

Numéro d'ordre : 3112

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée pour l'obtention du

grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

discipline : Mathématiques

par

Pierre-Antoine DESROUSSEaux

Valeurs exceptionnelles de fonctions transcendentes

soutenue le 22 Mars 2002 devant la commission d'examen :

Directeur :

Pr. D.R. Paula COHEN C.N.R.S. LILLE

Rapporteurs :

Pr. Yuri BILU Université de BORDEAUX

Pr. Marvin TRETAKOFF PRINCETON University U.S.A.

Membres du jury :

Pr. Daniel BERTRAND Institut de Mathématiques de JUSSIEU

Pr. Yann BUGEAUD Université de STRASBOURG

Pr. Jean-Claude DOUAI Université de LILLE I

Pr. Marc HUTTNER Université de LILLE I

Remerciements :

Je remercie très sincèrement ma Directrice de Thèse, Paula COHEN. Sa gentillesse et sa patience m'ont été d'un grand soutien durant ces trois années. La qualité de ses conseils et la pédagogie de ses explications sont pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail. Je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je tiens à remercier tout spécialement le Professeur Yuri BILU d'avoir spontanément accepté d'être rapporteur. Son travail m'a apporté une aide précieuse.

Je souhaite remercier le Professeur Marvin TRETROFF pour son accueil, son enthousiasme, ses encouragements et son immense gentillesse. Lors de nos discussions, la justesse de ses idées ont apporté un jour nouveau sur ce travail. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour son investissement, notamment comme rapporteur.

Mes remerciements vont également au Professeur Daniel BERTRAND qui me fait l'honneur d'être membre du jury. J'ai été très touché de l'attention qu'il a portée à ce travail et tiens à le remercier pour ses remarques.

J'exprime toute ma reconnaissance au Professeur Yann BUGEAUD pour sa gentillesse et l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je suis honoré qu'il ait accepté de faire partie du jury.

Je remercie les Professeurs Jean-Claude DOUAI et Marc HUTTNER, qui conjointement avec le Professeur Paula COHEN ont dispensé le cours de D.E.A. qui m'a initié aux surfaces de Riemann et aux fonctions hypergéométriques de Gauss. Je suis très heureux et honoré de leur présence dans le jury.

Je souhaite également remercier le Professeur Jürgen WOLFART dont les travaux ont été le point de départ de cette étude et qui m'a si gentiment apporté soutien et suggestions au travers de ses notes et de nos correspondances.

Je remercie l'Université des Sciences et Technologies de LILLE pour son soutien financier pour la préparation de cette thèse.

J'adresse mes remerciements aux membres de l'équipe d'Arithmétique, et plus généralement au personnel du laboratoire de Mathématiques, au sein duquel j'ai préparé ce travail et à ces étudiants devenus des amis.

Je tiens également à remercier le personnel de la Bibliothèque de Mathématiques, des secrétariats et de la reprographie dont l'aide m'a été précieuse.

Je dédie ce travail à ma femme Aurélie. Merci à ma soeur, à mes parents, à Napo et à travers lui aux Malgaches qui me sont chers, pour tout ce qu'ils m'ont appris et dont je ne parlerai pas ici. Enfin, merci à mon petit Maxime pour les fabuleuses nuits blanches qu'il offre à son jeune papa.

Sommaire :

INTRODUCTION.

Chapitre 1 : FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES DE GAUSS. p11

1 : Construction du plongement modulaire.

1.a Construction des variétés abéliennes liées aux fonctions hypergénométriques de Gauss.

1.b Description des espaces modulaires.

1.c Le théorème de l'ensemble exceptionnel.

2 : Valeurs exceptionnelles et transcendantes de la fonction de Gauss.

Chapitre 2 : FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES D'APPELL. p35

1 : Construction du plongement modulaire.

1.a Construction des variétés abéliennes liées aux fonctions hypergénométriques d'Appell.

1.b Le théorème du plongement modulaire.

2 : Ensemble exceptionnel et fonctions hypergénométriques d'Appell.

Chapitre 3 : UTILISATION D'UNE CONJECTURE FAIBLE
D'ANDRÉ-OORT. p55

1 : Utilisation d'une conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une surface.

2 : Quelques remarques concernant les groupes de P.T.D.M. vérifiant la condition (*INT*).

Chapitre 4 : VALEURS TRANSCENDANTES DE FONCTIONS
HYPERGÉOMÉTRIQUES D'APPELL. p67

Chapitre 5 : ETUDE D'UNE NOUVELLE FONCTION
TRANSCENDANTE. p83

1 : Propriétés de $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y)$.

2 : L'ensemble exceptionnel lié à $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y)$.

3 : Remarques sur le point de base $T(\lambda; 0)$.

4 : Courbe modulaire tracée sur une surface.

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

Introduction :

L'objectif majeur de cette thèse est d'étendre au cas des fonctions hypergéométriques d'Appell, les travaux de J. Wolfart [Wo] de 1988, et de P. Cohen et G. Wüstholz de 1999 qui s'intéressaient à la finitude de l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

où F est la fonction hypergéométrique de Gauss.

L'intérêt de cet ensemble \mathcal{E} est dû au fait que la fonction hypergéométrique de Gauss (tout comme la fonction hypergéométrique d'Appell que nous étudierons par la suite) est une fonction transcendante - sauf pour certains cas particuliers de coefficients a , b et c -.

On s'attend donc à ce qu'elle prenne "très souvent" des valeurs transcendentes en des points algébriques. Il est donc naturel de se demander quand prend-t-elle des valeurs algébriques en des points algébriques ; et même est-ce que cette situation peut se produire un grand nombre de fois, et sous quelles conditions ?

D'autre part, cet ensemble \mathcal{E} , appelé ensemble exceptionnel, est étroitement lié aux points à multiplication complexe de certaines variétés de Shimura, qui sont construits à partir de familles de courbes algébriques paramétrées par x .

La détermination de la finitude de cet ensemble \mathcal{E} , qui parachève les travaux de J. Wolfart, est un résultat dû à P. Cohen et G. Wüstholz [CoWü] de 1999, qui s'appuie sur la démonstration de la version faible d'une conjecture d'André-Oort par B. Edixhoven et A. Yafaev [EdYa].

Outre les auteurs cités précédemment, nous utiliserons très souvent les travaux de P. Cohen [Co1], H. Shiga et J. Wolfart [ShWo] qui relient les périodes non nulles de formes différentielles de première espèce à des variétés abéliennes.

Cette thèse s'organise en cinq chapitres.

Chapitre 1. La fonction hypergéométrique de Gauss, solution d'une équation différentielle linéaire, se présente sous forme intégrale de la façon suivante, pour des paramètres a, b, c complexes tels que c n'est pas un entier négatif, $\Re b > 0$, $\Re(c - b) > 0$:

$$F(a; b; c; x) = B(a; c - a)^{-1} \cdot \int_1^\infty u^{b-c} \cdot (u - 1)^{c-a-1} \cdot (u - x)^{-b} \cdot du$$

En imposant des conditions supplémentaires aux paramètres, qui seront conservées tout au long de ce travail (sauf mention contraire) :

$$c \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[, \quad a; b \in \mathbb{Q} \cap]0; c[,$$

on peut considérer la fonction hypergéométrique de Gauss comme quotient de périodes de variétés abéliennes. À partir de cette écriture, P. Cohen, J. Wolfart et G. Wüstholz ont obtenu les résultats essentiels, rappelés au premier paragraphe, concernant le plongement modulaire suivant :

$$\mathcal{H}/\Delta(p; q; r) \longrightarrow \mathcal{H}^m/\Gamma$$

où $\Delta(p; q; r)$ est le groupe de monodromie relatif à cette fonction (les $(p; q; r)$ sont exprimés en fonction de $(a; b; c)$), Γ un groupe modulaire, et dans lequel les coordonnées s'expriment en terme de périodes de variétés abéliennes. Ce plongement modulaire a notamment permis de donner une réponse définitive, dans [CoWü], à un problème posé quelques années plus tôt par J. Wolfart qui s'intéressait à la finitude de l'ensemble exceptionnel suivant :

$$\mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

Ce résultat utilise la version faible d'une conjecture d'André-Oort récemment démontrée par B. Edxihoven et A. Yafaev, voir [EdYa]. Nous donnerons, pour clore ce paragraphe introductif, un résultat (Proposition I.1) listant toutes les paires $(p; q)$, associés aux groupes de monodromie $\Delta(p; q; \infty)$, pour lesquels $m \leq 4$ dans le plongement modulaire. Puis, lors du deuxième paragraphe, nous donnerons notamment le résultat suivant :

Théorème I.2.1 :

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$,

si $F(a; b; c; x)$ algébrique alors $F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x)$ est transcendant.

Ainsi que quelques corollaires.

Chapitre 2. Les fonctions hypergéométriques d'Appell sont une généralisation au cas de deux variables des fonctions hypergéométriques de Gauss. Là encore, sauf certaines conditions particulières sur les coefficients a, b, b' et c , c'est une fonction transcendante, que l'on peut écrire sous forme intégrale de la façon suivante, pour des paramètres a, b, b', c complexes tels que c n'est pas un entier négatif, $\Re a > 0$, $\Re(c-a) > 0$:

$$F_1(a; b; b'; c; x; y) = B(a; c-a)^{-1} \cdot \int_1^\infty u^{b+b'-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-x)^{-b} \cdot (u-y)^{-b'} \cdot du$$

En imposant des conditions supplémentaires aux paramètres, qui seront conservées tout au long de ce travail (sauf dans la section 2 des chapitres II et IV) :

$$c \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[, \quad a; b; b' \in \mathbb{Q} \cap]0; c[,$$

on peut considérer la fonction hypergéométrique d'Appell comme quotient de périodes de variétés abéliennes. Cette étude a été effectuée par P. Cohen et J. Wolfart (cf [CoWo2]). On rappelle, en particulier, la construction du plongement modulaire dans le cas de deux variables, qui est l'outil essentiel pour toute la suite. Ce plongement modulaire nous indiquera notamment quelles seront les variétés abéliennes à utiliser dans le cas des fonctions d'Appell.

Dans le deuxième paragraphe, nous verrons, dans le **Théorème II.2.3** qu'il faut imposer une deuxième condition, non triviale, avant de pouvoir en déduire l'écriture de l'ensemble exceptionnel dans le cas des fonctions hypergéométriques d'Appell :

Lorsque $1-c > 0$, on notera l'**ensemble exceptionnel** :

$$\mathcal{E} := \left\{ (x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 : \begin{cases} F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases} \right\}.$$

Afin d'éclairer ce qui sera construit dans ce chapitre, on donnera en introduction de ce chapitre une "définition" de l'ensemble exceptionnel.

Chapitre 3. Lors du troisième chapitre, nous nous intéresserons à la distribution des variétés abéliennes à multiplication complexe, isogènes à une variété abélienne fixée, sur la variété modulaire construite précédemment. Nous obtiendrons le résultat suivant, corollaire de la version faible d'une conjecture d'André-Oort, encore non-démontrée dans le cas des surfaces :

Théorème III.1.1 :

On suppose que la conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une surface est vraie. Soit $\Delta(\mu_i)$ d'action discontinue sur B_2 .

L'image de \mathcal{E} est Zariski dense dans $B_2/\Delta(\mu_i)$ si et seulement si le groupe $\Delta(\mu_i)$ est arithmétique.

où $\Delta(\mu_i)$ est le groupe de monodromie du système d'équations différentielles lié à la fonction F_1 , les coefficients μ_i seront exprimés linéairement en fonction des paramètres a, b, b' et c , voir le paragraphe 1 du chapitre II.

Du sens connu de cette conjecture et en utilisant le théorème, on extraira dans la **Proposition III.1.2**, un contre-exemple à une conjecture de Coleman qui affirmait qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de courbes algébriques de genre $g \geq 4$ dont la jacobienne est à multiplication complexe.

Puis nous ferons quelques remarques sur la finitude de l'ensemble exceptionnel (**Proposition III.2.1**).

Chapitre 4. Dans ce chapitre, nous verrons de quelle façon on peut généraliser les résultats obtenus dans le premier chapitre, et, en particulier, sous quelles conditions des valeurs algébriques de fonctions hypergéométriques d'Appell, en des points algébriques, conduisent à la transcendance d'autres valeurs de fonctions d'Appell.

En particulier, sous les conditions précédentes sur les paramètres a, b, b' et c , on obtiendra le résultat suivant :

Théorème IV.2 :

On suppose que $1 - c > 0$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) : F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

entraîne $\begin{cases} (C_1) : F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C'_1) : F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C_2) : F_1(2 - a; 1 - b; 1 - b'; 3 - c; x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

ainsi que quelques corollaires. L'expression de l'ensemble \mathcal{Q}_{st} sera introduite au paragraphe 1.a du chapitre II (deuxième remarque).

Chapitre 5. Lors de ce chapitre, nous étudierons une nouvelle fonction transcendante, qui apparait naturellement comme quotient de périodes, l'une provenant de la fonction hypergéométrique de Gauss et l'autre de celle d'Appell, et que l'on peut exprimer de la façon suivante, les conditions sur les paramètres a , b , b' et c restent inchangées :

$$\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) = \frac{\int_1^\infty u^{b+b'-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot (u-y)^{-b'} \cdot du}{\int_1^\infty u^{b-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot du}$$

pour λ un paramètre distinct de 0 et de 1.

Après avoir donné quelques unes de ses propriétés lors du premier paragraphe, nous verrons lors du deuxième paragraphe dans le **Théorème V.2.1** pourquoi il faut utiliser une deuxième fonction Φ , non triviale, dans la description géométrique de l'ensemble **exceptionnel** relatif à cette nouvelle fonction. Nous en déduirons par la suite son expression :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\} : \begin{cases} (h_1) : \Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (h_2) : \end{cases} \}$$

$$\text{où } (h_2) : \Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) \sim \frac{B(b; c-b) \cdot F(c-b; c-a; c; \lambda)}{B(b; c-b-b') \cdot F(c-b-b'; c-a; c-b'; \lambda)}$$

et où \sim signifie que le quotient des deux nombres est un nombre algébrique non nul.

Puis nous ferons quelques remarques concernant les propriétés des objets géométriques liés à cet ensemble, afin de pouvoir appliquer la version démontrée de la conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une courbe et obtenir :

Théorème V.4.1 :

Pour $1 - c > 0$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$ tel que

$$F(a; b; c; \lambda) \sim \frac{B(a+1-c; 1-a)}{B(c-b; b)} F(b+1-c; a+1-c; 2-c; \lambda) :$$

C_λ est de type Hodge si et seulement si $\text{Card}(\mathcal{E}_\lambda) = \infty$

où C_λ est une courbe tracée sur une variété de Shimura et qui paramétrise les classes d'isomorphisme de certaines variétés abéliennes, liées à la fonction Φ , que nous expliciterons, voir le paragraphe 4 du chapitre V.

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE GAUSS.

Le premier paragraphe de ce chapitre a pour objet la mise en place des outils essentiels utilisés par la suite. Nous rappelons notamment la construction des variétés abéliennes liées aux fonctions hypergéométriques de Gauss obtenue par P. Cohen et J. Wolfart dans [CoWo1]. Puis nous nous intéresserons à l'ensemble exceptionnel :

$$\mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

où F est la fonction hypergéométrique de Gauss, construit dans [Wo] et à un critère de finitude de cet ensemble donné dans [CoWü]. Nous terminerons ce paragraphe par des exemples illustrants cette construction.

Lors du deuxième paragraphe, en utilisant ces outils, nous verrons de quelle façon on peut donner un critère de multiplication complexe des variétés abéliennes construites précédemment à l'aide des fonctions de Gauss ; puis, on en déduira l'obtention de valeurs transcendentes de fonctions hypergéométriques de Gauss en des points algébriques.

1. Construction du plongement modulaire :

1.a Construction des variétés abéliennes liées aux fonctions hypergéométriques de Gauss.

On considère l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss (E) = ($E(a; b; c)$) :

$$x(1-x) \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \cdot \frac{du(x)}{dx} - ab \cdot u(x) = 0$$

Pour l'instant, on prend les paramètres a, b, c complexes, tels que c n'est pas un entier négatif, $\Re b > 0$, $\Re(c-b) > 0$, voir [AK] p2.

Elle admet pour singularités régulières les trois points $x = 0; 1; \infty$. L'espace des solutions de (E) est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2, constitué de fonctions multivalentes en la variable x .

On pose $(\alpha; n) = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $(\alpha; 0) = 1$

La série hypergéométrique de Gauss :

$$F(a; b; c; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a; n)(b; n)}{(c; n)(1; n)} \cdot x^n, |x| < 1$$

est la solution de (E) holomorphe au voisinage de $x = 0$ et telle que : $F(a; b; c; 0) = 1$.

La série hypergéométrique possède un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, que l'on appelle fonction hypergéométrique et qui peut être mise sous la forme intégrale suivante :

$$F(a; b; c; x) = B(1-\mu_4; 1-\mu_2)^{-1} \cdot \int_1^{\infty} u^{-\mu_1} \cdot (u-1)^{-\mu_2} \cdot (u-x)^{-\mu_3} \cdot du$$

où l'on pose désormais :

$$\begin{cases} \mu_1 = c - b \\ \mu_2 = a + 1 - c \\ \mu_3 = b \\ \mu_4 = 1 - a \end{cases}$$

On supposera toujours que : $\mu_1; \mu_2; \mu_3; \mu_4 \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[$.

L'égalité suivante est toujours vérifiée : $\sum_{i=1}^4 \mu_i = 2$.

On note : N : le plus petit dénominateur commun des μ_i .

On rappelle que pour : $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0, B(p; q) = \int_1^\infty t^{-p-q} \cdot (t-1)^{q-1} \cdot dt$

De même, les autres solutions de (E) peuvent être mises sous forme intégrale, elles se présentent alors de la façon suivante (cf [AK] p5) :

$$\int_g^h u^{-\mu_1} \cdot (u-1)^{-\mu_2} \cdot (u-x)^{-\mu_3} \cdot du$$

où $(g; h) \in \{0; 1; x; \infty\}, g \neq h$.

Via les cycles de Pochhammer, ces intégrales sont équivalentes, modulo $\overline{\mathbb{Q}}^*$, à des intégrales du type :

$$\int_{\gamma_{gh}} u^{-\mu_1} \cdot (u-1)^{-\mu_2} \cdot (u-x)^{-\mu_3} \cdot du$$

où γ_{gh} est un chemin d'intégration autour des points g et h (cf [Yo] p9).

Toutes ces intégrales peuvent être considérées comme des périodes de formes différentielles sur les courbes algébriques de la famille suivante, paramétrées par x variant dans $\mathcal{Q} := \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0; 1; \infty\}$:

$$\mathcal{X}(x) : w^N = u^{\mu_1 N} \cdot (u-1)^{\mu_2 N} \cdot (u-x)^{\mu_3 N}$$

(on en donne ici l'équation affine).

Chaque fibre $\mathcal{X}(x)$, au-dessus de $x \in \mathcal{Q}$, de cette famille est un recouvrement abélien de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ramifié au-dessus des points $0; 1; x$ et ∞ et dont le groupe de recouvrement est $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{L'automorphisme } \kappa : \quad \mathcal{X}(x) &\rightarrow \mathcal{X}(x) \\ (u; w) &\mapsto (u; \zeta_N^{-1}.w) \end{aligned}$$

où ζ_N est une racine primitive N^{ieme} de l'unité, induit l'action suivante sur $H^0(Jac(\mathcal{X}(x)); \Omega)$ où $Jac(\mathcal{X}(x))$ est la jacobienne de $\mathcal{X}(x)$:

$$\kappa^*(\omega(x)) = \kappa^*\left(\frac{u^\alpha . du}{w^\beta}\right) = \frac{u^\alpha . du}{(\zeta_N^{-1}.w)^\beta} = \zeta_N^\beta . \omega(x)$$

Cette action de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ sur $H^0(Jac(\mathcal{X}(x)); \Omega)$, via κ^* , permet la décomposition de $Jac(\mathcal{X}(x))$, à isogénie près ([CoWü]) :

$$Jac(\mathcal{X}(x)) \cong T(x) \oplus \sum_{d|N} Jac(\mathcal{X}_d(x))$$

où d'une part, $T(x)$, appelée "partie nouvelle de la jacobienne", est une variété abélienne à polarisation principale de dimension $\varphi(N)$ (φ est la fonction d'Euler) et dont le réseau des périodes est un $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ -module de rang 2 ;

et d'autre part, $\mathcal{X}_d(x)$ sont les courbes algébriques données par l'équation affine : $w^d = u^{\mu_1 N} . (u-1)^{\mu_2 N} . (u-x)^{\mu_3 N}$ où d est un diviseur propre de N .

L'espace $H^0(T(x); \Omega)$ est engendré par les formes différentielles propres de $H^0(Jac(\mathcal{X}(x)); \Omega)$, dont les valeurs propres sont les ζ_N^s , $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ pour l'action de κ^* .

C'est le cas, par exemple, pour la forme différentielle propre suivante de valeur propre ζ_N^s :

$$\omega_s(x) = u^{-\langle s\mu_1 \rangle} . (u-1)^{-\langle s\mu_2 \rangle} . (u-x)^{-\langle s\mu_3 \rangle} . du$$

où $\langle t \rangle = t - E(t)$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t .

La dimension du sous-espace propre V_s correspondant à cette valeur propre ζ_N^s est donnée par :

$$\dim V_s := r_s = -1 + \langle s\mu_1 \rangle + \langle s\mu_2 \rangle + \langle s\mu_3 \rangle + \langle s\mu_4 \rangle$$

(cf [CW] p359)

et on a pour tout s dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$: $r_s = 0$; 1 ou 2 et $r_s + r_{-s} = 2$

On note $S = \{s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times : r_s = 1\} / \{\pm 1\}$ (puisque $r_s = 1 \iff r_{-s} = 1$)
et $M = \text{Card}(S)$.

1.b Description des espaces modulaires.

On commence par quelques définitions.

On rappelle qu'une variété abélienne A est dite de type IV (notations relatives aux travaux de G. Shimura, voir par exemple [Shi1]), lorsqu'il existe un corps K à multiplication complexe (c'est à dire que K est une extension imaginaire quadratique d'un corps de nombres totalement réel) tel que $K \subseteq \text{End}_0(A) := \text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que cette injection est unitaire (c'est à dire qu'elle envoie 1 sur id_A).

Remarque :

Le type IV dont on parlera ici est relatif à l'existence d'un corps C.M. dans l'algèbre des endomorphismes, mais on parlera également de type Φ d'une variété abélienne qui est une représentation de son algèbre des endomorphismes dans une algèbre de matrices.

Une variété abélienne simple est dite à multiplication complexe au sens de Shimura-Taniyama ou au sens strict (ce que l'on notera C.M.) lorsqu'il existe un corps K à multiplication complexe $[K : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \dim A$ tel que $K \subseteq \text{End}_0(A) := \text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, que cette injection est unitaire et que $[K : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \dim A$.

Dans le cas d'une variété abélienne quelconque, la décomposition de A , à isogénie près, en sous-variétés simples deux à deux non-isogènes étant donnée

$A \hat{=} A_1^{r_1} \times \dots \times A_k^{r_k}$, on dira que A est à multiplication complexe au sens de Shimura-Taniyama ou au sens strict (ce que l'on notera C.M.) lorsque pour $i = 1; \dots; k$, il existe un corps K_i à multiplication complexe tel que la variété abélienne simple A_i est à multiplication complexe par K_i .

Dans ce qui suit, on sera amené à considérer des variétés abéliennes F stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Dans certains cas, elles seront à C.M., parfois par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ lui-même, parfois par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ (lorsqu'elle est puissance pure d'une sous-variété abélienne à C.M. par ce sous-corps). En effet, D. Bertrand remarque que (voir [Be] exemple 3 paragraphe 1) :

soit k un corps tel que $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ soit une extension de degré n de k , et E une variété abélienne à C.M. par k .

L'anneau des endomorphismes $End_0(F)$ de $F = E^n$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(k)$, en utilisant une application de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ dans $\mathcal{M}_n(k)$ (après le choix d'une base de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ sur k , ce qui rend F stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$).

On dira alors que F est à C.M. par le sous-corps k de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$.

Le tore $T(x)$, considéré ici, est une variété abélienne à polarisation principale de type IV (par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$) et dont le type est donné par :

$$\Phi = \sum_{j=1}^M (\sigma_j + \sigma_{-j}) + 2 \sum_{j=M+1}^{\frac{1}{2}\varphi(N)} \sigma_j$$

où les σ_j sont les $\varphi(N)$ plongements de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ dans \mathbb{C} , cf [CoWo1] et [CoWü].

D'après les travaux d'Albert, Siegel et Shimura [Shi1], une famille de variétés abéliennes de dimension $\varphi(N)$ à C.M. de type IV (par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$) et de type Φ est paramétrée par \mathcal{H}^M (où \mathcal{H} est le demi-plan supérieur).

Deux membres de cette famille seront des variétés abéliennes isomorphes lorsque leurs coordonnées correspondantes dans \mathcal{H}^M sont dans la même orbite d'un certain groupe arithmétique Γ agissant discontinûment sur \mathcal{H}^M .

Les $T(x)$, $x \in \mathcal{Q}$ forment une sous-famille de dimension 1 de cet espace.

On a alors un morphisme de variétés quasi-projectives, définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$:

$$\Phi : \mathcal{Q} \rightarrow V$$

où les points de $\mathcal{Q} = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{0; 1; \infty\}$ correspondent aux courbes algébriques $\mathcal{X}(x)$ et où l'ensemble des points complexes de la variété de Shimura V est isomorphe à \mathcal{H}^M/Γ , les points $\Phi(x)$ de cet espace correspondent aux classes d'isomorphisme des "parties nouvelles" $T(x)$, $x \in \mathcal{Q}$.

De plus, les classes d'isomorphisme des courbes algébriques $\mathcal{X}(x)$, $x \in \mathcal{Q}$ sont paramétrées par \mathcal{H}/Δ , pour $\Delta = \Delta(\mu_1; \mu_2; \mu_3; \mu_4)$ est le groupe de monodromie correspondant à l'équation différentielle hypergéométrique $E(a; b; c)$. L'action de Δ sur \mathcal{H} est décrite de la façon suivante :

$$\text{Pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta \text{ et pour tout } z \in \mathcal{H}, \gamma(z) = \frac{a.z + b}{c.z + d}$$

On dit du groupe Δ que c'est un groupe triangulaire, cette appellation est relative au changement d'indices suivant :

$$\begin{aligned} p &= |1 - \mu_i - \mu_j|^{-1} \\ q &= |1 - \mu_k - \mu_l|^{-1} \\ r &= |1 - \mu_i - \mu_k|^{-1} \\ \text{pour } i, j, k, l &\text{ distinctes dans } \{1; 2; 3; 4\} \end{aligned}$$

Ceci permet de décrire le groupe de monodromie comme suit :

$$\Delta = \Delta(p; q; r) = \langle M_0; M_1; M_\infty : M_0^p = M_1^q = M_\infty^r = M_0.M_1.M_\infty = I_2 \rangle$$

où I_2 est la matrice identité de $SL_2(\mathbb{R})$.

$(p; q; r)$ désigne la signature du groupe triangulaire $\Delta(p; q; r)$.

Afin de s'assurer que $\Delta(p; q; r)$ agit bien discontinûment sur \mathcal{H} , on suppose que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ (Condition d'hyperbolicité, cf [Yo] p53-57),

et dans ce cas on a $\Delta(p; q; r) \subseteq PSL_2(\mathbb{R}) = Aut(\mathcal{H})$.

Cette discontinuité de l'action de $\Delta(p; q; r)$ sur \mathcal{H} est impliquée par les conditions suivantes (cf [DM] ou [M] p91) :

$$(INT) : \text{Pour tout } i \neq j \in \{1; 2; 3; 4\}, (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \in \mathbb{Z}$$

Il existe une infinité de tels groupes triangulaires hyperboliques d'action discontinue sur \mathcal{H} . Grâce aux conditions imposées sur les μ_i , nous travaillons avec de tels groupes.

Il est important de rappeler ce que l'on entend par groupe arithmétique car c'est une notion qui reviendra souvent dans la suite :

On considère un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie V , muni d'une \mathbb{Q} -structure, et Λ un réseau de V .

Soit G un sous-groupe de $GL(V)$ défini sur \mathbb{Q} .

On note : $G_\Lambda = \{g \in G(\mathbb{Q}) : g.\Lambda = \Lambda\}$.

Un sous-groupe Γ de $G(\mathbb{Q})$ est dit arithmétique lorsqu'il existe un Λ pour lequel Γ et G_Λ sont commensurables.

Dans le cas des groupes $\Delta(p; q; r)$ que nous considérons, c'est une notion qui ne dépend que de la signature du groupe triangulaire. Dans le cas particulier des groupes triangulaires hyperboliques, K. Tacheuki a donné dans [Ta] un critère déterminant l'arithméticité des signatures $(p; q; r)$ des groupes $\Delta = \Delta(p; q; r)$. Ce résultat utilise le corps suivant :

$$k_2 = \mathbb{Q}(tr\Delta^2) = \mathbb{Q}((tr\Delta)^2) = \mathbb{Q}\left(\left(\cos\frac{\pi}{p}\right)^2; \left(\cos\frac{\pi}{q}\right)^2; \left(\cos\frac{\pi}{r}\right)^2; \cos\frac{\pi}{p} \cdot \cos\frac{\pi}{q} \cdot \cos\frac{\pi}{r}\right)$$

(Ces égalités, non triviales, sont démontrées dans ce même article).

Critère d'arithméticité :

- Lorsque $\Delta(p; q; r)$ est de type non-compact (i.e. p ou q ou $r = \infty$, $\Delta(p; q; r)$ est arithmétique si et seulement si $k_2 = \mathbb{Q}$.

- Lorsque $\Delta(p; q; r)$ est de type compact,
 $\Delta(p; q; r)$ est arithmétique si et seulement si $k_2 = \mathbb{Q}$ ou $k_2 \supsetneq \mathbb{Q}$ et pour tout
plongement $\sigma : k_2 \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma \neq id$, on a :
 $\sigma((\cos \frac{\pi}{p})^2 + (\cos \frac{\pi}{q})^2 + (\cos \frac{\pi}{r})^2 + 2 \cdot \cos \frac{\pi}{p} \cdot \cos \frac{\pi}{q} \cdot \cos \frac{\pi}{r} - 1) < 0$.

Ce critère permet en outre de démontrer qu'il y a, à permutation des
 $(p; q; r)$ près, 85 signatures de groupes triangulaires hyperboliques arithméti-
ques, et l'auteur les donne explicitement. Il y a donc une infinité de tels
groupes non-arithmétiques.

A titre d'exemple, la signature $(2; 3; \infty)$ est celle d'un groupe arithmétique
correspondant au groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$. Il est engendré par les trans-
formations :

$$z \mapsto -1/z \text{ et } z \mapsto z + 1 \text{ pour } z \in \mathcal{H}$$

Par contre, la signature $(2; 5; \infty)$ est non-arithmétique et correspond, à con-
juguaison près, au groupe engendré par les transformations :

$$z \mapsto -\frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5})/z \text{ et } z \mapsto z + \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5}) \text{ pour } z \in \mathcal{H}.$$

Dans [CoWo1] paragraphe 2, les auteurs construisent de façon explicite le
plongement modulaire suivant :

$$F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^m$$

pour lequel $m|M$, compatible avec l'action des groupes Δ (non nécessairement
arithmétique) agissant sur \mathcal{H} et Γ agissant sur \mathcal{H}^m . m est le nombre de
quadruplets $(\langle s\mu_1 \rangle; \langle s\mu_2 \rangle; \langle s\mu_3 \rangle; \langle s\mu_4 \rangle)$ distincts pour $s \in S$.
L'application induite $\mathcal{H}/\Delta \longrightarrow \mathcal{H}^m/\Gamma$ fait apparaître un morphisme sur $\overline{\mathbb{Q}}$:

$$\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow V$$

de variétés projective et quasi-projective définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.
où $\mathcal{C}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}/\Delta$ et $V(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^m/\Gamma$.

1.c Le théorème de l'ensemble exceptionnel.

Lorsque $1 - c > 0$, on note \mathcal{E} l'ensemble exceptionnel :

$$\mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Selon les arguments de [CoWo1] et [CoWü], on peut également décrire cet ensemble en terme de variétés abéliennes isogènes, de la façon suivante :

$$\mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : T(x) \hat{=} T(0)\}$$

où $T(0)$ est une variété abélienne à C.M. fixée.

En se servant d'une version faible d'une conjecture d'André-Oort démontrée (voir ci-après), P. Cohen et G. Wüstholz démontrent le théorème suivant :

Théorème de l'ensemble exceptionnel : ([CoWü])

Pour $1 - c > 0$, $\text{Card } \mathcal{E} = \infty$ si et seulement si $\Delta(p; q; r)$ est arithmétique.

Lors du chapitre deux, un des objectifs de nos travaux sera de donner un résultat similaire à ce théorème dans le cas de deux variables, c'est à dire avec les fonctions hypergéométriques d'Appell.

La deuxième façon d'appréhender l'ensemble exceptionnel, c'est à dire sa description en terme de variétés abéliennes et l'utilisation du théorème va permettre, notamment, de résoudre des problèmes liés aux jacobiniennes de courbes algébriques à multiplication complexe, comme nous le verrons dans le corollaire I.2.3 et la remarque qui lui succède.

On rappelle la conjecture (faible) d'André-Oort dont il est question pour l'utilisation de l'ensemble exceptionnel, et qui a été démontrée par B. Edixhoven et A. Yafaev, voir [EdYa] ou [Ya] :

Conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une courbe :

(Théorème 4.2 [Ya])

On suppose que sur une courbe algébrique $Z = \Phi(\mathcal{C})$ irréductible de $V(\mathbb{C})$ il existe un point P qui est C.M.

S'il existe une infinité de points de Z dont la variété abélienne correspondante est isogène à la variété abélienne P , alors Z est de type Hodge.

La version (forte) de cette conjecture est la suivante :

Conjecture (forte) d'André-Oort dans le cas d'une courbe :

On suppose que sur une courbe algébrique $Z = \Phi(\mathcal{C})$ irréductible de $V(\mathbb{C})$ il existe une infinité de points à C.M., alors Z est de type Hodge.

La version forte de cette conjecture est à l'heure actuelle non démontrée.

Cependant en 1999, B. Edixhoven a démontré cette conjecture (forte) dans le cas particulier des courbes algébriques plongées dans les variétés modulaires de Hilbert, voir [Ed].

Or on sait, cf [CoWo1] p 104, que lorsque le groupe de monodromie $\Delta(p; q; r)$ est non-compact, i.e. lorsque p, q ou $r = \infty$, le groupe modulaire Γ est un groupe modulaire de Hilbert (c'est à dire $\Gamma = PSL_2(O_k)$ où k est un corps de nombres totalement réel). Dans le cas de la variété modulaire \mathcal{H}^m/Γ , m est le degré du corps $\mathbb{Q}(tr\Delta^2)$ (ce corps des traces au carré $tr\Delta^2 := \{tr\gamma^2/\gamma \in \Delta\}$ est celui utilisé par K. Tacheuki dans [Ta] pour donner la liste exhaustive des signatures de groupes triangulaires hyperboliques arithmétiques, c'est k_2 utilisé dans le critère d'arithméticité).

Le résultat ci-dessous indique les couples $(p; q)$ pour lesquels l'entier m qui apparaît dans le plongement modulaire est inférieur ou égal 4. On peut aller au-delà, mais le but de cette proposition est d'illustrer la théorie sous-jacente.

Proposition I.1.1 :

On note $(p; q)$ le couple correspondant au groupe $\Delta = \Delta(p; q; \infty)$.

On considère le plongement modulaire précédent : $\mathcal{H}/\Delta \longrightarrow \mathcal{H}^m/\Gamma$

- $(p; q) \in \{(2; 3); (2; 4); (2; 6); (2; \infty); (3; 3); (3; \infty); (4; 4); (6; 6); (\infty; \infty)\}$
si et seulement si $m = 1$; et on a $\text{Card } \mathcal{E} = \infty$.
- $(p; q) \in \{(4; 3); (4; 6); (4; 8); (5; 2); (5; 3); (5; 5); (5; \infty); (6; 3); (6; 4); (6; \infty)$
; $(8; 2); (8; 8); (10; 2); (10; 10); (12; 2); (12; 12); (15; 2); (15; 15)\}$ si et seulement si $m = 2$; et on a $\text{Card } \mathcal{E} < \infty$.
- $(p; q) \in \{(7; 2); (7; 7); (9; 2); (9; 9); (13; 2); (13; 13); (14; 2); (14; 14); (18; 2)$
; $(18; 18)\}$ si et seulement si $m = 3$; et on a $\text{Card } \mathcal{E} < \infty$.
- $(p; q) \in \{(5; 4); (5; 6); (5; \infty); (8; 3); (8; 4); (8; 6); (8; \infty); (10; 3); (10; 4)$
; $(10; 5); (10; 6); (10; \infty); (12; 3); (12; 4); (12; 6); (12; \infty); (15; 3); (15; \infty)$
; $(17; 2); (17; \infty); (20; 2); (20; 20); (24; 2); (24; 24); (30; 2); (30; 30)\}$
si et seulement si $m = 4$; et on a $\text{Card } \mathcal{E} < \infty$.

Démonstration de la proposition I.1.1 :

Dans le cas $m = 1$, cela revient à s'intéresser aux groupes triangulaires arithmétiques non-compacts, il suffit alors de se reporter à la liste donnée dans [Ta].

Les autres cas se résolvent de façon similaire.

Traitons par exemple le cas $m = 2$. Notons $k_2 := \mathbb{Q}(tr\gamma^2/\gamma \in \Delta)$, d'après [Ta], ce corps est égal à $\mathbb{Q}(\cos^2(\pi/p); \cos^2(\pi/q); \cos(\pi/p).\cos(\pi/q))$.

On cherche les couples $(p; q)$ tels que $[k_2 : \mathbb{Q}] = 2$.

Commençons par trouver les entiers q tels que $[\mathbb{Q}(\cos(\pi/q)) : \mathbb{Q}] = 2$.

On sait que $[\mathbb{Q}(\exp(2i\pi/q)) : \mathbb{Q}] = \varphi(q)$ (φ étant la fonction d'Euler) et $\mathbb{Q}(\exp(2i\pi/q))$ est une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}(\zeta_q + \bar{\zeta}_q) = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/q))$ (ζ_q racine q -ième de l'unité), donc $\mathbb{Q}(\cos(\pi/q)) = \frac{1}{2}.\varphi(2q)$.

$$\varphi(2q) = 4$$

$$\iff \varphi(2.2^{\alpha_0}.p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = 4 \text{ où } p_i \text{ premier impair}$$

$$\begin{aligned} \iff 2^{\alpha_0+1} \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 4 \\ \iff q = \frac{4 \cdot p_1 \dots p_k}{(p_1-1) \dots (p_k-1)} &= \frac{4 \cdot p_1 \dots p_k}{2^k \cdot t} \end{aligned}$$

et $p_1 \dots p_k$ étant impair, il faut $k \leq 2$.

On traite donc les différentes possibilités :

- lorsque $k = 2$, $q = 2^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$
on doit avoir $\frac{p_2-1}{2} | p_1$ et $\frac{p_1-1}{2} = 1$ donc $p_1 = 3$ et $p_2 = 7$; mais dans ce cas, on aurait d'une part $q = 2^{\alpha_0} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et d'autre part $q = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{(3-1) \cdot (7-1)} = 7$ contradiction.

- lorsque $k = 1$, $q = 2^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1}$
on doit avoir $p_1 - 1 | 4$ donc $p_1 = 3$ ou 5 ,
dès lors $p = 3$ donne $q = 2^{\alpha_0} \cdot 3^{\alpha_1} = \frac{4 \cdot 3}{(3-1)} = 6$ convient ;
et $p = 5$ donne $q = 2^{\alpha_0} \cdot 5^{\alpha_1} = \frac{4 \cdot 5}{(5-1)} = 5$ convient.

- lorsque $k = 0$, $q = 2^{\alpha_0}$
 $\alpha_0 = 2$ c'est à dire $q = 4$ convient.

Finalement $[\mathbb{Q}(\cos(\pi/q)) : \mathbb{Q}] = 2 \iff q = 4; 5$ ou 6 .

Comme il faut s'intéresser au carré des cosinus, puisque l'on considère le corps k_2 , on doit également calculer (de la même façon) $[\mathbb{Q}(\cos(\pi/q)) : \mathbb{Q}] = 4$.

On trouve $[\mathbb{Q}(\cos(\pi/q)) : \mathbb{Q}] = 4 \iff q = 8; 10; 12$ ou 15 .

Dès lors, en utilisant les résultats trouvés et l'abus de notation $\cos(\pi/\infty) = 1$, on obtient la solution.

Remarque :

Cette proposition s'appuie notamment sur les résultats de B. Edixhoven, qui a démontré, en 1999, la conjecture d'André-Oort à laquelle nous nous intéressons, dans le cas des courbes algébriques plongées dans les variétés modulaires de Hilbert (voir [Ed]). Depuis, la version faible de cette conjec-

ture (suffisante dans notre cadre de travail) a été prouvée dans le cadre plus général de courbes modulaires plongées dans une variété de Shimura (voir [EdYa] (2000)). Ce résultat a cependant le mérite d'illustrer la théorie sous-jacente. Donnons à ce titre quelques exemples :

Exemple 1 : Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z}) = \Delta(2; 3; \infty)$.

Des calculs immédiats donnent le résultats suivants :

$$(a; b; c) = \left(\frac{5}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right), (\mu_1; \dots; \mu_4) = \left(\frac{5}{12}; \frac{11}{12}; \frac{1}{12}; \frac{7}{12}\right) \text{ et } N = 12.$$

La courbe algébrique correspondante est donnée par l'équation affine suivante, pour $x \in \mathcal{Q}$:

$$\mathcal{X}(x) : w^{12} = u^5 \cdot (u - 1)^{11} \cdot (u - x)$$

D'après la proposition I.1.1, $m = 1$ car $PSL_2(\mathbb{Z})$ est arithmétique.

Le tore complexe considéré est de dimension $\varphi(12) = 4$ et se scinde, à isogénie près, en sous-variétés simples de la façon suivante : $T(x) \hat{=} \mathcal{E}(x)^4$ où $\mathcal{E}(x)$ est une courbe elliptique. Le plongement modulaire est l'identité et on a :

$$\text{Card } \mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F\left(\frac{5}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{2}; x\right) \in \overline{\mathbb{Q}}\} = \infty.$$

Exemple 2 : Le groupe de Hecke $\Delta(2; 5; \infty)$.

Des calculs immédiats donnent le résultats suivants :

$$(a; b; c) = \left(\frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{4}{5}\right), (\mu_1; \dots; \mu_4) = \left(\frac{7}{20}; \frac{13}{20}; \frac{3}{20}; \frac{17}{20}\right) \text{ et } N = 20.$$

La courbe algébrique correspondante est donnée par l'équation affine suivante, pour $x \in \mathcal{Q}$:

$$\mathcal{X}(x) : w^{20} = u^7 \cdot (u - 1)^{13} \cdot (u - x)^3$$

D'après la proposition I.1.1, $m = 2$ (il n'y a que deux quadruplets $(\langle s\mu_1 \rangle; \dots; \langle s\mu_4 \rangle)$ distincts, à permutation près, sur les huit de départ $s = 1$ et $s = 3$ par exemple).

Le tore complexe considéré est de dimension $\varphi(20) = 8$ et se scinde, à isogénie près, en sous-variétés simples de la façon suivante : $T(x) \hat{=} \mathcal{S}(x)^4$ où $\mathcal{S}(x)$ est une surface abélienne stable par $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. $\Delta(2; 5; \infty) \subset PSL_2(O_k)$ où O_k désigne l'anneau des entiers de k .

Le plongement modulaire est décrit comme suit (on utilise ici l'écriture en coordonnées projectives) :

$$\begin{aligned} \Delta(2; 5; \infty) \setminus \mathcal{H} &\longrightarrow PSL_2(O_k) \setminus \mathcal{H}^2 = V(\mathbb{C}) \\ (\int_{\gamma_0} \omega(x) : \int_{\gamma_1} \omega(x)) &\longmapsto (\int_{\gamma_0} \omega(x) : \int_{\gamma_1} \omega(x); \int_{\gamma_0} \omega_3(x) : \int_{\gamma_1} \omega_3(x)) \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega(x) = \frac{du}{w} = u^{-\frac{7}{20}} \cdot (u-1)^{-\frac{13}{20}} \cdot (u-x)^{-\frac{3}{20}} \cdot du$$

$$\text{et } \omega_3(x) = \frac{du}{w} = u^{-\frac{1}{20}} \cdot (u-1)^{-\frac{19}{20}} \cdot (u-x)^{-\frac{9}{20}} \cdot du$$

V est la surface modulaire de Hilbert correspondant au corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

L'action de $PSL_2(O_k)$ sur \mathcal{H}^2 est donnée, pour $\gamma \in PSL_2(O_k)$ et pour $z \in \mathcal{H}$ par :

$$\gamma(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\sigma(a)z+\sigma(b)}{\sigma(c)z+\sigma(d)} \right) \text{ où } \sigma \text{ est le plongement non trivial de } k \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Enfin, $\Delta(2; 5; \infty)$ étant non-arithmétique, on a :

$$\text{Card } \mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(\frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{4}{5}; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\} < \infty.$$

Exemple 3 : Le groupe $\Delta(2; 7; \infty)$.

Des calculs immédiats donnent le résultats suivants :

$$(a; b; c) = (\frac{23}{28}; \frac{9}{28}; \frac{1}{2}), (\mu_1; \dots; \mu_4) = (\frac{5}{28}; \frac{19}{28}; \frac{9}{28}; \frac{23}{28}) \text{ et } N = 28.$$

La courbe algébrique correspondante est donnée par l'équation affine suivante, pour $x \in \mathcal{Q}$:

$$\mathcal{X}(x) : w^{28} = u^5 \cdot (u-1)^{19} \cdot (u-x)^9$$

D'après la proposition I.1.1, $m = 3$ (il n'y a que trois quadruplets $(\langle s\mu_1 \rangle; \dots; \langle s\mu_4 \rangle)$ distincts, à permutation près, sur les douze de départ $s = 1, s = 3$ et $s = 5$ par exemple).

Le tore complexe considéré est de dimension $\varphi(28) = 12$ et se scinde, à isogénie près, en sous-variétés simples de la façon suivante : $T(x) \hat{=} \mathcal{V}(x)^4$ où $\mathcal{V}(x)$ est une variété abélienne stable par $k = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7}))$. $\Delta(2; 7; \infty) \subset PSL_2(O_k)$ où O_k désigne l'anneau des entiers de k .

Le plongement modulaire est décrit comme suit (on utilise ici l'écriture en coordonnées affines) :

$$\begin{aligned} \Delta(2; 7; \infty) \setminus \mathcal{H} &\longrightarrow PSL_2(O_k) \setminus \mathcal{H}^3 = W(\mathbb{C}) \\ \frac{\int_{\gamma_0} \omega(x)}{\int_{\gamma_1} \omega(x)} &\longmapsto \left(\frac{\int_{\gamma_0} \omega(x)}{\int_{\gamma_1} \omega(x)}; \frac{\int_{\gamma_0} \omega_3(x)}{\int_{\gamma_1} \omega_3(x)}; \frac{\int_{\gamma_0} \omega_5(x)}{\int_{\gamma_1} \omega_5(x)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega(x) = \frac{du}{w} = u^{-\frac{5}{28}} \cdot (u-1)^{-\frac{19}{28}} \cdot (u-x)^{-\frac{9}{28}} \cdot du$$

$$\omega_3(x) = \frac{du}{w} = u^{-\frac{15}{28}} \cdot (u-1)^{-\frac{1}{28}} \cdot (u-x)^{-\frac{27}{28}} \cdot du$$

et $\omega_5(x) = \frac{du}{w} = u^{-\frac{25}{28}} \cdot (u-1)^{-\frac{11}{28}} \cdot (u-x)^{-\frac{17}{28}} \cdot du$

W est la variété modulaire de Hilbert correspondant au corps $k = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7}))$.

L'action de $PSL_2(O_k)$ sur \mathcal{H}^3 est donnée, pour $\gamma \in PSL_2(O_k)$ et pour $z \in \mathcal{H}$ par : $\gamma(z) = (\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\sigma_1(a)z+\sigma_1(b)}{\sigma_1(c)z+\sigma_1(d)}, \frac{\sigma_2(a)z+\sigma_2(b)}{\sigma_2(c)z+\sigma_2(d)})$ où $\{id; \sigma_1; \sigma_2\}$ sont les plongements de k dans \mathbb{R} .

Enfin, $\Delta(2; 7; \infty)$ étant non-arithmétique, on a :

$\text{Card } \mathcal{E} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(\frac{23}{28}; \frac{9}{28}; \frac{1}{2}; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\} < \infty$.

2. Valeurs exceptionnelles et transcendentes de la fonction de Gauss :

On notera désormais et pour toute la suite : \sim
la relation d'équivalence suivante :

$$\forall \alpha; \beta \in \mathbb{C}, \alpha \sim \beta \iff \exists \delta \in \overline{\mathbb{Q}}^*, \alpha = \delta \cdot \beta$$

Pour $1 - c > 0$,

on dispose de deux solutions linéairement indépendantes sur \mathbb{C} au voisinage de $x = 0$ de l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss, données par les représentations intégrales suivantes (cf [AK] pp4-6) :

$$\int_1^\infty \omega(x) := \int_1^\infty u^{-\mu_1} \cdot (u-1)^{-\mu_2} \cdot (u-x)^{-\mu_3} \cdot du = B(1-\mu_4; 1-\mu_2) \cdot F(a; b; c; x)$$

et

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \omega'(x) &:= \int_1^\infty x^{1-c} \cdot v^{1-\mu_4} \cdot (1-v)^{-\mu_3} \cdot (x-v)^{-\mu_2} \cdot dv \\ &= \int_0^x \omega(x) = B(1-\mu_1; 1-\mu_3) \cdot x^{1-c} \cdot F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x) \end{aligned}$$

On souhaite donner un critère de C.M. de $T(x)$ portant sur les fonctions hypergéométriques de Gauss. Pour ce faire, on utilise le résultat fondamental suivant :

On pose $H_1(T(x); \mathbb{Z}) = \langle \gamma_0; \gamma_1 \rangle$ et $R_1 = \{s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times : r_s = \dim V_s = 1\}$, on sait alors que :

Lemme I.2.1 : (Corollaire 5 [ShWo])

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, $T(x)$ est C.M. si et seulement si $\int_{\gamma_0} \omega(x) \sim \int_{\gamma_1} \omega(x)$

En posant $\delta_{CM} := \frac{B(\mu_2; \mu_4)}{B(\mu_1; \mu_3)}$, on peut écrire :

Proposition I.2.1 :

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, $T(x)$ est à C.M. si et seulement si

$$F(a; b; c; x) \sim \delta_{CM} \cdot F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x)$$

Démonstration de la proposition I.2.1 :

On sait que dans tous les cas $s = 1 \in R_1$ puisqu'on a imposé au départ la condition $\sum_{i=1}^4 \mu_i = 2$.

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, la condition de C.M. de $T(x)$ énoncée dans le lemme I.2.1, se traduit, avec $s = 1$ et en faisant agir les cycles de Pochhammer pour modifier les chemins d'intégration, par :

$$\int_1^\infty \omega(x) \sim \int_0^x \omega(x)$$

Ce qui, en terme de fonctions hypergéométriques de Gauss, donne :

$$B(1-\mu_4; 1-\mu_2) \cdot F(a; b; c; x) \sim B(1-\mu_1; 1-\mu_3) \cdot x^{1-c} \times \\ \times F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x)$$

c'est à dire

$$F(a; b; c; x) \sim \frac{B(1-\mu_1; 1-\mu_3)}{B(1-\mu_4; 1-\mu_2)} \cdot F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x)$$

Dès lors, sachant que $\Gamma(\mu) \sim \frac{\pi}{\Gamma(1-\mu)}$, pour $\mu \notin \mathbb{Z}$ et que $B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, on en déduit que $B(1-\mu_i; 1-\mu_j) \sim \frac{\pi}{B(\mu_i; \mu_j)}$ ce qui achève la démonstration de cette proposition.

On choisit maintenant de fixer une variété abélienne, que l'on notera abusivement $T(0)$ qui est à C.M. (par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ ou par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$). En effet, voir [CoWü], la variété abélienne $T(0) \hat{=} A_1 \times A_2$ où A_i sont des sous-variétés abéliennes de dimension $\frac{\varphi(N)}{2}$ (extraite de la jacobienne de la courbe de Fermat $\mathcal{F}_N : u^N + w^N = 1$, voir [WoWü]) qui sont à C.M. et respectivement liées aux périodes $B(1-\mu_2; 1-\mu_4)$ et $B(\mu_1; \mu_3)$. Cette variété abélienne est suggérée dans l'ensemble exceptionnel \mathcal{E} . On s'intéressera aux conséquences

sur les valeurs des fonctions hypergéométriques de Gauss lorsque $T(x)$ est isogène à cette variété. On obtient le résultat suivant :

Théorème I.2.1 :

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$,

si $F(a; b; c; x)$ algébrique alors $F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x)$ est transcendant.

Afin de démontrer ce résultat, on utilise une conséquence directe du Satz 1 de [WoWü], que l'on exprime sous la forme suivante :

Lemme I.2.2 : ([WoWü])

Une période non nulle de première espèce et une période non nulle de deuxième espèce sur une même variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendantes.

D'autre part, on dispose du lemme suivant :

Lemme I.2.3 : (Proposition 3 [CoWü])

On suppose que $1 - c > 0$.

Pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, $F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si $T(x) \cong T(0)$

Cette condition entraîne, en particulier, que $T(x)$ est à C.M. (par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ ou par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$).

Remarques :

- C'est cette condition qui a permis la description de l'ensemble exceptionnel en terme de variétés abéliennes.

- Dans le cas où $1 - c < 0$, l'ensemble exceptionnel devient

$$\mathcal{E} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(b+1-c; a+1-c; 2-c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

et sa description en termes de variétés abéliennes reste identique (l'espèce des périodes $B(\mu_i; \mu_j)$ considérées change et les sous-variétés correspondantes aussi, mais on note toujours $T(0)$ la variété abélienne servant de référence).

Démonstration du théorème I.2.1 :

On doit distinguer deux cas, suivant la valeur de la constante c .

Sous les conditions $x \in \mathcal{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}}, F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}$, pour $1 - c > 0$

(resp. $x \in \mathcal{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}}, F(b + 1 - c; a + 1 - c; 2 - c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}$, pour $1 - c < 0$),

on sait que $T(x) \hat{=} T(0)$.

La variété abélienne $T(0)$ étant à C.M., il en est de même pour $T(x)$. On peut alors appliquer la proposition I.2.1, avec δ_{CM} pour $1 - c > 0$ (resp. avec δ_{CM}^{-1} pour $1 - c < 0$).

Or, $1 - c > 0 \iff \mu_2 + \mu_4 > 1$, donc la période $B(\mu_2; \mu_4)$ est de deuxième espèce, tandis que la période $B(\mu_1; \mu_3)$ est de première espèce (c'est le contraire dans le cas de $1 - c < 0$).

Donc, d'après le lemme I.2.2, le nombre δ_{CM} est transcendant, ce qui fournit le résultat.

Afin d'illustrer ces résultats, on donne ici quelques applications :

Corollaire I.2.1 :

On suppose que $1 - c > 0$: pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$,

$(H_1) : F(a; b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si $(H'_1) : F(c - a; c - b; c; x) \in \overline{\mathbb{Q}}$

implique $\begin{cases} (C_1) : F(b + 1 - c; a + 1 - c; 2 - c; x) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C'_1) : F(1 - a; 1 - b; 2 - c; x) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Démonstration du corollaire I.2.1 :

On utilise le théorème précédent et le fait que pour $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, (H_1) (resp. (C_1)) est algébriquement équivalent à (H'_1) (resp. (C'_1)).

En effet, $z_1(x) : = c_1 \cdot \int_1^\infty u^{-\mu_1} \cdot (u - 1)^{-\mu_2} \cdot (u - x)^{-\mu_3} \cdot du$
 $= c_1 \cdot \int_0^1 v^{-\mu_4} \cdot (1 - v)^{-\mu_2} \cdot (1 - xv)^{-\mu_3} \cdot dv$ où $v = 1/u$.

c_1 est une constante.

On pose alors $v = \frac{1-w}{1-wx}$ et on trouve,

d'une part :

$$\begin{aligned} z_1(x) : &= c_1 \cdot (x-1)^{1-\mu_2-\mu_3} \cdot \int_0^1 w^{-\mu_2} \cdot (1-w)^{-\mu_4} \cdot (1-wx)^{-\mu_1} \cdot dw \\ &= c_1 \cdot (x-1)^{c-a-b} \cdot \int_0^1 w^{c-a-1} \cdot (1-w)^{a-1} \cdot (1-wx)^{b-c} \cdot dw \\ &= (x-1)^{c-a-b} \cdot F(c-a; c-b; c; x) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$z_1(x) : = F(a; b; c; x)$$

dès lors, pour $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, $F(a; b; c; x) \sim F(c-a; c-b; c; x)$

On opère également par changement de variable pour démontrer l'équivalence algébrique de (C_1) et (C'_1) .

Ceci achève la démonstration du corollaire.

On note J la fonction modulaire (usuelle) pour le groupe $\Delta(2; 3; \infty) = SL_2(\mathbb{Z})$ et admettant comme développement au voisinage de l'infini :

$$J(\tau) = \frac{1}{1728 \cdot \exp(2i\pi\tau)} + c_0 + \sum_{n>0} c_n \cdot \exp(2i\pi n\tau)$$

On note enfin $C_{J,\rho}$ la composante connexe de $\{\tau \in \mathcal{H} : |J(\tau)| < 1\}$ contenant $\rho = \exp(2i\pi/3)$, on dispose alors du résultat suivant :

Corollaire I.2.2 :

pour tout $\tau \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \cap C_{J,\rho}$,

$F(\frac{5}{12}; \frac{5}{12}; \frac{4}{3}; J(\tau))$, $F(\frac{11}{12}; \frac{11}{12}; \frac{4}{3}; J(\tau))$ et $Res(J^{-1/3}; \rho)$

sont des nombres transcendants.

Démonstration du corollaire I.2.2 :

Pour τ quadratique imaginaire, $J(\tau)$ est un nombre algébrique.

Dans la proposition 2.3 p 129 [Ar] l'auteur démontre

d'une part que $F(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{2}{3}; J(\tau)) \in \overline{\mathbb{Q}}$

et d'autre part que $(\frac{\eta(\tau)}{\eta(\rho)})^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ (où η est la fonction de Dedekind).

D'après le corollaire I.2.1, on obtient les résultats de transcendance des deux

valeurs de la fonction hypergéométrique.

Enfin, en utilisant le résultat [Ar] p120 qui indique que :

$F(\frac{5}{12}; \frac{5}{12}, \frac{4}{3}; J(\tau)) = Res(J^{-1/3}; \rho)^{-1} \cdot (\tau - \rho) \cdot J(\tau)^{-1/3} \cdot (\frac{\eta(\tau)}{\eta(\rho)})^2$ on prouve la transcendence du résidu.

Corollaire I.2.3 : ([CoW u] p12)

Soit p un nombre premier, les conditions suivantes sont équivalentes :

$p = 5$ ou 7

$$Card \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(\frac{p-3}{2p}; \frac{p-1}{2p}, \frac{p-1}{p}; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\} = \infty$$

$$Card \{x \in \overline{\mathbb{Q}} : F(\frac{p+1}{2p}; \frac{p-1}{2p}, \frac{p-1}{p}; x) \in \overline{\mathbb{Q}}\} = \infty$$

Démonstration du corollaire I.2.3 :

On considère les courbes affines lisses définies sur \mathbb{C} suivantes :

$$\mathcal{X}_{(1)} : w^p = [(u(u-1)(u-x))^{\frac{p-1}{2}}]$$

$$\mathcal{X}_{(2)} : w^p = [(u(u-1)(u-x))^{\frac{p+1}{2}}]$$

Elles correspondent respectivement aux quadruplets :

$$(\mu_1^{(1)}; \mu_2^{(1)}; \mu_3^{(1)}; \mu_4^{(1)}) = (\frac{p-1}{2p}; \frac{p-1}{2p}, \frac{p-1}{2p}, \frac{p+3}{2p})$$

$$(\mu_1^{(2)}; \mu_2^{(2)}; \mu_3^{(2)}; \mu_4^{(2)}) = (\frac{p+1}{2p}; \frac{p+1}{2p}, \frac{p+1}{2p}, \frac{p-3}{2p})$$

et donc aux triplets

$$(a^{(1)}; b^{(1)}; c^{(1)}) = (\frac{p-3}{2p}; \frac{p-1}{2p}, \frac{p-1}{p})$$

$$(a^{(2)}; b^{(2)}; c^{(2)}) = (\frac{p+3}{2p}; \frac{p+1}{2p}, \frac{p+1}{p})$$

Dans le cas de $\mathcal{X}_{(1)}$, puisque $1 - c^{(1)} > 0$,

$F(a^{(1)}; b^{(1)}; c^{(1)}; x) = F(\frac{p-3}{2p}; \frac{p-1}{2p}, \frac{p-1}{p}; x)$ qui est solution de l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss dont le groupe de monodromie est isomorphe au groupe triangulaire $\Delta(p; p; p)$.

Dès lors, en utilisant l'ensemble exceptionnel \mathcal{E} décrit au premier paragraphe, on obtient la deuxième ligne puisque pour p premier,

$\Delta(p; p; p)$ est arithmétique si et seulement si $p = 5$ ou 7 ([Ta]).

En tenant le même raisonnement avec la courbe $\mathcal{X}_{(2)}$, dans ce cas $1 - c^{(2)} > 0$ on obtient la troisième ligne et on termine la démonstration.

Remarques :

- Ce corollaire fournit des contre-exemples, découverts par J. de Jong et R. Noot [dJN] avec des courbes birationnellement équivalentes à $\mathcal{X}_{(1)}$ et $\mathcal{X}_{(2)}$, à une conjecture de Coleman qui affirmait qu'il n'existait qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de courbes de genre $g \geq 4$ dont la jacobienne est à C.M. (ici $g = 4$ ou 6 et $Jac \mathcal{X} = T(x)$). Dans [CoWü], on trouve une autre démonstration .

- D'autre part, il indique que la fonction hypergéométrique de Gauss qui est une fonction transcendante prendra malgré tout, dans ces cas-là, une infinité de valeurs algébriques.

Corollaire I.2.4 :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0; \frac{1}{4}[$,

$$F(1 - 3\alpha; 3\alpha; 1 - \alpha; \frac{1}{2}) = 2^{3\alpha} \cdot \cos(\pi\alpha)$$

$$F(1 - 3\alpha; 3\alpha; 1 + \alpha; \frac{1}{2}) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + \frac{1}{2})}$$

Démonstration du corollaire I.2.4 :

On utilise le résultat suivant [BeWo] Théorème 4 :

$$F(2\alpha; 1 - 4\alpha; 1 - \alpha; \frac{1}{2}) = 4^\alpha \cdot \cos(\pi\alpha)$$

qui est un nombre algébrique pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap]0; \frac{1}{4}[$.

Ainsi, lorsque $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, on dispose de l'hypothèse (H_1) du corollaire I.2.1, puisque $1 - c = \alpha > 0$, dans la démonstration de ce corollaire, on a vu que $F(a; b; c; x) = (x - 1)^{c-a-b} \cdot F(c - a; c - b; c; x)$, c'est cette formule qui donne la première ligne.

Pour la deuxième ligne, on sait que (H_1) est équivalent à $T(\frac{1}{2}) \hat{=} T(0)$, ce qui implique que $T(\frac{1}{2})$ est à C.M.

Dès lors, en utilisant la proposition I.2.1, on obtient :

$$F(b + 1 - c; a + 1 - c; 2 - c; x) \sim \frac{B(\mu_1; \mu_3)}{B(\mu_2; \mu_4)}$$

c'est à dire $F(1 - 3\alpha; 3\alpha; 1 + \alpha; \frac{1}{2}) \sim \frac{B(3\alpha; 1-4\alpha)}{B(3\alpha; 1-2\alpha)}$

On utilise alors les propriétés suivantes des fonctions Gamma pour trouver le résultat :

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + \mu) &\sim \Gamma(\mu) \text{ pour } \mu \notin -\mathbb{N}, \\ \Gamma(\mu).\Gamma(1 - \mu) &\sim \pi \text{ pour } \mu \notin \mathbb{Z} \\ \Gamma(2\mu) &= 2^{2\mu-1}.\pi^{-\frac{1}{2}}.\Gamma(\mu).\Gamma(\mu + \frac{1}{2}), \text{ pour } \mu \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remarque :

Aux résultats précédents, on peut ajouter quelques résultats ponctuels en servant à nouveau du lemme I.2.1. En effet, dans sa version complète, ce lemme affirme également que :

*pour tout $x \in \mathcal{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}}$,
 $T(x)$ est C.M. si et seulement si
pour tout (ou il existe) $s \in R_1$, $\int_{\gamma_0} \omega_s(x) \sim \int_{\gamma_1} \omega_s(x)$*

Ainsi, traduit en terme de fonctions hypergéométriques, cela donne :
pour tout $x \in \mathcal{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, $T(x)$ est C.M. si et seulement si pour tout (ou il existe)
 $s \in R_1$, $F(a^{(s)}; b^{(s)}; c^{(s)}; x) \sim \delta_{CM}^{(s)}.F(b^{(s)} + 1 - c^{(s)}; a^{(s)} + 1 - c^{(s)}; 2 - c^{(s)}; x)$
avec des notations évidentes.

Bien entendu, dans le cas où le groupe $\Delta(\mu_i)$ est arithmétique, on ne peut pas extraire d'autres informations puisque $R_1 = \{1\}$.

Par contre, lorsqu'il ne l'est pas, les $s \in R_1 \setminus \{1\}$, fournissent d'autres égalités modulo $\overline{\mathbb{Q}}$.

Reprenons, par exemple, le cas du corollaire précédent avec $\alpha = \frac{1}{9}$.

Des calculs immédiats donnent $(\mu_1; \dots; \mu_4) = (3\alpha; 3\alpha; 1 - 4\alpha; 1 - 2\alpha) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{9}; \frac{7}{9})$, un groupe triangulaire non-arithmétique $\Delta(3; 9; 9)$, $N = 9$, $R_1 = \{1; 2\}$ et $(a^{(2)}; b^{(2)}; c^{(2)}) = (\frac{4}{9}; \frac{1}{9}; \frac{7}{9})$.

Du fait que $F(a; b; c; \frac{1}{2}) \in \overline{\mathbb{Q}}$, on déduit que $T(\frac{1}{2})$ est une variété abélienne à C.M. par $\mathbb{Q}(\zeta_9)$ ou par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_9)$ et cette condition, avec $s = 2$ à l'aide de la proposition I.2.1 donne :

$$F(\frac{4}{9}; \frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{1}{2}) \sim \frac{B(\frac{2}{3}; \frac{5}{9})}{B(\frac{2}{3}; \frac{1}{9})}.F(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{9}; \frac{1}{2})$$

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'APPELL.

Lorsqu'on dispose d'une fonction transcendante f (convenablement normalisée), on s'attend à ce qu'elle prenne "très souvent" des valeurs transcendentes en des points algébriques. On parle alors de valeur exceptionnelle ou de point exceptionnel pour un x algébrique en lequel la fonction prend une valeur algébrique.

L'ensemble exceptionnel est un ensemble constitué de points exceptionnels. Mais, outre sa description arithmétique (à l'aide des valeurs algébriques de la fonction transcendante considérée), il doit posséder une description géométrique (en terme de variétés abéliennes de la même classe d'isogénie).

Les fonctions hypergéométriques d'Appell sont une généralisation au cas de deux variables des fonctions hypergéométriques de Gauss. Comme ces dernières, sauf en certains cas particuliers de paramètres a , b , b' et c , elles sont des fonctions transcendentes.

La question concernant l'existence d'un ensemble exceptionnel se pose alors naturellement, tant pour sa description en terme de fonctions transcendentes prenant des valeurs algébriques, que pour sa description en terme de variétés abéliennes à multiplication complexe. L'objectif ici est de tenter de trouver des résultats similaires à ceux de P. Cohen et G. Wüstholz dans [CoWü].

Dans le premier paragraphe, nous rappellerons les résultats de P. Cohen et de J. Wolfart sur le plongement modulaire qui indiquent quelles sont les variétés abéliennes auxquelles il convient de s'intéresser dans le cas des fonctions d'Appell.

L'objet du deuxième paragraphe est la construction de l'ensemble exceptionnel pour les fonctions d'Appell qui généralise celui utilisant les fonctions hypergéométriques de Gauss.

1. Construction du plongement modulaire :

1.a Construction des variétés abéliennes liées aux fonctions d'Appell.

On considère le système $(E_1) = (E_1(a; b; b'; c))$ d'équations différentielles partielles linéaires du second ordre d'Appell :

$$\begin{cases} x(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c - (a+b+1)x)\frac{\partial v}{\partial x} - by\frac{\partial v}{\partial y} - abv = 0 \\ y(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c - (a+b'+1)y)\frac{\partial v}{\partial y} - b'x\frac{\partial v}{\partial x} - ab'v = 0 \\ (x-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - b'\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Pour l'instant, on considère les paramètres a, b, b' et c comme étant des complexes tels que c n'est pas un entier négatif, $\Re a > 0$, $\Re(c-a) > 0$, voir [AK] p29.

Ce système a pour singularités régulières les 7 surfaces caractéristiques de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^2$ suivantes : $x, y = 0, 1, \infty; x = y$

Les deux premières lignes impliquent la troisième.

L'espace vectoriel des solutions de (E_1) est de dimension 3.

La série hypergéométrique d'Appell est la solution locale de (E_1) qui est égale à 1 en $(x; y) = (0; 0)$, et qui est définie par la série :

$$F_1(a; b; b'; c; x; y) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} \frac{(a; m+n)(b; m)(b'; n)}{(c; m+n)m!n!} \cdot x^m y^n$$

pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

Cette solution peut être prolongée analytiquement sur $(\mathbb{C} \setminus [1; \infty])^2$ sous la forme d'une intégrale appelée fonction hypergéométrique d'Appell (cf [AK] p 29) :

$$F_1(a; b; b'; c; x; y) = B(a; c-a)^{-1} \cdot \int_1^\infty u^{-\mu_0} \cdot (u-1)^{-\mu_1} \cdot (u-x)^{-\mu_2} \cdot (u-y)^{-\mu_3} \cdot du$$

cette intégrale étant définie pour $\Re \mu_4 < 1$ et $\Re \mu_1 < 1$.

où on pose désormais :

$$\begin{cases} \mu_0 = c - b - b' \\ \mu_1 = a + 1 - c \\ \mu_2 = b \\ \mu_3 = b' \\ \mu_4 = 1 - a \end{cases}$$

avec $\mu_i \in \mathbb{Q} \cap]0; 1[$ et N le plus petit dénominateur commun des μ_i .
On a toujours : $\sum_{i=0}^4 \mu_i = 2$.

De même, les autres solutions de (E_1) peuvent être mises sous forme intégrale de la façon suivante [AK] pp58-65 :

$$\int_g^h u^{-\mu_0} \cdot (u-1)^{-\mu_1} \cdot (u-x)^{-\mu_2} \cdot (u-y)^{-\mu_3} \cdot du \quad \text{où } g; h \in \{0; 1; x; y; \infty\}, g \neq h$$

En utilisant les cycles de Pochhammer, elles sont égales à un multiple de $\overline{\mathbb{Q}}^*$ près, à :

$$\int_{\gamma_{gh}} u^{-\mu_0} \cdot (u-1)^{-\mu_1} \cdot (u-x)^{-\mu_2} \cdot (u-y)^{-\mu_3} \cdot du$$

où γ_{gh} est un chemin d'intégration autour des points g et h (cf [Yo] p9).

Ces solutions intégrales peuvent être vues comme des périodes de formes différentielles de première espèce sur les courbes algébriques suivantes définies sur \mathbb{C} et paramétrées par $(x; y)$ (dont on donne ici le modèle affine) :

$$\mathcal{X}(x; y) : w^N = u^{\mu_0 N} \cdot (u-1)^{\mu_1 N} \cdot (u-x)^{\mu_2 N} \cdot (u-y)^{\mu_3 N}$$

On dispose du résultat suivant :

Théorème de P.T.D.M. : (Picard, Terada, Deligne, Mostow)

On considère les μ_i comme précédemment.

il existe $\theta_1; \theta_2 \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$, il existe $\gamma_0; \gamma_1; \gamma_2$ trois cycles tels que, sur l'ensemble des points réguliers $\mathcal{Q} := \{(x; y) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})^2 : x \neq y; x, y \neq 0, 1, \infty\}$

l'application développante

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{Q} &\longrightarrow B_2 \\ (x; y) &\longmapsto (\theta_1 \int_{\gamma_1} \omega(x; y) : \theta_2 \int_{\gamma_2} \omega(x; y) : \int_{\gamma_0} \omega(x; y)) \end{aligned}$$

soit localement biholomorphe, $PGL_3(\mathbb{C})$ -multivalente, non-dégénérée, d'image un sous-ensemble dense de la boule

$$B_2 = \{(z_1; z_2; z_0) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) : |z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_0|^2\};$$

de plus, le groupe de monodromie Δ du système d'équations différentielles (E) opère sur B_2 ;

et dès que : (ΣINT)

$$\text{Pour tout } i \neq j \in \{0; \dots; 4\}, (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \in \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \{\infty\} & \text{si } \mu_i = \mu_j \\ \mathbb{Z} & \text{si } \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

l'action de Δ est discontinue.

Remarques :

- A permutation des μ_i -près, il y a 49 groupes Δ (arithmétiques ou non) d'action discontinue, appelés groupes de P.T.D.M. dont les μ_i vérifient (ΣINT) (cf [DM] et [M]).

Parmi ces groupes, 27 vérifient la condition plus restrictive suivante :

$$(INT) : \text{Pour tout } i \neq j \in \{0; \dots; 4\}, (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

Hormis ces 49 groupes, 9 autres trouvés par J.Sauter [Sa], ne vérifient pas (ΣINT) et sont cependant d'action discontinue sur B_2 .

- On note \mathcal{Q}_{st} l'espace des points stables, défini comme suit (cf [CoWo2] paragraphe 4) :

$$\mathcal{Q}_{st} := (\{z = (z_0; \dots; z_4) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})^5\} \setminus (\{z : \exists z_i = z_j, i \neq j, \mu_i + \mu_j \geq 1\} \cup \{z : \exists z_i = z_j = z_k, i, j, k \text{ distincts}, \mu_i + \mu_j + \mu_k \geq 1\} \cup \{z : \exists z_i = z_j = z_k = z_l, i, j, k, l\})) / PGL_2(\mathbb{C}),$$

où $PGL_2(\mathbb{C})$ agit diagonalement sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^5$.

En utilisant l'homographie suivante :

$$V : \begin{aligned} \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto V(z) = \frac{(z-z_0)(z_1-z_4)}{(z-z_4)(z_1-z_0)}, \end{aligned}$$

on identifie \mathcal{Q} à un sous-espace de \mathcal{Q}_{st} , en faisant agir V ,

$(z_0; z_1; z_2; z_3; z_4)$ devient $(0; 1; V(z_2) = x; V(z_3) = y; \infty)$.

L'application ψ s'étend à l'espace \mathcal{Q}_{st} . En effet, au voisinage de $z_i = z_j$, on dispose de trois solutions linéairement indépendantes de (E_1) , dont deux sont holomorphes en ce point et la troisième s'écrit comme le produit de $(z_i - z_j)^{1-\mu_i-\mu_j}$ par une fonction holomorphe non nulle en ce point. On peut faire en sorte que, via l'homographie V , leur image reste dans B_2 .

Pour plus de détails voir [CoWo2] paragraphe 4.

\mathcal{Q} est dense dans \mathcal{Q}_{st} .

On peut identifier \mathcal{Q}_{st} à $\overline{B_2/\Delta}$.

La construction qui suit se trouve explicitée dans [CoWo2] paragraphe 2.

Pour chaque diviseur propre f de N , on note :

$$\mathcal{X}_f(x; y) : w^f = u^{\mu_0 N} \cdot (u-1)^{\mu_1 N} \cdot (u-x)^{\mu_2 N} \cdot (u-y)^{\mu_3 N}$$

$$\text{L'application : } \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(x; y) & \rightarrow & \mathcal{X}_f(x; y) \\ (u; w) & \mapsto & (u; w^{N/f}) \end{array}$$

induit un morphisme $m_f : \text{Jac}(\mathcal{X}(x; y)) \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{X}_f(x; y))$.

On note alors $T(x; y)$ le tore donné par la composante connexe à l'origine (pour la topologie classique) de l'intersection : $\bigcap_{f|N} \text{Ker } m_f$.

C'est une variété abélienne à polarisation principale.

On dispose de la décomposition suivante :

$$\text{Jac}((x; y)) \cong T(x; y) \oplus \sum_{f|N} \text{Jac}(\mathcal{X}_f(x; y))$$

$$\text{L'automorphisme } k : \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(x; y) & \rightarrow & \mathcal{X}(x; y) \\ (u; w) & \mapsto & (u; \zeta_N^{-1} \cdot w) \end{array}$$

où ζ_N est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité

induit une action sur $\text{Jac}(\mathcal{X}(x; y))$ définie par :

$$k^*(\omega(x; y)) = k^*(f(u) \cdot \frac{du}{w^\alpha}) = f(u) \cdot \frac{du}{(\zeta_N^{-1} \cdot w)^\alpha} = \zeta_N^\alpha \cdot \omega(x; y)$$

pour $\omega(x; y) \in H^0(\text{Jac}(\mathcal{X}(x; y)); \Omega)$.

De la même façon k^* agit sur $T(x; y)$, ce qui permet, d'une part, d'affirmer que $\mathbb{Q}(\zeta_N) \subseteq \text{End}_0(T(x; y))$ et donc de dire que $T(x; y)$ est de type IV (par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$), et d'autre part de décomposer l'espace vectoriel $H^0(T(x; y); \Omega)$ en sous-espaces propres pour cette action.

1.b Le théorème du plongement modulaire.

Comme dans le cas d'une variable, on sait donner une forme différentielle propre correspondante à la valeur propre ζ_N^s :

$$\omega_s(x; y) = u^{-\langle s\mu_0 \rangle} \cdot (u-1)^{-\langle s\mu_1 \rangle} \cdot (u-x)^{-\langle s\mu_2 \rangle} \cdot (u-y)^{-\langle s\mu_3 \rangle} \cdot du$$

Le sous-espace propre correspondant à la valeur propre ζ_N^s (c'est à dire que $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ agit sur V_s comme une multiplication par $\sigma_s(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ où σ_s est le plongement de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ dans \mathbb{C} qui à ζ_N associe ζ_N^s) a pour dimension (cf [CW] p359) :

$$\dim V_s := r_s = -1 + \sum_{i=0}^4 \langle s\mu_i \rangle$$

et pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, $r_s + r_{-s} = 3$.

On pose m le nombre de sous-espace propre de dimension 1, correspondants aux indices $s = i_1; \dots; i_m$ ($i_1 = 1$), il y en a donc également m de dimension 2, correspondants aux indices $s = -i_1; \dots; -i_m$ ($-i_1 = N-1 = -1 \pmod{N}$). Enfin, il y a $\frac{\varphi(N)}{2} - m$ qui sont de dimension 3, on les numérote $s = j_{m+1}; \dots; j_{\frac{\varphi(N)}{2}}$.

Ainsi

$$H^0(T(x; y); \Omega) = V_{i_1}^1 \oplus \dots \oplus V_{i_m}^1 \oplus V_{-i_1}^2 \oplus \dots \oplus V_{-i_m}^2 \oplus V_{i_{m+1}}^3 \oplus \dots \oplus V_{j_{\frac{\varphi(N)}{2}}}^3$$

(V_{ij}^k) est un sous-espace propre de dimension k associé à la valeur propre (ζ_N^{ij}) ,

on obtient alors $\dim T(x; y) = \frac{3\varphi(N)}{2}$

Le type de $T(x; y)$ est donné par :

$$\Phi = \sum_{s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} r_s \cdot \sigma_s$$

D'après les travaux de Shimura [Shi1], [Shi2], [Shi3], les variétés abéliennes à polarisation principale de dimension $\frac{3\varphi(N)}{2}$ à C.M. généralisée par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et de type Φ sont paramétrées par l'espace symétrique B_2^m de dimension :

$$2m = \sum_{s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times / \{\pm 1\}} r_s \cdot r_{-s}$$

Les $T(x; y)$ forment une sous-famille de dimension deux de cet espace, paramétrée par $(x; y) \in \mathcal{Q}_{st}$.

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème du plongement modulaire :

([CoWo2] Théorème 1)

Soit Δ un groupe de P.T.D.M.

Il existe un entier positif m , un groupe arithmétique Γ contenant Δ , agissant sur B_2^m et un plongement dit modulaire qui consiste en une injection analytique

$$F : B_2 \rightarrow B_2^m$$

compatible à une inclusion de groupes $h : \Delta \rightarrow \Gamma$ de sorte que :

$$\text{pour tout } \delta \in \Delta, \text{ pour tout } \tau \in B_2, F(\delta(\tau)) = h(\delta)(F(\tau))$$

L'application F induit un morphisme \mathbb{Q} -rationnel de $\overline{B_2/\Delta}$ vers $\overline{B_2^m/\Gamma}$, où ces espaces quotients sont munis de leur structure naturelle de variété projective définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

La variété $\overline{B_2^m/\Gamma}$ est la compactification d'une variété de Shimura qui paramétrise les classes d'isomorphisme des variétés abéliennes à C.M. généralisée par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et d'un type donné.

2. Ensemble exceptionnel et fonctions hypergéométriques d'Appell :

Dans un article de 1988 (voir [Wo]), J. Wolfart introduit l'ensemble exceptionnel dans le cas des fonctions hypergéométriques de Gauss. On construit ici l'ensemble exceptionnel relatif aux fonctions hypergéométriques d'Appell. C'est sa description en terme de variétés abéliennes qui donnera sa description en terme de fonctions hypergéométriques.

Pour ce faire, on utilise les résultats suivants :

Théorème II.2.1 : ([CoWo2] Théorème 2)

La variété abélienne A d'un point de multiplication complexe P le long de la surface caractéristique stable $S_{st}(ij) := \{z : z_i = z_j \text{ et } \mu_i + \mu_j < 1\}$ est isogène à un produit de trois variétés abéliennes à C.M. de dimension $\varphi(N)/2$.

La classe d'isogénie de chacun des facteurs est déterminée par la classe, modulo $\overline{\mathbb{Q}}^$, d'un certain élément $\omega(B)$ du réseau des périodes.*

Il y a deux possibilités :

1)(section 1) : si $\mu_i + \mu_j + \mu_k < 1$ alors au point $P=S(ijk)$ correspond la variété abélienne $A \cong A'_{lp} \times A_{ij}^2$

et $\omega(A'_{lp}) \sim B(1 - \mu_i; 1 - \mu_p)$, $\omega(A_{ij}) \sim B(\mu_i; \mu_j) \sim B(\mu_j; \mu_k) \sim B(\mu_k; \mu_i)$.

2)(section 2) : si $\mu_k + \mu_l < 1$ alors au point $P= S_{st}(ij) \cap S_{st}(kl)$

correspond la variété abélienne $A \cong A' \times A_{ij} \times A_{kl}$

et $\omega(A') \sim B(1 - \mu_i - \mu_j; 1 - \mu_k - \mu_l)$, $\omega(A_{ij}) \sim B(\mu_i; \mu_j)$, $\omega(A_{kl}) \sim B(\mu_k; \mu_l)$.

Théorème II.2.2 : ([CoWo2] Théorème 3)

a)(section 1) : Pour $\mu_0 + \mu_2 + \mu_3 < 1$, autour du point stable de C.M. $S(023)$ ($x=y=0$), on a trois solutions fondamentales de (E) données par des intégrales du type Euler à développement dans $c.\overline{\mathbb{Q}}[[x; y]]$.

Pour deux de ces solutions, on a

$$c = B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2)$$

et pour l'autre

$$c = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4).$$

b)(section 2) : Pour $\mu_0 + \mu_3 < 1$ et $\mu_1 + \mu_2 < 1$, autour du point stable de C.M. $S_{st}(03) \cap S_{st}(12)$ ($x=1; y=0$), on a trois solutions fondamentales de (E) données par des intégrales du type Euler à développement dans $c.\overline{\mathbb{Q}}[[x-1; y]]$.

Pour ces solutions, on a respectivement

$$c = B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3),$$

et

$$c = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_2),$$

et

$$c = B(1 - \mu_0 - \mu_3; 1 - \mu_1 - \mu_2).$$

Afin de se servir de ces résultats, on est amené à distinguer deux cas :

SECTION 1 : $\mu_1 + \mu_4 > 1$

Comparativement au cas d'une variable, le problème rencontré ici provient de la dimension de $T(x; y)$ qui est égale à $\frac{3\varphi(N)}{2}$; car donner une condition d'algébricité de la fonction F_1 , en une valeur $(x; y)$ de $\overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$ fixée, ne va permettre d'extraire de $T(x; y)$ qu'un seul facteur à C.M. de dimension $\frac{\varphi(N)}{2}$; mais alors, on ne maîtrise plus le caractère C.M. du facteur restant dans la décomposition de $T(x; y)$ puisqu'il est de dimension $\varphi(N)$ et que $[\mathbb{Q}(\zeta_N) : \mathbb{Q}] = \varphi(N)$.

On va s'intéresser tout d'abord aux solutions du système d'équations différentielles. De façon explicite, les trois solutions au voisinage du point $(x; y) = (0; 0)$ considérées dans le théorème 3 [CoWo2], énoncé ci-dessus, sont données par :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x; y) &:= \int_1^\infty \omega(x; y) = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4) \cdot F_1(a; b; b'; c; x; y) \\
\varphi_2(x; y) &:= \int_0^x \omega(x; y) = B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2) \cdot x^{1-\mu_0-\mu_2} \cdot (1-x)^{-\mu_1} \cdot (y-x)^{-\mu_3} \times \\
&\quad \times F_1(1-b; a+1-c; b'; 2+b'-c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\
\varphi_3(x; y) &:= \int_1^y \omega(x; y) = B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3) \cdot y^{1-\mu_0-\mu_3} \cdot (1-y)^{-\mu_1} \cdot (x-y)^{-\mu_2} \times \\
&\quad \times F_1(1-b'; b; a+1-c; 2+b-c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1})
\end{aligned}$$

Remarque :

Puisque l'on suppose ici que $\mu_1 + \mu_4 > 1$ c'est à dire $\mu_0 + \mu_2 + \mu_3 < 1$, en utilisant le 1) du théorème II.2.1, on sait que $B(\mu_0; \mu_2) \sim B(\mu_0; \mu_3)$ ou ce qui équivalent $B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2) \sim B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3)$. La constante c correspondante à la solution $\varphi_3(x; y)$ est donc bien celle annoncée dans le a) du théorème II.2.2.

Or, pour $\mu_1 + \mu_4 > 1$, les deux dernières solutions ne peuvent pas fournir de condition d'algèbricité de la fonction hypergéométrique correspondante, en la valeur $(x; y)$ fixée, car elles sont reliées à des périodes bêta de deuxième espèce. On va donc utiliser (lemme II.2.2) d'autres périodes de la variété abélienne $T(x; y)$ qui sont suggérées par le résultat suivant :

(On rappelle que dans le cas qui nous intéresse $\dim V_s + \dim V_{-s} = 1 + 2 = 3$)

On note : $H_1(T(x; y); \mathbb{Z}) = \langle \gamma_0; \gamma_1; \gamma_2 \rangle$

Lemme II.2.1 : (Corollaire 6 [ShWo])

Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, $T(x; y)$ est à C.M.

si et seulement s'il existe une base $\{\omega_{-1}; \omega'_{-1}\}$ de $V_{-1} \cap H^0(T(x; y); \Omega_{\overline{\mathbb{Q}}})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\gamma_0} \omega(x; y) \sim \int_{\gamma_1} \omega(x; y) \sim \int_{\gamma_2} \omega(x; y) \\ \int_{\gamma_0} \omega_{-1}(x; y) \sim \int_{\gamma_1} \omega_{-1}(x; y) \sim \int_{\gamma_2} \omega_{-1}(x; y) \\ \int_{\gamma_0} \omega'_{-1}(x; y) \sim \int_{\gamma_1} \omega'_{-1}(x; y) \sim \int_{\gamma_2} \omega'_{-1}(x; y) \end{array} \right.$$

Remarque à propos du lemme II.2.1 :

Dans [ShWo], les auteurs conjecturent que, comme dans le cas d'une variable, un seul $s \in R_1$ suffirait à déterminer la C.M. de la variété $T(x; y)$.

C'est à dire que l'on aurait :

Conjecture : (voir [ShWo] p24)

Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, $T(x; y)$ est C.M.

si et seulement s'il existe $s \in R_1$, $\int_{\gamma_0} \omega_s(x; y) \sim \int_{\gamma_1} \omega_s(x; y) \sim \int_{\gamma_2} \omega_s(x; y)$.

Comme ils en font la remarque, on sait que cette conjecture est vraie dans le cas où $\Delta(\mu_i)$ est arithmétique, car alors $R_1 = \{1\}$ en raison de la condition $\sum_{i=0}^4 \mu_i = 2$ et on a $m = 1$, dans ce cas, la conjecture est identique au théorème suivant :

Théorème : (P. Cohen-H. Shiga-J. Wolfart appliqué aux variétés $T(x; y)$)

Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, $T(x; y)$ est C.M.

$$\left(\frac{\int_{\gamma_1} \omega_1(x; y)}{\int_{\gamma_0} \omega_1(x; y)}; \frac{\int_{\gamma_2} \omega_1(x; y)}{\int_{\gamma_0} \omega_1(x; y)}; \dots; \frac{\int_{\gamma_1} \omega_m(x; y)}{\int_{\gamma_0} \omega_m(x; y)}; \frac{\int_{\gamma_2} \omega_m(x; y)}{\int_{\gamma_0} \omega_m(x; y)} \right) \in B_2^m \cap \overline{\mathbb{Q}}^{2m}.$$

(fin de la remarque).

Les formes différentielles que l'on utilisera sont celles correspondant à la valeur propre ζ_N^{-1} . On les construit dans le lemme suivant :

Lemme II.2.2 :

$\{\omega_{N-1}(x; y); u.\omega_{N-1}(x; y)\}$ est une base de V_{-1} ,

où $\omega_{N-1}(x; y) = u^{\mu_0-1} \cdot (u-1)^{\mu_1-1} \cdot (u-x)^{\mu_2-1} \cdot (u-y)^{\mu_3-1} \cdot du$

Démonstration du lemme II.2.2 :

Afin d'utiliser les résultats sur les conditions de régularité des formes différentielles qui figurent p62 [Ar], on posera :

$$\omega_{-1}(x; y) = \omega_{N-1}(x; y) = \frac{u^{a_0} \cdot (u-1)^{a_1} \cdot (u-x)^{a_2} \cdot (u-y)^{a_3}}{w^{N-1}} \cdot du$$

On note $\alpha \wedge \beta$ le plus grand diviseur commun des entiers α et β .

Les critères de régularité aux points $(u; w) \in \{(0; 0); (1; 0); (x; 0); (y; 0); (\infty; \infty)\}$ de la forme différentielle $\omega_{N-1}(x; y)$ sur $\mathcal{X}(x; y)$ sont alors donnés par :

$$(i) \quad a_0 \geq \frac{(N-1)A + N \wedge A}{N} - 1$$

$$(ii) \quad a_1 \geq \frac{(N-1)B + N \wedge B}{N} - 1$$

$$(iii) \quad a_2 \geq \frac{(N-1)C + N \wedge C}{N} - 1$$

$$(iv) \quad a_3 \geq \frac{(N-1)D + N \wedge D}{N} - 1$$

$$(v) \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \leq \frac{(N-1)(A+B+C+D) - N \wedge (A+B+C+D-N)}{N} - 1$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$, et $A = N\mu_0$; $B = N\mu_1$, $C = N\mu_2$, $D = N\mu_3$.

On s'intéresse à la forme différentielle construite à partir des a_i minimums, notés $(a_i)_{min}$.

Considérons par exemple la condition (i) :

$$\frac{(N-1)A + N \wedge A}{N} - 1 = (A-1) + \frac{N \wedge A - A}{N}$$

Ainsi, lorsque $A|N$, $N \wedge A - A = 0$ et

$$(a_0)_{min} = A - 1$$

et lorsque $A \nmid N$, $N \wedge A - A < 0$ et

$$(a_0)_{min} = E\left(\frac{(N-1)A + N \wedge A}{N} - 1\right) + 1 = (A-1) + E\left(\frac{N \wedge A - A}{N}\right) + 1$$

et, puisque $-1 < \frac{N \wedge A - A}{N} < 0$, on obtient $E\left(\frac{N \wedge A - A}{N}\right) = -1$

$$\text{et } (a_0)_{min} = A - 1.$$

Nous allons donc considérer

$$\begin{aligned}\omega_{N-1}(x; y) &= \frac{u^{A-1} \cdot (u-1)^{B-1} \cdot (u-x)^{C-1} \cdot (u-y)^{D-1}}{w^{N-1}} \cdot du \\ &= u^{\mu_0-1} \cdot (u-1)^{\mu_1-1} \cdot (u-x)^{\mu_2-1} \cdot (u-y)^{\mu_3-1} \cdot du\end{aligned}$$

Il reste à vérifier la condition de régularité (v) qui est équivalente à :

$$A + B + C + D - 4 \leq A + B + C + D - 1 - \frac{A+B+C+D+N \wedge (A+B+C+D-N)}{N}$$

$$\iff \frac{A+B+C+D+N \wedge (A+B+C+D-N)}{N} \leq 3$$

$$\text{or } \frac{A+B+C+D+N \wedge (A+B+C+D-N)}{N} \leq \frac{2(A+B+C+D)-N}{N}$$

donc $(v) \iff 2(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - 1 \leq 3 \iff 3 - 2\mu_4 \leq 3 \iff \mu_4 \geq 0$
ce qui est toujours vrai.

Les conditions de régularité sont donc vérifiées pour $\omega_{N-1}(x; y)$.

Concernant $u \cdot \omega_{N-1}(x; y)$, les conditions (i) à (iv) sont clairement réalisées et un calcul identique donnerait la condition (v) .

Enfin, ces deux formes différentielles appartiennent à V_{-1} puisqu'en les écrivant sous la forme :

$$\omega_{N-1}(x; y) = \frac{u^{A-1} \cdot (u-1)^{B-1} \cdot (u-x)^{C-1} \cdot (u-y)^{D-1}}{w^{N-1}} \cdot du$$

il est clair que $k^*(\omega_{N-1}(x; y)) = \zeta_N^{N-1} \cdot \omega_{N-1}(x; y) = \zeta_N^{-1} \cdot \omega_{N-1}(x; y)$.
Ceci termine la démonstration de ce lemme.

Pour démontrer le lemme II.2.4, nous avons besoin d'un résultat qui est une conséquence du théorème du sous-groupe analytique de G. Wüstholz [Wü], que l'on écrit de la façon suivante :

Lemme II.2.3 :

Soient A et B deux variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On note par V_A le $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel engendré par l'ensemble des nombres,

$$\left\{ \int_{\gamma} \omega : \omega \in H^0(A; \Omega_{\overline{\mathbb{Q}}}); \gamma \in H_1(A; \mathbb{Z}) \right\}$$

et de même pour B . Alors $V_A \cap V_B \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe A' sous-variété simple de A et B' sous-variété simple de B telles que $A' \cong B'$.

Lemme II.2.4 :

On suppose que $\mu_1 + \mu_4 > 1$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$(H_1) : F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$ implique que $T(x; y)$ contient un facteur isogène à A'_{14} dans sa décomposition.

$(H_2) : F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}}$ implique que $T(x; y)$ contient un facteur isogène à A_{02} dans sa décomposition.

A_{ij} (resp. A'_{ij}) est la variété abélienne utilisée dans le théorème II.2.1. Elle est liée à la période $B(\mu_i; \mu_j)$ (resp. $B(1 - \mu_i; 1 - \mu_j)$), de dimension $\frac{\varphi(N)}{2}$ et à C.M. par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ ou par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Elles sont des sous-variétés abéliennes extraites de la jacobienne d'une certaine courbe de Fermat, voir [WoWü].

Démonstration du lemme II.2.4 :

En effet, $F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \iff \int_1^\infty \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$

lorsque $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$.

Or, d'après le lemme II.2.3, les variétés $T(x; y)$ et $A = T(0; 0)$ (abus de notation) possèdent en commun, modulo $\overline{\mathbb{Q}}$, une période de première espèce, elles admettent donc à isogénie près une sous-variété simple en commun dans leur décomposition.

Cette sous-variété correspond à la période $B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$, elle est donc isogène à A'_{14} .

D'autre part, cf tableau p62 [AK],

$$B(\mu_2; \mu_0)^{-1} \cdot \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) = x^{1+\mu_0+\mu_2} \cdot (1-x)^{\mu_2-1} \cdot (y-x)^{\mu_3-1} \cdot F_1(\mu_2; 1 - \mu_1; 1 - \mu_3; \mu_0 + \mu_2; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) =$$

$$x^{1+\mu_0+\mu_2} \cdot (1-x)^{\mu_2-1} \cdot (y-x)^{\mu_3-1} \cdot F_1(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y})$$

donc, lorsque $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$F_1(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\iff \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_2; \mu_0) \cdot x^{1+\mu_0+\mu_2} \cdot (1-x)^{\mu_2-1} \cdot (y-x)^{\mu_3-1}$$

$$\iff \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_2; \mu_0)$$

Dès lors, en tenant le même raisonnement que précédemment,

$T(x; y)$ admet un facteur simple dans sa décomposition, isogène à la sous-variété A_{02} et correspondant à la période $B(\mu_2; \mu_0)$.

Théorème II.2.3 :

On suppose que $\mu_1 + \mu_4 > 1$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (H_1) : F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{array} \right.$$

si et seulement si $T(x; y) \hat{=} A'_{14} \times A_{02}^2 =: T(0; 0)$

En particulier, $T(x; y)$ est à C.M.

Démonstration du théorème II.2.3 :

$$T(x; y) \hat{=} A'_{14} \times A_{02}^2,$$

que l'on écrit $T(x; y) \hat{=} B \times C^2$ où $B \hat{=} A'_{14}$ et $C \hat{=} A_{02}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{End}_0(B) \simeq \text{End}_0(A'_{14}) \\ \text{End}_0(C) \simeq \text{End}_0(A_{02}) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \Lambda_{A'_{14}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \Lambda_C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \Lambda_{A_{02}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

où Λ_B (resp. Λ_C) est le réseau des périodes associé à la variété B (resp. C)

$$\iff (2) \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\Lambda_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda_{A'_{14}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \Phi(\Lambda_C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda_{A_{02}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

car $\Phi(\Lambda_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

on décompose le type Φ à l'aide de l'action de k^* comme précédemment :

pour tout $a \in \mathbb{Q}(\zeta_N) \subseteq \text{End}_0(T(x; y))$,

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} \Phi_B(a) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_C(a) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_C(a) \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{cases} \int_1^\infty \omega_1(x; y) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4) \\ \int_0^x \omega_{-1}(x; y) \sim B(\mu_2; \mu_0) \end{cases}$$

ce qui est équivalent aux conditions (H_1) et (H_2) .

Réciproquement, d'après le lemme II.2.4, (H_1) et (H_2) , voir (3), impliquent, d'après le 1) du théorème II.2.1, que $T(x; y)$ contient A'_{14} et A_{02} dans sa décomposition et donc $T(x; y) \hat{=} A'_{14} \times A_{02}^2$, ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Ce résultat permet déduire l'expression de l'ensemble exceptionnel lié à la fonction hypergéométrique d'Appell :

Lorsque $\mu_1 + \mu_4 > 1$, on notera l'**ensemble exceptionnel** :

$$\mathcal{E} := \{(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 : \begin{cases} (H_1) : F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}\}.$$

$$\text{SECTION 2 : } \begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$$

Bien que la méthode de construction de l'ensemble exceptionnel soit globalement identique à celle de la section 1, il faut ici apporter une modification au théorème II.2.3, que l'on écrit sous la forme suivante :

Théorème II.2.3' :

$$\text{Pour } \begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$$

1^{er} cas : Si $A_{03} \hat{=} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) : F_2(a; b; b'; a + b + 1 - c; c - b; 1 - x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b'; 1 - b; c - a; c - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

$$\iff T(x; y) \hat{=} A' \times A_{03} \times A_{12}$$

2^{eme} cas : Si $A_{03} \hat{\neq} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (H_1) \\ (H_2') : F_1(b; b + b' + 1 - c; 1 - b'; a + b + 1 - c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

$$\iff T(x; y) \hat{=} A' \times A_{03} \times A_{12}$$

Démonstration du théorème II.2.3' :

En effet, comme le suggère le théorème II.2.2, les solutions indépendantes de (E) au voisinage de $(x; y) = (1; 0)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(x; y) &= B(1 - \mu_1; 1 - \mu_0) \cdot x^{-b} \cdot y^{-b'} \times \\ &\quad \times F_1(b + b' + 1 - c; b; b'; b + b' + 1 - a; \frac{1}{x}; \frac{1}{y}) \\ &\sim B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2)) \cdot F_2(a; b; b'; a + b + 1 - c; c - b; 1 - x; y) \end{aligned}$$

cf [AK] et [CoWo2] pp681-682,

où $F_2(a; b; b'; c; c'; x; y)$ se développe en série à l'intérieur du domaine $|x| + |y| < 1$ de la façon suivante :

$$F_2(a; b; b'; c; c'; x; y) = \sum_{m; n \in \mathbb{N}} \frac{(a; m + n)(b; m)(b'; n)}{(c; m)(c'; n)m!n!} \cdot x^m \cdot y^n$$

et admet un prolongement analytique ailleurs déterminé par l'intégrale ci-dessus (à une constante multiplicative près).

Les deux autres solutins sont données par :

$$\begin{aligned} \int_0^y \omega(x; y) &= B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3) \cdot y^{b+1-c} \cdot (1 - y)^{c-a-1} \cdot (x - y)^{-b} \times \\ &\quad \times F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \end{aligned}$$

$$\int_1^x \omega(x; y) = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_2) \cdot x^{b+b'-c} \cdot (1-x)^{c-a-b} \cdot (y-x)^{-b'} \times \\ \times F_1(1-b; c-b-b'; b'; c+1-a-b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y})$$

Les solutions $\int_0^y \omega(x; y)$ et $\int_1^x \omega(x; y)$ étant reliées à des périodes bêta de deuxième espèce, on ne peut pas les utiliser ici. Par contre, on se sert de la forme différentielle propre $\omega_{N-1}(x; y)$ associée à la valeur propre ζ_N^{-1} , ce qui donne le même raisonnement que le théorème II.2.3 et un résultat similaire dans le premier cas.

Quant au deuxième cas :

$$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \int_0^1 \omega(x; y) \sim B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2)) \\ \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3) \end{cases}$$

$\implies T(x; y)$ admet A' et A_{03} dans sa décomposition, ce qui est équivalent à dire que $T(x; y) \hat{=} A' \times A_{03} \times A_{12}$ et de même

$$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2') \end{cases} \iff \begin{cases} \int_0^1 \omega(x; y) \sim B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2)) \\ \int_1^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_1; \mu_2) \end{cases}$$

$\implies T(x; y)$ admet A' et A_{12} dans sa décomposition, ce qui est équivalent à dire que $T(x; y) \hat{=} A' \times A_{03} \times A_{12}$.

Réciproquement, supposons que $T(x; y) \hat{=} A' \times C \times D$:

$$H^0(A'; \Omega_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \langle \omega; \dots; \omega_r; \omega_{r+1}; \dots; \omega_{\frac{\varphi(N)}{2}} \rangle$$

$$\text{où } H^0(C; \Omega_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \langle \omega_{N-1}; \dots; \omega_{-r}; \omega'_{r+1}; \dots; \omega'_{\frac{\varphi(N)}{2}} \rangle$$

$$H^0(D; \Omega_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \langle u \cdot \omega_{N-1}; \dots; u \cdot \omega_{-r}; \omega''_{r+1}; \dots; \omega''_{\frac{\varphi(N)}{2}} \rangle$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

$$\text{- soit } C \hat{=} A_{03} \iff \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3)$$

$$\iff (H_2) : F_1(b'; 1-b; c-a; c-b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\text{- soit } C \hat{=} A_{12} \iff \int_1^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_1; \mu_2)$$

$$\iff (H_2') : F_1(b; b+b'+1-c; 1-b'; a+b+1-c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème II.2.3'.

D'où , lorsque $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$, et $B(\mu_0; \mu_3) \sim B(\mu_1; \mu_2)$

on notera l'**ensemble exceptionnel** :

$$\mathcal{E} := \{(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 : \begin{cases} (H_1) : F_2(a; b; b'; a + b + 1 - c; c - b; 1 - x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b'; 1 - b; c - a; c - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases} \}$$

Et, lorsque $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$, et $B(\mu_0; \mu_3) \approx B(\mu_1; \mu_2)$

on notera l'**ensemble exceptionnel** :

$$\mathcal{E} := \{(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 : \begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (H_1) \\ (H'_2) \end{cases} \}$$

où $(H'_2) : F_1(b; b + b' + 1 - c; 1 - b'; a + b + 1 - c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

UTILISATION D'UNE CONJECTURE FAIBLE D'ANDRÉ-OORT.

L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser à la distribution des points de multiplication complexe correspondants aux variétés abéliennes $T(x; y)$, qui sont dans la même orbite de Hecke, sur les variétés modulaires considérées. En particulier, dans le premier paragraphe, il s'agit d'appliquer une conjecture faible d'André-Oort concernant les surfaces modulaires, encore non-démontrée (rappelée ci-après) au cas des fonctions hypergéométriques d'Appell via l'ensemble exceptionnel que nous avons construit au chapitre précédent.

Par la suite, nous ferons quelques remarques sur la finitude de l'ensemble exceptionnel, en nous intéressant notamment au cas particulier des groupes de P.T.D.M. vérifiant les conditions (INT) .

1. Utilisation d'une conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une surface :

On rappelle qu'une sous-variété d'une variété de Shimura est dite de type Hodge lorsqu'elle est une sous-variété de Shimura ou qu'elle est l'image par une correspondance de Hecke d'une sous-variété de Shimura (cf [Co2] ou [Ya]). On n'utilise ici que le point de vue des variétés abéliennes, et la seule propriété des correspondances de Hecke dont on se servira est qu'elles transforment une variété abélienne d'une variété de Shimura en une autre variété abélienne, isogène à la première. On donne ici une version faible d'une conjecture d'André-Oort (cf [CoWü]) pour les surfaces. L'utilité de cette version affaiblie pour la transcendance est discutée au cas des sous-variétés de dimension 1 dans [CoWü] et en dimension quelconque dans [Co2]. Nos résultats en donnent une application pour les surfaces plongées dans les variétés de Shimura.

Conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une surface :

Une surface algébrique S irréductible de $V(\mathbb{C})$ est de type Hodge si et seulement s'il existe un sous-ensemble de points à C.M. de S , dans la même classe d'isogénie, qui est Zariski dense dans S .

Remarque :

La démonstration de la suffisance de cette conjecture est connue.

Théorème III.1.1 :

On suppose que la conjecture faible d'André-Oort dans le cas d'une surface est vraie. Soit $\Delta(\mu_i)$ d'action discontinue sur B_2 .

L'image de \mathcal{E} est Zariski dense dans $B_2/\Delta(\mu_i)$ si et seulement si le groupe $\Delta(\mu_i)$ est arithmétique.

Démonstration du théorème III.1.1 :

On suppose vraie la version faible de la conjecture d'André-Oort, dans le cas d'une surface, énoncée ci-dessus.

On suppose que le groupe $\Delta(\mu_i)$ est arithmétique c'est à dire que $m = 1$ (où $F : B_2 \rightarrow B_2^m$).

$\Delta(\mu_i)$ est alors un sous-groupe arithmétique du groupe modulaire Γ .

En tant que surface de Shimura $B_2/\Delta(\mu_i)$ est de type Hodge. Or elle contient un point $P_0 = T(0; 0)$ (resp. $T(1; 0)$ suivant les cas) qui est à C.M.. Dès lors, en utilisant le sens connu de la conjecture ci-dessus, elle contient un ensemble Zariski dense de points qui sont isogènes à P_0 .

Or, d'après les théorèmes II.2.3 et II.2.3', on sait décrire l'ensemble exceptionnel en terme de variétés abéliennes de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = \{(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 : T(x; y) \cong T(0; 0)\}$$

pour ce qui est de la section 1, et on remplace $T(0; 0)$ par $T(1; 0)$ dans le cas de la section 2.

Ainsi, par construction, cet ensemble de points est l'ensemble \mathcal{E} et $B_2/\Delta(\mu_i)$ étant de type Hodge, il est Zariski dense dans $B_2/\Delta(\mu_i)$.

Réciproquement, supposons que l'image de l'ensemble exceptionnel dans $B_2/\Delta(\mu_i)$ soit Zariski dense.

On se sert là encore de la description de l'ensemble \mathcal{E} en terme de variétés abéliennes.

En utilisant alors la conjecture faible écrite ci-dessus, on dispose d'un ensemble Zariski dense de variétés abéliennes isogènes à une variété fixée, on en déduit que $B_2/\Delta(\mu_i)$ est une variété de type Hodge.

Or en calculant les groupes modulaires possibles $\Gamma(T; \mathcal{M})$ correspondant aux espaces de paramètres B_2^m dans les travaux de G. Shimura [Shi1], [Shi3], on remarque que $\Gamma(T; \mathcal{M})$ doit être un sous-groupe de $GL_3(O_{F(\alpha)})$ (où F est un corps de nombres totalement réel de degré m sur \mathbb{Q} et $F(\alpha)$ une extension quadratique imaginaire de F).

En particulier, ces groupes modulaires doivent préserver le réseau \mathcal{M} , ce qui en fait des groupes arithmétiques, il est donc nécessaire que $\Delta(\mu_i)$ soit arithmétique pour qu'il puisse être un tel groupe modulaire.

Remarques :

- Il n'est pas étonnant de trouver un tel résultat, en effet, comme les auteurs l'expliquent dans [CoWü], cette conjecture "reflète une situation typique dans la théorie de la transcendance. Lorsqu'une fonction transcendante (F_1 ici) prend une valeur algébrique, il doit y avoir une raison arithmétique et lorsque cela se produit souvent, cela doit se traduire en terme de géométrie arithmétique".

- On verra dans le paragraphe suivant (voir lemme III.2.1), que dans le cas des groupes de P.T.D.M., il existe également un critère, trouvé par P. Deligne et G. Mostow dans [DM], déterminant leur arithméticité.

La proposition suivante, qui utilise le sens connu du résultat précédent, fournit un contre-exemple à une conjecture de Coleman qui affirmait qu'il n'existait qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de courbes de genre $g \geq 4$ dont la jacobienne est à C.M. :

Proposition III.1.2 :

Il existe une infinité de couples $(x; y)$ de $\overline{\mathbb{Q}}^2$ pour lesquels la jacobienne de la courbe algébrique : $\mathcal{Y}(x; y) : v^5 = u(u-1)(u-x)(u-y)$ de genre $g=6$, est à multiplication complexe.

Démonstration de la proposition III.1.2 :

On considère donc la famille de courbes algébriques, paramétrée par $(x; y) \in \mathcal{Q}_{st}$ suivante :

$$\mathcal{Y}(x; y) : v^5 = u(u-1)(u-x)(u-y)$$

Chacune de ces courbes algébriques est birationnellement isomorphe à la courbe algébrique :

$$\mathcal{X}(x; y) : w^5 = [u(u-1)(u-x)(u-y)]^2$$

L'isomorphisme birationnel étant donné par $(u; v) \mapsto (u; w = v^2)$ d'inverse

$$(u; w) \mapsto (u; v = \frac{u(u-1)(u-x)(u-y)}{w^2}).$$

Puisque $N = 5$ est premier, la décomposition de la jacobienne de la courbe $\mathcal{X}(x; y)$ du premier paragraphe donne :

$$Jac \mathcal{X}(x; y) \hat{=} T(x; y)$$

et le genre de la courbe considérée est :

$$g = \dim Jac \mathcal{X}(x; y) = \dim T(x; y) = \frac{3\varphi(5)}{2} = 6.$$

Or, le groupe de monodromie associé $\Delta(\frac{2}{5}; \dots; \frac{2}{5})$ est arithmétique, on peut donc utiliser le sens connu du théorème III.1.1.

Cela implique que l'image de \mathcal{E} est Zariski dense dans $B_2/\Delta(\mu_i)$, et en particulier qu'il existe une infinité de valeurs de $(x; y)$ pour lesquelles $Jac \mathcal{X}(x; y) \hat{=} T(1; 0)$ et donc pour lesquelles $Jac \mathcal{X}(x; y)$ est à C.M. par $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ou par un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_5)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque :

C'est le premier contre-exemple dans le cas de la dimension 2. Dans le cas de la dimension 1, deux autres contre-exemples à cette conjecture avaient été trouvés par J. de Jong et R. Noot (voir [dJN]) dans le cas de courbes de genre $g = 4$ ou 6. On peut également se référer aux travaux de P. Cohen et G. Wüstholz dans [CoWü] pour une autre démonstration (voir le corollaire I.2.3 du premier chapitre).

2. Quelques remarques concernant les groupes de P.T.D.M. vérifiant la condition (INT).

Contrairement au cas d'une variable, la Zariski densité n'est plus équivalente à l'infinité de points à C.M.

On peut même démontrer que pour tous les groupes de P.T.D.M., arithmétiques ou non-arithmétiques, satisfaisant la condition (INT), on a $\text{Card } \mathcal{E} = \infty$, c'est à dire qu'il existe une infinité de points à C.M. isogènes à une variété C.M. fixée (voir le proposition III.2.1 qui suit). En effet :

Proposition III.2.1 :

Pour tous les groupes arithmétiques de P.T.D.M. satisfaisant la condition (INT) et pour tous les couples $(i; j)$, $i \neq j \in \{0; \dots; 4\}$, $\mu_i + \mu_j < 1$, le groupe triangulaire $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ est arithmétique.

Afin de démontrer cette proposition, on utilise les lemmes suivants : ce premier lemme est un critère déterminant l'arithméticité des groupes de P.T.D.M.

Lemme III.2.1 : (cf [DM] p76)

Pour tous les groupes $\Delta(\mu_0; \dots; \mu_s)$ satisfaisant la condition (Σ INT) : $\Delta(\mu_0; \dots; \mu_s)$ est arithmétique si et seulement si pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times - \{1; N-1\}$, $r_s = 0$ ou $\text{Card}(S-1)$.

On rappelle que : pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, pour tout $i \neq j \in \{0; \dots; 4\}$, $r_s = -1 + \langle s\mu_0 \rangle + \dots + \langle s\mu_4 \rangle$ et lorsque $\mu_i + \mu_j < 1$ en utilisant la remarque [CoWo2] p679, on peut décomposer le tore $T(x; y) \cong A_{ij} \times T$, le long de la surface caractéristique S_{ij} , de telle sorte que le type de T soit déterminé par :

$$r_s^{(1)} = -1 + \langle s(\mu_i + \mu_j) \rangle + \langle s\mu_k \rangle + \langle s\mu_l \rangle + \langle s\mu_p \rangle$$

dès lors, $r_s^{(1)} = r_s + \langle s(\mu_i + \mu_j) \rangle - \langle s\mu_i \rangle - \langle s\mu_j \rangle$

On peut remarquer que $r_1 = 1$ et que la condition $\mu_i + \mu_j < 1$ implique $r_1^{(1)} = 1$.

Lemme III.2.2 :

Pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times - \{1; N - 1\}$, $r_s = 0$ ou 3 implique $r_s^{(1)} \neq 1$.

Démonstration du lemme III.2.2 :

On utilise le cas S=4 du lemme III.2.1.

En effet, $0 \leq \langle a \rangle < 1$ donc $-2 < \langle a \rangle - \langle b \rangle - \langle c \rangle < 1$
d'où $r_s - 2 < r_s + \langle s(\mu_i + \mu_j) \rangle - \langle s\mu_i \rangle - \langle s\mu_j \rangle < r_s + 1$
et $r_s - 2 < r_s^{(1)} < r_s + 1$

Ainsi, pour $r_s = 0$; $-2 < r_s^{(1)} < 1$
tandis que pour $r_s = 3$; $1 < r_s^{(1)} < 4$
donc $r_s^{(1)} \neq 1$ lorsque $r_s = 0$ ou 3 .

Ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Démonstration de la proposition III.2.1 :

Supposons que $\Delta(\mu_0; \dots; \mu_4)$ soit arithmétique.

Soit $i \neq j \in \{0; \dots; 4\}$ tels que $\mu_i + \mu_j < 1$ (il en existe toujours puisque $\sum_{i=0}^4 \mu_i = 2$), alors d'après le lemme III.2.1,
pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times - \{1; N - 1\}$, $r_s = 0$ ou 3

et d'après le lemme III.2.2, pour tout $s \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times - \{1; N - 1\}$, $r_s^{(1)} \neq 1$
or, $r_s^{(1)}$ ne pouvant prendre que les valeurs 0; 1 ou 2, le groupe $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ vérifie la condition du lemme III.2.1, c'est à dire qu'il est arithmétique.

Remarques :

- C'est cette proposition, et en particulier le cas des groupes $\Delta(\mu_i; \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ arithmétiques, qui a inspiré le tableau qui suit. Dans le cas des groupes non-arithmétiques de P.T.D.M. vérifiant la condition (INT), il se trouve que la proposition reste, en partie vraie :

en effet, dans ce cas, il existe toujours des couples $(i; j)$ (listés dans le tableau) tels que $\mu_i + \mu_j < 1$ et $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ est arithmétique ; malheureusement on ne dispose pas d'une démonstration similaire car si on sait qu'il existe un $s_0 \neq 1; N - 1$ tel que $r_{s_0} = 1$, on ne sait pas lequel (il dépend des μ_i), et si on sait qu'il existe des couples $(i; j)$ tels que $\mu_i + \mu_j < 1$, là encore, on ne sait lequel donnera un groupe triangulaire arithmétique.

- Les conditions de demi-intégrabilité (ΣINT) ne permettent pas de définir les entiers $(p, q; r)$, c'est pourquoi cette étude se restreint aux cas (INT).

- Pour tout $\{i; j; k; l; p\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, les groupes triangulaires $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ considérés sont toujours d'action discontinue sur \mathcal{H} car lorsque le quintuplet $(\mu_0; \dots; \mu_4)$ vérifie la condition (INT), le quadruplet $(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ aussi.

Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que :

$$(1 - (\mu_i + \mu_j) - \mu_k)^{-1} = (-1 + \mu_l + \mu_p)^{-1} \text{ (car } \sum_{i=0}^4 \mu_i = 2)$$

$$= -(1 - \mu_l - \mu_p)^{-1} \in \mathbb{Z} \text{ (par hypothèse).}$$

Le tableau ci-après donne la liste des groupes $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ correspondant au(x) couple(s) $(i; j)$ de la proposition III.2.1 et de la remarque qui suit (cas non-arithmétiques) et aux surfaces $S_{st}(ij)$ du proposition III.2.1 qui lui succède.

On inscrit dans la première colonne du tableau ci-dessous le numéro du groupe correspondant dans la liste donnée par Deligne et Mostow dans [DM].

$(p; q; r)$ est le triplet arithmétique correspondant à :

$$(p; q; r) = (|1 - \mu_i - \mu_j - \mu_k|^{-1}; |1 - \mu_i - \mu_j - \mu_l|^{-1}; |1 - \mu_k - \mu_l|^{-1})$$

	N	$N\mu_0$	$N\mu_1$	$N\mu_2$	$N\mu_3$	$N\mu_4$	$(i; j)$	$(p; q; r)$
1	3	1	1	1	1	2	(0;1),(0;2),(0;3), (1;2),(1;3),(2;3)	(3; ∞ ; ∞)
2	4	2	2	2	1	1	(0;3),(0;4), (1;3),(1;4): (2;3),(2;4),(3;4)	(2; ∞ ; ∞): (4;4; ∞)
3	4	1	1	1	2	3	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3)	(4;4; ∞): (2; ∞ ; ∞)
4	5	2	2	2	2	2	les 10 couples $(i; j)$	(5;5;5)
5	6	2	2	2	3	3	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(0;4),(1;3), (1;4),(2;3),(2;4)	(6;6; ∞): (3;6;6)
6	6	3	3	3	1	2	(0;3),(1;3),(2;3): (0;4),(1;4),(2;4): (3;4)	(6;6; ∞): (3;3; ∞): (∞ ; ∞ ; ∞)
7	6	4	3	2	2	1	(0;4),(2;3): (1;2),(1;3): (2;4),(3;4): (1;4)	(3;6;6): (2;6; ∞): (6;6; ∞): (3; ∞ ; ∞)
8	6	2	2	2	1	5	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3)	(2;6; ∞): (3;6;6)
9	8	3	3	3	3	4	(0;1),(0;2),(0;3), (1;2),(1;3),(2;3): (0;4),(1;4),(2;4),(3;4)	(4;8;8): (4;4;4)
10	8	2	2	2	5	5	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3), (0;4),(1;4),(2;4)	(4;8;8): (2;8;8)
11	8	3	3	3	1	6	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3): (3;4)	(2;8;8): (4;8;8): (4;4;4)
12	9	4	4	4	2	4	(0;1),(0;2),(1;2), (0;4),(1;4),(2;4): (0;3),(1;3),(2;3),(3;4)	(3;3;9): (9;9;9)
13	10	4	4	4	1	7	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3): (3;4)	(2;5;10): (5;10;10): (5;5;5)
14	12	5	5	5	4	5	(0;1),(0;2),(0;4), (1;2),(1;4),(2;4): (0;3),(1;3),(2;3),(3;4)	(4;4;6): (6;6;6)

	N	$N\mu_0$	$N\mu_1$	$N\mu_2$	$N\mu_3$	$N\mu_4$	$(i; j)$	$(p; q; r)$
15	12	6	5	5	4	4	(0;1),(0;2): (0;3),(0;4): (1;2): (3;4)	(3;4;4): (4;4;6): (3;12;12): (6;12;12)
16	12	5	5	5	3	6	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3): (0;4),(1;4),(2;4): (3;4)	(3;4;12): (6;12;12): (3;3;6): (6;6;6)
17	12	4	4	4	5	7	(0;3),(1;3),(2;3): (0;4),(1;4),(2;4)	(3;12;12) (3;4;4)
18	12	7	6	5	3	3	(0;3),(0;4): (1;2)	(3;4;12): (2;6;6)
19	12	7	7	4	4	2	(0;2),(0;3),(1;2),(1;3): (0;4),(1;4): (2;3): (2;4),(3;4)	(2;4;12): (3;12;12): (4;4;6): (6;12;12)
20	12	8	5	5	3	3	(0;3),(0;4): (1;2): (1;3),(1;4),(2;3),(2;4): (3;4)	(3;3;6): (2;12;12): (3;12;12): (6;12;12)
21	12	5	5	5	1	8	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3): (3;4)	(2;4;12): (6;12;12) (6;6;6)
22	12	3	3	3	7	8	(0;3),(1;3),(2;3): (0;4),(1;4),(2;4)	(2;12;12): (2;6;6)
23	12	3	3	3	5	10	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3)	(3;4;12): (2;12;12):
24	15	6	6	6	4	8	(0;4),(1;4),(2;4): (3;4)	(4;4;5): (5;5;5)
25	18	8	8	8	1	11	(0;1),(0;2),(1;2): (0;3),(1;3),(2;3): (3;4)	(2;3;18): (9;18;18): (9;9;9)
26	20	5	5	5	11	14	(0;4),(1;4),(2;4)	(2;5;5)
27	24	9	9	9	7	14	(0;1),(0;2),(1;2): (0;4),(1;4),(2;4): (3;4)	(3;8;24): (3;3;4): (4;4;4)

Corollaire III.2.1 :

Pour tous les groupes de P.T.D.M. satisfaisant la condition (INT), il existe une surface caractéristique stable $S_{st}(ij)$ sur laquelle se trouve une infinité de points à C.M.

Démonstration du corollaire III.2.1 :

On a vu dans le tableau précédent que pour de tels groupes il existe toujours un couple $(i; j)$ tel que $i \neq j \in \{0; \dots; 4\}$ et $\mu_i + \mu_j < 1$ avec $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ arithmétique.

Or, en travaillant le long de la surface caractéristique correspondante $S_{st}(ij)$ (pour fixer les idées, on prendra $i = 0$ et $j = 2$), on a $T(x; y) \hat{=} A_{02} \times T(y)$ (cf [CoWo2] paragraphe 5) où $T(y)$ est la variété abélienne à polarisation principale décrite dans le cas d'une variable, correspondant à la surface de Riemann :

$$\mathcal{X}(y) : w^N = u^{(\mu_0 + \mu_2)N} \cdot (u - 1)^{\mu_1 N} \cdot (u - y)^{\mu_3 N}$$

et au groupe triangulaire $\Delta(\mu_0 + \mu_2; \mu_1; \mu_3; \mu_4)$.

Or, $T(x; y)$ est à C.M. si et seulement si $T(y)$ est à C.M. puisque A_{02} une variété abélienne à C.M., et d'après le théorème de l'ensemble exceptionnel dans le cas d'une variable,

$\Delta(\mu_0 + \mu_2; \mu_1; \mu_3; \mu_4)$ est arithmétique si et seulement si $\text{Card} \{y \in \overline{\mathbb{Q}} : T(y) \hat{=} T(0)\} = \infty$.

C'est le cas des groupes $\Delta(\mu_i + \mu_j; \mu_k; \mu_l; \mu_p)$ que nous considérons ici, cela qui implique en particulier que :

$$\text{Card} \{y \in \overline{\mathbb{Q}} : T(y) \text{ est C.M.}\} = \infty$$

donc

$$\text{Card} \{(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap S_{st}(ij) : T(x; y) \text{ est C.M.}\} = \infty$$

Ainsi, le long de la surface caractéristique $S_{st}(ij)$, il existe une infinité de variétés abéliennes $T(x; y)$ qui sont à C.M. (isogènes à une variété abélienne fixée). Ceci achève la démonstration.

Les $T(x; y)$ à C.M. que nous considérons ici sont tous dans la même classe d'isogénie, dès lors, en utilisant le résultat de [EdYa], on peut affirmer que :

Corollaire III.2.2 :

Pour tous les groupes de P.T.D.M. satisfaisant la condition (INT), il existe toujours une courbe de type Hodge plongée dans la variété modulaire B_2^m/Γ .

Cette courbe correspond à la surface caractéristique stable $S_{st}(ij)$ du tableau.

VALEURS TRANSCENDANTES DE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'APPELL.

On s'intéresse ici aux valeurs transcendentes des fonctions d'Appell. Le but est de donner un résultat qui conduit à de telles valeurs sans avoir à choisir les paramètres a, b, b' et c .

Il faut remarquer en effet que dans certains cas, on peut donner des informations concernant la transcendance de valeurs de ces fonctions .

Prenons l'exemple traité par J. Wolfart dans [Wo2].

Considérons la fonction :

$$F_1\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; \frac{3}{2}; x; y\right) = B\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \int_1^\infty u^{-\frac{7}{12}} \cdot (u-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot (u-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (u-y)^{-\frac{5}{12}} \cdot du$$

La période $B\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ est de deuxième espèce car $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} > 1$.

Intéressons nous à la période $\int_1^\infty \omega(x; y) :$

- Lorsque $(x; y) = (1; 1)$, $\int_1^\infty \omega(1; 1) \sim B\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$ est de deuxième espèce.

- Lorsque $x = 0$, $\int_1^\infty \omega(0; y) = \int_1^\infty u^{-\frac{13}{12}} \cdot (u-1)^{-\frac{3}{12}} \cdot (u-y)^{-\frac{5}{12}} \cdot du$ est de deuxième espèce car $\frac{13}{12} > 1$.

- Lorsque $y = 0$, $\int_1^\infty \omega(x; 0) = \int_1^\infty u^{-1} \cdot (u-1)^{-\frac{3}{12}} \cdot (u-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot du$ est de troisième espèce.

- Dans les autres cas, $\int_1^\infty \omega(x; y)$ est de première espèce sur la courbe algébrique correspondante.

De ces renseignements, on peut déduire différents résultats. D'une part, pour $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q} - \{(x; 0); (0; y); (1; 1) : (x; 0) \in \mathcal{Q}; (0; y) \in \mathcal{Q}\}$ la fonction $F_1(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; \frac{3}{2}; x; y)$ est égale au quotient de période non nulles, l'une de première espèce et l'autre de deuxième espèce, donc prend une valeur transcendante.

D'autre part, pour $y \in \overline{\mathbb{Q}}$, $F_1(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; \frac{3}{2}; 0; y) = F(\frac{3}{4}; \frac{5}{12}; \frac{3}{2}; y)$ et cette fonction hypergéométrique de Gauss est reliée au groupe de monodromie $\Delta(\mu_0 + \mu_2; \mu_1; \mu_3; \mu_4) = \Delta(2; 3; 3)$ qui est fini (car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$), c'est donc une fonction algébrique. Ainsi, pour $y \in \overline{\mathbb{Q}}$, $F_1(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; \frac{3}{2}; 0; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

L'objectif de ce chapitre est de voir de quelle façon la localisation de certains points de multiplication complexe, ou encore certaines valeurs algébriques de fonctions hypergéométriques d'Appell, permettent de déduire des valeurs transcendentes de ces fonctions en des points algébriques. Ces résultats "rappellent" celui obtenu au premier chapitre pour le cas d'une variable : théorème I.2.1.

Pour obtenir les résultats cherchés, les hypothèses à imposer consistent notamment à s'assurer que la variété abélienne considérée est à multiplication complexe.

Mais comme nous l'avons déjà signalé au début du paragraphe 2, le problème rencontré ici provient de la dimension de $T(x; y)$ qui est égale à $\frac{3\varphi(N)}{2}$. En effet, donner une condition d'algébricité de la fonction F_1 , en une valeur $(x; y)$ de $\overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$ fixée, ne va suffir plus pour affirmer que la variété $T(x; y)$ est à multiplication complexe.

Il existe donc deux possibilités qui permettront de contourner le problème :
- soit imposer la multiplication complexe de $T(x; y)$ (Théorèmes IV.1 et IV.1')
- soit imposer une deuxième condition de valeur algébrique d'une autre fonction hypergéométrique d'Appell en un point algébrique (Théorèmes IV.2 et IV.2').

SECTION 1 : $\mu_1 + \mu_4 > 1$

Afin d'utiliser le lemme II.2.1 et l'équivalence entre les périodes de variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on doit s'assurer du caractère C.M. de la variété $T(x; y)$.

En imposant cette condition, on obtient :

Théorème IV.1 :

On suppose que $\mu_1 + \mu_4 > 1$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$\left\{ \begin{array}{l} T(x; y) \text{ est à C.M.} \\ F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{array} \right.$

entraîne

Démonstration du théorème IV.1 :

De façon explicite, les trois solutions au voisinage du point $(x; y) = (0; 0)$

considérées dans le a) du théorème II.2.2, sont données par :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x; y) &:= \int_1^\infty \omega(x; y) = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4) \cdot F_1(a; b; b'; c; x; y) \\
\varphi_2(x; y) &:= \int_0^x \omega(x; y) \\
&= B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2) \cdot x^{1-\mu_0-\mu_2} \cdot (1-x)^{-\mu_1} \cdot (y-x)^{-\mu_3} \times \\
&\quad \times F_1(1-b; a+1-c; b'; 2+b'-c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\
\varphi_3(x; y) &:= \int_1^y \omega(x; y) \\
&= B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3) \cdot y^{1-\mu_0-\mu_3} \cdot (1-y)^{-\mu_1} \cdot (x-y)^{-\mu_2} \times \\
&\quad \times F_1(1-b'; b; a+1-c; 2+b-c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

si et seulement si

$$\int_1^\infty \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4). \quad (1)$$

De plus, d'après le lemme II.2.1, et en utilisant les cycles de Pochhammer pour modifier les chemins d'intégration, on trouve que $T(x; y)$ est à C.M. implique

$$\int_1^\infty \omega(x; y) \sim \int_0^x \omega(x; y) \sim \int_1^y \omega(x; y). \quad (2)$$

Les conditions (1) et (2) réunies donnent alors, pour la solution $\varphi_2(x; y)$ que

$$\int_0^x \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$$

si et seulement si

$$\begin{aligned}
&B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2) \cdot x^{1-\mu_0-\mu_2} \cdot (1-x)^{-\mu_1} \cdot (y-x)^{-\mu_3} \times \\
&\quad \times F_1(1-b; a+1-c; b'; 2+b'-c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\
&\quad \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)
\end{aligned}$$

et cela, si et seulement si,

$$B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2) \cdot F_1(1-b; a+1-c; b'; 2+b'-c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$$

Or, puisque $\mu_1 + \mu_4 > 1$, $B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$ est de première espèce, alors que $\mu_0 + \mu_2 < 1$ donnent un facteur $B(1 - \mu_0; 1 - \mu_2)$ de deuxième espèce, tous les deux sont des périodes sur la variété abélienne A , notée abusivement $T(0; 0)$, citée dans le théorème A1).

Mais d'après le lemme I.2.2 voir [Wo] deux telles périodes non nulles sur une même variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendantes, d'où :

$$F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

On tient le même raisonnement avec $\varphi_3(x; y)$ pour achever la démonstration.

Remarque :

Lorsque $\mu_i + \mu_j > 1$ avec $(i; j) \neq (1; 4)$, on doit remplacer la période $\int_1^\infty \omega(x; y)$ par la période $\int_g^h \omega(x; y)$, $g, h \in \{0; 1; x; y; \infty\}$ correspondant à $B(1 - \mu_i; 1 - \mu_j)$ valable au voisinage d'un autre point.

Les solutions $\varphi_2(x; y)$ et $\varphi_3(x; y)$ changent elles aussi. Et on obtient le même type de résultat, par exemple :

Pour $\mu_0 + \mu_4 > 1$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$\left\{ \begin{array}{l} T(x; y) \text{ est à C.M.} \\ F_1(a; b; b'; a + b + b' + 1 - c; 1 - x; 1 - y) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{array} \right.$

entraîne $\left\{ \begin{array}{l} F_1(1 - b; c - b - b'; b'; c + 1 - a - b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(1 - b'; b; c - b - b'; c + 1 - a - b'; \frac{y-1}{y}; \frac{y-1}{y-x}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{array} \right.$

On souhaite maintenant enlever la condition sur $T(x; y)$ afin de ne conserver que des conditions sur les fonctions hypergéométriques d'Appell.

Comme nous l'avons déjà signalé le problème rencontré est que la seule condition (H_1) ne suffit pas à s'assurer du caractère C.M. de $T(x; y)$, on va donc en imposer une deuxième, celle qui apparaît dans l'ensemble exceptionnel, puisqu'alors $T(x; y)$ est isogène à une variété abélienne fixée (notée $T(0; 0)$) à C.M.

Théorème IV.2 :

On suppose que $\mu_1 + \mu_4 > 1$. Pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) : F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

entraîne $\begin{cases} (C_1) : F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C'_1) : F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C_2) : F_1(2 - a; 1 - b; 1 - b'; 3 - c; x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Démonstration du théorème IV.2 :

On commence par décrire explicitement les nouvelles formes différentielles utilisées :

pour $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , d'après le théorème II.2.3, puisque $T(x; y)$ est à C.M., on peut appliquer le lemme II.2.1 aux formes différentielles $\omega = \omega_1(x; y)$, $\omega_{-1} = \omega_{N-1}(x; y)$ et $\omega'_{-1} = u.\omega_{N-1}(x; y)$, ce qui se traduit, en faisant agir les cycles de Pochhammer pour modifier les chemins d'intégration, par :

$$\begin{cases} (a) \int_1^\infty \omega(x; y) \sim \int_0^x \omega(x; y) \sim \int_0^y \omega(x; y) \\ (b) \int_1^\infty \omega_{N-1}(x; y) \sim \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \\ (c) \int_1^\infty u.\omega_{N-1}(x; y) \sim \int_0^x u.\omega_{N-1}(x; y) \sim \int_0^y u.\omega_{N-1}(x; y) \end{cases}$$

Or, d'une part, $(H_1) \iff \int_1^\infty \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$

et, d'autre part,

$$\int_0^x \omega(x; y) = B(1 - \mu_2; 1 - \mu_0).x^{1-\mu_0-\mu_2}.(1-x)^{-\mu_2}.(y-x)^{-\mu_3} \times \\ \times F_1(1 - \mu_2; \mu_1; \mu_3; 2 - \mu_0 - \mu_2; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y})$$

Ainsi, (a) implique

$B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4) \sim B(1 - \mu_2; 1 - \mu_0).F_1(1 - \mu_2; \mu_1; \mu_3; 2 - \mu_0 - \mu_2; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y})$
 mais les périodes $B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4)$ et $B(1 - \mu_2; 1 - \mu_0)$ étant respectivement de première et de deuxième espèce en raison de l'hypothèse $\mu_1 + \mu_4 > 1$, elles ne peuvent être $\overline{\mathbb{Q}}$ -liées,

donc $F_1(1 - \mu_2; \mu_1; \mu_3; 2 - \mu_0 - \mu_2; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$

En utilisant le même procédé, on trouve que :

Pour $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, $\int_1^\infty \omega(x; y) \sim \int_0^y \omega(x; y)$
entraîne $F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-1}; \frac{y}{y-x}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$

et $\int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim \int_1^\infty \omega_{N-1}(x; y)$
entraîne $F_1(2 - a; 1 - b; 1 - b'; 3 - c; x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}}$

Ce qui achève la démonstration du théorème IV.2.

Remarque :

Pour $\mu_i + \mu_j > 1$, $(i; j) \neq (1; 4)$ les trois chemins d'intégration sont modifiés mais on garde les mêmes formes différentielles. On obtient, par exemple pour $\mu_0 + \mu_4 > 1$: pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} F_1(a; b; b'; a + b + b' + 1 - c; 1 - x; 1 - y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(b; b + b' + 1 - c; 1 - b'; a + b + 1 - c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

entraîne $\begin{cases} F_1(1 - b; c - b - b'; b'; c + 1 - a - b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(1 - b'; b; c - b - b'; c + 1 - a - b; \frac{y-1}{y}; \frac{y-1}{y-x}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(2 - a; 1 - b; 1 - b'; 2 + c - a - b - b'; 1 - x; 1 - y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Corollaire IV.1 :

Pour $\mu_1 + \mu_4 > 1$, pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

La condition $T(x; y) \hat{=} A'_{14} \times A_{02}^2$ est équivalente à chacune des conditions ci-dessous :

- a) $\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases}$
- b) $\begin{cases} (H_1) \\ (H'_2) : F_1(b'; 1 - b; c - a; c - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$
- c) $\begin{cases} (H_1) \\ (H_3) : F_1(b; c - a; 1 - b'; c + 1 - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$
- d) $\begin{cases} (H_1) \\ (H'_3) : F_1(b'; 1 - b; c - a; c + 1 - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Démonstration du corollaire IV.1 :

Les hypothèses (H_1) et (H_2) entraînent $T(x; y)$ est à C.M. et (H_2) ce qui

$$\text{implique } \begin{cases} \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \\ \int_0^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_2) \end{cases}$$

Ainsi $\int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_2)$ et $A_{02} \hat{=} A_{03}$

Or d'après [CoWo2] lemme 2,

i.e. $B(\mu_0; \mu_2) \sim B(\mu_0; \mu_3)$ donc $\int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3)$

ce qui est équivalent à (H'_2) .

Concernant l'hypothèse (H_3) , on a vu dans la démonstration du théorème II.2.3 que $T(x; y)$ admet A'_{14} et A_{02} dans sa décomposition si et seulement si $T(x; y) \hat{=} A'_{14} \times A_{02}^2$, c'est à dire si et seulement s'il contient A'_{14} , A_{02} et $A_{03} \hat{=} A_{02}$.

Donc (H_1) et (H_2) entraînent (H'_3)

qui est équivalent à $\int_0^y u \cdot \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3)$

et en tenant le même raisonnement que précédemment, on obtient l'hypothèse (H_3) .

Corollaire IV.2 :

Pour $\mu_1 + \mu_4 > 1$, pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases} \text{ implique } \begin{cases} (C_1) : F_1(1-b; a+1-c; b'; 2+b'-c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C'_1) : F_1(1-b'; b; a+1-c; 2+b-c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C_2) : F_1(2-a; 1-b; 1-b'; 3-c; x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C_3) : F_1(1-a; 1-b; 1-b'; 2-c; x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Démonstration du corollaire IV.2 :

D'après le corollaire précédent, puisque (H_1) et (H_2) est équivalent à (H_1) et (H_3) et que $(H_3) \iff \int_0^x u \cdot \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_2)$; sachant que $T(x; y)$ est alors à C.M., on a, en particulier,

$$\begin{aligned} \int_0^x u \cdot \omega_{N-1}(x; y) &\sim \int_1^\infty u \cdot \omega_{N-1}(x; y) \\ &= B(\mu_1; \mu_4) \cdot F_1(1-a; 1-b; 1-b'; 2-c; x; y) \end{aligned}$$

dès lors, en raison des espèces, $B(\mu_2; \mu_0) \approx B(\mu_1; \mu_4)$ entraîne la conclusion (C_3) .

Remarque :

En remplaçant l'une des périodes $\int_0^x \omega$ (resp. $\int_0^y \omega$), on trouve des résultats similaires en échangeant $B(\mu_0; \mu_2)$ (resp. $B(\mu_0; \mu_3)$) et $B(\mu_2; \mu_3)$. C'est à dire que des hypothèses (H_4) et (H'_4) dans le théorème IV.1 et le corollaire IV.2 et une conclusion (C_4) dans le corollaire IV.2.

Avant de clore cette section, il convient de faire une remarque sur la démonstration des théorèmes IV.1 et IV.2.

On peut, en effet, donner une autre preuve de ces résultats.

On conserve les mêmes outils, en particulier les formes différentielles $\omega(x; y)$, $\omega_{-1}(x; y)$ et $\omega'_{-1}(x; y)$; ainsi que les périodes qui leurs sont associées. Posons :

$$\delta_{CM} = \frac{B(\mu_1; \mu_4)}{B(\mu_2; \mu_0)} \quad \eta_{CM} = \frac{B(\mu_1; \mu_4)}{B(\mu_3; \mu_0)}$$

La traduction du lemme II.2.1 (Corollaire 6 [ShWo]) en terme de fonctions hypergéométriques d'Appell donne le résultat suivant :

Proposition IV.1 :

Pour $\mu_1 + \mu_4 > 1$, pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, $T(x; y)$ est C.M. si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(a; b; b'; c; x; y) \\ \quad \sim \delta_{CM} \cdot F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\ \quad \sim \eta_{CM} \cdot F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \\ F_1(2 - a; 1 - b; 1 - b'; 3 - c; x; y) \\ \quad \sim \delta_{CM} \cdot F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\ \quad \sim \eta_{CM} \cdot F_1(b'; 1 - b; c - a; c - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \\ F_1(1 - a; 1 - b; 1 - b'; 2 - c; x; y) \\ \quad \sim \delta_{CM} \cdot F_1(b; c - a; 1 - b'; c + 1 - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \\ \quad \sim \eta_{CM} \cdot F_1(b'; 1 - b; c - a; c + 1 - b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \end{array} \right.$$

Démonstration de la proposition IV.1 :

Après avoir modifié les chemins d'intégrations via les cycles de Pochhammer, il suffit d'écrire chacune des périodes $\int_{\alpha}^{\beta} \omega_s(x; y)$ en terme de fonctions hypergéométriques d'Appell, puis de simplifier les termes $B(p; q)$.

Traitons, par exemple, la première ligne :

pour $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\int_{\gamma_0} \omega(x; y) \sim \int_{\gamma_1} \omega(x; y) \sim \int_{\gamma_2} \omega(x; y)$$

devient

$$\int_1^{\infty} \omega(x; y) \sim \int_0^x \omega(x; y) \sim \int_0^y \omega(x; y)$$

Or,

$$\int_1^{\infty} \omega(x; y) = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_4) \cdot F_1(a; b; b'; c; x; y)$$

$$\int_0^x \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_2; 1 - \mu_0) \cdot F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y})$$

$$\int_0^y \omega(x; y) \sim B(1 - \mu_3; 1 - \mu_0) \cdot F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1})$$

Enfin, comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition I.2.1,

$$B(1 - \mu_i; 1 - \mu_j) \sim \frac{\pi}{B(\mu_i; \mu_j)}$$

d'où δ_{CM} et η_{CM} et le résultat.

Pour conclure et retrouver les propositions et corollaires précédents, il faut d'une part remarquer que pour $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, les conditions :

$$\begin{cases} F_1(a; b; b'; c; x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

entraînent que $T(x; y)$ est C.M. (voir par exemple la description en terme de variétés abéliennes de l'ensemble exceptionnel).

D'autre part, puisque l'on a supposé que $\mu_1 + \mu_4 > 1$, les δ_{CM} et η_{CM} s'écrivent, modulo $\overline{\mathbb{Q}}$, comme quotient de périodes de variétés abéliennes de première et de deuxième espèce, ainsi, d'après le lemme I.2.2, ces nombres sont transcendants.

Finalement, sous ces hypothèses, on obtient :

$$F_1(1 - b; a + 1 - c; b'; 2 + b' - c; \frac{x}{x-1}; \frac{x}{x-y}) \sim \delta_{CM}^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

et

$$F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \sim \eta_{CM}^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

d'où le résultat du théorème IV.1.

Les conclusions du théorème IV.2 et de ses corollaires s'obtiennent grâce aux deux lignes suivantes.

$$\text{SECTION 2 : } \begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$$

Théorème IV.1' :

Pour $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$, pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$\begin{cases} T(x; y) \text{ est à C.M.} \\ F_2(a; b; b'; a + b + 1 - c; c - b; 1 - x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

implique $\begin{cases} F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ F_1(1 - b; c - b - b'; b'; c + 1 - a - b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Démonstration du théorème IV.1' :

On tient le même raisonnement que dans le cas du théorème IV.1.

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème II.2.3', les solutions indépendantes de l'équation différentielle hypergéométrique au voisinage de $(x; y) = (1; 0)$ suggérées par le théorème II.2.2 sont les suivantes :

$$\int_0^1 \omega(x; y) \sim B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2)) \times \\ \times F_2(a; b; b'; a + b + 1 - c; c - b; 1 - x; y)$$

$$\int_0^y \omega(x; y) = B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3) \cdot y^{b+1-c} \cdot (1 - y)^{c-a-1} \cdot (x - y)^{-b} \times \\ \times F_1(1 - b'; b; a + 1 - c; 2 + b - c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1})$$

$$\int_1^x \omega(x; y) = B(1 - \mu_1; 1 - \mu_2) \cdot x^{b+b'-c} \cdot (1-x)^{c-a-b} \cdot (y-x)^{-b'} \times \\ \times F_1(1-b; c-b-b'; b'; c+1-a-b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y})$$

Dès lors, les périodes $B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2))$, resp. $B(1 - \mu_0; 1 - \mu_3)$ et $B(1 - \mu_1; 1 - \mu_2)$ sont de première (resp. de deuxième) espèce en raison des conditions imposées sur les μ_i , ce qui permet de tenir le même raisonnement que précédemment.

Théorème IV.2' :

Pour $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$, pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$$\begin{cases} (H_1) : F_2(a; b; b'; a+b+1-c; c-b; 1-x; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (H_2) : F_1(b'; 1-b; c-a; c-b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

$$\text{entraîne} \begin{cases} (C_1) : F_1(1-b'; b; a+1-c; 2+b-c; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C'_1) : F_1(1-b; c-b-b'; b'; c+1-a-b; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (C_2) : F_2(2-a; 1-b; 1-b'; A+b+1-c; 2+b-c; 1-x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Démonstration du théorème IV.2' :

Là encore, elle est identique à celle du théorème IV.2 : les formes différentielles utilisées sont les mêmes ($\omega(x; y)$, $\omega_{N-1}(x; y)$ et $u \cdot \omega_{N-1}(x; y)$) mais les chemins d'intégration diffèrent comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème IV.1'.

Les données sont les suivantes :

$$\int_0^1 \omega_{N-1}(x; y) = \\ B(\mu_1; \mu_0) \cdot x^{b-1} \cdot y^{b'-1} \cdot F_1(c-b-b'; 1-b; 1-b'; a+1-b-b'; \frac{1}{x}; \frac{1}{y}) \sim \\ B(\mu_0 + \mu_3 - 1; \mu_1 + \mu_2 - 1) \cdot F_2(2-a; 1-b; 1-b'; A+b+1-c; 2+b-c; 1-x; y)$$

et puisque $\Gamma(1 + \alpha) \sim \Gamma(\alpha)$ pour $\alpha \notin -\mathbb{N}$

on a $B(\mu_0 + \mu_3 - 1; \mu_1 + \mu_2 - 1) \sim B(\mu_0 + \mu_3; \mu_1 + \mu_2)$ qui est de deuxième espèce car $(\mu_0 + \mu_3) + (\mu_1 + \mu_2) = 2 - \mu_4 > 1$.

$$\int_0^y \omega_{N-1}(x; y) = B(\mu_0; \mu_3) \cdot y^{c-b-1} \cdot (1-y)^{a-c} \cdot (x-y)^{b-1} \times$$

$$\times F_1(b'; 1-b; c-a; c-b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1})$$

$$\int_1^x \omega_{N-1}(x; y) = B(\mu_1; \mu_2) \cdot x^{c-b-b'-1} \cdot (1-x)^{a+b-c} \cdot (y-x)^{b'-1} \times$$

$$\times F_1(b; b+b'+1-c; 1-b'; a+b+1-c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y})$$

où $B(\mu_0; \mu_3)$ et $B(\mu_1; \mu_2)$ sont de première espèce.
Ces données permettent d'obtenir le résultat voulu.

La variété abélienne, notée abusivement $T(1; 0)$, servant de référence et à laquelle $T(x; y)$ sera isogène sous les conditions (H_1) et (H_2) , sera $T(1; 0) \hat{=} A' \times A_{03} \times A_{12}$ décrite dans le théorème II.2.1 b) et le théorème II.2.3' (où A' est la sous-variété simple déterminée par la période $B(1 - (\mu_0 + \mu_3); 1 - (\mu_1 + \mu_2))$).

Corollaire IV.1' :

Pour $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$

1^{er} cas : Si $A_{03} \hat{=} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases}$
- b) $\begin{cases} (H_1) \\ (H'_2) \end{cases}$
- c) $\begin{cases} (H_1) \\ (H_3) : F_1(b'; 1-b; c-a; c+1-b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-1}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$
- d) $\begin{cases} (H_1) \\ (H'_3) : F_1(b; b+b'-c; 1-b'; a+b+1-c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

2^{eme} cas : Si $A_{03} \not\hat{=} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$, on a, d'une part, l'équivalence entre a) et d) et, d'autre part, l'équivalence entre b) et c).

Démonstration du corollaire IV.1' :

Le premier cas est identique au corollaire IV.1, quant au deuxième cas, il suffit de remarquer que $C \hat{=} A_{03} \iff \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3) \iff (H_2) \iff D \hat{=} A_{12} \iff \int_0^x u \cdot \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_1; \mu_2) \iff (H_3')$.

Corollaire IV.2' :

Pour $\begin{cases} \mu_0 + \mu_3 < 1 \\ \mu_1 + \mu_2 < 1 \end{cases}$

1^{er} cas : Si $A_{03} \hat{=} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases}$ entraîne $\begin{cases} (C_1) \\ (C_1') \\ (C_2) \\ (C_3) : F_2(1-a; 1-b; 1-b'; c+1-a-b; b+1-c; 1-x; y) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

2^{eme} cas : Si $A_{03} \hat{\neq} A_{12}$ alors pour tout $(x; y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2 \cap \mathcal{Q}_{st}$,

$\begin{cases} (H_1) \\ (H_2) \end{cases}$ entraîne $\begin{cases} (C_1) \\ (C_1') \\ (C_2) \\ (C_3) \\ (\neg H_2') : F_1(b; b+b'+1-c; 1-b'; a+b+1-c; \frac{x-1}{x}; \frac{x-1}{x-y}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \\ (\neg H_3) : F_1(b'; 1-b; c-a; c+1-b; \frac{y}{y-x}; \frac{y}{y-x}) \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

Démonstration du corollaire IV.2' :

Le premier cas est identique à celui de la section 1 ; (H_1) et (H_2) étant équivalent à (H_1) et (H_3) , la condition (H_3) implique la conclusion (C_3) .

Pour le deuxième cas, montrons que (H_1) et (H_2) impliquent $(\neg H_2')$.

(H_1) et (H_2) entraînent, en particulier que $T(x; y)$ est à C.M. et donc d'après les lemmes II.2.1 et II.2.2 :

$$\int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim \int_1^x \omega_{N-1}(x; y)$$

$$\text{or } (H_2) \iff \int_0^y \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3),$$

$$\text{on a donc d'une part } \int_1^x \omega_{N-1}(x; y) \sim B(\mu_0; \mu_3)$$

et, d'autre part $B(\mu_0; \mu_3) \approx B(\mu_1; \mu_2)$ par hypothèse

d'où $\int_1^x \omega_{N-1}(x; y) \approx B(\mu_1; \mu_2) \iff (\neg H'_2)$.

Il reste à utiliser le corollaire IV.1' pour en déduire un résultat identique avec (H'_3) et $(\neg H_3)$.

Remarque :

Comme pour la section 1, on peut écrire l'analogie de la proposition IV.1, qui va permettre de donner une autre démonstration des résultats trouvés dans cette section.

ETUDE D'UNE NOUVELLE FONCTION TRANSCENDANTE.

Lors du premier chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de la fonction hypergéométrique de Gauss. Cette fonction, qui est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, peut être exprimée sous la forme intégrale d'Euler suivante :

$$F(a; b; c; x) = \frac{\int_1^\infty u^{b-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-x)^{-b} \cdot du}{\int_1^\infty u^{-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot du} = \frac{P_1(x)}{P_0}$$

où l'on peut voir $P_1(x)$ comme une période de première espèce sur la variété abélienne $T(x)$ et, pour $1-c > 0$, $P_0 = B(a; c-a)$ comme une période de première espèce sur la jacobienne d'une courbe de Fermat.

Nous avons traité, dans le deuxième chapitre, de l'étude de la fonction hypergéométrique d'Appell, solution d'un système d'équations différentielles partielles d'ordre deux en deux variables. Mise sous forme intégrale, elle se présente de la façon suivante :

$$F_1(a; b; b'; c; x; y) = \frac{\int_1^\infty u^{b+b'-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-x)^{-b} \cdot (u-y)^{-b'} \cdot du}{\int_1^\infty u^{-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot du} = \frac{P_2(x; y)}{P_0}$$

où l'on peut voir $P_2(x; y)$ comme une période de première espèce sur la variété abélienne $T(x; y)$ et, pour $\mu_1 + \mu_4 > 1$ ce qui revient à $1-c > 0$, P_0 comme précédemment.

Ces deux études nous amènent naturellement à considérer, la nouvelle fonction d'une variable complexe suivante, quotient de deux fonctions hypergéométriques :

$$\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) = \frac{P_2(\lambda; y)}{P_1(\lambda)} = \frac{F_1(a; b; b'; c; \lambda; y)}{F(a; b; c; \lambda)}$$

Elle sera à son tour solution d'une équation différentielle linéaire. De même, en tant que fonction transcendante, on va s'intéresser à ses valeurs algébriques en des points algébriques et tenter de relier ces valeurs, via un ensemble exceptionnel, à des propriétés géométriques. C'est l'objet du deuxième paragraphe. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous considérerons la fréquence d'apparition de ces valeurs pour relier la finitude de l'ensemble exceptionnel au caractère de type Hodge de certaines courbes modulaires.

L'auteur tient particulièrement à remercier M. Tretkoff qui a suggéré, en fixant l'une des variables, de regarder le comportement de courbes tracées sur la surface modulaire du chapitre II.

1. Propriétés de $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y)$:

Nous supposerons désormais que le paramètre λ est différent de $0; 1; \infty$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre trois suivante $(D) = (D(a; b; b'; c; \lambda))$:

$$B_0(\lambda; y) \cdot \frac{d^3 v}{dy^3} + B_1(\lambda; y) \cdot \frac{d^2 v}{dy^2} + B_2(\lambda; y) \cdot \frac{dv}{dy} + B_3(\lambda; y) \cdot v = 0$$

où

$$\begin{cases} B_0(\lambda; y) = y(y-1)(y-\lambda) \\ B_1(\lambda; y) = (b-c-1)(y-1)(y-\lambda) \\ \quad + (c-a-b'-2)y(y-\lambda) + (-b-b'-1)y(y-1) \\ B_2(\lambda; y) = (b'+1)[(a+b+b'+1-c)y + c(y-1) + (a+1-b)(y-\lambda)] \\ B_3(\lambda; y) = ab'(b'+1) \end{cases}$$

L'espace des solutions de (D) est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension trois, constitué de fonctions multivalentes en la variable y . Les singularités régulières de cette équation différentielle se situent aux quatre points $y = 0; 1; \lambda; \infty$.

On dispose d'une solution de (D) , holomorphe au voisinage de $y = 0$, que l'on note :

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) &= \frac{\int_1^\infty u^{b+b'-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot (u-y)^{-b'} \cdot du}{\int_1^\infty u^{b-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot du} \\ &= \frac{F_1(a; b; b'; c; \lambda; y)}{F(a; b; c; \lambda)} \end{aligned}$$

Cette solution vérifie $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; 0) = 1$. C'est une nouvelle fonction transcendante.

On sait donner une base de solutions de (D_i) à l'aide des fonctions Φ , il suffit pour cela de changer les chemins d'intégration $\int_g^h \omega(\lambda; y)$, $g \neq h \in$

$\{0; 1; \lambda; \infty\}$.

Ces trois solutions de (D_t) seront linéairement indépendantes puisque les périodes issues de $\omega(\lambda; y)$ proviennent de solutions linéairement indépendantes de (E_1) .

Comme nous l'avons vu dans les chapitres I et II, on peut concevoir Φ_λ comme le quotient de deux périodes de première espèce :

l'une,

$$P_1(\lambda) = \int_1^\infty u^{b-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot du$$

période de la variété abélienne $T(\lambda)$ provenant de la courbe algébrique d'équation affine

$$\mathcal{X}_N(\lambda) : w^N = u^{(c-b)N} \cdot (u-1)^{(a+1-c)N} \cdot (u-\lambda)^{bN}$$

et l'autre,

$$P_2(\lambda; y) = \int_1^\infty u^{b+b'-c} \cdot (u-1)^{c-a-1} \cdot (u-\lambda)^{-b} \cdot (u-y)^{-b'} \cdot du$$

période de la variété abélienne $T(\lambda; y)$ provenant de la courbe algébrique d'équation affine

$$\mathcal{X}_N(\lambda; y) : w^N = u^{(c-b-b')N} \cdot (u-1)^{(a+1-c)N} \cdot (u-\lambda)^{bN} \cdot (u-y)^{b'N}$$

.

2. L'ensemble exceptionnel lié à $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y)$:

La construction de l'ensemble exceptionnel consiste à relier des valeurs algébriques de la fonction transcendante considérée, en des points algébriques, à des variétés abéliennes qui sont dans la même orbite de Hecke ; c'est à dire toutes isogènes à une variété abélienne fixée.

Les variétés abéliennes considérées sont celles correspondantes aux $T(\lambda; y)$ du chapitre II où l'on a fixé la variable $x = \lambda$.

Commençons par le résultat suivant :

Lemme V.2.1 :

Pour $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$ et $1 - c > 0$,
pour tout $y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\}$, $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$ entraîne que $T(\lambda; y)$ et $T(\lambda)$ ont une sous-variété abélienne en commun, à isogénie près, dans leur décomposition en sous-variétés abéliennes simples.

Démonstration du lemme V.2.1 :

C'est une application directe du résultat de G. Wüstholz (voir lemme II.2.3). Lorsque λ et y sont algébriques, les périodes $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda; y)$ sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et la condition $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$ est équivalente à $P_1(\lambda) \sim P_2(\lambda; y)$. Ainsi, en utilisant les notations du lemme II.2.3, on a :

$$V_{T(\lambda)} \cap V_{T(\lambda; y)} \supseteq \{P_1(\lambda)\} \neq \{0\}$$

d'où la conclusion.

Le problème lié aux $T(\lambda; y)$ provient de leur dimension trop élevée : la seule condition $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$ ne suffit pas, en général, pour obtenir des renseignements suffisants à la construction de l'ensemble exceptionnel, c'est à dire à la construction d'une variété abélienne fixée, que l'on notera $T(\lambda; 0)$ et qui servira de point de base.

Ainsi, doit-on imposer une autre condition d'algébricité sur une autre fonction Φ pour obtenir le résultat voulu. Cette condition ne peut pas être donnée par les deux autres solutions de (D_i) , car elles ne permettent pas d'affirmer, que le cas échéant, on se trouve sur une autre sous-variété abélienne de $T(\lambda)$. Cette autre fonction provient de la forme différentielle liée à la valeur propre ζ_N^{-1} .

Le résultat suivant va nous permettre à la fois de bâtir l'ensemble exceptionnel et de détailler ce qui servira de point de base.

Théorème V.2.1 :

Pour $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$ et $1 - c > 0$, pour tout $y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\}$,

$$\begin{cases} (h_1) : \Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (h_2) : \Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

si et seulement si $T(\lambda; y) \cong T(\lambda) \times A_{03} =: T(\lambda; 0)$

Pour la démonstration de ce théorème, on utilise un argument de D. Bertrand, voir [Be] exemple 3 paragraphe 1, que l'on écrit sous la forme suivante, appliquée à notre étude :

Lemme V.2.2 :

On considère une variété abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Deux cas peuvent alors se produire :

1^{er} cas : Soit A n'admet pas de sous-variété abélienne propre stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et dans ce cas $A \cong B^k$ où B est une sous-variété abélienne simple de A .

2^{eme} cas : Soit A admet des sous-variétés abéliennes propres stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et dans ce cas $A \cong A_1 \times \dots \times A_t$ où les A_i sont toutes des sous-variétés abéliennes de A stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, ne contenant pas de sous-variété abélienne stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. (Ce cas comprend le cas A simple).

Lemme V.2.3 :

Sous les hypothèses du théorème V.2.1, la condition $\Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}}$ implique que $T(\lambda; y)$ s'écrit comme le deuxième cas du lemme V.2.2.

Démonstration du lemme V.2.3 :

Sous les hypothèses du théorème V.2.1, la condition (h_1) est équivalente à :

$$\int_1^\infty \omega(\lambda; y) \sim \int_1^\infty \omega(\lambda)$$

Ainsi, d'après le lemme II.2.3,

$$V_{T(\lambda;y)} \cap V_{T(\lambda)} \supseteq \left\{ \int_1^\infty \omega(\lambda) \right\} \neq \{0\}$$

Donc $T(\lambda; y)$ et $T(\lambda)$ ont en commun une sous-variété abélienne simple, que l'on notera E , dans leur décomposition à isogénie près.

Détaillons les différents cas possibles pour $T(\lambda)$.

Premier cas :

Supposons que $T(\lambda)$ n'admet pas de sous-variété abélienne propre stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$.

Ainsi, $T(\lambda) \cong B^n$, avec B non stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, mais stable par un sous-corps k de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et tel que $[\mathbb{Q}(\zeta_N) : k] = n$ (voir remarque 1 [Be]) et $\dim B = \frac{\varphi(N)}{n}$.

On en déduit que $E \cong B^{n'}$. Dès lors,

- soit $T(\lambda; y)$ n'admet pas de sous-variété propre stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Dans ce cas $T(\lambda; y) \cong B^{n_0}$ avec $n_0 = \frac{3n}{2}$, en raison des dimensions de ces variétés, ce qui, d'après la remarque 1 de D. Bertrand est contradictoire car B est stable par k et $[\mathbb{Q}(\zeta_N) : k] = n \neq \frac{3n}{2}$.

- soit $T(\lambda; y)$ admet des sous-variétés propres stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, en particulier B^n .

(Dans ce cas, $T(\lambda; y) \cong B^n \times A \cong T(\lambda) \times A$)

Deuxième cas :

Supposons que $T(\lambda)$ admet des sous-variétés abéliennes propres stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$.

Premier sous-cas : Si $T(\lambda)$ est simple, alors $E \cong T(\lambda)$ et $T(\lambda; y) \cong T(\lambda) \times A$, on est bien dans le deuxième cas du lemme V.2.2.

Deuxième sous-cas : Si $T(\lambda)$ n'est pas simple, alors c'est qu'il s'écrit $T(\lambda) \cong A_1 \times A_2$ avec A_1 et A_2 stables par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, n'admettant pas de sous-variété propre stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ (pour des raisons de dimension).

Supposons, sans perdre de généralité que la période $\int_1^\infty \omega(\lambda)$ soit liée à la variété A_1 .

Dès lors,

- soit A_1 est simple et cela implique que $E \cong A_1$, ainsi $T(\lambda; y)$ admet une sous-variété propre stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ dans sa décomposition à isogénie près ($T(\lambda; y) \cong A_1 \times D$).

- soit A_1 n'est pas simple, et dans ce cas $A_1 \cong B_1^{n_1}$ avec B_1 stable par k_1 sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ tel que $[\mathbb{Q}(\zeta_N) : k_1] = n_1$. Ainsi $E \cong B_1^{n_1}$.

Mais là encore, dans le cas où $T(\lambda; y) \hat{=} B_1^t$, on a $t > n_1$ et on peut écrire $T(\lambda; y) \hat{=} B_1^{n_1} \times B_1^{t-n_1}$, ce qui fournit $B_1^{n_1}$ comme sous-variété propre de $T(\lambda; y)$ stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. On est donc également ramené au cas deux du lemme V.2.2 ($T(\lambda; y) \hat{=} B_1^{n_1} \times D \hat{=} A_1 \times D$).

Dans le résultat suivant, on explicite la provenance de la deuxième condition d'algébricité.

Lemme V.2.4 :

Pour $\lambda \neq 0; 1; \infty$, pour $1 - c > 0$ et $y \neq 0; 1; \lambda; \infty$,

$$\Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) = \lambda^{b'-2} (1 - \lambda)^{c+1-a-b} (y - \lambda)^{1-b'} \frac{B(b; c-b)}{B(b; c-b-b')} \times \frac{F(c-b; c-a; c; \lambda)}{F(c-b-b'; c-a; c; \lambda)} \times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda; y)}{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)}$$

Démonstration du lemme V.2.4 :

On pose

$$\omega_{N-1}(\lambda) = u^{c-b-1} \cdot (u-1)^{a-c} \cdot (u-\lambda)^{b-1} \cdot du$$

Comme dans le cas de deux variables (voir démonstration du lemme II.2.2), on montrerait ici que cette forme différentielle engendre le sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $H^0(T(\lambda); \Omega)$ (noté V_{-1}), lié à la valeur propre ζ_N^{-1} et qu'il vérifie les conditions de régularité, c'est à dire qu'il correspond à une période de première espèce sur la courbe algébrique $\mathcal{X}_N(\lambda)$.

Par définition,

$$\Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) = \frac{\int_1^\infty u^{1-a} (u-1)^{c-b-b'-1} (u-\frac{\lambda}{\lambda-1})^{a-c} (u-\frac{\lambda}{\lambda-y})^{b'-1} du}{\int_1^\infty u^{b'-a} (u-1)^{c-b-b'-1} (u-\frac{\lambda}{\lambda-1})^{a-c} du}$$

En modifiant les intégrales présentes dans cette écriture, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c - a; 1 - b'; c - b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) &= \\ \lambda^{b'-c-1} (1 - \lambda)^{1-b} (y - \lambda)^{1-b'} &\times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda; y)}{\int_1^\infty \eta(\frac{\lambda}{\lambda-1})} = \\ \lambda^{b'-c-1} (1 - \lambda)^{1-b} (y - \lambda)^{1-b'} &\times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)}{\int_1^\infty \eta(\frac{\lambda}{\lambda-1})} \times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda; y)}{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)} = \end{aligned}$$

$$\lambda^{b'-c-1}(1-\lambda)^{1-b}(y-\lambda)^{1-b'} \times \frac{B(b;c-b)\lambda^{c-1}F(c-b;c-a;c;\lambda)}{B(b;c-b-b')(1-\lambda)^{a-c}F(c-b-b';c-a;c-b';\lambda)} \times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda;y)}{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)} =$$

$$\lambda^{b'-2}(1-\lambda)^{c+1-a-b}(y-\lambda)^{1-b'} \times \frac{B(b;c-b)F(c-b;c-a;c;\lambda)}{B(b;c-b-b')F(c-b-b';c-a;c-b';\lambda)} \times \frac{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda;y)}{\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)}$$

Ce qui fournit le résultat.

Démonstration du théorème V.2.1 :

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, $1 - c > 0$ et $y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\}$.

Reprenons les différents cas traités dans la démonstration du lemme V.2.3.

On a vu que, lorsque $T(\lambda) \hat{=} B^n$ (premier cas) ou que $T(\lambda)$ est simple (deuxième cas, premier sous-cas), la condition (h_1) entraîne : $T(\lambda; y) \hat{=} T(\lambda) \times A$.

La condition (h_2) est alors redondante.

On explicitera la variété A par la suite.

Lorsque $T(\lambda) \hat{=} A_1 \times A_2$ avec A_i à C.M. par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ (deuxième cas, deuxième sous-cas), la condition (h_1) entraîne : $T(\lambda; y) \hat{=} A_1 \times D$ où D est une sous-variété abélienne de dimension $\varphi(N)$, stable par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ mais non nécessairement à C.M..

Or, on sait, d'après le lemme V.2.4 que la condition (h_2) ,

$$\Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) \sim \frac{B(b; c-b)}{B(b; c-b-b')} \times \frac{F(c-b; c-a; c; \lambda)}{F(c-b-b'; c-a; c; \lambda)}$$

a pour objet l'équivalence modulo $\overline{\mathbb{Q}}^*$, des périodes de première espèce relatives à la valeur propre ζ_N^{-1} , en effet, elle est équivalente à :

$$\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda; y) \sim \int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)$$

or le type de $T(\lambda)$ est le suivant : pour $a \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$,

$$\Phi_{T(\lambda)}(a) = \begin{pmatrix} \Phi_{A_1}(a) & 0 \\ 0 & \Phi_{A_2}(a) \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, cette variété abélienne est celle, notée A_{03} , reliée à la période de première espèce $B(\mu_0; \mu_3)$ (apparaissant dans la décomposition en sous-variétés simples de la jacobienne d'une certaine courbe de Fermat, voir [WoWü]).

Réciproquement :

$$T(\lambda; y) \hat{=} T(\lambda) \times A_{03} \iff T(\lambda; y) \hat{=} E \times F \text{ où } E \hat{=} T(\lambda) \text{ et } F \hat{=} A_{03}$$

$$\iff \begin{cases} \text{End}_0(T(\lambda)) \simeq \text{End}_0(E) \\ \text{End}_0(A_{03}) \simeq \text{End}_0(F) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Lambda_{T(\lambda)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \Lambda_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \Lambda_{A_{03}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \Lambda_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{cases}$$

où Λ est le réseau des périodes associé à la variété considérée

$$\iff (*) \begin{cases} \Phi(\Lambda_{T(\lambda; y)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \Phi(\Lambda_{T(\lambda; y)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\text{car } \Phi(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

La condition (*) est équivalente à :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0; 1; 2\}, \exists a \in \mathbb{Q}(\zeta_N), \Phi_E(a) \cdot \int_{\gamma_i} \eta_E(\lambda; y) = \int_{\gamma_i} \eta_E(\lambda; 0) \\ \forall j \in \{0; 1; 2\}, \exists a \in \mathbb{Q}(\zeta_N), \Phi_F(a) \cdot \int_{\gamma_j} \eta_F(\lambda; y) = \int_{\gamma_j} \eta_F(\lambda; 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \eta_E(\lambda; y) &= {}^t (\omega_1(\lambda; y); \dots; \omega_m(\lambda; y); \omega_{-1}(\lambda; y); \dots; \omega_{-m}(\lambda; y); \\ &\quad \omega_{m+1}(\lambda; y); \dots; \omega_{\frac{1}{2}, \varphi(N)}(\lambda; y); \omega'_{m+1}(\lambda; y); \dots; \omega'_{\frac{1}{2}, \varphi(N)}(\lambda; y)) \\ \text{et } \eta_F(\lambda; y) &= {}^t (\omega_{-1}(\lambda; y); \dots; \omega_{-m}(\lambda; y); \omega''_{m+1}(\lambda; y); \dots; \omega''_{\frac{1}{2}, \varphi(N)}(\lambda; y)) \end{aligned}$$

Ce qui implique en particulier que :

$$\int_{\gamma_i} \omega(\lambda; y) \sim \int_{\gamma_i} \omega(\lambda)$$

et

$$\int_{\gamma_j} \omega_{N-1}(\lambda; y) \sim \int_{\gamma_j} \omega_{N-1}(\lambda)$$

Ce qui, en prenant pour γ_i le chemin allant de 1 à l'infini, et pour γ_j le chemin allant de 0 à λ donne, sous les hypothèses de départ du théorème :

$$\int_1^\infty \omega(\lambda; y) \sim \int_1^\infty \omega(\lambda)$$

c'est à dire la condition (h_1)

$$(r_1^{(T(l;y))} = r_1^{(T(\lambda))} = 1)$$

et

$$\int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda; y) \sim \int_0^\lambda \omega_{N-1}(\lambda)$$

c'est à dire la condition (h_2)

$$(r_{-1}^{(T(l;y))} = 2; r_{-1}^{(T(\lambda))} = r_{-1}^{(A_{03})} = 1).$$

Ce qui achève la démonstration de ce résultat.

On peut maintenant donner explicitement l'ensemble cherché.

Lorsque $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$ et $1 - c > 0$, l'**ensemble exceptionnel** pour cette fonction Φ sera le suivant :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\} : \left\{ \begin{array}{l} (h_1) : \Phi_\lambda(a; b; b'; c; y) \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (h_2) : \end{array} \right\}$$

où la condition (h_2) est donnée par :

$$\Phi_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(b; c-a; 1-b'; c-b'; \frac{\lambda}{\lambda-y}) \sim \frac{B(b; c-b).F(c-b; c-a; c; \lambda)}{B(b; c-b-b').F(c-b-b'; c-a; c-b'; \lambda)}$$

3. Remarques sur le point de base $T(\lambda; 0)$:

1. Cet ensemble exceptionnel nous permet, via le théorème V.2.1, de relier les valeurs algébriques de ces nouvelles fonctions, en des points algébriques, aux variétés abéliennes $T(\lambda; y)$ qui ont la propriété d'être isogènes au point de base $T(\lambda; 0)$, en effet, géométriquement, on peut écrire \mathcal{E}_λ de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{y \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1; \lambda\} : T(\lambda; y) \cong T(\lambda; 0)\}$$

2. Cependant, ce point de base diffère de ceux étudiés dans les chapitres I et II car on ne sait rien sur son caractère C.M. (qui est indispensable pour l'utilisation de la version faible de la conjecture d'André-Oort démontrée par B.Edixhoven et A.Yafaev).

Détaillons ce que nous savons sur la multiplication complexe du point de base :

Lemme V.3.1 :

Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

$T(\lambda; 0)$ est à C.M.

$T(\lambda)$ est à C.M.

$$F(a; b; c; \lambda) \sim \frac{B(a+1-c; 1-a)}{B(c-b; b)}. F(b+1-c; a+1-c; 2-c; \lambda)$$

Démonstration du lemme V.3.1 :

La première équivalence est une conséquence de la définition de $T(\lambda; 0)$, puisque $T(\lambda; 0) := T(\lambda) \times A_{03}$ et que A_{03} est à C.M., $T(\lambda; 0)$ est à C.M. si et seulement si $T(\lambda)$ l'est.

La deuxième équivalence est une application directe de la proposition I.2.1.

3. D'autre part, on connaît la fréquence d'apparition de certains points $T(\lambda)$ à C.M.

En effet, si l'on regarde les résultats du chapitre I, le tore $T(\lambda)$ est celui extrait de la décomposition en sous-variété abéliennes de la jacobienne de la courbe algébrique :

$$\mathcal{X}_N(\lambda) : w^N = u^{(c-b)N} \cdot (u-1)^{(a+1-c)N} \cdot (u-\lambda)^{bN}$$

c'est à dire

$$\mathcal{X}_N(\lambda) : w^N = u^{(\mu_0+\mu_3)N} \cdot (u-1)^{\mu_1 N} \cdot (u-\lambda)^{\mu_2 N}$$

Le groupe de monodromie lié à ces paramètres est le groupe triangulaire noté $\Delta(\mu_0 + \mu_3; \mu_1; \mu_2; \mu_4)$.

De plus, on sait que le tore $T(0)$ est à C.M. stricte par $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ et que pour $1 - c > 0$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$, $T(\lambda) \cong T(0)$ lorsque $F(a; b; c; \lambda) \in \overline{\mathbb{Q}}$

Ainsi, d'après le théorème de l'ensemble exceptionnel dans le cas d'une variable, on sait qu'il existe une infinité de tels λ avec $T(\lambda) \cong T(0)$ si et seulement le groupe $\Delta(\mu_0 + \mu_3; \mu_1; \mu_2; \mu_4)$ est arithmétique.

Ce qui, dans notre situation revient à dire la chose suivante :

il existe une infinité de points de base $T(\lambda; 0)$ à C.M. isogènes à $T(0) \times A_{03}$ si et seulement si le groupe triangulaire $\Delta(\mu_0 + \mu_3; \mu_1; \mu_2; \mu_4)$ est arithmétique.

4. Pour finir, insistons sur le fait que les points de base $T(\lambda; 0)$ qui sont à C.M. ne sont pas tous isogènes à $T(0) \times A_{03}$. Il y a d'autres cas, et leur fréquence d'apparition est également dépendante de l'arithméticité du groupe de monodromie cité précédemment, mais cela est conditionné par la version forte de la conjecture d'André-Oort rappelée au chapitre I (qui n'impose pas aux variétés abéliennes considérées d'être dans la même classe d'isogénie), mais qui est à l'heure actuelle non-démontrée (sauf dans le cas des variétés modulaires de Hilbert voir [Ed]).

4. Courbe modulaire tracée sur une surface :

Nous avons fixé la variable $x = \lambda$.

De cette façon, on étudie la courbe modulaire suivante :

$$C_\lambda = \{[T(\lambda; y)] : y \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0; 1; \lambda; \infty\}\}$$

tracée sur la surface modulaire $S = \{[T(x; y)] : (x; y) \in \mathcal{Q}_{st}\}$ plongée dans $V(\mathbb{C}) = B_2^m/\Gamma$.

($[A]$ désigne la classe d'isomorphisme de la variété abélienne A).

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème V.4.1 :

Pour $1 - c > 0$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0; 1\}$ tel que

$$F(a; b; c; \lambda) \sim \frac{B(a+1-c; 1-a)}{B(c-b; b)}. F(b+1-c; a+1-c; 2-c; \lambda) :$$

$$C_\lambda \text{ est de type Hodge si et seulement si } \text{Card}(\mathcal{E}_\lambda) = \infty$$

Démonstration du théorème V.4.1 :

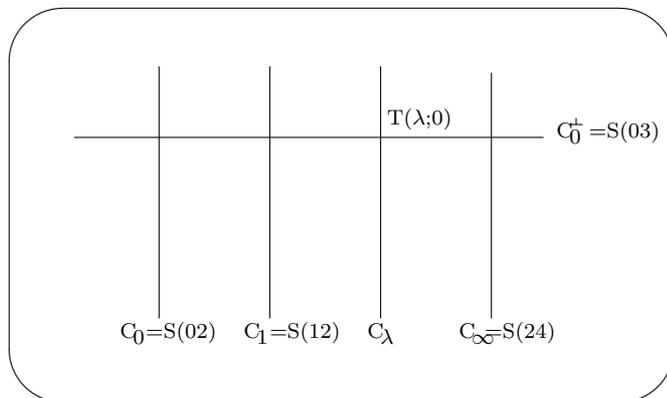
C'est une traduction ad hoc de la version faible de la conjecture d'André-Oort pour une variable, démontrée par B. Edixhoven et A. Yafaev. L'hypothèse de départ est faite pour s'assurer que le point de base $T(\lambda; 0)$ est bien à C.M. (voir lemme V.3.1).

On utilise la description géométrique de l'ensemble exceptionnel, décrite dans le théorème V.2.1 et la remarque 1 du paragraphe précédent pour obtenir la conclusion.

Remarques concernant les courbes C_λ :

1. Nous avons vu dans le deuxième paragraphe (remarque 3), qu'il est possible de relier l'arithméticité du groupe de monodromie $\Delta(\mu_0 + \mu_3; \mu_1; \mu_2; \mu_4)$

au caractère de type Hodge de la courbe C_0^\perp de la figure ci-dessous.



Courbes modulaires

2. D'après le corollaire III.2.2, dès que la condition (INT) est vérifiée, il existe toujours au moins une surface caractéristique stable $S_{st}(ij)$ de type Hodge, c'est à dire une courbe sur laquelle se trouvent une infinité de variétés abéliennes à C.M., susceptibles de fournir un "bon" point de base.

3. On peut se poser la question suivante : peut-on envisager de relier l'arithméticité du groupe de monodromie de l'équation différentielle $(D(a; b; b'; c; \lambda))$ au caractère de type Hodge des courbes C_λ , comme on sait le faire dans les cas particuliers de C_0 , C_1 et C_∞ ?

Conclusion :

Tout au long de cette étude, on a relié des valeurs algébriques (donc exceptionnelles) de fonctions transcendentes en des points algébriques à des propriétés géométriques de variétés abéliennes, via leurs périodes. Ces descriptions, à la fois arithmétique et géométrique des ensembles exceptionnels que l' a contruit, ont ensuite permis de relier la fréquence d'apparition de certaines variétés abéliennes, à multiplication complexe par un corps cyclotomique, au groupe de monodromie associé à la fonction considérée ou au caractère de type Hodge d'une courbe modulaire ; en utilisant selon les cas, une version démontrée ou non d'une conjecture faible d'André-Oort.

Lorsque le nombre de variables est supérieur à deux, il conviendrait de travailler avec la généralisation des fonctions hypergéométriques, appelée fonctions de Lauricella (voir par exemple [CoWo3]). Mais dans ce cas, on ne connaît qu'un seul exemple de groupe $\Delta(\mu_i)$, agissant discontinûment sur l'espace symétrique complexe voulu, qui soit non-arithmétique (voir [DM] p86), et ce groupe correspond au cas de trois variables.

Cependant, il semblerait que l'on puisse se passer de l'action discontinue des groupes de monodromie, et considérer de façon plus directe un morphisme d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^n$ (où n est le nombre de variables) à la variété modulaire de Shimura correspondante. Ce qui fournirait une infinité d'exemples qui viendraient s'ajouter à ceux de la liste donnée par P. Deligne et G.D. Mostow, auxquels nous devons nous restreindre ici. Ces travaux sont en cours.

Bibliographie :

- [AK] APPELL-KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, L.M. (1926).
- [Ar] N. ARCHINARD, *Hypergeometric abelian varieties and identities*, Thèse de Doctorat, Juin 2000.
- [BeWo] F. BEUKERS-J. WOLFART, *Algebraic values of hypergeometric functions*, New Advances in Transcendence Number Theory, C.U.P. (1988), Proceedings of the 1986 Durham Symposium in Transcendental Number Theory, ed. A. Baker.
- [Be] D. BERTRAND, *Endomorphismes de groupes algébriques ; applications arithmétiques. Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Prog. Math. 31 (1983) pp1-45.
- [Co1] P. COHEN, *Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol.26(3) (1996).
- [Co2] P. COHEN, Prépublication Journées Arithmétiques de Lille 2001.
- [CoWo1] P. COHEN-J. WOLFART, *Modular embeddings for some non-arithmetic Fuchsian groups*, Acta Arithmetica LVI (1990) pp93-110.
- [CoWo2] P. COHEN-J. WOLFART, *Fonctions hypergéométriques en plusieurs variables et espaces de modules de variétés abéliennes*, Ann. Scient. E.N.S (1993) pp665-690.
- [CoWo3] P. COHEN-J. WOLFART, *Algebraic Appell-Lauricella functions*, Analysis 12, (1992) pp359-376.
- [CoWü] P. COHEN-G. WÜSTHOLZ, *Application of the André-Oort conjecture to some questions in transcendence*, Panorama of Number Theory (1999), ed. G. Wüstholz, C.U.P.

- [CW] CL. CHEVALLEY-A. WEIL, *Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers.*, Abh. Hamburger Math. Sem. 10 (1934) pp358-361.
- [DM] P. DELIGNE-G.D. MOSTOW, *Monodromy of the hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, I.H.E.S. 63 (1986) pp5-90.
- [dJN] J.DE JONG-R.NOOT, *Jacobians with complex multiplication*, Arithmetic algebraic geometry, G. van der Geer-F. Oort-J. Steendbrink, eds, PM89, Birkhäuser (1991) pp177-192.
- [Ed] B. EDIXHOVEN, *On the André-Oort conjecture for Hilbert modular surfaces*, prépublication de Université de Rennes 1, Nov. 1999.
- [EdYa] B. EDIXHOVEN-A. YAFAEV, *Subvarieties of Shimura varieties*, Prépublication de l'I.R.M. de Rennes, Mai 2001.
- [M] G.D. MOSTOW, *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions*, I.H.E.S. 63 (1986) pp91-106.
- [Pr] A. PRÄVE, *On transcendence degree of period quotients*, Thèse de Doctorat, Juin 2000.
- [Sa] J.K. SAUTER, *Isomorphisms among monodromy groups and applications to lattices in $PU(1,2)$* , Pacific J. of Math. (1990) Vol.146 pp331-384.
- [Shi1] G. SHIMURA, *On analytic families of polarised abelian varieties and automorphic functions*, Ann. Math. (1963) Vol.78 pp149-192.
- [Shi2] G. SHIMURA, *Moduli of abelian varieties and number theory*, Proc. Sympos. Pure Math. (1966) Vol.9 pp312-332.
- [Shi3] G. SHIMURA, *Automorphic forms and the periods of abelian varieties*, J. Math. Soc. Japan (1979) Vol.31 pp561-592.
- [ShWo] H. SHIGA-J. WOLFART, *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. Reine Angew. Math. (1995) Vol.463 pp1-25.

[Ta] K. TAKEUCHI, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan (1977) Vol.29 pp91-106.

[Wo] J. WOLFART, *Werte hypergeometrischer Funktionen*, Invent. Math. (1988) Vol.92 pp187-216.

[Wo2] J. WOLFART, *Manuscrit traitant de remarques sur les valeurs des fonctions hypergéométriques d'Appell en des points algébriques*.

[WoWü] J. WOLFART-G. WÜSTHOLZ, *Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen*, Math. Ann. (1985) Vol.273 pp1-15.

[Wü] G. WÜSTHOLZ, *Algebraic groups, Hodge theory and transcendence*, Proc. of the Intern. Congress of Math., Berkeley California U.S.A. (1986)

[Ya] A. YAFAEV, *Sous-variétés des variétés de Shimura*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1.

[Yo] M. YOSHIDA, *Fuchsian differential equations*, Aspekte der Mathematik, Vieweg E11 (1987).

P.A. Desrousseaux
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.M.R. 8524 Bâtiment M2
59655 Villeneuve d'Ascq cedex
desrouss@agat.univ-lille1.fr

Résumé

VALEURS EXCEPTIONNELLES DE FONCTIONS TRANSCENDANTES

On s'intéresse aux fonctions transcendentes, et plus particulièrement aux valeurs des fonctions hypergéométriques de Gauss et d'Appell en des points algébriques. Dans certains cas, on peut interpréter géométriquement de telles valeurs.

Après avoir rappelé l'ensemble exceptionnel lié à la fonction hypergéométrique de Gauss, introduit par J. Wolfart, on montre dans la première partie, comment des valeurs algébriques de telles fonctions conduisent à des valeurs transcendentes d'autres fonctions de Gauss.

Dans un deuxième temps, on construit l'ensemble exceptionnel relatif aux fonctions hypergéométriques d'Appell. Il permet de relier des valeurs algébriques de ces fonctions des variétés abéliennes de la même classe d'isogénie.

En utilisant une conjecture d'André-Oort, on relie ensuite la fréquence d'apparition de certaines valeurs algébriques de fonctions d'Appell à l'arithméticité du groupe de monodromie relatif à cette fonction.

Un résultat similaire à celui du premier paragraphe est obtenu dans cette quatrième partie, il porte sur les fonctions hypergométriques d'Appell.

Enfin, en se servant des deux fonctions étudiées précédemment, on introduit une nouvelle fonction transcendente. On construit et on étudie la finitude de son ensemble exceptionnel.