

N° d'ordre : 3369

ECOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Spécialité : **GENIE ELECTRIQUE**

par

Omessaad HAJJI

INGENIEUR DE L'ECOLE NATIONALE D'INGENIEUR DE MONASTIR, TUNISIE

**DOCTORAT DELIVRE CONJOINTEMENT PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE
ET L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

Titre de la thèse :

CONTRIBUTION AU DEVELOPPEMENT DE METHODES D'OPTIMISATION STOCHASTIQUES. APPLICATION A LA CONCEPTION DES DISPOSITIFS ELECTROTECHNIQUES

Soutenue le 03/12/2003 devant le jury d'examen :

Jean-Marie KAUFFMAN	<i>Rapporteur</i>
Alain GERBAUD	<i>Rapporteur</i>
El-ghazali Talbi	<i>Examineur</i>
Laurent Krahenbuhl	<i>Examineur</i>
Pascal BROCHET	<i>Examineur</i>
Stephane BRISSET	<i>Examineur</i>

Thèse préparée dans le laboratoire L2EP, à l'Ecole Centrale de Lille
sous la direction du Professeur Pascal BROCHET

Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire sont une contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques et à leur application à la conception des dispositifs électrotechniques.

Les problèmes d'optimisation en électrotechnique présentent plusieurs difficultés liées aux besoins de l'utilisateur (recherche d'une solution globale, fiabilité et précision de la solution, diversité des problèmes traités, temps de calculs raisonnable, ...), aux caractéristiques du problème d'optimisation (non linéarité, dérivées difficilement accessibles, ...) et au temps de calculs importants. La résolution de telles difficultés a fait l'objet de nombreux travaux en utilisant diverses méthodes d'optimisation. Les méthodes déterministes s'appuient sur le calcul d'une direction de recherche généralement liée à la dérivée des résultats par rapport aux paramètres de conception du dispositif. Elles ne sont réellement utilisables que dans le cas restreint où la solution cherchée est réputée proche d'une solution connue, point de départ de cette recherche. C'est pour lever cette difficulté, que nous avons choisi de nous intéresser au développement des méthodes stochastiques et d'étudier leur application aux problèmes de conception rencontrés en électrotechnique.

Les méthodes d'optimisation stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation.

Les trois méthodes stochastiques les plus prometteuses : algorithmes génétiques, recuit simulé et recherche taboue ont été implantées et testées. Ces méthodes ont une grande capacité à trouver l'optimum global du problème. Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni à la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif.

Pour résoudre ce problème, quelques contributions originales ont été apportées. Un nouveau critère d'arrêt pour les algorithmes génétiques, basé sur la méthodologie des surfaces de réponse, deux améliorations au niveau de la prédétermination du vecteur pas et une nouvelle méthode de recherche taboue avec un mécanisme d'exploration radicalement différent ont été proposés.

Plusieurs applications en électrotechnique sont proposées afin de servir de cas test. Deux problèmes modélisés analytiquement, tels que la maximisation du rendement d'un moteur à courant continu sans balai et la minimisation du coût d'un transformateur triphasé à colonnes. Deux problèmes utilisent la méthode des éléments finis. Il s'agit d'une bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie et d'une presse à aimants.

Mots clés

Dispositifs électrotechniques
Optimisation
Méthodes stochastiques
Algorithmes génétiques
Recuit simulé
Recherche taboue

Abstract

The work presented in this memory is a contribution to the development of stochastic optimization methods and their application to the design of electromagnetic devices.

The optimization problems in electrical engineering present several difficulties related to the needs of the user (search of global solution, reliability and accuracy of the solution, diversity of the problems, available time...), with the characteristics of the optimization problems (non-linearity, derivatives difficult to compute ...) and to the significant computing time.

The resolution of such difficulties was the object of many works by using various optimization methods. The deterministic methods are based on the calculation of a search direction generally computed from the derivatives of the objective function related to the design parameters of the device.

They are really usable only in the restricted case where the searched solution is close to a known solution that is the starting point of this search. In order to overcome this difficulty, we choose to investigate on stochastic methods and to study their application to the design problems in electrical engineering.

The optimization stochastic methods are based on probabilistic and random mechanisms of search. This characteristic indicates that several successive executions of these methods can lead to different results for the same initial configuration of an optimization problem.

The three most promising stochastic methods: genetic algorithms simulated annealing and tabu search have been programmed established and tested. These methods have a great capability to find the global optimum of a problem. Contrary to the most deterministic methods, they require neither starting point, nor with the knowledge of the derivatives of objective function to reach the optimal solution. However, they require a significant number of simulations of the objective function.

To solve this problem, some original contributions have been made. A new stop criterion for the genetic algorithms, based on the response surfaces methodology, two improvements on predetermination of the step vector and a new tabu search method with a radically different mechanism of exploration have been proposed.

Several applications in electric machines design are proposed in order to be used as benchmark. Two problems, such as the maximization of the efficiency of a brushless DC motor and the minimization of the cost of a three-phase transformer use analytical model. Two problems use finite element analysis. The first one is a superconducting magnetic energy storage and the second is a die press model.

Key words

Electric machine design
Optimization
Stochastic methods
Genetic algorithm
Simulated annealing
Tabu search

Table des matières

Tables des matières

<i>Introduction générale</i>	1
<i>Partie I – Place de l’optimisation dans la démarche de conception en électrotechnique</i>	5
<i>I.1. Introduction</i>	7
<i>I.2. Méthodologie de conception</i>	8
<i>I.3. Formalisme mathématique</i>	12
I.3.1. Optimisation continue sans contraintes	12
I.3.2. Optimisation continue avec contraintes	12
I.3.3. Optimisation à objectifs multiples	13
<i>I.4. Traitements des contraintes</i>	15
I.4.1. Méthodes des pénalités	15
I.4.2. Lagrangien	19
I.4.3. Optimisation séquentielle des contraintes.....	20
<i>I.5. Problèmes d’optimisation en électrotechnique</i>	21
I.6.1. Optimisation d’un moteur à courant continu sans balai.....	22
I.6.2. Transformateur triphasé à colonne.....	26
I.6.3. Bobines supraconductrices pour le stockage d’énergie	29
I.6.4. Presse à aimants	33
<i>I.6. Conclusion</i>	37
<i>Partie II – Méthodes d’optimisation</i>	39
<i>II. 1. Introduction</i>	41
<i>II.2. Caractéristiques</i>	43
II.2.1. Sensibilité et robustesse d’une méthode d’optimisation.....	43
II.2.2. Opérateurs de recherche fondamentaux	43
II.2.3. Mode de recherche de l’optimum	44
II.2.4. Ordre d’une méthode de résolution	44
<i>II.3. Classification des méthodes d’optimisation</i>	45
II.3.2. Méthodes déterministes	45
II.3.3. Méthodes stochastiques	49
<i>II.4. Choix des méthodes d’optimisation</i>	53
<i>II.5. Algorithmes Génétiques</i>	54
II.5.1. Introduction	54
II.5.2. Principe	55
II.5.3. Codage	57
II.5.4. Population initiale.....	60
II.5.5. Fonction d’adaptation	61
II.5.6. Méthodes de sélection	63
II.5.7. Modèles de reproduction	66
II.5.8. Comparaison entre les codages.....	73

II.5.9. Théorie des schémas	73
II.5.10. Traitement des contraintes	78
II.5.11. Critères d'arrêt	79
II.6. Nouveau critère d'arrêt basé sur les plans d'expériences	82
II.6.1. Nécessité d'un nouveau critère	82
II.6.2. Critère d'arrêt proposé	82
II.6.3. Sélection des individus	84
II.6.4. Calcul d'erreur	86
II.6.5. Pertinence des choix	87
II.7. Recuit simulé	90
II.7.1. Introduction	90
II.7.2. Notions	91
II.7.3. Algorithme	92
II.7.4. Paramètres	93
II.7.5. Gestion des déplacements	97
II.7.6. Améliorations apportées	98
II.8. Recherche taboue	102
II.8.1. Introduction	102
II.8.2. Recherche taboue à variables continues	102
II.8.3. La recherche taboue de Hu	104
II.8.4. Recherche taboue dite universelle	105
II.9. Nouvelle méthode de recherche taboue	108
II.9.1. Introduction	108
II.9.2. Génération des nouveaux points	108
II.9.3. Liste taboue	111
II.9.4. Intensification et diversification	111
II.9.5. Paramètres de contrôle	112
II.9.6. Algorithme	113
II.10. Conclusion	114
Partie III. Applications en électrotechnique	116
III.1. Introduction	117
III.2. Etude des paramètres de contrôle	118
III.2.1. Fonctions tests	118
III.2.2. Analyse de la sensibilité	120
III.3. Optimisation des dispositifs électrotechniques	128
III.3.1. Moteur à courant continu sans balai	128
III.3.2. Transformateur triphasé de puissance	133
III.3.3. Bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie	135
III.3.4. Presse à aimant	142
III.4. Conclusion	147
Conclusion générale	149
Bibliographie	155

Introduction générale

Introduction générale

Dans tous les domaines d'activités industrielles, les ingénieurs sont amenés à concevoir de nouveaux dispositifs. Ce travail de conception, longtemps manuel et basé sur l'expérience et la pratique, devient de plus en plus automatisé, grâce à l'arrivée des ordinateurs. Cette démarche de conception d'un dispositif de grande performance est grandement facilitée et devient plus efficace grâce notamment aux méthodes d'optimisation automatiques. Elles doivent permettre l'obtention de la configuration optimale satisfaisant les besoins fonctionnels et économiques. Mais cette tâche est difficile, en effet, son but est de trouver un compromis entre plusieurs facteurs : besoins à satisfaire, choix entre différents concepts possibles sur la base de la faisabilité, des coûts de développement, de fabrication ou de maintenance ou encore de critères non quantifiables tels que l'esthétique du produit. Il en résulte qu'une même conception peut être optimisée de différents points de vue.

Les problèmes d'optimisation en électrotechnique présentent plusieurs difficultés liées aux besoins de l'utilisateur (recherche d'une solution globale, fiabilité et précision de la solution, diversité des problèmes traités, temps de calculs disponible, ...), aux caractéristiques du problème d'optimisation (non linéarité, dérivées difficilement accessibles, ...) et aux temps de calculs importants. La résolution de telles difficultés a fait l'objet de nombreux travaux [SAL 92] [VAS 94] [SAR 99] [COS 01] [VIV 02] en utilisant diverses méthodes d'optimisation.

Les méthodes déterministes ont été étudiées dans l'équipe Conception et Optimisation des Machines Electriques (COME) par [BRI 95], [GIL 97], [VIV 02]. Elles s'appuient sur le calcul qui peut être fait d'une direction de recherche, généralement liée à la dérivée de certains résultats par rapport aux paramètres de conception de dispositif. Elles ne sont réellement utilisables que dans le cas restreint où la solution cherchée est réputée proche d'une solution connue, point de départ de cette recherche. C'est pour lever cette difficulté, que nous avons choisi de nous intéresser au développement des méthodes stochastiques et d'étudier leur application aux problèmes de conception rencontrés en électrotechniques.

En effet, les méthodes stochastiques permettent de localiser l'optimum d'une fonction dans l'espace des paramètres sans avoir recours aux dérivées de la fonction par rapport à ces paramètres. De plus, elles ne se laissent pas piéger par un optimum local et réussissent le plus souvent à déterminer l'optimum global de la fonction considérée. Leur principe consiste à

travailler avec un ensemble de solutions, puis à les faire évoluer au moyen des règles heuristiques et probabilistes. Nous avons surtout retenu pour notre étude les algorithmes génétiques, le recuit simulé et les méthodes de recherche taboue. La facilité de programmation et les mécanismes passionnants desquels découlent ces algorithmes nous ont beaucoup motivés.

La première partie de notre travail est consacrée à l'exposé d'une méthodologie de conception applicable au domaine de l'électrotechnique. Elle s'appuie sur la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes. Notamment, la formulation d'un problème de conception en un problème d'optimisation est présentée. Plusieurs applications en électrotechnique sont proposées afin de servir de cas test. En particulier, nous proposerons deux problèmes modélisés analytiquement, tels que la maximisation du rendement d'un moteur à courant continu sans balai [BRI 03] et la minimisation du coût d'un transformateur triphasé à colonnes [FAN 99] et deux problèmes utilisant la méthode des éléments finis. Il s'agit d'une bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie [TEAM 22a] [TEAM 22b] et d'une presse à aimants [TAK 96a]. Le choix de présenter les applications avant les méthodes d'optimisation est délibéré. Il permet de se concentrer immédiatement sur les méthodes les mieux adaptées à nos problèmes de conception.

La partie II brosse un état de l'art des techniques d'optimisation capables de résoudre les problèmes de conception en électrotechnique présentés en première partie. Deux grandes classes de méthodes sont présentées : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Les caractéristiques principales de chaque classe, leurs points forts et leurs points faibles sont montrés. Les méthodes les plus connues et les plus utilisées sont détaillées. Les concepts fondamentaux des méthodes stochastiques citées ci-dessus sont introduits et analysés. Leur principal défaut est le nombre élevé d'évaluations. Pour le résoudre, certaines améliorations sont proposées ainsi que des nouvelles méthodes.

La partie III montre l'intérêt de ces méthodes pour la résolution des quatre problèmes en électrotechnique présentés en partie I. L'efficacité des méthodes stochastiques présentées en partie II est testée et une comparaison est faite. Ces applications sont l'occasion de discuter largement des caractéristiques de ces divers algorithmes dans le cadre particulier de notre domaine d'application.

Ces travaux nous permettent de conclure en rappelant leurs apports et en indiquant les principales perspectives de recherche à développer.

**Partie I – Place de
l’optimisation dans la
démarche de
conception en
électrotechnique**

I.1. Introduction

La conception économique et la mondialisation se traduit en terme de conception de produit industriel par trois axes principaux de progrès sur lesquels il faut inlassablement travailler : réduire le délai de la mise sur le marché, augmenter les performances des produits (simplicité, fiabilité, maintenance, robustesse...) et diminuer le coût de possession. Les outils dits de conception assistée par ordinateur sont aujourd'hui performants et permettent un gain de productivité considérable en intégrant plusieurs étapes du processus de conception et de fabrication d'un produit industriel. L'intervention de l'ingénieur reste encore cruciale, car c'est à lui que reviennent les tâches d'exploration de l'espace de conception et de décision pour le choix de la conception répondant le mieux au cahier des charges. Le développement des méthodes d'optimisation répond à ce besoin de l'ingénieur en l'assistant dans sa tâche de conception, en automatisant l'exploration de l'espace de conception et en lui garantissant l'obtention de la meilleure solution. L'intérêt de l'optimisation est non seulement de rationaliser la recherche de la solution au problème de conception mais également, de raccourcir le délai d'obtention de cette dernière et de contribuer ainsi à la maîtrise du coût de conception.

Durant ces dernières années, de nombreuses études ont été menées dans le domaine de l'optimisation comme le montre le nombre important de publications sur ce thème dans les revues du domaine. Aujourd'hui, l'optimisation s'applique à tous les domaines de la science et même à notre vie quotidienne. Chacun cherche souvent à mieux gérer son temps, son argent, minimiser certaines consommations, ..., ce sont autant de problèmes d'optimisation.

Dans le domaine de l'automobile, la recherche d'une meilleure aérodynamique se pose depuis longtemps en terme d'optimisation de forme sous différentes contraintes : espace intérieur, faisabilité, sécurité, coût, etc. Dans l'industrie électronique, la réalisation de circuits à très haute échelle d'intégration conduit à la minimisation des distances entre connexions. En électrotechnique, un objectif est de diminuer le coût de possession d'un dispositif, en exploitant au mieux les matériaux de façon à minimiser les coûts de fabrication et augmenter le rendement. Ainsi, il convient de trouver la forme d'un dispositif qui permet d'obtenir une distribution particulière du champ magnétique, réduire le champ de fuite, etc.

Cette première partie est consacrée à l'exposé d'une méthodologie de conception applicable au domaine de l'électrotechnique. Elle s'appuie sur la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes. Plusieurs applications en électrotechniques sont proposées afin de lui servir d'illustration et de cas test.

I.2. Méthodologie de conception

L'optimisation est souvent réduite aux techniques de résolution mathématiques auxquelles sont attribués par la suite les échecs rencontrés. Or, comme pour la plupart des problèmes que l'ingénieur est amené à résoudre, l'optimisation doit faire l'objet d'une démarche systématique qui comporte quatre phases récapitulées dans la figure I.1. Les phases peuvent s'enchaîner séquentiellement mais les itérations et les retours sont bien souvent indispensables.

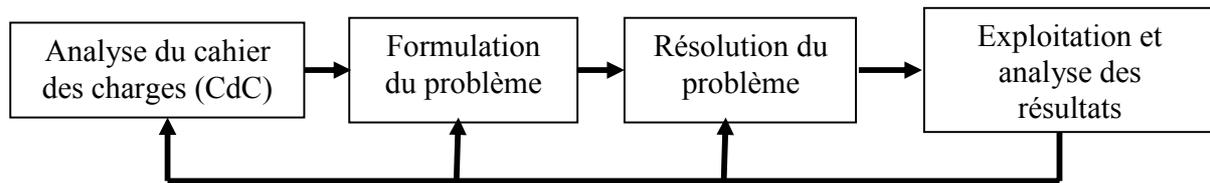


Fig. I.1. Démarche de résolution d'un problème de conception

Analyse du cahier des charges

Le cahier de charge, définit en amont, exprime les besoins des utilisateurs en termes de fonctions de service et contraintes à satisfaire. Des exemples de cahiers des charges pour divers dispositifs électrotechniques sont présentés dans cette partie au paragraphe I.6. Par exemple, il précise le rendement, l'encombrement, la maintenance et la robustesse de la chaîne de traction électrique d'un moteur synchrone à aimants permanents à commutations électroniques.

A l'état initial, il est décidé que l'objet à concevoir doit assurer certaines fonctions dans un environnement donné : les fonctions de service. Il doit également satisfaire certaines exigences qui conditionnent son adoption par l'utilisateur final : les contraintes.

En général, l'objet à concevoir interagit avec son environnement. Un ou plusieurs phénomènes physiques sont nécessaires pour décrire ces interactions et constituent les modèles physiques comportementaux de l'objet.

Pour évaluer les performances de l'objet et vérifier qu'il répond aux exigences imposées, il est nécessaire de définir un ensemble de réponses de contrôle ainsi qu'un ensemble de facteurs sur lesquels il est possible d'agir. Facteurs et réponses sont liées à la nature et au comportement de l'objet ainsi qu'aux réactions de l'environnement.

La phase de rédaction du cahier des charges impose une caractérisation rigoureuse du dispositif à concevoir et n'est pas traitée ici. Elle peut s'appuyer sur des méthodologies et

techniques de management de projets [CAZ 97].

Formulation du problème d'optimisation

Cette phase consiste à traduire le problème de conception, décrit par le cahier des charges, en un problème mathématique équivalent. C'est l'étape la plus délicate du processus de conception car, là aussi, la formulation d'un problème n'est jamais unique, en particulier la définition des fonctions caractérisant les performances du système.

Elle consiste à définir de façon précise :

1. La fonction objectif.
2. Les paramètres de conception.
3. Les éventuelles contraintes liées à la fabrication ou à l'utilisation du dispositif et donc exprimées dans le cahier des charges.
4. Les contraintes ajoutées par le concepteur.

La fonction objectif est une des réponses de l'objet qui définit l'objectif à atteindre et peut être de deux natures : un coût à minimiser (coût de fabrication, consommation, coût d'exploitation, durée de développement) ou une performance à maximiser (profit, rendement, facteur de transmission). Son choix conditionne la définition du problème d'optimisation et inclus les moyens qui en permettent le calcul, c'est-à-dire la modélisation retenue pour l'objet. Dans le cas d'un objectif unique, le choix de cette fonction est évident. Par exemple, dans le cas où le but est de trouver les caractéristiques d'un dispositif produisant des performances dont les valeurs sont spécifiées, la fonction objectif peut prendre comme expression l'écart entre les performances et les spécifications. Cependant, les problèmes d'optimisation doivent souvent satisfaire des objectifs multiples dont certains sont concurrents. Plusieurs façons de traiter ces problèmes sont analysées dans ce chapitre.

Les paramètres ou variables de conception sont des facteurs contrôlés qui permettent d'influencer les performances. Ils peuvent être de natures diverses : dimensions géométriques, propriétés des matériaux, choix structurels, etc. Ils peuvent être quantitatifs ou qualitatifs, continus ou discrets. Le choix et le nombre des paramètres conditionnent aussi la définition du problème d'optimisation. Il peut être intéressant de faire varier un grand nombre de facteurs afin d'augmenter l'espace de recherche mais le processus d'optimisation sera alors plus long.

Des contraintes peuvent être ajoutées par le concepteur pour avoir, par exemple, une forme géométrique convenable, s'assurer de la validité de la modélisation retenue et de son bon fonctionnement, etc.

La formulation du problème d'optimisation est fondamentale dans le processus de conception parce qu'elle conditionne le succès des étapes suivantes. Elle n'est pas facile à aborder car le choix des variables de conception n'est jamais unique et les moyens de calcul actuels ne peuvent en gérer qu'un nombre limité.

Résolution du problème d'optimisation

La recherche de l'optimum d'un problème est réalisée à l'aide de méthodes d'optimisation qui seront présentées dans la deuxième partie.

Certaines de ces méthodes sont dites déterministes car elles conduisent, pour une solution initiale donnée, toujours au même résultat final. Pour trouver l'optimum, elles s'appuient sur une direction de recherche qui peut être fournie par les dérivées de la fonction objectif. Ces méthodes ont la réputation d'être efficaces lorsque la solution initiale est proche de l'optimum recherché. Cette particularité constitue un inconvénient majeur dans le cas d'une fonction objectif possédant plusieurs optimums. Elles peuvent, en effet, converger vers un optimum local.

Les méthodes stochastiques, contrairement à la plupart des méthodes déterministes, ne nécessitent ni point de départ, ni à la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Elles s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires qui explorent efficacement l'espace de recherche et convergent vers l'optimum global. Leur nature aléatoire implique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes conduisent à des résultats différents pour une même initialisation du problème d'optimisation. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif en comparaison avec les méthodes déterministes exploitant la dérivée de la fonction objectif.

Analyse et exploitation des résultats

Une fois le problème résolu, il est impératif d'évaluer la qualité de la solution et en cas d'échec de s'interroger sur les choix adoptés lors des phases précédentes. On attribue souvent l'échec de l'optimisation à la méthode de recherche employée pour la localisation de l'optimum ou à la sensibilité des paramètres de cette méthode alors que le problème est peut-être mal formulé.

Un cahier des charges peut être non faisable à cause de contraintes trop sévères ou parce que la fonction objectif n'est pas pertinente. Par exemple, la réduction des oscillations de couple doit être faite en ajoutant une contrainte pour maintenir le couple moyen. Il se peut que le problème soit mal formulé par manque de contraintes qui n'apparaissent pas

explicitement dans le cahier des charges. Il est alors nécessaire de les ajouter. Ce cas s'est présenté dans les exemples traités au paragraphe I.6.

Le choix de la méthode de résolution peut être effectivement erroné et il est nécessaire de s'assurer de l'adéquation entre la méthode de résolution et le modèle retenu. En effet, si le modèle n'est pas continu et différentiable ou si l'expression de la fonction objectif n'est pas explicite, il est imprudent d'utiliser les méthodes déterministes du premier ordre, c'est-à-dire qui utilisent les dérivées premières de la fonction objectif.

Les différentes phases de la démarche de résolution d'un problème de conception ont été présentées. La résolution du problème d'optimisation sera traitée dans la partie II. Dans la partie III, des exemples d'exploitation et d'analyse des résultats seront présentés et commentés. La formulation mathématique du problème d'optimisation, à partir de l'analyse du cahier des charges, est décrite dans le paragraphe suivant.

I.3. Formalisme mathématique

La première étape d'un processus d'optimisation consiste à formuler, en termes mathématiques, le problème de conception. Au cours de ce paragraphe, certains concepts de base liés à la formulation d'un problème d'optimisation sont détaillés. La présentation reste très générale et est nécessaire à la compréhension de la suite de l'exposé.

I.3.1. Optimisation continue sans contraintes

Un problème d'optimisation continue sans contraintes peut se formuler par :

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(X) \\ X = \{x_1, \dots, x_n\} \\ x_{im} \leq x_i \leq x_{iM} \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow X \in S \subset R^n \quad (\text{I.1})$$

Les composantes, $(x_i, i = 1, \dots, n)$ du vecteur X sont connues sous le nom de variables ou paramètres de conception. En électrotechnique, celles-ci peuvent être les dimensions géométriques ou les propriétés physiques (densité de courant, induction magnétique, pertes spécifiques, perméabilité...), d'un dispositif.

La fonction $f(X)$ est nommée fonction objectif. Elle peut représenter aussi bien un critère physique (force électromotrice, puissance...), un coût de fabrication tenant compte par exemple du prix d'une tôle magnétique, d'un aimant, etc, ou le poids de la structure à optimiser. Par défaut, la fonction objectif est à minimiser ce qui correspond à objectif de type coût. Dans le cas de la maximisation d'une performance, la fonction objectif vaudra l'opposé de la performance.

Le problème d'optimisation est dit continu car les variables sont réelles. Les limites technologiques minimale et maximale, respectivement, x_{im} et x_{iM} , représentent les limites de variation de chaque paramètre. S est appelé espace des solutions ou espace de recherche.

I.3.2. Optimisation continue avec contraintes

Généralement, un problème mathématique d'optimisation continue avec contraintes s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(X) \\ X \in S \subset R^n \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Les fonctions $g_j(X)$, $j = 1, \dots, m$ sont les contraintes d'inégalités associées à la faisabilité du dispositif et à son adaptation au cahier des charges. Dans notre cas, elles représentent des limites imposées au problème (limitation de l'induction magnétique, limitation de masse totale, limitation des grandeurs géométriques...). Elles peuvent également représenter des relations entre les variables ajoutées par le concepteur pour garantir le bon conditionnement du problème.

L'ensemble des régions de l'espace de recherche où les contraintes de conception sont vérifiées est dénommé espace réalisable ou domaine admissible. Inversement, l'espace irréalisable ou domaine interdit, désigne l'ensemble des zones de l'espace où au moins une des contraintes n'est pas respectée.

La solution du problème que nous venons de formuler est obtenue lorsque le minimum de la fonction $f(X)$ est atteint.

Les fonctions $f(X)$ et $g_j(X)$ peuvent être linéaires, non linéaires, continues ou discontinues. De ce fait, une solution optimale du problème sera déduite à partir d'une méthode d'optimisation adéquate comme détaillé en deuxième partie.

Il faut cependant préciser qu'en général un problème d'optimisation de structure en électrotechnique, ou dans n'importe quelle autre discipline, ne peut être résolu avec suffisamment de cohérence sans une bonne connaissance du dispositif à traiter. En effet, les méthodes d'optimisation ne sont pas des outils magiques, mais doivent être considérées comme des outils d'aide à la recherche de solutions.

I.3.3. Optimisation à objectifs multiples

Parfois, il n'est pas possible d'extraire une fonction objectif unique du cahier des charges mais plusieurs objectifs qu'il faut satisfaire simultanément. L'optimisation à objectifs multiples ou optimisation multi-critère a pour objet la résolution de ce problème à partir des variables de conception. Ces problèmes entrent dans la catégorie des problèmes d'optimisation vectoriels. Leur description est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_l(X) \end{bmatrix} \\ X \in S \subset R^n \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (I.3)$$

où les fonctions $f_h(X)$ désignent les objectifs et $g_j(X)$ les contraintes du problème.

Lorsque ce type de problème apparaît, la solution retenue est de le transformer en problème mono-critère de type (I.2) en utilisant les méthodes de Marglin [MES 98], Pareto [LOU 92] [SCH 85] [SHA 85] ou de pondérations [MAN 85].

I.4. Traitements des contraintes

Les contraintes imposées par le cahier des charges comme les contraintes ajoutées par le concepteur doivent être prises en compte dans le problème. Il y a plusieurs choix pour le traitement des problèmes avec contraintes.

On peut, pour des raisons de robustesse et de facilité de mise en œuvre, transformer un problème contraint en une suite de problèmes sans contrainte. Cette transformation s'effectue en ajoutant des pénalités à la fonction objectif.

La méthode du Lagrangien procède, elle, par linéarisation des contraintes.

Enfin, le problème contraint peut être transformé en problème non-contraint à objectifs multiples.

I.4.1. Méthodes des pénalités

L'intérêt de ces méthodes est la simplicité de leurs principes et leurs relatives efficacité pratique [RAY 74], [MIN 83] [ATT 85]. Le concept de base est de transformer la résolution du problème (I.2) sous contraintes en une suite de résolutions de problèmes sans contrainte (I.1) en associant à l'objectif une pénalité dès qu'une contrainte est violée.

La fonction objectif $f(X)$ du problème (I.2) est alors remplacée par la fonction suivante à minimiser :

$$\varphi(X, r) = f(X) + r \cdot h(X) \quad (\text{I.4})$$

où $h(X)$ est la fonction pénalité, continue, dépendant des contraintes $g_j(X)$, r est un coefficient de pénalité, toujours positif. La fonction de pénalité est choisie de telle façon que la possibilité de réalisation soit garantie dans tous les processus de recherche de l'optimum. Cette caractéristique est très importante pour éviter un arrêt prématuré de l'algorithme d'optimisation.

Suivant les types de contraintes et le type de fonction $h(X)$ on distingue la méthode des pénalités intérieures [CAR 61] et la méthode des pénalités extérieures [FIA 68] [RAO 96] que nous allons exposer.

La méthode de pénalité extérieure

La fonction $h(X)$ est utilisée afin de défavoriser les positions non admissibles. La fonction de pénalité doit être continue et à dérivées continues :

$$h(X) = \sum_{j=1}^m \max^2(0, g_j(X)) \quad (\text{I.5})$$

Le problème obtenu pourrait être résolu directement pour une valeur de r suffisamment grande de telle façon que les contraintes soient satisfaites mais ce choix entraîne un mauvais conditionnement de $\varphi(X, r)$ et donc engendre un problème numérique lors de la résolution [MIN 83]. Pour cette raison, les méthodes des pénalités sont en général résolues de manière itérative : une suite de valeurs croissantes de r est générée et à chaque itération k du processus, le problème d'optimisation sans contrainte suivant est résolu :

$$\varphi(X, r, k) = f(X) + r^k \sum_{j=1}^m (\max(0, g_j(X)))^2 \quad (\text{I.6})$$

Lorsque k tend vers l'infini, (I.6) devient équivalent à notre problème contraint (I.2).

Le coefficient r doit être choisi supérieur à 1, et pas trop grand pour éviter le problème numérique cité précédemment. En pratique, une valeur de $r = 10$ et une valeur de $k = 3$ convient bien si toutes les fonctions contraintes sont mises à l'échelle.

Grâce aux caractéristiques de continuité et dérivabilité de la fonction de pénalité, cette méthode est applicable partout. De plus, elle est facile à mettre en œuvre.

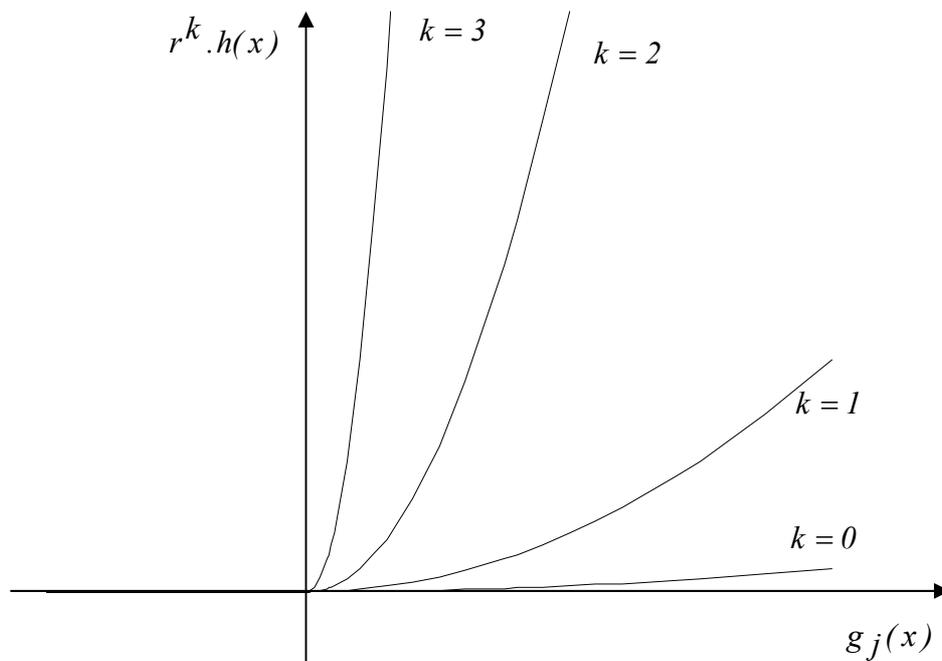


Fig. I.2. Fonctions de pénalité extérieure pour $r = 10$

L'avantage de cette méthode est que le point de départ n'est pas nécessairement admissible tout en garantissant que le point final sera dans le domaine admissible ou presque. La fonction de pénalité extérieure est continue dans tout le domaine d'étude, admissible comme non admissible, mais elle présente l'inconvénient de conduire à un optimum réalisable seulement quand k tend vers l'infini et d'approcher ce point par une série de solutions non admissibles. Elle est utilisée pour les contraintes non uniquement fonction des variables d'optimisation ou les contraintes d'égalités. La méthode des pénalités intérieures est utilisée pour toutes les autres contraintes pour des raisons que nous allons expliciter.

Méthode des pénalités intérieures

Dans le cas de la pénalité intérieure, on cherche à définir la fonction $h(x)$ de telle sorte que, plus la contrainte devient active, c'est-à-dire plus x_i se rapproche de la frontière du domaine admissible, plus la fonction de pénalisation $h(x)$ croît et tend vers l'infini et par conséquent, moins on a de chance de trouver le minimum proche de la frontière du domaine admissible. Cette caractéristique montre que cette technique ne convient pas pour résoudre les problèmes possédant des contraintes égalités.

Les fonctions de pénalités intérieures les plus employées dans la littérature sont :

La fonction inverse [CAR 61] :
$$h(x) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(x)} \tag{I.7}$$

La fonction logarithmique [RAO 96]:
$$h(x) = -\log(-g_j(x)) \tag{I.8}$$

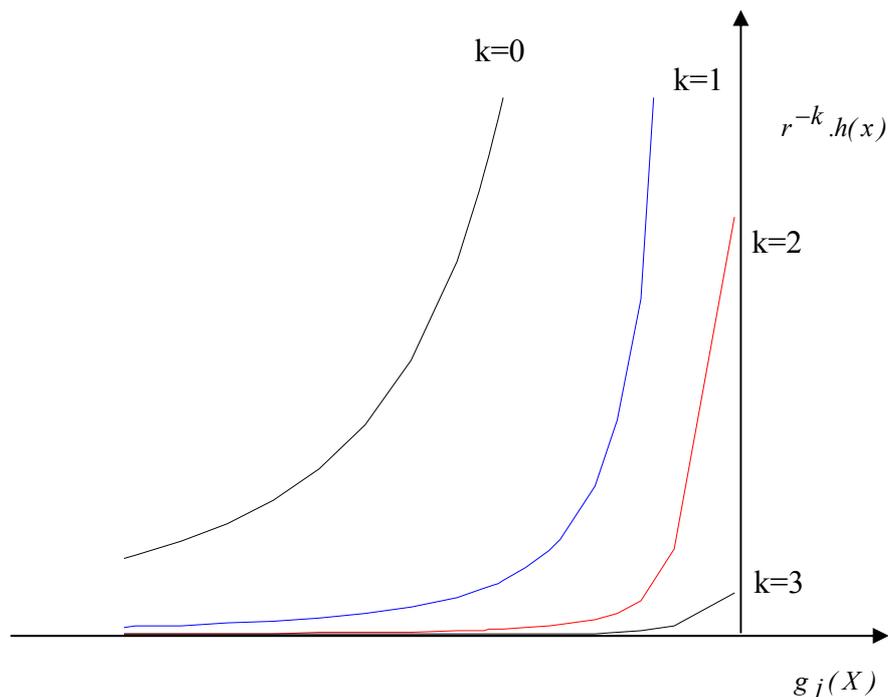


Fig. I.3. Fonction de pénalité intérieure pour $r = 10$

Dans le cas de la fonction inverse, la fonction objectif du problème d'optimisation (I.2) est remplacée par la fonction suivante :

$$\varphi(X, r) = f(X) - r^{-k} \sum_{j=1}^m \frac{I}{g_j(X)} \quad (\text{I.9})$$

Le coefficient r est choisi grand pour que la recherche se fasse initialement loin des limites du domaine de faisabilité. A chaque nouvelle itération, la recherche pourra se rapprocher davantage des limites de faisabilité, la pénalité diminuera et (I.9) deviendra équivalent à (I.2) pour r^{-k} tendant vers zéro, i.e. k tendant vers l'infini.

La fonction de pénalisation intérieure présente l'avantage de toujours conduire à une séquence de solutions réalisables. Néanmoins, elle a l'inconvénient majeur d'être discontinue sur l'interface entre les domaines admissible et interdit. En plus, le point de départ doit obligatoirement être dans la région admissible, ce qui conduit à la nécessité d'un algorithme supplémentaire pour le trouver. Par exemple, on choisit comme point initial celui qui minimise les pénalités ce qui permet à l'optimisation de démarrer dans une direction d'amélioration de la fonction objectif $f(X)$.

Méthode de pénalisation radicale

La méthode de pénalisation radicale est un processus de pénalisation très populaire dans le domaine de l'optimisation évolutionnistes [MIC 96]. Il s'agit d'écarter les solutions non réalisables en attribuant à la fonction de transformation une valeur très élevée en cas de minimisation, ou une valeur nulle en cas de maximisation. Par conséquent, la probabilité de survie de ces solutions, déterminée par les mécanismes de sélection, est quasi-nulle. Cette méthode est séduisante en raison de sa grande simplicité. Elle peut être appliquée avec succès lorsque l'espace de recherche est convexe. Dans le cas contraire, cette approche a de sérieuses limitations, les solutions situées dans l'espace irréalisable ne pouvant être améliorées en raison de l'absence de directions données par la méthode de pénalisation.

Choix de la méthode de pénalité

La méthode des pénalités extérieures, d'un point de vue pratique, est très avantageuse. En effet, le domaine d'optimisation défini par des contraintes assure la possibilité et la pertinence du calcul de la réponse en tout point. Cette méthode peut donc être appliquée à un problème contraint sans modification des algorithmes de recherche. Elle permet aussi la prise en compte des contraintes égalités et des contraintes qui ne sont pas fonction uniquement des

variables d'optimisation mais également des résultats de simulation.

Comparativement, la méthode des pénalités intérieures est plus difficile à mettre en œuvre car les inégalités sont strictes et ne peuvent être transgressées. Par contre, elle permet de réduire le domaine de recherche au seul domaine faisable et ainsi limiter les risques d'arrêt prématuré du processus d'optimisation.

En conclusion, une combinaison des deux méthodes est préférable : la méthode des pénalités extérieures pour les contraintes non uniquement fonction des variables d'optimisation ou les contraintes égalités et la méthode de pénalités intérieures pour les autres.

Les méthodes que nous venons de décrire présentent certains inconvénients. Notamment lorsque k tend vers l'infini, la fonction peut être mal conditionnée ce qui entraîne une convergence lente. De plus, ces méthodes sont itératives et nécessitent donc un temps de calcul important.

Nous allons maintenant présenter une méthode qui permet d'éliminer en partie les difficultés dues aux pénalités en assurant une convergence vers l'optimum. Ces méthodes sont dites du Lagrangien augmenté [HES 69] [ROC 73] et sont réputées robustes et efficaces.

I.4.2. Lagrangien

On appelle fonction de Lagrange associée au problème d'optimisation (I.2), la fonction :

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(X) \quad (\text{I.10})$$

où $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, m$) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Théorème de Kuhn et Tucker

Une condition nécessaire pour que X^* soit minimum local d'un problème contraint est donnée par les équations de Kuhn-Tucker [SAL 92] :

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(X^*) = 0 \\ \lambda_j^* g_j(X^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

L'équation (I.11) s'écrit à l'aide de l'équation (I.10) :

$$\begin{cases} \nabla L(X, \lambda^*) = 0 \\ \lambda_j^* g_j(X^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

La résolution du système (I.12) à $(n + m)$ équations permet de trouver des points pouvant être des minima locaux mais rien ne garantit pas qu'ils le soient effectivement. Néanmoins, il est clair que ces méthodes nécessitent le calcul des dérivées exactes des fonctions objectif et contraintes. Pour cette raison, elles sont difficiles à mettre en œuvre dans le contexte de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour évaluer ces fonctions. Une description complète du traitement du Lagrangien se trouve dans [HES 69], [ROC 73], [MIN 83] et [VAS 94].

I.4.3. Optimisation séquentielle des contraintes

Cette approche a été mise en œuvre avec succès dans le domaine évolutionniste [SCH 93] [MIC 96]. Elle semble particulièrement bien adaptée à ces méthodes qui progressent à partir d'une population. La procédure consiste à utiliser à tour de rôle chaque contrainte comme fonction objectif d'un problème d'optimisation sans contrainte. Chaque contrainte devient successivement la fonction objectif alors que les autres sont ignorées. Ce processus de minimisation est interrompu dès qu'un pourcentage significatif de la population satisfait la contrainte. Lorsque toutes les contraintes ont été traitées, la fonction objectif est alors prise comme critère d'optimisation. La puissance de cette méthode réside dans la mémoire acquise par la population à chaque itération du processus. Bien que cette méthode paraisse coûteuse en temps de calcul, elle serait assez intéressante lorsque on est en présence de nombreuses contraintes difficiles à respecter.

I.5. Problèmes d'optimisation en électrotechnique

Les problèmes de conception en électrotechnique sont souvent multi-physiques et comporte des incertitudes notamment sur les propriétés des matériaux mis en œuvre. Ainsi, le concepteur est amené à employer des modèles simplifiés, ne prenant en compte qu'un nombre limité de phénomènes physiques. Les différentes modélisations employées dans nos travaux sont de deux catégories :

- **La modélisation analytique** : Elle permet une représentation globale du dispositif en prenant en compte les phénomènes physiques indispensables au dimensionnement : magnétique, électrique, thermique, mécanique. Cette vision multi-physique se fait généralement au détriment de la précision dans chaque domaine physique. Ces systèmes sont composés d'équations généralement non linéaires à coefficients variables mais sont rapides à résoudre. Cette propriété permet d'envisager leur utilisation dans une optimisation avec beaucoup de paramètres. Pour ces modèles analytiques, il est possible d'obtenir l'expression des dérivées partielles de la fonction objectif et des fonctions contraintes.
- **Modélisation par éléments finis** : elle est fréquemment utilisée pour modéliser précisément et finement des systèmes électromagnétiques. Cette méthode permet de tenir compte de la géométrie de la machine et peut être utilisé systématiquement pour tout problème magnétique éventuellement couplé avec un nombre limité d'autres phénomènes. Nous avons utilisé le logiciel éléments finis Opera2D® [Opera 01]. Les dérivées partielles des fonctions objectif et contraintes ne sont pas accessibles. Il faut signaler que certains logiciels éléments finis donnent parfois accès à ces dérivées [COU 83] [COU 97].

Pendant notre étude, nous avons traité deux problèmes modélisés analytiquement, tels que la maximisation du rendement d'un moteur à courant continu sans balai [BRI 01b], [BRI 03], et la minimisation du coût d'un transformateur triphasé à colonnes [FAN 99]. Deux problèmes utilisent la méthode des éléments finis (MEF). Il s'agit d'une bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie [TEAM 22a] [TEAM 22b] et d'une presse à aimants [TAK 96b].

Pour la description de ces quatre applications, la même démarche est employée. Après une présentation du dispositif et du cahier des charges, le problème de conception est formulé en précisant la fonction objectif, les fonctions contraintes et les paramètres.

I.6.1. Optimisation d'un moteur à courant continu sans balai

La conception d'un moteur roue à courant continu sans balai pour un véhicule solaire est un problème complexe qui possède de nombreux degrés de liberté. Une approche rationnelle est de le formuler comme un problème d'optimisation.

Cahier des charges

Le moteur doit produire un couple permanent de 20 N.m du démarrage jusqu'à la vitesse nominale, i.e. 700 tr/min. La vitesse du moteur peut dépasser 1000 tr/min. La puissance fournie par les panneaux solaires dépendant de l'ensoleillement, le rendement doit être élevé pour des vitesses comprises entre 500 tr/min et 700 tr/min. La puissance utile nominale du moteur est 1500 W, ce qui est supérieur à la puissance fournie par les panneaux solaires car des batteries chargées avant chaque départ apportent un surplus temporaire de puissance.

Pour faciliter le montage et la maintenance du moteur et de la jante, le moteur roue est fixé sur un bras oscillant et non une fourche. L'encombrement axial du moteur doit donc être réduit. Le diamètre extérieur du moteur doit également être limité pour qu'il puisse prendre place dans la jante de la roue.

Finalement, le moteur opère dans un environnement hostile pendant la course. Il est proche de la route et subit des chocs ainsi que le poids du véhicule. Il est également nécessaire de le protéger contre les poussières. Proche du sol, la température extérieure est environ 50°C. Toute la course se déroule sur un terrain plat excepté une dizaine de kilomètres avec une montée à 7 %. Durant les freinages, l'énergie cinétique du véhicule est renvoyée aux batteries.

Le but est de concevoir un moteur avec le meilleur rendement η tout en répondant à des contraintes techniques. Deux formulations pour le problème de conception sont proposées suivant le nombre de facteurs considérés et leurs types. La première prend en compte cinq paramètres et la seconde en considère dix.

Choix technologiques et structurels

Le moteur à courant continu sans balai (Fig.I.6) est un moteur électrique qui propulse un véhicule solaire. Il est intégré dans une roue d'une voiture à trois roues. Le moteur a un rotor extérieur pour faciliter le maintien des aimants permanents. La jante de la roue est directement fixée sur le rotor. Les aimants permanents sont des terres rares de nuance SmCo cintré qui sont collés sur la périphérie intérieure du rotor.

Comme le diamètre extérieur du moteur vaut environ cinq fois la largeur du paquet de

tôles, un bobinage concentré est choisi pour augmenter le ratio du volume de cuivre utile, i.e. dans les encoches, sur le volume total de cuivre. Ainsi, les têtes de bobines sont réduites et ne se chevauchent pas. L'encombrement axial du moteur est donc faible. Une structure à flux radial est choisie car les forces d'attraction entre le rotor et le stator sont théoriquement à somme nulle. Le circuit magnétique est aussi facile à construire en empilant des feuilles de tôles préalablement découpées [BRI 01b].

Modèle analytique

Un programme de dimensionnement, basé sur un ensemble d'équations analytiques décrivant le fonctionnement du moteur, est construit. Ces équations sont décrites en [BRI 03]. Elles sont rapides à résoudre et prennent en compte des phénomènes physiques de nature différente, i.e. thermique, mécanique, magnétique, électrique. Les modèles éléments finis ne sont pas retenus car le temps nécessaire à une simulation du moteur à pleine charge sur une période électrique est de quelques heures qu'il faut multiplier par le grand nombre de simulations nécessaires pour l'optimisation. Toutefois, un modèle éléments finis est utilisé pour simuler finement le moteur optimal et valider le dimensionnement.

Toutes les équations sont réécrites de telle sorte que les paramètres d'entrée du modèle proviennent soit du cahier des charges, soit des propriétés des matériaux. Le diamètre extérieur du stator et la longueur du paquet de tôles sont les seules données géométriques utilisées. Les paramètres provenant des propriétés des matériaux sont la densité de courant dans les bobines et les inductions magnétiques dans l'entrefer, les dents et la culasse du stator. Les valeurs minimales et maximales de ces paramètres sont connues, varient peu avec la taille et l'application du moteur et sont directement interprétables pour un constructeur de machines électriques.

Pour un rotor extérieur, la hauteur d'encoche est calculée au moyen d'une équation du second degré dont le discriminant doit être supérieur ou égal à zéro. Dans le cas d'un rotor intérieur, le discriminant est toujours positif et il est nul pour un moteur à flux axial. Il faut donc faire attention avant chaque exécution du modèle analytique.

Problème de conception à cinq variables

Les valeurs de cinq variables de conception sont à trouver : le diamètre extérieur du stator D_s , la densité de courant dans les bobines δ , l'induction magnétique dans l'entrefer B_e , dans les dents B_d et la culasse du stator B_{cs} .

Les limites de variation des paramètres du problème sont données dans le tableau I.1 :

<i>Paramètre</i>	<i>Unité</i>	<i>Valeur minimale</i>	<i>Valeur maximale</i>
D_s	<i>mm</i>	150	330
δ	<i>A/mm²</i>	2	5
B_d	<i>T</i>	0.9	1.8
B_e	<i>T</i>	0.5	0.76
B_{cs}	<i>T</i>	0.6	1.6

Tab. I.1 Limites de variation des paramètres

Les contraintes techniques imposées sont les suivantes: le poids total P_{tot} ne doit pas excéder 15 kg. Le diamètre extérieur D_{ext} doit être inférieur à 340 mm pour que le moteur s'insère dans la jante. Le diamètre intérieur D_{int} doit être supérieur à 76 mm pour des raisons mécaniques. Enfin, les aimants doivent supporter un courant dans les phases I_{max} de 125 A sans risque de désaimantation. La largeur du paquet de tôles L_m vaut 45 mm.

Le problème de conception est transformé en un problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } 1 - \eta \\ \text{avec les contraintes} \\ P_{tot} \leq 15 \text{ kg} \\ D_{ext} \leq 340 \text{ mm} \\ D_{int} \geq 76 \text{ mm} \\ I_{max} \geq 125 \text{ A} \\ \text{discr}(D_s, \delta, B_d, B_e) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.13})$$

où η , P_{tot} , D_{ext} , D_{int} , I_{max} sont des résultats du programme de dimensionnement et $\text{discr}(D_s, \delta, B_d, B_e)$ est le discriminant utilisé pour le calcul de la hauteur d'encoche. Cette dernière contrainte doit impérativement être vérifiée avant d'exécuter le programme de dimensionnement.

Pour traiter les contraintes, le problème d'optimisation avec contraintes (I.13) est transformé en un problème sans contrainte en utilisant la méthode des pénalités. Comme la contrainte sur le discriminant doit être vérifiée, une pénalité radicale est utilisée. Les autres contraintes sont transformées en pénalités extérieures car elles peuvent ne pas être vérifiées.

Le problème d'optimisation (I.13) devient :

$$\text{minimiser } 1 - \eta + r^k \left[\begin{array}{l} \max^2 \left(0, \frac{P_{tot}}{15} - 1 \right) + \max^2 \left(0, \frac{D_{ext}}{340} - 1 \right) \\ + \max^2 \left(0, 1 - \frac{D_{int}}{76} \right) + \max^2 \left(0, 1 - \frac{I_{max}}{125} \right) \end{array} \right] \quad (\text{I.14})$$

où k est égal à 3 et r vaut 10.

Problème de conception à 10 variables

Cinq nouvelles variables de conception sont ajoutées : la longueur fer L_m , le rapport longueur rotor sur longueur stator r_{rls} , l'entrefer e , l'induction magnétique dans la culasse du rotor B_{cr} . Etant donné les variétés d'aimants (ferrite, SmCo, NdFeB) et de conditionnements (cintré, plasto), on peut supposer que l'induction rémanente M varie continûment.

Les limites de variation des paramètres du problème sont données dans le tableau I.2 :

<i>Paramètres</i>	<i>Unités</i>	<i>Valeur minimale</i>	<i>Valeur maximale</i>
L_m	<i>Mm</i>	30	70
r_{rls}	-	0.8	1.2
e	<i>Mm</i>	0.3	2
B_{cr}	<i>T</i>	0.6	1.4
M	<i>T</i>	0.3 (ferrite)	1.2 (NdFeB cintré)

Tab. I.2 Limites de variation des paramètres

Une contrainte supplémentaire est ajoutée à ce problème. L'encombrement axial du paquet de tôle et des têtes de bobine L_{tot} ne doit pas dépasser 80 mm pour limiter le porte-à-faux.

Le problème de conception est formulé en un problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } 1 - \eta \\ \text{avec les contraintes} \\ P_{tot} \leq 15 \text{ Kg} \\ D_{ext} \leq 340 \text{ mm} \\ D_{int} \geq 76 \text{ mm} \\ I_{max} \geq 125 \text{ A} \\ L_{tot} \leq 80 \text{ mm} \\ \text{discr}(D_s, \delta, B_d, B_e) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

où L_{tot} est un résultat du programme de dimensionnement.

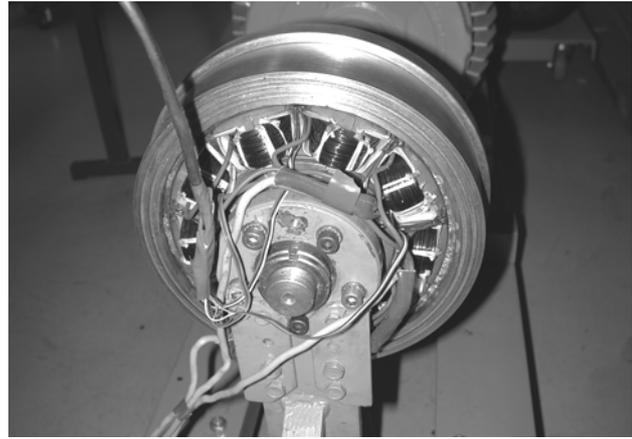
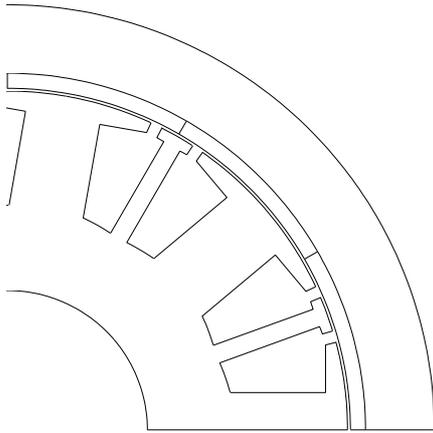


Fig. I.6 Forme du moteur avec 12 aimants **Fig. I.7** Prototype du moteur roue

I.6.2. Transformateur triphasé à colonne

Description du dispositif

L'exemple traité est le dimensionnement d'un transformateur triphasé de puissance, à trois colonnes et à deux enroulements concentriques par colonne, dont la structure est détaillée sur les figures I.8 et I.9 [POL 86], [FAN 99]. Le problème d'optimisation est entièrement repris de [FAN 99].

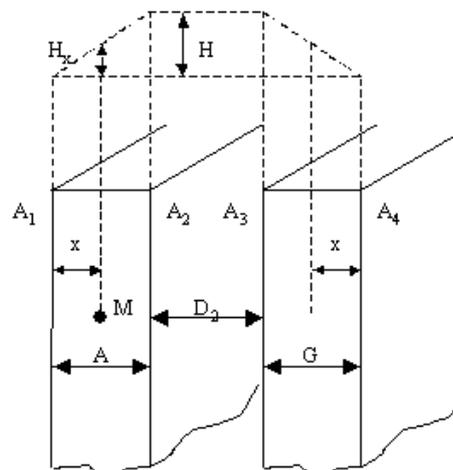
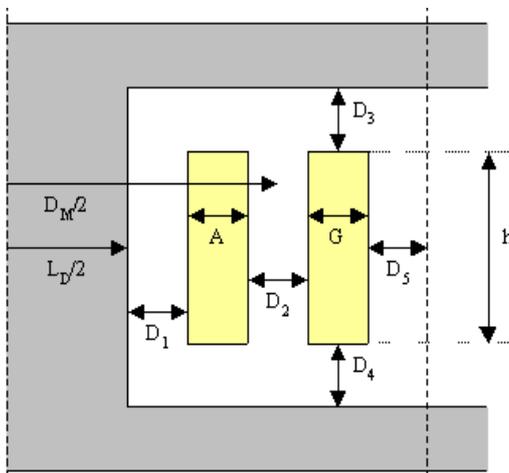


Fig. I.8 Géométrie d'une section du transformateur

Fig. I.9 Champ de fuite entre les enroulements

L'objectif du dimensionnement est de trouver les valeurs des paramètres de construction géométriques et électriques qui satisfont différentes contraintes et qui minimisent le coût.

Modèle analytique

Le modèle analytique est constitué d'un modèle technique et d'un modèle économique afin d'illustrer les possibilités de prise en compte de plusieurs domaines dans le dimensionnement. Le premier relie les paramètres géométriques (diamètre du noyau, largeur et hauteur des enroulements...) avec les paramètres électriques (réactance de fuite, densité de flux maximale, densité de courant...). Le deuxième permet d'obtenir le coût du transformateur.

La réactance de fuite est un paramètre fondamental dans les transformateurs de puissance car sa valeur détermine et limite les courants de court-circuit. Sa valeur (de même que celle de la puissance apparente et du rapport de transformation de la tension) est en général fixée dans le cahier de charges imposé par les entreprises d'électricité. L'expression de la réactance de fuite vue du primaire peut être approchée par (I.16) avec le facteur de forme (I.17).

La force magnétomotrice (F.M.M.) maximale du primaire est exprimée en fonction du courant maximal par (I.18). Cette F.M.M. peut aussi être exprimée à partir du courant enlacé au primaire (I.19). La force magnétomotrice du secondaire, par hypothèse égale à celle du primaire, est donnée par (I.20). Le diamètre moyen des enroulements D_m est donné par (I.21). De l'expression de la tension induite au primaire V_1 , on obtient la section du noyau A_L (I.22), et de celle-ci, le diamètre du noyau L_D (I.23).

$$X_1 = \mu_0 \cdot \pi \cdot D_m \cdot N_1^2 (2 \cdot \pi \cdot f) \cdot F_f \quad (\text{I.16})$$

$$F_f = \frac{D_2 + \frac{A+G}{3}}{h} \quad (\text{I.17})$$

$$F.M.M. = N_1 \frac{S}{V_1} \quad (\text{I.18})$$

$$F.M.M. = (A \cdot h \cdot F_1) \cdot J \quad (\text{I.19})$$

$$F.M.M. = (G \cdot h \cdot F_2) \cdot J \quad (\text{I.20})$$

$$D_m = L_D + 2 \cdot D_1 + 2 \cdot A + D_2 \quad (\text{I.21})$$

$$A_L = \sqrt{2} \cdot \frac{V_1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot B_t \cdot N_1 \cdot F_1} \quad (\text{I.22})$$

$$L_D = 2\sqrt{\frac{A_L}{\pi}} \quad (I.23)$$

où A , G , D_2 , D_1 sont des paramètres géométriques affichés dans les figures I.8 et I.9. N_I est le nombre de spires du primaire, f est la fréquence, h est la hauteur des enroulements, S est la puissance apparente par phase, F_1 et F_2 sont les facteurs de remplissage des bobines primaire et secondaire. Enfin, B_t est la densité de flux maximale et J est la densité de courant dans les enroulements.

Un modèle économique simple du coût est ajouté. Le coût du transformateur prend en compte le coût des masses de fer et de cuivre, et la valeur actualisée du coût des pertes futures. Le coût de fabrication n'est pas pris en compte. Il est possible d'en tenir compte par des fonctions empiriques dans lesquelles les coûts de fabrications dépendent de paramètres du transformateur (puissance, tension, masse...).

Le coût de matière du fer C_f donnée par (I.24) est fonction de la masse de fer M_f et du prix massique du fer P_f . Le coût de masse de cuivre C_c donné par (I.25) est fonction du prix massique de cuivre P_c , de la densité du cuivre D_c et des volumes de cuivre au primaire V_{cp} et au secondaire V_{cs} .

$$C_f = P_f \cdot M_f \quad (I.24)$$

$$C_c = P_c \cdot D_c \cdot (V_{cp} + V_{cs}) \quad (I.25)$$

Dans la valeur actualisée de l'énergie perdue future, l'utilisateur tient compte du coût d'utilisation du transformateur qui provient des pertes. Les pertes sont les pertes fer V_f et les pertes cuivre V_c . Ces pertes sont réparties sur les années de durée de vie N_a et doivent être actualisées à leur valeur d'aujourd'hui. Les coefficients psp_f et psp_c représentent respectivement le prix actualisé de 1 kW de pertes fer V_f et cuivre V_c sur N_a années avec un taux d'actualisation de i %.

$$psp = 8760 \cdot \left(\sum_{n=1}^{N_a} \frac{1}{(1+i)^n} \right) \cdot \text{Prix du kWh} \quad (I.26)$$

Les valeurs actualisées des pertes fer TP_f et des pertes cuivre TP_c sont fonction

respectivement de psp_f , psp_c et des pertes fer V_f et cuivre V_c .

$$TP_f = psp_f \cdot V_f \quad (I.27)$$

$$TP_c = psp_c \cdot V_c \quad (I.28)$$

Le coût total du transformateur inclus le coût de matériaux et les valeurs actualisées des coûts des pertes.

Formulation du problème d'optimisation

L'objectif est de minimiser le coût total du transformateur qui inclus le coût de matériaux et les valeurs actualisées des coûts des pertes.

$$f(X) = C_f + C_c + TP_f + TP_c \quad (I.29)$$

Les variables de conception sont la densité de flux B_t , les densités de courant primaire et secondaire J , le nombre de spires au primaire N_1 et la hauteur des enroulements h . Les domaines d'étude pour les différents cahiers des charges sont présentés dans le tableau I.3.

Selon le cahier des charges, des contraintes d'égalité et d'intervalle sur quelques paramètres de sortie tels que la réactance X_l , la largeur des enroulements A et la longueur totale du transformateur L_u sont introduites.

			CDC1		CDC2		CDC3		CDC4		CDC5	
		Unité	min	max	min	max	min	Max	min	max	min	max
Paramètres de conception	h	M	1	10	1	10	1	1.4	1	1.4	1	1.4
	J	A/mm^2	0.5	4.5	0.5	4.5	0.5	4.5	0.5	4.5	0.5	4.5
	N_1	-	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000
	B_t	T	0.5	1.9	0.5	1.9	0.5	1.9	0.5	1.9	0.5	1.9
Contraintes sur les variables sorties	coût	Francs	Fonction objectif à minimiser									
	X_l	Ω	Fixé : 7.2		5.76	8.64	5.76	8.64	5.76	8.64	5.76	8.64
	A	M							0	0.04	0	0.04
	L_u	M									0	3

Tab. I.3. Domaines d'étude et contraintes sur les paramètres de sortie pour chaque CdC

I.6.3. Bobines supraconductrices pour le stockage d'énergie

Description du dispositif

Le système considéré (fig. I.10) [TEAM 22a] est un dispositif de stockage d'énergie magnétique par anneaux supraconducteurs. Par la suite, on y fera référence par le sigle SMES (Superconducting Magnetic Energy Storage). Il est composé d'un enroulement supraconducteur qui permet d'avoir une résistance électrique nulle moyennant de très basses températures.

Le champ magnétique créé alors par le courant permet de conserver directement de l'énergie sous forme magnétique sans aucune conversion. Dans les années 80, le SMES était constitué de bobines de plusieurs centaines de mètres de diamètre, mais aujourd'hui, les recherches sont plutôt axées sur des SMES de dimensions raisonnables et avec un champ magnétique réduit. Une réduction du champ peut être réalisée si une deuxième bobine est placée à l'extérieur de la première, et parcourue par un courant de même amplitude mais dans la direction opposée. Le dispositif est axisymétrique. Une conception correcte du système devrait alors coupler la bonne valeur de l'énergie à stocker avec un champ parasite minimal. La partie droite de la vue en coupe est représentée dans la figure I.10.

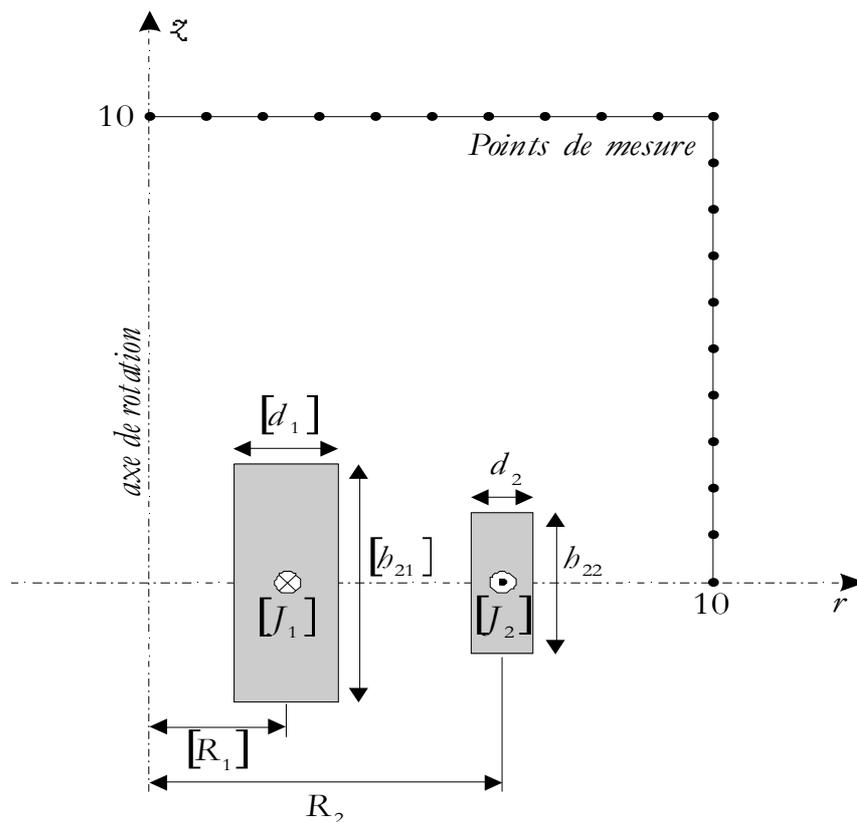


Fig. I.10. Vue en coupe de la partie droite d'un SMES

Contraintes

Pour conserver le caractère supraconducteur des bobines, il est nécessaire que les grandeurs densité de courant, température et induction soient inférieures à certaines valeurs critiques. Celles-ci sont liées entre elles et forment une surface critique dans l'espace induction, température et densité de courant. Ainsi, dans le processus d'optimisation cette condition appelée « quench condition » en anglais se traduira par une contrainte liant la densité de courant et la valeur maximale de l'induction à l'intérieur de la bobine. Cette courbe critique est en général approximée par une droite au dessus de laquelle le matériau perd ses propriétés supraconductrices (fig.I.11). Cette dépendance a été simplifiée et écrite sous la forme linéaire suivante :

$$|J| = (-6.4|B| + 54.0) \text{ A/mm}^2 \quad (\text{I.30})$$

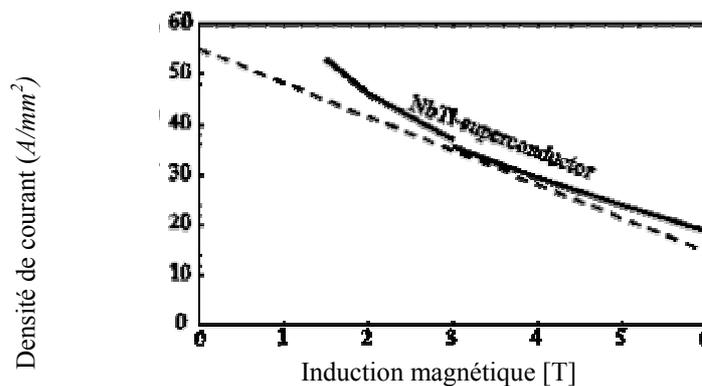


Fig. I.11. Courbe critique d'un supraconducteur industriel

Objectifs

La configuration du SMES doit être optimisée en respectant les objectifs suivants :

- L'énergie stockée vaut 180 MJ
- Le champ magnétique évalué en plusieurs points de mesures, à une distance de 10 mètres du dispositif, doit être le plus faible possible.
- Le champ magnétique doit toujours respecter la condition physique garantissant l'état de supraconductivité (quench condition)

Les valeurs mesurées

- L'énergie stockée par le dispositif : E (J)
- L'induction magnétique en 22 points de référence : $B_{fuites, i}(T) \quad i = 1, \dots, 22$

- L'amplitude maximale de l'induction magnétique dans les bobines: $B_{max}(T)$

B_{fuites}^2 est la moyenne des amplitudes au carré de l'induction magnétique $B_{fuites,i}$ en chaque point de mesure (Fig. I.10).

$$B_{fuites}^2 = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} |B_{fuites,i}|^2 \quad (I.31)$$

La fonction objectif, qui sera considérée par la suite, concentre les deux premiers objectifs donnés précédemment :

$$OF = \frac{B_{fuites}^2}{B_{norm}^2} + \frac{|E - E_{ref}|}{E_{ref}} \quad (I.32)$$

avec les valeurs de référence $B_{ref} = 180.10^6 J$ et $B_{norm} = 3.10^{-3} T$.

Le troisième objectif (quench condition) est vérifié sur la solution optimale, les solutions intermédiaires pouvant ne pas respecter cette contrainte. Dans le cadre de cette optimisation, les valeurs des paramètres sont d'autant meilleures que OF est faible. Ce problème d'optimisation particulier est régulièrement utilisé pour comparer les performances des méthodes d'optimisation. Cet usage tend à en faire une application centrale, voire de référence pour le test de nouvelles procédures, notamment dans le domaine d'étude des systèmes électromagnétiques [TEAM 22a].

Deux formulations de ce problème sont proposées, suivant le nombre de variables considérées et leurs types. La première prend en compte trois variables discrètes alors que la seconde en considère huit de type continu.

Bobines supraconductrices à trois paramètres

Les paramètres d'optimisation sont le rayon moyen de l'anneau extérieur R_2 , sa hauteur h_{22} et sa largeur d_2 . Les intervalles de variation des paramètres de conception et les paramètres fixés sont présentés dans le tableau I.4, [TEAM 22a].

Paramètre	R_1	R_2	h_{12}	h_{22}	d_1	d_2	J_1	J_2
Unité	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[A/mm ²]	[A/mm ²]
Min	-	2.6	-	0.204	-	0.1	-	-
Max	-	3.4	-	1.1	-	0.4	-	-
Fixé	2.0		0.8		0.27		22.5	-22.5

Tab. I.4. Paramètres et domaine d'étude

Pour la contrainte qui maintient la supraconductivité, la densité de courant dans les bobines est fixée à $J = 22.5 \text{ A/mm}^2$ et donc la contrainte (I.30) est simplifiée par :

$$B_{max} \leq 4.92 \text{ T} \quad (\text{I.33})$$

Bobine supraconductrice à 8 paramètres

Les paramètres de conception sont présentés dans le tableau I.5, [TEAM 22b].

Paramètre	R_1	R_2	h_{12}	h_{22}	d_1	d_2	J_1	J_2
Unité	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[A/mm ²]	[A/mm ²]
Min	1.0	1.8	0.1	0.1	0.1	0.1	10	-30
Max	4.0	5.0	1.8	1.8	0.8	0.8	30	-10

Tab. I.5. Paramètres et domaine d'étude

Pour ce cas, il faut ajouter une condition qui assure que les deux bobines ne se chevaucheront pas.

$$R_2 - \frac{d_2}{2} > R_1 + \frac{d_1}{2} \quad (\text{I.34})$$

Les contraintes de supraconductivité sur les bobines peuvent être approximées par les deux inégalités :

$$\begin{aligned} J_1 &\leq (-6.4|B_{max,1}| + 54) \text{ A/mm}^2 \\ J_2 &\leq (-6.4|B_{max,2}| + 54) \text{ A/mm}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

où $B_{max,i}$ désigne la valeur maximale de l'induction magnétique dans la bobine i .

Ces deux contraintes seront associées à l'objectif sous la forme d'une fonction de pénalité extérieure.

I.6.4. Presse à aimants

Description générale

La figure I.12 [TAK 96a] [TAK 96b] [TAK 01] montre une presse avec électro-aimant pour l'orientation de la poudre magnétique. Elle est employée pour produire des aimants permanents anisotropes. La presse et l'électro-aimant sont faits d'acier. Les moules de matrice

sont placés pour former une distribution radiale de flux. La poudre magnétique est insérée dans la cavité. Le modèle peut être considéré comme bidimensionnel.

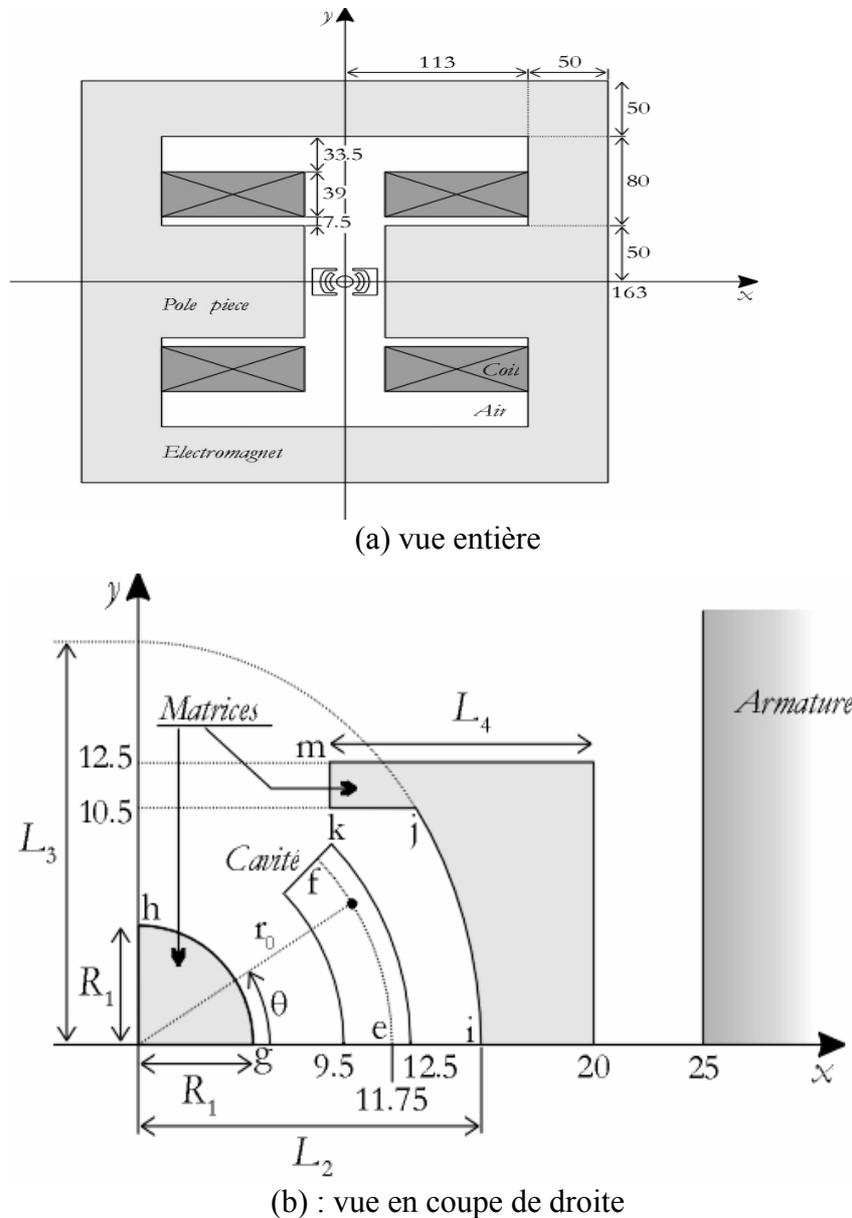


Fig. I.12. Modèle de la presse à aimants

Le dispositif est alimenté par deux bobines inductrices, dont chaque enroulement porte 4253 ampere-tours, tandis que son armature est constituée par un matériau magnétique non linéaire.

L'analyse préliminaire montre qu'une distribution radiale du flux peut être presque obtenue en paramétrant la forme de la matrice extérieure par la combinaison d'une ligne droite, d'un cercle et d'une ellipse (fig.I.12). La forme du moule intérieur de la matrice est un cercle.

Formulation du problème d'optimisation

La forme du moule est définie par deux pièces magnétiques dont la géométrie dépend des paramètres : le rayon R_1 de la matrice intérieure, les axes long et court L_2 et L_3 de l'ellipse et la dimension L_4 . Ces variables de conception sont visibles dans la figure I.12.

Les contraintes concernant les limites de variation des paramètres du problème sont données dans le tableau I.6.

Paramètres	Valeur minimale (mm)	Valeur maximale (mm)
R_1	5.0	9.4
L_2	12.6	18.0
L_3	14.0	45.0
L_4	4.0	19.0

Tab. I.6. Limites de variation des paramètres

L'objectif recherché est de disposer le long de la courbe $e-f$, d'une induction magnétique B radiale et valant 0.35 T comme précisé par la relation (I.36):

$$\begin{aligned}
 B_x^* &= 0.35 \cos(4.5 \cdot i) \quad [T] \\
 B_y^* &= 0.35 \sin(4.5 \cdot i) \quad [T] \\
 B_{x,i} &= B_x \{R = 11.75, \theta = 4.5 \cdot i\} \\
 B_{y,i} &= B_y \{R = 11.75, \theta = 4.5 \cdot i\} \\
 i &= 1, \dots, 10
 \end{aligned} \tag{I.36}$$

Le problème peut être décrit alors par la minimisation de la fonction objectif représentant l'erreur entre l'induction mesurée et la valeur de référence :

$$OF = \sum_{i=1}^{10} (B_{x,i} - B_{x,i}^*)^2 + (B_{y,i} - B_{y,i}^*)^2 \tag{I.37}$$

Sur la figure I.12, il apparaît qu'une contrainte géométrique doit être ajoutée pour que la distance $d_{k,j}$ entre k et j soit positive.

Ainsi $d_{k,j} \geq 0$ se traduit par la contrainte suivante :

$$\frac{20 - L_4}{L_2} - \sqrt{1 - \left(\frac{10.5}{L_3}\right)^2} \leq 0 \tag{I.38}$$

Le calcul de l'induction magnétique est fait par la méthode des éléments finis, en utilisant une formulation magnétostatique bidimensionnelle non linéaire [OPERA].

I.6. Conclusion

Cette première partie a permis de poser la problématique de la conception des dispositifs électromagnétiques. Dans l'optique d'améliorer la qualité et la productivité de l'activité de conception, une démarche systématique et générale est proposée. Elle est composée de quatre grandes étapes dont les deux premières ont été détaillées : l'analyse du cahier des charges et la formulation d'un problème d'optimisation. A l'issue des deux premières étapes, une formulation mathématique est obtenue et transformée selon l'expertise du concepteur, les outils de modélisation et les techniques d'optimisation employées.

Quatre dispositifs représentatifs de ce type de travail sont choisis pour illustrer la diversité des problèmes de conception rencontrés en électrotechnique.

Le premier dispositif étudié est un moteur à courant continu sans balai utilisé pour propulser un véhicule solaire. Il s'agit d'en maximiser le rendement tout en respectant les contraintes sur le poids, l'encombrement et le courant démagnétisant.

Le deuxième dispositif est un transformateur de puissance triphasé, à trois colonnes et à deux enroulements concentriques par colonne. Ici, l'objectif est de minimiser le coût en respectant des contraintes sur la réactance de fuite et certaines dimensions géométriques.

Le troisième dispositif permet le stockage d'énergie magnétique par anneaux supraconducteurs. Il s'agit d'un problème connu comme cas test international utilisé pour évaluer les méthodes d'optimisation. Sa difficulté tient à l'existence de minima multiples.

Le dernier dispositif étudié est une presse utilisée dans la construction d'aimants permanents anisotropes. Son objectif est de trouver la forme du moule afin d'obtenir d'une distribution radiale et constante de l'induction magnétique dans la cavité. Il s'agit également d'un cas test international.

Les deux premiers dispositifs sont modélisés par des équations analytiques. Il s'agit de modèles de prédimensionnement, c'est-à-dire employés au début de la conception lorsque l'espace de recherche est vaste et qu'il faut l'explorer rapidement.

La méthode des éléments finis est utilisée pour calculer les performances des deux derniers dispositifs. Cette méthode est consommatrice en temps de calcul et ne peut être employée qu'avec un nombre réduit de paramètres. Elle se justifie parfaitement en fin de processus de conception pour valider et affiner la solution.

Le chapitre suivant se propose de répondre à la question « Quelle méthode utiliser pour résoudre ces problèmes d'optimisation en électromagnétique ? ». Il détaille les

différentes méthodes d'optimisation de façon générale et s'intéresse en particulier aux méthodes d'optimisation stochastiques.

Partie II – Méthodes d'optimisation

II. 1. Introduction

Dans la première partie, la formulation d'un problème de conception en un problème d'optimisation a été décrite et une sélection des cas tests présentée. Ils seront traités en troisième partie. Cette deuxième partie s'intéresse aux méthodes d'optimisation les mieux adaptées.

Nombreuses sont les méthodes d'optimisation. On peut cependant les classer en deux grandes catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Dans la première classe, on rencontre toutes les méthodes qui cherchent le minimum d'une fonction en se basant sur la connaissance d'une direction de recherche, souvent donnée par le gradient de cette fonction. Dans le cas d'optima multiples, elles s'arrêtent sur le premier rencontré. Les méthodes stochastiques sont une alternative pour palier cet inconvénient. Les trois méthodes stochastiques les plus répandues sont les algorithmes génétiques, le recuit simulé et la recherche taboue. Elles sont capables de trouver le minimum global d'une fonction même dans des cas très difficiles, mais le temps de calcul peut être élevé. Ceci est particulièrement pénalisant lorsque le calcul de la performance de chaque nouvelle solution proposée par le processus aléatoire nécessite la résolution d'un modèle éléments finis.

Les algorithmes génétiques imitent l'évolution naturelle et le processus de sélection. En employant des opérations de base : sélection, croisement et mutation, ils sont capables de trouver le minimum global ou au moins une solution qui en est proche.

L'algorithme du recuit simulé a été développé par analogie entre le processus thermodynamique de recuit d'un solide et le processus d'optimisation. La succession des phases d'équilibre thermique et de refroidissement permet de localiser l'optimum global.

Le fonctionnement de la recherche taboue repose sur une utilisation intelligente de l'historique de la recherche pour influencer sur les prochains déplacements.

Après une caractérisation des méthodes d'optimisation, les avantages intrinsèques des méthodes stochastiques sont mis en valeur. Une description complète des algorithmes génétiques, du recuit simulé et de la recherche taboue est donnée. L'amélioration de ces méthodes est également une des motivations de l'exposé. En ce qui concerne les algorithmes génétiques, les mécanismes de recherches sont particulièrement originaux, ce qui a nécessité une description très détaillée. Après avoir analysé les avantages et les inconvénients de cette méthode, un nouveau critère d'arrêt qui évite de nombreuses évaluations inutiles est proposé. De même, une nouvelle recherche taboue est proposée.

II.2. Caractéristiques

II.2.1. Sensibilité et robustesse d'une méthode d'optimisation

La méthode d'optimisation est conditionnée par des paramètres de contrôle et des conditions initiales (valeurs initiales des variables de conception, valeurs initiales des paramètres de contrôle,...). Elle peut être caractérisée selon le modèle de la boîte noire illustré en figure II.1.

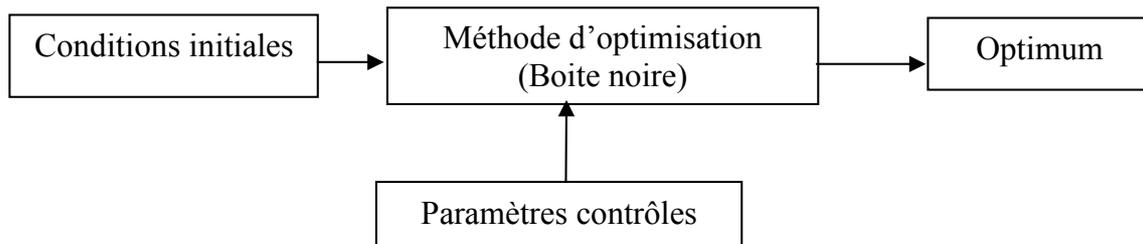


Fig. II.1. Modèle de la boîte noire

L'efficacité d'une méthode d'optimisation est liée à la sensibilité et à la robustesse par rapport aux paramètres de contrôle et aux conditions initiales. Lorsque les variables de conception doivent prendre une valeur bien précise pour que la méthode de résolution converge vers l'optimum d'une fonction donnée, la méthode est dite sensible aux conditions initiales. Une méthode d'optimisation est robuste si pour une même valeur des paramètres de contrôle et des conditions initiales, elle est capable de trouver l'optimum de fonctions très différentes.

Une méthode parfaite devrait être totalement insensible aux conditions initiales et aux variables de conception et converger vers l'optimum quelles que soient la fonction objectif et les contraintes.

II.2.2. Opérateurs de recherche fondamentaux

La recherche de l'optimum d'une fonction est généralement réalisée à l'aide de deux opérateurs fondamentaux : l'exploration et l'exploitation.

L'exploration permet une localisation imprécise de l'optimum global alors que l'exploitation affine cette solution en augmentant la précision de l'optimum.

Le succès et l'efficacité d'une technique de résolution dépendent la plupart du temps d'un compromis entre l'exploration et l'exploitation. Certaines méthodes toutefois n'utilisent qu'un seul de ces opérateurs pour parvenir à l'optimum. Ainsi, les méthodes déterministes, exploitant les dérivées de la fonction objectif et des contraintes pour atteindre rapidement et

précisément le minimum local le plus proche du point de départ, privilégie l'exploitation au détriment de l'exploration.

Tout algorithme d'optimisation doit utiliser ces deux stratégies pour trouver l'optimum global: l'exploration pour la recherche de régions inexplorées de l'espace de recherche, et l'exploitation pour exploiter la connaissance acquise aux points déjà visités et ainsi trouver des points meilleurs. Ces deux exigences peuvent paraître contradictoires mais un bon algorithme de recherche doit trouver le bon compromis entre les deux. Une recherche purement aléatoire est bonne pour l'exploration mais pas pour l'exploitation alors que la recherche dans le voisinage est une bonne méthode d'exploitation mais pas d'exploration.

II.2.3. Mode de recherche de l'optimum

Lorsque l'évolution de la méthode de résolution est prévisible et ne laisse aucune place au hasard, celle-ci est qualifiée de déterministe. En revanche les méthodes dites stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabiliste qui peuvent conduire à des résultats différents pour des conditions initiales et des paramètres de contrôle identiques.

Les méthodes déterministes sont qualifiées de méthodes locales, c'est-à-dire qu'elles convergent vers un optimum dépendant uniquement du point de départ, qu'il soit local ou global. A l'opposé, les techniques stochastiques sont reconnues comme des méthodes globales qui permettent de localiser l'optimum global.

II.2.4. Ordre d'une méthode de résolution

Les méthodes de résolution peuvent être classées à partir de leur ordre selon qu'elles nécessitent ou non le calcul des dérivées de la fonction objectif et des fonctions contraintes par rapport aux paramètres. Une méthode est dite d'ordre zéro si elle utilise uniquement la connaissance de la fonction elle-même. Elle est d'ordre un si elle requiert le calcul des dérivées premières et d'ordre deux s'il lui faut aussi accéder aux dérivées secondes.

Les méthodes d'ordre zéro sont en général peu précises et convergent plus lentement vers l'optimum. En revanche, elles offrent l'avantage d'éviter le calcul du gradient, ce qui est intéressant lorsque la fonction n'est pas différentiable ou que le calcul de son gradient représente un coût important. C'est notamment le cas des modèles éléments finis.

Les méthodes d'ordre un permettent d'accélérer la localisation de l'optimum, puisque le gradient donne l'information sur la direction de l'amélioration. Par contre elles sont applicables seulement aux problèmes où les fonctions objectif et contraintes sont continûment différentiables.

II.3. Classification des méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisations sont classées, selon le mode de recherche de l'optimum, en deux grands groupes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

II.3.2. Méthodes déterministes

Ces méthodes peuvent être subdivisées en plusieurs sous classes, les méthodes heuristiques, les méthodes statistiques, les méthodes Branch&Bound, les méthodes mathématiques, et les méthodes d'apprentissage automatique. Cette classification est illustrée en figure II.2.

Les méthodes utilisant les plans d'expériences

Récemment, les développements se sont concentrés sur la mise au point de stratégies d'optimisation utilisant une suite de plans d'expériences. Des méthodes déterministes d'ordre zéro et globales ont été proposées [VIV 02]. Ces méthodes sont bien adaptées aux problèmes électrotechniques et n'entrent pas dans le cadre de ce travail. Elles sont habituellement employées lorsque le nombre de paramètres est faible, en tous cas inférieur à 10 [GOU 99] [PIL 94] [DRO 97] [GIL 97].

Les méthodes Branch&Bound

Elles s'appuient sur l'algèbre de Moore ou algèbre des intervalles qui permet d'estimer l'intervalle de variation d'une fonction à partir de son expression analytique et des intervalles de variation des paramètres [MES 98]. Elles sont déterministes d'ordre zéro et globales mais ne s'appliquent que pour des modèles analytiques. Les plus évoluées sont capables de localiser tous les optima de la fonction avec une certaine précision liée à la taille des subdivisions de l'espace et aux incertitudes d'estimation des intervalles de variation de la fonction objectif. Elles sont généralement coûteuses en temps de calcul et ne peuvent s'appliquer que pour un nombre réduit de paramètres.

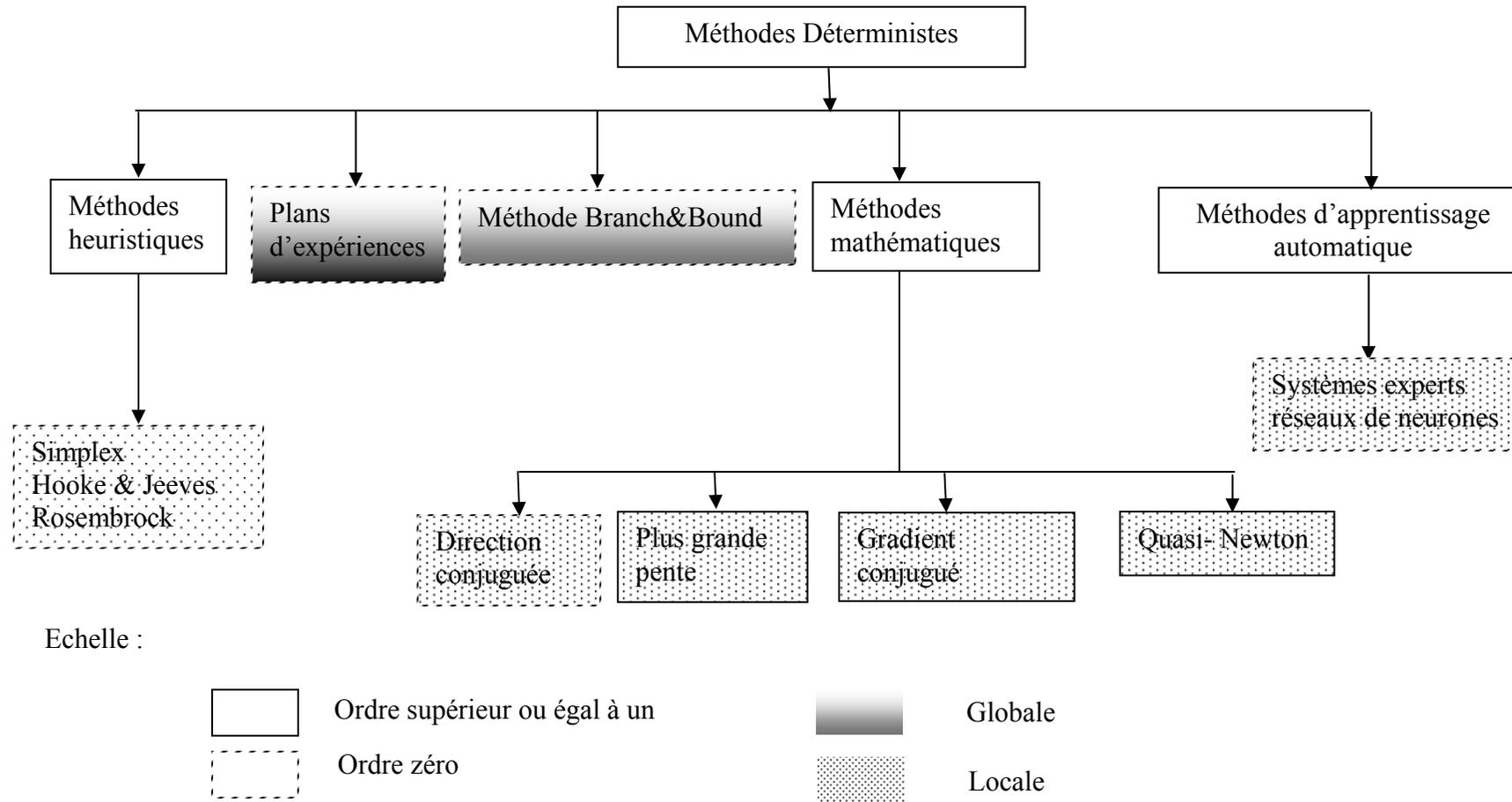


Fig. II.2. Méthodes d'optimisation déterministes

Les méthodes heuristiques ou méthodes géométriques

Elles explorent l'espace par essais successifs en recherchant les directions les plus favorables. La stratégie de Hooke et Jeeves [CHE 99], la méthode de Rosenbrock [RAO 96], ou la méthode du Simplex [NEL 65], [SCH 95] sont les plus souvent employées. Toutes ces techniques sont déterministes et locales mais elles sont beaucoup plus robustes que les méthodes mathématiques, en particulier lorsque la fonction objectif est discontinue. Par contre, elles deviennent moins robustes lorsque le nombre de paramètres est élevé [SAR 99].

Méthodes mathématiques

Pour déterminer un optimum, les méthodes mathématiques se basent sur la connaissance d'une direction de recherche donnée souvent par le gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres. Elles génèrent une suite de points $(X_k, k \in \mathbb{N})$ qui convergent vers un minimum local X^* de la fonction f vérifiant (I.11) ou $\varphi(X^*, r) = 0$ suivant le traitement des contraintes utilisées.

L'inconvénient principal des méthodes à base de gradient est que la dérivée de la fonction f n'est pas toujours connue, dans ce cas, il faut l'estimer par différences finies.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \lambda, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\lambda} \quad (\text{II.1})$$

Dans ces conditions le choix du pas du gradient λ est très important, il conditionne la bonne détermination de la direction de recherche.

Les exemples les plus significatifs des méthodes mathématiques sont la méthode de Cauchy ou méthode de la plus grande pente [CUL 94] et la méthode du gradient conjugué [FLE 87] qui sont d'ordre un. D'autres techniques de gradient construisent une estimation du Hessien c'est-à-dire des dérivées secondes comme les méthodes DFP [POW 65] et BFGS [MIN 83] qui sont dites quasi-Newton [FLE 87] [PRE 92] [CUL 94].

Parmi ces méthodes, la méthode du gradient conjugué, la méthode quasi-Newton, la méthode SQP et la méthode de Powell sont présentées brièvement. Elles sont comparées par la suite avec les méthodes stochastiques.

➤ **La méthode de gradient conjugué**

La méthode de gradient conjugué [FLE 64] [FLE 87] [PRE 92] [CUL 94] est une variante améliorée de la méthode de la plus grande pente, qui consiste à suivre la direction opposée au gradient. Cette méthode a l'inconvénient de créer des directions de recherche orthogonales, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme. La méthode de Fletcher et Reeves [FLE 87] résout ce problème en déterminant la nouvelle direction de recherche à partir du gradient aux pas courant et précédent.

➤ **Méthode quasi-Newton**

Les méthodes quasi-Newton consistent à imiter la méthode de Newton où l'optimisation d'une fonction est obtenue à partir de minimisations successives de son approximation au second ordre. Elles ne calculent pas le Hessien mais elles utilisent une approximation définie positive du Hessien qui peut être obtenue soit par l'expression proposée par Davidon-Fletcher-Powell (DFP) [MIN 83], soit par celle proposée par Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [MIN 83].

➤ **Méthode PQS**

La méthode de programmation quadratique séquentielle (PQS), développée par Schittkowski en 1983 [SCH 83], est une méthode de programmation non-linéaire. Elle a été reconnue comme étant une des méthodes les plus efficaces pour résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes de taille petite et moyenne. Comme son nom le suggère, la méthode PQS trouve la solution optimale par une séquence de problèmes de programmation quadratique. A chaque itération, une approximation quadratique de la fonction objectif et des approximations linéaires des contraintes sont utilisées. Le Hessien est construit par la méthode BFGS. Une analyse canonique fournit le minimum de la fonction Lagrangienne et un déplacement est fait vers ce point.

➤ **La méthode des directions conjuguées de Powell**

Lorsqu'il n'est pas possible de calculer le gradient, la méthode de direction conjuguée propose de trouver l'optimum uniquement par des recherches linéaires [POW 65]. Elle effectue n recherches linéaires successives suivant des directions conjuguées qui sont modifiées à chaque itération pour accélérer la convergence.

Ces méthodes convergent rapidement et précisément vers l'optimum si celui-ci est proche du point initial. Si ces méthodes sont intéressantes en raison de leur grande rapidité de convergence, elles ont plusieurs inconvénients :

1. les valeurs de la fonction objectif et éventuellement de ses dérivées doivent être accessibles.
2. lorsque le gradient de la fonction n'est pas calculable directement, sa détermination par la méthode des différences finies est toujours délicate à cause de problèmes liés au choix du pas de variation pouvant conduire à des problèmes de convergence [FLE 87].
3. ces méthodes nécessitent la résolution de systèmes matriciels pouvant être mal conditionnés [MIN 83].
4. la convergence est exclusivement locale. L'optimum trouvé dépend du point initial. La sensibilité par rapport aux conditions initiales est importante.

Les méthodes d'apprentissage automatique

Elles ne sont pas des techniques de résolution proprement dites, mais elles sont parfois couplées aux méthodes précédentes pour augmenter l'efficacité de la convergence [EBN 98].

II.3.3. Méthodes stochastiques

Les méthodes d'optimisation stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation.

Ces méthodes ont une grande capacité à trouver l'optimum global du problème. Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Elles sont d'ordre zéro. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. La figure II.3 présente les méthodes stochastiques les plus utilisées.

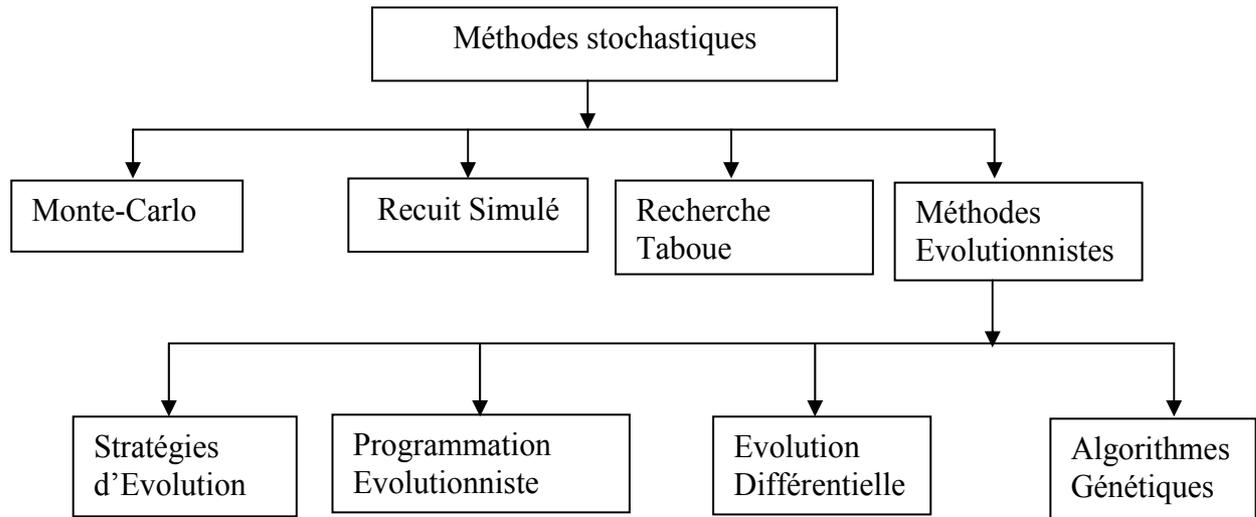


Fig. II.3. Méthodes d'optimisation stochastiques

Parmi ces méthodes stochastiques, les méthodes Monte-carlo et les méthodes évolutionnistes seront présentés brièvement.

Monte-Carlo

C'est la plus simple des méthodes stochastiques [ELP 88] [FIS 97]. Elle consiste à tirer une solution au hasard à chaque itération. La fonction objectif est évaluée en ce point. Si elle est meilleure que l'optimum courant, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante et le processus continue jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient vérifiées. Il s'agit donc d'un processus d'exploration.

Les méthodes Monte-Carlo peuvent être utilisées, en première approche, pour avoir des renseignements utiles sur la forme de la fonction. Elles permettent par exemple de choisir de façon plus appropriée le point de départ d'un algorithme de recherche locale. Toutefois, cette association ne garantit pas la localisation de l'optimum global.

Méthodes évolutionnistes

Les méthodes évolutionnistes font partie de la dernière grande classe de méthodes stochastiques. Elles reposent sur une analogie avec la théorie de l'évolution naturelle des espèces de Darwin selon laquelle, les individus les mieux adaptés à leur environnement survivent et peuvent se reproduire pour donner des enfants encore mieux adaptés de génération en génération [DAR 59].

Contrairement aux techniques d'optimisation qui explorent l'espace à partir d'un point unique, les méthodes évolutionnistes partent d'un ensemble de configurations, c'est à dire d'une population d'individus, et la font évoluer à partir d'opérateurs à transition aléatoire, la sélection et l'évolution, selon le principe de la figure II.4.

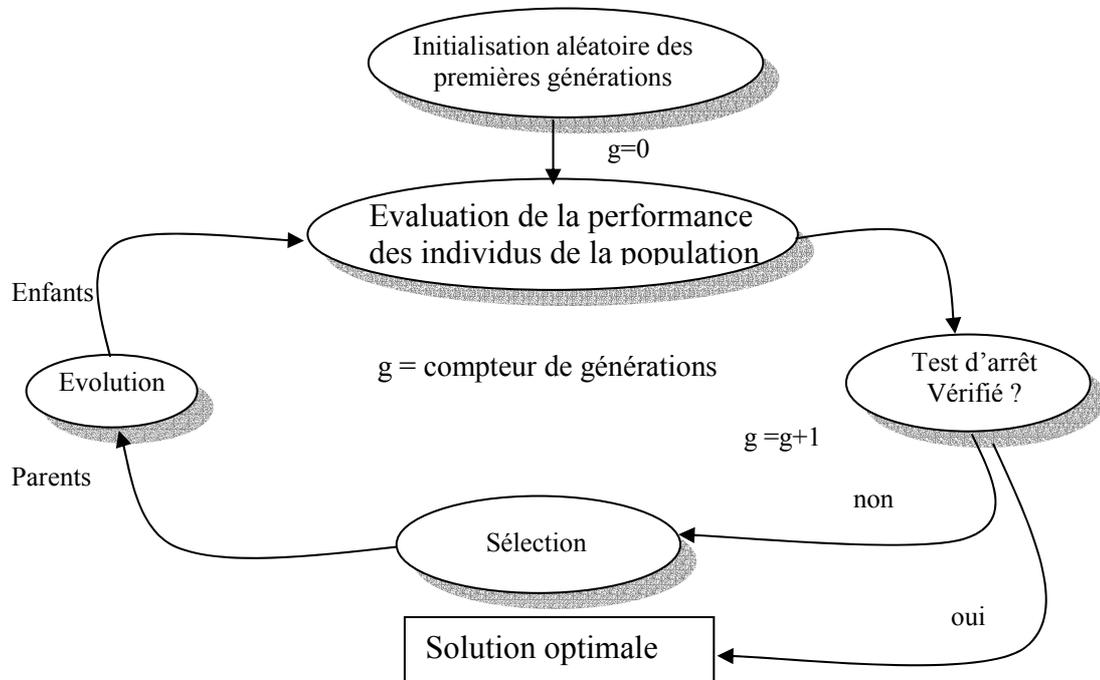


Fig. II.4. Principe d'une méthode évolutionniste

Les algorithmes évolutionnistes remontent à l'introduction des algorithmes génétiques (AG) par Holland [HOL 75]. Reshenberg et Schwefel ont mis au point trois méthodes assez similaires : les stratégies d'évolution [REC 94], la programmation évolutionnistes [FOG 94] et la programmation génétique [KOZ 92]. L'évolution différentielle est apparue plus récemment [STO 96] [PAH 00].

Les différences entre ces méthodes sont liées à la représentation des individus et aux modes d'évolution de la population. Les AG utilisent un codage des paramètres de la fonction à optimiser alors que les autres techniques se servent directement de la valeur des paramètres. Chacune des méthodes est caractérisée par un opérateur d'évolution particulier. Les AG et l'évolution différentielle ont un mécanisme de croisement qui permet la génération de nouvelles configurations par recombinaison de solutions existantes. C'est donc un opérateur d'exploration. L'exploitation est faite par le processus de sélection. Les stratégies d'évolution

et la programmation évolutionniste sont, pour leur part, basées principalement sur un procédé de mutation de la population par perturbation successive de chaque solution [DAR 59].

Les méthodes évolutionnistes s'affirment peu à peu comme les techniques d'optimisation les plus robustes. Elles peuvent être appliquées à des problèmes très divers car elles sont indépendantes du processus à optimiser et n'utilisent pas les dérivées.

Parmi les algorithmes évolutionnistes cités précédemment, les algorithmes génétiques occupent une place particulière car ils réunissent les trois opérateurs de sélection, croisement et mutation.

II.4. Choix des méthodes d'optimisation

Dans la plupart des problèmes de conception en électrotechnique, la fonction à optimiser a plusieurs minima. Dans ce cas, les méthodes déterministes locales ne peuvent conduire à la solution, sauf si le point de départ est voisin de la solution globale, ce qui est peu probable.

Les méthodes stochastiques sont l'alternative pour résoudre ces problèmes à plusieurs minima. Elles sont capables de trouver le minimum global d'une fonction même dans des cas très difficiles, alors que la fonction considérée présente un grand nombre de minima relatifs. Cependant, il y a un prix à payer, en temps de calcul, qui peut être élevé. Ceci est particulièrement vrai en électrotechnique.

Dans le cadre des méthodes de simulation numérique utilisées dans l'analyse de dispositifs électromagnétiques, la méthode des éléments finis (MEF) se présente aujourd'hui comme une des méthodes les plus robustes et les plus généralistes que nous ayons. La simulation par éléments finis permet d'obtenir des résultats assez fiables, même en situation où le dispositif analysé présente une configuration complexe.

La difficulté d'évaluer le gradient de la fonction objectif directement à partir d'une simulation par éléments finis peut limiter l'utilisation des méthodes d'optimisation déterministes les plus performantes.

De plus, le temps de calcul demandé par la MEF pour atteindre une solution peut devenir important, surtout lorsque l'analyse du dispositif est réalisée en trois dimensions. La résolution d'un problème d'optimisation par les méthodes stochastiques peut demander quelques centaines, voir quelques milliers d'évaluations de la fonction objectif, ce qui induit des temps de calcul de plusieurs jours à plusieurs semaines.

Cependant, cet inconvénient peut être levé si une architecture informatique permettant le calcul distribué sur plusieurs ordinateurs connectés au réseau est utilisée.

En conclusion, les méthodes stochastiques sont certainement bien adaptées à la résolution des problèmes d'optimisation dans le domaine de l'électrotechnique. Les algorithmes génétiques (AG), le recuit simulé (RS) et la recherche taboue (RT) sont développés dans les paragraphes suivants.

II.5. Algorithmes Génétiques

II.5.1. Introduction

Les algorithmes génétiques reposent sur l'analogie entre la théorie de l'évolution naturelle de Darwin et l'optimisation. Selon la théorie de Darwin, les individus d'une population les mieux adaptés à leur environnement ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. Comme dans les mécanismes naturels de la reproduction, les principaux opérateurs qui affectent la constitution d'un chromosome, qui code les caractéristiques des individus, sont le croisement et la mutation.

Les AG ont été proposés par Holland en 1975 [HOL 75], puis développés par d'autres chercheurs tels que De Jong [DEJ 75], Goldberg [GOL 89a], [BEA 93b], [BEA 93c] et Michalewicz [MIC 94]. C'est actuellement une des méthodes les plus diffusées et les plus utilisées dans la résolution de problèmes d'optimisation dans de nombreux domaines d'application.

Les particularités des algorithmes génétiques sont [GOL 89a]:

1. Ils utilisent un codage des paramètres et non les paramètres eux mêmes.
2. Ils travaillent sur une population de points au lieu d'un point unique.
3. Ils n'utilisent que la valeur de la fonction étudiée et non sa dérivée ou une autre connaissance auxiliaire.
4. Ils utilisent des règles de transition probabilistes et non déterministes.

J. Holland et D. Goldberg ont proposé les trois principes fondamentaux des algorithmes génétiques :

- a. Le codage des paramètres sous forme de gène
- b. L'opérateur de sélection des individus les mieux adaptés ou les plus performants
- c. Les opérateurs de reproduction : croisement et mutation qui agissent sur les gènes sachant que au niveau de codage binaire, le croisement favorise plus l'exploration ou diversification tandis que la mutation favorise plus l'exploitation ou l'intensification du domaine de conception. Par contre, au niveau de codage réel, le croisement favorise l'exploitation ou l'intensification et la mutation favorise la diversification.

Les applications des AG sont multiples : intelligence artificielle, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, optimisation des fonctions numériques difficiles

(discontinues, multimodales,), traitement d'image (alignement des photos satellites) optimisation d'emploi du temps, contrôle de systèmes industriels [BEA 93] et apprentissage des réseaux de neurones [REN 94]. Ils sont peu employés en électrotechnique comparativement avec d'autres domaines comme l'automatique, par exemple.

Les différentes caractéristiques des algorithmes génétiques sont présentées ci-dessous.

II.5.2. Principe

Les AG sont des algorithmes d'optimisation qui s'appuient sur des techniques dérivées de la génétique et des mécanismes de sélection naturelle. Pour transposer les processus génétiques observés dans l'évolution des espèces au domaine de l'optimisation, Holland a introduit deux points fondamentaux [HOL 75], [MIC 94], [ALL 94] :

L'évolution des espèces est un processus qui opère sur des structures appelées chromosomes. Dans les algorithmes génétiques, on transforme tout point de l'espace de recherche en un chromosome appelé encore chaîne ou individu. Chacune de ces chaînes représente, sous forme codée, l'ensemble des valeurs des paramètres. Par exemple, pour un problème à trois paramètres, une chaîne sera formée par la concaténation des trois valeurs réelles $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$.

Dans la nature, l'adaptation d'un individu reflète sa capacité de survivre dans son environnement. En optimisation, la valeur de la fonction objectif mesure l'adaptation de l'individu à l'environnement. Un individu est donc d'autant mieux adapté qu'il satisfait le critère d'optimisation.

A partir de ces deux concepts : codage des paramètres et mesure d'adaptation, on peut décrire le fonctionnement général des algorithmes génétiques.

Les AG débutent par l'initialisation aléatoire d'une population P de N individus. La population évolue sur plusieurs générations. A chaque génération g , les individus de la population $P(g)$ sont évalués et les plus adaptés sont autorisés par l'opérateur sélection à avoir un grand nombre de descendants. Une mise en œuvre de cet opérateur consiste à donner pour chaque individu une probabilité d'avoir un descendant dans la génération suivante, proportionnelle à sa performance. Les mécanismes de mise en œuvre les plus employés sont la roue de loterie, le tournoi ou la décimation et ils seront détaillés plus loin. Ils ont tous en commun de générer une population $P'(g)$ de même nombre N d'individus formés des copies des individus appelés à se produire. Pour former la nouvelle génération, les opérateurs de

croisement et de mutation sont alors appliqués sur des individus sélectionnés aléatoirement dans $P'(g)$.

La performance d'un individu est mesurée par une fonction de performance ou d'adaptation (fitness en anglais) qui se déduit de la fonction objectif, car les AG sont naturellement formulés en terme de maximisation.

La figure suivante illustre le processus d'optimisation développé par les AG.

- 1°) *Initialisation*
- 2°) *TANT que (critère d'arrêt=FAUX)*
 - 21°) *Evaluation*
 - 22°) *Sélection*
 - 23°) *Reproduction (croisement, mutation)*
- 3°) *Fin Tant que*

Fig. II.5. Algorithmes génétiques standard

Les algorithmes génétiques travaillent par générations successives jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit vérifié.

Le codage des paramètres et les opérateurs de sélection, de croisement et de mutation sont présentés en détails.

II.5.3. Codage

Pour utiliser les AG, la première chose à se demander est: "Comment décrire un individu?". C'est à dire, comment les paramètres peuvent se coder ?

La réponse à cette question a une influence forte sur l'implémentation des mécanismes de croisement et de mutation. Un gène correspond de fait à un paramètre et un seul x_i . Un chromosome est constitué par un ensemble de gènes et décrit complètement un individu. L'ensemble des individus est appelé population. On aboutit ainsi à une structure présentant quatre niveaux d'organisation (fig.II.6). Un chromosome est une concaténation des gènes (fig.II.7)

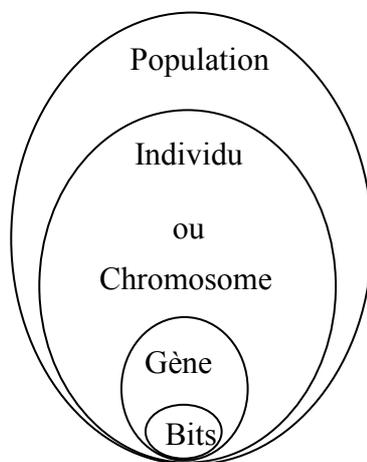


Fig. II.6. Les quatre niveaux d'organisation des AG

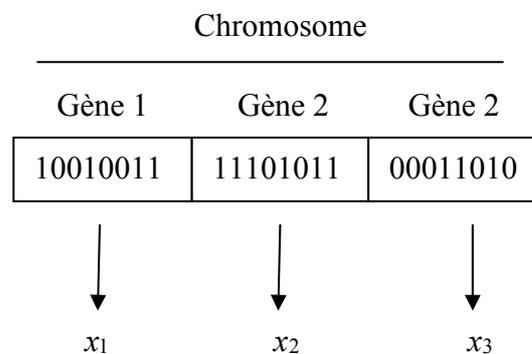


Fig.II.7. Illustration du codage des variables d'optimisation

Il y a plusieurs types de codage : binaire, réel, codage de Gray et codage dynamique des paramètres. Chacun ayant ses propres avantages et inconvénients.

Les plus utilisés sont présentés ci-dessous.

Codage binaire

Holland [HOL 75] et De Jong [DEJ 75] ont imposé le codage binaire de longueur fixe pour un chromosome qui s'écrit sous la forme d'une chaîne de l bits avec

$$l = \sum_{i=1}^n l(x_i) \quad (\text{II.3})$$

où $l(x_i)$ est le nombre de bits du gène numéro i correspondant au paramètre x_i .

Un des avantages du codage binaire est que l'on peut ainsi facilement coder toutes sortes de paramètres : réels, entiers, booléens et chaînes de caractères. Cela nécessite

simplement l'usage de fonctions de codage et décodage pour passer d'une représentation à l'autre. Ce choix le rend virtuellement applicable à tous les problèmes dont les solutions sont numériques, c'est-à-dire calculées par des ordinateurs.

Le génotype d'un individu caractérise la structure du chromosome tandis que le phénotype désigne la chaîne obtenue par la concaténation des paramètres réels ou gènes $\langle x_1 x_2 x_3 \dots \rangle$.

Le décodage convertit le chromosome en phénotype grâce au génotype. Les valeurs des paramètres sont extraites du phénotype et ensuite fournies à la fonction d'adaptation qui retourne la performance permettant ainsi de classer l'individu dans la population.

Le phénotype est obtenu à partir du génotype par l'équation [RAH 99] :

$$x_i = \left(\frac{x_{iM} - x_{im}}{2^{l(x_i)} - 1} \right) \sum_{j=0}^{l(x_i)} 2^j \cdot b_j + x_{im} \quad (\text{II.4})$$

b_j est le $j^{\text{ème}}$ bit dans le gène numéro i .

Cette méthode de codage est relativement facile à implanter mais elle présente l'inconvénient de limiter la précision des paramètres à une valeur correspondant à l'écart entre deux configurations réelles adjacentes obtenues, pour une variation du bit le moins significatif. On constate que la précision du codage dépend du nombre de bits utilisé. Pour un nombre de bits par gène valant 8, 16 et 32, les précisions relatives valent $3.9 \cdot 10^{-3}$, $1.5 \cdot 10^{-5}$ et $2.3 \cdot 10^{-10}$, respectivement.

A chaque paramètre x_i , on associe un gène g_i qui est un entier obtenu par :

$$g_i = \frac{x_i - x_{im}}{x_{iM} - x_{im}} \cdot (2^{l(x_i)} - 1) \quad (\text{II.5})$$

Codage de Gray

Avec le codage binaire, deux configurations proches dans l'espace des paramètres peuvent avoir deux chromosomes très distincts, par exemple, les chaînes « 01111 » et « 10000 » correspondent à deux configurations réelles voisines alors qu'elles diffèrent de cinq bits. Cette caractéristique peut s'avérer pénalisante pour la recherche locale par croisement.

L'utilisation du code de Gray a été recommandée pour répondre à ce problème [CAR 88] [BAC 93]. En effet, avec ce code, les entiers adjacents ne diffèrent que d'un bit. Le

passage entre deux configurations réelles voisines ne nécessite que de modifier un seul bit dans le chromosome.

Le passage du code binaire au code de Gray est effectué de la manière suivante :

$$b_j^{gray} = \begin{cases} b_j & \text{si } j = l(x_i) \\ b_j \oplus b_{j-1} & \text{si } j \leq l(x_i) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

où \oplus représente l'addition modulo 2.

La transformation inverse s'obtient avec l'équation suivante :

$$b_j = \bigoplus_{k=j}^{l(x_i)} b_k^{gray} \quad (\text{II.7})$$

Si on considère que le chromosome est représenté en code de Gray, on effectuera d'abord la transformation (II.7) avant un décodage binaire standard.

Ces opérations sont transcrites dans la table II.1.

Entier	Binaire	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Tab. II.1. Code binaire et code de Gray sur 4 bits

L'intérêt du codage de Gray se comprend mieux lorsque les opérateurs de croisement et de mutation sont présentés.

Codage dynamique des paramètres

Pour résoudre le problème de précision inhérent au décodage binaire standard et améliorer la recherche locale, un codage dynamique des paramètres est proposé [SCH 92]. La procédure de décodage est la suivante :

$$x_i = x_{im} + \frac{x_{iM} - x_{im}}{2^{l(x_i)} - 1} \left(\sum_{j=0}^{l(x_i)} 2^j \cdot b_j + dN(x_i) \right) \quad (\text{II.8})$$

où $dN(x_i)$ est une variable réelle aléatoire à densité de probabilité uniforme prise, dans l'intervalle $[0,1]$.

L'introduction de $dN(x_i)$ supprime donc les discontinuités entre deux configurations réelles adjacentes, obtenues pour une variation du bit le moins significatif, en proposant une valeur aléatoire.

Codage réel

Dans le cas du codage binaire, des difficultés surviennent pour calculer la fonction objectif et traiter les problèmes à plusieurs variables:

- Les fonctions objectifs sont exprimées sous forme réelle. Les chromosomes binaires doivent alors être convertis à chaque évaluation.
- Les problèmes multi-variables sont ramenés à des problèmes mono-variable par concaténation des inconnues en un seul chromosome. A chaque évaluation, la chaîne de bits résultante doit alors être découpée en autant de sous-chaînes qu'il y a d'inconnues. Ces sous-chaînes sont converties en nombres réels pour l'évaluation de la fonction objectif.

Une solution est tout simplement de représenter l'ensemble des variables par un vecteur : $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ où chaque x_i est un nombre réel. Cette façon de faire est le codage réel [MIC 94] [ALL 94]. Il emploie à cet effet des mécanismes plus adaptés, reposant principalement sur une représentation réelle des chromosomes.

Dans la suite du travail, seuls les codages binaire et réel sont employés.

II.5.4. Population initiale

La première étape de l'algorithme est la genèse de la population initiale. Elle peut être obtenue en générant aléatoirement les individus dans l'espace de recherche suivant une loi de probabilité uniforme.

Pour privilégier une direction de recherche ou lorsque le problème est fortement contraint, les individus peuvent être également initialisés de façon heuristique ou directement introduits par l'utilisateur. Mais cette méthode peut faire converger trop rapidement la recherche vers un optimum local.

II.5.5. Fonction d'adaptation

La construction d'une fonction d'adaptation appropriée à partir de la fonction objectif est très importante pour obtenir un bon fonctionnement des AG.

La transformation de la fonction objectif en fonction d'adaptation

Les algorithmes génétiques travaillent sur la maximisation d'une fonction positive. Or dans beaucoup de problèmes, l'objectif est de minimiser une fonction coût $f(X)$. Et même, dans un problème de maximisation rien ne garantit que la fonction objectif reste positive pour tout individu X . Ainsi, il est souvent nécessaire de transformer la fonction objectif en une fonction appelée fonction d'adaptation f_a .

Dans le cas d'une minimisation, la fonction objectif peut être transformée par [RAH 99] :

$$f_a(X) = f_{max} - f(X) \quad (\text{II.9})$$

Avec $f_{max} = \max(f(X))$ dans la génération courante.

Dans le cas où la fonction objectif à maximiser prendrait des valeurs négatives, elle peut être transformée de la façon suivante :

$$f_a(X) = f(X) - f_{min} \quad (\text{II.10})$$

où f_{min} est la valeur minimale de $f(X)$.

La fonction d'adaptation comporte des caractéristiques intrinsèques qu'il est nécessaire d'exploiter au mieux, notamment en ce qui concerne ses ordres de grandeur sur le domaine de recherche. Il est nécessaire de prévoir des réajustements possibles de cette fonction.

Les réajustements de la fonction d'adaptation

Au début de l'exécution, les individus sont proches les uns des autres et donc proches de la moyenne, même les meilleurs. Sans y prendre garde, en utilisant la méthode de sélection

habituelle, il y a un risque d'avoir une convergence prématurée et ainsi nuire à la diversité des individus.

Il faut au contraire faire en sorte que les meilleurs s'écartent le plus possibles de la moyenne. Une modification des fonctions d'adaptation est introduite [MIC 94] [GRE 86].

Soit f_a' la fonction d'adaptation transformée.

Une de façon de faire est de dupliquer les meilleurs individus. Soit C le nombre de copies souhaitées pour le meilleur individu de la population. Pour les petites populations avec N allant de 50 à 100, une valeur de C comprise entre 1.2 et 2 a été utilisée avec succès [GOL 89a].

D'autre part, il est intéressant d'accroître l'écart de performance d'individus proche les uns des autres de façon à pouvoir les discerner.

Une possibilité intéressante est une mise à l'échelle linéaire.

- Mise à l'échelle linéaire [GOL 89a]

On pose :

$$f_a' = \alpha \cdot f_a + \beta \quad (\text{II.11})$$

$$f_{a,max}' = C \cdot f_{a,max} \quad (\text{II.12})$$

On se donne comme contrainte de garder la même moyenne, soit :

$$\bar{f}_a' = \bar{f}_a \quad (\text{II.13})$$

où $\bar{f}_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_a(i)$ est l'adaptation moyenne de la population.

On en déduit :

$$\alpha = \frac{C \cdot f_{a,max} - \bar{f}_a}{(f_{a,max} - \bar{f}_a)} \quad (\text{II.14})$$

$$\beta = (1 - \alpha) \cdot \bar{f}_a \quad (\text{II.15})$$

Une autre possibilité pour accroître le caractère discriminant de la fonction d'adaptation est d'utiliser une transformation selon la loi de puissance.

- Echelle selon la loi de puissance (*Power Law Scaling*) :

La fonction d'adaptation est la suivante :

$$f'_a = f_a^k \quad (\text{II.16})$$

où la constante k peut varier au cours des générations pour accentuer la sélection des individus proche d'un maximum [GOL 89a].

Enfin une dernière possibilité est d'éliminer les individus de faible performance avant une éventuelle mise à l'échelle linéaire.

- Elimination (Sigma truncation)

La nouvelle fonction d'adaptation est définie par :

$$f'_a = \max(0, f_a - (\bar{f}_a - C \cdot \sigma)) \quad (\text{II.17})$$

où \bar{f}_a est la moyenne de la fonction d'adaptation précédente, σ l'écart type de la population, et C le nombre de copies souhaitées pour le meilleur individu.

II.5.6. Méthodes de sélection

Par analogie au processus de sélection naturelle, un caractère aléatoire est conféré à la sélection des individus tout en exploitant les valeurs de la fonction d'adaptation. Plusieurs procédures existent [MIC 94] [RAH 99].

Roue de loterie

La sélection proportionnelle ou sélection par roue de loterie consiste à dupliquer chaque individu proportionnellement à la valeur de la fonction d'adaptation. Ceci peut être effectué aisément en procédant à des tirages aléatoires consécutifs où chaque individu a une probabilité d'être sélectionnée égale à [HOL 75] :

$$P_{\text{selection}}(i) = \frac{f_a(i)}{\sum_{j=1}^N f_a(j)} \quad (\text{II.18})$$

où i désigne l'individu.

Pour réaliser cela en pratique, une roue de loterie est divisée en N secteurs de surface proportionnelle à la probabilité de sélection. Elle est lancée autant de fois qu'il y a d'individus et à chaque coup, l'individu désigné par l'aiguille est copié dans la nouvelle population.

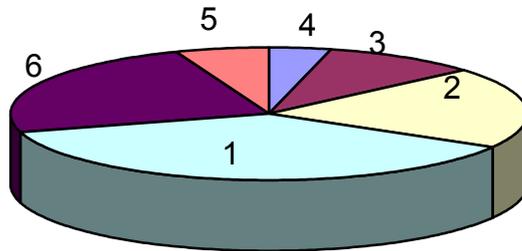


Fig. II.8. Sélection par roue de loterie

Tournoi

Un nombre p d'individus est sélectionné parmi les N individus de la population. Le meilleur, c'est à dire celui dont la fonction d'adaptation est la plus élevée, est sélectionné. Ce procédé est répété jusqu'à obtenir N individus. Il est tout à fait possible que certains individus participent à plusieurs tournois. Ils ont donc droit d'être copiés plusieurs fois, ce qui favorise la pérennité de leurs gènes [BAC 95]. En général quatre individus sont sélectionnés pour chaque tournoi, $p=4$.

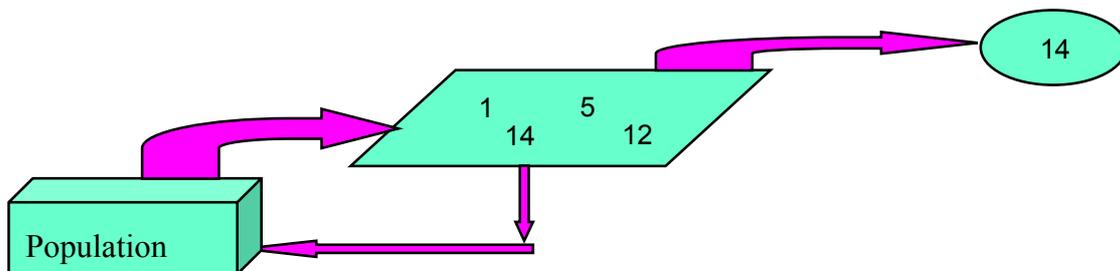


Fig. II.9. Processus de sélection par tournoi

Décimation

Seuls, les p meilleurs individus de la population sont sélectionnés et autorisés à se reproduire par croisement et mutation jusqu'à obtenir une population de même taille N que la population initiale [RAH 99].

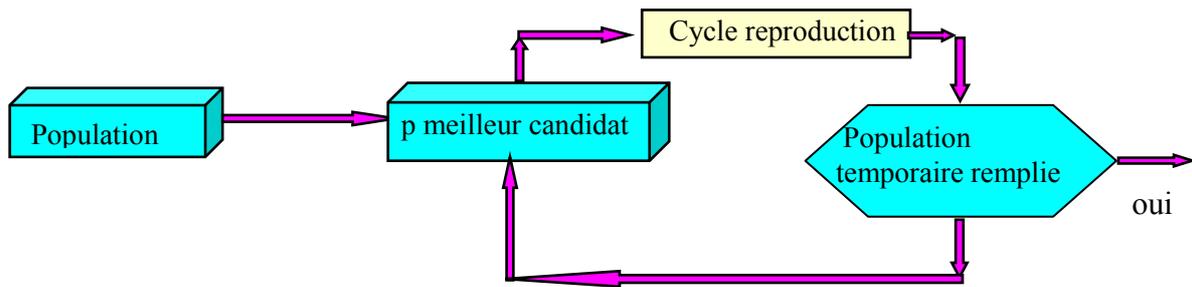


Fig. II.10. Processus de sélection par décimation

Proportionnelle à reste stochastique

Avec la sélection proportionnelle à reste stochastique, le nombre de copies $N(i)$ d'un individu i est directement fixé par le rapport de sa performance avec la performance moyenne de la population [BAK 87]

$$N(i) = \text{int}\left(\frac{f_a(i)}{\bar{f}_a}\right) \quad (\text{II.19})$$

Le nombre d'individus sélectionnés est donc $N_1 = \sum_{i=1}^N N(i)$, mais, il est fort possible que $N_1 < N$. La population est alors complétée par une sélection par roue de loterie où chaque individu a une probabilité de sélection égale à :

$$p_s(i) = \frac{1}{N - N_1} \left(\frac{f_a(i)}{\bar{f}_a} - N(i) \right) \quad (\text{II.20})$$

Stochastique universelle

Contrairement à la méthode de sélection proportionnelle où il faut réaliser N tirages aléatoires pour sélectionner N individus, la sélection stochastique universelle ne nécessite qu'un seul tirage pour choisir tous les parents d'une génération [BAK 87]. A partir d'une variable aléatoire θ prise uniformément dans l'intervalle $[0, \bar{f}_a]$, deux séries de pointeurs p_u et p_v sont définies de la manière suivante :

$$p_u = \theta + (u - 1) \cdot \bar{f}_a \quad u = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.21})$$

$$p_v = \sum_{j=1}^v f_a(j) \quad v = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.22})$$

Le pseudo code de la sélection stochastique universelle est donné par la figure II.11 :

```

u = 1
v = 1
pour i = 1, ..., N
    tant que p_u < p_v
        sélectionner un individu i
        Incrementer u
        calculer p_u = \theta + (u-1) \cdot \bar{f}_a
    fin tant que
    incrementer v
calculer p_v = \sum_{j=1}^v f_a(j)
fin pour

```

Fig. II.11. Pseudo code de sélection stochastique universelle

II.5.7. Modèles de reproduction

Pendant la phase de reproduction, les individus sont sélectionnés et les structures de leurs chromosomes sont modifiées pour construire les nouveaux individus de la génération suivante. Pour cela il y a différents opérateurs génétiques et différentes stratégies avec des objectifs propres.

II.5.7.1. Opérateurs génétiques

Les parents sélectionnés sont introduits dans le bassin de reproduction où ils sont choisis aléatoirement deux à deux pour subir des transformations par les opérateurs génétiques.

Les deux principaux opérateurs sont le croisement et la mutation. Le croisement réalise une opération qui nécessite deux parents. La mutation est une opération unaire, utilisée pour introduire une faible variation dans la solution ou changer la direction de recherche.

Les opérateurs génétiques se distinguent suivant le type de codage, binaire ou réel.

➤ Croisement binaire

Le croisement est un processus aléatoire de probabilité pc appliqué séquentiellement à des couples de parents pris au hasard dans la population. Il consiste à échanger une partie du matériel génétique des parents pour former deux nouveaux individus (enfants). En pratique, l'échange n'est effectué que si un nombre aléatoirement, tiré entre 0 et 1, est inférieur à pc .

Plusieurs types de croisement binaire sont possibles.

Croisement en un point

Pour chaque couple, un point de croisement est choisit au hasard. Les composantes situées à gauche de ce point sont conservées et celles à droite sont échangées entre les deux individus. Les enfants ainsi constitués sont placés dans la population suivante $P(g+1)$.

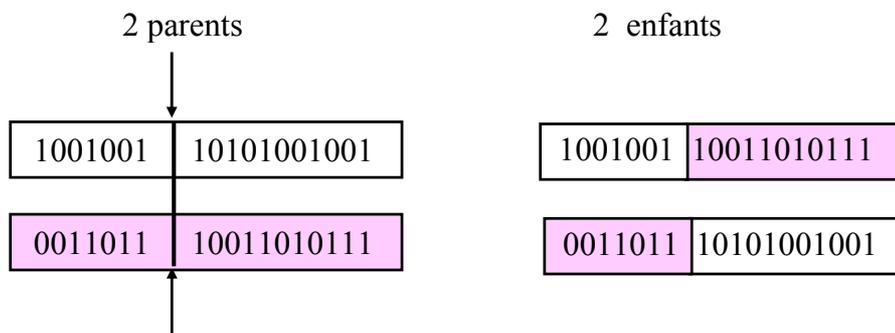


Fig. II.12. Principe du croisement en un point

Croisement en deux points

Les deux points de croisements sont également choisit au hasard puis, les séquences des chromosomes situées entre les deux points sont échangées. Elle est généralement considérée comme plus efficace que le précédent.

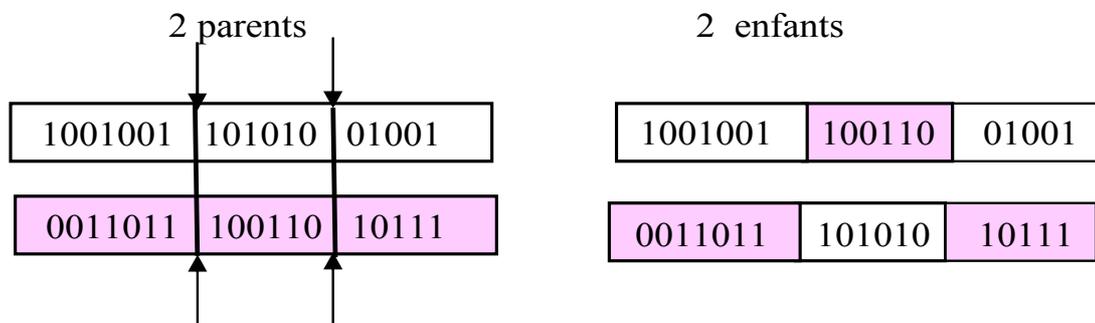


Fig. II.13. Principe du croisement en deux points

Croisement multiple

Le croisement précédent peut être généralisé en croisement en k-points de coupe, [DEJ 92] générant k+1 sous chaînes pour chaque chromosome. Les deux chromosomes fils sont obtenus par concaténation des sous chaînes en alternant les parties venant de chaque parent.

Croisement uniforme

Le croisement uniforme est obtenu à partir d'un masque binaire initialisé aléatoirement et possédant un nombre de bits égal au nombre de bits des individus de la population. Le premier enfant est créé en prenant les gènes du premier parent lorsque les bits correspondant dans le masque valent 1 et les gènes du deuxième parent si ces derniers valent 0.

Le deuxième enfant s'obtient de la même manière en complétant le masque.

Exemple :

Masque de croisement	0 0 1 1 0 1 0 0 1 0
Parents	Enfants
1 1 1 0 0 1 1 0 1 0	0 0 1 0 0 1 1 1 1 0
0 0 1 1 0 1 1 1 0 0	1 1 1 1 0 1 1 0 0 0

Fig. II.14. Principe du croisement uniforme

Combinaison des types de croisement

Une question qui se pose est de savoir lequel des croisements proposés est le plus performant. Des recherches ont été faites pour répondre à cette question [SYS 89] [SPE 90] et n'ont pas permis de conclure. Une solution intéressante est le croisement adaptatif.

Pour créer un croisement adaptatif, Spears propose un mécanisme qui met en valeur le croisement uniforme et le croisement en deux points [SPE 95].

Un bit de décision choisis aléatoirement est ajouté en dernière position du chromosome des individus de la population. Le croisement à appliquer est déterminé en fonction de la valeur du bit de décision des deux parents reproducteurs:

- Si les bits de décision des deux parents valent 0, ceux-ci sont recombinaés à l'aide d'un croisement uniforme.
- Si les bits de décision des deux parents valent 1, ceux-ci sont recombinaés à l'aide d'un croisement à deux points.
- Si les bits de décision des deux parents diffèrent, le type de croisement à appliquer est fixé aléatoirement de façon équiprobable.

Nous proposons une variante qui consiste, dans le cas où les bits de décision des parents différent, à appliquer aléatoirement et de façon équiprobable le croisement en un point et le croisement multiple.

➤ Mutation binaire

La mutation revient à modifier aléatoirement la valeur d'un paramètre. Elle constitue un opérateur de recherche secondaire qui favorise l'apparition de nouveaux génotypes. En effet, il arrive parfois que les informations importantes contenues dans les gènes disparaissent au cours des opérations de croisement. Le rôle essentiel de la mutation est de remédier à ce type de dégénérescence. Une implémentation possible est la complémentation d'un bit dans un chromosome.

Soit pm la probabilité d'une mutation, un paramètre des AG.

Pour chaque bit, une valeur aléatoire p est attribuée dans l'intervalle $[0,1]$.

Si $p < pm$ alors le bit est complétementé.

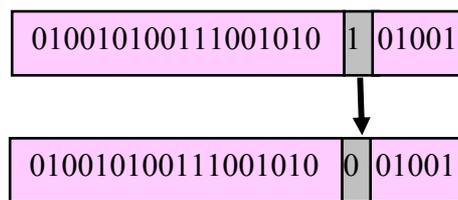


Fig. II.15. Principe de la mutation binaire

En général la probabilité de mutation pm par bit et par génération est fixée entre 0.01 et 0.1 . Backer a utilisé un $pm = \frac{1}{l}$ [BAC 93], où l est le nombre de bits composant un chromosome, cela revient à dire qu'en moyenne un bit par chromosome est muté.

Schaffer proposent une formule empirique qui exprime le taux de mutation en fonction de l et de la taille de population N [SCH 89]:

$$\ln(N) + 0.93 \cdot \ln(pm) + 0.45 \cdot l = 0.56 \quad (\text{II.23})$$

Une solution approximative de l'équation (II.23) est un taux de mutation égal à

$$pm = \frac{l}{N \cdot \sqrt{l}}$$

➤ Croisement réel

Le croisement réel ne se différencie du croisement binaire que par la nature des éléments qu'il altère : ce ne sont plus des bits qui sont échangés à droite du point de croisement, mais des variables réelles.

Des opérateurs simples du type croisement en un point, en deux points, multiple ou uniforme peuvent être implantés de la même manière que dans le cas d'un codage binaire. La seule différence réside dans le point de coupe qui doit être choisi entre deux variables du vecteur, ce qui revient à permuter des variables entre 2 chaînes. La figure II.16 présente l'opérateur de croisement en un point.

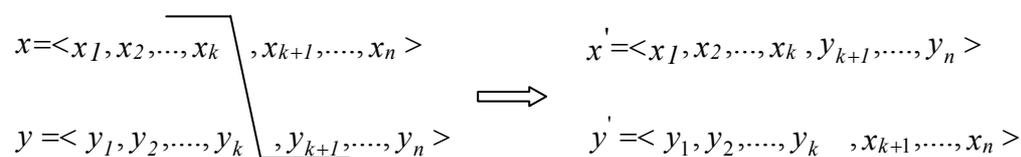


Fig.II.16. Principe de croisement réel en un point

Ces techniques ont un taux d'exploration relativement limité car elles ne font apparaître aucune nouvelle valeur pour les paramètres. Pour palier cet inconvénient majeur, deux techniques sont applicables.

Croisement arithmétique

Le croisement arithmétique est propre à la représentation réelle. Il s'applique à une paire de chromosomes et se caractérise par une pondération aléatoire des chromosomes des deux parents:

Soient x et y deux parents et p un poids appartenant à l'intervalle $[0,1]$ qui garantit que les descendants auront bien leurs gènes x_i dans $[x_{iM}, x_{iM}]$. Alors les enfants sont :

$$\begin{aligned} x' &= p \cdot x + (1 - p) \cdot y \\ y' &= (1 - p) \cdot y + p \cdot x \end{aligned} \tag{II.24}$$

x' est constitué de $p\%$ du parent x et de $(100 - p)\%$ du parent y , et réciproquement pour y' .

Croisement uniforme

Elle échange chaque composante entre les deux individus avec une probabilité égale à 0.5.

➤ **Mutation réelle**

La mutation réelle ne se différencie de la mutation binaire que par la nature de l'élément qu'elle altère, ce n'est plus un bit qui est complémenté, mais une variable réelle qui est de nouveau tirée au hasard dans son intervalle de définition.

On distingue l'opérateur de mutation uniforme et celui non uniforme.

Mutation uniforme

Elle sélectionne au hasard un gène k dans la chaîne $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n \rangle$ et génère la nouvelle chaîne $x' = \langle x_1, x_2, \dots, x'_k, \dots, x_n \rangle$ où x'_k est une valeur aléatoire prise dans l'intervalle $[x_{kM}, x_{kM}]$.

Mutation non uniforme

La mutation non uniforme possède la particularité de modifier les éléments qu'elle altère dans un intervalle de définition variable et de plus en plus petit. Plus les générations avancent, moins la mutation écarte les éléments de la zone de convergence. Cette mutation adaptative offre un bon équilibre entre l'exploration du domaine de recherche et l'affinement des individus. Le coefficient d'atténuation de l'intervalle est un paramètre de cet opérateur.

Il génère une nouvelle valeur x'_k pour le gène k sélectionné au hasard, donné par la formule :

$$x'_k = \begin{cases} x_k + \Delta(g, x_{kM} - x_k) \\ \text{ou} \\ x_k - \Delta(g, x_k - x_{kM}) \end{cases} \quad \text{(II.25)}$$

où g représente la génération courante et $\Delta(g, y)$ une fonction qui retourne un nombre aléatoire dans $[0, y]$ et dont la probabilité de renvoyer un nombre proche de 0 augmente lorsque g augmente. Cette propriété de Δ permet à l'opérateur de chercher de façon uniforme dans l'espace des solutions dans les premières générations puis de façon plus locale en fin d'exécution. Michalewicz [MIC 94] a proposé pour Δ la fonction :

$$\Delta(g, y) = y \cdot \left(1 - \text{rand}^{\left(\frac{1-g}{G}\right)^b}\right) \quad \text{(II.26)}$$

où G est le nombre maximum de génération, $rand$ un nombre aléatoire dans $[0,1]$ et b un paramètre de l'opérateur qui détermine le degré de dépendance au nombre d'itérations.

II.5.7.2. Les stratégies de mise en œuvre des opérateurs

Les opérateurs de reproduction peuvent être mis en œuvre de différentes façons qui ont une influence forte sur le comportement de l'algorithme que se soit sur son coût, le critère de convergence ou la qualité de la solution. Les façons sont :

- La stratégie dite « élitiste » [RAH 99] qui consiste à conserver le meilleur individu de la population actuelle dans la population de la génération suivante. L'adaptation du meilleur individu est donc une fonction croissante du nombre de génération. La performance de l'algorithme génétique en est grandement améliorée.
- La stratégie dite "la population sans double" qui consiste à n'insérer un nouvel individu dans la génération suivante que s'il est différent de tous les individus déjà présents dans celle-ci. Il devient alors impossible d'appliquer l'opérateur de croisement génétique à une paire de chromosomes identiques. Il en découle ainsi qu'aucun enfant ne peut être identique à un de ses parents. Cette stratégie favorise l'exploration.
- La stratégie du *remplacement de la population (generational replacement)* qui remplace la génération actuelle par la génération nouvellement créée après la phase de reproduction. Cette stratégie est facile à implanter mais elle peut faire perdre les traces de la recherche par élimination systématique des individus. L'alternative consiste à conserver aussi bien les parents que les enfants, ce qui double la taille de la population à la génération $g+1$. L'opérateur de sélection permet de ramener la population à sa taille initiale.
- La stratégie des états stationnaires (*steady-state*) [MIC 94] : la reproduction consiste à sélectionner dans la population initiale deux parents, les croiser entre eux pour générer deux enfants. L'enfant est éventuellement soumis à la mutation puis réinséré dans la population. Ainsi, parents et enfants cohabitent dans la même population pendant plusieurs générations. Il arrive qu'un individu ne soit jamais choisi pour être parent. Pour résoudre ce problème, le nombre de fois où un individu peut se reproduire est limité. Lorsque la présence d'un individu dans la population dépasse la durée maximale affectée en nombre de générations, il est éliminé de la population.
- La stratégie de renouvellement de la population, basée sur un contrôle *à posteriori* du renouvellement de la population. Puisque le croisement et La mutation sont des

opérateurs déclenchés aléatoirement, certains individus sont conservés tels quels dans la nouvelle génération. Il est donc possible de contrôler le taux de renouvellement de la population. Si ce taux est trop bas, l'opération complète de reproduction est renouvelée jusqu'à satisfaction.

Ces stratégies de mise en œuvre ne sont pas incompatibles les unes avec les autres et, au contraire, peuvent et doivent être combinées.

II.5.8. Comparaison entre les codages

La comparaison entre les codages nécessite d'introduire des critères intéressants pour comparer les algorithmes d'optimisation. Ce sont la robustesse et le bruit.

Définitions

- Un algorithme est robuste s'il est susceptible de s'appliquer à un grand nombre de problèmes sans que la structure de son programme nécessite des modifications.
- Un algorithme est bruité si deux de ses exécutions rendent des résultats différents pour un même problème.

Les algorithmes génétiques binaires sont bien plus robustes que les algorithmes génétiques réels. En effet, la représentation binaire leur permet de coder n'importe quel type de solutions. Ainsi, un chromosome peut être une liste des villes à parcourir pour le problème du voyageur de commerce [MAR 90]. Cependant, ils sont bien moins rapides que leurs homologues réels plus spécifiques à certains types de problèmes [ALL 94]. En effet, les opérations de conversion des chromosomes, codages et décodage, sont coûteux en temps de calcul et répétés un grand nombre de fois à chaque génération.

La représentation réelle propose un compromis intéressant. Elle élimine toutes les opérations de conversion mais, en contrepartie, elle rend l'algorithme génétique réel plus dépendant du problème traité.

Les algorithmes génétiques sont par définition des algorithmes sensibles car ils sont basés sur le hasard et ne donnent qu'une solution approchée au problème qu'ils traitent.

II.5.9. Théorie des schémas

Introduction

Le but de ce paragraphe est de fournir quelques éléments de base, sur une formalisation mathématique des algorithmes génétiques et de leur fonctionnement. En effet, l'efficacité et l'universalité des AG est étonnante. Pourquoi les algorithmes génétiques fonctionnent-ils ? Ont-ils des fondements théoriques ? Existe-il une preuve de leur convergence ?

Les algorithmes génétiques traitent d'une population d'individus qui sont les éléments d'un espace de recherche au sens mathématique. L'adaptation de chaque individu est jugée par une fonction d'adaptation (*fitness*). Le mécanisme de reproduction et les opérateurs génétiques permettent de tendre vers une population dont les individus maximisent cette fonction.

La première tâche a été d'enlever aux algorithmes génétiques l'analogie biologique qui les entoure. La *théorie des schémas* et la mise en relation des algorithmes génétiques avec les *processus stochastiques* [RUD 94] [RAH 99] [MIC 94] répondent à la question fondamentale de la convergence.

La similarité entre les individus d'une même population a amené à définir la théorie de schémas. Pour étudier cette notion, quelques définitions sont nécessaires

Définition 1 : Une séquence A de longueur $l(A)$ est une suite $A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$

avec $\forall i \in [1, l], \alpha_i \in V = \{0, 1\}$, ex : $A = 0111011$

Une séquence est donc une suite finie de bits.

Définition 2: Le schéma H de longueur $l(H)$ est une suite

$$H = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_l$$

avec $\forall i \in [1, l], \alpha_i \in V^+ = \{0, 1, *\}$, ex : $H = *0**1**10$.

Les bits marqués par * peuvent être 0 ou 1. Le schéma $H = 10*1$ admet 2 séquences 1011 et 1001. Ces deux séquences sont ses instances.

Définition 3 : Une séquence $A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ est dite une instance du schéma H , si pour tout i tel que $b_i \neq *$ on a $\alpha_i = b_i$

Définition 4 : La position i est une position fixe (respectivement position libre) d'un schéma H si $\alpha_i = 1$ ou $\alpha_i = 0$ (respectivement si $\alpha_i = *$)

Le schéma est caractérisé par son ordre et sa longueur: L'ordre d'un schéma H noté $o(H)$, est le nombre de positions fixes de H . La longueur fondamentale, notée $\delta(H)$, est égale à la distance entre la première et la dernière position fixe d'un schéma.

Il faut noter que le nombre d'instances différentes d'un schéma H est donné par :

$$2^{\delta(H)-o(H)}$$

Définition 5 : L'adaptation d'un schéma est $f(H) = \frac{\sum_{i=1}^{2^{(l(H)-o(H))}} f(A_i)}{2^{(l(H)-o(H))}}$

où les A_i sont les instances de H et $f(A_i)$ est l'adaptation de séquence A_i

Les schémas ne sont pas manipulés directement par les AG. Ils permettent seulement de rendre compte des similarités entre les individus pour expliquer de façon théorique les performances des AG. L'effet de la sélection ou l'effet d'un opérateur de recombinaison génétique peut être mesuré par son effet sur la propagation d'un schéma dans une population de N individus entre deux générations successives.

La sélection

Pour étudier l'effet de la sélection, la roue de loterie est choisie comme méthode de sélection.

La probabilité de sélection d'une séquence A_i de la population est donnée par l'équation II.27

$$p(A_i) = \frac{f(A_i)}{\sum_{j=1}^N f(A_j)} \quad (\text{II.27})$$

Le nombre de séquences représentant le schéma H à la génération g dans la population est noté $ns(H, g)$, à la génération $g + 1$, il est égal à:

$$ns(H, g + 1) = \sum_{A_i \in S(H)} N \times p(A_i) \quad (\text{II.28})$$

où $S(H)$ est l'ensemble des individus représentés par le schéma H .

$$ns(H, g + 1) = \sum_{A_i \in S(H)} N \times \frac{f(A_i)}{\sum_{j=1}^N f(A_j)} = \frac{N}{\sum_{j=1}^N f(A_j)} \times \sum_{A_i \in S(H)} f(A_i) \quad (\text{II.29})$$

L'adaptation moyenne de la population à la génération g est :

$$\bar{f}(g) = \frac{\sum_{j=1}^N f(A_j)}{N} \quad (\text{II.30})$$

L'adaptation du schéma H est :

$$f(H) = \frac{\sum_{A_i \in S(H)} f(A_i)}{ns(H, g)} \quad (\text{II.31})$$

$$ns(H, t+1) = ns(H, t) \times \frac{f(H)}{\bar{f}(g)} \quad (\text{II.32})$$

Si l'adaptation est supérieure à la moyenne, alors il existe $C_g(H) > 0$ tel que :

$$f(H) = (1 + C_g(H)) \bar{f}(g) \quad (\text{II.33})$$

$$ns(H, g+1) = (1 + C_g(H)) \cdot ns(H, g) \quad (\text{II.34})$$

En conclusion, plus un schéma dispose d'une bonne adaptation $f(H)$, plus le nombre des instances de ce schéma à la génération suivante a de chance d'être important. Au contraire, les schémas faibles ont toutes les chances de disparaître.

Le croisement

Si le croisement s'effectue entre la première et la dernière position fixe du schéma alors celui-ci risque d'être détruit.

Par exemple, $H = **100**$, donne $ns(H) = 5 - 3 = 2$

Il est remarquable que toute instance de H restera une instance de H si le lieu de croisement est inférieur à 2 ou supérieur à 5. Le site de croisement est choisi au hasard selon une loi uniforme. La probabilité de croisement est notée pc . La probabilité ps de survie d'un schéma H vérifie alors :

$$ps > 1 - pc \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} \quad (\text{II.35})$$

L'effet combiné de la reproduction et du croisement nous donne alors :

$$ns(H, g+1) \geq m(H, g) \times \frac{\bar{f}(H)}{\bar{f}(g)} \left(1 - pc \cdot \frac{\delta(H)}{l-1}\right) \quad (\text{II.36})$$

La mutation.

Pour un schéma H donné, seule la modification d'une position fixe par mutation entraîne la destruction du schéma. Avec une probabilité de mutation d'un bit dans une séquence donnée par pm , la probabilité de survie d'un schéma est :

$$ps = (1 - pm)^{o(H)} \quad (II.37)$$

Pour $pm \ll 1$, ce qui est le cas en pratique (généralement $pm < 0.1$), ps est alors :

$$ps = 1 - pm \cdot o(H) \quad II.38)$$

Les effets conjugués de la mutation et du croisement nous fournissent alors le résultat

$$ns(H, g + l) \geq ns(H, g) \cdot (1 + C_g(H)) \cdot (1 - p_c \cdot \frac{ns(H)}{l-1} - pm \cdot o(H)) \quad (II.39)$$

La conséquence générale de cette formule est présentée comme le « Théorème des schémas », c'est la suivante:

Théorème des schémas

Les schémas de longueur fondamentale et d'ordre plus petit que les autres et dont la performance moyenne est supérieure à la moyenne de la population, sont favorisés lors de la génération d'une nouvelle population.

Ce résultat théorique est d'un intérêt pratique évident pour qui souhaite améliorer le choix de représentation des individus. En effet, il est préférable de coder les données les plus adaptées avec des séquences d'ordre et de longueur fondamentale faible. Donc, une connaissance *à priori* de la forme de la solution doit être prise en compte, comme heuristique, dans le choix de la représentation.

Un algorithme génétique canonique est un algorithme qui utilise le croisement en un point et la mutation binaire.

Un algorithme génétique canonique qui maintient la meilleure solution trouvée au cours du temps converge vers l'optimum global.

Au terme de l'activité de modélisation, la représentation stochastique fournit la preuve mathématique de la convergence d'un algorithme génétique utilisant la politique élitiste. La convergence ne vient pas des algorithmes génétiques de manière intrinsèque, mais de l'astuce algorithmique visant à conserver systématiquement le meilleur individu dans la population. L'introduction d'opérateurs variant dans le temps (exemple : mutation non uniforme) donne

d'excellent résultat dans la pratique. Cependant, il a été démontré que cela ne suffisait pas pour assurer la convergence du modèle non élitiste. La clé du problème de convergence réside donc dans le mécanisme d'élitisme, qui doit donc conserver le meilleur individu.

II.5.10. Traitement des contraintes

Les AG conviennent au traitement des contraintes. En effet, les contraintes peuvent être divisées en deux types.

- ✓ Les contraintes qui dépendent exclusivement des paramètres de conception et peuvent être vérifiées avant le calcul de la fonction objectif. Les individus qui violent ses contraintes sont alors éliminés [MIC 96].
- ✓ Les contraintes qui dépendent des résultats du programme et ne peuvent pas être vérifiées avant. Elles sont incorporées dans la fonction objectif. Classiquement, une fonction de pénalité extérieure est utilisée [MIC 94] [SCH 93] [RIC 89] [SMI 93] [SAR 00].

L'algorithme AG avec contraintes est modifié comme suit :

1. Initialiser aléatoirement une population d'individus qui satisfont des contraintes dépendant exclusivement des paramètres de conception.
2. Sélectionner les individus de la population qui vont se reproduire en mesurant leur adaptativité.
3. Appliquer les opérateurs génétiques (croisement et mutation) pour obtenir des nouveaux individus.
4. Evaluer l'adaptativité des nouveaux individus et affecter des valeurs nulles quand les contraintes dépendant exclusivement des paramètres de conception ne sont pas satisfaites.
5. Eliminer les individus dont la pénalité est telle que l'adaptativité est négative ou nulle.
6. Répéter les étapes 3. à 5. jusqu'à ce que la taille de la nouvelle population soit égale à la taille de la population initiale.
7. Revenir à l'étape 2, jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

Les méthodes stochastiques détaillées par la suite de cette partie traitent les contraintes de la même façon que les AG. Ces méthodes sont le recuit simulé et la recherche taboue.

II.5.11. Critères d'arrêt

Le critère d'arrêt est une caractéristique essentielle des AG. Un critère peu performant peut en effet conduire à de nombreuses évaluations inutiles de la fonction d'adaptation. Les critères proposés dans la littérature sont:

1. nombre maximal de générations (itération)
2. temps écoulé
3. le meilleur individu de la dernière génération atteint un seuil critique (meilleur).
4. performances en ligne et hors ligne (PERL) et (PERHL)
5. convergence des bits (CB)

Les deux derniers critères méritent quelques explications et définitions.

Performances

Quand les algorithmes génétiques sont exécutés, la dynamique de la population ne peut pas être suivie en regardant seulement la population à chaque étape de l'exécution. Différentes statistiques sont observables et les relations entre elles doivent être établies pour comprendre les informations synthétisées.

Ces statistiques sont importantes pour contrôler et réajuster les paramètres en ligne car l'ajustage des paramètres, souvent interdépendants, n'est pas toujours facile. Ces mesures statistiques sont utilisées dans [GRE 86]. Deux d'entre elles sont présentées. Ce sont la performance en ligne et la performance hors ligne.

➤ Performance en ligne

La performance en cours de recherche est mesurée par la *performance moyenne* de l'algorithme, basée sur la fonction d'adaptation :

$$\text{Performance – en – ligne } (T) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{t=T} F(t) \quad (\text{II.40})$$

Avec T , le nombre total d'évaluations de la fonction d'adaptation jusqu'à l'évaluation courante, $F(t)$ est la $t^{\text{ième}}$ évaluation de la fonction d'adaptation. Lors de l'exécution de l'AG, $\text{performance – en – ligne}(T)$ converge vers une valeur stable (état stationnaire), puisque les solutions trouvées par l'algorithme deviennent de plus en plus stables.

➤ **Performance hors ligne**

La mesure de performance *hors-ligne*, est similaire à celle *en-ligne* mais la performance *hors-ligne* accorde plus l'importance aux performances des meilleurs individus :

$$\text{performance} - \text{hors} - \text{ligne} (T) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{t=T} F_{max}(t) \quad (\text{II.41})$$

$$\text{avec } F_{max}(t) = \sup_{\alpha=1}^{\alpha=t} (F(\alpha))$$

Dans l'équation II.41, ce qui change par rapport à la performance en-ligne c'est la fonction $F_{max}(t)$, qui enregistre la meilleure fonction d'adaptation jusqu'à présent et ignore toute autre évaluation.

Ces mesures de performance peuvent être utilisées comme critère d'arrêt. En effet, si performance – hors – ligne(T) converge vers une valeur stable durant l'évolution ainsi la chance d'obtenir une solution encore meilleure diminue fortement, et continuer l'algorithme serait une perte de temps.

Convergence des bits

Au lieu de juger la convergence par la performance en ligne ou hors ligne, on peut aussi l'observer directement sur les bits des individus d'une population. Ce critère n'est alors valable que dans le cas d'un codage binaire. Un bit est dit avoir convergé lorsque 95% de la population partage la même valeur et la population est dite avoir convergé si tous les bits ont convergé.

Le calcul de la convergence d'un code binaire est basé sur les valeurs des bits à chaque position. La convergence d'un bit à la position j est exprimée par les relations (II.42) et (II.43):

$$C(j) = \frac{1}{N} \cdot \max \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} b(i, j, 1), \sum_{i=1}^{i=N} b(i, j, 0) \right\} \quad (\text{II.42})$$

$$\text{avec } b(i, j, v) = \begin{cases} 1 & \text{si individu } i \text{ a son bit } j \text{ à la valeur } v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

$C(j) \in [0.5, 1.0]$ définit la convergence du bit à la position j et $b(i, j, v)$ est une fonction pour identifier si un individu i possède la valeur v du bit à la position j . Plus $C(j)$ est grand, plus la population aura convergé pour le bit à la position j .

Donc, pour que la population entière converge, il faut qu'il y ait convergence à chaque position des bits et pour tous les individus:

$$C_l = \frac{l}{l} \cdot \sum_{j=1}^{j=l} C(j) \quad (\text{II.44})$$

Avec l la longueur du chromosome (le nombre de bits par individu) et $C_l \in [0.5, 1.0]$, définit la convergence de la population entière pour toutes les positions des bits et pour tous les individus. Comme pour $C(j)$, plus C_l est grand, plus la population a convergé. Donc, la convergence de C_l vers 1.0 implique qu'il y a de moins en moins de diversité et de plus en plus de solutions identiques.

Une autre méthode pour tester la convergence, est de compter le nombre de bits pour lesquels : $C(l) > 0.95$.

$$C_2 = \sum_{j=1}^{j=l} \begin{cases} j & \text{si } C(j) > 0.95 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

$C_2 \in [0, l]$, quand $C_2 = l$, la population a convergé et l'AG est stoppé.

II.6. Nouveau critère d'arrêt basé sur les plans d'expériences

II.6.1. Nécessité d'un nouveau critère

Une étude approfondie des AG a montré que la vitesse de convergence est très lente et de nombreuses simulations sont exécutées inutilement malgré que l'optimum global soit déjà trouvé, mais non identifié comme tel.

Il est clair que les critères d'arrêt numéro 1 et 2 (le nombre maximal de générations et le temps maximum autorisé pour l'optimisation) sont insuffisants pour obtenir la convergence des AG. Soit l'optimisation continue ainsi inutilement et entraîne une perte de temps alors que l'optimum a été trouvé, soit l'arrêt est prématuré. Le critère de convergence 3, basé sur la valeur de la performance du meilleur individu, est également insuffisant. La convergence de toute la population vers un seul point n'est pas toujours achevée et donc le critère de convergence numéro 5 ne serait pas efficace. Pour les critères de convergence de type 4, les convergences en ligne et hors ligne ne peuvent être constatées qu'avec un retard plus ou moins important par rapport au moment pour lequel leur valeur devient stable. Pour toutes ces raisons, un nouveau critère d'arrêt plus efficace est proposé. Il ne se contente pas seulement de détecter le plus tôt possible la convergence des AG mais l'accélère.

II.6.2. Critère d'arrêt proposé

Une solution retenue est de construire une approximation de la fonction objectif avec des propriétés spéciales [HAJ 02] (surfaces de réponse quadratique). Si l'approximation de la fonction objectif est suffisamment précise, elle peut être utilisée pour localiser très rapidement l'optimum dans le domaine de faisabilité.

La méthode d'optimisation proposée ici est en deux étapes :

- Première étape : le processus d'AG est répété jusqu'à ce que l'erreur entre la fonction objectif et son approximation soit suffisamment réduite.
- Deuxième étape : l'approximation de la fonction objectif sert à localiser l'optimum global en utilisant une analyse canonique récursive.

Pour les AG, on constate en général un resserrement des individus autour du meilleur d'entre-eux quand le nombre de générations augmente. Cela permet de construire une approximation correcte de la fonction objectif avec une fonction du second ordre. Ainsi, la première étape peut se terminer.

La performance de la méthode proposée dépend des individus sélectionnés pour construire la surface de réponse et également de la formule choisie pour calculer l'erreur.

Les paragraphes suivants permettent de détailler les éléments nécessaires à la compréhension du critère d'arrêt proposé. Les méthodes employées pour sélectionner les individus et calculer l'erreur d'approximation seront analysées.

Surface de réponse

La construction d'un modèle analytique est faite en utilisant la méthode des plans d'expériences et plus particulièrement la méthode des surfaces de réponse [GOU 99]. Une fonction du second degré de toutes les variables d'entrées ainsi que comprenant les interactions entre les variables prises deux à deux est construite et utilisée comme fonction d'approximation de la fonction objectif :

$$\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \bar{x}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^n a_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot \bar{x}_i^2 \quad (\text{II.46})$$

où \bar{x}_i est la valeur centrée réduite du paramètre x_i pour chaque individu de la population, a_0 est l'estimation de la fonction objectif au centre de l'espace de conception, a_i sont les effets des paramètres, a_{ij} sont les interactions entre les paramètres et a_{ii} sont les effets paraboliques. Les valeurs centrées réduites sont calculées comme suit :

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - \frac{x_{iM} + x_{im}}{2}}{\frac{x_{iM} - x_{im}}{2}} \quad -1 \leq \bar{x}_i \leq 1 \quad (\text{II.47})$$

Déterminer la fonction \hat{f} revient donc à déterminer les coefficients de chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ effets et interactions.

L'expression (II.46) peut se mettre sous la représentation matricielle suivante :

$$\hat{y} = M_e \cdot a \quad : \text{matrice colonne des réponses approximatives} \quad (\text{II.48})$$

$y = (y_1, \dots, y_N)^t$: matrice colonne des réponses

$a = (a_0, a_1, \dots, a_n, a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{(n-1)n})^t$: matrice colonne des coefficients

M_e : matrice d'expérience

L'écriture générale de matrice M_e peut se faire sous la forme suivante :

$$M_e = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_{1,1} & \dots & \bar{x}_{n,1} & \bar{x}_{1,1}^2 & \dots & \bar{x}_{n,1}^2 & \bar{x}_{1,1} \cdot \bar{x}_{2,1} & \dots & \bar{x}_{n-1,1} \cdot \bar{x}_{n,1} \\ 1 & \bar{x}_{1,2} & \dots & \bar{x}_{n,2} & \bar{x}_{1,2}^2 & \dots & \bar{x}_{n,2}^2 & \bar{x}_{1,2} \cdot \bar{x}_{3,2} & \dots & \bar{x}_{n-1,2} \cdot \bar{x}_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \bar{x}_{1,N'} & \dots & \bar{x}_{n,N'} & \bar{x}_{1,N'}^2 & \dots & \bar{x}_{n,N'}^2 & \bar{x}_{1,N'} \cdot \bar{x}_{n-1,N'} & \dots & \bar{x}_{n-1,N'} \cdot \bar{x}_{n,N'} \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

où N' est le nombre d'individus participant à la construction de la surface de réponse et $\bar{x}_{i,j}$ représente la valeur réduite de la variable x_i pour l'individu j . Ainsi, chaque ligne décrit les valeurs des variables de conception pour chaque individu de la population qui participe à la construction de la surface de réponse, tandis que chaque colonne est liée à un effet ou à une interaction [GOU 99].

L'utilisation de la méthode des moindres carrés permet une estimation non biaisée du vecteur des coefficients a , notée \hat{a} , dans le cas de la non singularité de la matrice $M_e^t.M_e$:

$$\hat{a} = (M_e^t.M_e)^{-1} M_e^t y \quad (\text{II.50})$$

La matrice carrée $M_e^t.M_e$ est appelée matrice d'information. Son inverse $(M_e^t.M_e)^{-1}$ est quant à elle appelée *matrice de dispersion*.

Analyse canonique récursive

L'analyse canonique permet de déduire de nombreuses caractéristiques relatives à cette surface de réponse et de simplifier la recherche du point optimum. Elle permet aussi de connaître :

- Les coordonnées du point stationnaire.
- La fonction objectif en ce point.
- Le type de point stationnaire (maximum, minimum, point selle)

Cette étude doit prendre en compte les limites imposées par le domaine de recherche. Les bornes des variables de conception peuvent ainsi compliquer la recherche d'un optimum en utilisant une simple analyse canonique. Dans ce cas, l'analyse canonique récursive est réalisée. La thèse de Vivier décrit en détail cette technique [VIV 02].

II.6.3. Sélection des individus

Des individus sont sélectionnés pour construire la surface de réponse. Trois méthodes pour choisir les individus sont proposées. Dans la première et la deuxième, les individus

choisis sont dans un hyper-rectangle centré autour du meilleur individu et dont la taille se réduit à chaque nouvelle génération.

Méthode 1 : réduction du domaine, centré

Dans la première méthode (M1), des individus dans la génération courante sont choisis s'ils remplissent la condition suivante :

$$\Delta x_i^{\min}(g) = \frac{k_1}{k_1 + g} \min(x_{iM} - x_i^*, x_i^* - x_{im}) \tag{II.51}$$

$$x_i^* - \Delta x_i^{\min}(g) \leq x_i \leq x_i^* + \Delta x_i^{\min}(g)$$

où x_i^* sont les coordonnées du meilleur individu, g est le numéro de la génération courante et k_1 est un coefficient donné par l'utilisateur, par exemple égal à 10. L'inconvénient principal de cette méthode apparaît quand le meilleur individu est proche des frontières de l'espace de recherche. Si c'est le cas, la taille de l'hyper-rectangle diminue terriblement.

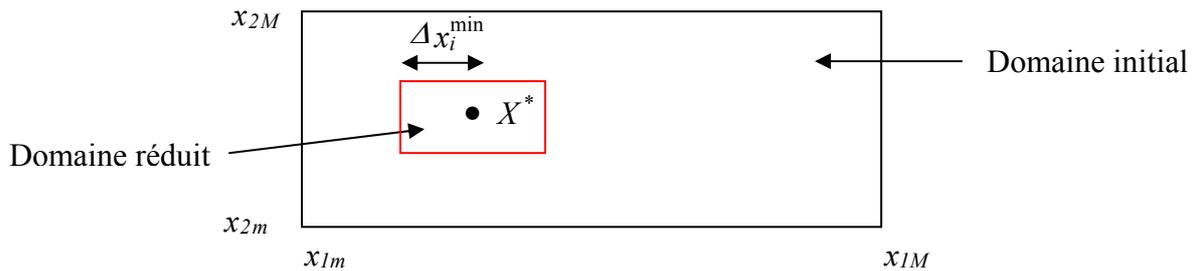


Fig. II.17. Principe de la réduction du domaine, centré

Méthode 2 : réduction du domaine, tronqué

Pour la deuxième méthode (M2), des individus dans la génération courante sont choisis s'ils vérifient la condition suivante :

$$\Delta x_i(g) = (x_{iM} - x_{im}) \cdot \exp(-k_2 \cdot g) \tag{II.52}$$

$$\max(x_{im}, x_i^* - \Delta x_i(g)) \leq x_i \leq \min(x_{iM}, x_i^* + \Delta x_i(g))$$

où k_2 est choisi égal typiquement à 0.1.

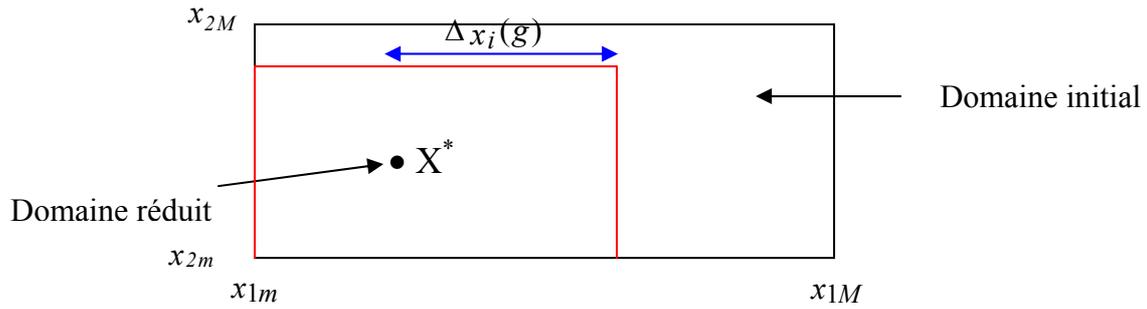


Fig. II.18. Principe de la réduction du domaine, tronqué

Si une partie du nouveau domaine est à l'extérieur de l'espace de recherche, ce dernier est tronqué de façon à être en totalité à l'intérieur.

Dans les deux méthodes, si le nombre des individus dans la boîte de polygone est inférieur au nombre d'effets, interactions et effets paraboliques, les opérateurs de croisement et des mutations sont répétés jusqu'à ce que le nombre d'individus sélectionnés soit suffisant pour construire la surface de réponse et calculer l'erreur.

Méthode 3 : sélection des meilleurs individus

Dans la troisième méthode (M3), un pourcentage des meilleurs individus est choisi pour construire la surface de réponse quelque soit leur position. La surface de réponse a un domaine de validité défini par les valeurs maximales et minimales des paramètres des individus sélectionnés.

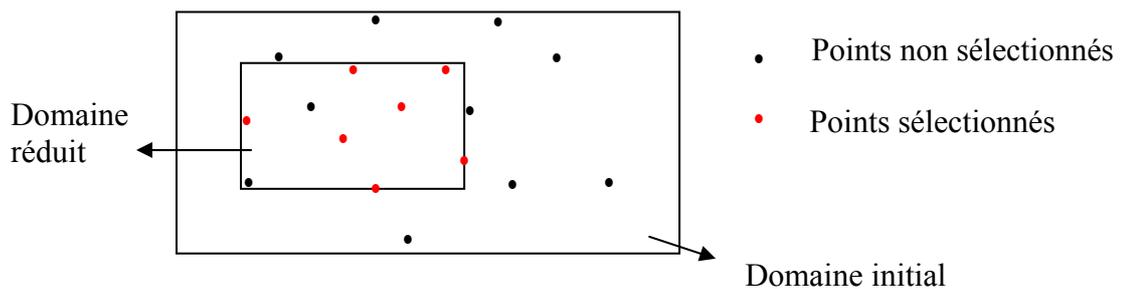


Fig. II.19. Principe de la méthode de sélection des meilleurs individus

II.6.4. Calcul d'erreur

Deux formules sont testées pour calculer l'erreur d'approximation, l'une basée de l'erreur moyenne (E1) et l'autre sur l'erreur maximale (E2).

$$E_1 = \sqrt{\frac{\|r\|^2}{\|y\|^2}} = \frac{\|r\|}{\|y\|} \quad (\text{II.53})$$

$$E_2 = \max \left(\frac{|r_i|}{|y_i|} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N' \quad (\text{II.54})$$

où $r = (r_1, \dots, r_{N'})^t = y - \hat{y}$ est la matrice colonne des résidus et $\hat{y} = X \cdot \hat{a}$ est la matrice colonne des réponses calculées par l'approximation.

Valeurs propres

Une matrice A comprenant les interactions et effets paraboliques peut être employée pour calculer le point stationnaire. En effet, l'équation (II.46) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y = a_0 + X^t \cdot a + X^t \cdot A \cdot X \quad (\text{II.55})$$

où $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$ est le vecteur des coefficients des termes du premier ordre et $A = [a'_{ij}]$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$ est la matrice centrale des termes du second degré, ses éléments diagonaux sont les coefficients a_{ii} des termes carrés, ses éléments non diagonaux sont égaux à la moitié des coefficients a_{ij} des termes d'interaction. A est une matrice symétrique.

Les valeurs propres de A donnent la nature du point stationnaire: minimum, maximum ou minimax, c'est à dire point de selle. Basée sur ces calculs, une autre méthode est examinée mais écartée parce qu'elle est efficace seulement si le point stationnaire est dans l'espace de conception et les valeurs propres sont toutes positives dans le cas d'une minimisation ou toutes négatives dans le cas d'une maximisation.

II.6.5. Pertinence des choix

L'analyse de la variance recouvre un ensemble de techniques de test et d'estimation destiné à apprécier l'effet de variables qualitatives, ici le choix de la méthode de sélection des individus (M1, M2, M3) et celui de la formule de l'erreur (E1, E2), sur une variable numérique, ici la qualité de l'optimum obtenu.

Un vocabulaire particulier est utilisé : les variables qualitatives susceptibles d'influer sur la distribution de la variable numérique observée sont appelées « facteurs de variables » et leurs modalités « niveaux ». Lorsqu'il y a plusieurs facteurs, une combinaison de niveaux est un « traitement ».

Les deux facteurs présents ici sont le facteur « méthode de sélection des individus » et le facteur « formule pour le calcul de l'erreur ». Le nombre de répétitions est de trois pour chaque méthode et pour chaque fonction test. Pour évaluer la méthode, son influence sur la précision de la localisation de l'optimum et sur la réponse en ce point est étudiée. Pour cela, une fonction φ qui tient compte des deux critères cités précédemment est définie avec l'équation (II.56).

$$\varphi = \frac{\alpha}{\text{dist}(X_{\text{estime}} - X_{\text{reel}})} + \frac{\beta}{\text{abs}(Y_{\text{estimé}} - Y_{\text{reel}})} \quad (\text{II.56})$$

où dist est la distance euclidienne entre l'optimum réel et l'optimum estimé et abs la valeur absolue de l'écart de la réponse. α et β sont deux coefficients de pondération compris entre 0 et 1 qui permettent de pondérer chaque critère. Ils sont choisis respectivement égaux à 0.6 et 0.4.

La variance est définie pour chaque méthode par :

$$\text{var}_l = \frac{\sum_{i=1}^{nr \cdot nf} (\varphi_i - \bar{\varphi})^2}{(nr + 1) \cdot (nf - 1)} \quad l = 1, \dots, nm \quad (\text{II.57})$$

où nm est le nombre de combinaisons (3 méthodes \times 2 fonctions = 6), nr est le nombre de répétitions pour chaque fonction (3), nf est le nombre de fonctions de test (3) et $\bar{\varphi}$ est la moyenne de toutes les valeurs de φ , pour chaque combinaison.

La variance résiduelle var_R est calculée par :

$$\text{var}_R = \frac{\sum_i^{nm} \sum_j^{nf} \sum_k^{nr} (\varphi_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j})^2}{nm \cdot nf \cdot (nr - 1)} \quad (\text{II.58})$$

Le calcul du coefficient de Fisher donne la probabilité d'efficacité de la méthode :

$$F_i = \frac{\text{var}_i}{\text{var}_R} \quad (\text{II.59})$$

combinaison	Coefficient de Fisher	Probabilité d'efficacité
M1+E1	0,61380802	0,34456222
M1+E2	0,06471633	0,0080401
M2+E1	0,22124483	0,07517891
M2+E2	1,01315343	0,58644262
M3+E1	4,27273325	0,99375924
M3+E2	6,12569139	0,99927551

Tab. II.2. Combinaison entre les méthodes de sélection et les fonctions de calcul d'erreur

La technique du screening permet de déterminer, parmi un ensemble initial de facteurs, ceux qui sont influents. Il s'agit donc d'un procédé de sélection ou de criblage [SCH 98].

Le screening de toutes les combinaisons est examiné sur trois fonctions analytiques [VIV 02]. Une analyse de la variance est faite avec deux facteurs, le facteur de la combinaison et le facteur de la fonction test. Le coefficient de Fisher est calculé en comparant les variances et donne la probabilité d'efficacité de chaque combinaison. Les résultats sont récapitulés dans le tableau II.2.

Cette statistique est obtenue avec la méthode de sélection dite de la roue de loterie, des probabilités de croisement et de mutation respectivement égale à 0.85 et 0.005. La longueur de chaque gène est de 32 bits et la taille de la population est de 240.

Les résultats montrent que la sélection des meilleurs individus (M3) et la formule de l'erreur maximale (E2) donnent un algorithme plus robuste et plus précis.

II.7. Recuit simulé

II.7.1. Introduction

Le recuit simulé est une version améliorée de la méthode d'amélioration itérative. Il a été proposé en 1983 par Kirkpatrick [KIR 83] pour la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire comme par exemple le problème de déplacement du voyageur de commerce (traveling salesman problem) [RAN 86]. La méthode imite le principe thermodynamique. Elle s'inspire du phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion qui le conduit à un état solide de basse énergie. Un métal est chauffé à une température très élevée, il devient liquide et peut occuper toute configuration. Quand la température décroît, le métal va se figer peu à peu dans une configuration qu'il est de plus en plus difficile à déformer, il est refroidi. En le réchauffant (recuit), le métal peut être retravaillé de nouveau pour lui donner la forme désirée. Il faut baisser lentement la température en marquant des paliers suffisamment longs pour que le corps atteigne l'équilibre thermodynamique à chaque palier de la température, ce qui permet d'obtenir à la fin du processus un matériau dans un état cristallin bien ordonné correspondant à un état d'énergie minimum. Par contre, si la baisse de température se fait de manière trop brutale, le matériau est amorphe et ses atomes sont figés dans un état désordonné traduisant un minimum local d'énergie.

Le comportement des atomes a été caractérisé par une loi statistique de distribution proposée par Boltzman : pour une température donnée T , la probabilité pour qu'un système d'atomes soit dans un état d'énergie E est proportionnelle à $\exp(-\frac{E}{T})$. Ainsi quand la température décroît et devient proche de zéro, seuls les états d'énergie minimum ont une probabilité non nulle d'apparaître.

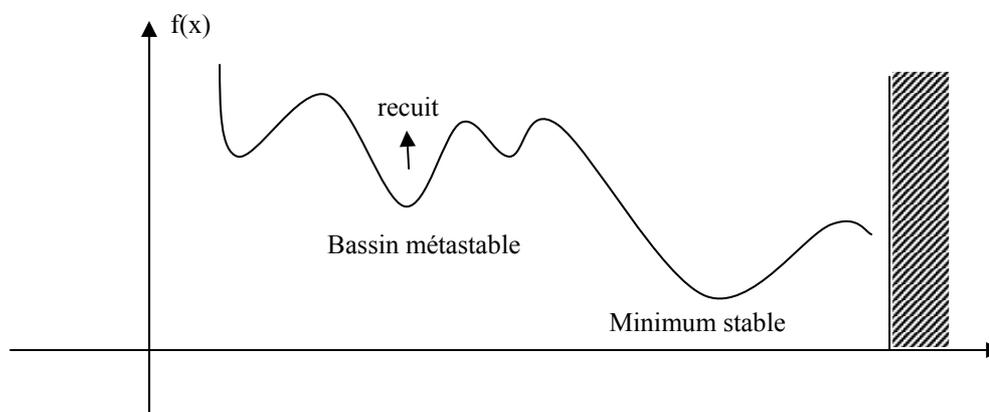


Fig. II.20. Parcours de l'espace de recherche avec le recuit simulé. Le principe de "recuit" qui se traduit par une augmentation du niveau d'énergie, permet de sortir des minimums locaux.

Les paragraphes suivants présentent le recuit simulé dans sa forme originale pour l'optimisation combinatoire, le recuit simulé pour l'optimisation de paramètres continus et quelques améliorations proposées.

II.7.2. Notions

Il y a plusieurs notions à définir telles que la probabilité de Boltzmann et le critère de Metropolis.

Probabilité de Boltzmann

La probabilité de Boltzmann [AAR 90], notée P_T mesure la probabilité de trouver un système dans une configuration i avec une énergie E_i , à une température T donnée, dans l'espace des configurations S . Elle est définie par :

$$P_T(X = i) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(\frac{-E_i}{KT}\right) \quad (\text{II.60})$$

où X est une variable stochastique qui désigne l'état actuel du solide, K est appelé *la constante de Boltzmann* et $Z(T)$ est une fonction appelé fonction de répartition définie par :

$$Z(T) = \sum_{j=1}^t \exp\left(\frac{-E_j}{KT}\right) \quad (\text{II.61})$$

où t représente tous les états énergétiques possibles.

Dans cette expression, le facteur KT montre que lorsque la température est très élevée, tous les états sont à peu près équiprobables, c'est-à-dire qu'un grand nombre de configurations sont accessibles. Au contraire quand la température est basse, les états à haute énergie deviennent peu probables par rapport à ceux de faible énergie.

Pour simuler l'évolution d'un solide vers l'équilibre thermique pour une température T , Metropolis [MET 53] a proposé un critère appelé critère de Metropolis et qui est dérivé de la probabilité de Boltzmann.

Critère de Metropolis

Dans le contexte d'optimisation par la méthode du RS, l'énergie est remplacée par la fonction objectif, ainsi l'obtention d'un solide à énergie minimum est équivalente à la recherche de l'optimum global de la fonction objectif. Cette recherche se fait par explorations successives de différentes configurations.

Après chaque passage d'une configuration X à une configuration Y , la variation de la fonction objectif est $\Delta f = f(Y) - f(X)$. La transformation est acceptée selon la probabilité $p(X, Y)$ telle que :

$$p(X, Y) = e^{\frac{-\Delta f}{T}} \quad (\text{II.62})$$

Lorsque la variation Δf est négative ou nulle, l'exponentielle est supérieure ou égale à 1 et la nouvelle configuration est acceptée.

Si $\Delta f > 0$, $p(X, Y)$ est comparé à un nombre aléatoire $rand \in [0,1]$:

Si $rand < p(X, Y)$ la configuration Y est acceptée;

Sinon elle est rejetée et une autre configuration est essayée.

Les configurations ayant une augmentation en Δf , c'est à dire une dégradation de la fonction objectif sont donc moins probables pour une température donnée, d'autant moins que la température est faible.

Chaîne de Markov et équilibre thermique

La chaîne de Markov est l'ensemble des configurations explorées à température constante. L'équilibre thermique est caractérisé par la convergence de la distribution des énergies calculées sur les différentes configurations de la chaîne de Markov vers une loi normale. En pratique, ce critère d'équilibre thermique est trop sévère et il est remplacé par la notion de quasi-équilibre. Ce dernier est atteint lorsque la longueur de la chaîne de Markov, c'est-à-dire le nombre de configurations explorées, est suffisamment grande.

II.7.3. Algorithme

Kirkpatrick a fait une analogie entre l'optimisation et le phénomène physique de refroidissement en faisant une correspondance entre arrangements des atomes et paramètres de conception, énergie et fonction objectif à minimiser, minimum de l'énergie et minimum global, chaîne de Markov et nombre de configurations explorées à température constante.

Cependant, le concept de température d'un système physique n'a pas d'équivalent direct avec le problème à optimiser. Ainsi, le paramètre température T est simplement un paramètre de contrôle, indiquant le contexte dans lequel se trouve le système, c'est à dire le stade de la recherche. Le critère de Metropolis détermine si une nouvelle configuration générée présente une variation de fonction objectif acceptable. Il permet aussi de sortir des minima locaux quand la température est élevée.

L'algorithme débute par une température initiale élevée et une configuration initiale prise au hasard. A l'aide d'un déplacement aléatoire, une nouvelle configuration est générée selon chaque direction. Selon le critère de Metropolis, elle sera acceptée ou rejetée. Ce processus est répété, à partir du dernier point accepté, un certain nombre de fois jusqu'à obtenir l'équilibre thermique. Pendant cette phase, le vecteur pas de déplacement p est périodiquement ajusté pour s'adapter à la fonction, le meilleur point obtenu est désigné comme optimum courant.

La température est diminuée progressivement en générant à chaque palier un ensemble de solutions à partir de l'optimum courant. Au début de l'algorithme, le paramètre de contrôle T est élevé, ainsi la probabilité $p(X, Y)$ est proche de 1 et presque toutes les dégradations de la fonction objectif sont acceptables, ce qui favorise l'exploration. Au contraire, quand T diminue, les remontées sont de plus en plus difficiles et seules de très faibles dégradations sont acceptées, favorisant ainsi l'intensification. Le processus complet est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

En résumé, le recuit simulé utilise une double dynamique :

- 1°) recherche de minima à température fixée avec la chaîne de Markov
- 2°) diminution par étape de la température.

II.7.4. Paramètres

La principale difficulté rencontrée dans la résolution d'un problème d'optimisation par cette méthode est liée à la détermination du schéma de refroidissement. L'ensemble des paramètres qui gouvernent la convergence de l'algorithme sont :

- Valeur initiale du paramètre de contrôle T_0 (température initiale)
- Facteur de réduction de la température rt
- Nombre d'itérations à température constante (longueur de la chaîne de Markov) Lm
- Taille de voisinage N_s
- Critère d'arrêt

Température

La température est un paramètre de contrôle important. Le but est d'avoir une température assez haute pour éviter les minimums locaux et suffisamment basse pour réduire le temps d'optimisation. En diminuant lentement la température, on permet au système de rechercher les "bassins d'attraction" dont la préférence est toujours donnée à celui dont le coût

est minimal. La loi selon laquelle la température décroît est importante pour l'efficacité de l'algorithme puisqu'elle doit laisser le temps au système de tester le maximum de configurations pour être sûr d'obtenir le minimum global. Aussi, la température initiale doit-elle être suffisamment élevée pour que la descente en température soit aussi lente que possible.

➤ Température initiale

Dans un problème physique, le solide doit être chauffé jusqu'à ce qu'il fonde pour que, dans la phase liquide, les atomes ou particules puissent occuper toutes configurations. Dans l'algorithme du recuit simulé (RS), le paramètre de contrôle doit être suffisamment élevé pour permettre à toutes les transitions d'être acceptées, c'est à dire pour permettre la localisation de la région où se trouve le minimum global.

La température initiale est déterminée, sinon fixée arbitrairement, lors d'une phase de pré-traitement avec une exploration initiale partielle de l'espace de configurations. D'après Kirkpatrick [KIR 83], T_0 doit être choisie de sorte que la probabilité d'acceptation de la plus mauvaise solution, noté P_r , soit environ 80%. Ensuite, dans l'expression de $p(X,Y)$, l'utilisateur doit fixer l'accroissement maximal acceptable de la fonction objectif, noté Δf^+ , pour en déduire la valeur de T_0 . L'expression suivante est obtenue :

$$T_0 = \frac{\Delta f^+}{\ln(P_r)} \quad (\text{II.63})$$

Cette relation peut être déduite de la probabilité de Boltzmann. Heck [HEC 95] propose de générer aléatoirement un certain nombre de configurations initiales. Ensuite, la température initiale est calculée de façon à pouvoir accepter les configurations dont la fonction objectif est comprise dans l'intervalle $\pm 3 \cdot \sigma$ autour de la valeur moyenne, avec σ l'écart type des valeurs initiales de la fonction objectif. La probabilité d'acceptation P_r est réglée à 0.01 pour avoir une température initiale suffisamment élevée. Ainsi, la température initiale vaut:

$$T_0 = \frac{-3 \cdot \sigma}{\ln(P_r)} \quad (\text{II.64})$$

➤ Décroissance de la température

Le changement de température de T_k vers T_{k+1} est effectué au moment où l'équilibre thermique (ou l'état de *quasi-équilibre*) est détecté. La recherche de cet équilibre s'effectue en générant une succession de chaînes de Markov. La variation de température se fait donc par paliers suivant la fonction de décroissance utilisée. Les fonctions les plus couramment rencontrées dans la littérature sont les fonctions linéaires, discrètes ou exponentielles (cf. Tab. II.3) [SAL 92].

Type	Fonctions	Paramètres
Linéaire	$T_{k+1} = a \cdot T_k$	$a < 1$ (typ. 0.99 à 0.8)
Discrète	$T_{k+1} = T_k - \Delta T$	$\Delta T > 0$
Exponentielle	$T_{k+1} = T_k \cdot \exp\left(\frac{-\lambda \cdot T_k}{\sigma_k}\right)$ avec $0 \leq \frac{T_{k+1}}{T_k} \leq 1$	σ_k est l'écart type des fonctions objectifs des configurations acceptées à la température T_k , λ est un paramètre de réglage fixé par l'utilisateur, positif

Tab. II.3. Lois de décroissance de la température les plus utilisées.

La plus utilisée est la loi linéaire qui permet d'avoir une décroissance rapide au début de l'optimisation et lente proche de la convergence. La décroissance exponentielle permet de tenir compte de l'état précédent par l'utilisation de l'écart type des valeurs de la fonction objectif obtenues au palier de température précédent. Au début de la recherche, presque toutes les configurations sont acceptées. Comme ces configurations peuvent être très dispersées dans l'espace de recherche, l'écart type peut être alors relativement grand et donc la température décroît plus lentement selon la valeur donnée au paramètre λ . La décroissance est donc dynamique et adaptative. Pour la fonction discrète, la décroissance est indépendante de la valeur de l'état précédent du système et dépend uniquement de ΔT .

Nombre d'itérations à température constante

Cette valeur doit être assez élevée pour atteindre le quasi-équilibre et suffisamment faible pour réduire le temps d'optimisation.

Critères d'arrêt

Un grand nombre de critères existent. Le processus d'optimisation est arrêté quand aucune amélioration sensible n'est réalisée, ou quand le paramètre de contrôle est inférieur à une certaine valeur. Vanderbilt et al [Van 84] ont suggéré comme critère d'arrêt l'expression suivante :

$$\frac{\bar{f} - f_{opt}}{\bar{f}} \leq \varepsilon \quad (\text{II.65})$$

où f_{opt} est la valeur de la fonction objectif à l'optimum courant, \bar{f} est la moyenne des fonctions objectifs des configurations générées depuis le début de l'optimisation et ε est la précision fixée par l'utilisateur.

Aarts et al, en 1985 [AAR 85], ont proposé de stopper la recherche lorsque la différence de la moyenne des variations de la fonction objectif à un palier de température donné devenait inférieur à une valeur spécifiée ε :

$$\frac{\bar{f}_{k+1} - \bar{f}_k}{T_{k+1} - T_k} \frac{T_k}{\bar{f}_{T_0}} < \varepsilon \quad (\text{II.66})$$

où \bar{f}_k représente la valeur moyenne de la fonction objectif à la température T_k . Notons que le

terme $\frac{T_k}{\bar{f}_0}$ permet de rendre le critère terminal adimensionnel.

D'autres méthodes empiriques, faciles à implanter et conduisant à de bon résultats ont également été publiées. Painton, en 1994 [PAI 94], propose d'arrêter l'algorithme lorsque après dix décroissances successives de la température, il n'y a pas d'amélioration de la configuration optimale. Dolan, en 1990 [DOL 90], propose d'arrêter l'algorithme de recuit simulé lorsque la température de recuit est inférieure à une valeur choisie.

Durant notre travail, le critère d'arrêt suivant équivalent à celui de Painton avec un nombre de décroissance N_e fixé par l'utilisateur, a été employé :

$$\left| f_k^* - f_{k-u}^* \right| \leq \varepsilon \quad u = 1, \dots, N_e \quad (\text{II.67})$$

$$f_k^* - f_{opt} \leq \varepsilon \quad (\text{II.68})$$

où f_k^* est la valeur de la fonction objectif de l'optimum courant à la température T_k et N_e est le nombre de réductions successives du paramètre de contrôle utilisé pour surveiller l'évolution de la convergence. Les critères (II.67) et (II.68) doivent tous les deux être satisfaits pour que l'algorithme s'arrête.

II.7.5. Gestion des déplacements

L'algorithme RS a été proposé initialement pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire, c'est-à-dire avec des variables discrètes. Dans ce cas, les mouvements aléatoires correspondent à des permutations dans la liste des mouvements possibles. Comme exemple, nous pouvons citer le problème de la détermination du meilleur itinéraire (le plus court) pour parcourir un ensemble de villes dont on connaît les coordonnées. Pour ce problème, les mouvements aléatoires correspondent à des permutations dans la liste chronologiques des villes visitées.

Pour l'application de cet algorithme en électrotechnique, où les variables sont souvent continues, plusieurs améliorations ont été apportées à l'algorithme RS standard.

La nature des mouvements aléatoires est un problème spécifique au procédé à optimiser, il n'y a pas de méthodes générales décrivant la nature des mouvements. L'examen de la littérature [COR 87] montre qu'il est préférable d'implanter de petits mouvements, simples qui permettent de modifier légèrement la solution actuelle en proposant des points réalisables.

Pour l'optimisation à variables continues, les mouvements aléatoires sont remplacés par des perturbations aléatoires sur les variables de conception. La perturbation consiste à modifier la variable courante en effectuant un mouvement qui doit être déterminé en utilisant une stratégie efficace. Cette stratégie doit être indépendante du problème traité et se régler automatiquement pour permettre à l'algorithme d'être numériquement efficace. Elle est réalisée selon la formule suivante :

$$\begin{cases} x_i' = x_i + rand \cdot p_i \\ x_j' = x_j \quad \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

où $rand$ est un nombre aléatoire dans l'intervalle $[-1,1]$ et p_i est le pas de déplacement dans la direction i .

Auto-adaptation du vecteur pas

Une stratégie proposée par Corana [COR 87] consiste à ajuster les pas selon l'information sur le rapport entre les nombres de points acceptés et rejetés. L'objectif est que ce rapport soit proche de l'unité. Une petite valeur signifie qu'un nombre élevé de mouvements est rejeté et que la recherche a été réalisée dans une région trop large. Une grande valeur signifie qu'un nombre élevé de mouvements est accepté et que la recherche a été faite dans une région trop petite. Une méthode a été proposée pour la mise à jour du vecteur des pas :

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} &= p_{i,j-1} \left(1 + c \cdot \frac{\frac{n_i}{N_s} - 0.6}{0.6} \right) & \text{si } n_i > 0.6 N_s \\
 p_{i,j} &= \frac{p_{i,j-1}}{1 + c \cdot \frac{0.4 - \frac{n_i}{N_s}}{0.4}} & \text{si } n_i < 0.4 N_s \\
 p'_{i,j} &= p_{i,j-1} & \text{sinon}
 \end{aligned} \tag{II.70}$$

où $p_{i,j}$ est la composante du vecteur pas selon la direction i à l'itération j , $j = 1, \dots, L_m$, N_s est le nombre des points générés pendant une itération à température constante et n_i est le nombre des points acceptés.

II.7.6. Améliorations apportées**Prédétermination du vecteur pas**

La stratégie proposée par Corona a été utilisée. Cette stratégie a donné de bon résultat pour la plupart des fonctions analytiques testées. Cependant, en présence de contraintes, la stratégie d'auto-adaptation conduit à des pas trop petits. Le nombre des configurations atteignables devient alors très faible, ce qui empêche la poursuite du processus d'optimisation.

Une nouvelle méthode de détermination des vecteurs pas a été proposée. Les vecteurs pas utilisés sont indépendants de la situation de l'algorithme, ce qui le rend plus robuste. Ils ne dépendent que d'un paramètre, fixé par l'utilisateur, qui est le coefficient de réduction du pas. Le vecteur pas est initialement égal à la largeur de l'espace de recherche et il se réduit à chaque itération comme montrée en (II.71) à température constante. Cette équation a été proposée par Hu [Hu 92] pour une méthode de recherche taboue.

Pour chaque direction i et à chaque itération j , le vecteur pas est calculé :

$$p_{i,j} = \frac{x_{iM} - x_{im}}{c^j}, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, L_m \quad (\text{II.71})$$

où c est un coefficient de réduction supérieur à 1, éventuellement dépendant de l'espace de recherche.

Le recuit simulé employant la relation (II.71) pour déterminer le vecteur pas est appelé recuit simulé à pas tabulé, noté RS+PT. Au début, la recherche commence par des grands pas couvrant tout l'espace, favorisant ainsi l'exploration. La diminution du vecteur pas et du paramètre du contrôle favorise la recherche dans un espace plus petit, permettant ainsi l'intensification.

➤ Algorithme de RS+PT

L'algorithme de recuit simulé à pas tabulé est le suivant :

1. initialisation : soit X_0 un point initial, T_0 la température initiale, N_s le nombre des points générés à vecteur pas constant, selon chaque direction, L_m le nombre de réductions du vecteur pas à température constante, N_t le nombre de diminutions de la température, le point initial est optimum courant et point de départ.
2. prédéterminer les vecteurs pas en utilisant (II.71).
3. générer un nouveau point à partir du point de départ, en utilisant un mouvement aléatoire selon la direction courante et avec le vecteur pas courant.
4. si la valeur de la fonction objectif du nouveau point est plus petite que celle de l'optimum courant, alors le nouveau point devient l'optimum courant.
5. sinon, calculer la probabilité de Boltzmann (II.62) à la température courante. Si le critère de Metropolis est vérifié alors le nouveau point devient le point de départ.
6. changer la direction courante.
7. retourner à 3, n fois.
8. retourner à 3, N_s fois.
9. changer le pas courant selon (II.71).
10. retourner à 3, L_m fois.
11. réduire la température courante.
12. retourner à 3, si le critère d'arrêt n'est pas satisfaisant.

Retour sur l'auto-adaptation

Dans le recuit simulé standard, durant la phase de température constante, le vecteur pas est ajusté périodiquement pour bien s'adapter aux variations de la fonction objectif. Après chaque équilibre thermique, la température est réduite, et le vecteur pas est ajusté de nouveau

L_m fois. D'après une étude de sensibilité des paramètres qui sera détaillée au chapitre suivant, ce nombre L_m dépend du problème à optimiser et il est difficile à déterminer. L'équation (II.70) montre que le pas augmente si le nombre des points acceptés représente plus de 60% du voisinage, et se réduit si ce nombre est inférieur à 40%.

Cette façon de réduire le vecteur pas est efficace seulement si le point de départ est très proche de l'optimum global. Or, avec le critère de Metropolis, il est probable que ce ne soit pas le cas, notamment si la température est élevée. Ainsi, lorsque le pas diminue, le nombre de rejets augmente alors qu'il devrait diminuer. L'algorithme d'auto-adaptation a comme réaction de réduire davantage le pas, ce qui amplifie le problème et conduit à un pas trop petit. Selon ces observations, un critère plus efficace est trouvé pour déterminer si l'équilibre thermique est atteint, tout en gardant la méthode d'auto-adaptation de Corona [COR 87]. Ainsi, la longueur de la chaîne de Markov n'est pas fixée mais varie au cours du processus d'optimisation.

Pour augmenter la rapidité de convergence et détecter un tel problème, le nouveau critère d'équilibre thermique est le suivant :

$$\frac{P_{i,j}}{x_{iM} - x_{im}} \leq \varepsilon \quad (\text{II.72})$$

Si ce critère est satisfaisant alors le pas de déplacement est réinitialisé et la recherche repart de l'optimum courant. La température est encore diminuée et ainsi la probabilité d'accepter un point selon le critère de Metropolis est diminuée et la probabilité de trouver des meilleurs points augmente. Le recuit simulé obtenu est appelé recuit simulé à pas ajusté, noté RS+PA.

➤ Algorithme de RS+PA

L'algorithme de recuit simulé à pas ajusté est le suivant :

1. initialisation : soit X_0 un point initial, T_0 la température initiale, N_s le nombre des points générés à vecteur pas constant, selon chaque direction, N_t le nombre de diminutions de la température, le point initial est optimum courant et point de départ.
2. générer un nouveau point à partir du point de départ, en utilisant un mouvement aléatoire selon la direction courante et avec le vecteur pas courant.
3. si la valeur de la fonction objectif du nouveau point est plus petite que celle de l'optimum courant, alors le nouveau point devient l'optimum courant.
4. sinon, calculer la probabilité de Boltzmann (II.62) à la température courante. Si le critère de Metropolis est vérifié alors le nouveau point devient le point de départ.
5. changer la direction courante du mouvement.

6. retourner à 3, n fois.
7. retourner à 3, N_s fois.
8. actualiser le pas courant selon (II.70).
9. retourner à 3 si le critère (II.72) n'est pas vérifié
10. réduire la température courante.
11. retourner à 3, si le critère d'arrêt n'est pas satisfaisant.

II.8. Recherche taboue

II.8.1. Introduction

La recherche taboue (RT) est une méta-heuristique originalement développée par Glover en 1986 [GLO 86] spécifiquement pour des problèmes d'optimisation combinatoire et qui permet de trouver d'une manière flexible un compromis entre la qualité de la solution et le temps de calcul [GLO 89a] [GLO 89b]. Elle est basée sur l'utilisation d'une mémoire flexible qui joue un rôle essentiel dans le processus de recherche et permet d'exploiter son historique en évitant de se faire piéger dans des optimums locaux et de revenir à des solutions déjà visitées. Une liste taboue est utilisée pour stocker les meilleures solutions pendant une durée dépendante de la taille de la liste [GLO 95]. Cette méthode a été appliquée avec succès pour résoudre de nombreux problèmes d'optimisation réputés difficiles tels que le voyageur de commerce [TSU 98] [MAR 90], le routage de véhicule [GEN 99], l'ordonnancement [WID 89] et la planification des restaurations [SHY 99] ou des rencontres sportives [HAM 00].

Les paragraphes suivants présentent une description des deux méthodes de recherche taboue existantes dans la littérature. En analysant les avantages et les inconvénients de chacune, une nouvelle méthode de recherche taboue est proposée au paragraphe suivant.

II.8.2. Recherche taboue à variables continues

Définition du voisinage

Soit $X \in S$ et un nouveau point Y obtenu par un déplacement à partir de X suivant

$$y_i = x_i + rand_i \cdot p_i \quad \text{avec} \quad -1 \leq rand_i \leq 1 \quad (\text{II.73})$$

où p_i est la valeur de la composante du vecteur pas de déplacement selon la direction i .

Y est faisable s'il répond à toutes les contraintes. Pour un point X donné, tous les mouvements faisables forment un ensemble, qui est fini dans le cas d'une optimisation combinatoire et peut être infini pour une optimisation avec des variables continues.

Dans la recherche taboue avec des variables continues, deux concepts sont mis en jeu : le voisinage d'un point donné et un mouvement aléatoire dans le voisinage. Pour un point X et un pas donné p , le voisinage $V(X, p)$ est défini de la façon suivante :

$$V(X, p) = \{Y : |X - Y| \leq p\} \quad (\text{II.74})$$

où le point Y est aléatoirement généré dans le voisinage $V(X, p)$ de X . De plus s'il répond aux contraintes, il est appelé mouvement aléatoire faisable. Ce voisinage est noté V_X .

La taille du voisinage est le nombre de points Y générés dans le voisinage V_X de X avec un pas donné p . La performance de la recherche taboue dépend de la taille du voisinage et la longueur de la liste taboue.

Principe

Dans une première phase, la méthode de recherche taboue peut être vue comme une généralisation des méthodes d'amélioration locale. En effet, en partant d'une solution quelconque X appartenant à l'ensemble des solutions S , la recherche se déplace vers une solution Y située dans le voisinage V_X par exploration itérativement de l'espace des solution. Au début, le vecteur pas couvre la totalité de l'espace de recherche puis il diminue à chaque itération.

Parmi tous les points générés dans le voisinage V_X de X , le meilleur est retenu et sera le centre du prochain voisinage. Ce point est celui qui améliore le plus la fonction objectif f , ou sinon celui qui la dégrade le moins.

L'originalité de la méthode de recherche taboue par rapport aux méthodes locales, qui s'arrêtent dès qu'il n'y a pas d'amélioration de la valeur de la fonction objectif f , réside dans le fait qu'il est possible de dégrader la solution. Cette caractéristique évite ainsi à l'algorithme d'être piégé dans un minimum local mais elle induit également un risque de revenir à des solutions déjà explorées.

Pour régler ce problème, l'algorithme a besoin d'une mémoire qui conserve pendant un moment la trace des dernières solutions visitées. Ces solutions sont déclarées taboues, d'où le nom de la méthode. Elles sont stockées dans une liste de la longueur L fixe appelé liste taboue. Une nouvelle solution n'est acceptée que si elle n'appartient pas à la liste taboue. Le retour vers des solutions déjà explorées dépendant donc de la longueur de liste taboue. Elle sera d'autant plus difficile que cette dernière est longue. En conséquence, la recherche sera dirigée vers des régions non explorées. Dans le cas des variables continues, c'est le pas de déplacement ayant conduit à cette solution, et non la solution elle-même, qui est stocké dans la liste taboue.

La liste taboue est gérée comme une liste circulaire FIFO (premier entré, premier sorti). À chaque itération, le pas de déplacement tabou le plus ancien est éliminé et il est remplacé par le plus récent.

Dans la littérature, on trouve deux structures fondamentales des algorithmes de recherche taboue. Elles sont implémentées ici pour l'optimisation avec des variables continues. Ces méthodes sont la recherche taboue de Hu (RTHu) et la recherche taboue dite universelle (RTU).

II.8.3. La recherche taboue de Hu

En suivant les idées de Glover, Hu [Hu 92] a proposé un algorithme de recherche taboue pour l'optimisation de variables continues. Pour générer un mouvement aléatoire en utilisant (II.73) et définir un voisinage, Hu a proposé un ensemble de pas p_i , $P = [p_1, p_2, \dots, p_{N_a}]$ en utilisant (II.71). Mais le codage d'une liste taboue est encombrant car il faudrait garder en mémoire tous les éléments qui définissent une solution. Pour pallier à cet inconvénient, la liste taboue des solutions interdites est remplacée par la liste des derniers pas p_i correspondant aux solutions ayant amélioré la fonction objectif. Cette recherche taboue ne permet pas de dégrader la fonction objectif, même temporairement.

Les paramètres de RTHu sont la taille de voisinage N_n , le nombre de subdivisions du vecteur pas N_a . Ce dernier nombre est également la taille de la liste taboue T .

Algorithme de RTHu

L'algorithme est comme suit :

1. construire la matrice des pas en utilisant (II.71) pour chaque direction.
2. initialisation : soit un point de départ généré aléatoirement X_0 , la liste taboue est vide et le meilleur point est le point initial $X^* = X_0$, $f^* = f(X_0)$.
3. générer un mouvement aléatoire faisable dans les voisinages $V(X^*, p_k)$ ($k = 1, \dots, N_a$) de la meilleure solution courante en utilisant les pas non tabous. Soit X_j le meilleur point dans tous les voisinages, $f(X_j)$ est sa fonction objectif et p_j le pas utilisé pour générer X_j .
4. si $f(X_j) \leq f(X^*)$ alors $X^* = X_j$, $f^* = f(X_j)$, ajouter le pas p_j à la liste taboue T .
5. mettre à jour les pas p_i en utilisant (II.71) et retourner à l'étape 3.
6. si tous les pas sont dans la liste taboue et le critère d'arrêt n'est pas satisfaisant, alors remise à zéro de la liste taboue T et retour à l'étape 3.

Critère d'arrêt

L'algorithme s'arrête si :

1. la fonction objectif ne change plus de manière significative ou si

2. un grand nombre de points est généré sans aucune amélioration de la fonction objectif.

II.8.4. Recherche taboue dite universelle

La recherche taboue dite universelle [SHI 98] pour l'optimisation des fonctions à variables continues est dérivée de la recherche taboue de Hu. Essentiellement, les améliorations concernent la détermination des pas de déplacement, le critère d'arrêt et la possibilité de dégrader temporairement la fonction objectif.

Son intérêt est justifié par le fait que la recherche taboue proposée par Hu converge parfois vers un optimum local.

Exploration du domaine de recherche

Dans la recherche taboue de Hu, seuls les mouvements conduisant à une diminution de la fonction objectif sont gardés. Ainsi, chaque nouvelle solution est générée à partir de la meilleure solution courante. Cette solution peut donc rester la même durant plusieurs itérations, ce qui ne donnera pas suffisamment accès à l'exploration de tout le domaine de recherche. Pour cette raison, l'algorithme de RTHu risque de converger vers un optimum local.

Dans la recherche taboue universelle, la meilleure solution dans le voisinage de l'état courant est gardée comme nouveau point de départ même si sa fonction objectif n'est pas la meilleure. La RTU autorise ainsi une dégradation de la fonction objectif.

Si la recherche ne recommence pas toujours à partir du meilleur point courant, la recherche pourra s'en écarter et permettre une exploration plus large de l'espace des solutions. Il en résulte une probabilité plus grande de découvrir l'optimum global. Ainsi la recherche taboue universelle commence chaque nouveau cycle à la meilleure solution du cycle précédent même si elle est moins bonne que l'optimum courant. Toutefois, si aucune amélioration de la fonction objectif n'est constatée pendant N_{opt} cycles d'exploration alors le prochain cycle partira de l'optimum courant.

Détermination du vecteur pas

En pratique, la longueur de l'intervalle de variation pour les différentes paramètres de conception n'est pas la même et il n'est donc pas raisonnable d'utiliser le même pas de déplacement pour toutes les variables. Ainsi, dans la RTU :

1. Les intervalles des différentes directions sont transformés au début en des intervalles $[0,1]$.
2. Un vecteur pas universel est donné par :

$$P = \left\{ p_j = \frac{p_{j-1}}{c} \quad j = 2, 3, \dots, N_a; c = 1000^{1/j-1}; P_1 = 1 \right\} \quad (\text{II.75})$$

3. Un mouvement faisable à partir de l'état courant, dans la direction i , pour le pas p_i est réalisé en utilisant :

$$y_i = x_i + \text{rand}_i \cdot (0.5 \cdot (x_{iM} - x_{im})) \cdot p_j \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{II.76})$$

où rand_i est un nombre aléatoire appartenant à $[-1, 1]$.

Liste taboue

Dans la recherche taboue de Hu, la meilleure solution X_j de tous les voisinages $V(X, p_k) \quad k = 1, \dots, N_a$ est acceptée comme nouvel état courant et le pas correspondant p_j est stocké dans la liste taboue pour éviter de revenir à X .

Les auteurs de la méthode RTU jugent qu'il n'est pas raisonnable d'utiliser une liste taboue pour l'optimisation des fonctions à variables continues pour les raisons suivantes :

- le transfert de X_j à X est éliminé mais aussi toutes les solutions du voisinage $V(X_j, p_j)$,
- le mouvement de X_j à X ne sera pas éliminé si X est également localisé dans un autre voisinage $V(X_j, p_k) \quad k \neq j$.
- avec l'augmentation de la taille de la liste taboue, le nombre de mouvements faisables pour l'état courant est réduit, ce qui augmente le risque de non convergence

Pour toutes ces raisons, il n'y a pas de liste taboue dans la recherche taboue universelle.

Paramètres

En plus des paramètres déjà présents dans RTHu, les paramètres supplémentaires de RTU sont le nombre maximal de cycles d'exploration N_{opt} et le nombre de cycles sans amélioration de la fonction objectif N_e .

Algorithme de RTU

L'algorithme de la recherche taboue universelle est décrit ci-dessous :

1. construire la matrice des pas en utilisant (II.75).
2. initialisation : soit le point initial X_0 , X_0 est optimum courant et point de départ
 $X_d, f^* = f(X_0), X^* = X_d = X_0,$
3. générer $N_n \times N_a$ des nouveaux points dans le voisinage de X_d en utilisant N_a pas. Soit X_j le meilleur point de tous ceux générés et $f(X_j)$ sa valeur objectif.
4. si $f(X_j) \leq f^*$ alors $X^* = X_j, f^* = f(X_j)$.
5. $X_d = X_j, n_{opt} = n_{opt} + 1$
6. si $n_{opt} < N_{opt}$ alors retourner à 3.
7. X_d prend la valeur du meilleur point trouvé précédemment, $X_d = X^*, n_{opt} = 0$ et retourner à 3.
8. si les relations (II.67) et (II.68) sont non satisfaites et que le nombre maximum de cycles n'est pas atteint alors retourner à l'étape 3.

II.9. Nouvelle méthode de recherche taboue

II.9.1. Introduction

L'utilisation des deux méthodes de recherche taboue RTHu et RTU donne un nombre de simulations élevées car elles n'empêchent pas définitivement de revenir aux solutions déjà explorées. Pour résoudre ce problème, une nouvelle méthode de recherche taboue (NRT) est développée.

Dans cette méthode, la liste taboue contient tous les points générés depuis le début et une zone interdite autour de chaque point dont la taille dépend de la valeur de la fonction objectif et diminue à chaque nouvelle itération. Une alternance des phases de diversification et d'intensification permet de trouver l'optimum global avec une bonne précision.

Le paragraphe suivant présente la nouvelle méthode de recherche taboue et détaille la génération des points, les propriétés de la liste de taboue, les phases d'exploitation et d'exploration et les paramètres de contrôle de l'algorithme. Les différences avec RTHu et RTU sont soulignées.

II.9.2. Génération des nouveaux points

A la première itération, aucune information n'est disponible sur une probable localisation de l'optimum. Ainsi, les points sont générés aléatoirement sur tout le domaine de conception en utilisant la loi de probabilité uniforme.

Lors des itérations suivantes, les points sont générés à l'aide de lois normales définies par :

$$p(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_i^*)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (\text{II.77})$$

où σ_i est l'écart type, $(x_i^*)_{i=1, \dots, n}$ sont les coordonnées du meilleur point à l'itération précédente.

L'écart type est choisi initialement égal à 10% du domaine de conception, ce qui correspond à une phase d'intensification (exploitation). Ainsi, les nouveaux points ont une probabilité plus forte de se trouver à proximité du meilleur point actuel. Par la suite, la phase de diversification (exploration) est faite en augmentant l'écart type.

La génération des points est faite au moyen d'un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, et de la fonction de répartition $P(x)$:

$$x_i = x_i^* + \sigma_i P^{-1}(rand) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{où } P(x) = \int_{-\infty}^x p(u) d(u) \quad \text{et } 0 \leq rand \leq 1$$
(II.78)

Les méthodes RTHu et RTU utilisent plusieurs voisinages, qui sont des intervalles, et la loi de probabilité uniforme pour générer des points autour de l'optimum courant. Dans le paragraphe suivant, il est démontré que ce procédé est similaire au notre avec une densité de probabilité de type hyperbolique.

Démonstration

Rappelons que pour RTHu et RTU, les pas sont définis en utilisant (II.71). Soient les fonctions de répartition, notées fr_j , pour chaque pas h_j , unidimensionnelles définies et vérifiant la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fr_{i,j}(x_i) dx_i = 1$$
(II.79)

la loi uniforme sur un intervalle de longueur $h_{i,j}$ donne la fonction de répartition suivante :

$$fr_{i,j}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i,j}} & \text{si } -\frac{h_{i,j}}{2} \leq x_i \leq \frac{h_{i,j}}{2} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(II.80)

où $j = 0, \dots, N_a$, et $h_{i,0} = x_{iM} - x_{im}$. La figure II.21 représente les fonctions de répartition des différents pas $h_{i,j}$ pour $x_i > 0$.

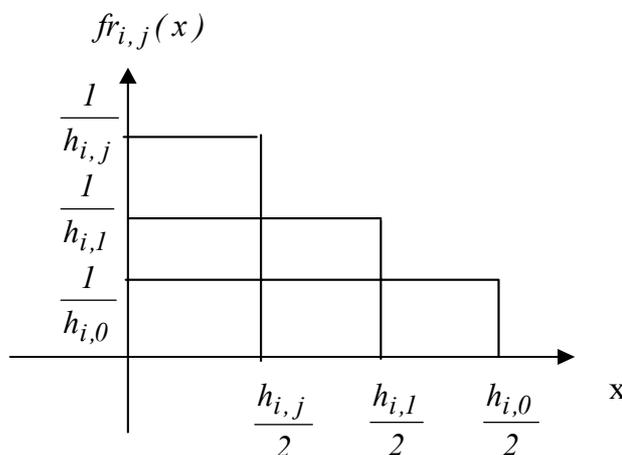


Fig. II.21. Fonctions de répartition

La fonction de répartition définie en (II.80) vérifie la relation (II.79) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fr_{i,j}(x) dx = 2 \int_0^{\frac{h_{i,j}}{2}} \frac{1}{h_{i,j}} dx_i = 2 \cdot \frac{1}{h_{i,j}} \cdot \frac{h_{i,j}}{2} = 1 \quad (\text{II.81})$$

Les points générés par les méthodes RTHu et RTU avec les N_a pas ont la fonction de répartition suivante:

$$\begin{aligned} fr_i(x_i) &= \frac{p(x_i < X_i < x_i + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= Cst \cdot \sum_{j=0}^j fr_{i,j}(x_i) \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

où Cst est une constante telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} fr_i(x_i) dx_i = 1$. Sa valeur est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} fr_{i,j}(x_i) dx_i &= Cst \cdot \left(2 \cdot \int_0^{\frac{h_{i,0}}{2}} \frac{1}{h_{i,0}} dx_i + 2 \cdot \int_0^{\frac{h_{i,1}}{2}} \frac{1}{h_{i,1}} dx_i + \dots + 2 \cdot \int_0^{\frac{h_{i,N_a}}{2}} \frac{1}{h_{i,N_a}} dx_i \right) \\ &= Cst \cdot \sum_{j=0}^{N_a} \int_{-\infty}^{+\infty} fr_{i,j}(x_i) dx_i = Cst \cdot N_a = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

donc $Cst = \frac{1}{N_a}$

Pour une valeur de x telle que $\frac{h_{i,j+1}}{2} < x < \frac{h_{i,j}}{2}$, la valeur de la fonction de répartition vaut :

$$\begin{aligned} fr_i(x_i) &= \frac{1}{N_a} \cdot \sum_{k=0}^j \frac{1}{h_{i,k}} \\ &= \frac{1}{N_a} \cdot \sum_{k=0}^j \frac{c^k}{h_{i,0}} \\ &= \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{h_{i,0}} \sum_{k=0}^j c^k \quad \text{avec} \quad \frac{h_{i,0}}{c^{j+1}} < 2 \cdot x_i < \frac{h_{i,0}}{c^j} \Rightarrow c^{-(j+1)} < \frac{2 \cdot x_i}{h_{i,0}} < c^{-j} \\ &= \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{h_{i,0}} \cdot \frac{1}{c-1} \cdot (c^{j+1} - 1) \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

Si le nombre de subdivisions N_a tend vers l'infini, alors $c^{j+1} \approx \frac{h_{i,0}}{2 \cdot x_i}$ et dans ce cas,

la fonction de répartition tend vers l'expression suivante :

$$fr_i(x_i) \xrightarrow{N_a \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{h_{i,0}} \cdot \frac{1}{c-1} \cdot \left(\frac{h_{i,0}}{2 \cdot x_i} - 1 \right) \quad (\text{II.85})$$

la densité de probabilité obtenue est bien hyperbolique.

II.9.3. Liste taboue

Elle contient toutes les zones taboues. Ces zones sont des hyper-rectangles définis par un centre et une longueur pour chaque variable d'optimisation. Le centre est un point existant. Une difficulté est le calcul de la longueur pour chaque coté de l'hyper-rectangle. Deux règles heuristiques sont proposées.

Premièrement, il est admis que la probabilité de trouver l'optimum global proche d'un bon point, c'est-à-dire avec une fonction objectif de petite valeur, est plus forte que proche d'un mauvais point, c'est-à-dire avec une fonction objectif de grande valeur. Deuxièmement, le volume total des zones taboues est une constante indépendante des itérations. Ainsi, les longueurs $l_i(X, g)$ des cotés de l'hyper-rectangle sont calculées par :

$$l_i(X, g) = \frac{x_{iM} - x_{im}}{c} \frac{f(X)}{f(X_{g-1}^*)} \frac{2}{\sqrt[n]{g}} \quad (\text{II.86})$$

où X est le centre de l'hyper-rectangle, g est le numéro de l'itération courante, c est une constante et X_{g-1}^* est le meilleur point à l'itération précédente.

La liste taboue est mise à jour à chaque fois qu'un nouveau point est généré. Aucune zone taboue n'est retirée de la liste mais leur taille diminue à chaque nouvelle itération.

II.9.4. Intensification et diversification

L'algorithme proposé ici commence par l'intensification. En effet, au début de chaque nouvelle itération, l'écart type est fixé à 1/10 de l'espace de conception, c'est à dire $\sigma_i = (x_{iM} - x_{im}) / 10$ et la loi normale à la propriété de produire 68% des points entre $x_i^* - \sigma_i$ et $x_i^* + \sigma_i$.

Comme beaucoup de points sont générés proche du meilleur point actuel, le voisinage

de ce dernier devient rapidement tabou et un grand nombre de points générés seront alors rejetés car étant à l'intérieur des zones taboues. Si la proportion de points rejetés est supérieure à 95% alors l'écart type est augmenté. Ainsi, les nouveaux points seront plus éloignés du meilleur point et la phase de diversification débutera.

II.9.5. Paramètres de contrôle

Quatre paramètres caractérisent la nouvelle méthode et ont une grande influence sur ses performances. Ce sont le nombre de points générés à chaque nouvelle itération N_p , le nombre maximum d'itérations G , la constante c et la précision relative souhaitée pour la localisation de l'optimum a . Les deux règles heuristiques citées précédemment permettent de construire des relations entre eux. L'équation (II.87) exprime la précision relative a atteinte quand l'algorithme s'arrête.

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_i(X_G^*, G)}{x_{iM} - x_{im}} \quad (\text{II.87})$$

Les équations (II.86) et (II.87) conduisent à une relation entre la constante c et a :

$$a = \frac{1}{c \cdot \sqrt[n]{G}} \quad (\text{II.88})$$

Ainsi, lorsque la précision relative, le nombre de variables et le nombre maximum d'itérations sont connus, il est possible d'en déduire la constante c :

$$c = \frac{1}{a \cdot \sqrt[n]{G}} \quad (\text{II.89})$$

La deuxième règle heuristique exprime que le rapport entre le volume total de l'espace de recherche S et le volume total des régions taboues T est le même pour chaque itération.

$$\frac{T}{S} = \beta \approx \frac{\sum_{j=1}^{N_p \cdot g} \left[\prod_{i=1}^n l_i(X_j, g) \right]}{\prod_{i=1}^n (x_{iM} - x_{im})} \quad (\text{II.90})$$

où β est une constante comprise entre 0 et 1, choisie par l'utilisateur. À partir de la relation (II.86), la relation (II.90) devient :

$$\beta = \frac{2^n \cdot N_p}{c^n} \quad (\text{II.91})$$

Puisque $\beta < 1$, le nombre des points générés à chaque itération doit respecter la relation (II.92).

$$N_p < \frac{c^n}{2^n} \quad (\text{II.92})$$

II.9.6. Algorithme

Basée sur la description précédente, la nouvelle méthode de recherche taboue est récapitulée par les étapes suivantes :

1. générer des points dans tout l'espace de recherche en utilisant la densité de probabilité uniforme. Le meilleur point généré X^* sera le point initial pour la prochaine itération.
2. calculer la longueur des cotés des zones taboues pour tous les points générés en utilisant (II.86) et ajouter les points à la liste taboue.
3. générer N_p points non tabous autour de X^* en utilisant (II.78).
4. calculer les longueurs des zones taboues pour tous les points générés en utilisant (II.86) et mettre à jour la liste taboue.
5. commencer la phase d'intensification : chaque itération initialise l'écart type à $\frac{x_{iM} - x_{im}}{10}$.
6. si le rapport entre le nombre des points rejetés et le nombre des points générés est supérieur à 0.95 alors la phase de diversification commence en augmentant l'écart type de $\frac{x_{iM} - x_{im}}{10}$.
7. critère d'arrêt : si le nombre maximum d'itérations G est atteint alors l'algorithme est terminé. Sinon, retour à l'étape 3.

II.10. Conclusion

En premier lieu, un état de l'art des méthodes d'optimisation mathématiques a été dressé. Ces méthodes peuvent être réunies en deux différents groupes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Les méthodes déterministes peuvent trouver le minimum global de la fonction sous certaines hypothèses comme la convexité et la différentiabilité. En d'autres termes, si la fonction objectif remplit ces hypothèses dans une région locale contenant le minimum désiré et si la configuration initiale est quelque part à l'intérieur de cette région, les méthodes déterministes convergent très rapidement vers ce minimum. Cependant, résolvant des problèmes pratiques où aucune de ces hypothèses ne peut être rendue, les méthodes déterministes convergent souvent vers un des minimums locaux de la fonction objectif. Vu que ces hypothèses ne sont *à priori* pas répandues dans le domaine de l'électrotechnique dans lequel généralement très peu de connaissances sur le comportement de la fonction objectif sont disponibles, il semble recommandé de commencer le processus d'optimisation avec des méthodes stochastiques.

Malgré le nombre important d'évaluations, les algorithmes stochastiques présentent le grand avantage par rapport aux méthodes déterministes, d'avoir la capacité de trouver l'optimum global. Les méthodes stochastiques les plus prometteuses sont les algorithmes génétiques, le recuit simulé et la recherche taboue.

Une étude a porté sur les aspects fondamentaux des algorithmes génétiques standard et des améliorations ont été proposées pour les rendre plus performants. Les différents critères d'arrêt trouvés dans la littérature ont été analysés en soulignant leurs avantages et inconvénients. En se basant sur certains de leurs points faibles, un nouveau critère utilisant des surfaces de réponses a été proposé. Ce critère offre l'avantage d'une convergence accélérée par la construction d'une approximation de la fonction objectif permettant ainsi une localisation rapide de l'optimum au moyen d'une analyse canonique récursive.

La méthode du recuit simulé a été détaillée, ainsi que les améliorations apportées. Une nouvelle méthode de prédétermination du pas de déplacement a rendu l'algorithme plus stable. Un autre problème a été résolu : c'est le réglage de la longueur de la chaîne de Markov. Un nouveau critère d'arrêt pour la phase à température constante a été proposé en gardant la méthode d'auto-adaptation du vecteur pas introduite par Corona. Il est basé sur l'observation de l'évolution de la longueur du vecteur pas.

Une étude des deux méthodes de recherche taboue fondamentales, RTHu et RTU a été réalisée. Elles font usage d'une mémoire flexible empêchant temporairement des mouvements qui pourraient faire retourner à une solution qui a été récemment visitée. Cependant, ces solutions peuvent être revisitées sur de grands intervalles de temps.

Pour résoudre ce problème, une nouvelle méthode recherche taboue plus performante a été développée. Sa mémoire de taille illimitée contient des zones taboues centrées sur les points générés et dont la taille diminue d'une itération à l'autre. La nouvelle méthode taboue empêche définitivement de retourner à des points déjà visités.

Le chapitre suivant se propose d'appliquer ces méthodes et leurs améliorations. Elles seront testées et discutées sur des fonctions tests ainsi que pour les quatre exemples de conception en électrotechnique décrits dans le chapitre I.

Partie III.
Applications en
électrotechnique

III.1. Introduction

Dans cette dernière partie, les méthodes d'optimisation présentées précédemment sont appliquées à la résolution de quatre problèmes d'optimisation en électrotechnique.

Auparavant, une analyse de la sensibilité des paramètres de contrôle de chaque méthode stochastique est faite avec des fonctions tests. Cela permet de trouver rapidement les plages de variation de ces paramètres qui assurent une bonne convergence des algorithmes. Les premiers problèmes en électrotechnique sont la maximisation du rendement d'un moteur à courant continu sans balai et la minimisation du coût d'un transformateur triphasé qui utilisent tous deux des équations analytiques. Les seconds problèmes sont les cas tests 22 et 25 du TEAM Workshop qui font partie d'une série de problèmes internationaux permettant de valider des nouvelles méthodes d'optimisation et tester leur efficacité. Les résultats présentés sont issus du logiciel Sophemis [VIV 02], dans lequel les méthodes stochastiques ont été implantées. Les résultats seront analysés et comparés avec ceux fournis dans la littérature [TEAM 22a] [TEAM 22b].

III.2. Etude des paramètres de contrôle

III.2.1. Fonctions tests

Fonction sinus cardinal

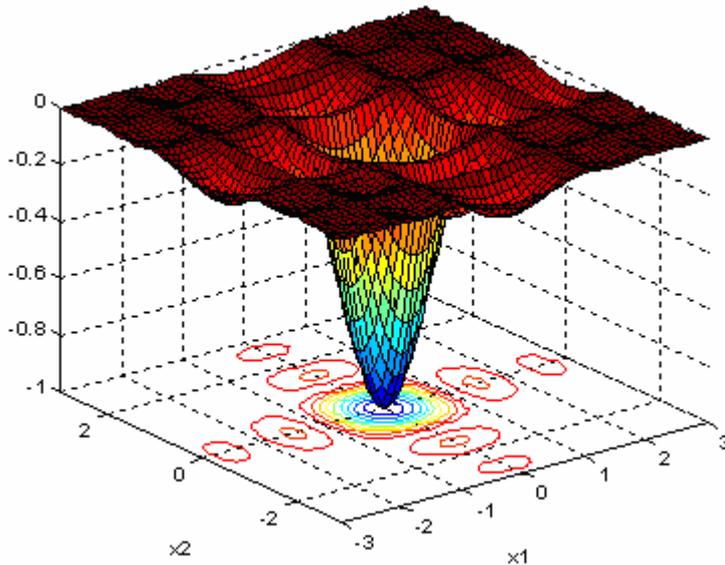


Fig. III.1. Fonction sinus cardinal

Cette fonction est caractérisée par l'existence d'un seul optimum global et plusieurs optima locaux. L'optimum global est $X^* = (0,0)$ avec $f_1(X^*) = -1$ (fig. III.1). Cette fonction est proposée dans [RAH 99]. Elle est définie de la façon suivante :

$$f_1(x_1, x_2) = -\left(\frac{\sin(\pi \cdot x_1)}{\pi \cdot x_1} + \frac{\sin(\pi \cdot x_2)}{\pi \cdot x_2}\right)$$

$$\begin{aligned} -3 &\leq x_1 \leq 3 \\ -3 &\leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Fonction sinusoidale

Cette fonction varie peu dans la direction x_1 sur une région du domaine alors qu'elle présente une forte oscillation sur d'autres régions [COS 01]. Elle a pour expression :

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin(x_1^2) + x_2^2 + 4$$

$$\begin{aligned} -3 &\leq x_1 \leq 0 \\ -2 &\leq x_2 \leq 2 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

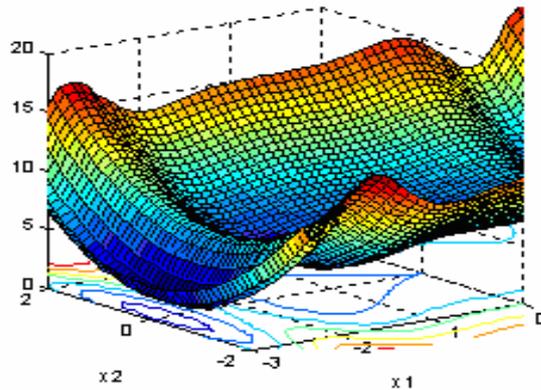


Fig. III.2. Fonction sinusoïdale

Fonction sinus exponentielle

Cette fonction est massivement multimodale. Elle possède beaucoup de minima proches les uns des autres. L'intérêt est de vérifier l'obtention de l'optimum global. Elle est définie dans l'intervalle $[-1,2]$ [MIC 94]. Elle est définie de la façon suivante :

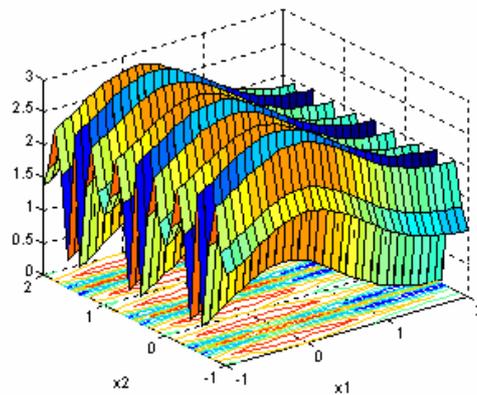


Fig. III.3. Fonction sinus exponentielle

$$\begin{aligned}
 f_3(x, y) &= \exp(-x_1^2) + \sin(10 \cdot \pi \cdot x_2^2) + 1 \\
 &-1 \leq x_1 \leq 2 \\
 &-1 \leq x_2 \leq 2
 \end{aligned}
 \tag{III.3}$$

Fonction exponentielle

Cette fonction, proposée dans [VAS 94], est définie dans $[-3,2]$. Elle est très plate pour des points éloignés du minimum, ce qui gêne la recherche du minimum par une méthode déterministe basée sur le calcul du gradient quand le point de départ se situe dans cette zone plate [VAS 94]. Elle a pour expression :

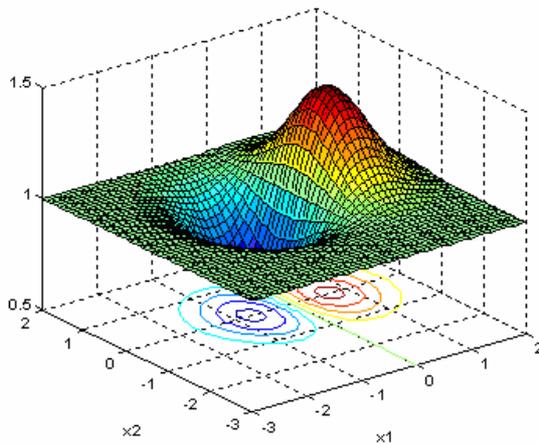


Fig. III.4. Fonction exponentielle

$$\begin{aligned}
 f_4(x_1, x_2) &= x_1 \cdot \exp(-x_1^2 - x_2^2) \\
 -3 &\leq x_1 \leq 2 \\
 -3 &\leq x_2 \leq 2
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

III.2.2. Analyse de la sensibilité

L'analyse de la sensibilité est une étape indispensable pour conditionner la qualité des résultats trouvés. Le grand nombre de paramètres des méthodes stochastiques ne doit pas faire oublier qu'il nous faut déterminer des valeurs pour ces paramètres qui ne soient pas trop disparates suivant les problèmes traités. En effet, lorsque des problèmes d'optimisation en électromagnétique sont traités, il n'y a pas autant de facilité pour faire varier les valeurs des paramètres vu le coût d'évaluation très élevé de la fonction objectif. Par conséquent, le réglage des paramètres est fait, pour chaque méthode stochastique, sur les fonctions tests présentées précédemment. Des intervalles de variation des paramètres sont déterminés au

moyen d'essais fait séquentiellement. Aucune affirmation ne permet de conclure que nos choix sont les meilleurs et devraient être les mêmes pour tous les problèmes, mais ils donnent des bons résultats avec les fonctions présentées précédemment.

Algorithmes génétiques

La solution obtenue avec les algorithmes génétiques dépend d'un nombre considérable des paramètres qui sont :

- G : nombre maximum de générations
- N : taille de la population
- pc : probabilité de croisement
- pm : probabilité de mutation
- $l(x_i)$: longueur de gène
- tyc : type de croisement
- tym : type de mutation
- critère d'arrêt
- type de codage

Le comportement de l'algorithme vis-à-vis du choix de la méthode de sélection, de la méthode de croisement et de la méthode de mutation est étudié en conservant les probabilités pc et pm inchangées. Une taille constante de population et un codage binaire sont utilisés. Il est constaté que la méthode de sélection par la roue de loterie, le croisement en deux points et la mutation binaire donnent les meilleurs résultats.

Ensuite, l'influence des probabilités de mutation et de croisement sur la convergence de l'algorithme est testée. Les probabilités pm et pc sont modifiées en utilisant la méthode de sélection par la roue de loterie, le croisement en deux points et la mutation binaire. La figure III.5 illustre la variation de la valeur maximale et de la valeur moyenne de la fonction exponentielle. Il est constaté une grande dépendance des résultats des AG vis-à-vis des probabilités de mutation et de croisement. La convergence est améliorée avec pc élevé et pm faible. Dans la mutation binaire, chaque bit d'une chaîne peut être complété avec une probabilité pm . Si pm est trop élevé alors les meilleurs individus risquent de disparaître et ne contribuent pas à l'amélioration globale de la population. C'est pour cette raison que la probabilité de mutation doit être faible. Il semble que des valeurs proches ou légèrement

inférieures à l'inverse du nombre de bit du chromosome donnent des meilleurs résultats [BAC 93]. L'étude de sensibilité permet de prévoir un intervalle de variation pour les deux paramètres pc et pm . Ainsi, les intervalles de variation de pc et pm sont 0.8 à 0.99 et 0.0001 à 0.1, respectivement.

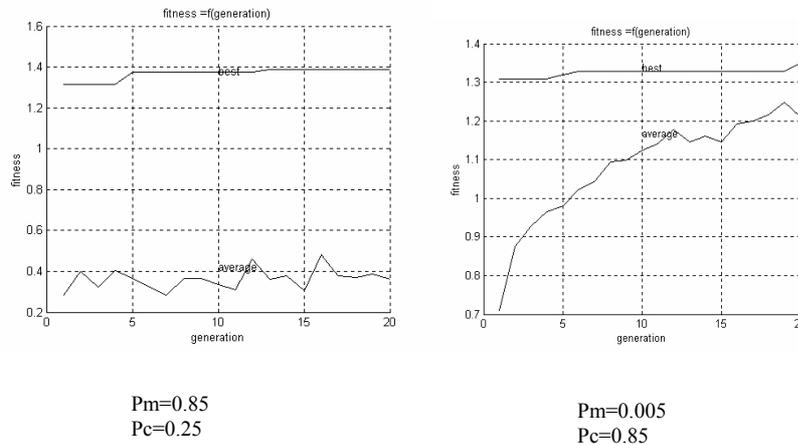


Fig. III.5. Influence des probabilités de croisement et de mutation

Une étude a été faite sur le choix du codage : réel ou binaire. Il est constaté qu'il n'y a pas de différence remarquable. En général, les codages binaire et réel donnent des résultats similaires. Parfois, le codage binaire donne de meilleurs résultats. Il est également plus facile à mettre en œuvre. Plusieurs longueurs de gène $l(x_i)$ sont testées : 4, 8, 16, 32 et 64. Il est constaté que la meilleure valeur est 32 bits et qu'il n'y a pas d'amélioration pour un passage à 64 bits.

L'effet de la stratégie élitiste est également étudié. Il nous a permis de conclure qu'elle est nécessaire à l'obtention de l'optimum global, conformément à ce qui est mis en évidence par la théorie des schémas. La stratégie de renouvellement de population est toujours utilisée.

Le choix de la taille de population N est délicat, une population trop petite évoluera probablement vers un optimum local peu intéressant. Une population trop grande entraînera un temps de convergence excessif. La taille de la population doit être choisie de façon à réaliser un bon compromis entre temps de calcul et qualité du résultat. Une taille de population variant entre 30 et 240 est raisonnable pour une fonction analytique à deux paramètres. Le critère d'arrêt sera étudié ultérieurement sur le cas test 22. Le tableau III.1 présente les intervalles de variation ou les valeurs optimales des paramètres de contrôle.

paramètres	Valeur minimale	Valeur maximale
N	30	240
pc	0.8	0.99
pm	0.0001	0.1
tyc	Croisement en deux points	
tym	Mutation binaire	
$l(x_i)$	32 bits	
codage	binaire	
G	30	500

Tab. III.1. Intervalles de variations des paramètres des AG

Recuit simulé à pas tabulé

L'algorithme de recuit simulé à pas tabulé (RS+PT) comprend un nombre réduit de paramètres. Leurs noms et significations sont rappelés ci-dessous :

- T_0 : la température initiale
- rt : le coefficient de réduction de température pour la méthode linéaire
- N_s : le nombre de points générés suivant chaque direction
- L_m : le nombre d'itérations à température constante

L'influence de N_s et L_m sur le nombre de calculs de la fonction objectif et la valeur minimale trouvée est investiguée en gardant les autres paramètres constants.

Un bon compromis entre le temps d'exécution et la valeur optimale de la fonction objectif est atteint pour N_s variant de 7 à 15 et L_m variant de 10 à 20. Le produit $N_s \cdot L_m \cdot n$ représente le nombre de points générés à température constante. Ainsi, son augmentation permet une meilleure recherche mais pénalise le temps d'optimisation.

Les paramètres L_m et N_s sont maintenant fixés à 10, chacun, et l'influence du coefficient de réduction de température rt est analysé. Après une variation entre 0.6 et 0.99, les valeurs conduisant à des bons résultats sont comprises entre 0.85 et 0.92. La valeur de la température initiale est à ajuster avec l'intervalle de variation de la fonction objectif sur le domaine de recherche comme le montre (II.64). Dans le cas des fonctions tests, elle est choisie égale à 100.

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale
L_m	10	20
N_s	7	15
rt	0.85	0.92
T_0	100	

Tab. III.2. Intervalles de variation des paramètres du recuit simulé à pas tabulé

Recuit simulé à pas ajusté

Les paramètres influents pour RS+PA sont les suivants :

- N_e : le nombre maximum de cycles consécutifs sans amélioration de la fonction objectif.
- ε : rapport entre le pas minimum autorisé et le pas initial

Afin de trouver des valeurs correctes pour les paramètres, un processus de recherche est exécuté successivement. Pour chaque paramètre, un intervalle de recherche est défini et la meilleure valeur est trouvée, les autres paramètres étant fixés à leur valeur optimale. Le tableau III.3 donne les meilleures valeurs des paramètres de contrôle et l'intervalle de variation choisi. Le paramètre ε a été choisi égal à 0.008, ce qui donne un bon compromis entre la durée de calcul et la qualité de la solution. La valeur de N_s a été prise égale à 10 et N_e est pris égal à 5.

paramètres	meilleur	minimum	maximum
ε	0.008	0.006	0.1
N_s	10	5	15
N_e	5	2	6

Tab. III.3. Intervalles de variation des paramètres de l'algorithme du recuit simulé à pas ajusté

Recherche taboue de Hu

Les paramètres de RTHu sont :

- N_a : nombre de subdivisions du vecteur pas et c'est également la taille de la liste taboue
- N_n : taille de voisinage.

L'influence de N_n est étudiée en gardant N_a et N_e constants. Les valeurs acceptables de N_n sont comprises entre 7 et 15. N_n est ensuite fixé à 10 et N_a subit des variations. Une valeur comprise entre 6 et 10 est convenable.

Le nombre de vecteurs pas dépend des dimensions de l'espace de recherche. Il est choisi de telle sorte que le plus petit pas soit supérieur ou égal à la précision souhaitée.

Paramètres	Valeur minimale	Valeur maximale
N_a	6	10
N_n	7	15

Tab. III.4. Intervalles de variation des paramètres de RTHu

Recherche taboue universelle

Les paramètres supplémentaires de RTU par rapport à RTHu sont :

- N_{opt} : nombre maximal de cycles d'exploration.
- N_e : nombre de cycles sans amélioration de la fonction objectif.

La sensibilité de N_{opt} est étudiée. Les autres paramètres sont gardés constants et égaux aux meilleures valeurs trouvées pour RTHu. Son influence sur l'optimum trouvé est faible. La valeur optimale vaut 4 car il n'y a pas d'amélioration au-delà. Une valeur plus grande risque d'éloigner la recherche de l'optimum global, de la piéger dans un optimum local et d'entraîner une perte de temps. Une valeur de 1 permet de revenir à un fonctionnement identique à RTHu.

L'influence de N_e est également étudiée en laissant N_{opt} fixe à sa valeur optimale. Une variation entre 4 et 8 permet d'avoir des résultats convenables. La majorité des fonctions tests ont trouvé des meilleurs résultats avec une valeur égale à 4.

Paramètres	Valeur minimale	Valeur maximale
N_{opt}	4	
N_e	4	8

Tab. III.5. Intervalles de variation des paramètres de RTU

Nouvelle recherche taboue

Elle dépend uniquement des quatre paramètres de contrôle qui sont :

- N_p : nombre de points générés par itération qui est lié à β
- G : nombre maximum d'itération.
- α : précision relative souhaitée pour la localisation de l'optimum

La variation de N_p est réalisée en laissant G fixe. Un nombre petit de N_p risque de ne pas explorer tout l'espace et un nombre élevé risque d'augmenter le taux de rejet des points générés. Après une série d'essais, un intervalle de variation entre 10 et 30 peut être pris en considération.

L'influence de G sur l'optimum est étudiée en laissant N_p fixe et égal à 15. Une augmentation du nombre d'itérations G permet d'avoir une meilleure précision, mais elle augmente le nombre d'évaluations de la fonction objectif. Une variation de G entre 15 et 150 peut être envisagée. Le paramètre β est dépendant des autres paramètres selon (II.83). Il peut plus judicieux de fixer β que N_p car sa valeur est moins dépendante du problème traité, notamment le nombre de variables.

Paramètres	Valeurs minimales	Valeurs maximales
N_p	10	30
G	15	150
α	0.00001	

Tab. III.6. Intervalles de variation des paramètres de NRT

Conclusion

Le choix de la valeur des paramètres de contrôle d'un algorithme est délicat. Des fonctions tests ont été utilisées pour étudier leur influence. Le temps de calcul de ces fonctions est faible, et un réglage des paramètres est fait rapidement. Des intervalles de variation et parfois des valeurs optimales des paramètres de contrôle sont trouvés. Ils seront utilisés et éventuellement adaptés pour l'application des méthodes stochastiques à l'optimisation des problèmes en électrotechnique.

III.3. Optimisation des dispositifs électrotechniques

Les divers algorithmes présentés dans la partie II sont appliqués et comparés sur les dispositifs électromagnétiques détaillés en partie I. Les critères retenus pour classer les méthodes d'optimisation sont :

- le nombre d'évaluations de la fonction objectif pour atteindre l'optimum
- la valeur de la fonction objectif à l'optimum
- la distance euclidienne entre l'optimum trouvé et l'optimum global lorsque ce dernier est connu

Pour les méthodes stochastiques, il est nécessaire de procéder à plusieurs exécutions des algorithmes car les résultats ne sont jamais les mêmes de part les procédures aléatoires utilisées. Une analyse statistique est alors faite avec une dizaine de répétitions. La moyenne, le meilleur, le moins bon et l'écart type des résultats sont présentés.

III.3.1. Moteur à courant continu sans balai

Ce problème d'optimisation est traité avec une approche de type « boîte noire » c'est-à-dire un système de structure inconnue possédant des entrées et des sorties mais aucune information sur les équations liant les sorties aux entrées, ni sur leurs dérivées exactes. Ce modèle a déjà été optimisé par certaines méthodes déterministes [HAJ 01] [BRI 98] [BRI 00]. Ces résultats seront comparés à ceux obtenus par les méthodes stochastiques implantées dans Sophemis et à la méthode PQS disponible dans le logiciel Pro@design [WUR 96] [FAN 99].

Méthodes déterministes

L'optimisation est réalisée par différentes méthodes déterministes (PGP, GC, BFGS, Powell) en utilisant plusieurs points de départ. Les coordonnées de ces points sont présentées dans le tableau III.7. Les résultats des optimisations sont donnés dans le tableau III.8. Il est possible de faire plusieurs remarques.

Premièrement, les méthodes déterministes du premier ordre n'atteignent que des optimums locaux. Ces méthodes ont certainement échoué car le gradient est calculé par la technique des différences finies. Les meilleurs résultats sont obtenus en partant du point numéro cinq.

Deuxièmement, la méthode de Powell atteint un optimum supposé global. Sur les cinq points initiaux choisis, trois atteignent ce point optimal. L'utilisation des points initiaux

multiples semble donc indispensable pour atteindre l'optimum global mais ne fournit, pour autant, aucune garantie d'y converger systématiquement.

Pour confirmer la localisation de l'optimum global, une grille de dimension 5 est faite en divisant l'intervalle de variation de chaque paramètre en 100 parties égales. Les 100^5 dimensionnements analytiques prennent plusieurs jours mais donnent un maximum avec une précision de 1 % sur les paramètres. On peut noter que la méthode de Powell a trouvé un meilleur point en relativement peu de temps. Le temps est exprimé en nombre d'exécutions du programme de dimensionnement.

<i>Nom</i>	<i>Unité</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
D_s	<i>mm</i>	240	170	300	300	300
δ	<i>A/mm²</i>	3.5	4.5	3.0	4.5	3.0
B_d	<i>T</i>	1.35	1.6	1.0	1.0	1.6
B_e	<i>T</i>	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63
B_{cs}	<i>T</i>	1.1	1.4	0.7	0.7	1.4

Tab. III.7. Paramètres de conception et points initiaux

<i>Méthode</i>	<i>Temps</i>	<i>Points</i>	η	D_s	B_e	B_d	B_{cs}	δ
<i>Unité</i>	#	#	%	<i>mm</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>A/mm²</i>
<i>PGP</i>	116x5	5	94.42	183	0.73	1.63	1.45	3.10
<i>GC</i>	96x5	5	94.50	185	0.76	1.63	1.45	3.10
<i>BFGS</i>	93x5	5	94.50	185	0.76	1.63	1.45	3.10
<i>Powell</i>	2675x5	1, 3, 5	94.69	191	0.72	1.80	1.44	2.66
<i>Grille</i>	100^5	-	94.62	184	0.76	1.79	0.99	3.00

Tab. III.8. Résultats d'optimisation obtenus par les méthodes déterministes

La méthode PQS s'est trouvée confrontée à deux difficultés et des modifications du modèle et du cahier des charges ont dû être faites. Premièrement, le nombre total de conducteurs est devenu une variable continue. Initialement, c'était une variable discrète car arrondie à un multiple du nombre total d'encoches. La solution obtenue ne sera donc pas réalisable. Actuellement, le logiciel CDI-Optimiser est en cours de développement dans l'équipe CDI du LEG. Il est capable de gérer des variables continues comme discrètes. Avec ce logiciel, le rendement trouvé est légèrement inférieur mais le bobinage de la solution trouvée est réalisable, il est de 94.739 %. Deuxièmement, le discriminant est remplacé par sa valeur absolue après avoir ajouté une contrainte lui imposant d'être positif. En pratique, la

méthode PQS calcule à chaque itération une solution à partir d'une approximation linéaire des contraintes. Ainsi, une solution intermédiaire peut ne pas vérifier une contrainte et entraîner un arrêt du programme dans le cas du discriminant utilisé pour calculer la hauteur d'encoche.

L'optimisation avec la méthode PQS a été lancée en utilisant cinq points initiaux dont les coordonnées sont données en tableau III.7. Les résultats d'optimisation obtenus en prenant le nombre total de conducteur comme variable continue sont affichés dans le tableau III.9. Trois points ont conduit au même optimum. Le rendement est le plus élevé et les contraintes sur le poids, le diamètre intérieur, l'induction magnétique dans les dents et le courant démagnétisant sont à leurs valeurs extrêmes. Les optimisations conduites à partir des deux autres points ont convergé vers une solution assez différente avec un rendement moindre. Il s'agit d'un minimum local.

Méthode	Temps	Points	η	D	B_e	B_d	B_{cs}	δ
Unité	#	#	%	mm	T	T	T	A/mm ²
PQS	1230	1, 4	94.625	186.6	0.63	1.8	1.507	2.47
PQS	340	2, 3, 5	94.773	186.3	0.72	1.8	1.348	2.59

Tab. III.9. Résultats d'optimisation obtenus avec la méthode PQS

Le problème à 10 paramètres est traité uniquement par la méthode PQS. Elle atteint le même optimum pour les cinq points initiaux cités précédemment. Les résultats sont affichés dans le tableau III.10.

Méthode	η	D_s	B_e	B_d	B_{cs}	δ	e	L_m	M	B_{cr}	r_{lrls}	temps
Unité	%	mm	T	T	T	A/mm ²	mm	mm	T	T	-	#
PQS	95.22	179.46	0.7	1.8	1.18	2.4	2	51.2	1.2	1.4	1.2	660

Tab. III.10. Résultats d'optimisation pour le problème à 10 paramètres

Méthodes stochastiques

Le tableau III.11. présente les résultats des différentes méthodes stochastiques appliquées pour l'optimisation de ce moteur. Chaque méthode d'optimisation a été testée dix fois. Une analyse de la variance de la fonction objective est donnée dans le tableau III.12.

Le meilleur rendement pour les AG, est obtenu pour une sélection par roue de loterie, une stratégie élitiste, un codage binaire avec 32 bits par variable, une probabilité de croisement égale à 0.85, une probabilité de mutation égale à 0.005 et une taille de population égale à 1000. L'algorithme s'arrête après 31 générations mais la convergence vers la solution est atteinte en 24 générations.

Les meilleurs résultats de RS+PT sont obtenus avec une température initiale T_0 de 100. Un total de 30 mouvements aléatoires autour de la configuration courante sont projetés pour chaque direction ($N_s=30$). La longueur de la chaîne de Markov L_m est 10. L'algorithme est arrêté après 18 réductions de température.

Les meilleurs résultats de RTHu et RTU sont obtenus avec une taille de voisinage N_n égale à 20 et une liste taboue contenant les 10 derniers pas ($N_a=10$). L'optimisation s'arrête s'il n'y a aucune amélioration de la fonction objectif pendant les 4 derniers cycles ($N_e=4$). Les meilleurs résultats de NRT sont obtenus pour $N_p = 20$ et $G = 18$.

<i>Méthode</i>	<i>Temps</i>	η	D_s	B_e	B_d	B_{cs}	δ
<i>Unité</i>	#	%	mm	T	T	T	A/mm ²
AG	31000	94.69	185.7	0.73	1.76	1.22	2.75
RS+PT	18601	94.66	190.8	0.73	1.71	1.47	2.69
RTHu	8688	94.74	185.8	0.72	1.78	1.33	2.66
RTU	2251	94.71	185.0	0.73	1.78	1.16	2.75
NRT	360	94.75	183.7	0.75	1.79	1.25	2.67

Tab. III.11. Meilleurs moteurs obtenus avec les méthodes stochastiques

<i>Méthode</i>	<i>Meilleur</i>	<i>Moins bon</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
AG	94.69	94.63	94.68	0.0202
RS+PT	94.66	94.07	94.45	0.1699
RTHu	94.74	94.39	94.66	0.1000
RTU	94.71	94.60	94.65	0.0397
NRT	94.75	94.43	94.58	0.1000

Tab. III.12. Analyse de la variance des résultats

Parmi les méthodes stochastiques, les recherches taboues donnent de meilleurs résultats par rapport aux méthodes AG et RS+PT. La méthode NRT réussit à être la meilleure et la plus rapide. Toutes les méthodes stochastiques donnent des résultats meilleurs que l'optimum local rencontré avec PQS en partant des points 1 et 4, confirmant ainsi leur capacité à localiser l'optimum global.

RTHu et NRT donnent les deux meilleurs résultats, mais NRT est plus rapide que RTHu. Les méthodes AG et RTU sont les plus robustes car leurs écarts types sont faibles mais leurs meilleurs résultats sont inférieurs.

La figure III.6 montre la variation du meilleur rendement en fonction du nombre d'évaluations pour toutes les méthodes d'optimisation stochastiques.

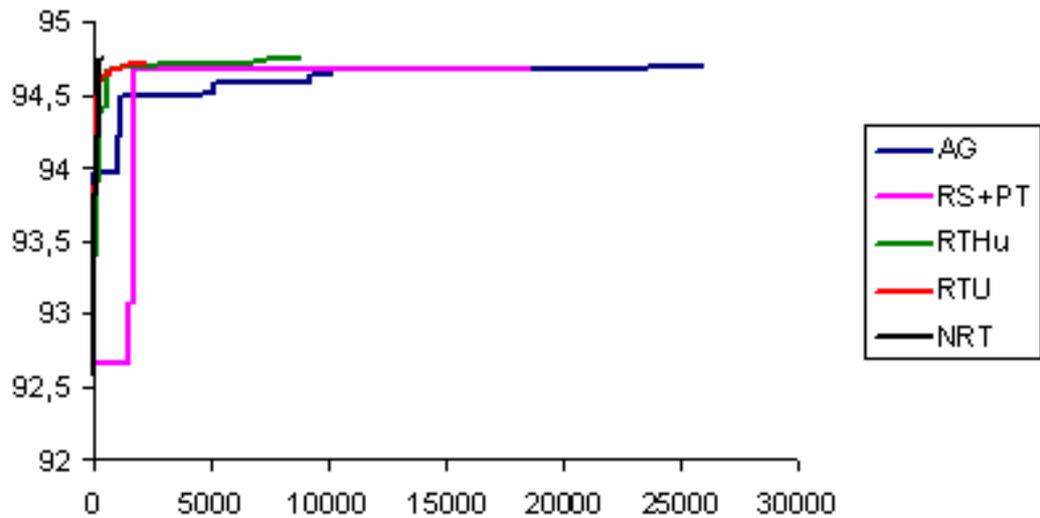


Fig. III.6. Meilleur rendement en fonction du nombre d'évaluations

Afin d'illustrer visuellement ces résultats, les formes optimales trouvées avec NRT, RTHu, GC et PQS sont dessinées en fig. III.7.

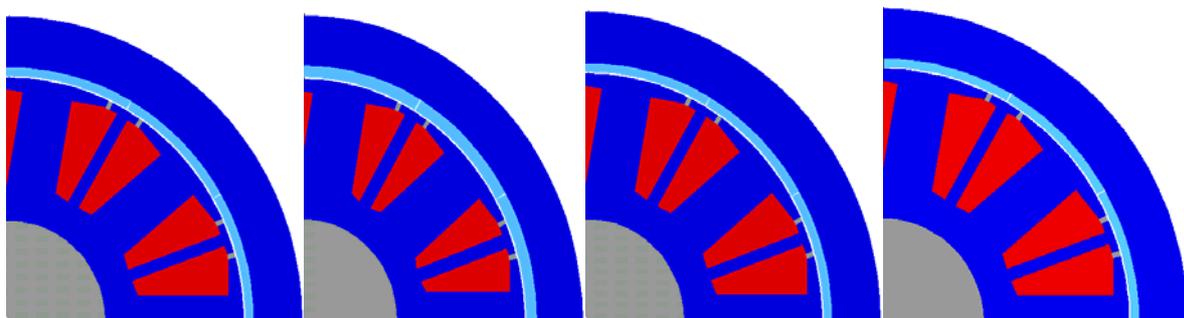


Fig. III.7. Formes optimales trouvées par HuRT (a), CG (b), NRT (c) et SQP (d)

Les hauteurs des aimant et les dents de forme optimale (b) sont plus larges donc la machine est plus saturée. Pour les autres formes optimales, il y a une différence claire à l'œil nu.

III.3.2. Transformateur triphasé de puissance

L'optimisation des cahiers des charges présentés dans la partie I est réalisée en utilisant les différentes méthodes stochastiques. Leurs résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode PQS.

Résultats d'optimisation

Les résultats d'optimisation sont présentés dans les tableaux suivants, on peut faire plusieurs remarques.

	Unité	AG	RS+PT	RTHu	RTU	NRT	PQS	NRT+PQS
Temps	#	7440	4462	5292	4501	916	85	961
Coût	MF	1.902105	2.500000	1.792156	1.945400	1.702800	1.700978	1.700960
J	A/mm ²	1.361880	2.666533	2.540998	2.183557	1.759526	1.79655	1.781310
N1	-	613.8378	966.9830	401.7250	592.7438	373.5186	341.7602	343.1870
Bt	T	1.381637	1.778105	1.541811	1.444016	1.585682	1.570868	1.570920
h	m	3.317438	6.662738	1.938482	3.616964	1.937020	1.729907	1.744390
X1	Ω	11.81509	7.18097	7.19940	7.19993	7.08510	7.20484	7.20006

Tab. III.13. Résultats d'optimisation du CdC1

Le CdC1 comprend quatre paramètres d'entrée et une contrainte égalité. On remarque que certaines méthodes stochastiques (AG, NRT, RS) ne parviennent pas à respecter cette contrainte. SQP trouve le meilleur coût et respecte la contrainte, NRT trouve le second meilleur coût mais ne respecte pas la contrainte, RTHu arrive en troisième position et vérifie la contrainte.

	Unité	AG	RS+PT	RTHu	RTU	NRT	PQS	NRT+PQS
Temps	#	9300	20161	9376	4501	766	85	841
Coût	MF	1.736879	1.705200	1.681200	1.681261	1.684400	1.681224	1.681220
J	A/mm ²	2.308743	1.557560	1.771156	1.770141	1.678086	1.772285	1.772480
N1	-	385.3330	335.4701	348.9981	314.3175	356.4456	349.3426	349.2760
Bt	T	1.628511	1.638687	1.571485	1.570113	1.557941	1.571959	1.57195
h	m	1.756145	1.642521	1.595792	1.594155	1.697447	1.598201	1.59771
X1	Ω	7.85912	8.05130	8.64360	8.64005	8.24890	8.64002	8.64000

Tab. III.14. Résultats d'optimisation du CdC2

Le CdC2 montre que les méthodes stochastiques parviennent à gérer correctement une contrainte inégalité. Les méthodes de recherche taboue (RTHu, RTU, NRT) et la méthode SQP donnent des résultats très similaires. RTHu est légèrement meilleur.

	Unité	AG	RS+PT	RTHu	RTU	NRT	PQS	NRT+PQS
Temps	#	23050	6364	22178	4501	1516	55	1551
Coût	MF	1.689730	1.710297	1.685800	1.685400	1.687900	1.686163	1.686160
J	A/mm ²	1.852623	1.659873	1.849580	1.847297	1.877992	1.849623	1.849900
N1	-	372.3200	294.0253	322.4588	322.3279	324.7165	321.5562	321.5700
Bt	T	1.653000	1.504240	1.572060	1.571500	1.555253	1.572358	1.572370
h	m	1.263770	1.322866	1.399990	1.400000	1.398778	1.400000	1.400000
X1	Ω	14.14200	8.40330	8.69320	8.69290	8.68180	8.64000	8.64000

Tab. III.15. Résultats d'optimisation du CdC3

Le CdC3 montre les mêmes tendances que CdC2 mais la contrainte n'est pas tout à fait respectée alors que PQS la respecte précisément. La précision avec laquelle les méthodes stochastiques vérifient les contraintes est donnée par le coefficient de pénalité. Une plus forte valeur conduira à un meilleur respect de la contrainte.

	Unité	AG	RS+PT	RTHu	RTU	NRT	PQS	NRT+PQS
Temps	#	12980	26881	7621	3001	766	35	801
Coût	MF	1.834000	1.857600	1.853650	1.868800	1.796600	1.843537	1.843540
J	A/mm ²	2.809934	3.036888	2.961097	3.045217	2.576486	2.918502	2918460
N1	-	289.5500	292.4920	288.6041	277.5181	312.4113	297.23364	297.2300
Bt	T	1.532244	1.625700	1.544986	1.565330	1.583718	1.568368	1.568280
h	m	1.532244	1.302378	1.339800	1.252519	1.368966	1.400000	1.400000
X1	Ω	5.74580	5.99170	5.76968	5.76450	7.01950	5.76000	5.76000
A	m	0.0412	0.0407	0.0399	0.0400	0.0460	0.0399	0.0400

Tab. III.16. Résultats d'optimisation du CdC4

Pour le CdC4, toutes les méthodes donnent un coût similaire. Lorsque les contraintes ne sont pas rigoureusement respectées, NRT et AG trouvent un coût plus faible.

Dans le CdC5, on constate que la longueur totale du transformateur est la contrainte la plus critique. En effet, PQS la fixe à sa valeur maximale alors que les méthodes stochastiques la dépassent légèrement.

	Unité	AG	RS	RTHu	RTU	NRT	PQS	NRT+PQS
Temps	#	20500	10081	14720	4501	1516	40	1556
Coût	MF	1.683002	2.146964	2.237730	2.235575	2.220653	2.126357	2.126360
J	A/mm ²	1.690826	4.267822	4.499181	4.407013	4.478610	3.931110	3.931110
N1	-	312.3192	340.2441	379.2857	398.1845	403.7090	398.1530	398.1530
Bt	T	1.615104	1.82446	1.898565	1.899639	1.870661	1.890492	1.890490
h	m	1.207286	1.348480	1.250200	1.349440	1.399939	1.400000	1.400000
X1	Ω	10.83977	6.46609	8.65027	8.65149	8.43912	8.64000	8.64000
A	m	0.0841	0.0325	0.0370	0.0368	0.0354	0.0397	0.0397
Ltt	m	4.0138	3.1870	3.1061	3.0602	3.0446	3.0000	3.0000

Tab. III.17. Résultats d'optimisation du CdC5

On voit sur cette optimisation que les AG peinent à affiner la recherche en présence de contraintes. En effet, dans le cas d'un codage binaire des gènes, deux parents proches peuvent générer des enfants éloignés. Si cette technique favorise l'exploration, elle pénalise l'intensification, c'est-à-dire la précision de l'optimum. Les méthodes de recherche taboue se comportent bien, RTHu étant globalement meilleur alors que NRT est plus rapide.

La solution d'un problème d'optimisation obtenue par les méthodes déterministes dépend d'une façon générale du point de départ car ces méthodes font la recherche du minimum à partir de l'information donnée par le calcul du gradient, lequel est évalué au point courant. Ainsi, si la direction donnée par le gradient conduit vers un minimum local, l'algorithme ne s'arrêtera pas sur le minimum global. Obtenir le minimum global ne peut être que le fruit d'une heureuse coïncidence. Les méthodes stochastiques ont deux grands avantages, la capacité à trouver le minimum global et l'absence de calcul des dérivées. L'inconvénient majeur est l'effort de calcul qu'il faut fournir dans la plupart des cas pour arriver à des solutions précises. On peut alors envisager le couplage entre méthodes stochastiques et déterministes pour tirer parti des avantages respectifs :

- Un algorithme globalement convergent (capacité de trouver le minimum global)
- Précision de la solution et respect des contraintes.

Pour vérifier que le transformateur a un seul optimum global pour chaque CdC, l'optimum trouvé par une méthode stochastique est pris comme point initial pour la méthode PQS, les mêmes optimums sont obtenus. Le transformateur a donc un seul optimum pour chaque cahier de charge. L'optimum trouvé est global. D'autres points initiaux pris aléatoirement ont confirmé la convexité du problème du transformateur.

De ce fait PQS surpasse les méthodes stochastiques et l'utilisation conjointe d'une méthode stochastique et de PQS n'apporte aucune amélioration par rapport à PQS.

III.3.3. Bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie

Modèle éléments finis

Les figures III.8 et III.9 donnent un aperçu du maillage construit sur la géométrie modélisée du dispositif.

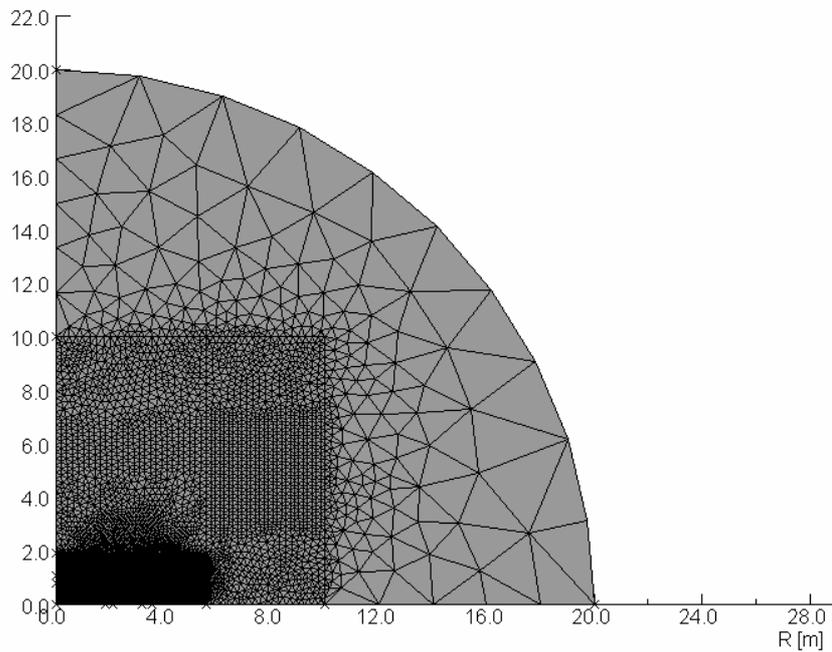


Fig. III.8. Vue du modèle éléments finis du SMES.

La propriété d'axisymétrie du système a été prise en compte dans la modélisation. De plus, le plan $z = 0$ est aussi un plan de symétrie. Seule la partie correspondant aux valeurs positives de z est dessinée.

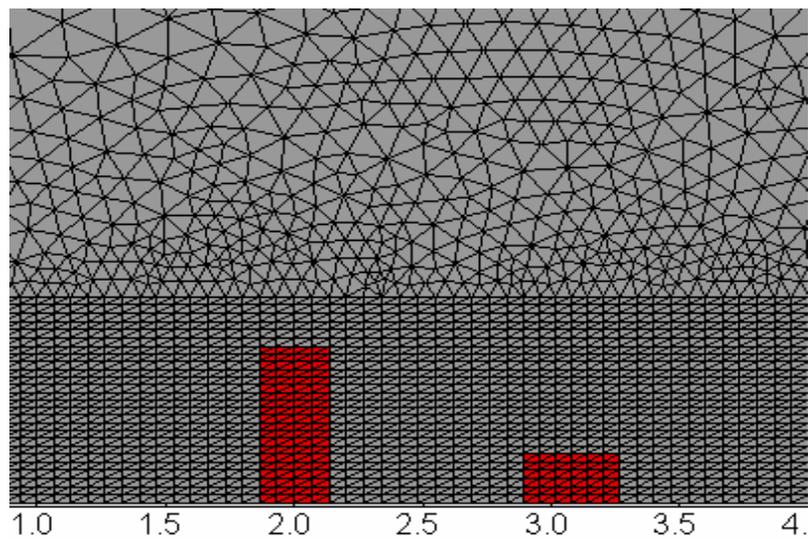


Fig. III.9 Agrandissement sur les bobines du SMES

Problèmes à trois paramètres

Un optimum global de ce problème d'optimisation a été fourni dans [TEAM 22a] en calculant la fonction objectif pour l'ensemble des combinaisons des valeurs discrètes des paramètres. Les caractéristiques de ce point sont données dans le tableau III.18.

	R_2	h_{22}	d_2	OF	B_{fuites}^2	E
<i>Unité</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	-	$10^{-6} T^2$	$10^6 J$
<i>IGTE</i>	3.08	0.239	0.349	0.08802	7.9138	180.0277
<i>Opera 2D</i>				0.0864	7.6955	179.8290

Tab. III.18. Valeurs des paramètres et des réponses au meilleur point connu.

La modélisation éléments finis utilisée ici n'étant pas la même que celle prise dans [TEAM 22a], le calcul de la fonction objectif au point optimum n'a pas donné la même valeur, ce qui illustre l'existence d'une erreur expérimentale sur les simulations.

<i>Critère</i>	OF	B_{fuites}^2	E	B_{max}	R_2	h_{22}	d_2	<i>dist</i>	<i>Temps</i>
<i>Unité</i>	-	$10^{-6} T^2$	$10^6 J$	T	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	#
<i>Itérations</i>	0.0901	7.668	179.19	4.722	3.04	0.240	0.386	0.078	2400
<i>Meilleur</i>	0.08877	0.756	179.14	4.590	3.081	0.543	0.346	0.307	1400
<i>PERL</i>	0.08658	0.779	180.02	4.677	3.090	0.478	0.389	0.289	540
<i>PERHL</i>	0.08776	0.787	180.06	4.487	3.103	0.562	0.329	0.363	2480
<i>CB</i>	0.09766	0.749	177.40	4.501	3.069	0.586	0.319	0.397	2160
<i>SR</i>	0.08617	0.775	180.02	4.715	3.084	0.476	0.395	0.283	945

Tab. III.19. Les dispositifs optimaux trouvés avec les différents critères d'arrêt

Les dispositifs optimaux trouvés par les AG avec tous les critères d'arrêt sont récapitulés dans le tableau III.19. Le temps est exprimé en nombre d'évaluations de la fonction objectif. Le nouveau critère d'arrêt, basé sur la méthode de surface de réponse (SR), donne les meilleurs résultats. La densité maximum de flux dans les enroulements est inférieure à 4.92 T (tableau III.19), ainsi la condition de supraconductivité est remplie. Le critère de performance en ligne prend le moins de temps. Chaque méthode d'optimisation est testée dix fois. Les meilleures valeurs, les moins bonnes, les moyennes et les écarts types de la fonction objectif sont donnés dans le tableau III.20. Le nouveau critère d'arrêt a un écart type inférieur à celui de la performance en ligne, ce qui implique que son résultat est plus stable. *dist* représente la distance euclidienne entre le point connu et les optimums trouvés. Les valeurs sont grandes, elles expriment que ces optimums sont loin de l'optimum connu. Ce fait

est typique de ce cas test pour lequel de nombreux optimums se situent dans une vallée étroite et très longue [VIV 02].

Le critère d'arrêt basé sur la convergence des bits n'est pas efficace et seulement 85 % des individus partagent le même code génétique.

Le problème du SMES a été considéré avec un réglage des probabilités de croisement et de mutation à 0.85 et 0.005, respectivement. La sélection est faite par roue de loterie, le croisement se fait en deux points et la mutation est binaire. Un codage binaire est employé avec une longueur de gène de 32 bits. Une stratégie élitiste est utilisée. La taille de population est égale à 40 et 30 % des meilleurs individus sont utilisés pour construire la surface de réponse. Lorsque le nombre maximum d'itérations est fixé, sa valeur est 60.

<i>Critère</i>	<i>meilleur</i>	<i>moins bon</i>	<i>moyenne</i>	<i>écart type</i>
<i>Itérations</i>	<i>0.0901</i>	<i>0.1308</i>	<i>0.1060</i>	<i>0.01230</i>
<i>Meilleur</i>	<i>0.08877</i>	<i>0.14063</i>	<i>0.10553</i>	<i>0.01660</i>
<i>PERL</i>	<i>0.08658</i>	<i>0.11131</i>	<i>0.09779</i>	<i>0.00844</i>
<i>PERHL</i>	<i>0.08776</i>	<i>0.13231</i>	<i>0.10140</i>	<i>0.01438</i>
<i>CB</i>	<i>0.09766</i>	<i>0.11014</i>	<i>0.10239</i>	<i>0.00510</i>
<i>SR</i>	<i>0.08617</i>	<i>0.10770</i>	<i>0.09460</i>	<i>0.00644</i>

Tab. III.20. Analyse de la variance pour les différents critères d'arrêt

Le résultat obtenu par le nouveau critère d'arrêt confirme son objectif principal d'éviter la perte de temps et d'améliorer les résultats.

L'optimisation par les autres algorithmes stochastiques : recuit simulé et recherche taboue est également réalisée, les résultats sont affichées dans le tableau III.21.

Les deux méthodes stochastiques sous leurs formes originales (RS+PT, RTHu) mènent à un grand nombre d'évaluations de la fonction objectif et à une précision faible pour RS+PT. Les versions améliorées de ces algorithmes stochastiques (RS+PA, NRT) sont sensiblement plus rapides et plus précises. RS+PA est plus rapide et plus précis, avec 20% de temps en moins par rapport à RS. NRT atteint le même résultat que RTHu avec 50 % de gain en temps.

L'évolution de la fonction objectif pour les différentes méthodes stochastiques est présentée en fig. III.10. La densité de flux et les lignes de champs de la géométrie optimisée obtenue par NRT sont données en fig. III.11. On peut constater dans le tableau III.21 que la condition de supraconductivité, c.-à-d. $|B_{max}| \leq 4.92 T$ est vérifiée. Les valeurs de *dist* sont faibles. Les optimums trouvés sont proches de l'optimum connu.

Les algorithmes améliorés emploient moins de temps et fournissent de meilleures solutions que leurs versions originales.

Méthode	R_1	h_{22}	d_2	<i>dist</i>	<i>OF</i>	E	B_{fuites}^2	B_{max}	Temps
Unité	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	-	$10^6 J$	$10^{-6} T^2$	<i>T</i>	#
RS+PT	3.078	0.237	0.390	0.053	0.0870	179.36	7.590	4.716	5025
RS+PA	3.089	0.246	0.381	0.048	0.0864	179.95	7.790	4.893	859
RTHu	3.080	0.246	0.381	0.039	0.0864	179.79	7.670	4.693	3821
RTU	3.077	0.245	0.385	0.045	0.0868	179.75	7.700	4.717	901
NRT	3.083	0.254	0.368	0.034	0.0864	179.99	7.781	4.649	1800

Tab. III.21. Meilleurs résultats trouvés par les autres méthodes stochastiques

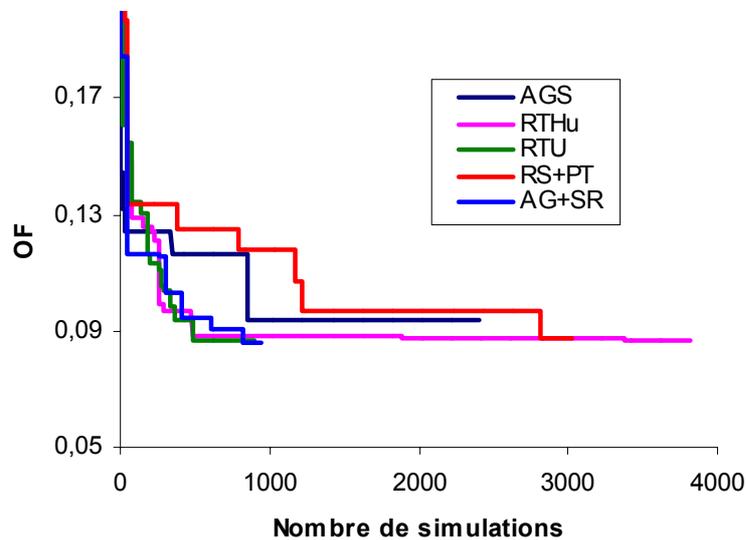


Fig. III.10. Evolution de la fonction objectif

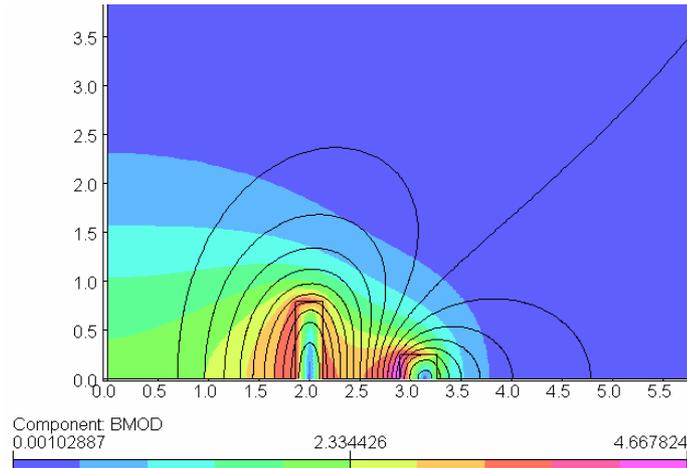


Fig. III.11. Densité de flux (BMOD) et lignes de champ pour la forme optimisée par NRT

Problème avec 8 paramètres

Les valeurs de la fonction objectif pour les optimums globaux trouvés en [TEAM 22b] et [ALO 98] sont différentes de celles calculées avec Opera2D. Les résultats sont affichés dans le tableau III.22 et seront utilisés comme références.

Méthode	unité	[TEAM 22b]	Opera2D	[ALO 98]	Opera2D
R_1	m	1.57		1.43	
R_2	m	2.01		2.02	
h_{12}	m	0.78		0.78	
h_{22}	m	1.42		1.41	
d_1	m	0.59		0.78	
d_2	m	0.25		0.18	
J_1	A/mm^2	17.33		12.29	
J_2	A/mm^2	-12.57		-18.01	
OF	10^{-3}	5.52	3.21	3.06	2.97
E	$10^{-6}J$	179.99	179.42	179.99	179.47
B_{fuites}	$10^{-10}T$	2.19	2.14	1.236	3.927

Tab. III.22. Valeurs des paramètres et des réponses aux meilleurs points connus

L'optimisation du SMES à 8 paramètres continus est réalisée avec les différentes méthodes stochastiques. Quelques problèmes se produisent. Ils sont liés à l'expansion élevée de l'espace de conception dû à l'augmentation du nombre de paramètres. Pour contourner ce problème, l'optimisation est réalisée en plusieurs étapes. A la première étape, une optimisation dans la totalité de l'espace de recherche est effectuée. Un optimum imprécis est trouvé. A la deuxième étape, l'intervalle de variation de chaque paramètre est divisé en deux

et centré autour de l'optimum courant. De nouveau, l'optimisation est relancée dans cet espace réduit. Ce processus est arrêté à la troisième étape car les résultats sont suffisamment bons. Ces derniers sont affichés dans le tableau III.23. Il présente les valeurs des paramètres de conception trouvées par les différents méthodes stochastiques, ainsi que la valeur de la fonction objectif et le nombre d'évaluations correspondant.

Les solutions obtenues sont éloignées les unes des autres. Ce fait montre qu'il est difficile de résoudre ce problème d'optimisation.

Méthode	Unité	AG	RS	RTHu	RTU	NRT
R_1	m	1.741	1.710	1.531	1.676	1.663
R_2	m	2.433	2.193	2.080	2.343	2.366
h_{12}	m	0.831	0.874	0.785	0.495	0.684
h_{22}	m	1.569	1.594	1.026	1.330	1.508
d_1	m	0.474	0.466	0.448	0.598	0.554
d_2	m	0.279	0.282	0.219	0.199	0.187
J_1	A/mm^2	16.975018	19.057034	22.222904	21.205688	17.604595
J_2	A/mm^2	-12.091162	-10.589057	-19.046944	-12.267098	-11.861226
$B_{max,1}$	T	5.13	5.43	5.97	6.22	5.49
$B_{max,2}$	T	4.58	4.73	5.56	4.14	3.6
$J_{max,1}$	A/mm^2	21.14	19.22	15.76	20.36	19.76
$J_{max,2}$	A/mm^2	24.66	23.69	18.35	27.47	30.94
$dist$	-	1.689	4.365	4.201	4.955	1.623
OF	10^{-3}	9.544	6.17	3.5	0.79	0.548
E	$10^6 J$	181.01	180.09	179.99	179.99	180.04
B_{fuites}	10^{-8}	5.98	5.54	3.17	0.699	0.288
$Temps$	#	3280	23650	4097	10501	1704

Tab. III.23. Résultats d'optimisation pour le problème avec 8 paramètres

Il est possible d'observer que les résultats sont éloignés les uns des autres au niveau de la valeur de la fonction objectif et des paramètres optimaux. La meilleure configuration a été obtenue par la méthode NRT.

En ce qui concerne le nombre d'évaluations de la fonction objectif, NRT a montré son avantage par rapport aux autres méthodes car le nombre de calculs par éléments finis demandé par ces dernières est environ deux à quatorze fois plus important.

$J_{max,j}$ est la densité de courant maximum dans la bobine j calculée à partir de $B_{max,j}$ et (I.35) pour respecter les conditions de supraconductivité. RTHu et RTU mènent à des résultats qui ne respectent pas ces conditions. Par conséquent, une pénalité devrait être ajoutée

à la fonction objectif pour garantir cette condition de supraconductivité. La contrainte qui évite le chevauchement des bobines est traitée par une pénalité radicale.

La figure III.12 présente la densité de flux et les lignes équipotentielles pour la configuration optimale trouvée par NRT.

Les résultats obtenus mettent en évidence une amélioration par rapport aux résultats de références. Ils montrent que l'algorithme NRT est fiable et peut être employé pour résoudre des problèmes d'optimisation en électrotechnique pour un nombre plus important de paramètres.

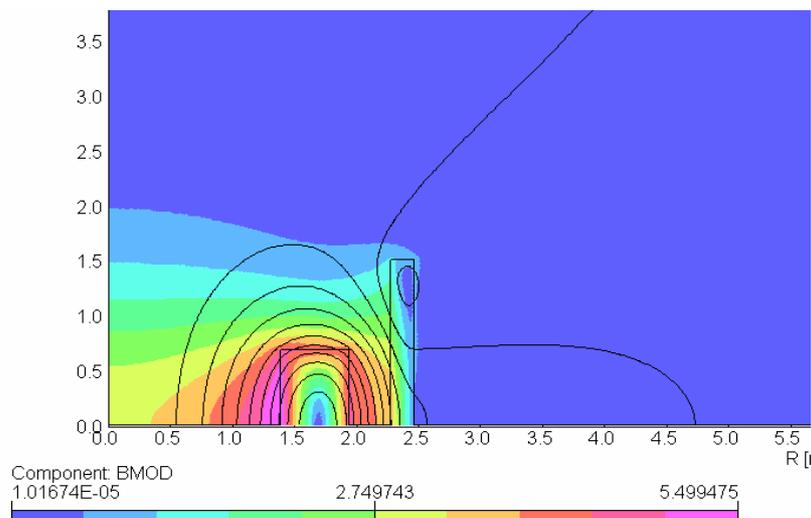


Fig. III.12. Densité de flux (BMOD) et lignes équipotentielles de la configuration optimale obtenue par NRT

III.3.4. Presse à aimant

Modèle éléments finis

La modélisation ne prend en compte qu'un quart de la machine de part les symétries. Les figures III.13 et III.14 montrent un aperçu du maillage.

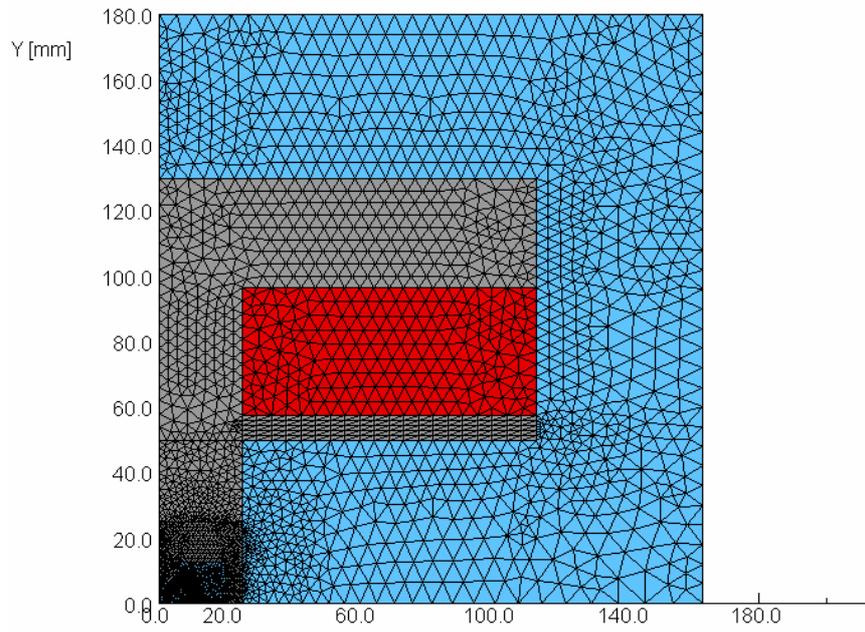


Fig. III.13. Vue générale du modèle éléments finis d'une presse à aimant

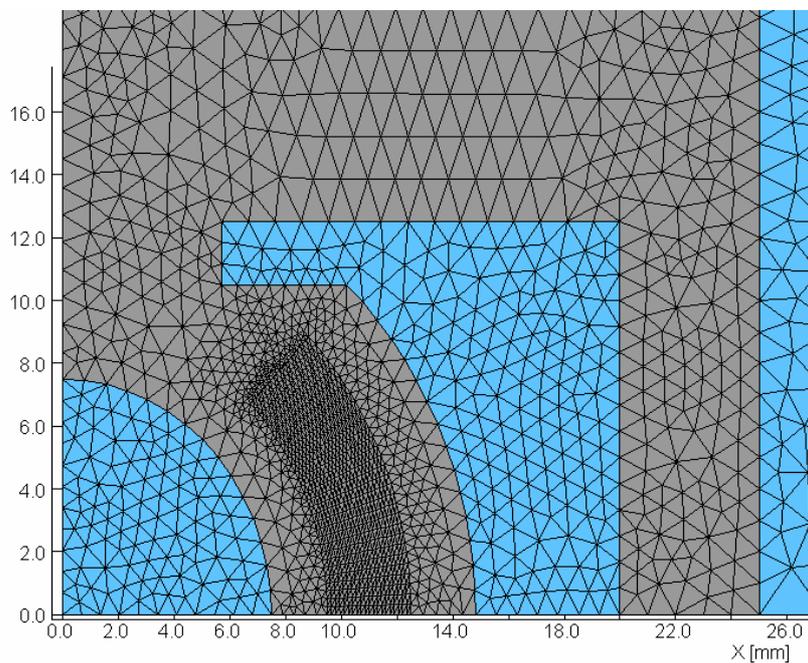


Fig. III.14 Vue rapprochée du modèle éléments finis de la presse à aimant

Résultats d'optimisation

L'optimisation est réalisée en utilisant les différentes méthodes stochastiques décrites dans la partie II. Ces résultats sont comparés entre eux et avec les meilleurs résultats obtenus par [COS 01] et [ALO 98b]. Les résultats de références sont affichés dans le tableau III.24.

	<i>OF</i>	<i>Temps</i>	R_1	L_2	L_3	L_4
<i>Unité</i>	10^{-4}	#	<i>mm</i>	<i>mm</i>	<i>mm</i>	<i>mm</i>
[ALO 98]	8.9200	2360	7.2877	13.9972	14.0000	14.6700
Opera2D	6.6152					
[COS 01]	2.1500	343	7.1675	14.0804	14.0000	14.3550
Opera2D	1.1499					

Tab. III.24. Paramètres optimaux obtenus par [COS 01] et [ALO 98b]

Le tableau III.25 présente les valeurs des paramètres de conception obtenus par différentes méthodes stochastiques, ainsi que la valeur de la fonction objectif et le nombre d'évaluations correspondant. Tous les résultats obtenus sont meilleurs que ceux obtenus par [ALO 98]. AG+ PERL est plus rapide que AG mais elle est plus mauvaise.

RTHu donne des résultats légèrement meilleurs que NRT, mais ce dernier utilise moins d'un tiers des évaluations de RTHu pour atteindre l'optimum. RTU est plus rapide que RTHu mais conduit à un moins bon résultat. Les autres méthodes stochastiques sont moins précises et plus lentes.

<i>Méthode</i>	<i>OF</i>	R_1	L_2	L_3	L_4	<i>Temps</i>
<i>Unité</i>	10^{-4}	<i>mm</i>	<i>mm</i>	<i>mm</i>	<i>mm</i>	#
AG	2.6861	7.29961	14.1739	14.001	14.326	3421
AG+PERL	3.5587	7.0124	13.726	14.010	14.193	2300
RS+PT	1.6223	7.22524	14.3223	14.110	14.306	2145
RTHu	0.5009	7.37807	14.6139	14.371	14.204	1513
RTU	1.0571	7.5487	14.9085	14.506	14.416	931
NRT	0.6482	7.25447	14.2949	14.292	14.058	511

Tab. III.25. Optimums obtenus par les différentes méthodes stochastiques

Chaque méthode d'optimisation est testée dix fois. Les meilleures valeurs, les moins bonnes, les moyennes et les écarts types de la fonction objectif sont donnés dans le tableau III.26. L'écart type de NRT est plus petit que celui de RTHu, donc NRT est plus robuste. La figure III.15 illustre la variation de la densité de flux dans la cavité le long de la ligne e-f. Elle montre que l'amplitude de la densité de flux de la forme optimale est presque égale à 0.35 T. La figure III.16 nous montre les lignes équipotentielles du dispositif initial (a) et optimal (b)

obtenu par la RTHu. Pour ce dernier dispositif, il est constaté que l'induction magnétique dans la cavité est radiale. La forme optimisée est considérablement différente de celle initiale.

Toutes les stratégies stochastiques réussissent à trouver une solution meilleure que celle obtenu par [ALO 98b]. Seuls, les trois méthodes de recherche taboue ont trouvé de meilleurs résultats que ceux obtenus par [COS 01].

<i>Méthode</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Meilleur</i>	<i>Moins bon</i>	<i>Ecart type</i>
<i>Unité</i>	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
<i>AG</i>	7.215	2.6861	19.181	6.391
<i>AG+PERL</i>	4.340	3.5587	12.235	2.3345
<i>RS+PT</i>	13.874	1.6223	32.433	12.961
<i>RTHu</i>	8.379	0.5009	34.594	12.127
<i>RTU</i>	1.666	1.0501	2.926	0.733
<i>NRT</i>	2.397	0.6482	5.770	1.741

Tab. III.26. Meilleure valeur, moins bonne, valeur moyenne et écart type de la fonction objectif pour toutes les méthodes stochastiques

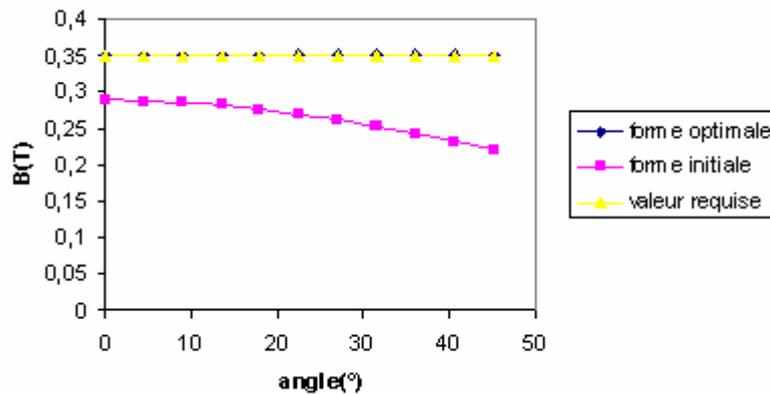
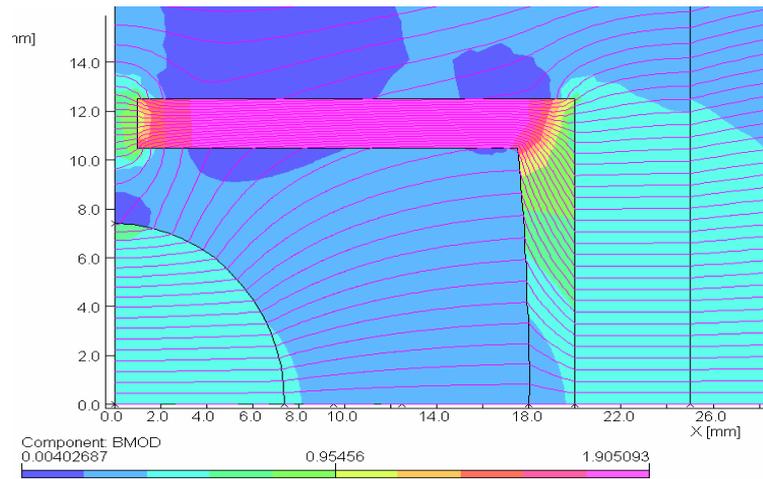
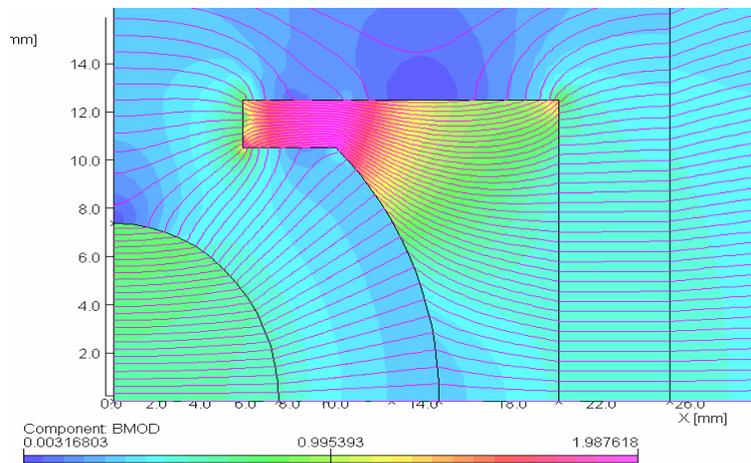


Fig. III.15. Valeur de la densité de flux radiale le long de la ligne e-f



(a) Forme initiale



(b) Forme optimisée

Fig. III.16. Densité de flux (BMOD) et les lignes équipotentielles pour les configurations initiale (a) et optimale (b) obtenue par RTHu

III.4. Conclusion

Ce chapitre illustre le comportement des méthodes d'optimisation développées tout au long de ce travail pour la résolution des problèmes de conception en électrotechnique.

Leurs performances dépendent de quelques paramètres de contrôle qui doivent être accordés pour obtenir de meilleures performances. La sensibilité de ces paramètres a été étudiée et un intervalle de variation ou une valeur optimale a été défini pour tous les paramètres de chaque algorithme.

Cette étude a présenté l'optimisation d'un moteur à courant continu sans balai par cinq méthodes d'optimisation déterministes (plus grande pente, gradient conjugué, quasi-Newton, Powell et SQP) et cinq méthodes stochastiques (AG, RS+PT, RTHu, RTU, NRT). Ce problème possède notamment certaines difficultés dues à la présence de contraintes fortes liées à la faisabilité. La méthode SQP avec des points de départs multiples donne le meilleur résultat. Les autres méthodes déterministes à base de gradient ont échoué, ce qui montre la nécessité de calculer le gradient de façon exacte. Toutes les méthodes stochastiques donnent des bons résultats et ne nécessitent aucun point initial mais les méthodes de recherche taboue sont plus performantes. Parmi ces méthodes, NRT conduit au meilleur rendement avec un temps bien inférieur aux autres méthodes stochastiques.

L'optimisation d'un transformateur triphasé par les méthodes stochastiques et la méthode SQP est également réalisée.

Les deux problèmes analytiques de pré-dimensionnement, en apparence fort semblables, se sont montrés très différents lors des optimisations. En effet, le transformateur semble posséder un seul optimum alors que le moteur est un problème multimodal. De plus, le fait qu'un modèle soit constitué d'équations analytiques n'est pas suffisant pour qu'il soit traité par une méthode déterministe du premier ordre : toutes les équations doivent être explicites, continues et dérivables. Ainsi, la façon d'écrire un modèle de dimensionnement est conditionnée par la méthode d'optimisation qui sera employée pour le résoudre.

Le choix de la méthode d'optimisation dépend du problème traité et des résultats attendus. Les méthodes déterministes se sont montrées plus précises et plus rapides que les méthodes stochastiques pour les problèmes d'optimisation non-linéaires dérivables et à optimum unique. Elles ont une bonne capacité à gérer les contraintes mais risquent d'être piégées par des optimums locaux.

Les méthodes stochastiques ont une bonne probabilité de trouver l'optimum global, mais elles sont peu précises dans sa localisation et le respect des contraintes. De plus, elles

nécessitent un temps de calcul important. D'où l'intérêt de mettre en œuvre une stratégie mixte proposant d'exploiter cette complémentarité. Les méthodes stochastiques globales trouvent le voisinage de l'optimum alors que les méthodes déterministes locales le localisent précisément, notamment en présence de contraintes fortes. Ces algorithmes présentent l'inconvénient de nécessiter le calcul de ces dérivés, dans la seconde phase du processus d'optimisation. Néanmoins, la possibilité de trouver le minimum global sans payer un prix trop élevé nous semble séduisante.

Pour l'optimisation des deux autres dispositifs électrotechniques, l'utilisation d'un modèle éléments finis rend le calcul du gradient difficile. Ainsi, seules les méthodes stochastiques sont appliquées pour l'optimisation d'une bobine supraconductrice pour le stockage d'énergie et d'une presse à aimant. Ces deux exemples sont des cas tests internationaux utilisés pour comparer les méthodes d'optimisation. Les résultats obtenus par les nouvelles méthodes stochastiques ont montré qu'il est possible d'avoir des résultats assez précis avec un nombre raisonnable d'évaluations de la fonction objectif.

Les améliorations proposées se sont montrées pertinentes pour réduire le temps nécessaire à une optimisation. Ainsi le nouveau critère d'arrêt proposé pour les AG apporte la meilleure précision sur l'optimum et se place en deuxième position pour la rapidité comme illustré par l'optimisation du SMES. Pour tous les dispositifs optimisés, la nouvelle méthode de recherche taboue s'est montrée la plus rapide, la plus précise et/ou la plus robuste.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif de ces travaux était de proposer une méthodologie de résolution des problèmes de conception dans le domaine de l'électrotechnique. Les développements se sont concentrés sur la mise au point de stratégies d'optimisation basées sur l'utilisation des méthodes stochastiques.

Dans la première partie, le problème de conception a été transformé en un problème d'optimisation avec contraintes en utilisant un formalisme mathématique spécifique. Pour résoudre ce type de problèmes, plusieurs transformations possibles ont été présentées. Les méthodes des pénalités sont retenues car elles sont bien adaptées aux méthodes stochastiques. Elles transforment un problème contraint en problème non contraint dont la fonction objectif est modifiée par l'ajout d'une fonction de pénalité. Quatre problèmes d'optimisation ont été présentés pour servir de cas test. Les deux premiers sont des dimensionnements analytiques et les deux autres utilisent la méthode des éléments finis. Ces problèmes sont largement diffusés dans le « TEAM Workshop » de la conférence COMPUMAG ou les opérations 4 et 5 du GdR Maîtrise d'Energie Electrique du Matériau jusqu'au Système (M2EMS).

En deuxième partie, les différentes méthodes d'optimisation ont été présentées. Les trois méthodes stochastiques les plus prometteuses : algorithmes génétiques, recuit simulé et recherche taboue ont été implantées et testées. Elles se fondent sur l'aléatoire. Ceci, d'une part, leur permet d'explorer le domaine d'optimisation de façon plus robuste que les méthodes déterministes mais, d'autre part, le temps de calcul est élevé.

Pour résoudre ce problème, quelques contributions originales ont été apportées. Un nouveau critère d'arrêt pour les algorithmes génétiques, basé sur la méthodologie des surfaces de réponse, a été proposé. L'avantage qu'il présente est une convergence accélérée en construisant une approximation de la fonction objectif ayant des propriétés particulières, lui permettant de localiser plus rapidement l'optimum en utilisant l'analyse canonique récursive.

Pour le recuit simulé, deux améliorations ont été proposées. La première consiste en une prédétermination du vecteur pas, rendant l'algorithme moins sensible au problème traité. La deuxième amélioration consiste à introduire un nouveau critère d'arrêt pour la phase à température constante tout en gardant la méthode d'auto-adaptation du vecteur pas proposée par Corona.

Une étude approfondie sur les deux méthodes de recherche taboue existantes a été réalisée. L'analyse de leurs points faibles a permis de développer une nouvelle méthode d'optimisation avec un mécanisme d'exploration radicalement différent. Elle est à la fois globalement convergente et fournit une solution avec la précision souhaitée tout en économisant du temps de calcul. Elle utilise efficacement l'historique de la recherche et évite définitivement de revenir à des solutions déjà visitées. En effet, autour de chaque point précédemment visité, une zone taboue est définie en utilisant deux règles heuristiques qui mènent à une expression spécifique pour sa taille.

La dernière partie a été consacrée à l'application des méthodes présentées en partie II à notre échantillon représentatif des problèmes d'optimisation en électrotechnique. Chacun d'entre eux possède des particularités qui nécessitent une adaptation pour l'emploi des méthodes stochastiques.

Une comparaison entre les différentes méthodes stochastiques développées et la méthode de programmation quadratique séquentielle a été réalisée sur les deux premiers problèmes. Les résultats obtenus ont montré que la méthode de programmation quadratique séquentielle est très performante lorsque la fonction à optimiser est unimodale ou lorsque la solution initiale est proche de l'optimum global. Elle est plus efficace qu'une méthode stochastique si on se réfère au nombre d'évaluations pour atteindre l'optimum, à la précision de l'optimum obtenu et au respect des contraintes. Cependant, elle nécessite aussi le calcul exact des gradients de la fonction et des contraintes, ce qui l'a rend inutilisable lorsque la fonction est non dérivable et *à fortiori* discontinue.

Une comparaison entre les méthodes stochastiques standard et les méthodes stochastiques améliorées a été réalisée. Les résultats obtenus montrent que les algorithmes améliorés nécessitent moins de temps et fournissent de meilleures solutions. La nouvelle méthode de recherche taboue est bien adaptée à l'optimisation avec des modèles éléments finis où le temps de chaque simulation est élevé. C'est une nouvelle et puissante méthode pour l'optimisation globale à variables continues qui a surpassé les autres méthodes stochastiques, pour la majorité des cas test considérés.

Ces travaux nous ont donc permis de mettre en évidence, d'une part, que les méthodes stochastiques globales et déterministes locales ne sont pas concurrentes mais complémentaires. D'autre part, qu'il y a une nécessaire adéquation entre les propriétés d'un modèle et celles de la méthode d'optimisation employée pour sa résolution, et ceci même pour des modèles analytiques.

De nombreuses perspectives peuvent être envisagées à la suite des travaux présentés dans ce document. Les quatre premières peuvent être mises en œuvre assez rapidement. Premièrement, l'exploitation des complémentarités entre méthodes stochastiques globales et déterministes locales devrait conduire à des implémentations efficaces. Deuxièmement, les améliorations apportées aux algorithmes génétiques et au recuit simulé ainsi que la nouvelle méthode taboue devraient facilement être transposables et bénéfiques à d'autres domaines de l'ingénierie. Troisièmement, les méthodes de nichage (nitching, en anglais) [GAL 00] pourraient être introduites dans les algorithmes génétiques afin d'explorer en parallèle des solutions locales ou globales situées dans des régions éloignées de l'espace. Quatrièmement, la recherche parallèle semble être une nouvelle voie très prometteuse et sur laquelle beaucoup de travail reste à faire. Il ne s'agit pas seulement de répartir la charge des calculs entre les divers processus mais aussi d'effectuer un échange d'information non plus seulement entre individus, mais entre sous populations entières.

Bien que ces travaux se sont intéressés à l'application de trois méthodes stochastiques à l'optimisation en électrotechnique, des développements ultérieurs pourraient s'intéresser à l'application d'autres méthodes stochastiques en émergence telles que la méthode d'optimisation par essaim particulaire (optimization particule swarm, en anglais) [CIU 02] [BRA 02], et certaines méthodes d'intelligences artificielles [GER 02] [HOO 03] telles que les réseaux de neurones [FAN 03] et la logique floue [RAS 01] [VAS 99].

La transformation du cahier des charges en problème d'optimisation est une tâche critique du concepteur notamment en ce qui concerne le choix de la fonction objectif et des contraintes. L'utilisation d'une formulation multi-objectif pourrait être une solution efficace pour contourner ce problème. Les algorithmes stochastiques peuvent être utilisés dans ce contexte pour identifier la frontière de Pareto [DIA 02] [HO 02]. L'obtention d'un ensemble de solutions optimales au lieu d'une solution unique permet au concepteur d'affiner ses critères afin d'opérer un choix.

Dans les exemples, spécifiques à l'électrotechnique, traitées dans ces travaux, les tolérances d'usinages, de fabrication et les incertitudes sur les variables de conception sont négligées. Les optimums trouvés pendant ces travaux sont généralement situés très près de la frontière entre les domaines faisable et non faisable. Ceci peut avoir comme conséquence la non faisabilité de la conception lors de sa mise en œuvre. Une formulation robuste du problème d'optimisation qui fait intervenir les incertitudes et leurs effets sur la conception et la réalisation doit être trouvée ainsi qu'une programmation spécifique [STE 03] [CIO 03] [ALO 02] [MAG 03].

Bibliographie

- [AAR 85] E.H. L Aarts, P.J.M. Van Laarhoven
 “Statistical cooling: a general approach to combinatorial optimisation problems”
Philips J. Res. Vol. 40, No. 193, 1985.
- [AAR 90] E. Aarts, J. Korst
 “Simulated Annealing and Boltzmann machines”
 John Wiley&Sons, New York, 1990.
- [ALO 02] P. Alotto, T. Fortuna, C. Magele
 “Robust optimization in electromagnetic design ”
Conférence CEFC02, 2002.
- [ALO 98a] P. Alotto, B. Brandstätter, G. Fuertratt, Ch. Magele, G. Molinari, M. Nervi, M. Repetto, K. R. Richter
 “Some Results on a SMES Device Optimization Benchmark Problem”,
International Journal of Applied Electromagnetic and Mechanics, Vol. 9, IOS Press, pp. 315-324, 1998.
- [ALO 98b] P. Alotto, C. Eranda, B. Brandstätter, G. Fuertratt, Ch. Magele, G. Molinari, M. Nervi, M. Repetto, K. R. Richter
 “Stochastic Algorithms in Electromagnetic Optimisation”
IEEE Trans. Magn., Vol. 34., No. 5, pp. 3674-3684, 1996.
- [ALL 94] J. M. Alliot, T. Schiex
 “Intelligence Artificielle & Informatique Théorique”
 Cepadues-Editions, Toulouse, pp. 441-460, 1994.
- [ATT 85] N.F Attia,
 “New Methods of Constrained Optimisation using Penalty Functions”,
 Ph.D. Thesis, Essex University, England 1985.
- [BAC 95] Th. Back
 “Generalized Convergence Models for Tournament- and (μ , l)-Selection”
 L. Eshelman, editor, *Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Francisco CA, pp. 2-8, 1995.
- [BAC 93] Th, Back
 “Optimal mutation rates in genetic search”
 S. Forrest (Ed), *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms and their Applications*, Morgan Kauffmann Publishers, pp.2-9, 1993.
- [BAK 87] J.E. Baker
 “Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm”
 J.J Grefenstette (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, pp.14-21,1987.
- [BAR 01] N. Bartoli, P. Del Moral
 “Simulation algorithmes stochastiques: une introduction avec applications”,
 CEPADUES-Editions, Toulouse 2001.
- [BAT 94] R. Battiti
 “The reactive tabu search”
ORSA journal on computing, Vol. 6, No. 2, Spring 1994, pp. 126-140, 1994.
- [BEA 93a] D. Beasley, D.R. Bull, R. Martin
 “A sequential niche technique for multimodal functions optimisation”
Evolutionary computation, Vol.1, No.2, pp.101-125, 1993.
- [BEA 93b] D. Beasley, D.R. Bull, R. Martin

- “An overview of genetic algorithms, Part 1: fundamentals”
University Computing, 15, pp. 58-69, 1993.
- [BEA 93c] D. Beasley, D. R., Bull, R. Martin
 “An interview of genetic algorithms: part 2, research topics”
University computing. No. 15, pp. 170-181, 1993.
- [BRA 02] B. Brandstatter, U. Baumgartner
 “Particle Swarm Optimization - Mass-Spring System Analogon”
IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, pp. 997-1000, 2002.
- [BRI 95] S. Brisset
 “Outil et Méthodologie pour la conception des moteurs à réluctance variable à double saillance”
 Thèse soutenue le 23 janvier 1995-USTL
- [BRI 98] S. Brisset, P. Brochet
 “Optimization of Switched Reluctance Motors Using Deterministic Methods with Static and Dynamic Finite Element Simulations”
IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No. 5, part I of two parts, pp. 2853-2856, September 1998.
- [BRI 00] S. Brisset, P. Brochet
 “Shape Optimization of BDC wheel Motor using Powell’s Method”
Compel, Vol. 19, No. 2, pp. 596-601, 2000.
- [BRI 01a] S. Brisset, F. Gillon, S. Vivier, P. Brochet
 “Optimization with experimental design: an approach using Taguchi’s methodology and finite element simulations”
IEEE Trans. Magn., Vol. ,No. , pp. September 2001
- [BRI 01b] S. Brisset, G. Odoux, P. Brochet
 “Conception d’un moteur roue brushless DC pour un véhicule solaire”
Electrotechnique du Futur, pp. 355-359, 2001.
- [BRI 03] S. Brisset, C. Espanet, P. Brochet
 “Modèle de pré-dimensionnement d’un moteur à courant continu, aimant permanent, commutation électronique et bobinage concentré”
 Proposé à EF 2003.
- [CAR 88] R.A. Caruana, J.D. Schaffer
 “Representation and hidden bias: Gray vs. binary coding for genetic algorithms”
 J. Laird (Ed.), *Proceedings of the 5th International conference on machine Learning*, San Mateo, CA, Morgan Kauffmann Pulishers, pp.153-161, 1988.
- [CAR 61] C. W. Caroll
 “The created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems”
Operational Research, No. 9, pp. 169-184, 1961.
- [CAZ 97] C. Cazaubon, G. Gramacia, G. Massard
 “Management de projet technique”
 Ellipses, 1997.
- [CHE 99] Y. Cherruault,
 “Optimisation: méthodes locales et globales”
 Presses Universitaires de France, ISBN 2613064991064, 1999.
- [CIO 03] M. Cioffi, A. Formisano, R. Martone
 “Stochastic Handling of Tolerance in Robust Magnets Design”
 Conférence Compumag 2003
- [CIU 02] G. Ciuprina, D. Ioan, I. Munteanu

- “Use of Intelligent Particle Swarm Optimization in Electromagnetics”
IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, pp. 1037-1040, 2002.
- [COR 87] A. Corana
 “Minimising multimodal Functions of Continuous Variables with the Simulated Annealing Algorithm”
ACM Trans. Math. Soft., Vol. 13, No. 3, pp. 262-280, Sept. 1987.
- [COU 83] J.L. Coulomb
 “A methodology for the determination of global electromechanical quantities from finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness”
IEEE Trans. Magn., Vol. 19, No. 6, pp. 2514-2519, 1983.
- [COU 97] J.L. Coulomb
 “About Sensitivity Analysis using High Order Derivatives”
ICS Newsletter, Vol. 4, No. 1, March 1997.
- [COS 01] M. Caldora Costa
 “Optimisation de dispositifs électromagnétiques dans un contexte d’analyse par la méthode des éléments finis”
 Thèse de Doctorat- INPG-28-06-2001.
- [CUL 94] J.C. Culioli,
 “Introduction à l’optimisation”
 Ellipses, ISBN 26729-89428-4, 1994.
- [DAR 59] Ch. Darwin,
 “The origin of species by means of natural selection”
 John Marray London, 1859.
- [DEJ 92] K.A. De Jong, W.M. Spears
 “A formal analysis of the role of multi-point crossover in genetic algorithms”
Annals of Mathematics and Artificial Intelligence Journal, Vol. 5, No. 1, pp. 1-26, 1992.
- [DEJ 75] K.A. De Jong
 “An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems”
 PhD thesis, University of Michigan, *Dissertation Abstracts International*, 36(10), 5140B, University Microfilms No.76-9381, 1975.
- [DIA 02] A. H. F. DIA, A. de Vasconcelos
 “Multiobjective Genetic Algorithms Applied to solve Optimization Problems”
IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, March 2002.
- [DOL 90] W. B. Dolan, P.T. Cummings M. D. Le Van
 “Algorithmic efficiency of simulated annealing for heat exchanger network design”
Comp. chem. Engng. Vol. 14, No. 20, pp. 1039-1050, 1990
- [DRO 97] J.J. Droesbeke, J. Fine, G. Saporta
 “Plans d’expériences – Applications à l’entreprise”
 Ed. TECHNIP, 1997.
- [DUF 96] M. Duflo
 “Algorithmes stochastiques”
 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [EBN 98] Th. Ebner, Ch. Magele, B.R. Brandstatter, K. R. Richeter
 “Utilizing Feed Forward Neural Networks for Acceleration of Global Optimisation Procedures”

- [ELP 88] *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 34, No. 5, pp. 2928-2931, 1998.
T. Elperin
"Monte Carlo structural optimisation in discrete variables with annealing algorithm"
International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 26, pp. 815-821, 1988.
- [FAN 03] A. Fanni, A. Monstisci
"A Neural inverse problem Approach for Optimal Design"
IEEE Trans. Magn., Vol. 39, No. 3, pp. 1305-1308, 2003
- [FAN 99] J. Faudino, F. Wurtz, J. Bignon,
"Nouvelle méthodologie de conception de dispositifs électrotechniques"
Revue Internationale de Génie Electrique, Vol. 2, No. 1, pp. 1-120, 1999.
- [FIA 68] A. V. Fiacco, G.P McCormik
"Nonlinear Programming Sequential Unconstrained Minimization Techniques"
John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [FIS 97] G. S. Fishman
"Monte Carlo, concepts, Algorithms and Applications"
Springer-Verlag, New York, 1997.
- [FLE 64] R. Fletcher, C. M. Reeves
"Function minimisation by conjugual gradients"
Computer Journal, No. 7, pp. 148-154, 1964.
- [FLE 87] R. Fletcher,
"Practical Methods of Optimization"
John Wiley & Sons, ISBN 0-471-49463-1, 1987.
- [FOG 94] L.J. Fogel
"Evolutionary Programming in Perspective: The top-Dawn View"
Computational Intelligence: Imitating Life, in Zarada, pp. 135-146, 1994.
- [GAL 00] A. Gallardo, D. A. Lowther
"Some Aspects of Niching Genetic Algorithms Applied to Electromagnetic Device Optimization"
IEEE Trans. Magn., Vol. 36, No. 4, pp. 1076-1079, 2000
- [GEN 99] M. Gendreau, G. Laporte
"A tabu search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem"
Computers & Operations Research No. 26, pp. 1153-1173, 1999.
- [GER 02] L. Geromel, C. R. Souza, L. C. Leite
"The Application of Intelligent Systems in Power Transformer Design"
Conférence IEEE CCECE'2002, Canada 2002.
- [GIL 97] F. Gillon
"Modélisation et optimisation par plans d'expériences d'un moteur a commutations électroniques"
Thèse soutenue 1997, USTL.
- [GLO 89a] F. Glover
"Tabu Search –Part I"
ORSA Journal on Computing, Vol. 1, No. 3, pp. 190-206, 1989.
- [GLO 89b] F. Glover
"Tabu Search –Part II"
ORSA Journal on Computing, Vol. 2, No. 3, pp. 4-32, 1989.
- [GLO 93] F. Glover

- “A user’s guide to tabu search”
Annals of Operations Research, Vol. 41, pp. 3-28, 1993.
- [GLO 86] F. Glover
 “Future paths for integer programming and links to artificial intelligence”
Computers & Operations Research 13, pp. 533-549, 1986.
- [GLO 95] F. Glover, M. Laguna
 “Tabu Search”
 Colin R. Reeves (ed.), *Modern Heuristic Techniques for combinatorial Problems, Blackwell Scientific Publications, Oxford, pp. 70-150, 1993.*
- [GOL 89a] D.E. Goldberg
 “Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”
 Addison Wesley, 1989.
- [GOL 89b] D.E. Goldberg
 “Sizing Populations for Serial and Parallel Genetic Algorithms”
Int. Conf. genetic algorithm, 1989.
- [GOU 99] J. Goupy
 “Plans d’expériences pour surfaces de réponse”
 DUNOD, Paris, 1999
- [GRE 86] J.J. Grefenstette
 “Optimisation of Control Parameters for Genetic Algorithms”,
IEEE Trans. on SMC, Vol. 16, No. 1, pp.122-128, January /February 1986.
- [HAJ 03] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 “A new Tabu Search Method for Optimization with Continuous Parameters”
 COMPUMAG 2003.
- [HAJ 02] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 “A stop Criterion to accelerate Magnetic Optimization Process using Genetic Algorithms and Finite Element Analysis”
IEEE Trans. Magn., Vol. 39, No. 3, pp. 1297-1300, May 2003.
- [HAJ 01] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 « Optimization of a brushless DC motor for an electric vehicle using genetic algorithms »
 ISEF’2001, Cracovie, Pologne, 2001.
- [HAJ 01a] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 « Optimization of a brushless DC motor for an electric vehicle using genetic algorithms »,
Revue Studies in Applied Electromagnetic and Mechanics 2001.
- [HAJ 01b] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 « Optimisation d’un moteur roue brushless DC par des méthodes déterministes et stochastiques »
 EF’2001, Nancy, France, 2001.
- [HAJ 02] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 « Optimisation de machines électriques par les algorithmes génétiques »,
 GEI’2002, Hammamet, Tunisie, 2002.
- [HAJ 02a] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 “A stop Criterion to accelerate Magnetic Optimization Process using Genetic Algorithms and Finite Element Analysis”
 CEFC 2002, pp.304-307, 2002.
- [HAJ 02b] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,

- “A stop Criterion to accelerate Magnetic Optimization Process using Genetic Algorithms and Finite Element Analysis”
IEEE Trans. Magn., Vol. 39, No. 3, pp. 1297-1300, May 2003.
- [HAJ 02c] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 « Comparing Stochastic Methods on SMES Optimization”
VII-th International Workshop on Optimisation and inverse Problems in Electromagnetism OIPE, Lodz, Poland 2002.
- [HAJ 02d] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 “Comparing Stochastic Methods on SMES Optimization”
Revue Optimization and Inverse Problem in Electromagnetic
- [HAJ 02e] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 “Comparing stochastic optimization methods used in electrical engineering”,
IEEE SMC’02, System Man & Cybernetic 2002 Hammamet, Tunisie, 2002
- [HAJ 03] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 « A new Tabu Search Method for continuous parameter optimization.
 Application to design problems in electromagnetic »
SSD03, Signal System & Decision 2003.
- [HAJ 03a] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 « A new Tabu Search Method for continuous parameter optimization.
 Application to design problems in electromagnetic »,
Revue ETEP 2003.
- [HAJ 03b] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 “A new Tabu Search Method for Optimization with Continuous Parameters”,
COMPUMAG 2003.
- [HAJ 03c] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet, “A new Tabu Search Method for
 Optimization with Continuous Parameters”,
IEEE Trans. Mag. COMPUMAG 2003.
- [HAJ 03d] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 “ Some results on a SMES device optimization problem using stochastic
 methods ”,
COMPUMAG 2003.
- [HAJ 03e] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet
 « Optimization of a Die Press model using a new tabu search method»,
EMF2003.
- [HAJ 03f] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 “Une nouvelle méthode de recherche taboue pour l’optimisation de
 dispositifs électromagnétiques avec des paramètres continus »,
EF 2003
- [HAJ 03g] O. Hajji, S. Brisset, P. Brochet,
 “Comparaison des méthodes stochastiques et déterministes pour
 l’optimisation de dispositifs électromagnétiques »
EF 2003.
- [HAM 00] J. P. Hamiez, Jin-Kao Hao
 “Recherche taboue et planification de rencontre sportives”,
RFRIA ’2000, Paris, Janvier 2000.
- [HEC 95] R. Heckman, Th. Lengauer
 “A simulated Annealing Approach to the Nesting Problem in the Textile
 Manufacturing Industry”
 In R. E. Burkard, P. L. Hammer, T. Ibaraki and M. Queyranne, editors,
*Annals of Operations Research, Vol. 57, pp. 103-133, J. C. Baltzar AG
 science Publishers, Amsterdam, 1995.*
- [HES 69] M. R. Hestenes
 “Survey Paper Multiplier and Gradient Methods”

- Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 4, No. 5, pp. 303-320, 1969.
- [HOL 75] J. H. Holland
 “Adaptation in natural and artificial systems”
 University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [HO 01] S.L. Ho, S. Yang
 “An Improved Tabu Search for the Global Optimizations of Electromagnetic Devices”
IEEE Trans. Magn., Vol. 37, No. 5, pp. 3570-3574, September 2001.
- [HO 02] S.L. Ho, S. Yang
 “A tabu Method to find the pareto Solutions of Multiobjective optimal Design Problems in Electromagnetics”
IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, March 2002.
- [HOO 03] S. R. H. Hoole, A. Mascrenge, K. Navukkarasu, K. Sivasubramaniam
 “An Exepert Design Environment for Electrical Devices and its Engineering”
IEEE Trans. Magn. Vol. 39, No. 3, pp.1693-1696, 2003.
- [HU 92] N. Hu
 “Tabu Search Method with random moves for globally optimal”
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, No. 5, pp. 1055-1070, 1992.
- [KIR 83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi
 “Optimisation by Simulated Annealing”
Science, Vol. 220, No. 4598, pp. 671-680, 1983.
- [KOZ 92] J.R. Koza
 “Genetic Programming”
 Cambridge, MA, MIT Press, 1992.
- [LAG 99] M. Laguna
 “Intensification and diversification with elite tabu search solution for the linear ordering problem”
Computers Ops. Res., Vol. 26, pp. 1217-1230, 1999.
- [LOU 92] S. J. Louis, G. J. E. Rawlins
 “Pareto Optimality, GA-easiness and Deception”
Int. Conf. genetic algorithm, 1992.
- [MAG 03] D. Magot, F. Wurtz, B. Cogittore, B. Delinchant, J.P. Keradec
 “A Methodology and Tools for Worst-Case Tolerance Design”
Conférence Compumag 2003
- [MAR 90] S. Martello, P. Toth
 “Knapsack Problems”
 John Wiley& Sons, Chichester, UK. 1990.
- [MES 98] F. Messine, B. Nogarède, J.L. Langounaelle
 “Optimal Design of Electro-Mechanical Actuators: A New Method Based on Global Optimization”
IEEE Trans. Magn. Vol. 34, No. 1, pp. 299-308, 1998.
- [MET 53] N. Metropolis, A. Rosebluth, M. Rosebluth, A. Teller, E. Teller
 “Equation of state calculations by fast computing machines”
Journal Chem. Phys., Vol. 27, No. 1087, pp.1087-1092, 1953.
- [MIC 94] Z. Michalewicz
 “Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs”
 Springer-Verlag, 1994.

- [MIC 96] Z. Michalewicz, D. Dasgupta, R. Leriche
 “Evolutionary Algorithms for Constrained Engineering Problems”
Computers & Industrial Engineering Journal, Vol. 30, No. 2, 1996.
- [MIN 83] M. Minoux,
 “Programmation mathématique : Tome 1 Théorie et algorithmes”
 Ed. Dunod, 1983.
- [NEL 65] J.A. Nelder, R. Mead,
 “A Simplex Method for function Minimisation”
Computer Journal, Vol. 7, pp. 308-312, 1965.
- [OPERA] Vector Fields
 OPERA 2D, Reference manuals
- [PAH 00] U. Pahner, K. Hameyer
 “Adaptive Coupling of Differential Evolution and Multiquadrics
 Approximation for the tuning of the optimization process”
IEEE Trans. Magn., Vol. 36, No. 4, pp. 1047-1051, July 2000.
- [PAI 94] L. Painton, U.M. Diwekar
 “Synthesizing Optimal Design Configurations for a Brayton Cycle Power
 Plant”
Comput. Chem. Eng., Vol. 18, pp. 369-381, 1994.
- [PAR 02] P. M. Pardalos, M. G.C. Resende
 “Handbook of Applied optimisation”
 Oxford University Press, 2002.
- [PIL 94] M. Pillet
 “Introduction aux plans d’expériences par la méthode Taguchi”
 Les Editions d’Organisations Université, 1994.
- [POL 86] M. Poloujadoff, R.D. Findlay
 “A procedure for illustrating the effect of variation of parameters on
 optimal transformer design”
IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWRS-1, No. 4, pp 202-206. ,1986.
- [POW 65] M.J.D. Powell,
 “An efficient method for finding the minimum of a function of several
 variables without calculating derivations”
Computer Journal, Vol. 7, pp. 155-162, 1965.
- [POW 69] M.J.D. Powell
 “A method for Nonlinear Constraints in Minimisation Problems”
Optimisation, Academic Press, New York, pp. 283-298, 1969.
- [POW 93] M.J.D. Powell, M. Skolnick,
 “Using Genetic Algorithms in Engineering Design Optimisation with non
 linear Constraints”
Proceedings of the fifth International Conference on Genetic Algorithms,
 pp. 424-430, 1993.
- [PRE 92] W.H. Press
 “Numerical Recipes in C: The art of Scientific Computing”
 Cambridge University Press, ISBN 0-521-43108-5, 1992.
- [RAH 99] Y. Rahmat – Sami, E. Michielssen
 “Electromagnetic Optimisation by Genetic Algorithms”
 John Wiley & Sons, 1999.
- [RAN 86] R.E. Randelman G. S. Grest
 “N-City Travelling Salesman Problem: Optimisation by simulated
 Annealing”

- [RAO 96] *Journal of Statistical Physics*, Vol. 45, No. 5/6, pp. 885-890, 1986.
S. S. Rao
“Engineering Optimisation, Theory and Practice”
John Wiley & Sons, 1996.
- [RAS 01] K. Rashid, J. A. Ramirez, E. M. Freeman
“Optimization of Electromagnetic Devices Using Sensitivity Information from Clustered Neuro-Fuzzy Models ”
IEEE Trans. Magn., Vol. 37, No. 5, pp. 3575-3578, July 2001.
- [RAY 74] D.M. Rayan,
“Penalty and Barrier Functions”
P.E. Gill and Murray, Academic Press, 1974.
- [REC 94] I. Rechenberg
“Evolution Strategy”
In Zarada Computational Intelligence: Imitating Life, pp.147-159, 1994.
- [RIC 89] J.T. Richardson, M.R. Palmer, G. Liepins, M. Hilliard
“Some Guidelines for Genetic Algorithms with Penalty Functions”
Proceedings of the fifth International Conference on Genetic Algorithms, pp. 191-197, 1989.
- [ROC 73] R. T. Rockaffelar
“A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained optimisation”
Mathematical Programming, Vol. 12, No. 6, pp. 354-373, 1973.
- [RUD 94] G. Rudolph,
“Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms”
IEEE Trans. on Neural Networks, Vol. 5, No. 1, pp. 96-101, January 1994.
- [SAL 92] R. R. Saldanha
“Optimisation en électromagnétisme par application conjointe des méthodes de programmation non linéaire et de la méthode des éléments finis”
Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
- [SAR 99] B. Sareni
“Méthodes d’optimisation multimodales associées à la modélisation numérique en électromagnétisme »
Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 1999.
- [SAR 00] B. Sareni, L. Krahenbuhl
“Efficient Genetic Algorithms for Solving Hard Constrained Optimization Problems”
IEEE Trans. Magn., Vol. 36, No. 4, pp. 1027-1030, July 2000.
- [SCH 89] J.D. Schaffer, R.A. Caruana, L.J. Eshelman, R. Das
“A study of control parameters affecting online performance of genetic algorithms for function optimisation”,
J.D. Schaffer (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms and Their applications*, San Mateo, CA, Morgan Kaufmann Publishers, pp. 51-60, 1989.
- [SCH 95] H.P. Schwefel
“Evolution and Optimum Seeking- Sixth generation Computer Technology Series”
John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [SCH 92] N.N. Schraudolph, R.K. Belew
“Dynamic parameter encoding for genetic algorithms”

- Technical Report CS 90-175, La Jolla, University of California, Computer Science and Engineering Department, 1992.*
- [SCH 93] M. Schoenauer, S. Xanthakis,
 “Constrained GA Optimization”
Proceedings of the fifth International Conference on Genetic Algorithms,
 pp. 573-580, 1993.
- [SCH 98] P. Schimmerling, J.C. Sission, A. Zaidi
 “Pratique des plans d’expériences”
 Ed Lavoisier Tec& Doc, 1998.
- [SCH 85] J.D. Schaffer
 “Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms”
10th Int. Conf. on genetic algorithms, 1985.
- [SCH 83] K. Schittkowski,
 “On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function”,
Mathematische Operationsforschung and Statistik, Series optimisation 14,
 1983.
- [SEG 94] G. Séguier, F. Notelet,
 “Electrotechnique Industrielle”
 Lavoisier Tec&Doc, Paris ,1994.
- [SEX 98] R. S. Sexton, B. Alidaee
 “Global optimisation for artificial neural networks: A tabu search application”
European Journal of Operational Research Vol. 106, pp. 570-584, 1998.
- [SHI 98] Y. Shiyou
 “An Universal Tabu Search Algorithm for Global Optimisation of Multimodal Functions with Continuous Variables in Electromagnetic”
IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No. 5, September 1998.
- [SHY 99] C.C. Shyur, T.C. Lu
 ”Applying tabu search to spare capacity planning for network restoration”
Computers & Oper. Res., Vol. 26, pp. 1175-1194, 1999.
- [SMI 93] R.E. Smith, S. Forrest, A. Perelson
 “Population diversity in a immune system model: implication for genetic search”
Foundations of Genetic Algorithms 2, San Mateo, pp.153-165, 1993.
- [STE 03] G. Steiner, A. Weber, C. Magele
 “Managing Uncertainties in Electromagnetic Design Problem with Robust Optimization ”
Conférence Compumag July 2003
- [STO 96] R. Storn, K. Price
 “Minimizing the real functions of the ICEC’96 contest by Differential Evolution”
International Conference on Evolutionary computation, Nagoya, Japon,
 1996.
- [TAK 01] R.H.C. Takahashi, J. A. Vansconcelos,
 “Sensitivity Analysis for Optimization Problems Solved by Stochastic Methods”
IEEE Trans. Magn., Vol. 37, No. 5, September 2001.
- [TAK 96a] N. Takahashi, K. Ehihara

- “Investigation of Simulated Annealing Method and Its Application to Optimal Design of Die Mold for Orientation of Magnetic Powder”
IEEE Trans. Magn. Vol. 32, No. 3. pp.1996.
- [TAK 96b] N. Takahashi
 “Optimization of die press model”
Proc TEAM Workshop 6th Round, Okayama, Japon, Mar, 20-21. 1996.
- [TEAM 22a] B. Bransdstaetter
 “SMES Optimization Benchmark, TEAM Workshop Problem 22, Definition of the 3 parameter problem, discrete case”
<http://www-igte.tu-graz.ac.at/team/team3dis.htm>.
- [TEAM 22b] C. Magele
 “SMES Optimization Benchmark, TEAM Workshop Problem 22, Definition of the 8 parameter problem, continuous case”,
<http://www-igte.tu-graz.ac.at/team/team8dis.htm>.
- [TSU 98] S. Tsubakitani, J. R. Evans
 “Optimizing tabu list size for the travelling salesman problem”,
Computers Ops. Res., Vol. 25, No. 2, pp. 91-97, 1998.
- [VAN 84] D. Vanderbilt, S. G. Louie,
 “A Monte Carlo Simulated Annealing Approach to Optimization over Continuous Variables”,
Journal of Computational, Physics, 56, pp. 259-271, 1984.
- [VAS 01] J.A. Vasconcelos, J.A. Ramirez
 “Improvements in Genetic Algorithms”,
IEEE Trans. Magn. Vol. 37, No. 3. September 2001.
- [VAS 94] J. A. Vasconcelos
 “Optimisation de forme des structures Electromagnétiques”,
 Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [VAS 99] P. Vas
 “Artificial - Intelligence -Based, Electrical Machines and Drives ”,
 Oxford University Press, Inc, New York, 1999.
- [VIV 02] S. Vivier
 “Stratégies d’optimisation par la méthode des plans d’expériences et application aux dispositifs électrotechniques modélisés par éléments finis”,
 Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [WID 89] M. Widmer, A. Hertz
 “A new approach for solving the flow shop sequencing problem”
Europ. J. Oper. Res., Vol. 41, pp. 186-193, 1989.
- [WUR 96] F. Wurtz, J. Bignon
 “A Methodology and a Tool for the Computer Aided Design with Constraints of Electrical Devices”
IEEE Trans. Magn., Vol. 32, No. 3, pp.1429-1432 ? 1996.
- [XUD 02] C. Xudong, N. Guangzheng, Y. Shiyong
 “An Improved Tabu Algorithm Applied to Global Optimizations of Inverse Problems in Electromagnetics”,
IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, pp. 1069-1072, March 2002.
- [XUD 01] C. Xudong, Q. Jingen
 “An Improved Genetic Algorithm for Global Optimization of Electromagnetic Problems”,
IEEE Trans. Magn. Vol. 37, No. 5, pp. 3579-3583, September 2001.
- [YAN 00] S. Yang, J. M. Machado

*“ A self-Learning Simulated Annealing Algorithm for Global Optimisations of Electromagnetic Devices ”,
IEEE Trans., Magn., Vol. 36, No. 4, pp.1004-1008, 2000.*

Listes des symboles, des notations et des abréviations

symbole	description
Formulation et transformation du problème d'optimisation	
$x_i \quad i = 1, \dots, n$	Variables d'optimisation
n	Nombre de variables d'optimisation
x_{im}	Borne inférieure de x_i
x_{iM}	Borne supérieure de x_i
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	Vecteur d'optimisation, point
$f(X)$	Fonction objectif
$g_j(X) \quad j = 1, \dots, m$	Fonction contrainte
m	Nombre de fonctions contraintes
S	Espace de recherche délimité par les bornes
$h(X)$	Fonction de pénalité
r	Coefficient de pénalité
$\varphi(X, r)$ ou $\varphi(X, r, k)$	Fonction objectif obtenue après transformation des contraintes
k	Itération k
$L(X, \lambda)$	Fonction de Lagrange
$\lambda_j \quad j = 1, \dots, m$	Multiplicateurs de Lagrange
X^*	Meilleur point
Algorithme génétique (AG)	
N	Nombre d'individu par génération = taille de la population
$P(g)$	Population à la génération g
$P'(g)$	Population des reproducteurs à la génération g
g	Indice de génération = numéro d'itération
rs	Probabilité de sélection
pc	Probabilité de croisement
pm	Probabilité de mutation
l	Nombre de bits du chromosome
$l(x_i)$	Nombre de bits du gène i correspond à la variable x_i
f_a	Fonction d'adaptation
G	Nombre maximal d'itérations
M_e	Matrice d'expérience
N'	Nombre d'individus participants à la construction de la surface de réponse
Analyse de la variance	
φ	
nr	Nombre de répétition
nm	Nombre des méthodes
nf	Nombre des fonctions
Recuit simulé (RS)	
$p(x, y)$	Probabilité de Boltzmann
T	Paramètre de contrôle = température

T_0	Température initiale
L_m	Longueur de chaîne de Markov= nombre d'ajustements du vecteur déplacement=nombre d'itération à température constante
p	Vecteur pas du déplacement
N_s	Nombre des points générés par itération selon une direction i
N_t	Nombre de réduction de paramètre contrôle
N_e	Nombre de cycles d'exploration
Recherche taboue (RT)	
N_a	Nombre d'ajustement de vecteur pas
V_X	Le voisinage de X
X_v	Solution dans le voisinage de V_X
N_n	Taille de voisinage
N_{opt}	Nombre maximal de cycle d'exploration pour recommencer de l'optimum global pour la recherche taboue universelle (RTU)
N_m	Nombre maximal d'itérations
Nouvelle recherche taboue (NRT)	
$l_i(X, g)$	Longueur de l'hyper rectangle selon direction i
α	Précision relative pour la localisation de l'optimum
c	Constante liée à la précision
T	Volume total des régions taboues
$\beta = \frac{T}{S}$	Rapport entre T et le volume total S , entre 0 et 1
N_p	Nombre des points générés par itération
G	Nombre maximum d'itération

Abréviations

Méthodes d'optimisation	
MEF	Méthode Eléments Finis
SQP	Programmation quadratique séquentielle
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanoo
QN	Quasi-Newton
GC	Gradient Conjugué
AG	Algorithmes Génétiques
RS	Recuit Simulé
RS+PT	Recuit simulé à pas tabulé
RS+PA	Recuit simulé à pas ajusté
RTHu	Recherche taboue de Hu
RTU	Recherche taboue universelle
NRT	Nouvelle recherche taboue
critères d'arrêt des algorithmes génétiques	
PERFL	Performance en ligne
PERFHL	Performance hors ligne
SR	Surface de réponse

CB	Convergence de bits
----	---------------------