N° d'ordre : 3099

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

Sébastien Guffroy

Sur l'incomplétude de la série linéaire caractéristique d'une famille de courbes planes à nœuds et à cusps

Soutenue le 4 janvier 2002 devant

J. d'Almeida,	Professeur à l'université de Lille I,	Directeur de thèse
L. Gruson,	Professeur à l'université de Versailles,	Président et Rapporteur
F. Lescure,	Professeur à l'université de Lille I,	Examinateur
C. Walter,	Professeur à l'université de Nice,	Rapporteur

Sur l'incomplétude de la série linéaire caractéristique d'une famille de courbes planes à nœuds et à cusps

Résumé

On sait depuis J.Wahl ([31]) que les courbes planes de degré fixé ayant pour seules singularités des nœuds et des cusps en nombres imposés sont représentées par un schéma H qui peut être singulier. Wahl exhibe une famille de courbes comme ci–dessus dont les points correspondants sont singuliers dans H mais lisses dans H_{red}, la structure réduite sous–jacente. Ici, on construit explicitement une famille de courbes planes à nœuds et à cusps représentées par des points singuliers de H_{red}.

Pour ce faire, on montre tout d'abord que le schéma de Hilbert des courbes lisses et connexes de degré 12 et de genre 15 de l'espace projectif complexe est irréductible et génériquement lisse ; puis qu'il est singulier le long d'une hypersurface (***3.10***). Cet exemple est minimal dans le sens où le schéma de Hilbert des courbes lisses et connexes de degré d et genre g est lisse en codimension 1 pour $d < 12$ (***B.2***). Enfin, on construit les courbes planes à partir des courbes gauches représentées par cette hypersurface (***4.7***).

Abstract

Since J.Wahl ([31]), it is known that degree d plane curves having a fixed numbers of nodes and cusps as its only singularities can be represented by a scheme, let say H, which can be singular. In Wahl's example, H is singular along a subscheme F but the induced reduced scheme H_{red} is smooth along F. In this work, we construct explicitly a family of plane curves with nodes and cusps which are represented by singular points of H_{red}.

To this end, we begin to show that the Hilbert scheme of smooth and connected space curves of degree 12 and genus 15 is irreducible and generically smooth. It follows that it is singular along a hypersurface (***3.10***). This example is minimal in the sense that the Hilbert scheme of smooth and connected space curves is regular in codimension 1 for $d < 12$ (***B.2***). Finally we construct our plane curves from the space curves represented by points of this hypersurface (***4.7***).

Table des matières

Introduction

L'existence et l'étude des espaces de modules des courbes planes projectives vérifiant certaines propriétés, *e.g.* ayant un degré fixé et possédant des singularités en nombre et type donnés, est un problème classique de géométrie algébrique. Par exemple, les courbes de degré d sont paramétrées par le système linéaire complet $|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(d)| \simeq \mathbb{P}^N$ où $N = d(d+3)/2$. Cet espace de modules est une variété lisse et irréductible. L'existence d'une variété lisse quasiprojective paramétrant les courbes projectives planes de degré d ayant pour seules singularités δ nœuds pour $\delta \leqslant \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ remonte à Severi ([30]). Son irréductibilité, affirmée par ce dernier, n'a cependant été démontrée qu'en 1985 par Harris. Les Anciens semblaient penser qu'un tel espace de paramètres existait toujours et qu'il s'agissait même d'une «belle variété», *e.g.* lisse, irréductible...

Il a fallu attendre la formulation moderne et rigoureuse de ce problème via la théorie de la déformation pour s'apercevoir qu'il n'en est rien. Le premier contre–exemple apparaît lors de l'étude des courbes de $\mathbb{P}^2$ de degré d ayant δ nœuds et κ cusps† comme seules singularités. Wahl ([31]) a prouvé l'existence d'un schéma $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ paramétrant les courbes du type précédent. En notant $[C]$ le point de $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ correspondant à une courbe C, on dit que C est obstruée si et seulement si $[C]$ est un point singulier de $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$. La lissité de $(\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa})_{\mathrm{red}}$ en $[C]$ est équivalente à ce qui est classiquement nommé l'appartenance de C à un *système continu complet.* Avec cette terminologie, *C appartient à un système continu complet dont la série linéaire caractéristique est complète* si et seulement si $[C]$ est un point non singulier de $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$. Dans ce même article, Wahl exhibe une famille de courbes planes avec nœuds et cusps dont le membre général est un point singulier du schéma $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$. Plus précisément, $[C] \in \mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ est singulier mais $[C] \in (\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa})_{\mathrm{red}}$ est lisse.

D'autres types d'obstruction peuvent se présenter lorsque l'on autorise des singularités plus sévères. Luengo ([18]) construit une courbe plane intègre de degré 9 qui possède un seul point singulier de type A_{35} et qui est obstruée tout en appartenant à une composante réduite du schéma paramétrant les courbes planes de degré 9 avec un point de type A_{35} pour seule singularité.

La question se pose alors, voir [12, p109,(6)], de l'existence d'une courbe C plane avec comme seules singularités des nœuds et des cusps, telle que $[C] \in (\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa})_{\mathrm{red}}$ soit singulier. Le but de ce travail est de construire un tel exemple.

†il s'agit, et il s'agira dans la suite, de nœuds et cusps ordinaires.

§*1* . *Rappels et notations*

Pour un schéma X on note $\mathscr{O}_X$ son faisceau structural et, si X est fermé dans $\mathbb{P}_n = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]$, $\mathscr{I}_X$ le faisceau d'idéaux le définissant. Si X est lisse, K_X désigne le diviseur canonique et ω_X le faisceau canonique. On note simplement $\mathscr{O}$ le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_3}$. Pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X, $H^i(X, \mathscr{F})$ (ou $H^i\mathscr{F}$ en abrégé) désignera le i–ème groupe de cohomologie et $h^i(X, \mathscr{F})$ (ou $h^i\mathscr{F}$) sa dimension.

On réserve le nom de *courbe* aux sous-schémas fermés de dimension pure 1 de $\mathbb{P}_3$, sans points immergés, donc localement de Cohen–Macaulay. On note $H_{d,g}$ l'ouvert du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^{nd+1-g}_{\mathbb{P}_3}$ représentant les courbes de $\mathbb{P}_3$ de degré d et de genre arithmétique g et $\mathcal{H}_{d,g}$ l'ouvert paramétrant les courbes lisses et connexes de degré d et de genre g. On dira *famille de courbes* pour une famille plate de courbes sur un schéma sur $\mathbb{C}$, *i.e.* pour un morphisme plat $\mathscr{C} \to S$ dont les fibres géométriques sont des courbes de même polynôme de Hilbert. La *dimension* d'une famille de courbes est celle du sous–schéma de $H_{d,g}$ représentant les membres de $\mathscr{C}$. Pour une courbe C, $[C]$ est le point qui la représente dans $H_{d,g}$.

On utilisera la notion de *régularité* de Castelnuovo–Mumford ([24, Lecture 14]) dont voici la définition et les propriétés principales.

Définition 1.1 *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_n$.*
$\mathscr{F}$ est dit m–régulier si $H^i\mathscr{F}(m-i) = 0$ pour tout $i > 0$ et m–irrégulier sinon. La régularité de $\mathscr{F}$ est le plus petit entier m tel que $\mathscr{F}$ soit m–régulier. Si X est un sous–schéma fermé de $\mathbb{P}_n$, on appelle régularité de X celle de son idéal de définition $\mathscr{I}_X$.

Proposition 1.2 **(Mumford)** *Si $\mathscr{F}$ est m–régulier, on a*
1. $\mathscr{F}$ est $(m+1)$–régulier.
2. $H^0\mathscr{F}(k+1)$ est engendré par $H^0\mathscr{F}(k) \otimes H^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ pour tout $k \geqslant m$.
3. $\mathscr{F}(k)$ est engendré par ses sections globales pour tout $k \geqslant m$.

On se servira également du procédé de la *liaison* par intersection complète. On parlera de *liaison* $s \times t$ pour une liaison par deux surfaces de degrés s et t. Les définitions et résultats nécessaires sont résumés dans le paragraphe suivant (voir [19]).

Définition 1.3 *Biliaison élémentaire de type (s, h)*
Soit C une courbe, Q et S deux surfaces de degrés respectifs s et t contenant C et sans composante commune. On note X l'intersection complète de S et Q et C' la liée à C par X. S'il existe une surface S' de degré $t+h$ contenant C' et sans composante commune avec Q, l'intersection complète Y de Q et S' permet de lier C' à une courbe Γ. Dans ce cas, on dit que Γ est obtenue par une biliaison élémentaire de type (s, h) à partir de C.

Définition 1.4 *Quelques invariants d'une courbe.*
Le module de Rao de C est le $\mathbb{C}[x, y, z, t]$–module gradué $M_C = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^1\mathscr{I}_C(k)$.
La fonction de Rao de C est $\rho_C : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ où $\rho_C(n) = h^1\mathscr{I}_C(n)$.
Le caractère de postulation de C est défini par $\gamma_C(n) = \partial^3 h^0\mathscr{I}_C(n) - \binom{n}{0}$ où ∂ est l'opérateur

différence première : $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$ *et où l'on convient que le coefficient binomial* $\binom{n}{0}$ *vaut* 0 *pour* $n < 0$.

On dira simplement *formules de liaison* (resp. *de biliaison*) pour qualifier les formules qui relient étroitement les invariants d'une courbe à ceux de sa liée (resp. de sa biliée). Les schémas suivants seront considérés au paragraphe §*3* :

- $H_{\gamma,\rho}$ est le sous–schéma de $H_{d,g}$ paramétrant les courbes de caractère de postulation γ et de fonction de Rao ρ.

- $\mathscr{D}_{\gamma,\rho,s,t}$ est le schéma représentant les triplets (C, Q, Q') où C est une courbe telle que $[C] \in H_{\gamma,\rho}$, et Q (resp. Q') est une surface de degré s (resp. t) contenant C avec Q et Q' sans composante commune. Si Γ est liée à C par $s \times t$, les schémas $\mathscr{D}_{\gamma_C,\rho_C,s,t}$ et $\mathscr{D}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,s,t}$ sont isomorphes. On utilisera cet isomorphisme pour relier les dimensions de deux familles de courbes liées par $s \times t$.

- $\mathscr{B}_{\gamma,\rho,s,h}$ est le schéma paramétrant les biliaisons élémentaires de type (s, h) obtenues à partir d'une courbe C avec $[C] \in H_{\gamma,\rho}$. Si Γ est biliée à C par (s, h), $\mathscr{B}_{\gamma_C,\rho_C,s,h}$ et $\mathscr{B}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,s,-h}$ sont isomorphes ce qui permettra de comparer les dimensions de familles de courbes biliées par (s, h).

Pour finir on précise les différents *foncteurs de déformations* intervenant dans [31] et certaines de leurs propriétés. On note $\mathfrak{Ens}$ la catégorie des ensembles et $\mathfrak{C}$ celle des $\mathbb{C}$–algèbres artiniennes locales et finies où les flèches sont les homomorphismes locaux d'algèbres. Les foncteurs considérés ensuite vont de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{Ens}$, sont covariants et envoient $\mathbb{C}$ sur un singleton.

Pro–représentabilité, morphisme lisse de foncteurs :

• Soit R une $\mathbb{C}$–algèbre locale d'idéal maximal m_R telle que $R/m_R^n \in \mathfrak{C}$ pour tout entier n. On définit un foncteur h_R par $h_R(A) = \mathrm{Hom}(R, A)$. Un foncteur G est dit *pro–représentable* s'il existe un isomorphisme $h_R \xrightarrow{\sim} G$.

• Un morphisme de foncteurs $F \to G$ est *lisse* si $A' \to A$ surjectif implique $F(A') \to F(A) \times_{G(A)} G(A')$ surjectif ; on dira alors que F et G sont *liés (ou reliés) de façon lisse.* Si F et G sont pro–représentés respectivement par R_F et R_G, alors $F \xrightarrow{f} G$ est un morphisme lisse si et seulement si R_F est un anneau de séries formelles sur R_G.

Les trois foncteurs d'intérêt :

• Soit X un sous schéma fermé de $\mathbb{P}_n$. On note H_X le foncteur de Hilbert, *i.e.* des déformations de X ; $H_X(A)$ est l'ensemble des $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n \times \mathrm{Spec}\, A$ tels que $\overline{X}$ est plat sur $\mathrm{Spec}\, A$ et $\overline{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} = X$.

• Soit X une hypersurface réduite de $\mathbb{P}_n$, H'_X désigne le *foncteur des déformations localement triviales de* X, *i.e.* qui conservent (formellement) les singularités de X.

• Soit X un schéma normal, Y une variété projective lisse et $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme fini et plat. Une *déformation de X au dessus de Y vers A* est un carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y_A = Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}} \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

où $\overline{X} \to Y_A$ est plat et tel que l'application naturelle $X \to \overline{X} \times_{Y_A} Y$ est un isomorphisme. Deux telles déformations $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ sont dites équivalentes s'il existe un Y_A–isomorphisme $\overline{X_1} \xrightarrow{\sim} \overline{X_2}$ induisant un isomorphisme entre les diagrammes définissant $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$. On note $F(f)$ le foncteur défini par $F(f)(A)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de déformations de X au dessus de Y vers A.

D'après la proposition 3.2.5 de [31], H_X, H'_X et $F(f)$ sont pro–représentés par des anneaux locaux que l'on notera encore H_X, H'_X et $F(f)$.

§*2* . *La méthode*

On utilise le même cheminement que Wahl dans [31] dont on rappelle

2.1 *La démarche*

On part d'une famille de courbes lisses et connexes de $\mathbb{P}_3$ dont les points correspondants dans le schéma de Hilbert ne sont pas lisses‡. Soit C une de ces courbes. On est assuré de l'existence d'une surface irréductible S ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires (ou des points pince) le long de C, pour S de degré suffisant par rapport à certains invariants relatifs à C. Kodaira a démontré que si $\deg S$ est assez grand, les foncteurs H'_S et H_C sont liés de façon lisse. Soit $Y \to S$ la normalisée (lisse) de S et $S \to \mathbb{P}_2$ la projection générique de S sur $\mathbb{P}_2$ depuis un point extérieur à S. La composée $\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & S \arrow[r] & \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$ a pour lieu de ramification une courbe plane intègre, γ, avec nœuds et cusps comme seules singularités. Si $\deg S$ est assez grand, Wahl montre qu'il existe un morphisme lisse entre les foncteurs H'_S et $F(f)$. Enfin, il prouve que $F(f)$ et H'_γ sont isomorphes.

En conclusion, si n est un entier assez grand§ comparé à certains invariants de C (qui doivent donc être accessibles pour une construction effective), on obtient une courbe plane intègre à nœuds et à cusps telle que H_C et H'_γ sont réguliers et réduits simultanément. En particulier, si $[C]$ est un point singulier de $(\mathcal{H}_{d,g})_{\text{red}}$, $[\gamma]$ est également un point singulier de $(\mathscr{X}_{d_\gamma,\delta,\kappa})_{\text{red}}$.

Pour construire l'exemple recherché, on considère la famille des courbes lisses et connexes de $\mathbb{P}_3$ de degré 12 et de genre 15, tracées sur une surface cubique à droite double qui n'est

‡Wahl considère les courbes de degré 14 et genre 24 étudiées par Mumford dans [23]. Ces courbes sont contenues dans une composante génériquement non réduite de $\mathcal{H}_{14,24}$.

§Les conditions précises sur $n = \deg\, S$ sont données en ***4.3***.

pas un cône et en intersectant 4 fois la génératrice générale. La non lissité de $\mathcal{H}_{12,15}$ en les points correspondants est suggérée dans l'appendice B de [14].

Le travail se compose de deux parties principales. On montrera tout d'abord que $\mathcal{H}_{12,15}$ est irréductible, génériquement lisse de dimension 48 et que les courbes considérées en constituent une hypersurface singulière. Ensuite, on calculera les invariants numériques propres à ces courbes afin d'appliquer les résultats de Wahl. On obtiendra une famille de courbes planes, intègres, de degré 216 avec 17632 nœuds et 2856 cusps, représentées par des points singuliers de $(\mathscr{X}_{216,17632,2856})_{\mathrm{red}}$.

On commence par apporter quelques précisions sur les

2.2 *Courbes tracées sur une surface cubique à droite double*

Soit $S \subset \mathbb{P}_3$ une surface cubique à droite double qui n'est pas un cône. On note, comme dans [16, Chap 4], $X_1 = \mathbb{P}\left(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)\right)$. Son groupe de Picard est Pic $X_1 = f\mathbb{Z} \oplus H\mathbb{Z}$ où $H \sim C_0 + 2f$ est le diviseur très ample qui permet de plonger X_1 dans $\mathbb{P}_4$. On désigne par $\widetilde{S}$ la surface réglée rationnelle cubique image de X_1 par ce morphisme. Le faisceau $\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(af+bH)$ sera noté simplement $\mathscr{O}(a,b)$. Le diviseur canonique est $K_{\widetilde{S}} \sim -2H + f = (1,-2)$, la forme d'intersection est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Il est bien connu que S est une surface réglée, projection générique de $\widetilde{S}$ depuis un point extérieur. Soit C une courbe lisse et connexe de degré $d \geqslant 2$ tracée sur S et intersectant k fois une génératrice générale de S. C n'ayant pas la droite double comme composante, on peut l'identifier à sa transformée propre dans $\widetilde{S}$. On a alors $C \sim (d-3k, k)$. Son genre g est fourni par la formule d'adjonction : $2g - 2 = (d-3k)(k-2) + k(d-5)$. Pour $d = 12$ et $k = 4$ on trouve $g = 15$.

Pour $3 \leqslant k \leqslant \frac{d-3}{2}$, la dimension de $|\mathscr{O}(d-3k,k)|$ est calculée dans [14] de même que celle de l'espace tangent à $\mathcal{H}_{d,g}$ en un de ces points. Elles sont respectivement de $2d+g-k-1$ et de $2d+g-k+14$. Pour $d > 9$, C n'est tracée que sur une surface cubique, S. Les surfaces cubiques à droite double de $\mathbb{P}_3$ formant une famille irréductible de dimension 13, le système des courbes de degré $d > 9$, tracées sur une surface cubique à droite double (variable) et rencontrant k fois une génératrice générale est un localement fermé irréductible de dimension $2d+g-k+12$ de $\mathcal{H}_{d,g}$.

Pour $d = 12$ et $k = 4$, on obtient une famille irréductible de dimension 47 dont l'espace tangent à $\mathcal{H}_{12,15}$ aux points correspondants est de dimension 49. Pour atteindre le but de la première partie, il reste à vérifier que $[C]$ est un point singulier de $(\mathcal{H}_{12,15})_{\mathrm{red}}$. C'est ce que l'on fait au numéro suivant en prouvant que

§3 . *Le schéma $\mathcal{H}_{12,15}$ est irréductible et génériquement lisse de dimension 48*

Dans cette partie C désigne une courbe lisse et connexe de degré 12 et de genre 15. On note que C n'est pas dégénérée, qu'elle n'est pas tracée sur une quadrique, qu'elle n'est pas intersection complète, et que $\mathscr{O}_C(n)$ est non spécial pour $n \geqslant 3$.

Comme toute composante irréductible de $\mathcal{H}_{12,15}$ est de dimension $\geqslant 48$, si l'on met en évidence une famille *irréductible* de courbes de dimension 48 et si l'on démontre que toutes les autres courbes appartiennent à un nombre fini de familles de dimensions < 48, l'irréductibilité de $\mathcal{H}_{12,15}$ sera acquise ainsi que l'égalité $\dim \mathcal{H}_{12,15} = 48$. Il restera à justifier que $\mathcal{H}_{12,15}$ est lisse au point générique. On procède par séparation des cas.

Cas 1. C n'est pas linéairement normale.
Le théorème de Clifford donne $h^0\mathscr{O}_C(1) \leqslant 7$. D'autre part, on a $h^0\mathscr{O}_C(1) = 4+h^1\mathscr{I}_C(1) \geqslant 5$ donc le faisceau très ample $\mathscr{O}_C(1)$ induit un plongement de C dans $\mathbb{P}_N$ où $N = 4, 5, 6$, *a priori*. L'image de C par ce morphisme est une courbe de mêmes degré et genre que C. Il suit du théorème de la borne de Castelnuovo (voir par exemple [1, p122]) que $N = 4$, et que ces courbes sont de genre maximal, donc tracées sur une surface cubique réglée rationnelle de $\mathbb{P}_4$ que l'on note S. Si S est lisse, les classes d'équivalence linéaire des courbes extrémales sont connues et l'on retrouve les courbes initiales de type $(d-3k, k)$ avec $d = 12$ et $k = 4$, dont on sait qu'elles constituent une famille (irréductible) de dimension 47.

Sinon S est un cône cubique à droite double de modèle lisse $\widetilde{S} \simeq X_3 \to S$ et le transformé propre de la section hyperplane générale de S est $C_0 + 3f$ ([17, p89]). La transformée propre $\widetilde{C}$ de C est linéairement équivalente à $aC_0 + bf$ où $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 3a$ et son degré est $C \cdot (C_0 + 3f) = b$. Le diviseur canonique de X_3 étant $K \sim -2C_0 - 5f$, la formule d'adjonction s'écrit $g = d(a-1) - \frac{1}{2}a(3a-1) + 1$. Pour $d = 12$ et $g = 15$, on a donc $a = 4$ soit $\widetilde{C} \sim 4C_0 + 12f$. Comme $\widetilde{C} \cdot f = 4 \geqslant 0$, la cohomologie de $\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(\widetilde{C})$ se calcule sur $\mathbb{P}_1$ donc

$$\dim |\widetilde{C}| = h^0\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(\widetilde{C}) - 1 = h^0 \oplus_{i=0}^{4} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(12-3i) - 1 = 34$$

Les cônes sur une cubique plane intègre et singulière formant une famille de dimension 11 (3 pour le sommet, une fois fixé un plan ne le contenant pas, $2+6$ pour un point et une cubique de ce plan ayant un noeud ou un cusp en ce point) et C n'étant tracée que sur une seule surface cubique, les courbes étudiées ici constituent une famille de dimension $34 + 11 = 45 < 48$ et ne sont donc pas générales dans $\mathcal{H}_{12,15}$.

On suppose maintenant que C est linéairement normale. Elle peut être ou non tracée sur une cubique mais elle est toujours sur une quartique d'après la longue suite exacte en cohomologie déduite de $0 \to \mathscr{I}_C(n) \to \mathscr{O}(n) \to \mathscr{O}_C(n) \to 0$ et la non spécialité de $\mathscr{O}_C(n)$ pour $n \geqslant 3$.

Cas 2. C est contenue dans une surface cubique S.
C est irréductible, elle n'est pas dégénérée et n'est pas tracée sur une quadrique donc S est irréductible ; et unique pour des raisons évidentes de degré. S est également réduite.

En effet, C étant réduite, l'inclusion $C \rightarrow S$ se factorise, de façon unique et naturelle [16, ex 2.3.c p79], par $C \rightarrow S_{\mathrm{red}}$. On en déduit que si S n'est pas réduite C est tracée sur un plan ou une quadrique ce qui est exclu par hypothèse. On distingue plusieurs cas suivant le lieu singulier de S.
(i) S possède un point triple
S ne peut être qu'un cône cubique à droite double puisqu'il n'existe aucune courbe lisse et connexe de degré 12 et de genre 15 sur un cône cubique sans droite double d'après la proposition 2.12 de [14]. Mais si C est tracée sur une telle surface elle n'est pas linéairement normale.
(ii) S a une droite double et pas de point triple
On a vu que S est obtenue par projection générique de $\widetilde{S}$, l'image de X_1 dans $\mathbb{P}_4$ par le morphisme donné par $|H| = |C_0 + 2f|$. Dans $\operatorname{Pic}\widetilde{S} = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}f$, il n'y a qu'une classe donnant un degré 12 et un genre 15 : $(0, 4)$. On retrouve les courbes du cas 1 dont on sait qu'elles ne sont pas linéairement normales.
(iii) S est normale et non réglée
On appliquera la proposition suivante au cas $d = 12$ et $g = 15$.

Proposition 3.1 *([14] pour le cas lisse)*
Soit (d, g) un couple d'entiers tel qu'il existe des courbes lisses et connexes de degré d et de genre g tracées sur une surface cubique normale non réglée.
1) Une telle surface étant fixée, les courbes du type précédent qu'elle contient se répartissent en une union finie de familles de dimensions $d + g - 1$.
2) Pour $d > 9$, les courbes lisses et connexes de degré d et de genre g tracées sur une cubique normale non réglée (variable) constituent une union finie de localement fermés de dimensions $\leqslant d + g + 18$ de $\mathcal{H}_{d,g}$.

On dispose d'un modèle plan de ces surfaces que l'on utilisera pour démontrer la proposition. Il est décrit dans le

Lemme 3.2 *Soit S une surface cubique normale de $\mathbb{P}_3$ qui n'est pas un cône. Il existe un sextuplet de points de $\mathbb{P}_2$ en position presque générale (voir [6] pour la définition), $(p_1, \cdots, p_6)$ avec $p_1 \in \mathbb{P}_2$ et p_j éventuellement infiniment voisin de p_i pour $i < j$, tel que S soit l'image par le morphisme anticanonique de la surface de Del Pezzo (peut–être dégénérée) obtenue en éclatant successivement le plan en les p_i.*

Preuve : Si S est lisse cela est bien connu et les p_i sont en position générale, *i.e.* aucun sous groupe de 3 points n'est contenu dans une droite et les 6 points ne sont pas sur une conique. On considère désormais les surfaces singulières.

A changement de coordonnées près, on peut supposer que $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ est un point double de S. En notant x_0, x_1, x_2 et x_3 des coordonnées dans $\mathbb{P}_3$, une équation de S est alors

$$f = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2)$$

où f_2 et f_3 sont homogènes de degrés respectifs 2 et 3. S étant irréductible f_2 et f_3 sont sans facteur commun dans $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. La projection de centre P sur le plan $(x_3 = 0)$ induit une application birationnelle $\pi : S \to \mathbb{P}_2$ qui est un isomorphisme en dehors des droites contenues dans S qui passent par P. Ces dernières correspondent par π aux points de Z_{red} où $Z \subset \mathbb{P}_2$ est le schéma intersection complète des deux courbes $(f_2 = 0)$ et $(f_3 = 0)$. D'autre part, les sections hyperplanes de S s'identifient aux éléments du système linéaire $L = \mathbb{P}H^0\mathscr{I}_Z(3)$ des cubiques planes contenant Z. La résolution de $\mathscr{I}_Z$ donne $h^0\mathscr{I}_Z(3) = 4$. Comme S a un nombre fini de points doubles ($\leqslant 4$), le théorème de Bertini assure que la section hyperplane générique de S est lisse et connexe. Sa projection h est un élément lisse et connexe de L.

Z étant intersection complète, il est aisé de l'interpréter comme un sextuplet de points $(p_1, \cdots, p_6)$, avec $p_1 \in \mathbb{P}_2 = V_1$ et $p_{i+1} \in V_{i+1}$ où V_{i+1} est l'éclaté de V_i en p_i.

Soit $\varepsilon : \overline{S} \to \mathbb{P}_2$ le composé des éclatements successifs de $\mathbb{P}_2$ en les p_i. En notant E_i le transformé total de p_i, on a Pic $\overline{S} \simeq \varepsilon^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_2}(1)\mathbb{Z} \oplus E_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus E_6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^7$. Dans cette base, le diviseur anticanonique est $-K_{\overline{S}} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Les éléments de $|-K_{\overline{S}}|$ sont les tranformés propres des éléments de L ([6, d,p38]). La transformée stricte de h est une section lisse et connexe du faisceau anticanonique. Cela implique que le système $|-K_{\overline{S}}|$ n'a pas de composante fixe [6, Th 1,p39](*i.e.* les points p_i sont en position presque générale) ni de point base [6, Th 1 ,p 55]. Il définit donc un morphisme $\varphi : \overline{S} \to \mathbb{P}_3$ dont l'image est une surface cubique de mêmes sections hyperplanes que S. □

Preuve de la proposition : On note D une courbe lisse et connexe de degré d et de genre g tracée sur une cubique normale non réglée $S \subset \mathbb{P}_3$. D'après le lemme ***3.2***, il existe une surface $\overline{S}$, l'éclaté du plan projectif en 6 points en position presque générale, dont l'image par le morphisme anticanonique est S. Notons $\overline{D}$ la transformée propre de D par $\overline{S} \overset{|-K_{\overline{S}}|}{\longrightarrow} S$ et $\mathscr{L} \in$ Pic $\overline{S}$ un fibré en droites ayant $\overline{D}$ pour section.

Dans la preuve du théorème 2.11 de [14], pour $d \geqslant 2$, il est démontré l'existence d'une *base adéquate* de Pic $\overline{S}$ pour le fibré $\mathscr{L}$, à savoir une base dans laquelle les coordonnées de $\mathscr{L}$ sont $(d, m_1, \cdots, m_6)$ où $d \geqslant m_1 + m_2 + m_3$ et $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_6 \geqslant 0$. L'hypothèse de position presque générale entraine que le faisceau anticanonique de $\overline{S}$ a une section intègre ([6, Th 1 p39]). On peut donc utiliser les résultats de [15], et en en suivant la terminologie, $\mathscr{L}$ est *standard*. Le lemme 1.5 de ce même article entraine alors que $h^1(\overline{S}, \mathscr{L}) = h^2(\overline{S}, \mathscr{L}) = 0$. Par conséquent,

$$\dim |D| = h^0\mathscr{O}_S(D) - 1 = h^0(\overline{S}, \mathscr{L}) - 1 = \chi\mathscr{O}_{\overline{S}}(\mathscr{L}) - 1 = d + g - 1$$

Cette égalité justifie le point *1)* pour $d > 1$. Si $d = 1$, on a $g = 0$ et il suffit de remarquer que les surfaces cubiques considérées comportent un nombre fini de droites.

Enfin, si $d > 9$, S est l'unique surface cubique contenant D. Les surfaces cubiques normales non réglées de $\mathbb{P}_3$ constituent un ouvert de $\mathbb{P}_{19} = \text{Hilb}_{\mathbb{P}_3}^{3n^2/2+3n/2+1}$ d'où la majoration annoncée en *2)*. □

Pour $d = 12$ et $g = 15$, on obtient une dimension $\leqslant 45 < 48$. D'autre part, on aura pu remarquer que les dimensions des systèmes linéaires de courbes lisses et connexes de degré d et de genre g tracées sur une surface cubique normale non réglée ne dépend pas de sa lissité. Cela permet de démontrer le

Théorème 3.3 *Soit C_0 une courbe lisse connexe tracée sur une surface cubique normale non réglée de $\mathbb{P}_3$. C_0 est spécialisation de courbes tracées sur des surfaces cubiques lisses.*

Preuve : Etant donnée une courbe C_0, lisse et connexe, et tracée sur une fibre d'une famille de surfaces cubiques normales non réglées, on montre la représentabilité du foncteur des diviseurs de Cartier relatifs «localement isomorphes à C_0»(la définition précise est donnée après). On vérifie ensuite que le schéma représentant est irréductible. On peut évidemment supposer que C_0 n'est pas une droite et donc que son degré est $\geqslant 2$.

Soient $\mathbb{P}_{19}$ le schéma de Hilbert des surfaces cubiques de $\mathbb{P}_3$, $\mathscr{S}$ la famille universelle associée et U l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^6_{\mathbb{P}_2}$ (donc irréductible) paramétrant les sextuplets en position presque générale. D'après le lemme ***3.2***, on a un morphisme

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{P}_2)_U & \to & \mathbb{P}_{19} \\ u = [(p_1^u, \cdots, p_6^u)] & \mapsto & [S_u] \end{array}$$

où S_u est la surface cubique image par le morphisme anticanonique de $\varepsilon_u : \overline{S_u} \to \mathbb{P}_2$, l'éclaté successif de $\mathbb{P}_2$ en les points p_i^u. Cette flèche induit un morphisme $\widetilde{\mathscr{S}} \xrightarrow{f} (\mathbb{P}_2)_U$ où $\widetilde{\mathscr{S}}$ est le produit fibré de $(\mathbb{P}_2)_U$ et de $\mathscr{S}$ au dessus de $\mathbb{P}_{19}$. De plus, f est plat, projectif, et à fibres géométriques intègres.

Soit C_0 une courbe lisse et connexe, de degré $d \geqslant 2$ et de genre g, tracée sur une surface cubique normale et non réglée. On note 0 un point de U tel que $C_0 \subset S_0$ et $\mathscr{L}_0$ l'élément de Pic S_0 défini par C_0. On commence par vérifier que $\mathscr{L}_0$ est la restriction à S_0 d'un faisceau inversible sur $\widetilde{\mathscr{S}}$. Soit $(d, m_1, \cdots, m_6) \in \mathbb{Z}^7$ les coordonnées de $\mathscr{L}_0$ dans la base donnée par $\varepsilon_0^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ et les transformés totaux des p_i^0. En notant u le point générique de l'ouvert irréductible U et en posant $\mathscr{L} = f^* \mathscr{O}_{(\mathbb{P}_2)_U}(d - m_1 p_1^u - \cdots m_6 p_6^u)$, on obtient un faisceau inversible sur $\widetilde{\mathscr{S}}$ dont la restriction à $u = 0$ est $\mathscr{L}_0$.

On définit un foncteur contravariant, de la catégorie des schémas sur U dans la catégorie des ensembles par

$$\mathscr{T}(T) = \Big\{ D \subset \widetilde{\mathscr{S}} \times_U T \,|\, D \text{ diviseur de Cartier effectif relatif sur } \widetilde{\mathscr{S}} \times_U T/T \\ \text{tel que } \mathscr{O}_{\widetilde{\mathscr{S}} \times_U T}(D) \text{ est isomorphe à } \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_T \text{ localement au dessus de } T \Big\}$$

Il reste à justifier que ce foncteur est représenté par un schéma irréductible.

D'après le théorème 4.3 de [13], il existe un faisceau cohérent $\mathscr{Q}$ sur U tel que le fibré projectif $\mathbb{P}(\mathscr{Q})$ représente le foncteur $\mathscr{T}$. Pour tout $y \in U$, si l'on note $\mathscr{L}_y$ la restriction de $\mathscr{L}$ à la fibre S_y, on a $\mathscr{L}_y \simeq (d, m_1, \cdots, m_6) \in \mathrm{Pic}\ S_y$. Comme $d \geqslant 2$, il découle de la preuve de la proposition ***3.1***, que $H^1(S_y, \mathscr{L}_y) = H^1(S_0, \mathscr{L}_0) = 0$. Il résulte alors de la remarque 4.15 de [13], que $\mathscr{Q}$ est localement libre sur U. $\mathbb{P}(\mathscr{Q})$ est fibré sur l'ouvert irréductible U avec des fibres irréductibles de même dimension : $h^0(S_y, \mathscr{L}_y) = h^0(S_0, \mathscr{L}_0) = d + g$. Par suite, $\mathbb{P}(\mathscr{Q})$ est irréductible. Son point générique représente une courbe lisse et connexe tracées sur une fibre générale de f soit une cubique lisse dont C_0 est spécialisation. □

Remarque 3.4 Il existe des courbes lisses et connexes tracées sur des surfaces cubiques intègres qui ne sont pas cas particuliers de courbes tracées sur une cubique lisse. Par exemple, les courbes générales du système linéaire $|\mathscr{O}(d-3k,k)|$ sur une cubique à droite double pour (d,k) convenable ([14, Cor B.4]). Le cas $(12,4)$ traité ici en fait partie.

Il reste à étudier les courbes lisses et connexes de degré 12 et de genre 15, linéairement normales, et non tracées sur une surface cubique. On note, et l'on notera dans toute la suite, γ le caractère de postulation, M le module de Rao et ρ la fonction de Rao d'une telle courbe C.

Cas 3. $h^1\mathscr{I}_C(1)=0$, $h^0\mathscr{I}_C(3)=0$ et $h^1\mathscr{I}_C(2)>0$.
Soit S une quartique irréductible contenant C. C étant réduite, S est réduite et donc intègre. C n'étant pas intersection complète, la spécialité de $\mathscr{O}_C(2)$ ($h^1\mathscr{O}_C(2)=h^1\mathscr{I}_C(2)$) permet d'effectuer une biliaison élémentaire de type $(4,-2)$ à partir de la surface intègre S [19, remarque 2.7b p65]. La courbe biliée à C est de degré 4 et de genre -1. On la nomme Γ. Une description des courbes de degré 4 et de genre -1 est contenue dans l'appendice A.

Soit U_C l'image de la projection naturelle de $\mathscr{B}_{\gamma,\rho,4,-2}$ sur $H_{\gamma,\rho}$. La fibre au dessus de $[C']\in U_C$ est de dimension ([19, cor 4.8 p153]) $h^0\mathscr{I}_{C'}(4)+h^1\mathscr{O}_{C'}(2)-1$ soit $f_C := h^0\mathscr{I}_C(4)+h^1\mathscr{O}_C(2)-1$ puisque C et C' ont même cohomologie. $\mathscr{B}_{\gamma,\rho,4,-2}\to U_C$ est un morphisme dominant à fibres de dimensions constantes d'où

$$\dim \mathscr{B}_{\gamma,\rho,4,-2}=\dim U_C+f_C$$

De même, en notant U_Γ l'image de la projection de $\mathscr{B}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,2}$ sur $H_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma}$ et $f_\Gamma := h^0\mathscr{I}_\Gamma(4)+h^0\mathscr{O}(2)+h^1\mathscr{O}_\Gamma(-2)-1$ la dimension commune des fibres de ce morphisme, on obtient

$$\dim \mathscr{B}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,2}=\dim U_\Gamma+f_\Gamma$$

On passe de C à Γ par une biliaison élémentaire $(4,-2)$ donc ([19, th 4.6 p152]) les schémas $\mathscr{B}_{\gamma,\rho,4,-2}$ et $\mathscr{B}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,2}$ sont isomorphes d'où l'égalité $\dim U_C+f_C=\dim U_\Gamma+f_\Gamma$.

Les formules de biliaison donnent $h^0\mathscr{I}_\Gamma(4)=h^0\mathscr{I}_C(6)-9$ et $h^1\mathscr{I}_C(6)=h^1\mathscr{I}_\Gamma(4)$. Γ est de degré 4 et de genre -1 donc sa fonction de Rao est nulle à partir du degré 4([20]). On en déduit que $h^0\mathscr{I}_\Gamma(4)=h^0\mathscr{O}(6)-h^0\mathscr{O}_C(6)-9$ et, grâce à la non spécialité de $\mathscr{O}_C(6)$, que $h^0\mathscr{I}_\Gamma(4)=17$. Ensuite, $h^1\mathscr{O}_\Gamma(-2)=h^1\mathscr{O}_C-9=15-9=6$. Finalement, la fibre au dessus de Γ est de dimension $f_\Gamma=32$. Pour f_C, on remarque que $h^0\mathscr{I}_C(4)=h^0\mathscr{I}_\Gamma(2)+1$ et, par hypothèse, $h^1\mathscr{O}_C(2)>0$. Donc $f_C\geqslant 1+h^0\mathscr{I}_\Gamma(2)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\dim U_C &= \dim U_\Gamma+f_\Gamma-f_C\\ &< \dim U_\Gamma+32\end{aligned}$$

On majore maintenant $\dim U_\Gamma$. Les formules de biliaison donnent $\rho(1)=\rho_\Gamma(-1)$ et C est linéairement normale par hypothèse. Il suit que C ne peut être biliée par $(4,-2)$ à une courbe extrémale. Le corollaire ***A.2*** s'applique et donne $\dim U_\Gamma\leqslant 16$. Par conséquent $\dim U_C\leqslant 16+32-1<48$ donc C n'est pas la courbe générale d'une composante de $\mathcal{H}_{12,15}$.

Cas 4. $h^1\mathscr{I}_C(n) = 0$ pour $n = 1, 2$, $h^0\mathscr{I}_C(3) = 0$ et $h^0\mathscr{I}_C(4) > 1$.
On appelle S et Q deux surfaces quartiques linéairement indépendantes contenant C. Elles sont nécessairement sans composante commune et permettent de lier C à une courbe Γ de degré 4 et de genre -1. L'image de la projection de $\mathscr{D}_{\gamma,\rho,4,4}$ sur $H_{\gamma,\rho}$ (resp. de $\mathscr{D}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,4}$ sur $H_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma}$) est notée U_C (resp. U_Γ). Les fibres de cette projection au dessus d'un point de U_C sont de dimension $f_C = 2(h^0\mathscr{I}_C(4) - 1)$ (resp. $f_\Gamma = 2(h^0\mathscr{I}_\Gamma(4) - 1)$) ([19, cor 3.8 p149]) d'où dim $\mathscr{D}_{\gamma,\rho,4,4} =$ dim $U_C + f_C$ (resp. dim $\mathscr{D}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,4} =$ dim $U_\Gamma + f_\Gamma$). C et Γ sont liées par 4×4 donc les schémas $\mathscr{D}_{\gamma,\rho,4,4}$ et $\mathscr{D}_{\gamma_\Gamma,\rho_\Gamma,4,4}$ sont isomorphes ([19, th 3.6 p146]) d'où dim $U_C + f_C =$ dim $U_\Gamma + f_\Gamma$.

Les formules de liaisons impliquent que $\rho_\Gamma(3) = 0$ donc Γ n'est pas extrémale. Il suit alors du corollaire ***A.2*** que $\dim U_\Gamma \leqslant 16$[¶] d'où dim $U_C \leqslant 16 + f_\Gamma - f_C$.

On passe au calcul de f_Γ et f_C. En notant X la courbe intersection complète des deux quartiques, on a $h^0\mathscr{I}_\Gamma(4) = h^0\mathscr{I}_X(4) + h^1\mathscr{O}_C = 2 + 15 = 17$ d'où $f_\Gamma = 32$. $h^0\mathscr{I}_C(4) > 1$ par hypothèse donc $f_C \geqslant 2$. Il vient alors dim $U_C \leqslant 46 < 48$. Les courbes du cas 4 ne sont donc pas générales dans $\mathcal{H}_{12,15}$.

Cas 5. $h^1\mathscr{I}_C(n) = 0$ pour $n = 1, 2$, $h^0\mathscr{I}_C(3) = 0$ et $h^0\mathscr{I}_C(4) = 1$.
On a désormais $h^1\mathscr{I}_C(4) = 0$ et comme $h^2\mathscr{I}_C(3) = 0$, C est 5–régulière et son module de Rao est $M = H^1\mathscr{I}_C(3)$ avec $h^1\mathscr{I}_C(3) = 2$. On note tout d'abord qu'il existe de telles courbes lisses et connexes. En effet, il existe des courbes lisses connexes de degré 12 et de genre 15, par exemple celles tracées sur une surface cubique à droite double, mais toutes les courbes listées, à l'exception de celle du cas 5, appartiennent à des familles de dimensions < 48. On remarque ensuite que la cohomologie de C est entièrement fixée ; ainsi que la structure de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$–module de M puisque C est trivialement de Buchsbaum. Il résulte alors de [3] que les courbes du cas 5 forment une famille *irréductible* d'où l'irréductibilité de $\mathcal{H}_{12,15}$.
On a la

Proposition 3.5 *Une courbe lisse connexe de degré 12, de genre 15 et de fibré normal N_C avec $h^1 N_C \neq 0$ est contenue dans une surface cubique.*

Preuve : Soit C une courbe lisse connexe de degré 12 et de genre 15 avec $h^1 N_C \neq 0$. Par dualité de Serre, $h^0\left(N_C^v \otimes \omega_C\right) > 0$, d'où l'existence d'une section non nulle $\mathscr{O}_C \xrightarrow{s} N_C^v \otimes \omega_C$. En notant D le diviseur des zéros de s et compte tenu des identifications $N_C \simeq N_C^v \otimes \wedge^2 N_C$ et $\wedge^2 N_C^v \otimes \omega_C \simeq \mathscr{O}_C(-4)$, on obtient une surjection

$$N_C^v \to \mathscr{O}_C(-4)[-D] \to 0$$

Comme $N_C^v = \mathscr{I}_C/\mathscr{I}_C^2$, on voit que le noyau de l'application précédente peut s'écrire $\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_C^2$. Le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_Z$ définit une structure double Z sur la courbe C obtenue par le doublage de Ferrand [2] et précisée par la suite exacte

$$0 \to \mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_C \to \mathscr{O}_C(-4)[-D] \to 0 \qquad (1)$$

[¶] En fait on a $\rho_\Gamma(0) = 1$, $\rho_\Gamma(1) = 2$ et $\rho_\Gamma(n) = 0$ sinon ; donc Γ est spécialisation de la réunion disjointe d'une cubique gauche et d'une droite.

dont on déduit par exemple que Z est de genre arithmétique $p_a(Z) \geqslant 77$. Le genre maximal d'une structure double sur une courbe intègre C avec $h^0\mathscr{I}_C(3) = 0$ et deg $C = 12$ étant 73 d'après le théorème 13 de [9], on a bien que C est contenue dans une surface cubique comme annoncé. $\square$

Remarque 3.6 Dans la preuve précédente, on peut justifier, «à la main», que C est tracée sur une surface cubique. On commence par vérifier que Z est contenue dans au moins 5 quintiques linéairement indépendantes. Aucune ne pouvant être intègre par un argument de liaison, le seul cas à détailler est celui où toutes sont réunion d'une quartique et d'un plan. On s'assure qu'elles ont un plan en commun d'où l'apparition d'au moins 5 quartiques contenant la courbe non dégénérée C. On tire alors de l'homologie de la suite exacte (1)$\otimes\mathscr{O}(4)$ que $h^0\mathscr{I}_Z(4) \geqslant 4$ et, en raisonnant comme avant, qu'aucune de ces quartiques n'est intègre d'où le fait que C est tracée sur une surface cubique.

On a le

Corollaire 3.7 *Le schéma $\mathcal{H}_{12,15}$ est génériquement lisse de dimension 48.*

Preuve : On sait que $\mathcal{H}_{12,15}$ est irréductible et que sa courbe générique C n'est pas contenue dans une surface cubique. La proposition donne $h^1N_C = 0$ d'où le résultat. $\square$

Remarque 3.8 Au vu du corollaire on a aussi par ***3.5*** qu'*une courbe lisse et connexe représentée par un point singulier de $\mathcal{H}_{12,15}$ est contenue dans une surface cubique.*

On achève cette partie par le calcul de la résolution du faisceau d'idéaux de la courbe générique de $\mathcal{H}_{12,15}$. On part d'une résolution libre et minimale de $\mathscr{I}_C$ (C est Cohen–Macaulay donc de dimension projective 2)

$$0 \to \mathscr{L}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{I}_C \to 0$$

qui donne lieu à une résolution libre de $\mathscr{I}_C$ de la forme

$$0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_C \to 0 \tag{2}$$

où $\mathscr{E}$ est le fibré conoyau de α donc $H^1_*\mathscr{E} = 0$, et $\mathscr{F} = \mathscr{L}_0$ est somme de faisceaux inversibles. Une résolution du type précédent existe pour toute courbe localement de Cohen–Macaulay mais il est difficile en général de déterminer le fibré $\mathscr{E}$ et même le faisceau $\mathscr{F}$ *i.e.* les générateurs minimaux de l'idéal de C. La connaissance de la cohomologie de C permet ici d'y parvenir. De $h^0\mathscr{I}_C(4) = 1$ on déduit que $\mathscr{O}(-4)$ est un terme de $\mathscr{F}$. Le faisceau $\mathscr{I}_C$ étant 5–régulier, $H^0\mathscr{I}_C(n)$ est engendré par $H^0\mathscr{I}_C(5) \otimes H^0\mathscr{O}(n-5)$ pour tout $n \geqslant 6$. Il s'ensuit que les quintiques contenant C engendrent son idéal I_C. Ces dernières sont au nombre de $h^0\mathscr{I}_C(5) = 10$ dont 4 pour les multiples de l'unique quartique Q sur laquelle est tracée C. Ainsi $\mathscr{F} = \mathscr{O}(-4) \oplus \mathscr{O}(-5)^{\oplus 6}$. Pour déterminer $\mathscr{E}$, on utilise un théorème de Beilinson :

Théorème 3.9 *[26, Th 3.1.3 p240] Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_n$.*
On note $\Omega^p_{\mathbb{P}_n} = \begin{cases} \wedge^p \Omega_{\mathbb{P}_n} & \text{si } p \geqslant 0 \\ \wedge^{-p} \Omega^v_{\mathbb{P}_n} & \text{si } p < 0 \end{cases}$ *où $\Omega_{\mathbb{P}_n}$ désigne le fibré cotangent à $\mathbb{P}_n$.*
Il existe une suite spectrale E_r^{pq} dont le terme E_1 est précisé par $E_1^{pq} = (H^q E(p)) \otimes \Omega^{-p}_{\mathbb{P}_n}(-p)$ et qui converge vers $E^i = \begin{cases} E & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ i.e. *$E_\infty^{pq} = 0$ pour $p + q \neq 0$ et $\oplus_{p=0}^n E_\infty^{-p,p}$ est le faisceau gradué associé à une filtration de E.*

On pose $E = \mathscr{E}(5)$. La longue suite exacte en cohomologie induite par (2) indique que $H^0\mathscr{E}(5)$ et $H^3\mathscr{E}(2)$ sont nuls ; le seul terme «diagonal» $E_1^{-q,q}$ non nul est $E_1^{-2,2}$. On déduit de (2) que $H^2\mathscr{E}(n) \simeq H^1\mathscr{I}_C(n)$, par conséquent tous les $E_1^{p,2}$ sont nuls sauf $E_1^{-2,2}$ ainsi $E_1^{-2,2} = E_2^{-2,2}$. On vérifie de même que $E_2^{-2,2} = E_3^{-2,2} = E_\infty^{-2,2}$ donc que $E_\infty^{-2,2} = E_1^{-2,2}$.

La filtration de E du théorème se résume au terme $E_\infty^{-2,2}$ donc $\mathscr{E}(5) \simeq E_\infty^{-2,2}$. D'où $\mathscr{E}(5) \simeq (H^2\mathscr{E}(5-2)) \otimes \Omega^2_{\mathbb{P}_3}(2) \simeq (H^1\mathscr{I}_C(3)) \otimes \Omega^2_{\mathbb{P}_3}(2)$. Compte tenu de $h^1\mathscr{I}_C(3) = 2$ et de l'identification $\Omega^2_{\mathbb{P}_3} \simeq \wedge^1 \Omega^v_{\mathbb{P}_3} \otimes \omega_{\mathbb{P}_3} \simeq T_{\mathbb{P}_3}(-4)$, on arrive à $\mathscr{E} \simeq T_{\mathbb{P}_3}(-7)^{\oplus 2}$. La résolution du faisceau d'idéaux de la courbe générique de $\mathcal{H}_{12,15}$ est donc

$$0 \to T_{\mathbb{P}_3}(-7)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}(-5)^{\oplus 6} \oplus \mathscr{O}(-4) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

On peut noter que cette résolution éclaire un peu la géométrie de $\mathcal{H}_{12,15}$ en permettant d'en construire explicitement un élément générique. Il suffit en effet de prendre un morphisme générique de $T_{\mathbb{P}_3}(-7)^{\oplus 2}$ vers $\mathscr{O}(-5)^{\oplus 6} \oplus \mathscr{O}(-4)$, il est injectif et son conoyau est le faisceau d'idéaux d'une courbe lisse et connexe de degré 12 et de genre 15. On récapitule les résultats obtenus dans le

Théorème 3.10
1. Le schéma $\mathcal{H}_{12,15}$ est irréductible, génériquement lisse et de dimension 48. Le faisceau d'idéaux de la courbe générique a pour résolution

$$0 \to T_{\mathbb{P}_3}(-7)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}(-5)^{\oplus 6} \oplus \mathscr{O}(-4) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

2. Les points $[C]$ correspondant aux courbes de type $(d, k) = (12, 4)$ tracées sur une surface cubique à droite double qui n'est pas un cône constituent une hypersurface singulière de $(\mathcal{H}_{12,15})_{\text{red}}$.

Remarque 3.11 De nombreuses pathologies du schéma de Hilbert $\mathcal{H}_{d,g}$ sont connues. On peut les classer suivant la nature de la singularité observée :

- Le schéma $\mathcal{H}_{d,g}$ possède une composante génériquement non réduite. La découverte de ce phénomène revient à Mumford (il s'agit des courbes de [23] qui sont utilisées par Wahl dans [31]).
- Le point $[C]$ est singulier dans $\mathcal{H}_{d,g}$ car il vit à l'intersection de deux composantes irréductibles. Un procédé général pour produire de telles courbes est indiqué dans [10]. Le premier cas fut trouvé par Sernesi ([29]).
- Le schéma $\mathcal{H}_{d,g}$ a des composantes immergées ([21, Th 5.3]).

- Le type de singularité de $\mathcal{H}_{12,15}$ (point réduit ne se trouvant pas à l'intersection de deux composantes) a déjà été remarqué par Walter dans [32] où de tels exemples sont exhibés mais les singularités sont en codimension $\geqslant 3$.

§4 . *La construction*

4.1 Notations

On considère les courbes lisses et connexes C de degré d, tracées sur une surface cubique S, à droite double qui n'est pas un cône, et qui en intersectent k fois la génératrice générale. Il s'agit des courbes de ***2.2.***. On a $S = p(\widetilde{S})$ où p est la projection de $\widetilde{S} \subset \mathbb{P}_4$ dans $\mathbb{P}_3$ depuis un point extérieur à $\widetilde{S}$. $\widetilde{C}$ désignera la transformée propre de C dans $\widetilde{S}$. On rappelle que $\widetilde{C} \sim (d-3k, k)$. On impose aussi que $3 \leqslant k \leqslant \frac{d-3}{2}$ afin d'utiliser les formules de dimension de Gruson–Peskine. Cette condition est vérifiée dans le cas particulier $d = 12$ et $k = 4$.

Le théorème de Riemann–Roch, sur $\widetilde{S}$, s'écrit $\chi\mathscr{O}(a,b) = (a(b+2)+b(a+3b+5)+2)/2$. On rappelle également que $(a,b)\cdot f = b$ donc si $b \geqslant 0$, la cohomologie de $\mathscr{O}(a,b)$ se calcule directement sur $\mathbb{P}_1$. En fait, si on note $\pi : X_1 \to \mathbb{P}_1$, on a $R^i\pi_*\mathscr{O}(a,b) = 0$ pour $i > 0$ et $\pi_*\mathscr{O}(a,b) \simeq \bigoplus_{i=0}^{b} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(2b+a-i)$ d'où $H^i\mathscr{O}(a,b) \simeq H^i\left(\mathbb{P}_1, \oplus_{i=0}^{b}\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(a+2b-i)\right)$, $i = 0,1,2$. Si $b < 0$, $H^0\mathscr{O}(a,b) = 0$.

p est un isomorphisme de $\widetilde{S} - \widetilde{\ell}$ sur $S - \ell$ où $\widetilde{\ell}$ est le sous–schéma de $\widetilde{S}$ d'idéal le conducteur de p dans $\widetilde{S}$: $\omega_{\widetilde{S}} \otimes p^*\omega_S^v$ où $\omega_{\widetilde{S}}$ et ω_S désignent respectivement le fibré canonique de $\widetilde{S}$ et un faisceau dualisant de S. On a $\mathscr{I}_{\widetilde{\ell}} = \omega_{\widetilde{S}} \otimes p^*\omega_S^v = \mathscr{O}(1,-2) \otimes \mathscr{O}(0,1) = \mathscr{O}(1,-1)$ et $p_*\mathscr{I}_{\widetilde{l}} = \mathscr{I}_{l/S}$.

Comme S a pour normalisée la surface lisse $\widetilde{S}$ et que C n'a pas ℓ pour composante, le degré du schéma de dimension 0, $\ell \cap C$, est égal au nombre d'intersection $\widetilde{\ell}\cdot\widetilde{C} = d-k$ d'après [5, prop 1.3]. Il en résulte que $\boxed{\ell \text{ est une } (d-k)\text{–sécante à } C}$.

On notera $\mathscr{I}_{C/S}$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_S$ définissant C dans S et I_C l'idéal de C dans $\mathbb{C}[x,y,z,t]$.

4.2 Calcul des constantes de Wahl

Voici les définitions des trois invariants numériques relatifs à C nécessaires à l'application effective des résultats de Wahl.

Définition 4.1 **(Constantes de Wahl)**

$$\begin{aligned} r &= \min\{\max\{\deg P_i\} \mid I_C = (P_1, \cdots, P_n)\} \\ r_0 &= \min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geqslant n \Rightarrow h^1\mathscr{I}_C(m) = 0\} \\ m_0 &= \min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geqslant n \Rightarrow h^1\mathscr{I}_C^2(m) = 0\} \end{aligned}$$

Remarque 4.2
1. Dans [31], m_0 est défini par $m_0 = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geqslant n \Rightarrow h^1\mathscr{O}(m-2C) = 0\}$ où $\mathscr{O}(m-2C)$ désigne le faisceau des fonctions sur $\mathbb{P}_3$, de degré m, qui s'annulent deux fois

le long de C. Il s'agit de la seconde puissance symbolique, usuellement notée $\mathscr{I}_C^{<2>}(m)$, du $\mathscr{O}$–module $\mathscr{I}_C(m)$. Ses éléments sont les fonctions qui, au voisinage (affine) de chaque point de C, s'annulent ainsi que leurs dérivées partielles premières. La courbe C étant lisse, $\mathscr{I}_C^{<2>}(m) = \mathscr{I}_C^2(m)$, d'où la définition de m_0 donnée ici.
2. ℓ est une $(d-k)$–sécante à C donc $r \geqslant d-k$.

Préliminaires

Les calculs s'effectuent grâce au conducteur et aux deux suites exactes

$$0 \to \mathscr{I}_S \to \mathscr{I}_C \to \mathscr{I}_{C/S} \to 0 \tag{3}$$

$$0 \to \mathscr{I}_{\ell/S} \to \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_\ell \to 0 \tag{4}$$

Comme $\mathscr{I}_S \simeq \mathscr{O}(-3)$, on obtient, en passant à la longue suite exacte induite en cohomologie par (3), $H^1\mathscr{I}_C(n) \simeq H^1\mathscr{I}_{C/S}(n)$ et, pour $n \geqslant 0$, $H^2\mathscr{I}_{C/S}(n) \simeq H^2\mathscr{I}_C(n)$. Puis, comme C n'a pas la droite double comme composante, (4) tensorisée par $\mathscr{I}_{C/S}$ est exacte à gauche et il vient

$$0 \to \mathscr{I}_{\ell/S} \otimes \mathscr{I}_{C/S} \to \mathscr{I}_{C/S} \to \mathscr{O}_\ell \otimes \mathscr{I}_{C/S} \to 0 \tag{5}$$

On a $\mathscr{I}_{C/S} \otimes \mathscr{O}_\ell \simeq \mathscr{O}_\ell(-\widetilde{\ell} \cdot \widetilde{C}) = \mathscr{O}_\ell(k-d) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(k-d)$.
D'autre part, $\mathscr{I}_{\ell/S} \otimes \mathscr{I}_{C/S} \simeq p_*(\mathscr{I}_{\widetilde{l}} \otimes \mathscr{I}_{\widetilde{C}/\widetilde{S}}) \simeq p_*\mathscr{O}(3k-d+1, -k-1)$.
En notant $\mathscr{D}$ le faisceau $\mathscr{O}(3k-d+1, -k-1)$, (5) tordue par n s'écrit alors

$$0 \to p_*\mathscr{D}(n) \to \mathscr{I}_{C/S}(n) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n+k-d) \to 0 \tag{6}$$

p n'est autre que la normalisation de S donc c'est un morphisme fini ainsi a–t–on pour tout faisceau quasi–cohérent $\mathscr{F}$ sur $\widetilde{S}$ et tout $i \geqslant 0$

$$H^i(\widetilde{S}, \mathscr{F}) \simeq H^i(S, p_*\mathscr{F}) \tag{7}$$

Régularité de C, valeurs de r et de r_0

Proposition 4.3 *C est $(d-k)$–régulière et $(d-k-1)$–irrégulière et,*
1) $r = d-k$.
2) $r_0 = d-k-1$

Preuve : On commence par la première assertion. La longue suite exacte en cohomologie induite par (6), couplée à l'identification (7) appliquée à $\mathscr{D}(n)$, comporte la séquence

$$\begin{aligned} H^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n+k-d) \to H^1\mathscr{D}(n) \to H^1\mathscr{I}_{C/S}(n) \to H^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d-k-n-2)^v \\ \to H^2\mathscr{D}(n) \to H^2\mathscr{I}_{C/S}(n) \to 0 \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant k+1$, $H^i\mathscr{D}(n) \simeq H^i(\mathbb{P}_1, \pi_*\mathscr{D}(n))$ $(i \geqslant 0)$. Ainsi $H^2\mathscr{D}(n) = 0$, d'où $H^2\mathscr{I}_{C/S}(n) = \boxed{H^2\mathscr{I}_C(n) = 0}$. On fixe $n = d-k-1$. Pour cet entier, il vient $h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d-k-n-2) = 0$

et $h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n+k-d)=0$ donc $h^1\mathscr{I}_{C/S}(n)=h^1\mathscr{D}(n)$. Compte tenu de la condition $\frac{d-3}{2}\geqslant k$, on a $n\geqslant k+1$ donc $h^1\mathscr{D}(n)=\sum_{i=0}^{n-k-1}h^1\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(2n+k-d-1-i)$. Par dualité de Serre, on obtient, $h^1\mathscr{I}_{C/S}(n)=\sum_{i=0}^{n-k-1}h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d-k-1-2n+i)$ qui est nul pour le choix $n=d-k-1$ soit $\boxed{H^1\mathscr{I}_C(d-k-1)=0}$. Il résulte des deux encadrés que C est $(d-k)$–régulière donc $\mathscr{I}_C(d-k)$ est engendré par ses sections d'où $r\leqslant d-k$. Or on sait que $r\geqslant d-k$ d'où *1)*.

On vérifie immédiatement que $H^1\mathscr{I}_{C/S}(d-k-2)\to(H^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1})^v\to 0$ et par suite que $H^1\mathscr{I}_{C/S}(d-k-2)\neq 0$. La courbe C est donc $(d-k-1)$–irrégulière et on a comme annoncé $r_0=d-k-1$. □

Valeur de m_0

Proposition 4.4 $m_0=2(d-k)-1$

Preuve : La multiplication par une équation de S fournit une injection $\mathscr{I}_C(-3)\to\mathscr{I}_C^2$. En notant L son conoyau on a la suite exacte

$$0\to\mathscr{I}_C(n-3)\to\mathscr{I}_C^2(n)\to L(n)\to 0$$

Pour $n\geqslant d-k+2$, condition que l'on suppose remplie par la suite, on obtient en cohomologie

$$0\to H^1\mathscr{I}_C^2(n)\to H^1L(n)\to 0\to H^2\mathscr{I}_C^2(n)\to H^2L(n)\to 0$$

Soit $\varepsilon:\widetilde{\mathbb{P}_3}\to\mathbb{P}_3$ l'éclatement de $\mathbb{P}_3$ le long de la droite ℓ. La transformée stricte de S par ε n'est autre que sa normalisée lisse $\widetilde{S}$. On note encore $\widetilde{C}$ la transformée propre de C. On dispose d'un degré sur $\widetilde{\mathbb{P}_3}$ donné par $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathbb{P}_3}}(H):=\varepsilon^*\mathscr{O}(1)$ qui permet de parler de la puissance symbolique $\mathscr{I}_{\widetilde{C}/\widetilde{S}}^{<2>}(nH)$ correspondant à $L(n)$ via ε . La lissité de $\widetilde{S}$ donne $\mathscr{I}_{\widetilde{C}/\widetilde{S}}^{<2>}(nH)\simeq\mathscr{I}_{2\widetilde{C}/\widetilde{S}}(nH)$ de sorte que L apparaît comme le faisceau d'idéaux d'un sous schéma fermé Y de S, image par p (ε restreint à $\widetilde{S}$ et p coïncident) d'une courbe de la classe de $2\widetilde{C}$ dans $\operatorname{Pic}\widetilde{S}$. Comme Y n'a pas la droite ℓ comme composante, il vient que $(4)\otimes\mathscr{I}_{Y/S}$ est exacte à gauche ; tordu par n cela s'écrit

$$0\to\mathscr{I}_{\ell/S}\otimes\mathscr{I}_{Y/S}(n)\to\mathscr{I}_{Y/S}(n)\to\mathscr{O}_\ell\otimes\mathscr{I}_{Y/S}(n)\to 0$$

Et comme $\mathscr{I}_{\ell/S}\otimes\mathscr{I}_{Y/S}(n)\simeq p_*(\mathscr{I}_{\widetilde{\ell}}\otimes\mathscr{O}(6k-2d,n-2k))$,

$$0\to p_*\mathscr{O}(6k-2d+1,n-2k-1)\to\mathscr{I}_{Y/S}(n)\to\mathscr{O}_\ell\left(n-2\widetilde{C}\cdot\widetilde{\ell}\right)\to 0$$

Enfin, en notant $\mathscr{L}(n)=\mathscr{O}(6k-2d+1,n-2k-1)$, on a

$$0\to p_*\mathscr{L}(n)\to\mathscr{I}_{Y/S}(n)\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n-2(d-k))\to 0$$

Si $n\geqslant 2k+1$, la cohomologie de $\mathscr{L}(n)$ (qui est celle de $p_*\mathscr{L}(n)$ par (7)) se calcule sur $\mathbb{P}_1$ donc $h^2\mathscr{L}(n)=0$ d'où $h^2\mathscr{I}_C^2(n)=0$.

Pour $n \geqslant 2d-4k-1$, $h^1\mathscr{L}(n)=0$. Il s'ensuit que si $n \geqslant 2(d-k)-1$ ($\geqslant 2d-4k-1$) $h^1\mathscr{I}_C^2(n)=0$ puisqu'alors $h^1\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n-2(d-k))=0$.

En particulier, pour $n=2(d-k)$ on a $n-1 \geqslant 2d-4k-1$, et comme $(d-3)/2 \geqslant k$, on a également $n-1 \geqslant d-k+2$ et $n-1 \geqslant 2k+1$ donc $\boxed{h^1\mathscr{I}_C^2(2(d-k)-1)=0}$. De même on vérifie que $\boxed{h^2\mathscr{I}_C^2(2(d-k)-2)=0}$. Le faisceau $\mathscr{I}_C^2$ est donc $2(d-k)$–régulier d'où $m_0 \leqslant 2(d-k)-1$.

On conclut en remarquant que pour $n=2(d-k)-2$, $H^1\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n-2(d-k)) \simeq \mathbb{C}$ donc la surjection $H^1\mathscr{I}_{Y/S}(n) \to H^1\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(n-2(d-k)) \to 0$ implique que $h^1\mathscr{I}_{Y/S}(n-2(d-k)) \neq 0$ d'où $m_0 \geqslant 2(d-k)-1$. $\square$

4.3 Conclusion

On commence par préciser les indications de l'introduction. On aura besoin de plusieurs résultats contenus dans l'article de Wahl. Tout d'abord l'existence d'un espace classifiant des courbes planes d'un degré fixé, avec pour seules singularités des nœuds et cusps en nombres imposés. Il s'agit d'un schéma sur $\mathbb{C}$. Le théorème est le suivant.

Théorème 4.5 **(Wahl)** *Il existe un schéma $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ et une famille de courbes $\mathscr{E} \to \mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ dont les fibres sont des courbes planes de degré d avec δ nœuds et κ cusps (d, δ et κ fixés) comme seules singularités et tels que toute autre famille de courbes du même type $\mathscr{E}' \to \mathscr{X}'$ ($\mathscr{X}'$ un schéma algébrique sur $\mathbb{C}$) se factorise de façon unique par un morphisme $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$. De plus, $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ est la réunion disjointe de sous schémas localement fermés de $\mathbb{P}_N$ où $N=d(d+3)/2$.*

En fait, $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ représente le foncteur $J_{d,\delta,\kappa}$: $\{$Schéma sur $\mathbb{C}\} \to \mathfrak{Ens}$ défini par :

$$J_{d,\delta,\kappa}(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{diviseur de Cartier effectif relatif } \mathscr{D} \subset \mathbb{P}_2 \times T \text{, qui en tant que famille} \\ \text{de courbes sur } T \text{, est formellement localement trivial en tout } t \in T\,; \\ \text{et tel que les fibres géométriques de } \mathscr{D} \to T \text{ sont des courbes planes} \\ \text{de degré } d \text{ avec } \delta \text{ nœuds et } \kappa \text{ cusps ordinaires pour seules singularités.} \end{array} \right\}$$

On s'intéresse à la lissité de $\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa}$ en un point $[\gamma]$ c'est à dire à la régularité de l'anneau $H'_\gamma \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{\mathscr{X}_{d,\delta,\kappa},[\gamma]}$ ([31, (3.3.3) p559]). De même, si C est une courbe de $\mathbb{P}_3$, $[C] \in H_{d,g}$ est un point lisse si et seulement si l'anneau H_C est régulier.

On peut passer à la construction de l'exemple annoncé.

Pour cela, on considère la famille irréductible $\mathscr{C}$ des courbes lisses et connexes de $\mathbb{P}_3$, de degré 12 et genre 15, tracées sur une surface cubique à droite double variable et qui en intersectent 4 fois une génératrice générale. Soit $C \in \mathscr{C}$. D'après ***4.2***, on a $r=8$, $r_0=7$ et $m_0=15$.

① C n'étant pas intersection complète, pour $n \geqslant 2r = 16$, il existe une surface irréductible S avec $S_{\text{Sing}} = C$, chaque point de C étant un point double ordinaire ou un point pince de S ([31, Th 3.5.2 p570]).

② Si de plus, $n \geqslant m_0$, H'_S et H_C sont liés de façon lisse (Kodaira).

③ Soit Y la normalisée de S et f le morphisme composé $Y \to S \to \mathbb{P}_2$ où la seconde flèche désigne la projection générique de S sur $\mathbb{P}_2$. Alors Y est lisse, la courbe de ramification de f est une courbe γ, plane et intègre, dont les seules singularités sont des nœuds et des cusps ordinaires. Dans cette situation, le corollaire 3.2.9 de [31] entraine l'existence d'un isomorphisme $H'_\gamma \xrightarrow{\sim} F(f)$.

④ Si $n \geqslant r_0 + 5$ (et $h^2\mathscr{I}_C(n-5) = 0$), le théorème 3.4.10 de [31] implique la lissité du morphisme $H'_S \to F(f)$.

Le degré d_n de γ, δ_n son nombre de nœuds, et κ_n son nombre de cusps sont obtenus par les formules classiques ([28]) :

$$\begin{cases} d_n = n(n-1) - 24 \\ \delta_n = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) - 24(n^2 - 5n) + 16 \\ \kappa_n = n(n-1)(n-2) - 36(n-2) \end{cases}$$

Dès que $n \geqslant 16$, toutes les conditions numériques sont remplies puisque $h^2\mathscr{I}_C(m) = 0$ pour $m \geqslant 6$. Par conséquent, on dispose de deux morphismes lisses de foncteurs

$$\begin{tikzcd} & H'_S \arrow[dl] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ H_C & & H'_\gamma \end{tikzcd}$$

On peut désormais conclure : H'_S est un anneau de séries formelles sur H_C. Ce dernier étant réduit et non régulier, il en est de même de H'_S. D'autre part, H'_γ jouit également de ces deux propriétés grâce à la lissité de α, et $[\gamma]$ est un point singulier de $(\mathscr{X}_{d_n,\delta_n,\kappa_n})_{\text{red}}$ comme annoncé.

Remarque 4.6

1. La courbe de Mumford donne naissance à une courbe plane obstruée de degré 104, avec 3636 nœuds et 900 cusps. La différence fondamentale est la nature de la singularité : le point représentant la courbe de Mumford–Wahl est singulier dans $\mathscr{X}_{104,3636,900}$ mais lisse dans $(\mathscr{X}_{104,3636,900})_{\text{red}}$.

2. L'obstruction de H_C implique celle de H'_S par le théorème de Kodaira. Ceci constitue un nouveau contre–exemple à une conjecture d'Enriques [33, p115]. Dans le même ordre d'idée, comme le note Mumford dans [23, p 643–644], si l'on éclate $\mathbb{P}_3$ le long de C, on obtient un volume lisse V_3 dont le schéma «espace des modules locaux» est isomorphe à H_C, donc obstrué avec même type formel de singularité.

On conclut par l'énoncé du résultat principal

Théorème 4.7

Pour tout $n \geqslant 16$, *il existe une famille plate* $\mathscr{C}_n$ *de courbes planes (intègres), de degré* $d_n = n(n-1) - 24$, *ayant* $\delta_n = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) - 24(n^2 - 5n) + 16$ *nœuds et* $\kappa_n = n(n-1)(n-2) - 36(n-2)$ *cusps ordinaires pour seules singularités, et qui sont représentées par des points singuliers de* $(\mathscr{X}_{d_n,\delta_n,\kappa_n})_{\mathrm{red}}$.

Par la méthode utilisée, l'exemple de plus bas degré est atteint pour $n = 16$, *les courbes obtenues sont alors de degré 216 et ont 17632 nœuds et 2856 cusps.*

Appendice A

Courbes de degré 4 et genre −1

Ces objets sont intervenus dans l'étude des courbes lisses et connexes de degré 12 et genre 15 par liaison 4×4 ou biliaison élémentaire de type $(4, -2)$. On s'attache ici à majorer les dimensions des familles de ces courbes. Le résultat utilisé au **§*3*** est le corollaire ***A.2***.

Soit Γ une courbe de degré d et de genre arithmétique g. La fonction de Rao de Γ est majorée par les bornes de Martin–Deschamps et Perrin ([20]). De plus, il existe des courbes dont la fonction de Rao ρ_Γ atteint les bornes précédentes, elles sont appelées *extrémales* et constituent une composante irréductible de $H_{d,g}$. Lorsque la courbe n'est pas extrémale, on peut affiner les majorations de ρ_Γ et caractériser les courbes, dites *sous–extrémales*, réalisant ces nouvelles bornes ([25]).

Pour $d = 4$ et $g = -1$, on note ρ_1 la fonction de Rao des courbes extrémales et ρ_2 celle des courbes sous–extrémales. On a, d'après [20] et [25, Th 2.11],

n	$\leqslant -2$	-1	0	1	2	3	$\geqslant 4$
$\rho_1(n)$	0	1	2	2	2	1	0
$\rho_2(n)$	0	0	1	2	1	0	0

On va justifier le résultat suivant

Proposition A.1 *Soit Γ une courbe de degré 4 et de genre -1.*
(i) Si ρ_Γ n'est ni ρ_1 ni ρ_2, $\rho_\Gamma = \rho_3$ où $\rho_3(0) = 1$, $\rho_3(1) = 2$ et 0 sinon.
(ii) La fonction de Rao de Γ détermine toute sa cohomologie.
(iii) $H_{4,-1}$ possède trois composantes irréductibles V_1, V_2 et V_3. V_1 est ensemblistement le schéma H_{γ_1,ρ_1} des courbes extrémales. Cette composante est génériquement non reduite de dimension 17 et son point générique représente la réunion d'une conique et d'une droite double de genre -4 s'intersectant en 2 points non réduits. V_2 est l'adhérence de H_{γ_2,ρ_2}, sa dimension est 16 et son point générique correspond à la réunion disjointe de deux coniques. Enfin, V_3 est l'adhérence de H_{γ_3,ρ_3}, elle est de dimension 16 et de point générique représentant la réunion disjointe d'une cubique gauche et d'une droite. V_2 et V_3 sont lisses au point générique.

Preuve : On note $e = \max\{n \in \mathbb{Z} | h^1\mathscr{O}_\Gamma(n) > 0\}$ l'indice de spécialité de Γ et s le degré minimum d'une surface la contenant. Le théorème de spécialité de Schlesinger [27, Th 1.1] donne $e \leqslant 2 - s$ et, comme Γ n'est pas plane, on a $e \leqslant 0$.
(i) $h^0\mathscr{I}_\Gamma(1) = 0$ donc $h^1\mathscr{I}_\Gamma(1) = h^0\mathscr{O}_\Gamma(1) - h^0\mathscr{O}(1)$ et, par le théorème de Riemann–Roch, on a $h^1\mathscr{I}_\Gamma(1) = 6 + h^1\mathscr{O}_\Gamma(1) - 4 \geqslant 2$. Comme $h^1\mathscr{I}_\Gamma(1) \leqslant 2$, $h^1\mathscr{I}_\Gamma(1) = 2$. De même, $h^1\mathscr{I}_\Gamma = h^1\mathscr{O}_\Gamma + 1 \geqslant 1$. Une courbe non extrémale ni sous–extrémale a donc ρ_3 pour fonction de Rao.

(ii) $h^0\mathscr{I}_\Gamma(n) = 0$ pour $n \leqslant 1$. Comme $e \leqslant 0$, la fonction de Rao détermine la postulation via le théorème de Riemann–Roch en degrés $\geqslant 2$. Plus précisément, on obtient

ρ_Γ	e	n	2	3	$\geqslant 4$
ρ_1	0	$h^0\mathscr{I}_\Gamma(n)$	2	7	$\binom{n+3}{3} - 4n - 2$
ρ_2	-1	$h^0\mathscr{I}_\Gamma(n)$	1	6	$\binom{n+3}{3} - 4n - 2$
ρ_3	-1	$h^0\mathscr{I}_\Gamma(n)$	0	6	$\binom{n+3}{3} - 4n - 2$

On note pour la suite H_i le schéma H_{γ_i,ρ_i} pour $i = 1, 2, 3$.
(iii) On distingue en fonction du type de ρ_Γ.
$\underline{\rho_\Gamma = \rho_1 :}$ Il est connu ([21, Th 4.3]) que ces courbes constituent une composante irréductible V_1, génériquement non réduite de dimension 17, du schéma de Hilbert $H_{4,-1}$. La description de la courbe générale est donnée, par exemple, dans la proposition 0.6 *(ii)* de [21].

Pour les deux cas restants on commence par rappeler (voir [19, Chap VI 4.] pour tous les détails) une condition suffisante pour qu'un schéma $H_{\gamma,\rho}$ soit irreductible et lisse. Etant donnée une fonction $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ à support fini, on fixe des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels V_i tels que $\dim_{\mathbb{C}} V_i = \rho(i)$ et l'on pose $V = \oplus V_i$. Soit $\widehat{E}_\rho$ (resp. E_ρ) le foncteur de la catégorie des schémas dans celle des ensembles qui associe à un schéma Y l'ensemble des structures de $\mathbb{C}[x,y,z,t] \otimes \mathscr{O}_Y$–module gradué sur $V \otimes \mathscr{O}_Y$ (resp. des classes d'isomorphisme de $\mathbb{C}[x,y,z,t] \otimes \mathscr{O}_Y$–module gradué $\mathcal{M} = \oplus \mathcal{M}_n$ où $\mathcal{M}_n$ est un $\mathscr{O}_Y$–module localement libre de rang $\rho(n)$). $\widehat{E}_\rho$ est représentable par un schéma affine encore noté $\widehat{E}_\rho$ mais E_ρ n'est en général pas représentable.

On introduit alors le schéma $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ dont les points rationnels sont les mêmes que ceux de $H_{\gamma,\rho}$ mais avec une donnée supplémentaire : un isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels du module de Rao vers V (on rigidifie la situation en fixant une base). On dispose d'un morphisme de foncteurs $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui à une courbe associe son module de Rao. Ce dernier se relève en un morphisme $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ qui à un point de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ associe son module de Rao «rigidifié». La situation est résumée par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \widehat{H}_{\gamma,\rho} \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[d, "q_H"'] & \widehat{E}_\rho \arrow[d, "q_E"] \\ H_{\gamma,\rho} \arrow[r, "\Phi"] & E_\rho \end{tikzcd}$$

$\widehat{\Phi}$ est lisse ([19, Th 1.5 p135]), donc plat, et de fibre irréductible au dessus de tout point de son image ([19, preuve du Th 1.1 p133]). Il s'ensuit que si l'image de $\widehat{\Phi}$ est irréductible il en est de même de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ et donc de $H_{\gamma,\rho}$ via q_H. En particulier, comme $\operatorname{Im}\widehat{\Phi}$ est ouverte dans $\widehat{E}_\rho$ ([19, Rq 1.9 p140]), si $\widehat{E}_\rho$ est irréductible alors $H_{\gamma,\rho}$ l'est également.

$\underline{\rho_\Gamma = \rho_2 :}$ $\widehat{E}_{\rho_2}$ est irréductible ([19, p128–129]) donc H_2 est irréductible. On note U_2 l'ouvert de H_2 de point générique la réunion disjointe de deux coniques. U_2 est de dimension 16 donc $\dim H_2 = 16$.

$\underline{\rho_\Gamma = \rho_3}$: $\widehat{E}_{\rho_3}$ n'est autre que l'espace affine à 8 dimensions il est donc irréductible d'où l'irréductibilité de H_3. Si l'on note U_3 l'ouvert de H_3 de point générique la réunion disjointe d'une cubique gauche et d'une droite, on dispose d'un ouvert dense de dimension 16 de H_3.

Pour $i = 2, 3$, on note V_i l'adhérence de H_i dans $H_{4,-1}$ et, pour $i = 1, 2, 3$, Γ_i la courbe générale de V_i. Γ_2 et Γ_3 ne peuvent être spécialisation de Γ_1 par semi–continuité. De même, Γ_3 ne peut être cas particulier de Γ_2. Ensuite, Γ_1 n'est pas spécialisation de Γ_2 ou de Γ_3 pour une raison de dimension. Enfin, Γ_2 n'est pas un cas particulier de Γ_3 puisque U_2 et U_3 sont de même dimension (dans l'hypothèse contraire, Γ_3 devrait aussi être spécialisation de Γ_2 et cela vient d'être écarté.).

Il reste à vérifier la lissité générique de V_2 et V_3. Γ_i $(i = 2, 3)$ étant réunion disjointe de deux courbes C_1^i et C_2^i, le faisceau normal de Γ_i dans $\mathbb{P}^3$ s'identifie à la somme directe des faisceaux normaux de C_1^i et C_2^i. Il s'ensuit que

$$h^0 N_{\Gamma_i/\mathbb{P}^3} = h^0 N_{C_1^i/\mathbb{P}^3} + h^0 N_{C_2^i/\mathbb{P}^3} = \begin{cases} 8+8 & \text{pour les deux coniques} \\ 4+12 & \text{pour la droite et la cubique gauche} \end{cases}$$

On a donc $h^0 N_{\Gamma_i/\mathbb{P}^3} = 16 = \dim U_i$ donc V_i est lisse au point générique. $\square$

Cette proposition admet le corollaire immédiat suivant

Corollaire A.2 *Une courbe de degré 4 et de genre -1 qui n'est pas extrémale est représentée par un point d'une composante irréductible de dimension 16 de $H_{4,-1}$.*

Appendice B

Le schéma $\mathcal{H}_{d,g}$ est lisse en codimension 1 pour $d \leqslant 11$

Lors du §*3*, on a montré que $\mathcal{H}_{12,15}$ est singulier le long d'une hypersurface. Le but de cet appendice est de vérifier que $\mathcal{H}_{d,g}$ est lisse en codimension 1 pour $d < 12$. Les courbes de type $(0,4)$ sur une cubique à droite double (§*2 (2.2)*) constituent, en ce sens, un exemple «minimal» de singularités d'un schéma de Hilbert des courbes gauches.

Lemme B.1 *Soit C une courbe lisse et connexe de $\mathbb{P}_3$ de degré $d < 12$ avec $h^0\mathscr{I}_C(3) > 0$. Alors $[C]$ est un point lisse du schéma de Hilbert sauf peut être si la seule surface de degré $\leqslant 3$ contenant C est un cône cubique à droite double. Les courbes lisses et connexes de degré < 12 tracées sur un cône cubique à droite double variable constituent une union finie de localement fermés irréductibles de codimension $\geqslant 3$ du schéma de Hilbert.*

Preuve : Soit S une surface de degré $s \leqslant 3$ contenant C. On distingue suivant le degré et le type de la surface S.

Si C est plane ou tracée sur un cône quadrique ou encore sur un cône cubique sans droite double alors C est Arithmétiquement Cohen–Macaulay (ACM) et l'on sait depuis Ellingsrud ([11]) que les points correspondant sont lisses dans le schéma de Hilbert. La même conclusion vaut pour les courbes non spéciales. Il suit que l'on peut supposer $d \geqslant 7$ dans la suite.

Si S est lisse, on dispose de la suite exacte $0 \to N_{C/S} \to N_C \to N_S \otimes \mathscr{O}_C \to 0$. On a $N_S \otimes \mathscr{O}_C \simeq \mathscr{O}_C(s)$, et $N_{C/S} \simeq \omega_C(4-s)$ par la formule d'adjonction, d'où $H^1N_C \simeq H^1\mathscr{O}_C(s)$ pour $s \leqslant 3$. D'autre part, on a la suite exacte $0 \to \mathscr{O}_S(-C)(s) \to \mathscr{O}_S(s) \to \mathscr{O}_C(s) \to 0$ qui permet de calculer la cohomologie de $\mathscr{O}_C(s)$ en tenant compte de la surface S.

Si C est de bidegré (a,b) sur une quadrique lisse, on a $H^1\mathscr{O}_C(2) \simeq H^2\mathscr{O}_S(2-a,2-b)$ soit $H^1\mathscr{O}_C(2) \simeq (H^0\mathscr{O}_S(a-4,b-4))^v$ par dualité de Serre. Si a ou b est < 4, on a $h^1\mathscr{O}_C(2) = 0$ et $[C]$ est un point lisse de $\mathcal{H}_{d,(a-1)(b-1)}$. Sinon, $h^1\mathscr{O}_C(2) = (a-3)(b-3)$ et il s'ensuit que $h^0N_C = ((a+1)(b+1)-1)+9$ qui n'est autre que la dimension de la famille irréductible des courbes de bidegré (a,b) tracées sur une quadrique lisse variable d'où la lissité des points correspondant dans $\mathcal{H}_{d,(a-1)(b-1)}$.

Sur une cubique normale non réglée, on note $N^v_{C/S}$ le noyau du morphisme naturel $\Omega_S \otimes \mathscr{O}_C \to \omega_C$ et $\lambda : \widetilde{S} \to S$ une désingularisation minimale de S dans laquelle on identifie C à sa transformée propre. Les points singuliers de S étant rationnels, ils n'affectent pas l'adjonction et $N^v_{C/\widetilde{S}} \simeq \omega^v_C(-1)$. D'après le théorème 3.1 de [22], il existe un diviseur effectif $Z = \sum m_iP_i$, de support les points singuliers de S sur C et où les coefficients m_i sont donnés par la table 2.2 de [22]‖, tel que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{O}_Z \to N^v_{C/S} \to N^v_{C/\widetilde{S}} \to \mathscr{O}_Z \to 0 \tag{8}$$

‖On convient de poser $Z = 0$ si S est lisse le long de C. Dans toutes les configurations possibles pour les singularités de S, on vérifie que $\deg Z \leqslant 4$.

Des inclusions $C \subset S \subset \mathbb{P}_3$, on tire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_C^v \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \Omega_{\mathbb{P}_3} \otimes \mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \omega_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_{C/S}^v \arrow[r] & \Omega_S \otimes \mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \omega_C \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

duquel on déduit que α est surjective ce qui, avec (8), fournit une surjection

$$N_C^v \xrightarrow{\beta} \operatorname{Ker}\left(N_{C/\widetilde{S}}^v \to \mathscr{O}_Z\right) \to 0$$

En dualisant, on obtient alors une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker}\left(N_{C/\widetilde{S}}^v \to \mathscr{O}_Z\right)^v \to N_C \to (\operatorname{Ker}\beta)^v \to 0$$

En passant aux degrés, il vient

$$\begin{array}{rcl}
\deg(\operatorname{Ker}\beta)^v & = & \deg N_C + \deg \operatorname{Ker}\left(N_{C/\widetilde{S}}^v \to \mathscr{O}_Z\right) \\
 & = & 4d + 2g - 2 - \deg \omega_C(1) - \deg Z \\
 & \geqslant & 3d - 4 \qquad\qquad (\text{car } \deg Z \leqslant 4)
\end{array}$$

Comme $\deg \operatorname{Ker}\left(N_{C/\widetilde{S}}^v \to \mathscr{O}_Z\right)^v = d+2g-2+\deg Z > 2g-2$, $\operatorname{Ker}\left(N_{C/\widetilde{S}}^v \to \mathscr{O}_Z\right)^v$ est non spécial. Il s'ensuit que si l'on veut que N_C soit spécial il faut que $(\operatorname{Ker}\beta)^v$ le soit et donc qu'on ait $3d-4 \leqslant 2g-2$. Les courbes tracées sur une quadrique ayant déjà été traitées, on peut supposer que $g \leqslant d(d-3)/6+1$. Les deux inégalités sur g étant incompatibles pour $d \leqslant 11$ on en déduit que N_C est non spécial et donc que $[C]$ est lisse dans $\mathcal{H}_{d,g}$.

Sur une cubique réglée à droite double qui n'est pas un cône, on utilise le calcul de $h^1 N_C$ fait dans [14]. Si C coupe k fois la génératrice générale f de S, C est de classe $(d-3k)f + kH$ où H est la classe d'une section hyperplane. Avec ces notations, on a $h^1 N_C = h^0 \mathscr{O}_S(d-3k, k-4)$. Comme $(d-3k, k-4)\cdot f = k-4$, $h^1 N_C = 0$ pour $k < 4$ et pour $k \geqslant 4$, on a $h^1 N_C = h^0\left(\mathbb{P}_1, \oplus_{i=0}^{k-4} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d-3k+2(k-4)-i\right)$. En particulier $h^1 N_C = 0$ si $d < k+8$ ce qui est le cas pour $d < 12$ et $[C]$ est lisse dans $\mathcal{H}_{d,g}$.

Il reste le cas des courbes tracées sur un cône cubique à droite double. Ne sachant pas comment calculer $h^1 N_C$ dans ce cas, on se contente de vérifier que ces courbes se répartissent en des familles de dimension $\leqslant 4d-3$ donc de codimension $\geqslant 3$ dans $\mathcal{H}_{d,g}$. Pour ce faire, on se place sur le scroll X_3, modèle lisse de S. La courbe C s'identifie à sa transformée propre sur X_3 et s'écrit $aC_0 + df$ dans $\operatorname{Pic} X_3$ avec $d \geqslant 3a \geqslant 0$. Les formules du genre de [14, prop 2.12 p413] donnent que $3a = \begin{cases} d & \text{si } d \equiv 0[3] \\ d-1 \text{ ou } d+2 & \text{si } d \equiv 1[3] \\ d+1 & \text{si } d \equiv 2[3] \end{cases}$.

D'autre part, on peut calculer la dimension de $|C|$ sur X_3

$$\begin{aligned}\dim|C| &= h^0\mathscr{O}_{X_3}(aC_0+df)-1\\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{a} h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d-3k)-1\\ &= \tfrac{a+1}{2}(2d+2-3a)-1\end{aligned}$$

Les cônes cubiques à droite double formant une famille de dimension 11, les courbes considérées ici constituent une famille de dimension $\leqslant \frac{a+1}{2}(2d+2-3a)+10$. Une simple vérification donne que ce dernier nombre est $\leqslant 4d-3$ pour tout $d\leqslant 12$. □

Proposition B.2 *Le schéma $\mathcal{H}_{d,g}$ est lisse en codimension 1 pour $d<12$.*

Preuve : Soit C une courbe lisse et connexe de $\mathbb{P}_3$ de degré d et de genre g. On suppose que $[C]$ est un point singulier de $\mathcal{H}_{d,g}$. En particulier, C est spéciale et $d\leqslant 2g-2$. D'autre part, $h^1N_C>0$ d'où l'existence d'une structure double sur C de genre arithmétique $4d+2g-1$ (*confer* la preuve de la proposition ***3.5***). À d fixé, g grand entraine que C est tracée sur une surface de degré <4 d'après la majoration du théorème 13 de [9] et donc que $d\geqslant 12$ ou que $\operatorname{codim}\{C\}\geqslant 3$ par le lemme précédent. Cela englobe tous les couples (d,g) exceptés $(10,6),(11,7)$ et $(11,8)$.

On utilise un argument de dimension pour ces 3 cas particuliers. On note r et e les entiers tels que $h^0\mathscr{O}_C(1)=r+1$ et $h^1\mathscr{O}_C(1)=e+1$. La courbe C est obtenue en plongeant une courbe abstraite $\widetilde{C}$ lisse irréductible de genre g dans $\mathbb{P}_3$. Le choix de $\widetilde{C}$ repose sur au plus $3g-3$ paramètres, celui d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ de degré d avec $h^0\mathscr{L}\geqslant r+1$ sur $\dim W^r_d$ paramètres et celui d'un sous espace vectoriel de dimension 4 de $H^0\mathscr{L}$ sur $\dim G(4,r+1)$ paramètres (avec $G(4,r+1)$ la grassmannienne). Lorsque l'on ajoute dim GL_4 pour les changements de coordonnées dans le $\mathbb{P}_3$ d'arrivée, on obtient une majoration de la dimension de la famille $\mathscr{F}$ des courbes considérées par

$$(3g-3)+\dim W^r_d+4(r-3)+15=\dim W^r_d+4(d+e+1)-g$$

Pour $(d,g)=(10,6)$, le théorème de Clifford donne $e=0$ et C est canonique donc le fibré $\mathscr{L}$ est le faisceau canonique d'où une codimension $\geqslant 2$ (pour $d\geqslant g+3$, $\mathcal{H}_{d,g}$ est irréductible de dimension $4d$ d'après [8]). Pour $(d,g)=(11,7)$, on a de même $e=0$ d'où une dimension $\leqslant 41+\dim W^5_{11}$. En passant à la série linéaire résiduelle, on a $W^5_{11}\simeq W^0_1\simeq\widetilde{C}$ d'où une codimension $\geqslant 2$.

Pour $(d,g)=(11,8)$, comme $W^4_{11}\simeq W^0_3\simeq\widetilde{C}^{(3)}$ (la 3ème puissance symétrique de $\widetilde{C}$) est irréductible de dimension 3, la famille $\mathscr{F}$ est irréductible de dimension 43. Soit S une surface quartique à conique double de $\mathbb{P}_3$, projection de la surface de Del Pezzo de $\mathbb{P}_4$, $\overline{S}$. Cette dernière est l'éclaté du plan projectif en 5 points en position générale plongée dans $\mathbb{P}_4$ par le système des cubiques planes passant par les 5 points avec multiplicité $\geqslant 1$. Son groupe de Picard est $\mathbb{Z}^6$ par l'identification usuelle. L'élément général de $|\mathscr{O}_{\overline{S}}(6,2,2,1,1,1)|$

est une courbe lisse et connexe dont la projection C est de degré 11 et de genre 8. On dispose de plus de la suite exacte suivante (preuve de la proposition 2.8 de [7]) :

$$0 \to \omega_C(1) \to N_C \to \mathscr{O}_C(3) \to 0$$

qui entraine que $H^1 N_C \simeq H^1 \mathscr{O}_C(3)$ donc que $H^1 N_C = 0$ et $[C]$ est un point lisse de $\mathcal{H}_{11,8}$. La courbe C n'est pas linéairement normale. Elle est donc spéciale et représentée par un point de $\mathscr{F}$. Il vient par semicontinuité que le point générique de $\mathscr{F}$ est lisse donc que le lieu singulier de $\mathcal{H}_{11,8}$ est de codimension $\geqslant 2$. $\square$

Bibliographie

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths et J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves*, tome 1 de *Grundlehren der math. Wissen. 267*. Springer–Verlag, 1984.

[2] C. Bănică et O. Forster. Multiplicity Structures on Space Curves. *Contemp. Math.*, **58** (1986) :47–64.

[3] G. Bolondi. Irreducible families of curves with fixed cohomology. *Arch. Math.*, **53** (1989) :300–305.

[4] J. Bruce et C. Wall. On classification of cubic surfaces. *J. London Math. Soc.*, **19** (1979)(2) :245–256.

[5] J. d'Almeida. Courbes de l'espace projectif : Séries linéaires incomplètes et multisécantes. *J. für Reine und Angew. Math.*, **370** (1986) :30–51.

[6] M. Demazure. *Surfaces de Del Pezzo*. LNM 777. Springer–Verlag, 1980.

[7] A. Dolcetti et G. Pareschi. On linearly normal space curves. *Math. Z.*, **198** (1988) :73–82.

[8] L. Ein. Hilbert scheme of smooth space curves. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, **19** (1986)(4) :469–478.

[9] P. Ellia. Double structure and normal bundle of space curves. *J. London Math. Soc.*, **58** (1998)(2) :18–26.

[10] P. Ellia et M. Fiorentini. Défaut de postulation et singularités du schéma de Hilbert. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.*, **30** (1984) :185–198.

[11] G. Ellingsrud. Sur les variétés de codimension 2 dans $\mathbb{P}^e$ à cône projetant de Cohen–Macaulay. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **58** (1975)(2) :18–26.

[12] G. Greuel et U. Karras. Families of varieties with prescribed singularities. *Compo. Math.*, **69** (1989) :83–110.

[13] A. Grothendieck. *Schéma de Picard*. Séminaire Bourbaki. fascicules 2 et 3, 1962.

[14] L. Gruson et C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif(II). *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, **15** (1983) :401–418.

[15] B. Harbourne. Complete linear systems on rational surfaces. *Trans. A.M.S.*, **289** (1985) :213–226.

[16] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. GTM 52. Springer–Verlag, 1977.

[17] R. Hartshorne. *Families of Curves in $\mathbb{P}^3$ and Zeuthen's Problem*. Memoirs of the A.M.S. No 617, 1997.

[18] I. Luengo. On the existence of complete families of projective plane curves, which are obstructed. *J. London Math. Soc.*, **36** (1987)(2) :33–43.

[19] M. Martin-Deschamps et D. Perrin. *Sur la classification des courbes gauches*. Astérisque 184–185. Publ. S.M.F, 1990.

[20] M. Martin-Deschamps et D. Perrin. Sur les bornes du module de Rao. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **137** (1993) :1159–1162.

[21] M. Martin-Deschamps et D. Perrin. Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen–Macaulay n'est (presque) jamais réduit. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, **29** (1996) :757–785.

[22] D. R. Morrison. The birational geometry of surfaces with rational double points. *Math. Ann.*, **271** (1985) :415–438.

[23] D. Mumford. Further Pathologies in Algebraic Geometry. *Am. J. Math.*, **84** (1962).

[24] D. Mumford. *Lectures on curves on a algebraic surface*. Ann. Maths. Studies 59. Princeton University Press, 1966.

[25] S. Nollet. Subextremal Curves. *Manuscripta Math.*, **94** (1997) :303–317.

[26] C. Okonek, M. Schneider et H. Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Progress in math. Birkhauser, 19801.

[27] E. Schlesinger. A speciality theorem for Cohen–Macaulay space curves. *Trans. of A.M.S.*, **351** (1999)(7) :2731–2743.

[28] J. Semple et L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford Univ. Press, 1949.

[29] E. Sernesi. Un esempio di curva obstruita in $\mathbb{P}^3$. *Seminario di variabili complesse, Bologna (1981), CNR, Università degli Studi di Bologna*, (1982).

[30] F. Severi. Vorlesungen über algebraische Geometrie. *Teubner*, (1921).

[31] J. Wahl. Deformations of plane curves with nodes and cusps. *Amer. J. Math.*, **96** (1974)(4) :529–577.

[32] C. Walter. Some examples of obstructed curves in $\mathbb{P}^3$. *London Math. Soc. LNS*, **179** (1992) :325–340.

[33] O. Zariski. *Algebraic surfaces*. Classics in Mathematics. Springer–Verlag, 1995.