

Université de Lille I
U.F.R. de Mathématiques - Laboratoire A.G.A.T. - U.M.R. 8524

Un isomorphisme motivique entre deux variétés homogènes projectives sous l'action d'un groupe de type G_2

Thèse

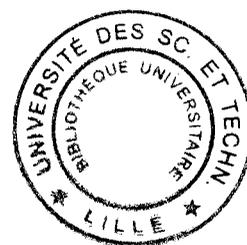
de

Jean-Paul BONNET

pour obtenir le titre de

Docteur en mathématiques pures

Spécialité : Géométrie algébrique



Soutenue le 28 novembre 2003 devant la Commission d'Examen :

Président

Jean-Pierre **Tignol** Professeur, Université de Louvain-la-neuve

Rapporteurs

Alexander **Merkurjev** Professeur, Université de Californie

Philippe **Gille** Professeur, Université de Paris-sud

Examineurs

Pasquale **Mammone** Professeur, Université d'Artois

Patrick **Morandi** Professeur, Université du Nouveau Mexique

Ivan **Panin** Professeur, Université de Saint Petersburg

Adrian **Wadsworth** Professeur, Université de Californie

Directeurs

Jean-Claude **Douai** Professeur, Université de Lille 1

Nikita **Karpenko** Professeur, Université d'Artois,
Institut de mathématiques de France

Numéro d'ordre : 3425.

Nul ne saurait en effet écouter plusieurs morceaux de musique en même temps. Car c'est la méditation sur le motif central qui rend possible la compréhension du beau.

Le livre du thé, Kakuzô OKAKURA

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs de thèse pour m'avoir fait pénétrer les secrets de la géométrie algébrique moderne. Merci à Jean-Claude Douai pour son communicatif et éternel enthousiasme. Un très grand merci à Nikita Karpenko qui, plus que tout autre, a su m'amener à tirer le meilleur de moi-même.

Je remercie également P. Gille et A. Merkurjev qui ont gentiment accepté de rapporter mon travail et m'ont gratifié de précieux conseils et améliorations. Je suis très honoré que P. Mamonne, P. Morandi, I. Panin, J.P. Tignol et A. Wadsworth aient accepté de constituer mon jury et les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour certains d'entre eux dès le départ de cette aventure.

J'ai rencontré de nombreux chercheurs en cours de route et tous ont, à un stade ou a un autre inspiré mon travail. Aussi, je remercie particulièrement les membres du laboratoire AGAT de Lille, ceux du LML de Lens, l'équipe de géométrie algébrique de Louvain-la-neuve et également celle de Besançon où j'ai pu faire mes débuts de conférencier.

J'aurai aussi un mot particulier pour R. Gergondey dont le talent et la personnalité ont indéniablement marqué mes goûts en matière de mathématiques.

Je remercie Stephane Zahnd pour notre collaboration lors de notre groupe de travail sur les schémas et toutes les discussions fructueuses que nous avons eues.

Un grand merci à mes collègues de bureau et tous ceux qui gravitent autour. Parmi eux, je citerai plus particulièrement ceux qui sont partis, Axelle, François et Habiba, ceux qui sont encore (et toujours) là, Nicolas (J), Pierre-Marie, Vincent et le petit nouveau, Stylian. Ils ont tous contribué (et continuent même de loin) à entretenir une ambiance de travail détendue et une permanente stimulation intellectuelle et pas seulement en mathématiques.

Je remercie aussi spécialement Nicolas (B), pour son soutien, sa patiente relecture de ma prose et ses précieux conseils L^AT_EX-niques.

Je m'adresse maintenant à mes parents, soeurs, frères et amis que je ne peux tous citer mais sans lesquels je ne serai pas ce que je suis. Qu'ils soient tous assurés que je suis fier d'appartenir à une si grande famille.

Enfin et surtout, je remercie ici mon épouse Isabelle sans laquelle ce que j'ai fait jusqu'à aujourd'hui n'aurait vraisemblablement pas vu le jour. Son soutien constant, son implication dans mon travail (elle qui n'est pourtant pas mathématicienne) m'ont permis de réaliser bien plus que ce travail. Elle a toujours été là et m'a bien plus aidé à accoucher de ces pages que je ne l'ai aidée à accoucher de notre fille Margaux. Qu'elle trouve ici la marque indélébile de ma gratitude.

Marcq-en-Baroeul, le 13 Décembre 2003.

Table des matières

Introduction	ix
1 Les octonions	1
1.1 Algèbres à composition	1
1.2 Un modèle d'algèbre d'octonions déployée	7
2 Présentation des variétés	13
2.1 Groupes et variétés homogènes projectives associées	14
2.2 Foncteurs de points	20
2.3 Foncteurs de points associés aux variétés d'un groupe de type G_2	29
3 Décomposition cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$	31
3.1 Structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$	32
3.2 Anneau de CHOW de $\mathcal{X}(\alpha_2)$	45
3.2.1 Relations dans $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$	48
3.2.2 Calcul des invariants de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$	55
3.2.3 Calcul de la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$	57
4 L'isomorphisme motivique	61
4.1 Correspondances et motifs	61
4.2 Théorème de nilpotence et conséquence	64
4.3 Isomorphisme motivique	67
4.3.1 Cas déployé	67
4.3.2 Cas anisotrope	71
A Quelques résultats célèbres et d'autres un peu moins	79
A.1 Lemme de YONEDA et foncteurs de points	79
A.2 Le lemme de NAKAYAMA	81
A.3 Modules projectifs	81

Introduction

La théorie des motifs de CHOW, imaginée par A. GROTHENDIECK, constitue une première approche vers une théorie de cohomologie universelle dont toutes les autres cohomologies se déduiraient. En tant qu'objet de cette nouvelle catégorie, les variétés algébriques classiques peuvent parfois se décomposer en somme de motifs plus simples. Toutefois, dans le cas particulier des variétés algébriques lisses, certaines décompositions sont déjà réalisées dans une sous-catégorie pleine de la catégorie des motifs de CHOW, qui est une catégorie intermédiaire dans sa construction, à savoir celle des correspondances. Notre travail portant sur des variétés algébriques lisses, nous nous sommes par conséquent tout naturellement placés dans cette catégorie et même plus précisément dans la catégorie des correspondances de degré 0. Le lien entre une telle catégorie et celle des variétés algébriques lisses est fait par un foncteur naturel qui associe à une variété algébrique lisse X , la variété X elle-même et qui associe à tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ entre deux variétés la classe (modulo équivalence rationnelle) de son graphe Γ_f dans l'espace produit $X \times Y$, cet élément devenant un élément de l'anneau de CHOW de ce produit.

Ainsi, l'espace projectif \mathbb{P}_k^n de dimension n sur le corps k s'écrit, dans la catégorie des correspondances, sous la forme

$$\mathbb{P}_k^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(n)$$

où $\mathbb{Z}(1)$ désigne le motif de TATE (qui est une partie de \mathbb{P}_k^1 en fait) et où $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1) \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}(1)$. De même, si E est un fibré vectoriel de rang $r + 1$ sur une variété X alors

$$\mathbb{P}(E) = \bigoplus_{i=0}^r X(i)$$

où $X(i) = X \otimes \mathbb{Z}(i)$ (on dit parfois que l'on a tordu i -fois la variété X). D'autre part, comme un espace projectif est une variété homogène sous l'action du groupe $PGL_{n+1}(k)$, la question de savoir si une telle décomposition est possible pour d'autres variétés homogènes se pose tout naturellement. Ainsi, B. KÖCK, a alors démontré (dans [Köc91]) que toute variété homogène projective sous l'action d'un groupe algébrique déployé se décompose elle-aussi comme une somme directe de puissances de motifs de TATE. Cette décomposition est d'ailleurs intimement liée à

la décomposition de BRUHAT du groupe en question et s'établit à l'aide des racines de ce même groupe. Un autre exemple d'une telle décomposition pour une variété homogène projective (mais qui n'est plus déployée) est celui d'une quadrique projective X donnée par une forme quadratique q . En effet, si la quadrique X possède un point rationnel, c'est-à-dire si la forme q est isotrope, alors il existe une sous-forme quadratique q' de q telle que

$$q \simeq q' \perp \mathbb{H}$$

où \mathbb{H} désigne la forme quadratique standard sur un plan hyperbolique. De cette décomposition de la forme quadratique, M. ROST a montré (dans [Ros90]) que, dans la catégorie des correspondances et en désignant par Y la sous-variété de X associée à q' , on a la décomposition suivante

$$X \simeq \mathbb{Z} \oplus Y(1) \oplus \mathbb{Z}(d)$$

où $d = \dim X$. Là encore, ce dernier résultat a été généralisé par N. KARPENKO (dans [Kar01]) au cas des variétés de drapeau isotropes arbitraires, c'est-à-dire à toutes les variétés homogènes projectives sous l'action d'un groupe semi-simple classique. Il ne restait donc plus qu'à traiter le cas des variétés homogènes projectives sous l'action des groupes exceptionnels et c'est ainsi que nous nous sommes lancé dans l'étude des variétés homogènes projectives associées à un groupe de type G_2 . Un tel groupe possède la particularité de se déployer sur une extension de degré 2 par conséquent, les variétés homogènes qui lui sont associées sont soit totalement déployées, soit anisotropes. D'autre part, parmi les deux variétés homogènes projectives « principales¹ » associées à un tel groupe, l'une d'entre elles, que nous noterons $\mathcal{X}(\alpha_1)$, a déjà été identifiée par M. DEMAZURE dans [Dem77] comme étant une quadrique associée à une voisine de PFISTER. Dans le cas de telles quadriques, les décompositions motiviques sont maintenant très bien connues. Il nous restait ainsi à étudier la seconde, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ qui s'est d'ailleurs révélée être une variété de FANO de genre 10. Nous avons alors recherché une décomposition motivique explicite sous la forme d'une décomposition cellulaire de la variété comme cela avait été fait dans [Kar01]. Bien que l'on sache, par d'autres moyens, qu'une telle variété pouvait se décomposer motiviquement, nous n'étions en aucune façon assurés de pouvoir établir un lien entre une telle structure cellulaire et une grassmannienne comme nous l'avons fait. Nous espérions pouvoir le faire afin obtenir des renseignements sur la rationalité de ses cycles. Nous avons finalement obtenu cette structure en adaptant des techniques utilisées dans le cas des grassmanniennes à l'aide des variétés de SCHUBERT. Cette structure nous a en plus permis de présager

¹Ici, nous qualifions de « principales » les variétés homogènes projectives qui sont associées à une seule racine du groupe algébrique.

de l'existence d'un résultat plus intéressant, celui de l'existence d'un isomorphisme motivique entre les deux variétés « principales » associées à un groupe de type G_2 . Avant de nous étendre plus avant sur les isomorphismes motiviques, nous devons signaler ici que V. CHERNOUSOV, S. GILLE et A. MERKURJEV ont, dans leur prépublication [CGM03] et de façon totalement indépendante, encore étendu les résultats de décompositions motiviques au cas des variétés projectives isotropes possédant un point rationnel et homogènes sous l'action d'un groupe semi-simple arbitraire cette fois-ci. Dans leur travail, les techniques utilisées sont, comme dans le travail de B. KÖCK, très liées au système de racine d'un tel groupe. Ce résultat a également eu comme autre conséquence, d'obtenir la généralisation d'un résultat établi par M. ROST, (toujours dans [Ros90]) et connu sous le nom de théorème de nilpotence initialement établi pour les quadriques. Il faut également noter que nous avons nous même établi ce résultat dans le cas particulier de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$ grâce à l'étude de sa décomposition cellulaire.

La seconde partie de notre travail se rattache donc à un autre intérêt de la théorie des motifs, celle de la recherche d'un isomorphisme entre deux motifs. En effet, dans la catégorie des motifs de CHOW, l'ensemble des morphismes (qui est en fait un groupe) est en quelque sorte « plus gros » que dans celui des variétés algébriques lisses. Nous disons « plus gros » dans la mesure où, comme nous l'avons dit au début, la classe (modulo équivalence rationnelle) du graphe de tout morphisme entre deux variétés algébriques lisses donne une correspondance (de degré 0) et par conséquent un morphisme dans la catégorie des motifs de CHOW. Dès lors, le groupe des morphismes motiviques contient au moins autant d'éléments que celui des morphismes entre variétés, mais il peut également en contenir plus et ainsi potentiellement autoriser plus d'isomorphismes entre les objets. Notez bien que cette application entre les morphismes de variétés algébriques et les correspondances n'est pas non plus injective car deux morphismes différents peuvent donner la même classe. Toutefois, ceci n'est pas réellement un problème dans la mesure où dans ce cas-là, du point de vue cohomologique, les morphismes algébriques relient les variétés de la même façon. Pour l'essentiel, les résultats connus dans ce domaine portent sur les équivalences motiviques entre des objets comme des quadriques ou encore des variétés de SEVERI-BRAUER (voir par exemple [Kar00]). Mais, mise à part l'existence d'isomorphismes motiviques entre des espaces projectifs et des quadriques, on ne connaissait pas encore d'exemple explicite d'isomorphisme entre des variétés (en apparence) si « différentes ». Ce manque est donc comblé dans la mesure où le résultat final de notre travail est d'avoir prouvé l'existence d'une correspondance de degré 0 réalisant un isomorphisme motivique entre les deux variétés homogènes « principales » associées à un groupe de type G_2 et ce, que ce groupe soit déployé ou non. Le cas non déployé est prouvé d'ailleurs à l'aide de notre théorème de nilpotence (en fait à l'aide du théorème d'isomorphisme qui s'en

déduit) ainsi que grâce aux résultats portant sur la rationalité des cycles de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. De plus, nous l'avons déjà dit, les motifs des quadriques comme $\mathcal{X}(\alpha_1)$ sont très bien connus et leurs cohomologies motiviques sont totalement déterminées. Ainsi, notre isomorphisme motivique nous permet de déduire que $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ ont même cohomologie et ainsi celle de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est elle aussi totalement déterminée et ce quelle que soit la théorie.

Plan de la thèse

Dans tout ce travail, et nous ne manquerons pas de le rappeler par la suite, nous travaillons sur un corps k de caractéristique différente de 2 et le terme de variété désignera un k -schéma séparé de type fini.

L'objet du premier chapitre est d'introduire le matériel nécessaire à la description des variétés associées à un groupe algébrique de type G_2 . Pour cela nous commençons par traiter des algèbres à composition en toute généralité, puis après cette étude préliminaire, nous nous intéressons au cas particulier des algèbres d'octonions. Nous construisons alors un modèle d'algèbre d'octonions déployée grâce auquel nous mettons en avant une base particulière, appelée base normale, qui joue un rôle prépondérant dans la construction explicite de la structure cellulaire de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Dans le second chapitre, nous rappelons en premier lieu des résultats bien connus de la théorie des groupes algébriques, notamment un certain nombre de points concernant les systèmes de racines, dont le rôle est prépondérant dans certaines étapes de notre travail. Ensuite, nous introduisons le langage des foncteurs de points et donnons en particulier la description de la grassmannienne, notée $\Gamma_i(V)$, des sous espaces de dimension i d'un k -espace vectoriel V , en termes de foncteurs de points. De tout ceci, nous déduisons finalement la description de nos deux variétés (« principales ») $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ associées aux deux racines α_1 et α_2 d'un groupe de type G_2 ainsi que la variété de drapeau complète $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$, à savoir

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\alpha_1)(R) &= \{D \in \Gamma_1(H)(R) \mid \forall u, v \in D, uv = 0\}, \\ \mathcal{X}(\alpha_2)(R) &= \{P \in \Gamma_2(H)(R) \mid \forall u, v \in P, uv = 0\},\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)(R) = \{(D, P) \in \mathcal{X}(\alpha_1)(R) \times \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid D \subset P\}$$

où H désigne le noyau d'une forme linéaire (la trace T) associée à notre algèbre d'octonions déployées. De là, nous déduisons que

$$\mathcal{X}(\alpha_1) = \Gamma_1(H, q'),$$

où q' désigne une forme quadratique non dégénérée sur H , c'est-à-dire que $\mathcal{X}(\alpha_1)$ est en fait la grassmannienne des droites q' -isotropes. En d'autres termes, nous sommes en présence d'une quadrique projective (de dimension 5), résultat qui, comme nous l'avons déjà dit, a déjà été signalé par M. DEMAZURE dans [Dem77].

Dans le chapitre trois, nous construisons donc explicitement une structure cellulaire de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dans le cas déployé. Pour cela nous utilisons des outils déjà connus concernant les grassmanniennes, notamment un certain nombre de résultats sur les variétés de SCHUBERT et c'est donc tout naturellement ici que notre base normale (définie dans le chapitre 1) joue son rôle. De cette structure, nous déduisons, après quelques rappels sur les groupes de CHOW, que $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est engendré sur \mathbb{Z} par un seul élément par codimension, élément que nous notons h_2^i pour i parcourant l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2) &\longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_2) \\ (D, P) &\longmapsto P \end{aligned}$$

est une fibration projective de rang 1 ce qui implique donc que l'anneau de CHOW $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ est un $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ -module libre de rang 2. De là, grâce à la formule de CHEVALLEY :

$$[X_{w_0 s_\alpha}] \cdot [X_w] = \sum_{\beta \in R_+, l(ws_\beta)=l(w)-1} \langle \beta^\vee, \varpi_\alpha \rangle [X_{ws_\beta}]$$

publiée (et démontrée) par M. DEMAZURE dans [Dem74], il est possible de calculer le produit de n'importe quel élément de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ avec l'un de ses générateurs en codimension 1. Nous nous servons alors de la structure de module existant entre les deux groupes de CHOW pour en déduire les relations multiplicatives entre les générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} (h_2^1)^2 &= lh_2^2, \\ (h_2^1)^3 &= 2lh_2^3, \\ (h_2^1)^4 &= 2l^2h_2^4, \\ (h_2^1)^5 &= 2l^2h_2^5 \end{aligned}$$

où le nombre l est un entier positif impair.

Dans le quatrième et dernier chapitre, après avoir introduit la catégorie des correspondances, nous établissons à l'aide d'un résultat de M. ROST, notre théorème de nilpotence pour la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$:

Proposition 3 (Théorème de nilpotence). *Soit f un élément de l'anneau $\text{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ et \mathbb{L}/k une extension quelconque du corps de base k . Si $f_{\mathbb{L}} = 0$ dans $\text{End}_{\text{corr}^0(\mathbb{L})}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}})$ alors il existe un nombre entier n tel que $f^n = 0$.*

ainsi que le théorème d'isomorphisme qui s'en déduit :

Corollaire 3 (Théorème d'isomorphisme). *Sous les hypothèses précédentes, si $f_{\mathbb{L}}$ est un isomorphisme alors f en est également un.*

Ensuite, nous prouvons que, dans le cas déployé,

Proposition 4. *La correspondance*

$$J = \sum_{i=0}^5 h_1^i \times h_2^{5-i}$$

de l'ensemble $\mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1), \mathcal{X}(\alpha_2))$, réalise un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dont l'inverse est la correspondance transposée ${}^t J$.

où h_1^i désigne le générateur en codimension i (i parcourant l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$) de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1))$. De là, nous prouvons alors que

Proposition 5. *La correspondance*

$$J = \sum_{i=0}^5 h_1^i \times h_2^{5-i}$$

de $\mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}, \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est rationnelle.

ce qui nous permet (d'après le théorème d'isomorphisme) d'en déduire qu'il existe également une correspondance qui est un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dans le cas non déployé ce qui achève notre travail.

Nous avons aussi, dans une annexe, reproduit des résultats importants issus de la théorie des catégories et de l'algèbre commutative. Il nous est en effet apparu comme normal de faire figurer ici des résultats dont il existe dans la littérature plusieurs énoncés regroupés sous la même dénomination afin de bien fixer nos références. De plus, nous avons également utilisé des résultats qui n'étaient pas entièrement démontrés dans la référence indiquée, nous les avons donc consignés ici avec une démonstration afin que l'ensemble de notre travail soit le plus « auto-suffisant » possible en pareil cas.

Chapitre 1

Les octonions

Dans tout ce chapitre nous désignons par k le corps de base. Ce corps k est de caractéristique différente de deux.

Dans une première section, nous rappelons les résultats généraux sur les **algèbres à composition** pour, à la fin de cette section, introduire les **algèbres d'octonions** (ou plus simplement les **octonions**), qui sont un cas particulier d'algèbres à composition. Dans la seconde section, nous construisons un modèle d'algèbre d'octonions **déployée** et introduisons les **bases normales**, famille de bases particulières dont le rôle sera primordial dans le calcul des structures cellulaires de nos variétés au chapitre suivant.

Pour un exposé plus général sur les algèbres à composition nous conseillons au lecteur, les ouvrages de [SV] ou de [S].

1.1 Algèbres à composition

Tout d'abord une définition :

Définition 1. *Soit C une k -algèbre unitaire d'unité 1, non nécessairement associative. S'il existe une forme quadratique $q: C \rightarrow k$ non dégénérée qui permette la composition, c'est-à-dire telle que*

$$\forall x, y \in C \quad q(xy) = q(x)q(y),$$

*alors, l'algèbre C est appelée **algèbre à composition**.*

Nous verrons plus loin (cf. corollaire 1) que la forme quadratique q est unique. À partir de maintenant, C est une algèbre à composition et q sa forme quadratique.

On associe classiquement à la forme q une forme bilinéaire symétrique, ici notée $B_q(\cdot, \cdot)$, définie par la formule de pôlarisation

$$\forall x, y \in C, \quad B_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

De là, on introduit également une forme linéaire sur C , appelée **trace** et définie par

$$\forall x \in C, \quad T(x) = 2B_q(x, 1).$$

Comme le corps k est inclu dans l'algèbre C , nous pouvons supposer que les formes q , B_q et T sont à valeurs dans C (et plus tard nous supposerons qu'elles seront à valeurs dans l'algèbre d'octonions O), ceci nous permet de clarifier et d'alléger considérablement les formules qui vont suivre.

Un premier résultat intéressant concernant C est que la donnée de la forme quadratique q induit sur C l'existence d'un anti-automorphisme involutif :

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : C &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \bar{x} = 2B_q(x, 1) - x, \end{aligned}$$

c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall x \in C, \quad \bar{\bar{x}} &= x && \text{(Condition d'involutivité)} \\ \forall x, y \in C, \quad \overline{xy} &= \bar{y} \bar{x} && \text{(Condition d'anti-automorphisme).} \end{aligned}$$

La vérification de la première égalité est un simple calcul que nous reproduisons ci-dessous :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= 2B_q(1, \bar{x}) - \bar{x} \\ &= 2B_q(1, 2B_q(1, x) - x) - (2B_q(1, x) - x) \\ &= (4B_q(1, x)B_q(1, 1) - 2B_q(1, x)) - (2B_q(1, x) - x) \\ &= 2B_q(1, x) - (2B_q(1, x) - x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Le second point est nettement plus technique à obtenir et nécessite quelques relations intermédiaires que nous allons réunir sous forme d'un lemme.

Lemme 1. *Si C est une algèbre de composition alors, pour tous w, x, y et z dans C nous avons les formules suivantes :*

$$q(x)B_q(y, w) = B_q(xy, xw) = B_q(yx, wx), \quad (1.1)$$

$$2B_q(x, z)B_q(y, w) = B_q(xy, zw) + B_q(zy, xw), \quad (1.2)$$

$$B_q(xy, z) = B_q(x, z\bar{y}), \quad (1.3)$$

$$B_q(xy, z) = B_q(y, \bar{x}z). \quad (1.4)$$

Démonstration. Pour établir l'égalité (1.1), il suffit de se rappeler que

$$q(x)q(y+w) = q(xy+xw)$$

par suite comme $q(a+b) = q(a) + q(b) + 2B_q(a, b)$, le membre de gauche devient

$$q(x)q(y) + q(x)q(w) + 2q(x)B_q(y, w)$$

et celui de droite devient

$$q(x)q(y) + q(x)q(w) + 2B_q(xy, xw)$$

ce qui, après simplifications, établit la première égalité de (1.1). Pour la seconde, il suffit de répéter le même calcul avec

$$q(x+w)q(x) = q(yx+wx).$$

On obtient l'égalité (1.2) de la même façon en remplaçant x par $x+z$, cela donne alors

$$q(x+z)B_q(y, w) = B_q(xy+zy, xw+zw), \quad (1.5)$$

en développant le membre de droite et en utilisant (1.1), on a

$$\begin{aligned} B_q(xy+zy, xw+zw) &= B_q(xy, xw) + B_q(zy, zw) + B_q(xy, zw) + B_q(zy, xw) \\ &= q(x)B_q(y, w) + q(z)B_q(y, w) + B_q(xy, zw) + B_q(zy, xw), \end{aligned}$$

et en utilisant encore le fait que $q(a+b) = q(a) + q(b) + 2B_q(a, b)$ dans le membre de gauche de (1.5), on trouve

$$q(x)B_q(y, w) + q(z)B_q(y, w) + 2B_q(x, z)B_q(y, w)$$

et en simplifiant les expressions on conclut. Quant à l'égalité (1.3), on a

$$\begin{aligned} B_q(x, z\bar{y}) &= B_q(x, z2B_q(y, 1) - zy) \\ &= 2B_q(x, z)B_q(y, 1) - B_q(x, zy) \\ &= B_q(xy, z) + B_q(zy, x) - B_q(x, zy) \quad \text{d'après (1.2)} \\ &= B_q(xy, z), \end{aligned}$$

et en répétant le même type de calculs, on trouve que

$$B_q(y, \bar{x}z) = B_q(xy, z)$$

ce qui établit le dernier point. □

Pour conclure, on va s'appuyer sur le fait que q est non-dégénérée et que par conséquent, si on a $B_q(a, z) = B_q(b, z)$ pour tout z dans C alors nécessairement $a = b$.

D'après l'égalité (1.3), $B_q(\overline{xy}, z) = B_q(1, z(xy))$. Vérifions que $B_q(\overline{y} \overline{x}, z)$ a la même valeur. Par définition de $\overline{\cdot}$ on a

$$\begin{aligned} \overline{y} \overline{x} &= (2B_q(y, 1) - y)(2B_q(x, 1) - x) \\ &= 4B_q(x, 1)B_q(y, 1) - 2B_q(y, 1)x - 2B_q(x, 1)y + yx \\ &= 2(B_q(xy, 1) + B_q(x, y) - B_q(y, 1)x - B_q(x, 1)y) + yx \quad \text{d'après (1.2)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B_q(\overline{y} \overline{x}, z) &= 2(B_q(1, z)B_q(xy, 1) + B_q(x, y)B_q(1, z) \\ &\quad - B_q(y, 1)B_q(x, z) - B_q(x, 1)B_q(y, z)) + B_q(yx, z) \\ &= B_q(xy, z) + B_q(z(xy), 1) + B_q(x, yz) \quad \text{d'après (1.2)} \\ &\quad + B_q(y, xz) - B_q(yx, z) - B_q(x, yz) \\ &\quad - B_q(xy, z) - B_q(y, xz) + B_q(yx, z) \\ &= B_q(z(xy), 1) \end{aligned}$$

ce qui établit bien le résultat annoncé.

Cette involution joue un rôle important car sa donnée permet de retrouver la forme quadratique q . En effet, par définition de $\overline{\cdot}$ et T , on a tout d'abord pour tout x dans C ,

$$T(x) = x + \overline{x},$$

puis en combinant les égalités (1.1) et (1.3), il vient que pour tous x, y et z dans C ,

$$q(x)B_q(y, z) = B_q(y, (zx)\overline{x})$$

d'où en prenant $z = 1$,

$$B_q(y, q(x)) = B_q(y, x\overline{x})$$

et par non-dégénérescence de q , il en découle que pour tout x dans C , on a

$$q(x) = x\overline{x}.$$

Il existe ainsi dans la littérature des présentations des algèbres à composition à partir de la donnée d'une involution $\overline{\cdot}$ sur C . Pour cela, il faut exiger que $x\overline{x}$ soit une forme quadratique non-dégénérée et $x + \overline{x}$ une forme linéaire. Les calculs que nous venons de mener montrent bien que ces deux présentations sont équivalentes.

Le lecteur remarquera qu'en utilisant les égalités (1.3) et (1.4), on constate que pour tout x et y dans C ,

$$\begin{aligned} T(xy) &= 2B_q(xy, 1) \\ &= 2B_q(x, \overline{y}) \end{aligned}$$

d'après (1.3)

$$= 2B_q(1, \overline{xy})$$

d'après (1.4)

$$= T(\overline{xy})$$

et comme $T(x) = x + \overline{x}$, il est clair que

$$\overline{T(x)} = T(\overline{x}) = T(x).$$

En combinant ces deux expressions, on trouve que pour tout x et y dans C ,

$$T(xy) = T(\overline{x} \overline{y}) = T(\overline{yx}) = T(yx) \quad (1.6)$$

ce qui est une relation classique sur la trace des endomorphismes d'un espace vectoriel. Outre la justification a posteriori de la terminologie, ce résultat nous sera d'une utilité certaine dans la prochaine section.

On peut encore se livrer à de très jolis calculs en combinant de la sorte l'involution $\overline{}$, T et q . Le résultat probablement le plus fondamental liant T , q et la structure de produit de C est d'ailleurs résumé dans la proposition clef suivante :

Proposition 1 (Proposition clef). *Pour tout x dans C une algèbre à composition, on a*

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0 \quad (1.7)$$

et pour tout x et y dans C , on a également

$$xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x, y) = 0. \quad (1.8)$$

Démonstration. Pour tous x et y dans C , on calcule

$$\begin{aligned} B_q(x^2 - T(x)x + q(x), y) &= \\ &= B_q(x^2, y) - T(x)B_q(x, y) + q(x)B_q(1, y) \\ &= B_q(x^2, y) - 2B_q(x, 1)B_q(x, y) + B_q(x, xy) && \text{d'après (1.1)} \\ &= B_q(x^2, y) - B_q(x^2, y) - B_q(x, xy) + B_q(x, xy) && \text{d'après (1.2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par non-dégénérescence de q , on conclut que pour tout x dans C on a bien

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0.$$

Si maintenant on applique cette formule à $x + y$ on trouve que

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y)^2 - T(x + y)(x + y) + q(x + y) \\ &= x^2 - T(x)x + q(x) + y^2 - T(y)y + q(y) \\ &\quad + xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x, y) \\ &= xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x, y). \end{aligned}$$

□

En premier lieu, la formule (1.8) implique en particulier que $xy = -yx$ dès que $x, y \in \ker T$ et que x et y sont des vecteurs orthogonaux. Cette simple constatation sera très utile dans le prochain chapitre pour comprendre la structure de nos deux variétés. D'autre part, la proposition 1 a pour conséquence les deux corollaires ci-dessous.

Corollaire 1. *La forme quadratique q d'une algèbre à composition C est déterminée de façon unique par l'algèbre C .*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $q(1) = 1$ et que si x est un élément de k , alors $q(x) = x^2$. De là, pour tout y de C qui n'est pas dans k , comme y et 1 sont linéairement indépendants, en utilisant la formule (1.7), le calcul de y^2 détermine de façon unique $T(y)$ et $q(y)$ d'où le résultat. □

Corollaire 2. *Les algèbres à composition C sont puissances-associatives, i.e. pour tout $x \in C$, la sous-algèbre $k[x]$ est associative.*

Démonstration. Là encore, par la formule (1.7), une puissance quelconque d'un x de C est un polynôme du premier degré en x , le résultat est donc clair. □

Une autre curiosité des algèbres à composition, c'est qu'elles n'existent pas en toute dimension. Et même, plus la dimension est grande plus on perd de bonnes propriétés de l'algèbre. Le résultat précis concernant ces derniers points est énoncé sous la forme du théorème suivant dont on pourra trouver une démonstration¹ dans [SV, Th. 1.6.2 p. 14] :

¹La preuve de SPRINGER et VELDKAMP utilise un procédé de duplication (aussi appelé procédé de CAYLEY-DICKSON) dont nous n'avons pas parlé ici ; un point important de la démonstration, réside dans le fait que c'est la perte de l'associativité qui empêche le procédé de se prolonger au-delà de la dimension 8.

Théorème 1. *Les dimensions possibles pour une algèbre à composition sont 1, 2, 4 et 8. Les algèbres à composition de dimension 1 ou 2 sont commutatives et associatives, celles de dimension 4 sont associatives mais non commutatives, et quant à celles de dimension 8 elles ne sont ni l'un ni l'autre.*

Lorsque l'on travaille avec une algèbre à composition de dimension 4, on parle généralement d'**algèbre de quaternions** et en dimension 8, d'**algèbre d'octonions** (ou encore d'**algèbre de CAYLEY**). Ce sont ces dernières qui nous intéressent plus particulièrement.

À partir de maintenant, lorsque nous parlons d'une algèbre à composition qui est une algèbre d'octonions, nous la désignons par O . Par ailleurs, si la forme quadratique q sur O est isotrope, nous dirons que l'algèbre O est **déployée**.

De telles algèbres d'octonions déployées existent quel que soit le corps de base et sont uniques à isomorphisme près sur ce corps de base. Il s'agit des seules algèbres à composition de dimension 8 ayant des diviseurs de zéro. En revanche, sur un corps fixé il peut exister de nombreuses algèbres d'octonions non-déployées. Il est toutefois clair que toute algèbre non déployée se déploie sur une certaine extension quadratique du corps de base.

Le lecteur plus particulièrement intéressé par ces derniers points, pourra notamment consulter [S, Chap. 3 §4] ou [SV, Th. 1.8.1]. Dans ces deux mêmes ouvrages, le lecteur trouvera d'autres identités (**identités de MOUFANG** et **lois alternatives**) qui sont importantes lorsque l'on doit effectuer des calculs dans une algèbre à composition. En ce qui nous concerne, les calculs menés dans le prochain chapitre ne réclament pas ces identités, c'est pourquoi nous ne les avons pas introduites ici.

1.2 Un modèle d'algèbre d'octonions déployée

Nous allons maintenant construire O une algèbre d'octonions déployée. Nous avons précédemment signalé que de telles algèbres sont uniques à isomorphismes près. Ainsi lorsque par la suite nous parlerons d'algèbre d'octonions déployée, le lecteur pourra toujours avoir à l'esprit le modèle d'algèbre que nous allons construire maintenant.

On se donne tout d'abord le k -espace vectoriel

$$O = \mathfrak{M}_2(k) \times \mathfrak{M}_2(k)$$

où $\mathfrak{M}_2(k)$ désigne l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans le corps k et on munit O du produit

$$\forall x, y \in O \quad xy = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 + \tilde{y}_2x_2, y_2x_1 + x_2\tilde{y}_1)$$

avec

$$\tilde{y}_i = {}^t \text{co}(y_i),$$

$\text{co}(y_i)$ désignant la matrice constituée des cofacteurs de y_i et ${}^t y'$ la matrice transposée de y' .

De cette façon et comme signalé dans le corollaire 1, les formes q et T sont uniquement déterminées par ce produit. Nous allons d'ailleurs utiliser le procédé intervenant dans sa démonstration pour les expliciter.

On rappelle que pour tout x dans C ,

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0.$$

Ici, nous avons

$$\begin{aligned} x^2 &= (x_1^2 + \tilde{x}_2 x_2, x_2 x_1 + x_2 \tilde{x}_1) \\ &= (x_1^2 + \det(x_2)Id, x_2(x_1 + \tilde{x}_1)) \\ &= (x_1^2 + \det(x_2)Id, x_2 \text{trace}(x_1)) \end{aligned}$$

car

$$\tilde{x}_2 x_2 = {}^t \text{co}(x_2)x_2 = \det(x_2)Id$$

où $\det(x_2)$ est le déterminant de la matrice x_2 , Id la matrice identité de $\mathfrak{M}_2(k)$ et

$$x_1 + \tilde{x}_1 = x_1 + {}^t \text{co}(x_1) = \text{trace}(x_1)Id$$

où $\text{trace}(x_1)$ désigne la trace de la matrice x_1 . D'autre part, x_1 est un élément de $\mathfrak{M}_2(k)$ donc son polynôme caractéristique est donné par

$$x_1^2 - \text{trace}(x_1)x_1 + \det(x_1)Id = 0$$

d'où

$$x_1^2 = \text{trace}(x_1)x_1 - \det(x_1)Id$$

ce qui nous indique que

$$\begin{aligned} x^2 &= (\text{trace}(x_1)x_1 - \det(x_1)Id + \det(x_2)Id, \text{trace}(x_1)x_2) \\ &= \text{trace}(x_1)(x_1, x_2) - ((\det(x_1) - \det(x_2))(Id, 0)) \\ &= \text{trace}(x_1)x - (\det(x_1) - \det(x_2))Id \end{aligned}$$

et par identification nous donne

$$T(x) = \text{trace } x_1, \quad \text{et} \quad q(x) = \det x_1 - \det x_2.$$

Au vu de cette expression pour q , il est clair que q est isotrope et par conséquent, O sera une algèbre d'octonions déployée dès que nous aurons vérifié qu'elle permet

la composition. Ce dernier point s'établit là encore moyennant quelques calculs que nous reproduisons ici. On remarque tout d'abord que l'application $\det: \mathfrak{M}_2(k) \rightarrow k$ est une forme quadratique sur $\mathfrak{M}_2(k)$. De plus, \det est un homomorphisme multiplicatif, donc en tant que forme quadratique, elle permet la composition. Ainsi, $\mathfrak{M}_2(k)$ est une algèbre à composition de dimension 4, c'est donc une algèbre de quaternions et comme \det est isotrope, c'est même une algèbre de quaternions déployée. Dans la mesure où $\det(x)Id = {}^t \text{co}(x)x$, il est clair que l'involution sur $\mathfrak{M}_2(k)$ est ${}^t \text{co}(\cdot)$, par ailleurs, le polynôme caractéristique d'un élément x de $\mathfrak{M}_2(k)$ étant

$$x^2 - \text{trace}(x)x + \det(x) = 0,$$

on a également

$$T(x) = \text{trace}(x).$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned} q(xy) &= \det(x_1y_1 + \tilde{y}_2x_2) - \det(y_2x_1 + x_2\tilde{y}_1) \\ &= 2B_{\det}(x_1y_1, \tilde{y}_2x_2) + \det(x_1y_1) + \det(\tilde{y}_2x_2) \\ &\quad - 2B_{\det}(y_2x_1, x_2\tilde{y}_1) - \det(y_2x_1) - \det(x_2\tilde{y}_1) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} B_{\det}(x_1y_1, \tilde{y}_2x_2) &= B_{\det}(1, \tilde{y}_2x_2\tilde{y}_1\tilde{x}_1) && \text{d'après (1.3)} \\ &= B_{\det}(1, x_2\tilde{y}_1\tilde{x}_1\tilde{y}_2) && \text{commutativité de la trace} \\ &= B_{\det}(y_2x_1, x_2\tilde{y}_1) && \text{d'après (1.3)} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} q(xy) &= \det(x_1y_1) + \det(\tilde{y}_2x_2) - \det(y_2x_1) - \det(x_2\tilde{y}_1) \\ &= \det(x_1)\det(y_1) + \det(\tilde{y}_2)\det(x_2) - \det(y_2)\det(x_1) - \det(x_2)\det(\tilde{y}_1) \\ &= (\det(x_1) - \det(x_2))(\det(y_1) - \det(y_2)) \\ &= q(x)q(y) \end{aligned}$$

On remarquera que l'on a également utilisé le fait que $\det(\tilde{x}_i) = \det(x_i)$. Une autre façon d'établir ce résultat aurait été de vérifier que O était obtenue par la duplication de $\mathfrak{M}_2(k)$ par le procédé de CAYLEY-DICKSON. Toutefois, nous n'explicitons pas ici ce procédé afin de ne pas inutilement surcharger notre propos. Là encore, pour plus de détails sur le principe de cette duplication, nous vous conseillons la lecture de [SV, §1.5 et §1.8] ou encore de [Gar99, §2.3].

Nous considérons maintenant les vecteurs

$$e_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [0] \right); \quad f_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [0] \right) \quad (1.9)$$

$$e_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [0] \right); \quad f_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, [0] \right) \quad (1.10)$$

$$e_2 = \left([0], \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right); \quad f_2 = \left([0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (1.11)$$

$$e_3 = \left([0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right); \quad f_3 = \left([0], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (1.12)$$

où $[0]$ désigne la matrice nulle. Ces vecteurs forment clairement une base de O puisqu'il s'agit ni plus ni moins que de la réunion de deux bases de $\mathfrak{M}_2(k)$. L'intérêt tout particulier que nous portons à cette base réside en les nombreuses propriétés qu'elle vérifie, dont les plus importantes sont résumées dans le lemme 2 ci-dessous (dans ce lemme, δ_{ij} désigne le delta de KRONECKER qui prend la valeur 1 si $i = j$ et 0 sinon).

Lemme 2. *On a*

$$\begin{aligned} e_0 + f_0 &= 1, & \bar{e}_0 &= f_0, & 2B_q(e_0, f_0) &= 1, \\ e_0^2 &= e_0, & f_0^2 &= f_0, & e_0 f_0 &= f_0 e_0 = 0 \end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} q(e_i) &= q(f_i) = 0, & 2B_q(e_i, f_j) &= \delta_{ij}, & e_i^2 &= 0, \\ f_i^2 &= 0, & \bar{e}_i &= -e_i, & \bar{f}_i &= -f_i, \\ f_0 e_i &= e_i e_0 = 0, & e_0 f_i &= f_i f_0 = 0, & e_0 e_i &= e_i f_0 = e_i, \\ f_0 f_i &= f_i e_0 = f_i, & e_i f_j &= -\delta_{ij} e_0, & f_i e_j &= -\delta_{ij} f_0, \end{aligned}$$

$$e_i e_{i+1} = -e_{i+1} e_i = -f_{i+2}, \quad f_i f_{i+1} = -f_{i+1} f_i = -e_{i+2}$$

ces deux dernières égalités étant vraies avec les indices $i + 1$ et $i + 2$ pris modulo 3 à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Démonstration. Pour commencer, il est clair que l'unité de O est $(Id, [0])$, par conséquent il est bien évident que $1 = e_0 + f_0$. Un simple calcul de transposées de comatrices donne clairement que $\bar{e}_0 = f_0$, $\bar{e}_i = -e_i$ et $\bar{f}_i = -f_i$ pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$. Dans la mesure où, pour tout i cette fois dans $\{0, \dots, 3\}$, les vecteurs e_i et f_i sont construits à partir de matrices ayant au plus un coefficient différent

de 0, il est clair que le déterminant de telles matrices est nul et par conséquent $q(e_i) = q(f_i) = 0$. De là, comme $2B_q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$, on en conclut aisément que $2B_q(e_i, f_j) = q(e_i + f_j) = \delta_{ij}$. En utilisant maintenant la formule (1.7), on trouve que $e_0^2 - T(e_0)e_0 + q(e_0) = 0$, soit $e_0^2 = T(e_0)e_0 = e_0$. De même en ce qui concerne f_0 . Pour les autres vecteurs, comme $T(e_i) = T(f_j) = 0$, on en déduit aisément que $e_i^2 = f_j^2 = 0$. Un calcul direct de e_0f_0 et f_0e_0 nous donne bien 0 dans les deux cas. De même en ce qui concerne les produits e_0f_i , f_if_0 , f_0e_i et e_ie_0 . Pour calculer les dernières relations, nous allons utiliser la formule (1.8). Cette dernière appliquée à e_0 et e_i (i dans $\{1, 2, 3\}$) donne $e_0e_i + e_ie_0 - e_i + q(e_0 + e_i) = 0$ et comme il est clair d'une part que $q(e_0 + e_i) = 0$ et comme d'autre part nous avons déjà calculé que $e_ie_0 = 0$, il vient bien $e_0e_i = e_i$. Le même genre de calcul donne $f_0f_i = f_i$, $e_if_0 = e_i$ et $f_ie_0 = f_i$. Toujours en appliquant (1.8), on trouve $e_if_j + f_je_i + q(e_i + f_j) = 0$, or $q(e_i + f_j) = \delta_{ij}$. D'où en calculant $e_if_j = -\delta_{ij}e_0$ (en utilisant le fait $e_0 + f_0 = 1$), on trouve $f_je_i = \delta_{ij}f_0$. Enfin, appliqué à e_i et e_{i+1} l'équation 1.8, nous donne $e_ie_{i+1} + e_{i+1}e_i = 0$ et en calculant $e_ie_{i+1} = -f_{i+2}$, on trouve l'autre égalité. Le même type de calcul pour f_i et f_{i+1} nous permet de conclure cette démonstration. \square

Toute base de O vérifiant les propriétés de ce lemme 2 est appelée **base normale** (cette terminologie a été introduite par SCHELLEKENS dans son article [Sch62, §1 p. 202]; le lecteur remarquera que dans leur livre, SPRINGER et VELDKAMP utilisent une base particulière, construite à partir de la donnée de trois vecteurs, un « basic triple », qui n'est pas une base normale). Par la suite nous travaillerons avec une base normale et le lecteur pourra toujours garder à l'esprit la base précédente pour suivre nos calculs. D'autre part, comme certains résultats du lemme 2 nous seront plus utiles que d'autres, nous les avons résumés dans la figure 1.1 reproduite page suivante.

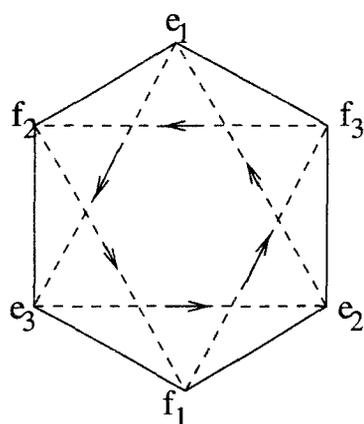


FIG. 1.1 – Diagramme illustrant la multiplication dans O

Les traits pleins relient deux éléments dont le produit est nul. En pointillé le produit de ces deux éléments donne celui situé au-dessus du trait et la flèche indique la positivité. Par exemple $f_2 f_3 = -e_1$.

Chapitre 2

Présentation des variétés

Dans tout ce chapitre, k désigne toujours notre corps de base et est donc de caractéristique différente de deux. Par **variétés**, nous désignons les k -schémas **séparés de type fini**. Nous désignons également par $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ les variétés homogènes projectives associées à un groupe de type G_2 . Dans tout ce chapitre nous traitons uniquement le cas des variétés déployées. L'ensemble $\text{Hom}_k(X, Y)$ désigne l'ensemble des k -homomorphismes de X dans Y respectant la structure algébrique de X et Y . Ainsi, si X et Y désignent, par exemple, des k -modules, il s'agira d'homomorphismes de k -modules, etc. . .

Dans une première section, nous rappelons des résultats généraux concernant les **groupes algébriques** et les **variétés homogènes projectives**, ceci tant pour fixer le cadre général de notre travail que pour introduire nos notations. Dans cette section, le lecteur pourra supposer, bien que ce ne soit pas indispensable, que k est un corps algébriquement clos car nous nous cantonnons à l'exposition de résultats sur les groupes algébriques déployées. Ensuite dans une seconde section, nous traiterons des **foncteurs de points** en général avant d'introduire les **foncteurs grassmanniennes**. Ces deux premières sections nous permettront alors, dans la troisième, de définir les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ associées à un groupe de type G_2 .

Pour un exposé complet sur les groupes algébriques, nous vous conseillons la lecture de [Bor], celle de [Bou] en ce qui concerne plus spécifiquement les systèmes de racines et vous renvoyons à [MPW96] en ce qui concerne notre formalisme et notre convention concernant les définitions des sous-groupes paraboliques. Pour ce qui est des foncteurs de points, les références classiques sont [DG], [EH] et [Mu]. Ce travail s'inspire également de l'article [Kar01, §8], tant par le formalisme que les techniques employées.

2.1 Groupes et variétés homogènes projectives associées

On se donne G un groupe algébrique **adjoint** (i.e. de centre trivial) et **semi-simple**, à savoir un groupe dont le **radical** $R(G)$ (i.e. un sous groupe fermé, **normal**¹, **résoluble**² de G et maximal pour ces propriétés) est réduit au sous-groupe trivial $\{1_G\}$ de G . On désigne également par \mathbb{G}_m le **groupe multiplicatif** (i.e. le groupe défini pour toute k -algèbre K par $\mathbb{G}_m(K) = K^\times$).

Un **tore** T de G est un sous-groupe fermé de G qui est isomorphe³ à $(\mathbb{G}_m)^l$ pour un certain entier l . On parlera de **tore maximal** de G si la puissance l est la plus grande possible (on a alors $l = \dim T$). Un **sous-groupe de BOREL** B de G est un sous-groupe maximal parmi les sous-groupes résolubles connexes de G . On choisit alors B un tel sous-groupe de BOREL contenant un tore maximal T de G fixé.

Soit V un T -module de dimension finie, V peut se décomposer comme la somme directe de ses **espaces de poids**, c'est-à-dire que $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ où

$$V_\alpha = \{v \in V \mid t \cdot v = \alpha(t)v \ \forall t \in T\}$$

et α est un élément du groupe $X(T) = \text{Hom}_k(T, \mathbb{G}_m)$, appelé le **groupe des caractères** de T . On dit qu'un élément α de $X(T)$ est un **poids** dans V si $V_\alpha \neq \{0\}$. La dimension de V_α est appelée la **multiplicité** du poids α . On considère maintenant $\Delta(T, V)$ l'ensemble des poids non nuls dans V . Cet ensemble est appelé **ensemble des racines** de T dans V .

On désigne par \mathfrak{g} l'**algèbre de LIE** du groupe G (i.e. \mathfrak{g} est l'**espace tangent** $T_{1_G}G$ à la variété G en son élément neutre; le fait que \mathfrak{g} possède une structure d'algèbre est un résultat classique dû au fait que G est une variété possédant une structure de groupe). À tout élément g de G , on peut associer le morphisme $\text{Int}_g: G \rightarrow G$ défini par $x \mapsto gxg^{-1}$, la conjugaison par g . Cette fonction induit (par « dérivation ») l'application $\text{Ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que l'on appelle l'**action adjointe** sur l'algèbre de LIE \mathfrak{g} . Cette action adjointe restreinte à T munit \mathfrak{g} d'une structure de T -module dont l'ensemble des poids non nuls, noté $\Delta(T, \mathfrak{g})$, forme ce que l'on appelle plus précisément le **système de racines** de G par rapport à T . Ce

¹On dit aussi distingué.

²On dit qu'un groupe G est **résoluble** si la suite de ses **groupes dérivés** (i.e. le groupe $\mathcal{D}_1(G)$ engendré par les commutateurs de G , puis le groupe $\mathcal{D}_2(G) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(G))$, etc...) se termine par le groupe neutre $\{1_G\}$ de G .

³Lorsque l'on travaille dans le cas non-déployé, un tore T est un sous-groupe **connexe** et **diagonalisable** (i.e. qu'il existe une certaine extension de corps k' de k telle que l'algèbre $k'[T]$ des fonctions régulières de T sur k' soit engendrée par $X(T)_{k'} = \text{Hom}_{k'}(T, \mathbb{G}_m)$; on dit alors que T est déployé sur k').

système de racine est contenu dans $E = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension l .

Une **réflexion** s de E est un automorphisme vectoriel tel que $s^2 = id$ et $id - s$ est un endomorphisme de rang 1. Ainsi, à toute réflexion s , on peut associer deux éléments, α dans E et α^\vee dans $E^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ (i.e. le dual de E) tels que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ et $s(v) = v - \alpha^\vee(v)\alpha$ pour tout vecteur v de E . En effet, comme $id - s$ est de rang 1, il existe bien un élément α dans $E \setminus \{0\}$ et un autre α^\vee dans $E^\vee \setminus \{0\}$ tels que $v - s(v) = \alpha^\vee(v)\alpha$ pour tout v de E . Par suite

$$v = s^2(v) = s(v) - \alpha^\vee(s(v))\alpha = v + \alpha^\vee(v)(\alpha^\vee(\alpha) - 2)\alpha$$

et comme ni $\alpha = 0$, ni $\alpha^\vee = 0$, on a bien par identification, $\alpha^\vee(\alpha) = 2$. Si α est une racine de $\Delta(T, \mathfrak{g})$, on note alors s_α , la réflexion vérifiant

$$s_\alpha(v) = v - \alpha^\vee(v)\alpha$$

pour tout v dans E et pour un certain élément α^\vee de E^\vee . En particulier, on a $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Le groupe W engendré par les s_α , où α est un élément de $\Delta(T, \mathfrak{g})$, est appelé⁴ le **groupe de WEYL** de G .

Le fait que $\Delta(T, \mathfrak{g})$ soit système de racines signifie qu'il vérifie les propriétés suivantes :

Axiomes sur les systèmes de racines

1. $\Delta(T, \mathfrak{g})$ est fini, ne contient pas 0 et engendre sur k l'espace vectoriel E .
2. Si α est dans $\Delta(T, \mathfrak{g})$, les seuls multiples de α qui appartiennent également à $\Delta(T, \mathfrak{g})$ sont α et $-\alpha$.
3. Pour tout α de $\Delta(T, \mathfrak{g})$, l'ensemble $\Delta(T, \mathfrak{g})$ est stable sous s_α .
4. Pour tous α et β dans $\Delta(T, \mathfrak{g})$, $\beta - s_\alpha(\beta)$ est un multiple entier de α (i.e. $\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$).

Un sous-ensemble $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ du système de racines $\Delta(T, \mathfrak{g})$ est appelé **base** de $\Delta(T, \mathfrak{g})$, si c'est une base de l'espace vectoriel E et si pour tout $\alpha = \sum c_i \alpha_i$ de $\Delta(T, \mathfrak{g})$, ses coefficients c_i sont soit tous positifs (ou nuls), soit tous négatifs. Ainsi, à l'aide d'une telle base, on peut partitionner $\Delta(T, \mathfrak{g})$ en les deux ensembles $\Delta(T, \mathfrak{g})^+$, l'ensemble des **racines positives** (celles dont les coefficients sont positifs) et $\Delta(T, \mathfrak{g})^-$, l'ensemble des **racines négatives** (celles dont les coefficients sont négatifs). L'ensemble $\Delta(T, \mathfrak{g})^+$ est appelé **système de racines positif** et les éléments de Σ , les **racines simples** de $\Delta(T, \mathfrak{g})$. Le groupe de WEYL W de G est alors engendré par les réflexions s_α où α est une racine simple.

⁴Si $\mathcal{N}_G(T)$ désigne le **normalisateur** de T (i.e. le plus grand sous-groupe de G dans lequel T est un groupe normal) dans G , W est également isomorphe à $\mathcal{N}_G(T)/T$.

Si on désigne par \mathfrak{b} , l'algèbre de LIE de notre groupe de BOREL B , le sous-ensemble $\Delta(T, \mathfrak{b})$ de $\Delta(T, \mathfrak{g})$ est un système de racines positives de $\Delta(T, \mathfrak{g})$ dont un ensemble de racines simples $\Sigma(T, \mathfrak{b})$, est donné par les éléments de $\Delta(T, \mathfrak{b})$ qui ne s'expriment pas comme somme positive d'autres éléments de $\Delta(T, \mathfrak{b})$.

Si α est une racine positive de $\Delta(T, \mathfrak{b})$, \mathfrak{g}_α son espace de poids (de dimension 1) sous l'action de T sur \mathfrak{g} , il existe alors un unique sous-groupe de G , connexe et stable sous l'action de T (i.e. qui soit normalisé par T) d'algèbre de LIE \mathfrak{g}_α . On note U_α ce sous-groupe et on l'appelle le **sous-groupe de racine associé à la racine α** . On peut également considérer, en répétant la même construction, $U_{-\alpha}$ le sous groupe de racine associé à $-\alpha$ que l'on appelle le **sous-groupe de racine opposée associé à α** . On pose maintenant $\Sigma(T, \mathfrak{b}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. à tout sous-ensemble Θ de $\Sigma(T, \mathfrak{b})$, on fait correspondre⁵ un sous-groupe de G , P_Θ appelé un **sous-groupe parabolique** de G et défini par

$$P_\Theta = \text{gr}(T, \{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta(T, \mathfrak{b})\}, \{U_{-\alpha} \mid \alpha \notin \Theta\})$$

où $\text{gr}(S)$ désigne le groupe engendré par l'ensemble S . Par exemple, pour $\Theta = \Delta(T, \mathfrak{b})$, le sous-groupe parabolique associé est le sous-groupe de BOREL B et pour $\Theta = \emptyset$, c'est G lui-même. On notera, pour simplifier, P_{α_i} le groupe $P_{\{\alpha_i\}}$ associé à une seule racine α_i . Enfin, de toute cette construction, il résulte qu'à tout sous-ensemble Θ de $\Sigma(T, \mathfrak{b})$ on peut associer le quotient G/P_Θ qui est une **variété projective, homogène** sous l'action de G et que nous notons $\mathcal{X}(\Theta)$. Là encore, nous noterons simplement $\mathcal{X}(\alpha_i)$ en lieu et place de $\mathcal{X}(\{\alpha_i\})$. Une telle variété $\mathcal{X}(\Theta)$ est évidemment lisse, puisque homogène sous l'action de G . Si nous supposons maintenant que le groupe G est en fait défini sur un sous corps k' de k , alors la variété $\mathcal{X}(\Theta)$ sera définie sur le corps k' , si et seulement si l'ensemble Θ est stable sous l'action du groupe de GALOIS absolu de k' .

Un groupe algébrique G peut toujours se réaliser comme le groupe d'automorphismes d'un certain ensemble S , préservant éventuellement une structure algébrique particulière de S . Cet ensemble peut être un k -espace vectoriel comme dans le cas du groupe $SL_n(k)$, ou encore un k -espace vectoriel quadratique et il s'agira alors du groupe $O_n(k, q)$ ou encore de $SO_n(k, q)$, etc... Les sous-groupes paraboliques de G font alors office de stabilisateurs de certains sous-espaces de S , comme par exemple, l'ensemble des plans d'un espace vectoriel pour $SL_n(k)$ ou celui des droites isotropes pour $SO_n(k)$. La variété $\mathcal{X}(\Theta)$ est alors ce que l'on appelle une **orbite** de G et s'identifie à certains sous-ensembles⁶ de S . Plus pré-

⁵Dans certains ouvrages sur le sujet, c'est la convention opposée qui est prise; P_Θ est alors engendré par le sous-groupe de BOREL $B = \text{gr}(T, \{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta(T, \mathfrak{b})\})$ et l'ensemble $\{U_{-\alpha} \mid \alpha \in \Theta\}$.

⁶Il est bien évident que ces sous-ensembles sont alors munis d'une structure de variété algébrique lisse.

cisement, lorsque les racines simples $\Sigma(T, \mathcal{B}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ sont convenablement⁷ numérotées, $\mathcal{X}(\alpha_i)$ est une variété formée à partir de sous-ensembles de S (satisfaisant éventuellement certaines restrictions supplémentaires), de dimension i sur k . Dès lors, il est possible de définir une relation d'incidence sur ces i -espaces et on obtient alors, à partir des variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$, les variétés associées aux autres sous-ensembles de $\Sigma(T, \mathcal{B})$. Concrètement, la variété $\mathcal{X}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$ associée au sous-ensemble $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ de $\Sigma(T, \mathcal{B})$, a pour ensemble⁸ de ses k -points,

$$\left\{ (V_1, \dots, V_n) \in X(\alpha_{i_1})(k) \times \dots \times X(\alpha_{i_n})(k) \mid \begin{array}{l} V_i \text{ est incident à } V_j \\ \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n \end{array} \right\}.$$

Ce résultat est en réalité la traduction du fait que, dans le cas où G est déployé, les k -points de l'ensemble des variétés $\mathcal{X}(\Theta)$ correspondent à l'**immeuble sphérique** associé à G . Bien qu'elle soit très intéressante, nous ne souhaitons pas traiter de la **théorie des immeubles** dans ces pages, leur introduction dépassant très largement leur cadre. Nous nous contenterons donc de renvoyer le lecteur à [Br] pour un exposé complet.

Dans le cadre de notre étude, G est un groupe de type G_2 , il se réalise donc comme un groupe d'automorphismes d'une algèbre d'octonions comme cela nous est appris par le résultat suivant :

Théorème 2. *Le groupe G des automorphismes d'une algèbre d'octonions O est un k -groupe algébrique simple adjoint de type G_2 . Tout groupe adjoint de ce type est obtenu de cette façon.*

Démonstration. Voir, par exemple, [SV, Th. 2.3.5 p. 33] ou encore, mais sans preuve, les articles [Car14, p. 298] et [Car52, p. 443]. \square

Un groupe de type G_2 est un groupe de rang 2, ainsi ses tores maximaux sont de dimension 2, et par suite, son ensemble de racines simples par rapport à un tore T fixé et un sous-groupe de BOREL B le contenant est constitué de deux racines que l'on note α_1 et α_2 . Bien que n'en ayant pas parlé auparavant, on peut associer à un ensemble de racines simples son **diagramme de DYNKIN**. Un tel diagramme se construit en symbolisant les racines simples par des ronds et en reliant chaque couple de racines α et β par $\alpha^\vee(\beta) \cdot \beta^\vee(\alpha)$ arêtes. Si $\alpha^\vee(\beta) > \beta^\vee(\alpha)$, on oriente alors les arêtes par une tête de flèche dirigée de α vers β . Dans le cas du groupe G de type G_2 , le diagramme de DYNKIN obtenu est celui de la figure 2.1.

En effet, l'espace vectoriel $E = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est un plan puisque G est de rang 2. D'autre part, $\Delta(T, \mathfrak{g})$ est constitué de 12 racines, dont 6 constituent $\Delta(T, \mathfrak{b})$. En

⁷C'est-à-dire comme nous l'avons fait ici.

⁸On rappelle que les k -points d'une variété, sont les points de cette variété qui sont définis sur k .

FIG. 2.1 – Diagramme de DYNKIN de G

utilisant la base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ des racines simples de G relativement à B (et à T), on représente l'ensemble des racines de $\Delta(T, \mathfrak{g})$ sur le diagramme 2.2. Ce diagramme nous resservira d'ailleurs dans le chapitre suivant pour déterminer les générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$, le groupe de CHOW de $\mathcal{X}(\alpha_2)$, et calculer les relations, en tant qu'anneau de CHOW cette fois-ci, entre les générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ anneau gradué associé à la variété $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$.

La réflexion s_{α_1} transforme α_1 en $-\alpha_1$ et fixe la droite engendrée par $3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Par conséquent, $s_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_1 + 3\alpha_2$ et par identification avec $\alpha_2 - \alpha_1^\vee(\alpha_2)\alpha_1$, on en déduit que $\alpha_1^\vee(\alpha_2) = -3$. Par le même enchaînement, on prouve que $\alpha_2^\vee(\alpha_1) = -1$, d'où le diagramme de DYNKIN précédent pour G de type G_2 .

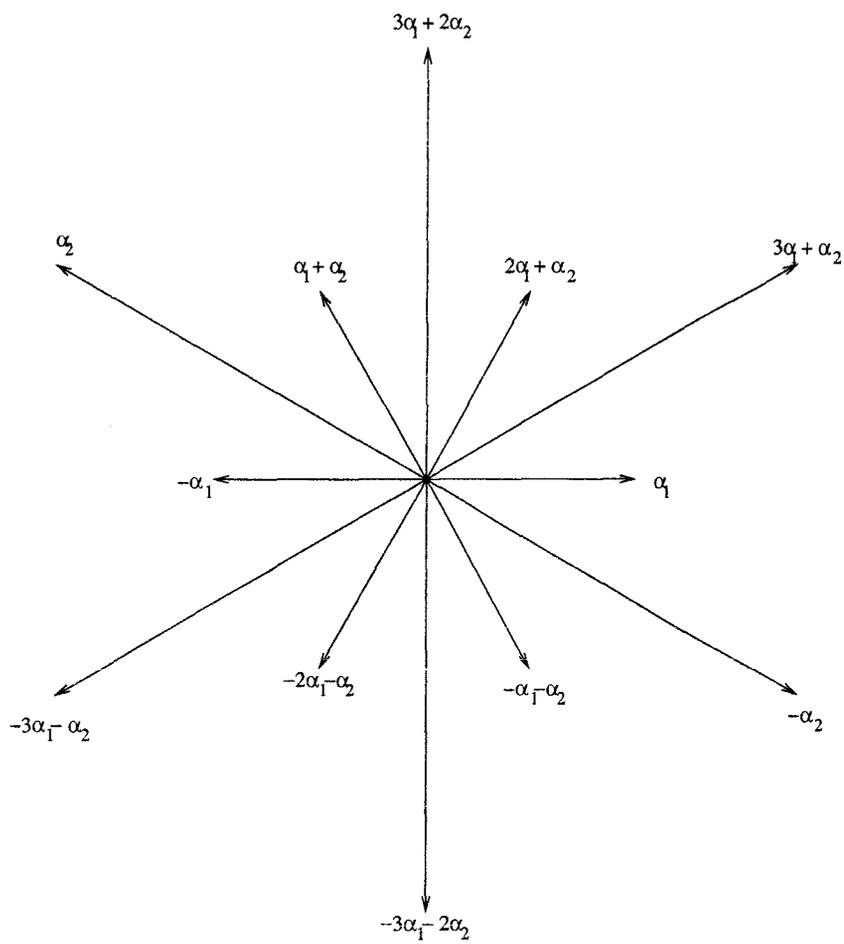
D'après ce que nous avons exposé plus haut, en dehors du point $\mathcal{X}(\emptyset)$, nous avons trois variétés homogènes sous G , $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$. En calculant la dimension⁹ des différentes variétés, on trouve que $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont de dimension 5 et que $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ est de dimension 6. D'autre part, comme G est le groupe d'automorphismes d'une algèbre d'octonions O , les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) sont constituées des sous-espaces vectoriels V_i de dimension i de O , dont les éléments sont de trace nulle et tels que si x et y sont deux éléments de V_i alors $xy = 0$. La relation d'incidence permettant de définir $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ est tout simplement l'inclusion.

De par les formules (1.7) et (1.8) de la proposition clef (la proposition 1) et comme nous le vérifierons en détail plus loin, une condition nécessaire et suffisante pour que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ aient un point rationnel, est que l'algèbre des octonions O soit déployée. Par extension lorsque cela sera le cas, nous qualifierons également les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ de **déployées**. Dans tous les cas, ces variétés sont définies sur le corps k car son groupe de GALOIS absolu a une action triviale sur les racines de G .

Afin de construire la structure cellulaire de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$, nous allons devoir exhiber une famille de sous-variétés fermées de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ (cf. chapitre 3). Pour ce faire, le langage des foncteurs de points nous est apparu comme le plus indiqué. Cette fois encore, il nous semble judicieux de rappeler, sans nous limiter au strict nécessaire¹⁰, quelques éléments importants de la théorie des foncteurs de points.

⁹Par exemple en utilisant leurs algèbres de LIE, ou encore en faisant agir G sur des sphères de O .

¹⁰Nous avons, dans un souci de cohérence, volontairement détaillé plus que nécessaire la théorie

FIG. 2.2 – Système de racines d'un groupe de type G_2

2.2 Foncteurs de points

Nous désignons par $\mathcal{A}lg(k)$ la **catégorie des k -algèbres associatives, unitaires et commutatives**. Tout morphisme $R \rightarrow R'$ de cette catégorie envoie l'unité de R sur celle de R' . Par \mathbf{Ens} , nous désignons la **catégorie des ensembles**.

On appelle **foncteur de points**, tout foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{A}lg(k)$ à valeurs dans la catégorie \mathbf{Ens} . Un tel foncteur \mathcal{F} est dit **représentable** s'il existe un k -schéma X telle que pour tout élément R de $\mathcal{A}lg(k)$ on ait :

$$\mathcal{F}(R) = \text{Hom}_{k\text{-Sch}}(\text{Spec } R, X),$$

$\text{Spec } R$ désignant le spectre de R , c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de R muni de sa **topologie de ZARISKI** et de son faisceau structural usuel, et $\text{Hom}_{k\text{-Sch}}(\text{Spec } R, X)$ l'ensemble des homomorphismes de k -schémas. On dit aussi que le foncteur \mathcal{F} est **représenté** par X et la variété X est alors appelé la **réalisation géométrique** de \mathcal{F} . On parle alors d'**ensemble des R -points** (ou plus simplement de **R -points**) de \mathcal{F} pour désigner¹¹ l'ensemble $\mathcal{F}(R)$. On remarquera au passage que l'application $X \mapsto \text{Hom}_{k\text{-Sch}}(-, X)$ définit une transformation naturelle entre la catégorie des k -variétés et celle des foncteurs de points représentables qui est en fait une équivalence de catégories (cf [DG, Th. de comparaison p. 18]).

Un exemple d'un tel foncteur de points est donné par le **foncteur affine** $\text{Spec } R$ associé à la k -algèbre R , défini pour tout élément S de $\mathcal{A}lg(k)$ par

$$\text{Spec } R(S) = \text{Hom}_k(R, S).$$

Ce foncteur est clairement représenté par le k -schéma $\text{Spec } R$, ceci expliquant que nous leur ayons donné le même nom.

On dit que \mathcal{G} est un **sous-foncteur** de \mathcal{F} , si pour toute k -algèbre R , $\mathcal{G}(R)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(R)$ et si pour tout homomorphisme φ de $\text{Hom}_k(R, S)$ (où $S \in \mathcal{A}lg(k)$), l'application $\mathcal{G}(\varphi): \mathcal{G}(R) \rightarrow \mathcal{G}(S)$ est la restriction de $\mathcal{F}(\varphi)$.

Par définition, l'**image réciproque d'un sous-foncteur** \mathcal{G} de \mathcal{F} par rapport à une transformation naturelle $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ est le sous-foncteur \mathcal{G}' de \mathcal{G} tel que $\mathcal{G}'(R)$ soit l'image réciproque du sous-ensemble $\mathcal{G}(R)$ de $\mathcal{F}(G)$ par l'application $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$. Si on revient maintenant à notre foncteur affine $\text{Spec } R$ et si on fixe un idéal \mathcal{I} de R , on peut alors construire deux types de sous-foncteurs de $\text{Spec } R$ en associant, à toute k -algèbre S , les ensembles de S -points suivants :

$$\{\varphi \in \text{Spec } R(S) \mid \varphi(\mathcal{I}) \cdot S = S\} \quad \text{et} \quad \{\varphi \in \text{Spec } R(S) \mid \varphi(\mathcal{I}) = 0\}.$$

des foncteurs de points. Notre objet était aussi de montrer au lecteur qu'un foncteur de points est en fait, la « même chose » qu'un schéma et que seule la différence des points de vue (et par conséquent des techniques) justifie une terminologie différente.

¹¹Il est évident que $\mathcal{F}(R)$ correspond bien aux R -points de la variété X , tels qu'ils ont précédemment été introduits.

Dans la suite de ce chapitre il nous arrivera de faire référence à ce type de sous-foncteurs de $\text{Spec } R$. Aussi, nous désignerons les premiers par **sous-foncteur du premier type** et les seconds par **sous-foncteurs du second type**. De ces deux sous-foncteurs, on peut alors poser comme définition qu'un sous-foncteur \mathcal{G} de \mathcal{F} est **ouvert** (respectivement **fermé**) si pour toute transformation naturelle $\text{Spec } R \rightarrow \mathcal{F}$, l'image réciproque de \mathcal{G} par cette application est un sous-foncteur de $\text{Spec } R$ du premier (respectivement du second) type. Dans le cas où \mathcal{F} est représentable, il est équivalent de dire que la réalisation géométrique de \mathcal{G} est un sous-schéma ouvert (respectivement fermé) de celui de \mathcal{F} . Au passage, signalons que d'après le lemme de YONEDA (cf. Annexe A), l'ensemble des morphismes de $\text{Spec } R \rightarrow \mathcal{F}$, est en bijection avec $\mathcal{F}(R)$, l'ensemble des R -points de \mathcal{F} .

D'autre part, la réunion de foncteurs restant une opération délicate, on pose comme définition qu'une famille de sous-foncteurs $\{\mathcal{G}_i\}$ d'un foncteur de points \mathcal{F} **recouvre** ce foncteur \mathcal{F} , si pour toute k -algèbre K qui est un corps on a :

$$\mathcal{F}(K) = \bigcup_i \mathcal{G}_i(K).$$

En outre, si \mathcal{F} est un foncteur représentable et $\{\mathcal{G}_i\}$ une famille de foncteurs de \mathcal{F} tous ouverts ou fermés (ou encore **localement fermés**¹²), \mathcal{F} sera recouvert par les \mathcal{G}_i si et seulement si la réalisation géométrique de \mathcal{F} est elle-même recouverte par les réalisations géométriques des \mathcal{G}_i .

Dans le même ordre d'idée, deux foncteurs représentables \mathcal{F} et \mathcal{G} qui coïncident sur toutes les k -algèbres qui sont des anneaux locaux sont égaux.

Si l'on s'intéresse maintenant à l'intersection de foncteurs, cette dernière est, contrairement à la réunion, définie¹³ de la façon naïve suivante : pour toute k -algèbre R , on a

$$\left(\bigcap_i \mathcal{G}_i \right) (R) = \bigcap_i \mathcal{G}_i(R).$$

On dit qu'un foncteur \mathcal{F} est **local** si pour toute k -algèbre R et toute famille r_1, \dots, r_n d'éléments de R qui engendre l'idéal de l'unité de R (on parle aussi de **partition de l'unité** de R), la suite des applications ensemblistes suivantes¹⁴

$$\mathcal{F}(R) \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{F}(R_{r_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n \mathcal{F}(R_{r_i r_j})$$

¹²Un sous-foncteur **localement fermé** est un sous-foncteur fermé dans un sous-foncteur ouvert du foncteur total.

¹³Une autre façon de définir l'intersection aurait été d'utiliser les produits fibrés, ces derniers étant bien définis dans la mesure où nous ne travaillons qu'avec des ensembles.

¹⁴Dans cette suite, R_{r_i} désigne le **localisé** de R par rapport à $\{r_i^p \mid p \in \mathbb{N}\}$, la **partie multiplicative** engendrée par r_i et il est entendu que $R_{r_i r_j} = R_{r_j r_i}$ pour tout couple d'indices i et j , d'après les propriétés connues sur les parties multiplicatives.

est exacte. En d'autres termes, la première flèche est injective et son image est exactement constituée par les éléments du terme du milieu dont les images par les deux flèches de gauches sont égales. Ce résultat a son importance car, toujours d'après le théorème de comparaison de [DG], tout foncteur de points local admettant un recouvrement par des sous-foncteurs affines est représentable.

Enfin, une transformation naturelle de foncteurs représentables $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ est un **fibré vectoriel** si pour toute k -algèbre R et tout R -point p de \mathcal{F} , l'image réciproque $f(R)^{-1}(p)$ de p par l'application ensembliste $f(R): \mathcal{G}(R) \rightarrow \mathcal{F}(R)$ est muni d'une structure de R -module **projectif** (i.e. est un facteur direct¹⁵ d'un module libre) finiment engendré telle que pour tout morphisme de k -algèbres $\varphi: R \rightarrow S$, l'application

$$f(R)^{-1}(p) \rightarrow f(S)^{-1}(m),$$

où m est l'image de p dans $\mathcal{F}(S)$, soit un homomorphisme de R -modules et que l'homomorphisme de S -modules induit

$$(f(R)^{-1}(p)) \otimes_R S \rightarrow f(S)^{-1}(m)$$

soit un isomorphisme. Maintenant que nous connaissons la définition d'un fibré vectoriel, nous pouvons associer à un tel fibré un fibré projectif. En effet, si $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ est un fibré vectoriel, on définit $\mathbb{P}(f): \mathbb{P}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{F}$ le fibré projectif associé en posant, pour tout anneau R , les fibres $\mathbb{P}(f)(R)^{-1}(x)$, où x est un R -point de \mathcal{F} , comme étant l'ensemble des sous-modules projectifs N de $f(R)^{-1}(P)$ tels que le quotient $f(R)^{-1}(P)/N$ soit également projectif. Ceci est possible puisque $f(R)^{-1}(x)$ est un R -module projectif. Le passage d'une fibre à une autre et les extensions de scalaires ne posent aucun problème puisque tout provient de la structure vectorielle sous-jacente.

À présent, nous allons définir un certain type de foncteurs de points que nous appelons les foncteurs de points **grassmanniennes** (ou plus simplement **grassmannienne**) et qui interviendront tant dans la suite de ce chapitre que dans le suivant. Pour cela, on se donne un k -espace vectoriel V de dimension finie n et pour toute k -algèbre R on considère le R -module libre $V \otimes_k R$ que nous notons V_R . Plus généralement, U_R désignera toujours une extension des scalaires à R d'un certain module U . À partir de maintenant, les modules qui vont intervenir seront tous au moins projectifs de type fini.

Définition 2. Soit i un élément de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, le foncteur grassmannienne $\Gamma_i(V)$ des sous-espaces de dimension i (ou encore grassmanniennes des i -espaces) est défini par :

¹⁵Le lecteur notera qu'il ne s'agit pas là de la définition usuelle d'un module projectif, mais plutôt d'une de ses caractérisations; toutefois, cette caractérisation sera amplement suffisante pour notre propos et le lecteur trouvera plus de renseignements sur les modules projectifs dans l'annexe A

- pour toute k -algèbre R , l'ensemble $\Gamma_i(V)(R)$ est constitué des facteurs directs de rang i de V_R , en d'autres termes, il s'agit des sous-modules (projectifs) M de rang i de V_R tels que V_R/M soit (également) projectif;
- pour tout morphisme φ de $\text{Hom}_k(R, S)$, l'application $\Gamma_i(V)(R) \rightarrow \Gamma_i(V)(S)$ est définie par la tensorisation par S sur R , c'est-à-dire par l'application

$$V_R \supset M \mapsto M \otimes_R S = M_S \subset V_S.$$

Avant de prouver que ce foncteur est bien représentable et que sa réalisation géométrique est la grassmannienne au sens usuel, il nous faut rappeler au lecteur qu'il existe un lien entre les R -modules et certains faisceaux sur l'espace topologique $\text{Spec } R$. Plus précisément, il existe en fait une équivalence de catégories entre la catégorie des R -modules (respectivement des R -modules de type fini) et celle des faisceaux quasi-cohérents (respectivement cohérents) sur $\text{Spec } R$. pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [H, Cor. 5.5 p. 113].

Ainsi, une façon de caractériser un R -module projectif M est de dire que le faisceau de modules \widetilde{M} qu'il induit, est **localement libre de type fini**, c'est-à-dire que pour tout anneau local, le faisceau induit est libre de type fini. En particulier, un module projectif sur un anneau local est libre. Pour le lecteur désireux d'en savoir plus sur les propriétés des modules projectifs (en particulier concernant les derniers points abordés), nous avons en annexe A reporté les résultats que nous allons utiliser par la suite, notamment le théorème 3 sur la caractérisation des modules projectifs. Ces résultats peuvent également être consultés dans [E]. D'autre part, le lecteur qui ne serait pas très familier avec les faisceaux peut, au besoin, se reporter à [H] pour un exposé général de la théorie. La démonstration du caractère local de $\Gamma_i(V)$ va en effet, être établie à grand renfort de faisceaux de modules.

Nous allons maintenant prouver que $\Gamma_i(V)$ est un foncteur de points local. Nous nous donnons donc R une k -algèbre et r_1, \dots, r_s une partition de l'unité de R . Il nous faut par conséquent prouver l'exactitude de la suite suivante :

$$\Gamma_i(V)(R) \rightarrow \prod_{j=1}^s \Gamma_i(V)(R_{r_j}) \rightrightarrows \prod_{j,k=1}^s \Gamma_i(V)(R_{r_j r_k})$$

Nous considérons donc un élément $(M_j)_j$ de $\prod_{j=1}^s \Gamma_i(V)(R_{r_j})$. Chaque M_j étant un module projectif de rang i , il induit sur $\text{Spec } R_{r_j}$, comme nous l'avons déjà mentionné, un faisceau cohérent \widetilde{M}_j . Ainsi, dire que les deux flèches

$$\prod_{i=1}^n \Gamma_i(V)(R_{r_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n \Gamma_i(V)(R_{r_i r_j})$$

coïncident, signifie que tous les couples de faisceaux \widetilde{M}_j et \widetilde{M}_k coïncident sur l'intersection $\text{Spec } R_{r_j} \cap \text{Spec } R_{r_k}$ (que cette intersection soit vide ou non bien entendu). Par suite, il est un fait connu que, sous de tels hypothèses, nous pouvons recoller ces faisceaux en un faisceau global \widetilde{M} sur $\bigcup_{j=1}^s \text{Spec } R_{r_j}$. Or les éléments r_j engendrent l'unité de R , par conséquent $\bigcup_{j=1}^s \text{Spec } R_{r_j} = \text{Spec } R$ (voir par exemple [EH, Lem. I.6 p. 19]). Ainsi, \widetilde{M} est un faisceau cohérent sur $\text{Spec } R$ puisque les $\{\text{Spec } R_{r_j}\}_j$ forment un recouvrement de $\text{Spec } R$ et que $\widetilde{M}(\text{Spec } R_{r_j}) = M_j$ est de type fini. Le faisceau \widetilde{M} provient donc, par l'équivalence de catégories invoquée ci-dessus, d'un R -module de type fini M . D'autre part, le module M_j est un module projectif sur l'anneau local¹⁶ R_{r_j} , il est donc libre (voir par exemple notre annexe A). Nous avons donc un R -module de type fini M et une partition de l'unité r_1, \dots, r_s de R telle que $M_{r_j} = M_j$ soit libre pour tout indice j . D'après une des caractérisations de modules projectifs (voir par exemple l'annexe A), M est un R -module projectif. Si l'on considère maintenant V_R/M , ce module induit lui aussi un faisceau cohérent sur $\text{Spec } R$ et pour tout r_j , on a l'isomorphisme canonique

$$(V_R/M)_{r_j} \simeq V_{R_{r_j}}/M_{r_j}.$$

Or $M_{r_j} = M_j$ par construction de M et par définition de $\Gamma_i(V)(R_{r_j})$, $V_{R_{r_j}}/M_{r_j}$ est projectif. Par conséquent, $V_{R_{r_j}}/M_{r_j}$ est libre en tant que module projectif sur un anneau local et par le même argument que précédemment, V_R/M est également un module projectif. Le R -module M est donc bien un élément de $\Gamma_i(V)(R)$. Enfin, ce module est unique (injectivité de la première flèche de la suite) car si M et N sont deux éléments de $\Gamma_i(V)(R)$ tels que $M_{r_j} = N_{r_j} = M_j$ pour tout indice j , cela signifie que les faisceaux \widetilde{M} et \widetilde{N} coïncident sur un recouvrement ouvert de $\text{Spec } R$, en conséquence de quoi, les faisceaux \widetilde{M} et \widetilde{N} sont égaux, ce qui au niveau des modules signifie bien évidemment que $M = N$. Nous venons en fait de voir que pour toute k -algèbre R , $\Gamma_i(V)(R)$ est un ensemble de faisceaux cohérents sur $\text{Spec } R$. Dès lors, la condition de localité de $\Gamma_i(V)$ est impliquée par la condition de recollement des faisceaux, condition évidemment remplie par tout faisceau cohérent.

Nous allons maintenant établir que $\Gamma_i(V)$ est recouvert par des sous-foncteurs ouverts. Pour cela, nous fixons une fois pour toute une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V et construisons à partir de cette base un sous-espace vectoriel U de dimension i et une projection $p: V \rightarrow U$. De ces données, nous définissons un foncteur \mathcal{U} , en posant pour toute k -algèbre R comme ensemble de R -points,

$$\mathcal{U}(R) = \{M \in \Gamma_i(V)(R) \mid (p_R)|_M: M \rightarrow U_R \text{ est un isomorphisme}\}$$

où $(p_R)|_M: M \rightarrow U_R = U \otimes_k R$ est l'homomorphisme de R -modules induit par p sur V_R et restreint à M . Nous allons tout d'abord établir que \mathcal{U} est un foncteur espace

¹⁶En fait, comme $\{r_j^p \mid p \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative, son complémentaire est un idéal premier et ainsi R_{r_j} est un anneau local.

affine, pour cela nous posons $U' = \ker p$ et il est bien évident que $V \simeq U' \oplus U$. Considérant alors f un élément de $\text{Hom}_R(U_R, U'_R)$ (l'ensemble des homomorphismes de R -modules de U_R dans U'_R), nous construisons le module

$$N_f = \{m + f(m) \mid m \in U_R\}.$$

Il est clair par construction que N_f est un élément de $\mathcal{U}(R)$ et puisqu'il est isomorphe à U_R , il est donc libre et par conséquent¹⁷ projectif. D'autre part, si f et f' sont deux morphismes de $\text{Hom}_R(U_R, U'_R)$ tels que $N_f = N_{f'}$, alors en particulier, considérant une base¹⁸ $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_i}\}$ de U , qui est donc une base de U_R , nous avons pour tout indice j de $\{j_1, \dots, j_i\}$

$$e_j + f(e_j) = e_j + f'(e_j)$$

ce qui implique donc que

$$(f - f')(e_j) = 0$$

pour tout indice j et ainsi $f = f'$. Réciproquement, si N est un élément de $\mathcal{U}(R)$, N est un module libre puisqu'isomorphe à U_R . Le module N étant par conséquent un sous-module libre de V_R , \mathcal{B} est une famille génératrice (non minimale) de N . En considérant la base $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_i}\}$ de U_R extraite de \mathcal{B} , on construit $p' : U_R \rightarrow V_R$ tel que $(p_R)|_M \circ p' = id_{U_R}$ et $f = p' - id_{V_R}$ définit alors un homomorphisme de U_R dans U'_R . Nous avons donc établi une bijection entre $\mathcal{U}(R)$ et $\text{Hom}_R(U_R, U'_R)$. D'autre part, il est bien clair que¹⁹ $\text{Hom}_R(U_R, U'_R) \simeq \text{Hom}_k(U, U') \otimes_k R$ (en tenant compte du fait que les R -modules U_R et U'_R sont libres). Nous pouvons ainsi identifier \mathcal{U} avec l'espace $\text{Hom}_k(U, U')$ qui est bien affine en tant qu'espace vectoriel des applications k -linéaires de U dans U' .

Nous allons maintenant prouver que \mathcal{U} est un foncteur ouvert. Pour cela, nous allons établir que pour toute transformation naturelle de $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$, l'image réciproque de \mathcal{U} est un sous-foncteur du premier type de $\text{Spec } R$. L'application $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ est définie pour tout k -algèbre S par

$$\text{Spec } R(S) \ni \varphi \mapsto M \otimes_R S = M_S \in \Gamma_i(V)(S).$$

Le produit tensoriel avec S sur R se fait via φ et M est le R -point correspondant à l'image de id_R dans $\text{Spec } R(R)$ par $\text{Spec } R(R) \rightarrow \Gamma_i(V)(R)$. En effet, si φ est un élément de $\text{Spec } R(S)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } R(R) & \longrightarrow & \Gamma_i(V)(R) \\ \downarrow \text{Spec } R(\varphi) & & \Gamma_i(V)(\varphi) \downarrow \\ \text{Spec } R(S) & \longrightarrow & \Gamma_i(V)(S) \end{array}$$

¹⁷ Un module libre étant un exemple de module projectif (voir par exemple l'annexe A).

¹⁸ Par exemple celle initialement formée à partir de \mathcal{B} pour définir U .

¹⁹ Plus généralement, si M et M' sont deux R -modules et si S est une R -algèbre **plate**, on a alors $\text{Hom}_R(M, M') \otimes_R S \simeq \text{Hom}_S(M_S, M'_S)$ (voir par exemple [E, prop. 2.10 p. 69]).

où l'application $\text{Spec } R(\varphi)$ n'est autre que la composée avec φ et $\Gamma_i(V)(\varphi)$ la tensorisation par S sur R via φ par définition de $\Gamma_i(V)$. Ainsi, par commutativité du diagramme, l'image de $\text{Spec } R(S)$ par $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ est bien l'ensemble des modules $M \otimes_R S$ où M est l'image de id_R par $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$. Réciproquement, si M est un élément de $\Gamma_i(V)(R)$, on peut construire une transformation naturelle $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ en associant à tout φ de $\text{Spec } R(S)$, $M \otimes_R S$ construit avec φ . En fait, nous venons de redémontrer le lemme de YONEDA dans le cas de $\Gamma_i(V)$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les transformations naturelles $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ et les R -points de $\Gamma_i(V)$. Dès lors, et par définition de \mathcal{U} , on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{U}(R) &\iff (p_R)_{|M} \text{ est un isomorphisme} \\ &\iff \text{coker}(p_R)_{|M} = 0 \text{ et } \text{rg}(M) = i \end{aligned}$$

D'autre part, il est bien clair que

$$\text{rg}(M) = i \iff \bigwedge^{i+1} M = 0$$

où $\bigwedge^{i+1} M$ est la $i^{\text{ème}}$ puissance extérieure de M . Nous définissons alors le module $P = \text{coker}(p_R)_{|M} \oplus \bigwedge^{i+1} M$, et dès lors, nous avons que

$$\begin{aligned} M \otimes_R S \in \mathcal{U}(S) &\iff P \otimes_R S = 0 \\ &\iff \varphi(\text{Ann } P) \cdot S = S \end{aligned}$$

où $\text{Ann } P$ désigne l'idéal annulateur du R -module P . La dernière équivalence est donnée par le lemme technique suivant.

Lemme 3. *Soit $\varphi: R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs et P un R -module de type fini. Alors on a $P \otimes_R S = 0$ si et seulement si le sous-ensemble $\varphi(\text{Ann } P)$ de S , contient une partie génératrice de S en tant qu'idéal.*

Démonstration. Si le S -module $\varphi(\text{Ann } P)$ contient une partie génératrice de S en tant qu'idéal, le S -module $P \otimes_R S$ est engendré par les éléments du type $p \otimes \varphi(r)$ où r et p sont des éléments de $\text{Ann } P$ et P respectivement. D'où $p \otimes \varphi(r) = rp \otimes 1 = 0$ et ainsi $P \otimes_R S = 0$.

Nous établissons maintenant la réciproque par contraposition. Nous supposons donc que $\varphi(\text{Ann } P) \cdot S \neq S$. Soit \mathfrak{M} un idéal maximal de S contenant $\varphi(\text{Ann } P)$ et posons $\wp = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$. L'idéal \wp est premier, contient $\text{Ann } P$ et le module P est

de type fini, par conséquent²⁰, $P_{\wp} \neq 0$. Par ailleurs, nous avons les isomorphismes canoniques

$$(P/P \cdot \wp)_{\wp} = P_{\wp}/(P \cdot \wp)_{\wp} = P_{\wp}/\wp_{\wp}$$

et par suite

$$\begin{aligned} P_{\wp}/\wp_{\wp} = 0 &\iff P_{\wp} = \wp_{\wp} \\ &\iff P_{\wp} = (\wp \cdot P)_{\wp}. \end{aligned}$$

L'anneau R_{\wp} étant local, d'idéal maximal \wp et P_{\wp} étant finiment engendré, le lemme de NAKAYAMA (cf. [E, Cor 4.8 p. 124] ou l'annexe A) s'applique, et par conséquent $P_{\wp} = 0$. Or P_{\wp} , nous l'avons déjà signalé, n'est pas nul, d'où nécessairement, $(P/P \cdot \wp)_{\wp} \neq 0$. L'idéal R/\wp étant intègre, $(R/\wp)_{\wp}$ est un corps et comme $\varphi(\wp) = \mathfrak{M}$, l'application

$$\bar{\varphi}: (R/\wp)_{\wp} \hookrightarrow S/\mathfrak{M}$$

est une extension de corps (l'injectivité vient du fait que $\varphi(\wp) = \mathfrak{M}$). Par suite, le S/\mathfrak{M} -module $P \otimes_R S/\mathfrak{M}$ est non nul puisqu'il contient $(P/P \cdot \wp)_{\wp} = P \otimes_R (R/\wp)_{\wp}$ et enfin, comme $P \otimes_R S/\mathfrak{M}$ est inclus dans $P \otimes_R S$, le S -module $P \otimes_R S$ est donc non nul ce qui achève la démonstration. \square

De ce résultat, nous déduisons que l'image réciproque de \mathcal{U} par $\text{Spec } R \rightarrow \mathcal{U}$ est le sous-foncteur du premier type défini par $\text{Ann } P$ et par conséquent \mathcal{U} est un sous-foncteur ouvert de $\Gamma_i(V)$. Il ne nous reste maintenant plus qu'à établir que de tels sous-foncteurs recouvrent $\Gamma_i(V)$. Pour cela il suffit, par définition d'un recouvrement, de travailler sur les k -algèbres qui sont des corps. Nous considérons à nouveau la base \mathcal{B} précédemment fixée de l'espace vectoriel V . Nous construisons alors tous les espaces vectoriels possibles engendrés par $n-i$ vecteurs distincts de \mathcal{B} . Nous obtenons ainsi une famille finie $\{W_j\}_j$ d'espaces vectoriels de dimension $n-i$ de V . Ensuite, nous construisons, comme précédemment une famille (finie) de foncteurs \mathcal{U}_j à partir des espaces $U_j \simeq V/W_j$ et des projections $V \rightarrow U_j$ construites via les vecteurs de la base \mathcal{B} . Soit maintenant K une k -algèbre qui est un corps et M un K -point de $\Gamma_i(V)$. La base \mathcal{B} est évidemment une base de V_K , par suite on peut exprimer une base (nous sommes en effet sur un corps) de M à partir des vecteurs de \mathcal{B} . Il est alors clair que parmi tous les espaces W_j , il en existe au moins un tel que $(W_j)_K \cap M = \{0\}$ (pour des raisons de dimension) et par conséquent, M est un K -point du foncteur \mathcal{U}_j associé. Nous avons donc bel et bien un recouvrement (fini)

²⁰En effet, un élément x de P s'annule dans P_{\wp} si et seulement si il existe u dans $P \setminus \wp$ qui annule x . Par suite, si P est finiment engendré, $P_{\wp} = P[(P \setminus \wp)^{-1}] = 0$ si et seulement si P est annulé par un élément de $P \setminus \wp$ (cf [E, page 60]).

de $\Gamma_i(V)$ par des sous-foncteurs ouverts. De là, $\Gamma_i(V)$ est un foncteur représentable et la variété qui le représente (sa représentation géométrique) est donc recouverte par une famille finie (composée de $C_n^{n-i} = C_n^i$ éléments, C_n^i représentant le nombre de combinaisons possibles d'un ensemble de i éléments dans un ensemble de n) de variétés affines, toutes isomorphes à un espace vectoriel de dimension $i(n-i)$ (la dimension de l'espace vectoriel $\text{Hom}_k(U, U')$), il s'agit donc nécessairement de la grassmannienne des i -espaces au sens usuel.

Si maintenant nous munissons en plus l'espace vectoriel V d'une application k -bilinéaire $f: V \times V \rightarrow W$ où W est également un k -espace vectoriel de dimension finie. Il est alors possible de définir un sous-foncteur de $\Gamma_i(V)$, à savoir $\Gamma_i(V, f)$ le sous-foncteur des **sous-espaces totalement isotropes** de dimension i de V , en posant comme ensemble de ses R -points ($R \in \mathfrak{Alg}(k)$) :

$$\Gamma_i(V, f)(R) = \{M \in \Gamma_i(V)(R) \mid f_R(M, M) = 0\}$$

où f_R est l'application R -bilinéaire induite par f . Ce sous-foncteur est un sous-foncteur fermé de $\Gamma_i(V)$. En effet, si nous nous donnons une transformation naturelle $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ et que nous appelons M le R -points associé, nous posons alors $P = f_R(M, M)$ et nous avons,

$$M \in \Gamma_i(V, f)(R) \iff P = 0.$$

Si $\varphi: R \rightarrow S$ est un homomorphisme de k -algèbres, en désignant par $\varphi^W: W_R \rightarrow W_S$ l'homomorphisme induit par φ , nous avons alors

$$M \otimes_R S \in \Gamma_i(V, f)(S) \iff \varphi^W(P) = 0.$$

En effet, M étant un R -module de type fini et f_S une application S -bilinéaire, $f_S(M \otimes_R S, M \otimes_R S)$ est l'extension de $f_R(M, M)$ à S via φ , c'est-à-dire l'image de P par φ^W . Pour conclure, nous allons utiliser un argument que nous réutiliserons par la suite et auquel nous ferons référence en parlant d'**argument standard**. De la description précédente, nous déduisons que l'image réciproque de $\Gamma_i(V, f)$ par la transformation naturelle $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_i(V)$ admet comme ensemble de S -points ($S \in \mathfrak{Alg}(k)$),

$$\{\varphi \in \text{Spec } R(S) \mid \varphi^W(P) = 0\}.$$

Il est clair que P n'est pas nécessairement un idéal mais par contre, c'est un sous-module du R -module libre W_R . Nous pouvons donc fixer une partie génératrice de W_R afin de pouvoir exprimer les éléments de P à partir de coordonnées c de R dans cette base. Le fait que $\varphi^W(P) = 0$ implique donc que $\varphi(c) = 0$ pour toute coordonnée c et par suite, ce sont ces coordonnées qui constituent l'idéal de R recherché. Le sous-foncteur $\Gamma_i(V, f)$ est donc fermé puisque son image réciproque

par une transformation naturelle est un foncteur du second type. Dans ce chapitre, nous utiliserons cette définition dans le cas où $V = W = O$, une algèbre d'octonions et où f est la multiplication de l'algèbre²¹. Pour le lecteur souhaitant plus de détails concernant ce formalisme, ces définitions ou encore les techniques employées, nous lui conseillons la lecture de l'article [Kar01, §9 p. 23].

Nous allons maintenant pouvoir donner les définitions explicites de $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ en terme de foncteurs de points. Ces définitions sont donc la version fonctorielle des définitions classiques que le lecteur pourra, par exemple, consulter dans [Sch62, §6 p. 207] ou dans [Fau72, (D) p. 5] et que nous avons déjà succinctement abordées précédemment.

2.3 Foncteurs de points associés aux variétés d'un groupe de type G_2

Dans les définitions de $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$, les éléments mis en jeu, nous l'avons déjà signalé, sont tous de trace nulle. Par conséquent, nous pouvons nous restreindre à l'hyperplan $H = \ker T$ au lieu de travailler sur O tout entier et ce même si, lorsqu'il s'agit d'effectuer le produit de deux éléments, le résultat est toujours vu comme un élément de O . De ces simples constatations, nous obtenons pour tout élément R de $\mathfrak{Alg}(k)$, les définitions allégées suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\alpha_1)(R) &= \{D \in \Gamma_1(H)(R) \mid \forall u, v \in D, uv = 0\}, \\ \mathcal{X}(\alpha_2)(R) &= \{P \in \Gamma_2(H)(R) \mid \forall u, v \in P, uv = 0\}\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)(R) = \{(D, P) \in \mathcal{X}(\alpha_1)(R) \times \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid D \subset P\}$$

où $\Gamma_1(H)$ et $\Gamma_2(H)$ désignent donc respectivement le foncteur grassmannienne des droites et des plans de H .

Regardons maintenant ces définitions d'un peu plus près. Nous avons déjà fait remarquer que tous les éléments x de O vérifient l'équation (1.7), c'est-à-dire que

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0.$$

Par conséquent la définition de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ devient

$$\mathcal{X}(\alpha_1)(R) = \{D \in \Gamma_1(H)(R) \mid \forall u \in D (q|_H)_R(u) = 0\}$$

²¹Dans ce cas là, il est clair que le module $P = f_R(M, M)$ est déjà un idéal de R .

où $(q|_H)_R$ désigne la forme quadratique q restreinte à H et étendue à R . Toujours pour alléger les notations, nous posons $q' = q|_H$. Nous avons déjà utilisé le fait qu'un module projectif (de rang 1) définit un faisceau cohérent qui est localement libre (de rang 1). Par conséquent, la condition $uv = 0$ est localement équivalente à $su^2 = 0$ (car puisque le module est libre de rang 1, il existe un scalaire s tel que $v = su$) et en vertu de l'équation (1.7) est donc équivalente à $q'(u) = 0$. Cette équivalence étant vraie localement, elle l'est également globalement et ainsi il devient clair que

$$\mathcal{X}(\alpha_1) = \Gamma_1(H, q').$$

Soit en d'autres termes, $\mathcal{X}(\alpha_1)$ est le foncteur des droites isotropes de H ou encore, plus géométriquement parlant, c'est une quadrique projective de dimension 5. Ce résultat a déjà été mis en évidence par M. DEMAZURE (cf. [Dem77, §2 (c)]). Il s'agit d'un des quelques cas où des variétés homogènes projectives associées à deux groupes algébriques bien distincts sont isomorphes. En ce qui nous concerne, cet article présente aussi un autre intérêt. Il nous apprend en effet que $\text{Aut}(\mathcal{X}(\alpha_1)) \simeq \text{SO}(q')$ et que $\text{Aut}(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq G$. Donc les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$, ayant des groupes d'automorphismes différents, ne sont pas isomorphes en tant que variétés. Pourtant, comme nous le verrons au chapitre 4, dans une catégorie plus « large » que celle des variétés (celles des correspondances), $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ seront des objets isomorphes.

Concernant maintenant $\mathcal{X}(\alpha_2)$, nous constatons là encore que tout ses points sont des plans totalement isotropes. En effet, ils sont de trace nulle et le produit de deux éléments quelconques est également nul. Ainsi, en vertu des équations (1.7) et (1.8), à savoir que

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0$$

et que

$$xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x, y) = 0,$$

nous constatons alors que $q(x) = 0 = B_q(x, y)$, c'est-à-dire que tous les éléments sont isotropes et orthogonaux deux à deux. En revanche un plan totalement isotrope constitué d'éléments de trace nulle n'appartient pas forcément à $\mathcal{X}(\alpha_2)$. En effet, dans ce cas là les formules (1.7) et (1.8) nous indiquent juste que $x^2 = 0$ et $xy + yx = 0$ ce qui n'implique pas que $xy = yx = 0$. Par exemple, dans la base normale (1.9), le module libre engendré par f_1 et f_2 est bien isotrope et vérifie les conditions requises car $f_1 f_2 + f_2 f_1 = 0$ pourtant $f_1 f_2 = -e_3$ et n'est par conséquent pas nul. En conclusion, contrairement à ce qui se passe dans le cas de $\mathcal{X}(\alpha_1)$, nous ne pouvons pas simplifier plus la définition de $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Chapitre 3

Décomposition cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

Dans tout ce chapitre, notre corps de base k est toujours de caractéristique différente de deux et par k -algèbre, nous désignons un objet de $\mathfrak{Alg}(k)$. Là encore, nous allons travailler avec des variétés (leurs foncteurs de points en fait) déployées. En conséquence le lecteur peut supposer que k est algébriquement clos, même si ce n'est pas indispensable. D'autre part, nous désignons par $\mathrm{CH}^*(Y)$, le **groupe de CHOW** (gradué par la codimension en tant qu'anneau) associé à une k -variété algébrique lisse Y .

Dans une première section, nous allons construire une **structure cellulaire** pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Ce genre de construction ne nous semble pas très répandu dans la littérature classique traitant de la géométrie algébrique. Aussi, nous nous livrerons à de courts rappels afin de bien cerner notre propos. Entre autres choses, nous introduirons une construction parallèle à celle des structures cellulaires, celles des **variétés de SCHUBERT**. Nous utiliserons également tout l'arsenal des systèmes de racines dont nous avons déjà fait usage au chapitre précédent. Outre le fait que cette décomposition nous permet de retrouver la structure de groupe de CHOW $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ de $\mathcal{X}(\alpha_2)$, elle nous donnera également de précieuses informations sur la rationalité de certains cycles. En seconde section, nous allons utiliser les résultats connus, que nous rappellerons, sur la structure d'anneau de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ pour déterminer celle de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$.

La notion de structure cellulaire est légèrement évoquée dans [F1] et plus largement développée et exploitée dans [Kar01], dont nous recommandons vivement la lecture à toute personne souhaitant en savoir plus sur cette question. Concernant l'anneau de CHOW, la référence classique est [F1] et là encore nous conseillons [Bou] en ce qui concerne les systèmes de racines.

3.1 Structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

On rappelle qu'une variété X est dite **lisse** si elle est **géométriquement régulière** (i.e. **régulière** sur la clôture algébrique du corps de base) et **complète** si elle est **propre** sur k (cf. [H, p. 208 et p. 105] pour plus de détails concernant ces deux notions). Les variétés avec lesquelles nous allons travailler étant projectives, elles sont donc complètes, la notion de variété complète « généralisant » en quelque sorte celle de variété projective (cf. [Mu, §9 p. 54]). Nous désignons donc par X une telle variété lisse et complète et une **structure cellulaire** de X est la donnée d'une **filtration**

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

par des sous-variétés fermées X_i telles que les différences $X_i \setminus X_{i-1}$, pour i parcourant l'ensemble $\{0, \dots, n\}$, soient des espaces affines. Par la suite, nous appellerons ces différences les **cellules** de la variété X . L'intérêt d'une telle filtration réside dans le fait que les **classes modulo l'équivalence rationnelle** (voir section 3.2 pour une définition) des sous-variétés X_i engendrent librement sur \mathbb{Z} le groupe de CHOW de X (voir par exemple [F1, ex. 1.9.1]).

De façon équivalente, on peut définir la structure cellulaire comme la donnée d'une famille $\{C_i\}_i$ d'espaces affines localement fermés¹ dans X tels que $X = \coprod_i C_i$ (réunion disjointe). Le passage de l'une à l'autre de ces définitions se fait de façon très naturelle. En effet, de la filtration on déduit la famille d'espaces affines en considérant les cellules de X , et réciproquement on peut reconstruire une filtration en prenant $X_i = \overline{C}_i$, l'adhérence \overline{C}_i de C_i étant définie naturellement comme l'intersection de toutes les sous-variétés fermées de X contenant C_i . Dans le meilleur des cas, on peut alors ordonner les variétés X_i de façon à former une chaîne d'inclusions, sinon il faut « rajouter » des cellules à certaines variétés pour créer des variétés intermédiaires et former ainsi une filtration. Cette construction fonctionne bien de façon abstraite, mais en pratique elle peut s'avérer très difficile à mettre en œuvre. D'autre part, une telle structure n'existe pas toujours. En effet, une conique anisotrope d'un plan projectif (qui est bien une variété projective lisse) n'en admet pas. En ce qui nous concerne, nous savons que lorsque $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée (i.e. lorsque l'algèbre des octonions O l'est) une telle structure existe. Ce résultat a été établi dans [Köc91] pour toutes les variétés projectives homogènes associées à un groupe déployé sur le corps de base k . La démonstration de ce résultat s'appuie sur les systèmes de racines et la **décomposition de BRUHAT** d'un tel groupe et de ses sous-groupes paraboliques. Les cellules sont alors définies via les racines du groupe, toutefois il n'y a pas là d'interprétation géométrique de ces cellules. En revanche ce résultat permet également d'affirmer que les grassmanniennes admettent également

¹Nous rappelons qu'un espace est dit **localement fermé** lorsqu'il est fermé dans un ouvert de l'espace total.

une structure cellulaire en tant que variétés homogènes projectives sous l'action du groupe spécial linéaire. Mais comme nous venons de le dire, cette description n'est pas très géométrique ni très exploitable pour des calculs explicites aussi, nous allons avoir recours à une description plus géométrique et historiquement très connue, celle des **cellules** et de **variétés de SCHUBERT**.

Nous allons nous contenter de définir ces notions dans le cas particulier de $\Gamma_2(H)$ qui est le seul dont nous ayons besoin. Les variétés et cellules de SCHUBERT de $\Gamma_2(H)$ se définissent à partir d'un drapeau complet de H , c'est-à-dire d'une filtration

$$H = V_7 \supset V_6 \supset V_5 \supset V_4 \supset V_3 \supset V_2 \supset V_1 \supset V_0 = \{0\}$$

où pour tout indice i de l'ensemble $\{1, \dots, 7\}$, V_i est un k -espace vectoriel de dimension i . Ensuite, nous considérons la famille Λ de tous les couples d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, tels que $5 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Les variétés de SCHUBERT de $\Gamma_2(H)$ ont alors pour ensemble des R -points ($R \in \mathfrak{Alg}(k)$)

$$X_\lambda(R) = \{M \in \Gamma_2(H)(R) \mid \text{rg}(M \cap (V_{5+i-\lambda_i})_R) \geq i, 1 \leq i \leq 2\},$$

où la notation $(V_i)_R$ désigne comme au chapitre précédent le R -module libre $V_i \otimes_k R$. Ainsi, nous avons par exemple $X_{(0,0)} = \Gamma_2(H)$ et $X_{(1,1)} = \Gamma_2(V_6)$. Les X_λ sont des sous-variétés algébriques fermées de $\Gamma_2(H)$. Un moyen de le prouver est d'utiliser l'argument standard pour la définition des sous-foncteurs. En effet, donnons-nous une transformation naturelle $\text{Spec } R \rightarrow \Gamma_2(H)$ où R est une k -algèbre et M le R -point correspondant. Nous posons alors $P_1 = \bigwedge^2(M \cap (V_{6-\lambda_1})_R)$, le carré extérieur de $M \cap (V_{6-\lambda_1})_R$ et $P_2 = \bigwedge^3(M \cap (V_{7-\lambda_2})_R)$ le cube extérieur de $M \cap (V_{7-\lambda_2})_R$. Si maintenant φ est un k -homomorphisme de R dans une autre k -algèbre S , nous désignons par $\varphi^{\wedge 2V} : V_R \rightarrow V_S$ et par $\varphi^{\wedge 3V} : V_R \rightarrow V_S$ les homomorphismes de modules libres qu'elle induit et nous avons par définition

$$M \otimes_R S \in X_\lambda(S) \iff \varphi^{\wedge 2V}(P_1) = 0 = \varphi^{\wedge 3V}(P_2).$$

Ainsi, par l'argument standard, l'image réciproque de la variété X_λ par cette application est l'intersection de deux sous-foncteurs fermés de $\text{Spec } R$.

Si on pose maintenant $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$ et que l'on munit l'ensemble Λ de la relation d'ordre partiel

$$\lambda \supset \mu \iff \lambda_1 \geq \mu_1 \text{ et } \lambda_2 \geq \mu_2,$$

on a alors

$$X_\lambda \supset X_\mu \iff \lambda \subset \mu.$$

Les **cellules de SCHUBERT** C_λ de $\Gamma_2(H)$ sont par suite définies comme les différences $X_\lambda \setminus X_\mu$ où $\lambda \subset \mu$ et $|\lambda| = |\mu| + 1$. Une telle cellule C_λ est un espace affine

de dimension $10 - |\lambda|$ qui est un **ouvert dense** de X_λ . On a également

$$X_\lambda = \overline{C}_\lambda = \coprod_{\mu \supset \lambda} C_\mu$$

Il n'est pas dans notre intention de démontrer ces résultats ici. En effet, la littérature sur ce sujet est très abondante bien que dans la plupart des cas les ouvrages traitent du cas où le corps de base est le corps des nombres complexes \mathbb{C} , ce qui n'est pas vraiment un obstacle dans la mesure où nous travaillons dans une situation où les objets sont déployés. Les références possibles sont alors [Man, §3.2 p. 111] et [F2, §9.4 p. 145]. Pour un corps de base quelconque, le lecteur pourra consulter [F1, §14.6 p. 266].

Le lecteur s'est sûrement rendu compte que la notation utilisant les couples d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, bien que rebutante de prime abord, est très pratique pour manipuler ces objets. Toutefois, la relation d'ordre sur les λ étant partielle, elle ne permet pas en l'état de définir une filtration. Pour cela il nous faudrait, comme nous l'avons déjà signalé, « recoller » des cellules et des variétés de SCHUBERT ensembles. Toutefois, connaître en détail la structure cellulaire de $\Gamma_2(H)$ sous la forme d'une filtration n'est pas indispensable pour ce que nous avons à faire. En effet, l'adhérence des cellules, c'est-à-dire ses variétés de SCHUBERT sont déjà des représentants des générateurs de $\text{CH}^*(\Gamma_2(H))$ (cf. par exemple [F1, §14.7 p. 271]). Nous les avons d'ailleurs toutes reproduites sur le diagramme 3.1 en les classant par dimension décroissante (la plus grande en haut, la plus petite en bas) et en représentant les inclusions directes (i.e. sans variété intermédiaire) par un trait. Le lecteur ne manquera pas de remarquer l'axe de symétrie formé par les variétés de dimension 5.

Si nous nous sommes donné autant de mal pour expliciter les générateurs de $\text{CH}^*(\Gamma_2(H))$, c'est dans le but d'en faire l'intersection avec $\mathcal{X}(\alpha_2)$ afin d'obtenir une structure cellulaire plus explicite (et plus « géométrique »). Le lecteur remarquera qu'en général, même lorsqu'une variété X admet une structure cellulaire et que Y est une sous-variété fermée de X , l'intersection de la structure cellulaire de X avec Y ne donne pas nécessairement une structure cellulaire pour Y . Il suffit pour s'en convaincre de considérer à nouveau l'exemple d'une conique projective anisotrope incluse dans un plan projectif. En effet, le plan projectif est en fait la grassmannienne des droites d'un espace de dimension 3 et admet à ce titre une structure cellulaire (d'ailleurs dans ce cas là ses variétés de SCHUBERT sont totalement ordonnées et forment une vraie filtration), pourtant la conique n'en admet pas une pour autant. Le fait que cela fonctionne dans ce cas là est donc assez exceptionnel. Par ailleurs, si nous sommes tant attaché à la définition explicite de cette structure c'est que grâce à elle nous allons pouvoir établir que certains cycles de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ sont **rationnels**.

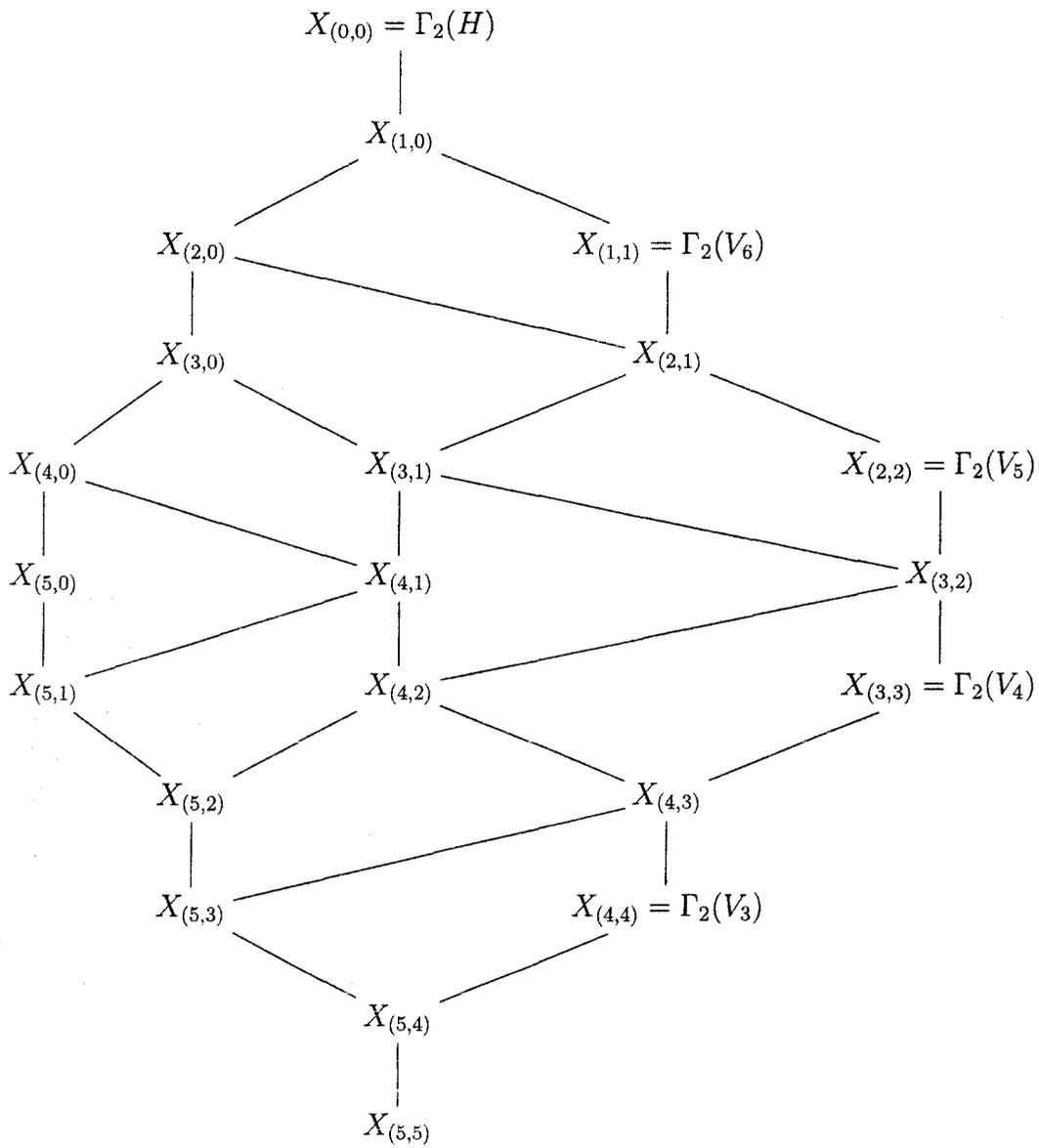


FIG. 3.1 – Variétés de SCHUBERT de $\Gamma_2(H)$

A priori, il ne nous reste plus maintenant qu'à intersecter $\mathcal{X}(\alpha_2)$ avec les X_λ . Toutefois, cela revient à comparer 20 intersections pour réellement différencier les éléments et reconstituer une filtration. Aussi, nous préférons exploiter un peu plus les résultats de [Köc91] afin de savoir dès maintenant, de combien de termes la filtration sera constituée et de quelle dimension seront ces termes. Pour cela nous allons revenir sur les systèmes de racines.

Nous reprenons les notations de la section 2.1 du chapitre 2. Par G , nous désignons donc un groupe semi-simple adjoint et déployé. Nous choisissons un tore maximal T ainsi qu'un sous-groupe de BOREL B le contenant. La décomposition de BRUHAT de G (voir par exemple [Bor, Th p. 193]) est alors

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

où W désigne le groupe de WEYL de G . Si P_Θ désigne un sous-groupe parabolique de G associé au sous-ensemble Θ de $\Sigma(T, \mathfrak{b})$, il vient alors

$$P_\Theta = \coprod_{w \in W_\Theta} BwP$$

où W_Θ est² le sous-groupe de W engendré par les réflexions s_α associées aux éléments α de l'ensemble $\Sigma(T, \mathfrak{b}) \setminus \Theta$. Nous avons en effet déjà signalé dans le chapitre 2 que le groupe W était engendré par les réflexions s_α associées à un élément α de $\Sigma(T, \mathfrak{b})$. Par conséquent, pour tout élément w de W , il existe des réflexions $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_t}$ telles que $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$. De plus, parmi les décompositions possibles, il en existe une qui est minimale en terme de produit de réflexions. Cette décomposition minimale est alors appelée **décomposition réduite** (voir par exemple [Bou, ch. IV §1.4 p. 14]). On peut ainsi à l'aide d'une telle décomposition réduite définir une fonction $l: W \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à un élément $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$ de W , sa **longueur**, c'est-à-dire le nombre minimum de réflexions qui interviennent dans sa décomposition réduite, soit $l(w) = t$ dans notre exemple. On pose également $l(id) = 0$. Nous définissons³ alors l'ensemble suivant

$$W^\Theta = \{w \in W \mid l(ws_\alpha) = l(w) + 1, \forall \alpha \in \Sigma(T, \mathfrak{b}) \setminus \Theta\}.$$

De là, l'application

$$\begin{aligned} W^\Theta \times W_\Theta &\rightarrow W \\ (w, w') &\mapsto ww' \end{aligned}$$

²Comme dans le chapitre précédent, on notera W_α au lieu de $W_{\{\alpha\}}$ le sous-groupe associé à un seule racine α .

³Là encore, nous noterons juste W^α en lieu et place de $W^{\{\alpha\}}$.

est bijective (voir⁴ par exemple [Köc91, prop. 1.1 p. 364]) et on a de plus $l(ww') = l(w) + l(w')$ pour tout couple (w, w') de $W^\Theta \times W_\Theta$. Dès lors, on obtient la décomposition suivante :

$$X_\Theta = \coprod_{w \in W^\Theta} BwP/P = \coprod_{w \in W^\Theta} C_w.$$

La variété C_w étant une cellule de SCHUBERT de X_Θ , par conséquent isomorphe à un espace affine qui de plus, est de dimension $l(w)$ (cf. [Köc91, prop. 1.3 p. 365]). Dès lors, comme dans le cas d'une grassmannienne, l'adhérence \overline{C}_w d'une telle cellule est une sous-variété dont la classe modulo équivalence rationnelle fait partie d'un système de générateurs libres du groupe de CHOW de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ (cf. [Köc91, Cor. 1.5 p. 365]).

Appliquons maintenant ces résultats à notre groupe G (adjoint, semi-simple et déployé) de type G_2 . Son groupe de WEYL est, nous le rappelons, engendré par s_{α_1} et s_{α_2} , les réflexions associées aux deux racines simples de G . C'est un groupe d'ordre 12 puisqu'il agit simplement transitivement sur l'ensemble des racines du système de racines de G (voir l'illustration 2.2 du système de racines de G au chapitre 2). D'autre part, $s_{\alpha_1} \cdot s_{\alpha_2}$ et $s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_1}$ sont deux rotations d'ordre 6 reliées entre elles par la relation

$$(s_{\alpha_1} \cdot s_{\alpha_2})^i = (s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_1})^{6-i}$$

pour tout indice i de l'ensemble $\{0, \dots, 6\}$ (ce sont des rotations d'angles inverses). Dès lors, nous pouvons donner la décomposition réduite de tous les éléments de W , à savoir

$$\begin{array}{cc} s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} \\ s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} & s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \\ s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} & s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \\ (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2 & (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2 \\ s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} & s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \end{array}$$

et enfin

$$\begin{aligned} (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 &= (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^3 = -id \\ (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^6 &= (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^6 = id \end{aligned}$$

Nous avons également donné la décomposition de l'élément neutre id de W , même si ce n'est pas sa décomposition minimale puisque $l(id) = 0$. On note au passage que

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} &= s_{3\alpha_1 + \alpha_2}, & s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} &= s_{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} &= s_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, & s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} &= s_{2\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

⁴Compte tenu du fait que nous avons pris la convention inverse de celle de [Köc91] dans la définition des sous-groupes paraboliques P_Θ , il convient de remplacer Θ par son complémentaire dans $\Sigma(T, \mathfrak{b})$ dans l'article original, mais cela ne change en rien le résultat final.

De là, nous avons

$$W_{\alpha_2} = \{s_{\alpha_1}, (s_{\alpha_1})^2 = id\}$$

et ainsi, nous trouvons que $l(ws_{\alpha_1}) = l(w) + 1$, si et seulement si w a une écriture réduite qui se termine par s_{α_2} . Il s'ensuit alors que

$$W^{\alpha_2} = \{id, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}, s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}, (s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^4, s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\},$$

qui est un ensemble à 6 éléments. Nous savons donc que nous devons rechercher 6 éléments et que les cellules associées sont de dimensions 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Revenons maintenant à nos considérations précédentes. Dans le cas d'une grassmannienne le choix du drapeau de départ importe peu pour la définition de ses variétés de SCHUBERT, en effet, même si celles-ci changent suivant le drapeau, leur classe dans l'anneau de CHOW reste quant à elle, la même. En revanche, ce choix est primordial si l'on veut obtenir une vraie structure cellulaire pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$. En l'occurrence, pour construire ce drapeau nous partons d'une base normale (cf. (1.9)) de notre algèbre d'octonions déployée O et nous munissons H d'une base qui s'en déduit. Concrètement nous avons

$$H = \text{Vect}\{e_1, f_2, f_3, e = e_0 - f_0, e_3, e_2, f_1\}$$

où $\text{Vect } S$ est le k -espace vectoriel engendré par les éléments de l'ensemble S . Dès lors, le drapeau que nous en déduisons est le suivant :

$$\begin{aligned} V_7 &= H \\ &\cup \\ V_6 &= \text{Vect}\{f_2, f_3, e, e_3, e_2, f_1\} \\ &\cup \\ V_5 &= \text{Vect}\{f_3, e, e_3, e_2, f_1\} \\ &\cup \\ V_4 &= \text{Vect}\{e, e_3, e_2, f_1\} \\ &\cup \\ V_3 &= \text{Vect}\{e_3, e_2, f_1\} \\ &\cup \\ V_2 &= \text{Vect}\{e_2, f_1\} \\ &\cup \\ V_1 &= \text{Vect}\{f_1\} \\ &\cup \\ V_0 &= \{0\}. \end{aligned}$$

À partir de ce drapeau, nous construisons donc les variétés de SCHUBERT X_λ de $\Gamma_2(H)$ avant d'en prendre l'intersection avec $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Il est tout d'abord bien évident que

$$\mathcal{X}(\alpha_2) = X_{(0,0)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

Ensuite, pour toute k -algèbre R , le R -module libre P_1 engendré par les vecteurs e_1 et f_2 est un élément de $\mathcal{X}(\alpha_2)(R)$ puisque par définition ce sont deux éléments isotropes de trace nulle et que d'après le lemme 2, $e_1 f_2 = 0$. Or cet élément n'appartient pas à $\mathcal{X}_{(1,0)}(R)$. Par conséquent nous avons

$$X_{(0,0)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2) \neq X_{(1,0)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

De même, le R -module libre P_2 engendré par les vecteurs e_1 et f_3 est pour les mêmes raisons que précédemment un élément de $\mathcal{X}(\alpha_2)(R)$. De plus, il appartient à $X_{(1,0)}$ mais plus à $X_{(3,1)}(R)$. Ainsi, là encore

$$X_{(1,0)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2) \neq X_{(3,1)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

Toujours pour les mêmes raisons, le R -module libre P_3 engendré par les vecteurs f_2 et e_3 est bien un élément de $(X_{(3,1)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2))(R)$ mais en revanche, il n'appartient plus à $X_{(4,2)}(R)$, donc plus à $(X_{(4,2)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2))(R)$ et par conséquent

$$X_{(3,1)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2) \neq X_{(4,2)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

En considérant ensuite le R -module libre P_4 engendré par les vecteurs f_3 et e_2 , nous constatons que là encore, il s'agit d'un élément de $(X_{(4,2)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2))(R)$ qui n'est plus dans $X_{(5,4)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2)(R)$ et de là nous avons

$$X_{(4,2)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2) \neq X_{(5,4)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

Enfin, en considérant le R -module libre P_5 engendré par les vecteurs e_3 et f_1 , nous avons là encore un élément de $(X_{(5,4)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2))(R)$ qui n'appartient plus à $(X_{(5,5)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2))(R)$ et en conséquence nous avons

$$X_{(5,4)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2) \neq X_{(5,5)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2).$$

Ainsi, nous venons de construire 5 sous-variétés distinctes de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. De plus, étant donné que

$$X_{(0,0)} \supset X_{(1,0)} \supset X_{(3,1)} \supset X_{(4,2)} \supset X_{(5,4)} \supset X_{(5,5)},$$

les 5 sous-variétés ainsi construites forment également une filtration. Pour simplifier

la suite de notre travail, nous posons donc pour toute k -algèbre R ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_5(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap \Gamma_2(H)(R) \\
&= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \\
\mathcal{X}_4(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(1,0)}(R) \\
&= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_7)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_5)_R) \geq 1\} \\
\mathcal{X}_3(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(3,1)}(R) \\
&= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_6)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_3)_R) \geq 1\} \\
\mathcal{X}_2(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(4,2)}(R) \\
&= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_5)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_2)_R) \geq 1\} \\
\mathcal{X}_1(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(4,2)}(R) \\
&= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_3)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_1)_R) \geq 1\} \\
\mathcal{X}_0(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(5,5)}(R) \\
&= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_2)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_1)_R) \geq 1\}
\end{aligned}$$

Le lecteur remarquera que nous aurions pu remplacer $X_{(3,1)} \cap \mathcal{X}(\alpha_2)$ par l'intersection de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ avec n'importe quelle variété comprise strictement entre $X_{(1,0)}$ et $X_{(3,1)}$, comme par exemple $X_{(4,7)}$ où $X_{(2,1)}$ et ce, sans que cela ne change la filtration. Il en est bien entendu de même pour toutes les cellules où plusieurs choix étaient possibles. Par ailleurs, il est bien clair que ces sous-variétés sont fermées, il suffit pour s'en convaincre de répéter presque mot pour mot ce que nous avons dit pour démontrer que les X_λ étaient fermées dans $\Gamma_2(H)$ en utilisant l'argument pour la définition des sous-foncteurs. Maintenant que nous avons une filtration, il nous faut vérifier que les différences sont bien des cellules, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'espaces affines ayant les dimensions attendues, afin d'avoir effectivement une décomposition cellulaire. Pour commencer, nous introduisons la notation suivante pour désigner les différences :

$$\forall i \in \{0, \dots, 5\} \quad \mathcal{X}_{(i|i-1)} = \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}_{i-1}$$

avec la convention $\mathcal{X}_{-1} = \emptyset$. Il ne nous reste maintenant plus qu'à établir le résultat suivant :

Lemme 4. $\forall i \in \{0, \dots, 5\}$,

$$\mathcal{X}_{(i|i-1)} \simeq \mathbb{A}^i$$

où \mathbb{A}^i désigne le foncteur espace affine de dimension i .

Démonstration. Dans son fonctionnement, la preuve est la même pour toutes les cellules. Nous allons par conséquent nous limiter à détailler celle de $\mathcal{X}_{(4|3)} \simeq \mathbb{A}^4$,

pour les autres nous nous contenterons de donner les systèmes d'équations (résolus) correspondants.

On se donne donc R une k -algèbre et nous allons établir qu'il existe une bijection entre $\mathcal{X}_{(4\setminus 3)}(R)$ et R^4 .

Soit $j: V_7 \rightarrow V_7/V_6$ la projection canonique. Donnons-nous P un R -point de $\mathcal{X}_{(4\setminus 3)}$. Dès lors, dire que P est un élément de $\mathcal{X}_{(4\setminus 3)}(R)$ est équivalent à dire que : d'une part l'application j étendue à R et restreinte à P , $(j_R)_{|P}$, est surjective ; d'autre part $\ker(j_R)_{|P} \subset (V_5)_R$; et enfin $(V_5)_R \rightarrow (V_5/V_4)_R$ restreinte à $\ker(j_R)_{|P}$ est un isomorphisme. En conséquence, nous posons $i: (V_5/V_4)_R \hookrightarrow P$ l'application induite par l'isomorphisme $(V_5/V_4)_R \xrightarrow{\sim} \ker(j_R)_{|P}$. Finalement, la situation se résume à la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow (V_5/V_4)_R \xrightarrow{i} P \xrightarrow{(j_R)_{|P}} (V_7/V_6)_R \rightarrow 0.$$

Il en découle que

$$P \simeq (V_5/V_4)_R \oplus (V_7/V_6)_R$$

où l'isomorphisme dépend de la donnée d'une section de $(j_R)_{|P}$. De cet isomorphisme nous déduisons que P est en fait un module libre et par conséquent nous allons pouvoir raisonner à partir des bases des espaces vectoriels V_i . Comme $(V_7/V_6)_R$ est engendré par \bar{e}_1 , classe de e_1 modulo $(V_6)_R$ et $(V_5/V_4)_R$ par \bar{f}_3 , classe de f_3 modulo $(V_4)_R$, une façon générique de remonter ces éléments est de prendre

$$m = m(a, b, c, d, g, h) = e_1 + a \cdot f_2 + b \cdot f_3 + c \cdot e + d \cdot e_3 + g \cdot e_2 + h \cdot f_1$$

et

$$n = n(w, x, y, z) = f_3 + w \cdot e + x \cdot e_3 + y \cdot e_2 + z \cdot f_1$$

où $a, b, c, d, g, h, w, x, y$ et z sont des scalaires. Ces deux éléments forment bien un module libre de rang 2. En fait, ce module est le même si nous remplaçons m par $m - b \cdot n$ et ainsi nous éliminons un scalaire et réduisons le problème. En conséquence et quitte à renommer les scalaires restants, nous pouvons travailler avec

$$m = m(a, c, d, g, h) = e_1 + a \cdot f_2 + c \cdot e + d \cdot e_3 + g \cdot e_2 + h \cdot f_1$$

au lieu de la précédente définition de m . Dans l'ensemble de tous les modules qu'il est possible d'engendrer à partir de m et n en faisant varier la valeur des scalaires, nous nous intéressons au sous-ensemble des modules qui appartiennent à $\mathcal{X}_{(4\setminus 3)}(R)$. Il est clair par définition que m et n sont dans H . Il ne nous reste qu'à vérifier que $m \cdot n = 0$ et $m^2 = n^2 = 0$.

En effectuant les calculs, nous obtenons

$$m \cdot n = 0 \iff \begin{cases} 0 = hw - cz - xg + yd \\ 0 = xc - dw + az \\ 0 = yc + h - gw \\ 0 = cw - z - d \\ 0 = cw - ya \\ 0 = x + aw \\ 0 = -w - a \\ 0 = -y - c \end{cases} \iff \begin{cases} h = c^2 + gw \\ d = cw - z \\ x = w^2 \\ y = -c \\ a = -w \end{cases}$$

ce qui nous laisse déjà les variables c, g, w et z libres. Le calcul suivant nous montre

$$m^2 = 0 \iff 0 = c^2 - h - ag \iff h = c^2 - ag$$

ce qui est trivialement vérifié avec les précédentes relations. Enfin, le dernier calcul nous donne

$$n^2 = 0 \iff 0 = w^2 - x \iff x = w^2$$

qui est là encore une relation déjà présente dans le premier calcul.

Réciproquement, si nous considérons un module libre P engendré par $m = m(-w, c, cw - z, g, c^2 + gw)$ et $n = n(w, w^2, -c, z)$, les calculs précédents montrent directement que $m^2 = n^2 = m \cdot n = 0$ et par conséquent que $P \in \mathcal{X}_{(4 \setminus 3)}(R)$. Nous avons donc mis en bijection $\mathcal{X}_{(4 \setminus 3)}(R)$ et l'ensemble des modules engendrés par $m = m(-w, c, cw - z, g, c^2 + gw)$ et $n = n(w, w^2, -c, z)$ qui est en bijection avec R^4 . Comme annoncé, nous avons ainsi établi que

$$\mathcal{X}_{(4 \setminus 3)} \simeq \mathbb{A}^4.$$

Le calcul des autres cellules se fait en procédant de la même façon aussi, comme annoncé au début de cette preuve, nous allons nous contenter de donner les différents systèmes d'équations et leurs solutions.

En ce qui concerne $\mathcal{X}_{(5 \setminus 4)}$, un module P est un élément de $\mathcal{X}_{(5 \setminus 4)}(R)$ si et seulement si

$$P \simeq (V_7/V_6)_R \oplus (V_6/V_5)_R.$$

Ceci nous donne donc comme générateurs réduits

$$m = m(b, c, d, g, h) = e_1 + b \cdot f_3 + c \cdot e + d \cdot e_3 + g \cdot e_2 + h \cdot f_1$$

et

$$n = n(v, w, x, y, z) = f_2 + v \cdot f_3 + w \cdot e + x \cdot e_3 + y \cdot e_2 + z \cdot f_1$$

vérifiant

$$m \cdot n = 0 \iff \begin{cases} 0 = -gw - bz + yc + vh \\ 0 = hw - cz - xg + yd \\ 0 = cw - z - g - vd \\ 0 = bw - vc - y \\ 0 = xc - h - dw \\ 0 = cw - xb \\ 0 = b - w \\ 0 = x - c \end{cases} \iff \begin{cases} g = cw - z - vd \\ y = w^2 - vc \\ h = c^2 - dw \\ x = c \\ b = w \end{cases}$$

ce qui laisse les variables w, c, v, d et z libres. D'autre part, nous avons

$$m^2 = 0 \iff 0 = c^2 - h - bd \iff h = c^2 - bd$$

et

$$n^2 = 0 \iff 0 = w^2 - y - vx \iff y = w^2 - vx$$

qui sont déjà des résultats impliqués par les équations précédentes. Dès lors, en concluant comme précédemment, nous avons finalement prouvé que

$$\mathcal{X}_{(5 \setminus 4)} \simeq \mathbb{A}^5.$$

Pour $\mathcal{X}_{(3 \setminus 2)}$, un module P appartient à $\mathcal{X}_{(5 \setminus 4)}(R)$ si et seulement si

$$P \simeq (V_6/V_5)_R \oplus (V_3/V_2)_R.$$

Ceci nous donne comme générateurs réduits :

$$m = m(b, c, g, h) = f_2 + b \cdot f_3 + c \cdot e + g \cdot e_2 + h \cdot f_1$$

et

$$n = n(y, z) = e_3 + y \cdot e_2 + z \cdot f_1$$

vérifiant

$$m \cdot n = 0 \iff \begin{cases} 0 = -bz + yc \\ 0 = -cz - g \\ 0 = -b - y \\ 0 = c + z \end{cases} \iff \begin{cases} g = z^2 \\ c = -z \\ b = -y \end{cases}$$

ce qui laisse les variables y, h et z libres. D'autre part, nous avons

$$m^2 = 0 \iff 0 = c^2 - g \iff g = c^2$$

qui est déjà impliquée par les équations précédentes et de plus, $n^2 = 0$ est vraie quelles que soient les valeurs de y et z . Dès lors, nous avons finalement prouvé que

$$\mathcal{X}_{(3\setminus 2)} \simeq \mathbb{A}^3.$$

En ce qui concerne $\mathcal{X}_{(2\setminus 1)}$, un module P est un élément de $\mathcal{X}_{(3\setminus 2)}(R)$ si et seulement si

$$P \simeq (V_5/V_4)_R \oplus (V_2/V_1)_R.$$

Ceci nous donne comme générateurs réduits :

$$m = m(c, d, h) = f_3 + c \cdot e + d \cdot e_3 + h \cdot f_1$$

et

$$n = n(z) = e_2 + z \cdot f_1$$

vérifiant

$$m \cdot n = 0 \iff \begin{cases} 0 = -cz + d \\ 0 = -z + c \end{cases} \iff \begin{cases} d = z^2 \\ c = z \end{cases}$$

ce qui laisse les variables h et z libres. D'autre part, nous avons

$$m^2 = 0 \iff 0 = c^2 - d \iff d = c^2$$

qui est déjà une équation connue et de plus, $n^2 = 0$ est, là encore, vraie quelle que soit la valeur de z . Par conséquent, nous avons bien

$$\mathcal{X}_{(2\setminus 1)} \simeq \mathbb{A}^2.$$

Pour $\mathcal{X}_{(1\setminus 0)}$, un module P appartient à $\mathcal{X}_{(1\setminus 0)}(R)$ si et seulement si

$$P \simeq (V_3/V_2)_R \oplus (V_1)_R.$$

Ceci nous donne comme générateurs réduits :

$$m = m(h) = e_3 + h \cdot f_1$$

et

$$n = f_1$$

et dans ce cas, les équations $m \cdot n = 0$, $m^2 = 0$ et $n^2 = 0$ sont vérifiées quelle que soit la valeur de h . Par conséquent, là encore nous trouvons que

$$\mathcal{X}_{(1\setminus 0)} \simeq \mathbb{A}^1.$$

Enfin, les modules P qui appartiennent à $\mathcal{X}_{(0|-1)}(R) = \mathcal{X}_0(R)$ sont ceux qui sont égaux à $(V_2)_R$ et dès lors, il s'agit bien d'un point affine. Ainsi,

$$\mathcal{X}_{(0|-1)} \simeq \mathbb{A}^0.$$

En résumé, nous avons bien établi que pour tout indice i appartenant à l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$,

$$\mathcal{X}_{(i|i-1)} \simeq \mathbb{A}^i.$$

□

Nous avons donc bien explicitement construit une structure cellulaire pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et les classes modulo équivalence rationnelle de chacun de ces termes forment un système de générateurs libres du groupe $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$. Le point le plus important de cette construction, outre le fait que l'on a une structure cellulaire explicite et géométrique de $\mathcal{X}(\alpha_2)$, est que

$$\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}(\alpha_2) \cap X_{(1,0)}.$$

En d'autres termes, le premier terme non trivial de la filtration, celui qui va correspondre au cycle de codimension un de $\text{CH}^*(X(\alpha_2))$ est égal à l'intersection de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et du générateur en codimension un de la grassmannienne. Ce fait nous permettra au chapitre suivant d'établir la rationalité de ce cycle.

3.2 Anneau de CHOW de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

Nous allons maintenant préciser les choses concernant les groupes de CHOW, dont nous avons déjà parlé sans les définir totalement.

Nous appelons donc X une variété algébrique lisse et complète. Un **cycle de codimension i** sur X est une somme formelle finie

$$\sum_i n_i \{Y_i\}$$

où les Y_j sont des sous-variétés fermées de X de codimension i et les n_i des nombres entiers. Le **groupe des cycles de codimension i** sur X , noté $Z^i(X)$ est le groupe libre sur \mathbb{Z} engendré par les sous-variétés fermées de codimension i de X . À une sous-variété Y de X on fait correspondre le cycle $\{Y\}$ dans $Z^i(X)$. Deux cycles $\{Y\}$ et $\{Z\}$ de codimension i de X sont **rationnellement équivalents** s'il existe un cycle $\{W\}$ de codimension i dans $X \times \mathbb{A}^1$ dont l'intersection est **propre**⁵ avec

⁵C'est-à-dire tel que

$$\text{codim}(W \cap X \times \{p\}) = \text{codim}(W) + \text{codim}(X \times \{p\})$$

où p vaut 0 ou 1.

$X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$, et tel que

$$Y = W \cap X \times \{1\}$$

et

$$Z = W \cap X \times \{0\}.$$

On note \sim_{rat} cette relation d'équivalence et on pose pour tout i dans l'ensemble $\{0, \dots, \dim X\}$

$$\mathrm{CH}^i(X) = Z^i(X) / \sim_{rat}$$

ce qui définit le $i^{\text{ème}}$ **groupe de CHOW** de X . Le **groupe de CHOW total** de X **gradué par la codimension** est alors

$$\mathrm{CH}^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} \mathrm{CH}^i(X).$$

Il est possible de répéter exactement la même construction afin de construire $\mathrm{CH}_*(X)$, le **groupe de CHOW de X gradué par la dimension**. Lorsque X est irréductible, on a alors

$$\mathrm{CH}^i(X) = \mathrm{CH}_{\dim X - i}(X)$$

pour tout i de l'ensemble $\{0, \dots, \dim X\}$. Bien que cela soit un abus de langage, nous parlerons plus souvent de cycle que de classe de cycles. La lissité de X fait que l'intersection des cycles (comptée avec multiplicité) définit, pour tout⁶ i et i' de l'ensemble $\{0, \dots, \dim X\}$, un produit

$$\mathrm{CH}^i(X) \times \mathrm{CH}^{i'}(X) \rightarrow \mathrm{CH}^{i+i'}(X)$$

donnant à $\mathrm{CH}^*(X)$ une structure d'anneau gradué.

Le but de cette section est d'établir, dans le cas déployé, la structure de l'anneau de CHOW de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Pour cela, nous allons déterminer quelles relations vérifient les générateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$, en s'aidant de celles de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. La construction de la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ établie dans la section précédente, où le résultat plus général de [Köc91, Cor. 1.5 p. 365], nous permettent d'affirmer que l'anneau $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ possède un unique générateur par codimension. Ce qu'il nous faut maintenant comprendre, c'est comment ces générateurs se multiplient entre eux. Pour cela, nous allons utiliser le fait que $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ peut être vue comme une fibration projective au-dessus de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ au moyen de l'application suivante définie pour toute k -algèbre R par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2) & \longrightarrow & \mathcal{X}(\alpha_2) \\ (D, P) & \longmapsto & P. \end{array}$$

⁶Si $i + i' > \dim X$ le résultat est nul et appartient à $\mathrm{CH}^{\dim X}(X)$.

En effet, si nous définissons un **fibré trivial** \mathcal{J} au-dessus de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ en posant pour toute k -algèbre R , la fibre au-dessus d'un élément P de $\mathcal{X}(\alpha_2)(R)$ comme étant P lui-même, dès lors comme P est un module projectif, nous pouvons considérer $\mathbb{P}(P)$ l'espace projectif associé qui est, rappelons le, l'ensemble des sous-modules projectifs N de P de rang 1 tels que P/N soit également projectif. Nous définissons ainsi le fibré projectif $\mathbb{P}(\mathcal{J})$ sur $\mathcal{X}(\alpha_2)$. De là, pour toute k -algèbre qui est un anneau local K , nous avons

$$\mathbb{P}(\mathcal{J})(K) = \{(D, P) \mid P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(K) \text{ et } D \subset P\}.$$

Or si $D \subset P$ et en tenant compte du fait que les modules projectifs sont libres sur les anneaux locaux, tous les éléments de D sont donc de trace et de carré nuls, par conséquent P est un élément de $\mathcal{X}(\alpha_1)(K)$ d'où

$$\mathbb{P}(\mathcal{J})(K) = \mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)(K)$$

et ainsi les deux foncteurs sont égaux. En fait, $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ est le fibré projectif associé au fibré vectoriel trivial \mathcal{J} et de plus, cette fibration projective induit une application faisant de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ un $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ -module libre de rang 2 (c.f. [F1, Th. 3.3 b]).

En effet, plus généralement lorsque l'on a un fibré vectoriel E de rang r au-dessus d'une variété lisse X , on pose $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif associé et $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ la projection sur X . On a l'isomorphisme d'anneaux gradués suivant

$$\text{CH}^*(\mathbb{P}(E)) \simeq \text{CH}^*(X)[\xi] / (\xi^r - c_1(E)\xi^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r(E))$$

où pour tout i de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$, $c_i(E)$ est un élément de $\text{CH}^*(X)$ appelé $i^{\text{ème}}$ **classe de CHERN** de E et ξ est le cycle de codimension 1 associé au fibré en droite $\mathcal{O}_E(1)$.

Les classes de CHERN du fibré sont par définition les coefficients de l'équation de rang r que vérifie l'élément ξ . Dans notre cas, cette équation est de degré 2 et nous allons voir qu'il sera inutile de la déterminer. Ainsi nous posons

$$\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) \simeq \text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))[\xi] / (\xi^2 - c_1\xi + c_2).$$

Cette structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ -module maintenant exposée, nous allons l'utiliser pour calculer de deux façons différentes des invariants de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. En comparant les résultats de ces deux calculs nous obtiendrons alors la table de multiplication (partielle) des générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$.

En premier lieu, il nous faut rappeler quelques résultats connus sur la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$.

3.2.1 Relations dans $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$

Là encore, nous allons utiliser les notations de la section 2.1.

En premier lieu, la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ en tant que groupe est déjà connue et a déjà été étudiée, notamment dans [Mar76, Lem. 5.1.1]. Sinon, nous pouvons toujours retrouver ces résultats en exploitant, comme nous l'avons déjà fait, l'article de [Köc91]. Dans tous les cas, on trouve que $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ est un groupe libre sur \mathbb{Z} engendré par douze éléments, un pour chaque racine du groupe de WEYL de G , notre groupe (adjoint, semi-simple et) déployé de type G_2 . En effet, nous avons déjà vu qu'à chaque élément de W on fait correspondre une cellule de dimension égale à la longueur de cet élément, ensuite l'ensemble constitué de l'adhérence de tous ces éléments forme un système de générateurs libres de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. Pour simplifier les notations, nous reproduisons ci-dessous les éléments de W avec à côté la notation adoptée pour le générateur correspondant :

$$\begin{array}{ll}
 h^5 \rightsquigarrow s_{\alpha_2} & g^5 \rightsquigarrow s_{\alpha_1} \\
 h^4 \rightsquigarrow s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} & g^4 \rightsquigarrow s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \\
 h^3 \rightsquigarrow s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} = s_{\alpha_1 + \alpha_2} & g^3 \rightsquigarrow s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} = s_{3\alpha_1 + \alpha_2} \\
 h^2 \rightsquigarrow s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} & g^2 \rightsquigarrow s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} \\
 h^1 \rightsquigarrow s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} = s_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} & g^1 \rightsquigarrow s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} = s_{2\alpha_1 + \alpha_2} \\
 g^6 \rightsquigarrow (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 = (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^3 = id & g^0 \rightsquigarrow (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 = (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^3 = -id
 \end{array}$$

L'indice supérieur de chacun des éléments correspond à sa codimension. En second lieu, il existe une formule due à CHEVALLEY bien que démontrée et publiée par DEMAZURE dans [Dcm74, §4 Cor. 2], que pour notre part nous appellerons ici formule de CHEVALLEY et qui va nous permettre de calculer le produit de n'importe quel couple d'éléments dont l'un au moins est de codimension 1. Cette formule, reproduite avec les notations de l'article original, est :

Formule de CHEVALLEY

$$[X_{w_0 s_\alpha}] \cdot [X_w] = \sum_{\beta \in R_+, l(ws_\beta) = l(w) - 1} \langle \beta^\vee, \varpi_\alpha \rangle [X_{ws_\beta}]$$

Explicitons maintenant cette formule. Tout d'abord, w_0 désigne l'élément de longueur maximale de W , w est un élément quelconque de W et R_+ désigne l'ensemble des racines positives par rapport au choix d'un sous-groupe de BOREL de G , que nous, nous avons noté $\Delta(T, \mathfrak{b})^+$. La notation X_w désigne, comme nous l'avons déjà expliqué, la variété de SCHUBERT correspondant à la cellule définie par la racine w dans la décomposition de BRUHAT de G/B . De là, la notation $[X_w]$ désigne sa classe dans $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. D'autre part, α est une racine simple, ainsi $l(s_\alpha) = 1$ et par conséquent $[X_{w_0 s_\alpha}]$ est de codimension $l(w_0) - l(w_0 s_\alpha) = l(s_\alpha) = 1$.

L'écriture $\langle \beta^\vee, \varpi_\alpha \rangle$ désigne ce que nous avons noté $\beta^\vee(\varpi_\alpha)$ où ϖ_α est l'élément de $E = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tel que, pour tout β de $\Sigma(T, \mathfrak{b})$,

$$\beta^\vee(\varpi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ désigne le delta de KRONECKER.

Si nous traduisons tout ce ci dans notre contexte, nous avons tout d'abord

$$\begin{aligned} \varpi_{\alpha_1} &= \varpi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ \varpi_{\alpha_2} &= \varpi_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \end{aligned}$$

comme on peut aisément le calculer en utilisant le fait que $\alpha_i^\vee(\varpi_j) = \delta_{ij}$ et le fait que $\alpha_1^\vee(\alpha_2) = -3$, $\alpha_2^\vee(\alpha_1) = -1$ (comme nous l'avons déjà calculé pour fabriquer le diagramme de DYNKIN de G en section 2.1) et $\alpha_i^\vee(\alpha_i) = 2$ puisque $s_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i = \alpha_i - \alpha_i^\vee(\alpha_i)\alpha_i$. On retrouve par ailleurs ces résultats dans [Bou, §4.13 p. 221]. Ensuite, nous avons déjà vu que

$$\Delta(T, \mathfrak{b})^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

et que leur écriture réduite est

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1 + \alpha_2} &= s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}, & s_{2\alpha_1 + \alpha_2} &= s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}, \\ s_{3\alpha_1 + \alpha_2} &= s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}, & s_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} &= s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Enfin, comme $w_0 = (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 = (s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^3$, on a donc

$$[X_{w_0 s_{\alpha_1}}] = [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] = [X_{s_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}] = [X_{s_{\varpi_2}}] = h^1$$

et

$$[X_{w_0 s_{\alpha_2}}] = [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] = [X_{s_{2\alpha_1 + \alpha_2}}] = [X_{s_{\varpi_1}}] = g^1.$$

Voyons maintenant comment appliquer cette formule, pour cela nous allons devoir calculer $\beta^\vee(\varpi_1)$ et $\beta^\vee(\varpi_2)$ pour toutes les racines positives β du groupe. En effet, comme l'application $\beta \mapsto \beta^\vee$ n'est pas linéaire, connaître α_1^\vee et α_2^\vee n'est pas suffisant. Il est toutefois bon de noter que par définition on a tout de même $\beta^\vee(\beta) = 2$ pour toute racine β .

Nous allons donc par exemple calculer $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1)$. Dans la base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, les involutions s_{α_1} et s_{α_2} ont pour matrice

$$M(s_{\alpha_1}) = M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$M(s_{\alpha_2}) = M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dès lors, comme $s_{\alpha_1+\alpha_2} = s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$ nous avons

$$M(s_{\alpha_1+\alpha_2}) = M_2M_1M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1+\alpha_2}(\varpi_1) &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Parallèlement, nous savons que par définition

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1+\alpha_2}(\varpi_1) &= \varpi_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 2\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1))\alpha_1 + (1 - (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1))\alpha_2 \end{aligned}$$

ce qui par identification avec le résultat précédent nous donne

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) = 1.$$

En procédant de la même façon pour toutes les racines, nous trouvons finalement que

$$\begin{aligned} \alpha_1^\vee(\varpi_1) &= 1, & \alpha_2^\vee(\varpi_1) &= 0, \\ \alpha_1^\vee(\varpi_2) &= 0, & \alpha_2^\vee(\varpi_2) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) &= 1, & (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) &= 2, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) &= 3, & (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) &= 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) &= 1, & (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_1) &= 1, \\ (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) &= 1, & (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_2) &= 2. \end{aligned}$$

D'autre part, nous allons avoir besoin de déterminer quelles sont les racines positives β telles que $l(ws_\beta) = l(w) - 1$ et ce, pour tous les w possibles, à savoir les dix racines définissant les g^i et les h^i . Par exemple, pour calculer $(h^1)^2$, il nous faut trouver les racines β telles que

$$l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_\beta) = 4.$$

Il est bien évident que nous pouvons d'ores et déjà écarter $\beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$. En

calculant tous les autres produits possibles nous obtenons :

$$\begin{aligned} l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{\alpha_1}) &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_1}) \\ &= l((s_{\alpha_2}s_{\alpha_1})^3) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{\alpha_2}) &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_2}) \\ &= l((s_{\alpha_2}s_{\alpha_1})^2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{\alpha_1+\alpha_2}) &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}) \\ &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{2\alpha_1+\alpha_2}) &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}) \\ &= l((s_{\alpha_2}s_{\alpha_1})^5) = l(s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{3\alpha_1+\alpha_2}) &= l(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2} \cdot s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}) \\ &= l((s_{\alpha_2}s_{\alpha_1})^4) = l((s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^2) = 4. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$l(s_{3\alpha_1+2\alpha_2}s_{\beta}) = 4 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_2 \\ \beta = 3\alpha_1 + \alpha_2. \end{cases}$$

En procédant de la même façon pour tous les autres éléments nous trouvons que :

$$l((s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^2s_{\beta}) = 3 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_2 \\ \beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{\alpha_1+\alpha_2}s_{\beta}) = 2 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_2 \\ \beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\beta}) = 1 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_2 \\ \beta = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{\alpha_2}s_{\beta}) = 0 \iff \beta = \alpha_2$$

et

$$l(s_{2\alpha_1 + \alpha_2} s_\beta) = 4 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_1 \\ \beta = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$l((s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2 s_\beta) = 3 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_1 \\ \beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{3\alpha_1 + \alpha_2} s_\beta) = 2 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_1 \\ \beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_\beta) = 1 \iff \begin{cases} \beta = \alpha_1 \\ \beta = 3\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$$l(s_{\alpha_1} s_\beta) = 0 \iff \beta = \alpha_1$$

Ces calculs préliminaires établis, nous pouvons maintenant effectuer tous les calculs librement. Nous allons commencer par calculer les puissances de g^1 :

$$\begin{aligned} (g^1)^2 &= [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{2\alpha_1 + \alpha_2}}] \\ &= \alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2}] + (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2}] \\ &= 0 + 3 [X_{(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2}] = 3g^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g^1)^3 &= 3g^1 g^2 = 3 [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{(\alpha_2 s_{\alpha_1})^2}}] \\ &= 3(\alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}]) \\ &= 3(0 + 2 [X_{s_{3\alpha_1 + \alpha_2}}]) = 6g^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g^1)^4 &= 3g^1 g^3 = 6 [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{3\alpha_1 + \alpha_2}}] \\ &= 6(\alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] + (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}]) \\ &= 6(0 + 3 [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}]) = 18g^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g^1)^5 &= 18g^1g^4 = 18 [X_{w_0s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}}] (g^1)^5 \\
 &= 18(\alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2}}] + (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1}}]) \\
 &= 18(0 + [X_{s_{\alpha_1}}]) = 18g^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g^1)^6 &= 18g^1g^5 = 18 [X_{w_0s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1}}] \\
 &= 18(\alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{id}]) \\
 &= 18(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant les puissances de h^1 .

$$\begin{aligned}
 (h^1)^2 &= [X_{w_0s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{3\alpha_2+2\alpha_1}}] \\
 &= \alpha_2^\vee(\varpi_1) [X_{(s_{\alpha_2}s_{\alpha_1})^2}] + (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{(s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^2}] \\
 &= 0 + [X_{(s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^2}] = h^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h^1)^3 &= h^1h^2 = [X_{w_0s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{(\alpha_1s_{\alpha_2})^2}}] \\
 &= \alpha_2^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}}] + (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}}] \\
 &= 0 + 2 [X_{s_{\alpha_1+\alpha_2}}] = 2h^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h^1)^4 &= 2h^1h^3 = 2 [X_{w_0s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1+\alpha_2}}] \\
 &= 2(\alpha_2^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}}] + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}}]) \\
 &= 2(0 + [X_{s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}}]) = 2h^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h^1)^5 &= 2h^1h^4 = 2 [X_{w_0s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}}] \\
 &= 2(\alpha_1^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1}}] + (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2}}]) \\
 &= 2(0 + [X_{s_{\alpha_2}}]) = 2h^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h^1)^6 &= 2h^1h^5 = 2 [X_{w_0s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{\alpha_2}}] \\
 &= 2(\alpha_2^\vee(\varpi_1) [X_{id}]) = 2(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer le produit de g^1 avec les h^i . Le lecteur remarquera que dans le cas particulier de g^1h^1 , nous avons le choix de privilégier le produit en utilisant la formule avec g^1 ou avec h^1 . Ici, nous avons choisi d'utiliser la formule de CHEVALLEY avec g^1 mais le lecteur est libre de vérifier que le résultat est le même en utilisant h^1 .

Les calculs nous donnent :

$$\begin{aligned}
g^1 h^1 &= [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}] \\
&= \alpha_2^\vee(\varpi_2) [X_{(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2}] + (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2}] \\
&= [X_{(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2}] + [X_{(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2}] = g^2 + h^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^1 h^2 &= [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^2}] \\
&= \alpha_2^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] + (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] \\
&= [X_{s_{3\alpha_1 + \alpha_2}}] + 3 [X_{s_{\alpha_1 + \alpha_2}}] = g^3 + 3h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^1 h^3 &= [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1 + \alpha_2}}] \\
&= \alpha_2^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] \\
&= [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] + 2 [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] = g^4 + 2h^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^1 h^4 &= [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] = \alpha_2^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_1}}] + (\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_2) [X_{s_{\alpha_2}}] \\
&= [X_{s_{\alpha_1}}] + 3 [X_{s_{\alpha_2}}] = g^5 + 3h^5
\end{aligned}$$

$$g^1 h^5 = [X_{w_0 s_{\alpha_2}}] \cdot [X_{s_{\alpha_2}}] = \alpha_2^\vee(\varpi_2) [X_{id}] = [X_{id}] = g^6$$

Enfin, nous n'avons plus maintenant qu'à calculer le produit de h^1 avec les éléments g^i . ceci nous donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
h^1 g^2 &= [X_{w_0 s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{(s_{\alpha_2} s_{\alpha_1})^2}] \\
&= \alpha_1^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] \\
&= [X_{s_{\alpha_1 + \alpha_2}}] + [X_{s_{3\alpha_1 + \alpha_2}}] = h^3 + g^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^1 g^3 &= [X_{w_0 s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{3\alpha_1 + \alpha_2}}] = \alpha_1^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] + (2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] \\
&= [X_{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}}] + 2 [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] = h^4 + 2g^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^1 g^4 &= [X_{w_0 s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}}] \\
&= \alpha_1^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_2}}] + (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee(\varpi_1) [X_{s_{\alpha_1}}] = [X_{s_{\alpha_2}}] + [X_{s_{\alpha_1}}] = h^5 + g^5
\end{aligned}$$

$$h^1 g^5 = [X_{w_0 s_{\alpha_1}}] \cdot [X_{s_{\alpha_1}}] = \alpha_1^\vee(\varpi_1) [X_{id}] = [X_{id}] = g^6$$

En résumé, la table de multiplication de notre système de générateurs (libres) de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ est :

$$\begin{array}{llll}
 (g^1)^2 = 3g^2 & (h^1)^2 = h^2 & h^1g^2 = g^3 + h^3 & g^1h^2 = g^3 + 3h^3 \\
 (g^1)^3 = 6g^3 & (h^1)^3 = 2h^3 & h^1g^3 = 2g^4 + h^4 & g^1h^3 = g^4 + 2h^4 \\
 (g^1)^4 = 18g^4 & (h^1)^4 = 2h^4 & h^1g^4 = g^5 + h^5 & g^1h^4 = g^5 + 3h^5 \\
 (g^1)^5 = 18g^5 & (h^1)^5 = 2h^5 & h^1g^5 = g^6 & g^1h^5 = g^6 \\
 (g^1)^6 = 0 & (h^1)^6 = 0 & h^1g^1 = h^2 + g^2 &
 \end{array}$$

Comme nous l'avons précédemment annoncé nous allons maintenant calculer de deux façons différentes certains invariants de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$.

3.2.2 Calcul des invariants de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$

Nous désignons tout d'abord par A le sous-anneau de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ engendré par les éléments du groupe $\text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$, c'est-à-dire par les puissances de g^1 et de h^1 . Nous considérons ensuite A^i le groupe abélien libre engendré sur \mathbb{Z} par les éléments de codimension i de A , c'est-à-dire engendré par les polynômes homogènes de degré i en g^1 et h^1 . Par conséquent, d'après la table de multiplication précédemment calculée, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 A^1 &= \text{gr}(g^1, h^1) \\
 A^2 &= \text{gr}((g^1)^2, g^1h^1, (h^1)^2) \\
 &= \text{gr}(3g^2, g^2 + h^2, h^2) \\
 A^3 &= \text{gr}((g^1)^3, (g^1)^2h^1, g^1(h^1)^2, (h^1)^3) \\
 &= \text{gr}(6g^3, 3(g^3 + h^3), g^3 + 3h^3, 2h^3) \\
 A^4 &= \text{gr}((g^1)^4, (g^1)^3h^1, (g^1)^2(h^1)^2, g^1(h^1)^3, (h^1)^4) \\
 &= \text{gr}(18g^4, 12g^4 + 6h^4, 6(g^4 + h^4), 2g^4 + 4h^4, 2h^4) \\
 A^5 &= \text{gr}((g^1)^5, (g^1)^4h^1, (g^1)^3(h^1)^2, (g^1)^2(h^1)^3, g^1(h^1)^4, (h^1)^5) \\
 &= \text{gr}(18g^5, 18(g^5 + h^5), 12g^5 + 18h^5, 6g^5 + 12h^5, 2g^5 + 6h^5, 2h^5) \\
 A^6 &= \text{gr}((g^1)^6, (g^1)^5h^1, (g^1)^4(h^1)^2, (g^1)^3(h^1)^3, (g^1)^2(h^1)^4, g^1(h^1)^5, (h^1)^6) \\
 &= \text{gr}(0, 18g^6, 18g^6, 12g^6, 6g^6, 2g^6, 0)
 \end{aligned}$$

où là encore, comme dans la section 2.1, nous désignons par $\text{gr}(\mathcal{E})$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de \mathcal{E} sur \mathbb{Z} . Il est tout d'abord clair que A^i est un sous-groupe de $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) = \text{gr}(g^i, h^i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$. Par conséquent, nous pouvons, pour tout i de $\{1, \dots, 6\}$, calculer l'indice de A^i dans $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ que nous notons $(\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^i)$.

Ce sont ces nombres entiers qui constituent les invariants recherchés. Il est clair que $A^1 = \text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. D'autre part, h^2 est dans A^2 et $g^2 + h^2$ aussi, donc g^2 appartient à A^2 et par suite nous avons également $A^2 = \text{CH}^2(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. Pour les autres, nous allons procéder par générateurs et relations. Le groupe quotient $\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^3$ est engendré par deux éléments g^3 et h^3 qui vérifient $2h^3 = 0 = 6g^3$ et $3g^3 + 3h^3 = 0 = g^3 + 3h^3$. En faisant la différence des deux dernières relations nous trouvons donc que $2g^3 = 0$, par conséquent les éléments g^3 et h^3 sont d'ordre deux et comme $3g^3 + 3h^3 = 0$, il vient que $g^3 = -h^3 = h^3$ puisque h^3 est un élément d'ordre deux. Par suite, nous pouvons identifier g^3 et h^3 et ainsi

$$\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Pour $\text{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^4$, l'un des générateurs, h^4 , est d'ordre deux et par suite les autres relations deviennent

$$18g^4 = 12g^4 = 6g^4 = 2g^4 = 0.$$

Donc les deux générateurs sont d'ordre deux et ne sont pas liés entre eux, par suite

$$\text{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

En refaisant mot pour mot le même raisonnement pour $\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^5$, nous trouvons que

$$\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^5 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

En ce qui concerne $\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^5$, il possède un seul générateur d'ordre deux et par conséquent nous avons

$$\text{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))/A^6 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En résumé, les invariants recherchés sont donc :

$$\begin{aligned} (\text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^1) &= 1, \\ (\text{CH}^2(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^2) &= 1, \\ (\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^3) &= 2, \\ (\text{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^4) &= 4, \\ (\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^5) &= 4, \\ (\text{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^6) &= 2. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer à nouveau ces indices en utilisant la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ -module de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ et à comparer les résultats.

3.2.3 Calcul de la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$

Pour commencer, nous rappelons que $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ possède un seul générateur par codimension que nous notons h_2^i pour i parcourant l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. Ensuite, nous savons que $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ est un $\text{CH}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ -module libre de rang 2 mais plus précisément cela signifie qu'il admet pour base l'ensemble $\{1, \zeta\}$ où 1 désigne l'élément neutre et ζ est un élément qui vérifie

$$\zeta^2 - c_1 h_2^1 \zeta + c_2 h_2^2 = 0$$

et où c_i désigne la $i^{\text{ème}}$ classe de CHERN du fibré vectoriel associé au fibré projectif au-dessus de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Ainsi, pour i à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$, les groupes $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ correspondent à $\text{gr}(h_2^i, \zeta h_2^{i-1})$ et pour les indices 0 et 6, nous avons $\text{CH}^0(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) \simeq \text{CH}^0(\mathcal{X}(\alpha_2))$, et $\text{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) \simeq \text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2))\zeta$. Nous nous donnons ensuite quatre nombres entiers positifs l, m, n et p tels que

$$(h_2^1)^2 = l h_2^2, \quad (h_2^1)^3 = l m h_2^3, \quad (h_2^1)^4 = l m n h_2^4, \quad (h_2^1)^5 = l m n p h_2^5.$$

Ceci étant posé, nous allons comme précédemment considérer, les sous-groupes A^i exprimés cette fois-ci en fonction de $(h_2^1)^i$ et $\zeta(h_2^1)^{i-1}$. Pour commencer,

$$A^1 = \text{gr}(h_2^1, \zeta)$$

nous avons donc bien

$$(\text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^1) = 1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} A^2 &= \text{gr}((h_2^1)^2, h_2^1 \zeta, \zeta^2) \\ &= \text{gr}(l h_2^2, h_2^1 \zeta, c_1 h_2^1 \zeta - c_2 h_2^2) \\ &= \text{gr}(l h_2^2, c_2 h_2^2, h_2^1 \zeta) \end{aligned}$$

et comme

$$(\text{CH}^2(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^2) = 1$$

nous en déduisons que les nombres l et c_2 sont premiers entres eux. Ce résultat sera d'ailleurs très largement exploité dans les calculs suivants. Concernant le groupe A^3 , nous avons

$$\begin{aligned} A^3 &= \text{gr}((h_2^1)^3, (h_2^1)^2 \zeta, h_2^1 \zeta^2, \zeta^3) \\ &= \text{gr}(l m h_2^3, l h_2^2 \zeta, l c_1 h_2^2 \zeta - m c_2 h_2^3, (l c_1^2 - c_2) h_2^2 \zeta - m c_1 c_2 h_2^3) \\ &= \text{gr}(m h_2^3, h_2^2 \zeta) \end{aligned}$$

d'où

$$(\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^3) = m = 2.$$

Nous calculons maintenant A^4 ,

$$\begin{aligned} A^4 &= \text{gr}((h_2^1)^4, (h_2^1)^3\zeta, (h_2^1)^2\zeta^3, h_2^1\zeta^3, \zeta^4) \\ &= \text{gr}(2lh_2^4, 2lh_2^3\zeta, 2lc_1h_2^3\zeta - 2nc_2h_2^4, 2(lc_1^2 - c_2)h_2^3\zeta - 2nc_1c_2h_2^4, \\ &\quad 2c_1(lc_1^2 - 2c_2)h_2^3\zeta - \frac{2n}{l}(lc_1^2 - c_2)c_2h_2^4) \\ &= \text{gr}(2nh_2^4, 2h_2^3\zeta, \frac{2n}{l}c_2^2h_2^4) \end{aligned}$$

ainsi

$$(\text{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^4) = 2 \text{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2) = 4$$

où $\text{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2)$ désigne le plus grand commun multiple de $\frac{2n}{l}c_2$ et $2n$. Par suite, comme $\text{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2) = 2$, nous avons nécessairement $\text{pgcd}(n, \frac{n}{l}c_2) = 1$ et ainsi $l = n$. Nous calculons maintenant

$$\begin{aligned} A^5 &= \text{gr}((h_2^1)^5, (h_2^1)^4\zeta, (h_2^1)^3\zeta^2, (h_2^1)^2\zeta^3, h_2^1\zeta^4, \zeta^5) \\ &= \text{gr}(2l^2ph_2^5, 2l^2h_2^4\zeta, 2l^2c_1h_2^4\zeta - 2lpc_2h_2^5, 2l(lc_1^2 - c_2)h_2^4\zeta - 2lpc_1c_2h_2^5, \\ &\quad 2lc_1(lc_1^2 - 2c_2)h_2^4\zeta - 2pc_2(lc_1^2 - c_2)h_2^5, \\ &\quad (2l^2c_1^4 - 6lc_1^2c_2 + 2c_2^2)h_2^4\zeta - 2pc_1c_2(lc_1^2 - 2c_2)h_2^5) \\ &= \text{gr}(2ph_2^5, 2h_2^4\zeta) \end{aligned}$$

ainsi

$$(\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^5) = 4p = 4$$

d'où $p = 1$. Enfin, en calculant

$$\begin{aligned} A^6 &= \text{gr}((h_2^1)^6, (h_2^1)^5\zeta, (h_2^1)^4\zeta^2, (h_2^1)^3\zeta^3, (h_2^1)^2\zeta^4, h_2^1\zeta^5, \zeta^6) \\ &= \text{gr}(0, 2l^2h_2^5\zeta, 2l^2c_1h_2^5\zeta, 2l(lc_1^2 - c_2)h_2^5\zeta, 2lc_1(lc_1^2 - 2c_2)h_2^5\zeta, \\ &\quad (2l^2c_1^4 - 6lc_1^2c_2 + 2c_2^2)h_2^5\zeta, (2l^2c_1^5 - 8lc_1^3c_2 + 6c_1c_2^2)h_2^5\zeta) \\ &= \text{gr}(2h_2^5\zeta), \end{aligned}$$

nous trouvons bien que

$$(\text{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) : A^6) = 2.$$

Finalement, la table de multiplication (partielle) de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est

$$\begin{aligned} (h_2^1)^2 &= lh_2^2, \\ (h_2^1)^3 &= 2lh_2^3, \\ (h_2^1)^4 &= 2l^2h_2^4, \\ (h_2^1)^5 &= 2l^2h_2^5. \end{aligned}$$

Malgré tous nos efforts, le nombre l reste donc jusque là indéterminé. Pourtant, nous pouvons signaler que l'image de h_2^1 dans $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ par l'application $pr^*: \text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2)) \rightarrow \text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$, application induite par la fibration projective, est une combinaison de g^1 et h^1 . En d'autres termes,

$$pr^*(h_2^1) = ag^1 + bh^1$$

avec a et b dans \mathbb{Z} , premiers entre eux puisque l'élément $pr^*(h_2^1)$ peut être choisi comme un des générateurs de $\text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. De plus, nous avons

$$lpr^*(h_2^2) = (pr^*(h_2^1))^2 = (3a^2 + 2ab)g^1 + (b^2 + 2ab)h^2,$$

ce qui impose aux nombres a et b d'être pairs si l l'est, ce qui entrerait en contradiction avec le fait que a et b sont premiers entre eux. Par conséquent, l est nécessairement impair et ce fait nous sera très utile par la suite pour établir (la rationalité de) l'isomorphisme motivique. En effet, bien que n'ayant pas totalement déterminé la structure de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$, nous verrons que les informations dont nous disposons maintenant seront suffisantes pour établir l'isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ en toute généralité.

Nous faisons remarquer au lecteur que la quadrique $\mathcal{X}(\alpha_1)$ a elle aussi dans le cas déployé, un seul générateur par codimension que nous allons noter h_1^i , où i décrit l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. Toutefois la table de multiplication de ses générateurs est

$$\begin{aligned} (h_1^1)^2 &= h_1^2, \\ (h_1^1)^3 &= 2h_1^3, \\ (h_1^1)^4 &= 2h_1^4, \\ (h_1^1)^5 &= 2h_1^5. \end{aligned}$$

Par conséquent, il est possible que $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1))$ et $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ soient isomorphes si $l = 1$. Quoi qu'il en soit, nous allons voir que les motifs associés à ces deux variétés sont isomorphes que les anneaux le soient ou non. Le lecteur souhaitant plus de détails sur la façon dont on obtient ces relations entre les générateurs de la quadrique $\mathcal{X}(\alpha_1)$ pourra, par exemple, se rapporter à [Kar90, §2.1].

Chapitre 4

L'isomorphisme motivique

Dans tout ce chapitre, k désigne notre corps de base de caractéristique différente de deux et K une de ses clôtures algébriques. Les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ seront, suivant le contexte, déployées ou non sur k . De plus, dans ce chapitre, $\text{Hom}(X, Y)$ désignera par $\text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)$ le **groupe des correspondances de degré 0**.

Dans une première partie, nous introduirons la **catégorie des correspondances** qui est la catégorie motivique avec laquelle nous allons travailler. Cette section n'est en aucun cas originale et la principale motivation de cet exposé est d'introduire nos notations. Ensuite, dans une seconde partie, nous établissons, pour la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$, un théorème d'isomorphisme analogue à celui qu'a établi M.ROST pour les quadriques. Enfin, en troisième partie, nous établissons dans le cas déployé, un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ avant de prouver la rationalité de la correspondance réalisant cet isomorphisme, rationalité qui établit ainsi l'isomorphisme en toute généralité.

Pour un exposé complet sur les correspondances, nous conseillons la lecture de [F1, §16.1]. Pour la catégorie des correspondances en particulier, le lecteur pourra se référer à [Man68]. En outre, nous nous sommes également très largement inspiré de [Ros90] et [Kar00].

4.1 Correspondances et motifs

Nous désignons ici et pour le reste de ce chapitre par $\mathfrak{Var}(k)$, la catégorie des k -variétés lisses, complètes mais non nécessairement connexes. Nous considérons également que l'ensemble vide \emptyset est un élément de $\mathfrak{Var}(k)$. Nous avons déjà signalé que pour X dans $\mathfrak{Var}(k)$, $\text{CH}^*(X)$ désigne l'anneau de CHOW de X et que, bien que cela soit un abus de langage, nous préférons parler de cycle plutôt que de classes de cycles. D'autre part, nous allons revenir ici sur l'anneau de CHOW $\text{CH}^*(X)$ d'une variété X pour introduire la notion de **correspondance**.

Ainsi, une **correspondance** de X dans¹ Y , où X et Y sont des éléments de $\mathfrak{Var}(k)$, est par définition, un cycle dans l'anneau $\mathrm{CH}^*(X \times Y)$. La composition des correspondances se fait alors de la façon classique suivante (voir par exemple [F1, Défi. 16.1.1]) :

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*(X \times Y) \times \mathrm{CH}^*(Y \times Z) &\longrightarrow \mathrm{CH}^*(X \times Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f = (\mathrm{pr}_{13})_*((f \times Z) \cdot (X \times g)) \end{aligned}$$

où \cdot désigne la multiplication des cycles dans $\mathrm{CH}^*(X \times Y \times Z)$ et $(\mathrm{pr}_{13})_*$ le push-forward de la projection

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{13}: X \times Y \times Z &\longrightarrow X \times Z \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, z). \end{aligned}$$

Soient maintenant des variétés X et Y dans $\mathfrak{Var}(k)$ où Y est supposée connexe (ou d'une façon plus générale **équidimensionnelle**²). On définit alors dans un premier temps une **correspondance de X dans Y de degré p** comme étant un cycle homogène de $\mathrm{CH}^{\dim Y + p}(X \times Y)$. On étend ensuite cette définition au cas d'une variété Y quelconque dans $\mathfrak{Var}(k)$ en désignant par correspondance de degré p les cycles homogènes de $\bigoplus_i \mathrm{CH}^{\dim Y_i + p}(X \times Y_i)$, où les Y_i sont les composantes connexes de Y . Le lecteur notera que si X est également équidimensionnelle, on a alors

$$\bigoplus_i \mathrm{CH}^{\dim Y_i + p}(X \times Y_i) = \bigoplus_j \mathrm{CH}_{\dim X_j - p}(X_j \times Y)$$

où ici aussi, les variétés X_j désignent les composantes connexes de X . Le lecteur prendra garde de ne pas confondre la notion de correspondance de degré p avec le **degré** d'un 0-cycle, notion qui sera également utilisée par la suite. En effet, un 0-cycle d'une variété X est un élément $c = \sum n_P [P]$ dans $\mathrm{CH}^*(X)$ et son degré est alors

$$\mathrm{deg}(c) = \sum_P n_P [k(P) : k].$$

Le lecteur souhaitant de plus amples informations sur ce sujet pourra consulter [F1, Def. 1.4].

Revenons maintenant à la notion de degré d'une correspondance. Lorsque l'on compose des correspondances, les degrés s'ajoutent (comme le lecteur peut par exemple le vérifier dans [F1, Ex. 16.1.1]). Il est ainsi clair que l'ensemble des correspondances de degré 0 est stable par composition et on définit par conséquent la **catégorie des correspondances de degré 0**, notée $\mathfrak{Corr}^0(k)$, qui est une catégorie **additive** dont les objets sont ceux de $\mathfrak{Var}(k)$ et les groupes de morphismes

¹Si $Y = X$ on parlera de correspondance sur X tout court.

²Une variété est dite **équidimensionnelle** lorsque toutes ses composantes irréductibles ont même dimension.

sont tout simplement les correspondances de degré 0. Le lecteur trouvera dans [F1, Ex. 16.1.12] de plus amples renseignements sur la catégorie $\mathbf{Corr}^0(k)$. Nous signalons tout de même que id_X , l'application identité de X dans $\mathbf{Corr}^0(k)$ est donnée par la classe de l'application diagonale sur $X \times X$. D'autre part, nous désignerons par $\text{End}(X)$ le groupe $\text{Hom}(X, X)$ des correspondances de X dans elle-même.

Dans tout cet exposé, nous ne composerons que des correspondances **décomposées** et **homogènes**. En d'autres termes, ces correspondances sont supposées combinaisons linéaires sur \mathbb{Z} de produits de cycles de X , Y et Z , la codimension de chaque membre restant toujours la même. La composition de deux correspondances se calcule alors explicitement grâce au lemme suivant qui est une conséquence immédiate de la définition classique de la composition :

Lemme 5. *Soient X, Y , et Z trois éléments de $\mathfrak{Var}(k)$ et f un cycle de $\text{CH}^*(X)$, g, g' deux cycles de $\text{CH}^*(Y)$ et enfin h un cycle de $\text{CH}^*(Z)$. On suppose également que la variété Y est connexe (ou plus généralement équidimensionnelle) et que les cycles g et g' sont homogènes. On a alors*

$$\begin{aligned} (g' \times h) \circ (f \times g) &= (pr_{13})_*(f \times (g \cdot g') \times h) \\ &= \begin{cases} \deg(g \cdot g')(f \times h) & \text{si } \text{codim}(g) + \text{codim}(g') = \dim Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où $\deg(-)$ désigne ici le degré d'un 0-cycle (voir précédemment).

Par ailleurs, à toute correspondance f de $\text{Hom}(X, Y)$, on peut associer sa **transposé** ${}^t f = \tau_*(f)$ dans $\text{Hom}(Y, X)$ définie à l'aide de la permutation des points :

$$\begin{aligned} \tau : X \times Y &\rightarrow Y \times X \\ (x, y) &\mapsto (y, x). \end{aligned}$$

Enfin, si X est une variété définie sur le corps de base k et \mathbb{L}/k une extension de corps, on désigne par $X_{\mathbb{L}}$ la variété X définie sur \mathbb{L} (i.e. la variété $X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \mathbb{L}$). On dit alors qu'un cycle f de $\text{CH}^*(X_{\mathbb{L}})$ est **défini sur k** si f est dans l'image de l'homomorphisme de restriction

$$\text{res}_{\mathbb{L}/k} : \text{CH}^*(X) \rightarrow \text{CH}^*(X_{\mathbb{L}})$$

correspondant au pull-back du morphisme canonique $X_{\mathbb{L}} \rightarrow X$. De même, on dira qu'une **correspondance est définie sur k** , si elle l'est en tant que cycle. Dans la suite de ce texte, on préférera dire d'un cycle ou d'une correspondance défini sur k qu'il (ou elle) est **rationnelle**.

Ces préliminaires terminés, nous allons maintenant nous employer à prouver que les deux variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathbf{Corr}^0(k)$ et que par conséquent il s'agit bien d'un isomorphisme motivique.

Pour prouver cet isomorphisme, nous allons procéder en trois étapes. Pour commencer, nous allons prouver un théorème de nilpotence pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$ comme M.ROST l'a fait pour le cas des quadriques dans [Ros90]. Ensuite, nous allons exhiber un isomorphisme entre les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ lorsqu'elles sont déployées puis de là, grâce à notre théorème de nilpotence, nous prouverons que l'isomorphisme à lieu en toute généralité.

établissons maintenant notre théorème de nilpotence pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

4.2 Théorème de nilpotence et conséquence

Tout d'abord, nous allons énoncer un résultat établi par M.ROST dans [Ros90, §1]. On désigne donc par X et B deux variétés algébriques lisses sur le corps de base k et $\text{pr}_1: B \times X \rightarrow B$ la première projection. Pour tout élément b de B , $X_b = \text{Spec } k(b) \times_k X$ désigne la fibre au-dessus de b où $k(b)$ est le corps résiduel au point b . à toute correspondance f de $\text{End}(X)$, on peut associer par extension des scalaires un élément f_b de $\text{End}_{\mathcal{O}_{\text{Corr}^0(k(b))}}(X_b)$, l'élément obtenu par changement de base. On a alors

Proposition 2 (M.ROST). *Soit f un élément de $\text{End}(X)$ tel que*

$$(f_b)_* (\text{CH}_i(X_b)) = 0$$

pour tout b dans B et tout i dans $\{0, \dots, \dim B\}$. Alors

$$f^{(1+\dim B)} \circ \text{Hom}(B, X) = 0.$$

Il est clair qu'ici, la puissance de f est prise dans l'anneau $\text{End}(X)$. Nous établissons maintenant le résultat suivant :

Lemme 6. *La variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée, on a alors pour tout indice i dans l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$*

$$\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \bigoplus_{j=0}^i \text{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_1)) \otimes \text{CH}^{i-j}(\mathcal{X}(\alpha_2))$$

et par conséquent

$$\text{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \bigoplus_{i=0}^5 \text{End}_{\mathbb{Z}}(\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))).$$

Démonstration. Tout d'abord, nous savons d'après [Kar01, §7] que $\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$ possède une structure cellulaire que l'on peut déduire de celle de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Pour cela, on munit les couples d'indices (i, j) de $\{1, \dots, 5\} \times \{1, \dots, 5\}$ de la relation d'ordre (partiel)

$$(i', j') < (i, j) \iff i' < i \text{ où si } i' = i \text{ et } j' < j$$

et on définit alors les cellules du produit par

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2))_{(i,j)} &= \bigcup_{(i',j') \leq (i,j)} \mathcal{X}_{i'} \times \mathcal{X}_{j'} \\ &= \mathcal{X}_{i-1} \times \mathcal{X}(\alpha_2) \cup \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j, \end{aligned}$$

le cas d'égalité $(i', j') = (i, j)$ étant bien entendu celui que l'on imagine. De là, il est clair que puisque les classes de cellules engendrent les anneaux de CHOW que pour tout i dans $\{0, \dots, 5\}$ nous avons un isomorphisme

$$\bigoplus_{j=0}^i \mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_2)) \otimes \mathrm{CH}^{i-j}(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2))$$

et qu'en particulier,

$$\mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \bigoplus_{j=0}^5 \mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_2)) \otimes \mathrm{CH}^{5-j}(\mathcal{X}(\alpha_2)).$$

Ainsi, il en découle que

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \bigoplus_{j=0}^i \mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_2)) \otimes \mathrm{CH}^{i-j}(\mathcal{X}(\alpha_2)).$$

De l'existence de la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ nous savons que pour tout i dans $\{1, \dots, 5\}$

$$\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \mathbb{Z}$$

d'où

$$\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)) \otimes \mathrm{CH}^{5-i}(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)))$$

ce qui est bien le résultat annoncé. \square

Ce dernier résultat est en réalité l'analogue³ de [Ros90, Lem. 7]. Il est vrai que M. ROST l'énonce pour les quadriques déployées, il spécifie dans sa preuve que ce résultat est vrai dès que le motif d'une variété s'écrit comme une somme de puissances du motif de TATE. En fait, cette dernière hypothèse est équivalente⁴ pour la variété à posséder une structure cellulaire et c'est précisément cela qui nous à permis de l'établir.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème de nilpotence pour la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Proposition 3 (Théorème de nilpotence). *Soit f un élément de l'anneau $\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ et \mathbb{L}/k une extension quelconque du corps de base k . Si $f_{\mathbb{L}} = 0$ dans $\mathrm{End}_{\mathrm{corr}^0(\mathbb{L})}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}})$ alors il existe un nombre entier n tel que $f^n = 0$.*

³Dans l'article de M. Rost, le résultat est établi sur les dimensions mais comme nous travaillons avec des variétés irréductibles il est clair que c'est totalement équivalent.

⁴C'est faux si la décomposition cellulaire est relative et non totale.

Démonstration. Nous traitons tout d'abord le cas où $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée. Comme nous avons établi que

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \bigoplus_{i=0}^5 \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))),$$

le fait que $f_{\mathbb{L}} = 0$ implique nécessairement que $f = 0$ étant donné qu'une fois déployé, $\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est invariant par extension.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\mathcal{X}(\alpha_2)$ n'est pas déployée et pour commencer, nous allons établir le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 7. *Pour tout x dans $\mathcal{X}(\alpha_2)$, la fibre*

$$\mathcal{X}(\alpha_2)_x = \mathrm{Spec} k(x) \times_k \mathcal{X}(\alpha_2)$$

est déployée.

Démonstration. Il est clair par construction que la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ admet le point x comme point rationnel. En conséquence, il existe au moins un plan P de l'algèbre d'octonions O tel que la trace restreinte à P est identiquement nulle et que le produit de deux éléments quelconques de P est également nul. Nous avons déjà fait remarquer au lecteur (cf. sous-section 2.3) que sous ces conditions, P est totalement isotrope. Ainsi, la forme quadratique q sur O est isotrope et d'après le théorème 1.8.1 de [SV], O est par conséquent déployée. Nous avons donc prouvé que $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ est déployée. \square

Puisque $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ est maintenant déployée, en utilisant ce que l'on a déjà dit en début de preuve, le fait que $(f_x)_{\mathbb{L}} = 0$ implique que $f_x = 0$. Dès lors, grâce à la proposition 2 de M.ROST, où nous prenons $B = \mathcal{X}(\alpha_2)$ et que l'on peut appliquer puisque la condition

$$(f_x)_*(\mathrm{CH}_i(\mathcal{X}(\alpha_2)_x)) = 0$$

est trivialement vérifiée, nous en déduisons que

$$f^6 = 0$$

ce qui établit le résultat. Le nombre entier n valant donc 1 ou 6 selon le déploiement de la variété. \square

Dès lors, nous déduisons de ce résultat notre théorème d'isomorphisme :

Corollaire 3 (Théorème d'isomorphisme). *Sous les hypothèses précédentes, si $f_{\mathbb{L}}$ est un isomorphisme alors f en est également un.*

Démonstration. Tout d'abord, quitte à passer sur une extension plus grande, nous pouvons supposer que $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}}$ est déployée sans rien changer à la conclusion de notre résultat. De là, en utilisant le lemme 6, nous constatons que

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \bigoplus_{i=0}^5 \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)))$$

et par conséquent la correspondance $f_{\mathbb{L}}$ est totalement déterminée par son action sur les groupes $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))$ qui sont, pour toutes les valeurs de i possibles, isomorphes à \mathbb{Z} . Ainsi, $f_{\mathbb{L}}$ satisfait à l'équation $t^2 - 1 = 0$ puisque c'est un isomorphisme de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} , c'est-à-dire que $f_{\mathbb{L}}^2 = (\Delta_2)_{\mathbb{L}}$ où Δ_2 désigne l'élément neutre de $\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ (à savoir, la classe de l'application diagonale de $\mathcal{X}(\alpha_2)$). D'après la proposition 3, nous en déduisons que $f^2 - \Delta_2 = g$, où g est un élément nilpotent et en conclusion $f = \Delta_2 + g$ est par conséquent un automorphisme de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. \square

Depuis que l'auteur a établi ce théorème d'isomorphisme pour le cas particulier de $\mathcal{X}(\alpha_2)$, V.CHERNOUSOV, S.GILLE et A.MERKURJEV ont généralisés ce résultat (et le théorème de nilpotence 3) dans leur prépublication [CGM03, Th. 7.4] où ils établissent qu'il est vérifié pour toutes les variétés homogènes projectives associées à un groupe algébrique.

4.3 Isomorphisme motivique

Il s'agit maintenant d'établir l'isomorphisme motivique que les deux variétés soient déployées ou non. Pour commencer, nous nous placerons dans le cas où les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont déployées. Nous rappelons que cela signifie que l'algèbre d'octonions sur laquelle le groupe de type G_2 agit l'est, ou encore que la forme quadratique q définie sur l'algèbre des octonions est isotrope. Nous allons donc dans un premier temps établir qu'il existe une correspondance de degré 0 qui réalise un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Puis dans un second temps, nous allons à l'aide du théorème d'isomorphisme que nous avons établi dans la section précédente, prouver que cette correspondance est rationnelle ce qui établira alors l'isomorphisme en toute généralité.

4.3.1 Cas déployé

Là encore, commençons par fixer quelques notations. Soit j un entier naturel de l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$, nous appelons h_1^j le générateur du groupe $\mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_1))$ et h_2^j celui de $\mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_2))$. Les relations multiplicatives entre ces générateurs sont classiques dans le cas de la quadrique $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et depuis la sous-section 3.2.3 (presque totalement) déterminées dans le cas de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Pour prouver cet isomorphisme, nous allons exhiber deux correspondances f et g , f dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1), \mathcal{X}(\alpha_2))$ et g

dans $\text{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_2), \mathcal{X}(\alpha_1))$ telles que $g \circ f = \Delta_1$ et $f \circ g = \Delta_2$ où Δ_1 et Δ_2 désignent respectivement la classe de l'application diagonale de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$. En ce qui concerne Δ_1 , cette correspondance est déjà connue,

$$\Delta_1 = \sum_{i=0}^5 h_1^i \times h_1^{5-i}.$$

En revanche, il va nous falloir expliciter Δ_2 .

En guise de préliminaire, signalons au lecteur que, comme les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ ont toutes les deux⁵ une structure cellulaire, $\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$, $\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$ en ont également une que l'on déduit de celle de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ (voir [Kar01, Défi. 7.2]). Nous avons d'ailleurs déjà montré dans la preuve du lemme 6 que cette structure se décrivait en munissant les couples (i, j) de l'ensemble $\{0, \dots, 5\} \times \{1, \dots, 5\}$ d'une relation d'ordre partiel. Ceci nous permet alors d'établir le résultat suivant :

Lemme 8. *Pour tout indice l dans $\{0, \dots, 5\}$, les applications*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{m=0}^l \text{CH}^m(\mathcal{X}(\alpha_i)) \otimes \text{CH}^{5-m}(\mathcal{X}(\alpha_j)) & \rightarrow & \text{CH}^l(\mathcal{X}(\alpha_i) \times \mathcal{X}(\alpha_j)) \\ (f \otimes g) & \mapsto & f \times g \end{array}$$

où i et j parcourent $\{1, 2\}$, sont des isomorphismes.

Démonstration. Dans le lemme 6, nous avons déjà établi ce résultat dans le cas où $i = j = 2$. Pour les cas restant, la démonstration est exactement la même. \square

Ce résultat est en fait plus général, il est en effet vérifié dès que les deux variétés admettent une structure cellulaire.

De ce dernier lemme, nous déduisons ainsi que les générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_i) \times \mathcal{X}(\alpha_j))$ s'expriment en fonction de ceux de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1))$ et $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$. En particulier, nous remarquons qu'en tant qu'anneaux, ils sont sans torsion et retrouvons de cette façon un résultat déjà établi dans [Köc91, Cor. 1.5].

Ceci étant dit, nous sommes maintenant en mesure d'en déduire l'expression de Δ_2 , application diagonale de $\mathcal{X}(\alpha_2)$:

Lemme 9.

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^5 h_2^i \times h_2^{5-i}$$

⁵La structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ bien que non décrite ici est en fait classique et bien connue.

Démonstration. La seule chose à faire ici, est de prouver que la correspondance $\sum_{i=0}^5 h_2^i \times h_2^{5-i}$ agit trivialement sur les générateurs de l'anneau $\text{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2))$.

D'après le lemme 5 nous avons :

$$(h_2^i \times h_2^{5-i}) \circ (h_2^j \times h_2^{5-j}) = \begin{cases} \deg(h_2^{5-j} \cdot h_2^i)(h_2^j \times h_2^{5-i}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\deg(h_2^{5-i} \cdot h_2^i)$ désigne le degré du 0-cycle $h_2^{5-i} \cdot h_2^i$. Dès lors, dans le cas où $i = j$, nous devons donc calculer le produit $h_2^{5-i} \cdot h_2^i$ pour toutes les valeurs de j possibles, à savoir 0, 1 et 2. Il est tout d'abord clair en vertu de ce que nous avons calculé que

$$h_2^0 \cdot h_2^5 = h_2^5 \cdot h_2^0 = h_2^5$$

et que

$$h_2^1 \cdot h_2^4 = h_2^4 \cdot h_2^1 = h_2^5.$$

Dans le cas restant, c'est-à-dire $j = 2$, nous calculons tout d'abord

$$\begin{aligned} 2h_2^2 \cdot h_2^3 &= (h_2^1)^2 \cdot h_2^3 \\ &= h_2^1 \cdot 2h_2^4 \\ &= 2h_2^5 \end{aligned}$$

et par conséquent nous en déduisons que

$$h_2^2 \cdot h_2^3 = h_2^3 \cdot h_2^2 = h_2^5,$$

en vertu de quoi nous sommes en mesure de conclure que

$$\deg(h_2^{5-j} \cdot h_2^j) = \deg(h_2^5) = 1$$

pour tout indice j de l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. En effet, puisque $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée, nous avons $h_2^5 = [\mathcal{X}_0]$ et il est clair que $[k(\mathcal{X}_0) : k] = 1$. De là, nous en déduisons que pour tout indice j ,

$$\left(\sum_{i=0}^5 h_2^i \times h_2^{5-i} \right) \circ (h_2^j \times h_2^{5-j}) = h_2^j \times h_2^{5-j}$$

et de l'unicité de l'élément neutre nous pouvons conclure que

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^5 h_2^i \times h_2^{5-i}.$$

□

L'élément neutre maintenant connu, nous allons donc expliciter la correspondance réalisant l'isomorphisme motivique dans le cas déployé.

Proposition 4. *La correspondance*

$$J = \sum_{i=0}^5 h_1^i \times h_2^{5-i}$$

de l'ensemble $\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) = \text{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1), \mathcal{X}(\alpha_2))$, réalise un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dont l'inverse est la correspondance transposée ${}^t J$.

Démonstration. Nous allons prouver que $J \circ {}^t J = \Delta_2$. Pour cela nous utilisons une fois encore le lemme 5 pour calculer :

$$(h_1^i \times h_2^{5-i}) \circ (h_2^j \times h_1^{5-j}) = \begin{cases} \deg(h_1^{5-j} \cdot h_1^i)(h_2^j \times h_2^{5-i}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et là encore nous avons

$$\deg(h_1^{5-j} \cdot h_1^i) = \deg(h_1^5) = 1$$

puisque

$$\begin{aligned} (h_1^1)^2 &= h_1^2 \\ (h_1^1)^3 &= 2h_1^3 \\ (h_1^1)^4 &= 2h_1^4 \\ (h_1^1)^5 &= 2h_1^5 \end{aligned}$$

comme le lecteur pourra s'en assurer en consultant [Kar90]. Par conséquent, il vient tout naturellement en développant que

$$J \circ {}^t J = \sum_{i=0}^5 h_2^i \times h_2^{5-i} = \Delta_2.$$

De même, en calculant ${}^t J \circ J$, on trouve en procédant exactement de la même manière et en utilisant les résultats de la preuve du lemme 9, que

$${}^t J \circ J = \Delta_1.$$

Ainsi, J réalise, comme annoncé, un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ puisque cette correspondance possède un inverse à droite et à gauche. \square

L'étape suivante est donc d'établir que la correspondance J est rationnelle. De là, nous expliquerons plus loin en détail comment en appliquant le théorème d'isomorphisme cela nous permet de conclure que l'isomorphisme motivique est aussi réalisé dans le cas anisotrope.

4.3.2 Cas anisotrope

À présent les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont supposées anisotropes (i.e. non déployées) sur le corps de base k . Nous considérons alors \mathbb{K} une clôture algébrique de k (où plus simplement une extension quadratique de k sur laquelle l'algèbre des octonions O est déployée) et les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} = \mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \mathbb{K}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}} = \mathcal{X}(\alpha_2) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \mathbb{K}$ qui sont, elles, déployées. Comme précédemment, nous désignons alors par h_1^i et h_2^i les générateurs respectifs de $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})$ et $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ pour tout i dans l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. Nous annonçons maintenant :

Proposition 5. *La correspondance*

$$J = \sum_{i=0}^5 h_1^i \times h_2^{5-i}$$

de $\text{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) = \text{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}, \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est rationnelle.

Démonstration. Sur le corps \mathbb{K} , les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ sont déployées et admettent par conséquent une structure cellulaire. Nous rappelons donc que d'après le lemme 6,

$$\bigoplus_{i=0}^j \text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}) \otimes \text{CH}^{j-i}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) \simeq \text{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$$

pour tout j dans l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. Dès lors, $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est clairement engendré par les éléments de la forme $h_1^i \times h_2^{j-i}$. Ces préliminaires fixés, nous allons alors procéder en plusieurs étapes pour prouver la rationalité de J . Pour commencer, nous allons démontrer les deux lemmes suivants :

Lemme 10. *Le cycle h_2^1 dans $\text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est rationnel.*

Démonstration. Ce résultat peut être vu comme une conséquence de la construction de la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$. En effet, lorsque nous l'avons calculée (cf. section 3.1), nous avons montré que le premier terme de la filtration admettait pour R -points (où R est un élément de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}(k))$) l'ensemble :

$$\mathcal{X}_4(R) = \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_7)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_5)_R) \geq 1\}$$

et la classe de cette variété modulo équivalence rationnelle est justement notre élément h_2^1 . D'autre part, le groupe de CHOW de la grassmannienne $\Gamma_2(H)_{\mathbb{K}}$ a également un seul générateur en codimension 1, à savoir la variété de SCHUBERT $X_{(1,0)}$ dont nous rappelons que l'ensemble des R -points est précisément

$$X_{(1,0)}(R) = \{P \in \Gamma_2(H)(R) \mid \text{rg}(P \cap (V_7)_R) \geq 2, \text{rg}(P \cap (V_5)_R) \geq 1\}.$$

Nous constatons ainsi que $\mathcal{X}_4(R) = \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap X_{(1,0)}(R)$ pour toute algèbre R de $\mathfrak{Alg}(k)$ et comme nous avons de plus

$$\text{codim}_{\mathcal{X}(\alpha_2)} \mathcal{X}_4 = \text{codim}_{\Gamma_2(H)} \mathcal{X}(\alpha_2) \cap X_{(0,1)}$$

alors, l'image du générateur de $\text{CH}^1(\Gamma(H)_K)$ est exactement $h_2^1 = [\mathcal{X}_4]$. Il nous faut maintenant établir la rationalité de ce cycle. Pour cela, nous considérons les pull-back des extensions des scalaires

$$\mathcal{X}(\alpha_2)_K \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \Gamma_2(H)_K \longrightarrow \Gamma_2(H)$$

c'est-à-dire les applications

$$\text{res}_{K/k}: \text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)) \longrightarrow \text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)_K)$$

et

$$\text{res}_{K/k}: \text{CH}^1(\Gamma_2(H)) \longrightarrow \text{CH}^1(\Gamma_2(H)_K).$$

Il est maintenant entendu qu'une base normale n'existe pas sur le corps de base k , toutefois comme nous l'avons déjà signalé, n'importe quelle base permet de définir toutes les variétés de SCHUBERT d'une grassmannienne et les classes modulo équivalence rationnelle de ces variétés forment un système de générateurs libres de $\text{CH}^*(\Gamma_2(H))$. Dès lors, il est bien clair que

$$\text{CH}^*(\Gamma_2(H)) \simeq \text{CH}^*(\Gamma_2(H)_K)$$

et ainsi en considérant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^1(\Gamma_2(H)_K) & \longrightarrow & \text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)_K) \\ \uparrow & & \uparrow \text{res}_{K/k} \\ \text{CH}^1(\Gamma_2(H)) & \longrightarrow & \text{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)) \end{array}$$

nous en déduisons que le cycle h_2^1 est rationnel. \square

Le lemme suivant est au sens propre le résultat charnière pour établir la rationalité de J .

Lemme 11. *Le cycle $c = h_1^0 \times h_2^3 + h_1^3 \times h_2^0$ de $\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_K \times \mathcal{X}(\alpha_2)_K)$ est rationnel.*

Démonstration. Pour établir la rationalité de c , nous considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_K \times \mathcal{X}(\alpha_2)_K) & \xrightarrow{(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_K} \times p_K)^*} & \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_K(\mathcal{X}(\alpha_2)_K)) \\ \text{res}_{K/k} \uparrow & & \uparrow \text{res}_{K(\mathcal{X}(\alpha_2)_K)/k(\mathcal{X}(\alpha_2))} \\ \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) & \xrightarrow{(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} \times p)^*} & \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_k(\mathcal{X}(\alpha_2))) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les pull-backs par rapport aux morphismes plats

$$id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} \times p: \mathcal{X}(\alpha_1)_{k(\mathcal{X}(\alpha_2))} \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$$

et

$$id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}}: \mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})} \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$$

où p (respectivement $p_{\mathbb{K}}$) est le morphisme point générique de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ (respectivement $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$), c'est-à-dire les morphismes

$$p: \text{Spec } k(\mathcal{X}(\alpha_2)) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_2)$$

et

$$p_{\mathbb{K}}: \text{Spec } \mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}.$$

Par transitivité du produit fibré (cf. [H, p. 89]) nous avons

$$\mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2) \times_{\mathcal{X}(\alpha_2)} \text{Spec } k(\mathcal{X}(\alpha_2)) \quad (4.1)$$

où le produit fibré de $\mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\text{Spec } k(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est réalisé par le morphisme point générique p et par

$$\text{pr}_2: \mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2) \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_2)$$

la projection sur le second facteur. Dès lors, comme dans la démonstration du lemme 7, nous avons en quelque sorte « ajouté » un point rationnel à $\mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2)$. En fait, l'espace topologique sous-jacent de $\mathcal{X}(\alpha_1) \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2) \times_{\mathcal{X}(\alpha_2)} \text{Spec } k(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est exactement la fibre au-dessus du point générique de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ par le morphisme pr_2 . Ainsi, toujours comme dans la preuve du lemme 7, la forme quadratique q est totalement isotrope et par conséquent $\mathcal{X}(\alpha_1)_{k(\mathcal{X}(\alpha_2))}$ est déployée d'où la rationalité de $(h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$.

D'autre part, l'application $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*$ est surjective. En effet, si nous prenons un générateur $g = [x]$ de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})})$ où x est un élément de $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$ (i.e. est tel que $p_{\mathbb{K}}(x) \neq 0$), alors cet élément x peut en particulier être vu comme un élément de $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times_{\text{Spec } k} \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ et sa classe $g' = [x]$ dans $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est telle que $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(g') = g$ (voir aussi [IK00, §5, prop. 5.1]).

De la surjectivité de $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*$, il découle donc qu'il existe un cycle d dans $\text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ qui est défini sur k et tel que

$$(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(d) = (h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}.$$

Nous calculons maintenant l'action de $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*$ sur les éléments engendrant le groupe $CH^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ afin de déterminer une expression générale de d . Ainsi,

$$(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(h_1^i \times h_2^{3-i}) = \begin{cases} (h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})} & \text{si } i = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où il s'ensuit que nécessairement

$$d = h_1^3 \times h_2^0 + \sum_{i=1}^2 a_i h_1^i \times h_2^{3-i} + a h_1^0 \times h_2^3$$

pour certains éléments a_1 , a_2 et a dans \mathbb{Z} .

Ainsi, nous avons donc trouvé une correspondance (de degré 3) qui est rationnelle. De même, nous savons, d'après le lemme 10, que le cycle h_2^1 est rationnel, donc son carré $(h_2^1)^2 = lh_2^2$ l'est également. D'autre part, par un argument de transfert, $2h_2^2$ est aussi rationnel. Plus précisément, si \mathbb{L} désigne une extension finie du corps k et X une k -variété, alors l'extension des scalaires (canonique)

$$X_{\mathbb{L}} \longrightarrow X$$

induit par, respectivement pull-back et push-forward, les applications

$$\text{res}_{\mathbb{L}/k}: CH^*(X) \longrightarrow CH^*(X_{\mathbb{L}})$$

et

$$\text{tr}: CH^*(X_{\mathbb{L}}) \rightarrow CH^*(X)$$

dont la composé

$$\text{tr} \circ \text{res}_{\mathbb{L}/k}: CH^*(X) \longrightarrow CH^*(X)$$

est la multiplication des cycles par $[\mathbb{L} : k] = n$, le degré de l'extension (cf. [F1, Ex. 13.12]). En outre et par définition même, un cycle est rationnel si et seulement si il est dans l'image de $\text{res}_{\mathbb{L}/k}$. Si maintenant on suppose qu'un élément $[x]$ de $CH^*(X_{\mathbb{L}})$ n'est pas rationnel alors l'élément $n \cdot [x]$, lui, le sera. En effet, nous avons

$$\text{tr}(n \cdot x) = \text{tr}(\text{res}_{\mathbb{L}/k}(\text{tr}(x)))$$

d'où

$$\text{tr}(n \cdot x - \text{res}_{\mathbb{L}/k}(\text{tr}(x))) = 0$$

et ainsi, si l'application de transfert tr est injective, nous en déduisons que

$$n \cdot x = \text{res}_{\mathbb{L}/k}(\text{tr}(x)).$$

Par conséquent, $n \cdot x$ est dans l'image de $\text{res}_{\mathbb{L}/k}$ et est dès lors rationnel.

Dans notre cas de figure, nous savons que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ se déploient sur une extension de degré 2 et l'existence d'une structure cellulaire pour ces deux variétés nous assure que les groupes $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_j))$ et $\text{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_j)_{\mathbb{L}})$ sont libres de rang 1 pour tout i dans $\{0, \dots, 5\}$ (et j dans $\{1, 2\}$) ce qui assure l'injectivité du transfert. Nous pouvons donc appliquer le raisonnement pour en déduire comme nous l'avons dit plus haut que $2h_2^2$ est rationnel. Nous avons d'autre part déjà signalé (cf. sous-section 3.2.3) que le nombre l est impair. Nous pouvons donc en déduire que le cycle h_2^2 est lui-même rationnel. Par ailleurs, h_1^1 est aussi un cycle rationnel. En effet, ce résultat est classique et relève du même argument que dans le cas de h_2^1 . Donc comme nous avons aussi que $h_1^2 = (h_1^1)^2$, ce cycle-ci est lui aussi un cycle rationnel. De là, nous en déduisons que les correspondances $h_1^1 \times h_2^2$ et $h_1^2 \times h_2^1$ sont rationnelles. Pour les mêmes raisons, $h_1^0 \times h_2^2$ et $h_1^1 \times h_2^2$ sont également rationnels et comme nous pouvons par ailleurs écrire que

$$2h_1^0 \times h_2^3 = (h_1^0 \times h_2^1) \cdot (h_1^0 \times h_2^2),$$

il s'ensuit que le cycle $2h_1^0 \times h_2^3$ est lui aussi rationnel.

Dès lors, en soustrayant des multiples de ces cycles à d , il en découle que selon la parité de a , soit $h_1^3 \times h_2^0$ est rationnelle, soit $h_1^3 \times h_2^0 + h_1^0 \times h_2^3$ l'est. Dans ce dernier cas, la preuve est terminée. Dans l'autre cas, nous devons refaire exactement le même raisonnement avec $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})}$ au lieu de $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$, avec, cette fois-ci, l'hypothèse que la correspondance $h_1^3 \times h_2^0$ est rationnelle.

Ainsi nous considérons encore une fois le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) & \xrightarrow{(q_{\mathbb{K}} \times \text{id}_{\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}})^*} & \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})}) \\ \uparrow \text{res}_{\mathbb{K}/k} & & \uparrow \text{res}_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})/k(\mathcal{X}(\alpha_1))} \\ \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) & \xrightarrow{(q \times \text{id}_{\mathcal{X}(\alpha_2)})^*} & \text{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_2)_{k(\mathcal{X}(\alpha_1))}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont ici les pull-backs par rapport aux morphismes plats

$$q \times \text{id}_{\mathcal{X}(\alpha_2)} : \mathcal{X}(\alpha_2)_{k(\mathcal{X}(\alpha_1))} \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$$

et

$$q_{\mathbb{K}} \times \text{id}_{\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}} : \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})} \longrightarrow \mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$$

où q (respectivement $q_{\mathbb{K}}$) est, ici, le morphisme point générique de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ (resp. $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$). Par le même argument que précédemment, nous en déduisons que le cycle $(h_2^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})}$ est défini sur $k(\mathcal{X}(\alpha_1))$, et de la surjectivité de $(q_{\mathbb{K}} \times \text{id}_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}})^*$ combinée avec le calcul de son action sur les générateurs de $\text{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$,

nous en déduisons à nouveau l'existence d'une correspondance rationnelle

$$d' = h_1^0 \times h_2^3 + \sum_{i=1}^2 b_i h_1^i \times h_2^{3-i} + b h_1^3 \times h_2^0,$$

où b_1 , b_2 et b sont des éléments de \mathbb{Z} , et telle que

$$(q_{\mathbb{K}} \times id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}})^*(d') = (h_2^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})}.$$

Comme précédemment, les cycles $h_1^1 \times h_2^2$ et $h_1^2 \times h_2^1$ sont rationnels et nous savons maintenant que $h_1^3 \times h_2^0$ l'est également d'où nécessairement $h_1^0 \times h_2^3$ l'est lui aussi. De là nous concluons que la correspondance

$$c = h_1^3 \times h_2^0 + h_1^0 \times h_2^3$$

est rationnelle comme annoncé. \square

Par des arguments similaires aux précédents, nous pouvons en déduire que les cycles $h_1^1 \times h_2^2$ et $h_1^2 \times h_2^1$ sont rationnels. Par conséquent, les correspondances

$$\begin{aligned} (h_1^0 \times h_2^2) \cdot c &= h_1^3 \times h_2^2 + h_1^0 \times h_2^5, \\ (h_1^1 \times h_2^1) \cdot c &= h_1^4 \times h_2^1 + l h_1^1 \times h_2^4, \\ (h_1^2 \times h_2^0) \cdot c &= h_1^5 \times h_2^0 + h_1^2 \times h_2^3, \end{aligned}$$

sont également rationnelles. Enfin, en utilisant à nouveau l'argument de transfert, nous pouvons en déduire que la correspondance $2h_1^1 \times h_2^4 = h_1^1 \times 2h_2^4$ est rationnelle et là encore, comme l est impair,

$$h_1^1 \times h_2^4 + h_1^4 \times h_2^1$$

est rationnelle. La correspondance J étant égale à la somme de trois correspondances, $h_1^3 \times h_2^0 + h_1^0 \times h_2^3$, $h_1^1 \times h_2^4 + h_1^4 \times h_2^1$ et $h_1^5 \times h_2^0 + h_1^2 \times h_2^3$, elle est par voie de conséquence rationnelle. \square

Finalement, le fait que J soit rationnelle signifie donc qu'il existe une correspondance f dans $\text{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1), \mathcal{X}(\alpha_2))$ telle que $f_{\mathbb{K}} = J$. Nous avons par ailleurs prouvé dans la proposition 4 que J établit un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$. De la même façon, la correspondance transposée ${}^t J$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et est également rationnelle en tant que transposée d'une correspondance rationnelle. Ainsi, d'après le théorème d'isomorphisme (cf. corollaire 3), les correspondances $f \circ {}^t f$ de $\text{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ et ${}^t f \circ f$ de $\text{End}(\mathcal{X}(\alpha_1))$ sont des automorphismes motiviques de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1)$ respectivement. Par conséquent, f réalise un isomorphisme motivique de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ dans $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et ${}^t f$ un isomorphisme

motivique de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dans $\mathcal{X}(\alpha_1)$. Le lecteur notera que f et ${}^t f$ ne sont pas nécessairement l'inverse l'une de l'autre. En effet, comme $f \circ {}^t f - id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} = r$ est nulle sur le corps \mathbb{K} , c'est un élément nilpotent et $f \circ {}^t f = id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} + r$ est bien un isomorphisme dont l'inverse est la somme finie $id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} - r + r^2 - \dots$. Il en est bien entendu de même concernant ${}^t f \circ f$.

Nous avons donc enfin prouvé, comme annoncé, que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$, bien que non isomorphes en tant que variétés algébriques lisses, sont motiviquement isomorphes en tant qu'objets de la catégorie des correspondances.

Annexe A

Quelques résultats célèbres et d'autres un peu moins

Dans cette annexe, nous rappelons certains résultats connus de géométrie algébrique (ou théorie des catégories) et d'algèbre commutative et quelques notions peut être moins connues sur les modules projectifs. Nous ne prétendons en aucun cas à l'originalité et c'est uniquement motivé par un souci d'exhaustivité que nous reproduisons ici ces résultats.

Le lecteur souhaitant des informations complémentaires pourra consulter avec profit [E] et [EH] dont l'essentiel de nos résultats sont tirés ou inspirés.

A.1 Lemme de YONEDA et foncteurs de points

Le lemme de YONEDA est un résultat très important effectuant la « liaison » entre des foncteurs représentables d'une catégorie \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie \mathbf{Ens} , des ensembles, et les variétés qui les représentent. Nous rappelons qu'un foncteur contravariant d'ensemble \mathcal{F} est dit **représentable** s'il existe un objet X de la catégorie \mathcal{C} tel que

$$\mathcal{F}(Y) = \text{Hom}(Y, X)$$

pour tout objet Y de \mathcal{C} . Enfin, on désigne par $\mathfrak{F}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ la catégorie des foncteurs contravariants allant de la catégorie \mathcal{C} dans la catégorie des ensembles et par $H_X = \text{Hom}(-, X)$.

Ces différents points étant précisés, nous énonçons le lemme.

Lemme 12 (Lemme de YONEDA). *Soient \mathcal{C} une catégorie et X, X' deux objets de \mathcal{C} .*

1. Si \mathcal{F} est un foncteur contravariant quelconque de la catégorie \mathcal{C} dans la catégorie \mathbf{Ens} , les transformations naturelles entre $\mathrm{Hom}(-, X)$ et \mathcal{F} sont en bijection avec les éléments de $\mathcal{F}(X)$.
2. Si les foncteurs H_X et $H_{X'}$ de la catégorie \mathcal{C} dans la catégorie \mathbf{Ens} sont isomorphes alors $X \simeq X'$. Plus généralement, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(H_X, H_{X'}) \simeq \mathrm{Hom}(X', X),$$

en d'autres termes, le foncteur

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$$

qui envoie X sur H_X réalise une anti-équivalence¹ entre \mathcal{C} et une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$.

Nous reproduisons ici quelques indications de preuves.

Démonstration. On commence par établir le point 1. La bijection envoie toute transformation naturelle

$$\varphi: H_X \rightarrow \mathcal{F}$$

sur l'élément $\varphi(id_X)$ de $\mathcal{F}(X)$, où $id_X: X \rightarrow X$ est l'identité de X . Sa réciproque envoie un élément p de $\mathcal{F}(X)$ sur la transformation naturelle φ qui à tout élément f de $\mathrm{Hom}(Y, X)$ fait correspondre $\mathcal{F}(f)(p)$ dans $\mathcal{F}(Y)$.

Pour le point 2, on applique le point 1 au foncteur $\mathcal{F} = H_{X'}$. □

Nous allons maintenant préciser les choses concernant les foncteurs de points dont nous avons parlé en section 2.2 du chapitre 2. En effet, la définition standard d'un **foncteur de points** est celle d'un **foncteur contravariant** allant de la catégorie des schémas \mathfrak{Sch} dans la catégorie des ensembles. Toutefois, dans cette thèse, nous nous sommes ici limité à travailler sur les k -schémas affines, c'est-à-dire les schémas du type $\mathrm{Spec} R$ où R est une k -algèbre. Le foncteur contravariant Spec réalisant une anti-équivalence de catégories (voir par exemple [EH, Cor. I-41 p. 30]) entre la catégorie des anneaux commutatifs avec unité (respectivement des k -algèbres) et celles des schémas affines (respectivement des k -schémas), nous avons par conséquent défini nos foncteurs de points sur les k -algèbres et ils sont devenus covariants comme composée de deux foncteurs contravariants. Il est par ailleurs tout à fait possible d'adapter la preuve du lemme de YONEDA pour obtenir le même résultat sur des foncteurs covariants. Le choix de se restreindre aux k -schémas affines est motivé par le fait qu'un k -schéma est totalement déterminé par la restriction de son foncteur de points aux k -schémas affines.

¹Une anti-équivalence de catégories est une équivalence de catégories où les flèches sont renversées lorsque l'on passe de l'une à l'autre.

A.2 Le lemme de NAKAYAMA

Ici nous nous contentons d'énoncer le lemme en question sans autre forme de cérémonie, ce résultat étant en effet très classique et se trouvant dans la plupart des ouvrages d'algèbre commutative. L'énoncé suivant est celui de [E, Cor 4.8 p. 124] où le lecteur en trouvera également une preuve. Nous rappelons tout de même qu'on appelle **radical de JACOBSON** d'un anneau R , l'intersection de tous ses idéaux maximaux.

Lemme 13 (Lemme de NAKAYAMA). *Soient \mathfrak{p} un idéal contenu dans le radical de JACOBSON d'un anneau R et M un R -module finiment engendré.*

1. *Si $\mathfrak{p}M = M$, alors $M = 0$.*
2. *Si une famille $\{m_1, \dots, m_n\}$ d'éléments de M ont des images dans $M/\mathfrak{p}M$ qui l'engendrent en tant que R -module, alors la famille $\{m_1, \dots, m_n\}$ engendrent M en tant que R -module.*

A.3 Modules projectifs

Nous allons maintenant traiter succinctement des modules projectifs et des propriétés les concernant, propriétés que nous avons largement utilisées dans cette thèse. Dans toute cette dernière partie, R désigne un anneau commutatif unitaire et noëthérien².

En premier lieu, nous donnons la définition d'un module projectif.

Définition 3. *Soit P un R -module, ce module est dit **projectif** si pour tout épimorphisme (i.e. morphisme surjectif) de R -modules $\varphi: M \rightarrow N$ et tout morphisme $\psi: P \rightarrow N$, il existe un morphisme $\psi': P \rightarrow M$ tel que $\psi = \varphi \circ \psi'$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \swarrow \psi' & \downarrow \psi \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & N
 \end{array}$$

Le lecteur remarquera que cette définition est équivalente à demander que pour tout épimorphisme de R -modules $\varphi: M \rightarrow N$, l'application induite sur les morphismes de R -modules $\text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N)$ soit également un épimorphisme. Nous énonçons maintenant le résultat suivant :

²Cette dernière hypothèse n'est en fait pas nécessaire avant le théorème concernant la caractérisation des modules projectifs.

Lemme 14. Soit $\{P_i\}_i$ une famille finie de R -modules, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Chaque R -module P_i est projectif.
2. La somme directe $\oplus_i P_i$ est un R -module projectif.

Démonstration. Dans toute cette démonstration, P désigne la somme $\oplus_i P_i$ et θ_i l'injection canonique de P_i dans P .

Nous supposons tout d'abord que chaque module P_i est projectif. Nous nous donnons donc un épimorphisme de R -module $\varphi: M \rightarrow N$ ainsi qu'un morphisme $\psi: P \rightarrow N$. Le module P_i étant projectif, il existe un morphisme $\psi_i: P_i \rightarrow M$ tel que $\psi \circ \theta_i = \varphi \circ \psi_i$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 & P_i & \\
 & \swarrow \psi_i & \downarrow \theta_i \\
 & & P \\
 & & \downarrow \psi \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & N
 \end{array}$$

L'application de $\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \prod_i \text{Hom}_R(P_i, N)$ définie par $f \mapsto (f \circ \theta_i)_i$ étant clairement un isomorphisme, il existe un morphisme de ψ' de P dans N tel que pour tout indice i on ait $\psi' \circ \theta_i = \psi_i$. Ainsi, pour tout indice i nous avons

$$(\varphi \circ \psi') \circ \theta_i = \varphi \circ (\psi' \circ \theta_i) = \varphi \circ \psi_i = \psi \circ \theta_i$$

et par conséquent $\varphi \circ \psi' = \psi$ d'où le R -module P est un module projectif.

Nous supposons maintenant que P est un R -module projectif et nous nous donnons un morphisme surjectif $\varphi: M \rightarrow N$ ainsi qu'un morphisme $\psi_i: P_i \rightarrow N$. Nous définissons alors un morphisme ψ de P dans N tel que $\psi \circ \theta_i = \psi_i$ et $\psi \circ \theta_j = 0$ si l'indice j est différent de i (en composant la projection sur P_i avec ψ_i par exemple). Comme P est un R -module projectif, il existe un morphisme ψ' de P dans M tel que $\varphi \circ \psi' = \psi$. Si nous posons $\psi'_i = \psi' \circ \theta_i$, nous avons alors

$$\varphi \circ \psi'_i = \varphi \circ (\psi' \circ \theta_i) = (\varphi \circ \psi') \circ \theta_i = \psi \circ \theta_i = \psi_i$$

et par conséquent P_i est un R -module projectif. En procédant de la même manière pour chaque P_i , on conclut aisément. \square

Le lecteur remarquera qu'il est tout à fait possible d'adapter la preuve au cas d'un produit fini $\prod_i P_i$ de modules. D'autre part un corollaire évident de ce résultat est que tout facteur direct d'un module projectif est un module projectif. Si l'on remarque maintenant que le R -module R est projectif, le résultat précédent

implique également que tout module libre est projectif. Pour voir que R est un R -module projectif, il suffit de se donner un épimorphisme de R -modules $\varphi: M \rightarrow N$ et un morphisme de R -module $\psi: R \rightarrow N$. Ce dernier est en effet défini par $\psi(1)$ dans la mesure où pour tout r de R on a $\psi(r) = r\psi(1)$, dès lors un antécédent de $\psi(1)$ par φ nous fournit un morphisme ψ' tel que $\varphi \circ \psi' = \psi$.

De toutes ces considérations, nous déduisons le résultat suivant qui garantit que la définition des R -modules projectifs donnée dans la section 2.2 du chapitre 2 est bien compatible avec la définition précédente.

Proposition 6. *Soit P un R -module, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. P est un R -module projectif.
2. P est un facteur direct d'un R -module libre.

Démonstration. Nous supposons tout d'abord que le R -module P est projectif. Nous nous donnons un épimorphisme $M \rightarrow P$ où M est un R -module libre (on peut toujours le faire en envoyant les générateurs de M sur des éléments de P) et par conséquent l'application induite $\text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, P)$ est surjective. Par suite, tout morphisme f de $\text{Hom}_R(P, M)$ qui est dans la pré-image de id_P ($\text{id}_P \in \text{Hom}_R(P, P)$) est une section de l'épimorphisme $M \rightarrow P$ et par conséquent, P est un facteur direct de M .

La réciproque est une conséquence immédiate du lemme 14 comme nous l'avons montré en préambule de cette proposition. □

Nous pouvons maintenant énoncer un des résultats les plus importants concernant les modules projectifs.

Théorème 3 (Caractérisation des modules projectifs). *Soit M un module de type fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. M est un module projectif.
2. $M_{\mathfrak{p}}$ est libre pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R .
3. Il existe une partition de l'unité r_1, \dots, r_n de R telle que pour chaque indice i de $\{1, \dots, n\}$, le R_{r_i} -module M_{r_i} est libre.

En particulier, tout module projectif sur un anneau local est libre.

L'énoncé original de [E, th. A3.2 p. 622] utilise un module M de présentation finie sur R un anneau noethérien. Nous avons quant à nous, pour des raisons de cohérence, remplacé cette hypothèse par celle d'un module de type fini ce qui ne pose aucun problème dans la mesure où ces deux notions coïncident dans le cas d'un anneau noethérien. D'autre part, nous nous permettons de proposer ici une démonstration de ce résultat dans la mesure où celle de [E, th. A3.2 p. 622]

est en fait donnée dans l'ouvrage sous forme d'exercices avec indications. Cette démonstration est assez technique et fait parfois appels à d'autres résultats. Notre volonté restant l'exhaustivité, nous avons essayé d'avoir le moins possible recours à des résultats annexes. Malheureusement nous utilisons tout de même deux résultats que nous énonçons ci-dessous sans démonstration. Le lecteur trouvera pour chacun de ces résultats une référence.

† Si M est un R -module de type fini, N un R -module, alors pour toute partie S de R on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1} \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

(voir par exemple [E, prop. 2.10 p. 69]).

†† Soit M un R -module de type fini, si $\varphi: M \rightarrow M$ est un épimorphisme alors c'est un isomorphisme (voir par exemple [E, cor. 4.4 a p. 120]).

Démonstration. Le but de cette preuve est d'établir la principale caractéristique d'un module projectif, à savoir qu'il est localement libre.

Nous prouvons tout d'abord $1 \Rightarrow 2$. Soit \wp un idéal premier de R . Le R -module M étant projectif, c'est un facteur libre d'un certain module libre F . Par conséquent, il est clair que le localisé M_\wp est un facteur libre du module libre F_\wp en vertu de quoi, M_\wp est un module projectif. Nous allons maintenant établir un résultat un peu plus général, à savoir que tout module projectif sur un anneau local est libre. Ainsi, compte tenu du caractère local de R_\wp , le module M_\wp sera libre. Soit m_1, \dots, m_s des éléments de M_\wp qui forment une base du $R_\wp/\wp R_\wp$ -espace vectoriel $M_\wp/\wp M_\wp$. D'après le lemme de NAKAYAMA (que l'on peut appliquer car R_\wp étant local, son idéal maximal est donc clairement contenu dans le radical de JACOBSON), ces éléments engendrent M_\wp en tant que R_\wp -module. Soient maintenant $F = (R_\wp)^s$ un R_\wp -module libre de rang s et $\varphi: F \rightarrow M_\wp$ l'épimorphisme qui envoie le $i^{\text{ème}}$ générateur de F sur m_i . Par construction, φ induit donc un isomorphisme de $F/\wp F$ sur $M_\wp/\wp M_\wp$, ainsi, $\ker \varphi$ est nécessairement un sous-module de $\wp F$. D'autre part, φ est un épimorphisme et comme M_\wp est un module projectif (et que id_{M_\wp} nous fournit un morphisme de M_\wp dans lui-même), φ admet une section. Nous pouvons donc écrire le module F sous la forme $M' \oplus \ker \varphi$ où M' est un R_\wp -module isomorphe à M_\wp . Par suite, $\wp F = \wp M' \oplus \wp \ker \varphi$ et comme $\ker \varphi$ est inclus dans $\wp F$, $F/\wp F = M'/\wp M'$, d'où $\ker \varphi/\wp \ker \varphi = 0$, par suite $\ker \varphi = \wp \ker \varphi$ et conséquence du lemme de NAKAYAMA, $\ker \varphi = 0$. Dès lors, $F = M'$, φ est un isomorphisme et par conséquent M_\wp est un module libre.

Nous établissons maintenant $2 \Rightarrow 3$. Il est clair que l'anneau R_{τ_i} est local et par conséquent, M_{s_i} est un module libre. Le point difficile ici est d'établir l'existence d'une telle partition de l'unité pour R . Il s'agit en fait d'établir une condition de liberté locale plus « forte » que la précédente, plus « forte » dans le sens où l'on trouve un nombre fini d'anneaux locaux « les plus grands possibles » tels que le

localisé de M soit un module libre. Pour construire de tels éléments, nous prenons un idéal premier \wp et nous nous donnons un R -module libre F , tel que F_\wp soit de même rang que M . Ainsi, il existe un isomorphisme $\varphi: F_\wp \rightarrow M_\wp$. Ensuite, nous allons prouver qu'il existe un élément f de R n'appartenant pas à \wp , tel que M_f et F_f sont isomorphes (cela revient donc à « agrandir » la partie multiplicative par rapport à laquelle le localisé de M est libre). Du résultat †, nous déduisons alors qu'il existe un morphisme $\varphi': F \rightarrow M$ tel que $\varphi = \frac{\varphi'}{f_1}$ pour un certain élément f_1 n'appartenant pas à \wp . Comme φ' est un isomorphisme lorsqu'on le localise par rapport à la partie multiplicative définie par \wp , il existe un élément f_2 n'appartenant pas à \wp qui annule coker φ' . On peut répéter le même argument pour l'isomorphisme $\psi = \varphi^{-1}$ et trouver ainsi deux autres éléments f_3 et f_4 n'appartenant pas à \wp et jouant le même rôle pour ψ . Nous posons alors $f_\wp = f_1 f_2 f_3 f_4$ ($f_\wp \notin \wp$) et ainsi, sur R_f , les applications $\varphi' \circ \psi'$ et $\psi' \circ \varphi'$ sont, par constructions mêmes, des épimorphismes (comme composées d'épimorphismes) et par le résultat ††, ce sont donc des isomorphismes. Nous avons donc établi l'existence d'un élément f_\wp pour tout idéal premier \wp de R tel que $M_{f_\wp} \simeq F_\wp$ pour un certain module libre F . D'autre part, les éléments constituant l'ensemble $\{f_\wp \mid \wp \text{ est idéal premier de } R\}$ ne sont évidemment jamais simultanément contenus dans un même idéal premier \wp , en particulier dans aucun idéal maximal et par conséquent l'idéal engendré par ces éléments est R lui-même. L'anneau R étant noethérien, cet idéal est engendré par un nombre fini d'éléments r_1, \dots, r_n de R qui forment donc une partition de l'unité de R . Nous avons donc prouvé l'existence d'une partition de l'unité de R telle que pour tout indice i de $\{1, \dots, n\}$, M_{r_i} soit un module libre.

Nous établissons maintenant $3 \Rightarrow 1$. Tout d'abord, nous allons prouver qu'un élément t d'un R -module N qui s'annule dans chaque N_{r_i} (i.e. $t = 0$ vu comme élément de N_{r_i}) est nécessairement nul. En effet, si t est nul dans N_{r_i} , cela signifie qu'il existe un entier p_i tel que $r_i^{p_i} t = 0$. Ceci étant vrai pour tout indice i , cela signifie que t est annulé par tout les éléments de l'idéal engendré par $\{r_1^{p_1}, \dots, r_n^{p_n}\}$. Or par construction, cet idéal contient une puissance de l'idéal engendré par les r_i , donc en particulier une puissance de 1 et par conséquent il engendre lui aussi l'unité de R . L'élément t est alors nécessairement nul. De là nous déduisons que tout R -module N qui est tel que $N_{r_i} = 0$ pour tout indice i est un module nul. Ceci établi, nous nous donnons maintenant un R -module libre (de rang supérieur ou égal au nombre de générateurs de M) et construisons un épimorphisme $\varphi: F \rightarrow M$ (en envoyant des générateur de F sur des générateurs de M). Nous considérons alors l'application induite $\varphi': \text{Hom}_R(M, F) \rightarrow \text{Hom}_R(M, M)$. Cet homomorphisme est surjectif localement en chaque r_i , le module M_{r_i} étant un module projectif en tant que module libre. Du résultat †, il s'ensuit qu'on a des isomorphismes $\text{Hom}_{R_{r_i}}(M_{r_i}, F_{r_i}) \simeq (\text{Hom}_R(M, F))_{r_i}$ et $\text{Hom}_{R_{r_i}}(M_{r_i}, M_{r_i}) \simeq (\text{Hom}_R(M, M))_{r_i}$ pour tout indice i de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Nous avons donc un homomorphisme de

R -modules qui est localement un épimorphisme, en d'autres termes, le R -module coker φ' est un module qui est nul en tous les localisés par rapport aux parties multiplicatives définies par les r_i , en vertu de ce que nous avons dit plus haut, coker φ' est un module nul et φ' est par conséquent surjective. En conclusion, il existe dans l'image réciproque de id_M par φ' , une section de φ et donc M est un facteur direct du module libre F . Il s'agit donc d'un R -module projectif par la proposition 6.

Nous avons donc prouvé que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, ce qui établit l'équivalence des trois assertions. \square

Cette dernière preuve peut paraître très « alambiquée ». En fait, elle est beaucoup plus « intuitive » si on la considère du point de vu du faisceau cohérent sur $\text{Spec } R$ induit par le module projectif M . Nous conseillons au lecteur peu familier de la théorie des faisceaux et désireux d'en apprendre plus de se rapporter à [E] où il trouvera un exposé général de la théorie, ou encore à [EH] pour un exposé peut-être un peu plus élémentaire.

Bibliographie

- [Bor] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre IV, V et VI, Hermann, Paris, 1968.
- [Br] K. Brown, *Buildings*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag New York-Berlin, 1989.
- [Car14] É. Cartan, *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. Sci. école Norm. Sup. **31**, 263–355, 1914.
- [Car52] É. Cartan, *Œuvres Complètes. Partie I. Groupes de Lie*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [CGM03] V. Chernousov, S. Gille and A. Merkurjev, *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*, Prépublication, 2003. (voir <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/lag/>).
- [Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Scient. éc. Norm. Sup. **7** (4), 53–88, 1974. Collection of Henri Cartan on the occasion of his 70th Birthday, I.
- [Dem77] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (2), 179–186, 1977.
- [DG] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes Algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michel Hazewinkel.
- [E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [EH] D. Eisenbud and J. Harris, *The Geometry of Schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, (2nd edition) 2000.
- [Fau72] J.R. Faulkner, *On the geometry of inner ideals*, J. Algebra **26**, 1–9 1973.

- [F1] W. Fulton, *Intersection Theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [F2] W. Fulton, *Young Tableaux : With Application to Representation theory and Geometry*, London mathematical Society Student Text **35**, Cambridge University Press date??
- [Gar99] R.S. Garibaldi, *Exceptional algebraic groups*, ETH Zürich, Summer Semester 1999
Voir <http://www.mathcs.emory.edu/~skip/classes/eag/eag.html>.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [IK00] O. Izhboldin and N. A. Karpenko, *Some new examples in the theory of quadratic forms*. *Math. Z.* **234** (4), 647–695, 2000.
- [Kar90] N. A. Karpenko, *Algebro-geometric invariants of quadratic forms.*, *Leningrad Math. J.* **2** (1), 119–138, 1991.
- [Kar00] N. A. Karpenko, *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*, *Math. Ann.* **317** (2000) 585–611
- [Kar01] N. A. Karpenko, *Cohomology of relative cellular spaces and isotropic flag varieties*, *St-Petersburg Math. J.* **12**, 1–50, 2001.
- [Köc91] B. Köck, *Chow motif and higher Chow theory of G/P* , *Manuscripta math.* **70** (4), 363–372, 1991.
- [Man68] J. I. Manin, *Correspondences, motifs, and monoidal transformations*, *Math. USSR Sb.* **6** (1968), 439–470
- [Man] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, volume 3 des *Cours spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [Mu] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, *Lectures Notes in Mathematics* **1358**, Springer-Verlag Berlin, 1999.
- [Mar76] R. Marlin, *Comparaison de l'anneau de Chow et de l'anneau de Grothendieck*. Dans le Séminaire de géométrie analytique (École Norm. Sup., Paris, 1974–75), 229–240. Astérisque, n. 36-37. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [MPW96] A. S. Merkurjev, I. Panin, and A. R. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties, I*, *K-Theory* **10** (6), 517–596, 1996.
- [Ros90] M. Rost, *The motive of a Pfister form*. Prépublication, 1990 (voir <http://www.math.ohio-state.edu/~rost/motive.html>).

- [S] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, volume 22 of Pure and Applied Math., Academic Press, New York-London, 1966.
- [Sch62] G. J. Schellekens, *On a hexagonal structure. I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **65** Indag. Math. **24**, 201–217, 1962.
- [SV] T. A. Springer, F.D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, 2000.

