

THÈSE DE DOCTORAT
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THÈSE

Présentée par

Laëtitia GENTOT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Titre de la Thèse :

**ADOUCCISSEMENT PAR FATIGUE DES MILIEUX ELASTOMERES :
CARACTERISATION, MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE**

Soutenue le 12 Décembre 2003

M. Jean-Yves COGNARD	Rapporteur
M. Yves REMOND	Rapporteur
M. Pierre ALART	Examineur
M. Moussa NAIT-ABDELAZIZ	Examineur
M. Jean-Michel VACHERAND	Examineur
M. Gérard MESMACQUE	Directeur de thèse
M. Mathias BRIEU	Co-directeur de thèse

LABORATOIRE de MECANIQUE de LILLE
U.M.R C.N.R.S 8107
E.C. Lille / E.N.S.A.M. / U.S.T.L.
L.M.L, Boulevard Paul Langevin, Cité Scientifique, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

Résumé

L'étude porte sur le comportement hyperélastique de matériaux élastomères et sur l'endommagement de ceux-ci lors de sollicitations en fatigue à faible nombre de cycles. Les essais de traction répétée à déformation maximale imposée sur différents matériaux élastomères ont montré un adoucissement important qui se caractérise par une chute de la contrainte dès les premiers cycles de chargement. Cette étude expérimentale a permis de mettre en évidence la dépendance de ce phénomène d'adoucissement par fatigue vis à vis d'une part de la déformation maximale imposée au cours du chargement cyclique et d'autre part du nombre de cycles de chargement.

L'étude bibliographique a permis de constater que les modèles proposés pour décrire le phénomène d'adoucissement ne faisaient pas intervenir, simultanément, les deux paramètres mis en évidence lors de l'étude expérimentale. Deux tendances se sont imposées : les modèles qui ne prennent en compte que la déformation maximale imposée et les modèles qui ne tiennent compte que du nombre de cycles de chargement. Afin d'illustrer ces deux tendances, nous présentons deux modèles relativement récents dont nous montrerons les limites au travers de résultats expérimentaux.

Ainsi, un modèle permettant de rendre compte du phénomène d'adoucissement par fatigue, et prenant en compte l'ensemble des paramètres intervenant dans celui-ci, a été développé. Une fois l'identification du comportement faite, le modèle proposé pénalise le comportement hyperélastique du milieu élastomère par un endommagement évoluant en fonction des deux paramètres précédemment cités. Ce modèle, prédictif, présente l'avantage de nécessiter l'identification d'un unique paramètre. Celui-ci a été testé sur plusieurs matériaux différant soit par la matrice, soit par les renforts. Une étude, du seul paramètre intervenant dans le modèle proposé, a permis de montrer que sa détermination à un certain niveau de déformation maximale imposée permettait de prévoir l'adoucissement pour des niveaux de déformation maximale imposés et des niveaux de contrainte induite plus faibles, et ce quelque soit le nombre de cycles considéré.

Par la suite, le modèle d'adoucissement par fatigue développé a été implémenté au sein d'un code éléments finis modulaire (modulef) afin d'offrir un outil d'aide à la conception de structures élastomères prenant en compte ces phénomènes d'adoucissement. Dans ce but, un algorithme non incrémental de résolution a été développé afin de prendre en compte d'une part la nature incompressible et endommageable du comportement et d'autre part le caractère grandement déformable et non linéaire des comportements mis en jeu. En effet, les problèmes à traiter étant par définition des problèmes non linéaires (comportement hyperélastique) et instationnaires (endommagement), l'utilisation d'algorithme classique de type incrémental ne pouvait être envisagée à cause des temps de calculs alors requis. Un algorithme non incrémental basé sur des techniques de type Newton, ou plus précisément LATIN, a donc été proposé ainsi que plusieurs méthodes d'optimisation afin de diminuer les temps de calcul.

Mots Clés : **Matériaux élastomères, Hyperélasticité, Endommagement, Adoucissement, Fatigue, Méthodes de résolution de problèmes non linéaires**

Table des matières

Introduction	1
Nomenclature	7
1 Comportement et fatigue des milieux élastomères	9
1.1 Le comportement élastique des élastomères	11
1.2 Quelques rappels sur les grandes déformations	12
1.2.1 Formalisme des grandes déformations	12
1.2.1.1 Tenseurs des déformations	12
1.2.1.2 Tenseurs des contraintes	13
1.2.2 Equations d'équilibre	14
1.2.2.1 Configuration eulérienne	15
1.2.2.2 Configuration lagrangienne	15
1.3 Loi de comportement	16
1.3.1 Inégalité de Clausius-Duhem	16
1.3.1.1 Cas général	16
1.3.1.2 Cas particulier des matériaux élastiques sans endomma- gement	17
1.3.2 Quelques exemples de densité d'énergie sans endommagement	18
1.3.2.1 Densités d'énergie à expression imposée	18
1.3.2.2 Densité d'énergie à expression non imposée	19
1.4 Phénomène d'adoucissement par fatigue	20
1.4.1 Présentation	20
1.4.1.1 Endommagement discontinu	21
1.4.1.2 Endommagement continu	21
1.4.1.3 Remarques	22
1.4.2 Modélisations existantes	23
1.4.2.1 Modèle à endommagement discontinu	23
1.4.2.2 Modèle à endommagement continu	25
1.4.3 Remarques sur ces différents modèles	26
2 Mise en oeuvre expérimentale et caractérisation du comportement non endommagé de milieux élastomères en grandes déforma- tions	29
2.1 Matériaux étudiés	31
2.2 Essai de traction uniaxiale	31

2.2.1	Géométrie des éprouvettes	32
2.2.2	Machine d'essai INSTRON 4302	32
2.2.3	Système vidéo de mesures des déformations	33
2.2.3.1	Nécessité des mesures locales des déformations	33
2.2.3.2	Mesures locales des déformations	34
2.3	Essai de traction biaxiale	36
2.3.1	Machines existantes	37
2.3.2	Géométrie des éprouvettes	39
2.3.3	Description du système	39
2.4	Résultats	43
2.5	Choix de la densité d'énergie	43
2.5.1	Expression de la contrainte dans le cas de déformations homogènes	43
2.5.2	Identification des différentes densités d'énergie	44
2.5.3	Résultats de l'identification	46
2.5.4	Confrontation sur un essai de traction biaxiale	50
3	Caractérisation des phénomènes d'adoucissement par fatigue	53
3.1	Mise en évidence des phénomènes d'adoucissement par fatigue	55
3.2	Limites des modèles de la littérature	61
3.2.1	Modèle de Beatty et Krishnaswamy [7]	62
3.2.2	Modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree [99]	62
3.3	Confrontation des modèles et de l'expérience	63
3.3.1	Identification des différents modèles	63
3.3.1.1	Modèle de Beatty et Krishnaswamy	63
3.3.1.2	Modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree	64
3.3.2	Résultats expérimentaux	66
3.3.2.1	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> et des résultats expérimentaux	66
3.3.2.2	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> et des résultats expérimentaux	68
4	Un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue	73
4.1	Développement d'un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue	75
4.2	Confrontation du nouveau modèle à l'expérience	77
4.2.1	Identification du modèle proposé	77
4.2.2	Résultats expérimentaux	78
4.3	Etude du paramètre c_1	83
4.3.1	Identification du paramètre c_1 sur un essai à 100% de déformation maximale imposée	83
4.3.2	Identification du paramètre c_1 sur un essai à 200% de déformation maximale imposée	86
4.4	Adoucissement par fatigue à contrainte maximale imposée	88
5	Simulation numérique de l'adoucissement dans les milieux élastomères chargés	93
5.1	Présentation du problème	95

5.2	Algorithme non incrémental	96
5.2.1	Principe de la méthode	96
5.2.2	Choix des deux groupes	97
5.2.3	Schéma itératif de la méthode	98
5.2.3.1	Initialisation	98
5.2.3.2	Passage de l'itéré n à l'itéré $n + \frac{1}{2}$	98
5.2.3.3	Passage de l'itéré $n + \frac{1}{2}$ à l'itéré $n + 1$	99
5.2.3.4	Critère de convergence	100
5.3	Résolution du problème de minimisation	101
5.4	Linéarisation de la loi de comportement	103
5.5	Résolution des problèmes (5.7) et (5.15)	104
5.5.1	Formulation variationnelle	104
5.5.2	Élément fini développé	105
5.6	Résolution de la loi d'évolution de l'endommagement	107
5.7	Présentation schématique de l'algorithme	107
6	Performances et optimisation parallèle de l'algorithme	111
6.1	Problème considéré	113
6.2	Validation de l'approche algorithmique	113
6.2.1	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux	114
6.2.2	Analyse des taux de convergence lors du processus algorithmique	115
6.3	Optimisation du démarrage du processus itératif	117
6.3.1	Initialisation au voisinage de la solution finale du problème posé à l'incrément de temps précédent	117
6.3.2	Initialisation au voisinage d'une solution intermédiaire du problème posé à l'incrément de temps précédent	119
6.4	Bilan des initialisations proposées	121
6.4.1	Performances itératives	121
6.4.2	Performances parallèles	122
	Conclusion et perspectives	125
	Références bibliographiques	129

Table des figures

1.1	Comportement non-linéaire d'un élastomère	11
1.2	Configurations eulérienne et lagrangienne	12
1.3	Schématisation de l'adoucissement	21
1.4	Cycles de traction : illustration du modèle d'endommagement continu selon Miehe (1995) [74]	22
1.5	Courbes expérimentales obtenues par Shen, Golnaraghi et Plumtree (2001 [99]) dans le cas compressible	25
1.6	Courbes expérimentales obtenues sur un SBR renforcé avec de la silice dans le cas incompressible (Laiarinandrasana <i>et al.</i> 2003 [62])	26
1.7	Contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour les courbes expérimentales obtenues par Laiarinandrasana <i>et al.</i> (2003 [62]) pour un SBR renforcé avec de la silice	27
1.8	Contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour les courbes expérimentales obtenues par Shen, Golnaraghi et Plumtree (2001 [99]) pour une mousse polyuréthane	27
2.1	Géométrie de l'éprouvette uniaxiale	32
2.2	Machine d'essai utilisée pour les essais de traction uniaxiale cyclique	33
2.3	Mors autoserrants par un dispositif à excentriques pendant l'essai	33
2.4	Mors autoserrants par un dispositif à excentriques	33
2.5	Différence entre déformations globales et déformations locales (la contrainte est calculée en divisant la force F par la section initiale de l'éprouvette S_0)	34
2.6	Système de vidéotraction Apollor [®]	35
2.7	Evolution de la vitesse de traverse	35
2.8	Evolution de la déformation locale	35
2.9	Méthodes 4 tâches : photos avant l'essai	36
2.10	Méthodes 4 tâches : photos pendant l'essai	36
2.11	Méthode 4 tâches : calcul des déformations axiale et transverse	36
2.12	Evolution de I_2 en fonction de I_1 pour différentes sollicitations ($I_1 = 9,6$ correspond à 200% de déformation longitudinale en traction uniaxiale)	37
2.13	Evolution de I_1/I_2 en fonction de l'élongation pour différentes sollicitations	37
2.14	Schématisation de la traction équibiaxiale, sollicitation radiale d'un disque	38
2.15	Traction équibiaxiale, sollicitation radiale d'un disque	38
2.16	Traction équibiaxiale, gonflage d'un ballon	38
2.17	Traction équibiaxiale, gonflage d'un disque de caoutchouc	38
2.18	Géométrie de l'éprouvette de traction équibiaxiale	39
2.19	Vue d'ensemble du système de traction biaxiale	40

2.20	Système de traction biaxiale installé sur la machine de traction Instron 4302	40
2.21	Fixation du système biaxial sur la machine de traction	41
2.22	Orientation des mors	41
2.23	Système de bielles	42
2.24	Liaison entre les pièces 5, 6, 7 et 8	42
2.25	Confrontation de la densité de Treloar (1.31) aux résultats expérimentaux pour le NR	47
2.26	Confrontation de la densité de Treloar (1.31) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150	47
2.27	Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux pour le NR	48
2.28	Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150	48
2.29	Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux sur les essais de Treloar [107]	48
2.30	Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux sur les essais d'Alexander [3]	48
2.31	Confrontation de la densité de Hart-Smith (1.33) aux résultats expérimentaux pour le NR	49
2.32	Confrontation de la densité de Hart-Smith (1.33) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150	49
2.33	Confrontation de la densité de Diani et Rey (1.34) aux résultats expérimentaux pour le NR	49
2.34	Confrontation de la densité de Diani et Rey (1.34) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150	49
2.35	Résultats obtenus sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le NR	50
2.36	Résultats obtenus sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le SBR+Si150	50
2.37	Evolution de l'erreur obtenue sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le NR	51
2.38	Evolution de l'erreur obtenue sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le SBR+Si150	51
3.1	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR	55
3.2	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR	55
3.3	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR+C	56
3.4	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR+C	56
3.5	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR+Si	56
3.6	Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR+Si	56

3.7	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR	57
3.8	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR	57
3.9	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+C	58
3.10	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+C	58
3.11	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+Si	58
3.12	Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+Si	58
3.13	Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+C	60
3.14	Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+C	60
3.15	Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+Si	61
3.16	Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+Si	61
3.17	Représentation de la contrainte au cycle N en fonction de la contrainte au premier cycle considéré	65
3.18	Identification des $C_i(N)$	65
3.19	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR	66
3.20	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR	66
3.21	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR+C	67
3.22	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR+C	67
3.23	Confrontation du modèle de Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR+Si	67
3.24	Confrontation du modèle Beatty <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR+Si	67
3.25	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR .	69
3.26	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR	69
3.27	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR+C	69
3.28	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR+C	69
3.29	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR+Si	70
3.30	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR+Si	70
3.31	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance NR+Si dans le cas d'une identification sur les 19 premiers cycles	70
3.32	Confrontation du modèle de Shen <i>et al.</i> à l'expérience pour la nuance SBR+C dans le cas d'une identification sur les 19 premiers cycles	70

4.1	Identification du paramètre b	78
4.2	Identification de c_1	78
4.3	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR à N imposé	79
4.4	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR à N imposé	79
4.5	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+C à N imposé et déformation maximale imposée variable	80
4.6	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+C à N imposé et déformation maximale imposée variable	80
4.7	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+Si à N imposé et déformation maximale imposée variable	80
4.8	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+Si à N imposé et déformation maximale imposée variable	80
4.9	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR à déformation maximale imposée fixe et N variable	81
4.10	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR à déformation maximale imposée fixe et N variable	81
4.11	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+C à déformation maximale imposée fixe et N variable	81
4.12	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+C à déformation maximale imposée fixe et N variable	81
4.13	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+Si à déformation maximale imposée fixe et N variable	82
4.14	Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+Si à déformation maximale imposée fixe et N variable	82
4.15	Prévision de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance NR+C	84
4.16	Prévision de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance NR+Si	84
4.17	Prévision de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 150% de déformation maximale imposée pour la nuance SBR+C	85
4.18	Prévision de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance SBR+Si	85
4.19	Validation du modèle pour la nuance NR+C	86
4.20	Validation du modèle pour la nuance NR+Si	86
4.21	Validation du modèle pour la nuance SBR+C	87
4.22	Validation du modèle pour la nuance SBR+Si	87
4.23	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 6$ MPa	88
4.24	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 7$ MPa	88
4.25	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 5$ MPa	89
4.26	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 5$ MPa	89

4.27	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 4$ MPa	89
4.28	Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $\mathbf{T}_{max} = 3,5$ MPa	89
5.1	Géométrie et noeuds de l'élément tetra P2-P0 développé	106
5.2	Algorithme de résolution	108
6.1	Structure étudiée	113
6.2	Maillage de la structure	113
6.3	Confrontation de la simulation EF et des résultats expérimentaux de l'adoucissement pour plusieurs cycles de charge	115
6.4	Evolution de l'erreur relative entre l'expérience et la simulation numérique en fonction de l'élongation	115
6.5	Evolution du taux de convergence de l'algorithme, les pas de temps étant simulés les uns à la suite des autres	116
6.6	Evolution du taux de convergence de l'algorithme, les pas de temps étant traités simultanément	116
6.7	Evolution du taux de convergence de l'algorithme lors d'une initialisation à partir de la solution déterminée au pas de temps précédent	118
6.8	Evolution du taux de convergence de l'algorithme lors d'une initialisation à partir d'une solution intermédiaire du problème posé au pas de temps précédent	120
6.9	Nombre de problèmes EF à résoudre par pas de temps	121
6.10	Nombre total de problèmes EF à résoudre par méthode de redémarrage	121
6.11	Bilan d'un point de vue parallélisation des trois initialisations proposées pour l'algorithme	123
6.12	Répartition des tâches sur un quadripcesseur dans le cas des initialisations développées sections 6.2.1 et 6.2.3	123
6.13	Comparaison en temps de calcul des première et troisième méthodes d'initialisation	124

Introduction

Cette étude est consacrée à la caractérisation, la modélisation et la simulation numérique du comportement mécanique de structures élastomères soumises à des chargements cycliques induisant des phénomènes d'adoucissement par fatigue.

Le caoutchouc naturel est fabriqué à partir de la sève de l'hévéa *Brasilienis*. Sa première utilisation fut pour imperméabiliser les étoffes et fabriquer des tissus élastiques. Son développement industriel coïncide avec la découverte par C. Goodyear du procédé de vulcanisation par le soufre au début du XIX^{ième} siècle. Ce procédé permet de transformer la sève, qui est visqueuse, en une structure solide de réseau tridimensionnel constitué de chaînes macromoléculaires.

Afin d'accroître la rigidité des caoutchoucs naturels, des particules de renforts (Noir de Carbone, Kaolin, Silice, ...) y sont adjointes, permettant ainsi d'étendre les domaines d'utilisation de ces mélanges appelés élastomères. Par la suite, l'introduction des caoutchoucs de synthèse par l'industrie chimique ne fera qu'accroître les performances (mécaniques, chimiques et tenue au feu) des milieux élastomères et augmenter les champs d'application.

Grâce à leurs propriétés remarquables et notamment une grande souplesse aux faibles déformations combinée à une haute résistance aux forts étirages, les élastomères sont utilisés pour une très grande variété d'applications dans de nombreux domaines des industries de pointe. La plupart du temps, ces milieux interviennent dans la réalisation de structures devant assumer des tâches de suspension, de liaison et/ou d'amortissement. Les pneumatiques et les supports de moteur en industrie automobile, la suspension secondaire de voitures de TGV en industrie ferroviaire, les éléments de liaison entre le rotor et les pâles d'hélicoptères en industrie aéronautique, les éléments de liaison entre le fuselage et les réservoirs de carburants de la fusée Ariane V en industrie spatiale ou encore les systèmes antisismiques dans l'industrie terrestre n'en sont que quelques exemples.

En 1994, la consommation mondiale de matériaux élastomères approchait les 15 millions de tonnes.

Cependant, le dimensionnement de structures constituées de milieux élastomères pose de nombreuses difficultés tant d'un point de vue caractérisation ou modélisation du comportement de ces milieux que d'un point de vue simulation numérique de ces structures.

Les niveaux de déformation envisagés dans un cadre élastique sont extrêmement importants. En effet, le domaine de déformation élastique est la plupart du temps supérieur à quelques centaines de pour cent de déformation, alors que la déformation à rupture est souvent au delà du millier de pour cent de déformation. Les très grands niveaux de déformation considérés (plusieurs centaines de pour cent de déformation) se situant dans

un cadre élastique et non linéaire, on parle souvent d'hyperélasticité. La modélisation du comportement doit donc se faire dans le cadre des grandes transformations. De nombreux travaux ont été réalisés sur la modélisation du comportement élastique en grandes transformations. Celui-ci est généralement représenté par une fonction densité d'énergie (Rivlin, 1948 [92]; Ciarlet, 1986 [29]) qui, dans la mesure où le matériau est supposé isotrope, s'exprime en fonction des trois invariants principaux du tenseur de Cauchy-Green droit ou encore en fonction des élongations principales du tenseur gradient de déformation. Une autre hypothèse généralement formulée concerne l'incompressibilité des matériaux permettant de simplifier le problème puisqu'elle réduit le nombre de variables indépendantes à 2. De nombreuses lois de comportement ont été développées ces dernières années parmi lesquelles on peut citer Rivlin, 1948 [92]; 1949 [93]; Gent et Thomas, 1958 [43]; Hart-Smith, 1966 [51]; Ogden, 1972 [82]; Treloar, 1975 [107]; Haines, 1979 [50]; Diani, 1999 [34].

Cependant, certains matériaux ne vérifient pas cette hypothèse d'incompressibilité et c'est pour cette raison que des lois de comportement compressibles ont été développées (Blatz-Ko, 1962 [11]; Peng-Landel, 1975 [86]; Ciarlet-Geymonat, 1982 [28]).

Modéliser la loi de comportement d'un matériau n'est donc pas chose facile puisque de nombreux phénomènes doivent être pris en compte et il serait utopique de chercher une expression de la fonction densité d'énergie permettant une bonne modélisation de tous les phénomènes. Il n'existe donc pas un modèle plus performant que les autres et on ne peut pas affirmer que telle fonction est LA densité d'énergie de tel matériau. Il s'agit donc, pour un problème donné, de déterminer la loi de comportement qui représentera au mieux l'évolution élastique des matériaux étudiés.

En outre, toutes ces lois sont fondées sur l'hypothèse d'isotropie. Pourtant, de récents travaux ont montré que le comportement mécanique des matériaux élastomères peut être anisotrope, en raison du processus de fabrication (Robisson, 2000 [97]) ou de l'histoire du chargement (Laraba-Abbès, 1998 [65]), introduisant ainsi le développement de nouveaux modèles de comportement (Diani *et al.*, 2003 [35]). Cette notion d'anisotropie induite par l'histoire du chargement introduit, en plus du problème de définition du comportement élastique, des difficultés de caractérisation et de modélisation des phénomènes d'endommagement.

L'étude de l'endommagement, qu'il soit en fatigue ou en rupture, est de plus en plus abordée. En effet, d'un point de vue conception, une structure ne peut être considérée comme fiable que dans la mesure où celle-ci résiste aux conditions de chargement de sorte à éviter la rupture (quasi)immédiate, mais également dans la mesure où l'on peut garantir sa résistance dans le temps, c'est-à-dire sa tenue en fatigue, lorsqu'elle est soumise à des chargements cycliques.

Parmi les contributions sur l'étude de l'endommagement des milieux élastomères soumis à des chargements quasi-statiques, qu'elles concernent la rupture, la croissance de porosités ou encore la perte d'incompressibilité, on peut citer : Farris, 1968 [39]; Rice, 1968 [91]; Ghfiri, 1993 [47]; Polignone-Horgan, 1993 [87]; Aït Hocine, 1996 [1]; Andrieux *et al.*, 1997 [2]; Naït Abdelaziz, 1997 [79]; Saanouni *et al.*, 1998 [98]; Brieu, 1999 [18]; Diani, 1999 [34].

Concernant les phénomènes de fatigue mécanique dans les élastomères, ceux-ci sont essentiellement dus à l'adoucissement de ces milieux encore appelé effet Müllins. Ce phénomène,

se traduisant par une perte de rigidité des élastomères au cours d'un chargement cyclique, fût initialement mis en évidence par Bouasse et Carrière (1903 [13]) puis plus largement étudié par Müllins et Tobin (1947 [78]). Pourtant, la plupart des auteurs considèrent ce phénomène comme négligeable au-delà de quelques cycles de chargement (Bueche, 1961 [24]; Müllins, 1969 [77]; Simo, 1987 [102], Govindjee et Simo, 1991 [48]; 1992 [49]; Ogden et Roxburgh, 1999 [84]; Beatty *et al.*, 2000 [7]; Chagnon *et al.*, 2001 [26]), rendant impossible l'utilisation de leurs modèles en fatigue. Malheureusement, peu de travaux ont été réalisés sur la fatigue induite par les phénomènes d'adoucissement. On peut néanmoins citer Miehe (1995 [74]) et Shen *et al.* (2001 [99]).

C'est dans le but d'offrir des outils de simulation du comportement en fatigue de structures élastomères que s'inscrit le travail présenté dans ce mémoire. Ainsi, on se propose au cours des chapitres suivants de mettre en œuvre des techniques expérimentales, de développer un modèle et des outils de simulation numérique séquentiels et parallèles permettant de :

- déterminer une densité d'énergie adaptée au comportement hyperélastique des milieux que nous étudions,
- mettre en évidence les phénomènes d'adoucissement par fatigue ainsi que leurs paramètres influants,
- développer un modèle d'adoucissement par fatigue simple et pertinent,
- introduire des outils de simulation de ces problèmes de fatigue.

A cet effet, ce manuscrit comporte six chapitres qui s'inscrivent dans les trois domaines de la mécanique. Une partie expérimentale, qui a pour objectif de caractériser le comportement hyperélastique et les phénomènes d'adoucissement par fatigue des milieux élastomères, mettra en évidence la spécificité des protocoles et outils requis pour la mise en œuvre de ces essais. Une partie modélisation permettra, dans un cadre thermodynamique approprié, de choisir un modèle de comportement hyperélastique associé aux matériaux étudiés, de confronter des modèles d'adoucissement extraits de la littérature aux "réalités" expérimentales de nos essais et enfin, après avoir montré leurs limites, de proposer un modèle simple permettant de rendre compte de ces phénomènes de fatigue quels que soient les matériaux et les conditions de chargement envisagés. Enfin, une partie numérique sera consacrée au développement d'un algorithme et à la mise en œuvre d'un outil de simulation hautement parallélisable afin de simuler le comportement en fatigue de ces milieux.

Précisons enfin que ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une bourse du ministère au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) et d'un monitorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille (USTL).

Les simulations numériques présentées dans ce mémoire ont été réalisées pour leurs parties séquentielles au sein du LML et pour leurs parties parallèles sur la machine multi-processeurs du Centre de Ressources Informatique de l'USTL.

Le **premier chapitre** introduit le cadre thermodynamique au sein duquel sont formulées les lois de comportements de milieux subissant de grandes déformations élastiques. Nous présenterons ainsi plusieurs lois de comportement sans endommagement extraites de la littérature mettant en évidence la multiplicité des choix. Par la suite, nous introduirons les phénomènes d'adoucissement et présenterons différents modèles existants. Nous

montrons, en révélant, a priori, les limites de ces différents modèles, qu'il est nécessaire de développer un modèle permettant d'appréhender de manière plus satisfaisante les phénomènes d'adoucissement par fatigue.

Afin de modéliser les phénomènes d'adoucissement par fatigue, il est nécessaire d'une part de maîtriser la définition du comportement élastique sans endommagement de ces milieux et, d'autre part de déterminer les paramètres qui influent sur l'adoucissement. Ainsi, au cours du **deuxième chapitre**, après avoir présenté les matériaux élastomères étudiés, nous introduirons les dispositifs expérimentaux mis en place. Outre l'utilisation d'une machine d'essai conventionnelle de traction uniaxiale, nous montrerons qu'il a été nécessaire de développer un système de traction biaxiale. Par ailleurs, nous introduirons la nécessité d'avoir recours à un outil de mesure des déformations locales et sans contact afin de réaliser des essais en grandes déformations fiables. Nous déterminerons ainsi la densité hyperélastique la plus appropriée à nos matériaux.

Les protocoles d'essais présentés au cours du chapitre précédent nous permettront de réaliser, au cours du **troisième chapitre**, des essais de fatigue afin de mettre en évidence les phénomènes d'adoucissement par fatigue et leurs dépendances au nombre de cycles et à la déformation maximale imposée. Nous montrerons les limites des modèles d'adoucissement extraits de la littérature par le biais d'une confrontation aux résultats expérimentaux et, enfin, la nécessité de développer un nouveau modèle qui permettra d'appréhender de manière plus satisfaisante les phénomènes d'adoucissement par fatigue.

Le **quatrième chapitre** est consacré au développement de ce nouveau modèle d'adoucissement par fatigue. Celui-ci est fondé sur une dégradation du comportement du matériau non endommagé par une fonction endommagement dépendant des deux facteurs influant ce phénomène, c'est-à-dire le nombre de cycles et la déformation maximale imposée. Nous montrerons que le modèle proposé n'introduit l'identification que d'un seul paramètre et prévoit le comportement en fatigue pour l'ensemble des matériaux étudiés et ce pour différents cas de chargement (déformation ou contrainte maximale imposée). Nous présenterons également une confrontation des résultats obtenus par le modèle proposé aux résultats expérimentaux et montrerons ainsi que celui-ci permet de prévoir de manière très satisfaisante le comportement en fatigue des matériaux élastomères considérés.

Cependant, la seule détermination du comportement en fatigue ne peut suffire à la conception de structures et un outil numérique est également nécessaire. A cet effet, le **cinquième chapitre** présente un algorithme non incrémental de résolution permettant de traiter les problèmes non linéaires, hyperélastiques, incompressibles et endommageables considérés. Toutes ces particularités sont cependant sources de difficultés en simulation numérique. Nous présenterons les différents techniques mises en œuvre afin de s'affranchir de celles-ci.

Enfin, le **sixième chapitre** présente les résultats de la simulation numérique que nous avons obtenus en implémentant, de façon séquentielle, le modèle d'adoucissement par fatigue, et l'algorithme développés au cours de cette étude, dans un code éléments finis modulaire. La confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux permet

de valider l'algorithme introduit au chapitre précédent. Par ailleurs, nous proposons et testons, au cours de ce chapitre, différentes solutions pour optimiser l'algorithme dans le but d'obtenir des gains en temps de calcul mais également d'accroître le caractère parallélisable de cet algorithme. Enfin, une implémentation sur machine parallèle du code développé permettra d'illustrer les performances parallèles de l'algorithme ainsi que de déterminer la solution d'optimisation la plus efficace en vue de réduire les ressources machines et les temps de calcul requis.

Nomenclature

Désignation	Notation
Structure	\mathcal{B}
Espace tridimensionnel	\mathbb{R}^3
Configuration de référence (Configuration lagrangienne)	Ω_0
Configuration déformée (Configuration eulérienne)	Ω
Point matériel (Configuration lagrangienne)	M_0
Point matériel (Configuration eulérienne)	M
Coordonnées lagrangiennes	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
Coordonnées Eulériennes	$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$
Référentiel Cartésien	$R = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
Tenseur gradient de la déformation	\mathbf{F}
Tenseur des dilatations	\mathbf{C}
Tenseur des contraintes de Cauchy	$\boldsymbol{\sigma}$
Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	\mathbf{T}
Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	$\boldsymbol{\Sigma}$
Vitesse eulérienne	\mathbf{V}
Masse volumique (Configuration lagrangienne)	ρ_0
Masse volumique (Configuration eulérienne)	ρ
Densité d'efforts volumiques (Configuration eulérienne)	\mathbf{G}
Densité d'efforts surfaciques (Configuration eulérienne)	\mathbf{g}
Densité d'efforts volumiques (Configuration lagrangienne)	\mathbf{G}_0
Accélération (Configuration Lagrangienne)	$\boldsymbol{\gamma}_0$
Accélération (Configuration Eulérienne)	$\boldsymbol{\gamma}$
Fonction densité d'énergie endommagée	W
Energie libre	\mathcal{W}
Energie interne spécifique	Ψ
Entropie spécifique	s
Température	T
Vecteur flux de chaleur (Configuration lagrangienne)	\mathbf{q}_0
Normale unitaire extérieure	\mathbf{N}
Variable d'endommagement	d
Densité d'énergie non endommagée	W_0
Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff non endommagé	\mathbf{T}_0
Invariants principaux du tenseur des dilatations	I_1, I_2, I_3
Dilatations ou élongations principales	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Multiplicateur de lagrange ou pression hydrostatique	p

Désignation	Notation
Fonctions de découplage de la densité de Diani	f, g
Déformation	ε
Densité d'énergie de la matrice	W_m
Densité d'énergie des chaînes entre deux points de réticulation	W_{pp}
Densité d'énergie des chaînes entre deux charges	W_{cc}
Fraction volumique des charges	ν_p
Magnitude du tenseur des dilatations	m
Nombre de cycles	N
Longueur utile de l'éprouvette au repos dans la direction axiale	l_0
Longueur utile de l'éprouvette à l'état déformé dans la direction axiale	l
Longueur utile de l'éprouvette au repos dans la direction transverse	w_0
Longueur utile de l'éprouvette à l'état déformé dans la direction transverse	w
Déplacement horizontal	u
Déplacement vertical	v
Rapport de traction entre les directions 1 et 2	η
Section initiale	S_0
Elongation	λ
Force	F
Contrainte de Piola-Kirchhoff uniaxiale dans la direction 1	T^u
Contrainte de Piola-Kirchhoff équi-biaxiale dans la direction 1	T^{eq}
Partie de Ω où des efforts sont imposés	$\partial\Omega_g$
Partie de Ω où des déplacements sont imposés	$\partial\Omega_u$
Temps	t
Espace d'équations globales en espace et paramétrées par le temps	\mathcal{L}
Espace d'équations locales en espaces	\mathcal{NL}
Opérateur de passage de \mathcal{L} dans \mathcal{NL}	H^+
Opérateur de passage de \mathcal{NL} dans \mathcal{L}	H^-
Opérateur divergence (Configuration lagrangienne)	div_x
Opérateur divergence (Configuration eulérienne)	div_X
Opérateur gradient (Configuration lagrangienne)	∇_x
Opérateur gradient (Configuration eulérienne)	∇_X
Tenseur des raideurs	Q
Tenseur des précontraintes	P

Chapitre 1

Comportement et fatigue des milieux élastomères

Les difficultés de caractérisation du comportement en fatigue des milieux élastomères en grande transformation sont de deux types. Le premier est dû à la définition du comportement hyperélastique non endommagé des matériaux, et donc de leur comportement élastique en grandes transformations. Le second provient de la complexité de comprendre et de modéliser les phénomènes de fatigue qui induisent un endommagement des élastomères.

Dans un premier temps, les notions caractéristiques des problèmes en grandes transformations seront rappelées. Par la suite, nous rappellerons la formulation des lois de comportement hyperélastique sans endommagement dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Cela nous permettra d'introduire différents modèles de comportement élastique grandement déformable des milieux élastomères. Enfin, nous introduirons les phénomènes de fatigue des milieux élastomères au cours de chargements cycliques. Nous conclurons ce chapitre en présentant les principaux modèles de fatigue existants dans la littérature et montrerons la nécessité de développer un nouveau modèle afin d'appréhender de manière plus satisfaisante ces phénomènes.

1.1 Le comportement élastique des élastomères

Un élastomère se présente sous la forme d'un ensemble de chaînes macromoléculaires de différentes longueurs, chacune étant repliée sur elle-même sous forme de "pelote statistique" (Bouchereau, 1997 [14]). En pratique, les élastomères ne sont pas utilisés purs. Ainsi, dès 1820 (Dannenberg, 1987 [31]), on y adjoint des charges pour accroître la rigidité de ceux-ci. Les charges les plus couramment utilisées sont les noirs de carbone, mais, depuis les années 40, on utilise également beaucoup les charges de silice. Ces charges utilisées afin de renforcer le produit le sont également pour atteindre certaines propriétés chimiques spécifiques telles que la lutte contre les agents extérieurs (soleil, agents chimiques...) ou encore mécaniques comme une meilleure contrainte ou une élongation à rupture (Kraus, 1965 [59]). Cette introduction de charges permet d'élargir le domaine d'utilisation des élastomères.

Malgré la diversité des élastomères utilisés (caoutchouc naturel, styrène butadiène, néoprène....) et la multitude de formulations* suivant les propriétés chimiques et/ou mécaniques souhaitées, les comportements qui apparaissent, demeurent cependant très caractéristiques. Le comportement mécanique est non linéaire, comme le montre la figure 1.1, et fortement incompressible. La forte non-linéarité se constate en étudiant la courbe de traction (figure 1.1) qui s'incurve rapidement aux grands allongements (domaine III). Des tensions relativement faibles produisent sur les élastomères de très grands allongements allant jusqu'à 7 fois la longueur de l'éprouvette au repos (domaine II). Ainsi, le comportement n'obéit à une loi de comportement linéaire, comme la loi de Hooke, qu'aux petits allongements -de l'ordre de quelques pour cent de déformation-(domaine I)(Flory, 1967 [40]).

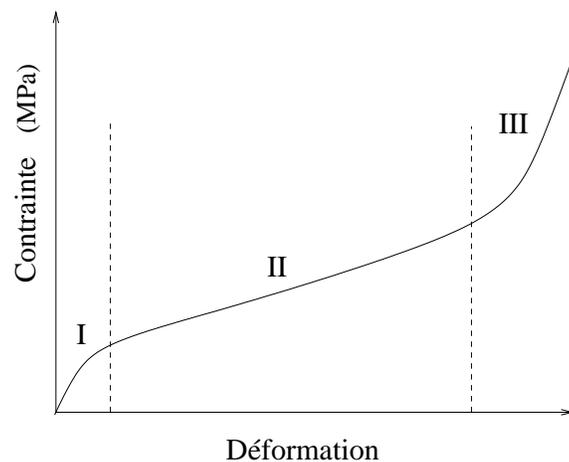


FIG. 1.1 – Comportement non-linéaire d'un élastomère

Pour cette raison, il est nécessaire de se placer dans un contexte de grandes déformations. Nous rappellerons donc dans le paragraphe qui suit les notions de configuration et présenterons les différentes notations et grandeurs qui seront utilisées par la suite. Nous aborderons également les mesures de déformations et l'écriture des lois de comportement.

*La formulation recouvre l'ensemble des savoir-faire nécessaires au développement et à la fabrication d'un produit commercial.

1.2 Quelques rappels sur les grandes déformations

1.2.1 Formalisme des grandes déformations

Soit une structure, \mathcal{B} , occupant à l'état initial non déformé un domaine Ω_0 de \mathbb{R}^3 , appelé configuration de référence. Chaque point M_0 , de la structure \mathcal{B} en Ω_0 , peut être repéré par ses coordonnées lagrangiennes $(x_i)_{(1 \leq i \leq 3)}$ exprimées dans un repère d'espace orthonormé $\mathbb{R}(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Après déformations, la structure \mathcal{B} occupe un nouveau domaine Ω de \mathbb{R}^3 , appelé configuration actuelle ou configuration déformée. Le point M_0 , de Ω_0 , se déplace en M , de Ω , et a alors pour coordonnées $(X_\alpha)_{(1 \leq \alpha \leq 3)}$ appelées coordonnées eulériennes.

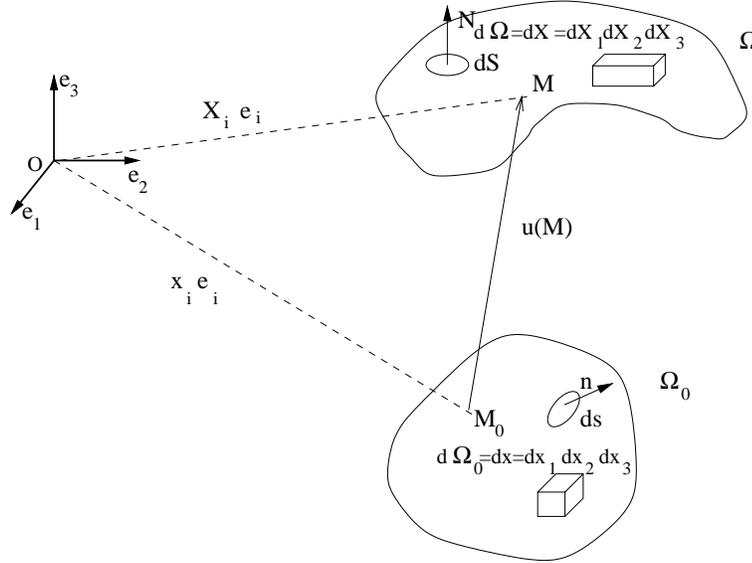


FIG. 1.2 – Configurations eulérienne et lagrangienne

En grandes déformations, les configurations de référence et déformée ne peuvent plus être confondues et un point M_0 de la configuration de référence, Ω_0 , peut être relié à son image M dans la configuration déformée, Ω , par la relation :

$$\mathbf{X} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

où la fonction vectorielle \mathbf{h} , qui permet de passer de Ω_0 à Ω , est une fonction inversible.

En différenciant cette fonction, on peut écrire :

$$dX_i = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \quad (1.2)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.

1.2.1.1 Tenseurs des déformations

Les notations précédemment introduites permettent ainsi de définir la notion de déformation. En effet, introduisons $d\mathbf{M}_0 = (dx_1, dx_2, dx_3)$ et $d\mathbf{M} = (dX_1, dX_2, dX_3)$ des vecteurs

infinitésimaux, respectivement aux points M_0 et M . Pour définir la déformation de $d\mathbf{M}_0$ en $d\mathbf{M}$, lors du passage de la structure \mathcal{B} de Ω_0 à Ω , on peut écrire :

$$d\mathbf{M} = \mathbf{F}d\mathbf{M}_0 \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

\mathbf{F} est appelé tenseur gradient de déformation, il traduit la déformation de la structure (ou encore les déformations locales).

En introduisant le vecteur déplacement de M_0 en M (figure 1.2) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{M}_0\mathbf{M} \quad \text{pour tout } M \in \Omega \quad (1.4)$$

qui se traduit pour tout $M_0 \in \Omega_0$ et $M \in \Omega$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}M_0 &= \mathbf{O}M + \mathbf{u}(M_0) \\ \text{i.e. } X_i &= x_i + u_i(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

le tenseur gradient de déformation peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre 2 et $\nabla_{\mathbf{x}}$ l'opérateur gradient par rapport aux variables lagrangiennes.

Enfin, à partir de ce tenseur gradient de déformation \mathbf{F} , on peut, ce qui nous sera utile par la suite, définir le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit ou tenseur des dilatations \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} \quad (1.7)$$

où \mathbf{F}^t est la matrice transposée de \mathbf{F} .

1.2.1.2 Tenseurs des contraintes

Le vecteur contrainte, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$, caractérise les efforts intérieurs de cohésion. Lorsqu'on déforme le système, les forces intérieures $d\mathbf{f}$ sur la surface dS s'opposent à cette déformation.

Ainsi, l'effort $d\mathbf{f}$ exercé sur une partie du solide à l'état déformé à travers un élément de surface dS de normale extérieure \mathbf{n} s'écrit :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})dS. \quad (1.8)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ est appelé tenseur de Cauchy.

On introduit, à partir de $\boldsymbol{\sigma}$, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T} , faisant intervenir des données géométriques de la configuration initiale, défini par :

$$\mathbf{T} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-t} \quad (1.9)$$

où $J = \det \mathbf{F}$ et \mathbf{F}^{-t} est l'inverse de la transposée de \mathbf{F} .

Ce tenseur est défini tel que :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1.10)$$

où dS_0 est l'élément de surface dans la configuration de référence et \mathbf{n}_0 la normale extérieure à dS_0 .

Ce tenseur est qualifié de tenseur "mixte" car il fait intervenir des quantités lagrangiennes, dS_0 et \mathbf{n}_0 , et eulérienne, $d\mathbf{f}$.

On peut également définir dans la configuration de référence, Ω_0 , le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{\Sigma}$, défini uniquement à partir de quantités lagrangiennes, tel que :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{\Sigma}\mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1.11)$$

où $d\mathbf{f}_0$ est la force intérieure de cohésion dans la configuration de référence.

La relation reliant ces trois tenseurs des contraintes s'écrit alors :

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-t} \quad (1.12)$$

Ainsi, afin de caractériser l'état de contrainte au sein d'une structure, trois possibilités s'offrent à nous en fonction du système de coordonnées retenu :

- Dans le système de coordonnées eulériennes : le tenseur des contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, (1.8). Ce tenseur est symétrique.
- Dans le système de coordonnées lagrangiennes : le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{\Sigma}$, (1.11). C'est un tenseur symétrique mais qui n'a malheureusement aucun sens physique. En effet, il est difficile, voire impossible, de définir directement les efforts intérieurs $d\mathbf{f}_0$, dans la configuration de référence.
- Tenseur des contraintes mixte : le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T} , (1.10). On remarque que, contrairement au tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est non symétrique.

1.2.2 Equations d'équilibre

Nous allons à présent préciser les relations entre les grandeurs mécaniques qui traduisent la notion d'équilibre.

La modélisation des efforts permet, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, d'obtenir les équations du mouvement qui gouvernent la réponse de la structure \mathcal{B} .

Si l'on désigne par \mathbf{V} la vitesse eulérienne d'une particule $M \in \Omega$, alors la quantité de mouvement d'un volume élémentaire quelconque, $\omega \subset \Omega$, (configuration déformée) est :

$$\int_{\omega} \rho \mathbf{V} d\omega \quad \text{où } \rho \text{ est la masse volumique eulérienne en un point quelconque } M \in \omega \subset \Omega$$

Les forces agissant sur ω peuvent être de deux types :

- les efforts volumiques, \mathbf{G} , imposés à l'ensemble de ω ,
- les densités surfaciques d'efforts, \mathbf{g} , imposées sur le bord $\partial\omega$ de ω .

La résultante de ces efforts est donnée par :

$$\int_{\omega} \rho \mathbf{G} d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{g} dS$$

Le principe fondamental de la dynamique (ou conservation de la quantité de mouvement), appliqué à ω , permet alors d'obtenir deux équations dont la première, qui représente l'équation des forces, s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{V} d\omega = \int_{\omega} \rho \mathbf{G} d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{g} dS \quad (1.13)$$

La deuxième équation, qui représente l'équation des moments, permet de montrer la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (Maugin, 1988 [71]).

Cependant, nous avons vu précédemment que la déformation de la structure \mathcal{B} pouvait être représentée dans deux configurations distinctes. Nous allons donc exprimer l'équation (1.13) dans chacune d'entre elles.

1.2.2.1 Configuration eulérienne

En introduisant le tenseur des contraintes de Cauchy, défini au point $M \in \Omega$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}(M)(\mathbf{N}) = \mathbf{g} \quad \forall M \in \partial\omega, \omega \subset \Omega \quad (1.14)$$

où \mathbf{N} est la normale extérieure unitaire à $\partial\omega$ au point M , on montre que (1.13) est, sous forme locale, équivalente à :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \rho \mathbf{G} + \text{div}_X \boldsymbol{\sigma}, \forall M \in \omega \subset \Omega \quad (1.15)$$

où $\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ est l'accélération eulérienne au point M et div_X l'opérateur divergence par rapport aux variables eulériennes.

L'inconvénient de cette équation du mouvement (1.15) est qu'elle est exprimée dans la configuration eulérienne qui est, a priori, inconnue. Il semble donc plus simple d'exprimer le principe fondamental de la dynamique dans une configuration connue, telle que la configuration initiale.

1.2.2.2 Configuration lagrangienne

Etant données les relations qui existent entre la configuration lagrangienne, $\omega_0 \subset \Omega_0$, et la configuration eulérienne, $\omega \subset \Omega$, (équations (1.5) et (1.9)), on montre facilement (Ciarlet, 1986 [29]; Duvaut, 1990 [36]) que l'équation (1.13) équivaut, sous forme locale, à :

$$\rho_0 \boldsymbol{\gamma}_0 = \rho_0 \mathbf{G}_0 + \text{div}_x \mathbf{T}, \forall M_0 \in \omega_0 \subset \Omega_0 \quad (1.16)$$

où ρ_0 est la masse volumique lagrangienne; $\boldsymbol{\gamma}_0$ l'accélération au point M_0 , exprimée en variables lagrangiennes; \mathbf{G}_0 les efforts imposés dans la configuration lagrangienne

($\mathbf{G}_0 = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}$); \mathbf{T} le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, défini par la relation (1.9) et div_x l'opérateur divergence par rapport aux variables lagrangiennes.

On constate que la relation (1.16) est, dans la mesure où Ω_0 est connue, beaucoup plus simple à manipuler que l'équation (1.15). Par conséquent, c'est cette relation, exprimée dans la configuration lagrangienne ou non-déformée, que nous utiliserons par la suite.

À présent que les équations du mouvement (1.15) et (1.16) ont été définies, nous allons nous attacher à la modélisation du comportement des matériaux élastomères.

1.3 Loi de comportement

1.3.1 Inégalité de Clausius-Duhem

1.3.1.1 Cas général

Comme tout matériau, le comportement des élastomères doit satisfaire les équations classiques de la thermodynamique et plus particulièrement l'inégalité de Clausius-Duhem. Celle-ci, obtenue dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, s'écrit (Lemaître, 1988 [66]; Duvaut, 1990 [36]) :

$$\mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \rho_0 \left(T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{\mathbf{q}_0}{T} \nabla_x T \geq 0 \quad \text{en variables lagrangiennes} \quad (1.17)$$

où l'on note $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ le produit contracté des tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} ($\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$), Ψ l'énergie interne spécifique, T la température, s l'entropie spécifique et \mathbf{q}_0 le flux de chaleur.

En introduisant la fonction énergie libre, \mathcal{W} , définie en configuration lagrangienne par :

$$\mathcal{W} = \Psi - Ts \quad (1.18)$$

l'inégalité (1.17) devient :

$$\mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + s \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\mathbf{q}_0}{T} \nabla_x T \geq 0 \quad (1.19)$$

Ainsi, en supposant que le potentiel énergie libre \mathcal{W} admet les dépendances suivantes :

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{F}, T, d) \quad (1.20)$$

où d sont les variables d'endommagement.

de sorte que :

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial t} \quad (1.21)$$

dès lors, l'équation (1.19) équivaut à :

$$\left(\mathbf{T} - \rho_0 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}} \right) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \rho_0 \left(s + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial t} - \frac{\mathbf{q}_0}{T} \nabla_x T \geq 0 \quad (1.22)$$

Dans le cas isotherme et dans la mesure où l'inégalité de Clausius-Duhem doit être vérifiée quelle que soit l'histoire des variables d'état \mathbf{F} et d , on obtient, entre autre, la loi de comportement dérivant de la fonction densité d'énergie de déformation W et qui relie le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T} , au tenseur gradient de déformation, \mathbf{F} , définie par :

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, d) \quad (1.23)$$

1.3.1.2 Cas particulier des matériaux élastiques sans endommagement

Dans le cas où les matériaux étudiés possèdent des propriétés d'isotropie dans la configuration non déformée et satisfont le principe d'indifférence matérielle (c'est-à-dire que la densité d'énergie est invariante dans le cas d'un changement de référentiel), et dans la mesure où aucun phénomène d'endommagement n'est considéré, Rivlin (1948 [92]) et Ciarlet (1986 [29]) ont montré que la densité d'énergie, W_0 , de ces matériaux n'est fonction que des invariants principaux du tenseur des dilatations \mathbf{C} , soit :

$$W_0(\mathbf{F}) = W_0(\mathbf{C}) = W_0(I_1, I_2, I_3) \quad (1.24)$$

avec :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 \\ I_3 = \det \mathbf{C} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{cases} \quad (1.25)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les dilatations principales du tenseur gradient de déformation \mathbf{F} .

La relation de comportement s'écrit alors :

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial W_0(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W_0(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{F}} \quad (1.26)$$

où \mathbf{T}_0 est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff du matériau non endommagé.

Compte tenu de (1.25), on montre aisément que :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} = 2(I_1\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{C}) \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} = 2I_3\mathbf{F}^{-t} \quad (1.27)$$

ainsi, la relation de comportement (1.26) devient :

$$\mathbf{T}_0 = 2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} \mathbf{F} + \frac{\partial W_0}{\partial I_2} (I_1\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{C}) + \frac{\partial W_0}{\partial I_3} I_3\mathbf{F}^{-t} \right) \quad (1.28)$$

Une grande caractéristique des matériaux élastomères est leur caractère quasi-incompressible. Dans le cas des élastomères chargés avec des charges très fines, l'incompressibilité de la matrice caoutchoutique est préservée. Heuillet et Dugautier (1997 [53]) ont montré sur

des essais simples comme la traction uniaxiale ou biaxiale que les variations de volume restaient extrêmement faibles, pratiquement non détectables du fait des très faibles niveaux de pression hydrostatique. Donc, tant que la pression hydrostatique n'est pas trop élevée, l'hypothèse d'incompressibilité reste valable et cette hypothèse sera toujours assumée pour notre étude.

Ainsi, I_3 reste constant et égal à 1. La fonction densité d'énergie ne dépend plus alors que des deux premiers invariants I_1 et I_2 .

Robisson (2000 [97]) montre que lors d'une transformation isochore, la contrainte de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}_0$, introduite par l'incompressibilité, est de la forme $-p\mathbf{1}$. La relation (1.9) nous permet alors d'écrire que la contrainte de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T}_0 , introduite également par l'incompressibilité, est de la forme $-p\mathbf{F}^{-t}$ (car $J = \det\mathbf{F} = I_3 = 1$).

Ainsi, la relation de comportement se réduit à :

$$\mathbf{T}_0 = 2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} \mathbf{F} + \frac{\partial W_0}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{C}) \right) - p \mathbf{F}^{-t} \quad \text{et} \quad \det \mathbf{F} = 1 \quad (1.29)$$

où p est une pression hydrostatique arbitraire ou multiplicateur de Lagrange.

De nombreux auteurs ont adopté cette approche phénoménologique, à savoir une modélisation par une densité d'énergie élastique W_0 , fonction des invariants principaux. Nous rappelons dans le paragraphe qui suit quelques modèles hyperélastiques classiquement utilisés.

1.3.2 Quelques exemples de densité d'énergie sans endommagement

La plupart des densités d'énergie proposées dans la littérature s'expriment comme une fonction donnée des invariants, I_1 et I_2 , du tenseur des dilatations, \mathbf{C} , pour modéliser le comportement des milieux élastomères. Nous présentons par la suite, de façon non exhaustive, quelques uns de ces modèles les plus couramment utilisés.

1.3.2.1 Densités d'énergie à expression imposée

Rivlin (1948 [92], 1949 [93]) a proposé une forme polynomiale de la densité d'énergie :

$$W_0(I_1, I_2) = \sum_{m,n} C_{mn} (I_1 - 3)^m (I_2 - 3)^n. \quad (1.30)$$

Cette expression polynomiale est largement utilisée sous forme simplifiée. Ainsi, Treloar (1975 [107]) a abouti à la forme la plus simple qu'est le modèle néo-hookien ($n=0$ et $m=1$) :

$$W_0(I_1) = C_{10} (I_1 - 3). \quad (1.31)$$

Ce modèle permet une bonne représentation des essais de traction uniaxiale mais uniquement pour de faibles déformations. En effet, il ne permet pas de rendre compte de la rigidité du matériau pour de grandes déformations (voir partie III figure 1.1) (Treloar,

1944 [106], 1975 [107]).

La restriction au premier ordre de la densité proposé par Rivlin donne la densité de Mooney-Rivlin (1940 [75]) :

$$W_0(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (1.32)$$

qui est largement utilisée de par sa simplicité. Cette expression permet une bonne représentation des essais de traction simple et de cisaillement simple jusqu'à 300% de déformation pour certains caoutchoucs. En revanche, il n'est pas très représentatif pour les sollicitations biaxiales et en cisaillement pur (Mooney, 1940 [75]).

Bien qu'introduisant un nombre très important de paramètres, la densité généralisée de Rivlin (1.30) est l'une des densités les plus utilisées, notamment dans les codes éléments finis.

Hart-Smith (1966 [51]) propose :

$$W_0(I_1, I_2) = C_1 \int_3^{I_1} \exp\{C_3(I_1 - 3)^2\} dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right). \quad (1.33)$$

Ce modèle présente l'avantage de représenter l'évolution brutale de la rigidité aux très grandes déformations, jusqu'à 500%, grâce à la constante C_3 dont le rôle est prédominant en grandes déformations (Hart-Smith 1966 [51], Alexander 1968 [3]).

Cette liste n'est pas exhaustive et il existe bien d'autres densités d'énergie dont l'écriture est plus ou moins complexe comme la densité de Rivlin et Saunders (1951 [94]) ou de Gent et Thomas (1958 [43]), ou encore celle d'Ogden (1972 [82], 1984 [83]) qui s'exprime cette fois, non pas en fonction des invariants principaux, mais en fonction des dilatations principales λ_1 , λ_2 et λ_3 définies en (1.25).

Cependant, l'ensemble de ces densités ne permet pas toujours de rendre compte du comportement de façon fiable, comme nous le verrons au cours du chapitre suivant. En outre, l'introduction d'une forme prédéterminée de la densité rend parfois l'identification complexe et le nombre de paramètres trop élevé.

1.3.2.2 Densité d'énergie à expression non imposée

C'est pour pallier les difficultés engendrées par le choix de densités d'énergie que Lambert-Diani et Rey (1998 [63], 1999 [64]) proposent, plutôt qu'une densité d'expression imposée, une méthode d'identification laissant l'utilisateur libre de ses choix en ce qui concerne l'expression de la densité d'énergie. Cette méthode présente en effet l'avantage de ne pas imposer a priori, contrairement aux densités précédemment présentées, la forme initiale de la densité d'énergie W_0 .

Les travaux de Rivlin et Saunders (1951 [94]) et de Kawabata *et al.* (1977 [56], 1981 [57]) ont montré que pour des déformations inférieures à 50%, les dérivées partielles de W_0 sont

des fonctions assez complexes des deux premiers invariants I_1 et I_2 . Cependant, dans le cadre de notre travail, c'est-à-dire dans le domaine des grandes déformations, Obata *et al.* (1970 [81]) et Kawabata *et al.* (1977 [56]) ont montré qu'il était parfaitement raisonnable de supposer que $\frac{\partial W_0}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W_0}{\partial I_2}$ dépendaient respectivement uniquement de I_1 et I_2 . Nous pouvons donc introduire les fonctions f et g telles que :

$$\frac{\partial W_0}{\partial I_1} = f(I_1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial I_2} = g(I_2). \quad (1.34)$$

Les expériences de Treloar (1944 [106]) ont quant à elles montré que la réponse du matériau dépend de l'état de déformation. Il est donc nécessaire de considérer différentes expériences afin de déterminer les fonctions f et g , expériences qui sont classées selon le nombre de directions d'étirement.

De plus, Kawabata *et al.* (1981 [57]) et Fukahori *et al.* (1991 [41]) ont montré que pour les expériences faisant intervenir une seule direction d'étirement, la contribution de $g(I_2)$ est négligeable devant celle de $f(I_1)$. On peut alors écrire que :

$$f(I_1) \gg g(I_2) \quad \text{en traction uniaxiale.} \quad (1.35)$$

Lambert-Diani et Rey (1998 [63]) proposent donc de déterminer la fonction $f(I_1)$ sur un essai de traction uniaxiale et la fonction $g(I_2)$ sur un essai faisant intervenir deux directions d'étirement comme, par exemple, la traction biaxiale ou plus simplement la traction équibiaxiale. Les expressions de $f(I_1)$ et $g(I_2)$ sont variables en fonction des matériaux considérés et le choix de celles-ci est laissé à l'utilisateur (Diani, 1999 [34]).

Nous présenterons au cours du chapitre suivant une confrontation des différentes densités d'énergie introduites. Celles-ci seront identifiées à partir d'essais réalisés au sein du laboratoire.

1.4 Phénomène d'adoucissement par fatigue

1.4.1 Présentation

Lorsqu'une éprouvette d'élastomère est soumise à un chargement cyclique, la contrainte à un cycle donné pour atteindre le même niveau de déformation qu'au cycle précédent est toujours plus faible. Ce phénomène est appelé phénomène d'adoucissement.

Cependant, la chute de contrainte d'un cycle à l'autre ne peut suffire à définir le phénomène d'adoucissement. En effet, on peut distinguer deux types de chute de contrainte lors d'un chargement cyclique : la première, très importante, apparaît entre les charges des premier et deuxième cycles et traduit un phénomène d'endommagement fort au cours des deux premiers cycles ; la seconde, apparaît entre chaque cycle et est d'intensité beaucoup plus faible.

A ce titre, Miehe (1995 [74]), à partir d'observations expérimentales sur des essais cycliques à déformation maximale imposée, constate que l'adoucissement fait intervenir deux types d'endommagements.

1.4.1.1 Endommagement discontinu

Celui-ci ne dépend que de l'élongation maximale vue par le matériau au cours de son histoire. Il caractérise la chute de contrainte entre les premier et deuxième cycles à même niveau de déformation imposé. Celui-ci est communément appelé effet Müllins.

L'effet Müllins est considéré comme un endommagement du matériau élastomère. Ce phénomène est représenté sur la figure 1.3 dans le cas d'un matériau idéal, c'est-à-dire sans phénomène viscoélastique et sans dépendance à la vitesse de déformation.

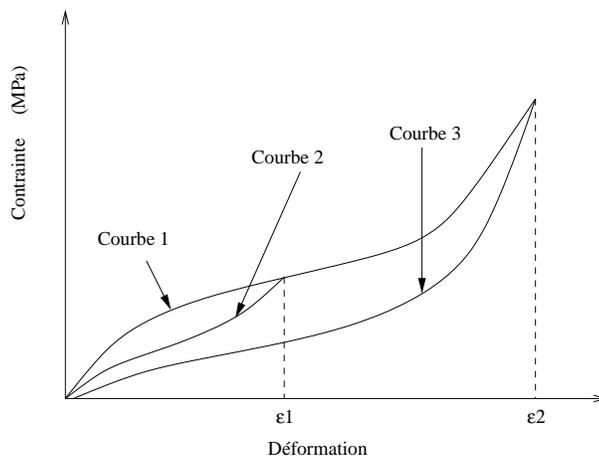


FIG. 1.3 – Schématisation de l'adoucissement

L'effet Müllins est, pour ce matériau idéal, décrit de la manière suivante :

un matériau élastomère est chargé jusqu'à une déformation ε_1 (courbe 1) puis, il est déchargé jusqu'à une déformation nulle. La réponse emprunte alors un autre chemin (courbe 2). Ensuite, lorsque le matériau est chargé de nouveau jusqu'à une déformation $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, puis déchargé, il se comporte de manière élastique, empruntant toujours le même chemin (courbe 2). En revanche, si le matériau est chargé jusqu'à une déformation $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, la réponse du matériau suit la courbe 2 jusqu'à $\varepsilon = \varepsilon_1$ puis, réemprunte la courbe 1 jusqu'à $\varepsilon = \varepsilon_2$. Ensuite, lorsque le matériau est déchargé, sa réponse emprunte la courbe 3.

Ce phénomène a été observé pour la première fois par Bouasse et Carrière (1903 [13]) et il apparaît aussi bien dans les élastomères purs que dans les élastomères chargés. Cependant ce phénomène est nettement plus prononcé dans les élastomères chargés.

Müllins et Tobin (1947 [78]) et Müllins (1969 [77]) ont étudié ce phénomène physique plus en détails, qui porte le nom d'effet Müllins.

1.4.1.2 Endommagement continu

Appelé aussi accumulation d'endommagement, il dépend de toute l'histoire de la déformation vue par le matériau. Il représente la chute de contrainte au cours du chargement cyclique au delà des deux premiers cycles.

On peut voir sur la figure qui suit (figure 1.4), une représentation de ce mécanisme d'endommagement (le trait pointillé représente le comportement du matériau non endommagé).

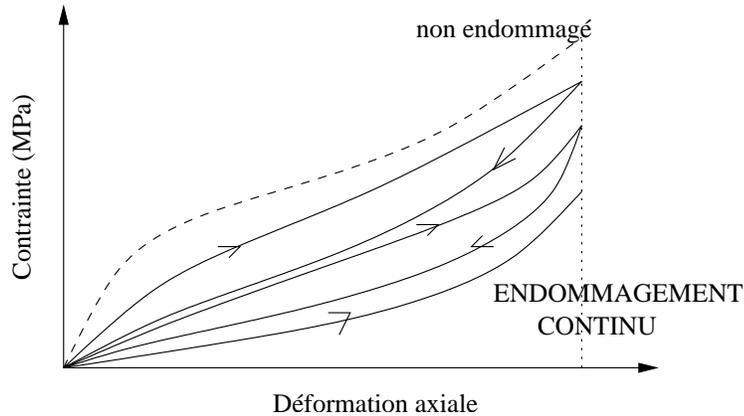


FIG. 1.4 – Cycles de traction : illustration du modèle d'endommagement continu selon Miehe (1995) [74]

Cet endommagement est un phénomène cumulatif. Chaque chargement, à un niveau de déformation maximale imposé, induit un endommagement qui amoindrit le niveau de contrainte au cycle suivant comme le montre la figure 1.4.

1.4.1.3 Remarques

Il n'existe pas d'explication unanime au phénomène d'adoucissement, qu'il soit continu ou discontinu. Plusieurs explications et modélisations ont été avancées ces dernières années. Müllins (1969 [77]) suggérait que l'adoucissement était dû au désenchevêtrement des chaînes macromoléculaires qui entraînerait une destruction des interactions entre les particules et la matrice. Bueche (1961 [24]) puis, plus récemment, Govindjee et Simo (1987 [102], 1991 [48], 1992 [49]), ont expliqué que l'adoucissement de l'élastomère chargé était entraîné par le fait que, les chaînes, étirées au-delà de leur longueur maximale, se rompent ou se désorbent (c'est-à-dire se libèrent) de la surface des charges.

Néanmoins, l'adoucissement est généralement interprété comme étant dû à de l'endommagement. De plus, comme la longueur des chaînes varie, celles-ci cassent à différents niveaux de déformation, ce qui implique que si la déformation augmente, l'endommagement peut être regardé comme prenant place de manière continue.

Néanmoins, la prise en compte de ces deux mécanismes est extrêmement complexe. Ainsi, nombre d'auteurs ont préféré introduire des modèles plus simples, en négligeant l'un des deux mécanismes d'endommagement (continu ou discontinu), tout en garantissant que ceux-ci permettaient de rendre compte de l'évolution du comportement à plus ou moins grand nombre de cycles.

1.4.2 Modélisations existantes

Il a souvent été choisi de modéliser ce phénomène d'adoucissement par de l'endommagement. Certains modèles sont fondés sur une description physique et mécanique de l'endommagement tels que le modèle unidimensionnel de Bueche (1961 [24]) ou encore le modèle tridimensionnel de Govindjee et Simo (1991 [48]). Ce dernier est fondé sur le développement d'une fonction densité d'énergie pour le matériau élastomère (théorie de la moyenne). En effet, dans ce modèle, l'élastomère y est vu comme un matériau composite contenant de la gomme et des charges rigides. La densité d'énergie de la matrice W_m est alors composée de la densité d'énergie des chaînes situées entre deux points de réticulation (un noeud de réticulation est le site d'une macromolécule d'où partent au moins 4 chaînes et qui résulte de réactions ou d'interactions entre macromolécules préexistantes) W_{pp} , et de la densité d'énergie des chaînes situées entre deux charges W_{cc} soit :

$$W_m = (1 - \nu_p)(W_{pp} + W_{cc}) \quad \text{avec } \nu_p \text{ fraction volumique de charges.} \quad (1.36)$$

Cependant l'approche microscopique n'a pas fait l'objet de cette étude.

En effet, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'approche macroscopique, c'est-à-dire aux modèles phénoménologiques, qui décrivent au mieux le phénomène d'adoucissement, sans se préoccuper d'une quelconque explication physique. Ces modèles s'appuient sur des considérations mécaniques macroscopiques.

Les modèles étudiés s'appuient sur les développements de Lemaître *et al.* (1988 [66]) appliqués à la description phénoménologique de l'endommagement. Ces auteurs considèrent que la densité d'énergie de déformation endommagée, W , peut s'écrire en fonction de la densité d'énergie de déformation non endommagée, W_0 , grâce à la relation suivante :

$$W = (1 - d)W_0 \quad (1.37)$$

où d est la variable d'endommagement liée à l'adoucissement.

1.4.2.1 Modèle à endommagement discontinu

L'endommagement discontinu est largement étudié dans la littérature. En effet, de nombreux auteurs considèrent que la chute de contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée, a surtout lieu entre les premier et deuxième cycles (Mullins et Tobin, 1947 [78]; Ogden et Roxburgh, 1999 [84]; Beatty et Krishnaswamy, 2000 [7]). Ils considèrent la chute de contrainte par fatigue négligeable et modélisent ainsi l'adoucissement en fonction de l'intensité du chargement imposé et indépendamment de l'historique de chargement du matériau.

Ogden et Roxburgh (1999 [84]) supposent que le comportement peut être décrit par une densité d'énergie de la forme $W(\mathbf{F}, d)$ où d est une variable d'endommagement. Ainsi, dans le cas de matériaux incompressibles, la contrainte de Piola-Kirchhoff s'écrit :

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, d) - p\mathbf{F}^{-t} \quad (1.38)$$

Au cours d'essais cycliques, d peut être "actif" ou "non actif" et peut passer d'un état à l'autre de manière continue. Lorsque d n'est "pas actif", le matériau se comporte de manière élastique avec comme densité d'énergie $W(\mathbf{F}, d) = W(\lambda_1, \lambda_2, d)$ où d est supposé constant. En revanche, lorsque d est "actif", il peut être déterminé implicitement en fonction de \mathbf{F} grâce à la relation :

$$\frac{\partial W}{\partial d}(\mathbf{F}, d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \chi(\mathbf{F}) = \chi(\lambda_1, \lambda_2) \quad (1.39)$$

Le matériau se comporte alors de nouveau de manière élastique mais cette fois avec la densité d'énergie $W(\mathbf{F}, \chi(\mathbf{F}))$.

Par la suite, les auteurs proposent le modèle suivant pour décrire l'effet Müllins :

$$W(\mathbf{F}, d) = d\tilde{W}(\mathbf{F}) + \phi(d) \quad (1.40)$$

où \tilde{W} est définie par $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) = W(\lambda_1, \lambda_2, 1)$, $\phi(d)$ est une fonction endommagement qui est choisie arbitrairement mais qui satisfait néanmoins quelques conditions telles que $\phi(1) = 0$, $\phi'(1) = -\tilde{W}(\lambda_{1m}, \lambda_{2m})$, où λ_{1m} et λ_{2m} sont les élongations principales atteintes au cours du premier cycle de chargement, et $\phi''(d) < 0$.

Plus récemment, Beatty et Krishnaswamy (2000 [7]) ont proposé un modèle qui décrit l'effet Müllins représenté sur la figure 1.3. Ces auteurs décrivent le phénomène grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (1 - d(m))\mathbf{T}_0 & \text{si } m \geq m_{max} \\ \mathbf{T} = (1 - d(m_{max}))\mathbf{T}_0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.41)$$

où \mathbf{T} est la contrainte de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T}_0 la contrainte de Piola-Kirchhoff dans le matériau élastique non endommagé (c'est-à-dire déterminée à l'aide d'une densité d'énergie telle que celles vues paragraphe 1.3.2), m la magnitude de \mathbf{C} et m_{max} le maximum de la magnitude m atteint au cours des chargements précédents.

Cette magnitude, m , est définie par la relation suivante :

$$m = \|\mathbf{C}\| = \sqrt{\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}} = \sqrt{tr(\mathbf{C}^2)}. \quad (1.42)$$

On peut la définir en fonction des invariants principaux du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} . Ainsi, dans le cas d'un matériau incompressible, $I_3 = 1$, m s'écrit :

$$m = \sqrt{I_1^2 - 2I_2}. \quad (1.43)$$

On constate facilement que dans la configuration de référence, dans la mesure où \mathbf{C} est égal au tenseur identité, $I_1 = I_2 = 3$ et donc $m = \sqrt{3}$.

La fonction d'adoucissement, $d(m)$, est quant à elle définie par la relation :

$$d(m) = 1 - \exp(-b(m - \sqrt{3})) \quad (1.44)$$

où b est un paramètre matériau, positif, appelé vitesse d'adoucissement et $\sqrt{3}$ est une constante provenant de la définition de la magnitude, m , dans la configuration de référence.

1.4.2.2 Modèle à endommagement continu

L'endommagement continu (figure 1.4) est quant à lui beaucoup moins étudié dans la littérature. En effet, beaucoup d'auteurs pensent que cette partie de l'endommagement est négligeable par rapport à l'endommagement discontinu (qui apparaît lui, lors de la première montée en charge), citons par exemple Chagnon *et al.* (2001 [26]).

Shen *et al.* (2001 [99]) ont cependant modélisé cet endommagement pour une mousse polyuréthane, qui est un élastomère compressible, soumise à de la compression cyclique. Les résultats expérimentaux obtenus sont représentés sur la figure 1.5.

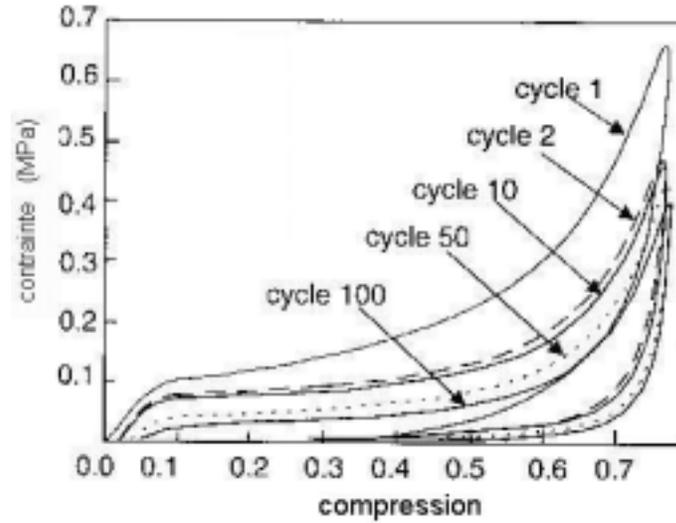


FIG. 1.5 – Courbes expérimentales obtenues par Shen, Golnaraghi et Plumtree (2001 [99]) dans le cas compressible

Ils modélisent ce phénomène par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{ch}(N, \varepsilon) = C_1(N)\mathbf{T}_{ch}(1, \varepsilon) + C_2(N) & N \geq 2 \text{ pour la charge} \\ \mathbf{T}_{dch}(N, \varepsilon) = C_3(N)\mathbf{T}_{dch}(1, \varepsilon) + C_4(N) & N \geq 2 \text{ pour la décharge} \end{cases} \quad (1.45)$$

où $\mathbf{T}_{ch}(N, \varepsilon)$ est la contrainte à la $N^{ième}$ charge, $\mathbf{T}_{ch}(1, \varepsilon)$ la contrainte à la première charge, $\mathbf{T}_{dch}(N, \varepsilon)$ la contrainte à la $N^{ième}$ décharge, $\mathbf{T}_{dch}(1, \varepsilon)$ la contrainte à la première décharge, ε la déformation et $C_1(N)$, $C_2(N)$, $C_3(N)$ et $C_4(N)$ des coefficients fonctions du nombre de cycle N .

Après analyse sur 100 cycles, les auteurs constatent que ces coefficients peuvent se mettre sous la forme :

$$C_i(N) = \frac{a_{1i}N + a_{2i}}{a_{3i}N^2 + a_{4i}N + a_{5i}} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.46)$$

où les a_{ij} ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$) sont des paramètres matériaux à identifier. Ce modèle reste néanmoins purement descriptif et introduit un nombre de paramètres a_{ij} ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$) trop important pour leur donner un sens physique.

Les mêmes courbes sont obtenues dans le cas incompressible, citons par exemple les courbes obtenues par Laiarinandrasana *et al.* (2003 [62]) pour un matériau soumis à 50% de déformation maximale imposée seulement (figure 1.6).

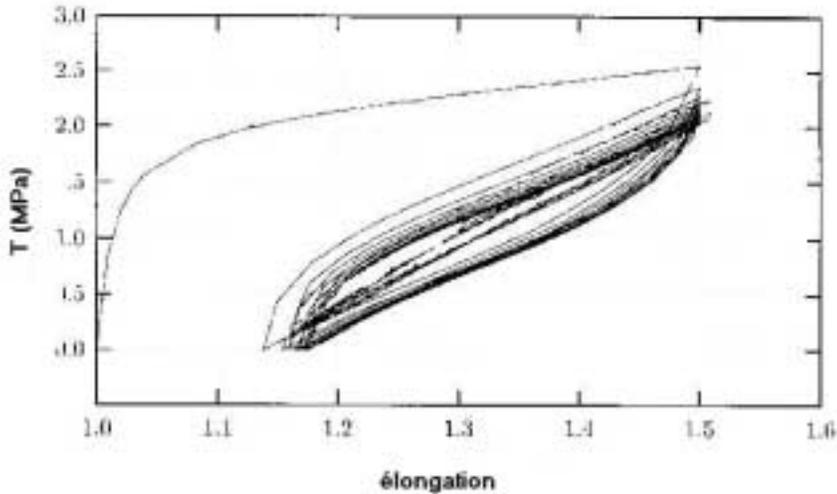


FIG. 1.6 – Courbes expérimentales obtenues sur un SBR renforcé avec de la silice dans le cas incompressible (Laiarinandrasana *et al.* 2003 [62])

1.4.3 Remarques sur ces différents modèles

Comme le montre Miehe [74], la chute de contrainte lors d'un chargement cyclique est due à deux types d'endommagements. L'un, qualifié de discontinu, traduit la chute de contrainte lors de la première charge à un niveau de déformation donné. L'autre, qualifié de continu, traduit un cumul de dommages infinitésimaux lors de plusieurs cycles de charge.

Cependant, pour la plupart des auteurs, cette chute de contrainte se stabilise dès les tous premiers cycles de chargement (Chagnon *et al.*, 2001 [26] [27]). En fait, ils ne considèrent que la partie discontinue de l'endommagement et considèrent que seule l'intensité des déformations imposées est une donnée influente. Beatty et Krishnaswamy [7], qui proposent un modèle ayant cette approche, ne prennent en compte que la déformation, par l'intermédiaire de la magnitude m , comme seul paramètre pour modéliser la chute de contrainte. Une telle approche suppose donc que l'historique de chargement est négligeable et que l'adoucissement par fatigue est négligeable même au cours du temps.

Quelques auteurs considèrent, pour leur part, que la chute de contrainte ne dépend que de l'historique du chargement et n'est donc due qu'au phénomène d'endommagement continu. Par exemple, Shen *et al.* [99] proposent un modèle qui fait intervenir le nombre de cycles mais pas l'intensité des déformations vues par le matériau.

Pourtant, lorsqu'on représente dans les cas compressible ou incompressible, la contrainte maximale à une déformation donnée en fonction du nombre de cycles (figures 1.7 et 1.8), on constate facilement que le phénomène d'adoucissement dépend de deux paramètres :

- d'une part de la déformation maximale imposée, dépendance prise en compte pour les modèles de type endommagement discontinu,
- et d'autre part du nombre de cycles de chargement imposé, pris en compte par les modèles de type endommagement continu.

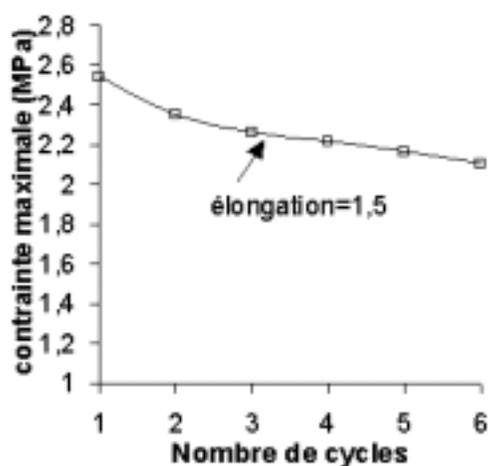


FIG. 1.7 – Contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour les courbes expérimentales obtenues par Laiarinandrasana *et al.* (2003 [62]) pour un SBR renforcé avec de la silice

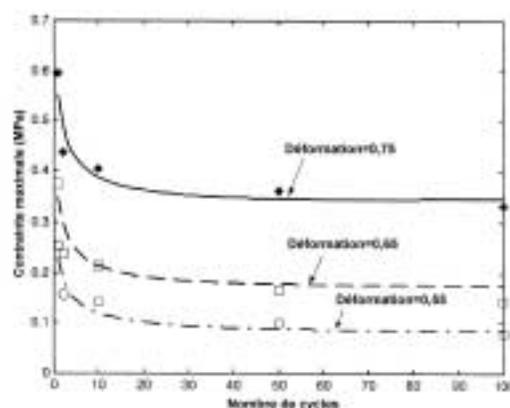


FIG. 1.8 – Contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour les courbes expérimentales obtenues par Shen, Golnaraghi et Plumtree (2001 [99]) pour une mousse polyuréthane

Ces deux courbes, montrent bien que la chute de contrainte entre les premier et deuxième cycles est de 8% dans le cas de Laiarinandrasana *et al.* pour 50% de déformation, et de 27% dans le cas de Shen *et al.* pour une compression de 25%, alors que la chute de contrainte entre les cycles 2 et 6 est de 10% pour Laiarinandrasana *et al.* et de 25% entre les cycles 2 et 100 dans le cas de Shen *et al.*.

Il semble donc que lors de chargements cycliques, la chute de contrainte au delà des deux premiers cycles ne puisse être négligée. Ainsi les phénomènes d'adoucissement par fatigue, mis en évidence figures 1.7 et 1.8, ne pourront être modélisés par des modèles ne prenant en compte que l'endommagement discontinu qui, par définition, les considère comme négligeables.

Des modèles ne tenant compte que de l'endommagement continu permettent, a priori,

de mieux rendre compte de la fatigue dans la mesure où ils la considèrent comme non négligeable. Cependant un tel modèle considère que l'adoucissement par fatigue dépend uniquement du nombre de cycles de charge vus par le matériau.

Pourtant, les figures 1.7 et 1.8 font également clairement apparaître que les phénomènes de fatigue dépendent non seulement du nombre de cycles de charge mais également de l'amplitude des déformations mises en jeu.

Il semble nécessaire de développer un nouveau modèle d'adoucissement qui prenne en compte ces deux paramètres afin de pouvoir appréhender les problèmes d'adoucissement par fatigue.

Nous allons, par la suite, développer un nouveau modèle de fatigue qui nous permettra d'appréhender de manière plus satisfaisante les phénomènes d'adoucissement par fatigue et nous confronterons les résultats obtenus grâce à ce nouveau modèle à ceux obtenus par deux modèles de la littérature, à savoir celui de Beatty *et al.* [7] et celui proposé par Shen *et al.* [99], illustrant les deux approches précédemment citées.

Nous allons successivement présenter au cours du chapitre suivant, l'ensemble des essais et protocoles expérimentaux mis en oeuvre afin d'identifier le comportement hyperélastique non endommagé, et utiliser ces protocoles expérimentaux pour mettre en évidence les phénomènes d'adoucissement par fatigue et les modéliser.

Chapitre 2

Mise en oeuvre expérimentale et caractérisation du comportement non endommagé de milieux élastomères en grandes déformations

Au cours du chapitre précédent, nous avons montré que la modélisation du comportement en fatigue des milieux élastomères requérait dans un premier temps la définition du comportement non endommagé de ces milieux.

C'est conscients de la multiplicité des modèles de comportement hyperélastique existants que nous avons mis en oeuvre un ensemble de dispositifs expérimentaux afin de pouvoir justifier les choix réalisés pour modéliser le comportement purement élastique de ces milieux.

Après avoir décrit les matériaux élastomères que nous avons étudiés, nous présenterons le protocole expérimental de traction uniaxiale utilisé pour caractériser le comportement. Nous montrerons qu'un système d'acquisition locale est nécessaire pour obtenir des mesures précises de la déformation. Ce système est décrit ainsi que la méthode de mesure des déformations locales vraies. Nous montrerons ensuite qu'une caractérisation fiable du comportement ne peut être possible que dans la mesure où un essai de traction uniaxiale d'une part, et un essai faisant intervenir deux directions d'élongation d'autre part, sont disponibles. A cet effet, nous présenterons le système de traction biaxiale développé au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille. Enfin, nous confronterons les différents modèles de comportement présentés au cours du chapitre 1 et justifierons ainsi nos choix quant à la densité d'énergie utilisée par la suite.

2.1 Matériaux étudiés

Les matériaux étudiés sont soit non chargés, soit renforcés. Les renforts présentent entre autres comme caractéristique la surface spécifique en contact avec l'élastomère. Cette surface spécifique est la surface totale du renfort par unité de poids. Elle s'exprime donc en m^2/g . Plus la taille de la particule de renfort est petite, plus sa surface spécifique est grande. Les charges inertes comme les craies ont des surfaces spécifiques de l'ordre du m^2/g , les kaolins vont de 10 à 40 m^2/g , les noirs de carbone de quelques m^2/g à 150 m^2/g tandis que la surface spécifique de certaines silices peut atteindre 400 m^2/g .

Cette surface spécifique peut être mesurée soit par adsorption d'azote ou de gaz rare (Robert, 1989 [95]), soit par diffraction de rayons X ou encore par microscopie électronique. Pour une charge, présenter une grande surface spécifique est une condition nécessaire mais non suffisante pour que celle-ci soit renforçante. En effet, les interactions entre l'élastomère et une charge dépendent d'autres paramètres comme le facteur d'activité chimique (compatibilité entre la surface de la charge et les chaînes macromoléculaires) et le facteur de structure (représentatif de la manière dont les particules sont liées les unes aux autres) (Bouchereau, 1997 [14]).

Afin de mener notre étude, nous avons étudié des matériaux constitués d'une combinaison de deux matrices et de deux charges. Les matrices considérées sont, d'une part un caoutchouc naturel (Natural Rubber, NR) et d'autre part un caoutchouc synthétique appelé styrène butadiène (Styrene Butadiene Rubber, SBR). Les deux matrices peuvent être renforcées, ou non, par des charges soit de noir de carbone, soit de silice de surface spécifique égale à 150 m^2/g .

Ces différents matériaux sont répertoriés dans le tableau 2.1.

Nuance	Matrice	Renforts (surface spécifique)	Notation utilisée
1	Caoutchouc naturel		NR
2	Caoutchouc naturel	Noir de carbone	NR+C
3	Caoutchouc naturel	Silice (150 m^2/g)	NR+Si
4	Caoutchouc synthétique		SBR
5	Caoutchouc synthétique	Noir de carbone	SBR+C
6	Caoutchouc synthétique	Silice (150 m^2/g)	SBR+Si

TAB. 2.1 – Matériaux considérés pour l'étude

2.2 Essai de traction uniaxiale

Afin de caractériser le comportement des matériaux élastomères et de mettre en évidence l'adoucissement par fatigue de ces matériaux, des essais cycliques de traction uniaxiale à déformation maximale imposée ont été réalisés sur une machine conventionnelle : Instron 4302.

2.2.1 Géométrie des éprouvettes

Les éprouvettes utilisées pour la traction uniaxiale sont appelées “haltères” en raison de leur forme. Cette géométrie permet de rendre les déformations homogènes au centre de l'éprouvette et évite aussi la rupture de celle-ci dans les mors de la machine. Les éprouvettes utilisées sont ainsi normalisées et qualifiées de type 2 (Brown, 1996 [23]). Le plan de ces éprouvettes est représenté sur la figure 2.1.

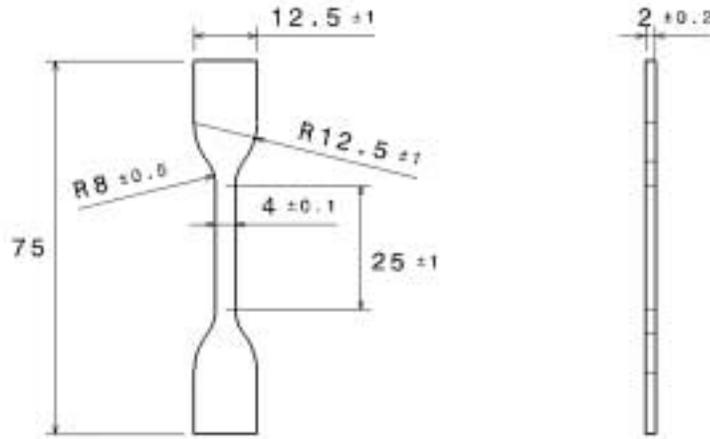


FIG. 2.1 – Géométrie de l'éprouvette uniaxiale

2.2.2 Machine d'essai INSTRON 4302

Cette machine (figure 2.2) permet un très grand déplacement de traverse et nous donne ainsi la possibilité de solliciter les éprouvettes jusqu'à 1000 % de déformation si nécessaire. La force est mesurée grâce à une cellule de charge de capacité 1 kN. Cette cellule est bien adaptée à nos essais dans la mesure où des tensions relativement faibles (quelques centaines de Newtons) produisent sur les élastomères de très grands allongements (plusieurs centaines de %). Dans un premier temps, la machine est pilotée en déplacement avec une vitesse de traverse égale à 65 mm/min, soit une vitesse de déformation d'environ $0,02 \text{ s}^{-1}$ permettant de considérer le problème comme quasi-statique.

Tous les essais ont été réalisés à température ambiante et ceux-ci ont été réalisés trois fois sur des éprouvettes différentes de la même nuance afin de s'assurer de la reproductibilité des résultats obtenus.

Les élastomères étudiés étant supposés incompressibles, leurs grands allongements s'accompagnent d'une diminution de l'épaisseur au cours de l'essai. La fixation des éprouvettes pour de tels matériaux ne peut donc être réalisée à l'aide d'un dispositif classique. En effet, celui-ci permet un serrage avec une distance entre les pièces de serrage constant, ce qui entraîne donc des glissements trop importants au niveau des mors. Pour pallier cette incompressibilité, un système de mors autoserrants a été réalisé par un dispositif



FIG. 2.2 – Machine d'essai utilisée pour les essais de traction uniaxiale cyclique



FIG. 2.3 – Mors autoserrants par un dispositif à excentriques pendant l'essai

à excentriques. Les surfaces des plans de cames des mors sont moletées (figure 2.4) afin de diminuer encore plus les glissements. Ce système de serrage permet la fixation de l'éprouvette dans de bonnes conditions quel que soit le niveau de déformation imposé (figure 2.3).



FIG. 2.4 – Mors autoserrants par un dispositif à excentriques

La machine de traction est pilotée grâce à un ordinateur qui permet l'acquisition des déformations globales, correspondant aux déplacements de la partie mobile, et des efforts au sein de l'éprouvette.

2.2.3 Système vidéo de mesures des déformations

2.2.3.1 Nécessité des mesures locales des déformations

Un système vidéo de mesure de déformations, le système Apollor[®], a permis de comparer les mesures des déformations globales, réalisées automatiquement par la machine de

traction en fonction du déplacement de la traverse, aux mesures des déformations locales au sein de l'éprouvette, réalisées grâce au système vidéo. Les résultats obtenus montrent une différence non négligeable de la mesure (figure 2.5).

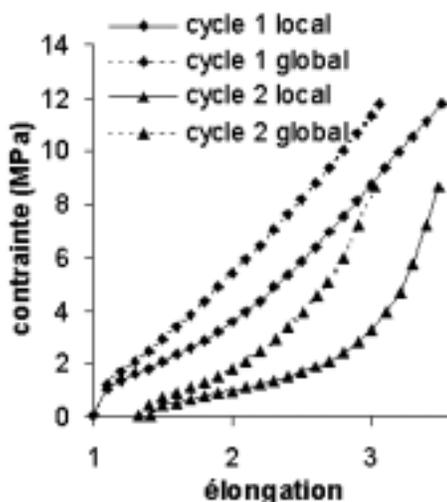


FIG. 2.5 – Différence entre déformations globales et déformations locales (la contrainte est calculée en divisant la force F par la section initiale de l'éprouvette S_0)

Etant données la très faible rigidité des matières mises en jeu et la géométrie des éprouvettes, les déformations au sein de celles-ci ne peuvent être homogènes. Ainsi, il est compréhensible que les déformations globales, correspondant à une moyenne de la déformation le long de l'éprouvette, soient à ce point différentes des déformations locales, mesurées au centre de l'éprouvette.

Ainsi, afin d'avoir des résultats d'essais fiables, l'ensemble des mesures, présenté par la suite, a été réalisé grâce au système vidéo Apollor[®], que nous allons décrire dans ce qui suit.

2.2.3.2 Mesures locales des déformations

Le principe du système de vidéotraction (figure 2.6) est de focaliser une caméra sur la zone de déformation de l'échantillon au centre de l'éprouvette et d'analyser en temps réel le déplacement de repères sur l'éprouvette. Ce système permet également de piloter la machine d'essai (traction, compression,...) en contrôlant les paramètres de la machine (vitesse, intensité du déplacement...) en fonction de la réponse du matériau. Alors que le pilotage de la machine permet de déplacer la traverse à vitesse constante et ne génère donc, a priori, pas une vitesse de déformation locale constante, ce système permet de modifier les vitesses de déplacement de traverse de la machine de traction (figure 2.7) de sorte à garantir une vitesse de déformation locale constante (figure 2.8) égale à $0,02s^{-1}$.

Ce système de pilotage et d'acquisition permet des mesures sans contact avec le matériau et d'analyser les données en temps réel. Le système utilisé permet également, pour les

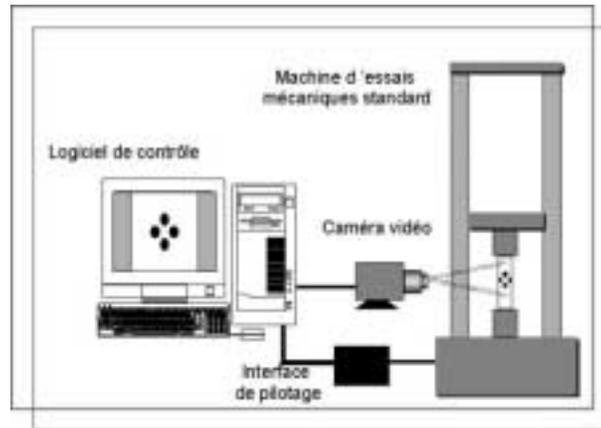


FIG. 2.6 – Système de vidéotraction Apollor®

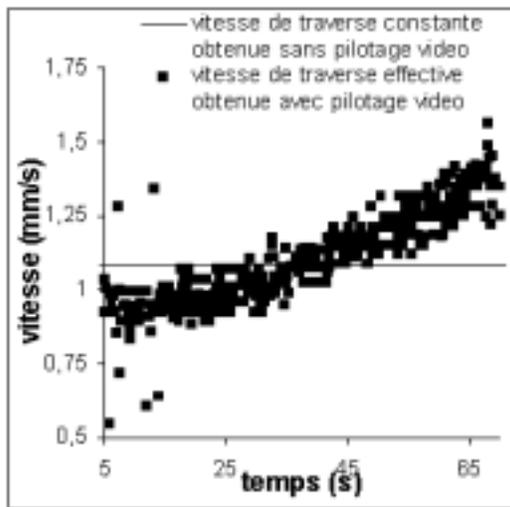


FIG. 2.7 – Evolution de la vitesse de traverse

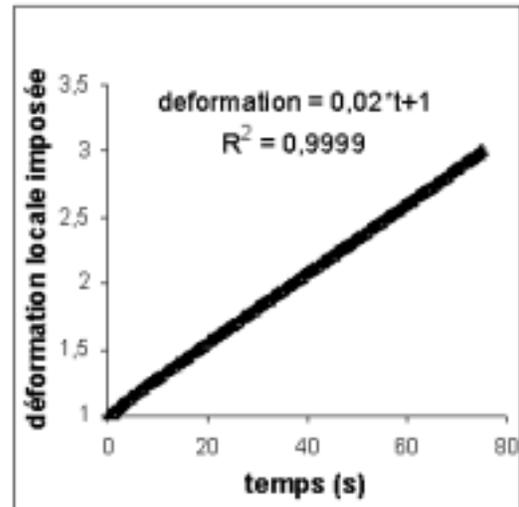


FIG. 2.8 – Evolution de la déformation locale

essais que nous avons réalisés, de mesurer les déformations longitudinale et transverse, ce qui, dans le cas des essais multi-axiaux, sera très utile. Pour ce faire, 4 marqueurs sont tracés au centre de l'éprouvette comme le montrent les figures 2.9 et 2.10.

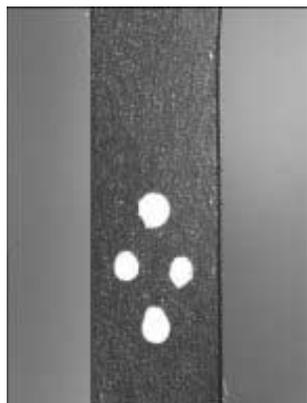


FIG. 2.9 – Méthodes 4 tâches : photos avant l'essai

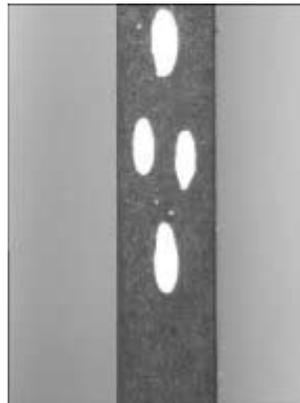


FIG. 2.10 – Méthodes 4 tâches : photos pendant l'essai

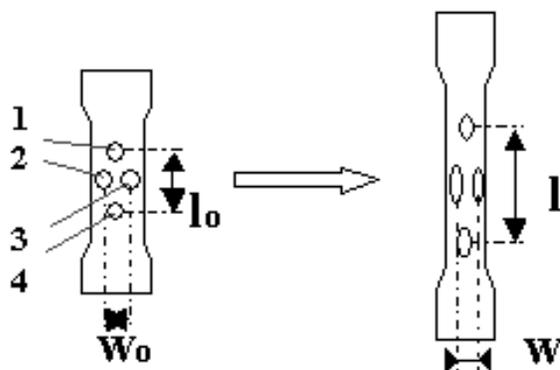


FIG. 2.11 – Méthode 4 tâches : calcul des déformations axiale et transverse

Grâce aux notations définies figure 2.11, on peut calculer les déformations axiale et transverse comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + \frac{l - l_0}{l_0} & \text{pour la déformation axiale vraie} \\ \lambda_2 = 1 + \frac{w - w_0}{w_0} & \text{pour la déformation transverse vraie} \end{cases} \quad (2.1)$$

2.3 Essai de traction biaxiale

La seule utilisation d'un essai de traction uniaxiale ne peut suffire à une détermination fiable du comportement pour la plupart des densités d'énergie présentées dans le paragraphe 1.3.2 du chapitre 1. En effet, comme nous l'avons vu lors de cette section, l'ensemble

des densités proposées, hormis la densité de Treloar (1975 [107]) (équation (1.31)), fait intervenir les deux invariants I_1 et I_2 du tenseur des dilatations \mathbf{C} . Cependant, étant données les expressions de I_1 et I_2 (équation (1.25)), on peut constater que I_2 est très faible devant I_1 lors d'une traction uniaxiale (figure 2.12). La dépendance des densités vis à vis de I_2 est donc impossible à déterminer sur ce seul essai. En outre Kawabata *et al.* et Fukahori *et al.* ont montré que la contribution de I_2 dans le cas de la traction uniaxiale était négligeable, ce qui peut également se voir figure 2.12.

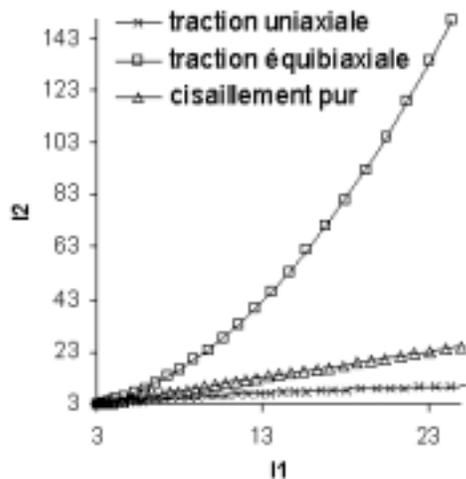


FIG. 2.12 – Evolution de I_2 en fonction de I_1 pour différentes sollicitations ($I_1 = 9,6$ correspond à 200% de déformation longitudinale en traction uniaxiale)

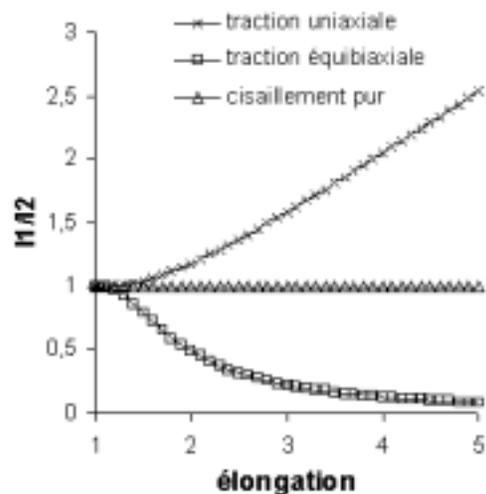


FIG. 2.13 – Evolution de I_1/I_2 en fonction de l'élongation pour différentes sollicitations

On constate sur les figures 2.12 et 2.13 que, pour de grandes déformations imposées, les variations de I_2 ne sont plus négligeables vis à vis de I_1 dans le cas du cisaillement pur et de la traction équi-biaxiale. Il est donc nécessaire de réaliser un essai, en plus de la traction uniaxiale, faisant intervenir deux directions d'étirement de sorte à obtenir des variations de I_2 importantes (Diani, 1999 [34]). Cependant, on peut noter également que sur l'intervalle de notre étude, à savoir 0-200% de déformation, l'essai de traction équi-biaxiale engendre des variations de I_2 bien plus importantes, rendant cet essai plus intéressant que celui de cisaillement. Afin d'obtenir de tels essais, le laboratoire a conçu une machine de traction biaxiale que nous allons présenter.

2.3.1 Machines existantes

Les essais de traction équi-biaxiale peuvent être réalisés de différentes manières en sollicitant radialement un disque de caoutchouc (Nottin, 1989 [80]), en gonflant une éprouvette sphérique (ballon) (Hart-Smith, 1966 [51]; Alexander, 1971 [4]) ou en gonflant un disque bridé sur un support (De Vries, 1976 [32]; Roberts, 1978 [96]; Bhate, 1984 [10]). Les figures 2.14, 2.16 et 2.17 présentent le principe de ces trois techniques.

Dans le cas du disque sollicité radialement (figures 2.14 et 2.15), aux grandes déformations l'équibiaxialité n'est plus respectée car les amarrages deviennent trop éloignés (Nottin, 1989 [80]).

La solution du ballon gonflé (figure 2.16) conduit à un état d'équibiaxialité quasi-parfait mais aux grandes déformations apparaissent des instabilités (Alexander, 1971 [4]).

Le gonflage du disque (figure 2.17) semble la solution la plus facile mais l'état d'équibiaxialité n'est valable qu'au pôle, c'est-à-dire au sommet du disque gonflé.

En outre, les systèmes de gonflage ne permettent de réaliser que des essais équibiaxiaux. Pourtant, il semble intéressant d'obtenir les essais de traction biaxiale, non équibiaxiale, de sorte à pouvoir valider des modèles de comportement sur des sollicitations n'ayant pas été utilisées pour identifier les paramètres des modèles étudiés.

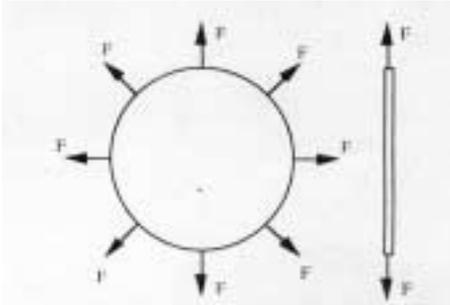


FIG. 2.14 – Schématisation de la traction équibiaxiale, sollicitation radiale d'un disque



FIG. 2.15 – Traction équibiaxiale, sollicitation radiale d'un disque

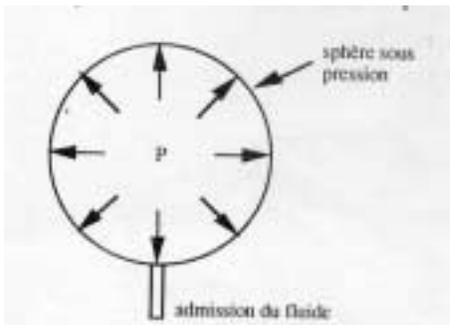


FIG. 2.16 – Traction équibiaxiale, gonflage d'un ballon

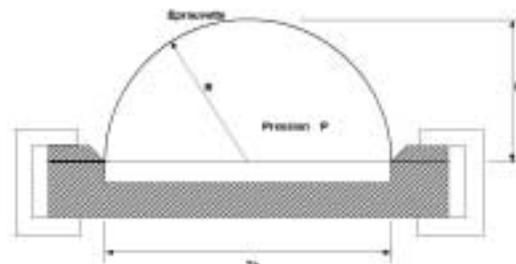


FIG. 2.17 – Traction équibiaxiale, gonflage d'un disque de caoutchouc

Les machines d'essais biaxiaux existantes étant de coût extrêmement élevé et ne permettant pas de réaliser à notre connaissance des essais cycliques en grandes déformations, un système de traction biaxiale a été conçu et réalisé au sein du laboratoire (dépôt de brevet en cours).

Ce mécanisme présente l'avantage de pouvoir s'adapter sur toute machine de traction uniaxiale classique et il a, en particulier, été adapté sur la machine de traction uniaxiale

Instron 4302 (figures 2.19 et 2.20) afin de pouvoir faire des essais en grandes déformations. Il présente également l'avantage de pouvoir faire des essais cycliques en traction biaxiale et plus particulièrement en traction équibiaxiale.

2.3.2 Géométrie des éprouvettes

Les éprouvettes utilisées sont des éprouvettes carrées (figure 2.18) qu'on a prélevées dans des plaques calandrées. Comme aucune norme n'existait concernant la forme des éprouvettes biaxiales, la géométrie de celles-ci a été déterminée grâce à un calcul par éléments finis de sorte, d'une part, à garantir les déformations biaxiales au centre de l'éprouvette et, d'autre part, à obtenir des déformations suffisamment importantes au centre.

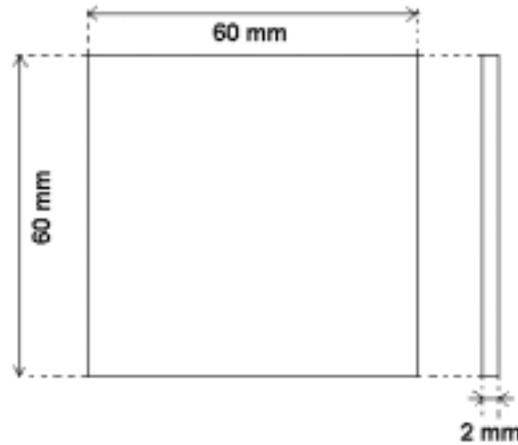


FIG. 2.18 – Géométrie de l'éprouvette de traction équibiaxiale

Le choix d'éprouvettes en croix a été abandonné après avoir constaté expérimentalement et a posteriori numériquement que les déformations au centre de celles-ci, bien qu'équibiaxiales, étaient très faibles (de l'ordre de 50%) pour des déformations globales de l'éprouvette importantes (300%). Ceci s'explique facilement par la plus faible raideur des bras de l'éprouvette en croix et donc de leur plus grande déformabilité.

2.3.3 Description du système

Le système biaxial a été développé au sein du laboratoire afin d'une part, de pouvoir se fixer sur la machine de traction uniaxiale déjà à notre disposition (Instron 4302 (figure 2.2)), et d'autre part, de pouvoir faire des essais biaxiaux cycliques.

Ce système, composé de différentes pièces, répertoriées dans le tableau 2.2, est adapté sur la machine uniaxiale de la façon suivante :

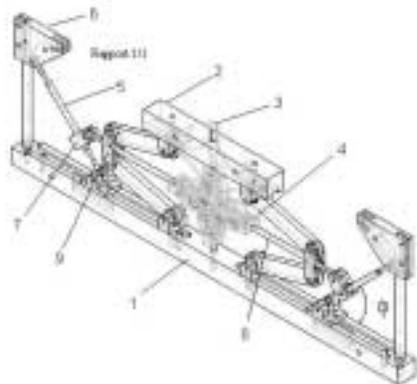


FIG. 2.19 – Vue d'ensemble du système de traction biaxiale



FIG. 2.20 – Système de traction biaxiale installé sur la machine de traction Instron 4302

Pièce	Désignation
1	Socle
2	Fixation supérieure sur la traverse mobile
3	Barre de traction verticale
4	Mors ($\times 4$)
5	Guides de traction horizontale ($\times 2$)
6	Pièces de réglage du rapport de traction ($\times 2$)
7	Paliers de guidage entre les pièces 5 et 8 ($\times 2$)
8	Barres de traction horizontale ($\times 2$)
9	Biellettes de transformation mouvement vertical-mouvement horizontal ($\times 2$)

TAB. 2.2 – Désignation des différentes pièces du système de traction biaxiale

Le socle du système biaxial (pièce 1) est fixé sur l'embase de la machine uniaxiale, tandis que la fixation supérieure (pièce 2) est fixée sur la traverse mobile de la machine (figure 2.21).



FIG. 2.21 – Fixation du système biaxial sur la machine de traction



FIG. 2.22 – Orientation des mors

Les 4 mors de fixation de l'éprouvette (figure 2.22) sont positionnés de la façon suivante :

- Le mors vertical du haut est lié à la cellule de charge 1 kN par l'intermédiaire de la barre de traction verticale (pièce 3). La fixation à la cellule de charge permet une mesure de l'effort mis en jeu dans la direction verticale.
- Le mors vertical du bas est fixé sur le socle du système biaxial (pièce 1).
- Les deux mors horizontaux sont fixés sur les barres de traction horizontale (pièces 8). Celles-ci sont équipées de jauges de déformation afin d'obtenir une mesure de l'effort dans la direction horizontale. Le capteur d'effort a été réalisé à l'aide de quatre jauges collées sur la barre de traction horizontale (pièce 8) et montées en pont complet dans un pont de Wheatstone (Asch, 1999 [5]).

La sollicitation imposée à l'éprouvette ne peut être biaxiale qu'à deux conditions :

- L'effort de traction horizontale doit être imposé sur la médiatrice du segment liant les deux mors verticaux. Ceci est assuré par le système de biellette (pièces 9) (figure 2.23).
- La déformation horizontale doit être contrôlée en intensité. Cette fonctionnalité est garantie par la liaison des pièces 5, 6, 7 et 8 (figure 2.24). En effet, les barres 8 vont monter (respectivement descendre) par l'intermédiaire des biellettes (pièces 9). Lors de ce mouvement, les barres 8 vont reculer (respectivement avancer) grâce à la liaison entre les pièces 5 et 8 réalisée à l'aide des paliers 7.



FIG. 2.23 – Système de biellettes



FIG. 2.24 – Liaison entre les pièces 5, 6, 7 et 8

L'intensité du déplacement horizontal des barres 8 est fonction de l'angle Φ (défini figure 2.19) des barres 5.

L'influence de l'angle, Φ , des barres 5 par rapport à l'horizontale sur le déplacement horizontal des barres 8, est le suivant :

$$\tan\Phi = \frac{\text{déplacement vertical des barres 8}}{\text{déplacement horizontal des barres 8}} \quad (2.2)$$

Les quatre positions possibles pour la fixation des pièces 5 sur les pièces 6 (figure 2.24) permettent d'obtenir des angles Φ tels que :

$$\tan\Phi = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = 45^\circ, 63.4^\circ, 71.6^\circ, 76^\circ \quad (2.3)$$

Ainsi, ce mécanisme permet de réaliser des tractions biaxiales où les intensités des déplacements horizontaux, u , et verticaux, v , sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = u \quad : \text{ traction équi-biaxiale} \\ v = 2u \quad : \text{ traction biaxiale (rapport=2)} \\ v = 3u \quad : \text{ traction biaxiale (rapport=3)} \\ v = 4u \quad : \text{ traction biaxiale (rapport=4)} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ce système adapté sur la machine de traction uniaxiale Instron 4302, nous permet, étant données les dimensions du prototype utilisé, de réaliser de la traction (équi)biaxiale en grandes déformations, jusqu'à 200 % de déformation dans la direction horizontale.

Le système est composé d'un ensemble de barres rigides, ce qui nous permet de faire des essais charge-décharge de traction (équi)biaxiale, ce qui n'était pas possible avec les machines de traction biaxiale déjà existantes et réalisées à l'aide de courroies.

2.4 Résultats

Maintenant que les protocoles expérimentaux ont été décrits, nous pouvons nous attacher à l'identification du comportement hyperélastique non endommagé.

Nous avons fait le choix au cours du chapitre 1 de modéliser le comportement grandement déformable (plusieurs centaines de pour cent de déformation) des matériaux élastomères en configuration mixte grâce à la relation (1.29). Ainsi, bien qu'ayant un système de mesure des déformations nous permettant de travailler avec la contrainte vraie et la déformation vraie, les résultats obtenus sont présentés en traçant la contrainte conventionnelle $T = \frac{F}{S_0}$ encore appelée contrainte de Piola-Kirchhoff n° 1 en fonction de l'élongation

$$\lambda = \frac{l}{l_0}.$$

2.5 Choix de la densité d'énergie

Nous avons présenté dans la section 1.3.2 du chapitre précédent plusieurs exemples de densités d'énergie à expression imposée (équations (1.31), (1.32), (1.33)) ou non imposée (équation (1.34)) qui sont classiquement utilisées pour déterminer le comportement hyperélastique, incompressible et non endommagé des matériaux élastomères. Nous allons au cours de ce paragraphe identifier ces différentes densités d'énergie et comparer les résultats obtenus afin de justifier le choix que nous avons opéré pour l'identification du comportement.

Nous avons également montré dans la section 1.4.2.1 du chapitre 1 qu'il existait une chute de contrainte très importante entre les premier et deuxième cycles de chargement qui traduisait un phénomène d'endommagement très fort au cours de ces deux premiers cycles. Cependant, nous n'étudions pas ce phénomène d'endommagement discontinu ou effet Müllins mais le phénomène d'adoucissement par fatigue qui lui succède, c'est-à-dire l'adoucissement au delà du deuxième cycle. Pour cette raison nous identifierons le comportement hyperélastique considéré comme non endommagé sur le deuxième cycle de chargement, considérant les cycles suivants comme endommageables par adoucissement.

2.5.1 Expression de la contrainte dans le cas de déformations homogènes

On exprime ici, les contraintes principales (équation (1.29)) associées à différents états de déformation en fonction des dilatations principales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du tenseur gradient de déformation \mathbf{F} . L'inconnue hydrostatique p est éliminée par combinaison linéaire des contraintes principales.

Traction uniaxiale

Une éprouvette constituée d'élastomère incompressible est étirée dans la direction 1. La

contrainte principale et les invariants principaux s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_{11} = 2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \\ T_{22} = T_{33} = 0 \\ \lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Traction biaxiale

Une feuille d'élastomère est étirée dans deux directions perpendiculaires contenues dans le plan de la feuille. L'intensité des étirements peut être différente suivant ces deux directions. Les contraintes principales et les invariants principaux s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11} = 2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} \left(\lambda - \frac{1}{\gamma^2 \lambda^3} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \left(\gamma^2 \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \\ T_{22} = 2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial I_1} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma^3 \lambda^2} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial I_2} \left(\gamma \lambda^2 - \frac{1}{\gamma^3} \right) \right) \\ T_{33} = 0 \\ \lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \gamma = 1 + \frac{\lambda - 1}{\eta} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\gamma \lambda} \\ I_1 = \lambda^2 + \gamma^2 + \frac{1}{\lambda^2 \gamma^2} \quad I_2 = \lambda^2 \gamma^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\gamma^2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où η correspond au rapport de traction entre les directions 1 et 2 tel qu'il a été défini en (2.4).

2.5.2 Identification des différentes densités d'énergie

Les dérivées par rapport aux invariants de la densité d'énergie interviennent dans la définition des contraintes principales (équations (2.5) et (2.6)).

Compte tenu du paragraphe 1.3.2, on a :

– **Densité de Treloar** (1975 [107]) (équation (1.31))

$$\frac{\partial W_0}{\partial I_1} = C_{10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial I_2} = 0 \quad (2.7)$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} T^u = T_{11} = 2C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ T^{eq} = T_{11} = 2C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où T^u et T^{eq} sont les contraintes de Piola-Kirchhoff dans la direction 1 respectivement dans le cas d'une traction uniaxiale et équi-biaxiale.

Dans la mesure où une seule constante est à identifier pour cette densité d'énergie, seul l'essai de traction uniaxiale est requis pour déterminer C_{10} .

– **Densité de Mooney-Rivlin** (1940 [75]) (équation (1.32))

$$\frac{\partial W_0}{\partial I_1} = C_{10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial I_2} = C_{01} \quad (2.9)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T^u = T_{11} = 2 \left(C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + C_{01} \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \\ T^{eq} = T_{11} = 2 \left(C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + C_{01} \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

– **Densité de Hart-Smith** (1966 [51]) (équation (1.33))

$$\frac{\partial W_0}{\partial I_1} = C_1 \exp(C_3(I_1 - 3)^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial I_2} = \frac{C_2}{I_2} \quad (2.11)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T^u = T_{11} = 2 \left(C_1 \exp(C_3(I_1 - 3)^2) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{C_2}{I_2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \\ T^{eq} = T_{11} = 2 \left(C_1 \exp(C_3(I_1 - 3)^2) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + \frac{C_2}{I_2} \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Les différents paramètres de ces densités sont ensuite obtenus par optimisation à l'aide d'un logiciel de lissage (origin[®]) grâce aux expériences de traction uniaxiale et équi-biaxiale.

– **Densité de Diani** (1999 [34]) (équation (1.34))

$$\frac{\partial W_0}{\partial I_1} = f(I_1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial I_2} = g(I_2) \quad (2.13)$$

La fonction f est identifiée sur un essai de traction uniaxiale. La courbe $f(I_1)$ est représentée de façon très satisfaisante par un polynôme de degré 2 en $(I_1 - 3)$. Ainsi, la fonction f s'écrit :

$$f(I_1) = \sum_{i=0}^2 a_i (I_1 - 3)^i \quad (2.14)$$

La fonction g est, quant à elle, identifiée sur un essai de traction équi-biaxiale. La courbe $\ln(g(I_2))$ est représentée de façon très satisfaisante par une droite $\ln(I_2)$. Ainsi, la fonction g s'écrit :

$$g(I_2) = \exp(b_0) I_2^{b_1} \quad (2.15)$$

Dès lors,

$$\begin{cases} T^u = T_{11} = 2 \left(\sum_{i=0}^2 a_i (I_1 - 3)^i \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \exp(b_0) I_2^{b_1} \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \\ T^{eq} = T_{11} = 2 \left(\sum_{i=0}^2 a_i (I_1 - 3)^i \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + \exp(b_0) I_2^{b_1} \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right) \end{cases} \quad (2.16)$$

2.5.3 Résultats de l'identification

Afin de pouvoir comparer les différentes densités d'énergie, nous avons identifié tous ces paramètres sur différentes nuances. Par soucis de clarté, seules les nuances de caoutchouc naturel (NR) et de caoutchouc synthétique renforcée par des particules de silice (SBR+Si150) sont représentées. Cependant, les autres nuances conduisent aux mêmes conclusions. Les valeurs de ces paramètres sont répertoriées dans le tableau 2.3.

Densité	Paramètre	Valeur pour le NR	Valeur pour le SBR+Si150
Treloar (1.31)	C_{10}	$35,57.10^{-2}$	$98,71.10^{-2}$
Mooney-Rivlin (1.32)	C_{10}	$35,57.10^{-2}$	$98,71.10^{-2}$
	C_{01}	$4,46.10^{-2}$	$9,71.10^{-2}$
Hart-Smith (1.33)	C_1	$2,8.10^{-1}$	$8,6.10^{-1}$
	C_2	1,1	1,4
	C_3	$2,2.10^{-3}$	$7,4.10^{-3}$
Diani-Rey (1.34)	a_0	$27,96.10^{-2}$	$84,6.10^{-2}$
	a_1	6.10^{-6}	$1,93.10^{-2}$
	a_2	8.10^{-4}	$3,2.10^{-3}$
	b_0	-1,2626	$-89,74.10^{-2}$
	b_1	$-46,89.10^{-2}$	$-49,22.10^{-2}$

TAB. 2.3 – Valeurs des paramètres des différentes densités d'énergie

Les figures 2.25 à 2.34 représentent une confrontation entre les lois de comportement étudiées et des résultats expérimentaux. Les essais de traction uniaxiale et équi-biaxiale, qui ont servi à l'identification, sont ainsi comparés aux résultats obtenus avec les densités d'énergie présentées auparavant.

Nous constatons sur les figures 2.25 et 2.26 que le modèle de Treloar (1975 [107]) (équation (1.31)) permet une bonne représentation de la traction uniaxiale jusqu'à environ 150% de déformation (en particulier figure 2.26). En revanche, il ne permet pas de représenter le comportement en traction équi-biaxiale. On peut également constater que pour d'importants niveaux de déformation, le modèle de Treloar en traction uniaxiale et en traction équi-biaxiale tend vers une même asymptote (équation (2.8)). En effet, quand λ augmente, les expressions en $\frac{1}{\lambda^n}$ ($n=2$ ou 5 , équation (2.8)) tendent alors vers 0 et dans ce cas les contraintes principales en traction uniaxiale et en traction équi-biaxiale tendent toutes les deux vers $2C_{10}\lambda$. Dans la mesure où ce modèle est incapable de représenter les essais

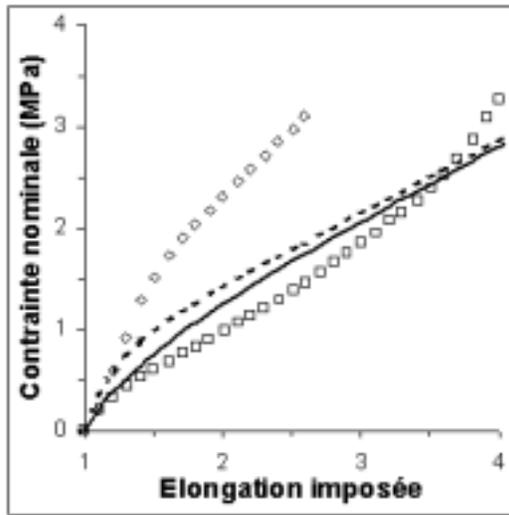


FIG. 2.25 – Confrontation de la densité de Treloar (1.31) aux résultats expérimentaux pour le NR

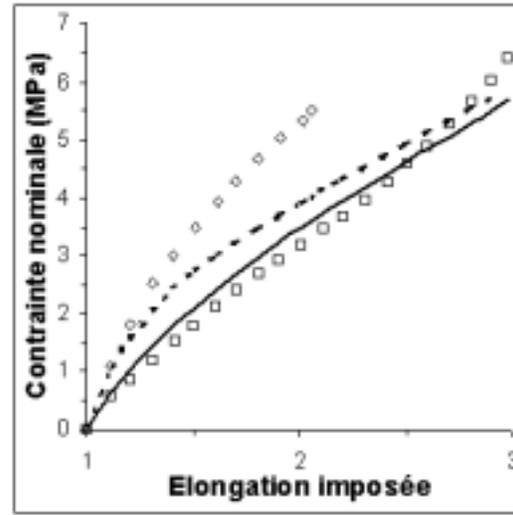


FIG. 2.26 – Confrontation de la densité de Treloar (1.31) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150

	résultats expérimentaux	modélisation
traction uniaxiale	□	—
traction équibiaxiale	◇	...

de traction biaxiale, il paraît peu fiable. Ce modèle de comportement ne peut donc être utilisé.

On peut remarquer sur les figures 2.27 et 2.28 que le modèle de Mooney-Rivlin (1940 [75]) (équations (1.32) et (2.10)) permet une bonne représentation de la traction uniaxiale jusqu'à environ 200% de déformation et de la traction équibiaxiale pour les deux matériaux étudiés. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, ce modèle ne peut prendre en compte les changements de rigidité pour de grands niveaux de déformation (au delà de 200%) (Mooney, 1940 [75]). Les figures 2.29 et 2.30 illustrent cette remarque grâce aux essais de Treloar [107] et Alexander [3] disponibles dans la littérature et que nous avons cherché à identifier avec le modèle de Mooney-Rivlin. Cette constatation était tout à fait prévisible étant donnée l'expression de la contrainte uniaxiale qui tend vers une asymptote linéaire (équation (2.10)). Bien que les niveaux de déformation considérés pour cette étude soient inférieurs à 200%, rendant ce modèle satisfaisant, nous préférons, pour cette raison, ne pas utiliser celui-ci.

Les figures 2.31 et 2.32 montrent que la densité de Hart-Smith (1966 [51]) (équation (1.33)) permet une assez bonne représentation du comportement en traction uniaxiale notamment aux grandes déformations. En effet, ce modèle (équation (2.12)) permet de rendre compte de la rigidité du matériau grâce au coefficient C_3 . A des niveaux de déformations importants, les valeurs du premier invariant I_1 sont élevées. Celles-ci permettent à l'exponentielle de devenir prépondérante dans la relation de Hart-Smith (équation (1.33)) et par là

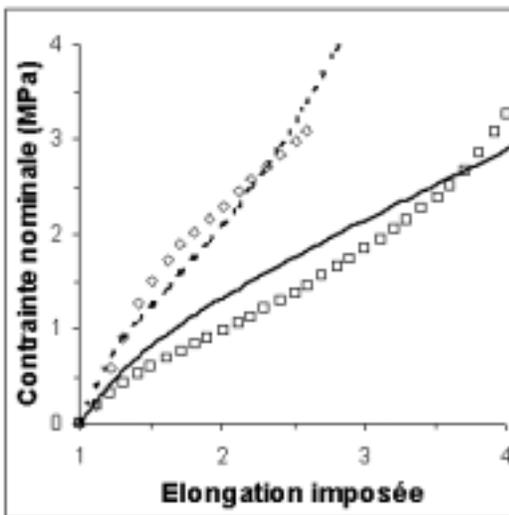


FIG. 2.27 – Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux pour le NR

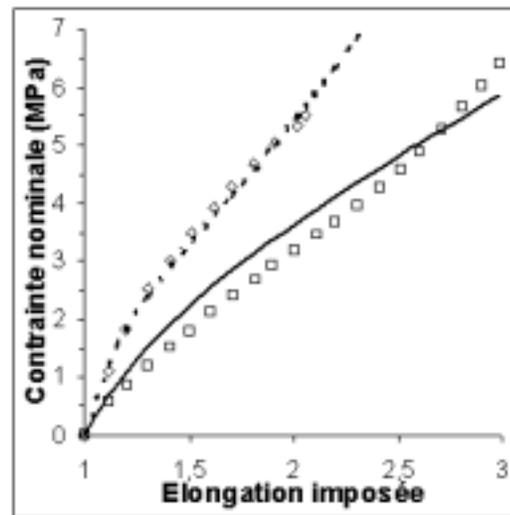


FIG. 2.28 – Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150

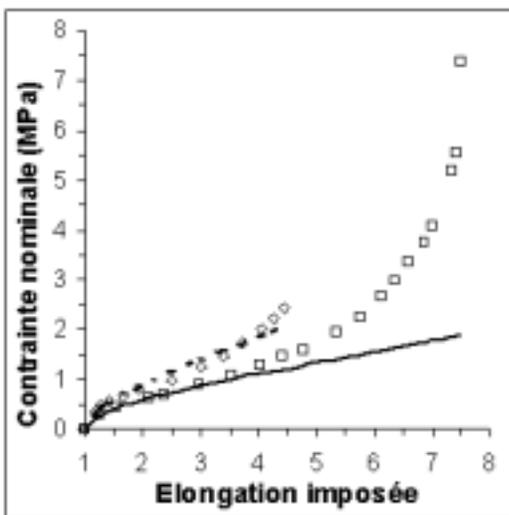


FIG. 2.29 – Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux sur les essais de Treloar [107]

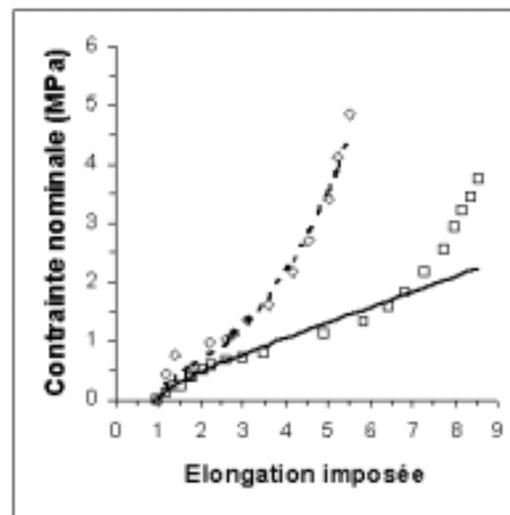


FIG. 2.30 – Confrontation de la densité de Mooney-Rivlin (1.32) aux résultats expérimentaux sur les essais d'Alexander [3]

	résultats expérimentaux	modélisation
traction uniaxiale	□	—
traction équiaxiale	◇	...

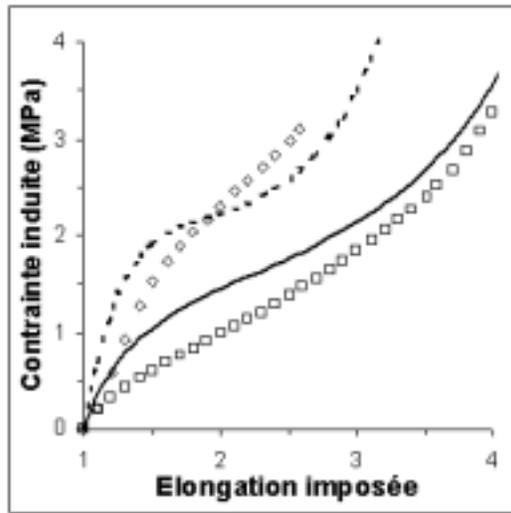


FIG. 2.31 – Confrontation de la densité de Hart-Smith (1.33) aux résultats expérimentaux pour le NR

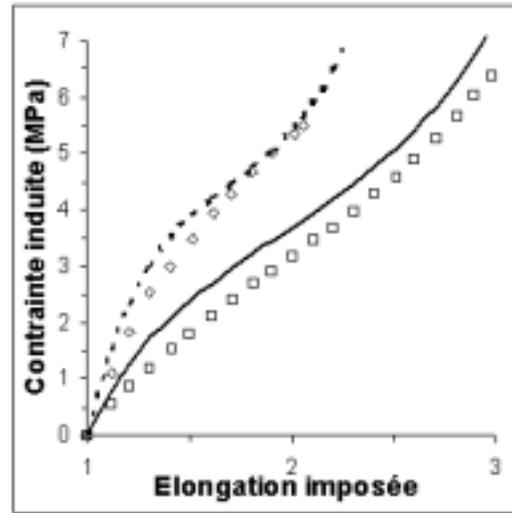


FIG. 2.32 – Confrontation de la densité de Hart-Smith (1.33) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150

même font devenir le paramètre C_3 prépondérant devant le terme en C_2 . Ce modèle permet également une bonne représentation du comportement en traction équibiaxiale. Cependant on peut remarquer que l'allure des courbes de traction obtenues expérimentalement n'est pas respectée dans le cas de la traction équibiaxiale.

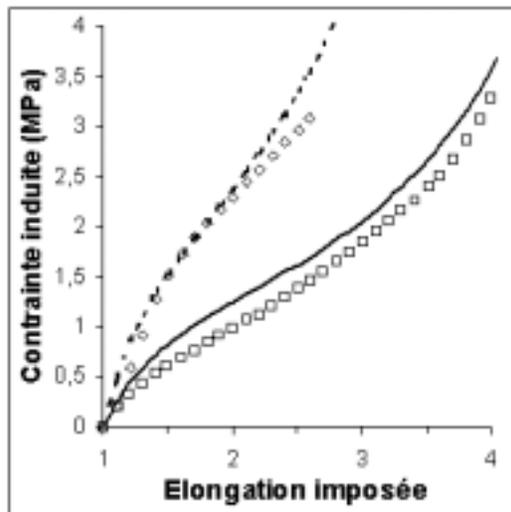


FIG. 2.33 – Confrontation de la densité de Diani et Rey (1.34) aux résultats expérimentaux pour le NR

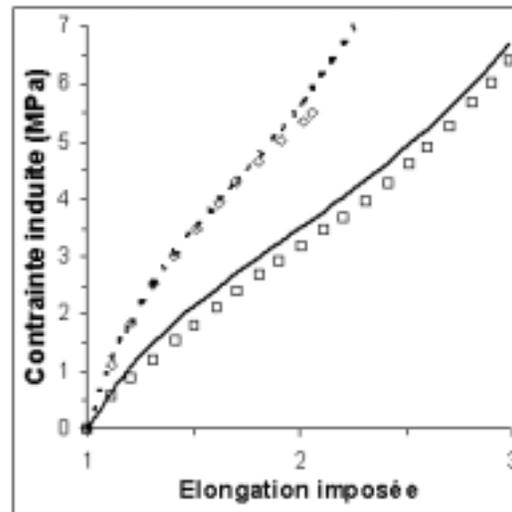


FIG. 2.34 – Confrontation de la densité de Diani et Rey (1.34) aux résultats expérimentaux pour le SBR+Si150

	résultats expérimentaux	modélisation
traction uniaxiale	□	—
traction équibiaxiale	◇	...

La technique d'identification de Diani (1999 [34]) (équation (1.34)) (figures 2.33 et 2.34) permet également une bonne représentation de la traction uniaxiale et une excellente représentation du comportement en traction équi-biaxiale sur tout l'intervalle de déformation considéré, ce qui provient, en particulier, de la non-imposition de l'expression de cette densité d'énergie.

2.5.4 Confrontation sur un essai de traction biaxiale

Afin de pouvoir faire un choix entre les deux densités semblant permettre une bonne approximation de la réponse expérimentale (densités de Hart-Smith et Diani), nous utilisons les paramètres identifiés lors de la section précédente afin de confronter les modèles à un essai qui n'a pas été requis pour l'identification.

Pour cela, nous allons confronter les modèles à un essai de traction biaxiale où le rapport, η , défini en (2.4) et (2.6), est égal à 2. C'est donc un essai de traction biaxiale où les déplacements imposés dans la direction 1 sont deux fois plus importants que dans la direction 2. Les résultats sont présentés figures 2.35 et 2.36.

Les figures 2.35 et 2.36 représentent les résultats obtenus pour les différents modèles confrontés aux résultats expérimentaux, alors que les figures 2.37 et 2.38 montrent les valeurs absolues des erreurs relatives pour chacun des modèles vis-à-vis de l'expérience.

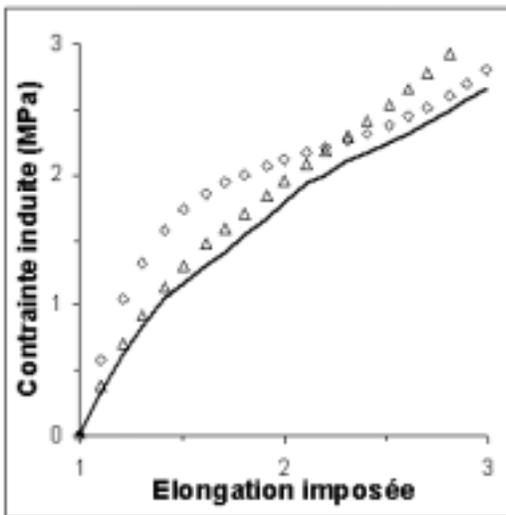


FIG. 2.35 – Résultats obtenus sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le NR

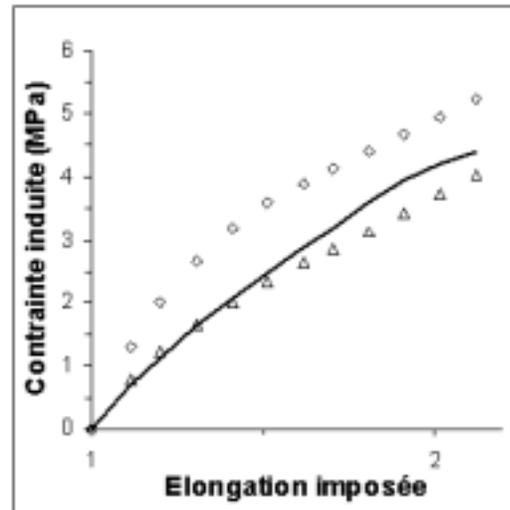


FIG. 2.36 – Résultats obtenus sur un essai de traction biaxiale avec $\eta = 2$ avec les différentes densités pour le SBR+Si150

traction biaxiale	résultats expérimentaux	modèle Diani	modèle Hart-Smith
	—	△	◇

Chapitre 3

Caractérisation des phénomènes d'adoucissement par fatigue

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté les protocoles expérimentaux qui ont été mis en oeuvre lors de cette étude. Ceux-ci nous ont permis de choisir une densité d'énergie parmi celles proposées dans la littérature afin de caractériser de façon fiable le comportement sans endommagement des milieux élastomères étudiés.

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher à l'étude du comportement en fatigue de ces milieux hyperélastiques.

Dans un premier temps, nous mettrons en évidence les phénomènes d'adoucissement par fatigue que nous avons pu constater expérimentalement. Nous montrerons que ces phénomènes dépendent de deux paramètres qui sont le nombre de cycles de chargement et la déformation maximale imposée. Enfin, après une analyse approfondie des modèles proposés dans la littérature, présentés au cours du chapitre 1, pour décrire les phénomènes d'adoucissement, nous utiliserons ceux-ci afin de modéliser l'adoucissement par fatigue que nous avons pu remarquer expérimentalement. L'analyse et la confrontation aux résultats expérimentaux de ces modèles montreront la nécessité de développer un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue permettant d'appréhender de façon plus satisfaisante ces phénomènes.

3.1 Mise en évidence des phénomènes d'adoucissement par fatigue

Des éprouvettes normalisées (définies section 2.2.1) d'élastomères ont été soumises à de la traction répétée à déformation maximale imposée sur la machine de traction uniaxiale présentée section 2.2.2. Ces éprouvettes sont composées des matériaux présentés dans le tableau 2.1.

Les essais et le système d'acquisition des déformations, décrit dans la section 2.2.3, nous permettent de représenter pour les différentes nuances de caoutchouc étudiées, l'évolution de la contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{T} au cours du chargement cyclique.

Nous avons évoqué au cours du chapitre 1 que deux mécanismes d'endommagement gouvernaient l'adoucissement. L'endommagement discontinu, apparaissant entre les 1^{er} et 2^{ième} cycles de charge, ne faisant pas partie de cette étude, nous avons représenté l'évolution de la contrainte au cours du chargement cyclique seulement à partir du 2^{ième} cycle.

Les graphes qui suivent représentent cette évolution pour les matériaux étudiés dans le cas d'un chargement à 200% de déformation maximale imposée sauf dans le cas du SBR, pour lequel nous avons représenté le cas d'un chargement à 100% de déformation car les conditions d'essais (vitesse) induisaient une rupture trop rapide dans le cas d'un chargement à 200% de déformation maximale imposée (figures 3.1 à 3.6). Seules les charges sont représentées puisqu'elles seules font l'objet de cette étude.

Nous pouvons remarquer sur les figures 3.1 à 3.6 une chute importante de la contrainte dès les premiers cycles de chargement.

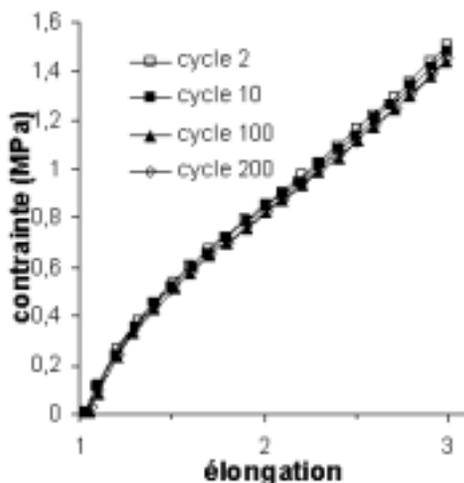


FIG. 3.1 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR

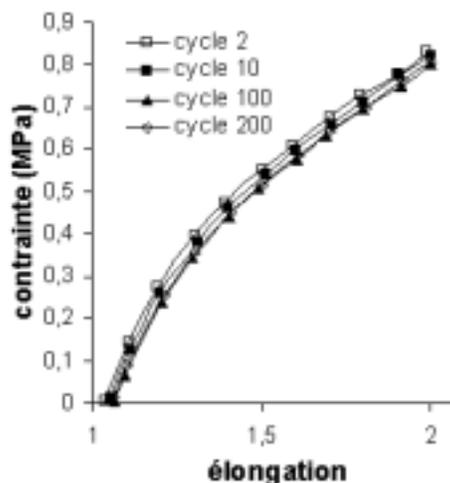


FIG. 3.2 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR

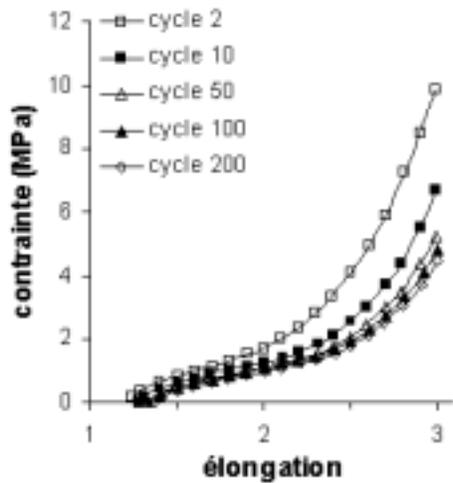


FIG. 3.3 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR+C

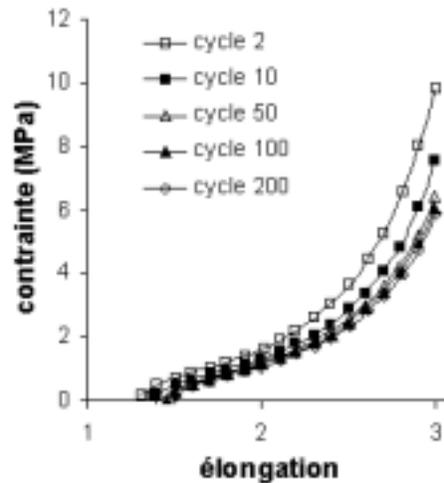


FIG. 3.4 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR+C

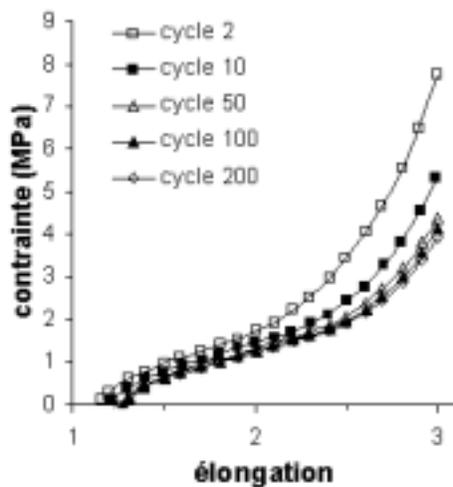


FIG. 3.5 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance NR+Si

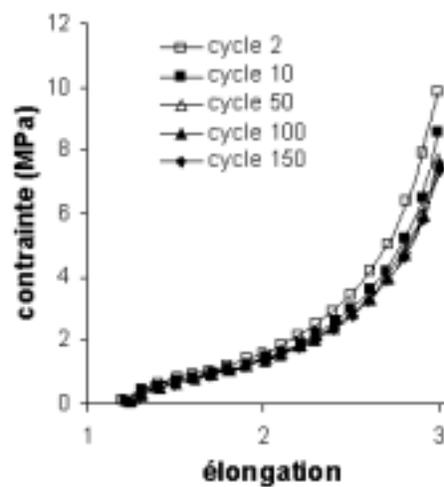


FIG. 3.6 – Evolution de la contrainte au cours d'un chargement cyclique à déformation maximale imposée pour la nuance SBR+Si

En effet, la valeur de la contrainte nominale induite à un cycle donné, à un niveau de déformation donné, est toujours inférieure aux valeurs des contraintes mesurées au cours des cycles précédents. C'est ce phénomène de chute de contrainte au cours du chargement que nous appelons phénomène d'adoucissement par fatigue.

Afin de mieux rendre compte de l'adoucissement par fatigue, nous pouvons représenter l'évolution de la contrainte maximale induite en fonction du nombre de cycles pour les différentes intensités de déformations maximales imposées. Les différents niveaux de déformation maximale imposés sont de 100, 150 et 200% de déformation.

On peut constater sur les figures 3.7 et 3.8 que la chute de contrainte est quasiment négligeable dans le cas des caoutchoucs non chargés, c'est-à-dire le caoutchouc naturel (NR) et le caoutchouc synthétique (SBR). Cette chute est en tout cas très nettement inférieure aux chutes constatées pour les caoutchoucs renforcés par des particules de noir de carbone ou par des particules de silice (NR+C, NR+Si, SBR+C, SBR+Si)(figures 3.9 à 3.12).

En effet, par exemple dans le cas du caoutchouc naturel pur, NR, soumis à 200% de déformation maximale imposée, la chute de contrainte entre le 2^{ième} et le 200^{ième} cycle est de l'ordre de 4 %, tandis que dans le cas du caoutchouc naturel renforcé par des particules de silice, NR+Si, soumis au même niveau de déformation maximale imposée, la chute de contrainte est de l'ordre de 45 %.

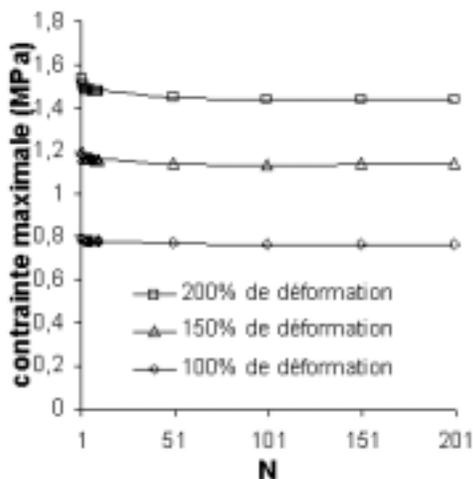


FIG. 3.7 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR

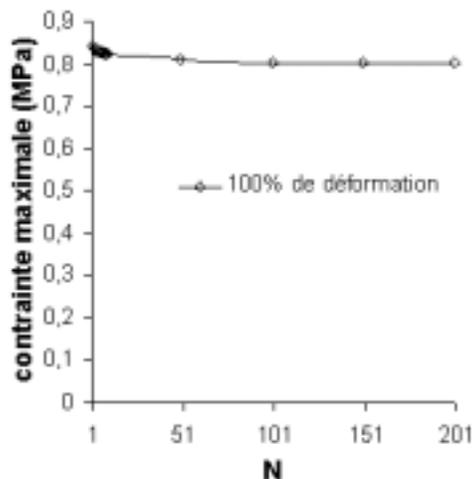


FIG. 3.8 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR

Cette constatation corrobore les résultats présentés par Bouasse et Carrière (1903 [13]) ou encore Müllins et Tobin (1947 [78]). En effet, ces auteurs expliquaient que le phénomène d'adoucissement apparaissait aussi bien dans les élastomères purs que dans les élastomères chargés mais que ce phénomène était nettement plus prononcé dans les élastomères chargés. La présence de charges et/ou de liaisons matrice-charges semble donc être en fatigue un facteur fragilisant.

On peut également remarquer que l'adoucissement par fatigue est moins important pour les nuances de caoutchouc synthétique chargé (SBR+C, SBR+Si) que pour les nuances de caoutchouc naturel renforcé par le même type de charges (NR+C, NR+Si).

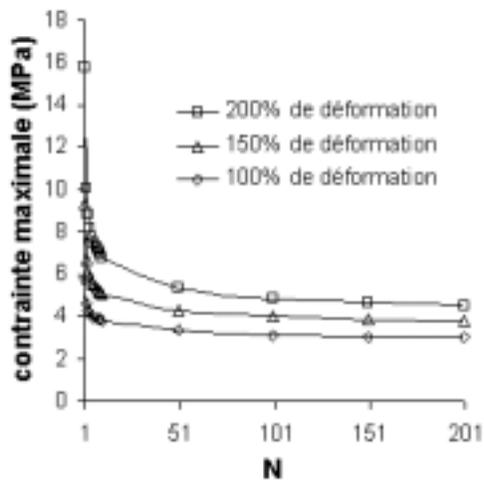


FIG. 3.9 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+C

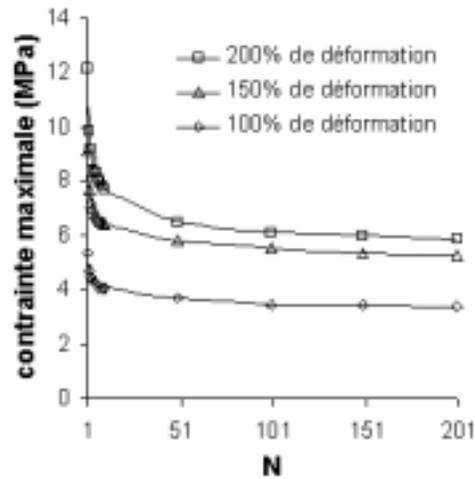


FIG. 3.10 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+C

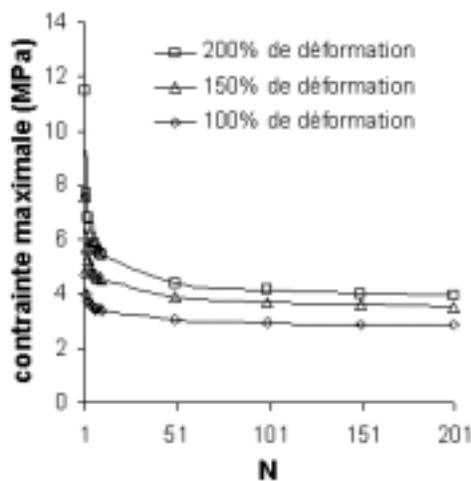


FIG. 3.11 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+Si

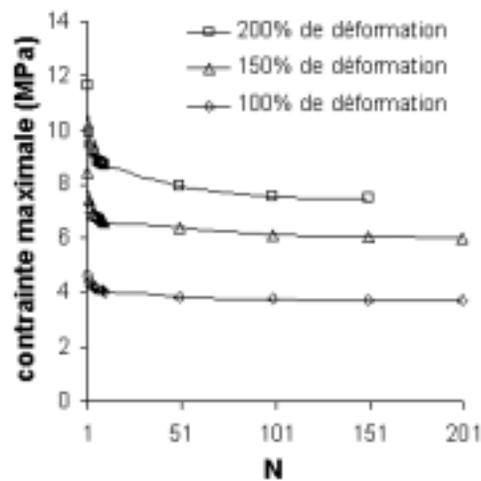


FIG. 3.12 – Evolution de la contrainte maximale en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+Si

Par exemple, la chute entre le 2^{ème} et le 150^{ème} cycle pour le NR+Si soumis à 200% de déformation maximale imposée est de l'ordre de 48% alors qu'elle n'est que de 25% pour le SBR+Si. Cette remarque demeure valable pour les niveaux de déformation plus faibles. Ainsi, il semblerait que le caoutchouc naturel chargé ait une moins bonne tenue en fatigue

que le caoutchouc synthétique chargé.

Les figures 3.9 à 3.12, qui représentent l'évolution de la contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour les nuances de caoutchouc chargé, montrent également que les phénomènes d'adoucissement par fatigue sont importants et rapides au cours des 50 premiers cycles, mais que ces phénomènes, bien qu'amoindris, continuent à évoluer au delà du 50^{ième} cycle.

En effet, prenons le cas du NR+Si, la chute de contrainte entre le 2^{ième} et le 50^{ième} cycle est de l'ordre de 37 % mais la contrainte chute encore de 13 % entre le 50^{ième} et le 200^{ième} cycle. Dans le cas du SBR+C, la chute de contrainte entre le 2^{ième} et le 50^{ième} cycle est égale à 34% et de 9% entre le 50^{ième} et le 200^{ième} cycle. Ce phénomène semble donc persister quelles que soient la matrice et la charge.

Les figures 3.8 à 3.12 montrent bien que le phénomène d'adoucissement par fatigue est un phénomène qui ne peut être négligé au delà de quelques cycles, et ce, pour les trois niveaux de déformation maximale imposés considérés.

Le fait que la contrainte continue de chuter au delà du 50^{ième} cycle de façon significative, contredit beaucoup d'auteurs qui considèrent le phénomène d'adoucissement par fatigue stabilisé au bout de quelques cycles (Müllins et Tobin, 1947 [78]; Ogden et Roxburgh, 1999 [84]), ou encore négligeable devant l'endommagement discontinu c'est-à-dire devant la chute de contrainte entre le 1^{er} et le 2^{ième} cycle (Chagnon et al, 2001 [26] [27]).

L'ensemble de ces constatations a été quantifié et résumé dans le tableau 3.1.

On constate encore une fois que certes la chute de contrainte entre les cycles 1 et 2 est plus importante qu'entre deux autres cycles consécutifs, quels qu'ils soient. Cependant cette chute ne peut être considérée comme la seule à prendre en compte étant données les chutes de contraintes cumulées après 50 ou encore 200 cycles de chargement.

Enfin, les figures 3.7 à 3.12, qui représentent la contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour différentes déformations maximales imposées, montrent également la dépendance de ce phénomène d'adoucissement vis à vis de deux paramètres :

- le nombre de cycles de chargement,
- l'intensité des déformations maximales vues par le matériau.

Cette dépendance avait déjà été suggérée dans le premier chapitre grâce à la figure 1.8 qui représentait la contrainte maximale expérimentale en fonction du nombre de cycles, obtenue par Shen *et al.* [99] dans un cas compressible.

Afin de mieux illustrer cette double dépendance, nous présentons dans le cas des nuances chargées, figure 3.13 à 3.16, l'évolution, en fonction du nombre de cycle, de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale au cours du cycle 1.

	% de chute du cycle 2 par rapport au cycle 1	% de chute du cycle 10 par rapport au cycle 2	% de chute du cycle 50 par rapport au cycle 10	% de chute du cycle 200 par rapport au cycle 50
NR				
100%	2	1	~0	2
150%	2	1	2	~0
200%	2	2	2	~0
SBR				
100%	2	2	1	1
NR+C				
100%	21	17	12	10
150%	28	24	16	13
200%	36	32	21	16
SBR+C				
100%	12	14	9	8
150%	16	16	10	8
200%	19	21	16	9
NR+Si				
100%	16	15	9	7
150%	25	21	15	9
200%	33	30	19	10
SBR+Si				
100%	5	8	5	4
150%	12	11	3	6
200%	15	12	8	rupture

TAB. 3.1 – Valeurs des chutes de contraintes au cours du chargement cyclique

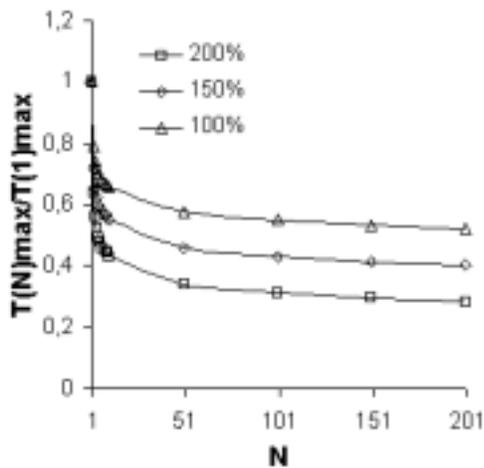


FIG. 3.13 – Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+C

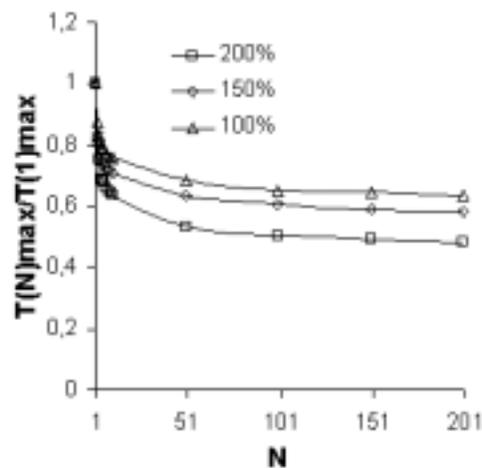


FIG. 3.14 – Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+C

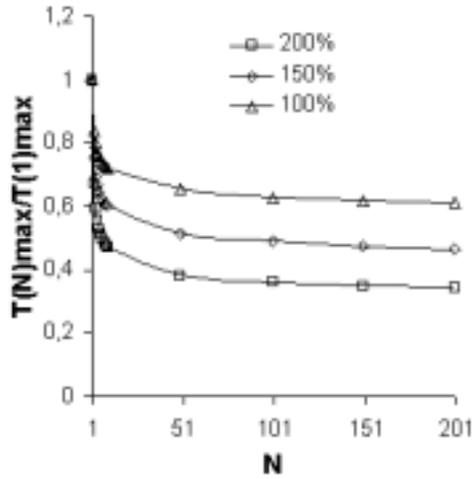


FIG. 3.15 – Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance NR+Si

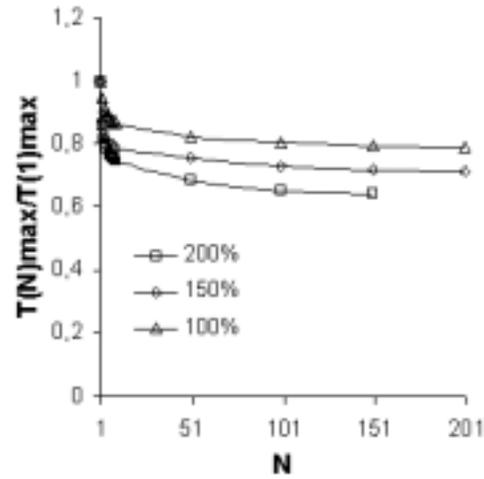


FIG. 3.16 – Evolution de la contrainte maximale normée par la contrainte maximale du cycle 1 en fonction de l'intensité des déformations maximales imposées et du nombre de cycles pour la nuance SBR+Si

On peut remarquer sur les figures 3.13 à 3.16, de façon plus évidente que sur les figures 3.9 à 3.12, la dépendance du phénomène d'adoucissement vis-à-vis de ces deux paramètres. En effet, on constate que non seulement la contrainte décroît lorsque le nombre de cycle de charge augmente mais également que plus le niveau de déformation maximale imposé est grand, plus la chute de contrainte est importante.

Nous allons montrer par la suite en quoi les modèles de la littérature proposés par Beatty *et al.* [7] et Shen *et al.* [99], décrits dans les sections 1.4.2.2 et 1.4.2.3, ne sont pas adaptés au phénomène d'adoucissement par fatigue.

Par soucis de clarté et dans la mesure où l'adoucissement ayant lieu entre les deux premiers cycles de chargement, appelé communément effet Müllins, ne fait pas partie de notre étude, nous considérerons le 2^{ième} cycle de chargement effectif comme le premier cycle considéré et l'appellerons ainsi.

3.2 Limites des modèles de la littérature

Parmi les modèles trouvés dans la littérature, deux grandes tendances sont présentes. La première est de considérer que les phénomènes d'adoucissement au cours des 2 premiers cycles, dépendant quasi-essentiellement du niveau de déformation imposé, sont prépondérants et donc de négliger l'adoucissement ayant lieu au cours des cycles suivants. C'est ce que proposent, comme d'autres, Beatty et Krishnaswamy [7]. La deuxième tendance est de considérer que les phénomènes d'adoucissement par fatigue, étant par définition des phénomènes dépendant du nombre de cycles de chargement, ne dépendent

que de ce paramètre. C'est ce que proposent Shen, Golnaraghi et Plumtree [99].
Etudions ces deux approches.

3.2.1 Modèle de Beatty et Krishnaswamy [7]

Le modèle de Beatty et Krishnaswamy [7] est décrit par les relations (1.41), (1.42) et (1.44). Ces auteurs ont proposé un modèle d'adoucissement qui ne prend en compte que la déformation par l'intermédiaire de la magnitude m , définie par l'équation (1.42), comme seul paramètre pour modéliser la chute de contrainte.

Bien que ce modèle considère l'adoucissement par fatigue comme négligeable, nous l'avons tout de même étudié. Nous avons donc appliqué ce modèle à nos essais de traction répétée à déformation maximale imposée. La magnitude, m , atteint son maximum dès la première montée en charge et donc, selon ce modèle, dès le 2^{ième} cycle le matériau se comporte de façon élastique suivant la première courbe de décharge. La contrainte est alors donnée par la deuxième équation de la relation (1.41), c'est-à-dire qu'on peut exprimer la contrainte au $N^{\text{ième}}$ cycle, $\forall N \geq 2$, grâce à la relation suivante :

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{T}_2 = (1 - d(m_{max}))\mathbf{T}_0 \quad \forall N \quad (3.1)$$

où \mathbf{T}_N est la contrainte de Piola-Kirchhoff au cycle N , \mathbf{T}_2 , celle au cycle 2, \mathbf{T}_0 , celle du matériau non endommagé (dérivant d'une densité d'énergie choisie dans la littérature), et m_{max} , le maximum de la magnitude m .

Cependant les figures 3.1 à 3.16 montrent que la contrainte associée à une déformation imposée ne cesse de diminuer en fonction du nombre de cycles. En effet, la valeur de la contrainte à un cycle donné, à un niveau de déformation donné, est toujours inférieure aux valeurs de contrainte des cycles précédents au même niveau de déformation. De plus, ce phénomène d'adoucissement par fatigue évolue même au-delà du 50^{ième} cycle (figures 3.9 à 3.16 et tableau 3.1). Ainsi, plus le nombre de cycles sera grand, plus l'adoucissement sera important. Pourtant Beatty et Krishnaswamy supposent que pour tout cycle supérieur à 2, le matériau se comporte de façon élastique suivant toujours la première courbe de décharge. Ainsi, d'après l'équation (3.1), plus le nombre de cycles sera grand, plus l'adoucissement par fatigue sera important et plus l'erreur entre l'expérience et leur modèle sera également grande.

3.2.2 Modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree [99]

Le modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree [99] est décrit par les relations (1.45) et (1.46). Ces auteurs ont proposé un modèle purement descriptif qui ne fait intervenir que le nombre de cycles de chargement et non l'intensité des déformations vues par le matériau, dans la définition des paramètres décrivant l'adoucissement (équation (1.46)).

Nous pouvons remarquer que, bien que les coefficients $C_i(N)$ soient définis par la même équation (1.46), ceux-ci n'ont pas la même dimension. En effet, si on regarde l'équation (1.45), on constate que $C_1(N)$ est un paramètre sans dimension alors que $C_2(N)$ est un

paramètre ayant la dimension d'une contrainte, soit en MPa. Cette remarque rend l'interprétation de ces paramètres extrêmement difficile.

Nous adapterons cependant ce modèle dans un cadre prédictif en identifiant les coefficients d'adoucissement $C_i(N)$ sur les premiers cycles de chargement afin de prévoir le comportement à un cycle ultérieur et rendre ainsi le modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree [99] prédictif.

Cependant, les figures 3.7 à 3.16, qui représentent l'évolution de la contrainte maximale en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de déformations maximales imposés, montrent clairement la dépendance du phénomène d'adoucissement par fatigue vis-à-vis de deux paramètres : le nombre de cycles de chargement ET le niveau de déformation maximale imposé. Pourtant, les paramètres d'adoucissement $C_i(N)$ de ce modèle (équation (1.46)) ne dépendent clairement que du nombre de cycles de chargement N .

Ainsi, nous pensons que celui-ci ne sera pas adapté à l'adoucissement par fatigue à cause de sa non-dépendance à la déformation maximale imposée.

Nous avons constaté que les modèles proposés dans la littérature ne semblaient pas adaptés pour décrire le phénomène d'adoucissement par fatigue de par leur unique dépendance soit au nombre de cycles de chargement, soit à la déformation maximale imposée. Il semble donc nécessaire de développer un nouveau modèle prenant en compte ces deux paramètres en même temps. Cependant, nous vérifions dans un premier temps la mise en défaut de ces modèles extraits de la littérature.

3.3 Confrontation des modèles et de l'expérience

Afin de pouvoir confronter ces différents modèles, nous expliquons, dans un premier temps, la façon dont ceux-ci sont identifiés.

3.3.1 Identification des différents modèles

3.3.1.1 Modèle de Beatty et Krishnaswamy

Le modèle d'adoucissement de Beatty et Krishnaswamy est défini par le système d'équations (1.41).

Au cours d'un essai cyclique à déformation maximale imposée constante, la magnitude, m , atteint son maximum à la fin de la première montée en charge considérée. L'adoucissement est alors modélisé pour tout autre cycle $N \geq 2$, par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N &= (1 - d(m_{max}))\mathbf{T}_0 \quad \forall N \geq 2 \\ \text{avec } d(m) &= 1 - \exp(-b(m - \sqrt{3})) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La contrainte \mathbf{T}_0 est ensuite identifiée sur la première charge considérée (c'est-à-dire la charge du cycle 2) en utilisant une fonction densité d'énergie. Nous avons choisi de travailler avec la méthode d'identification proposée par Lambert-Diani et Rey [63] pour les

raisons décrites au cours du deuxième chapitre (section 2.5).

Le paramètre b est choisi de sorte à vérifier la relation suivante :

$$\frac{\mathbf{T}_{1exp} - \mathbf{T}_0}{\mathbf{T}_{1exp}} \leq 5\% \quad (3.3)$$

où \mathbf{T}_{1exp} est la contrainte expérimentale au premier cycle considéré.

Une fois ce paramètre b déterminé, nous avons contrôlé qu'il vérifiait la condition de monotonie proposée par Beatty et Krishnaswamy [7] et qui s'écrit :

$$0 < b < \frac{d\mathbf{T}_0}{d\lambda} \frac{m}{2\mathbf{T}_0(\lambda^3 - \lambda^{-3})} \quad (3.4)$$

La contrainte s'exprime alors de la manière suivante :

$$\mathbf{T}_N = \exp(-b(m_{max} - \sqrt{3}))\mathbf{T}_0 \quad \forall N \geq 2. \quad (3.5)$$

Beatty et Krishnaswamy ont, dans leur article, fait varier le paramètre b et ils ont constaté que leur modèle décrivait l'adoucissement étudié. Cependant, aucun résultat expérimental n'a été proposé pour corroborer les résultats obtenus.

Avec les résultats expérimentaux que nous avons obtenus, nous avons trouvé $b = 5.10^{-3}$ pour l'ensemble des matériaux considérés, c'est-à-dire que le paramètre b est constant quelque soit le matériau que nous avons étudié. Cette constatation nous incite à dire que, dans notre cas, b n'est pas un paramètre dépendant du matériau mais un coefficient définissant le modèle.

3.3.1.2 Modèle de Shen, Golnaraghi et Plumtree

Le modèle d'adoucissement de Shen, Golnaraghi et Plumtree est défini par le système d'équations (1.45). Seule la première équation nous intéresse puisque dans le cadre de cette étude, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges.

Sur la base de ce modèle établi dans un but descriptif pour des matériaux compressibles, nous avons identifié les deux paramètres $C_1(N)$ et $C_2(N)$ adaptés aux matériaux que nous avons étudiés sur les neuf premiers cycles de charge considérés. Grâce à l'identification de ces paramètres, nous en avons déduit les contraintes des cycles ultérieurs. Par ce biais, le modèle devient donc un modèle prédictif.

Pour l'identification des paramètres $C_1(N)$ et $C_2(N)$, nous avons tracé les contraintes expérimentales $\mathbf{T}(N, \epsilon)$ pour $2 \leq N \leq 10$, en fonction de la contrainte expérimentale au premier cycle considéré $\mathbf{T}(1, \epsilon)$ (figure 3.17). Ces graphes sont très bien approximés par des droites de la forme $\mathbf{T}(N, \epsilon) = C_1\mathbf{T}(1, \epsilon) + C_2$.

Par la suite, les valeurs des paramètres $C_1(N)$ et $C_2(N)$ sont tracées en fonction du nombre de cycles de chargement, N (figure 3.18). Les courbes obtenues ont pu être représentées de façon satisfaisante par des fonctions rationnelles définies par l'équation (1.46) et nous avons finalement identifié les coefficients a_{ij} grâce à un logiciel de lissage (origin[©]).

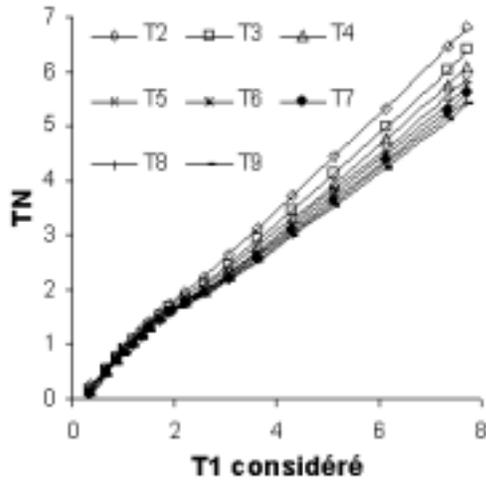


FIG. 3.17 – Représentation de la contrainte au cycle N en fonction de la contrainte au premier cycle considéré

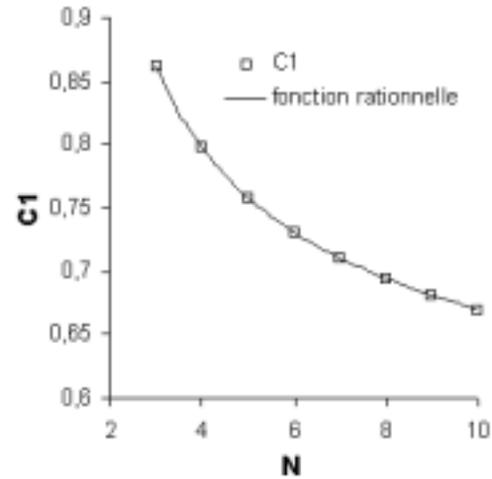


FIG. 3.18 – Identification des $C_i(N)$

Finalement, nous obtenons la relation suivante pour la contrainte :

$$\mathbf{T}_N = \frac{a_{11}N + a_{21}}{a_{31}N^2 + a_{41}N + a_{51}} \mathbf{T}_1 + \frac{a_{12}N + a_{22}}{a_{32}N^2 + a_{42}N + a_{52}} \quad \forall N \geq 2. \quad (3.6)$$

Les valeurs de ces différents paramètres sont répertoriées dans le tableau 3.2.

Matériau	paramètre C_1	paramètre C_2
NR	$a_{11}=3,31168, a_{21}=3,38366$ $a_{31}=0,00148, a_{41}=3,39447$ $a_{51}=3,23157$	$a_{12}=-8,7923 \cdot 10^{24}, a_{22}=1,1036 \cdot 10^{26}$ $a_{32}=-2,3103 \cdot 10^{26}, a_{42}=7,5296 \cdot 10^{27}$ $a_{52}=-5,7673 \cdot 10^{28}$
SBR	$a_{11}=-0,73965, a_{21}=12,83278$ $a_{31}=0,00027, a_{41}=-0,74523$ $a_{51}=12,78322$	$a_{12}=-0,90034, a_{22}=1,66437$ $a_{32}=-1,91804, a_{42}=50,13356$ $a_{52}=-16,62429$
NR+C	$a_{11}=2,27082, a_{21}=3,10505$ $a_{31}=0,02179, a_{41}=3,91755$ $a_{51}=-0,18648$	$a_{12}=1,74108, a_{22}=-4,85873$ $a_{32}=0,50864, a_{42}=3,68243$ $a_{52}=47,22373$
SBR+C	$a_{11}=2,01224, a_{21}=11,60563$ $a_{31}=-0,02529, a_{41}=3,18074$ $a_{51}=10,20018$	$a_{12}=-2,10116, a_{22}=327,93134$ $a_{32}=160,21196, a_{42}=-2507,5687$ $a_{52}=17170,99746$
NR+Si	$a_{11}=2,41551, a_{21}=2,66236$ $a_{31}=0,02182, a_{41}=3,79447$ $a_{51}=-0,07588$	$a_{12}=2,02016, a_{22}=-4,0287$ $a_{32}=0,07678, a_{42}=8,42653$ $a_{52}=7,83988$
SBR+Si	$a_{11}=3,12641, a_{21}=-3,38488$ $a_{31}=0,00846, a_{41}=3,54545$ $a_{51}=-4,32641$	$a_{12}=-3,491 \cdot 10^{10}, a_{22}=1,2703 \cdot 10^{12}$ $a_{32}=3,931 \cdot 10^{13}, a_{42}=-6,8013 \cdot 10^{14}$ $a_{52}=3,1846 \cdot 10^{15}$

TAB. 3.2 – Valeurs des paramètres du modèle de Shen *et al.* [99]

3.3.2 Résultats expérimentaux

3.3.2.1 Confrontation du modèle de Beatty *et al.* et des résultats expérimentaux

Nous avons vu au cours du premier chapitre et dans la section 3.2.1 que le modèle de Beatty *et al.* [7] ne dépendait que de la déformation par l'intermédiaire de la magnitude, m (équation (1.42)). En outre, nous avons également montré que l'adoucissement par fatigue était plus ou moins important selon le niveau de déformation maximale imposé considéré.

Nous avons donc confronté ce modèle aux résultats expérimentaux pour différents niveaux de déformation maximale imposée pour un cycle de chargement donné. Le paramètre b est identifié comme nous l'avons expliqué dans la section 3.3.1.1 sur le premier cycle de chargement considéré.

Les résultats obtenus avec ce modèle d'adoucissement sont représentés sur les figures 3.19 à 3.24. Ces figures représentent la contrainte prévue par le modèle de Beatty *et al.* [7] et les résultats expérimentaux au 200^{ième} cycle considéré pour trois niveaux de déformation maximale imposés (sauf pour le SBR+Si pour lequel nous présenterons le 150^{ième} cycle en raison de problèmes expérimentaux) en fonction de l'élongation. Pour les nuances non chargées, nous avons représenté le cas d'un seul niveau de déformation maximale imposé, car nous avons vu au cours de la section 3.1 que même pour des niveaux de déformation élevés, le matériau ne s'adoucissait que très peu (figure 3.7).

Les figures 3.19 et 3.20, qui présentent les résultats obtenus pour les nuances de caoutchoucs non chargés, montrent que le modèle proposé par Beatty *et al.* prévoit de façon très satisfaisante la contrainte au cycle 200, aussi bien pour des déformations faibles qu'élevées.

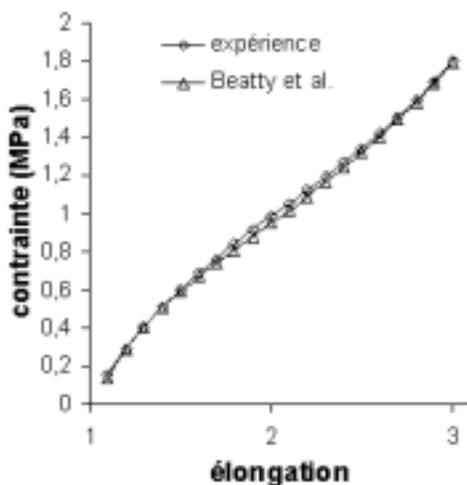


FIG. 3.19 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance NR

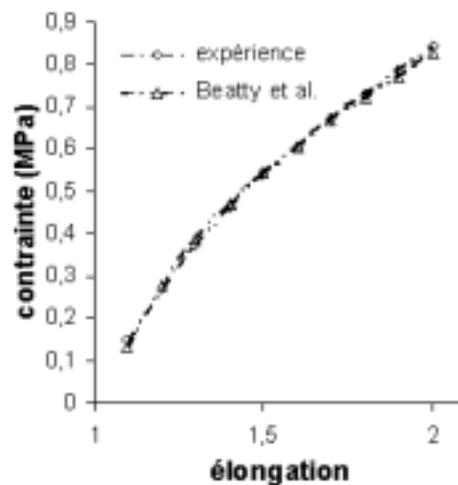


FIG. 3.20 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR

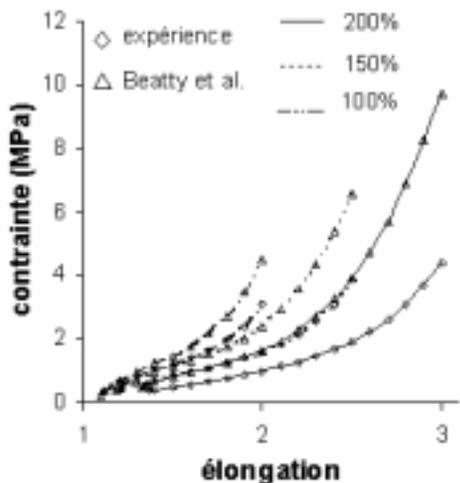


FIG. 3.21 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance NR+C

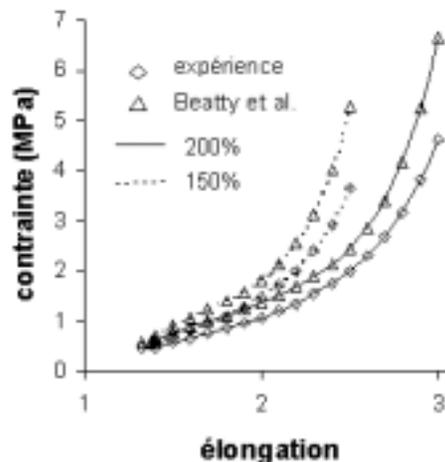


FIG. 3.22 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR+C

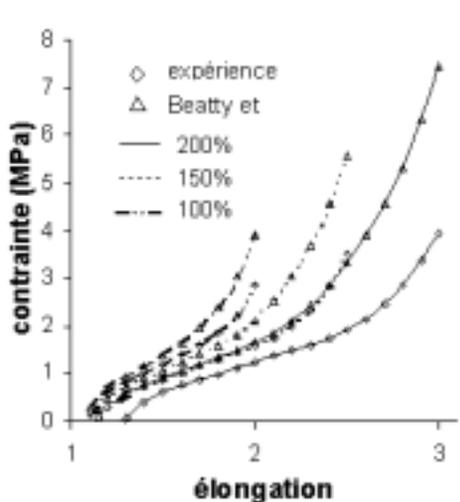


FIG. 3.23 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance NR+Si

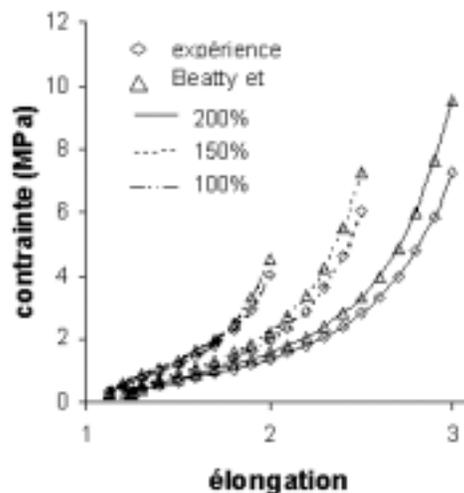


FIG. 3.24 – Confrontation du modèle de Beatty *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR+Si

Ceci s'explique, comme nous avons pu le remarquer sur les figures 3.1 et 3.2, par le fait que les caoutchoucs non chargés s'adoucissaient de façon moins prononcée que les caoutchoucs chargés. De ce fait, le modèle de Beatty *et al.* est très bien adapté à ce genre de matériaux puisque ces auteurs considèrent que l'adoucissement n'a lieu qu'entre les deux premiers cycles.

En ce qui concerne les nuances de caoutchouc chargé (figures 3.21 à 3.24), on peut remarquer que le modèle de Beatty *et al.* surestime systématiquement la contrainte expérimenta-

le pour les trois niveaux de déformation considérés. En effet, ces auteurs supposent que dès le 2^{ième} cycle, les matériaux se comportent de façon élastique et qu'ainsi la contrainte ne chute plus. Cependant, nous avons montré que la chute de contrainte se produisait encore au-delà du 50^{ième} cycle (tableau 3.1). Il est donc logique que le modèle de Beatty *et al.* surestime la contrainte expérimentale. Cependant, la figure 3.24 montre que le modèle de Beatty *et al.* donne des résultats assez satisfaisants pour la nuance de SBR+Si. Ceci s'explique par le fait que cette nuance s'adoucit moins que les autres nuances chargées (tableau 3.1), qu'elles aient une matrice de caoutchouc naturel ou de caoutchouc synthétique.

L'ensemble de ces remarques confirment que le modèle de Beatty *et al.* n'est pas adapté pour décrire les phénomènes d'adoucissement par fatigue de par son unique dépendance à la déformation. Cependant, il reste bien adapté dans le cas de matériaux qui s'adoucissent très faiblement, comme les caoutchoucs non chargés.

3.3.2.2 Confrontation du modèle de Shen *et al.* et des résultats expérimentaux

Nous avons vu au cours du premier chapitre et dans la section 3.2.2 que le modèle de Shen *et al.* [99] ne dépendait que du nombre de cycles de chargement. Nous avons également montré que l'adoucissement par fatigue dépendait pourtant également de l'intensité des déformations maximales imposées au cours du chargement cyclique. Nous avons donc confronté ce modèle à l'expérience à un niveau de déformation maximale imposée pour différents cycles de chargement. Les différents paramètres sont identifiés sur les 10 premiers cycles de chargement (section 3.4.1.2) et sont répertoriés dans le tableau 3.2.

Les figures 3.25 à 3.30 représentent les résultats obtenus aux cycles 50, 100 et 200 à 200% de déformation maximale imposée (sauf le SBR pour lequel on a représenté le cas d'un chargement à 100% de déformation maximale imposée).

Les figures 3.25 et 3.27 montrent que le modèle de Shen *et al.* donnent de très mauvais résultats. En effet, les erreurs relatives atteignent 51% pour le NR+C et 39% pour le NR au 200^{ième} cycle.

On remarque que pour la nuance NR+Si (figure 3.29), le modèle de Shen *et al.* prévoit de façon satisfaisante la contrainte au cycle 50. Cependant, il devient instable et engendre des erreurs nettement plus grandes quand on regarde la contrainte prévue au cycle 200. Concernant le SBR+C (figure 3.28), au 50^{ième} cycle, l'erreur est de l'ordre de 39% en moyenne sur l'intervalle considéré et atteint 42% au maximum de déformation. En revanche, au 200^{ième} cycle, l'erreur est de l'ordre de 257% en moyenne sur l'intervalle de déformation considéré.

Les figures 3.26 et 3.30 montrent que le modèle de Shen *et al.* est assez satisfaisant aussi bien aux petites qu'aux grandes déformations pour les trois cycles étudiés. En effet, pour le SBR, le modèle de Shen *et al.* atteint 14% d'erreur en moyenne au 200^{ième} cycle, et pour le SBR+Si, les erreurs sont de l'ordre de 5% au 150^{ième} cycle.

Ces différentes remarques montrent que le modèle proposé par Shen *et al.* adapté à un cadre prédictif, est très instable, donnant parfois de bons résultats, et qu'il ne peut donc être utilisé dans ce cadre.

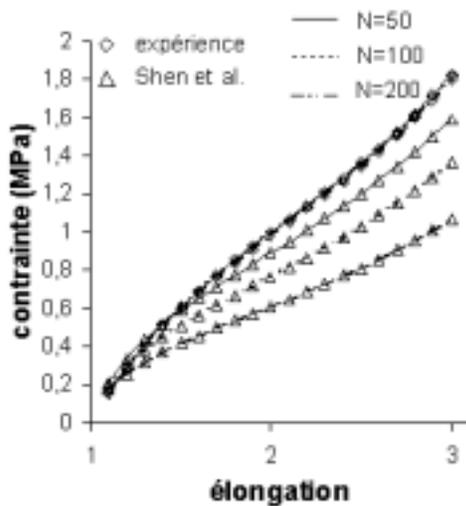


FIG. 3.25 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance NR

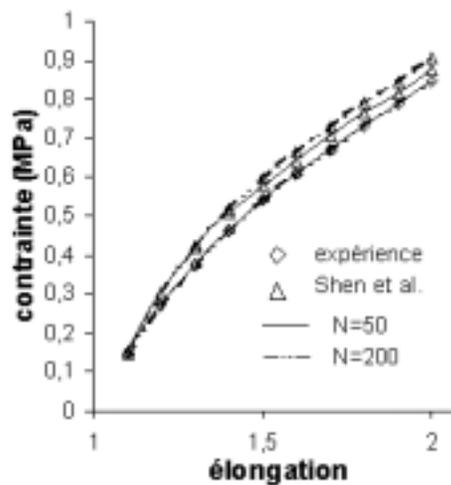


FIG. 3.26 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR

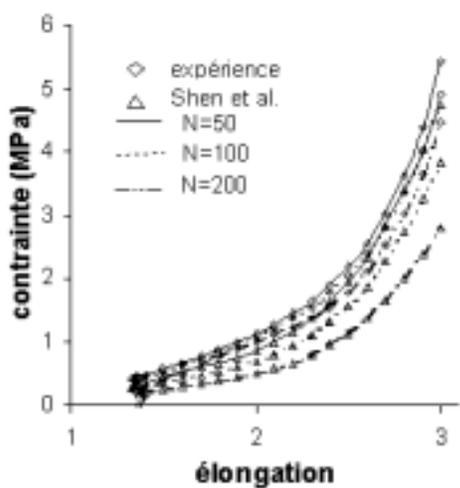


FIG. 3.27 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance NR+C

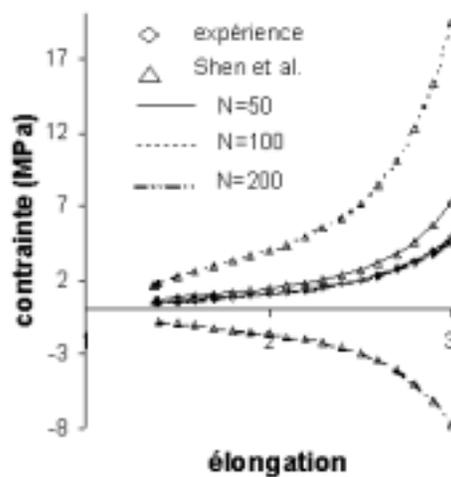


FIG. 3.28 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR+C

De plus, même si, parfois, il prévoit correctement le comportement en fatigue, il introduit cependant l'identification de 10 paramètres.

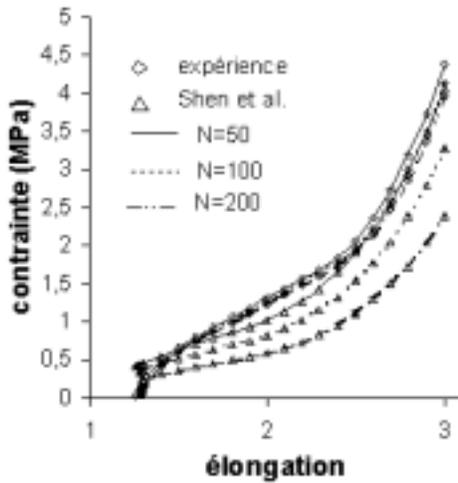


FIG. 3.29 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance NR+Si

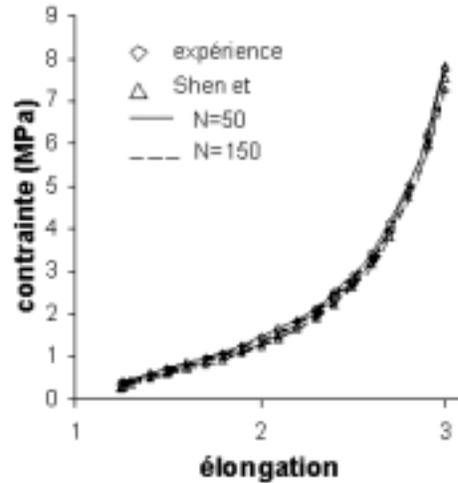


FIG. 3.30 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR+Si

Nous avons également regardé les résultats obtenus pour le NR+Si et le SBR+C, cas les plus défavorables au modèle, dans le cas où les coefficients étaient, cette fois, identifiés sur les 19 premiers cycles. Les valeurs sont répertoriées dans le tableau 3.3 et les résultats sont représentés sur les figures 3.31 et 3.32.

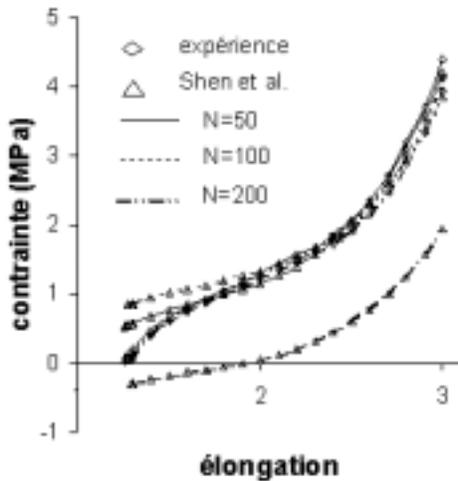


FIG. 3.31 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance NR+Si dans le cas d'une identification sur les 19 premiers cycles

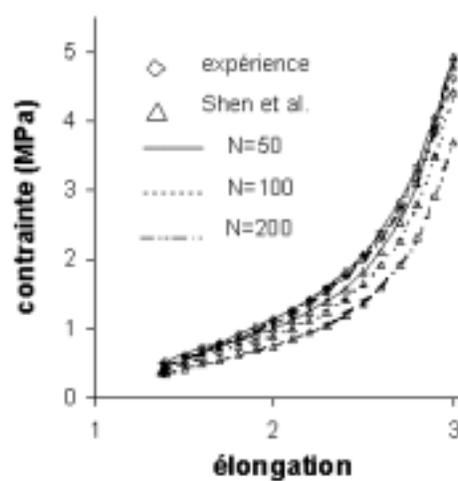


FIG. 3.32 – Confrontation du modèle de Shen *et al.* à l'expérience pour la nuance SBR+C dans le cas d'une identification sur les 19 premiers cycles

On peut remarquer que l'augmentation du nombre de cycles requis pour l'identification permet, dans le cas du SBR+C (figure 3.32), de diminuer l'erreur entre l'expérience et

Matériau	paramètre C_1	paramètre C_2
SBR+C	$a_{11}=3,35406$, $a_{21}=-0,57585$ $a_{31}=0,0101$, $a_{41}=4,21655$ $a_{51}=-2,26102$	$a_{12}=141,97352$, $a_{22}=-228,08291$ $a_{32}=97,6202$, $a_{42}=2527,58898$ $a_{52}=-2023,01913$
NR+Si	$a_{11}=2,75327$, $a_{21}=3,86295$ $a_{31}=0,02223$, $a_{41}=4,40401$ $a_{51}=0,66641$	$a_{12}=1,94527$, $a_{22}=-4,12528$ $a_{32}=-0,07124$, $a_{42}=10,25303$ $a_{52}=-1,57692$

TAB. 3.3 – Valeurs des paramètres du modèle de Shen *et al.* [99] identifiés sur 19 cycles

le modèle. Cependant, dans le cas du NR+Si (figure 3.31), même si l'erreur a diminué aux cycles 50 et 100, celle-ci a doublé au cycle 200. Le modèle reste ainsi toujours très instable même en augmentant le nombre de cycles pour identifier les différents paramètres.

Nous avons donc montré les limites des modèles de la littérature au travers de ces résultats expérimentaux. Nous allons développer dans le chapitre suivant un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue permettant d'appréhender de manière plus satisfaisante ces phénomènes en prenant en compte les dépendances vis-à-vis de la déformation maximale imposée (comme le modèle de Beatty *et al.*) et du nombre de cycles de chargement (comme le modèle de Shen *et al.*). Nous le confronterons ensuite aux résultats expérimentaux.

Chapitre 4

Un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue

Au cours du chapitre précédent, nous avons mis en évidence l'adoucissement par fatigue ainsi que les facteurs influant ce phénomène. En outre, nous avons montré les limites, grâce à une confrontation à des résultats expérimentaux, des modèles extraits de la littérature.

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher au développement d'un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue permettant d'appréhender de manière plus satisfaisante ces phénomènes.

Ce modèle, fondé sur une approche classique de la mécanique des milieux continus, introduit une variable d'endommagement qui tient compte des dépendances au nombre de cycles de chargement et à la déformation maximale imposée. Nous montrerons alors que le modèle développé présente l'avantage d'être un modèle prédictif nécessitant l'identification d'un unique paramètre. Nous confronterons ensuite ce modèle aux résultats expérimentaux obtenus. Nous montrerons enfin que l'identification de ce paramètre permet, dans certaines conditions, la prévision du comportement en fatigue induit par de la traction répétée tant à déformation maximale imposée qu'à contrainte maximale imposée, et ce pour l'ensemble des matériaux considérés.

4.1 Développement d'un nouveau modèle d'adoucissement par fatigue

Nous allons développer dans cette section un nouveau modèle de fatigue qui nous permettra d'appréhender de manière plus satisfaisante les phénomènes d'adoucissement par fatigue et qui prendra en compte les deux paramètres cités dans le paragraphe 3.1, que sont le nombre de cycles de chargement et la déformation maximale imposée.

Afin de modéliser le phénomène d'endommagement qu'est l'adoucissement par fatigue, nous avons choisi une approche classique de la mécanique des milieux continus qui consiste à dégrader les caractéristiques mécaniques du comportement sans endommagement par l'introduction d'une variable d'endommagement, d (Lemaître *et al.*, 1988 [66]). La variable d'endommagement, d , que nous introduisons doit tenir compte des dépendances au nombre de cycles de chargement, N , et à la déformation maximale imposée, λ_{max} .

Notons que pour notre étude, nous n'avons tenu compte que de la charge et non de la décharge. Ainsi, le modèle qui suit ne s'adapte qu'aux phases de chargements de ces matériaux.

Dans un premier temps, nous avons pensé, comme Beatty *et al.* ou encore Shen *et al.*, dégrader la contrainte de Piola-Kirchhoff du premier cycle considéré, supposé purement élastique et noté \mathbf{T}_1 , par une fonction dépendant du nombre de cycles de chargement et de la déformation maximale imposée, pour traduire le phénomène d'adoucissement par fatigue (Gentot *et al.* 2002 [44], [45], 2003 [46]). La contrainte au cycle N considéré s'exprimait alors par la relation :

$$\mathbf{T}_N = (1 - d(N, m))\mathbf{T}_1 \quad (4.1)$$

où \mathbf{T}_N est la contrainte de Piola-Kirchhoff au cycle N considéré, \mathbf{T}_1 , la contrainte de Piola-Kirchhoff au premier cycle considéré (supposé élastique sans endommagement) et m la magnitude du tenseur des dilatations définie précédemment (équation (1.42)).

Bien que le modèle d'adoucissement exprimé sous cette forme ait donné des résultats satisfaisants, il présente cependant un certain inconvénient. En effet, un tel modèle ne permet pas de prévoir le comportement en fatigue lors d'essais à contrainte maximale imposée. Dans ce cas, les contraintes aux 1^{er} et $N^{ième}$ cycles considérés sont égales et la variable d doit, compte tenu de (4.1), être nulle, quels que soient N et m , et ne peut ainsi pas évoluer. L'expression du modèle ne nous permet donc pas de l'utiliser dans d'autres cas que celui d'essais pilotés en déformation maximale imposée.

C'est pour pallier cet inconvénient que nous avons préféré développer un modèle fondé sur une dégradation du comportement, c'est-à-dire une dégradation de la densité d'énergie du matériau non endommagé au premier cycle considéré W_1 (celui-ci correspond au cycle sur lequel nous avons identifié le comportement (section 2.5))(Brieu *et al.*, 2003 [22]).

Ce modèle s'écrit alors :

$$\frac{\partial W_N(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} = (1 - d) \frac{\partial W_1(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.2)$$

où W_N est la densité d'énergie du matériau au cycle N considéré et d , la variable d'endommagement.

Dans le cas incompressible, l'équation (1.29) nous permet alors d'écrire :

$$\mathbf{T}_N = (1 - d) \frac{\partial W_1(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-t} \quad (4.3)$$

Comme nous l'avons vu au cours de la section 3.1, le phénomène d'adoucissement par fatigue dépend de deux paramètres, d'une part le nombre de cycles, N , et d'autre part la déformation maximale imposée. Ces dépendances sont prises en compte dans la définition de la variable d'endommagement, d , qui s'écrit alors :

$$d = d(N, m) \quad (4.4)$$

La variable d est donc une fonction qui dépend de la déformation maximale imposée par l'intermédiaire de la magnitude, m , du tenseur des dilatations, \mathbf{C} , définie par l'équation (1.42), et du nombre de cycles de chargement, N .

Les fonctions $d(N, m)$ sont ensuite choisies sous la forme :

$$d(N, m) = 1 - a \cdot \exp(-b(N)m) \quad \text{telles que} \quad d(1, m) = 0 \quad (4.5)$$

où a est une constante et $b(N)$ une fonction qui dépend du nombre de cycles. En outre, $d(1, m)$ est nul de sorte à garantir un endommagement nul lors du premier cycle considéré, supposé élastique sans endommagement.

Après analyse expérimentale, cette fonction $b(N)$ peut être représentée de façon très satisfaisante par une fonction logarithmique :

$$b(N) = c_1 \ln(N) \quad (4.6)$$

où c_1 est un paramètre à identifier.

Afin que la variable d'endommagement, d , soit nulle lors du premier cycle considéré, supposé sans endommagement, l'équation (4.5), associée à l'expression de la fonction $b(N)$ (équation (4.6)), impose alors que la constante a soit égale à 1.

Ainsi, les fonctions d'endommagement $d(N, m)$ deviennent :

$$d(N, m) = 1 - \exp(-c_1 \ln(N)m) \quad (4.7)$$

et la contrainte au cycle N s'exprime alors par la relation :

$$\mathbf{T}_N = \exp(-c_1 \ln(N)m) \frac{\partial W_1(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-t} \quad (4.8)$$

Une fois le paramètre c_1 identifié, cette relation nous permet de déterminer la contrainte pour n'importe quel cycle de chargement et donc n'importe quel comportement associé.

On peut remarquer que ce modèle présente deux avantages :

- Ce modèle est un modèle prédictif. En effet, le paramètre c_1 est identifié sur les premiers cycles de charge seulement et le comportement au cours des cycles suivants peut ensuite être déterminé grâce à la relation (4.8).
- Ce modèle n'introduit l'identification que d'un seul paramètre, c_1 , auquel il sera éventuellement possible, par la suite, de donner une signification physique.

Regardons maintenant les résultats que nous obtenons avec ce modèle et confrontons le avec les résultats expérimentaux obtenus.

4.2 Confrontation du nouveau modèle à l'expérience

Afin de pouvoir confronter ce modèle aux résultats expérimentaux, nous expliquons dans un premier temps la façon dont celui-ci est identifié.

4.2.1 Identification du modèle proposé

Le modèle d'adoucissement proposé pour décrire les phénomènes d'adoucissement par fatigue, est défini par la relation (4.8). L'identification de celui-ci est réalisé à partir des 10 premiers cycles de chargement. Son identification nous impose de déterminer le comportement pour les dix premiers cycles considérés.

La qualité de la détermination du modèle de fatigue dépend donc fortement de la qualité de l'identification du comportement sur ces dix premiers cycles puisque celle-ci introduit déjà des erreurs. La méthode de Lambert-Diani et Rey (méthode d'identification choisie section 2.5) engendrera le moins d'erreur en grandes déformations dans la détermination du comportement. Nous l'utilisons donc pour identifier la fonction densité d'énergie, W_N , pour $1 \leq N \leq 10$. La détermination des W_N nous permet ainsi de déterminer les fonctions $f_N(I_1)$ et $g_N(I_2)$, qui sont les fonctions de découplage définies par le système d'équations (1.34), ainsi que la pression hydrostatique, p_N , pour chaque cycle de charge.

En traction uniaxiale, d'après (1.29), on a :

$$p_N = 2 * \left(\frac{f_N(I_1)}{\lambda} + g_N(I_2) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq N \leq 10 \quad (4.9)$$

où λ est l'élongation imposée.

Par la suite, dans la mesure où :

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{F}} - p_1 \mathbf{F}^{-t} \quad (4.10)$$

et compte-tenu de (4.3), on montre aisément que :

$$1 - d(N, m) = \frac{\mathbf{T}_N + p_N \mathbf{F}^{-t}}{\frac{\partial W_1(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}}} = \frac{\mathbf{T}_N + p_N \mathbf{F}^{-t}}{\mathbf{T}_1 + p_1 \mathbf{F}^{-t}} \quad (4.11)$$

où p_1 et p_N sont respectivement les pressions hydrostatiques aux premier et $N^{\text{ième}}$ cycles considérés, définies par (4.9), et \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_N les valeurs expérimentales des contraintes.

On trace donc les variations de l'endommagement, d , en fonction de la magnitude, m , à l'aide des données expérimentales grâce à (4.11).

Les courbes obtenues peuvent ensuite être représentées de façon satisfaisante par une fonction exponentielle de la forme $\exp(-b(N)m)$ (figure 4.1).

Enfin, les valeurs du paramètre $b(N)$ sont tracées en fonction du nombre de cycles de chargement, N . La courbe obtenue peut alors être représentée par une fonction logarithmique de la forme $c_1 \ln(N)$ (figure 4.2), ce qui nous permet finalement d'identifier le paramètre c_1 .

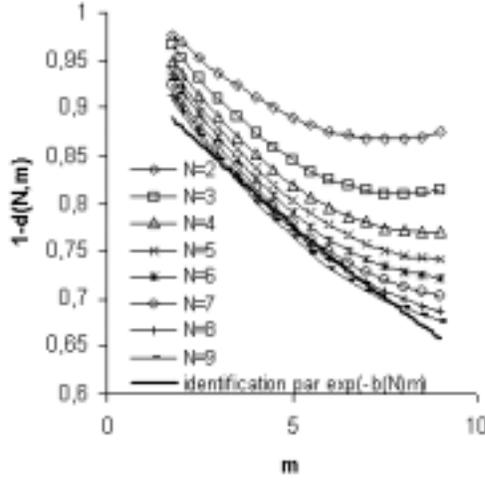


FIG. 4.1 – Identification du paramètre b

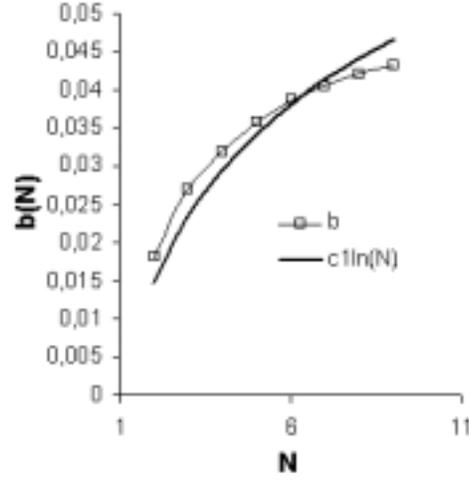


FIG. 4.2 – Identification de c_1

Nous avons alors la relation suivante pour décrire l'adoucissement :

$$\mathbf{T}_N = \exp(-c_1 \ln(N)m) \frac{\partial W_1(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p_N \mathbf{F}^{-t} \quad \forall N \geq 2. \quad (4.12)$$

Le paramètre c_1 est identifié pour chaque cas de chargement, et ses différentes valeurs sont répertoriées dans le tableau 4.1. On peut remarquer sur ce tableau que le paramètre c_1 varie en fonction des cas de chargement laissant à penser qu'il y a une dépendance de c_1 vis à vis de l'intensité des déformations maximales vues par le matériau. Cependant, nous montrerons par la suite qu'il n'en est rien.

Les résultats expérimentaux lors d'essais à déformation maximale imposée sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.2.2 Résultats expérimentaux

Nous avons confronté les résultats obtenus avec le modèle proposé aux résultats expérimentaux en faisant varier, de la même façon qu'au chapitre précédent, soit le niveau de déformation maximale imposée, soit le nombre de cycles. Les résultats obtenus avec ce modèle d'adoucissement sont représentés sur les figures 4.3 à 4.14. Les figures 4.3 à 4.8

Matériau	niveau de déformation	Modèle proposé paramètre c_1 equation (4.12)
NR	200%	$3,8 \cdot 10^{-4}$
SBR	100%	$1 \cdot 10^{-5}$
NR+C	100%	$40,95 \cdot 10^{-3}$
	150%	$29,71 \cdot 10^{-3}$
	200%	$2,19 \cdot 10^{-2}$
SBR+C	100%	$5,35 \cdot 10^{-3}$
	150%	$5,39 \cdot 10^{-3}$
	200%	$5,39 \cdot 10^{-3}$
NR+Si	100%	$41,24 \cdot 10^{-3}$
	150%	$29,24 \cdot 10^{-3}$
	200%	$21,25 \cdot 10^{-3}$
SBR+Si	100%	$7,67 \cdot 10^{-3}$
	150%	$4,16 \cdot 10^{-3}$
	200%	$7,24 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.1 – Valeurs du paramètre du modèle proposé

représentent la contrainte prévue par le modèle proposé et les résultats expérimentaux au 200^{ième} cycle considéré pour trois niveaux de déformation maximale imposés (sauf pour le SBR+Si pour lequel nous présenterons le 150^{ième} cycle en raison de problèmes expérimentaux) en fonction de l'élongation.

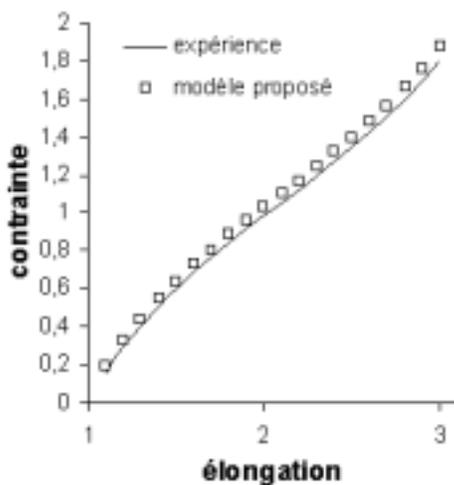


FIG. 4.3 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR à N imposé

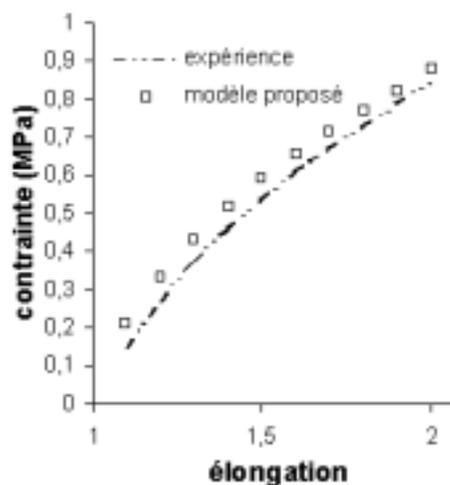


FIG. 4.4 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR à N imposé

Pour les nuances non chargées, nous avons représenté le cas d'un seul niveau de déformation maximale imposé, dans la mesure où nous avons vu au cours de la section 3.1 que même pour des niveaux de déformation élevés, le matériau ne s'adoucissait que très peu (figure 3.7). Les figures 4.9 à 4.14 représentent les contraintes expérimentales et prévues à 200% de déformation maximale imposée pour les cycles 50, 100 et 200 (sauf pour le SBR pour lequel nous présentons les résultats à 100% de déformation maximale imposée).

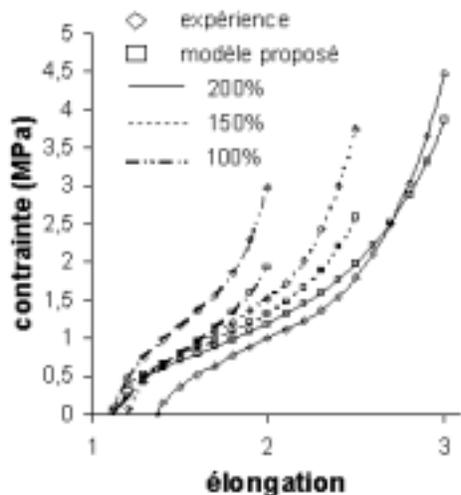


FIG. 4.5 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+C à N imposé et déformation maximale imposée variable

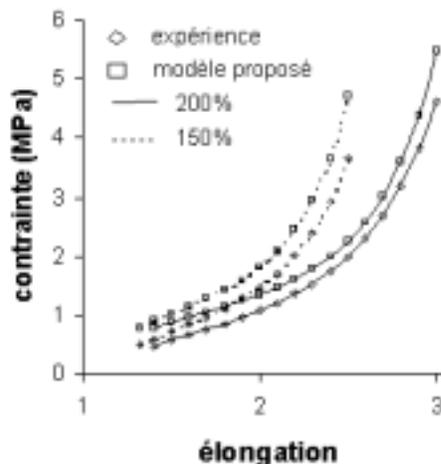


FIG. 4.6 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+C à N imposé et déformation maximale imposée variable

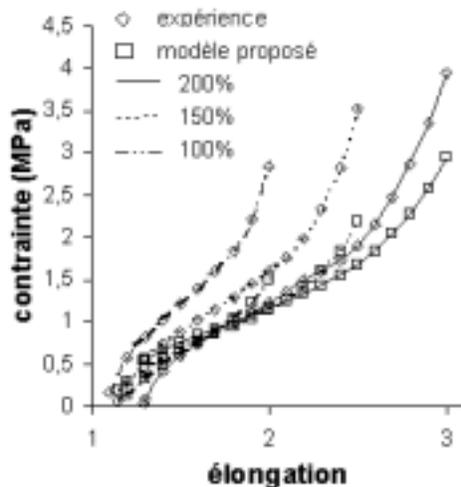


FIG. 4.7 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+Si à N imposé et déformation maximale imposée variable

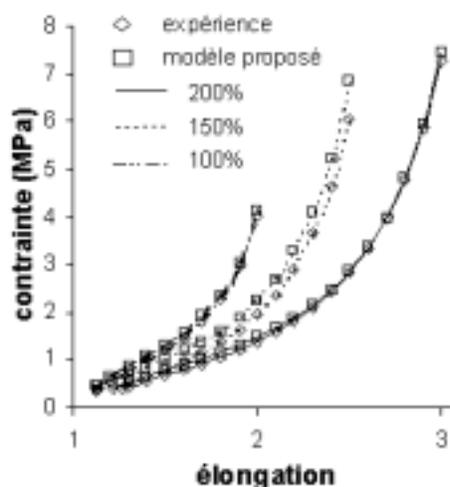


FIG. 4.8 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+Si à N imposé et déformation maximale imposée variable

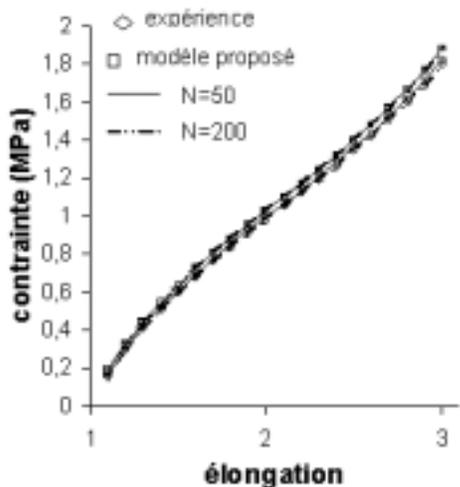


FIG. 4.9 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR à déformation maximale imposée fixe et N variable

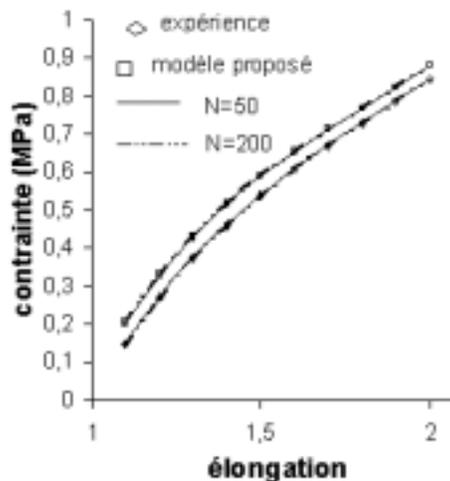


FIG. 4.10 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR à déformation maximale imposée fixe et N variable

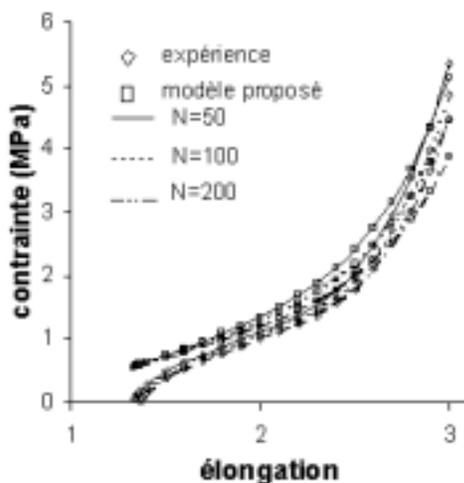


FIG. 4.11 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+C à déformation maximale imposée fixe et N variable

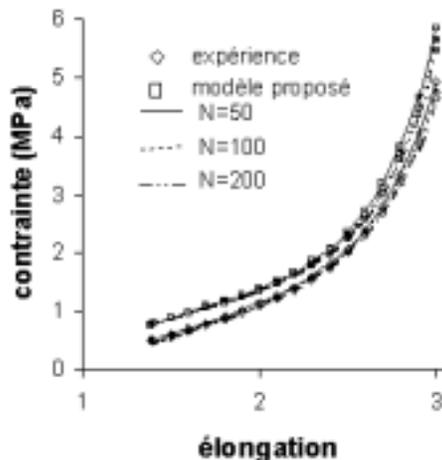


FIG. 4.12 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+C à déformation maximale imposée fixe et N variable

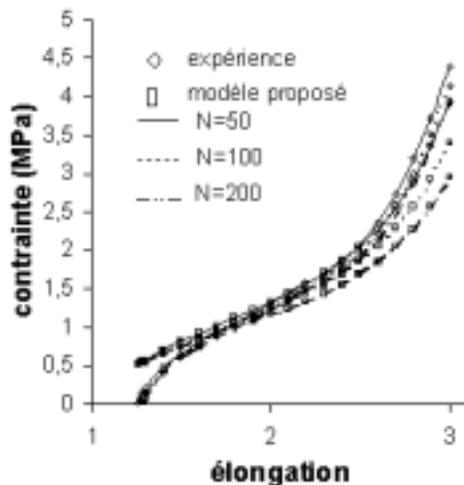


FIG. 4.13 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance NR+Si à déformation maximale imposée fixe et N variable

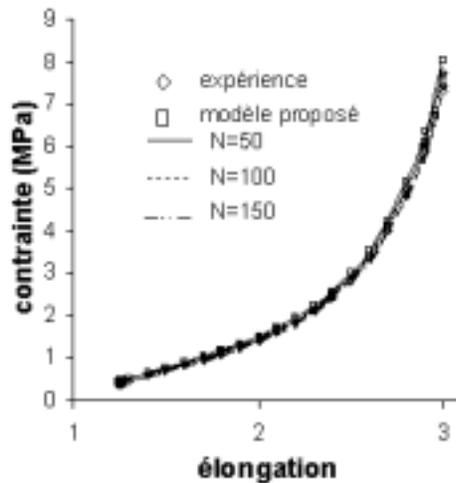


FIG. 4.14 – Confrontation du modèle proposé à l'expérience pour la nuance SBR+Si à déformation maximale imposée fixe et N variable

Les tableaux 4.2, 4.3 et 4.4 résument les performances des différents modèles (Beatty *et al.*, Shen *et al.* ainsi que celui proposé) pour les nuances NR+C, NR+Si et SBR+Si en présentant les erreurs moyenne et maximale ainsi que l'erreur au niveau de déformation maximale imposé. Ces 3 nuances ont été retenues de sorte à obtenir des éléments de

		Beatty <i>et al.</i>	Shen <i>et al.</i>	Modèle proposé
200%	N=50	70/94/81	14/25/11	15/29/5
	N=100	83/121/99	26/37/21	15/36/9
	N=200	97/129/117	42/51/37	17/47/12
N=200	100%	41/53/50	20/17/13	34/45/37
	150%	59/80/75	54/59/50	17/33/33
	200%	97/129/117	42/51/37	17/47/12

TAB. 4.2 – Erreurs engendrées par les différents modèles sur la nuance NR+C

		Beatty <i>et al.</i>	Shen <i>et al.</i>	Modèle proposé
200%	N=50	46/70/69	13/22/8	6/12/12
	N=100	53/80/80	26/35/21	9/18/18
	N=200	58/89/88	44/52/40	13/25/25
N=200	100%	23/38/37	48/54/39	50/63/49
	150%	36/61/58	30/37/22	31/38/38
	200%	58/89/88	44/52/40	13/25/25

TAB. 4.3 – Erreurs engendrées par les différents modèles sur la nuance NR+Si

		Beatty <i>et al.</i>	Shen <i>et al.</i>	Modèle proposé
200%	N=50	16/27/20	4/6/1	5/10/4
	N=100	19/32/26	5/7/1	5/14/3
	N=200	22/34/28	5/8/1	5/16/2
N=200	100%	17/23/16	38/39/39	7/15/3
	150%	20/26/23	4/6/1	13/18/11
	200%	22/34/28	5/8/1	5/16/2

TAB. 4.4 – Erreurs engendrées par les différents modèles sur la nuance SBR+Si

comparaison en faisant varier le renfort ou la matrice. Les autres nuances n'ont pas été représentées car elles ne fournissent pas de résultats complémentaires. En effet, les nuances non chargées ayant des adoucissements très faibles, notre modèle fournit des réponses avec moins de 5% d'erreur, alors que la nuance SBR+C fournit des erreurs du même ordre que le NR+C.

En étudiant ces tableaux, on peut constater que dans le cas où l'on cherche à étudier l'influence de la déformation en comparant les modèles à l'expérience au même cycle de charge mais pour différents niveaux de déformation maximale imposés, le modèle de Shen *et al.* et le modèle proposé permettent d'avoir des estimations de même qualité alors que le modèle de Beatty *et al.* génère des erreurs très importantes. En revanche, dans le cas où l'on s'intéresse à l'influence du cyclage en comparant expérience et modèles à un niveau de déformation maximale imposé pour différents cycles, on constate que cette fois, ce sont les modèles de Beatty *et al.* et le modèle proposé qui sont les plus fiables alors que celui de Shen *et al.* est complètement mis en défaut.

Ainsi, seul le modèle proposé est réellement capable de prendre en compte à la fois l'influence en cycle et en intensité de déformation maximale imposée.

4.3 Etude du paramètre c_1

Nous avons montré au cours de la section précédente que le modèle proposé permettait de rendre compte des phénomènes d'adoucissement par fatigue de façon satisfaisante pour l'ensemble des matériaux étudiés. Cependant, nous avons déterminé une valeur du paramètre c_1 pour chaque niveau de déformation maximale imposé ce qui suppose que celui-ci serait dépendant de m et donc non intrinsèque au matériau. Afin de vérifier son caractère unique, nous avons cherché à identifier c_1 à un niveau de déformation maximale imposé et voir si celui-ci permettait d'estimer l'adoucissement à des niveaux de déformation maximale imposés différents.

4.3.1 Identification du paramètre c_1 sur un essai à 100% de déformation maximale imposée

Nous avons identifié le paramètre c_1 sur un essai pour lequel le niveau de déformation maximale imposé est le plus faible de l'étude, à savoir un essai à 100% de déformation maximale imposée (pour le SBR+C, c_1 a été identifié à 150% de déformation maximale

imposée). Les valeurs du paramètre c_1 sont répertoriées dans le tableau 4.1. La valeur du paramètre c_1 , identifié sur un essai à 100% de déformation maximale imposée, est ensuite introduite dans l'équation (4.12) afin de prévoir l'évolution de l'adoucissement pour des niveaux de déformation maximale imposés supérieurs : 150 et 200%.

Les résultats obtenus avec le modèle d'adoucissement proposé, associé au paramètre c_1 identifié à 100% (150% pour le SBR+C (figure 4.17)) de déformation maximale imposée, sont représentés sur les figures 4.15 à 4.18. Nous avons représenté la contrainte prévue au 200^{ème} cycle en fonction de l'élongation, uniquement pour les nuances de caoutchoucs chargés, sauf pour le SBR+Si pour lequel nous n'avons pu représenter que le cycle 150 en raison de problèmes expérimentaux.

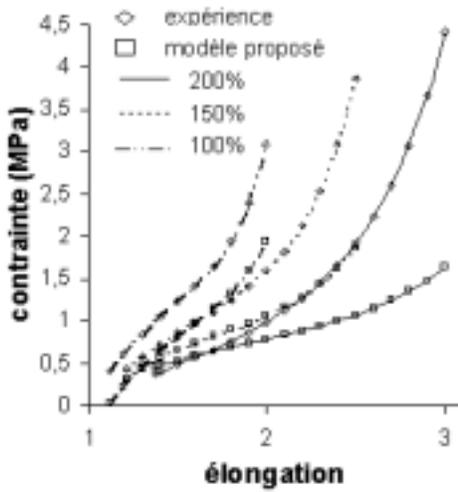


FIG. 4.15 – Prédiction de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance NR+C

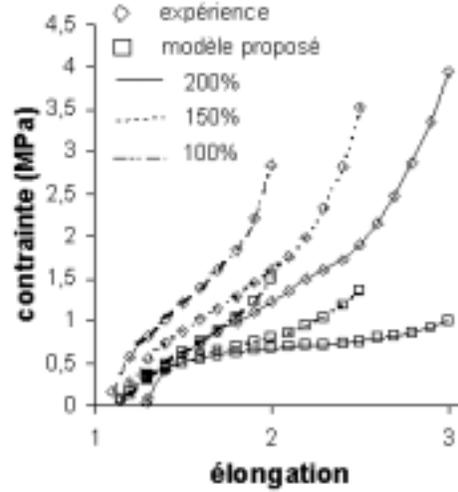


FIG. 4.16 – Prédiction de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance NR+Si

On peut remarquer sur les figures 4.15 et 4.16 que le modèle que nous avons proposé, associé au paramètre c_1 identifié sur un essai à 100% de déformation maximale imposée, ne prévoit pas du tout de façon satisfaisante la contrainte au 200^{ème} cycle.

En effet, dans le cas du NR+C (figure 4.15) soumis à 200% de déformation maximale imposée, la corrélation entre les résultats expérimentaux et la prévision du modèle est satisfaisante jusqu'à une élongation de 2 dans la mesure où les erreurs sont inférieures à 20%. Au delà de ce niveau de déformation, l'erreur augmente et atteint 63% au maximum de déformation. En moyenne, sur cet intervalle de déformation, l'erreur, de l'ordre de 32%, est bien trop importante.

Dans le cas du même matériau soumis à 150% de déformation maximale imposée, l'erreur entre la prévision du modèle et l'expérience est toujours supérieure à 24% et atteint 52% au maximum de déformation.

Dans le cas du NR+Si (figure 4.16) soumis à 200% de déformation maximale imposée, l'erreur entre l'expérience et la prévision du modèle est en moyenne de l'ordre de 49% et atteint 75% au maximum de déformation. Les erreurs sont du même ordre de grandeur

pour 150% de déformation maximale imposée.

Pour ces deux matériaux, on peut constater que le modèle proposé, associé au paramètre c_1 identifié sur un essai à 100% de déformation maximale imposée, prévoit un adoucissement beaucoup trop important puisque la contrainte prévue est systématiquement plus faible que la contrainte expérimentale.

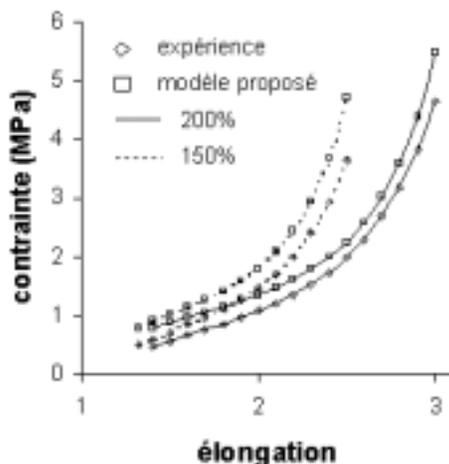


FIG. 4.17 – Prédiction de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 150% de déformation maximale imposée pour la nuance SBR+C

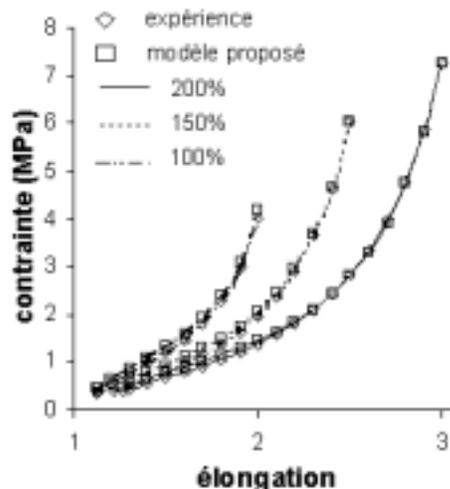


FIG. 4.18 – Prédiction de l'adoucissement avec le paramètre c_1 identifié à 100% de déformation maximale imposée pour la nuance SBR+Si

En revanche, pour le SBR+C (figure 4.17) soumis à 200% de déformation maximale imposée, l'erreur entre l'expérience et la prédiction du modèle est en moyenne de l'ordre de 23% et atteint 18% au maximum de déformation. Dans ce cas, l'erreur est acceptable et on peut noter qu'elle est du même ordre de grandeur que lorsque le paramètre c_1 est identifié à 200% de déformation maximale imposée.

De même, la figure 4.18, qui représente les résultats obtenus avec le SBR+Si, montre une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et la prédiction du modèle associé au paramètre c_1 identifié sur un niveau de déformation maximale imposée inférieur.

En effet, pour 150 et 200% de déformation maximale imposée, les erreurs moyennes sont de 5 et 4% et au maximum de déformation l'erreur est quasi nulle. On peut toutefois constater que les erreurs sont supérieures à 15% pour des élongations inférieures à 1,4.

La bonne corrélation entre l'expérience et le modèle s'explique par le fait que la valeur du paramètre c_1 est très faible contrairement aux valeurs déterminées pour les deux nuances de caoutchouc naturel, et donc l'adoucissement aussi et ce quel que soit le niveau de déformation maximal (cf tableau 4.1).

L'utilisation du modèle associé à la valeur du paramètre c_1 identifié sur un essai soumis à un niveau de déformation maximale imposé λ_1 , ne semble donc pas très fiable pour prévoir le comportement en fatigue de matériaux soumis à des niveaux de déformation maximale imposés plus importants, $\lambda_2 > \lambda_1$.

4.3.2 Identification du paramètre c_1 sur un essai à 200% de déformation maximale imposée

Nous avons identifié le paramètre c_1 sur l'essai de niveau de déformation maximale imposé le plus important de cette étude, à savoir 200% de déformation maximale imposée. Cette valeur de c_1 est ensuite introduite dans l'équation (4.12) afin de prévoir l'évolution de l'adoucissement pour les deux autres niveaux de déformation maximale imposés étudiés : 100 et 150% de déformation. On rappelle que les valeurs de c_1 sont répertoriées dans le tableau 4.1.

Les résultats obtenus avec le modèle d'adoucissement proposé associé au paramètre c_1 identifié à 200% de déformation maximale imposé au 200^{ème} cycle pour les nuances de caoutchoucs chargés sont représentés sur les figures 4.19 à 4.22.

On peut remarquer sur ces figures que le modèle proposé associé au paramètre c_1 déterminé sur un essai à déformation maximale imposée égale à 200%, permet de prévoir de façon très correcte l'évolution de l'adoucissement par fatigue pour les niveaux de déformation maximale imposés plus faibles. En effet, la figure 4.19, qui représente les résultats obtenus avec le NR+C, montre une très bonne corrélation entre l'expérience et la prévision du modèle proposé. L'erreur à un niveau de déformation maximale imposé de 100% entre l'expérience et la prévision est de l'ordre de 5% en moyenne et atteint 3% au maximum de déformation.

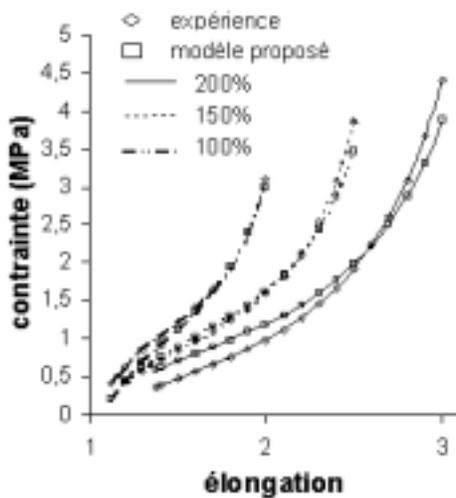


FIG. 4.19 – Validation du modèle pour la nuance NR+C

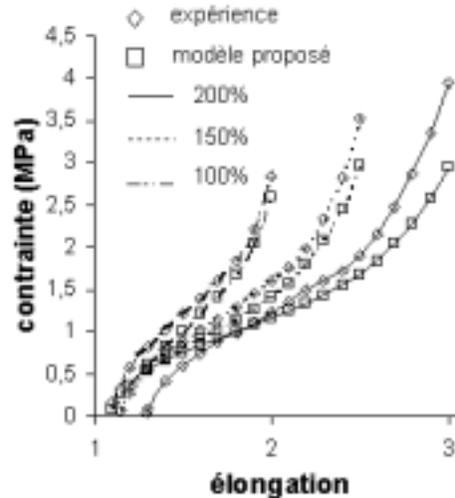


FIG. 4.20 – Validation du modèle pour la nuance NR+Si

Pour le NR+Si (figure 4.20), le modèle proposé donne des résultats très satisfaisants notamment sur l'intervalle de déformation [50%,180%] pour les trois niveaux de déformation maximale imposés. Au delà d'une élongation de l'ordre de 2,8 l'erreur augmente. Néanmoins, celle-ci n'excède pas 14% en moyenne sur les intervalles de déformation complets

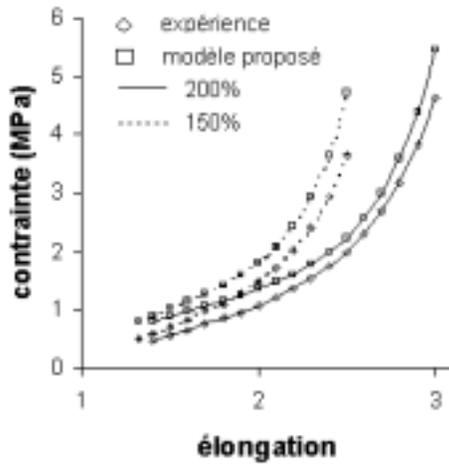


FIG. 4.21 – Validation du modèle pour la nuance SBR+C

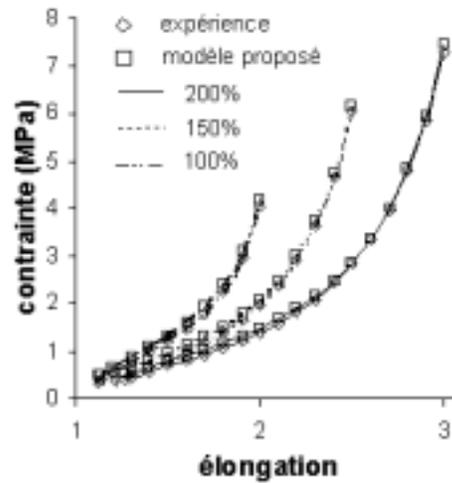


FIG. 4.22 – Validation du modèle pour la nuance SBR+Si

considérés. En effet, l'erreur n'excède pas 13% en moyenne sur l'intervalle de déformation considéré pour une déformation maximale imposée égale à 100% et atteint au maximum de déformation 9%. Pour un niveau de déformation maximale imposé égal à 150%, l'erreur est inférieure à 10% en moyenne.

Dans le cas du SBR+C (figure 4.21), l'erreur à 150% de déformation maximale imposée entre l'expérience et la prévision est du même ordre de grandeur que dans le cas d'une identification à ce même niveau de déformation. Ceci s'explique par le fait que les valeurs de c_1 sont très proches à 150 et 200% de déformation maximale imposée.

La corrélation entre l'expérience et la prévision du comportement en fatigue est également très satisfaisante dans le cas du SBR+Si (figure 4.22). En effet, dans le cas d'un chargement à 150% de déformation maximale imposée, l'erreur en moyenne est de l'ordre de 6%, et, au maximum de déformation elle est égale à 2%. Pour 100% de déformation maximale imposée, l'erreur en moyenne est inférieure à 8%.

Ainsi, la détermination du paramètre d'adoucissement par fatigue, c_1 , sur des essais cycliques de traction répétée à un niveau de déformation maximale imposé, λ_{max} , permet au modèle proposé de prévoir de façon très satisfaisante le comportement en fatigue des matériaux étudiés pour tout chargement cyclique à des niveaux de déformation maximale imposés, λ , inférieurs à λ_{max} ($\lambda \leq \lambda_{max}$).

Dès lors, on peut supposer que ce paramètre c_1 est un paramètre intrinsèque au matériau permettant en quelque sorte, compte tenu de sa définition (4.12) et dans la mesure où le temps est défini implicitement par le cycle de charge, N , de définir la vitesse d'endommagement par fatigue d'un milieu élastomère.

Désormais, afin de mettre encore plus en avant l'intérêt et la robustesse de ce modèle,

études celui-ci dans un autre contexte qu'un chargement cyclique à déformation maximale imposée.

4.4 Adoucissement par fatigue à contrainte maximale imposée

Au cours d'essai à contrainte maximale imposée, en raison des phénomènes d'adoucissement par fatigue, la déformation atteinte sera de plus en plus importante au cours du chargement cyclique. Cependant, comme nous venons de le voir, le modèle développé ne permet une bonne approximation de la contrainte expérimentale que pour des chargements où la déformation maximale imposée est inférieure ou égale à celle considérée pour identifier le paramètre c_1 du modèle. Ainsi l'utilisation de ce modèle pour des chargements à contrainte maximale imposée et non plus à déformation maximale imposée requiert une certaine vigilance. Il faut prendre garde à ne pas dépasser le niveau de déformation maximale imposée requis pour l'identification du paramètre c_1 .

Seuls les résultats obtenus pour les nuances de NR+Si et SBR+Si sont représentés sur les figures qui suivent, et ce pour différents niveaux de contrainte maximale imposés. Trois niveaux de contrainte ont été envisagés : pour le NR+Si, les niveaux de contrainte maximale imposés sont de 4 ; 5 et 6 MPa et pour le SBR+Si, les niveaux de contrainte maximale imposés sont de 3,5 ; 5 et 7 MPa.

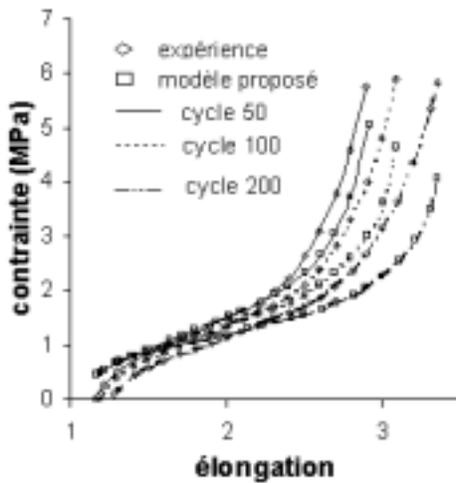


FIG. 4.23 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $T_{max} = 6$ MPa

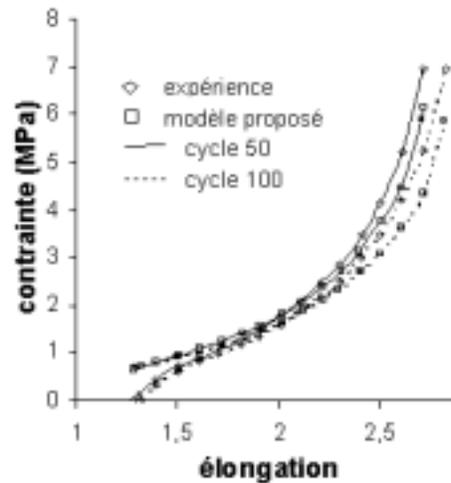


FIG. 4.24 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $T_{max} = 7$ MPa

La figure 4.23 représente les résultats obtenus avec le modèle d'adoucissement proposé, associé au paramètre c_1 identifié sur un essai à 200% de déformation maximale imposée,

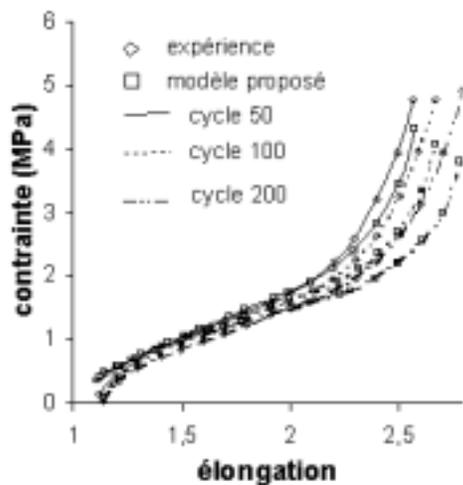


FIG. 4.25 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $T_{max} = 5$ MPa

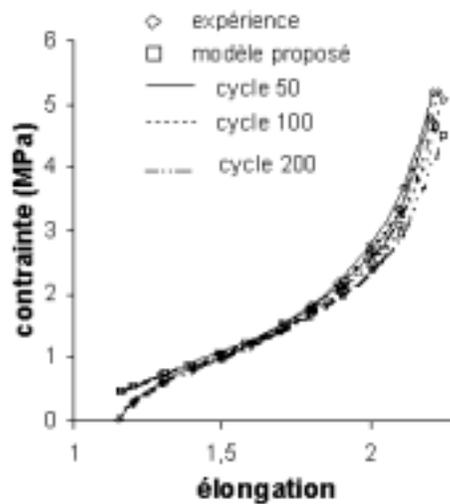


FIG. 4.26 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $T_{max} = 5$ MPa

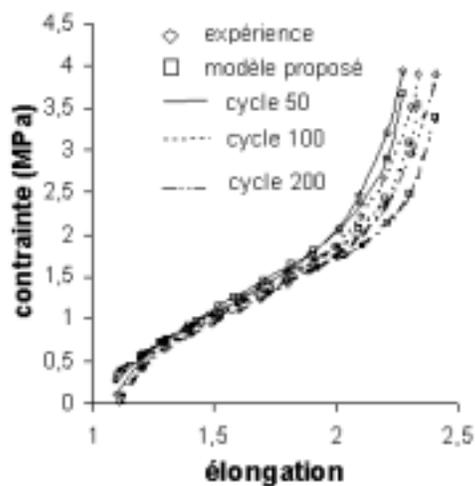


FIG. 4.27 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance NR+Si. $T_{max} = 4$ MPa

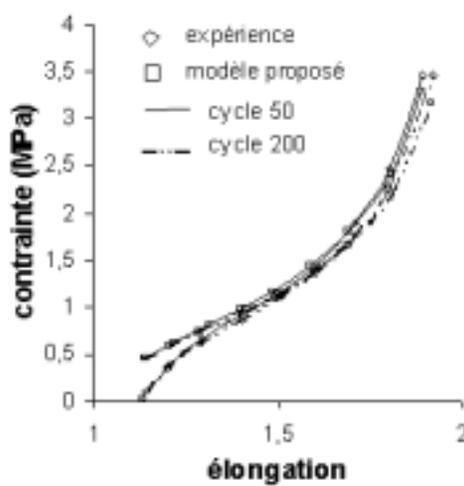


FIG. 4.28 – Validation du modèle lors d'un essai à contrainte maximale imposée pour différents cycles pour la nuance SBR+Si. $T_{max} = 3,5$ MPa

pour le NR+Si soumis à 6 MPa de contrainte maximale imposée.

Au cycle 50, la corrélation entre les résultats expérimentaux et la prévision du modèle est assez satisfaisante sur l'intervalle d'élongation $[1,5; 2,5]$, l'erreur étant inférieure à 15%, et en moyenne sur l'intervalle de déformation complet, l'erreur n'excède pas 13%.

Au cycle 100, on constate que les résultats sont déjà moins satisfaisants puisque l'erreur moyenne est égale à 18% et au maximum de déformation, l'erreur atteint 21%. Cependant, on peut remarquer qu'en raison de l'adoucissement de ces matériaux, au cycle 100, la contrainte maximale imposée est atteinte pour 210% de déformation.

Au cycle 200, les erreurs augmentent encore et atteignent au maximum de déformation 31%. En moyenne sur l'intervalle de déformation considéré, l'erreur vaut 26%. La contrainte maximale imposée est atteinte, au cycle 200, pour 235% de déformation. Ces erreurs, devenues importantes, s'expliquent aisément. En effet, nous avons constaté, lors de la section précédente, que le modèle proposé était fiable tant que le niveau de déformation maximale imposé, λ , était inférieur au niveau de déformation maximale, λ_{max} , imposé lors des essais utilisés pour l'identification de c_1 . Or, ce n'est plus le cas dès le cycle 100.

Lors d'essais à contrainte maximale, σ_{max} , imposée, afin d'être certain que les niveaux de déformation induits soient inférieurs au niveau de déformation maximale imposé, λ_{max} , lors des essais utilisés pour l'identification du paramètre c_1 , il faut veiller à ce que σ_{max} soit inférieure à la contrainte maximale induite lors du chargement à λ_{max} imposée. Nous avons vu que l'adoucissement par fatigue se caractérisait par une chute de la contrainte lors d'essais à déformation maximale imposée donc dans le cas d'essais à contrainte maximale imposée, il est bien évident que la déformation deviendra de plus en plus grande au cours du cyclage. Ainsi, il faudra également, au cours du chargement cyclique en contrainte, veiller à ne pas dépasser le niveau de déformation maximale, λ_{max} , imposé de l'essai qui nous a servi à identifier le paramètre c_1 .

La figure 4.24, qui représente les résultats obtenus pour le SBR+Si soumis à une contrainte maximale imposée égale à 7 MPa, montre que la corrélation entre la prévision du modèle aux 50 et 100^{ième} cycles et les résultats expérimentaux est très satisfaisante. En effet, pour le cycle 50, l'erreur entre la prévision et l'expérience est de 10% en moyenne sur l'intervalle de déformation considéré et vaut 13% en moyenne pour le 100^{ième} cycle. Au maximum de déformation, l'erreur atteint 11 et 15% respectivement aux cycles 50 et 100. Le cycle 200 n'a pas pu être représenté en raison de problèmes expérimentaux.

Pour le NR+Si soumis à une contrainte maximale imposée égale à 5 MPa (figure 4.25), la corrélation entre les résultats expérimentaux et la prévision du modèle est très satisfaisante pour les cycles 50 et 100. Pour le cycle 200, les résultats obtenus sont un peu moins satisfaisants mais néanmoins acceptables.

En effet, au cycle 50, l'erreur atteint 10% au maximum de déformation, c'est-à-dire pour une élongation de 2,6, et au cycle 100, l'erreur atteint 15% au maximum de déformation. En moyenne sur les intervalles de déformation considérés les erreurs sont respectivement 9 et 12%. En revanche, pour le cycle 200, l'erreur atteint 21% au maximum de déformation et vaut en moyenne 16%.

Pour le SBR+Si soumis à une contrainte maximale imposée égale à 5 MPa (figure 4.26), la corrélation entre les résultats expérimentaux et la prévision du modèle est très satisfai-

sante pour tous les cycles étudiés.

En effet, au cycle 50, l'erreur atteint 7% au maximum de déformation, tandis qu'au cycle 200, elle atteint 12%. En moyenne, l'erreur n'excède pas 6% pour le cycle 50 et 9% pour le cycle 200 sur les intervalles de déformation considéré.

Les figures 4.27 et 4.28 montrent également une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et la prévision du modèle pour les nuances de NR+Si et SBR+Si soumises respectivement à une contrainte maximale imposée égale à 4 et 3,5 MPa.

En effet, pour le NR+Si, au cycle 200, l'erreur atteint 13% au maximum de déformation et n'excède pas 11% en moyenne (figure 4.27). Quant à la nuance de SBR+Si, au cycle 200, l'erreur atteint 7% au maximum de déformation et n'excède pas 6% en moyenne (figure 4.28).

L'ensemble de ces remarques montrent que le modèle proposé ainsi que l'identification du paramètre c_1 le définissant à un niveau de déformation maximale imposée, λ_{max} , permet de prévoir le comportement en fatigue de matériaux soumis à de la traction répétée à contrainte maximale imposés. Cependant ces essais demandent une attention particulière puisqu'il ne faut dépasser ni le niveau de contrainte maximale induit, ni la déformation maximale imposée au cours de l'essai requis pour procéder à l'identification du paramètre c_1 du modèle proposé.

Nous pouvons donc conclure en disant que le modèle que nous avons proposé pour décrire les phénomènes d'adoucissement par fatigue a été testé et validé sur différentes nuances de caoutchoucs chargés et non chargés. Ce modèle permet en effet d'appréhender de manière très satisfaisante les phénomènes d'adoucissement par fatigue que nous avons pu observer grâce aux essais expérimentaux. Il permet de prévoir le comportement en fatigue de matériaux soumis aussi bien à de la traction répétée à déformation maximale imposée, qu'à contrainte maximale imposée.

Cependant, la seule détermination du comportement en fatigue ne peut suffire à la conception de structures et un outil numérique est également nécessaire. Nous allons alors nous intéresser à l'implémentation de ce nouveau modèle d'adoucissement dans un processus de simulation numérique et nous nous intéresserons plus particulièrement au développement d'une méthode non incrémentale de résolution qui permettra de prendre en compte le caractère non-linéaire et incompressible ainsi que la nature grandement déformable des matériaux élastomères.

Chapitre 5

Simulation numérique de l'adoucissement dans les milieux élastomères chargés

Nous avons précédemment mis en évidence les phénomènes d'adoucissement observés dans les élastomères et proposé un modèle d'endommagement afin d'en rendre compte. Cependant, la seule détermination du comportement en fatigue ne peut suffire à la conception de structures et un outil numérique est également nécessaire. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la prise en compte de lois de comportement hyperélastiques, incompressibles et endommageables dans un processus de simulation numérique.

La mise en oeuvre d'un outil numérique performant nécessite dans ce cas de prendre en compte d'une part la non-linéarité et l'incompressibilité du comportement et d'autre part le caractère instationnaire des problèmes considérés. Ces difficultés rendent l'utilisation des méthodes incrémentales rapidement trop coûteuses (Bernadou, 1982 [8]). C'est conscient de ces difficultés que nous proposons un algorithme non incrémental permettant d'appréhender au mieux le problème.

Nous présenterons successivement l'algorithme non incrémental permettant de simuler le comportement non-linéaire de ces milieux hyperélastiques incompressibles et endommageables et les techniques mises en oeuvre afin de s'affranchir des différentes difficultés rencontrées.

Nous avons pu établir au cours des chapitres précédents que nous avons à faire à des matériaux ayant un comportement non linéaire, hyperélastique et endommageable. Pour résoudre les problèmes non linéaires engendrés par l'utilisation de ces matériaux, nous proposons une technique de résolution adaptée afin de ne pas engendrer de coûts de calcul trop importants.

5.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons ici à la prise en compte de lois de comportement hyperélastiques, incompressibles faisant intervenir un endommagement, d , dans un processus de simulation numérique. De façon générale, comme nous l'avons vu au cours des chapitres précédents (1.37), les lois de comportement mises en jeu s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (1 - d) \frac{\partial W_0(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-t} \\ \det(\mathbf{F}) = 1 \\ \dot{d} = g(\mathbf{x}, \mathbf{F}, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où \mathbf{T} est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, d la variable d'endommagement, W_0 la densité d'énergie non endommagée et \mathbf{F} le tenseur gradient de déformation.

Afin de préserver à cette présentation un caractère général, la loi d'évolution de l'endommagement, d , est définie a priori sous forme différentielle. Cependant, nous conservons à l'esprit que la loi d'évolution de d permet, dans notre cas, d'écrire celui-ci sous forme explicite du temps (équation (4.7)) et non différentielle, le temps correspondant, dans notre cas, au cycle de charge considéré.

Dans ces conditions, le problème non linéaire à résoudre, compte tenu des équations (1.6), (1.16), (1.29) et (1.37) en quasi-statique, est $\forall t \in [0, \tau]$ le suivant :

$$\begin{cases} \begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \\ \begin{cases} \mathbf{T} = (1 - d) \frac{\partial W_0(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-t} & \text{dans } \Omega \\ \det(\mathbf{F}) = 1 & \text{dans } \Omega \\ \dot{d} = g(\mathbf{x}, \mathbf{F}, t) & \text{dans } \Omega \end{cases} \end{cases} \quad (5.2)$$

où div_x et ∇_x sont respectivement les opérateurs divergence et gradient par rapport à la variable d'espace \mathbf{x} , \mathbf{N} la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, $\partial\Omega_g$ la partie de Ω où des efforts sont imposés, $\partial\Omega_u$ la partie de Ω où des déplacements \mathcal{U} sont imposés et $[0, \tau]$ l'intervalle d'étude considéré.

Plusieurs méthodes ont été envisagées pour la résolution de ce type de problèmes telles des méthodes de Newton par continuation (Rheinboldt, 1974 [89], 1981 [90]), des méthodes de type Newton (Ortega *et al.*, 1970 [85]; Le Tallec *et al.*, 1985 [68]) ou encore, des méthodes du gradient ou de type "approximations successives" (Sibony *et al.*, 1988 [100]). Afin de

pallier les difficultés engendrées par l'utilisation de ces méthodes, basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de 2 champs inconnus, que sont la déformation et la pression, des algorithmes incrémentaux ont été développés pour résoudre ce genre de problèmes non linéaires (Bernadou *et al.*, 1982 [8]; Devries, 1996 [33]). Cependant les conditions de convergence de ces méthodes incrémentales (Bernadou *et al.*, 1982 [8]) induisent des temps de calculs trop importants.

C'est dans le but de s'affranchir des problèmes dus aux méthodes incrémentales que de nombreux auteurs ont développé une méthode non incrémentale de résolution permettant d'accélérer le processus de résolution. Ainsi, nous nous proposons de résoudre le problème (5.2) par l'utilisation d'une méthode non incrémentale de résolution initialement développée pour l'étude de matériaux élastoplastiques (Boisse, 1987 [12]; Cognard, 1989 [30]; Ladevèze, 1996 [61]), puis viscoplastiques et viscoélastiques (Cognard, 1989 [30]; Stehly *et al.*, 2002 [105]).

Ces méthodes ont ensuite été largement étudiées dans le cas hyperélastique (Ladeveze, 1995 [60]; Brieu, Devries, 1998 [15], [17]; Brieu *et al.*, 1998 [16]; Brieu, 1999 [18]; Michel, 1999 [72]; Aubard *et al.*, 2000 [6]; Michel-Ponnelle, 2001 [73]) et la convergence a même été démontrée dans le cas de problème d'homogénéisation de matériaux hyperélastiques sans endommagement par Brieu *et al.*(2003, [21]).

Cette méthode permet de résoudre le problème sur tout l'intervalle de temps et sur toute la structure.

5.2 Algorithme non incrémental

5.2.1 Principe de la méthode

Le problème non linéaire (5.2) est composé d'un certain nombre d'équations que sont l'équation d'équilibre, la définition du tenseur gradient de déformation, les conditions aux limites, la loi de comportement, la relation d'incompressibilité et la loi d'évolution de l'endommagement. Nous pouvons remarquer que celles-ci ne sont pas toutes de même nature et ne présentent donc pas toutes les mêmes difficultés de résolution. On peut, en effet, séparer les équations linéaires et stationnaires (comme l'équation d'équilibre) des équations non linéaires ou instationnaires (par exemple la loi de comportement ou la loi d'évolution de l'endommagement), mais également les équations locales en espace des équations globales.

Le principe de la méthode consiste en la recherche simultanée de l'ensemble des variables du problème $S = (\mathbf{T}, \mathbf{F}, p, d)$ en vérifiant alternativement l'ensemble des équations globales en espace, linéaires et stationnaires, et l'ensemble des équations locales en espace, non linéaires et/ou instationnaires. L'ensemble des équations sont ainsi regroupées en deux groupes distincts.

Le premier groupe, noté \mathcal{NL} , est constitué des équations locales en espace qui peuvent être non linéaires ou instationnaires. Les champs satisfaisant les équations du groupe \mathcal{NL} constituent des approximations intermédiaires notées $S^{n+\frac{1}{2}} = (\mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}, p^{n+\frac{1}{2}}, d^{n+\frac{1}{2}})$ ($n \in \mathbb{N}$) dont on dira par abus de langage qu'elles appartiennent à \mathcal{NL} .

Le deuxième groupe, noté \mathcal{L} , est constitué des équations linéaires qui seront éventuellement globales en espace mais stationnaires. Les champs satisfaisant les équations du groupe \mathcal{L} constituent des approximations intermédiaires notées $S^{n+1} = (\mathbf{T}^{n+1}, \mathbf{F}^{n+1}, p^{n+1}, d^{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$) dont on dira qu'elles appartiennent à \mathcal{L} .

Les équations de \mathcal{L} et \mathcal{NL} seront alternativement vérifiées jusqu'à la convergence vers la solution $S = (\mathbf{T}, \mathbf{F}, p, d)$ du problème (5.2) qui bien évidemment, satisfait simultanément l'ensemble des équations des deux groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} .

Pour ce faire, à partir d'une approximation S^n connue et vérifiant les équations globales, linéaires et stationnaires, appartenant donc à \mathcal{L} , nous allons construire une approximation intermédiaire que l'on espère meilleure, notée $S^{n+\frac{1}{2}}$, et qui appartient à \mathcal{NL} . Cette approximation est construite à partir de S^n grâce à un opérateur dit de "montée", noté H^+ , de sorte que :

$$S^{n+\frac{1}{2}} = H^+(S^n) \quad \text{et} \quad S^{n+\frac{1}{2}} \in \mathcal{NL}. \quad (5.3)$$

L'approximation $S^{n+\frac{1}{2}}$ étant déterminée, nous cherchons une approximation S^{n+1} qui vérifie à son tour les équations linéaires, globales et stationnaires et qui appartient donc à \mathcal{L} . Cette approximation est construite à partir de $S^{n+\frac{1}{2}}$ grâce à un opérateur dit de "descente", noté H^- , de sorte que :

$$S^{n+1} = H^-(S^{n+\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad S^{n+1} \in \mathcal{L}. \quad (5.4)$$

Les opérateurs H^+ et H^- sont choisis en fonction des deux groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} de manière à garantir une mise en oeuvre simple et un fonctionnement économique afin de garantir des gains en temps de calcul.

5.2.2 Choix des deux groupes

Nous avons vu que le problème à résoudre (5.2) était composé d'équations de nature différente : des équations linéaires globales en espace et stationnaires, et des équations locales en espace non linéaires et/ou instationnaires. Nous choisissons donc de définir les groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} de la façon suivante :

$$\mathcal{L} = \left\{ S = (\mathbf{T}, \mathbf{F}, p, d) \right\} / \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_x \mathbf{T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

$$\mathcal{NL} = \left\{ S = (\mathbf{T}, \mathbf{F}, p, d) \right\} / \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{T} = (1-d) \frac{\partial W_0(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-t} & \text{dans } \Omega \\ \det(\mathbf{F}) = 1 & \text{dans } \Omega \\ \dot{d} = g(\mathbf{x}, \mathbf{F}, t) & \text{dans } \Omega \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Les deux groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} étant définis, nous allons maintenant présenter le processus itératif que nous allons mettre en oeuvre pour résoudre le problème hyperélastique, incompressible et endommageable (5.2).

5.2.3 Schéma itératif de la méthode

5.2.3.1 Initialisation

Afin d'amorcer le processus itératif, la première étape de l'algorithme consiste à déterminer une approximation initiale $S^0 = (\mathbf{T}^0, \mathbf{F}^0, p^0, d^0)$ n'engendrant pas de coûts de calculs importants et vérifiant les équations globales en espace, linéaires et stationnaires, c'est-à-dire appartenant au groupe \mathcal{L} .

Nous pouvons constater que le groupe des équations linéaires \mathcal{L} (équation (5.5)) ne contient pas de conditions sur l'évolution de l'endommagement, ni de loi de comportement. Nous pouvons donc choisir librement une valeur initiale de l'endommagement et une expression de la loi de comportement.

Nous choisirons alors de bloquer l'endommagement de l'approximation initiale, S^0 , à sa valeur initiale c'est-à-dire que nous choisirons l'endommagement, d^0 , nul et un comportement élastique linéaire qui sera déterminé en linéarisant la densité d'énergie au premier ordre au voisinage du tenseur identité.

Ainsi pour trouver les champs de l'approximation initiale S^0 , il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T}^0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^0 = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^0(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U}^0 = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}^0 = (1 - d^0)(\mathbf{P}(\mathbf{1}) + \mathbf{Q}(\mathbf{1}) : \nabla_x \mathbf{U}^0) - p^0(\mathbf{1})^{-t} & \text{dans } \Omega \\ d^0 = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5.7)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{Q} , les tenseurs de précontraintes et de raideurs initiaux, sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{1}) = \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{1}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{1}) = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{1}) - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{1}) : \mathbf{1} \end{cases} \quad (5.8)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre 2.

Dans la mesure où l'endommagement d^0 est imposé comme nul, il est le même pour toute valeur du temps. Ce problème n'est donc à résoudre qu'une fois pour toute valeur du temps.

Nous verrons par la suite comment traiter des problèmes de ce type.

Connaissant l'approximation initiale, S^0 , permettant d'amorcer le processus de résolution, il s'agit désormais de définir comment déterminer une approximation intermédiaire, S^{n+1} , que l'on souhaite plus proche de la solution recherchée, à partir d'une approximation précédemment déterminée, S^n .

5.2.3.2 Passage de l'itéré n à l'itéré $n + \frac{1}{2}$

Dans un premier temps, il nous faut construire à partir de l'approximation S^n , l'approximation intermédiaire $S^{n+\frac{1}{2}}$ qui vérifie les équations non linéaires et/ou instationnaires

c'est-à-dire celles de \mathcal{NL} . Il nous faut pour cela définir l'opérateur de montée H^+ :

$$H^+ : S^n \rightarrow S^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Nous pouvons remarquer que le groupe d'équations \mathcal{NL} n'impose pas de conditions sur l'évolution de la pression hydrostatique $p^{n+\frac{1}{2}}$. Nous choisisons que celle-ci n'évolue pas lors du passage de l'itéré n à l'itéré $n + \frac{1}{2}$. Nous avons alors la relation suivante :

$$p^n = p^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

Les champs solutions issus de la résolution de (5.7) et (5.8) bien que contenant une variable de pression hydrostatique, p , ne sont pas incompressibles dans la mesure où aucune condition en pression n'a été imposée. En particulier, la condition $\det \mathbf{F} = 1$ n'est pas vérifiée. La condition d'incompressibilité se vérifie lors du passage de n à $n + \frac{1}{2}$ en recherchant des champs de déformation $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ tel que $\det(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = 1$. Pour ce faire, nous cherchons le tenseur gradient de déformation de l'itéré $n + \frac{1}{2}$, $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$, le plus "proche" possible du tenseur gradient de déformation de l'itéré n , \mathbf{F}^n , tout en vérifiant la condition d'incompressibilité. Ainsi, le problème de minimisation suivant sera résolu :

$$\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \min_{\mathbf{F}, \det \mathbf{F} = 1} \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n)(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n)}{2} \quad (5.11)$$

Celui-ci permet effectivement de trouver un tenseur $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$, tel que $\det(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = 1$, proche au sens de la minimisation introduite de \mathbf{F}^n . Celle-ci sera détaillée ultérieurement. Ainsi, les champs $S^{n+\frac{1}{2}}$ sont définis tels que $\forall t \in [0, \tau]$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial W(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \mathbf{F}} - p^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \min_{\mathbf{F}, \det \mathbf{F} = 1} \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n)(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n)}{2} & \text{dans } \Omega \\ \det(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = 1 & \text{dans } \Omega \\ p^n = p^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega \\ d^{n+\frac{1}{2}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}, t) & \end{array} \right. \quad (5.12)$$

On peut remarquer que dès l'itération $\frac{1}{2}$, qui fait suite à l'initialisation, la résolution de l'équation différentielle portant sur l'endommagement, d , permettra d'obtenir une valeur de l'endommagement d par pas de temps, t , considéré sur l'intervalle d'étude $[0, \tau]$. Ainsi, les variables $\mathbf{T}^{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{F}^{\frac{1}{2}}$ seront à déterminer pour chaque pas de temps, t .

Ainsi, dès l'étape $\frac{1}{2}$, l'ensemble des quantités seront à déterminer pour chaque pas de temps et les problèmes seront à traiter pour l'ensemble de ces pas de temps.

5.2.3.3 Passage de l'itéré $n + \frac{1}{2}$ à l'itéré $n + 1$

Connaissant maintenant l'approximation $S^{n+\frac{1}{2}}$, nous devons construire l'approximation S^{n+1} qui vérifie les équations linéaires globales, locales et stationnaires, c'est-à-dire la

relation d'équilibre, la définition de la déformation et les conditions aux limites. Il nous faut pour cela définir l'opérateur de descente H^- :

$$H^- : S^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow S^{n+1} \quad (5.13)$$

Ce groupe d'équations n'impose aucune condition sur l'évolution du paramètre d'endommagement. Cet endommagement restera alors constant lors du passage de l'itéré $n + \frac{1}{2}$ à l'itéré $n + 1$ quel que soit le pas de temps considéré. Nous avons donc la relation suivante :

$$d^{n+\frac{1}{2}} = d^{n+1} \quad \forall t \in [0, \tau] \quad (5.14)$$

De plus, aucune loi de comportement n'est imposée pour relier les contraintes aux déformations. Ainsi, afin d'avoir des problèmes d'ordre $n + 1$ les plus simples possibles, nous linéariserons la loi de comportement au voisinage de $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$. De sorte que l'approximation S^{n+1} doit vérifier, $\forall t \in [0, \tau]$, le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_x \mathbf{T}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^{n+1}(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{P}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) : \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} - p^{n+1}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} & \text{dans } \Omega \\ d^{n+1} = d^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (5.15)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont les tenseurs de précontraintes et de raideurs issus de la linéarisation de la loi de comportement.

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\partial^2 [(1 - d^{n+1})W_0]}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\partial [(1 - d^{n+1})W_0]}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial^2 [(1 - d^{n+1})W_0]}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) : \nabla_x \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Le détail de cette linéarisation sera donné ultérieurement.

Il est à noter que dans la mesure où il existe une valeur de l'endommagement, d^{n+1} , et de la déformation, $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$, par pas de temps considéré, les valeurs de $\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}}$ (5.16) sont à définir pour chaque pas de temps. Ainsi, le problème (5.15) est à résoudre pour chaque pas de temps. Cependant, dès que les $d^{n+1}(t)$, pour chaque pas de temps t , sont déterminés, ils sont indépendants les uns des autres et les problèmes (5.15), (5.16) posés pour chaque pas de temps, le sont également.

5.2.3.4 Critère de convergence

Une fois les étapes précédentes réalisées, la connaissance de l'approximation S^{n+1} est assurée. Ce processus itératif de \mathcal{L} vers \mathcal{NL} , puis de \mathcal{NL} vers \mathcal{L} est répété jusqu'à satisfaire

le critère de convergence suivant :

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, \tau]} \tau_{cv} &< \text{seuil}_{cv} \\ \text{avec} \quad \tau_{cv} &= \left| \frac{\mathbf{F}^{n+1} : \mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} : \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}}}{\mathbf{F}^{n+1} : \mathbf{T}^{n+1}} \right| \end{aligned} \quad (5.17)$$

La convergence de l'algorithme est atteinte dès que la quantité énergétique de l'itéré $n+1$ est égale à la quantité énergétique de l'itéré $n + \frac{1}{2}$, au seuil de convergence seuil_{cv} près, ce qui garantit que le champ solution $S = (\mathbf{T}, \mathbf{F}, p, d)$ appartienne à la fois aux deux groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} , et vérifie l'ensemble des équations du problème (5.2) quelque soit $t \in [0, \tau]$.

Le traitement de ce processus itératif nécessite donc de s'affranchir de quelques difficultés :

- Lors du traitement de l'étape $n + \frac{1}{2}$ (section 5.2.3.2) : la résolution du problème de minimisation (5.11).
- Lors du traitement de l'étape $n + 1$ (section 5.2.3.3) : le choix de la linéarisation de la loi de comportement (5.16).
- Lors de l'initialisation et de l'étape $n + 1$ (section 5.2.3.1 et 5.2.3.3) : la résolution d'un problème linéaire avec comme inconnues le champ de déplacement et le champ de pression.
- Enfin, lors de l'étape $n + \frac{1}{2}$ (section 5.2.3.2) : la résolution de l'équation d'évolution de l'endommagement.

C'est l'ensemble de ces difficultés que nous allons désormais étudier.

5.3 Résolution du problème de minimisation

La définition de l'opérateur H^+ , appelé opérateur de montée, passe par la résolution d'un problème de minimisation (équation (5.11)) qui consiste à trouver le tenseur gradient de déformation $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ le plus "voisin" possible du tenseur gradient de déformation de l'itéré précédent, à savoir \mathbf{F}^n , tel que $\det(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = 1$.

Bien que la notion de voisin soit très simple à définir pour des variables scalaires, pour des tenseurs d'ordre 2 (9 inconnues car \mathbf{F} est non symétrique) cette notion est beaucoup plus délicate. Ainsi, la manière de définir la notion de "voisin" pour les tenseurs prédétermine la nature de la solution de (5.11).

Le moyen le plus simple et le moins coûteux de satisfaire (5.11) est de poser :

$$\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\det(\mathbf{F}^n)} \mathbf{F}^n \quad (5.18)$$

Cette approche a été testée, mais malheureusement, est extrêmement instable conduisant parfois l'algorithme à échouer en traitant des problèmes (5.15) dont les matrices $\mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}}$ définies en (5.16) étaient non inversibles.

Nous avons préféré, afin de satisfaire (5.11), minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n) : (\mathbf{F} - \mathbf{F}^n) - w \frac{1}{2} \left(\det(\mathbf{F}^n) - 1 \right)^2 \quad (5.19)$$

où w représente un coefficient permettant de privilégier l'importance de la contrainte $\det(\mathbf{F}) = 1$.

Cette minimisation est réalisée grâce à une méthode de Newton (méthode de la tangente) par la résolution du système :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{F})}{\partial F_{pq}} = 0 \quad \forall (p, q) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \quad (5.20)$$

Cette méthode de résolution présente néanmoins un gros inconvénient. En effet, rien ne contraint le tenseur résultat, $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$, à respecter les directions $\mathbf{F}^n \cdot \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$ où \mathbf{e} est un vecteur directeur du repère d'espace \mathbb{R}^3). Ainsi, un tenseur gradient de déformation \mathbf{F}^n , vérifiant les conditions aux limites et de chargement du problème initial (5.2), initialement diagonal, comme par exemple dans le cas d'une sollicitation de traction, peut induire un tenseur résultat $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ ayant des termes non diagonaux. Les directions de $\mathbf{F}^n \cdot \mathbf{e}_i$ sont pourtant nécessairement à respecter puisque \mathbf{F}^n est solution du problème en espace, étant donné que l'approximation $S^n \in \mathcal{L}$. Cette méthode pénalise donc les performances de l'algorithme et l'éloigne ainsi de la solution impliquant même parfois la non convergence de l'algorithme.

Afin donc d'éviter ce type de problème, nous avons imposé une contrainte supplémentaire au tenseur gradient de déformation recherché de sorte à garantir le respect des directions $\mathbf{F}^n \cdot \mathbf{e}_i$ de \mathbf{F}^n :

$$\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} k_1 F_{11}^n & k_2 F_{12}^n & k_3 F_{13}^n \\ k_1 F_{21}^n & k_2 F_{22}^n & k_3 F_{23}^n \\ k_1 F_{31}^n & k_2 F_{32}^n & k_3 F_{33}^n \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Dès lors, le problème de minimisation (5.19) et (5.20) devient :

$$\begin{cases} \mathbf{F} \text{ défini par (5.21)} \\ \mathcal{F}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^n) : (\mathbf{F} - \mathbf{F}^n) - w \frac{1}{2} \left(\det(\mathbf{F}^n) - 1 \right)^2 \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{F})}{\partial k_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.22)$$

Cette technique est moins lourde numériquement car seul trois paramètres (k_1, k_2, k_3) sont à rechercher. De plus, elle permet de garantir le respect des directions et a permis de garantir une stabilité numérique.

Ce problème de minimisation étant résolu, il nous faut résoudre le problème lié à la définition de l'opérateur de descente H^- et en particulier à la définition des tenseurs des raideurs $\mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}}$ et des précontraintes $\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}$ permettant d'obtenir une loi de comportement linéarisée au voisinage de $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ afin de résoudre le problème (5.15).

5.4 Linéarisation de la loi de comportement

Nous allons, au cours de ce paragraphe, nous intéresser à la définition des tenseurs des raideurs \mathbf{Q} et des précontraintes \mathbf{P} définis en (5.15) et (5.16).

Ces tenseurs sont obtenus grâce à une linéarisation de la loi de comportement définie en (5.1). Cette loi est linéarisée au voisinage de $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ en tenant compte de la dépendance de l'endommagement, d , vis-à-vis de \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{n+1} &= \left(\left[(1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial W_0(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \mathbf{F}} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left((1 - d) \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}} \right) \Big|_{(d^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})} \right] \right) : (\mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad - p^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} \\ &= \mathbf{P}'(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{Q}'(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} - p^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}'(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = -\frac{\partial d}{\partial \mathbf{F}} (d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) + (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{P}'(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_x \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.24)$$

Cette linéarisation complète de la loi de comportement fait apparaître dans la définition du tenseur des raideurs \mathbf{Q}' un terme de la forme $-\frac{\partial d}{\partial \mathbf{F}} (d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})$ qui provient de la dérivation de d par rapport au tenseur gradient de déformation \mathbf{F} . Ce terme négatif apparaît sur la diagonale du tenseur \mathbf{Q}' , empêchant celui-ci d'être systématiquement défini positif et entraînant ainsi parfois la résolution des problèmes (5.15) délicate.

Dans la mesure où aucune contrainte n'est imposée, dans la définition de \mathcal{L} , sur la manière dont peut être linéarisée la loi de comportement (5.1) et afin d'éviter ce type de problèmes, nous avons choisi de linéariser la loi de comportement de façon incomplète en négligeant les dérivées de la variable d'endommagement, d , par rapport à \mathbf{F} . La contrainte s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{n+1} &= (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \left[\frac{\partial W_0(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \right] : (\mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad - p^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} - p^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) = (1 - d^{n+\frac{1}{2}}) \left(\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}) : \nabla_x \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \quad (5.26)$$

La linéarisation incomplète de la loi de comportement pénalisera, comme nous le verrons par la suite, la vitesse de convergence de l'algorithme, cependant elle la garantit puisque dans ce cas le tenseur des raideurs $\mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}}$ est toujours défini positif.

5.5 Résolution des problèmes (5.7) et (5.15)

Les problèmes (5.7) et (5.15) sont, $\forall t \in [0, \tau]$, de la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T} = \mathbf{P}(\mathbf{F}^i) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^i) : \nabla_x \mathbf{U} - p(\mathbf{F}^i)^{-t} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (5.27)$$

où

$$\mathbf{F}^i = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{lors de l'initialisation} \\ \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} & \text{lors du processus itératif} \end{cases} \quad (5.28)$$

et $\mathbf{P}(\mathbf{F}^i)$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{F}^i)$ définis par (5.26).

La résolution de ce problème passe par la détermination simultanée des champs de déplacements, \mathbf{U} , et de pression hydrostatique, p . A cet effet, un élément fini spécifique a été développé. Afin de l'introduire, établissons, la formulation variationnelle de ce problème.

5.5.1 Formulation variationnelle

Soit \mathcal{U}_{ad} l'espace des champs de déplacements et de pression hydrostatique, admissibles pour ce problème :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, p) / \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3, p \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{v} = \mathcal{U} \text{ sur } \partial\Omega_u \right\} \quad (5.29)$$

et

$$\mathcal{U}_{ad}^0 = \left\{ \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, p) / \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_0)]^3, p \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \right\} \quad (5.30)$$

où $\underline{\mathbf{v}}$ est un champ mixte déplacement/pression admissibles.

Le principe des puissances virtuelles nous permet d'écrire pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \mathbf{T}^{n+1} \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{U}) = 0 \quad (5.31)$$

Le théorème de Green nous permet de transformer l'équation (5.31) sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^{n+1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{T}^{n+1} \cdot \nabla_x \mathbf{v} = 0 \quad (5.32)$$

Grâce aux conditions limites de (5.27) et à la définition de \mathcal{U}_{ad}^0 , l'équation (5.32) devient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}^{n+1} \cdot \nabla_x \mathbf{v} = 0 \quad (5.33)$$

En remplaçant le tenseur gradient de déformation \mathbf{T}^{n+1} par son expression linéarisée (équations (5.25) et (5.26)) et en posant :

$$\begin{cases} l(\underline{\mathbf{v}}) = - \int_{\Omega} \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_x \mathbf{v} \\ a(\mathbf{U}^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} \nabla_x \mathbf{v} \\ a'(p^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} p^{n+1} (\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}})^{-t} \nabla_x \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.34)$$

on aboutit à la relation suivante :

$$a(\mathbf{U}^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) - a'(p^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) = l(\underline{\mathbf{v}}) \quad (5.35)$$

En introduisant le champ mixte déplacement/pression $\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix}$, la dernière équation devient :

$$A(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{v}}) = l(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \quad (5.36)$$

avec

$$A(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{v}}) = a(\mathbf{U}^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) - a'(p^{n+1}, \underline{\mathbf{v}}) \quad (5.37)$$

Dès lors, la formulation variationnelle associée à (5.15) est :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \text{ tel que :} \\ A(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{v}}) = l(\underline{\mathbf{v}}), \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

avec $l(\bullet)$ et $A(\bullet, \bullet)$ définis par les équations (5.34) et (5.37).

A est une forme bilinéaire de $\underline{\mathbf{U}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$, et l , une forme linéaire de $\underline{\mathbf{v}}$.

5.5.2 Élément fini développé

La formulation variationnelle (5.38) conduit à la résolution d'un problème où, en plus des inconnues de déplacement, il nous faut déterminer une inconnue de pression.

Afin de traiter ce problème qui est de type incompressible, un élément spécifique a été développé.

En effet, dès lors que l'on tend vers l'incompressibilité en utilisant des éléments classiques, on observe des difficultés numériques. La principale est liée au fait que la contrainte d'incompressibilité est tellement forte, qu'elle provoque des phénomènes de blocage, c'est-à-dire une impossibilité du maillage à se déformer, ou au moins qu'elle entraîne un comportement trop rigide par rapport au comportement réel. Pour relâcher cette contrainte

cinématique, on peut distinguer deux approches. La première consiste à utiliser les avantages de la sous-intégration (Hugues, 1980 [54]). La deuxième technique consiste à rajouter des degrés de libertés internes à chaque élément (Wilson *et al.*, 1973 [108]; Simo *et al.*, 1990 [103]). Pour notre part, nous avons préféré utiliser la première technique.

Pour construire notre élément fini, nous avons utilisé une formulation mixte déplacement/pression. La première formulation mixte pour les problèmes de quasi-incompressibilité a été développée par Herrmann (1965 [52]) pour des matériaux isotropes linéaires sous l'hypothèse des petites perturbations. Des extensions pour des matériaux non élastiques isotropes ou pour les grandes transformations ont été proposées (Simo *et al.*, 1985 [101]; Liu *et al.*, 1991 [70]; Klaas *et al.*, 1999 [58]).

Dans le cas de la sous-intégration des éléments mixtes déplacement/pression un compromis doit alors être trouvé entre :

- un nombre de noeuds de pression suffisamment important pour vérifier la condition d'incompressibilité presque partout,
- un nombre de noeuds de pression suffisamment faible pour avoir plus de degrés de liberté à calculer que de contraintes à vérifier pour éviter les problèmes de blocage.

L'élément retenu est un élément tétraédrique dont l'interpolation est de type Lagrange de degré 2 (P2) pour les champs de déplacements et de type Lagrange de degré 0 (P0) pour le champ de pression. Cet élément, noté tetra P2-P0, est représenté sur la figure 5.1.

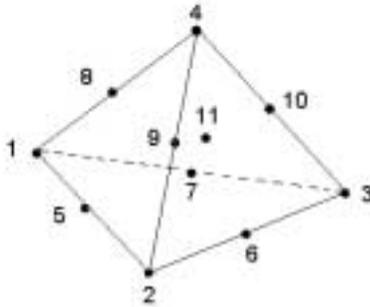


FIG. 5.1 – Géométrie et noeuds de l'élément tetra P2-P0 développé

Cet élément est constitué de 11 noeuds, d'une part 10 noeuds pour l'interpolation des déplacements, et d'autre part 1 noeud pour l'interpolation de la pression. Ces noeuds sont respectivement situés aux sommets et aux milieux des arêtes pour les déplacements et au barycentre de l'élément tétraèdre pour le champ de pression.

Les noeuds qui permettent d'approximer les champs de déplacements, \mathbf{U}^{n+1} , c'est-à-dire

les noeuds numérotés 1 à 10, ont 3 degrés de liberté tandis que celui qui permet d'approximer le champ de pression, p^{n+1} , c'est-à-dire le noeud 11, a un seul degré de liberté. Ainsi, l'élément fini développé possède 31 degrés de libertés.

Associé à cette géométrie et cette interpolation, un schéma numérique d'intégration de type Gauss a été retenu pour les champs de déplacement. Celui-ci est constitué de 15 points dans l'élément de référence, appelés points de Gauss pour l'intégration volumique et de 7 points pour l'intégration surfacique.

Les champs de déplacement sont donc déterminés par un schéma d'intégration exact. Le champ de pression est considéré comme constant sur l'élément et ainsi aucun schéma d'intégration n'est requis.

5.6 Résolution de la loi d'évolution de l'endommagement

Comme nous l'avons vu section 5.2.3.2, à l'issue de l'étape d'initialisation, il y a autant de problèmes de type (5.15) à traiter que de pas de temps considéré sur l'intervalle d'étude $[0, \tau]$. Cependant ces problèmes sont indépendants les uns des autres.

Cette remarque est intéressante dans la mesure où elle permet de garantir une parallélisation aisée de la résolution en temps des problèmes (5.15). Ces problèmes étant indépendants, ils peuvent être traités simultanément. La résolution parallèle des équations (5.12) est sujette au traitement parallèle de l'équation d'évolution portant sur l'endommagement, d .

Dans le cas de notre étude, cela ne pose pas la moindre difficulté dans la mesure où la loi d'évolution de l'endommagement a été déterminée sous forme non différentielle et explicite du temps, en l'occurrence le cycle N considéré :

$$d(N, m) = 1 - \exp(-c_1 \ln(N)m) \quad (5.39)$$

où N , qui est le nombre de cycles considérés, représente implicitement le temps.

Dans ces conditions, l'algorithme proposé est équivalent à la méthode de Picard (Burrage, 1995 [25]; Brieu, 1999 [18]) et permet éventuellement d'effectuer simultanément les calculs à chaque instant de contrôle.

5.7 Présentation schématique de l'algorithme

On fournit sur la figure qui suit, un schéma résumant le fonctionnement de l'algorithme non incrémental qui vient d'être présenté.

On peut constater sur ce schéma que l'ensemble des temps est traité simultanément, garantissant ainsi une parallélisation en temps de l'algorithme simple.

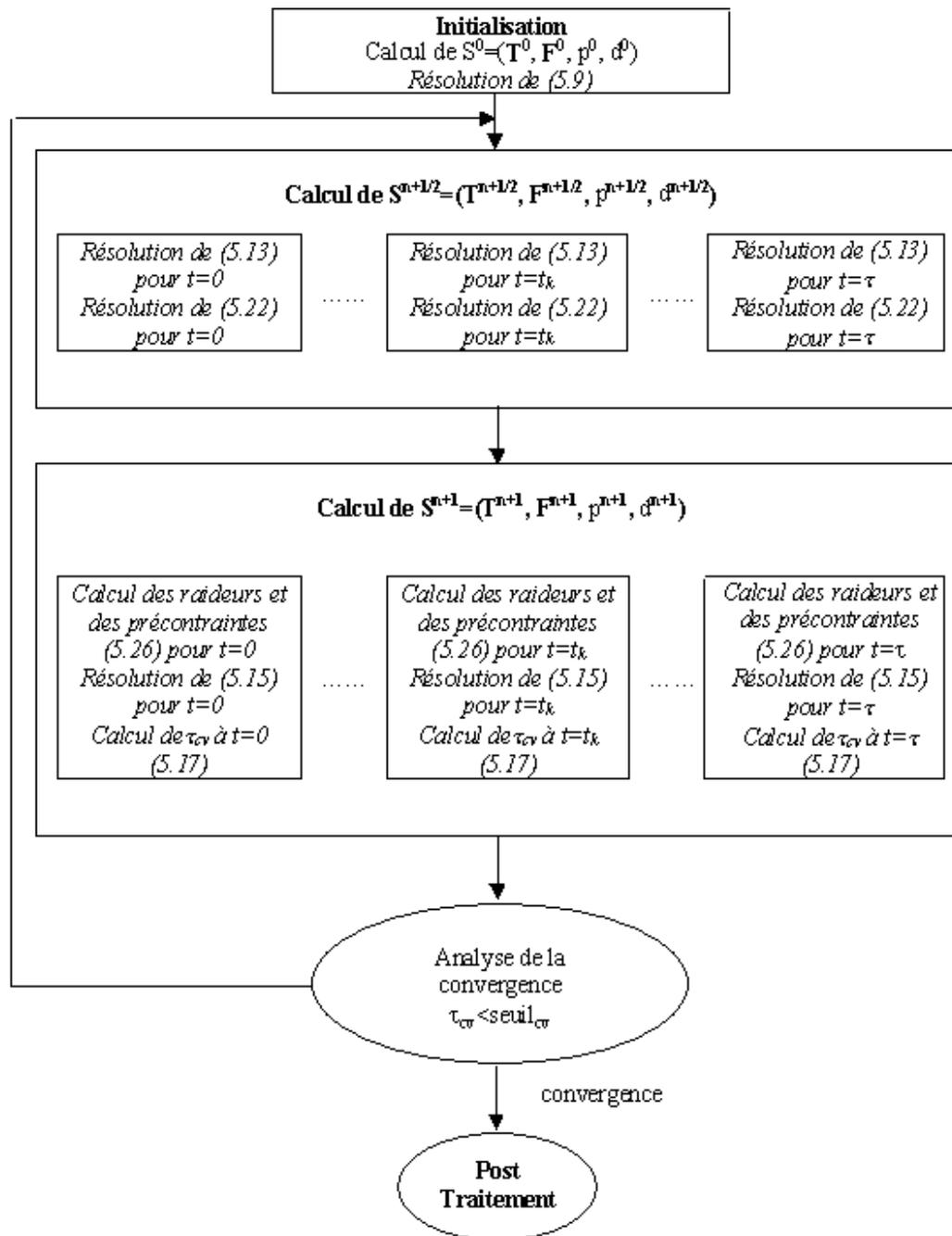


FIG. 5.2 – Algorithme de résolution

Le processus itératif ayant été défini précédemment et les problèmes de résolution liés à la définition des opérateurs de montée et de descente ayant été résolus, nous présentons dans la suite les résultats obtenus avec cet algorithme non incrémental de résolution et les moyens adoptés pour optimiser l'algorithme.

Chapitre 6

Performances et optimisation parallèle de l'algorithme

Au cours du chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la prise en compte de lois de comportement hyperélastiques, incompressibles et endommageables dans un processus de simulation numérique et avons présenté un algorithme non incrémental de résolution. Nous avons implémenté le modèle d'adoucissement développé au cours du chapitre 4 et l'algorithme proposé au sein du code éléments finis modulef (Bernadou *et al.*, 1985 [9]). Nous présenterons dans un premier temps le problème considéré ainsi que les résultats de fatigue obtenus grâce à une simulation éléments finis séquentielle. Dans un deuxième temps, nous verrons au cours de ce chapitre les moyens que nous avons adoptés pour optimiser l'algorithme non incrémental présenté, notamment dans la façon de redémarrer le processus de résolution entre chaque incrément de temps considéré. Ces moyens permettront d'obtenir des gains en temps de calcul que nous présenterons. Pour trois processus de redémarrage, nous présenterons les résultats obtenus en terme de convergence. Enfin, un bilan et des résultats de parallélisation du code seront présentés.

6.1 Problème considéré

Afin de valider l'algorithme non incrémental, développé au cours du chapitre précédent, associé au modèle d'adoucissement par fatigue proposé et validé chapitre 4, nous considérons une structure parallélépipédique dont les dimensions correspondent aux dimensions de la zone utile des éprouvettes que nous avons utilisées lors des essais de traction répétée ($L=25\text{mm}$, $l=4\text{mm}$, $e=2\text{mm}$)(figure 6.1).

Cette structure est maillée grâce aux éléments tetra P2-P0 introduits au cours du chapitre précédent. Le maillage est constitué de 1404 éléments, 3525 noeuds à 3 degrés de liberté pour déterminer les champs de déplacements, 1404 noeuds à 1 degré de liberté pour le champ de pression hydrostatique. Le maillage introduit donc des problèmes à 11979 degrés de liberté (figure 6.2).

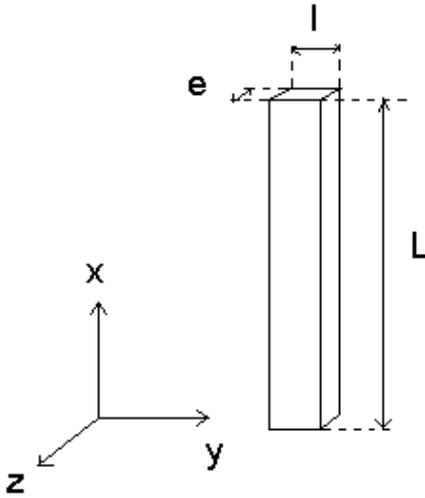


FIG. 6.1 – Structure étudiée

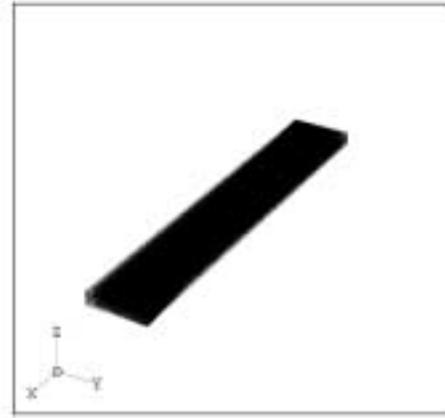


FIG. 6.2 – Maillage de la structure

Nous considérons, pour illustrer cet algorithme, des cas de chargement de traction uniaxiale suivant la direction de l'éprouvette (0,x).

Seul un matériau est présenté pour cette étude, les simulations réalisées avec les autres matériaux fournissant le même type de résultats. Le matériau considéré est le NR+C. Le comportement élastique est défini par une densité Lambert-Diani-Rey (1.34), (2.14) et (2.15) où les coefficients, identifiés de la même façon qu'au chapitre 2, sont :

$$a_0 = -1,0683 \quad a_1 = 0,1706 \quad a_2 = 0,0127 \quad b_0 = -4,5946 \quad b_1 = 0,772 \quad (6.1)$$

et l'adoucissement est défini par le modèle proposé au chapitre 4 (4.12) avec $c_1 = 0,0219$.

6.2 Validation de l'approche algorithmique

Nous rappelons que le problème non linéaire à résoudre s'écrit sous la forme (5.2).

Nous avons vu au cours des chapitres précédents que la loi d'évolution de l'endommage-

ment précédemment définie par l'équation (5.39) fait clairement apparaître une notion de temps. Ainsi toutes les quantités mécaniques intervenant dans ce problème sont également implicitement dépendantes du temps. On peut alors noter :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_t & \mathbf{F} &= \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_t & \mathbf{U} &= \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_t \\ p &= p(t) = p_t & d &= d(t) = d_t \end{aligned} \quad (6.2)$$

où \mathbf{T}_t , \mathbf{F}_t , \mathbf{U}_t , p_t et d_t sont respectivement le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, le tenseur gradient de déformation, le champ de déplacement, la pression hydrostatique et l'endommagement au temps t , temps qui sera d'ailleurs caractérisé par la suite par le cycle de charge considéré. En effet, dans la mesure où le chargement auquel sont soumis les matériaux étudiés, est un chargement de traction répétée à déformation ou contrainte maximale imposée, il est clair que le nombre de cycles, N , correspond au paramètre temps.

D'après l'équation (5.39), dans la mesure où le nombre de cycles de chargement, N , représente le temps, on peut écrire l'endommagement, d , sous la forme :

$$d_t = G(\mathbf{x}, \mathbf{F}_t, t) \quad (6.3)$$

Le problème à résoudre devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_x \mathbf{T}_t = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}_t = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}_t & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}_t = (1 - d_t) \frac{\partial W_0(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{F}} - p_t \mathbf{F}_t^{-t} & \text{dans } \Omega \\ \det(\mathbf{F}_t) = 1 & \text{dans } \Omega \\ d_t = G(\mathbf{x}, \mathbf{F}_t, t) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (6.4)$$

6.2.1 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Les résultats expérimentaux, que nous avons introduits chapitre 3, dans le cas d'un caoutchouc naturel renforcé par des particules de noir de carbone (NR+C), sont comparés aux résultats obtenus à l'issue d'une simulation numérique (figures 6.3 et 6.4) lors d'un chargement cyclique à 200% de déformation maximale imposée.

La figure 6.3 montre que la corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats obtenus avec la simulation EF est très satisfaisante pour les trois cycles représentés, et ce, sur tout l'intervalle de déformation considéré.

En effet, l'erreur entre l'expérience et la simulation numérique au cycle 50 est de l'ordre de 5% en moyenne sur l'intervalle de déformation considéré et atteint 16% au maximum de déformation. Pour les cycles 100 et 200, l'erreur en moyenne n'excède pas respectivement 6 et 8%. Néanmoins, au maximum de déformation, l'erreur atteint 20% pour les cycles 100 et 200. On constate également que la simulation numérique surestime légèrement l'adoucissement dans la mesure où la contrainte prévue numériquement est plus faible que la contrainte expérimentale, notamment sur l'intervalle d'élongation [2,75 , 3].

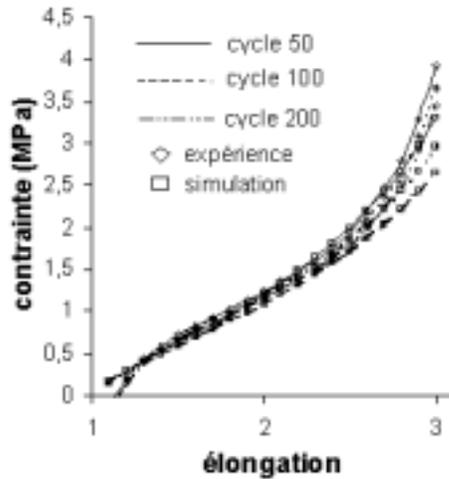


FIG. 6.3 – Confrontation de la simulation EF et des résultats expérimentaux de l'adoucissement pour plusieurs cycles de charge

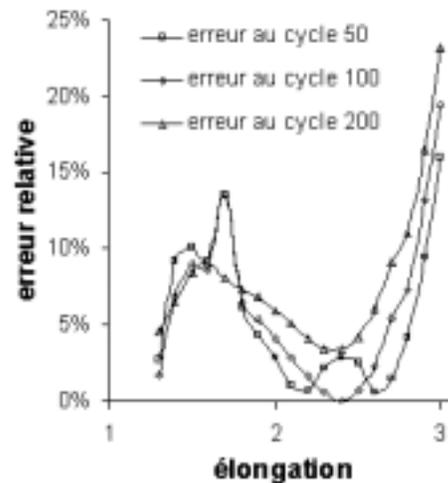


FIG. 6.4 – Evolution de l'erreur relative entre l'expérience et la simulation numérique en fonction de l'élongation

Les erreurs relatives engendrées pour chaque cycle sont représentées en fonction de l'élongation sur la figure 6.4. On constate sur cette figure que les erreurs relatives sont inférieures à 15% sur presque tout l'intervalle de déformation considéré. Seul les 20 premiers et les 10 derniers % de déformation engendrent des erreurs supérieures. Cette figure montre que l'algorithme non incrémental présenté dans le chapitre précédent est bien adapté à la résolution de problèmes incompressibles et endommageables.

6.2.2 Analyse des taux de convergence lors du processus algorithmique

Nous avons également représenté les taux de convergence de l'algorithme lors de cette simulation en échelle semi-logarithmique en fonction des itérations (figure 6.5) pour les cycles 50, 100, 150 et 200. On constate que la convergence est la même pour les 4 temps étudiés dans la mesure où toutes les courbes sont quasiment parallèles. La figure 6.5 montre également que la convergence n'est pas quadratique mais linéaire, contrairement au cas hyperélastique sans endommagement où la convergence quadratique a été démontrée par Brieu (1999, [18]; 2003, [21]). Cependant, Brieu (1999, [18]) avait également constaté une perte de la convergence quadratique lors de la simulation du comportement de composite hyperélastique avec prise en compte d'endommagement de type décohésion entre renfort et matrice. Cette perte de convergence quadratique est probablement due à la linéarisation incomplète, mais nécessaire, de la loi de comportement (section 5.4). Néanmoins la convergence reste assez rapide puisque pour chaque cycle considéré, 13 itérations suffisent pour que l'algorithme converge.

Sur la figure 6.5, on peut remarquer également que les différents temps étudiés, caractérisés

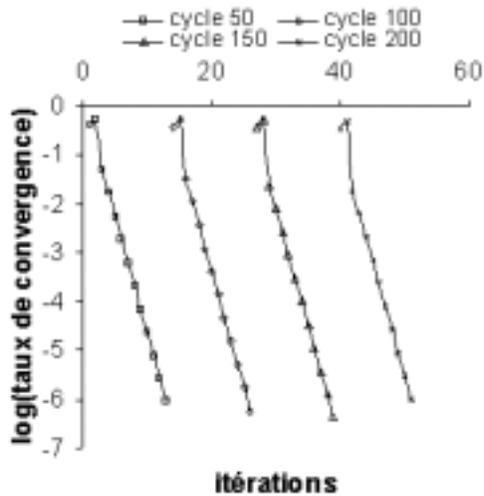


FIG. 6.5 – Evolution du taux de convergence de l'algorithme, les pas de temps étant simulés les uns à la suite des autres

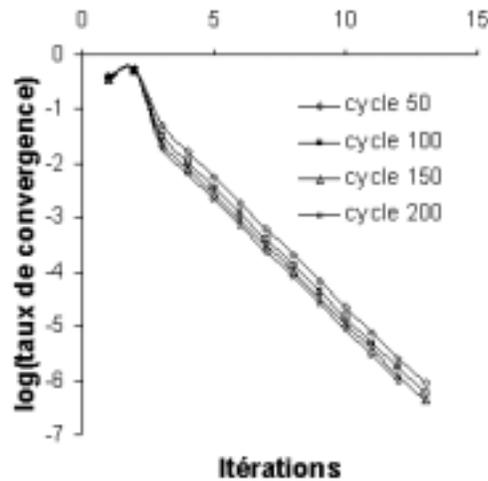


FIG. 6.6 – Evolution du taux de convergence de l'algorithme, les pas de temps étant traités simultanément

par les cycles de charge, ont été simulés séquentiellement les uns à la suite des autres. Cependant nous avons mis en évidence au cours du chapitre précédent que l'ensemble des problèmes en temps étaient indépendants les uns des autres une fois les paramètres d'endommagement, d_t^{n+1} , déterminés (équations (5.15) et (5.16)). L'ensemble des problèmes, posés pour chaque incrément de temps, peut alors être traité simultanément, de façon séquentielle ou parallèle. Nous avons représenté, pour illustrer cette remarque, le taux de convergence de l'algorithme, en échelle semi-logarithmique, en fonction non plus des itérations globales du processus itératif mais en fonction des itérations requises pour la résolution de chaque incrément de temps (figure 6.6). Cette figure montre que non seulement la vitesse de convergence est indépendante de l'incrément de temps considéré mais également que le nombre d'itérations requis pour traiter chaque incrément est le même, ce qui confirme la robustesse et la fiabilité de cet algorithme.

Quel que soit l'incrément de temps considéré, t , l'initialisation se fait exactement de la même façon. Cependant, le temps n'intervient qu'au niveau du calcul de l'endommagement, d , qui pénalise le comportement. Il est donc logique que le processus et ses performances ne dépendent pas, ou peu, de l'incrément de temps.

Ainsi, lors d'un traitement séquentiel de l'algorithme, l'ensemble des incréments de temps considérés seront traités successivement tout en gardant le même type de redémarrage, lors du passage d'un incrément à un autre, et ainsi le même nombre d'itérations sera requis pour atteindre la convergence de chaque incrément.

Dans ce cas, on peut se demander si, au delà du premier incrément, un tel redémarrage pour les incréments de temps suivants est pertinent dans la mesure où une initialisation au tenseur identité ne semble pas performante d'un point de vue numérique lorsque la solution au pas de temps précédent a déjà été numériquement déterminée.

Nous essayerons d'optimiser le processus de redémarrage de l'algorithme, pour tous les

incréments de temps considérés, autre que le premier, de sorte à accroître ses performances.

6.3 Optimisation du démarrage du processus itératif

6.3.1 Initialisation au voisinage de la solution finale du problème posé à l'incrément de temps précédent

Afin d'accélérer la convergence de l'algorithme nous avons choisi, pour le redémarrage du processus de résolution, de ne pas initialiser systématiquement l'algorithme au voisinage du tenseur identité $\mathbf{1}$. En effet, nous avons montré, figure 6.6, que la convergence était complètement indépendante de l'incrément de temps considéré. Dans la mesure où les incréments de temps sont traités les uns à la suite des autres, l'initialisation pour l'incrément considéré au voisinage de la solution finale du problème posé au pas de temps précédent, plutôt qu'au voisinage de l'identité, est donc tout à fait envisageable.

Dans ce cas, le premier incrément de temps considéré t_0 est initialisé de la même façon que lors du chapitre précédent, c'est-à-dire grâce aux équations (5.7).

Une fois le problème au pas de temps t_0 convergé, l'approximation S_{t_0} est connue et les champs $(\mathbf{T}_{t_0}, \mathbf{F}_{t_0}, p_{t_0}, d_{t_0})$ solutions du problème au temps t_0 sont déterminés.

Les champs solutions des problèmes posés aux pas de temps, t_n , seront alors déterminés à partir de la connaissance des champs solutions du problème à l'incrément de temps précédent t_{n-1} , c'est-à-dire à partir des champs $(\mathbf{T}_{t_{n-1}}, \mathbf{F}_{t_{n-1}}, p_{t_{n-1}}, d_{t_{n-1}})$ grâce au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{t_n}^{ini} = \min_{\mathbf{F}, \det \mathbf{F} = 1} \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}_{t_{n-1}})(\mathbf{F} - \mathbf{F}_{t_{n-1}})}{2} \\ d_{t_n}^0 = G(x, \mathbf{F}_{t_n}^{ini}, t_n) \end{cases} \quad (6.5)$$

Les approximations initiales des problèmes au temps t_n , $S_{t_n}^0 = (\mathbf{T}_{t_n}^0, \mathbf{F}_{t_n}^0, p_{t_n}^0, d_{t_n}^0)$, qui vérifient les équations linéaires et stationnaires, c'est-à-dire qui appartiennent à \mathcal{L} , seront déterminées en résolvant les équations (5.5) couplées à la loi de comportement linéarisée cette fois au voisinage de $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$:

$$\mathbf{T}_{t_n}^0 = \mathbf{P}(\mathbf{F}_{t_n}^{ini}) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}_{t_n}^{ini}) : \nabla_x U_{t_n}^0 - p_{t_n}^0 (\mathbf{F}_{t_n}^{ini})^{-t} \quad (6.6)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont définis par (5.26)

Les équations (6.5) sont telles que le tenseur gradient de déformation $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$ vérifie bien la condition d'incompressibilité, c'est-à-dire que $\det(\mathbf{F}_{t_n}^{ini})$ égal à 1.

En effet, dans la mesure où le test de convergence (5.17) n'est réalisé qu'après le passage de \mathcal{NL} à \mathcal{L} , rien ne garantit que l'on vérifie exactement cette condition d'incompressibilité lors de l'étape d'initialisation. Une fois cette condition vérifiée, les équations (6.5) permettent de calculer l'endommagement associé, $d_{t_n}^0$.

Nous avons représenté le taux de convergence de l'algorithme avec cette nouvelle technique de redémarrage en échelle semi-logarithmique en fonction des itérations du processus global (figure 6.7) pour les cycles 50, 100, 150 et 200.

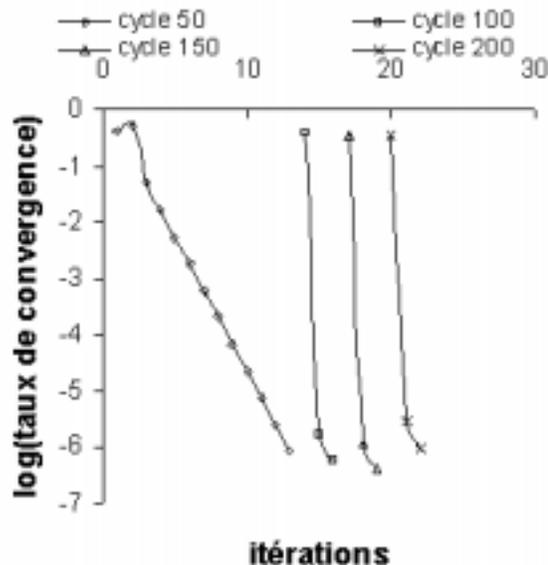


FIG. 6.7 – Evolution du taux de convergence de l'algorithme lors d'une initialisation à partir de la solution déterminée au pas de temps précédent

On constate sur cette figure que le nombre d'itérations nécessaires pour le premier pas de temps considéré, le cycle 50, n'a bien évidemment pas changé puisqu'il n'y a pas eu de changement au niveau de ce premier incrément. Pour un redémarrage avec une initialisation au voisinage de l'identité, il fallait 13 itérations au deuxième temps, c'est-à-dire le cycle 100, pour converger, alors qu'avec cette nouvelle méthode 3 itérations sont suffisantes pour qu'il y ait convergence. Cette remarque reste valable aussi pour les cycles 150 et 200.

Cette figure montre donc une très forte accélération du processus itératif pour les incréments de temps bénéficiant de cette nouvelle technique de redémarrage avec une initialisation au voisinage de la solution finale du problème posé au pas de temps précédent. Cette nouvelle méthode de redémarrage permet donc un gain en temps de calcul séquentiel significatif.

Cependant, cette méthode présente également un inconvénient. En effet, dans la mesure où la détermination de la solution initiale, $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$ (équation (6.5)), du problème posé au temps t_n , se fait à partir de la connaissance du tenseur gradient de déformation convergé, $\mathbf{F}_{t_{n-1}}$, du problème posé à l'incrément précédent, t_{n-1} , il faut systématiquement attendre la convergence du problème posé à t_{n-1} avant d'entreprendre le traitement du problème posé à t_n . Il est alors impossible de traiter l'ensemble des problèmes t_n de façon parallèle, comme nous aurions pu le faire dans le cas précédent. Cette modification change complètement le caractère hautement parallèle de l'algorithme. On ne peut dans ce cas considérer l'algorithme comme parallélisable en temps, ce qui nous semble, un inconvénient majeur. Dans le cas d'une implémentation sur machine parallèle, l'algorithme sera automatiquement plus lent.

Nous avons donc cherché une nouvelle méthode de redémarrage s'inspirant de celle-ci mais qui permettrait néanmoins de traiter plusieurs problèmes à la fois. Nous la présentons dans la section qui suit.

6.3.2 Initialisation au voisinage d'une solution intermédiaire du problème posé à l'incrément de temps précédent

Le premier incrément, t_0 , considéré est initialisé de la même manière qu'en 6.2.1 c'est-à-dire au voisinage de l'identité. Ensuite, les temps t_n , $\forall n \geq 1$, démarrent dès qu'une approximation intermédiaire, $(\mathbf{T}_{t_{n-1}}^i, \mathbf{F}_{t_{n-1}}^i, p_{t_{n-1}}^i, d_{t_{n-1}}^i)$, obtenue à l'issue de l'itération i du processus de résolution du problème posé à t_{n-1} , aura atteint un seuil qu'on qualifiera d'acceptable. Ce champ intermédiaire est tel que :

$$\tau_{cv} < \text{seuil}_{\text{démarrage}}$$

$$\text{avec } \tau_{cv} = \left| \frac{\mathbf{F}_{t_{n-1}}^i : \mathbf{T}_{t_{n-1}}^i - \mathbf{F}_{t_{n-1}}^{i-\frac{1}{2}} : \mathbf{T}_{t_{n-1}}^{i-\frac{1}{2}}}{\mathbf{F}_{t_{n-1}}^i : \mathbf{T}_{t_{n-1}}^i} \right| \quad (6.7)$$

Dès que ce seuil de démarrage, $\text{seuil}_{\text{démarrage}}$, est atteint, on peut déterminer $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$ de la même manière que précédemment, c'est-à-dire déterminer $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$ tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{t_n}^{ini} = \min_{\mathbf{F}, \det \mathbf{F} = 1} \frac{(\mathbf{F} - \mathbf{F}_{t_{n-1}}^i)(\mathbf{F} - \mathbf{F}_{t_{n-1}}^i)}{2} \\ d_{t_n}^0 = G(x, \mathbf{F}_{t_n}^{ini}, t_n) \end{cases} \quad (6.8)$$

Les champs initiaux $S_{t_n}^0 = (\mathbf{T}_{t_n}^0, \mathbf{F}_{t_n}^0, p_{t_n}^0, d_{t_n}^0)$, du problème posé à t_n , qui vérifient les équations linéaires et stationnaires, seront alors déterminées en résolvant les équations (5.5) couplées à la loi de comportement linéarisée au voisinage de $\mathbf{F}_{t_n}^{ini}$ (équation (6.6)). Ce tenseur gradient de déformation est lui-même défini par les systèmes d'équations (6.7) et (6.8).

Nous avons représenté le taux de convergence de l'algorithme avec cette nouvelle méthode de redémarrage en échelle semi-logarithmique en fonction des itérations requises (figure 6.8) pour 4 temps : les cycles 50, 100, 150 et 200.

Le trait pointillé sur cette figure correspond au seuil de démarrage que l'on a fixé à 10^{-4} alors que la convergence est décrétée à $\tau_{cv} = 10^{-6}$ (5.17).

La figure 6.8 montre que l'allure du taux de convergence ainsi que le nombre d'itérations du premier incrément, ici le cycle 50, n'ont pas changé puisque l'initialisation du premier temps demeure le même (les 12 itérations au lieu de 13 étant dues à un artefact numérique). Dès que le taux de convergence du cycle 50 dépasse le seuil de démarrage qu'on a qualifié d'acceptable, c'est-à-dire ici à la 8^{ième} itération, le deuxième incrément peut démarrer. Ainsi, à la 9^{ième} itération, les cycles 50 et 100 sont traités simultanément.

Ensuite, lorsque le taux de convergence du cycle 100 a dépassé le seuil de démarrage, c'est-à-dire à la 10^{ième} itération, le cycle 150 peut démarrer. Ainsi, à la 11^{ième} itération, les cycles 50, 100 et 150 sont traités simultanément. A la 12^{ième} itération, le taux de

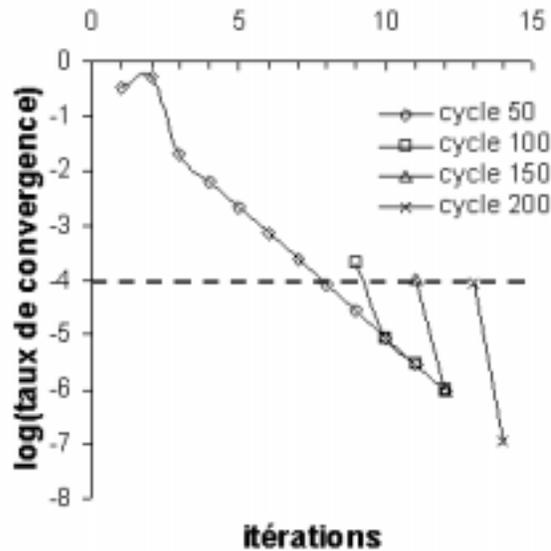


FIG. 6.8 – Evolution du taux de convergence de l'algorithme lors d'une initialisation à partir d'une solution intermédiaire du problème posé au pas de temps précédent

convergence du cycle 150 a dépassé le seuil de démarrage que l'on a choisi, ce qui permet au 4^{ième} temps, c'est-à-dire le cycle 200, de démarrer. Lors des 13^{ième} et 14^{ième} itérations, seul le cycle 200 est traité dans la mesure où, outre l'activation, à l'itération 13, des calculs liés au cycle 200, les cycles 50, 100 et 150 ont convergé.

On remarque le gain en temps de calcul par rapport à la première technique de redémarrage envisagée puisque pour le deuxième temps, c'est-à-dire le cycle 100, le nombre d'itérations pour converger est passé de 13 à 4, et pour les cycles 150 et 200, le nombre d'itérations est passé de 13 à 2.

L'intérêt de cette approche par rapport à la précédente est également notoire puisque 22 itérations globales étaient requises pour l'approche précédente contre 14 pour cette dernière.

Les résultats obtenus aux cycles 150 et 200 peuvent paraître surprenants par rapport aux résultats obtenus avec la deuxième méthode d'initialisation (section 6.2.2). En effet, il peut sembler étonnant que la convergence pour le problème au temps t_n soit plus rapide lorsque l'algorithme est démarré à partir d'une solution intermédiaire du problème posé à t_{n-1} , que lorsque le problème à t_n est initialisé à partir de la solution convergée du problème à t_{n-1} . Cependant, rien ne peut permettre d'affirmer que la solution du problème à t_{n-1} soit plus proche de la solution du problème à t_n qu'une solution intermédiaire.

Cette dernière méthode de redémarrage présente donc deux intérêts. D'une part, elle accélère l'algorithme par rapport aux techniques de redémarrage envisagées précédemment, et d'autre part, elle permet de traiter plusieurs problèmes simultanément, que ce soit de façon séquentielle ou parallèle.

6.4 Bilan des initialisations proposées

6.4.1 Performances itératives

Nous avons représenté sur la figure 6.9, le nombre de problèmes EF (6.4) à résoudre jusqu'à convergence pour chaque incrément de temps considéré et ce pour chaque méthode de redémarrage envisagée dans les sections précédentes et sur la figure 6.10, le nombre total de problèmes EF à résoudre par méthode de redémarrage.

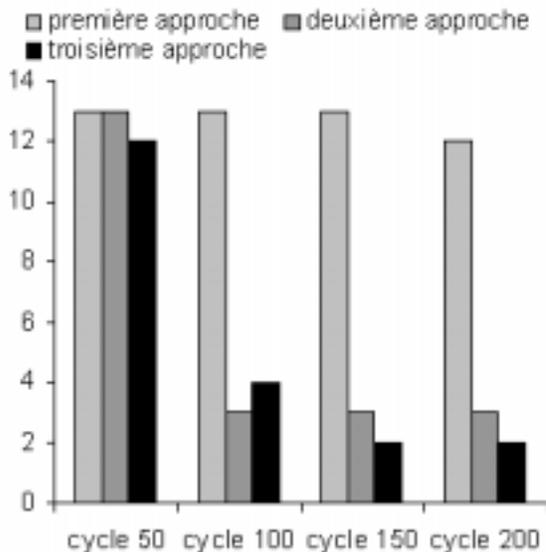


FIG. 6.9 – Nombre de problèmes EF à résoudre par pas de temps

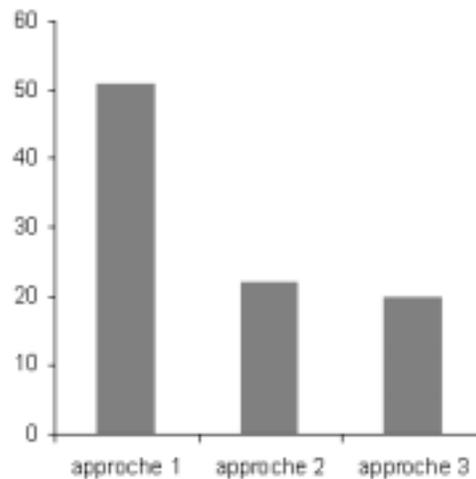


FIG. 6.10 – Nombre total de problèmes EF à résoudre par méthode de redémarrage

Dans un premier temps, on peut remarquer, figure 6.9, que le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence du premier incrément de temps est le même pour les trois techniques de redémarrage envisagées (problème d'artefact numérique pour la troisième). Ceci n'a rien de surprenant dans la mesure où pour les trois techniques de redémarrage proposées, l'initialisation du premier incrément de temps reste la même. Ce n'est que sur les incréments ultérieurs que les différences apparaissent.

La figure 6.10 montre que la première méthode de redémarrage est la moins performante des trois proposées. En effet, pour chaque incrément de temps considéré, 13 itérations sont nécessaires pour qu'il y ait convergence, 52 itérations globales sont donc requises en séquentiel.

La deuxième technique de redémarrage améliore nettement les performances de l'algorithme puisque le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des incréments de temps redémarrés a diminué de 75%. Le nombre d'itérations pour les cycles 100, 150 et 200 est en effet passé de 13 à 3, 22 itérations sont donc globalement requises.

Cette deuxième approche semble optimisée grâce à la troisième méthode de redémarrage proposée. Cette optimisation ne se voit pas sur les deux premiers incréments de temps traités puisque le nombre d'itérations est supérieur ou égal au nombre d'itérations nécessaire

à la convergence dans le cas de la deuxième méthode de redémarrage. Par contre, on constate que pour les deux derniers incréments de temps, c'est-à-dire les cycles 150 et 200, seules 2 itérations sont nécessaires pour qu'il y ait convergence. Soit un total, en séquentiel, de 20 itérations pour traiter l'ensemble des problèmes.

6.4.2 Performances parallèles

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 5, un des grands intérêts de cet algorithme est son caractère hautement parallélisable (Brieu, 1999 [18]; Brieu *et al.*, 2001 [19]). Il nous semble donc primordial que les techniques de redémarrage retenues pour initialiser l'algorithme permettent de conserver le caractère parallélisable de celui-ci.

On a représenté figure 6.11, l'ensemble du processus itératif pour les différentes techniques de redémarrage en traitant simultanément, dès que cela est possible, l'ensemble des incréments de temps recherchés. Celle-ci montre bien que la deuxième méthode de redémarrage interdit tout traitement parallèle des problèmes posés en temps puisque, pour que le problème posé au temps t_n soit traité, il faut que le problème posé au temps t_{n-1} ait convergé.

Afin de comparer, de façon effective, les performances de ces deux dernières approches, nous avons implémenté l'ensemble du code éléments finis développé sur une machine parallèle. La machine utilisée est un supercalculateur à architecture parallèle IBM RS6000/SP constitué de 4 noeuds, comprenant chacun 16 processeurs à 375 MHz avec 16 Go de mémoire partagée. Chaque noeud est relié par un réseau haut débit de type colony. Le protocole de parallélisation utilisé est Open MP.

Il est à noter que ce travail de parallélisation ne porte que sur la distribution des différents problèmes en temps entre les différents processeurs et en aucun cas sur une parallélisation de la résolution des problèmes EF. Les méthodes de décomposition en sous-domaines, comme les méthodes de recouvrement (Lions, 1988 [69]) ou sans recouvrement (Rey, 1994 [88]; Le Tallec, 1994 [67]; Farhat, 1994 [37], [38]; Soulat, 1996 [104]; Brieu, 1999 [18], 2001 [19]), classiquement utilisées pour paralléliser un problème EF, ne font pas l'objet de cette étude.

Pour illustrer les performances parallèles de l'algorithme, nous avons utilisé 4 processeurs qui ont chacun traité 5 incréments de temps. Les résultats du processus itératif sur chaque processeur en fonction du type de technique de redémarrage sont illustrés figure 6.12. Nous avons ensuite représenté sur la figure 6.13 les temps de calculs CPU séquentiels et parallèles requis par les première et troisième méthodes de redémarrage. Ces temps de calculs sont normalisés par rapport au temps de calcul séquentiel de la technique de redémarrage simple, c'est-à-dire l'initialisation du temps traité au voisinage du tenseur identité, de telle façon que celui-ci représente 100% du temps CPU. Au niveau du temps CPU séquentiel, la figure 6.13 montre bien le gain obtenu dès qu'on utilise comme redémarrage, une initialisation au voisinage d'une solution intermédiaire du problème posé au pas de temps précédent.

Au niveau du temps CPU parallèle, on peut remarquer, pour le redémarrage simple, que le gain en temps de calculs est proportionnel au nombre de processeurs. Ceci s'explique par

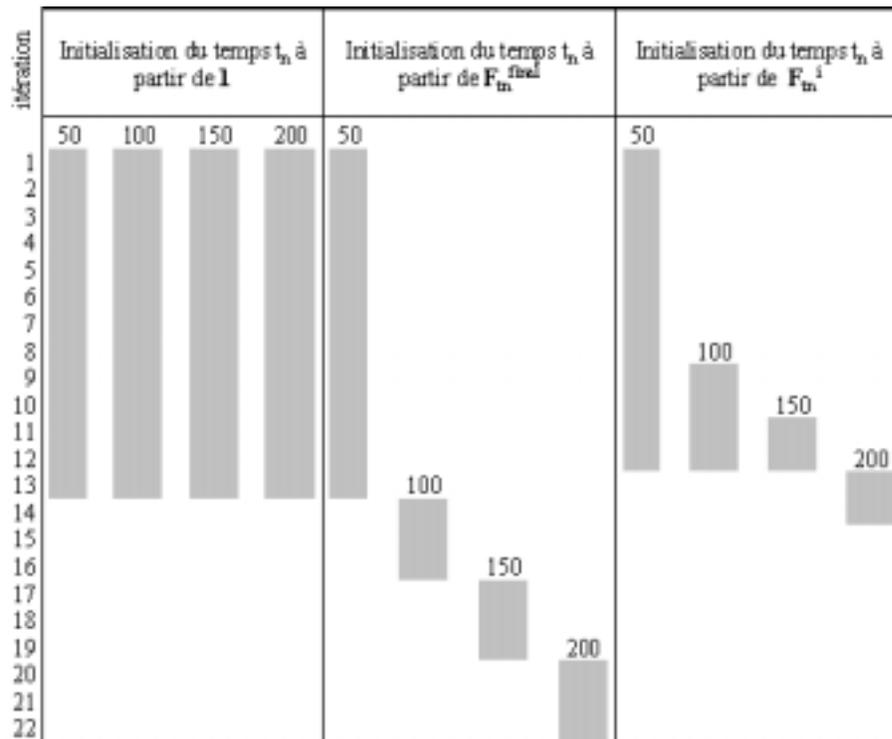


FIG. 6.11 – Bilan d'un point de vue parallélisation des trois initialisations proposées pour l'algorithme

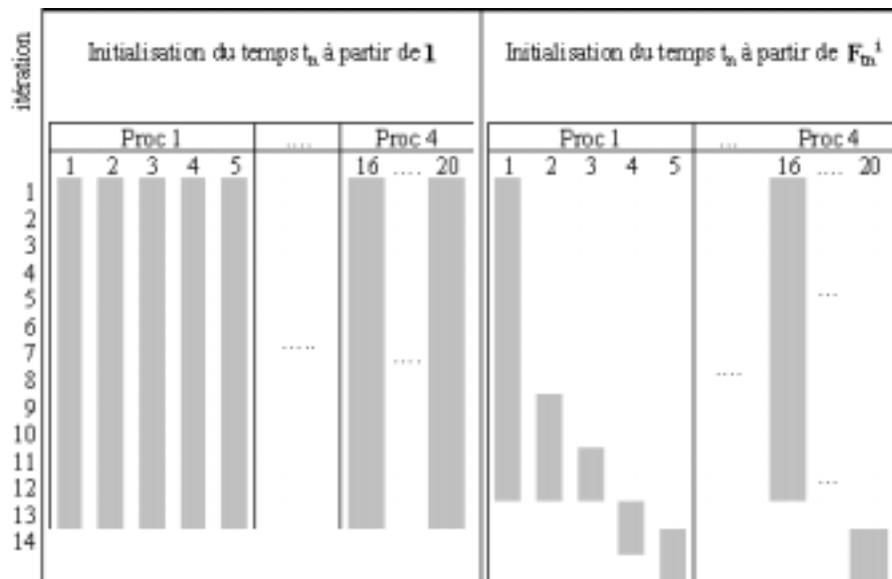


FIG. 6.12 – Répartition des tâches sur un quadriprocesseur dans le cas des initialisations développées sections 6.2.1 et 6.2.3

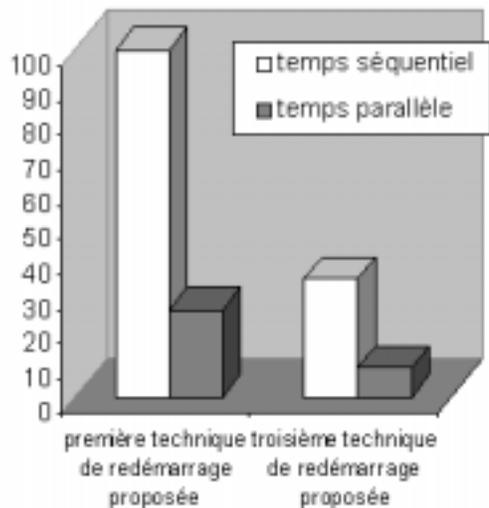


FIG. 6.13 – Comparaison en temps de calcul des première et troisième méthodes d'initialisation

le fait que chaque processeur résout exactement le même nombre de problèmes posés en temps, simultanément. En l'occurrence, dans notre cas, 4 processeurs avaient 5 problèmes à traiter (figure 6.12), ce qui implique que le temps CPU est passé de 100 à 25%.

Le gain en temps pour la troisième méthode de redémarrage est également significatif lors de la parallélisation. Cependant, celui-ci n'est plus proportionnel au nombre de processeurs. En effet, dans ce cas, chaque processeur doit d'abord traiter le premier incrément de temps, et c'est seulement sur les incréments de temps suivants que la méthode permet d'obtenir des gains significatifs (figure 6.12). Néanmoins, on peut constater que les gains sont très importants car on passe de 40% de temps CPU à 14%.

Enfin, il est à noter qu'aucun temps de calcul n'est perdu en communication entre les processeurs puisque l'ensemble des tâches par processeur sont rigoureusement indépendantes. Ce qui n'est pas le cas par exemple pour les problèmes de parallélisation de méthodes de décomposition en sous-domaines.

En conclusion, nous pouvons dire que même si la première méthode de redémarrage requiert peu d'itérations, elle demeure la plus consommatrice de ressources. La troisième méthode de redémarrage, nécessitant un plus grand nombre d'itérations, est cependant moins consommatrice de ressources. Pour cette dernière raison, la dernière méthode nous a semblé la plus intéressante.

Conclusion et perspectives

En raison de la diversité des comportements et des difficultés numériques liées au comportement non linéaire, incompressible et au caractère grandement déformable, la modélisation et la simulation numérique de structures à base d'élastomère sont encore des problèmes largement ouverts. Ce travail a été entrepris afin de prévoir le comportement en fatigue et notamment les phénomènes d'adoucissement par fatigue dans les matériaux élastomères. La démarche que nous avons choisie a consisté à :

- mettre en évidence les phénomènes d'adoucissement par fatigue ainsi que les facteurs influents ces phénomènes par le biais d'une étude expérimentale menée sur plusieurs matériaux élastomères différant soit par la matrice, soit par les renforts,
- modéliser le comportement des élastomères en identifiant dans un premier temps le comportement des matériaux non endommagés grâce à une loi de comportement bien adaptée, issue de la littérature, puis dans un deuxième temps à modéliser le phénomène d'adoucissement par fatigue en dégradant le comportement non endommagé par une fonction d'endommagement dépendant des facteurs influents précédemment identifiés,
- simuler le comportement non-linéaire, hyperélastique, incompressible et endommageable de structures élastomères grâce à un algorithme non incrémental de résolution et optimiser les potentialités de cet algorithme en particulier à des fins de parallélisation de celui-ci.

Concernant la modélisation, le modèle proposé permet d'appréhender de manière très satisfaisante l'adoucissement par fatigue observé expérimentalement. Ce modèle présente également de nombreux avantages. En effet, il est prédictif, ne nécessite l'identification que d'un seul paramètre, et permet de prévoir le comportement en fatigue de matériaux élastomères soumis aussi bien à des chargements cycliques à déformations maximales imposées qu'à contraintes maximales imposées.

Cependant, ce modèle ne permet d'étudier que la phase de charge de ces milieux. Il serait alors utile d'envisager la prise en compte de l'hystérésis entre la charge et la décharge, en plus du nombre de cycles et de la déformation maximale imposée, pour que le modèle puisse également prévoir l'adoucissement par fatigue lors de la décharge.

De plus, le caractère visqueux des milieux élastomères ainsi que les effets liés à la température ont été négligés dans cette étude. La mise en place de protocoles expérimentaux spécifiques qui permettent d'intégrer les variables temps et température au sein du modèle développé pourraient alors être mis en place.

D'autre part, le modèle proposé a été développé dans le cas de chargements uniaxiaux. La prise en compte de l'influence des déformations est réalisée par l'intermédiaire de la magnitude du tenseur des dilatations. Cette quantité exprimée en fonction des invariants

de ce tenseur, ne permet pas de prendre en compte les influences directionnelles du chargement. Pourtant, nous savons que l'adoucissement par fatigue intervient également lors d'essais multi-axiaux. Il serait donc intéressant d'envisager de prendre en compte les paramètres liés au cas de chargements multi-axiaux au sein du modèle proposé en utilisant, non plus la magnitude, mais des grandeurs susceptibles de prendre en compte l'influence directionnelle du chargement comme par exemple, les directions principales du tenseur gradient de déformation.

La traction répétée à déformation maximale imposée sur les matériaux élastomères induit une anisotropie dans les directions perpendiculaires à la direction de sollicitation. Les modifications précédemment citées devront également permettre la prise en compte du phénomène d'anisotropie induite afin que le modèle puisse également prévoir l'incidence du chargement en fatigue sur une direction perpendiculaire à la direction de sollicitation.

Les temps de calcul nécessaires à la résolution de problèmes non-linéaires, hyperélastiques, incompressibles et endommagables étant très importants, il ne nous a pas été permis d'utiliser des algorithmes incrémentaux. Ainsi, un algorithme non incrémental, de type LATIN, a été développé.

Cet algorithme repose d'une part sur la décomposition du problème en deux groupes d'équations qui sont, soit linéaires, stationnaires et globales, soit non linéaires et/ou instationnaires mais locales et d'autre part, sur le choix de deux opérateurs permettant de transporter successivement jusqu'à convergence, les approximations des champs solutions appartenant alternativement à ces deux groupes. Les choix réalisés au cours de ce travail, bien qu'étant les plus simples et les moins coûteux, ne sont pas forcément les plus efficaces. On se propose alors de rechercher d'autres opérateurs permettant de réaliser ces passages et se révélant plus efficaces, tout en étant de mise en oeuvre simple, garantissant ainsi l'obtention de gains en temps de calculs plus conséquents.

D'autre part, afin de s'affranchir des difficultés liées à l'incompressibilité, nous avons proposé un problème de minimisation à résoudre de sorte à garantir que le déterminant du tenseur gradient de déformation soit égal à 1. Celui-ci n'est peut-être pas le plus efficace et il serait bon d'envisager une autre méthode de minimisation.

Nous avons également dû faire un choix quant à la linéarisation de la loi de comportement. Le choix de linéarisation incomplète, que nous avons fait, semble affecter la vitesse de convergence de l'algorithme. On se propose alors de chercher un moyen de linéariser la loi de comportement afin que la convergence soit efficace et plus rapide.

Plusieurs méthodes de redémarrage de l'algorithme, pour la prise en compte successive d'incrément de temps, ont été proposées afin d'optimiser l'algorithme non incrémental présenté permettant de conserver le caractère parallélisable de l'algorithme tout en équilibrant les tâches entre les processeurs. D'autres méthodes de redémarrage doivent être envisageables afin d'améliorer encore les performances de cet algorithme.

La parallélisation de l'algorithme, présentée dans ce manuscrit, n'a été envisagée que sur les problèmes d'évolution de l'endommagement. Ainsi, seul l'espace temps a été parallélisé. Cependant, les gains obtenus par cette parallélisation se sont avérés extrêmement importants. Néanmoins, afin d'accroître les performances parallèles de l'algorithme, et réduire de fait les temps de calculs mis en jeu, il faut envisager l'utilisation de méthodes de décomposition en sous-domaines, appelées également méthodes de sous-structuration, de sorte à diminuer les coûts de calculs engendrés par la résolution successive de problèmes

éléments finis de taille non négligeable. Ce double niveau de parallélisme, en temps et en espace, devrait s'avérer extrêmement efficace étant donnée l'architecture de la machine parallèle utilisée. En outre, la parallélisation globale de l'algorithme pourra être accrue par l'utilisation des bibliothèques de calculs optimisés telles les BLAS ou LAPACK de sorte à utiliser des algorithmes par blocs afin d'optimiser au mieux la hiérarchie mémoire de la machine.

Pour conclure, nous noterons que l'utilisation conjointe de loi simple d'endommagement tel le modèle d'adoucissement par fatigue proposé, associé à un algorithme de résolution de problèmes non linéaires, permet désormais de simuler la réponse de structures de plus en plus complexes, constitués de tels matériaux et soumis à des chargements de fatigue.

Bibliographie

- [1] AIT HOCINE N., *Approche globale de la mécanique de la rupture appliquée aux élastomères : validation expérimentale et numérique d'une expression de l'intégrale J sous une forme multiplicative d'une fonction de la densité d'énergie de déformation et d'une fonction de géométrie*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [2] ANDRIEUX F., SAANOUNI K., SIDOROFF F., *Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement*, C.R.A.S., II, 324, p. 281-288, 1997.
- [3] ALEXANDER H., *A constitutive relation for rubber-like materials*, Int. J. of Engng. Sci., 6, p. 549-563, 1968.
- [4] ALEXANDER H., *Tensile instability of initially spherical balloons*, Int. J. Engng. Sci., 9, p. 151-162, 1971.
- [5] ASCH G. et Collaborateurs, *Les capteurs en instrumentation industrielle*, 5ème édition, Dunod, 1999.
- [6] AUBARD X., BOUCARD P.A., LADEVEZE P., MICHEL S., *Modeling and simulation of damage in metal/elastomer structures at high strains*, Computational techniques for materials, composites and composites structures, ed. par Topping (B.H.V.) CST2000.
- [7] BEATTY M.F., KRISHNASWAMY S., *A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials*, J. Mech. Phys. Solids, 48, p. 1931-1965, 2000.
- [8] BERNADOU M., CIARLET P.G., HU J., *Sur la convergence des méthodes incrémentales en élasticité non linéaire tridimensionnelle*, C.R.A.S., I, 295, p.639-642, 1982.
- [9] BERNADOU M., GEORGE P.L., HASSIM A., JOLY P., PERRONNET A., SALTEL E., STEER D., VANDERBORRCK G., *Modulef : Une bibliothèque modulaire d'éléments finis*, INRIA Editeur, 1985.
- [10] BHATE A.P., KARDOS J.L., *A novel technique for the determination of high frequency equibiaxial stress- deformation behavior of viscoelastic elastomers*, Polymer Engng. and Sci., vol 24, No 11, 1984.
- [11] BLATZ P.J., KO W.L., *Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials*, Trans. Soc. Rheol., 6, p. 223-251, 1962.
- [12] BOISSE P., *Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1987.
- [13] BOUASSE H., CARRIERE Z., *Courbes de traction du caoutchouc vulcanisé*, Ann. Fac. Sciences de Toulouse, 5, p. 257-283, 1903.
- [14] BOUCHEREAU M.N., *Formulation des élastomères*, Génie mécanique des caoutchoucs, ed. G'Sell et Coupard, Appolor et INPL, 1997.
- [15] BRIEU M., DEVRIES F., *Homogénéisation de composite élastomère*, Colloques Eléments Finis Polymères, Apollor Eds, Nancy, 1998.

- [16] BRIEU M., DEVRIES F., ERHEL J., *Une méthode non incrémentale d'homogénéisation de structures élastomères. Application aux composites unidirectionnels*, Rapport interne I.N.R.I.A., 3341, 1998.
- [17] BRIEU M., DEVRIES F., *Homogénéisation de composites élastomères. Méthode et algorithme*, C.R.A.S., II, 326, p. 379-384, 1998.
- [18] BRIEU M., *Homogénéisation et endommagement de composites élastomères par techniques de calcul parallèle*, Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.
- [19] BRIEU M., DEVRIES F., ERHEL J., *Algorithme parallèle non incrémental pour la simulation de l'évolution d'endommagements en milieux hyperélastiques*, Réseaux et systèmes répartis, calculateurs parallèles, Algorithmes itératifs parallèles et distribués, vol. 13, n^o 1, p. 83-106, 2001.
- [20] BRIEU M., DIANI J., ROYAL J.M., *Identification et calcul d'erreur pour la détermination du comportement de milieux élastomères incompressibles*, 9^{ième} séminaire franco-polonais de mécanique, Cahiers de Mécanique, p. 49-54, 2002.
- [21] BRIEU M., ERHEL J., *On the convergence on non-incremental homogeneization methods for nonlinear elastic composites materials*, Numerical Algorithms, 32(2), p. 141-161, 2003.
- [22] BRIEU M., GENTOT L., MESMACQUE G., *Loi d'évolution de l'endommagement pour la prise en compte de l'adoucissement dans les milieux élastomères chargés*, soumis aux C. R. Méca. Paris, 2003.
- [23] BROWN R.P., *Physical testing of rubber*, Third edition, Chapman & Hall, 1996.
- [24] BUECHE F., *Mullins effect and rubber-filler interactions*, J. Appl. Polymer Sci., 15, p. 271-281, 1961.
- [25] BURRAGE K., *Parallel and sequential methods for ordinary differential equations*, Num. Math. and Scien. Comp., 1995.
- [26] CHAGNON G., VERRON E., GORNET L., MARKMANN G., CHARRIER P., *Modélisation et simulation de l'effet Müllins dans les pièces élastomères du secteur automobile*, XVème Congrès Français de Mécanique, 2001.
- [27] CHAGNON G., VERRON E., GORNET L., MARKMANN G., CHARRIER P., FORT P., *Experimental identification and rheological modeling of the Mullins effect for carbon black-filled rubber*, in proceedings of the Eight Seminar on Elastomers, Le Mans, France, 8-12 may, p. 79-82, 2001.
- [28] CIARLET P.G., GEYMONAT G., *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*, C.R.A.S., II, 295, p. 423-426, 1982.
- [29] CIARLET P.G., *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, 1986.
- [30] COGNARD J.Y., *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la M.A.G.I.T.*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [31] DANNENBERG E.M., *Product modifications important in fillers*, Elastomerics, 1987.
- [32] DE VRIES A.J., BONNEBAT C., *Uni and biaxial stretching of chlorinated PVC sheets. A fundamental study of thermoformability*, Polymer Engng. and Sci., vol. 16, n^o 2, 1976.
- [33] DEVRIES F., *Calcul du comportement homogénéisé de composites hyperélastiques*, Revue des composites et des matériaux avancés, 6, n^o 2, p. 217-248, 1996.
- [34] DIANI J., *Contribution à l'étude du comportement élastique et de l'endommagement des matériaux élastomères*, Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.
- [35] DIANI J., BRIEU M., VACHERAND J.M., REZGUI A., *Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials*, Mechanics of Materials, In Press, 2003.

- [36] DUVAUT G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [37] FARHAT C., MANDEL J., ROUX F.X., *Optimal convergence on the FETI domain decomposition method*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 115, p. 365-385, 1994.
- [38] FARHAT C., ROUX F.X., *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances, n^o 1, North Holland, 1994.
- [39] FARRIS R.J., *The influence of vacuole formation on the response and failure of filled elastomers*, Trans. Soc. Rheol., 12, p. 315-334, 1968.
- [40] FLORY P.J., *Principles of Polymers Chemistry*, Cornell University Press, Ithaca New York, p. 432-493, 1967.
- [41] FUKAHORI Y., SEKI W., *Molecular behaviour of elastomeric materials under large deformation : 1. Re-evaluation of the Mooney-Rivlin plot*, Polymer, 33, p. 502-508, 1991.
- [42] GAY D., *Matériaux composites*, 3^{ième} édition revue et augmentée, Traité des nouvelles technologies, Série Mécanique, Hermès, 1991.
- [43] GENT A.N., THOMAS A.G., *Forms of the stored (strain) energy function for vulcanised rubber*, J. Polymer Sci., 28, p. 625, 1958.
- [44] GENTOT L., BRIEU M., MESMACQUE G., *Modélisation de l'adoucissement de matériaux élastomères chargés en silice*, Université d'été Apollor, Nancy, Septembre 2002.
- [45] GENTOT L., BRIEU M., MESMACQUE G., *Modelization of stress-softening in incompressible rubber-like materials*, JIFI, Caracas, Venezuela, Octobre 2002.
- [46] GENTOT L., BRIEU M., MESMACQUE G., *Modélisation du comportement et de l'adoucissement de matériaux composites élastomères*, 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites, vol. 1, p. 543-551, Strasbourg, Mars 2003.
- [47] GHFIRI H., *Application de la mécanique de la rupture aux matériaux à comportement non linéaire : contributions respectives des dimensions finies et du comportement du matériau dans l'expression énergétique J*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- [48] GOVINDJEE S., SIMO J.C., *A micro-mechanically bases continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins effect*, J. Mech. Phys. Solids, vol 39, 1, p. 87-112, 1991.
- [49] GOVINDJEE S., SIMO J.C., *Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology : carbon black-filled rubbers incorporating Mullins effect*, J. Mech. Phys. Solids, vol 40, 1, p. 213-233, 1992.
- [50] HAINES D.Q., WILSON W.D., *Strain-energy density function for rubber-like materials*, J. Mech. Phys. Solids, 27, 1979.
- [51] HART-SMITH L.J., *Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials*, J. Appl. Math. Phys., 17, p. 608-625, 1966.
- [52] HERRMANN L.R., *Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible material by a variational theorem*, AIAA J.3, vol 10, 1965.
- [53] HEUILLET P., DUGAUTIER L., *Modélisation du comportement hyperélastique des élastomères compacts*, Génie Mécanique des Caoutchoucs et des Elastomères Thermoplastiques, édité par C. G'SELL et A. COUPARD, p. 67-103, Apollor 1997.
- [54] HUGUES T.J.R., *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non-linear media*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol 15, p. 1413-1418, 1980.
- [55] JAMES A.G., GREEN A., *Strain energy functions of rubber. II. Characterization of filled vulcanizates*, J. Appl. Polymer Sci., 19, p. 2319-2330, 1975.

- [56] KAWABATA S., KAWAI H., *Strain energy density functions of rubber vulcanizates from biaxial extension*, Adv. Polym. Sci., 24, p. 90-124, 1977.
- [57] KAWABATA S., MATSUDA M., TEI K., KAWAI H., *Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate*, Macromolecules, 14, p. 154-162, 1981.
- [58] KLAAS O., MANIATTY A., SHEPHARD M.S., *A stabilized mixed finite element method for finite elasticity. Formulation for linear displacement and pressure interpolation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol 180, p. 65-79, 1999.
- [59] KRAUS G., *Reinforcement of elastomers*, Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, New York, p. 529-561, 1965.
- [60] LADEVEZE P., *New advances in the large time increment method*, New advances in computational structural mechanics, ed. par Ladevèze P. et Zienkiewicz O.C., p. 3-21, Elsevier Science Publishers, 1995.
- [61] LADEVEZE P., *Mécanique non linéaire des structures*, Etudes en mécanique des matériaux et des structures, Hermès, 1996.
- [62] LAIARINANDRASANA L., PIQUES R., ROBISSON A., *Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation*, Int. J. Plasticity, 19, In Press, 2003.
- [63] LAMBERT-DIANI J., REY C., *Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères : principes et avantages*, C. R. Acad. Sci. Paris, 326, p. 483-488, 1998.
- [64] LAMBERT-DIANI J., REY C., *New phenomenological laws for rubbers and thermoplastic elastomers*, Eur. J. Mech. A/Solids, 18, p. 1027-1043, 1999.
- [65] LARABA-ABBES F., *Etude des comportements hyperélastiques de deux élastomères de type NR et PDMS par extensiométrie optique bidimensionnelle*, Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Paris, 1998.
- [66] LEMAITRE J., CHABOCHE L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 2ème édition, 1988.
- [67] LE TALLEC P., *Domain decomposition methods in computational mechanics*, Computational mechanics advances, 1, n^o2, North Holland, 1994.
- [68] LE TALLEC P., VIDRASCU M., *Une méthode numérique pour les problèmes de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations*, Numerical Mathematics, 43, p. 199-224, 1985.
- [69] LIONS P.L., *On the Schwarz alternating method*, PROC. of the first Int. Symp. on domain decomposition methods for the partial differential equations, 1987, S.I.A.M., p 142-156, 1988.
- [70] LIU C.H., HOFSTETTER G., MANG H.A., *A comparison of two variational formulations for rubber-like materials*, The finite element method in the 90's, ed. par E. Oñate et Samuelsson, p. 248-257, Springer-Verlag, 1991.
- [71] MAUGIN G.A., *Continuum mechanics of electromagnetic solids* Applied mathematics and mechanics, North Holland, 1988.
- [72] MICHEL S., *Modélisation et simulation de structures élastomères endommageables en grandes déformations*, AUM-AFM 14^{ème} Congrès français de mécanique, Toulouse 30 août-3 septembre 1999.
- [73] MICHEL-PONNELLE S., *Modélisation et simulation de structures élastomères endommageables en grandes déformations*, Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Caen, 2001.

- [74] MIEHE C., *Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials*, Eur. J. Mech. A/Solids, 14, p. 697-720, 1995.
- [75] MOONEY M., *A theory of large elastic deformation*, J. App. Phys., 11, p. 582-592, 1940.
- [76] MULLINS L., *Effect of stretching on the properties of rubber*, Rubber Chem. Technol., 21, p. 281-300, 1948.
- [77] MULLINS L., *Softening of rubber by deformation*, Rubber Chem. Technol., 42, p. 339-362, 1969.
- [78] MULLINS L., TOBIN N.R., *Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers*, Rubber Chem. Technol., 30, p. 551-571, 1947.
- [79] NAIT ABDELAZIZ M., *Contribution à l'étude de la déchirure des matériaux par approche globale et approche locale de la mécanique de la rupture*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1997.
- [80] NOTTIN J.P., RACIMOR P., *Mechanical behaviour of solid propellants during tensile tests with variable temperature*, AIAA-89-2645, Monterey, USA, 1989.
- [81] OBATA Y., KAWABATA S., KAWAI H., *Mechanical properties of natural rubber vulcanizates in finite deformation*, J. Polymer Sci., A-2 8, p. 903-919, 1970.
- [82] OGDEN R.W., *Large deformation isotropic elasticity on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids*, Proc. Roy. Soc. Lond., A326, p. 565-584, 1972.
- [83] OGDEN R.W., *Non linear elastic deformations*, John Wiley and Sons, 1984.
- [84] OGDEN R.W., ROXBURGH D.G., *A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber*, Proc. Roy. Soc. Lond., A455, p. 2861-2877, 1999.
- [85] ORTEGA J., RHEINBOLDT W.C., *Iterative solution of non-linear equations in several variables*, New-York, Academic Press, 1970.
- [86] PENG S., LANDEL R., *Stored energy function and compressibility of compressible rubber-like materials under large strain*, J. Applied Phys., 46, 1975.
- [87] POLIGNONE D.A., HORGAN C.O., *Effects of material anisotropy and inhomogeneity on cavitation for composite incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres*, Int. J. Solids Structures, 30, p. 3381-3416, 1993.
- [88] REY C., *Développement d'algorithmes parallèles de résolution en calcul de structures hétérogènes : application au cas d'une butée acier-élastomère*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [89] RHEINBOLDT W.C., *Methods for solving systems of non-linear equations*, Society for Industrial and Application of Mathematics, Philadelphia, 1974.
- [90] RHEINBOLDT W.C., *Numerical analysis of continuation methods for non-linear structural problems*, Computers and Structures, 13, p. 103-113, 1981.
- [91] RICE G.R., *A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notched cracks*, J. of Appl. Mech., p. 379, 1968.
- [92] RIVLIN R.S., *Large elastic deformations of isotropic materials*, Phil. Trans. R. Soc., A240, p. 459, 1948.
- [93] RIVLIN R.S., *A rechercher*, Phil. Trans. R. Soc., A243, p. 251, 1949.
- [94] RIVLIN R.S., SAUNDERS D.W., *Large elastic deformations of isotropic materials. experiments on the deformation of rubber*, Phil. Trans. R. Soc., A243, p. 251-288, 1951.
- [95] ROBERT L., *Adsorption*, Les techniques de l'ingénieur, vol J21, p. J 2730, 1989.

- [96] ROBERTS B.J., BENZIES J.B., *Relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon-black- filled vulcanizates*, *Plastics and Rubber : Materials and Applications*, p. 49-54, 1978.
- [97] ROBISSON A., *Comportement visco-hyperélastique endommageable d'élastomères SBR et PU : Prévission de la durée de vie en fatigue*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [98] SAANOUNI K., SIDOROFF F., ANDRIEUX F., *Damaged hyperelastic solid with induced volume variation. Effects of loading paths*, *Damage Mechanics in Engineering materials*, in *Studies in Appl. Mech.*, 46, p. 503-522, 1998.
- [99] SHEN Y., GOLNARAGHI F., PLUMTREE A., *Modelling compressive cyclic stress-strain behaviour of structural foam*, *Int. J. Fatigue*, 23, p. 491-497, 2001.
- [100] SIBONY M., MARDEN J.Cl., *Systèmes linéaires et non-linéaires*, *Analyse numérique*, I, Hermann, 1988.
- [101] SIMO J.C., TAYLOR R.L., PISTER K.S., *Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, vol 51, p. 177-208, 1985.
- [102] SIMO J.C., *On a fully three-dimensionnal finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computationnal aspects*, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 60, p. 153-173, North holland, 1987.
- [103] SIMO J.C., RIFAI M.S., *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 29, p. 1595-1638, 1990.
- [104] SOULAT D., *Méthodes de décomposition de domaines et parallélisme en calcul de structures hétérogènes et composites*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- [105] STEHLY M., REMOND Y., *On numerical simulation of cyclic viscoplastic and viscoelastic constitutive laws with the large time increment method*, *Journal of Time-Dependent Materials*, vol 6, n° 2, p. 147-170, 2002.
- [106] TRELOAR L.R.G., *Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation*, *Trans. Faraday Soc.*, 40, p. 59-70, 1944.
- [107] TRELOAR L.R.G., *The physics of rubber elasticity*, Claredon press, Oxford, 1975.
- [108] WILSON E.L., TAYLOR R.L., DOHERTY W.P., GHABOUSSI J., *Incompatible displacement models*, *Numerical and computer methods in structural mechanics*, ed. par Fenves S.J., p. 43-58, New-York, Academic Press, 1973.