

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN INFORMATIQUE

par

NEUT Sylvain

Implantation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence de Cartan

Thèse soutenue le 16 Octobre 2003

Membres du jury

Président :	Sophie Tison	Professeur, LIFL Université de Lille I
Rapporteurs :	Peter Olver	Professeur, University of Minnesota
	Pierre Rouchon	Professeur, CAS École des Mines de Paris
Examineurs :	Marc Giusti	DR CNRS, École Polytechnique
	Joël Merker	CR CNRS, LATP de Marseille
Directeur :	Michel Petitot	Professeur, LIFL Université de Lille I

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE FONDAMENTALE DE LILLE

Remerciements

Je remercie tout d'abord Michel Petitot qui a dirigé cette thèse. Michel est une personne qui aime le dialogue et dont je salue la jeunesse et l'ouverture d'esprit, sa curiosité scientifique n'a d'égale que son énergie. J'ai beaucoup appris à son contact. Merci Michel.

Gérard Jacob m'a accueilli dans l'équipe de Calcul Formel de Lille. C'est avec grand plaisir que j'ai donné des travaux dirigés en sa compagnie et profité de son expérience. Je souhaite à Gérard une heureuse retraite.

Je remercie Sophie Tison qui a accepté d'être la présidente de ce jury.

Je tiens à remercier Peter Olver et Pierre Rouchon de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Peter Olver a relu le manuscrit en français et ses remarques ont permis d'affiner certains résultats. Je lui sais gré d'avoir fait un exposé le jour de la soutenance. Pierre Rouchon m'a donné l'occasion de lui exposer mes travaux.

Je remercie Marc Giusti et Joël Merker d'avoir fait partie de ce jury. Marc Giusti m'accueille actuellement dans son équipe pour une partie de l'année 2004. J'ai apprécié la collaboration développée avec Joël Merker dans le cadre de cette thèse.

François Boulier m'a encouragé tout au long de mon DEA et de ma thèse et poussé à écrire un premier article. J'ai toujours plaisir à discuter avec lui, son grand sens de l'humour n'y est pas étranger. Merci François.

Je remercie Nour-Eddine Oussous pour sa gentillesse, sa bonne humeur et sa disponibilité.

Je remercie Hoang Minh pour son énergie communicative et sa gentillesse.

Je remercie Rudolph Bkouche pour ses exposés lors de nombreux groupes de travail.

Je remercie Marc Moreno Maza pour son soutien et pour m'avoir invité au Canada après ma thèse. Notre collaboration fructueuse ainsi que nos nombreux et succulents repas furent une très grande joie.

Je remercie Alexandre Sedoglavic pour avoir relu ma thèse.

Merci à Mickaël Bigotte pour son accueil lorsque je suis arrivé dans l'équipe.

Merci à François Lemaire qui a été mon "collègue de bureau" et restera mon ami.

Merci à Stew.

Table des matières

0	Introduction	3
0.1	Résultats	5
1	Rappels de géométrie différentielle	13
1.1	Espaces de jets	13
1.2	Algèbre différentielle extérieure	19
1.3	Solutions d'un système différentiel extérieur	20
1.4	Solutions d'un système différentiel extérieur : existence, dimension . . .	21
1.5	Systèmes différentiels extérieurs avec variables indépendantes	25
1.6	Prolongation d'un système différentiel extérieur	29
2	La méthode d'équivalence de Cartan	33
2.1	Introduction	33
2.2	La catégorie des G -structures	36
2.3	Equivalence de deux systèmes différentiels	43
2.4	Étape 1 : Calcul des équations de structure	44
2.5	Étape 2 : Absorption de la torsion	47
2.6	Étape 3 : Normalisation	50
2.7	Étape 4 : Test d'involution	54
2.8	Étape 5 : Prolongation	56
2.9	L'algèbre différentielle des invariants	58
2.10	Simplification des conditions d'équivalence	59
3	Équivalence et algèbre différentielle	61
3.1	Algèbre différentielle	61
3.2	Nouvelle méthode pour l'équivalence d'équations différentielles	63

3.3	Limites de cette méthode	66
3.4	Utilisation de dérivations non commutatives	68
4	L'équation $y''' = f(x, y, y', y'')$	73
4.1	Formulation du problème	73
4.2	Le semi-invariant I	74
4.3	Le cas $I = 0$	74
4.4	Le cas $I \neq 0$	76
4.5	Linéarisation	77
5	L'équation $y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''')$	81
6	Systèmes d'EDO du second ordre	85
7	Systèmes d'équations aux dérivées partielles	89
7.1	Introduction	89
7.2	Formulation du problème	90
7.3	Systèmes à deux variables indépendantes	91
7.4	Systèmes à n variables indépendantes	92
7.5	Groupe de symétries	93
7.6	Preuve du théorème 17	93
8	Implantation	101
8.1	Le langage choisi	102
8.2	Déclaration d'une G-structure	103
8.3	Absorption de la torsion	110
8.4	Normalisation	112
8.5	Involution	118
8.6	Prolongation	118
8.7	Simplification des invariants	122
8.8	Exemple de script	126
9	Conclusion et perspectives	129

Chapitre 0

Introduction

Développée par Élie Cartan entre 1905 et 1910, la *méthode d'équivalence* [11, 8] est un algorithme permettant de décider si deux systèmes d'équations différentielles se déduisent l'un de l'autre par un changement de coordonnées locales. Cet algorithme suppose que l'on se donne chacun des deux systèmes d'équations (ordinaires ou aux dérivées partielles) ainsi que le (pseudo)groupe des transformations autorisées.

Ainsi on peut, par exemple, calculer les conditions portant sur la fonction f pour que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

se ramène à l'équation

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$$

par un difféomorphisme local quelconque de la forme $X = X(x, y)$ et $Y = Y(x, y)$. La réponse dépend évidemment du groupe des transformations autorisées.

La question de l'équivalence joue un rôle crucial pour l'écriture de nouveaux solveurs d'équations différentielles. Un solveur devrait être capable de trouver par une méthode, si possible systématique, le "bon changement de variables" permettant de ramener le système que l'on *veut* résoudre à un système que l'on *sait* résoudre. Pour les équations *ordinaires*, la pratique la plus courante encore aujourd'hui consiste à examiner si l'équation à résoudre figure dans une liste répertoriée d'équations dont la solution est connue [63]. Pendant longtemps, le livre de Kamke (1976 [31]) contenant environ 250 équations ordinaires du second ordre a servi de référence. Aujourd'hui, le livre de D. Polyanin et F. Zaitsev [51] contient en tout une liste de 2049 équations, ce qui est beaucoup et marque les limites de cette approche.

Bien que Cartan (élève de Lie) ait traité avec succès de nombreux exemples, sa méthode d'équivalence est restée longtemps incomprise des mathématiciens. Ainsi Weyl [61], grand spécialiste de géométrie différentielle a pu dire à propos du livre de Cartan de 1937 [9] :

Nevertheless, I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading. Does the reason lie only in the great French geometric tradition on which Cartan draws, and the style and contents

of which he more or less takes for granted as a common ground for all geometers, while we, born and educated in others countries do not share it ?

Ce sont deux élèves de Cartan, à savoir C. Ehresmann [20] et S. S. Chern [13], qui ont introduit les deux concepts clés de la géométrie différentielle moderne permettant de fonder la méthode : les espaces de jets et les G -structures. Dans les années 60, Singer, Sternberg [58], Guillemin, Kuranishi, Kodaira et Spencer [52] etc. menèrent tout un programme pour tenter d'expliquer *rigoureusement* les calculs menés par Cartan. La notion de G -structure est particulièrement importante puisque la plupart des structures apparaissant en géométrie différentielle sont des G -structures : structure riemannienne, structure symplectique, structure complexe, groupes de Lie etc. En fait, la méthode développée par Cartan fournit pour une G -structure donnée, un système *complet* d'invariants différentiels permettant sa classification *locale*. On peut montrer que l'équivalence de deux systèmes d'équations différentielles se ramène à l'équivalence de deux G -structures. La méthode de Cartan est donc d'une portée tout à fait générale.

À partir des années 80, des mathématiciens américains comme Gardner [25, 26], Kamran [32, 39] et Olver [33, 34, 35] ont commencé à traiter des exemples conséquents en se servant des systèmes de calcul formel existants sans pour autant écrire un logiciel optimisé et structuré de façon à être utilisable par la communauté scientifique. Ces dernières années, la recherche française en calcul formel s'est surtout concentrée sur l'écriture de solveurs d'équations algébriques (bases de Gröbner, triangularisation, etc.) ainsi que sur les techniques d'algèbre différentielle (triangularisation des équations différentielles *à la manière de Ritt* ou théorie de Galois différentielle dite *de Picard–Vessiot*).

Ainsi, la géométrie des équations différentielles (calcul tensoriel, algèbres de Lie, connexions, systèmes hamiltoniens etc.) a été en grande partie négligée par les spécialistes du calcul symbolique bien que la physique relativiste, quantique ou même certains calculs intervenant actuellement en économie [17] soient basés sur l'approche géométrique. Or les géomètres ont résolu *à la main* beaucoup de questions non traitables par l'algèbre différentielle effective, du fait du grossissement des formules.

Cependant, même en géométrie différentielle, les calculs peuvent devenir impraticables. Il est alors inévitable de programmer la méthode d'équivalence de Cartan pour espérer traiter de nouveaux problèmes. Cette thèse s'inscrit dans cette ligne et propose une implantation de l'algorithme de Cartan qui a permis de traiter un certain nombre d'exemples significatifs.

Comme nous le verrons, la méthode d'équivalence de Cartan est un cas particulier de la théorie des systèmes différentiels extérieurs [10]. En effet, décider si deux systèmes d'équations différentielles sont équivalents revient à savoir si un certain système différentiel extérieur a des solutions. Le premier chapitre de cette thèse sera donc consacré à un exposé succinct de cette théorie ainsi qu'à quelques rappels de géométrie différentielle.

Le second chapitre sera consacré à une description de l'algorithme de Cartan. Ce chapitre doit beaucoup aux ouvrages de Gardner [27] et de Olver [50]. Nous tenterons cependant d'y insister de façon simple sur le rapport entre la méthode d'équivalence et la théorie des systèmes différentiels extérieurs évoquée précédemment. Suivront dans les autres chapitres nos différents résultats dont voici une synthèse.

0.1 Résultats

0.1.1 Programmation de la méthode d'équivalence

Le premier résultat de cette thèse est un paquetage Maple qui implante efficacement l'algorithme de Cartan. Ce paquetage contient environ 4500 lignes de code. Pour traiter un problème d'équivalence, l'utilisateur définit une G -structure associée au problème d'équivalence qu'il souhaite résoudre et déroule l'algorithme de Cartan. L'utilisateur garde un contrôle sur les calculs effectués par l'exécution successive de chacune des opérations de base qui constitue une procédure : réduction de la torsion, réduction du groupe structural, prolongation. Les principaux points forts de ce paquetage sont de trois sortes.

- Tout d'abord, une analyse fine des objets en présence et des opérations effectuées a permis d'éviter certains calculs redondants.
- Une deuxième optimisation importante est la manipulation de dérivations non commutatives. En effet, la méthode d'équivalence de Cartan fournit comme nous l'avons vu, un système complet d'invariants. Ceux-ci sont des polynômes différentiels pouvant être très volumineux (plusieurs Méga-octets). Exprimés dans certaines dérivations ayant un sens géométrique (celles-ci ne commutent pas en général), ces invariants sont naturellement compressés.
- Enfin, ces invariants sont parfois très nombreux (au maximum $\frac{m^3-m}{2}$ si m est la dimension du groupe des symétries des équations considérées). Il est donc indispensable de calculer les relations algébriques et différentielles qui lient ces invariants. Des outils ont été développés à cet effet : dans [48, 2], nous montrons que si un certain invariant différentiel de petite taille est nul, tous les autres le sont également. Cela constitue alors un résultat très simple à utiliser.

Des routines de génération automatique au format LATEX des divers résultats ont été programmées. Celles-ci n'ont rien d'anecdotique dans la mesure où ces calculs menés sur ordinateur doivent avoir valeur de preuve et être réutilisables. Cette implantation sera décrite au chapitre 8. Voici maintenant un aperçu de nouveaux résultats obtenus à l'aide de notre implantation.

0.1.2 Équations différentielles ordinaires du troisième ordre

Dans [15, 14], Chern avait initié la classification des équations différentielles ordinaires du troisième ordre

$$y''' = f(x, y, y', y'') \tag{1}$$

sous l'action des transformations de contact de la forme $(X, Y, Y') = \phi(x, y, y')$. Nous complétons ce résultat de Chern. Grâce à notre logiciel, nous avons calculé explicitement et simplifié les invariants permettant cette classification. Dans [48], nous avons obtenu, grâce à ces invariants, des conditions nécessaires et suffisantes très simples portant sur la fonction f permettant de tester si l'équation étudiée est *linéarisable* sous la forme $Y''' + a(X) Y'' + b(X) Y' + c(X) Y = 0$. Ces conditions sont données par le nouveau théorème suivant :

Théorème 1 Soit une équation différentielle ordinaire du troisième ordre de la forme (1). Posons

$$I = -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{2}D_x f_p - \frac{1}{6}D_x^2 f_q - f_y + \frac{1}{3}f_q D_x f_q - \frac{2}{27}f_q^3$$

avec $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + f(x, y, p, q) \frac{\partial}{\partial q}$.

1. Lorsque $I = 0$, l'équation (1) est linéarisable si et seulement si $f_{qqq} = 0$. Dans ce cas, elle peut se ramener à l'équation $y''' = 0$.

2. Lorsque $I \neq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'équation (1) est linéarisable par une transformation de contact sous la forme

$$y''' + a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0.$$

(ii) L'équation se ramène par une transformation de contact à la forme

$$y''' + b(x) y' + (1 + 1/2 b'(x)) y = 0.$$

(iii) Les invariants définis en (4.9), sauf éventuellement $I_2 = I_6$, sont nuls.

(iv) Les invariants ($I_1, I_3, I_8, I_{10}, I_{16}$) sont nuls (voir (4.9) page 76).

(v) Les 2-formes $d\theta^4$ et $d\theta^5$ sont nulles (voir (4.9) page 76).

Ces résultats ont fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [48]. Ils seront détaillés au chapitre 4 page 73.

0.1.3 L'équation différentielle ordinaire du quatrième ordre

Poursuivant l'étude des équations différentielles ordinaires, nous avons calculé les invariants permettant la classification d'équations du quatrième ordre sous l'action des transformations de contact. Cet exemple n'avait jamais été traité auparavant. Cette étude n'a pas encore fait l'objet de recherches plus poussées mais nous a déjà fourni un nouveau théorème. Celui-ci donne les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence d'une équation quelconque $y^{(4)} = f(x, y, p = y', q = y'', r = y''')$ avec la forme canonique $y^{(4)} = 0$.

Théorème 2 Une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre $y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''')$ est équivalente à l'équation $y^{(4)} = 0$, sous l'action du groupe des transformations de contact, si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{rrr} = 0, \\ f_{rr}^2 + 6f_{qrr} = 0, \\ f_r^3 + 4f_r f_q - 6f_r D_x f_r + 8f_p + 4D_x^2 f_r - 8D_x f_q = 0, \\ -560D_x^2 f_q + 240D_x^3 f_r + 800D_x f_p - 432(D_x f_r)^2 + 244D_x f_q f_r + 416f_q D_x f_r \\ -342f_r D_x^2 f_r + 189D_x f_r f_r^2 - 800f_y - 26f_r^2 f_q - 44f_p f_r - 72f_q^2 = 0 \end{array} \right.$$

où $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + r \frac{\partial}{\partial q} + f(x, y, p, q, r) \frac{\partial}{\partial r}$.

Ce travail est décrit au chapitre 5.

Systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre, à deux variables dépendantes

Le troisième résultat présenté concerne cette fois-ci l'équivalence de systèmes d'équations différentielles ordinaires à deux variables dépendantes $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = F^1(t, x, \dot{x}), \\ \ddot{x}^2 = F^2(t, x, \dot{x}). \end{cases} \quad (2)$$

sous l'action du groupe des transformations ponctuelles de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$(T, X) = \phi(t, x).$$

Ici la variable indépendante est t et \dot{x}^1 (resp. \dot{x}^2) est la dérivée de x^1 (resp. x^2) par rapport à t . Nous avons pu calculer les invariants permettant la classification de tels systèmes [23] et en déduire un nouveau théorème donnant les conditions d'équivalence au système

$$\begin{cases} \ddot{X}^1 = 0, \\ \ddot{X}^2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Théorème 3 *Le système (2) est équivalent au système (3), sous l'action du groupe des transformations ponctuelles, si et seulement si*

$$\begin{cases} F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^2 & = 0, \\ F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 & = 0, \\ F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2 - 3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 & = 0, \\ F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^1 - 3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^2 & = 0, \\ F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^1 - F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2 & = 0, \\ 2D_t F_{\dot{x}^2}^1 - F_{\dot{x}^2}^1 F_{\dot{x}^1}^1 - F_{\dot{x}^2}^2 F_{\dot{x}^2}^1 - 4F_{x^2}^1 & = 0, \\ -F_{\dot{x}^2}^2{}^2 - 2D_t F_{\dot{x}^1}^1 - 4F_{x^2}^2 + 4F_{x^1}^1 + 2D_t F_{\dot{x}^2}^2 + F_{\dot{x}^1}^1{}^2 & = 0, \\ -2D_t F_{\dot{x}^1}^2 + F_{\dot{x}^2}^2 F_{y^1}^2 + 4F_{x^1}^2 + F_{\dot{x}^1}^1 F_{\dot{x}^1}^2 & = 0, \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + F^1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^1} + F^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^2}.$$

Ces résultats, qui complètent ceux de Fels [23], sont l'objet du chapitre 6.

0.1.4 Systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre

Enfin, nous avons traité un problème plus conséquent que les précédents en terme de temps de calcul et d'espace mémoire consommé. Ce problème porte sur l'équivalence

de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une variable complexe dépendante u sous l'action du groupe des transformations ponctuelles.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'équivalence de systèmes à deux variables complexes indépendantes x et y , complètement intégrables, de la forme

$$\begin{cases} u_{xx} = f_{11}(x, y, u, u_x, u_y), \\ u_{xy} = f_{12}(x, y, u, u_x, u_y), \\ u_{yy} = f_{22}(x, y, u, u_x, u_y). \end{cases} \quad (5)$$

Notre implantation de la méthode de Cartan nous a permis de calculer les 78 invariants nécessaires à la classification de tels systèmes. Nous avons notamment montré que l'algèbre différentielle engendrée par ces invariants (qui occupent un espace mémoire de 1,1 Méga-octets) est engendrée par un seul petit invariant. Sur la base de ces résultats nous pouvons énoncer le nouveau théorème suivant.

Théorème 4 *Le système (5) complètement intégrable, comportant deux variables indépendantes, est équivalent au système plat $\{U_{XX} = 0, U_{XY} = 0, U_{YY} = 0\}$ par une transformation ponctuelle de la forme $(X, Y, U) = \phi(x, y, u)$ si et seulement si*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_2 \partial u_2} - \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_1} - 4 \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0. \end{cases}$$

On note $u_1 := u_x$ et $u_2 := u_y$ pour les dérivées partielles de u par rapport à x et à y .

Dans un deuxième temps, nous avons généralisé le théorème (4) à des systèmes d'équations aux dérivées partielles à une variable complexe dépendante u et n variables complexes indépendantes $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ du type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = f_{\alpha\beta} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \leq \beta \leq n. \quad (6)$$

Nous avons ainsi obtenu des conditions très simples portant sur les fonctions $f_{\alpha\beta}$ pour que le système étudié se ramène au système

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \leq \beta \leq n, \quad (7)$$

par une transformation ponctuelle de la forme $(X, U) = \phi(x, u)$. Ces conditions sont données par le nouveau théorème suivant :

Théorème 5 *Si le système (6) est équivalent au système (7) alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq n, \{\alpha, \beta\} \cap \{\sigma, \rho\} = \emptyset, \\ \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\alpha} - \frac{\partial^2 f_{\beta\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \alpha \neq \beta, \\ \frac{\partial^2 f_{\alpha\alpha}}{\partial u_\alpha \partial u_\alpha} - 4 \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial^2 f_{\beta\beta}}{\partial u_\beta \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha < \beta \leq n, \\ \frac{\partial^2 f_{\alpha\alpha}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} - 4 \frac{\partial^2 f_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n, \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha. \end{array} \right.$$

Ce travail, détaillé au chapitre 7, a été motivé par une question de classification des hypersurfaces réelles plongées dans la variété complexe \mathbb{C}^n . Il a été réalisé en collaboration avec C. Bièche du L.A.T.P. de Marseille (UMR 6632) sous la direction de B. Coupet. Enfin, il fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences actuellement soumise. Ces calculs ont été initiés par Chern. Cependant, dans [14], celui-ci ne donne ni les valeurs explicites des invariants ni les conditions concrètes d'équivalence avec le système plat (7).

0.1.5 Problèmes d'équivalence et algèbre différentielle

Notre dernier résultat est une nouvelle méthode basée sur l'algèbre différentielle permettant de traiter par un calcul d'élimination certains problèmes d'équivalence. Cette méthode fournit directement les conditions d'équivalence d'une équation différentielle générale avec une équation particulière. Nous proposons une optimisation importante de cette méthode basée sur l'utilisation de dérivations non commutatives (dérivées de Lie), dans le but d'obtenir une compression des données manipulées. Ce nouveau point de vue nécessite une refonte complète des algorithmes d'élimination ¹, ce qui représente un gros travail qui n'est pas encore terminé. Ces résultats seront exposés au chapitre 3.

¹Il semble que les fondateurs de l'algèbre différentielle (Ritt, Kolchin, Seidebberg, Rosenfeld, Kaplanski et.) aient complètement négligé le grossissement des données provoqué par l'écriture des équations avec des dérivées qui commutent

Notations

M	variété analytique réelle de dimension m
$T_x M$	espace tangent en x à la variété M
$T_x^* M$	espace cotangent en x à la variété M
TM	fibré tangent de M (dimension $2m$)
T^*M	fibré cotangent de M (dimension $2m$)
$\Omega(M)$	module des formes différentielles de M
$\mathcal{R}(M)$	variété fibrée des repères de M
$\mathcal{R}^*(M)$	variété fibrée des corepères de M
x	$x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$, variables indépendantes
u	$u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, variables dépendantes
X	variété analytique réelle de dimension p
U	variété analytique réelle de dimension n
$J^q(X, U)$	variété des jets d'ordre q des fonctions de X dans U
$(x, u^{(q)})$	système de coordonnées locales de $J^q(X, U)$
$D_i = \frac{d}{dx^i}$	dérivation totale (champ de Cartan) par rapport à x^i
$GL(m, \mathbb{R})$	matrices réelles $m \times m$ invertibles
G	sous-groupe de Lie de $GL(m, \mathbb{R})$ de dimension r
\mathcal{G}	G -structure sur la variété M , $\mathcal{G} \simeq G \times M$
ω	$\omega = (\omega^1, \dots, \omega^m)$, corepère de M
θ	$\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$, formes invariantes sur \mathcal{G}
π	$\pi = (\pi^1, \dots, \pi^r)$, formes de Maurer-Cartan de G modifiées
$\frac{\partial}{\partial \theta^i}$	dérivations duales des formes θ^i
s_i	caractères de Cartan
σ_p	pseudo-caractère tel que $s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} + \sigma_p = m - p$
s'_i	caractères réduits de Cartan
σ'_p	pseudo-caractère tel que $s'_0 + s'_1 + \dots + s'_{p-1} + \sigma'_p = m - p$

Chapitre 1

Rappels de géométrie différentielle

Ce premier chapitre sera consacré au rappel de quelques définitions de géométrie différentielle. On y introduira les notations utilisées au long de ce mémoire : les notions d'espaces de jets, de formes de contact et de prolongation d'une transformation.

Dans un deuxième temps, nous exposerons brièvement la théorie des systèmes différentiels extérieurs de Cartan, décrite dans [10], qui permet de déterminer l'existence et la dimension maximale de solutions d'un système différentiel extérieur. Elle est basée sur le calcul des caractères de Cartan et le théorème de Cartan-Kähler.

On peut aussi considérer des systèmes différentiels extérieurs avec condition d'indépendance : $dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^p \neq 0$. Le test d'involution de Cartan permet dans ce cas de savoir si les solutions trouvées par le théorème de Cartan-Kähler respectent cette condition, c'est à dire préservent l'indépendance des variables x^1, \dots, x^p . On teste par exemple l'involution de systèmes extérieurs provenant de systèmes d'équations aux dérivées partielles pour lesquels certaines variables (les variables de dérivation) sont indépendantes. Le test d'involution est basé sur le calcul des caractères réduits de Cartan. Nous le détaillerons aussi.

Connaître la théorie des systèmes différentiels extérieurs est important pour comprendre la méthode d'équivalence de Cartan. Nous verrons, au chapitre 2, que le problème de l'équivalence locale de deux systèmes d'équations différentielles (sous l'action d'un groupe de transformations) se ramène à l'existence de solutions pour un certain système différentiel extérieur. La méthode d'équivalence de Cartan est donc une application particulière de la théorie des systèmes différentiels extérieurs.

1.1 Espaces de jets

Notons tout d'abord que par souci de lisibilité, nous utiliserons tout au long de ce mémoire les notations d'Einstein. Ainsi, tout indice répété en haut et en bas dans une formule indique une sommation sur cet indice. Ainsi l'expression $a_i x^i$ pour i de 1 à n représente la somme $a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Nous considérerons des variétés analytiques réelles M de dimension m . L'espace tan-

gent au point x d'une variété M sera noté $T_x M$ et l'espace cotangent noté $T_x^* M$. Un élément du fibré tangent TM est un couple quelconque (x, v) formé d'un point $x \in M$ et d'un vecteur $v \in T_x M$. Le point de vue sera toujours local. Les notations utilisées sont proches du livre de P. Olver [50].

La définition rigoureuse et intrinsèque des espaces de jets a été posée par C. Ehresmann (élève de E. Cartan) vers 1950 mais l'idée remonte à S. Lie. Une équation différentielle définit une sous-variété dans un espace de jets. Ainsi l'équation $y'(x) = y(x)$ définit le plan d'équation $y' - y = 0$ plongé dans l'espace $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{(x, y, y') \in \mathbb{R}^3\}$. Le point important est que les nombres (x, y, y') soient vus comme un système de coordonnées locales sur une certaine variété.

Dans l'écriture d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), les variables dites *indépendantes* sont notées $x = (x^1, \dots, x^p)$ et les variables dites *dépendantes* (de x) sont notées $u = (u^1, \dots, u^n)$. Pour la clarté de l'exposé, on considère les variétés réelles analytiques $X \simeq \mathbb{R}^p$ et $U \simeq \mathbb{R}^n$. La solution d'un système EDP est alors une fonction analytique de X dans U .

Définition 1 (jet) Soient $x \in X$ et $q \in \mathbb{N}$. Deux applications de X dans U définissent le même jet (à l'ordre q , au point $x \in X$) si leurs développements de Taylor respectifs au point x coïncident jusqu'à l'ordre q .

EXEMPLE – Soit $X = U = \mathbb{R}$. Un jet d'ordre 2 au point $x \in X$ est la donnée d'un développement limité

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)h^2/2 + O(h^3).$$

Un tel jet d'ordre 2 est la donnée de quatre nombres réels quelconques $(x, u, u', u'') \in \mathbb{R}^4$. Ainsi l'ensemble des jets d'ordre 2 est une variété isomorphe à \mathbb{R}^4 . \square

L'espace des jets d'ordre q de X dans U en un point $x \in X$ quelconque est noté $J^q(X, U)$. Par souci de simplification, $J^q(X, U)$ sera souvent noté J^q . La variété notée $J^\infty(X, U)$ est la limite projective des variétés J^q lorsque $q \rightarrow \infty$. C'est une variété de dimension infinie appelée *diffiété* triviale dans le formalisme de Lychagin–Vinogradov [37].

Par exemple, on notera (x, u, u_x) les coordonnées de l'espace des jets $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De même, on notera $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ les coordonnées de l'espace $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Dans le cas général $\dim X = p$ et $\dim U = n$, les coordonnées de $J^\infty(X, U)$ sont indicées par des multi-indices symétriques I de la forme

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_l), \quad l \in \mathbb{N}$$

formés d'entiers compris entre 1 et p . La longueur l de ce multi-indice est notée $\#I$. Les dérivées partielles itérées d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont notées

$$f_I(x) := \frac{\partial^l f(x)}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_l}}, \quad l = \#I.$$

Comme les dérivations $\partial/\partial x^i$ commutent entre elles, on pourra toujours supposer que $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l$. Avec ces conventions, les coordonnées d'un point de l'espace $J^q(X, U)$

sont notées $(x, u^{(q)})$ avec

$$\begin{aligned} x &:= (x^i \mid 1 \leq i \leq p), \\ u^{(q)} &:= (u_I^\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq n, \#I \leq q). \end{aligned}$$

Définition 2 (jet de fonction) *Le jet à l'ordre q d'une fonction analytique $f : X \rightarrow U$ est la fonction $j^q f : X \rightarrow J^q(X, U)$ telle que*

$$j^q f(x) := (x, f_I(x))$$

où I parcourt l'ensemble des multi-indices tels que $\#I \leq q$.

Définition 3 (forme de contact) *On appelle forme de contact une forme différentielle définie sur l'espace $J^q(X, U)$ obtenue par combinaison linéaire des formes de base*

$$du_I^\alpha - u_{I,i}^\alpha dx^i \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \#I < q,$$

les coefficients étant des fonctions arbitraires de J^q dans \mathbb{R} .

Les formes de contact définies sur l'espace J^q ont la propriété de s'annuler sur le graphe du jet $j^q f$ de toute fonction $f : X \rightarrow U$.

Définition 4 (champs de Cartan) *On appellera dérivations totales ou champs de Cartan, les champs de vecteurs définis sur la diffiété J^∞ par :*

$$\frac{d}{dx^i} = D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots + u_{I,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} + \cdots$$

Restreints aux variables de l'espace des jets d'ordre q , on parlera de champs de Cartan tronqués à l'ordre q .

Les champs de Cartan tronqués à l'ordre q , ont la propriété d'être tangents au graphe du jet $j^q f$ de toute fonction $f : X \rightarrow U$. Ces champs de vecteurs sont orthogonaux aux formes de contact.

1.1.1 Groupes de difféomorphismes

Pour classifier les équations différentielles, on se donne un (pseudo)groupe de difféomorphismes locaux. On cherche alors à savoir si deux systèmes donnés sont équivalents sous l'action d'une transformation de ce groupe. Voici une description des groupes de transformations que nous utiliserons.

Définition 5 *On appelle transformation ponctuelle d'une variété $M = X \times U$ de dimension m dans une variété $\bar{M} = \bar{X} \times \bar{U}$ de même dimension, tout difféomorphisme de M dans \bar{M} . Les transformations ponctuelles de M dans M forment un groupe. Ces transformations sont de la forme :*

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = \xi(x, u), \\ u \rightarrow \bar{u} = \eta(x, u). \end{cases} \quad (1.1)$$

EXEMPLE – Une rotation de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est une transformation ponctuelle. \square

On considère souvent des sous groupes du groupe des transformations ponctuelles de $M = X \times U$ dans M .

EXEMPLE – Les transformations *préservant les fibres* sont de la forme

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = \xi(x), & (x, \bar{x} \in X) \\ u \rightarrow \bar{u} = \eta(x, u), & (u, \bar{u} \in U). \end{cases} \quad (1.2)$$

\square

Voici maintenant une famille de transformations plus générales que les transformations ponctuelles que nous utiliserons souvent pour classifier les équations différentielles : les transformations de contact.

Définition 6 (transformation de contact) *On appelle transformation de contact d'ordre q , un difféomorphisme de $J^q(X, U)$ dans $J^q(\bar{X}, \bar{U})$ qui transforme une forme de contact de $J^q(X, U)$ en une forme de contact de $J^q(\bar{X}, \bar{U})$*

Les transformations de contact d'ordre q transforment le graphe du jet d'ordre q d'une fonction en le graphe du jet d'ordre q d'une autre fonction. En particulier, toute transformation ponctuelle est une transformation de contact. Nous utiliserons notamment les transformations de contact pour la classification des équations différentielles ordinaires du troisième et quatrième ordre.

EXEMPLE – Un fameux exemple de transformation de contact est la transformation de Legendre de $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Elle associe au point $(x, u, p = u_x)$ le point $(\bar{x} = u_x, \bar{u} = u - xu_x, \bar{p} = -x)$. \square

Un autre exemple fameux est la transformation dite par *polaire réciproque* qui transforme un point du plan en une droite et une droite en un point. Des points alignés sont transformés en des droites concourantes et réciproquement. Par suite, un élément de contact est transformé en un élément de contact. Rappelons que les anciens mathématiciens désignaient par *élément de contact* la donnée d'un point du plan et d'une droite passant par ce point, i.e. la donnée d'un élément (x, y, y') de $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Bäcklund a démontré que toute transformation de contact de J^q dans J^q est la prolongation (voir section suivante) d'une transformation de J^1 dans J^1 . La structure du groupe des transformations de contact de J^∞ dans J^∞ est beaucoup plus compliquée et ce groupe ne sera pas utilisé dans cette thèse.

1.1.2 Prolongation d'une transformation

La prolongation d'un difféomorphisme est l'expression de l'action induite par cette transformation sur le jet d'une fonction. Par exemple, soient deux courbes du plan déduites l'une de l'autre par une transformation ponctuelle. En tout point de la courbe image, la tangente n'est pas quelconque mais peut être calculée en fonction du point origine et de la valeur de la pente de la tangente en ce point. La transformation étendue aux *éléments de contact* (un point et la tangente à la courbe passant par ce point) est la prolongation à l'ordre 1 de la transformation ponctuelle de départ.

Définition 7 (prolongation) Soit $\phi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$ une transformation de contact d'ordre q . La prolongation de ϕ à l'ordre $q + 1$ est l'unique transformation de contact de $J^{q+1}(X, U)$ dans $J^{q+1}(\overline{X}, \overline{U})$ qui, restreinte à l'espace des jets d'ordre q , est ϕ .

Voyons comment calculer la prolongation d'une transformation ϕ donnée.

Proposition 1 Soit $\phi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$, une transformation de contact.

$$\phi \begin{cases} x & \rightarrow \bar{x} = \xi(x, u^{(q)}), \\ u^{(q)} & \rightarrow \bar{u}^{(q)} = \eta(x, u^{(q)}). \end{cases} \quad (1.3)$$

La prolongation de l'action de ϕ aux variables $u_{I,i}^\alpha$ de $J^{q+1}(X, U)$ est donnée par la formule suivante :

$$\phi^*(\bar{u}_{I,i}^\alpha) = D_j(\eta_I^\alpha) \times C_i^j(\xi), \quad 1 \leq i, j \leq p, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \#I = q. \quad (1.4)$$

D_j est le champ de Cartan de la définition 4. La matrice $C_i^j(\xi)$ est par construction l'inverse de la matrice de fonctions $D_j(\xi^i)$.

PREUVE – Cette preuve peut être sautée en première lecture. Pour la simplicité des notations, on se place dans le cas $q = 0$. Par définition, la prolongation de ϕ est une transformation de contact de $J^1(X, U)$ dans $J^1(\overline{X}, \overline{U})$. La prolongation de ϕ envoie donc le module des formes de contact de $J^1(X, U)$ sur le module des formes de contact de $J^1(\overline{X}, \overline{U})$. Les formes de contact de base sur $J^1(\overline{X}, \overline{U})$ sont $d\bar{u}^\alpha - \bar{u}_i^\alpha d\bar{x}^i$. Calculons l'image réciproque par ϕ de ces formes :

$$\begin{aligned} \phi^*(d\bar{u}^\alpha - \bar{u}_i^\alpha d\bar{x}^i) &= d(\eta^\alpha) - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) d(\xi^i) \\ &= \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} dx^j - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \right) \\ &= \left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} \right) du^\beta + \left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) dx^j. \end{aligned}$$

Il faut que cette image soit une forme de contact, donc il existe des fonctions A_β^α telles que

$$\phi^*(d\bar{u}^\alpha - \bar{u}_i^\alpha d\bar{x}^i) = A_\beta^\alpha(x, u)(du^\beta - u_j^\beta dx^j).$$

D'où, par identification des coefficients

$$A_\beta^\alpha(x, u) = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} \quad (1.5)$$

et

$$-A_\beta^\alpha(x, u)u_j^\beta = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \quad (1.6)$$

En substituant (1.5) dans (1.6), on obtient :

$$\left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} \right) u_j^\beta = -\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} + \phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j},$$

soit,

$$\phi^*(\bar{u}_i^\alpha) \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} u_j^\beta \right) = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} u_j^\beta.$$

Les champs de Cartan D_j sont tronqués à l'ordre q . Nous obtenons

$$\phi^*(\bar{u}_i^\alpha) D_j(\xi^i) = D_j(\eta^\alpha)$$

et finalement la formule cherchée

$$\phi^*(\bar{u}_i^\alpha) = D_j(\eta^\alpha) \times C_i^j(\xi).$$

□

EXEMPLE – Soit X, \bar{X}, U, \bar{U} quatre variétés de dimension 1. Les coordonnées utilisées sont x, \bar{x}, u, \bar{u} . Soit $\phi : J^0(X, U) \rightarrow J^0(\bar{X}, \bar{U})$ une transformation ponctuelle de la forme

$$\phi \begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = x + C, \\ u \rightarrow \bar{u} = \eta(x, u), \end{cases}$$

où C est une constante arbitraire et η une fonction quelconque. Calculons la prolongation de ϕ sur $J^1(X, U)$. On a, d'après la proposition 1

$$\phi^*(\bar{u}_{\bar{x}}) = (D_x \eta) / D_x(x + C) = \eta_x + u_x \eta_u.$$

□

EXEMPLE – Considérons maintenant une transformation ponctuelle $\phi : J^0(X, U) \rightarrow J^0(\bar{X}, \bar{U})$:

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = \xi(x, u), \\ u \rightarrow \bar{u} = \eta(x, u) \end{cases} \quad (1.7)$$

en supposant $\dim X = \dim \bar{X} = 2$ et $\dim U = \dim \bar{U} = 1$.

Calculons la prolongation de ϕ sur $J^1(X, U)$. Nous avons :

$$\left(D_j(\xi^i) \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} D_1 \xi^1 & D_1 \xi^2 \\ D_2 \xi^1 & D_2 \xi^2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\phi^* \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D_1 \xi^1 D_2 \xi^2 - D_1 \xi^2 D_2 \xi^1} (D_1 \eta, D_2 \eta) \begin{pmatrix} D_2 \xi^2 & -D_1 \xi^2 \\ -D_2 \xi^1 & D_1 \xi^1 \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \phi^*(\bar{u}_1) = \frac{D_1 \eta D_2 \xi^2 - D_2 \eta D_2 \xi^1}{D_1 \xi^1 D_2 \xi^2 - D_1 \xi^2 D_2 \xi^1}, \\ \phi^*(\bar{u}_2) = \frac{D_2 \eta D_1 \xi^1 - D_1 \eta D_1 \xi^2}{D_1 \xi^1 D_2 \xi^2 - D_1 \xi^2 D_2 \xi^1}. \end{cases}$$

□

1.2 Algèbre différentielle extérieure

Cette section est consacrée à un rappel des notations utilisées en calcul extérieur ainsi qu'à l'énoncé de lemmes et théorèmes importants. Nous supposons connues les définitions des formes différentielles extérieures ainsi que les axiomes du calcul extérieur. Nous renvoyons à [10], [12] et [6] pour des exposés complets sur le calcul extérieur.

Soit M une variété différentielle de dimension m et $\Omega := \Omega(M)$ l'ensemble des formes différentielles extérieures définies sur M . Les fonctions sur M dans \mathbb{R} sont appelées des 0-formes et plus généralement, on appellera k -formes, les formes différentielles de degré k . L'ensemble de ces k -formes sera noté $\Omega^k(M)$. Le produit extérieur sera noté \wedge et la différentielle extérieure sera notée d . Rappelons la règle d'évaluation d'une p -forme $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p$ sur p champs de vecteurs v_1, \dots, v_p :

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p; v_1, \dots, v_p \rangle = \det(\langle \omega^i; v_j \rangle), \quad 1 \leq i, j \leq p.$$

EXEMPLE – Soit M , une variété de dimension 2, de coordonnées (x, y) . Soit $\omega = dy - xdx$, une 1-forme de $\Omega(M)$. Soit $v = \partial/\partial x + 2\partial/\partial y$. On a $\langle \omega; v \rangle = \langle dy; v \rangle - x \langle dx; v \rangle = 1 - 2x$. \square

EXEMPLE – Soit M , variété de dimension 2, de coordonnées (x, y) . Soient $\omega^1 = dx$ et $\omega^2 = xdy$, des 2-formes. Soient $v_1 = \partial/\partial x + 2\partial/\partial y$ et $v_2 = 2\partial/\partial x + 3\partial/\partial y$ deux champs de vecteurs. On a :

$$\langle \omega^1 \wedge \omega^2; v_1, v_2 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle dx; v_1 \rangle & \langle dx; v_2 \rangle \\ x \langle dy; v_1 \rangle & x \langle dy; v_2 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2x & 3x \end{pmatrix} = -x.$$

\square

Voici maintenant le lemme de Poincaré que nous utiliserons lors de l'exploitation des résultats de la méthode d'équivalence de Cartan.

Lemme 1 (Poincaré) *Soit $\omega \in \Omega(M)$ une forme différentielle extérieure de degré quelconque. On a :*

$$d(d\omega) = 0.$$

Définition 8 *Soit $\Omega(M)$ l'ensemble des formes différentielles définies sur la variété M . Un système différentiel extérieur sur M est un ensemble fini $S \subset \Omega(M)$ auquel on associe l'ensemble des équations*

$$\{\omega = 0 \mid \omega \in S\}.$$

Définition 9 *Un système différentiel extérieur $S \subset \Omega(M)$ est dit de Pfaff s'il est formé uniquement de 1-formes (formes de degré 1), i.e. $S \subset \Omega^1(M)$.*

Définition 10 (idéal extérieur) *Soit $I \subset \Omega(M)$, un ensemble de formes différentielles extérieures. I est un idéal extérieur lorsque :*

1. *Le produit extérieur de toute forme de I par une forme de $\Omega(M)$ appartient à I .*
2. *La somme de deux formes différentielles (de même degré) appartenant à I appartient à I .*

Soit $S \subset \Omega(M)$. On appelle idéal extérieur engendré par S , le plus petit idéal extérieur contenant S .

Définition 11 (idéal différentiel extérieur) Soit $I \subset \Omega(M)$ un ensemble de formes différentielles extérieures. I est un idéal différentiel si c'est un idéal extérieur fermé par dérivation extérieure i.e. tel que $\forall \omega \in I, d\omega \in I$.

Soit $S \subset \Omega(M)$. On appelle idéal différentiel extérieur engendré par S , le plus petit idéal différentiel extérieur contenant S .

Définition 12 (système fermé) Un système différentiel extérieur $S \subset \Omega(M)$ est dit fermé lorsque la différentielle extérieure de toute forme de S , appartient à l'idéal extérieur engendré par S .

EXEMPLE – Le système

$$S \begin{cases} \omega^1 := y \, dx & = 0, \\ \omega^2 := dx \wedge dy & = 0, \end{cases}$$

est fermé car les différentielles extérieures des formes de S sont dans l'idéal extérieur engendré par S . En effet, $d\omega^1 = d(ydx) = -dx \wedge dy = -\omega^2$ et $d\omega^2 = d(dx \wedge dy) = 0$. \square

Lemme 2 Un système différentiel extérieur S est fermé si et seulement si l'idéal différentiel extérieur engendré par S est égal à l'idéal extérieur engendré par S . En particulier $S \cup dS$ est fermé.

1.3 Solutions d'un système différentiel extérieur

Les définitions suivantes sont dues à Cartan [10].

Définition 13 Soit un système différentiel extérieur $S \subset \Omega(M)$ et N une sous-variété de M , i.e. il existe un plongement $i : N \rightarrow M$. Alors N est appelée une variété intégrale de S si $i^*(\omega) = 0$, quelque soit $\omega \in S$.

Remarquons que l'on ne change pas les solutions d'un système différentiel extérieur en lui rajoutant les différentielles extérieures de ses équations. En effet si $i^*(\omega) = 0$, on en déduit $i^*(d\omega) = d(i^*(\omega)) = d(0) = 0$.

Montrons que toute sous-variété N' de N est également solution de S . Pour cela considérons l'injection canonique $j : N' \rightarrow N$ et démontrons que $\omega|_{N'} = 0$ pour tout $\omega \in S$. Ceci résulte des égalités

$$\omega|_{N'} := (i \circ j)^*\omega = (j^* \circ i^*)\omega = j^*(i^*\omega) = j^*(0) = 0.$$

Définition 14 (p -plan) Un élément plan de dimension p (p -plan) d'une variété M est un couple $E = (x, V)$ où x est un point de M et $V \subset T_x M$ est un espace vectoriel de dimension p .

Définition 15 (élément intégral) Soit S un système différentiel extérieur. Notons M_0 la sous-variété de M définie par l'annulation des 0-formes de S . Un élément plan $E = (x, V)$ est un élément intégral de S si $x \in M_0$ et si

$$\forall \omega \in S, \quad \langle \omega|_x; v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = 0 \quad \forall v_1, v_2, \dots, v_k \in V \text{ avec } k = \deg \omega.$$

Le théorème de Frobénius dit que les variétés intégrales d'un système différentiel extérieur fermé engendré par des 1-formes forment un feuilletage de M , autrement dit qu'il existe des coordonnées redressantes, pour lesquelles les variétés intégrales forment un champ de plans parallèles. Le système est dit *complètement intégrable*.

Théorème 6 (Frobénius) Soit M une variété analytique de dimension m sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit $S \subset \Omega^1 M$ un système de Pfaff formé de s formes linéairement indépendantes définies sur M . Le système S sera dit complètement intégrable s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. S est fermé.
2. Pour tout point $x \in M$, il existe s fonctions h^1, h^2, \dots, h^s indépendantes définies sur un voisinage de x dans M telles que le système S soit équivalent au système :

$$dh^1 = 0, \quad dh^2 = 0, \dots, \quad dh^s = 0.$$

Une variété intégrale de dimension maximale de S est alors donnée par le système d'équations :

$$h^1 = C^1, \quad h^2 = C^2, \dots, \quad h^s = C^s,$$

dans lequel figurent s constantes arbitraires C^1, C^2, \dots, C^s . Les graphes des solutions de dimension maximale $m - s$ forment alors un *feuilletage*.

Les systèmes de Pfaff fermés ne sont qu'un cas très particulier de systèmes différentiels extérieurs. Par exemple, le système : $x dy \wedge dz = 0$ n'est pas un système de Pfaff et n'est pas non plus fermé. On ne peut donc lui appliquer le théorème de Frobénius.

1.4 Solutions d'un système différentiel extérieur : existence, dimension

Le théorème de Cartan–Kähler permet de déterminer si un système différentiel extérieur fermé admet des variétés intégrales de dimension p et quelle est la valeur maximale de p . Pour cela, il faut d'abord déterminer si le système admet des plans intégraux de dimension p . Ces éléments intégraux doivent être réguliers. Lorsque le système extérieur admet un p -plan intégral régulier $E_p(x_0)$ au point $x_0 \in M$, on montre l'existence d'un champ de p -plans intégraux $x \rightarrow E_p(x)$ où x appartient à un voisinage du point x_0 . Si le système S de départ est fermé, on montre que ce champ de plans est complètement intégrable. On en déduit l'existence d'une variété intégrale de S dans un voisinage du point x_0 et tangente en x à $E_p(x)$.

Soit S , un système différentiel extérieur fermé défini sur une variété M de dimension m . Si S n'est pas fermé, il l'est en lui rajoutant les différentielles extérieures de ses équations.

Pour montrer que le système différentiel S admet des éléments intégraux de dimension p , on procède de façon incrémentale. On construit un drapeau

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_p \quad (1.8)$$

formé d'éléments intégraux de dimension 0 puis 1 puis 2 jusqu'à atteindre la dimension p . Chaque étape est basée sur le calcul d'un caractère de Cartan. On pourra se référer à Cartan dans [10] pour un exposé complet sur les caractères de Cartan.

1.4.1 Calcul d'éléments intégraux de dimension 0

Par définition, un élément intégral E_0 de dimension 0 est un point quelconque de la sous-variété $M_0 \subset M$ définie par l'annulation des 0-formes de S .

1.4.2 Calcul d'éléments intégraux de dimension 1

Soit $E_0 = x$ un élément intégral de dimension 0. Alors $E_1 = (E_0, v_1)$ est un élément intégral de S de dimension 1 si le vecteur v_1 est solution du système linéaire en v_1 :

$$\langle \omega|_x; v_1 \rangle = 0 \text{ pour tout } \omega \in S \text{ tel que } \deg \omega = 1.$$

Soit $r(E_0)$, le rang de ce système linéaire appelé *système polaire*. S admet un élément intégral de dimension 1 si et seulement si il existe un élément intégral E_0 tel que

$$r(E_0) \leq m - 1, \quad m = \dim M.$$

Définition 16 L'élément intégral E_0 est dit régulier si le rang $r(E_0)$ est maximum. Le premier caractère de Cartan est $s_0 = r(E_0)$ pour tout E_0 régulier.

EXEMPLE – Soit le système différentiel extérieur défini sur la variété $M = (x, y, z)$:

$$S \begin{cases} dx - dy = 0, \\ dz \wedge dy = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

E_0 est un point quelconque de M . Nous cherchons s'il existe $E_1 = (E_0, v_1)$, élément intégral de dimension 1 de S . Le vecteur v_1 doit être solution du système linéaire formé des 1-formes de S . On a alors $r(E_0) = s_0 = 1 \leq 3 - 1$ donc S admet des éléments intégraux de dimension 1. \square

1.4.3 Calcul d'éléments intégraux de dimension 2

Soit E_2 un élément intégral de dimension 2 de $S \subset \Omega(M)$ tel que $E_0 \subset E_1 \subset E_2$. On note $E_2 = (E_0, (v_1, v_2)) = (E_1, v_2)$, où $E_1 = (E_0, v_1)$ est un 1-plan intégral régulier. Le

vecteur inconnu v_2 est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \langle \omega|_x; v_2 \rangle & = 0 \text{ pour tout } \omega \in S \text{ tel que } \deg \omega = 1, \\ \langle \omega|_x; v_1, v_2 \rangle & = 0 \text{ pour tout } \omega \in S \text{ tel que } \deg \omega = 2. \end{cases} \quad (1.10)$$

sachant que v_1 est solution du système engendré par les 1-formes. On note $r(E_1)$ le rang de ce système linéaire (dit système polaire). Alors le système S admet un élément intégral de dimension 2 si et seulement si

$$r(E_1) \leq m - 2. \quad (1.11)$$

En effet, les vecteurs linéairement indépendants v_1 et v_2 doivent être solutions du système (1.10).

Définition 17 *L'élément intégral $E_1 = (E_0, v_1)$ est dit régulier si le rang $r(E_1)$ est maximum. On définit le deuxième caractère de Cartan, noté s_1 , par l'égalité :*

$$s_0 + s_1 = r(E_1) \text{ pour tout } E_1 \text{ régulier.} \quad (1.12)$$

EXEMPLE – Reprenons le système extérieur (1.9) :

$$S \begin{cases} dx - dy = 0, \\ dz \wedge dy = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous allons déterminer si S admet des éléments intégraux de dimension 2 notés $E_2 = (E_0, (v_1, v_2)) = (E_1, v_2)$ où $E_1 = (E_0, v_1)$ est un élément intégral régulier de dimension 1. On pose $v_i = v_i^x \frac{\partial}{\partial x} + v_i^y \frac{\partial}{\partial y} + v_i^z \frac{\partial}{\partial z}$ pour $i = 1, 2$. Le vecteur v_2 doit être solution du système polaire (linéaire en v_2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & v_1^z & -v_1^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \\ v_2^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

On a $r(E_1) = 2 > 3 - 2$, donc le système S n'admet pas d'éléments intégraux de dimension 2. Le deuxième caractère de Cartan est $s_1 = 1$. \square

E. Cartan avait l'habitude de noter un système polaire tel que (1.14) comme un système de 1-formes

$$\begin{cases} dx - dy & = 0 \\ v_1^z dy - v_1^y dz & = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Ceci revient à considérer classiquement les coordonnées d'un vecteur tangent (ici le vecteur v_2) à une variété (intégrale) comme des différentielles.

1.4.4 Calcul d'éléments intégraux de dimension p

Nous allons exposer un critère permettant de décider si le système différentiel extérieur S admet un *drapeau* d'éléments intégraux de la forme

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{p-1} \subset E_p.$$

On cherche un p -plan intégral $E_p = (E_0, (v_1, v_2, \dots, v_p))$ sachant que

$$E_{p-1} = (E_0, (v_1, v_2, \dots, v_{p-1}))$$

est un $(p-1)$ -plan intégral obtenu à l'étape précédente.

Le vecteur $w := v_p$ est alors solution du système polaire (linéaire en w) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \omega|_x; w \rangle = 0 \text{ pour tout } \omega \in S, \text{ deg } \omega = 1, \\ \langle \omega|_x; v_{k_1}, w \rangle = 0 \text{ pour tout } \omega \in S, \text{ deg } \omega = 2 \quad (1 \leq k_1 \leq p-1), \\ \langle \omega|_x; v_{k_1}, v_{k_2}, w \rangle = 0 \text{ pour tout } \omega \in S, \text{ deg } \omega = 3 \quad (1 \leq k_1 < k_2 \leq p-1), \\ \vdots \\ \langle \omega|_x; v_1, v_2, \dots, w \rangle = 0 \text{ pour tout } \omega \in S, \text{ deg } \omega = p. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

On note $r(E_{p-1})$ le rang de ce système linéaire (1.16). Le système S admet un élément intégral de dimension p si et seulement si le rang

$$r(E_{p-1}) \leq m - p. \quad (1.17)$$

En effet, les vecteurs linéairement indépendants v_1, v_2, \dots, v_p doivent être solutions du système (1.16).

Définition 18 *L'élément intégral E_{p-1} est dit régulier si le rang $r(E_{p-1})$ est maximum. On définit le p -ième caractère de Cartan, noté s_{p-1} , par l'égalité suivante :*

$$s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} = r(E_{p-1}). \quad (1.18)$$

Le pseudo caractère σ_p est défini en posant

$$s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} + \sigma_p = m - p. \quad (1.19)$$

1.4.5 Le théorème de Cartan–Kähler

Une fois prouvée l'existence d'éléments intégraux réguliers de dimension p d'un système différentiel extérieur fermé, le théorème de Cartan–Kähler permet de prouver l'existence (locale) de variétés intégrales de dimension p de ce système.

Théorème 7 (Cartan–Kähler) *Soit S un système différentiel extérieur analytique fermé défini sur une variété M . Si S admet un élément intégral régulier (x, V) , de dimension p , alors il existe une variété intégrale $N \subset M$ de dimension p telle que $x \in N$ et V est l'espace tangent de N en x . De plus la variété intégrale dépend de σ_p fonctions analytiques de p variables si $\sigma_p \neq 0$. Si $\sigma_p = 0$, considérons le dernier caractère de Cartan non nul s_k . La variété intégrale dépend de constantes arbitraires si $k = 0$, sinon de s_k fonctions analytiques arbitraires de k variables.*

PREUVE – Voir [50] théorème 15.7 pages 456-459. □

Définition 19 *On appelle solution singulière de dimension p d'un système différentiel extérieur S d'une variété M , un élément plan E_p de S non régulier mais régulier sur une sous variété de M .*

1.5 Systèmes différentiels extérieurs avec variables indépendantes

On s'intéresse à l'existence de variétés intégrales d'un système comportant des inéquations du type

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p \neq 0.$$

Les équations définissant une variété intégrale du système ne doivent comporter aucune relation entre les variables x^1, \dots, x^p .

C'est par exemple le cas lorsqu'un système extérieur provient d'un système EDP. Il est alors impératif que les variétés intégrales de ce système extérieur soient le graphe des solutions du système EDP, à savoir des fonctions de la forme $u = f(x)$ avec $x = (x^1, \dots, x^p)$.

Définition 20 (involution) *Un système différentiel extérieur est dit en involution ([10] page 88) par rapport aux variables x^1, \dots, x^p si les équations de définition d'un élément intégral générique de dimension p , n'implique aucune relation linéaire entre les formes dx^1, \dots, dx^p i.e. $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p \neq 0$.*

Par "équations de définition", il faut entendre *système polaire* vu comme un système de 1-formes comme dans (1.15).

1.5.1 Mise sous forme extérieure d'un système d'équations différentielles

Un système analytique Σ d'équations aux dérivées partielles (EDP) comportant p variables indépendantes est vu comme une sous-variété \mathcal{R}^q de $J^q(X, U)$ avec $\dim X = p$. Tout système EDP est équivalent à un système différentiel extérieur S défini sur J^q et inversement ([10] page 88). On verra que l'on peut se ramener (par le théorème des fonctions implicites) à un système extérieur défini sur J^{q-1} ne comportant aucune 0-forme.

Le graphe d'une solution de Σ est une variété intégrale du système S de dimension p . De plus, il faut que sur cette variété intégrale, les variables indépendantes (x^1, \dots, x^p) puissent prendre des valeurs arbitraires, autrement dit que cette variété soit *étalée* au-dessus de la variété X . On dira alors que l'indépendance des variables x^i est préservée, ce qui se traduit par la condition $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p \neq 0$.

Soit Σ , un système EDP d'ordre q . Le système extérieur S équivalent à Σ est défini sur la variété des jets d'ordre q , $J^q(X, U)$. Il est obtenu en rajoutant aux équations de Σ , les formes de contact de J^q . Soit :

$$S \begin{cases} f & = 0, & \forall f \in \Sigma \\ du_I^\alpha - u_{I,i}^\alpha dx^i & = 0, & 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq p, 0 \leq \#I < q, \\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p & \neq 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Pour fermer le système (1.20), il suffit de lui rajouter les équations :

$$\begin{cases} df & = 0, \quad \forall f \in \Sigma, \\ dx^i \wedge du_{I,i}^\alpha & = 0, \quad 1 \leq i \leq p, \#I = q - 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

EXEMPLE – Soit le système d'équations aux dérivées partielles

$$\Sigma \begin{cases} u_{xx} & = 1, \\ u_{yy} & = 1. \end{cases} \quad (1.22)$$

D'après (1.20), ce système EDP (Σ) est équivalent au système différentiel extérieur :

$$S \begin{cases} r - 1 & = 0, \\ t - 1 & = 0, \\ du - p dx - q dy & = 0, \\ dp - r dx - s dy & = 0, \\ dq - s dx - t dy & = 0, \\ dx \wedge dy & \neq 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

défini sur la variété M dans le système de coordonnées $(x, y, u, p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy})$.

Il est très simple de restreindre (1.23) sur la variété $M_0 \subset M$ définie par l'annulation des 0-formes :

$$\begin{cases} du - p dx - q dy & = 0, \\ dp - r dx - s dy & = 0, \\ dq - s dx - t dy & = 0, \\ dx \wedge dy & \neq 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Dans le cadre du calcul formel, on préfère parfois calculer modulo l'idéal différentiel extérieur engendré par les 0-formes, ce qui est toujours possible pour des équations algébriques, en utilisant des bases de Groebner ou des systèmes triangulaires.

Ce système (1.24) est fermé en lui rajoutant les différentielles extérieures des deux dernières équations, ce qui donne

$$\begin{cases} du - p dx - q dy & = 0, \\ dp - r dx - s dy & = 0, \\ dq - s dx - t dy & = 0, \\ ds \wedge dx & = 0, \\ ds \wedge dy & = 0, \\ dx \wedge dy & \neq 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Il y a une contrainte d'intégrabilité $ds = 0$ qui n'est pas dans l'idéal différentiel extérieur engendré par les équations. Cette contrainte d'intégrabilité découle de la condition d'indépendance $dx \wedge dy \neq 0$. En effet, à cause des deux dernières équations, il existe des fonctions λ et μ telles que $ds = \lambda dx = \mu dy$. Lorsque $\lambda \neq 0$, on a $dx = \frac{\mu}{\lambda} dy$, ce qui entraîne la contradiction $dx \wedge dy = 0$. Donc $\lambda = 0$ et par suite $ds = 0$.

Ainsi, la condition d'indépendance peut entraîner de nouvelles égalités qui ne sont pas dans l'idéal différentiel extérieur engendré par les équations. On verra que si tel est le cas, le système n'est pas en involution. Il est clair que le théorème de Cartan–Kähler qui détermine l'existence de variétés intégrales en prenant en compte uniquement les équations est insuffisant pour résoudre des systèmes extérieurs comportant une condition d'indépendance.

Remarquons que le système (1.23) défini sur J^2 peut être ramené sur l'espace $J^1 = \{(x, y, u, p = u_x, q = u_y) \in \mathbb{R}^5\}$ par des produits extérieurs adaptés qui éliminent la coordonnée $s = u_{xy}$ dans (1.25)

$$\begin{cases} du - p dx - q dy & = 0, \\ dp \wedge dy - dx \wedge dy & = 0, \\ dq \wedge dx + dx \wedge dy & = 0, \\ dx \wedge dy & \neq 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ce système est fermé ; on verra qu'il n'est pas en involution. \square

1.5.2 Définition et calcul des caractères réduits

Lors du calcul des caractères de Cartan, on a vu que chaque colonne de la matrice du système polaire (1.16) correspond à la différentielle d'une coordonnée de M (voir système (1.15) page 23).

Définition 21 (système polaire réduit) *Considérons le système polaire (1.16) auquel on aura supprimé les colonnes correspondant à dx^1, \dots, dx^p . Le système ainsi obtenu est appelé système polaire réduit.*

Définition 22 (caractères réduits) *Les caractères réduits, notés $(s'_1, \dots, s'_{p-1}, \sigma'_p)$ sont obtenus par un calcul identique à celui des caractères de Cartan sur le système polaire réduit.*

1.5.3 Critères d'involution

Théorème 8 (Premier critère) *Un système différentiel extérieur est en involution par rapport aux variables x^1, \dots, x^p si et seulement si ce système admet des éléments intégraux génériques de dimension p et si chacun de ses caractères réduits est égal au caractère de Cartan correspondant i.e.*

$$s_i = s'_i \text{ pour } i = 0, \dots, p - 1.$$

PREUVE – Le système polaire des éléments intégraux de dimension p est de la forme $A du + B dx = 0$ avec $du := (du^i)_{1 \leq i \leq n}$ et $dx := (dx^j)_{1 \leq j \leq p}$. D'après la définition 20, le système est en involution si ce système polaire n'implique aucune relation linéaire entre les dx^j . Un résultat classique d'algèbre linéaire dit qu'il faut et il suffit que le système polaire $A du + B dx = 0$ ait même rang que le système polaire réduit $A du = 0$ – voir [50] pages 467–468. \square

On peut déterminer si un système est en involution par rapport à des variables x_1, \dots, x_p par un algorithme de pivot de Gauss en calculant *simultanément* les caractères et les caractères réduits en une seule passe. En effet, supposons les colonnes de la matrice du système polaire (1.16) réordonnées de façon à ce que celles correspondant aux différentielles dx^1, \dots, dx^p soient le plus à droite possible. La triangularisation est effectuée par combinaison linéaire de lignes en faisant apparaître des zéros dans les colonnes de gauche de la matrice, ce qui revient à éliminer les du^i dans le système polaire. On obtient ainsi, "à coup sur", les relations éventuelles entre les dx^j . Ce test d'involution, qui découle directement de la définition 20 est d'une remarquable efficacité. Il ne se trouve pas, à ma connaissance, référencé dans la littérature.

EXEMPLE – Soit le système différentiel extérieur avec condition d'indépendance, défini sur M de coordonnées (u, x, y) :

$$S \begin{cases} du \wedge dx = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Ce système ne contient pas de 1-formes, donc $s_0 = 0$. Le système (1.27) admet donc des éléments intégraux de dimension 1, notés (x, v_1) où $v_1 = v_1^u \partial/\partial u + v_1^x \partial/\partial x + v_1^y \partial/\partial y$. Calculons les 2-plans intégraux $(x, (v_1, v_2))$ du système (1.27). Le vecteur v_2 est alors solution du système polaire :

$$\begin{pmatrix} -v_1^x & v_1^u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^u \\ v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} = 0. \quad (1.28)$$

Ce système est *génériquement* de rang 1, on a donc $s_0 + s_1 = 1 \leq 3 - 2$. Donc $s_1 = 1$ et (1.27) admet des éléments intégraux de dimension 2.

D'après la définition 20 page 25, le système (1.27) est en involution, si le système polaire (1.28) n'implique aucune relation liant uniquement les coordonnées $dx := v_2^x$ et $dy := v_2^y$. On peut aussi montrer que le système (1.28) est en involution en adoptant un point de vue légèrement différent. Si l'on supprime les deux dernières colonnes de la matrice du système polaire (1.28) correspondant aux deux différentielles dx et dy , le rang générique ne change pas, donc le système extérieur est en involution. L'équivalence des deux points de vue est un résultat classique d'algèbre linéaire. \square

Voyons maintenant un deuxième critère d'involution, celui qui sera notamment utilisé par la méthode d'équivalence de Cartan.

Définition 23 (degré d'indétermination) Soit S un système différentiel extérieur défini sur $M = (X, U)$. On pose

$$du^i = \lambda_j^i dx^j,$$

les équations des p -plans intégraux du système S préservant l'indépendance des variables x^1, \dots, x^p . Le nombre de paramètres λ_j^i fonctionnellement indépendants lorsque l'on tient compte des équations de S et de l'indépendance des variables x^j est appelé degré d'indétermination.

Théorème 9 (deuxième critère) *Soit r le degré d'indétermination des p -plans intégraux d'un système différentiel extérieur et $s'_1, \dots, s'_{p-1}, \sigma'_p$ les caractères réduits de ce système. Ce système est en involution si et seulement si*

$$s'_1 + 2s'_2 + \dots + (p-1)s'_{p-1} + p\sigma'_p = r.$$

PREUVE – Voir [10] page 91. □

EXEMPLE – Reprenons le système (1.27) :

$$S \begin{cases} du \wedge dx = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

et testons son involution par le critère du théorème (9). S ne contient pas de 1-formes par conséquent, $s'_0 = 0$. On a immédiatement $s'_1 = 1 \leq 3 - 2$. Soit

$$du = \lambda dx + \mu dy, \quad (1.30)$$

l'équation d'un 2-plan intégral de S . La substitution de (1.30) dans S implique $\mu = 0$. Le degré d'indétermination des 2-plans intégraux de S est donc 1. Par suite, le critère du théorème 9 implique que le système (1.27) est en involution. Enfin, le théorème de Cartan-Kähler assure que S admet des variétés intégrales de dimension 2 préservant l'indépendance des variables x et y . □

Soit S , un système différentiel extérieur. On peut être dans la situation où S possède des éléments intégraux de dimensions p mais n'est pas en involution par rapport aux variables x^1, \dots, x^p . On peut aussi se trouver dans la situation où S n'admet pas d'élément intégral régulier de dimension p . Dans chacun de ces deux cas, on prolonge le système S , ce qui permet de se ramener, en un nombre fini d'étapes (thm de Cartan-Kuranishi), à un système soit en involution, soit inconsistant (n'ayant pas de solutions).

1.6 Prolongation d'un système différentiel extérieur

Soit S , un système différentiel extérieur fermé, qui n'est pas involution par rapport aux variables x_1, \dots, x_p . D'un point de vue abstrait, le prolongement du système S est un nouveau système différentiel extérieur équivalent à S et qui est défini sur la variété fibrée des p -plans intégraux réguliers de S . Plus concrètement, l'algorithme de prolongation du système S comporte les trois étapes suivantes :

1. Ajouter à S les équations suivantes :

$$du^i = \lambda_j^i dx^j, \quad 1 \leq j \leq p \quad (1.31)$$

Ces équations sont vraies car les variables u^i sont des fonctions des variables indépendantes x^j (thm des fonctions implicites).

2. Remplacer dans S , les du^i par leur valeur $\lambda_j^i dx^j$ conformément à (1.31)

$$\begin{cases} f_i dx^i & = 0, \\ f_{ij} dx^i \wedge dx^j & = 0, \quad i < j, \\ \vdots & \end{cases} \quad (1.32)$$

L'indépendance des formes dx^1, \dots, dx^p permet alors de déduire la nullité des 0-formes f_i, f_{ij}, \dots à partir des relations (1.32) soit :

$$\begin{cases} f_i = 0, \\ f_{ij} = 0, \\ \vdots \end{cases} \quad (1.33)$$

3. Ajouter à S les différentielles extérieures des équations (1.31) et (1.33). C'est à dire fermer le système obtenu en vue d'appliquer le théorème de Cartan–Kähler.

Notons qu'à l'étape 2 de la prolongation, les 0-formes de S peuvent être incompatibles ou impliquer des relations entre les variables indépendantes sur la variété M_0 définie par l'annulation des 0-formes. Dans ce cas, le système n'a pas de solution préservant l'indépendance des variables x_1, \dots, x_p . D'autre part, l'indépendance de ces variables peut n'être préservée que sur une sous-variété de M_0 . Dans ce cas, il convient de spécialiser le système S sur cette sous-variété de M_0 (solution singulière), ce qui peut entraîner des scindages (raisonnement par disjonction de cas).

EXEMPLE – Soit le système différentiel extérieur avec condition d'indépendance, défini sur M dans les coordonnées (x, y, u) :

$$S \begin{cases} du \wedge dx = 0, \\ du \wedge dy = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

S ne contient pas de 1-formes par conséquent, $s_0 = 0$. Comme précédemment, pour calculer s_1 , il faut calculer $r(E_1)$ le rang du système polaire :

$$\begin{pmatrix} -v_1^x & v_1^u & 0 \\ -v_1^y & 0 & v_1^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^u \\ v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} = 0.$$

On a immédiatement $r(E_1) = s_0 + s_1 = 2 > 3 - 2$ et $s_1 = 2$. Par conséquent, S n'admet pas d'élément intégral régulier de dimension 2 de façon générique. À fortiori, S n'est pas en involution par rapport à x et y . Il faut donc prolonger le système S . Soit

$$du = \lambda dx + \mu dy, \quad (1.35)$$

l'équation d'un 2-plan intégral de S . La substitution de (1.35) dans S implique

$$\lambda = \mu = 0. \quad (1.36)$$

Si l'on se place sur la sous-variété définie par les équations (1.36), le système S' prolongé de S est :

$$S' \begin{cases} du = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

On a cette fois, $s_0 = s'_0 = 1$ et $s_1 = s'_1 = 0$ par conséquent le système S' est en involution par rapport à x et y et admet des variétés intégrales de dimension 2 préservant l'indépendance de ces variables. \square

Nous allons montrer que la prolongation de S revient, entre autre, à rajouter à ce système les dérivées partielles des équations du système Σ . Ce lemme (simple mais non répertorié dans la littérature) permet notamment de préciser le rapport entre la prolongation d'un système différentiel extérieur et l'algorithme de prolongation utilisé en algèbre différentielle pour calculer les contraintes d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple [3]).

Lemme 3 *Soit S , un système différentiel extérieur provenant d'un système d'équations aux dérivées partielles à p variables indépendantes x^1, \dots, x^p de J^q . Si S comporte une 0-forme notée $f(x, u^{(q)}) = 0$ alors le système obtenu par prolongation de S contient les 0-formes $D_i f(x, u^{(q)}) = 0$, où D_i est la dérivée totale par rapport à la variable indépendante x^i . Autrement dit, le système prolongé de S contient les dérivées totales des 0-formes de S .*

PREUVE – Les 1-formes de S sont

$$du_I^\alpha - u_{I,i}^\alpha dx^i = 0. \quad (1.38)$$

Pour obtenir les équations des p -plans intégraux de S , on ajoute à ces équations, les équations

$$du_{I,k}^\alpha - u_{I,k,i}^\alpha dx^i = 0. \quad (1.39)$$

Par définition,

$$df = f_{u_{I,k}^\alpha} du_{I,k}^\alpha + f_{u_I^\alpha} du_I^\alpha + f_{x^i} dx^i = 0. \quad (1.40)$$

Substituons (1.38) dans (1.40). Nous obtenons $f_{u_{I,k}^\alpha} du_{I,k}^\alpha + (f_{u_I^\alpha} u_{I,i}^\alpha + f_{x^i}) dx^i = 0$. Substituons y ensuite (1.39). Nous obtenons $(f_{u_{I,k}^\alpha} u_{I,k,i}^\alpha + f_{u_I^\alpha} u_{I,i}^\alpha + f_{x^i}) dx^i = 0$. En utilisant l'hypothèse d'indépendance des formes dx^i , nous concluons que : $D_i f = f_{u_{I,k}^\alpha} u_{I,k,i}^\alpha + f_{u_I^\alpha} u_{I,i}^\alpha + f_{x^i} = 0$. \square

D'après le théorème de Cartan-Kuranishi [38] (sous certaines hypothèses de régularités), un système différentiel extérieur peut être prolongé en un nombre fini d'étapes, en un système qui est soit en involution soit incompatible.

Chapitre 2

La méthode d'équivalence de Cartan

2.1 Introduction

Ce chapitre décrit la méthode d'équivalence mise au point par E. Cartan dans les années 1905–1910 sans aborder l'aspect programmation qui sera traité au chapitre 8.

Cette méthode permet de décider de l'équivalence locale de deux G -structures par un changement de coordonnées. Introduite vers 1950 par C. Ehresmann et S. S. Chern (deux élèves de E. Cartan) [20, 13], la notion de G -structure nous permettra notamment de clarifier les entrées de l'algorithme et par la-même de mieux structurer les programmes informatiques implantant cette méthode. Les applications sont très nombreuses car la plupart des structures géométriques (variétés analytiques, variétés riemanniennes, variétés (presque) complexes, variétés symplectiques etc.) sont des G -structures. En particulier, Cartan a montré que l'équivalence de deux systèmes d'équations différentielles sous l'action d'un changement de coordonnées locales pris dans un (pseudo)groupe de transformations se ramène à l'étude de l'équivalence locale de deux G -structures.

Les *pseudo-groupes* sont apparus dans les travaux de Lie car le groupe des symétries [43] d'un système d'équations différentielles est assez souvent un groupe de dimension infinie. Un tel groupe est toujours formé des transformations qui sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles appelées *équations de définition* du groupe. Par exemple, les difféomorphismes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 de la forme $\bar{x} = X(x)$ et $\bar{y} = Y(x, y)$ forment un pseudo-groupe de transformations de \mathbb{R}^2 qui sont solutions du système EDP

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Lie s'est rendu compte que les équations de définition des transformations infinitésimales d'un groupe continu sont infiniment plus simples que les équations de définition du groupe lui-même. Par exemple, le groupe des transformations homographiques de \mathbb{R}

$$\bar{x} = X(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ pour } ad - bc = 1 \tag{2.1}$$

a pour équations de définition (on élimine a, b, c, d)

$$X''' - \frac{3}{2} \frac{X''^2}{X'} = 0, \quad (2.2)$$

tandis que les transformations infinitésimales associées

$$\bar{x} = x + \varepsilon \xi(x) + O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

ont pour équations de définition

$$\xi'''(x) = 0. \quad (2.4)$$

Celles-ci sont obtenues en remplaçant X par $x + \varepsilon \xi(x)$ dans (2.2) et en annulant les termes en ε^2 .

Dans l'étude des groupes de Lie (groupes continus de dimension finie), le point de vue infinitésimal [41, 42] apporte donc une simplification notable mais sa généralisation aux pseudo-groupes de transformations (groupes de dimension infinie) pose problème, en particulier lorsque l'action du pseudo-groupe n'est pas transitive [57] sur la variété sur laquelle il opère. Cartan adopte un point de vue nouveau. Selon lui, l'étude d'un pseudo-groupe doit partir de ses "équations de définition". Par un travail assez difficile, Cartan montre, de manière complètement constructive, qu'un tel pseudo-groupe est toujours isomorphe ¹ au groupe des automorphismes d'une certaine G -structure.

Soit G un sous-groupe de $GL(m, \mathbb{R})$. Nous verrons qu'une G -structure de base M est une sous-variété du fibré des repères de M . En termes plus techniques, c'est un fibré principal, autrement dit, le groupe G opère librement et transitivement sur les fibres. Par suite, ce fibré est localement isomorphe à $G \times M$. Le groupe G est appelé *groupe structural*.

Nous démontrerons qu'une G -structure est localement décrite par une 1-forme θ à valeurs dans \mathbb{R}^m , ce qui revient à poser

$$\theta = (\theta^i)_{1 \leq i \leq m}, \quad \theta^i \in \Omega^1(G \times M).$$

Soient θ et $\bar{\theta}$ les 1-formes associées à deux G -structures \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$ de même groupe structural G . Alors \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$ sont localement équivalentes (on notera $\mathcal{G} \sim \bar{\mathcal{G}}$) si et seulement si le système de Pfaff avec condition d'indépendance

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^m \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

admet des variétés intégrales de dimension m . Par définition, une variété intégrale de (2.5) est une sous-variété de $\mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}} \simeq M \times G \times \bar{M} \times \bar{G}$ représentant le graphe d'un isomorphisme local $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$.

On a vu au chapitre 1 que cette question de l'existence de variétés intégrales, i.e. du calcul des contraintes d'intégrabilité est résolue par le théorème de Cartan–Khähler et la théorie des systèmes en involution. Les contraintes d'intégrabilité seront toujours présentées comme un système d'équations (non différentielles) toutes de la forme

$$\bar{I}(\bar{x}, \bar{g}) = I(x, g), \quad (\bar{x}, \bar{g}) = \phi(x, g). \quad (2.6)$$

¹La notion d'isomorphisme utilisée n'est pas exactement la définition actuelle.

Les fonctions $I : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des *fonctions invariantes* de \mathcal{G} car pour tout automorphisme local $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, en posant $(\bar{x}, \bar{g}) = \phi(x, g)$, on a forcément

$$I(\bar{x}, \bar{g}) = I(x, g),$$

autrement dit, pour tout automorphisme local ϕ

$$\phi^*(I) = I.$$

Un ensemble $\{I_\alpha\}$ est dit un ensemble *complet* d'invariants locaux de la G -structure \mathcal{G} si la condition $\phi^*(I_\alpha) = I_\alpha$, supposée vraie pour tout indice α , implique que ϕ est un automorphisme local de la G -structure \mathcal{G} .

L'algorithme mis au point par E. Cartan permet de calculer un système complet d'invariants locaux d'une G -structure décrite par une 1-forme θ . A cette fin, Cartan construit à partir de la G -structure de départ $\mathcal{G}^{(0)} := \mathcal{G}$, une suite finie de G -structures

$$\mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}^{(l)}. \quad (2.7)$$

Ces constructions sont *invariantes*² au sens suivant

$$\mathcal{G} \sim \bar{\mathcal{G}} \text{ ssi } \mathcal{G}^{(i)} \sim \bar{\mathcal{G}}^{(i)}, \quad (0 \leq i \leq l). \quad (2.8)$$

En fait, on arrête la construction (à l'étape l) lorsque le système de Pfaff associé (2.5) est en involution. Il y a deux types de passages d'une G -structure $\mathcal{G} \simeq G \times M$ à la suivante $\mathcal{G}' \simeq G' \times M'$:

1. Réduction du groupe structural de \mathcal{G} selon le schéma

$$G' \subset G \text{ et } M' = M.$$

Cette réduction revient essentiellement à fixer un invariant $I(x, g)$ à une valeur constante C_0 convenable. La relation $I(x, g) = C_0$ entre $x \in M$ et $g \in G$ réduit de un la dimension du groupe G .

2. Prolongement de la G -structure \mathcal{G} selon le schéma

$$M' = M \times G.$$

Le nouveau groupe G' est alors un groupe commutatif qui découle du procédé d'absorption de la torsion décrit en section 2.5 page 47. Le lien subtil entre prolongement d'un système différentiel extérieur et prolongement d'une G -structure sera examiné dans la section 2.8.

L'étude de la compatibilité des conditions (2.6) obtenues à la fin de la méthode d'équivalence est seulement esquissée dans cette thèse. Le logiciel calcule les invariants en coordonnées locales. Quand ces invariants sont des polynômes, l'étude de la compatibilité se ramène à l'étude des solutions d'un système d'équations algébriques, problème que l'on sait résoudre "en théorie" par des techniques d'élimination (bases de Groebner,

²On pourrait aussi dire *covariante*.

systèmes triangulaires etc.). En réalité, les formules obtenues grossissent assez rapidement, ce qui rend souvent ce calcul d'élimination impossible en pratique.

Une autre méthode, dite des *variétés classifiantes*, repose sur le calcul des relations liant les fonctions invariantes d'une G -structure. Nous verrons que la plupart de ces relations s'obtiennent grâce à l'identité fondamentale (Poincaré)

$$d(d\theta) = 0.$$

Ce calcul, qui ne nécessite pas la connaissance des invariants en coordonnées locales, est d'une remarquable efficacité. Dans les exemples traités dans cette thèse, les relations obtenues par cette méthode permettent de construire un système générateur réduit de l'algèbre *différentielle* des invariants d'une G -structure. Il est important d'insister sur la structure différentielle, i.e. sur le fait que l'algèbre des invariants est fermée pour les dérivations invariantes $X_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$ duales des formes θ^i . En effet si I est un invariant, alors dI est une forme invariante. On a

$$dI = I_1 \theta^1 + I_2 \theta^2 + \dots + I_m \theta^m. \quad (2.9)$$

Les coordonnées $I_k := X_k(I)$ pour $1 \leq k \leq m$ sont de nouveaux invariants appelés invariants *dérivés*. Il est dommage que l'algèbre différentielle telle qu'elle a été axiomatisée initialement par Ritt puis Kolchin ne s'applique pas à l'étude des algèbres d'invariants. Il est important de faire la théorie des algèbres différentielles structurées par des dérivations qui ne commutent pas entre elles, travail qui a été entrepris par B. Malgrange, lors de sa réinterprétation personnelle de la cohomologie de Spencer.

Le schéma d'exécution de l'algorithme de Cartan est donné par la figure (2.1) page 37.

2.2 La catégorie des G -structures

2.2.1 Définitions de base

Soit M une variété analytique réelle de dimension m et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Informellement, une G -structure de base M est une réduction du fibré des repères de M . Plus précisément, un repère R est la donnée d'un point $x \in M$ et d'une base, notée $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$, du plan tangent $T_x M$ en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. L'ensemble des repères de M est une variété fibrée au-dessus de M notée $\mathcal{R}(M)$. En posant pour tout repère $R = (x, \{e_i\})$ et pour tout $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$,

$$R.g = (x, \{\bar{e}_j\}) \text{ avec } \bar{e}_j = e_i g_j^i, \quad (2.10)$$

on définit une action à droite de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{R}(M)$. Une G -structure, notée \mathcal{G} , est une sous-variété $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(M)$ possédant la propriété

$$\forall R \in \mathcal{G}, \forall g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}), \quad R.g \in \mathcal{G} \text{ ssi } g \in G. \quad (2.11)$$

Cela signifie que deux éléments de \mathcal{G} sont dans la même fibre (deux repères de même origine x) si et seulement s'ils se déduisent l'un de l'autre par une matrice de passage

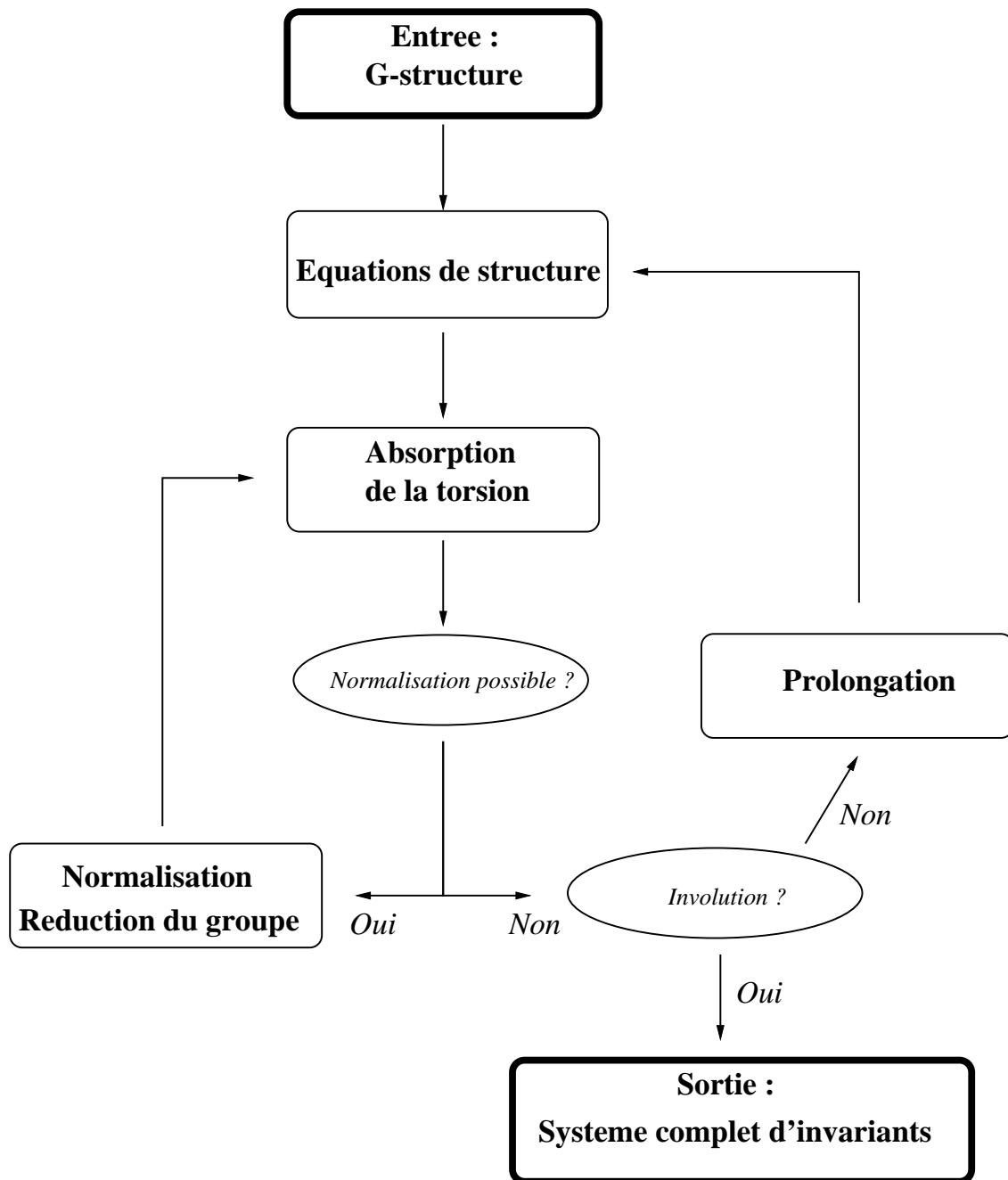


FIG. 2.1 – Schéma d'algorithme de la méthode d'équivalence

qui est dans le groupe G . Ce groupe est appelé *groupe structural* de \mathcal{G} . Par exemple, $\mathcal{R}(M)$ est une $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ -structure tandis que l'ensemble des repères orthonormés d'une variété riemannienne est une $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$ -structure.

Tout difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ se prolonge de manière unique en un difféomorphisme $\phi : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(\overline{M})$ en posant pour tout repère $R = (x, \{e_i\})$,

$$\phi(R) = (\varphi(x), \{\bar{e}_i\}) \text{ avec } \bar{e}_i := \varphi'(x)(e_i) \quad (2.12)$$

sachant que $\varphi'(x)$ désigne la différentielle (jacobienne) de φ au point x . Les deux actions à droite (2.10) et à gauche (2.12) définies sur le fibré des repères commutent entre elles. On vérifie que

$$\forall g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}), \quad \phi(R.g) = \phi(R).g \quad (2.13)$$

Définition 24 (isomorphisme) Deux G -structures \mathcal{G} et $\overline{\mathcal{G}}$ de base M et \overline{M} sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ tel que le prolongement $\phi : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(\overline{M})$ défini par (2.12) vérifie

$$\phi(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{G}}.$$

On écrit alors $\mathcal{G} \sim \overline{\mathcal{G}}$. La restriction de ϕ à la variété $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(M)$ est appelé un isomorphisme de \mathcal{G} dans $\overline{\mathcal{G}}$.

Un *automorphisme* de \mathcal{G} est un isomorphisme de \mathcal{G} dans \mathcal{G} . Le groupe des automorphismes de \mathcal{G} est noté $\mathrm{aut}(\mathcal{G})$.

Définition 25 (invariant) Un objet géométrique X attaché à la G -structure \mathcal{G} est dit invariant lorsque

$$\forall \phi \in \mathrm{aut}(\mathcal{G}), \quad \phi_*(X) = X. \quad (2.14)$$

L'objet X peut être, par exemple, une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ou une forme $\theta \in \Omega^1 \mathcal{G}$, un champ de vecteur sur \mathcal{G} , etc. Pour une fonction f , on préfère écrire $\phi^*(f) = f$ où le morphisme ϕ^* , appelé *pull-back* en anglais, est défini par $\phi^*(f) = f \circ \phi$.

2.2.2 Exemples de G -structures

EXEMPLE – Le fibré des repères d'une variété différentiable M est une $\mathrm{GL}(m)$ -structure. En tout point $x \in M$, il est clair que l'on peut passer d'une base de $T_x M$ à une autre par une matrice de $\mathrm{GL}(m)$. Les automorphismes de cette G -structure $\mathcal{R}(M)$ correspondent aux difféomorphismes de M dans M . \square

EXEMPLE – Le fibré des repères orthonormés d'une variété riemannienne M est une $\mathrm{O}(m)$ -structure. En tout point $x \in M$, il est clair que l'on peut passer d'une base orthonormée de $T_x M$ à une autre par une matrice orthogonale de $\mathrm{O}(m)$. Les automorphismes de la G -structure correspondent aux difféomorphismes $\varphi : M \rightarrow M$ dont la différentielle (jacobienne) $\varphi'(x)$ transforme un repère orthonormé en x en un repère orthonormé en $\varphi(x)$. Ce sont donc les isométries de M i.e. les transformations qui conservent la métrique de M . \square

EXEMPLE – Un champ de p -plans (distribution) est une application qui associe à tout point $x \in M$, un sous-espace vectoriel $E_x \subset T_x M$ de dimension p . Il lui correspond une G -structure $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(M)$. Un élément de \mathcal{G} est une base de $T_x M$ formée d'une base quelconque de E_x complétée par une base de $m-p$ vecteurs pris dans un supplémentaire quelconque de E_x dans $T_x M$. Les automorphismes de cette G -structure correspondent aux difféomorphismes $\varphi : M \rightarrow M$ qui laissent le champ des p -plans globalement invariant, i.e. tels que $\varphi_*(E_x) = E_{\varphi(x)}$. Ce sont donc les symétries de ce champ de p -plans. \square

EXEMPLE – Un *système différentiel* est par définition une distribution définie sur une certaine variété M . Cela provient du fait que système EDP quelconque est équivalent à un certain système de Pfaff (plus une condition d'indépendance fonctionnelle sur les variables dites *indépendantes*). \square

Ce dernier exemple est le plus intéressant pour la suite. La théorie des *diffiétés* [37] de l'école Lychagin, Vinogradov etc. montre qu'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles (avec p variables indépendantes) se ramène toujours à un champ de p -plans *complètement* intégrable (au sens de Frobenius) qui est défini sur la variété des *conditions initiales*. La seule difficulté vient du fait que cette variété des conditions initiales peut être de dimension infinie, ce qui correspond au fait que les solutions dépendent d'un nombre infini de constantes arbitraires. En tout point de cette variété, le p -plan est engendré par les vecteurs directeurs $D_i = \frac{d}{dx^i}$.

- Par exemple, une équation du premier ordre $y' = f(x, y)$ est vue comme un champ de droites. Par tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = M$, on considère la droite passant par ce point et de pente $y' = f(x, y)$.
- De même, une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$ est la donnée en tout point $(x, y, y') \in \mathbb{R}^3 = M$, du champ de Cartan

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'}$$

Par tout point $(x, y, y') \in M$ passe une droite et une seule de vecteur directeur D_x . Le graphe d'une solution de l'équation $y'' = f(x, y, y')$ est une courbe tracée dans M tangente en tout point au champ de vecteur D_x .

- Enfin, par exemple, le système d'équations $u_{xx} = u_{yy} = 0$ définit un champ de 2-plans sur la variété des conditions initiales $M = \{(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) \in \mathbb{R}^6\}$. Ces plans sont définis en tout point de M par les deux vecteurs directeurs (champs de Cartan)

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y}, \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_x}. \end{aligned}$$

Le graphe d'une solution de ce système différentiel est une sous-variété de M tangente en tout point à ce champ de 2-plans.

2.2.3 Forme canonique associée à une G -structure

Soit \mathcal{G} une G -structure de base M . Dans ce paragraphe, un repère $R \in \mathcal{G}$ dont l'origine est un point $x \in M$ est vu comme une application linéaire inversible notée p :

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M \quad (\dim M = m). \quad (2.15)$$

Soit $\pi : \mathcal{G} \rightarrow M$, la projection canonique qui, au repère p associe son origine x . La *forme canonique* θ est une 1-forme définie sur \mathcal{G} à valeurs dans \mathbb{R}^m . Elle s'obtient en posant (voir figure 2.2)

$$\theta|_p = p^{-1} \circ \pi_* \quad (2.16)$$

L'interprétation géométrique de cette construction est simple. Un élément $(p, \dot{p}) \in T_p \mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} p \in \mathcal{G} & & \dot{p} \in T_p \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & \swarrow \theta & \downarrow \pi_* \\ x \in M & \xrightarrow{p} & \dot{x} \in T_x M \end{array}$$

FIG. 2.2 – Définition de la 1-forme canonique θ

est un repère p animé d'une vitesse \dot{p} . La projection $(x, \dot{x}) := \pi_*(p, \dot{p})$ fait intervenir la vitesse \dot{x} du point mobile $x := \pi(p)$. Par construction, la forme θ associe au couple (p, \dot{p}) les coordonnées du vecteur \dot{x} dans le repère p . Cette définition est *globale* et *intrinsèque*, c'est à dire qu'elle est indépendante de tout système de coordonnées locales (voir Sternberg [58] page 309).

$$\begin{array}{ccc} p \in \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \bar{p} \in \bar{\mathcal{G}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in M & \xrightarrow{\varphi} & \bar{x} \in \bar{M} \end{array}$$

FIG. 2.3 – Correspondance entre φ et ϕ

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^m & \\ p \swarrow & & \searrow \bar{p} \\ T_x M & \xrightarrow{\varphi'(x)} & T_{\bar{x}} \bar{M} \end{array}$$

FIG. 2.4 – Correspondance entre p et \bar{p}

Un isomorphisme de G -structure $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ transforme un repère $p \in \mathcal{G}$ en un repère $\bar{p} = \phi(p)$ tel que le schéma de la figure 2.4 commute. En effet, par construction du repère \bar{p} , le vecteur vitesse $\dot{x} \in T_x M$ a exactement les mêmes coordonnées que le vecteur $\dot{\bar{x}}$ dans le repère \bar{p} .

Proposition 2 Soient θ et $\bar{\theta}$ les formes canoniques définies sur les G -structures \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$ et $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ un difféomorphisme entre ces deux variétés. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le difféomorphisme ϕ est un isomorphisme de G -structures.

(ii) Le difféomorphisme ϕ vérifie $\phi^*(\bar{\theta}) = \theta$.

PREUVE – La commutativité du diagramme de la figure 2.4 est équivalente à la commutativité du diagramme de la figure 2.5. \square

$$\begin{array}{ccc}
 T_p \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi'(p)} & T_{\bar{p}} \bar{\mathcal{G}} \\
 \searrow \theta & & \swarrow \bar{\theta} \\
 & \mathbb{R}^m & \\
 \swarrow p & & \searrow \bar{p} \\
 T_x M & \xrightarrow{\phi'(x)} & T_{\bar{x}} \bar{M}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \downarrow \pi_* \\
 \\
 \downarrow \pi_*
 \end{array}$$

FIG. 2.5 – $\phi^*(\bar{\theta}) = \theta$

2.2.4 Equivalence locale de deux G -structures

Définition 26 (équivalence locale) Soient $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(M)$ et $\bar{\mathcal{G}} \subset \mathcal{R}(\bar{M})$ deux G -structures. On dit que \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$ sont localement équivalentes en $(x, \bar{x}) \in M \times \bar{M}$ s'il existe des voisinages ouverts U de x , \bar{U} de \bar{x} et un isomorphisme $\phi : \mathcal{G}|_U \rightarrow \bar{\mathcal{G}}|_{\bar{U}}$. Ici, $\mathcal{G}|_U$ et $\bar{\mathcal{G}}|_{\bar{U}}$ désignent les restrictions de \mathcal{G} sur U et de $\bar{\mathcal{G}}$ sur \bar{U} .

2.2.4.1 Calcul de la forme canonique en coordonnées locales

Le point de vue étant local, on peut supposer que $M = U$ est un ouvert de \mathbb{R}^m . Montrons d'abord que la donnée d'une *section locale* de \mathcal{G} permet de construire un isomorphisme local

$$\mathcal{G} \simeq M \times G.$$

Une section locale σ de \mathcal{G} est la donnée d'un champ de repères, c'est à dire d'une application

$$M \ni x \rightarrow \sigma(x) \in \mathcal{G} \text{ avec } \sigma(x) = \left(x, \{X_i(x)\}_{1 \leq i \leq m} \right).$$

Comme les vecteurs $X_i(x)$ de la base dépendent de manière différentiable du point $x \in M$, la donnée de σ équivaut à la donnée d'un repère mobile formé de m champs de vecteurs X_i linéairement indépendants. Tout repère $p \in \mathcal{G}$ d'origine x est un repère qui se déduit de façon unique de $\sigma(x)$ par multiplication à droite par une matrice du groupe G . On définit $g \in G$ en posant :

$$\sigma(x) = p \cdot g. \tag{2.17}$$

Un élément de $p \in \mathcal{G}$ est donc la donnée d'un couple $(x, g) \in M \times G$.

Considérons les 1-formes $\omega := (\omega^j)_{1 \leq j \leq m}$ duales des champs de vecteurs $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$. Autrement dit, on a

$$\omega^j(X_i) = \delta_i^j \text{ (symbole de Kroneker).}$$

Pour tout vecteur vitesse $\dot{x} \in T_x M$, le vecteur des coordonnées de \dot{x} dans le repère $\sigma(x)$ est égal à $\omega|_x(\dot{x})$. D'après (2.17), le vecteur des coordonnées de \dot{x} dans le repère p est égal à $\theta|_p = g \cdot \omega|_x(\dot{x})$. On en déduit la formule fondamentale

$$\theta|_{x,g} = g \cdot \omega|_x. \quad (2.18)$$

2.2.4.2 Formulation de l'équivalence locale

D'après la proposition 2, le difféomorphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ est un isomorphisme de G -structure ssi $\phi^*(\bar{\theta}) = \theta$, ce qui signifie que le graphe de ϕ dans $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ vérifie le système de Pfaff

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \neq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

D'après (2.18), la condition précédente se reformule

$$\exists g : M \rightarrow G, \quad \exists \bar{g} : \overline{M} \rightarrow \overline{G}, \quad \bar{g}(\bar{x}) \cdot \bar{\omega}|_{\bar{x}} = g(x) \cdot \omega|_x \quad (2.20)$$

en supposant $\bar{x} = \varphi(x)$ et $G = \overline{G}$. Maintenant, une des deux matrices $g(x)$ ou $\bar{g}(\bar{x})$ est arbitraire et lorsque la fonction φ est fixée, le choix de la fonction g détermine complètement la fonction \bar{g} . Ces remarques sont la clé de la proposition suivante :

Proposition 3 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un difféomorphisme local $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ qui induit un isomorphisme de G -structures $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$.*
- (ii) *Le système de Pfaff (2.19) admet au moins une variété intégrale de dimension m .*
- (iii) *Le système de Pfaff (2.19) admet au moins une variété intégrale de dimension $m + r$ avec $r = \dim(G)$.*

PREUVE – L'équivalence des conditions (ii) et (iii) tient au fait que dans l'équation (2.20), une des fonctions g ou \bar{g} est forcément arbitraire. En effet, si cette équation admet une solution $\bar{x} = \varphi(x)$ pour un certain couple de fonctions $(g(x), \bar{g}(\bar{x}))$, alors φ est également solution pour tout couple $(a(x) g(x), \bar{a}(\bar{x}) \bar{g}(\bar{x}))$, quelque soit la fonction $a : M \rightarrow G$ en posant $\bar{a}(\bar{x}) = a(x)$ pour tout $x \in M$.

Dans le cas (ii), chaque variété intégrale (de dimension m) est le graphe d'une fonction

$$M \ni x \rightarrow (\bar{x}, g, \bar{g}) \in M \times G \times \overline{G} \text{ avec } \bar{x} = \varphi(x).$$

Dans le cas (iii), chaque variété intégrale (de dimension $m + r$) est le graphe d'une fonction $\phi : M \times G \rightarrow \overline{M} \times \overline{G}$ telle que

$$(\bar{x}, \bar{g}) = \phi(x, g) \text{ avec } \bar{x} = \varphi(x).$$

□

2.3 Equivalence de deux systèmes différentiels

Nous allons montrer, sur un exemple, que tout problème d'équivalence locale entre deux systèmes d'équations différentielles sous l'action d'un pseudo-groupe de transformations se ramène à un problème d'équivalence locale de deux G -structures. Cet exemple sera repris et traité dans la section 3.2.1 en utilisant les techniques d'algèbre différentielle.

2.3.1 Le problème d'équivalence

Calculer les relations liant les fonctions f et \bar{f} pour que l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.21)$$

se ramène à l'équation

$$\bar{y}'' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \quad (2.22)$$

par une transformation ponctuelle φ de la forme :

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = x + C, \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y), \end{cases} \quad (2.23)$$

où C est une constante arbitraire et η une fonction arbitraire de (x, y) . Dans [29], Hsu et Kamran donnent la classification complète, par les transformations qui préservent la fibre, des équations différentielles ordinaires du second ordre.

2.3.2 Prise en compte des équations

On se place toujours sur la variété des jets d'ordre 1 notée $J^1 = M = \bar{M} = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{x} = (x, y, p = y_x)$ (respectivement $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p} = \bar{y}_{\bar{x}})$) un système de coordonnées locales de M (resp. \bar{M}). Comme nous l'avons vu en (1.5.1), l'équation (2.21) est équivalente au système de Pfaff :

$$\begin{cases} dp - f(x, y, p) dx = 0, \\ dy - p dx = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

De même, l'équation (2.22) est équivalente au système :

$$\begin{cases} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x} = 0, \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Les systèmes de Pfaff (2.24) et (2.25) sont équivalents par un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ si les différentielles $(d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{p})$ sont linéairement liées aux différentielles (dx, dy, dp) , autrement dit si

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{x}) & a_2(\mathbf{x}) \\ a_4(\mathbf{x}) & a_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f(\mathbf{x}) dx \\ dy - p dx \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

2.3.3 Prise en compte du (pseudo)groupe de transformations

On suppose que φ est une transformation ponctuelle de la forme (2.23), donc $d\bar{x} = dx$. Par définition, la prolongation de φ sur l'espace J^1 est telle que la forme de contact $d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x}$ est égale à $dy - p dx$ à un facteur près. Il s'ensuit que les équations (2.21) et (2.22) sont équivalentes par une transformation du groupe (2.23) si et seulement si, il existe une transformation $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ et des fonctions a_1, a_2 et a_3 de M à valeurs dans \mathbb{R} telles que :

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & 0 \\ 0 & a_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f(x) dx \\ dy - p dx \\ dx \end{pmatrix}.$$

Ce système de Pfaff est réécrit sous la forme "symétrique"

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1(\bar{x}) & \bar{a}_2(\bar{x}) & 0 \\ 0 & \bar{a}_3(\bar{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & 0 \\ 0 & a_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f(x) dx \\ dy - p dx \\ dx \end{pmatrix}.$$

Maintenant, une des deux matrices est formée de fonctions arbitraires, la deuxième étant définie de manière univoque dès que la fonction $\bar{x} = \varphi(x)$ est fixée.

On note $\omega_f = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ le corepère $(dp - f(x, y, p) dx, dy - p dx, dx)$ et on pose

$$\theta_f := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega_f. \quad (2.27)$$

Chacune des formes θ_f et $\theta_{\bar{f}}$ définit une G -structure de base M et de groupe structural G formé des matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, \quad a_1 a_3 \neq 0.$$

On vient de démontrer que les équations $y'' = f(x, y, y')$ et $\bar{y}'' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$ sont équivalentes par un changement de variable φ de la forme (2.23) si et seulement si, il existe une transformation $(\bar{x}, \bar{g}) = \phi(x, g)$ telle que

$$\phi^* \theta_{\bar{f}} = \theta_f. \quad (2.28)$$

Ainsi, le problème d'équivalence de deux équations a été reformulé sous la forme d'un problème d'équivalence entre deux G -structures.

2.4 Étape 1 : Calcul des équations de structure

Pour le moment, la première chose à faire pour appliquer le théorème de Cartan-Kähler (théorème (7) page 24) au système $\bar{\theta} = \theta$ est de fermer celui-ci en lui ajoutant

les différentielles extérieures de ses équations (voir la section 1.4). On considère donc le système fermé :

$$\begin{cases} \bar{\theta} &= \theta, \\ d\bar{\theta} &= d\theta. \end{cases} \quad (2.29)$$

Le calcul de la différentielle de la forme θ définie en (2.18) se fait de la façon suivante (il est donné tel que dans [27]) :

$$d\theta = d(S\omega) = dS \wedge \omega + S \cdot d\omega \quad (2.30)$$

$$= (dS \cdot S^{-1}) \wedge S\omega + S \cdot d\omega \quad (2.31)$$

$$= (dS \cdot S^{-1}) \wedge \theta + S \cdot d\omega. \quad (2.32)$$

Considérons un corepère $\pi := (\pi^1, \dots, \pi^r)$ du groupe structural G . L'ensemble (θ, π) forme donc un corepère de la G -structure $\mathcal{G} \simeq M \times G$. Nous allons montrer que la décomposition des $d\theta^i$ dans la base des 2-formes différentielles de \mathcal{G} est de la forme

$$d\theta^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \text{ pour } 1 \leq i, j, k \leq m, \quad j < k, \quad 1 \leq \rho \leq r. \quad (2.33)$$

De même pour les formes $\bar{\theta}^i$, on a :

$$d\bar{\theta}^i = \bar{A}_{j\rho}^i \bar{\pi}^\rho \wedge \bar{\theta}^j + \bar{T}_{jk}^i \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k \text{ pour } 1 \leq i, j, k \leq m, \quad j < k, \quad 1 \leq \rho \leq r. \quad (2.34)$$

Les équations (2.33) et (2.34) sont appelées *équations de structure*. Attardons-nous quelques instants sur ces équations qui sont essentiellement la donnée de deux tenseurs A et T .

2.4.1 Les tenseurs A et \bar{A}

Le tenseur A est issu du calcul de la matrice $dS \cdot S^{-1}$, appelée forme ³ de Maurer-Cartan du groupe G . Par définition, les formes de Maurer-Cartan de G sont des formes différentielles invariantes par les translations à droite sur le groupe. Il est aisé de montrer que $dS \cdot S^{-1}$ est une matrice de formes de Maurer-Cartan. Soit $R_g : S \rightarrow Sg$ la translation à droite par un élément $g \in G$. On a :

$$\begin{aligned} R_g^*(dS \cdot S^{-1}) &= d(Sg) \cdot (Sg)^{-1} = (dS \cdot g)(g^{-1}S^{-1}) \\ &= dS \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Les formes $(\pi^\rho)_{1 \leq \rho \leq r}$ des équations (2.33) sont construites en sélectionnant r entrées linéairement indépendantes de $dS \cdot S^{-1}$. On montre qu'elles forment une base des formes de Maurer-Cartan de G (G est de dimension r).

Les coefficients $A_{j\rho}^i$ sont les coefficients de la décomposition des entrées de $dS \cdot S^{-1}$ dans la base des formes π^ρ :

$$(dS \cdot S^{-1})_j^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho. \quad (2.35)$$

Il y a plusieurs façons de choisir une base des formes de Maurer-Cartan, les équations de structure (2.33) ne sont donc pas uniques. On montre (voir [50]) que les coefficients $A_{j\rho}^i = \bar{A}_{j\rho}^i$ sont constants. De ce fait, il est judicieux de construire un corepère (θ, π) de \mathcal{G} à partir d'une base π des formes de Maurer-Cartan du groupe structural G .

³Cette matrice est vue comme une 1-forme définie sur G et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe G

2.4.2 Les tenseurs T et \bar{T}

Ces tenseurs sont simplement issus de l'expression des formes $Sd\omega$ de (2.30) dans la base des 2-formes $\theta^j \wedge \theta^k$

$$(Sd\omega)^i := T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \quad (1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j < k \leq m). \quad (2.36)$$

Les coefficients T_{jk}^i (resp \bar{T}_{jk}^i) appelés *coefficients de structure*, sont des fonctions de $M \times G$ (resp. $\bar{M} \times \bar{G}$) dans \mathbb{R} . Les tenseurs T_{jk}^i et \bar{T}_{jk}^i sont anti-symétriques en les indices i, j .

2.4.3 Symétrie des calculs

Une des caractéristiques de la méthode d'équivalence de Cartan est la symétrie des calculs, sur la variété $M \times G$ d'un coté et $\bar{M} \times \bar{G}$ de l'autre. Dorénavant, nous n'explicitons les calculs que d'un côté : sur $M \times G$. Par exemple, étudier l'équivalence de deux EDO du second ordre quelconques, comme nous le faisons, conduit à deux calculs identiques, les différences apparaissent lorsque l'on spécialise les équations. On supposera toujours qu'un calcul similaire à celui sur $M \times G$ est fait sur la variété $\bar{M} \times \bar{G}$, sans pour autant l'expliciter.

2.4.4 Exemple

Reprenons l'exemple d'équivalence d'équations différentielles ordinaires du second ordre mis en équation en section 2.3.3 page 44. Le calcul des formes de Maurer-Cartan du groupe G est le suivant :

$$dSS^{-1} = \begin{pmatrix} da_1 & da_2 & 0 \\ 0 & da_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1 a_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^1 & \pi^2 & 0 \\ 0 & \pi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

si l'on note π^1, π^2 et π^3 les formes :

$$\begin{cases} \pi^1 = \frac{1}{a_1} da_1, \\ \pi^2 = -\frac{a_2}{a_1 a_3} da_1 + \frac{1}{a_3} da_2, \\ \pi^3 = \frac{1}{a_3} da_3. \end{cases} \quad (2.38)$$

Le calcul des équations de structure (2.30) page 45 donne :

$$\begin{cases} d\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^1 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = \pi^3 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^2 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^2 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = 0, \end{cases}$$

avec les coefficients de structure :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,3}^1 = -\frac{f_y a_1 + a_2}{a_1}, \\ T_{2,3}^1 = \frac{a_1 f_y a_2 - f_p a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_3}, \\ T_{1,3}^2 = -\frac{a_3}{a_1}, \\ T_{2,3}^2 = \frac{a_2}{a_1}. \end{array} \right.$$

On supposera, comme nous l'avons précisé, qu'un calcul similaire est fait pour les formes $d\bar{\theta}$.

2.5 Étape 2 : Absorption de la torsion

La deuxième étape de l'algorithme de Cartan est *l'absorption de la torsion*. Celle-ci consiste à fixer un maximum de coefficients T_{jk}^i à zéro dans les équations de structure

$$d\theta^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k.$$

en modifiant les formes $(\pi^\rho)_{1 \leq \rho \leq r}$. On montrera que les coefficients T_{jk}^i non nuls restant sont des invariants de \mathcal{G} (voir définition 25). Pour trouver de tels invariants, on applique le lemme de Cartan aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} - \theta = 0, \\ d\bar{\theta} - d\theta = 0, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \neq 0. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Lemme 4 (Cartan) Soient $(\theta^j)_{1 \leq j \leq p}$, des 1-formes indépendantes sur M , variété de dimension $m \geq p$. Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$, des 1-formes sur M telles que $f_i \wedge \theta^i = 0$. Alors, il existe des fonctions $\lambda_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f_i = \lambda_{ij} \theta^j \text{ où } \lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

PREUVE – Voir [10, pages 11-12]. □

Proposition 4 (Cartan) Les équations (2.39) impliquent qu'il existe mr fonctions $\lambda_k^\rho : M \times G \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\pi}^\rho = \pi^\rho + \lambda_j^\rho \theta^j, \\ \bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + A_{k\rho}^i \lambda_j^\rho - A_{j\rho}^i \lambda_k^\rho. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

PREUVE – Cette proposition est une conséquence du lemme de Cartan appliqué aux équations $d\bar{\theta} = d\theta$. En effet si l'on substitue les égalités (2.33) et (2.34) de la page 45 puis $\bar{\theta}^i = \theta^i$ dans les équations $d\bar{\theta}^i - d\theta^i = 0$, on obtient :

$$\forall i, \quad f_k^i \wedge \theta^k = 0, \quad 1 \leq i, k \leq m, \quad (2.41)$$

avec

$$f_k^i = A_{k\rho}^i(\bar{\pi}^\rho - \pi^\rho) + (\bar{T}_{jk}^i - T_{jk}^i) \theta^j, \quad 1 \leq i, j, k \leq m, \quad 1 \leq \rho \leq r. \quad (2.42)$$

D'après le lemme de Cartan, il existe des fonctions $\mu_{kj}^i = \mu_{jk}^i$ telles que

$$f_k^i = \mu_{kj}^i \theta^j, \quad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

Enfin, d'après (2.42) on obtient :

$$A_{k\rho}^i(\bar{\pi}^\rho - \pi^\rho) = \left(\mu_{kj}^i - (\bar{T}_{jk}^i - T_{jk}^i) \right) \theta^j \quad 1 \leq i, j, k \leq m, \quad 1 \leq \rho \leq r. \quad (2.43)$$

Le système (2.43) comporte m^2 équations (i par k chaque indice allant de 1 à m). Parmi ces équations, r sont de la forme $\bar{\pi}^\rho - \pi^\rho = \lambda_k^\rho \theta^k$. En effet, par construction, les formes π^ρ (resp $\bar{\pi}^\rho$) sont r entrées indépendantes de la matrice des formes de Maurer-Cartan du groupe G . Il y a donc r équations pour lesquelles un seul des $A_{j\rho}^i$ sur r vaut 1 et les autres 0. On a donc $\bar{\pi}^\rho = \pi^\rho + \lambda_k^\rho \theta^k$. Si l'on substitue $\bar{\pi}^\rho$ par $\pi^\rho + \lambda_k^\rho \theta^k$ dans (2.41), on obtient $\bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + A_{k\rho}^i \lambda_j^\rho - A_{j\rho}^i \lambda_k^\rho$. \square

Etant donnés deux tenseurs $A_{j\rho}^i$ et T_{jk}^i , l'absorption de la torsion consiste à effectuer une transformation de la forme

$$\begin{cases} \pi'^\rho &= \pi^\rho + \lambda_j^\rho \theta^j, \\ T'^i_{jk} &= T_{jk}^i + A_{k\rho}^i \lambda_j^\rho - A_{j\rho}^i \lambda_k^\rho, \end{cases} \quad (2.44)$$

afin de fixer à zéro un nombre maximum des nouveaux coefficients de torsion T'^i_{jk} . Dans le calcul des λ_j^ρ , on peut procéder de la façon suivante :

tq il existe T'^i_{jk} dépendant d'un coefficient λ_j^ρ faire
 Calculer ce coefficient λ_j^ρ à partir de l'équation $T'^i_{jk} = 0$
 Reporter la valeur de λ_j^ρ dans les autres équations
fin tq.

Lorsque cette boucle s'arrête, plus aucun coefficient de structure T'^i_{jk} ne dépend d'un paramètre λ .

En section (8.3), nous décrirons un calcul matriciel permettant d'absorber la torsion (voir [50] page 309). Soit la matrice inconnue $\Lambda := (\lambda_j^\rho)$ de dimensions $r \times m$. Le système (2.44) s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{cases} \pi' &= \pi + \Lambda \cdot \theta \\ T' &= T + L(\Lambda) \end{cases}$$

où L est un opérateur linéaire dépendant uniquement du tenseur $A_{j\rho}^i$. Le résultat du calcul est une matrice de la forme

$$\Lambda = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}.$$

La matrice $\Lambda^{(1)}$ est calculée en fonction des anciens coefficients de torsion T_{jk}^i et la matrice $\Lambda^{(2)}$ est une matrice quelconque appartenant au noyau de l'opérateur linéaire L . Le nombre de paramètres arbitraires λ de la matrice $\Lambda^{(2)}$ est appelé *degré d'indétermination* et sera noté r' . On a alors $r' = \dim \ker(L)$.

2.5.1 Exemple

Continuons le traitement du problème d'équivalence d'EDO du second ordre mis en équation en section 2.4.4 page 46. Les équations de structure avant absorption étaient :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^1 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^2 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^2 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Si l'on opère le changement de formes $\pi \rightarrow \pi + \Lambda\theta$ dans ces équations, on déduit les nouveaux coefficients de structure :

$$\begin{aligned} T'_{1,2} &= T_{1,2}^1 - \lambda_2^1 + \lambda_1^2, \\ T'_{1,3} &= T_{1,3}^1 - \lambda_3^1, \\ T'_{2,3} &= T_{2,3}^1 - \lambda_3^2, \\ T'_{1,2} &= T_{1,2}^2 - \lambda_1^3, \\ T'_{1,3} &= T_{1,3}^2, \\ T'_{2,3} &= T_{2,3}^2 - \lambda_3^3. \end{aligned}$$

En choisissant judicieusement les paramètres λ_1^2 , λ_3^1 , λ_3^2 , λ_1^3 et λ_3^3 on peut fixer à zéro tous les coefficients de structure sauf $T'_{1,3} = T_{1,3}^2$ qui est donc un invariant. Sur notre exemple, pour absorber la torsion il faut donc poser :

$$\begin{cases} \pi^1 &\rightarrow \pi^1 - T_{1,3}^1 \theta^3, \\ \pi^2 &\rightarrow \pi^2 - T_{2,3}^1 \theta^3, \\ \pi^3 &\rightarrow \pi^3 - T_{2,3}^2 \theta^3, \end{cases} \quad (2.46)$$

soit $\pi \rightarrow \pi + \Lambda^{(1)}\theta$ avec

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -T_{1,3}^1 \\ 0 & 0 & -T_{2,3}^1 \\ 0 & 0 & -T_{2,3}^2 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres λ_1^1 , λ_2^1 , λ_3^2 et λ_2^3 demeurent arbitraires. Ainsi, on peut rajouter à la forme π^1 la quantité $\lambda_1^1 \theta^1 + \lambda_2^1 \theta^2$, à π^2 la quantité $\lambda_2^1 \theta^1 + \lambda_2^2 \theta^2$ et à π^3 la quantité $\lambda_2^3 \theta^2$ sans changer les équations de structure. Le degré d'indétermination des formes π est donc $r' = 4$. Cette indétermination est contenue dans la matrice

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & 0 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après absorption, on a $\bar{\pi} = \pi + \Lambda^{(2)}\theta$ et les équations de structure sont :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^2 \theta^1 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{cases}$$

$T_{1,3}^2 = -\frac{a_3}{a_1}$ est un invariant.

2.6 Étape 3 : Normalisation

D'après (2.20), le difféomorphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ est un isomorphisme de G -structures ssi

$$\exists g : M \rightarrow G, \quad \exists \bar{g} : \overline{M} \rightarrow \overline{G}, \quad \bar{g}(\bar{x}) \cdot \bar{\omega}_{|\bar{x}} = g(x) \cdot \omega_{|x} \quad (2.47)$$

en supposant $\bar{x} = \varphi(x)$ et $G = \overline{G}$. On a démontré, que l'une des deux matrices $g(x)$ ou $\bar{g}(\bar{x})$ est arbitraire. Donc, si l'on connaît deux invariants \bar{I} et I conjugués pour tout isomorphisme ϕ , il est possible de restreindre simultanément les valeurs possibles des deux matrices $g(x)$ et $\bar{g}(\bar{x})$ en imposant une relation telle que

$$\bar{I}(\bar{x}, \bar{g}) = I(x, g) = C_0 \quad (2.48)$$

où C_0 est une constante arbitraire (la constante C_0 est choisie telle que l'équation $I(x, g) = C_0$ ait des solutions en g pour tout $x \in M$). Il est clair qu'il existe, pour tout $x \in M$, des matrices $g(x)$ et $\bar{g}(\bar{x})$ vérifiant l'équation (2.47), ssi il existe de nouvelles matrices $g'(x)$ et $\bar{g}'(\bar{x})$ vérifiant $\bar{g}'(\bar{x}) \cdot \bar{\omega}_{|\bar{x}} = g'(x) \cdot \omega_{|x}$ plus la condition (2.48).

La difficulté est de démontrer que les nouvelles formes $g'(x) \cdot \omega_{|x}$ et $\bar{g}'(\bar{x}) \cdot \bar{\omega}_{|\bar{x}}$ définissent bien de nouvelles G' -structures pour un certain groupe $G' \subset G$ qu'il convient de définir. Les justifications sont plus simples quand on adopte le point de vue *intrinsèque* développé dans [58] chapitre VII. S. Sternberg construit un espace vectoriel W et une fonction invariante appelée *fonction de structure*

$$c : \mathcal{G} \rightarrow W, \quad (2.49)$$

qui permet de retrouver les invariants scalaires calculés par E. Cartan en choisissant une base quelconque de W . Voici un résumé succinct de cette construction.

On note $V = \mathbb{R}^m$ et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie du groupe structural G . Pour toute application linéaire $S : V \rightarrow \mathfrak{g}$, on définit l'application linéaire anti-symétrique

$$\mathcal{A}(S) : V \wedge V \rightarrow V,$$

en posant pour tout $u, v \in V$

$$\mathcal{A}(S)(u \wedge v) := S(u) \cdot v - S(v) \cdot u.$$

Le membre de droite (anti-symétrisation) est bien défini car $S(u)$ et $S(v)$ sont des matrices qui opèrent sur l'espace vectoriel V . En effet, puisque $G \subset \text{GL}(V)$, alors $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Sternberg donne une interprétation intrinsèque des formules utilisées pour absorber la torsion

$$\begin{cases} \bar{\pi}^\rho &= \pi^\rho + \lambda_j^\rho \theta^j, \\ \bar{T}_{jk}^i &= T_{jk}^i + A_{k\rho}^i \lambda_j^\rho - A_{j\rho}^i \lambda_k^\rho. \end{cases} \quad (2.50)$$

Soit $(A_\rho)_{1 \leq \rho \leq r}$ une base de \mathfrak{g} et $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de V . On pose pour tout $p \in \mathcal{G}$

$$\begin{cases} S(e_i) &= \lambda_i^\rho A_\rho, \\ C(p)(e_j \wedge e_k) &= T_{jk}^i e_i, \\ \bar{C}(p)(e_j \wedge e_k) &= \bar{T}_{jk}^i e_i. \end{cases} \quad 1 \leq i, j, k \leq m \quad (2.51)$$

où $C(p)$ et $\bar{C}(p)$ sont des applications linéaires de $V \wedge V$ dans V . On montre à partir de (2.50) que pour tout $p \in \mathcal{G}$,

$$C(p) - \bar{C}(p) = \mathcal{A}(S).$$

Par suite, $C(p) = \bar{C}(p) \pmod{\mathcal{A} \operatorname{Hom}(V, \mathfrak{g})}$. Soit l'espace vectoriel

$$W := \operatorname{Hom}(V \wedge V, V) / \mathcal{A} \operatorname{Hom}(V, \mathfrak{g})$$

L'application $c : \mathcal{G} \rightarrow W$ définie pour tout $p \in \mathcal{G}$ par

$$c(p) := C(p) \pmod{\mathcal{A} \operatorname{Hom}(V, \mathfrak{g})}$$

est donc indépendante de tout choix particulier des formes π^ρ dans les formules d'absorption de la torsion. C'est l'invariant fondamental de \mathcal{G} qui permet de retrouver, en choisissant une base de W , les invariants scalaires obtenus par E. Cartan.

Le groupe structural G opère à droite de manière naturelle sur \mathcal{G} mais aussi sur W car cet espace vectoriel est obtenu par des constructions *tensorielles* à partir de V , espace sur lequel opère G . Sternberg montre que la fonction de structure c est *équivariante* (voir figure 2.6).

$$\begin{array}{ccc} p \in \mathcal{G} & \xrightarrow{c} & w \in W \\ R_g \downarrow & & \downarrow g^* \\ pg \in \mathcal{G} & \xrightarrow{c} & g^*w \in W \end{array}$$

FIG. 2.6 – Equivariance de la fonction de structure c

Nous pouvons maintenant réduire le groupe structural G . Soit $w_0 \in W$, un vecteur fixe quelconque non nul. On définit la sous-variété $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ et le groupe G' par

$$\begin{cases} \mathcal{G}' & := \{p \in \mathcal{G} \mid c(p) = w_0\} \\ G' & := \{g \in G \mid \forall p \in \mathcal{G}, c(p \cdot g) = c(p)\} \end{cases} \quad (2.52)$$

Il est clair que \mathcal{G}' est une variété et G' un sous-groupe de G .

Définition 27 (type constant) *La normalisation (2.52) est dite une normalisation “du 1er ordre de type constant” lorsque le groupe G opère transitivement sur l'espace vectoriel W , i. e.*

$$\forall w_0, w_1 \in W, \quad w_0 \neq 0, w_1 \neq 0, \quad \exists g \in G, \quad g^*(w_0) = w_1.$$

Proposition 5 *Si la normalisation (2.52) est “du 1er ordre de type constant”, alors \mathcal{G}' est une G' -structure de base M . De plus, à tout automorphisme $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, correspond un unique automorphisme $\phi' : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}'$ et réciproquement.*

PREUVE – Il est clair que tout automorphisme ϕ se restreint à la variété \mathcal{G}' . En effet, si $p \in \mathcal{G}'$, alors $\phi(p) \in \mathcal{G}'$ car $c(p) = c(\phi(p)) = w_0$. D'autre part, le morphisme ϕ est complètement déterminé sur une fibre de \mathcal{G} dès lors qu'il est déterminé sur un seul point de cette fibre. Ceci découle de l'égalité $\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$ pour tout $g \in G$. On peut montrer (Gardner dans [27] page 38) que G' opère librement et transitivement sur les fibres de \mathcal{G}' , donc que \mathcal{G}' est une G' -structure. \square

Proposition 6 *Soit $i : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$, le plongement canonique de \mathcal{G}' dans \mathcal{G} . Si θ est la 1-forme canonique définie sur \mathcal{G} , alors la 1-forme $\theta' := i^*\theta$ est la forme canonique de la G' -structure \mathcal{G}' définie en (2.52).*

PREUVE – On a vu que par restriction, les automorphismes $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les automorphismes $\phi' : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}'$. On montre que pour tout $\phi \in \text{aut}(\mathcal{G})$, $\phi'^*(\theta') = \theta'$. \square

2.6.1 Normalisation et scindages

Lorsque l'invariant utilisé pour réduire le groupe structural, dépend d'une fonction arbitraire, on est parfois amené à faire un scindage. Prenons l'exemple de l'équivalence d'équations différentielles ordinaires du troisième ordre $y''' = f(x, y, y', y'')$ présenté au chapitre 4. On y trouve un invariant I/a_9^3 , où I est un polynôme différentiel en la fonction f qui est nul lorsque $f = 0$. Il est clair que si $I = 0$, on ne peut normaliser l'invariant pour éliminer le paramètre du groupe a_9 . Sur cet exemple, il convient donc de scinder la discussion en deux branches selon que $I = 0$ ou que $I \neq 0$. La méthode d'équivalence génère donc dans certains cas un arbre de scindages. Chacun de ces scindages apparaît lors de l'étape de normalisation.

Après chaque normalisation, l'étape d'absorption, présentée en section (2.5), peut à nouveau permettre de trouver des invariants. On reste ainsi dans une boucle d'absorptions et de normalisations tant que l'on trouve des invariants qui dépendent des paramètres du groupe G .

2.6.2 Exemple

Reprenons le problème d'équivalence d'EDO d'ordre 2. L'étape d'absorption, décrite section 2.5.1 page 49, nous a fourni l'invariant $T_{1,3}^2 = -a_3/a_1$. Posons :

$$T_{1,3}^2 = -1$$

Remarquons que l'on ne peut pas poser $T_{1,3}^2 = -a_1/a_3 = 0$ car on a supposé $a_1 a_3 \neq 0$ dans la définition du groupe G . Explicitement, on pose :

$$-\frac{a_3}{a_1} = -1$$

Ceci permet l'élimination d'un paramètre du groupe, par exemple a_1 soit :

$$a_1 = a_3. \tag{2.53}$$

La relation (2.38) implique :

$$\pi^1 = \pi^3. \quad (2.54)$$

On recalcule ensuite les équations de structure avec, pour nouveau groupe, le groupe G spécialisé grâce à la relation (2.53). Comme nous le verrons au chapitre (8), ce nouveau calcul des équations de structure peut se faire simplement : sur l'exemple, en réécrivant les équations de structure modulo les relations (2.53) et (2.54).

Ainsi, avant absorption les équations de structure étaient (voir section 2.4.4 page 46) :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^1 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^2 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^2 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

avec les coefficients de structure :

$$\begin{cases} T_{1,3}^1 &= -\frac{f_y a_1 + a_2}{a_1}, \\ T_{2,3}^1 &= \frac{a_3 f_y a_2 - f_p a_1^2 + a_2^2}{a_3^2}, \\ T_{1,3}^2 &= -\frac{a_3}{a_1}, \\ T_{2,3}^2 &= \frac{a_2}{a_1}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Après spécialisation à l'aide des relations (2.53) et (2.54) on obtient :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^3 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T_{1,3}^1 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{2,3}^2 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{cases} \quad (2.57)$$

avec les coefficients de structure :

$$\begin{cases} T_{1,3}^1 &= -\frac{f_y a_3 + a_2}{a_3}, \\ T_{2,3}^1 &= \frac{a_1 f_y a_2 - f_p a_3^2 + a_2^2}{a_1^2}, \\ T_{2,3}^2 &= \frac{a_2}{a_3}. \end{cases} \quad (2.58)$$

Après une nouvelle absorption de la torsion et la normalisation du paramètre a_2 , les équations de structure sont :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

avec

$$T_{2,3}^1 = -\frac{1}{4}f_p^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p,$$

où

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Le degré d'indétermination est $r' = 0$. Les équations (2.59) ne comporte plus d'invariant dépendant d'un paramètre du groupe. La normalisation n'est donc plus possible. Notons que l'invariant $T_{2,3}^1$ fournit une condition nécessaire d'équivalence de deux EDO du second ordre (sous l'action du groupe que l'on s'est donné en (2.23) page 43). Pour que deux équations $\bar{y}'' = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ et $y'' = f(x, y, p)$ soient équivalentes, il faut que :

$$-\frac{1}{4}\bar{f}_{\bar{p}}^2 - \bar{f}_{\bar{y}} + \frac{1}{2}D_{\bar{x}}\bar{f}_{\bar{p}} = -\frac{1}{4}f_p^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p.$$

En particulier, pour qu'une équation $y'' = f(x, y, p)$ soit équivalente à l'équation $\bar{y}'' = 0$, il faut que :

$$-\frac{1}{4}f_p^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p = 0. \quad (2.60)$$

2.7 Étape 4 : Test d'involution

Quand plus aucun coefficient de structure ne dépend des paramètres du groupe G , le test d'involution permet de dire si l'on peut, au stade où l'on est, décider de l'équivalence des deux G -structures \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$. Celles-ci si sont équivalentes si et seulement si le système différentiel extérieur

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta, \\ d\bar{\theta} = d\theta, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \neq 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

admet des variétés intégrales de dimension m dans $M \times G \times \bar{M} \times \bar{G}$. Pour tester l'involution de (2.61), on peut appliquer le test du théorème 9 (section 1.5.3 page 27) que nous rappelons : soient s'_i pour $0 \leq i \leq m-1$ les caractères réduits de Cartan et σ'_m le pseudo-caractère réduit défini par :

$$\begin{aligned} s'_0 + s'_1 + \dots + s'_{m-1} + \sigma'_m &= 2m + 2r - m \\ &= m + 2r. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Soit $r^{(m)}$ le degré d'indétermination des éléments intégraux de dimension m du système (2.61). Ce système est en involution si et seulement si

$$s'_1 + 2s'_2 + \dots + (m-1)s'_{m-1} + m\sigma'_m = r^{(m)}. \quad (2.63)$$

Olver dans [50] donne une variante optimisée du test d'involution (2.63) que nous utilisons pour notre implantation. Le pseudo caractère σ'_m y est défini différemment (notons le \widehat{s}'_m) par :

$$s'_0 + s'_1 + \dots + s'_{m-1} + \widehat{s}'_m = m + r. \quad (2.64)$$

Le test d'involution est alors :

$$s'_1 + 2s'_2 + \cdots + (m-1)s'_{m-1} + m\widehat{s}'_m = r', \quad (2.65)$$

où r' est le degré d'indétermination des formes π calculé lors de l'absorption de la torsion.

Lemme 5 *Les tests (2.63) et (2.65) sont équivalents.*

PREUVE – La comparaison des équations (2.62) et (2.64) montre que

$$\sigma'_m = \widehat{s}'_m + r.$$

Pour montrer le lemme, il faut prouver que

$$r^{(m)} = mr + r'.$$

Examinons le nombre $r^{(m)}$ de constantes arbitraires figurant dans l'équation d'un élément intégral de (2.61) de dimension m . On a vu qu'une variété intégrale de dimension m est le graphe d'une fonction de M dans $\overline{M} \times G \times \overline{G}$ de la forme

$$\begin{cases} \bar{x} &= \varphi(x) \\ g &= g(x) \\ \bar{g} &= \bar{g}(x) \end{cases}$$

où $g(x)$ est une fonction quelconque de M dans G . Les différentielles des variables dépendantes $(d\bar{x}, dg, d\bar{g})$ dépendent donc linéairement de dx . Cette dépendance linéaire doit être analysée comme une dépendance linéaire de $(\bar{\theta}, \pi, \bar{\pi})$ par rapport à θ . Cette dépendance linéaire, qui est justement l'équation d'un élément intégral de dimension m , est de la forme

$$\begin{cases} \bar{\theta} &= \theta \\ \pi &= \Delta\theta \\ \bar{\pi} &= \pi + \Lambda^{(2)}\theta \end{cases} \quad (2.66)$$

où $\Lambda^{(2)}$ et Δ sont deux matrices de dimension $m \times r$. Comme la fonction $g(x)$ est arbitraire, la matrice Δ est arbitraire et contient donc mr constantes arbitraires.

D'autre part, la matrice $\Lambda^{(2)}$ donnant l'indétermination des formes π lors de l'absorption de la torsion contient r' constantes arbitraires. On a bien finalement $r^{(m)} = mr + r'$. \square

Si le système (2.61) est en involution, on verra qu'on peut construire à partir des invariants T_{jk}^i un système complet d'invariants permettant de décider de l'équivalence des G -structure \mathcal{G} et $\overline{\mathcal{G}}$. Dans le cas contraire, on prolonge le système (2.61).

2.7.1 Exemple

Pour l'exemple d'équivalence d'équations ordinaires du second ordre, le système extérieur :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

n'est pas en involution. En effet, le calcul des caractères réduits de Cartan donne : $s'_1 = 1$, $s'_2 = 0$. Le degré d'indétermination est $r' = 0$ (voir section 2.6.2). On a donc $s'_1 + 2s'_2 \neq r'$.

2.8 Étape 5 : Prolongation

La prolongation d'un système différentiel extérieur S ou les variables indépendantes sont $x = (x^1, \dots, x^p)$ et les variables dépendantes $u = (u^1, \dots, u^n)$ consiste à :

- (i) Ajouter à S les équations des éléments intégraux de dimension p :

$$du^i = \lambda_j^i dx^j, \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p). \quad (2.68)$$

- (ii) Substituer les équations (2.68) dans S pour calculer les contraintes sur les λ_j^i qui sont conséquences de S et de la condition d'indépendance $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \neq 0$. Ajouter ces contraintes au système de départ S .

Dans le cas de la méthode d'équivalence de Cartan, les variables indépendantes sont $x = (x^1, \dots, x^m) \in M$ et les variables dépendantes $(\bar{x}, g, \bar{g}) \in \bar{M} \times G \times \bar{G}$. Les équations des plans intégraux (de dimension m) sont exactement les équations du système 2.66. On a vu qu'il n'y a aucune contrainte sur les éléments de la matrice Δ , les contraintes sur les λ_j^i dans (2.68) sont les contraintes d'intégrabilité

$$\bar{T}_{jk}^i(\bar{x}, \bar{g}) = T_{jk}^i(x, g) \quad (2.69)$$

obtenues au cours de l'absorption de la torsion.

On n'effectue qu'un prolongement partiel ([10, page 114]) du système (2.61). Tout d'abord on ne rajoute pas toutes les équations (2.68) (voir (2.66) page 55) mais seulement :

$$\bar{\pi} = \pi + \Lambda^{(2)}\theta. \quad (2.70)$$

On ne rajoute pas les équations (2.69) conséquences de (2.61). Enfin, on symétrise les équations (2.70) en posant

$$\bar{\pi} + \bar{\Lambda}^{(2)}\bar{\theta} = \pi + \Lambda^{(2)}\theta. \quad (2.71)$$

Le système (2.71) définit l'équivalence de deux nouvelles G -structures. Ainsi \mathcal{G} est prolongée en la G -structure \mathcal{G}' définie sur la variété $M' = M \times G$. Le nouveau groupe G' a

pour coordonnées les paramètres indéterminés λ de la matrice $\Lambda^{(2)}$ issue de l'absorption. La dimension de G' est donc r' le degré d'indétermination des éléments intégraux de (2.61). Le nouveau groupe G' est formé des matrices de la forme

$$S' := \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \Lambda^{(2)} & \text{Id} \end{pmatrix}$$

est clairement commutatif. Un corepère invariant de \mathcal{G}' est alors

$$\theta' := S' \omega' \text{ en posant } \omega' := \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix}$$

On suppose que la G -structure $\bar{\mathcal{G}}$ est prolongée en $\bar{\mathcal{G}}'$ de la même façon.

Proposition 7 *Les G -structure \mathcal{G} et $\bar{\mathcal{G}}$ équivalentes si et seulement si les G -structures prolongées \mathcal{G}' et $\bar{\mathcal{G}}'$ sont équivalentes.*

PREUVE – Cette prolongation partielle a consisté à ajouter une *partie* des contraintes d'intégrabilité en ne retirant aucune équation. \square

Après prolongation, on entre à nouveau dans une boucle d'absorption de la torsion et de normalisation.

2.8.1 Exemple

Pour l'exemple d'équations différentielles du second ordre, la variété prolongée $M' = M \times G$ est (x, y, p, a_3) . Le nouveau groupe G' est l'identité (le degré d'indétermination r' est nul). Les équations de structure de la G -structure \mathcal{G}' sont obtenues en rajoutant la différentielle de la forme π^1 maintenant notée θ^4 , soit :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^4 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4 \\ d\theta^3 &= 0 \\ d\theta^4 &= T_{1,2}^4 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{2,3}^4 \theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} T_{2,3}^1 = -\frac{1}{4} f_p^2 - f_y + \frac{1}{2} D_x f_p, \\ T_{1,2}^4 = \frac{f_{ppp}}{2a_3^2}, \\ T_{2,3}^4 = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a_3}. \end{cases}$$

Sur notre exemple, après cette prolongation, le système est en involution.

2.9 L'algèbre différentielle des invariants

Après un nombre fini de prolongations, le système différentiel $\{\bar{\theta} = \theta, d\bar{\theta} = d\theta\}$ est en involution (voir section 1.6). La méthode d'équivalence fournit alors un système complet d'invariants permettant de décider de l'équivalence des G -structures. Ces invariants sont d'une part les coefficients de structure :

$$\bar{T}_{j,k}^i = T_{j,k}^i.$$

D'autre part, les dérivations invariantes $\partial/\partial\theta^i$ (resp $\partial/\partial\bar{\theta}^i$) duales des formes invariantes θ^i (resp $\bar{\theta}^i$) appliquées aux invariants fournissent de nouveaux invariants. En effet,

$$\bar{T}_{j,k}^i = T_{j,k}^i \Rightarrow d\bar{T}_{j,k}^i = dT_{j,k}^i.$$

Or, on a

$$d\bar{T}_{j,k}^i = dT_{j,k}^i \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{T}_{j,k}^i}{\partial \bar{\theta}^l} \bar{\theta}^l = \frac{\partial T_{j,k}^i}{\partial \theta^l} \theta^l.$$

Les formes $\bar{\theta}^l$ et θ^l étant indépendantes et invariantes, les coefficients $\frac{\partial}{\partial \theta^l} T_{j,k}^i$ sont des invariants. Pour que les G -structure soient équivalentes, il faut donc que :

$$\begin{cases} \bar{T}_{j,k}^i &= T_{j,k}^i, \\ \frac{\partial \bar{T}_{j,k}^i}{\partial \bar{\theta}^l} &= \frac{\partial T_{j,k}^i}{\partial \theta^l}. \end{cases} \quad (2.72)$$

Plus généralement en itérant les dérivations sur chaque nouvel invariant produit, il faut a priori considérer le système infini d'équations :

$$\begin{cases} \bar{T}_{j,k}^i &= T_{j,k}^i, \\ \frac{\partial^s \bar{T}_{j,k}^i}{\partial \bar{\theta}_1^l \dots \partial \bar{\theta}_s^l} &= \frac{\partial^s T_{j,k}^i}{\partial \theta_1^l \dots \partial \theta_s^l}, \quad \forall s > 1. \end{cases} \quad (2.73)$$

Si un des invariants ainsi produits dépend d'un paramètre du groupe, il faut le normaliser et reprendre les calculs. En effet, la différentielle d'un tel invariant s'exprime en fonction de formes π comportant une certaine indétermination.

Proposition 8 *Soit \mathcal{A} (resp. $\bar{\mathcal{A}}$) l'algèbre différentielle engendrée par les invariants T (resp. \bar{T}) et les dérivations $\partial/\partial\theta$ (resp. $\partial/\partial\bar{\theta}$) du système $\{\bar{\theta} = \theta, d\bar{\theta} = d\theta\}$ en involution. Alors les G -structure $\bar{\mathcal{G}}$ et \mathcal{G} sont équivalentes si et seulement si \mathcal{A} et $\bar{\mathcal{A}}$ sont isomorphes.*

PREUVE – Ceci découle de la théorie des variétés classifiantes présentée par Olver dans [49, pages 252-279]. \square

Le cas le plus simple et celui où tous les invariants sont constants. Dans ce cas, les deux G -structures $\overline{\mathcal{G}}$ et \mathcal{G} sont équivalentes si et seulement si leurs invariants ont mêmes valeurs constantes.

Si les invariants ne sont pas tous constants, l'isomorphisme d'algèbres différentielles peut être testé en un nombre fini d'étapes. Dans le cas d'invariants algébriques, on utilise pour cela des techniques de bases de Gröbner.

2.10 Simplification des conditions d'équivalence

Nous venons de le voir, la méthode d'équivalence fournit un système complet d'invariants et de dérivations invariantes qui permettent de décider de l'équivalence de G -structure. Cependant, les invariants peuvent être très nombreux et très volumineux (en coordonnées locales). Pour l'exemple d'équivalence de systèmes EDP du second ordre traité au chapitre (7), les invariants occupent 1,1 Mo (plusieurs centaines de pages). Ceci pose un problème d'exploitation des résultats. Il est donc intéressant d'avoir des outils qui permettent de simplifier les conditions d'équivalence. On peut pour cela utiliser le lemme de Poincaré (lemme (1) page 19) appliqué aux équations de structure, soit

$$dd\theta^i = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Ces équations fournissent des relations entre les invariants et leurs dérivées (voir (8.57) page 123) que l'on peut utiliser pour simplifier les conditions d'équivalence. En section 8.7 du chapitre 8 nous verrons comment utiliser de telles relations pour trouver une base de l'idéal différentiel engendré par les invariants.

2.10.1 Exemple

Pour conclure l'exemple d'équivalence d'équations différentielles ordinaires du second ordre, regardons quelles sont les conditions pour qu'une équation $y'' = f(x, y, p)$ soit équivalente à $y'' = 0$. Les équations de structure en involution sont :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^4 + T_{2,3}^1 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4 \\ d\theta^3 &= 0 \\ d\theta^4 &= T_{1,2}^4 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{2,3}^4 \theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases}$$

avec les invariants :

$$\begin{cases} T_{2,3}^1 = -\frac{1}{4}f_p^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p, \\ T_{1,2}^4 = \frac{f_{ppp}}{2a_3^2}, \\ T_{2,3}^4 = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a_3}. \end{cases}$$

Parmi les relations fournies par le lemme de Poincaré on a :

$$-\frac{\partial T_{2,3}^1}{\partial \theta^1} + T_{2,3}^4 = 0$$

On en déduit alors que $T_{2,3}^1$ et $T_{1,2}^4$ forment une base de l'algèbre différentielle engendrée par les trois invariants. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 10 *Une équation $y_{xx} = f(x, y, p)$ est équivalente à $y_{xx} = 0$ ssi :*

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}f_p^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p = 0 \\ f_{ppp} = 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Équivalence et algèbre différentielle

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode fondée sur de l'élimination en algèbre différentielle pour résoudre certains problèmes d'équivalence. La méthode d'équivalence de Cartan permet de traiter l'équivalence de deux systèmes d'équations différentielles quelconques. L'algorithme que nous décrivons permet de traiter l'équivalence d'un système quelconque avec un système donné. Cette méthode est simple, elle s'appuie sur le fait que le changement de variables qui peut exister entre deux systèmes d'équations est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles qu'il faut exploiter pour obtenir les conditions d'équivalence cherchées.

Après un bref rappel d'algèbre différentielle, nous exposons notre méthode et l'illustrons sur un exemple simple. Nous en donnons ensuite les limitations, essentiellement dues à un problème de grossissement des données lors du calcul sur machine. Puis nous proposons une optimisation qui semble très prometteuse, même si elle n'a pas encore fait l'objet d'une implantation et si ses bases théoriques restent à établir. Cette optimisation repose sur de l'algèbre différentielle utilisant des dérivations ne commutant pas nécessairement.

3.1 Algèbre différentielle

Avant, d'exposer notre méthode, voyons quels outils elle utilise. François Boulier dans [4] a proposé le premier algorithme effectif d'élimination en algèbre différentielle sur un corps de base calculable. Cet algorithme, nommé Rosenfeld-Gröbner, permet de tester l'appartenance d'un polynôme différentiel au radical d'un idéal différentiel. Il a été implanté par F. Boulier au sein du paquetage `difalg` disponible dans la version commercialisée de Maple (voir [40], [5] et [30] pour de récents travaux relatifs à l'algorithme Rosenfeld-Gröbner). C'est sur cet algorithme que se base la méthode présentée dans ce chapitre. Évoquons aussi d'autres travaux à la croisée de la géométrie différentielle et de l'algèbre différentielle tels que [53] et [45] qui doivent aussi permettre de mettre en œuvre notre méthode.

3.1.1 Définitions

Définition 28 On appelle dérivation sur un anneau A toute opération unaire δ satisfaisant les axiomes des dérivations :

$$\delta(a + b) = \delta a + \delta b, \quad \delta(ab) = (\delta a)b + a\delta b.$$

Dans le cadre de l'algèbre différentielle de [54] et [36] les dérivations sont supposées commuter entre elles :

$$\delta_1\delta_2a = \delta_2\delta_1a.$$

Définition 29 Un anneau (resp. un corps) différentiel est par définition un anneau (resp. un corps) muni de m dérivations. Dans le texte qui suit, K désigne un corps différentiel.

On note Θ le monoïde commutatif engendré par les dérivations. Ses éléments sont les opérateurs de dérivation $\theta = \delta_1^{a_1} \cdots \delta_m^{a_m}$ où les a_i sont des entiers positifs ou nuls. Soit $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ un ensemble de n indéterminées différentielles. Les opérateurs de dérivation agissent sur les indéterminées différentielles, donnant des dérivées θu .

Définition 30 Un classement (en Anglais un ranking) est un ordre total sur l'ensemble des dérivées, compatible avec l'action des dérivations sur ΘU . Il s'agit donc de n'importe quel ordre total sur ΘU vérifiant :

1. $\delta v > v$ (pour toute dérivation δ et toute dérivée v)
2. $v > w \Rightarrow \delta v > \delta w$ (pour toute dérivation δ et toutes dérivées v et w)

On distingue les classements compatibles avec l'ordre total (en Anglais *orderly*), c'est-à-dire vérifiant

$$\text{ord } \theta > \text{ord } \phi \Rightarrow \theta u > \phi v \quad \text{pour tous } u, v \in U$$

des classements d'élimination (notés $u \gg v$) qui satisfont

$$u > v \Rightarrow \theta u > \phi v \quad \text{pour tous } \theta, \phi \in \Theta \text{ et } u, v \in U.$$

On note $A = K\{u_1, \dots, u_n\}$ l'anneau différentiel des polynômes différentiels à coefficients dans K construits sur l'alphabet des dérivées.

Définition 31 Une fois fixé un classement, on peut définir la dérivée dominante d'un polynôme différentiel p : c'est la plus grande (pour le classement fixé) des dérivées figurant dans p i.e la plus grande indéterminée v telle que $\deg(p, v) > 0$.

Soit $p \in A \setminus K$ et $q \in A$ deux polynômes différentiels. Le polynôme différentiel q est dit *partiellement réduit* par rapport à p si aucune dérivée propre de la dérivée dominante de p ne figure dans q ; il est dit *réduit* par rapport à p s'il est partiellement réduit par rapport à p et si $\deg(q, v) < d$.

3.1.2 L'algorithme Rosenfeld-Gröbner

Soit $\Sigma \subset A$ un ensemble de polynômes différentiels. Supposons que Σ ne contienne aucun élément non nul de K .

Définition 32 *Alors un sous-ensemble C de Σ est un ensemble caractéristique de Σ s'il est autoréduit (i.e ses éléments sont réduits deux-à-deux) et si Σ ne contient aucun élément non nul réduit par rapport à C .*

Un idéal différentiel I de A est un idéal de A stable sous l'action des dérivations :

$$a \in I \Rightarrow \delta a \in I \quad (a \in A, \delta \text{ dérivation quelconque sur } A).$$

Définition 33 *Le radical \sqrt{I} d'un idéal différentiel I d'un anneau différentiel A est l'ensemble de tous les éléments de A dont une puissance appartient à I :*

$$\exists r \in \mathbb{N}, a^r \in I \Leftrightarrow a \in \sqrt{I}.$$

Un système de polynômes différentiels engendre un idéal différentiel : c'est l'idéal au sens usuel engendré par les polynômes et leurs dérivées d'ordre quelconque.

L'algorithme Rosenfeld–Gröbner prend en entrée un système de polynômes différentiels Σ et un classement \mathcal{R} . Il produit en sortie une décomposition du radical de I en une intersection d'idéaux différentiels

$$\sqrt{I} = I_1 \cap \dots \cap I_p$$

présentés par des ensembles caractéristiques C_1, \dots, C_p . Cette décomposition permet de décider de l'appartenance à \sqrt{I} au moyen d'un certain algorithme de réduction fondé sur la pseudo-division (l'algorithme de réduction de Ritt [54]).

3.1.3 Élimination

En jouant sur les classements, on peut éliminer certaines indéterminées différentielles d'un système. Supposons qu'on veuille éliminer les indéterminées différentielles u_1, \dots, u_ℓ pour un certain $\ell < n$ dans un système de polynômes différentiels Σ , c'est-à-dire, caractériser l'idéal

$$\sqrt{I} \cap K\{u_{\ell+1}, \dots, u_n\}$$

où I désigne l'idéal différentiel engendré par Σ . Il suffit d'appeler Rosenfeld–Gröbner avec pour paramètres le système Σ et un classement qui élimine les indéterminées différentielles u_1, \dots, u_ℓ :

$$(u_1, \dots, u_\ell) \gg (u_{\ell+1}, \dots, u_n).$$

On peut alors montrer que les idéaux différentiels $I_k \cap K\{u_{\ell+1}, \dots, u_n\}$ admettent pour ensembles caractéristiques les ensembles $C_k \cap K\{u_{\ell+1}, \dots, u_n\}$.

3.2 Nouvelle méthode pour l'équivalence d'équations différentielles

Notre algorithme, basé sur de l'élimination en algèbre différentielle, permet de décider de l'équivalence d'équations ou systèmes d'équations différentielles. Nous allons l'illustrer sur plusieurs problèmes d'équivalence d'équations différentielles ordinaires que nous

supposons résolues par rapport à la variable la plus dérivée apparaissant dans chaque équation. Soient $y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$ une équation différentielle ordinaire quelconque d'ordre k et $\bar{y}^{(k)} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(k-1)})$ une équation particulière. Ces équations sont conjuguées sous l'action d'un groupe transformations Φ (par exemple les transformations ponctuelles $\phi : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$) si et seulement si il existe une transformation ϕ appartenant à Φ telle que

$$\phi^*(\bar{y}^{(k)} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(k-1)})) = 0 \quad \text{mod} \quad y^{(k)} - f(x, y, \dots, y^{(k-1)}).$$

Pour savoir si deux équations sont équivalentes sous l'action de Φ , nous appliquons donc l'algorithme suivant :

- (i) Prolonger l'action du groupe Φ sur J^k , espace des jets d'ordre k , où k est l'ordre des équations.
- (ii) Construire le système différentiel $\Sigma = \{\phi^*(\bar{y}^{(k)} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(k-1)})) = 0\}$ où l'on aura remplacé $y^{(k)}$ par $f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$
- (iii) Compléter le système Σ avec un ensemble d'équations différentielles définissant le groupe de transformations souhaité.
- (iv) Trouver les conditions d'équivalence (polynômes différentiels) portant sur f à l'aide d'un algorithme d'élimination en algèbre différentielle.

Cette méthode peut aussi s'appliquer à des systèmes d'équations aux dérivées partielles, cependant elle est moins générale que la méthode d'équivalence de Cartan, dans la mesure où on ne peut discuter de l'équivalence d'équations en toute généralité. En effet, pour exprimer le pull-back d'une équation comme un polynôme différentiel, il faut une équation particulière. Ceci implique que l'on recherche la classe d'équivalence d'une forme canonique donnée. On n'explore alors qu'une branche des calculs effectués par la méthode d'équivalence de Cartan.

3.2.1 Exemple : équivalence d'EDO d'ordre 2

Reprenons l'exemple, traité au chapitre 2, de l'équivalence d'équations différentielles ordinaires du second ordre $y'' = f(x, y, y')$ avec l'équation $\bar{y}'' = 0$ sous l'action du groupe de transformations Φ suivant :

$$\Phi \begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = x + C, \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où C est une constante arbitraire et η une fonction arbitraire de x et y . La prolongation de l'action de (3.1) sur $J^2 = (x, y, p = y', q = y'')$, l'espace des jets d'ordre 2 donne :

$$\Phi^{(2)} \begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = x + C, \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y), \\ p \rightarrow \bar{p} = \eta_x + \eta_y p, \\ q \rightarrow \bar{q} = \eta_{xx} + 2\eta_{xy}p + \eta_{yy}p^2 + \eta_y q. \end{cases} \quad (3.2)$$

L'équivalence de deux équations $q = f(x, y, p)$ et $\bar{q} = 0$ sous l'action de Φ se traduit :

$$\exists \phi \in \Phi, \quad \phi^*(\bar{q}) = 0 \quad \text{mod} \quad q - f(x, y, p). \quad (3.3)$$

Ceci est équivalent au système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \eta_{xx} + 2\eta_{xy}p + \eta_{yy}p^2 + \eta_y f = 0, \\ \eta_p = 0, \\ \eta_y \neq 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où f et η sont les variables dépendantes et x , y et p les variables indépendantes. Dans le système (3.4), la première équation est le pull-back de \bar{q} réécrit modulo $q - f(x, y, p)$. L'équation suivante traduit l'indépendance de la fonction η par rapport à la variable p . Pour préciser que ϕ est inversible, il faut rajouter l'inéquation $\eta_y \neq 0$ qui signifie que le déterminant de la jacobienne de ϕ est non nul. Les conditions d'équivalence se calculent alors à l'aide de l'algorithme Rosenfeld-Gröbner sur le système (3.4) pour l'ordre d'élimination $\xi \gg \eta \gg f$ (voir section 3.1.3). L'ensemble caractéristique calculé par Rosenfeld-Gröbner est le suivant :

$$\begin{cases} \eta_{xx} &= -\eta_y f + p\eta_y f_p - \frac{1}{2}p\eta_y f_{pp}, \\ \eta_{xy} &= -\frac{1}{2}\eta_y f_p + \frac{1}{2}p\eta_y f_{pp}, \\ \eta_{yy} &= -\frac{1}{2}\eta_y f_{pp}, \\ \eta_p &= 0, \\ f_{ppp} &= 0, \\ f_{xp} &= -f_{pp}f + 2f_y + \frac{1}{2}f_p^2 - pf_{yp}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les deux dernières équations de (3.5) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une EDO du second ordre soit équivalente à l'équation $\bar{y}'' = 0$ sous l'action du groupe de transformations (3.1). Nous retrouvons évidemment les conditions d'équivalence trouvées sur le même exemple, au chapitre 2, au moyen de la méthode d'équivalence de Cartan (voir théorème (10) page 60).

Si l'on souhaite trouver le changement de variables permettant de transformer une équation vérifiant les conditions d'équivalence en la forme canonique $\bar{y}'' = 0$, il faut intégrer les quatre premières équations de (3.5). Soit par exemple une équation $y'' = f(x)$ (f ne dépend ni de y ni de p) équivalente à $\bar{y}'' = 0$ (i.e vérifiant les deux dernières équations de (3.5)). Le changement de variables est obtenu en intégrant les équations suivantes :

$$\eta_{xx} - \eta_y f = 0, \quad (3.6)$$

$$\eta_{xy} = 0, \quad (3.7)$$

$$\eta_{yy} = 0, \quad (3.8)$$

$$\eta_p = 0. \quad (3.9)$$

D'après (3.7) et (3.8), on déduit que η est de la forme $\eta(x, y) = ay + b(x)$ où a est une constante. Par substitution dans (3.6) on obtient $b_{xx} - af(x) = 0$. Si l'on pose

par exemple $a = 1$, il vient $b(x) = \int_x (\int_x f(x) dx) dx$. Un changement de variable ϕ permettant de passer de l'équation $y_{xx} = 0$ à l'équation $y_{xx} = f(x)$ est donc $(x \rightarrow \bar{x} = x, y \rightarrow \bar{y} = y + \int_x (\int_x f(x) dx) dx)$. Remarquons que si l'on pose $f = 0$ les équations à intégrer sont les équations donnant les symétries de $y_{xx} = 0$ appartenant au groupe Φ . Bien sûr, cet exemple est simple et il est souvent beaucoup plus difficile d'obtenir le changement de variable.

La méthode que nous venons d'exposer, même si elle est, répétons le, moins générale que la méthode d'équivalence de Cartan a le mérite d'être conceptuellement beaucoup plus simple. De plus, elle est très efficace lorsque l'on se donne deux équations particulières. Enfin, si les équations sont équivalentes et le changement de variables polynomial, celui-ci peut être obtenu par développement limité (voir [4]) des solutions de l'ensemble caractéristique calculé.

3.3 Limites de cette méthode

Dans cette section, nous allons aborder les limitations de la méthode que nous venons de présenter et tenter de les expliquer. Le problème d'équivalence le plus conséquent que nous ayons traité est celui présenté en section 3.2.1, soit l'équivalence d'EDO d'ordre 2. Une tentative de traitement du problème de l'équivalence d'EDO d'ordre 3 sous l'action des transformations de contact (traité par la méthode d'équivalence chapitre 4) sature la mémoire des ordinateurs, en voici une explication.

3.3.1 Exemple : équivalence d'EDO d'ordre 3

Considérons l'exemple de l'équivalence d'EDO du troisième ordre $y''' = f(x, y, p = y', q = y'')$ avec l'équation $\bar{y}''' = 0$ sous l'action du groupe des transformations de contact. La mise en équations de ce problème nécessite la prolongation sur $J^3 = (x, y, p = y_x, q = y_{xx}, r = y_{xxx})$ l'espace des jets d'ordre 3, du groupe Φ des transformations de contact de J^1 dans J^1 . Voici cette prolongation :

$$\Phi^{(3)} \left\{ \begin{array}{l}
 x \rightarrow \bar{x} = \xi(x, y, p) \\
 y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y, p) \\
 p \rightarrow \bar{p} = \frac{\eta_x + p\eta_y}{\xi_x + p\xi_y} \\
 q \rightarrow \bar{q} = (\eta_{xx}\xi_x + \eta_{xx}p\xi_y + 2p\eta_{xy}\xi_x + 2p^2\eta_{xy}\xi_y - \eta_x\xi_{xx} - 2\eta_xp\xi_{xy} - p\eta_y\xi_{xx} \\
 - 2p^2\eta_y\xi_{xy} + p^2\eta_{yy}\xi_x + p^3\eta_{yy}\xi_y - p^2\eta_x\xi_{yy} - p^3\eta_y\xi_{yy} + q\eta_{xp}\xi_x \\
 + q\eta_{xp}p\xi_y + qp\eta_{yp}\xi_x + qp^2\eta_{yp}\xi_y - q\eta_x\xi_{xp} - q\eta_xp\xi_{yp} - qp\eta_y\xi_{xp} \\
 - qp^2\eta_y\xi_{yp}) / ((\xi_x + p\xi_y + q\xi_p)(\xi_x + p\xi_y)^2) \\
 \\
 r \rightarrow \bar{r} = -(-3p\eta_{xxy}\xi_x^3 + 12\eta_{xx}p^2\xi_{xy}\xi_y\xi_x + 6p^3\eta_y\xi_{xxy}\xi_y\xi_x - 3p\eta_y\xi_{xx}^2\xi_x \\
 + 6\eta_{xx}\xi_{xx}\xi_xp\xi_y - 12p^3\eta_y\xi_{xx}\xi_{xy}\xi_y - 12\eta_x\xi_{xx}p^2\xi_{xy}\xi_y + 6p^3\eta_{xy}\xi_{xx}\xi_y^2 \\
 + 6p\eta_{xy}\xi_{xx}\xi_x^2 - 9p^2\eta_{xxy}\xi_x^2\xi_y - 3\eta_{xxx}\xi_x^2p\xi_y + 6\eta_{xx}p\xi_{xy}\xi_x^2 \\
 + 12p^2\eta_{xy}\xi_{xy}\xi_x^2 + 3\eta_xp\xi_{xxy}\xi_x^2 + p\eta_y\xi_{xxx}\xi_x^2 + 3p^2\eta_y\xi_{xxy}\xi_x^2 \\
 - 9p^3\eta_{xxy}\xi_y^2\xi_x - 3\eta_{xxx}p^2\xi_y^2\xi_x - 12p^3\eta_y\xi_{xy}^2\xi_x - 12\eta_xp^2\xi_{xy}^2\xi_x \\
 - \eta_{xxx}\xi_x^3 - 3\eta_x\xi_{xx}^2p\xi_y - 3p^2\eta_y\xi_{xx}^2\xi_y + 3\eta_{xx}\xi_{xx}p^2\xi_y^2 \\
 + 12p^2\eta_{xy}\xi_{xx}\xi_y\xi_x - 12p^2\eta_y\xi_{xx}\xi_{xy}\xi_x - 12\eta_x\xi_{xx}p\xi_{xy}\xi_x \\
 \\
 \vdots \\
 \mathbf{100 \text{ lignes de polynôme différentiel}} \\
 \\
 \vdots \\
 + p^2\eta_y\xi_{yy}\xi_xq^2\xi_p + 2p^3q^2\eta_{yp}\xi_{yy}\xi_x\xi_p - \eta_{xxx}p^2\xi_y^2q\xi_p + 2\eta_{xx}\xi_{xx}\xi_xq\xi_p \\
 - 2p\eta_y\xi_{xx}^2q\xi_p + p^3\eta_y\xi_{yy}\xi_yq^2\xi_p + p^4\eta_x\xi_{yyy}\xi_yq\xi_p - 4p^4q^2\eta_y\xi_{yp}\xi_{yy}\xi_p \\
 - 8p^2q^2\eta_x\xi_{yp}\xi_{xy}\xi_p - 8p^2q^2\eta_y\xi_{xp}\xi_{xy}\xi_p - 8p^3q^2\eta_y\xi_{yp}\xi_{xy}\xi_p \\
 + 4p^2q^2\eta_x\xi_{xyp}\xi_y\xi_p + 2p^3q^2\eta_x\xi_{yyp}\xi_y\xi_p + 4p^3q^2\eta_y\xi_{xyp}\xi_y\xi_p - qp\eta_{yy}\xi_x^3 \\
 - q^3\eta_{xpp}\xi_x^2\xi_p - \eta_{xy}\xi_x^2q^2\xi_p + q\eta_x\xi_{xy}\xi_x^2 + q\eta_{xy}p^3\xi_y^3 + 4q^2\eta_{xp}\xi_x^2\xi_{xp} \\
 - 3\eta_x\xi_{xx}^2\xi_x - q^2\eta_{xpp}\xi_x^3 + \eta_x\xi_{xxx}\xi_x^2 + 3\eta_{xx}\xi_{xx}\xi_x^2) \\
 / ((\xi_x + p\xi_y + q\xi_p)^3(\xi_x + p\xi_y)^3)
 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Si l'on prolonge une transformation $(x \rightarrow \bar{x} = \xi(x, y, p), y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y, p))$ sur J^1 à l'aide des formules de la proposition (1) page 17, on obtient :

$$\bar{p} = \frac{\eta_x + p\eta_y + q\eta_p}{\xi_x + p\xi_y + q\xi_p}. \quad (3.11)$$

C'est une expression différente de celle obtenue en (3.10). En effet, le groupe de transformations souhaité est le groupe des transformations de contact de J^q dans J^q , pour tout $q > 0$. Dans (3.10), on a pris soin de considérer de telles transformations en imposant que la variable \bar{p} ne dépende pas de la variable q , i.e. que $\partial\bar{p}/\partial q = 0$. Ceci se fait en posant l'égalité des rapports

$$\frac{\eta_x + p\eta_y + q\eta_p}{\xi_x + p\xi_y + q\xi_p} = \frac{\eta_x + p\eta_y}{\xi_x + p\xi_y} = \frac{\eta_p}{\xi_p}. \quad (3.12)$$

Pour résoudre le problème d'équivalence avec l'équation $\bar{y}''' = 0$, il faut considérer le système différentiel formé des équations $\bar{r} = 0$ obtenue en (3.10) (où l'on aura remplacé r

par f) et de (3.12). Il faut ensuite calculer l'ensemble caractéristique de ce système pour l'ordre d'élimination $\xi \gg \eta \gg f$ afin d'obtenir les conditions d'équivalence portant sur la fonction f . Remarquons que les données d'entrée de l'algorithme d'élimination sont assez conséquentes (plus de 100 lignes de polynômes différentiels). C'est une première explication au fait que les calculs ne terminent pas.

Il semble cependant y avoir une autre explication à cet échec. Il apparaît en fait que l'algorithme Rosenfeld-Gröbner calcule plus que les conditions d'équivalence recherchées. En effet, là où la méthode d'équivalence s'arrête lorsqu'elle a trouvé toutes les conditions d'équivalence, l'algorithme d'élimination continue le calcul de ce que l'on appelle les paires critiques entre ces conditions, c'est à dire les relations algébro-différentielles qui lient les conditions trouvées. Par exemple, nous le verrons au chapitre 4, les conditions sur la fonction f pour que l'équation $y''' = f(x, y, p = y', q = y'')$ se ramène à l'équation $\bar{y}''' = 0$ sont :

$$\begin{cases} I = 0, \\ f_{qqqq} = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

où

$$I = -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{2}D_x f_p - \frac{1}{6}D_x^2 f_q - f_y + \frac{1}{3}f_q D_x f_q - \frac{2}{27}f_q^3,$$

avec

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + f \frac{\partial}{\partial q}.$$

Ces conditions d'équivalence ont été trouvées par l'application de la méthode de Cartan. Si l'on soumet maintenant le système (3.13) à l'algorithme Rosenfeld-Gröbner, celui-ci génère les nombreuses et volumineuses paires critiques qui existent entre les deux polynômes du système (3.13). Ceci ne s'avère pas utile dans notre cas dans la mesure où la nullité de (3.13) suffit.

À la vue des limitations que nous venons d'exposer, il faut chercher dans une direction légèrement différente si l'on souhaite traiter des problèmes d'équivalence plus conséquents à l'aide de notre méthode. Voici une optimisation qui semble prometteuse. Celle-ci est basée sur l'utilisation d'algèbre différentielle en dérivations non commutatives.

3.4 Utilisation de dérivations non commutatives

Si l'on observe les formules de prolongation d'une transformation, données par la proposition (1) page 17, on constate qu'elles s'expriment très simplement à l'aide des dérivées totales

$$D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots + u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots$$

(voir définition 4). On va donc exprimer un problème d'équivalence, non plus dans les dérivations $\partial/\partial x^i$ et $\partial/\partial u_j^\alpha$, mais dans les dérivations D_{x^i} et $\partial/\partial u_j^\alpha$.

3.4.1 Exemple : équivalence d'EDO d'ordre 2

Par exemple, exprimons le problème d'équivalence d'EDO du second ordre, traité en section 3.2.1, à l'aide des dérivations $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial p}$ et $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial p}$. La prolongation sur $J^2 = (x, y, p = y', q = y'')$ des transformations ϕ du groupe (3.1) est alors :

$$\phi \begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = x + C, \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y), \\ p \rightarrow \bar{p} = D_x \eta, \\ q \rightarrow \bar{q} = D_x^2 \eta. \end{cases} \quad (3.14)$$

Le système EDP traduisant l'équivalence des équations $q = f(x, y, p)$ et $\bar{q} = 0$ est maintenant :

$$\begin{cases} D_x^2 \eta = 0, \\ \eta_p = 0, \\ \eta_y \neq 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

où l'on a $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial p}$. Comme pouvait le laisser penser les formules de prolongation (1.4) page 17, si l'on compare les systèmes (3.4) et (3.15), on constate que les équations sont moins volumineuses une fois exprimées à l'aide du champ de Cartan D_x .

Nous devons éliminer dans (3.15) la variable η pour obtenir les contraintes sur la fonction $f(x, y, p)$. Comme les dérivations $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial p}$ et D_x ne commutent pas, il faut revoir l'algorithme ROSENFELD-GROEBNER d'élimination en algèbre différentielle commutative.

Cet algorithme ¹ prend en paramètres un système différentiel et les crochets de Lie des dérivations. Pour notre exemple, les crochets de Lie des dérivations sont :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial y}, D_x \right] = f_y \frac{\partial}{\partial p}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial p}, D_x \right] = \frac{\partial}{\partial y} + f_p \frac{\partial}{\partial p}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Comme en algèbre différentielle commutative, le calcul est guidé par l'ordre $\eta \gg f$ et procède par dérivations *croisées* des équations du système (3.15). Les équations et inéquations de départ sont :

$$D_x^2 \eta = 0, \quad (3.17)$$

$$\eta_p = 0, \quad (3.18)$$

$$\eta_y \neq 0. \quad (3.19)$$

Si l'on considère le terme $D_x^2 \eta_p$, on constate qu'il s'écrit de deux façons différentes suivant que l'on utilise l'équation (3.17) ou l'équation (3.18). Ainsi en réordonnant les

¹Sur cette idée, François Boulier a implanté, dans le langage C, un prototype fonctionnant avec des dérivations qui ne commutent pas nécessairement.

dérivations du terme $\frac{\partial}{\partial p} D_x^2 \eta$, on tire de (3.17) : $D_x^2 \eta_p = -2D_x \eta_y - f_p \eta_y$. De (3.18), on tire $D_x^2 \eta_p = 0$. Les relations (3.17) et (3.18) impliquent alors la nouvelle équation

$$D_x \eta_y = -\frac{1}{2} f_p \eta_y. \quad (3.20)$$

De même, si l'on procède par dérivations croisées des équations (3.17) et (3.20) (en dérivant (3.17) par rapport à y et (3.20) par rapport à D_x), on obtient après simplification par (3.18) et (3.20) :

$$D_x f_p \eta_y = \frac{1}{2} f_p^2 \eta_y + 2f_y \eta_y. \quad (3.21)$$

D'après (3.19), η_y est non nul, on déduit alors de (3.21) :

$$D_x f_p = \frac{1}{2} f_p^2 + 2f_y \quad (3.22)$$

Par dérivations croisées de (3.18) et (3.20), on obtient :

$$\eta_{yy} = -\frac{1}{2} f_{pp} \eta_y. \quad (3.23)$$

Une dernière dérivation croisée entre (3.18) et (3.23) permet d'obtenir $f_{ppp} \eta_y = 0$. Toujours d'après la non nullité de η_y on en déduit :

$$f_{ppp} = 0. \quad (3.24)$$

Nous avons donc retrouver (voir (3.5)) les conditions portant sur la fonction f pour que l'équation $y'' = f(x, y, p)$ se ramène à l'équation $\bar{y}'' = 0$ par une transformation (3.14). Ces conditions sont données en dérivations non commutatives par (3.22) et (3.24).

Bien sûr, cet exemple est simple, et le gain obtenu par le changement de dérivations n'est pas significatif puisque l'exemple était traité en algèbre différentielle commutative. Avant de traiter un exemple plus conséquent, signalons que Mansfield dans [44] développe des techniques d'élimination en algèbre différentielle avec des dérivations non commutatives. De telles dérivations apparaissent, lorsque Mansfield exprime un système différentiel dans les invariants de son groupe de symétries, ceux-ci étant trouvés à l'aide de la méthode de Olver et Fels (voir [21] et [22]).

3.4.2 Exemple : équivalence d'EDO d'ordre 3

Reprenons l'exemple de la section 3.3.1, soit le problème de l'équivalence d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre avec l'équation $y''' = 0$. Les formules de prolongation des transformations de contact $\phi \in \Phi$ du groupe (3.10) sur $J^3 = (x, y, p = y', q = y'', r = y''')$, à l'aide du champ de Cartan

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + r \frac{\partial}{\partial q},$$

prennent la forme :

$$\phi^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \bar{x} = \xi(x, y, p), \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x, y, p), \\ p \rightarrow \bar{p} = \frac{D_x \eta}{D_x \xi}, \\ q \rightarrow \bar{q} = \frac{(D_x^2 \eta)(D_x \xi) - (D_x \eta)(D_x^2 \xi)}{(D_x \xi)^3}, \\ r \rightarrow \bar{r} = ((D_x^3 \eta)(D_x \xi)^2 - 3(D_x^2 \eta)(D_x^2 \xi)D_x \xi + 3(D_x \eta)(D_x^2 \xi)^2 \\ \quad - (D_x \eta)(D_x^3 \xi)D_x \xi)/(D_x \xi)^5. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Les crochets de Lie des dérivations sont maintenant :

$$\begin{aligned} [\partial_y, D_x] &= f_y \partial_q, \\ [\partial_p, D_x] &= \partial_y + f_p \partial_q, \\ [\partial_q, D_x] &= \partial_p + f_q \partial_q, \\ [\partial_y, \partial_p] &= 0, \\ [\partial_y, \partial_q] &= 0, \\ [\partial_p, \partial_q] &= 0. \end{aligned}$$

En comparant (3.10) et (3.25), on constate une division par 100 de la taille des polynômes différentiels. Comme précédemment, les transformations de contact souhaitées respectent la graduation des espaces de jets et doivent vérifier : $\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = 0$, soit :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{D_x \eta}{D_x \xi} \right) = 0.$$

Pour calculer un critère d'équivalence avec l'équation $y''' = 0$, il convient d'éliminer ξ et η dans le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x^3 \eta)(D_x \xi)^2 - 3(D_x^2 \eta)(D_x^2 \xi)D_x \xi + 3(D_x \eta)(D_x^2 \xi)^2 - (D_x \eta)(D_x^3 \xi)D_x \xi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial q} D_x \eta \right) D_x \xi - D_x \eta \left(\frac{\partial}{\partial q} D_x \xi \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

On procède alors à un calcul de dérivations croisées guidé par l'ordre d'élimination $\xi \gg \eta \gg f$. Le système (3.26) est nettement moins volumineux qu'auparavant.

À son stade de développement actuel, le logiciel d'élimination en algèbre différentielle non-commutative évoqué plus haut, ne permet pas encore de traiter le système (3.26). Ceci étant, au vu de la compression des données réalisée, nous sommes convaincus qu'il y a beaucoup à gagner des changements de dérivations que nous effectuons.

Chapitre 4

L'équation $y''' = f(x, y, y', y'')$

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de travaux portant sur l'équivalence d'équations différentielles ordinaires du troisième ordre sous l'action du groupe des transformations de contact. Ces travaux ont fait l'objet d'une note présentée avec Michel Petitot aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [48]. Grâce à sa méthode d'équivalence [11, 27, 50], E. Cartan a facilement démontré que l'équation générale du deuxième ordre $y'' = f(x, y, y')$ peut être linéarisée sous la forme $y'' = 0$ par une transformation de contact. La classification de l'équation générale du troisième ordre

$$y''' = f(x, y, y', y'') \quad (4.1)$$

est nettement plus compliquée puisque les équations $y''' = 0$ et $y''' + y = 0$ ne se déduisent pas l'une de l'autre par une transformation de contact.

Sous la direction de É. Cartan, S. S. Chern [15, 16] en 1937 calcule les équations de structure (4.6) et (4.9) obtenues en discutant sur la nullité d'un semi-invariant mis en évidence dans la thèse de K. Wünschmann en 1905 [62]. Par ailleurs, Sato et Yoshikawa dans [56] ont explicités les conditions d'équivalence avec l'équation $\bar{y}''' = 0$.

Reprenant ce problème d'équivalence, nous avons pu calculer explicitement les invariants fondamentaux qui permettent la classification générale d'équations du troisième ordre sous l'action du groupe des transformations de contact. Ceci, dans le cas $I = 0$ où nous retrouvons les résultats de [56] ainsi que dans le cas $I \neq 0$ jusqu'alors inexploré. Ces résultats sont exposés dans les sections 4.3 et 4.4.

Par la suite nous avons exploité ces invariants pour en extraire des conditions simples de linéarisation de l'équation (4.1) sous la forme

$$y''' + a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0. \quad (4.2)$$

Ces résultats font l'objet de la section 4.5.

4.1 Formulation du problème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'espace J^n des jets d'ordre n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Une *transformation de contact* de J^n dans J^n est un difféomorphisme analytique *local* qui

préserve le module des formes de contact du J^n . D'après un théorème de Bäcklund, une telle transformation de contact de J^n dans J^n ($n > 1$) est la prolongation d'une transformation de contact de J^1 dans J^1 .

Soit $x := (x, y, p = y', q = y'') \in \mathbb{R}^4$ un système de coordonnées locales de J^2 . Deux équations $y''' = f(x, y, y', y'')$ et $\bar{y}''' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')$ sont équivalentes par une transformation de contact $\bar{x} = \phi(x)$ lorsqu'il existe des fonctions (a_1, \dots, a_9) de J^2 dans \mathbb{R} telles que

$$\phi^* \underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{q} - \bar{f}(\bar{x})d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}d\bar{x} \\ d\bar{p} - \bar{q}d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\bar{\omega}(\bar{x})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) & 0 \\ 0 & a_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & a_5(x) & a_6(x) & 0 \\ 0 & a_7(x) & a_8(x) & a_9(x) \end{pmatrix}}_{g(x) \in G} \underbrace{\begin{pmatrix} dq - f(x)dx \\ dy - pdx \\ dp - qdx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega(x)} \quad (4.3)$$

Voir [16, 27] et la section 2.3 pour la mise en équation de ce problème. On se ramène à l'équivalence de deux G -structures, i.e. au système de Pfaff $\phi^*\bar{\theta} = \theta$ en posant $\theta = g\omega$ et $\bar{\theta} = \bar{g}\bar{\omega}$.

4.2 Le semi-invariant I

Après quatre normalisations, on obtient les équations de structure suivantes

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^3 + I_1 \theta^2 \wedge \theta^4, \\ d\theta^2 &= \pi^1 \wedge \theta^2 + 2\pi^5 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, \\ d\theta^3 &= \pi^1 \wedge \theta^3 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^5 \wedge \theta^3 - \theta^1 \wedge \theta^4, \\ d\theta^4 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + \pi^4 \wedge \theta^3 + \pi^5 \wedge \theta^4, \end{cases} \quad (4.4)$$

faisant apparaître l'invariant $I_1 = I/a_9^3$ en posant

$$I = -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{2}D_x f_p - \frac{1}{6}D_x^2 f_q - f_y + \frac{1}{3}f_q D_x f_q - \frac{2}{27}f_q^3 \quad (4.5)$$

la dérivation totale étant notée $D_x := \partial/\partial x + p \partial/\partial y + q \partial/\partial p + f(x, y, p, q) \partial/\partial q$.

D'après K. Wünschmann [62], la nullité du semi-invariant I signifie que la condition de contact de deux courbes intégrales voisines solutions de l'équation (4.1) est une équation de Monge du second ordre.

Vessiot a montré que la condition $I = 0$ traduit l'existence d'un système fondamental de solutions $(y_1, y_2, y_3) = (z_1^2, z_1 z_2, z_2^2)$ telles que les fonctions (z_1, z_2) forment un système fondamental de solutions d'une équation linéaire du second ordre qui se déduit de (4.2).

4.3 Le cas $I = 0$

À cette étape, aucune normalisation n'est possible. Après une prolongation et trois normalisations, il faut prolonger encore une fois pour obtenir un système en involution.

Les équations de structure obtenues (formules (25) dans [16]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^6, \\ d\theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^5 - 2\theta^2 \wedge \theta^9 - \theta^3 \wedge \theta^4, \\ d\theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^6 - \theta^3 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^9, \\ d\theta^4 = -\theta^2 \wedge \theta^7 - \theta^3 \wedge \theta^8 - \theta^4 \wedge \theta^9, \\ d\theta^5 = -2\theta^1 \wedge \theta^8 - \theta^3 \wedge \theta^7 - \theta^4 \wedge \theta^6, \\ d\theta^6 = -\theta^1 \wedge \theta^7 - \theta^3 \wedge \theta^{10} + \theta^6 \wedge \theta^9, \\ d\theta^7 = I_1\theta^1 \wedge \theta^2 + I_2\theta^1 \wedge \theta^3 + I_3\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^{10} - \theta^5 \wedge \theta^7 - \theta^6 \wedge \theta^8 + \theta^7 \wedge \theta^9, \\ d\theta^8 = I_4\theta^1 \wedge \theta^2 + I_5\theta^1 \wedge \theta^3 + I_6\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^7 - \theta^5 \wedge \theta^8, \\ d\theta^9 = \theta^1 \wedge \theta^8 - \theta^2 \wedge \theta^{10} + \theta^4 \wedge \theta^6, \\ d\theta^{10} = I_7\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^5 \wedge \theta^{10} - \theta^6 \wedge \theta^7 - 2\theta^9 \wedge \theta^{10}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

font apparaître neuf invariants (I_1, \dots, I_9) fondamentaux. Parmi 70 relations, l'identité de Poincaré

$$d(d\theta^i) = R_{j,k,l}^i \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = 0 \quad (4.7)$$

pour $1 \leq i \leq 10$ et $1 \leq j < k < l \leq 10$, fournit les relations suivantes.

$$\begin{aligned} R_{1,2,3}^4 &= -I_2 + I_4 = 0, & R_{1,2,3}^5 &= I_1 + 2I_6 = 0, & R_{2,3,4}^7 &= \frac{\partial I_3}{\partial \theta^4} + I_9 = 0, \\ R_{1,2,4}^8 &= \frac{\partial I_4}{\partial \theta^4} - I_6 + I_1 = 0, & R_{1,3,4}^8 &= \frac{\partial I_5}{\partial \theta^4} + I_4 + I_2 = 0, & R_{2,3,4}^8 &= \frac{\partial I_6}{\partial \theta^4} + I_3 = 0, \\ R_{1,2,3}^9 &= -I_6 - I_8 = 0, & R_{1,3,4}^{10} &= \frac{\partial I_8}{\partial \theta^4} + I_7 = 0. \end{aligned}$$

On montre, grâce à ces relations, que l'algèbre *différentielle* (les dérivations sont *duales* des 1-formes $\theta^1, \dots, \theta^{10}$) des neuf invariants est engendrée par le seul invariant :

$$I_5 = -\frac{f_{qqqq}}{6a_1^3 a_9} \quad (4.8)$$

Pour l'équation $y''' = 0$, les neuf invariants fondamentaux sont nuls. De plus ¹, on montre que si les invariants I_1 à I_9 sont constants alors ils sont nuls. Donc toute équation équivalente à $y''' = 0$ possède un groupe de symétrie (de contact) de dimension 10 (voir [50, théorème 8.22 page 275]).

Par suite,

Théorème 11 *Soit une équation $y''' = f(x, y, y', y'')$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'équation se ramène à $y''' = 0$ par une transformation de contact.*
- (ii) *L'équation possède un groupe de symétries de contact de dimension 10.*
- (iii) *$I = 0$ et $f_{qqqq} = 0$.*

¹Nous répondons ici à une question posé par Peter Olver que nous remercions pour ses remarques.

4.4 Le cas $I \neq 0$

Dans ce cas, on normalise l'invariant I/a_9^3 à 1 en posant $a_9 = J = \sqrt[3]{I}$, ce qui conduit aux équations de structure (formules (32–33) dans [16]) suivantes comportant 16 invariants fondamentaux (I_1, \dots, I_{16}) :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^5 + I_1\theta^2 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4 + I_2\theta^3 \wedge \theta^4, \\ d\theta^2 &= I_3\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^4, \\ d\theta^3 &= I_4\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^4 + I_5\theta^2 \wedge \theta^3 + I_6\theta^2 \wedge \theta^4 - \theta^3 \wedge \theta^5, \\ d\theta^4 &= I_7\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{10}\theta^2 \wedge \theta^4, \\ d\theta^5 &= I_{11}\theta^1 \wedge \theta^2 + I_{12}\theta^1 \wedge \theta^3 + I_{13}\theta^1 \wedge \theta^4 + I_{14}\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{15}\theta^2 \wedge \theta^4 + I_{16}\theta^3 \wedge \theta^4. \end{cases} \quad (4.9)$$

L'expression en coordonnées locales des invariants obtenue par notre logiciel montre que les invariants I_2 et I_6 sont égaux. L'identité de Poincaré (4.7) fournit, pour le système (4.9), 35 relations parmi lesquelles on a :

$$\begin{aligned} R_{1,2,3}^1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \theta^1} - I_2 I_7 + I_8 + I_{14} = 0 & R_{1,2,4}^1 &= I_2 I_4 - I_1 + I_{15} = 0 \\ R_{1,3,4}^1 &= \frac{\partial I_2}{\partial \theta^1} + I_{16} = 0 & R_{1,2,3}^2 &= \frac{\partial I_3}{\partial \theta^1} + I_7 - I_{12} = 0 \\ R_{1,2,4}^2 &= -I_4 - I_3 - I_{13} = 0 & R_{2,3,4}^2 &= \frac{\partial I_3}{\partial \theta^4} - I_5 - I_{10} + I_{16} = 0 \\ R_{1,2,3}^3 &= \frac{\partial I_5}{\partial \theta^1} + \frac{\partial I_4}{\partial \theta^3} - I_4 I_3 + I_6 I_8 + I_9 + I_{11} = 0 & R_{1,3,4}^3 &= I_4 - I_{13} = 0 \\ R_{2,3,4}^3 &= -\frac{\partial I_6}{\partial \theta^3} + \frac{\partial I_5}{\partial \theta^4} + I_2 I_4 - I_1 + I_6 I_3 - I_{15} = 0 & R_{1,2,4}^4 &= \frac{\partial I_{10}}{\partial \theta^1} + \frac{\partial I_7}{\partial \theta^4} - I_9 - I_6 I_8 = 0 \\ R_{1,3,4}^4 &= \frac{\partial I_8}{\partial \theta^4} + I_7 = 0 \end{aligned}$$

Nous montrons alors grâce à ces relations que l'algèbre différentielle générée par les 16 invariants est engendrée par les quatre invariants suivants :

$$\begin{cases} I_8 &= \frac{J_{qq}}{J a_1^2}, \\ I_3 &= \frac{-8J_q f_q J + 2f_{qq} J^2 - 12J_p J + 12J_q D_x J}{3J^3 a_1}, \\ I_{10} &= -\frac{D_x J_p - D_x^2 J_q - J_y}{J^3 a_1}, \\ I_2 = I_6 &= \frac{-3J^2 f_p - J^2 f_q^2 + 3J^2 D_x f_q - 6J D_x^2 J + 9(D_x J)^2}{6J^4}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Ceci nous permet alors d'énoncer le nouveau théorème suivant :

Théorème 12 *Une équation différentielle ordinaire du troisième ordre $y_{xxx} = f(x, y, p, q)$ est équivalente à l'équation $y_{xxx} = y$ sous l'action du groupe des transformations de*

contact si et seulement si

$$\begin{cases} J_{qq} = 0, \\ -4J_q f_q J + f_{qq}(J)^2 - 6J_p J + 6J_q D_x J = 0, \\ D_x J_p - D_x^2 J_q - J_y = 0, \\ -3(J)^2 f_p - (J)^2 f_q^2 + 3(J)^2 D_x f_q - 6J D_x^2 J + 9(D_x J)^2 = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

où $J^3 = -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{2}D_x f_p - \frac{1}{6}D_x^2 f_q - f_y + \frac{1}{3}f_q D_x f_q - \frac{2}{27}f_q^3$ et $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + f(x, y, p, q) \frac{\partial}{\partial q}$.

4.5 Linéarisation

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction f pour qu'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre (4.1) soit équivalente à une équation linéaire (4.2) par une transformation de contact.

4.5.1 Cas $I = 0$

Pour une équation linéaire, on a $f_{qqqq} = 0$. Nous sommes dans le cas $I = 0$. D'après le théorème 11, une équation (4.1) est linéarisable si et seulement si $f_{qqqq} = 0$.

4.5.2 Cas $I \neq 0$

Proposition 9 *L'équation linéaire (4.2) est équivalente à la forme canonique*

$$y''' + 2I_2(x) y' + (1 + I_2'(x)) y = 0 \quad (4.12)$$

par une transformation de contact.

PREUVE – On peut réduire le problème en se plaçant dans le cas $I = 1$ par une transformation de contact $\bar{x} = \xi(x)$ et $\bar{y} = y$. En effet, $I_1 = I/a_9^3$ est un invariant (voir section 4.2). Si l'on pose $\bar{a}_9 = 1$, de (4.3) on tire $a_9 = \xi'(x)$. Il s'ensuit $\bar{I} = \frac{I}{a_9^3} = \frac{I}{\xi'(x)^3}$. Pour une équation linéaire, I est fonction de la seule variable x . On pose alors $\xi'(x) := \sqrt[3]{I(x)}$ soit $\xi(x) = \int \sqrt[3]{I}$ pour fixer \bar{I} à 1.

On peut ensuite ramener l'équation (4.2) au cas $a(x) = 0$ par une transformation de la forme $\bar{x} = x$ et $\bar{y} = \eta(x)y$. Cette transformation ne change pas la valeur $I = 1$ puisque $\frac{d\bar{x}}{dx} = 1$. L'équation (4.2) devient alors

$$y''' + \frac{3\eta_x - a\eta}{\eta} y'' + \dots = 0.$$

On fixe le coefficient de y'' à 0 en prenant $\eta(x)$ tel que $3\eta_x - a\eta = 0$.

Pour l'équation linéaire (4.2), le semi-invariant est

$$I = \frac{1}{6} a'' + \frac{1}{3} aa' + \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} ab - \frac{1}{2} b' + c.$$

Quand $a(x) = 0$, on a $I = -\frac{1}{2} b' + c = 1$. L'équation est alors de la forme $y''' + b(x) y' + (1 + \frac{1}{2} b'(x)) y = 0$. On vérifie que l'invariant I_2 défini en (4.10) vaut $I_2 = \frac{1}{2} b(x)$. L'équation est alors sous la forme (4.12) qui est une forme canonique puisque $I_2(x)$ est un invariant. \square

Proposition 10 *Si les invariants I_1, I_3, I_8, I_{10} et I_{16} (donnés en section (4.5.3)) sont nuls, alors les invariants fondamentaux $\{I_1 \dots I_{16}\}$ à l'exception de $I_2 = I_6$ sont nuls.*

PREUVE – Les relations de Poincaré (4.7) données en section 4.4 permettent de faire la preuve. Le calcul des invariants en coordonnées locales est fait par notre programme. \square

Théorème 13 *Soit $y''' = f(x, y, y', y'')$, une équation différentielle ordinaire du troisième ordre telle que $I \neq 0$. Alors les cinq conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'équation est équivalente à la forme linéaire*

$$y''' + a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0.$$

par une transformation de contact.

(ii) *L'équation est équivalente à la forme canonique (4.12) par une transformation de contact.*

(iii) *Les invariants définis en (4.9), sauf éventuellement $I_2 = I_6$, sont nuls.*

(iv) *Les invariants $(I_1, I_3, I_8, I_{10}, I_{16})$ définis en proposition 10 sont nuls.*

(v) *Les 2-formes $d\theta^4$ et $d\theta^5$ définies en (4.9), (4.13) et (4.14) sont nulles.*

PREUVE – D'après la proposition 9, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes, de même que les propositions (iii) et (iv) d'après la proposition 10. Il reste donc à montrer que (ii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii).

Montrons que (ii) \Rightarrow (v). Le programme donne

$$\theta^4 = Jdx + (J_p - D_x J_q)(dy - p dx) + J_q(dp - q dx). \quad (4.13)$$

et quand $I = 1$,

$$\begin{aligned} \theta^5 &= \frac{1}{3} f_q dx + \frac{1}{18} (6f_{pq} - 3D_x f_{qq} - f_{qq} f_q) (dy - p dx) \\ &\quad + \frac{2}{3} f_{qq} (dp - q dx) + \frac{1}{a_1} da_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pour la forme canonique (4.12), on a $\theta^4 = dx$ et $\theta^5 = \frac{1}{a_1} da_1$. Il est alors clair que $d\theta^4 = d\theta^5 = 0$.

Montrons que (v) \Rightarrow (iii). D'après $d\theta^4 = d\theta^5 = 0$, on déduit que les invariants $I_7 \dots I_{16}$ sont nuls. Des relations issues du lemme de Poincaré (4.7), le lecteur peut vérifier que tous les invariants fondamentaux excepté I_2 sont nuls.

Montrons que (iii) \Rightarrow (ii). Comme $d\theta^4 = 0$, on peut fixer $I = J = 1$ en posant $\theta^4 = dx$. Montrons qu'alors l'invariant I_2 est une fonction de la seule variable x . Les dérivations invariantes évaluées par notre programme sont :

$$\frac{\partial}{\partial\theta^1} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta^2} &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{f_q}{3a_1} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{5f_q^2 + 9f_p - 3D_x f_q}{18a_1} \frac{\partial}{\partial q} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{6} f_{qq} f_q - \frac{1}{3} f_{pq} + \frac{1}{6} D_x f_{qq} \right) \frac{\partial}{\partial a_1}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^3} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{2f_q}{3a_1} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{2}{3} f_{qq} \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^4} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + f \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{3} f_q a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^5} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}. \quad (4.19)$$

D'après les équations de Poincaré (4.7) calculées en (4.9) on a :

1. $R_{1,3,4}^1 = \partial I_2 / \partial\theta^1 + I_{16} = 0$ donc d'après (4.15) $\partial I_2 / \partial q = 0$. Il s'ensuit que I_2 ne dépend pas de q .
2. $R_{3,4,5}^1 = \partial I_2 / \partial\theta^5 = 0$ donc d'après (4.19) $\partial I_2 / \partial a_1 = 0$. Donc I_2 ne dépend pas de a_1 .
3. $R_{2,3,4}^3 = -\partial I_2 / \partial\theta^3 + \partial I_5 / \partial\theta^4 + I_2 I_4 - I_1 + I_6 I_3 - I_{15} = 0$ donc d'après (4.17) $\partial I_2 / \partial p = 0$. Donc I_2 ne dépend pas de p .
4. $R_{2,3,4}^1 = \partial I_2 / \partial\theta^2 + \partial I_1 / \partial\theta^4 + I_3 + I_2 I_5 + I_2 I_{10} = 0$. Donc d'après (4.16) $\partial I_2 / \partial y = 0$. Donc I_2 ne dépend pas de y .

□

4.5.3 Invariants de la proposition 10

$$I_8 = \frac{J_{qq}}{J a_1^2},$$

$$I_3 = \frac{-8J_q f_q J + 2f_{qq} J^2 - 12J_p J + 12J_q D_x J}{3J^3 a_1},$$

$$I_{10} = -\frac{D_x J_p - D_x^2 J_q - J_y}{J^3 a_1},$$

$$I_{16} = (-18J_p D_x J J + 6J^2 D_x^2 J_q - 18J_q J D_x^2 J + 12J^2 D_x J_p + 6J^2 J_y + 12J^2 D_x J_q f_q - 18J J_q f_q D_x J + 4J^2 J_q f_q^2 + 36J_q (D_x J)^2 + 12J_q J^2 D_x f_q + 6J^2 J_p f_q - 18J D_x J_q D_x - J^3 f_{qq} f_q - 3D_x f_{qq} J^3)/(6J^5 a_1),$$

$$I_1 = (54J^3 f_p J_q f_q - 45f_{yq} J^4 - 108J_q (D_x J)^3 + 27f_{pp} J^4 + 6J^3 J_p f_q^2 - 42J_q D_x J J^2 f_q^2 - 18J^3 J_q f_q D_x f_q - 18J^2 D_x^2 J J_q f_q - 54J_p D_x J J^2 f_q + 3J^3 f_{qq} f_q D_x J + 54J_q J D_x^2 J D_x J - 18J_q D_x J J^2 D_x f_q - 54J_q D_x J J^2 f_p - 36J^2 D_x J_q f_q D_x J + 90(D_x J)^2 J_q f_q J - 9D_x f_{pq} J^4 + 54J^3 D_x J_y - 27J^4 f_{qq} f_p + 108J^3 f_y J_q - 4J^4 f_{qq} f_q^2 + 16J^3 J_q f_q^3 + 18J^3 J_y f_q + 18f_{pq} J^4 f_q + 54J^2 D_x^2 J D_x J_q + 54J^3 D_x J_q f_p + 18J^3 D_x J_p f_q + 18J^3 J_p D_x f_q + 24J^3 D_x J_q f_q^2 + 6J^4 f_{qq} D_x f_q - 108J_y D_x J J^2 - 54J^2 D_x J_p D_x J - 54J D_x J_q (D_x J)^2 + 9J_q D_x^2 f_q J^3 - 27J_q D_x f_p J^3 - 6D_x f_{qq} J^4 f_q + 9D_x f_{qq} J^3 D_x J - 54J^2 D_x^2 J J_p + 162J_p (D_x J)^2 J - 36J^3 D_x J_q D_x f_q)/(54a_1 J^7).$$

Chapitre 5

L'équation $y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''')$

Nous nous intéressons ici au problème de l'équivalence de deux équations différentielles ordinaires du quatrième ordre

$$\bar{y}^{(4)} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}''') \quad (5.1)$$

et

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y'''),$$

sous l'action du groupe des transformations de contact et plus particulièrement avec l'équation $y^{(4)} = 0$. Le détail de la mise en équations, par-ailleurs très proche de la mise en équations du problème d'équivalence d'équations différentielles ordinaires d'ordre 3 traité au chapitre 4, ne sera pas donné ici. Ceci étant, nous nous plaçons sur $J^3 = (x, y, p = y', q = y'', r = y''')$ l'espace des jets d'ordre 3. Ce problème d'équivalence est défini par le corepère

$$\omega \begin{cases} \omega_1 = dr - f(x, y, p, q, r) dx, \\ \omega_2 = dy - p dx, \\ \omega_3 = dp - q dx, \\ \omega_4 = dq - r dx, \\ \omega_5 = dx, \end{cases}$$

ainsi que par le groupe G à treize paramètres $G = (a_1, \dots, a_{13})$ dont la matrice S donnée ci-dessous est un représentant :

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_8 & a_9 & a_{10} & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & a_{13} \end{pmatrix}.$$

Nous ne donnons ici qu'une branche de l'arbre des scindages qu'il faut développer pour classifier complètement l'équation (5.1) et nous intéressons à l'équivalence avec l'équation $y^{(4)} = 0$. Après 10 normalisations et une prolongation, nous obtenons les équations de structure finales comportant 37 invariants I_1 à I_{37} . Ces invariants occupent

un espace mémoire de 36 Ko. Le temps de calcul est de 9 secondes sur un processeur Athlon 500 MHz. Voici ces équations de structure :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta_1 = -\theta_1 \wedge \theta_7 + \theta_1 \wedge \theta_8 + I_1\theta_2 \wedge \theta_3 + I_2\theta_2 \wedge \theta_4 + I_3\theta_2 \wedge \theta_5 - \frac{3}{4}\theta_4 \wedge \theta_6, \\ d\theta_2 = -\theta_2 \wedge \theta_7 - 2\theta_2 \wedge \theta_8 - \theta_3 \wedge \theta_5, \\ d\theta_3 = -\frac{3}{4}\theta_2 \wedge \theta_6 - \theta_3 \wedge \theta_7 - \theta_3 \wedge \theta_8 - \theta_4 \wedge \theta_5, \\ d\theta_4 = -\theta_1 \wedge \theta_5 + I_4\theta_2 \wedge \theta_4 + I_5\theta_2 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_6 - \theta_4 \wedge \theta_7, \\ d\theta_5 = I_6\theta_1 \wedge \theta_2 + I_7\theta_1 \wedge \theta_3 + I_8\theta_2 \wedge \theta_3 + I_9\theta_2 \wedge \theta_4 + I_{10}\theta_2 \wedge \theta_5 + I_{11}\theta_3 \wedge \theta_4 \\ \quad - \theta_5 \wedge \theta_8, \\ d\theta_6 = I_{12}\theta_1 \wedge \theta_2 + I_{13}\theta_1 \wedge \theta_3 + I_{14}\theta_1 \wedge \theta_4 + I_{15}\theta_2 \wedge \theta_3 + I_{16}\theta_2 \wedge \theta_4 + I_{17}\theta_2 \wedge \theta_5 \\ \quad + I_{18}\theta_2 \wedge \theta_6 + I_{19}\theta_3 \wedge \theta_4 + I_{20}\theta_3 \wedge \theta_5 + I_{21}\theta_4 \wedge \theta_5 + \theta_6 \wedge \theta_8, \\ d\theta_7 = I_{22}\theta_1 \wedge \theta_2 + I_{23}\theta_1 \wedge \theta_3 + I_{24}\theta_1 \wedge \theta_4 + I_{25}\theta_2 \wedge \theta_3 + I_{26}\theta_2 \wedge \theta_4 + I_{27}\theta_2 \wedge \theta_5 \\ \quad + I_{28}\theta_3 \wedge \theta_4 + I_{29}\theta_3 \wedge \theta_5 - \frac{1}{4}\theta_5 \wedge \theta_6, \\ d\theta_8 = I_{30}\theta_1 \wedge \theta_2 + I_{31}\theta_1 \wedge \theta_3 + I_{32}\theta_1 \wedge \theta_4 + I_{33}\theta_2 \wedge \theta_3 + I_{34}\theta_2 \wedge \theta_4 + I_{35}\theta_2 \wedge \theta_5 \\ \quad + I_{36}\theta_3 \wedge \theta_4 + I_{37}\theta_3 \wedge \theta_5 + \frac{1}{2}\theta_5 \wedge \theta_6. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Un calcul des relations de Poincaré, $d(d\theta^i) = 0$ pour $1 \leq i \leq 8$, sur les équations (5.2) permet de montrer que les quatre invariants I_7 , I_{15} , I_5 et I_3 , donnés ci-après en coordonnées locales, forment une base de l'idéal différentiel engendré par les 37 invariants.

Base de l'idéal différentiel engendré par les invariants

$$\left\{ \begin{array}{l} I_7 = \frac{f_{rrr}}{6a_{13}a_1^2}, \\ I_{11} = -\frac{1}{36} \frac{f_{rr}^2 a_1 + 6f_{qrr} a_1 - 6f_{rrr} a_4}{a_1^3 a_{13}^2}, \\ I_5 = -\frac{4f_r f_q - 6f_r D_x f_r + f_r^3 + 8f_p + 4D_x^2 f_r - 8D_x f_q}{8a_{13}^3}, \\ I_3 = ((-1120D_x^2 f_q - 1440f_r D_x^2 f_r + 832f_q D_x f_r + 2000D_x f_q f_r + 1600D_x f_p, \\ \quad + 480D_x^3 f_r - 864(D_x f_r)^2 - 1600f_y - 189f_r^4 - 144f_q^2 + 1512D_x f_r f_r^2 \\ \quad - 808f_q f_r^2 - 1600f_p f_r) a_1 + (-800D_x^2 f_r + 1600D_x f_q - 1600f_p \\ \quad + 1200f_r D_x f_r - 800f_r f_q - 200f_r^3) a_4) / (1600a_1 a_{13}^4), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + r \frac{\partial}{\partial q} + f(x, y, p, q, r) \frac{\partial}{\partial r}$.

Sur l'équation $y^{(4)} = 0$, ces invariants sont nuls. Une équation est donc équivalente à cette forme canonique si et seulement si les numérateurs de ces invariants sont nuls.

C'est à dire si les coefficients de ces numérateurs vus comme polynômes en les variables a_1 et a_4 sont nuls. De plus on montre que si les invariants sont constants alors ils sont nuls. Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 14 *Soit une équation $y^{(4)} = f(x, y, p, q, r)$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'équation se ramène à $y^{(4)} = 0$ par une transformation de contact.*
- (ii) *L'équation possède un groupe de symétries de contact de dimension 8.*
- (iii)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{rrr} = 0, \\ f_{rr}^2 + 6f_{qrr} = 0, \\ f_r^3 + 4f_r f_q - 6f_r D_x f_r + 8f_p + 4D_x^2 f_r - 8D_x f_q = 0, \\ -560D_x^2 f_q + 240D_x^3 f_r + 800D_x f_p - 432(D_x f_r)^2 + 244D_x f_q f_r + 416f_q D_x f_r \\ -342f_r D_x^2 f_r + 189D_x f_r f_r^2 - 800f_y - 26f_r^2 f_q - 44f_p f_r - 72f_q^2 = 0, \end{array} \right.$$

avec $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + r \frac{\partial}{\partial q} + f(x, y, p, q, r) \frac{\partial}{\partial r}$.

Ces résultats concernant les EDO d'ordre quatre ne sont que partiels et n'ont pour l'instant pas fait l'objet d'investigations aussi poussées que pour les EDO d'ordre 3 ou les systèmes EDP du second ordre exposé aux chapitres 4 et 7. Signalons les travaux de Doubrov dans [18] et Fels dans [24] qui calculent une partie des invariants de (5.2). Le faible espace mémoire occupé par les invariants ainsi que le très court temps de calcul nécessaire à l'obtention des résultats, laisse envisager de traiter le problème d'équivalence d'EDO d'ordre 5 voire au delà.

Chapitre 6

Systèmes d'EDO du second ordre

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'équivalence de systèmes différentiels ordinaires du second ordre à deux variables dépendantes, sous l'action du groupe des transformations ponctuelles. Soient deux systèmes d'EDO :

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \bar{F}^1(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \\ \ddot{x}^2 = \bar{F}^2(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \end{cases} \quad (6.1)$$

et

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = F^1(t, x, \dot{x}), \\ \ddot{x}^2 = F^2(t, x, \dot{x}), \end{cases} \quad (6.2)$$

où t (resp. \bar{t}) désigne la variable indépendante, $x = (x^1, x^2)$ (resp. $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2)$) désignent les variables dépendantes et $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2)$ (resp. $\dot{\bar{x}} = (\dot{\bar{x}}^1, \dot{\bar{x}}^2)$) leurs dérivées par rapport à t (resp. \bar{t}). Nous cherchons à savoir à quelles conditions les systèmes (6.1) et (6.2) sont équivalents par une transformation ϕ de la forme :

$$\phi \begin{cases} t & \rightarrow \bar{t} & = \tau(t, x), \\ x^1 & \rightarrow \bar{x}^1 & = \xi^1(t, x), \\ x^2 & \rightarrow \bar{x}^2 & = \xi^2(t, x). \end{cases} \quad (6.3)$$

Nous donnerons notamment des conditions nécessaires et suffisantes inédites d'équivalence d'un système (6.2) au système plat :

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = 0, \\ \ddot{x}^2 = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

portant sur les fonctions F^1 et F^2 . Les deux systèmes (6.1) et (6.2) sont équivalents sous l'action d'une transformation ponctuelle si et seulement si il existe des fonctions a_1, \dots, a_{15} de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telles que :

$$\phi^* \underbrace{\begin{pmatrix} d\dot{\bar{x}}^1 - \bar{F}^1(\bar{t}, \bar{x}, \dot{\bar{x}})d\bar{t} \\ d\dot{\bar{x}}^2 - \bar{F}^2(\bar{t}, \bar{x}, \dot{\bar{x}})d\bar{t} \\ d\bar{x}^1 - \dot{\bar{x}}^1 d\bar{t} \\ d\bar{x}^2 - \dot{\bar{x}}^2 d\bar{t} \\ d\bar{t} \end{pmatrix}}_{\bar{\omega}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 & a_{10} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix}}_{g(x) \in G} \underbrace{\begin{pmatrix} dx^1 - F^1(t, x, \dot{x})dt \\ dx^2 - F^2(t, x, \dot{x})dt \\ dx^1 - \dot{x}^1 dt \\ dx^2 - \dot{x}^2 dt \\ dt \end{pmatrix}}_{\omega}$$

L'application de la méthode d'équivalence de Cartan à ce problème génère comme pour le problème d'équivalence d'EDO du troisième ordre traité au chapitre 4, un arbre de scindages. Nous n'exposerons ici qu'une branche de cet arbre. Les invariants calculés dans cette branche permettent entre autres de déterminer les systèmes (6.1) équivalents au système plat (6.4). Voici les 15 équations de structure produites par l'algorithme dans cette branche.

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta_1 = -\theta_1 \wedge \theta_7 + \theta_1 \wedge \theta_{13} - \theta_2 \wedge \theta_8 - \theta_3 \wedge \theta_6 + I_1 \theta_4 \wedge \theta_5, \\ d\theta_2 = -\theta_1 \wedge \theta_9 - \theta_2 \wedge \theta_{10} + \theta_2 \wedge \theta_{13} + I_2 \theta_3 \wedge \theta_5 + I_3 \theta_4 \wedge \theta_5 - \theta_4 \wedge \theta_6, \\ d\theta_3 = -\theta_1 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_7 - \theta_4 \wedge \theta_8, \\ d\theta_4 = -\theta_2 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_9 - \theta_4 \wedge \theta_{10}, \\ d\theta_5 = -\theta_3 \wedge \theta_{11} - \theta_4 \wedge \theta_{12} - \theta_5 \wedge \theta_{13}, \\ d\theta_6 = -\theta_1 \wedge \theta_{14} - \theta_2 \wedge \theta_{15} + I_4 \theta_3 \wedge \theta_4 + I_5 \theta_3 \wedge \theta_5 + I_6 \theta_3 \wedge \theta_{11} + I_7 \theta_3 \wedge \theta_{12} \\ \quad + I_8 \theta_4 \wedge \theta_5 + I_9 \theta_4 \wedge \theta_{11} + I_{10} \theta_5 \wedge \theta_8 + I_{11} \theta_5 \wedge \theta_9 + \theta_6 \wedge \theta_{13}, \\ d\theta_7 = -\theta_1 \wedge \theta_{11} + I_{12} \theta_3 \wedge \theta_4 + I_{13} \theta_3 \wedge \theta_5 - 2\theta_3 \wedge \theta_{14} - \theta_4 \wedge \theta_{15} + \theta_5 \wedge \theta_6 + \theta_8 \wedge \theta_9, \\ d\theta_8 = -\theta_1 \wedge \theta_{12} + I_{14} \theta_2 \wedge \theta_4 - \theta_3 \wedge \theta_{15} + I_{15} \theta_4 \wedge \theta_5 + \theta_7 \wedge \theta_8 + \theta_8 \wedge \theta_{10}, \\ d\theta_9 = I_{16} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{17} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{18} \theta_2 \wedge \theta_4 - \theta_2 \wedge \theta_{11} + I_{19} \theta_3 \wedge \theta_5 + I_{20} \theta_4 \wedge \theta_5 \\ \quad - \theta_4 \wedge \theta_{14} - \theta_7 \wedge \theta_9 - \theta_9 \wedge \theta_{10}, \\ d\theta_{10} = I_{21} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{22} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{23} \theta_2 \wedge \theta_3 + I_{24} \theta_2 \wedge \theta_4 - \theta_2 \wedge \theta_{12} + I_{25} \theta_3 \wedge \theta_4 \\ \quad + I_{26} \theta_3 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_{14} + I_{27} \theta_4 \wedge \theta_5 - 2\theta_4 \wedge \theta_{15} + \theta_5 \wedge \theta_6 - \theta_8 \wedge \theta_9, \\ d\theta_{11} = I_{28} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{29} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{30} \theta_1 \wedge \theta_5 + I_{31} \theta_2 \wedge \theta_3 + I_{32} \theta_2 \wedge \theta_4 + I_{33} \theta_3 \wedge \theta_4 \\ \quad + I_{34} \theta_3 \wedge \theta_5 + I_{35} \theta_3 \wedge \theta_8 + I_{36} \theta_3 \wedge \theta_9 + I_{37} \theta_4 \wedge \theta_5 + I_{38} \theta_4 \wedge \theta_8 - \theta_5 \wedge \theta_{14} \\ \quad - \theta_7 \wedge \theta_{11} - \theta_9 \wedge \theta_{12} - \theta_{11} \wedge \theta_{13}, \\ d\theta_{12} = I_{39} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{40} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{41} \theta_2 \wedge \theta_3 + I_{42} \theta_2 \wedge \theta_4 + I_{43} \theta_3 \wedge \theta_4 + I_{44} \theta_3 \wedge \theta_5 \\ \quad + I_{45} \theta_3 \wedge \theta_8 + I_{46} \theta_4 \wedge \theta_5 + I_{47} \theta_4 \wedge \theta_8 + I_{48} \theta_4 \wedge \theta_9 - \theta_5 \wedge \theta_{15} - \theta_8 \wedge \theta_{11} \\ \quad - \theta_{10} \wedge \theta_{12} - \theta_{12} \wedge \theta_{13}, \\ d\theta_{13} = I_{49} \theta_1 \wedge \theta_3 + \theta_1 \wedge \theta_{11} + \theta_2 \wedge \theta_{12} + I_{50} \theta_3 \wedge \theta_4 + I_{51} \theta_3 \wedge \theta_5 - \theta_3 \wedge \theta_{14} \\ \quad + I_{52} \theta_4 \wedge \theta_5 - \theta_4 \wedge \theta_{15} + 2\theta_5 \wedge \theta_6, \\ d\theta_{14} = I_{53} \theta_1 \wedge \theta_2 + I_{54} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{55} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{56} \theta_1 \wedge \theta_5 + I_{57} \theta_1 \wedge \theta_8 + I_{58} \theta_1 \wedge \theta_9 \\ \quad + I_{59} \theta_2 \wedge \theta_3 + I_{60} \theta_2 \wedge \theta_4 + I_{61} \theta_2 \wedge \theta_5 + I_{62} \theta_3 \wedge \theta_4 + I_{63} \theta_3 \wedge \theta_5 + I_{64} \theta_3 \wedge \theta_6 \\ \quad + I_{65} \theta_3 \wedge \theta_{11} + I_{66} \theta_3 \wedge \theta_{12} + I_{67} \theta_4 \wedge \theta_5 + I_{68} \theta_4 \wedge \theta_{11} + I_{69} \theta_5 \wedge \theta_8 \\ \quad + I_{70} \theta_5 \wedge \theta_9 + I_{71} \theta_5 \wedge \theta_{11} + I_{72} \theta_5 \wedge \theta_{12} - \theta_6 \wedge \theta_{11} \\ \quad - \theta_7 \wedge \theta_{14} - \theta_9 \wedge \theta_{15}, \\ d\theta_{15} = I_{73} \theta_1 \wedge \theta_2 + I_{74} \theta_1 \wedge \theta_3 + I_{75} \theta_1 \wedge \theta_4 + I_{76} \theta_1 \wedge \theta_5 + I_{77} \theta_2 \wedge \theta_3 + I_{78} \theta_2 \wedge \theta_4 \\ \quad + I_{79} \theta_2 \wedge \theta_8 + I_{80} \theta_2 \wedge \theta_9 + I_{81} \theta_3 \wedge \theta_4 + I_{82} \theta_3 \wedge \theta_5 + I_{83} \theta_3 \wedge \theta_{11} + I_{84} \theta_3 \wedge \theta_{12} \\ \quad + I_{85} \theta_4 \wedge \theta_5 + I_{86} \theta_4 \wedge \theta_{11} + I_{87} \theta_5 \wedge \theta_8 + I_{88} \theta_5 \wedge \theta_9 - \theta_6 \wedge \theta_{12} - \theta_8 \wedge \theta_{14} \\ \quad - \theta_{10} \wedge \theta_{15}. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Les équations (6.5) sont obtenues après 7 normalisations et une prolongation suivies de 3 normalisations et d'une dernière prolongation. Après les 7 premières normalisation, si les invariants I_1 , I_2 et I_3 sont nuls, plus aucune normalisation n'est possible et le système n'étant pas en involution, il faut le prolonger. Après prolongation (le système prolongé est alors composé de 13 équations de structure) et à nouveau 3 normalisations, si les invariants I_4 à I_{52} sont nuls plus aucune normalisation n'est possible et il faut à nouveau prolonger le système pour obtenir les équations (6.5).

Nous ne donnons pas ici le détail des calculs pour le moins volumineux. Les équations (6.5) comportent un système complet de 88 invariants, I_1 à I_{88} , qui permet de décider de l'équivalence des deux systèmes (6.1) et (6.2).

Grâce à l'analyse des relations sur les invariants données par le lemme de Poincaré, $dd\theta^i = 0$ pour $1 \leq i \leq 15$, appliqué à (6.5); on montre que les invariant I_1 et I_{14} forment une base de l'idéal différentiel engendré par les invariants I_1 à I_{88} . Notons,

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + F^1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^1} + F^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^2}.$$

Voici l'expression des invariants I_1 et I_{14} en coordonnées locales :

$$\begin{aligned} I_1 = & ((2D_t F_{\dot{x}^2}^1 - F_{\dot{x}^2}^1 F_{\dot{x}^1}^1 - F_{\dot{x}^2}^2 F_{\dot{x}^2}^1 - 4F_{x^2}^1) a_9^2 \\ & + (-F_{\dot{x}^2}^2{}^2 - 2D_t F_{\dot{x}^1}^1 - 4F_{x^2}^2 + 4F_{x^1}^1 + 2 D_t F_{\dot{x}^2}^2 + F_{\dot{x}^1}^1{}^2) a_{10} a_9 \\ & + (-2D_t F_{\dot{x}^1}^2 + F_{\dot{x}^2}^2 F_{y^1}^2 + 4F_{x^1}^2 + F_{\dot{x}^1}^1 F_{\dot{x}^1}^2) a_{10}^2) \frac{1}{(4(a_9 a_{12} - a_{11} a_{10}) a_{15}^2)}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} I_{14} = & (a_9^4 F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 + (-3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 + F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2) a_{10} a_9^3 + (3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^1 - 3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2) a_{10}^2 a_9^2 \\ & + (3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^2 - F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^1) a_{10}^3 a_9 - a_{10}^4 F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^2) \frac{a_{15}}{2(a_9 a_{12} - a_{11} a_{10})^3}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sur le système plat (6.4), les invariants I_1 et I_{14} et donc tous les invariants sont nuls. Or I_1 et I_{14} sont nuls si et seulement si leurs numérateurs, qui sont des polynômes en les variables $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ et a_{15} , sont nuls. La nullité de ces numérateurs quelques soient $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ et a_{15} implique la nullité des coefficients des monômes en ces variables. On déduit donc de l'expression de (6.6) et (6.7), le théorème suivant :

Théorème 15 *Le système $\{\ddot{x}^1 = F^1(t, x, \dot{x}), \ddot{x}^2 = F^2(t, x, \dot{x})\}$ est équivalent au système $\{\ddot{x}^1 = 0, \ddot{x}^2 = 0\}$ sous l'action du groupe des transformations ponctuelles si et seulement*

si

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^2 = 0, \\ F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 = 0, \\ F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2 - 3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^1 = 0, \\ F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^1}^1 - 3F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^2 = 0, \\ F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2}^1 - F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^2}^2 = 0, \\ 2D_t F_{\dot{x}^2}^1 - F_{\dot{x}^2}^1 F_{\dot{x}^1}^1 - F_{\dot{x}^2}^2 F_{\dot{x}^2}^1 - 4F_{x_2}^1 = 0, \\ -F_{\dot{x}^2}^2{}^2 - 2D_t F_{\dot{x}^1}^1 - 4F_{x_2}^2 + 4F_{x_1}^1 + 2D_t F_{\dot{x}^2}^2 + F_{\dot{x}^1}^1{}^2 = 0, \\ -2D_t F_{\dot{x}^1}^2 + F_{\dot{x}^2}^2 F_{y_1}^2 + 4F_{x_1}^2 + F_{\dot{x}^1}^1 F_{\dot{x}^1}^2 = 0, \end{array} \right. \quad (6.8)$$

avec

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + F^1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^1} + F^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^2}.$$

Les techniques de preuves présentées en section 7.6 et utilisées pour généraliser les résultats obtenus sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 à deux variables indépendantes et une variables dépendantes s'appliquent ici. Ce travail en cours, permettra à n'en pas douter, de généraliser le théorème (15) en des conditions au moins nécessaires d'équivalence de systèmes d'EDO comportant un nombre arbitraire de variables dépendantes. On peut ainsi espérer compléter les résultats de [14] et [23] portant sur de tels systèmes.

Chapitre 7

Systèmes d'équations aux dérivées partielles

Ce chapitre est consacré à la présentation de nouveaux résultats obtenus sur l'équivalence de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec Camille Bièche, du L.A.T.P de Marseille et a fait l'objet d'une note actuellement soumise aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Suivront dans l'ordre la note telle qu'elle a été soumise puis les preuves des théorèmes énoncés.

Nous donnons des conditions nécessaires portant sur les fonctions holomorphes $f_{\alpha\beta}$ pour qu'un système EDP du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = f_{\alpha\beta} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{ pour } 1 \leq \alpha, \beta \leq n$$

soit équivalent au système plat $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^\alpha \partial \hat{x}^\beta} = 0$ par une transformation biholomorphe ponctuelle $(x, u) \rightarrow (\hat{x}, \hat{u})$ définie sur un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} . Dans le cas de deux variables indépendantes, ces conditions sont suffisantes.

7.1 Introduction

Soient les deux systèmes aux dérivées partielles holomorphes à n variables indépendantes $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n$ — resp. $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n) \in \mathbb{C}^n$ — et une variable dépendante $u \in \mathbb{C}$ — resp. $\hat{u} \in \mathbb{C}$:

$$(\mathcal{S}_f) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = f_{\alpha\beta} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} \text{ pour } \alpha, \beta = 1 \dots n, \quad (7.1)$$

$$(\mathcal{S}_{\hat{f}}) : \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^\alpha \partial \hat{x}^\beta} = \hat{f}_{\alpha\beta} \left(\hat{x}, \hat{u}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right), \quad \hat{f}_{\alpha\beta} = \hat{f}_{\beta\alpha} \text{ pour } \alpha, \beta = 1 \dots n. \quad (7.2)$$

Nous étudions le problème d'équivalence locale suivant : étant donnés deux systèmes (\mathcal{S}_f) et $(\mathcal{S}_{\hat{f}})$ supposés *complètement intégrables*, existe-t-il un changement de coordonnées biholomorphe $(\hat{x}, \hat{u}) = \phi(x, u)$ défini sur un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} qui transforme

le système (\mathcal{S}_f) en le système $(\mathcal{S}_{\hat{f}})$? Si tel est le cas, on dira que les deux systèmes (\mathcal{S}_f) et $(\mathcal{S}_{\hat{f}})$ sont équivalents. Nous résolvons ce problème à l'aide de la méthode d'équivalence développée par Elie Cartan [11] vers 1905.

On rencontre de tels systèmes dans l'étude des biholomorphismes locaux des hypersurfaces *réelles* analytiques (Levi non dégénérées) de \mathbb{C}^{n+1} . Une telle hypersurface réelle \mathcal{H} passant par l'origine est définie par une fonction r à valeurs réelles :

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z, \bar{z}) = 0\}. \quad (7.3)$$

On associe à \mathcal{H} , une famille d'hypersurfaces *complexes* appelées *variétés de Segre*

$$\mathcal{Q}(\zeta) := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z, \zeta) = 0\} \text{ pour } \zeta \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (7.4)$$

Ces variétés de Segre $\mathcal{Q}(\zeta)$ sont exactement les graphes des solutions d'un certain système (\mathcal{S}_f) pourvu que le paramètre ζ soit assez proche de l'origine – voir [14].

En particulier, si deux hypersurfaces \mathcal{H} et $\hat{\mathcal{H}}$ sont biholomorphes, les systèmes (\mathcal{S}_f) et $(\mathcal{S}_{\hat{f}})$ associés à leurs variétés de Segre sont équivalents. Le système *plat* noté (\mathcal{S}_0) correspond au cas particulier où toutes les fonctions $f_{\alpha\beta}$ sont nulles dans (7.1). Il est associé aux variétés de Segre des quadriques de \mathbb{C}^{n+1} .

7.2 Formulation du problème

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on considère $J^q(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ l'espace des jets d'ordre q des fonctions holomorphes de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} . Soit $(x, u, u', u'') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ un système de coordonnées locales de l'espace $J^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ obtenu en posant $x := (x^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$, $u' := (u_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$ et $u'' := (u_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq n}$. Le système (\mathcal{S}_f) défini en (7.1) s'écrit alors

$$u'' = f(x, u, u'). \quad (7.5)$$

Ce système est supposé complètement intégrable, i.e. tout point $(x, u, u') \in J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ est une condition initiale qui définit une unique solution de (\mathcal{S}_f) , autrement dit le système de Pfaff $\{du - u'dx = 0, du' - f(x, u, u')dx = 0\}$, défini sur la variété $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, vérifie la condition de Frobénius (6).

Soit $(\hat{x}, \hat{u}) = \phi(x, u)$ une transformation biholomorphe de $J^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dans $J^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ et $\phi^{(1)}$ la prolongation de ϕ définie sur $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Deux systèmes (\mathcal{S}_f) et $(\mathcal{S}_{\hat{f}})$ sont localement équivalents [14] par ϕ si et seulement si

$$\phi^{(1)*} \begin{pmatrix} d\hat{u} - \hat{u}'d\hat{x} \\ d\hat{x} \\ d\hat{u}' - \hat{f}d\hat{x} \end{pmatrix} = g(x, u, u') \begin{pmatrix} du - u'dx \\ dx \\ du' - fdx \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

où g est une application holomorphe de $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dans le groupe de Lie complexe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ A & M & 0 \\ B & 0 & N \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, A, B \in \mathbb{C}^n, M, N \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \right\} \quad (7.7)$$

Le problème d'équivalence se ramène donc à l'équivalence analytique locale de deux G -structures.

On note $(\omega, \omega^\alpha, \omega_\alpha)^T := g(x, u, u').(du - u'dx, dx, du' - f dx)^T$ le vecteur des formes invariantes figurant dans (7.6). En appliquant la méthode de Cartan [11] à la manière de S. S. Chern dans [14], on obtient finalement les équations d'une $\{e\}$ -structure comportant $(n^2 + 4n + 3)$ 1-formes invariantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega = \varphi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \omega_\beta \\ d\omega^\alpha = \varphi^\alpha \wedge \omega + \varphi_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta \\ d\omega_\alpha = \varphi_\alpha \wedge \omega + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta \\ d\varphi = \psi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \varphi_\beta + \varphi^\beta \wedge \omega_\beta \\ d\varphi_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \psi \wedge \omega - \varphi_\beta^\gamma \wedge \varphi_\gamma^\alpha - \varphi_\beta \wedge \omega^\alpha - \varphi^\alpha \wedge \omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \omega^\gamma \wedge \varphi_\gamma + S_{\beta\rho}^{\alpha\sigma} \omega^\rho \wedge \omega_\sigma \\ \quad + R_{\beta\gamma}^{\alpha\gamma} \omega^\gamma \wedge \omega + T_\beta^{\alpha\gamma} \omega_\gamma \wedge \omega \\ d\varphi^\alpha = \frac{1}{2}\psi \wedge \omega^\alpha + \varphi^\alpha \wedge \varphi + \varphi_\beta^\alpha \wedge \varphi^\beta + T_\beta^{\alpha\gamma} \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \frac{1}{2}Q_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + L^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega \\ d\varphi_\alpha = \frac{1}{2}\psi \wedge \omega_\alpha - \varphi_\alpha^\beta \wedge \varphi_\beta + R_{\alpha\gamma}^\beta \omega_\beta \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2}Q_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega + P_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega \\ d\psi = \psi \wedge \varphi + 2\varphi^\alpha \wedge \varphi_\alpha + Q_\alpha^\beta \omega^\alpha \wedge \omega_\beta + K^\alpha \omega_\alpha \wedge \omega + H_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Ces 1-formes invariantes forment un corepère d'une certaine variété $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \times G^{(1)} \times G^{(2)}$ où $G^{(1)}$ est un sous-groupe de G et $G^{(2)}$ est un groupe abélien.

Par construction, les huit tenseurs invariants H, K, L, P, Q, R, S, T vérifient les relations de symétrie $S_{\beta\rho}^{\alpha\sigma} = S_{\beta\rho}^{\sigma\alpha} = S_{\rho\beta}^{\alpha\sigma}$, $R_{\alpha\gamma}^\beta = R_{\gamma\alpha}^\beta$, $T_\alpha^{\beta\gamma} = T_\alpha^{\gamma\beta}$, $L^{\alpha\beta} = L^{\beta\alpha}$, $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$ et les conditions de trace nulle $S_{\beta\sigma}^{\alpha\sigma} = 0$, $R_{\alpha\gamma}^\alpha = T_\alpha^{\alpha\gamma} = 0$, $Q_\alpha^\alpha = 0$. Tous les invariants peuvent être obtenus à partir de S par des dérivations covariantes par rapport à $(\omega, \omega^\alpha, \omega_\alpha)$

Pour le système plat (\mathcal{S}_0) , ces huit tenseurs sont nuls, quel que soit $g \in G$. Les équations (7.8) sont alors les équations de Maurer–Cartan du groupe des symétries ponctuelles de (\mathcal{S}_0) , à savoir le groupe projectif $\text{PGL}(2n + 2, \mathbb{C})$.

7.3 Systèmes à deux variables indépendantes

Dans le cas de deux variables indépendantes, un calcul sur machine nous permet d'explicitier les huit tenseurs invariants en fonction de f . Grâce à l'identité de Poincaré appliquée aux quinze 1-formes invariantes ($d^2\omega = \dots = d^2\psi = 0$), on montre que la nullité du seul invariant I vérifiant

$$\begin{aligned} a^2 \det(N)^4 I &= \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_1} (N_2^1)^4 + 2 \left(\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_2} \right) N_1^1 (N_2^1)^3 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_1} - 4 \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_2 \partial u_2} \right) (N_1^1)^2 (N_2^1)^2 \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_2 \partial u_2} - \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} \right) (N_1^1)^3 N_2^1 + \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_2 \partial u_2} (N_1^1)^4 \end{aligned} \quad (7.9)$$

implique la nullité de tous les autres invariants. Notons que $a, N_1^1, N_2^1, N_3^1, N_4^1$ sont des paramètres du groupe structural G défini en (7.7).

Théorème 16 *Le système (\mathcal{S}_f) complètement intégrable, défini comme en (7.1), comportant deux variables indépendantes est équivalent au système plat (\mathcal{S}_0) si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_2 \partial u_2} - \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial u_1 \partial u_1} - 4 \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

7.4 Systèmes à n variables indépendantes

Les conditions données en (7.10) se généralisent de la façon suivante, pour des systèmes à n variables indépendantes :

Théorème 17 *Si le système (\mathcal{S}_f) défini comme en (7.1) est équivalent au système (\mathcal{S}_0) alors*

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq n, \\ \{\alpha, \beta\} \cap \{\sigma, \rho\} = \emptyset, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\alpha} - \frac{\partial^2 f_{\beta\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad \alpha \neq \beta, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha\alpha}}{\partial u_\alpha \partial u_\alpha} - 4 \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial^2 f_{\beta\beta}}{\partial u_\beta \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq n, \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha\alpha}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} - 4 \frac{\partial^2 f_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial u_\beta \partial u_\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n, \\ \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha. \quad (7.14)$$

Une première preuve de ce résultat est obtenue en explicitant le système différentiel (\mathcal{S}_f) obtenu par image réciproque ϕ^* du système plat (\mathcal{S}_0) . Les formules définissant les fonctions $f_{\alpha\beta}$ figurant dans le système (\mathcal{S}_f) dépendent du changement de variables ϕ . Ce sont des fractions dont le dénominateur est le déterminant de la jacobienne de ϕ . Le numérateur de ces fractions est un polynôme en les variables u_i . Par un calcul explicite des $f_{\alpha\beta}$, on prouve (7.11) à (7.14). Cette preuve sera donnée en (7.6)

Une deuxième preuve du théorème 17 due à Camille Bièche consiste à évaluer les coefficients du tenseur invariant S de (7.8) sur l'élément neutre de $G^{(1)} \times G^{(2)}$. On

montre alors — voir aussi formule (3,8) dans [60] — pour tout indice $1 \leq \alpha, \rho, \beta, \sigma \leq n$ la relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\sigma} - \frac{1}{n+2} \sum_{\kappa} \left(\delta_\rho^\sigma \frac{\partial^2 f_{\alpha\kappa}}{\partial u_\beta \partial u_\kappa} + \delta_\rho^\beta \frac{\partial^2 f_{\alpha\kappa}}{\partial u_\sigma \partial u_\kappa} + \delta_\alpha^\sigma \frac{\partial^2 f_{\rho\kappa}}{\partial u_\beta \partial u_\kappa} + \delta_\alpha^\beta \frac{\partial^2 f_{\rho\kappa}}{\partial u_\sigma \partial u_\kappa} \right) \\ + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{\kappa, \gamma} (\delta_\alpha^\beta \delta_\rho^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\rho^\beta) \frac{\partial^2 f_{\kappa\gamma}}{\partial u_\kappa \partial u_\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Les systèmes de relations (7.11) à (7.14) et (7.15) se déduisent l'un de l'autre par des combinaisons linéaires à coefficients constants sont équivalents. Cette preuve ne sera pas donnée dans cette thèse.

7.5 Groupe de symétries

Les équations de structure (7.8) montrent que le système (\mathcal{S}_f) possède un groupe de symétries ponctuelles (voir aussi A. Sukhov dans [59]) de dimension au plus $n^2 + 4n + 3$. La dimension maximale est obtenue lorsque les huit tenseurs invariants sont constants. Par une méthode analogue à celle de M. E. Fels dans [23], on montre que si tous invariants sont constants, alors ils sont nuls. Ceci nous permet alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 18 *Le système (\mathcal{S}_f) est équivalent au système plat (\mathcal{S}_0) si et seulement si son groupe de symétries ponctuelles est un groupe de Lie de dimension $n^2 + 4n + 3$.*

7.6 Preuve du théorème 17

Cette section est consacrée à la preuve du théorème (17) page 92. Camille Bièche possède par ailleurs une preuve qui est totalement différente de celle présentée ici.

L'idée principale est d'explicitier les systèmes

$$(\mathcal{S}_f) : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} = f_{jk} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad f_{jk} = f_{kj} \text{ pour } j, k = 1 \dots n$$

équivalents au système plat \mathcal{S}_0 , sous l'action du groupe des transformations ponctuelles :

$$\phi \in \Phi \begin{cases} x^i & \rightarrow \hat{x}^i = \xi^i(x, u), \\ u & \rightarrow \hat{u} = \eta(x, u). \end{cases} \quad (7.16)$$

Une fois les fonctions f_{jk} trouvées, nous prouverons les relations (7.11), (7.12), (7.13) et (7.14) du théorème 17.

7.6.1 Calcul des fonctions f_{jk}

Une première façon de procéder est de calculer la prolongation du groupe de transformations (7.16) sur $J^2 = (x, u, u' = u_i, u'' = u_{ij})$ puis d'effectuer le pull-back par $\phi \in \Phi$

du système \mathcal{S}_0 . Ceci implique de volumineux calculs qui ne tirent pas partie de tous les renseignements que nous avons à notre disposition. En effet, nous connaissons les solutions du système \mathcal{S}_0 . Elles sont de la forme :

$$\widehat{u} = a_i \widehat{x}^i + b,$$

où les a_i et b sont des constantes. Ces solutions écrites dans le système de coordonnées (x, u) sont :

$$\eta(x, u) = a_i \xi^i(x, u) + b \quad 1 \leq i \leq n. \quad (7.17)$$

Explicitons maintenant le système différentiel dont sont solutions les équations (7.17) (c'est le système S_0 exprimé dans les coordonnées (x, u)). Faisons pour cela apparaître les dérivées u_j et u_{jk} dans les équations. Une première application des champs de Cartan

$$D_{x^k} = \partial/\partial x^k + u_k \partial/\partial u + f_{jk} \partial/\partial u_j, \quad 1 \leq k \leq n,$$

à (7.17) donne un système d'équations de la forme :

$$V = aP, \quad (7.18)$$

où V est le vecteur ligne de composantes

$$V_l = \eta_l + u_l \eta_u, \quad (7.19)$$

a est le vecteur ligne de composantes a_i et P la matrice carrée de dimension $n \times n$ et de composantes

$$P_l^i = \xi_l^i + u_l \xi_u^i. \quad (7.20)$$

Ces équations nous permettent d'ores et déjà de tirer a , soit :

$$a = VP^{-1}. \quad (7.21)$$

Une nouvelle application des champs de Cartan $D_{x^j} = \partial/\partial x^j + u_j \partial/\partial u + f_{jk} \partial/\partial u_k$ pour $1 \leq j \leq n$ aux équations (7.18) donne :

$$\eta_{jk} + u_j \eta_{ku} + f_{jk} \eta_u + u_k \eta_{ju} + u_j u_k \eta_{uu} - a_i (\xi_{jk}^i + u_j \xi_{ku}^i + f_{jk} \xi_u^i + u_k \xi_{ju}^i + u_j u_k \xi_{uu}^i) = 0.$$

Soit encore :

$$f_{jk} (\eta_u - a_i \overbrace{\xi_u^i}^{W^i}) = \overbrace{-\eta_{jk} - u_j \eta_{ku} - u_k \eta_{ju} - u_j u_k \eta_{uu}}^{R_{jk}} + a_i \overbrace{(\xi_{jk}^i + u_j \xi_{ku}^i + u_k \xi_{ju}^i + u_j u_k \xi_{uu}^i)}^{Y_{jk}^i} \quad (7.22)$$

où W est le vecteur colonne de composantes ξ_u^i , $R = -\eta_{jk} - u_j \eta_{ku} - u_k \eta_{ju} - u_j u_k \eta_{uu}$ est une fonction du J^1 , et où Y_{jk} est un vecteur colonne de composantes $\xi_{jk}^i + u_j \xi_{ku}^i + u_k \xi_{ju}^i + u_j u_k \xi_{uu}^i$. On a alors l'expression des systèmes images du système \mathcal{S}_0 par le pull-back d'une transformation ponctuelle, soit $u_{jk} = f_{jk} = (R_{jk} + aY_{jk})/(\eta_u - aW)$. D'après (7.21), on obtient :

$$f_{jk} = (R_{jk} + VP^{-1}Y_{jk})/(\eta_u - VP^{-1}W). \quad (7.23)$$

Le numérateur ainsi que le dénominateur de (7.23) sont des fractions où intervient le déterminant de la matrice P . Commençons donc par réduire les fractions f_{jk} . Notons \tilde{P} la transposée de la matrice des cofacteurs de P . On a :

$$\tilde{P} = \det(P)P^{-1}. \quad (7.24)$$

En utilisant (7.23) et (7.24), on a enfin :

$$f_{jk} = \frac{\det(P)R_{jk} + V\tilde{P}Y_{jk}}{\det(P)\eta_u - V\tilde{P}W}, \quad (7.25)$$

où le numérateur et le dénominateur de f_{jk} sont des polynômes en les variables u_i .

7.6.2 Quelques remarques

La matrice P définie en (7.20) est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \xi_1^1 + u_1\xi_u^1 & \xi_2^1 + u_2\xi_u^1 & \cdots \\ \xi_1^2 + u_1\xi_u^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n + u_1\xi_u^n & \vdots & \xi_n^n + u_n\xi_u^n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice peut se factoriser en AB de la façon suivante :

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_u^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_u^2 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \xi_u^n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 + \xi_1^1/\xi_u^1 & u_2 + \xi_2^1/\xi_u^1 & \cdots \\ \xi_1^2 - \xi_u^2\xi_1^1/\xi_u^1 & \xi_2^2 - \xi_u^2\xi_2^1/\xi_u^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n - \xi_u^n\xi_1^1/\xi_u^1 & \vdots & \xi_n^n - \xi_u^n\xi_n^1/\xi_u^1 \end{pmatrix}}_B. \quad (7.26)$$

On remarque que $\det(A) = \xi_u^1$ et que $\det(B)$ est linéaire en les u_i (en développant par rapport à la première ligne de B). Donc $\det(P)$ est linéaire en les u_i . Avant d'aller plus loin, explicitons quelques propriétés de la matrice B .

Soit \tilde{B} , la transposée de la matrice des cofacteurs de B . On a par définition :

$$\tilde{B} = \det(B)B^{-1}. \quad (7.27)$$

\tilde{B}_i^j est donc le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice B .

Lemme 6 *Quels que soient i, j et k entre 1 et n , \tilde{B}_i^j est linéaire en u_k .*

PREUVE – C'est évident d'après (7.26). □

Lemme 7 $\frac{\partial \tilde{B}_1^j}{\partial u_i} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n.$

PREUVE – C'est évident d'après (7.26). \square

Lemme 8 $\frac{\partial \tilde{B}_i^j}{\partial u_j} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n.$

PREUVE – C'est évident d'après (7.26). \square

Lemme 9 $\frac{\partial \tilde{B}_k^j}{\partial u_i} = -\frac{\partial \tilde{B}_k^i}{\partial u_j} \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$

PREUVE – Pour $k = 1$, le lemme (7) permet de prouver (9). Pour $k \neq 1$, le coefficient de \tilde{B}_k^j en la variable u_i est le déterminant de la matrice B où l'on a supprimé la ligne k , la colonne j , la ligne 1 et la colonne i (on a développé \tilde{B}_k^j par rapport à la première ligne). Le coefficient de \tilde{B}_k^i en la variable u_j est obtenu par le même calcul de déterminant sur la matrice B où l'on a échangé les colonnes i et j . Les coefficients de \tilde{B}_k^j en u_i et de \tilde{B}_k^i en u_j sont donc de signes opposés (on change le signe du déterminant d'une matrice en permutant deux colonnes). \square

Lemme 10 $\det(B)$ est linéaire en les variables u_j . Plus précisément, $\det(B) = u_1 \tilde{B}_1^1 + u_2 \tilde{B}_1^2 + \cdots + u_n \tilde{B}_1^n + \alpha$, où α ne dépend pas des variables u_j .

PREUVE – C'est immédiat d'après (7.26), en développant le déterminant de la matrice B par rapport à la première ligne. \square

Lemme 11 $\det(P) = \xi_u^1 u_i \tilde{B}_1^i + \alpha$, où α ne dépend pas des variables u_j .

PREUVE – C'est immédiat d'après (7.26) et le lemme (10). \square

7.6.3 Le dénominateur des fonctions f_{jk}

Proposition 11 Le dénominateur des fonctions f_{jk} obtenues en (7.25) est indépendant des variables u_j i.e $\det(P)\eta_u - V\tilde{P}W$ est indépendant des variables u_j .

PREUVE – Premièrement, d'après (7.26) et (9) :

$$\det(P)\eta_u = \eta_u \xi_u^1 (u_1 \tilde{B}_1^1 + \cdots + u_n \tilde{B}_1^n) + \alpha, \quad (7.28)$$

où α est indépendant des variables u_k . Deuxièmement, on a :

$$\begin{aligned} V\tilde{P}W &= V\det(P)P^{-1}W \\ &= \det(P)VB^{-1}A^{-1}W \\ &= \frac{\det(P)}{\det(B)} V\tilde{B}A^{-1}W \\ &= \det(A)V\tilde{B}A^{-1}W. \end{aligned} \quad (7.29)$$

D'après (7.26), on obtient facilement l'inverse de la matrice A et par définition du vecteur W , on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\xi_u^1 & 0 & \dots & 0 \\ -\xi_u^2/\xi_u^1 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -\xi_u^n/\xi_u^1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_u^1 \\ \xi_u^2 \\ \vdots \\ \xi_u^n \end{pmatrix}}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

D'où,

$$\tilde{B}A^{-1}W = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^1 \\ \tilde{B}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_1^n \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} \det(A)V\tilde{B}A^{-1}W &= \xi_u^1(\eta_i + u_i\eta_u)\tilde{B}_1^i \\ &= \xi_u^1\eta_u u_i \tilde{B}_1^i + \beta, \end{aligned} \quad (7.32)$$

où β ne dépend pas des variables u_j . D'après (7.28) et (7.32), on déduit la proposition (11). \square

7.6.4 Le numérateur des fonctions f_{jk}

Explicitons maintenant le numérateur des fonctions f_{jk} définies en (7.25), soit $\det(P)R + V\tilde{P}Y$. Premièrement, d'après le lemme (11) et la définition de R on a :

$$\det(P)R = (\xi_u^1 u_i \tilde{B}_1^i + \alpha)(-\eta_{jk} - u_j \eta_{ku} - u_k \eta_{ju} - u_j u_k \eta_{uu}). \quad (7.33)$$

Deuxièmement, on a :

$$V\tilde{P}Y = (\eta_l + u_l \eta_u) \tilde{P}_m^l (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m), \quad (7.34)$$

avec

$$\tilde{P} = \tilde{B}\tilde{A}, \quad (7.35)$$

où rappelons-le $\tilde{B} = \det(B)B^{-1}$ et $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$. De (7.27) et (7.30), nous avons donc :

$$\tilde{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{B}_1^1 & \tilde{B}_2^1 & \dots & \tilde{B}_n^1 \\ \tilde{B}_1^2 & \tilde{B}_2^2 & \vdots & \tilde{B}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{B}_1^n & \dots & \dots & \tilde{B}_n^n \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\xi_u^2 & \xi_u^1 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \xi_u^1 & 0 \\ -\xi_u^n & 0 & \dots & \xi_u^1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}. \quad (7.36)$$

Soit,

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^1 - \sum_{i>1} \tilde{B}_i^1 \xi_u^i & \tilde{B}_2^1 \xi_u^1 & \dots & \tilde{B}_n^1 \xi_u^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{B}_1^n - \sum_{i>1} \tilde{B}_i^n \xi_u^i & \tilde{B}_2^n \xi_u^1 & \dots & \tilde{B}_n^n \xi_u^1 \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

Les lemmes (6), (8) et (9) portant sur la matrice \tilde{B} impliquent certaines propriétés de la matrice \tilde{P} donnée en (7.37). Voici ces propriétés.

Proposition 12 *Quels que soient i, j et k entre 1 et n , \tilde{P}_i^j est linéaire en u_k .*

PREUVE – Ceci résulte du lemme (10) et de (7.37) □

Proposition 13 *Quels que soient i, j entre 1 et n , on a :*

$$\frac{\partial \tilde{P}_i^j}{\partial u_j} = 0.$$

PREUVE – Ceci résulte de la proposition (8). □

Proposition 14 *Quels que soient i, j et k entre 1 et n , on a :*

$$\frac{\partial \tilde{P}_k^i}{\partial u_j} = -\frac{\partial \tilde{P}_k^j}{\partial u_i}.$$

PREUVE – Ceci résulte du lemme (9) et de (7.37). □

7.6.5 Calcul explicite de $\frac{\partial f_{jk}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma}$

Comme nous l'avons vu proposition (11), le dénominateur des fonctions f_{jk} que nous noterons d , ne dépend pas des variables u_j . Les conditions d'équivalence du théorème (17) portent uniquement sur des dérivations en les variables u_j . Donc seuls les numérateurs des fonctions f_{jk} jouent un rôle dans la preuve du théorème (17). Nous allons maintenant faire un calcul explicite des dérivées des fonctions f_{jk} par rapport aux variables u_ρ . On a, d'après (7.33) et (7.34) :

$$\begin{aligned} f_{jk} &= \frac{1}{d} ((\xi_u^1 u_i \tilde{B}_1^i + \alpha)(-\eta_{jk} - u_j \eta_{ku} - u_k \eta_{ju} - u_j u_k \eta_{uu}) \\ &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \tilde{P}_m^l (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m)) \end{aligned} \quad (7.38)$$

où le dénominateur d ne dépend pas des variables u_i pour $1 \leq i \leq n$, comme nous l'avons vu en (11). En dérivant (7.38) par rapport à la variable u_r et en tenant compte des lemmes (6), (7) et (8) pour simplifier les calculs, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_\rho} &= \frac{1}{d} (\xi_u^1 \tilde{B}_1^\rho (-\eta_{jk} - u_j \eta_{ku} - u_k \eta_{ju} - u_j u_k \eta_{uu}) \\ &\quad + (\xi_u^1 u_i \tilde{B}_1^i + \alpha) (-\delta_j^\rho \eta_{ku} - \delta_k^\rho \eta_{ju} - \delta_j^\rho u_k \eta_{uu} - \delta_k^\rho u_j \eta_{uu}) \\ &\quad + \eta_u \tilde{P}_m^\rho (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m) \\ &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \frac{\partial \tilde{P}_m^l}{\partial u_r} (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m) \\ &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \tilde{P}_m^l (\delta_j^\rho \xi_{ku}^m + \delta_k^\rho \xi_{ju}^m + \delta_j^\rho u_k \xi_{uu}^m + \delta_k^\rho u_j \xi_{uu}^m)), \end{aligned}$$

où δ est le symbole de Kronecker. En différentiant cette fois par rapport à u_σ et en tenant compte de la proposition (12) (linéarité de \tilde{P}_j^i en u_k) on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} &= \frac{1}{d} (\xi_u^1 \tilde{B}_1^\rho (-\delta_j^\sigma \eta_{ku} - \delta_k^\sigma \eta_{ju} - \delta_j^\sigma u_k \eta_{uu} - \delta_k^\sigma u_j \eta_{uu}) \\
 &\quad + \xi_u^1 \tilde{B}_1^\sigma (-\delta_j^\rho \eta_{ku} - \delta_k^\rho \eta_{ju} - \delta_j^\rho u_k \eta_{uu} - \delta_k^\rho u_j \eta_{uu}) \\
 &\quad + (\xi_u^1 u_i \tilde{B}_1^i + \alpha) (-\delta_j^\sigma \delta_k^\sigma \eta_{uu} - \delta_k^\sigma \delta_j^\sigma \eta_{uu}) \\
 &\quad + \eta_u \frac{\partial \tilde{P}_m^\rho}{\partial u_\sigma} (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + \eta_u \tilde{P}_m^\rho (\delta_j^\sigma \xi_{ku}^m + \delta_k^\sigma \xi_{ju}^m + \delta_j^\sigma u_k \xi_{uu}^m + \delta_k^\sigma u_j \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + \eta_u \frac{\partial \tilde{P}_m^\sigma}{\partial u_\rho} (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \frac{\partial \tilde{P}_m^l}{\partial u_\rho} (\delta_j^\sigma \xi_{ku}^m + \delta_k^\sigma \xi_{ju}^m + \delta_j^\sigma u_k \xi_{uu}^m + \delta_k^\sigma u_l \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + \eta_u \tilde{P}_m^\sigma (\delta_j^\rho \xi_{ku}^m + \delta_k^\rho \xi_{ju}^m + \delta_j^\rho u_k \xi_{uu}^m + \delta_k^\rho u_j \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \frac{\partial \tilde{P}_m^l}{\partial u_\sigma} (\delta_j^\rho \xi_{ku}^m + \delta_k^\rho \xi_{ju}^m + \delta_j^\rho u_k \xi_{uu}^m + \delta_k^\rho u_l \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + (\eta_l + u_l \eta_u) \tilde{P}_m^l (\delta_j^\rho \delta_k^\sigma \xi_{uu}^m + \delta_j^\sigma \delta_k^\rho \xi_{uu}^m)). \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

7.6.6 Preuve de (7.11)

Si l'on pose $\{j, k\} \cap \{\sigma, \rho\} = \emptyset$, on a $\delta_\rho^j = \delta_\sigma^j = \delta_\sigma^k = \delta_\rho^k = 0$. De (7.39) nous déduisons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} &= \frac{1}{d} (\eta_u \frac{\partial \tilde{P}_m^\rho}{\partial u_\sigma} (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m) \\
 &\quad + \eta_u \frac{\partial \tilde{P}_m^\sigma}{\partial u_\rho} (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m)) \\
 &= \frac{1}{d} ((\frac{\partial \tilde{P}_m^\rho}{\partial u_\sigma} + \frac{\partial \tilde{P}_m^\sigma}{\partial u_\rho}) \eta_u (\xi_{jk}^m + u_j \xi_{ku}^m + u_k \xi_{ju}^m + u_j u_k \xi_{uu}^m)).
 \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition (14), on a $\frac{\partial \tilde{P}_m^\rho}{\partial u_\sigma} = -\frac{\partial \tilde{P}_m^\sigma}{\partial u_\rho}$. D'où :

$$\frac{\partial^2 f_{jk}}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = 0 \text{ pour } 1 \leq j, k, \rho, \sigma \leq n, \{j, k\} \cap \{\sigma, \rho\} = \emptyset.$$

7.6.7 Preuves de (7.12), (7.13) et (7.14)

Les preuves de (7.12), (7.13) et (7.14) du théorème 17 s'obtiennent de manière analogue à celle de l'équation (7.11) en utilisant les propositions 12, 13 et 14.

Chapitre 8

Implantation

Outre la compréhension de la méthode d'équivalence, une grosse part du travail de cette thèse en est la programmation. Celle-ci est justifiée car si l'on souhaite obtenir les invariants produits par l'algorithme de Cartan en coordonnées locales, il est impensable d'effectuer leur calcul à la main. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la méthode d'équivalence est un cas particulier de la théorie des systèmes différentiels extérieurs. Il est donc préférable de lui dédier un programme plutôt que d'utiliser un algorithme généraliste, par exemple [28].

Cependant, une programmation basique ne permet pas de traiter de nouveaux problèmes d'équivalence conséquents, ni d'exploiter facilement les volumineuses données. Nous ne manquerons pas, dans ce chapitre, d'insister sur les optimisations mises en œuvre pour obtenir un paquetage efficace. C'est ce paquetage qui constitue l'apport essentiel de cette thèse car il a permis de traiter des problèmes non accessibles jusqu'alors (exposés aux chapitres 4 à 7). Voici ses principaux points forts :

- Une analyse fine des objets manipulés lors de l'exécution de l'algorithme a permis de structurer le logiciel et d'éviter nombre de calculs redondants. En particulier, nous avons tiré partie de la structure par blocs de certaines matrices. De plus, des objets utiles à plusieurs niveaux sont stockés et non recalculés.
- L'utilisation de dérivations adaptées au problème permet de réduire considérablement la taille des données et le temps de calcul. Ces dérivations sont non-commutatives.
- Des outils simplifient les invariants produits. Ainsi, le lemme de Poincaré (lemme 1 page 19), appliqué aux équations de structure, $d(d\theta) = 0$, fournit des relations entre les invariants et leurs dérivées. Le calcul de ces relations a été programmé. Celles-ci pouvant être très nombreuses, nous avons élaboré une heuristique simple mais efficace qui permet de les exploiter et d'obtenir une base de l'idéal différentiel généré par les invariants.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'algorithme de Cartan prend en entrée une G -structure \mathcal{G} et retourne une G -structure \mathcal{G}' dont les invariants permettent la classification locale. Cet algorithme peut être décomposé en six principales étapes :

- (i) Calcul des équations de structure
- (ii) Absorption de la torsion

- (iii) Normalisation
- (iv) Test d'involution
- (v) Prolongation
- (vi) Calcul des relations de Poincaré.

Chacune de ces étapes fait l'objet d'une procédure que nous allons décrire par ordre d'utilisation. Pour illustrer le fonctionnement de chaque procédure et l'évolution des structures de données, nous prendrons l'exemple suivant :

EXEMPLE – Équivalence d'équations du second ordre $y'' = f(x, y, p = y')$, sous l'action du groupe des transformations

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = \xi(x), \\ y \rightarrow \bar{y} = \eta(x)y. \end{cases} \quad (8.1)$$

□

Cet exemple a l'avantage d'être suffisamment petit pour permettre l'affichage des structures de données et assez conséquent pour comporter toutes les étapes de la méthode d'équivalence.

8.1 Le langage choisi

La méthode d'équivalence de Cartan nécessite la manipulation de très gros polynômes (simplification de fractions, résolutions de systèmes d'équations, substitutions) et fait appel entre autre à de l'algèbre linéaire, par l'intermédiaire de calculs de rangs sur des matrices à coefficients dans des algèbres de polynômes. De telles opérations sont loin d'être simples à programmer de façon efficace mais sont disponibles et optimisées dans tous les systèmes de calcul formel (Maple, Aldor, Mupad etc.).

L'utilisation de Maple dans l'équipe de calcul formel de Lille et la présence de François Boulier, concepteur du paquetage `difalg` de Maple ont été des facteurs déterminants du choix de ce système. Maple met à la disposition de l'utilisateur un ensemble de paquetages spécialisés couvrant une grande part des mathématiques (algèbre linéaire, algèbre différentielle etc.). Ces paquetages sont complétés d'un langage interprété permettant la création de programmes. De nombreux types d'objets mathématiques y sont définis (ensembles, polynômes, matrices etc.), ainsi que des routines permettant de les manipuler (voir [47]).

Si notre implantation de la méthode d'équivalence est faite en Maple, la description des procédures qui va suivre est volontairement éloignée de sa syntaxe. En effet, l'algorithme de Cartan peut très bien se programmer dans d'autres langages de haut niveau. Nous allons cependant insister sur un type de données propre à Maple dont il sera fait mention par la suite : les tables. Le type `table` désigne des tables de hachage dont les clefs sont de type alphanumérique et les entrées de types quelconques. Les tables permettent une certaine approche objet de la programmation en Maple. En effet, un objet complexe peut être vu comme une table dont les clefs sont les champs et dont les entrées sont les valeurs de ces champs. Lors de la programmation, une fois les différents

objets mathématiques identifiés, l'emploi de tables simplifie notablement le passage de paramètres des procédures. Signalons à ce propos qu'une bonne structuration des procédures (noms appropriés, réduction de leur nombre, passage simple de paramètres) est un travail de réflexion important. Cette structuration est une condition sine qua non de l'utilisation d'un logiciel par d'autres personnes que son concepteur. L'ensemble de nos procédures constitue un module Maple. Celui-ci représente environ 4500 lignes de code.

8.2 Déclaration d'une G-structure

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, un problème d'équivalence est défini par une G-structure \mathcal{G} . Pour notre programme, \mathcal{G} est donnée par quatre objets dont la construction est laissée à l'utilisateur :

- une variété M donnée par la liste de ses coordonnées x^i pour $1 \leq i \leq m$,
- un corepère admissible ω^i donné par Ω , la matrice de passage du corepère ω^i au corepère dx^i ,
- un groupe G , donné par la liste de ses coordonnées a_i pour $1 \leq i \leq r$,
- une matrice du groupe notée S .

La procédure `G_Structure` construit \mathcal{G} à partir de M , Ω , G et S (voir table 8.1).

Nom	G_Structure
Paramètres	M : : liste des coordonnées x^i de la variété M , Ω : : matrice du corepère ω^i , G : : liste des coordonnées du groupe, S : : matrice du groupe
Retourne	\mathcal{G} : : table contenant la G-Structure
Effets de bord	Aucun
Remarques	\mathcal{G} contient les objets suivants : <ul style="list-style-type: none"> • M, Ω, G, S, • m dimension de la variété M et r dimension du groupe G, • la matrice $\Theta = S \Omega$ ainsi que Θ^{-1}, • Π_G et Π_M, matrices donnant la projection sur T^*G et T^*M des formes π^ρ ainsi que Π_G^{-1}, • $\mathcal{A} = (v_i, [v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k)$, table représentant l'algèbre de Lie de dérivations v_i adaptées au problème, • $\tilde{\Omega}$ matrice de passage des formes $\tilde{\omega}^i$ duales des champs de vecteurs v_i dans les formes dx^i, • \tilde{S}^{-1} matrice de passage des formes $\tilde{\omega}^i$ aux formes θ^i, • les équations de structure représentées par deux tables à trois indices A et T.

TAB. 8.1 – Spécification Maple de la fonction `G_structure`

8.2.1 Objets utiles stockés dans \mathcal{G}

Les premiers objets stockés dans la table \mathcal{G} par la procédure **G-structure** sont ses paramètres M , Ω , G et S .

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour l'équivalence d'équations du second ordre sous l'action du groupe des transformations (8.1) page 102, la table \mathcal{G} contient en premier lieu :

$$\begin{aligned} M &= [x, y, p], \\ \Omega &= \begin{pmatrix} -p/y & 1/y & 0 \\ -f(x, y, p) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G &= [a_1, a_2, a_3], \\ S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Outre les objets passés en paramètres, la table retournée contient deux matrices utiles dans les procédures de normalisation et de prolongation décrites en sections 8.4 et 8.6. La première notée Θ est égale au produit de la matrice S par la matrice Ω . Θ est donc l'expression du corepère θ dans le corepère dx . La deuxième est sa matrice inverse Θ^{-1} . Ces matrices sont données par S et Ω , on peut trouver leur stockage dans \mathcal{G} redondant. Cependant, les matrices Θ et Θ^{-1} évoluent à chaque normalisation. Il apparaît beaucoup plus avantageux de les stocker et de les modifier que de les recalculer à chaque normalisation (Θ^{-1} est l'inverse d'une matrice de gros polynômes différentiels). L'espace mémoire perdu est compensé par le temps de calcul gagné. C'est une première optimisation. Accessoirement, la table \mathcal{G} contient aussi m la dimension de la variété M et r la dimension du groupe G .

8.2.2 Calcul des équations de structure

La table \mathcal{G} retournée par la procédure **G-Structure** contient bien sûr les équations de structure dont nous rappelons les formules vues au chapitres 2 :

$$d\theta^i = d(S_j^i \omega^j) = dS_j^i \wedge \omega^j + S_j^i d\omega^j = (dS_j^i S^{-1j}_k) \wedge \theta^k + S_j^i d\omega^j, \quad (8.2)$$

$$= A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq \rho \leq r, 1 \leq j < k \leq m. \quad (8.3)$$

8.2.2.1 Structure de données choisie

Une première façon de représenter les équations (8.3) est d'utiliser un paquetage de formes différentielles (par exemple le paquetage **Liesymm** de Maple [7]) qui met à disposition de l'utilisateur le produit et la dérivation extérieure, ou encore de reprogrammer ces opérations. Ceci amène à représenter les 2-formes des équations de structure comme

des sommes de produits extérieurs. Cette représentation n'est pas la plus satisfaisante. En effet, l'accès à un coefficient $A_{j\rho}^i$ ou T_{jk}^i n'est pas direct et nécessite le parcours d'une forme, ce qui alourdit la programmation et ralentit les calculs.

Les équations (8.3) sont uniquement déterminées par les tenseurs A et T . Si l'on représente chacun d'eux par un tableau à trois indices, on facilite la programmation. D'une part l'écriture des fréquents parcours en boucles de ces tenseurs est allégée. D'autre part, on a maintenant un accès direct à chacun des coefficients $A_{j\rho}^i$ et T_{jk}^i . En Maple de tels tableaux sont des tables dont les clefs sont des triplets d'entiers. On peut choisir des tables creuses, ceci évite de stocker les entrées nulles des tenseurs. Le calcul des équations de structure se fera donc en deux étapes : le calcul du tenseur A puis le calcul du tenseur T .

8.2.2.2 Calcul du tenseur A

Le tenseur A est obtenu d'après (8.2) et (8.3), en décomposant chacune des entrées de la matrice dSS^{-1} dans une base de l'espace vectoriel engendré par ces entrées. Cette base est notée π^ρ , ρ allant de 1 à r , la dimension du groupe G et est obtenue par algèbre linéaire. Enfin, l'entrée $A_{j\rho}^i$ du tenseur A est le coefficient en la forme π^ρ de l'élément $(dSS^{-1})_j^i$ décomposé dans cette base. La procédure `G_Structure` ajoute le tenseur A à \mathcal{G} .

Notons Π la matrice donnant l'expression des formes π^ρ dans le corepère de $T^*G \times T^*M$, (dx, da) . La matrice Π de dimensions $r \times (r+m)$ est décomposée en deux matrices, Π_G de dimensions $r \times m$ et Π_M de dimensions $r \times r$. Π_G est l'expression de la projection des formes π^ρ sur T^*G . Π_M est l'expression de la projection des formes π^ρ sur T^*M . Bien entendu pour l'instant, la matrice Π_M est une matrice nulle, cependant celle ci évoluera à chaque normalisation. En effet, lors d'une normalisation, on spécialise un paramètre du groupe en une fonction sur $G \times M$. Ceci implique que les formes de Maurer-Cartan π^ρ originellement sur T^*G se spécialisent en des formes sur $T^*G \times T^*M$. Les matrices Π_M et Π_G sont stockées dans la table \mathcal{G} , la matrice Π_G^{-1} qui servira lors de la normalisation et de la prolongation est aussi stockée dans \mathcal{G} .

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour cet exemple (voir section 8.2.1 page 104), il y a autant de paramètres du groupe que d'entrées de la matrices S non constantes. La matrice S faisant partie d'un groupe, les matrices dS et S^{-1} sont (à quelques zéros près provenant de la dérivation d'entrées éventuellement constantes) de la même forme. Ainsi, on peut sans aucun calcul, déduire de S la forme de dSS^{-1} et le tenseur A , soit :

$$dSS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi^1 & \pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^3 \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

où π^1, π^2, π^3 est une base des formes de Maurer-Cartan de G . D'après (8.4), le tenseur A peut être représenté de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \\ (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, 1) \end{pmatrix}.$$

Soit, $A_{1,1}^2 = 1$, $A_{2,2}^2 = 1$ et $A_{3,3}^3 = 1$, les autres coefficients du tenseur étant nuls. Cependant, pour mener les calculs de la méthode d'équivalence en coordonnées locales, il faut obtenir l'expression explicite des formes π . On a :

$$dSS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ da_1 & da_2 & 0 \\ 0 & 0 & da_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1/a_2 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

De (8.5), on tire $\pi^1 = da_1 - a_1 da_2/a_2$, $\pi^2 = da_2/a_2$ et $\pi^3 = da_3/a_3$. Sur notre exemple on a donc :

$$\Pi_G = \begin{pmatrix} 1 & -a_1/a_2 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

8.2.2.3 Calcul du tenseur T

D'après (8.2) et (8.3) le tenseur T est donné par la formule suivante :

$$T_{jk}^i = S_i^j d\omega^k. \quad (8.6)$$

Sur la variété $M = (x^1, \dots, x^m)$, nous pouvons calculer les équations de structure en utilisant les dérivations classiques, $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m$. On a $\omega^l = \Omega_n^l dx^n$. Les formes $d\omega^l$ de (8.6) se calculent alors de la façon suivante (dans les formules suivantes sauf mention contraire, tous les indices vont de 1 à m) :

$$\begin{aligned} d\omega^l &= d\Omega_n^l \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial \Omega_n^l}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial \Omega_n^l}{\partial x^p} \Theta^{-1p}_j \Theta^{-1n}_k \theta^j \wedge \theta^k \\ &= \frac{\partial \Omega_n^l}{\partial x^p} (\Theta^{-1p}_j \Theta^{-1n}_k - \Theta^{-1p}_k \Theta^{-1n}_j) \theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq j \leq k \leq m, \end{aligned} \quad (8.7)$$

où Θ est la matrice de passage des formes θ^i au corepère dx^j .

Comme nous allons le voir, nous pouvons faire ces calculs avec d'autres dérivations, pour lesquelles la taille des coefficients T_{jk}^i sera fortement réduite.

EXEMPLE – Dans [15], il est question de l'équivalence d'équations différentielles ordinaires du troisième ordre sous l'action des transformations de contact. Chern y réexprime un semi invariant I (qui est une condition nécessaire d'équivalence avec l'équation $y_{xxx} = 0$) à l'aide du champ de Cartan D_x spécialisé sur l'équation $y_{xxx} = f(x, y, p, q)$, soit :

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial p} + f(x, y, p, q) \frac{\partial}{\partial q}$$

L'expression de I dans les dérivations $\partial/\partial x, \dots, \partial/\partial q$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
 I = & -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{3}f_q f_{xq} - \frac{1}{3}f_{xuq}p - \frac{1}{3}f_{xpq}q - \frac{1}{3}f_{xqq}f - \frac{1}{6}f_{qq}f_x - \frac{1}{6}f_{qqq}f^2 \\
 & + \frac{1}{2}qf_{pp} - \frac{1}{6}qf_{uq} - \frac{1}{6}f_{ppq}q^2 + \frac{1}{3}ff_{pq} + \frac{1}{2}pf_{up} - \frac{1}{6}f_{uuq}p^2 - f_u + \frac{1}{2}f_{xp} \\
 & - \frac{1}{6}f_{xxq} - \frac{2}{27}f_q^3 - \frac{1}{6}pf_{qq}f_u + \frac{1}{3}qf_{pq}f_q - \frac{1}{3}qf_{pqq}f - \frac{1}{6}qf_{qq}f_p \\
 & + \frac{1}{6}ff_q f_{qq} - \frac{1}{3}pf_{upq}q + \frac{1}{3}pf_q f_{uq} - \frac{1}{3}pf_{uqq}f.
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Une fois exprimé à l'aide de l'opérateur D_x , I a une expression beaucoup plus simple :

$$I = -\frac{1}{3}f_p f_q + \frac{1}{2}D_x f_p - \frac{1}{6}D_x^2 f_q - f_y + \frac{1}{3}f_q D_x f_q - \frac{2}{27}f_q^3.$$

Il est évident sur cet exemple qu'utiliser la dérivation D_x apporte un gain de mémoire. \square

Nous allons maintenant montrer comment faire systématiquement de telles simplifications.

8.2.2.4 Optimisation : changement de dérivations

Notons v_i les champs de vecteurs duaux des formes ω^i , soient :

$$\langle \omega^i; v_j \rangle = \delta_j^i. \tag{8.9}$$

Nous allons calculer les coefficients de structure T_{jk}^i à l'aide des dérivations v_i définies en (8.9). L'équation (8.9) est un produit de matrices égal à la matrice identité. La matrice Ω donne l'expression des formes ω^i , les champs de vecteurs v_i sont donc les vecteurs colonnes de la matrice Ω^{-1} .

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour cette exemple, l'inverse de la matrice Ω est (Ω est donnée section 8.2.1 page 104) :

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & p \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

Ceci conduit à introduire les trois nouvelles dérivations :

$$\begin{cases} v_1 = y \frac{\partial}{\partial y}, \\ v_2 = \frac{\partial}{\partial p}, \\ v_3 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial p}. \end{cases} \tag{8.11}$$

On reconnaît en v_3 le champ de Cartan D_x spécialisé sur l'équation différentielle $y'' = f(x, y, p)$. \square

Dans nombre de problèmes d'équivalence traités, ce changement de dérivations fait apparaître un ou plusieurs champs de Cartan. Ceci est dû au fait que la plupart du temps les formes ω^i sont des formes de contact spécialisées sur un système d'équations différentielles que l'on complète par certaines des formes dx^i en chaque point x de M en un corepère de T_x^*M . Les champs de vecteurs duaux de ces formes dx^i sont alors des multiples des champs de Cartan. Pour l'exemple de l'équivalence de systèmes d'équations aux dérivées partielles traité au chapitre 7, on travaille par exemple avec deux champs de Cartan D_x et D_y , un champ de Cartan par variable indépendante.

Si l'on calcule maintenant le tenseur T à l'aide des nouvelles dérivations v_i définies en (8.9), cela donne un calcul différent de (8.7). Notons \mathcal{L}_{v_p} la dérivée de Lie par rapport au vecteur v_p . Dans les formules suivantes sauf mention contraire, tous les indices vont de 1 à m . On a :

$$\begin{aligned} d\omega^l &= d\Omega_n^l \wedge dx^n \\ &= \mathcal{L}_{v_p}(\Omega_n^l)\omega^p \wedge dx^n \\ &= \mathcal{L}_{v_p}(\Omega_n^l)\Omega_q^{-1n}\omega^p \wedge \omega^q \\ &= \mathcal{L}_{v_p}(\Omega_n^l)S_j^{-1p}\Theta_k^{-1n}\theta^j \wedge \theta^k \\ &= \mathcal{L}_{v_p}(\Omega_n^l)(S_j^{-1p}\Theta_k^{-1n} - S_k^{-1p}\Theta_j^{-1n})\theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq j \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (8.12)$$

D'après (8.7) et (8.12), il apparaît que les coefficients de structure calculés à l'aide les dérivations v_j sont moins volumineux. En effet, la matrice $\Theta^{-1} = \Omega^{-1}S^{-1}$ de (8.7) a été remplacée à deux reprises par la matrice S^{-1} dans (8.12). Les matrices Ω^{-1} , sont bien sûr maintenant dans le terme \mathcal{L}_{v_p} , mais non explicitées.

Au début de l'algorithme, les formes duales des dérivations v_i utilisées pour calculer (8.12) sont, par définition (8.9), les formes ω^i . Cependant, lors de la prolongation, les formes ω^i changent (voir section 2.8). Or les dérivations ne doivent pas changer en cours de calcul. Il faut donc marquer une différence entre les formes duales des champs de vecteurs v_i et les formes ω^i .

Notons $\tilde{\omega}^i$, les formes différentielles duales des champs de vecteurs v_i . Au départ on a : $\tilde{\omega}^i = \omega^i$. Les deux objets suivant stockés dans \mathcal{G} seront utiles par la suite :

1. La matrice $\tilde{\Omega}$ qui donne les formes $\tilde{\omega}^i$ dans le corepère dx^i . Au départ on a : $\tilde{\Omega} = \Omega$. Cette matrice sera utile lors des normalisations. Au départ, la matrice Ω est déjà stockée dans \mathcal{G} , on ne dédouble donc pas cette matrice avant la première prolongation. $\tilde{\Omega}$ et Ω sont donc deux pointeurs vers le même objet en début d'algorithme. On économise donc de l'espace mémoire.
2. \tilde{S}^{-1} , la matrice de passage des formes $\tilde{\omega}^i$ aux formes θ^i . Au début de la méthode d'équivalence de Cartan on a : $\tilde{S}^{-1} = S^{-1}$. Ici non plus, on ne dédouble pas la matrice au début de l'algorithme. \tilde{S}^{-1} et S^{-1} sont aussi deux pointeurs vers le même objet avant la première prolongation.

Une fois les matrices $\tilde{\Omega}$ et \tilde{S}^{-1} définies, le calcul de (8.12) s'écrit maintenant :

$$d\omega^l = \mathcal{L}_{v_p}(\Omega_n^l)(\tilde{S}^{-1}_j{}^p\Theta_k^{-1n} - \tilde{S}^{-1}_k{}^p\Theta_j^{-1n})\theta^j \wedge \theta^k. \quad (8.13)$$

$d\omega^l$ calculé, de simples boucles permettent d'obtenir (8.6). La procédure `G_Structure` stocke alors le tenseur T , calculé avec (8.13), dans la table \mathcal{G} .

Exemple	Calcul avec $\partial/\partial x^i$	Calcul avec v_i
EDO d'ordre 3 ($I = 0$)	18 Ko (35 sec)	8 Ko (20 sec)
EDO d'ordre 3 ($I \neq 0$)	57 Ko (7 sec)	7,5 Ko (3,5 sec)
EDO d'ordre 4	280 Ko (38 sec)	36 Ko (9 sec)
Systèmes d'EDP d'ordre 2	2 Mo (non abouti)	1,1 Mo (3 h)

TAB. 8.2 – Comparaison des temps de calcul

Le tableau comparatif (8.2) permet d'apprécier le gain espace en mémoire ainsi qu'en temps de calcul apporté par l'utilisation des dérivations v_i . Ce tableau indique dans la première colonne, l'exemple traité, dans la deuxième colonne l'espace mémoire occupé par les invariants en fin de calcul et, entre parenthèses, le temps de calcul pour les dérivations $\partial/\partial x^i$. Dans la troisième colonne nous trouvons les mêmes informations mais pour un calcul effectué avec les dérivations v_i . Ces calculs ont été réalisés sur un PC muni d'un processeur Athlon 600 Mhz et de 256 Mo de mémoire vive. Remarquons, pour le dernier exemple du tableau, que pour avoir la taille des invariants dans les dérivations classiques sans avoir pu terminer le calcul, il suffit d'avoir à disposition une routine de passage des v_i aux dérivations $\partial/\partial x^i$ et d'utiliser les résultats obtenus pour les dérivations v_i .

8.2.2.5 Ordre sur les dérivations (test d'égalité à zéro)

En général, les dérivations v_i ne commutent pas. Pour avoir un test d'égalité à zéro sur les polynômes différentiels, il est important d'en réordonner les dérivations (pour un ordre quelconque). Il faut pour cela calculer les crochets de Lie des dérivations. On réordonne ensuite récursivement les dérivations d'une fonctions f en utilisant la formule :

$$\mathcal{L}_{v_1}(\mathcal{L}_{v_2}f) = \mathcal{L}_{v_2}(\mathcal{L}_{v_1}f) + \mathcal{L}_{[v_1, v_2]}f.$$

La procédure G-Structure stocke dans la table \mathcal{G} l'algèbre de Lie \mathcal{A} donnée par les champs de vecteurs v_i et leurs crochets de Lie : $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$.

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Notons f_i la dérivée de Lie de la fonction f par rapport au champ de vecteur v_i . Considérons le polynôme différentiel :

$$f_{1,3} - f_{3,1} + \frac{p}{y} f_1 - f_1 f_2 + f_{1,2} - f_{2,1}, \tag{8.14}$$

où, $f_{1,3}$ représente $\mathcal{L}_{v_1}(\mathcal{L}_{v_3}f)$. Les champs de vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont donnés par (8.11) page 107. Le polynôme différentiel (8.14) est nul. Pour s'en apercevoir, il suffit d'en réordonner les dérivations pour un ordre quelconque, par exemple $v_1 \succ v_2 \succ v_3$. Les crochets de Lie des dérivations v_i sont :

$$\begin{cases} [v_1, v_2] = 0, \\ [v_1, v_3] = -\frac{p}{y} v_1 + f_1 v_2, \\ [v_2, v_3] = \frac{1}{y} v_1 + f_2 v_2. \end{cases} \tag{8.15}$$

De (8.15), on tire alors

$$\begin{cases} f_{3,1} = f_{1,3} + \frac{p}{y}f_1 - f_1f_2, \\ f_{2,1} = f_{1,2}. \end{cases} \quad (8.16)$$

Par substitution de (8.16) dans (8.14), on détecte la nullité de (8.14).

Pour notre problème d'équivalence d'EDO d'ordre 2, après le calcul du tenseur A (voir (8.4) page 105) et du tenseur T (formule (8.13) page 108), les équations de structure exprimées dans les dérivations v_i (voir (8.11) page 107) sont :

$$\begin{cases} d\theta^1 = \frac{a_2p + a_1}{a_2a_3y} \theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{1}{a_2a_3y} \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \frac{a_1a_2p + a_1^2 - a_2^2pf_1 + a_1a_2yf_2}{a_2a_3y} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \quad - \frac{a_1 + a_2yf_2}{a_2a_3y} \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = \pi^3 \wedge \theta^3. \end{cases} \quad (8.17)$$

□

8.3 Absorption de la torsion

Comme nous l'avons vu en section 2.5, l'*absorption de la torsion* consiste à modifier les formes π^ρ

$$\pi'^\rho = \pi^\rho - \lambda_j^\rho \theta^j, \quad (8.18)$$

de manière à fixer un maximum de coefficients T_{jk}^i à zéro. On montre que les nouveaux coefficients de structure T_{jk}^i résultant de ce changement des formes π sont des invariants. L'absorption de la torsion est réalisée par la procédure **Absorption** (voir table 8.3) qui prend en entrée deux paramètres : le premier est une G-structure \mathcal{G} , dont on a calculé les équations de structure, le second paramètre est le nom que l'on souhaite donner aux indéterminées λ_j^ρ .

D'après la section 2.5, le changement de formes (8.18) modifie les coefficients de structure T_{jk}^i en des coefficients T'_{jk}^i

$$T' = T + L(\lambda), \quad (8.19)$$

où λ est un vecteur colonne de dimension mr et T un vecteur colonne comportant autant de lignes qu'il y a de coefficients de structure T_{jk}^i soit $m^2(m-1)/2$ et L une matrice de dimensions $(m^3 - m)/2 \times rm$.

Pour mettre un maximum de coefficients T_{jk}^i à zéro, on développe l'algorithme présenté en section 2.5 sous forme matricielle. Un pivot de Gauss permet de mettre L sous la forme

$$L = Q \begin{pmatrix} \text{Id} & \tilde{L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \quad (8.20)$$

Nom	Absorption
Paramètres	\mathcal{G} : : table contenant une G-structure λ : : chaîne de caractère, nom de l'indétermination
Retourne	Null
Effets de bord	Modifie \mathcal{G}
Remarques	la procédure ajoute à \mathcal{G} les objets suivants : <ul style="list-style-type: none"> • deux tenseurs A' et T' représentant les équations de structure après absorption • r' : le degré d'indétermination des équations de structure, • G' : la liste de taille r' des paramètres λ_j^ρ indéterminés, • $\Lambda^{(1)}$: la matrice des paramètres λ_j^ρ déterminés, • $\Lambda^{(2)}$: la matrice des paramètres λ_j^ρ indéterminés.

TAB. 8.3 – Spécification de la procédure **Absorption**

où Q opère par combinaison linéaire de lignes et P par *permutation* de colonnes. En posant $\tilde{T}' - \tilde{T} = Q^{-1}(T' - T)$ et $\tilde{\lambda} = P\lambda$, le système (8.19) se ramène à

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}'^{(1)} \\ \tilde{T}'^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}^{(1)} \\ \tilde{T}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Id} & \tilde{L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^{(1)} \\ \tilde{\lambda}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

Il est alors possible de fixer à zéro les coefficients de torsion du bloc $\tilde{T}'^{(1)}$ en posant

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}^{(1)} &= -\tilde{T}^{(1)} - \tilde{L} \tilde{\lambda}^{(2)} \\ \tilde{T}'^{(2)} &= \tilde{T}^{(2)}. \end{cases} \quad (8.22)$$

Ainsi, les coefficients de torsion du bloc $\tilde{T}^{(2)}$ qui sont indépendants des valeurs des λ_j^ρ sont invariants.

Les éléments du bloc $\lambda^{(2)}$ sont indéterminés. Après absorption, les formes π'^ρ définies en (8.18) peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\pi' = \pi + (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)})\theta, \quad (8.23)$$

où la matrice $\Lambda^{(1)}$ de taille $r \times m$ est la matrice des coefficients λ_j^ρ déterminés et $\Lambda^{(2)}$ de taille $r \times m$ est la matrice des coefficients λ_j^ρ indéterminés. Les deux matrices $\Lambda^{(1)}$ et $\Lambda^{(2)}$ ainsi que le nouveau tenseur T' sont stockées par la procédure **Absorption** dans la table \mathcal{G} passée en premier paramètre.

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Sur cet exemple, si l'on pose $\pi' := \pi + \Lambda^{(1)}\theta$ avec

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -T_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & -T_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

on met à zéro tous les coefficients de structure de (8.17) (page 110) à l'exception de

$T'_{2,3}$ et $T''_{2,3}$. L'indétermination des formes π' est donnée par la matrice

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}.$$

Les équations de structure après absorption de la torsion sont donc :

$$\begin{cases} d\theta^1 &= \frac{a_2p + a_1}{a_2a_3y} \theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{1}{a_2a_3y} \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi'^1 \wedge \theta^1 + \pi'^2 \wedge \theta^2, \\ d\theta^3 &= \pi'^3 \wedge \theta^3. \end{cases} \quad (8.25)$$

□

8.4 Normalisation

Après l'étape d'absorption de la torsion, si des coefficients de structure dépendent des paramètres du groupe, on peut fixer ces derniers à certaines valeurs constantes (voir section 2.6). Ainsi, on élimine certains paramètres du groupe G .

Pour notre programme, le choix des différentes normalisations est laissé à l'utilisateur qui peut ensuite faire appel à la procédure `Normalisation` (voir table 8.4. Cette procédure est à trois paramètres. Le premier est une G -Structure \mathcal{G} . Le second est une liste de normalisations du type : coefficient de structure = constante. Cette liste est notée \widehat{T} . Le troisième paramètre est la liste des paramètres du groupe à éliminer qui est notée \widehat{G} .

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour cet exemple, les équations (8.25), permettent de normaliser $T'_{1,3}$ à 0 et $T'_{2,3}$ à -1 . Soit $(a_2p + a_1)/(a_2a_3y) = 0$ et $-1/(a_2a_3y) = -1$. Nous pourrions ainsi éliminer les deux paramètres a_1 et a_2 . Nous avons :

$$\widehat{T} := [T'_{1,3} = 0, T'_{2,3} = -1] \quad \text{et} \quad \widehat{G} := [a_1, a_2]. \quad (8.26)$$

Et l'on peut réécrire les paramètres a_1 et a_2 de la façon suivante : $a_1 = -p/(ya_3)$ et $a_2 = 1/(ya_3)$. □

Cette procédure permet d'effectuer plusieurs normalisations simultanément mais aussi de se donner une normalisation soit par les indices d'un coefficient de structure, par exemple : $T'_{1,3} = 0$, soit explicitement, par exemple : $(a_2p + a_1)/(a_2a_3y) = 0$. Cette dernière possibilité donne plus de souplesse au logiciel et permet d'introduire des symboles auxiliaires en cours de calcul pour renommer des expressions volumineuses.

Si l'on pose

$$T'_{jk} = C, \quad (8.27)$$

où C est une constante. Ceci implique

$$dT'_{jk} = 0. \quad (8.28)$$

Nom	Normalisation
Paramètres	\mathcal{G} : : table contenant une G -structure \widehat{T} : : liste des normalisations \widehat{G} : : liste des paramètres du groupe à éliminer
Retourne	Relations sur les formes de Maurer-Cartan : : liste
Effets de bord	Modifie \mathcal{G}
Remarques	Cette procédure met à jour les objets de \mathcal{G} suivants : <ul style="list-style-type: none"> • les deux tenseurs A et T • G, la liste des paramètres du groupe • les matrices Θ et Θ^{-1} • les matrices Π_M et Π_G • la matrice \widetilde{S}^{-1} relative aux dérivations

TAB. 8.4 – Spécification de la procédure Normalisation

La relation (8.27) permet d'éliminer un paramètre du groupe, la relation (8.28) permet d'éliminer la différentielle de ce paramètre et donc une forme π . Bien sûr, pour obtenir (8.28) il faudra différentier à l'aide des dérivations v_i que nous utilisons pour réduire les données. La procédure de normalisation, met à jour tous les objets contenus dans la table \mathcal{G} en tenant compte des relations (8.27) et (8.28).

8.4.1 Relations de normalisation

Soient

$$\widehat{T} = \{T_1 = C_1, \dots, T_n = C_n\}, \quad (8.29)$$

les relations de normalisation où T_1 à T_n désignent des coefficients de structure et C_1, \dots, C_n sont des constantes. Notons \mathcal{I}_0 l'idéal algébrique engendré par les relations (8.29). \mathcal{I}_0 est un idéal de l'algèbre des polynômes sur G dont les coefficients sont des fonctions de M dans \mathbb{R} . La normalisation implique que l'on sache calculer modulo \mathcal{I}_0 .

8.4.1.1 Choix d'un système de réécriture

Pour calculer modulo \mathcal{I}_0 plusieurs techniques existent. Premièrement, si les relations (8.29) sont linéaires en les paramètres à éliminer, un solveur d'équations suffit pour les résoudre. C'est la solution retenue dans notre programme pour le moment. Dans tous les exemples que nous avons traités, les relations de normalisations ont pu être résolues sans radicaux à l'aide du solveur solve de Maple.

Si les relations (8.29) sont polynômiales en les paramètres du groupe G , le calcul modulo \mathcal{I}_0 peut se faire à l'aide des fonctions de formes normales soit d'une base de Gröbner, soit d'un ensemble triangulaire représentant \mathcal{I}_0 . En effet la résolution explicite du système n'est pas toujours possible et si elle l'est, entraîne l'apparition de radicaux indésirables tant par leur taille que par leur aspect. Nous n'avons pu utiliser le paquetage de bases de Gröbner de Maple qui n'accepte que des formats de données très réduits.

Marc Moreno Maza a développé un logiciel de calcul d'ensembles triangulaires [46] dont une version de notre algorithme attend l'implantation en Maple.

8.4.2 Différentielles des relations de normalisation

Notons \mathcal{I}_1 l'idéal extérieur engendré par les différentielles des relations (8.29). Nous allons réécrire les objets de \mathcal{G} modulo \mathcal{I}_1 .

Dans un premier temps, les différentielles de (8.29) sont obtenues en différentiant les relations par rapport aux champs de vecteurs utilisés tout au long des calculs : les champs de vecteurs v_i . Rappelons que l'on nomme $\tilde{\omega}^i$, les formes différentielles duales de ces champs de vecteurs. On a :

$$\begin{cases} dT_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial a_\rho} da_\rho + \mathcal{L}_{v_1}(T_1)\tilde{\omega}^l = 0, \\ &\vdots \\ dT_n &= \frac{\partial T_n}{\partial a_\rho} da_\rho + \mathcal{L}_{v_l}(T_n)\tilde{\omega}^l = 0. \end{cases} \quad (8.30)$$

Notons R , la matrice représentant le système (8.30) telle que :

$$R \begin{pmatrix} da \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.4.2.1 Relations sur les formes da et dx

Rappelons que $\tilde{\Omega}$ est la matrice de passage des formes $\tilde{\omega}^i$ aux formes dx^i . On réexprime les relations (8.30) dans les formes da_i et dx^j en multipliant la matrice R par la matrice de passage $(\text{Id}, \tilde{\Omega})$. Notons R_1 la matrice obtenue. On a :

$$R_1 = R(\text{Id}, \tilde{\Omega}). \quad (8.31)$$

Un pivot de Gauss-Jordan R_1 modulo \mathcal{I}_0 permet d'obtenir les règles de réécriture pour éliminer certaines formes da_i . Après ce pivot, la matrice R_1 est de la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}}_{R_1} \begin{pmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_r \\ dx^1 \\ \vdots \\ dx^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Le rang de R_1 est égal au nombre de paramètres du groupe que l'on réécrit. Chaque échelon de la matrice R_1 est surmonté de zéros.. Bien sûr, les colonnes de la matrice R_1 ont été réordonnées avant le pivot de Gauss, de façon à ce que les colonnes correspondant aux formes da_i que l'on réécrit se trouvent sur la gauche de R_1 .

8.4.2.2 Mise à jour des matrices Π_G et Π_M

Les matrices Π_G et Π_M donnent les projections des formes π^ρ sur les espaces T^*G et T^*M . Ces matrices sont mises à jour, grâce aux relations (8.32), comme suit. Soit $J_1 = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ la liste des indices des formes $da_{\rho_1}, \dots, da_{\rho_n}$ réécrites. Soit $I_1 = (i_1, \dots, i_n)$ tel que i_k soit l'indice de ligne de l'échelon qui se trouve en colonne ρ_k de R_1 . On a :

$$da_{\rho_1} = - \sum_{\rho \notin J_1} R_{1\rho}^{I_1(\rho_1)} da_\rho - \sum_{l=1}^m R_{1l+r}^{I_1(\rho_1)} dx^l, \quad \forall \rho_1 \in J_1. \quad (8.33)$$

Des relations (8.33), on tire les combinaisons linéaires à effectuer sur les colonnes de la matrice Π_G pour la mettre à jour :

$$\Pi_{G\rho} := \Pi_{G\rho} - \sum_{\rho_1 \in J_1} \Pi_{G\rho_1} R_{1\rho}^{I_1(\rho_1)}, \quad \forall \rho \notin J_1.$$

De même, pour la matrice Π_M , les combinaisons linéaires de colonnes sont données par la formule suivante :

$$\Pi_{Mj} := \Pi_{Mj} - \sum_{\rho_1 \in J_1} \Pi_{G\rho_1} R_{1j+r}^{I_1(\rho_1)}, \quad \forall 1 \leq j \leq m.$$

Les formes $(da_\rho \mid \rho \in J_1)$ sont maintenant réécrites. Il faut supprimer de la matrice Π_G les colonnes d'indice appartenant à J_1 . Il en va de même des formes $(\pi_\rho \mid \rho \in J)$, il faut donc supprimer des matrices Π_G et Π_M les lignes d'indice appartenant à J . Après ces mises à jour, il faut recalculer la matrice Π_G^{-1} stockée dans \mathcal{G} (on ne peut l'obtenir par manipulation de ligne et colonnes).

8.4.2.3 Relations sur les formes π et θ

Réexprimons les relations (8.32) dans les formes π et θ . On a :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ \Pi_M & \Pi_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ da \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

L'inversion de la matrice de passage du corepère (θ, π) au corepère (dx, da) donnée par (8.34) se fait en tirant partie de ses blocs stockés dans \mathcal{G} . Soit :

$$\begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ \Pi_M & \Pi_G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Theta^{-1} & 0 \\ \Pi_G^{-1} \Pi_M \Theta^{-1} & \Pi_G^{-1} \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Les matrices Θ^{-1} , Π_M et Π_G^{-1} sont disponibles dans \mathcal{G} . La valeur de ces matrices doit être prise avant les modifications décrites en section 8.4.2.1. Les relations sur les formes π^ρ et θ^i sont donc obtenues en multipliant (8.32) par (8.34), soit :

$$R_1 \begin{pmatrix} \Theta^{-1} & 0 \\ \Pi_G^{-1} \Pi_M \Theta^{-1} & \Pi_G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Un nouveau pivot de Gauss-Jordan modulo \mathcal{I}_0 du système (8.36) permet d'obtenir les relations déduites de (8.29) sur les formes π^ρ et θ^i . Que nous notons à nouveau R , on a pour fixer les idées :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^r \\ \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.37)$$

Cette fois encore, on aura pris soin avant le pivot, de réordonner les colonnes de (8.36) de façon à ce que les colonnes les plus à gauche de la matrice correspondent aux formes π^ρ que l'on souhaite éliminer. Ceci donne plus de souplesse au programme et permet de reproduire les calculs effectués par d'autres. Il faut pour cela gérer une table de correspondance entre les indices de colonnes de R et les indices des formes à éliminer, ceci a été programmé.

Soit n , le nombre de paramètres du groupe à éliminer, la matrice R donnée en (8.37) est de rang n . Soit $J = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ la liste des indices des formes $\pi^{\rho_1}, \dots, \pi^{\rho_n}$ réécrites en fonction des autres formes de Maurer-Cartan. Soit $I = (i_1, \dots, i_n)$ tel que i_k soit l'indice de ligne de l'échelon se trouvant en colonne ρ_k de la matrice R . Les relations sur les formes π^ρ et θ^i s'écrivent alors :

$$\pi^{\rho_1} = - \sum_{\rho \notin J} R_\rho^{I(\rho_1)} \pi^\rho - \sum_{l=1}^m R_{l+r}^{I(\rho_1)} \theta^l \quad \forall \rho_1 \in J. \quad (8.38)$$

8.4.2.4 Mise à jour des tenseurs A et T

Les relations (8.38) impliquent une mise à jour des équations de structure $d\theta^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$, soit :

$$\begin{aligned} d\theta^i &= \sum_{\rho \notin J} \sum_{j=1}^m A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + \sum_{\rho_1 \in J} \sum_{j=1}^m A_{j\rho_1}^i \left(- \sum_{\rho \notin J} R_\rho^{I(\rho_1)} \pi^\rho - \sum_{l=1}^m R_{l+r}^{I(\rho_1)} \theta^l \right) \wedge \theta^j \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{j < k} T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Après réarrangement des termes de (8.39), on met à jour le tenseur A de la façon suivante :

$$A_{j\rho}^i := A_{j\rho}^i - \sum_{\rho_1 \in J} A_{j\rho_1}^i R_\rho^{I(\rho_1)} \quad \forall \rho \notin J. \quad (8.40)$$

Après cela, les entrées de A correspondant à des formes π éliminées ne sont plus valides. De plus le parcours du tenseur par une boucle du plus petit au plus grand indice n'est

plus possible à moins de mémoriser la liste des indices à parcourir. Ceci alourdit la programmation. Il faut donc si il y a n relations de normalisation, transformer le tenseur A de dimension $m \times m \times r$ en tenseur de dimension $m \times m \times (r - n)$, ceci implique un décalage d'indice de certaines entrées. On gère cela en comptant le nombre de formes π éliminées dont l'indice est inférieur à celui de chaque forme non éliminée. Le fait de réordonner le tenseur a un inconvénient : la perte de la trace des calculs car les formes π sont réindexées. Pour éviter cela, il suffit de gérer la liste des indices d'affichage des formes π , celle-ci est différente des indices de calcul qui sont compris entre de 1 et $r - n$.

La mise à jour du tenseur T est donnée par la formule suivante, obtenue après réarrangement des termes de (8.39) :

$$T_{jk}^i := T_{jk}^i + \sum_{\rho_1 \in J} A_{j\rho_1}^i R_{k+r}^{I(\rho_1)} - A_{k\rho_1}^i R_{j+r}^{I(\rho_1)}. \quad (8.41)$$

8.4.3 Mise à jour de la G-structure

Lorsque l'on a pris en compte les relations sur les formes différentielles, chaque objet de la G -structure est réécrit modulo l'idéal \mathcal{I}_0 . Pour le tenseur T , ceci se fait en prenant la forme normale de chacun de ses coefficients. De même, on prendra pour chacune des matrices de \mathcal{G} susceptibles de contenir des paramètres du groupe, la forme normale de ses entrées. Ceci concerne les matrices S , Θ , Θ^{-1} , \tilde{S}^{-1} , Π_G et Π_M . Le groupe G est mis à jour en y supprimant les n paramètres du groupe éliminés. Enfin la dimension du groupe est mise à jour, soit $r := r - n$.

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour cet exemple, après mise à jour des équations de structure (8.17) page 110, à l'aide des relations (8.40) et (8.41), on a :

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = -\pi^1 \wedge \theta^2 - \frac{f_1 + f_2 p - f}{ya_3^2} \theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{-2p + f_2 y}{ya_3} \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = \pi^1 \wedge \theta^3. \end{cases} \quad (8.42)$$

G est maintenant réduit au paramètre a_3 . Après cette première normalisation, il est à nouveau possible de trouver des invariants. Pour mettre à 0 un maximum de coefficients T_{jk}^i de (8.42), il suffit de rajouter $-T_{2,3}^2$ à la forme π^1 . Le degré d'indétermination est alors 0 et les équations de structure après absorption sont les suivantes :

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = -\pi^1 \wedge \theta^2 - \frac{f_1 + f_2 p - f}{ya_3^2} \theta^1 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = \pi^1 \wedge \theta^3. \end{cases} \quad (8.43)$$

Si l'on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires du second ordre équivalentes à $y'' = 0$, le coefficient de structure $T_{1,3}^2$ qui est un invariant ne peut pas être normalisé car il doit être nul. \square

Nom	Is_In_Involution
Paramètres	$\mathcal{G} : :$ table contenant une G-structure
Retourne	booléen signifiant l'involution
Effets de bord	Aucun

TAB. 8.5 – Spécification de la procédure `Involution`

Nom	Prolongation
Paramètres	$\mathcal{G} : :$ table contenant une G-structure
Retourne	Null
Effets de bord	Modifie \mathcal{G}
Remarques	Cette procédure met à jour tous les objets contenus dans \mathcal{G}

TAB. 8.6 – Spécification de la procédure `Prolongation`

8.5 Involution

Lorsque l'on ne peut plus réduire le groupe structural, il faut tester l'involution du système différentiel extérieur donné par la G -structure. La procédure `Is_In_Involution` y est dédiée. Cette procédure (voir table 8.5) prend en unique paramètre une G -structure \mathcal{G} et retourne un booléen signifiant si oui ou non ce système extérieur est en involution.

Le test d'involution programmé dans cette procédure est celui décrit par P. Olver dans [50, pages 463-470]. Comme signalé en section 2.7, c'est le test d'involution du théorème 9 page 28 : $s'_1 + 2s'_2 + \dots + m\widehat{s'_m} = r'$. Il est basé sur de l'algèbre linéaire pour le calcul des caractères réduits de Cartan s'_i . Le degré d'indétermination r' est obtenu lors de l'absorption de la torsion. Nous n'entrerons pas plus ici dans les détails. Notons cependant que le test d'involution n'est pas une étape coûteuse de l'algorithme de Cartan (lorsqu'elle est effectuée à la machine).

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Le système (8.43) page 117 n'est pas en involution. En effet, le degré d'indétermination r' est 0 et les caractères réduits de Cartan sont $s'_1 = 1$ et $s'_2 = s'_3 = 0$. Par conséquent, on a $s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 \neq r'$. Il faut donc prolonger le système extérieur et définir la nouvelle G -structure correspondant à ce système prolongé. \square

8.6 Prolongation

Lorsque le système extérieur correspondant à une G -structure \mathcal{G} n'est pas en involution, ces invariants ne suffisent pas à la classifier, il faut alors prolonger \mathcal{G} en une nouvelle G' -structure \mathcal{G}' . C'est l'objet de la procédure `Prolongation` (voir table 8.6).

\mathcal{G}' n'est en fait qu'une mise à jour de \mathcal{G} . Voici cette mise à jour basée sur la section 2.8.

8.6.0.1 Nouveau corepère ω'

La variété prolongée est $M' = M \times G$. Le corepère ω' est composé des formes θ et des formes de Maurer-Cartan π auxquelles ont été ajoutées des combinaisons linéaires de formes θ déterminées durant l'absorption (la matrice $\Lambda^{(1)}$ de (8.23) page 111). Ce corepère est donné par la matrice Ω' suivante :

$$\Omega' := \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ \Pi_M + \Lambda^{(1)}\Theta & \Pi_G \end{pmatrix}. \quad (8.44)$$

Rappelons que Π_M et Π_G stockées dans \mathcal{G} donnent l'expression des formes π dans les formes dx et da .

8.6.0.2 Nouveau groupe G'

Le nouveau groupe est G' : la liste des paramètres λ indéterminés et stockée dans \mathcal{G} lors de la dernière absorption. La nouvelle matrice de présentation du groupe est maintenant :

$$S' := \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \Lambda^{(2)} & \text{Id} \end{pmatrix}. \quad (8.45)$$

8.6.0.3 Nouvelles matrices Θ' et Θ'^{-1}

Il faut ensuite calculer Θ' la matrice de passage des nouvelles formes θ' au nouveau corepère dx' de T^*M' . Nous avons $\Theta' := S'\Omega'$. La matrice Θ' est donc construite par blocs de la façon suivante :

$$\Theta' := \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ \Pi_M + (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)})\Theta & \Pi_G \end{pmatrix}.$$

Sa matrice inverse Θ'^{-1} est alors calculée efficacement en tirant partie de la structure de Θ' et des matrices Θ^{-1} et Π_G^{-1} déjà stockées dans la table \mathcal{G} . On a donc :

$$\Theta'^{-1} := \begin{pmatrix} \Theta^{-1} & 0 \\ \Pi_G^{-1}(\Pi_M\Theta^{-1} + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}) & \Pi_G^{-1} \end{pmatrix}.$$

Les matrices Θ , Π_G et Π_M sont définies en section 8.2. Les matrices $\Lambda^{(1)}$ et $\Lambda^{(2)}$ sont définies en section 8.3

8.6.0.4 Nouvelles formes de Maurer-Cartan π'

D'après la forme très particulière de S' , on obtient sans calcul les nouvelles formes de Maurer-Cartan π'^ρ . D'après (8.45), on a :

$$dS' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\Lambda^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S'^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -\Lambda^{(2)} & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad dS'S'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\Lambda^{(2)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

Les nouvelles formes de Maurer-Cartan sont donc da'_i , les différentielles des nouveaux paramètres du groupe a'_i . La matrice Π_G donne la projection des formes π^ρ dans le corepère naturel de T^*G . Sa mise à jour notée Π_G' est donc la matrice identité. Quant à la matrice $\Pi_{M'}$ donnant la projection sur T^*M' , elle est de nouveau la matrice nulle.

8.6.0.5 Nouvelles dérivations v'_i

Les dérivations que nous utilisons au cours des calculs sont les champs de vecteurs v_i duaux des formes ω^i de la G -structure initiale. Ces dérivations, qui doivent être conservées après prolongation, sont complétées par les dérivations triviales de G $\partial/\partial a_i$ pour $i = 1 \dots r$, en une base l'espace tangent de M' notée v'_i .

En conséquence, la matrice $\tilde{\Omega}$ qui donne l'expression des formes duales des dérivations v_i est mise à jour de la façon suivante :

$$\tilde{\Omega}' := \begin{pmatrix} \tilde{\Omega} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

Les crochets de Lie des dérivations n'ont aucune modification à subir puisque les crochets impliquant les dérivations ajoutées sont tous nuls.

La matrice \tilde{S}^{-1} permet le passage des formes duales des dérivations v_i aux formes θ^i . Notons \tilde{S}'^{-1} , cette matrice après prolongation. On a :

$$\tilde{S}'^{-1} := \begin{pmatrix} \tilde{S}^{-1} & 0 \\ \Pi_G^{-1}(\Pi_M \Theta^{-1} + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}) & \Pi_G^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a une fois de plus tiré partie de la structure par blocs des matrices. Comme on le constate, la matrice \tilde{S}'^{-1} a deux blocs communs avec la matrice Θ'^{-1} . On peut alors gagner de la place mémoire et du temps de normalisation en ne stockant qu'une fois les blocs communs aux deux matrices.

8.6.1 Nouveaux tenseurs A' et T'

Voyons enfin comment sont modifiés les tenseurs A et T des équations de structure par la prolongation. Soient m et r les dimensions de la variété M et du groupe G avant prolongation. Notons $\theta' = S'\omega'$ les formes θ construites par prolongation des formes θ . Notons A' et T' les tenseurs correspondant aux formes $d\theta'$. D'après (8.45) et (8.44) on a :

$$d\theta' := d\theta, \quad (8.48)$$

pour les m premières formes et

$$\begin{aligned} d\theta' &:= d\pi + d(\Lambda^{(2)}\theta) + d(\Lambda^{(1)}\theta) \\ &:= d\Lambda^{(2)} + d\pi + \Lambda^{(2)}d\theta + d(\Lambda^{(1)}\theta), \end{aligned} \quad (8.49)$$

pour les r dernières formes.

8.6.1.1 Nouveau tenseur A'

Évidemment, d'après (8.48), les m premières lignes du tenseur A' sont nulles. Les r dernières lignes sont, quant à elles, données par la matrice $d\Lambda^{(2)}$ d'après (8.49).

8.6.1.2 Nouveau tenseur T'

Les m premières lignes de T' se calculent en fonction des anciennes équations (8.48). Soit :

$$T'_{jk}{}^i := T_{jk}{}^i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < k \leq m$$

et

$$T'_{j,m+\rho}{}^i := -A_{j\rho}{}^i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq \rho \leq r.$$

Les r dernières lignes de T' sont données par les formes (8.49), soient :

$$d\pi + \Lambda^{(2)}d\theta + d(\Lambda^{(1)}\theta). \quad (8.50)$$

Le calcul de (8.50) se fait en trois étapes. Le calcul de $d\pi$ qui est identique à celui décrit en (8.12) page 108. Le calcul de $(\Lambda^{(2)})d\theta$ qui est immédiat. Enfin le calcul de $d(\Lambda^{(1)}\theta)$ qui est similaire à (8.12).

Insistons sur une première optimisation possible du calcul de (8.50). Développer le troisième terme de (8.50) va permettre d'éviter un calcul implicite de $d\theta$ lors du calcul de $d(\Lambda^{(1)}\theta)$. Il faut donc calculer les trois termes de l'expression suivante (où $d\theta$ est connue) :

$$d\pi + (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)})d\theta + d\Lambda^{(1)} \wedge \theta. \quad (8.51)$$

Voici une deuxième optimisation. Les formes $d\pi$ de (8.51) ne sont pas quelconques, ce sont les différentielles des formes de Maurer-Cartan de G . C'est à dire certaines des entrées de la matrices dSS^{-1} . Les formes $d\pi$ sont donc des entrées de :

$$d(dSS^{-1}) = dS \wedge d(S^{-1}).$$

Voyons dans quelle mesure ceci peut faciliter le calcul des formes $d\pi$. On a évidemment $SS^{-1} = \text{Id}$ et $d(SS^{-1}) = 0$, d'où $d(SS^{-1}) = dSS^{-1} - Sd(S^{-1}) = 0$. Par suite

$$dSS^{-1} \wedge (dSS^{-1} + Sd(S^{-1})) = dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} - dS \wedge d(S^{-1}) = 0$$

et finalement,

$$dS \wedge d(S^{-1}) = dSS^{-1} \wedge dSS^{-1}.$$

Les formes $d\pi$ sont donc des entrées de $dSS^{-1} \wedge dSS^{-1}$. La matrice dSS^{-1} est connue. On peut donc obtenir sans nouvelle dérivation les formes $d\pi$ comme combinaisons des entrées de cette matrice. Cela suppose de savoir quelles entrées de dSS^{-1} sont les formes π et d'avoir une décomposition des autres entrées dans ces formes. Ceci se mémorise aisément lors du calcul des équations de structure. Il faut bien prendre garde au fait que cette décomposition change au cours des normalisations. Les entrées de la matrice dépendent alors des formes θ . On peut, en gardant la trace des normalisations, mettre

correctement à jour la matrice dSS^{-1} . En fait tout ceci revient à regarder comment évoluent les équations de structure de groupe G lorsque l'on normalise. Soit :

$$\pi^\rho = (dSS^{-1})_{j(\rho)}^{i(\rho)},$$

où $i(\rho)$ et $j(\rho)$ désignent les indices de ligne et de colonne de la forme π^ρ dans la matrice dSS^{-1} . On a alors :

$$d\pi^\rho = (dSS^{-1})_k^{i(\rho)} \wedge (dSS^{-1})_{j(\rho)}^k.$$

Cette optimisation non programmée à l'heure actuelle doit permettre un gain substantiel en temps de calcul.

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Pour cette exemple, après prolongation on a $M = [x, y, p, a_3]$. Lors de la dernière absorption, le degré d'indétermination était nul (8.43). Par conséquent le nouveau groupe G est réduit à l'identité. On ajoute aux dérivations la dérivation $v_4 = \partial/\partial a_3$. Finalement les équations de structure sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta^1 = -\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = -\frac{f_1 + f_2 p - f}{y a_3^2} \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4, \\ d\theta^3 = -\theta^3 \wedge \theta^4, \\ d\theta^4 = -\frac{f_{1,2} + p f_{2,2}}{a_3} \theta^1 \wedge \theta^3 + (2 - y f_{2,2}) \theta^2 \wedge \theta^3. \end{array} \right. \quad (8.52)$$

Le système (8.52) est en involution. On en déduit donc, qu'une équation différentielle du second ordre $y'' = f(x, y, p)$ est équivalente à $y'' = 0$ sous l'action du groupe (8.1) si et seulement si on a $T_{1,3}^2 = T_{1,3}^4 = 0$ et $T_{2,3}^4 = 2$ dans (8.52). \square

8.7 Simplification des invariants

Dans cette section nous allons décrire deux procédures permettant la simplification des invariants calculés par la méthode d'équivalence.

8.7.1 Application du lemme de Poincaré

La première de ces procédures (voir table 8.7) applique le lemme de Poincaré (lemme 1 page 19) aux équations de structure. Il s'agit donc de calculer les différentielles des équations de structure

$$d(d\theta^i) = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (8.53)$$

Ces équations impliquent nombre de relations entre les invariants et leurs dérivées qui vont permettre de diminuer fortement le nombre d'invariants à considérer. Ces relations sont calculées sans manipulation d'invariants en coordonnées locales ce qui est très important dans la mesure où ils peuvent être très volumineux (jusqu'à plusieurs Mega-octets).

Nom	Poincare
Paramètres	$\mathcal{G} : :$ table contenant une G -structure
Retourne	Null
Effets de bord	Modifie \mathcal{G} en y ajoutant les relations sur les invariants et leurs dérivées déduites du lemme de Poincaré.

TAB. 8.7 – Spécification de la procédure Poincare

Nous allons maintenant donner le détail du calcul des équations (8.53). Soient les équations de structure :

$$d\theta^i = T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < k \leq m. \quad (8.54)$$

Notons $\partial/\partial\theta^i$ le champ de vecteur dual de la forme θ^i . L'application du lemme de Poincaré aux équations de structure (8.54) donne :

$$d(d\theta^i) = R_{jkl}^i \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = 0 \quad 1 \leq j < k < l \leq m, 1 \leq i \leq m. \quad (8.55)$$

L'indépendance des formes θ^i et de (8.55) entraîne la nullité des coefficients R_{jkl}^i . Ces coefficients, que nous allons expliciter, sont des polynômes différentiels en les invariants T_{jk}^i exprimés dans les dérivations $\partial/\partial\theta^i$. On a :

$$d(d\theta^i) = dT_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k + T_{jk}^i d\theta^j \wedge \theta^k - T_{jk}^i \theta^j \wedge d\theta^k. \quad (8.56)$$

Le premier terme de (8.56) vaut :

$$\begin{aligned} dT_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k &= \frac{\partial T_{jk}^i}{\partial \theta^l} \theta^l \wedge \theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq j < k \leq m, 1 \leq l \leq m \\ &= \left(\frac{\partial T_{jk}^i}{\partial \theta^l} - \frac{\partial T_{lk}^i}{\partial \theta^j} + \frac{\partial T_{lj}^i}{\partial \theta^k} \right) \theta^l \wedge \theta^j \wedge \theta^k, \quad 1 \leq l < j < k \leq m. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de (8.56) est :

$$\begin{aligned} T_{jk}^i d\theta^j \wedge \theta^k &= T_{jk}^i T_{ln}^j \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^n, \quad 1 \leq j < k \leq m, 1 \leq l < n \leq m \\ &= (T_{jk}^i T_{ln}^j - T_{jl}^i T_{kn}^j + T_{jn}^i T_{kl}^j) \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^n, \quad 1 \leq j < k < l < n \leq m. \end{aligned}$$

Enfin, le troisième terme de (8.56) est donné par :

$$\begin{aligned} T_{jk}^i \theta^j \wedge d\theta^k &= T_{jk}^i T_{ln}^k \theta^j \wedge \theta^l \wedge \theta^n, \quad 1 \leq j < k \leq m, 1 \leq l < n \leq m \\ &= (T_{jk}^i T_{ln}^k - T_{nk}^i T_{lj}^k + T_{nk}^i T_{nj}^k) \theta^l \wedge \theta^n \wedge \theta^j, \quad 1 \leq l < n < j < k \leq m. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= \frac{\partial T_{kl}^i}{\partial \theta^j} - \frac{\partial T_{jl}^i}{\partial \theta^k} + \frac{\partial T_{jk}^i}{\partial \theta^l} + T_{jk}^n (T_{nl}^i - T_{ln}^i) + T_{jl}^n (T_{kn}^i - T_{nk}^i) \\ &+ T_{kl}^n (T_{nj}^i - T_{jn}^i) = 0, \quad 1 \leq j < k < l \leq m, 1 \leq n \leq m, 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (8.57)$$

EXEMPLE – (Équivalence d'EDO d'ordre 2) Sur notre exemple, l'application du lemme de Poincaré aux équations (8.52) fournit des relations entre les coefficients de structure et leurs dérivées. Les entrées non trivialement nulles du tenseur R défini en (8.55) sont les suivantes :

1. $R_{1,2,3}^2 = -\frac{\partial T_{1,3}^2}{\partial \theta^2} + T_{1,3}^4 = 0,$
2. $R_{1,3,4}^2 = \frac{\partial T_{1,3}^2}{\partial \theta^4} + 2T_{1,3}^2 = 0,$
3. $R_{1,2,3}^4 = \frac{\partial T_{2,3}^4}{\partial \theta^1} - \frac{\partial T_{1,3}^4}{\partial \theta^2} = 0,$
4. $R_{1,3,4}^4 = \frac{\partial T_{1,3}^4}{\partial \theta^4} + T_{1,3}^4 = 0,$
5. $R_{2,3,4}^4 = \frac{\partial T_{2,3}^4}{\partial \theta^4} = 0.$

La première relation montre que l'invariant $T_{1,3}^4$ est égal à $\partial T_{1,3}^2 / \partial \theta^2$. On en déduit donc que $T_{1,3}^2$ et $T_{2,3}^4$ forment une base de l'idéal différentiel engendré par les trois invariants $T_{1,3}^2$, $T_{1,3}^4$ et $T_{2,3}^4$. Ces deux invariants forment même une base de l'algèbre différentielle des invariants, ce qui est plus fort. Nous avons donc simplifier les conditions d'équivalence grâce au lemme de Poincaré. Si l'on réexprime les invariants dans les dérivations $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial p$ à l'aide des champs de vecteurs donnés en (8.11) page 107, on a :

Théorème 19 *Une équation différentielle du second ordre $y'' = f(x, y, p)$ est équivalente à $y'' = 0$ sous l'action du groupe (8.1) si et seulement si on a $T_{1,3}^2 = 0$ et $T_{2,3}^4 = 2$ dans les équations (8.52). Soit si et seulement si $f_y + pf_p - f = 0$ et $f_{pp} = 0$.*

□

Sur ce petit exemple, il est aisé de trouver soi-même une base de l'idéal ou de l'algèbre différentielle engendré par les invariants. Sur des exemples plus conséquents cela s'avère beaucoup plus laborieux. Il faut alors développer un outil permettant l'exploitation des relations de Poincaré de façon automatique.

8.7.2 Base de l'idéal différentiel généré par les invariants

Lorsque l'on a calculé les relations (8.57), on peut, en théorie, simplifier les invariants. Cependant, pour certains problèmes, ces relations sont très nombreuses, il n'est donc pas raisonnable d'exploiter celles-ci sans ordinateur. Considérons par exemple le problème d'équivalence sous l'action des transformations ponctuelles, de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\begin{cases} u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y), \\ u_{xy} = g(x, y, u, u_x, u_y), \\ u_{yy} = h(x, y, u, u_x, u_y). \end{cases} \quad (8.58)$$

Ce problème est traité au chapitre 7. Il y a 78 invariants finaux occupant au total 1,1 Mega-octet de mémoire. Les relations conséquences du lemme de Poincaré sont au

Nom	Base_Ideal_Invariants
Paramètres	R : : table contenant les relations (8.57) dédites du lemme de Poincaré
Retourne	Null
Effets de bord	une base de l'idéal différentiel engendré par les invariants

TAB. 8.8 – Spécification de la procédure `Base_Ideal_Invariants`

nombre de 940. Dans le cas du système plat

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, \\ u_{xy} = 0, \\ u_{yy} = 0, \end{cases} \quad (8.59)$$

les 78 invariants sont nuls. Ceci doit être le cas pour un système équivalent. Pour obtenir un critère d'équivalence au système (8.59), il faut donc calculer une base de l'idéal différentiel engendré par les invariants. Il est évident d'après la taille des données que ce n'est pas envisageable à la main. Ils faut alors trouver un moyen de simplifier ces relations.

Nous allons décrire la procédure `Base_Ideal_Invariants` qui trouve une base de l'idéal différentiel engendré par les invariants. Cette procédure pourra être facilement modifiée pour trouver une base de l'algèbre différentielle engendrée par les invariants. Bien-sûr, cette base pourrait être trouvée à l'aide d'un algorithme d'élimination en algèbre différentielle non-commutative. Mais nous n'en disposons pas encore. Voici la .

Cette procédure est basée sur une heuristique très simple mais très efficace qui exploite les relations déduites du lemme de Poincaré passées en paramètre.

Notons R l'ensemble des équations (8.57) obtenues par application du lemme de Poincaré aux équations de structure. Nous allons construire à l'aide de R , une base B de l'idéal différentiel engendré par les invariants T_{jk}^i . Pour ce faire nous allons trier les invariants par ordre croissant d'espace mémoire occupé. Soit $L = [T_1, T_2, \dots, T_n]$, cette liste après le tri. T_1 est le plus petit invariant. Voici le pseudo-code de la procédure qui construit B :

R : liste des relations sur les invariants déduites du Lemme de Poincaré,

$B = \emptyset$: base de l'idéal différentiel des invariants,

L : liste des invariants triée par ordre croissant d'espace mémoire occupé,

tq L est non vide **faire**

Ajouter à B , $L[1]$, le premier élément de L (le plus petit invariant)

Ré-écrire R modulo $L[1]$

Retirer de L tous les invariants dont la nullité de $L[1]$ entraîne la nullité.

Pour cela on utilise des pivots de Gauss sur le sous ensemble
des relations linéaires de R

fin tq

B est une base de l'idéal différentiel engendré par T_1, \dots, T_n .

EXEMPLE – Sur l'exemple d'équivalence de systèmes d'équations aux dérivées partielles

```
_T[1,1,3] = 0,  
_T[1,2,3] = -1  
] :  
  
N := [a[1], a[2]] :           # Paramètres du groupe à éliminer  
  
Normalisation(GS, T, N) :     # Normalisation  
  
Absorption(GS, 'b') :        # Absorption de la torsion  
  
Is_In_Involution(GS) :       # Test d'involution  
  
Prolongation(GS) :           # Prolongation de la G-structure  
  
Is_In_Involution(GS) :       # Test d'involution  
  
Poincare(GS) :               # Application du lemme de Poincaré
```


Chapitre 9

Conclusion et perspectives

Pour conclure ce mémoire, voyons tout d'abord les nouveaux problèmes d'équivalence qu'il est envisageable de traiter à l'aide de notre programme à son stade actuel de développement. Rappelons les temps de calcul et l'espace mémoire nécessaires au traitement des exemples présentés dans les chapitres 4 à 7.

Exemple	Temps de calcul	Espace mémoire
EDO d'ordre 3 ($I = 0$)	20 sec	8 Ko
EDO d'ordre 3 ($I \neq 0$)	3,5 sec	7,5 Ko
EDO d'ordre 4	9 sec	36 Ko
Systèmes d'EDP d'ordre 2	3 h	1,1 Mo

Comme on le constate, les ressources nécessaires au traitement des problèmes d'équivalence d'EDO sont très modestes au regard de la puissance des machines actuelles. Ces résultats sont encourageants et il est probable de gagner plusieurs ordres et de traiter l'équivalence d'EDO d'ordre 4, 5 et au delà. Les problèmes d'équivalence de systèmes EDP sont beaucoup plus coûteux et il est délicat de faire un pronostic tant la complexité des calculs varie avec le nombre de variables dépendantes, le nombre de variables indépendantes et le degré de dérivation des systèmes. Une étude cas par cas doit être menée. Ce travail prospectif sera fait prochainement. Une fois les limites de notre implantation atteintes, nous envisageons cependant quelques optimisations dont voici les deux plus importantes.

- La première optimisation est propre au langage Maple. Il semble que lors des calculs, la récupération de l'espace mémoire non utilisé (garbage collector) ne soit pas optimale. Ainsi, pour les systèmes d'EDP que nous avons considérés, si les données finales occupent un espace de 1,1 Mo, la mémoire vive consommée s'élève à 250 Mo. Il semble donc que l'on puisse optimiser la gestion mémoire en cours d'algorithme.
- La seconde optimisation est sans doute la plus importante. Il s'agit de calculer les relations entre les invariants fournies par le lemme de Poincaré, non plus à la fin mais en cours d'algorithme. Ceci permet, à chaque étape de la méthode d'équivalence, de ne conserver qu'une base de l'algèbre différentielle engendrée par les invariants déjà calculés. Ceci évite donc le calcul et le stockage de volumineux et inutiles invariants.

Voici quelques directions de recherche qu'il nous semble important de considérer à plus long terme :

- Dans tous les exemples présentés dans ce mémoire, nous avons donné des critères d'équivalence sans pour autant expliciter les changements de variables permettant de passer d'un système d'équations différentielles à un système équivalent. Il semble que, dans certains cas, les invariants trouvés par la méthode d'équivalence permettent de donner de riches renseignements sur ces changements de variables. Sans cela, le changement de variable peut être obtenu en théorie par l'intégration du système de formes invariantes $\bar{\theta}^i = \theta^i$ que calcule la méthode d'équivalence. C'est un point qu'il nous reste à étudier scrupuleusement.
- Programmer le calcul tensoriel permettrait d'effectuer les calculs de la méthode d'équivalence de Cartan plus génériquement comme le faisait Chern par exemple.

Le problème de la classification des objets de nature géométrique, en particulier des systèmes d'équations différentielles intervenant dans la modélisation des systèmes dynamiques occupe actuellement de nombreux chercheurs. Il est souhaitable que notre logiciel soit intégré dans un grand système de calcul formel, disponible partout tel que Maple. Il faut collaborer avec des spécialistes de géométrie afin qu'ils puissent eux-mêmes effectuer les calculs sur machine.

Finalement voici divers travaux de collaboration en cours ou en projet qui devraient tirer parti des résultats présentés dans ce mémoire :

- J. Merker a déposé un projet de collaboration entre des mathématiciens du laboratoire A.G.A.T. de Lille, du C.M.I. de Marseille et deux informaticiens de l'équipe de calcul formel de Lille. Ce projet concerne en particulier A. Sukhov (PR, AGAT Lille), B. Coupet (PR, LATP Marseille), H. Gaussier (MCF, LATP Marseille) et J. Merker (CR CNRS, LATP Marseille), M. Petitot (PR, LIFL Lille) et moi-même. Il s'agit d'effectuer la classification des hypersurfaces analytiques réelles Levy non dégénérées de \mathbb{C}^3 , ceci notamment grâce à la méthode d'équivalence de Cartan.
- Ivar Ekeland (PR CEREMADE Dauphine) a pris contact avec l'équipe de calcul formel de Lille afin de traiter sur machine diverses instances du "problème variationnel inverse" i.e l'étude de critères simples permettant de décider si les solutions d'un système donné (ordinaire du second ordre)

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}) \quad \text{avec } x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (9.1)$$

sont des géodésiques pour un certain Lagrangien $L(x, \dot{x})$. Cette question très classique (voir [19] et [1]) est étroitement liée à la classification de l'équation (9.1). Cette classification a été réalisée *en principe* par S. S Chern et M. E. Fels mais les calculs n'ont pas été menés *jusqu'au bout*. Grâce à notre logiciel, nous avons déjà traité quelques cas particuliers afin de tester la faisabilité du projet.

- Formaliser un algorithme d'élimination en algèbre différentielle non commutative. Ce travail est à envisager avec François Boulier (MCF Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille). Un tel logiciel permettrait d'une part de traiter les problèmes d'équivalence comme nous l'avons vu au chapitre (3). D'autre part un tel logiciel peut se révéler très intéressant lorsqu'un système différentiel est naturellement exprimé dans des dérivations qui ne commutent pas nécessairement. C'est par exemple le cas des polynômes différentiels que notre implantation de la

méthode d'équivalence manipule. C'est aussi le cas des systèmes différentiels que l'on rencontre lorsque l'on s'intéresse au problème de Douglas autrement appelé problème variationnel inverse que nous venons d'évoquer (voir [19] et [1]).

- P. Rouchon (PR Centre d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris) voudrait utiliser la méthode d'équivalence en vue de construire des *observateurs*¹ de systèmes non linéaires, en particulier pour des systèmes non commandés. Il s'agit d'étudier la possibilité de ramener, par un changement de variables approprié, une dynamique générale de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (9.2)$$

à des formes particulières pour lesquelles la construction d'un observateur est connue (voir [55]).

¹Un observateur est un programme de calcul en ligne qui fournit une estimation à tout instant t de la valeur des variables d'état à partir des grandeurs mesurées

Bibliographie

- [1] I. Anderson and G. Thompson. *The Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations*, volume 98. AMS, Providence, 1992.
- [2] C. Bièche and S. Neut. Sur le problème d'équivalence de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2. *soumise au C. R. Acad. Sci. Paris*, 2003.
- [3] F. Boulier. *Etude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle*. PhD thesis, Univ. Lille I, 59655 Villeneuve-d'Ascq, juin 1994.
- [4] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, and M. Petitot. Representation for the radical of a finitely generated differential ideal. In *proc. ISSAC'95, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 158–166, Montréal, Canada, 1995.
- [5] F. Boulier, F. Lemaire, and Marc Moreno Maza. PARDI! In *proceedings of ISSAC'01*, pages 38–47, London, Ontario, Canada, 2001.
- [6] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, Goldschmidt H. L., and Griffiths P. A. *Exterior Differential Systems*, volume 18. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] J. Carminati, J. Devitt, and G. Fee. Isogroups of differential equations using algebraic computing. *J. Symbolic Computation*, (14) :103–120, 1992.
- [8] E. Cartan. Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Bull. Soc. Math. de France*, 27(3) :109–192, 1910.
- [9] E. Cartan. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*. Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [10] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann, Paris, 1945.
- [11] E. Cartan. *Les problèmes d'équivalence*, volume 2 of *oeuvres complètes*, pages 1311–1334. Gauthiers–Villars, Paris, 1953.
- [12] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [13] S. S. Chern. The geometry of G-structures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :167–219, 1966.
- [14] S. S. Chern. On the projective structure of a real hypersurface in \mathbb{C}^{n+1} . *Math. Scand.*, 36 :74–82, 1975.
- [15] S.S. Chern. Sur la géométrie d'une équation différentielle du troisième ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1227, 1937.
- [16] S.S. Chern. The geometry of the differential equation $y''' = f(x, y, y', y'')$. *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ.*, 4 :97–111, 1940.

- [17] P.A. Chiappori and I. Ekeland. Problèmes d'agrégation en théorie du consommateur et calcul différentiel extérieur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (323) :565–570, 1996.
- [18] B. Doubrov. Contact invariants of ordinary differential equations. *Lie groups, geometric structures and differential equations, one hundred years after Sophus Lie*, 1150 :105–113, 2000.
- [19] J. Douglas. Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, 25 :631–637, 1939.
- [20] C. Ehresmann. *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie*. 1953.
- [21] M. Fels and P. J. Olver. Moving coframes I. A practical algorithm. *Acta Appl. Math.*, 51 :161–213, 1998.
- [22] M. Fels and P. J. Olver. Moving coframes II. Regularization and theoretical foundations. *Acta Appl. Math.*, 55 :127–208, 1999.
- [23] M. E. Fels. The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations. *Proc. London Math. Soc.*, 71(3) :221–240, 1995.
- [24] M. E. Fels. The inverse problem of the calculus of variations for scalar fourth-order ordinary differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc*, 348 :5007–5029, 1996.
- [25] R. Gardner and W. Shadwick. Equivalence of 1-dim. Lagrangian Field Theories in the plane I. *Springer Lecture Notes in Math.*, 1156 :154–179, 1985.
- [26] R. Gardner and W. Shadwick. Feedback Equivalence of Control Systems. *Systems and Control Letters*, 8 :463–465, 1987.
- [27] R.B. Gardner. *The method of equivalence and its applications*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [28] D. Hartley and R. Tucker. A constructive implementation of the cartan-kähler theory of exterior differential systems. *J. Symbolic Computation*, (12) :655–667, 1991.
- [29] L. Hsu and N. Kamran. Classification of second-order ordinary differential equations admitting lie groups of fiber-preserving symmetries. *Proc. London Math. Soc.*, 58 :387–416, 1989.
- [30] E. Hubert. Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra. *Journal of Symbolic Computations*, 29(4-5), 2000.
- [31] E. Kamke. *Handbook on Ordinary Differential Equations*. Nauka, Moscow, 1976.
- [32] N. Kamran. Contributions to the study of the equivalence problem of Elie Cartan and its applications to partial and ordinary differential equations. *Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique*, (45), 1989.
- [33] N. Kamran and P.J. Olver. Equivalence of differential operators. *SIAM J. Math. Anal.*, 20 :1172–1187, 1989.
- [34] N. Kamran and P.J. Olver. Equivalence problems for first-order lagrangians. *J. Differential Equations*, 80 :32–79, 1989.
- [35] N. Kamran and P.J. Olver. Equivalence of higher-order Lagrangians, I : Formulation and reduction. *J. Math. Pures et Appliquées*, 70 :369–391, 1991.

-
- [36] E.R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*. Academic press, New-York and london, 1973.
- [37] I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin, and A. M. Vinogradov. *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Differential Equations*, volume 1. Gordon and Breach, New York, 1986.
- [38] M. Kuranishi. On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems. *Amer. J. Math.*, (79) :1–47, 1957.
- [39] N. Kamran L. Hsu and P.J. Olver. Equivalence of higher-order Lagrangians, II : The cartan form. *J. Math. Phys.*, 30 :902–907, 1989.
- [40] F. Lemaire. *Contribution à l'algorithmique en algèbre différentielle*. PhD thesis, Université Lille I, 59655, Villeneuve d'Ascq, France, january 2002. in French.
- [41] I. G. Lisle and G. J. Reid. Geometry and structure from infinitesimal defining equations. *Journal of Symbolic Computation*, 26 :355–379, 1998.
- [42] I. G. Lisle and G. J. Reid. *Cartan Structure of Infinite Lie Pseudogroups*, pages 116–145. Cambridge University Press, 2000.
- [43] I. G. Lisle, G. J. Reid, and A. Boulton. Algorithmic determination of the structure of infinite symmetry groups of differential equations. In *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, New York, 1995. acm press.
- [44] E. L. Mansfield. Algorithms for symmetric differential systems. *Foundations of Computational Mathematics*, 1(4) :335–383, 2001.
- [45] Elizabeth L. Mansfield. *Differential Gröbner Bases*. PhD thesis, University of Sydney, Australia, 1991.
- [46] M. M. Maza. *Calcul de pgcd au-dessus des tours d'extensions et résolution des systèmes d'équations algébriques*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, Juin 1997.
- [47] M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, Labahn G, and Vorkoetter S. M. *Maple Programming Guide*. Springer-Verlag, Waterloo, 1996.
- [48] S. Neut and M. Petitot. La géométrie de l'équation $y''' = f(x, y, y', y'')$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, (335) :515–518, 2002.
- [49] P. J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer–Verlag, 1993.
- [50] P. J. Olver. *Equivalence, invariants and symmetry*. Graduate Texts in Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [51] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. CRC Press, New York, 1995.
- [52] J.F. Pommaret. *Lie pseudogroups and mechanics*, volume 16 of *Mathematics and its applications*. Gordon and Breach sciences publ., New–York, 1987.
- [53] G.J. Reid. Algorithms for reducing a system of PDE's to standard form determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. *Eur. J. of Applied Math.*, 2 :293–318, 1991.
- [54] J.F. Ritt. *Differential Algebra*. Amer. Math. Soc, New York, 1950.

-
- [55] P. Rouchon and F. Lamnabhi. *Systèmes non linéaires*, volume 17 of *Traité IC2*, chapter 3, pages 81–122. Hermes Science, 2002.
- [56] H. Sato and A.Y. Yoshikawa. Third order ordinary differential equations and Legendre connections. *J. Math. Soc. Japan*, 50(4) :993–1013, 1998.
- [57] I. Singer and S. Sternberg. The infinite groups of lie and cartan. *J. Analyse Math.*, 15, 1965.
- [58] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1964.
- [59] A. Sukhov. Segre varieties and Lie symmetries. *Math. Z.*, 238 :483–492, 2001.
- [60] S. M. Webster. Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface. *J. differential geometry*, 13 :25–41, 1978.
- [61] H. Weyl. Cartan on groups and differential geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 598–601, 1938.
- [62] K. Wünschmann. Über berührungsbedingungen bei differentialgleichungen. *Enzyklopädie der Math. Wiss.*, 3 :490–492, 1905.
- [63] D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, New York, 1992.

Résumé

La méthode d'équivalence de Cartan est un algorithme qui permet de décider si deux systèmes d'équations différentielles se déduisent l'un de l'autre par un difféomorphisme local pris dans un (pseudo)groupe de transformations donné. On montre que cette question se ramène à la classification locale des G-structures et donc au calcul d'un ensemble complet d'invariants de celles-ci. L'implantation en Maple proposée dans cette thèse permet de traiter des exemples restés hors de portée jusqu'à maintenant. Ainsi sont présentés :

- des résultats de classification des équations différentielles ordinaires du troisième ordre par des transformations de contact,
- des résultats de classification d'équations ordinaires du quatrième ordre ainsi que certains systèmes d'équations différentielles ordinaires,
- l'étude d'un système aux dérivées partielles du second ordre complètement intégrable à une variable dépendante et n variables indépendantes sous l'action du groupe des transformations ponctuelles.

Une optimisation essentielle du programme repose sur l'utilisation de dérivations ne commutant pas entre elles. Les problèmes d'équivalence sont également abordés en utilisant les techniques d'algèbre différentielle.

Mots clefs : Informatique, calcul formel, méthode d'équivalence de Cartan, équations différentielles, classification, calcul extérieur, algèbre différentielle.

Abstract

The Cartan's equivalence method is an algorithm which allows to decide if two systems of differential equations can be mapped on each other by a local diffeomorphism from a given (pseudo)group of transformations. This problem amounts to the local classification of G-structures and therefore to the computation of a complete set of invariants of these ones. The Maple implantation proposed in this thesis allows to treat examples that remained out of capability up to now. Thus are presented :

- some classification results about third order ordinary differential equations under the group of contact transformations,
- some classification results about fourth order ordinary differential equations as well as some systems of ordinary differential equations,
- the study of completely integrable second order partial differential equations systems with one dependent variable and n independent variables.

One of the essential optimisation is the use of derivations that do not necessarily commute pairwise. The equivalence problems are also tackled using differential algebra technics.

Key words : Computer science, computer algebra, Cartan's equivalence method, differential equations, classification, exterior calculus, differential algebra.