Numéro d'ordre : 3329

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES

Thèse

présentée pour obtenir
le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
discipline : Mathématiques

par

William Alexandre

Régularité des équations de Cauchy-Riemann et Cauchy-Riemann tangentielles sur les domaines convexes de type fini de $\mathbb{C}^n$

Soutenue le 10 octobre 2003 devant le jury composé de

Président :	M. Joachim VON BELOW, Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur de Recherche :	Mme Anne-Marie CHOLLET, Université de Lille 1
Co-Directeur de Recherche :	M. Joachim MICHEL, Université du Littoral Côte d'Opale
Rapporteurs :	Mme Christine LAURENT-THIÉBAUT, Université de Grenoble 1
	M. Ingo LIEB, Université de Bonn, Allemagne
Membre :	M. Vincent Thilliez, Université de Lille 1

Introduction

En analyse complexe, la classe de domaines la plus importante est la classe des domaines d'holomorphie. Dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, du point de vue des équations aux dérivées partielles, ces domaines sont caractérisés par la solubilité de l'équation $\overline{\partial}$ dans la classe des $(0, q)$-formes différentielles de régularité C^∞, $q = 1, \ldots, n$. Plus précisément, on étudie sur un domaine D le complexe du $\overline{\partial}$ suivant :

$$0 \to C^\infty_{0,0}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{0,1}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \ \ldots \ \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{0,n}(D) \to 0. \tag{1}$$

Comme $\overline{\partial}^2 = 0$, pour une $(0, q)$-forme f donnée, de régularité C^∞ et telle que $\overline{\partial} f = 0$, on considère l'équation

$$\overline{\partial} u \ = \ f. \tag{2}$$

Alors D est un domaine d'holomorphie si et seulement si pour tout $q = 1, 2, \ldots, n$ et toute forme $f \in C^\infty_{0,q}(D)$ $\overline{\partial}$-fermée, l'équation (2) admet une solution u dans $C^\infty_{0,q-1}(D)$.
En imposant au domaine D la condition plus forte de stricte pseudoconvexité, G.M. Henkin dans [14] ou encore H. Grauert et I. Lieb dans [13] ont montré que si f $\overline{\partial}$-fermée n'est que continue et bornée sur D, alors l'équation (2) admet une solution u prolongeable sur le bord de D et de régularité höldérienne $\frac{1}{2}$ sur $\overline{D}$. Pour parvenir à établir ce gain de régularité, ils ont explicitement déterminé une solution de l'équation (2) au moyen de formules de représentation intégrales. Ces formules de représentation permettent aussi l'étude de l'équation (2) dans d'autres classes de domaines d'holomorphie. Nous nous proposons ici d'étudier les domaines convexes de type fini où, d'après des résultats de D. Catlin et J.J. Kohn, on retrouve ce phénomène de gain de régularité lorsque les coefficients de f appartiennent à des espaces de Sobolev.

Une formule de représentation intégrale sur un domaine borné D utilise un noyau construit à partir d'une fonction de support, c'est-à-dire une fonction S, définie sur un voisinage $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ de $bD \times \overline{D}$ (bD étant le bord de D), holomorphe par rapport à z et telle que :

(i) $S(\zeta, \zeta) = 0$ quel que soit ζ dans $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$,

(ii) $S(\zeta, z) \neq 0$ quel que soit le couple (ζ, z) élément de $bD \times D$.

A une telle fonction de support, nous associons une section de Hefer-Leray, autrement dit n fonctions $Q_1, \ldots, Q_n$, elles aussi holomorphes par rapport à z et qui satisfont $S(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n (\zeta_i - z_i) Q_i(\zeta, z)$.

Un noyau intégral de type Cauchy-Fantappiè défini avec S comme fonction de support est alors une somme de fractions dont les dénominateurs comportent une puissance de S et dont les numérateurs comportent un produit des fonctions $Q_1, \ldots, Q_n$ et de leurs dérivées premières par rapport à $\overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_n$.

Cependant, comme l'ont montré J.J. Kohn et L. Nirenberg dans [16], il existe des domaines de type fini qui n'admettent pas de fonction de support. Ainsi, nous imposons aux domaines de type fini que nous considérons d'être convexes car sur les domaines convexes nous connaissons des fonctions de support.

En effet, si $D = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, r(\zeta) < 0\}$, r une fonction définissante de D, convexe de classe C^2 au moins, on peut par exemple définir $S(\zeta, \cdot)$ comme l'application linéaire qui annule le plan tangent complexe en ζ et dont la partie réelle annule le plan tangent réel en ζ, soit $S(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial \zeta_i}(\zeta)(\zeta_i - z_i)$. Avec ce choix, la convexité de r assure $S(\zeta, z) \neq 0$ pour tout ζ de bD et z de D. Cependant, même si on obtient effectivement un opérateur de résolution de l'équation $\overline{\partial}$, un tel choix de fonction de support ne permet pas d'assurer un contrôle adéquat du noyau jusqu'au bord. En effet, nous avons bien $S(\zeta, z) \neq 0$, mais cela n'empêche pas que $S(\zeta, z)$ soit très petit tandis que $|\zeta - z|$ non. C'est par exemple le cas si en ζ le bord du domaine est très plat ou pire encore si le bord contient un segment d'une droite réelle du plan tangent complexe en ζ. Ainsi, il n'y a que certains cas particuliers comme dans [4] où on parvient à garder un contrôle suffisant du noyau.

Pour un ellipsoïde réel de fonction définissante $r(\zeta) = \sum_{j=1}^n (x_j^{2n_j} + y_j^{2m_j}) - 1$, n_j et m_j entiers positifs non nuls, K. Diederich, J.E. Fornæss et J. Wiegerinck ont pensé à rajouter à la somme $\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j)$ des termes holomorphes du développement de Taylor de r d'ordres supérieurs. Ces termes ajoutés assurent que la nouvelle fonction de support S satisfait

$\Re S(\zeta, z) \leq -c|\zeta - z|^{\max_{i=1,\ldots,n}(n_i,m_i)}$ pour tout $\zeta \in bD$ et tout $z \in \overline{D}$, c uniforme par rapport à z et ζ. En 1986, dans [10], ils parviennent ainsi à produire des estimées höldériennes optimales pour l'équation $\overline{\partial}$ sur cette classe particulière de domaines convexes de type fini.

K. Diederich et J.E. Fornæss ont poursuivi l'étude des domaines convexes de type fini en travaillant dans un cadre général. Ils ont ainsi considéré un domaine D, borné, convexe, de type fini m, autrement dit un domaine convexe à bord C^∞ dont l'ordre de contact en tout point du bord et avec toute droite complexe est majoré par m (nous définirons précisément le type dans le chapitre 1). Lorsque r est une fonction définissante convexe de D, à l'application $(\zeta, z) \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j)$, ils ont rajouté des termes judicieusement choisis du développement de Taylor de r pour obtenir une nouvelle fonction de support F. En 1999, dans [9], ils montrent que cette fonction satisfait $\Re F(\zeta, z) \leq -c|\zeta - z|^m$ quel que soit (ζ, z) dans $bD \times \overline{D}$ avec $|\zeta - z|$ suffisamment petit, $c > 0$ ne dépendant ni de z, ni de ζ. Cette fonction intègre à la structure complexe des noyaux la structure réelle du bord comme la convexité et elle permet aussi de quantifier $\Re F(\zeta, z)$ en fonction du type fini m et de $|\zeta - z|$.

Toujours en 1999, cela a permis à K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss de montrer dans [8] ces estimées hölderiennes :

Théorème 1 *Soient D un domaine borné, convexe, de type fini m et $C^\alpha_{0,q}(\overline{D})$ l'ensemble des $(0,q)$-formes dont les coefficients sont de régularité C^α sur $\overline{D}$, $\alpha \geq 0$.*
Pour $q = 1, \ldots, n-1$, il existe un opérateur linéaire T_q tel que pour toute forme f élément de $C^0_{0,q}(\overline{D})$, $T_q f$

(i) soit de régularité $C^{\frac{1}{m}}$ sur $\overline{D}$,

(ii) satisfasse $\|T_q f\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \leq c_0 \|f\|_{\overline{D},0}$, c_0 ne dépendant pas de f,

(iii) vérifie $\overline{\partial} T_q f = f$ si $\overline{\partial} f = 0$.

Depuis, beaucoup de chercheurs ont travaillé avec cette fonction de support. Par exemple, en 2001, K. Diederich et E. Mazzilli ont utilisé cette fonction afin de caractériser les classes de Nevanlinna des domaines convexes de type fini et ont ainsi obtenu l'équivalent des travaux de G.M. Henkin et H. Skoda portant sur les domaines strictement pseudo-convexes. Dans [12], avec cette fonction et un noyau de type Berndtsson-Andersson, B. Fischer a étendu aux convexes de type fini les estimées L^p déjà obtenues dans le cadre des domaines strictement pseudoconvexes dans [17].

Nous nous proposons d'utiliser cette fonction afin d'établir une version du théorème 1 pour les $(0,q)$-formes de régularité supérieure, à savoir montrer ces estimées C^k :

Théorème 2 *Soit D un domaine borné, convexe, de type fini m. Pour $q = 1, \ldots, n-1$, il existe un opérateur linéaire T_q^* tel que pour tout $k \geq 0$ entier et toute $(0,q)$-forme f, $\overline{\partial}$-fermée, de régularité C^k sur $\overline{D}$, $T_q^* f$*

(i) soit de régularité $C^{k+\frac{1}{m}}$ sur $\overline{D}$,

(ii) satisfasse $\|T_q^* f\|_{\overline{D},k+\frac{1}{m}} \leq c_k \|f\|_{\overline{D},k}$, c_k ne dépendant pas de f,

(iii) vérifie $\overline{\partial} T_q^* f = f$.

Ce théorème étend un résultat de I. Lieb et R.M. Range sur les domaines strictements pseudoconvexes. Dans [18], ils avaient construit un opérateur qui résolvait l'équation $\overline{\partial}$ et qui à toute $(0,q)$-forme $\overline{\partial}$-fermée de régularité C^k, $k \geq 0$ entier, associait une $(0,q-1)$-forme de régularité $C^{k+\frac{1}{2}}$. Ce gain de régularité est comparable au notre car, à un biholomorphisme local près, un domaine strictement pseudoconvexe est un domaine convexe de type fini 2.
Les estimées höldériennes de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss correspondant au cas $k = 0$ du théorème 2, nous étendons aussi leur résultat aux formes de régularité C^k, $k \geq 0$ entier quelconque.

Notons que dans le théorème 2, nous avons écarté le cas $q = n$. En effet, toute $(0,n)$-forme est $\overline{\partial}$-fermée. Ainsi, lorsque f est de régularité C^k jusqu'au bord de D, nous pouvons la prolonger en une $(0,n)$-forme $\overline{\partial}$-fermée de même régularité que f et à support compact sur une boule $B = \{z \in \mathbb{C}^n, |z| < R\}$ contenant $\overline{D}$. Un opérateur de prolongement de Seeley combiné avec la formule de Bochner-Martinelli fournit alors immédiatement un opérateur T_n^* tel que quel que soit $\varepsilon \in [0,1[$, $T_n^* f$ appartienne à $C^{k+\varepsilon}_{0,n-1}(\overline{D})$, vérifie $\overline{\partial} T_n^* f = f$ et $\|T_n^* f\|_{k+\varepsilon} \leq c_{k,\varepsilon} \|f\|_k$, $c_{k,\varepsilon}$ ne dépendant pas de f.

Pour construire notre opérateur T_q^*, nous emploierons la même technique que I. Lieb et R.M. Range. Nous allons modifier l'opérateur T_q de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss en lui retranchant un opérateur M_q $\overline{\partial}$-fermé. Nous montrerons que M_q satisfait aussi des estimées höldériennes, ce qui prouvera le théorème 2 pour $k = 0$.

Pour les $k > 0$, comme I. Lieb et R.M. Range nous montrerons que si f dans $C^k_{0,q}(\overline{D})$ est $\overline{\partial}$-fermée nous avons quel que soit z dans D :

$$T_q^* f(z) = -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\zeta,\lambda,z) - \int_{G\cup D} Ef(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z), \quad (3)$$

où

- $\Omega_{n,q-1}$ est un noyau intégral de type Cauchy-Fantappiè,
- $B_{n,q-1}$ est le noyau de Bochner-Martinelli,
- G est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $0 \leq r(z) < \eta$, $\eta > 0$ suffisamment petit,
- E est un opérateur de prolongement qui à toute forme $f \in C^k_{0,q}(\overline{D})$ associe une $(0,q)$-forme Ef de régularité C^k et à support compact dans $G \cup D$ telle que $\|Ef\|_{D\cup G,k} \leq c_k \|f\|_{D,k}$, c_k ne dépendant pas de f, et $Ef(z) = f(z)$ pour tout z de D.

Lorsque nous allons vouloir prouver le théorème 2 pour les formes de classe C^k, nous allons devoir dériver k fois $T^*_q f$. En agissant notamment sur la fonction de support, ces dérivations successives vont provoquer une augmentation des ordres d'annulation du dénominateur du noyau. L'écriture (3) de $T^*_q f$ va nous permettre de profiter de la régularité de f pour compenser cette augmentation de l'ordre d'annulation.

En effet, la forme $\overline{\partial} Ef$ étant nulle sur D, pour tout ζ de G proche du bord de D, $|\overline{\partial} Ef(\zeta)|$ sera majoré par $\|f\|_k d(\zeta, bD)^{k-1}$. D'autre part, le terme de Bochner-Martinelli $\int_{G\cup D} Ef \wedge B_{n,q-1}$ ne cause aucun problème car Ef étant de régularité C^k et à support compact dans $G \cup D$, nous savons qu'il est de régularité $C^{k+\varepsilon}$ sur D pour tout $\varepsilon \in [0,1[$.

Avant de décrire comment nous prouverons le théorème 2, signalons une particularité du cas $q = 1$. Grâce à l'holomorphie de la fonction de support et aux techniques que nous allons développer, comme l'ont fait I. Lieb et R.M. Range pour le cas strictement pseudoconvexe, il serait certainement possible de montrer que M_1 satisfait déjà des estimées C^k et par suite T_1 aussi. Cependant, pour éviter d'obtenir un volume de calcul trop important, nous n'explorerons pas cette voie et n'étudierons que la continuité de T^*_q.

Bien que la construction de T^*_q soit la même que dans le cadre des domaines strictement pseudoconvexes, son étude sera inspirée de celle de T_q. En effet, par rapport aux domaines strictement pseudoconvexes, la fonction de support est plus complexe et donc plus difficile à manipuler et à estimer. Comme K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss, nous devrons utiliser des outils spécifiques aux domaines convexes de type fini tels que les bases ε-extrémales de McNeal. Contrairement à K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss, nous utiliserons la définition de ces bases donnée par J.D. McNeal et non pas celle donnée dans [5] par J. Bruna, P. Charpentier et Y. Dupain. Cela nous permettra d'utiliser immédiatement les propriétés que J.D. McNeal démontre dans [20] et [21]. Une autre différence notable dans les outils employés sera la fonction de support. D'après le théorème 1.5.1, la fonction F construite dans [9] n'est à priori que locale : rien n'empêche $F(\zeta, z) = 0$ lorsque z est dans D, ζ dans le bord de D et $|\zeta - z|$ grand. Pour éviter ce problème, il faut modifier F de sorte à obtenir la fonction globale S du théorème 1.5.2. Ce dernier nous dit notamment que lorsque $|\zeta - z|$ est petit, S est le produit de F par une fonction de régularité C^∞ et de module minoré par $\frac{1}{2}$. Ainsi, par rapport à [8], le changement de fonction de support ne fait essentiellement que compliquer les calculs. Par exemple, K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss avaient une expression explicite de la section de Hefer-Leray pour F, mais comme S n'est pas connue précisément, nous devrons définir notre section au moyen d'une intégrale (voir la sous-section 1.5.2).

Ce ne sont pas là les seules différences avec le travail de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss. Ces derniers n'avaient besoin que de considérer des dérivées premières du noyau et ζ, leur variable d'intégration, vivait uniquement dans le bord de D. Pour les estimées C^k, $k > 0$, nous devrons naturellement nous intéresser à des dérivées d'ordres supérieurs, mais en plus, afin de pouvoir profiter de la régularité de f, ζ appartiendra à une mince couronne G extérieure à D. Cela compliquera considérablement nos caluls et nous confrontera à de nouveaux problèmes, comme par exemple, le mauvais comportement de la composante normale du noyau en ζ.

En effet, jusqu'ici, les intégrales portant uniquement sur le bord du domaine, la composante normale du noyau en la variable d'intégration s'en trouvait écrasée et peu importait son comportement. Dans notre étude, cela ne peut plus être le cas. Pour surmonter cette difficulté, nous devrons produire de nouvelles estimations des dérivées dans la direction normale de la fonction définissante de D et finalement, dans la proposition 1.4.5, les traduire dans le langage des bases ε-extrémales. Le principal obstacle à ces nouvelles majorations est de pouvoir assurer l'uniformité des différentes constantes qui apparaîtront par rapport aux points où nous évaluons les dérivées, mais aussi par rapport à ε. Forts de ces estimations, nous entamerons l'étude du noyau. Mais pour parvenir à nos fins, nous devrons aussi réussir à quantifier par rapport aux bases ε-extrémales la régularité de f (corollaire A.2.3), et encore faire une intégration par parties semblable à celle de J. Michel dans [22] afin de faire apparaître une relation de récurrence.

Après cette étude de la régularité des équations de Cauchy-Riemann sur les domaines convexes de type fini, nous nous intéresserons à la régularité des équations tangentielles de Cauchy-Riemann pour ces mêmes domaines. Nous considérerons un domaine borné D, convexe, de type fini m et démontrerons des estimées C^k pour l'équation $\overline{\partial}_b$.

L'opérateur $\overline{\partial}_b$ est défini sur des classes d'équivalences. Deux $(0,q)$-formes f et g continues au voisinage du bord de D sont dites équivalentes si

$$\int_{bD} f(\zeta)\wedge\phi(\zeta) = \int_{bD} g(\zeta)\wedge\phi(\zeta)$$

pour toute $(n,n-q-1)$-forme ϕ de classe C^∞ au voisinage de bD. Nous notons $[f]$ la classe de la forme f.

Les classes d'équivalence ainsi définies, nous dirons que la classe $[f]$ est de régularité C^α, $\alpha\geq 0$, s'il en existe un représentant de régularité C^α au voisinage du bord de D.

Si $[f]$ représente la classe d'équivalence de la $(0,q)$-forme f, $\overline{\partial}_b[f]$ sera la classe d'équivalence $[g]$ où g est une $(0,q+1)$-forme qui satisfait

$$\int_{bD} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}\phi(\zeta) = (-1)^{q+1}\int_{bD} g(\zeta)\wedge\phi(\zeta)$$

quelle que soit la $(n,n-q-2)$-forme ϕ de classe C^∞ au voisinage de bD. Remarquons que par définition de l'équivalence de deux $(0,q)$-formes, $\overline{\partial}_b[f]$ est bien définie. De plus, si $[f]$ est une classe d'équivalence dont f est un représentant de régularité C^1, alors $\overline{\partial}_b[f]=[\overline{\partial} f]$.

Nous définirons rigoureusement les classes d'équivalence et l'opérateur $\overline{\partial}_b$ avant de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit D un domaine borné, convexe, de type fini m. Pour $q=1,\dots,n-1$, il existe un opérateur linéaire T_q^b agissant sur les classes d'équivalence tel que pour tout $k\geq 0$ entier et toute classe d'équivalence $[f]$ de régularité C^k avec $\overline{\partial}_b[f]$ de régularité C^0, nous ayons :*

(i) $T_q^b[f]$ *est de régularité* $C^{k+\frac{1}{m}}$ *et satisfait* $\|T_q^b[f]\|_{bD,k+\frac{1}{m}}\leq c_k\|[f]\|_{bD,k}$, c_k *ne dépendant pas de* $[f]$*,*

(ii) $[f]=\overline{\partial}_b T_q^b[f]+T_{q+1}^b\overline{\partial}_b[f]$

où pour (ii), lorsque $q=n-1$, nous posons $T_{q+1}^b=0$ et faisons l'hypothèse supplémentaire que $\int_{bD} f\wedge\phi=0$ pour toute $(n,0)$-forme ϕ $\overline{\partial}$-fermée de classe C^∞ au voisinage de bD.

Ce théorème a également un semblable dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes. Dans [15], G.M. Henkin construit lui aussi un opérateur de résolution de l'équation $\overline{\partial}_b$ qui à une classe d'équivalence de régularité C^k

associe une classe d'équivalence de régularité $C^{k+\frac{1}{2}}$. Comme lorsque nous avons étudié les équations de Cauchy-Riemann, ce gain de régularité est comparable au notre. Encore dans le cas strictement pseudoconvexe, dans [19], Ma Lan et J. Michel donnent d'autres résultats locaux.

Ma Lan et J. Michel utilisait un seul noyau intégral mélangeant deux fonctions de support : l'une pour D et l'autre pour $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Ce mélange permettait notamment de devoir distinguer moins de cas en ne travaillant qu'avec un seul opérateur. Cependant, les fonctions de support pour les domaines convexes de type fini sont plus compliquées que celles qu'ils ont employées. Ainsi nous devrons les séparer et suivre la méthode décrite par G.M. Henkin en écrivant T_q^b comme la différence de deux opérateurs.

Soit une $(0,q)$-forme f continue au voisinage du bord de D. Le point de départ est la formule de saut suivante. Pour toute $(n,n-q-1)$-forme différentielle ϕ de classe C^∞ au voisinage de bD, nous avons

$$\int_{bD} f(z) \wedge \phi(z) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD} (f_+(z-\varepsilon\eta_z) - f_-(z+\varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z) \tag{4}$$

où η_z désigne la normale unitaire extérieure en z à bD et

$$\begin{aligned} f_+(z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta,z) \qquad \text{lorsque } z \in D,\\ f_-(z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta,z) \qquad \text{lorsque } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}. \end{aligned}$$

En utilisant une formule d'homotopie, nous définirons un opérateur T_q qui à une $(0,q)$-forme continue sur bD va associer une $(0,q-1)$-forme de régularité C^∞ sur D. T_q sera assez proche de l'opérateur du théorème 1 et nous permettra de représenter f_+ sous la forme

$$f_+ = \overline{\partial} T_q f + T_{q+1} \overline{\partial} f. \tag{5}$$

En étudiant T_q, nous verrons que $T_q f$ est de régularité $C^{\frac{1}{m}}$ sur $\overline{D}$ et induit donc une $(0,q-1)$-forme sur bD.

Ensuite, nous chercherons à construire un opérateur $\tilde{T}_q$ qui permette d'écrire f_- sous la forme $f_- = \overline{\partial}\tilde{T}_q f + \tilde{T}_{q+1}\overline{\partial} f$. Dans le cas d'un domaine strictement pseudoconvexe, il suffit d'inverser le rôle des variables dans le noyau intégral de T_q. Cela définit un opérateur $\tilde{T}_q$ tel que quelle que soit la $(0,q)$-forme g continue au voisinage de bD, $\tilde{T}_q g$ soit de régularité höldérienne $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{C}^n \setminus D$ et induit donc une $(0,q-1)$-forme sur bD.

Cette technique fonctionnerait toujours dans le cas d'un domaine convexe de type fini 2. Cependant, pour un domaine convexe de type fini au moins 4, nous ne pourrions même pas assurer que $\tilde{T}_q f$ reste bornée au voisinage du bord. En effet, dans l'opérateur T_q (aussi bien le notre que celui du théorème 1 de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornaess), la composante normale du noyau en ζ a un mauvais comportement. Cependant, T_q étant défini par une intégrale sur le bord, la composante normale du noyau en ζ ne joue aucun rôle. Une fois les variables inversées, c'est la composante normale en z qui a un mauvais comportement, et bien que l'opérateur soit toujours défini par une intégrale sur le bord, cette composante ne disparaît pas.

Pour surmonter ce problème, nous allons remarquer que les classes d'équivalence ne tiennent pas compte de la composante normale. En isolant la composante normale en z du noyau pour ne conserver que la composante tangentielle, nous définirons un opérateur $\tilde{T}_q^t$ tel que $\tilde{T}_q^t f$ soit de régularité $C^{\frac{1}{m}}$ sur $\mathcal{V} - D$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage de bD. $\tilde{T}_q^t f$ induira donc une $(0, q-1)$-forme de classe $C^{\frac{1}{m}}$ sur bD. Puisque nous n'aurons conservé que la composante tangentielle en z du noyau, nous devrons garder uniquement f_-^t la composante tangentielle de f_- et considérer seulement $\overline{\partial}^t$ la composante tangentielle de l'opérateur $\overline{\partial}$. Nous montrerons qu'alors

$$f_-^t = \overline{\partial}^t \tilde{T}_q^t f + \tilde{T}_{q+1}^t \overline{\partial} f. \tag{6}$$

Ensuite, dans (4) le domaine d'intégration est le bord de D et la composante normale de f_- ne joue aucun rôle. Ainsi (4) devient

$$\int_{bD} f(z) \wedge \phi(z) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{bD} (f_+(z - \varepsilon\eta_z) - f_-^t(z + \varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z). \tag{7}$$

Puisque cette égalité est valable pour tout ϕ de régularité C^∞ au voisinage de bD, en y introduisant (5) et (6) et en utilisant la régularité höldérienne de T_q et $\tilde{T}_q^t$, comme G.M. Henkin nous obtiendrons par calcul de la limite

$$[f] \;=\; \overline{\partial}_b([T_q f] - [\tilde{T}_q^t f]) + [T_{q+1}\overline{\partial}_b f] - [\tilde{T}_{q+1}^t \overline{\partial}_b f].$$

(nous ferons bien entendu ces calculs de manière rigoureuse lors de notre étude).

Pour une classe d'équivalence $[f]$ dont f est un représentant continu au voisinage du bord de D, nous définirons $T_q^b[f]$ comme la classe d'équivalence $[T_q f] - [\tilde{T}_q^t f]$.

Pour prouver le point (i) du théorème 3 pour les $k > 0$, nous estimerons les dérivées tangentielles des fonctions de support et de leurs sections de Hefer-Leray. Encore une fois, notre travail sur les dérivées normales de la fonction définissante sera un outil essentiel pour produire les majorations nécessaires. Ensuite, pour parvenir à garder le contrôle des noyaux au cours des dérivations successives, nous devrons faire des intégrations par parties en cascade. Pour cela, nous devrons gérer les multiples interactions des différents éléments des noyaux et dégager une écriture générique vérifiée par les noyaux au fil des intégrations par parties. Cette écriture nous permettra de raisonner par récurrence, mais il faudra aussi montrer qu'elle nous assure vraiment le contrôle voulu de chacun des noyaux.

Cette thèse est organisée comme suit : dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler quelques définitions dont celle d'un domaine de type fini, la construction des bases ε-extrémales de McNeal ainsi que leurs propriétés qui nous seront utiles. Après avoir constaté que celle donnant des estimations des dérivées de la fonction définissante n'est pas optimale lors d'une dérivation dans la direction normale au bord du domaine, nous améliorerons cette estimation. Ensuite nous rappelerons la fonction de support de K. Diederich et J.E. Fornæss pour les domaines convexes de type fini ainsi que sa version globalisée. Nous construirons ensuite sa décomposition de Hefer-Leray avant de définir et d'analyser une famille de matrices nécessaires à l'étude de cette décomposition.

Dans le second chapitre, nous nous intéresserons à la régularité des équations de Cauchy-Riemann sur les domaines convexes de type fini. Nous définirons l'opérateur de résolution T_q^* qui va satisfaire les estimées C^k puis décrirons la technique de travail que nous emploierons pour prouver ces dernières. Nous entamerons alors les majorations de chaque élément du noyau avant d'estimer les diverses intégrales et montrer (i) et (ii) du théorème 2.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous examinerons la régularité des équations tangentielles de Cauchy-Riemann, toujours sur les domaines convexes de type fini. Après avoir défini T_q^b comme différence de deux opérateurs où pour l'un d'entre eux nous aurons pris soin d'isoler la composante tangentielle, nous vérifierons que T_q^b satisfait (ii) du théorème 3. Ensuite, pour montrer sa continuité, nous estimerons les dérivées tangentielles des noyaux et après avoir identifié une écriture générale des noyaux, nous intégrerons par parties de nombreuses fois. Enfin, nous montrerons que cette écriture nous confère le contrôle voulu des noyaux et assure ainsi (i) du théorème 3. En annexe nous rappelerons des outils utiles à la construction mais aussi à l'estimation des opérateurs intégraux tels que le lemme de Hardy-Littlewood ou encore l'opérateur de prolongement de Seeley.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier M. Joachim Michel qui a encadré cette thèse mais aussi mes mémoires de D.E.A. et de maîtrise. Etrangement, il semble avoir toujours su mieux que moi ce dont j'étais capable et il est parvenu à ce que je donne le meilleur de moi-même. Pour cela, mais aussi pour le temps qu'il m'a consacré, les conseils mathématiques ou non qu'il m'a prodigués et le soutien qu'il m'a apporté, je le remercie infiniment.

Je remercie aussi Mme Anne-Marie Chollet qui a été présente à chaque moment opportun, M. Emmanuel Mazzilli qui le premier m'a initié aux formules de représentation intégrales.

Je suis également reconnaissant à M. Ingo Lieb et Mme Christine Laurent qui ont bien voulu juger ce travail. Merci pour leurs remarques qui m'ont permis de l'améliorer. Merci aussi à MM. Vincent Thillier et Joachim Von Below qui ont accepté d'être respectivement membre et président du jury.

Enfin, je voudrais associer à l'aboutissement de cette thèse mes parents et ma petite soeur Delphine. J'espère qu'ils voudront bien m'excuser car je sais qu'au cours de ces trois années je n'ai pas toujours été agréable à vivre. A mes amis, mathématiciens ou non, présents à mes côtés ou à l'autre bout de la France, que vous lisiez ou non ce travail ou ces remerciements : merci. Votre soutien moral, les sourires et les rires mais aussi les peines que nous avons partagés m'ont beaucoup aidé. Sans vous non plus je ne crois pas que je serai parvenu à ce résultat.

Table des matières

Notations et définitions

⋆ Pour $k \leq l$ entiers, nous notons $[\![k,l]\!]$ l'ensemble $\{k, k+1, \dots, l-1, l\}$.

Soit n un entier, $n \geq 1$.

⋆ Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, nous posons :

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

⋆ Pour $\varepsilon > 0$ et z un point de $\mathbb{C}^n$, nous notons $B(z,\varepsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - z| < \varepsilon\}$.

⋆ Soient $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_{k'}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Les formes différentielles de $\mathbb{C}^n$ $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$ et $d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_{k'}}$ seront respectivement notées dz_I et $d\overline{z}_J$, où $I = (i_1, \dots, i_k)$ et $J = (j_1, \dots, j_{k'})$.

⋆ Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $p, q \in \{1, \dots, n\}$, k un entier, $k \geq 0$. Nous notons $C^k_{p,q}(\mathcal{U})$ l'ensemble des (p,q)-formes $f = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$, où les I et J sont supposés ordonnés, telles que tous les f_{IJ} soient de régularité C^k sur $\mathcal{U}$. Nous posons pour z dans $\mathcal{U}$:

$$|f(z)| := \sup_{|I|=p,|J|=q} |f_{IJ}(z)|$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{U},k} := \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leq k \\ |I|=p,|J|=q}} \sup_{z\in\mathcal{U}} \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(z) \right|.$$

Pour $f = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J \in C^k_{p,q}(\mathcal{U})$, $\varepsilon \in]0,1[$, nous posons :

$$\|f\|_{\mathcal{U},k+\varepsilon} := \|f\|_{\mathcal{U},k} + \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|=k \\ |I|=p,|J|=q}} \sup_{z,\zeta\in\mathcal{U}} \frac{\left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(z) - \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}(\zeta) \right|}{|\zeta - z|^\varepsilon},$$

et notons $C^{k+\varepsilon}_{p,q}(\mathcal{U})$ l'ensemble des (p,q)-formes $f \in C^k_{p,q}(\mathcal{U})$ pour lesquelles $\|f\|_{\mathcal{U},k+\varepsilon}$ est fini.
$C^k_{p,q}(\overline{\mathcal{U}})$ désigne l'ensemble des (p,q)-formes de $C^k_{p,q}(\mathcal{U})$ dont toutes les dérivées d'ordre au plus k sont continues sur $\overline{\mathcal{U}}$. Pour $k \geq 0$ entier et $\varepsilon \in [0,1[$, $\|f\|_{\overline{\mathcal{U}},k+\varepsilon}$ ne sera autre que $\|f\|_{\mathcal{U},k+\varepsilon}$.

⋆ Le bord d'un ensemble A de $\mathbb{C}^n$ sera noté bA.

Soit $M \subset\subset \mathbb{C}^n$ une hypersurface réelle de classe C^∞ compacte et sans bord.

⋆ Pour z dans M, nous notons T_zM le plan tangent réel à M en z et $T^{\mathbb{C}}_zM$ le plan tangent complexe à M en z.

⋆ Nous définissons les normes C^k sur M. Soit g une fonction de classe C^k sur M, $k \geq 0$ entier et soit z_0 un point de M.
Soient $U(z_0)$ un voisinage de z_0 et $V^0_1, \dots, V^0_{2n-1}$ une base de champs de vecteurs tangents définis et C^∞ sur $\overline{U(z_0) \cap M}$. Nous posons :

$$\|g\|_{U(z_0)\cap M,k} := \sup_{\substack{j\in\{0,\dots,k\}\\ 1\leq \nu_1,\dots,\nu_j\leq 2n-1}} \sup_{z\in M\cap U(z_0)} |V^0_{\nu_1}\dots V^0_{\nu_j} g(z)|,$$

et pour $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\|g\|_{U(z_0)\cap M,k+\varepsilon} := \|g\|_{U(z_0)\cap M,k} + \\ + \sup_{1\leq \nu_1,\dots,\nu_k\leq 2n-1} \sup_{\zeta,z\in M\cap U(z_0)} \frac{|V^0_{\nu_1}\dots V^0_{\nu_j} g(z) - V^0_{\nu_1}\dots V^0_{\nu_j} g(\zeta)|}{|\zeta - z|^\varepsilon}.$$

A noter, cette dernière quantité peut-être infinie.
Nous recouvrons M par les voisinages $U(z)$, $z \in M$, et par compacité de M nous en extrayons un sous-recouvrement fini $U(z_i)$, $i = 1, \dots, N$, puis posons :

$$\|g\|_{M,k} := \sup_{i=1,\dots,N} \|g\|_{U(z_i)\cap M,k}$$

et pour $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\|g\|_{M,k+\varepsilon} := \sup_{i=1,\dots,N} \|g\|_{U(z_i)\cap M,k+\varepsilon}.$$

Lorsque $\|g\|_{M,k+\varepsilon}$ est fini, nous disons que g appartient à $C^{k+\varepsilon}(M)$.
La définition ci-dessus dépend du recouvrement et des bases de champs de vecteurs choisies. Cependant, toutes les normes définies de cette manière sont équivalentes.
Soit maintenant la (p,q)-forme différentielle $g = \sum_{|I|=p,|J|=q} g_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$, où

les I et J sont supposés ordonnés, telle que tous les g_{IJ} soient de régularité $C^{k+\varepsilon}$ sur M, $k \geq 0$ entier et $\varepsilon \in [0,1[$. Nous définissons :

$$\|g\|_{M,k+\varepsilon} := \sup_{|I|=p,|J|=q} \|g_{IJ}\|_{M,k+\varepsilon}.$$

Chapitre 1

Les domaines convexes de type fini

1.1 Convexité et type fini

Dans cette partie, nous rappelons les définitions de la convexité et du type fini ainsi que quelques propriétés des domaines convexes de type fini.

Convexité.

Définition 1.1.1 *$C \subset \mathbb{R}^n$ sera dit* **convexe** *si pour tout x et y de C et tout λ de $[0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda)y$ appartient à C.*
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Nous dirons que $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est **convexe** *si $\lambda r(x) + (1-\lambda)r(y) \geq r(\lambda x + (1-\lambda)y)$ pour tout x et y de $\mathcal{U}$ et tout λ de $[0,1]$.*

Rappelons maintenant un fait connu :

Proposition 1.1.2 *Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe, $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application convexe de régularité C^2. Alors la hessienne de r, $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, satisfait :*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i w_j \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{U}, \ \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Cette proposition nous permettra d'exploiter la convexité d'un domaine convexe par l'intermédiaire d'une fonction définissante. Mais précisons ce que nous appellerons fonction définissante :

Définition 1.1.3 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine. Nous dirons que D a un bord différentiable de classe C^k, $k > 0$ éventuellement infini, si pour tout point p du bord de D, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p et une fonction à valeurs réelles $r \in C^k(\mathcal{U})$ telle que :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} \cap D & = & \{x \in \mathcal{U}, r(x) < 0\}, \\ grad\, r(x) & \neq & 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{U} \cap bD, \end{array}$$

où bD désigne le bord de D.
La fonction r est alors appelée **fonction définissante locale** *en p. Lorsque $\mathcal{U}$ est un voisinage de $\overline{D}$, r est appelée* **fonction définissante globale** *ou plus simplement* **fonction définissante**.

Proposition 1.1.4 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné et convexe à bord C^k. Alors il existe une fonction définissante de D de classe C^k, convexe et définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

Preuve : voir [25]. $\square$
Pour un domaine convexe de type fini, nous travaillerons toujours avec une fonction définissante convexe et définie sur $\mathbb{C}^n$ tout entier. En fait, nous pourrions simplement exiger que cette fonction soit définie et convexe sur un voisinage du bord de D, mais introduire ce voisinage superflu alourdirait encore les notations et la rédaction.

Type fini.

Alors que la convexité est une notion réelle, le type fini est une notion complexe derrière laquelle se cache un ordre de contact.
Soit $f \in C^\infty(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. Nous noterons $\nu(f) = \inf\{\alpha_1 + \alpha_2 / \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}, \frac{\partial^{(\alpha_1+\alpha_2)} f}{\partial z^{\alpha_1} \partial \bar{z}^{\alpha_2}}(0) \neq 0\}$.
Soit $F = (f_j)_{1 \leq j \leq n} \in C^\infty(\mathcal{V})$. Nous noterons $\nu(F) := \min_{1 \leq j \leq n} \nu(f_j)$
Nous allons maintenant définir le type linéaire fini et le type fini. Cette notion est due à D'Angelo.

Définition 1.1.5 *Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord C^∞, p un point de bD et r une fonction définissante locale en p. Le point p sera dit de* **1-type fini** *au sens de D'Angelo, ou plus généralement de* **type fini** *si $\Delta_1(p) = \sup_F \frac{\nu(r \circ F)}{\nu(F-p)}$ est borné, la borne supérieure portant sur les $F : \mathcal{V} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ holomorphe, telle que 0 appartienne à $\mathcal{V}$ et $F(0) = p$. $\Delta_1(p)$ est appelé type fini ou plus simplement type de D en p.*
D sera dit de type fini si $\sup_{p \in bD} \Delta_1(p)$ est borné. $m = \sup_{p \in bD} \Delta_1(p)$ est alors appelé type de D.

L'exemple le plus simple de domaines convexes de type fini que l'on puisse trouver est un ellipsoïde complexe, c'est-à-dire l'ensemble des points $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ tels que $\sum_{j=1}^n |\zeta_i|^{2m_i} < 1$, $m_i \geq 1$ entier. Le type fini d'un tel domaine est alors $\max_{i=1,\ldots,n} m_i$. Pour calculer ce type fini, il est plus simple d'utiliser le type linéaire et le théorème 1.1.7.

Définition 1.1.6 *Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord C^∞, p un point de bD et r une fonction définissante locale en p. Le point p sera dit de* **type linéaire fini** *si $\Delta(p) = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ |v|=1}} \nu(r \circ l_v)$ est fini, où $l_v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \lambda & \longmapsto & \lambda v + p \end{array} \right.$, est une droite complexe passant par p et de vecteur directeur v. $\Delta(p)$ est appelé le type linéaire de D en p.*

Leurs définitions impliquent évidemment $1 \leq \Delta(p) \leq \Delta_1(p)$ pour tout p du bord de D. Lorsque D est convexe et $\Delta_1(p)$ est fini, nous avons l'inégalité réciproque $\Delta(p) \geq \Delta_1(p)$:

Théorème 1.1.7 *Soient $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, un domaine à bord C^∞ et $p \in bD$ de type fini tels que D soit convexe au voisinage de p.*
Alors le type linéaire et le type fini de D en p sont égaux.

Preuve : Voir l'article [21] de J.D. McNeal ou [3] de H.P. Boas et E.J. Straube. □
Dans [21], pour prouver ce théorème, J.D. McNeal a dû étudier de manière précise la géométrie du bord d'un domaine convexe de type fini. Il a en particulier construit des bases dites bases ε-extrémales qui se trouvent avoir de multiples propriétés. Nous rappelons maintenant la construction de ces bases et leurs propriétés qui nous seront utiles.

1.2 Les bases ε-extrémales

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, convexe, de type fini m, r une fonction définissante globale de D, de régularité C^∞, définie et convexe sur $\mathbb{C}^n$, de gradient non nul dans $\mathcal{V}$ un voisinage borné de bD. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous noterons $D_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{C}^n ; r(\zeta) < \alpha\}$ et η_z la normale extérieure unitaire en $z \in \mathcal{V}$ à $bD_{r(z)}$, le bord de $D_{r(z)}$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Quitte à choisir $\mathcal{V}$ et $\varepsilon > 0$ plus petits, les définitions et propriétés que nous allons énoncées sont valables dans $\mathcal{V}$ tout entier : il faut notamment choisir $\mathcal{V}$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que pour tout $z \in \mathcal{V}$, $D_{r(z)+\varepsilon}$ soit encore de type fini au plus m. Grâce à la régularité de r et à l'équivalence entre type fini et type linéaire, on peut voir que cela est toujours possible.

Nous fixons un point ζ_0 dans $\mathcal{V}$ et raisonnons par récurrence pour définir une base ε-extrémale en ζ_0.
Si $\mathcal{V}$ et ε sont suffisamment petits, la projection de ζ_0 sur $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ est bien définie. Soit ζ_1 le projeté de ζ_0 sur $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$. Nous posons $\tau_1(\zeta_0,\varepsilon) = |\zeta_0-\zeta_1|$ et $w_1^* = \frac{\zeta_1-\zeta_0}{|\zeta_1-\zeta_0|}$. w_1^* est donc la normale unitaire extérieure à $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ en ζ_1.
Supposons avoir contruit les k vecteurs orthonormés $w_1^*,\dots,w_k^*$, $k<n$. Pour un vecteur v unitaire nous calculons la distance de ζ_0 à $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ dans la direction v, distance que nous notons

$$\tau(\zeta_0,v,\varepsilon) := \sup\{\tau>0, r(\zeta_0+\lambda v) < r(\zeta_0)+\varepsilon,\ \forall \lambda\in\mathbb{C} \text{ avec } |\lambda|\le\tau\}.$$

Nous notons

$$\tau_{k+1}(\zeta_0,\varepsilon) := \sup\{\tau(\zeta_0,v,\varepsilon), v\in\mathbb{C}^n \text{ unitaire orthogonal à } w_1^*,\dots,w_k^*\}$$

puis choisissons un point ζ_{k+1} dans $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ et un vecteur unitaire w_{k+1}^* orthogonal à $w_1^*,\dots,w_k^*$ tels que $\zeta_{k+1} = \zeta_0 + \tau_{k+1}(\zeta_0,\varepsilon)w_{k+1}^*$. Comme $D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ est de type fini, un tel point et un tel vecteur existe toujours.
Par récurrence, nous construisons ainsi une base orthonormée $w_1^*,\dots,w_n^*$ telle que w_1^* soit la normale unitaire extérieure en ζ_1 et $w_2^*,\dots,w_n^*$ une base de l'espace tangent complexe à $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ en ζ_1. La base $w_1^*,\dots,w_n^*$ est appellée **base ε-extrémale** en ζ_0. A cette base, nous associons un repère centré en ζ_0 que nous appellerons **repère ε-extrémal** en ζ_0.
Remarquons qu'une telle base n'est pas unique : dans le cas de la boule, en tout point il y a une infinité de telles bases. De plus, suivant le domaine, quand ε varie, elles peuvent avoir un comportement assez chaotique. Aussi, en se servant de telles bases pour montrer des inégalités (voir le chapitre 2), il faut prendre soin de vérifier l'indépendance par rapport à ε et ζ_0 des divers paramètres et constantes qui apparaissent.
Nous définissons encore les polydisques de McNeal :

Définition 1.2.1 *Soit $\zeta_0\in\mathcal{V}$, $\varepsilon>0$. Nous fixons une base ε-extrémale en ζ_0 puis posons*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0) \quad := \quad \{\zeta\in\mathbb{C}^n, |\zeta_i^*| < \tau_i(\zeta_0,\varepsilon),\ i=1,\dots,n\}$$

où $\zeta_1^*,\dots,\zeta_n^*$ désignent les coordonnées de ζ dans le repère ε-extrémal en ζ_0 (et donc centré en ζ_0) associé à la base ε-extrémale choisie.

Soulignons la dépendance d'un polydisque de McNeal par rapport à la base ε-extrémale qui sert à le définir. Aussi, quand nous considérerons un tel polydisque et une base ε-extrémale, même si nous ne le précisons pas, le polydisque sera bien entendu défini par rapport à cette base. Ces polydisques nous serviront à estimer des intégrales (voir les lemmes A.4.1, A.5.1 et les corollaires A.4.2 et A.5.2).

1.3 Propriétés des bases ε-extrémales

Nous regroupons ici des inégalités et autres estimations liant la distance $\tau(z,v,\varepsilon)$ de $z\in\mathcal{V}$ au bord dans une direction v et les dérivées de la fonction définissante en z. Ces propriétés sont établies par J.D. McNeal dans [20], [21] ou encore par J. Bruna, P. Charpentier et Y. Dupain dans [5].
Du fait de la nature des domaines convexes de type fini et du caractère des bases ε-extrémales, ces estimations sont toujours données à une constante multiplicative près. Afin d'alléger la rédaction, nous adoptons les notations suivantes :
Pour A et B réels, nous notons $A\lesssim B$ s'il existe $c>0$ tel que $A\leq cB$. $A\gtrsim B$ signifiera que $B\lesssim A$ et $A\approx B$ que nous avons à la fois $A\lesssim B$ et $A\gtrsim B$. Bien entendu, nous préciserons la dépendance de la constante par rapport aux divers paramètres.

Proposition 1.3.1 *Pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, tout $z\in\mathcal{V}$, et tout v vecteur unitaire de $\mathbb{C}^n$ de coordonnées $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ dans une base ε-extrémale en z, nous avons uniformément en z, v et ε :*

$$\frac{1}{\tau(z,v,\varepsilon)}\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{|v_i^*|}{\tau_i(z,\varepsilon)}.$$

Preuve : Voir [21] proposition 2.2. □

Proposition 1.3.2 *Pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, tout $z\in\mathcal{V}$ et $v\in\mathbb{C}^n$ vecteur unitaire, nous avons uniformément en z, ε et v :*

$$\sum_{1\leq i+j\leq m}\left|\left.\frac{\partial^{i+j}r(z+\lambda v)}{\partial\lambda^i\partial\overline{\lambda}^j}\right|_{\lambda=0}\right|\tau(z,v,\varepsilon)^{i+j}\quad\approx\quad\varepsilon.$$

Preuve : Voir [5], équation (3). □

Proposition 1.3.3 *Pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, tout $z_0\in\mathcal{V}$, $z\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $v\in\mathbb{C}^n$ vecteur unitaire, nous avons uniformément en z_0, z, v et ε :*

$$\tau(z,v,\varepsilon)\quad\approx\quad\tau(z_0,v,\varepsilon).$$

Preuve : Voir [21] proposition 2.3. □
Les propositions suivantes nous serviront lors des estimations de la décomposition de Hefer-Leray de la fonction de support (voir la sous-section 2.3.2).

Proposition 1.3.4 *Pour tout $z \in \mathcal{V}$, tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $v \in \mathbb{C}^n$ vecteur unitaire, nous avons uniformément en z, ε et v :*

$$\varepsilon^{\frac{1}{m}} \gtrsim \tau(z, v, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon.$$

Si v est un vecteur de $T_z^{\mathbb{C}} bD_{r(z)}$, alors :

$$\tau(z, v, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Si v est la normale en z :

$$\tau(z, v, \varepsilon) \approx \varepsilon.$$

Preuve : Ce sont des conséquences directes de la proposition 1.3.2. □

Remarque 1.3.1 Notons $w_1^*, \ldots, w_n^*$ une base ε-extrémale en $z \in \mathcal{V}$ et p un point de $bD_{r(z)+\varepsilon}$ pour lequel nous avons $|p - z| = \tau_1(z, \varepsilon)$. Comme w_1^* est la normale extérieure unitaire en p et comme $w_2^*, \ldots, w_n^*$ sont des vecteurs de $T_p^{\mathbb{C}} bD_{r(p)}$, les propositions 1.3.3 et 1.3.4 permettent de conclure que, pour $i = 2, \ldots, n$, nous avons $\tau_i(z, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et $\varepsilon \approx \tau_1(z, \varepsilon)$.

Comme K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss (voir proposition 3.1 de [8]), nous aurons besoin de cette généralisation de l'inégalité (6) de [5] :

Proposition 1.3.5 *Soient $v_1, \ldots, v_n$ une base de vecteurs orthonormés de $\mathbb{C}^n$, z un point de $\mathcal{V}$ et α et β deux multi-indices tels que $|\alpha| + |\beta| \geq 1$. Alors uniformément par rapport à z, β, α et la base $v_1, \ldots, v_n$:*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} r}{\partial v^\alpha \partial \overline{v}^\beta}(z) \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^n \tau(z, v_i, \varepsilon)^{\alpha_i + \beta_i}}.$$

Nous définissons maintenant une notation qui nous servira souvent :

Notation 1.3.6 *Soient $A \subset \mathbb{C}^n$, $B \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ contenant bD, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $k \geq 0$ un entier et $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ un N-uplet de $[\![0, n]\!]^N$, $N \geq 0$. Nous dirons que g est une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-forme différentielle sur $A \times B$ si elle satisfait :*

$$|g(\zeta, z)| \lesssim \frac{\beta \varepsilon^\alpha}{\prod_{j=1}^N \tau_{\nu_j}(z, \varepsilon) |\zeta - z|^k},$$

uniformément en $z \in B$, $\varepsilon > 0$ dans $[c_2|r(z)|, \varepsilon_0]$, c_2 la constante du lemme A.3.1 et en ζ dans $A \cap \mathcal{P}_\varepsilon(z)$ si $\varepsilon = |r(z)|$, ou dans $A \cap (\mathcal{P}_\varepsilon(z) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))$ si $\varepsilon \neq |r(z)|$, c_1 la constante du lemme A.3.2.
Insistons bien sur le fait que les constantes intervenant dans la majoration ci-dessus ne peuvent pas dépendre des paramètres α, β, ν et k.

Puisque l'inégalité vérifiée par une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-forme l'est à une constante multiplicative près, l'introduction du paramètre β peut paraître étrange mais ce β est important : Par exemple, quand nous étudierons l'action de l'opérateur T_q^* du théorème 2.0.1 sur $h \in C^k_{0,q}(\overline{D})$, β ne sera autre que $\|h\|_{\overline{D},k}$ (on pourra regarder par exemple le corollaire 2.4.2) et il est important de voir comment les constantes dépendent de h.
Dans les lemmes 2.4.1, 2.4.5 et 2.4.7, mais aussi dans les propositions 3.3.2 et 3.3.4, nous montrerons que nos noyaux intégraux sont des sommes de $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$ pour des paramètres ε_0, β, α, ν, k adéquats au sens des lemmes A.4.1 et A.5.1 ou des corollaires A.4.2 et A.5.2.

1.4 Dérivation dans la direction normale

1.4.1 Motivation

Examinons la majoration de la proposition 1.3.5 dans le cas particulier où la base $v_1, \dots, v_n$ est telle que v_1 soit la normale unitaire extérieure à $bD_{r(z)}$, $\alpha = (1, 1, 0, \dots, 0)$ et $\beta = (0, \dots, 0)$. La propostion 1.3.5 donne la majoration :

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial v_1 \partial v_2}(z)\right| \quad \lesssim \quad \frac{\varepsilon}{\tau(z, v_1, \varepsilon)\tau(z, v_2, \varepsilon)}. \tag{1.1}$$

Comme d'après la proposition 1.3.3 nous avons $\tau(z, v_1, \varepsilon) \approx \varepsilon$, (1.1) est équivalente à $\left|\frac{\partial^2 r}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}(z)\right| \lesssim \frac{1}{\tau(z, v_2, \varepsilon)}$: Nous majorons une quantité finie par une autre arbitrairement grande quand ε est petit ce qui n'est certainement pas optimal et ne suffit pas pour l'utilisation que nous voulons en faire (voir les remarques 2.3.2 et 2.4.2). Afin de voir où intervient réellement la convexité et le gain que l'on peut attendre, nous allons étudier un exemple et, par un calcul direct, nous verrons quelle amélioration est possible.
Soit $r(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = -x_1 + x_2^m - a x_2^k y_1 + y_1^2 + x_3^2$ où a est strictement positif et $k \geq 1$ un entier. Nous supposons que a et k ont été choisis de sorte que r soit convexe au voisinage de 0, auquel cas r est une fonction définissante locale d'un domaine convexe de type fini m. Remarquons que l'on peut choisir de tels paramètres a et k en posant par exemple $a = 2$ et

$m = 2k$.
Nous avons $\frac{\partial^2 r}{\partial y_1 \partial x_2} = akx_2^{k-1}$ et pouvoir déterminer k permettrait de trouver une nouvelle majoration. Nous allons montrer que la convexité de r impose $k \geq \frac{m}{2}$.
Pour que $\{z \in \mathbb{C}^3, r(z) < 0\}$ soit convexe au voisinage de 0, il faut que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial y_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 r}{\partial y_1^2} \end{pmatrix}$ soit positive et, en particulier, le produit de ses valeurs propres doit être positif : $\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 r}{\partial y_1^2} - \left(\frac{\partial^2 r}{\partial y_1 \partial x_2}\right)^2 = 2m(m-1)x_2^{m-2} - (ak)^2 x_2^{2k-2} \geq 0$. Or, cela n'est possible au voisinage de 0 que si $k \geq \frac{m}{2}$.
D'autre part, ici $\tau(0, v_2, \varepsilon) \approx \varepsilon^m$ ce qui donne pour tout z tel que $|z_i| \leq \tau(0, v_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 r}{\partial y_1 \partial x_2}(z) \right| &\lesssim \tau(z, v_2, \varepsilon)^{\frac{m}{2}-1} \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau(0, v_2, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cela représente un gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ par rapport à l'estimation (1.1). Cet exemple nous permet donc d'espérer un gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ par rapport à la proposition 1.3.5 lorsque l'on dérive dans la direction normale : C'est effectivement le cas comme nous allons nous employer à le démontrer.
La principale difficulté qui apparaît lorsque l'on veut obtenir ce gain, est de réussir à assurer l'uniformité des constantes qui entrent en jeu par rapport à z et ε mais aussi par rapport à la base de Diederich-Fornæss. Cela est du au fait que le type d'un domaine n'est pas continu par rapport à z et que l'ordre de contact avec les droites complexes n'est pas homogène dans toutes les directions (c'était notamment le cas dans notre exemple). C'est pourquoi ramener un cas général à une situation proche de notre exemple au moyen d'un développement de Taylor n'amène rien. Aussi, faut-il partir dans une toute autre voie que celle des travaux de J.D. McNeal ou de J. Bruna, P. Charpentier et Y. Dupain avant de pouvoir se ramener à des majorations du même genre que dans la proposition 1.3.5.

1.4.2 Travail en dimension deux

Lemme 1.4.1 *Soit*

$$\rho_0 : \left\{ \begin{array}{ccl} V \subset \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \rho_0(w) = \rho_0(0) + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1}(0)x_1 + R_0(w_1, w_2) \end{array} \right.$$

une fonction convexe de classe C^∞ *dans* V *voisinage de* $\overline{B(0,1)}$*, avec* R_0 *telle que* $R_0(0) = 0$ *et grad* $R_0(0) = 0$.
De plus, lorsque ρ_0 *est écrite sous la forme* $\rho_0(w) = \rho_0(0) + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1}(0)x_1 + P_{2r_0}(w_2) + R_0'(w)$*, où* P_{2r_0} *est un polynôme homogène non nul de degré* $2r_0$*,* $r_0 > 0$ *entier, nous supposons aussi que* R_0' *satisfait :*

$$|R_0'(w)| \leq C(|w_1|^2 + |w_1 w_2| + |w_2|^{2r_0+1}) \quad \forall w \in \overline{B(0,1)}.$$

Soit encore $m' \in \mathbb{N}$*,* $m' \geq 2r_0$.
Alors il existe $s > 0$ *suffisamment petit et* $c > 0$ *suffisamment grand tels que* quelle *que soit la fonction* $\tilde{\rho}$ *convexe de régularité* C^∞ *sur un voisinage de* $\overline{B(0,1)}$ *vérifiant :*

- $\|\tilde{\rho} - \rho_0\|_{\overline{B(0,1)}, m'+3} < s$,
- $\tilde{\rho}(w) = \tilde{\rho}(0) + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(0)x_1 + \tilde{R}(w)$ *avec* $\tilde{R}$ *et grad*$\tilde{R}$ *nuls en 0,*

nous avons pour $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$*,* $|w_1|^2 + |w_2|^2 \leq 1$ *:*

$$\left|\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y_1}(w)\right| \leq c \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m'} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \left| \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0) \right| |w_2|^j} \right), \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(w) - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(0)\right| \leq c \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m'} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \left| \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0) \right| |w_2|^j} \right). \tag{1.3}$$

Remarque *1.4.1 La condition sur* R_0' *signifie seulement que lorsque l'on écrit un développement de Taylor en 0 de* R_0 *à un ordre suffisamment grand, non seulement, il existe un terme homogène non nul en* w_2*, qu'en plus le premier terme non nul est un polynôme de degré* $2r_0$ *(son degré, par convexité de* ρ_0*, est nécessairement pair) et que* R_0' *comprend tous les autres termes ainsi que le reste. Cette condition sera satisfaite si par exemple* ρ_0 *est la fonction définissante d'un domaine convexe de type fini* $2r_0$ *dont la normale en 0 est la direction* x_1*. Le paramètre* m' *intervient car lors de la généralisation aux dimensions supérieures, nous allons devoir travailler avec différentes fonctions dont les "types finis" seront au plus celui du domaine* D.

Preuve du lemme 1.4.1 : Les deux inégalités se démontrant suivant le même schéma, nous ne montrerons que (1.3) avec tous les détails.
Pour $Q(z) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k+l=j} q_{kl} z^k \overline{z}^l$, nous posons $\|Q\| := \sum_{j=0}^{N} \sum_{k+l=j} |q_{kl}|$ et $s := \frac{\|P_{2r_0}\|}{2}$. Soit alors $\tilde{\rho}$ de classe C^∞ et convexe sur un voisinage de

$\overline{B(0,1)}$ telle que $\|\tilde\rho-\rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}<s$ et $\tilde\rho(w)=\tilde\rho(0)+\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(0)x_1+\tilde R(w)$ avec $\tilde R(0)=0$ et $grad\,\tilde R(0)=0$.
Pour $j\geq 2$, notons $\tilde P_j(w_2)=\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k,l\leq j\\ k+l=j}}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^j\tilde\rho}{\partial w_2^k\partial\overline{w_2}^l}(0)w_2^k\overline{w_2}^l$. Nous voulons donc montrer :

$$\left|\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(w)-\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(0)\right| \leq c\left(|w_1|+\sqrt{\sum_{j=2}^{m'}\|\tilde P_j\||w_2|^j}\right). \tag{1.4}$$

Soient

$$R_1(w)=\frac{\partial\tilde R}{\partial x_1}(0,w_2)+\int_0^1(1-t)\left(x_1\frac{\partial^2\tilde R}{\partial x_1^2}(tw_1,w_2)+y_1\frac{\partial^2\tilde R}{\partial x_1\partial y_1}(tw_1,w_2)\right)\mathrm{d}t,$$
$$\tilde R_1(w)=\frac{\partial\tilde R}{\partial y_1}(0,w_2)+\int_0^1(1-t)\left(x_1\frac{\partial^2\tilde R}{\partial x_1\partial y_1}(tw_1,w_2)+y_1\frac{\partial^2\tilde R}{\partial y_1^2}(tw_1,w_2)\right)\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties montre que $\tilde R(w)=x_1R_1(w)+y_1\tilde R_1(w)+\tilde R(0,w_2)$ et ainsi :

$$\tilde\rho(w)=\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(0)x_1+\tilde\rho(0,w_2)+x_1R_1(w)+y_1\tilde R_1(w). \tag{1.5}$$

Nous dérivons (1.5) par rapport à x_1 pour obtenir :

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(w) = \frac{\partial\tilde\rho}{\partial x_1}(0)+R_1(w)+x_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1}(w)+y_1\frac{\partial\tilde R_1}{\partial x_1}(w). \tag{1.6}$$

L'inégalité $\|\tilde\rho-\rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}<s$ contrôle indépendamment de $\tilde\rho$ les dérivées d'ordre 1 de $\tilde R_1$ et R_1 dans $\overline{B(0,1)}$:

$$\left|x_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1}(w)+y_1\frac{\partial\tilde R_1}{\partial x_1}(w)\right|\lesssim|w_1|. \tag{1.7}$$

Pour prouver (1.4) il reste donc à majorer R_1. C'est ici que la convexité va jouer un rôle.
Soit $v_2\in\mathbb{C}$, de module 1. Pour $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\leq 1$, nous posons $\tilde\rho_{v_2}(\alpha_1,\alpha_2):=\tilde\rho(\alpha_1,\alpha_2v_2)$.
$\tilde\rho_{v_2}$ étant la restriction d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^4$ à un plan de $\mathbb{R}^4$, elle est elle-même convexe et son hessien est positif ou nul :

$$\left(\frac{\partial^2\tilde\rho_{v_2}}{\partial\alpha_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2\tilde\rho_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\tilde\rho_{v_2}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)^2\geq 0. \tag{1.8}$$

Nous utilisons cette inégalité afin de majorer uniformément $\frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial \alpha_2}$ puis par intégration, nous majorerons $R_1(0,\alpha_2 v_2)$. Comme v_2 est arbitraire, nous aurons majoré $R_1(0,w_2)$ pour$|w_2|\leq 1$. Pour conclure, nous montrerons que $R_1(w)$ n'est qu'une variation contrôlée par $|w_1|$ de $R_1(0,w_2)$.
Nous estimons tout d'abord $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_1^2}(0,\alpha_2)$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_1^2}(0,\alpha_2)\right| &= \left|\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_1^2}(0,\alpha_2 v_2)\right| \\ &\lesssim 1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ car $\|\tilde{\rho}\|_{\overline{B(0,1)},2}\leq \|\tilde{\rho}_0\|_{\overline{B(0,1)},2}+\frac{1}{2}\|P_{2r_0}\|$.
Regardons maintenant $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}(0,\alpha_2)$:

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}(0,\alpha_2)\right| = \left|\frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial \alpha_2}\right|. \tag{1.10}$$

Il ne reste donc plus qu'à estimer $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_2^2}$. En appliquant la formule de Taylor à $\tilde{\rho}$ en 0, nous avons :

$$\tilde{\rho}(w_1,w_2)=\sum_{j=0}^{2r_0}\sum_{|I|+|J|=j}\frac{1}{I!J!}\frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w^I \partial \overline{w}^J}(0)w^I\overline{w}^J+\tilde{R}'(w_1,w_2)$$

et donc :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_{v_2}}{\partial \alpha_2^2}(0,\alpha_2)=\sum_{j=2}^{2r_0}\sum_{\substack{k,l=0\\k+l=j}}^{j}\frac{j(j-1)}{k!l!}\alpha_2^{j-2}\frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0)v_2^k\overline{v_2}^l+\frac{\partial^2 \tilde{R}'(0,\alpha_2 v_2)}{\partial \alpha_2^2}. \tag{1.11}$$

Comme $\|\tilde{\rho}-\rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}<s$, nous contrôlons les dérivées de $\tilde{\rho}$ jusqu'à l'ordre $2r_0+3$ au moins et en exprimant par exemple $\tilde{R}'$ au moyen de la formule de Taylor avec reste intégral, nous sommes assurés qu'uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ et v_2 :

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{R}'(0,\alpha_2 v_2)}{\partial \alpha_2^2}\right|\lesssim |\alpha_2|^{2r_0-1},$$

quel que soit $\alpha_2\in[0,1]$.
Encore car $\|\tilde{\rho}-\rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}<\frac{\|P_{2r_0}\|}{2}$, nous avons $\|\tilde{P}_{2r_0}\|\geq\frac{\|P_{2r_0}\|}{2}>0$ et

donc uniformément par rapport à $\tilde\rho$ et v_2 :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 \tilde R'(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2^2}\right| &\lesssim |\alpha_2|^{2r_0-2}\\ &\lesssim \|\tilde P_{2r_0}\||\alpha_2|^{2r_0-2}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Rassemblant (1.11) et (1.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\tilde\rho_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}(0,\alpha_2)\right| &\lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\|\tilde P_j\||\alpha_2|^{j-2}+\|\tilde P_{2r_0}\||\alpha_2|^{2r_0-2}\\ &\lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\|\tilde P_j\||\alpha_2|^{j-2}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Maintenant, les inégalités (1.8), (1.9), (1.10) et (1.13) amènent pour tout $\alpha_2\in[0,1]$:

$$\left(\frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}\right)^2 \lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\|\tilde P_j\||\alpha_2|^{j-2} \tag{1.14}$$

et en prenant la racine carré de (1.14) :

$$\left|\frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}\right| \lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\sqrt{\|\tilde P_j\|}|\alpha_2|^{\frac{j}{2}-1} \tag{1.15}$$

uniformément par rapport à $\tilde\rho$ et v_2.
Ensuite, nous intégrons (1.15) par rapport à α_2 : Puisque $R_1(0)=\frac{\partial\tilde R}{\partial x_1}(0)$ et $grad\,\tilde R(0)=0$, $R_1(0)$ en nul et nous obtenons :

$$\begin{aligned}|R_1(0,\alpha v_2)| &= \left|\int_0^\alpha \frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}d\alpha_2\right|\\ &\leq \int_0^\alpha\left|\frac{\partial R_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}\right|d\alpha_2\\ &\lesssim \sum_{j=2}^{m'}\|\tilde P_j\|^{\frac12}|\alpha|^{\frac{j}{2}}\\ &\lesssim \sqrt{\sum_{j=2}^{m'}\|\tilde P_j\||\alpha|^j}.\end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\alpha \in [0,1]$, uniformément par rapport à $v_2 \in \mathbb{C}$, $|v_2| = 1$, nous en déduisons :

$$|R_1(0,w_2)| \lesssim \sqrt{\sum_{j=2}^{m'} \|\tilde{P}_j\| |w_2|^j}, \tag{1.16}$$

quel que soit $w_2 \in \mathbb{C}$ tel que $|w_2| \leq 1$, uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ et w_2.
Remarquons maintenant que :

$$\begin{aligned} &|R_1(w_1,w_2) - R_1(0,w_2)| = \\ &= \left| \int_0^1 (1-t) \left(x_1 \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x_1^2}(tw_1,w_2) + y_1 \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x_1 \partial y_1}(tw_1,w_2) \right) dt \right| \\ &\lesssim |w_1|, \end{aligned} \tag{1.17}$$

toujours uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ car $\|\tilde{\rho} - \rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3} < s$.
Pour conclure, il reste à combiner (1.7), (1.16) et (1.17) dans (1.6) :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(w) - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(0) \right| \leq \\ &\leq \left| x_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_1}(w) + y_1 \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x_1}(w) \right| + |R_1(w_1,w_2) - R_1(0,w_2)| + |R_1(0,w_2)| \\ &\leq c' \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m'} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \left| \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0) \right| |w_2|^j} \right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

où c' ne dépend que de ρ_0.
La démonstration de l'inégalité (1.2) est très semblable à celle de (1.3) : Nous dérivons (1.5) par rapport à y_1 et obtenons :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y_1}(w) = \tilde{R}_1(w) + x_1 \frac{\partial R_1}{\partial y_1}(w) + y_1 \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial y_1}(w). \tag{1.19}$$

Encore une fois, l'inégalité $\|\tilde{\rho} - \rho_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3} < s$ contrôle indépendamment de $\tilde{\rho}$ les dérivées d'ordre 1 de $\tilde{R}_1$ et R_1 dans $\overline{B(0,1)}$. Par conséquent pour tout w de $\overline{B(0,1)}$:

$$\left| x_1 \frac{\partial R_1}{\partial y_1}(w) + y_1 \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial y_1}(w) \right| \lesssim |w_1|. \tag{1.20}$$

Ainsi, pour montrer l'inégalité (1.2), il reste à majorer $\tilde{R}_1$. Pour cela, nous introduisons $\tilde{\rho}'_{v_2}(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{\rho}(i\alpha_1,\alpha_2 v_2)$ où α_1 et α_2 sont des réels tels que $|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\leq 1$ et v_2 un complexe de module 1. $\tilde{\rho}'_{v_2}$ est donc une fonction convexe car c'est la restriction d'une fonction convexe. Ainsi, le hessien de $\tilde{\rho}'_{v_2}$ doit être positif ou nul :

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)^2\geq 0.$$

Nous avons :

$$\left|\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}(0,\alpha_2)\right| = \left|\frac{\partial\tilde{R}_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}\right| \tag{1.21}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_1^2}(0,\alpha_2)\right| &= \left|\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial y_1^2}(0,\alpha_2 v_2)\right|\\ &\lesssim 1,\end{aligned} \tag{1.22}$$

uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ car $\|\tilde{\rho}\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}\leq\|\tilde{\rho}_0\|_{\overline{B(0,1)},m'+3}+\frac{1}{2}\|P_{2r_0}\|$. Ensuite, $\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}(0,\alpha_2)=\frac{\partial^2\tilde{\rho}_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}(0,\alpha_2)$ et d'après (1.13), nous avons la majoration suivante :

$$\left|\frac{\partial^2\tilde{\rho}'_{v_2}}{\partial\alpha_2^2}(0,\alpha_2)\right| \lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\|\tilde{P}_j\||\alpha_2|^{j-2}. \tag{1.23}$$

(1.21), (1.22) et (1.23) donnent alors cette majoration :

$$\left|\frac{\partial\tilde{R}_1(0,\alpha_2 v_2)}{\partial\alpha_2}\right| \lesssim \sum_{j=2}^{2r_0}\sqrt{\|\tilde{P}_j\|}|\alpha_2|^{\frac{j}{2}-1}. \tag{1.24}$$

Ensuite, puisque $\tilde{R}_1(0)=\frac{\partial\tilde{R}}{\partial y_1}(0)=0$, en intégrant (1.24) comme dans le cas de R_1, nous obtenons :

$$|\tilde{R}_1(0,w_2)|\lesssim\sqrt{\sum_{j=2}^{m'}\|\tilde{P}_j\||w_2|^j}, \tag{1.25}$$

quel que soit $w_2\in\mathbb{C}$ tel que $|w_2|\leq 1$, uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$. Ensuite, l'égalité

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_1(w_1,w_2)-\tilde{R}_1(0,w_2)=\\ &=\int_0^1(1-t)\left(x_1\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial x_1\partial y_1}(tw_1,w_2)+y_1\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial y_1^2}(tw_1,w_2)\right)\mathrm{dt}\end{aligned}$$

permet la majoration

$$|\tilde{R}_1(w_1,w_2) - \tilde{R}_1(0,w_2)| \lesssim |w_1| \tag{1.26}$$

pour tout (w_1,w_2) de $\overline{B(0,1)}$, uniformément par rapport à $\tilde{\rho}$ et (w_1,w_2).
Enfin, (1.20), (1.25) et (1.26) placées dans (1.19) impliquent

$$\left|\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y_1}(w)\right| \leq c'' \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m'} \sum_{\substack{0\leq k,l\leq j\\ k+l=j}} \left|\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^j\tilde{\rho}}{\partial w_2^k\partial\overline{w_2}^l}(0)\right| |w_2|^j}\right) \tag{1.27}$$

où c'' ne dépend que de ρ_0.
Avec (1.18) et (1.27), nous obtenons (1.2) et (1.3) en posant $c = \max(c', c'')$.
□

1.4.3 Généralisation aux dimensions supérieures

Grâce à un raisonnement par compacité, nous allons étendre le lemme 1.4.1 au cas d'un domaine de $\mathbb{C}^n$.
Rappelons que D est un domaine relativement compact de $\mathbb{C}^n$, convexe, de type fini m, $\mathcal{V}$ un voisinage de bD relativement compact, r une fonction définissante de D, de classe C^∞ et convexe sur $\mathbb{C}^n$, de gradient non nul sur $\mathcal{V}$. η_ζ désigne la normale unitaire extérieure en $\zeta \in \mathcal{V}$ à $bD_{r(\zeta)}$. Nous supposons que $\mathcal{V}$ est tel que pour tout ζ dans son adhérence, $D_{r(\zeta)}$ soit encore convexe de type fini au plus m.

Proposition 1.4.2 *Pour tout $\zeta \in \mathcal{V}$, et tout $z = \zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v$, v unitaire dans $T^{\mathbb{C}}_\zeta bD_{r(\zeta)}$, $w_j \in \mathbb{C}$, $w_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, tels que $|w_1|^2 + |w_2|^2 \leq 1$, nous avons*

$$\left|\frac{\partial r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v)}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v)}{\partial x_1} - \left.\frac{\partial r(\zeta + w_1\eta_\zeta)}{\partial x_1}\right|_{w_1=0}\right| \lesssim$$

$$\lesssim \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0\leq k,l\leq j\\ k+l=j}} \frac{1}{k!l!}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta + w_2 v)}{\partial w_2^k\partial\overline{w_2}^l}\right|_{w_2=0}\right| |w_2|^j}\right) \tag{1.28}$$

uniformément par rapport à ζ, w_1, w_2 et v.

Preuve : Fixons $\zeta_0 \in \overline{\mathcal{V}}$ et $v_0 \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta_0} bD_{r(\zeta_0)}$ unitaire. Soit $\rho_{\zeta_0,v_0}(w_1,w_2) = r(\zeta_0 + w_1\eta_{\zeta_0} + w_2 v_0)$. ρ_{ζ_0,v_0} est une fonction de classe C^∞ et convexe sur un voisinage de $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{C}^2$. D'autre part, par définition, $\rho_{\zeta_0,v_0}(w) = \rho_{\zeta_0,v_0}(0) + \frac{\partial \rho_{\zeta_0,v_0}}{\partial x_1}(0)x_1 + R_0(w)$ où $R_0(0) = 0$ et $grad\, R_0(0) = 0$. Afin de vérifier la dernière hypothèse du lemme 1.4.1, nous écrivons le développement de Taylor de ρ_{ζ_0,v_0} à l'ordre m en 0 :

$$\begin{aligned}
&\rho_{\zeta_0,v_0}(w) = \\
&= \rho_{\zeta_0,v_0}(0) + \frac{\partial \rho_{\zeta_0,v_0}}{\partial x_1}(0)x_1 + \sum_{j=2}^{m} \sum_{|I|+|J|=j} \frac{1}{I!J!} \frac{\partial^j \rho_{\zeta_0,v_0}}{\partial w^I \partial \overline{w}^J}(0) w^I \overline{w}^J + o(|w|^m).
\end{aligned}$$

Comme D est de type fini m, l'ordre de contact avec la droite complexe passant par ζ_0 et portée par v_0 est majoré par m et par convexité de D, cet ordre de contact est un nombre pair. Nous le notons $2r_0$, $r_0 > 0$. Nous posons alors $P_{2r_0,0}(w_2) = \sum_{k+j=2r_0} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{2r_0} \rho_{\zeta_0,v_0}}{\partial w_2^k \partial \overline{w}_2^j}(0) w_2^k \overline{w}_2^j$. $P_{2r_0,0}$ est donc un polynôme homogène non identiquement nul et $R_0'(w) := R_0(w) - P_{2r_0,0}(w_2)$ satisfait $|R_0'(w)| \lesssim (|w_1|^2 + |w_1||w_2| + |w_2|^{2r_0+1})$.
Nous pouvons donc appliquer le lemme 1.4.1 à ρ_{ζ_0,v_0} avec $m' = m$. Cela nous fournit deux constantes s_{ζ_0,v_0} et c_{ζ_0,v_0} strictement positives telles que pour toutes fonctions $\tilde{\rho}$ convexes et classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{C}^2$, vérifiant $\|\tilde{\rho} - \rho_{\zeta_0,v_0}\|_{\overline{B(0,1)},m'+3} < s_{\zeta_0,v_0}$ et $\tilde{\rho}(w) = \tilde{\rho}(0) + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(0)x_1 + \tilde{R}(w)$ avec $\tilde{R}$ et $grad \tilde{R}$ nuls en 0, nous ayons :

$$\left|\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y_1}(w)\right| \leq \tilde{c}_{\zeta_0,v_0} \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \left| \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0) \right| |w_2|^j} \right),$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(w) - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1}(0)\right| \leq \tilde{c}_{\zeta_0,v_0} \left(|w_1| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \left| \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^j \tilde{\rho}}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}(0) \right| |w_2|^j} \right)$$

pour $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $|w_1|^2 + |w_2|^2 \leq 1$.
Comme r est de régularité C^∞, il existe un voisinage $V_{\zeta_0,v_0}(\zeta_0)$ de ζ_0 dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage $V_{\zeta_0,v_0}(v_0)$ de v_0 dans $\mathbb{C}^n$ tels que pour tout $\zeta \in V_{\zeta_0,v_0}(\zeta_0)$ et tout $v \in V_{\zeta_0,v_0}(v_0) \cap T_\zeta^{\mathbb{C}} bD_{r(\zeta)}$ unitaire, $\rho_{\zeta,v}(w) := r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v)$ qui par définition est déjà de régularité C^∞ et convexe dans un voisinage de $\overline{B(0,1)}$, satisfasse $\|\rho_{\zeta,v} - \rho_{\zeta_0,v_0}\|_{\overline{B(0,1)},m'+3} < s_{\zeta_0,v_0}$. De plus, puisque v est un vecteur de $T_\zeta^{\mathbb{C}} bD_{r(\zeta)}$, nous avons $\rho_{\zeta,v}(w) = \rho_{\zeta,v}(0) + \frac{\partial \rho_{\zeta,v}}{\partial x_1} + R(w)$ où $R(0) = 0$ et $grad R(0) = 0$. Cela implique que pour tout $\zeta \in V_{\zeta_0,v_0}(\zeta_0)$ et tout $v \in V_{\zeta_0,v_0}(v_0) \cap T_\zeta^{\mathbb{C}} bD_{r(\zeta)}$ unitaire, $\rho_{\zeta,v}$ satisfait (1.28) pour une constante

$c_{\zeta_0,v_0} = 2\tilde{c}_{\zeta_0,v_0}$ ne dépendant que de ζ_0 et v_0.
Faisons alors varier v_0 dans la sphère unité de $T^{\mathbb{C}}_{\zeta_0}bD_{r(\zeta_0)}$: nous obtenons un recouvrement de celle-ci par des voisinages $V_{\zeta_0,v}(v)$, v vecteur unitaire de $T^{\mathbb{C}}_{\zeta_0}bD_{r(\zeta_0)}$. Par compacité de la sphère unité, nous en extrayons un sous recouvrement fini $V_{\zeta_0,v_i}(v_i)$, $i = 1,\dots,N$. Posons $c_{\zeta_0} := \max\{c_{\zeta_0,v_i}, i = 1,\dots,N\}$. Encore grâce à la régularité de r, il existe un voisinage V_{ζ_0} de ζ_0 inclus dans $\bigcap_{i=1}^N V_{\zeta_0,v_i}(\zeta_0)$ tel que pour tout ζ de V_{ζ_0}, tout vecteur unitaire v de $T^{\mathbb{C}}_{\zeta}bD_{r(\zeta)}$ soit un vecteur de $\bigcup_{i=1}^N V_{\zeta_0,v_i}(v_i)$. Autrement dit, pour tout $\zeta \in V_{\zeta_0}$ et tout $v \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta}bD_{r(\zeta)}$ unitaire, l'inégalité (1.28) est vraie pour une constante c_{ζ_0} ne dépendant que de ζ_0.
Nous faisons varier ζ_0 dans $\overline{\mathcal{V}}$ pour obtenir un recouvrement de celui-ci par les V_{ζ_0}. Ensuite, par compacité de $\overline{\mathcal{V}}$, nous extrayons de ce recouvrement un sous recouvrement fini V_{ζ_i}, $i = 1,\dots,N'$ et nous considérons le maximum des c_{ζ_i}, $i = 1,\dots,N'$, afin d'obtenir (1.28) uniformément par rapport à $\zeta \in \mathcal{V}$, $v \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta}bD_{r(\zeta)}$ unitaire. □

1.4.4 Traduction en termes de distance au bord

Nous concluons maintenant les problèmes de dérivation dans la direction normale en établissant le lien entre la proposition 1.4.2 et les distances au bord de McNeal. Pour cela, nous aurons notamment besoin des propositions 1.3.2 et 1.3.4 que nous supposons donc vraies sur $\mathcal{V}$ tout entier et pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit. Nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.4.3 *Considérons ζ un point de $\mathcal{V}$. Nous appellerons* **base de Diederich-Fornæss** *en ζ toute base orthonormée complexe dont le premier vecteur est η_ζ, la normale unitaire extérieure en ζ à $bD_{r(\zeta)}$.*
Un **repère de Diederich-Fornæss** *en ζ sera un repère centré en ζ dont la base est une base de Diederich-Fornæss en ζ.*

Nous fixons ζ_0 un point de $\mathcal{V}$ et $w'_1,\dots,w'_n$ une base de Diederich-Fornæss en ζ_0. Nous notons $\zeta' = (\zeta'_1,\dots,\zeta'_n)$ les coordonnées d'un point ζ dans le repère de Diederich-Fornæss en ζ_0 associé à la base $w'_1,\dots,w'_n$.
Dans les deux prochains lemmes, nous travaillons pour toutes les bases de Diederich-Fornæss car pour estimer la décomposition de Hefer-Leray, nous définirons des bases de Diederich-Fornæss en fonctions des bases ε-extrémales de McNeal puis ferons varier ε dans l'intervalle $]0,\varepsilon_0]$. Par la suite (voir par exemple le lemme 2.3.6), nous travaillerons avec des points ζ dans des polydisques $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$. Les coordonnées $(\zeta'_1,\dots,\zeta'_n)$ de $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ dans la base de Diederich-Fornæss $w'_1,\dots,w'_n$ associée à la base ε-extrémale

satisferont $|\zeta'_j| \lesssim \tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, n$. Cela nous contraint à introduire dans les deux prochains lemmes une constante C :

Lemme 1.4.4 *Soient $C \geq 1$, $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $w'_1, \ldots, w'_n$ une base de Diederich-Fornæss en ζ_0 et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Quel que soit ζ dans $\overline{B(\zeta_0, 1)}$ tel que $|\zeta'_j| \leq C\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, n$, nous avons :*

$$\left|\frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta_0)\right| \lesssim C^{\frac{m}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

uniformément par rapport à C, ζ, ε, ζ_0 et la base $w'_1, \ldots, w'_n$.

Preuve : Soient $C, \zeta_0, w'_1, \ldots, w'_n, \varepsilon$ et ζ comme dans l'énoncé. Nous écrivons $\zeta = \zeta_0 + \lambda\eta_{\zeta_0} + \mu v$, $v \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta_0} bD_{r(\zeta_0)}$ unitaire puis nous utilisons la proposition 1.4.2 aux points $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\zeta \in \overline{B(\zeta_0, 1)}$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta_0)\right| &\lesssim \\ &\lesssim \left(|\lambda| + \sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \frac{1}{k!l!} \left|\frac{\partial^j r(\zeta_0 + w_2 v)}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}\Big|_{w_2=0}\right| |\mu|^j}\right). \qquad (1.29)\end{aligned}$$

Nous admettons provisoirement les deux majorations suivantes

$$|\lambda| \lesssim C\varepsilon, \qquad (1.30)$$
$$|\mu| \lesssim C\tau(\zeta_0, v, \varepsilon) \qquad (1.31)$$

et finissons la preuve du lemme.
La proposition 1.3.2 et (1.31) implique uniformément par rapport à ζ_0 et ε :

$$\sqrt{\sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq j \\ k+l=j}} \frac{1}{k!l!} \left|\frac{\partial^j r(\zeta_0 + w_2 v)}{\partial w_2^k \partial \overline{w_2}^l}\Big|_{w_2=0}\right| |\mu|^j} \lesssim C^{\frac{m}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

ce qui avec (1.30) et (1.29) prouve le lemme. Il reste alors à montrer (1.30) et (1.31).
Nous avons $\lambda = \zeta'_1$ et d'après la proposition 1.3.4, nous avons $\tau(\zeta_0, w'_1, \varepsilon) \approx \varepsilon$, par conséquent (1.30) est donc vraie.
La démonstration de (1.31) va être une conséquence géométrique de la convexité de $D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$. Nous commençons par montrer que l'ensemble $\{z \in$

$\mathbb{C}^n, |z'_j| \leq \frac{1}{2n}\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon),\ \ j = 1, \dots, n\}$ est inclus dans $\overline{D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}}$
Pour α réel, nous posons $signe(\alpha) = 1$ lorsque $\alpha > 0$, $signe(\alpha) = 0$ lorsque $\alpha = 0$ et $signe(\alpha) = -1$ lorsque $\alpha < 0$.
Soit z un point de $\mathbb{C}^n$ satisfaisant $|z'_j| \leq \frac{1}{2n}\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$ pour $j = 1, \dots, n$. Nous définissons les $2n$ points suivants : $p_j = \zeta_0 + signe(\Re z'_j)\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)w'_j$ et $p'_j = \zeta_0 + i\, signe(\Im z'_j)\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)w'_j$, $j = 1, \dots, n$. Alors z est le barycentre des points $p_1, p'_1, \dots, p_n, p'_n$ et ζ_0 affectés respectivement des poids $\frac{|\Re z'_1|}{\tau(\zeta_0, w'_1, \varepsilon)}$, $\frac{|\Im z'_1|}{\tau(\zeta_0, w'_1, \varepsilon)}, \dots, \frac{|\Re z'_n|}{\tau(\zeta_0, w'_n, \varepsilon)}, \frac{|\Im z'_n|}{\tau(\zeta_0, w'_n, \varepsilon)}$ et $1 - \sum_{j=1}^n \frac{|\Re z'_j|}{\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)} + \frac{|\Im z'_j|}{\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)}$. Puisque tous les poids de ce système sont positifs, cela signifie que z appartient à l'enveloppe convexe des points $p_1, p'_1, \dots, p_n, p'_n, \zeta_0$ qui appartiennent eux-mêmes au convexe $\overline{D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}}$. Ainsi z est un point de $\overline{D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}}$, ce qui montre que $\{z \in \mathbb{C}^n, |z'_j| \leq \frac{1}{2n}\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon),\ \ j = 1, \dots, n\}$ est inclus dans $\overline{D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}}$.
Grâce à cette inclusion, nous allons montrer (1.31).
Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ arbitraire. Le point $\zeta_0 + \frac{1}{2nC}\mu e^{i\theta} v$ a pour coordonnées $(0, \frac{1}{2nC}e^{i\theta}\zeta'_2, \dots, \frac{1}{2nC}e^{i\theta}\zeta'_n)$ dans le repère de Diederich-Fornæss en ζ_0 associé à la base $w'_1, \dots, w'_n$. Ainsi, puisque ζ a été choisi de sorte que, pour $j = 1, \dots, n$, nous ayons $|\zeta'_j| \leq C\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$, $\zeta_0 + \frac{1}{2nC}\mu e^{i\theta} v$ appartient à $\{z \in \mathbb{C}^n, |z'_j| \leq \frac{1}{2n}\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon),\ \ j = 1, \dots, n\} \subset \overline{D_{r(\zeta_0)+\varepsilon}}$ et donc $r(\zeta_0 + \frac{1}{2nC}\mu e^{i\theta} v) \leq \varepsilon + r(\zeta_0)$. Comme θ est arbitraire, par définition de la distance de ζ_0 au bord $bD_{r(\zeta_0)+\varepsilon}$ dans la direction v, nous en déduisons que $\frac{1}{2nC}|\mu| \leq \tau(\zeta_0, v, \varepsilon)$, ce qui montre (1.31). $\square$

Proposition 1.4.5 *Soient des multi-indices* α_0 *et* β_0 *tels que* $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. *Il existe* $c_{\alpha_0,\beta_0} > 0$ *tel que quels que soient* $C \geq 1$, $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $w'_1, \dots, w'_n$ *une base de Diederich-Fornæss en* ζ_0, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\zeta \in \overline{B(\zeta_0, 1)}$ *avec* $|\zeta'_j| \leq C\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$ *pour tout* j*, nous ayons :*

$$\left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r}{\partial w'_1 \partial w'^{\alpha_0} \partial \overline{w'}^{\beta_0}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r}{\partial \overline{w}'_1 \partial w'^{\alpha_0} \partial \overline{w'}^{\beta_0}}(\zeta)\right| \leq \frac{c_{\alpha_0,\beta_0} C^{\frac{m}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^n \tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)^{\alpha_i+\beta_i}}.$$

Remarque 1.4.2 Précisons bien que dans la proposition 1.4.5, c_{α_0,β_0} *est uniforme par rapport à* C, ε, ζ, ζ_0 *et la base* $w'_1, \dots, w'_n$.
D'autre part, comme nous l'espérions lorsque nous avons étudié un exemple, l'estimation de la proposition 1.4.5 apporte un gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ *par rapport à celle de la proposition 1.3.5.*

Preuve de la proposition 1.4.5 : Soient C, ζ_0, $w'_1, \dots, w'_n$, α_0, β_0, ε et ζ comme dans l'énoncé de la proposition. Nous montrons tout d'abord l'inégalité :

$$\left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|}r}{\partial w'_1 \partial w'^{\alpha_0} \partial \overline{w'}^{\beta_0}}(\zeta)\right| \lesssim c'_{\alpha_0,\beta_0} \frac{C^{\frac{m}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^n \tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)^{\alpha_i+\beta_i}}, \tag{1.32}$$

c'_{α_0,β_0} ne dépendant que de α_0 et β_0.
Nous appliquons la formule de Taylor à $\frac{\partial r}{\partial w'_1}$ en ζ_0 à l'ordre $|\alpha_0| + |\beta_0| + \frac{m}{2}$ et obtenons :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta_0) = \\ &\quad = \sum_{j=1}^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{j+1}r}{\partial w'_1 \partial w'^{\alpha} \partial \overline{w'}^{\beta}}(\zeta_0)\zeta'^{\alpha}\overline{\zeta}'^{\beta} + o(|\zeta'|^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}}).\end{aligned}$$

Puisque ζ est tel que pour tout j $|\zeta'_j| \leq C\tau(\zeta_0, w'_j, \varepsilon)$, nous avons $|\zeta - \zeta_0| \lesssim C\varepsilon^{\frac{1}{m}}$, d'où $|o(|\zeta'|^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}})| \lesssim C^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ uniformément par rapport à ζ_0, ζ, C et ε. De plus, ζ appartient à $\overline{B(\zeta_0, 1)}$ et nous pouvons donc appliquer le lemme 1.4.4, ce qui implique :

$$\left|\sum_{j=1}^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{j+1}r}{\partial w'_1 \partial w'^{\alpha} \partial \overline{w'}^{\beta}}(\zeta_0)\zeta'^{\alpha}\overline{\zeta}'^{\beta}\right| \lesssim C^{\frac{m}{2}+|\alpha_0|+|\beta_0|}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Nous normalisons alors en posant $\xi_i := \frac{\zeta'_i}{C\tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)}$ et nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{C^j}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{j+1}r}{\partial w'_1 \partial w'^{\alpha} \partial \overline{w'}^{\beta}}(\zeta_0)\xi^{\alpha}\overline{\xi}^{\beta} \prod_{i=1}^n \tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)^{\beta_i+\alpha_i}\right| \lesssim \\ &\qquad \lesssim C^{\frac{m}{2}+|\alpha_0|+|\beta_0|}\varepsilon^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

pour tout ξ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $|\xi_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.
Nous utilisons maintenant une propriété des espaces vectoriels de dimension finie. Considérons F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ constitué des polynômes à coefficients complexes de degré au plus $|\alpha_0| + |\beta_0| + \frac{m}{2}$, muni des deux normes suivantes :

$$\|P\|_\star := \sup_{|\xi_1|,\dots,|\xi_n|\leq 1} |P(\xi_1, \dots, \xi_n)|$$

et
$$\|P\|_\bullet := \sup_{|\alpha|+|\beta|\le|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} |P_{\alpha,\beta}|.$$
où $P(\xi)=\sum_{|\alpha|+|\beta|\le|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} P_{\alpha,\beta}\xi^\alpha\overline{\xi}^\beta$.
Alors F étant de dimension finie, les deux normes $\|\cdot\|_\bullet$ et $\|\cdot\|_\star$ sont équivalentes : il existe une constante $\tilde{c}_{\alpha_0,\beta_0}$ telle que pour tout P de F, nous ayons
$$\|P\|_\bullet \le \tilde{c}_{\alpha_0,\beta_0}\|P\|_\star.$$
$\sum_{j=1}^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}}\sum_{|\alpha|+|\beta|=j}\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{j+1}r}{\partial w_1'\partial w'^\alpha\partial\overline{w'}^\beta}(\zeta_0)\prod_{i=1}^n(C\tau(\zeta_0,w_i',\varepsilon))^{\beta_i+\alpha_i}\xi^\alpha\overline{\xi}^\beta$ est un polynôme en ξ de degré au plus $|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}$. Nous en déduisons que pour tous multi-indices α et β avec $|\alpha|+|\beta|\le|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}$ nous avons
$$\left|\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+1}r}{\partial w_1'\partial w'^\alpha\partial\overline{w'}^\beta}(\zeta_0)\right| \lesssim \tilde{c}_{\alpha_0,\beta_0}\frac{C^{\frac{m}{2}+|\alpha_0|+|\beta_0|}\varepsilon^{\frac12},}{\prod_{i=1}^n(\tau(\zeta_0,w_i',\varepsilon)C)^{\alpha_i+\beta_i}} \tag{1.33}$$
ce qui, en particulier, montre (1.32) lorsque $\zeta=\zeta_0$. Pour établir le cas général, nous effectuons un développement de Taylor à l'ordre $\frac{m}{2}$ en ζ_0 de $\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|}r}{\partial w_1'\partial w'^{\alpha_0}\partial\overline{w'}^{\beta_0}}$. Nous obtenons :
$$\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|}r}{\partial w_1'\partial w'^{\alpha_0}\partial\overline{w'}^{\beta_0}}(\zeta) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}}\sum_{|\alpha|+|\beta|=j}\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|+j}r}{\partial w_1'\partial w'^{\alpha+\alpha_0}\partial\overline{w'}^{\beta+\beta_0}}(\zeta_0)\zeta'^\alpha\overline{\zeta'}^\beta + o(|\zeta-\zeta_0|^{\frac{m}{2}}).$$
Comme, quel que soit j, $|\zeta_j'|\le C\tau(\zeta_0,w_j',\varepsilon)$, nous avons toujours $o(|\zeta-\zeta_0|^{\frac{m}{2}})\lesssim C^{\frac{m}{2}}\varepsilon^{\frac12}$ et en appliquant (1.33), nous obtenons l'existence de $c'_{\alpha_0,\beta_0}>0$ ne dépendant pas de ζ, ζ_0, ε et C mais de α_0 et β_0 tel que
$$\left|\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|}r}{\partial w_1'\partial w'^{\alpha_0}\partial\overline{w'}^{\beta_0}}(\zeta)\right| \le c'_{\alpha_0,\beta_0}C^{\frac{m}{2}}\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\prod_{i=1}^n\tau(\zeta_0,w_i',\varepsilon)^{(\alpha_0)_i+(\beta_0)_i}}.$$
L'inégalité sur $\frac{\partial^{|\alpha_0|+|\beta_0|+1}r}{\partial\overline{w_1'}\partial w'^{\alpha_0}\partial\overline{w}'^{\beta_0}}(\zeta)$ se montre pareillement :
Nous effectuons un développement de Taylor de $\frac{\partial r}{\partial\overline{w}_1'}$ en ζ_0 à l'ordre $|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}$ et obtenons
$$\frac{\partial r}{\partial\overline{w}_1'}(\zeta)-\frac{\partial r}{\partial\overline{w}_1'}(\zeta_0)=$$

$$= \sum_{j=1}^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{j+1} r}{\partial \overline{w}'_1 \partial w'^\alpha \partial \overline{w}'^\beta}(\zeta_0)\zeta'^\alpha \overline{\zeta}'^\beta + o(|\zeta'|^{|\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}}).$$

Le lemme 1.4.4 permet de majorer la différence $\frac{\partial r}{\partial \overline{w}'_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial \overline{w}'_1}(\zeta_0)$ par $C^{\frac{m}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Ensuite, en utilisant l'équivalence des normes $\|\cdot\|_\star$ et $\|\cdot\|_\bullet$, nous en déduisons pour tous les multi-indices α et β tels que $|\alpha|+|\beta| \leq |\alpha_0|+|\beta_0|+\frac{m}{2}$:

$$\left| \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+1} r}{\partial \overline{w}'_1 \partial w'^\alpha \partial \overline{w}'^\beta}(\zeta_0) \right| \lesssim \tilde{c}_{\alpha_0,\beta_0} \frac{C^{\frac{m}{2}+|\alpha_0|+|\beta_0|}\varepsilon^{\frac{1}{2}},}{\prod_{i=1}^n (\tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)C)^{\alpha_i+\beta_i}}.$$

En effectuant encore un développement de Taylor en ζ_0 de $\frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r}{\partial \overline{w}'_1 \partial w'^{\alpha_0} \partial \overline{w}'^{\beta_0}}(\zeta)$ à l'ordre $\frac{m}{2}$, nous en déduisons l'inégalité

$$\left| \frac{\partial^{1+|\alpha_0|+|\beta_0|} r}{\partial \overline{w}'_1 \partial w'^{\alpha_0} \partial \overline{w}'^{\beta_0}}(\zeta) \right| \leq c'_{\alpha_0,\beta_0} C^{\frac{m}{2}} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\prod_{i=1}^n \tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)^{(\alpha_0)_i+(\beta_0)_i}}$$

pour un c'_{α_0,β_0} peut-être différent du précédent. Pour conclure, il suffit alors choisir de c_{α_0,β_0} égal à la somme des 2 constantes c'_{α_0,β_0}. □

1.5 Une fonction de support

1.5.1 Fonctions locale et globale

Nous allons donner ici la définition de la fonction de support que nous utiliserons ainsi que ses principales propriétés. D désigne toujours un domaine convexe et borné dans $\mathbb{C}^n$, de type fini m, $\mathcal{V}$ un voisinage borné de bD et r une fonction définissante globale de D, convexe, de régularité C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ et de gradient non nul sur $\overline{\mathcal{V}}$. Soit $\zeta \in \mathcal{V}$, $w'_1, \ldots, w'_n$ une base de Diederich-Fornæss en ζ. Afin de bien marquer la dépendance par rapport à ζ, nous notons $r_\zeta(\omega) := r(\zeta + \omega_1 w'_1 + \ldots + \omega_n w'_n)$.
Nous posons alors :

$$F_\zeta(\omega) := 3\omega_1 + K\omega_1^2 - K' \sum_{j=2}^m \kappa_j M^{2^j} \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_1=0}} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^j r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\omega^\beta$$

où K, K', M sont des réels, $\kappa_j = 1$ si $j \equiv 0 \, mod\, 4$, -1 si $j \equiv 2 \, mod\, 4$ et 0 sinon.

Pour z appartenant à $\mathbb{C}^n$, nous notons $\omega_z = (\omega_{z,1}, \dots, \omega_{z,n})$ les coordonnées de z dans le repère centré en ζ et de base $w_1', \dots, w_n'$ et définissons $F(\zeta, z)$ par :

$$F(\zeta, z) := F_\zeta(\omega_z).$$

Remarquons que F ne dépend pas de la base de Diederich-Fornæss en ζ et est donc bien définie.
Le prochain théorème nous donne l'existence des constantes K, K' et M et d'un voisinage de bD, que nous noterons encore $\mathcal{V}$, de sorte que F soit une fonction de support locale. L'énoncé que nous donnerons est celui de [2]. Il diffère de celui du théorème 2.3 de [9] donné par K. Diederich et J.E. Fornæss dans la mesure où ces derniers travaillaient uniquement pour ζ dans bD et z dans D alors que notre énoncé considère en fait une famille de domaines et laisse z aller au delà de $D_{r(\zeta)}$. Nous avons besoin de cette forme pour donner dans le théorème 1.5.2 une version globalisée de cette fonction de support.

Théorème 1.5.1 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de bD, M, K, K', k', c_+, c_- et R' des réels strictement positifs tels que $c_+ < c_-$ et pour tout $\zeta \in \mathcal{V}$, tout $v \in T_\zeta^{\mathbb{C}} bD_{r(\zeta)}$ vecteur unitaire, tout $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $|w| < R'$, nous ayons :*

$$\begin{aligned}
&\Re F(\zeta, \zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v) \leq \\
&\quad \leq \ -\left|\frac{\Re w_1}{2}\right| - \frac{K}{2}(\Im w_1)^2 - \frac{K'k'}{4}\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\lambda v)}{\partial\lambda^\alpha\partial\overline{\lambda}^\beta}\right|_{\lambda=0}\right||w_2|^j \\
&\qquad +c_+(r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v) - r(\zeta))
\end{aligned}$$

si $r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v) - r(\zeta) \geq 0$ et sinon :

$$\begin{aligned}
&\Re F(\zeta, \zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v) \leq \\
&\quad \leq \ -\left|\frac{\Re w_1}{2}\right| - \frac{K}{2}(\Im w_1)^2 - \frac{K'k'}{4}\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\lambda v)}{\partial\lambda^\alpha\partial\overline{\lambda}^\beta}\right|_{\lambda=0}\right||w_2|^j \\
&\qquad +c_-(r(\zeta + w_1\eta_\zeta + w_2 v) - r(\zeta)).
\end{aligned}$$

Preuve : Voir [2] ou l'article de K. Diederich et J.E. Fornæss : [9]. □
Cette fonction présente cependant un défaut. Bien que F soit définie globalement, les inégalités du théorème 1.5.1 n'assurent pas globalement que $F(\zeta, z) \neq 0$ pour $z \neq \zeta$ mais seulement localement. Il faut en toute rigueur globaliser la fonction pour assurer cette propriété.

Théorème 1.5.2 *Il existe des voisinages $\mathcal{V}$ de bD et $\mathcal{U}$ de $\overline{D}$ et deux applications*

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V}\times\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\zeta,z) & \longmapsto & S(\zeta,z) \end{array} \right.$$

et

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \left\{(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}, |\zeta-z|<\frac{R}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\zeta,z) & \longmapsto & A(\zeta,z) \end{array} \right. ,$$

où $R' \geq R > 0$, R' le réel donné par le théorème 1.5.1 tels que :

(i) A et S sont de régularité C^∞ et holomorphe en z pour ζ fixé.

(ii) $\Re S(\zeta,z) \lesssim -|\zeta-z|^m$ pour tout $(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}$ avec $r(z)\leq r(\zeta)$.

(ii) Pour tout $(z,\zeta)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ tel que $|\zeta-z|<\frac{R}{2}$, $S(\zeta,z)=A(\zeta,z)F(\zeta,z)$.

(iv) $\frac{1}{2}\leq|A(\zeta,z)|\leq 2$ pour tout $(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}$ avec $|\zeta-z|<\frac{R}{2}$ et toutes les dérivées de A sont bornées sur $\left\{(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}, |\zeta-z|<\frac{R}{2}\right\}$.

De plus, si $|\zeta-z|\leq\frac{R}{2}$, $A(\zeta,z)=\frac{1}{1+(m'-v(\zeta,z))F(\zeta,z)}$ où m' est un réel et v une fonction de classe C^∞ bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{U}$ dont toutes les dérivées sont elles aussi bornées sur $\mathcal{V}\times\mathcal{U}$.

Preuve : Nous ne donnons pas tous les détails des calculs car ces derniers ont été faits dans [2] et que ces calculs eux-mêmes sont inspirés de la preuve de la proposition 3.1, chapitre VII du livre de R.M. Range [24].
Le théorème 1.5.1 implique l'existence d'une constante $c>0$ telle que pour tout ζ de $\mathcal{V}$, tout z vérifiant $|\zeta-z|<R'$

$$\Re F(\zeta,z) \quad\leq\quad -c|\zeta-z|^m + c_+(r(z)-r(\zeta)) \tag{1.34}$$

si $r(z)\geq r(\zeta)$ et sinon

$$\Re F(\zeta,z) \quad\leq\quad -c|\zeta-z|^m + c_-(r(z)-r(\zeta)). \tag{1.35}$$

Nous tronquons F au moyen d'une fonction χ de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\chi(z)=0$ si $|z|\geq R'$, $\chi(z)=1$ si $|z|\leq\frac{2R'}{3}$ et $0\leq\chi(z)\leq 1$ pour tout z de $\mathbb{C}^n$ et posons :

$$\hat{S}(\zeta,z)=\chi(\zeta-z)F(\zeta,z)-c(1-\chi(\zeta-z))|\zeta-z|^m.$$

Cette définition entraîne que $\Re\hat{S}(\zeta,z)$ est strictement négative pour tous les ζ et z de $\mathbb{C}^n$ tels que $|\zeta-z|\geq R'$ et pour tous les z de $\mathbb{C}^n$ et tous les ζ de $\mathcal{V}$ tels que $r(\zeta)\geq r(z)$ et $0<|\zeta-z|\leq R'$.
m étant pair, la fonction $\hat{S}$ reste une fonction de classe C^∞. Cependant,

pour ζ fixé, elle n'est holomorphe en z que si $|\zeta - z| < \frac{R'}{2}$. Comme dans [24], nous remédions à cela en résolvant une équation $\overline{\partial}$ à paramètres.
Nous prolongeons la forme $\overline{\partial}_z \frac{1}{\hat{S}}$ en une forme différentielle α de classe C^∞ et $\overline{\partial}_z$-fermée sur un voisinage de $bD \times \overline{D}$ telle que $\alpha(\zeta, z) = 0$ lorsque $|\zeta - z| < \frac{R'}{2}$. Nous appliquons à α le théorème 2.5 du chapitre V de [24] selon lequel il existe une forme différentielle v, de classe C^∞ sur un voisinage de $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ de $bD \times \overline{D}$ ($\mathcal{V}$ peut-être plus petit que le précédent) telle que $\overline{\partial}_z v = \alpha$ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$. Remarquons que v est holomorphe par rapport à z lorsque $|\zeta - z| < \frac{R'}{2}$. Quitte à rétrécir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$, nous supposons que v et toutes ses dérivées sont bornées sur $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$. Soit alors $m' = \inf_{(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}} \Re v(\zeta, z)$.
Nous posons $u = \frac{1}{\hat{S}} + m' - v$. Alors u est définie, holomorphe par rapport à z pour ζ fixé et de classe C^∞ sur $\{(\zeta, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U},\ \Re\hat{S}(\zeta, z) < 0\}$. De plus $u(\zeta, z)$ est non nul quand $\Re\hat{S}(\zeta, z) < 0$ car $\Re u(\zeta, z) \leq \frac{\Re\hat{S}(\zeta,z)}{|\hat{S}(\zeta,z)|^2}$.
Enfin, lorsque $\Re\hat{S}(\zeta, z)$ est strictement négatif, nous posons

$$S(\zeta, z) = \frac{1}{u(\zeta, z)}.$$

Ainsi, S est bien définie, holomorphe en z pour ζ fixé et de régularité C^∞ sur l'ensemble des couples $(\zeta, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ ($\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ peut-être plus petit que le précédent), tels que $|\zeta - z| \geq \frac{R'}{4}$ car $\Re\hat{S}$ y est strictement négative dès que $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ est suffisamment petit. Cependant, S n'est à priori pas définie lorsque $\zeta = z$ mais nous allons lui trouver un prolongement très naturel.
Puisque $F(\zeta, \zeta) = 0$, l'uniforme continuité de F sur un voisinage borné $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ de $bD \times \overline{D}$ peut-être plus petit que le précédent, implique que si $|\zeta - z| < \frac{R}{2}$, $R \in]0, R']$ suffisamment petit, nous avons $|m' - v(\zeta, z)||F(\zeta, z)| < \frac{1}{2}$. Nous posons alors $A(\zeta, z) = \frac{1}{1+(m'-v(\zeta,z))F(\zeta,z)}$ pour tous les (ζ, z) de $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ tel que $|\zeta - z| < \frac{R}{2}$. A est une fonction holomorphe en z, de classe C^∞, majorée par 2 et minorée par $\frac{1}{2}$ et dont toutes les dérivées sont bornées sur $\left\{(\zeta, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U}, |\zeta - z| < \frac{R}{2}\right\}$.
Remarquons maintenant que pour ζ fixé, la fonction AF est holomorphe par rapport à z, de classe C^∞ et prolonge S lorsque $|\zeta - z| < \frac{R}{2}$.
Ainsi S est bien définie, holomorphe par rapport à z et de régularité C^∞ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$.
Enfin, puisque $\Re S \leq \frac{\Re\hat{S}}{|\hat{S}|^2|u|^2}$, nous avons bien $\Re S(\zeta, z) \lesssim -|\zeta - z|^m$ pour tous les (ζ, z) de $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ tel que $r(z) \leq r(\zeta)$. □

Afin de faciliter l'application de ces théorèmes conjointement aux propositions 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5 et 1.4.5 et au lemme 1.4.4, nous introduisons la notation suivante :

Notation 1.5.3 *Nous dirons que $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet si :*

(a) D est un domaine convexe relativement compact de $\mathbb{C}^n$ de type fini m, r est une fonction définissante globale de D, convexe et de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n$.

(b) $\mathcal{V}$ est un voisinage relativement compact de bD, contenu dans le voisinage $\mathcal{V}$ du théorème 1.5.2, tel que pour tout z dans son adhérence, $\operatorname{grad} r(z)$ soit non nul et $D_{r(z)}$ convexe de type fini au plus m.

(c) ε_0 est un réel srtictement positif tel que quels que soient $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $z \in \mathcal{V}$, $\mathcal{P}_\varepsilon(z)$ soit inclus dans $B(z, \min(1, \frac{R}{4}))$.

(d) $\mathcal{V}$ et ε_0 sont tels que les propositions 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5 et 1.4.5, le lemme 1.4.4 et le corollaire A.2.3 soient vrais sur $\mathcal{V}$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.

(e) Il existe $c(\varepsilon_0) > 0$ tel que pour tout z de $\mathcal{V}$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\left|\frac{\partial r}{\partial u_1}(\zeta)\right| \geq c(\varepsilon_0)$ et $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right| \geq c(\varepsilon_0)$, quel que soit ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z)$, u_1 direction normale réelle à $bD_{r(z)}$ en z et w_1^* premier vecteur d'une base ε-extrémale en z.

Remarquons que la condition (e) n'est pas trop restrictive : à partir du moment où r est de gradient non nul sur bD, il existe toujours un tel voisinage $\mathcal{V}$ et de tels nombres ε_0 et $c(\varepsilon_0)$.

1.5.2 Section de Hefer-Leray de S

Nous allons définir ici la décomposition de Hefer-Leray de S. Dans [8], K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss utilisaient la fonction de support explicite F et pouvaient simplement obtenir une section explicite. Ici, nous utiliserons la version globale S qui n'est plus explicite à cause de la globalisation. Pour définir la section de Hefer-Leray, nous sommes alors contraints d'employer une méthode plus abstraite et définissons la section par une intégrale.

Nous supposons que le domaine de définition $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ de S est tel que $\mathcal{V}$ soit inclus dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ soit convexe.

Nous fixons U une matrice unitaire arbitraire. Pour $\omega \in \mathbb{C}^n$, lorsque cela est possible (c'est-à-dire si $\zeta + U\omega$ appartient à $\mathcal{U}$), nous posons :

$$\Sigma(\zeta, \omega) = S(\zeta, \zeta + U\omega).$$

Supposons pour l'instant être capable d'écrire Σ sous la forme :

$$\Sigma(\zeta,\omega) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\zeta,\omega)\omega_j, \tag{1.36}$$

alors pour tout $(\zeta,z) \in \mathcal{V}\times\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
S(\zeta,z) &= \Sigma(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta)) \left[\overline{U}^t(z-\zeta)\right]_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{U_{ij}}\sigma_j(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta))\right)(z_i-\zeta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{U}\sigma(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta))\right]_i (z_i-\zeta_i)
\end{aligned}$$

où $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$. Il suffirait alors de poser $Q(\zeta,z) = -\overline{U}\sigma(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta))$ pour avoir sur $\mathcal{V}\times\mathcal{U}$:

$$S(\zeta,z) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i(\zeta,z)(\zeta_i - z_i).$$

Encore faut-il écrire Σ sous la forme (1.36) : Soient $\zeta\in\mathcal{V}$, $\omega\in\mathbb{C}^n$ tel que $\zeta+U\omega$ soit dans $\mathcal{U}$.
Puisque nous avons supposé $\mathcal{V}$ inclus dans $\mathcal{U}$, ζ appartient à $\mathcal{U}$ et par convexité de $\mathcal{U}$, $\zeta+tU\omega$ appartient à $\mathcal{U}$ pour tout $t\in[0,1]$. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\Sigma(\zeta,\omega) &= \Sigma(\zeta,\omega) - \Sigma(\zeta,0) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial\Sigma(\zeta,t\omega)}{\partial t} dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega_j \int_0^1 \frac{\partial\Sigma}{\partial\omega_j}(\zeta,t\omega)dt.
\end{aligned}$$

Nous posons $\sigma_j(\zeta,\omega) := \int_0^1 \frac{\partial\Sigma}{\partial\omega_j}(\zeta,t\omega)dt$ et nous obtenons (1.36).
Dans notre cas, afin de pouvoir profiter au maximum des propriétés de S, il faudra introduire une matrice $U(\zeta)$, dépendante de ζ, qui soit une matrice de passage vers une base de Diederich-Fornæss en ζ.

Mais avant tout, vérifions tout de même que Q ne dépend pas de U : Soit U' une autre matrice unitaire. Nous posons :

$$\begin{aligned}\Sigma'(\zeta,\omega') &= S(\zeta,\zeta+U'\omega')\\ \sigma'_j(\zeta,\omega') &= \int_0^1 \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega'_j}(\zeta,t\omega')dt.\end{aligned}$$

Nous avons donc $\Sigma(\zeta,\omega)=\Sigma'(\zeta,\overline{U'}^tU\omega)$ et

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\omega_i}(\zeta,\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Sigma'}{\partial\omega'_j}(\zeta,\overline{U'}^tU\omega)\sum_{k=1}^n \overline{U'}_{kj}U_{ki}.$$

Ainsi

$$\sigma_i(\zeta,\omega) = \sum_{j,k=1}^n \overline{U'}_{kj}U_{ki}\sigma'_j(\zeta,\overline{U'}^tU\omega)$$

et pour $l=1,\dots,n$, puisque U et U' sont unitaires,

$$\begin{aligned}Q_l(\zeta,z) &= -\sum_{i=1}^n \overline{U}_{li}\sigma_i(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta))\\ &= -\sum_{i=1}^n \overline{U}_{li}\sum_{j,k=1}^n \overline{U'}_{kj}U_{ki}\sigma'_j(\zeta,\overline{U'}^t(z-\zeta))\\ &= -\sum_{j,k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n \overline{U}_{li}U_{ki}\right)\overline{U'_{kj}}\sigma'_j(\zeta,\overline{U'}^t(z-\zeta))\\ &= -\sum_{j=1}^n \overline{U'}_{lj}\sigma'_j(\zeta,\overline{U'}^t(z-\zeta)).\end{aligned}$$

Nous avons donc toute latitude quant au choix de la matrice U : reste à faire le bon choix !

Résumons tout cela dans la proposition suivante.

Proposition 1.5.4 *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ deux ouverts, $\mathcal{U}$ convexe contenant $\mathcal{V}$. Soit $S\in C^1(\mathcal{V}\times\mathcal{U})$ satisfaisant $S(\zeta,\zeta)=0$ pour tout ζ de $\mathcal{V}$. Soit encore U une matrice unitaire. Nous posons $\Sigma(\zeta,\omega)=S(\zeta,\zeta+U\omega)$, $\sigma_i(\zeta,\omega)=\int_0^1\frac{\partial\Sigma}{\partial\omega_i}(\zeta,t\omega)dt$ et $Q(\zeta,z)=-\overline{U}\sigma(\zeta,\overline{U}^t(z-\zeta))$.*
Alors pour tout $(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{U}$, $S(\zeta,z)=\sum_{i=1}^n Q_i(\zeta,z)(\zeta_i-z_i)$ et Q ne dépend pas de U.

Remarquons qu'en appliquant cette méthode à la fonction de support locale F utilisée dans [8] avec une matrice $U = U(\zeta)$ telle que $U\eta_\zeta = (1, 0, \dots, 0)$, nous obtenons la même section de Hefer-Leray que K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss. Ici, nous sommes obligés de définir notre section par le biais d'une intégrale car à cause de la globalisation, nous ne connaissons pas explicitemment S, alors que dans [8] la fonction de support était explicite.

1.5.3 Famille de bases de Diederich-Fornæss

La fonction de support locale du théorème 1.5.1 et par suite celle du théorème 1.5.2 ainsi que sa décomposition de Hefer-Leray sont fortement liées aux bases de Diederich-Fornæss. Aussi, pour pouvoir travailler avec, il nous faut définir une famille de base de Diederich-Fornæss au voisinage d'un point quelconque du bord de D. Nous allons construire ces familles de bases en utilisant les bases extrémales de McNeal. Ensuite, comme nous devrons dériver la fonction de support et sa décomposition de Hefer-Leray, il faudra tenir compte des variations du repère, c'est pour cela que nous dériverons aussi les coordonnées des vecteurs.
Soit $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ un bon quintuplet.
Nous fixons $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et une base ε-extrémale en ζ_0 : $w_1^*, \dots, w_n^*$.
Nous notons $\zeta^* = (\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*)$ les coordonnées de $\zeta \in \mathbb{C}^n$ dans le repère ε-extrémal en ζ_0 de base $w_1^*, \dots, w_n^*$.
Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, nous allons définir $\Psi^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)$, matrice de passage de la base $w_1^*, \dots, w_n^*$ vers une base de Diederich-Fornæss en ζ.
Il existe $c(\varepsilon_0) > 0$ (ne dépendant que du quintuplet $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$) tel que $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right| \geq c(\varepsilon_0)$ pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$. Nous pouvons alors poser :

$$\begin{aligned}
\nu_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) &:= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right|^2}} \frac{\partial r}{\partial w_j^*}(\zeta), \quad j = 1, \dots, n,\\
A_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) &:= 1 - \sum_{k=2}^j |\nu_k^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)|^2, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

η_ζ a alors $(\overline{\nu_1^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)}, \dots, \overline{\nu_n^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)})$ pour coordonnées dans la base $w_1^*, \dots, w_n^*$.
Nous définissons la matrice $\Psi^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)$ par :

$$\Psi_{1i}^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) := \nu_i^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) \text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

et si $j > 1$:

$$\Psi_{ji}^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{A_{j-1}^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)A_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)}} \begin{cases} -\overline{\nu_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)}\nu_1^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } 1<i<j \\ A_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) & \text{si } i=j \\ -\overline{\nu_j^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)}\nu_i^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta) & \text{si } i>j \end{cases}.$$

Une matrice semblable a déjà été définie dans [8]. Cependant, K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss ne travaillaient que sur le bord du domaine et pouvaient de ce fait imposer que r ait un gradient normé sur le bord. Comme il ne nous est pas possible de faire une telle hypothèse, nous devons normaliser en divisant par $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right|^2}$. Nous allons maintenant montrer que notre matrice $\Psi^{\zeta_0,\varepsilon}$ a les mêmes propriétés que celle de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss.

Puisqu'ici ζ_0 et ε sont fixés, nous noterons plus simplement $\Psi := \Psi^{\zeta_0,\varepsilon}$, $\nu_j := \nu_j^{\zeta_0,\varepsilon}$ et $A_j := A_j^{\zeta_0,\varepsilon}$.

Proposition 1.5.5 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, $\Psi(\zeta)$ est une matrice unitaire telle que $\Psi(\zeta)\eta_\zeta = (1, 0, \dots, 0)$.*

Preuve : Puisque η_ζ a pour coordonnées $(\overline{\Psi_{11}(\zeta)}, \dots, \overline{\Psi_{1n}(\zeta)})$ dans la base $w_1^*, \dots, w_n^*$, il suffit de vérifier que Ψ est unitaire.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overline{\Psi_{1i}(\zeta)}\Psi_{1i}(\zeta) &= \sum_{i=1}^n |\nu_i(\zeta)|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Soit $j = 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overline{\Psi_{1i}(\zeta)}\Psi_{ji}(\zeta) &= \overline{\nu_1(\zeta)}\frac{-\overline{\nu_j(\zeta)}\nu_1(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}} + \overline{\nu_j(\zeta)}\frac{A_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}} \\ &\quad + \sum_{i=j+1}^n \overline{\nu_i(\zeta)}\frac{-\overline{\nu_j(\zeta)}\nu_i(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}} \\ &= \frac{\overline{\nu_j(\zeta)}}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\left(A_j(\zeta) - |\nu_1(\zeta)|^2 - \sum_{i=j+1}^n |\nu_i(\zeta)|^2\right) \\ &= \frac{\overline{\nu_j(\zeta)}}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\left(A_j(\zeta) - (1 - \sum_{i=2}^j |\nu_i(\zeta)|^2)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{\Psi_{ji}(\zeta)}\Psi_{ji}(\zeta) &= \left|\frac{-\overline{\nu_j(\zeta)}\nu_1(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\right|^2 + \left|\frac{A_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\right|^2 + \\
&\quad \sum_{i=j+1}^{n}\left|\frac{-\overline{\nu_j(\zeta)}\nu_i(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\right|^2 \\
&= \frac{A_j(\zeta)^2 + |\nu_j(\zeta)|^2(1-\sum_{i=2}^{j}|\nu_i(\zeta)|^2)}{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)} \\
&= \frac{A_j(\zeta)(A_j(\zeta)+|\nu_j(\zeta)|^2)}{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)} \\
&= \frac{A_j(\zeta)A_{j-1}(\zeta)}{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)} = 1.
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\sum_{i=1}^{n} \overline{\Psi_{ji}(\zeta)}\Psi_{ki}(\zeta)$ pour $1 < j < k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{\Psi_{ji}(\zeta)}\Psi_{ki}(\zeta) &= \frac{-\overline{\nu_1(\zeta)}\nu_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\frac{-\overline{\nu_k(\zeta)}\nu_1(\zeta)}{\sqrt{A_{k-1}(\zeta)A_k(\zeta)}} + \\
&\quad + \frac{A_k(\zeta)}{\sqrt{A_{k-1}(\zeta)A_k(\zeta)}}\frac{-\overline{\nu_k(\zeta)}\nu_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}} \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{-\overline{\nu_i(\zeta)}\nu_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)}}\frac{-\overline{\nu_k(\zeta)}\nu_i(\zeta)}{\sqrt{A_{k-1}(\zeta)A_k(\zeta)}} \\
&= -\frac{\overline{\nu_k(\zeta)}\nu_j(\zeta)(A_k(\zeta)-|\nu_1(\zeta)|^2-\sum_{i=k+1}^{n}|\nu_i(\zeta)|^2)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)A_{k-1}(\zeta)A_k(\zeta)}} \\
&= -\frac{\overline{\nu_k(\zeta)}\nu_j(\zeta)}{\sqrt{A_{j-1}(\zeta)A_j(\zeta)A_{k-1}(\zeta)A_k(\zeta)}}(A_k(\zeta)-A_k(\zeta)) = 0.
\end{aligned}$$

$\Psi(\zeta)$ est donc bien une matrice unitaire qui amène la normale extérieure η_ζ sur le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$. □

Pour ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, les vecteurs dont les coordonnées dans la base $w_1^*, \ldots, w_n^*$ sont $(\overline{\Psi_{j1}(\zeta)}, \ldots, \overline{\Psi_{jn}(\zeta)})$, $j = 1, \ldots, n$, sont une base de Diederich-Fornæss en ζ. Ainsi, avec $\Psi(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, nous définissons à la fois une famille de bases de Diederich-Fornæss et une famille de matrices de passage de la base ε-extrémale $w_1^*, \ldots, w_n^*$ vers une base de Diederich-Fornæss en ζ. Cependant, ces matrices et ces bases dépendent à priori de la base ε-extrémale et donc de ε. Il faudra prendre garde à ce que les majorations que nous montrerons soient bien indépendantes de ε et de la base ε-extrémale choisie.

Au cours de nos travaux, nous aurons besoin d'informations quantitatives sur les coefficients de Ψ que nous montrons maintenant.

Lemme 1.5.6 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$. Pour tout ζ de $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et $i = 2,\dots,n$, nous avons uniformément par rapport à ζ_0, ζ et ε :*

$$\begin{aligned} |\nu_1(\zeta)| &\approx 1, \\ |\nu_i(\zeta)| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Preuve : Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, ζ appartenant à $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et $i = 2,\dots,n$. Nous avons choisi $\varepsilon > 0$ de sorte que $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right| \geq c(\varepsilon_0)$ pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, donc $|\nu_1(\zeta)| \gtrsim 1$. La définition de $\nu_1(\zeta)$ implique trivialement que $|\nu_1(\zeta)| \leq 1$ et donc $|\nu_1(\zeta)|\approx 1$.
D'autre part, d'après les propositions 1.3.5 et 1.3.3, $\left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}$ ce qui amène $|\nu_i(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}$. $\square$
La prochaine proposition existe déjà dans [8] mais pour une matrice Ψ définie uniquement sur le bord.

Proposition 1.5.7 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, tout i, j, $i \neq j$, nous avons uniformément par rapport à ζ_0, ζ et ε :*

$$\begin{aligned} 1 \lesssim |\Psi_{ii}(\zeta)| &\leq 1, \\ |\Psi_{ij}(\zeta)| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Preuve : Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et $i,j = 1,\dots,n$, $i \neq j$.
Comme $\Psi(\zeta)$ est unitaire, trivialement $|\Psi_{ii}(\zeta)| \leq 1$.
D'autre part, $|\Psi_{ii}(\zeta)| = \sqrt{\frac{A_i(\zeta)}{A_{i-1}(\zeta)}}$ et :

$$1 \geq A_i(\zeta) = 1 - \sum_{l=2}^{i} |\nu_l(\zeta)|^2 \geq 1 - \sum_{l=2}^{n} |\nu_l(\zeta)|^2 = |\nu_1(\zeta)|^2.$$

L'inégalité $|\Psi_{ii}(\zeta)| \gtrsim 1$ est alors une conséquence du lemme 1.5.6.
Par définition $\Psi_{1j}(\zeta) = \nu_j(\zeta)$ et encore d'après le lemme 1.5.6

$$|\Psi_{1j}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)},$$

pour tout $j \neq 1$. Comme $\tau_1(\zeta_0,\varepsilon)\approx\varepsilon$ (remarque 1.3.1), nous obtenons

$$|\Psi_{1j}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_1(\zeta_0,\varepsilon)}.$$

Pour $j > i > 1$, puisque $\sqrt{A_i(\zeta)A_{i-1}(\zeta)} \gtrsim 1$, il suffit d'appliquer le lemme 1.5.6 pour avoir :

$$\begin{aligned} |\Psi_{ij}(\zeta)| &\lesssim |\nu_i(\zeta)\nu_j(\zeta)| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Dans tous les autres cas, $\Psi_{ij}(\zeta) = 0$, ce qui montre la proposition. □

Nous noterons $\zeta' = (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ les coordonnées d'un point $\zeta \in \mathbb{C}^n$ dans le repère de Diederich-Fornæss centré ζ_0 dont la base est définie par $\Psi(\zeta_0)$, coordonnées que nous confondrons avec le système de coordonnées associé à ce repère.

La base de Diederich-Fornæss définie par $\Psi(\zeta)$ a des propriétés très proches de celles de la base ε-extrémale par rapport à laquelle elle est définie. Par exemple :

Proposition 1.5.8 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$. Pour tout j, nous avons :*

$$|\zeta'_j| \lesssim \tau_j(\zeta_0, \varepsilon),$$

uniformément par rapport à ζ, ζ_0 et ε.

Preuve : Notons $(\zeta^*_1, \ldots, \zeta^*_n)$ les coordonnées de $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ dans le repère centré en $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et dont la base est la base ε-extrémale, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Alors pour $j = 1, \ldots, n$:

$$\zeta'_j = \sum_{i=1}^n \Psi_{ji}(\zeta_0)\zeta^*_i.$$

Selon la proposition 1.3.4, pour tout j, $\varepsilon \lesssim \tau_j(\zeta_0, \varepsilon)$. Aussi, en nous aidant de la proposition 1.5.7, nous montrons :

$$\begin{aligned} |\zeta'_j| &\leq \sum_{i=1}^n |\Psi_{ji}(\zeta_0)||\zeta^*_i| \\ &\lesssim \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)}\tau_i(\zeta_0,\varepsilon) + \tau_j(\zeta_0,\varepsilon) \\ &\lesssim \tau_j(\zeta_0,\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.9 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, $w'_1, \dots, w'_n$ les n vecteurs de la base de Diederich-Fornæss en ζ définie par $\Psi(\zeta)$. Alors pour tout i :*

$$\tau(\zeta, w'_i, \varepsilon) \approx \tau_i(\zeta_0, \varepsilon),$$

uniformément par rapport à ζ, ζ_0 et ε.

Preuve : Nous reprenons les notations de l'énoncé.
Pour $i = 1$, le résultat est trivial : w'_1 est la normale en ζ à $bD_{r(\zeta)}$ et d'après la proposition 1.3.4 $\tau(\zeta, w'_1, \varepsilon) \approx \varepsilon$. D'autre part, selon la remarque 1.3.1 nous avons $\tau_1(\zeta_0, \varepsilon) \approx \varepsilon$ et donc $\tau(\zeta, w'_1, \varepsilon) \approx \tau_1(\zeta_0, \varepsilon)$.
Soit maintenant $i > 1$. Les coordonnées de w'_i dans la base ε-extrémale sont $(\overline{\Psi_{i1}}(\zeta), \dots, \overline{\Psi_{in}}(\zeta))$. Les propositions 1.3.3 et 1.3.1 amènent alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(\zeta, w'_i, \varepsilon)} &\approx \frac{1}{\tau(\zeta_0, w'_i, \varepsilon)} \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Psi_{ij}(\zeta)|}{\tau_j(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Nous évaluons chacun des termes de la somme de (1.37) :
Soit $j \neq i$. Comme d'après la proposition 1.3.4, $\tau_j(\zeta_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon$, avec la proposition 1.5.7 nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi_{ij}(\zeta)|}{\tau_j(\zeta_0, \varepsilon)} &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0, \varepsilon)^2 \tau_i(\zeta_0, \varepsilon)} \\ &\lesssim \frac{1}{\tau_i(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Soit $j = i$. D'après la proposition 1.5.7, $|\Psi_{ii}(\zeta)| \approx 1$ et nous avons donc :

$$\frac{|\Psi_{ii}(\zeta)|}{\tau_i(\zeta_0, \varepsilon)} \approx \frac{1}{\tau_i(\zeta_0, \varepsilon)}. \tag{1.39}$$

Nous déduisons de (1.37), (1.38) et (1.39) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_i(\zeta_0, \varepsilon)} &\gtrsim \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Psi_{ij}(\zeta)|}{\tau_j(\zeta_0, \varepsilon)} \\ &\gtrsim \frac{1}{\tau(\zeta, w'_i, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

puis de (1.37) et (1.39) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)} &\lesssim \sum_{j=1}^{n}\frac{|\Psi_{ij}(\zeta)|}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)}\\ &\lesssim \frac{1}{\tau(\zeta,w'_i,\varepsilon)},\end{aligned}$$

ce qui montre que $\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\approx\tau(\zeta,w'_i,\varepsilon)$. $\square$
Lorsque nous dériverons la fonction de support, nous aurons besoin de connaître les dérivées de Ψ. Pour éviter de devoir distinguer trop de cas, nous posons :

$$\begin{aligned}\tau'_i(\zeta,\varepsilon) &= \tau_i(\zeta,\varepsilon),\ \text{si } i\neq 1,\\ \tau'_1(\zeta,\varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Réécrivons la remarque 1.3.1 :

Remarque 1.5.1 Avec ces notations et la remarque 1.3.1, nous avons pour tout $k\neq 1$ $\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\gtrsim\varepsilon^{\frac{1}{2}}=\tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)$.

Quant à elles, les propositions 1.3.5 et 1.4.5 deviennent :

Corollaire 1.5.10 *(des propositions 1.3.5 et 1.4.5) Pour tous multi-indices α et β tels que $|\alpha|+|\beta|>1$, tout $\zeta_0\in\mathcal{V}$, tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$ et tout $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$:*

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}r}{\partial\zeta'^\alpha\partial\overline{\zeta'}^\beta}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^n\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)^{\alpha_i+\beta_i}},$$

uniformément par rapport à ζ, ζ_0 et ε.

Preuve : Soient $\zeta_0\in\mathcal{V}$, $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et α, β deux multi-indices tels que $|\alpha|+|\beta|\geq 2$.
Dans le cas où $\alpha_1=\beta_1=0$, le résultat découle d'une application successive des propositions 1.3.5, 1.3.3 et 1.5.9.
Si $\alpha_1+\beta_1>1$, alors $\frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^n\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)^{\alpha_i+\beta_i}}\gtrsim 1$ et donc puisque r et ses dérivées sont bornées au voisinage de D, le résultat est trivial.
Si enfin $\alpha_1+\beta_1=1$: Nous notons $w'_1,\dots,w'_n$ les n vecteurs de la base de Diederich-Fornæss définie par $\Psi(\zeta_0)$.
Comme ζ appartient à $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, les propositions 1.5.9 et 1.5.8 impliquent qu'il existe $C\geq 1$ tel que pour tout i, $|\zeta'_i|\leq C\tau(\zeta_0,w'_i,\varepsilon)$, uniformément par rapport à ζ, ζ_0, et ε. D'autre part $\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ est inclus dans $B(0,1)$ et nous

pouvons appliquer la proposition 1.4.5 puis la proposition 1.5.9 qui donnent $\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}r}{\partial\zeta'^{\alpha}\partial\overline{\zeta'}^{\beta}}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{i=1}^{n}\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)^{\alpha_i+\beta_i}}$. $\square$

Nous allons maintenant dériver les coefficients de Ψ. Nous commençons par évaluer les dérivées de ν_i. Comme leurs définitions sont assez compliquées, cela va donner lieu à beaucoup de calculs.

Lemme 1.5.11 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, $i,j,k = 1,\ldots,n$ nous avons uniformément par rapport à ζ_0, ζ et ε :*

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\nu_i}{\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial\nu_i}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)},\\ \left|\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\overline{\zeta'_j}\partial\overline{\zeta'_k}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_k}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Preuve : La démonstration est fondée sur le corollaire 1.5.10 qui ne fait pas de distinction entre les dérivées par rapport à ζ et $\overline{\zeta}$. Il n'y a donc aucune différence à montrer les majorations de $\frac{\partial\nu_i}{\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta)$ et $\frac{\partial\nu_i}{\partial\zeta'_j}(\zeta)$, ou celles de $\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\overline{\zeta'_j}\partial\overline{\zeta'_k}}(\zeta)$, $\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta)$ et $\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_k}}(\zeta)$, c'est pourquoi à chaque fois, nous ne montrerons que l'une d'elles.

Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et $i,j,k = 1,\ldots,n$. Calculons $\frac{\partial r}{\partial w_k^*}$ en utilisant la base de Diederich-Fornæss en ζ_0 :

$$\frac{\partial r}{\partial w_k^*}(\zeta) = \sum_{l=1}^{n}\Psi_{lk}(\zeta_0)\frac{\partial r}{\partial\zeta'_l}(\zeta),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w_k^*}(\zeta)\right) = \sum_{l=1}^{n}\Psi_{lk}(\zeta_0)\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_j}(\zeta). \tag{1.40}$$

Si $k \neq 1$, pour $l \neq k$, puisque les dérivées de r d'ordre 2 sont bornées nous avons

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{lk}(\zeta_0)\right| \lesssim |\Psi_{lk}(\zeta_0)|,$$

et la proposition 1.5.7 donne

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{lk}(\zeta_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)}.$$

Comme $\tau_l(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon$ (proposition 1.3.4), nous obtenons

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{lk}(\zeta_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.41}$$

Si maintenant $k=1$, alors pour $l \neq 1$, le même schéma que précédemment donne

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{l1}(\zeta_0)\right| &\lesssim |\Psi_{l1}(\zeta)|\\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau_1(\zeta_0,\varepsilon)}\\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_l(\zeta_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Selon la remarque 1.5.1, nous avons $\tau_l(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)$ et finalement :

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{lk}(\zeta_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.42}$$

En définitive, avec (1.41) et (1.42), nous avons pour $k,l=1,\dots,n$, $l\neq k$,

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_l}(\zeta)\Psi_{lk}(\zeta_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.43}$$

D'autre part, la proposition 1.5.7 et le corollaire 1.5.10 nous indiquent que

$$\left|\frac{\partial^2 r}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta)\Psi_{kk}(\zeta_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.44}$$

Ainsi, l'inégalité

$$\left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)} \tag{1.45}$$

est une conséquence directe de (1.40), (1.43) et (1.44).
Comme $\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right) = \sum_{l=1}^n \Psi_{lk}(\zeta_0)\frac{\partial^2 r}{\partial\bar\zeta'_l\partial\zeta'_j}(\zeta)$ et puisqu'il n'y a pas de différence dans les majorations des dérivées par rapport à $\overline{\zeta}'_l$ et ζ'_l, on montre

de même que $\left|\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}$.
Calculons aussi $\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right)\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_k}}(\zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_k}}(\zeta)\right)\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta).$$

Puisque pour tout k $\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)$ (voir la remarque 1.5.1), l'inégalité (1.45) nous permet de montrer que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2 &\lesssim \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_k}}(\zeta)\right)\right| \\
&\lesssim \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)} \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

(nous avons négliger la contribution du terme $\frac{\partial r}{\partial w^*_k}$ car si $k = 1$, la pire éventualité, il est seulement majorable par une constante).
Nous sommes maintenant prêts à estimer les dérivées premières des ν_i :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu_i}{\partial \zeta'_j}(\zeta) = & \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2}}\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right) + \\
& -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta).
\end{aligned}$$

Si $i \neq 1$, d'après les propositions 1.3.5 et 1.3.3 nous avons

$$\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}, \qquad (1.47)$$

et puisque $\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_k}(\zeta)\right|^2 \gtrsim 1$, avec (1.45), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \nu_i}{\partial \zeta'_j}(\zeta)\right| &\lesssim \left|\frac{\partial}{\partial \zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right| \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Si $i=1$, avec (1.45) et (1.46) nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \nu_1}{\partial \zeta_j'}(\zeta)\right| &\lesssim \left|\frac{\partial}{\partial \zeta_j'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \zeta_j'}\left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w_k^*}(\zeta)\right|^2\right)\right|\\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Nous avons montré la première inégalité, passons à la deuxième. En procédant de la même manière que pour la dérivée d'ordre 1, nous montrons pour tout l que :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.48}$$

En effet, en dérivant de nouveau (1.40) nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_l'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_k^*}(\zeta)\right) = \sum_{p=1}^n \Psi_{pk}(\zeta_0)\frac{\partial^3 r}{\partial \zeta_l'\partial \zeta_j'\partial \zeta_p'}(\zeta). \tag{1.49}$$

Pour $p\neq k$, nous avons d'après la proposition 1.5.7 $|\Psi_{pk}(\zeta)|\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau_p(\zeta_0,\varepsilon)}$.
Si $k=1$, alors nous avons $\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau_p(\zeta_0,\varepsilon)\gtrsim \varepsilon\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)$ et si $k\neq 1$ nous avons $\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau_p(\zeta_0,\varepsilon)\gtrsim \varepsilon\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)$.
Ceci montre donc que $|\Psi_{pk}(\zeta)|\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}$ pour tout p distinct de k. Puisque d'après le corollaire 1.5.10 $\left|\frac{\partial^3 r}{\partial \zeta_l'\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}$, cela nous donne

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_l'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_k^*}(\zeta)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}.$$

Il faut aussi estimer $\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}\left(\sum_{l=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}\left(\sum_{l=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right) =\\ &\quad \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right)\frac{\partial r}{\partial \overline{w_l^*}}(\zeta) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta_j'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right)\frac{\partial}{\partial \zeta_k'}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w_l^*}}(\zeta)\right) +\\ &\quad \sum_{l=1}^n \frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j'\partial \zeta_k'}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w_l^*}}(\zeta)\right) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta_k'}\left(\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right)\frac{\partial}{\partial \zeta_j'}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w_l^*}}(\zeta)\right)\end{aligned}$$

et avec (1.45) et (1.48), puisque pour tout l $\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right)\right| \lesssim \\
&\lesssim \sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right)\right| + \sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_l}}(\zeta)\right)\right| + \\
&\quad + \sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_l}}(\zeta)\right)\right| + \sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{w^*_l}}(\zeta)\right)\right| \\
&\lesssim \sum_{l=1}^n \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)^2} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_1(\zeta_0,\varepsilon)}. \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors estimer les dérivées d'ordre 2 des ν_i :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}\right|^2}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right) + \\
&\quad - \frac{1}{2\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}\right|^2\right)^{\frac32}}\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}\right|^2\right)^{\frac32}}\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right) + \\
&\quad + \frac{3\left(\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta)\right)}{4\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}\right|^2\right)^{\frac52}}\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right) + \\
&\quad - \frac{1}{2\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}\right|^2\right)^{\frac32}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w^*_l}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial r}{\partial w^*_i}(\zeta).
\end{aligned}$$

D'après les propositions 1.3.5 et 1.3.3 nous avons $\left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}$. Avec (1.45) et (1.48) nous en déduisons pour $i \neq 1$ que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 \nu_i}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \\
&\lesssim \left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right)\right| + \\
&\quad + \left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right| \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, le plus mauvais terme est celui où toutes les dérivées portent sur $\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)$. Par contre, dans le cas où $i = 1$, en plus, il y aura aussi celui où aucune dérivée ne porte dessus car $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right| \gtrsim 1$. En effet, lorsque $i \neq 1$, le terme $-\frac{1}{2\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}\right|^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)$ a une très bonne estimation car le facteur $\left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right|$ est majorable par $\frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}$. Mais lorsque $i = 1$, $\left|\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)\right|$ est minoré par une constante non nulle, aussi, il faut trouver des facteurs ε dans le majorant de $\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)\right|$ et nous verrons que ce majorant est le même que celui de $\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right)\right|$. Nous utilisons (1.45), (1.46), (1.48) et (1.50), pour avoir :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \\
&\lesssim \left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)\right|\left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)\right| + \\
&\quad + \left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}\left(\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_k}\left(\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_k}\left(\sum_{l=1}^n\left|\frac{\partial r}{\partial w_l^*}(\zeta)\right|^2\right)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)^2\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)},
\end{aligned}$$

et ainsi montrer la deuxième inégalité. □

Nous pouvons maintenant estimer les dérivées des coefficients de Ψ. Cependant, malgré les calculs que nous avons déjà fournis, il reste encore beaucoup de travail.

Proposition 1.5.12 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, $i = 2,\dots,n$, $j,k,l = 1,\dots,n$, $j \neq i$, nous avons uniformément par rapport à ζ, ζ_0 et ε :*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Psi_{1j}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Psi_{1j}}{\partial \overline{\zeta_k'}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}, \\
\left|\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \overline{\zeta_k'}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}, \\
\left|\frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial \overline{\zeta_k'}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}, \\
\left|\frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \overline{\zeta_l'}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial \zeta_k'\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)}, \\
\left|\frac{\partial^2 \Psi_{ij}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \overline{\zeta_l'}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{ij}}{\partial \zeta_k'\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{ij}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}, \\
\left|\frac{\partial^2 \Psi_{ii}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \overline{\zeta_l'}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{ii}}{\partial \zeta_k'\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Psi_{ii}}{\partial \overline{\zeta_k'}\partial \zeta_l'}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.5.2 Il existe une proposition semblable dans [8]. Ici, non seulement nous considérons des dérivées d'ordres supérieurs, mais en plus, par l'introduction de nos résultats sur les dérivées dans la direction normale, nous obtenons un gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ lorsque l'on dérive selon ζ_1' ou $\overline{\zeta}_1'$. Cela sera esssentiel quand nous chercherons des majorations de la décomposition de Hefer-Leray (voir la sous-section 2.3.2).

Preuve de la proposition 1.5.12 : Cette proposition est une conséquence du lemme 1.5.11. Comme pour ce dernier, ne faisant pas de distinction entre les

dérivées par rapport à ζ et $\overline{\zeta}$, nous ne montrerons qu'une majoration dans chaque cas. Pour tout j, par définition, $\Psi_{1j} = \nu_j$ et le lemme 1.5.11 donne les résultats escomptés pour ces coefficients.
Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $k, l = 1, \dots, n$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$.
Nous commençons par traiter les dérivées des Ψ_{ii}, $i = 2, \dots, n$, et travaillons tout d'abord sur $\frac{\partial A_p}{\partial \zeta'_k}$ pour $p = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial A_p}{\partial \zeta'_k} = -\sum_{s=2}^{p} \overline{\nu_s} \frac{\partial \nu_s}{\partial \zeta'_k} + \nu_s \frac{\partial \overline{\nu_s}}{\partial \zeta'_k}.$$

Les lemmes 1.5.11 et 1.5.6 nous donnent pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$

$$\left| \frac{\partial A_p}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| \lesssim \sum_{s=2}^{p} \frac{\varepsilon}{\tau_s(\zeta_0, \varepsilon)} \frac{\varepsilon}{\tau'_s(\zeta_0, \varepsilon)\tau'_k(\zeta_0, \varepsilon)}.$$

Maintenant, pour tout $s \neq 1$, $\tau'_s(\zeta_0, \varepsilon) = \tau_s(\zeta_0, \varepsilon)$ et d'après la remarque 1.5.1, $\tau'_s(\zeta_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial A_p}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| &\lesssim \sum_{s=2}^{p} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau'_k(\zeta_0, \varepsilon)} \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Puisque pour $i \neq 1$ $\Psi_{ii} = \frac{\sqrt{A_i}}{\sqrt{A_{i-1}}}$, (1.51) nous permet de montrer :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| &= \left| \frac{1}{2(A_i(\zeta)A_{i-1}(\zeta))^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial A_i}{\partial \zeta'_k}(\zeta) - \frac{A_i(\zeta)^{\frac{1}{2}}}{2A_{i-1}(\zeta)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| \\ &\lesssim \left| \frac{\partial A_i}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| + \left| \frac{\partial A_{i-1}}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Nous procédons de la même manière pour $\frac{\partial^2 A_p}{\partial \zeta'_l \partial \zeta'_k}$, $p = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial^2 A_p}{\partial \zeta'_l \partial \zeta'_k} = -\sum_{s=2}^{p} \overline{\nu_s} \frac{\partial^2 \nu_s}{\partial \zeta'_l \partial \zeta'_k} + \frac{\partial \overline{\nu_s}}{\partial \zeta'_l} \frac{\partial \nu_s}{\partial \zeta'_k} + \frac{\partial \overline{\nu_s}}{\partial \zeta'_k} \frac{\partial \nu_s}{\partial \zeta'_l} + \nu_s \frac{\partial^2 \overline{\nu_s}}{\partial \zeta'_l \partial \zeta'_k}$$

et avec les lemmes 1.5.6 et 1.5.11, puisque pour $s \neq 1$ $\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)=\tau'_s(\zeta_0,\varepsilon)\gtrsim \varepsilon^{\frac12}$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 A_p}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \sum_{s=2}^{p}\frac{\varepsilon^2}{\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_s(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}\\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}. \qquad (1.52)\end{aligned}$$

Nous estimons alors $\frac{\partial^2\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k} &= -\frac{1}{4A_i^{\frac32}A_{i-1}^{\frac12}}\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_l}\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_k}-\frac{1}{4A_i^{\frac12}A_{i-1}^{\frac32}}\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_l}\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_k}+\\ &\quad+\frac{1}{2(A_iA_{i-1})^{\frac12}}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}-\frac{1}{4(A_iA_{i-1}^3)^{\frac12}}\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_l}\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_k}+\\ &\quad+\frac{3A_i^{\frac12}}{4A_{i-1}^{\frac54}}\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_k}\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_l}-\frac{A_i^{\frac12}}{2A_{i-1}^{\frac32}}\frac{\partial^2 A_{i-1}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l},\end{aligned}$$

et avec (1.51) et (1.52), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \left|\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_l}(\zeta)\right|\left|\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|+\left|\frac{\partial^2 A_i}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|+\left|\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_l}(\zeta)\right|\left|\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|\\ &\quad+\left|\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|\left|\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_l}(\zeta)\right|+\left|\frac{\partial^2 A_{i-1}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right|+\left|\frac{\partial A_{i-1}}{\partial\zeta'_l}(\zeta)\right|\left|\frac{\partial A_i}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|\\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à estimer les dérivées des Ψ_{ij} pour $i,j=1,\dots,n$ tels que $i>j=1$ ou $j>i>1$. Dans ces cas, $\Psi_{ij}=-\frac{\nu_j\overline{\nu_i}}{\sqrt{A_{i-1}A_i}}$. Donc :

$$\frac{\partial\Psi_{ij}}{\partial\zeta'_k} = -\frac{\overline{\nu_i}}{\sqrt{A_{i-1}A_i}}\frac{\partial\nu_j}{\partial\zeta'_k}-\frac{\nu_j}{\sqrt{A_{i-1}A_i}}\frac{\partial\overline{\nu_i}}{\partial\zeta'_k}-\overline{\nu_i}\nu_j\frac{\partial\left(\sqrt{A_{i-1}A_i}\right)^{-1}}{\partial\zeta'_k}.$$

Si nous sommes dans le cas où $j=1$, alors le pire terme est celui où ni ν_j, ni $\sqrt{A_iA_{i-1}}$ ne sont dérivés, ce qui avec les lemmes 1.5.6 et 1.5.11 nous conduit à

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\Psi_{i1}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim |\nu_i(\zeta)|+\left|\frac{\partial\overline{\nu_i}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|\\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Comme pour $i \neq 1$ $\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon) = \tau_i(\zeta_0, \varepsilon)$, nous obtenons finalement

$$\left|\frac{\partial \Psi_{i1}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)}.$$

Si $j > i > 1$, nous aboutissons de la même manière à

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| &\lesssim |\nu_i(\zeta)| \left|\frac{\partial \nu_j}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| + |\nu_j(\zeta)| \left|\frac{\partial \overline{\nu_i}}{\partial \zeta_k'}(\zeta)\right| + |\nu_j(\zeta)| \left|\overline{\nu_i(\zeta)}\right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_j'(\zeta_0, \varepsilon)}.\end{aligned}$$

Enfin, les dérivées d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi_{ij}}{\partial \zeta_l' \partial \zeta_k'} = &-\left(\frac{1}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \frac{\partial \overline{\nu_i}}{\partial \zeta_l'} + \overline{\nu_i} \frac{\partial \left(\sqrt{A_i A_{i-1}}\right)^{-1}}{\partial \zeta_l'}\right) \frac{\partial \nu_j}{\partial \zeta_k'} - \frac{\overline{\nu_i}}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \frac{\partial^2 \nu_j}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'} \\ &-\left(\frac{1}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \frac{\partial \nu_j}{\partial \zeta_l'} + \nu_j \frac{\partial \left(\sqrt{A_i A_{i-1}}\right)^{-1}}{\partial \zeta_l'}\right) \frac{\partial \overline{\nu_i}}{\partial \zeta_k'} - \frac{\nu_j}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \frac{\partial^2 \overline{\nu_i}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'} \\ &-\left(\nu_j \frac{\partial \overline{\nu_i}}{\partial \zeta_l'} + \overline{\nu_i} \frac{\partial \nu_j}{\partial \zeta_l'}\right) \frac{\partial \left(\sqrt{A_i A_{i-1}}\right)^{-1}}{\partial \zeta_k'} - \overline{\nu_i} \nu_j \frac{\partial^2 \left(\sqrt{A_i A_{i-1}}\right)^{-1}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'}.\end{aligned}$$

Puisqu'il est borné uniformément, nous majorons par une constante uniforme le terme $\sqrt{A_i A_{i-1}}$ qu'il soit dérivé ou non (la pire éventualité étant celle où il n'est pas dérivé) et avec les lemmes 1.5.6 et 1.5.11, nous parvenons comme précédemment à

$$\left|\frac{\partial^2 \Psi_{ij}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_l'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_j(\zeta_0, \varepsilon)}$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$.
Comme dans tous les cas que nous n'avons pas traité (c'est-à-dire $1 < j < i$), $\Psi_{ij} = 0$, la proposition est prouvée. $\square$

Nous pourrions procéder comme K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss dans [8] en travaillant uniquement par rapport à une base McNeal en ζ_0. Cependant, non seulement à cause de la définition de la fonction de support de Diederich-Fornæss mais surtout à cause de la nature de la proposition 1.4.5 et du lemme 1.4.4 qui travaillent avec des dérivées dans la direction normale, il sera plus facile et plus naturel de travailler dans une base de

Diederich-Fornæss en ζ_0. Aussi, nous devrons passer d'une base de Diederich-Fornæss en ζ_0 vers une base de Diederich-Fornæss en un point $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et c'est pourquoi nous définissons :

$$\Phi(\zeta) \quad = \quad \Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta_0)}^t. \tag{1.53}$$

$\Phi(\zeta)$ est la matrice de passage de la base de Diederich-Fornæss en ζ_0 induite par $\Psi(\zeta_0)$ vers la base de Diederich-Fornæss en ζ induite par $\Psi(\zeta)$. De plus, lorsque ε est suffisamment petit, Φ a les mêmes propriétés que Ψ :

Proposition 1.5.13 *Soient $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ et $\zeta_0 \in \mathcal{V}$. Si ε_0 est suffisamment petit (indépendamment de ζ_0), pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ et tout i, j distincts, nous avons uniformément par rapport à ζ_0, ζ et ε :*

$$\begin{aligned} 1 \lesssim |\Phi_{ii}(\zeta)| &\leq 1, \\ |\Phi_{ij}(\zeta)| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Preuve : Montrons tout d'abord les deux majorations : Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, $i, j = 1,\dots,n$, $i \neq j$.
Tout d'abord, $|\Phi_{ii}(\zeta)| \leq 1$ car $\Phi(\zeta)$ est unitaire. D'autre part :

$$\Phi_{ij} \quad = \quad \sum_{s=1}^n \Psi_{is}\overline{\Psi_{js}(\zeta_0)},$$

d'où

$$|\Phi_{ij}(\zeta)| \quad \leq \quad \sum_{s=1}^n |\Psi_{is}(\zeta)||\overline{\Psi_{js}(\zeta_0)}|.$$

Il suffit alors de distinguer différents cas et d'utiliser la proposition 1.5.7 :

$$\begin{aligned} |\Psi_{ii}(\zeta)\overline{\Psi_{ji}(\zeta_0)}| &\leq |\Psi_{ji}(\zeta_0)| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{ij}(\zeta)\overline{\Psi_{jj}(\zeta_0)}| &\leq |\Psi_{ij}(\zeta)| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)} \end{aligned} \tag{1.55}$$

et pour $k \neq i, j$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{ik}(\zeta)\overline{\Psi_{jk}(\zeta_0)}| &\leq \frac{\varepsilon^4}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k(\zeta_0,\varepsilon)^2} \\
&\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)} \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

où pour (1.56) nous avons utilisé le fait que $\tau_k(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon$ (proposition 1.3.4). Nous utilisons alors (1.54), (1.55) et (1.56) pour finalement obtenir :

$$|\Phi_{ij}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)}.$$

Pour conclure la preuve de la proposition, nous montrons la minoration $|\Phi_{ii}(\zeta)| \gtrsim 1$:

$$|\Phi_{ii}(\zeta)| \geq |\Psi_{ii}(\zeta)||\overline{\Psi_{ii}(\zeta_0)}| - \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{n} |\Psi_{is}(\zeta)||\overline{\Psi_{is}(\zeta_0)}|. \qquad (1.57)$$

Or, selon la proposition 1.5.7, $|\Psi_{ii}(\zeta)| \gtrsim 1$ et $|\Psi_{ii}(\zeta_0)| \gtrsim 1$ et nous avons ainsi

$$|\Psi_{ii}(\zeta)||\overline{\Psi_{ii}(\zeta_0)}| \gtrsim 1. \qquad (1.58)$$

Toujours selon la proposition 1.5.7, pour tout s distinct de i

$$|\Psi_{is}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)},$$

ce qui entraîne

$$|\overline{\Psi_{is}(\zeta_0)}||\Psi_{is}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon^4}{\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)^2\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)^2}.$$

Mais puisque $s \neq i$, nécessairement $i \neq 1$ ou $s \neq 1$ et d'après la remarque 1.3.1 $\tau_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau_s(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, d'où nous tirons finalement :

$$|\Psi_{is}(\zeta)||\overline{\Psi_{is}(\zeta_0)}| \lesssim \varepsilon. \qquad (1.59)$$

Des inégalités (1.57), (1.58) et (1.59), nous déduisons l'existence d'un $c > 0$ ne dépendant ni de ζ, ni de ε, ni de i tel que :

$$|\Phi_{ii}(\zeta)| \gtrsim 1 - c\varepsilon$$

et si ε est suffisamment petit (indépendamment de ζ et ζ_0) :

$$|\Phi_{ii}(\zeta)| \gtrsim 1.$$

La proposition est prouvée. □
Les dérivées des coefficients de Φ ont aussi le même comportement que ceux de Ψ :

Proposition 1.5.14 *Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$, tout $i = 2, \dots, n$, $j, k, l = 1, \dots, n$, $j \neq i$, nous avons uniformément par rapport à ζ_0, ζ et ε :*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi_{1j}}{\partial \zeta'_k}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Phi_{1j}}{\partial \overline{\zeta'_k}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)},\\
\left|\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \zeta'_k}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \overline{\zeta'_k}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)},\\
\left|\frac{\partial \Phi_{ii}}{\partial \zeta'_k}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial \Phi_{ii}}{\partial \overline{\zeta'_k}}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)},\\
\left|\frac{\partial^2 \Phi_{1j}}{\partial \overline{\zeta'_k}\partial \overline{\zeta'_l}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{1j}}{\partial \zeta'_k \partial \zeta'_l}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{1j}}{\partial \overline{\zeta'_k}\partial \zeta'_l}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)},\\
\left|\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \overline{\zeta'_k}\partial \overline{\zeta'_l}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \zeta'_k \partial \zeta'_l}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \overline{\zeta'_i}\partial \zeta'_l}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)},\\
\left|\frac{\partial^2 \Phi_{ii}}{\partial \overline{\zeta'_k}\partial \overline{\zeta'_l}}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{ii}}{\partial \zeta'_k \partial \zeta'_l}(\zeta)\right| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{ii}}{\partial \overline{\zeta'_k}\partial \zeta'_l}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Preuve : Comme pour le lemme 1.5.11 et la proposition 1.5.12, nous ne ferons pas de distinction entre les dérivées par rapport à ζ et $\overline{\zeta}$ et dans chaque cas ne montrerons la majoration que de l'une d'entre elles. Soient $\zeta_0 \in \mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ et i, j, k, l dans $\{1, \dots, n\}$. Dans les sommes

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \zeta'_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial \zeta'_k}\overline{\Psi_{js}(\zeta_0)}, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \zeta'_k \partial \zeta'_l} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi_{is}}{\partial \zeta'_k \partial \zeta'_l}\overline{\Psi_{js}(\zeta_0)}, \tag{1.61}$$

c'est le terme où $s = i$ qui va compter le plus car $|\Psi_{ii}(\zeta_0)| \approx 1$, et c'est pour cela que nous ne pouvons pas avoir de meilleurs résultats que pour $\Psi_{ij}(\zeta)$.

La preuve de la proposition se résume alors à un fastidieux jeu avec les indices en isolant les "bons" et les "mauvais" cas.
Si $i = j = 1$, pour $s \neq 1$, alors $\tau_s(\zeta_0, \varepsilon) \gtrsim \tau_1'(\zeta_0, \varepsilon)$ (remarque 1.5.1) et avec la proposition 1.5.7 nous avons

$$\begin{aligned} |\Psi_{1s}(\zeta_0)| \left| \frac{\partial \Psi_{1s}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| &\lesssim |\Psi_{1s}(\zeta_0)| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_s(\zeta_0, \varepsilon)} \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0, \varepsilon)}, \end{aligned} \tag{1.62}$$

et de même

$$|\Psi_{1s}(\zeta_0)| \left| \frac{\partial^2 \Psi_{1s}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'}(\zeta) \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0, \varepsilon)}. \tag{1.63}$$

Avec les propositions 1.5.7 et 1.5.12 nous avons

$$\begin{aligned} |\Psi_{11}(\zeta_0)| \left| \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| &\leq \left| \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_1'(\zeta_0, \varepsilon)}, \end{aligned} \tag{1.64}$$

et de même

$$\begin{aligned} |\Psi_{11}(\zeta_0)| \left| \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'}(\zeta) \right| &\leq \left| \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial \zeta_k' \partial \zeta_l'}(\zeta) \right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_l'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_1'(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Ainsi, (1.60), (1.62) et (1.64) donnent $\left| \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)}$, alors que (1.61), (1.63) et (1.65) donnent l'estimation $\left| \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_1'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_k'(\zeta_0,\varepsilon)\tau_l'(\zeta_0,\varepsilon)}$.
Si $i = j \neq 1$, nous utilisons $\tau_s(\zeta_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon$ quel que soit s (proposition 1.3.4), $\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ (remarque 1.5.1) ainsi que les propositions 1.5.7 et 1.5.12 pour obtenir pour tout $s \neq i$

$$\begin{aligned} |\Psi_{is}(\zeta_0)| \left| \frac{\partial \Psi_{is}}{\partial \zeta_k'}(\zeta) \right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_s(\zeta_0, \varepsilon)\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon)} \frac{\varepsilon^2}{\tau_s(\zeta_0, \varepsilon)\tau_i'(\zeta_0, \varepsilon)\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)} \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k'(\zeta_0, \varepsilon)}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

De même :

$$|\Psi_{is}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.67}$$

Les propositions 1.5.7 et 1.5.12 nous donnent quant à elles

$$\begin{aligned}|\Psi_{ii}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\approx \left|\frac{\partial\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)},\end{aligned} \tag{1.68}$$

et toujours de même

$$|\Psi_{ii}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{ii}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.69}$$

De (1.60), (1.66) et (1.68) nous déduisons $\left|\frac{\partial\Phi_{ii}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)}$, et avec (1.61), (1.67) et (1.69) $\left|\frac{\partial\Phi_{ii}}{\partial\zeta'_l\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}$ pour tout $i \neq 1$.
Si maintenant $i \neq j = 1$, nous utilisons les propositions 1.5.7 et 1.5.12 pour avoir quel que soit s

$$\begin{aligned}|\Psi_{1s}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \left|\frac{\partial\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}\end{aligned} \tag{1.70}$$

et

$$|\Psi_{1s}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.71}$$

Pour tout $i \neq 1$, (1.60) et l'inégalité (1.70) donnent la majoration $\left|\frac{\partial\Phi_{i1}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}$, et (1.61) et (1.71) donnent $\left|\frac{\partial^2\Phi_{i1}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}$.
Si $i = 1 \neq j$: Pour tout $s \neq j$, puisque $\tau_s(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon$ (proposition 1.3.4) et puisque $\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon) = \tau_j(\zeta_0,\varepsilon)$, la proposition 1.5.7 entraîne

$$|\Psi_{js}(\zeta_0)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}. \tag{1.72}$$

Les propositions 1.5.7 et 1.5.12 impliquent :

$$\begin{aligned}|\Psi_{jj}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial\Psi_{1j}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\approx \left|\frac{\partial\Psi_{1j}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \\ &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)},\end{aligned} \tag{1.73}$$

et aussi de même

$$|\Psi_{jj}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{1j}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}. \qquad (1.74)$$

De (1.60), (1.72) et (1.73) nous déduisons $\left|\frac{\partial\Phi_{1j}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}$, et de (1.61), (1.72) et (1.74) $\left|\frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}$ pour tout $j \neq 1$.
Si enfin $1, i$ et j sont deux à deux distincts : Pour tout $s \neq i, j$, puisque $\tau_s(\zeta_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon$, les propositions 1.5.12 et 1.5.7 entraînent

$$\begin{aligned}
|\Psi_{js}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)}\frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau_s(\zeta_0,\varepsilon)}\\
&\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}, && (1.75)\\
|\Psi_{jj}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial\Psi_{ij}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| &\approx \left|\frac{\partial\Psi_{ij}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right|\\
&\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)}, && (1.76)\\
|\Psi_{ji}(\zeta_0)| &\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)} && (1.77)
\end{aligned}$$

et (1.60), (1.75), (1.76) et (1.77) impliquent $\left|\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\zeta'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}$ pour tout $i, j = 2, \dots, n$, $i \neq j$.
Pour de tels i et j, nous avons aussi d'après les propositions 1.5.12 et 1.5.7

$$|\Psi_{js}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{is}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}, \ \forall s \neq i, j. \qquad (1.78)$$

$$|\Psi_{jj}(\zeta_0)|\left|\frac{\partial^2\Psi_{ij}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)}. \qquad (1.79)$$

Et pour tout $i, j = 2, \dots, n$, $i \neq j$, (1.61), (1.77), (1.78) et (1.79) impliquent $\left|\frac{\partial^2\Phi_{ij}}{\partial\zeta'_k\partial\zeta'_l}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau'_i(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_l(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_k(\zeta_0,\varepsilon)\tau'_j(\zeta_0,\varepsilon)}$, ce qui finit de démontrer la proposition. $\square$

Chapitre 2

Estimées C^k sur les domaines

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 2.0.1 *Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné convexe de type fini m. Pour $q = 1, \ldots, n-1$, il existe un opérateur $T_q^* : C_{0,q}(\overline{D}) \to C_{0,q-1}(D)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute $(0,q)$-forme f élément de $C_{0,q}^k(\overline{D})$ $\overline{\partial}$-fermée, nous ayons :*

(i) $\overline{\partial} T_q^* f = f$,

(ii) $T_q^* f$ *appartient à* $C_{0,q-1}^{k+\frac{1}{m}}(\overline{D})$ *et il existe* $c_k > 0$ *ne dépendant pas de* f *tel que* $\|T_q^* f\|_{\overline{D},k+\frac{1}{m}} \leq c_k \|f\|_{\overline{D},k}$.

Nous commençons par définir T_q^* comme I. Lieb et R.M. Range dans [18] en utilisant ici la fonction de support S des domaines convexes de type fini. Pour prouver (ii), nous appliquerons un lemme de Hardy-Littlewood dont nous vérifierons les hypothèses en écrivant $T_q^* f$ comme une somme finie de $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-formes pour des paramètres adéquats. Mais avant tout, faisons quelques remarques sur le théorème 2.0.1.

Remarque 2.0.3 La constante c_k peut-être choisie de sorte que le théorème 2.0.1 soit vrai pour cette même constante c_k sur tous les $D_\alpha = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, r(\zeta) < \alpha\}$, r fonction définissante globale de D, de classe C^∞ et convexe sur $\mathbb{C}^n$, α réel avec $|\alpha|$ suffisamment petit.

Remarque 2.0.4 Si cela n'allait pas à l'encontre de la définition d'un domaine convexe de type fini, nous pourrions considérer un domaine convexe D à bord C^{j+3} de type fini m, $m \leq j+3$, dans le sens où D serait un domaine convexe à bord C^{j+3} dont l'ordre de contact avec toute courbe holomorphe *est au plus m. En suivant la méthode employée pour prouver le théorème 2.0.1, nous construirions un opérateur T_q^* qui résout l'équation $\overline{\partial}$ sur D et tel que pour toute forme $f \in C^k_{0,q}(\overline{D})$, $k \leq j$, $\overline{\partial}$-fermée, $T_q^* f$ appartienne à $C^{k+\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie $\|T_q^* f\|_{\overline{D},k+\frac{1}{m}} \leq c_k \|f\|_{\overline{D},k}$, c_k ne dépendant pas de f.*

Remarque 2.0.5 *Dans le théorème 2.0.1, nous ne parlons pas du cas $q = n$ car pour $q = n$ il existe un résultat meilleur : Lorsque $q = n$, toute $(0,n)$-forme est $\overline{\partial}$-fermée. Aussi, si f est une $(0,n)$-forme de classe C^k sur $\overline{D}$, $k \geq 0$ entier, nous pouvons la prolonger en une $(0,n)$-forme Ef $\overline{\partial}$-fermée de classe C^k à support compact dans une boule B contenant $\overline{D}$ et telle que $\|Ef\|_{B,k} \lesssim \|f\|_{\overline{D},k}$ uniformément par rapport à f (il suffit par exemple d'appliquer à f l'opérateur de prolongement du théorème A.2.1). En utilisant sur B une formule d'homotopie telle que celle qui définit l'opérateur T_q de la section 2.1, nous pouvons construire un opérateur T_n^* tel que pour tout $\varepsilon \in [0,1[$, $\overline{\partial} T_n^* Ef = Ef$, $T_n^* Ef$ appartienne à $C^{\varepsilon+k}_{0,n-1}(\overline{D})$ et vérifie $\|T_n^* Ef\|_{\overline{D},k+\varepsilon} \leq c_{k,\varepsilon} \|f\|_{\overline{D},k}$, $c_{k,\varepsilon}$ ne dépendant pas de f. En fait, comme Ef est à support compact dans B, $T_n^* Ef$ n'est finalement qu'un terme de Bochner-Martinelli et le Hilfssatz 1 de l'article [18] de I. Lieb et R.M. Range en assure la régularité.*

2.1 Opérateur de résolution

Soit $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ un bon quintuplet et soit S la fonction de support construite à la Diederich-Fornæss du théorème 1.5.2, que nous supposons définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U}$ voisinage convexe de $\overline{D}$ contenant $\mathcal{V}$. Avec ces hypothèses sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, nous pouvons utiliser la décomposition de Hefer-Leray Q de S donnée dans la proposition 1.5.4.

Voici le noyau de type Cauchy-Fantappiè que nous utiliserons (voir [24]) : Pour $(\zeta, \lambda, z) \in \mathcal{V} \times [0,1] \times \mathcal{U}$, tel que $S(\zeta, z) \neq 0$, on note :

$$\eta_0(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n \overline{\zeta_j - z_j} d\zeta_j,$$

$$\eta_1(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n Q_j(\zeta, z) d\zeta_j,$$

$$\eta(\zeta, \lambda, z) = (1-\lambda)\frac{\eta_0(\zeta, z)}{|\zeta - z|^2} + \lambda \frac{\eta_1(\zeta, z)}{S(\zeta, z)}.$$

Nous posons alors pour $0 \leq q \leq n-1$:

$$\Omega_{n,q}(\eta) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} \eta \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\eta)^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z \eta)^q.$$

Pour $q = -1, n$, nous posons aussi :

$$\Omega_{n,-1}(\eta) = \Omega_{n,n}(\eta) = 0.$$

Pour $q = 0, \ldots, n$, d'après [24] :

$$\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta) = (-1)^q \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-1}(\eta).$$

Soient encore :

$$\iota_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \{1\} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times [0,1] \times \mathbb{C}^n \\ (\zeta,\lambda,z) & \longmapsto & (\zeta,\lambda,z) \end{cases},$$

$$\iota_0 : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \{0\} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times [0,1] \times \mathbb{C}^n \\ (\zeta,\lambda,z) & \longmapsto & (\zeta,\lambda,z) \end{cases}$$

et :

$$B_{n,q} = \iota_0^*(\Omega_{n,q}(\eta)) \text{ et } K_{n,q} = \iota_1^*(\Omega_{n,q}(\eta)).$$

Nous posons enfin pour z appartenant à D

$$T_q(f)(z) := \int_{bD\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) - \int_D f(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z)$$

de sorte que selon [24], pour tout $z \in D$:

$$f(z) = \overline{\partial}(T_q f)(z) + T_{q+1}(\overline{\partial} f)(z). \tag{2.1}$$

K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss ont montré dans [8] que $T_q : C^0_{0,q}(\overline{D}) \to C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ est continu. Pour obtenir des estimées C^k nous suivons les pas de I. Lieb et R.M. Range et modifions T_q de la même manière que dans [18]. Soit $E : C^0(\overline{D}) \longrightarrow C^0_c(D \cup \mathcal{V})$ l'opérateur de type Seeley du théorème A.2.1. Soit $G = \mathcal{V} - D$. Nous montrerions comme dans [18] que pour toute $(0,q)$-forme f de classe C^1 sur $\overline{D}$, $\overline{\partial}$-fermée, et tout z de D, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_{bD\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) = \\
&= -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta (Ef)(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) - \int_G (Ef)(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z) \\
&\quad + \overline{\partial}_z \int_{G\times[0,1]} Ef(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) + \int_G (Ef)(\zeta) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Pour tout $z \in D$, nous posons si $q = 1$:

$$M_1(f)(z) = \int_G (Ef)(\zeta) \wedge K_{n,0}(\zeta, z),$$

et pour $2 \leq q \leq n$:

$$M_q(f)(z) = \overline{\partial}_z \int_{G\times[0,1]} Ef(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, z).$$

Pour $q \geq 1$, nous définissons T_q^* par :

$$T_q^* \quad := \quad T_q - M_q. \tag{2.3}$$

C'est cet opérateur qui va, comme dans [18], satisfaire les estimées C^k. Remarquons que $K_{n,0}$ est holomorphe en z et par conséquent $\overline{\partial}_z T_1^* f = \overline{\partial}_z T_1 f$. Lorsque $q > 1$, $\overline{\partial}_z T_q^* f = \overline{\partial}_z T_q f$ car $M_q(f)$ est $\overline{\partial}_z$-fermé. Ainsi, T_q^* reste un opérateur de résolution de l'équation $\overline{\partial}$.
De plus, pour $f \in C^1_{0,q}(\overline{D})$, $\overline{\partial}$-fermée, et $z \in D$ nous avons grâce à (2.2) :

$$T_q^* f(z) = -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta (Ef)(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, z) - \int_{G\cup D} Ef(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta, z). \tag{2.4}$$

L'écriture de $T_q^* f$ sous la forme de (2.4) permet de profiter de la régularité de f au travers de $\overline{\partial}_\zeta Ef$: plus f $\overline{\partial}$-fermée sera régulière, plus $\overline{\partial}_\zeta Ef$ aura un ordre d'annulation élevé sur bD.

2.2 Technique de travail

Décrivons la méthode que nous allons employer pour prouver le théorème 2.0.1. Soit k un entier, $k \geq 0$.
Si $k = 0$, en s'appuyant sur le travail de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss dans [8], il suffira de montrer que pour tout q et tout $f \in C^0_{0,q}(\overline{D})$, $M_q f$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie $\|M_q f\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|f\|_{\overline{D},0}$, uniformément par rapport à f.
Si k est non nul, il faudra montrer que pour tout f de $C^k_{0,q}(\overline{D})$, $\overline{\partial}$-fermée, et tout opérateur de dérivation $\Delta_k = \frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$, avec $|\alpha| + |\beta| = k$, $\Delta_k T_q^* f$ est un élément de $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et qu'il existe un réel c_k ne dépendant pas de f tel que :

$$\|\Delta_k T_q^* f\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \quad \leq \quad c_k \|f\|_{\overline{D},k}. \tag{2.5}$$

Posons $T'_q f := -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta(Ef) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)$. Comme f est de régularité C^k jusqu'au bord de D et que Ef est à support compact dans $D\cup G$, $\int_{G\cup D} Ef(\zeta)\wedge B_{n,q-1}(\zeta,\cdot)$ appartient à $C^{k+\varepsilon}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait $\| \int_{G\cup D} Ef \wedge B_{n,q-1}\|_{\overline{D},k+\varepsilon} \lesssim \|f\|_{\overline{D},k}$ pour tout ε de $[0,1[$. Il suffira donc de montrer que :

Objectif 2.2.1 *Pour tout j et tout opérateur de différentiation $\Delta_{k-1} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$, avec $|\alpha|+|\beta| = k-1$, $\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}$ et $\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q f}{\partial \overline{z}_j}$ appartiennent à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifient uniformément par rapport à f :*

$$\left\|\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q f}{\partial \overline{z}_j}(z)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} + \left\|\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}(z)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|f\|_{\overline{D},k},$$

ce que nous allons nous employer à prouver.

Quand nous chercherons à montrer l'objectif 2.2.1, les plus mauvais cas se présenteront lorsque la fonction de support S sera dérivée. Aussi, le gain d'une dimension d'intégration est suffisant pour traiter $\frac{\partial T'_q f}{\partial \overline{z}_j}$ car S étant holomorphe par rapport à z, elle ne sera pas dérivée par $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$. Cependant, même si ce gain d'une dimension d'intégration permet de traiter $\frac{\partial T'_q f}{\partial \overline{z}_j}$, il sera la cause d'une difficulté majeure car il va révéler le mauvais comportement de la composante normale du noyau en la variable d'intégration ζ. En effet, jusqu'alors, dans tous les opérateurs intégraux construits avec la fonction de support de Diederich-Fornæss, la variable d'intégration restait toujours dans le bord du domaine. Aussi, la composante normale en ζ du noyau ne jouait aucun rôle puisqu'elle se trouvait écrasée par l'intégration sur le bord. Lors des estimations du noyau au moyen des polydisques et des bases ε-extrémales de McNeal, cette astuce permettait de gagner un facteur ε lorsque la composante normale du noyau en ζ apparaissait. Ici, T'_q est une intégrale sur un volume et de ce fait nous ne pouvons plus utiliser "cette astuce" détruisant la composante normale qui avait permis dans [8] de montrer les estimées C^0. C'est pourquoi pour traiter $\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}$, il faut plus que le gain d'une dimension d'intégration et notamment la proposition 1.4.5 qui, en améliorant l'estimation de la composante normale du noyau (voir la remarque 2.3.2), permet le gain d'un premier facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Pour gagner le dernier facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, il va falloir effectuer une manipulation semblable à celle effectuée par J. Michel dans [22] et aussi produire d'autres estimées. Pourtant, nous verrons que sans la proposition 1.4.5, cette manipulation seule n'apporte rien (voir les remarques 2.3.2 et 2.4.2).

Pour $j = 1, 2, \dots, n$, nous posons $\delta_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$. Soit $z \in D$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}(z) &= \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) + \\
&\quad - \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \\
&= Y - X.
\end{aligned}$$

Nous manipulons X de sorte à faire apparaître une relation de récurrence dans l'expression de $\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}$. Comme $\Omega_{n,q-1}(\eta)$ est de degré n en $d\zeta$:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\zeta (Ef) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \Omega_{n,q-1}(\eta) &= d_{\zeta,\lambda}(Ef) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \Omega_{n,q-1}(\eta) \\
&= d_{\zeta,\lambda}(Ef) \wedge \partial_\zeta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta) \right),
\end{aligned}$$

où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur. Ainsi :

$$\begin{aligned}
X &= \int_{G\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda}(Ef)(\zeta) \wedge \partial_\zeta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \right) \\
&= \int_{G\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda}(Ef)(\zeta) \wedge d_{\zeta,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \right) \\
&\quad - \int_{G\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda}(Ef)(\zeta) \wedge \overline{\partial}_{\zeta,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \right) \\
&= X_1 - X_2.
\end{aligned}$$

Nous appliquons le théorème de Stokes à X_1 :

$$\begin{aligned}
X_1 &= (-1)^{q+1} \int_{G\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda} \left(d_{\zeta,\lambda} Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \right) \\
&= (-1)^q \int_{bD\times[0,1]} d_\zeta Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \\
&\quad + (-1)^q \int_G d_\zeta Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, B_{n,q-1}(\zeta,z) \\
&\quad - (-1)^q \int_G d_\zeta Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, K_{n,q-1}(\zeta,z) \\
&= X_{11} + X_{12} + X_{13}.
\end{aligned}$$

Sur bD nous avons $\overline{\partial}_\zeta Ef = \overline{\partial}_\zeta f = 0$, donc :

$$X_{11} = (-1)^q \int_{bD\times[0,1]} \partial_\zeta Ef(\zeta) \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner\, \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z),$$

et comme $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\Omega_{n,q-1}(\eta)$ contient déjà $d\zeta_1,\ldots,d\zeta_{j-1},d\zeta_{j+1},\ldots,d\zeta_n$:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \int_{bD\times[0,1]}\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)d\zeta_j\wedge\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)\\ &= \int_{bD\times[0,1]}\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z). \end{aligned}$$

D'autre part, sur bD, nous avons aussi : $\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}=\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}$ et donc :

$$X_{11}=\int_{bD\times[0,1]}\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$$

Comme $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,B_{n,q-1}$ est de degré $(n-1,n-q)$ en ζ et comme Ef est une $(0,q)$-forme et que nous intégrons sur $G\times\{0\}$, nous avons :

$$X_{12}=\int_G\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge B_{n,q-1}(\zeta,z),$$

et de même :

$$X_{13}=-\int_G\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge K_{n,q-1}(\zeta,z).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_{bD\times[0,1]}\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)+\int_G\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge B_{n,q-1}(\zeta,z)+\\ &\quad -\int_G\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_j}(\zeta)\wedge K_{n,q-1}(\zeta,z). \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}=-\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner$, nous avons pour X_2 :

$$\begin{aligned} X_2 &= \int_{G\times[0,1]}d_{\zeta,\lambda}Ef(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)\right)\\ &= -\int_{G\times[0,1]}d_{\zeta,\lambda}Ef(\zeta)\wedge\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \end{aligned}$$

En utilisant maintenant $\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q-1}(\eta)=(-1)^{q-1}\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)$, nous avons :

$$\begin{aligned} X_2 &= (-1)^q\int_{G\times[0,1]}d_{\zeta,\lambda}Ef(\zeta)\wedge\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z)\\ &= (-1)^q\int_{G\times[0,1]}\partial_\zeta Ef(\zeta)\wedge\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z)\\ &\quad +(-1)^q\int_{G\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Ef(\zeta)\wedge\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\lrcorner\,\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z)\\ &= X_{21}+X_{22} \end{aligned}$$

L'intégrande de X_{22} est de bidegré $(n-1, n+1)$ en ζ, et donc $X_{22} = 0$. Puisque $\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)$ contient $d\zeta_1, \dots, d\zeta_{j-1}, d\zeta_{j+1}, \dots, d\zeta_n$:

$$X_{21} = \int_{G\times[0,1]} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) d\zeta_j \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \lrcorner \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, z)$$

et donc

$$X_2 = \int_{G\times[0,1]} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, z).$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
X = & \int_{bD\times[0,1]} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) - \int_G \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) \\
& - \int_{G\times[0,1]} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) + \int_G \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z) \\
= & \int_{bD\times[0,1]} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) - \int_G E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) + \\
& - \int_G \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) \\
& - \int_{G\times[0,1]} \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \\
& - \int_{G\times[0,1]} E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) + \int_{G\cup D} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z) \\
& - \int_D \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z).
\end{aligned}$$

D'une part, sur D, $\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta)$ ce qui donne $\int_D \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z)$.
D'autre part, comme S est holomorphe en z, $\int_G E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) = 0$ lorsque $q > 1$ et $\int_{G\times[0,1]} E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) = 0$ lorsque $q = 1$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
X = \; & T_q\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)(z) - M_q\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)(z) + \int_{G\cup D} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,z) \\
& - \int_G \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) \\
& - \int_{G\times[0,1]} \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial T'_q f}{\partial z_j}(z) = &\int_G \left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right)\wedge K_{n,q-1}(\zeta,z) - \int_{G\cup D}\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta)\wedge B_{n,q-1}(\zeta,z)\\ &+ \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Ef(\zeta)\wedge \delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z) - T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)(z)\\ &+ \int_{G\times[0,1]}\left(\frac{\partial Ef}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right)\wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Nous connaissons déjà les estimées pour le terme de Bochner-Martinelli, la récurrence nous apportera les estimées de $T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)$ et nous apprendrons à contrôler les autres termes. Pour cela, il nous faut déjà prouver les estimées C^0 pour notre opérateur T_q^* et estimer les nouveaux termes, dont $\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)$.

2.3 Estimations des termes du noyau

2.3.1 Minoration de la fonction de support

Soit c_1 donnée par le lemme A.3.2.
Dans le lemme 4.2 de [8], K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss donnaient déjà une minoration de $F(\zeta,z)$ pour z dans D proche du bord et ζ dans le bord de D. Cette minoration implique la même estimation de $S(\zeta,z)$. Cependant, dans la définition de T_q^*, la variable d'intégration ζ appartient à une petite couronne $G\subset\mathbb{C}^n\setminus D$. Ainsi, nous devons montrer une majoration semblable à celle de [8], mais pour les ζ au delà de bD. Pour cela, nous employons une méthode différente de celle de [8] : Pour minorer $F(\zeta,z_0)$, K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss devaient considérer un point ζ_0 projeté de z_0 sur bD et travaillaient pour les points ζ de $bD\cap\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(\zeta_0)$ en utilisant une pseudo-distance liée aux polydisques de McNeal. Notre approche, plus géométrique, permet de travailler directement sur $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$. Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Quitte à choisir ε_0 plus petit, il existe $c_0>0$ tel que l'on ait l'assertion suivante. Soient $z_0\in\mathcal{V}$, $c\in]0,c_0]$, $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ et z_0 écrit sous la forme $z_0=\zeta+\lambda\eta_\zeta+\mu v$ où v est un vecteur unitaire de $T_\zeta^{\mathbb{C}}bD_{r(\zeta)}$. Alors $|\mu|<c\tau(\zeta,v,\varepsilon)$ implique $|\lambda|\approx\varepsilon$, uniformément par rapport à z_0, ζ, ε et c.*

Preuve : Soit $c_0 > 0$ arbitraire que nous fixerons ultérieurement. Soient alors ε, c, z_0 et ζ comme dans l'énoncé. Ecrivons $z_0 = \zeta + \lambda\eta_\zeta + \mu v$. Soient aussi $w_1^*, \ldots, w_n^*$ les n vecteurs de la base ε-extrémale en z_0. Nous noterons v^* et $(\eta_\zeta)^*$ les coordonnées de v et η_ζ respectivement dans cette base, ζ^* celles de ζ dans le repère centré en z_0 et de base $w_1^*, \ldots, w_n^*$.
Nous avons :

$$\zeta_i^* = -\lambda(\eta_\zeta)_i^* - \mu v_i^*. \tag{2.7}$$

Nous commençons par montrer que $|\lambda| \lesssim \varepsilon$. Cette propriété est en fait vraie avec la seule hypothèse que ζ appartient à $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$.
Comme $(\eta_\zeta)_i^* = \frac{1}{|\partial r(\zeta)|}\frac{\partial r}{\partial w_i^*}(\zeta)$, d'après les propositions 1.3.5 et 1.3.3, nous avons $|(\eta_\zeta)_i^*| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ et

$$\begin{aligned} |\lambda| &\lesssim \sum_{i=1}^n |\zeta_i^*||(\eta_\zeta)_i^*| \\ &\lesssim \sum_{i=1}^n \tau_i(z_0,\varepsilon)\frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)} \\ &\lesssim \varepsilon. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $|\lambda| \gtrsim \varepsilon$. Dans ce but, nous utilisons (2.7) afin de majorer ζ_i^* pour $i \neq 1$ et ainsi prouver que $|\zeta_1^*| \geq c_1\varepsilon$ dès que c_0 est suffisamment petit.
D'après la proposition 1.3.3, $\tau(\zeta, v, \varepsilon) \approx \tau(z_0, v, \varepsilon)$ et d'après la proposition 1.3.1 : $\frac{|\mu|}{\tau(z_0,v,\varepsilon)} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|\mu||v_i^*|}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Nous en déduisons que $\frac{|\mu|}{\tau(\zeta,v,\varepsilon)} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|\mu||v_i^*|}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ et si $|\mu| < c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$, nous avons pour tout i

$$|\mu v_i^*| \lesssim c\tau_i(z_0,\varepsilon). \tag{2.8}$$

D'autre part, pour tout $i \neq 1$, d'après la remarque 1.3.1, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \lesssim \tau_i(z_0,\varepsilon)$, et nous avons donc $|(\eta_\zeta)_i^*| \lesssim \tau_i(z_0,\varepsilon)$. Nous obtenons ainsi pour tout $i \neq 1$

$$|\lambda||(\eta_\zeta)_i^*| \lesssim \varepsilon\tau_i(z_0,\varepsilon). \tag{2.9}$$

Nous rassemblons (2.7), (2.8) et (2.9) et obtenons pour tout $i \neq 1$

$$|\zeta_i^*| \lesssim (\varepsilon + c)\tau_i(z_0,\varepsilon).$$

Ainsi, lorsque c_0 et ε_0 sont suffisamment petits et que nous supposons $|\mu| < c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$, nous avons $|\zeta_i^*| < c_1\tau_i(z_0,\varepsilon)$. Mais comme par hypothèse ζ n'est

pas dans $c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, nous avons nécessairement $|\zeta_1^*| \geq c_1\tau_1(z_0,\varepsilon)$.
Mais maintenant, $|\lambda||(\eta_\zeta)_1^*| \geq |\zeta_1^*| - |\mu v_1^*|$.
Or, puisque $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet, $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(\zeta)\right| \gtrsim 1$ et $|(\eta_\zeta)_1^*| \gtrsim 1$ uniformément par rapport à ζ, z_0 et ε, ce qui avec (2.8) conduit à l'existence de $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |\lambda| &\gtrsim c_1\tau_1(z_0,\varepsilon) - Cc\tau_1(z_0,\varepsilon) \\ &\gtrsim \varepsilon(c_1 - Cc) \end{aligned}$$

car $\varepsilon{\approx}\tau_1(z_0,\varepsilon)$ (voir la remarque 1.3.1). Il suffit alors de choisisr $c_0 > 0$ suffisamment petit encore. □
Nous supposons à partir de maintenant que ε_0 est tel que $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ soit un bon quintuplet et le lemme 2.3.1 soit vérifié.
Nous allons maintenant produire la proposition établissant la minoration de S telle que nous l'utiliserons.

Proposition 2.3.2 *(i) Pour tout z_0 de $\mathcal{V}$, tout ζ de $\mathcal{V}$ tel que $r(\zeta) \geq r(z_0)$, nous avons*

$$|S(\zeta, z_0)| \gtrsim r(\zeta) - r(z_0),$$

uniformément par rapport à z_0 et ζ.

(ii) Quitte à choisir ε_0 plus petit encore, pour tout $z_0 \in \mathcal{V}$, tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $\zeta \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap \mathcal{V}$ satisfaisant $r(\zeta) \geq r(z_0)$, nous avons

$$|S(\zeta, z_0)| \gtrsim \varepsilon + r(\zeta) - r(z_0)$$

uniformément par rapport à z_0, ζ et ε.

Preuve : Nous commençons par (i). Soient z_0 et ζ dans $\mathcal{V}$ tels que $r(\zeta) \geq r(z_0)$. Si $|\zeta - z_0| \geq \frac{R}{2}$, d'après le théorème 1.5.2, $|S(\zeta, z_0)| \gtrsim 1$ et dans ce cas l'inégalité est triviale. Encore d'après le théorème 1.5.2, dès que $|\zeta - z_0| \leq \frac{R}{2}$, $S(\zeta, z_0) = A(\zeta, z_0)F(\zeta, z_0)$ avec $|A(\zeta, z_0)| \geq \frac{1}{2}$ et il suffit de minorer $|F(\zeta, z_0)|$. La minoration découle alors directement du théorème 1.5.1 car

$$\begin{aligned} |F(\zeta, z_0)| &\geq -\Re F(\zeta, z_0) \\ &\geq c_-(r(\zeta) - r(z_0)) \end{aligned}$$

et (i) est montré. Passons à (ii) :
Soit c_0 donné par le lemme 2.3.1. Soient alors $c \in]0, c_0]$ que nous fixerons ultérieurement, z_0 appartenant à $\mathcal{V}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $\zeta \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap \mathcal{V}$ avec $r(\zeta) \geq r(z_0)$, de sorte que toutes les hypothèses du lemme 2.3.1 soient

satisfaites.
Dès que $|\zeta - z_0| \leq \frac{R}{2}$, d'après le théorème 1.5.2 $S(\zeta, z_0) = A(\zeta, z_0)F(\zeta, z_0)$. Par le choix de ε_0, cette condition est réalisée de sorte que $|S(\zeta, z_0)| \geq \frac{1}{2}|F(\zeta, z_0)|$ et qu'il suffise de travailler avec F.
Nous écrivons $z_0 = \zeta + \lambda\eta_\zeta + \mu v$ où v unitaire est dans $T^{\mathbb{C}}_\zeta bD_{r(\zeta)}$. D'après le théorème 1.5.1, puisque ε_0 est tel que $|\zeta - z_0| < \frac{R}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned} -\Re F(\zeta, z) \quad &\geq \quad \left|\frac{\Re\lambda}{2}\right| + \frac{K}{2}(\Im\lambda)^2 + \frac{k'K'}{4}\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\mu v)}{\partial\mu^\alpha\partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0}\right||\mu|^j \\ &\quad +c_-(r(\zeta) - r(z_0)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

L'inégalité triangulaire nous permet quant à elle de donner cette minoration de $|\Im F|$:

$$|\Im F(\zeta, z)| \quad \geq \quad 3|\Im\lambda| - K|\lambda|^2 - K'\sum_{j=2}^{m} M^{2^j}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\mu v)}{\partial\mu^\alpha\partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0}\right||\mu|^j.$$

Supposons que $|\mu| < c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$, auquel cas d'après le lemme 2.3.1 $|\lambda| \approx \varepsilon$ et cela uniformément par rapport à c. D'autre part, d'après la proposition 1.3.2 nous avons

$$\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\mu v)}{\partial\mu^\alpha\partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0}\right|\tau(\zeta, v, \varepsilon)^j \approx \varepsilon.$$

Puisque nous avons supposé $|\mu| < c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$, nous en déduisons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |F(\zeta, z_0)| \quad &\gtrsim \quad |\Im F(\zeta, z_0)| - \Re F(\zeta, z_0) \\ &\gtrsim \quad |\lambda| - K|\lambda|^2 - K'\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(\zeta+\mu v)}{\partial\mu^\alpha\partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0}\right||\mu|^j + \\ &\quad +c_-(r(\zeta) - r(z_0)) \\ &\gtrsim \quad \varepsilon(1 - C(\varepsilon + c)) + c_-(r(\zeta) - r(z_0)). \end{aligned}$$

Ainsi, si ε_0 et c sont suffisamment petits encore, nous avons

$$|F(\zeta, z_0)| \quad \gtrsim \quad \varepsilon + r(\zeta) - r(z_0). \tag{2.11}$$

Nous fixons à partir de maintenant $\varepsilon_0 > 0$ et $c > 0$ petits de sorte que (2.11) soit vraie dès que $|\mu| < c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$.

Nous considérons alors $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $z_0 \in \mathcal{V}$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$. Ecrivons $z_0 = \zeta + \lambda\eta_\zeta + \mu v$ où v unitaire appartient à $T^{\mathbb{C}}_\zeta bD_{r(\zeta)}$. Deux éventualités s'offrent à nous :
Soit $|\mu| \leq c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$ et comme nous l'avons montré avec (2.11),

$$|F(\zeta, z_0)| \gtrsim \varepsilon + r(\zeta) - r(z_0)$$

Soit $|\mu| \geq c\tau(\zeta, v, \varepsilon)$ et avec (2.10) nous obtenons

$$\begin{aligned} |F(\zeta, z_0)| &\gtrsim \sum_{j=2}^{m} \sum_{\alpha+\beta=j} \left| \frac{\partial^j r(\zeta + \mu v)}{\partial\mu^\alpha \partial\overline{\mu}^\beta} \Big|_{\mu=0} \right| |\mu|^j + r(\zeta) - r(z_0) \\ &\gtrsim \sum_{j=2}^{m} \sum_{\alpha+\beta=j} \left| \frac{\partial^j r(\zeta + \mu v)}{\partial\mu^\alpha \partial\overline{\mu}^\beta} \Big|_{\mu=0} \right| \tau(\zeta, v, \varepsilon)^j + r(\zeta) - r(z_0). \end{aligned}$$

Selon la proposition 1.3.2, $\sum_{j=2}^{m} \sum_{\alpha+\beta=j} \left| \frac{\partial^j r(\zeta+\mu v)}{\partial\mu^\alpha \partial\overline{\mu}^\beta} \Big|_{\mu=0} \right| \tau(\zeta, v, \varepsilon)^j \approx \varepsilon$ d'où

$$|F(\zeta, z_0)| \gtrsim \varepsilon + r(\zeta) - r(z_0),$$

ce qui prouve la proposition. □
Bien entendu, des inégalités du même type sont valables lorsque $r(\zeta) \leq r(z_0)$, mais elles ne nous seront pas utiles.
A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, ε_0 est fixé de sorte que $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ soit un bon quintuplet et que la proposition 2.3.2 soit vérifiée pour ce ε_0.

2.3.2 Estimations de la décomposition de Hefer-Leray et de ses dérivées

Afin d'exploiter au mieux la fonction de support et sa décomposition de Hefer-Leray, il faut exprimer le noyau dans les bases de Diederich-Fornæss. Plus précisément, nous fixons un point z_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$ et $\varepsilon > 0$ dans $[c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$. Nous considérons une base ε-extrémale en z_0, Φ_* la matrice de passage de la base canonique vers cette base, et aussi la famille de matrices $\Psi^{z_0,\varepsilon}$ définie pour les bons quintuplets dans la sous-section 1.5.3. Nous noterons $\zeta' = (\zeta'_1, \dots, \zeta'_n)$ les coordonnées d'un point ζ dans le repère de Diederich-Fornæss en z_0 de base $w'_1, \dots, w'_n$ donnée par $\Psi^{z_0,\varepsilon}(z_0)$. Nous utiliserons aussi cette notation pour désigner le système de coordonnées associé à ce repère.
Puisque z_0 et ε seront fixés tout au long de cette partie, la matrice $\Psi^{z_0,\varepsilon}(\zeta)$

sera simplement notée $\Psi(\zeta)$.
Soient ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, z dans $\mathcal{U}$ et ω dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\zeta+\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega$ soit dans $\mathcal{U}$. Nous posons

$$\begin{aligned}
\Sigma(\zeta,\omega) &= S(\zeta,\zeta+\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega),\\
\sigma_i(\zeta,\omega) &= \int_0^1 \frac{\partial\Sigma}{\partial\omega_i}(\zeta,t\omega)dt,\\
Q(\zeta,z) &= -(\Psi(\zeta)\Phi_*)^t\sigma(\zeta,\Psi(\zeta)\Phi_*(z-\zeta)).
\end{aligned}$$

Q correspond à la décomposition de Hefer-Leray de S de la proposition 1.5.4 avec pour choix $U=\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t$. Σ est l'expression de S dans le repère de Diederich-Fornæss centré en ζ.
C'est dans la base de Diederich-Fornæss induite par $\Psi(z_0)$ que nous exprimons le noyau. Soient

$$\begin{aligned}
\omega(\zeta,z) &= \Psi(\zeta)\Phi_*(z-\zeta),\\
A_\zeta(\omega) &= A(\zeta,\zeta+\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega),\\
Q'(\zeta,z) &= \overline{(\Psi(z_0)\Phi_*)}Q(\zeta,z),\\
\Phi(\zeta) &= \Psi(\zeta)\overline{\Psi(z_0)}^t.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà étudié les propriétés de Φ dans les propositions 1.5.13 et 1.5.14. $\omega(\zeta,z)$ représente les coordonnées de z dans le repère de Diederich-Fornæss en ζ induit par $\Psi(\zeta)$. De plus, si $|\zeta-z|\leq\frac{R}{2}$ nous avons

$$\Sigma(\zeta,\omega(\zeta,z))=A_\zeta(\omega(\zeta,z))F_\zeta(\omega(\zeta,z)). \tag{2.12}$$

D'autre part, nous avons aussi $Q'(\zeta,z)=-\Phi(\zeta)^t\sigma(\zeta,\Phi(\zeta)(z'-\zeta'))$ et

$$\begin{aligned}
\eta_1(\zeta,z) &= \sum_{i=1}^n Q'_i(\zeta,z)d\zeta'_i,\\
\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial Q'_i}{\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta,z)d\overline{\zeta'_j}\wedge d\zeta'_i.
\end{aligned}$$

Pour utiliser (2.6), nous devrons aussi regarder l'action de δ_j sur le noyau, mais il sera plus facile pour nous de l'étudier à travers la base $w'_1,\ldots,w'_n$, c'est pourquoi nous posons $\delta'_j=\frac{\partial}{\partial z'_j}+\frac{\partial}{\partial\zeta'_j}$, $j=1,\ldots,n$.
Comme les coefficients de Φ et leurs dérivées hors de la diagonale sont très petits en termes de ε, les Q'_i auront le même comportement que les σ_i. Nous

entamons donc l'étude des σ_i et de leurs dérivées. Avant cela, rappelons que nous avons défini les $\tau'_i(\zeta,\varepsilon)$ par

$$\begin{array}{rcl}\tau'_i(\zeta,\varepsilon) &=& \tau_i(\zeta,\varepsilon),\ \text{si } i\neq 1,\\ \tau'_1(\zeta,\varepsilon) &=& \sqrt{\varepsilon}.\end{array}$$

D'autre part, afin de ne pas avoir à recommencer des calculs très semblables lorsque nous étudierons l'équation $\overline{\partial}_b$, nous travaillons sur les couples $(\zeta,z)\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0))^2$ et non pas (ζ,z_0), ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ comme cela suffirait pour montrer le théorème 2.0.1.

Lemme 2.3.3 *Pour tout $z,\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $i,j=1,\dots,n$ et $k=2,\dots,n$, nous avons uniformément par rapport à z, ζ et ε :*

$$\begin{array}{rcl}|\omega_i(\zeta,z)| &\lesssim& \tau_i(z_0,\varepsilon),\\ |\delta'_i\omega_k(\zeta,z)|+\left|\dfrac{\partial\omega_k}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z)\right| &\lesssim& \dfrac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon),\\ |\delta'_i\omega_1(\zeta,z)|+\left|\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z)\right| &\lesssim& \dfrac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)},\\ \left|\delta'_j\dfrac{\partial\omega_k}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z)\right| &\lesssim& \dfrac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon),\\ \left|\delta'_j\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z)\right| &\lesssim& \dfrac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}.\end{array}$$

Remarque 2.3.1 Dans [8], K. Diederich, B. Fischer et J.E Fornæss étudiaient aussi les ω_i. Seulement, ils n'avaient besoin que de majorants pour $|\omega_i(\zeta,z)|$ et $\left|\frac{\partial\omega_i}{\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta,z)\right|$ alors que nous devons aussi majorer $|\delta'_i\omega_k(\zeta,z)|$ et $\left|\delta'_j\frac{\partial\omega_k}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z)\right|$.

Preuve du lemme 2.3.3 : Soient $z,\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, i,j,k comme dans l'énoncé du lemme. En utilisant le repère de Diederich-Fornæss en z_0, nous écrivons $\omega_i(\zeta,z)$ comme $\sum_{l=1}^n\Phi_{il}(\zeta)(z'_l-\zeta'_l)$. Cette égalité ainsi que les propositions 1.5.13 et 1.5.8 conduisent à :

$$|\omega_i(\zeta,z)| \leq \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^n|\Phi_{il}(\zeta)||\zeta'_l-z'_l|+|\Phi_{ii}(\zeta)||\zeta'_i-z'_i|$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n} \frac{\varepsilon^2}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_l(z_0,\varepsilon)}\tau_l(z_0,\varepsilon)+\tau_i(z_0,\varepsilon)\\ &\lesssim \tau_i(z_0,\varepsilon)\end{aligned}$$

où pour passer à la dernière ligne nous avons utilisé $\tau_i(z_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon$ (proposition 1.3.4).
Nous faisons à présent agir δ_i' sur ω_k, $k \neq 1$:

$$\delta_i'\omega_k(\zeta,z) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \zeta_i'}(\zeta)(z_l'-\zeta_l').$$

Nous utilisons les propositions 1.5.14 et 1.5.8 et procédons comme précédemment :

$$\begin{aligned} |\delta_i'\omega_k(\zeta,z)| &\leq \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \left|\frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial \zeta_i'}(\zeta)\right| |\zeta_l'-z_l'| + \left|\frac{\partial \Phi_{kk}}{\partial \zeta_i'}(\zeta)\right| |\zeta_k'-z_k'|\\ &\lesssim \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{\varepsilon^2}{\tau_k(z_0,\varepsilon)\tau_l(z_0,\varepsilon)\tau_i'(z_0,\varepsilon)}\tau_l(z_0,\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon)\end{aligned}$$

et puisque selon la remarque 1.3.1, pour tout k différent de 1, $\tau_k(z_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et donc

$$|\delta_i'\omega_k(\zeta,z)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon).$$

Lorsque $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta_i'}}$ agit sur ω_k, comme pour δ_i', seuls les coefficients de Φ sont dérivés et l'inégalité $\left|\frac{\partial \omega_k}{\partial \overline{\zeta_i'}}(\zeta,z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon)$ se démontre point par point comme $|\delta_i'\omega_k(\zeta,z)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon)$. Il n'y a guère plus de différences pour la dernière inégalité :

$$\left|\delta_i'\frac{\partial \omega_k}{\partial \overline{\zeta_j'}}(\zeta,z)\right| \leq \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \left|\frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial \overline{\zeta_j'}\partial \zeta_i'}(\zeta)\right| |\zeta_l'-z_l'| + \left|\frac{\partial^2 \Phi_{kk}}{\partial \zeta_i'\partial \overline{\zeta_j'}}(\zeta)\right| |\zeta_k'-z_k'|.$$

Nous utilisons alors les propositions 1.5.14 et 1.5.8 pour avoir

$$\left|\delta_i'\frac{\partial \omega_k}{\partial \overline{\zeta_j'}}(\zeta,z)\right| \lesssim \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \frac{\varepsilon^2}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)\tau_l(z_0,\varepsilon)\tau_j'(z_0,\varepsilon)}\tau_l(z_0,\varepsilon)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_j'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon)\\
\lesssim\ &\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_j'(z_0,\varepsilon)}\tau_k(z_0,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Il reste encore à examiner les dérivées de ω_1 :

$$\delta_i'\omega_1(\zeta,z)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\Phi_{1l}}{\partial\zeta_i'}(\zeta)(z_l'-\zeta_l').$$

Pour $l\neq 1$, la proposition 1.5.14 implique $\left|\frac{\partial\Phi_{1l}}{\partial\zeta_i'}(\zeta)\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_l(z_0,\varepsilon)}$ d'où nous tirons avec la proposition 1.5.8

$$\left|\sum_{l=2}^{n}\frac{\partial\Phi_{1l}}{\partial\zeta_i'}(\zeta)(z_l'-\zeta_l')\right|\ \lesssim\ \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}.\tag{2.13}$$

Ensuite, encore selon la proposition 1.5.8, $|\zeta_1'|\lesssim\varepsilon$ et $|z_1'|\lesssim\varepsilon$ et donc $\left|\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\zeta_i'}(\zeta)(z_1'-\zeta_1')\right|\lesssim\varepsilon$, ce qui avec (2.13) nous conduit finalement à

$$|\delta_i'\omega_1(\zeta,z)|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}.$$

Nous démontrerions de même que $\left|\frac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta,z)\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}$. Pour la dernière inégalité à montrer, nous suivons la même voie :

$$\delta_j'\frac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta,z)\ =\ \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_{1l}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_j'}(\zeta,z)(z_l'-\zeta_l').$$

Nous séparons cette somme en deux puis appliquons les propositions 1.5.14 et 1.5.8 pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\left|\delta_j'\frac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta,z)\right| &\lesssim \sum_{l=2}^{n}\left|\frac{\partial^2\Phi_{1l}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_j'}(\zeta,z)(z_l'-\zeta_l')\right|+|z_1'-\zeta_1'|\\
&\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_j'(z_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

□

Dans la base de Diederich-Fornæss induite par $\Psi(\zeta)$, la fonction r_ζ qui intervient dans la définition de F_ζ est $r_\zeta(\omega)=r(\zeta+\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega)$. Nous l'estimons ainsi que ses dérivées dans le prochain lemme. Signalons qu'encore une fois des résultats similaires existent dans [8]. Cependant, nous considérons des dérivées d'ordres supérieures et améliorons leurs résultats dans le cas d'une dérivée dans la direction normale. Cette amélioration se répercutera dans le corollaire 2.3.5 puis dans le lemme 2.3.6 et dans le corollaire 2.3.7 et se révèlera fondamentale pour conclure (voir la remarque 2.4.2).

Lemme 2.3.4 *Soient $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $i, j = 1, \dots, n$, β un multi-indice tel que $\beta_1 = 0$ et $|\beta| \geq 1$. Nous avons uniformément par rapport à ζ, z_0 et ε :*

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{k=1}^n \tau_k(z_0,\varepsilon)^{\beta_k}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \zeta'_i}\left(\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta'_i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\prod_{k=1}^n \tau_k(z_0,\varepsilon)^{\beta_k}},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \overline{\zeta'_i}\partial \overline{\zeta'_j}}\left(\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial \zeta'_i\partial \overline{\zeta'_j}}\left(\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)\prod_{k=1}^n \tau_k(z_0,\varepsilon)^{\beta_k}}.$$

Preuve : Avec les outils dont nous disposons, la première inégalité est presque triviale : les propositions 1.3.5 et 1.5.9 entraînent directement : $\left|\frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\prod_{k=1}^n \tau_k(z_0,\varepsilon)^{\beta_k}}$.
Pour montrer les autres inégalités, nous allons ramener l'expression de r_ζ à une expression ne dépendant que de r_{z_0} :

$$\begin{aligned} r_\zeta(\omega) &= r(\zeta + \overline{\Phi_*}^t\overline{\Psi(\zeta)}^t\omega) \\ &= r(z_0 + \overline{\Phi_*}^t\overline{\Psi(z_0)}^t(\zeta' + \Psi(z_0)\overline{\Psi(\zeta)}^t\omega)) \\ &= r_{z_0}(\zeta' + \overline{\Phi(\zeta)}^t\omega). \end{aligned}$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{2, \dots, n\}$, $k \geq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k r_\zeta}{\partial \omega_{\alpha_1}\dots\partial\omega_{\alpha_k}}(0) &= \sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} \frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial \zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^k\left(\frac{\partial\left(\zeta' + \overline{\Phi(\zeta)}^t\omega\right)_{i_l}}{\partial\omega_{\alpha_l}}\right) \\ &= \sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} \frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial \zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^k\left(\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right). \end{aligned}$$

Nous dérivons cette expression par rapport à $\overline{\zeta}'_i$:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta'_i}}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0) = \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n\\1\leq p\leq k}} \frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$$

$$+\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\prod_{l=1}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}. \qquad (2.14)$$

Il faut distinguer différents cas selon les valeurs des i_s :
Dans le terme $\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\prod_{l=1}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, s'il existe s tel que α_s diffère de i_s, alors d'après la proposition 1.5.13 $|\Phi_{\alpha_s i_s}(\zeta)|\lesssim\frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)\tau_{i_s}(z_0,\varepsilon)}$ et comme $\tau_{i_s}(z_0,\varepsilon)\gtrsim\varepsilon$ (proposition 1.3.4), à une constante multiplicative près ne dépendant ni de ζ, ni de z_0 et ni de ε, $\left|\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\prod_{l=1}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right|$ est majoré par $\frac{\varepsilon}{\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.
Si un tel indice s n'existe pas, $i_s=\alpha_s$ pour tout s et avec le corollaire 1.5.10, nous obtenons $\left|\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_{\alpha_1}'\cdots\partial\zeta_{\alpha_k}'}(\zeta')\prod_{l=1}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l\alpha_l}(\zeta)}\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\prod_{s=1}^{k}\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.
Pour $\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, si $\alpha_p\neq i_p$, d'après la proposition 1.5.14, $\left|\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\right|\lesssim\frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau_{i_p}(z_0,\varepsilon)\tau_i'(z_0,\varepsilon)}$ et nous obtenons la majoration $\left|\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$. Si au contraire $\alpha_p=i_p$, alors la proposition 1.5.14 entraîne une estimation encore meilleure : $\left|\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta_{i_1}'\cdots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p\alpha_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)}$.
En rassemblant tous ces cas dans (2.14), nous obtenons en définitive

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta_i'}}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\prod_{s=1}^{k}\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}.$$

Prouver l'inégalité $\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_i'}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i'(z_0,\varepsilon)\prod_{s=1}^{k}\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$ se fait de manière identique.
Pour la dernière inégalité du lemme, les calculs sont très semblables :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta_i'}\partial\zeta_j'}&\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)=\\ &=\sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n\\1\leq p\leq k}}\frac{\partial^{1+k}r_{z_0}}{\partial\zeta_j'\partial\zeta_{i_1}'\dots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\\ &\quad+\sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n\\1\leq p,s\leq k\\s\neq p}}\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta_{i_1}'\dots\partial\zeta_{i_k}'}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta_i'}}(\zeta)\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\zeta_j'}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p,s}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n\\ 1\leq p\leq k}} \frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\ldots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\\
&+\sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n\\ 1\leq p\leq k}} \frac{\partial^{k+1} r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\\
&+\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^{k+2} r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^{k}\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

En distinguant les cas où tous les α_t et les i_t sont égaux, les cas où pour un t au moins α_t diffère de i_t, nous montrons comme précédemment que chacun des termes de (2.15) est majorable par $\frac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)\prod_{t=1}^k\tau_{\alpha_t}(z_0,\varepsilon)}$:

Dans $\frac{\partial^{k+2}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, s'il existe s tel que α_s diffère de i_s, alors d'après la proposition 1.5.13, $|\Phi_{\alpha_s i_s}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)\tau_{i_s}(z_0,\varepsilon)}$, et comme $\tau_{i_s}(z_0,\varepsilon)\gtrsim\varepsilon$ (proposition 1.3.4), à une constante multiplicative près ne dépendant ni de ζ, ni de z_0 et ni de ε, $\left|\frac{\partial^{k+2}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right|$ est majoré par $\frac{\varepsilon}{\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.
Si un tel indice s n'existe pas, $i_s=\alpha_s$ pour tout s et avec le corollaire 1.5.10, nous obtenons $\left|\frac{\partial^{k+2}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\prod_{l=1}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\prod_{s=1}^k\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.
Pour $\frac{\partial^{1+k}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_{i_1}\ldots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, si $\alpha_p\neq i_p$, d'après la proposition 1.5.14, $\left|\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau_{i_p}(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)}$ et nous obtenons la majoration $\left|\frac{\partial^{1+k}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_{i_1}\ldots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$. Si au contraire $\alpha_p=i_p$, alors la proposition 1.5.14 entraîne une estimation encore meilleure : $\left|\frac{\partial^{1+k}r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_{i_1}\ldots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_i(z_0,\varepsilon)}$.
Pour $\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, encore grâce à la proposition 1.5.14, nous pouvons dans tous les cas majorer $\left|\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\right|$ par $\frac{\varepsilon}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}$ et nous obtenons la majoration $\left|\frac{\partial^{k+1}r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq p}}^k\overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.

Pour $\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^k \overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, d'après la proposition 1.5.14, nous pouvons dans tous les cas majorer $\left|\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}(\zeta)\right|$ par $\frac{\varepsilon}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}$ ce qui donne la majoration suivante : $\left|\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p}}^k \overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$.
Pour $\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p,s}}^k \overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}$, la proposition 1.5.14 implique la majoration $\left|\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}$ et nous avons la majoration $\left|\frac{\partial^k r_{z_0}}{\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta)\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)\prod_{\substack{l=1\\l\neq p,s}}^k \overline{\Phi_{\alpha_l i_l}(\zeta)}\right| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{\tau_{\alpha_p}(z_0,\varepsilon)\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)}$.
En rassemblant tous ces cas dans (2.15), nous obtenons en définitive :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\prod_{l=1}^k\tau_{\alpha_l}(z_0,\varepsilon)}.$$

Puisque $\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta)$, $\frac{\partial^{1+k} r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta'_j}\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')$, $\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\overline{\zeta'_j}}(\zeta)$ et $\frac{\partial^{k+2} r_{z_0}}{\partial\overline{\zeta'_j}\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')$ admettent respectivement les mêmes majorations que $\frac{\partial\overline{\Phi_{\alpha_s i_s}}}{\partial\zeta'_j}(\zeta)$, $\frac{\partial^{1+k} r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\zeta'_{i_1}\dots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')$, $\frac{\partial^2\overline{\Phi_{\alpha_p i_p}}}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}(\zeta)$ et $\frac{\partial^{k+2} r_{z_0}}{\partial\zeta'_j\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_{i_1}\cdots\partial\zeta'_{i_k}}(\zeta')$ montrer que $\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\overline{\zeta'_j}}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)$ est majoré par $\frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_i(z_0,\varepsilon)\prod_{s=1}^k\tau_{\alpha_s}(z_0,\varepsilon)}$ se fait comme pour $\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta'_i}\partial\zeta'_j}\frac{\partial^k r_\zeta}{\partial\omega_{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{\alpha_k}}(0)$. □
Avant le prochain corollaire, rappelons que pour ζ dans $\mathcal{V}$, $F_\zeta(\omega)$ est donnée par :

$$F_\zeta(\omega) = 3\omega_1 + K{\omega_1}^2 - K'\sum_{j=2}^m \kappa_j M^{2^j}\sum_{\substack{|\beta|=j\\\beta_1=0}}\frac{1}{\beta!}\frac{\partial r_\zeta}{\partial\omega^\beta}(0)\omega^\beta.$$

Corollaire 2.3.5 *Pour tout z dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, tout ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap\mathcal{V}$, tout $t\in[0,1]$, $i,j,k=1\dots,n$, nous avons uniformément par rapport à z, ζ, z_0, t et ε :*

$$|F_\zeta(t\omega(\zeta,z))| \lesssim \varepsilon,$$
$$\left|\frac{\partial F_\zeta}{\partial\omega_i}(t\omega(\zeta,z))\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},$$

$$
\begin{aligned}
|\delta'_j F_\zeta(t\omega(\zeta,z))| + \left|\frac{\partial F_\zeta(t\omega(\zeta,z))}{\partial \overline{\zeta}'_j}\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)},\\
\left|\delta'_j\left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))\right)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}'_j}\left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))\right)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)},\\
\left|\delta'_k \frac{\partial F_\zeta(t\omega(\zeta,z))}{\partial \overline{\zeta}'_j}\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_k(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)},\\
\left|\delta'_k \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}'_j}\left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))\right)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_k(z_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Preuve : Soient ζ, z, t, i, j et k comme dans l'énoncé. D'après la remarque 1.3.1, $\tau_1(z_0,\varepsilon) \approx \varepsilon$ et donc les deuxième, quatrième et cinquième inégalités sont triviales lorsque $i = 1$. Nous supposons donc $i \neq 1$.
Nous avons

$$
\begin{aligned}
F_\zeta(t\omega(\zeta,z)) &= 3t\omega_1(\zeta,z) + K\,(t\omega_1(\zeta,z))^2 + \\
&\quad -K'\sum_{j=2}^{m}\kappa_j M^{2^j} t^j \sum_{\substack{|\beta|=j\\ \beta_1=0}} \frac{1}{\beta!}\frac{\partial r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)(\omega(\zeta,z))^\beta,
\end{aligned}
$$

et $\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))$ est donc donné par :

$$
\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z)) = -K'\sum_{j=2}^{m}\kappa_j M^{2^j} t^{j-1} \sum_{\substack{|\beta|=j\\ \beta_1=0}} \frac{\beta_i}{\beta!}\frac{\partial r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\frac{(\omega(\zeta,z))^\beta}{\omega_i(\zeta,z)}.
$$

Les lemmes 2.3.3 et 2.3.4 suffisent alors pour prouver immédiatement le corollaire. □
Le corollaire 2.3.5 correspond aux propriétés de la fonction de support de Diederich-Fornæss non globalisée et à sa décomposition de Hefer-Leray. Au cours du prochain lemme, nous allons nous intéresser aux Q'_i proprement dits et à leurs dérivées. Nous constaterons que la globalisation du théorème 1.5.2 a préservé toutes ces propriétés :

Lemme 2.3.6 *Pour tout $\zeta, z \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap\mathcal{V}$, $i,j,k = 1,\dots,n$, nous avons uniformément par rapport à ζ, z, z_0 et ε :*

$$
\begin{aligned}
|Q'_i(\zeta,z)| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},\\
|\delta'_j Q'_i(\zeta,z)| + \left|\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta}'_j}(\zeta,z)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)},
\end{aligned}
$$

$$\left|\delta'_k \frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta,z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_k(z_0,\varepsilon)}.$$

Remarque 2.3.2 Encore une fois, un résultat du même type a déjà été obtenu dans [8] par K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss. Cependant, dans [8], $\left|\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_1}}(\zeta,z)\right|$ *était majoré par* $\frac{1}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ *car* $\varepsilon \approx \tau_1(z_0,\varepsilon)$*. Ici, grâce au gain d'un facteur* $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ *dans la majoration des dérivées de la fonction définissante, nous majorons* $\left|\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_1}}(\zeta,z)\right|$ *par* $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ *et gagnons un facteur* $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ *essentiel dans le lemme 2.4.5 : Sans cela, nous n'aurions pas pu conclure dans le corollaire 2.4.6. D'autre part, sans notre étude des dérivées dans la direction normale de la fonction définissante, nous n'aurions pas eu de meilleur majorant pour* $|\delta'_1 Q'_i(\zeta,z)|$ *qu'une constante uniforme. Cela se serait répercuté dans le corollaire 2.3.7 et, encore une fois, nous n'aurions pas pu conclure dans le corollaire 2.4.6 : Ce gain lors de l'estimation des dérivées dans la direction normale de la fonction définissante est donc fondamental pour nous.*

Preuve du lemme 2.3.6 : Soient ζ, z, i, j, et k comme dans l'énoncé. Nous faisons apparaître F_ζ du précédent corollaire dans Q'_i :

$$Q'_i(\zeta,z) = -\sum_{l=1}^{n} \Phi_{li}(\zeta)\sigma_l(\zeta,\omega(\zeta,z)) \tag{2.16}$$

Remarquons que de par le comportement de Φ, c'est σ_i qui va marquer cette somme car $|\Phi_{ii}(\zeta)| \approx 1$: Dès que l diffère de i, d'après la proposition 1.5.13, $|\Phi_{li}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Nous en déduisons alors que $\left|\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n} \Phi_{li}(\zeta)\sigma_l(\zeta,\omega(\zeta,z))\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Lorsque $l=i$, il faut étudier σ_i : (2.12) mène à

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(\zeta,\omega(\zeta,z)) = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \omega_i}(\zeta, t\omega(\zeta,z))dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))F_\zeta(t\omega(\zeta,z))dt + \int_0^1 A_\zeta(t\omega(\zeta,z))\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}(t\omega(\zeta,z))dt.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Comme A ainsi que ses dérivées sont bornées et que les coefficients de Ψ sont des fonctions de classe C^∞ bornées, A_ζ et $\frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_i}$ sont uniformément bornées, et le corollaire 2.3.5 amène :

$$|\sigma_i(\zeta,\omega(\zeta,z))| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},$$

d'où nous déduisons en particulier :

$$|Q'_i(\zeta, z)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0, \varepsilon)}.$$

Pour obtenir les autres inégalités, nous procèdons de la même manière : Nous dérivons (2.16) par rapport à $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta'_j}}$:

$$\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta, z) = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{li}}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta)\sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z)) - \sum_{l=1}^{n} \Phi_{li}(\zeta) \frac{\partial \sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}.$$

Pour majorer la première somme, nous utilisons la proposition 1.5.14 selon laquelle pour tout l : $\left|\frac{\partial \Phi_{li}}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$.
Pour la seconde, lorsque $l \neq i$, nous utilisons la propostion 1.5.13 selon laquelle $|\Phi_{li}(\zeta)| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Lorsque $l = i$, $|\Phi_{ii}(\zeta)| \approx 1$. Ainsi, il faut et il suffit donc de montrer que $\left|\frac{\partial \sigma_i(\zeta,\omega(\zeta,z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Pour cela, nous majorons les dérivées par rapport à $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ de chacune des intégrales de (2.17). Mais A_ζ et ses dérivées étant uniformément bornées, nous déduisons encore du corollaire 2.3.5 que :

$$\left|\frac{\partial \sigma_i(\zeta, \omega(\zeta, z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0, \varepsilon)\tau_i(z_0, \varepsilon)}, \tag{2.18}$$

ce qui aboutit finalement à $\left|\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta, z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$.
$\delta'_j F_\zeta$ et $\delta'_j \frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}$ admettent respectivement les mêmes majorations que $\frac{\partial F_\zeta}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta'_j}} \frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_i}$. Ainsi on majore de même $|\delta'_j Q'_i(\zeta, z)|$ et c'est pourquoi nous passons directement à la dernière inégalité du lemme. La seule chose qui va changer est le nombre de dérivées :

$$\begin{aligned}\delta'_k \frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta, z) = &-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi_{li}}{\partial \zeta'_k \partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta)\sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z)) - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{li}}{\partial \overline{\zeta'_j}}(\zeta)\delta'_k \sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z)) + \\ &-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{li}}{\partial \zeta'_k}(\zeta) \frac{\partial \sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z))}{\partial \overline{\zeta'_j}} - \sum_{l=1}^{n} \Phi_{li}(\zeta)\delta'_k \frac{\partial \sigma_l(\zeta, \omega(\zeta, z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}.\end{aligned}$$

Comme précédemment, seul le cas où à la fois Φ_{li} n'est pas dérivé et $l = i$ mérite réflexion car dans tous les autres, il suffit d'invoquer les propositions

1.5.13 et 1.5.14. Nous évaluons donc $\delta'_k \frac{\partial \sigma_i(\zeta,\omega(\zeta,z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}$. Mais comme A_ζ et ses dérivées sont uniformément bornées, (2.17) et l'intégration des inégalités du corollaire 2.3.5 conduisent à

$$\left|\delta'_k \frac{\partial \sigma_i(\zeta,\omega(\zeta,z))}{\partial \overline{\zeta'_j}}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau'_j(z_0,\varepsilon)\tau'_k(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$$

et la dernière inégalité du lemme est établie. □

Remarque 2.3.3 Nous avons éludé dans ces inégalités les cas où i vaut 1, mais remarquons par exemple que $|\sigma_1(\zeta,\omega)| \gtrsim 1$ *: En effet,* $\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_1}(\omega) = 3 + 2K\omega_1$*. Ainsi, si* $|\zeta - z|$ *est petit,* $\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_1}(t\omega(\zeta,z))$ *est non nul et comme nous l'avons remarqué en prouvant le lemme 2.3.6, c'est essentiellement* $\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_1}$ *qui compte dans* σ_1 *: Nous n'avons pas fait de "cadeau par négligence".*

Nous avons étudié les $\delta'_j Q'_i$, mais c'est surtout les $\delta_j Q'_i$ qui nous intéressent :

Corollaire 2.3.7 *Pour* $i, j, k = 1, \ldots, n$*,* z *et* $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap \mathcal{V}$*, nous avons uniformément en* ζ*,* z*,* z_0 *et* ε *:*

$$\begin{aligned}
|\delta_j Q'_i(\zeta,z)| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},\\
\left|\delta_j \frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_k}}(\zeta,z)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_k(z_0,\varepsilon)},\\
|\delta_j S(\zeta,z)| &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Preuve : Elle est très simple : Soient i, j, k, z et ζ comme dans l'énoncé du corollaire. Pour tout l, selon la remarque 1.5.1, $\tau'_l(z_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, d'où, avec le lemme 2.3.6,

$$\begin{aligned}
|\delta'_l Q'_i(\zeta,z)| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},\\
\left|\delta'_l \frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_k}}(\zeta,z)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau'_k(z_0,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Comme $\delta_j = \sum_{l=1}^n (\Psi(z_0)\Phi_*)_{lj}\delta'_l$ et que $|(\Psi(z_0)\Phi_*)_{lj}| \leq 1$ pour tout j, l (Φ_* et $\Psi(z_0)$ sont des matrices unitaires), les deux premières inégalités du corollaire sont démontrées. Pour la dernière, nous écrivons simplement $S(\zeta,z) = \sum_{l=1}^n Q'_l(\zeta,z)(\zeta'_l - z'_l)$, et puisque $\delta_j(\zeta_l - z_l) = 0$ pour tout j et l, $\delta_j S(\zeta,z) = \sum_{l=1}^n \delta_j(Q'_l(\zeta,z))(\zeta'_l - z'_l)$. Comme $|\zeta'_l| + |z'_l| \lesssim \tau_l(z_0,\varepsilon)$ (proposition 1.5.8), la première inégalité implique la dernière. □

2.4 Régularité de T_q^*

Nous en venons maintenant aux estimées des dérivées du noyau. Rappelons que $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet où ε_0 a été choisi de sorte que la proposition 2.3.2 soit vérifiée et que $G = \mathcal{V} - D$ est une petite couronne extérieure à D intervenant dans la définition de T_q^*.
C'est dans cette section que nous allons enfin comprendre l'importance du gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ que la proposition 1.4.5 a apporté et pourquoi il était important de toujours préserver ce gain lorsque nous avons estimé la décomposition de Hefer-Leray et ses dérivées.

Lemme 2.4.1 *Soient $q = 1, \ldots, n-1$, Δ_k un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ et d'ordre $k > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Alors nous avons :*

$$\Delta_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \int_{\lambda \in [0,1]} \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, z) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n-q-1} \sum_{\substack{1 \leq \nu_0 < \ldots < \nu_l \leq n \\ 1 < \mu_1 < \ldots < \mu_l \leq n}} W_{\varepsilon_0}[1, -k, (\nu_0, \ldots, \nu_l, \mu_1, \ldots, \mu_l), 2(n-l-1)](\zeta, z) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n-q-1} \sum_{\substack{1 \leq \nu_0 < \ldots < \nu_l \leq n \\ 1 < \mu_1 < \ldots < \mu_{l-1} \leq n}} W_{\varepsilon_0}[1, -k - \frac{1}{2}, (\nu_0, \ldots, \nu_l, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}), 2(n-l-1)](\zeta, z)$$

pour tout $z \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ et tout $\zeta \in G$.

Preuve : La preuve de ce lemme repose sur la proposition 2.3.2 et les estimations de la sous-section 2.3.2.
S et Q étant holomorphes par rapport à z lorsque ζ est fixé, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ n'agit que sur la partie de Bochner-Martinelli du noyau. Ainsi, après intégration par rapport à la variable scalaire λ, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \Omega_{n,q-1}(\eta)$ est une combinaison linéaire de :

$$\frac{\eta_1 \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_1)^l}{S^{l+1}} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left(\frac{\eta_0 \wedge (\overline{\partial}_z \eta_0)^{q-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_0)^{n-q-1-l}}{|\zeta - z|^{2(n-l-1)}} \right),$$

où l appartient à $[\![0, \ldots, n-q-1]\!]$.
Soient $k > 0$ entier, Δ_k un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k$, $j = 1, \ldots, n$. Nous fixons $z_0 \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \in [c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$, reprenons les notations de la sous-section 2.3.2, et comme annoncé dans cette dernière, exprimons le noyau dans la base de Diederich-Fornæss en z_0 définie par $\Psi(z_0)$.

Soient $\Delta_{k'}$ et $\Delta_{k''}$ deux opérateurs de différentiation d'ordres respectifs k' et k'' tels que $\Delta_{k'}\Delta_{k''} = \Delta_k$, ζ appartenant à $(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap G$ si $\varepsilon \neq |r(z_0)|$ et à $G \cap \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ si $|r(z_0)| = \varepsilon$. Nous devons évaluer des termes de la forme :

$$\Delta_{k'} \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta, z_0)d\zeta'_{\nu_0} \wedge \bigwedge_{i=1}^l \frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial \overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta, z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}} \wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta, z_0)} \wedge$$
$$\wedge \Delta_{k''} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \frac{\eta_0(\zeta, z_0) \wedge (\overline{\partial}_z \eta_0(\zeta, z_0))^{q-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_0(\zeta, z_0))^{n-q-l-1}}{|\zeta - z_0|^{2(n-l-1)}} \quad (2.19)$$

où l varie entre 0 et $n - q - 1$.
Pour ne pas avoir à distinguer trop de cas, nous adoptons les conventions suivantes : Q'_i et $\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ seront estimés par le lemme 2.3.6 et S par la proposition 2.3.2. Nous ne nous sommes pas intéressés aux dérivées des Q'_i autres que $\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}$, mais cela ne nous handicapera aucunement : Lorsque $\Delta_{k'}$ va agir sur $\frac{Q'_{\nu_0}d\zeta'_{\nu_0} \bigwedge_{i=1}^l \frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial \overline{\zeta'_{\mu_i}}} d\overline{\zeta'_{\mu_i}} \wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}}$, $\frac{1}{S^{l+1}}$ se trouvera bien entendu dérivé, par exemple, par rapport à $\frac{\partial}{\partial z'_1}$. Mais $\frac{\partial}{\partial z'_1}\frac{1}{S^{l+1}} = -\frac{l+1}{S^{l+2}}\frac{\partial S}{\partial z'_1}$ et $\frac{\partial S}{\partial z'_1}(\zeta, z_0)$ se comportera comme le gradient de r en ζ : il ne sera jamais petit face à ε. Par conséquent, dériver $\frac{1}{S^{l+1}}$ par rapport à z'_1 revient à diviser par S, ou encore puisque selon la proposition 2.3.2 $S(\zeta, z_0)$ sera minoré par ε, à diviser par ε. C'est pour cela que lorsque Q'_i et $\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ sont dérivés p fois, nous ne perdons rien en divisant simplement les estimations du lemme 2.3.6 par ε^p, ce que nous ferons. Remarquons que cette division est licite car nous majorons des quantités bornées par d'autres qui ne le sont pas si ε devient petit.
Nous considérons (2.19) :
Remarquons que pour tout i, j, $i \neq j$, ν_i et ν_j ainsi que μ_i et μ_j sont distincts. Nous distinguons deux cas :
S'il existe i (nécessairement unique) tel que $\mu_i = 1$, alors puisque $\tau'_1(z_0, \varepsilon)$ vaut $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et $\tau'_j(z_0, \varepsilon) = \tau_j(z_0, \varepsilon)$ pour tout $j \neq 1$, nous avons avec nos conventions

$$\left| \Delta_{k'} \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta, z_0)d\zeta'_{\nu_0} \bigwedge_{i=1}^l \frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial \overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta, z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}} \wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta, z_0)} \right| \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^{l+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{l+1+k'} \prod_{i=0}^l \tau_{\nu_i}(z_0, \varepsilon) \prod_{\substack{i=1 \\ \mu_i \neq 1}}^l \tau_{\mu_i}(z_0, \varepsilon)}$$

où les ν_i (respectivement μ_i) sont deux à deux distincts.
A une constante multiplicative près ne dépendant ni de ζ ni de z_0, la forme différentielle $\Delta_{k''}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ est majorable par $\frac{1}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)+k''}}$. Nous "convertissons" $|\zeta-z_0|^{k''}$ en $\varepsilon^{k''}$: Si $\varepsilon\neq|r(z_0)|$, ζ n'appartenant pas à $c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $|\zeta-z_0|\gtrsim\varepsilon$ et si $\varepsilon=|r(z_0)|$, $|\zeta-z_0|\geq d(z_0,bD)$, mais $d(z_0,bD)$ est comparable à $|r(z_0)|$ et encore : $|\zeta-z_0|\gtrsim\varepsilon$.
Ceci nous permet de majorer $\Delta_{k''}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ par $\frac{1}{\varepsilon^{k''}|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ et finalement quitte à renuméroter les indices de sorte que $\mu_l=1$, nous avons

$$\left|\Delta_{k'}\frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge\right.$$
$$\left.\wedge\Delta_{k''}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\right|\lesssim$$
$$\lesssim\frac{\varepsilon^{-k-\frac12}}{\prod_{i=0}^l\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$$

avec $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts.
S'il n'existe pas i tel que $\mu_i=1$:

$$\left|\Delta_{k'}\frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\right|\lesssim$$
$$\lesssim\frac{\varepsilon^{l+1}}{\varepsilon^{l+1+k'}\prod_{i=0}^l\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^l\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

toujours avec les ν_i (respectivement μ_i) deux à deux distincts et $\mu_i>1$ pour tout i.
Nous majorons toujours $\Delta_{k''}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ par $\frac{1}{\varepsilon^{k''}|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ et obtenons finalement

$$\left|\Delta_{k'}\frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge\right.$$
$$\left.\wedge\Delta_{k''}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\right|\lesssim$$

$$\lesssim \quad \frac{\varepsilon^{-k}}{\prod_{i=0}^{l}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$$

où les ν_i (respectivement μ_i) sont deux à deux distincts et $\mu_i > 1$ pour tout i.
Nous sommons maintenant sur les $\Delta_{k'}$, $\Delta_{k''}$, l, ν_i, μ_i et obtenons pour tout ζ de $(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0))\cap G$ si $\varepsilon \neq |r(z_0)|$ et de $G\cap\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ si $|r(z_0)| = \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&\left|\Delta_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\int_{\lambda\in[0,1]}\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z_0)\right| \lesssim \\
&\sum_{l=1}^{n-q-1}\sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_l\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_{l-1}\leq n}}\frac{\varepsilon^{-k-\frac{1}{2}}}{\prod_{i=0}^{l}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\\
&+\sum_{l=0}^{n-q-1}\sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_l\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_l\leq n}}\frac{\varepsilon^{-k}}{\prod_{i=0}^{l}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}.
\end{aligned}$$

Puisque ε est quelconque dans $[c_2|r(z_0)|,\varepsilon_0]$, cela finit la preuve du lemme.
□
Nous déduisons de ce lemme trois corollaires :

Corollaire 2.4.2 *Soient $q = 1,\ldots,n-1$, $k > 0$ entier et $h \in C^k_{0,q}(\overline{D})$ $\overline{\partial}$-fermée. Alors pour tout j, $\frac{\partial T'_q h}{\partial\overline{z}_j}$ appartient à $C^{k-1+\frac{1}{m}}_{0,q}(\overline{D})$ et vérifie uniformément par rapport à h :*

$$\left\|\frac{\partial T'_q h}{\partial \overline{z}_j}\right\|_{\overline{D},k-1+\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}.$$

Preuve : Le lemme 2.4.1 permet de vérifier les hypothèses du lemme A.5.1 et du corollaire A.5.2 pour pouvoir appliquer le lemme de Hardy-Littlewood : Soient $q = 1,\ldots,n-1$, $k > 0$ entier, Δ_{k-1} un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha|+|\beta| = k-1$, $\Delta = \frac{\partial}{\partial z_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}$, $i = 1,\ldots,n$ et h une forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée de $C^k_{0,q}(\overline{D})$. Nous fixons un j de $\{1,\ldots,n\}$ et z_0 un point dans $D\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$.
D'une part le théorème A.2.1 donne $\|\overline{\partial}_\zeta Eh\|_{G,0} \lesssim \|h\|_{\overline{D},1}$. D'autre part, pour ζ appartenant à $G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$, $|\zeta-z_0| \gtrsim \varepsilon_0$ et donc

$$\sup_{\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)}\left|\Delta\left(\Delta_{k-1}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\int_{\lambda\in[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z_0)\right)\right| \leq \|h\|_{\overline{D},1}c_0$$

où c_0 ne dépend que de ε_0.
Ensuite, comme $\overline{\partial}_\zeta Eh$ est identiquement nul sur $\overline{D}$, d'après le corollaire A.2.3 et le théorème A.2.1, pour tout $\varepsilon \in [c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$ et tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, nous avons $\left|\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\right| \lesssim \varepsilon^{k-1} \|h\|_{\overline{D},k}$.
Avec le lemme 2.4.1, nous en déduisons que pour tout (ζ, z) de $G \times (\mathcal{V} \cap D)$ avec $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$, $\Delta\Delta_{k-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\int_{\lambda\in[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k}, \alpha, \nu, p](\zeta, z)$ pour $\alpha = -1$, $|\nu| = 2l+1$, $p = 2n-2l-2$ et $l \in [\![0, n-q-1]\!]$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$, $|\nu| = 2l$, $p = 2n-2l-2$ et $l \in [\![1, n-q-1]\!]$, où dans les deux cas $2, \dots, n$ apparaissent au plus 2 fois et 1 au plus une fois dans ν. Puisque $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet, dans le premier cas, nous pouvons appliquer le lemme A.5.1 et dans le second le corollaire A.5.2 qui donnent en z_0, uniformément par rapport à z_0

$$\left|\Delta\left(\Delta_{k-1}\frac{\partial T_q' h}{\partial \overline{z}_j}\right)(z_0)\right| \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Comme z_0 est quelconque dans $\mathcal{V} \cap D$ pourvu que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, le lemme de Hardy-Littlewood (lemme A.1.1) implique que $\Delta_{k-1}\frac{\partial T_q' h}{\partial \overline{z}_j}$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait

$$\left\|\Delta_{k-1}\frac{\partial T_q' h}{\partial \overline{z}_j}\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0},$$

uniformément par rapport à h. Comme Δ_{k-1} est quelconque, cela montre le corollaire. □

Remarque 2.4.1 Comme nous l'avions annoncé peu après avoir formulé l'objectif 2.2.1, le gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ n'est pas nécessaire dans l'application du lemme 2.4.1. Sans ce gain, dans le corollaire 2.4.2 nous aurions eu une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k}, \alpha, \nu, p](\zeta, z)$ pour $\alpha = -1$, $|\nu| = 2l+1$, $p = 2n-2l-2$ et $l \in [\![0, n-q-1]\!]$ ou $\alpha = -2$, $|\nu| = 2l$, $p = 2n-2l-2$ et $l \in [\![1, n-q-1]\!]$. Le lemme A.5.1 et le corollaire A.5.2 donnaient encore des majorations suffisantes. Cela vient du fait que la dérivation par rapport à $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ ne peut pas affecter S et nous évitons donc une dérivation à S. Ce sera encore le cas dans les deux prochains corollaires mais pas dans le corollaire 2.4.6.

Corollaire 2.4.3 *Soit $q = 2, \dots, n-1$. Pour toute forme $h \in C^0_{0,q}(\overline{D})$, $M_q h$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait $\|M_q h\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0}$ uniformément par rapport à h.*

Preuve : Encore une fois, le lemme 2.4.1 permet de vérifier les hypothèses du lemme A.5.1 ou de son corollaire pour appliquer le lemme de Hardy-Littlewood : Soient h une forme différentielle de $C_{0,q}(\overline{D})$, $\Delta = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ ou $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, n$, un point z_0 dans $D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$.
Selon le théorème A.2.1 nous avons $\|Eh\|_{G,0} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0}$. De plus, pour ζ appartenant à $G - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$, $|\zeta - z_0| \gtrsim \varepsilon_0$. Cela implique donc

$$\sup_{\zeta \in G - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)} \left| \Delta \int_{\lambda \in [0,1]} Eh(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, z_0) \right| \leq \|h\|_{\overline{D},0} c_0$$

où c_0, qui n'a pas de lien avec le c_0 du corollaire précédent, ne dépend que de ε_0.
Ensuite, selon le lemme 2.4.1, $\Delta \int_{\lambda \in [0,1]} Eh(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, z)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},0}, \alpha, \nu, p](\zeta, z)$ pour tout ζ de G et tout z de $\mathcal{V} \cap D$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ avec $\alpha = -1$, $|\nu| = 2l + 1$, $p = 2n - 2l - 2$ et $l \in [\![0, n - q]\!]$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$, $|\nu| = 2l$, $p = 2n - 2l - 2$ et $l \in [\![1, n - q]\!]$, où dans les deux cas $2, \dots, n$ apparaissent au plus 2 fois et 1 au plus une fois dans ν. Puisque $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet, dans le premier cas nous pouvons appliquer le lemme A.5.1 et dans le second le corollaire A.5.2 qui donnent en z_0, uniformément par rapport à z_0,

$$|\Delta M_q h(z_0)| \lesssim \|h\|_{\overline{D},0} |r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Comme z_0 est quelconque dans $\mathcal{V} \cap D$ pourvu que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, le lemme de Hardy-Littlewood (lemme A.1.1) implique que $M_q h$ appartient à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{D})$ et satisfait :

$$\|M_q h\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0},$$

uniformément par rapport à h, ce qui montre le corollaire. □
Ce troisième corollaire est très semblable aux deux précédents par sa démonstration.

Corollaire 2.4.4 *Soient $q = 2, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$, $k > 0$ entier, $h \in C_{0,q}^k(\overline{D})$. Alors $\int_{G \times [0,1]} \left(E \frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)$ est un élément de $C_{0,q-1}^{k-1+\frac{1}{m}}(\overline{D})$ et vérifie*

$$\left\| \int_{G \times [0,1]} \left(E \frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot) \right\|_{\overline{D}, k-1+\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$$

uniformément par rapport à h.

Preuve : Soient $k>0$ entier, h une forme différentielle de $C^k_{0,q}(\overline{D})$, Δ_{k-1} un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha|+|\beta|=k-1$, $\Delta=\frac{\partial}{\partial z_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}$, $i=1,\dots,n$, et un point z_0 dans $D\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$.
D'après le théorème A.2.1, $\left\|E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}\right\|_{G,0}\lesssim\|h\|_{\overline{D},1}$. D'autre part, pour tout $\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$, $|\zeta-z_0|\gtrsim\varepsilon_0$ et nous avons donc

$$\sup_{\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)}\left|\Delta\Delta_{k-1}\int_{\lambda\in[0,1]}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z_0)\right|\lesssim$$
$$\lesssim\ \|h\|_{\overline{D},1}c_0$$

où c_0 n'a pas de lien avec ceux des précédents corollaires et ne dépend que de ε_0.
Sur $G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$: Soient $\varepsilon\in[c_2|r(z_0)|,\varepsilon_0]$ et ζ dans $G-\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$. Comme $E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}$ est identiquement nul sur $\overline{D}$, d'après le corollaire A.2.3, nous avons $\left|E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right|\lesssim\varepsilon^{k-1}\left\|E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}\right\|_{G\cup D,k-1}$ et avec le théorème A.2.1 :

$$\left|E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right|\lesssim\varepsilon^{k-1}\|h\|_{\overline{D},k}.\tag{2.20}$$

Le lemme 2.4.1 et (2.20) impliquent que pour tout (ζ,z) dans $G\times(\mathcal{V}\cap D)$ tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$, $\Delta\Delta_{k-1}\int_{\lambda\in[0,1]}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k},\alpha,\nu,p](\zeta,z)$ pour $\alpha=-1$, $|\nu|=2l+1$, $p=2n-2l-2$ et $l\in[\![0,n-q]\!]$, ou $\alpha=-\frac{3}{2}$, $|\nu|=2l$, $p=2n-2l-2$ et $l\in[\![1,n-q]\!]$, avec à chaque fois chaque i de $\{2,\dots,n\}$ apparaissant au plus deux fois dans ν, 1 au plus une fois. Dans le premier cas, nous pouvons appliquer le lemme A.5.1 et dans le second le corollaire A.5.2 qui donnent en z_0, uniformément par rapport à z_0,

$$\left|\Delta\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,z_0)\right|\lesssim\|h\|_{\overline{D},k}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Puisque z_0 est quelconque dans $\mathcal{V}\cap D$ pourvu que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$, le lemme A.1.1 implique que $\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait, uniformément par rapport à h,

$$\left\|\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}}\lesssim\|h\|_{\overline{D},k}.$$

Comme Δ_{k-1} est quelconque, c'est encore une fois le résultat voulu. $\square$

Lemme 2.4.5 *Soient $q = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$, Δ_k un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k$ et $h \in C^k_{0,q}(\overline{D})$ $\overline{\partial}$-fermée. Nous avons :*

$$\Delta_k \int_{\lambda \in [0,1]} \overline{\partial}_\zeta E h(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, z) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-q-1} \sum_{\substack{1 \le \nu_0 < \dots < \nu_l \le n \\ 1 < \mu_1 < \dots < \mu_{l-1} \le n}} W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k}, -2, (\nu_0, \dots, \nu_l, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}), 2(n-l-1)-1](\zeta, z)$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-q-1} \sum_{\substack{1 \le \nu_0 < \dots < \nu_l \le n \\ 1 < \mu_1 < \dots < \mu_l \le n}} W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k}, -\frac{3}{2}, (\nu_0, \dots, \nu_l, \mu_1, \dots, \mu_l), 2(n-l-1)-1](\zeta, z)$$

pour tout $z \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z)| \le \varepsilon_0$ et tout $\zeta \in G$.

Preuve : En comparaison avec lemme 2.4.1, le terme de Bochner-Martinelli ne subira l'influence que de Δ_k, δ_j le laissant intact. Par contre, δ_j va agir sur les termes provenant de S, entrainant une perte d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.
Soient $j = 1, \dots, n$, $k > 0$ entier, Δ_k un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k$, $q = 1, \dots, n-1$ et $h \in C^k_{0,q}(\overline{D})$ $\overline{\partial}$-fermée. Nous fixons $z_0 \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \le \varepsilon_0$, $\varepsilon \in [c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$ et reprenons les notations de la sous-section 2.3.2.
Comme nous l'avions vu dans le corollaire 2.4.2, $|\overline{\partial}_\zeta E h(\zeta)| \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}\ \varepsilon^{k-1}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ et nous pourrons donc multiplier le résultat de l'estimation de $\delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)$ par $\|h\|_{\overline{D},k} \varepsilon^{k-1}$.
Après intégration par rapport à la variable scalaire λ, $\delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)$ est une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\frac{\delta_j \eta_1 \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_1)^l \wedge \eta_0 \wedge (\overline{\partial}_z \eta_0)^{q-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_0)^{n-q-1-l}}{S^{l+1}|\zeta - z|^{2(n-l-1)}},$$

$$\frac{\eta_1 \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_1)^{l-1} \wedge \delta_j \overline{\partial}_\zeta \eta_1 \wedge \eta_0 \wedge (\overline{\partial}_z \eta_0)^{q-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_0)^{n-q-1-l}}{S^{l+1}|\zeta - z|^{2(n-l-1)}},$$

$$\frac{\eta_1 \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_1)^l \wedge \eta_0 \wedge (\overline{\partial}_z \eta_0)^{q-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_0)^{n-q-1-l}}{S^{l+2}|\zeta - z|^{2(n-l-1)}} \delta_j S,$$

où l appartient à $[\![0, \dots, n-q-1]\!]$.
Soient $\Delta_{k'}$ et $\Delta_{k''}$ deux opérateurs de différentiation d'ordres respectifs k' et k'' tels que $\Delta_{k'} \Delta_{k''} = \Delta_k$, ζ appartenant à $(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1 \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap G$ si

$\varepsilon \neq |r(z_0)|$ et à $G\cap\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ si $|r(z_0)|=\varepsilon$. Comme δ_j n'agit pas sur les termes de Bochner-Martinelli, nous devons évaluer des éléments de la forme :

$$\Delta_{k'}\frac{\delta_j Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{l}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge$$
$$\wedge\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\tag{2.21}$$

$$\Delta_{k'}\left(\frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=2}^{l}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge\delta_j\frac{\partial Q'_{\nu_1}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_1}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_1}}\wedge d\zeta'_{\nu_1}\right)\wedge$$
$$\wedge\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\tag{2.22}$$

$$\Delta_{k'}\left(\frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{l}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+2}(\zeta,z_0)}\delta_j S(\zeta,z_0)\right)\wedge$$
$$\wedge\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\tag{2.23}$$

où l varie entre 0 et $n-q-1$.
Les conventions seront les mêmes que pour le lemme 2.4.1 : Q'_i, $\frac{\partial Q'_i}{\partial\overline{\zeta'_j}}$, $\delta_j\frac{\partial Q'_i}{\partial\overline{\zeta'_l}}$, $\delta_j\frac{\partial Q'_i}{\partial\zeta'_l}$, $\delta_j S$, seront estimées avec le lemme 2.3.6 et le corollaire 2.3.7. De plus, lorsque chacun de ces termes sera dérivé p fois, nous diviserons ces estimées par ε^p auquel cas nous majorerons des quantités bornées uniformément par d'autres qui ne le sont pas lorsque ε devient petit. Pour S, nous utiliserons la proposition 2.3.2 et majorerons ses dérivées par 1.
Ces conventions correspondent toujours au pire des cas, c'est-à-dire lorsque l'opérateur de dérivation est k fois la composée de $\frac{\partial}{\partial z'_1}$ avec lui-même et agit uniquement sur S.
Nous étudions (2.21) :
Comme précédemment, pour i,j distincts, ν_i et ν_j ainsi que μ_i et μ_j sont distincts. Nous distinguons deux cas :

S'il existe i tel que $\mu_i = 1$, nous avons avec nos conventions :

$$\left|\Delta_{k'}\frac{\delta_j Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\right|\lesssim$$

$$\lesssim\frac{\varepsilon^l}{\varepsilon^{l+k'+1}\prod_{i=0}^l\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{\substack{i=1\\ \mu_i\neq 1}}^l\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

où les ν_i (respectivement μ_i) sont deux à deux distincts.
$\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ est majoré par $\frac{1}{\varepsilon^{k''}|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)-1}}$, et finalement, en renumérotant les indices de sorte que $\mu_l = 1$, nous obtenons

$$\left|\Delta_{k'}\frac{\delta_j Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge\right.$$

$$\left.\wedge\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\right|\lesssim$$

$$\lesssim\quad\frac{\varepsilon^{-1-k}}{\prod_{i=0}^l\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)-1}}$$

avec $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts et $\mu_i > 1$ pour tout i.
S'il n'existe pas i tel que $\mu_i = 1$, alors :

$$\left|\Delta_{k'}\frac{\delta_j Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\right|\lesssim$$

$$\lesssim\quad\frac{\varepsilon^{l+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{l+k'+1}\prod_{i=0}^l\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^l\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

où les ν_i (respectivement μ_i) sont deux à deux distincts.
Nous majorons encore une fois $\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}$ par $\frac{1}{\varepsilon^{k''}|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)-1}}$, d'où

$$\left|\Delta_{k'}\frac{\delta_j Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^l\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^{l+1}(\zeta,z_0)}\wedge\right.$$

$$\wedge\Delta_{k''}\frac{\eta_0(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_0(\zeta,z_0))^{n-q-1-l}\wedge(\overline{\partial}_z\eta_0(\zeta,z_0))^{q-1}}{|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)}}\Bigg| \lesssim$$

$$\lesssim \quad \frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}-k}}{\prod_{i=0}^{l}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2(n-l-1)-1}}$$

toujours avec $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts et $\mu_i>1$ pour tout i. Pour (2.22) et (2.23), la même méthode donne le même résultat. Il ne reste alors plus qu'à sommer sur les $\Delta_{k'}$, $\Delta_{k''}$, l, ν_i, μ_i et multiplier par $\varepsilon^{k-1}\|h\|_{\overline{D},k}$. □

Corollaire 2.4.6 *Soient $q=1,\ldots,n-1$, $j=1,\ldots,n$, $k>0$ entier, $h\in C^k_{0,q}(\overline{D})$, $\overline{\partial}$-fermée. Alors nous avons*

Si $m\neq 2$, $\int_{G\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)$ appartient à $C^{k-1+\frac{2}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait

$$\left\|\int_{G\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)\right\|_{\overline{D},k-1+\frac{2}{m}}\lesssim\|h\|_{\overline{D},k},$$

uniformément par rapport à h.
Si $m=2$, pour tout $\varepsilon\in]0,1]$, $\int_{G\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)$ appartient à $C^{k-\varepsilon}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait

$$\left\|\int_{G\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)\right\|_{\overline{D},k-\varepsilon}\lesssim\|h\|_{\overline{D},k},$$

uniformément par rapport à h aussi, mais pas par rapport à ε.

Preuve : Nous reprenons les notations de l'énoncé, fixons Δ_{k-1} un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha|+|\beta|=k-1$, $\Delta=\frac{\partial}{\partial z_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_i}$, $i=1,\ldots,n$, et un point z_0 dans $D\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$. En utilisant le théorème A.2.1, nous voyons que :

$$\sup_{\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)}\left|\Delta\Delta_{k-1}\int_{\lambda\in[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z_0)\right| \quad\leq\quad \|h\|_{\overline{D},1}c_0$$

c_0, sans lien avec ceux des précédents corollaires, ne dépendant que de ε_0. D'après le lemme 2.4.5, pour tout couple (ζ,z) de $G\times(\mathcal{V}\cap D)$ tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$, $\Delta\Delta_{k-1}\int_{\lambda\in[0,1]}\overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta)\wedge\delta_j\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k},\alpha,\nu,p](\zeta,z)$ pour $\alpha=-2$, $|\nu|=2l$ et $p=2n-2l-3$ et

$l \in [\![1, n-q-1]\!]$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$, $|\nu| = 2l+1$, $p = 2n-2l-3$ et $l \in [\![0, n-q-1]\!]$, chaque i de $\{2, \ldots, n\}$ apparaissant au plus 2 fois et 1 apparaissant au plus une fois dans ν. Dans les deux cas, nous pouvons appliquer le corollaire A.5.2 qui donne en z_0, uniformément par rapport à z_0,

$$\left|\Delta\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, z_0)\right| \lesssim \|h\|_{\overline{D},k} |r(z_0)|^{\frac{2}{m}-1}$$

si $m \neq 2$ et sinon, car $\alpha + 1 - \frac{2n-|\nu|-p-1}{m} = 0$,

$$\left|\Delta\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, z_0)\right| \lesssim \|h\|_{\overline{D},k} |\ln|r(z_0)||.$$

Comme z_0 est quelconque dans $D \cap \mathcal{V}$ pourvu que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, le lemme de Hardy-Littlewood nous indique que si $m \neq 2$, $\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge$ $\delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)$ appartient à $C^{\frac{2}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie

$$\left\|\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)\right\|_{\overline{D}, \frac{2}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k},$$

et si $m = 2$, que pour tout $\varepsilon > 0$, $\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)$ est dans $C^{1-\varepsilon}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait

$$\left\|\Delta_{k-1} \int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)\right\|_{\overline{D}, 1-\varepsilon} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}.$$

Comme Δ_{k-1} est quelconque, c'est exactement le résultat voulu. □

Remarque 2.4.2 Sans le gain d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ que nous avons obtenu au cours du lemme 2.3.6 dans la majoration de $\frac{\partial Q_i'}{\partial \overline{\zeta}_1'}$, il était impossible de conclure dans le corollaire 2.4.6 car il nous aurait manqué un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.
D'autre part, remarquons que l'intégration par parties qui fait apparaître $\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta, \lambda, \cdot)$ dans (2.6) n'apporte strictement rien sans les nouvelles estimations des dérivées dans la direction normale de la fonction définissante de D : C'est elles seules qui dans le lemme 2.3.6 permettent de majorer correctement $\delta_1' Q_i'$, $\delta_1' \frac{\partial Q_i'}{\partial \overline{\zeta}_j'}$ et d'en déduire ensuite les majorations du corollaire 2.3.7. En fait, dans [22], l'intégration par parties

avec les δ_j permettait à J. Michel de gagner un ordre d'annulation lorsque $\zeta = z$. Ici aussi cela permet de gagner un ordre d'annulation. Cependant, dans le cadre des domaines de type fini, nous ne pouvons pas l'exploiter comme tel car un ordre d'annulation correspond seulement à un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{m}}$. En effet, la seule information que l'on peut tirer du fait que ζ appartienne à $\mathcal{P}_\varepsilon(z)$ est $|\zeta - z| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{m}}$ et cela ne peut suffir que pour un domaine convexe de type fini 2 puisque dans ce cas $m = 2$. Par conséquent, il faut exploiter cet ordre d'annulation d'une autre manière, notamment avec à la proposition 1.4.5 qui permet de le transformer en $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Avant de pouvoir entériner le théorème 2.0.1, nous avons encore besoin de résultats sur $K_{n,0}$.

Lemme 2.4.7 *Pour tout opérateur de différentiation Δ_k de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k$, nous avons :*

$$\begin{aligned}
&\Delta_k K_{n,0}(\zeta, z) = \\
&= \sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_{n-1}\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_{n-1}\leq n}} W_{\varepsilon_0}[1, -k, (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}), 0](\zeta, z)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_{n-1}\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_{n-2}\leq n}} W_{\varepsilon_0}[1, -k - \frac{1}{2}, (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}), 0](\zeta, z)
\end{aligned}$$

pour tout $z \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ et tout $\zeta \in G$.

Preuve : Fixons $z_0 \in D \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \in [c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$ et reprenons les notations de la sous-section 2.3.2.
Soient Δ_k un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^k}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k$, ζ dans $(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap G$ si $\varepsilon \neq |r(z_0)|$ et dans $G \cap \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ si $|r(z_0)| = \varepsilon$.
Nous devrons travailler avec des termes de la forme :

$$\Delta_k \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta, z_0) d\zeta'_{\nu_0} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial \overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta, z_0) d\overline{\zeta'_{\mu_i}} \wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^n(\zeta, z_0)}. \tag{2.24}$$

Nous reprenons aussi les conventions du lemme 2.4.1 : Q'_i, $\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ estimés par le lemme 2.3.6, S, par la proposition 2.3.2, lorsque Q'_i et $\frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta'_j}}$ sont dérivés p fois, nous divisons les estimations du lemme 2.3.6 par ε^p.
Nous étudions (2.24) :
Comme toujours, dès que i est distinct de j, ν_i est distinct de ν_j et μ_i de

μ_j. Nous distinguons encore deux cas :
S'il existe i tel que $\mu_i = 1$, alors puisque $\tau_1'(z_0,\varepsilon)$ vaut $\varepsilon^{\frac12}$ et $\tau_j'(z_0,\varepsilon) = \tau_j(z_0,\varepsilon)$ pour tout $j\neq 1$, nous avons avec nos conventions :

$$\left|\Delta_k \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^n(\zeta,z_0)}\right| \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^{n-\frac12}}{\varepsilon^{n+k}\prod_{i=0}^{n-1}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{\substack{i=1\\ \mu_i\neq 1}}^{n-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

où les ν_i (respectivement μ_i) sont deux à deux distincts, ce que nous écrivons en ré-ordonnant les μ_i de sorte que $\mu_{n-1}=1$:

$$\left|\Delta_k \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^n(\zeta,z_0)}\right| \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^{-\frac12-k}}{\prod_{i=0}^{n-1}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{n-2}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

avec encore $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts.
S'il n'existe pas de i tel que $\mu_i=1$:

$$\left|\Delta_k \frac{Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta'_{\mu_i}}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta'_{\mu_i}}\wedge d\zeta'_{\nu_i}}{S^n(\zeta,z_0)}\right| \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^{n}}{\varepsilon^{n+k}\prod_{i=0}^{l}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{l}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)}$$

toujours avec les ν_i (respectivement μ_i) deux à deux distincts et $\mu_i>1$ pour tout i.
Il suffit maintenant de sommer sur les ν_i et les μ_i pour finir la preuve. □
Ce lemme implique deux corollaires semblables aux corollaires 2.4.3 et 2.4.4 :

Corollaire 2.4.8 *Pour toute $h\in C^0_{0,1}(\overline{D})$, M_1h appartient à $C^{\frac1m}_{0,0}(\overline{D})$ et satisfait $\|M_1h\|_{\overline{D},\frac1m}\lesssim\|h\|_{\overline{D},0}$ uniformément par rapport à h.*

Preuve : Nous allons appliquer le lemme 2.4.7 afin d'utiliser le lemme de Hardy-Littlewood : Soient $\Delta=\frac{\partial}{\partial z_j}$ ou $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}$, $j=1,\dots,n$, h une forme

différentielle de $C_{0,1}(\overline{D})$ et un point z_0 dans $D\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$.
Le théorème A.2.1 implique que $\|Eh\|_{G,0}\lesssim\|h\|_{\overline{D},0}$, d'où :

$$\sup_{\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)}|\Delta(Eh(\zeta)\wedge K_{n,0}(\zeta,z_0))| \quad\lesssim\quad \|h\|_{\overline{D},0}c_0$$

où c_0, peut-être différent des précédents, ne dépend que de ε_0.
Du lemme 2.4.7, nous déduisons que pour tout couple (ζ,z) dans $G\times(\mathcal{V}\cap D)$ tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$, $\Delta\left(Eh(\zeta)\wedge K_{n,0}(\zeta,z)\right)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},0},\alpha,\nu,0](\zeta,z)$ pour $\alpha=-1$ et $|\nu|=2n-1$, ou $\alpha=-\frac{3}{2}$ et $|\nu|=2n-2$, avec chaque fois chaque i de $\{2,\dots,n\}$ apparaissant au plus 2 fois et 1 apparaissant au plus une fois dans ν. Dans le premier cas, nous appliquons le lemme A.5.1 et dans le second le corollaire A.5.2 qui donnent en z_0, uniformément par rapport à z_0,

$$|\Delta M_1h(z_0)|\lesssim\|h\|_{\overline{D},0}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Comme z_0 est quelconque dans $D\cap\mathcal{V}$ pourvu que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$, le lemme de Hardy-Littlewood (lemme A.1.1) implique que M_1h appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,0}(\overline{D})$ et satisfait :

$$\|M_1h\|_{\overline{D},\frac{1}{m}}\lesssim\|h\|_{\overline{D},0},$$

uniformément par rapport à h, ce qui montre le corollaire. $\square$

Corollaire 2.4.9 *Soient $j=1,\dots,n$, $k>0$ entier et $h\in C^k_{0,1}(\overline{D})$. Alors $\int_G\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge K_{n,0}(\zeta,\cdot)$ appartient à $C^{k-1+\frac{1}{m}}_{0,0}(\overline{D})$ et :*

$$\left\|\int_G\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge K_{n,0}(\zeta,\cdot)\right\|_{\overline{D},k-1+\frac{1}{m}}\lesssim\|h\|_{\overline{D},k}$$

uniformément par rapport à h.

Preuve : Soient $j=1,\dots,n$, $k>0$ entier, h une forme différentielle de $C^k_{0,1}(\overline{D})$, Δ_{k-1} un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha|+|\beta|=k-1$, $\Delta=\frac{\partial}{\partial\overline{z}_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $i=1\dots,n$ et un point z_0 dans $D\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$.
Le théorème A.2.1 implique que :

$$\sup_{\zeta\in G-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)}\left|\Delta\Delta_{k-1}\left(E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right)\wedge K_{n,0}(\zeta,z_0)\right| \quad\lesssim\quad \|h\|_{\overline{D},1}c_0$$

où c_0, qui n'a aucun lien avec les précédents, ne dépend que de ε_0.
Maintenant, soit $\varepsilon\in[c_2|r(z_0)|,\varepsilon_0]$ et $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap G$. Comme $E\frac{\partial h}{\partial\zeta_j}-\frac{\partial Eh}{\partial\zeta_j}$ est

identiquement nul sur $\overline{D}$, d'après le corollaire A.2.3, nous avons $\Big|E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) -\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\Big| \lesssim \varepsilon^{k-1}\Big\|E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j} \ -\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}\Big\|_{G\cup D,k-1}$ et avec le théorème A.2.1 :

$$\left|E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right| \lesssim \varepsilon^{k-1}\|h\|_{\overline{D},k}. \tag{2.25}$$

Lorsque nous étudions $\Delta\Delta_{k-1}\left(E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge K_{n,0}(\zeta, z_0)$, nous pouvons donc multiplier le résultat du lemme 2.4.7 par $\varepsilon^{k-1}\|h\|_{D,k}$. Ainsi, pour (ζ, z) dans $G \times (\mathcal{V} \cap D)$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon$, $\Delta\Delta_{k-1}\left(E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right)$ $\wedge K_{n,0}(\zeta, z)$ est une somme finie de $W_{\varepsilon_0}[\|h\|_{\overline{D},k}, \alpha, \nu, 0](\zeta, z)$ pour $\alpha = -1$ et $|\nu| = 2n - 1$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $|\nu| = 2n - 2$ avec dans chaque cas, tout i de $\{2, \ldots, n\}$ apparaissant au plus deux fois dans ν, 1 au plus une fois. Dans le premier cas, nous pouvons appliquer le lemme A.5.1 et dans le second le corollaire A.5.2 qui donnent en z_0, uniformément par rapport à z_0,

$$\left|\Delta\Delta_{k-1}\int_G\left(E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge K_{n,0}(\zeta, z_0)\right| \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Comme z_0 est quelconque dans $D\cap\mathcal{V}$ pourvu que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$, le lemme de Hardy-Littlewood nous indique que $\Delta_{k-1}\int_G\Big(E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta)-\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\Big) \wedge K_{n,0}(\zeta, \cdot)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie

$$\left\|\Delta_{k-1}\int_G\left(E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge K_{n,0}(\zeta, \cdot)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k},$$

ce qui finit la preuve du corollaire. □

Maintenant, tous les outils sont à notre disposition pour démontrer le théorème 2.0.1.

Preuve du théorème 2.0.1 : Nous travaillons par récurrence sur k :
Pour $k = 0$: Par définition (voir (2.3)), $T_q^* = T_q - M_q$. Or, dans [8], K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss ont montré que si h appartient à $C_{0,q}(\overline{D})$, alors T_qh appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie $\|T_qh\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0}$ uniformément par rapport à h. D'autre part, nous avons vu dans le corollaire 2.4.3 si $q = 2, \ldots, n-1$ ou dans le corollaire 2.4.8 si $q = 1$, que M_qh appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie $\|M_qh\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},0}$ uniformément par rapport à h dès que h appartient à $C_{0,q}(\overline{D})$. Aussi le théorème 2.0.1 est vrai pour $k = 0$.

Pour $k > 0$: supposons le théorème établi pour tout $k' < k$. Soit $h \in C^k_{0,q}(\overline{D})$, $\overline{\partial}$-fermée et Δ_{k-1} un opérateur de différentiation de type $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ avec $|\alpha| + |\beta| = k-1$. Nous avions posé dans la section 2.2 : $T'_q h = -\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta(Eh) \wedge \Omega_{n,q-1}(\eta)$. Nous avions aussi vu dans cette section qu'il suffirait de montrer l'objectif 2.2.1, à savoir : pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q h}{\partial z_j}$ et $\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q h}{\partial \overline{z}_j}$ appartiennent à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et $\left\|\frac{\partial}{\partial z_j}(\Delta_{k-1}T'_q h)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} + \left\|\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}(\Delta_{k-1}T'_q h)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \leq c_k \|h\|_{\overline{D},k}$, c_k ne dépendant pas de h.

Dans le corollaire 2.4.2, nous avons montré que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}(\Delta_{k-1}T'_q h)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et vérifie $\left\|\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}(\Delta_{k-1}T'_q h)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$ uniformément par rapport à h.

Pour $\frac{\partial}{\partial z_j}(\Delta_{k-1}T'_q h)$, nous utilisons l'écriture donnée par (2.6) :

D'après le corollaire 2.4.9, si $q = 1$, $\Delta_{k-1}\int_G \left(\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge K_{n,0}(\zeta,\cdot)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et $\left\|\Delta_{k-1}\int_G \left(\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge K_{n,0}(\cdot,\zeta)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$. Si $q > 1$, comme S et Q sont holomorphes, ce terme est nul.

D'après le corollaire 2.4.6, $\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et $\left\|\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]} \overline{\partial}_\zeta Eh(\zeta) \wedge \delta_j \Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$.

Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à $\Delta_{k-1}T^*_q\left(\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}\right)$ qui est donc dans $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait $\left\|\Delta_{k-1}T^*_q\left(\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}\right)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \left\|\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}\right\|_{\overline{D},k-1}$.

Si $q = 1$, $\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]}\left(\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j} - E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}\right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)$, est nul, et si $q > 2$, c'est le corollaire 2.4.4 qui nous indique qu'il appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et que $\left\|\Delta_{k-1}\int_{G\times[0,1]}\left(\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) - E\frac{\partial h}{\partial \zeta_j}(\zeta)\right) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-2}(\eta)(\zeta,\lambda,\cdot)\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$.

Il reste encore le terme de Bochner-Martinelli. Mais comme $\frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}$ est de classe C^k et à support compact dans $D \cup G$, $\int_{G\cup D} \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,\cdot)$ appartient à $C^{k-\varepsilon}_{0,q}(\overline{D})$ et satisfait $\left\|\int_{G\cup D} \frac{\partial Eh}{\partial \zeta_j}(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta,\cdot)\right\|_{\overline{D},k-\varepsilon} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$ quel que soit ε dans $]0,1]$.

Nous avons énuméré et traité tous les termes de (2.6), ce qui montre que $\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q h}{\partial z_j}$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{D})$ et satisfait $\left\|\Delta_{k-1}\frac{\partial T'_q h}{\partial z_j}\right\|_{\overline{D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{\overline{D},k}$ uniformément par rapport à h et donc le théorème est prouvé au rang k. $\square$

Chapitre 3

Estimées C^k sur le bord

Nous allons maintenant nous intéresser à la régularité des équations tangentielles de Cauchy-Riemann. Mais avant d'énoncer notre principal théorème, nous devons en préciser le contexte et les notations.

Définition 3.0.1 *Deux $(0,q)$-formes différentielles h et g continues au voisinage de bD sont dites équivalentes si pour toute $(n,n-q-1)$-forme ϕ de régularité C^∞ dans un voisinage de bD, nous avons $\int_{bD} h\wedge\phi = \int_{bD} g\wedge\phi$. Dans ce cas, nous noterons $h\sim g$. La classe d'équivalence de h sera notée $[h]$.*

On peut montrer que deux $(0,q)$-formes h et g sont équivalentes si et seulement si il existe une $(0,q)$-forme g_1 et une $(0,q-1)$-forme g_2 telles que $h=g+rg_1+g_2\wedge\overline{\partial}r$.
Soit $C^\alpha_{0,q}(bD)$ l'ensemble des $(0,q)$-formes $g=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_q\leq n} g_{(i_1,\ldots,i_q)}d\overline{z}_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\overline{z}_{i_q}$ telles que pour chaque multi-indice $(i_1,\ldots,i_q)$, $g_{(i_1,\ldots,i_q)}$ soit un élément de régularité C^α dans un voisinage de bD, $\alpha\geq 0$.
$\tilde{C}^\alpha_{0,q}(bD)$ désigne l'ensemble des classes $[h]$ pour lesquels il existe g dans $C^\alpha_{0,q}(bD)$ tel que $g\sim h$. $\|[h]\|_{bD,\alpha}$ est alors défini comme :

$$\|[h]\|_{bD,\alpha} := \inf\{\|g\|_{bD,\alpha}, g\in C^\alpha_{0,q}(bD) \text{ et } g\sim h\}.$$

L'opérateur $\overline{\partial}_b$ agit sur les classes d'équivalence :
Soit $[h]$ une classe d'équivalence dans $\tilde{C}^0_{0,q}(bD)$ dont h est un représentant continu sur un voisinage de bD. Nous définissons $\overline{\partial}_b[h]$ au sens des distributions comme suit : S'il existe $g\in C^\alpha_{0,q+1}(bD)$, $\alpha\geq 0$ telle que pour toute $(n,n-q-2)$-forme ϕ de classe C^∞ dans un voisinage de bD, nous ayons :

$$(-1)^{q+1}\int_{bD} h(\zeta)\wedge\overline{\partial}\phi(\zeta) = \int_{bD} g(\zeta)\wedge\phi(\zeta),$$

alors nous posons $\overline{\partial}_b[h] = [g]$ et nous disons que $\overline{\partial}_b[h]$ appartient à $C^\alpha_{0,q+1}(bD)$. Remarquons que la définition des classes d'équivalence implique que $[g]$ est univoquement déterminé.
D'autre part, si $[h]$ est une classe d'équivalence de $\tilde{C}^1_{0,q}(bD)$ dont h est un représentant qui appartient à $C^1_{0,q}(bD)$, on peut vérifier qu'alors $\overline{\partial}_b[h] = [\overline{\partial}h]$.
Nous pouvons maintenant énoncer le théorème sur les estimées C^k pour l'équation $\overline{\partial}_b$:

Théorème 3.0.2 *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine convexe de type fini m. Pour $q = 1, \ldots, n-1$, il existe un opérateur linéaire $T^b_q : \tilde{C}^0_{0,q}(bD) \to \tilde{C}^0_{0,q-1}(bD)$ vérifiant :*

(i) Pour tout k entier, $k \geq 0$, il existe $c_k > 0$ tel que pour toute classe $[h] \in \tilde{C}^k_{0,q}(bD)$, $T^b_q[h]$ appartienne à $\tilde{C}^{k+\frac{1}{m}}_{0,q-1}(bD)$ et satisfasse $\|T^b_q[h]\|_{bD,k+\frac{1}{m}} \leq c_k\|[h]\|_{bD,k}$

(ii) Pour tout $[h]$ dans $\tilde{C}_{0,q}(bD)$, avec $\overline{\partial}_b[h]$ aussi dans $\tilde{C}_{0,q+1}(bD)$ et l'hypothèse supplémentaire si $q = n-1$ que $\int_{bD} h \wedge \phi = 0$ quelle que soit la $(n,0)$-forme ϕ de classe C^∞ et $\overline{\partial}$-fermée sur un voisinage de bD, nous avons

$$[h] = \overline{\partial}_b T^b_q[h] + T^b_{q+1}\overline{\partial}_b[h]$$

(avec la convention lorsque $q = n-1$ que T^b_n soit identiquement nul).

Comme pour les estimées C^k sur les domaines, la preuve de ce théorème utilise des opérateurs intégraux.

3.1 Opérateur de résolution

3.1.1 Notations

Soient $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ un bon quintuplet, $S \in C^\infty(\mathcal{V} \times \mathcal{U})$ la fonction de support donnée par le théorème 1.5.2 pour D. Nous supposons que le domaine $\mathcal{U}$ soit convexe et contienne $\mathcal{V}$. Quitte à le choisir plus petit, nous supposons que ε_0 est tel que les propositions 2.3.2 et 1.5.13 et les majorations de la sous-section 2.3.2 soient vérifiées.
Afin de définir T^b_q, nous allons employer la méthode décrite dans [15] par G.M. Henkin pour les domaines strictement pseudoconvexes. Plus précisément, si $[f]$ est une classe de $\tilde{C}_{0,q}(bD)$ dont f est un représentant appartenant à $C_{0,q}(bD)$, nous écrivons f comme le saut sur bD de deux $(0,q)$-formes, l'une f_+ définie sur D et l'autre f_- définie sur $\mathcal{V} \setminus \overline{D}$. Ensuite, nous représentons

f_+ et f_- au moyen d'une formule d'homotopie utilisant les noyaux $\Omega_{n,q}(\eta)$ et $\Omega^t_{n,q}(\tilde{\eta})$ que nous définissons maintenant.
Soit Q la décomposition de Hefer-Leray de S donnée par la proposition 1.5.4. Nous définissons :

$$\tilde{S} : \begin{cases} \mathcal{U}\times\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\zeta,z) & \longmapsto & \tilde{S}(\zeta,z)=S(z,\zeta) \end{cases}$$

$$\tilde{Q} : \begin{cases} \mathcal{U}\times\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (\zeta,z) & \longmapsto & \tilde{Q}(\zeta,z)=-Q(z,\zeta) \end{cases}$$

de sorte que $\tilde{S}$ et $\tilde{Q}$ soient de régularité C^∞, holomorphes en ζ pour z fixé et satisfassent :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\zeta,z) &= S(z,\zeta) \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_j(\zeta,z)(\zeta_j-z_j). \end{aligned}$$

Pour $(\zeta,z)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ tel que $S(\zeta,z)$ et $\tilde{S}(\zeta,z)$ soit non nuls et $\lambda\in[0,1]$, nous posons :

$$\begin{aligned} \eta_0(\zeta,z) &= \sum_{j=1}^n \overline{\zeta_j-z_j}\,d\zeta_j, \\ \eta_1(\zeta,z) &= \sum_{j=1}^n Q_j(\zeta,z)d\zeta_j, \\ \tilde{\eta}_1(\zeta,z) &= \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_j(\zeta,z)d\zeta_j, \\ \eta(\zeta,\lambda,z) &= (1-\lambda)\sum_{j=1}^n \frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2}d\zeta_j+\lambda\sum_{j=1}^n\frac{Q_j(\zeta,z)}{S(\zeta,z)}d\zeta_j, \\ \tilde{\eta}(\zeta,\lambda,z) &= (1-\lambda)\sum_{j=1}^n \frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2}d\zeta_j+\lambda\sum_{j=1}^n\frac{\tilde{Q}_j(\zeta,z)}{\tilde{S}(\zeta,z)}d\zeta_j. \end{aligned}$$

Pour f dans $C_{0,q}(bD)$, nous notons encore :

$$T_qf(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]} f(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$$

si z appartient à D. T_q est un opérateur à valeur dans $C^\infty_{0,q-1}(D)$ très proche de l'opérateur T_q défini par K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss dans [8]. Ainsi, pour f continue sur bD, T_qf sera de régularité höldérienne $\frac{1}{m}$ sur $\overline{D}$ et induira donc un opérateur à valeurs dans $\tilde{C}_{0,q-1}(bD)$. Nous aimerions pouvoir poser $\tilde{T}_qf(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]} f(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\tilde{\eta})(\zeta,\lambda,z)$ pour les z de $\mathcal{V}\setminus\overline{D}$, mais même si $\tilde{T}_qf$ sera une forme de classe C^∞ sur $\mathcal{V}\setminus\overline{D}$, rien ne permet d'assurer que $\tilde{T}_qf$ soit bien définie sur bD lorsque f n'est que continue : Dans le travail de K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss, la composante normale du noyau en ζ avait un mauvais comportement, mais elle se trouvait écrasée par l'intégration sur le bord. Ici nous avons inversé les variables et c'est la composante normale en z du noyau qui a un mauvais comportement. Aussi, pour une forme f seulement continue, une approche directe ne permet pas de montrer que $\tilde{T}_qf$ est ne serait-ce que bornée au voisinage de bD. Nous ne pouvons donc pas considérer la classe $[\tilde{T}_qf]$. Cependant, lorsque l'on regarde les classes d'équivalence, la composante normale ne compte pas et c'est pourquoi nous allons isoler la composante tangentielle en z de $\tilde{T}_qf$ afin de définir un opérateur $\tilde{T}^t_q$ qui induira un opérateur de $\tilde{C}_{0,q}(bD)$ vers $\tilde{C}_{0,q-1}(bD)$.

3.1.2 Composantes tangentielles

Nous adoptons la convention suivante : Pour un champ de vecteurs $B^z = \sum_{i=1}^n a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n b_i(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}$, B^ζ sera le même champ de vecteurs agissant sur la variable ζ, c'est-à-dire $B^\zeta = \sum_{i=1}^n a_i(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_i} + \sum_{i=1}^n b_i(\zeta)\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_i}$.

Soit z dans $\mathcal{V}$ et $\tilde{\Psi} := \tilde{\Psi}(z)$ la matrice de passage de la base canonique vers une base de Diederich-Fornæss en z. Pour $i = 1,\dots,n$, nous posons

$$\begin{aligned}\overline{L}^z_i &:= \sum_{j=1}^n \tilde{\Psi}_{ij}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\\ \overline{l}^z_i &:= \sum_{j=1}^n \overline{\tilde{\Psi}_{ij}}d\overline{z}_j.\end{aligned}$$

Soit maintenant f une (p,q)-forme différentielle. Nous avons

$$\sum_{j=1}^n \overline{L}^z_j(f)\wedge\overline{l}^z_j = \sum_{i,j,k=1}^n \tilde{\Psi}_{ji}\overline{\tilde{\Psi}}_{jk}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}\wedge d\overline{z}_k$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\Psi}_{ji} \overline{\tilde{\Psi}_{jk}} \right) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} \wedge d\overline{z}_k,$$

et comme $\tilde{\Psi}$ est unitaire

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \overline{L}_j^z(f) \wedge \overline{l}_j^z &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} \wedge d\overline{z}_i \\ &= (-1)^{p+q} \overline{\partial} f. \end{aligned}$$

Pour toute forme différentielle f de bidegré (p,q), nous définissons $\overline{\partial}^t f$ par $\overline{\partial}^t f := \overline{\partial} f + (-1)^{p+q+1} \overline{L}_1^z(f) \wedge \overline{l}_1^z$.
$\overline{\partial}^t$ est bien défini et ne dépend pas de la matrice $\tilde{\Psi}$:
Soit z dans $\mathcal{V}$. $\overline{\partial} r(z)$ est non nul et $\overline{l}_1^z = \frac{1}{|\overline{\partial} r(z)|} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \overline{z}_j}(z) d\overline{z}_j$ d'où :

$$\overline{\partial}^t f(z) = \overline{\partial} f(z) + (-1)^{p+q+1} \frac{\overline{L}_1^z(f)}{|\overline{\partial} r(z)|}(z) \wedge \overline{\partial} r(z). \qquad (3.1)$$

De plus, $\overline{L}_1^z = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\overline{\partial} r(z)|} \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ est univoquement déterminé, aussi $\overline{L}_1^z(f) \wedge \overline{l}_1^z$ ne dépend pas de la base et grâce à (3.1), $\overline{\partial}^t f$ non plus.
L'opérateur $\overline{\partial}^t$ ainsi défini, pour toute (p,q)-forme f, considérer $\overline{\partial}^t f$ à la place de $\overline{\partial} f$ revient à isoler et supprimer la composante normale de $\overline{\partial} f$ apportée par l'opérateur $\overline{\partial}$.

Pour $q = 1, \ldots, n-1$, $z \in \mathcal{V} \setminus \overline{D}$ et $f \in C_{0,q}(bD)$, nous posons :

$$\tilde{T}_q^t f(z) = \int_{bD \times [0,1]} f(\zeta) \wedge \Omega_{n,q-1}^t(\tilde{\eta})(\zeta, \lambda, z)$$

où $\Omega_{n,q}^t(\tilde{\eta}) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} \tilde{\eta} \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,\lambda} \tilde{\eta})^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta})^q$.

Lemme 3.1.1 *Soient $q = 1, \ldots, n-1$, Δ un opérateur de différentiation d'ordre 1 du type $\frac{\partial}{\partial z_j}$ ou $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$, $f \in C_{0,q}^0(bD)$. Alors nous avons :*

(i) pour tout z de $D \cap \mathcal{V}$, $|\Delta\, T_q f(z)| \lesssim \|f\|_{bD,0} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$,

(ii) pour tout z de $\mathcal{V} - \overline{D}$, $|\Delta\, \tilde{T}_q^t f(z)| \lesssim \|f\|_{bD,0} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$

uniformément par rapport à z et f.
En particulier, $T_q f$ appartient à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{\mathcal{V} \cap D})$ et $\tilde{T}_q^t f$ à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{\mathcal{V} - D})$.

Lorsque f appartient à $C^0_{0,q}(bD)$, ce lemme nous autorise à considérer les classes d'équivalence induites par $T_q f$ et $\tilde{T}^t_q f$, ce qui nous permet de définir $[T_q]$ et $[\tilde{T}_q]$:

Définition 3.1.2 *Pour $q = 1,\dots,n-1$, et $[f] \in \tilde{C}_{0,q}(bD)$ dont f est un représentant dans $C_{0,q}(bD)$, nous posons :*

$$[T_q][f] := [T_q f],$$

$$[\tilde{T}_q][f] := [\tilde{T}^t_q f].$$

Remarquons que $[T_q]$ et $[\tilde{T}_q]$ sont bien définis car si f et g de $C^0_{0,q}(bD)$ sont deux représentants de $[f]$, alors $T_q f = T_q g$ et $\tilde{T}^t_q f = \tilde{T}^t_q g$.
Nous montrerons les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.1.3 *Pour $q = 1,\dots,n-1$ et k entier, $k \geq 0$, il existe $c_k > 0$ tel que pour tout $[h] \in \tilde{C}^k_{0,q}(bD)$:*

(i) $[T_q][h]$ soit un élément de $\tilde{C}^{k+\frac{1}{m}}_{0,q-1}(bD)$ et satisfasse $\|[T_q][h]\|_{bD,k+\frac{1}{m}} \leq c_k\|[h]\|_{bD,k}$.

(ii) $[\tilde{T}_q][h]$ soit un élément de $\tilde{C}^{k+\frac{1}{m}}_{0,q-1}(bD)$ et satisfasse $\|[\tilde{T}_q][h]\|_{bD,k+\frac{1}{m}} \leq c_k\|[h]\|_{bD,k}$.

Théorème 3.1.4 *Soient $q = 1,\dots,n-1$, $[f]$ dans $\tilde{C}_{0,q}(bD)$ dont f est un représentant continu. Nous supposons que $\overline{\partial}_b[f]$ appartient à $\tilde{C}_{0,q+1}(bD)$ et, lorsque $q = n-1$, que pour toute $(n,0)$-forme différentielle ϕ de régularité C^∞ au voisinage de bD telle que $\overline{\partial}\phi = 0$, nous ayons $\int_{bD} f(\zeta)\wedge\phi(\zeta) = 0$. Alors, avec la convention $[T_{q+1}] = [\tilde{T}_{q+1}] = 0$ si $q = n-1$, nous avons :*

$$[f] = \overline{\partial}_b([T_q] - [\tilde{T}_q])[f] + ([T_{q+1}] - [\tilde{T}_{q+1}])\overline{\partial}_b[f].$$

En posant $T^b_q := [T_q] - [\tilde{T}_q]$, les théorèmes 3.1.3 et 3.1.4 démontrent le théorème 3.0.2. Le lemme 3.1.1 implique le cas $k = 0$ du théorème 3.1.3. Nous démontrerons les deux en même temps. Supposons avoir prouvé le lemme 3.1.1 et montrons le théorème 3.1.4 :
Preuve du théorème 3.1.4 : Soient $q = 1,\dots,n-1$ et $[f] \in \tilde{C}_{0,q}(bD)$ dont f est un représentant continu dans un voisinage de bD, $g \in C^0_{0,q+1}(bD)$ un représentant de la classe $\overline{\partial}_b[f]$. Quitte à utiliser une fonction de troncature,

nous supposons f définie et à support compact dans $\mathbb{C}^n$.
Rappelons que ι_0 et ι_1 ont été définies comme suit :

$$\iota_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \{1\} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times [0,1] \times \mathbb{C}^n \\ (\zeta, \lambda, z) & \longmapsto & (\zeta, \lambda, z) \end{array} \right. ,$$

$$\iota_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \{0\} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times [0,1] \times \mathbb{C}^n \\ (\zeta, \lambda, z) & \longmapsto & (\zeta, \lambda, z) \end{array} \right. .$$

Nous posons $B^t_{n,q} = \iota_0^*(\Omega^t_{n,q}(\tilde{\eta}))$, $\tilde{K}^t_{n,q}(\tilde{\eta}) = \iota_1^*(\Omega^t_{n,q}(\tilde{\eta}))$, $K_{n,q} = \iota_1^*(\Omega_{n,q}(\eta))$. $B^t_{n,q}$ n'est rien d'autre que $B_{n,q}$, le noyau de Bochner-Martinelli, auquel nous avons enlevé la composante normale en z, et ainsi, pour tout z et ζ de $\mathbb{C}^n$ distincts, $|B^t_{n,q}(\zeta, z)| \lesssim \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-1}}$.
Nous posons ensuite :

$$\begin{aligned} f_+(z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z) && \text{lorsque } z \in D, \\ f_-(z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z) && \text{lorsque } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}, \\ f^t_-(z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B^t_{n,q}(\zeta, z) && \text{lorsque } z \in \mathcal{V} \setminus \overline{D}. \end{aligned}$$

Nous commençons par écrire f_+ comme $T_{q+1} g + \overline{\partial}_z T_q f$ à l'intérieur de D. Cependant, nous devrons appliquer le théorème de Stokes et puisque f n'est que continue, nous devons régulariser et considérer une suite de $(0, q)$-formes $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{C}^n$ et telle que, pour tout N, f_N soit de régularité C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ (ceci est possible puisque nous supposons f à support compact dans $\mathbb{C}^n$).
Soit z un point de D. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{N \to +\infty} \int_{bD} f_N(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z), \\ \lim_{N \to +\infty} \int_{bD} f_N(\zeta) \wedge K_{n,q}(\zeta, z) &= \int_{bD} f(\zeta) \wedge K_{n,q}(\zeta, z). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\int_{bD} f_N(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z) - \int_{bD} f_N(\zeta) \wedge K_{n,q}(\zeta, z) = \\ &= \int_{bD} f_N(\zeta) \wedge \iota_0^*(\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta, \lambda, z)) - \int_{bD} f_N(\zeta) \wedge \iota_1^*(\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta, \lambda, z)) \\ &= \int_{b(bD \times [0,1])} f_N(\zeta) \wedge \Omega_{n,q}(\eta)(\zeta, \lambda, z). \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
&\int_{bD} f_N(\zeta)\wedge B_{n,q}(\zeta,z)-\int_{bD} f_N(\zeta)\wedge K_{n,q}(\zeta,z)=\\
&=\int_{bD\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda}(f_N(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z))\\
&=\int_{bD\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta f_N(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)+(-1)^q\int_{bD\times[0,1]} f_N(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z).
\end{aligned}$$

Comme $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}^n$ vers f :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{bD\times[0,1]} f_N(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)=\int_{bD\times[0,1]} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z).$$

D'autre part, pour toute $(n,n-q-2)$-forme différentielle ϕ de clasee C^∞ sur un voisinage de bD, $\int_{bD}\overline{\partial} f_N(\zeta)\wedge\phi(\zeta)=(-1)^{q+1}\int_{bD} f_N(\zeta)\wedge\overline{\partial}\phi(\zeta)$ et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_{bD}\overline{\partial} f_N(\zeta)\wedge\phi(\zeta) &= (-1)^{q+1}\int_{bD} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}\phi(\zeta)\\
&= \int_{bD} g(\zeta)\wedge\phi(\zeta).
\end{aligned}$$

Nous en concluons que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{bD\times[0,1]}\overline{\partial}_\zeta f_N(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)=\int_{bD\times[0,1]} g(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)$$

et finalement

$$\begin{aligned}
&\int_{bD} f(\zeta)\wedge B_{n,q}(\zeta,z)-\int_{bD} f(\zeta)\wedge K_{n,q}(\zeta,z)=\\
&\quad=\int_{bD\times[0,1]} g(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)+(-1)^q\int_{bD\times[0,1]} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z).
\end{aligned}$$

Rappelons nous maintenant que $\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\eta)=(-1)^q\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-1}(\eta)$ et donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{bD} f(\zeta)\wedge B_{n,q}(\zeta,z)-\int_{bD} f(\zeta)\wedge K_{n,q}(\zeta,z)=\\
&\quad=\int_{bD\times[0,1]} g(\zeta)\wedge\Omega_{n,q}(\eta)(\zeta,\lambda,z)+\int_{bD\times[0,1]} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Omega_{n,q-1}(\eta)(\zeta,\lambda,z),
\end{aligned}$$

ce qui se traduit finalement pour tout z de D par :

$$f_+(z) = T_{q+1}g(z)+\overline{\partial}_z(T_qf)(z)+\int_{bD} f(\zeta)\wedge K_{n,q}(\zeta,z).$$

Si $q \geq 1$, $\int_{bD} f(\zeta) \wedge K_{n,q}(\zeta, \cdot) = 0$ car η_1 et S étant holomorphe par rapport à z pour ζ fixé, $K_{n,q} = 0$ et donc :

$$f_+ \quad = \quad T_{q+1}g + \overline{\partial}_z T_q f \qquad \text{sur } D. \tag{3.2}$$

Nous appliquons la même technique à f_-^t et obtenons pour z dans $\mathcal{V} - \overline{D}$

$$\int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}^t(\zeta, z) - \int_{bD} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{n,q}^t(\zeta, z) =$$
$$= \int_{bD\times[0,1]} g(\zeta) \wedge \Omega_{n,q}^t(\tilde{\eta})(\zeta, \lambda, z) + (-1)^q \int_{bD\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}^t(\tilde{\eta})(\zeta, \lambda, z).$$

Maintenant, $\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}(\tilde{\eta}) = (-1)^q \overline{\partial}_z \Omega_{n,q-1}(\tilde{\eta})$ et en ne gardant que la composante tangentielle en z, nous obtenons $\overline{\partial}_{\zeta,\lambda}\Omega_{n,q}^t(\tilde{\eta}) = (-1)^q \overline{\partial}_z^t \Omega_{n,q-1}^t(\tilde{\eta})$. Ainsi,

$$\int_{bD} f(\zeta) \wedge B_{n,q}^t(\zeta, z) - \int_{bD} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{n,q}^t(\zeta, z) =$$
$$= \int_{bD\times[0,1]} g(\zeta) \wedge \Omega_{n,q}^t(\tilde{\eta})(\zeta, \lambda, z) + \int_{bD\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z^t \Omega_{n,q-1}^t(\tilde{\eta})(\zeta, \lambda, z),$$

d'où, pour tout z de $\mathcal{V} - \overline{D}$,

$$f_-^t(z) \quad = \quad \tilde{T}_{q+1}^t g(z) + \overline{\partial}_z^t(\tilde{T}_q^t f)(z) + \int_{bD} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{n,q}^t(\zeta, z).$$

Si $q < n-1$, $\int_{bD} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{n,q}^t(\zeta, \cdot) = 0$ car $\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{S}$ sont holomorphes par rapport à ζ et donc $\tilde{K}_{n,q}^t = 0$.
Si $q = n-1$, pour z fixé dans $\mathcal{V} - \overline{D}$, $\tilde{K}_{n,n-1}^t(\cdot, z)$ est $\overline{\partial}_\zeta$-fermée et de classe C^∞ dans un voisinage de $\overline{D}$ et par hypothèse, $\int_{bD} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{n,n-1}^t(\zeta, z) = 0$.
Nous avons donc finalement

$$f_-^t \quad = \quad \tilde{T}_{q+1}^t g + \overline{\partial}_z^t \tilde{T}_q^t f \qquad \text{sur } \mathcal{V} \setminus \overline{D}. \tag{3.3}$$

Nous utilisons alors la formule de saut pour faire apparaître la différence des deux opérateurs. Soit ϕ une $(n, n-q-1)$-forme de régularité C^∞ dans un voisinage de bD. Selon la formule de saut, nous avons

$$\int_{bD} f(z) \wedge \phi(z) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{bD} (f_+(z - \varepsilon\eta_z) - f_-(z + \varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z) \tag{3.4}$$

où η_z est la normale unitaire extérieure à $bD_{r(z)}$ en z.
Nous remplaçons f_- par f_-^t : Il existe une forme différentielle h de degré

$(n, n-q-1)$ en ζ et $(0, q-1)$ en z telle que pour tout z et ζ de $\mathbb{C}^n$ distincts, $|h(\zeta, z)| \lesssim \frac{1}{|\zeta-z|^{2n-1}}$ et

$$B^t_{n,q}(\zeta, z) - B_{n,q}(\zeta, z) = h(\zeta, z) \wedge \overline{\partial}_z r(z).$$

Ainsi, puisque ϕ est de degré $(n, n-q-1)$ en z, pour $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{bD} (f^t_-(z+\varepsilon\eta_z) - f_-(z+\varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z) = \\
&= \int_{z\in bD} \left(\int_{\zeta \in bD} f(\zeta) \wedge (B^t_{n,q}(\zeta, z+\varepsilon\eta_z) - B_{n,q}(\zeta, z+\varepsilon\eta_z)) \right) \wedge \phi(z) \\
&= \int_{z\in bD} \left(\int_{\zeta \in bD} f(\zeta) \wedge h(\zeta, z+\varepsilon\eta_z) \right) \wedge \overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z) \wedge \phi(z) \\
&= \int_{z\in bD} \left(\int_{\zeta \in bD} f(\zeta) \wedge h(\zeta, z+\varepsilon\eta_z) \right) \wedge (\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z) - \overline{\partial}_z r(z)) \wedge \phi(z).
\end{aligned}$$

D'une part r étant de classe C^∞, $|\overline{\partial} r(z+\varepsilon\eta_z) - \overline{\partial} r(z)| \lesssim \varepsilon$ uniformément par rapport à ε et z dans bD. D'autre part, pour z et ζ dans bD, $|\zeta - (z+\varepsilon\eta_z)| \geq \varepsilon$ donc $|h(\zeta, z+\varepsilon\eta_z)| \lesssim \frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{|\zeta-z|^{2n-\frac{3}{2}}}$ et nous avons

$$\left| \int_{\zeta\in bD} f(\zeta) \wedge h(\zeta, z+\varepsilon\eta_z) \right| \lesssim \|f\|_{bD,0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous en déduisons que $\left| \int_{bD} (f^t_-(z+\varepsilon\eta_z) - f_-(z+\varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z) \right| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, uniformément par rapport à ε et donc (3.4) devient

$$\int_{bD} f(z) \wedge \phi(z) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \int_{bD} (f_+(z-\varepsilon\eta_z) - f^t_-(z+\varepsilon\eta_z)) \wedge \phi(z). \quad (3.5)$$

Ensuite, nous introduisons T_q et $\tilde{T}^t_q$ dans cette équation. D'après (3.2), pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{bD} f_+(z-\varepsilon\eta_z) \wedge \phi(z) = \\
&\quad = \int_{bD} (T_{q+1} g)(z-\varepsilon\eta_z) \wedge \phi(z) + \int_{bD} (\overline{\partial} T_q f)(z-\varepsilon\eta_z) \wedge \phi(z). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.1, $T_{q+1} g$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q}(\overline{\mathcal{V} \cap D})$ et donc lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0, $z \mapsto T_{q+1} g(z-\varepsilon\eta_z)$ converge uniformément vers $T_{q+1} g$ sur bD, d'où :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \int_{bD} (T_{q+1} g)(z-\varepsilon\eta_z) \wedge \phi(z) = \int_{bD} T_{q+1} g(z) \wedge \phi(z). \quad (3.7)$$

Pour $\int_{bD}(\overline{\partial}T_qf)(z-\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z)$, la situation est plus compliquée. Nous notons $u_\varepsilon : \left\{\begin{array}{ccc} bD & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & z-\varepsilon\eta_z\end{array}\right.$.
Alors

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_z(T_qf\circ u_\varepsilon)(z) &= \overline{\partial}_z(T_qf)\circ u_\varepsilon(z)+\\ &+(-1)^q\varepsilon\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial T_qf}{\partial\overline{z}_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial\overline{(\eta_z)_j}}{\partial\overline{z}_i}+\frac{\partial T_qf}{\partial z_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial(\eta_z)_j}{\partial\overline{z}_i}\right)d\overline{z}_i,\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\int_{bD}\overline{\partial}_z(T_qf)\circ u_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) &= \int_{bD}\overline{\partial}_z(T_qf\circ u_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z)+\\ &+(-1)^{q+1}\varepsilon\int_{bD}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial T_qf}{\partial\overline{z}_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial\overline{(\eta_z)_j}}{\partial\overline{z}_i}+\frac{\partial T_qf}{\partial z_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial(\eta_z)_j}{\partial\overline{z}_i}\right)d\overline{z}_i\wedge\\ &\wedge\phi(z).\end{aligned}\tag{3.8}$$

D'après le lemme 3.1.1 (i), lorsque ε est suffisamment petit,

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial T_qf}{\partial\overline{z}_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial\overline{(\eta_z)_j}}{\partial\overline{z}_i}+\frac{\partial T_qf}{\partial z_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial(\eta_z)_j}{\partial\overline{z}_i}\right|\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{bD}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial T_qf}{\partial\overline{z}_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial\overline{(\eta_z)_j}}{\partial\overline{z}_i}+\frac{\partial T_qf}{\partial z_j}(u_\varepsilon(z))\frac{\partial(\eta_z)_j}{\partial\overline{z}_i}\right)d\overline{z}_i\wedge\\ \wedge\phi(z)=0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

D'autre part, puisque ϕ est de degré $(n,n-q-1)$ en z :

$$\begin{aligned}&\int_{bD}\overline{\partial}_z((T_qf)\circ u_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z)=\\ &=\int_{bD}d_z((T_qf)\circ u_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z)\end{aligned}$$

et d'après le théorème de Stokes :

$$\int_{bD}d_z((T_qf)\circ u_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z) = (-1)^q\int_{bD}(T_qf)(u_\varepsilon)(z)\wedge d_z\phi(z).$$

Nous passons alors à la limite lorsque ε tend vers 0 et utilisons encore le lemme 3.1.1 selon lequel $(T_q f)\circ u_\varepsilon$ converge uniformément vers $T_q f$ sur bD :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{bD} d_z((T_q f)\circ u_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z) &= (-1)^q\int_{bD} T_q f(z)\wedge d_z\phi(z)\\ &= (-1)^q\int_{bD} T_q f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z).\end{aligned}$$

Avec (3.8) et (3.9), nous en déduisons que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{bD}\overline{\partial}_z(T_q f)\circ u_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) = (-1)^q\int_{bD} T_q f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z),$$

et ré-introduit avec (3.7) dans (3.6), cela nous conduit finalement à :

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{bD} f_+(z-\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) =\\ &\quad = \int_{bD} T_{q+1}g(z)\wedge\phi(z) + (-1)^q\int_{bD} T_q f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Nous montrons maintenant le résultat équivalent pour f_-^t. Soit $\varepsilon>0$. Alors d'après (3.3) :

$$\begin{aligned}&\int_{bD} f_-^t(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) =\\ &\quad = \int_{bD}\tilde{T}_{q+1}^t g(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) + \int_{bD}(\overline{\partial}^t\tilde{T}_q^t f)(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Selon le lemme 3.1.1, lorsque $\varepsilon>0$ tend vers 0, la forme différentielle $z\mapsto \tilde{T}_{q+1}^t g(z+\varepsilon\eta_z)$ converge uniformément sur bD vers $\tilde{T}_{q+1}^t g$ d'où :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{bD}\tilde{T}_{q+1}^t g(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) = \int_{bD}\tilde{T}_{q+1}^t g(z)\wedge\phi(z).\tag{3.12}$$

Nous posons $v_\varepsilon : \left\{\begin{array}{ccc} bD & \longrightarrow & \mathbb{C}^n\\ z & \longmapsto & z+\varepsilon\eta_z\end{array}\right.$. Nous avons :

$$\begin{aligned}&\int_{bD}\overline{\partial}_z^t(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) =\\ &= \int_{bD}\overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) + (-1)^{q+1}\int_{bD}\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z).\end{aligned}$$

Comme pour T_q, nous montrons que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) \quad = \quad (-1)^q \int_{bD} \tilde{T}_q^t f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z). \tag{3.13}$$

En effet, nous avons

$$\int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) = \int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f\circ v_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z) +$$
$$+(-1)^q\varepsilon\int_{bD}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial\tilde{T}_q^t f}{\partial\overline{z}_j}(v_\varepsilon(z))\frac{\partial\overline{(\eta_z)_j}}{\partial\overline{z}_i} + \frac{\partial\tilde{T}_q^t f}{\partial z_j}(v_\varepsilon(z))\frac{\partial(\eta_z)_j}{\partial\overline{z}_i}\right)d\overline{z}_i\wedge$$
$$\wedge\phi(z)$$

et le lemme 3.1.1 (ii) implique :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) \quad = \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f\circ v_\varepsilon)(z)\wedge\phi(z)$$

Ensuite, le théorème de Stokes donne :

$$\int_{bD} \overline{\partial}_z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\phi(z) \quad = \quad (-1)^q\int_{bD} \tilde{T}_q^t f\circ v_\varepsilon(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z).$$

Enfin, le lemme 3.1.1 entraîne la converge uniforme sur bD de $\tilde{T}_q^t f\circ v_\varepsilon$ vers $\tilde{T}_q^t f$ et donc l'égalité (3.13) est vraie.
Quant à $\int_{bD}\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z)$, puisque ϕ est de degré $(n, n-q-1)$ en z et que nous intégrons sur bD :

$$\int_{bD}\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) =$$
$$= \quad \int_{bD}\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge(\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z)-\overline{\partial}_z r(z))\wedge\phi(z).$$

Le lemme 3.1.1 (ii) implique que pour tout z de bD et tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, $|\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q^t f)(z+\varepsilon\eta_z)| \lesssim \|f\|_{bD,0}\varepsilon^{\frac{1}{m}-1}$ uniformément par rapport à z et ε. D'autre part, puisque r est de régularité C^∞ dans un voisinage de bD, $|\overline{\partial} r(z+\varepsilon\eta_z)-\overline{\partial} r(z)|\lesssim\varepsilon$ uniformément par rapport à ε et z. Nous en déduisons que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD}\overline{L}_1^z(\tilde{T}_q^t f)\circ v_\varepsilon(z)\wedge\overline{\partial}_z r(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) = 0,$$

et finalement avec (3.11), (3.12) et (3.13) :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{bD} f_-^t(z+\varepsilon\eta_z)\wedge\phi(z) = \\ = \int_{bD} \tilde{T}_{q+1}^t g(z)\wedge\phi(z) + (-1)^q \int_{bD} \tilde{T}_q^t f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z). \quad (3.14)$$

(3.10) et (3.14) mis dans la formule de saut (3.5) donne :

$$\int_{bD} f(z)\wedge\phi(z) = \\ = \int_{bD} (T_{q+1}-\tilde{T}_{q+1}^t)g(z)\wedge\phi(z) + (-1)^q \int_{bD} (T_q-\tilde{T}_q^t)f(z)\wedge\overline{\partial}_z\phi(z).$$

Puisque que ϕ de classe C^∞ dans un voisinage de bD est quelconque, cela prouve que :

$$[f] = ([T_{q+1}]-[\tilde{T}_{q+1}])\overline{\partial}_b[f] + \overline{\partial}_b([T_q]-[\tilde{T}_q])[f].$$

□

3.1.3 Dérivations tangentielles successives

Que ce soit pour $[T_q]$ ou pour $[\tilde{T}_q]$, un autre problème va apparaître pour établir les estimées C^k, $k>0$: Pour une forme f de régularité C^k, les dérivations successives de $T_q f$ et $\tilde{T}_q^t f$ vont entraîner la perte de précieux facteurs ε lors des estimations des noyaux avec les bases ε-extrémales. Notre stratégie sera d'intégrer par parties afin que f "porte" le plus de dérivées possible. Pour cela, nous avons besoin de montrer qu'il existe un champ de vecteurs tangents $\tilde{V}_1^\zeta$ tel que pour z et ζ proches, nous ayons $|\tilde{V}_1^\zeta S(\zeta,z)| \gtrsim 1$ et $|\tilde{V}_1^\zeta \tilde{S}(\zeta,z)| \gtrsim 1$. C'est ce que nous mettons en place maintenant :

Soit ζ dans $\mathcal{V}$ et $\tilde{V}_1^\zeta := \frac{1}{|\partial r(\zeta)|}\sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_i}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \frac{\partial r}{\partial\zeta_i}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_i}$. Signalons qu'un tel champ de vecteurs a déjà été utilisé notamment dans le livre de R.M. Range (lemme 7.18, chapitre VII) ou encore dans l'article [1] de P. Ahern et R. Schneider. Pour étudier l'action de $\tilde{V}_1^\zeta$ sur S et $\tilde{S}$, nous définissons $\tilde{V}_1^\zeta$ par l'intermédiaire d'une matrice unitaire $\Psi := \Psi(\zeta)$ telle que $\Psi\eta_\zeta = (1,0,\dots,0)$. Dans ce cas, les Ψ_{1i}, $i=1,\dots,n$ sont univoquement déterminés et nous avons $\tilde{V}_1^\zeta = \sum_{i=1}^n \overline{\Psi}_{1i}\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \Psi_{1i}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_i}$. Il faut aussi que nous définissions une famille de matrices de passage $\tilde{\Phi}(\zeta)$ de la base canonique vers une base

de Diederich-Fornæss en ζ. Pour ne pas avoir à mettre en place la lourde théorie des bases ε-extrémales mal adaptée ici (nous n'avons pas besoin de ε), nous allons définir de manière semblable à la famille de matrices Ψ de la sous-section 1.5.3 une nouvelle famille de matrices.
Fixons un point ζ_0 dans bD. Puisque par hypothèse le gradient de r ne s'annule pas sur $\overline{\mathcal{V}}$, il existe $c, R' > 0$ ne dépendant pas de ζ_0 tels que :

(i) $B(\zeta_0, R')$ soit incluse dans $\mathcal{V}$,

(ii) il existe i tel que quel que soit ζ de $B(\zeta_0, R')$, $\left|\frac{\partial r}{\partial \zeta_i}(\zeta)\right| \geq c$.

Quitte à renuméroter, nous supposons que $i = 1$. Soit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_j^{\zeta_0}(\zeta) &:= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial r}{\partial \zeta_i}(\zeta)\right|^2}} \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta), \quad j = 1, \ldots, n, \\ \tilde{A}_j^{\zeta_0}(\zeta) &:= 1 - \textstyle\sum_{k=2}^j |\tilde{\nu}_k^{\zeta_0}(\zeta)|^2, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\eta_\zeta = (\overline{\tilde{\nu}_1^{\zeta_0}(\zeta)}, \ldots, \overline{\tilde{\nu}_n^{\zeta_0}(\zeta)})$ dans la base canonique.
Nous définissons enfin la matrice $\tilde{\Phi}^{\zeta_0}(\zeta)$ par :

$$\tilde{\Phi}_{1i}^{\zeta_0}(\zeta) := \tilde{\nu}_i^{\zeta_0}(\zeta), \quad i = 1, \ldots, n,$$

et pour $j \neq 1$:

$$\tilde{\Phi}_{ji}^{\zeta_0}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_{j-1}^{\zeta_0}(\zeta)\tilde{A}_j^{\zeta_0}(\zeta)}} \begin{cases} -\overline{\tilde{\nu}_j^{\zeta_0}(\zeta)}\tilde{\nu}_1^{\zeta_0}(\zeta) & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < i < j \\ \tilde{A}_j^{\zeta_0}(\zeta) & \text{si } i = j \\ -\overline{\tilde{\nu}_j^{\zeta_0}(\zeta)}\tilde{\nu}_i^{\zeta_0}(\zeta) & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Comme pour $\Psi^{\zeta_0,\varepsilon}(\zeta)$, $\tilde{\Phi}^{\zeta_0}(\zeta)$ est une matrice unitaire qui amène la normale extérieure en ζ sur $(1, 0, \ldots, 0)$. De plus, puisque $\tilde{A}_j^{\zeta_0}(\zeta) \geq |\tilde{\nu}_1^{\zeta_0}(\zeta)|^2$, $\tilde{\Phi}^{\zeta_0}(\zeta)$ est définie pour tout ζ tel que $|\zeta - \zeta_0| < R'$.

Proposition 3.1.5 *Il existe $R'' \in]0, R']$ indépendant de $\zeta_0 \in bD$ tel que pour tout ζ, z de $B(\zeta_0, R'')$:*

$$|\tilde{V}_1^\zeta S(\zeta, z)| \geq 1.$$

Preuve : Soit $R'' > 0$ que nous choisirons suffisamment petit par la suite et soient $z, \zeta \in B(\zeta_0, R')$
Rappelons que si R' est suffisamment petit, $S(\zeta, z) = A(\zeta, z)F(\zeta, z)$ avec :

$$F(\zeta, z) = 3\omega_1(\zeta, z) + K\left(\omega_1(\zeta, z)\right)^2 - K' \sum_{j=2}^m \kappa_j M^{2^j} \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_1=0}} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^j r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0)\omega(\zeta, z)^\beta,$$

où les $\omega_1(\zeta,z),\dots,\omega_n(\zeta,z)$ sont les coordonnées de z dans un repère de Diederich-Fornæss centré en ζ et r_ζ désigne r exprimée dans ce même repère. Trivialement, $F(\zeta,z)=O(|z-\zeta|)$, uniformément par rapport à ζ_0 et ainsi, $F(\zeta,z)\tilde{V}_1^\zeta A(\zeta,z)=O(|\zeta-z|)$, toujours uniformément par rapport à ζ_0. Il nous reste donc à évaluer $A(\zeta,z)\tilde{V}_1^\zeta F(\zeta,z)$.
Les coordonnées de z dans le repère de Diederich-Fornæss centré en ζ et de base définie par $\tilde{\Phi}^{\zeta_0}(\zeta)$ sont données par $\omega(\zeta,z)=\tilde{\Phi}^{\zeta_0}(\zeta)(z-\zeta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}_1^\zeta\omega_1(\zeta,z)=\\
&\quad=\sum_{i,j=1}^n \overline{\tilde{\Phi}_{1i}^{\zeta_0}(\zeta)}\frac{\partial\tilde{\Phi}_{1j}^{\zeta_0}}{\partial\zeta_i}(\zeta)(z_j-\zeta_j)-\tilde{\Phi}_{1i}^{\zeta_0}(\zeta)\frac{\partial\tilde{\Phi}_{1j}^{\zeta_0}}{\partial\overline{\zeta_i}}(\zeta)(z_j-\zeta_j)+\\
&\qquad-\sum_{i=1}^n\overline{\tilde{\Phi}_{1i}^{\zeta_0}(\zeta)}\tilde{\Phi}_{1i}^{\zeta_0}(\zeta)\\
&\quad=O(|\zeta-z|)-1,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à ζ_0. D'autre part :

$$K\tilde{V}_1^\zeta\left(\omega_1(\zeta,z)^2\right)-\tilde{V}_1^\zeta\left(K'\sum_{j=2}^m\kappa_jM^{2^j}\sum_{\substack{|\beta|=j\\ \beta_1=0}}\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^j r_\zeta}{\partial\omega^\beta}(0)\omega(\zeta,z)^\beta\right)=O(|\zeta-z|).$$

Nous en concluons que :

$$\tilde{V}_1^\zeta S(\zeta,z)\quad=\quad O(|\zeta-z|)-3A(\zeta,z)$$

encore uniformément par rapport à ζ_0.
Si $|\zeta-z|$ est suffisamment petit, le théorème 1.5.2 assure que $|A(\zeta,z)|\geq\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe $R''>0$ ne dépendant pas de ζ_0 tel que si $|\zeta-\zeta_0|<R''$ et $|\zeta_0-z|<R''$ nous ayons :

$$|\tilde{V}_1^\zeta S(\zeta,z)|\quad\geq\quad 1.$$

□

Proposition 3.1.6 *Il existe $R''\in]0,R']$ indépendant de ζ_0 tel que pour tout z et tout ζ de $B(\zeta_0,R'')$:*

$$|\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)|\geq\frac{1}{2}.$$

Preuve : Nous utilisons le lemme 3.2.4 (que nous pouvons prouver sans cette proposition) :

$$(\tilde{V}_1^\zeta + \tilde{V}_1^z)\tilde{S}(\zeta, z) = O(|\zeta - z|).$$

D'autre part, d'après la proposition 3.1.5, si $|\zeta - z|$ est suffisamment petit, $|\tilde{V}_1^z \tilde{S}(\zeta, z)| = |\tilde{V}_1^z S(z, \zeta)| \geq 1$ et en choisissant z et ζ suffisamment proche nous obtenons

$$|\tilde{V}_1^\zeta \tilde{S}(\zeta, z)| \geq \frac{1}{2}.$$

□

3.2 Noyau en terme de ε

3.2.1 Dérivées tangentielles des noyaux

Dans une certaine mesure, nous allons étudier en parallèle les noyaux des deux opérateurs. Comme précédemment, nous obtiendrons de meilleurs résultats en exprimant le noyau et les champs de vecteurs qui vont agir dessus par l'intermédiaire des bases de Diederich-Fornæss et des matrices $\Psi^{z,\varepsilon}$. Cependant, pour obtenir les estimées C^k pour $k > 0$ et intégrer par parties, nous devons étudier l'action de champs de vecteurs tangents sur le noyau qui ne peuvent pas dépendre de ε. C'est pour cela que nous nous ramenons à une base locale de vecteurs indépendants de ε.
Nous notons encore R'' le minimum des R'' des propositions 3.1.5 et 3.1.6. Par compacité de bD, il existe $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(N)}$ tel que bD soit recouvert par les $B(\zeta^{(i)}, R'')$. Pour fixer les idées et ne pas compliquer encore les notations, nous travaillerons seulement sur $B(\zeta^{(1)}, R'')$ et quitte à renuméroter supposerons que $\left|\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right| \geq c$ pour tout ζ de $B(\zeta^{(1)}, R'')$. Nous définissons les champs de vecteurs :

$$\begin{array}{rcll}
Z_1^\zeta &=& \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \left(\frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}\right), & \\
Z_j^\zeta &=& \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} & \text{si } j = 2, \dots, n, \\
\overline{Z}_1^\zeta &=& \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \left(\frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}\right), & \\
\overline{Z}_j^\zeta &=& \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} - \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} & \text{si } j = 2, \dots, n.
\end{array}$$

Pour tout ζ de $B(\zeta^{(1)}, R'')$, $\frac{\partial r}{\partial z_1}(\zeta)$ est non nul, les $Z_1^\zeta, \dots, Z_n^\zeta, \overline{Z}_1^\zeta, \dots, \overline{Z}_n^\zeta$ sont linéairement indépendants et $Z_1^\zeta, \dots, Z_n^\zeta, \overline{Z}_2^\zeta, \dots, \overline{Z}_n^\zeta$ est une base des vecteurs tangents à bD sur $B(\zeta^{(1)}, R'')$.

Nous fixons un point z_0 dans $\mathcal{V} \cap B(\zeta^{(1)}, R'')$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$ et $\varepsilon > 0$ dans $[c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$. Nous considérons une base ε-extrémale en z_0, Φ_* la matrice de passage de la base canonique vers cette base, et aussi le repère de Diederich-Fornæss centré en z_0 dont la base $w'_1, \ldots, w'_n$ est donnée par $\Psi^{z_0,\varepsilon}(z_0)$, matrice définie dans la sous-section 1.5.3. Nous noterons $\zeta' = (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ les coordonnées d'un point ζ dans ce repère. Puisque z_0 et ε seront fixés tout au long de cette partie, la matrice $\Psi^{z_0,\varepsilon}(\zeta)$ sera simplement notée $\Psi(\zeta)$. Soit encore $\Phi(\zeta) = \Psi(\zeta)\overline{\Psi(z_0)}$, la matrice étudiée au cours de la sous-section 1.5.3. Rappelons que $\Phi(\zeta)$ est une matrice de passage d'une base de Diederich-Fornæss en z_0 vers une base de Diederich-Fornæss en ζ. Comme dans la sous-section 2.3.2, nous exprimons Q et $\tilde{Q}$ au travers de la matrice unitaire $\Psi\Phi_*$: Soit ω dans $\mathbb{C}^n$. Nous posons :

$$\begin{aligned}
\Sigma(\zeta, \omega) &= S(\zeta, \zeta + \overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega), \\
\sigma_i(\zeta, \omega) &= \int_0^1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \omega_i}(\zeta, t\omega)dt, \\
Q'(\zeta, z) &= -\Phi(\zeta)^t\sigma(\zeta, \Phi(\zeta)(z' - \zeta')).
\end{aligned}$$

où $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Rappelons que $\Sigma(\zeta, \omega)$ n'est autre que la fonction S exprimée dans le repère de Diederich-Fornæss en ζ induit par $\Psi(\zeta)$, σ correspond à sa section de Hefer-Leray dans ce même repère et Q' est la section de Hefer-Leray de S qui nous permet d'exprimer le noyau intégral $\Omega(\eta)$ dans la base de Diederich-Fornæss en z_0 induite par $\Psi(z_0)$.
Pour $\tilde{S}$, nous définissons de manière "symétrique" pour $\omega \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(z, \omega) &= \tilde{S}(z + \overline{\Psi(z)\Phi_*}^t\omega, z), \\
\tilde{\sigma}_i(z, \omega) &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial \omega_i}(z, t\omega)dt, \\
\tilde{Q}'(\zeta, z) &= \Phi(z)^t\tilde{\sigma}(z, \Phi(z)(\zeta' - z')).
\end{aligned}$$

où $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$. $\tilde{\Sigma}(z, \omega)$ est $\tilde{S}$ exprimée dans le repère de Diederich-Fornæss en z, $\tilde{\sigma}$ la décomposition de Hefer-Leray associée et $\tilde{Q}'$ nous permettra d'exprimer le noyau $\Omega^t(\tilde{\eta})$ dans la base de Diederich-Fornæss en z_0 induite par $\Psi(z_0)$. De plus, nous avons toujours $\tilde{Q}'(\zeta, z) = -Q'(z, \zeta)$.
Afin de pouvoir évaluer $\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1$ en fonction de $\tau_1(z_0, \varepsilon), \ldots, \tau_n(z_0, \varepsilon)$, nous exprimons l'opérateur $\overline{\partial}^t$ avec les champs de vecteurs suivants :

$$\overline{V}_i^z = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z'_j}}, \quad \text{si } i = 1, \ldots, n$$

et les formes différentielles :

$$\begin{array}{rcl}\overline{q}_1^z & = & \frac{1}{|\partial r(z)|}\overline{\partial} r(z), \\ \overline{q}_i^z & = & \sum_{j=1}^n \overline{\Phi_{ij}}(z) d\overline{z}'_j, \quad \text{si } i=2,\dots,n.\end{array}$$

Ainsi, pour toute (p,q)-forme différentielle f, nous pouvons écrire $\overline{\partial}^t f = (-1)^{p+q}\sum_{i=2}^n \overline{V}_i^z(f)\wedge \overline{q}_i^z$.
Avec ces notations :

$$\begin{array}{rcl}\eta_1(\zeta,z) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n Q'_i(\zeta,z)d\zeta'_i, \\ \overline{\partial}_\zeta \eta_1(\zeta,z) & = & \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial Q'_i}{\partial \overline{\zeta}'_j}(\zeta,z)d\overline{\zeta}'_j\wedge d\zeta'_i,\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\eta}_1(\zeta,z) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n \tilde{Q}'_i(\zeta,z)d\zeta'_i, \\ \overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta,z) & = & \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ j=2}}^n \overline{V}_j^z(\tilde{Q}'_i)(\zeta,z)\overline{q}_j^z\wedge d\zeta'_i.\end{array}$$

A cause de l'introduction de l'opérateur $\overline{\partial}^t$, nous devons montrer ce lemme qui en fait est un corollaire du lemme 2.3.6 :

Lemme 3.2.1 *Pour $i=2,\dots,n$, $j,=1,\dots,n$, ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap\mathcal{V}$:*

$$|\overline{V}_i^z(\tilde{Q}'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_i^{z_0}| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}.$$

Preuve : Les propriétés de Φ sont telles que dans la définition de $\overline{V}_i^z$, c'est $\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}'_i}$ qui seul va compter.
Nous écartons le cas $j=1$ car $\tau_1(z_0,\varepsilon)\approx\varepsilon$ et l'inégalité est triviale. Soit donc $i,j=2,\dots,n$ et $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap\mathcal{V}$. Par définition de $\overline{q}_i^z$ et $\overline{V}_i^z$: $\overline{V}_i^z(\tilde{Q}'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_i^{z_0} = \sum_{k,l=1}^n \overline{\Phi_{il}(z_0)}\Phi_{jk}(z_0)\frac{\partial\tilde{Q}'_j}{\partial\overline{z}'_k}(\zeta,z_0)d\overline{z}_l$. Mais $\Phi(z_0)$ est la matrice identité, donc $V_i^z(\tilde{Q}'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_i^{z_0} = \frac{\partial\tilde{Q}'_j}{\partial\overline{z}'_i}(\zeta,z_0)d\overline{z}_i$. Maintenant, le lemme 2.3.6 nous dit que :

$$|V_i^z(\tilde{Q}'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_i^{z_0}| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}, \tag{3.15}$$

ce qui montre le lemme. □
Nous allons regarder l'action de champs vecteurs du type $Z_1^z + Z_1^\zeta, \ldots$ mais avant, nous montrons ce lemme :

Lemme 3.2.2 *Pour tout ζ de $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap \mathcal{V}$ et tout k :*

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(z_0) \right| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

uniformément par rapport à ε, ζ, z_0.

Preuve : Soit ζ comme dans l'énoncé. Pour prouver le lemme, il suffit en fait de pouvoir montrer l'inégalité lorsque la base n'est pas la base canonique mais la base de Diederich-Fornæss en z_0 induite par $\Psi(z_0)$. Soit $w'_1, \ldots, w'_n$ cette base et $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ les coordonnées de ζ dans le repère centré en z_0 et de base $w'_1, \ldots, w'_n$.
Selon les propositions 1.5.8 et 1.5.9, pour tout i, $|\zeta'_i| \lesssim \tau(z_0, w'_i, \varepsilon)$. Comme $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ est inclus dans $B(z_0, 1)$, le lemme 1.4.4 implique alors la majoration $\left|\frac{\partial r}{\partial w'_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_1}(z_0)\right| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Pour $k \neq 1$, $\frac{\partial r}{\partial w'_k}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_k}(z_0) = \frac{\partial r}{\partial w'_k}(\zeta)$ et la proposition 1.3.5 implique que $\left|\frac{\partial r}{\partial w'_k}(\zeta)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau(\zeta, w'_k, \varepsilon)}$. Nous appliquons successivement les propositions 1.3.3 et 1.3.4 pour montrer que $\tau(\zeta, w'_k, \varepsilon) \approx \tau(z_0, w'_k, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ puis conclure que $\left|\frac{\partial r}{\partial w'_k}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial w'_k}(z_0)\right| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. □

Lemme 3.2.3 *Pour $B^z = Z_1^z, \ldots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \ldots, \overline{Z}_n^z$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ et ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap B(\zeta^{(1)}, R'')$. Nous avons uniformément par rapport à ζ, $\zeta^{(1)}$, z_0 et ε :*

$$|(B^z + B^\zeta)Q'_j(\zeta, z_0)| + |(B^z + B^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)},$$

$$\left|(B^z + B^\zeta)\frac{\partial Q'_j}{\partial \overline{\zeta}'_i}(\zeta, z_0)\right| + |(B^z + B^\zeta)(\overline{V}_i^z \tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)\overline{q}_i^{z_0})| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)\tau_i(z_0, \varepsilon)},$$

$$|(B^z + B^\zeta)S(\zeta, z_0)| + |(B^z + B^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z_0)| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Soient i, j et ζ comme dans l'énoncé. Nous commençons par montrer la première inégalité. Nous nous intéresserons tout d'abord à $(B^z + B^\zeta)\tilde{Q}'_j$. Avant de commencer les calculs, rappelons que pour tout k, δ_k a été défini par : $\delta_k := \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$.
Pour tout $k \neq 1$, nous avons :

$$(Z_k^z + Z_k^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0) =$$

$$= \delta_k \tilde{Q}'_j(\zeta, z_0) - \frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0)\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1} \delta_1 \tilde{Q}'_j(\zeta, z_0) + \left(\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0) - \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)\right)\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \zeta_1}(\zeta, z_0). \quad (3.16)$$

Puisque pour tout l, $\delta_l \tilde{Q}'_j(\zeta, z_0) = -\delta_l Q'_j(z_0, \zeta)$, le corollaire 2.3.7 montre que pour tout l :

$$|\delta_l \tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)}. \quad (3.17)$$

Le lemme 3.2.2 va permettre de majorer la différence $\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0) - \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0) - \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)\right| &\lesssim \\ \lesssim \left|\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0) - \frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)\right) + \frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta) - \frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)\right| & \\ \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & \quad (3.18)\end{aligned}$$

ce qui avec (3.17) montre que pour tout $k \neq 1$, $|(Z^z_k + Z^\zeta_k)\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Toujours pour $k \neq 1$, puisque $\tilde{Q}'_j$ est holomorphe par rapport à ζ :

$$\begin{aligned}&(\overline{Z}^z_k + \overline{Z}^\zeta_k)\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0) = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}_k}(\zeta, z_0) - \frac{\partial r}{\partial \overline{z}_k}(z_0)\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{z}_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}_1}(\zeta, z_0).\end{aligned}$$

D'une part, $\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}'_l}(\zeta, z_0) = -\frac{\partial Q'_j}{\partial \overline{\zeta}'_l}(z_0, \zeta)$ et le lemme 2.3.6 implique pour $l = 1, \ldots, n$:

$$\left|\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}'_l}(\zeta, z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0, \varepsilon)\tau'_l(z_0, \varepsilon)}. \quad (3.19)$$

D'autre part, d'après la remarque 1.5.1, $\tau'_l(z_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et (3.19) implique donc pour tout l :

$$\left|\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}_l}(\zeta, z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)}, \quad (3.20)$$

et par conséquent $\left|(\overline{Z}_k^z+\overline{Z}_k^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)\right|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Pour finir l'étude de $(B^z+B^\zeta)\tilde{Q}'_j$, il reste donc à montrer que $|(Z_1^z+Z_1^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)|\lesssim \varepsilon^{\frac12}$.

$$\begin{aligned}
&(Z_1^z+Z_1^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)=\\
&= \frac12\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)-\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \zeta_1}(\zeta,z_0)\\
&\quad +\frac12\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\delta_1\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)-\frac12\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{z}_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}_1}(\zeta,z_0)
\end{aligned}$$

Le lemme 3.2.2, le corollaire 2.3.7 et l'inégalité (3.20) permettent de majorer respectivement $\left|\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)-\frac{\partial r}{\partial z_1}(\zeta)\right|$, $|\delta_1\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)|$ et $\left|\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}_1}(\zeta,z_0)\right|$ par $\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, ce qui donne finalement $|(Z_1^z+Z_1^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.

On montre de la même manière que $|(B^z+B^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, mais afin de lever tous doutes, nous le faisons rapidement :
Soit $k\neq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
&(Z_k^z+Z_k^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)=\\
&= \delta_kQ'_j(\zeta,z_0)-\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0)\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\delta_1Q'_j(\zeta,z_0)\\
&\quad +\left(\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial z_k}(z_0)-\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \zeta_k}(\zeta)\right)\frac{\partial Q'_j}{\partial \zeta_1}(\zeta,z_0).
\end{aligned}$$

Le corollaire 2.3.7 montre que pour tout l $|\delta_lQ'_j(\zeta,z_0)|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, ce qui avec (3.18) montre que pour tout $k\neq 1$, $|(Z_k^z+Z_k^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Toujours pour $k\neq 1$, puisque Q'_j est holomorphe par rapport à z :

$$\begin{aligned}
&(\overline{Z}_k^z+\overline{Z}_k^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)=\\
&= \frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{\zeta}_k}(\zeta,z_0)-\left(\frac{\partial r}{\partial \overline{\zeta}_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial r}{\partial \overline{\zeta}_k}(\zeta)\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{\zeta}_1}(\zeta,z_0).
\end{aligned}$$

Avec le lemme 2.3.6, nous obtenons : $\left|(\overline{Z}_k^z+\overline{Z}_k^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)\right|\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Enfin :

$$(Z_1^z+Z_1^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)-\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)\right)\frac{\partial Q'_j}{\partial z_1}(\zeta,z_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\delta_1 Q'_j(\zeta,z_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial \bar\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial Q'_j}{\partial \bar\zeta_1}(\zeta,z_0)
\end{aligned}$$

Le lemme 3.2.2, le corollaire 2.3.7 et l'inégalité (3.20) permettent de majorer respectivement $\left|\frac{\partial r}{\partial z_1}(z_0)-\frac{\partial r}{\partial z_1}(\zeta)\right|$, $|\delta_1 Q'_j(\zeta,z_0)|$ et $\left|\frac{\partial Q'_j}{\partial \bar\zeta_1}(\zeta,z_0)\right|$ par $\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ et donc finalement que $|(Z_1^z+Z_1^\zeta)Q'_j(\zeta,z_0)|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.
La dernière inégalité du lemme est une conséquence de la première :

$$\begin{aligned}
(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z) &= \sum_{j=1}^n(\zeta'_j-z'_j)(B^z+B^\zeta)\tilde Q'_j(\zeta,z),\\
(B^z+B^\zeta)S(\zeta,z) &= \sum_{j=1}^n(\zeta'_j-z'_j)(B^z+B^\zeta)Q'_j(\zeta,z)
\end{aligned}$$

et puisque $|\zeta'_j-(z_0)'_j|=|\zeta'_j|\lesssim\tau_j(z_0,\varepsilon)$, il suffit d'appliquer la première inégalité pour obtenir :

$$|(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)|+|(B^z+B^\zeta)S(\zeta,z)|\lesssim\varepsilon^{\frac12}.$$

Montrons maintenant que $|(B^z+B^\zeta)(\overline{V}_i^z(\tilde Q'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_i^{z_0})|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$:
D'une part, puisque $\Phi(z_0)$ est la matrice identité, $\overline{V}_i^z\tilde Q'_j(\zeta,z_0)=\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_i}(\zeta,z_0)$ et le lemme 2.3.6 nous dit que $|\overline{V}_i^z\tilde Q'_j(\zeta,z_0)|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Ainsi :

$$|\overline{V}_i^z\tilde Q'_j(\zeta,z_0)(B^z+B^\zeta)\overline{q}_i^{z_0}|\ \lesssim\ \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}.$$

D'autre part :

$$(B^z+B^\zeta)\overline{V}_i^z(\tilde Q'_j)(\zeta,z_0)=\sum_{l=1}^n B^z(\Phi_{il})(z_0)\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_l}(\zeta,z_0)+(B^z+B^\zeta)\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_i}(\zeta,z_0).$$

Le lemme 2.3.6 implique pour tout l, $\left|\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_l}(\zeta,z_0)\right|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Il suffit donc de montrer que $\left|(B^z+B^\zeta)\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_i}(\zeta,z_0)\right|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$, mais c'est exactement la même preuve que pour la première inégalité : Comme nous l'avons vu dans le lemme 2.3.6, la seule différence dans les majorations de $\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\bar z'_i}(\zeta,z_0)$ et

$\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)$ est une division par $\tau_i(z_0, \varepsilon)$. Ainsi, en reprenant point par point la démonstration de l'inégalité $|(B^z + B^\zeta)\tilde{Q}'_j(\zeta, z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, on montre que $|(B^z + B^\zeta)\frac{\partial \tilde{Q}'_j}{\partial \overline{z}'_i}(\zeta, z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ et finalement la majoration voulue : $|(B^z + B^\zeta)(\overline{V}^z_i(\tilde{Q}'_j)(\zeta, z_0)\overline{q}^{z_0}_i)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.
C'est encore la même chose pour $\left|(B^z + B^\zeta)\frac{\partial Q'_j}{\partial \overline{\zeta}'_i}(\zeta, z_0)\right|$: une simple division par $\tau_i(z_0, \varepsilon)$ dans la preuve de la première inégalité du lemme. □
Parfois, plutôt que raisonner avec des ε, il faudra voir $(B^z + B^\zeta)S$ ou $(B^z + B^\zeta)\tilde{S}$ comme un $O(|\zeta - z|)$:

Lemme 3.2.4 *Soient $B^z, \tilde{B}^z$ deux champs de vecteurs tangents, z et ζ dans $B(\zeta^{(1)}, R'')$. Alors :*

$$\begin{aligned}
(B^z + B^\zeta)S(\zeta, z) &= O(|\zeta - z|),\\
(B^z + B^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z) &= O(|\zeta - z|),\\
(\tilde{B}^z + \tilde{B}^\zeta)(B^z + B^\zeta)S(\zeta, z) &= O(|\zeta - z|),\\
(\tilde{B}^z + \tilde{B}^\zeta)(B^z + B^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z) &= O(|\zeta - z|),
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à z et ζ.

Preuve : C'est trivial : $(B^z + B^\zeta)S(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)(B^z + B^\zeta)Q_i(\zeta, z)$, $(B^z + B^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)(B^z + B^\zeta)\tilde{Q}_i(\zeta, z)$ et les $(B^z + B^\zeta)Q_i$ comme les $(B^z + B^\zeta)\tilde{Q}_i$ sont uniformément bornés. De même, lorsque $(\tilde{B}^z + \tilde{B}^\zeta)$ agit sur ces termes. □
Les prochains lemmes vont nous permettre d'évaluer l'action de $\tilde{V}^\zeta_1$ sur les deux noyaux. Même si on pourra remarquer quelques similitudes, pour cette étude, nous devons séparer le cas "intérieur" du cas "extérieur". Pourtant, dans les deux cas, nous exprimons $\tilde{V}^\zeta_1$ au travers de la base de Diederich-Fornæss $w'_1, \dots, w'_n$:

$$\tilde{V}^\zeta_1 = \sum_{i=1}^n \overline{\Phi_{1i}(\zeta)}\frac{\partial}{\partial \zeta'_i} - \Phi_{1i}(\zeta)\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}'_i}.$$

Le cas de $\Omega(\eta)$.

Soient $\omega_1(\zeta, z), \dots, \omega_n(\zeta, z)$ les coordonnées de z dans le repère centré en ζ dont la base est la base de Diederich-Fornæss en ζ induite par $\Psi(\zeta)$.

Lemme 3.2.5 *Pour $i = 1,\dots,n$, $j = 2,\dots,n$, $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap B(\zeta^{(1)}, R'')$:*

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \omega_j}{\partial \zeta_1'}(\zeta, z_0)\right| &\lesssim \tau_j(z_0,\varepsilon), \\ \left|\frac{\partial^2 \omega_j}{\partial \zeta_1' \partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta, z_0)\right| &\lesssim \frac{\tau_j(z_0,\varepsilon)}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Preuve : Soient i, j, et ζ comme dans l'énoncé.
Puisque $\omega_j(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ji}(\zeta)(z_i' - \zeta_i')$:

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \zeta_1'}(\zeta, z) = -\Phi_{j1}(\zeta) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_{jk}}{\partial \zeta_1'}(\zeta)(z_k' - \zeta_k').$$

Puisque quel que soit k, $|\zeta_k' - (z_0)_k'| \lesssim \tau_k(z_0,\varepsilon)$, il n'y a plus qu'à appliquer les propositions 1.5.13 et 1.5.14 :

$$\left|\frac{\partial \omega_j}{\partial \zeta_1'}(\zeta, z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)} + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^2}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)\tau_1'(z_0,\varepsilon)} \tau_k(z_0,\varepsilon),$$

et comme $\tau_j(z_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ (remarque 1.3.1), la première inégalité est montrée.
Pour la deuxième :

$$\frac{\partial^2 \omega_j}{\partial \zeta_1' \partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta, z) = -\frac{\partial \Phi_{j1}}{\partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_{jk}}{\partial \zeta_1' \partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta)(z_k' - \zeta_k'),$$

comme $\tau_j(z_0,\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, la proposition 1.5.14 permet de conclure. □

Lemme 3.2.6 *Soient $i, j = 1,\dots,n$, ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap B(\zeta^{(1)}, R'')$. Alors :*

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_1^\zeta Q_j'(\zeta, z_0)| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}, \\ \left|\tilde{V}_1^\zeta \frac{\partial Q_j'}{\partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta, z_0)\right| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Preuve : Soient i, j et ζ comme dans l'énoncé. Nous écartons le cas $j = 1$ car dans ce cas l'inégalité est triviale. Calculons $\tilde{V}_1^\zeta Q_j'(\zeta, z_0)$:

$$\tilde{V}_1^\zeta Q_j'(\zeta, z_0) = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi_{1k}(\zeta)} \frac{\partial Q_j'}{\partial \overline{\zeta}_k'}(\zeta, z_0) - \Phi_{1k}(\zeta) \frac{\partial Q_j'}{\partial \overline{\zeta}_k'}(\zeta, z_0),$$

et le lemme 2.3.6 et la proposition 1.5.13 montrent que seul $\frac{\partial Q'_j}{\partial \zeta'_1}(\zeta, z_0)$ compte car pour tout $k \neq 1$, $\tau_k(z_0, \varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ (remarque 1.3.1) et donc :

$$\left| \Phi_{11}(\zeta) \frac{\partial Q'_j}{\partial \overline{\zeta}'_1}(\zeta, z_0) + \sum_{k=2}^{n} \overline{\Phi_{1k}(\zeta)} \frac{\partial Q'_j}{\partial \zeta'_k}(\zeta, z_0) - \Phi_{1k}(\zeta) \frac{\partial Q'_j}{\partial \overline{\zeta}'_k}(\zeta, z_0) \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)}.$$

Ainsi, nous devons prouver que $\left| \frac{\partial Q'_j}{\partial \zeta'_1}(\zeta, z_0) \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Pour cela, nous faisons apparaître σ_j :

$$\frac{\partial Q'_j}{\partial \zeta'_1}(\zeta, z_0) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{kj}}{\partial \zeta'_1}(\zeta) \sigma_k(\zeta, \omega(\zeta, z_0)) + \Phi_{kj}(\zeta) \frac{\partial \sigma_k(\zeta, \omega(\zeta, z_0))}{\partial \zeta'_1}.$$

Comme $\left| \frac{\partial \Phi_{kj}}{\partial \zeta'_1}(\zeta) \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ pour tout k (proposition 1.5.14 et remarque 1.5.1) et $|\Phi_{kj}(\zeta)| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ pour tout $k \neq j$ (proposition 1.5.13 et remarque 1.5.1), il reste à montrer que $\left| \frac{\partial \sigma_j(\zeta, \omega(\zeta, z_0))}{\partial \zeta'_1} \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.
Pour ζ dans $\mathcal{V}$ et ω dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\zeta + \overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t \omega$ appartienne à $\mathcal{U}$ et $|\omega| < \frac{R}{2}$ (R donné par le théorème 1.5.2), nous posons $A_\zeta(\omega) = A(\zeta, \zeta + \overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t \omega)$, de sorte que $A_\zeta(\omega(\zeta, z)) = A(\zeta, z)$ pour tout ζ de $\mathcal{V}$ et z de $\mathcal{U}$ tels que $|\zeta - z| < \frac{R}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &\sigma_j(\zeta, \omega(\zeta, z_0)) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta, z_0)) F_\zeta(t\omega(\zeta, z_0)) dt + \int_0^1 A_\zeta(t\omega(\zeta, z_0)) \frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta, z_0)) dt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'après les lemmes 2.3.3 et 2.3.4, pour tout multi-indice β tel que $\beta_1 = 0$ et $|\beta| \geq 2$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta'_1} \frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0) \right| \left| \beta_j \frac{\omega^\beta(\zeta, z_0)}{\omega_j(\zeta, z_0)} \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)},$$

D'après les lemmes 2.3.3, 2.3.4 et 3.2.5 :

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} r_\zeta}{\partial \omega^\beta}(0) \right| \left| \beta_j \frac{\partial}{\partial \zeta'_1} \frac{\omega^\beta(\zeta, z_0)}{\omega_j(\zeta, z_0)} \right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0, \varepsilon)},$$

d'où pour $t \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta'_1} \frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta, z_0)) \right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0, \varepsilon)}. \tag{3.22}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.3.5, $\left|\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \zeta_1'}\int_0^1 A(\zeta,\zeta+t(z_0-\zeta))\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)} \quad (3.23)$$

Pour l'autre intégrale de (3.21), la situation est moins évidente : nous pourrions montrer que $\frac{\partial F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))}{\partial \zeta_1'}$ se comporte, modulo une petite perturbation, comme une constante donc $\left|\frac{\partial F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))}{\partial \zeta_1'}\right| \gtrsim 1$: il faudrait pouvoir montrer que $\left|\frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Pour cela, nous allons faire appel à la forme particulière de A lorsque ζ et z sont proches : $A(\zeta,z_0) = \frac{1}{1+(m'-v(\zeta,z_0))F(\zeta,z_0)}$. Nous notons $v_\zeta(\omega) = v(\zeta,\zeta+\overline{\Psi(\zeta)\Phi_*}^t\omega)$, de sorte que $A_\zeta(\omega) = \frac{1}{1+(m'-v_\zeta(\omega))F_\zeta(\omega)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0)) &= \\ &= -\frac{(m'-v_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0)) - F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))\frac{\partial v_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))}{(1+(m'-v_\zeta(t\omega(\zeta,z_0)))F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0)))^2}\end{aligned}$$

et v et ses dérivées étant bornées, le corollaire 2.3.5 donne la majoration :

$$\left|\frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}, \quad (3.24)$$

ce qui nous permet de montrer, encore avec le corollaire 2.3.5 :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \zeta_1'}\int_0^1 \frac{\partial A_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}. \quad (3.25)$$

Les inégalités (3.23) et (3.25) entrainent enfin la majoration $\left|\frac{\partial \sigma_j(\zeta,\omega(\zeta,z_0))}{\partial \zeta_1'}\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ et finalement $|\tilde{V}_1^\zeta Q_j'(\zeta,z_0)| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.

Pour montrer que $\left|\tilde{V}_1^\zeta \frac{\partial Q_j'}{\partial \overline{\zeta}_i'}(\zeta,z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, comme pour $\tilde{V}_1^\zeta Q_j'$, il suffit de montrer que $\left|\frac{\partial^2 \sigma_j(\zeta,\omega(\zeta,z_0))}{\partial \zeta_1'\partial \overline{\zeta}_i'}\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. Les lemmes 2.3.3, 2.3.4 et 3.2.5 montrent que $\left|\frac{\partial^2}{\partial \zeta_1'\partial \overline{\zeta}_i'}\left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ d'où avec le corollaire 2.3.5 et (3.22) :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial \zeta_1'\partial \overline{\zeta}_i'}\int_0^1 A_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))\frac{\partial F_\zeta}{\partial \omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}. \quad (3.26)$$

Ensuite, le corollaire 2.3.5 montre que $\left|\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta'_i}}\left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial\omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))\right)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, d'où, encore avec le corollaire 2.3.5 et (3.24) :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta'_1\partial\overline{\zeta'_i}}\int_0^1\frac{\partial A}{\partial\omega_j}(t\omega(\zeta,z_0))F_\zeta(t\omega(\zeta,z_0))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}. \quad (3.27)$$

En rassemblant (3.26) et (3.27), nous avons $\left|\frac{\partial^2\sigma_j(\zeta,\omega(\zeta,z_0))}{\partial\zeta'_1\partial\overline{\zeta'_i}}\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_i(z_0,\varepsilon)}$ et finalement : $\left|\tilde{V}_1^\zeta\frac{\partial Q'_j}{\partial\overline{\zeta'_i}}(\zeta,z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_i(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}$. $\square$

Le cas de $\Omega^t(\tilde{\eta})$.

En inversant le rôle de z et ζ, $\omega_1(z,\zeta),\dots,\omega_n(z,\zeta)$ sont donc maintenant les coordonnées de ζ dans le repère de Diederich-Fornæss centré en z dont la base est donnée par $\Psi(z)$.

Lemme 3.2.7 *Pour $i=1,\dots,n$, $l=2,\dots,n$ et ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap B(\zeta^{(1)},R'')$:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega_l}{\partial\zeta'_1}(z_0,\zeta) &= 0,\\ \left|\frac{\partial^2\omega_l}{\partial\zeta'_1\partial\overline{z'_i}}(z_0,\zeta)\right| &\lesssim \frac{\tau_l(z_0,\varepsilon)}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Preuve : Soient $i=1,\dots,n$, $l=2,\dots,n$ et ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap B(\zeta^{(1)},R'')$. Par définition, $\omega_l(z,\zeta)=\sum_{k=1}^n\Phi_{lk}(z)(\zeta'_k-z'_k)$ et donc $\frac{\partial\omega_l}{\partial\zeta'_1}(z_0,\zeta)=\Phi_{l1}(z_0)$, et comme $\Phi(z_0)$ est la matrice identité, nécessairement, $\frac{\partial\omega_l}{\partial\zeta'_1}(z_0,\zeta)=0$. Ensuite :

$$\frac{\partial^2\omega_l}{\partial\zeta'_1\partial\overline{z'_i}}(z_0,\zeta) = \frac{\partial\Phi_{l1}}{\partial\overline{z'_i}}(z_0),$$

d'où, avec la propostion 1.5.14, et la remarque 1.3.1 : $\left|\frac{\partial^2\omega_l}{\partial\zeta'_1\partial\overline{z'_i}}(z_0,\zeta)\right| \lesssim \frac{\tau_l(z_0,\varepsilon)}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. $\square$

Nous appliquons ce lemme dès maintenant :

Lemme 3.2.8 *Pour $j=1,\dots,n$, $k=2,\dots,n$ et $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap B(\zeta^{(1)},R'')$:*

$$\begin{aligned}|\tilde{V}_1^\zeta\tilde{Q}'_j(\zeta,z_0)| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)},\\ |\tilde{V}_1^\zeta(\overline{V}_k^z(\tilde{Q}'_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_k^{z_0})| &\lesssim \frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Preuve : Pour $j=1$, puisque $\tau_1(z_0,\varepsilon)\approx\varepsilon$, les deux inégalités sont triviales. Soient donc $j,k=2,\dots,n$ et $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap B(\zeta^{(1)},R'')$. Nous commençons par montrer que $|\tilde V_1^\zeta\tilde Q'_j(\zeta,z_0)|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.
D'une part, $\tilde V_1^\zeta\tilde Q'_j(\zeta,z_0)=\sum_{i=1}^n\overline{\Phi_{1i}(\zeta)}\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\zeta'_i}(\zeta,z_0)$ et d'autre part, pour tout $i\neq1$, $|\Phi_{1i}(\zeta)|\lesssim\varepsilon^{\frac12}$ (proposition 1.5.13 et remarque 1.3.1) : il suffit donc de prouver que $\left|\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\zeta'_1}(\zeta,z_0)\right|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, ou encore puisque $\Phi(z_0)$ est la matrice identité et puisque $\frac{\partial\tilde Q'_j}{\partial\zeta'_1}(\zeta,z_0)=\sum_{i=1}^n\Phi_{ij}(z_0)\frac{\partial\tilde\sigma_i}{\partial\zeta'_1}(\zeta,z_0)$, que $\left|\frac{\partial\tilde\sigma_j(z_0,\omega(z_0,\zeta))}{\partial\zeta'_1}\right|\lesssim\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$.

$$\begin{aligned}\tilde\sigma_i(z_0,\omega(z_0,\zeta)) &= \int_0^1\frac{\partial\tilde\Sigma}{\partial\omega_i}(z_0,t\omega(z_0,\zeta))dt\\ &= \int_0^1\frac{\partial A_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))F_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))dt\\ &\quad+\int_0^1 A_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))\frac{\partial F_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))dt.\end{aligned}\tag{3.28}$$

D'après le lemme 3.2.7, $\frac{\partial\omega_k}{\partial\zeta'_1}(z_0,\zeta)=0$ pour tout $k\neq1$, ainsi, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta'_1}\frac{\partial F_{z_0}}{\partial\omega_j}(t\omega(z_0,\zeta)) = 0.\tag{3.29}$$

(3.29) et le corollaire 2.3.5 implique que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial\zeta'_1}\int_0^1 A_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))\frac{\partial F_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}.\tag{3.30}$$

Pour l'autre intégrale de (3.28), nous utilisons la forme particulière de A : $A(z_0,\zeta)=\frac{1}{1+(m'-v(z_0,\zeta))F(z_0,\zeta)}$:

$$\frac{\partial A_{z_0}}{\partial\omega_j}(\omega) = -\frac{(m'-v_{z_0}(\omega))\frac{\partial F_{z_0}}{\partial\omega_j}(\omega)-F_{z_0}(\omega)\frac{\partial v_{z_0}}{\partial\omega_j}(\omega)}{(1+(m'-v_{z_0}(\omega))F_{z_0}(\omega))^2}\tag{3.31}$$

d'où avec le corollaire 2.3.5, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\left|\frac{\partial A_{z_0}}{\partial\omega_j}(t\omega(z_0,\zeta))\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}.\tag{3.32}$$

Encore avec le corollaire 2.3.5, nous en concluons que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_1'}\int_0^1\frac{\partial A_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))F_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)},$$

puis avec (3.30), que $\left|\frac{\partial\tilde{\sigma}_j(z_0,\omega(z_0,\zeta)}{\partial\zeta_1'}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$, ce qui montre la première inégalité.
$\tilde{V}_1^\zeta(\overline{V}_k^z(\tilde{Q}_j)(\zeta,z_0)\overline{q}_k^{z_0}) = \sum_{i=1}^n \overline{\Phi_{1i}(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta_i'}\overline{V}_k^z\tilde{Q}_j(\zeta,z_0)d\overline{z}_k$ et d'après la proposition 1.5.13, $|\Phi_{1i}(\zeta)|$ est majoré par $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, pour prouver la deuxième inégalité il suffira de montrer que $\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_1'}\overline{V}_k^z(\tilde{Q}_j')(\zeta,z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}$.
Nous nous ramenons à $\frac{\partial^2\tilde{\sigma}_j(z,\omega(z,\zeta))}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}$: Comme $\Phi(z_0)$ est la matrice identité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\zeta_1'}\overline{V}_k^z\tilde{Q}_j'(\zeta,z_0) &= \frac{\partial^2\tilde{Q}_j'}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}(\zeta,z_0)\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\overline{z_k'}}(z_0)\frac{\partial\tilde{\sigma}_i(z_0,\omega(z_0,\zeta))}{\partial\zeta_1'} + \left.\frac{\partial^2\tilde{\sigma}_j(z,\omega(z,\zeta))}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}\right|_{z=z_0}.\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.5.14, $\left|\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\overline{z_k'}}(z_0)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}$ et il reste à étudier $\left.\frac{\partial^2\tilde{\sigma}_j(z,\omega(z,\zeta))}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}\right|_{z=z_0}$.
En utilisant les lemmes 2.3.3, 2.3.4 et 3.2.7, nous remarquons que pour tout $t\in[0,1]$:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial\omega_j}(t\omega(z,\zeta))\right)\Big|_{z=z_0}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}. \quad (3.33)$$

Avec (3.29) et le corollaire 2.3.5, cela implique que :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z}_k'}\int_0^1 A_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))\frac{\partial F_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}. \quad (3.34)$$

Ensuite, les inégalités du corollaire 2.3.5 mises dans (3.31) impliquent que $\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k'}\left.\frac{\partial A_z(t\omega(z,\zeta))}{\partial\omega_j}\right|_{z=z_0}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}$. Avec le corollaire 2.3.5 et (3.32), nous en tirons :

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z}_k'}\int_0^1\frac{\partial A_{z_0}}{\partial\omega_i}(t\omega(z_0,\zeta))F_{z_0}(t\omega(z_0,\zeta))dt\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_k(z_0,\varepsilon)\tau_j(z_0,\varepsilon)}.$$

Cette inégalité et (3.34) entraînent que $\left|\left.\frac{\partial^2\tilde\sigma_j(z,\omega(z,\zeta))}{\partial\zeta_1'\partial\overline{z_k'}}\right|_{z=z_0}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}$, d'où découle la deuxième inégalité. □

Une étude plus fine permettrait de majorer respectivement $\tilde V_1^\zeta \tilde Q_j'(\zeta,z_0)$ et $\tilde V_1^\zeta(\overline{V}_k^z \tilde Q_j'(\zeta,z_0)\overline{q}_k^{z_0})$ par $\frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)}$ et $\frac{\varepsilon}{\tau_j(z_0,\varepsilon)\tau_k(z_0,\varepsilon)}$. Cependant, cela ne nous apporterait rien car l'action de $\tilde V_1^\zeta$ sur certains termes du noyau, entrainera une perte d'un facteur $\varepsilon^{\frac12}$. Ainsi, utiliser des majorations meilleures nous obligerait à distinguer plusieurs cas et finirait en fait par compliquer nos calculs futurs.

Alors que nous connaissions exactement la minoration de la fonction de support dans le cas de $\Omega(\eta)$, nous devons encore la montrer pour $\Omega^t(\tilde\eta)$. La technique est cependant la même dans les deux cas :

Lemme 3.2.9 *Quitte à choisir ε_0 plus petit, il existe $\tilde c_0 > 0$ ne dépendant pas de z_0 tel que pour tout $\tilde c \in]0,\tilde c_0]$ et tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $\zeta = z_0+\lambda\eta_{z_0}+\mu v$, $v\in T^{\mathbb{C}}_{z_0}bD_{r(z_0)}$ unitaire, nous ayons : $|\mu| < \tilde c\tau(z_0,v,\varepsilon)$ implique $|\lambda|\approx\varepsilon$, uniformément par rapport à z_0, v, μ, λ, ε et $\tilde c$.*

Preuve : Soit $\tilde c_0 > 0$ arbitraire que nous fixerons ultérieurement. Soient alors ε, $\tilde c$, $\zeta = z_0+\lambda\eta_{z_0}+\mu v$ comme dans l'énoncé. Soit aussi $w_1^*,\dots,w_n^*$ les n vecteurs de la base ε-extrémale en z_0. Nous notons $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ et $((\eta_{z_0})_1^*,\dots,(\eta_{z_0})_n^*)$ les coordonnées de v et η_{z_0} respectivement dans cette base, $(\zeta_1^*,\dots,\zeta_n^*)$ celles de ζ dans le repère centré en z_0 et dont la base est $w_1^*,\dots,w_n^*$.

Nous avons :

$$\zeta_i^* = \lambda(\eta_{z_0})_i^* + \mu v_i^*. \tag{3.35}$$

Nous montrons tout d'abord que $|\lambda|\lesssim\varepsilon$: En écrivant le produit scalaire de η_{z_0} et $\overrightarrow{z_0\zeta}$ avec les coordonnées ε-extrémales, nous obtenons :

$$|\lambda| \lesssim \sum_{i=1}^n |\zeta_i^*|\left|\frac{\partial r}{\partial\zeta_i^*}(z_0)\right|.$$

Puisque ζ appartient à $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, avec la proposition 1.3.5, nous en déduisons que $|\lambda|\lesssim\varepsilon$.

Nous utilisons maintenant (3.35) afin de majorer ζ_i^* pour $i\neq 1$ et ainsi en déduire que $|\zeta_1^*|\geq c_1\varepsilon$.

D'après la proposition 1.3.1, nous avons :

$$\frac{|\mu|}{\tau(z_0,v,\varepsilon)} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|\mu||v_i^*|}{\tau_i(z_0,\varepsilon)},$$

et donc pour tout i :

$$|\mu v_i^*| \lesssim \tilde{c}\tau_i(z_0, \varepsilon). \tag{3.36}$$

D'autre part, pour tout i, $|\partial r(z_0)|(\eta_{z_0})_i^* = \frac{\partial r}{\partial w_i^*}(z_0)$ et la proposition 1.3.5 amène donc : $|(\eta_{z_0})_i^*| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z_0,\varepsilon)}$. Puisque pour $i \neq 1$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \lesssim \tau_i(z_0, \varepsilon)$, nous obtenons :

$$|\lambda||(\eta_{z_0})_i^*| \lesssim \varepsilon\tau_i(z_0, \varepsilon) \tag{3.37}$$

quel que soit $i \neq 1$.
Nous déduisons de l'égalité (3.35) et des inégalités (3.36) et (3.37) que pour tout $i \neq 1$:

$$|\zeta_i^*| \lesssim (\varepsilon + \tilde{c})\tau_i(z_0, \varepsilon),$$

et ainsi, si $\tilde{c}_0$ et ε_0 sont suffisamment petits, $|\zeta_i^*| < c_1\tau_i(z_0, \varepsilon)$. Mais comme ζ n'est pas dans $c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, nécessairement, $|\zeta_1^*| \geq c_1\tau_1(z_0, \varepsilon)$.
Ensuite, $|\lambda||(\eta_{z_0})_1^*| \geq |\zeta_1^*| - |\mu v_1^*|$ et puisque $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ est un bon quintuplet, $\left|\frac{\partial r}{\partial w_1^*}(z_0)\right| \gtrsim 1$ et $|(\eta_{z_0})_1^*| \gtrsim 1$ uniformément par rapport à ζ, z_0 et ε, ce qui avec (3.36), conduit à l'existence de $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |\lambda| &\gtrsim c_1\tau_1(z_0, \varepsilon) - C\tilde{c}\tau_1(z_0, \varepsilon) \\ &\gtrsim \tau_1(z_0, \varepsilon)(c_1 - C\tilde{c}). \end{aligned}$$

Puisque selon la remarque 1.3.1, $\varepsilon \approx \tau_1(z_0, \varepsilon)$, il suffit de choisir $\tilde{c}_0 > 0$ suffisamment petit encore pour avoir $|\lambda| \gtrsim \varepsilon$. $\square$
Une fois le lemme 3.2.9 montré, la démonstration de la minoration satisfaite par $\tilde{S}$ est très proche de la démonstration de la minoration de S. Toutefois, afin de lever tous doutes possibles, nous la montrons tout de même :

Lemme 3.2.10 *Quitte à choisir ε_0 plus petit encore, pour tout $\zeta \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap \mathcal{U}$ avec $r(\zeta) \leq r(z_0)$:*

$$|\tilde{S}(\zeta, z_0)| \gtrsim \varepsilon + r(z_0) - r(\zeta),$$

uniformément par rapport à z_0, ζ et ε.
De plus, pour tout ζ de $\mathcal{U}$ tels que $r(z_0) \geq r(\zeta)$:

$$|\tilde{S}(\zeta, z_0)| \gtrsim r(z_0) - r(\zeta),$$

uniformément par rapport à z_0 et ζ.

Preuve : Nous montrons tout d'abord la deuxième inégalité : Soit ζ dans $\mathcal{U}$ tel que $r(\zeta) \leq r(z_0)$. Si $|\zeta - z_0| \geq \frac{R}{2}$, d'après le théorème 1.5.2, l'inégalité est triviale. Sinon, d'après ce même théorème, $|\tilde{S}(\zeta, z_0)| \geq \frac{1}{2}|F(z_0, \zeta)|$. Nous appliquons alors le théorème 1.5.1 selon lequel $-\Re F(z_0, \zeta) \gtrsim r(z_0) - r(\zeta)$ et la deuxième inégalité est vraie.
Montrons la première inégalité : Soit $\zeta \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap \mathcal{U}$ tel que $r(\zeta) \leq r(z_0)$. Par notre choix de ε_0, ζ appartient à $B(z_0, \frac{R}{4})$ et selon (iii) du théorème 1.5.2, $\tilde{S}(\zeta, z_0) = A(z_0, \zeta)F(z_0, \zeta)$. De plus d'après (iv) de ce même théorème, $|A(z_0, \zeta)| \geq \frac{1}{2}$: il suffit donc de minorer $|F(z_0, \zeta)|$. Pour cela, nous appliquons le lemme 3.2.9. Ecrivons $\zeta = z_0 + \lambda\eta_{z_0} + \mu v$, v unitaire dans $T^{\mathbb{C}}_{z_0} bD_{r(z_0)}$.
Par définition d'un bon quintuplet, ε_0 est tel que $|\zeta - z_0| \leq \frac{R}{4}$, R donné par le théorème 1.5.2, et d'après ce même théorème :

$$-\Re F(z_0, \zeta) \geq c_-(r(z_0) - r(\zeta)) + \frac{|\Re\lambda|}{2} + \frac{K}{2}(\Im\lambda)^2 + \frac{K'k'}{4}\sum_{j=2}^{m}\sum_{\alpha+\beta=j}\left|\left.\frac{\partial^j r(z_0 + \mu v)}{\partial\mu^\alpha\partial\overline{\mu}^\beta}\right|_{\mu=0}\right||\mu|^j. \tag{3.38}$$

Plus simplement cette fois, l'inégalité triangulaire donne :

$$|\Im F(z_0, \zeta)| \geq \; \geq \; 3|\Im\lambda| - K|\lambda|^2 - K'\sum_{j=2}^{m} M^{2^j}\frac{1}{j!}\left|\left.\frac{\partial^j r(z_0 + \mu v)}{\partial\mu^j}\right|_{\mu=0}\right||\mu^j|. \tag{3.39}$$

Nous supposons que $|\mu| < \tilde{c}\tau(z_0, v, \varepsilon)$, auquel cas selon la proposition 1.3.5 :

$$K'\sum_{j=2}^{m} M^{2^j}\frac{1}{j!}\left|\left.\frac{\partial^j r(z_0 + \mu v)}{\partial\mu^j}\right|_{\mu=0}\mu^j\right| \lesssim \tilde{c}\varepsilon. \tag{3.40}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.2.9, $|\lambda| \approx \varepsilon$ et donc :
Soit $|\Re\lambda| \gtrsim \varepsilon$, et en utilisant (3.38) :

$$\begin{aligned} |F(z_0, \zeta)| &\geq -\Re F(z_0, \zeta) \\ &\gtrsim c_-(r(z_0) - r(\zeta)) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Soit $|\Im\lambda| \gtrsim \varepsilon$ et (3.38), (3.39) et (3.40) donnent cette fois-ci l'existence de $C > 0$ telle que :

$$|F(z_0, \zeta)| \gtrsim -\Re F(z_0, \zeta) + |\Im F(z_0, \zeta)|$$

$$\begin{aligned}
&\gtrsim c_-(r(z_0)-r(\zeta)) + \\
&\quad 3|\Im\lambda| - K|\lambda|^2 - K' \sum_{j=2}^{m} M^{2^j} \frac{1}{j!} \left| \left. \frac{\partial^j r(z_0+\mu v)}{\partial \mu^j} \right|_{\mu=0} \mu^j \right| \\
&\gtrsim c_-(r(z_0)-r(\zeta)) + \varepsilon(1 - C(\varepsilon - \tilde{c}))
\end{aligned}$$

et pour ε_0 (et donc ε) et $\tilde{c}$ suffisamment petits :

$$|F(z_0,\zeta)| \gtrsim r(z_0) - r(\zeta) + \varepsilon. \tag{3.42}$$

Remarquons aussi que l'inégalité $|\lambda| \gtrsim \varepsilon$ étant uniforme par rapport à z_0, ζ, ε et $\tilde{c}$ (pourvu que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $\tilde{c} \leq \tilde{c}_0$), les inégalités (3.41) et (3.42) sont uniformes par rapport à z_0, ζ, ε et $\tilde{c}$.
Nous fixons maintenant $\tilde{c} \in]0, \tilde{c}_0]$ de sorte que (3.42) soit satifaite dès que $|\mu| < \tilde{c}\tau(z_0, v, \varepsilon)$. Soit $\zeta = z_0 + \lambda\eta_{z_0} + \mu v \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)) \cap \mathcal{U}$, $v \in T_z^{\mathbb{C}} bD_{r(z_0)}$ unitaire, tel que $r(\zeta) \leq r(z_0)$. Il y a alors deux possibilités :
Soit $|\mu| < \tilde{c}\tau(z_0, v, \varepsilon)$ auquel cas nous sommes dans la situation de (3.41) ou (3.42).
Soit $|\mu| \geq \tilde{c}\tau(z_0, v, \varepsilon)$, d'après la proposition 1.3.2 :

$$\frac{K'k'}{4} \sum_{j=2}^{m} \sum_{\alpha+\beta=j} \left| \left. \frac{\partial^j r(z_0+\mu v)}{\partial \mu^\alpha \partial \overline{\mu}^\beta} \right|_{\mu=0} \right| |\mu|^j \gtrsim \varepsilon$$

et en utilisant encore (3.38) :

$$|F(z_0,\zeta)| \gtrsim \varepsilon + r(z_0) - r(\zeta),$$

ce qui montre la première inégalité. □

3.3 Intégration par parties

Pour récupérer les facteurs ε qui vont disparaître lors des dérivations successives, nous devrons intégrer par parties au moins autant de fois que nous dériverons. Pour cela, nous aurons besoin d'une formulation assez générale et récursive.
Pour conclure dans la démonstration du théorème 3.1.3, nous utiliserons une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $B(\zeta^{(i)}, R'')$, $i = 1, \ldots, N$, de bD. C'est pourquoi nous travaillerons seulement sur $B(\zeta^{(1)}, R'')$ et introduisons les notations suivantes : Soit $R_1 \in]0, R''[$. Pour p et s des entiers, $0 \leq s \leq p$, f une $(0,q)$-forme différentielle de classe C^p sur bD à

support dans $\overline{B(\zeta^{(1)}, R_1)}$, $\Gamma^s f$ désigne une forme différentielle de régularité $(p-s)$ sur bD, à support dans $\overline{B(\zeta^{(1)}, R_1)}$, de même degré que f telle que $\|\Gamma^s f\|_{bD,p-s} \leq c_{s,D}\|f\|_{bD,p}$, $c_{s,D}$ ne dépendant que de D et s.

3.3.1 Analyse du noyau pour les z extérieurs à D : $\Omega(\tilde{\eta})$

Pour z appartenant à $B(\zeta^{(1)}, R'') - \overline{D}$, nous notons :

$$\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) =$$
$$= \int_{bD} \Gamma^s f(\zeta) \wedge \frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z) \wedge (\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}} \prod_{i=1}^{j'} (\tilde{Z}_i^z + \tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z),$$

où $j,j',k,k',l,l',s \geq 0$ sont des entiers , $p \geq s \geq 0$, $k,j \geq 1$, $X^{k'}$ est k' fois la composée de champs de vecteurs de $\{\tilde{V}_1^\zeta, Z_1^z + Z_1^\zeta, \ldots, Z_n^z + Z_n^\zeta, \overline{Z}_2^z + \overline{Z}_2^\zeta, \ldots, \overline{Z}_n^z + \overline{Z}_n^\zeta\}$, pour $i = 1, \ldots, j'$, $\tilde{Z}_i^z$ est dans $\{Z_1^z, \ldots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \ldots, \overline{Z}_n^z\}$ et $\varpi_{l'}$ une forme différentielle en ζ telle que $|\varpi_{l'}(\zeta,z)| = O(|\zeta-z|^{l'})$. Nous dirons aussi bien que $\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)$ ou que (j,j',k,k',l,l') satisfait la condition (CI) si :

$$(CI)\left\{\begin{array}{rcl} 1 & < & j \\ 2j-j' & \leq & 2k-k' \\ k' & \leq & k \\ 2k+2l-l' & \leq & 2n-1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \left\{\begin{array}{l} k=j=1 \\ k'=j'=0 \\ 2l-l' \leq 2n-3 \end{array}\right.$$

Toujours pour s,j,j',k,k',l,l' entiers, $p \geq s \geq 0$, $j',k,k',l,l' \geq 0$ et $j \geq 1$, nous définissons :

$$\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) =$$
$$= \int_{bD} \Gamma^s f(\zeta) \wedge \frac{X^{k'}\left((\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}} \prod_{i=1}^{j'} (\tilde{Z}_i^z + \tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z).$$

et la condition (CJ) qui s'y attache :

$$(CJ)\left\{\begin{array}{rcl} 1 & < & j \\ 2j-j' & \leq & 2k-k' \\ k' & \leq & k \\ 2k+2l-l' & \leq & 2n-2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \left\{\begin{array}{l} j=1 \\ k=k'=j'=0 \\ 2l-l' \leq 2n-3 \end{array}\right. .$$

Nous verrons que $\tilde{T}_q^t f$ s'écrit comme somme de $\tilde{I}[f](k,0,k,2(n-k),1,0)$, $k \in [\![1, q-1]\!]$ qui satisfont (CI). (CI) et (CJ) ne font que transcrire l'évolution

possible de ce terme initial au cours des différentes intégrations par parties. Elles permettent en outre d'assurer un bon équilibre entre le nombre de facteurs ε et le nombre de τ_i afin de pouvoir appliquer le lemme A.4.1 ou son corollaire. Nous aurons parfois beaucoup de peine à maintenir ce fragile équilibre à cause des très nombreuses interactions des différentes parties du noyau et il faudra faire attention aux particularités de chaque cas.
Restreindre le support de f à $\overline{B(\zeta^{(1)}, R_1)}$ nous permet de ne pas avoir à nous soucier de ce qui se passe à l'extérieur de la boule $B(\zeta^{(1)}, R'')$ alors que les Z_j^ζ et les $\overline{Z}_j^\zeta$ ne sont pas nécessairement définis.

Proposition 3.3.1 *Soit $B^z \in \{Z_1^z, \dots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \dots, \overline{Z}_n^z\}$, $s < p$.*

(i) Si $\tilde{I}[f](j, j', k, k', l, l', s)$ vérifie (CI), alors quel que soit z appartenant à $(\mathcal{V} \cap B(\zeta^{(1)}, R'')) - \overline{D}$, $B^z\tilde{I}[f](j, j', k, k', l, l', s)(z)$ est une somme finie de $\tilde{I}[f](\tilde{j}, \tilde{j}', \tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{l}, \tilde{l}', \tilde{s})(z)$ et de $\tilde{J}[f](\tilde{j}, \tilde{j}', \tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{l}, \tilde{l}', \tilde{s})(z)$, $\tilde{s} \le s + 1$, satisfaisant respectivement (CI) et (CJ).

(ii) Si $\tilde{J}[f](j, j', k, k', l, l', s)$ vérifie (CJ), alors quel que soit z appartenant à $(\mathcal{V} \cap B(\zeta^{(1)}, R'')) - \overline{D}$, $B^z\tilde{J}[f](j, j', k, k', l, l', s)(z)$ est une somme finie de $\tilde{J}[f](\tilde{j}, \tilde{j}', \tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{l}, \tilde{l}', \tilde{s})(z)$ satisfaisant (CJ) avec $\tilde{s} \le s + 1$.

Preuve : Nous montrons (i) et reprenons les notations de l'énoncé.

$$
\begin{aligned}
&B^z\tilde{I}[f](j, j', k, k', l, l', s)(z) = \\
&= \int_{bD} \Gamma^s f(\zeta) \wedge \\
&\quad \wedge (B^z + B^\zeta)\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta, z) \wedge (\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta, z))^{k-1}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta, z)}{\tilde{S}^j(\zeta, z)|\zeta - z|^{2l}} \prod_{i=1}^{j'} (\tilde{Z}_i^z + \tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z)\right) \\
&\quad - \int_{bD} \Gamma^s f(\zeta) \wedge \\
&\quad \wedge B^\zeta\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta, z) \wedge (\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta, z))^{k-1}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta, z)}{\tilde{S}^j(\zeta, z)|\zeta - z|^{2l}} \prod_{i=1}^{j'} (\tilde{Z}_i^z + \tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta, z)\right) \\
&= X + Y.
\end{aligned}
$$

Pour Y, nous faisons une intégration par parties :

$$
Y = \int_{bD} B^\zeta \Gamma^s f(\zeta) \wedge
$$

$$
\begin{aligned}
&\wedge \frac{X^{k'}\left(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}^t_z\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z^z_i+\tilde Z^\zeta_i)\tilde S(\zeta,z)\\
= \;& \tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s+1)(z),
\end{aligned}
$$

et Y vérifie (CI).
Pour X, il faut distinguer différents cas selon les valeurs de j, k,...
Si $j=1$:

$$
\begin{aligned}
X \;=\;& -\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)^2|\zeta-z|^{2l}}+\\
&+\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)}\wedge(B^z+B^\zeta)\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)+\\
&+\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\\
=\;& X_1+X_2+X_3
\end{aligned}
$$

Analyse de X_3 : Puisque $(1,j',k,k',l,l')$ vérifie (CI), $k=1$ et $2l-l'\leq 2n-3$. Ainsi, comme $(B^z+B^\zeta)\tilde\eta_1$ est borné, $X_3=J[f](1,0,0,0,l,l',s)$ et vérifie (CJ).
Analyse de X_2 : Nous remarquons que $(B^z+B^\zeta)\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)=\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}$ et ainsi $X_2=\tilde I[f](1,0,1,0,l,l',s)(z)$ vérifie (CI).
Analyse de X_1 : nous allons faire une intégration par parties, un peu moins naturelle que pour Y : La proposition 3.1.6 nous indique que $|\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)|\gtrsim 1$, uniformément par rapport à z et ζ. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
X_1 \;=\;& \int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)}\tilde V^\zeta_1\left(\frac{1}{\tilde S(\zeta,z)}\right)\\
=\;& -\int_{bD}\tilde V^\zeta_1\left(\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)}\right)\frac{1}{\tilde S(\zeta,z)}\\
=\;& -\int_{bD}\tilde V^\zeta_1(\Gamma^s f(\zeta))\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)}+\\
&-\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)}\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\tilde V^\zeta_1\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)\\
&-\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\tilde V^\zeta_1\left(\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde S(\zeta,z)}{\tilde V^\zeta_1\tilde S(\zeta,z)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{bD} \Gamma^s f(\zeta) \wedge \frac{(B^z+B^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\tilde{V}_1^\zeta(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)) \wedge \varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\\
= \;& X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}.
\end{aligned}
$$

Analyse de X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14} :

Puisque $\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}$ et $\tilde{V}_1^\zeta\Big(\frac{(B^z+B^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\Big)$ sont uniformément bornés, $X_{11}=\tilde{I}[f](1,0,1,0,l,l',s+1)(z)$ et $X_{13}=\tilde{I}[f](1,0,1,0,l,l',s)(z)$ et vérifient (CI). Pour X_{12}, $\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)=\frac{\varpi_{1+l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2(l+1)}}+\frac{\varpi_{l'-1}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}$ et il manquerait un ordre d'annulation pour satisfaire la dernière condition de (CI). Aussi, nous utilisons le lemme 3.2.4 selon lequel $(B^z+B^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)=O(|\zeta-z|)$, ce qui montre que $X_{12}=\tilde{I}[f](1,0,1,0,l,l',s)(z)+\tilde{I}[f](1,0,1,0,l+1,l'+2,s)(z)$ et satisfait (CI). Enfin X_{14} : en majorant $\tilde{V}_1^\zeta\tilde{\eta}_1$ par une constante uniforme, $X_{14}=\tilde{J}[f](1,0,0,0,l,l',s)(z)$ qui vérifie (CJ) car $k=1$ et $2l-l'\leq 2n-3$. Le cas où $j=1$ est donc règlé : nous supposons maintenant $j>1$. Dans ce cas :

<u>*Si $j>1$:*</u>

$$
\begin{aligned}
X \;=\;& \int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\Big(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right).\\
&.\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+\\
&+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{(B^z+B^\zeta)X^{k'}\Big(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right).\\
&.\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)+\\
&+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\Big(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j+1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right).\\
&.(B^z+B^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)+\\
&+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\Big(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\Big)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\wedge(B^z+B^\zeta)\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\\
=\ & X_1'+X_2'+X_3'+X_4'.
\end{aligned}$$

Analyse de X_1' : Nous allons pouvoir faire une intégration par parties semblable à celle que nous avons faite pour traiter X_1 : $|\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)|\gtrsim 1$ pour tout z de $B(\zeta^{(1)},R'')$ et tout ζ de $B(\zeta^{(1)},R'')$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
&X_1' =\\
&=-\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\\
&\quad .\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{1}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)}\right)\\
&=\int_{bD}\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{(j-1)^{-1}\Gamma^s(f)(\zeta)}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\right)\wedge\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)\\
&\quad .\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+\\
&\quad +\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\\
&\quad \tilde{V}_1^\zeta\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+\\
&\quad +\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{\tilde{V}_1^\zeta X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\\
&\quad .\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+\\
&\quad +\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)}\right)\wedge\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)
\end{aligned}$$

$$.\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde V_1^\zeta\tilde S(\zeta,z)}$$
$$=X'_{11}+X'_{12}+X'_{13}+X'_{14}.$$

Analyse de X'_{11}, X'_{12}, X'_{13} et X'_{14} lorsque $j-1=1$: Le problème est que lorsque k' est non nul, nous ne pouvons pas satisfaire la condition (CI) : il faut donc montrer que l'on peut satisfaire (CJ). Remarquons déjà que $2l-l'\le 2n-3$ car $k\ge 1$. Comme $\tilde V_1^\zeta\left(\frac{(j-1)^{-1}\Gamma^s(f)}{\tilde V_1^\zeta\tilde S}\right)=\Gamma^{s+1}f$, et puisque $\tilde V_1^\zeta X^{k'}\left(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline\partial_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$, $\tilde V_1^\zeta\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)\right)$, $\left((B^z+B^\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)\right)$ et $X^{k'}\left(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline\partial_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$ sont bornés uniformément, nous voyons que $X'_{11}=\tilde J[f](1,0,0,0,l,l',s+1)$, que X'_{12} et X'_{13} sont des $\tilde J[f](1,0,0,0,l,l',s)$ et tous satisfont (CJ). Enfin pour X'_{14}, il faut en plus voir que X'_1 n'existe que si $j'>0$ et que d'après le lemme 3.2.4, $(B^\zeta+B^z)(\tilde Z_1^\zeta+\tilde Z_1^z)\tilde S(\zeta,z)=\varpi_1(\zeta,z)$ et $(\tilde Z_1^z+\tilde Z_1^\zeta)\tilde S(\zeta,z)=\varpi_1(\zeta,z)$. Ainsi, $X'_{14}=\tilde J[f](1,0,0,0,l,l',s)+\tilde J[f](1,0,0,0,l+1,l'+2,s)$ et satisfait (CJ).

Analyse de X'_{11}, X'_{12}, X'_{13} et X'_{14} lorsque $j-1>1$:

Pour X'_{11}, nous n'avons changé que peu de choses : $\tilde V_1^\zeta\left(\frac{(j-1)^{-1}\Gamma^s(f)}{\tilde V_1^\zeta\tilde S}\right)=\Gamma^{s+1}f$. Ensuite, dans la mesure où nous majorons par une constante uniforme le terme de $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)$ sur lequel B^z+B^ζ agit, nous écrivons $X'_{11}=\tilde I[f](j-1,j'-1,k,k',l,l',s+1)$ et constatons qu'elle satisfait (CI).

Pour X'_{12}, puisque qu'ils sont majorés uniformément, nous majorons simplement les termes de $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)$ sur lesquels $\tilde V_1^\zeta$ et $B^\zeta+B^z$ agissent par une constante uniforme : X'_{12} s'écrit alors comme somme finie de $\tilde I[f](j-1,\max(j'-2,0),k,k',l,l',s)$ et $\tilde I[f](j-1,j'-1,k,k',l,l',s)$ qui satisfont (CI) (A noter : X'_{12} ne peut exister que lorsque $j'\ge 1$ et donc considérer $\tilde I[f](j-1,j'-1,k,k',l,l',s)$ a bien un sens).

Pour X'_{13} : Majorons par une constante uniforme le terme de $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)$ sur lequel $(B^\zeta+B^z)$ agit. Deux cas se présentent : soit $k>k'$, alors $X'_{13}=\tilde I[f](j-1,j'-1,k,k'+1,l,l',s)$ satisfait (CI). Sinon, puisque (CI) est satisfaite, $k=k'$ et dans $X^{k'+1}\left(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline\partial_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$, soit $\tilde\eta_1$, soit un des $\overline\partial_z^t\tilde\eta_1$ subit l'action de deux champs de vecteurs au moins. Mais comme il est uniformément borné, nous le majorons par une constante. Si c'est $\tilde\eta_1$, nous obtenons un $\tilde J[f](j-1,j'-1,k-1,\tilde k',l,l',s)$, sinon un

$\tilde{I}[f](j-1,j'-1,k-1,\tilde{k}',l,l',s)$, $\tilde{k}' \leq k'-1$, qui vérifient respectivement (CJ) et (CI).

Pour X'_{14} : Pour palier la perte d'un degré d'annulation de $\tilde{V}_1^\zeta\Big(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\Big)$, nous utilisons le lemme 3.2.4 qui nous dit que pour tout i, $(B^z+B^\zeta)(\tilde{Z}_i^\zeta+\tilde{Z}_i^z)\tilde{S}(\zeta,z)=O(|\zeta-z|)$. Cela donne : $X'_{14}=\tilde{I}[f](j-1,j'-1,k,k',l,l',s)+\tilde{I}[f](j-1,j'-1,k,k',l+1,l'+2,s)$ et vérifie (CI).

Analyse de X'_2 : Comme nous avons supposé $j-1\geq 1$, nous pouvons faire une intégration par parties :

$$X'_2 =$$

$$=-\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)$$

$$.\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{1}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)}\right)$$

$$=\int_{bD}\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{\Gamma^s(f)(\zeta)}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}\right)\wedge\left(\frac{(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)$$

$$(j-1)^{-1}\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+$$

$$+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)$$

$$\tilde{V}_1^\zeta\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}+$$

$$+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{\tilde{V}_1^\zeta(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)$$

$$.\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}+$$

$$+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)}{\tilde{S}^{j-1}(\zeta,z)}\right)\wedge$$

$$\wedge\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{(j-1)^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}$$
$$=X'_{21}+X'_{22}+X'_{23}+X'_{24}.$$

Analyse de X'_{21}, X'_{22}, X'_{23}, X'_{24} lorsque $j=2$: $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)$ et $(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$ sont bornés, $k\geq 1$ et donc $2l-l'\leq 2n-3$. Ainsi $X'_{21}=\tilde{J}[f](1,0,0,0,l,l',s+1)$ et satisfait (CJ). Pour X'_{22} et X'_{23}, $\tilde{V}_1^\zeta(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$ et $\tilde{V}_1^\zeta\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)$ étant aussi bornés, X'_{22} et X'_{23} sont donc des $\tilde{J}[f](1,0,0,0,l,l',s)$ qui satisfont (CJ). Pour X'_{24} : si $j'\geq 1$, alors $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)=\varpi_1(\zeta,z)$ et puisque $k\geq 1$, $X'_{24}=\tilde{J}[f](1,0,0,0,l,l',s)+\tilde{J}[f](1,0,0,0,l+1,l'+2,s)$ et vérifie (CJ). Si $j'=0$, alors $4\leq 2k-k'$ et $k\geq 2$. Ainsi $2l-l'\leq 2n-5$ et $X'_{24}=\tilde{J}[f](1,0,0,0,l+1,l'+1,s)+\tilde{J}[f](1,0,0,0,l,l'-1,s)$ et satisfait (CJ).

Analyse de X'_{21}, X'_{22}, X'_{23}, X'_{24} lorsque $j>2$:

Pour X'_{21} : si $k'<k$, nous ne changeons rien par rapport au cas $j=2$: $X'_{21}=\tilde{I}[f](j-1,j',k,k'+1,l,l',s+1)$ et vérifie (CI). Si $k=k'$, pour rétablir la condition "$k'\leq k$" de (CI), il nous faut remarquer que dans $\tilde{V}_1^\zeta X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$, il y a un terme au moins dérivé deux fois au moins. Ce terme dérivé étant uniformément borné, nous le majorons simplement par une constante uniforme : si c'est $\tilde{\eta}_1$, nous obtenons un $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l',s+1)$ qui satisfait (CJ), si c'est un $\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1$, nous obtenons un $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l',s+1)$ qui satisfait (CI), avec dans les deux cas $0\leq\tilde{k}'\leq k'-1$.

Pour X'_{22}, $j'\geq 1$ et nous majorons uniformément le terme de $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)$ sur lequel $\tilde{V}_1^\zeta$ agit. Il faut ensuite faire la même distinction selon les valeurs de k et k' : si $k>k'$, X'_{22} est un $\tilde{I}[f](j-1,j'-1,k,k'+1,l,l',s)$ qui satisfait (CI), sinon une somme finie de $\tilde{I}[f](j-1,j'-1,k-1,\tilde{k}',l,l',s)$ (qui n'apparaît que si $k>1$) et de $\tilde{J}[f](j-1,j'-1,k-1,\tilde{k}',l,l',s)$, $0\leq\tilde{k}'\leq k'-1$, qui satisfont (CI) et (CJ) respectivement.

Pour X'_{24}, lorsque $k=k'$, dans $(B^z+B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$, nous majorons par une constante uniforme un terme dérivé deux fois au moins : X'_{24} est donc une somme de $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l+1,l'+1,s)$, $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l'-1,s)$ (ces deux termes n'existant que si $k>1$), $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l'-1,s)$ et $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l+1,l'+1,s)$ qui

satisfont respectivement (CI) et (CJ) avec $0 \leq \tilde{k}' \leq k' - 1$.
Si $k' < k$, en majorant uniformément par une constante un terme de $(B^z + B^\zeta)X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z) \wedge (\overline{\partial}_z^t \tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$ dérivé une fois au moins, nous pouvons écrire l'intégrale X'_{24} comme somme de $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l+1,l'+1,s)$, $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l'-1,s)$, ces deux termes n'existant que si $k>1$, $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l+1,l'+1,s)$ et $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l'-1,s)$ avec $0 \leq \tilde{k}' \leq k'$, qui satisfont respectivement (CI) et (CJ).

Pour X'_{23} : Si $k' < k-1$, $X'_{23} = \tilde{I}[f](j-1,j',k,k'+2,l,l')$ et vérifie (CI).
Si $k' = k-1$, dans $\tilde{V}_1^\zeta(B^z+B^\zeta)X^{k'}(\tilde{\eta}_1 \wedge (\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1)^{k-1})$, nous majorons par une constante uniforme un des termes dérivé deux fois au moins, ce qui fait de X'_{23} une somme de $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l',s)$ (qui n'existe que lorsque $k>1$) et $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k}',l,l',s)$, $0 \leq \tilde{k}' \leq k'$ qui satisfont respectivement (CI) et (CJ).
Si $k' = k$, alors dans $\tilde{V}_1^\zeta(B^z+B^\zeta)X^{k'}(\tilde{\eta}_1 \wedge (\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1)^{k-1})$, soit un terme est dérivé 3 fois au moins, soit deux termes au moins sont dérivés deux fois exactement. Nous majorons par une constante uniforme ces termes et dans le premier cas, lorsque $k=1$, nous obtenons une somme de $\tilde{J}[f](j-1,j',0,0,l,l',s)$ vérifiant (CJ), alors que si $k>1$, c'est une somme de $\tilde{I}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k},l,l',s)$ et $\tilde{J}[f](j-1,j',k-1,\tilde{k},l,l',s)$ vérifiant respectivement (CI) et (CJ), avec à chaque fois $0 \leq \tilde{k}' \leq k'-1$. Dans le second cas, nécessairement, $k \geq 2$ et lorsque $k=2$, nous aurons une somme de $\tilde{J}[f](j-1,j',0,0,l,l',s)$ qui satisfont (CJ), et lorsque $k>2$, une somme de $\tilde{I}[f](j-1,j',k-2,k'-2,l,l',s)$ et $\tilde{J}[f](j-1,j',k-2,k'-2,l,l',s)$ qui satisfont respectivement (CI) et (CJ).
X'_3 est la partie où nous avons le moins de latitude dans le sens où pour X'_1 et X'_2, certaines des inégalités de (CI) et (CJ) étaient meilleures que celles vérifiées par (j,j',k,k',l,l'). Pour X'_3, on ne peut rien gagner.

Analyse de X'_3 : Après intégration par parties, X'_3 s'écrit :

$$
\begin{aligned}
X'_3 &= \\
&= \int_{bD} \tilde{V}_1^\zeta \left(\frac{j^{-1}\Gamma^s(f)(\zeta)}{\tilde{V}_1^\zeta \tilde{S}(\zeta,z)}\right) \wedge \left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z) \wedge (\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right) \\
&\quad .\left((B^\zeta + B^z)\tilde{S}(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z + \tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right) + \\
&\quad + \int_{bD} \Gamma^s(f)(\zeta) \wedge \left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z) \wedge (\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right) \wedge \varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right) \frac{j^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta \tilde{S}(\zeta,z)}
\end{aligned}
$$

$$\tilde{V}_1^\zeta\left((B^\zeta+B^z)\tilde{S}(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)+$$
$$+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{\tilde{V}_1^\zeta X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\right)$$
$$.\left((B^\zeta+B^z)\tilde{S}(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{j^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}+$$
$$+\int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\left(\frac{X^{k'}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)}{\tilde{S}^j(\zeta,z)}\right)\wedge\tilde{V}_1^\zeta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)$$
$$.\left((B^\zeta+B^z)\tilde{S}(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)\tilde{S}(\zeta,z)\right)\frac{j^{-1}}{\tilde{V}_1^\zeta\tilde{S}(\zeta,z)}$$
$$=X'_{31}+X'_{32}+X'_{33}+X'_{34}.$$

Analyse de X'_{31}, X'_{32}, X'_{33}, X'_{34} :

La procédure est la même que pour X'_1 et X'_2 : $X'_{31}=\tilde{I}[f](j,j'+1,k,k',l,l',s+1)$, $X'_{32}=\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)$ et satisfont (CI). Comme $(B^\zeta+B^z)\tilde{S}(\zeta,z)=\varpi_1(\zeta,z)$, X'_{34} est somme de $\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)$ et $\tilde{I}[f](j,j',k,k',l+1,l'+2,s)$ qui satisfont (CI). Enfin, si $k>k'$, $X'_{33}=\tilde{I}[f](j,j'+1,k,k'+1,l,l',s)$ et satisfait (CI), sinon $k=k'$, et dans $X^{k'+1}\left(\tilde{\eta}_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1(\zeta,z))^{k-1}\right)$, nous majorons uniformément un terme dérivé deux fois au moins : si c'est $\tilde{\eta}_1$, nous obtenons un $\tilde{J}[f](j,j'+1,k-1,\tilde{k}',l,l',s)$ qui satisfait (CJ), si c'est $\overline{\partial}_z^t\tilde{\eta}_1$, nous avons un $\tilde{I}[f](j,j',k-1,\tilde{k}',l,l',s)$ qui satisfait (CI), avec dans tous les cas $\tilde{k}'\leq k'-1$.

Analyse de X'_4 : il n'y a presque rien à faire : $(B^\zeta+B^z)\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}=\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}$ donc $X'_4=\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)$ et satisfait (CI), ce qui finit de démontrer (i).

Pour (ii), dans $\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)$, il n'y a plus de facteur $\tilde{\eta}_1$ et par conséquent, lorsque nous majorons par une constante uniforme un terme, nous ne pouvons le perdre. On maintient alors la condition (CJ) comme (CI) en faisant quelques intégrations par parties et en examinant le 6-uplet (j,j',k,k',l,l'). □

Il peut sembler qu'en négligeant des termes par des majorations avec des constantes, nous ayons perdu en régularité. Prenons par exemple le cas où

dans $(B^\zeta+B^z)X^{k'}(\tilde\eta_1\wedge(\overline{\partial}^t_z\tilde\eta_1)^k)$, nous n'avons pas tenu compte d'un élément dérivé 2 fois. Dans le lemme 3.2.3, nous avons vu qu'une dérivation de $\tilde Q'_j$ ou $\overline{V}^z_k(\tilde Q'_j)\overline{q}^z_k$ provoquait une perte d'un facteur $\varepsilon^{\frac12}$ par rapport à la majoration originale. Lors d'une double dérivation, nous ne pouvons pas espérer quantifier la perte en deçà d'un facteur ε. Le terme dérivé 2 fois ne nous apporte alors plus rien et il est inutile de le garder. D'autre part, dans X'_3 et X'_4 sont apparus des intégrales n'améliorant pas la condition de départ,comme par exemple X'_{32}, X'_{34}...
Nous montrons maintenant les majorations de $\tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ et $\tilde J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ que les conditions (CI) et (CJ) nous assurent pour les $z\in(\mathcal V\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D}$.

Proposition 3.3.2 *Soit* $\Delta=\frac{\partial}{\partial z_t}$ *ou* $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_t}$, $t=1,\dots,n$.

(i) Soient $s\le p$, $\tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s)$ *vérifiant* (CI). *Pour tout* z *de* $(\mathcal V\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D}$ *avec* $c_2|r(z)|\le\varepsilon_0$ *nous avons :*

$$\left|\Delta\tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)\right|\lesssim c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac1m-1}\|f\|_{bD,s},$$

uniformément par rapport à f *et* z.

(ii) Soient $s\le p$, $\tilde J[f](j,j',k,k',l,l',s)$ *vérifiant* (CJ). *Alors pour tout* z *de* $(\mathcal V\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D}$ *avec* $c_2|r(z)|\le\varepsilon_0$ *nous avons :*

$$\left|\Delta\tilde J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)\right|\lesssim c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac1m-1}\|f\|_{bD,s},$$

uniformément par rapport à f *et* z.

Preuve : Nous montrons (i). Soit $\tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifiant (CI).
Soit z un point de $(B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal V)-\overline{D}$ tel que $c_2|r(z)|\le\varepsilon_0$.

$$\begin{aligned}
&\Delta\tilde I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)=\\
&=\int_{bD}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z^z_i+\tilde Z^\zeta_i)\tilde S(\zeta,z)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\qquad\wedge\frac{\Delta(X^{k'}(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}^t_z\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1}))\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}+\\
&\quad+\int_{bD}\Delta\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z^z_i+\tilde Z^\zeta_i)\tilde S(\zeta,z)\right)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\wedge\frac{X^{k'}(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}+\\
&-j\int_{bD}\Delta\tilde S(\zeta,z)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\wedge\frac{X^{k'}(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{\tilde S^{j+1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\\
&+\int_{bD}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\wedge\frac{X^{k'}(\tilde\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z))^{k-1})}{\tilde S^j(\zeta,z)}\wedge\Delta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right)\\
=\;&\tilde I_1(z)+\tilde I_2(z)+\tilde I_3(z)+\tilde I_4(z)
\end{aligned}
$$

Nous majorons $I_3(z)$ en appliquant le lemme A.4.1 :
Fixons pour le moment un z_0 dans $(B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal V)-\overline D$. Puisque $|\zeta-z_0|\gtrsim\varepsilon_0$ dès que ζ n'appartient pas à $\mathcal P_{\varepsilon_0}(z_0)$:

$$
\begin{aligned}
\Bigg|&\Delta\tilde S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\wedge\frac{X^{k'}(\tilde\eta_1(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_z^t\tilde\eta_1(\zeta,z_0))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{\tilde S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\Bigg|\le c_0,
\end{aligned}
$$

pour tout $\zeta\in bD-\mathcal P_{\varepsilon_0}(z_0)$, c_0 ne dépendant que de ε_0.
Intéressons nous à ce qui se passe dans $\mathcal P_{\varepsilon_0}(z_0)$. Soit $\varepsilon\in[c_2|r(z_0)|,\varepsilon_0]$. Nous notons $\zeta'=(\zeta'_1,\dots,\zeta'_n)$ les coordonnées d'un point ζ dans le repère de Diederich-Fornæss centré en z_0 et de base donnée par $\Psi^{z_0,\varepsilon}(z_0)$. Nous reprenons les notations de la sous-section 3.2.1 en notant $\Psi(\zeta)$ au lieu de $\Psi^{z_0,\varepsilon}(\zeta)$, $\Phi(\zeta)=\Psi(\zeta)\overline{\Psi(z_0)}^t$, $\overline q_i^z=\sum_{j=1}^n\overline\Phi_{ij}(z)d\overline z_j$, $\overline V_i^z=\sum_{j=1}^n\Phi_{ij}(z)\frac{\partial}{\partial\overline z'_j}$, pour $i=2,\dots,n$.
L'intégrande de $\tilde I_3(z_0)$, exprimée dans cette même base, s'écrit comme somme de

$$
\begin{aligned}
&\Delta\tilde S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde Z_i^z+\tilde Z_i^\zeta)\tilde S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\wedge\frac{X^{k'}\Big(\tilde Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{k-1}\overline V_{\mu_i}^z(\tilde Q'_{\nu_i}(\zeta,z_0))\overline q_{\mu_i}^{z_0}\wedge d\zeta'_{\nu_i}\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{\tilde S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}
\end{aligned}
$$

où pour tout i, μ_i est différent de 1.
Nous n'avons regardé $\tilde{Q}'_i$ et $\overline{V}^z_j(\tilde{Q}'_i)\overline{q}^z_j$ que lorsqu'ils subissent l'action d'un seul champ de vecteurs, alors que les champs de vecteurs qui compose $X^{k'}$ pourraient agir plusieurs fois sur un même terme. Aussi, si t champs de vecteurs tangents, $t > 1$, agissent sur $\tilde{Q}'_i$ ou sur $\overline{V}^z_j(\tilde{Q}'_i)\overline{q}^z_j$, nous divisons par $\varepsilon^{\frac{t}{2}}$ les estimations des lemmes 2.3.6 et 3.2.1 correspondantes. Cette division est licite puisque nous majorons des quantités finies par d'autres arbitrairement grandes lorsque ε est petit. De plus si chaque champ de vecteurs composant $X^{k'}$ agissait sur des éléments différents du produit $\tilde{Q}'_{\nu_0} d\zeta'_{\nu_0} \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} \overline{V}^z_{\mu_i}(\tilde{Q}'_{\nu_i})\overline{q}^z_{\mu_i} \wedge d\overline{\zeta}'_{\nu_i}$, nous n'aurions pas de meilleure majoration.
$|\Delta\tilde{S}(\zeta, z_0)|$ est au mieux majorable par une constante et les lemmes 2.3.6, 3.2.3, 3.2.8, 3.2.10 et 3.2.1 impliquent que pour tout ζ de $(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0))\cap bD$ si $\varepsilon \neq |r(z_0)|$ ou de $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0) \cap bD$ sinon :

$$\begin{aligned}&\left|\iota^*\left(\Delta\tilde{S}(\zeta, z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}^z_i + \tilde{Z}^\zeta_i)\tilde{S}(\zeta, z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\wedge\frac{X^{k'}\Big(\tilde{Q}'_{\nu_0}(\zeta, z_0)d\zeta'_{\nu_0}\bigwedge_{i=1}^{k-1}\overline{V}^z_{\mu_i}(\tilde{Q}'_{\nu_i}(\zeta, z_0))\overline{q}^{z_0}_{\mu_i}\wedge d\zeta'_{\nu_i}\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta, z_0)}{\tilde{S}^{j+1}(\zeta, z_0)|\zeta - z_0|^{2l}}\right)\right| \lesssim\\ &\lesssim \|f\|_{bD,s}\frac{\varepsilon^{k-j-\frac{k'-j'}{2}-1}}{\prod_{i=0}^{k-1}\tau_{\nu_i}(z_0, \varepsilon)\prod_{i=1}^{k-1}\tau_{\mu_i}(z_0, \varepsilon)|\zeta - z_0|^{2l-l'}}\end{aligned}$$

avec $\nu_i \neq \nu_j$, $\mu_i \neq \mu_j$ pour tout i, j distincts, $\mu_i > 1$ pour tout i et ι l'application $\iota : \left\{\begin{array}{ccc} bD & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \zeta & \longmapsto & \zeta\end{array}\right.$.
Puisque ε est quelconque dans $[c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$, nous en déduisons que l'intégrande

$$\begin{aligned}&\Delta\tilde{S}(\zeta, z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}^z_i + \tilde{Z}^\zeta_i)\tilde{S}(\zeta, z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\ &\qquad\wedge\frac{X^{k'}(\tilde{\eta}_1(\zeta, z_0)\wedge(\overline{\partial}^t_z\tilde{\eta}_1(\zeta, z_0))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta, z_0)}{\tilde{S}^{j+1}(\zeta, z_0)|\zeta - z_0|^{2l}}\end{aligned}$$

de $\tilde{I}_3(z_0)$ est la somme suivante de W_{ε_0}-formes sur $bD\times((\mathcal{V}\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D})$:

$$\sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_{k-1}\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_{k-1}\leq n}} W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s}, k-j-\frac{k'-j'}{2}-1,$$
$$(\nu_0,\ldots,\nu_{k-1},\mu_1,\ldots,\mu_{k-1}),2l-l'](\zeta,z_0).$$

Ensuite, puisque (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), nous pouvons appliquer à chaque terme de cette somme le lemme A.4.1 qui entraîne uniformément par rapport à z_0 :

$$|\tilde{I}_3(z_0)|\leq c_{j,j',k,k',l,l'}\max(|r(z_0)|^{k-j-\frac{k'-j'}{2}-1+\frac{2n-2k-2l+l'}{m}},|\ln|r(z_0)||,1)\|f\|_{bD,s}.$$

Mais comme (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), $k-j-\frac{k'-j'}{2}-1+\frac{2n-2k-2l+l'}{m}\geq\frac{1}{m}-1$, et nous avons pour un $c_{j,j',k,k',l,l'}$ peut-être différent du précédent :

$$|\tilde{I}_3(z_0)| \leq c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s},$$

uniformément par rapport à z_0 dans $(B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V})-\overline{D}$.
Pour obtenir la même majoration de $\tilde{I}_1(z_0)$, il faut appliquer la même procédure : nous pouvons majorer le terme de $X^{k'}(\tilde{\eta}_1\wedge(\overline{\partial}^t_z\tilde{\eta}_1)^{k-1})$ sur lequel Δ agit par une constante uniforme. Cela a pour effet de provoquer une perte d'un facteur ε au numérateur et la situation est alors la même que pour $\tilde{I}_3(z_0)$. Même chose pour $\tilde{I}_2(z_0)$ en majorant cette fois par une constante le terme de $\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_1^\zeta+\tilde{Z}_i^z)\tilde{S}(\zeta,z_0)$ sur lequel Δ va agir. Cela provoque une perte d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ au numérateur et la situation est donc meilleure encore que pour $\tilde{I}_3(z_0)$. Enfin, pour $\tilde{I}_4(z_0)$, $\left|\Delta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{|\zeta-z_0|^{2l}}\right)\right|\lesssim\frac{1}{|\zeta-z_0|^{2l-l'+1}}$, mais comme $|\zeta-z_0|\gtrsim\varepsilon$, dès que ζ appartient à $bD\cap(\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z_0))$ si $\varepsilon\neq|r(z_0)|$ et à $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)\cap bD$ sinon, nous avons $\left|\Delta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{|\zeta-z_0|^{2l}}\right)\right|\lesssim\frac{1}{\varepsilon|\zeta-z_0|^{2l-l'}}$: nous sommes encore une fois dans la même situation que pour $\tilde{I}_3(z_0)$. Tout ceci montre que :

$$|\Delta\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)| \lesssim c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}$$

pour un $c_{j,j',k,k',l,l'}$ peut-être différent du précédent mais uniforme par rapport à z dans $(\mathcal{V}\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D}$ tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$, et ce dès que (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI) : (i) est montré.
Pour (ii), lorsque (j,j',k,k',l,l') vérifie (CJ) et $j\neq 1$, la même majoration est valable pour $\Delta\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)$: comme $\Delta\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)$, sur

$bD\times(\mathcal{V}\cap B(\zeta^{(1)},R'')-\overline{D})$ l'intégrande de $\Delta\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)$ est somme de $W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s},k-j-\frac{k'-j'}{2}-1,(\nu_0,\ldots,\ \nu_{k-1},\mu_0,\ldots,\mu_{k-1}),2l-l']$ avec $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_j\neq\mu_i$ pour tout i,j distincts, $\mu_i>1$ pour tout i. Il reste alors à appliquer le lemme A.4.1 et puisque (j,j',k,k',l,l'), vérifie (CJ), nous concluons que quel que soit z dans $(\mathcal{V}\cap B(\zeta^{(1)},R''))-\overline{D}$ tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$:

$$|\Delta\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)| \leq c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}.$$

Si $j=1$, alors sur bD, l'intégrande de $\Delta\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s},-2,\emptyset,2l-l'](z,\zeta)$ avec $2l-l'\leq 2n-3$. Nous pouvons alors appliquer le corollaire A.4.2 et en conclure que :

$$|\Delta\tilde{J}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)|\leq c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}.$$

□

3.3.2 Analyse du noyau pour les z intérieurs à D : $\Omega(\eta)$

Pareillement au cas intérieur, pour z appartenant à $B(\zeta^{(1)},R'')\cap D\cap\mathcal{V}$, nous notons :

$$I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) = \\ = \int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{X^{k'}\left(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z)$$

$$J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) = \\ = \int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge\frac{X^{k'}\left((\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^k\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(V_i^z+V_i^\zeta)S(\zeta,z)$$

Nous dirons que $I[f](j,j',k,k',l,l',s)$, respectivement $J[f](j,j',k,k',l,l',s)$, vérifie (CI), respectivement (CJ), si (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), respectivement (CJ).
I et J possèdent les mêmes propriétés que les $\tilde{I}$ et $\tilde{J}$ définis dans le cadre de l'étude de $\Omega^t(\tilde{\eta})$:

Proposition 3.3.3 *Soit $B^z\in\{Z_1^z,\ldots,Z_n^z,\overline{Z}_2^z,\ldots,\overline{Z}_n^z\}$, $s<p$.*

(i) Si $I[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifie (CI), alors quel que soit z appartenant à $B(\zeta^{(1)},R'')\cap D\cap\mathcal{V}$, $B^z\tilde{I}[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ s'écrit comme une somme finie de $I[f](\tilde{j},\tilde{j}',\tilde{k},\tilde{k}',\tilde{l},\tilde{l}',\tilde{s})(z)$ et de $J[f](\tilde{j},\tilde{j}',\tilde{k},\tilde{k}',\tilde{l},\tilde{l}',\tilde{s})(z)$, $\tilde{s}\leq s+1$, satisfaisant respectivement (CI) et (CJ).

(ii) Si $J[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifie (CJ), alors quel que soit z appartenant à $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$, $B^zJ[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ s'écrit comme une somme finie de $J[f](\tilde{j},\tilde{j}',\tilde{k},\tilde{k}',\tilde{l},\tilde{l}',\tilde{s})(z)$ satisfaisant (CJ) avec $\tilde{s}\leq s+1$.

Preuve : La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.3.1 :
Pour (i) :

$$\begin{aligned}
&B^zI[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) = \\
&= \int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge(B^z+B^\zeta) \\
&\quad \left(\frac{X^{k'}\left(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z)\right) \\
&\quad -\int_{bD}\Gamma^s f(\zeta)\wedge \\
&\quad \wedge B^\zeta\left(\frac{X^{k'}\left(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z)\right) \\
&= X+Y.
\end{aligned}$$

<u>*Pour Y,*</u> nous faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
Y &= \int_{bD}B^\zeta\Gamma^s f(\zeta)\wedge \\
&\quad \wedge\frac{X^{k'}\left(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z) \\
&= I[f](j,j',k,k',l,l',s+1)(z),
\end{aligned}$$

et Y vérifie (CI).
<u>*Pour X,*</u> il faut distinguer différents cas selon les valeurs de j, j', k, k',l, l'. En intégrant par parties grâce à la proposition 3.1.5 (équivalente de la proposition 3.1.6 dans l'étude de $\Omega(\tilde{\eta})$), tout comme dans la démonstration de la proposition 3.3.1, nous pouvons restaurer les conditions (CI) et (CJ).
Pour (ii), la situation est là aussi analogue à la démonstration de (ii) de la proposition 3.3.1 □

Les conditions (CI) et (CJ) assurent là aussi les majorations nécessaires de $\Delta I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ et $\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)$.

Proposition 3.3.4 *Soit $\Delta=\frac{\partial}{\partial z_t}$ ou $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_t}$, $t=1,\dots,n$.*

(i) Soient $s \leq p$ et $I[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifiant (CI). Pour tout z de $D \cap B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V}$ avec $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ nous avons :

$$\left|\Delta I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)\right| \lesssim c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s},$$

uniformément par rapport à f et z.

(ii) Soient $s \leq p$ et $J[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifiant (CJ). Pour tout z de $D \cap B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V}$ avec $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ nous avons :

$$\left|\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)\right| \lesssim c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s},$$

uniformément par rapport à f et z.

Preuve : Au premier abord, la démonstration est semblable à celle de la proposition 3.3.2, mais comme nous ne travaillons pas avec $\overline{\partial}^t$, il y a quelques différences à préciser.
Nous montrons (i). Soit $I[f](j,j',k,k',l,l',s)$ vérifiant (CI), $s \leq p$.
Pour z dans $D \cap B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
&\Delta I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z) = \\
&= \int_{bD} \Gamma^s(f)(\zeta) \wedge \frac{\Delta(X^{k'}(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1}))\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}} \\
&\quad \cdot\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z) + \\
&\quad + \int_{bD} \Delta\left(\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z)\right)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge \\
&\quad \wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}} \\
&\quad - j\int_{bD}\Delta S(\zeta,z)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge \\
&\quad \wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^{j+1}(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\cdot\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z) \\
&\quad + \int_{bD}\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z))^{k-1})}{S^j(\zeta,z)}\wedge\Delta\left(\frac{\varpi_{l'}(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}\right) \\
&\quad \prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z) \\
&= I_1(z)+I_2(z)+I_3(z)+I_4(z)
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme A.4.1, nous majorons $I_3(z)$.
Nous fixons un z_0 de $D \cap B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)| \leq \varepsilon_0$. Puisque $|\zeta - z_0| \gtrsim \varepsilon_0$ dès que ζ appartient à $bD - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$, nous savons que :

$$\begin{aligned}&|\Delta S(\zeta, z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\ &\quad\left.\wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z_0))^k)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\right|\leq c_0,\end{aligned}$$

pour tout $\zeta \in bD - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$, c_0 ne dépendant que de ε_0.
Intéressons nous à ce qui se passe à l'intérieur de $\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z_0)$ et montrons que l'intégrande $I_3(z_0)$ est une somme de W_{ε_0}-formes.
Soit ε dans $[c_2|r(z_0)|, \varepsilon_0]$. Nous notons $\zeta' = (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ les coordonnées d'un point ζ dans le repère de Diederich-Fornæss centré en z_0 et de base donnée par $\Psi^{z_0,\varepsilon}(z_0)$.
L'intégrande de $I_3(z_0)$, exprimée dans cette même base, s'écrit comme somme de

$$\begin{aligned}&\Delta S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\ &\qquad\wedge\frac{X^{k'}\left(Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\wedge\bigwedge_{i=1}^{k-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta}'_{\mu_i}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}'_{\mu_i}\wedge d\zeta'_{\nu_i}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}.\end{aligned}$$

Si t champs de vecteurs tangents, $t > 1$ agissent sur Q'_{ν_0} ou sur $\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta}'_{\mu_i}}$, nous divisons par $\varepsilon^{\frac{t}{2}}$ l'estimation du lemme 2.3.6. Cette division est licite puisque nous majorons des quantités finies par d'autres arbitrairement grandes lorsque ε est petit.
Ensuite comme pour l'étude des estimées C^k sur les domaines, nous majorons ΔS par une constante, résultat optimal car, modulo une petite perturbation, $\frac{\partial S}{\partial z'_1}$ se comporte comme une constante.
Si pour tout i, $\mu_i \neq 1$, les lemmes 2.3.6, 3.2.3, 3.2.6 et la proposition 2.3.2 impliquent que pour tout $\zeta \in bD$:

$$\begin{aligned}&\left|\iota^*\left(\Delta S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\wedge\frac{X^{k'}\left(Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\bigwedge_{i=1}^{k-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta}'_{\mu_i}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}'_{\mu_i}\wedge d\zeta'_{\nu_i}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\right)\right|\lesssim\end{aligned}$$

$$\lesssim \quad \|f\|_{bD,s}\frac{\varepsilon^{k-j-\frac{k'-j'}{2}-1}}{\prod_{i=0}^{k-1}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{i=1}^{k-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2l-l'}}$$

avec $\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts, $\mu_i>1$ pour tout i.
Si maintenant il existe un $i_0\in\{1,\dots,k-1\}$ tel que $\mu_{i_0}=1$, remarquons que puisque $\iota^*(\partial r\wedge\overline{\partial}r)=0$ et puisque pour tout ζ de $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $\frac{\partial r}{\partial\zeta_1'}(\zeta)\neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\iota^*\big(\bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i'\bigwedge_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n d\overline{\zeta}_i'\big)=\\
&=\iota^*\left(\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial\zeta_1'}(\zeta)\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_1'}(\zeta)}\partial r(\zeta)\wedge\bigwedge_{i=2}^n d\zeta_i'\wedge\left(\overline{\partial}r(\zeta)-\sum_{k=2}^n\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_k'}(\zeta)d\overline{\zeta_k'}\right)\wedge\bigwedge_{\substack{i=2\\i\neq j}}d\overline{\zeta_i'}\right)\\
&=\iota^*\left(\frac{(-1)^{j+1}\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_j'}(\zeta)}{\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_1'}(\zeta)}\bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i'\wedge\bigwedge_{i=2}^n d\overline{\zeta_i'}\right).
\end{aligned}$$

Puisque pour tout ζ de $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $\left|\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_1'}(\zeta)\right|$ est minorable par $c(\varepsilon_0)$, cette remarque aboutit à :

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\iota^*\Bigg(\Delta S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\\
&\qquad\wedge\frac{X^{k'}\left(Q_{\nu_0}'(\zeta,z_0)d\zeta_{\nu_0}'\bigwedge_{i=1}^{k-1}\frac{\partial Q_{\nu_i}'}{\partial\overline{\zeta}_{\mu_i}'}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}_{\mu_i}'\wedge d\zeta_{\nu_i}'\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\Bigg)\Bigg|\lesssim\\
&\lesssim\Bigg|\iota^*\Bigg(\sum_{\mu_0=2}^n\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_{\mu_0}'}(\zeta)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\frac{\partial Q_{\nu_{i_0}}'}{\partial\overline{\zeta}_1'}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}_{\mu_0}'\wedge d\zeta_{\nu_{i_0}}'\wedge\\
&\qquad\wedge\frac{X^{k'}\Big(Q_{\nu_0}'(\zeta,z_0)d\zeta_{\nu_0}'\bigwedge_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{k-1}\frac{\partial Q_{\nu_i}'}{\partial\overline{\zeta}_{\mu_i}'}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}_{\mu_i}'\wedge d\zeta_{\nu_i}'\Big)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\Delta S(\zeta,z_0)\Bigg)\Bigg|.
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $\zeta\in\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$, $\left|\frac{\partial r}{\partial\overline{\zeta}_{\mu_0}'}(\zeta)\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_{\mu_0}(z_0,\varepsilon)}$ (propositions 1.3.3 et 1.3.5), pour tout ζ de bD, avec les lemmes 2.3.6, 3.2.3, 3.2.6 et la proposition

2.3.2, nous obtenons :

$$\left|\iota^*\left(\Delta S(\zeta,z_0)\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge\wedge\right.\right.$$
$$\left.\left.\wedge\frac{X^{k'}\left(Q'_{\nu_0}(\zeta,z_0)d\zeta'_{\nu_0}\bigwedge_{i=1}^{k-1}\frac{\partial Q'_{\nu_i}}{\partial\overline{\zeta}'_{\mu_i}}(\zeta,z_0)d\overline{\zeta}'_{\mu_i}\wedge d\zeta'_{\nu_i}\right)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\right)\right|\lesssim$$
$$\lesssim\quad\|f\|_{bD,s}\sum_{\mu_0=2}^{n}\frac{\varepsilon^{k-j-\frac{k'-j'}{2}-1}}{\prod_{i=0}^{k-1}\tau_{\nu_i}(z_0,\varepsilon)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq i_0}}^{k-1}\tau_{\mu_i}(z_0,\varepsilon)|\zeta-z_0|^{2l-l'}}$$

$\nu_i\neq\nu_j$, $\mu_i\neq\mu_j$ pour tout i,j distincts, $\mu_i>1$ pour tout $i\neq i_0$.
Puisque z_0 est quelconque dans $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$ pourvu que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon_0$, ε est quelconque dans $[c_2|r(z_0)|,\varepsilon_0]$, nous en concluons que l'intégrande de I_3 :

$$\Delta S(\zeta,z_0)\Gamma^s(f)(\zeta)\wedge$$
$$\wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(\zeta,z_0)\wedge(\overline{\partial}_\zeta\eta_1(\zeta,z_0))^k)\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z_0)}{S^{j+1}(\zeta,z_0)|\zeta-z_0|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}(\tilde{Z}_i^z+\tilde{Z}_i^\zeta)S(\zeta,z_0)$$

n'est autre que cette somme de W_{ε_0}-formes sur $bD\times D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$:

$$\sum_{\substack{1\leq\nu_0<\ldots<\nu_{k-1}\leq n\\ 1<\mu_1<\ldots<\mu_{k-1}\leq n}}W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s},k-j-\frac{k'-j'}{2}-1,$$
$$(\nu_0,\ldots,\nu_{k-1},\mu_1,\ldots,\mu_{k-1}),2l-l'](\zeta,z_0).$$

Ainsi, pour tout z_0 dans $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$ satisfaisant $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon$, nous pouvons appliquer à $I_3(z_0)$ le lemme A.4.1 selon lequel, uniformément par rapport à z_0 :

$$|I_3(z_0)|\leq c_{j,j',k,k',l,l'}\max(|r(z_0)|^{k-j-1-\frac{k'-j'}{2}+\frac{2n-2k-2l+l'}{m}},|\ln|r(z_0)||,1)\|f\|_{bD,s}.$$

Comme (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), $k-j-\frac{k'-j'}{2}-1+\frac{2n-2k-2l+l'}{m}\geq\frac{1}{m}-1$, nous avons donc :

$$|I_3(z_0)|\quad\leq\quad c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z_0)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s},$$

où $c_{j,j',k,k',l,l'}$ peut avoir changé par rapport au précédent mais reste uniforme par rapport à z_0 dans $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z_0)|\leq\varepsilon$.

I_1, I_2, et I_4 se traitent en suivant la même méthode que I_3 et en faisant les mêmes distinctions que leurs homologues $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$ et $\tilde{I}_4$. Ainsi, pour un $c_{j,j',k,k',l,l'}$ peut-être différent du précédent :

$$|\Delta I[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)| \quad \leq \quad c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}$$

pour tout z de $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$ dès que (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), ce qui montre (i).
Pour (ii), lorsque $(j,j',k,\,k',l,l')$ vérifie (CJ) et $j \neq 1$, la même majoration est valable pour $\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)$: comme $\Delta I[f](j,j',k,k',l,l',s)$, sur $bD\times(D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V})$, l'intégrande de $\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)$ est somme de $W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s}, k-j-\frac{k'-j'}{2}-1, (\nu_0,\ldots,\,\nu_{k-1},\mu_0,\ldots,\mu_{k-1}), 2l-l']$ avec $\nu_i \neq \nu_j$, $\mu_j \neq \mu_i$ pour tout i,j distincts, $\mu_i > 1$ pour tout i. Il reste alors à appliquer le lemme A.4.1 et puisque (j,j',k,k',l,l'), vérifie (CJ), nous concluons que quel que soit z dans $D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V}$ tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$:

$$|\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)| \quad \leq \quad c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}.$$

Si $j=1$, sur $bD\times(D\cap B(\zeta^{(1)},R'')\cap\mathcal{V})$, l'intégrande de $\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)$ est une somme de $W_{\varepsilon_0}[\|f\|_{bD,s},-2,\emptyset,2l-l']$ avec $2l-l' \leq 2n-3$. Nous pouvons alors appliquer le corollaire A.4.2 et en conclure que :

$$|\Delta J[f](j,j',k,k',l,l',s)(z)| \leq c_{j,j',k,k',l,l'}|r(z)|^{\frac{1}{m}-1}\|f\|_{bD,s}.$$

□

3.3.3 Continuité de $[T_q]$ et $[\tilde{T}_q]$

Preuve du théorème 3.1.3 et du lemme 3.1.1 : Soient $p \geq 0$ un entier, $[h] \in \tilde{C}^p_{0,q}(bD)$ dont h est un représentant dans $C^p_{0,q}(bD)$ et $\chi_1,\ldots,\chi_N$ une partition de l'unité subordonnée aux ouverts $B(\zeta^{(i)},R'')$, $i=1,\ldots,N$. Nous montrons tout d'abord les points (i). En appliquant successivement les propositions 3.3.3 et 3.3.4, nous allons vérifier les hypothèses du lemme de Hardy-Littlewood afin de montrer que pour tous champs de vecteurs tangents $B_1,\ldots,B_p$ agissant sur la variable z, $B_1\ldots B_pT_q(\chi_1 h)$ appartient à $C^{\frac{1}{m}}_{0,q-1}(\overline{\mathcal{V}\cap D})$ et vérifie $\|B_1\ldots B_pT_q(\chi_1h)\|_{\overline{\mathcal{V}\cap D},\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{bD,0}$ uniformément par rapport à h :
Soient Δ un opérateur de dérivation d'ordre 1 du type $\frac{\partial}{\partial z_j}$ ou $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$, $B_1,\ldots,B_p$ p champs de vecteurs tangents agissant sur la variable z. Il existe $R''_1 \in]0,R''[$ tel que le support de χ_1 soit inclus dans $\overline{B(\zeta^{(1)},R''_1)}$, de sorte que $\chi_1 h$

soit à support dans $\overline{B(\zeta^{(1)}, R_1'')}$. Ainsi, pour z dans $(\mathcal{V} \cap D) - B(\zeta^{(1)}, R'')$, $\Delta B_1 \dots B_p T_q(\chi_1 h)$ est uniformément borné.
Pour les z de $B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V} \cap D$, nous raisonnons par rapport à $\{Z_1^z, \dots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \dots, \overline{Z}_n^z\}$, base de vecteurs tangents sur $B(\zeta^{(1)}, R'')$: il nous suffit de montrer que quels que soient les champs de vecteurs tangents $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_p$ dans $\{Z_1^z, \dots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \dots, \overline{Z}_n^z\}$ et z dans $B(\zeta^{(1)}, R'') \cap D \cap \mathcal{V}$:

$$|\Delta(\tilde{B}_1 \dots \tilde{B}_p) T_q(\chi_1 h)(z)| \lesssim \|h\|_{bD,p} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}.$$

Nous intégrons dans $T_q(\chi_1 h)$ par rapport à la variable scalaire λ et obtenons pour z dans $B(\zeta^{(1)}, R'') \cap D \cap \mathcal{V}$:

$$T_q(\chi_1 h)(z) = \sum_{k=1}^{n-q} \int_{\zeta \in bD} \chi_1(\zeta) h(\zeta) \wedge \frac{\eta_1(\zeta, z) \wedge (\overline{\partial}_\zeta \eta_1(\zeta, z))^{k-1} \wedge \varpi_1(\zeta, z)}{S^k(\zeta, z) |\zeta - z|^{2(n-k)}}.$$

Ceci montre que $T_q(\chi_1 h)$ est une somme de $I[\chi_1 h](k, 0, k, 0, 2(n-k), 1, 0)$ pour k variant entre 1 et $n-q$. Une simple récurrence sur la proposition 3.3.3 montre que sur $\mathcal{V} \cap B(\zeta^{(1)}, R'') \cap D$, $(\tilde{B}_1 \dots \tilde{B}_p) T_q(\chi_1 h)$ est une somme finie de $I[\chi_1 h](j, j', k, k', l, l', s)$ et $J[\chi_1 h](j, j', k, k', l, l', s)$ vérifiant respectivement (CI) et (CJ) avec $s \le p$. Nous appliquons à chacun de ces termes la proposition 3.3.4 et en concluons que pour tout z de $B(\zeta^{(1)}, R'') \cap \mathcal{V} \cap D$, $|\Delta(\tilde{B}_1 \dots \tilde{B}_p) T_q(\chi_1 h)(z)| \lesssim \|h\|_{bD,p} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$.
Nous avons donc prouvé que pour tout z de $\mathcal{V} \cap D$, $|\Delta(B_1 \dots B_p) T_q(\chi_1 h)(z)| \lesssim \|h\|_{bD,p} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$ uniformément par rapport à z et h.
Lorsque $p = 0$, nous en déduisons que $|\Delta T_q(\chi_1 h)(z)| \lesssim \|h\|_{bD,0} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$. Ce résultat étant aussi valable pour $\chi_2 h, \dots, \chi_N h$, par linéarité de T_q, nous avons $|\Delta T_q h(z)| \lesssim \|h\|_{bD,0} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$ uniformément par rapport à z et h, ce qui montre (i) du lemme 3.1.1. Comme Δ est quelconque, le lemme de Hardy-Littlewood implique alors que $T_q h$ appartient à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{D \cap \mathcal{V}})$, et satisfait $\|T_q h\|_{bD, \frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{bD,0}$. Revenons à (i) du théorème 3.1.3 :
Pour $p \ge 0$, le lemme de Hardy-Littlewood implique que $B_1 \dots B_p T_q(\chi_1 h)$ appartient à $C_{0,q-1}^0(\overline{\mathcal{V} \cap D})$ et satisfait $\|B_1 \dots B_p T_q(\chi_1 h)\|_{\overline{\mathcal{V} \cap D}, \frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{bD,p}$. Comme $B_1, \dots, B_p$ sont quelconques, nous en déduisons que $[T_q][\chi_1 h] = [T_q(\chi_1 h)]$ appartient à $\tilde{C}_{0,q-1}^{p+\frac{1}{m}}(bD)$ et satisfait $\|[T_q][\chi_1 h]\|_{bD, p+\frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{bD,p}$.
Par linéarité de $[T_q]$, nous en déduisons que $[T_q][h]$ appartient à $\tilde{C}_{0,q-1}^{p+\frac{1}{m}}(bD)$ et vérifie $\|[T_q][h]\|_{bD, p+\frac{1}{m}} \lesssim \|[h]\|_{bD,p}$, ce qui prouve (i) du théorème 3.1.3.

Pour (ii), le même raisonnement montre que si $B_1, \dots, B_p$ sont p champs de vecteurs tangents, $|\Delta B_1 \dots B_p \tilde{T}_q^t(\chi_1 h)(z)| \lesssim \|h\|_{bD,p} |r(z)|^{\frac{1}{m}-1}$ uniformément par rapport à h et $z \in \mathcal{V} - \overline{D}$. Ce résultat étant vrai pour $\chi_1 h, \dots, \chi_N h$ et pour tout Δ, lorsque $p = 0$, cela implique (ii) du lemme 3.1.1 et avec le lemme de Hardy-Littlewood l'appartenance de $\tilde{T}_q^t h$ à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{\mathcal{V} - D})$. Pour $p \geq 0$, nous en déduisons que $B_1 \dots B_p \tilde{T}_q^t h$ appartient à $C_{0,q-1}^{\frac{1}{m}}(\overline{\mathcal{V} - D})$ et satisfait $\|B_1 \dots B_p \tilde{T}_q^t h\|_{\overline{\mathcal{V} - D}, \frac{1}{m}} \lesssim \|h\|_{bD,p}$. Puisque les $B_1, \dots, B_p$ sont quelconques, nous en déduisons que $[\tilde{T}_q][h]$ appartient à $\tilde{C}_{0,q-1}^{p+\frac{1}{m}}(bD)$ et vérifie $\|[\tilde{T}_q][h]\|_{bD,p+\frac{1}{m}} \lesssim \|[h]\|_{bD,p}$, ce qui montre (ii) du théorème 3.1.3. $\square$

Annexe A

A.1 Lemme de Hardy-Littlewood

Lemme A.1.1 *(Hardy-Littlewood) Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à bord C^1 et $g \in C^1(D)$. Si pour $0 < \alpha < 1$ il existe $c_g \in \mathbb{R}$ telle que $|dg(x)| \leq c_g(d(bD,x))^{\alpha-1}$ $\forall x \in D$ alors g est dans $C^\alpha(\overline{D})$.*
De plus, il existe $c > 0$ ne dépendant que de D et α tel que :

$$\|g\|_{D,\alpha} \leq c(c_g + \|g\|_{D,0}).$$

Preuve : voir [24] V.3.1 lemme 3.1.

A.2 Opérateur de Seeley

Nous regroupons ici quelques outils utiles lors de la construction d'opérateurs intégraux mais aussi lors de l'étude de leurs propriétés. Certains de ces outils ont déjà été employés dans une forme légèrement différente, nous les adaptons à nos notations.

Théorème A.2.1 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de $\overline{\mathcal{U}}$. Il existe un opérateur $E : C^0(\overline{\mathcal{U}}) \longrightarrow C^0(\mathcal{V})$ tels que :*

(i) pour tout $u \in C^0(\overline{\mathcal{U}})$, $E\,u|_{\overline{\mathcal{U}}} = u$ et Eu est à support compact dans $\mathcal{V}$.

(ii) Pour tout $k \geq 0$ entier, si $u \in C^k(\overline{\mathcal{U}})$ alors Eu appartient à $C^k(\mathcal{V})$.

(iii) Pour tout $k \geq 0$ entier, il existe une constante c_k telle que pour $u \in C^k(\overline{\mathcal{U}})$, on ait $\|Eu\|_{\mathcal{V},k} \leq c_k\|u\|_{\overline{\mathcal{U}},k}$

Preuve : voir [18], Satz 6. □

Lemme A.2.2 *Soit $\mathcal{U} \neq \mathbb{C}^n$ un ouvert non vide et borné, $k \geq 1$ un entier, g une application de régularité C^k sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $\overline{\mathcal{U}}$ telle que g soit identiquement nulle sur $\mathcal{U}$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{V}'$, ne dépendant pas de g, tel que $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{V}' \subset \overline{\mathcal{V}'} \subset \mathcal{V}$ et pour tout z de $\mathcal{V}'$:*

$$|g(z)| \lesssim \|g\|_{\mathcal{V}',k} d(z, b\mathcal{U})^k,$$

uniformément par rapport à g et z.

Preuve : Nous commençons par construire le voisinage $\mathcal{V}'$. Soit $\alpha = \frac{1}{2} \inf\{|\zeta - z|, \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{V}, z \in \overline{\mathcal{U}}\}$. Puisque $\overline{\mathcal{U}} \cap (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{V}) = \emptyset$, α est strictement positif. Nous posons $\mathcal{V}' = \bigcup_{\zeta \in b\mathcal{U}} B(\zeta, \alpha) \cup \mathcal{U}$.
Soit alors $z \in \mathcal{V}'$. Si z appartient à $\overline{\mathcal{U}}$, c'est trivial : nous supposerons donc que z n'est pas dans $\overline{\mathcal{U}}$. Soit alors $z_0 \in b\mathcal{U}$ tel que $|z_0 - z| = d(z, b\mathcal{U})$. Remarquons que z appartient à $B(z_0, \alpha)$ car $d(z, b\mathcal{U}) < \alpha$.
Nous appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégral en z_0 à l'ordre $k-1$. Comme g est identiquement nul sur $\mathcal{U}$, seul le reste intégral est non nul ce qui donne :

$$|g(\zeta)| \lesssim \|g\|_{\mathcal{V}',k} |\zeta - z_0|^k,$$

uniformément par rapport à g et ζ dans $B(z_0, \alpha)$. Il suffit alors de remplacer ζ par z. $\square$
Ce lemme n'est pas exploitable directement pour nous car nous avons besoin d'informations par rapport aux bases ε-extrémales et aux polydisques de McNeal. C'est pourquoi nous utiliserons ce lemme par l'intermédiaire du corollaire suivant :

Corollaire A.2.3 *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine convexe de type fini m, de fonction définissante r C^∞ et convexe sur $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{V}$ un voisinage de $\overline{D}$, $k \geq 1$ un entier, $g \in C^k(\mathcal{V})$ identiquement nulle sur D. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant pas de g tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout z_0 élément de $\overline{D}$ et tout ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$ nous ayons :*

$$|g(\zeta)| \lesssim \varepsilon^k \|g\|_{\mathcal{V},k},$$

uniformément par rapport à g, z_0, ζ, ε.

Preuve : Nous reprenons les notations de l'énoncé, appliquons à D et $\mathcal{V}$ le lemme A.2.2 et notons $\mathcal{V}'$ le voisinage de $\overline{D}$ qu'il fournit.
Nous choisissons alors $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit de sorte que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout z de $\overline{D}$, $\mathcal{P}_\varepsilon(z)$ soit inclus dans $\mathcal{V}'$, fixons z_0 dans $\overline{D}$ et ζ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)$. Si ζ appartient à D, le résultat est trivial et nous supposons donc

qu'il appartient à $\mathcal{P}_\varepsilon(z_0)-D$. Comme $d(\zeta,bD)\approx r(\zeta)$, en appliquant le lemme A.2.2, il suffit de montrer que $r(\zeta)\lesssim\varepsilon$. Nous effectuons un développement Taylor de r à l'ordre m en z_0. La proposition 1.3.5 montre que la partie principale du développement est de l'ordre de ε et puisque $|\zeta-z_0|\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}}$, le reste est aussi de l'ordre de ε. Ainsi, $|r(\zeta)-r(z_0)|\lesssim\varepsilon$ d'où, puisque $r(z_0)\leq 0$, $r(\zeta)\lesssim\varepsilon$ et $|g(\zeta)|\lesssim\|g\|_{\mathcal{V}',k}\varepsilon^k$. $\square$

A.3 Recouvrement par les polydisques de McNeal

Pour évaluer les diverses intégrales qui apparaîtront, nous allons procéder comme dans [8] et utiliser un recouvrement par des polydisques de McNeal "évidés". C'est avec les deux prochains lemmes que nous construisons ces recouvrements.

Lemme A.3.1 *Il existe $c_2\in]0,1[$ et $\mathcal{V}$ voisinage de bD tels que pour tout $z\in\mathcal{V}$, tout ε_1 suffisamment petit et ε_2 tel que $c_2\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$, nous ayons :*

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_2}(z)\subset\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(z).$$

Preuve : Soient $\mathcal{V}$ voisinage de bD et $\varepsilon_1>0$ tels que la proposition 1.3.1 soit vérifiée pour tout z de $\mathcal{V}$ et tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_1]$. Soient alors $\varepsilon_2\in]0,\varepsilon_1]$, $z\in\mathcal{V}$ et $\zeta=z+\lambda v\in\mathcal{P}_{\varepsilon_2}(z)$, $|v|=1$.
Notons $(v_1^{j,*},\dots,v_n^{j,*})$ les coordonnées de v dans la base ε_j-extrémale de McNeal en z, $j=1,2$. D'après la proposition 1.3.1, nous avons :

$$\frac{1}{\tau(z,v,\varepsilon_2)}\approx\sum_{i=1}^n\frac{|v_i^{2,*}|}{\tau_i(z,\varepsilon_2)}. \tag{A.1}$$

Mais comme ζ est dans $\mathcal{P}_{\varepsilon_2}(z)$, $|\lambda||v_i^{2,*}|<\tau_i(z,\varepsilon_2)$ pour $i=1,\dots,n$ et (A.1) implique alors :

$$|\lambda|\lesssim\tau(z,v,\varepsilon_2). \tag{A.2}$$

D'autre part, d'après (6) de [5], uniformément en z et v :

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{m}}\tau(z,v,\varepsilon_2)\lesssim\tau(z,v,\varepsilon_1)$$

ce qui avec (A.2) nous donne :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{m}} &\gtrsim \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{|\lambda|}{\tau(z,v,\varepsilon_2)}\\ &\gtrsim \frac{|\lambda|}{\tau(z,v,\varepsilon_1)}.\end{aligned} \tag{A.3}$$

Nous appliquons maintenant la proposition 1.3.1 aux coordonnées de v dans la base ε_1-extrémale pour obtenir $\frac{1}{\tau(z,v,\varepsilon_1)} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|v_i^{1,*}|}{\tau_i(z,\varepsilon_1)}$, puis avec (A.3) :

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{m}} \gtrsim \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda||v_i^{1,*}|}{\tau_i(z,\varepsilon_1)}.$$

Ainsi, si $\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{m}}$ est suffisamment petit, c'est-à-dire si $\varepsilon_2 \leq c_2\varepsilon_1$ avec c_2 suffisamment petit, nous aurons :

$$1 > \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda||v_i^*|}{\tau_i(z,\varepsilon_1)}$$

et donc $|\lambda v_i^{1,*}| < \tau_i(z,\varepsilon_1)$ pour $i = 1,\dots,n$, c'est-à-dire $\zeta \in \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(z)$. $\square$
Voici maintenant un lemme qui nous donne un recouvrement d'un polydisque de McNeal quelconque par des polydisques "évidés".

Lemme A.3.2 *Il existe $\mathcal{V}$ voisinage de bD et $c_2, c_1 \in]0,1[$ tels que quels que soient $\varepsilon_0 > 0$ suffisammment petit, $z \in \mathcal{V}$ et $\alpha \in]0,\varepsilon_0]$ nous ayons*

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \subset \left(\bigcup_{i=0}^{j_0} \mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z) \setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z)\right) \cup \mathcal{P}_\alpha(z)$$

où $j_0 = j_0(\alpha,\varepsilon_0)$, entier positif ou nul, satisfait $c_2\alpha \leq 2^{-j_0}\varepsilon_0 < 2c_2\alpha$.

Preuve : Soient $\mathcal{V}$ un voisinage de bD et $\varepsilon_0 > 0$ tels que le lemme A.3.1 soit vérifié avec z quelconque dans $\mathcal{V}$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$. D'après la proposition 3.1.i de [8], il existe $c\left(\frac{1}{2}\right) =: c_1$ telle que pour tout $z \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$:

$$c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z) \subset \mathcal{P}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z).$$

Nous en déduisons avec $\varepsilon = 2^{-i}\varepsilon_0$, $i \geq 0$ entier, que

$$\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z) \subset \left(\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z) \setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z)\right) \cup \mathcal{P}_{2^{-(i+1)}\varepsilon_0}(z),$$

et donc, pour tout $k \geq 0$ entier

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \subset \left(\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z) \setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z)\right) \cup \mathcal{P}_{2^{-(k+1)}\varepsilon_0}(z).$$

Soit alors $j_0 \geq 0$ entier minimal tel que $2^{-(j_0+1)}\varepsilon_0 < c_2\alpha$ où c_2 désigne la constante du lemme A.3.1. D'après le lemme A.3.1, $\mathcal{P}_{2^{-(j_0+1)}\varepsilon_0}(z) \subset \mathcal{P}_\alpha(z)$ et par minimalité de j_0 nous avons aussi $2^{-j_0}\varepsilon_0 \geq c_2\alpha$. Ainsi

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \subset \left(\bigcup_{i=0}^{j_0} \mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z) \setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-i}\varepsilon_0}(z)\right) \cup \mathcal{P}_\alpha(z)$$

et

$$c_2\alpha \leq 2^{-j_0}\varepsilon_0 < 2c_2\alpha.$$

□

A.4 Intégrales sur le bord

Voici le lemme qui nous permet d'intégrer sur le bord de D et de prouver les estimées C^k pour l'équation $\overline{\partial}_b$. Cette technique d'évaluation d'intégrale est celle qui a permis à K. Diederich, B. Fischer et J.E. Fornæss d'établir leurs estimées höldériennes.

Lemme A.4.1 *Soient $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ un bon quintuplet, $B \subset \mathcal{V} \setminus bD$ et h une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-$(n, n-1)$-forme différentielle sur $bD \times B$, tels que :*

(i) $\forall z \in B$, $\forall \zeta \in bD - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$, nous ayons $|h(\zeta, z)| \leq c$, $c > 0$,

(ii) l'occurrence de tout élément de $\{2, \ldots, n\}$ dans ν soit au plus 2 et celle de 1 au plus 1,

(iii) $|\nu| + k < 2n - 1$,

Alors, à une constante multiplicative près, pour tout z de B tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$, $\left|\int_{\zeta \in bD} h(\zeta, z)\right|$ est majoré par :

(a) $\beta|r(z)|^{\alpha + \frac{2n-1-(k+|\nu|)}{m}} + c$ si $\alpha + \frac{2n-1-(k+|\nu|)}{m} < 0$,

(b) $\beta|\ln|r(z)|| + c$ si $\alpha + \frac{2n-1-(k+|\nu|)}{m} = 0$,

(c) $c + \beta$ sinon,

uniformément par rapport à z, β et c. Les constantes dépendent cependant de $\alpha + \frac{2n-1-|\nu|-k}{m}$ et ε_0.

Preuve : Soit z dans B tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$.
Par (i), nous avons immédiatement $\int_{\zeta \in bD - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta, z)| dV(\zeta) \lesssim c$ et il nous suffit donc de majorer $\int_{\zeta \in \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \cap bD} |h(\zeta, z)| dV(\zeta)$. Pour cela, étant donnée

la forme des inégalités vérifiées par une $W_{\varepsilon_0}[\beta,\alpha,\nu,k]$-forme, nous allons utiliser le lemme A.3.2 pour recouvrir $\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$ avec des polydisques évidés : Il existe $i_0 \geq 0$ entier tel que :

$$c_2|r(z)| \leq 2^{-i_0}\varepsilon_0 < 2c_2|r(z)|, \tag{A.4}$$

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \subset \mathcal{P}_{|r(z)|}(z) \cup \bigcup_{j=0}^{i_0} \mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z) \setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z). \tag{A.5}$$

Soit $\varepsilon = 2^{-j}\varepsilon_0$, $j = 0,\dots,i_0$, $\varepsilon \neq |r(z)|$. Nous avons par définition d'une $W_{\varepsilon_0}[\beta,\alpha,\nu,k]$-forme sur $bD \times B$:

$$|h(\zeta,z)| \lesssim \frac{\beta\varepsilon^\alpha}{\prod_{l=1}^{|\nu|}\tau_{\nu_l}(z,\varepsilon)|\zeta - z|^k} \tag{A.6}$$

pour tout $\zeta \in (\mathcal{P}_\varepsilon(z) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z)) \cap bD$.
Notons $(\zeta'_1,\dots,\zeta'_n)$ les coordonnées de $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z)$ dans le repère de Diederich-Fornæss centré en z dont la base est donnée par $\Psi^{z,\varepsilon}(z)$ de la partie 1.5.3, $\zeta'_l = u_{2l-1} + iu_{2l}$, où u_{2l-1} et u_{2l} sont des réels. Nous avons donc $|\zeta'_l| \lesssim \tau_l(z,\varepsilon)$ pour $l = 1,\dots,n$ (proposition 1.5.8) et puisque $\left|\frac{\partial r}{\partial u_1}(\zeta)\right| \gtrsim 1$ pour tout $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z)$, le changement de variables $\zeta \mapsto (r(\zeta), u_2,\dots,u_{2n})$ nous donne alors :

$$\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap bD} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \int_{\substack{|u_2|\leq\tau_1(z,\varepsilon)\\ |u_3|,|u_4|\leq\tau_2(z,\varepsilon),\\ \vdots\\ |u_{2n-1}|,|u_{2n}|\leq\tau_n(z,\varepsilon)}} \frac{\beta\varepsilon^\alpha du_2\dots du_{2n}}{\prod_{i=1}^{|\nu|}\tau_{\nu_i}(z,\varepsilon)|\zeta - z|^k}.$$

Nous allons enfin intégrer. Soit $A = \{2\nu_j - 1, j$ tel que ν_j apparaît exactement une fois dans $\nu\} \cup \{2\nu_j - 1, 2\nu_j,\ j$ tel que ν_j apparaît exactement deux fois dans $\nu\}$. Puisque $\sum_{\substack{j=2\\ j\notin A}}^{2n} |u_j| \leq \sum_{j=1}^{2n} |u_j|$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap bD} &|h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim\\ &\lesssim \int_{\substack{|u_2|\leq\tau_1(z,\varepsilon)\\ |u_3|,|u_4|\leq\tau_2(z,\varepsilon),\\ \vdots\\ |u_{2n-1}|,|u_{2n}|\leq\tau_n(z,\varepsilon)}} \frac{\beta\varepsilon^\alpha du_2\dots du_{2n}}{\prod_{j=1}^{|\nu|}\tau_{\nu_j}(z,\varepsilon)\left(\sum_{\substack{j=2\\ j\notin A}}^{2n} |u_j|\right)^k}.\end{aligned}$$

Intégrons selon u_j, $j \in A$. Puisque $\int_{|u_j|\leq\tau_j(z,\varepsilon)} \frac{du_j}{\tau_j(z,\varepsilon)} \leq 1$:

$$\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap bD} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta\varepsilon^\alpha \int_{|\omega|\leq\sup_{j=1,\dots,n}\tau_j(z,\varepsilon)} \frac{dV(\omega)}{|\omega|^k}$$

où ω est une variable $2n-1-|\nu|$ dimensionnelle car d'après l'hypothèse (ii), A est de cardinal exactement $|\nu|$. Maintenant, puisque pour tout j, $\tau_j(z,\varepsilon) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{m}}$, un passage en coordonnées polaires nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap bD} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) &\lesssim \beta\varepsilon^\alpha \int_{|r|\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}}} \frac{r^{2n-2-|\nu|}dr}{r^k}\\ &\lesssim \beta\varepsilon^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}.\end{aligned}$$

Puisque lorsque $\varepsilon=|r(z)|$, $h(\zeta,z)$ vérifie l'estimation (A.6) pour tout ζ dans $bD\cap\mathcal{P}_\varepsilon(z)$, nous montrerions de même que $\int_{\zeta\in\mathcal{P}_{|r(z)|}(z)\cap bD}|h(\zeta,z)|dV(\zeta)\lesssim \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}$. Il ne nous reste maintenant plus qu'à sommer en utilisant le recouvrement (A.5) :

$$\begin{aligned}&\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \leq\\ &\leq \int_{\zeta\in\mathcal{P}_{|r(z)|}(z)\cap bD} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) +\\ &\quad + \sum_{j=0}^{i_0}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z)\setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z))\cap bD} |h(\zeta,z)|dV(\zeta)\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{i_0}\beta(2^{-j}\varepsilon_0)^{\left(\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}\right)} + \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}.\end{aligned}$$

Il faut ici distinguer trois cas. Tout d'abord, si $\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}>0$, la série : $\sum_j 2^{-j\left(\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}\right)}$ converge et donc :

$$\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta.$$

Ensuite, si $\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}<0$:

$$\begin{aligned}&\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim\\ &\lesssim \beta\varepsilon_0^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}\frac{2^{-(i_0+1)\left(\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}\right)}-1}{2^{-\left(\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}\right)}-1} + \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}\\ &\lesssim \beta\frac{(2^{-(i_0+1)}\varepsilon_0)^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}}{2^{-\left(\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}\right)}-1} + \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}},\end{aligned}$$

et avec (A.4), nous concluons que :

$$\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \quad\lesssim\quad \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}}.$$

Si maintenant $\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}=0$:

$$\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \quad\lesssim\quad \beta i_0,$$

et avec (A.4) :

$$\int_{bD\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \quad\lesssim\quad \beta|\ln|r(z)||.$$

□

Corollaire A.4.2 *Soient $(D,m,\mathcal{V},r,\varepsilon_0)$ un bon quintuplet, $B\subset\mathcal{V}\setminus bD$ et h une $W_{\varepsilon_0}[\beta,\alpha,\nu,k]$-$(n,n-1)$-forme différentielle sur $bD\times B$, tels que :*

(i) $\forall z\in B$, $\forall\zeta\in bD-\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$, nous ayons $|h(\zeta,z)|\leq c$, $c>0$

(ii) Pour tout $j\in\{2,\dots,n\}$, l'occurrence de j dans ν est au plus 2, 1 n'apparaissant pas.

(iii) $|\nu|+k<2n-2$.

Alors, à une constante multiplicative près, quel que soit z dans B tel que $c_2|r(z)|\leq\varepsilon_0$, $\left|\int_{\zeta\in bD} h(\zeta,z)\right|$ est majoré par :

(a) $\beta|r(z)|^{\alpha+1+\frac{2n-2-(k+|\nu|)}{m}}+c$ si $\alpha+1+\frac{2n-2-(k+|\nu|)}{m}<0$,

(b) $\beta|\ln|r(z)||+c$ si $\alpha+1+\frac{2n-2-(k+|\nu|)}{m}=0$,

(c) $c+\beta$ sinon,

uniformément par rapport à z, β et c, mais pas par rapport à $\alpha+\frac{2n-2-|\nu|-k}{m}+1$ et ε_0.

Preuve : On applique le lemme A.4.1 en remarquant que h est une $W_{\varepsilon_0}[\beta,\alpha+1,\nu',k]$-$(n,n-1)$-forme avec $\nu'=(1,\nu_1,\dots,\nu_{|\nu|})$ qui satisfait toutes les hypothèses requises. □

Bien que les constantes dépendent de ε_0 et $\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}$, cela n'est pas un handicap car lorsque nous appliquons le lemme A.4.1, son corollaire, ou bien encore le lemme A.5.1 et son corollaire, ε_0 sera fixé et $\alpha+\frac{2n-1-|\nu|-k}{m}$ ne prendra au pire qu'un nombre fini de valeurs.

A.5 Intégrales sur un volume

Dans le prochain lemme, nous étendons les techniques utilisées dans [8] de manière à pouvoir intégrer sur un volume en non plus seulement sur le bord. Ce lemme et son corollaire interviennent dans le deuxième chapitre lorsque nous intégrons sur une couronne autour de D.

Lemme A.5.1 *Soient $(D, m, \mathcal{V}, r, \varepsilon_0)$ un bon quintuplet, $G \subset \mathbb{C}^n \setminus D$, $B \subset \mathcal{V} \cap D$, h une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-$(n,n)$-forme différentielle sur $G \times B$ tels que :*

(i) pour z de B et tout ζ de $G - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$, nous ayons $|h(\zeta, z)| \leq c$, $c > 0$.

(ii) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, l'occurrence de j dans ν soit au plus 2.

(iii) $|\nu| + k < 2n$.

(iv) G est borné.

Alors, à une constante multiplicative près, pour tout z de B tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$, $\left|\int_{\zeta \in G} h(\zeta, z)\right|$ est majoré par :

(a) $\beta|r(z)|^{\alpha + \frac{2n-(k+|\nu|)}{m}} + cV(G)$ si $\alpha + \frac{2n-(k+|\nu|)}{m} < 0$,

(b) $\beta|\ln|r(z)|| + cV(G)$ si $\alpha + \frac{2n-(k+|\nu|)}{m} = 0$,

(c) $cV(G) + \beta$ sinon,

uniformément par rapport à z, β et c. Les constantes dépendent de $\alpha + \frac{2n-(k+|\nu|)}{m}$ et ε_0 et $V(G)$ désigne le volume de G.

Preuve : Elle est calquée sur celle du lemme A.4.1 :
Soit z dans B tel que $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$. (i) nous indique immédiatement que $\int_{\zeta \in G - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta, z)| dV(\zeta) \leq cV(G)$.
Reste alors à majorer $\int_{\zeta \in \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z) \cap G} |h(\zeta, z)| dV(\zeta)$. Nous utilisons le lemme A.3.2 pour recouvrir $\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$ avec des polydisques évidés et obtenir (A.4) et (A.5).
Soit $\varepsilon = 2^{-j}\varepsilon_0$, $j = 0, \ldots, i_0$, $\varepsilon \neq |r(z)|$. Nous avons par définition d'une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha, \nu, k]$-forme sur $G \times B$:

$$|h(\zeta, z)| \lesssim \frac{\beta\varepsilon^\alpha}{\prod_{l=1}^{|\nu|} \tau_{\nu_l}(z, \varepsilon)|\zeta - z|^k} \tag{A.7}$$

pour tout ζ dans $(\mathcal{P}_\varepsilon(z) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z)) \cap G$.
Notons $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ les coordonnées de $\zeta \in \mathcal{P}_\varepsilon(z) \setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z)$ dans le repère de Diederich-Fornæss centré en z dont la base est donnée par $\Psi^{z,\varepsilon}(z)$, $\zeta'_l =$

$u_{2l-1}+iu_{2l}$, où u_{2l-1}, u_{2l} appartiennent à $\mathbb{R}$. Nous avons donc $|\zeta'_l| \lesssim \tau_l(z,\varepsilon)$ pour $l=1,\dots,n$ (proposition 1.5.8) et alors :

$$\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap G} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \int_{\substack{|u_1|,|u_2|\leq\tau_1(z,\varepsilon)\\ \vdots \\ |u_{2n-1}|,|u_{2n}|\leq\tau_n(z,\varepsilon)}} \frac{\beta\varepsilon^\alpha du_1\dots du_{2n}}{\prod_{j=1}^{|\nu|}\tau_{\nu_j}(z,\varepsilon)|\zeta-z|^k}$$

Nous allons pouvoir intégrer : soit $A=\{2\nu_j-1;\ j$ tel que ν_j apparaît exactement une fois dans $\nu\}\cup\{2\nu_j-1,2\nu_j;\ j$ tel que ν_j apparaît exactement deux fois dans $\nu\}$. Puisque $\sum_{\substack{j=1\\ j\notin A}}^{2n}|u_j| \leq \sum_{j=1}^{2n}|u_j|$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap G} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) &\lesssim \\ \lesssim \int_{\substack{|u_1|,|u_2|\leq\tau_1(z,\varepsilon)\\ \vdots \\ |u_{2n-1}|,|u_{2n}|\leq\tau_n(z,\varepsilon)}} &\frac{\beta\varepsilon^\alpha du_1\dots du_{2n}}{\prod_{j=1}^{|\nu|}\tau_{\nu_i}(z,\varepsilon)\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\notin A}}^{2n}|u_j|\right)^k}.\end{aligned}$$

Intégrons maintenant selon u_j, $j\in A$. Comme $\int_{|u_j|\leq\tau_j(z,\varepsilon)}\frac{du_j}{\tau_j(z,\varepsilon)}\leq 1$, nous avons

$$\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap G} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta\varepsilon^\alpha \int_{|\omega|\leq\sup_{j=1,\dots,n}\tau_j(z,\varepsilon)}\frac{dV(\omega)}{|\omega|^k}$$

où ω est une variable $2n-|\nu|$ dimensionnelle car d'après l'hypothèse (ii), A est de cardinal exactement $|\nu|$. Maintenant, puisque $\tau_j(z,\varepsilon)\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}}$ quel que soit j, un passage en coordonnées polaires nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_\varepsilon(z)\setminus c_1\mathcal{P}_\varepsilon(z))\cap G} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) &\lesssim \beta\varepsilon^\alpha\int_{|r|\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{m}}}\frac{r^{2n-1-|\nu|}dr}{r^k} \\ &\lesssim \beta\varepsilon^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}}.\end{aligned}$$

Puisque lorsque $\varepsilon=|r(z)|$, $h(\zeta,z)$ vérifie l'estimation (A.7) pour tout ζ dans $G\cap\mathcal{P}_\varepsilon(z)$, nous montrerions de même que $\int_{\zeta\in\mathcal{P}_{|r(z)|}(z)\cap G}|h(\zeta,z)|dV(\zeta)\lesssim \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}}$. Il ne nous reste maintenant plus qu'à sommer en utilisant le recouvrement (A.5) :

$$\begin{aligned}\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)}|h(\zeta,z)|dV(\zeta) &\lesssim \int_{\zeta\in\mathcal{P}_{|r(z)|}(z)\cap G}|h(\zeta,z)|dV(\zeta)+ \\ &+\sum_{j=0}^{i_0}\int_{\zeta\in(\mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z)\setminus c_1\mathcal{P}_{2^{-j}\varepsilon_0}(z))\cap G}|h(\zeta,z)|dV(\zeta)\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{i_0} \beta(2^{-j}\varepsilon_0)^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}} + \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}}.$$

Il faut ici distinguer trois cas. Tout d'abord, si $\alpha + \frac{2n-|\nu|-k}{m} > 0$, la série $\sum_j 2^{-j\left(\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}\right)}$ converge, d'où

$$\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta.$$

Ensuite, si $\alpha + \frac{2n-|\nu|-k}{m} < 0$,

$$\begin{aligned}\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) &\lesssim \beta(\varepsilon_0)^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}} \frac{2^{-(i_0+1)\left(\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}\right)}-1}{2^{-\left(\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}\right)}-1} \\ &\quad +\beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}} \\ &\lesssim \beta\frac{(2^{-(i_0+1)}\varepsilon_0)^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}}}{2^{-\left(\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}\right)}-1} + \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}},\end{aligned}$$

et nous concluons avec (A.4) :

$$\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta|r(z)|^{\alpha+\frac{2n-|\nu|-k}{m}}.$$

Enfin, si $\alpha + \frac{2n-|\nu|-k}{m} = 0$,

$$\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta i_0,$$

et avec (A.4) nous obtenons

$$\int_{G\cap\mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)} |h(\zeta,z)|dV(\zeta) \lesssim \beta|\ln|r(z)||.$$

□

Voici maintenant un corollaire à ce lemme qui nous sera utile lorsque dans le multi-indice ν, l'occurrence de 1 sera exactement 1 et $k+|\nu| < 2n-1$:

Corollaire A.5.2 *Soient $(D,m,\mathcal{V},r,\varepsilon_0)$ un bon quintuplet, $G \subset \mathbb{C}^n \setminus D$, $B \subset \mathcal{V}\cap D$, h une $W_{\varepsilon_0}[\beta,\alpha,\nu,k]$-$(n,n)$-forme différentielle sur $G\times B$, tels que :*

(i) Pour tout z *de* B *et tout* ζ *de* $G - \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(z)$, *nous ayons* $|h(\zeta, z)| \leq c$, $c > 0$.

(ii) Pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, *l'occurrence de* j *dans* ν *est au plus 2 et celle de 1 est au plus 1.*

(iii) $|\nu| + k < 2n - 1$.

(iv) G *est borné.*

Alors, à une constante multiplicative près, $\left|\int_{\zeta \in G} h(\zeta, z)\right|$ *est majoré par :*

(a) $\beta |r(z)|^{\alpha+1+\frac{2n-(k+|\nu|+1)}{m}} + cV(G)$ *si* $\alpha + 1 + \frac{2n-(k+|\nu|+1)}{m} < 0$,

(b) $\beta |\ln |r(z)|| + cV(G)$ *si* $\alpha + 1 + \frac{2n-(k+|\nu|+1)}{m} = 0$,

(c) $cV(G) + \beta$ *sinon,*

uniformément par rapport à β, c *et* z *dans* B *tel que* $c_2|r(z)| \leq \varepsilon_0$. *Les constantes dépendent cependant de* ε_0 *et* $\alpha + 1 + \frac{2n-1-|\nu|-k}{m}$ *et* $V(G)$ *désigne le volume de* G.

Preuve : On applique le lemme A.5.1 en remarquant que h est une $W_{\varepsilon_0}[\beta, \alpha + 1, \nu', k]$-$(n, n)$-forme où $\nu' = (1, \nu_1, \dots, \nu_{|\nu|})$ qui satisfait toutes les hypothèses requises. □

Bibliographie

[1] P. Ahern, R. Schneider : *Holomorphic Lipschitz functions in pseudo-convex domains,* Amer. J. of Math. 101 (1979), 543-565.

[2] W. Alexandre : *Construction d'une fonction de support à la Diederich-Fornæss*, PUB. IRMA, Lille 2001, Vol.54, N^o III.

[3] H.P. Boas, E.J. Straube : *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, J. Geom. Analysis 2 (1992), 95-98.

[4] J. Bruna, J. del Castillo : *Hölder and* L^p *estimates for the* $\overline{\partial}$*-equation in some convex domains with real analytic boundary*, Math. Ann. 269 (1984), 527-539.

[5] J. Bruna, P. Charpentier, Y. Dupain : *Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Math. 127 (1988), 333-365.

[6] A. Cumenge : *Estimées Lipschitz optimes dans les convexes de type fini*, C.R. Acad. Sci. Paris 325 (1997), 1077-1080.

[7] J.P. D'Angelo : *Real Hypersurfaces, orders of contact and applications*, Ann. Math. 115 (1982), 615-637.

[8] K. Diederich, B. Fischer, J.E. Fornæss : *Hölder estimates on convex domains of finite type*, Math. Z. 232 (1999), 43-61.

[9] K. Diederich, J.E. Fornæss : *Support functions for convex domains of finite type*, Math. Z. 230 (1999), 145-164.

[10] K. Diederich, J.E. Fornæss, J. Wiegerinck : *Sharp hölder estimates for* $\overline{\partial}$ *on ellipsoids*, Manuscripta Math. 56 (1986), 399-417.

[11] K. Diederich, E. Mazzilli : *Zero varieties for the Nevanlinna class on all convex domains of finite type*, Nagoya Math. J. 163 (2001), 215-227.

[12] B. Fischer : L^p *estimates on convex domains of finite type,* Math. Z. 236 (2001), 401-418.

[13] H. Grauert, I. Lieb :*Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\overline{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen*, Rice Univ. Studies 56 (1970), 29-50.

[14] G.M. Henkin : *Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and applications to the $\overline{\partial}$ problem*, Math. U.S.S.R. Sb. 11 (1970), 273-281.

[15] G.M. Henkin : *The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Russian Math. Surveys 32.3 (1977), 59-130.

[16] J.J. Kohn, L. Nirenberg : *A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function*, Math. Ann. 201 (1973), 265-268.

[17] S.G. Krantz : *Optimal Lipschitz and L^p regularity for the equation $\overline{\partial} u = f$ on strongly pseudoconvex domains*, Math. Ann. 219 (1976), 233-260.

[18] I. Lieb, R.M. Range : *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit C^k-Abschätzungen*, Math. Ann. 253 (1980),145-164.

[19] L. Ma, J. Michel : *Local regularity for the tangential Cauchy-Riemann complex*, J. reine und angew. Mathematik 442 (1993), 63-90.

[20] J.D. McNeal : *Convex domains of finite type*, J. Functional Anal. 108 (1992), 361-373.

[21] J.D. McNeal : *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Adv. in Math. 109 (1994), No. 1, 108-139.

[22] J. Michel : *$\overline{\partial}$-Problem für stückweise streng pseudokonvexe Gebiete in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 280 (1988), 46-68.

[23] J. Michel, A. Perotti : *C^k-Regularity for the $\overline{\partial}$-equation on Strictly Pseudoconvex Domains with Piecewise Smooth Boundaries*, Math. Z. 203 (1990), 415-427.

[24] R.M. Range : *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, New York (1986).

[25] R.T. Rockafellar : *Convex analysis*, Princeton University Press (1970).

[26] R.T. Seeley : *Extension of C^∞-functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625-626.

[27] H. Skoda : *Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur $\overline{\partial}$, et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna,* Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 225-299.