

n° 46/h 136004

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

*N° d'ordre : 3201*

**THESE**  
pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I**  
Discipline : Mathématiques

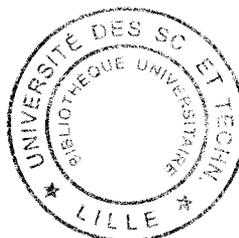
présentée par  
**Laurent BRUNEAU**

**MODELE HAMILTONIEN POUR LE FROTTEMENT  
LINEAIRE EN MILIEU HOMOGENE**

Soutenance le 12 Décembre 2002

**Jury**

Directeur de Thèse : S. DE BIEVRE, Université de Lille I  
Rapporteurs : C. GERARD, Université Paris XI  
C.A. PILLET, Université Toulon-Var  
Examineurs : L. FLAMINIO, Université Lille I  
G. TUYNMAN, Université Lille I  
A. VERBEURE, Katolieke Universiteit Leuven



# Remerciements

Cette thèse achevée, je voudrais profiter de l'occasion qu'il m'est donnée ici de remercier un certain nombre de personnes.

Je souhaiterais, en premier lieu, exprimer toute ma reconnaissance à Stephan De Bièvre pour avoir guidé mes premiers pas de jeune chercheur. Je le remercie également pour toutes les heures qu'il a bien voulu me consacrer, celles passées au tableau ou lors de nos nombreuses discussions, mais aussi les nombreuses heures de lecture et relecture de mes travaux.

Je remercie les professeurs Christian Gérard et Claude-Alain Pillet d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que pour leur lecture attentive de ce manuscrit.

Je voudrais remercier également les professeurs Livio Flamini, Gijs Tuynman et André Verbeure qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Finalement, je voudrais remercier mes parents, ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé tout au long de ces années.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Frottement et dissipation . . . . .	4
1.2	Bains d'oscillateurs-milieux homogènes . . . . .	8
1.2.1	Couplage à un bain d'oscillateurs . . . . .	8
1.2.2	Milieux homogènes . . . . .	11
1.2.3	Le frottement linéaire . . . . .	13
1.2.4	Echelles de temps I . . . . .	16
1.3	Quelques modèles de la littérature . . . . .	17
1.3.1	Assemblée d'oscillateurs couplés . . . . .	17
1.3.2	Chaîne d'oscillateurs . . . . .	19
1.3.3	Modèle des oscillateurs indépendants . . . . .	19
1.3.4	Modèle avec couplage linéaire : cas général . . . . .	21
1.3.5	Le "modèle de Nelson classique" . . . . .	23
1.4	Présentation de notre modèle . . . . .	25
1.5	Echelles de temps II . . . . .	28
1.6	Conservation de l'impulsion . . . . .	29
1.6.1	Modèle de Nelson . . . . .	30
1.6.2	Notre modèle . . . . .	31
1.6.3	Relation énergie-impulsion . . . . .	34
1.7	Présentation des résultats . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Etude du modèle : mécanique classique</b>	<b>37</b>
2.1	La force de frottement . . . . .	37
2.1.1	Appendice . . . . .	42
2.2	Existence des solutions . . . . .	42
2.3	Comportement des solutions : force constante . . . . .	47
2.4	Le cas confinant . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Le modèle quantique</b>	<b>70</b>
3.1	Espaces de Fock, opérateurs de création et d'annihilation . . . . .	70
3.2	Ecriture du modèle quantique . . . . .	72

3.3	Domaine et auto-adjonction . . . . .	75
3.4	Existence d'un état fondamental sous condition infrarouge . .	78
3.5	Le problème infrarouge : une interprétation classique . . . . .	79
3.6	Le cas massif . . . . .	82
3.6.1	Modèles discrets avec quasi-particules massives . . . . .	83
3.6.2	Modèles "continus" avec quasi-particules massives . . . . .	88
3.7	Le cas non-massif . . . . .	96
3.7.1	Hamiltonien avec "cut-off" . . . . .	96
3.7.2	Estimations uniformes en $\sigma$ . . . . .	97
3.7.3	Preuve du Théorème 3.3 . . . . .	100
3.8	Perspectives . . . . .	102

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Frottement et dissipation

D'une façon générale, on dit qu'un système est soumis à un phénomène de dissipation lorsqu'il "perd" de l'énergie. Dans ce cas, la description du système isolé ne peut pas être hamiltonienne. La perte d'énergie se fait en faveur de degrés de liberté externes au système : une description plus fondamentale des phénomènes doit les inclure et devrait permettre une description hamiltonienne de l'ensemble. Il faut donc décrire le système étudié sous une forme plus globale, en tenant compte du milieu dans lequel ce système évolue. La dissipation correspond alors à un transfert d'énergie du "petit" système vers le milieu ("grand" système) et non plus simplement à une perte d'énergie. Lorsqu'un système comportant un petit nombre de degrés de libertés est couplé avec un large système ayant lui un grand nombre de degrés de liberté (éventuellement infini) on dit qu'il est ouvert. Cette situation est très fréquente, tant au niveau classique que quantique. L'un des principaux objectifs dans ce genre de problème est d'étudier la dynamique du petit système, son comportement asymptotique (*i.e.*  $t \rightarrow +\infty$ ), et d'établir l'équation effective gérant l'évolution de ses degrés de liberté.

Une source typique de dissipation est le frottement. Notre but dans ce travail est de présenter (voir la Section 1.4) et ensuite d'étudier un système (hamiltonien) dans lequel une particule classique se déplace dans un milieu dissipatif, homogène et à température nulle, et ce de façon à ce que cette particule ressente une force de frottement linéaire, c'est-à-dire proportionnelle à sa vitesse. Par homogène, on entend un milieu qui est invariant par translation. Plusieurs modèles de systèmes ouverts menant à un frottement linéaire pour le petit système existent déjà dans la littérature, et nous les présenterons brièvement dans la Section 1.3. Cependant aucun de ces modèles

ne permet de décrire ce que nous appelons un milieu homogène. Ils sont en particulier adaptés aux situations où le petit système est confiné. Or, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où la particule est soumise à une force extérieure constante.

À part le frottement linéaire, qu'on observe par exemple lorsqu'un électron se déplace dans un métal, une autre source de dissipation importante est l'amortissement par rayonnement ("radiation damping"), phénomène typique de l'électromagnétisme [Ja]. Il est instructif de comparer les effets du frottement linéaire et de l'amortissement par rayonnement sur le mouvement d'une particule afin de mieux cerner les différences essentielles entre ces deux sources de dissipation. Considérons d'abord l'amortissement par rayonnement. Soit donc une particule chargée, de charge totale  $e$  et avec une densité de charge  $\rho$  localisée, couplée au champ électromagnétique (modèle d'Abraham). Typiquement,  $\rho$  sera une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact et à symétrie sphérique. On peut d'un côté prescrire le mouvement de la charge et en déduire le champ résultant via les équations de Maxwell ou alors spécifier le champ et dans ce cas le mouvement de la particule est donné par la force de Lorentz. Cependant l'idée est qu'une particule chargée en mouvement émet des radiations aussitôt qu'elle est accélérée. Ceci a pour effet de transférer de l'énergie et de l'impulsion de la particule vers le champ et donc d'influer sur le mouvement de la charge. Une étude de ce phénomène implique donc une étude couplée du champ et du mouvement de la charge. Si  $v$  désigne la vitesse de la particule et  $c$  la vitesse de propagation des ondes, on résume en général les effets dûs au rayonnement dans la force de frottement [Ja] :

$$F_{\text{ray}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}. \quad (1.1)$$

L'équation de mouvement effective pour la particule s'écrit alors

$$m\dot{v} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v} = -\nabla V(q), \quad (1.2)$$

où  $q$  désigne la position de la particule, et  $V$  un potentiel extérieur. Ce frottement correspond à une perte d'énergie par unité de temps donnée par la formule de Larmor

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{v})^2. \quad (1.3)$$

C'est le phénomène de "radiation damping" : une charge *accélérée* perd de l'énergie par rayonnement. L'énergie étant bornée inférieurement, on s'attend ainsi à ce que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{v}(t) = 0.$$

Le fait que, dans le cadre du modèle d'Abraham, l'accélération de la charge tende en effet vers zéro est prouvé rigoureusement dans [KS2].

Considérons maintenant le frottement linéaire, qui sera le sujet de cette thèse. Plus précisément, on pense aux nombreux systèmes qui obéissent (à température nulle) à une équation effective (non-hamiltonienne) du type :

$$m\ddot{q}(t) + \gamma\dot{q}(t) = -\nabla V(q(t)), \quad \gamma > 0. \quad (1.4)$$

On peut considérer par exemple le mouvement d'un électron dans un métal (le terme  $\gamma\dot{q}$  est alors à l'origine de l'explication de la loi d'Ohm dans le modèle de Drude) ou celui d'une bille plongée dans un milieu visqueux. L'énergie dissipée par unité de temps dans le milieu est cette fois donnée par

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \gamma(\dot{q})^2. \quad (1.5)$$

On remarque qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse, et non à celui de l'accélération comme dans (1.3).

Pour mieux cerner les différences entre le comportement décrit par les équations (1.2) et (1.4), il suffit de considérer deux types de potentiels particuliers : le cas d'un potentiel confinant (*i.e.*  $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} V(q) = +\infty$ ), et, de façon encore plus frappante, le cas du potentiel nul.

Considérons d'abord le cas du potentiel nul. La principale différence réside dans l'existence (ou non) de solutions à vitesses constantes, parfois appelées *solitons* dans la littérature [KS1]. Dans le cas de l'équation effective (1.2), il est évident que, quelle que soit la vitesse  $v$ , il existe des solutions à vitesse constante égale à  $v$ . Dans [KS2], les auteurs ont montré ce comportement dans le cadre du modèle d'Abraham. Au contraire, dans le cas de (1.4), de telles solutions n'existent évidemment pas sauf à vitesse nulle. Il faut mettre cela en relation avec les formules (1.3) et (1.5) qui décrivent la perte d'énergie. En effet, dans le cas de (1.2), la perte d'énergie d'une solution à vitesse constante est nulle, alors que pour l'équation (1.4), une particule se déplaçant avec une vitesse  $v$  non nulle perd de l'énergie. Il est donc impossible pour une telle particule de garder une telle vitesse s'il n'y a pas d'apport d'énergie. Dans ce dernier cas, on voit d'ailleurs facilement que, pour toutes conditions initiales, la particule s'arrête exponentiellement rapidement, avec un taux de convergence égal à  $\frac{\gamma}{m}$ .

Pour un potentiel confinant, on peut dans les deux cas montrer que la particule "s'arrête" en un point critique du potentiel. Dans le cas de l'équation (1.4), cela se montre assez simplement [Ra]-[C]. Ce résultat est également montré dans [KS2] dans le cadre du modèle d'Abraham. Si ce point est un minimum, on peut de plus montrer que la vitesse de convergence est exponentielle dans les deux cas. La principale différence entre les deux situations

réside donc dans le taux de convergence. De façon heuristique, cela se voit assez facilement : on commence par remarquer que, de façon formelle, on peut écrire (1.2) sous la forme (1.4) mais avec un coefficient  $\gamma$  qui dépend cette fois de  $q(t)$  via le potentiel  $V$ . En effet, si on dérive (1.2) par rapport à  $t$ , on obtient :

$$m\ddot{v}(t) = -(\nabla^2 V(q)) \cdot v + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}.$$

En reportant l'expression ainsi obtenue pour  $\ddot{v}$  dans (1.2) et en négligeant le terme  $\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}$ , on obtient l'équation :

$$m\dot{q}(t) + \frac{2e^2}{3mc^3} (\nabla^2 V(q(t))) \dot{q}(t) = -\nabla V(q(t)), \quad (1.6)$$

où on reconnaît une équation de la forme (1.4) mais avec cette fois un coefficient de frottement non constant ( $\gamma = \gamma(q) = \frac{2e^2}{3mc^3} (\nabla^2 V(q))$ ). En comparant (1.4) et (1.6), on peut voir que le coefficient de frottement et donc le taux de convergence dépendent fortement du potentiel  $V$  dans le cas de l'amortissement par rayonnement ( $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \nabla^2 V$ ) alors que dans le cas du frottement linéaire, le coefficient de frottement  $\gamma$  est indépendant de  $V$  et donc le taux de convergence aussi (tout du moins si  $\gamma$  est petit, il vaut alors  $\frac{\gamma}{2m}$ ).

Nous remarquons pour terminer que le fait que l'équation (1.2) soit de troisième ordre implique, lorsque  $V = 0$ , l'existence de solutions pour lesquelles l'accélération croît exponentiellement avec le temps. Celles-ci, couramment appelées "runaway solutions", n'ont évidemment pas de sens physique. Elles n'apparaissent d'ailleurs pas dans le modèle d'Abraham, c'est-à-dire lorsque l'on tient compte également du milieu environnant. Alternativement, elles peuvent être éliminées à l'aide de conditions asymptotiques appropriées à  $t = \pm\infty$ . On peut aussi comprendre leur absence via l'équation (1.6).

Dans cette thèse on présentera et on étudiera un modèle hamiltonien d'une particule couplée à un milieu homogène de telle façon que la particule se comporte comme si son mouvement était régi par l'équation effective (1.4). On s'attachera en particulier à l'étude de trois types de potentiels : le potentiel confinant, le potentiel nul et le potentiel linéaire (cas d'une force extérieure constante). Le dernier cas est a priori le plus difficile, en effet dans ce cas l'énergie du système n'est pas bornée inférieurement. Avant cela, nous allons voir comment décrire le phénomène de frottement à l'aide d'un "bain d'oscillateurs" et, sous quelles conditions celui-ci décrit un milieu homogène (Section 1.2). Nous présenterons ensuite brièvement quelques modèles existant dans la littérature et qui conduisent au phénomène de frottement (Section 1.3). Notre modèle sera présenté dans la Section 1.4, son étude sera l'objet du Chapitre 2.

## 1.2 Bains d'oscillateurs-milieux homogènes

Dans cette section, nous expliquons comment il est possible de décrire le phénomène de frottement à l'aide d'un "bain d'oscillateurs". Nous dérivons ensuite quelles sont les conditions à imposer sur ce "bain" pour qu'il décrive un milieu *homogène* et enfin quelles sont celles qui, dans un tel milieu, donnent lieu à un frottement linéaire. Nous aboutirons ainsi à la description d'une large classe de modèles dont le nôtre, décrit dans la Section 1.4, est un cas particulier.

### 1.2.1 Couplage à un bain d'oscillateurs

On verra que le système étudié dans cette thèse peut être considéré comme une particule couplée à un grand nombre d'oscillateurs. De tels modèles hamiltoniens sont nombreux dans la littérature physique, et, pour mieux mettre en évidence les différences avec le modèle que nous proposons, nous les passerons sommairement en revue dans la Section 1.3. Ils ont en général pour but de montrer que la particule obéit à une équation de mouvement effective qui est l'équation de Langevin :

$$m\ddot{q}(t) + \int_{-\infty}^t \gamma(t-s)\dot{q}(s)ds = -\nabla V(q(t)) + F_L(t), \quad (1.7)$$

où  $\gamma(t)$  est un noyau de frottement, aussi appelée fonction mémoire, et  $F_L(t)$  une force de fluctuation. Le terme  $\int_{-\infty}^t \gamma(t-s)\dot{q}(s)ds$  représente une force de frottement. Dans le cas où  $\gamma(t)$  s'écrit  $\gamma\delta(t)$ , on retrouve le terme de frottement de l'équation (1.4). L'équation de Langevin est une équation macroscopique, elle correspond à une description réduite du système. A l'origine, Langevin étudiait une particule se déplaçant dans un fluide. Il remarqua que la résistance ressentie par la particule était en fait due à l'effet moyen des collisions avec les molécules du fluide. Pour expliquer le comportement Brownien du mouvement de la particule, il proposa, en plus de la force de frottement, d'introduire une force complémentaire, aléatoire et de moyenne nulle : la force de fluctuation.

D'une manière plus fondamentale, on considère une particule couplée avec un milieu dissipatif appelé réservoir (ou "bain"). L'idée est que le réservoir joue un double rôle. D'un côté, il absorbe de l'énergie et de l'impulsion sans que son état interne ne subisse de changement notable, d'où la présence du terme de frottement. Ce dernier décrit la réaction du réservoir au passage de la particule et doit en particulier être indépendant de l'état dans lequel il se trouve. De l'autre côté, sa large entropie crée des fluctuations, responsables du terme  $F_L(t)$ , empêchant la particule de se placer dans un état d'équilibre.

Cette force provient de l'action directe du réservoir. Un tel terme de fluctuation est présent dans le modèle étudié dans cette thèse, mais il ne jouera pas un rôle majeur. Ceci est dû au fait que l'on se placera à température nulle. A température positive, cette force de fluctuation serait beaucoup plus difficile à traiter.

Pour obtenir une telle équation, la stratégie usuelle est d'écrire dans un premier temps les équations de mouvement du système global. On résoud ensuite (si possible) les équations correspondant aux variables du réservoir, et on reporte ces solutions dans les équations de la particule. On obtient ainsi une description réduite du mouvement de la particule donnée par une équation effective. Lorsque le réservoir est décrit par un bain d'oscillateurs, il est possible d'appliquer cette stratégie parce que les équations correspondant aux degrés de liberté du réservoir sont alors linéaires.

Nous partons du hamiltonien suivant :

$$H_{CL} = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 \right] + \sum_{j=1}^N \sigma_j(q) q_j + \sum_{j=1}^N W_j(q), \quad (1.8)$$

où

$$W_j(q) = \frac{\sigma_j(q)^2}{2m_j \omega_j^2}. \quad (1.9)$$

Remarquons tout de suite que, si ce hamiltonien est quadratique dans les variables  $(q_j, p_j)$  du réservoir, il ne l'est pas en  $q$ . Le terme d'interaction néanmoins est linéaire dans les  $q_j$ . Dans [CL]-[MS], les auteurs argumentent que, d'une façon générale, pour étudier l'interaction entre une particule et un milieu dissipatif, on peut toujours considérer un hamiltonien de cette forme. On retrouve également ce type de hamiltonien dans de très nombreux modèles [CEFM]-[DDLL]-[FKM]-[FLM]-[FLO1]-[FLO2]. Le dernier terme de (1.8), un peu surprenant, agit juste comme un potentiel pour la particule. Il est en général appelé "contre-terme." En définissant

$$V_{eff} = V + W, \quad W(q) = \sum_{j=1}^N W_j(q),$$

on peut voir  $W$  comme étant un potentiel dû à la présence du réservoir tout en étant indépendant de l'état où celui-ci se trouve. Nous reviendrons sur son origine un peu plus tard. Afin d'obtenir un comportement dissipatif, il faut ensuite passer à la limite "thermodynamique" dans le réservoir (*i.e.*  $N \rightarrow +\infty$ ) de façon à avoir un spectre continu de fréquence [FLM].

Nous allons écrire le modèle décrit par le hamiltonien (1.8) sous une forme plus générale. Ceci nous permettra de regrouper dans un même cadre les modèles décrits par un hamiltonien du type (1.8), mais également les modèles du type Nelson [KKS1], Pauli-Fierz [DG]-[DJ] ou encore le modèle que nous proposons dans cette thèse. Nous pourrons enfin analyser plus aisément quelles sont les conditions nécessaires sur les différents paramètres présents dans le hamiltonien pour que ce dernier décrive un phénomène de dissipation par frottement linéaire en milieu homogène.

Soit donc  $(A, \mu)$  un espace mesurable, et considérons le hamiltonien

$$H_A(q, p, \phi, \pi) = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \int_A d\mu(\alpha) \left[ \frac{|\pi_\alpha|^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 |\phi_\alpha|^2 \right] + \int_A d\mu(\alpha) \sigma_\alpha(q) \phi_\alpha + \int_A d\mu(\alpha) W_\alpha(q), \quad (1.10)$$

avec les équations de mouvement correspondantes

$$m_\alpha \ddot{\phi}_\alpha(t) + m_\alpha \omega_\alpha^2 \phi_\alpha(t) = -\sigma_\alpha(q(t)) \quad \text{et} \quad m \ddot{q}(t) = -\nabla V_{eff}(q(t)) + f(t),$$

où

$$f(t) = - \int \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \phi_\alpha(t) d\mu(\alpha) \quad (1.11)$$

est la force exercée par le bain d'oscillateurs sur la particule. Précisons que nous n'imposons pas ici au terme  $W_\alpha$  d'être de la forme (1.9). Si on résoud les équations correspondant aux  $\phi_\alpha$  on trouve :

$$\phi_\alpha(t) = -\frac{1}{m_\alpha \omega_\alpha} \int_{-\infty}^t ds \sigma_\alpha(q(s)) \sin[\omega_\alpha(t-s)] + \phi_\alpha^0(t),$$

où  $\phi_\alpha^0$  est la solution générale de l'équation homogène associée. En reportant ces solutions dans la seconde équation on obtient

$$m \ddot{q}(t) = -\nabla V_{eff}(q(t)) - \int \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \phi_\alpha^0(t) d\mu(\alpha) + \int d\mu(\alpha) \int_{-\infty}^t ds \frac{1}{m_\alpha \omega_\alpha} \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \sigma_\alpha(q(s)) \sin[\omega_\alpha(t-s)].$$

Si on effectue maintenant une intégration par parties dans la dernière intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} & m \ddot{q}(t) + \int d\mu(\alpha) \int_{-\infty}^t ds \frac{1}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \nabla \sigma_\alpha(q(s)) \cdot \dot{q}(s) \cos[\omega_\alpha(t-s)] \\ = & -\nabla V_{eff}(q(t)) + \int d\mu(\alpha) \frac{\sigma_\alpha(q(t)) \nabla \sigma_\alpha(q(t))}{m_\alpha \omega_\alpha^2} - I_\infty(t) \\ & - \int \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \phi_\alpha^0(t) d\mu(\alpha), \end{aligned} \quad (1.12)$$

où

$$I_\infty(t) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int d\mu(\alpha) \frac{\sigma_\alpha(q(T)) \nabla \sigma_\alpha(q(t))}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \cos[\omega_\alpha(t - T)] \quad (1.13)$$

est le terme de bord de l'intégration par parties correspondant à  $-\infty$ . Nous verrons que les conditions que nous donnerons par la suite, afin que le milieu décrit soit homogène et donne lieu à un phénomène de frottement linéaire, entraînent que ce terme est nul.

Les variables du réservoir sont responsables de trois termes. L'un dépend des conditions initiales du réservoir, c'est la force de fluctuation :

$$F_L(t) = - \int \nabla \sigma_\alpha(q(t)) \phi_\alpha^0(t) d\mu(\alpha),$$

un autre ne dépend que de la position de la particule à l'instant  $t$  et agit comme un potentiel, et enfin le dernier qui décrit une force de frottement retardé. On reconnaît une équation du type (1.7) avec un potentiel

$$\tilde{V}(q) = V_{eff} - \int d\mu(\alpha) \frac{\sigma_\alpha(q) \sigma_\alpha(q)}{2m_\alpha \omega_\alpha^2}.$$

Si on souhaite avoir une équation dans laquelle le potentiel  $\tilde{V}$  soit exactement le potentiel de départ, on voit que le contre-terme  $W$  doit avoir exactement la forme (1.9). On trouve ainsi une première explication à la présence de ce terme.

Remarquons également que dans le cas où  $A$  est l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  et  $\mu$  la mesure de comptage, on retrouve  $H_{CL}$  avec  $\phi_\alpha$  et  $\pi_\alpha$  au lieu de  $q_j$  et  $p_j$ .

## 1.2.2 Milieux homogènes

Pour obtenir un réservoir et un couplage décrivant la situation physique souhaitée, il faut donner certaines conditions sur les différents paramètres  $m_\alpha, \omega_\alpha, \dots$ , qui apparaissent dans le modèle (1.10).

La première condition que nous souhaitons imposer est que le *même* choix de paramètres décrive correctement le système pour *différents* choix du potentiel  $V$ , en particulier dans le cas  $V \equiv 0$ . Dans un tel cas, on s'attend à ce que la particule puisse se trouver au repos en n'importe quel point de l'espace, avec le milieu environnant lui aussi au repos. En d'autres termes, le hamiltonien doit posséder dans ce cas un point d'équilibre, et ce quelle que soit la position de la particule. Supposons donc que la particule se trouve au repos au point  $q$ , le champ stationnaire  $\phi_\alpha$  associé est alors

$$\phi_\alpha = - \frac{\sigma_\alpha(q)}{m_\alpha \omega_\alpha^2}.$$

La force exercée par le bain d'oscillateurs sur la particule est alors indépendante du temps et s'écrit

$$f(t) \equiv f = \int_A \frac{\sigma_\alpha(q)}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \nabla \sigma_\alpha(q) d\mu(\alpha).$$

On voit donc que l'équation de mouvement correspondant à la particule n'est satisfaite que si le contre-terme  $W$  est tel que :

$$\nabla W(q) = \nabla U(q), \quad U(q) = \int_A \frac{\sigma_\alpha(q)^2}{2m_\alpha \omega_\alpha^2} d\mu(\alpha). \quad (1.14)$$

On trouve ainsi une seconde explication (simple) à la présence de ce terme dans le modèle (1.10) et à sa forme très spécifique dans (1.8) (et différente de celle proposée dans [CL]-[MS]). On peut également remarquer que le contre-terme est en fait l'énergie potentielle du milieu lorsque le système est dans son état d'équilibre avec la particule située en  $q$ . La condition

$$U(q) < +\infty \quad (1.15)$$

s'impose donc tout naturellement. En prenant  $W(q) = U(q)$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} H_A(q, p, \phi, \pi) = & \frac{p^2}{2m} + V(q) \\ & + \int_A d\mu(\alpha) \left[ \frac{|\pi_\alpha|^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \left( \phi_\alpha + \frac{\sigma_\alpha(q)}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le milieu dans lequel la particule se déplace est homogène. L'énergie potentiel  $U(q)$  doit alors être indépendante de  $q$ , ce qui signifie que le contre-terme est constant et peut donc être omis dans le hamiltonien.

Il semble que les modèles du type (1.10)-(1.14) qui aient été le plus activement étudiés dans la littérature soient celui donné par (1.8) dans lequel  $\sigma_j(q) = -C_j q$ ,  $C_j > 0$  ou des modèles équivalents (nous les passerons en revue dans la Section 1.3). On parle alors de modèles à couplage linéaire. Notre analyse précédente montre que la présence d'un contre-terme non constant dans ces modèles ne leur permet pas de décrire un milieu homogène en l'absence de potentiel extérieur. Nous expliquerons dans la Section 1.3 qu'on peut néanmoins utiliser ces modèles comme une approximation (approximation dipolaire) en présence d'un potentiel  $V$  confinant.

On peut obtenir une large classe de modèles invariants par translation de la manière suivante. On prend

$$A = \mathbb{R}^d \times B, \quad \alpha = (x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times B, \quad d\mu = dx d\nu(\beta), \quad \omega_\alpha = \omega_\beta, m_\alpha = m_\beta, \quad (1.16)$$

et surtout un couplage de la forme

$$\sigma_\alpha(q) = \sigma_1(x - q)\sigma_2(\beta). \quad (1.17)$$

L'idée est d'avoir, en chaque point  $x \in \mathbb{R}^d$ , une famille d'oscillateurs, indexée par  $\beta \in B$  et de fréquence  $\omega_\beta$ , qui forme un obstacle que la particule heurterait lors de son passage en  $x$ . Les oscillateurs en différents points de l'espace n'interagissent pas. L'intuition physique laisse penser qu'une telle configuration devrait être en mesure de produire une force de frottement (linéaire) sur la particule, et c'est ce que nous nous appliquerons à démontrer dans la suite. On suppose que  $\sigma_1$  est à symétrie sphérique, régulière et à support compact. On suppose de plus, avec quelques abus de notation, que  $\sigma_2(\beta) = \sigma_2(\omega_\beta)$  et  $m_\beta = m(\omega_\beta)$ . En particulier, le couplage de la particule avec l'oscillateur  $\beta$  ne dépend que de la fréquence de cet oscillateur. On définit ensuite

$$N(\omega) = \int_{\omega_\beta \leq \omega} d\nu(\beta)$$

et on écrit  $dN = n(\omega)d\omega$ . La fonction  $n$  représente la densité de fréquence. Comme nous l'expliquons dans la Section 1.1, nous souhaitons trouver un modèle du type (1.10)-(1.14)-(1.15)-(1.16)-(1.17) dans lequel la particule subit une force de frottement linéaire (tout du moins à petite vitesse) de façon à ce qu'elle obéisse à une équation de mouvement du type (1.4). Nous verrons que cette information est "codée" dans le choix de  $n$ . La fonction  $n(\omega)$  est donc le paramètre central dans cette question.

On peut en outre remarquer que le modèle d'Abraham, tout en décrivant un environnement homogène, n'est pas de cette forme. Le phénomène qui y apparaît est celui du rayonnement, et est donc totalement différent de celui que nous désirons obtenir ici. Nous y reviendrons en plus de détails dans la Section 1.3.5.

### 1.2.3 Le frottement linéaire

Nous supposons que nous avons un modèle du type (1.10)-(1.14)-(1.15)-(1.16)-(1.17). Avec les notations introduites dans la section précédente, on peut écrire

$$U(q) \equiv U_* = \int_0^{+\infty} u(\omega)d\omega, \quad \text{avec } u(\omega) = \|\sigma_1\|^2 \frac{\sigma_2(\omega)^2}{2m(\omega)\omega^2} n(\omega). \quad (1.18)$$

On introduit également

$$K(\lambda) = - \int_{\mathbb{R}^d} dx (\partial_1 \sigma_1)(x_1, x^\perp) (\partial_1 \sigma_1)(x_1 + \lambda, x^\perp),$$

et on remarque que

$$\hat{K}(\xi) = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\eta \left[ \widehat{\partial_1 \sigma_1}(\xi, \eta) \right]^2$$

est une fonction négative. En effet,  $\sigma_1$  est à symétrie sphérique,  $\partial_1 \sigma_1$  est donc impaire dans sa première variable et paire dans les autres, et  $\widehat{\partial_1 \sigma_1}$  est donc imaginaire pure.

Afin d'analyser sous quelles conditions sur  $\sigma_1, \sigma_2, m$  et  $n$  un tel modèle décrit un frottement linéaire, on calcule la force de réaction (1.11) du milieu sur la particule lorsque celle-ci se déplace à vitesse  $v$  constante. On ne donne ici que les résultats de ces calculs (ceux-ci seront fait de façon plus détaillée dans la Section 2.1). On trouve que la force  $f$  ne dépend que de la vitesse  $v$  et plus précisément

$$f(v) = f_r(|v|) \frac{v}{|v|},$$

avec

$$f_r(|v|) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\|\sigma_1\|^2} \left[ \int_0^{+\infty} d\omega u(\omega) \hat{K}\left(\frac{\omega}{|v|}\right) \right] \leq 0.$$

On remarque que la force de frottement est alignée avec  $v$ . Ce type de modèle semble donc bien conduire à une équation effective pour la particule du type (1.4) plutôt que (1.2). On veut cependant une force de frottement qui soit linéaire. Etant donné que  $u$  est intégrable, que  $\hat{K}(0) = 0$  (puisque  $\partial_1 \sigma_1$  est impaire en  $x_1$ ) et que  $\hat{K}$  est à décroissance rapide, on voit immédiatement que  $f_r(0) = 0 = \lim_{|v| \rightarrow +\infty} f_r(|v|)$ , et il n'est donc pas possible que  $f(v)$  dépende linéairement de  $v$  pour toute valeur de  $v$  dans aucun des modèles de la classe présentée ci-dessus. Cependant, comme  $f_r$  est une fonction régulière de  $|v|$ , il est raisonnable d'imposer une condition plus faible, à savoir que  $f_r$  s'annule linéairement lorsque  $|v|$  tend vers zéro, *i.e.*

$$- \lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{f_r(|v|)}{|v|} = -u(0) \frac{\sqrt{2\pi}}{\|\sigma_1\|^2} \int_0^{+\infty} d\xi \hat{K}(\xi) = \gamma > 0, \quad (1.19)$$

ou encore, de manière équivalente, que

$$u(0) > 0.$$

Pour cela, il suffit d'imposer les conditions suivantes :

$$0 < \sigma_2(\omega), m(\omega) < +\infty, \quad n(\omega) \sim n_0 \omega^2 \quad (\omega \rightarrow 0). \quad (1.20)$$

La condition sur la fonction  $n(\omega)$  est une condition à  $\omega$  petit, autrement dit, ce sont les basses fréquences qui jouent un rôle important. Nous donnerons une autre explication physique plus détaillée de cette condition dans la Section 2.1.

Nous voudrions maintenant donner un commentaire sur le lien entre la condition pour avoir un frottement linéaire proposée dans [CL] et la nôtre, donnée par (1.20). Bien qu'il ne soit pas possible, dans les modèles du type (1.10), d'avoir  $f(v) = -\gamma v$  pour tout  $v$ , on peut néanmoins l'assurer pour tout  $|v| \leq v_M$ . En effet, si on choisit les paramètres des modèles de façon à ce que

$$u(\omega) = u_0, \forall \omega \leq \Omega, \text{ et } u(\omega) = 0, \forall \omega > \Omega, \quad (1.21)$$

ce qui est une condition plus forte que la condition  $u(0) > 0$ , on a alors

$$f_r(|v|) = \frac{\sqrt{2\pi}u_0}{\|\sigma_1\|^2} \left[ \int_0^{\Omega/|v|} d\xi \hat{K}(\xi) \right] |v|$$

et  $f(v) = -\gamma v$  pour tout  $v \leq v_M$  si  $\hat{K}$  est à support compact. Si  $\hat{K}$  est seulement à décroissance rapide (ce qui est le cas si  $\sigma_1$  est à support compact), alors le résultat est encore vrai avec une très bonne approximation. On pourra remarquer le "cut-off" sur les hautes fréquences dans la condition (1.21). C'est précisément cette condition qui est imposée dans [CL] pour décrire le frottement linéaire. Rappelons néanmoins que le modèle étudié par les auteurs de [CL] ne décrit pas un milieu homogène.

En conclusion, une classe de modèles dans lesquels une particule "lente" ressentirait une force de frottement linéaire dans un milieu homogène est donnée par un hamiltonien du type (1.10) avec les conditions (1.14)-(1.15)-(1.16)-(1.17)-(1.20). On retrouvera cette même condition de "cut-off" dans les modèles présentés dans la Section 1.3.

Avant de poursuivre, nous revenons un instant sur le terme  $I_\infty$  de l'équation (1.12), et plus précisément, nous vérifions que celui-ci est bien nul comme nous l'avions indiqué. Avec les notations que nous avons introduites dans cette section ainsi que dans la précédente, on écrit :

$$\begin{aligned} |I_\infty(t)| &= \lim_{T \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \nabla \sigma_1(x - q(t)) \sigma_1(x - q(T)) \hat{u}(t - T) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\nabla \sigma_1\|_{L^1} \|\sigma_1\|_{L^\infty} \lim_{T \rightarrow -\infty} |\hat{u}(t - T)| = 0. \end{aligned}$$

### 1.2.4 Echelles de temps I

On voudrait enfin dire quelques mots sur le phénomène d'échelles de temps. Nous y reviendrons dans les Sections 1.3.5 et 1.5. Ce phénomène jouera un rôle primordial dans l'étude de notre modèle. Les modèles de la classe introduite ici contiennent deux échelles de temps intrinsèques. La première est celle donnée par le coefficient de frottement  $\gamma$  défini en (1.19). On définit en effet le temps de relaxation du modèle

$$\tau_1 = \gamma^{-1}. \quad (1.22)$$

Si ensuite on appelle  $v_M$  le premier zéro de  $f'_r$ , on introduit alors le temps

$$\tau_2 = \frac{2R_1}{v_M}, \quad (1.23)$$

où  $R_1$  est la taille du support de  $\sigma_1$ . Le temps  $\tau_2$  représente le temps que met la particule pour traverser son propre diamètre lorsqu'elle se déplace à la vitesse caractéristique  $v_M$ . Pour traduire le fait physique que la dissipation est un "phénomène à temps long", on impose la condition  $\tau_1 \gg \tau_2$ , autrement dit, on demande que la distance parcourue par une particule se déplaçant à une vitesse de l'ordre de la vitesse caractéristique  $v_M$  pendant le temps  $\tau_1$  soit beaucoup plus grande que le diamètre de la particule. En d'autres termes, on demande que pendant une durée de temps égale à  $\tau_1$ , temps qu'il faut à la particule pour ressentir efficacement les effets de la force de réaction du milieu, celle-ci parcourt une distance "macroscopique". Afin de s'assurer que cette condition est satisfaite par le modèle que nous étudierons, et de permettre une analyse précise de celui-ci, il est commode d'introduire un paramètre supplémentaire. Tous les autres paramètres du modèle étant fixés (en particulier, on a pris toutes les masses des oscillateurs égales à 1), on introduit la famille de hamiltoniens  $H_c$ , indexés par  $c > 0$  :

$$\begin{aligned} H_c(q, p, \phi, \pi) &= \frac{p^2}{2m} + V(q) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_B d\nu(\beta) [|\pi(x, \beta)|^2 + c^2 \omega_\beta^2 |\phi(x, \beta)|^2] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_B d\nu(\beta) \sigma_1(x - q) \sigma_2(\omega_\beta) \phi(x, \beta). \end{aligned}$$

On a donc simplement choisi un bain d'oscillateurs de fréquences  $\omega_c(\beta) = c\omega_\beta$ . On notera avec un indice  $c$  les différentes grandeurs associées au hamiltonien  $H_c$  et sans indice celles du hamiltonien pour  $c = 1$ . On trouve facilement que

$$N_c(\omega) = N\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad n_c(\omega) = \frac{1}{c} n\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

et

$$u_c(\omega) = \frac{1}{c} \|\sigma_1\|^2 \frac{\sigma_2(\frac{\omega}{c})^2}{2m(\omega)\omega^2} \quad n_c(\omega) = \frac{1}{c^3} u(\frac{\omega}{c}).$$

On en déduit que  $\gamma_c = \frac{\gamma}{c^3}$ ,  $f_c(v) = \frac{1}{c^2} f(\frac{v}{c})$  et donc  $v_{M,c} = v_M c$ . La condition  $\tau_1 \gg \tau_2$  s'écrit alors  $\frac{c^4 v_M}{2\gamma R_1} \gg 1$ , et celle-ci peut être satisfaite simplement en choisissant le paramètre  $c$  "assez grand".

Nous avons, dans cette section, identifié une classe de modèles et donné les conditions qui semblent raisonnables afin de décrire un milieu *homogène* donnant lieu à une force de frottement linéaire. Nous sommes cependant incapables de démontrer rigoureusement le moindre résultat sur le comportement de la particule dans une telle généralité. C'est pourquoi, dans ce travail, nous nous attacherons à un modèle particulier, de la classe présentée ci-dessus, que nous introduirons dans la Section 1.4. Mais avant cela, nous allons brièvement passer en revue quelques uns des modèles existant dans la littérature pour montrer qu'ils ne conviennent pas pour ce que nous voulons faire ici.

## 1.3 Quelques modèles de la littérature

Tous les modèles présentés dans cette section sont des modèles unidimensionnels (*i.e.* la particule se déplace dans  $\mathbb{R}$ ).

### 1.3.1 Assemblée d'oscillateurs couplés

Ce modèle est présenté dans [FKM] et peut se ramener à un modèle de la forme (1.8) par un changement de coordonnées dans les variables du réservoir (voir [FLO2]). Les auteurs de [FKM] considèrent une assemblée de  $2N + 1$  "oscillateurs" couplés les uns aux autres et dont le hamiltonien est donné par :

$$H_{FKM} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^N p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=-N}^N q_j A_{jk} q_k. \quad (1.24)$$

La masse de chaque oscillateur a été fixée à 1. On particularise l'oscillateur d'indice  $j = 0$  comme étant la particule étudiée, les autres oscillateurs décrivant le réservoir. Les oscillateurs sont supposés identiques et placés de façon à former une chaîne avec conditions aux bords périodiques. Ceci impose que la matrice  $A$  soit symétrique, définie positive et cyclique. Les éléments d'une telle matrice s'écrivent :

$$A_{jk} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \omega_n^2 \exp\left(i \frac{2\pi}{2N+1} n(j-k)\right), \quad \omega_{-n}^2 = \omega_n^2.$$

On peut réécrire les éléments de  $A$  sous la forme :

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta) e^{i(j-k)\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta) \cos[(j-k)\theta], \end{aligned}$$

où  $f(\theta) = \sum_n \omega_n^2 \delta\left(n - \frac{(2N+1)\theta}{2\pi}\right)$ .

Les équations de mouvement sont ici linéaires et se résolvent facilement. On trouve pour la particule l'équation suivante :

$$\ddot{q}_0(t) = -\gamma(t)\dot{q}_0(t) + F_L(t),$$

où  $F_L$  est le terme de fluctuation et  $\gamma(t) = -\frac{d}{dt} \log \left( \cos(A^{\frac{1}{2}}t) \right)_{00}$  ; ici la notation  $\left( \cos(A^{\frac{1}{2}}t) \right)_{00}$  désigne le coefficient d'indice 0, 0 de la matrice  $\cos(A^{\frac{1}{2}}t)$ . Pour obtenir une équation de Langevin dans laquelle le terme de frottement serait semblable à celui de (1.4), il faut que la fonction  $\gamma(t)$  soit constante égale à  $\gamma > 0$ . Cela impose d'avoir

$$\left( \cos(A^{\frac{1}{2}}t) \right)_{00} = e^{-\gamma t}. \quad (1.25)$$

La définition de la matrice  $A$  donne

$$\begin{aligned} \left( \cos(A^{\frac{1}{2}}t) \right)_{00} &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \cos \omega_n t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos([f(\theta)]^{\frac{1}{2}}t). \end{aligned}$$

A la limite  $N \rightarrow +\infty$ ,  $f(\theta)$  devient une certaine fonction décrivant la distribution des fréquences  $\omega_n$ . La condition (1.25) n'est vérifiée que pour  $f(\theta) = \gamma^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Cependant un tel choix entraîne que les coefficients  $A_{jk}$  deviennent infinis. Pour contourner ce problème, on définit

$$\begin{aligned} f_{\omega_c}(\theta) &= f(\theta), & |\theta| < \theta_c, \\ &= 0, & \theta_c \leq |\theta| \leq \pi, \end{aligned}$$

où  $\theta_c$  est défini par  $\omega_c = \gamma \tan \frac{\theta_c}{2}$ ;  $\omega_c$  représente le "cutoff" à hautes fréquences dont on a parlé dans la section précédente. On n'obtient un terme de frottement linéaire que dans la limite  $\omega_c \rightarrow +\infty$ . On retrouvera un tel cutoff dans le cas général des modèles à couplage linéaire. On remarque également que, dans ce modèle, on fait un choix sur la distribution  $f(\theta)$  des fréquences et non sur le couplage entre les oscillateurs. Cela rend le modèle plutôt abstrait. Il ne décrit pas, en tout état de cause, une particule se déplaçant dans un milieu homogène.

### 1.3.2 Chaîne d'oscillateurs

Un modèle un peu plus concret que celui de [FKM] est celui étudié dans [DDLL]. Ce modèle a été étudié par de nombreux autres auteurs, et on pourra trouver d'autres références dans [DDLL]. On considère une chaîne de  $2N + 1$  oscillateurs dans laquelle chacun des oscillateurs est couplé avec ses plus proches voisins (Figure 1.1). L'oscillateur d'indice  $j = 0$  a une masse  $M$  et représente la particule et les autres ont une masse  $m$  et décrivent le réservoir. Les ressorts ont tous même constante de raideur  $k$ .

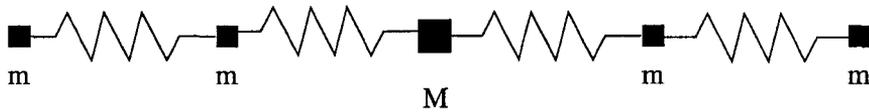


FIG. 1.1 – Chaîne d'oscillateurs.

On suppose que la particule est soumise à un potentiel extérieur. Le hamiltonien s'écrit

$$H_{CO} = \frac{p_0^2}{2M} + V(q_0) + \sum_{j \neq 0} \frac{p_j^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{j=-N}^N (q_{j+1} - q_j)^2, \quad (1.26)$$

où  $q_{N+1} = q_{-N}$ , c'est-à-dire que l'on considère une chaîne dont les deux extrémités seraient reliées. A nouveau, il est nécessaire de prendre la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ . Le "cutoff" du modèle de [FKM], et en particulier sa limite  $\omega_c \rightarrow +\infty$  est traitée de manière différente. On effectue un changement d'échelle sur  $m$  et  $k$ , à savoir :  $m = \frac{m_*}{L}$  et  $k = k_* L$ , et on considère ensuite la limite  $L \rightarrow \infty$ . On retrouve à nouveau une équation de Langevin avec un terme de frottement linéaire. Cependant, on peut facilement voir qu'il ne décrit pas une particule qui se "ballade" dans un certain environnement.

### 1.3.3 Modèle des oscillateurs indépendants

Dans ce modèle, on considère une particule couplée à un grand nombre d'oscillateurs (éventuellement infini), indépendants les uns des autres, chacun d'entre eux étant relié à la particule par un ressort (Figure 1.2).

On suppose à nouveau que la particule est soumise à un potentiel extérieur  $V$ . Le hamiltonien du système s'écrit alors :

$$H_{IO} = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \sum_j \left[ \frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 (q_j - q)^2 \right]. \quad (1.27)$$

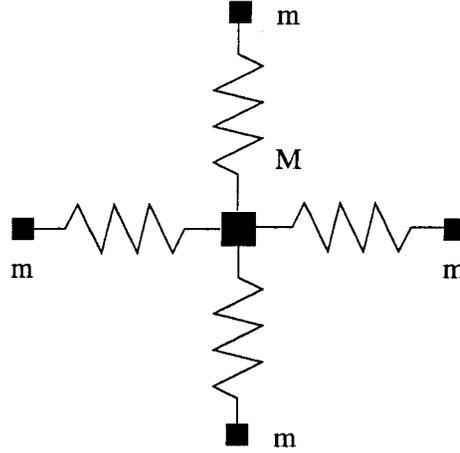


FIG. 1.2 – Oscillateurs indépendants.

Ce modèle, dans lequel on peut également faire des calculs explicites, est étudié dans [FLO2]. Les auteurs expliquent en particulier que via un changement de coordonnées, il est équivalent à celui de [FKM] présenté précédemment. Pour ce modèle, l'équation effective (1.12) pour la particule devient :

$$m\ddot{q}(t) + V'(q(t)) = - \sum_j m_j \omega_j^2 \left( \int_{-\infty}^t dt' \cos[\omega_j(t-t')] \dot{q}(t') \right) + \sum_j m_j \omega_j^2 \left( q_j^0 \cos(\omega_j t) + p_j^0 \frac{\sin(\omega_j t)}{m_j \omega_j} \right),$$

où  $q_j^0$  et  $p_j^0$  sont deux constantes déterminées par les conditions initiales du réservoir. On reconnaît ici la forme générale de l'équation de Langevin (1.7) dans laquelle la fonction mémoire  $\gamma(t)$  est définie par

$$\gamma(t) := \sum_j m_j \omega_j^2 \cos(\omega_j t)$$

et la force de fluctuation par

$$F_L(t) = \sum_j m_j \omega_j^2 \left( q_j^0 \cos(\omega_j t) + p_j^0 \frac{\sin(\omega_j t)}{m_j \omega_j} \right).$$

On remarque que la force de fluctuation dépend de l'état initial du réservoir via  $q_j^0$  et  $p_j^0$ . Grâce à un choix convenable dans la distribution des fréquences  $\omega_j$ , on peut obtenir la fonction  $\gamma(t)$  réelle et positive la plus générale possible [FLO2]. A l'aide d'un tel modèle, on obtient donc l'équation de Langevin

dans sa forme la plus générale (voir (1.7)). Il faut pour cela que le réservoir soit constitué d'une infinité d'oscillateurs, comme indiqué dans la Section 1.2. On peut cependant noter que le terme de frottement n'est pas linéaire en  $\dot{q}(t)$ . On a affaire à un frottement retardé : il dépend des valeurs de  $\dot{q}(t')$  pour des temps  $t'$  antérieurs à  $t$ .

### 1.3.4 Modèle avec couplage linéaire : cas général

Tous les modèles présentés jusqu'à maintenant sont en fait des cas particuliers de modèles avec couplage linéaire. On considère donc le hamiltonien (1.8) avec  $\sigma_j(q) = -C_j q$ . Les calculs de la Section 1.2.1 donnent ici :

$$m\ddot{q}(t) = \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j^2} \int_0^t dt' \dot{q}(t-t') \cos(\omega_j t') + F_L(t) - V'(q(t)). \quad (1.28)$$

A nouveau,  $F_L(t)$  est une fonction qui s'exprime en fonction des différents paramètres du modèle ainsi que des conditions initiales du réservoir. Le premier terme du membre de droite décrit un frottement retardé. On notera  $F_{fr}(t)$  ce terme. On a vu que pour avoir un comportement dissipatif, il fallait que le "bain" possède un nombre infini de degrés de liberté. On voudrait alors savoir comment choisir les constantes de couplage  $C_j$  pour que ce terme de frottement soit (approximativement) de la forme  $-\gamma\dot{q}$ . Pour passer à la limite d'un réservoir continu, on introduit la fonction  $J(\omega)$  suivante, appelée densité spectrale :

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_j \frac{C_j^2}{m_j \omega_j} \delta(\omega - \omega_j), \quad (1.29)$$

$\delta$  étant la fonction de Dirac. La fonction  $J$  est reliée à la fonction  $u(\omega)$  définie en (1.18), on a effet

$$J(\omega) = \pi \omega u(\omega).$$

Le terme de frottement peut alors se réécrire comme

$$F_{fr}(t) = \frac{2}{\pi} \int d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \int_0^t dt' \dot{q}(t-t') \cos(\omega t').$$

L'idée est de remplacer la fonction  $J$  par une fonction  $J_c$  qui sera continue. Cette approximation est raisonnable à partir du moment où l'on s'intéresse à l'évolution du système sur un temps très court devant  $\frac{1}{\epsilon}$ ,  $\epsilon$  étant l'écart moyen entre deux fréquences  $\omega_j$  [CT]. Si on prend pour  $J_c$  la fonction suivante :

$$\begin{aligned} J_c(\omega) &= \gamma \omega, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ &= 0, & \omega > \omega_c, \end{aligned}$$

le terme de frottement devient, modulo des approximations raisonnables sous certaines conditions ( $\gamma \ll \omega_c$  par exemple) :

$$F_{fr}(t) = -\gamma\dot{q}(t).$$

On remarque que cette hypothèse sur la fonction  $J$  correspond exactement à l'hypothèse (1.21) de la Section 1.2.3 sur la fonction  $u$ .

L'équation (1.28) devient donc :

$$m\ddot{q}(t) = -\gamma\dot{q}(t) - V'(q(t)) + F_L(t).$$

Comme dans le modèle de [FKM], les approximations dont on a parlé deviennent exactes dans la limite  $\omega_c \rightarrow +\infty$ . Cependant, ce type de modèle ne décrit pas un milieu homogène, comme nous l'avons déjà fait remarquer. Toutefois, comme nous l'avons indiqué dans la Section 1.2.2, on peut l'utiliser comme approximation en présence d'un potentiel confinant.

En effet, si on suppose que le hamiltonien (1.10)-(1.14) possède un point fixe stable en  $q = q_*$ ,  $p = 0$ ,  $\phi_\alpha = \phi_\alpha^*$ ,  $\pi_\alpha = 0$ , on voit que  $q_*$  est un point critique de  $V$ , et de plus  $\phi_\alpha^* = -\frac{\sigma_\alpha(q_*)}{m_\alpha\omega_\alpha^2}$ . En linéarisant le problème autour de ce point fixe, on retrouve le hamiltonien  $H_{CL}$  dans les variables  $q - q_*$ ,  $\phi_\alpha - \phi_\alpha^*$ , et avec un couplage linéaire. En effet, si on définit  $q = q_* + \tilde{q}$  et  $\phi_\alpha = \phi_\alpha^* + \tilde{\phi}_\alpha$ , le hamiltonien  $H_A$  s'écrit alors

$$H_A = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \int_A d\mu(\alpha) \left[ \frac{|\pi_\alpha|^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2}m_\alpha\omega_\alpha^2 \left( \tilde{\phi}_\alpha + \phi_\alpha^* + \frac{\sigma_\alpha(\tilde{q} + q_*)}{m_\alpha\omega_\alpha^2} \right)^2 \right].$$

On linéarise ensuite le terme  $\sigma_\alpha(\tilde{q} + q_*)$  autour de  $q_*$  et en utilisant le fait que  $\phi_\alpha^* = -\frac{\sigma_\alpha(q_*)}{m_\alpha\omega_\alpha^2}$ , on obtient

$$H_{A,lin} = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \int_A d\mu(\alpha) \left[ \frac{|\pi_\alpha|^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2}m_\alpha\omega_\alpha^2 \left( \tilde{\phi}_\alpha + \frac{\nabla\sigma_\alpha(q_*)}{m_\alpha\omega_\alpha^2} \tilde{q} \right)^2 \right].$$

Ce modèle apparaît donc comme une approximation raisonnable d'un système dissipatif en milieu homogène uniquement dans le cas d'un potentiel confinant. En particulier, il ne convient pas dans le cas d'une force extérieure constante ou d'une particule libre. Le seul travail, à notre connaissance, dans lequel on considère un couplage non-linéaire est [JP].

Comme nous l'avons expliqué, aucun de ces modèles avec couplage linéaire ne permet de décrire un milieu homogène. Cependant, et afin d'éviter tout malentendu, on rappelle que ces modèles peuvent être considérés comme invariant par translation, tout du moins dans un sens formel. En effet, le hamiltonien  $H_{CL}$  est invariant par la transformation  $q \rightarrow q + a, p \rightarrow p, q_j \rightarrow q_j + \frac{C_j}{m_j \omega_j} a, p_j \rightarrow p_j$ , et peut ainsi être considéré comme invariant par translation. Il ne l'est cependant pas dans le sens utilisé ici, c'est-à-dire comme décrivant un milieu homogène.

### 1.3.5 Le "modèle de Nelson classique"

On entend par "modèle de Nelson classique" un modèle constitué d'une particule couplée à un champ scalaire. Ce modèle est en fait la "version classique" du modèle de Nelson étudié en mécanique quantique. Au premier abord, on pourra avoir l'impression que ce modèle est identique à celui étudié dans cette thèse, et que nous présenterons dans la prochaine section. Nous verrons cependant que les effets produits par ces deux modèles sont radicalement différents. Celui-ci est un modèle pour l'amortissement par rayonnement, et il est à rapprocher du modèle d'Abraham. La différence étant que le champ électromagnétique figurant dans ce dernier est ici remplacé par un champ scalaire. Plus précisément, le hamiltonien du système s'écrit :

$$H_{\text{nels}}(q, p, \phi, \pi) = \frac{p^2}{2} + V(q) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx (c^2 |\nabla \phi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) + \int_{\mathbb{R}^d} dx \rho(x - q) \phi(x). \quad (1.30)$$

Ce modèle est étudié dans [KKS1]-[KKS2]-[KS1], exceptés le terme  $\frac{p^2}{2}$  qui (pour des raisons techniques) est remplacé par  $\sqrt{p^2 + 1}$  et l'absence du paramètre  $c$ . Ce modèle est du type (1.10)-(1.14), mais pas (1.16)-(1.17), même s'il décrit toujours un milieu homogène ; cela peut se voir directement sur la forme du couplage.

On peut, comme dans la Section 1.2.3, calculer la force de réaction (1.11). On trouve que celle-ci est nulle pour tout  $|v| < c$  (les calculs se trouvent de façon détaillée dans la Section 2.1). Dans [KS1], les auteurs montrent, dans le cas  $V \equiv 0$ , que pour toute condition initiale, il existe une vitesse  $v_\infty$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{q}(t) = v_\infty.$$

Ils étudient également le comportement asymptotique du champ, chose que nous ne ferons pas pour notre modèle. Le cas du potentiel confinant est traité

dans [KKS1]. Ils montrent, dans ce cas, que la particule finit par s'arrêter en un point critique du potentiel et que si celui-ci est un minimum non-dégénéré la convergence est exponentielle. Nous obtiendrons ici le même type de résultats, en suivant leur méthode pour prouver la convergence ; cependant, en ce qui concerne la vitesse de convergence, nous obtenons un taux de convergence explicite en fonction des données du modèle mais indépendant de la forme du potentiel. C'est une des différences entre le phénomène de radiation et celui de frottement dont on a parlé dans la Section 1.1. Nous reviendrons sur ce modèle dans la Section 1.6

Pour conclure cette section, on voudrait introduire, dans le cadre de ce modèle, le phénomène d'échelle de temps. Nous en avons déjà parlé dans la Section 1.2.4 dans le cadre de la classe de modèles que nous avons présentée. On peut tout d'abord remarquer que les temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  que nous avons introduits n'existent pas ici.

On va donc supposer que le potentiel extérieur varie lentement, c'est-à-dire qu'il est de la forme  $V(\epsilon q)$  où  $\epsilon$  est un paramètre sans dimension tendant vers 0. La force extérieure qui s'exerce sur la particule est alors d'ordre  $\epsilon$ . On appelle  $R_\rho$  le rayon de la charge et  $c$  la vitesse de la lumière. Le temps que met la lumière pour traverser la charge est alors  $t_\rho = \frac{R_\rho}{c}$ . On obtient ainsi trois échelles de temps sur lesquelles la particule a des comportements très différents [KKS2] :

- (i) *temps microscopique*,  $t = \mathcal{O}(t_\rho)$ ,  $q = \mathcal{O}(R_\rho)$ . Sur cette échelle, la particule suit essentiellement un mouvement rectiligne.
- (ii) *temps macroscopique*,  $t = \mathcal{O}(\epsilon^{-1}t_\rho)$ ,  $q = \mathcal{O}(\epsilon^{-1}R_\rho)$ . Cette échelle est définie par les variations du potentiel. En effet, sur celle-ci, il s'écrit  $V(q)$ . La particule "suit" la force extérieure. Plus précisément, sur cette échelle, elle obéit à une dynamique donnée par le hamiltonien effectif  $H_{\text{eff}}(Q, P) = E(P) + V(\epsilon Q)$ , où  $E(P)$  est ce qu'on appelle la relation *énergie-impulsion* sur laquelle nous reviendrons dans la Section 1.6. En particulier, le phénomène de radiation n'a pas encore d'influence sur le mouvement.
- (iii) *temps de frottement*. Les forces extérieures étant d'ordre  $\epsilon$ , ceci est également vrai pour  $\ddot{q}$ . La formule de Larmor (1.3) indique alors que la force de radiation est d'ordre  $\epsilon^2$  et influe fortement sur la trajectoire de la particule pour des temps d'ordre  $\epsilon^{-2}t_\rho$ . On voit que sur l'échelle de temps (ii), la force de radiation produit un effet d'ordre  $\epsilon$  qui est donc "négligeable" par rapport aux forces qui proviennent des potentiels extérieurs. La dissipation est donc un phénomène dont les effets n'apparaissent de manière significative que pour des temps longs.

On retrouve ces trois mêmes échelles de temps dans le cas du modèle

d'Abraham [S].

## 1.4 Présentation de notre modèle

Nous avons présenté, dans la section précédente, un certain nombre de modèles existant dans la littérature, et nous avons vu qu'aucun d'entre eux ne permet de décrire le phénomène de frottement linéaire dans un milieu homogène. Nous revenons donc maintenant à la classe de modèles présentée dans la Section 1.2.

On considère un modèle constitué d'une particule classique qui est, d'un côté, couplée à des obstacles représentés par des champs vibratoires scalaires et d'un autre soumise à une force extérieure  $F = -\nabla V$  indépendante du temps. On notera  $q \in \mathbb{R}^d$  la position de la particule et  $\psi(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  le champ. Le couplage de la particule avec le champ sera représenté par la fonction  $\rho(x, y) = \rho_1(x)\sigma_2(y)$ . Enfin,  $c$  désignera la vitesse de propagation des ondes. Les équations du mouvement du système couplé sont alors :

$$\partial_t^2 \psi(x, y, t) - c^2 \Delta_y \psi(x, y, t) = -\rho(x, y) \quad (1.31)$$

$$\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho(x - q(t), y) (\nabla_x \psi)(x, y, t), \quad (1.32)$$

où  $\Delta_y$  désigne le laplacien pris dans les variables  $y$ , *i.e* :

$$\Delta_y \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_i^2}.$$

On a choisi de fixer la masse de la particule à  $m = 1$  par commodité, celle-ci ne jouant aucun rôle fondamental contrairement à  $c$  comme on le verra plus loin. Si on note  $p$  l'impulsion de la particule et  $\pi$  le champ conjugué à  $\psi$ , le hamiltonien du système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H(\psi, q, \pi, p) = & \frac{p^2}{2} + V(q) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy (c^2 |\nabla_y \psi(x, y)|^2 + |\pi(x, y)|^2) \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho(x - q, y) \psi(x, y). \end{aligned} \quad (1.33)$$

On peut voir que notre modèle rentre totalement dans le cadre décrit dans la Section 1.2. Il est en effet de la forme (1.10)-(1.14)-(1.16)-(1.17) où  $B = \mathbb{R}^n$ ,  $d\nu(\beta) = dk$ ,  $\omega_\beta = c|k|$ . Le problème est donc entièrement déterminé par la donnée du paramètre  $c$  et de la fonction de couplage  $\rho$ . On fait sur celle-ci les hypothèses suivantes :

(H1)  $\rho(x, y) = \rho_1(x)\sigma_2(y) \neq 0 \in C_0^\infty$  où  $\rho_1, \sigma_2$  sont des fonctions positives à symétrie sphérique vérifiant  $\rho_1(x) = 0$  si  $|x| \geq R_1 > 0$  et  $\sigma_2(y) = 0$  si  $|y| \geq R_2 > 0$ ,

où  $C_0^\infty$  désigne l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact. Pour certains résultats, nous supposons que  $\sigma_2$  satisfait en outre la condition suivante :

(W)  $\hat{\sigma}_2(k) \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^3$ .

Enfin, par la suite nous aurons également besoin de certaines hypothèses sur le potentiel  $V$ . Nous donnons dès à présent ces hypothèses, et nous les rappellerons en temps voulu. On supposera que le potentiel  $V$  satisfait :

(H2)  $V \in C^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\nabla V$  est Lipschitzien. De plus, l'une des deux conditions suivantes est satisfaite : soit  $\nabla V$  est borné (comme dans le cas  $V(q) = -F \cdot q$ ) soit  $V$  est borné inférieurement.

Nous utiliserons également, par moments (voir Section 2.4 et Chapitre 3), l'une des deux hypothèses suivantes :

(C)  $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} V(q) = +\infty$ ,

(C')  $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) = +\infty$ .

On peut remarquer que le champ  $\psi(x, y, t) \equiv \psi_t(x, y)$  joue le rôle d'un potentiel pour la particule. En effet, le second terme de (1.32) est  $\mathcal{F}_{\psi_t}(q(t))$  où

$$\mathcal{F}_{\psi}(q) = - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho_1(x - q)\sigma_2(y)(\nabla_x \psi)(x, y) \quad (1.34)$$

est la force exercée par le milieu sur la particule quand celui-ci est dans l'état  $\psi$ . Si on considère une interaction ponctuelle, *i.e.*  $\rho(x, y) = \delta(x)\delta(y)$  où  $\delta$  est la fonction de Dirac, cette force devient  $\mathcal{F}_{\psi}(q) = -\nabla_x \psi(q, 0)$ . On peut remarquer également que le terme d'interaction dans le hamiltonien devient alors juste  $\psi(q, 0)$ .

On voudrait maintenant donner une idée du fonctionnement du modèle. Tout d'abord, la particule se déplace dans l'espace des  $x$ , ou plus précisément, dans le sous-espace " $y = 0$ " de  $\mathbb{R}^{d+n}$ . En fait, on peut penser à  $\psi(x, \cdot)$  comme représentant, en chaque point  $x$  de l'espace de configuration de la particule, un "obstacle" ayant un grand nombre de degrés de liberté, et qui est modélisé par un champ scalaire. En particulier, il ne faut pas voir les variables  $y$  comme des variables d'espace pour la particule ; elles "indexent" les degrés de liberté des "obstacles". Pour comprendre plus précisément ce que l'on entend par là, il est utile d'effectuer une transformée de Fourier partielle dans la variable  $y$ .

Le système (1.31)-(1.32) devient alors

$$\partial_t^2 \hat{\psi}(x, k, t) + c^2 |k|^2 \hat{\psi}(x, k, t) = -\rho_1(x - q(t)) \hat{\sigma}_2(k) \quad (1.35)$$

$$\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) + \int_{\mathbb{R}^n} dk \tilde{\mathcal{F}}_{\psi_t}(q(t), k), \quad (1.36)$$

où

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\psi}(q, k) = - \int_{\mathbb{R}^d} dx \rho_1(x - q) \hat{\sigma}_2(k) \nabla_x \hat{\psi}(x, k). \quad (1.37)$$

Sous cette forme, on peut aisément voir que  $\hat{\psi}(x, k, t)$  représente, pour chaque valeur de  $x$  et de  $k$ , l'amplitude d'un oscillateur de fréquence  $\omega(k) = c|k|$ . Tous ces oscillateurs sont indépendants les uns des autres et contribuent chacun à une force d'amplitude  $\rho_1(x - q) \hat{\sigma}_2(k) \nabla_x \hat{\psi}(x, k)$  agissant sur la particule.

Bien qu'il fasse partie de la classe de modèles présentés dans la Section 1.2, la forme particulière de ce modèle, et spécialement de la représentation des "obstacles", fait apparaître un phénomène supplémentaire qui sera essentiel dans les preuves de nos résultats. Nous verrons que l'on obtient ce que l'on pourrait appeler un principe de Huyghens dans les variables  $y$ . L'énergie dissipée par la particule se "propagera vers l'infini" dans la direction  $y$ . Pour se faire une idée de ce phénomène, on imagine que la particule est contrainte de se déplacer en une dimension (*i.e.*  $d = 1$ ), et que  $y \in \mathbb{R}^2$ , ainsi,  $\psi(x, y)$  décrit les vibrations d'une membrane élastique située au point  $x$  et perpendiculaire à l'axe sur lequel la particule se déplace. Lorsque la particule rencontre les membranes successives, elle crée une sorte de sillage (Figure 1.3) qui représenterait la propagation de l'énergie dans ces membranes.

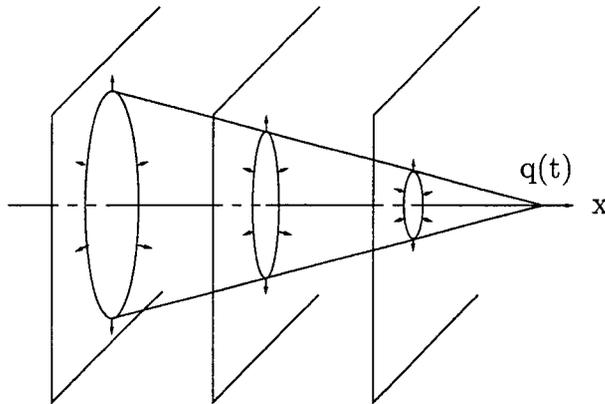


FIG. 1.3 – Onde créée par le passage de la particule à travers les membranes successives.

On a expliqué dans la Section 1.2 pourquoi un tel modèle devrait produire un comportement dissipatif, et en particulier un frottement linéaire (tout du moins à petite vitesse). En l'absence de potentiel extérieur, l'intuition nous dit que la particule va perdre toute son énergie cinétique dans les membranes et va finir par s'arrêter. On montrera que cette intuition est correcte et que la particule va s'arrêter exponentiellement vite pour toute valeur de  $d$ , mais à condition que  $n = 3$  et pourvu que  $c$  soit suffisamment grand. On a déjà parlé de la condition sur  $c$  dans la Section 1.2.3 et nous donnerons une autre explication dans la prochaine section. Concernant la condition sur la valeur de  $n$ , celle-ci est à mettre en relation avec la condition (1.20). Nous reviendrons plus en détail sur cette question dans la Section 2.1.

La critique que l'on pourrait apporter à ce modèle est que les oscillateurs situés en différents points de l'espace ne sont pas couplés. Pour remédier à cela, il suffirait de changer l'énergie potentielle du champ en :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy (c_1^2 |\nabla_x \psi(x, y)|^2 + c_2^2 |\nabla_y \psi(x, y)|^2). \quad (1.38)$$

Cependant, dans ce cas, on n'obtient plus une force de frottement linéaire pour  $v$  petit ; on peut en effet montrer que la force exercée par le milieu sur une particule se déplaçant à une vitesse  $v$  constante est identiquement nulle pour tout  $|v| \leq c_1$  (voir l'appendice de la section 2.1). Dans de tels modèles, la force de frottement est en fait proportionnelle à des dérivées de  $q$  d'ordre supérieur. En particulier, dans le cas  $c = c_1 = c_2$ , on retrouve (essentiellement) le "modèle de Nelson classique" de la Section 1.3.5.

## 1.5 Echelles de temps II

Dans la section précédente on a indiqué que nos résultats étaient obtenus pourvu que  $c$  soit suffisamment grand. Nous en avons donné une explication dans la Section 1.2.3, et nous voudrions en donner ici une seconde, particulière au modèle présenté dans la section précédente.

Rappelons que le modèle contient trois paramètres  $c, \rho_1$  et  $\sigma_2$ , où  $\rho_1, \sigma_2$  sont des fonctions qui satisfont à l'hypothèse (H1). On a défini les temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (voir (1.22)-(1.23)). On peut ici définir une troisième échelle de temps caractéristique du modèle :

$$\tau_3 = \frac{2R_2}{c}, \quad (1.39)$$

temps que les signaux dans les "membranes" mettent pour traverser la particule. Un des mécanismes fondamentaux dans notre modèle est le fait que

les membranes évacuent rapidement l'énergie dissipée par la particule, c'est ce que nous avons appelé "principe de Huyghens" dans la section précédente. Cette condition se traduit par le fait que  $\tau_3$  doit être petit devant le temps de relaxation  $\tau_1$  du système :  $\tau_1 \gg \tau_3$ . On rappelle que  $\tau_1$  peut s'écrire  $c^3 \gamma^{-1}$ , la condition précédente prend alors la forme  $\frac{c^4}{2\gamma R_2} \gg 1$ , condition qui à nouveau peut être simplement assurée par le fait de prendre  $c$  suffisamment grand.

Néanmoins une partie du travail de cette thèse ne nécessite pas d'avoir une condition sur la vitesse de propagation  $c$ . Pour cette raison, il est commode de faire "disparaître"  $c$  grâce à un changement d'échelle. On définit

$$\phi(x, y, t) = c^{\frac{n}{2}} \psi(x, y, ct) \quad \text{et} \quad \rho_2(y) = c^{\frac{n}{2}} \sigma_2(cy). \quad (1.40)$$

Le système (1.31)-(1.32) devient alors

$$\partial_t^2 \phi(x, y, t) - \Delta_y \phi(x, y, t) = -\rho_1(x - q(t)) \rho_2(y) \quad (1.41)$$

$$\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho_1(x - q(t)) \rho_2(y) (\nabla_x \phi)(x, y, t). \quad (1.42)$$

La force de réaction (1.34) du milieu sur la particule devient, elle,

$$\mathcal{F}_\psi(q) = - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho_1(x - q) \rho_2(y) (\nabla_x \phi)(x, y). \quad (1.43)$$

On transforme de même le système (1.35)-(1.36) en

$$\partial_t^2 \hat{\phi}(x, k, t) + |k|^2 \hat{\phi}(x, k, t) = -\rho_1(x - q(t)) \hat{\rho}_2(k) \quad (1.44)$$

$$\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - q) \hat{\rho}_2(k) \nabla_x \hat{\phi}(x, k), \quad (1.45)$$

## 1.6 Conservation de l'impulsion

Nous voudrions dans cette section faire apparaître une autre différence importante entre les deux sources de dissipation dont nous avons parlé : le rayonnement et le frottement. Nous nous restreindrons au cas où le milieu dissipatif est homogène et le potentiel extérieur  $V$  est nul. Nous considérons donc le "modèle de Nelson classique" pour le rayonnement et le modèle présenté dans cette thèse pour le frottement.

Ces modèles étant tous deux invariants par translation, on remarque que dans chaque cas l'impulsion totale du système est conservée. Pour le modèle de Nelson, celle-ci est définie par

$$P := p + P_f = p - \int_{\mathbb{R}^d} dx \pi(x) \nabla_x \phi(x), \quad (1.46)$$

et pour notre modèle par

$$P := p + P_f = p - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \pi(x, y) \nabla_x \phi(x, y). \quad (1.47)$$

Ici  $P_f$  représente en fait l'impulsion du champ. On va voir qu'il existe cependant une différence fondamentale entre les deux phénomènes.

### 1.6.1 Modèle de Nelson

On rappelle que le hamiltonien du système s'écrit

$$\begin{aligned} H_{\text{nels}}(q, p, \phi, \pi) &= \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx (|\nabla \phi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} dx \rho(x - q) \phi(x). \end{aligned}$$

Par la suite, on notera simplement  $Y$  un quadruplet  $(q, p, \phi, \pi)$ . Il est facile de voir que  $H_{\text{nels}}$  est borné inférieurement et atteint son minimum

$$E_{\text{nels},0} = \frac{1}{2} \int \rho \Delta^{-1} \rho$$

en tout point  $Y_q = (q, 0, \phi_q, 0)$  où  $\phi_q$  est la solution de  $\Delta \phi(x) = \rho(x - q)$  qui tend vers zéro à l'infini. On sait cependant que le long des trajectoires l'impulsion totale  $P$  est conservée, on peut donc s'intéresser au problème : étant fixée une valeur  $P_0$  de l'impulsion,  $H$  a-t-il un minimum sur la surface  $\Sigma_{P_0} = \{Y | P(Y) = P_0\}$ ? Si oui, quel est-il et en quel(s) point(s) est-il atteint? On peut voir que  $H$  possède bien un minimum sur chaque surface  $\Sigma_{P_0}$ . Cette question est traitée dans [KS1]. On note  $\phi_p$  et  $\pi_p$  les solutions des équations

$$\pi_p(x) = -p \cdot \nabla \phi_p(x), \quad -\Delta \phi_p(x) + \rho(x) = p \cdot \nabla \pi_p(x).$$

Ce sont ce que les auteurs appellent les solutions solitons. Ce sont en fait les champs qui "suivent" une particule se déplaçant à vitesse  $p$  constante. Les auteurs montrent en essence le résultat suivant :

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $P_0$ ,  $H$  atteint un minimum  $E(P_0)$  sur  $\Sigma_{P_0}$  et il existe une fonction  $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  positive et croissante telle que  $\Sigma_{P_0} \cap \{Y | H(Y) = E(P_0)\}$  est la sous-variété, de dimension  $d$ ,  $\{(q, p, \phi_p(x - q), \pi_p(x - q))\}$  où  $p = v(|P_0|) \frac{P_0}{|P_0|}$ .*

On peut également calculer l'énergie de ces minima en fonction de  $p$  [KKS2]. On remarque que celle-ci ne dépend que de  $|p|$  et que c'est aussi une fonction croissante.

En résumé, pour tout  $P_0$ ,  $H$  atteint un minimum  $E(P_0)$  sur la surface  $\Sigma_{P_0}$ , et  $E(P_0)$  est une fonction croissante de  $|P_0|$ . C'est cette fonction  $E(P)$  dont on a parlé à la fin de la Section 1.3.5 et que l'on appelle relation énergie-impulsion.

**Remarque 1.1.** *On peut, dans ce modèle établir une relation simple entre l'impulsion du champ  $P_f$  et l'énergie du champ libre  $H_f$ , en effet on a :*

$$\begin{aligned} |P_f| &= \left| \int \pi \nabla \phi \right| \leq \left( \int |\nabla \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \pi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq H_f. \end{aligned}$$

*On voit ainsi que l'impulsion est dominée par l'énergie : si l'impulsion n'est pas nulle, alors on ne peut pas rendre l'énergie aussi petite que l'on veut. La situation sera tout à fait différente dans notre modèle.*

## 1.6.2 Notre modèle

On rappelle que le hamiltonien du système s'écrit

$$\begin{aligned} H(q, p, \phi, \pi) &= \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy (|\nabla_y \phi(x, y)|^2 + |\pi(x, y)|^2) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho_1(x - q) \rho_2(y) \phi(x, y). \end{aligned}$$

Comme dans le cas du modèle de Nelson, on voit facilement que  $H$  possède un minimum :

$$E_0 = \frac{1}{2} \int dx \int dy \rho_1^2(x) \rho_2(y) \Delta_y^{-1} \rho_2(y),$$

et que celui-ci est atteint si et seulement si  $Y = Y_q = (q, 0, \phi_q, 0)$  où  $\phi_q$  est la solution de  $\Delta_y \phi(x) = \rho_1(x - q) \rho_2(y)$  qui tend vers zéro à l'infini. Cependant, si on s'intéresse au comportement de la fonction  $H$  sur les surfaces d'impulsion totale constante, on observe un phénomène totalement différent par rapport au modèle de Nelson. On montre en effet le résultat suivant :

**Proposition 1.2.** *Quelque soit  $P_0$ , on a*

$$\inf_{Y \in \Sigma_{P_0}} H(Y) = E_0.$$

*Si, de plus,  $P_0 \neq 0$ , alors cette borne inférieure n'est pas atteinte.*

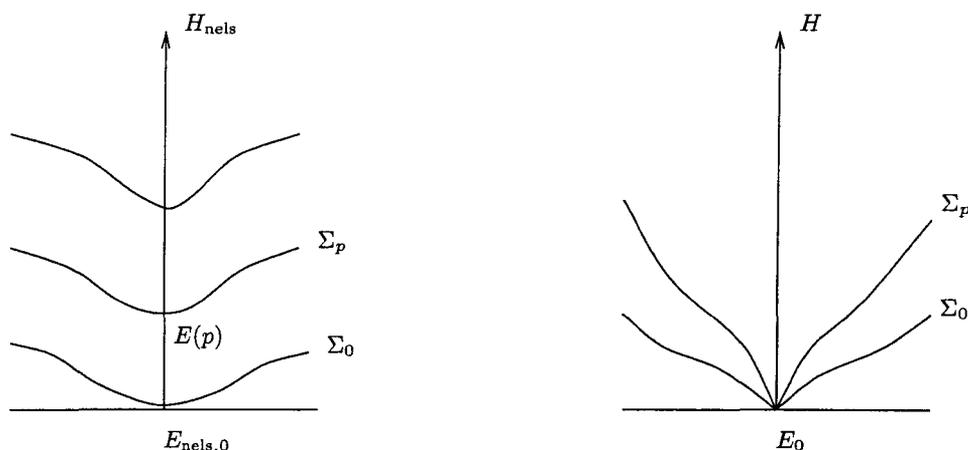


FIG. 1.4 – Energie et impulsion.

Alors que dans le modèle de Nelson, la fonction  $H$  atteint un minimum sur chaque surface  $\Sigma_{P_0}$ , dans notre modèle on peut trouver sur chacune de ces surfaces un élément dont l'énergie sera aussi proche que l'on veut du minimum absolu de  $H$  (voir Figure 1.4), mais sans pour autant atteindre ce minimum si  $P_0 \neq 0$ .

**Démonstration :** On choisit un minimum absolu  $Y_0 = (0, 0, \phi_0, 0)$  de  $H$ . On peut remarquer que  $P(Y_0) = 0$ . On a d'ailleurs  $P(Y_q) = 0$  pour tout  $q$ . Ainsi, une fois la première partie démontrée, on aura également le fait que  $H$  n'atteint pas sa borne inférieure sur  $\Sigma_{P_0}$  si  $P_0 \neq 0$  puisque  $H(Y) = E_0$  si et seulement si  $Y = Y_q$ .

L'idée est d'ajouter à  $Y_0$  un champ  $Y^\epsilon = (0, 0, \phi^\epsilon, \pi^\epsilon)$  tel que

$$P(Y_0 + Y^\epsilon) = P_0 \quad \text{et} \quad H(Y_0 + Y^\epsilon) = H(Y_0) + \epsilon.$$

On remarque que le support de  $\phi_0$  en  $x$  est localisé autour de  $x = 0$ . On va choisir  $Y^\epsilon$  de façon à ce que les supports de  $\phi^\epsilon$  et  $\pi^\epsilon$  en  $x$  soient disjoints de ceux de  $\phi_0$  et de  $\rho_1$ . On aura alors

$$H(Y_0 + Y^\epsilon) = H(Y_0) + H(Y^\epsilon)$$

et

$$P(Y_0 + Y^\epsilon) = P(Y_0) + P(Y^\epsilon).$$

Il faut donc choisir  $Y^\epsilon$  tel que

$$P(Y^\epsilon) = P_0 \quad \text{et} \quad H(Y^\epsilon) = \epsilon.$$

En d'autres termes, on veut choisir un élément  $Y^\epsilon$  ayant très peu d'énergie mais ayant tout de même l'impulsion  $P_0$ . On voit aussi que dans ce cas

$H(Y^\epsilon)$  vaut juste  $\frac{1}{2} \int |\pi^\epsilon|^2 + |\nabla_y \phi^\epsilon|^2$ . En effet, le terme d'interaction dans le hamiltonien est nul du fait du choix du support de  $\phi^\epsilon$ .

On va maintenant construire  $\phi^\epsilon$  et  $\pi^\epsilon$ . Soient  $K, L$  deux nombres positifs,  $\chi_1, \chi_2$  deux fonctions dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\chi_3$  une fonction dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\int \chi_3^2(y) dy = 1.$$

Soient

$$\phi^L(x, y) = K \chi_1 \left( \frac{x}{L} \right) \chi_3(y) \quad \text{et} \quad \pi^L(x, y) = K \chi_2 \left( \frac{x}{L} \right) \chi_3(y),$$

on a alors

$$\nabla_y \phi^L(x, y) = K \chi_1 \left( \frac{x}{L} \right) \nabla_y \chi_3(y) \quad \text{et} \quad \nabla_x \phi^L(x, y) = \frac{K}{L} (\nabla \chi_1) \left( \frac{x}{L} \right) \chi_3(y).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int dx dy (|\pi^L(x, y)|^2 + |\nabla_y \phi^L(x, y)|^2) \\ &= \frac{1}{2} K^2 L^d \int dx \chi_2^2(x) \int dy \chi_3^2(y) + \frac{1}{2} K^2 L^d \int dx \chi_1^2(x) \int dy |\nabla \chi_3|^2(y), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int dx dy \pi^L(x, y) \nabla_x \phi^L(x, y) &= \frac{K^2}{L} \int dx (\nabla \chi_1) \left( \frac{x}{L} \right) \chi_2 \left( \frac{x}{L} \right) \int dy \chi_3^2(y) \\ &= K^2 L^{d-1} \int dx (\nabla \chi_1)(x) \chi_2(x) \int dy \chi_3^2(y). \end{aligned}$$

On choisit  $K = L^{\frac{1-d}{2}}$ , et  $\chi_1$  et  $\chi_2$  tels que

$$\int dx \chi_2(x) \nabla \chi_1(x) = P_0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dx dy (|\pi^L(x, y)|^2 + |\nabla_y \phi^L(x, y)|^2) &= \frac{L}{2} \int dx dy (\chi_2^2(x) \chi_3^2(y) \\ &\quad + \chi_1^2(x) |\nabla \chi_3|^2(y)) \end{aligned}$$

et

$$\int dx dy \pi^L(x, y) \nabla_x \phi^L(x, y) = P_0.$$

On choisit enfin  $x_L$  tel que les supports de  $\phi^L(x - x_L, y)$  et  $\pi^L(x - x_L, y)$  en  $x$  sont disjoints de ceux de  $\phi_0$  et  $\rho_1$ . Si on fait tendre  $L$  vers zéro, on obtient bien le résultat voulu.  $\square$

### 1.6.3 Relation énergie-impulsion

Nous avons défini la fonction  $E(P)$  dans le cadre du modèle de Nelson. C'est cette fonction que l'on appelle relation *énergie-impulsion*, et dont nous avons parlé dans la Section 1.3.5. Dans le cadre de notre modèle, celle-ci n'existe pas. Cela induit une différence notable sur le comportement général des solutions. On se place toujours dans le cas où le potentiel extérieur est nul.

Dans le cas du modèle de Nelson, on peut montrer que toute solution converge "localement" vers un minimum de  $H_{\text{nels}}$  sur  $\Sigma_P$  où  $P$  est l'impulsion totale de la solution [KS1]. Par convergence locale, on entend convergence au sens de Fréchet pour la famille de semi-normes suivante

$$|Y|_R := \left( |p|^2 + \int_{|x|<R} dx |\nabla\phi(x)|^2 + |\pi(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R > 0.$$

Ainsi, étant donnée une condition initiale d'impulsion totale  $P$ , la particule "garde" une partie de l'énergie et de l'impulsion totales, le reste étant évacué dans le champ à l'infini. Si le potentiel extérieur est de la forme  $V(\epsilon q)$ , sur des temps de l'ordre de  $\frac{1}{\epsilon}$  tout se passe comme si le mouvement de la particule obéissait au hamiltonien effectif  $H_{\text{eff}}(q, p) = E(p) + V(\epsilon q)$  (voir Section 1.3.5). On peut montrer que :

$$E(p) \sim_0 \frac{p^2}{2(1 + m_e)},$$

où  $m_e := -\langle \rho; \Delta^{-1}\rho \rangle$ . La particule acquiert une masse effective. Cela provient de l'interaction avec le champ, c'est le phénomène de *renormalisation de masse*.

On verra au contraire que, dans notre modèle, la particule finit par s'arrêter, et ce indépendamment de la condition initiale. Elle dissipe donc toute son énergie et son impulsion dans le champ.

## 1.7 Présentation des résultats

On étudie dans cette thèse le modèle donné par le système d'équations (1.41)-(1.42) et ce pour deux types de potentiel  $V$  : les potentiels confinants et surtout les potentiels linéaires. On montrera que dans chacun de ces cas, et sous certaines conditions, la particule se comporte comme si elle était gouvernée par une équation du type (1.4). En particulier, on montrera que, modulo des termes d'erreurs que l'on contrôlera, la force de réaction (1.43) du milieu sur la particule produit une force de frottement linéaire, quelque soit la valeur de  $d$ , mais pour  $n = 3$  et  $c$  assez grand. Une étude détaillée de la

force de réaction du milieu est donc un préambule nécessaire à nos résultats. Celle-ci est l'objet de la Section 2.1 dans laquelle on reviendra également sur l'origine de la restriction à  $n = 3$ .

On étudie le comportement asymptotique (i.e.  $t \rightarrow +\infty$ ) des solutions du système (1.41)-(1.42). Cela suppose que, étant données des conditions initiales, ce système admette une solution unique et définie pour tout temps. D'un point de vue mathématique, on a affaire à un système de deux équations couplées : une équation aux dérivées partielles et une équation différentielle. Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions n'est donc pas totalement évident. On traitera cette partie du problème dans la Section 2.2.

L'étude du comportement des solutions fait l'objet des Sections 2.3 (pour le cas du potentiel linéaire) et 2.4 (pour le potentiel confinant). Dans ces sections, comme on l'a dit précédemment,  $c$  joue un rôle majeur, et on le ré-introduira donc dans les équations. Dans la Section 2.3, on considère le cas où la force extérieure  $F$  est constante. Sous des hypothèses raisonnables sur les conditions initiales, et pourvu que  $c$  soit assez grand et  $F$  suffisamment petite, on montre alors qu'asymptotiquement la particule se comporte comme si son mouvement était dirigé par l'équation (1.4). En particulier, on montrera que la vitesse de la particule converge vers une vitesse limite  $v(F)$  proportionnelle à  $F$  pour des petites valeurs de  $F$ , i.e.  $\lim_{F \rightarrow 0} \frac{v(F)}{F} = \gamma^{-1} > 0$ . On rappelle que le coefficient de frottement  $\gamma$  est défini en (2.5). Plus précisément, on montrera que

$$v(F) = \frac{F}{\gamma} + O(c^{1-2\varepsilon})$$

et que pour tout  $t > 0$  on a :

$$|q(t) - q_\infty - v(F)t| \leq Ke^{-\gamma t}$$

pour un certain  $q_\infty$  (qui dépend des conditions initiales) et une certaine constante  $K$ . Le fait d'obtenir une vitesse proportionnelle à la force appliquée est à l'origine de la loi d'Ohm. Dans la Section 2.4, on étudie le cas d'un potentiel confinant. On montre dans un premier temps que la particule "s'arrête" en un point critique du potentiel, en suivant la méthode de [KKS1]. Pour cela, aucune hypothèse sur la taille de  $c$  n'est nécessaire. Dans un deuxième temps, on s'attache à estimer la vitesse de convergence, et en particulier à montrer que celle-ci est identique à celle obtenue dans le cas de (1.4). A nouveau, il faudra alors prendre  $c$  assez grand.

Tous les résultats énoncés dans le Chapitre 2 proviennent de [BDB]. Les démonstrations des différents résultats sont extraites directement de ce papier et ont été placées à la fin des sections correspondantes.

Dans le Chapitre 3, on introduit la version quantique de notre modèle. On entre ainsi dans un tout autre domaine. On présentera dans un premier temps les objets nécessaires à la description du modèle dans sa version quantique : espaces de Fock, opérateurs de création, d'annihilation. On les présentera d'une façon assez générale dans la Section 3.1. Dans un deuxième temps on écrira la version quantique de notre modèle à l'aide de ces objets et en particulier le hamiltonien quantique correspondant. Dans la Section 3.3, on montrera le caractère auto-adjoint de ce hamiltonien. Cette question "correspond" au niveau quantique à celle de l'existence des solutions au niveau classique. Enfin, dans la Section 3.4, on s'intéressera à la question de l'existence d'un état fondamental. On montrera que ce dernier existe, modulo une hypothèse supplémentaire sur la fonction de couplage  $\rho_2$ .

# Chapitre 2

## Etude du modèle : mécanique classique

### 2.1 La force de frottement

Une étude détaillée de la force de réaction du milieu définie en (1.43) est cruciale pour comprendre le modèle. Elle sera également utile dans les preuves de nos principaux résultats. On suppose que l'on applique à la particule une force extérieure  $F$  constante. On cherche alors des solutions aux équations de mouvement (1.41)-(1.42) pour lesquelles la particule aurait un mouvement rectiligne uniforme  $q(t) = q_0 + vt$  et le champ "suivrait" la trajectoire de la particule, i.e :

$$\phi_v(x, y, t) = \Phi_v(x - (q_0 + vt), y). \quad (2.1)$$

En insérant cet ansatz dans (1.44), on trouve facilement la solution :

$$\hat{\Phi}_v(x, k) = - \int_0^{+\infty} ds \rho_1(x + vs) \hat{\rho}_2(k) \frac{\sin(|k|s)}{|k|}. \quad (2.2)$$

C'est ce qu'on appelle la solution retardée, décrivant les ondes créées dans les "membranes" par le passage de la particule. On peut remarquer que cette solution a des conditions initiales nulles à  $t = -\infty$  dans le sens où, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^{d+n}$ , il existe  $T$  (ne dépendant que de  $x$ ) tel que  $\phi_v(x, y, t) = 0$  pour tout  $t \leq T$  (Figure 1.3). Il est facile de voir que c'est la seule solution vérifiant (2.1). Ce champ  $\phi_v(x, y, t)$  crée une force qui agit sur la particule et que l'on peut facilement calculer à partir de (1.43) et (2.2) en utilisant un

changement de variables dans l'intégration ( $x \rightarrow x + vt + q_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\phi_v, t}(q_0 + vt) &= - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \rho_1(x - (q_0 + vt)) \rho_2(y) (\nabla_x \phi_v)(x, y, t) \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_0^{+\infty} ds \nabla \rho_1(x) \rho_1(x + vs) \\
 &\quad \times |\hat{\rho}_2(k)|^2 \frac{\sin(|k|s)}{|k|} \\
 &=: f(v),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui est clairement indépendante de  $q_0$  et  $t$ . Ainsi,  $\phi_v(x, y, t)$  et  $q(t) = q_0 + vt$  sont solutions du système couplé (1.41)-(1.42) avec  $-\nabla V = F$  pourvu que  $v$  satisfasse l'équation  $f(v) = -F$ . En conclusion, une solution du type (2.1) avec vitesse  $v$  existe pourvu que l'équation  $f(v) = -F$  ait au moins une solution. Nous verrons que pour  $F$  suffisamment petite cette équation possède deux solutions, une à "petite" et une à "grande" vitesse. Notre résultat principal dit que, étant données des conditions initiales suffisamment petites et n'importe quelle force  $F$  pas trop grande, la trajectoire de la particule suit asymptotiquement la trajectoire à vitesse constante qui correspond (Théorème 2.4).

Pour les preuves de nos résultats, il est important de bien comprendre le comportement de la fonction  $f(v)$ . Le reste de cette section est consacré à l'étude de celle-ci, et les différents résultats sont regroupés dans la Proposition 2.1. Il faut d'abord remarquer que  $f$  est une fonctionnelle dépendant de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Dans cette section et dans la suivante ces deux fonctions sont fixées, et on n'indiquera pas explicitement cette dépendance. Par contre, dans les Sections 2.3 et 2.4, nous réintroduirons explicitement  $c$  via (1.40) tout en gardant  $\rho_1$  et  $\rho_2$  fixes :  $f$  deviendra alors une fonction de  $v$  et  $c$ .

Il est clair que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . De plus, il est facile de voir que

$$f(v) = -f_r(|v|) \frac{v}{|v|}, \quad f_r(|v|) > 0,$$

et donc que la force de réaction du milieu sur la particule est exactement de sens contraire à la vitesse de la particule, comme on l'attendait pour une force de frottement. Pour montrer ceci, on peut d'abord remarquer que l'invariance de  $\rho_1$  par rotation implique que

$$\forall R \in O(d), \quad R[f(v)] = f(Rv).$$

Si on prend maintenant  $v = |v|e_1$ , on trouve alors, après changements de variables ( $\lambda = |v|s$  et  $\tilde{k} = \frac{k}{|v|}$ ) :

$$f(v) = -|v|^{n-2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{k} \int_0^{+\infty} d\lambda \nabla \rho_1(x) \rho_1(x + \lambda e_1) |\hat{\rho}_2(|v|\tilde{k})|^2 \frac{\sin(\lambda|\tilde{k}|)}{|\tilde{k}|}.$$

L'invariance de  $\rho_1$  par rotation implique alors que  $f_i(|v|e_1) = 0$  pour  $i = 2, \dots, d$ ,  $f(v)$  est donc dirigée par  $e_1$  et dans le cas général ( $v \neq 0$ ) on obtient

$$f(v) = -f_r(|v|) \frac{v}{|v|}.$$

On a besoin d'étudier le comportement asymptotique de  $f(v)$  lorsque  $|v|$  tend vers 0 et lorsque  $|v|$  tend vers  $+\infty$ . Pour cela, on écrit (voir (2.3))

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^n} dk f(v, k),$$

avec (après quelques manipulations)

$$\begin{aligned} f(v, k) &= -f_r(|v|, |k|) \frac{v}{|v|}, \\ f_r(|v|, |k|) &= \frac{1}{|v|^2} |\hat{\rho}_2(k)|^2 h\left(\frac{k}{|v|}\right), \\ h(\xi) &= \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{\mathbb{R}^d} dx \partial_1 \rho_1(x) \rho_1(x_1 + \lambda, x_\perp) \frac{\sin \lambda |\xi|}{|\xi|} \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\eta |\hat{\rho}_1(|\xi|, \eta)|^2, \end{aligned}$$

où  $\hat{\rho}_1$  est la transformée de Fourier de  $\rho_1$ . Ici,  $f(v, k)$  est la force produite par les "oscillateurs"  $\hat{\phi}(x, k)$  de fréquence  $\omega = |k|$ . De ce qui précède, on déduit alors que  $f_r(|v|) > 0$  et que, étant donné  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_\ell > 0$  telle que

$$|f(v, k)| \leq C_\ell \frac{1}{|k|^2} \left(\frac{|v|}{|k|}\right)^\ell.$$

Autrement dit, à  $k$  fixé,  $f(v, k)$  s'annule à tout ordre en  $|v|$  lorsque  $v \rightarrow 0$ . Donc, lorsque  $v \rightarrow 0$ , la force qui s'exerce sur la particule et qui est due à un oscillateur de fréquence  $\omega(k) = |k|$  situé en  $x$ , décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance de  $|v|$  pour  $v$  petit (*i.e.* lorsque  $|v| \ll |k|R_1$ ). Le couplage de la particule à un tel oscillateur est donc très faible quand  $|v|$  est beaucoup plus petit que  $|k|R_1$ . Cela correspond à une intuition physique bien connue : si la particule se déplace avec une vitesse  $v$ , elle interagit avec un oscillateur donné pendant un temps d'ordre  $\frac{R_1}{|v|}$ . Pour que l'énergie transférée entre la particule et l'oscillateur soit efficace, ce temps d'interaction doit être comparable à la période de l'oscillateur. En effet, l'énergie totale  $\Delta E$  transférée (de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ ) à un oscillateur forcé de fréquence  $\omega$

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \sigma(t)$$

peut facilement être calculée :  $\Delta E = \pi|\hat{\sigma}(\omega)|^2$ . En appliquant ceci à l'équation (1.44) avec  $q(t) = vt$ , on trouve  $\Delta E = \frac{\pi}{|v|^2}|\hat{\rho}_2(k)|^2|\hat{\rho}_1(|k|/|v|, 0)|^2$  qui s'annule à nouveau à tout ordre en  $v$  lorsque  $|v| \rightarrow 0$ .

En particulier, il est clair d'après cette observation que, si on couple la particule à une famille d'oscillateurs ayant tous la même fréquence, on ne pourrait espérer aucun comportement "ohmique" puisque la force de frottement ne serait pas linéaire en  $v$  pour  $v$  petit dans ce cas. Lorsque la particule ralentit, elle interagit de moins en moins efficacement avec de tels oscillateurs. Pour remédier à cet effet, il faut coupler la particule à une famille d'oscillateurs suffisamment nombreux et de fréquence arbitrairement basse. Lorsque la particule ralentira, elle transférera alors de l'énergie aux oscillateurs avec lesquels elle entrera alors en résonance. Dans notre modèle, le nombre d'oscillateurs de basse fréquence situés au point  $x$  dépend de la dimension  $n$  de la variable  $y$ , et ce à travers l'élément de volume  $dk = |k|^{n-1}d|k|d\Omega$ . La présence du facteur  $|k|^{n-1}$  implique que plus la dimension  $n$  augmente, moins il y a d'oscillateurs de basse fréquence. Cela se reflète immédiatement dans le comportement basse vitesse de la force  $f(v)$  :

$$\begin{aligned} f_r(|v|) &= |v|^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\rho}_2(|v|\xi)|^2 h(\xi) d\xi \\ &= |v|^{n-2} |\hat{\rho}_2(0)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) d\xi \\ &\quad + o(|v|^{n-2}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

On remarque en effet que, pour  $v$  petit,  $f_r$  diminue lorsque  $n$  augmente. Ainsi, une force de frottement proportionnelle à la la vitesse n'est obtenue que pour  $n = 3$ . Plus précisément, pour  $n = 3$ ,

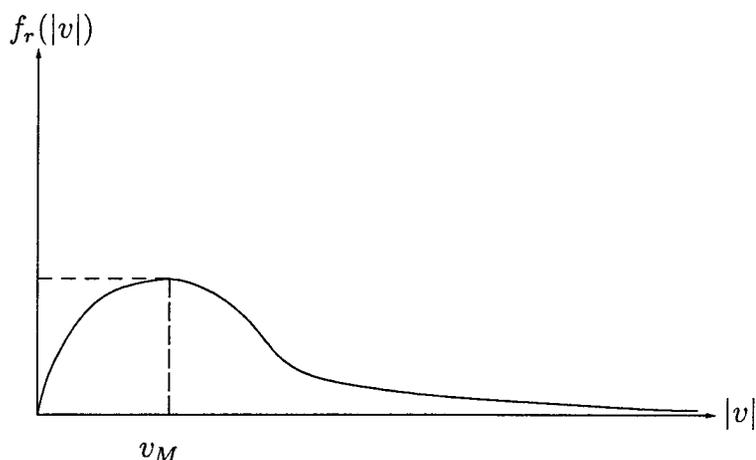
$$f(v) = - \left[ |\hat{\rho}_2(0)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) d\xi \right] v + o(v) = -\gamma v + o(v)$$

où on a défini

$$\gamma = |\hat{\rho}_2(0)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) d\xi. \tag{2.5}$$

Ceci montre pourquoi le mouvement d'une particule dans le milieu décrit ici produit un terme de frottement identique à celui de l'équation (1.4) pourvu que  $n = 3$ . On peut noter que le coefficient de frottement  $\gamma$  est donné explicitement en termes de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et est non nul sous l'hypothèse (H1). On s'intéresse dans cette thèse à un frottement linéaire, c'est pourquoi dans les principaux résultats (Sections 2.3 et 2.4) on se restreindra au cas  $n = 3$ .

On s'intéresse maintenant au comportement de  $f_r(|v|)$  pour des grandes valeurs de  $|v|$ . Il est facile de voir d'après (2.4) que  $\lim_{|v| \rightarrow +\infty} f_r(|v|) = 0$ . En d'autres termes, la force de frottement exercée par le milieu sur la particule est petite également à grande vitesse. Comme on peut le voir dans les équations (1.44) et (2.4), cela est principalement dû à la présence du facteur  $\hat{\rho}_2$ . En particulier, en présence d'une force extérieure  $F$ , on ne peut espérer du modèle qu'il produise un comportement dissipatif lorsque  $v$  est trop grande. On donne l'allure de  $f_r(|v|)$  lorsque  $\rho$  est une gaussienne dans la Figure 2.1.


 FIG. 2.1 – Allure de  $f_r(|v|)$ 

Finalement, on a démontré la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Sous l'hypothèse (H1), la fonction  $f(v)$ , définie en (2.3), vérifie :*

$$(i) \quad f(v) = -f_r(|v|) \frac{v}{|v|}, \quad f_r(|v|) > 0, \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad f_r(|v|) = \gamma |v|^{n-2} + o(|v|^{n-2}), \quad (2.7)$$

lorsque  $v$  tend vers zéro, et où  $\gamma > 0$  est défini en (2.5),

$$(iii) \quad \lim_{|v| \rightarrow +\infty} f_r(|v|) = 0.$$

### 2.1.1 Appendice

On revient un instant au cas où les oscillateurs en différents points de l'espace sont couplés, c'est-à-dire au cas où l'énergie potentielle du champ est donnée par (1.38). On montre dans ce cas-là que la force de réaction du milieu s'annule pour  $|v| < c_1$ .

Par un calcul similaire à celui présenté ci-dessus, on trouve

$$f(v) = f_r(|v|) \frac{v}{|v|},$$

$$f_r(|v|) = i \int_{\mathbb{R}^d} dl \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_0^{+\infty} d\lambda l_1 e^{i l_1 |v| \lambda} \frac{\sin(\omega \lambda)}{\omega} |\hat{\rho}_1(l)|^2 |\hat{\rho}_2(k)|^2$$

avec  $l = (l_1, \dots, l_d)$  et  $\omega = \sqrt{c_1^2 |l|^2 + c_2^2 |k|^2}$ . On peut réécrire  $f_r$  :

$$\begin{aligned} f_r(|v|) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} dl \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_{\mathbb{R}} d\lambda |\hat{\rho}_1(l)|^2 |\hat{\rho}_2(k)|^2 \frac{l_1}{\omega} [e^{i\omega\lambda} - e^{-i\omega\lambda}] e^{i l_1 |v| \lambda} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dl \int_{\mathbb{R}^n} dk |\hat{\rho}_1(l)|^2 |\hat{\rho}_2(k)|^2 \frac{l_1}{\omega} [\delta(l_1 |v| + \omega) - \delta(l_1 |v| - \omega)]. \end{aligned}$$

On voit alors facilement, étant donnée la définition de  $\omega$ , que  $f_r(|v|) = 0$  si  $|v| < c_1$ .

## 2.2 Existence des solutions

On rappelle que le potentiel  $V$  satisfait l'hypothèse (H2) suivante :

(H2)  $V \in C^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\nabla V$  est Lipschitzien. De plus, l'une des deux conditions suivantes est satisfaite : soit  $\nabla V$  est borné (comme dans le cas  $V(q) = -F \cdot q$ ) soit  $V$  est borné inférieurement.

On peut maintenant introduire l'espace des phases  $\mathcal{E}$  du modèle. On note  $\|\cdot\|_2$  la norme usuelle sur  $L^2(\mathbb{R}^{d+n}, dx dy)$ . Sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\phi\| = \|\nabla_y \phi\|_2$  définit une norme. On appelle  $E$  le complété de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n)$  pour cette norme. En utilisant les théorèmes d'injection de Sobolev ([B], Chapitre 9), on peut voir  $E$  comme l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d, D, dx)$  où

$$D = \{\phi \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n, dy) \mid \nabla_y \phi \in L^2(\mathbb{R}^n, dy)\}.$$

On définit alors

$$\mathcal{E} = E \times \mathbb{R}^d \times L^2(\mathbb{R}^{d+n}) \times \mathbb{R}^d$$

munit de la norme :

$$|Y|_{\mathcal{E}} = (\|\phi\|^2 + |q|^2 + \|\pi\|_2^2 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } Y = (\phi, q, \pi, p).$$

Avec cette norme,  $\mathcal{E}$  est un espace de Hilbert.

On écrit maintenant le problème (1.41)-(1.42) sous une forme plus commode, de façon à prouver l'existence et l'unicité des solutions :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = G(Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \in \mathcal{E} \end{cases} \quad (2.8)$$

où

$$G : (\phi, q, \pi, p) \rightarrow \left( \pi, p, \Delta_y \phi - \rho_1(x - q)\rho_2(y), \right. \\ \left. -\nabla V(q) + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \nabla \rho_1(x - q)\rho_2(y)\phi(x, y) \right). \quad (2.9)$$

Par solution, on entend :

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t G(Y(s))ds$$

au sens des distributions.

**Théorème 2.2.** *On suppose  $n \geq 3$ . Sous les hypothèses (H1) et (H2), on a :*

1. *Pour tout  $Y_0$  dans  $\mathcal{E}$ , l'équation différentielle (2.8) admet une unique solution  $Y(t)$  dans  $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ .*
2. *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application  $W^t : Y_0 \rightarrow Y(t)$  est continue sur  $\mathcal{E}$ .*
3. *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $H(Y(t)) = H(Y_0)$  où  $H$  est le hamiltonien défini en (1.33) et de plus  $H$  est une fonction continue sur  $\mathcal{E}$ .*

**Remarque 2.1.** *En utilisant la première partie du théorème et (1.42), on voit que  $q(t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ .*

Pour un usage ultérieur, on définit

$$H_0(Y) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy (|\nabla_y \phi(x, y)|^2 + |\pi(x, y)|^2). \quad (2.10)$$

On peut remarquer que la forme bilinéaire antisymétrique

$$\omega(Y_1, Y_2) = q_1 p_2 - p_1 q_2 + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy (\phi_1 \pi_2 - \pi_1 \phi_2)$$

est densément définie et fait de  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel symplectique. Si on note  $\{, \}$  le crochet de Poisson associé, on peut voir que :

$$\begin{aligned} \{\phi(x, y), \phi(x', y')\} &= \{\pi(x, y), \pi(x', y')\} = 0 \\ \{\phi(x, y), \pi(x', y')\} &= \delta(x - x')\delta(y - y'). \end{aligned} \quad (2.11)$$

On retrouvera des expressions similaires pour le modèle quantique.

Enfin, les équations de mouvement (1.41)-(1.42) sont bien sur les équations de Hamilton pour le hamiltonien  $H$  définie en (1.33), qui représente l'énergie totale du système. On peut noter que ce dernier n'est pas borné inférieurement quand  $V$  ne l'est pas, comme dans le cas  $V = -F \cdot q$ . Cela entraîne une légère complication dans la preuve qui est par ailleurs assez classique et suit largement celle de [KKS1].

**Preuve :** On commence par montrer qu'il existe une solution locale. On utilise ensuite la conservation de l'énergie pour montrer que cette solution est globalement définie.

On commence par regarder l'équation

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = G_0(Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

avec

$$G_0 Y = (\pi; 0; \Delta_y \phi; 0). \quad (2.13)$$

Cette équation est juste l'équation des ondes homogène dans  $\mathbb{R}^n$  avec un paramètre  $x \in \mathbb{R}^d$ . Elle admet une unique solution :  $t \in \mathbb{R} \rightarrow Y(t) \in \mathcal{E}$ . De plus, si on note  $W_0^t : Y_0 \rightarrow Y(t)$  le groupe à un paramètre correspondant, on peut voir que  $W_0^t$  est une isométrie linéaire pour la norme  $|\cdot|_{\mathcal{E}}$ .  $W_0^t$  est également continue sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$  ([LM], Chapitre 3).

On définit maintenant  $Z(t) = W_0^{-t} Y(t)$ , c'est à dire  $Y(t) = W_0^t Z(t)$ . En particulier,  $Z(0) = Y(0) = Y_0$ . On a  $\dot{Y}(t) = G_0 Y(t) + W_0^t \dot{Z}(t)$ .  $Y(t)$  est solution de l'équation (2.8) si et seulement si  $Z(t)$  vérifie

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = W_0^{-t} G_1(W_0^t Z(t)) \\ Z(0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} G_1 : (\phi; q; \pi; p) \in \mathcal{E} &\rightarrow \left( 0; p; -\rho_1(x-q)\rho_2(y); -\nabla V(q) \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \nabla \rho_1(x-q)\rho_2(y)\phi(x,y) \right) \in \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En introduisant

$$\tilde{G} : (t, Z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow W_0^{-t} G_1(W_0^t Z) \in \mathcal{E},$$

il est clair que  $\tilde{G}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$  et lipschitzienne sur  $\mathcal{E}$  puisque  $W_0^t$  est une isométrie et  $G_1$  est lipschitzienne. Cette équation vérifie toutes

les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ([H], Théorème 3.1), elle possède donc une unique solution qui est définie sur un intervalle ouvert. Plus précisément, il existe un intervalle ouvert  $J$  tel que  $0 \in J$  et il existe une unique fonction  $Z : t \in J \rightarrow Z(t) \in \mathcal{E}$  satisfaisant (2.14). De plus,  $\tilde{W}^t : Z_0 \rightarrow Z(t)$  est continue sur  $\mathcal{E}$  pour tout  $t \in J$  et on a donc les mêmes résultats pour

$$W^t : Y_0 \in \mathcal{E} \rightarrow Y(t) = W_0^t \tilde{W}^t Y_0 \in \mathcal{E}.$$

Afin de montrer l'existence globale, on montre maintenant la conservation de l'énergie. On commence par montrer le résultat pour des conditions initiales régulières (i.e.  $\phi_0, \pi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+n})$ ). Soit  $Y_0 = (\phi_0, q_0, \pi_0, p_0)$  avec  $\phi_0, \pi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+n})$ . Alors  $W_0^t Y_0$  est régulière ([CH], Chapitre 6) et en utilisant la forme intégrale :

$$Y(t) = W_0^t Y_0 + \int_0^t ds W_0^{t-s} G_1(Y(s)),$$

il est clair que  $\phi(t), \pi(t)$  sont également régulières (en  $x$  et  $y$ ). Remarquons que  $\phi(x, y, t)$  et  $\pi(x, y, t)$  sont aussi régulières en  $t$  ([LM], Chapitre 3). Pour de telles conditions initiales, un simple calcul donne :

$$\frac{d}{dt} H(Y(t)) = 0,$$

et donc, pour des conditions initiales régulières,  $H(Y(t))$  est constant pour tout  $t$  dans  $J$ . On montre maintenant que  $H$  est continu sur  $\mathcal{E}$ . La continuité de  $W^t$  sur  $\mathcal{E}$  et le fait que les fonctions régulières soient denses dans  $\mathcal{E}$  impliqueront alors le résultat pour toutes conditions initiales. Comme  $V$  est continu, il suffit de montrer que le terme d'interaction dans  $H$  est continu. Sa continuité dans la variable  $\phi$  est immédiate par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \rho_1(x-q) \rho_2(y) \phi(x, y) - \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \rho_1(x-q) \rho_2(y) \psi(x, y) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dk \frac{\rho_1(x-q) \tilde{\rho}_2(k)}{|k|} (|k| \hat{\phi}(x, k) - |k| \hat{\psi}(x, k)) \right| \\ &\leq \left\| \frac{\rho_1(x-q) \tilde{\rho}_2(k)}{|k|} \right\|_{L^2} \times \left\| |k| (\hat{\phi} - \hat{\psi}) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \frac{\rho_1(x-q) \tilde{\rho}_2(k)}{|k|} \right\|_{L^2} \times \|\phi - \psi\|. \end{aligned}$$

Comme  $\rho$  est à support compact et que  $n \geq 3$  le premier terme du membre de droite est fini et donc  $H$  est continu (la continuité en  $(q, \phi)$  découle de façon similaire).

Nous aurons également besoin de l'inégalité suivante (basée sur  $|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ ) :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \rho_1(x - q)\rho_2(y)\phi(x, y) \right| \leq \frac{\|\phi\|^2}{4} - \langle \rho_1\rho_2; \rho_1\Delta_y^{-1}\rho_2 \rangle. \quad (2.16)$$

Ainsi :

$$H(Y(t)) \geq \frac{1}{2}p(t)^2 + V(q(t)) + \frac{1}{4}\|\phi(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\pi(t)\|_2^2 + \langle \rho_1\rho_2; \rho_1\Delta_y^{-1}\rho_2 \rangle. \quad (2.17)$$

Nous pouvons maintenant montrer que  $J = \mathbb{R}$ . On sait que  $J$  peut s'écrire  $]a; b[$  avec  $-\infty \leq a < 0$  et  $0 < b \leq +\infty$ . Nous allons montrer par l'absurde que  $b = +\infty$  (le même raisonnement montrerait que  $a = -\infty$ ). Si  $b < +\infty$ , on sait par la théorie des équations différentielles ([H], Théorème 2.1) que

$$\lim_{t \rightarrow b} |Z(t)|_{\mathcal{E}} = +\infty$$

et le même résultat est alors valable pour  $|Y(t)|_{\mathcal{E}}$  puisque

$$|Y(t)|_{\mathcal{E}} = |W_0^t Z(t)|_{\mathcal{E}} = |Z(t)|_{\mathcal{E}}.$$

On considère d'abord le cas (plus difficile) où  $\nabla V$  est borné (mais  $V$  n'est pas nécessairement borné inférieurement). Pour  $t > 0$ , on peut écrire  $\phi$  comme :

$$\phi = \phi^r + \phi^0, \quad (2.18)$$

où  $\phi^r$  est la solution de l'équation des ondes avec conditions initiales égales à 0 et  $\phi^0$  est la solution de l'équation des ondes homogène avec conditions initiales  $\phi_0$  et  $\pi_0$  [CH] [J]. En conséquence,

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\nabla V(q(t)) + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \nabla \rho_1(x - q(t))\rho_2(y)\phi^r(x, y, t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \nabla \rho_1(x - q(t))\rho_2(y)\phi^0(x, y, t). \end{aligned}$$

Le premier terme  $-\nabla V(q(t))$  est borné par hypothèse. Le deuxième peut facilement être borné en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la forme exacte de  $\phi^r$  donnée dans ([CH], p.692). En utilisant (2.16) avec  $\nabla \rho_1$  au lieu de  $\rho_1$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \nabla \rho_1(x - q(t))\rho_2(y)\phi^0(x, y, t) \right| &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_y \phi^0(t)\|_2^2 \\ &\quad + \|\nabla^{-1}\rho_2(y)\nabla \rho_1(x - q(t))\|_2^2. \end{aligned}$$

Mais  $\phi^0$  est solution de l'équation des ondes homogène avec conditions initiales  $\phi_0$  et  $\pi_0$ , donc, par conservation de l'énergie :

$$\| \nabla_y \phi^0(t) \|_2^2 + \left\| \frac{d}{dt} \phi^0(t) \right\|_2^2 = \| \nabla_y \phi_0 \|_2^2 + \| \pi_0 \|_2^2 \quad (2.19)$$

et donc  $\| \nabla_y \phi^0(t) \|_2^2$  est également borné.

Finalement,  $\dot{p}(t)$  est borné sur  $J$  : il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall t \in J, t > 0 \quad |\dot{p}(t)| \leq C. \quad (2.20)$$

On a supposé  $b$  fini, donc  $p(t)$  et  $q(t)$  sont également bornés pour  $t > 0, t \in J$ .

En utilisant la conservation de l'énergie et (2.17), on voit que  $\|\phi(t)\|$  et  $\|\pi(t)\|_2$  sont bornés. Ainsi  $|Y(t)|_\varepsilon$  est également borné, ce qui est en contradiction avec le fait que  $b$  soit fini.

On traite enfin le second cas, où  $V$  est borné inférieurement. Il existe  $V_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $q \in \mathbb{R}^d$ ,  $V(q) \geq V_0$ .

(1.33) implique que

$$H(Y_0) \geq \frac{1}{2} p(t)^2 + V_0 + \frac{1}{4} \|\phi(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\pi(t)\|_2^2 + \langle \rho_1 \rho_2; \rho_1 \Delta_y^{-1} \rho_2 \rangle. \quad (2.21)$$

Donc  $p(t)$ ,  $\|\phi(t)\|$  et  $\|\pi(t)\|_2$  sont bornés sur  $J$  et comme  $b$  est supposé fini,  $q(t)$  est également borné, ce qui est à nouveau une contradiction.  $\square$

## 2.3 Comportement des solutions : force constante

A partir de maintenant et pour toute la suite du Chapitre 2, on prendra  $n = 3$ . Pour montrer nos résultats on a besoin de supposer que  $c$  est assez grand (voir (1.31)). On a déjà donné une idée sur cette condition dans la Section 1.5 du Chapitre précédent et on reviendra dessus après avoir réintroduit  $c$  explicitement comme dans (1.40) :

$$\rho_2(y) = c^{\frac{3}{2}} \sigma_2(cy). \quad (2.22)$$

Dans toute la suite,  $\rho_1$  et  $\sigma_2$  sont fixées et satisfont (H1) ;  $c$  est traité comme un paramètre. La force exercée par l'environnement sur une particule se déplaçant à vitesse  $v$  est définie en (2.3). On a

$$f(v) = \frac{1}{c^2} \tilde{f} \left( \frac{v}{c} \right) = -\frac{1}{c^2} \tilde{f}_r \left( \frac{|v|}{c} \right) \frac{v}{|v|}, \quad (2.23)$$

où, pour tout  $w \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\tilde{f}(w) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_0^{+\infty} ds \nabla \rho_1(x) \rho_1(x + ws) |\hat{\sigma}_2(k)|^2 \frac{\sin(|k|s)}{|k|}.$$

On note que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{f}_r$  ne dépendent pas de  $c$ . En utilisant la Proposition 2.1 et le fait que  $n = 3$ , le coefficient de frottement  $\gamma$  défini en (2.5) devient alors

$$\gamma = f'_r(0) = \frac{1}{c^3} \tilde{f}'_r(0) \equiv \frac{\tilde{\gamma}}{c^3} > 0, \quad (2.24)$$

où  $\tilde{\gamma}$  ne dépend pas de  $c$  :

$$\tilde{\gamma} = \left[ |\hat{\sigma}_2(0)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) d\xi \right] > 0. \quad (2.25)$$

On peut définir  $w_M$  comme étant le plus petit zéro de  $\tilde{f}'_r$  et  $\tilde{F}_M = \tilde{f}_r(w_M)$ . Pour tout  $w < w_M$ ,  $\tilde{f}_r$  est croissante, et donc pour tout  $F \in \mathbb{R}^d$ ,  $|F| \leq \frac{\tilde{F}_M}{c^2}$ , il existe un unique  $v(F) \in \mathbb{R}^d$ ,  $|v(F)| \leq w_M c = v_M$  (voir Figure 2.1) tel que

$$f(v(F)) = -F. \quad (2.26)$$

Ceci définit  $v(F)$ .

Pour obtenir nos résultats, on a besoin de certaines hypothèses sur les conditions initiales. Pour cela, on définit l'ensemble suivant :

**Definition 2.3.** On appelle  $\mathcal{D}$  l'ensemble de tous les états  $Y_0 = (\phi_0, q_0, \pi_0, p_0)$  dans  $\mathcal{E}$  tels que

$$[|\phi_0(x, y)| + |y|(|\nabla_y \phi_0(x, y)| + |\pi_0(x, y)|)] \leq \kappa(x)(1 + |y|)^{-\nu} \quad (2.27)$$

pour un certain  $\nu > 2$  et avec  $\kappa \in L^\infty \cap L^2$ .

On peut maintenant énoncer nos principaux résultats.

**Théorème 2.4.** On suppose que  $\rho_1$  et  $\sigma_2$  vérifient (H1) et on considère (1.41) – (1.42) avec  $V(q) = -F \cdot q$ ,  $F \in \mathbb{R}^d$ .

(i) Pour tout  $F_0, K, R, \varepsilon, \eta > 0$  il existe  $c_0(\rho_1, \sigma_2, \varepsilon, \eta, F_0, K, R) > 0$  tel que pour tout  $c > c_0$ , pour tout  $|F| < F_0 c^{-2-\varepsilon}$  et pour tout  $Y_0 \in \mathcal{E}$  tel que  $\phi_0(x, \cdot), \pi_0(x, \cdot)$  sont à support compact dans  $B_{Rc} \subset \mathbb{R}^3$  pour tout  $x$ , et vérifiant  $H_0(Y_0) < Kc^{2-2\varepsilon}$ , il existe  $q_\infty(F, Y_0) \in \mathbb{R}^d$  et  $K' > 0$  tels que pour tout  $t > 0$

$$|q(t) - q_\infty - v(F)t| \leq K' e^{-\frac{\tilde{\gamma}(1-\eta)}{c^3} t}. \quad (2.28)$$

(ii) Pour tout  $F_0, K, \varepsilon, \eta > 0$  il existe  $c_0(\rho_1, \sigma_2, \varepsilon, \eta, F_0, K) > 0$  tel que pour tout  $c > c_0$ , pour tout  $|F| < F_0 c^{-2-\varepsilon}$  et pour tout  $Y_0 \in \mathcal{D}$  avec  $\|\kappa\|_\infty < Kc$  et  $H_0(Y_0) < Kc^{2-2\varepsilon}$ , il existe  $q_\infty(F, Y_0) \in \mathbb{R}^d$  et  $K' > 0$  tels que pour tout  $t > 0$

$$|q(t) - q_\infty - v(F)t| \leq K'|t|^{2-\nu}.$$

Il faut remarquer que, puisque  $\eta$  peut être choisi arbitrairement petit, le taux de décroissance exponentielle dans (2.28) est essentiellement donné par le coefficient de frottement  $\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{c^3}$ , et que de plus

$$v(F) = \frac{F}{\gamma} + O(c^{1-2\varepsilon}) \quad (2.29)$$

uniformément pour  $|F| \leq F_0 c^{-2-\varepsilon}$ . Cela montre que les solutions  $q(t)$  de (1.42) ont bien le même comportement asymptotique que celles de (1.4), comme annoncé précédemment. La restriction sur l'énergie  $H_0(Y_0)$  des conditions initiales dans les hypothèses est reliée au fait que  $f(v) \rightarrow 0$  lorsque  $|v| \rightarrow +\infty$  (voir Proposition 2.1). En effet, il est intuitivement clair que, si à un certain instant  $t$ ,  $|\dot{q}(t)|$  est trop grand, alors la force de réaction du milieu sera trop faible pour contrer la force extérieure  $F$  et la particule continuera d'accélérer. Cette argument n'est plus valable lorsque  $F = 0$ . Dans ce cas, on peut alors omettre l'hypothèse sur l'énergie initiale  $H_0(Y_0)$ , pourvu que l'on impose sur  $\sigma_2$  la condition supplémentaire (W) (voir Section 1.4). Cette condition exprime l'idée que la particule est couplée avec les oscillateurs de toutes les fréquences possibles (voir (1.44)). On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Théorème 2.5.** *On suppose que  $\rho_1, \sigma_2$  vérifient (H1) et que  $\sigma_2$  vérifie (W). On considère (1.41) – (1.42) avec  $V \equiv 0$ .*

(i) *Pour tout  $\eta > 0$  il existe  $c_0(\rho_1, \sigma_2, \eta) > 0$  tel que pour tout  $c > c_0$  et pour tout  $Y_0 \in \mathcal{E}$  tel que  $\phi_0(x, \cdot), \pi_0(x, \cdot)$  sont à support compact pour tout  $x$ , il existe  $q_\infty(Y_0) \in \mathbb{R}^d$  et  $K' > 0$  tels que pour tout  $t > 0$*

$$|q(t) - q_\infty| \leq K' e^{-\frac{\tilde{\gamma}(1-\eta)t}{c^3}}.$$

(ii) *Pour tout  $\eta > 0$  il existe  $c_0(\rho_1, \sigma_2, \eta) > 0$  tel que pour tout  $c > c_0$  et pour tout  $Y_0 \in \mathcal{D}$ , il existe  $q_\infty(Y_0) \in \mathbb{R}^d$  et  $K' > 0$  tels que pour tout  $t > 0$*

$$|q(t) - q_\infty| \leq K'|t|^{2-\nu}.$$

La preuve du Théorème 2.5, qui utilise des techniques de cette section et de la section suivante, sera donnée à la fin de cette dernière.

On introduit enfin quelques notations qui apparaîtront fréquemment dans les différentes preuves. On note  $Df(v)$  la différentielle de la fonction  $f(v)$ . On peut voir que dans n'importe quelle base orthonormée  $(e_1, \dots, e_d)$  dans laquelle  $e_1 = \frac{v}{|v|}$  on a

$$Df(v) = \begin{pmatrix} -f'_r(|v|) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{f_r(|v|)}{|v|} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{f_r(|v|)}{|v|} \end{pmatrix}$$

si  $v \neq 0$  et

$$Df(0) = -\gamma Id.$$

On définit pour tout  $w \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{\theta}_*(w) = \max \left( \tilde{f}'_r(|w|), \frac{\tilde{f}_r(|w|)}{|w|} \right), \quad \tilde{\gamma}_*(w) = \min \left( \tilde{f}'_r(|w|), \frac{\tilde{f}_r(|w|)}{|w|} \right). \quad (2.30)$$

Etant donnée la définition de  $w_M$  et (2.23), il est clair que  $\tilde{\theta}_*(w)$  et  $\tilde{\gamma}_*(w)$  sont strictement positifs pour  $|w| < w_M$  et que  $\|Df(v)\| = \frac{1}{c^3} \tilde{\theta}_*(\frac{v}{c})$ . Clairement,

$$\lim_{w \rightarrow 0} \tilde{\theta}_*(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_*(w) = \tilde{\gamma} \quad (2.31)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est défini en (2.25). Pour alléger les notations, on écrira simplement  $Df_F$ ,  $\tilde{\gamma}_F$  et  $\tilde{\theta}_F$  à la place de  $Df(v(F))$ ,  $\tilde{\gamma}_*(\frac{v(F)}{c})$  et  $\tilde{\theta}_*(\frac{v(F)}{c})$ .

Comme on veut montrer que  $\dot{q}(t) \rightarrow v(\bar{F})$ , il est commode d'introduire  $h(t) = q(t) - v(F)t$ . Pour démontrer le Théorème 2.4, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.6.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.4(i) (resp. Théorème 2.4(ii)), il existe  $c_0 > 0$  et  $\beta > 0$  tels que*

$$\sup_{t \geq 0} |\dot{h}(t)| \leq \beta c^{1-\varepsilon}$$

pour tout  $c > c_0$  et pour toute condition initiale comme dans le Théorème 2.4(i) (resp. Théorème 2.4(ii)).

La preuve du Lemme 2.6 sera donnée à la fin de cette section.

**Preuve du Théorème 2.4 :** Tout au long de la preuve, de nombreuses estimations seront faites en terme de  $c$ , il faut donc se rappeler que  $\rho_2$  dépend de  $c$  via (2.22). D'un autre côté, les différentes constantes ne dépendront que de  $\rho_1, \sigma_2, \eta, \varepsilon, F_0, K, R$ , mais pas de  $c, F$ , ni des conditions initiales. On commence par fixer  $c$  assez grand pour que  $F_0 c^{-2-\varepsilon} < \bar{F}_M c^{-2}$ , ce qui entraîne que  $v(F)$  est bien défini (voir (2.26)), et on considère (1.41) – (1.42) pour un certain  $F \in \mathbb{R}^d, |F| \leq F_0 c^{-2-\varepsilon}$  et un  $Y_0 \in \mathcal{E}$ .

La première partie de la preuve consiste en un calcul assez direct mais relativement long transformant (1.41)-(1.42) en une équation intégro-différentielle effective pour  $h(t) = q(t) - v(F)t$  obtenue en (2.42).

La résolution de (1.41) donne, en utilisant (2.18),

$$\phi(x, y, t) = \phi^r(x, y, t) + \phi^0(x, y, t),$$

où dans le cas tridimensionnel que l'on considère ici :

$$\phi^r(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|z|\leq t} dz \frac{\rho_2(y-z)}{|z|} \rho_1(x - q(t - |z|)) \quad (2.32)$$

$$\phi^0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(y)} [\phi_0(x, \sigma) + \sigma \cdot \nabla_y \phi_0(x, \sigma) + t\pi_0(x, \sigma)] d\sigma \quad (2.33)$$

et  $S_t(y)$  est la sphère de rayon  $t$  centrée en  $y$  ([J], Chapitre 3). En insérant ceci dans (1.42), on obtient l'équation intégral-différentielle suivante pour  $q(t)$  :

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) = F - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \rho_1(x - q(t - |z|)) \\ \times \nabla \rho_1(x - q(t)) + A_0(t), \end{aligned} \quad (2.34)$$

où

$$\begin{aligned} A_0(t) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint dx dy \int_{S_t(y)} d\sigma [\phi_0(x, \sigma) + \sigma \cdot \nabla_y \phi_0(x, \sigma) \\ + t\pi_0(x, \sigma)] \rho_2(y) \nabla \rho_1(x - q(t)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Comme  $n = 3$ , il n'est pas difficile de voir que  $f(v)$ , définie en (2.3), peut se réécrire comme suit :

$$f(v) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \rho_1(x + v|z|) \nabla \rho_1(x). \quad (2.36)$$

En utilisant cette expression pour remplacer  $F$  dans (2.34) par  $-f(v(F))$  on trouve

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) = \frac{1}{4\pi} \iiint dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \rho_1(x + v(F)|z|) \nabla \rho_1(x) \\ - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \rho_1(x - q(t - |z|)) \nabla \rho_1(x - q(t)) \\ + A_0(t). \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, on écrira désormais  $v = v(F)$ . On divise maintenant la première intégrale en deux parties :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dz = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{|z|\leq t} dz + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{|z|\geq t} dz.$$

On note  $\tilde{f}(t)$  le second terme, *i.e.*

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \geq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \rho_1(x+v|z|) \nabla \rho_1(x). \quad (2.37)$$

On remarque maintenant que pour  $|z| \geq 2\frac{R_2}{c}$ ,  $\rho_2(y)\rho_2(y-z) = 0$  puisque

$$|y-z| \geq |z| - |y| \geq 2\frac{R_2}{c} - |y|$$

et  $\rho_2(y) = 0$  si  $|y| \geq \frac{R_2}{c}$ . Donc  $\tilde{f}(t)$  s'annule si  $t \geq \frac{2R_2}{c}$ . Finalement, on pose

$$A_1(t) = A_0(t) + \tilde{f}(t). \quad (2.38)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \left[ -\rho_1(x-q(t-|z|)) \right. \\ & \left. \nabla \rho_1(x-q(t)) + \rho_1(x+v|z|) \nabla \rho_1(x) \right] + A_1(t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

En insérant

$$q(t-|z|) = q(t) - \int_{t-|z|}^t \dot{q}(s) ds$$

dans (2.39) et en utilisant l'invariance par translation, on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \left[ \rho_1(x+v|z|) \right. \\ & \left. - \rho_1\left(x + \int_{t-|z|}^t \dot{q}(s) ds\right) \right] \nabla \rho_1(x) + A_1(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

On peut maintenant introduire  $h(t) = q(t) - vt$ , en terme duquel (2.40) devient

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \left[ \rho_1(x+v|z|) \right. \\ & \left. - \rho_1\left(x+v|z| + \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds\right) \right] \nabla \rho_1(x) + A_1(t). \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} & \rho_1\left(x+v|z| + \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds\right) - \rho_1(x+v|z|) \\ = & \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) ds \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds; \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds \right\rangle \end{aligned}$$

pour un certain  $\tilde{x}_{t,|z|}$  appartenant au segment  $[x+v|z|; x+v|z| + \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds]$ . De plus, une intégration par parties donne

$$\int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds = |z|\dot{h}(t) + \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s)\ddot{h}(s)ds.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \rho_2(y-z)\rho_2(y) \left[ \dot{h}(t) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \quad \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s)\ddot{h}(s)ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \quad \times \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds; \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds \right\rangle \nabla \rho_1(x) \\ &\quad + A_1(t). \end{aligned}$$

A nouveau, on réécrit la première intégrale comme  $\int_{|z|\leq t} = \int_{\mathbb{R}^3} - \int_{|z|\geq t}$ . Il est facile de voir à partir de (2.36) que le premier terme est alors égal à  $Df_F \cdot \dot{h}(t)$  tandis que le second s'annule, une fois de plus, si  $t \geq \frac{2R_2}{c}$ . On définit

$$\begin{aligned} A_2(t) &= A_1(t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\geq t} dx dy dz \rho_2(y-z)\rho_2(y) \\ &\quad \quad \times \left[ \dot{h}(t) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \end{aligned} \quad (2.41)$$

et on obtient finalement la forme suivante de l'équation intégral-différentielle pour  $h(t) = q(t) - vt$  :

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) &= Df_F \cdot \dot{h}(t) - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \quad \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s)\ddot{h}(s)ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z|\leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \quad \times \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds; \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s)ds \right\rangle \nabla \rho_1(x) \\ &\quad + A_2(t), \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $A_2(t)$  est défini via (2.35)-(2.37)-(2.38)-(2.41). On reconnaît ici, dans les deux premiers termes, l'équation (1.4) avec  $V = -F \cdot q$ .

On peut maintenant montrer que  $h(t) \rightarrow 0$  et contrôler le taux de convergence. On commence par définir  $g(t) = e^{\frac{\theta}{c^3}t} \dot{h}(t)$ . On a

$$\dot{h}(t) = e^{-\frac{\theta}{c^3}t} g(t), \quad \ddot{h}(t) = -\frac{\theta}{c^3} e^{-\frac{\theta}{c^3}t} g(t) + e^{-\frac{\theta}{c^3}t} \dot{g}(t) = -\frac{\theta}{c^3} \dot{h}(t) + e^{-\frac{\theta}{c^3}t} \dot{g}(t),$$

et donc (2.42) devient

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \left[ \frac{\theta}{c^3} Id + Df_F \right] \cdot g(t) \\ &+ \frac{\tilde{\theta}_F}{4\pi c^3} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s) e^{\frac{\theta}{c^3}(t-s)} g(s) ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \\ &- \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \nabla \rho_1(x) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-|z|}^t e^{\frac{\theta}{c^3}(t-s)} g(s) ds; \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds \right\rangle \\ &- \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s) e^{\frac{\theta}{c^3}(t-s)} \dot{g}(s) ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] \nabla \rho_1(x) \\ &+ e^{\frac{\theta}{c^3}t} A_2(t). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Remarquons que, dans le troisième terme du membre de droite, nous avons remplacé seulement un facteur  $\dot{h}(s)$  par  $e^{-\frac{\theta}{c^3}s} g(s)$ . Nous utiliserons le Lemme 2.6 pour contrôler l'autre. On définit

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \quad \text{et} \quad N(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\dot{g}(s)|.$$

En écrivant  $R(t)$  pour le membre de droite de (2.43) et en utilisant le Lemme 2.6 pour contrôler son troisième terme, on trouve facilement (en se souvenant de (2.22)) qu'il existe des constantes  $D_1, D_2, D_3 > 0$  ne dépendant que de  $\rho_1, \sigma_2$  telles que

$$\begin{aligned} |R(t)| &\leq \left( \frac{\theta}{c^3} - \frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3} \right) M(t) + \frac{\tilde{\theta}_F}{c^7} D_1 e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}} M(t) + \frac{D_2 e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}}}{c^{3+\varepsilon}} M(t) \\ &\quad + \frac{D_3}{c^4} e^{2R_2 \frac{\tilde{\theta}_F}{c^4}} N(t) + e^{\frac{\theta}{c^3}t} |A_2(t)|. \end{aligned}$$

Ici,  $R_2$  est le rayon du support de  $\sigma_2$  (voir (H1)). En prenant  $c$  assez grand (dépendant de  $D_1, D_2, \tilde{\theta}_F$ ) on obtient pour tout  $s \geq 0$ ,

$$|\dot{g}(s)| \leq \left( \frac{\theta}{c^3} - \frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3} + \frac{D_4 e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}}}{c^{3+\varepsilon}} \right) M(s) + N(s) \frac{D_3}{c^4} e^{2R_2 \frac{\tilde{\theta}_F}{c^4}} + e^{\frac{\theta}{c^3}s} |A_2(s)|. \quad (2.44)$$

En prenant le supremum sur tous les  $s \in [0, t]$ , d'abord dans le membre de droite et ensuite dans celui de gauche de cette inégalité, on obtient

$$\left[ 1 - \frac{D_3}{c^4} e^{2R_2 \frac{\tilde{\theta}_F}{c^4}} \right] N(t) \leq \left( \frac{\theta}{c^3} - \frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3} + \frac{D_4 e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}}}{c^{3+\varepsilon}} \right) M(t) + \sup_{0 \leq s \leq t} (e^{\frac{\theta}{c^3}s} |A_2(s)|).$$

On note  $k_c$  l'inverse du facteur devant  $N(t)$ . Remarquons que  $k_c \sim 1 + \frac{k}{c^4}$ . Ainsi

$$N(t) \leq k_c \left( \frac{\theta}{c^3} - \frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3} + \frac{D_4 e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}}}{c^{3+\varepsilon}} \right) M(t) + k_c \sup_{0 \leq s \leq t} (e^{\frac{\theta}{c^3}s} |A_2(s)|).$$

On remarque que, à la vue de (2.29), uniformément en  $F \in \mathbb{R}^d$  tel que  $0 \leq |F| \leq F_0 c^{-2-\varepsilon}$ ,  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{v(F)}{c} = 0$ . Ainsi, de (2.31), on déduit que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \tilde{\gamma}_F = \lim_{c \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_F = \tilde{\gamma}. \quad (2.45)$$

En utilisant ceci, il est maintenant facile de voir que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $c_0(\rho_1, \sigma_2, K, F_0, \varepsilon, \eta)$  tel que, pour tout  $c > c_0$ , on a

$$0 < k_c \left( \frac{\theta}{c^3} - \frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3} + \frac{D_4}{c^{3+\varepsilon}} e^{2\tilde{\theta}_F \frac{R_2}{c^4}} \right) \leq (\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1 - \eta)) \frac{1}{c^3}.$$

On obtient alors :

$$N(t) \leq \frac{1}{c^3} (\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1 - \eta)) M(t) + k_c \sup_{0 \leq s \leq t} (e^{\frac{\theta}{c^3}s} |A_2(s)|). \quad (2.46)$$

Pour contrôler le dernier terme de cette inégalité, nous avons maintenant besoin d'utiliser les hypothèses sur la condition initiale  $Y_0 \in \mathcal{E}$ . On commence par traiter le cas du Théorème 2.4 (ii). Rappelons que  $A_2 - A_0$  est une fonction à support compact, s'annulant pour  $t \geq \frac{2R_2}{c}$ . Donc, il existe  $B_c(Y_0)$  tel que, pour tout  $t \geq 0$  :

$$k_c \sup_{0 \leq s \leq t} |e^{\frac{\theta}{c^3}s} (A_2(s) - A_0(s))| \leq B_c(Y_0) < +\infty. \quad (2.47)$$

D'un autre côté, comme, pour  $|y| \geq \frac{R_2}{c}$ ,  $\rho_2(y) = 0$  (voir (2.22)), on a

$$A_0(t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int dx \int_{|y| \leq \frac{R_2}{c}} dy \int_{S_t(y)} d\sigma [\phi_0(x, \sigma) + \sigma \cdot \nabla_y \phi_0(x, \sigma) + t\pi_0(x, \sigma)] \rho_2(y) \nabla \rho_1(x - q(t)).$$

Si  $|y| \leq \frac{R_2}{c}$ , alors  $|\sigma| \geq |t - \frac{R_2}{c}|$ . D'après (2.27), et les hypothèses sur  $\phi_0$ ,  $\pi_0$

$$|\phi_0(x, \sigma)| \leq Kc |t - \frac{R_2}{c}|^{-\nu}, \quad |\sigma \cdot \nabla_y \phi_0(x, \sigma)| \leq Kc |t - \frac{R_2}{c}|^{-\nu},$$

$$|t\pi_0(x, \sigma)| \leq Kct |t - \frac{R_2}{c}|^{-\nu-1},$$

uniformément en la variable  $x$ . On a donc, pour une certaine constante  $A$ ,

$$|A_0(t)| \leq \frac{A}{c^{\frac{1}{2}}(1+t)^\nu}. \quad (2.48)$$

Un simple calcul montre alors qu'il existe  $t_*(\frac{\theta}{c^3}) > 0$  tel que

$$\left. \begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t} \left[ \frac{e^{\frac{\theta}{c^3}s}}{(1+s)^\nu} \right] &= \frac{e^{\frac{\theta}{c^3}t}}{(1+t)^\nu} & \forall t \geq t_*(\frac{\theta}{c^3}), \\ &= 1 & \forall t \leq t_*(\frac{\theta}{c^3}). \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

On écrira  $t_* = t_*(\frac{\theta}{c^3})$ . On a maintenant, pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$$|g(s)| \leq |g(0)| + \int_0^s |\dot{g}(u)| du \leq |g(0)| + \int_0^s N(u) du \leq |g(0)| + \int_0^t N(u) du,$$

et donc, en utilisant (2.46), (2.47) et (2.49), on trouve

$$\begin{aligned} M(t) &\leq |M(0)| + \int_0^t N(u) du \\ &\leq |g(0)| + \frac{1}{c^3} (\bar{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)) \int_0^t M(u) du \\ &\quad + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{e^{\frac{\theta}{c^3}u}}{(1+u)^\nu} du + k_c A c^{-\frac{1}{2}} t_* + B_c t. \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme de Gronwall ([H], Lemme 6.2) pour obtenir

$$\begin{aligned} |g(t)| \leq M(t) &\leq (|g(0)| + k_c A c^{-\frac{1}{2}} t_* + \frac{B_c c^3}{\bar{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)}) e^{(\bar{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)) \frac{t}{c^3}} \\ &\quad + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \frac{e^{\frac{\tilde{\gamma}(1-\eta)s}}{(1+s)^\nu}} ds \right) e^{(\bar{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)) \frac{t}{c^3}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

On définit  $h_\infty = |g(0)| + k_c A c^{-\frac{1}{2}} t_* + \frac{B_c c^3}{\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)}$ . En se rappelant que  $\dot{h}(t) = e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3} t} g(t)$ , cela donne

$$\begin{aligned}
 |\dot{h}(t)| &\leq h_\infty e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \frac{e^{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)s}}{(1+s)^\nu} ds \right) e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} \\
 &\leq h_\infty e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{e^{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)s}}{(1+s)^\nu} ds \right) e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} \\
 &\quad + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{e^{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)s}}{(1+s)^\nu} ds \right) e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} \\
 &\leq h_\infty e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t}}{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)} [e^{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)\frac{t}{2}} - 1] \\
 &\quad + k_c A c^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{ds}{(1+s)^\nu} \\
 &\leq h_\infty e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t} + \frac{k_c}{\tilde{\gamma}(1-\eta)} A c^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)\frac{t}{2}} + \frac{k_c A c^{-\frac{1}{2}}}{(\nu-1)(1+\frac{t}{2})^{\nu-1}}.
 \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\dot{h}(t) = O(t^{1-\nu}),$$

et on peut donc en conclure qu'il existe  $q_\infty(Y_0, K, F, \varepsilon) \in \mathbb{R}^d$  avec la propriété que

$$q(t) = q_\infty + v(F)t + O(t^{2-\nu}),$$

ce qui montre la seconde partie du théorème.

Dans la partie (i) du théorème,  $\phi_0$  et  $\pi_0$  sont à support compact. Donc  $A_2$  est également à support compact. Dans ce cas, (2.46) devient

$$N(t) \leq \frac{1}{c^3} (\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta)) M(t) + \tilde{N},$$

où  $\tilde{N}$  est une constante qui dépend de tout excepté  $t$ , donnant au lieu de (2.50)

$$|g(t)| \leq |g(0)| e^{(\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta))\frac{t}{c^3}} + \tilde{N} e^{(\tilde{\theta}_F - \tilde{\gamma}(1-\eta))\frac{t}{c^3}}$$

et donc

$$|\dot{h}(t)| \leq (|\dot{h}(0)| + \tilde{N}) e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c^3}(1-\eta)t}.$$

Le comportement annoncé de  $q(t)$  en découle alors.  $\square$

**Preuve du Lemme 2.6 :** Remarquons d'abord que dans le cas considéré ici ( $V = -F \cdot q$ ) le hamiltonien n'est pas borné inférieurement (sauf si  $F = 0$ ),

il n'y a donc pas de raison a priori pour que  $\dot{h}$  soit borné. On commence par contrôler  $\ddot{h}(t)$ . En utilisant (2.22), (2.34) et  $\ddot{h}(t) = \ddot{q}(t)$  on a :

$$|\ddot{h}(t)| \leq |F| + \frac{\tilde{K}}{c^2} + |A_0(t)|.$$

Mais

$$\begin{aligned} |A_0(t)| &= \left| \int \int dx dy \rho_2(y) \nabla \rho_1(x - q(t)) \phi^0(x, y, t) \right| \\ &\leq \|\nabla_y \phi^0(t)\|_2 \times \|\nabla_y^{-1} \rho_2(y) \nabla \rho_1(x - q(t))\|_2 \end{aligned}$$

et en utilisant (2.19) avec l'hypothèse  $H_0(Y_0) \leq Kc^{2-2\varepsilon}$  ainsi que la forme de  $\rho_2$  on a

$$|A_0(t)| \leq Ac^{-\varepsilon}. \quad (2.51)$$

On rappelle alors que  $|F| \leq F_0c^{-2-\varepsilon} \leq F_M(c) = \frac{\tilde{F}_M}{c^2}$ , donc finalement :

$$|\ddot{h}(t)| \leq K_0c^{-\varepsilon}. \quad (2.52)$$

On se tourne maintenant vers la borne sur  $\dot{h}(t)$  qui sera obtenue en (2.57). Pour alléger les notations, on écrira  $\Gamma_F$  au lieu de  $Df_F$ . En multipliant (2.42) par  $e^{-\Gamma_F t}$  et en intégrant entre 0 et  $T$ , on obtient après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \dot{h}(T) &= e^{\Gamma_F T} \dot{h}(0) - \frac{1}{4\pi} \int_0^T dt \int \int \int_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s) \ddot{h}(s) ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x+v|z|) \right] e^{-\Gamma_F(t-T)} \nabla \rho_1(x) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_0^T dt \int \int \int_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-\frac{|z|}{c}}^t \dot{h}(s) ds; \int_{t-|z|}^t \dot{h}(s) ds \right\rangle e^{-\Gamma_F(t-T)} \nabla \rho_1(x) \\ &\quad + \int_0^T dt e^{-\Gamma_F(t-T)} A_2(t). \end{aligned}$$

En définissant  $B(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\dot{h}(s)|$  et en utilisant (2.22) et (2.52), on trouve, pour tout  $t \geq 0$  et pour des constantes  $K_1, K_2 > 0$  :

$$\begin{aligned} |\dot{h}(t)| &\leq |\dot{h}(0)| + \frac{K_1}{c^{4+\varepsilon}} \int_0^t \|e^{-\Gamma_F(s-t)}\| ds + \frac{K_2}{c^4} \int_0^t \|e^{-\Gamma_F(s-t)}\| B^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \|e^{-\Gamma_F(s-t)} A_2(s)\| ds. \end{aligned}$$

Ainsi, avec les notations introduites après le Théorème 2.5 (voir (2.30)-(2.31)),

$$|\dot{h}(t)| \leq |\dot{h}(0)| + \frac{K_1}{c^{4+\varepsilon}} \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} ds + \frac{K_2}{c^4} B^2(t) \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} ds + \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_2(s)| ds.$$

et en conséquence

$$|\dot{h}(t)| \leq |\dot{h}(0)| + \frac{K_1}{\tilde{\gamma}_F c^{1+\varepsilon}} + \frac{K_2}{\tilde{\gamma}_F c} B^2(t) + \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_2(s)| ds.$$

On contrôle maintenant le dernier terme de cette inégalité. Sous les hypothèses de la partie (i) du Théorème 2.4,  $A_0(s)$  est à support compact. Il faut également se rappeler que  $A_2$  ne diffère de  $A_0$  que par des termes à support compact dans la boule de rayon  $\frac{2R_2}{c}$ . De plus, un de ces termes est borné par  $\frac{1}{c^2}$  et l'autre par  $\frac{|\dot{h}(t)|}{c^3}$ . Ainsi, en utilisant (2.51), la dernière intégrale peut être bornée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_2(s)| ds &\leq \int_0^\alpha e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_0(s)| ds + \int_0^{\frac{2R_2}{c}} e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_2(s) - A_0(s)| ds \\ &\leq A c^{-\varepsilon} \int_0^\alpha e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} ds + k(B(t)c^{-3} + c^{-2}) \int_0^{\frac{2R_2}{c}} e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} ds \\ &\leq A' \alpha c^{-\varepsilon} + k' c^{-3} + k' B(t) \alpha c^{-4}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où  $\alpha$  est tel que  $A_0(s) = 0$  pour  $s > \alpha$  (notons que  $\alpha < \sup\{\frac{2R_2}{c}, \frac{R_2}{c} + Rc\}$ ) et pourvu que  $c$  soit assez grand. Et on a donc pour tout  $t \geq 0$

$$|\dot{h}(t)| \leq |\dot{h}(0)| + K_3 c^{1-\varepsilon} + \frac{K_2}{\tilde{\gamma}_F c} B^2(t) + k' B(t) c^{-4}. \quad (2.54)$$

Si nous sommes maintenant sous les hypothèses de la partie (ii), on utilise (2.48) pour contrôler  $\int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_0(s)| ds$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)} |A_0(s)| ds &\leq \frac{A}{c^{\frac{1}{2}}} \int_0^t \frac{e^{\frac{\tilde{\gamma}_F}{c^3}(s-t)}}{(1+s)^\nu} ds \\ &\leq \int_0^t \frac{A}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1+s)^\nu} ds \leq A'' c^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

puisque  $\nu > 2$ . Finalement nous avons à nouveau (2.54) pour tout  $t \geq 0$ .

On conclut maintenant de la façon suivante. Comme  $B(t)$  est croissante, on a, pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,

$$|\dot{h}(t)| \leq |\dot{h}(0)| + K_3 c^{1-\varepsilon} + \frac{K_2}{\tilde{\gamma}_{FC}} B^2(T) + k' B(T) c^{-4}.$$

Donc, en prenant le supremum sur  $t$ , on a l'inégalité suivante pour tout  $T \geq 0$  :

$$B(T) - k' B(T) c^{-4} \leq |\dot{h}(0)| + K_3 c^{1-\varepsilon} + \frac{K_2}{\tilde{\gamma}_{FC}} B^2(T). \quad (2.55)$$

En utilisant les hypothèses sur  $F$  et  $H_0(Y_0)$ , on a  $|\dot{h}(0)| < K c^{1-\varepsilon}$ , donc, pour  $c$  assez grand :

$$B(T) \leq 2(K + K_3) c^{1-\varepsilon} + \frac{2K_2}{\tilde{\gamma}_{FC}} B^2(T). \quad (2.56)$$

Un simple calcul et la continuité de  $B(t)$  nous disent que :

$$B(t) \leq B_- \quad \forall t \geq 0 \quad \text{ou} \quad B(t) \geq B_+ \quad \forall t \geq 0,$$

avec

$$B_{\pm} = \frac{\tilde{\gamma}_{FC}}{4K_2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{16K_2(K + K_3)}{\tilde{\gamma}_{FC} c^{\varepsilon}}} \right).$$

On prend maintenant  $c$  assez grand pour qu'il existe deux constantes  $\beta$  et  $\beta'$  telles que :

$$B_- \leq \beta c^{1-\varepsilon}, \quad B_+ \geq \beta' c > K c^{1-\varepsilon}.$$

Notons maintenant que

$$B(0) = |\dot{h}(0)| \leq K c^{1-\varepsilon} < B_+,$$

et donc on a finalement la borne suivante sur  $\dot{h}(t)$  :

$$|\dot{h}(t)| \leq B(t) \leq B_- \leq \beta c^{1-\varepsilon} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.57)$$

□

## 2.4 Le cas confinant

On s'intéresse maintenant au cas d'un potentiel confinant. On supposera dans cette section que  $V$  satisfait l'hypothèse (C) et que  $\sigma_2$  vérifie la condition

(W). On définit alors  $\rho_2$  comme dans (2.22). Soit  $S = \{q^* \in \mathbb{R}^d \mid \nabla V(q^*) = 0\}$  l'ensemble des points critiques de  $V$ , on suppose que  $S$  est discret. Pour tout  $q \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\phi_q$  l'unique solution de  $-\Delta_y \phi(x, y) = -\rho_1(x - q)\rho_2(y)$  qui tende vers zéro à l'infini. On voit ainsi que  $\{(\phi_q, q, 0, 0) \mid q \in S\}$  est l'ensemble des points d'équilibre pour la dynamique.

**Théorème 2.7.** *On suppose que  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(C)$  et  $(W)$  sont vérifiées et que  $n = 3$ . On note  $Y(t) = (\phi(t), q(t), \pi(t), p(t))$  la solution de (1.41) – (1.42). Pour tout  $Y_0 \in \mathcal{D}$ , il existe  $q^* \in S$  tel que :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q^* \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{q}(t) = 0. \quad (2.58)$$

*Si de plus,  $q^*$  est un minimum non-dégénéré de  $V$ , alors pour tout  $\eta > 0$  il existe  $c_0 > 0$  tel que pour tout  $c > c_0$  et pour tous  $\phi_0$  et  $\pi_0$  à support compact, on a pour tout  $t > 0$*

$$|q(t) - q^*| \leq K e^{-\frac{(1-\eta)\tilde{\gamma}}{2c^3}t}. \quad (2.59)$$

*On a également un résultat similaire pour  $\dot{q}(t)$ .*

On pourrait également, comme dans [KKS1], étudier la convergence de  $\phi(t)$  vers  $\phi_{q^*}$ , cependant nous ne le ferons pas ici. Il faut remarquer que la première partie du théorème ne nécessite pas de prendre  $c$  grand. En fait, en utilisant la méthode de linéarisation de [KKS1], on pourrait montrer que la convergence reste exponentielle pour toute valeur de  $c$ . Cependant, cette méthode ne fournit pas une expression très explicite du taux de convergence. Notre méthode montre ici que celui-ci est égal à  $\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}$ , confirmant que les solutions de ce modèle se comportent comme celles de l'équation phénoménologique (1.4).

**Preuve :** Afin de montrer (2.58), *i.e.* la convergence de  $q(t)$  et  $\dot{q}(t)$ , on suit la méthode de [KKS1]. Le taux exponentiel (2.59) sera alors obtenu par les mêmes techniques que dans le cas  $V(q) = -F \cdot q$ .

En utilisant la conservation de l'énergie et l'hypothèse sur  $V$ , on peut immédiatement en conclure que  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  sont  $\ddot{q}(t)$  bornés. Soit  $B_R \subset \mathbb{R}^3$  la boule de rayon  $R$  centrée en 0. On définit :

$$\begin{aligned} E_R(t) = & \frac{p^2(t)}{2} + V(q(t)) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{B_R} dy (|\nabla_y \phi(x, y, t)|^2 + |\pi(x, y, t)|^2) \\ & + \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dy \rho_1(x - q(t)) \rho_2(y) \phi(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.60)$$

On prend  $R \geq \frac{R_2}{c}$ . En utilisant (2.18), on peut écrire  $\phi$  comme  $\phi^r + \phi^0$  et de façon similaire,  $\pi = \pi^r + \pi^0$  où  $\pi^r(x, y, t) = \dot{\phi}^r(x, y, t)$  et  $\pi^0(x, y, t) =$

$\phi^0(x, y, t)$ . En utilisant cette décomposition ainsi que la régularité de  $\phi_0$  et  $\pi_0$ , on voit que  $\phi(x, y, t)$  et  $\pi(x, y, t)$  sont différentiables. On notera  $n(y) = \frac{y}{|y|}$  et  $d\sigma$  l'élément de surface de  $\partial B_R$ . En dérivant alors (2.60), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_R(t) &= \frac{d}{dt}\left(H(Y(t)) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{|y|>R} dy (|\nabla_y \phi(x, y, t)|^2 + |\pi(x, y, t)|^2)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) n(y) \cdot \nabla_y \phi(x, y, t) \pi(x, y, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) n(y) \cdot (\nabla_y \phi^r(x, y, t) \pi^r(x, y, t) + \nabla_y \phi^0(x, y, t) \\ &\quad \times \pi^0(x, y, t) + \nabla_y \phi^0(x, y, t) \pi^r(x, y, t) + \nabla_y \phi^0(x, y, t) \pi^0(x, y, t)). \end{aligned}$$

On borne les trois derniers termes grâce à l'inégalité de Young, et on intègre ensuite en  $t$ . Ainsi, pour tout  $T > \frac{R_2}{c}$ ,

$$\begin{aligned} &E_R(T + R) - E_R\left(R + \frac{R_2}{c}\right) \\ &\leq \int_{R + \frac{R_2}{c}}^{T+R} dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) \left( n(y) \cdot \nabla_y \phi^r(x, y, t) \pi^r(x, y, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (|\nabla_y \phi^r(x, y, t)|^2 + |\pi^r(x, y, t)|^2) + 2(|\nabla_y \phi^0(x, y, t)|^2 + |\pi^0(x, y, t)|^2) \right). \end{aligned}$$

On sait que  $E_R\left(R + \frac{R_2}{c}\right) \leq H\left(Y\left(R + \frac{R_2}{c}\right)\right) = H(Y_0)$ , et l'hypothèse sur le potentiel et (2.21) nous donnent alors

$$\begin{aligned} E_R(t) &\geq H(Y(t)) - \frac{1}{2} (\|\pi(t)\|_2^2 + \|\phi(t)\|^2) \\ &\geq -H(Y_0) + 2V_0 + 2\langle \rho_1 \rho_2; \rho_1 \Delta^{-1} \rho_2 \rangle, \end{aligned}$$

où  $V_0$  est le minimum de  $V$ . On a donc

$$E_R(T + R) - E_R\left(R + \frac{R_2}{c}\right) \geq -C,$$

où  $C$  est une constante ne dépendant pas de  $R, T$ . Donc,

$$\begin{aligned} &-\int_{R + \frac{R_2}{c}}^{T+R} dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) \left( n(y) \cdot \nabla_y \phi^r(x, y, t) \pi^r(x, y, t) + \frac{1}{4} (|\nabla_y \phi^r|^2 + |\pi^r|^2) \right) \\ &\leq C + 2 \int_{R + \frac{R_2}{c}}^{T+R} dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) (|\nabla_y \phi^0(x, y, t)|^2 + |\pi^0(x, y, t)|^2). \quad (2.61) \end{aligned}$$

Nous avons d'abord besoin de borner le membre de droite. Cela provient du Lemme 3.3 de [KKS1] et du fait que  $\kappa \in L^2$  (rappelons que  $\kappa$  est définie dans la Définition 2.3) :

$$\int_{R+\frac{R_2}{c}}^{T+R} dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) (|\nabla_y \phi^0(x, y, t)|^2 + |\pi^0(x, y, t)|^2) \leq I_0$$

uniformément en  $R$  et  $T$ .

Ensuite, en utilisant (2.32), on a

$$\phi^r(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y-z| \leq t} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \rho_1(x - q(t - |y-z|)).$$

Si  $|y| = R$ , comme  $\rho_2(z) = 0$  pour  $|z| \geq \frac{R_2}{c}$ , on a pour  $t > R + \frac{R_2}{c}$

$$\phi^r(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|z| < \frac{R_2}{c}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \rho_1(x - q(t - |y-z|c)).$$

En conséquence, toujours pour  $|y| = R$  et  $t > R + \frac{R_2}{c}$

$$\pi^r(x, y, t) = \dot{\phi}^r(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|z| < \frac{R_2}{c}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t - |y-z|)) \quad (2.62)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_y \phi^r(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|z| < \frac{R_2}{c}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t - |y-z|)) n(y) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{|z| < \frac{R_2}{c}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|^2} \rho_1(x - q(t - |y-z|)) n(y-z) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{|z| < \frac{R_2}{c}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t - |y-z|)) \\ &\quad \quad \quad \times (n(y-z) - n(y)). \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sont bornées par  $KR^{-2}$  car  $\dot{q}$  est borné. Donc

$$\nabla_y \phi^r(x, y, t) = -\pi^r(x, y, t)n(y) + \mathcal{O}(|y|^{-2}).$$

Comme on sait que  $q(t)$  est borné par une certaine constante  $Q_0$ , pour  $|x| > Q_0 + R_1 = \tilde{R}_1$  on a  $\phi^r(x, y, t) = \pi^r(x, y, t) = 0$ . Donc (2.61) devient

$$\int_{R+\frac{R_2}{c}}^{T+R} dt \int_{|x| < Q_0+R_1} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) |\pi^r(x, y, t)|^2 \leq K + T\mathcal{O}(R^{-2}), \quad (2.63)$$

et, en utilisant à nouveau (2.62), on a

$$\int_{R+\frac{R_2}{c}}^{T+\frac{R}{c}} dt \int_{B_{\bar{R}_1}} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t - |y-z|c)) \right|^2 \leq K + T\mathcal{O}(R^{-2}).$$

Or  $|y-z| \sim R$  et  $t + R - |y-z| = t + n(y) \cdot z + \mathcal{O}(R^{-1})$ , donc

$$\int_{\frac{R_2}{c}}^T dt \int_{B_{\bar{R}_1}} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \frac{\rho_2(z)}{|y-z|} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t + n(y) \cdot z + \mathcal{O}(R^{-1}))) \right|^2 \leq K + T\mathcal{O}(R^{-2}).$$

Après avoir effectué le changement de variable  $y = R\sigma$ , on prend maintenant la limite  $R \rightarrow +\infty$  et donc

$$\int_{\frac{R_2}{c}}^T dt \int_{B_{\bar{R}_1}} dx \int_{S^2} d\sigma \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \rho_2(z) \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x - q(t + \sigma \cdot z)) \right|^2 \leq K.$$

Cette borne est satisfaite pour tout  $T$  et donc

$$\int_0^{+\infty} dt \left[ \int_{B_{\bar{R}_1}} dx \int_{S^2} d\sigma \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \rho_2(z) \nabla \rho_1(x - q(t + \sigma \cdot z)) \cdot \dot{q}(t + \sigma \cdot z) \right|^2 \right] < +\infty. \quad (2.64)$$

On définit la fonction

$$I(x, \sigma, t) = \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \rho_2(z) \nabla \rho_1(x - q(t + \sigma \cdot z)) \cdot \dot{q}(t + \sigma \cdot z) \right|^2$$

qui est différentiable en  $x$ ,  $\sigma$  et uniformément lipschitzienne en  $t$  puisque  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  sont bornés. On a alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(x, \sigma, t) = 0 \quad (2.65)$$

uniformément en  $x \in B_{\bar{R}_1}$  et  $\sigma \in S^2$ . On fixe  $\sigma$  et  $x$ . On prend une base de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\sigma = e_1$ , et on définit

$$\bar{\rho}_2(z_1) = \int dz_2 dz_3 \rho_2(z_1, z_2, z_3)$$

et  $s = \sigma \cdot z$ . On a alors

$$\begin{aligned} I(x, \sigma, t) &= \left| \int ds \bar{\rho}_2(s) \nabla \rho_1(x - q(t + s)) \cdot \dot{q}(t + s) \right|^2 \\ &= \left| \int ds \bar{\rho}_2(t - s) \nabla \rho_1(x - q(s)) \cdot \dot{q}(s) \right|^2 \\ &= |\bar{\rho}_2 \star (\nabla \rho_1(x - q) \cdot \dot{q})(t)|^2. \end{aligned}$$

Donc (2.65) entraîne que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\rho}_2 \star (\nabla \rho_1(x - q) \cdot \dot{q})(t) = 0.$$

L'hypothèse (W) et l'extension de Pitt du théorème Taubérien de Wiener [Ru] implique que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla \rho_1(x - q(t)) \cdot \dot{q}(t) = 0$$

uniformément en  $x$ . On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B_{\tilde{R}_1}} \nabla \rho_1(x - q(t)) \cdot \dot{q}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \nabla \rho_1(x - q(t)) \cdot \dot{q}(t), \end{aligned}$$

car  $\nabla \rho_1(x - q(t)) = 0$  si  $|x| > \tilde{R}_1$ . D'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla \rho_1(x) \cdot \dot{q}(t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

ce qui prouve que  $\dot{q}(t)$  tend vers zéro (on peut prendre  $x = re_i$  où  $r$  est tel que  $\rho_1'(re_i) \neq 0$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  est n'importe quelle base orthonormée). Il reste à montrer que  $q(t)$  converge vers un certain  $q^*$  vérifiant  $\nabla V(q^*) = 0$ . Rappelons que  $\phi_q$  est la solution stationnaire de (1.41) correspondant à  $q(t) = q$ . Soit  $\mathcal{A} = \{Y_q = (\phi_q, q, 0, 0) \mid q \in \mathbb{R}^d, |q| \leq Q_0\}$ .  $\mathcal{A}$  est compact dans  $\mathcal{E}$ . Finalement, on note  $\|\cdot\|_R$  la norme  $L^2$  restreinte à la boule de rayon  $R$  et  $|Y|_{\mathcal{E}, R}^2 = \|\nabla_y \phi\|_R^2 + |q|^2 + \|\pi\|_R^2 + |p|^2$ . On montre d'abord que

$$\begin{aligned} &\inf_{Y_q \in \mathcal{A}} |Y(t) - Y_q|_{\mathcal{E}, R}^2 \tag{2.66} \\ &= |p(t)|^2 + \|\pi(t)\|_R^2 + \inf_{|q| \leq Q_0} (\|\nabla_y(\phi(t) - \phi_q)\|_R^2 + |q(t) - q|^2) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

On sait que  $|p(t)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Donc (2.62) entraîne que  $\|\pi^r(t)\|_R \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . La borne sur  $\|\pi^0(t)\|_R$  (voir le Lemme 3.3 de [KKS1]) montre alors que le même résultat est valable pour  $\|\pi(t)\|_R$ . Pour estimer

l'infimum sur  $q$  dans (2.66), on prend  $q(t)$  pour  $q$ . Le dernier terme s'annule alors et on doit contrôler

$$\nabla_y(\phi^r(x, y, t) - \phi_{q(t)}(x, y)) = \nabla_y \left[ \frac{-1}{4\pi} \int dz \frac{\rho_2(y-z)}{|z|} \left( \rho_1(x - q(t - |z|)) - \rho_1(x - q(t)) \right) \right]$$

pour  $|y| \leq R$ , le terme avec  $\nabla_y \phi^0$  étant à nouveau contrôlé en utilisant le Lemme 3.3 de [KKS1]. La différence  $\rho_1(x - q(t - |z|)) - \rho_1(x - q(t))$  peut s'écrire en utilisant une intégrale ne dépendant que de  $\dot{q}(s)$  pour  $s \in [t - (R + \frac{R_2}{c}), t]$  ce qui tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini, et ce uniformément en  $(x, y) \in B_R$ . Tout cela prouve (2.66).

Etant donnée une solution  $Y(t)$  de (2.8), on appelle  $\mathcal{B}$  l'ensemble de tous les  $\bar{Y} \in \mathcal{E}$  tels qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  avec  $Y(t_n) \rightarrow \bar{Y}$  dans la semi-norme  $|\cdot|_{\mathcal{E}, R}$  pour tout  $R$ . La continuité de  $W^t$  nous dit que  $\mathcal{B}$  est un ensemble invariant. De plus, (2.66) entraîne que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ . Donc, pour tout  $\bar{Y} \in \mathcal{B}$ , il existe une courbe  $t \rightarrow \tilde{q}(t) \in \mathbb{R}^d$  de classe  $C^2$  telle que  $W^t \bar{Y} = Y_{\tilde{q}(t)}$ . Or  $W^t \bar{Y}$  est solution de (2.8) donc on doit avoir  $\dot{\tilde{q}}(t) = 0$ , et donc  $\tilde{q}(t) = q^*$  avec  $\nabla V(q^*) = 0$  et  $q^* \in S$ . Ainsi,  $\bar{Y} = Y_{q^*}$  et  $\mathcal{B} \subset \{Y_q, q \in S\}$ .

On montre maintenant que  $q(t) \rightarrow q^*$ . Supposons qu'il existe  $R_0, \epsilon > 0$  et une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tels que

$$\inf_{q \in S} |Y(t_n) - Y_q|_{\mathcal{E}, R_0} \geq \epsilon. \quad (2.67)$$

Or (2.66) et la compacité de  $\mathcal{A}$  impliquent qu'il existe  $\bar{Y} \in \mathcal{A}$  et une sous-suite  $t'_n$  tels que  $Y(t'_n) \rightarrow \bar{Y}$  dans la norme  $|\cdot|_{\mathcal{E}, R}$  pour tout  $R$ , où  $\bar{Y} \in \mathcal{A}$ . Alors, par définition,  $\bar{Y} \in \mathcal{B}$ . Mais (2.67) est alors une contradiction avec le fait que  $\mathcal{B} \subset \{Y_q, q \in S\}$ . Donc

$$\inf_{q \in S} |q(t) - q| \rightarrow 0$$

et comme  $S$  est discret, il existe  $q^* \in S$  tel que  $q(t) \rightarrow q^*$ . On a donc prouvé (2.58).

Pour montrer (2.59), on suppose maintenant que  $q^*$  est un minimum non-dégénéré de  $V$ . A cause de l'invariance par translation du terme d'interaction, on peut supposer que  $q^* = 0$ .

Maintenant, le calcul amenant à (2.42) dans le cas particulier  $v = 0$ , et

donc  $h(t) = q(t)$ , donne :

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}(t) = & -\nabla V(q(t)) - \frac{\tilde{\gamma}}{c^3} \dot{q}(t) - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\
 & \times \left[ \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s) \ddot{q}(s) ds \right) \cdot \nabla \rho_1(x) \right] \nabla \rho_1(x) \\
 & - \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \\
 & \times \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|}) \int_{t-|z|}^t \dot{q}(s) ds; \int_{t-|z|}^t \dot{q}(s) ds \right\rangle \nabla \rho_1(x) \\
 & + A_2(t). \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

De plus,  $\nabla V(q(t)) = W \cdot q(t) + r(q(t))$  où  $W$  est la matrice hessienne de  $V$  en  $q = 0$  et  $r(q) = o(|q|)$ . Remarquons que  $A_2(t)$  est à support compact. On définit maintenant  $Q(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$  et  $\tilde{W}$  la matrice  $2d \times 2d$  :

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} O & I \\ -W & -\frac{\tilde{\gamma}}{c^3} I \end{pmatrix}.$$

Comme 0 est un minimum non-dégénéré de  $V$ ,  $W$  est une matrice définie positive diagonalisable. Il faut remarquer que  $\tilde{W}$  est également diagonalisable avec valeurs propres  $\lambda_k = -\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3} + i\alpha_k$ , et donc, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\|e^{\tilde{W}t}\| = e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}t}$ . On réécrit (2.68) comme

$$\dot{Q}(t) = \tilde{W}Q(t) + \psi(t, Q, \dot{Q}),$$

où  $\psi$  est une fonction que l'on contrôlera en termes de  $|\ddot{q}(t)|$ ,  $|\dot{q}(t)|$  et  $|q(t)|$ . En définissant  $X(t) = e^{-\tilde{W}t}Q(t)$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{X}(t) = & e^{-\tilde{W}t} \psi \left( t, e^{\tilde{W}t} X(t), \tilde{W} e^{\tilde{W}t} X(t) + e^{\tilde{W}t} \dot{X}(t) \right) \\
 |\dot{X}(t)| \leq & \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \left( \int_{t-|z|}^t (t-|z|-s) \right. \\
 & \times e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}(t-s)} (|\tilde{W}X(s)| + |\dot{X}(s)|) ds \Big) |\nabla \rho_1(x)|^2 \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint_{|z| \leq t} dx dy dz \frac{\rho_2(y-z)\rho_2(y)}{|z|} \times \frac{1}{2} |\text{Hess} \rho_1(\tilde{x}_{t,|z|})| \\
 & \times \left( \int_{t-|z|}^t e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}(t-s)} |X(s)| ds \right) \left( \int_{t-|z|}^t |Q(s)| ds \right) |\nabla \rho_1(x)| \\
 & + e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}t} |\tilde{A}(t)| + e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}t} |r(q(t))|. \tag{2.69}
 \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $r(q) = o(|q|)$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $|q| < \delta$ ,  $|r(q)| < \varepsilon|q| < \varepsilon|Q|$ . On pose  $\eta = \min(\delta, \varepsilon)$ . De plus, on sait déjà que  $Q(t) \rightarrow 0$ , donc il existe  $T$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $|Q(t)| \leq \eta$ . En utilisant le fait que l'évolution de la solution  $Y(t)$  de (2.8) est donnée par un groupe linéaire continu et que  $Y(t)$  satisfait aux mêmes conditions que  $Y_0$ , on peut supposer  $T = 0$ . On a donc

$$\forall t \geq 0, |Q(t)| < \eta < \varepsilon \quad \text{et} \quad |r(q)| < \varepsilon|Q|. \quad (2.70)$$

Comme dans la Section 2.3, on définit

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)| \quad \text{et} \quad N(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\dot{X}(s)|.$$

En se rappelant une fois de plus que  $\rho_2$  ne dépend de  $c$  que via (2.22) et en utilisant (2.69) et (2.70), on a pour tout  $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} |\dot{X}(s)| &\leq \frac{K_1}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} \|\tilde{W}\| M(t) + \frac{\varepsilon K_2}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} M(t) + \frac{K_1}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} N(t) \\ &\quad + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\varepsilon e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3} \tau} |Q(\tau)|) + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3} \tau} |\tilde{A}(\tau)|). \end{aligned}$$

Remarquons que  $e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3} s} |Q(s)| = |e^{-\tilde{W}s} Q(s)| = |X(s)|$  et  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} (e^{\frac{\tilde{\gamma}}{2c^3} \tau} |\tilde{A}(\tau)|) \leq K_3$ , donc en prenant le supremum sur tout  $s \in [0, t]$  dans le membre de gauche, on a

$$N(t) \leq \left( \frac{K_1}{c^4} \|\tilde{W}\| e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} + \frac{\varepsilon K_2}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} + \varepsilon \right) M(t) + \frac{K_1}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} N(t) + K_3$$

et donc

$$\left( 1 - \frac{K_1}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} \right) N(t) \leq \left( \frac{K_1}{c^4} \|\tilde{W}\| e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} + \frac{\varepsilon K_2}{c^4} e^{\frac{\tilde{\gamma} R_2}{c^4}} + \varepsilon \right) M(t) + K_3.$$

On appelle  $(k'_c)^{-1}$  le facteur devant  $N(t)$ . On peut choisir  $\varepsilon$  aussi petit que l'on veut, donc le facteur devant  $M(t)$  peut être borné par  $\frac{K'_c}{c^4}$ . Le même calcul que dans la dernière partie de la preuve du Théorème 2.4 donne alors

$$M(t) \leq \left( M(0) + \frac{K_3 c^4}{K'_c} \right) e^{\frac{k_c K'_c}{c^4} t}$$

et finalement on a

$$|Q(t)| \leq \left( M(0) + \frac{K_3 c^4}{K'_c} \right) e^{(\frac{k_c K'_c}{c^4} - \frac{\tilde{\gamma}}{2c^3}) t}$$

ce qui est le résultat annoncé.  $\square$

**Preuve du Théorème 2.5 :** Dans une première partie, nous suivrons la preuve du Théorème 2.7 afin de montrer que  $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ . La seule chose à laquelle nous devons faire attention dans ce cas est que, contrairement au cas du Théorème 2.7,  $q(t)$  n'est pas borné a priori. Cependant,  $\dot{q}(t)$  est borné car  $V \equiv 0$ . Afin d'obtenir le taux de convergence exponentiel, nous effectuerons ensuite les mêmes calculs que dans la preuve du Théorème 2.4, excepté que nous n'utiliserons pas le Lemme 2.6 mais le fait que nous saurons déjà que  $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ .

On commence par prouver que  $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ . Nous suivons le calcul de la preuve du Théorème 2.7. Comme  $\dot{q}(t)$  est borné, si  $t$  appartient à  $[R + \frac{R_2}{c}; R + T]$ , si  $|y| = R$  et  $|z| \leq \frac{R_2}{c}$ , on a

$$|q(t - |y - z|)| \leq C(T + \frac{R_2}{c})$$

pour une certaine constante  $C > 0$ . Avec cette estimation, (2.63) devient clairement

$$\int_{R + \frac{R_2}{c}}^{R+T} dt \int_{|x| < C(T + \frac{R_2}{c}) + R_1} dx \int_{\partial B_R} d\sigma(y) |\pi^r(x, y, t)|^2 \leq K + T^{d+1} \mathcal{O}(R^{-2}).$$

Ainsi, (2.64) devient

$$\int_0^{+\infty} dt \left[ \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{S^2} d\sigma \left| \int_{B_{\frac{R_2}{c}}} dz \rho_2(z) \nabla \rho_1(x - q(t + \sigma \cdot z)) \cdot \dot{q}(t + \sigma \cdot z) \right|^2 \right] < +\infty$$

et la fin de la preuve suit de manière identique.

Maintenant que nous savons que  $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ , on peut contrôler  $|q(t) - q_\infty|$  exactement de la même façon que dans la preuve du Théorème 2.4, mais au lieu d'utiliser le Lemme 2.6, on remarque qu'il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $|\dot{q}(t)| < 1$ . En utilisant le fait que l'évolution de la solution  $Y(t)$  de (2.8) est donnée par un groupe linéaire continu et que  $Y(T)$  vérifie les mêmes conditions que  $Y_0$ , on peut supposer  $T = 0$ . Donc, avec les notations de la Section 2.3 on a, au lieu de (2.46),

$$N(t) \leq \eta \frac{\tilde{\gamma}}{c^3} M(t) + k_c \sup_{0 \leq s \leq t} (e^{\frac{\tilde{\gamma}}{c^3} s} |A_2(s)|).$$

La fin de la preuve est alors similaire.  $\square$

# Chapitre 3

## Le modèle quantique

En mécanique quantique, l'étude de la dynamique se fait via l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t\psi_t = H\psi_t, \quad (3.1)$$

où  $\psi_t \in \mathcal{H}$  représente l'état du système à l'instant  $t$  et  $H$  est un opérateur (appelé également hamiltonien) sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si on considère simplement une particule se déplaçant dans  $\mathbb{R}^d$  et soumise à un potentiel  $V$ , l'espace de Hilbert est alors  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $H = -\Delta + V(q)$  où  $\Delta$  est le laplacien et  $V(q)$  l'opérateur de multiplication par la fonction  $V$ . La fonction  $|\psi_t|^2(x)$  représente alors la densité de probabilité de trouver la particule au point  $x$  à l'instant  $t$ .

Cependant pour décrire le modèle présenté ici, à savoir une particule couplée avec un champ scalaire, l'espace de Hilbert et le hamiltonien sont des objets moins usuels. On introduira donc d'abord (Section 3.1) quelques outils théoriques permettant de décrire le modèle (Section 3.2) que l'on étudiera dans les sections suivantes.

### 3.1 Espaces de Fock, opérateurs de création et d'annihilation

Dans cette section, nous présentons de manière assez générale (et très sommaire) les différents objets nécessaires à la description de la version quantique du modèle. Cela nous permettra également de fixer quelques notations. On pourra trouver une présentation plus détaillée de ces différents objets dans [DG]-[RS2].

Soit  $\mathfrak{h}$  un espace de Hilbert complexe, que l'on appellera l'espace à une (quasi-)particule. Soient  $f, g$  deux éléments de  $\mathfrak{h}$ , on note  $\langle f; g \rangle$  leur produit

scalaire. Par convention, le produit est choisi linéaire à droite et anti-linéaire à gauche (*i.e.*  $\langle f; \lambda g \rangle = \lambda \langle f; g \rangle = \langle \bar{\lambda} f; g \rangle$ ). On définit l'espace à  $m$  (quasi-) particules,  $m \in \mathbb{N}$ , comme le produit tensoriel symétrisé  $m$  fois de  $\mathfrak{h}$  :

$$\mathfrak{h}_m = \otimes_s^m \mathfrak{h}, \quad (3.2)$$

avec, si  $m = 0$ ,  $\otimes_s^0 \mathfrak{h} = \mathbb{C}$ . On notera  $S_m$  la projection orthogonale de  $\otimes^m \mathfrak{h}$  sur  $\mathfrak{h}_m$ . On définit alors l'espace de Fock sur  $\mathfrak{h}$  comme étant la somme directe

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathfrak{h}_m, \quad (3.3)$$

et  $\mathcal{F}_{fin}(\mathfrak{h})$  l'espace à nombre fini de particules :

$$\mathcal{F}_{fin}(\mathfrak{h}) := \{f = (f^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \in \Gamma(\mathfrak{h}) \mid f^{(m)} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } m\}. \quad (3.4)$$

Sur cet espace on définit deux familles d'opérateurs qui jouent un rôle primordial : les opérateurs de création et d'annihilation ([RS2], Chapitre X.7). Soit  $h \in \mathfrak{h}$ , on définit l'opérateur de création  $a^*(h)$  par :

$$a^*(h) : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathfrak{h}) & \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \\ g & \rightarrow \sqrt{m+1} S_{m+1}(h \otimes g), \quad \text{si } g \in \mathfrak{h}_m, \end{cases} \quad (3.5)$$

et l'opérateur d'annihilation  $a(h)$  adjoint de  $a^*(h)$ . Les deux opérateurs  $a$  et  $a^*$  sont définis sur  $\mathcal{F}_{fin}(\mathfrak{h})$  et peuvent être étendus en des opérateurs fermés sur un domaine dense de  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ . Ils satisfont aux relations de commutation canoniques :

$$\begin{aligned} [a(h_1), a^*(h_2)] &= \langle h_1; h_2 \rangle id, \\ [a(h_1), a(h_2)] &= [a^*(h_1), a^*(h_2)] = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où, si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs,  $[A, B] := AB - BA$ .

Dans le cas où  $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$  (ce qui sera le cas pour notre modèle avec  $\nu = d + n$ ), un élément  $g$  de  $\mathfrak{h}_m$  est alors une fonction  $g(k_1, \dots, k_m) \in L^2((\mathbb{R}^\nu)^m)$  symétrique en ses variables, *i.e.*  $g(k_1, \dots, k_m) = g(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(m)})$  pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . On peut alors écrire les opérateurs de création et d'annihilation formellement de la façon suivante :

$$a^*(h) = \int_{\mathbb{R}^\nu} dk h(k) a^*(k), \quad a(h) = \int_{\mathbb{R}^\nu} dk \bar{h}(k) a(k),$$

où

$$(a^*(k)g)^{(m)}(k_1, \dots, k_m) := \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \delta(k - k_j) g^{(m-1)}(k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m),$$

et

$$(a(k)g)^{(m)}(k_1, \dots, k_m) := \sqrt{m+1}g^{(m+1)}(k, k_1, \dots, k_m).$$

Par abus de langage, on appellera également  $a(k)$  et  $a^*(k)$  opérateurs d'annihilation et de création. Les relations de commutation canoniques deviennent :

$$\begin{aligned} [a(k), a^*(k')] &= \delta(k - k'), \\ [a(k), a(k')] &= [a^*(k), a^*(k')] = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Enfin, étant donné un opérateur  $b$  agissant sur  $\mathfrak{h}$ , on définit les opérateurs :

$$\begin{aligned} d\Gamma(b) &: \Gamma(\mathfrak{h}) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{h}) \\ d\Gamma(b)|_{\mathfrak{h}_m} &:= \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{j-1} \otimes b \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{m-j}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma(b) &: \Gamma(\mathfrak{h}) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{h}) \\ \Gamma(b)|_{\mathfrak{h}_m} &:= \underbrace{b \otimes \dots \otimes b}_m. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour l'opérateur  $d\Gamma$ , on parle de seconde quantification de l'opérateur  $b$ . Lorsque  $b$  est un opérateur auto-adjoint,  $\Gamma(b)$  et  $d\Gamma(b)$  sont liés par la relation

$$e^{id\Gamma(b)} = \Gamma(e^{ib}).$$

Un opérateur que l'on rencontrera fréquemment est  $d\Gamma(\mathbb{1})$ . On le notera simplement  $N$ . C'est ce qu'on appelle l'opérateur de nombre.

## 3.2 Ecriture du modèle quantique

On peut maintenant décrire notre modèle dans sa version quantique. On ne considèrera ici que le cas où le potentiel extérieur  $V$  est confinant. Il nous faut donc donner d'une part l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur lequel on travaillera, et d'autre part le hamiltonien  $H$  du système. Le modèle est composé d'une particule et d'un champ. La partie qui concerne la particule est bien connue et ne pose pas de problème particulier. En ce qui concerne la partie champ, on entre dans le domaine de la *théorie quantique des champs*, dont les objets sont peut-être moins familiers. C'est pourquoi nous insisterons plus là-dessus dans cette section sans pour autant rentrer dans les détails [MaS].

L'espace de Hilbert se "divise" en deux parties. La première, concernant l'état de la particule, est comme nous l'avons dit plus haut :  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . La

seconde partie décrit l'état du champ. On considère pour cela l'espace de Fock défini sur  $L^2(\mathbb{R}^{d+n})$ . On notera simplement

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^{d+n}, dx dk)). \quad (3.10)$$

Un élément de  $\mathcal{F}$  est donc une suite  $\psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots)$  où pour chaque  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|\psi^{(m)}|^2(x_1, k_1, \dots, x_m, k_m)$  est la probabilité d'avoir  $m$  quasi-particules, une d'impulsion  $k_1$  "dans la membrane" située en  $x_1$ , etc... L'espace de Hilbert du système couplé s'écrit alors

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}. \quad (3.11)$$

On définit maintenant le hamiltonien du système. Celui-ci va, comme dans le cas classique, se décomposer en trois parties : la première correspondant à la particule, la deuxième au champ libre, et enfin un terme d'interaction. Le hamiltonien de la particule agit sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et s'écrit

$$H_p := -\Delta + V(q). \quad (3.12)$$

Le hamiltonien du champ libre est défini à partir de l'opérateur  $d\Gamma$ . Soit

$$\omega : (x, k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \omega(x, k) = |k| \in [0; +\infty[, \quad (3.13)$$

on définit sur  $\mathcal{F}$  :

$$H_f := d\Gamma(\omega), \quad (3.14)$$

où on considère  $\omega$  comme l'opérateur de multiplication par la fonction  $\omega(x, k)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^{d+n})$ . Comme  $\omega$  ne dépend que de  $k$ , on écrira simplement  $\omega(k)$  au lieu de  $\omega(x, k)$ . On peut ainsi écrire  $H_f$  sous une forme plus explicite :

$$H_f = \int_{\mathbb{R}^{d+n}} dx dk \omega(k) a^*(x, k) a(x, k). \quad (3.15)$$

Le hamiltonien du système libre (*i.e.* sans interaction) est alors :

$$H_0 := H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f. \quad (3.16)$$

Il n'est évidemment pas possible, à partir de ce qui précède, de déceler un lien quelconque entre les hamiltoniens classique et quantique. Afin de mieux cerner ce lien, on introduit deux nouveaux opérateurs : les opérateurs du champ et du champ conjugué. On définit

$$\phi(x, k) := \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (a^*(x, k) + a(x, k)),$$

et

$$\pi(x, k) := i\sqrt{\frac{\omega(k)}{2}}(a^*(x, k) - a(x, k)).$$

Les relations de commutation deviennent pour ces opérateurs :

$$\begin{aligned} [\phi(x, k), \pi(x', k')] &= i\delta(x - x')\delta(k - k'), \\ [\phi(x, k), \phi(x', k')] &= [\pi(x, k), \pi(x', k')] = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ces relations sont l'analogie quantique des relations (2.11). On peut également remarquer que

$$\frac{1}{2}(\omega(k)^2\phi(x, k)^2 + \pi(x, k)^2) = \frac{\omega(k)}{2}(a(x, k)a^*(x, k) + a^*(x, k)a(x, k)).$$

Ainsi, en utilisant les relations de commutation (3.7), et modulo un terme constant "infini", on peut réécrire  $H_f$  sous la forme

$$H_f = \frac{1}{2} \int dx dk (\omega(k)^2\phi(x, k)^2 + \pi(x, k)^2),$$

où on reconnaît la partie du champ libre du hamiltonien (1.33) écrit dans les variables  $(x, k)$  ( $k$  étant la variable conjuguée à  $y$ ). Les calculs précédents ne prétendent bien évidemment pas à la rigueur, mais ils permettent d'établir le lien entre les formulations classique et quantique du modèle.

On devine maintenant aisément quelle est la forme du terme d'interaction. On appelle  $Q$  l'opérateur de multiplication par  $q$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , i.e. si  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $(Q\psi)(q) := q\psi(q)$ . On considère les mêmes fonctions de couplage  $\rho_1$  et  $\rho_2$  que dans le cadre classique. Le terme d'interaction s'écrit :

$$H_I := \int dx dk \rho_1(x - Q)\hat{\rho}_2(k) \otimes \phi(x, k). \quad (3.18)$$

Si, pour tout  $(x, k) \in \mathbb{R}^{d+n}$ , on définit l'opérateur

$$\lambda(x, k) := \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\hat{\rho}_2(k)\rho_1(x - Q), \quad (3.19)$$

on peut réécrire  $H_I$ , en utilisant les opérateurs de création et d'annihilation, sous une forme plus maniable :

$$H_I = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \lambda(x, k) \otimes a^*(x, k) + \lambda(x, k)^* \otimes a(x, k).$$

Finalement, le hamiltonien du système couplé est

$$H := H_0 + H_I. \quad (3.20)$$

Cette définition peut a priori sembler un peu formelle, mais nous verrons dans la prochaine section que cela a bien un sens et en particulier que  $H$  est un opérateur auto-adjoint sur un certain domaine dense de  $\mathcal{H}$ .

### 3.3 Domaine et auto-adjonction

On supposera à partir de maintenant que  $n \geq 3$ . Comme dans le cadre classique, la première question est de montrer l'existence des solutions pour l'équation de Schrödinger (3.1). On sait que cette question se ramène à montrer le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $H$ . Pour un opérateur borné  $A$ , cela équivaut à montrer qu'il est symétrique, *i.e* :

$$\langle \psi; A\phi \rangle = \langle A\psi; \phi \rangle \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}.$$

Cependant, on travaille ici avec des opérateurs non bornés définis uniquement sur un certain domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ ; le caractère symétrique n'est alors qu'une condition nécessaire et le fait qu'un opérateur soit auto-adjoint n'est pas forcément évident.

On a indiqué dans la section précédente que l'on ne considérerait que le cas où le potentiel  $V$  est confinant. Plus précisément, on supposera que  $V$  satisfait la condition (C') :

$$(C') \quad V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d), \lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) = +\infty.$$

Cette hypothèse assure que  $H_p$  est auto-adjoint sur son domaine de définition  $\mathcal{D}(H_p) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid H_p \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$  ([RS2], Théorème X.28). On pourrait supposer ici que  $V$  est seulement borné inférieurement et non pas confinant, cependant, pour le problème de l'existence d'un état fondamental dont nous parlerons dans la Section 3.4, nous nous restreindrons exclusivement au cas d'un potentiel confinant. C'est pourquoi nous préférons nous placer dès à présent dans ce cas. On sait également que  $H_f$  est auto-adjoint sur son domaine  $\mathcal{D}(H_f)$  ([RS1], Chapitre VIII.10). On prouve alors facilement que  $H_0$  (défini en (3.16)) est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{D}(H_p) \otimes \mathcal{D}(H_f)$  ([RS1], Chapitre VIII.10). On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *On suppose que  $n \geq 3$ , que  $V$  satisfait la condition (C') et que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  satisfont (H1). Alors  $H$  est auto-adjoint sur  $D(H) = D(H_0)$ . De plus,  $H$  est essentiellement auto-adjoint sur tout coeur de  $H_0$ , et il est borné inférieurement.*

Pour montrer cette proposition, on fera appel au Théorème de Kato-Rellich ([RS2], Théorème X.12). En particulier, on aura besoin de certaines estimations sur le terme d'interaction  $H_I$ . Pour cela, on utilisera le lemme suivant :

**Lemme 3.2.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 3.1, pour tout  $\Psi \in \mathcal{D}(H_0)$ , on a les estimations suivantes :*

$$(i) \quad \left\| \int dx dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - Q) \otimes a(x, k) \Psi \right\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \|(\mathbb{1} \otimes H_f^{\frac{1}{2}})\Psi\|_{\mathcal{H}}^2. \\
 (ii) \quad &\| \int dx dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - Q) \otimes a^*(x, k) \Psi \|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &\leq \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \|(\mathbb{1} \otimes H_f^{\frac{1}{2}})\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &\quad + \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)} \right] \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2.
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.** (i) Des estimations de ce genre sont courantes dans la littérature [A1]-[BFS1]-[DJ] et sont parfois appelées  $N_\tau$ -estimates.

(ii) L'hypothèse  $n \geq 3$  assure que les intégrales dans le membre de droite de chacune des deux inégalités convergent. Modulo un facteur 1/2, on reconnaît l'énergie  $U_*$  (voir (1.18)) du champ classique lorsque le système est au repos. Le fait que cette intégrale converge correspond alors à la condition (1.15). C'est cette condition qui entraîne que  $H$  est borné inférieurement.

**Démonstration du Lemme 3.2 :** On utilise le fait que  $\mathcal{H}$  est naturellement isomorphe à l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{F})$  (fonctions de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathcal{F}$ ). Dans cette représentation on a alors :

$$\begin{aligned}
 &\| \int dx dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - Q) \otimes a(x, k) \Psi \|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \| \int dx dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - y) a(x, k) \Psi(y) \|_{\mathcal{F}}^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \| a(g_y) \Psi(y) \|_{\mathcal{F}}^2,
 \end{aligned}$$

où  $g_y$  est la fonction

$$g_y(x, k) = \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - y).$$

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$ , on a (voir [BFS1]) :

$$\begin{aligned}
 \|a(g_y)\Psi(y)\|_{\mathcal{F}}^2 &= \left\| \int dx dk g_y(x, k) a(x, k) \Psi(y) \right\|_{\mathcal{F}}^2 \\
 &\leq \left( \int dx dk \frac{|g_y(x, k)|}{\sqrt{\omega(k)}} \sqrt{\omega(k)} \|a(x, k) \Psi(y)\| \right)^2 \\
 &\leq \left[ \int dx dk \frac{|g_y(x, k)|^2}{\omega(k)} \right] \int dx dk \omega(k) \|a(x, k) \Psi(y)\|^2.
 \end{aligned}$$

Or

$$\int dx dk \omega(k) \|a(x, k)\Psi(y)\|^2 = \langle \Psi(y); H_f \Psi(y) \rangle,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \|a(g_y)\Psi(y)\|_{\mathcal{F}}^2 &\leq \left[ \int dx dk \frac{|g_y(x, k)|^2}{\omega(k)} \right] \|H_f^{1/2}\Psi(y)\|_{\mathcal{F}}^2 \\ &\leq \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \|H_f^{1/2}\Psi(y)\|_{\mathcal{F}}^2. \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\begin{aligned} &\| \int dx dk \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \rho_1(x - Q) \otimes a(x, k)\Psi \|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \int_{\mathbb{R}^d} dy \|H_f^{1/2}\Psi(y)\|_{\mathcal{F}}^2 \\ &\leq \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \|(\mathbb{1} \otimes H_f^{1/2})\Psi\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve (i). La preuve de (ii) se fait de façon similaire.  $\square$

**Démonstration de la Proposition 3.1 :** Il est clair que  $H$  est symétrique.

On montre alors que  $H_I$  est relativement  $H_0$ -borné avec borne relative infinitésimale, ce qui démontrera la proposition via le Théorème de Kato-Rellich.

En utilisant le Lemme 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \|H_I\Psi\|^2 &\leq 2 \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^2} \right] \|(\mathbb{1} \otimes H_f^{1/2})\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \left[ \int dx dk |\rho_1(x)|^2 \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)} \right] \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Or  $H_f^{1/2}$  est relativement  $H_f$  borné avec borne infinitésimale donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que :

$$\|H_I\Psi\| \leq \varepsilon \|(\mathbb{1} \otimes H_f)\Psi\| + C_\varepsilon \|\Psi\|. \quad (3.21)$$

$V$  étant un potentiel confinant,  $H_p$  est borné inférieurement. Ainsi, quitte à changer  $C_\varepsilon$ , (3.21) reste vraie en remplaçant  $\mathbb{1} \otimes H_f$  par  $H_0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### 3.4 Existence d'un état fondamental sous condition infrarouge

On s'intéresse dans cette section à la question de l'existence d'un état fondamental. Nous savons que l'opérateur  $H$  est borné inférieurement, et donc

$$E_0 := \inf \sigma(H) > -\infty, \quad (3.22)$$

où  $\sigma(H)$  désigne le spectre de  $H$ . De manière générale, on dira qu'un opérateur borné inférieurement admet un état fondamental si et seulement si la borne inférieure de son spectre est une valeur propre. On appellera énergie fondamentale cette borne inférieure et état fondamental tout vecteur propre associé lorsque celle-ci est une valeur propre. L'état fondamental est l'équivalent quantique du minimum de l'énergie au niveau classique, minimum qui est un point d'équilibre pour la dynamique. Un des obstacles à l'existence d'un état fondamental, dans les modèles où une particule est couplée avec un champ, provient de ce que l'on appelle la *catastrophe infrarouge*. C'est-à-dire le comportement de  $\omega(k)$  pour  $k$  petit et en particulier le fait que  $\omega(0) = 0$ . C'est pourquoi dans cette section, nous serons amenés à imposer la condition suivante sur  $\hat{\rho}$  :

$$(IR) \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{\omega(k)^3} < +\infty.$$

On montrera alors le théorème suivant :

**Théorème 3.3.** *On suppose que  $n \geq 3$ , que  $V$  satisfait la condition (C'), que  $\rho_1$  satisfait (H1) et que  $\hat{\rho}_2$  satisfait (IR). Alors  $H$  admet un état fondamental.*

Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin d'étudier certains modèles "intermédiaires", et en particulier nous aurons besoin de rendre les quasi-particules *massives* et de "discrétiser" l'espace. Le terme massif signifie ici que l'on remplacera la fonction  $\omega(k)$  par une fonction  $\omega_m(k)$  vérifiant :

$$(H_\omega) \begin{cases} \nabla \omega_m \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \lim_{|k| \rightarrow \infty} \omega_m(k) = +\infty, \\ \inf \omega_m(k) = m > 0. \end{cases}$$

Notre preuve utilise diverses méthodes développées dans la littérature [BFS1]-[BFS2]-[DG]-[G]-[GJ]. Le hamiltonien défini en (3.16)-(3.20) est en effet de type Pauli-Fierz (voir [DG]) mais présente cette particularité que la relation de dispersion  $\omega(x, k)$  ne dépend pas de  $x$  et donc en particulier ne tend pas vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers l'infini. Ceci est à l'origine de quelques différences conceptuelles et techniques avec les modèles usuels comme on le verra plus loin.

Remarquons encore que tous les hamiltoniens présents dans les sections suivantes pourront s'écrire sous une forme similaire à (3.20) et on peut montrer un résultat identique à la Proposition 3.1 pour chacun d'entre eux. Toutes les preuves étant semblables, nous ne les répèterons pas.

### 3.5 Le problème infrarouge : une interprétation classique

Avant de nous attaquer à la preuve du Théorème 3.3, nous voudrions revenir sur la signification de la condition infrarouge. Remarquons tout de suite que, si  $n \geq 4$ , la condition (IR) est automatiquement satisfaite dès que  $\rho_2$  vérifie (H1). Cependant, si  $n = 3$ , ce qui est le cas qui nous intéresse, cette condition impose d'avoir  $\hat{\rho}_2(0) = 0$ . Or une telle hypothèse entraîne que le coefficient  $\gamma$  défini en (2.5) est nul. On "perd" ainsi l'effet de frottement linéaire qui est la raison d'être de notre modèle. Toutefois, on sait que, pour la version quantique du modèle de Nelson, une telle condition est nécessaire et suffisante pour avoir un état fondamental [G]-[LMS]. Même si nous ne l'avons pas démontré, il est raisonnable de penser qu'il doit en être de même pour notre modèle.

D'un autre côté, dans [A2], l'auteur montre que si on se place dans une autre représentation bien choisie des relations de commutation canoniques le modèle de Nelson sans condition infrarouge admet un état fondamental. Cette représentation régularise en quelque sorte la singularité infrarouge et n'est bien sûr pas unitairement équivalente à la représentation de Fock. On pourrait penser qu'une démarche similaire devrait marcher pour notre modèle. Il apparaît néanmoins que ce n'est pas le cas. Afin de le montrer, nous allons brièvement expliquer l'origine physique du choix de représentation proposé par Arai. Cela permettra de voir aisément que sa démarche s'adapte à notre modèle mais n'y a pas le même effet régularisant.

Nous voudrions expliquer l'idée qui se cache derrière ce changement de représentation, en revenant un instant à la mécanique classique, et regarder en un peu plus de détails la quantification d'un champ scalaire classique. Cela nous permettra alors d'expliquer la différence entre le modèle de Nelson et le nôtre. On considère donc un hamiltonien classique du type

$$H = \frac{1}{2} \int_A d\mu(\alpha) (\omega(\alpha)^2 \phi(\alpha)^2 + \pi(\alpha)^2),$$

où  $\omega(\alpha)$  est une fonction strictement positive presque partout. On notera simplement  $X$  un élément  $(\phi, \pi)$ . Le flot hamiltonien associé s'écrit sous la

forme

$$X_t = \Phi_t X_0 = \cos(\omega t) X_0 + \sin(\omega t) J X_0,$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que  $J^2 = -\mathbb{1}$ .

Soit maintenant, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{D}(\omega^s) := \{\phi \in L^2 \mid \omega^s \phi \in L^2\},$$

et  $[\mathcal{D}(\omega^s)]$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\omega^s)$  pour la norme  $\|\phi\|_s = \|\omega^s \phi\|_{L^2}$ . Etant donnés  $s, r \in \mathbb{R}$ , on définit

$$\mathcal{H}_{s,r} := [\mathcal{D}(\omega^s)] \times [\mathcal{D}(\omega^r)].$$

L'opérateur  $J$  n'est bien défini (en tant qu'opérateur borné) sur  $\mathcal{H}_{s,r}$  que si  $r = s - 1$ . D'un autre côté, la forme symplectique

$$\sigma(X_1, X_2) = \int_A d\mu(\alpha) (\phi_1(\alpha)\pi_2(\alpha) - \phi_2(\alpha)\pi_1(\alpha))$$

n'a de sens que sur les espaces du type  $\mathcal{H}_{s,-s}$ . Si on veut un espace sur lequel  $J$  et  $\sigma$  sont bien définis, cela impose de prendre  $s$  tel que  $s - 1 = -s$ , c'est-à-dire  $s = \frac{1}{2}$ . Soit donc

$$\mathcal{H} = [\mathcal{D}(\omega^{\frac{1}{2}})] \times [\mathcal{D}(\omega^{-\frac{1}{2}})].$$

On munit cet espace d'une structure hilbertienne complexe  $\langle ; \rangle$  définie par

$$\langle X_1; X_2 \rangle = \sigma(JX_1, X_2) + i\sigma(X_1, X_2).$$

On peut alors identifier  $\mathcal{H}$  avec  $L^2(A, d\mu, \mathbb{C})$  via l'isométrie :

$$(\phi, \pi) \in \mathcal{H} \rightarrow \sqrt{\omega(\alpha)}\phi(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{\omega(\alpha)}}\pi(\alpha) \in L^2(A, d\mu, \mathbb{C}).$$

On définit alors

$$a(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\omega(\alpha)}\phi(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{\omega(\alpha)}}\pi(\alpha) \right) \in L^2(A, d\mu, \mathbb{C}),$$

et on peut réécrire  $H$  sous la forme

$$H = \int_A \omega(\alpha) a^*(\alpha) a(\alpha) d\mu(\alpha). \quad (3.23)$$

De plus, le crochet de Poisson associé à  $\sigma$  est

$$\{\phi(\alpha), \pi(\alpha)\} = \delta_\mu(\alpha - \alpha'),$$

où  $\delta_\mu$  est défini par

$$\int_A f(\alpha') \delta_\mu(\alpha - \alpha') d\mu(\alpha') = f(\alpha).$$

On voit alors facilement que

$$\{a(\alpha), a^*(\alpha')\} = -i\delta_\mu(\alpha - \alpha'),$$

ce qui est à comparer à (3.6). En comparant en outre (3.23) à (3.15), on comprend mieux pourquoi le modèle quantique est alors construit en considérant l'espace de Fock sur  $L^2(A, d\mu, \mathbb{C})$ .

On regarde maintenant le cas du modèle de Nelson, *i.e.*  $A = \mathbb{R}^d$  et  $d\mu(\alpha) = dk$ . Si on couple le champ avec une particule soumise par ailleurs à un potentiel  $V$  confinant tel que  $\min V = V(0)$ , le point d'équilibre du système correspondant au minimum de l'énergie est de la forme  $(q_*, \phi_*, p_*, \pi_*) = (0, -\frac{\hat{p}}{\omega^2}, 0, 0)$  et  $(\phi_*, \pi_*)$  n'est dans l'espace  $\mathcal{H}$  que si  $\frac{\hat{p}}{\omega^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , ce qui est exactement la condition (IR). On rappelle que pour ce modèle cette condition est nécessaire est suffisante pour avoir un état fondamental quantique. En d'autres termes, le minimum  $(q_*, \phi_*, p_*, \pi_*)$  du hamiltonien classique n'appartient à  $\mathcal{H}$  que si (IR) est satisfait. Dans ce sens, on peut dire que la condition pour qu'il y ait un état fondamental en mécanique quantique est exactement la même qu'en mécanique classique.

Le changement de représentation effectué dans [A2] correspond, au niveau classique, à se placer dans l'espace affine " $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + (\frac{\hat{p}}{\omega^2}, 0)$ ", plus précisément, on effectue la transformation symplectique  $(q, \phi, p, \pi) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{\phi}, \tilde{p}, \tilde{\pi})$  suivante :

$$\tilde{q} = q, \tilde{\phi} = \phi + \frac{\hat{p}}{\omega^2}, \tilde{p} = p, \tilde{\pi} = \pi.$$

Ici,  $\tilde{\phi}$  représente le déplacement du champ par rapport à la position d'équilibre. Remarquons tout de suite que  $0 \notin \tilde{\mathcal{H}}$  si et seulement si la condition (IR) n'est pas satisfaite. On voit donc que les deux points d'équilibre, avant  $(\phi_* = 0)$  et après  $(\phi_* = -\frac{\hat{p}}{\omega^2})$  avoir couplé le champ à la particule, ne sont pas dans le même espace. C'est ce phénomène qui, au niveau quantique, se traduit par le fait que l'état fondamental existe mais dans une représentation non-équivalente à celle de Fock. On lit parfois que "l'état fondamental n'est pas dans l'espace de Fock" (par exemple, dans le contexte du "modèle de Van Hove" [D]-[Fr]-[VH]).

Dans les nouvelles variables, le hamiltonien du système couplé s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{\phi}, \tilde{p}, \tilde{\pi}) &= \frac{1}{2} \int (\omega^2 \tilde{\phi}^2 + \tilde{\pi}^2) + \int \hat{\rho}(k)(e^{-ikq} - 1)\tilde{\phi} \\ &+ \frac{\tilde{p}^2}{2} + V(\tilde{q}) - \underbrace{\int \frac{|\hat{\rho}(k)|^2 e^{-ikq}}{\omega^2}}_{=W(\tilde{q}) \text{ borné}} + \underbrace{\int \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{2\omega^2}}_{=\text{constante}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si on souhaite étudier le système proche du nouvel équilibre, il faut choisir l'espace des phases tel que  $\tilde{\phi} = 0$  y soit. Il est alors naturel d'étudier  $\tilde{H}$  non sur  $\tilde{\mathcal{H}}$  mais sur  $\mathcal{H}$ . En d'autres termes, afin d'assurer que le point d'équilibre après couplage est dans l'espace des phases, on est obligé de changer d'espace. Si on fait cela, la condition (IR) est maintenant satisfaite même lorsque  $d = 3$  :

$$\frac{\hat{\rho}(k)(e^{-ikq} - 1)}{\omega^{\frac{3}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Du coup, en quantifiant  $\tilde{H}$  en (3.24), on obtient un modèle dans lequel il y a un état fondamental quantique. C'est précisément ce que fait Arai dans [A2], sans toutefois l'expliquer en ces termes. Par contre, cette même transformation dans notre modèle ne permet pas "d'arranger" les choses. En effet, la condition (IR) devient, après la même transformation chez nous :

$$\frac{[\rho_1(x - q) - \rho_1(x)]\hat{\rho}_2(k)}{\omega(k)^{\frac{3}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n),$$

qui n'est toujours pas satisfaite si  $n = 3$  sauf si  $\hat{\rho}_2(0) = 0$ . Pour le moment, nous nous contentons donc de démontrer le Théorème 3.3 sous l'hypothèse (IR).

### 3.6 Le cas massif

Nous revenons maintenant à la preuve du Théorème 3.3. Notre premier but est de montrer un résultat analogue pour le cas massif (Théorème 3.10, Section 3.6.2). Nous utiliserons l'approche de [GJ] et [BFS1] qui consiste à se placer dans une boîte  $|x| < L$  et à contrôler ce qui se passe en dehors de cette boîte lorsque  $L$  tend vers l'infini. Comme on le verra dans la Section 3.6.2, le modèle "dans la boîte" est de la forme (3.25). Il est traité dans la Section 3.6.1 (Théorème 3.4).

### 3.6.1 Modèles discrets avec quasi-particules massives

#### 3.6.1.1 Présentation

On s'intéresse à un hamiltonien du type :

$$\begin{aligned}
 H^d &:= H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a_l^*(k) a_l(k) \\
 &\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^n} dk (\beta_l(k) \otimes a_l^*(k) + \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k)) \\
 &= H_0^d + W^d,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

qui agit sur l'espace

$$\mathcal{H}^d := L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}(l^2(\mathbb{Z}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)), \tag{3.26}$$

et où les coefficients  $\beta_l(k)$  satisfont la condition

$$\begin{aligned}
 (C_\beta) \quad \beta_l(k) &= \zeta_l \frac{\hat{p}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \text{ où } \zeta_l \text{ est un opérateur de multiplication} \\
 &\text{sur } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \sup_l \| |l|^s \zeta_l \| < +\infty \text{ pour tout } s \text{ positif,}
 \end{aligned}$$

et les opérateurs  $a_l(k)$  et  $a_l^*(k)$  sont les opérateurs d'annihilation et de création sur l'espace  $\mathcal{F}(l^2(\mathbb{Z}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^n))$ .

**Remarque 3.2.** Si  $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $|l| = \sup_i |l_i|$ .

On appelle  $E_0^d$  l'énergie fondamentale de  $H^d$ . On montrera le théorème suivant :

**Théorème 3.4.**  $\sigma_{\text{ess}}(H^d) \subset [E_0^d + m; +\infty[$ . En particulier,  $H^d$  admet un état fondamental  $\phi_0^d$ .

#### 3.6.1.2 Modèles "tronqués"

Dans toute la suite,  $L$  désignera un nombre strictement positif. Sur  $\mathcal{H}^d$ , on définit

$$\begin{aligned}
 H^d(L) &:= H_0^d + \sum_{|l| \leq L} \int_{\mathbb{R}^n} dk (\beta_l(k) \otimes a_l^*(k) + \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k)) \\
 &= H_0^d + W^d(L).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

On définit également

$$\begin{aligned} \tilde{H}^d(L) &:= H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{|l| \leq L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a_l^*(k) a_l(k) + W^d(L) \\ &= \tilde{H}_0^d(L) + W^d(L), \end{aligned} \quad (3.28)$$

qui agit sur l'espace

$$\mathcal{H}_L^d := L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}(l^2(\Lambda_L) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)), \quad (3.29)$$

où  $\Lambda_L = \{l \in \mathbb{Z}^d, |l| \leq L\}$ , de façon à ce que  $l^2(\Lambda_L)$  soit un espace de dimension finie. On appelle  $E_0^d(L)$  et  $\tilde{E}_0^d(L)$  les énergies fondamentales respectives de  $H^d(L)$  et  $\tilde{H}^d(L)$ . Le but est d'approcher  $H^d$  par  $H^d(L)$  (lorsque  $L$  tend vers l'infini) et d'obtenir ensuite des informations sur  $H^d$  à partir de celles que l'on aura sur  $H^d(L)$ . On commence donc par montrer un résultat identique à celui du Théorème 3.4 pour le hamiltonien  $H^d(L)$ .

**Proposition 3.5.**  $\sigma_{ess}(H^d(L)) \subset [E_0^d(L) + m; +\infty[$ . En particulier,  $H^d(L)$  admet un état fondamental  $\phi_0^d(L)$ . De plus,  $E_0^d(L) = \tilde{E}_0^d(L)$ .

**Lemme 3.6.**  $\sigma_{ess}(\tilde{H}^d(L)) \subset [\tilde{E}_0^d(L) + m; +\infty[$ . En particulier,  $\tilde{H}^d(L)$  admet un état fondamental  $\tilde{\phi}_0^d(L)$ .

**Preuve du Lemme 3.6 :** L'ensemble  $\Lambda_L$  est un ensemble fini. Si celui-ci ne contenait qu'un seul élément, on aurait exactement le modèle étudié dans [DG], comme si tout se passait dans une seule "membrane", et le lemme correspond alors à leur Théorème 4.1. Le fait d'avoir un nombre fini d'éléments ne change rien, et le résultat se montre de la même manière.  $\square$

**Preuve de la Proposition 3.5 :** La proposition découle directement du lemme précédent via une identification entre  $\mathcal{H}_L^d$  et un sous-espace de  $\mathcal{H}^d$ , [GJ]. En effet, on peut écrire

$$l^2(\mathbb{Z}^d) \simeq l^2(\Lambda_L) \oplus l^2(\Lambda_L^c),$$

$\Lambda_L^c$  désignant le complémentaire de  $\Lambda_L$  dans  $\mathbb{Z}^d$ , et donc on a

$$\mathcal{F}(l^2(\mathbb{Z}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathcal{F}(l^2(\Lambda_L) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)) \otimes \mathcal{F}(l^2(\Lambda_L^c) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)).$$

D'où finalement

$$\mathcal{H}^d \simeq \mathcal{H}_L^d \otimes \mathcal{F}(l^2(\Lambda_L^c) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)).$$

On identifie alors  $\mathcal{H}_L^d$  avec  $\mathcal{H}_L^d \otimes \Omega_L^c$  où  $\Omega_L^c$  est le vide de  $\mathcal{F}(l^2(\Lambda_L^c) \otimes L^2(\mathbb{R}^n))$ .

On peut réécrire  $\mathcal{H}^d$  sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} (\mathcal{H}_L^d \otimes_s^j (l^2(\Lambda_L^c) \otimes L^2(\mathbb{R}^n))) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}^{(j)}.\end{aligned}$$

On a en fait

$$\mathcal{H}_L^d = \mathcal{H}^{(0)} \quad \text{et} \quad (\mathcal{H}_L^d)^\perp = \bigoplus_{j=1}^{+\infty} \mathcal{H}^{(j)}.$$

On remarque que  $H^d(L)$  laisse les  $\mathcal{H}^{(j)}$  invariants. Or, sur  $\mathcal{H}^{(j)}$ , on a

$$\begin{aligned}H^d(L) &= \tilde{H}^d(L) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a_l^*(k) a_l(k) \\ &\geq \tilde{H}^d(L) \otimes \mathbb{1} + mj,\end{aligned}$$

et sur  $\mathcal{H}^{(0)}$ , on a

$$H^d(L) = \tilde{H}^d(L) \otimes \mathbb{1}.$$

On en déduit que

$$\sigma\left(H^d(L)|_{\mathcal{H}_L^d}\right) = \sigma\left(\tilde{H}^d(L)\right) \quad \text{et} \quad \sigma_{ess}\left(H^d(L)|_{\mathcal{H}_L^d}\right) = \sigma_{ess}\left(\tilde{H}^d(L)\right),$$

ainsi que

$$\sigma_{ess}\left(H^d(L)|_{(\mathcal{H}_L^d)^\perp}\right) \subset \sigma\left(H^d(L)|_{(\mathcal{H}_L^d)^\perp}\right) \subset \left[\tilde{E}_0^d(L) + m; +\infty\right],$$

ce qui achève la preuve. On peut en outre remarquer que  $\phi_0^d(L) = \tilde{\phi}_0^d(L) \otimes \Omega_L^c$ .  $\square$

### 3.6.1.3 Convergence de $H^d(L)$ vers $H^d$

Dans cette section, on montre divers résultats de convergence lorsque  $L$  tend vers l'infini.

**Proposition 3.7.**  $H^d(L)$  converge vers  $H^d$  au sens fort de la résolvante.

**Preuve :** On a

$$\begin{aligned}H^d - H^d(L) &= W^d - W^d(L) \\ &= \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \beta_l(k) \otimes a_l^*(k) + \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k).\end{aligned}$$

Soit  $\psi \in D(H_0^d)$ , on a alors, en utilisant la condition  $(C_\beta)$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \psi \right\| &\leq \frac{C(s)}{1+L^s} \left\| \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \mathbb{1} \otimes a_l(k) \psi \right\| \\ &\leq \frac{C(s)}{1+L^s} \|(\mathbb{1} \otimes N^d)^{\frac{1}{2}} \psi\| \\ &\leq \frac{C(s)}{1+L^s} \|(H_0^d)^{\frac{1}{2}} \psi\|. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les relations de commutations (3.7), on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \beta_l(k) \otimes a_l^*(k) \psi \right\|^2 &= \left\| \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \psi \right\|^2 \\ &\quad + \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk |\beta_l(k)|^2 \right) \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|H^d \psi - H^d(L) \psi\| \leq \frac{2C(s)}{1+L^s} \|(H_0^d)^{\frac{1}{2}} \psi\| + \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk |\beta_l(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|.$$

En utilisant la condition  $(C_\beta)$ , on montre que le membre de droite tend vers zéro lorsque  $L$  tend vers l'infini.  $H^d(L)$  converge donc vers  $H^d$  au sens fort et donc au sens fort de la résolvante ([RS1], Théorème VIII.25).  $\square$

**Proposition 3.8.**  $E_0^d(L)$  est une fonction décroissante de  $L$  qui converge vers  $E_0^d$ .

**Preuve :** On sait que si  $\phi_0^d(L)$  est un état fondamental de  $H^d(L)$ , il s'écrit  $\phi_0^d(L) = \tilde{\phi}_0^d(L) \otimes \Omega_L^c$ . On a donc

$$\forall l \in \Lambda_L^c, \forall k \in \mathbb{R}^n, a_l(k) \phi_0^d(L) = 0.$$

Soit  $L' > L$ ,

$$\begin{aligned} E_0^d(L') &\leq \langle \phi_0^d(L); H^d(L') \phi_0^d(L) \rangle \\ &\leq \underbrace{\langle \phi_0^d(L); H^d(L) \phi_0^d(L) \rangle}_{=E_0^d(L)} + \underbrace{\langle \phi_0^d(L); (W^d(L') - W^d(L)) \phi_0^d(L) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

La fonction  $E_0^d(L)$  est donc décroissante. De la même façon, on montre que  $E_0^d(L) \geq E_0^d$ . On en déduit que  $E_0^d(L)$  converge vers  $E_\infty \geq E_0^d$ . Or  $E_0^d \in$

$\sigma(H^d)$  et  $H^d(L)$  converge vers  $H^d$  au sens fort de la résolvante, donc ([RS1], Théorème VIII.24),

$$\forall L > 0, \exists E(L) \in \sigma(H^d(L))/E(L) \rightarrow E_0^d.$$

Comme  $E_0^d(L)$  est l'énergie fondamentale de  $H^d(L)$ , on a finalement  $E_\infty = E_0^d$ .  $\square$

**Proposition 3.9.** *Pour tout intervalle majoré  $\Delta$  de  $\mathbb{R}$ , pour tout  $s > 0$ , il existe  $K(s, \Delta) > 0$  tel que*

$$\|\chi_\Delta(H^d)(W^d - W^d(L))\chi_\Delta(H^d)\| \leq \frac{K(s, \Delta)}{1 + L^s}.$$

**Preuve :** Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{H}^d$ , on a

$$\begin{aligned} & |\langle \phi; \chi_\Delta(H^d)(W^d - W^d(L))\chi_\Delta(H^d)\psi \rangle| \\ &= |\langle \phi; \chi_\Delta(H^d) \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \beta_l(k) \otimes a_l^*(k) + \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \right) \chi_\Delta(H^d)\psi \rangle| \\ &\leq |\langle \chi_\Delta(H^d)\phi; \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \right) \chi_\Delta(H^d)\psi \rangle| \\ &\quad + |\langle \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \right) \chi_\Delta(H^d)\phi; \chi_\Delta(H^d)\psi \rangle| \\ &\leq \|\phi\| \cdot \left\| \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \right) \chi_\Delta(H^d)\psi \right\| \\ &\quad + \|\psi\| \cdot \left\| \left( \sum_{|l|>L} \int_{\mathbb{R}^n} dk \bar{\beta}_l(k) \otimes a_l(k) \right) \chi_\Delta(H^d)\phi \right\| \\ &\leq \frac{C(s)}{1 + L^s} \left( \|\phi\| \cdot \|(\mathbb{1} \otimes N^d)^{\frac{1}{2}} \chi_\Delta(H^d)\psi\| + \|\psi\| \cdot \|(\mathbb{1} \otimes N^d)^{\frac{1}{2}} \chi_\Delta(H^d)\phi\| \right). \end{aligned}$$

Or  $\Delta$  est majoré,  $\mathbb{1} \otimes N^d \leq \frac{1}{m} H_0^d$  et  $W^d$  est relativement  $H_0^d$  borné, donc  $(\mathbb{1} \otimes N^d)^{\frac{1}{2}} \chi_\Delta(H^d)$  est un opérateur borné. Finalement, on obtient

$$|\langle \phi; \chi_\Delta(H^d)(W^d - W^d(L))\chi_\Delta(H^d)\psi \rangle| \leq \frac{2C(s)\|(N^d)^{\frac{1}{2}}\chi_\Delta(H^d)\|}{1 + L^s} \|\phi\| \cdot \|\psi\|,$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

### 3.6.1.4 Preuve du Théorème 3.4

On utilise ici la méthode de [BFS2]. Etant donné un opérateur  $A$ , on note  $[A]_-$  sa partie négative et  $\text{Tr}(A)$  sa trace. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que, pour tout  $\epsilon$  positif, on a

$$\text{Tr} \{ [H^d - E_0^d - m + \epsilon]_- \} > -\infty.$$

Soient  $\epsilon > 0$ , et  $\Delta = ] - \infty; E_0^d + m - \epsilon[$ . On a alors

$$[H^d - E_0^d - m + \epsilon]_- = \chi_\Delta(H^d)(H^d - E_0^d - m + \epsilon)\chi_\Delta(H^d),$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ [H^d - E_0^d - m + \epsilon]_- \} &= \text{Tr} \{ \chi_\Delta(H^d)(H^d - E_0^d - m + \epsilon)\chi_\Delta(H^d) \} \\ &= \text{Tr} \{ \chi_\Delta(H^d)(H^d(L) - E_0^d(L) - m + \epsilon \\ &\quad + W^d - W^d(L) - E_0^d + E_0^d(L))\chi_\Delta(H^d) \}. \end{aligned}$$

Or

$$E_0^d(L) \rightarrow E_0^d \quad \text{et} \quad \|\chi_\Delta(H^d)(W^d - W^d(L))\chi_\Delta(H^d)\| \rightarrow 0,$$

d'après les Propositions 3.8 et 3.9, donc, pour  $L$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ [H^d - E_0^d - m + \epsilon]_- \} &\geq \text{Tr} \left\{ \chi_\Delta(H^d)(H^d(L) - E_0^d(L) - m + \frac{\epsilon}{2})\chi_\Delta(H^d) \right\} \\ &\geq \text{Tr} \left\{ \chi_\Delta(H^d)[H^d(L) - E_0^d(L) - m + \frac{\epsilon}{2}]_- \chi_\Delta(H^d) \right\} \\ &\geq \text{Tr} \{ [H^d(L) - E_0^d(L) - m + \frac{\epsilon}{2}]_- \} > -\infty \end{aligned}$$

d'après la Proposition 3.5. □

## 3.6.2 Modèles “continus” avec quasi-particules massives

On s'intéresse dans cette section à notre modèle, introduit dans la Section 3.2, mais dans le cas où la fonction  $\omega(k)$  est remplacée par une fonction  $\omega_m(k)$  vérifiant la condition  $(H_\omega)$ . On considère donc, sur  $\mathcal{H}$ , le hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} H_m &:= H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a^*(x, k) a(x, k) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - Q) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a^*(x, k) \\ &\quad + \rho_1(x - Q) \frac{\bar{\hat{\rho}}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \tag{3.30} \\ &= H_m^0 + W_m. \end{aligned}$$

On appelle  $E_m$  l'énergie fondamentale de  $H_m$ . Le résultat principal de cette section est le

**Théorème 3.10.**  $\sigma_{\text{ess}}(H_m) \subset [E_m + m; +\infty[$ . En particulier,  $H_m$  admet un état fondamental  $\phi_m$ .

Le principe de la preuve est essentiellement le même que dans le cas des modèles discrets. Il faut cependant être plus prudent dans les estimations car cette fois la norme de  $\rho_1(x - Q)$  en tant qu'opérateur de multiplication sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ne décroît pas avec  $x$ , elle en est même indépendante. Pour contrôler ce problème, nous exploiterons la décroissance exponentielle des projecteurs spectraux en la variable  $Q$ , que l'on obtient via la méthode d'Agmon (voir Section 3.4.3.2).

### 3.6.2.1 Modèles tronqués

Soit  $j$  une fonction de classe  $C_0^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$  vérifiant

- $0 \leq j(x) \leq 1$ ,
- $j(x) = 1$  si  $|x| \leq 1/2$ ,
- $j(x) = 0$  si  $|x| \geq 3/4$ .

Pour tout  $L > 0$ , on pose  $j_L(x) = j(\frac{x}{L})$  et  $\bar{j}_L(x) = 1 - j_L(x)$ . On définit alors

$$\begin{aligned} H_m(L) &:= H_m^0 + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - Q) j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a^*(x, k) \\ &\quad + \rho_1(x - Q) \bar{j}_L(x) \frac{\bar{\hat{\rho}}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \quad (3.31) \\ &= H_m^0 + W_m(L) \end{aligned}$$

qui agit sur  $\mathcal{H}$ . Etant donnée la définition de la fonction  $j_L$ , on peut, dans  $W_m(L)$ , remplacer  $\int_{\mathbb{R}^d} dx$  par  $\int_{[-L; L]^d} dx$ . On définit enfin

$$\tilde{H}_m(L) := H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \int_{[-L; L]^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a^*(x, k) a(x, k) + W_m(L) \quad (3.32)$$

qui agit sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}(L^2([-L; L]^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^n))$ . On appelle  $E_m(L)$  et  $\tilde{E}_m(L)$  les énergies fondamentales respectives de ces deux opérateurs.

On a "coupé" en  $x$  le hamiltonien  $H_m$ . On est maintenant dans une "boîte" de volume fini. Si on regarde la variable  $p$  conjuguée à  $x$ , cela revient à "discrétiser" le problème. Il faut bien noter que ici la variable  $p$  est une variable discrète :  $p \in \mathbb{Z}^d$ . Si on note

$$a_p^*(k) = \frac{1}{(2L)^{\frac{d}{2}}} \int_{[-L; L]^d} dx e^{ipx} a^*(x, k),$$

$$a_p(k) = \frac{1}{(2L)^{\frac{d}{2}}} \int_{[-L;L]^d} dx e^{-ipx} a(x, k)$$

et

$$\beta_p = \frac{1}{(2L)^{\frac{d}{2}}} \int_{[-L;L]^d} dx \rho_1(x - Q) j_L(x)$$

les coefficients de Fourier respectifs de  $a^*(x, k)$ ,  $a(x, k)$  et  $\rho_1(x - Q)j_L(x)$ , on s'est ramené à

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m(L) &= H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^n} dk \omega_m(k) a_p^*(k) a_p(k) \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^n} dk \left( \beta_p \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a_p^*(k) + \bar{\beta}_p \frac{\bar{\hat{\rho}}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a_p(k) \right) \end{aligned}$$

qui est bien un hamiltonien de la forme  $H^d$ . Si les coefficients  $\beta_p$  satisfont à la condition  $(C_\beta)$ , on aura alors le résultat suivant

**Proposition 3.11.**  $\forall L > 0, \sigma_{ess}(\tilde{H}_m(L)) \subset [\tilde{E}_m(L) + m; +\infty[$ .

Un découpage de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  en  $L^2([-L; L]^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d \setminus [-L; L]^d)$  et un traitement rigoureusement identique à celui de la section précédente nous donnera alors la proposition suivante :

**Proposition 3.12.**  $\sigma_{ess}(H_m(L)) \subset [E_m(L) + m; +\infty[$ . En particulier,  $H_m(L)$  admet un état fondamental  $\phi_m(L)$ .

Il reste donc à vérifier que les coefficients  $\beta_p$  satisfont à la condition  $(C_\beta)$ . La fonction  $j_L$  est nulle si  $|x| > L$  et la fonction  $\rho_1$  est à support compact, on a donc

$$\forall |q| > L + R_1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \rho_1(x - q)j_L(x) = 0.$$

On en déduit que pour tout  $p$  dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\beta_p$  est un opérateur de multiplication par une fonction à support dans la boule de rayon  $L + R_1$ . De plus, la fonction  $\rho_1(x - q)j_L(x)$  est de classe  $C^\infty$ , ses coefficients de Fourier décroissent donc plus vite que toute puissance de  $p$ . Ces deux éléments assurent que  $\sup_p \sup_q |\beta_p(q)| p^n < C_n(L) < +\infty$  et donc que la condition  $(C_\beta)$  est satisfaite. Pour démontrer le Théorème 3.10, il nous reste à contrôler la limite  $L \rightarrow +\infty$ .

### 3.6.2.2 Contrôles exponentiels

**Proposition 3.13.** Pour tout intervalle  $\Delta$  majoré de  $\mathbb{R}$  et pour tout  $\alpha$  positif, il existe  $M(\alpha, \Delta) > 0$  tel que

- $\|(e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1}) \chi_\Delta(H_m(L))\| \leq M(\alpha, \Delta)$ .
- $\|(e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1}) \chi_\Delta(H_m)\| \leq M(\alpha, \Delta)$ .

$$- \|(e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1})\chi_{\Delta}(H)\| \leq M(\alpha, \Delta).$$

Cette borne est uniforme en  $L$  et  $m$ . La preuve de cette proposition suit à la lettre celle du Théorème II.1 de [BFS1]. La seule différence est l'absence de spectre essentiel dans la partie "particule" des hamiltoniens. Cela simplifie les choses et nous permet d'ailleurs de ne pas avoir de restriction ni sur la borne supérieure de l'intervalle  $\Delta$  ni sur  $\alpha$ .

Pour tout  $R > 0$ , on définit

$$N(|x| \leq R) := \int_{|x| \leq R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk a^*(x, k)a(x, k), \quad (3.33)$$

et

$$N(|x| > R) := \int_{|x| > R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk a^*(x, k)a(x, k). \quad (3.34)$$

$N(|x| \leq R)$  représente le nombre de quasi-particules situées à l'intérieur de la boule centrée à l'origine et de rayon  $R$  (dans la variable  $x$ ), et  $N(|x| > R)$  le nombre de quasi-particules situés en dehors de cette boule. On va montrer que le nombre de ces quasi-particules "éloignées" décroît exponentiellement avec  $R$ . De façon plus précise, on a l'estimation suivante :

**Proposition 3.14.** *Pour tout  $\alpha$  positif, il existe  $C(\alpha) > 0$  tel que*

$$\langle \phi_m(L); \mathbb{1} \otimes N(|x| > R)\phi_m(L) \rangle \leq C(\alpha)e^{-\alpha R} \quad (3.35)$$

*uniformément en  $L$ .*

La méthode de démonstration de cette proposition est empruntée à [BFS1]. Néanmoins, ce qui est nouveau ici par rapport aux modèles usuels, c'est le besoin d'avoir un contrôle explicite sur "le nombre de quasi-particules à l'infini dans la direction des  $x$ ", déjà dans la preuve de l'existence d'un état fondamental pour  $m > 0$ . Pour montrer cette proposition, on aura besoin du lemme suivant :

$$\text{Lemme 3.15. } \|\mathbb{1} \otimes a(x, k)\phi_m(L)\| \leq \frac{1}{\omega_m(k)} \|\rho_1(x-Q)j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes \mathbb{1}\phi_m(L)\|.$$

**Preuve du Lemme 3.15 :** En utilisant les relations de commutations (3.7), on a

$$[H_m(L), \mathbb{1} \otimes a(x, k)] = -\omega_m(k)\mathbb{1} \otimes a(x, k) - \rho_1(x-Q)j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes \mathbb{1},$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$(H_m(L) + \omega_m(k))\mathbb{1} \otimes a(x, k) - (\mathbb{1} \otimes a(x, k))H_m(L) = -\rho_1(x-Q)j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes \mathbb{1}.$$

En appliquant cette relation sur  $\phi_m(L)$ , on obtient

$$(H_m(L) - E_m(L) + \omega_m(k)) \mathbb{1} \otimes a(x, k) \phi_m(L) = -\rho_1(x - Q) j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L).$$

Le résultat s'en suit en remarquant que  $H_m(L) - E_m(L) \geq 0$ .  $\square$

**Preuve de la Proposition 3.14 :** Soit  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \langle \phi_m(L); \mathbb{1} \otimes N(|x| > R) \phi_m(L) \rangle \\ &= \int_{|x| > R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \|\mathbb{1} \otimes a(x, k) \phi_m(L)\|^2 \\ &\leq \int_{|x| > R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{1}{\omega_m^2(k)} \|\rho_1(x - Q) j_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L)\|^2 \\ &\leq \int_{|x| > R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{2\omega_m^3(k)} \|\rho_1(x - Q) j_L(x) e^{-\alpha|Q|}\|_{\mathcal{B}(L^2)}^2 \times \|e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L)\|^2. \end{aligned}$$

La fonction  $\hat{\rho}_2$  étant à décroissance rapide et  $\omega_m$  étant minorée par  $m > 0$ , l'intégrale en  $k$  converge. Soit maintenant  $x \in \mathbb{R}^d$ , on rappelle que la fonction  $\rho_1$  est à support dans la boule de rayon  $R_1$ , on a donc

$$\begin{aligned} \|\rho_1(x - Q) e^{-\alpha|Q|}\|_{\mathcal{B}(L^2)} &= \sup_{q \in \mathbb{R}^d} |\rho_1(x - q) e^{-\alpha|q|}| \\ &= \sup_{|q-x| \leq R_1} |\rho_1(x - q) e^{-\alpha|q|}| \\ &\leq \|\rho_1\|_{\infty} e^{\alpha R_1} e^{-\alpha|x|}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{|x| > R} dx \|\rho_1(x - Q) e^{-\alpha|Q|}\|_{\mathcal{B}(L^2)}^2 &\leq \|\rho_1\|_{\infty}^2 e^{2\alpha R_1} \int_{|x| > R} dx e^{-2\alpha|x|} \\ &\leq K(\alpha) e^{-\alpha R}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\langle \phi_m(L); \mathbb{1} \otimes N(|x| > R) \phi_m(L) \rangle \leq K'(\alpha) e^{-\alpha R} \|e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L)\|^2.$$

Or, pour tout  $L$ , on a  $E_m(L) \leq E_p^0$  où  $E_p^0$  est l'énergie fondamentale de  $H_p$ . En effet, si on note  $\psi_p^0$  l'état fondamental de  $H_p$ , on a

$$E_m(L) \leq \langle \psi_p^0 \otimes \Omega; H_m(L) \psi_p^0 \otimes \Omega \rangle = E_p^0.$$

Soit maintenant  $\Delta = ]-\infty; E_p^0]$ , on peut alors écrire  $\phi_m(L) = \chi_{\Delta}(H_m(L)) \phi_m(L)$ , et donc

$$\begin{aligned} \|e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L)\|^2 &\leq \|e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1} \chi_{\Delta}(H_m(L))\|^2 \|\phi_m(L)\|^2 \\ &\leq M(\alpha, \Delta)^2, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

On donne enfin une estimation similaire à la Proposition 3.9.

**Proposition 3.16.** *Soient  $\Delta$  et  $\alpha$  comme dans la Proposition 3.13, il existe  $K(\alpha, \Delta)$  tel que*

$$\|\chi_\Delta(H_m)(W_m - W_m(L))\chi_\Delta(H_m)\| \leq K(\alpha, \Delta)e^{-\alpha L}.$$

**Preuve :** On suit le schéma de la preuve de la Proposition 3.13 en utilisant des estimations semblables à celles de la proposition précédente. Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} & | \langle \phi; \chi_\Delta(H_m)(W_m - W_m(L))\chi_\Delta(H_m)\psi \rangle | \\ \leq & | \langle (e^{2\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1})\chi_\Delta(H_m)\phi; \left( \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-2\alpha|Q|} \rho_1(x-Q)\bar{j}_L(x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\bar{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \right) \chi_\Delta(H_m)\psi \rangle | \\ & + | \langle (e^{2\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1})\chi_\Delta(H_m)\psi; \left( \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-2\alpha|Q|} \rho_1(x-Q)\bar{j}_L(x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\bar{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \right) \chi_\Delta(H_m)\phi \rangle |. \end{aligned}$$

Mis à part les rôles de  $\phi$  et  $\psi$  qui sont inversés, les deux termes du membre de droite sont identiques. On regarde donc uniquement l'un des deux.

$$\begin{aligned} & | \langle (e^{2\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1})\chi_\Delta(H_m)\phi; \left( \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-2\alpha|Q|} \rho_1(x-Q)\bar{j}_L(x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\bar{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \right) \chi_\Delta(H_m)\psi \rangle | \\ \leq & \| (e^{2\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1})\chi_\Delta(H_m)\phi \| \cdot \left\| \left( \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-2\alpha|Q|} \rho_1(x-Q)\bar{j}_L(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{\bar{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \right) \chi_\Delta(H_m)\psi \right\| \\ \leq & M(2\alpha, \Delta) \|\phi\| \left[ \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \| e^{-2\alpha|Q|} \rho_1(x-Q)\bar{j}_L(x) \frac{\bar{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \|_{\mathcal{B}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left[ \int_{|x|>\frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \| \mathbb{1} \otimes a(x, k) \chi_\Delta(H_m)\psi \|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C(\alpha, \Delta) e^{-\alpha L} \|\phi\| \cdot \|(\mathbb{1} \otimes N)^{\frac{1}{2}} \chi_\Delta(H_m)\psi\|. \end{aligned}$$

Comme dans le cas discret,  $\Delta$  est majoré,  $\mathbb{1} \otimes N \leq \frac{1}{m} H_m^0$  et  $W_m$  est relativement  $H_m^0$  borné, donc  $(\mathbb{1} \otimes N)^{\frac{1}{2}} \chi_\Delta(H_m)$  est un opérateur borné, d'où le résultat.  $\square$

### 3.6.2.3 Convergence de $H_m(L)$ vers $H_m$

**Proposition 3.17.**  *$H_m(L)$  converge vers  $H_m$  au sens fort de la résolvante.*

**Preuve :** Comme pour la Proposition 3.7, il suffit de montrer que  $H_m(L)$  converge vers  $H_m$  au sens fort. Soit  $\psi \in D(H_m^0)$ ,

$$\begin{aligned} & \|H_m \psi - H_m(L) \psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ = & \|W_m \psi - W_m(L) \psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ = & \int_{|q| > \frac{L}{2} - R_1} dq \left\| \left( \int_{|x| > \frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - q) \bar{j}_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} a^*(x, k) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\mathbb{R}^d} dq \int_{|x| > \frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - q) \bar{j}_L(x) \frac{\bar{\hat{\rho}}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} a(x, k) \right) \psi(q) \right\|_{\mathcal{F}}^2. \end{aligned}$$

Par des calculs identiques à ceux effectués dans la Proposition 3.7, on obtient

$$\|H_m \psi - H_m(L) \psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \int_{|q| > \frac{L}{2} - R_1} dq \|N^{\frac{1}{2}} \psi(q)\|_{\mathcal{F}}^2 + \|\psi(q)\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Or  $N^{\frac{1}{2}} \psi(q)$  et  $\psi(q)$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{F})$ , donc le membre de droite tend vers zéro lorsque  $L$  tend vers l'infini, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Proposition 3.18.**  *$E_m(L)$  tend vers  $E_m$  lorsque  $L$  tend vers l'infini.*

**Preuve :** On rappelle que  $\phi_m(L)$  est un état fondamental de  $H_m(L)$ . On a

$$\begin{aligned} E_m & \leq \langle \phi_m(L); H_m \phi_m(L) \rangle \\ & \leq E_m(L) + \langle \phi_m(L); (W_m - W_m(L)) \phi_m(L) \rangle \\ & \leq E_m(L) + 2\text{Re} \left( \langle \phi_m(L); \int_{|x| > \frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \rho_1(x - Q) \bar{j}_L(x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \phi_m(L) \rangle \right) \\ & \leq E_m(L) + 2\text{Re} \left( \langle e^{\alpha|Q|} \otimes \mathbb{1} \phi_m(L); \int_{|x| > \frac{L}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-\alpha|Q|} \rho_1(x - Q) \right. \\ & \quad \left. \times \bar{j}_L(x) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \otimes a(x, k) \phi_m(L) \rangle \right). \end{aligned}$$

En effectuant les mêmes calculs que dans la preuve de la Proposition 3.16, on obtient

$$\begin{aligned} E_m &\leq E_m(L) + K(\alpha)e^{-\frac{\alpha L}{2}} \langle \phi_m(L); \mathbb{1} \otimes N(|x| > \frac{L}{2}) \phi_m(L) \rangle \\ &\leq E_m(L) + C(\alpha)e^{-\alpha L}. \end{aligned}$$

La fonction  $E_m(L)$  est donc minorée (et majorée par  $E_p^0$ ). Il existe donc une suite  $L_n$  et un nombre  $E_\infty$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_m(L_n) = E_\infty \geq E_m.$$

Or,  $H_m(L_n)$  converge vers  $H_m$  au sens fort de la résolvante et  $E_m \in \sigma(H_m)$ , donc, pour tout  $n$ , il existe  $E(L_n) \in \sigma(H_m(L_n))$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(L_n) = E_m.$$

Comme  $E(L_n)$  est supérieur à  $E_m(L_n)$  pour tout  $n$ , on en déduit finalement que  $E_m = E_\infty$ . La fonction  $E_m(L)$  est donc bornée avec  $E_m$  pour seule valeur d'adhérence, elle converge donc vers  $E_m$  lorsque  $L$  tend vers l'infini.  $\square$

**Preuve du Théorème 3.10 :** La preuve est identique à celle du Théorème 3.4.

**Remarque 3.3.** *Pour montrer l'existence d'un état fondamental dans le cas massif, nous avons utilisé la méthode "classique" [BFS1]-[BFS2]-[GJ]. Une autre façon de voir serait d'utiliser les idées de [DG]-[GLL]. Le principe est de montrer que  $E_m$  n'est pas dans le spectre essentiel de  $H_m$  en utilisant le critère de Weyl. Pour cela, on montre que, étant donnée une suite  $\psi_j$  normée tendant faiblement vers 0,*

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \psi_j; (H_m - E_m)\psi_j \rangle > 0. \quad (3.36)$$

*L'idée est que, si la suite  $\psi_j$  tend faiblement vers 0, elle doit avoir une "partie qui s'échappe à l'infini". Dans notre modèle, si elle le fait dans la partie "électronique", par le nombre de quasi-particules ou par l'impulsion dans la direction  $y$  de ces quasi-particules, cela augmente l'énergie indéfiniment et on a donc certainement (3.36). Par ailleurs, si elle le fait par des quasi-particules éloignées "en espace" (dans la direction  $x$  ou  $y$ ) ou "en impulsion dans la direction  $x$ ", l'idée est que, comme celles-ci n'interagissent pas avec l'électron, elles apportent forcément chacune une quantité d'énergie au moins égale à  $m$ . Une suite de Weyl ne peut donc exister que pour  $E \geq E_m + m$ . Une rédaction précise de cette autre démonstration du Théorème 3.10 nécessiterait donc en particulier un contrôle sur l'impulsion des quasi-particules dans la direction  $x$ , ce qui constitue l'élément nouveau par rapport aux modèles usuels. Dans notre démonstration, ce contrôle apparaît de manière indirecte dans la Proposition 3.9 et réapparaîtra dans la section suivante.*

### 3.7 Le cas non-massif

L'objectif de cette section est de prouver le Théorème 3.3. On reprend la méthode utilisée dans [G]. Nous mettrons l'accent sur les différences avec ce papier. Le principe est d'approcher (dans un sens à préciser)  $H$  par des hamiltoniens dont on sait qu'ils possèdent un état fondamental et d'obtenir ensuite un résultat identique pour  $H$ . Plus précisément, on utilisera le lemme suivant :

**Lemme 3.19.** (*[AH], Lemme 4.9*) Soient  $H, H_n (n \in \mathbb{N})$  des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On suppose que

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$  a un état fondamental  $\psi_n$  avec énergie fondamentale  $E_n$ ,
- (ii)  $H_n$  converge vers  $H$  au sens fort de la résolvante,
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = E$ ,
- (iv)  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = \psi \neq 0$ .

Alors  $\psi$  est un état fondamental de  $H$  avec énergie fondamentale  $E$ .

#### 3.7.1 Hamiltonien avec “cut-off”

On rappelle que  $\lambda(x, k) = \rho_1(x - Q) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}}$ . Étant donné  $\sigma > 0$ , on définit

$$\lambda_\sigma(x, k) = \rho_1(x - Q) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \chi_{\sigma \leq \omega(k)}(k),$$

où  $\chi_{\sigma \leq \omega(k)}$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{k \in \mathbb{R}^n \mid \sigma \leq \omega(k)\}$ , et

$$\begin{aligned} H^\sigma &:= H_0 + \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \lambda_\sigma(x, k) \otimes a^*(x, k) + \lambda_\sigma(x, k)^* \otimes a(x, k) \\ &= H_0 + H_{I, \sigma}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

où  $H_0$  est le hamiltonien libre défini en (3.16). On veut utiliser le Lemme 3.19 avec  $H$  et  $H^{\sigma_n}$  où  $\sigma_n$  est une suite tendant vers zéro.

On choisit une fonction  $\tilde{\omega}_\sigma(k)$  vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \tilde{\omega}_\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \tilde{\omega}_\sigma(k) = \omega(k) \text{ si } \omega(k) \geq \sigma, \\ \inf \tilde{\omega}_\sigma(k) \geq \frac{\sigma}{2} > 0, \end{cases}$$

et on définit

$$\tilde{H}^\sigma = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\tilde{\omega}_\sigma) + H_{I, \sigma}. \quad (3.38)$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.20.** *Pour tout  $\sigma > 0$ ,  $H^\sigma$  a un état fondamental  $\psi_\sigma$ . On appelle  $E_\sigma$  son énergie fondamentale.*

Pour montrer cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.21.** *([G], Lemme 3.2)  $H^\sigma$  a un état fondamental si et seulement si  $\tilde{H}^\sigma$  en a un.*

**Preuve de la Proposition 3.20 :** D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que  $\tilde{H}^\sigma$  a un état fondamental. Or  $\tilde{H}^\sigma$  est un hamiltonien du type étudié dans la Section 3.6.2 et donc, d'après le Théorème 3.10, il admet un état fondamental.  $\square$

**Proposition 3.22.**  *$H^\sigma$  converge vers  $H$  en norme au sens de la résolvante.*

**Preuve :** On utilise le Lemme A.2 de [G] selon lequel il suffit donc de montrer que  $Q^\sigma$  converge vers  $Q$  dans la topologie de  $\mathcal{D}(Q)$ , où  $Q^\sigma$  et  $Q$  sont les formes quadratiques associées à  $H^\sigma$  et  $H$ . Or par un calcul similaire à celui du Lemme 3.2, on a

$$|Q(u, v) - Q^\sigma(u, v)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\omega(k) \leq \sigma} dk \frac{\rho_1(x - q)^2 |\hat{\rho}_2(k)|^2}{2\omega^2(k)} \right)^{\frac{1}{2}} \times (Q(u, u)\|v\| + Q(v, v)\|u\|).$$

$\square$

**Corollaire 3.23.**  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} E_\sigma = E_0$ .

**Remarque 3.4.** *Comme dans le cas massif, on a  $E_\sigma \leq E_p^0$  pour tout  $\sigma > 0$ .*

Les Propositions 3.20 et 3.22 et le Corollaire 3.23 entraînent que la famille d'opérateurs  $H^\sigma$  et l'opérateur  $H$  satisfont aux hypothèses (i) – (ii) – (iii) du Lemme 3.19. Il reste donc à vérifier l'hypothèse (iv) de ce lemme et on aura alors prouvé le Théorème 3.3.

### 3.7.2 Estimations uniformes en $\sigma$

**Lemme 3.24.** *Il existe  $C_1 > 0$  tel que pour tout  $\sigma > 0$ ,*

$$\langle \psi_\sigma; H_0 \psi_\sigma \rangle \leq C_1.$$

Cette inégalité provient du fait que  $H_{I,\sigma}$  est relativement  $H_0$  borné avec borne infinitésimale, uniformément en  $\sigma > 0$ . Nous avons bien évidemment besoin d'une estimation sur les “photons mous” qui utilise la condition (IR).

**Lemme 3.25.** *Il existe  $C_2 > 0$  tel que pour tout  $\sigma > 0$ ,*

$$\langle \psi_\sigma; \mathbb{1} \otimes N \psi_\sigma \rangle \leq C_2.$$

**Preuve :** Comme dans le Lemme 3.15, on peut montrer que

$$\|\mathbb{1} \otimes a(x, k)\psi_\sigma\| \leq \frac{1}{\omega(k)} \|\rho_1(x - Q) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega_m(k)}} \chi_{\omega(k) \geq \sigma}(k) \otimes \mathbb{1}\psi_\sigma\|. \quad (3.39)$$

D'où,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\sigma; \mathbb{1} \otimes N\psi_\sigma \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk \|\mathbb{1} \otimes a(x, k)\psi_\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\omega(k) \geq \sigma} dk \frac{1}{\omega^2(k)} \|\rho_1(x - Q) \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \otimes \mathbb{1}\psi_\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} dq \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\omega(k) \geq \sigma} dk \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{2\omega^3(k)} |\rho_1(x - q)|^2 \|\psi_\sigma(q)\|_{\mathcal{F}}^2 \\ &\leq \|\rho_1\|_2^2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{2\omega^3(k)} \right) \int_{\mathbb{R}^d} dq \|\psi_\sigma(q)\|_{\mathcal{F}}^2 \\ &\leq C_2. \end{aligned}$$

□

Nous avons obtenus ici un contrôle sur le nombre total de quasi-particules. Cependant, nous aurons besoin également d'un contrôle uniforme en  $\sigma$  sur le nombre de quasi-particules "à l'infini" dans l'espace des phases, c'est à dire sur les quantités suivantes :  $\langle \psi_\sigma; N(|x| > R)\psi_\sigma \rangle$ ,  $\langle \psi_\sigma; N(|y| > S)\psi_\sigma \rangle$  et  $\langle \psi_\sigma; N(|p| > P)\psi_\sigma \rangle$  avec

$$N(|x| > R) = \int_{|x| > R} dx \int_{\mathbb{R}^n} dk a^*(x, k)a(x, k),$$

$$N(|y| > S) = \int_{|y| > S} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \tilde{a}^*(x, y)\tilde{a}(x, y),$$

$$N(|p| > P) = \int_{|p| > P} dp \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{a}^*(p, k)\hat{a}(p, k).$$

Les opérateurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{a}^*$  sont obtenus à partir de  $a$  et  $a^*$  par transformation de Fourier partielle dans la variable  $k$ , et les opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^*$  par transformation de Fourier partielle dans la variable  $x$ . On montre alors un résultat analogue à celui de la Proposition 3.14 :

**Lemme 3.26.** *Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $C(\alpha) > 0$  tel que*

$$\langle \psi_\sigma; \mathbb{1} \otimes N(|x| > R)\psi_\sigma \rangle \leq C(\alpha)e^{-\alpha R}.$$

La démonstration de ce lemme est rigoureusement identique à celle de la Proposition 3.14. Ce lemme nous donne un contrôle sur le nombre de quasi-particules “éloignées” dans la direction  $x$ .

De la même manière, on contrôle le nombre de quasi-particules dont l’impulsion dans la direction  $x$  est grande :

**Lemme 3.27.** *Pour tout  $s > 0$ , il existe  $C(s) > 0$  tel que*

$$\langle \psi_\sigma; \mathbb{1} \otimes N(|p| > P) \psi_\sigma \rangle \leq \frac{C(s)}{1 + P^s}.$$

**Preuve :** En utilisant (3.39) et par le même calcul que dans la preuve de la Proposition 3.14, on obtient

$$\langle \psi_\sigma; \mathbb{1} \otimes N(|p| > P) \psi_\sigma \rangle \leq \left( \int dk \frac{|\hat{\rho}_2(k)|^2}{2\omega(k)^3} \right) \times \left( \int_{|p|>P} dp |\hat{\rho}_1(p)|^2 \right),$$

d’où le résultat. □

Enfin, pour contrôler  $N(|y| > S)$ , on utilise le résultat suivant en remarquant que  $d\Gamma(1 - F_S(y)) \leq N(|y| > \frac{S}{2})$ .

**Lemme 3.28.** *Soit  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que*

- $0 \leq F(y) \leq 1$ ,
- $F(y) = 1$  si  $|y| \leq 1/2$ ,
- $F(y) = 0$  si  $|y| \geq 1$ .

*Soit  $F_S(y) = F(\frac{|y|}{S})$ . Alors*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0, S \rightarrow +\infty} \langle \psi_\sigma; d\Gamma(1 - F_S(y)) \psi_\sigma \rangle = 0.$$

**Preuve :** On trouve un résultat analogue dans [G] (Lemme 4.5), et on suit essentiellement la preuve de celui-ci. Pour commencer, on voit facilement que

$$d\Gamma(1 - F_S(y)) = \int dx dk a^*(x, k) \left(1 - F\left(\frac{|D_k|}{S}\right)\right) a(x, k). \quad (3.40)$$

On rappelle (voir la preuve du Lemme 3.15) que pour tout  $\sigma$  on a

$$a(x, k) \psi_\sigma = (E_\sigma - H^\sigma - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x - Q) \hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \chi_{\sigma \leq \omega(k)}(k) \psi_\sigma.$$

On peut alors montrer ([G], Prop 4.4) que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} a(x, k) \psi_\sigma - (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x - Q) \hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \psi_\sigma = 0$$



dans  $L^2(\mathbb{R}^{d+n}, dx dk; \mathcal{H})$ . En utilisant cela avec (3.40), on a alors

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_\sigma; d\Gamma(1 - F_S(y))\psi_\sigma \rangle \\
 &= \int dx dk \langle (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \psi_\sigma; \\
 & \quad (1 - F(\frac{|D_k|}{S})) (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \psi_\sigma \rangle + o(\sigma^0) \\
 &\leq \| (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \psi_\sigma \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{H})} \\
 & \quad \times \| (1 - F(\frac{|D_k|}{S})) (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \psi_\sigma \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{H})} + o(\sigma^0) \\
 &\leq \| (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)e^{-\alpha|Q|}\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{B}(\mathcal{H}))} \times \| e^{\alpha|Q|}\psi_\sigma \|_{\mathcal{H}} \\
 & \quad \times \| (1 - F(\frac{|D_k|}{S})) (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)e^{-\alpha|Q|}\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{B}(\mathcal{H}))} \\
 & \quad \times \| e^{\alpha|Q|}\psi_\sigma \|_{\mathcal{H}} + o(\sigma^0)
 \end{aligned}$$

On vérifie que  $(E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)e^{-\alpha|Q|}\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}}$  est bien dans  $L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ , en utilisant le fait que  $\| (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \| \leq \omega(k)^{-1}$  et la condition (IR). On a donc

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \| (1 - F(\frac{|D_k|}{S})) (E_0 - H - \omega(k))^{-1} \frac{\rho_1(x-Q)e^{-\alpha|Q|}\hat{\rho}_2(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+n}; \mathcal{B}(\mathcal{H}))} = 0.$$

De plus  $\| e^{\alpha|Q|}\psi_\sigma \|_{\mathcal{H}}$  est borné uniformément en  $\sigma$ , ce qui se montre de la même manière que pour  $\| e^{\alpha|Q|}\psi_m(L) \|_{\mathcal{H}}$  (voir Section 3.6.2), d'où le résultat.  $\square$

### 3.7.3 Preuve du Théorème 3.3

On a vu qu'il restait à vérifier l'hypothèse (iv) du Lemme 3.19. On procède de la même façon que dans [G]. La boule unité de  $\mathcal{H}$  est faiblement compact, donc il existe une suite  $\sigma_n \rightarrow 0$  et un vecteur  $\psi \in \mathcal{H}$  tel que  $\psi_{\sigma_n}$  tend faiblement vers  $\psi$ . Il suffit donc de montrer que  $\psi \neq 0$ . Le principe est de trouver un opérateur compact  $K$  tel que pour tout  $n$  assez grand on ait une estimation du type

$$\| K\psi_{\sigma_n} \| \geq \delta > 0. \tag{3.41}$$

Cela assure alors que  $\psi$  est non nul. En effet, comme  $K$  est compact,  $K\psi_{\sigma_n}$  tend fortement vers  $K\psi$ . Si  $\psi$  était nul on aurait alors  $\| K\psi_{\sigma_n} \|$  qui tendrait vers zéro, ce qui serait une contradiction avec (3.41).

Soit donc  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  vérifiant les mêmes conditions que dans le Lemme 3.28. On rappelle que  $p$  est la variable conjuguée à  $x$ , i.e.  $p = -i \frac{\partial}{\partial x}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^{d+n}, dx dk)$ . On a alors les inégalités suivantes :

$$(1 - \Gamma(F_S(y)))^2 \leq (1 - \Gamma(F_S(y))) \leq d\Gamma(1 - F_S(y)), \tag{3.42}$$

$$(1 - \Gamma(G_R(x)))^2 \leq (1 - \Gamma(G_R(x))) \leq d\Gamma(1 - G_R(x)) \leq N(|x| > \frac{R}{2}), \quad (3.43)$$

$$(1 - \Gamma(G_P(p)))^2 \leq (1 - \Gamma(G_P(p))) \leq d\Gamma(1 - G_P(p)) \leq N(|p| > \frac{P}{2}). \quad (3.44)$$

Soit enfin  $\chi(s \leq s_0)$  une fonction à support dans  $\{|s| \leq s_0\}$  et égale à 1 dans  $\{|s| \leq \frac{s_0}{2}\}$ . Pour tous nombres positifs  $\theta, P, R$  et  $S$ , on définit

$$K(\theta, P, R, S) := \chi(N \leq \theta)\chi(H_0 \leq \theta)\Gamma(F_S(y))\Gamma(G_R(x))\Gamma(G_P(p)). \quad (3.45)$$

Les hypothèses sur  $F, G, \chi$  ainsi que celle sur  $\omega$  assurent que  $K(\theta, P, R, S)$  est compact pour toutes valeurs de  $\theta, P, R$  et  $S$ .

D'après les Lemmes 3.24 et 3.25, il existe  $\theta_0 > 0$  tel que, pour tout  $n$ , on a :

$$\|(1 - \chi(N \leq \theta))\psi_{\sigma_n}\| \leq \frac{1}{10}, \|(1 - \chi(H_0 \leq \theta))\psi_{\sigma_n}\| \leq \frac{1}{10}. \quad (3.46)$$

De même, en utilisant les Lemmes 3.26 et 3.27 et les inégalités (3.43) et (3.44), il existe  $R_0$  et  $P_0$  positifs tels que, pour tout  $n$ , on a :

$$\|(1 - \Gamma(G_R(x)))\psi_{\sigma_n}\| \leq \frac{1}{10}, \|(1 - \Gamma(G_P(p)))\psi_{\sigma_n}\| \leq \frac{1}{10}. \quad (3.47)$$

Enfin, en utilisant le Lemme 3.28 et (3.42), il existe  $S_0 > 0$  et  $n_0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$\|(1 - \Gamma(F_S(y)))\psi_{\sigma_n}\| \leq \frac{1}{10}. \quad (3.48)$$

On a alors, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \|\psi_{\sigma_n}\| &\leq \|(1 - \chi(N \leq \theta_0))\psi_{\sigma_n}\| + \|\chi(N \leq \theta_0)(1 - \chi(H_0 \leq \theta_0))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|\chi(N \leq \theta_0)\chi(H_0 \leq \theta_0)(1 - \Gamma(G_{R_0}(x)))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|\chi(N \leq \theta_0)\chi(H_0 \leq \theta_0)\Gamma(G_{R_0}(x))(1 - \Gamma(G_{P_0}(p)))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|\chi(N \leq \theta_0)\chi(H_0 \leq \theta_0)\Gamma(G_{R_0}(x))\Gamma(G_{P_0}(p))(1 - \Gamma(F_{S_0}(y)))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|K(\theta_0, P_0, R_0, S_0)\psi_{\sigma_n}\| \\ &\leq \|(1 - \chi(N \leq \theta_0))\psi_{\sigma_n}\| + \|(1 - \chi(H_0 \leq \theta_0))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|(1 - \Gamma(G_{R_0}(x)))\psi_{\sigma_n}\| + \|(1 - \Gamma(G_{P_0}(p)))\psi_{\sigma_n}\| \\ &\quad + \|(1 - \Gamma(F_{S_0}(y)))\psi_{\sigma_n}\| + \|K(\theta_0, P_0, R_0, S_0)\psi_{\sigma_n}\| \\ &\leq \frac{1}{2} + \|K(\theta_0, P_0, R_0, S_0)\psi_{\sigma_n}\|. \end{aligned}$$

Or  $\|\psi_{\sigma_n}\| = 1$  pour tout  $n$ , donc finalement, on a

$$\|K(\theta_0, P_0, R_0, S_0)\psi_{\sigma_n}\| \geq \frac{1}{2},$$

pour tout  $n \geq n_0$ , ce qui est bien une estimation du type (3.41).  $\square$

### 3.8 Perspectives

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, nos résultats sur la version quantique du modèle sont bien moins complets que dans le cas du modèle classique. D'une part, nous n'avons absolument pas traité le cas des potentiels linéaires, d'autre part, même en ce qui concerne les potentiels confinants, le phénomène de frottement linéaire et en particulier le coefficient de frottement  $\gamma$  n'apparaissent pas dans nos résultats. Pire, nous avons travaillé sous l'hypothèse que  $\gamma = 0$ . Nous souhaitons indiquer ici quelques pistes pour des recherches futures qui nous paraissent intéressantes.

Restons dans le cadre où le potentiel  $V$  est confinant. On sait alors que le spectre du hamiltonien  $H_p = -\Delta + V$  est purement discret. D'autre part le spectre du hamiltonien correspondant au champ libre est  $\sigma(H_f) = [0; +\infty[$ . Il est purement absolument continu exceptée une valeur propre simple en 0 (l'état propre correspondant est le vide). Si on regarde donc le système *particule-champ* sans mettre de terme d'interaction, le spectre est alors de la forme  $\sigma(H_0) = \sigma(H_p) + \sigma(H_f) = [E_p^0; +\infty[$ . En particulier, il possède des valeurs propres correspondant à celles de  $H_p$ , qui sont toutes plongées dans le spectre continu de  $H_0$ . Lorsque l'on "branche" l'interaction, on peut se demander ce que deviennent ces valeurs propres. Nous n'avons traité ici que la question de l'état fondamental. En particulier, on a vu que sous une certaine condition infrarouge celui-ci persistait.

Les autres valeurs propres sont plongées dans le spectre continu, on s'attend donc à ce que celles-ci disparaissent lorsqu'on branche l'interaction et se transforment en résonances. Cette question doit pouvoir être abordée en utilisant les méthodes développées dans [BFS1]-[BFS2]. En particulier, on peut espérer mettre en évidence un lien entre la largeur de ces résonances et le coefficient de frottement  $\gamma$  (en utilisant éventuellement  $c$  large).

Pour ce qui est des potentiels linéaires, le problème est encore plus ouvert, en ce sens que nous n'avons pas d'idée précise sur le genre de résultat mathématique que l'on peut espérer obtenir.

# Bibliographie

- [A1] Arai A., On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field, I, *Journal of Math. Phys.* **22**, 2539-2548 (1981).
- [A2] Arai A., Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a Non-Fock representation, *Rev. Math. Phys* **13**, 1075-1094 (2001).
- [AH] Arai A., Hirokawa M., On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, *J. Func. Anal.* **151**, 455-503 (1997).
- [B] Brezis H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson (1993).
- [BDB] Bruneau L., De Bièvre S., A Hamiltonian model for linear friction in a homogeneous medium, *Comm. Math. Phys.* **229**, 511-542 (2002).
- [BFS1] Bach V., Fröhlich J., Sigal I, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv.Math.* **137**, 299-395 (1998).
- [BFS2] Bach V., Fröhlich J., Sigal I, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Comm. Math. Phys.* **207**, 249-290 (1999).
- [C] Cesarie L., *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag (1963).
- [CEFM] Castella F., Erdős L., Frommlet F., Markovich P. A., Fokker-Planck equations as scaling limits of reversible quantum systems, *J. Stat. Phys.* **100**, 3-4, 543-601 (2000).
- [CH] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics (vol 2)*, Interscience (1962).
- [CL] Caldeira A.O., Leggett A.J., Quantum tunnelling in a dissipative system, *Annals of Physics* **149**, 374-456 (1983).

- [CT] Cohen-Tannoudji C., Cours de physique atomique et moléculaire, Cours du Collège de France (1988-1989).
- [D] Dereziński J., Van Hove Hamiltonians - exactly solvable models of the infrared and ultraviolet problem, preprint.
- [DDLL] De Smedt P., Dürr D., Lebowitz J.L., Liverani C., Quantum system in contact with a thermal environment : rigorous treatment of a simple model, *Comm. Math. Phys.* **120**, 195-231 (1988).
- [DG] Dereziński J., Gérard C., Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* **11**, 383-450 (1999).
- [DJ] Dereziński J., Jakšić V., Spectral theory of Pauli-Fierz operators, *J. Func. Anal.* **180**, 243-327 (2001).
- [FKM] Ford G.W., Kac M., Mazur P., Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators, *Journal of Math Phys*, **6**, 504-515 (1965).
- [FLM] Fisher W., Leschke H., Müller P., On the averaged quantum dynamics by white-noise Hamiltonians with and without dissipation, *Ann.Physik* **8**, 2, 59-100 (1998).
- [FLO1] Ford G.W., Lewis J.T., O'Connell R.F., Independent oscillator model of a heat bath : exact diagonalization of the Hamiltonian, *J.Stat.Phys.* **53**, 1/2, 439-455 (1988).
- [FLO2] Ford G.W., Lewis J.T., O'Connell R.F., Quantum Langevin Equation, *Phys Review A* **11**, 4419-4428, (1988).
- [Fr] Friedrichs K.O., *Mathematical aspects of quantum theory of fields*, New-York (1953).
- [G] Gérard C., On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri. Poincaré.* **1**, 443-459 (2000).
- [GJ] Glimm J., Jaffe A., The  $\lambda(\phi^4)_2$  quantum field theory without cutoffs II. The field operators and the approximate vacuum, *Ann. Math.* **91**, 362-401 (1970).
- [GLL] Griesemer M., Lieb E.H., Loss M., Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145**, 557-595 (2001).
- [H] Hale J., *Ordinary Differential Equations*, Robert E.Krieger Publishing Company (1969).
- [J] John F., *Partial differential equations*, Springer-Verlag (1971).
- [Ja] Jackson J.D., *Classical electrodynamics*, Wiley, New-York, 2nd edition (1975).

- [JP] Jakšić V., Pillet C.A., Ergodic properties of classical dissipative systems I, *Acta.Math.* **181**, 245-282 (1998).
- [KKS1] Komech A., Kunze M, Spohn H., Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field, *Comm. Partial Differential Equations* **22**, 307-335 (1997).
- [KKS2] Komech A., Kunze M, Spohn H., Effective dynamics for a mechanical particle coupled to a wave field, *Comm. Math. Phys.* **203**, 1-19 (1999).
- [KS1] Komech A., Spohn H., Soliton-like asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field, *Nonlinear Anal.* **33**, 13-24 (1998).
- [KS2] Komech A., Spohn H., Long-time asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations, *Comm. Partial Differential Equations* **25**, 559-584 (2000).
- [LM] Lions J. L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes* (vol 1), Dunod (1968).
- [LMS] Lörinczi J., Minlos R.A., Spohn H., The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri. Poincaré.* **3**, 269-295 (2002).
- [MaS] Mandl F., Shaw G., *Quantum Field Theory*, Wiley, New-York, revised edition (1993).
- [MS] Möhrig K., Smilansky U., A semi-classical treatment of dissipative processes based on Feynman's influence functional method, *Nucl. Phys. A* **338**, 227-268 (1980).
- [Ra] Rao M.R., *Ordinary differential equations. Theory and applications*, Edward Arnold (1981).
- [Ru] Rudin W., *Functional analysis*, McGraw Hill, New-York (1973).
- [RS1] Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics* (vol 1), Academic Press, London (1976).
- [RS2] Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics* (vol 2), Academic Press, London (1976).
- [S] Spohn H., *Dynamics of charged particles and their radiation field*, Notes de cours (Ecole d'été, Danemark, Août 2000).
- [VH] Van Hove L., Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié, *Physica* **18**, 145-152 (1952).

## Abstract

We introduce and study a Hamiltonian model of a particle submitted to an external potential and moving in a homogeneous dissipative medium in such a way that it experiences an effective *linear* friction force proportional to its velocity. The medium consists at each point in the space of a vibration field modelling an obstacle with which the particle exchanges energy and momentum. We are interested in the asymptotic behaviour of the particle and for two kinds of potential : linear potentials, *i.e.* constant external force, and confining potentials. We show that, for a large class of initial conditions and under some hypothesis on the parameter of the model (particularly the propagation speed of the waves in the medium), the particle has the same asymptotic behaviour as if it was obeying the equation :  $m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) - \gamma\dot{q}(t)$ , *i.e.* the particle feels a friction force  $-\gamma\dot{q}$  which sums up the effects of the reaction of the medium to the passage of the particle, where  $\gamma$  is a constant depending explicitly on the parameter of the model and independent of the potential. In particular, in the case of a constant external force  $F$ , the particle reaches an asymptotic velocity  $v(F)$  depending only on the force  $F$  and proportionnal to it. On the other hand, if the particle moves in a confining potential, we show that it will “stop” in one of the critical points of the potential.

We will also introduce the quantum version of this model. We first briefly present some theoretical tools necessary to its writing. We then precise what are the phase space and the quantum Hamiltonian. We prove the self-adjointness of this Hamiltonian and finally, we deal with the question of the existence of a ground state.