

Université de Lille I
U.F.R. de Mathématiques - Laboratoire A.G.A.T. - U.M.R. 8524

Propriétés homotopiques et dynamiques de la catégorie relative de Lusternik et Schnirelmann

Thèse soutenue le 12 juin 2002

par

Pierre-Marie MOYAU

pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques

Composition du jury:

<i>Président</i>	Daniel TANRÉ	Université de Lille I
<i>Rapporteurs</i>	Yves FÉLIX	Université Catholique de Louvain
	John OPREA	Cleveland State University
<i>Examineur</i>	Mathias SCHWARZ	Universität Leipzig
<i>Directeur de Thèse</i>	Octavian CORNÉA	Université de Lille I

Numéro d'ordre: 3131

Résumé

Nous étudions les propriétés homotopiques et dynamiques d’une version relative (due à Fadell et Husseini) de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann, version qui peut être utilisée pour estimer le nombre de points critiques de certaines fonctions définies sur des variétés à bords.

La première partie est consacrée à un rappel des définitions et de quelques résultats classiques sur la catégorie relative, ainsi qu’à l’adaptation au cadre relatif de résultats du cadre absolu.

Puis, nous étudions la catégorie relative des paires d’indice de Conley. Nous montrons en particulier qu’un ensemble invariant isolé S pour un flot ϕ défini sur une variété possède un voisinage à l’intérieur duquel la catégorie de ses paires d’indice est constante, maximale, de valeur notée $cat(S, \phi)$. Si de plus ϕ est presque gradient au voisinage de S , S contient au moins $cat(S, \phi)$ orbites stationnaires.

Enfin, nous étudions les invariants homotopiques des paires $(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$. En utilisant la construction classifiante de Dold-Lashof, nous obtenons une nouvelle description des fibrations de Ganéa servant à calculer ces invariants. On en déduit les égalités $inv(X \times D^{n+1}, X \times S^n) = inv(X) + 1$ pour inv l’invariant e de Toomer et la σ catégorie de Vandembroucq.

Puis, en collaboration avec Vandembroucq, nous montrons que $cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n) = Q^{n+1}cat(X) + 1$ où $Q^{n+1}cat$ est un invariant défini par Scheerer, Stanley et Tanré. En corollaire de ce résultat, nous obtenons entre autre que toute fonction quadratique à l’infini au dessus d’une variété fermée M possède au moins $Qcat(M) + 1$ points critiques. Combinée avec un résultat de Laudenbach et Sikorav, cette inégalité donne une nouvelle borne homotopique pour le problème des intersections lagrangiennes dans un fibré cotangent : si ψ est un difféomorphisme hamiltonien à support compact de T^*M , alors M et $\psi(M)$ se coupent en au moins $Qcat(M) + 1$ points.

Mots-clés: catégorie de Lusternik-Schnirelmann, points critiques, indice de Conley, intersections lagrangiennes.

Table des matières	1
Introduction	3
1^{ere} Partie : Généralités sur la catégorie relative	11
1 Définitions de la catégorie relative	11
1.1 Définition par les recouvrements	11
1.1.1 Recouvrements catégoriques	11
1.1.2 Suites catégoriques et formules produits	14
1.2 Déformation de la diagonale	15
1.3 Catégorie relative et fibrations de Ganéa	16
1.3.1 Construction fibre-cofibre	16
1.3.2 Application à la catégorie relative	17
1.4 Lien avec d'autres invariants relatifs	19
2 Quelques propriétés homotopiques	21
2.1 Catégorie relative et attachement de cellule	21
2.2 Catégorie relative d'applications avec section	25
2.3 Catégorie et fibrés vectoriels	27
2^{eme} Partie : Catégorie relative et points critiques	31
3 Rappels	32
3.1 Premières définitions	32
3.2 Indice de Conley	33
3.2.1 Définition et existence des paires d'indice	33
3.2.2 Paires d'indice régulières	35
3.2.3 L'indice de Conley	36
3.3 Bloc isolant	37
4 Catégorie relative des paires d'indices	39
4.1 Déformation des paires d'indices par des flots	39
4.2 Points critiques et paires d'indice	43
4.3 Produits de flots et suspension dynamique	46
4.4 Paires d'indice d'un type d'homotopie fixé	47
4.4.1 Paires d'indice du type (X, \emptyset)	47
4.4.2 Rappels sur les ensembles critiques raisonnables	49

4.5	Catégorie des paires d'indice	50
3^{eme}	Partie : Etude de $cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$	55
5	Catégorie relative et espaces classifiants	56
5.1	Préliminaires	56
5.1.1	Construction de Borel	56
5.1.2	Join équivariant de deux espaces	57
5.1.3	Construction de Dold-Lashof-Milnor	57
5.2	Le cas particulier de l'action triviale	60
5.3	Applications à la catégorie relative	63
6	Catégorie relative et Qcatégorie	64
6.1	Extension fibre à fibre d'un foncteur	64
6.2	Qcatégorie	65
6.3	Catégorie relative et Qcatégorie	68
7	Corollaires	71
7.1	Conjectures sur les invariants numériques	71
7.2	Points critiques de fonctions quadratiques à l'infini	73
7.3	Intersections lagrangiennes dans un fibré cotangent	76
	Références	79

Introduction

La LS-catégorie d'un espace X est le plus petit n tel que X puisse être recouvert par $n + 1$ ouverts contractiles dans X . Elle a été initialement définie par Lusternik et Schnirelmann (1934) dans le cadre des variétés pour obtenir des estimations de nombre minimal de points critiques. Nous avons en effet :

Théorème : [31] *Soit M une variété lisse fermée et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une application lisse. Alors, f possède au moins $\text{cat}(M) + 1$ points critiques.*

Malgré la simplicité apparente de sa définition, la catégorie est très difficile à calculer en général. Par exemple, un des problèmes centraux dans l'étude de la catégorie a été la conjecture de Ganéa :

Conjecture de Ganéa : Pour tout CW -complexe fini X et pour tout $n \geq 1$,

$$\text{cat}(X \times S^n) = \text{cat}(X) + 1$$

La catégorie possède plusieurs définitions équivalentes. En particulier, on peut définir $\text{cat}(X)$ comme le plus petit n tel que l'inclusion de la $n^{\text{ème}}$ étape de la construction classifiante de Milnor de $B\Omega X$, $g_n : B_n(\Omega X) \rightarrow B\Omega X$ ait une section. De nombreux invariants homotopiques approchant la catégorie ont été définis en appliquant des foncteurs aux applications g_n et en cherchant des sections aux applications ainsi obtenues. En particulier, signalons $Q^p \text{cat}$ et $Q \text{cat}$ (extension fibre à fibre des foncteurs $Q^p = \Omega^p \Sigma^p$ et $Q = \Omega^\infty \Sigma^\infty$) de Stanley, Scheerer et Tanré [45], σcat (foncteur Σ^∞) de Vandembroucq [53], e (foncteur Homologie) de Toomer [52].

La notion de catégorie a également été étendue par Reeken [38], puis par Fadell et Husseini [15] à des paires (X, A) d'espaces. Le nombre $\text{cat}(X, A)$ est le plus petit n tel qu'il existe un recouvrement de X par $n + 1$ ouverts $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ satisfaisant : U_0 est un voisinage de A tel qu'il existe $H : (U_0, A) \times I \rightarrow (X, A)$ déformation de U_0 sur A relativement à A et pour $i \geq 1$, U_i est contractile dans X . La catégorie relative a été étudiée par Cornéa [7] qui a montré en particulier les deux résultats suivants :

- on a les inégalités

$$\text{cat}(X \times D^{n+1}, X \times S^n) \leq \text{cat}(X \times S^n) \leq \text{cat}(X) + 1$$

- La catégorie relative peut également servir pour des estimations de nombre de points critiques (voir en début de 2^{ème} partie pour un énoncé plus précis):

Théorème : [7] *Si X est une variété à bords, f une fonction régulière sur X et*

$A \subset \partial X$ est l'endroit de la frontière où $-\nabla f$ pointe extérieurement, alors f a au moins $cat(X, A)$ points critiques.

En particulier, soit M une variété fermée et f une fonction définie sur $M \times D^n$ admettant comme ensemble de sortie pour le flot associé $M \times D^{n-t-1} \times S^t \subset \partial(M \times D^n)$. Alors, f possède au moins $cat(M \times D^{t+1}, M \times S^t)$ points critiques. En application directe de ce résultat, Cornéa prouve également que si (M, ω) est une variété symplectique compacte avec revêtement euclidien, alors tout système hamiltonien régulier 1-périodique possède au moins $cat(M \times D^{t+1}, M \times S^t)$ orbites stationnaires, pour n assez grand.

Ces diverses considérations ont mené à la conjecture suivante, que l'on peut voir comme une version homotopique de la conjecture d'Arnold (Homotopical Arnold Conjecture) (voir section 7.3).

Conjecture : (HAC) Pour tout CW -complexe fini et pour n assez grand,

$$cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n) = cat(X) + 1$$

Clairement, (HAC) entraînerait la conjecture de Ganéa (pour tout n).

Cependant, Iwase a construit des contre-exemples à la conjecture de Ganéa [25] qui sont donc également des contre-exemples à la conjecture d'Arnold homotopique. Il se pose maintenant la question de la caractérisation des espaces vérifiant la conjecture de Ganéa. Dans ce but, Scheerer, Stanley et Tanré [45] ont introduit l'invariant $Qcat$ et émis la conjecture :

Conjecture : (SST) Pour tout CW -complexe fini X ,

$$X \text{ satisfait la conjecture de Ganéa} \iff Qcat(X) = cat(X).$$

Mon travail s'inscrit dans ce contexte et a pour point de départ les deux résultats de Cornéa cités ci-dessus.

- La première partie de cette thèse est consacrée à des rappels et des généralités sur la catégorie relative. On y rappelle entre autres les différentes définitions de la catégorie et d'autres invariants relatifs. Nous énonçons également quelques propriétés homotopiques de cet invariant, certaines étant des extensions au cadre relatif de propriétés connues pour la catégorie absolue, d'autres étant propres au cadre relatif.

- On peut remarquer que l'approximation de points critiques par la catégorie relative a un caractère local. On considère en fait une fonction sur une variété $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ puis on choisit à l'intérieur de M une certaine sous-variété à bords de même dimension X à laquelle on applique le résultat de Cornéa. L'énoncé de Cornéa est donc

très proche, dans l'esprit, de la théorie de l'indice de Conley (voir section 3.2). En effet, dans celle-ci, à un ensemble isolé invariant S pour un flot ϕ , on associe une paire d'indice (N_1, N_0) , où N_1 est un certain voisinage de S et N_0 est la zone de sortie du flot ϕ dans N_1 . (La paire (X, A) du théorème de [7] correspond à une telle paire pour le flot engendré par $-\nabla f$.) Le type d'homotopie des paires d'indice n'est pas un invariant de (S, ϕ) . Par contre, le type d'homotopie du quotient N_1/N_0 ne dépend pas de la paire considérée. On définit alors l'indice de Conley $h(S, \phi)$ comme étant le type d'homotopie de ce quotient et les propriétés homotopiques de $h(S, \phi)$ donnent des renseignements sur S . La réduction de N_0 en un point est donc nécessaire mais peut occasionner une perte sensible d'informations.

En partant de ce constat, nous étudions dans la deuxième partie de cette thèse la catégorie relative des paires d'indice d'ensembles invariants d'un flot. Nous prouvons entre autres :

Théorème 4.9 *Soit ϕ un flot continu, obtenu par intégration d'un champs de vecteurs continu sur X , variété riemannienne lisse de dimension n . Soit S un ensemble invariant isolé pour ce flot et (N_1, N_0) une paire d'indice régulière pour S .*

(ii) *Il existe un voisinage K de S tel que pour toute paire d'indice (M_1, M_0) pour (S, ϕ) ,*

$$M_1 \subset K \Rightarrow \text{cat}(M_1; M_0) = \max \left\{ \text{cat}(N_1, N_0) \mid (N_1, N_0) \text{ paire d'indice pour } (S, \phi) \right\}$$

On appelle catégorie de ϕ en S , $\text{cat}(S, \phi)$ cette valeur maximale.

iii) *$\text{cat}(h(S, \phi)) \leq \text{cat}(S, \phi) \leq n$.*

iv) *Pour tout $n \geq 1$, $\text{cat}(S, \Sigma^{n+1}\phi) \leq \text{cat}(S, \Sigma^n\phi) \leq \text{cat}(S, \phi)$.*

v) *Si ϕ est presque gradient au voisinage de S , alors S contient au moins $\text{cat}(S, \phi)$ orbites stationnaires.*

(On rappelle (section 4.3) que si ϕ est un flot sur M la suspension $n^{\text{ème}}$ de ϕ , notée $\Sigma^n\phi$, est le flot produit sur $M \times \mathbf{R}^n$ de ϕ avec le flot gradient de la forme quadratique $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.)

Pour un ensemble invariant S d'un flot ϕ comme ci-dessus, $\text{cat}(S, \phi)$ permet donc d'estimer la 'complexité' de S , en complétant les informations données par l'indice de Conley. En particulier, l'indice de Conley de l'ensemble invariant de la suspension d'un flot est toujours une suspension (de LS catégorie 1) et est donc homotopiquement 'assez pauvre'. Le nombre $\text{cat}(S, \phi)$ occasionne une perte d'information moindre. En particulier, si M est une variété riemannienne fermée et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction régulière, on peut considérer la suspension dynamique $n^{\text{ème}}$ de f , $f \oplus q : M \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, où q est la forme quadratique ci-dessus. Alors, M est un ensemble invariant isolé pour ψ , flot gradient de $f \oplus q$. De plus, $\text{cat}(M, \psi) = \text{cat}(M \times D^n, M \times S^{n-1})$ est en général strictement plus grand que 1. Par contre, $h(S, \psi) = \Sigma^n M \vee S^n$ et sa catégorie absolue

vaut 1.

• Dans la troisième partie de ce travail, nous étudions la catégorie des paires $(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$.

De manière similaire à la catégorie absolue, on peut caractériser la catégorie relative en utilisant la construction classifiante de Dold-Lashof [10]. Cette caractérisation nous permet d'obtenir

Théorème 5.5 :[35] *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW-complexe et pour tout $p \geq 1$, on a :*

- (i) $e(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = e(X) + 1 \leq \dots$
- (ii) $\dots \leq \sigma^{p+2} \text{cat}(X) + 1 = \sigma^1 \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq$
- (iii) $\sigma^{p+1} \text{cat}(X) + 1 \leq \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$

Nous remarquons tout d'abord (points *i* et *ii*) que les versions de la conjecture homotopique d'Arnold correspondant aux invariant de Toomer et à la σ catégorie sont vérifiées.

D'autre part, l'inégalité *iii*) a été le premier résultat liant la catégorie relative de $(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$ à une version stable de la catégorie de X . De plus, elle montre une convergence des notions de suspension dynamique et homotopique : le nombre de points critiques des stabilisations dynamiques de fonctions définies sur M est estimé par une version stable (au sens homotopique) de la catégorie de M .

Dans la section 6, issue d'une collaboration avec L.Vandembroucq [36], nous obtenons un résultat qui entraîne *iii*) de manière évidente. En effet, nous prouvons :

Théorème 6.3 : *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW complexe,*

$$\text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = Q^{p+1} \text{cat}(X) + 1.$$

qui entraîne en particulier :

Corollaire 6.4 : *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW-complexe fini,*

$$\inf_{p \in \mathbf{N}} \text{cat}(X \times D^{p+1}, X \times S^p) = Q \text{cat}(X) + 1.$$

Ces deux résultats ont des conséquences intéressantes, développées en section 7.

Conséquences pour les conjectures sur les invariants numériques.

Ce résultat nous permet de reformuler la conjecture d'Arnold homotopique en

$$X \text{ satisfait } \mathbf{(HAC)} \iff Q \text{cat}(X) = \text{cat}(X)$$

En particulier, puisque l'égalité $Qcat(X) = cat(X)$ a été prouvée dans [45] quand X est un espace rationnel, nous obtenons

Corollaire 7.2 : *La conjecture d'Arnold homotopique est vraie pour les espaces rationnels.*

D'autre part, en combinant le théorème 6.3 et l'inégalité prouvée par Cornéa on obtient clairement l'implication \Leftarrow de la conjecture *SST*.

Points critiques de fonctions quadratiques à l'infini.

Soit M une variété lisse, fermée, connexe et $\nu = (\pi; E; M)$ un fibré vectoriel de base M . On dit que $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est quadratique à l'infini sur M si f coïncide, en dehors d'un voisinage compact de la section zéro, avec une forme quadratique non dégénérée. (On peut remarquer que la suspension dynamique $n^{\text{ème}}$ de f est un cas particulier de fonction quadratique à l'infini sur M). On peut par des méthodes proches de celles de la seconde section, estimer le nombre de points critiques d'une fonction quadratique à l'infini au dessus de M par $cat(M \times D^{r+1}, M \times S^r) = Q^{r+1}cat(M) + 1$ pour un certain r (voir proposition 7.3). Nous obtenons alors un analogue stable du théorème de Lusternik et Schnirelmann :

Reformulation du corollaire 7.4 : *Soit M une variété fermée et f une fonction régulière, quadratique à l'infini au-dessus de M . Alors, f possède au moins $Qcat(M)+1$ points critiques.*

De plus, si M est 1-connexe, on peut construire [8] une fonction quadratique au dessus de M ayant moins de $cl_f(M) + 1$ points critiques (où $cl_f(M)$ est une variante de la notion de longueur en cones). Soit $\widetilde{crit}(M)$ le nombre minimal de points critiques d'une fonction quadratique à l'infini au dessus de M . Nous obtenons ainsi :

Corollaire 7.5 : *Pour toute variété fermée 1-connexe M ,*

$$Qcat(M) + 1 \leq \widetilde{crit}(M) \leq cl_f(M) + 1$$

Intersections lagrangiennes dans un fibré cotangent.

Soit M une variété lisse fermée. Alors, T^*M possède de manière canonique une structure de variété symplectique, donnée par la forme symplectique $\omega = -d\lambda$ avec λ la forme de Liouville. De plus, M identifiée avec son image par la section zéro, est une sous-variété lagrangienne de T^*M .

Etant donné une fonction $H : T^*M \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ régulière à support compact, on construit

une isotopie hamiltonienne (φ^t) . L'application $\psi = \varphi^1$ est appelée un difféomorphisme hamiltonien. Nous avons alors :

Conjecture d'Arnold : *Soit M une variété fermée. Pour tout difféomorphisme hamiltonien à support compact ψ of T^*M ,*

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{crit}(M)$$

où $\text{crit}(M)$ est le plus petit nombre de points critiques d'une fonction définie sur M . D'après le théorème de Lusternik et Schnirelmann, $\text{crit}(M) \geq 1 + \text{cat}(M)$. Remarquons d'ailleurs que $1 + \text{cat}(M)$ est la meilleure estimation homotopique connue de $\text{crit}(M)$. Cette conjecture a fait l'objet de nombreux travaux. En particulier, Hofer, en 1985, prouve l'inégalité $\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{cuplength}(M) + 1$.

La même année, Laudenbach et Sikorav, par la méthode des géodésiques brisées, montrent que $\#(\psi(M) \cap M) \geq \widetilde{\text{crit}}(M)$.

En combinant le résultat de Laudenbach et Sikorav avec notre estimation de $\widetilde{\text{crit}}(M)$, nous obtenons une nouvelle borne homotopique pour $\#(\psi(M) \cap M)$.

Corollaire 7.7 : *Soit M une variété fermée. Pour tout difféomorphisme hamiltonien à support compact ψ de T^*M ,*

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{Qcat}(M) + 1$$

Puisque $\text{Qcat} \geq \text{cuplength}$, nous obtenons le résultat de Hofer comme corollaire de cette inégalité.

Notons que d'après la conjecture (SST), les espaces pour lesquels $\text{Qcat} \neq \text{cat}$ sont précisément les espaces ne satisfaisant pas la conjecture de Ganéa et qu'il n'existe à l'heure actuelle que très peu d'exemples de variétés fermées dans ce cas.

De plus, lorsque M est une variété fermée vérifiant $\text{Qcat}(M) = \text{cat}(M)$ (par exemple $M = Sp(2)$ ou $M = Sp(3)$, voir remarque 7.1), le corollaire devient :

*Pour tout difféomorphisme hamiltonien à support compact ψ de T^*M ,*

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{cat}(M) + 1$$

qui est, comme indiqué précédemment, la meilleure borne homotopique que l'on puisse obtenir pour $\text{crit}(M)$.

Pour terminer, je tiens à remercier l'équipe de topologie de l'Université de Lille. En particulier, je suis très reconnaissant envers Octav Cornéa, sans lequel rien ne se serait fait. Avec beaucoup de gentillesse et de patience, il a su me guider et me conseiller tout au long de ces années et ce, tant sur le plan de la recherche que sur le plan humain. Une partie de ce travail a été effectuée avec Lucile Vandembroucq. J'ai beaucoup appris de nos échanges et ai beaucoup apprécié cette collaboration avec elle. Je

remercie également Daniel Tanré, pour les réponses qu'il a toujours su apporter à mes nombreuses questions. Je suis très heureux qu'il ait accepté de faire partie de mon jury. Une thèse est également l'occasion de voyager et d'élargir son horizon. En particulier, j'ai passé une année à l'Université de Rochester. Je remercie tous les membres du Département de Mathématiques pour la chaleur et la gentillesse de leur accueil. Je suis particulièrement reconnaissant envers Fred Cohen et John Harper pour tout le temps qu'ils m'ont consacré et toutes les choses qu'ils m'ont apprises. Au gré de cours, de congrès et de conférences, j'ai rencontré et apprécié plus de personnes que je ne pourrais en nommer. Parmi celles-ci, Yves Félix et John Oprea, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de ma thèse. Je les en remercie.

Enfin, pendant toutes ces années parfois difficiles, j'ai toujours pu compter sur l'amitié et le soutien de nombreux amis : mes collègues de la 'cave 12' (et les amis du lundi/mardi soir), les 'saturday night friends' de Rochester et enfin tous mes amis parisiens. Je les remercie de tout coeur.

Généralités sur la catégorie relative

Tout comme la catégorie absolue, la catégorie relative d'une paire (X, A) a été initialement définie en terme de recouvrements mais possède deux autres définitions équivalentes. L'une est de type Whitehead et est basée sur l'étude de la déformation de la diagonale $X \rightarrow X^{n+1}$ dans une version relative du bouquet garni (*fat wedge*). L'autre est de type Ganéa et repose sur la recherche de sections pour des fibrations canoniquement associées à la paire (X, A) . Dans une première section, nous détaillons ces définitions et en donnons quelques conséquences immédiates. Nous donnons également des versions relatives d'autres invariants numériques absolus, comme l'invariant de Toomer ou la σ catégorie.

Les variations de la catégorie relative lorsqu'on attache une cellule et l'évaluation de la catégorie (ou σ catégorie) relative des applications $A \rightarrow X$ possédant une section sont deux problèmes très proches dans l'esprit et que nous discutons dans la deuxième section.

Nous terminons cette partie par quelques résultats sur la catégorie des paires (Fibré en disque, Fibré en sphère) pour un fibré vectoriel au dessus d'une variété. Nous interpréterons ces résultats en terme d'estimations de nombre de points critiques en deuxième et troisième parties.

Dans toute cette première partie, nous nous plaçons dans la catégorie des espaces *compactly generated* bien pointés ayant le type d'homotopie d'un CW -complexe.

Notons cependant que l'équivalence des trois définitions de la LS-catégorie, le lemme 1.2 et la proposition 1.4 et en fait la plupart des énoncés et remarques de la première section restent valables pour des espaces *compactly generated* complètement normaux (*completely normal*).

1 Définitions de la catégorie relative

1.1 Définition par les recouvrements

1.1.1 Recouvrements catégoriques

La notion de catégorie relative a été introduite par Reeken [38] qui recherchait un invariant numérique lui permettant de comparer les structures topologiques des ensembles $f^{-1}(]-\infty, a])$ et $f^{-1}(]-\infty, b])$ pour $a \leq b$ et f une fonction réelle de classe C^1 définie sur une variété de Finsler. La définition précise que nous rappelons ici et que nous utiliserons par la suite est due à Fadell et Husseini [15].

Définition 1.1. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration. La catégorie relative de (X, A) , notée $cat(X, A)$, est le plus petit n tel qu'il existe un recouvrement de X par $n + 1$ ouverts*

$(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ satisfaisant :

- U_0 est un voisinage de A et il existe $H : (U_0, A) \times I \rightarrow (X, A)$ déformation de U_0 sur A relativement à A ;
- pour $i \geq 1$, U_i est contractile dans X .

Dans la suite, on appellera *recouvrement catégorique* de (X, A) un tel recouvrement. Nous nous restreindrons toujours au cas X connexe, mais autoriserons A non connexe. L'idée de base de la catégorie relative est donc claire : on utilise un ouvert pour recouvrir A , puis on étudie la complexité de la différence $X - A$ en recouvrant $X - A$ (en fait $X - U_0$ où U_0 se rétracte sur A dans X) par des ouverts contractiles.

Si $A = *$, on retrouve la définition usuelle de la catégorie de X . Si $A = \emptyset$, on pose $cat(X, A) = cat(X) + 1$.

Nous rappelons maintenant quelques données techniques concernant les recouvrements.

Remarque 1.1. *i)* L'existence de U_0 satisfaisant aux conditions de la définition 1.1 provient du fait que $A \rightarrow X$ soit une cofibration ([12], Chap. XV, Thm 7.4).

ii) Avec les notations précédentes, $A \hookrightarrow U_0$ est une cofibration. En effet, on peut trouver un voisinage ouvert V de A tel que $H|_{V \times I} \subset U_0$, ce qui suffit pour conclure.

iii) On peut toujours se ramener au cas où H se prolonge en une application sur $X \times I$ valant id_X en dehors d'un voisinage de U_0 . Par normalité de X , il existe un ouvert \tilde{U}_0 tel que $A \subset \tilde{U}_0 \subset Cl(\tilde{U}_0) \subset U_0$ et $(\tilde{U}_0, U_1, \dots, U_n)$ soit un recouvrement catégorique. Soit $u : X \rightarrow [0, 1]$ valant 1 sur $Cl(\tilde{U}_0)$ et 0 sur $X \setminus U_0$. On prolonge alors $H|_{\tilde{U}_0 \times I}$ sur $X \times I$ par $(x, t) \mapsto H(x, u(x).t)$ avec la convention $\forall x \in X, H(x, 0) = x$. On peut également appliquer ce procédé pour les autres ouverts $U_i, i \geq 1$.

iv) Soit V un ouvert de X contenant A . Si $A \rightarrow V$ est une cofibration et s'il existe $G : (V, A) \times I \rightarrow (X, A)$ déformation de V sur A non forcément relative à A , on peut construire une déformation de V sur A relative à A .

Il existe $R : (V \times I) \times I \rightarrow (V \times I)$ rétraction de $V \times I$ sur $V \times \{0\} \cup A \times I$ relative à $V \times \{0\} \cup A \times I$. Plus précisément, posons $R(x, s, t) = (R_V(x, s, t), u(x, s, t))$.

Nous avons les relations :

- $\forall x \in A, \forall s, t \in I, R(x, s, t) = (x, s)$,
 - $\forall x \in V, \forall s \in I, R(x, s, 1) \in V \times \{0\} \cup A \times I$ et donc $R_V(x, s, 1) \in A$ ou $u(x, s, 1) = 0$.
- Dès lors, $(x, t) \mapsto G(R_V(x, 1, t), 1 - u(x, 1, t))$ est clairement une déformation de V sur A relative à A .

On peut donc dans la définition 1.1 affaiblir la condition portant sur U_0 . •

La catégorie relative est un invariant du type d'homotopie de paires. Plus précisément, supposons que l'on ait le diagramme ci-dessous et qu'il existe $G : (X, A) \times I \rightarrow (X, A)$

homotopie entre $h \circ g$ et $id_{(X,A)}$. (On note cette situation $(X, A) \leq (Y, B)$). On a alors $cat(X, A) \leq cat(Y, B)$. (On obtient un recouvrement catégorique de (X, A) en prenant l'image inverse par g d'un recouvrement catégorique de (Y, B) et en utilisant la remarque 1.1.iv pour l'ouvert se rétractant sur A).

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g|_A} & B & \xrightarrow{h|_B} & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

Par suite,

$$(X, A) \simeq (Y, B) \Rightarrow cat(X, A) = cat(Y, B) \quad (1)$$

A partir de la définition 1.1 on obtient un premier encadrement de la catégorie relative. Avec les notations précédentes,

$$cat(X \cup CA) \leq cat(X, A) \leq cat(X) + 1 \quad (2)$$

L'inégalité de gauche apparait comme un cas particulier d'une propriété un peu plus générale :

Lemme 1.2. *Soit $f : A \rightarrow X$ une cofibration, $g : A \rightarrow B$ une application quelconque.*

Alors, si $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$ est une somme amalgamée, on a $cat(Y, B) \leq cat(X, A)$.

Preuve : Tout d'abord, $B \hookrightarrow Y$ est bien une cofibration. A homotopie près, $(Y, B) \simeq (X \cup_{A \times \{0\}} A \times I \cup_{A \times \{1\}} B, B) = (\tilde{Y}, B)$. Dès lors, si U_0, U_1, \dots, U_n est un recouvrement catégorique pour (X, A) , $\tilde{U}_0 = U_0 \cup_{A \times \{0\}} A \times I \cup_{A \times \{1\}} B, U_1, \dots, U_n$ sera un recouvrement catégorique de (\tilde{Y}, B) . \square

Remarque 1.3. Nous obtenons également à partir de la définition 1.1 :

i) $cat(X, A) = 0 \iff f : A \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.

Notons que si $f : A \rightarrow X$ induit une surjection en $\pi_1(-)$ et un isomorphisme en $H_*(-, \mathbf{Z})$, alors $X/A \simeq *$ (car X/A est 1-connexe et acyclique) et donc $cat(X/A) = 0$. Cependant, si f n'est pas une équivalence d'homotopie, on aura $cat(X, A) > 0$. De nombreux exemples de ce genre sont construits par Kan et Thurston [29].

ii) Si $f : A \rightarrow X$ est homotopiquement triviale et $X \not\simeq *$, $cat(X, A) = cat(X)$.

iii) Si $X \simeq *$ et $A \not\simeq *$, $cat(X, A) = 1$.

iv) Pour illustrer les points *i)* et *iii)*, considérons la sphère de Poincaré Z^3 , obtenue comme quotient de S^3 par l'action d'un groupe parfait d'ordre 120 (*binary icosahedral group*) (voir [2], [40]). Z^3 est une variété fermée de dimension 3 qui a l'homologie de S^3 mais n'est pas 1-connexe. Posons $A = Z - \{pt\}$. Alors, A n'est pas contractile (car $\pi_1(A) = \pi_1(Z)$) mais ΣA est contractile (car A est acyclique). Posons $X = CA$, le cône sur A . On a alors $cat(X, A) = 1$ mais $cat(X/A) = cat(\Sigma A) = 0$. •

1.1.2 Suites catégoriques et formules produits

On peut étendre au cas relatif la notion de suites catégoriques de Fox [19], dont l'utilité apparait pour l'établissement de formules produits.

Définition 1.2. Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration. On appelle suite catégorique de longueur n pour (X, A) la donnée de $(n + 1)$ ouverts $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = X$ satisfaisant :

- $A \subset A_0$ et A_0 se déforme sur A relativement à A ;
- pour $i \geq 1$, $A_i \setminus A_{i-1}$ est inclus dans un ouvert de X contractile dans X .

Les données de suites catégoriques et de recouvrements catégoriques sont équivalentes. En effet,

$$cat(X, A) \leq n \iff (X, A) \text{ possède une suite catégorique de longueur } n$$

Si $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un recouvrement catégorique de (X, A) , on pose $A_0 = U_0$ et pour $1 \leq i \leq n$, $A_i = A_{i-1} \cup U_i$. Réciproquement, si $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite catégorique de (X, A) , on pose $U_0 = A_0$ et on définit pour $1 \leq i \leq n$ U_i comme étant un ouvert contractile contenant $A_i \setminus A_{i-1}$, dont l'existence est supposée dans la définition de suite catégorique.

Proposition 1.4. Soient $(X, A), (Y, B)$ des paires d'espaces. On a :

- i)* $cat(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \leq cat(X, A) + cat(Y, B) - 1$;
- ii)* $\max\{cat(X, A), cat(Y, B)\} \leq cat(X \times Y, A \times B)$;
- iii)* $cat(X, A) \leq cat(X \times Y, A \times Y) \leq cat(X, A) + cat(Y)$.

Preuve : *i)* La preuve reprend celle de Fox [19] (voir également [27]). Posons $C = A \times Y \cup X \times B$. A partir d'une suite catégorique $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ pour (X, A) et d'une suite catégorique $(B_j)_{0 \leq j \leq p}$ pour (Y, B) , on construit une suite catégorique pour $(X \times Y, C)$ en posant $C_0 = A_0 \times Y \cup X \times B_0$ et pour $1 \leq k \leq n+p-1$, $C_k = C_0 \cup \bigcup_{\substack{i+j=k+1 \\ i \geq 1 \\ j \geq 1}} A_i \times B_j$. Tout d'abord, C_0 se déforme dans $X \times Y$ sur C relativement à C .

En effet, puisque $C \hookrightarrow C_0$ est une cofibration, il nous suffit (voir remarque 1.1iv) de trouver une déformation de paires $H_{X \times Y} : (C_0, C) \times I \rightarrow (X \times Y, C)$ amenant C_0 sur C . Soit $H_X : X \times I \rightarrow X$ (resp. $H_Y : Y \times I \rightarrow Y$) l'extension de la déformation de A_0

sur A (resp. de B_0 sur B).

On définit alors $H_{X \times Y}$ par $H_{X \times Y}(x, y, t) = (H_X(x, t), H_Y(y, t))$.

On termine la preuve (montrer que pour $0 \leq k \leq n + p - 2$, $C_{k+1} \setminus C_k$ est inclus dans un ouvert catégorique) de manière identique à [19], [27].

ii) Cette inégalité vient du fait que (X, A) et (Y, B) sont dominées par $(X \times Y, A \times B)$

iii) La première inégalité provient du *ii)*. La deuxième inégalité se montre de manière similaire à *i)*. Soit $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite catégorique pour (X, A) et $(B_j)_{0 \leq j \leq p}$ une suite catégorique pour $Y = (Y, *)$. On définit une suite catégorique pour $(X \times Y, A \times Y)$ en posant $C_0 = A_0 \times Y$ et pour $1 \leq k \leq n + p$, $C_k = C_0 \cup \bigcup \left\{ \begin{smallmatrix} i+j=k \\ i \geq 1 \\ j \geq 0 \end{smallmatrix} \right\} A_i \times B_j$. \square

1.2 Déformation de la diagonale

Soit $f : A \hookrightarrow X$ une cofibration. On définit les bouquets garnis relatifs $T^n(X, A) \subset X^n$ en posant $T^1(X, A) = A$ et $T^{n+1}(X, A) = T^n(X, A) \times X \bigcup_{T^n(X, A) \times *} X^n \times *$. De manière similaire au cas absolu,

Définition 1.3. [15] $cat(X, A) \leq n$ si et seulement si on peut déformer la diagonale $\Delta_{n+1} : X \rightarrow X^{n+1}$ dans $T^{n+1}(X, A)$ par une homotopie $H : (X, A) \times I \rightarrow (X^{n+1}, T^{n+1}(X, A))$ telle que $p_1 \circ H \circ f = f$.

Le lien entre la catégorie et la déformation de la diagonale provient de la remarque 1.1iii). Etant donné un recouvrement catégorique $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ de (X, A) , on peut étendre chacune des déformations $H_i : U_i \times I \rightarrow X$ en des applications $H_i : X \times I \rightarrow X$. Dès lors, l'application $H(x, t) = (H_0(x, t), \dots, H_n(x, t))$ sera une déformation de la diagonale dans $T^{n+1}(X, A)$ satisfaisant à la condition de la définition 1.3. Réciproquement, si j est un relèvement de la diagonale dans $T^{n+1}(X, A)$, on choisit un voisinage ouvert N_A de A se rétractant sur A , rel. A et un voisinage ouvert N_* de $*$ se rétractant sur $*$. Dès lors, $U_0 = j^{-1}(N_A \times X^n)$, $U_1 = j^{-1}(X \times N_* \times X^{n-1})$, ... $U_n = j^{-1}(X^n \times N_*)$ est un recouvrement catégorique de (X, A) .

Cette description de la catégorie permet d'utiliser la notion de déformation cellulaire pour estimer la catégorie. Nous avons ainsi :

Proposition 1.5. Soit (X, A) un CW-complexe relatif. Alors,

$$cat(X, A) < \frac{dim(X, A) - conn(X, A)}{1 + conn(X)} + 1$$

Preuve : Posons $dim(X, A) = n$, $conn(X, A) = q$ et $conn(X) = p$. Par suite, $(X, A) \simeq (A \cup (e^{q+1}) \cup \dots \cup (e^n), A)$. D'autres parts, X admet une décomposition

cellulaire avec une cellule de plus basse dimension en $p + 1$.

Donc, le CW -complexe relatif $(X^{k+1}, T^{k+1}(X, A)) = (X, A) \times (X, *) \times \cdots \times (X, *)$ admet $T^{k+1}(X, A)$ comme $(q + k(p + 1))^{eme}$ squelette (la première cellule de X^{k+1} en dehors de $T^{k+1}(X, A)$ correspond à $e^{q+1} \times e^{p+1} \times \cdots \times e^{p+1}$).

Par suite, si $dim(X, A) \leq q + k(p + 1)$, on peut étendre l'application $(X \times \{0\} \cup A \times I, A \times 1) \rightarrow (X^{k+1}, T^{k+1}(X, A))$, $(x, t) \rightarrow (x, \dots, x)$ en une application $(X \times I, X \times \{1\}) \rightarrow (X^{k+1}, T^{k+1}(X, A))$.

Donc, $dim(X, A) \leq q + k(p + 1) \Rightarrow cat(X, A) \leq k$. □

La définition de type Whitehead nous permet également de montrer de manière facile que si $A \hookrightarrow X$ et $X \hookrightarrow Y$ sont des cofibrations, alors

$$cat(Y, A) \leq cat(Y, X) + cat(X, A) \tag{3}$$

1.3 Catégorie relative et fibrations de Ganéa

1.3.1 Construction fibre-cofibre

Toute application $f : A \rightarrow X$ peut s'écrire comme la composée d'une équivalence d'homotopie et d'une fibration, suivant le diagramme :

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad f \quad} \\ \simeq \rightarrow \hat{A} \twoheadrightarrow X \\ \quad \quad \quad \hat{f} \end{array}$$

où $\hat{A} = \{(a, \omega) \in A \times X^I / f(a) = \omega(0)\}$, $\hat{f}(a, \omega) = \omega(1)$ et l'application $A \rightarrow \hat{A}$ est donnée par $a \mapsto (a, \text{chemin constant sur } f(a))$. Cette application est clairement une équivalence d'homotopie, d'inverse $\hat{A} \rightarrow A$ donné par $(a, \omega) \mapsto a$. La fibre de \hat{f} s'appelle la fibre homotopique de f .

Soit $f : A \rightarrow X$ une cofibration (de fibre homotopique F). En appliquant la construction fibre-cofibre [20], on définit de manière inductive les *fibrations de Ganéa associées à f*

$$F_n(X, A) \xrightarrow{i_n(X, A)} G_n(X, A) \xrightarrow{g_n(X, A)} X$$

Plus précisément,

- $g_0(X, A)$ est la fibration $\hat{A} \rightarrow X$ associée à f par le procédé ci-dessus;
- $g_{n+1}(X, A)$ est la fibration associée à $g_n(X, A) \cup * : G_n(X, A) \cup CF_n(X, A) \rightarrow X$, extension canonique de $g_n(X, A)$ à la cofibre de $i_n(X, A)$.

Soit $q_n(X, A)$ l'application canonique $A \rightarrow G_n(X, A)$.

Rappelons que d'après [21] Thm 1.1, $F_{n+1}(X, A) \simeq F_n(X, A) * \Omega X$.

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \longrightarrow & F_1(X, A) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_n(X, A) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{n+1}(X, A) \\
\downarrow i_0(X, A) & & \downarrow q_n(X, A) & & & & \downarrow i_n(X, A) & & & & \downarrow \\
A \simeq \hat{A} & \longrightarrow & G_1(X, A) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_n(X, A) & \longrightarrow & G_n(X, A) \cup CF_n(X, A) & \xrightarrow{\simeq} & G_{n+1}(X, A) \\
& & \downarrow g_1(X, A) & & & & \downarrow g_n(X, A) & & & & \downarrow \\
& & & & & & X & & & &
\end{array}$$

$g_0(X, A)$ (from $A \simeq \hat{A}$ to X), $g_{n+1}(X, A)$ (from $G_{n+1}(X, A)$ to X)

Signalons que pour tout n , $g_n(X, A) \circ q_n(X, A) = f$.

La construction de Ganéa est fonctorielle. Si on a une application de paire $h : (Z, C) \rightarrow (T, D)$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
C & \xrightarrow{q_k(Z, C)} & G_k(Z, C) & \longrightarrow & G_{k+1}(Z, C) \\
\downarrow & \searrow & \downarrow G_k(h) & \searrow & \downarrow G_{k+1}(h) \\
D & \xrightarrow{q_k(T, D)} & G_k(T, D) & \longrightarrow & G_{k+1}(T, D) \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
C & \xrightarrow{h|_C} & Z & \longrightarrow & Z \\
\downarrow & \searrow & \downarrow h & \searrow & \downarrow h \\
D & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T
\end{array}$$

1.3.2 Application à la catégorie relative

Les fibrations de Ganéa jouent un rôle très important pour le calcul de la catégorie. Nous avons en effet [7]

$$cat(X, A) \leq n \iff \exists s : X \rightarrow G_n(X, A) \text{ t.q. } \begin{cases} g_n(X, A) \circ s \simeq 1_X \\ s \circ f \simeq q_n(X, A) \end{cases}$$

On appellera *section catégorique pour* (X, A) une telle section. Une section catégorique est donc une section de $g_n(X, A)$ qui respecte la manière dont A est plongé dans X .

Notons que cette définition nous permet de définir la catégorie de (X, A) même si $A \rightarrow X$ n'est pas une cofibration. De plus, dans ce cas, $cat(X, A)$ est égale à $cat(\tilde{X}; A)$, obtenue en changeant f en une cofibration $A \hookrightarrow \tilde{X} (\simeq X)$ puis en appliquant la définition 1.1 à la paire (\tilde{X}, A) .

Le lien entre $cat(X, A)$ et les fibrations de Ganéa provient du fait que le carré ci-dessous est un produit fibré homotopique [7]. Par suite, à une section catégorique s pour $g_n(X, A)$ telle que $s|_A = q_n(X, A)$ (voir remarque 1.6) on peut associer un relèvement de la diagonale dans $T^{n+1}(X, A)$ satisfaisant aux conditions de la définition 1.3 et vice-versa.

$$\begin{array}{ccc} G_n(X, A) & \longrightarrow & T^{n+1}(X, A) \\ \downarrow g_n(X, A) & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

Remarque 1.6. *i)* L'existence d'une section catégorique est équivalente à l'existence d'une section à $g_n(X; A)$ vue comme application de paire $(G_n(X, A), A) \rightarrow (X, A)$.

Pour montrer ceci, on utilise un lemme de [22] :

Soit $\pi : E \rightarrow B$ une fibration avec une section exacte σ et $u : Y \rightarrow B$ une application. Alors, si $\hat{u} : Y \rightarrow E$ est un relèvement exact de u satisfaisant $\hat{u} \simeq \sigma \circ u$, alors \hat{u} et $\sigma \circ u$ sont verticalement homotopes.

Dès lors, soit s une section catégorique pour $g_n(X; A)$. Puisque $g_n(X; A)$ est une fibration, on peut supposer que s est une section exacte. D'après le lemme précédent, on peut supposer que l'homotopie $H : A \times I \rightarrow G_n(X; A)$ entre $s \circ f$ et $q_n(X; A)$ est verticale.

Dès lors, puisque $A \rightarrow X$ est une cofibration, on peut compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{s \cup H} & G_n(X; A) \\ \downarrow & \nearrow \text{dotted} & \downarrow g_n(X, A) \\ X \times I & \xrightarrow{pr_X} & X \end{array}$$

pour obtenir une section exacte à $g_n(X; A)$ valant $q_n(X; A)$ sur A . •

Soit X un espace et $f : * \rightarrow X$. Dans ce cas, les fibrations obtenues en appliquant la construction fibre-cofibre sont appelées les fibrations de Ganéa associées à X et s'écrivent

$$F_n(X) \xrightarrow{i_n(X)} G_n(X) \xrightarrow{g_n(X)} X$$

De plus, puisque A est contractile, toute section s de $g_n(X)$ vérifie de manière évidente $s \circ f \simeq q_n(X)$. On retrouve ainsi le résultat de Ganéa ([20]) :

$$cat(X) \leq n \iff g_n(X) \text{ a une section homotopique}$$

Notons que les fibrations de Ganéa peuvent être obtenues comme étapes de la construction de Milnor [34] du fibré classifiant pour (un groupe topologique homotope à) ΩX . Plus précisément, on peut identifier $F_n(X) \hookrightarrow G_n(X) \twoheadrightarrow X$ et $E_n(\Omega(X)) \twoheadrightarrow B_n(\Omega X) \hookrightarrow B_\infty(\Omega X) = B(\Omega X)$. Nous verrons par la suite que la situation est analogue dans le cas relatif.

$cl(X, A) = n$ et prenons une décomposition en cônes comme dans la définition ci-dessus. On a alors $cat(X, A) = cat(X_n, X_0) \leq cat(X_n, X_{n-1}) + \dots + cat(X_1, X_0) \leq n$. La deuxième inégalité du 2) est une extension de la preuve de Cornea dans le cas absolu. Pour l'aborder, nous avons besoin de deux résultats préliminaires de [5].

Tout d'abord, remarquons que la proposition 2.1 de [5] possède une extension évidente au cas relatif. On a alors :

Soit $F \rightarrow E \xrightarrow{p} X$ une fibration et $f : A \rightarrow X$ une cofibration. Soit E_A le produit fibré de p au-dessus de A . Alors $cl(E_A/F \rightarrow E/F) \leq cl(A \rightarrow X)$.

Ensuite, rappelons que si $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration et que p admet une section $s : B \rightarrow E$, alors la fibre homotopique de s est ΩF et l'injection de la fibre $\Omega F \rightarrow B$ est homotopiquement triviale.

Supposons maintenant que $cat(X, A) = n$. Donc, il existe une section exacte s à $g_n(X, A)$ telle que $s \circ f = q_n(X, A)$. Soit $E_n(X, A)$ le produit fibré de $g_n(X, A)$ au-dessus de f . Soit σ induite par id_A et $q_n(X, A)$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \searrow^{q_n(X,A)} & & \\
 & E_n(X, A) & \longrightarrow & G_n(X, A) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & A & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

Nous avons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\sigma} & E_n(X, A) & \twoheadrightarrow & A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{s} & G_n(X, A) & \twoheadrightarrow & X
 \end{array}$$

qui commute exactement et dans lequel le grand carré et le carré de droite sont des produits fibrés homotopiques (avec homotopies statiques). Par suite, le carré de gauche est également un p.f.h. . Soient $\hat{\sigma} : \hat{A} \rightarrow E_n(X, A)$ et $\hat{s} : \hat{X} \rightarrow G_n(X, A)$ obtenues en transformant σ et s en fibrations. On peut donc identifier $\hat{\sigma}$ avec le produit fibré de \hat{s} au-dessus de $E_n(X, A)$. Appelons F la fibre commune de \hat{s} et $\hat{\sigma}$.

Nous avons alors

$$cl(\hat{A} \cup CF \rightarrow \hat{X} \cup CF) \leq cl(E_n(X, A) \rightarrow G_n(X, A))$$

De plus, nous savons que $F \simeq \Omega F_n(X, A)$ et que l'injection de F dans \hat{A} et dans \hat{X} est homotopiquement triviale. De plus, par naturalité de cette homotopie triviale, nous pouvons identifier $\hat{A} \cup CF \rightarrow \hat{X} \cup CF$ et $\hat{A} \vee \Sigma F \rightarrow \hat{X} \vee \Sigma F$.

Dès lors $cl(\hat{A} \cup CF \rightarrow \hat{X} \cup CF) = cl(\hat{A} \vee \Sigma F \rightarrow \hat{X} \vee \Sigma F) = cl(A \rightarrow X)$.
On a ainsi $cl(E_n(X, A) \rightarrow G_n(X, A)) \leq cl(G_n(X, A)) + 1$ d'après [32]
 $\leq cl(G_n(X, A), A) + cl(A, *) + 1$
 $\leq n + cl(A) + 1$
 $\leq cat(X, A) + cl(A) + 1$

D'où la conclusion. \square

Remarque 1.8. *i)* Si nous prenons $A = *$, nous retrouvons les inégalités connues pour la catégorie absolue.

ii) Nous avons également la majoration $cl(A \rightarrow X) = cl(X, A) \leq cl(X) + 1$ due à Marcum [32]. Remarquons que $cl(X)$ et $cat(X, A) + cl(A)$ ne sont pas comparables. •

2 Quelques propriétés homotopiques

2.1 Catégorie relative et attachement de cellule

C'est un problème très classique (voir [1]) d'étudier la manière dont la catégorie peut varier lorsqu'on attache une cellule.

Soit $f : A \rightarrow X$ et $\alpha : S^p \rightarrow X$. Posons $Y = X \cup_\alpha e^{p+1}$ et $j : X \hookrightarrow Y$. On suppose de plus que $cat(X, A) \geq 1$.

De manière évidente, nous avons l'inégalité

$$cat(Y, A) \leq cat(Y, X) + cat(X, A) = 1 + cat(X, A)$$

Comme dans le cas absolu (voir [49], [53], [25]), nous allons employer un invariant de type Hopf pour décider quand on peut améliorer cette majoration.

Nous avons les inclusions de paires $(S^p, *) \xrightarrow{\alpha} (X, *) \xrightarrow{l_X} (X, A)$ et $l_Y : (Y, *) \hookrightarrow (Y, A)$. Dans la suite, nous noterons $r_n(X, A)$ l'application canonique $G_1(X, A) \rightarrow G_n(X, A)$. Nous définissons de même $r_n(X)$.

Par functorialité de la construction fibre-cofibre, nous avons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma\Omega S^p & \xrightarrow{\Sigma\Omega\alpha} & \Sigma\Omega X & \xrightarrow{G_1(l_X)} & G_1(X, A) & \xrightarrow{r_n(X, A)} & G_n(X, A) \\ \uparrow \iota_p \left(\begin{array}{c} \downarrow g_1(S^p) \\ \downarrow g_1(X) \\ \downarrow g_1(X, A) \\ \downarrow g_n(X, A) \end{array} \right) & & & & & & \\ S^p & \xrightarrow{\alpha} & X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

dans lequel ι_p est la section canonique unique de $g_1(S^p) : \Sigma\Omega S^p \rightarrow S^p$.

L'application α possède alors un relèvement canonique dans $G_n(X, A)$ défini par

$$T_n(\alpha) = r_n(X, A) \circ G_1(l_X) \circ \Sigma\Omega\alpha \circ \iota_p : S^p \rightarrow G_n(X, A)$$

Soit $s : X \rightarrow G_n(X, A)$ une section de $g_n(X, A)$ (non nécessairement catégorique). Clairement, $s \circ \alpha$ est un second relèvement de α dans $G_n(X, A)$.

Nous définissons alors $H_n(\alpha, s)$ comme la différence de ces deux relèvements, c'est à dire

$$H_n(\alpha, s) = T_n(\alpha) - s \circ \alpha : S^p \rightarrow G_n(X, A)$$

De plus, $g_n(X, A) \circ H_n(\alpha, s) \simeq *$ et donc $H_n(\alpha, s)$ peut être vu comme un élément de $\pi_p(F_n(X, A))$.

Proposition 2.1. *Si $s : X \rightarrow G_n(X, A)$ est une section catégorique pour (X, A) (avec $n = \text{cat}(X, A) \geq 1$),*

$$H_n(\alpha, s) = 0 \Rightarrow \text{cat}(Y, A) \leq \text{cat}(X, A)$$

Preuve : De manière classique, si $H_n(\alpha, s) = 0$ on pourra étendre s en une section σ de $g_n(Y, A)$. De plus, si s est une section catégorique pour (X, A) , σ sera de manière évidente une section catégorique pour (Y, A) .

Remarquons tout d'abord que $T_n(\alpha) = G_n(l_X) \circ t_n(\alpha)$, où $t_n(\alpha)$ est le relèvement canonique de α dans $G_n(X)$. Rappelons que $t_n(\alpha) = r_n(X) \circ \Sigma\Omega\alpha \circ \iota_p : S^p \rightarrow G_n(X)$. De plus, la composée $G_n(j) \circ t_n(\alpha)$ est homotopiquement triviale par une homotopie qui est le relèvement de l'homotopie triviale canonique de S^p dans Y . D'où l'existence de $O(\alpha) : e^{p+1} \rightarrow G_n(Y)$ telle que $g_n(Y) \circ O(\alpha)$ soit l'inclusion $e^{p+1} \hookrightarrow X \cup_\alpha e^{p+1} = Y$. Rappelons que $g_n(X) = g_n(X, A) \circ G_n(l_X)$, $g_n(Y) = g_n(Y, A) \circ G_n(l_Y)$.

Dans le diagramme suivant :

- les trois carrés du haut sont des sommes amalgamées et donc,

l'application $\widetilde{g_n(X)} : G_n(X) \cup_{t_n(\alpha)} e^{p+1} \rightarrow Y$ est induite par $j \circ g_n(X)$ et $e^{p+1} \hookrightarrow Y$,

l'application $\widetilde{g_n(X, A)} : G_n(X, A) \cup_{T_n(\alpha)} e^{p+1}$ est induite par $j \circ g_n(X, A)$ et $e^{p+1} \hookrightarrow Y$.

- $\zeta_n(X)$ est induite par $G_n(j) : G_n(X) \rightarrow G_n(Y)$ et par $O(\alpha)$. Par suite, $\widetilde{g_n(X)} = g_n(Y) \circ \zeta_n(X)$,

- $\zeta_n(X, A)$ est induite par $G_n(j) : G_n(X, A) \rightarrow G_n(Y, A)$ et par l'homotopie triviale de $G_n(j) \circ T_n(\alpha)$ obtenue comme la composée de $O(\alpha)$ avec $G_n(l_Y)$. Par suite,

$$\widetilde{g_n(X, A)} = g_n(Y, A) \circ \zeta_n(X, A).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & T_n(\alpha) & & & \\
& & & \curvearrowright & & & \\
S^p & \xrightarrow{t_n(\alpha)} & G_n(X) & \xrightarrow{G_n(l_X)} & G_n(X, A) & \xrightarrow{g_n(X, A)} & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j \\
e^{p+1} & \xrightarrow{\quad} & G_n(X) \cup_{t_n(\alpha)} e^{p+1} & \xrightarrow{\quad} & G_n(X, A) \cup_{T_n(\alpha)} e^{p+1} & \xrightarrow{\widetilde{g_n(X, A)}} & Y \\
\downarrow O(\alpha) & & \downarrow \zeta_n(X) & & \downarrow \zeta_n(X, A) & & \parallel \\
& & G_n(Y) & \xrightarrow{G_n(l_Y)} & G_n(Y, A) & \xrightarrow{g_n(Y, A)} & Y
\end{array}$$

A partir des deux colonnes de droite ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & A & & & \\
& & & \downarrow q_n(X, A) & & \downarrow q_n(Y, A) & \\
S^p & \xrightarrow{T_n(\alpha)} & G_n(X, A) & \xrightarrow{h} & G_n(X, A) \cup_{T_n(\alpha)} e^{p+1} & \xrightarrow{\zeta_n(X, A)} & G_n(Y, A) \\
\parallel & & \downarrow g_n(X, A) & & \downarrow \widetilde{g_n(X, A)} & & \downarrow g_n(Y, A) \\
& & A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{j} & X \cup_{\alpha} e^{p+1} \\
& & & \downarrow s & & & \parallel \\
& & & X & & & Y
\end{array}$$

Supposons alors que s soit une section catégorique (exacte) pour (X, A) telle que $H(\alpha, s) = 0$. Donc, $s \circ \alpha \simeq T_n(\alpha)$. On peut supposer sans restriction que α est une cofibration. Dès lors, en employant la technique de la remarque 1.6, on peut supposer que $s|_{S^p} = T_n(\alpha)$. Dès lors, l'application \tilde{s} induite par id_{S^p} et s est une section pour $\widetilde{g_n(X, A)}$ et donc $\zeta_n(X, A) \circ \tilde{s}$ est une section pour $g_n(Y, A)$. De plus, $(\zeta_n(X, A) \circ \tilde{s}) \circ (j \circ f) = \zeta_n(X, A) \circ h \circ s \circ f = \zeta_n(X, A) \circ h \circ q_n(X, A) = q_n(Y, A)$. D'où la conclusion $cat(Y, A) \leq n$. \square

Jusqu'à présent, la construction est la même que dans le cas absolu et la particularisation au cas relatif est faible. Ceci change avec la proposition suivante, plus spécifique au cadre relatif.

Proposition 2.2. *Supposons que $\alpha : S^p \rightarrow X$ possède un relèvement $\bar{\alpha} : S^p \rightarrow A$. Alors, pour toute section catégorique s de $g_n(X, A)$ (avec $n = cat(X, A) \geq 1$), on a $H_n(\alpha, s) = 0$.*

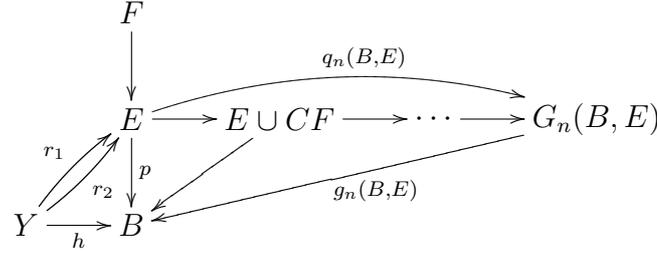
Par conséquent,

$$cat(X \cup_{\alpha} e^{p+1}, A) \leq cat(X, A)$$

La preuve de cette proposition est basée sur le

Lemme 2.3. *Pour $n \geq 1$, $T_n(\alpha) \simeq q_n(X, A) \circ \bar{\alpha}$*

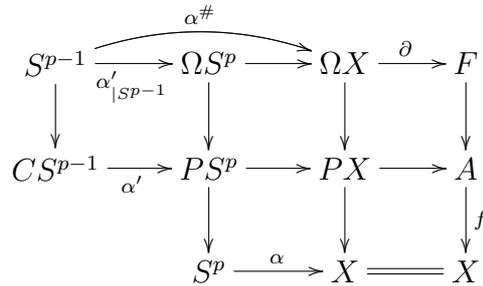
Remarque 2.4. Rappelons ici un résultat de Cornéa [6]. Soit Y un espace, $p : E \rightarrow B$ une fibration de fibre F , $h : Y \rightarrow B$ une application possédant deux relèvements $r_1, r_2 : Y \rightarrow E$. Alors, si $cl(Y) \leq n$, on a $q_n(B, E) \circ r_1 \simeq q_n(B, E) \circ r_2$.



Nous avons les décompositions $T_n(\alpha) = r_n(X, A) \circ T_1(\alpha)$ et $q_n(X, A) = r_n(X, A) \circ q_1(X, A)$. Donc, pour $n \geq 2$, on peut employer le résultat ci-dessus pour montrer que $T_n(\alpha) \simeq q_n(X, A) \circ \bar{\alpha}$, en prenant $h = \alpha$, $p = g_1(X, A)$, $r_1 = q_1(X, A) \circ \bar{\alpha}$ et $r_2 = T_1(X, A)$. Cependant, pour $n = 1$, $T_1(\alpha)$ ne factorise pas *a priori* par A et on ne peut donc employer ce résultat directement. •

Preuve du lemme : Il suffit de montrer que $T_1(\alpha) = q_1(X, A) \circ \bar{\alpha}$.

Dans la suite, nous considérons que f est une fibration de fibre F . A partir de $\alpha : S^p \rightarrow X$, on peut construire une application $\alpha' : (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (A, F)$, correspondant à son image par les isomorphismes $\pi_p(X) \cong \pi_{p-1}(\Omega X) \cong \pi_p(A, F)$. Soit $\alpha^\# : S^{p-1} \rightarrow \Omega X$ l'application adjointe de α et ∂ le connectant de la suite exacte de la fibration f . La composée $\partial \circ \alpha^\#$ est une application de $S^{p-1} \rightarrow F$ qui est nulhomotope de manière canonique quand on la prolonge à A . Nous obtenons ainsi l'application α' désirée, qui s'inscrit dans le diagramme



Remarquons que $T_1(\alpha) : S^p \rightarrow A \cup CF$ est obtenue comme application induite entre les cofibres des deux lignes supérieures.

L'application $\alpha : S^p \rightarrow X$ se relève en $\bar{\alpha} : S^p \rightarrow A$. Ceci signifie que dans la suite exacte d'homotopie $\cdots \rightarrow \pi_p(F) \rightarrow \pi_p(A) \rightarrow \pi_p(A, F) \xrightarrow{\delta} \pi_{p-1}(F) \rightarrow \cdots$, on a $\delta(\alpha') = 0$, c'est à dire $\partial \circ \alpha^\# = \alpha'_{|S^p} \simeq *$. On fixe une telle homotopie triviale $H : CS^{p-1} \rightarrow F$. Dans le cube ci-dessous, les faces verticales gauche, milieu et droite sont des sommes amalgamées et les flèches en pointillés sont induites.

$$\begin{array}{ccccccc}
S^{p-1} & \xrightarrow{\partial \circ \alpha^\# = \alpha'_{|S^p}} & F & \xlongequal{\quad} & F & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \Downarrow & \downarrow & \searrow & \\
CS^{p-1} & \xrightarrow{H} & F & \xrightarrow{\quad} & CF & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \Downarrow & \downarrow & \searrow & \\
CS^{p-1} & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xlongequal{\quad} & A & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \Downarrow & \downarrow & \searrow & \\
S^p & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & A & \xrightarrow{q_1(X,A)} & A \cup CF & & \\
& & \text{\scriptsize } T_1(\alpha) & & & &
\end{array}$$

On obtient ainsi une décomposition $T_1(\alpha) = q_1(X, A) \circ \bar{\alpha}$, où $\bar{\alpha}$ est un relèvement de α (ce que l'on peut constater par ailleurs car $\alpha = p_1(X, A) \circ T_1(\alpha) = p_1(X, A) \circ q_1(X, A) \circ \bar{\alpha} = f \circ \bar{\alpha}$).

On conclut car d'après la remarque précédente, $q_1(X, A) \circ \bar{\alpha} \simeq q_1(X, A) \circ \alpha$. □

Preuve de la proposition : Supposons que $cat(X, A) \leq n$ et soit s une section catégorique de (X, A) . On a alors :

$$H(\alpha, s) = T_n(\alpha) - s \circ \alpha = q_n(X, A) \circ \bar{\alpha} - s \circ \alpha = s \circ f \circ \bar{\alpha} - s \circ \alpha = s \circ \alpha - s \circ \alpha = 0 \quad \square$$

Un cas particulier d'utilisation de la proposition précédente est le cas où f possède une section homotopique r (et n'est pas une équivalence d'homotopie). Dès lors, toute application $\alpha : S^p \rightarrow X$ possède $r \circ \alpha$ comme relèvement dans A et par suite, $cat(X \cup e^{p+1}, A) \leq cat(X, A)$.

2.2 Catégorie relative d'applications avec section

Dans cette partie, nous étudions le cas où $f : A \rightarrow X$ possède une section homotopique $r : X \rightarrow A$.

Dans ce cas, nous avons :

Théorème : [7] Si $f : A \rightarrow X$ possède une section,

$$cat(X, A) \leq cat(A)$$

En employant le résultat cité en remarque 2.4 à id_A et $r \circ f$ (qui sont deux relèvements de f), Cornéa prouve que si $cat(A) = n$, alors $q_n(X, A) \circ id_A$ et $q_n(X, A) \circ (r \circ f)$ sont homotopes. (En utilisant le fait qu'il existe Z tel que $cat(A) = cl(A \vee Z)$ on peut dans ce cas affaiblir l'hypothèse $cl(A) = n$ en $cat(A) = n$.)

Par suite, $q_n(X, A) \circ r$ est une section catégorique pour (X, A) au rang $n = cat(A)$. Il est facile de constater que ceci reste vrai même si $cat(X, A) < cat(A)$ et que l'on a

Lemme 2.5.

$$\begin{aligned} cat(X, A) \leq k &\iff q_k(X, A) \circ r \text{ section catégorique pour } (X, A) \\ &\iff q_k(X, A) \simeq q_k(X, A) \circ r \circ f \end{aligned}$$

Preuve : Si $cat(X, A) = k$, alors il existe $s : X \rightarrow G_k(X, A)$ tel que $g_k(X, A) \circ s = id_X$ et $s \circ f \simeq q_k(X, A)$. L'application $q_k(X, A) \circ r$ est toujours une section pour $p_k(X, A)$. Il suffit donc de vérifier qu'elle "respecte" A . On a :

$$\begin{aligned} s \circ f \simeq q_k(X, A) &\implies s \circ f \circ r \circ f \simeq q_k(X, A) \circ r \circ f \\ &\implies s \circ f \simeq q_k(X, A) \circ r \circ f \\ &\implies q_k(X, A) \simeq (q_k(X, A) \circ r) \circ f \end{aligned}$$

Les autres implications sont évidentes. \square

Donc, déterminer la catégorie revient à étudier la commutativité d'un diagramme donné.

De plus, l'argument ci-dessus reste valide pour la σ^i catégorie. Plus précisément, si $\Sigma^i f : \Sigma^i A \rightarrow \Sigma^i X$ possède une section $\rho : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i A$, alors

$$\sigma^i cat(X, A) \leq k \iff \Sigma^i q_k(X, A) \simeq \Sigma^i q_k(X, A) \circ \rho \circ \Sigma^i f \quad (5)$$

C'est cette caractérisation que nous utiliserons pour déterminer $\sigma^1 cat(X, X \times X^p)$. Nous pouvons ainsi définir pour $i \geq 1$ un invariant de Hopf $\mathcal{H}_k^i(X, A) = \Sigma^i q_k(X, A) - \Sigma^i q_k(X, A) \circ \rho \circ \Sigma^i f$ nul si et seulement si $\sigma^i cat(X, A) \leq k$.

Si A est une suspension, nous pouvons également définir un invariant $\mathcal{H}_k^0(X, A)$.

C'est l'idée sous-jacente dans la démonstration suivante, à la différence que pour les applications considérées ($f : S^p \rightarrow S^q$), la section canonique n'existe qu'après la première étape de la construction fibre-cofibre.

Proposition 2.6. *Pour toute application $f : S^p \rightarrow S^q$, $p \geq q \geq 2$,*

$$cat(S^p \rightarrow S^q) = cat(S^q \cup_f e^{p+1})$$

Preuve : Soit F la fibre homotopique de f . A la première étape de la construction fibre-cofibre appliquée aux paires $(S^p, *) \xrightarrow{f} (S^q, *) \xrightarrow{j} (S^q, S^p)$, nous obtenons le

diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega S^p * \Omega S^p & \longrightarrow & \Omega S^q * \Omega S^q & \xrightarrow{\partial * id_{\Omega S^q}} & F * \Omega S^q & \longleftarrow & F \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Sigma \Omega S^p & \xrightarrow{\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega S^q & \xrightarrow{G_1(j)} & S^p \cup C F^{q_1(f)} & \longleftarrow & S^p \\
\downarrow \wr_{g_1(S^p)} \wr_{\iota_p} & & \downarrow \wr_{g_1(S^q)} \wr_{\iota_q} & & \downarrow \wr_{g_1(f)} \wr_s & & \downarrow \\
S^p & \xrightarrow{f} & S^q & \xlongequal{\quad} & S^q & \xleftarrow{f} & S^q
\end{array}$$

Montrons d'abord que $G_1(j)$ induit un isomorphisme en π_* pour $* \leq p + q - 2$ et un épimorphisme pour $* = p + q - 1$. Le connectant $\partial : \Omega S^q \rightarrow F$ induit un isomorphisme en π_* pour $* \leq p - 2$ et un épimorphisme pour $* = p - 1$. En utilisant les identifications $A * B \simeq \Sigma A \wedge B$, on constate que $\partial * id_{\Omega S^q}$ induit un isomorphisme en H_* (et donc en π_* par le théorème de Whitehead) pour $* \leq p + q - 2$, un épimorphisme pour $* = p + q - 1$. Il en est de même pour $G_1(j)$, puisque les fibrations $g_1(f)$ et $g_1(S^q)$ ont des suites exactes courtes en homotopie.

Soit ι_p (resp. ι_q) la section canonique (unique) de $g_1(S^p)$ (resp. $g_1(S^q)$). L'application $g_1(f)$ possède pour unique section $G_1(j) \circ \iota_q$. En effet, $G_1(j)$ induit un isomorphisme en π_q . Par suite, toute section s de $g_1(f)$ s'écrit sous la forme $s = G_1(j) \circ \alpha$ avec $\alpha : S^q \rightarrow \Sigma \Omega S^q$. On montre facilement que α est une section pour $g_1(S^q)$ et par suite, $\alpha = \iota_q$.

Par suite, $cat(f) = 1 \iff G_1(j) \circ \iota_q$ section catégorique

$$\begin{aligned}
&\iff G_1(j) \circ \iota_q \circ f \simeq q_1(f) \\
&\iff G_1(j) \circ \iota_q \circ f \simeq T_1(f) \quad \text{par le lemme 2.3} \\
&\iff G_1(j) \circ \iota_q \circ f \simeq G_1(j) \circ \Sigma \Omega f \circ \iota_p \\
&\iff G_1(j) \circ (\iota_q \circ f - \Sigma \Omega f \circ \iota_p) \simeq * \\
&\iff \iota_q \circ f - \Sigma \Omega f \circ \iota_p \simeq * \text{ car } G_1(j) \text{ iso en } \pi_p
\end{aligned}$$

Or, $\iota_q \circ f - \Sigma \Omega f \circ \iota_p$ est l'invariant de Hopf de l'application f et est nul si et seulement si $cat(S^q \cup_f e^{p+1}) = 1$ (voir par exemple [49]) \square

2.3 Catégorie et fibrés vectoriels

Proposition 2.7. *Soit M une variété lisse de dimension finie et $\nu = (\pi, E, M)$, $\nu' = (\pi', E', M')$ deux fibrés vectoriels munis de structures orthogonales. Alors,*

$$cat((E \oplus E')_D, (E \oplus E')_S) \leq cat(E_D, E_S)$$

Preuve : $E \oplus E' = \{(e, e') \in E \times E' / \pi(e) = \pi'(e')\}$ s'obtient comme produit fibré de

π et de π' (ou encore de la diagonale $d : M \rightarrow M \times M$, $d(x) = (x, x)$ et de $\pi \times \pi'$).

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E & \xrightarrow{\Delta} & E \times E' \\ \downarrow & & \downarrow \pi \times \pi' \\ M & \xrightarrow{d} & M \times M \end{array}$$

On notera $e \oplus e'$ un élément de $E \oplus E'$. On désigne par $Z' : M \rightarrow E'$ la section zéro du fibré ν' . Ainsi, pour tout $e \in E$, $Z'(\pi(e))$ est le seul $e' \in E'$ tel que $\|e'\| = 0$ et $\pi(e) = \pi'(e')$.

Si $A \subset E$, $B \subset E'$, on définit $A \oplus B \subset E \oplus E'$ par

$$A \oplus B = \{(e, e') \in E \times E' / e \in A, e' \in B, \pi(e) = \pi'(e')\} = \Delta^{-1}(A \times B)$$

Par exemple, $E_D \oplus E'_D = \Delta^{-1}(E_D \times E'_D)$ et correspond de plus au produit fibré

$$\begin{array}{ccc} E_D \oplus E'_D & \xrightarrow{\Delta} & E_D \times E'_D \\ \downarrow & & \downarrow \pi \times \pi' \\ M & \xrightarrow{d} & M \times M \end{array}$$

Remarquons que si U est un ouvert de E , U' un ouvert de E' , alors $U \oplus U'$ est un ouvert de $E \oplus E'$. De même, si U est un ouvert de E_D , U' un ouvert de E'_D , alors $U \oplus U'$ est un ouvert de $E_D \oplus E'_D$.

On munit $E \oplus E'$ de la métrique $\|e \oplus e'\| = \sup(\|e\|, \|e'\|)$.

Par suite, $(E \oplus E')_D = \{e \oplus e' \in E \oplus E' / \|e\| \leq 1 \text{ et } \|e'\| \leq 1\} = E_D \oplus E'_D$.

De même, $(E \oplus E')_S = \{e \oplus e' \in (E \oplus E')_D / \|e\| = 1 \text{ ou } \|e'\| = 1\} = E_S \oplus E'_S \cup E_D \oplus E'_D$.

Posons $\text{cat}(E_D, E_S) = n$ et soit U_0, U_1, \dots, U_n un recouvrement catégorique de (E_D, E_S) . Nous allons construire un recouvrement catégorique de $(E_D \oplus E'_D, E_S \oplus E'_D \cup E_D \oplus E'_S)$.

- Il est facile de construire des ouverts contractiles de $E_D \oplus E'_D$ à partir des U_i pour $i \geq 1$. On pose $\tilde{U}_i = U_i \oplus E'_D$. \tilde{U}_i est un ouvert de $(E \oplus E')_D$ qui se rétracte sur U_i . (En effet, si $e \oplus e' \in E_D \oplus E'_D$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\pi(e) = \pi'(te')$ et donc $e \oplus te'$ existe bien). Donc, $\tilde{U}_i \simeq U_i$ et U_i est contractile dans $(E \oplus E')_D$.

- Pour $i = 0$, le problème est moins facile à résoudre.

Soit $H : (U_0, E_S) \times I \rightarrow (E_D, E_S)$ la déformation de U_0 sur E_S . Pour un certain ϵ , posons $\tilde{U}_0 = U_0 \oplus E'_D \cup E_D \oplus]1 - \epsilon, 1]E'_S$. Nous allons prolonger H en une homotopie sur $\tilde{U}_0 \times I$ relative à $(E \oplus E')_S$ et dont l'image pour $t = 1$ sera dans $(E \oplus E')_D \setminus M$. Dès lors, en employant la rétraction canonique de $(E \oplus E')_D \setminus M$ sur $(E \oplus E')_S$, on obtiendra une déformation de \tilde{U}_0 sur $(E \oplus E')_S$ relativement à $(E \oplus E')_S$.

On peut choisir U_0 tel que $E_S \hookrightarrow U_0$ soit une cofibration. On rappelle également que $p : E_D \oplus E'_S \rightarrow E_D$ est une fibration.

Nous avons le diagramme suivant, où la flèche du haut est $(e \oplus e', t) \mapsto e \oplus e'$, $p(e \oplus e') = e$ et $H \circ p(e \oplus e', t) = H(e, t)$.

$$\begin{array}{ccc} (U_0 \oplus E'_S) \times \{0\} \cup (E_S \oplus E'_S) \times I & \longrightarrow & E_D \oplus E'_S \\ \downarrow & \nearrow \text{dotted} & \downarrow p \\ (U_0 \oplus E'_S) \times I & \xrightarrow{H \circ p} & E_D \end{array}$$

Soit $\widehat{H} : (U_0 \oplus E'_S) \times I \rightarrow E_D \oplus E'_S$ le relèvement de $H \circ p$. On peut donc écrire \widehat{H} sous la forme $\widehat{H}(e \oplus e', t) = H(e, t) \oplus H'(e \oplus e', t)$ où $H' : (U_0 \oplus E'_S) \times I \rightarrow E'_S$.

On peut étendre H' en une application continue sur $(U_0 \oplus E'_D) \times I$ en posant :

$$\begin{aligned} H' : (U_0 \oplus E'_D) \times I &\rightarrow E'_D \\ (e \oplus e', t) &\mapsto \|e'\| \cdot H' \left(e \oplus \frac{e'}{\|e'\|}, t \right) \quad \text{si } \|e'\| \neq 0. \\ (e \oplus e', t) &\mapsto Z'(\pi(H(e, t))) \quad \text{si } \|e'\| = 0 \end{aligned}$$

Ce procédé pour construire H' nous assure que

$$\forall (e \oplus e', t) \in (U_0 \oplus E'_D) \times I, \|H'(e \oplus e', t)\| = \|e'\|$$

De plus, H' est stationnaire sur $E_S \oplus E'_D$.

On prolonge alors \widehat{H} à $(U_0 \oplus E'_D) \times I$ en posant $\widehat{H}(e \oplus e', t) = H(e, t) \oplus H'(e \oplus e', t)$. (On constate facilement que $\pi(H(e, t)) = \pi'(H'(e \oplus e', t))$ pour tout $(e \oplus e', t)$, et donc que l'élément $H(e, t) \oplus H'(e \oplus e', t)$ existe bien.)

Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $\lambda : E'_D \mapsto [0, 1]$ défini par $\lambda(e') = 1 - \frac{\|e'\|}{1-\epsilon}$ pour $0 \leq \|e'\| \leq 1 - \epsilon$ et $\lambda(e') = 0$ si $\|e'\| \geq 1 - \epsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Posons maintenant } \widetilde{H} : (U_0 \oplus E'_D) \times I &\rightarrow E_D \oplus E'_D \\ (e \oplus e', t) &\mapsto \widehat{H}(e \oplus e', \lambda(e').t) \end{aligned}$$

On remarque que :

i) \widetilde{H} vaut l'identité pour $t = 0$.

ii) $\forall e \oplus e' \in U_0 \oplus E'_D, \|\widetilde{H}(e \oplus e', 1)\| \neq 0$. En effet,

Si $\|e'\| = 0$, alors $\widetilde{H}(e \oplus e', 1) = \widehat{H}(e \oplus e', 1) = H(e, 1) \oplus Z'(\pi(H(e, 1)))$ et $\|H(e, 1)\| = 1$.

Si $\|e'\| \neq 0$, alors $\widetilde{H}(e \oplus e', 1) = H(e, \lambda(e')) \oplus H'(e \oplus e', \lambda(e'))$ et $\|H'(e \oplus e', \lambda(e'))\| = \|e'\| \neq 0$.

iii) $\widetilde{H}(e \oplus e', t) = e \oplus e'$ pour tout t si $\|e\| = 1$ ou $\|e'\| \geq 1 - \epsilon$.

En effet, d'une part, H et H' sont stationnaires sur $E_S \oplus E'_D$. D'autre part, si $\|e'\| \geq 1 - \epsilon$, $\lambda(e') = 0$ et donc $\widetilde{H}(e \oplus e', t) = \widehat{H}(e \oplus e', 0) = e \oplus e'$.

Posons maintenant $\widetilde{U}_0 = U_0 \oplus E'_D \cup E_D \oplus]1 - \epsilon, 1]E'_S$. \widetilde{U}_0 est un voisinage ouvert de

$(E \oplus E')_S$ dans $(E \oplus E')_D$.

Les conditions imposées à \tilde{H} nous permettent de l'étendre sur $\tilde{U}_0 \times I$ en posant $\tilde{H}(e \oplus e', t) = e \oplus e'$ si $e \oplus e' \in E_D \oplus]1 - \epsilon, 1]E'_S$.

Pour tout $e \oplus e' \in \tilde{U}_0$, on a $\|\tilde{H}(e \oplus e', 1)\| \neq 0$. Comme annoncé, on peut donc, à la suite de \tilde{H} , appliquer la rétraction canonique de $(E \oplus E')_D \setminus M$ sur $(E \oplus E')_S$. On obtient ainsi une déformation de \tilde{U}_0 sur $(E \oplus E')_S$ relativement à $(E \oplus E')_S$.

• Enfin, $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ est clairement un recouvrement de $(E \oplus E')_D$.

Par suite, c'est un recouvrement catégorique de $((E \oplus E')_D, (E \oplus E')_S)$.

Donc, $\text{cat}((E \oplus E')_D, (E \oplus E')_S) \leq n = \text{cat}(E_D, E_S)$. \square

Corollaire 2.8. *Soit M une variété lisse de dimension n et $\nu = (\pi, E, M)$ un fibré vectoriel de rang r muni d'une structure orthogonale. Alors,*

$$\text{cat}(M \times D^{n+r}, M \times S^{n+r-1}) \leq \text{cat}(E_D, E_S)$$

Preuve : On applique la proposition précédente en prenant pour ν' le fibré inverse de ν . On a donc $\nu \oplus \nu' = (pr_M, M \times \mathbf{R}^{n+r}, M)$. D'où la conclusion. \square

Corollaire 2.9. *Soit X un CW-complexe fini. Alors, pour tout $n \geq 1$,*

$$\text{cat}(X \times D^{n+1}, X \times S^n) \leq \text{cat}(X \times D^n, X \times S^{n-1})$$

Preuve : Il existe une variété M homotope à X . On applique alors la proposition précédente en prenant $\nu = (pr_M, M \times \mathbf{R}^n, M)$ et $\nu' = (pr_M, M \times \mathbf{R}, M)$. \square

Catégorie relative et points critiques

Un des problèmes fondamentaux de la dynamique est la détermination des ensembles invariants d'un flot donné. Cependant, même dans les cas les plus simples (par exemple, détermination des points critiques d'un flot gradient), les méthodes directes peuvent être très difficiles à appliquer, voire inexistantes.

D'où la nécessité de mettre en place d'autres méthodes pouvant donner des renseignements quantitatifs ou qualitatifs sur ces ensembles invariants. C'est dans ce contexte qu'est apparue la catégorie de Lusternik et Schnirelmann. La LS catégorie a été initialement définie pour servir d'estimation au nombre minimal de points critiques d'une fonction définie sur une variété. Nous rappelons ici le résultat fondateur de Lusternik et Schnirelmann.

Théorème : [31] *Soit M une variété lisse fermée et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une application lisse. Alors, f possède au moins $\text{cat}(M) + 1$ points critiques.*

Takens [51] prolonge ce résultat au cas où M est une variété compacte à bords et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ constante, maximale et régulière sur ∂M .

Utilisant la catégorie relative, Cornéa donne une estimation du nombre minimal de points critiques pour des fonctions sur des variétés à bords ayant un comportement plus compliqué sur la frontière.

Théorème : [7] *Soit N une variété compacte riemannienne et $f : N \rightarrow \mathbf{R}$ une application lisse. Soit $M \subset N$ une variété topologique à bords, de même dimension que N , lisse exceptée la présence de coins sur la frontière, satisfaisant à :*

- $\partial M = E \cup I$ où E et I sont des variétés (avec ou sans bords), fermées (au sens topologique) et l'union est prise sur $\partial E = \partial I$ (éventuellement vide);
 - Soit $\nu_E(x)$ (resp. $\nu_I(x)$) le vecteur normal unitaire sortant en un point x de E (resp. de I) dans M . Il existe $\epsilon > 0$ tel que $(\nabla f(x))/\|\nabla f(x)\| \cdot \nu_E(x) \leq -\epsilon$ pour $x \in \text{Int}(E)$ et $(\nabla f(x))/\|\nabla f(x)\| \cdot \nu_I(x) \geq \epsilon$ pour $x \in \text{Int}(I)$;
- Alors, f possède au moins $\text{cat}(M, E)$ points critiques à l'intérieur de M .

La catégorie relative apparaît donc comme un outil pour l'étude des points critiques d'une fonction, c'est à dire pour l'étude des ensembles invariants de flots gradients.

Notons de plus qu'il s'agit d'une approche plus 'locale' que pour la catégorie absolue. En effet, il s'agit ici de sélectionner une 'petite' zone de la variété à la frontière de laquelle le flot a un 'bon' comportement et en étudiant les propriétés homotopiques de cette zone, de tirer des conclusions sur la dynamique du flot en question.

C'est exactement la philosophie de la théorie de l'*indice de Conley* (voir rappels sections 3.2). A un ensemble isolé invariant S pour un flot ϕ , on associe un certain type

de voisinage (en fait une paire d'espaces) (N_1, N_0) . L'indice de Conley de (S, ϕ) , noté $h(S, \phi)$, est alors obtenu en prenant le quotient N_1/N_0 et les propriétés homotopiques de ce quotient donnent des renseignements sur S . L'indice de Conley ne dépend pas de la paire d'indice choisie : si (N_1, N_0) et (N'_1, N'_0) sont des paires d'indices pour S , alors $N_1/N_0 \simeq N'_1/N'_0$. Notons que *a priori* $(N_1, N_0) \not\cong (N'_1, N'_0)$: les paires d'indice ne sont pas des invariants pour (S, ϕ) . Ainsi, la réduction de N_0 en un point est nécessaire. Cependant, elle peut occasionner une perte importante d'informations.

En partant de ce constat et inspiré par le résultat de Cornéa (la paire (M, E) ci-dessus correspond à une paire d'indice pour le flot engendré par $-\nabla f$), nous étudions dans cette partie la catégorie relative des paires d'indices d'ensembles invariants d'un flot.

3 Rappels

3.1 Premières définitions

Dans toute cette partie, Γ est un espace métrique localement compact. On désignera par $Cl(-)$ l'adhérence (*closure*) d'un ensemble et par $Int(-)$ son intérieur.

Généralités sur les flots

Soit $\phi : \Gamma \times \mathbf{R} \rightarrow \Gamma$ un flot, c'est à dire ϕ est une application continue qui vérifie les relations $\forall x \in \Gamma, \forall s, t \in \mathbf{R}, \phi(x, 0) = x$ et $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, s + t)$.

Un ensemble S est *invariant par ϕ* si $\phi(S, \mathbf{R}) = S$.

Etant donné un sous-ensemble N de Γ , l'*ensemble invariant maximal* de N est défini par $Inv(N) = \{x \in N \mid \phi(x, \mathbf{R}) \subset N\}$.

Etant donné un point x , on définit les ensembles suivants :

- l'*orbite de x* : $\mathcal{O}(x) = \phi(x, \mathbf{R})$. On distingue également $\mathcal{O}^+(x) = \phi(x, [0, +\infty[)$ et $\mathcal{O}^-(x) = \phi(x,]-\infty, 0])$;

- l' *ω -limite de x* : $\omega(x) = Inv(Cl(\mathcal{O}^+(x)))$. On montre que $\omega(x) = \bigcap_{t > 0} Cl(\phi(x, [t, +\infty[))$. Donc, $\omega(x)$ est l'ensemble des points $y \in \Gamma$ vérifiant $\exists (t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $\phi(x, t_n) \rightarrow y$.

- l' *α -limite de x* : $\alpha(x) = Inv(Cl(\mathcal{O}^-(x))) = \bigcap_{t < 0} Cl(\phi(x,]-\infty, t])$.

On observe que $Cl(\mathcal{O}(x)) = \alpha(x) \cup \mathcal{O}(x) \cup \omega(x)$.

Un *flot local* pour (Γ, ϕ) est un sous-ensemble de Γ sur lequel ϕ admet une 'bonne restriction'. Plus précisément, $X \subset \Gamma$ est un flot local si pour tout $x \in X$, il existe U voisinage de x dans Γ et $\epsilon > 0$ vérifiant $(X \cap U) \cdot [0, \epsilon[\subset X$.

Soit X un flot local et $S \subset X$. S est un *ensemble invariant isolé (dans X)* si il existe un voisinage compact N de S dans X tel que $S = Inv(N)$. N est alors un *voisinage isolant de S (dans X)*. L'utilité de la notion de flot local apparait déjà ici : un ensemble invariant S peut être isolé dans un flot local mais ne pas être isolé pour le flot sur Γ . C'est par exemple le cas si on considère un flot défini 'par tranches' sur un espace

produit $X \times [0, 1]$, de la forme $\phi((x, \lambda), t) = (\phi'(x, t), \lambda)$ où ϕ' est un flot sur X . Si ϕ possède un ensemble invariant isolé S , alors pour tout λ tel que $S_\lambda = S \cap (X \times \{\lambda\}) \neq \emptyset$, $X \times \{\lambda\}$ est un flot local pour ϕ et S_λ est un ensemble invariant isolé dans $X \times \{\lambda\}$. Par contre, S_λ est un ensemble invariant *a priori* non isolé pour ϕ dans $X \times [0, 1]$.

Flots gradients et presque-gradients

Si M est une variété riemannienne compacte lisse, alors à partir d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ on construit le champ de vecteurs gradient ∇f . En intégrant $-\nabla f$, on obtient un flot et f est strictement décroissante le long des orbites non stationnaires de ce flot.

On peut généraliser la notion de flot gradient. Soit ϕ un flot sur Γ pour lequel il existe $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ telle que g soit continue, strictement décroissante le long des orbites non stationnaires de ϕ . Alors, ϕ est un *flot presque-gradient* et g est une *fonction de Lyapunov (stricte)* pour ϕ . L'existence d'une fonction de Lyapunov stricte nous renseigne beaucoup sur la dynamique du flot. Par exemple, si $x \in \Gamma$ et s'il existe $t \neq 0$ tel que $g(x) = g(x.t)$, alors x est un point fixe du flot. On peut également remarquer que dans le cas presque-gradient, pour tout x , $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ se réduisent à des points fixes du flot. Par suite, soit x est un point fixe (et donc $\mathcal{O}(x) = \{x\}$), soit $\mathcal{O}(x)$ peut être vue comme un 'segment ouvert' d'extrémités les points $\alpha(x)$ et $\omega(x)$. Les flots presque gradients ont donc un comportement très similaire à celui des flots gradients tout en étant définis dans un cadre beaucoup plus large.

À noter également que la notion de fonctions de Lyapunov admet de nombreuses variantes (voir par exemple [55]). En règle générale, il s'agira d'applications prenant des valeurs fixées sur certains domaines (par exemple sur des ensembles invariants isolés) et strictement décroissantes le long des lignes de flots en dehors de ces domaines.

3.2 Indice de Conley

Nous définissons ici les paires d'indice (Index pair) d'un ensemble invariant isolé, outil fondamental de la théorie de l'indice de Conley. La bibliographie de base sur l'Indice de Conley est le livre de Conley [4] et l'article 'survey' de Salamon [44]. Nous nous plaçons ici dans le cadre de ce dernier.

3.2.1 Définition et existence des paires d'indice

Définition 3.1. Soit Γ un espace métrique localement compact. Soit $X \subset \Gamma$ un flot local et $S \subset X$ un ensemble isolé invariant pour le flot ϕ dans X . Une paire d'indice pour (S, ϕ) (dans X) est une paire (N_1, N_0) telle que N_0, N_1 soient compacts avec $N_0 \subset N_1 \subset X$ et vérifient :

- i) $N_1 \setminus N_0$ est un voisinage de S dans X et $S = \text{Inv}(Cl(N_1 \setminus N_0))$;
- ii) N_0 est positivement invariant dans N_1 : si $x \in N_0$ et $x.[0, t] \subset N_1$, alors $x.[0, t] \subset N_0$.

N_0 ;

iii) N_0 est la zone de sortie du flot ϕ : si $x \in N_1$ et $\mathcal{O}^+(x) \not\subset N_1$, alors il existe $t \geq 0$ tel que $x.t \in N_0$: toute ligne de champ quittant N_1 passe par N_0 .

Notons que la définition de paire d'indice autorise la présence d'ensemble invariants dans $\text{Int}_{N_1}(N_0)$ et autorise également le cas $N_0 = \emptyset$. Notons de plus que l'existence de paire d'indice n'est pas triviale. Si l'on prend un voisinage isolant compact N_1 de S et que l'on repère la zone N_0 sur ∂N_1 (au sens topologique si N_1 n'est pas une variété) où le flot sort, on n'obtiendra pas *a priori* de cette manière un ensemble N_0 compact. Ceci est illustré dans l'exemple suivant.

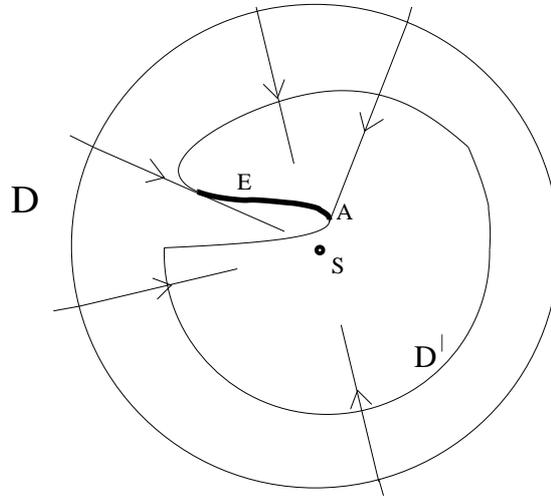


Figure 1: Un voisinage isolant qui n'est le grand ensemble d'aucune paire d'indice

Le flot ϕ de la figure 1 possède S comme unique point stationnaire et (D, \emptyset) est une paire d'indice pour (S, ϕ) . Considérons maintenant l'ensemble D' . D' est clairement un voisinage isolant de S mais il n'existe aucune paire d'indice pour (S, ϕ) ayant D' comme grand ensemble (voir lemme 3.1).

En effet, soit $E \subset \partial D'$ la zone où le flot sort de D' . Pour toute paire d'indice (D', N_0) , on aurait obligatoirement $E \subset N_0$. Nous rencontrons alors un problème avec le point A . En effet, $A \in Cl(E)$ et donc $A \in Cl(N_0) = N_0$ car N_0 est supposé fermé. Par suite, d'après la propriété ii) de la définition 3.1, on doit avoir $A.[0, +\infty[\subset N_0$ et donc, $S \in N_0$. Ceci contredit le point i) de la définition 3.1.

Nous avons cependant un important résultat d'existence :

Théorème : (4.3 [44]) Soit $X \subset \Gamma$ un flot local, $N \subset X$ un voisinage isolant pour

l'ensemble isolé invariant S et U un voisinage de S dans X . Alors, il existe une paire d'indice (N_1, N_0) pour (S, ϕ) (dans X) telle que N_1 et N_0 soient positivement invariants dans N et $Cl(N_1 \setminus N_0) \subset U$.

3.2.2 Paires d'indice régulières

Etant donnée une paire d'indice, on définit l'application temps d'arrivée sur N_0 ,

$$\begin{aligned} \tau_{N_0} : N_1 &\rightarrow [0; +\infty] \\ x &\mapsto 0 \quad \text{si } x \in N_0 \\ &\mapsto \sup\{t/x.[0, t] \subset N_1 \setminus N_0\} \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

On dit que (N_1, N_0) est *régulière* si τ_{N_0} est continue. Notons que si N_0 est vide, alors l'application τ_{N_0} est constante, égale à $+\infty$ et donc la paire d'indice est régulière.

La régularité d'une paire d'indice est une donnée technique très importante. Par exemple, on construit de nombreuses déformations de N_1 au moyen de τ_{N_0} . Notons également que si (N_1, N_0) est une paire d'indice régulière, alors $N_0 \hookrightarrow N_1$ est une cofibration.

Nous rappelons maintenant un critère de régularité pour une paire d'indice.

Lemme : (5.2 [44]) *Soit (N_1, N_0) une paire d'indice pour S et supposons que*

$$\forall x \in N_0, \forall \epsilon > 0, x.[0, \epsilon] \not\subset Cl(N_1 \setminus N_0)$$

Alors, (N_1, N_0) est régulière.

Cette condition exprime le fait que les lignes de champs sont transverses à $Fr_{N_1}(N_0)$.

Dans [44] Lemme 5.3, étant donnée une paire d'indice (N_1, N_0) , régulière ou non, Salamon construit une "fonction de Lyapunov" continue $g : N_1 \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

$$\begin{cases} g(x) = 1 \iff x.[0, +\infty[\subset N_1 \text{ et } \omega(x) \in S, \\ g(x) = 0 \iff x \in N_0, \\ \text{pour } t > 0, \text{ si } 0 < g(x) < 1, \text{ alors } x.[0, t] \subset N_1 \rightarrow g(x; t) < g(x) \end{cases}$$

(Donc g vaut 1 sur les lignes de champs qui n'atteignent pas N_0 , est strictement décroissante sur les orbites qui atteignent N_0 et vaut 0 sur N_0).

On remarque que si τ_{N_0} est continue, alors l'application définie sur N_1 par $f(x) = 1 - \exp(-\tau_{N_0}(x))$ vérifie les conditions ci-dessus et donc est une fonction de Lyapunov associée à (N_1, N_0) . D'autre part, pour toute paire d'indice (N_1, N_0) et tout $\epsilon \in]0; 1[$, posons $N_\epsilon = g^{-1}([0, \epsilon])$. Alors, la paire (N_1, N_ϵ) est une paire d'indice régulière (par application du lemme 5.2 ci-dessus).

3.2.3 L'indice de Conley

La théorie de l'indice de Conley est initialement développée pour l'étude d'ensembles invariants isolés dans un flot local d'un flot complet. Cependant, la définition même de flot local nous indique que nous pouvons nous placer dans un cadre moins restrictif. Il nous suffit de prendre ϕ défini sur un ouvert $\Omega \subset \Gamma \times \mathbf{R}$ et X un flot local satisfaisant pour tout $x \in X$, soit $\phi(x, -)$ est défini sur \mathbf{R} , soit $\exists t_1 > 0$ tel que $\phi(x, -)$ est défini sur $[0, t_1]$ et $\phi(x, t_1) \notin X$ ainsi qu'une condition analogue pour les t négatifs.

Théorème : (4.10 [44]) *Soit Γ un espace métrique localement compact, $X \subset \Gamma$ un flot local et $N \subset X$ un voisinage isolant pour l'ensemble isolé invariant S . Soient (N_1, N_0) , (N'_1, N'_0) deux paires d'indice régulières pour (S, ϕ) . Alors, $(N_1/N_0, [N_0])$ et $(N'_1/N'_0, [N'_0])$ ont le même type d'homotopie pointée.*

On appelle Indice de Conley de (S, ϕ) et l'on note $h(S, \phi)$ ce type d'homotopie. Notons que le résultat de Conley est en fait plus précis. Pour toutes paires d'indice (N_1, N_0) , (N'_1, N'_0) , on détermine une unique classe $[f_{N_1/N_0; N'_1/N'_0}] \in [N_1/N_0, N'_1/N'_0]$ telle que :

- i) $[f_{N_1/N_0; N_1/N_0}] = [Id_{N_1/N_0}]$,
- ii) $[f_{N_1/N_0; N'_1/N'_0}]^{-1} = [f_{N'_1/N'_0; N_1/N_0}]$,
- iii) $[f_{N'_1/N'_0; N''_1/N''_0}] \circ [f_{N_1/N_0; N'_1/N'_0}] = [f_{N_1/N_0; N''_1/N''_0}]$.

Autrement dit, les espaces quotients et les équivalences d'homotopies forment un *système connexe simple* (connected simple system).

Nous anticipons sur la section 4.1 en donnant un résultat dont la démonstration est un peu technique par des méthodes classiques (il faut étudier en toute généralité la situation de la figure 1) mais est évidente en utilisant l'indice de Conley.

Lemme 3.1. *Soient (N_1, N_0) , (N'_1, N'_0) deux paires d'indice régulières pour (S, ϕ) avec N_1, N'_1 connexes. Alors :*

- i) $N_0 \neq \emptyset \iff N'_0 \neq \emptyset$,
- ii) *Si $N_0 = \emptyset$ alors $N'_1 \simeq N_1$.*

Preuve du lemme : Rappelons que si X est un espace, alors X/\emptyset est l'union disjointe $X \amalg *$ où $*$ est un point ajouté servant de point base.

De plus, si $N_0 \neq \emptyset$, alors N_1/N_0 est toujours connexe (en fait il est étoilé autour du point base $[N_0]$). Par suite,

$$h(S) \text{ est connexe } \iff N_0 \neq \emptyset$$

L'indice de Conley ne dépendant pas de la paire d'indice choisie, nous en déduisons que $N_0 = \emptyset \iff N'_0 = \emptyset$.

De plus, si $N_0 = \emptyset$, nous avons donc l'existence d'une équivalence d'homotopie pointée $N_1 \amalg * \simeq N'_1 \amalg *$. Par suite, $N_1 \simeq N'_1$. \square

3.3 Bloc isolant

Dans cette partie, nous définissons un type particulier de paires d'indice qui nous sera très utile pour la suite.

Tout d'abord, dans le cadre de l'article de Salamon, soit S un ensemble invariant pour le flot ϕ . Donc, S est également un ensemble invariant isolé pour le flot dual $-\phi$ défini par $-\phi(x, t) = \phi(x, -t)$. Soit (N_1, N_0) (resp. (\bar{N}_1, \bar{N}_0)) une paire d'indice pour (S, ϕ) (resp. $(S, -\phi)$) et g (resp. \bar{g}) la fonction de Lyapunov qui lui est associée. Il existe un voisinage U de S sur lequel g et \bar{g} sont définies simultanément et $S = g^{-1}(1) \cap \bar{g}^{-1}(1)$. Dès lors, pour $\epsilon, \eta > 0$ assez petits $(\bar{g}^{-1}([1 - \eta; 1]) \cap g^{-1}([1 - \epsilon; 1]), \bar{g}^{-1}([1 - \eta; 1]) \cap g^{-1}(1 - \epsilon))$ est une paire d'indice régulière pour (S, ϕ) .

Supposons maintenant que Γ soit une variété lisse et ϕ un flot continu obtenu par intégration d'un champ de vecteurs continu. On peut alors supposer que l'application g est lisse sur $U \setminus g^{-1}(1)$ et que l'application \bar{g} est lisse sur $U \setminus \bar{g}^{-1}(1)$ ([55], Thm 2.1). Dès lors, par le théorème de Sard, on peut trouver ϵ, η tels que $\bar{g}^{-1}(1 - \eta)$ et $g^{-1}(1 - \epsilon)$ se coupent de manière transverse. (C'est pour cette application du théorème de Sard que l'on fait l'hypothèse de régularité sur Γ .)

Nous obtenons ainsi une paire d'indice dont le grand ensemble est une variété (à coins) et la zone de sortie une sous-variété du bord. Cette construction conduit naturellement à la définition suivante :

Définition 3.2. [55] Soit M une variété lisse de dimension n , ϕ un flot continu sur M obtenu par l'intégration d'un champ de vecteurs continu. On dit que N est un bloc isolant à coins (isolating bloc with corners) de classe C^r pour ϕ si N est une variété topologique compacte à bords de dimension n et ∂N est une variété de dimension $(n-1)$ C^r par morceaux telle qu'il existe une décomposition de ∂N en B^+, B^- et T satisfaisant à :

- B^+, B^- sont des variétés à bords de classe C^r , de dimension $(n-1)$, qui se coupent suivant leur bord. On a $T = \partial B^+ \cap \partial B^- = B^+ \cap B^-$ variété de dimension $(n-2)$. (T peut éventuellement être vide).
- $B^+ - T$ est la zone d'entrée du flot, $B^- - T$ est la zone de sortie du flot,
- B^+ et B^- sont transverses au flot ϕ . En fait, on demande un peu plus que cela : il existe deux variétés ouvertes de classe C^r de dimension $(n-1)$ U^+ et U^- telles que U^+ et U^- sont transverses au flot ϕ , B^+ soit une sous-variété à bords de U^+ , B^- soit une sous-variété à bords de U^- et $U^+ \cap U^- = B^+ \cap B^- = T$.

Par exemple, l'ensemble utilisé par Cornéa dans le théorème de [7] cité précédemment est un bloc isolant pour le flot induit par $-\nabla f$.

Remarquons que dans cette définition, on ne mentionne pas explicitement d'ensemble

invariant isolé. En fait, si N est un bloc isolant, alors N est un voisinage isolant pour son ensemble invariant maximal, éventuellement vide. De plus, si l'on pose $S = \text{Inv}(N)$ alors, (N, B^-) est une paire d'indice pour (S, ϕ) .

Soit \vec{n}_x^+ (resp. \vec{n}_x^-) le vecteur normal sortant de B^+ (resp. B^-) dans N en un point x et supposons que ϕ soit obtenu en intégrant le champ de vecteurs χ .

Alors, la condition de transversalité du flot par rapport à B^+ et à B^- s'exprime très simplement par $\forall x \in B^+, \vec{n}_x^+ \cdot \chi(x) < 0$ et $\forall x \in B^-, \vec{n}_x^- \cdot \chi(x) > 0$.

Réciproquement, soit ψ un flot obtenu par l'intégration du champ de vecteurs ζ tel que $\forall x \in B^+, \vec{n}_x^+ \cdot \zeta(x) < 0$ et $\forall x \in B^-, \vec{n}_x^- \cdot \zeta(x) > 0$. Alors, N est un bloc isolant pour le flot ψ et ψ possède donc un ensemble invariant isolé $S' = (\text{Inv}_\psi(N))$ dans $\text{Int}(N)$.

Nous pouvons résumer ces diverses remarques en :

Théorème : (2.4, 3.1 [55]) *Soit ϕ (resp. ψ) un flot continu obtenu par intégration d'un champ de vecteurs continu χ (resp. ζ) sur une variété riemannienne lisse M . Soit S un ensemble invariant isolé pour le flot ϕ et C un voisinage isolant de S .*

Alors, il existe un bloc isolant (à coins) lisse N pour (S, ϕ) tel que $N \subset C$.

De plus, il existe un voisinage Ω de N dans M et $\epsilon > 0$ tels que

$\forall x \in \Omega, \|\chi(x) - \zeta(x)\| < \epsilon \Rightarrow N$ est également un bloc isolant pour ψ .

En fait, pour conclure que N est un bloc isolant pour ψ , nous n'avons clairement besoin d'imposer la condition sur ζ que sur un voisinage Ω' de ∂N .

L'exemple illustré dans la figure 2 montre que la propriété de 'stabilité' décrite ci-

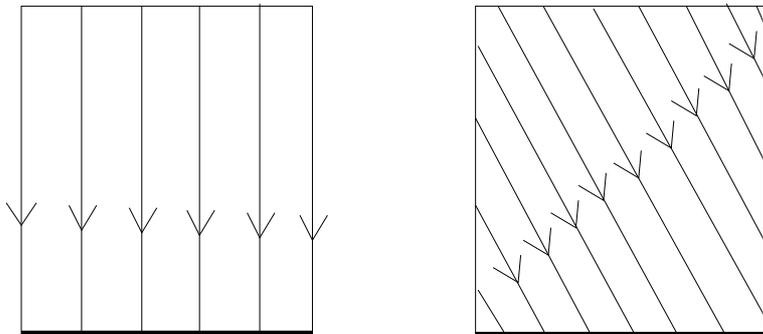


Figure 2: paire d'indice

dessus (un bloc isolant pour ϕ est également un bloc isolant pour un flot voisin de ϕ) n'est pas vérifiée par une paire d'indice quelconque.

En effet, soit ϕ le flot sur \mathbf{R}^2 obtenu par intégration du champ de vecteurs constant

$\chi(x, y) = (0, -1)$. Alors, $(I \times I, I \times \{0\})$ est une paire d'indice pour (\emptyset, ϕ) . Par contre, il existe des flots ψ arbitrairement proches de ϕ (par exemple ceux obtenus par intégration des champs de vecteurs constants $\zeta(x, y) = (\epsilon, -1)$) pour lesquels $(I \times I, I \times \{0\})$ n'est pas une paire d'indice pour (\emptyset, ψ) .

4 Catégorie relative des paires d'indices

Dans toute cette section, nous ne considérons que des paires d'indice régulières ayant un grand ensemble connexe. Pour les paires d'indice ayant un grand ensemble non connexe, on pourra appliquer les résultats ci-dessous à chacune des composantes connexes.

4.1 Déformation des paires d'indices par des flots

Cette première section est placée dans le cadre de l'article de Salamon. De plus, nous supposons que toutes les paires d'indice considérées ont une zone de sortie non vide.

Lemme 4.1. *Soit (N_1, N_0) une paire d'indice régulière et $g : N_1 \rightarrow [0; 1]$ la fonction de Lyapunov associée par [44], lemme 5.3. Soit $\epsilon \in [0; 1[$ et posons $N_\epsilon = g^{-1}([0, \epsilon])$. Alors, $(N_1, N_0) \simeq (N_1, N_\epsilon)$ (rel. N_0).*

Preuve : La preuve consiste à ramener $g^{-1}(\epsilon)$ sur $g^{-1}(0)$ en suivant les lignes de champs (voir figure 3, à gauche). On définit l'application λ suivante.

$$\begin{aligned} \lambda : N_1 &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto 1 && \text{si } x \in g^{-1}([0; \epsilon]) \\ &\mapsto \frac{-2}{1-\epsilon}g(x) + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} && \text{si } x \in g^{-1}([\epsilon; \frac{1+\epsilon}{2}]) \\ &\mapsto 0 && \text{si } x \in g^{-1}([\frac{1+\epsilon}{2}; 1]) \end{aligned}$$

Clairement, λ est continue et l'application $x \mapsto \lambda(x) \cdot \tau_{N_0}(x)$ vaut 0 sur N_0 , $\tau_{N_0}(x)$ sur $g^{-1}([0; \epsilon])$ et se prolonge par la valeur 0 sur $g^{-1}(1)$.

Dès lors, $r : (N_1, N_\epsilon) \rightarrow (N_1, N_0)$ définie par $r(x) = \phi(x, \lambda(x) \cdot \tau_{N_0}(x))$ est clairement un inverse homotopique (rel. N_0) de l'inclusion $(N_1, N_0) \hookrightarrow (N_1, N_\epsilon)$. \square

Lemme 4.2. *Soient $(N'_1, N'_0) \subset (N_1, N_0)$ deux paires d'indice régulières pour $(S; \phi)$. Alors, $(N'_1, N'_0) \simeq (N'_1, N'_1 \cap N_0)$ (rel. N'_0).*

Preuve : La preuve calque celle du lemme précédent : il s'agit ici de ramener $g^{-1}(0) \cap N'_1$ sur $g'^{-1}(0)$ (voir figure 3, à droite).

Tout d'abord, comme $N_0 \cap g'^{-1}(1) = \emptyset$, il existe $0 < \epsilon < 1$ tel que $N'_1 \cap N_0 \subset g'^{-1}([0; \epsilon])$. On définit $\lambda' : N'_1 \rightarrow [0; 1]$ de manière analogue à l'application λ précédente.

Le produit $\lambda' \cdot (1 - g)$ vaut $\tau_{N'_0}$ sur $N_0 \cap N'_1 \supset N'_0$ et se prolonge par 0 sur $g'^{-1}(1)$.

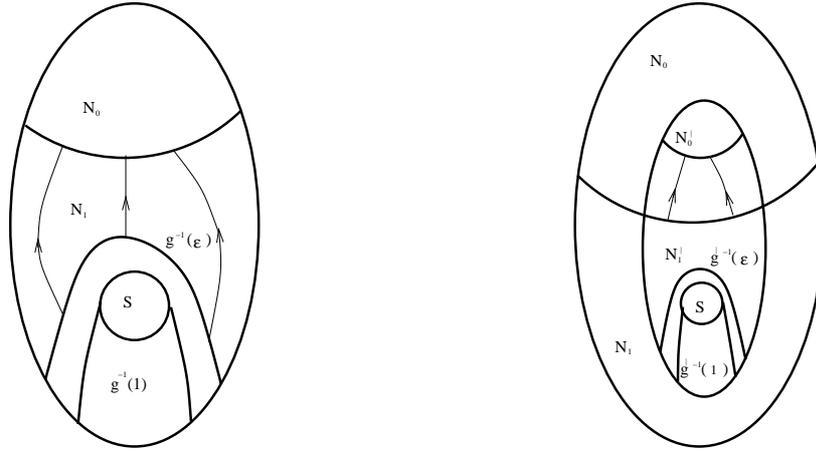


Figure 3: Illustration de la démonstration des lemmes 4.1 et 4.2

Dès lors, l'application $r' : (N'_1, N'_1 \cap N_0) \rightarrow (N'_1, N'_0)$ définie par $r'(x) = \phi(x, \lambda'(x) \cdot (1 - g(x)) \cdot \tau_{N'_0}(x))$ est un inverse homotopique (rel. N'_0) de l'inclusion $(N'_1, N'_0) \hookrightarrow (N'_1, N'_1 \cap N_0)$. \square

Lemme 4.3. *Pour toutes paires d'indice régulières $(N'_1, N'_0) \subset (N_1, N_0)$ pour (S, ϕ) , on a $(N'_1 \cup N_0, N_0) \simeq (N_1, N_0)$ (rel. N_0).*

Preuve : On peut, par le lemme précédent, supposer que $N'_0 = N'_1 \cap N_0$. Dès lors, tout point de N_1 atteint $N'_1 \cup N_0$. Cependant, l'application "temps d'arrivée" sur $N'_1 \cup N_0$ n'est pas *a priori* continue.

Nous montrons que l'on peut trouver $C \subset N'_1$ tel que tout point de N_1 atteigne $C \cup N_0$ et que l'application temps d'arrivée sur cet ensemble soit continue.

C est construit à partir des lignes de niveaux de fonctions de Lyapunov associées à ϕ et à $-\phi$.

o) • Tout d'abord, soit $g : N_1 \rightarrow N_0$ la fonction de Lyapunov associée à (N_1, N_0) . On constate que $g|_{N'_1} : N'_1 \rightarrow [0; 1]$ est une fonction de Lyapunov associée à (N'_1, N'_0) . On prendra donc $g' = g|_{N'_1}$.

De même, soient τ_{N_0} (resp. $\tau_{N'_0}$) l'application temps d'arrivée sur N_0 (resp. N'_0). On a $\tau_{N_0}|_{N'_1} = \tau_{N'_0}$.

• On considère le flot dual $-\phi$ défini par $-\phi(x, t) = \phi(x, -t)$.

Soient (\bar{N}_1, \bar{N}_0) la paire d'indice pour $(S; -\phi)$ obtenue en appliquant [44] Thm 4.2 avec $N = Cl(N_1 \setminus N_0)$ et $U = Int(N_1 \setminus N_0)$ et \bar{g} la fonction de Lyapunov qui lui est associée. Par construction, \bar{N}_1 est négativement invariant dans $Cl(N_1 \setminus N_0)$.

C'est à dire : $\left. \begin{array}{l} x \in \overline{N_1} \\ x.[-t; 0] \subset Cl(N_1 \setminus N_0) \end{array} \right\} \Rightarrow x.[-t; 0] \subset \overline{N_1}.$

Nous en déduisons que $g^{-1}(1) \subset \overline{N_1}$ et que plus généralement

$$\forall x \in N_1 \setminus g^{-1}(1), x \in \overline{N_1} \text{ ou } x.[0; \tau_{N_0}(x)] \cap \overline{N_1} = \emptyset.$$

Par suite, les choix effectués nous assurent un comportement assez simple des différentes paires d'indice (et fonctions associées) entre elles.

i) Construction de C .

Soit U un voisinage ouvert de S , vérifiant $U \subset Int(\overline{N_1} \setminus \overline{N_0}) \cap Int(N'_1 \setminus N'_0)$.

On a tout d'abord :

$$\exists \eta > 0, \epsilon > 0 \text{ tq } \bar{g}^{-1}([1 - \eta; 1]) \cap g^{-1}([1 - \epsilon; 1]) \subset U$$

En effet, U est un voisinage de $S = \bar{g}^{-1}(1) \cap g^{-1}(1)$.

Posons $C = \bar{g}^{-1}([1 - \eta; 1]) \cap g^{-1}([1 - \epsilon; 1])$.

Le choix de $C \subset U$ nous assure que les fonctions g et \bar{g} sont définies sur un voisinage de C . En particulier, $\forall x \in C, \exists t > 0 / x.[0, t] \subset N_1$ et g, \bar{g} définies sur $x.[0, t]$. Ce point technique nous permet donc d'étudier le comportement des orbites des points de la frontière de C en utilisant g, \bar{g} .

ii) Montrons que $C \cup N_{1-\epsilon}$ est positivement invariant dans N_1 .

Clairement, $(C, \bar{g}^{-1}([1 - \eta; 1]) \cap g^{-1}(1 - \epsilon))$ est une paire d'indice pour (S, ϕ) . En particulier, toute orbite quittant C passe par $g^{-1}(1 - \epsilon)$ et donc entre dans $N_{1-\epsilon}$. On conclut puisque $N_{1-\epsilon}$ est positivement invariant dans N_1 .

De même, on montre que $C \cup N'_{1-\epsilon}$ est positivement invariant dans N'_1 .

iii) Montrons que $(C \cup N_{1-\epsilon}, N_{1-\epsilon}) \simeq (N_1, N_{1-\epsilon})$ (rel. $N_{1-\epsilon}$).

Pour ce faire, nous allons montrer que l'application :

$$\begin{array}{lll} T : N_1 & \rightarrow & [0; +\infty] \\ x & \mapsto & 0 \quad \text{si } x \in C \cup N_{1-\epsilon} \\ & \mapsto & \sup\{t/x.[0; t] \subset \overline{N_1} \setminus C \cup N_{1-\epsilon}\} \quad \text{sinon} \end{array}$$

est continue et ne prend que des valeurs finies.

• Remarquons d'abord que $(N_1, C \cup N_{1-\epsilon})$ est une paire d'indice pour (\emptyset, ϕ) :

- $I(Cl(N_1 \setminus C \cup N_{1-\epsilon})) = \emptyset$ car $S \subset Int(C)$;

- l'invariance positive de $C \cup N_{1-\epsilon}$ dans N_1 a été montrée ci-dessus;

- comme $N_0 \subset C \cup N_{1-\epsilon}$, on a bien $C \cup N_{1-\epsilon}$ ensemble de sorti pour N_1 .

• Montrons maintenant que nous sommes dans les conditions d'applications du lemme 5.2 de [44], c'est à dire que

$$\forall x \in C \cup N_{1-\epsilon}, \forall u > 0, x.[0; u] \not\subset Cl(N_1 \setminus C \cup N_{1-\epsilon}).$$

Le seul cas à étudier est $x \in \text{Fr}_{N_1}(C \cup N_{1-\epsilon})$, c'est à dire $g(x) = 1 - \epsilon$ ou $\bar{g}(x) = 1 - \eta$ (et $g(x) \geq 1 - \epsilon$). Ce point est alors évident, en utilisant :

- la remarque à la fin du i), qui s'applique également (pour g) aux points de $g^{-1}(1 - \epsilon)$;
- l'application g est strictement décroissante sur les lignes de champs en dehors de $g^{-1}(1)$ et de $g^{-1}(0)$,
- l'application \bar{g} est strictement croissante sur les lignes de champs en dehors de $\bar{g}^{-1}(1)$ et de $\bar{g}^{-1}(0)$.

Nous pouvons donc appliquer le lemme 5.2 et par suite, T est continue.

- De plus, tout point de N_1 atteint $C \cup N_{1-\epsilon}$ en un temps fini. En effet, tout point de $N_1 \setminus g^{-1}(1)$ atteint $N_{1-\epsilon}$ et tout point de $g^{-1}(1)$ atteint C .

Pour montrer ce dernier point, remarquons que si $x \in g^{-1}(1)$, alors $\omega(x) \subset S$.

Donc, pour tout voisinage V de S , il existe t tel que $x.[t, +\infty[\subset V$.

Ceci est vrai en particulier pour $V = C$ et donc, x atteint bien C .

Par suite, T ne prend que des valeurs finies.

Dès lors, $r_{N_1} : (N_1; N_{1-\epsilon}) \rightarrow (C \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon})$ définie par $r_{N_1}(x) = x.T(x)$ est bien

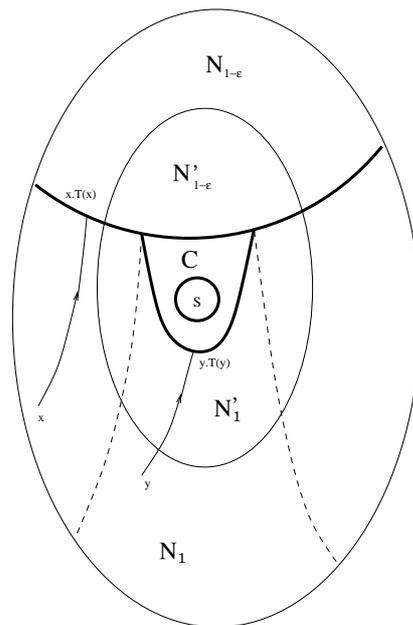


Figure 4: Illustration de la rétraction de N_1 sur $C \cup N_{1-\epsilon}$

définie, continue et est un inverse homotopique (rel. $N_{1-\epsilon}$) de l'inclusion $(C \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \hookrightarrow (N_1; N_{1-\epsilon})$.

On montre $(N'_1 \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \simeq (C \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon})$ (rel. $N_{1-\epsilon}$) de manière identique.

iv) Montrons que $(N'_1 \cup N_0, N_0) \simeq (N_1, N_0)$ (rel. N_0)

Nous avons déjà établi :

$$(N_1; N_0) \simeq (N_1; N_{1-\epsilon}) \simeq (C \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \simeq (N'_1 \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \quad (\text{rel. } N_0)$$

Montrons maintenant que $(N'_1 \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \simeq (N'_1 \cup N_0, N_0)$ (rel. N_0).

Par le lemme 4.1, il existe $\rho : (N_1, N_{1-\epsilon}) \rightarrow (N_1, N_0)$, équivalence d'homotopie (rel. N_0).

La restriction de cette application à $N'_1 \cup N_{1-\epsilon}$ induit une application de paire $(N'_1 \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon}) \rightarrow (N'_1 \cup N_0, N_0)$. En effet,

- si $x \in N_{1-\epsilon}$, trivialement $\rho(x) \in N_0$,
- si $x \in N'_1$, alors $\rho(x)$ est de la forme $\phi(x; u \cdot \tau_{N_0}(x))$ où $u \in [0; 1]$.

De plus, (voir *o*) ci-dessus), $\tau_{N_0}(x) = \tau_{N'_0}(x)$.

Donc, $\rho(x) \in x \cdot [0; \tau_{N_0}(x)] = x \cdot [0; \tau_{N'_0}(x)] \subset N'_1$.

Un argument similaire montre que ρ est bien une équivalence d'homotopie (rel. N_0). \square

Remarque 4.4. Il est facile de montrer, en utilisant le point *ii*), que $(C \cup N_{1-\epsilon}; N_{1-\epsilon})$ et $(C \cup N'_{1-\epsilon}; N'_{1-\epsilon})$ sont des paires d'indice pour (S, ϕ) .

4.2 Points critiques et paires d'indice

Nous étendons le résultat de Cornéa cité dans l'introduction de ce chapitre à des paires d'indices régulières pour des flots presque gradients (au lieu de flots gradients).

Pour cela, nous adaptions la technique du minimax (voir [37]) à un cadre relatif et non différentiel. Signalons que la proposition 4.6 a été obtenue de manière indépendante par M. Razvan [39]

Définition 4.1. *Soit $A \subset X \subset M$. La catégorie de (X, A) dans M est le plus petit k tel qu'il existe $k + 1$ ouverts de M vérifiant $X \subset \cup_{i=0}^n U_i$, $A \subset U_0$ et U_0 se rétracte sur A relativement à A et pour $i \geq 1$, U_i est contractile dans M .*

On la note $cat_M(X, A)$.

Clairement, $cat(X, A) = cat_X(X, A)$. Si on prend $A = *$ un point de X , on retrouve alors la notion classique de catégorie de X dans M , $cat_M(X)$.

Les points suivants se déduisent également facilement de la définition.

Lemme 4.5. *Soient $A \subset X \subset Y \subset M$, alors*

i) $cat_M(X, A) \leq cat_M(Y, A)$;

ii) Si il existe $H : (M, A) \times I \rightarrow (M, A)$, déformation de M relative à A telle que $H_1(Y) \subset Y$ alors $cat_M(H_1(Y), A) = cat_M(Y, A)$.

En particulier, si $H_1(Y) \subset X$, alors $cat_M(X, A) = cat_M(Y, A)$.

Proposition 4.6. *Soit Γ un espace métrique localement compact, ϕ un flot presque gradient sur Γ , X un flot local pour ϕ . Soit S un ensemble invariant isolé de ϕ dans X et (N_1, N_0) une paire d'indice régulière pour (S, ϕ) . Alors ϕ possède au moins $\text{cat}(N_1, N_0)$ orbites stationnaires dans $\text{Int}(N_1 \setminus N_0)$.*

(On rappelle que par convention, $\text{cat}(N_1, \emptyset) = \text{cat}(N_1) + 1$.)

Preuve : Remarquons d'abord que la définition de paire d'indice interdit la présence d'orbites stationnaires sur $Fr(N_1 \setminus N_0)$.

Par suite, le résultat est évident si ϕ a une infinité d'orbites stationnaires.

1^{er} cas : $N_0 \neq \emptyset$.

Soit g continue, strictement décroissante le long des orbites non stationnaires de ϕ . On peut choisir g strictement positive sur N_1 . Soit $\tau_{N_0} : N_1 \rightarrow [0; +\infty]$ la fonction temps d'arrivée sur N_0 .

Clairement, la fonction f définie sur N_1 par $x \mapsto (1 - \exp(-\tau_{N_0}(x))).g(x)$ est une fonction strictement décroissante sur les lignes de champs non constantes de $N_1 \setminus N_0$ et telle que $f^{-1}(0) = N_0$. On normalise f de manière à ce que f prenne ses valeurs dans $[0; 1]$. Par analogie avec le cas gradient, on appellera valeur critique de f l'image par f d'un point stationnaire de ϕ .

D'après ce qui précède, nous pouvons supposer que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques et en particulier que celles-ci sont isolées.

Posons $N_a = f^{-1}([0; a])$ et pour $0 \leq m \leq \text{cat}(N_1, N_0)$, on définit $c_m(f) = \inf\{a \in \mathbf{R} / \text{cat}_{N_1}(N_a, N_0) = m\}$.

Clairement, $c_0(f) = 0$ et $c_m(f) \leq c_{m+1}(f)$. (Rappelons que $N_0 \rightarrow N_1$ est une cofibration et donc qu'il existe bien un ouvert de N_1 se déformant sur N_0 (rel. N_0).)

Nous allons montrer que :

i) Pour $m \geq 1$, $c_m(f)$ est une valeur critique, c'est à dire que ϕ possède au moins une orbite stationnaire dans $f^{-1}(c_m(f))$; (remarquons que $c_0(f) = 0$ n'est pas une valeur critique);

ii) Pour $0 \leq m \leq \text{cat}(N_1, N_0)$, $\text{cat}_{N_1}(N_{c_m(f)}, N_0) = m$.

En particulier, les valeurs $c_m(f)$ sont donc toutes différentes. Par suite, ϕ possède au moins $\text{cat}(N_1, N_0)$ niveaux critiques et donc au moins $\text{cat}(N_1, N_0)$ points critiques.

Preuve du *i)* : Montrons que pour $\alpha \in]0; 1[$, soit α est une valeur critique, soit il existe ϵ tel que chaque point de $f^{-1}([\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon])$ atteigne $N_{\alpha - \epsilon}$, c'est à dire que

$$\exists \epsilon > 0, \text{ t.q. } \forall x \in f^{-1}([\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon]), \exists T > 0, f(\phi(x, T)) \leq \alpha - \epsilon$$

En effet, supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists x \in f^{-1}([\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon])$ t.q. $\forall t \geq 0, f(\phi(x, t)) > \alpha - \epsilon$. Prenons $\epsilon = \frac{1}{n}$. Nous obtenons donc une suite de points $(x_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $\forall t \geq 0, \alpha + \frac{1}{n} \geq$

$$f(x_n) \geq f(\phi(x_n, t)) > \alpha - \frac{1}{n}.$$

Par compacité, on peut supposer que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un point x .

Clairement, celui-ci vérifie $\forall t \geq 0, f(\phi(x, t)) = \alpha$.

Par suite, x est une orbite stationnaire de ϕ .

Par suite, si α n'est pas une valeur critique, il existe ϵ tel que chaque point de $f^{-1}([\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon])$ atteint $f^{-1}(\alpha - \epsilon)$. Notons qu'alors, l'application temps d'arrivée sur $f^{-1}(\alpha - \epsilon)$ est continue.

On peut dès lors construire en utilisant le flot une déformation de N_1 relative à N_0 amenant $N_{\alpha+\epsilon}$ sur $N_{\alpha-\epsilon}$. Par le lemme 4.5.ii), $cat_{N_1}(N_{\alpha+\epsilon}, N_0) = cat_{N_1}(N_{\alpha-\epsilon}, N_0)$.

Par suite, $c_m(f)$ est une valeur critique. Dans le cas contraire, en posant $\alpha = c_m(f)$, il existerait $\epsilon > 0$ tel que $cat_{N_1}(N_{c_m(f)+\epsilon}, N_0) = cat_{N_1}(N_{c_m(f)-\epsilon}, N_0)$.

Cette dernière égalité est absurde puisque par définition de $c_m(f)$, $cat_{N_1}(N_{c_m(f)+\epsilon}, N_0) \geq m$ tandis que $cat_{N_1}(N_{c_m(f)-\epsilon}, N_0) < m$.

Preuve du *ii*) : • Montrons d'abord que

$$\forall \alpha \in [0; 1[, \exists \epsilon_1 > 0 \text{ t.q. } cat_{N_1}(N_{\alpha+\epsilon_1}, N_0) = cat_{N_1}(N_\alpha, N_0)$$

En effet, supposons que $cat_{N_1}(N_\alpha, N_0) = m$.

Donc, il existe $m + 1$ ouverts de N_1 vérifiant $N_\alpha \subset \cup_{i=0}^m U_i$, $A \subset U_0$ et U_0 se rétracte sur N_0 relativement à A et pour $i \geq 1$, U_i est contractile dans N_1 .

Posons $U = \cup_{i=0}^m U_i$. Clairement, $N_\alpha \subset U$ et $cat_{N_1}(U, N_0) = cat_{N_1}(N_\alpha, N_0)$. Par un argument de compacité, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $N_\alpha \subset N_{\alpha+\epsilon_1} \not\subset U$. D'où le résultat.

Cette propriété reste vraie pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_1$.

• Soit c une valeur critique et notons K_c l'ensemble des points critiques situés sur $f^{-1}(c)$. On peut supposer que K_c est un ensemble de points isolés.

Soit U un voisinage de K_c se déformant sur K_c (U est donc contractile dans N_1).

Nous avons

$$\exists \epsilon_2 > 0 \text{ t.q. } \forall x \in f^{-1}([c - \epsilon_2; c + \epsilon_2]) \setminus U, \exists t \geq 0 \text{ t.q. } f(\phi(x, t)) \leq c - \epsilon_2$$

Si ce n'est pas vrai, on peut par compacité construire une suite x_n de points de $N_1 \setminus U$ qui convergent vers un point critique de ϕ , $x \in f^{-1}(c) \setminus U$, ce qui est impossible.

Par suite, il existe ϵ_2 tel que $N_{c+\epsilon_2} \setminus U$ se déforme sur $N_{c-\epsilon_2}$ rel. N_0 . Donc,

$$cat_{N_1}(N_{c+\epsilon_2}, N_0) \leq cat_{N_1}(N_{c+\epsilon_2} \cup U, N_0) \leq 1 + cat_{N_1}(N_{c+\epsilon_2} \setminus U, N_0) \leq 1 + cat_{N_1}(N_{c-\epsilon_2}, N_0)$$

Cette propriété reste vraie pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_2$.

• Appliquons ce qui précède à $c = c_m(f)$.

Nous avons donc l'existence d'un ϵ tel que

$$cat_{N_1}(N_{c_m(f)+\epsilon}, N_0) = cat_{N_1}(N_{c_m(f)}, N_0) \leq 1 + cat_{N_1}(N_{c_m(f)-\epsilon}, N_0)$$

On conclut car $m \leq \text{cat}_{N_1}(N_{c_m(f)+\epsilon}, N_0)$ tandis que $\text{cat}_{N_1}(N_{c_m(f)-\epsilon}, N_0) \leq m - 1$.

2^{eme} cas $N_0 = \emptyset$.

Soit f une fonction de Lyapunov pour le flot, normalisée de manière à ce que f prenne ses valeurs dans $[0; 1]$.

Posons $N_a = f^{-1}([0; a])$ et pour $0 \leq m \leq \text{cat}(N_1)$, on définit $c_m(f) = \inf\{a \in \mathbf{R} / \text{cat}_{N_1}(N_a) = m\}$.

Comme précédemment $c_m(f) \leq c_{m+1}(f)$ et $c_0(f) = 0$ (ce qui signifie en particulier que $f^{-1}(0)$ est contractile dans N_1).

En effet, tout $x \in f^{-1}(0)$ est une orbite stationnaire pour ϕ . (Si il existe $t > 0$ tel que $x.t \neq x$ alors nécessairement $f(x.t) < f(x) = 0$, ce qui est impossible). Par suite, on peut supposer que $f^{-1}(0)$ est un ensemble fini de points.

En réutilisant les mêmes arguments que pour le 1^{er} cas, on a :

i) Pour $m \geq 0$, $c_m(f)$ est une valeur critique, c'est à dire que ϕ possède au moins une orbite stationnaire dans $f^{-1}(c_m(f))$.

(C'est la différence par rapport au 1^{er} cas : $c_0(f)$ est une valeur critique.)

ii) Pour $0 \leq m \leq \text{cat}(N_1)$, $\text{cat}_{N_1}(N_{c_m(f)}) = m$.

En particulier, les valeurs $c_m(f)$ sont donc toutes différentes. Par suite, ϕ possède au moins $\text{cat}(N_1) + 1$ niveaux critiques et donc au moins $\text{cat}(N_1) + 1$ points critiques. \square

4.3 Produits de flots et suspension dynamique

Soient Γ, Γ' deux espaces métriques localement compacts et $\phi : \Gamma \times \mathbf{R} \rightarrow \Gamma, \psi : \Gamma' \times \mathbf{R} \rightarrow \Gamma'$ deux flots.

Soient X un flot local pour ϕ, S_ϕ ensemble isolé invariant pour ϕ dans X et (N_1, N_0) une paire d'indice régulière pour (S_ϕ, ϕ) .

Soient Y un flot local pour ψ, S_ψ ensemble isolé invariant pour ψ dans Y et (M_1, M_0) une paire d'indice régulière pour (S_ψ, ψ) .

On définit alors sur $\Gamma \times \Gamma'$ le flot produit $\phi \times \psi$ par $(\phi \times \psi)(x, y, t) = (\phi(x, t); \psi(y, t))$. De manière classique (voir [4] par exemple), $S_\phi \times S_\psi$ est un ensemble isolé invariant dans $X \times Y$ pour $\phi \times \psi$, qui admet $(N_1 \times M_1, N_1 \times M_0 \cup N_0 \times M_1)$ pour paire d'indice régulière.

Un cas particulier important est si l'on prend $\Gamma' = \mathbf{R}^n$ et ψ le flot gradient d'une forme quadratique. Plus précisément,

Définition 4.2. La n^{eme} suspension (dynamique) du flot ϕ défini sur Γ est le flot produit $\Sigma^n \phi = \phi \times \psi$ où ψ est le flot gradient de la forme quadratique q définie sur \mathbf{R}^n par $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

La forme q possède un unique point critique, $\vec{0}_n = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ et cette singularité admet clairement pour paire d'indice (D^n, S^{n-1}) .

Par suite, $\Sigma^n \phi$ admet $S_\phi \times \{\vec{0}_n\}$ comme ensemble invariant isolé et $(N_1 \times D^n, N_1 \times S^n \cup N_0 \times D^{n+1})$ est une paire d'indice pour cet ensemble. De plus, on peut clairement identifier les flots $\Sigma(\Sigma^n \phi)$ et $\Sigma^{n+1} \phi$.

Le terme "suspension dynamique" se justifie car les invariants topologiques associés à la dynamique du flot suspension sont liés à la stabilisation homotopique des invariants associés au flot initial. Par exemple, l'indice de Conley de $(S, \Sigma^n \phi)$ est la suspension (homotopique) $n^{\text{ième}}$ de celui de (S, ϕ) . On peut également remarquer que si M est une variété, la suspension d'un flot gradient sur M correspond au flot gradient d'une application *quadratique à l'infini* sur M (voir section 7.2), dont le nombre minimal de points critiques est estimé par des versions stables de la LS catégorie (voir corollaire 7.4).

Remarque 4.7. Par utilisation des formules produits de la section 1, nous avons avec les notations ci-dessus :

1) $cat(N_1 \times M_1, N_1 \times M_0 \cup N_0 \times M_1) \leq cat(N_1, N_0) + cat(M_1, M_0) - 1;$

2) En particulier,

$cat(N_1 \times D^n, N_1 \times S^n \cup N_0 \times D^{n+1}) \leq cat(N_1, N_0) + cat(D^{n+1}, S^n) - 1 = cat(N_1, N_0) \quad \bullet$

4.4 Paires d'indice d'un type d'homotopie fixé

Dans cette section, nous discutons la possibilité de réaliser des types d'homotopie fixés comme paire d'indice d'ensembles invariants.

4.4.1 Paires d'indice du type (X, \emptyset)

Notre but ici est de montrer que

Lemme 4.8. *Pour tout CW-complexe fini X , on peut réaliser à homotopie près les paires (X, \emptyset) et $(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$ comme paire d'indice d'un flot gradient d'une fonction C^∞ définie sur un ouvert d'un \mathbf{R}^q .*

Preuve : Tout d'abord, il existe une variété lisse à bords $(M, \partial M)$ telle que $M \simeq X$. On regarde \mathbf{R}^q comme $\mathbf{R}^{q-1} \oplus \mathbf{R}$ et on notera $\mathbf{R}_+^q = \mathbf{R}^{q-1} \times [0, +\infty[$ et $\mathbf{R}^{q-1} = \mathbf{R}^{q-1} \times \{0\}$.

Choix d'un voisinage tubulaire

On considère un plongement de $(M, \partial M)$ dans $(\mathbf{R}_+^q, \mathbf{R}^{q-1})$. Soit $\nu = (\pi, E(\nu), M)$ le fibré normal orthogonal de M , c'est à dire qu'en chaque point $x \in M$, on a $T_x M \oplus_\perp \nu_x = T_x \mathbf{R}^q$ que l'on identifie de manière canonique avec \mathbf{R}^q .

On choisit ce plongement de manière à ce que M rencontre \mathbf{R}^{q-1} orthogonalement le long de ∂M :

- $M \cap \mathbf{R}^{q-1} = \partial M,$

- si $x \in \partial M$, le vecteur normal \vec{n}_x de ∂M dans M (défini par $T_x M = T_x \partial M \oplus_{\perp} \mathbf{R} \vec{n}_x$) est orthogonal à \mathbf{R}^{q-1} . Cette condition est équivalente à $\nu_x \subset \mathbf{R}^{q-1}$ ou encore à $T_x \partial M \oplus_{\perp} \nu_x = \mathbf{R}^{q-1}$.

Enfin, par le théorème du collier, on considère que sur un voisinage de ∂M , M est un cylindre sur ∂M : il existe $\eta > 0$ tel que $M \cap (\mathbf{R}^{q-1} \times [0, \eta]) = \partial M \times [0, \eta]$.

Dès lors, soit U un voisinage tubulaire normal de M dans \mathbf{R}_+^q (on peut prendre pour U l'image par un plongement isométrique f d'un fibré en disque ouvert de ν). Le plongement est tel que $U' = U \cap (\mathbf{R}^{q-1} \times \{0\})$ est un voisinage tubulaire normal de ∂M dans \mathbf{R}^{q-1} . On peut choisir U tel que $U \cap (\mathbf{R}^{q-1} \times [0, \eta]) = U' \times [0, \eta]$.

U est muni de manière naturelle d'une projection sur M (que l'on notera encore π) et qui se restreint à une projection de U' sur ∂M .

Enfin, on choisit U assez petit pour que si $x \in U$, alors le point de M le plus proche de x est $\pi(x)$, c'est à dire $d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - \pi(x)\|$.

Choix de la fonction

Dans la suite, on adopte la convention pour $y = (y_1, \dots, y_q)$ de noter $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{q-1}, 0)$, le projeté de y sur $\mathbf{R}^{q-1} \times \{0\}$. Posons $h(t) = \exp(-\frac{1}{t^2})$.

Posons $\tilde{U} = U' \times]-\epsilon, 0] \cup_{U' \times \{0\}} U$ pour un ϵ fixé.

Soit $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x) = -d(x, M)^2$ si $x \in U$ et $g(x) = -d(\tilde{x}, M)^2 - h(x_q)$ si $x \in U' \times]-\epsilon, 0]$.

On remarque que $M = g^{-1}(0)$. Etudions la régularité de g .

Pour $x \in U$, $g(x) = -\|x - \pi(x)\|^2$.

De plus, grace au "collier" autour de ∂M , si $x \in U \cap (\mathbf{R}^{q-1} \times [0, \eta]) = U' \times [0, \eta]$, on a $d(x, M) = d(\tilde{x}, M)$, c'est à dire $\|x - \pi(x)\| = \|\tilde{x} - \pi(\tilde{x})\|$.

Par suite, $g(x) = -\|\tilde{x} - \pi(\tilde{x})\|^2$ si $x \in U' \times [0, \eta]$.

Si $x \in U' \times]-\epsilon, 0]$, $g(x) = -\|\tilde{x} - \pi(\tilde{x})\|^2 - h(x_q)$.

Les expressions trouvées sur chaque domaine pour g sont celles de fonctions lisses qui se recollent de manière C^∞ au voisinage de U' . (C'est pour avoir ce recollement C^∞ que l'on choisit h au lieu du choix "naturel" $x_q \mapsto x_q^2$.)

Points critiques de g

- Clairement, tous les points de M sont critiques ($x = \pi(x)$ amenant $\nabla g(x) = 0$).
 - De plus, pour $x \in U' \times]-\epsilon, 0[$ (donc $x_q \neq 0$), la dernière coordonnée du gradient est $-\frac{2}{x_q^3} \exp(-\frac{1}{x_q^2})$ et donc $\nabla g(x) \neq \vec{0}$.
 - Soit $x \in U$. Posons $\vec{v} = \overrightarrow{x\pi(x)}$. Clairement, si $x + t\vec{v} \in U$, on a $\pi(x + t\vec{v}) = \pi(x)$. Par suite, pour t assez petit, $g(x + t\vec{v}) - g(x) = -\|x + t\vec{v} - \pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 = -\|t\vec{v} - \vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2(1 - (1 - t)^2) = (2t - t^2)\|\vec{v}\|^2$.
- Par suite, la dérivée directionnelle de g selon \vec{v} et donc $\nabla g(x) \neq \vec{0}$ si $x \neq \pi(x)$, c'est à dire dès que $x \notin M$.

Choix d'une paire d'indice

\tilde{U} est un voisinage ouvert de $M = g^{-1}(0)$ dans \mathbf{R}^q . Soit \mathcal{O} un voisinage de M dans \mathbf{R}^q , que l'on peut choisir tel que $\mathcal{O} \subset Cl(\mathcal{O}) \subset \tilde{U}$. Alors, il existe ρ tel que $g^{-1}[-\rho, 0] \subset \mathcal{O}$. La condition sur \mathcal{O} nous assure que $g^{-1}[-\rho; 0]$ est un fermé de \mathbf{R}^q (au lieu d'être seulement un fermé de \tilde{U}).

Posons $N_1 = g^{-1}[-\rho; 0]$ et $N_0 = \emptyset$. Dès lors, (N_1, N_0) est une paire d'indice pour le flot induit par ∇g . En effet, pour $x \in \partial N_1 = g^{-1}(-\rho)$, le vecteur $\nabla g(x)$ est non nul et pointe intérieurement (vers les valeurs de g croissantes).

Enfin, soit $p : N_1 \rightarrow M$ défini par $p(x) = \pi(x)$ si $x_q \geq 0$ et par $p(x) = \pi(\tilde{x})$ si $x_q \leq 0$. L'application p est un inverse homotopique de $M \hookrightarrow N_1$. Par suite, on a $N_1 \simeq M \simeq X$. On obtient une paire d'indice homotope à $(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$ en considérant la $(n+1)^{eme}$ suspension du flot gradient de g . \square

4.4.2 Rappels sur les ensembles critiques raisonnables

Dans cette partie, nous reformulons un résultat de Cornéa [8] en l'adaptant directement à notre propos.

Soit (M, V_0, V_1) un cobordisme (avec M variété riemannienne lisse) et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une application lisse, régulière sur ∂M , constante, minimale sur V_0 , constante maximale sur V_1 .

On suppose que f possède une unique valeur critique et que sa sous-variété critique S est *raisonnable*, c'est à dire connexe et telle que $(f^{-1}(f(S)) - S, S)$ soit une stratification de Whitney de $f^{-1}(f(S))$. Soit ϕ le flot induit par $-\nabla f$. Nous avons alors :

Théorème : (2.4, [8]) *Avec les notations ci-dessus, si S est 1-connexe, pour tout voisinage V de S , on peut trouver une paire d'indice régulière (N_1, N_0) pour (S, ϕ) telle que $N_1 \subset V$ et $N_1 \simeq S$.*

Indication de preuve : Ici, nous décrivons simplement la construction de la paire d'indice.

Posons $H = f^{-1}(f(S))$. Soit U un 'bon' voisinage tubulaire de S dans M et U_ϵ l'ensemble des points x de U tels que $d(x, S) \leq \epsilon$.

Alors, pour ϵ assez petit, ∂U_ϵ coupe H de manière transverse. Pour un tel ϵ , posons $H_\epsilon = H \cap U_\epsilon$. Remarquons que pour $\tau < \epsilon$, $(H_\epsilon, H_\epsilon \cap \partial U_\epsilon) \simeq (H_\tau, H_\tau \cap \partial U_\tau)$ et que plus généralement, H_ϵ se rétracte sur S . (C'est pour montrer ces points qu'intervient l'hypothèse 'raisonnable').

Définissons $G_\epsilon = \{x \in M / \exists t \text{ t.q. } \phi(x, t) \in H_\epsilon \text{ ou } \alpha(x) \in S \text{ ou } \omega(x) \in S\}$

et $G_{\epsilon, \delta} = G_\epsilon \cap f^{-1}[f(S) - \delta, f(S) + \delta]$.

Alors, $(G_{\epsilon, \delta}, G_\epsilon \cap f^{-1}(f(S) - \delta))$ est une paire d'indice pour (S, ϕ) avec $G_{\epsilon, \delta} \simeq S$.

Cette paire d'indice est régulière car la fonction temps d'arrivée sur sa zone de sortie correspond à la fonction temps d'arrivée sur une ligne de niveau de f .

De plus, en prenant ϵ et δ assez petit, on obtient facilement $G_{\epsilon,\delta} \subset V$. \square

Notons que pour ϵ assez petit, le type d'homotopie de $Z = G_\epsilon \cap f^{-1}(f(S) - \delta)$ ne dépend pas de ϵ (ni de δ ou du voisinage tubulaire U initialement choisi).

L'espace Z s'appelle l' A -*indice* (A -index) de S et est noté $A_f(S)$.

Nous avons maintenant un résultat de réalisabilité :

Théorème : (corollaire 3.2, [8]) *Soit X un CW-complexe fini. Il existe un cobordisme (M, V_0, V_1) et une fonction $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ comme ci-dessus telle que l'ensemble critique de f est réduit à un unique point critique raisonnable S vérifiant $A_f(S) = X$.*

*En particulier, pour tout voisinage V de S , il existe une paire d'indice régulière (N_1, N_0) avec $N_1 \subset V$, $N_1 \simeq *$ et $N_0 \simeq X$.*

4.5 Catégorie des paires d'indice

Dans cette section, toutes les paires d'indice considérées sont régulières

Théorème 4.9. *Soit ϕ un flot continu, obtenu par intégration d'un champ de vecteurs continu sur X , variété riemannienne lisse de dimension n . Soit S un ensemble invariant isolé pour ce flot et (N_1, N_0) une paire d'indice pour S .*

(i) *Si $N_0 \neq \emptyset$, alors pour toute paire d'indice (M_1, M_0) pour (S, ϕ) vérifiant $N_1 \subset M_1$, on a $\text{cat}(M_1, M_0) \leq \text{cat}(N_1, N_0)$.*

Si $N_0 = \emptyset$, alors pour toute paire d'indice (M_1, M_0) pour (S, ϕ) , on a :

$M_0 = \emptyset$ et $\text{cat}(M_1, M_0) = \text{cat}(N_1, N_0) = \text{cat}(N_1) + 1$.

(ii) *Il existe un voisinage K de S tel que pour toute paire d'indice $(M_1; M_0)$ pour (S, ϕ) ,*

$$M_1 \subset K \Rightarrow \text{cat}(M_1; M_0) = \max \left\{ \text{cat}(N_1, N_0) \mid (N_1, N_0) \text{ paire d'indice pour } (S, \phi) \right\}$$

On appelle catégorie de ϕ en S , $\text{cat}(S, \phi)$ cette valeur maximale.

iii) $\text{cat}(h(S, \phi)) \leq \text{cat}(S, \phi) \leq n$.

iv) *Si S' est un ensemble invariant pour le flot ψ obtenu par intégration d'un champ de vecteurs sur Y , variété riemannienne lisse, alors $\text{cat}(S \times S', \phi \times \psi) \leq \text{cat}(S, \phi) + \text{cat}(S', \psi) - 1$.*

En particulier, pour tout $n \geq 1$, $\text{cat}(S, \Sigma^{n+1}\phi) \leq \text{cat}(S, \Sigma^n\phi) \leq \text{cat}(S, \phi)$.

v) *Si ϕ est presque gradient au voisinage de S , alors S contient au moins $\text{cat}(S, \phi)$ orbites stationnaires.*

Preuve du Théorème 4.9 : Remarquons que le point (i) est en fait valide dans le cadre de l'article de Salamon.

Si $N_0 \neq \emptyset$, Il découle facilement des lemmes 4.1, 4.2, 4.3.

Soient $(N_1, N_0), (M_1, M_0)$ deux paires d'indice vérifiant $N_1 \subset M_1$.

Comme $N_0 \cap g_M^{-1}(1) = \emptyset$, il existe $\epsilon < 1$ tel que $N_0 \subset M_\epsilon$ et d'après le lemme 4.1, on peut supposer dès le départ que $(N_1, N_0) \subset (M_1, M_0)$.

Par un argument similaire en employant cette fois-ci le lemme 4.2, on peut également supposer que $N_0 = N_1 \cap M_0$.

Dès lors, par le lemme 4.3, on obtient $(M_1, M_0) \simeq (N_1 \cup M_0, M_0)$.

Alors, clairement, $\text{cat}(N_1 \cup M_0, M_0) \leq \text{cat}(N_1, N_0)$.

En effet, $N_1 \cup M_0$ est la somme amalgamée de la cofibration $N_0 \hookrightarrow N_1$ et de l'application $N_0 \rightarrow M_0$. On conclut par le lemme 1.2.

Si $N_0 = \emptyset$, il s'agit exactement du lemme 3.1.

ii) On peut donc dire que la catégorie des paires d'indice forme une "suite croissante". Pour montrer le point (*ii*), il suffit de remarquer que cette "suite" est également bornée. En appliquant le théorème 2.4 de [55] à un voisinage isolant $Cl(N_1/N_0)$ de S , on obtient qu'il existe une paire d'indice (N'_1, N'_0) pour (S, ϕ) telle que :

- N'_1 est une variété à bord de dimension n , lisse excepté la présence de coins sur la frontière,
- $N'_1 \subset N_1$.

Par le point (*i*) ci-dessus, on obtient

$$\text{cat}(N_1; N_0) \leq \text{cat}(N'_1; N'_0) \leq \text{cat}(N'_1) + 1$$

Or, par [11] Thm 1, N'_1 est lissable, c'est à dire homéomorphe à une variété lisse à bords de dimension n . Par suite, d'après [51] $\text{cat}(N'_1) \leq n - 1$.

On en déduit que $\left\{ \text{cat}(N_1, N_0)/(N_1, N_0) \text{ paire d'indice pour } (S, \phi) \right\}$ est borné et qu'il existe (K_1, K_0) paire d'indice telle que $\text{cat}(K_1, K_0)$ soit maximale.

On pose $K = K_1$ et on conclut avec le point *i*).

iii) D'après ce qui précède, $\text{cat}(S, \phi) \leq n$. D'autre part, pour toute paire d'indice régulière (N_1, N_0) , on a d'après le lemme 1.2 $\text{cat}(N_1, N_0) \geq \text{cat}(N_1/N_0) = \text{cat}(h(S, \phi))$.

iv) Soit (P_1, P_0) une paire d'indice pour $S \times S'$ telle que $\text{cat}(P_1, P_0) = \text{cat}(S \times S', \phi \times \psi)$. Par définition de la topologie produit, P_1 contient un voisinage de $S \times S'$ de la forme $U \times V$ où U est un voisinage de S et V un voisinage de S' . Dès lors, on peut choisir (N_1, N_0) paire d'indice pour (S, ϕ) telle que $N_1 \subset U$, (M_1, M_0) paire d'indice pour (S', ψ) telle que $M_1 \subset V$. Donc, $(N_1 \times M_1, N_1 \times M_0 \cup N_0 \times M_1)$ est une paire d'indice pour $(S \times S', \phi \times \psi)$ et $N_1 \times M_1 \subset P_1$. Par suite, d'après le point *ii*) ci-dessus et la remarque 4.7,

$$\begin{aligned}
cat(S \times S', \phi \times \psi) &= cat(N_1 \times M_1, N_1 \times M_0 \cup N_0 \times M_1) \\
&\leq cat(N_1, N_0) + cat(M_1, M_0) - 1 \\
&\leq cat(S, \phi) + cat(S', \psi) - 1
\end{aligned}$$

La deuxième partie du *iv*) s'obtient de manière similaire.

v) Soit (N_1, N_0) une paire d'indice pour (S, ϕ) telle que $cat(N_1, N_0) = cat(S, \phi)$ et ϕ soit presque gradient sur un voisinage de N_1 .

D'après la proposition 4.6, ϕ a au moins $cat(S, \phi)$ orbites stationnaires dans $Int(N_1 \setminus N_0)$. Puisque $S = Inv(Cl(N_1 \setminus N_0))$, ces orbites stationnaires sont des points de S . \square

Nous donnons maintenant quelques remarques et exemples concernant $cat(S, \phi)$.

Remarque 4.10. *i*) La catégorie d'une paire d'indice régulière n'est pas un invariant de (S, ϕ) , comme on peut le voir sur cet exemple.

On considère un flot sur D^2 ayant la frontière S^1 et le centre O comme points fixes et comme orbites non stationnaires les rayons ouverts, parcourus de S^1 vers O . En recollant deux disques D_+^2 et D_-^2 munis de ce flot le long de S^1 , on obtient un flot ϕ sur S^2 . S^1 est un ensemble invariant isolé pour ϕ .

Soit $(N_1, N_0) = (S^2, N_+ \amalg N_-)$, où N_+ (resp. N_-) est un petit disque fermé centré

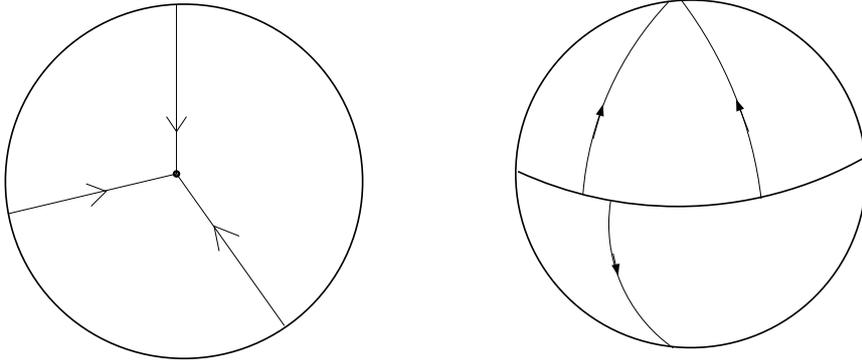


Figure 5: Flot sur D^2 et sur S^2

en O_+ (resp. O_-). Alors, (N_1, N_0) est une paire d'indice régulière pour (S^1, ϕ) et $cat(N_1, N_0) = 1$.

Soit (N'_1, N'_0) correspondant à un voisinage tubulaire de S^1 dans S^2 avec pour zone de sortie sa frontière. On peut l'écrire sous la forme $(S^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], S^1 \times \{-\frac{1}{2}\} \amalg S^1 \times \{\frac{1}{2}\})$. C'est également une paire d'indice pour (S^1, ϕ) et $cat(N'_1, N'_0) = 2$.

ii) $cat(S, \phi)$ est 'localement croissante'.

Plus précisément, supposons que ϕ soit obtenu par intégration d'un champ de vecteurs

χ et choisissons (N_1, N_0) telle que N_1 soit un bloc isolant pour (S, ϕ) , de zone de sortie N_0 et $cat(N_1, N_0) = cat(S, \phi)$.

Soit ψ obtenu par intégration d'un champ de vecteurs ζ .

Alors, il existe un voisinage Ω' de ∂N_1 et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega', \|\chi(x) - \zeta(x)\| < \epsilon \Rightarrow cat(S, \phi) \leq cat(S', \psi)$$

où S' est l'ensemble invariant maximal de ψ dans S' .

En effet, d'après la discussion de la section 3.2.3, N_1 est un bloc isolant pour ψ et (N_1, N_0) est une paire d'indice pour (S', ψ) .

Dès lors, $cat(S', \psi) \geq cat(N_1, N_0) = cat(S, \phi)$.

iii) Dans le cadre de la section 4.4.2 (S sous-variété critique raisonnable d'une application définie sur un cobordisme), on a l'inégalité

$$cat(S, \phi) \leq cat(S) + 1$$

En effet, pour tout voisinage U de S , on peut trouver une paire d'indice (N_1, N_0) avec $U \supset N_1 \simeq S$. Dès lors, pour N_1 assez proche de S , on a $cat(S, \phi) = cat(N_1, N_0) \leq cat(N_1) + 1 = cat(S) + 1$.

iv) D'autre part, si ϕ est presque gradient et que S est une unique singularité, alors d'après le point *v)* du théorème 4.9, $cat(S, \phi) \leq 1$. •

Les exemples suivants montrent que, notamment dans le cas de la suspension dynamique, $cat(S, \phi)$ réduit la perte d'information due à l'identification de la zone de sortie en un point.

Remarque 4.11. *i)* Soit X un CW -complexe fini tel que $X \neq *$ mais $\Sigma X \simeq *$ (voir Remarque 1.3*iv*). Appliquons le résultat de Cornéa cité en section 4.4.2 à X . Donc, il existe un cobordisme M et une application f définie sur M possédant une unique singularité S . De plus, soit ϕ induit par $-\nabla f$. Alors, S admet pour ce flot des paires d'indices (N_1, N_0) avec $N_1 \simeq *$ et $N_0 \simeq X$.

Dès lors, clairement, $cat(S, \phi) = 1$ mais $h(S, \phi) \simeq \Sigma X \simeq *$.

ii) La différence $cat(N_1, N_0) - cat(h(S, \phi))$ peut être arbitrairement grande.

Par exemple, si X est un CW -complexe fini, d'après le lemme 4.8, on peut réaliser (X, \emptyset) comme paire d'indice d'un ensemble isolé invariant S d'un flot gradient lisse ϕ d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbf{R}^q . On a alors :

$$cat(S, \phi) = cat(X, \emptyset) = cat(X) + 1 = cat(h(S, \phi))$$

Par contre, en suspendant ce flot, on obtient $(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$ comme paire d'indice pour $(S, \Sigma^{p+1}\phi)$. Et clairement,

$$cat(S, \Sigma^{p+1}\phi) = cat(X \times D^{p+1}, X \times S^p) \geq cat(h(S, \Sigma^{p+1}\phi)) = 1$$

alors que $cat(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$ peut être arbitrairement élevée, par exemple, pour $X = \mathbf{C}P^n$.

ii) De manière similaire, soit $X = S^1 \times S^1$ et ϕ_X le flot associé par le lemme 4.8. Alors, $cat(X, \Sigma^{p+1}\phi_X) = cat(X \times D^{p+1}, X \times S^p) = 3$ et $h(X, \Sigma^{p+1}\phi_X) = (X \times D^{p+1})/(X \times S^p) = S^p * X \vee S^{p+1} = S^{p+1} \vee S^{p+2} \vee S^{p+2} \vee S^{p+3}$ (de catégorie 1).

Par contre, si on prend $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ et ϕ_Y le flot associé par le lemme 4.8, on a $cat(Y, \Sigma^{p+1}\phi_Y) = cat(Y \times D^{p+1}, Y \times S^p) = 2$ mais $h(Y, \Sigma^{p+1}\phi_Y) = (Y \times D^{p+1})/(Y \times S^p) = S^{p+1} \vee S^{p+2} \vee S^{p+2} \vee S^{p+3} = h(X, \Sigma^{p+1}\phi_X)$. •

Etude de $cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$

Dans ce chapitre, nous étudions les invariants relatifs des paires $(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$. Les motivations pour cette étude sont nombreuses. Par exemple, nous avons les inégalités

$$cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n) \leq cat(X \times S^n) \leq cat(X) + 1$$

Par suite, la catégorie relative apparaît comme un outil pour l'étude de la conjecture de Ganéa.

D'autre part, en se basant sur les résultats de la section 2.3, 4.2 et 4.3, nous constatons que la catégorie des paires $(M \times D^{n+1}, M \times S^n)$ est également un outil important pour obtenir des estimations de nombre minimal de points critiques. En effet, soit M une variété lisse, $\nu = (\pi, E, M)$ est un fibré de base M et (E_D, E_S) la paire (fibré en disque, fibré en sphère) de ce fibré. Alors, toute fonction définie sur E et dont le gradient pointe extérieurement sur E_S possède au moins $cat(E_D, E_S)$ points critiques et donc, par le corollaire 2.8, possède au moins $cat(M \times D^{n+1}, M \times S^n)$ points critiques pour n assez grand.

Dans le cas absolu, nous pouvons identifier $F_n(X) \hookrightarrow G_n(X) \twoheadrightarrow X$ et $E_n(\Omega(X)) \twoheadrightarrow B_n(\Omega X) \hookrightarrow B_\infty(\Omega X) = B(\Omega X)$ (voir par exemple [17]). Nous montrons que la situation est analogue dans le cadre relatif. En utilisant la construction classifiante de Dold-Lashof, nous donnons une autre description des applications $g_{n+1}(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$. Ceci nous permet d'obtenir des relations entre les invariants de X et ceux de $(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$.

En particulier, nous montrons l'inégalité $cat(X \times D^{p+1}, X \times S^p) \geq \sigma^{p+1} cat(X) + 1$, premier résultat liant la catégorie relative de $(X \times D^{p+1}, X \times S^p)$ et une version stable de la catégorie de X .

Dans la section 6, en collaboration avec L. Vandembroucq, nous obtenons un résultat dont cette inégalité découle de manière évidente. Nous montrons en effet que $cat(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = Q^{p+1} cat(X) + 1$, où $Q^{p+1} cat$ est l'invariant associé par Stanley, Scheerer et Tanré au foncteur Q^{p+1} , version non pointée de $\Omega^{p+1}\Sigma^{p+1}$. En section 7, nous discutons les corollaires de cette égalité pour les conjectures sur les invariants numériques et pour les estimations de nombres de points critiques de fonctions quadratiques à l'infini. Nous appliquons également ces estimations au problème des intersections Lagrangiennes dans un fibré cotangent.

Dans toute cette partie, tous les espaces sont *compactly generated*, bien pointés et ont le type d'homotopie de CW -complexes. En particulier, les produits sont retopologisés et toutes les projections sur des espaces quotients sont des proclusions. Dans la suite, G désigne un groupe topologique.

5 Catégorie relative et espaces classifiants

Les résultats et méthodes de cette section ont fait l'objet d'une publication [35] dans Manuscripta Mathematica en 2000.

5.1 Préliminaires

5.1.1 Construction de Borel

Lemme 5.1. *Soit $\Xi : G \rightarrow E \rightarrow B$ un G -fibré principal. Alors, pour tout espace F muni d'une G -action (non forcément libre), on a le diagramme suivant, où :*

- i) la ligne du bas est un fibré localement trivial de fibre F ,*
- ii) Les colonnes sont des G -fibrés principaux (l'action de G sur $E \times F$ est l'action diagonale),*
- iii) le carré en bas à droite est un produit fibré.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G & \xlongequal{\quad} & G \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 F & \longrightarrow & E \times F & \xrightarrow{pr_E} & E \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 F & \longrightarrow & (E \times F)/G & \xrightarrow{\pi} & B
 \end{array}$$

(On note π l'application obtenue en quotientant pr_E .)

Remarque 5.2. *i) Si F est contractile, alors Ξ and $\pi^*(\Xi)$ ont le même type d'homotopie. De plus, si $F = EG$, alors $\pi^*(\Xi)$ est classifié par $(E \times EG)/G \rightarrow BG$. En effet, le carré ci-dessous est un produit fibré.*

$$\begin{array}{ccc}
 E \times EG & \longrightarrow & EG \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (E \times EG)/G & \longrightarrow & BG
 \end{array}$$

On pourra donc utiliser la construction de Borel pour obtenir une description simple de l'application classifiante d'un fibré.

ii) De manière plus générale, (en utilisant le lemme 5.1 avec Ξ le fibré universel classifiant), on obtient que pour tout G -espace F , $F \times EG \rightarrow (F \times EG)/G$ est un fibré principal classifié par $(F \times EG)/G \rightarrow BG$.

*iii) En prenant $\Xi : G \rightarrow *$ on constate que $F \rightarrow (F \times G)/G$, $f \mapsto [f, id_G]$ est un homéomorphisme, dont l'inverse est donné par $[f, g] \mapsto f.g^{-1}$. •*

5.1.2 Join équivariant de deux espaces

Soit A et B deux espaces. On définit le join (non réduit) de A et de B , $A * B$ comme étant le produit $A \times I \times B$ quotienté par la relation d'équivalence \mathcal{R} donnée par

$$(a, t, b) \mathcal{R} (a', t', b') \iff t = t' \text{ et } (a = a' \text{ si } t \neq 0), \quad (b = b' \text{ si } t \neq 1)$$

Si G agit librement sur A et B , alors il agit librement sur $A * B$. (Le choix de la topologie *compactly generated* est important pour montrer la continuité de cette action).

Notons que $A * B$ est homéomorphe à la somme amalgamée de $A \times B \hookrightarrow A \times CB$ et de $A \times B \hookrightarrow CA \times B$ et que cet homéomorphisme est équivariant si A et B sont des G espaces.

Chacun des espaces $A \times B$, $A \times CB$, $CA \times B$ étant libre, on peut donc construire $A * B/G$ au moyen de la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} (A \times B)/G & \longrightarrow & (A \times CB)/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ (CA \times B)/G & \longrightarrow & (A * B)/G \end{array}$$

De plus, cette construction possède une certaine stabilité. Soient A et B deux G -espaces libres et KA , $K'B$ deux espaces contractiles munis d'une G -action (non forcément libre) tels que $A \rightarrow KA$ et $(A \times B)/G \hookrightarrow (KA \times B)/G$ soient des cofibrations (ou une propriété analogue pour B). Alors, on obtient un espace homotope à $(A * B)/G$ en faisant la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} (A \times B)/G & \longrightarrow & (A \times K'B)/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ (KA \times B)/G & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

5.1.3 Construction de Dold-Lashof-Milnor

Soit $p : F \rightarrow F/G$ un G -fibré. Dans la continuité des travaux de Milnor [34], Dold et Lashof [10] associe à p une famille de fibrés $\phi_n(G, F)$ que l'on peut décrire comme :

- $\phi_0(G, F) = p : F \rightarrow F/G$,
- $\phi_{n+1}(G, F) : E_{n+1}(G, F) \rightarrow B_{n+1}(G, F)$, où $E_{n+1}(G, F) = E_n(G, F) * G = F * E_n(G)$; $B_{n+1}(G, F) = E_{n+1}(G, F)/G$ et $\phi_{n+1}(G, F)$ est la projection.

Cette famille vérifie les propriétés suivantes :

- i) pour tout n , $\phi_{n+1}(G, F)$ est un G -fibré;
- ii) pour $n \leq p$, les applications $j_{n,p}(G, F) : E_n(G, F) \hookrightarrow E_p(G, F)$ et leur quotients $\langle j_{n,p}(G, F) \rangle : B_n(G, F) \hookrightarrow B_p(G, F)$ sont des cofibrations;

iii) la limite directe des $\phi_n(G, F)$, $\phi(G, F) : E(G, F) = F * EG \rightarrow B(G, F)$ est un fibré universel classifiant pour les G -fibrés;

iv) $\phi_n(G, F)$ peut-être obtenu comme produit fibré de $\phi_{n+1}(G, F)$ au dessus de $\langle j_{n,n+1}(G, F) \rangle$. Donc, comme $\phi(G, F)$ est le fibré classifiant, $\psi_n(G, F) = \langle j_{n,\infty}(G, F) \rangle$ est l'application classifiante pour $\phi_n(G, F)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & G & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & G \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
F & \xrightarrow{\quad} & F * G & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & E_n(G, F) & \xrightarrow{\quad} & E_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & E(G, F) \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
F/G & \xrightarrow{\quad} & (F * G)/G & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & B_n(G, F) & \xrightarrow{\quad} & B_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & B(G, F) \\
& & \langle j_{0,n}(G, F) \rangle & & & & \langle j_{n,\infty}(G, F) \rangle = \psi_n(G, F) & & & & & &
\end{array}$$

Si $F = G$ et l'action de G sur lui-même est la multiplication on retrouve alors la construction de Milnor. Dans ce cas, on dénotera les espaces et les applications par $E_n(G)$, etc... au lieu de $E_n(G, G)$, etc...

De plus, la construction de Borel "commute" avec celle de Dold-Lashof. Dans le diagramme suivant, les deux faces horizontales sont des sommes amalgamées et les flèches verticales sont les permutations de coordonnées $A \times B \times C \rightarrow A \times C \times B$. On a donc clairement un homéomorphisme équivariant entre $(F \times EG) * E_n(G)$ et $(F * E_n(G)) \times EG$

$$\begin{array}{ccc}
F \times EG \times E_n(G) & \longrightarrow & CF \times EG \times E_n(G) \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \\
F \times EG \times CE_n(G) & \longrightarrow & (F \times EG) * E_n(G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F \times E_n(G) \times EG & \longrightarrow & CF \times E_n(G) \times EG \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \\
F \times CE_n(G) \times EG & \longrightarrow & (F * E_n(G)) \times EG
\end{array}$$

Donc, si $F \rightarrow F/G$ est un fibré principal, cette remarque nous permet d'identifier les fibrés $\phi_n(G, F \times EG)$ (obtenu par le quotient de la face du haut) et $\phi_n(G, F)$ (obtenu par le quotient de la face du bas).

D'autre part, même si l'action de G sur F n'est pas libre, on peut appliquer la construction de Dold-Lashof à $F \times EG$ (qui est un G -espace libre) ou on peut appliquer

la construction de Borel au G -espace (non forcément libre) $F * E_n(G)$. Le diagramme ci-dessus nous indique que l'on peut identifier les fibrés obtenus par ces deux méthodes.

Proposition 5.3. *On peut identifier la construction de Dold-Lashof-Milnor appliquée à un fibré $p : F \rightarrow F/G$ et la construction fibre-cofibre appliquée à son application classifiante.*

Preuve : Il nous suffit en fait de comparer la construction fibre-cofibre sur $(F \times EG)/G \rightarrow BG$ et la construction de Milnor sur $(F \times EG) \rightarrow (F \times EG)/G$.

Dans le cube suivant, on construit $E_{n+2}(G, F)$ comme somme amalgamée et on obtient $B_{n+2}(G, F)$ comme somme amalgamée en quotientant la face du haut par l'action de G .

De plus, chaque sommet de la face du haut est le produit de EG avec un autre espace et la projection $E_{n+2}(G, F) \rightarrow EG$ est induite par les autres projections sur EG . Le quotient de cette projection est l'application classifiante $\psi_{n+2}(G, F)$ (remarque 5.2ii). On identifie les espaces et les applications à gauche du diagramme en utilisant la remarque 5.2iii). (Les applications verticales sur la gauche du diagramme sont donc de la forme $(e, g) \mapsto e.g^{-1}$.)

Rappelons enfin que $E_{n+1}(G, F) = (F * E_n(G)) \times EG$

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{n+1}(G, F) \times G & \longrightarrow & E_{n+1}(G, F) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \phi_{n+1} & \searrow pr_{EG} & \\
 C(F * E_n(G)) \times EG \times G & \longrightarrow & E_{n+2}(G, F) & \xrightarrow{pr_{EG}} & EG \\
 \downarrow & & \downarrow \phi_{n+2} & & \downarrow \\
 E_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\phi_{n+1}} & B_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & EG \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C(F * E_n(G)) \times EG & \longrightarrow & B_{n+2}(G, F) & \xrightarrow{\psi_{n+2}} & BG \\
 & & \downarrow \tau & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Puisque $C(F * E_n(G)) \times EG$ est contractile, $B_{n+2}(G, F)$ est obtenu comme cofibre homotopique de ϕ_{n+1} . De plus, ψ_{n+2} est induite par ψ_{n+1} et τ , quotient de la projection $C(F * E_n(G)) \times EG \times G \rightarrow EG$.

Dans le diagramme commutatif suivant, on utilise cette description de ψ_{n+2} pour l'identifier avec $\widetilde{\psi}_{n+2}$, l'application obtenue en appliquant la construction fibre-cofibre à ψ_{n+1} .

Nous choisissons maintenant un point base $*_{EG}$ de EG et prenons son image $*_{BG} := \phi(G)(*_{EG})$ comme point base de BG .

L'application $\widetilde{\psi}_{n+2}$ est induite par ψ_{n+1} et l'application constante $C(F * E_n(G)) \rightarrow BG$ sur $*_{BG}$.

Avec les notations du lemme 5.1, la face du fond correspond à la factorisation de $F \rightarrow (E \times F)/G$ à travers $E \times F$ (avec $F := F * E_n(G)$, $E := EG$). Les applications verticales gauches sont de la forme $x \mapsto (x, *_{EG})$. L'application h est induite par les autres flèches verticales et est donc une équivalence d'homotopie. Par propriété universelle des sommes amalgamées, $\psi_{n+2} \circ h = \widetilde{\psi}_{n+2}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 F * E_n(G) & \longrightarrow & B_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & BG \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & C(F * E_n(G)) & \xrightarrow{\widetilde{\psi}_{n+2}} & BG \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 E_{n+1}(G, F) & \longrightarrow & B_{n+1}(G, F) & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & BG \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 C(F * E_n(G)) \times EG & \longrightarrow & B_{n+2}(G, F) & \xrightarrow{\psi_{n+2}} & BG \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & & & \tau
 \end{array}$$

D'où la conclusion. □

5.2 Le cas particulier de l'action triviale

Nous allons maintenant étudier le cas particulier où l'action de G sur F est triviale. Nous appliquons ainsi la construction de Dold-Lashoff au fibré $F \times EG \rightarrow F \times BG$.

Théorème 5.4. *Si G agit trivialement sur F , alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a les diagrammes suivants, qui commutent à homotopie près.*

i)

$$\begin{array}{ccc}
 F * B_n(G) \vee \Sigma F & \xrightarrow{\cong} & B_{n+1}(G, F)/B_0(G, F) \\
 \downarrow F * \psi_n(G) \vee \text{vid}_{\Sigma F} & & \downarrow \psi_{n+1}(G, F)/B_0(G, F) \\
 F * BG \vee \Sigma F & \xrightarrow{\cong} & B(G, F)/B_0(G, F)
 \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma(F \times BG) & \xrightarrow{\Sigma \langle j_{0,n+1}(G,F) \rangle} & \Sigma B_{n+1}(G,F) & \xrightarrow{\Sigma \psi_{n+1}(G,F)} & \Sigma BG \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \parallel \\
F * BG \vee \Sigma BG \vee \Sigma F & \xrightarrow{F * \overline{\psi_n(G)} \vee \text{Id}_{\Sigma BG}} & F * (BG/B_n(G)) \vee \Sigma BG & \xrightarrow{pr_{\Sigma BG}} & \Sigma BG
\end{array}$$

Preuve : Nous construisons $E_{n+1}(G,F) = (F \times EG) * E_n(G)$ comme somme amalgamée de $(F \times EG) \times E_n(G) \hookrightarrow (F \times EG) \times EG$ et de $(F \times EG) \times E_n(G) \hookrightarrow (CF \times EG) \times E_n(G)$. Nous obtenons donc $B_{n+1}(G,F)$ comme somme amalgamée de $F \times \frac{EG \times E_n(G)}{G} \hookrightarrow F \times \frac{EG \times EG}{G}$ et de $F \times \frac{EG \times E_n(G)}{G} \hookrightarrow CF \times \frac{EG \times E_n(G)}{G}$.

Dans la suite, on identifie $EG \times E_n(G)$, $EG \times EG$, $\frac{EG \times E_n(G)}{G}$, $\frac{EG \times EG}{G}$ respectivement avec $E_n(G)$, EG , $B_n(G)$ and BG .

Considérons le diagramme **D**:

$$\begin{array}{ccccc}
F \times B_n(G) & \xrightarrow{F \times \psi_n(G)} & F \times BG & \xrightarrow{\iota} & F \times CBG \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
CF \times B_n(G) & \longrightarrow & B_{n+1}(G,F) & \xrightarrow{\gamma_n} & F * B_n(G)
\end{array}$$

On construit $B_{n+1}(G,F)$ comme somme amalgamée dans le carré de gauche et $F * B_n(G)$ comme somme amalgamée dans le grand carré. Par le lemme du prisme, le carré de droite est également une somme amalgamée. L'application $\gamma_n : B_{n+1}(G,F) \rightarrow F * B_n(G)$ est induite. Notons que l'application verticale du milieu, obtenue comme quotient de $(F \times EG) \times EG \hookrightarrow E_{n+1}(G,F)$, correspond à $\langle j_{0,n+1}(G,F) \rangle$.

Remarquons que l'on construit $B_{n+1}(G,F)$ en prenant d'abord le join de $F \times EG$ et de $E_n(G)$ puis en quotientant l'espace ainsi obtenu et que $F * B_n(G)$ s'obtient en quotientant $E_n(G)$ puis en prenant le join avec F .

i) On construit le cube **C** ayant le carré droit de **D** comme face supérieure et sa

limite directe (par rapport à n) comme face inférieure.

$$\begin{array}{ccc}
F \times BG & \xrightarrow{\iota} & F \times CBG \\
\parallel & \searrow^{j_{0,n+1}(G,F) >} & \parallel \\
B_{n+1}(G,F) & \xrightarrow{\gamma_n} & F * B_n(G) \\
\parallel & \searrow & \parallel \\
F \times BG & \xrightarrow{\quad} & F \times CBG \\
\parallel & \searrow & \parallel \\
B(G,F) & \xrightarrow{\gamma_\infty} & F * BG
\end{array}
\begin{array}{c}
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow \\
\downarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
F * \psi_n(G) \\
F * \psi_n(G) \\
F * \psi_n(G) \\
F * \psi_n(G) \\
F * \psi_n(G)
\end{array}$$

Les faces du haut et du bas de \mathbf{C} étant des sommes amalgamées, on prouve *i*) en prenant les cofibres des flèches obliques de \mathbf{C} .

ii) Dans la suite, si on a $f : A \rightarrow B$, on note \bar{f} l'application $\bar{f} : B \rightarrow \text{cof}(f)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
F \times BG & \xrightarrow{\iota} & F \times CBG & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \text{cof}(\iota) & \xrightarrow{\beta \circ \alpha} & F * BG \vee \Sigma BG \longrightarrow \Sigma F \vee F * BG \vee \Sigma BG \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\langle j_{0,n+1}(G,F) \rangle & & & & \alpha & & f \\
B_{n+1}(G,F) & \xrightarrow{\gamma_n} & F * B_n(G) & \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} & \text{cof}(\gamma_n) & \xrightarrow{\beta} & F * BG \vee \Sigma BG \longrightarrow F * (BG/B_n(G)) \vee \Sigma BG \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\psi_{n+1}(G,F) & & F * \psi_n(G) & & \beta & & g \\
CF \times BG & \xrightarrow{\gamma_\infty} & F * BG & \xrightarrow{\bar{\gamma}_\infty} & \text{cof}(\gamma_\infty) & \xrightarrow{=} & F * BG \vee \Sigma BG \longrightarrow \Sigma BG
\end{array}$$

Construction du diagramme

Les deux carrés sur la gauche sont respectivement le sommet et la face avant du cube \mathbf{C} et sont des sommes amalgamées. Par suite, les applications α et β induites entre les cofibres sont des équivalences d'homotopie.

On identifie γ_∞ comme l'inclusion $CF \times BG \hookrightarrow F * BG$ en étudiant la limite directe suivant n du diagramme \mathbf{D} . On fixe un splitting de $\text{cof}(\gamma_\infty)$ tel que $\bar{\gamma}_\infty$ soit l'inclusion canonique. On identifie également (par β et $\beta \circ \alpha$) les cofibres $\text{cof}(\gamma_n)$ et $\text{cof}(\iota)$ à ce splitting. La dernière colonne est obtenue en prenant les cofibres de $\beta \circ \alpha \circ \bar{\iota}$, $\beta \circ \bar{\gamma}_n$ et de $\bar{\gamma}_\infty$. Notons que cette colonne s'identifie facilement avec $\Sigma(F \times BG) \rightarrow \Sigma B_{n+1}(G,F) \rightarrow \Sigma B(G,F)$ que l'on obtient en prenant les cofibres de $\bar{\iota}$, $\bar{\gamma}_n$ et $\bar{\gamma}_\infty$.

Identification de f et de g

Puisque $\beta \circ \alpha \circ \bar{i} \simeq *$, sa cofibre se décompose en $\Sigma F \vee \text{cof}(\gamma_\infty)$. Donc, $f|_{\text{cof}(\gamma_\infty)}$ est l'application $\overline{\beta \circ \bar{\gamma}_n} = \overline{\bar{\gamma}_\infty \circ (F * \psi_n(G))} = F * \left(BG \rightarrow BG/B_n(G) \right) \vee id_{\Sigma BG}$.

De plus, $f|_{\Sigma F} \simeq *$ parce que $F \rightarrow F \times BG \rightarrow B_{n+1}(G, F)$ est triviale (voir le carré de gauche de **D**).

De plus, $(\beta \circ \bar{\gamma}_n)(F * B_n(G)) \subset F * BG$. Nous en déduisons facilement que $g|_{\Sigma BG} = id|_{\Sigma BG}$ et $g|_{F*(BG/B_n(G))} = *$. Par suite, $g = pr_{\Sigma BG}$. \square

5.3 Applications à la catégorie relative

Théorème 5.5. *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW-complexe et pour tout $p \geq 1$, on a :*

- (i) $e(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = e(X) + 1 \leq \dots$
- (ii) $\dots \leq \sigma^{p+2} \text{cat}(X) + 1 = \sigma^1 \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq$
- (iii) $\sigma^{p+1} \text{cat}(X) + 1 \leq \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$

Preuve : On peut supposer sans restriction que $X = BG$ pour un certain CW-groupe G . Considérons le fibré $S^p \times \phi(G) : S^p \times EG \rightarrow S^p \times BG$. Précédemment, nous avons décrit son application classifiante $\psi_0(G, S^p) : B_0(G, S^p) \rightarrow B(G, S^p)$ comme l'inclusion $i_{BG} : S^p \times BG \hookrightarrow D^{p+1} \times BG$. Par suite, d'après la proposition 5.3 on peut identifier la construction de Ganéa appliquée à $i_X = i_{BG}$ et la construction de Dold-Lashoff appliquée à $S^p \times \phi(G)$.

En particulier, d'après le théorème 5.4, on identifie :

$$a) \quad S^p * g_n(X) \vee id_{\Sigma S^p} : S^p * G_n(X) \vee \Sigma S^p \rightarrow S^p * X \vee \Sigma S^p$$

et $g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)/(S^p \times X) :$

$$G_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)/(S^p \times X) \rightarrow D^{p+1} \times X/S^p \times X$$

$$b) \quad \Sigma g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) : \Sigma(S^p \times X) \longrightarrow \Sigma G_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$$

et

$$S^p * \overline{g_n(X)} \vee id_{\Sigma X} : S^p * X \vee \Sigma X \vee \Sigma S^p \longrightarrow S^p * \text{cof}(g_n(X)) \vee \Sigma X$$

i) La surjectivité en homologie de $g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$ vue comme application de paire est équivalente à la surjectivité de $H_*(g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)/S^p \times X)$. Par l'identification a), ceci est clairement équivalent à la surjectivité de $H_*(g_n(X))$.

ii) Remarquons que $i_X : S^p \times X \rightarrow D^{p+1} \times X$ a une section homotopique évidente r . De plus, via l'identification du b), Σi_X correspond à $* \vee id_{\Sigma X} \vee * : S^p * X \vee \Sigma X \vee \Sigma S^p \rightarrow \Sigma X$ et Σr à l'injection de ΣX dans le wedge.

Par suite, d'après la relation 5 (section 2.2) on a :

$$\begin{aligned} & \sigma^1 \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n + 1 \\ \iff & \Sigma q_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = \Sigma q_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \circ \Sigma r \circ \Sigma i_X \\ \iff & S^p * \overline{g_n(X)} : S^p * X \rightarrow S^p * \text{cof}(g_n(X)) \text{ est triviale en homotopie} \end{aligned}$$

Or, $S^p * \overline{g_n(X)} = \Sigma^{p+1} \overline{g_n(X)}$ et $\Sigma^{p+1} \overline{g_n(X)} \simeq * \iff \Sigma^{p+2} g_n(X)$ a une section [53].
Par suite, $\sigma^1 \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n + 1 \iff \sigma^{p+2} \text{cat}(X) \leq n$.

iii) Si $\text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n + 1$, alors $g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$, vue comme application de paire, a une section. On peut donc construire une section pour $g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)/(S^p \times X)$ et donc pour $S^p * g_n(X) \vee id_{\Sigma S^p}$. Par suite, $\Sigma^{p+1} g_n(X) = S^p * g_n(X)$ possède une section et donc, $\sigma^{p+1} \text{cat}(X) \leq n$. \square

6 Catégorie relative et Qcatégorie

Les deux parties suivantes sont issues d'une collaboration avec Lucile Vandembroucq et font l'objet d'un article [36] en cours de soumission.

On rappelle que dans toute cette section, nous considérons des espaces *compactly generated* ayant le type d'homotopie de CW-complexes. On notera $\mathcal{T}op$ la catégorie de ces espaces.

6.1 Extension fibre à fibre d'un foncteur

On rappelle qu'un foncteur $\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op$ est *régulier* s'il envoie les espaces contractiles sur des espaces contractiles et préserve les équivalences faibles, *coaugmenté* s'il existe une transformation naturelle $\iota_\lambda : id \rightarrow \lambda$.

Soit $\lambda : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op$ un foncteur régulier, coaugmenté.

Dror Farjoun [16] associe à λ son *extension fibre à fibre* $\bar{\lambda}$, foncteur de la catégorie des espaces au dessus d'un espace dans elle-même tel que pour toute application $p : E \rightarrow B$ on ait le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{j_{\bar{\lambda}(E)}} & \bar{\lambda}(E) & \xrightarrow{m_{\bar{\lambda}(E)}} & \lambda(E) \\ \downarrow p & & \downarrow p_{\bar{\lambda}} & & \downarrow \lambda(p) \\ B & \xlongequal{\quad} & B & \xrightarrow{\iota_{\lambda(B)}} & \lambda(B) \end{array}$$

dans lequel :

- i) le carré de gauche est commutatif,
- ii) le carré de droite commute à homotopie près par une homotopie naturelle,
- iii) la composée $m_{\bar{\lambda}(E)} \circ j_{\bar{\lambda}(E)}$ coïncide avec la coaugmentation $\iota_{\lambda(E)}$.
- iv) l'application induite par $j_{\bar{\lambda}(E)} : E \rightarrow \bar{\lambda}(E)$ entre les fibres homotopiques de p et

$p_{\bar{\lambda}}$ au dessus de chaque point $b \in B$ est équivalente par une homotopie naturelle à la coaugmentation ι_{λ} .

De plus, Vandembroucq a montré ([54], Prop. 2) que les quatre propriétés ci-dessus caractérisent à équivalence faible naturelle près l'extension fibre à fibre d'un foncteur et en constitue ainsi une définition axiomatique.

Scheerer, Stanley and Tanré [45] appliquent ce procédé aux fibrations de Ganéa et obtiennent le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(X) & \longrightarrow & \lambda(F_n(X)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_n(X) & \xrightarrow{j_{n,\bar{\lambda}}} & \bar{\lambda}(G_n(X)) \\
 \downarrow g_n(X) & & \downarrow g_n(X)_{,\bar{\lambda}} \\
 X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

à partir duquel ils définissent des approximations de la catégorie. En particulier,

Définition 6.1. [45] $\lambda cat(X)$ est le plus petit n tel que $g_n(X)_{,\bar{\lambda}}$ ait une section homotopique.

Puisque toute section pour $g_n(X)$ donne (par composition avec $j_{\bar{\lambda},n}$) une section pour $g_n(X)_{,\bar{\lambda}}$, on a $\lambda cat(X) \leq cat(X)$.

Rappelons maintenant un résultat de [45] (property 1), adapté directement au cadre des fibrations de Ganéa.

Proposition : [45] Soit X un espace, λ_1, λ_2 deux foncteurs réguliers coaugmentés et $\Lambda : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ une transformation naturelle compatible avec les coaugmentations.

Alors, $\lambda_1 cat(X) \geq \lambda_2 cat(X)$.

Si de plus pour tout espace Y l'application $\Lambda(Y) : \lambda_1(Y) \rightarrow \lambda_2(Y)$ est une équivalence faible, alors $\lambda_1 cat(X) = \lambda_2 cat(X)$.

6.2 Qcategoric

Un cas particulier important de cette construction générale, également abordé dans [45] est celui du foncteur $\Omega^k \Sigma^k$ (où Σ^k désigne la suspension k^{eme} réduite).

Certains problèmes se posent cependant. En effet, $\Omega^k \Sigma^k$ est un foncteur pointé. Donc, pour appliquer la construction de Dror Farjoun à $\Omega^k \Sigma^k$ et aux fibrations de Ganéa on aurait besoin que les fibres au dessus de chaque point soient pointées. Ceci signifierait que les fibrations considérées devraient admettre une section, ce qui n'est pas *a priori* le cas.

Pour résoudre ce problème, Scheerer, Stanley, Tanré utilisent une version non pointée du foncteur $\Omega^k \Sigma^k$, désignée par Q^k . Ceci signifie que, contrairement à $\Omega^k \Sigma^k$, on applique le foncteur Q^k à des espaces non pointés mais que si un espace Y est pointé, alors les espaces $\Omega^k \Sigma^k Y$ et $Q^k(Y)$ existent tous deux et sont homotopes par une équivalence d'homotopie naturelle.

Notons que les versions non pointées d'un foncteur ne sont pas *a priori* uniques et peuvent donc donner des invariants différents.

Nous donnons maintenant une définition du foncteur Q^k ainsi que d'une autre version non-pointée de $\Omega^k \Sigma^k$ qui lui est très proche et que nous utiliserons dans notre preuve.

Posons $D^{p+1} = I^{p+1}$, $S^p = \partial I^{p+1}$, où I est l'intervalle $[0, 1]$.

Pour $p \geq 1$, on définit sur $S^p = \partial I^{p+1} = I \times \partial I^p \cup \partial I \times I^p$ la relation $(t, u) \sim (t', u)$ pour $t, t' \in I$ et $u \in \partial I^p$. Soit $\tilde{S}^p = S^p / \sim$ et j_p la projection.

On peut alors définir le join (non réduit) $S^p * Y$ et la suspension (non réduite) $\tilde{\Sigma}^{p+1} Y$ par les sommes amalgamées suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} S^p \times Y & \xrightarrow{pr} & S^p & \xrightarrow{h|_{S^p}=j_p} & \tilde{S}^p \\ \downarrow & & \downarrow \mu_Y & & \downarrow \tilde{\mu}_Y \\ D^{p+1} \times Y & \longrightarrow & S^p * Y & \xrightarrow{h} & \tilde{\Sigma}^{p+1} Y \end{array}$$

Nous définissons alors :

- $Q^{p+1}(Y) = \left\{ \omega : (D^{p+1}, S^p) \rightarrow (\tilde{\Sigma}^{p+1} Y, \tilde{S}^p), \omega|_{S^p} = \tilde{\mu}_Y \circ j_p = h \circ \mu_Y \right\}$ (voir [45], [54]),
- $R^{p+1}(Y) = \left\{ \omega : (D^{p+1}, S^p) \rightarrow (S^p * Y, S^p), \omega|_{S^p} = \mu_Y \right\}$

On obtient la coaugmentation pour R^{p+1} , $\iota_{R^{p+1}}(Y) : Y \rightarrow R^{p+1}(Y)$, en appliquant la loi exponentielle dans le carré de gauche du diagramme ci-dessus.

De même la coaugmentation pour Q^{p+1} , $\iota_{Q^{p+1}}(Y) : Y \rightarrow Q^{p+1}(Y)$, est obtenue en appliquant la loi exponentielle dans le grand carré du diagramme ci-dessus.

Notons enfin que l'application de paire $h : (S^p * Y, S^p) \rightarrow (\tilde{\Sigma}^{p+1} Y, \tilde{S}^p)$ induit une transformation naturelle Λ , $\Lambda(Y) : R^{p+1}(Y) \rightarrow Q^{p+1}(Y)$, clairement compatible avec les coaugmentations. Nous voulons maintenant prouver que

Lemme 6.1. *Pour tout espace Y , $R^{p+1} \text{cat}(Y) = Q^{p+1} \text{cat}(Y)$.*

Preuve : Notons d'abord que h est une équivalence d'homotopie de paires, mais n'est pas relative par rapport à S^p . Par suite, on ne peut pas construire directement à

partir d'un inverse homotopique de h un inverse homotopique de l'application $\Lambda(Y)$. Nous pointons S^p par $(0, \dots, 0)$ et \tilde{S}^p , $S^p * Y$, $\tilde{\Sigma}^{p+1}Y$ par les images de ce point. On construit maintenant le diagramme ci-dessous, qui commute exactement.

$$\begin{array}{ccc} R^{p+1}(Y) & \xrightarrow{\Lambda(Y)} & Q^{p+1}(Y) \\ \downarrow f_{R^{p+1}} & & \downarrow f_{Q^{p+1}} \\ \Omega^{p+1}(S^p * Y) & \xrightarrow{\Omega^{p+1}(h)} & \Omega^{p+1}(\tilde{\Sigma}^{p+1}Y) \end{array}$$

Les applications horizontales sont induites par h .

L'application μ_Y est homotopiquement triviale. Fixons une homotopie pointée H entre μ_Y et l'application $S^p \rightarrow S^p * Y$ constante sur $\mu_Y(0, \dots, 0)$.

Nous avons $S^{p+1} = \partial D^{p+2} = D^{p+1} \times \{0\} \cup S^p \times I \cup D^{p+1} \times \{1\}$.

Si $\omega \in R^{p+1}(Y)$, $f_{R^{p+1}}(\omega)$ est l'élément de $\Omega^{p+1}(S^p * Y)$ obtenu en prenant l'application constante égale à $\mu_Y(0, \dots, 0)$ sur $D^{p+1} \times \{0\}$, égale à H sur $S^p \times I$ et à ω sur $D^{p+1} \times \{1\}$.

De manière similaire, si $\tilde{\omega} \in Q^{p+1}(Y)$, $f_{Q^{p+1}}(\tilde{\omega})$ est l'élément de $\Omega^{p+1}(\tilde{\Sigma}^{p+1}Y)$, valant $h(\mu_Y(0, \dots, 0))$ sur $D^{p+1} \times \{0\}$, valant $h \circ H$ sur $S^p \times I$ et $\tilde{\omega}$ sur $D^{p+1} \times \{1\}$.

Les applications $f_{R^{p+1}}$ et $f_{Q^{p+1}}$ sont de manière classique (relation des applications définies sur D^{p+1} dont la valeur sur S^p est fixée et homotopiquement triviale avec les applications pointées définies sur S^{p+1}) des équivalences d'homotopies.

Il en est de même pour $\Omega^{p+1}(h)$.

Par suite, $\Lambda(Y)$ est une équivalence d'homotopie. Et donc, par application de la propriété 1 de [45], les invariants R^{p+1} et Q^{p+1} sont égaux. \square

Pour tout $k \geq 0$, il existe une transformation naturelle de $\Omega^k \Sigma^k \rightarrow \Omega^{k+1} \Sigma^{k+1}$, compatible avec les coaugmentations.

Nous avons la même situation dans le cadre non-pointé, avec l'existence d'une transformation naturelle de $Q^k \rightarrow Q^{k+1}$, compatible avec les coaugmentations.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} Q^k(X) \xrightarrow{\quad} Q^{k+1}(X) \\ \xrightarrow{\quad} \end{array}$$

En appliquant la construction de Dror Farjoun, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & j_{n, \overline{Q^{k+1}}} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ G_n(X) & \xrightarrow{j_{n, \overline{Q^k}}} & \overline{Q^k}(G_n(X)) & \longrightarrow & \overline{Q^{k+1}}(G_n(X)) \\ g_n \downarrow & & g_{n, \overline{Q^k}} \downarrow & & g_{n, \overline{Q^{k+1}}} \downarrow \\ X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

à partir duquel on déduit les inégalités

$$\dots \leq Q^{k+1} \text{cat}(X) \leq Q^k \text{cat}(X) \leq \dots \leq Q^1 \text{cat}(X) \leq Q^0 \text{cat}(X) = \text{cat}(X)$$

(Ceci est une illustration de la propriété 1 de [45] citée précédemment.)

On pose alors :

Définition 6.2. [54] $Qcat(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q^k cat(X)$.

Remarque 6.2. En fait, $Qcat$ est défini dans [45] comme l'invariant associé au foncteur Q , version non pointée de $\Omega^\infty \Sigma^\infty$. Dans [54], Vandembroucq montre que pour les espaces connexes de dimension finie, cet invariant coïncide avec la limite ci-dessus. •

6.3 Catégorie relative et Qcatégorie

Notre but est maintenant de montrer le théorème

Théorème 6.3. *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW complexe, on a*

$$cat(D^{p+1} \times X, S^p \times X) = Q^{p+1} cat(X) + 1$$

Preuve du théorème : Dans la suite, on utilisera les abréviations g_n pour $g_n(X)$, g_{n+1} pour $g_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$ et $G_{n+1}(X, p)$ pour $G_{n+1}(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$.

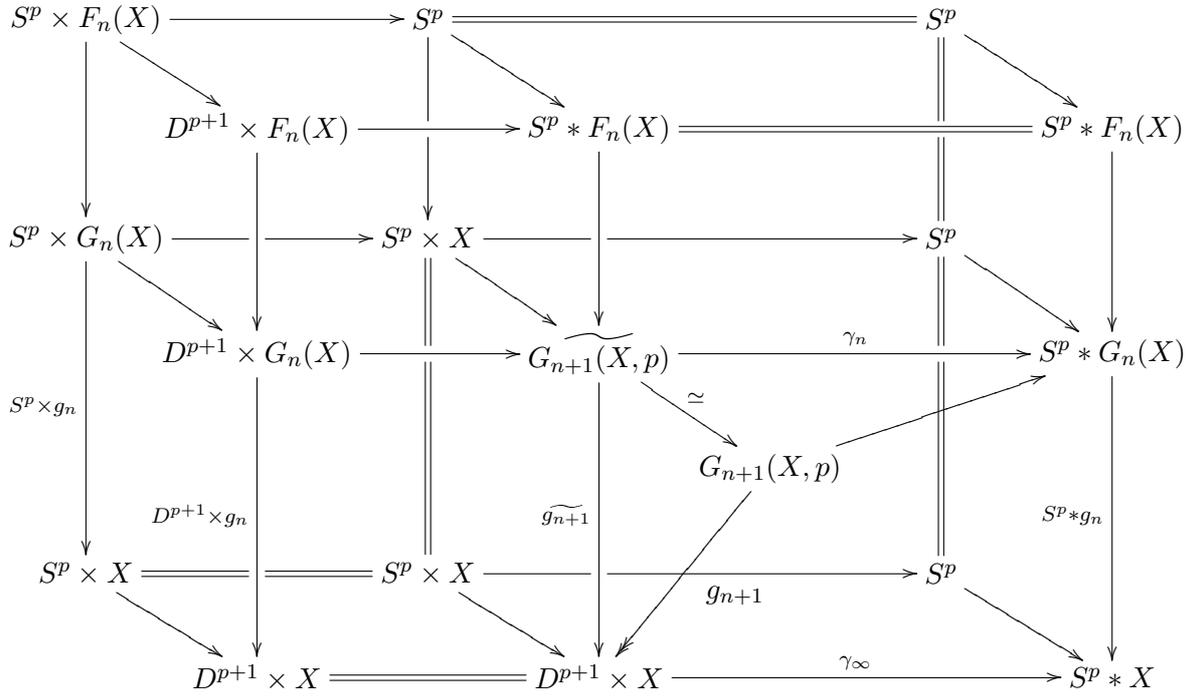
Nous voulons maintenant lier la R^{p+1} -catégorie de X et la catégorie relative de la paire $(D^{p+1} \times X, S^p \times X)$. Dans ce but, nous allons réexploiter les diagrammes de la preuve du théorème 5.4 (transcrits dans le vocabulaire des espaces de Ganéa).

Construction du diagramme

Le milieu du diagramme ci-dessous correspond au diagramme **D** et sa face inférieure correspond à la limite directe de **D** suivant n . Par suite, les carrés horizontaux sont des sommes amalgamées.

Appelons **A** le cube inférieur gauche, **B** le cube inférieur droit et **AB** la partie basse du diagramme. Donc, **AB** donne la construction de $S^p * G_n(X) \rightarrow S^p * X$ et **A** celle de $\widetilde{g_{n+1}}$. (On note cette application avec un $\widetilde{}$ pour réserver la notation g_{n+1} pour la fibration qui lui est canoniquement associée). En effet, remarquons qu'ici $\widetilde{g_{n+1}}$ n'est pas une fibration. Cependant, si on compose les applications verticales de **A** avec la projection sur X , on obtient des fibrations dont les fibres sont représentées dans le carré supérieur gauche. Celui-ci représente donc une construction de la fibre homotopique de $\widetilde{g_{n+1}}$ comme somme amalgamée.

L'application $G_{n+1}(\widetilde{X}, p) \rightarrow G_{n+1}(X, p)$ correspond à l'application $A \rightarrow \hat{A}$ du début de la section 1.3.1 . L'application $G_{n+1}(\widetilde{X}, p) \rightarrow S^p * G_n(X)$ est la composée de $G_{n+1}(\widetilde{X}, p) \rightarrow G_{n+1}(X, p)$ (correspondant à $\hat{A} \rightarrow A$) avec γ_n .



Ce diagramme commute exactement, à l'exception du "carré" avant (entre $G_{n+1}(X, p)$ et $S^p * X$) qui commute par une homotopie naturelle et stationnaire sur $S^p \times X$.
Nous avons maintenant d'après la remarque 1.6 i)

$$\begin{aligned}
& \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n \\
& \iff g_{n+1} : (G_{n+1}(X, p), S^p \times X) \rightarrow (D^{p+1} \times X, S^p \times X) \\
& \text{vu comme application de paire à une section} \\
& s : (D^{p+1} \times X, S^p \times X) \rightarrow (G_{n+1}(X, p), S^p \times X).
\end{aligned}$$

Par utilisation de la loi exponentielle, on voit que c'est équivalent à associer à chaque $x \in X$ une application $\omega_x : (D^{p+1}, S^p) \rightarrow (G_{n+1}(X, p); S^p \times X)$ telle que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc}
(D^{p+1}, S^p) & \xrightarrow{\omega_x} & (G_{n+1}(X, p), S^p \times X) \\
\downarrow & & \downarrow g_{n+1} \\
(D^{p+1} \times \{x\}, S^p \times \{x\}) & \longrightarrow & (D^{p+1} \times X, S^p \times X)
\end{array}$$

Définissons maintenant

$$R_X^{p+1}(G_{n+1}(X, p)) = \left\{ \begin{array}{l} \omega : (D^{p+1}, S^p) \rightarrow (G_{n+1}(X, p), S^p \times X) \mid \\ \exists x \in X \text{ t.q. } \omega \text{ fait commuter le diagramme ci-dessus} \end{array} \right\}$$

Remarquons l'existence d'une application $g_{n,R_X^{p+1}} : R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p)) \rightarrow X$.

Nous avons maintenant

$$\text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n + 1 \iff g_{n,R_X^{p+1}} \text{ a une section}$$

La face supérieure de \mathbf{A} représente une application de paire $(D^{p+1} \times G_n(X), S^p \times G_n(X)) \rightarrow (G_{n+1}(X,p), S^p \times X)$ qui entraîne par composition avec $G_{n+1}(X,p) \rightarrow G_{n+1}(X,p)$ une application de paire $(D^{p+1} \times G_n(X), S^p \times G_n(X)) \rightarrow (G_{n+1}(X,p), S^p \times X)$. En appliquant la loi exponentielle, on obtient $\alpha_X^{p+1} : G_n(X) \rightarrow R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p))$. De manière similaire, on a une application de paire $(G_{n+1}(X,p), S^p \times X) \rightarrow (S^p * G_n(X), S^p)$ et la composition d'un élément de $R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p))$ avec cette application est un élément de $R^{p+1}(G_n(X))$.

Par suite, on a une application $\beta_X^{p+1} : R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p)) \rightarrow R^{p+1}(G_n(X))$.

Ces applications s'insèrent dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G_n(X) & \xrightarrow{\alpha_X^{p+1}} & R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p)) & \xrightarrow{\beta_X^{p+1}} & R^{p+1}(G_n(X)) \\ g_n \downarrow & & g_{n,R_X^{p+1}} \downarrow & & \downarrow R^{p+1}(g_n) \\ X & \xlongequal{\quad\quad\quad} & X & \xrightarrow{\iota(X)} & R^{p+1}(X) \end{array}$$

dans lequel :

i) le carré de gauche commute exactement,

ii) le carré de droite commute par une homotopie naturelle. En effet,

Soit $\omega \in R_X^{p+1}(G_{n+1}(X,p))$. Donc, ω est une application $(D^{p+1}, S^p) \rightarrow (G_{n+1}(X,p); S^p \times X)$ telle que :

$$- \forall \theta \in D^{p+1}, g_{n+1} \circ \omega(\theta) = (\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)),$$

$$- \forall \theta \in S^p, \omega(\theta) \text{ est l'image par } S^p \times X \rightarrow G_{n+1}(X,p) \text{ de } (\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)).$$

D'autre part, un élément de $G_{n+1}(X,p)$ est un couple $(y; c) \in G_{n+1}(X,p) \times (D^{p+1} \times X)^I$ tel que $c(0) = \widetilde{g_{n+1}}(y)$ et $g_{n+1}(y, c) = c(1)$.

Par suite, si on écrit $\omega(\theta) = (y(\theta), c(\theta))$, nous avons les relations :

$$- \forall \theta \in D^{p+1}, c(\theta)(0) = \widetilde{g_{n+1}}(y(\theta)),$$

$$- \forall \theta \in D^{p+1}, c(\theta)(1) = (\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)),$$

$$- \forall \theta \in S^p, \forall t \in I, c(\theta)(t) = (\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)), y(\theta) = (\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)).$$

On peut maintenant calculer :

$$\bullet \iota(X) \circ g_{n,R_X^{p+1}}(\omega) : D^{p+1} \rightarrow S^p * X, \theta \mapsto \gamma_\infty(\theta, g_{n,R_X^{p+1}}(\omega)) = \gamma_\infty(c(\theta)(1)).$$

$$\bullet R^{p+1}(g_n) \circ \beta_X^{p+1}(\omega) : D^{p+1} \rightarrow S^p * X, \theta \mapsto (S^p * g_n)(\gamma_n(y(\theta))) = \gamma_\infty(\widetilde{g_{n+1}}(y(\theta))) = \gamma_\infty(c(\theta)(0)).$$

Des lors, on constate que $R_X^{p+1}(G_{n+1}(X, p)) \times I \rightarrow R^{p+1}(X)$, qui à $(\omega, u) = (y, c, u)$ associe l'application $(\theta \mapsto \gamma_\infty(c(\theta)(u)))$ est bien définie et est une homotopie entre $\iota_X \circ g_{n, R_X^{p+1}}$ et $R^{p+1}(g_n) \circ \beta_X^{p+1}$.

iii) De plus, par propriété de la loi exponentielle, $\beta_X^{p+1} \circ \alpha_X^{p+1} = \iota(G_n(X))$, l'application obtenue en appliquant la loi exponentielle à $(D^{p+1} \times G_n(X), S^p \times G_n(X)) \rightarrow (S^p * G_n(X), S^p)$.

iv) Enfin, l'application induite par α_X^{p+1} entre les fibres homotopiques de g_n et de $g_{n, R_X^{p+1}}$ correspond à l'application obtenue en appliquant la loi exponentielle à $(D^{p+1} \times F_n(X), S^p \times F_n(X)) \rightarrow (S^p * F_n(X), S^p)$, c'est à dire $\iota(F_n(X))$.

Par suite, par unicité de l'extension fibre à fibre ([54], Prop. 2), $R_X^{p+1}(G_{n+1}(X, p)) \rightarrow X$ est l'extension de g_n par R^{p+1} .

Par suite, on peut identifier :

- $g_{n, R_X^{p+1}}$ et $g_{n, \overline{R^{p+1}}} : \overline{R^{p+1}}(G_n(X)) \rightarrow X$,
- α_X^{p+1} et $j_{n, \overline{R^{p+1}}} : G_n(X) \rightarrow \overline{R^{p+1}}(G_n(X))$;
- β_X^{p+1} et $m_{n, \overline{R^{p+1}}} : \overline{R^{p+1}}(G_n(X)) \rightarrow R^{p+1}(G_n(X))$.

Donc,

$$\begin{aligned} \text{cat}(D^{p+1} \times X, S^p \times X) \leq n + 1 &\iff g_{n, R_X^{p+1}} \text{ a une section} \\ &\iff g_{n, \overline{R^{p+1}}} \text{ a une section} \\ &\iff R^{p+1} \text{cat}(X) \leq n \\ &\iff Q^{p+1} \text{cat}(X) \leq n \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On obtient ainsi :

Corollaire 6.4. *Pour tout espace X du type d'homotopie d'un CW-complexe fini,*

$$\inf_{p \in \mathbf{N}} \text{cat}(X \times D^{p+1}, X \times S^p) = Q \text{cat}(X) + 1$$

7 Corollaires

7.1 Conjectures sur les invariants numériques

La conjecture de Ganéa a été un des problèmes centraux dans l'étude de la LScatégorie. Elle s'énonce comme suit :

Conjecture de Ganéa : Pour tout CW-complexe fini X et pour tout $n \geq 1$,

$$\text{cat}(X \times S^n) = \text{cat}(X) + 1$$

Cette conjecture a été prouvée pour certaines classes d'espaces (citons entre autres les espaces rationnels [23] [28], les variétés symplectiques M de forme ω satisfaisant $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ [43]). Il existe également des critères reliant la catégorie, la connexité et la dimension d'un espace et permettant de décider si cet espace satisfait à la conjecture de Ganéa ([50], [41], [42]). D'autre part, des variantes de cette conjecture, obtenues en remplaçant cat par certaines de ses approximations, ont également été prouvées. Par exemple, pour tout CW -complexe X de dimension finie, $\sigma cat(X \times S^p) = \sigma cat(X) + 1$ [53] et $Qcat(X \times S^p) = Qcat(X) + 1$ [54].

Dans [7], inspiré par des considérations sur les points fixes de flots hamiltoniens, Cornéa énonce une version homotopique de la conjecture d'Arnold (*Homotopical Arnold Conjecture*).

Conjecture : (HAC) Pour tout CW -complexe fini et pour n assez grand,

$$cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n) = cat(X) + 1$$

A cause des inégalités $cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n) \leq cat(X \times S^n) \leq cat(X) + 1$ [7] et du corollaire 2.9, (HAC) entraînerait la conjecture de Ganéa (pour tout n).

Cette remarque a été l'une des motivations pour la recherche de bornes inférieures de la forme $inv(X) + 1$ pour $cat(X \times D^{n+1}, X \times S^n)$ [35], avant l'établissement du théorème 6.3. On peut d'ailleurs remarquer que les versions de (HAC) correspondant à l'invariant de Toomer et à la σ catégorie sont vérifiées (voir théorème 5.5).

Cependant, Iwase [25] a montré que la conjecture de Ganéa n'était pas vérifiée pour tout espace X . Par suite, il en est de même pour (HAC).

Il se pose maintenant la question de la caractérisation des espaces vérifiant la conjecture de Ganéa. Dans ce but, Scheerer, Stanley et Tanré [45] ont introduit l'invariant $Qcat$ et émis la conjecture :

Conjecture : (SST) Pour tout CW -complexe fini X ,

$$X \text{ satisfait la conjecture de Ganéa} \iff Qcat(X) = cat(X)$$

Tout d'abord, remarquons que l'implication \Leftarrow est obtenue comme conséquence directe du théorème 6.3 (et a été prouvée indépendamment dans [54] au moyen d'une formule produit pour $Qcat$).

Remarquons également que si la conjecture (SST) est vérifiée, alors les espaces pour lesquels $Qcat(X) \neq cat(X)$ sont exactement les espaces ne satisfaisant pas à la conjecture de Ganéa. Très peu de ces contre-exemples sont connus (même si il y a des variétés parmi eux [26]) et donc, à l'heure actuelle, il n'y a que très peu d'exemples de variétés avec $Qcat \neq cat$.

Remarque 7.1. Nous illustrons ce propos au moyen d'un résultat de [54] :

Théorème : *Soit X un CW-complexe $(r - 1)$ -connexe vérifiant $rcat(X) \geq 3$.*

Si $dim(X) \leq 2.r.cat(X) - 3$ alors $Qcat(X) = cat(X)$.

i) Dans [54], Vandembroucq applique ce résultat à $Sp(2)$ et $Sp(3)$.

On rappelle que le groupe symplectique $Sp(n)$ est une variété 2-connexe, de dimension $n.(2n + 1)$ définie par $Sp(n) = Sp(n, \mathbf{C}) \cap U(2n)$, où $Sp(n, \mathbf{C})$ est l'ensemble des ma-

trices complexes $2n \times 2n$ A satisfaisant $A^{tr} \cdot J_n \cdot A = J_n$ avec $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Rappelons [48] que $\cup\text{-length}(Sp(n)) = \cup_{\pi}\text{length}(Sp(n)) = n < cat(Sp(n))$.

D'où les égalités $Qcat(Sp(2)) = cat(Sp(2))$ ($= 3$ d'après [46]) et $Qcat(Sp(3)) = cat(Sp(3))$ ($= 5$ d'après [18]).

ii) Un autre exemple est fourni par les produits $X = N \times T^n$ où T^n est le n -tore $S^1 \times \dots \times S^1$. L'espace $N \times T^n$ est 0-connexe ($r=1$), de dimension $dim(N) + n$ et on calcule $2.cat(N \times T^n) - 3 \geq 2.cat(T^n) - 3 \geq 2.n - 3$.

Donc, pour n assez grand, (i.e. $n \geq dim(N) + 3$), $Qcat(N \times T^n) = cat(N \times T^n)$ (à comparer avec [41]). •

D'autre part, le théorème 6.3 nous permet de reformuler la conjecture d'Arnold homotopique en :

$$X \text{ satisfait (HAC)} \iff Qcat(X) = cat(X)$$

Puisque l'égalité $Qcat(X) = cat(X)$ a été prouvée dans [45] quand X est un espace rationnel, nous obtenons

Corollaire 7.2. *La conjecture d'Arnold homotopique est vraie pour les espaces rationnels.*

7.2 Points critiques de fonctions quadratiques à l'infini

Définition 7.1. *Soit M une variété lisse, fermée, connexe et $\nu = (\pi; E; M)$ un fibré vectoriel de base M .*

- *Une fonction lisse $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme quadratique non dégénérée d'indice i sur M si la restriction de q à chaque fibre est une forme quadratique non dégénérée d'indice i .*
- *Une fonction lisse $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est quadratique à l'infini d'indice i sur M si f coïncide, en dehors d'un voisinage compact de la section zéro, avec une forme quadratique non dégénérée d'indice i .*
- *$\text{crit}(M)$ est le nombre minimum de points critiques d'une fonction quadratique à l'infini au dessus de M .*

Proposition 7.3. *Soient M une variété fermée connexe de dimension n , $\nu = (\pi; E; M)$ un fibré vectoriel et $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction quadratique à l'infini au dessus de M et*

d'indice i . Alors,

$$\text{crit}(f) \geq \text{cat}(M \times D^{n+i}, M \times S^{n+i-1})$$

Preuve : Dans cette preuve, le terme "forme" est employé pour "forme quadratique non dégénérée".

Posons $r = \text{rang}(\nu)$. Soit K un voisinage compact de la section zéro dans E tel que f soit égale à une forme q en dehors de K . Fixons une structure orthogonale sur ν .

D'après le lemme 3 de [33], on peut se restreindre au cas où il y a une décomposition en somme directe $E_u \oplus E_s \cong E$ avec $q(u \oplus v) = q_u(u) + q_s(v)$ où $q_u : E_u \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme positive et $q_s : E_s \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme négative.

Notons que $\text{rang}(\nu_u) = r - i$ et $\text{rang}(\nu_s) = i$.

Soit ν'_s , le fibré inverse orthogonal de ν_s , tel que $E_s \oplus E'_s \cong M \times \mathbf{R}^{n+i}$ et soit q'_s une forme négative sur E'_s . La forme $Q_s = q_s \oplus q'_s$ peut être considérée comme une forme négative sur $M \times \mathbf{R}^{n+i}$.

De manière similaire, considérons ν'_u tel que $E'_u \oplus E_u \cong M \times \mathbf{R}^{n+r-i}$ et soit q'_u une forme positive sur E'_u . La forme $Q_u = q'_u \oplus q_u$ peut donc être considérée comme une forme positive sur $M \times \mathbf{R}^{n+r-i}$.

Donc, $Q = q'_u \oplus q \oplus q'_s = q'_u \oplus q_u \oplus q_s \oplus q'_s = Q_u \oplus Q_s$ est une forme quadratique d'indice $n + i$ sur $E'_u \oplus E_u \oplus E_s \oplus E'_s \cong M \times \mathbf{R}^{n+r-i} \times \mathbf{R}^{n+i} \cong M \times \mathbf{R}^{2n+r}$.

Construisons maintenant une application F sur $E'_u \oplus E_u \oplus E_s \oplus E'_s$ telle que $\text{crit}(F) = \text{crit}(f)$ et F soit égale à Q en dehors d'un voisinage compact de la section zéro de $M \times \mathbf{R}^{2n+r}$.

Les formes quadratiques q'_u et q'_s sont non dégénérées et ont donc 0 comme unique point critique dans chaque fibre. Donc, clairement, $\text{crit}(f) = \text{crit}(q'_u \oplus f \oplus q'_s)$.

Soit $\lambda : E'_u \oplus E'_s \rightarrow [0; 1]$ une application régulière telle que $\lambda(u', v') = 0$ si $\|u'\|^2 + \|v'\|^2 \leq 1$ et $\lambda(u', v') = 1$ si $\|u'\|^2 + \|v'\|^2 \geq 2$.

Définissons $F(u', u, v, v') = q'_u(u') + \left(f(u, v) + \lambda(u', v')(q(u, v) - f(u, v)) \right) + q'_s(v')$.

Donc, $F = q'_u \oplus f \oplus q'_s$ près de la section zéro et $F = Q$ en dehors d'un voisinage compact K' de la section zéro.

En modifiant au besoin q'_u et q'_s (multiplication par des constantes positives), on peut s'assurer que F ne possède pas de points critiques si $1 \leq \|u'\|^2 + \|v'\|^2 \leq 2$ et donc si $\|u'\|^2 + \|v'\|^2 \geq 1$.

Par suite, $\text{crit}(F) = \text{crit}(q'_u \oplus f \oplus q'_s) = \text{crit}(f)$ et tous les points critiques de F sont dans K' .

Choisissons des disques D^{n+r-i} et D^{n+i} tels que $K' \subset M \times D^{n+r-i} \times D^{n+i}$.

Clairement, la paire $(M \times D^{n+r-i} \times D^{n+i}, M \times D^{n+r-i} \times S^{n+i-1})$ est une paire d'indice pour le flot induit par $-\nabla Q$ et donc pour celui induit par $-\nabla F$.

Par suite, d'après la proposition 4.6, F a au moins $\text{cat}(M \times D^{n+r-i} \times D^{n+i}, M \times D^{n+r-i} \times$

S^{n+i-1}) points critiques (dans K').

Donc, $\text{crit}(f) = \text{crit}(F) \geq \text{cat}(M \times D^{n+i}, M \times S^{n+i-1})$. □

Nous avons donc comme corollaire immédiat

Corollaire 7.4. *Pour toute variété fermée M ,*

$$\widetilde{\text{crit}}(M) \geq \inf_{n \in \mathbf{N}} \text{cat}(M \times D^{n+1}, M \times S^n) = 1 + Q\text{cat}(M)$$

Cette inégalité est un analogue stable de l'inégalité classique (*cf.* le début de la 2^{ème} partie)

$$\text{crit}(M) \geq 1 + \text{cat}(M) \tag{6}$$

où $\text{crit}(M)$ est le nombre minimal de points critiques d'une fonction réelle lisse définie sur M .

Nous rappelons maintenant la définition d'une variante de la longueur en cônes d'un espace X (voir [8]). La *longueur en cônes finis* de X , $cl_f(X)$, est le plus petit n tel que X puisse être construit à partir d'un point en n cofibrations successives, les cônes étant pris sur des CW -complexes finis. (On réclame donc dans la définition 1.4 que $A = *$ et que les Z_i soient des CW -complexes finis.)

Dans [8], si M est une variété 2-connexe de dimension n , Cornea construit sur $M \times D^{n+1}$ une application f ayant au plus $cl_f(M) + 1$ points critiques et dont le gradient pointe intérieurement sur $M \times S^n$. On peut facilement prolonger cette fonction sur $M \times \mathbf{R}^{n+1}$ par une forme quadratique d'indice n et cela sans ajouter de nouveaux points critiques. On obtient ainsi une fonction quadratique à l'infini sur M ayant au plus $cl_f(M) + 1$ points critiques. Notons que ce résultat a été étendu aux variétés 1-connexes dans [9]. Nous obtenons ainsi

Corollaire 7.5. *Pour toute variété fermée 1-connexe M ,*

$$Q\text{cat}(M) + 1 \leq \widetilde{\text{crit}}(M) \leq cl_f(M) + 1$$

Donc, pour toute variété 1-connexe M satisfaisant $Q\text{cat}(M) = cl_f(M)$ (qui est une condition purement homotopique), nous avons $\widetilde{\text{crit}}(M) = \text{cat}(M) + 1$. Et dans ce cas, pour toute variété N homotope à M , $\widetilde{\text{crit}}(M) = \widetilde{\text{crit}}(N)$. Autrement dit, $\widetilde{\text{crit}}$ est un invariant homotopique sur la classe des variétés fermées satisfaisant $Q\text{cat} = cl_f$.

En outre, le corollaire 7.5 permet de calculer quelques exemples de $\widetilde{\text{crit}}$.

Ainsi, $Q\text{cat}(Sp(2)) = cl_f(Sp(2)) = 3$ entraîne $\widetilde{\text{crit}}(Sp(2)) = 3 + 1 = 4$.

De manière similaire, $Q\text{cat}(Sp(3)) = cl_f(Sp(3)) = 5$ (voir [18]) et donc $\widetilde{\text{crit}}(Sp(3)) = 6$.

Remarque 7.6. Peut-on améliorer l'inégalité $1 + Qcat \leq \widetilde{crit}$ en remplaçant $Qcat$ par un invariant homotopique plus grand ?

Recemment, Razvan [39], en utilisant une variante de la catégorie relative, a annoncé un résultat conduisant à $1 + cat \leq \widetilde{crit}$. Malheureusement, il y a une erreur dans sa preuve et la question de savoir si cette dernière inégalité est vraie reste ouverte.

Razvan définit $\widetilde{cat}(X, A)$ comme le plus petit k tel que X soit recouvert par $k + 1$ ouverts $(U_i)_{0 \leq i \leq k}$ tels que U_0 puisse être déformé dans A (rel. A) et les autres ouverts $U_i \subset X - A$ soient contractiles dans $X - A$. Il prouve alors l'inégalité $\widetilde{cat}(X \times D^{n+1}, X \times S^n) \geq cat(X) + 1$.

Cependant, si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration (et A fermé dans X), on a clairement $cat(X, A) = \widetilde{cat}(X \cup_{A \times \{0\}} A \times I, A \times \{1\})$.

En particulier, pour toute variété à bords N , par le théorème du collier, on obtient $cat(N; \partial N) = cat(N, \partial N)$.

Donc, si M est une variété fermée, $cat(M \times D^{n+1}, M \times S^n) = \widetilde{cat}(M \times D^{n+1}, M \times S^n)$. Ainsi, le résultat de Razvan entraîne l'inégalité $cat(M \times D^{n+1}, M \times S^n) \geq cat(M) + 1$ qui n'est pas vraie en général (voir section précédente). En fait, l'argument p 53 l.-7 de [39] est faux car les ensembles $\pi(U_i)$ ne sont pas *a priori* contractiles. •

7.3 Intersections lagrangiennes dans un fibré cotangent

Soit (V, ω) une variété symplectique (i.e V est une variété de dimension paire et ω est une 2-forme fermée non dégénérée sur TV).

Une sous-variété lagrangienne de V est une sous-variété L de V satisfaisant à $\omega|_{TL} \equiv 0$ et $\dim(L) = \frac{1}{2} \dim(V)$.

Etant donné $H : V \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction régulière à support compact, on définit une famille de champs de vecteurs X_{H_t} par la relation $\omega(X_{H_t}, -) = -dH_t$.

Pour chaque v , considérons le système différentiel $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = X_{H_t}(x(t)) \\ x(0) = v \end{cases}$ et posons

$$\varphi^t(v) = x(t).$$

(φ^t) est une famille à 1 paramètre de difféomorphismes, appelée une *isotopie hamiltonienne* et $\psi = \varphi^1$ est appelé un *diffeomorphisme hamiltonien*.

Etant donné V , L et ψ , un des problèmes classiques de géométrie symplectique est l'étude de l'intersection $\psi(L) \cap L$.

En particulier, si M est une variété lisse fermée, alors T^*M est une variété symplectique de forme symplectique $\omega = -d\lambda$, où λ est la forme de Liouville. En outre, M identifiée avec son image par la section zéro, est une sous-variété lagrangienne de T^*M . Dans ce cadre, nous avons alors :

Conjecture d'Arnold : *Soit M une variété fermée. Pour tout difféomorphisme*

hamiltonien à support compact ψ of T^*M ,

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{crit}(M)$$

On peut aborder ce problème en remplaçant dans l'inégalité $\text{crit}(M)$ par des bornes inférieures homotopiques de crit . Ainsi, Hofer [24] prouve l'inégalité

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{cuplength}(M) + 1$$

Laudenbach et Sikorav [30] ont une autre approche de ce problème. En utilisant la méthode des géodésiques brisées développée par Chaperon [3], ils montrent l'inégalité

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \widetilde{\text{crit}}(M)$$

Ce résultat a été généralisé par Eliashberg et Gromov [13], faisant usage de la méthode des fonctions génératrices (voir [47]). Comme corollaire de leur travaux, ils donnent également l'inégalité $\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{cup}_\pi \text{length}(M) + 1$, où $\text{cup}_\pi \text{length}$ est un raffinement de la notion de cuplength vérifiant $\text{cup}_\pi \text{length} \geq \text{cuplength}$ (voir remarque 7.8).

En combinant le résultat de [30] avec le corollaire 7.4, nous obtenons une nouvelle borne homotopique de $\#(\psi(M) \cap M)$.

Corollaire 7.7. *Soit M une variété fermée. Pour tout difféomorphisme hamiltonien à support compact ψ de T^*M ,*

$$\#(\psi(M) \cap M) \geq \text{Qcat}(M) + 1$$

Puisque $\text{cuplength} \leq \text{cup}_\pi \text{length} \leq \text{Qcat}$, le corollaire 7.7 implique les inégalités de [24] et [13] citées précédemment. Notons que l'on peut avoir $\text{Qcat} > \text{cup}_\pi \text{length}$, comme pour $Sp(2)$ ($3 > 2$) et $Sp(3)$ ($5 > 3$).

Rappelons aussi qu'il est conjecturé [45] que $\text{Qcat} = \text{cat}$ pour les espaces satisfaisant à la conjecture de Ganéa et qu'il n'existe que très peu d'exemples de variétés fermées avec $\text{Qcat} \neq \text{cat}$.

Lorsque $\text{Qcat}(M) = \text{cat}(M)$, le corollaire 7.7 devient :

*Pour tout difféomorphisme à support compact ψ de T^*M ,*

$$\#(\psi M \cap M) \geq \text{cat}(M) + 1.$$

C'est le cas (voir remarque 7.1) pour $M = Sp(2)$, $M = Sp(3)$ ou encore pour $M = N \times T^n$ avec N une variété fermée et $n \geq \text{dim}(N) + 3$.

Notons que ces minoration du nombre de points d'intersection par la LScatégorie sont les meilleures que l'on puisse obtenir d'un point de vue homotopique. En effet, cat est la meilleure borne inférieure homotopique stricte de crit .

Remarque 7.8. Dans cette remarque, nous rappelons la définition de $cup_\pi length$ utilisé dans [13] et montrons qu'il est plus petit que la Q catégorie.

Dans la notion habituelle de $cuplength$ d'un espace, toutes les classes de cohomologie ont le même poids. Une approche plus précise est fournie par la notion de poids catégorique d'une classe de cohomologie ([14], [42]). Pour $u \in H^*(X)$, le *poids catégorique strict* de u est défini par $swgt(u) = \sup\{k/g_{k-1}^*(u) = 0\} = \inf\{k/g_k^*(u) \neq 0\}$.

Nous avons maintenant la définition :

Définition : [13] Soit X un espace et $\varphi : X \rightarrow K(\pi_1(X); 1)$ l'application fondamentale de X , induisant un isomorphisme entre les groupes fondamentaux.

On considère tous les produits non nuls $w = u_\pi \cup u_1 \cup \dots \cup u_n \in H^*(X)$ avec $u_\pi \in \varphi^*(H^*(K(\pi_1(X); 1)))$ et $u_i \in \overline{H}^*(X)$ pour $1 \leq i \leq n$. Posons $l(w) = \dim(u_\pi) + n$.

On définit $cup_\pi length(X)$ comme la plus grande valeur de $l(w)$ pour $w \in H^*(X)$ comme ci-dessus.

Clairement, $cuplength(X) \leq cup_\pi length(X)$ et si X est 1-connexe, alors on prend $u_\pi = 1 \in H^0(X)$ et on obtient $cup_\pi length(X) = cuplength(X)$.

On suppose maintenant que $\pi_1(X)$ est un groupe discret. En réutilisant un argument de la preuve du Thm 4.1 de [43], on constate facilement qu'avec les notations ci-dessus, $swgt(u_\pi) = \dim(u_\pi)$ et donc que :

$$swgt(w) \geq swgt(u_\pi) + swgt(u_1) + \dots + swgt(u_n) \geq \dim(u_\pi) + n = l(w).$$

Nous obtenons alors que :

Pour tout CW-complexe X avec un groupe fondamental discret,

$$cup_\pi length(X) \leq Qcat(X)$$

En fait, il suffit de montrer que $cup_\pi length(X) \leq e(X)$ (l'inégalité $e(X) \leq Qcat(X)$ provient de [45]).

Soit w comme dans la définition ci-dessus tel que $l(w) = cup_\pi length(X)$ et posons $e(X) = m$.

Alors, $g_m^* : H^*(X) \rightarrow H^*(G_m(X))$ est injective et en particulier, $g_m^*(w) \neq 0$.

Grace aux propriétés classiques de $swgt$ et au calcul ci-dessus, on obtient :

$$e(X) = m \geq cat(G_m(X)) \geq swgt(g_m^*(w)) \geq swgt(w) \geq cup_\pi length(X). \quad \bullet$$

References

- [1] I. Bernstein, P. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois J. Math **4** (1960), 437-451.
- [2] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer Verlag, Berlin, GTM series **139** (1995).
- [3] M. Chaperon, *Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **298** (1984), 293-296.
- [4] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **38** (1978).
- [5] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95-111.
- [6] O. Cornea, *Lusternik-Schnirelmann-categorical sections*, Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **28** (1995), 689-704.
- [7] O. Cornea, *Some properties of relative L.S.-category*, Amer. Math. Soc., The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences Communications **19** (1998), 67-72.
- [8] O. Cornea, *Cone-decompositions and degenerate critical points*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 437-461.
- [9] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanre, *Monograph on the LS-category*, in preparation.
- [10] A.Dold and R.Lashof, *Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalences of bundles*, Illinois. J. Math. **3** (1959), 285-305.
- [11] A. Douady, *Arrondissement des arêtes*, Sèminaire Henri Cartan, Topologie Différentielle I, (1961/62).
- [12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, (1966).
- [13] Y. Eliashberg, M. Gromov *Lagrangian intersection theory: finite-dimensional approach*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **186** (1998), 27-118.

- [14] E. Fadell, S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **37** (1992), 151-161.
- [15] E. Fadell, S. Husseini, *Relative category, products and coproducts*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **64** (1994), 99-115.
- [16] E. Dror Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, LNM **1622**, Springer Verlag, 1996.
- [17] Y.Felix, *La Dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*, Soc. Math. de France, Asterisque **176**, (1989).
- [18] L. Fernandez, A. Gomez, J. Strom, D. Tanré, *The Lusternik-Schnirelmann category of $Sp(3)$* , Preprint 2001.
- [19] R. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333-370.
- [20] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417-427.
- [21] T. Ganea, *A generalization of the homology and homotopy suspension*, Comment. Math. Helv. **39** (1964), 295-322.
- [22] J.Harper, *A proof of Gray's conjecture*. in *Algebraic topology (Evanston, IL, 1988)*, Amer. Math. Soc., Contemp. Math. **96** (1989), 189-195.
- [23] K. Hess, *A proof of Ganea's conjecture for rational spaces.*, Topology **30** (1991), 205-214.
- [24] H. Hofer, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), 407-462.
- [25] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **6** (1998), 623-634.
- [26] N. Iwase, *Spheres bundles over spheres*, Preprint 2001.
- [27] I.M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.
- [28] B. Jessup, *Rational approximations to L-S category and a conjecture of Ganea.*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655-660.

- [29] D. Kan, W. Thurston, *Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$* , Topology **15** (1976), 253-258.
- [30] F. Laudenbach, J.-C. Sikorav, *Persistence d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent*, Invent. Math. **82** (1985), 349-357.
- [31] L.Ljusternik, L.Schnirelmann, *Methodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, (1934).
- [32] H. Marcum, *Cone length of the exterior join*, Glasgow Math. J. **40** (1998), 445-461.
- [33] W. Meyer, *Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **170** (1967), 45-66.
- [34] J. Milnor, *Construction of universal bundles II*, Ann. of Math. **63**, (1956), 430-436.
- [35] P.-M. Moyaux, *Lower bounds for the relative Lusternik-Schnirelmann category*, Manuscripta Math. **101** (2000), 533-542.
- [36] P.-M. Moyaux, L. Vandembroucq, *Lagrangian intersections in cotangent bundles and Qcategory*, Preprint (2002)
- [37] R. Palais, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115-132.
- [38] M. Reeken, *Stability of critical points under small perturbations, Part I : Topological theory*, Manuscripta Math. **7** (1972), 387-411.
- [39] M. Razvan, *Relative Ljusternik-Schnirelmann category of index pairs and applications to critical point theory*, Proceedings of the 31st Iranian Mathematics Conference (Tehran, 2000), Univ.Tehran, (2000), 50-55.
- [40] D.Rolfen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley, Mathematics Lecture Series **7** (1976).
- [41] Y. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511-2512.
- [42] Y. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37-55.
- [43] Y. Rudyak, J. Oprea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 673-678.

- [44] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 1-41.
- [45] H. Scheerer, D. Stanley, D. Tanré, *Fiberwise construction applied to Lusternik-Schnirelmann category*, To appear in Israel J. Math.
- [46] P. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337-355.
- [47] J.-C. Sikorav, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comment. Math. Helv **62** (1987), 62-73.
- [48] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups. II*, Math. Z. **151** (1976), 143-148.
- [49] D. Stanley, *Spaces and Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n + 1$* , Topology **39** (2000), 985-1019.
- [50] J. Strom, *Two special cases of Ganea's conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 679-688.
- [51] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelmann category*, Invent. Math. **6** (1968), 197-244.
- [52] G.H.Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. **138** (1974), 123-143.
- [53] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, Topology Appl. **105** (2000), 187-200.
- [54] L. Vandembroucq, *Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category*, Accepted in Topology.
- [55] F. Wilson, J. Yorke, *Lyapunov functions and isolating blocks*, J. Differential Equations **13** (1973), 106-123.