

n° ABph 156175

Université des Sciences et Technologies de LILLE

Laboratoire de Mécanique de Lille

# THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

*Discipline : Mécanique*

présentée et soutenue publiquement par

**Stéphane DECOSSIN**

le 2 décembre 2002

-----

## Etude de l'auto-organisation des structures tourbillonnaires bidimensionnelles localisées

-----

### JURY

*Rapporteurs :*

M. Armando BABIANO, Directeur de Recherche, CNRS,

Ecole Normale Supérieure, Paris

M. Gueorgui KHOMENKO, Professeur, Université du Littoral, Dunkerque

*Examineurs :*

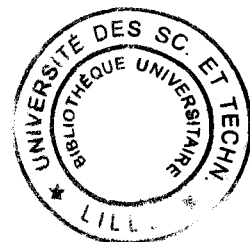
M. Pierre-Antoine BOIS, Professeur, Université de Lille 1

M. Daniel BUISINE, Professeur, Université de Lille 1

M. Guy CAIGNAERT, Professeur, E.N.S.A.M, Lille

*Directeur de thèse :*

M. Vadim PAVLOV, Professeur, Université de Lille 1



# Remerciements

Ce travail de recherche constitue l'aboutissement de trois ans de thèse effectués au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille.

Avant tout, je tiens à remercier Monsieur Vadim Pavlov, pour avoir accepté de diriger mes travaux de recherche. Je lui suis très reconnaissant pour l'encadrement dont j'ai bénéficié. Ses compétences scientifiques et ses qualités humaines m'ont apporté énormément et m'ont permis d'avancer de façon constante tout au long de ces trois années.

Je tiens également à remercier Monsieur Daniel Buisine pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences tant en analyse numérique qu'en informatique.

Qu'ils acceptent l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie également Messieurs Armando Babiano et Gueorgui Khomenko pour avoir accepté de rapporter ce travail et pour leurs remarques très constructives. J'ai été très flatté de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie vivement Monsieur Guy Caignaert pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie également Monsieur Pierre Antoine Bois pour avoir accepté d'examiner ce travail.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues du Laboratoire de Mécanique de Lille.

Pour conclure, je témoigne toute ma reconnaissance à ma famille et mes amis.

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>5</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre I Présentation et formulation du modèle mathématique</b>	<b>17</b>
I.1 Dynamique d'un fluide idéal en deux dimensions . . . . .	17
I.2 Particularités de la description du mouvement d'un fluide pour un très grand nombre de Reynolds . . . . .	19
I.3 Approche Hamiltonienne . . . . .	20
I.4 Version Hamiltonienne des équations de mouvement d'un fluide idéal . . .	23
I.4.1 Formulation . . . . .	23
I.4.2 Cas général . . . . .	23
I.4.3 Approximation bidimensionnelle . . . . .	25
I.5 Choix stratégique . . . . .	26
I.6 Concept des tourbillons ponctuels . . . . .	27
I.7 Description traditionnelle . . . . .	29
I.8 Difficultés liées au concept de tourbillons ponctuels . . . . .	31
I.9 Evolution des champs similaires aux champs tourbillonnaires : considération générale . . . . .	33
I.10 Champs similaires aux champs tourbillonnaires singuliers . . . . .	36
I.11 Formulation la plus simple de la dynamique des tourbillons . . . . .	37
I.12 Domaine infini . . . . .	38
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

<b>Chapitre II Mouvement des tourbillons en présence d'un bruit</b>	<b>45</b>
II.1 Introduction . . . . .	45
II.2 Equation d'évolution pour la probabilité de répartition de tourbillons . . .	46
<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>
<b>Chapitre III Est ce qu'une turbulence bidimensionnelle évolue vers un état final unique ?</b>	<b>55</b>
III.1 Problématique . . . . .	55
III.2 Expérience de plasma . . . . .	59
III.3 Résultats numériques et discussions . . . . .	60
<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>
<b>Chapitre IV Méthode d'auto-régulation</b>	<b>69</b>
IV.1 Avant-propos . . . . .	69
IV.2 Formulation de la méthode d'auto-régulation . . . . .	72
IV.2.1 Variation de l'énergie dans les expériences numériques . . . . .	72
IV.2.2 Détermination du correcteur . . . . .	73
IV.2.3 Condition d'application du correcteur . . . . .	75
IV.3 Equations de base pour un système de N tourbillons se mouvant dans un domaine borné. . . . .	76
IV.3.1 Fonction de Green . . . . .	76
IV.3.2 Forme intégrale de la fonction de Green . . . . .	79
IV.3.3 Système d'équations . . . . .	80
IV.4 Expérience numérique . . . . .	80
<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>
<b>Chapitre V Analyse des contraintes physiques d'un modèle pour des tourbillons s'organisant dans un domaine borné.</b>	<b>87</b>
V.1 Présentation du problème . . . . .	87
V.2 Difficultés numériques liées au problème . . . . .	89
V.3 Fonction de Green . . . . .	89

---

V.4	Formulation de la fonction de courant prise sur la frontière . . . . .	92
V.5	Hamiltonien . . . . .	93
V.6	Paradoxes . . . . .	95
V.7	Résolution possible des difficultés . . . . .	97
V.8	Equations de base en coordonnées polaires . . . . .	102
V.9	Détermination du pas de temps . . . . .	103
V.10	Expérience de plasma . . . . .	104
V.11	Expérience numérique, résultats et validation qualitative . . . . .	106
<b>Bibliographie</b>		<b>123</b>
<b>Conclusion générale</b>		<b>125</b>
<b>Annexe A Equations de transport de la turbulence</b>		<b>131</b>
<b>Annexe B Surfaces curvilignes</b>		<b>135</b>



# Préface

Ce travail de recherche porte sur l'étude théorique des phénomènes mettant en évidence l'auto-organisation de la turbulence en grandes structures tourbillonnaires.

Il est composé de plusieurs chapitres. Au travers de chacun d'eux, nous abordons quelques uns des aspects de ce thème général.

Les tourbillons à grande échelle et "à longue vie" sont présents dans de nombreux types d'écoulements hydrodynamiques. Le problème de la formation et de l'évolution de ces structures, connues en turbulence comme structures cohérentes, attire beaucoup l'attention. Les tourbillons à grande échelle sont largement observés dans les atmosphères planétaires et dans les océans (voir, par exemple, les livres de Gill, 1982 ; Robinson, 1983 ; Pedlosky, 1987 ; Ingersoll, 1990 et la bibliographie à laquelle ils font référence). D'une part, on observe ici des signes d'auto-organisation dans la Nature. D'autre part, les tourbillons atmosphériques et océaniques à grande échelle ont un intérêt très attractif dû au rôle qu'ils peuvent jouer, par exemple, dans le transport de chaleur, de polluants, de sel et d'autres propriétés.

Immédiatement, une question vient à l'esprit : sous quelles conditions les structures tourbillonnaires à grande échelle se forment-elles ?

Pour répondre à cette question, on utilise des approches diverses, en particulier, des méthodes de la mécanique statistique. Dans les approches statistiques traditionnelles, la turbulence est essentiellement considérée comme étant homogène et isotrope. Le sens physique (et les lois thermodynamiques) suggère qu'il est très difficile d'extraire l'énergie d'un système chaotique, sauf si le système en question possède des propriétés spécifiques additionnelles. La turbulence homogène et isotrope, qui ne possède ni d'échelles distinctes, et ni de directions privilégiées, est trop symétrique pour commencer à s'auto-organiser et donner naissance aux tourbillons à grande échelle ; l'auto-organisation semble être impro-

bable dans ce cas.

Il est évident que la "cassure" de la symétrie du système est une condition nécessaire pour l'auto-organisation.

Il est clair, par exemple, que le fluide turbulent avec une cassure de symétrie sphérique (approximation quasi-bidimensionnelle) peut être considéré comme un candidat adéquat d'un milieu où les tourbillons à grande échelle peuvent être organisés. Dans la ligne directe de cette remarque, nous considérons uniquement ici et après les structures *bidimensionnelles*, i.e., les écoulements qui surviennent communément dans la nature où les composantes de la vitesse horizontale sont dominantes par rapport à celles de la vitesse verticale.

Dans le contexte géophysique, il existe plusieurs raisons possibles pour la suppression d'une des composantes de la vitesse de l'écoulement : le mouvement bidimensionnel peut être causé par la nature bidimensionnelle prédominante du domaine de l'écoulement lui-même, lorsque l'échelle caractéristique horizontale de l'écoulement,  $L$ , surpasse largement celle verticale  $H_s$  (les modèles atmosphériques sont appelés à fine couche lorsque  $\epsilon = H_s/L \ll 1$ ). La possibilité de suppression peut être due à une forte stratification de densité, ou due à la rotation du système dans son ensemble, etc.

Dans un fluide conducteur électriquement (les écoulements de plasma dans les champs magnétiques), cette suppression est garantie par un fort champ magnétique. La suppression d'une composante de la vitesse est également observée dans les systèmes expérimentaux, incluant les fines couches des électrolytes, et les écoulements dans les "films de savon".

Dans les atmosphères et les océans de la Terre, les structures tourbillonnaires à grandes échelles quasi-bidimensionnelles sont abondantes. Les exemples de ces structures sont les anneaux du Golf Stream et les "lentilles" salées de la Méditerranée, le Tourbillon Polaire Antarctique et les cyclones tropicaux (voir figure 1), les "plumes" tournantes en convection turbulente, les taches sombres et brillantes dans les systèmes astrophysiques (où la rotation et les champs magnétiques jouent tous les deux un rôle), etc. Les modèles bidimensionnels,  $\epsilon = H_s/L \rightarrow 0$ , sont souvent appliqués à ces systèmes (voir Kamenkovich, 1977; Pedlosky, 1987, et la bibliographie à laquelle il est fait référence).

Pour les atmosphères, les échelles caractéristiques suivantes des variables de champ, basées sur les valeurs observées, peuvent être introduites (Holton, 1992) : l'échelle de la vitesse horizontale  $\langle v \rangle \sim 1 \div 10 \text{ ms}^{-1}$ , l'échelle de la vitesse verticale  $\langle w \rangle \sim 1 \text{ cms}^{-1}$ ,



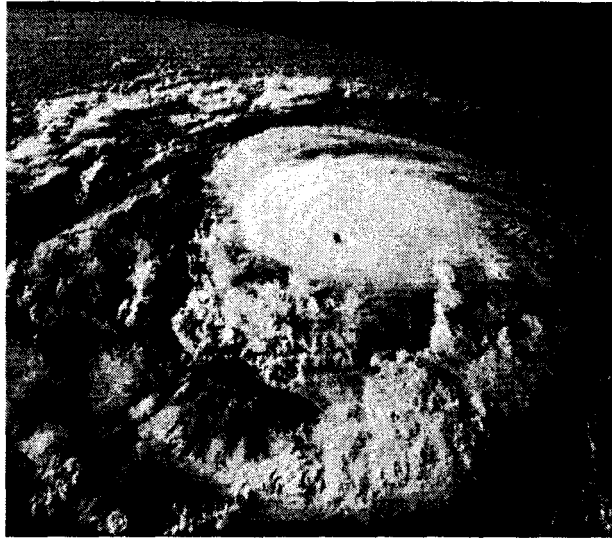


FIGURE 1: cyclone.

l'échelle de longueur  $H_s \sim 10^4 m$ . Tant que la composante de la vitesse verticale  $\langle w \rangle$  est petite,  $|w| \sim \epsilon$ , où  $\epsilon = H_s/L \ll 1$ , nous pouvons nous limiter à la première approximation en omettant les termes de l'ordre de  $\epsilon^2$  dans les équations de mouvement gouvernantes. Ainsi, l'évolution des plus grandes échelles, où  $L \gg H_s$  ( $L \ll R_0$ ) pour les grandes structures tourbillonnaires dans l'atmosphère, peut être considérée comme bidimensionnelle dans la première approximation.

La supposition que toutes les variables de champ sont indépendantes de la coordonnée  $z_3 = x_3$ , i.e. l'opérateur  $\partial_3 = 0$  pour toutes les variables de champ, conduit également aux modèles bidimensionnels et est largement utilisé dans les considérations théoriques (Milne-Thomson, 1968 ; Greenspan, 1968 ; Lavrent'ev et Shabat, 1973).

D'autre part, outre l'approximation *bidimensionnelle*, l'approximation d'un fluide *quasi-idéal* peut être utilisée. Elle est justifiée dans les écoulements réels, incluant ceux turbulents, si les échelles caractéristiques des structures tourbillonnaires sont plus grandes que les échelles caractéristiques des pulsations turbulentes (Pedlosky, 1987). Rappelons que les écoulements atmosphériques à grande échelle sont caractérisés par un très grand nombre de Reynolds  $Re = vL/\nu \gg 1$ . Si  $L \sim 10^5 m$ , et  $v \sim 1 m.s^{-1}$  (pour la Terre), même si la viscosité cinématique  $\nu$  est remplacée par une viscosité turbulente, on a  $Re \sim 10^6 : 10^8 \gg 1$ . Ces écoulements, avec de tels comportements, ont la propriété



FIGURE 2: *Circulation de l'atmosphère externe de Jupiter.*

frappante d'auto-organisation spontanée en larges structures tourbillonnaires cohérentes à grande échelle. Un exemple, bien connu en astrophysique, est la Grande Tache Rouge de Jupiter (voir figure 2), un grand tourbillon ayant des mouvements turbulents aux petites échelles très intenses, qui a persisté depuis plus de trois cents ans ; la présence d'une turbulence intense ne la détruit pas. Notons que même si un écoulement est turbulent (dû, par exemple, à une forte convection verticale), ceci ne signifie pas nécessairement que le mouvement régulier, mis sous forme *moyennée*, est absent. Dans ce cas, les équations de mouvement d'un fluide idéal (ou quasi-idéal avec une viscosité turbulente) sont connues comme étant une bonne approximation de la description des champs moyennés à grande échelle d'un écoulement turbulent.

Les écoulements d'Euler ( $Re \rightarrow \infty$ ) peuvent être considérés comme la limite non-visqueuse des écoulements de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnels. Ils sont souvent utilisés comme des modèles décrivant certains écoulements géophysiques et astrophysiques (Dritschel et Legras, 1993 ; Frisch, 1995 ; Marcus, 1988 ; Sommeria et al. 1988 ; Pavlov et al., 2001 ; Goncharov et Pavlov, 2001).

Une autre approximation utile est basée sur le remplacement du profil de la vitesse (ou vorticité) continue réelle par un *modèle de tache* avec une vorticité constante dans chaque tache (voir Zabusky et al., 1979 ; Saffman, 1992, et la bibliographie à laquelle il est

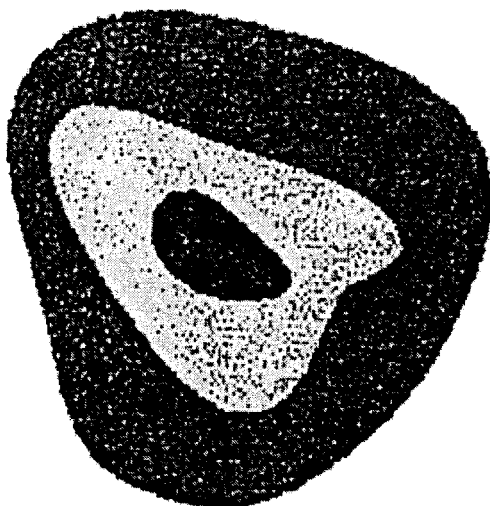


FIGURE 3: *Exemple de parcelle à trois niveaux de vorticité.*

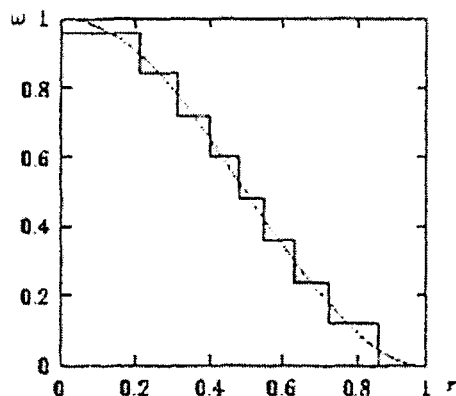


FIGURE 4: *Fonction en escalier permettant d'approximer une distribution continue de vorticité.*

fait référence). Les figures 3 et 4 présentent un exemple d'illustration de cette méthode. Ce modèle est valide lorsque les mouvements à grande échelle sont faiblement sensibles à la structure fine dans le champ de vitesse. Dans ce scenario, on peut s'attendre que même des approximations avec un nombre limité de taches, qui décrivent la structure générale du profil de la vorticité réelle, saisissent correctement la dynamique des structures tourbillonnaires à grande échelle.

Notons que le modèle, proposé dans les travaux référencés, permet de formuler la dynamique de l'écoulement en termes d'un petit nombre d'interfaces. Une telle possibilité est très attractive car la détermination de l'évolution des contours des structures tourbillonnaires se réalise dans le cadre des équations non-linéaires, intégro-différentielles, spatialement unidimensionnelles.

Cette approche est appelée la *méthode de la dynamique de contour*. Les équations de la dynamique de contour décrivent le mouvement auto-induit des frontières de la discontinuité de la vorticité (ou "contours") dans un fluide bidimensionnel, incompressible non-visqueux avec une distribution de vorticité "en escalier".

Rappelons que les comparaisons entre les résultats obtenus dans le cadre de la dynamique de contour et les simulations numériques traditionnelles (voir, par exemple, Zabusky

et al., 1979 ; Dritschel, 1988 ; Dritschel et McIntyre, 1990 ; Saffman, 1992, et les références présentes dans ces travaux) ont montré qu'ils étaient en accords satisfaisants pour les écoulements à un très grand nombre de Reynolds. Ainsi, il apparaît que beaucoup d'aspects généraux des écoulements quasi-parfaits, avec une vorticité distribuée de façon continue, peuvent être reproduits en utilisant la dynamique de contour avec un nombre modéré des niveaux de vorticité. Ces résultats suggèrent que la dynamique de contour peut être un outil analytique compétitif pour les problèmes d'intérêt scientifique, particulièrement en connection avec les écoulements à très grand nombre de Reynolds.

Une autre possibilité d'application est de construire une théorie en termes de *champs tourbillonnaires quasi-singuliers* (lignes tourbillonnaires dans le cas  $3D$ , ou tourbillons localisés en hydrodynamique  $2D$ ). Dans ce qui suit, nous appelons tourbillons localisés, des structures tourbillonnaires dont la vorticité est très concentrée et très élevée par rapport au reste du domaine d'écoulement. Contrairement à la méthode de la dynamique de contour qui permet d'étudier la déformation des domaine centraux des tourbillons, le modèle des tourbillons localisés ne considère pas de déformations des "noyaux" de ceux-ci. Ce modèle étudie seulement leurs déplacements, parfois très complexe, et leur auto-organisation.

Les exemples d'applications sont multiples et les études récentes (voir, par exemple, Shashikanth B. N. et al., The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Physics of Fluids*, **14**, 3, 1214 (2002) ; Buhler O., Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder, *Physics of Fluids*, **14**, 7, 2139 (2002), Atassi O. et al., The interaction of a point vortex with a wall-bounded vortex layer, *J. Fluid Mech.*, **343**, 169 (1997) ; Bell G. J., Interaction between vortices and waves in a simple model of geophysical flows, *Physics of Fluids*, **A5**, 575 (1990) ; Dezhe Z. et al., Point vortex dynamics within a background of vorticity patch, *Physics of Fluids*, **13** (3), 677 (2001) ; Schecter D. et al., Vortex crystals from  $2D$  Euler flows : experiment and simulations, *Physics of Fluids*, **11**, 905 (1999), etc.) montrent que ce type de modèle, malgré sa simplicité apparente, permet d'extraire les caractéristiques générales de nombre d'écoulements. Nous nous focalisons essentiellement, dans notre étude, sur les tourbillons localisés et les justifications sur ce choix de modèle seront présentés dans le premier chapitre.

Afin d'étudier les différents phénomènes tourbillonnaires, un outil de calcul analytique,

---

basé sur *l'Approche Hamiltonienne* a donc été mis au point.

Nous proposons un modèle guidé par la ligne directrice suivante.

Chaque modèle mathématique possède, soit une stabilité, soit une instabilité "structurelle". Donc, un modèle destiné à étudier un phénomène physique quelconque complexe doit être suffisamment simple, dit "rude". Cette idée appartient à L. Mandelstamm (voir également V. Arnold, Progrès des sciences mathématiques, 2002, YMH, 57, (4), 346, p.203). Cette idée sous-entend que la stabilité / instabilité structurelle du modèle mathématique est une propriété, non pas du système physique étudié, mais plutôt de nos questions posées concernant celui-ci. Si ces questions sont trop détaillées, trop "fines" (le modèle est donc complexe et contient beaucoup d'éléments), les réponses du modèle peuvent alors devenir "instables" s'il y a une petite perturbation dans un élément quelconque de celui-ci, même pour un système typique. L'art d'un chercheur doit donc se manifester dans le choix d'une description convenable du système physique, peut être moins détaillée, peut être plus "rude", qui serait déjà stable structurellement.

Guidé par cette idée, nous nous limitons aux plus simples modèles. Les limites de validité de ceux-ci, basées sur les approximations présentées ci-dessus, sont définies par l'objectif principal de notre travail : élucider les conditions qualitatives sous lesquelles une structure tourbillonnaire à grande échelle peut être formée. Au lieu d'amasser les détails concernant celle-ci, nous pensons qu'il est plus important de répondre à cette question d'importance pratique.

Dans ce travail, nous adoptons le plan suivant.

Dans le premier chapitre, nous définissons les aspects généraux de notre modèle ainsi que les caractéristiques et les avantages de celui-ci. Une analyse du concept de tourbillons localisés est également présenté dans ce chapitre. Ce point est essentiel afin de définir avec précision le cadre de notre étude.

Dans le second chapitre, nous montrons que le modèle de tourbillons localisés peut être appliqué à des problèmes autres que ceux liés à des écoulements de fluides parfaits. Pour cela, nous proposons, une formulation qui, dans le cadre du modèle des tourbillons localisés, peut permettre d'étudier les "écoulements visqueux".

L'objectif du chapitre trois est de déterminer l'existence ou non d'un état quasi-final lors de l'évolution d'une turbulence bidimensionnelle sous forme Eulérienne. Nous étudions dans ce chapitre le comportement d'un grand nombre de tourbillons se mouvant dans

un domaine infini. Après une validation du modèle à l'aide d'une comparaison avec des résultats d'une expérience de plasma, nous étudions une configuration initiale modifiée du système qui nous permet de montrer que le système "n'oublie pas" les conditions initiales.

Le chapitre quatre porte sur l'un des points essentiels de l'Approche Hamiltonienne : le respect des lois de conservation. Parfois, ces lois peuvent être mises en défaut lors d'une résolution numérique du problème.

Un modèle, basé sur des présomptions physiques, permettant de garantir le respect des lois de conservation durant tout le processus d'évolution est proposé. Nous présentons les "justifications physiques" de la méthode et sous quelle condition celle-ci peut être appliquée. Un exemple d'application, validé par une comparaison avec des résultats expérimentaux, est également présenté.

Le chapitre cinq a pour but d'étudier la dynamique d'un grand nombre de tourbillons se mouvant dans un domaine borné de forme circulaire. Nous insistons sur l'importance dans le choix du modèle en montrant que ce type de problème fait apparaître des difficultés non-négligeables et des *paradoxes* par rapport aux hypothèses liées au choix du modèle. Nous proposons une résolution possible de ces difficultés et appliquons le modèle dans le but de définir quelle "relations" peuvent exister entre l'état initial et l'état final.

Enfin, nous clôturons ce mémoire par un bref rappel des fondements de notre modèle et des résultats obtenus à l'aide de celui-ci. Nous évoquons également les perspectives possibles, notamment en astrophysique à l'aide d'une généralisation de l'Approche Hamiltonienne pour des surfaces curvilignes.

L'objectif principal de ce travail de recherche est d'analyser plus précisément le phénomène d'auto-organisation des structures tourbillonnaires localisées.

Précisons que nous ne nous intéressons pas aux détails des méthodes numériques, nous voulons uniquement étudier *le phénomène* par les moyens les plus simples et les plus adaptés au problème posé.

Nous montrons dans notre travail que s'il n'est pas tenu compte des fondements physiques du phénomène, on peut rencontrer des difficultés dans l'interprétation des résultats obtenus.

En effet, même si le phénomène d'auto-organisation semble bien compris, de nombreuses interrogations restent encore sans réponse. Parmi celles-ci, on peut se demander quelle "partie" de la turbulence s'auto-organise ? Est-ce toute la turbulence où uniquement

---

une fraction de celle ci ? L'apport de cette partie "active" dépend-t-elle des conditions initiales ? Plus précisément, peut-on déterminer le pourcentage des tourbillons "actifs" ? D'autre part, tout le monde sait que la turbulence s'organise en plusieurs "super tourbillons". On peut également se demander s'il est possible d'établir une relation entre le nombre de structures à grande échelle et les conditions initiales de l'écoulement ? En effet, quelque soit le problème physique, il doit être résolu en tenant compte des conditions initiales. Si celles-ci ne se manifestent pas dans l'étape quasi-finale du processus, on peut déduire l'existence d'un état final indépendant de ces conditions. On peut imaginer que cet état final est gouverné par les lois de la mécanique statistique des tourbillons. Remarquons à ce propos, que malgré de nombreux travaux sur ce sujet, jusqu'à présent, la réponse à cette question n'a pas été trouvée. La dernière interrogation à laquelle nous proposons de répondre est de déterminer l'influence des frontières sur la répartition finale des tourbillons. En effet, que ce soit un problème physique ou sa réalisation expérimentale, il doit être étudié avec la présence des frontières.

Le choix de *notre* modèle a donc été déterminé dans le but de répondre à ces questions, et uniquement celles-ci. L'intérêt particulier de *notre* modèle est qu'il permet d'étudier de façon générale les traits essentiels du phénomène de l'auto-organisation des tourbillons en respectant toutes les lois de conservation.

Les résultats de nos travaux ont fait l'objet de (i) publications dans des revues internationale et nationale avec comités de lecture [1, 2, 3]; (ii) publications à des congrès avec actes publiés [4]; communications à des congrès avec actes à diffusion restreinte [5, 6, 7, 8].





# Bibliographie

- [1] Pavlov V., Buisine D., Decossin S., Whether the two-dimensional Eulerian turbulence evolve to unique final state?, *Physics of Fluids*, **14**, 11, 3937 (2002).
- [2] Decossin S., Pavlov V., Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série Mécanique IIb*, **329**, 901 (2001).
- [3] Pavlov V., Buisine D., Decossin S., Instabilité et particularités de l'évolution d'une nappe tourbillonnaire, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série Mécanique IIb*, **330**, 757 (2002).
- [4] Decossin S., Pavlov V., Method of "self-regulation" describing an evolution of vorticity into bounded domain in the framework of the Hamiltonian Approach, *Euromech 9th European Turbulence Conference, Advances in Turbulence IX, CIMNE, Barcelona*, 879 (2002).
- [5] Pavlov V., Buisine D., Decossin S., Whether does the two-dimensional Eulerian turbulence evolve to unique final state?, *European Geophysical Society, Geophysical Research Abstracts*, **4**, section NP11, n<sup>o</sup>023 (2002).
- [6] Decossin S., Pavlov V., Hamiltonian Approach to motion of great number of vortices in presence of boundaries, *European Geophysical Society, Geophysical Research Abstracts*, **3**, section NP10, n<sup>o</sup>017 (2001).
- [7] Decossin S., Pavlov V., Buisine D., Formations de groupements de tourbillons se déplaçant sur une sphère, *Ateliers de modélisation de l'atmosphère, Centre National de Recherches Météorologiques*, 189 (2000).
- [8] Decossin S., Pavlov V., Dynamics of point vortices in a bounded domain, *European Geophysical Society, Geophysical Research Abstracts*, **2**, section NP8 n<sup>o</sup>019 (2000).



# Chapitre I

## Présentation et formulation du modèle mathématique

### I.1 Dynamique d'un fluide idéal en deux dimensions

Dans cette section, nous rassemblons quelques faits standards concernant les écoulements d'Euler en deux dimensions, qui constitue l'élément de base essentiel à notre étude. Une discussion détaillée des propriétés de l'écoulement d'Euler peut être trouvée dans les ouvrages [3, 25].

La vitesse bidimensionnelle est notée par  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ; le champ de vorticité  $\omega(\mathbf{x})$  est défini par

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \partial_x u_y - \partial_y u_x. \quad (\text{I.1})$$

Nous observons que, dans un système de coordonnées se déplaçant avec un élément (infinitésimal) de fluide  $\Gamma$ , la force sur l'élément fluide est donnée par (voir [25]),

$$-\oint_{\partial\Gamma} dSp = -\int_{\Gamma} dV \nabla p, \quad (\text{I.2})$$

où  $\partial\Gamma$  est la frontière de  $\Gamma$ , et l'équation de Newton s'écrit

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p. \quad (\text{I.3})$$

$D/Dt$  dénote une dérivée matérielle,  $p$  est la pression et  $\rho$  la densité.

Afin d'obtenir l'équation d'Euler, la dérivée matérielle peut être réécrite sous la forme

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \quad (\text{I.4})$$

Lorsque la densité  $\rho$  est constante, l'équation pour la conservation de la masse

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{u} = 0 \quad (\text{I.5})$$

donne la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{I.6})$$

En prenant le *rot* de l'équation d'Euler (I.4) et en utilisant la condition d'incompressibilité, nous obtenons en deux dimensions

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = 0, \quad (\text{I.7})$$

où  $D/Dt$  représente la dérivée convective de la vorticité. En deux dimensions, l'équation (I.7) est équivalente aux équations (I.4) et (I.6) (voir ci-dessous).

L'annulation de  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  en deux dimensions donne l'expression d'une fonction scalaire (la fonction de courant)  $\psi(\mathbf{x})$

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi \equiv (\partial_y\psi, -\partial_x\psi) \quad (\text{I.8})$$

et par conséquent  $\omega(\mathbf{x}) = -\nabla^2\psi(\mathbf{x})$ .

Quelque soit le contour fermé  $\partial\Gamma$  d'un domaine  $\Gamma$  se mouvant avec le fluide au temps  $t$ , la circulation

$$\Gamma = \oint_{\partial\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = \int_{\Gamma} d\mathbf{x}\omega \quad (\text{I.9})$$

est conservée par l'écoulement d'Euler. De plus, en deux dimensions, pour toute fonction  $f(\omega)$  du champ de vorticité, la quantité  $\int_{\eta(t)} f(\omega(\mathbf{r}))d^2r$  est conservée par l'écoulement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} d\mathbf{x}f(\omega(\mathbf{x})) = \int_{\Gamma} d\mathbf{x}f'(\omega(\mathbf{x})) \left[ \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega \right] = 0. \quad (\text{I.10})$$

Notons que si l'on prend  $f(\omega) = \omega^2$ , l'invariant de l'intégrale correspondante est appelé l'ensrophie.

Lorsque l'on considère des domaines avec des frontières rigides,  $\mathbf{u}$  est considérée comme étant tangente à la frontière  $\partial\Omega$  d'une région de plan  $\Omega$  contenant le fluide. Lorsque  $\Omega$  possède  $n$  "trous", nous pouvons définir les quantités  $\Gamma_n$  comme étant les circulations autour de chacun de ces trous. On observe alors que l'ensemble  $\omega(r)$  et  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  déterminent le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  [18].

## **I.2 Particularités de la description du mouvement d'un fluide pour un très grand nombre de Reynolds**

Le problème de l'explication de la nature de la turbulence est un des problème les plus actifs de la physique contemporaine et reste encore à ce jour non-résolu.

L'écoulement d'un fluide peut être caractérisé par un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie, qui tendent à désordonner l'écoulement, et de la viscosité qui tend à le stabiliser. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les instabilités apparaissent, se développent et le désordre s'installe progressivement pour aboutir à une turbulence dite "pleinement développée" où l'écoulement est alors complètement désordonné.

Pour les écoulements à *très grand nombre de Reynolds*, l'échelle de temps associée à l'évolution non-linéaire de l'écoulement est souvent bien plus petite que l'échelle de temps visqueux. Par conséquent, les effets de la viscosité peuvent être négligés dans les études théoriques correspondantes. Modéliser le comportement d'un fluide sur une base de modèle non-visqueux est une approximation raisonnable tant que le mécanisme de dissipation est considéré comme négligeable par rapport à la dynamique d'interactions.

Les méthodes permettant de décrire les systèmes hydrodynamiques parfaits sont multiples en dynamique des fluides.

L'une des plus utilisées au cours des siècles est basée sur les équations différentielles aux dérivées partielles écrites pour des grandeurs de champ (vitesse de l'écoulement d'un fluide, pression, etc). Cette approche a été validée, par exemple, dans le cas des écoulements laminaires visqueux.

En voulant décrire par cette méthode les écoulements turbulents à très grand nombre de Reynolds, les difficultés sont apparues.

La source principale de ces difficultés est contenue dans le choix non-adequate des variables de champ, par exemple, celui des composantes de la vitesse ou de la vorticité. Ces champs ont un comportement statistique dans les écoulements turbulents et ce fait entraîne une inutilité dans l'utilisation des équations différentielles. De plus, le nombre requis de degrés de liberté caractérisant des fluides excède les possibilités de n'importe quel ordinateur. A la condition d'une absence quasi-totale de dissipation, lorsque le nombre de Reynolds est très grand, l'utilisation des approches numériques traditionnelles est alors

extrêmement difficile.

En d'autres termes, les *particules fluides* ou les *modes ondulatoires* ne sont pas des structures élémentaires réels dans un écoulement turbulent lorsque le nombre de Reynolds est très grand (par exemple lorsque  $\ln Re \gg 1$ ). Le nombre de ces structures dans cette situation est trop grand, et toutes celles-ci interagissent très fortement entre elles, par conséquent, elles ne peuvent donc pas être considérées comme élémentaires.

Voilà pourquoi, il est nécessaire d'utiliser d'autres structures de base et de reformuler la dynamique des fluides en termes de celles-ci. Une possibilité est de construire une théorie en termes de champs tourbillonnaires quasi-singuliers (lignes tourbillonnaires dans le cas  $3D$ , ou tourbillons ponctuels en hydrodynamique  $2D$ ). Les exemples d'applications de cette approche peuvent être trouvés dans les travaux [3], [5], [10], [12], [28], [29].

Par rapport aux méthodes traditionnelles, cette méthode a l'avantage de pouvoir se débarrasser de la difficulté principale qui, rappelons le, réside dans le choix non-adéquate des variables de champ.

### I.3 Approche Hamiltonienne

Dans ce qui suit, nous utilisons l'Approche Hamiltonienne. Afin de ne pas tomber dans des malentendus terminologiques, il faut être prudent en utilisant la notion "hamiltonienne" : en effet, chacun sous-entend dans cette phrase sa propre vision de la méthode. C'est pourquoi, on peut avoir l'impression que l'approche dite "hamiltonienne" est bien connue depuis longtemps.

Il existe un grand nombre de papiers avec des titres ou l'adjectif "Hamiltonien" est utilisé (voir par exemple [19], [34], [35]). Voici pourquoi, lorsque l'on parle de méthode Hamiltonienne, il est nécessaire de définir quelle méthode est utilisée afin d'éviter tout "malentendu". Le vocabulaire joue également un rôle important : le "principe Hamiltonien" et la "description Hamiltonienne" peuvent correspondre à des approches différentes.

On utilise largement la méthode proposée par Kirchhoff pour l'étude de comportement des tourbillons ponctuels bidimensionnels (voir pour des références Kirchhoff [20], Lamb [23] ; la version mentionnée a été reprise par exemple par Onsager [29] pour la construction de la mécanique statistique des tourbillons ; les applications possibles peuvent être trouvées dans [2], [6]). Toutefois, insistons sur le fait qu'en parlant de l'approche "hamiltonienne"

traditionnelle, on ne parle en réalité que d'une analogie : le mouvement des singularités d'un champ hydrodynamique n'est que *similaire* en un certain sens au mouvement des particules en mécanique classique de Hamilton.

Dans la mécanique classique (soit de Lagrange, soit de Hamilton) des *particules*, on opère, en principe, avec les variations des positions et *vitesse*s des particules (accéléra-tions), tandis que dans le concept "classique" des *tourbillons ponctuels*, il n'y a aucune accélération (voir la section I.10 portant sur la formulation particulière de la dynamique des tourbillons). Kirchhoff fut probablement le premier à remarquer que la fonction de courant se manifeste dans le problème d'une description du mouvement des singularités bidimensionnelles comme quelque chose de *similaire* à l'Hamiltonien - cette analogie est utile, largement utilisée, mais elle ne permet pas d'avancer dans la compréhension du sens physique des résultats obtenus.

Voilà pourquoi, nous présentons dans cette partie la version de l'Approche Hamilto-nienne utilisée dans notre étude. Nous mettons en évidence ce qui la différencie des autres méthodes ainsi que les avantages non-négligeables dont elle bénéficie.

L'Approche Hamiltonienne pour des systèmes hydrodynamiques doit être formulée dès le début en termes de grandeurs énergétiques : c'est l'énergie totale du système hy-drodynamique qui doit servir d'Hamiltonien du système. Des systèmes hydrodynamiques possèdent la variété infinie et continue de degrés de liberté : les équations canoniques décrivant le mouvement d'un système hydrodynamique doivent être formulées en termes de dérivées fonctionnelles.

La version de la description Hamiltonienne utilisée dans notre étude provient des équations d'évolution [10],

$$\partial_t v_i = \{v_i, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{v_i, v'_j\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v_j(\mathbf{x}')} \quad (\text{I.11})$$

Ici,  $\{v_i(\mathbf{x}), v_j(\mathbf{x})\}$  est le crochet fonctionnel de Poisson,  $\mathcal{H}$  est l'Hamiltonien du système hydrodynamique.

Cette description Hamiltonienne est obtenue à partir de présomptions basées sur la physique concernant le type d'évolution des systèmes hydrodynamiques et de leurs pro-priétés internes.

L'approche Hamiltonienne a été initialement développée en dynamique des fluides comme une méthode résolvant des problèmes hydrodynamiques concrets. Par exemple,

elle apparaît comme étant très efficace dans la détermination des équations d'évolution non-linéaires pour des ondes interagissantes (pour des détails, voir [38]).

L'élaboration et l'utilisation avec succès des variables canoniques afin d'étudier les ondes gravitationnelles de surface [37] présenta l'un des exemples les plus marquants de l'application de l'Approche Hamiltonienne en hydrodynamique et donna un élan afin d'élaborer la théorie générale d'onde pour les moyennes dispersives non-linéaires dans le cadre du *formalisme canonique Hamiltonien*.

Il a été immédiatement noté que la méthode Hamiltonienne possède un certain nombre d'avantages par rapport aux autres méthodes. Les caractéristiques essentielles de la méthode sont sa richesse conceptuelle, son universalité et son adaptabilité.

En particulier :

- L'approche Hamiltonienne n'est pas attachée au choix particulier des "coordonnées de champ". Cette indépendance vis à vis de ces coordonnées de champ permet d'obtenir une formulation générale de l'approche. Cette propriété provient de la "non-destruction" des crochets fonctionnels de Poisson.
- Beaucoup de versions de la théorie des perturbations peuvent être simplifiées et standardisées à l'aide de l'Approche Hamiltonienne.
- La méthode est plutôt "économique" car le développement asymptotique peut être effectué dès le début.
- Le sens physique des résultats des calculs obtenus pour un système particulier peut être facilement exploité.
- Cette formulation a pour avantage de respecter toutes les lois de conservation. Nous reviendrons sur ce point essentiel par la suite.

Notons qu'en physique classique, beaucoup des modèles conservatifs, qui utilisent un concept de champ, conduisent à une structure Hamiltonienne cachée.

Le point essentiel dans la formulation de la méthode est la détermination des crochets fonctionnels de Poisson (voir, pour la formulation la fin du chapitre). Ce problème a donc été essentiel pour le développement de la méthode Hamiltonienne.

Une procédure régulière permettant de déterminer de façon exacte les variables canoniques a été développée [10].

L'approche Hamiltonienne (I.11) a offert une nouvelle vision des résultats "familiers" et mérite une attention particulière. Une évidence est que l'approche Hamiltonienne, réunie



avec les méthodes de la mécanique classique moderne, constitue un outil puissant pour la recherche en dynamique des fluides. Les lois de conservation, les conditions de stabilité, les approximations asymptotiques et les transformations de variable (largement utilisées) suscitent une motivation logique et une transparence qui est souvent manquante quand les manipulations correspondantes sont directement appliquées aux équations d'évolution traditionnelles.

## I.4 Version Hamiltonienne des équations de mouvement d'un fluide idéal

### I.4.1 Formulation

Nous illustrons l'idée de base de l'Approche Hamiltonienne, appliquée aux systèmes avec un nombre continu de degrés de liberté, en commençant par le modèle classique tridimensionnel des écoulements incompressibles qui est gouverné par les équations

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = \partial_\alpha (\rho^{-1} p + \chi), \quad \partial_\beta v_\beta = 0. \quad (\text{I.12})$$

Ici,  $v_\alpha$  sont les composantes de la vitesse ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) dans le système de coordonnées cartésiennes,  $\partial_t$  est la dérivée partielle de la variable de champ par rapport au temps, et  $p$  est la pression. En aval, toutes les valeurs seront normalisées sur la densité  $\rho$ . La convention de sommation est appliquée aux indices répétitifs lorsque la notation tensoriel est utilisée. Le système conserve l'énergie cinétique de l'écoulement

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} v^2. \quad (\text{I.13})$$

Ici,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ .

Les équations de base (I.12) peuvent être réécrites pour la vorticité  $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$  (voir [11], [13], [14], [30]) dans la forme Hamiltonienne comme

$$\partial_t \Omega_\alpha = \{\Omega_\alpha, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega'_\beta}. \quad (\text{I.14})$$

### I.4.2 Cas général

Le crochet dans l'équation (I.14),  $\{\Omega_\alpha(\mathbf{x}), \Omega_\beta(\mathbf{x}')\}$ , est antisymétrique, local, et est défini pour le modèle donné par l'expression

$$\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\} = \varepsilon^{\alpha\sigma\gamma} \varepsilon^{\gamma\lambda\nu} \varepsilon^{\beta\nu\mu} \partial_\sigma \Omega_\lambda \partial_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{I.15})$$

Ici, et par la suite, un "prime" signifie que les variables de champ dépendent de la coordonnée d'espace  $\mathbf{x}'$ ,  $\varepsilon^{\alpha\mu\beta}$  est le tenseur de Levi-Civita.

Démontrons la relation (I.15) qui est essentielle dans la discussion pour la suite de ce chapitre.

L'équation de mouvement de base (I.12) peut être réécrite sous la forme

$$\partial_t v_i = \varepsilon^{ijk} \Omega_j v_k - \partial_i \left( p + \chi + \frac{v^2}{2} \right). \quad (\text{I.16})$$

En appliquant à cette équation l'opérateur  $\partial_i$  et en utilisant la fonction de Green définie par  $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , nous obtenons

$$p + \chi + \frac{v^2}{2} = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial'_m (\varepsilon^{mjk} \Omega'_j v'_k). \quad (\text{I.17})$$

Le système (I.12) peut être réécrit comme suit :

$$\partial_t v_i = \{v_i, H\}. \quad (\text{I.18})$$

Ici,

$$\{v_i, H\} = \int d\mathbf{x}' \{v_i, v'_k\} \frac{\delta H}{\delta v'_k} = \int d\mathbf{x}' \{v_i, v'_k\} v'_k, \quad (\text{I.19})$$

où le résultat suivant a été utilisé :

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta v'_j} &= \frac{\delta}{\delta v'_j} \int d\mathbf{z} \frac{v^2(\mathbf{z})}{2} = \int d\mathbf{z} v_k(\mathbf{z}) \frac{\delta v_k(\mathbf{z})}{\delta v'_j} = \\ &= \int d\mathbf{z} v_k(\mathbf{z}) \delta_{jk} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}') = v'_j. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

A partir de (I.16) – (I.19), nous trouvons

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{x}' v'_k \{ \{v_i, v'_k\} - \\ &- \varepsilon^{ijk} \Omega'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \partial_i \varepsilon^{mjk} \Omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

En utilisant  $\partial_m v_m = 0$ , nous obtenons que

$$\begin{aligned} &\{v_i, v'_k\} = \\ &= \varepsilon^{ijk} \Omega'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \partial_i \varepsilon^{mjk} \Omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial'_k A_i, \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

et, évidemment,

$$\begin{aligned} \{v'_k, v_i\} &= \varepsilon^{kji} \Omega_j \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \\ &+ \partial'_k \varepsilon^{mji} \Omega_j \partial'_m G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) + \partial_i A'_k. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Le crochet fonctionnel de Poisson satisfait la condition  $\{v_i, v'_k\} = -\{v'_k, v_i\}$ . Cette condition permet de calculer la fonction  $A_i$ , qui est donnée par  $A_i = -\varepsilon^{mji} \Omega_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

Finalement, nous pouvons écrire l'expression pour le crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} \{v'_k, v_i\} &= \varepsilon^{kji} \Omega_j \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \\ &+ \partial_i \varepsilon^{mjk} \Omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - \partial'_k \varepsilon^{mji} \Omega_j \partial'_m G(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

L'expression (I.24) montre que le crochet de Poisson pour la vitesse hydrodynamique n'est pas local, c'est à dire que les équations de mouvement exprimées en termes de vitesse hydrodynamique uniquement, ne sont pas locales également. Ceci signifie que les équations différentielles ne peuvent pas être exprimées à l'aide d'un nombre fini de termes avec des dérivées (ceci vient du fait que la vitesse est définie sous forme intégrale à l'aide de la fonction de Green).

En appliquant à (I.24) les opérateurs  $(rot)_i \dots = \varepsilon^{ijk} \partial_j \dots$  et  $(rot')_i \dots = \varepsilon^{ijk} \partial'_j \dots$ , nous éliminons les termes  $\partial_i A$  et  $\partial'_k A'_i$ , et obtenons l'expression de base :

$$\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\} = \varepsilon^{\alpha\sigma\gamma} \varepsilon^{\gamma\lambda\nu} \varepsilon^{\beta\nu\mu} \partial'_\sigma \Omega'_\lambda \partial_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{I.25})$$

### I.4.3 Approximation bidimensionnelle

S'il n'y a qu'une composante de vorticité,  $\Omega = (0, 0, \Omega)$ , nous obtenons la structure plus simple

$$\{\Omega, \Omega'\} = \varepsilon^{ik} \partial'_i \Omega' \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{I.26})$$

Ici,  $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = +1$ , et  $\varepsilon^{jk} \partial_j \partial'_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ . L'équation d'évolution est

$$\partial_t \Omega = \{\Omega, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{\Omega, \Omega'\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega'} = \varepsilon^{ik} \partial_i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega} \partial_k \Omega. \quad (\text{I.27})$$

Le système du modèle donne un exemple de système Hamiltonien avec un crochet de Poisson non-trivial (dépendant fonctionnellement des variables de champ).

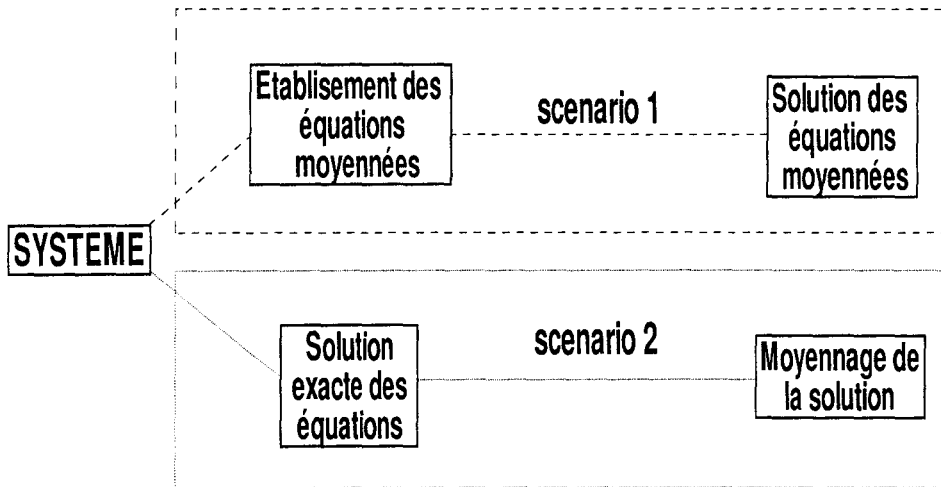


FIGURE I.1: Comparaison des schémas de résolution des systèmes d'équations dans le cadre du modèle des tourbillons ponctuels par rapport aux méthodes traditionnelles.

L'Hamiltonien pour le domaine bidimensionnel

$$H = \frac{1}{2} \int dx v^2 = \frac{1}{2} \int dx [\psi \Omega + div(\dots)]$$

peut être réécrit uniquement en termes de vorticité et de fonction de courant comme

$$H = \frac{1}{2} \int dx dx' \Omega \Omega' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (I.28)$$

où la vorticité  $\Omega$  et la fonction de courant  $\psi$  sont les fonctions aux coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  dans le plan horizontal et sont reliées par  $\Omega = -\Delta\psi$ ,  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$  est l'opérateur de Laplace bidimensionnel. Ici,  $dx = dx_1 dx_2$ , et après la normalisation par rapport à la densité, la dimension de l'Hamiltonien est  $[H] = ML^2T^{-2}M^{-1}L^3L^{-1} = L^4T^{-2}$ .

## I.5 Choix stratégique

Soient un phénomène physique et un modèle mathématique permettant de mettre en évidence les traits essentiels de ce phénomène étudié. On peut citer comme exemple la turbulence et les équations d'Euler pour sa description.

Il existe deux grands types de scénarios qui sont utilisés dans le but d'étudier le phénomène physique. La figure I.1 présente, de façon simplifiée, ces deux types de schémas de résolution.

Le premier scénario, consiste, dans un premier temps, à *moyenner les équations de l'évolution du système*. On introduit par exemple, dans ce cas, des tenseurs de Reynolds pour les modèles de turbulence, les schémas de fermeture divers, etc (voir en annexe A pour une description générale). Puis, à partir de ces équations moyennées est trouvée la solution. Ce type de schéma, utilisé très couramment et avec succès, ne permet toutefois pas de mettre en évidence certains phénomènes importants, tels que, par exemple, les événements "catastrophiques" ( i.e., les événements qui se développent en intervalles de temps courts, dans des domaines très localisés, lorsque les dérivées correspondantes atteignent des très grandes valeurs). Ceci est dû au moyennage des équations qui est équivalent à une sorte de "lissage", empêchant ainsi à ces phénomènes de se manifester.

Pour le second scénario, on procède de façon différente. On cherche tout d'abord des solutions "exactes" du modèle mathématique proposé. La solution est donc déterminée à partir des équations initiales, et le principe de moyennage n'est appliqué qu'à la fin. Notons que rien ne garantit que cette solution est identique à celle obtenue lors du premier cas.

Dans le second cas, une solution exacte peut donc être déterminée et cet avantage non-négligeable justifie en partie le fait que nous choisissons, dans notre étude, d'appliquer ce schéma. Un exemple de modèle mathématique qui satisfait à ce type de schéma est le modèle des tourbillons ponctuels qui sont les solutions exactes des équations d'Euler.

## I.6 Concept des tourbillons ponctuels

Notre étude porte essentiellement sur l'étude de phénomènes tourbillonnaires à l'aide du modèle des tourbillons ponctuels. Ceux-ci sont définis comme étant les solutions exactes des équations d'Euler, on se trouve alors dans le second type de scénario présenté dans la section précédente.

Ce choix de modèle a également été motivé par le fait observé qui est que les écoulements sont fréquemment dominés par des régions concentrées de vorticité. Les résultats expérimentaux ainsi que les calculs numériques montrent que la vorticité n'est pas distribuée de façon homogène dans l'espace [32] (voir figure I.2).

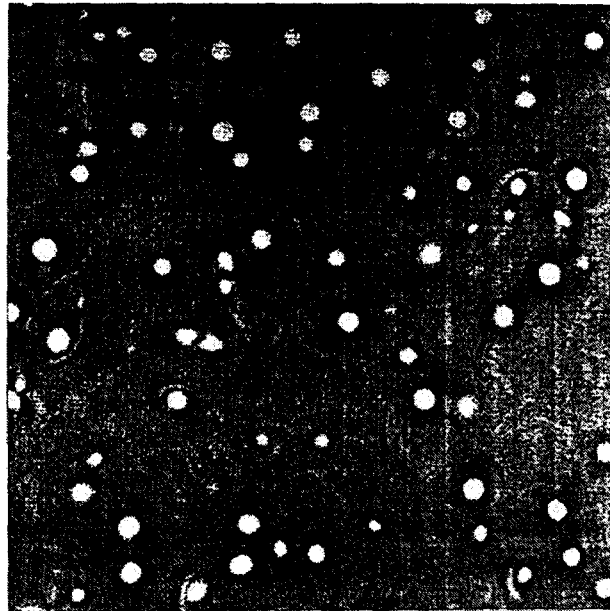


FIGURE I.2: Champ du paramètre  $Q$  de Okubo-Weiss pour le champ de vorticité (voir [32]).

Dans beaucoup de situations, la dynamique des tourbillons de taille finie peut être raisonnablement bien approximé par les modèles de tourbillons ponctuels, réduisant ainsi l'étude du champ au simple système Hamiltonien de  $N$  particules interagissantes entre elles [9],[26],[36]. La dynamique des tourbillons ponctuels est un élément essentiel des modèles Hamiltoniens, qui a été utilisé avec succès pour décrire l'évolution de la turbulence  $2D$  après l'émergence des tourbillons [4], [7], [8].

Ici, la vorticité est concentrée en singularités quasi-ponctuelles qui se meuvent par leur advection mutuelle, et le fluide entre ces singularités est complètement passif [1]. Les tourbillons ponctuels ont été choisis pour étudier le comportement des tourbillons étendus de la turbulence  $2D$  pour des temps limités, leur inconvénient principal étant le manque d'interactions inélastiques tourbillon-tourbillon et de fusion. Des tentatives pour étendre la dynamique des tourbillons ponctuels en incluant la fusion de tourbillons ont été discutées dans le travail [4]. Notons que, ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de l'advection de particules passives pour des systèmes de tourbillons ponctuels (voir par exemple [22]).

## I.7 Description traditionnelle

Rappelons quelques résultats bien connus. Dans un fluide incompressible bidimensionnel, le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  peut être écrit en termes d'une fonction de courant sous la forme

$$\mathbf{u} = -\mathbf{z} \times \nabla \psi \quad (\text{I.29})$$

où  $\mathbf{z}$  est un vecteur unité normal à l'écoulement.

La fonction de courant est reliée à la vorticité  $\omega \mathbf{z} = \nabla \times \mathbf{u}$  par l'équation de Poisson

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (\text{I.30})$$

obtenue en prenant le *rot* de l'équation (I.29).

On peut considérer la situation dans laquelle la vitesse est créée par une collection de  $N$  tourbillons ponctuels d'égale intensité  $\gamma$ . Dans ce cas, le champ de vorticité peut être exprimé comme une somme de fonction  $\delta$  sous la forme

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \gamma \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)], \quad (\text{I.31})$$

où  $\mathbf{x}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]$  est la position du tourbillon au temps  $t$ . Sa vitesse est donnée par

$$\mathbf{V}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = -\mathbf{z} \times \nabla \psi(\mathbf{x} = \mathbf{x}_i, t), \quad (\text{I.32})$$

où  $\psi$  est une solution de l'équation de Poisson (I.30) avec un champ de vorticité (I.31). Dans un fluide infini, on a

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)|. \quad (\text{I.33})$$

Par conséquent, la vitesse d'un tourbillon ponctuel est égale à la somme des vitesses  $\mathbf{V}(j \rightarrow i)$  produites par les  $N - 1$  autres tourbillons, i. e.,

$$\mathbf{V}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{V}(j \rightarrow i) \quad (\text{I.34})$$

avec

$$\mathbf{V}(j \rightarrow i) = -\frac{\gamma}{2\pi} \mathbf{z} \times \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2}. \quad (\text{I.35})$$

La dynamique décrite ci-dessus peut être mise sous la forme "Hamiltonienne" [20] :

$$\gamma \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \gamma \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (\text{I.36})$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \gamma^2 \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)|, \quad (\text{I.37})$$

où les coordonnées  $(x, y)$  des tourbillons ponctuels sont canoniquement conjuguées. Ces équations de mouvement s'appliquent encore lorsque le fluide est restreint par des frontières, dans ce cas l'Hamiltonien (I.37) est modifié; il peut être construit en termes de fonction de Green dépendant de la géométrie du domaine.

Il est facile de montrer que la distribution exacte des tourbillons ponctuels exprimée en termes de fonction  $\delta$

$$\omega_{exacte}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \gamma \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)], \quad (\text{I.38})$$

est une solution exacte de l'équation d'Euler,

$$\frac{\partial \omega_{exacte}}{\partial t} + \mathbf{u}_{exacte} \nabla \omega_{exacte} = 0, \quad (\text{I.39})$$

où  $\mathbf{u}_{exacte}$  est le champ de vitesse exact déterminé par les équations (I.29), (I.30) et (I.38). En effet, en prenant la dérivée de l'équation (I.38) en fonction du temps, nous obtenons

$$\frac{\partial \omega_{exacte}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^N \gamma \nabla \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \mathbf{V}_i. \quad (\text{I.40})$$

En utilisant  $\mathbf{V}_i = \mathbf{u}_{exacte}(\mathbf{x}, t)$ , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\partial \omega_{exacte}}{\partial t} = -\nabla \sum_{i=1}^N \gamma \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \mathbf{u}_{exacte}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{I.41})$$

Pour un fluide incompressible, on obtient

$$\frac{\partial \omega_{exacte}}{\partial t} = -\mathbf{u}_{exacte}(\mathbf{x}, t) \nabla \sum_{i=1}^N \gamma \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] = -\mathbf{u}_{exacte} \nabla \omega_{exacte} = 0. \quad (\text{I.42})$$

Par conséquent, l'équation d'Euler (I.39) avec les équations (I.29), (I.30) et (I.31) contient exactement la même information que le système Hamiltonien des équations (I.36) et (I.37).

Evidemment, le modèle des tourbillons ponctuels offre des modèles mathématiques commodes où l'on néglige les effets des noyaux finis de tourbillons.



## I.8 Difficultés liées au concept de tourbillons ponctuels

Faisons ici quelques commentaires au sujet des difficultés liées au concept de tourbillons ponctuels :

- Dans la description traditionnelle expérimentale, les écoulements résultants comportent des distributions continues de vortacité. Comment peut-on approximer une distribution continue de vortacité par des moyens de tourbillons ponctuels ?

La réponse peut être comme suit : la signification physique a seulement fait la distribution moyenne  $\langle \Omega \rangle = \int_{\Sigma} d\sigma \Omega$ , où la taille caractéristique de la moyenne spatiale,  $(\Sigma)^{1/2}$ , satisfait la condition  $(D/N)^{1/2} \ll (\Sigma)^{1/2} \ll D^{1/2}$ . Ici,  $N$  est le nombre total de tourbillons,  $D$  la surface du domaine où les tourbillons sont localisés. Le procédé de moyennage ne doit être appliqué qu'après le calcul de  $\Omega$ .

- Pour un champ de vortacité constitué de tourbillons ponctuels les intégrales de n'importe quelle puissance finie de la vortacité impliquent des puissances des fonctions delta et sont donc singulières. Pourtant, dans le cas du modèle physique typique, le champ de vortacité a des moments parfaitement bien définis. Comment peut-on définir ces intégrales et moments ?

L'interprétation des intégrales est simple si nous utilisons la considération suivante (voir [24]) :

$$\int dx \delta^n(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx \delta_{\epsilon}^{n-1}(0) \delta(x). \quad (\text{I.43})$$

Ici,  $\delta_{\epsilon}(x)$  est une fonction delta "spreaded" avec  $\delta_{\epsilon}(0) = \epsilon^{-1}$  et la condition de normalisation  $\int dx \delta_{\epsilon}(x) = 1$ .  $\epsilon$  est l'échelle caractéristique du domaine où la fonction delta "spreaded" est localisée. Ainsi nous obtenons

$$\int dx \delta^n(x) = \epsilon^{-(n-1)} \int dx \delta(x) = \epsilon^{-(n-1)}. \quad (\text{I.44})$$

Si  $\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  (pour la description bidimensionnelle), nous obtenons le bilan estimatif pour le moment

$$K^{(n)} = \int d\mathbf{x} \Omega^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^n \sigma^{-(n-1)}. \quad (\text{I.45})$$

Ici,  $\sigma$  est l'aire caractéristique du domaine occupée par un tourbillon localisé. Le nombre  $N$  de tourbillons est choisi arbitrairement, tandis que leurs intensités sont fixées par le nombre de moments  $K^{(n)}$  en question.

Les paramètres  $\gamma_i$  sont trouvés en résolvant l'ensemble des équations

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i^j = \sigma^{j-1} K^{(j)}, j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{I.46})$$

Ce système peut se mettre, pour  $N$  tourbillons, sous la forme

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N &= M^{(1)} \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_N^2 &= M^{(2)} \\ \dots & \dots \dots = \dots \\ \dots & \dots \dots = \dots \\ \dots & \dots \dots = \dots \\ \dots & \dots \dots = \dots \\ \dots & \dots \dots = \dots \\ \gamma_1^N + \gamma_2^N + \dots + \gamma_N^N &= M^{(N)}. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

A l'aide de la méthode classique de substitution, il est possible d'établir, à partir du système (I.47), un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des moments  $M^{(i)}$ . Le système (I.47) devient équivalent à l'équation

$$P_N(\gamma) = \gamma^N + \mathcal{A}_1 \gamma^{N-1} + \mathcal{A}_2 \gamma^{N-2} + \dots + \mathcal{A}_{N-1} = 0. \quad (\text{I.48})$$

A partir des valeurs des différents moments mesurables (circulation, énergie, entropie, etc...), il est donc possible de déterminer les intensités de chaque tourbillon qui permettent de définir le champ de vitesse du fluide.

A titre d'exemple, on présente les polynômes correspondants respectivement à un système de deux, trois et quatre tourbillons :

$$\begin{aligned} P_2 &= \gamma^2 - M^{(1)}\gamma + \frac{1}{2}[M^{(1)2} - M^{(1)}] \\ P_3 &= \gamma^3 - M^{(1)}\gamma^2 + \frac{1}{2}[M^{(1)2} - M^{(1)}]\gamma - \frac{1}{6}[M^{(1)3} - 3M^{(1)}M^{(2)} - 4M^{(3)}] \\ P_4 &= \gamma^4 - M^{(1)}\gamma^3 + \frac{1}{2}[M^{(1)2} - M^{(1)}]\gamma^2 + \frac{1}{6}[M^{(1)3} - 3M^{(1)}M^{(2)} - 4M^{(3)}]\gamma \\ &\quad - \frac{1}{24}[M^{(1)4} - 6M^{(1)2}M^{(2)} + 3M^{(2)2} + 8M^{(1)}M^{(3)} - 6M^{(4)}]. \end{aligned}$$

- La troisième particularité consiste à définir correctement la fonction delta (notamment pour un tourbillon ponctuel) dans les domaines bornés. En effet, la prise en compte des conditions aux frontières n'est pas une chose facile.

## I.9 Evolution des champs similaires aux champs tourbillonnaires : considération générale

Les modèles décrivant les systèmes bidimensionnels appelés "vorticiens" (Vortex Like systems), sont gouvernés par l'équation d'évolution

$$\partial_t \Omega + (\partial_2 \psi) \partial_1 \Omega - (\partial_1 \psi) \partial_2 \Omega = 0, \quad (\text{I.49})$$

où le champ ("vorticité généralisée")  $\Omega$  et la fonction de courant  $\psi$ , avec  $v_i = \epsilon^{ij} \partial_j \psi$ ,  $i, j = 1, 2$ , sont reliés par la relation de l'opérateur,

$$\Omega = \hat{L}(\psi). \quad (\text{I.50})$$

Pour l'équation bidimensionnelle d'Euler,  $\Omega = -\Delta\psi$ , et  $\hat{L}(\psi) \equiv -\Delta\psi$ . Il existe d'autres modèles, par exemple, les modèles définis à l'aide de l'opérateur  $\hat{L} = -(\Delta - 1/a^2)$  : (i) le modèle de plasma basé sur l'équation de Hasegawa-Mima [17] (ii) le modèle axial des tourbillons électroniques [21] (iii) le modèle barotropique quasi-géostrophique [31], etc. Il existe une situation plus complexe [15], [27].

Le modèle gouverné par (I.49) - (I.50) donne un exemple de système Hamiltonien avec un nombre continu de degrés de liberté (voir [10]).

Rappelons que ces systèmes Hamiltoniens évoluent donc selon la loi

$$\partial_t u_i = \{u_i, H\} = \int d\mathbf{x}' \{u_i, u'_j\} \frac{\delta H}{\delta u_j(\mathbf{x}')}, \quad (\text{I.51})$$

où l'Hamiltonien du système,  $H$ , est la quantité - énergie - dépendant fonctionnellement des champs,  $u_i$ , l'opérateur  $\delta/\delta u$  est l'opérateur de la dérivée fonctionnelle. Les dérivées des variables dynamiques,  $F[u]$ , sont calculées en utilisant la relation  $\delta u_i(\mathbf{x})/\delta u_j(\mathbf{x}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ .

La structure Hamiltonienne du système, avec un nombre continue de degrés de liberté, est constituée de l'Hamiltonien donné par l'énergie totale,  $H$ , et le crochet fonctionnel de Poisson  $\{., .\}$ . Ce crochet est antisymétrique bilinéaire et satisfait l'identité fonctionnel de Jacobi présenté symboliquement sous la forme suivante :

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (\text{I.52})$$

La conservation de l'énergie provient de la formulation donnée des équations gouvernantes

$$\frac{dH}{dt} = \partial_t H + \{H, H\} = 0, \quad (\text{I.53})$$

si,

$$\partial_t H = 0. \quad (\text{I.54})$$

Les détails de ce sujet ont été présentés dans les travaux [12], [30].

Pour les écoulements bidimensionnels rotationnels, les équations d'évolution (I.49) - (I.50) peuvent être réécrites sous la forme Hamiltonienne (voir section I.4)

$$\partial_t \Omega = \{\Omega, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{\Omega, \Omega'\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega'} = \epsilon^{ik} \partial_i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega} \partial_k \Omega, \quad (\text{I.55})$$

avec les crochets fonctionnels de Poisson

$$\{\Omega, \Omega'\} = \epsilon^{ik} \partial'_i \Omega' \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{I.56})$$

et l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega'. \quad (\text{I.57})$$

La fonction de Green est la solution de l'équation

$$\hat{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{I.58})$$

Ces équations de mouvement peuvent être appliquées lorsque le fluide est confiné dans un domaine borné, dans ce cas, l'Hamiltonien est modifié et doit être déterminé en termes de fonction de Green dépendant de la géométrie du domaine.

Les équations nonlinéaires (I.55)–(I.58) peuvent être résolues approximativement uniquement.

Deux obstacles sont rencontrés dans les applications des méthodes approximatives aux systèmes fluides. Tout d'abord, les fluides ont un nombre infini de degrés de liberté. Ensuite, les fluides parfaits ont un nombre infini d'intégrales de mouvement (circulation, enstrophie, et autres moments dynamiques) et de "Casimirs"  $C_k$  (les "Casimirs" du crochet fonctionnel de Poisson satisfont la condition  $\{u_i, C_k\} = 0$  [11]). Les "trajectoires" dans

l'espace de phase infini-dimensionnel sont les intersections du nombre infini de surfaces correspondant aux intégrales de mouvement. C'est une question intéressante de savoir si tous les invariants sont nécessaires pour décrire la physique du système tourbillonnaire bidimensionnel.

Ce fait est dû à la formulation des équations de mouvement du fluide en termes de dérivés fonctionnelles (I.55).

Quoi qu'il en soit, dans ce cas, une application formelle des méthodes approximatives aux systèmes hydrodynamiques avec un nombre continu de degrés de liberté, avec *des crochets fonctionnels de Poisson dépendants des champs* (par exemple similaire à (I.56), c'est à dire sous la forme *non canonique*) peut amener à des équations qui n'ont pas la forme conservative : la perte de la conservativité dans les systèmes de Liouville est fréquemment observé dans les expériences numériques. Cette perte de conservativité, de même qu'une violation possible dans ces simulations de la propriété de Jacobi, (I.52), peut avoir lieu, non pas à cause des changements physiques dans le système, mais est due aux erreurs numériques accumulées dans un schéma de calcul.

Cette remarque a une signification particulière dû au fait que l'on utilise des modèles discrets avec une correspondance adéquate avec les analogies continues.

Une sélection des méthodes approximatives ou numériques imposent une exigence spéciale sur la structure du crochet fonctionnel de Poisson (I.56) : les méthodes approximatives sont effectivement plus réalisées dans le contexte de la formulation *canonique* lorsque, dans ce cas, les crochets de Poisson sont indépendants des variables de champs (pour les détails, voir [11]). Dans ce cas, seul un objet pour l'approximation reste : l'Hamiltonien.

Pour cette raison, il est préférable de formuler les équations d'évolution pour les champs similaires aux champs tourbillonnaires dans cette direction que les crochets fonctionnels de Poisson sont indépendants des champs.

Un chemin possible afin d'éviter les difficultés possibles est de construire une troncature des équations d'Euler qui respectent automatiquement toutes les intégrales de mouvement du fluide et qui ont un nombre fini de degrés de liberté  $N$ . En sachant que la théorie formulée peut être aussi bien étendue aux champs continus et aux systèmes de tâches [13], [14], qu'aux champs singuliers [30], nous fixons notre intérêt aux champs singuliers.

Par exemple, dans le cas bidimensionnel, une possibilité pour la troncature est d'approximer le champ de vorticit   à l'aide du modèle de tourbillon ponctuel : (i) les tourbillons

ponctuels sont les solution exactes de solutions d'Euler, (ii) ils respectent toutes les intégrales de mouvement du fluide. Si  $N \rightarrow \infty$ , la solution converge vers la solution des équations d'Euler [5], [16]. Les tourbillons ponctuels sont d'excellents candidats sur le rôle des structures élémentaires. L'avantage principal des tourbillons ponctuels, dans ce contexte, est leur localisation aux petites échelles. Rappelons que, à la condition d'une quasi-absence de dissipation, lorsque le nombre de Reynolds est extrêmement grand, l'utilisation d'autres approches numériques traditionnelles est extrêmement difficile.

Naturellement, les modèles avec des champs singuliers présentent des modèles mathématiques commodes dans les situations pour lesquelles les effets des noyaux des tourbillons peuvent être considérés comme négligeables.

## I.10 Champs similaires aux champs tourbillonnaires singuliers

Considérons le champ "tourbillonnaire" singulier (voir I.50),

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_{(i)} \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)}). \quad (\text{I.59})$$

Ici,  $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)})$  est la fonction de Dirac bidimensionnelle. Dans ce cas, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \{\Omega, \Omega'\} = \\ \sum_{m,n}^l \sum_{i,k} \gamma_{(m)} \gamma_{(n)} \partial_k \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial'_i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\}. \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

En substituant cette expression dans (I.56) et en comparant les coefficients des fonctions delta et de leurs dérivées, on trouve que les crochets de Poisson, pour les coordonnées des tourbillons singuliers, sont donnés par la formule :

$$\{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\} = \gamma_{(m)}^{-1} \delta_{mn} \epsilon^{ik}. \quad (\text{I.61})$$

Le point crucial de cette formulation est que les crochets de Poisson sont indépendants des variables de champ.

Pour trouver l'équation de mouvement des singularités de champ, nous calculons au départ  $\partial_t x_i^{(m)}$ . Nous obtenons que

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \partial_t \Omega' = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega', \mathcal{H}\}. \quad (\text{I.62})$$

Tenant compte des lois de la dérivation fonctionnelle, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega', \mathcal{H}\} &= \{x_i^{(m)}, \mathcal{H}\} = \\ &= \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}}, \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

et en utilisant (I.61), nous trouvons finalement que :

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}} = \gamma_{(m)}^{-1} \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j^{(m)}}. \quad (\text{I.64})$$

## I.11 Formulation la plus simple de la dynamique des tourbillons

Prenons un cas simple. Si  $v_i = \epsilon_{ij} \partial_j \psi$ ,  $\Omega = -\Delta \psi$ , l'Hamiltonien –énergie totale du système–  $\mathcal{H} = (1/2) \int d\mathbf{x} v^2 = -(1/2) \int d\mathbf{x} \psi \Delta \psi$ , peut être présentée, dans le cas d'un plan infini comme  $(1/2\pi) \sum_{i,j}' \gamma_{(i)} \gamma_{(j)} \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ . Ici,  $-(1/2\pi) \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  est la fonction de Green,  $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  : solution de l'équation  $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , où  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est la fonction de Dirac dans le plan infini.

Les équations de mouvement sont données par (I.64).

Cette formulation spéciale correspond exactement au concept traditionnel pour les tourbillons ponctuels se déplaçant dans un plan infini  $x_0y$  (voir [23],[33]). Le résultat classique de Kirchhoff (1876) statue que les équations du mouvement du tourbillon ponctuel peuvent être écrites  $\gamma_i \partial_t x_i = \partial \psi / \partial y_i$ ,  $\gamma_i \partial_t y_i = -\partial \psi / \partial x_i$ , où la fonction de courant  $\psi = \psi(x_i, y_i)$  est fréquemment appelée " l'énergie cinétique d'interaction". Notons toutefois que la fonction de courant n'évoque pas une énergie "cinétique" des tourbillons dans le sens usuel. Ceci est lié au fait particulier qu'un tourbillon ponctuel produit une vitesse, et non une accélération : certes le terme  $\gamma_i \partial_t x_i$  a la dimension d'une accélération,  $[L][T]^{-2}$ , mais celui-ci n'est pas une accélération. C'est la vitesse de déplacement du tourbillon

multiplié par un facteur,  $\gamma_i$ , qui a la dimension  $[T]^{-1}$ . Les tourbillons ponctuels forment donc un système Hamiltonien très particulier.

Des élaborations plus complexes peuvent être analysées également. La théorie générale des mouvements tourbillonnaires basée sur (I.55)–(I.58), peut être généralisée pour des situations plus intéressantes : les tourbillons sur la sphère [30], les tâches tourbillonnaires, la dynamique de contour Hamiltonienne [13], [14], etc.

## I.12 Domaine infini

A titre d'exemple, nous présentons dans cette partie le cas des mouvements bidimensionnels de fluide dans un domaine infini.

La fonction de Green est alors définie par l'expression

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (\text{I.65})$$

Pour  $N$  tourbillons, d'intensités  $\gamma_j$ , localisés en  $\mathbf{x}_j(t)$ , l'Hamiltonien est donné par l'expression

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N -\gamma_i \gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad (\text{I.66})$$

L'Hamiltonien peut être symétrisé en fonction des permutations  $i \leftrightarrow j$ . La fonction de courant est évidemment  $\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^N [\gamma_j \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|]$ . L'équation de mouvement est donnée par (I.64) :

Si nous considérons le système de  $N$  tourbillons identiques ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N = \Gamma/N$ ), l'Hamiltonien devient

$$\mathcal{H} = -\frac{\Gamma^2}{4\pi N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad (\text{I.67})$$

On introduit ainsi cette forme de l'Hamiltonien dans le système d'équations défini précédemment (I.64).

Si, par défaut, nous associons une fonction de courant à la vorticit e par la relation  $\Omega = (\nabla^2 - 1/R^2)\psi$  (pour l'écoulement d'Euler, il faut choisir  $R \rightarrow \infty$ ), l'Hamiltonien devient

$$\mathcal{H} = -\frac{\Gamma^2}{4\pi N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \mathcal{K}_0 \left( \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R} \right). \quad (\text{I.68})$$



---

La fonction de Bessel  $\mathcal{K}_0(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/R)$  est la fonction de Green de l'opérateur  $(\bar{\nabla}^2 - 1/R^2)$ .

La différence essentielle entre cet Hamiltonien et celui déduit des équations d'Euler est que, pour le premier, les interactions longue portée sont négligeables :  $\mathcal{K}_0(x) \sim \sqrt{\pi/2x}e^{-x}$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Pour une courte portée, les interactions sont de même nature ( $\mathcal{K}_0(x) \sim -\ln x$  lorsque  $x \rightarrow 0$ ).



# Bibliographie

- [1] Aref H., Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 345-389 (1983).
- [2] Babiano A., Boffetta G., Provenzale A., Vulpiani A., Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **6**, 7 (1994).
- [3] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 537 (1967).
- [4] Benzi R., Colella M., Briscolini M., Santangelo P., A simple point vortex model for two-dimensional decaying turbulence, *Phys Fluids A*, **4**, 1036-1039 (1992).
- [5] Berdichevsky V. L., Statistical mechanics of point vortices, *Phys. Rev. E*, **51**, 5, 4432 (1995).
- [6] Brands H., Chavanis P. H., Pasmanter R., Sommeria J., Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, *Physics of Fluids***11**, no 11 (1999).
- [7] Christiansen J. P., Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortex, *J. Comput. Phys.*, **16**, 363 (1973).
- [8] Cléments R. R., Maull D. J., The representation of sheets of vorticity by discrete vortices, *Prog. Aeronaut. Sci.*, **16**, 129-146 (1975).
- [9] Dritschel D. G., A general theory of two-dimensional interactions, *Journ. Fluid. Mech.*, **293**, 269-303 (1995).
- [10] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **16**, no 4, 509-555 (1997).
- [11] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Vortex structures generated by a coastal current in harbour-like basins at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **351**, 201 (1997).

- [12] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Two-dimensional vortex motions of fluid at large Reynolds numbers, *Phys. Fluids*, **10**, no 9, 2384 (1998).
- [13] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Large-scale vortex structures in shear flows, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **19**, 831 (2000).
- [14] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Multipetal vortex structures in two-dimensional models of geophysical fluid dynamics and plasma, *JETP*, **119**, no 4, 685 (2001).
- [15] Gruzinov A. V., Contour dynamics of the Hasegawa-Mima equation, *JETP Lett.*, **55**, no 1, 75 (1992).
- [16] O. H. Hald, "Convergence of vortex methods II", *SIAM, J. Sci. Comput.* **16**, 726 (1979).
- [17] Hasegawa A., Mima K., Stationary spectrum of strong turbulence in magnetized nonuniform plasma, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 205 (1977).
- [18] Holm D. Marsden J. E., Ratiu T. et Weinstein A., Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, *Phys. Rep.*, **123**, 1-6 (1985).
- [19] Holm D., Zeitlin V., Hamiltonian principle for quasigeostrophic motion, *Phys. Fluids A*, **10**, n0 4, 800-806 (2000).
- [20] Kirchhoff G. R., *Vorlesungen uber Mathematische Physik*, Teubner, Leipzig (1876).
- [21] Krall N. A., Trivelpiece A. W., *Principles of Plasma Physics.*, McGraw-Hill Book Company (1973).
- [22] Kuznetsov L., Zaslavsky G. M., Chaotic dynamics of passive particles in three-vortex systems. I : Dynamical analysis, *chaos, Kinetics, and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas*, ed. S Benkadda, GM Zaslavsky, Berlin : Springer-Verlag, 119-131 (1998).
- [23] Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge University Press (1932).
- [24] Landau L. et Lifshitz E. M., *Théorie des champs*, Edition MIR Moscou, (1970).
- [25] Landau L. et Lifshitz E. M., *Mécanique des fluides*, Edition MIR Moscou, 314-44 (1971).
- [26] Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. M., Motion of three vortices near collapse, *Physics of Fluids*, **12**, 8, 1911-1927 (2000).

- 
- [27] Marcus P. S., Numerical simulation of Jupiter's Great Red Spot, *Nature*, London, **331**, 693 (1988).
- [28] Miller J., Weichman P. B., Cross M. C., Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, *Phys. Rev. A*, **45**, no 4, 2328 (1992).
- [29] Onsager L., Statistical hydrodynamics, *Nuevo Cimento Suppl.*, **6**, 279 (1949).
- [30] Pavlov V. I., Buisine D., Goncharov V. P., Formation of vortex clusters on a sphere, *Nonlin. Proc. in Geophysics*, **8**, 9 (2001).
- [31] Pedlosky J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York (1987).
- [32] Provenzale A., Transport by coherent barotropic vortices, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 55–93 (1999).
- [33] Saffman P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992).
- [34] Salmon R., Hamiltonian Fluid mechanics, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **20**, 225–256 (1988).
- [35] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D., The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Physics of Fluids*, **14**, no 3, 1214–1227 (2002).
- [36] Zabusky N. J., Mc Williams J. C., A modulated point-vortex model for geostrophic,  $\beta$ -plane dynamics, *Phys. Fluids*, **25**, 2175 (1982).
- [37] Zakharov V. E., Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**, 190-194 (1968).
- [38] Zakharov V. E., Musher S. L., Rubenchik A. M., Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena, *Phys. Rep.*, **5**, no 129, 287–366 (1985).



# Chapitre II

## Mouvement des tourbillons en présence d'un bruit

### II.1 Introduction

Un des buts principal de la théorie de la turbulence est de déterminer l'équation pour des *caractéristiques moyennées* de l'écoulement du fluide. Dans cette section, l'équation moyennée "exacte" est déduite du modèle d'un "gaz de tourbillons".

Si le nombre de tourbillons est très grand, il est raisonnable d'introduire une fonction de distribution décrivant la probabilité de leur répartition dans l'espace. Dans cette section, nous déduisons l'équation d'évolution temporelle de cette fonction. Nous montrons également, comment, dans le cadre du modèle des tourbillons ponctuels, nous pouvons décrire l'écoulement "visqueux".

On peut introduire deux niveaux de description du mouvement du fluide. Le premier niveau, *microscopique*, concernant le mouvement du fluide à petite échelle, décrit, dans le cadre de notre modèle, ce qui se passe à la petite échelle du chaos ("vacuum") turbulent. Le niveau *macroscopique* décrit, quand à lui, ce qui se passe à grande échelle, c'est à dire vu de loin, lorsque les détails du mouvement sont ignorés. Le passage des tourbillons localisés (des objets "microscopiques") au champ moyenné de vitesses (une structure "macroscopique") est *analogue* à celui qui mène de la description du mouvement des molécules gazeuses aux termes de leurs coordonnées et vitesses à la pression.

De même, on déduit le champ de vitesse de l'écoulement par la valeur moyenne (sta-

tistique) de la vorticité localisée dans les tourbillons. Le champ moyenné des vitesses ainsi calculé n'est pas uniforme, il se caractérise par la présence de structures tourbillonnaires quasi-organisées.

## II.2 Equation d'évolution pour la probabilité de répartition de tourbillons

Nous choisissons donc d'utiliser une approche statistique en déterminant l'équation d'évolution de la probabilité de leur répartition.

Considérons un ensemble de  $N$  tourbillons ponctuels dont les vitesses de leurs mouvements propres ne sont plus égales à la vitesse du fluide aux lieux mêmes de la position de leurs centres. Ils sont perturbés par des "bruits" blancs indépendants  $s_i^{(n)}(t)$ .

Dans le cadre du modèle des tourbillons ponctuels, les équations de mouvement en présence de "bruit" prennent la forme [3, 6] (voir le chapitre précédent)

$$\partial_t q_i^{(n)} = \frac{1}{\gamma^{(n)}} \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i^{(n)}} + s_i^{(n)}(t). \quad (\text{II.1})$$

où  $\gamma^{(n)}$  représente l'intensité du tourbillon ( $n$ ) et  $\epsilon^{ij}$  le tenseur de Levi-Civita.

Le sens physique de ces équations consiste en ce que la vitesse de déplacement du tourbillon  $n$  (le terme  $\partial_t q_i^{(n)}$ ) est définie par la vitesse totale de l'écoulement dans l'endroit où se trouve celui-ci.

On sait que la vitesse totale peut être présentée comme une somme :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(t)} + \mathbf{v}^{(s)}$ , où  $div \mathbf{v}^{(t)} = 0$  et  $rot \mathbf{v}^{(s)} = 0$ . En effet, de la formule  $\Delta \mathbf{v} = \nabla div \mathbf{v} - rot rot \mathbf{v}$ , c'est à dire, en introduisant la fonction de Green

$$\mathbf{v} = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{v}' div' \mathbf{v}' - \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') rot' rot' \mathbf{v}', \quad (\text{II.2})$$

on voit que la vitesse de l'écoulement comporte deux composantes : potentielle et rotationnelle. La vitesse est déterminée par le champ induit par les tourbillons lorsque  $rot \mathbf{v}^{(t)} \neq 0$  (il s'agit d'une composante incompressible, quand  $div \mathbf{v}^{(t)} = 0$ ). Dans l'équation (II.1), il s'agit du premier terme contenant  $\mathcal{H}$ . Outre cela, l'écoulement est défini par la composante potentielle de la vitesse,  $s_i^{(n)}(t)$ , (il s'agit donc d'une composante qui vérifie une



condition  $rot \mathbf{v}^{(s)} = 0$ ). Dans ce qui suit, cette composante est supposée être définie dans le sens statistique.

Désignant par  $\langle \dots \rangle$  l'opérateur de moyennage statistique par rapport aux coordonnées initiales, et supposons que, dans ce sens, la composante du "bruit" de la vitesse, complémentaire et extérieure, de l'écoulement vérifie les conditions

$$\begin{aligned} \langle s_i^{(n)} \rangle &= 0, \\ \langle s_i^{(n)}(t), s_j^{(m)}(t') \rangle &= 2\nu \delta_{ij} \delta(t - t') \delta_{nm} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

qui correspondent respectivement à la condition d'une moyenne nulle, et à la présence d'un "bruit blanc".

Il s'agit donc d'un modèle similaire au modèle de type Langevin : le système est excité par des bruits extérieurs.

Il apparaît clairement de l'équation (II.1) que lorsqu'un tourbillon effectue un mouvement "Brownien", la distribution dans l'espace d'un grand nombre de tourbillons va tendre vers une solution similaire à celle de l'équation de la chaleur, d'où l'interprétation de la solution en termes de "viscosité" devient inévitable.

L'objectif de ce chapitre est essentiellement de donner les arguments qu'une simulation à l'aide de l'équation (II.1) permet d'approcher les solutions des équations de Navier Stokes (voir [1]).

Introduisons une fonction-indicatrice de la position d'un tourbillon

$$J(\mathbf{x}, t) = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}(t)). \quad (\text{II.4})$$

Introduisons également la densité de probabilité en la définissant par l'expression :

$$n^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \langle \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}(t)) \rangle. \quad (\text{II.5})$$

Remarquons que

$$\int d\mathbf{x} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}(t)) = 1, \quad \text{et} \quad \int d\mathbf{x} n^{(n)}(\mathbf{x}, t) = 1. \quad (\text{II.6})$$

L'intensité moyenne de vorticité,  $\langle \Omega \rangle$ , est donc calculée d'après la formule

$$\langle \Omega \rangle = \sum_i \gamma_i n^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.7})$$

Faisons quelques calculs préliminaires en rappelant quel est le rapport de l'équation (II.1) avec les équations de Navier-Stokes.

Sachant que pour un champ  $u_i(t)$ , on a :  $\delta u_i(t)/\delta u_i(t') = \delta_{ij}\delta(t-t')$ , nous pouvons trouver :

$$\partial_s \frac{\delta q_i^{(n)}(s)}{\delta f_k^{(m)}(t')} = \frac{1}{\gamma^{(n)}} \epsilon^{ij} \frac{\delta}{\delta f_k^{(m)}(t')} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i^{(n)}} + \delta(s-t') \delta_{ik} \delta_{mn}. \quad (\text{II.8})$$

En intégrant l'équation (II.8) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_k^{(m)}(t')} = \underbrace{\{\dots\}}_{(*)} + \frac{1}{\gamma^{(n)}} \theta(t-t') \delta_{ik} \delta_{mn}. \quad (\text{II.9})$$

Le terme entre crochets (\*) ne présente pas d'intérêt pour nous car c'est le cas  $t' \rightarrow t$  qui nous intéresse dans ce qui suit. Si  $t' \rightarrow t$ , la valeur de ce terme (borné) est multipliée par  $\Delta t = t - x$  et devient donc négligeable. Dans ce cas,  $\theta(t-t') \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Par conséquent, on trouve que :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \left[ \frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_k^{(m)}(t')} \right] = \frac{1}{2\gamma^{(n)}} \delta_{ik} \delta_{mn}. \quad (\text{II.10})$$

Ce résultat sera utilisé dans la déduction de l'équation d'évolution de probabilité de distribution de vorticité.

En dérivant l'expression (II.5) et en introduisant l'équation (II.1), on trouve :

$$\gamma^{(n)} \partial_t n^{(n)}(\mathbf{x}, t) = -\gamma_{(i)} \partial_i \underbrace{\langle s_i^{(n)}(t) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle}_{(1)} - \partial_i \underbrace{\langle \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle}_{(2)} \quad (\text{II.11})$$

Calculons tout d'abord le terme (1) dans l'équation (II.11). En appliquant la formule de Furutsu-Novikov [2, 4, 5] pour des processus gaussiens

$$\langle s_i^{(n)}(t) F[s] \rangle = - \sum_j \int dt' \langle \frac{\delta F[s]}{\delta s_j^{(m)}(t')} \rangle \langle s_i^{(n)}(t) s_j^{(m)}(t') \rangle, \quad (\text{II.12})$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle s_i^{(n)}(t) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle &= -2\nu \partial_j \langle \frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_j^{(n)}(t')} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle \\ &= -\nu \partial_j n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Le terme (2) de l'équation (II.11) est déterminé en exprimant l'hamiltonien à l'aide de la fonction de Green.

En utilisant les propriétés de la fonction de Dirac, on obtient :

$$\begin{aligned}\epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}} &= \epsilon^{ij} \gamma^{(n)} \sum_{m=1}^{N'} \gamma^{(m)} \frac{\partial}{\partial q_j^{(n)}} G(\mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{q}^{(m)}) \\ &= \epsilon^{ij} \gamma^{(n)} \sum_{m=1}^{N'} \gamma^{(m)} \int d\mathbf{x}' \frac{\partial G(\mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{x}')}{\partial q_j^{(n)}} \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)})\end{aligned}$$

Le terme (2) de l'équation (II.11) devient alors :

$$\begin{aligned}\langle \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}} \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(n)}) \rangle &= \\ \epsilon^{ij} \gamma^{(n)} \sum_{m=1}^{N'} \gamma^{(m)} \int d\mathbf{x}' \frac{\partial G(\mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{x}')}{\partial q_j^{(n)}} \langle \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(m)}) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}) \rangle.\end{aligned}\quad (\text{II.14})$$

Dans notre cas, compte tenu de l'interaction à longue distance des tourbillons dont "l'énergie de l'interaction" individuelle est ( $\sim \ln|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^{(m)}|$ ), on peut présenter des arguments que les tourbillons sont fortement influencés, non pas par les tourbillons voisins, mais par les tourbillons se trouvant aux grandes distances.

En effet, nous justifions nos propos en considérant un grand nombre de tourbillons répartis de façon homogène et positionnés autour d'un tourbillon ( $i$ ) (voir figure II.1). En considérant  $n$  la concentration des tourbillons et  $2\pi r dr$  le "volume" dans lequel ceux-ci se trouvent, le champ de vitesse, là où se trouve le tourbillon ( $i$ ), dû à l'influence de l'ensemble des autres tourbillons, peut être estimé comme ayant la forme  $\sim r^{-1} n 2\pi r dr$ . Cette vitesse, induite par l'ensemble des tourbillons se trouvant dans la bande concentrique de rayon  $r$ , devient donc indépendante de  $r$ . Ceci signifie que ce ne sont pas uniquement les tourbillons voisins qui influencent fortement le mouvement du tourbillon ( $i$ ), mais l'ensemble des tourbillons éloignés. L'influence des tourbillons situés dans une bande de même largeur  $dr$ , mais à une distance plus grande ( $r^2$ ), a même valeur.

Le tourbillon ( $i$ ) se meut donc par rapport aux "voisins" de façon indépendante. Dans cette situation, la probabilité mutuelle peut être décomposée comme

$$\langle \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle \simeq \langle \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}) \rangle \langle \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle \quad (\text{II.15})$$

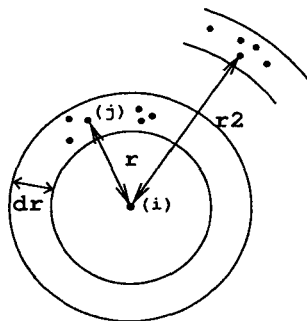


FIGURE II.1: Schématisation pour un tourbillon (i) de l'influence des tourbillons situés à une grande distance de celui-ci.

avec

$$\langle \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}) \rangle \langle \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle = n^{(m)}(\mathbf{x}', t) n^{(n)}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{II.16})$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \langle \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}} \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(n)}) \rangle = \\ & \epsilon^{ij} \gamma^{(n)} n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \partial_j \int d\mathbf{x}' n^{(m)}(\mathbf{x}', t) \sum_{m=1}^{N'} \gamma^{(m)} G(\mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

L'équation d'évolution s'écrit alors :

$$\partial_t n^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta n^{(n)}(\mathbf{x}, t) - \partial_i \epsilon^{ij} n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \partial_j U(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II.18})$$

où

$$U(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' n^{(m)} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sum_m \gamma^{(m)} n^{(m)}(\mathbf{x}', t) \quad (\text{II.19})$$

Ces deux équations représentent le résultat cherché : l'équation d'évolution pour la probabilité de répartition des tourbillons. Le problème classique de trouver "une solution des équations de Navier Stokes" se réécrit donc par "une détermination de probabilité"  $n^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ . Cette probabilité devient la quantité de base à partir de laquelle on peut calculer par exemple la vorticité moyenne  $\langle \Omega \rangle$  : celle ci est calculée à laide de la formule ( $\langle \Omega \rangle = (\sum_i \gamma_i) n(\mathbf{x})$ ).

Pour les tourbillons identiques de même signe, l'équation d'évolution s'écrit :

$$\partial_t n^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta n^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \partial_i \epsilon^{ij} n^{(1)}(\mathbf{x}, t) \partial_j U(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II.20})$$

où

$$U(\mathbf{x}, t) = \gamma N \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') n^{(1)}(\mathbf{x}', t) \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.20) peut être réécrite sous la forme

$$[\partial_t - \nu \Delta] n^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \epsilon^{ij} (\partial_i U(\mathbf{x}, t)) \partial_j n^{(1)}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{II.22})$$

Notons qu'en remplaçant la densité de probabilité  $n$  par la vorticité  $w$ , on retrouve l'équation d'évolution de la vorticité moyennée. Le paramètre  $\nu$  peut être estimée par l'expression  $\nu \sim \langle s_i^2(t) \rangle \tau$ , où  $\tau$  est le temps caractéristique de corrélation du bruit. Cette formule découle de la formule (II.3).

Nous avons donc établi, dans le cadre du modèle des tourbillons localisés, une équation dans laquelle intervient un terme lié à la viscosité. Cette équation est isomorphe aux systèmes d'équations permettant de décrire la turbulence  $2D$  avec viscosité, et pourrait donc être appliquée à l'étude de la turbulence près des parois.

Ce point est très important car il élargit le champ d'application du modèle des tourbillons ponctuels en montrant qu'ils peuvent être appliqués dans des problèmes autres que ceux liés aux écoulements de fluide parfait.



# Bibliographie

- [1] Chorin A. J., Numerical study of slightly viscous flow, *J. Fluid Mech.*, **57**, 785 (1973).
- [2] Furutsu K., On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium (I), *J. Res. Natl. Bur. Stand. D* **67**, 303–323 (1964).
- [3] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **16**, no 4, 509–555 (1997).
- [4] Monin A. S. et Yaglom A. M., *Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence*, MIT Press, **2** (1975).
- [5] Ishimaru A., *Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press, V-1 (1978).
- [6] Pavlov V. I., Buisine D., Goncharov V. P., Formation of vortex clusters on a sphere, *Nonlin. Proc. in Geophysics*, **8**, 9 (2001).





# Chapitre III

## Est ce qu'une turbulence bidimensionnelle évolue vers un état final unique ?

### III.1 Problématique

Les écoulements turbulents bidimensionnels à très grand nombre de Reynolds ( $\ln Re \gg 1$ ) ont la propriété d'auto-organisation en structures tourbillonnaires à grande échelle. Pour décrire ce type de structures, il est approprié d'utiliser le modèle de fluide non-visqueux. Omettre les termes visqueux dans les équations de mouvement implique que les forces de friction sont négligeables par rapport à la force d'inertie.

Le problème de détermination de l'état d'équilibre des systèmes hydrodynamiques bidimensionnels non-visqueux a été étudié depuis de nombreuses années (voir [2, 3, 6, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27], où une bibliographie étendue est présentée).

Dans ce contexte, de nombreuses théories ont été proposées. Un grand nombre d'auteurs a examiné la mécanique statistique d'un fluide incompressible bidimensionnel à l'aide des équations de mouvement d'Euler reformulées pour un champ de vorticité. Tant que la dynamique des structures tourbillonnaires est fortement non-linéaire et décrite par des équations de mouvement difficiles à résoudre analytiquement, il y a un fort intérêt à explorer un principe variationnel quelconque : dans un système évoluant librement, si un état stable doit être atteint, il doit correspondre à un extremum "de quelque chose". Certaines

approches sont basées sur une "maximisation de l'entropie" (voir par exemple, pour les tourbillons ponctuels [22], [23], et pour une distribution continue du champ tourbillonnaire [15], [19]). D'autres sont basées sur une "minimisation" de l'enstrophie (voir [16]). La liste des travaux peut évidemment être étendue. Toutes ces théories impliquent l'existence d'un état d'équilibre final, contrôlé par les invariants globaux du système. L'état final est supposé être indépendant de la structure précise des conditions initiales de l'écoulement.

Dans les travaux [19] et [20], il a été noté la possibilité d'établir une famille de champs discrets de vorticité. A l'aide de l'hypothèse de séparation d'échelle, on a construit la théorie du "champ moyenné", identique à la théorie du "champ moyenné" avec la séparation des échelles discutée dans certains travaux [25], [26]. La théorie mentionnée ci-dessus a fait l'objet de critiques dans le papier [6]. Selon l'auteur de ce travail, "la théorie du champ moyenné est, en général, une approximation insuffisante de la théorie complète implicite, excepté à des températures moyennes". On a noté que cette théorie "contredit les faits bien établis à propos des systèmes tourbillonnaires bidimensionnels, par exemple, l'existence de corrélations tourbillon-tourbillon non-triviales à petites échelles dans les structures cohérentes". En particulier, il a affirmé que "les conclusions principales de la théorie sont logiquement indépendantes ; certaines peuvent être vraies tandis que d'autres fausses".

La théorie statistique implique le comportement ergodique<sup>1</sup> du système. Malheureusement, il existe des suspicions (voir par exemple [24]), qu'en turbulence 2D, à cause de l'absence de processus capable de mélanger et la tendance observée de former des structures robustes et à "longue vie", il n'est pas clair que l'écoulement turbulent puisse être traité comme un système ergodique. D'un autre point de vue, une étude montrant l'ergodicité pour les équations d'Euler bidimensionnelles a été faite récemment dans le travail [14].

En tout cas, comme il a été mis en évidence par de nombreuses personnes, en dépit des différentes méthodes proposées pour le problème d'équilibre, la situation reste encore controversée.

Pour cette raison, les études expérimentales directes présentent un rôle crucial. Pourtant, même du point de vue expérimental, la situation est quelque peu inexplicable : les résultats obtenus dans le mercure [8] tendent à supporter la théorie statistique, tandis que ceux obtenus dans l'expérience de plasma [11], assumée comme étant isomorphe

---

<sup>1</sup>Comportement aléatoire et dont les moyennes temporelles sont identiques aux moyennes statistiques.

à un système fluide, tendent à supporter la théorie "de fission" sélective. Les données expérimentales [18] montrent que quelques caractéristiques sont en conflit avec la théorie statistique. Dans le travail [7], les auteurs ont conclu que la fission dans les écoulements à fine couche n'étaient pas en accords avec les "théories de fission" dérivées de simulations numériques [4], [10]. La liste de ces observations peut être continuée également.

Intrigués par cette situation complexe, nous nous sommes tournés vers une expérience numérique directe. Notre objectif est de considérer l'auto-organisation de tourbillons localisés (dans les écoulements bidimensionnels) en groupements de tourbillons ("clusters") et de montrer que les états finaux "n'oubliaient pas" les conditions de leur origine initiale. A l'aide de notre modèle, nous respectons automatiquement toutes les lois de conservation et nous nous débarassons des difficultés de modélisations numériques aux petites échelles. Nous montrons que la distribution de vorticité est déterminée par l'histoire d'établissement de l'écoulement. Des indications sur la possibilité de ce type de scénario peuvent être trouvées, par exemple, dans le travail [1].

Dans ce chapitre, nous débutons par la présentation des détails de l'expérience de plasma [11] qui nous permet, ensuite, de valider notre modèle. Rappelons le fait bien connu que le comportement d'un plasma d'électrons, confiné par un fort champ magnétique externe, offre des similitudes avec celui d'un fluide incompressible non-visqueux bidimensionnel. Puis, nous discutons, aussi bien le schéma numérique que nous adoptons pour résoudre les équations, que les résultats obtenus. Compte tenu des conditions de l'expérience [11], nous considérons comme négligeables l'influence des frontières. Les limites de validité pour le modèle sont définies par un objectif formulé : considérer différents scénarios d'auto-organisation du système en structures tourbillonnaires régulières. En toute probabilité, ce processus est réalisé dans le régime de bifurcation. Au lieu d'amasser les détails de calculs numériques des structures tourbillonnaires, nous voudrions répondre à la question plus pratique de savoir comment les groupements de tourbillons quasi-cristallins peuvent se former. Afin de valider notre modèle, nous comparons les prédictions de notre expérience numérique avec les résultats de Huang-Driscoll [11] pour un système de plasma, puis nous considérons un cas spécial et discutons le sens physique des résultats obtenus.

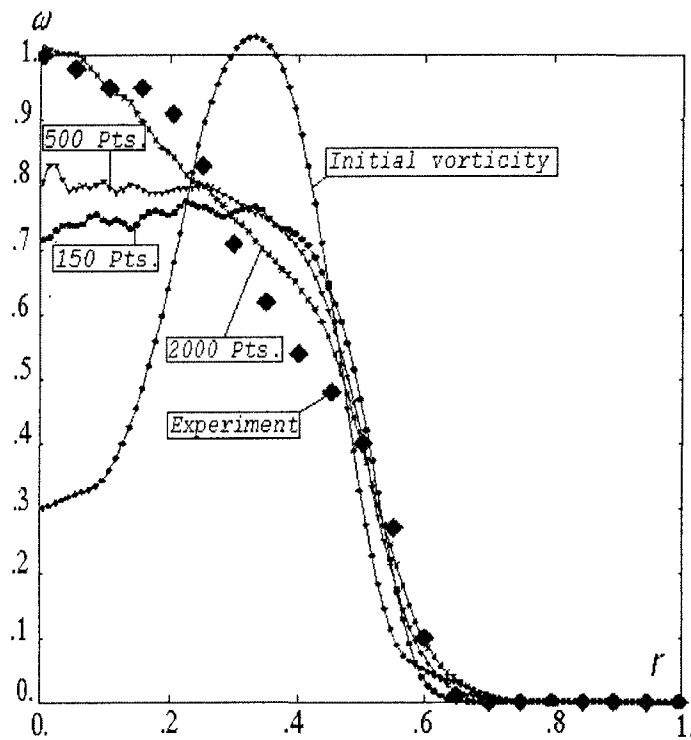


FIGURE III.1: Distribution initiale de la concentration moyennée du fluide électronique de l'expérience de Huang-Driscoll et distributions finales pour l'expérience (symboles) ainsi que pour la simulation numérique (points) obtenues avec 150, 500 et 2000 tourbillons ponctuels.

## III.2 Expérience de plasma

Nous commençons par un rappel des résultats de l'expérience [11]. Cette expérience est intéressante car il est un fait bien connu que la dynamique d'un plasma "chaud" d'électrons confiné par un fort champ magnétique externe offre des similitudes avec celle d'un fluide incompressible non-visqueux bidimensionnel (voir [12], [13]).

Plus précisément, dans "l'approximation du centre guidé", si au lieu de l'équation cinétique pour les électrons, on adopte l'approximation de Boltzmann pour les électrons  $n \sim \exp(e\Phi/T)$ . Cette approximation est valide lorsque la "vitesse thermique de l'électron"  $(T/m)^{1/2}$  excède la vitesse de phase d'onde et lorsque les résonances sont négligées. Dans ce cas, on récupère l'équation de Hasegawa-Mima,

$$(\partial_t + v_j \partial_j)(a_L^2 \Delta \Phi - \Phi) = v_j^* \partial_j \nabla \Phi, \quad (\text{III.1})$$

où  $a_L = (T/m)^{1/2}/\Omega_i$  est le rayon gyroscopique d'ion (à la température de l'électron),  $\Omega_i = eB_0/m_i c$  est la fréquence cyclotron d'ion,  $m_i$  est la masse d'ion,  $T_e$  est la température d'ion,  $e$  est la charge d'électron,  $c$  est la vitesse de la lumière,  $B_0$  est l'induction du champ magnétique ambiant,  $\mathbf{v} = (c/B^2)\mathbf{B} \times \nabla \Phi$  est la  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  vitesse de mouvement,  $\mathbf{v}^* = (Tc/eB^2 n_0)\nabla n_0 \times \mathbf{B}$  est la vitesse magnétique de l'électron,  $v_i = (v_1, v_2)$  sont les composantes cartésiennes dans le système cartésien de coordonnées dans les directions perpendiculaires à celle du champ magnétique,  $\partial_t$  est la dérivée partielle de la variable de champ par rapport au temps,  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$  est l'opérateur Laplacien bidimensionnel. Le potentiel électrique  $\Phi$  et la densité de l'électron  $n_e$  peuvent être exprimés en termes de fonction de courant comme

$$\Phi = \frac{B_0}{c}\psi, \quad n_e = n_0 \exp\left(\frac{B_0 e}{T_e c}\psi\right). \quad (\text{III.2})$$

Ici,  $n_0$  est la densité de plasma non-perturbée.

Pour les phénomènes de plasma à faible fréquence, les lignes de champ magnétique résistent à la flexion et par conséquent tendent à découpler la dynamique dans les directions parallèles et perpendiculaires au champ magnétique. L'équation de mouvement pour la concentration d'électron  $n_e$  dans les directions perpendiculaires à  $\mathbf{B}$  devient

$$\partial_t n_e + v_j \partial_j n_e = 0. \quad (\text{III.3})$$

Ici,  $\partial_t$  est la dérivée partielle par rapport au temps,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Dans le cadre du modèle, les composantes de la vitesse sont définies via le potentiel électrique,  $\Phi$ , par la relation  $v_i \sim \epsilon_{ij} \partial_j \Phi$ ,  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ ,  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ , et vérifient la condition  $\partial_k v_k = 0$ ,  $k = 1, 2$ . La relation entre la concentration  $n_e$  et le potentiel électrique,  $\Phi$  est

$$n_e = -\Delta \Phi, \quad (\text{III.4})$$

où  $\Delta$  est le laplacien dans le plan.

Les équations (III.3) - (III.4), sont isomorphiques aux équations hydrodynamiques bi-dimensionnelles d'Euler, où  $n_e$  joue le rôle de la vorticit    $\omega$  et le potentiel  $\Phi$  le r  le de la fonction de courant  $\psi$ . Elles peuvent   tre utilis  es afin de tester les pr  dictions exp  rimentales des diff  rentes th  ories de la dynamique bidimensionnelle d'un fluide non-visqueux.

Dans ce contexte, l'avantage principal d'utilisation de l'exp  rience de plasma est une quasi-absence de dissipation, attendu que dans les exp  riences de la dynamique des fluides ou dans les simulations num  riques traditionnelles, la r  alisation aux tr  s grands nombres de Reynolds est extr  mement difficile.

Des r  sultats de l'exp  rience [11] sont pr  sent  s dans la figure III.1. La distribution initiale de la concentration moyenne du fluide   lectronique de l'exp  rience de Huang et Driscoll et les distributions finales pour l'exp  rience (symboles) sont trac  es. Le profil de densit   du fluide   lectronique de l'  tat final est une distribution axisym  trique. Les unit  s sont prises de telle sorte que le maximum de la distribution est l'unit  .

### III.3 R  sultats num  riques et discussions

La premi  re   tape a donc   t   d'executer une simulation num  rique de l'exp  rience [11]    l'aide de notre mod  le, puis de comparer les r  sultats de nos calculs avec les donn  es exp  rimentales.

La description a   t   adapt  e pour obtenir les caract  ristiques essentielles des structures de champs tourbillonnaires, et m  me dans cette situation simplifi  e, nous trouvons un riche   chantillon de la dynamique de vorticit  .

La configuration initiale a   t   choisie afin de reproduire la densit   initiale des particules dans l'exp  rience de plasma (Fig. III.1).

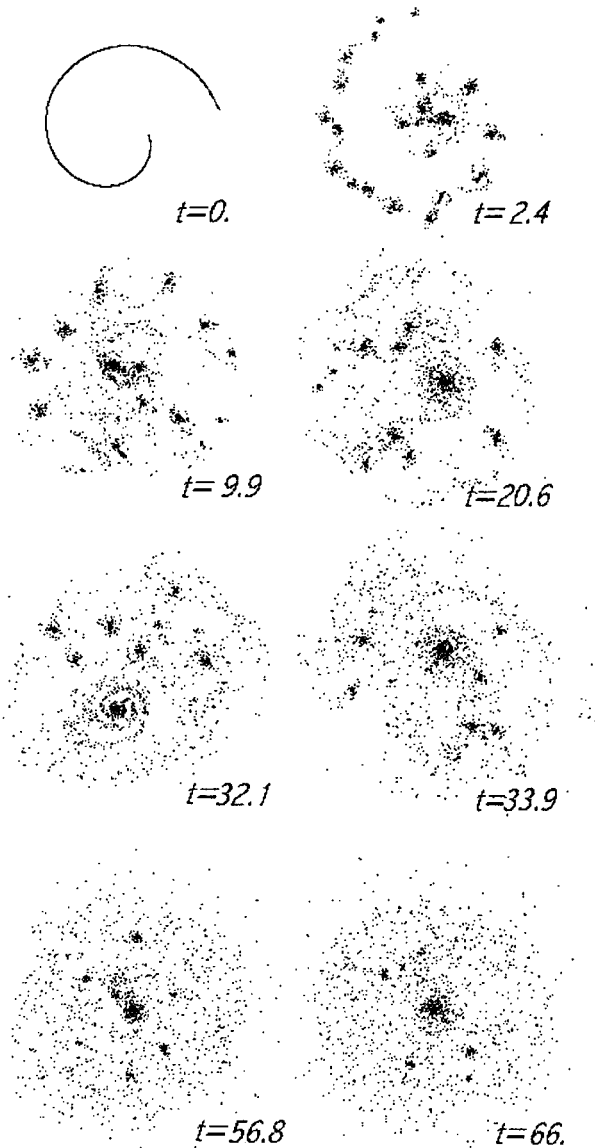


FIGURE III.2: Evolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration en nappe tourbillonnaire sous forme de spirale avec une symétrie axiale perturbée. Les processus de fusion des petites structures et la formation de structures sous forme de spirale sont observées distinctement.

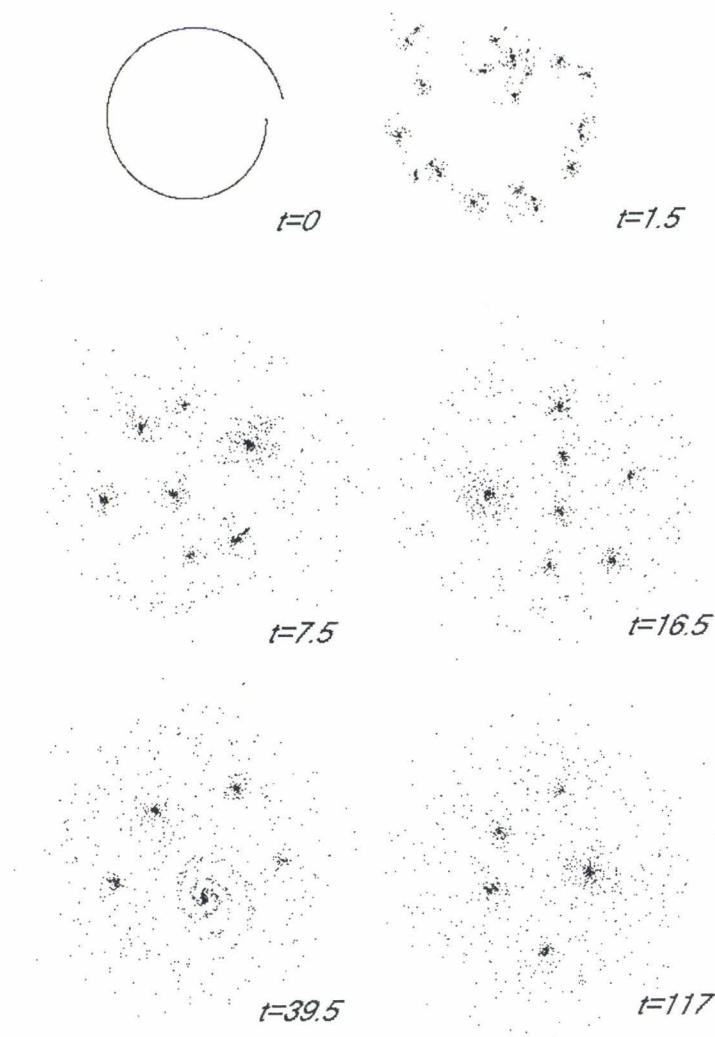


FIGURE III.3: Evolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration sous forme de nappe quasi-circulaire. Le système évolue vers une structure pentagonale tournante et uniforme qui oscille lentement proche de l'état d'équilibre.



Nous avons initialisé le système de  $N$  tourbillons identiques ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$ ). Les expériences ont été réalisées avec différents  $N$  :  $N_1 = 1.5 \cdot 10^2$ ,  $N_2 = 5 \cdot 10^2$ ,  $N_3 = 2 \cdot 10^3$ . La distribution initiale des tourbillons a été donnée par une configuration symétrique axialement qui reproduit la distribution des particules dans l'expérience [11].

Les valeurs des paramètres du problème (énergie, circulation) ont été les suivantes :  $H \sim 10^{-6}$ ,  $\Gamma = \sum_i \gamma_i = 1$ . L'intensité d'un tourbillon a été définie par la formule  $\gamma_i = \Gamma/N$ .

L'étude de l'évolution de la configuration tourbillonnaire d'un système, basée sur les équations (voir chapitre I),

$$\partial_t x_i^{(m)} = \gamma_{(m)}^{-1} \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j^{(m)}}, \quad (\text{III.5})$$

avec les conditions initiales associées, a été faite numériquement à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4. Le pas de temps est restreint par la condition  $\Delta t < \Delta\theta / \sup(|\gamma_i| / R_{ij}^2)$ , où  $\Delta\theta$  est l'angle caractéristique entre deux tourbillons ( $i, j$ ),  $0.01 < \Delta\theta < 0.04$  radian.

La conservation de l'énergie a été évaluée durant les calculs. L'énergie du système,  $\mathcal{H}$ , est le paramètre le plus sensible aux erreurs numériques de simulation. L'analyse montre que l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  subit des faibles variations avec une erreur :  $|\mathcal{H} - \mathcal{H}_0| / |\mathcal{H}_0| \leq 2 \cdot 10^{-5}$  (pour un processus d'itérations de  $t = 0$  à  $t = 10^6 \Delta t$ , qui correspond à 200 révolutions de la périphérie du domaine de la répartition tourbillonnaire).

Toutes les autres intégrales du mouvement sont conservées automatiquement.

La figure III.1 montre une bonne concordance quantitative entre les résultats des simulations numériques et l'expérience de Huang et Driscoll lorsque  $N_i \gg 1$  :  $N_3 > N_2 > N_1$ .

Des mouvements radiaux très fluctuants ont été observés dans le domaine central ( $r < 0.4$ ). La zone externe du système ( $r > 0.4$ ) est restée quasiment stable.

L'évolution en temps de la distribution pour un système de  $N = 2 \cdot 10^3$  tourbillons corotatifs est présentée sur la figure III.2. Le comportement dynamique de ces structures en question inclut un échange entre les tourbillons et les nuages de tourbillons et l'apparence de la fragmentation des structures originales.

L'instabilité de la configuration initiale a été observée très rapidement ( $t \sim 1$ ) lors de la simulation. La perturbation génère évidemment une instabilité (instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmoltz) qui croît exponentiellement en temps et provoque une forte évolution

non-linéaire. La fragmentation de l'état initial ( $t \sim 10$ ) et la "clusterisation" qui suivent sont nettement observées.

Aux étapes  $t \sim 32$ ,  $t \sim 33.9$ , la formation de structures cohérentes en spirale est observée.

Après un temps correspondant à  $10^2$  révolutions du domaine de la distribution tourbillonnaire, on observe la formation d'un tourbillon central.

En observant les répartitions obtenues, on peut penser, à première vue, que les tourbillons évoluent vers l'état quasi-final unique dont la structure est gouvernée par les lois statistiques (parce que  $N \gg 1$ ). Mais, les observations supplémentaires montrent une contradiction avec cette hypothèse : pour différentes distributions initiales axialement quasi-symétriques, le système n'évolue pas vers le même état final.

Modifions la configuration initiale. La Figure III.3 montre une séquence d'évolution de la distribution tourbillonnaire pour un système de  $N \sim 10^3$  tourbillons co-rotatifs avec cette configuration initiale modifiée. Contrairement au cas précédent (Fig. III.1), le système n'évolue pas vers un tourbillon unique : il évolue vers une structure pentagonale et nous n'avons pas observé de modifications significatives de l'état pour  $t \gg 100$ .

Il est évident, à partir de la Figure III.3, que nous trouvons un désaccord entre le concept traditionnel de l'équilibre statistique final (quasi-homogène) et l'état quasi-final observé illustré par la Figure 2 et la Figure 3 aux temps  $t > 100$ .

Finalement, nous observons que la structure pentagonale (Fig. III.4) n'est pas dissipée dans le temps.

Le sens physique de ces résultats peut être le suivant. La distribution finale de vorticité doit être arbitraire lorsque l'on considère le modèle d'un fluide non-visqueux. La distribution finale de vorticité est déterminée par l'histoire de l'établissement de l'écoulement, et cette histoire inclut un effet significatif de non-linéarité. Un tel comportement du système, qui est régi par l'équation différentielle de mouvement (c'est à dire déterministe), peut être attribué à la structure particulière des équations. Celles-ci peuvent avoir la propriété, pour une certaine variété de paramètres et de variables, d'être singulièrement dépendantes des conditions initiales. Ceci veut dire que même un changement infinitésimal dans la condition initiale peut causer un changement fini dans les scénarios d'évolution et dans l'état final.

Comme les structures tourbillonnaires bidimensionnelles sont gouvernées par les "in-

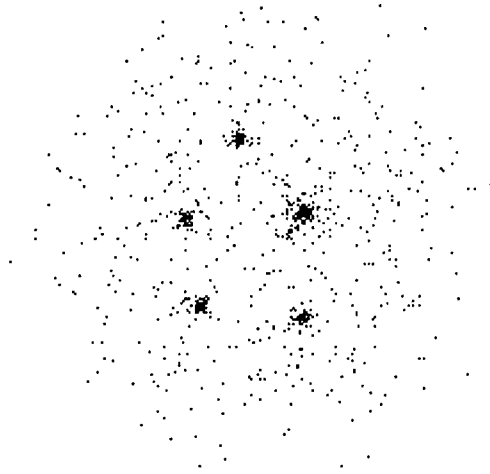


FIGURE III.4: *Le système évolue vers la structure pentagonale à  $t \gg 100$ .*

teractions" aux longues distances ( $H_{ij} \sim \log r_{ij}$ ) et que les tourbillons ne se rapprochent pas à une distance très courte, le phénomène observé est similaire, en un certain sens, aux transitions de phase du premier ordre dans les systèmes physiques réels. Pour mettre en évidence ceci, nous rappelons que les transitions de phase du premier ordre requièrent une répulsion aux petites distances et une attraction aux grandes distances pour les structures élémentaires. Remarquons que la transition appelée de Kosterlitz-Thouless a été discuté dans la littérature. La transition de Kosterlitz-Thouless est la transition entre les systèmes de paires tourbillonnaires et les systèmes pour lesquels les tourbillons peuvent vivre "séparés" en dimensions à deux phases; c'est une transition de phase qui peut être attendue dans un système tourbillonnaire bidimensionnel. Cette transition a été discuté dans les références [5], [21].

Si le phénomène observé (Fig. III.4) est une "transition de phase du premier ordre", il entraîne une formation spontanée de cellules tourbillonnaires similaires à des réseaux cristallins (notons cependant, que les tourbillons quasi-ponctuels forment un système Hamiltonien particulier dû au fait qu'un tourbillon produit une vitesse, et non une accé-

lération). Rappelons que des structures appelées, "les cristaux tourbillonnaires", ont été récemment observées dans des expériences de plasma non-neutres [9].

Ce type de transition de phase, entraînant à partir d'une instabilité une fragmentation et une clusterisation dans le système gravitationnel, est connue et a été discuté précédemment [17].

# Bibliographie

- [1] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 537 (1967).
- [2] Berdichevsky V. L., Statistical mechanics of point vortices, *Phys. Rev. E*, **51**, 5, 4432 (1995).
- [3] Brands H., Chavanis P. H., Pasmanter R., Sommeria J., Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, *Physics of Fluids* **11**, no 11 (1999).
- [4] Cardoso O., Marteau D., Tabeling P., Quantitative experimental study of the free decay of quasi-two-dimensional turbulence, *Phys. Rev. E*, **49**, 454 (1994).
- [5] Chorin A. J., *Vorticity and Turbulence*, Springer, NY (1994).
- [6] Chorin A. J., Partition functions and equilibrium measures in two-dimensional and quasi-three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, no 10, 2656 (1996).
- [7] Danilov S., Dolzhanski F. V., Dovzhenko V. A., Krymov V. A., Experiments on free decay of quasi-two-dimensional turbulent flows, *Phys. Rev. E*, **65**, 036316 (2002).
- [8] Denoix M. A., Thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble (1992).
- [9] Fine K. S., Cass A. S., Flynn W. G., Driscoll C. F., Relaxation of 2D Turbulence to Vortex Crystals, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3277 (1995).
- [10] Hansen A. E., Marteau D., Tabeling P., Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system, *Phys. Rev. E*, **58**, 7261 (1998).
- [11] Huang X. P., Driscoll C. F., Relaxation of 2D turbulence to a metastable equilibrium near the minimum enstrophy state, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 2187 (1994).
- [12] Kadomtsev B. B., *Plasma turbulence*, New York, Academic (1965).
- [13] Krall N. A., Trivelpiece A. W., *Principles of Plasma Physics.*, McGraw-Hill Book Company (1973).

- [14] Kupiainen A., Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equation with random forcing, *Commun. Math. Phys.*, to appear.
- [15] Kuzmin G. A., Statistical mechanics of the organization into two-dimensional coherent structures, in *Structural Turbulence*, edited by M. Goldshtik (Acad. Nauk SSSR Novosibirsk, ITPh), 103–114 (1982).
- [16] Leith C. E., Minimum enstrophy vortices, *Phys. Fluids*, **27**, 1388 (1984).
- [17] D. Lynden-Bell, and R. Wood, "The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems", *Phys. Rev. Lett.* **138**, 495 (1968).
- [18] Marteau D., Cardoso O., Tabeling P., Equilibrium states of two-dimensional turbulence : an experimental study, *Phys. Rev. E*, **51**, no 5, 5124 (1995).
- [19] Miller J., Statistical mechanics of Euler's equations in two dimensions, *Phys. Rev.*, **65**, 2137 (1990).
- [20] Miller J., Weichman P. B., Cross M. C., Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, *Phys. Rev. A*, **45**, no 4, 2328 (1992).
- [21] Minnhagen P., The two-dimensional Colomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films, *Rev. Mod. Phys.*, **59**, 1001 (1987).
- [22] Onsager L., Statistical hydrodynamics, *Nuevo Cimento Suppl.*, **6**, 279 (1949).
- [23] Pointin Y. B., Lundgren T. S., Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container, *Phys. Fluids*, **19**, 1459 (1976).
- [24] Pomeau Y., Statistical approach to 2D turbulence, *Turbulence : A Tentative Dictionary*, edited by P. Tabeling and O. Cardoso, Plenum, NY, **341**, 117 (1995).
- [25] Robert R., A maximum entropy principle for two-dimensional perfect fluid dynamics, *J. Stat. Phys.*, **65**, 531 (1991).
- [26] Robert R., Sommeria J., Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.*, **229**, 291 (1991).
- [27] Sommeria J., Staquet C., Robert R., Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer, *J. Fluid Mech.*, **233**, 661 (1991).

# Chapitre IV

## Méthode d'auto-régulation

### IV.1 Avant-propos

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur l'un des points essentiels de n'importe quelle méthode théorique appliquée à l'étude de la dynamique des fluides parfaits (en particulier l'Approche Hamiltonienne) qui est le respect des lois de conservation. Nous voulons nous concentrer sur l'importance du respect de celles-ci.

En effet, dans le cas contraire, aucune analyse, ni discussion n'est envisageable puisque "la base" de la méthode théorique ne sera, alors, pas respectée. Une variation temporelle, par exemple, de l'état énergétique du système a pour conséquence de mettre en défaut l'une des hypothèses principales imposée par le modèle, celle d'un fluide non-visqueux.

On se trouve dans ce type de situations lors de résolutions à l'aide de moyens numériques. En effet, quelle que soit la méthode concrète choisie, les erreurs numériques qui apparaissent peuvent s'accumuler (voir figure IV.1).

Ces accumulations d'erreurs se traduisent par l'apparition d'une "dissipation numérique" qui n'est aucunement en accord avec la physique du problème.

Afin de "contrer cette dissipation numérique" produite par la résolution numérique du système, nous "forçons" celui-ci en lui ajoutant une "excitation" basée sur des présomptions physiques liées à la dynamique tourbillonnaire. Le système se retrouve alors dans le même état énergétique qu'à l'origine. Ce forçage s'effectue numériquement et est fonction de la dissipation numérique observée (voir figure IV.2).

Cette méthode "d'auto-régulation", qui permet de contrôler et de réduire au minimum

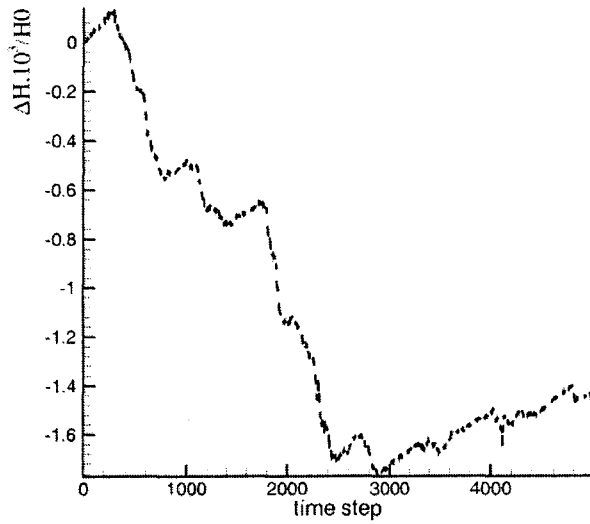


FIGURE IV.1: Evolution de l'Hamiltonien en fonction du temps calculé avec la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à l'ordre 4.

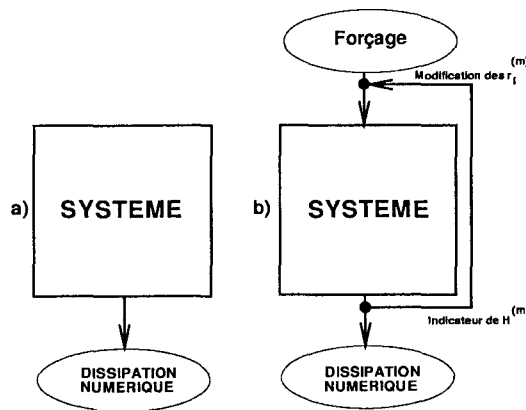


FIGURE IV.2: Schématisation du concept de la méthode d'auto-régulation. Le système subissant une "dissipation numérique" (schéma a), on "contre" celle-ci en excitant le système afin qu'il reste dans le même état énergétique qu'à l'origine (schéma b).



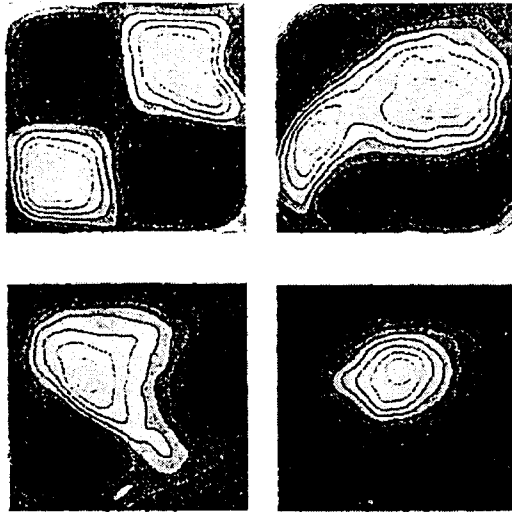


FIGURE IV.3: Résultats expérimentaux montrant l'évolution du champ de vorticité pour un système de quatre tâches tourbillonnaires contra-rotatifs dans un domaine borné, voir [4].

les erreurs, est appliquée au schéma classique de Runge-Kutta à l'ordre 4.

Afin de valider notre modèle, nous choisissons d'étudier l'exemple d'un grand nombre de tourbillons localisés dans un domaine borné pris, dans un but de simplification, de forme carré. Ce choix de la configuration du domaine a été motivé par le fait que, dans le cas général, la détermination de la forme de la fonction de Green pour un domaine borné n'est pas chose facile. En effet, il faut respecter les conditions aux frontières pour cette fonction imposées par la géométrie du domaine.

Nous montrons qu'à l'aide de notre méthode, nous garantissons le respect des lois de conservation durant tout le processus d'évolution.

Les résultats de notre expérience numérique sont comparés aux résultats d'une expérience [4] (voir figure IV.3) et publiés dans l'article [3].

## IV.2 Formulation de la méthode d'auto-régulation

### IV.2.1 Variation de l'énergie dans les expériences numériques

Nous proposons un processus-correcteur basé sur la loi de conservation de l'énergie : à chaque pas de temps, la position de chaque tourbillon est très légèrement modifiée afin d'obtenir une énergie cinétique d'interaction (Hamiltonien) égale à celle de départ  $\mathcal{H}_0$  (rappelez-vous que pour les tourbillons ponctuels, on respecte automatiquement la conservation de tous les moments,  $\mathcal{M}^{(n)}$ ).

Le problème est donc d'éliminer l'erreur  $\Delta\mathcal{H}$  définie comme étant la différence entre l'Hamiltonien calculé à un pas de temps quelconque et l'Hamiltonien de départ  $\mathcal{H}_0$ .

Pour cela, on suppose qu'à l'instant  $(m - 1)$ , le système se trouve au même niveau énergétique qu'à l'instant initial

$$\mathcal{H}[x_i^{(m-1)}, y_i^{(m-1)}] = \mathcal{H}_0, \quad (\text{IV.1})$$

et qu'à l'instant  $(m)$ , une légère variation de l'énergie, causée par l'apparition inévitable d'une erreur numérique, est observée

$$\mathcal{H}[x_i^{(m)}, y_i^{(m)}] \neq \mathcal{H}_0, \quad (\text{IV.2})$$

on introduit alors les modifications des positions des tourbillons,  $(\delta x_i^{(m)}, \delta y_i^{(m)})$ , nécessaires au respect de la loi de conservation d'énergie, c'est à dire

$$\mathcal{H}[x_i^{(m)} + \delta x_i^{(m)}, y_i^{(m)} + \delta y_i^{(m)}] = \mathcal{H}_0. \quad (\text{IV.3})$$

Compte tenu que ces modifications de positions sont très petites par rapport aux coordonnées des tourbillons (nous reviendrons sur ce point essentiel par la suite), on peut développer l'expression (IV.3) en série, et on obtient en se limitant aux premiers termes du développement :

$$\mathcal{H}[x_i^{(m)} + \delta x_i^{(m)}, y_i^{(m)} + \delta y_i^{(m)}] = \mathcal{H}[x_i^{(m)}, y_i^{(m)}] + \sum_{i=1}^N (\delta x_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \delta y_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}) + \dots, \quad (\text{IV.4})$$

on trouve donc que la variation de l'Hamiltonien  $\Delta\mathcal{H}^{(m)}$  peut être compensée :

$$\Delta\mathcal{H}^{(m)} = \mathcal{H}^{(m)} - \mathcal{H}_0 \cong - \sum_{i=1}^N (\delta x_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \delta y_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}) \quad (\text{IV.5})$$

Notons que le signe négatif présent dans cette égalité est indispensable. En le supprimant, au lieu d'atténuer les variations de l'Hamiltonien, on les accentue très fortement, et on observe une modification brutale de l'état énergétique du système qui pourrait être interprétée comme l'apparition et le développement d'une instabilité en réalité non-existante.

La difficulté principale est la détermination des expressions des modifications des positions  $\delta x_i$  et  $\delta y_i$ . En effet, il faut tenir compte de la physique liée à la dynamique tourbillonnaire. Par exemple, la correction ne peut être faite en effectuant "une translation globale du champ tourbillonnaire", la modification de la trajectoire doit être propre à chaque tourbillon.

### IV.2.2 Détermination du correcteur

Un choix de modèle, qui prend en compte l'aspect physique du phénomène, semble approprié, pour cela nous nous basons sur des constatations physiques qui sont

- Un tourbillon "lourd" (c'est à dire avec une forte intensité) sera moins influencé qu'un tourbillon "léger", on aura donc

$$\delta x_i \sim 1/\gamma_i \quad \text{et} \quad \delta y_i \sim 1/\gamma_i.$$

- La variation de position d'un tourbillon avec une grande vitesse de déplacement sera plus importante qu'un autre tourbillon plus "lent".

Par conséquent, nous aurons également

$$\delta x_i \sim v_i \quad \text{et} \quad \delta y_i \sim v_i.$$

Compte tenu de ces remarques, et que la dimension des variations de positions doit être une longueur, on définit alors les variations par :

$$\begin{aligned} \delta x_i &= -\epsilon \frac{L^2}{\gamma_i} \dot{y}_i + \epsilon_2 \frac{L^2}{\gamma_i} \dot{x}_i \\ \delta y_i &= \epsilon \frac{L^2}{\gamma_i} \dot{x}_i + \epsilon_3 \frac{L^2}{\gamma_i} \dot{y}_i, \end{aligned} \tag{IV.6}$$

où  $L$  représente une échelle de longueur caractéristique (largeur du domaine, etc) ,  $\gamma_i$  l'intensité du tourbillon,  $\dot{x}_i$  et  $\dot{y}_i$  les vitesses du tourbillon respectivement suivant les axes

$x$ ,  $y$ , et  $\epsilon$  le paramètre à déterminer. On introduit un signe négatif dans la première expression afin de simplifier les équations par la suite, cette modification ne change rien à la physique du problème. Les seconds termes de chaque expression n'interviendront que dans l'expression du correcteur pour le moment cinétique s'il y a conservation de cette grandeur. Toutefois, rappelons que pour un domaine borné (carré), il n'y a pas de conservation, ni de la quantité de mouvement, ni du moment cinétique, car il n'y a ni de symétrie de translation, ni de rotation [2].

En introduisant les équations (IV.6) dans l'équation (IV.5), on obtient :

$$\Delta\mathcal{H}^{(m)} = - \sum_{i=1}^N \left( \epsilon \frac{L^2}{\gamma_i} (-\dot{y}_i) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \epsilon \frac{L^2}{\gamma_i} (\dot{x}_i) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} \right). \quad (\text{IV.7})$$

En tenant compte des équations définissant le mouvement d'un système dynamique Hamiltonien dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \gamma_i \dot{x}_i &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} \\ \gamma_i \dot{y}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

on trouve après simplification

$$\Delta\mathcal{H}^{(m)} = \epsilon \sum_{i=1}^N L^2 (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2). \quad (\text{IV.9})$$

Pour un grand nombre de tourbillons, on peut introduire la vitesse moyenne,

$$\Delta\mathcal{H}^{(m)} = \epsilon L^2 N \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)}_{\overline{v^2}}. \quad (\text{IV.10})$$

On peut alors estimer cette vitesse moyenne par le fait que  $\overline{v^2} \sim \mathcal{H}_0$  :

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{v_i^2} \simeq \frac{2\mathcal{H}_0}{L^2}. \quad (\text{IV.11})$$

On trouve donc pour la variation  $\epsilon$  la formule suivante :

$$\epsilon = \beta \frac{1}{N} \frac{\Delta\mathcal{H}^{(m)}}{\mathcal{H}_0} \quad \text{avec} \quad \beta \simeq 1 \quad (\text{IV.12})$$

Les expressions définissant ce correcteur de positions des tourbillons sont alors :

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \beta \frac{1}{N} \frac{\Delta \mathcal{H}^{(m)}}{\mathcal{H}_0} L^2 \frac{\dot{y}_i^{(m)}}{\gamma_i} \\ \delta y_i &= -\beta \frac{1}{N} \frac{\Delta \mathcal{H}^{(m)}}{\mathcal{H}_0} L^2 \frac{\dot{x}_i^{(m)}}{\gamma_i}\end{aligned}\quad (\text{IV.13})$$

Remarque : si le nombre de tourbillons est faible, l'hypothèse sur la vitesse moyenne n'est plus valable, le correcteur prend alors la forme :

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \frac{\Delta \mathcal{H}^{(m)}}{\sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)} \frac{\dot{y}_i^{(m)}}{\gamma_i} \\ \delta y_i &= -\frac{\Delta \mathcal{H}^{(m)}}{\sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)} \frac{\dot{x}_i^{(m)}}{\gamma_i}\end{aligned}\quad (\text{IV.14})$$

### IV.2.3 Condition d'application du correcteur

Il faut maintenant déterminer la condition nécessaire afin de pouvoir utiliser ce correcteur. En effet, les variations de positions doivent être très faibles par rapport aux positions des tourbillons afin de ne pas modifier de façon significative la trajectoire générale de chaque tourbillon. Une trop grande "correction" des positions des tourbillons entraînerait une modification importante du champ tourbillonnaire et l'état final obtenu sera alors peu réaliste.

La modification de position moyennée  $\overline{(\delta r_i)^2}$  peut être estimée à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned}\overline{(\delta r_i)^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2] \\ &\sim \beta^2 \frac{1}{(2N)^2} \frac{(\Delta \mathcal{H}^{(m)})^2}{(\mathcal{H}_0)^2} L^4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{\gamma_i^2}\end{aligned}\quad (\text{IV.15})$$

En déterminant quel tourbillon possède l'intensité la plus faible, on peut majorer cette équation :

$$\overline{(\delta r_i)^2} \leq \beta^2 \frac{1}{(2N)^2} \frac{(\Delta \mathcal{H}^{(m)})^2}{(\mathcal{H}_0)^2} \frac{1}{\gamma_{\min}^2} L^4 \frac{2\mathcal{H}_0}{L^2}\quad (\text{IV.16})$$

Soit après simplification

$$\overline{(\delta r_i)^2} \leq \frac{\beta^2}{2N^2} \frac{(\Delta \mathcal{H}^{(m)})^2}{\mathcal{H}_0} \frac{L^2}{\gamma_{min}^2} \quad (\text{IV.17})$$

$L$  étant une grandeur caractéristique (dimension du domaine) et  $N$  le nombre de tourbillons, les variations de positions doivent être petites par rapport à la dimension caractéristique d'une "cellule propre" à chaque tourbillon, c'est à dire  $\sim L^2/N$ .

On obtient alors :

$$\frac{\beta^2}{2N^2} \frac{(\Delta \mathcal{H}^{(m)})^2}{\mathcal{H}_0} \frac{L^2}{\gamma_{min}^2} \ll \frac{L^2}{N} \quad (\text{IV.18})$$

La condition nécessaire validant ce correcteur de positions porte sur le nombre de tourbillons qui doit respecter la relation :

$$N \gg \frac{(\Delta \mathcal{H}^{(m)})^2}{\mathcal{H}_0} \frac{\beta^2}{2\gamma_{min}^2} \sim \left(\frac{\Delta \mathcal{H}^{(m)}}{\mathcal{H}_0}\right)^2 \frac{\mathcal{H}_0}{\gamma^2} N^2 \quad (\text{IV.19})$$

si  $\mathcal{H}_0 \sim \gamma^2 N^2$ , on a  $N < (\mathcal{H}_0/\Delta \mathcal{H})^{2/3}$ .

Ce test est indispensable afin de pouvoir appliquer notre méthode d'auto-régulation.

## IV.3 Equations de base pour un système de $N$ tourbillons se mouvant dans un domaine borné.

### IV.3.1 Fonction de Green

Considérons le mouvement d'un système de  $N$  tourbillons ponctuels dans le domaine de forme carré aux dimensions  $l_1$  et  $l_2$ .

Nous sommes obligés de respecter les conditions aux limites et la fonction de Green, introduite précédemment, elle ne sera donc pas la même que celle dans l'espace illimité [2].

La fonction de Dirac est définie dans ce domaine par l'expression suivante (voir figure IV.4) :

$$\delta^{(2)}(x, x', y, y') = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(l_1 l_2)} \sin\left(\frac{\pi}{l_1} m x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_1} m x'\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} n y\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} n y'\right). \quad (\text{IV.20})$$

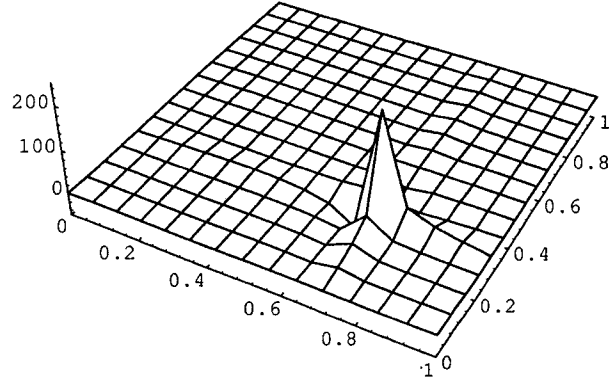


FIGURE IV.4: Représentation de la fonction de Dirac pour un domaine borné de forme carré. Les calculs sont effectués avec un nombre de modes  $m \times n = 30 \times 30$ .

Ce résultat découle du fait que les fonctions décrivant le processus peuvent être décomposées en série de Fourier, i.e.  $f(\mathbf{x}, t) = \sum f_{mn} h_{mn}(\mathbf{x})$ . Les coefficients de Fourier,  $f_{mn}$ , seront alors présentés par les intégrales correspondantes, i.e.  $f_{mn} = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, t) h_{mn}(\mathbf{x})$ , où les fonctions harmoniques  $h_{mn}(\mathbf{x})$  vérifient les conditions aux limites et de normalisation.

En réunissant ces deux représentations intégrales, nous trouvons que

$$f(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}', t), \quad (\text{IV.21})$$

et nous arrivons finalement à (IV.20).

La fonction de Green est alors représentée par l'expression suivante (voir figure IV.5) :

$$G(x, x', y, y') = \sum_{m,n=1}^{+\infty} g_{mn} \sin\left(\frac{\pi}{l_1} mx\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_1} mx'\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} ny\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} ny'\right), \quad (\text{IV.22})$$

avec

$$g_{mn} = \frac{1}{l_1 l_2 [(\pi m/l_1)^2 + (\pi n/l_2)^2]}.$$

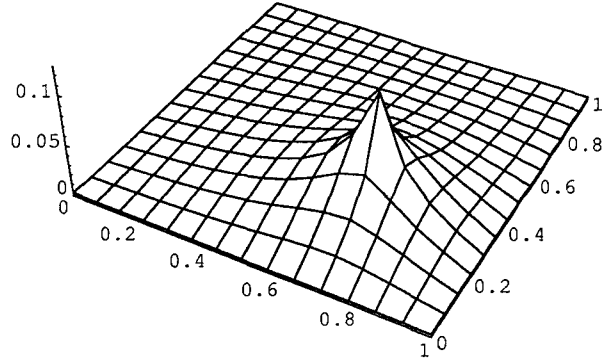


FIGURE IV.5: Représentation de la fonction de Green pour un domaine borné de forme carré pour un nombre de modes  $m \times n = 30 \times 30$ .

Dans ce cas, évidemment, la composante normale de la vitesse de l'écoulement s'annule sur les frontières du domaine. En effet, la fonction de courant prend alors la forme

$$\psi(\mathbf{x}) = \gamma \sum_{m,n=1}^{+\infty} g_{mn} \sin\left(\frac{\pi}{l_1} mx\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_1} mx'\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} ny\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_2} ny'\right), \quad (\text{IV.23})$$

et la composante normale de la vitesse s'obtient en dérivant par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$  la fonction de courant : la forme en *sinus* s'annule sur la frontière.

Après calculs et simplifications, on obtient :

$$G(x, x', y, y') = \frac{1}{16} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} g_{mn} \{ \cos(\mathbf{k}_{mn} \cdot \mathbf{R}_1) - \cos(\mathbf{k}_{mn} \cdot \mathbf{R}_2) - \cos(\mathbf{k}_{mn} \cdot \mathbf{R}_3) + \cos(\mathbf{k}_{mn} \cdot \mathbf{R}_4) \}, \quad (\text{IV.24})$$

avec  $\mathbf{k}_{mn} = (\pi m/l_1, \pi n/l_2)$ ,  $\mathbf{R}_1 = (x - x', y - y')$ ,  $\mathbf{R}_2 = (x - x', y + y')$ ,  $\mathbf{R}_3 = (x + x', y - y')$  et  $\mathbf{R}_4 = (x + x', y + y')$ .



Posons

$$G(x, x', y, y') = \frac{1}{16} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l_1 l_2 (\mathbf{k}_{mn}^2)} \{G^{(1)} - G^{(2)} - G^{(3)} + G^{(4)}\}.$$

En effectuant les calculs pour  $G^{(1)}$ , il sera très facile de généraliser le résultat obtenu pour la fonction  $G$ .

$$G^{(1)}(x, x', y, y') = \frac{1}{16\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \Delta \mathbf{k}_{mn} \frac{1}{k^2} \cos(\mathbf{k}_{mn} \cdot \mathbf{R}_1), \quad (\text{IV.25})$$

avec  $\Delta \mathbf{k}_{mn} = \pi^2 \Delta m \Delta n / l_1 l_2$ .

### IV.3.2 Forme intégrale de la fonction de Green

Si le nombre de modes est grand, étant donné que  $|\Delta \mathbf{k}_{mn}| \ll |\mathbf{k}_{mn}|$ , l'équation peut être mise sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x', y, y') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\neq 0}^{+\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{R}e \left\{ \int_{\neq 0}^{+\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{R}e \left\{ \int_{\neq 0}^{+\infty} \frac{dk}{k} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik|\mathbf{R}_1| \cos \varphi}}_{2\pi \mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_1|)} \right\}. \end{aligned}$$

On retrouve la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 [1], et après simplifications, on a :

$$G^{(1)}(x, x', y, y') = \frac{1}{8\pi} \int_{\neq 0}^{+\infty} \frac{dk}{k} \mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_1|). \quad (\text{IV.26})$$

Soit, en définitif, pour la fonction de Green, la forme suivante

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{8\pi} \int_{\neq 0}^{+\infty} \frac{dk}{k} [\mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_1|) - \mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_2|) \\ &\quad - \mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_3|) + \mathcal{J}_0(k|\mathbf{R}_4|)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

### IV.3.3 Système d'équations

En utilisant la fonction de Green (IV.22), on trouve les équations adimensionnées décrivant le mouvement des tourbillons ponctuels :

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= - \sum_j^{N'} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{np_j}{\epsilon_1 m^2 + \epsilon_2 n^2} \sin(\pi m x_i) \sin(\pi m x_j) \cos(\pi n y_i) \sin(\pi n y_j) \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_j^{N'} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{mp_j}{\epsilon_1 m^2 + \epsilon_2 n^2} \cos(\pi m x_i) \sin(\pi m x_j) \sin(\pi n y_i) \sin(\pi n y_j).\end{aligned}\quad (\text{IV.28})$$

où nous posons  $\epsilon_1 = l_2/l_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = l_1/l_2 = 1$ ,  $p_j = \tau\gamma_j/2\pi l_1 l_2 = \pm 1$ . Le temps caractéristique  $\tau = 2\pi l_1 l_2 / |\gamma|$  représente le temps de référence.

## IV.4 Expérience numérique

Il y a quelques particularités dans la partie numérique du problème.

L'une de celles-ci est la possibilité de formation des couples de tourbillons. En effet, lorsque deux tourbillons de même intensité en valeur absolue  $|\gamma_i|$ , mais de signes opposés se rapprochent à une petite distance  $d$  ( $d \rightarrow 0$ ), ils forment un couple. Le mouvement collectif de translation du couple se réalise donc avec une très grande vitesse,  $v \sim \gamma/d$ . C'est pourquoi il faut prêter attention au choix du pas de temps  $\Delta t$ ; si le pas est trop "grand", un couple peut être "éjecter" du domaine physique. Un effet analogue peut être observé lorsqu'un tourbillon se trouve proche d'une frontière du domaine.

D'autre part, pour des tourbillons de même signe tournant autour du centre commun, le pas de temps est restreint par la condition  $\Delta t \ll \min(r_{ij}^2/|\gamma|)$ , où  $r_{ij}$  est la distance entre deux tourbillons  $i$  et  $j$ . Ce sont les tourbillons les plus proches qui auront la vitesse la plus importante.

La seconde particularité est qu'en résolvant le problème numériquement, des erreurs numériques s'accumulent. Le phénomène physique étant basé sur le respect des lois de conservation, une tentative d'attaquer, sans analyse préliminaire, "de front" le problème peut entraîner le non-respect de celles-ci. Nous présentons donc ici les résultats de notre analyse qui permettent de valider notre méthode d'auto-régulation développée précédemment.

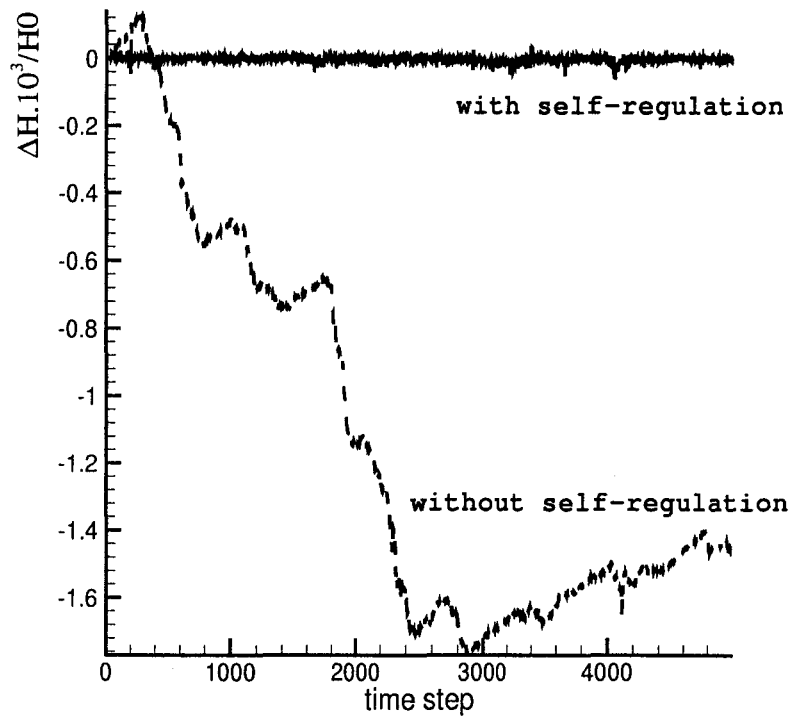


FIGURE IV.6: Evolution de l'Hamiltonien en fonction du temps calculé, pour la première courbe, avec la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à l'ordre 4 et, pour la seconde courbe, avec notre méthode d'auto-régulation ; la conservation de l'énergie est alors automatiquement respectée.

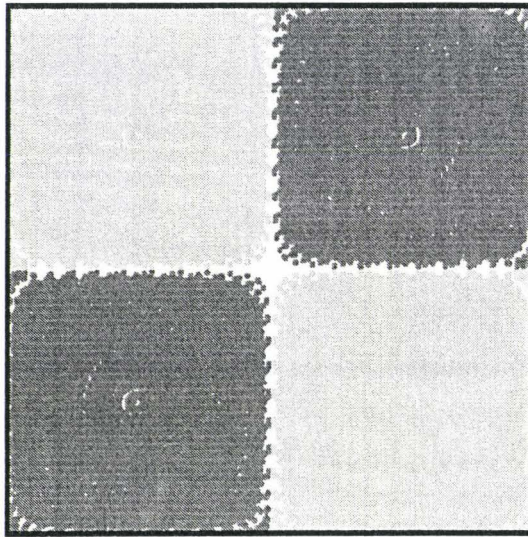


FIGURE IV.7: *Distribution initiale des tourbillons. Les zones sombres et claires sont respectivement caractérisées par un signe positive et négative de vorticité.*

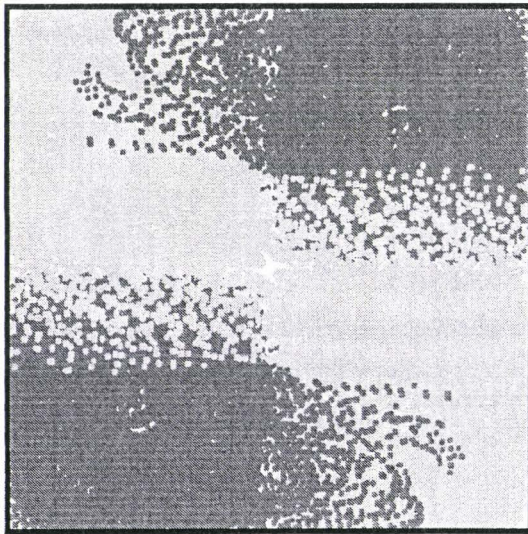


FIGURE IV.8: *Distribution des tourbillons à un état intermédiaire. Les instabilités apparaissent rapidement.*

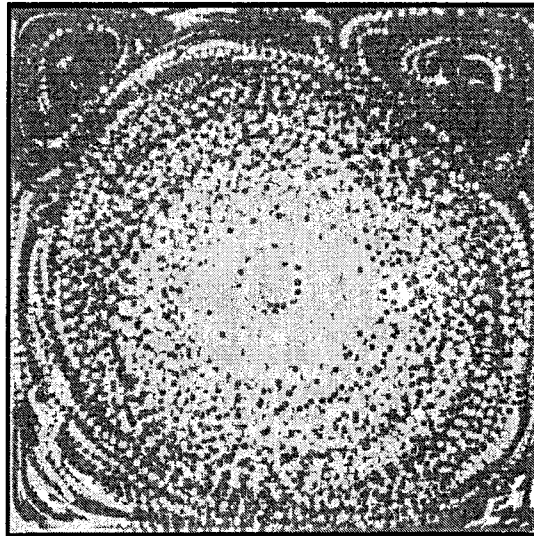


FIGURE IV.9: *Distribution tourbillonnaire pour un état quasi-final : la formation d'une zone centrale active est observée.*

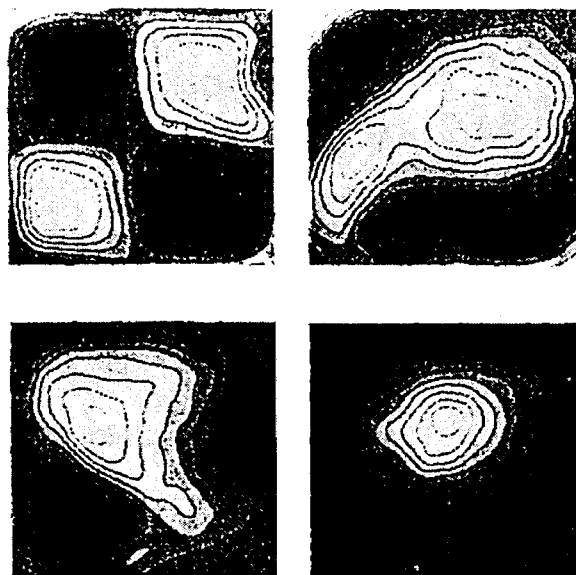


FIGURE IV.10: *Résultats expérimentaux montrant l'évolution du champ de vorticité pour un système de quatre tâches tourbillonnaires contra-rotatifs dans un domaine borné, voir [4].*

La figure IV.6 présente le résultat final de l'analyse : la première courbe montre l'allure de l'hamiltonien en fonction du temps calculé à l'aide de la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à l'ordre 4. La seconde courbe représente l'allure de cette même grandeur calculée à l'aide de notre méthode d'auto-régulation. Nous remarquons que les variations de l'Hamiltonien existent lors d'un calcul "classique". Même si celles-ci peuvent paraître négligeables, rien ne nous garantit qu'elles ne seront pas de l'ordre de l'Hamiltonien pour un long processus de calcul. Les résultats seront alors peu réalistes puisqu'ils seront en désaccord avec la physique du problème (fluide non-visqueux). Pour cela, notre modèle, applicable à toute configuration géométrique, garantit le respect des lois de conservation durant tout le processus d'évolution.

La figure IV.6 présentant l'évolution de l'Hamiltonien en fonction du temps correspond à une configuration initiale similaire à une expérience [4] dans laquelle était étudié le comportement de quatre tâches contra-rotatifs (figure IV.10). La figure IV.7 présente cette configuration initiale.

L'étude expérimentale montre que l'état final est, dans ce cas, une structure annulaire asymétrique pour laquelle la zone active du champ de vorticité occupe la majorité de la surface du domaine mais pas sa totalité. Les résultats obtenus (figures IV.8 et IV.9) sont en accords avec le données expérimentales, en effet, les tourbillons évoluent vers un tourbillon central.

Notons que la comparaison avec les résultats expérimentaux doit être effectuée avec précaution. En effet, pour l'expérience, à cause du frottement exercé par le fond sur la couche de fluide, l'énergie décroît de façon exponentielle. Par conséquent, la comparaison n'est possible que pour l'étape de processus pour lequel l'énergie ne varie pas encore de façon significative.

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus avec les méthodes vortex dans des cavités basés sur une résolution directe des équations de Navier-Stokes.

Certes, le comportement des tourbillons est différent au voisinage des frontières, toutefois, notre but n'est pas d'analyser la dynamique des tourbillons proches des parois, mais de valider notre méthode et de montrer la formation de "clusters" de tourbillons dans la zone centrale du domaine où les effets des parois sont négligeables.

# Bibliographie

- [1] Abramovitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C. (1964).
- [2] Aref H., Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 345-389 (1983).
- [3] Decossin S., Pavlov V., Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série Mécanique Iib*, **329**, 901 (2001).
- [4] Marteau D., Cardoso O., Tabeling P., Equilibrium states of two-dimensional turbulence : an experimental study, *Phys. Rev. E*, **51**, no 5, 5124 (1995).





# Chapitre V

## Analyse des contraintes physiques d'un modèle pour des tourbillons s'organisant dans un domaine borné.

### V.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution de champs tourbillonnaires *en présence de frontières*, la prise en compte des conditions aux frontières doit alors être effectuée avec précaution. Dans notre cas, l'utilisation de notre modèle simplifié est associé à certaines hypothèses qui doivent évidemment être respectées obligatoirement. Or, dans certaines situations extrêmes, celles-ci peuvent être mise en défaut. Ainsi, nous présentons tout d'abord une analyse du problème qui met en évidence l'apparition de difficultés liées à la présence de frontières. Nous montrons ensuite comment résoudre ces difficultés. Enfin, à l'aide d'une expérience numérique, nous étudions différents systèmes tourbillonnaires confinés dans un domaine borné de forme circulaire et montrons quelles "relations" peuvent exister entre l'état initial et l'état final.

L'analyse, exposée dans la section précédente, a montré que, dans le cas d'une turbulence Eulérienne bidimensionnelle, le système ne semble pas évoluer vers un état final unique. En effet, une légère modification de la configuration initiale du système a pour conséquence de faire évoluer celui-ci vers un autre état final.

L'objectif de cette partie est de considérer différentes configurations initiales et d'ana-

lyser les différents états quasi-finaux.

Pour cela, nous considérons un cas plus complexe, celui d'un grand nombre de tourbillons se mouvant dans un domaine circulaire. La présence des frontières fait apparaître des difficultés liées au respect des conditions aux frontières et des hypothèses liées à notre modèle (une discussion est présentée dans la suite).

Nous étudions donc, dans cette partie, différentes configurations initiales "en forme de spirales". L'équation définissant la configuration initiale du système des tourbillons est la suivante

$$r(i) = r_0 - \Delta r \theta(i), \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \Delta r \leq 0.1. \quad (\text{V.1})$$

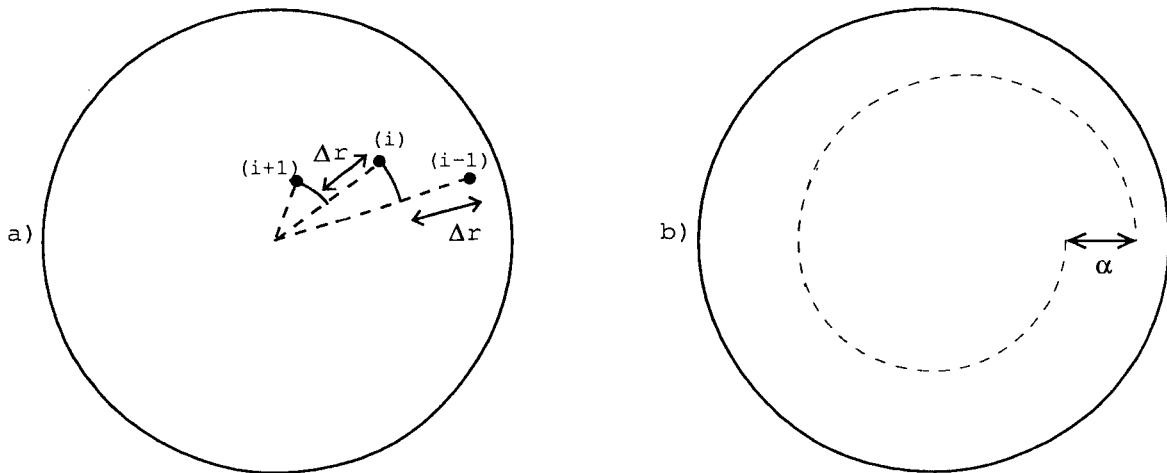


FIGURE V.1: Présentation du paramètre  $\Delta r$  caractérisant la différence radiale entre chaque tourbillon (schéma a) et du paramètre  $\alpha$  représentant la forme de la spirale (schéma b) :  $\alpha = \Delta r \times 2\pi$ .

Afin de simplifier les discussions des résultats, un paramètre  $\alpha = r_{max} - r_{min}$  lié à la géométrie du système est introduit (voir figure V.1). Nous étudions, en fonction de différentes valeurs de ce paramètre  $\alpha$ , les états finaux obtenus et déterminons l'influence de celui-ci sur la répartition finale des tourbillons.

## V.2 Difficultés numériques liées au problème

Dans nombre d'études, une analyse préliminaire qualitative du problème est indispensable. En effet, certains facteurs ou "événements" peuvent générer des erreurs qui influent fortement sur le résultat final.

Rappelons que dans ce qui suit, nous travaillons dans le cadre du modèle d'un fluide incompressible.

Afin de déterminer la fonction de Green qui permet de prendre en compte les conditions aux frontières, on utilise la méthode des images [11].

Notons que pour un tourbillon très proche d'une frontière, un tourbillon image est positionné pratiquement symétriquement par rapport à celle-ci. L'intensité du tourbillon étant  $\gamma$ , le tourbillon image a une intensité  $-\gamma$  et la vitesse induite au tourbillon par son image est  $\gamma/2\pi h$  (avec  $h$  la distance entre les tourbillons) et parallèle à la frontière. Dans cette situation, il faut prendre certaines précautions dans la détermination du pas de temps. Une restriction est nécessaire compte tenu que l'étude se fait dans un domaine borné avec un très grand nombre de tourbillons ( $\sim 10^3$ ). Tout comme dans le cas étudié dans le chapitre II (domaine de forme carré), un pas de temps trop grand aurait pour conséquence une "sortie" du domaine de la part des tourbillons et, ou un non-respect des lois de conservation.

## V.3 Fonction de Green

La première étape est la détermination de la fonction de Green qui doit prendre en compte les conditions aux limites propres à un domaine de forme circulaire.

Cette fonction de Green est constituée de deux parties.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{G}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}''). \quad (\text{V.2})$$

La première partie de la fonction ne présente aucune difficulté puisqu'elle correspond à la fonction de Green pour un domaine infini [1] :

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (\text{V.3})$$

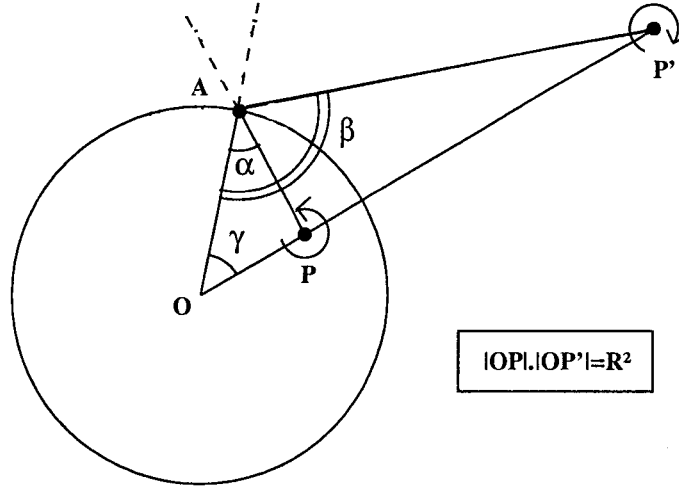


FIGURE V.2: Détermination de la position du tourbillon image d'un tourbillon situé à l'intérieur d'un domaine circulaire.

Dans ce cas, on a donc pour la partie correspondante la fonction de courant

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega(\mathbf{x}') \\ &= -\frac{\gamma}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|,\end{aligned}\tag{V.4}$$

et la vitesse de déplacement est de la forme  $v \sim 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

La seconde partie de la fonction de Green, qui est régulière à l'intérieur du domaine, caractérise l'influence des frontières.

Supposons que la composante normale de la vitesse est nulle sur la frontière du domaine :

$$v_n|_{\partial\mathcal{D}} = 0,\tag{V.5}$$

soit

$$n_x v_x + n_y v_y = n_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\tag{V.6}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur.

Considérons tout d'abord le cas d'un tourbillon et appliquons la méthode des images.

Du point de vue cinématique, la condition aux frontières s'exprime par (voir figure V.2)

$$(v_A)_n^{(P)} + (v_A)_n^{(P')} = 0, \quad (\text{V.7})$$

c'est à dire que la somme des composantes normales des vitesses générées par les tourbillons P et P' sur la frontière au point A est nulle. On voit, à partir de la figure V.2, que

$$\begin{aligned} (v_A)_n^{(P)} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{AP} (-\sin \alpha), \\ (v_A)_n^{(P')} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{AP'} \sin \beta. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Montrons où se trouve le point P'. A partir des relations trigonométriques, et plus précisément à partir du théorème du sinus appliqué aux triangles (AOP) et (AOP'), on trouve respectivement les relations

$$\frac{\sin \alpha}{OP} = \frac{\sin \gamma}{AP}, \quad \text{et} \quad \frac{\sin \beta}{OP'} = \frac{\sin \gamma}{AP'}. \quad (\text{V.9})$$

Les conditions (V.7), (V.8) et (V.9) donnent

$$\frac{AP}{R} = \frac{AP'}{OP'}, \quad (\text{V.10})$$

ou encore

$$\frac{OP}{R} = \frac{R}{OP'}. \quad (\text{V.11})$$

Cette relation représente la relation entre la position d'un tourbillon réel P situé à l'intérieur du domaine et son tourbillon image P'. On a alors

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}''| \quad (\text{V.12})$$

avec

$$\mathbf{x}'' = \frac{R^2}{|\mathbf{x}'|^2} \mathbf{x}', \quad (\text{V.13})$$

soit, en définitif (sous forme adimensionnée),

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{R} + \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{1}{R} \left| \mathbf{x} - \frac{R^2}{|\mathbf{x}'|^2} \mathbf{x}' \right| \right] \quad (\text{V.14})$$

## V.4 Formulation de la fonction de courant prise sur la frontière

La fonction de courant peut être représentée par

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}' \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega(\mathbf{x}') \quad (\text{V.15})$$

et, dans le cadre des tourbillons ponctuels, la vorticit e s'exprime par

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_i^N \gamma_i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (\text{V.16})$$

o u  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  repr esente la fonction de Dirac.

Compte tenu des propri et es de la fonction de Dirac  $\int f(t) \delta(t - t') dt = f(t')$ , on a

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \left\{ \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{R} - \ln \left[ \frac{1}{R} \left| \mathbf{x} - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_i|^2} \mathbf{x}_i \right| \right] \right\} \quad (\text{V.17})$$

En d evloppant cette relation, on a, sur la fronti ere

$$\psi|_R = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - 2 \frac{|\mathbf{x}_i|}{R} \cos \theta + \frac{|\mathbf{x}_i|^2}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( 1 - 2 \frac{R}{|\mathbf{x}_i|} \cos \theta + \frac{R^2}{|\mathbf{x}_i|^2} \right) \right]. \quad (\text{V.18})$$

o u  $\theta$  repr esente l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}$

En posant  $\alpha = R/|\mathbf{x}_i|$ , on obtient

$$\psi|_R = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos \theta + 1}{\alpha^2 (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)} \right) \right], \quad (\text{V.19})$$

soit apr es simplification

$$\psi|_R = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln \left( \frac{R}{|\mathbf{x}_i|} \right) \quad (\text{V.20})$$

Cette d emonstration est importante car ce r esultat sera utilisée dans la section suivante pour la d etermination de l'Hamiltonien.

## V.5 Hamiltonien

Etant donnée, l'énergie cinétique du système <sup>2</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} dx v^2 \quad (\text{V.21})$$

elle s'exprime en termes de la fonction de courant par la formule

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} dx [(\partial_x \psi)^2 + (\partial_y \psi)^2] \quad (\text{V.22})$$

ou, après intégration par parties, par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} dx \operatorname{div}(\psi \bar{\nabla} \psi) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} dx \psi \Delta \psi \quad (\text{V.23})$$

avec  $v_x = \partial \psi / \partial y$ ,  $v_y = -\partial \psi / \partial x$  (car le fluide est supposé incompressible).

A l'aide du théorème de Stokes, la première partie de l'Hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} dl \cdot \psi \bar{\nabla} \psi. \quad (\text{V.24})$$

Si nous choisissons le domaine d'étude  $\mathcal{D}$  limité par le contour  $\Gamma$  présenté sur la figure V.3 qui exclut les singularités tourbillonnaires et celle liée aux frontières du domaine, le second terme dans (V.23) s'annule car  $\Delta \psi = 0$  à l'intérieur du domaine. L'Hamiltonien est alors défini par

$$\mathcal{H} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\Gamma}, \quad (\text{V.25})$$

où  $\epsilon$  représente une longueur caractéristique de chaque domaine présentant une singularité (voir les définitions analogues dans les travaux [9],[11]).

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_{\Gamma} = \mathcal{H}_{\Gamma_i} + \mathcal{H}_{\Gamma_R}. \quad (\text{V.26})$$

Les termes dans cette somme sont rapportés respectivement aux contours autour de la singularité tourbillonnaire et la singularité sur la frontière.

<sup>2</sup>Exprimée en termes de variables canoniques ; l'énergie totale est l'Hamiltonien.

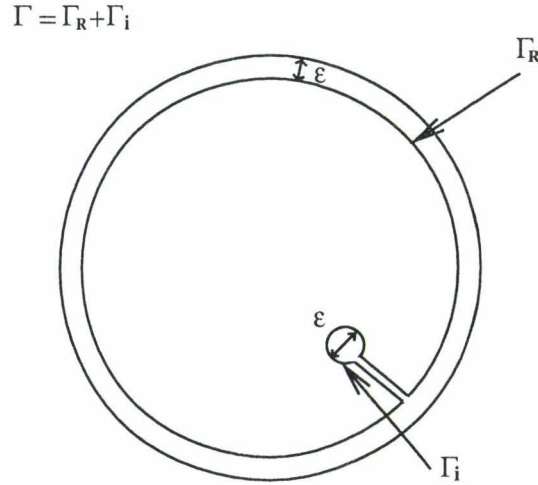


FIGURE V.3: Représentation du domaine dans lequel est calculé l'Hamiltonien : on exclue la singularité tourbillonnaire et la singularité sur la frontière.

La fonction de courant pourrait être mise sous la forme

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\gamma_i}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| + g_i(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{V.27})$$

La fonction  $g_i(\mathbf{x})$  caractérise l'écoulement potentiel solution de l'équation  $\Delta\psi = 0$ . On calcule chaque partie de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_\Gamma$ .

1- Calcul de  $\mathcal{H}_{\Gamma_i}$

A l'aide de l'expression (V.24), on trouve pour  $\mathcal{H}_{\Gamma_i}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_i} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{j=1}^N \psi(\mathbf{x}_j) \left[ -\frac{\gamma_j}{2\pi} \right] \\ \mathcal{H}_{\Gamma_i} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \gamma_j \psi(\mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

2- Calcul de  $\mathcal{H}_{\Gamma_R}$



A partir de l'expression (V.27), la fonction de courant au voisinage de la frontière s'exprime par

$$\psi|_{\Gamma_R} \implies \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|}. \quad (\text{V.29})$$

On trouve ainsi pour  $\mathcal{H}_{\Gamma_R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_R} &= \pi \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2\pi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|}. \end{aligned}$$

En regroupant les différentes parties de l'Hamiltonien, on obtient pour l'Hamiltonien la forme suivante

$$\mathcal{H}_{\Gamma} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln \left[ \frac{1}{R} |\mathbf{x}_i - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_j|^2} \mathbf{x}_j| \right] \quad (\text{V.30})$$

Notons que ce résultat aurait pu être établi à l'aide du calcul direct effectué à partir de la forme de la fonction de Green (V.14).

Compte tenu de la forme obtenu pour l'Hamiltonien, (V.30), nous arrivons à une série de paradoxes et de difficultés qu'il faut résoudre.

## V.6 Paradoxes

Regardons plus attentivement l'expression pour l'Hamiltonien. Supposons que les tourbillons se meuvent au voisinage du centre du domaine et leur zone de localisation se caractérise par le diamètre  $d \ll R$ , i.e.  $|x_i| < d \ll R$ . Donc, dans notre modèle, le petit paramètre  $\epsilon = d/R$  est apparu.

En développant en série par rapport à ce paramètre le second terme dans l'Hamiltonien, la partie correspondante à l'influence des frontières, nous trouvons que l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  devient

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \left( \ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R} + \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_i|} + o\left(\frac{d^2}{R^2}\right) \right). \quad (\text{V.31})$$

Physiquement, un tel développement signifie que nous déplaçons les frontières du domaine à l'infini quand  $R \rightarrow \infty$ . La présence du terme non-physique  $\sim \ln(R/|\mathbf{x}_i|)$  dans l'Hamiltonien signifie qu'un tourbillon situé très proche du centre du domaine posséderait une vitesse importante ( $v \sim 1/|\mathbf{x}_i|$ ). Plus le tourbillon est proche du centre, plus sa vitesse est grande (lorsque  $|\mathbf{x}_i| \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow \infty$ ). Tout se passe comme si les tourbillons images situés "plus loin que l'infini" (où se trouvent maintenant les frontières) influençaient le comportement des tourbillons réels.

Ce qui semble être impossible, car, si  $R \rightarrow \infty$ , l'influence des frontières doit devenir négligeable et pour des tourbillons localisés très proche du centre du domaine, seules les interactions entre les tourbillons réels doivent se manifester.

De plus, des tourbillons tournant autour du centre ont des variations de vitesse significatives. Cette "forte accélération" des tourbillons s'approchant à une distance très petite du centre du domaine doit s'accompagner d'un phénomène de rayonnement des ondes acoustiques [10]. Il s'agit du phénomène physique de caractère général : quelque soit l'objet physique, son mouvement accéléré doit s'accompagner d'un rayonnement "de freinage" des ondes dont l'existence est admise par un système hydrodynamique. Ce qui se traduit par l'apparition d'un effet similaire à une dissipation : les effets de perte d'énergie pour les tourbillons deviennent alors non-négligeables et le modèle n'est donc plus approprié à notre étude : hypothèse d'un fluide parfait.

Pour un très fort rayonnement, les tourbillons sont pratiquement "gelés" et leur déplacement dans le domaine devient impossible.

Un autre point litigieux se situe au niveau d'une seconde hypothèse imposée par le choix du modèle : celle de considérer le fluide comme incompressible. Les conditions nécessaires et suffisantes afin de valider cette hypothèse sont les suivantes [8] :  $|\mathbf{v}| \ll c_s$ ,  $\tau \gg L/c_s$ , où  $\mathbf{v}$  est la vitesse d'un élément quelconque du fluide,  $c_s$  la vitesse du son dans le fluide,  $L$  la dimension caractéristique du domaine (i.e. la distance sur laquelle la vitesse varie sensiblement) et  $\tau$  le temps au bout duquel on constate une variation notable de la vitesse.

Revenons plus particulièrement sur la première hypothèse qui signifie que la vitesse du fluide doit être petite devant la vitesse du son dans le fluide. Toutefois, pour une configuration montrée sur la figure, lorsqu'un tourbillon est situé très proche du centre, il possède un tourbillon image positionné à une distance quasi-infinie. Le moindre mouve-

ment du tourbillon "réel" entraîne un déplacement très important de son image (la vitesse de celle-ci est alors très grande). Ceci a pour conséquence de mettre en défaut l'hypothèse d'incompressibilité : aucun élément d'un système hydrodynamique, supposé incompressible, ne doit se déplacer avec une vitesse comparable en valeur avec celle du son. Or, dans notre cas, la vitesse du tourbillon image n'est plus négligeable par rapport à la vitesse du son dans le fluide.

La prise en compte de ces possibilités de scénario est indispensable, dans le cas contraire, soit le modèle utilisé n'est plus approprié à l'étude, soit la physique du phénomène n'est pas respectée.

Afin de tenir compte de cette série de paradoxes, et de résoudre ces difficultés, nous sommes obligés d'éliminer le centre du domaine comme une zone non-physique.

## V.7 Résolution possible des difficultés

Afin de résoudre ces difficultés, on considère un nouveau contour  $\Gamma$  dans lequel on exclut non-seulement la singularité tourbillonnaire et la singularité lié à la frontière, mais en plus la singularité présente au centre du domaine (voir figure V.4).

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_\Gamma$  se décompose alors de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{H}_{\Gamma_i} + \mathcal{H}_{\Gamma_o} + \mathcal{H}_{\Gamma_R}, \quad (\text{V.32})$$

qui représentent respectivement les domaines liés à la singularité tourbillonnaire, la singularité au centre du domaine et la singularité sur la frontière.

Lorsque le centre du domaine est exclu de la considération et le point  $|\mathbf{x}| = 0$  n'appartient plus au domaine physique, la fonction de courant peut être mise sous la forme

$$\psi(\mathbf{x}) = C \cdot \ln |\mathbf{x}| + \underbrace{\sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\gamma_i}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| + g_i(\mathbf{x}) \right]}_{\psi'} \quad (\text{V.33})$$

La présence du premier terme avec  $C \neq 0$  permettra de compenser le terme non-physique dans l'Hamiltonien.

On calcule chaque partie de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_\Gamma$ . On reprend la même méthode de résolution en introduisant le terme supplémentaire.

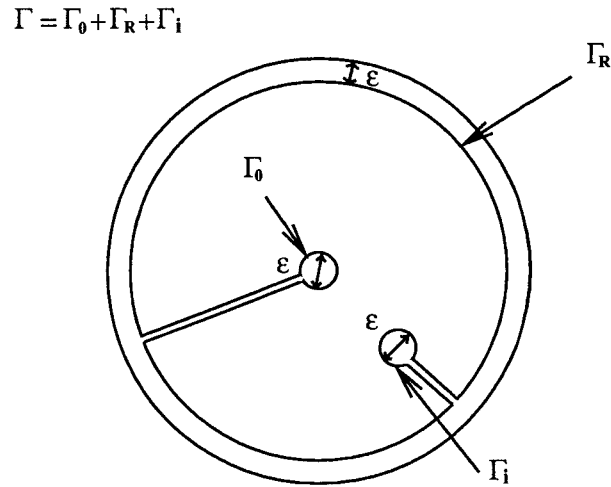


FIGURE V.4: Représentation du domaine dans lequel est calculé l'Hamiltonien : on exclue la singularité au centre du domaine, la singularité tourbillonnaire et la singularité sur la frontière.

1- Calcul de  $\mathcal{H}_{\Gamma_i}$

A l'aide de l'expression (V.24), on trouve pour  $\mathcal{H}_{\Gamma_i}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_i} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{j=1}^N \psi(\mathbf{x}_j) \left[ -\frac{\gamma_j}{2\pi} \right] \\ \mathcal{H}_{\Gamma_i} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_j \psi(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

2- Calcul de  $\mathcal{H}_{\Gamma_0}$

En calculant la fonction de courant  $\psi(0)$  à l'aide de la relation (V.33), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_0} &= -\pi C^2 \ln \epsilon - \pi C \psi'(0) \\ &\sim -\pi C \psi'(0) \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

3- Calcul de  $\mathcal{H}_{\Gamma_R}$

La fonction de courant au voisinage de la frontière s'exprime par

$$\psi|_{\Gamma_R} = C \cdot \ln R + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|}. \quad (\text{V.36})$$

On trouve ainsi pour  $\mathcal{H}_{\Gamma_R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_R} &= \pi \left\{ C \ln R + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|} \right\} \left\{ C + \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2\pi} \right\} \\ &= \pi \left\{ C^2 \ln R + C \frac{\ln R}{2\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i + C \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \gamma_j \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln \frac{R}{|\mathbf{x}_j|} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

En regroupant les différentes parties de l'Hamiltonien, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N N \gamma_j C \ln r_j - \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N N \gamma_i \gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N N \gamma_j g_i(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \left( C + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) \sum_{i=1}^N N \gamma_i \ln R r_i - \\ &\quad - \pi C \sum_{i=1}^N N \left( -\frac{\gamma_i}{2\pi} \ln r_i + g_i(0) \right), \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

avec

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}') &= \frac{1}{2\pi} \gamma_i \frac{1}{R} \ln \left| \mathbf{x}' - \frac{R^2}{r_i^2} \mathbf{x}_i \right|, \\ g_i(0) &= \frac{\gamma_i}{2\pi} \ln \frac{R}{r_i}. \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

On obtient pour l'Hamiltonien la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln \left[ \frac{1}{R} \left| \mathbf{x}_i - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_j|} \mathbf{x}_j \right| \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln \frac{r_i}{R} \left\{ C - \frac{\Gamma}{4\pi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

La dernière étape est la détermination de la valeur de  $C$ . Pour cela, on applique le principe de correspondance qu'en calculant la limite de l'Hamiltonien lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,



seule la partie de l'Hamiltonien portant sur les interactions entre les tourbillons réels intervient.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\Gamma = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \quad (\text{V.41})$$

c'est à dire, en utilisant l'équation (V.40), on a

$$\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln \frac{R}{r_i} + \left\{ C - \frac{\Gamma}{4\pi} \right\} \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln \frac{r_j}{R} = 0, \quad (\text{V.42})$$

on trouve ainsi pour  $C$

$$C = \frac{\Gamma}{2\pi} = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2\pi}.$$

La forme définitive de l'Hamiltonien est donc

$$\mathcal{H}_\Gamma = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \underbrace{\ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R}}_{(1)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \gamma_i \gamma_j \left\{ \underbrace{\ln \frac{1}{R} |\mathbf{x}_i - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_j|^2} \mathbf{x}_j|}_{(2)} + \underbrace{\ln \frac{|\mathbf{x}_j|}{R}}_{(3)} \right\}$$

La première partie de l'Hamiltonien correspond aux interactions entre les tourbillons réels, la seconde aux interactions entre les tourbillons réels et les tourbillons images, et la troisième partie a permis de compenser le terme non-physique.

Notons que ce problème de "compensation" n'apparaît pas dans le cas d'une vorticité totale nulle du système. En effet, on a alors  $C = 0$  car

$$C = \frac{\Gamma}{2\pi} = \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi} = 0 \quad (\text{V.43})$$

C'est ce cas particulier qui est largement utilisé dans la littérature, permettant ainsi de ne pas considérer le vrai problème, d'éviter tout terme non-physique dans les équations et toute impossibilité d'application du modèle (voir par exemple [3],[12]).

Notons que dans les ouvrages "classiques", il y a des indications sur les difficultés qui apparaissent lorsque l'on exige le respect des conditions aux limites. Saffman [11] détermine la fonction de Green pour des tourbillons se déplaçant à l'extérieur d'un cylindre, le problème de compensation n'a alors plus lieu d'être puisque les tourbillons réels ne se

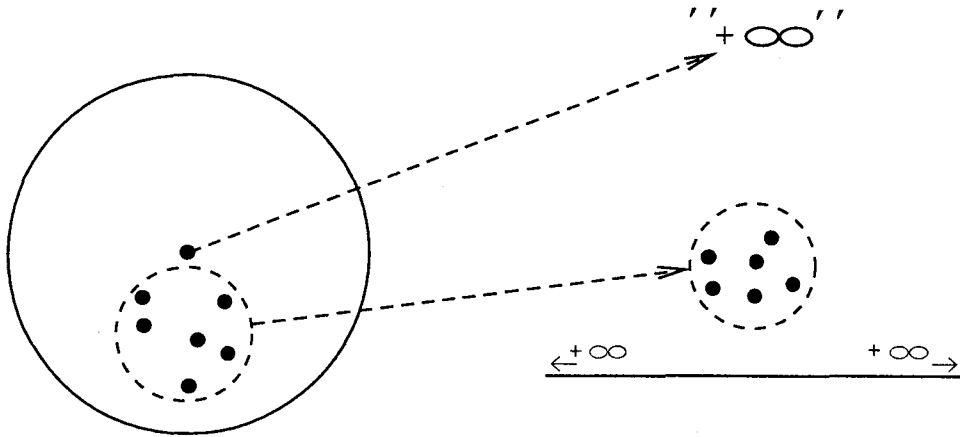


FIGURE V.5: Schématisation du principe de la méthode des transformations conformes appliquée à un domaine circulaire. Le nouveau domaine obtenu est un demi-plan où les singularités qui étaient présentes dans le domaine circulaire se retrouvent alors "proches" de la frontière délimitant ce demi-plan. La singularité située au centre du domaine circulaire se retrouve à "l'infini" de la frontière.

trouveront jamais à une distance l'infinie du centre du domaine. Seul Milne-Thomson [9] montre que des difficultés sont présentes lors de l'étude du comportement de tourbillons ponctuels à l'intérieur d'un domaine cylindrique (ou circulaire). Dans cet ouvrage est différencié l'étude à l'intérieur de celle à l'extérieur du cylindre mais aucune explication, ni justification n'est présentée.

On peut justifier une nouvelle fois de façon physique le fait d'exclure le centre du domaine. Pour cela, on se propose d'appliquer la méthode des transformations conformes (voir [2]). Il est un fait bien connu qu'à l'aide de cette méthode, à partir d'un domaine circulaire, on peut obtenir un demi-plan (voir figure V.5). Les singularités qui étaient présentes dans le domaine circulaire se retrouvent alors à une distance finie de la frontière délimitant ce demi-plan. La particule située au centre du domaine circulaire se retrouve à une distance infinie de la frontière du demi-plan après transformation du domaine. Dans notre étude, nous avons choisi d'exclure le centre du domaine circulaire, ce qui signifie qu'aucune particule n'est située à "l'infini" du demi-plan. Il semble "naturel" de considé-

rer que toutes les particules soient à une distance finie de la frontière. Notre hypothèse d'exclusion du centre semble donc tout à fait "raisonnable".

Cette partie de notre travail est primordiale, nous avons montré que cette prise en compte des difficultés liées au centre du domaine est indispensable afin d'éviter toute incompatibilité avec le modèle choisi ou toute impossibilité de résolution du système.

## V.8 Equations de base en coordonnées polaires

Le système à résoudre est le suivant [7]

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int dx' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}} = \gamma_{(m)}^{-1} \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j^{(m)}}. \quad (\text{V.44})$$

Etant donné la géométrie du domaine, nous passons au système de coordonnées cylindriques. En tenant compte du Jacobien dans les équations, le système devient alors

$$\begin{aligned} \gamma_i \frac{\partial r_i}{\partial t} &= \frac{1}{r_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} \\ \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= -\frac{1}{r_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i}, \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

et, en considérant que les tourbillons ont tous la même intensité  $\gamma = \Gamma/N$ , l'Hamiltonien peut se mettre *sous la forme adimensionné*, en prenant comme temps caractéristique  $\tau = 4\pi \frac{R^2}{\Gamma}$  et comme échelle caractéristique  $R$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=1}^N \ln(1 - r_i^2) + \sum_{i,j=1}^{N'} (-\ln \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)} + \right. \\ \left. + \ln \sqrt{1 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j) + r_i^2 r_j^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.46})$$

on trouve alors, après calculs, le système à résoudre

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial t} &= \frac{2}{N} \left\{ \sum_{j=1}^{N'} \left[ \frac{-r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)} + \frac{r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{1 + r_i^2 r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)} \right] \right\} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= -\frac{2}{N r_i} \left\{ -\frac{1}{1 - r_i^2} - \sum_{j=1}^{N'} \left[ \frac{r_i - r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_j [r_i r_j - \cos(\theta_i - \theta_j)]}{1 + r_i^2 r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)} \right] + \frac{1}{r_i} \frac{r_i^2 + 1}{r_i^2 - 1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$



## V.9 Détermination du pas de temps

L'étude du comportement des tourbillons se faisant sur un domaine borné, il faut prêter une attention particulière au choix du pas de temps des calculs numériques (présence d'un grand nombre de tourbillons dans une zone de petite dimension et influence des frontières). Une restriction du pas de temps est alors indispensable car un pas de temps trop grand pourrait entraîner un non respect des lois de conservation et, ou une "sortie" des tourbillons du domaine.

Afin de déterminer cette restriction, nous nous basons sur les situations extrêmes qui peuvent se produire :

- Lorsque deux tourbillons de même signe sont très proches l'un de l'autre à une distance suffisante des frontières (faible influence de celles-ci), leur vitesse de rotation est alors très grande. La vitesse linéaire de chacun des tourbillons ( $ij$ ) est estimé par :

$$v \sim \frac{\kappa}{r_{ij}}. \quad (\text{V.48})$$

Elle est également fonction de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de rotation mutuelle :

$$v = r_{ij}\dot{\theta} \equiv r_{ij} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (\text{V.49})$$

d'où

$$\Delta t \sim r_{ij}^2 \frac{1}{\kappa} \Delta\theta. \quad (\text{V.50})$$

Pour ce premier cas, la restriction du pas de temps se définit en limitant le "déplacement" angulaire à une fraction de  $\pi$  :

$$\Delta t \ll \frac{r_{ij}^2}{\kappa} \pi. \quad (\text{V.51})$$

- Lorsqu'un tourbillon ( $i$ ) est situé proche d'une paroi.

En effet, la formation du tourbillon image ( $i'$ ) entraîne une vitesse de déplacement très rapide car la distance entre le tourbillon et son image est très faible. Cette vitesse est estimée par

$$v \sim \frac{\kappa}{\epsilon} \sim \frac{\kappa}{r_{ii'}} \quad (\text{V.52})$$

Comme précédemment, en exprimant la vitesse linéaire en fonction de la vitesse angulaire, on obtient :

$$\frac{\Delta\theta'}{\Delta t} R \sim \frac{\kappa}{r_{ii'}}, \quad (\text{V.53})$$

où  $\theta'$  est l'angle sous lequel le tourbillon est "vu" du centre du domaine, soit

$$\Delta t \sim \frac{Rr_{ii'}}{\kappa} \Delta\theta'. \quad (\text{V.54})$$

Tout comme dans le premier cas, la restriction est fonction du déplacement angulaire :

$$\Delta t \ll \frac{Rr_{ii'}}{\kappa} \pi \quad (\text{V.55})$$

En regroupant ces deux cas extrêmes, la restriction du pas de temps se résume par

$$\Delta t \ll \frac{\pi}{\kappa} \min\{r_{ij}^2, Rr_{ii'}\}, \quad (\text{V.56})$$

ou encore

$$\Delta t \equiv \alpha \frac{\pi}{\kappa} \min\{r_{ij}^2, Rr_{ii'}\}, \quad (\text{V.57})$$

avec  $\alpha \ll 1$ .

Notons que la valeur du paramètre  $\alpha$  sera choisie de telle façon que les phénomènes de "résonances" n'apparaissent lors des calculs (on prendra, par exemple,  $\alpha = 0.013$ ).

## V.10 Expérience de plasma

Comme nous l'avons vu dans le chapitre III, le plasma d'électron pur confiné est un excellent système pour des observations quantitatives de la dynamique d'un fluide bidimensionnelle non-visqueux, de la turbulence  $2D$  et de l'auto-organisation des tourbillons localisés bidimensionnels.

Ainsi dans cette partie, nous effectuons une expérience numérique et comparons nos résultats à une expérience de plasma dont le dispositif expérimental est présenté sur la figure V.6 (voir [5]).

Le plasma d'électron, de densité  $n \sim 10^7 \text{ cm}^{-3}$ , est contenu, dans le vacuum ( $P \sim 10^{-9} \text{ Torr}$ ,  $P \sim 10^{-10} \text{ Torr}$ ), dans une conduite avec des parois métalliques de diamètre

$2R_w = 7\text{cm}$ . Les électrons émis par une spirale de tungsten (voir la partie gauche de la figure V.6) sont capturés par un "piège" énergétique dans la zone centrale de la conduite. Un champ magnétique uniforme axial ( $B_z \leq 4\text{kG}$ ,  $B_z \leq 1\text{T}$ ) impose un confinement radial du plasma pendant l'intervalle de temps  $\sim 100\text{ sec}$ . Une différence de potentiel négative ( $V \leq 50\text{ Volts}$ ) appliquée aux extrémités de la conduite et sur les parois de la zone centrale de la conduite, assure un confinement longitudinal dans la zone centrale du dispositif. Une "colonne électronique" créée dans ce dispositif a un rayon caractéristique  $R_p \sim 1,5\text{ cm}$  et une longueur  $L_p \sim 50\text{ cm}$ . L'énergie cinétique moyennée des électrons est de l'ordre de  $kT \sim 1\text{ ev}$  ( $T \sim 10^4\text{ K}$ ). Les électrons ne subissent pratiquement pas de collisions entre eux car la longueur de libre parcours est estimée dans ces conditions par  $\lambda_{ee} \sim 3\text{ km}$ . Les électrons individuels "sautent" rapidement le long de l'axe  $z$ , subissent les réflexions contre les "bouchons de champ" aux extrémités de la conduite ( $f_z = \langle v_z \rangle / 2L_p \sim 0,4\text{ Mhz}$ ). Ce fait permet de moyennner sur  $z$  tout des  $z$ -variations des champs. En ce qui concerne du mouvement des électrons individuels dans la direction perpendiculaire à l'axe  $z$ , il est influencé par l'effet de cyclotron, ayant le rayon de cyclotron caractéristique d'orbite  $r_c \sim 5\text{ }\mu\text{m}$  (ignorable pour des mouvements macroscopiques en question) et une période de rotation  $\tau^{-1} \sim 11\text{ Ghz}$ .

Ainsi, la représentation de la répartition moyennée des électrons peut être assimilée à des "tubes" rigides de charge orientés le long de l'axe  $z$ , et qui se meuvent sans changer leur orientation.

Dans les expériences citées, la répartition radiale de la densité d'électron, moyennée suivant  $z$ , a été diagnostiquée par des certains moyens. Le résultat, la répartition de la concentration  $n(r, \theta, t)$ , a été observée sur un écran phosphorescent (figure V.6).

Le mouvement des électrons dans le plan perpendiculaire au champ magnétique est dû au fort champ électrique  $\mathbf{E}(r, \theta, z) = -\nabla\phi(r, \theta, z)$  résultant du plasma d'électron non-neutre. La vitesse du mouvement collectif, "de dérive", pratiquement azimutal dans le champ électromagnétique croisé, est définie alors par l'expression  $v(r, \theta, z) = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ . Cette expression peut être trouvée de la façon suivante : on prend l'équation du mouvement de l'ensemble des électrons, avec les forces électrostatique et de Lorentz, on la multiplie vectoriellement par  $\mathbf{B}$  et on néglige les effets d'inertie.

On peut estimer le temps caractéristique du mouvement collectif de plasma, la période de rotation  $f_R^{-1} \equiv 2\pi r / v_\theta(r) \approx 10^{-4}\text{ s}$  (ce qui donne le temps caractéristique de référence ;

dans [5], on donne  $\tau_R \sim 170 \mu s$ ).

Dans le cadre de ces approximations, l'écoulement bidimensionnel,  $(r, \theta)$ , des électrons est décrit par le système des équations, qui peuvent être formulées en termes de vorticité  $\Omega$  et de fonction de courant  $\psi$ , définies respectivement par  $\Omega(r, \theta, t) \equiv (4\pi|e|c/B)n$  et  $\psi(r, \theta, z) \equiv (c/B)\phi(r, \theta, z)$ . La vorticité  $\Omega$  de l'écoulement est proportionnelle à la densité d'électron  $n$ , qui est mesurée dans le dispositif expérimental. On obtient donc

$$\begin{aligned} [\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla]\Omega &= 0, \\ \mathbf{v} &= -\nabla\psi \times \mathbf{z}, \\ \nabla^2\psi &= \Omega. \end{aligned} \tag{V.58}$$

Ces équations sont isomorphes aux équations d'Euler 2D.

Alors, la colonne d'électrons, entourée par un conducteur, évolue comme la turbulence 2D dans un fluide incompressible non-visqueux entouré par une frontière circulaire avec une condition qui est définie comme "free-slip". En effet, la condition  $\partial\phi/\partial r$  sur la surface latérale de la conduite donne une vraie condition "free-slip" :  $\phi \sim \psi(R_w) = 0$ .

Nous insistons ici, qu'il n'y a qu'un signe de vorticité (pris positif), car la densité d'électrons peut être uniquement positive, et il n'y a pas de charge de signe opposée.

En principe, on peut observer dans ce système des faibles effets diffusifs non-voulus, dus aux fuites des électrons à travers les "bouchons" des champs aux extrémités du dispositif, et des faibles effets "visqueux" sur les petites échelles spatiales, dus aux collisions électron-électron. Dans certains cas, ces effets non-désirables *ne sont pas* modélisés par les équations similaires à celles de Navier-Stokes (dissipation de Landau, effet de tunnel, etc.).

Dans les cas qui nous intéressent, ces effets de dissipation peuvent être négligés.

## V.11 Expérience numérique, résultats et validation qualitative

Cette étude numérique a pour objectif d'exprimer vers quelle tendance semble évoluer les tourbillons se mouvant à l'intérieur d'un domaine de forme circulaire. Nous avons privilégié, lors de cette étude, *le nombre de tourbillons* par rapport à *l'avancement temporel*

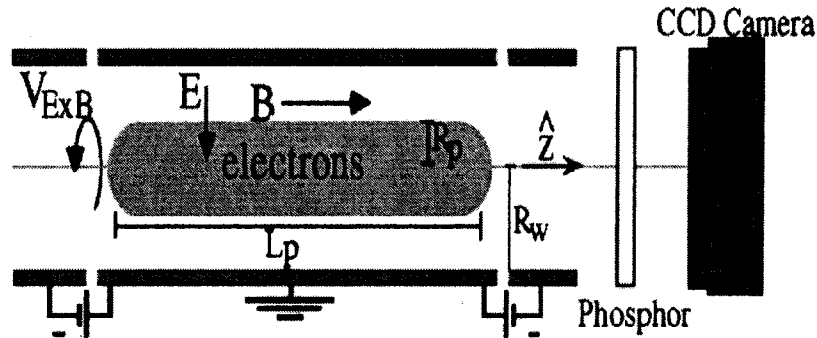


FIGURE V.6: Présentation du banc d'essai de l'expérience [5].  $\mathbf{E}$  est le champ électrique produit par les électrons et  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique uniforme appliqué.  $V_{ExB}$  dénote la dérive des électrons dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les paramètres géométriques de l'installation expérimentale sont  $R_w = 3.5\text{cm}$ ,  $R_p \sim 1.5 - 2.5\text{cm}$ , et  $L_P \sim 50\text{cm}$ .

du processus. Ceci afin de se trouver dans des cas qui peuvent être exploités et comparés aux résultats exprimés par les lois statistiques. On considère donc que les états finaux sont quasi-atteints.

Nous étudions cinq configurations composées de 1000 tourbillons de même intensité. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures V.7 à V.24.

Pour ces différents cas, les valeurs de  $\alpha$  sont respectivement 0.125, 0.313, 0.4, 0.5, 0.627.

Nous présentons, pour l'un des cas ( $\alpha = 0.627$ ), le scénario détaillé d'évolution des tourbillons (figures V.7 à V.9). On remarque que jusqu'à  $t = 8.79$ , la répartition des structures en spirale est toujours observée, ce qui, peut signifier, en premier approche, que le système "n'oublie" pas les conditions initiales ("forme spirale initiale").

La figure V.10 représente l'allure de l'Hamiltonien en fonction du temps pour  $\alpha = 0.314$  calculé à l'aide de la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à l'ordre 4 et à l'aide de notre méthode d'auto-régulation. On remarque, pour la méthode traditionnelle, que l'Hamiltonien subie une légère variation durant le processus d'évolution, l'erreur maximale

$(\Delta H/H_0)$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Pour les autres cas étudiés ( $\alpha \neq 0.314$ ), l'erreur maximale est du même ordre. La seconde courbe montre que notre méthode d'auto-régulation garantit le respect de la conservation de l'énergie durant tout le processus d'évolution.

Tout comme dans le chapitre IV, même si l'ajout du correcteur semble inutile ( $(\mathcal{H} - \mathcal{H}_o)/\mathcal{H}_o$  est de l'ordre de  $10^{-5}$  sur l'ensemble des cas étudiés), rien ne garantit que pour un long processus, l'incertitude ne sera pas de l'ordre de l'Hamiltonien. Notre méthode d'auto-régulation garantit le respect de conservation de l'énergie durant tout le processus d'évolution.

Puis, pour les différents  $\alpha$ , nous présentons les figures avec a) la configuration initiale des tourbillons, b) leur répartition à un temps intermédiaire ainsi que c) celle considérée comme étant obtenue à l'état final. Pour cette dernière, on ne présente que les tourbillons intervenant dans les regroupements. On choisit que des tourbillons sont considérés comme groupés lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons.

La répartition finale semble variée suivant les différentes valeurs de  $\alpha$ . En effet, plus la valeur de  $\alpha$  est grande (i.e. plus on a "une forme enroulée" au départ), plus les principaux regroupements se situent dans la zone centrale du domaine (voir figure V.21). Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que lorsque  $\alpha$  est faible (figure V.13), les tourbillons restent proche des frontières à cause de la présence des tourbillons images, l'influence de ceux-ci est importante, ils maintiennent les tourbillons "réels" proches des frontières (en imposant un déplacement le long de la frontière).

Il est difficile de conclure sur la dépendance du nombre de regroupements de tourbillons suivant les valeur de  $\alpha$ . En effet, considérer comme regroupés des tourbillons dépend d'un paramètre choisi "arbitrairement". Le graphe présenté sur la figure V.24 montre que lorsque l'on considère avoir un regroupement pour "une concentration au minimum 10 fois supérieure", on trouve une dépendance par rapport à  $\alpha$  : plus  $\alpha$  est grand, plus le nombre de tourbillons est faible. Alors que pour une "une concentration au minimum 20 fois supérieure", le nombre est pratiquement constant (7 – 8).

Cette étude avait pour objectif de montrer qu'en modifiant les conditions initiales, le système n'évoluait pas vers le même état quasi-final et que certaines "relations" pouvaient exister entre l'état initial et l'état final.

Afin de valider nos résultats, nous comparons qualitativement ceux-ci avec les don-

nées d'une expérience récente de plasma [5]. Les résultats obtenus dans l'expérience sont présentés sur les figures V.22 et V.23. On observe que, tout comme dans notre étude, le système n'évolue pas vers un état final unique, le nombre de tourbillons "survivants" est du même ordre de grandeur,  $N \sim 7 - 20$ , etc.

Cette comparaison confirme que l'on peut, en tout cas, tirer de notre modèle des résultats suffisamment significatifs.

Nous avons également établi le pourcentage de tourbillons qui intervenaient dans les regroupements par rapport au nombre initial de tourbillons. Les résultats présentés sur la figure V.26 montrent que ce pourcentage est pratiquement indépendant de  $\alpha$ . Parmi l'ensemble des tourbillons, 40 à 50% interviennent dans les regroupements quelque soit la valeur de  $\alpha$ . Ce résultat met en évidence que la turbulence bidimensionnelle non-visqueuse est constituée de deux sous-systèmes qui ne peuvent être négligés l'un par rapport à l'autre : les tourbillons participant au phénomène d'auto-organisation et le "fond".

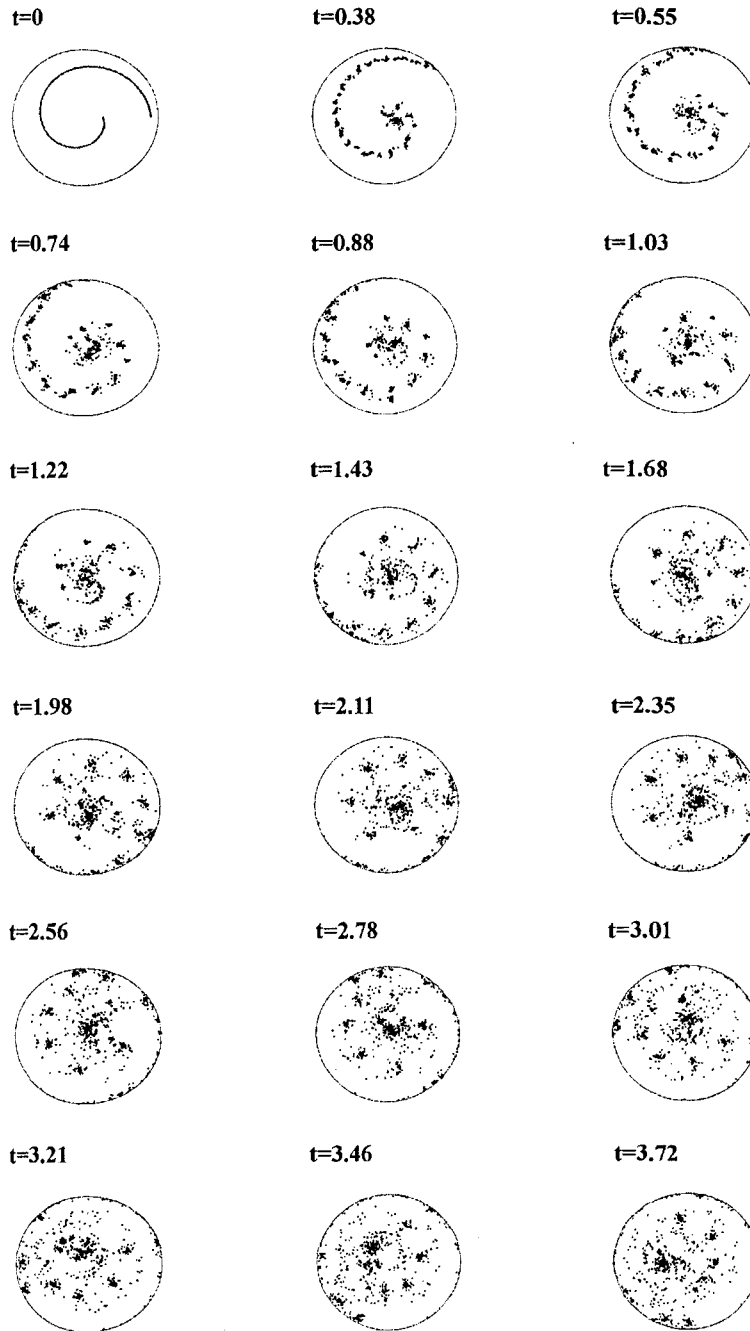


FIGURE V.7: Présentation détaillée de l'évolution des tourbillons pour  $t = 0$  à  $t = 3.72$  pour  $\alpha = 0.628$ .



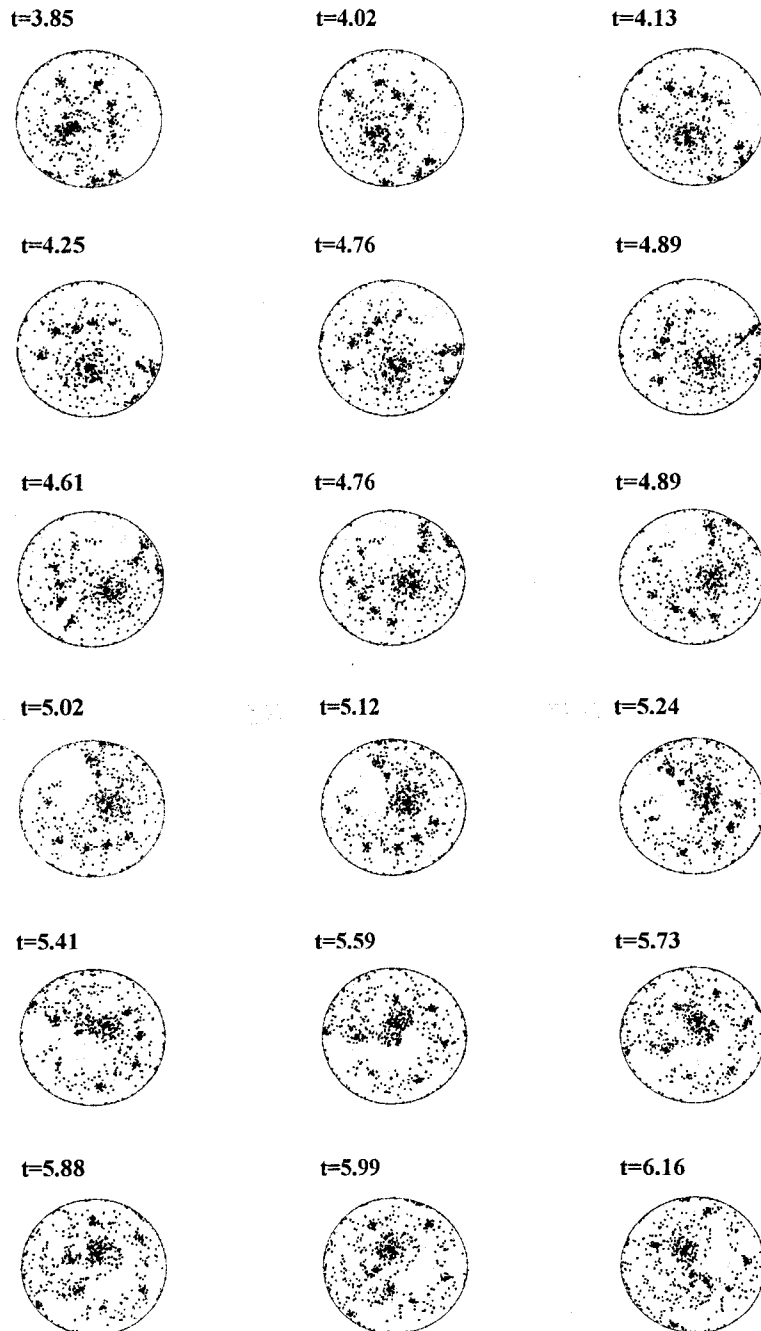


FIGURE V.8: Présentation détaillée de l'évolution des tourbillons pour  $t = 3.85$  à  $t = 6.16$  pour  $\alpha = 0.628$ .

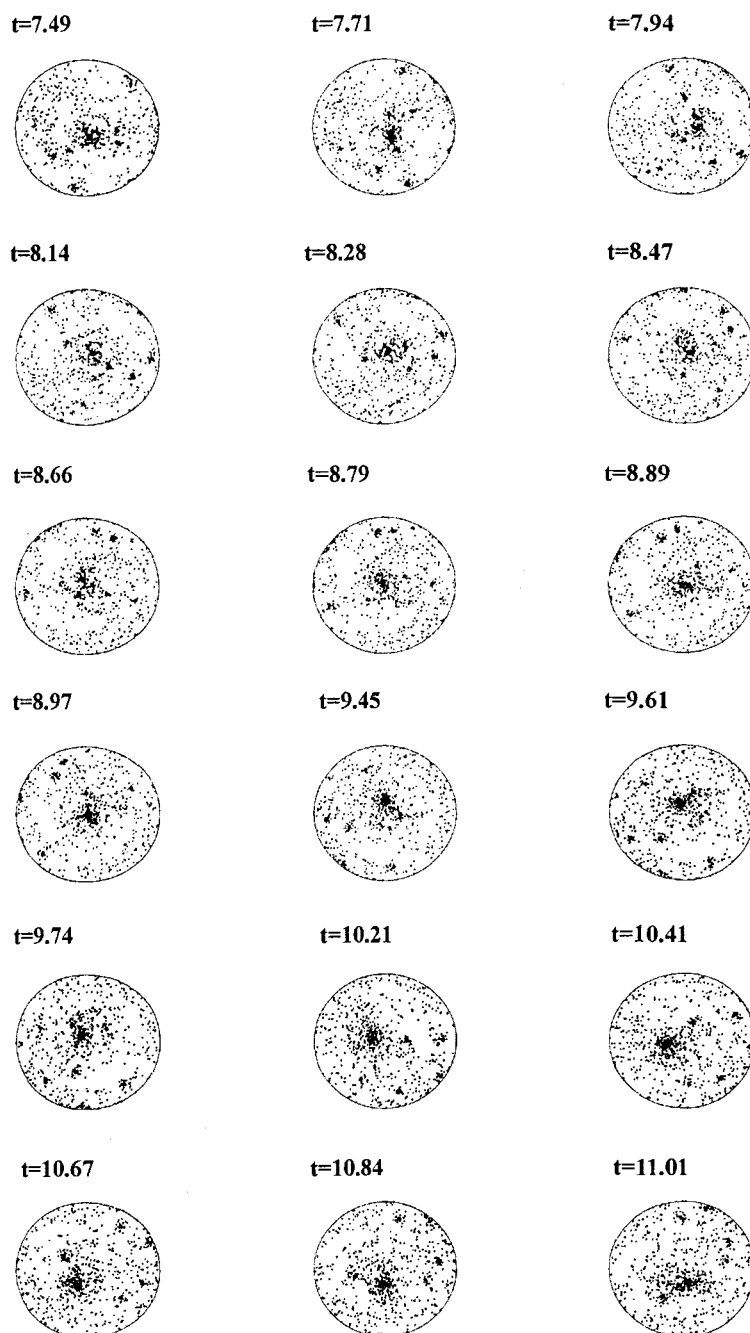


FIGURE V.9: Présentation détaillée de l'évolution des tourbillons pour  $t = 7.49$  à  $t = 11.01$  pour  $\alpha = 0.628$ .

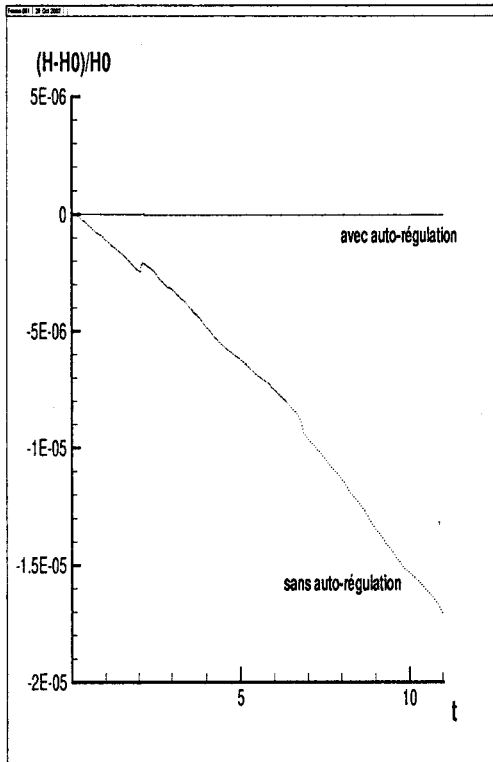


FIGURE V.10: Représentation de l'allure de l'Hamiltonien en fonction du temps pour  $\alpha = 0.314$  calculé à l'aide de la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à l'ordre 4 et à l'aide de notre méthode d'auto-régulation.

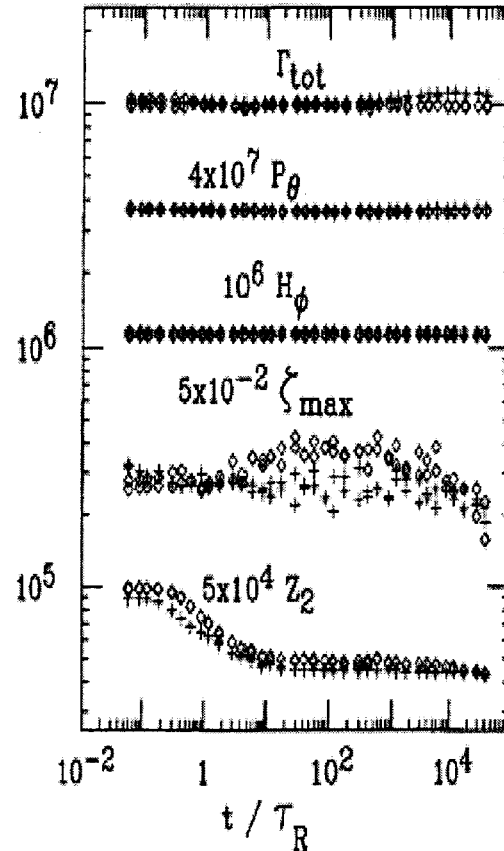


FIGURE V.11: Contrôle de l'évolution temporelle des invariants du système : la circulation totale, le moment angulaire, l'énergie, la vorticité et l'ensrophie (qui n'est pas conservée dans l'expérience).



FIGURE V.12: Répartition initiale et à un temps  $t = 6.81$  des tourbillons pour  $\alpha = 0.125$ .

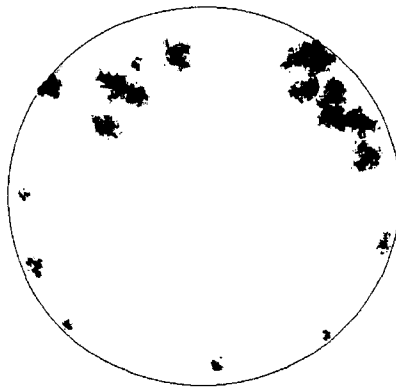


FIGURE V.13: Présentation des tourbillons intervenant dans les regroupements de tourbillons (taches) à un temps  $t = 11.01$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons. On observe 15 taches tourbillonnaires à cet instant du processus.

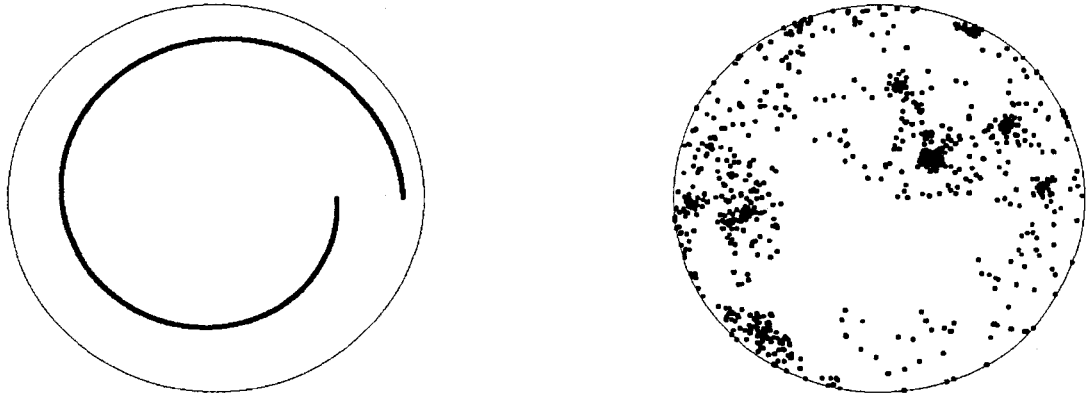


FIGURE V.14: Répartition initiale et à un temps  $t = 6.28$  des tourbillons pour  $\alpha = 0.314$ .

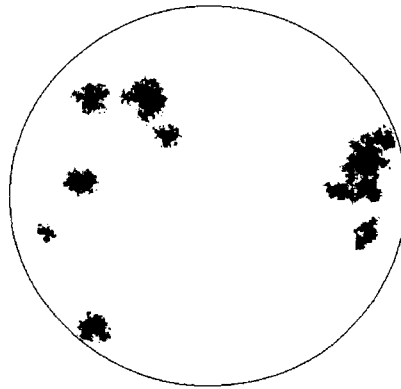


FIGURE V.15: Présentaion des tourbillons intervenant dans le phénomène de regroupements de tourbillons (taches) à un temps  $t = 10.98$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons. On observe 8 taches tourbillonnaires à cet instant du processus.

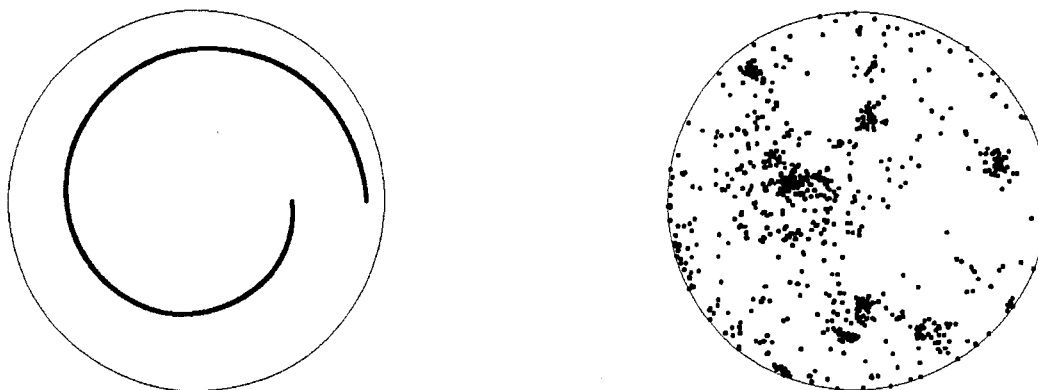


FIGURE V.16: Répartition initiale et à un temps  $t = 6.51$  des tourbillons pour  $\alpha = 0.4$ .

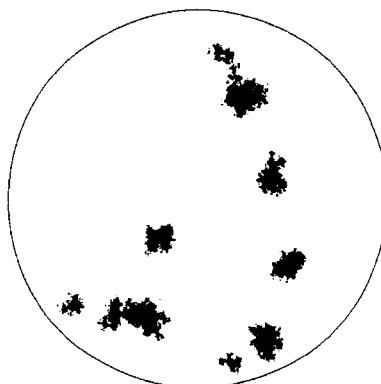


FIGURE V.17: Présentation des tourbillons intervenant dans les regroupements de tourbillons (taches) à un temps  $t = 10.51$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons. On observe 9 taches tourbillonnaires à cet instant du processus.

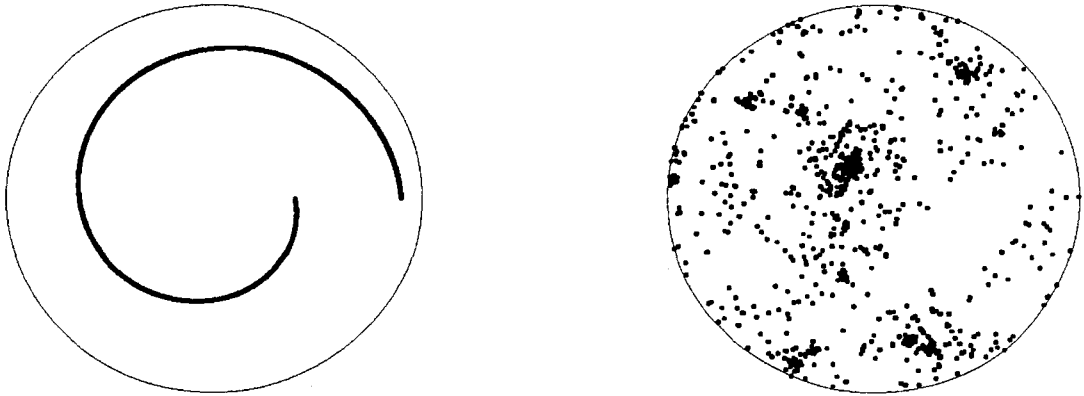


FIGURE V.18: Répartition initiale et à un temps  $t = 6.71$  des tourbillons pour  $\alpha = 0.5$ .

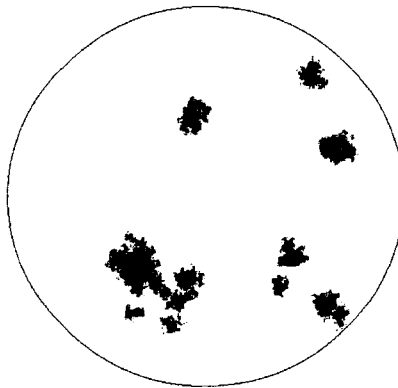


FIGURE V.19: Présentation des tourbillons intervenant dans les regroupements de tourbillons (taches) à un temps  $t = 11.01$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons. On observe 9 taches tourbillonnaires à cet instant du processus.

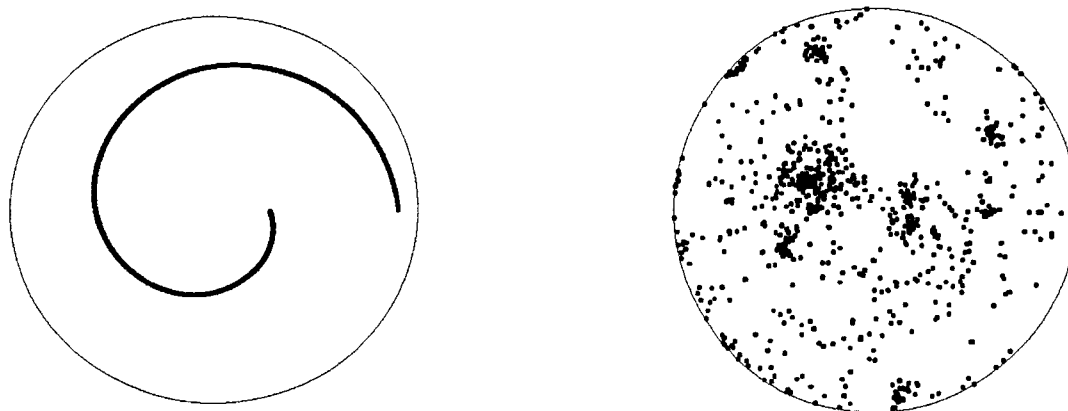


FIGURE V.20: Répartition initiale et à un temps  $t = 6.38$  des tourbillons pour  $\alpha = 0.628$ .

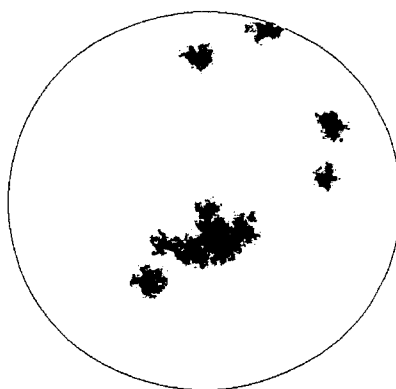


FIGURE V.21: Présentation des tourbillons intervenant dans le phénomène de regroupements de tourbillons (taches) à un temps  $t = 11.01$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons. On observe 6 taches tourbillonnaires à cet instant du processus.



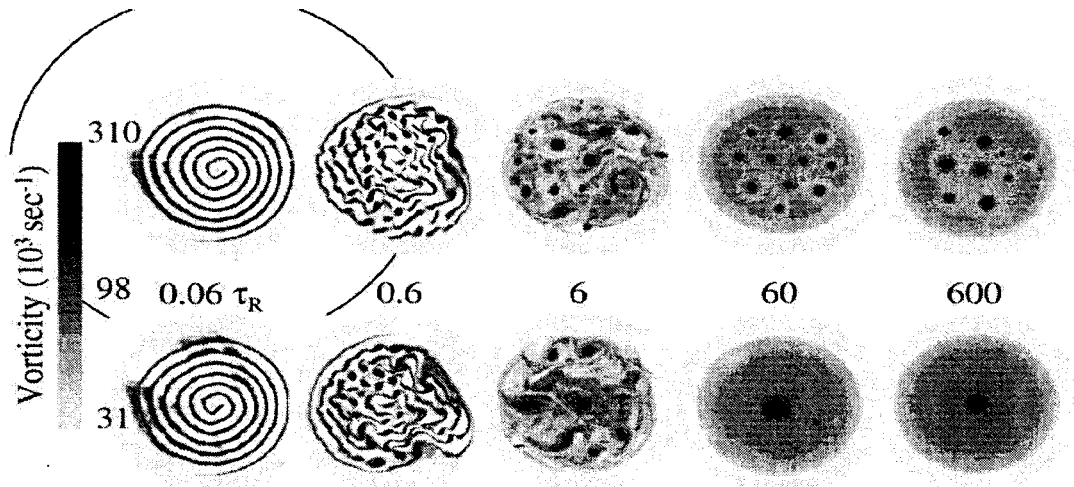


FIGURE V.22: Répartition de la vorticité, pour des instants de temps différents, pour deux séquences avec les configurations géométriques initiales similaires. On voit nettement que la configuration finale dépend des conditions initiales.

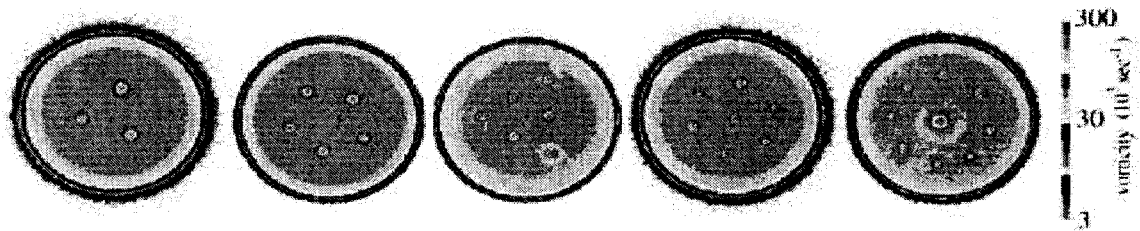


FIGURE V.23: Structures "cristallines" de tourbillons de configurations différentes observées lors de l'étude expérimentale. Dans les taches claires, la concentration de vorticité dépasse 10 fois la concentration environnante. Cette figure montre les cristaux tourbillonnaires avec, de gauche à droite,  $M = 3, 5, 6, 7, 9$  tourbillons intenses. Dans cet équilibre du cristal tourbillonnaire, la distribution totale de vorticité est stationnaire dans le système tournant de coordonnées.

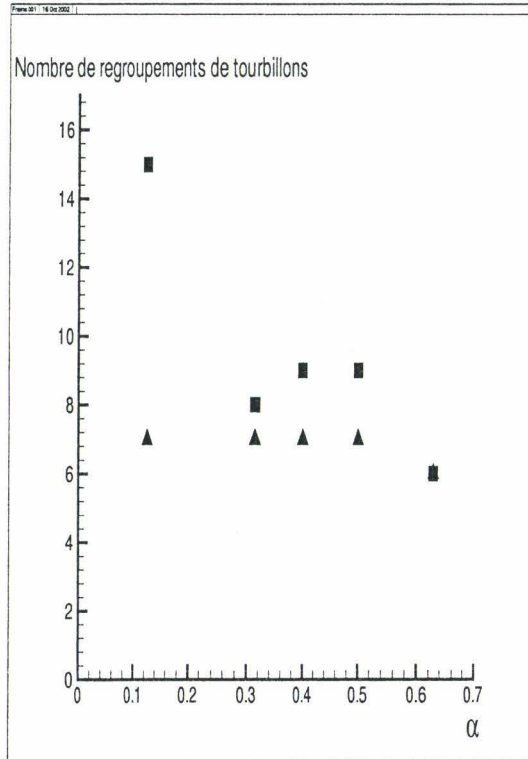


FIGURE V.24: Représentation du nombre de regroupements de tourbillons (taches) en fonction du paramètre  $\alpha$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois (■) et 20 fois (▲) supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons.

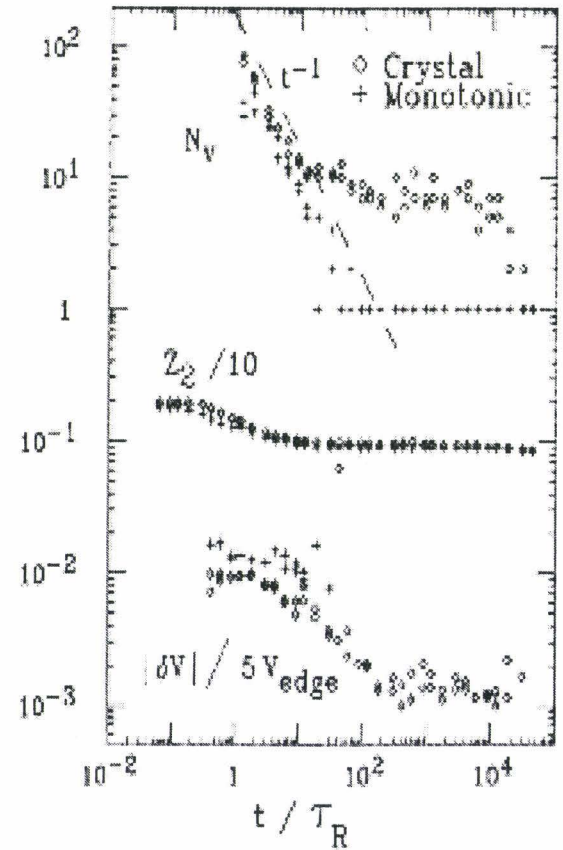


FIGURE V.25: Nombre de tourbillons "survivants"  $N_v$ , l'enstrophie  $Z_2$ , et la vitesse fluctuante moyennée  $|dV|$  obtenus dans l'expérience.

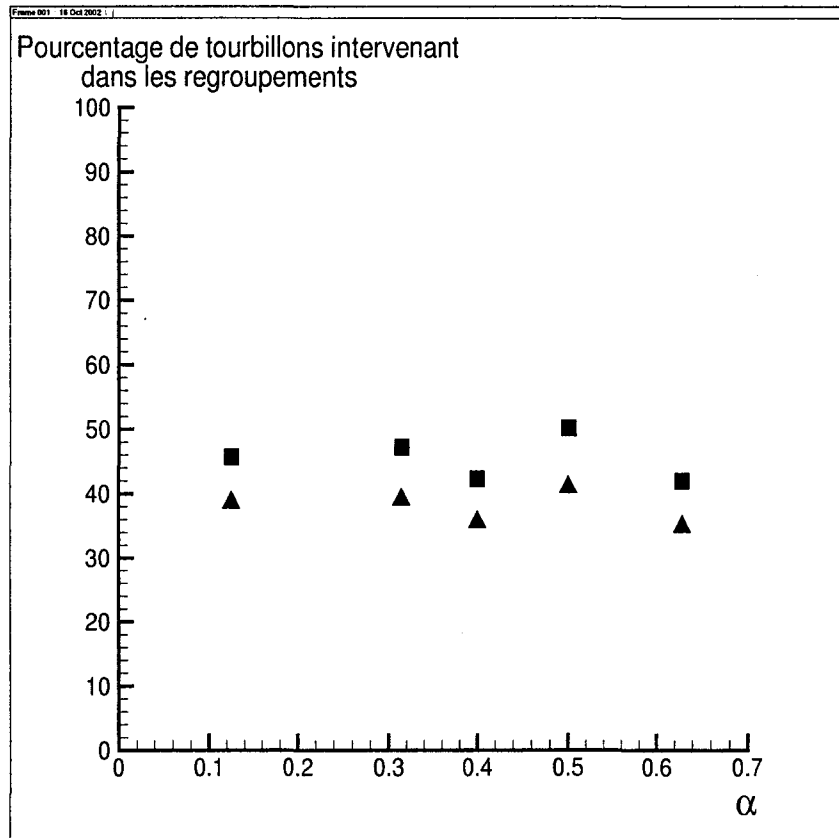


FIGURE V.26: Représentation du nombre de tourbillons intervenant dans les regroupements de tourbillons (taches) en fonction du paramètre  $\alpha$ . On considère que les tourbillons sont "groupés" lorsque la concentration de la vorticité est au minimum 10 fois (■) et 20 fois (▲) supérieure à la concentration de vorticité moyenne établie pour une distribution uniforme des tourbillons.



# Bibliographie

- [1] Aref H., Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 345-389 (1983).
- [2] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 537 (1967).
- [3] Buhler O., Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder, *Physics of Fluids* **41**, no 7, 2139 (2002).
- [4] Dezhe Z. J. et Dublin H. E., Theory of vortex crystal formation in two-dimensional turbulence, *Physics of Plasmas*, **7**, 5, 1719 (2000).
- [5] Driscoll C. F., Jin D. Z., Schecter D. A. et Dubin D. H. E., Vortex dynamics of 2D electron plasma, *Physica C*, **369**, 21-27 (2002).
- [6] Driscoll C. F., Jin D. Z., Schecter D. A., Moreau E. J. et Dubin D. H. E., Dynamics, Statistics and Vortex Crystals in the Relaxation of 2D turbulence, *Physica Scripta.*, **T84**, 76-80 (2000).
- [7] Goncharov V. P., Pavlov V. I., Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **16**, no 4, 509-555 (1997).
- [8] Landau L. et Lifshitz E. M., *Mécanique des fluides*, Edition MIR Moscou, 314-44 (1971).
- [9] Milne-Thomson L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, Vth edition, MacMillan, London (1968).
- [10] a) Pavlov V. et Kharim O. A., Emission of acoustic waves and formation of Heated ets as a fast sources moves through a medium with a relativistic equation of

- state, *Journal of Experimental Theoretical Physics*, **71**, 2, 211–216 (1990). b) Pavlov V. and Sukhorukov A. I., Emission of Acoustic Transition Waves, *Sov. Phys. - Progrès des Sciences Physiques*, **28**, 9, 784–802 (1985).
- [11] Saffman P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992).
- [12] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D., The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Physics of Fluids* **14**, no 3, 1214 (2002).
- [13] Schecter D. A., Dubin D. H. E., Fine K. S. et Driscoll C. F., Vortex crystals from 2D Euler flow : Experiment and simulation, *Physics of Fluids*, **11**, 4, 905 (1999).

# Conclusion générale

Ce travail de thèse avait pour but d'analyser le phénomène d'auto-organisation de la turbulence bidimensionnelle en grandes structures tourbillonnaires.

Pour cela, nous avons élaboré l'approche théorique en termes de champs tourbillonnaires sous la forme de tourbillons localisés.

Le choix de la méthode a été principalement motivé par plusieurs raisons essentielles.

- Les méthodes permettant de décrire les systèmes hydrodynamiques parfaits sont multiples en dynamique des fluides. L'une des plus utilisées au cours des siècles est basée sur les équations différentielles aux dérivées partielles écrites pour des grandeurs de champ (vitesse de l'écoulement d'un fluide, pression, etc). Cette approche a été validée, par exemple, dans le cas des écoulements laminaires visqueux. En voulant décrire par cette méthode les écoulements turbulents à très grand nombre de Reynolds, les difficultés sont apparues. La source principale de ces difficultés est contenue dans le choix non-adequate des variables de champ, par exemple, celui des composantes de la vitesse ou de la vorticité. Ces champs ont un comportement statistique dans les écoulements turbulents et ce fait entraîne une inutilité dans l'utilisation des équations différentielles. De plus, le nombre requis de degrés de liberté caractérisant des fluides excède les possibilités de n'importe quel ordinateur. En d'autres termes, les *particules fluides* ou les *modes ondulatoires* ne sont pas des structures élémentaires réels dans un écoulement turbulent lorsque le nombre de Reynolds est très grand (par exemple lorsque  $\ln Re \gg 1$ ). Le nombre de ces structures dans cette situation est trop grand, et toutes celles-ci interagissent très fortement entre elles, par conséquent, elles ne peuvent donc pas être considérées comme élémentaires. Voilà pourquoi, nous avons tenté de construire une théorie en termes de champs tourbillonnaires quasi-singuliers.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir se débarrasser de la difficulté principale qui,

rappelons le, réside dans le choix des variables de champ.

- Chaque modèle mathématique possède, soit une stabilité, soit une instabilité "structurelle". Donc, un modèle destiné à étudier un phénomène physique quelconque complexe doit être suffisamment simple, dit "rude". Cette idée sous-entend que la stabilité / instabilité structurelle du modèle mathématique est une propriété, non pas du système physique étudié, mais plutôt de nos questions posées concernant celui-ci. Si ces questions sont trop détaillées, trop "fines" (le modèle est donc complexe et contient beaucoup d'éléments), les réponses du modèle peuvent alors devenir "instables" s'il y a une petite perturbation dans un élément quelconque de celui-ci, même pour un système typique. Nous sommes donc obligés de choisir une description convenable du système physique, peut être moins détaillée, peut être plus "rude", qui serait déjà stable structurellement. Guidé par cette idée, nous nous limitons aux plus simples modèles, répondant à l'objectif principal de notre travail : élucider les conditions qualitatives sous lesquelles une structure tourbillonnaire à grande échelle peut être formée.

- Un modèle, basé sur des présomptions physiques, permettant de garantir le respect des lois de conservation durant tout le processus d'évolution a été utilisé. Nous insistons sur l'importance dans le choix du modèle parce que des paradoxes par rapport aux hypothèses liées au choix du modèle et des difficultés non-négligeables dans l'interprétation des résultats peuvent apparaître.

- Nous avons utilisé, dans notre travail, l'Approche Hamiltonienne. Rappelons que la structure Hamiltonienne d'un système hydrodynamique, avec un nombre continue de degrés de liberté, est constituée de l'*Hamiltonien* donné par l'énergie totale,  $H$ , et le *crochet fonctionnel de Poisson*  $\{., .\}$ . Ce crochet est antisymétrique bilinéaire et satisfait l'identité fonctionnel de Jacobi présenté symboliquement sous la forme de l'équation (I.52). Les avantages de cette approche résident dans le fait qu'il permet de franchir quelques obstacles sérieux. Par exemple, deux obstacles sont rencontrés dans les applications des méthodes approximatives aux systèmes fluides. Tout d'abord, les fluides ont un nombre infini de degrés de liberté. Ensuite, les fluides parfaits ont un nombre infini d'intégrales de mouvement (circulation, enstrophie, et autres moments dynamiques) et de "Casimirs"  $C_k$  (les "Casimirs" du crochet fonctionnel de Poisson satisfassent la condition  $\{u_i, C_k\} = 0$ ). Les "trajectoires" dans l'espace de phase infini-dimensionnel sont les intersections du nombre infini de surfaces correspondant aux intégrales de mouvement. Ce fait est dû à



---

la formulation des équations de mouvement du fluide en termes de dérivés fonctionnelles (I.55).

Alors, dans ce cas, une application formelle des méthodes approximatives aux systèmes hydronamiques avec un nombre continu de degrés de liberté, avec *des crochets fonctionnels de Poisson dépendants des champs* (par exemple similaire à (I.56), c'est à dire sous la forme *non canonique*) peut amener à des équations qui n'ont pas la forme conservative : la perte de la conservativité dans les systèmes de Liouville est parfois observé dans les expériences numériques. Cette perte de conservativité, de même qu'une violation possible dans ces simulations de la propriété de Jacobi, (I.52), peut avoir lieu, non pas à cause des changements physiques dans le système, mais est dûe aux erreurs numériques accumulées dans un schéma de calcul de très longue durée.

Cette remarque a une signification particulière dû au fait que l'on utilise des modèles discrets avec une correspondance adéquate avec les analogies continues.

Une sélection des méthodes approximatives ou numériques *imposent une exigence spéciale sur la structure du crochet fonctionnel de Poisson* (I.56) : les méthodes approximatives sont effectivement plus réalisées dans le contexte de la formulation *canonique* lorsque, dans ce cas, les crochets de Poisson sont indépendants des variables de champs. Dans ce cas, seul un objet pour l'approximation reste : l'Hamiltonien.

Pour cette raison, il est préférable de formuler les équations d'évolution pour les champs similaires aux champs tourbillonnaires dans cette direction que les crochets fonctionnels de Poisson sont indépendants des champs. Cette caractéristique est essentielle, car elle permet de se débarrasser d'une difficulté, rencontrée fréquemment dans de nombreux problèmes, qui est le choix non-adequate des variables de champ. De plus, cette formulation possède l'avantage de respecter automatiquement toutes les lois de conservation de l'énergie et des moments.

Les résultats principaux de ce mémoire sont synthétisés dans ce qui suit.

Tout d'abord, comme étape préliminaire, nous nous sommes concentrés sur le respect de lois de conservation. Sachant que l'utilisation d'un outil numérique pouvait entraîner une mise en défaut de celles-ci, ce qui peut avoir pour conséquence de ne plus respecter les hypothèses liées au modèle (fluide parfait), une méthode d'auto-régulation, basée sur

des présomptions physiques et permettant de garantir le respect des lois de conservation durant tout le processus d'évolution, a donc été mise au point. La présentation de l'évolution de l'Hamiltonien en fonction du temps avec et sans cette méthode a montré que les erreurs étaient réduites au minimum et une comparaison qualitative de la configuration finale avec des résultats expérimentaux a permis de valider notre modèle.

Dans un second temps, en nous intéressant à la question de l'existence ou non d'un état quasi-final lors de l'évolution d'une turbulence bidimensionnelle, en analysant le comportement d'un grand nombre de tourbillons se mouvant dans un domaine infini, nous avons montré que le système "n'oubliait pas" les conditions initiales. On a en effet montré qu'une légère modification de la répartition initiale des tourbillons entraînait une auto-organisation différente des tourbillons.

Enfin, compte tenu que dans la plupart des cas, un problème physique doit être analysé avec la présence de frontières, nous avons étudié un grand nombre de tourbillons se mouvant dans un domaine borné (de forme circulaire). Nous avons montré que s'il n'est pas tenu compte des fondements physiques du phénomène, on peut rencontrer certaines difficultés dans l'interprétation des résultats. Nous avons insisté sur l'importance dans le choix du modèle en montrant que ce type de problème fait apparaître des difficultés non-négligeables et des paradoxes par rapport aux hypothèses liées au choix du modèle (fluide incompressible). Nous avons proposé une résolution possible de ces difficultés et appliqué le modèle dans le but de définir quelle "relations" pouvaient exister entre l'état initial et l'état final. L'étude plus précise du phénomène d'auto-organisation a montré que la répartition finale des tourbillons dépendaient de l'état initial. En effet, suivant la répartition initiale, les tourbillons peuvent s'organiser, soit dans la zone centrale du domaine, soit dans la zone proche des frontières. Cette étude a également montré que le nombre de tourbillons intervenant dans le phénomène d'auto-organisation étaient indépendant des conditions initiales.

Nos résultats ont été comparés avec des résultats expérimentaux de plasma. La tendance observée dans notre étude est similaire à celle obtenue expérimentalement.

Onsager, dans une publication parue en 1949, voulait expliquer, sur la base d'un modèle des tourbillons ponctuels, l'ambiguïté des structures cohérentes qui apparaissent dans les écoulements à  $Re \rightarrow \infty$ , instables à partir de considérations statistiques.

Rappelons que, jusqu'à aujourd'hui, les idées statistiques avaient permis d'établir des

---

lois fondamentales telles que celles de Kolmogorov qui a démontré, à partir de l'hypothèse sur les échanges d'énergie entre les grandes et les petites échelles, que dans le domaine spectral de l'écoulement, dit inertiel, le spectre d'énergie évolue comme  $k^{-5/3}$ . Pour la turbulence à  $Re \rightarrow \infty$ , l'image spectrale des structures cohérentes est située dans le domaine inertiel, sur les échelles intermédiaires entre celles où les effets de viscosité sont prépondérants et celles qui sont imposées par la taille du système.

C'est pourquoi pour étudier les structures auto-organisées, il est naturel de considérer un fluide non-visqueux *sans terme de forçage et de dissipation*. Toutefois, dans ce cas, le fluide est abandonné à sa propre évolution : ce n'est donc pas un *régime turbulent au sens strict du terme* puisqu'il n'est pas entretenu par le forçage du domaine des grandes échelles. On peut imaginer qu'en possédant un *état fixe* (l'énergie est constante), le système, qui évolue donc librement, ne possède pas une *configuration fixe*, car il n'y a pas de mécanisme de stabilisation. Cette remarque correspond à l'idée exprimée par Batchelor (voir *An Introduction to Fluids Dynamics* (1967), p.537) qui a indiqué que la distribution finale de vorticit   doit   tre arbitraire lorsque l'on consid  re le mod  le d'un fluide non-visqueux car, selon lui, la distribution finale de vorticit   est d  termin  e par l'histoire de l'  tablissement de l'  coulement, et cette histoire inclut des effets significatifs de for  age, de dissipation et de non-lin  arit  .

Un d  veloppement possible des id  es pr  sent  es dans ce travail    des surfaces curvilignes, avec des applications dans les domaines g  o- et astro-physique, peut   tre effectu   sans difficult  s majeures (voir annexe B).

La conclusion finale que l'on peut, en tout cas, tirer de notre   tude, est que l'approche th  orique propos  e, m  me si elle a, comme toutes techniques th  oriques, des limitations, assure un champ d'investigations nouveau et int  ressant dans l'univers complexe de la turbulence.



# Annexe A

## Equations de transport de la turbulence

Cette section n'a pour ambition que de rappeler les différentes équations de transport de la turbulence déduites des équations du mouvement de la mécanique des fluides et de la décomposition de Reynolds. Cette démonstration peut être trouvée dans les ouvrages classiques de la turbulence (Cousteix 1989, Favre 1976, Schlichting 1979) ou dans différentes thèses (voir, par exemple, Carlier J., Etude des structures cohérentes d'une couche limite turbulente à grand nombre de Reynolds, 2001)

L'écoulement d'un fluide est régi par un système d'équations constitué de l'équation de continuité et des équations de Navier-Stokes. Pour un fluide newtonien, isovolume, isotherme et non-pesant, ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec  $s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , le tenseur des taux de déformation. Conformément à la décomposition de Reynolds des variables de l'écoulement, la pression et les différentes composantes de la vitesse sont décomposées en leur valeur moyenne et fluctuante au sens statistique :

$$\begin{cases} p = P + p' \\ u_i = U_i + u'_i \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En identifiant la décomposition de Reynolds des variables de l'écoulement A.2 dans le système A.1 et en lui appliquant l'opérateur de moyenne statistique  $\langle \cdot \rangle$ , on aboutit aux

équations dites de Reynolds :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (2S_{ij} - \langle u'_i u'_j \rangle) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

La décomposition de Reynolds A.2 peut s'appliquer à l'énergie cinétique instantanée  $k = u_i u_i / 2$  dont la moyenne statistique se décompose en une énergie cinétique moyenne  $K = U_i U_i / 2$  et une énergie cinétique turbulente  $\langle k' \rangle = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$  avec :

$$\langle k \rangle = K + \langle k' \rangle \quad (\text{A.4})$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique instantanée est simplement obtenue en multipliant les équations de Navier-Stokes du système A.1 par la vitesse instantanée  $u_i$  :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} s_{ij} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i s_{ij}) \quad (\text{A.5})$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne est obtenue en multipliant les équations de Reynolds A.3 par la vitesse moyenne  $U_i$  :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (P U_j) & \text{I} \\ +\frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle u'_i u'_j \rangle U_i) & \text{II} \\ +2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i S_{ij}) & \text{III} \\ -(-\langle u'_i u'_j \rangle) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} & \text{IV} \\ -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} S_{ij} & \text{V} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Le terme de gauche est le taux de variation de l'énergie cinétique moyenne. Il est contrebalancé d'une part avec la puissance extérieure (qui transporte l'énergie cinétique moyenne d'un point à un autre) de la pression (I), du mouvement fluctuant (II) et de la viscosité (III) et d'autre part avec la puissance intérieure du mouvement fluctuant (IV : échange d'énergie entre le mouvement moyen et fluctuant) et de la viscosité (V : taux de dissipation visqueuse de l'énergie cinétique moyenne).

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente est la différence entre la moyenne statistique de l'équation de transport de l'énergie cinétique instantanée A.5 et l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne A.6 :

$$\frac{\partial \langle k' \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle k' \rangle}{\partial x_j} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p' u'_j \rangle & \text{I} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle k' u'_j \rangle) & \text{II} \\ + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i s'_{ij} \rangle & \text{III} \\ + (-\langle u'_i u'_j \rangle) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} & \text{IV} \\ - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} s'_{ij} \right\rangle & \text{V} \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Elle est analogue à l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne A.6. Le terme de gauche est le taux de variation de l'énergie cinétique turbulente. Les termes I, II et III sont respectivement des termes de diffusion, par le mouvement fluctuant, de la pression, de l'énergie cinétique instantanée et de la viscosité. Le terme IV est dit de production et le terme V est le taux de dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente.

Pour obtenir les équations de transport des contraintes de Reynolds, on déduit de la différence entre les équations de Navier-Stokes du système A.1 et les équations de Reynolds A.3 des équations pour les fluctuations de vitesses  $u'_i$  et  $u'_j$  que l'on multiplie respectivement par  $u'_j$  et  $u'_i$  avant de les additionner et de leur appliquer l'opérateur de

moyenne statistique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i u'_j \rangle + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_i u'_j \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_i u'_j u'_k \rangle & \text{I} \\ +\frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j) \right\rangle & \text{II} \\ -\frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{p'}{\rho} (\delta_{ik} u'_j + \delta_{jk} u'_i) \right\rangle & \text{III} \\ -\left( \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) & \text{IV} \\ +\frac{2}{\rho} \langle p' s'_{ij} \rangle & \text{V} \\ -2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle & \text{VI} \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

Les termes I, II et III représentent un transport par diffusion due à la turbulence, à la viscosité et à la pression. L'énergie cinétique turbulente apportée par le terme de production IV est redistribuée par le terme de corrélation pression-vitesse V aux composantes diagonales du tenseur de Reynolds. Le terme VI joue un rôle de destruction.

La turbulence se manifeste dans les équations de Reynolds A.3 par l'apparition du tenseur des contraintes  $\langle u'_i u'_j \rangle$ . Le tenseur de Reynolds apparaît également sous la forme  $-\langle u'_i u'_j \rangle \partial U_i / \partial x_j$  dans le terme IV de l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne A.6 et, au signe près, de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente A.7. Les composantes de ce tenseur sont des inconnues supplémentaires qui rendent le système ouvert. *La fermeture de ce système peut être réalisée par la mise en œuvre d'hypothèses semi-empiriques reliant directement les composantes du tenseur de Reynolds au champ moyen des vitesses ou en introduisant de nouvelles équations pour ces variables supplémentaires.*



# Annexe B

## Surfaces curvilignes

Comme exemple de développement possible des idées présentées dans ce travail, nous présentons ici une généralisation du modèle à des surfaces curvilignes (avec des applications dans les domaines géo- et astro-physique).

La forme du crochet de Poisson pour le champ de vorticit    $\{\Omega((x), \Omega((x'))\}$  prend la forme (voir pour les d  tails, Pavlov et al. Formations of vortex clusters on a sphere, Nonlin. Proc. Geophys. (2001) 8 9)

$$\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\} = \epsilon^{\alpha\sigma\kappa} \epsilon^{\kappa\lambda\nu} \epsilon^{\beta\nu\mu} \partial_\sigma \Omega_l \partial_\mu \delta((x - x')). \quad (\text{B.1})$$

et la g  n  ralisation curviligne de (B.1) lorsque l'on utilise les coordonn  es  $\mathbf{x} = (x_1 x_2 x_3)$  qui ne sont pas cart  siennes peut   tre   crite comme

$$\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\} = g^{-1/2} \epsilon^{\alpha\sigma\kappa} \epsilon^{\kappa\lambda\nu} \epsilon^{\beta\nu\mu} \partial_\sigma \Omega_l \partial_\mu g^{-1/2} \delta((x - x')). \quad (\text{B.2})$$

$$H = \frac{1}{2} \int dx g^{-1/2} g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \quad (\text{B.3})$$

o    $g^{\alpha\beta}$  est le tenseur m  trique,  $g$  est son d  terminant,  $\Omega_\alpha$  sont les composantes contravariantes de la vorticit  ,  $v_\alpha$  sont les composantes covariantes de la vitesse. Ici,

$$\Omega_\alpha = g^{-1/2} \epsilon^{\alpha\beta\kappa} \partial_\beta v_\kappa. \quad (\text{B.4})$$

Nous consid  rons les   coulements incompressibles bidimensionnels. Dans ce syst  me de coordonn  es, le champ vectoriel de la vitesse a deux composantes  $\mathbf{v} = v_1, v_2, 0$  le champ vectoriel de la vorticit   uniquement une composante  $\Omega = 0, 0, \Omega$ , o    $\Omega = g^{-1/2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)$ .

L'équation d'incompressibilité,  $div \mathbf{v} = 0$ , est présentée sous la forme

$$g^{-1/2} \partial_\beta (g^{-1/2} v^\beta) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Introduisons la fonction de courant  $\psi$

$$v^\beta = g^{-1/2} \epsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha \psi, \quad (\text{B.6})$$

où  $\epsilon^{\beta\alpha}$  un tenseur unité antisymétrique d'ordre 2,  $\epsilon^{12} = 1$ ,  $\epsilon^{21} = -1$ .

Notons ici que  $\psi$  possède une symétrie  $\psi \rightarrow \psi + C^{te}$ , i.e. la partie indépendante par rapport aux coordonnées de la fonction de courant  $\langle \psi \rangle$  peut être omise.

Par la condition d'incompressibilité, les quantités de base peuvent être exprimées en terme de fonction de courant  $\psi$  comme

$$v_1 = g_{11} g^{-1/2} \partial_2 \psi, \quad v_2 = g_{22} g^{-1/2} \partial_1 \psi; \quad (\text{B.7})$$

$$\Omega = -g^{-1/2} (\partial_1 g_{22} g^{-1/2} \partial_1 + \partial_2 g_{11} g^{-1/2} \partial_2) \psi. \quad (\text{B.8})$$

Dans le cas bidimensionnel, les crochets de Poisson se réduisent à la simple expression :

$$\{\Omega, \Omega'\} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\delta(x - x')}{\sqrt{g}}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (\text{B.9})$$

La nature fondamentale de la vorticité contravariante est basée sur le fait que, dans le cas bidimensionnel des écoulements incompressibles non-plans, seule cette caractéristique est une quantité scalaire qui obéit à la loi

$$\partial_t \Omega + v^\alpha \partial_\alpha \Omega = 0, \quad (\alpha = 1, 2).$$

Voilà pourquoi,  $\Omega$  est conservée lors du transport des particules fluide le long de leurs trajectoires Lagrangiennes.

En utilisant l'équation (B.3), l'hamiltonien peut être arrangé comme

$$H^* = \frac{\rho}{2} \int d\vec{\zeta} (\nabla \psi)^2 = \frac{\rho}{2} \int d\vec{\zeta} \psi \Omega = \frac{\rho}{2} \int d\zeta^1 d\zeta^2 g^{1/2} \psi \Omega, \quad (\text{B.10})$$

où

$$\Omega = -g^{1/2} \epsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha u_\beta = -\Delta \psi. \quad (\text{B.11})$$

Ici, la quantité  $\Omega$  est un tourbillon généralisé sur un écoulement bidimensionnel non-plan,  $u_\beta$  sont les composantes covariantes de la vitesse hydrodynamique,  $u_\beta = g_{\beta\alpha}u^\alpha$ ,  $\Delta$  est un opérateur bidimensionnel, similaire à l'opérateur de Laplace défini par :

$$\Delta = g^{-1/2}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta g_{\alpha\gamma}g^{-1/2}\epsilon^{\gamma\nu}\partial_\nu = g^{-1/2}(\partial_1 g_{22}g^{-1/2}\partial_1 + \partial_2 g_{11}g^{-1/2}\partial_2) \quad (\text{B.12})$$

Dans l'expression (B.10), la partie indépendante de l'espace de  $\Omega$ , i.e.  $\langle\Omega\rangle$ , peut être éliminée aussi, grâce à la condition de la fonction de courant :  $\int d\vec{\zeta}\psi\langle\Omega\rangle = \langle\Omega\rangle\int d\vec{\zeta}\psi = 0$ . La partie dépendante en espace de la fonction de courant  $\psi$  peut être exprimée de  $\Omega$ . A partir de l'équation (B.11), nous trouvons la relation entre les caractéristiques de champ, i.e. entre  $\psi$  et  $\Omega$  :

$$\psi = - \int d\vec{\zeta}^T G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^T)\Omega(\vec{\zeta}^T), \quad (\text{B.13})$$

Ici, la fonction de Green  $G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^T)$  est solution de l'équation

$$\Delta G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^T) = \delta^{(2)}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^T) - V^{-1}, \quad (\text{B.14})$$

où  $V$  est le "volume" du domaine où la fonction delta est définie (pour une surface sphérique, le "volume" est  $V = 4\pi R^2$  et la structure concrète de  $G$  est donnée ci-dessous). Ce résultat montre de ce fait que la surface, par exemple la sphère, a un "volume", mais pas de frontières. Si  $V \rightarrow \infty$ , nous retrouvons l'équation traditionnelle. En appliquant l'opérateur  $\Delta$  à l'expression (B.14), nous trouvons la relation correcte,  $\Delta\psi = \Omega - \langle\Omega\rangle$ .

L'énergie cinétique du fluide peut être écrite sous la forme :

$$H^* = -\frac{\rho}{2} \int \int d\vec{\zeta} \Omega \Omega' d\vec{\zeta}^T G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^T). \quad (\text{B.15})$$

Si, dans le système considéré, il existe des zones localisées de concentration intense de la vorticité, la fonction de courant complète (champ de vorticité) peut être présentée comme la somme d'une partie régulière du champ,  $\psi^r$  (ou  $\Omega^r$ ), et la partie singulière,  $\psi^s$  (ou  $\Omega^s$ ), associée aux tourbillons localisées.

L'hamiltonien,  $H^*$ , (l'intégrale de mouvement, l'énergie exprimée en termes de variables canoniques) est dans ce cas

$$H^* = -\frac{\rho}{2} \int \int d\vec{\zeta} (\nabla\psi)^2 - \rho \sum_{i=1}^N \kappa_i \psi^r(\vec{\zeta}_i) - \frac{\rho}{2} \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j G_{ij} \quad (\text{B.16})$$

Le premier terme représente l'énergie régulière courante, le second,  $H_{rs}$ , décrit l'hamiltonien de l'interaction entre le courant régulier et les tourbillons localisés, et le dernier terme décrit les interactions entre les tourbillons ponctuels.

Une des applications possible est l'étude de la dynamique d'un fluide incompressible, non visqueux sur une surface sphérique de rayon  $R$ . Ce sujet a déjà fait l'objet d'un travail montrant la formation de "cluster" de tourbillons (voir Pavlov et al. (2001)).

Sur la sphère, la localisation est donnée par la longitude  $\theta$  et la latitude  $\phi$ . Les coordonnées  $\zeta_i^\alpha$  sont  $(\theta_i, \phi_i)$ , où  $\alpha = 1, 2, g^{-1/2} = r^2 \sin \theta$ , le tenseur  $\epsilon^{\alpha\beta}$  a les composantes  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \epsilon^{11} = -\epsilon^{22} = 0$ . Les coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  sont connectées avec les coordonnées cartésiennes par  $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ . Nous avons, ainsi,  $\zeta^1 = \theta, \zeta^2 = \varphi, \zeta^3 = r, g_{11} = r^2, g_{22} = r^2 \sin^2 \theta, g_{33} = 1$ , et  $g = r^4 \sin^2 \theta > 0$ .

Pour une surface sphérique, le système de base des équations adimensionnées devient, en présence de courant régulier

$$\begin{aligned}\partial_t \theta_i &= (\gamma_i \sin \theta_i)^{-1} \partial_{\phi_i} (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_{rs}), \\ \partial_t \phi_i &= -(\gamma_i \sin \theta_i)^{-1} \partial_{\theta_i} (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_{rs}).\end{aligned}\tag{B.17}$$

Ici,  $\partial_t$  est l'opérateur dérive adimensionné avec respect du temps appliqué à la coordonnée sphérique du tourbillon, le temps est mesuré en unités  $\tau = r^2/\kappa_0, \kappa_0 = \max(|\kappa - i|)$ ,  $\gamma_i = \kappa - i/\kappa_0, |\gamma_i| \leq 1, i = 1, \dots, N, \partial_{\phi_i} = \partial/\partial\phi_i, \partial_{\theta_i} = \partial/\partial\theta_i, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi - 2\pi k \leq 2\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

# Whether the two-dimensional Eulerian turbulence evolves to a unique final state

V. Pavlov, D. Buisine, and S. Decossin

*Bât M3, UFR des Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France*

(Received 10 January 2002; accepted 24 July 2002)

The relaxation of two-dimensional (2-D) Eulerian turbulence to a quasifinal state is studied. We consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into clusterlike and spiral-like structures and show that quasifinal states do not “forget” conditions of their initial origin. The numerical study confirms a possibility of the “vortex crystals” formation that have been observed in the plasma experiments. We discuss the physical significance of the obtained results.

© 2002 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1507325]

## I. INTRODUCTION

Two-dimensional turbulent flows at very large Reynolds numbers ( $\ln \text{Re} \gg 1$ ) have the property of self-organizing into large-scale vortex structures. For a description of such structures, one uses the model of an inviscid ideal fluid. Omitting viscous terms in the equations of motion implies that frictional forces are negligible compared to the inertial force. In order to estimate the ration of these forces, it is common practice to use the Reynolds number,  $\text{Re} = VL/\nu$ , where the quantity  $\nu$  is considered as the coefficient of kinematic or turbulent viscosity,  $L$  is the averaged horizontal scale of the vortex, and  $V$  is the characteristic velocity of the vortex. Because the velocity  $V$  of atmospheric motions measures  $\sim 10^1 - 10^2 \text{ m s}^{-1}$ , for  $\nu \sim 10^{-6} - 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , and  $L \sim 10^7 \text{ km}$  (for the Jovian Great Red Spot), the Reynolds number falls in the range  $\text{Re} \sim 10^8 - 10^9 \gg 1$ , that is,  $\ln \text{Re} \gg 1$ .

The problem of determining the equilibrium state of such quasi-inviscid, two-dimensional systems has been addressed a long time ago (see Refs. 1–12, where an extensive bibliography is given).

In this context, different theories have been proposed. A large number of authors have examined the statistical mechanics of the two-dimensional incompressible fluid in a vortex representation of Euler equations of motion. Since the dynamics of vortex structures is highly nonlinear and is described by a complex for analytical resolving equations of motion, there is a strong incentive to explore *some* variational principle: in a freely evolving system, if a steady state is to be reached, it must correspond to some extremum. Some approaches are based on a maximization of “entropy” (see, for example, for point vortices,<sup>1,2</sup> and for continuous vortex field distribution<sup>3,4</sup>). Others are based on a minimization of enstrophy.<sup>5</sup> The list of works can evidently be continued. All these theories imply the existence of a final equilibrium state, controlled by the global invariants of the system. The final state is supposed to be independent of the precise structure of the initial flow conditions.

In the works,<sup>4,7</sup> it has been noted that one can construct a family of discrete vorticity fields that share common values

for a finite number of invariants  $C_n = \int d\mathbf{x} \Omega^n$  by simple permuting the vortices in a finite number of boxes. Here  $\Omega$  is the vorticity  $\Omega = \text{curl } \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}$  is the velocity, and  $n$  is a positive integer. With the help of an assumption of scale separation, one has been obtained the mean-field theory, identical to the mean-field theory with the scale separation of Refs. 9, 10. The above-mentioned theory has been a subject of a criticism in the paper.<sup>12</sup> In this work, serious arguments have been expressed that the mentioned “mean-field theory is, in general, a poor approximation to the full theory implicit in the partition function, except at moderate temperatures.” One has been noted that this theory “contradicts well-established facts about two-dimensional vortex systems, for example, of the existence of nontrivial small-scale vortex–vortex correlations in coherent structures.” In particular, one has been pointed out (see, in detail, Ref. 12) that “the main conclusions of the theory are logically independent of each other; some may be true while others are false.”

The statistical theory implies the ergodicity of the system. However, there are suspicions (see, for example, Ref. 13) that in 2-D turbulence, because of the absence of an efficient process for mixing and the observed tendency to form long-lived, quasirobust structures, it is not clear whether the turbulent flow can be treated as an ergodic system. On the other hand, a study showing ergodicity for two-dimensional Euler equations has been done recently in Ref. 14.

In any case, as has been pointed out by several people, in spite of different approaches to the problem of equilibrium were proposed (see Refs. 1–12 and references therein), the situation still remains controversial.

By this reason, direct experimental studies present the crucial role. However, even on the experimental side, the situation is somewhat puzzling: the results obtained in mercury<sup>15</sup> tend to support statistical theory, while those obtained in a plasma experiment<sup>16</sup> assumed to be isomorphic to a fluid system, tend to support selective decay theory. Experimental data presented in Ref. 17 show that several characteristics are in conflict with statistical theory. In the work,<sup>18</sup> the authors have concluded that decay in thin-layer flows

does not lend support to decay theories derived from simulation (see, for instance, Refs. 19, 20). The list of similar observations can be continued as well.

Being intrigued by an involved situation and an uncertainty in facts, we turned toward the direct numerical experience. Our goal is to consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into cluster-like structures and to show that quasifinal states do not “forget” conditions of their initial origin. In the framework of the model, we respect automatically all laws of conservation and get over difficulties of numerical modeling in small scales. In this paper, we show that the vorticity distribution is determined by the previous history of establishment of the flow. Indications on a possibility of such a scenario can be found, for example, in Ref. 21.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we present some details of the plasma experience.<sup>16</sup> In Sec. III, we discuss the basic properties of the equations of the Hamiltonian fluid dynamics describing the evolution of vortex-like (VL) fields. In Sec. IV, we discuss properties of singular vortex-like fields and advantages of their using. These sections are important for the general theoretical analysis and determining of a place of the concept of a singular vortex-like system in the general theory of the Hamiltonian system with a continual number of degrees of freedom. In Sec. V, we discuss both the numerical scheme that we adopt to solve the equations and obtained results. The limits of validity for the model are defined by a formulated goal: to consider different scenarios of self-organization of the system into regular vortex structures. In all probability, this process is realized in the bifurcation regime. Instead of massaging the computer-calculated details of the vortex structures, we would like to answer the more practical question of whether the quasicrystalline clusters of vortices may form. In Sec. V, we first compare predictions of our numerical experience with the results of the experience of Huang–Driscoll<sup>16</sup> for a plasma system. Finally, we consider the special case and discuss the physical sense of obtained results. We relegate to Appendices A–D all technical details on the Hamiltonian approach used in Secs. III–IV.

## II. PLASMA EXPERIENCE

We start with a reminder of some results of the experience.<sup>16</sup> The above-mentioned experience is interesting because of the well-known fact that the dynamics of an electron plasma confined by a strong external magnetic field exhibits close similarities with two-dimensional inviscid and incompressible fluid.

In fact, when a homogeneous plasma is in the presence of a strong magnetic field,  $\mathbf{B}=(0,0,B)$ , the magnetic field induces a strong element of anisotropy (Appendix A). For low-frequency plasma phenomena, magnetic-field lines resist bending and therefore tend to decouple the dynamics in the directions parallel and perpendicular to the magnetic field. The equation of motion for the electron concentration  $n_e$  in perpendicular directions to  $\mathbf{B}$  becomes

$$\partial_t n_e + v_j \partial_j n_e = 0. \tag{2.1}$$

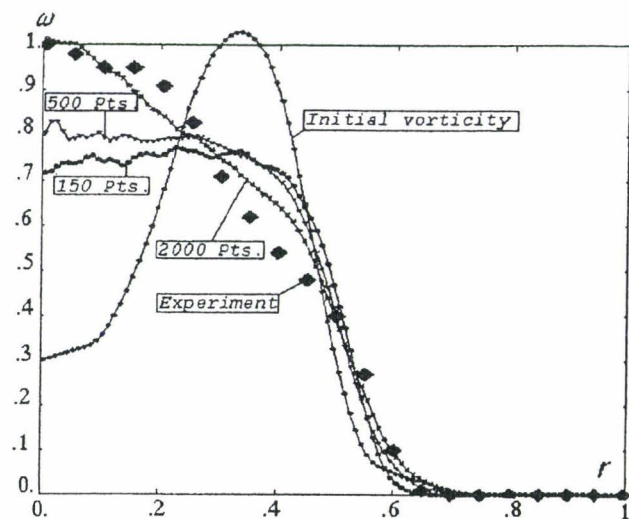


FIG. 1. Initial distribution of the averaged concentration of electronic fluid from the experience of Huang and Driscoll and final distributions for the experience (symbols) and for numerical simulation (pts) obtained with 150, 500, and 2000 point vortices. The vorticity profile of the meta-end state is the axisymmetric vortex. The unities are taken such that the meta-final vorticity maximum is unity, and the radius of the domain is unity.

Here,  $\partial_t$  is the partial time derivative,  $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ . In the framework of the model, the velocity components are defined via the electrical potential,  $\Phi$ , by the relationship  $v_i \sim \epsilon_{ij} \partial_j \Phi$ ,  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ ,  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ , and verifies the condition  $\partial_k v_k = 0$ ,  $k=1,2$ . The relationship between the concentration  $n_e$  and the electric potential,  $\Phi$ , is

$$n_e = -\Delta \Phi, \tag{2.2}$$

where  $\Delta$  is the planar Laplacian. The equations, (2.1)–(2.2), are isomorphic to the two-dimensional Euler hydrodynamical equations, where  $n_e$  plays the role of the vorticity and the electric potential  $\Phi$  the role of the streamfunction. They can be used to test experimentally predictions of different theories of two-dimensional inviscid fluid dynamics.

In this context, the main advantage of using plasma experiments is the virtual absence of dissipation, whereas in fluid dynamical experiments or traditional numerical simulations, the realization of very large Reynolds numbers is extremely difficult.

Some results of the experience<sup>16</sup> are presented in Fig. 1. The initial distribution of the averaged concentration of electronic fluid from the experience of Huang and Driscoll and final distributions for the experience (symbols) are plotted here. The electronic fluid density profile of the meta-end state is the axisymmetric distribution. The unities are taken such that the distribution maximum is unity, and the radius of the domain is unity.

## III. EVOLUTION OF VORTEXLIKE FIELDS: GENERAL CONSIDERATION

Models describing the two-dimensional, so-called vorticity-like systems (VL fields), are governed by the evolution equation

$$\partial_t \Omega + (\partial_2 \psi) \partial_1 \Omega - (\partial_1 \psi) \partial_2 \Omega = 0, \tag{3.1}$$

where the field—“generalized vorticity”— $\Omega$  and the “streamfunction”  $\psi$ , with  $v_i = \epsilon^{ij} \partial_j \psi$ ,  $i, j = 1, 2$ , are related by an operator relationship,

$$\Omega = \hat{L}(\psi). \tag{3.2}$$

For two-dimensional Euler equation  $\Omega = -\Delta\psi$ , and  $\hat{L}(\psi) \equiv -\Delta\psi$ . There are other models, for example, models of “screened vortices” with  $\hat{L} = -(\Delta - 1/a^2)$ : (i) the model of plasma based on the Hasegawa–Mima equation,<sup>22–24</sup> (ii) the axial model of electronic vortices,<sup>25</sup> and (iii) the quasigeostrophic barotropic model,<sup>26</sup> etc. There are more complex situation.<sup>27–29</sup>

The model governed by (3.1)–(3.2) gives an example of the Hamiltonian system with a continual number of degrees of freedom (see Ref. 30 and Appendices B and C). Such systems evolve according to the law

$$\partial_t u_i = \{u_i, H\} = \int d\mathbf{x}' \{u_i, u'_j\} \frac{\delta H}{\delta u_j(\mathbf{x}')}, \tag{3.3}$$

where the Hamiltonian of the system,  $H$ , is the quantity—energy—functionally dependent on the fields,  $u_i$ , the operator  $\delta/\delta u$  is the operator of the functional derivative. The derivatives of dynamical variables,  $F[u]$ , are calculated by using the relation  $\delta u_i(\mathbf{x})/\delta u_j(\mathbf{x}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ .

The Hamiltonian structure of the system, with a continual number of degrees of freedom, consists of the Hamiltonian given by the total energy,  $H$ , and the functional Poisson bracket  $\{.,.\}$ . This bracket is antisymmetric, bilinear, and satisfies the functional Jacobi identity presented symbolically in the following form:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0. \tag{3.4}$$

The conservation of energy follows from the given formulation of governing equations, since  $\partial_t H = \{H, H\} = 0$ .

The detailed consideration of the subject has been given in the works Refs. 31–35.

For two-dimensional VL fields, the equations of evolution (3.1)–(3.2) can be rewritten in the Hamiltonian form (Appendices B and C)

$$\partial_t \Omega = \{\Omega, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{\Omega, \Omega'\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega'} = \epsilon^{ik} \partial_i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega} \partial_k \Omega, \tag{3.5}$$

with the functional brackets

$$\{\Omega, \Omega'\} = \epsilon^{ik} \partial_i \Omega' \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{3.6}$$

and the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega'. \tag{3.7}$$

The Green’s function is the solution of the integral equation,

$$\hat{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{3.8}$$

These equations of motion apply when the fluid is restrained by boundaries, in which case the Hamiltonian is modified and may be constructed in terms of Green’s functions, depending on the geometry of the domain.

The set of nonlinear equations (3.5)–(3.8) can be resolved approximatively only.

Two obvious obstacles are seen in applications of the approximate methods to the fluid systems. First, fluids have an infinite number of degrees of freedom. Second, perfect fluids have an infinite number of integrals of motion (circulation, enstrophy, and other dynamical moments) and “Casimirs”  $C_k$  (Casimirs of functional Poisson bracket satisfy the condition  $\{u_i, C_k\} = 0$ <sup>33</sup>). “Trajectories” of the system in infinite-dimensional phase space lie in the cross section of an infinite number of surfaces corresponding to integrals of motion. It is an interesting question whether all invariants are needed to describe the physics of a two-dimensional vortex system.

This fact is reflected by the formulation of equations of fluid motion in terms of functional derivatives (3.5).

However, in this case, a formal application of approximate methods to systems of equations with a continual number of degrees of freedom, with *functional Poisson brackets depending on fields*, for example, similar to (3.6), i.e., in *noncanonical* form, can lead to equations that will not have a conservative form: the loss of conservativity in Liouville’s systems is frequently observed in numerical experiences. Such a loss of conservativity, as well as a possible violation in these simulations of the Jacobi property (3.4), may occur, not due to some physical changes in the system, but rather due to the numerical errors accumulated in a finite-differential schema of calculations.

This remark is of particular significance because computing physics use discrete models with adequate correspondence to continuous analogies.

A selection of approximate or numerical methods imposes special requirements on the structure of the functional Poisson bracket (3.6): approximate methods are most effectively realized in the framework of the *canonical* formulation when the Poisson bracket is independent of field variables (for details, see Ref. 33). In this case, only one object for approximation rests—the Hamiltonian, and corresponding calculations, which as a rule could have a cumbersome, recurrent character, are not replicated with an increase in the number of iterations.

By this cause, it is desirable to formulate evolution equations for VL fields in such a way that the Poisson brackets were independent of fields.

A possible way to overcome possible difficulties is to construct such a truncation of Euler’s equations that respect automatically all integrals of fluid motion and have a finite number of degrees of freedom  $N$ . Having in mind that the formulated theory (see the Appendices) can be extended both to continuous fields and to the system of patch-like<sup>32,34</sup> or singular VL fields,<sup>35</sup> we fix our interest on singular VL fields.

For example, in the two-dimensional case, a suitable candidate for truncation is a point vortex approximation of the vorticity field: (i) point vortices are exact solutions of the Euler’s equations; (ii) they respect all integrals of fluid motion. If  $N \rightarrow \infty$ , the solution probably converges to the solution of Euler’s equations.<sup>11,36</sup> Point vortices are excellent candidates on the role of elementary structures. The main advantage of point vortices in this context is their localiza-

tion at small scales. Let us recall that, at the conditions of the quasifull absence of dissipation, when the Reynolds number is extremely large, the using of other, traditional, numerical approaches is extremely difficult.

Naturally, models with singular fields present convenient mathematical models in the situations when the effects of vortex kernels can be considered as inessential.

**IV. SINGULAR VL FIELDS**

Let be a singular VL field,

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_{(i)} \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)}). \tag{4.1}$$

Here,  $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)})$  is the two-dimensional function of Dirac. In this case, we obtain that

$$\{\Omega, \Omega'\} = \sum_{m,n} \sum_{i,k} \gamma_{(m)} \gamma_{(n)} \partial_k \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial'_i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\}. \tag{4.2}$$

Substituting this expression into (3.6) (see Appendix B) and comparing coefficients at deltafunctions and of their derivatives, one finds that the Poisson brackets, for coordinates of singular “vortices,” are given by the formulas

$$\{x_k^{(m)}, x_i^{(n)}\} = \gamma_{(m)}^{-1} \delta_{mn} \epsilon^{ik}. \tag{4.3}$$

The crucial point of such a formulation is that the obtained Poisson brackets are independent ones of field variables.

To find the equation of motion of field singularities, we calculate, in the beginning,  $\partial_t x_i^{(m)}$ . We obtain that

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \partial_t \Omega' = \int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega', \mathcal{H}\}. \tag{4.4}$$

Taking into account rules for a functional derivation, the relationships,

$$\int d\mathbf{x}' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega'} \{\Omega', \mathcal{H}\} = \{x_i^{(m)}, \mathcal{H}\} = \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}}, \tag{4.5}$$

and using (4.3), we finally find that

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int d\mathbf{x}' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}} = \gamma_{(m)}^{-1} \epsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j^{(m)}}. \tag{4.6}$$

Let this be the simplest case. If  $v_i = \epsilon_{ij} \partial_j \psi$ ,  $\Omega = -\Delta \psi$ , the Hamiltonian—full energy of the fluid system— $\mathcal{H} = (1/2) \int dx v^2 = -(1/2) \int dx \psi \Delta \psi$ , can be presented, in the case of an unbounded plan, as  $\mathcal{H} = -(1/4\pi) \sum_{i,j} \gamma_{(i)} \gamma_{(j)} \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ . Here,  $-(1/2\pi) \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  is the Green’s function,  $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ : solution of the equation  $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , where  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  is the Dirac function in the unbounded plan.

The equation of motion is given by (4.6).

This special formulation exactly corresponds to the traditional concept for point vortices moving in the unbounded plane  $x_0y$  (see Refs. 37–39). The classical result of Kirchhoff (1876) states that the equations of a point-vortex motion

can be written as  $\gamma_i \partial_t x_i = \partial \psi / \partial y_i$ ,  $\gamma_i \partial_t y_i = -\partial \psi / \partial x_i$ , where the streamfunction  $\psi = \psi(x_i, y_i)$  is frequently called the “kinetic energy of interaction.” Note, however, that the streamfunction does not involve a “kinetic” energy of the vortices in the usual sense. This is related to the particular circumstance that a localized vortex produces a velocity, not the acceleration: the term  $\gamma_{(n)} \partial_t x_i$  has of cause dimension of acceleration,  $LT^{-2}$ , but this values is not at all an acceleration. It is the velocity of vortex displacement multiplied on a factor,  $\gamma_{(m)}$ , having some,  $[\gamma_{(m)}] = T^{-1}$ , dimension. Point vortices form, therefore, a very peculiar Hamiltonian system.

More complex constructions can be analyzed too. The general theory of vortex motions based on (3.5)–(3.8), can be generalized on more interesting situations: vortices on a sphere,<sup>35</sup> vortex patches, the Hamiltonian contour dynamics,<sup>32,34</sup> etc.

Let us consider a special case of two-dimensional fluid motions inside of a circle.

The Green’s function is defined by the expression

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{R} - \ln \left( \frac{1}{R} \left| \mathbf{x} - \frac{R^2}{|\mathbf{x}'|^2} \mathbf{x}' \right| \right) \right], \tag{4.7}$$

and can be applied to a set of vortices car board conditions are respected. This result follows from the following fact: A point vortex,  $P$ , inside a circle,  $D$ , with the board,  $\partial D$ , gives an example of the image system of an equal and opposite vortex at the inverse point,  $P'$ . This follows from fact that  $\sin(\angle PAO) / PA \sin(\angle P'AO) / P'A = 0$ , where  $OP \cdot OP' = R^2$  defines the inverse point,  $P'$ , and hence the velocity at  $A \in \partial D$  is tangential to the circumference,  $\partial D$ , of the center  $O$ .

For an assembly of  $N$  vortices, strengths  $\gamma_j = \Gamma / N$ , located at  $\mathbf{x}_j(t)$ , the Hamiltonian, for the fluid motion inside of the circle, is given by the expression

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \left( -\gamma_i \gamma_j \ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R} + \mathcal{H}_\Sigma \right), \tag{4.8}$$

where  $\mathcal{H}_\Sigma$  describes boundary effects. The first part of the Hamiltonian describes interactions between vortices when  $i \neq j$ , the second part describes interactions of vortices with their images. The Hamiltonian can be symmetrized with respect to permutations  $i \leftrightarrow j$ . (The streamfunction is evidently  $\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^N [\gamma_j \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|/r) - \gamma_j \ln(|\mathbf{x} - (R^2/|\mathbf{x}_j|^2) \mathbf{x}_j|/r)]$ .) The equation of motion is given by (4.6).

If we consider the system of  $N$  identical ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$ ) vortices, the Hamiltonian yields

$$\mathcal{H} = \frac{\Gamma^2}{4\pi N^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \left[ -\ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{R} + \mathcal{H}_\Sigma \right]. \tag{4.9}$$

**V. NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION**

The first step was to perform a point-vortex simulation of the experience of Huang–Driscoll<sup>16</sup> and to compare the results of our calculations with the experimental data



The description has been tailored to obtain the basic characteristics of vortex-like fields structures, and even in this simplified situation, we find a rich pattern of VL dynamics.

The initial configuration has been chosen to reproduce the initial density of particles in the plasma experience (see Fig. 1).

We have initialized the system of  $N$  identical ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$ ) vortices. The experiences have been realized with different  $N$ :  $N_1 = 1.5 \times 10^2$ ,  $N_2 = 5 \times 10^2$ ,  $N_3 = 2 \times 10^3$ . The initial distribution of vortices has been given by an axially symmetrical configuration that has reproduced the distribution of particles in the experience.<sup>16</sup>

The parameters of the problem (energy, circulation, circular moment) have been the following:  $H \sim 10^{-6}$ ,  $\Gamma = \sum_i \gamma_i = 1$ . The intensity of a vortex has been defined by the formula  $\gamma_i = \Gamma/N$ .

The study of the vortex configuration evolution for the system with associated initial conditions has been integrated numerically with a fourth-order Runge–Kutta scheme. The step time is restricted by the condition  $\Delta t < \Delta \theta / \sup(|\gamma_i|/R_{ij}^2)$ , where  $\Delta \theta$  is the characteristic angular “displacement” between two  $(i, j)$  vortices,  $0.01 < \Delta \theta < 0.04$  rad.

The conservation of the energy has been evaluated during of the calculations. The energy of the system,  $\mathcal{H}$ , is the most sensible parameter with respect to numerical errors of simulations. The analysis shows that the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  tries small variations with the error defined by  $|\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_0|/|\mathcal{H}_0| \leq 2 \times 10^{-5}$ , during the process of iterations from  $t=0$  to  $t = 10^6 \Delta t$ , which corresponds to  $\sim 200$  revolutions of the periphery of the vortex distribution domain.

All other integrals of motion are automatically conserved.

The results of the numerical simulations have been compared with those of the plasma experience of Huang and Driscoll (Fig. 1). The good qualitative consent is observed: the solution converges to the experimental observation when  $N_i \gg 1$ :  $N_3 > N_2 > N_1$ .

Intense fluctuating radial motions have been observed inside the central domain ( $r < 0.4$ ). The external zone of the system ( $r > 0.4$ ) has been resting quasistable. In Fig. 1, the averaged (in time) result of numerical calculations is presented. The period of averaging has been chosen as  $\sim 10^{-1} t$ , where  $t$  is full time of simulations.

Observing the obtained repartitions, at first glance, one could think that the distribution of vortices in the quasifinal stage of its evolution is governed by the statistical laws. However, supplementary observations refute this hope.

For different axially symmetrical initial distributions, the system does not evolve to the same final state.

Figure 2 shows an evolution in time of the sheet-like distribution for a system of  $N = 2 \times 10^3$  corotating vortices. The dynamical behavior of the structures in question includes an exchange of vortices between clouds of vortices and the appearance of the fragmentation of the original structures.

The instability of the initial configuration was observed at the earliest stage ( $t \sim 1$ ) of the simulation. A seed pertur-

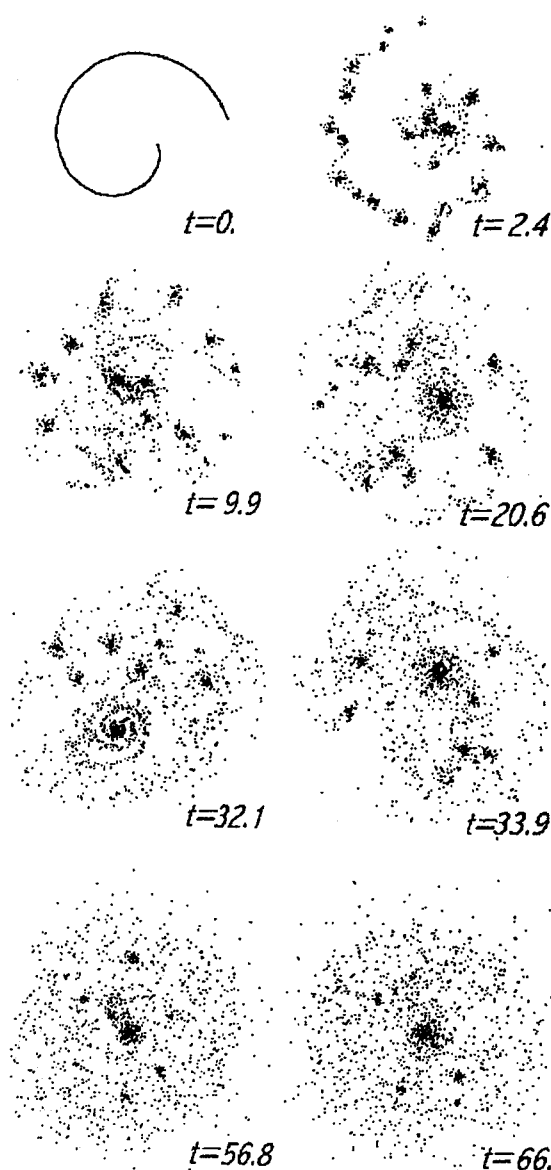


FIG. 2. Evolution of the system: sequence of states starting from a vortex-sheet spiral-like configuration with perturbed axial symmetry. The processes both of the fusion of small structures and of the formation of spiral-like structures are distinctly observed.

bation generates evidently an instability (shear instability of Kelvin–Helmholtz) that grows exponentially in time and starts the strong nonlinear evolution. The fragmentation of the initial state ( $t \sim 10$ ) and the following “clusterization” are neatly observed.

At the stages of ( $t \sim 32,1$ ;  $t \sim 33,9$ , etc.), the formation of coherent spiral-like structures is observed.

After the time that corresponds to  $\sim 10^2$  revolutions of the vortex distribution domain, the structure with a central vortex is formed (Fig. 2).

Let us modify slightly the initial configuration. Figure 3 shows an evolution sequence of the vortex distribution for a system of  $N \sim 10^3$  corotating vortices with such a modified initial configuration. In opposition to the previous case (Fig. 2), the system does not evolve to a single vortex: the system evolves to a uniformly rotating, pentagonal structure that is slowly oscillating near the equilibrium state, and rests near

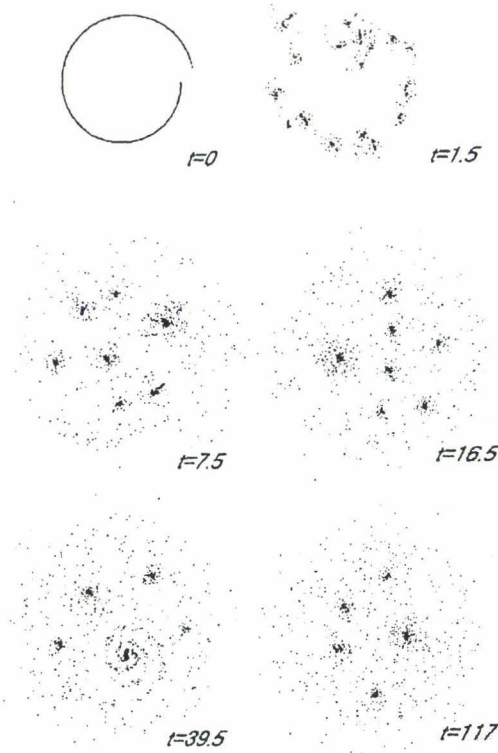


FIG. 3. Evolution of the system: sequence of states starting from an initial sheet-like configuration with perturbed axial symmetry. The system evolves to the pentagonal structure.

the state a very long time: we have not observed a significant modification of the state for  $t \gg 100$ .

It is evident from Fig. 3 that we find a conceptual deviation between the traditional concept of final statistical (quasi-homogeneous) equilibrium and the observed quasifinal state illustrated by Fig. 2 and Fig. 3 at times  $t > 100$ .

Finally, we observed that the pentagonal structure, Fig. 4, is not dissipated in time.

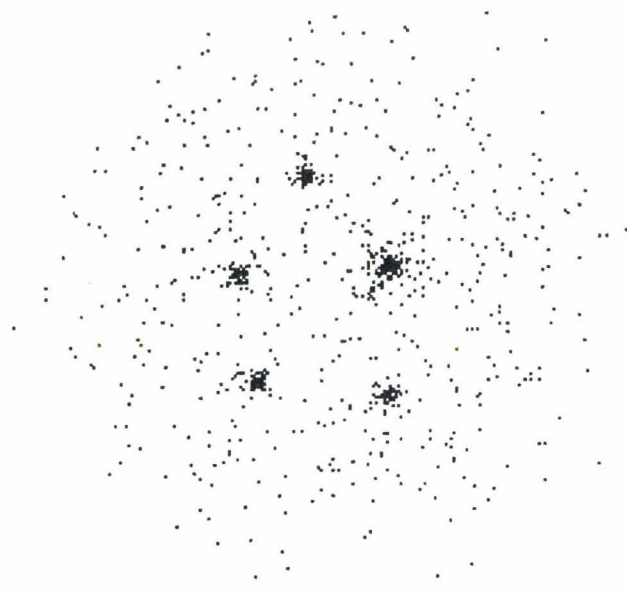


FIG. 4. The system evolves to the pentagonal structure at  $t \gg 100$ .

The physical sense of the results can be following. The vorticity distribution is arbitrary as far as inviscid-fluid theory is concerned. The vorticity distribution is determined by the history of establishment of the flow (see Ref. 21), and this previous history includes a significant effect of instability and of nonlinearity. Such behavior of a system that satisfies the deterministic equation of motion can be attributed to the mathematical structure of the equations. The equations have the property that, for a certain range of parameters and variables, they are singularly dependent upon initial conditions. This means that even an infinitesimal change in initial condition can cause a finite change in scenarios of evolution and in the final state (see also Ref. 40–44).

Because two-dimensional vortex-like structures are governed by long distance ( $H_{ij} \sim \log r_{im}$ ) “interactions” and vortices are not drawn together at very short distances, the observed phenomenon is similar, in some sense, to the first-order phase transitions in real physical systems. To see this, we recall that first-order phase transitions require a short-range repulsion and a long-range attraction for elementary structures. Let us recall that the so-called Kosterlitz–Thouless transition has been discussed in the literature. The Kosterlitz–Thouless transition is the transition between systems of vortex pairs and systems in which vortices can live unpaired in two-space dimensions; it is the phase transition that can be expected in a two-dimensional vortex system. This transition has been discussed in Refs. 45, 46, where an extensive bibliography is given.

If the observed (Fig. 4) phenomenon is a “first-order phase transition,” it has to lead to the spontaneous formation of crystalline patterns tight spots of vorticity. Note, however, that the quasipoint vortices form a very peculiar Hamiltonian system because of the particular circumstance that a localized vortex produces a velocity, not an acceleration.

Recall that some crystalline patterns called “the vortex crystals” have been recently observed in the non-neutral plasma experiments.<sup>42</sup> Also, such phase transitions involving through instability to fragmentation and clustering in the gravitational system are known and were discussed earlier.<sup>43</sup>

In any case, this is an interesting situation.

APPENDIX A:

It is well known that the dynamics of an electron plasma confined by a magnetic field exhibits close similarities with a two-dimensional incompressible and inviscid flow (see Refs. 23–25).

More precisely, in the “guiding center approximation,” if instead of the drift-kinetic equation for electrons, one adopts the Boltzmann distribution for electrons  $n \sim \exp(e\Phi/T)$ . Such an approximation is valid when the electron thermal velocity  $(T/m)^{1/2}$  exceeds the wave phase velocity and when resonances are neglected. In this case, one recovers the Hasegawa–Mima equation,

$$(\partial_t + v_j \partial_j)(a_L^2 \Delta \Phi - \Phi) = v_j^* \partial_j \nabla \Phi, \tag{A1}$$

where  $a_L = (T/m)^{1/2}/\Omega_i$  is the ion gyroradius (at electron temperature),  $\Omega_i = eB_0/m_i c$  is the ion cyclotron frequency,  $m_i$  is the ion mass,  $T_e$  is the electron temperature,  $e$  is the

electron charge,  $c$  is the light velocity,  $B_0$  is the induction of an ambient uniform magnetic field,  $\mathbf{v}=(c/B^2)\mathbf{B}\times\nabla\Phi$  is the  $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$  drift velocity,  $\mathbf{v}^*=(Tc/eB^2n_0)\nabla n_0\times\mathbf{B}$  is the electron diamagnetic velocity,  $v_i=(v_1, v_2)$  are velocity components in the Cartesian system of coordinates, in the directions perpendicular to the one of magnetic field,  $\partial_t$  is the partial derivative of a field variable with respect to time,  $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2$  is the two-dimensional Laplace operator. The electric potential  $\Phi$  and the electron number density  $n_e$  can be expressed in terms of the streamfunction as

$$\Phi=\frac{B_0}{c}\psi, \quad n_e=n_0\exp\left(\frac{B_0e}{T_e c}\psi\right). \quad (\text{A2})$$

Here  $n_0$  is the unperturbed plasma density.

When a homogeneous plasma is in the presence of a strong magnetic field (more precisely, when the magnetic field density exceeds the thermal energy density,  $\beta=8\pi p/B^2\ll 1$ ), the equations for the evolution of  $\omega=-\Delta\psi+\dots$  becomes

$$\partial_t\omega+v_j\partial_j\omega=0. \quad (\text{A3})$$

In the framework of the model, the velocity components are defined via the electrical potential,  $\Phi\sim\psi$ , by the relationship  $v_i=\epsilon_{ij}\partial_j\psi$ . The relationship between  $\omega$  and the streamfunction  $\psi$  is

$$\omega=-\Delta\psi. \quad (\text{A4})$$

## APPENDIX B:

We illustrate the basic idea of the Hamiltonian Approach applied to systems with a continual number of degrees of freedom by starting from the classical three-dimensional model of incompressible flows that is governed by equations

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = \partial_\alpha(\rho^{-1}p + \chi), \quad \partial_\beta v_\beta = 0. \quad (\text{B1})$$

Here,  $v_\alpha$  are velocity components ( $\alpha, \beta=1, 2, 3$ ) in the Cartesian system of coordinates,  $\partial_t$  is the partial derivative of a field variable with respect to time, and  $p$  is pressure. Below, all values will be normalized on density  $\rho$ . The summation convention is implied on repeated Greek indices when tensor notation is used. This system conserves the kinetic energy of flow,

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}v^2. \quad (\text{B2})$$

Here,  $d\mathbf{x}=dx_1dx_2dx_3$ .

The basic equations (B1) can be rewritten for the vorticity  $\Omega=\text{curl}\mathbf{v}$  (see Refs. 33, 35) in Hamiltonian form as

$$\partial_t\Omega_\alpha=\{\Omega_\alpha, \mathcal{H}\}=\int d\mathbf{x}'\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Omega'_\beta}. \quad (\text{B3})$$

The bracket in Eq. (B3),  $\{\Omega_\alpha(\mathbf{x}), \Omega_\beta(\mathbf{x}')\}$ , is skew symmetric, local, and is defined for the given model by the expression (see Appendix C)

$$\{\Omega_\alpha, \Omega'_\beta\}=\epsilon^{\alpha\sigma\gamma}\epsilon^{\gamma\lambda\nu}\epsilon^{\beta\nu\mu}\partial_\sigma\Omega_\lambda\partial_\mu\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (\text{B4})$$

Here and further, a prime denotes that the field variables depend on space coordinate  $\mathbf{x}'$ ,  $\epsilon^{\alpha\mu\beta}$  is the Levi-Civita tensor.

If there is only one component of vorticity,  $\Omega=(0, 0, \Omega)$ , we obtain a more simple structure,

$$\{\Omega, \Omega'\}=\epsilon^{ik}\partial'_i\Omega'\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (\text{B5})$$

Here,  $\epsilon^{12}=-\epsilon^{21}=+1$ , and  $\epsilon^{ijk}\partial_j\partial'_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0$ . The equation of evolution is

$$\partial_t\Omega=\{\Omega, \mathcal{H}\}=\int d\mathbf{x}'\{\Omega, \Omega'\}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Omega'}=\epsilon^{ik}\partial_i\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Omega}\partial_k\Omega. \quad (\text{B6})$$

The model system gives an example of the Hamiltonian system with nontrivial (functionally dependent of the field variables) Poisson bracket.

The Hamiltonian for the two-dimensional model,

$$H=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}v^2=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}[\psi\Omega+\text{div}(\dots)],$$

can be rewritten solely in terms of the vorticity and the streamfunction as

$$H=\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\Omega\Omega'G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (\text{B7})$$

where the vorticity  $\Omega$  and the streamfunction  $\psi$  are functions of the  $x_1$  and  $x_2$  coordinates in the horizontal plane and are related by  $\Omega=-\Delta\psi$ ,  $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2$  is the two-dimensional Laplace operator. Here,  $d\mathbf{x}=dx_1dx_2$  and, after normalization on density, the dimension of the Hamiltonian is  $[H]=ML^2T^{-2}M^{-1}L^3L^{-1}=L^4T^{-2}$ .

## APPENDIX C:

Let us demonstrate the expression (B4) that is central to the discussion in the remainder of the paper.

The basic equation of motion (B1) may be rewritten in the form

$$\partial_t v_i=\epsilon^{ijk}\Omega_j v_k-\partial_i\left(p+\chi+\frac{v^2}{2}\right). \quad (\text{C1})$$

Applying to this equation the operator  $\partial_i$  and using the Green's function defined by  $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ , we obtain

$$p+\chi+\frac{v^2}{2}=\int d\mathbf{x}'G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\partial'_m(\epsilon^{mjk}\Omega'_j v'_k). \quad (\text{C2})$$

The system (B1) can be written as follows:

$$\partial_t v_i=\{v_i, H\}. \quad (\text{C3})$$

Here,

$$\{v_i, H\}=\int d\mathbf{x}'\{v_i, v'_k\}\frac{\delta H}{\delta v'_k}=\int d\mathbf{x}'\{v_i, v'_k\}v'_k, \quad (\text{C4})$$

where the following result has been used:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta v_j'} &= \frac{\delta}{\delta v_j'} \int dz \frac{v^2(z)}{2} = \int dz v_k(z) \frac{\delta v_k(z)}{\delta v_j'} \\ &= \int dz v_k(z) \delta_{jk} \delta(z - \mathbf{x}') = v_j'. \end{aligned} \quad (C5)$$

From (C1)–(C4), we find

$$\int d\mathbf{x}' v_k' [\{v_i, v_k'\} - \epsilon^{ijk} \Omega_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \partial_i \epsilon^{mjk} \Omega_j' \partial_m' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] = 0. \quad (C6)$$

Using  $\partial_m v_m = 0$ , we obtain that

$$\{v_i, v_k'\} = \epsilon^{ijk} \Omega_j' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \partial_i \epsilon^{mjk} \Omega_j' \partial_m' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial_k' A_i, \quad (C7)$$

and, obviously,

$$\{v_k', v_i\} = \epsilon^{kji} \Omega_j \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \partial_k' \epsilon^{mji} \Omega_j \partial_m' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) + \partial_i A_k'. \quad (C8)$$

The functional Poisson bracket satisfies to the condition  $\{v_i, v_k'\} = -\{v_k', v_i\}$ . This condition permits to calculate the function  $A_i$ , which is given by  $A_i = -\epsilon^{mji} \Omega_j \partial_m' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

Finally, we can write the expression for the Poisson bracket:

$$\begin{aligned} \{v_k', v_i\} &= \epsilon^{kji} \Omega_j \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \partial_k' \epsilon^{mji} \Omega_j \partial_m' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \\ &\quad - \partial_k' \epsilon^{mji} \Omega_j \partial_m' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (C9)$$

The expression (C9) shows that the Poisson bracket of hydrodynamical velocity is not local, i.e., equations of motion expressed in terms of hydrodynamical velocity only, are also not local.

Applying to (C9) the operators  $(\text{curl})_i \dots = \epsilon^{ijk} \partial_j \dots$  and  $(\text{curl}')_i \dots = \epsilon^{ijk} \partial_j' \dots$ , we eliminate the terms of  $\partial_i A$  and  $\partial_k' A_i'$ , and obtain the basic expression:

$$\{\Omega_\alpha, \Omega_\beta'\} = \epsilon^{\alpha\sigma\gamma} \epsilon^{\gamma\lambda\nu} \epsilon^{\beta\nu\mu} \partial_\sigma' \Omega_\lambda' \partial_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (C10)$$

#### APPENDIX D:

We present here some comments about the difficulties associated with the concept of singular VL fields, and the measures for their resolving.

(i) In the traditional description of experimental results flows involve continuous distributions of fields. How can one approximate a continuous distribution of fields by means of point structures? The response is that the physical meaning has only the averaged distribution  $\langle \Omega \rangle = \int_\Sigma d\sigma \Omega$ , where the characteristic size of the domain of space averaging,  $(\Sigma)^{1/2}$ , satisfies the condition  $(D/N)^{1/2} \ll (\Sigma)^{1/2} \ll D^{1/2}$ . Here  $N$  is the full number of singularities,  $D$  the area of the domain where the singularities are localized. The averaging procedure has to be applied after calculating  $\Omega$  only.

(ii) For a field consisting of point structure, integrals of any finite power of the VL field involve powers of delta functions and are therefore singular. Yet in typical physical models, the VL field has perfectly well-defined moments. How can one define these integrals and moments?

The interpretation of the integrals can be made the traditional way (see Ref. 47):

$$\int dx \delta^n(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx \delta_\epsilon^{n-1}(0) \delta(x).$$

Here,  $\delta_\epsilon(x)$  is a “spreaded” delta function with  $\delta_\epsilon(0) = \epsilon^{-1}$  and the condition of normalization,  $\int dx \delta_\epsilon(x) = 1$ .  $\epsilon$  is the characteristic scale of the domain where the “spreaded” delta function is localized. Thus, we obtain

$$\int dx \delta^n(x) = \epsilon^{-(n-1)} \int dx \delta(x) = \epsilon^{-(n-1)}.$$

If  $\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  (for the two-dimensional description), we obtain the estimate for the moment,

$$M^{(n)} = \int d\mathbf{x} \Omega^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^n \sigma^{-(n-1)}.$$

Here,  $\sigma$  is the characteristic area of the domain occupied by a localized structure. The number  $N$  of singularities is fixed by the number of moments  $M^{(n)}$  in question. Parameters  $\gamma_i$  are found by solving the set of equations,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i^j = \sigma^{j-1} M^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

<sup>1</sup>L. Onsager, “Statistical hydrodynamics,” *Nuovo Cimento, Suppl.* 6, 279 (1949).

<sup>2</sup>Y. B. Pointin and T. S. Lundgren, “Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container,” *Phys. Fluids* 19, 1459 (1976).

<sup>3</sup>G. A. Kuzmin, “Statistical mechanics of the organization into two-dimensional coherent structures,” in *Structural Turbulence*, edited by M. Goldshtik (Akad. Nauk SSSR Novosibirsk, ITPH), 1982, pp. 103–114.

<sup>4</sup>J. Miller, “Statistical mechanics of Euler’s equations in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* 65, 2137 (1990).

<sup>5</sup>C. E. Leith, “Minimum enstrophy vortices,” *Phys. Fluids* 27, 1388 (1984).

<sup>6</sup>J. Sommeria, C. Staquet, and R. Robert, “Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer,” *J. Fluid Mech.* 233, 661 (1991).

<sup>7</sup>J. Miller, P. B. Weichman, and M. C. Cross, “Statistical mechanics, Euler’s equations, and Jupiter’s Red Spot,” *Phys. Rev. A* 45, 2328 (1992).

<sup>8</sup>H. Brands, P. H. Chavanis, R. Pastmanter, and J. Sommeria, “Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices,” *Phys. Fluids* 11, 3465 (1999).

<sup>9</sup>R. Robert, “A maximum entropy principle for two-dimensional perfect fluid dynamics,” *J. Stat. Phys.* 65, 531 (1991).

<sup>10</sup>R. Robert and J. Sommeria, “Statistical equilibrium states for two-dimensional flows,” *J. Fluid Mech.* 229, 291 (1991).

<sup>11</sup>V. L. Berdichevsky, “Statistical mechanics of point vortices,” *Phys. Rev. E* 51, 4432 (1995).

<sup>12</sup>A. J. Chorin, “Partition functions and equilibrium measures in two-dimensional and quasi-three-dimensional turbulence,” *Phys. Fluids* 8, 2656 (1996).

<sup>13</sup>Y. Pomeau, “Statistical approach to 2D turbulence,” in *Turbulence: A Tentative Dictionary*, edited by P. Tabeling and O. Cardoso (Plenum, New York, 1995), Vol. 341, p. 117.

<sup>14</sup>A. Kupiainen, “Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equation with random forcing,” *Commun. Math. Phys.* (to be published).

<sup>15</sup>M. A. Denoix, Thèse de l’Institut Polytechnique de Grenoble, 1992.

<sup>16</sup>X. P. Huang and C. F. Driscoll, “Relaxation of 2D turbulence to a metastable equilibrium near the minimum enstrophy state,” *Phys. Rev. Lett.* 72, 2187 (1994).

<sup>17</sup>D. Marteau, O. Cardoso, and P. Tabeling, “Equilibrium states of two-dimensional turbulence: An experimental study,” *Phys. Rev. E* 51, 5124 (1995).

<sup>18</sup>S. Danilov, F. V. Dolzhanski, V. A. Dovzhenko, and V. A. Krymov, “Experiments on free decay of quasi-two-dimensional turbulent flows,” *Phys. Rev. E* 65, 036316 (2002).

<sup>19</sup>A. E. Hansen, D. Marteau, and P. Tabeling, “Two-dimensional turbulence

- and dispersion in a freely decaying system," *Phys. Rev. E* **58**, 7261 (1998).
- <sup>20</sup>O. Cardoso, D. Marteau, and P. Tabeling, "Quantitative experimental study of the free decay of quasi-two-dimensional turbulence," *Phys. Rev. E* **49**, 454 (1994).
- <sup>21</sup>G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1967), p. 537.
- <sup>22</sup>A. Hasegawa and K. Mima, "Stationary spectrum of strong turbulence in magnetized nonuniform plasma," *Phys. Rev. Lett.* **39**, 205 (1977).
- <sup>23</sup>B. B. Kadomtsev, *Plasma Turbulence* (Academic, New York, 1965).
- <sup>24</sup>P. L. Similon and R. N. Sudan, "Plasma turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 317 (1990).
- <sup>25</sup>N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973).
- <sup>26</sup>J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1987).
- <sup>27</sup>P. S. Marcus, "Numerical simulation of Jupiter's Great Red Spot," *Nature (London)* **331**, 693 (1988).
- <sup>28</sup>V. V. Meleshko and G. J. F. Van Heijst, "Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties," *Chaos, Solitons Fractals* **4**, 233 (1994).
- <sup>29</sup>A. V. Gruzinov, "Contour dynamics of the Hasegawa-Mima equation," *JETP Lett.* **55**, 76 (1992).
- <sup>30</sup>V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, "Some remarks on the physical fundamentals of the Hamiltonian description of fluid motions," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **16**, 509 (1997).
- <sup>31</sup>V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, "Two-dimensional vortex motions of fluid at large Reynolds numbers," *Phys. Fluids* **10**, 2384 (1998).
- <sup>32</sup>V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, "Large-scale vortex structures in shear flows," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **19**, 831 (2000).
- <sup>33</sup>V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, "Vortex structures generated by a coastal current in harbour-like basins at large Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.* **351**, 201 (1997).
- <sup>34</sup>V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, "Multipetal vortex structures in two-dimensional models of geophysical fluid dynamics and plasma," *JETP* **119**, 685 (2001).
- <sup>35</sup>V. I. Pavlov, D. Buisine, and V. P. Goncharov, "Formation of vortex clusters on a sphere," *Nonlin. Proc. Geophys.* **8**, 9 (2001).
- <sup>36</sup>O. H. Hald, "Convergence of vortex methods II," *SIAM J. Sci. Comput. (USA)* **16**, 726 (1979).
- <sup>37</sup>H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1932).
- <sup>38</sup>L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, 5th ed. (MacMillan, London, 1968).
- <sup>39</sup>P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- <sup>40</sup>M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. Govt. Printing Office, Washington, DC, 1964).
- <sup>41</sup>H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Function* (McGraw-Hill, New York, 1955).
- <sup>42</sup>K. S. Fine, A. S. Cass, W. G. Flynn, and C. F. Driscoll, "Relaxation of 2D turbulence to vortex crystals," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3277 (1995).
- <sup>43</sup>D. Lynden-Bell and R. Wood, "The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems," *Phys. Rev. Lett.* **138**, 495 (1968).
- <sup>44</sup>E. Segre and S. Kida, "Late states of incompressible 2D decaying vorticity fields," *Fluid Dyn. Res.* **24**, 171 (1998).
- <sup>45</sup>A. J. Chorin, *Vorticity and Turbulence* (Springer-Verlag, New York, 1994).
- <sup>46</sup>P. Minnhagen, "The two-dimensional Colom gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films," *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001 (1987).
- <sup>47</sup>L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon, Oxford, New York, 1987).



# Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons

Stéphane DECOSSIN<sup>a</sup>, Vadim PAVLOV<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441, Université de Lille-1, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

<sup>b</sup> UFR de mathématiques pures et appliquées, Université de Lille-1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France  
Courriel : stephane.decoffin@univ-lille1.fr

(Reçu le 2 juillet 2001, accepté après révision le 30 octobre 2001)

---

**Résumé.** Ce travail porte sur la détermination d'une formulation générale de l'approche Hamiltonienne applicable à une répartition arbitraire de vorticité. Les résultats numériques mettent en évidence l'importance du respect des lois de conservation. Un modèle garantissant le respect de celles-ci est présenté. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*mécanique des fluides / approche Hamiltonienne / tourbillons localisés / lois de conservation*

## *Some remarks on the Hamiltonian dynamics of vortices*

**Abstract.** *This work deals with the determination of a general formulation of the Hamiltonian approach applicable to an arbitrary distribution of vorticity. The numerical results display the importance of the respect of the laws of conservation. A model which guarantees the respect of them is presented. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

*fluid mechanics / Hamiltonian approach / localized vortices / laws of conservation*

---

## *Abridged English version*

Our objectives are (a) to give a general formulation of the Hamiltonian Approach (AH) applicable to an arbitrary repartition of vorticity and (b) to validate this method by applying it to the behaviour of  $N$  localized vortices with the respect of the laws of conservation.

In order to avoid some terminological misunderstandings, one must be careful when using the advective 'Hamiltonian': indeed everyone implies his proper vision of the method. That's why one can have the impression that the so-called 'Hamiltonian approach' has been well known for a long time. One uses often the method proposed by Kirchhoff to study the behaviour of 2D localized vortices (see for the references Kirchhoff [1], Lamb [2], the mentioned version has been taken again for example by Onsager [3] for the construction of the statistical mechanic of vortices; the applications can be found in [4,5]). It is probably Kirchhoff who was the first to observe that the stream function appears, in the problem of 2D singularities motion, like something of similar to the Hamiltonian – this analogy is useful, often used.

The following Hamiltonian approach for hydrodynamic systems will be formulated from the beginning in terms of energetic variables: it's the total energy of the hydrodynamic system which must be used as Hamiltonian. Any hydrodynamic systems have the continuous variety degrees of freedom: so, the equations

---

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

S1620-7742(01)01417-9/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés

which describe the motion of an hydrodynamic system must be formulated in terms of functional derivatives or functional Poisson brackets. We notice that in reality there are a few versions of the method which pretend to be called 'Hamiltonian approach'. We use one of them and discuss the consequences which result from it. The physical fundamentals of this version have been discussed in the works [6].

The Hamiltonian approach has the advantage to be general, it can be applied to an arbitrary distribution of vorticity and to multiple geometric configurations of the domain. More, it respects automatically the laws of conservation. In the case of the Hamiltonian approach, the inevitable accumulation of numerical errors confines oneself to the minimum.

We will call by hamiltonian system, an hydrodynamic system evolving in according to the equations (1). The crucial point of this approach is evidently the formulation of a method allowing to calculate the functional Poisson brackets.

In this Note, we display that the vortex field  $\Omega_i$  evolves according to the law (1). We determinate the functional brackets for the vorticity (see (7)) and the evolution equation (8). To validate this method, we choose to determinate the motion equations for the localized vortices. We consider  $N$  localized vortices in a bounded domain. In this case, we must respect the boundaries conditions, so the Green function will not be the same than the Green function for an unbounded domain. We use a modified 4th order Runge-Kutta method. In the numerical part, there are a few particularities: first, we must be careful to the choice of time step. Indeed, two vortices with an opposite sign move very quickly, so if the time step is too 'great', they can be 'ejected' from the domain. Second, we can use the fact that the Hamiltonian approach is based on the respect of the laws of conservation. That is why, we can modify the 4th order Runge-Kutta method to guarantee automatically the respect of these laws during all the processus. This model of 'self-regulation' takes account of the physics of the phenomenon. The result presented in the *figure 1* compares the evolution of the Hamiltonian with and without the model of 'self-regulation'. The *figure 2* displays the formation of 'clusters' of vortices. Our result is validated by the experimental fact that zones intense vorticity exist.

To conclude, we constat that the Hamiltonian approach has the advantage to be general, it can be applied to an arbitrary distribution of vorticity and to any geometric configurations of the domain. The method of 'self-regulation' assures the respect of all laws of conservation.

---

## 1. Introduction

Nos buts sont (a) de donner une formulation générale de l'Approche Hamiltonienne (AH) applicable à une répartition arbitraire de vorticité et (b) de valider cette méthode en l'appliquant à l'étude du comportement de  $N$  tourbillons localisés tout en respectant les lois de conservation.

Afin de ne pas tomber dans des malentendus terminologiques, il faut être prudent en utilisant la notion « hamiltonienne » : en effet, chacun sous-entend dans cette phrase sa propre vision de la méthode. C'est pourquoi, on peut avoir l'impression que l'approche dite « hamiltonienne » est bien connue depuis longtemps. On utilise largement la méthode proposée par Kirchhoff pour l'étude de comportement des tourbillons ponctuels bidimensionnels (voir pour des références Kirchhoff [1], Lamb [2]; la version mentionnée a été reprise par exemple par Onsager [3] pour la construction de la mécanique statistique des tourbillons ; les applications possibles peuvent être trouvées dans [4,5]). Kirchhoff fut probablement le premier à remarquer que la fonction de courant se manifeste dans le problème d'une description du mouvement des singularités bidimensionnelles comme quelque chose de similaire à l'Hamiltonien – cette analogie est utile, largement utilisée.

L'approche Hamiltonienne que nous allons utiliser dans ce qui suit sera formulée dès le début en termes de grandeurs énergétiques : c'est l'énergie totale du système hydrodynamique qui doit servir d'Hamiltonien du système. Des systèmes hydrodynamiques possèdent la variété continue de degrés de liberté : les équations décrivant le mouvement d'un système hydrodynamique doivent être formulées en



termes de dérivées fonctionnelles. Il existe en réalité plusieurs versions de la méthode dite « approche Hamiltonienne ». Dans cette Note, nous utiliserons l'une d'elles, et discuterons les conséquences qui en résultent. Les fondements physiques de cette version de l'AH ont été discutés dans les travaux [6].

## 2. Approche Hamiltonienne

Dans ce qui suit, nous appellerons par système Hamiltonien, un système hydrodynamique dont l'évolution est régie par les équations

$$\partial_t u_i = \{u_i, \mathcal{H}\} = \int dx' \{u_i, u'_j\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_j(\mathbf{x}')} \quad (1)$$

Ici, l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  est l'énergie totale du système (quantité fonctionnelle dépendante des champs hydrodynamiques  $u_i$ ). En particulier, le champ de vorticité  $\Omega$  ( $u_i \equiv \Omega_i$ ) appartient à la classe des systèmes hamiltoniens. Le symbole  $\{\cdot, \cdot\}$  représente les crochets fonctionnels de Poisson (voir [6]). De la définition, il suit automatiquement la loi de conservation de l'énergie puisque l'on a  $\partial_t \mathcal{H} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$ .

Notre but est de montrer que le champ  $\Omega_i$  évolue selon la loi (1). Le point crucial de l'application de l'AH à des problèmes pratiques est évidemment la formulation d'une méthode permettant de calculer les crochets fonctionnels de Poisson. Montrons comment ceux-ci sont calculés, en prenant comme exemple le cas le plus simple : un système hydrodynamique régi par les équations de mouvement d'un fluide incompressible homogène  $\partial_i v_i = 0$ ,  $\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\partial_i(p + f)$ . Dans ces équations,  $v_i$  sont les composantes de la vitesse de l'écoulement,  $p$  la pression et  $f$  un potentiel des forces extérieures. Pour ce modèle, il y a conservation de l'énergie cinétique  $\mathcal{H} = \int dx v^2/2 \equiv \int dx e$ .

Calculons en détails les crochets correspondants, cet aspect n'a pas été examiné dans [8]. En utilisant la définition de  $\mathcal{H}$  et les propriétés des dérivées fonctionnelles (voir par exemple [6]), on obtient :

$$\partial_t v_i = \int dx' \{v_i, v'_j\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v_j(\mathbf{x}')} = \int dx' \{v_i, v'_j\} v'_j \quad (2)$$

On peut alors réécrire le système initial à l'aide de l'égalité  $v_j \partial_j v_i = \partial_i e - \epsilon^{ijk} v_j \omega_k$ , où  $e \equiv v^2/2$  et en introduisant la fonction de Green définie selon l'équation  $\partial_i^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . On a alors :

$$\begin{aligned} & \int dx \{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial_i^2 (p + f + e) - (p + f + e) \partial_i^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\} \\ &= \int dx \{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \partial_i \epsilon^{ijk} \omega_j v_k - (p + f + e) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\} \end{aligned} \quad (3)$$

En négligeant les effets de parois et en intégrant par parties, on obtient finalement l'expression suivante :

$$\int dx' v'_k \{ \{v_i, v'_k\} - \epsilon^{ijk} \omega'_j \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \partial_i \epsilon^{mjk} \omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \} = 0 \quad (4)$$

Cette intégrale est nulle, le terme entre crochets est donc de la forme  $\partial'_k A_i$ . En effet dans ce cas l'intégrale devient :  $\int dx' v'_k \partial'_k A_i = \int dx' [\partial'_k (v'_k A_i) - A_i \partial'_k v'_k] = 0$ . On obtient donc les expressions pour les crochets de Poisson des composantes de vitesse sous la forme :

$$\begin{aligned} \{v_i, v'_k\} &= \epsilon^{ijk} \omega'_j \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial_i \epsilon^{mjk} \omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial'_k A_i \\ \{v'_k, v_i\} &= \epsilon^{kji} \omega_j \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial'_k \epsilon^{mji} \omega_j \partial_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \partial_i A'_k \end{aligned} \quad (5)$$

Sachant que les crochets vérifient la condition  $\{v_i, v'_k\} = -\{v'_k, v_i\}$ , après quelques manipulations simples, on trouve que  $A_i = -\epsilon^{mji} \omega_j \partial_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  et  $A'_k = -\epsilon^{mjk} \omega'_j \partial'_m G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . On obtient alors que le crochet de

Poisson correspondant est de la forme, i.e. local (voir pour définitions [6]) :

$$\{\omega_i, \omega'_k\} = \epsilon^{ipq} \epsilon^{kmn} \epsilon^{nqj} \partial'_m \omega'_j \partial_p \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (6)$$

Pour des écoulements bidimensionnels, quand  $\omega_i = (0, 0, \Omega)$  et  $\epsilon^{ik} = \epsilon^{ik3}$ , le crochet a la structure

$$\{\Omega, \Omega'\} = \epsilon^{ik} \partial_k \Omega' \partial'_i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (7)$$

Dans ce cas l'équation de l'évolution (1) pour la vorticité  $\Omega$  devient

$$\partial_t \Omega = \{\Omega, \mathcal{H}\} = \int dx' \{\Omega, \Omega'\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega'} = \epsilon^{ik} \partial_i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Omega} \partial_k \Omega \quad (8)$$

L'équation (8) et la formule (7) possèdent l'avantage d'être générales et de pouvoir être appliquées à des répartitions arbitraires de vorticité : aussi bien singulière (tourbillons localisés, taches tourbillonnaires avec des contours, etc...) que continue. De plus, les configurations géométriques pour lesquelles elle peut être appliquée sont multiples.

### 3. Application numérique

L'objectif de notre application numérique est de mettre en évidence l'importance du respect des lois de conservation qui représentent la base de l'approche Hamiltonienne. En effet, lors d'une résolution numérique, et quelle que soit la méthode choisie, des erreurs numériques apparaissent. Ce qui entraîne l'apparition d'une « dissipation numérique » qui, dans de nombreux cas, n'est aucunement en accord avec la physique du problème. Nous proposons une méthode d'auto-régulation, appliquée au schéma classique de Runge–Kutta à l'ordre 4, qui permet de contrôler et de réduire au minimum ces erreurs. Afin de valider celle-ci, nous choisissons d'étudier l'exemple le plus simple : le modèle des tourbillons localisés dans un domaine borné (de forme carré). Notons que dans ce cas, nous sommes obligés de respecter les conditions aux limites et la fonction de Green ne sera donc pas la même que celle dans l'espace illimité.

Pour différentes raisons, des modèles avec des tourbillons localisés sont considérés comme attrayants : dans beaucoup de cas, l'étude de la dynamique des tourbillons localisés et leur interaction est plus simple que dans les problèmes analogues pour la distribution continue de vorticité. Evidemment, le modèle des tourbillons ponctuels offre des modèles mathématiques commodes où l'on néglige les effets des noyaux finis de tourbillons. Les difficultés liées au concept de tourbillons ponctuels et les méthodes de leur résolution ont été discutées dans [8].

Tout d'abord, établissons à partir des équations générales (7), (8) le système à résoudre dans le cas des tourbillons localisés. Et montrons à titre de comparaison par rapport aux résultats classiques pour des tourbillons ponctuels [1,3] que, dans ce cas, la méthode proposée amène à des résultats corrects. Pour des tourbillons singuliers, la vorticité peut s'écrire  $\Omega = \sum_{i=1}^N \kappa_{(i)} \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)})$ , où  $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)})$  est la fonction de Dirac. On obtient alors, en calculant les crochets de Poisson correspondants à l'aide de l'équation (7), les équations du mouvement des centres des tourbillons sous la forme ( $\{\Omega, \Omega'\} \rightarrow \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\}$ ) :

$$\partial_t x_i^{(m)} = \int dx' \frac{\delta x_i^{(m)}}{\delta \Omega(\mathbf{x}')} \partial_t \Omega(\mathbf{x}') = \int dx' \{x_i^{(m)}, x_j^{(n)}\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_j^{(n)}} = \kappa_{(m)}^{-1} \epsilon^{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j^{(m)}} \right) \quad (9)$$

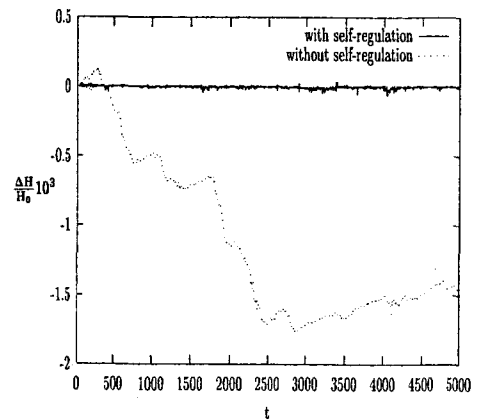
Dans ce cas, l'hamiltonien devient :  $\mathcal{H} = -(1/2) \sum_{i,j} \kappa_{(i)} \kappa_{(j)} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  (où  $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  est une fonction de Green) et la structure des équations obtenues devient équivalente aux équations traditionnelles.

Il y a quelques particularités dans la partie numérique du problème. L'une de celles-ci est une possibilité de formation des couples de tourbillons. En effet, lorsque deux tourbillons de même intensité  $\kappa_i$ , mais de

signes opposés se rapprochent à une petite distance  $d$  ( $d \rightarrow 0$ ), ils forment un couple qui se déplace avec une très grande vitesse,  $v \sim \kappa/d$ . Si le pas de temps  $\Delta t$  est trop « grand », le couple peut être « éjecter » du domaine physique. La seconde particularité est qu'en résolvant le problème numériquement, des erreurs numériques s'accumulent. Le phénomène physique étant basé sur le respect des lois de conservation, une résolution numérique « brute » du problème peut entraîner le non-respect de celles-ci. Pour cela, nous proposons un modèle d'auto-régulation prenant en compte la physique du phénomène et qui garantit la conservation de l'énergie durant tout le processus. Nous contrôlons l'énergie à chaque instant et modifions les positions des tourbillons (dans le but de respecter les lois de conservation) pour que le système reste dans le même état énergétique. La *figure 1* montre pour la première courbe l'allure de l'Hamiltonien en fonction du temps calculé à l'aide de la méthode traditionnelle de Runge–Kutta à l'ordre 4 et la seconde courbe cette même grandeur calculé à l'aide de notre méthode d'auto-régulation. Nous remarquons que les variations de l'Hamiltonien existent lors d'un calcul « classique ». Même si celles-ci peuvent paraître négligeables, rien ne nous garantit qu'elles ne seront pas de l'ordre de l'Hamiltonien pour un long processus de calcul. Les résultats seront alors peu réalistes puisqu'ils seront en désaccord avec la physique du problème (fluide parfait). Comme illustration, nous étudions l'évolution d'un grand nombre de tourbillons disposés initialement de façon homogène et la *figure 2* présente les résultats obtenus. Ceux-ci sont similaires à ceux obtenus par les méthodes vortex dans des cavités basés sur une résolution directe des équations de Navier–Stokes. Evidemment, les conditions aux frontières  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial D} = 0$  et  $\mathbf{v}|_{\partial D} = 0$  entraînent un comportement totalement différent au voisinage des frontières. Toutefois, si notre but n'est pas d'analyser la dynamique des tourbillons proches des parois, mais de montrer la formation de « clusters » de tourbillons dans la zone centrale du domaine où les effets des parois sont négligeables, alors les résultats sont semblables.

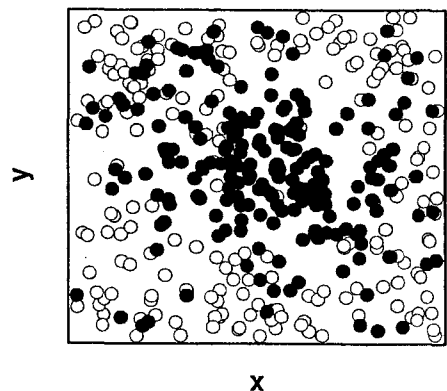
**Figure 1.** Evolution de l'Hamiltonien en fonction du temps calculé, pour la première courbe, avec la méthode traditionnelle de Runge–Kutta à l'ordre 4 et, pour la seconde courbe, avec notre méthode d'auto-régulation ; la conservation de l'énergie est alors automatiquement respectée.

**Figure 1.** Evolution of the Hamiltonian in respect of time calculated, for the first curve, with the classical Runge–Kutta method of 4th order and, for the second curve, with our method of self-regulation: then the conservation of energy is automatically respected.



**Figure 2.** Positions des tourbillons répartis initialement de façon homogène : on remarque la formation de groupements de tourbillons ainsi que la présence de zones « vides ».

**Figure 2.** Vortex positions with an initially homogeneous distribution: we remark the formation of grouping of vortices and the presence of 'empty' zones.



S. Decossin, V. Pavlov

Pour conclure, nous constatons que la méthode proposée (AH) présente l'avantage d'être générale et de respecter automatiquement toutes les lois de conservation. Elle peut être appliquée à une répartition arbitraire de vorticité et à de multiples configurations géométriques du domaine. La méthode d'auto-régulation assure le respect de tous les lois de conservation.

Nous remercions A. Babiano, V. Goncharov et J. Sommeria pour leurs remarques constructives.

### Références bibliographiques

- [1] Kirchhoff G.R., Vorlesungen über Matematische Physik, Teubner, Leipzig, 1876.
- [2] Lamb H., Hydrodynamics, VIth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [3] Onsager L., Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl 6 (1949) 279.
- [4] Brands H., Chavanis P.H., Pasmanter R., Sommeria J., Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, Phys. Fluids 11 (11) (1999).
- [5] Babiano A., Boffetta G., Provenzale A., Vulpiani A., Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence, Phys. Fluids 6 (1994) 7.
- [6] Goncharov V., Pavlov V., Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, European J. Mech. B Fluids 16 (4) (1997) 509–555.
- [7] Goncharov V., Pavlov V., On the Hamiltonian approach: Applications to geophysical flows, Nonlinear Processes in Geophys. 5 (1998) 219–240.
- [8] Pavlov V., Buisine D., Goncharov V., Formation of 'clusters' of vortices on a sphere, C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib 329 (1) (2001).

# Instabilité et particularités de l'évolution d'une nappe tourbillonnaire

Vadim Pavlov<sup>a</sup>, Daniel Buisine<sup>a</sup>, Stéphane Decossin<sup>b</sup>

<sup>a</sup> UFR de mathématiques pures et appliquées, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

<sup>b</sup> Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441 – Université de Lille 1, bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 29 janvier 2002 ; accepté après révision le 17 septembre 2002

Note présentée par Sébastien Candel.

## Résumé

L'instabilité et les particularités de l'évolution d'une nappe tourbillonnaire sont étudiées. Nous considérons l'auto-organisation de tourbillons localisés (dans des écoulements bidimensionnels) en groupements de tourbillons, en structures sous forme de spirale et nous montrons que les états quasi-finiaux « n'oublent pas » les conditions initiales. Nous discutons la signification physique des résultats obtenus. *Pour citer cet article : V. Pavlov et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 757–762.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / instabilités / état d'équilibre / étude numérique

## Instability and features of vortex sheet evolution

## Abstract

The instability and the features of vortex sheet evolution are studied. We consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into clusters-like and spiral-like structures and show that quasi-final states do not 'forget' conditions of their initial origin. We discuss the physical significance of the obtained results. *To cite this article: V. Pavlov et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 757–762.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / instabilities / equilibrium state / numerical study

## Abridged English version

Many theories have been proposed to study the evolution of hydrodynamic quasi-inviscid two-dimensional systems to a final equilibrium state. Some authors have used the methods of statistical mechanics [1]. However, in spite of different theories which were proposed on the problem of equilibrium, the explanation remains controversial. Concerning certain theories, argued criticisms have been emitted [2]. For this reason, direct experimental studies have a crucial role. However, even on the experimental level, the situation remains puzzling: obtained results tend to support different theories. The details of this discussion are presented in the work [3].

It is useful in this context to explore the direct numerical simulations of a simple model problem to establish some general results. We consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into cluster-like structures and we show that, in certain cases, the quasi-final states do not 'forget' conditions of their initial origin.

This study is based on the Hamiltonian approach applied to the mathematical model of point vortices (the general approach and the physical foundations have been developed in the works [4,5]). There are

---

Adresse e-mail : stephane.decossin@univ-lille1.fr (S. Decossin).

several advantages in the application of this approach: the laws of conservation are automatically fulfilled, the functional Poisson brackets are independent from the fields, etc. The Hamiltonian systems evolve according to the law (1). For a system of  $N$  identical point vortices confined in a circle (with a radius  $R$ ), the Hamiltonian takes the form presented in Eq. (2).

We start by summarizing the experiment [6] which concerns the motion of a plasma in a strong magnetic field. This is interesting because of the well-known fact that the dynamics of an electron plasma confined by a strong external magnetic field exhibits similarities with two-dimensional inviscid and incompressible fluid. Indeed, the system is governed by isomorphic equations to the two-dimensional Euler hydrodynamical equations, where the electron concentration plays the role of the vorticity and the electric potential the role of stream function. These quantities can be used to test the predictions of different theories of two-dimensional inviscid fluid dynamics.

The study of the vortex configuration evolution for the system with associated initial conditions has been integrated numerically with a fourth-order Runge–Kutta scheme. The initial configuration has been chosen to reproduce the initial density of particles in the plasma experience (see Fig. 1). The calculation is initialized with a system of  $N$  identical ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$ ) vortices. A good quantitative consent is observed: the solution converges to the experimental observation when  $N_i \gg 1$ . After a time which corresponds to  $\sim 10^2$  revolutions of the vortex distribution domain, a structure with a central vortex is formed (Fig. 2).

From the obtained distributions, one would be led to think that the distribution of vortices in quasi-final stage of its evolution is governed by statistical laws. However, supplementary observations refute this conclusion. To see this, one modifies slightly the initial configuration. Fig. 3 shows an evolution sequence of the vortex distribution for a system of  $N \sim 10^3$  co-rotating vortices with such a modified initial configuration. In contrast with the previous case (Fig. 2), the system evolves to a uniformly rotating, pentagonal structure. No major change is observed for  $t \gg 100$ .

It is obvious from Fig. 3 that there is a deviation from the traditional concept of final statistical (quasi-homogeneous) equilibrium and observed quasi-final state illustrated in Figs. 2 and 3 at times  $t > 100$ . The vorticity distribution is determined by the history of the flow establishment [7], and this previous history is significantly nonlinear.

If the observed phenomenon (Fig. 3) is a ‘first order phase transition’, it had to lead to the spontaneous formation of vortex cells similar to crystal. Recall that some structures called ‘vortex crystals’ have recently been observed in the non-neutral plasma experiments [8].

## 1. Introduction

De nombreuses théories ont été proposées afin d’étudier l’évolution des systèmes hydrodynamiques bidimensionnels non-visqueux vers l’état final d’équilibre. Dans ce contexte, certains auteurs ont appliqué les méthodes de la mécanique statistique [1]. Toutefois, constatons qu’en dépit des nombreuses théories proposées, la situation reste encore très controversée. Concernant certaines approches, des critiques argumentées ont été émises [2]. Pour cette raison, les études expérimentales présentent un rôle crucial. Mais même du point de vue expérimental, la situation reste embarrassante : nombre de travaux tendent à soutenir des théories différentes. Les détails de cette discussion sont présentés dans le travail [3].

Intrigués par cette situation compliquée, nous choisissons d’appliquer une expérience numérique directe à un modèle simple permettant toutefois d’établir certaines lois générales. Nous considérons l’auto-organisation d’un très grand nombre de tourbillons localisés en groupements de tourbillons et nous montrons que, dans certains cas, le système « n’oublie pas » les conditions initiales.

Dans notre étude, la méthode utilisée est l’Approche Hamiltonienne appliquée au modèle mathématique des tourbillons ponctuels (l’approche générale et les fondements physiques ont été développés dans les travaux [4,5]). Il y a plusieurs avantages dans l’application de cette méthode : les lois de conservation sont respectées automatiquement, les crochets fonctionnels de Poisson ne dépendent pas des champs, etc.

Omettant les détails de l'analyse théorique [4,5], constatons seulement que notre système évolue selon la loi

$$\partial_t x_i^{(m)} = \{x_i^{(m)}, H\} \quad (1)$$

où  $x^{(m)}(t)$  est la coordonnée du  $m$ -ième tourbillon et  $H$  l'énergie totale du système.

Soit un système de  $N$  tourbillons localisés à l'intérieur d'un domaine circulaire de rayon  $R$ , d'intensités identiques  $\Gamma/N$ . En respectant les conditions à la frontière, on peut montrer que l'Hamiltonien est donné par l'expression

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\pi N^2} \left\{ \sum_{i,j=1, i \neq j}^N -\ln\left(\frac{1}{R}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\right) + \sum_{i,j=1}^N \ln\left(\frac{1}{R}\left|\mathbf{x}_i - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_j|^2}\mathbf{x}_j\right|\right) + \dots \right\} \quad (2)$$

La première partie de l'Hamiltonien décrit les « interactions » entre les tourbillons et la seconde partie les « interactions » entre les tourbillons et leurs images. Si  $|\mathbf{x}_i| \ll R$ , seul le terme  $\sim \sum \ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  restera. Les conditions de l'expérience [6] permettent de ne pas considérer les termes omis.

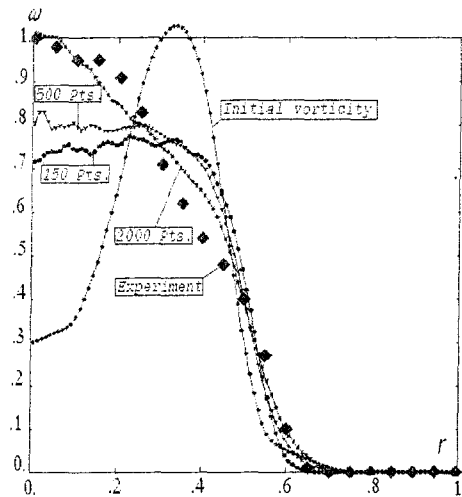
## 2. Résultats numériques et discussions

Nous commençons par un rappel des résultats de l'expérience [6] dans laquelle on a étudié le mouvement de plasma dans un fort champ magnétique. Cette expérience est intéressante par le fait que la dynamique d'un plasma « chaud » d'électrons, dans un fort champ magnétique externe, montre des similarités avec un fluide bidimensionnel incompressible et non-visqueux. En effet, due à l'anisotropie dans la direction du champ, les électrons se meuvent pratiquement dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . D'autre part, la viscosité du plasma « chaud » dans cette situation est pratiquement absente. Les équations sont donc isomorphiques aux équations hydrodynamiques bidimensionnelles sous forme Eulérienne, où la concentration joue le rôle de la vorticité et le potentiel électrique le rôle de la fonction de courant. Les résultats de cette expérience peuvent donc être utilisées afin de tester les prédiction des différentes théories de la dynamique des fluides bidimensionnels non-visqueux. La première étape a donc été d'exécuter une simulation numérique de l'expérience [6] à l'aide de notre modèle, puis de comparer les résultats de nos calculs avec les données expérimentales. La configuration initiale a été choisie afin de reproduire la densité initiale des particules dans l'expérience de plasma (voir Fig. 1). Nous avons initialisé le système de  $N$  tourbillons identiques ( $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$ ). Les expériences ont été réalisées avec différents  $N$  :  $N_1 = 1,5 \cdot 10^2$ ,  $N_1 = 5 \cdot 10^2$ ,  $N_1 = 2 \cdot 10^3$ . La distribution initiale des tourbillons a été donnée par une configuration symétrique axialement qui reproduit la distribution des particules dans l'expérience [6]. Les valeurs des paramètres du problème ( nergie, circulation) ont été les suivantes :  $H \sim 10^{-6}$ ,  $\Gamma = \sum_i \gamma_i = 1$ . L'intensité d'un tourbillon a été définie par la formule  $\gamma_i = \Gamma/N$ .

L'étude de l'évolution de la configuration tourbillonnaire d'un système avec les conditions initiales associées a été faite numériquement à l'aide d'un schéma de Runge–Kutta à l'ordre 4. Le pas de temps est restreint par la condition  $\Delta t < \Delta\theta / \sup(|\gamma_i|/R_i^2)$ , où  $\Delta\theta$  est l'angle caractéristique entre deux tourbillons ( $i, j$ ),  $0,01 < \Delta\theta < 0,04$  radian. La conservation de l'énergie a été évaluée durant les calculs. L'énergie du système,  $H$ , est le paramètre le plus sensible aux erreurs numériques de simulation. L'analyse montre que l'Hamiltonien  $H$  subit des faibles variations avec une erreur :  $|H - H_0|/|H_0| \leq 2 \cdot 10^{-5}$  (pour un processus d'itérations de  $t = 0$     $t = 10^6 \Delta t$ , qui correspond à 200 révolutions de la périphérie du domaine de la répartition tourbillonnaire). Toutes les autres intégrales du mouvement sont conservées automatiquement.

Les résultats des simulations numériques sont quantitativement en accords avec l'expérience de Huang et Driscoll (Fig. 1) lorsque  $N_i \gg 1$  :  $N_3 > N_2 > N_1$ .

La Fig. 2 montre une évolution en temps de la distribution pour un système de  $N = 2 \cdot 10^3$  tourbillons corotatifs. L'instabilité de la configuration initiale a été observée très rapidement ( $t \sim 1$ ) lors de la simulation. La perturbation génère évidemment une instabilité (instabilité de cisaillement de Kelvin–Helmholtz) qui croit exponentiellement en temps et provoque une forte évolution non-linéaire. La fragmentation de l'état initial ( $t \sim 10$ ) et la « clusterisation » qui suivent sont nettement observées. Aux étapes  $t \sim 32$ ,  $t \sim 33,9$ , la



**Figure 1.** Distribution initiale de la concentration moyennée du fluide électronique de l'expérience de Huang–Driscoll et distributions finales pour l'expérience (symboles) ainsi que pour la simulation numérique (points) obtenues avec 150, 500 et 2000 tourbillons ponctuels.

**Figure 1.** Initial distribution of the averaged concentration of electronic fluid from experience of Huang–Driscoll and final distributions for the experience (symbols) and for numerical simulation (pts) obtained with 150, 500 and 2000 point vortices.

formation de structures cohérentes en spirale est observée. Après un temps correspondant à  $10^2$  révolutions du domaine de la distribution tourbillonnaire, on observe la formation d'un tourbillon central.

En observant les répartitions obtenues, on peut penser, à première vue, que les tourbillons évoluent vers l'état quasi-final unique dont la structure est gouvernée par les lois statistiques (parce que  $N \gg 1$ ). Mais, les observations supplémentaires montrent une contradiction avec cette hypothèse : pour différentes distributions initiales axialement quasi-symétriques, le système n'évolue pas vers le même état final.

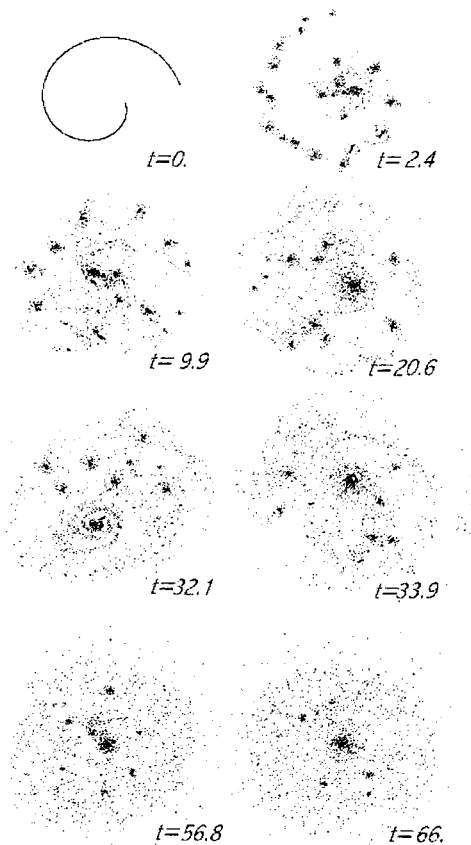
Modifions la configuration initiale. La Fig. 3 montre une séquence d'évolution de la distribution tourbillonnaire pour un système de  $N \sim 10^3$  tourbillons co-rotatifs avec cette configuration initiale modifiée. Contrairement au cas précédent (Fig. 2), le système n'évolue pas vers un tourbillon unique : il évolue vers une structure pentagonale et nous n'avons pas observé de modifications significatives de l'état pour  $t \gg 100$ . Il est évident, à partir de la Fig. 3, que nous trouvons un désaccord entre le concept traditionnel de l'équilibre statistique final (quasi-homogène) et l'état quasi-final observé illustré par la Figs. 2 et 3 aux temps  $t > 100$ .

Batchelor [7] a indiqué que la distribution finale de vortacité doit être arbitraire lorsque l'on considère le modèle d'un fluide non-visqueux car, selon lui, la distribution finale de vortacité est déterminée par l'histoire de l'établissement de l'écoulement, et cette histoire inclut un effet significatif de non-linéarité. Un tel comportement du système, qui est régi par l'équation différentielle de mouvement (c'est-à-dire déterministe), peut être attribué à la structure particulière des équations. Celles-ci peuvent avoir la propriété, pour une certaine variété de paramètres et de variables, d'être singulièrement dépendantes des conditions initiales. Ceci veut dire que même un changement infinitésimal dans la condition initiale peut causer un changement fini dans les scénarios d'évolution et dans l'état final.

Comme les structures tourbillonnaires bidimensionnelles sont gouvernées par les « interactions » aux longues distances ( $H_{ij} \sim \log r_{ij}$ ) et que les tourbillons ne se rapprochent pas à une distance très courte, le phénomène observé est similaire, en un certain sens, aux transitions de phase du premier ordre dans les systèmes physiques réels. Pour mettre en évidence ceci, nous rappelons que les transitions de phase du premier ordre requièrent une répulsion aux petites distances et une attraction aux grandes distances pour les structures élémentaires.

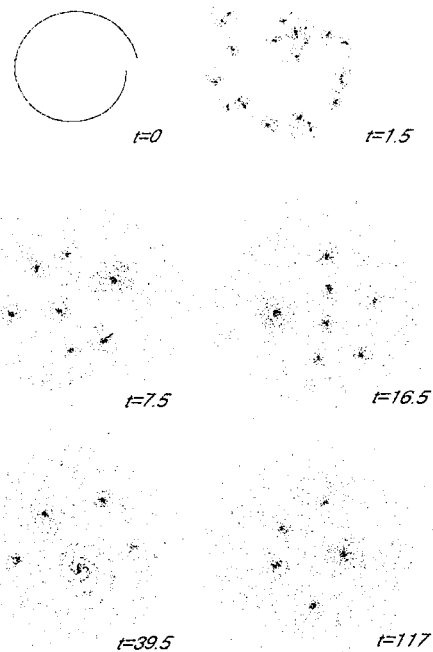
Si le phénomène observé (Fig. 3) est une « transition de phase du premier ordre », il entraîne une formation spontanée de cellules tourbillonnaires similaires à des réseaux cristallins (notons cependant, que les tourbillons quasi-ponctuels forment un système Hamiltonien particulier dû au fait qu'un tourbillon produit une vitesse, et non une accélération). Rappelons que des structures appelées, « les cristaux tourbillonnaires », ont été récemment observés dans des expériences de plasma non-neutres [8].





**Figure 2.** Évolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration en nappe tourbillonnaire sous forme de spirale avec une symétrie axiale perturbée. Les processus de fusion des petites structures et la formation de structures sous forme de spirale sont observés distinctement.

**Figure 2.** *Evolution of the system: sequence of states starting from a vortex-sheet spiral-like configuration with perturbed axial symmetry. The processes both of fusion of small structures and of formation of spiral-like structures are distinctly observed.*



**Figure 3.** Évolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration sous forme de nappe quasi-circulaire. Le système évolue vers une structure pentagonale tournante et uniforme qui oscille lentement proche de l'état d'équilibre. Nous avons observé que la structure pentagonale n'est pas dissipée avec le temps.

**Figure 3.** *Evolution of the system: sequence of states starting from an initial sheet-like quasi-circular configuration. The system evolves to a uniformly rotating, pentagonal structure which is slowly oscillating near the equilibrium state. We observed that the pentagonal structure is not dissipated in time.*

### Références bibliographiques

- [1] (a) L. Onsager, Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl. 6 (1949) 279;  
 (b) R. Robert, J. Sommeria, Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2776;  
 (c) J. Miller, P.B. Weichman, M.C. Cross, Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, Phys. Rev. A 45 (4) (1992) 2328–2359;  
 (d) V.L. Berdichevsky, Statistical mechanics of point vortices, Phys. Rev. E 51 (5) (1995) 4432–4452.

- [2] A.J. Chorin, Partition functions and equilibrium measures in two-dimensional and quasi-three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids* 8 (10) (1996) 2656-2660.
- [3] V. Pavlov, D. Buisine, S. Decossin, Whether the two-dimensional Eulerian turbulence evolves to a unique final state, *Phys. Fluids*, accepté.
- [4] (a) V. Goncharov, V. Pavlov, Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech. B Fluids* 16 (4) (1997) 509-555;  
(b) V. Goncharov, V. Pavlov, On the Hamiltonian approach: Applications to geophysical flows, *Nonlinear Processes Geophys.* 5 (1998) 219-240;  
(c) V. Pavlov, D. Buisine, V. Goncharov, Formation of vortex clusters on a sphere, *Nonlinear Processes Geophys.* 8 (2001) 9-19.
- [5] S. Decossin, V. Pavlov, Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons, *C. R. Acad. Sci. Paris* 329 (2001) 12.
- [6] X.-P. Huang, C.F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 2187.
- [7] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967, p. 537.
- [8] K.S. Fine, A.S. Cass, W.G. Flynn, C.F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3277.

