Numéro d'ordre : 3295

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE : **MATHEMATIQUES PURES**

par Caroline DESREUMAUX

FORMES DE JACOBI RELATIVES AU RESEAU DE RACINES A_2 ET APPLICATIONS

SOUTENUE LE 25 JUIN 2003, DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

V.GRITSENKO, Professeur à l'Université de Lille I, Directeur de thèse

M.HARRIS, Professeur à l'Université de Paris VII, Président de jury

C.BACHOC, Professeur à l'Université de Bordeaux I, Rapporteur

V.NIKULIN, Professeur à l'Université de Liverpool, Rapporteur

D.MARKOUCHEVITCH, Professeur à l'Université de Lille I

N.SKORUPPA, Professeur à l'Université de Siegen

A mes parents,

Céline, Vincent et Julien.

Je remercie Valéry Gritsenko de m'avoir fait découvrir le sujet des formes de Jacobi et d'avoir dirigé ma recherche pendant ces trois années.
Je remercie Christine Bachoc et Viacheslav Nikulin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Michael Harris, Dimitri Markouchevitch et Nills-Peter Skoruppa d'avoir bien voulu faire partie du jury.
Merci à Olivier Ramaré qui a contribué à l'installation du logiciel pari-gp, sans lequel certains calculs n'auraient pu être menés à bien, ainsi qu'à Nicolas Baeyens pour son aide précieuse en informatique.
Enfin, je tiens à remercier les amis et tous les membres de ma famille dont le constant soutien joua un grand rôle dans l'aboutissement de ce travail.

Résumé

On connaît la structure sur le corps $\mathbb{C}$ des algèbres bigraduées de formes de Jacobi faibles relatives à un réseau de racines irréductible (à l'exception du réseau de type $\mathbb{E}_8$), exposée notamment par K.Wirthmüller.
On s'attache ici à décrire diverses constructions de telles formes de Jacobi dans le cas particulier du réseau de racines A_2, dans le but de préciser une structure arithmétique de l'algèbre graduée des formes de Jacobi faibles de poids 0, à coefficients de Fourier entiers, ainsi que d'établir la structure de l'espace vectoriel complexe des formes de Jacobi holomorphes (respectivement cuspidales) d'indice 1, relatives à ce réseau.
Ces constructions, qui ont aussi donné des résultats susceptibles d'être exploités dans le domaine arithmétique, permettent d'exhiber des formes réflectives pour des réseaux de signature (2,4), liées à la théorie de Borcherds et à la détermination d'algèbres de Kac-Moody. Ces mêmes constructions sont aussi à l'origine de l'obtention de formes différentielles canoniques sur des espaces de modules de surfaces abéliennes ou de surfaces $K3$ polarisées particulières.
On pourra remarquer que la théorie des formes hermitiennes de degré 2 déterminées sur l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, peut être retrouvée comme un cas particulier du travail effectué sur les formes de Jacobi définies relativement à un réseau de racines.

Abstract

We know the structure on the complex field of bigraded algebras of Jacobi forms associated to irreducible root lattices (except in the case of the lattice $\mathbb{E}_8$), described especially by K.Wirthmüller.
We attach ourselves here to describe several constructions of Jacobi forms in the particular case of the root lattice A_2, in order to precise an arithmetical structure for the graded algebra of weak Jacobi forms of weight 0, with integral Fourier coefficients, and to establish the structure of the space of holomorphic (respectively cuspidal) Jacobi forms of index 1, associated to this lattice.
Some results of these constructions may be exploited in arithmetic. Moreover, these constructions let us find examples of reflectiv automorphic forms for lattices of signature (2,4), related to Borcherds theory and to the determination of Kac-Moody algebras. Thirdly, these constructions give a way to obtain canonical forms on moduli spaces of abelian surfaces or special polarized $K3$ surfaces.
We will observe that theory of hermitian modular forms of degree 2 defined over the ring of integers of the quadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, appears as a particular case of the work on Jacobi forms associated to a root lattice.

Table des matières

0.1 Introduction

Introduite par l'ouvrage de M.Eichler et D.Zagier [EZ], la théorie des formes de Jacobi (voir la définition 1.1.1), d'abord vue comme un outil utile à la description des formes modulaires, devient un objet d'étude à part entière.

D'une façon générale, une forme de Jacobi est une fonction à plusieurs variables, définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^n$, où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur complexe, et n un entier naturel non nul fixé, que l'on notera $\Phi(\tau,\vec{z})$, qui est modulaire par rapport à la variable τ et elliptique par rapport à la variable $\vec{z}$.

La théorie des formes de Jacobi germe dès le 19ème siècle, avec l'apparition des premières formes elliptiques classiques. On peut citer l'exemple de la fonction ϑ, étudiée notamment par D.Mumford ([Mu]), définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ par :

$$\vartheta(\tau,z) = ie^{\frac{1}{4}i\pi\tau}\ (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1-q^n e^{2i\pi z})(1-q^n e^{-2i\pi z}).$$

On peut citer également la fonction $\wp$ de Weierstrass (voir par exemple [WW], [K]), définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ par :

$$\wp(\tau,z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2-(0,0)} \Big(\frac{1}{(z-(n\tau+m))^2} - \frac{1}{(n\tau+m)^2}\Big).$$

Cette théorie surgit également dans l'étude des fonctions modulaires de Siegel, et, plus précisément, de certains coefficients de ces fonctions, qui seront apppelés coefficients de Fourier-Jacobi. (Voir les travaux de I.I.Pyatetskii-Shapiro [PS], ou de W.Baily [Ba].)
Enfin, elle apparaît aussi avec l'étude des algèbres de Kac-Moody affines : les caractères construits sur ces algèbres constituent des exemples de formes de Jacobi (voir [KP]).

Longue est la liste des applications de la théorie des formes de Jacobi.
Différents relèvements de ces formes permettent d'obtenir des formes de Siegel pour des groupes modulaires (voir les travaux de H.Maass [M]) ou paramodulaires (voir [G6], [GN II]), ou encore des formes modulaires pour les groupes orthogonaux de signature $(2,N)$ (voir l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin [G]).
Elles donnent aussi par exemple le moyen de démontrer de façon brève l'existence de prolongements analytiques de formes modulaires de Siegel, vérifiant des équations fonctionnelles du type de celles des fonctions L. (Voir [G7], [KS], [G8] .)
Elles interviennent également dans la construction et la classification des algèbres de Kac-Moody de type de Borcherds (voir les travaux de R.Borcherds [Bo1], [Bo2], [Bo3], et ceux de V.Gritsenko et V.Nikulin [GN], [GN I], [GN II], [GN3], [GN4]).
Elles fournissent des exemples de fonctions de partition en physique. (Voir [Di], [DMVV], [Ka], [KY], [GN6], [G1].)
Elles sont aussi liées à la théorie des singularités et aux structures de Frobenius (voir notamment les travaux de E.Looijenga [L1], [L2], K.Saito [Sa], B.Dubrovin [Du], I.Satake [Sat], M.Bertola [Be]).
Elles sont présentes également dans la théorie de cobordisme : on sait que certaines formes de Jacobi apparaissent dans l'expression du genre elliptique de certains domaines, voir [G1], [G2], voir aussi [DMVV], [KYY], [Ho].

On peut dès à présent donner une définition plus explicite d'une forme de Jacobi (voir la

définition 1.1.1).
On considère $U_{\mathbb{R}}$, un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive notée $<\,,\,>$, et $L \subset U_{\mathbb{R}}$ un réseau entier pair de rang n.
On note $\widetilde{L}$ le réseau dual de L relativement à la forme bilinéaire $<\,,\,>$, et U l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ défini par : $U := U_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.
Une forme de Jacobi (faible) notée Φ, définie relativement au réseau L, sera une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$, vérifiant les deux équations fonctionnelles suivantes (qui traduisent respectivement la propriété de modularité et celle de double-périodicité) :
pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Phi\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\vec{z}}{c\tau + d}\Big) = (c\tau + d)^k e^{\pi i m \frac{c<\vec{z},\vec{z}>}{c\tau+d}} \Phi(\tau,\vec{z}),$$

pour tout (α,β) appartenant à $L \times L$:

$$\Phi(\tau,\vec{z} + \alpha + \beta\tau) = e^{-\pi i m(2<\beta,\vec{z}> + <\beta,\beta>\tau)} \Phi(\tau,\vec{z})$$

et possédant un développement de Fourier du type :

$$\Phi(\tau,\vec{z}) = \sum_{\substack{l \in \widetilde{L} \\ n \geq 0}} c(n,l)\ e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i <l,\vec{z}>}$$

Les entiers k et m sont appelés respectivement poids et indice de la forme Φ, et les coefficients $c(n,l)$ sont ses coefficients de Fourier.

M.Eichler et D.Zagier ([EZ]) posent les bases de la théorie des formes de Jacobi en s'intéressant aux formes de Jacobi dites classiques, définies sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, qui entrent dans le cadre plus large de la définition décrite ci-dessus, si l'on considère le réseau L comme étant le réseau de racines A_1.
Ils établissent la structure sur le corps $\mathbb{C}$ de certaines algèbres bigraduées constituées de ces formes, notamment celle de l'algèbre des formes faibles (voir [EZ]).
K.Wirthmüller généralise ce résultat de structure en considérant le cas des formes de Jacobi définies relativement à un réseau de racines classique, irréductible, quelconque (non de type E_8). (Voir [W], théorème 3.6.)
Adoptant un point de vue arithmétique dans le but d'obtenir des applications dans les diverses domaines cités plus haut, V.Gritsenko s'intéresse à la structure sur $\mathbb{Z}$ de l'anneau gradué, noté $J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$, des formes de Jacobi faibles, classiques, de poids 0, à coefficients de Fourier entiers. (Voir [G1], [G2]). Il démontre que cet anneau est un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en quatre générateurs, dont trois sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

La question de la possibilité d'une généralisation de ce résultat de structure arithmétique est à l'origine du travail qui suit.
Ce travail s'attachera à l'étude de la généralisation la plus simple des formes de Jacobi classiques que constituent les formes de Jacobi définies pour le réseau de racines A_2, et à quelques applications des résultats obtenus.

Un chapitre introductif, basé sur un cours donné par V.Gritsenko ([G3]), l'article [G], ainsi que de nombreuses discussions, rappelle les définitions et les propriétés des formes de Jacobi définies relativement à un réseau entier pair L, de réseau dual noté $\widetilde{L}$, avant de se placer dans le cadre du réseau de racines A_2.

Le paragraphe 1.1.3 donne quelques exemples bien connus de formes de Jacobi à une variable, dont celui de la fonction ϑ, les formes classiques introduites par M.Eichler et D.Zagier, et les générateurs qu'utilise V.Gritsenko dans les articles [G1], [G2].
Les propriétés décrites au paragraphe 1.1.5 des coefficients de Fourier $c(n,l)$ d'une forme de Jacobi faible d'indice m, notée Φ, permettent de donner la représentation vectorielle de cette forme de Jacobi, à l'aide des séries thêta d'indice m associées au réseau L, notées $\theta^L_{\mu,m}$, et définies au paragraphe 1.1.6. On écrit Φ sous la forme suivante (voir la proposition 1.1.5) :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{\mu\in\widetilde{L}/mL} g_\mu(\tau)\ \theta^L_{\mu,m}(\tau,z),$$

où les fonctions $g_\mu(\tau)$ sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan complexe supérieur $\mathbb{H}$.

Les paragraphes 1.2.4 et 1.2.5 soulignent certains liens entre les formes de Jacobi à plusieurs variables et les formes de Jacobi classiques à une variable, par spécialisation, ou encore avec les formes modulaires, par utilisation de développement de Taylor, qui relèvent chacune de théories plus connues. Ces méthodes sont illustrées dans le cas du réseau de racines A_2. On obtient en particulier, à la proposition 1.2.11, l'expression suivante de la *correction automorphe* de la forme de Jacobi faible Φ, de poids k, d'indice m :

$$\exp(-4\pi^2 m G_2(\tau) < z,z >)\Phi(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

où pour chaque couple d'entiers naturels $(k_1,\ k_2)$, la fonction $f_{(k_1,\ k_2)}$ est une forme modulaire de poids $k+k_1+k_2$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.
Ceci permet, en exploitant les propriétés connues des formes modulaires, de donner une évaluation de la dimension de l'espace vectoriel des formes de Jacobi faibles de poids et d'indice fixés, définies relativement à A_2, (corollaire 1.2.3), et également, en notant α_1 l'une des racines du réseau A_2, d'écrire la relation (corollaire 1.2.1) importante concernant les coefficients de Fourier $c(n,l)$ d'une forme de Jacobi faible de poids 0, d'indice m suivante :

$$m\sum_l c(0,l) = 6\sum_l c(0,l) < l\ ,\ \alpha_1 >^2\ ,$$

relation utile notamment pour l'étude du coefficient $[\Phi]_{q^0} = \sum_l c(0,l) e^{2i\pi<z,l>}$ (voir la notation 1.1.1), réalisée au paragraphe 5.1.

Ce travail se poursuivra dans ce cadre précis du réseau de racines A_2. Toutefois, certaines remarques de généralisation seront suggérées au fil du texte.
La géométrie de ce réseau de racines, et plus particulièrement l'action de son groupe de Weyl, groupe engendré par les réflexions par rapport aux racines du réseau (voir la proposition-définition 2.1.1), seront exploitées à partir du deuxième chapitre.

La réalisation du réseau A_2 utilisée est précisée au paragraphe 1.2.1, il s'agit de la réalisation décrite par N.Bourbaki [B].

On considère, dans le sous-espace $U_{\mathbb{R}} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \sum_{j=1}^{3} x_j = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, le réseau $L_0 := \{(n_1,n_2,n_3) \in \mathbb{Z}^3 / \sum_{j=1}^{j=3} n_j = 0\}$, de base de racines $\alpha_1 = (1,-1,0)$, $\alpha_2 = (0,1,-1)$.
Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ induit sur $U_{\mathbb{R}} = L_0 \otimes \mathbb{R}$ la forme bilinéaire dont la matrice, dans la base $\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$, est donnée par :

$$S_0 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On utilisera dans $U = U_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ entre autres le système de coordonnées (z'_1, z'_2, z'_3) où $z'_1 + z'_2 + z'_3 = 0$.
Comme l'indique le paragraphe 2.1, le groupe de Weyl du réseau A_2 agit par permutation de ces coordonnées (z'_1,z'_2,z'_3).

La première idée pour obtenir une forme de Jacobi pour le réseau A_2, est de considérer certains produits du type $f_1(\tau,z'_1)f_2(\tau,z'_2)f_3(\tau,z'_3)$, où f_1, f_2, f_3 sont des formes de Jacobi classiques à une variable, voir la proposition 1.2.3.
C'est ainsi qu'apparaissent deux des formes qui seront essentielles pour cette étude, notées $a_{-3,1}$, $a_{-2,1}$. (Voir les propositions-définitions 2.5.1 et 2.5.2.)

Les opérateurs différentiels et l'opérateur de Hecke, bien connus dans le cas de une variable, se généralisent dans le cas de plusieurs variables (voir le paragraphe 1.2.3), et leur utilisation constitue une deuxième façon d'obtenir des formes de Jacobi, méthode qui sera exploitée, dans la proposition-définition 2.5.3, pour obtenir **la troisième forme capitale**, notée $a_{0,1}$.

Les trois formes particulières citées ci-dessus, dont les propriétés font l'objet du paragraphe 2.5.3, **constituent les trois formes génératrices dont K.Wirthmüller démontre l'existence ([W]), et permettent, à la proposition 2.6.2, de retrouver le résultat relatif à la structure de l'algèbre bigraduée, sur le corps $\mathbb{C}$, des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$-invariantes**, (définition 2.1.2), qu'il démontre par une autre approche dans ce même article :

$$J_{\star,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{C}} = M_\star[a_{0,1}, a_{-2,1}, a_{-3,1}],$$

où $M_\star$ désigne l'espace des formes modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

De cette structure découlent notamment les structures de l'algèbre graduée $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}$, algèbre des formes faibles, $W(A_2)$-invariantes, de poids 0, à coefficients rationnels, celle de l'idéal $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}(q)$ constitué des formes de coefficient $[\ ]_{q^0}$ nul (voir la notation 2.7.2), celle de $J_{\star,1}^{W(A_2),hol}$, espace vectoriel complexe des formes holomorphes, $W(A_2)$-invariantes, d'indice 1, et celle de $J_{\star,1}^{W(A_2),cusp}$, espace des formes cuspidales, $W(A_2)$-invariantes, d'indice 1. (Voir le paragraphe 2.7.)

On obtient notamment à la proposition 2.7.1 :

$$J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6]$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 sont des formes de Jacobi définies à l'aide des formes de Jacobi $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ et des formes modulaires $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$.

Les formes φ_1, φ_2, φ_3, φ_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et on a les relations :

$$\varphi_4^2 = \varphi_2 \times \varphi_6,$$

$$\varphi_2^2 \times \varphi_3 = \varphi_4 \times \varphi_5.$$

On obtient également, aux propositions 2.7.3 et 2.7.4 :

$$J_{k,1}^{W(A_2),hol} = M_{k-4}E_{4,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-6}E_{6,1}^{(A_2)} \oplus S_{k+3}a_{-3,1}$$

$$J_{k,1}^{W(A_2),cusp} = M_{k-9}\Delta(\tau)a_{-3,1} \oplus M_{k-10}\Delta(\tau)a_{-2,1} \oplus M_{k-12}\Delta(\tau)a_{0,1}$$

où $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$ sont les séries d'Eisenstein définies relativement au réseau A_2, de poids 4 et 6 respectivement, d'indice 1, définies au paragraphe 1.2.7, et où M_j, respectivement S_j, désigne l'espace des formes modulaires, respectivement modulaires cuspidales, de poids j.

Chacun de ces espaces présente un intérêt particulier.
Les propriétés des formes de Jacobi de poids 0 à coefficients dans un anneau ayant une structure arithmétique (l'anneau $\mathbb{Z}$ ou une extension) possèdent des applications en géométrie.
C'était le cas dans le cadre classique des formes à une variable, comme l'a montré V.Gritsenko ([G1], [G2]), et ce sera encore le cas ici, comme le développe le paragraphe 6.2 du dernier chapitre.
On parviendra notamment, après application, à certaines formes de Jacobi appartenant à $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$, du relèvement exponentiel décrit par V.Gritsenko et V.Nikulin [GN II], à la construction de formes modulaires associées à des algèbres de Kac-Moody hyperboliques de type de Borcherds ([Bo1], [Bo2], [GN]).

Quant aux **formes d'indice** 1, **holomorphes ou cuspidales**, elles se relèvent en des formes modulaires sur des domaines de type IV, et **permettent**, selon une méthode exposée par V.Gritsenko [G] et rappelée également dans le dernier chapitre, **la construction de formes différentielles canoniques sur des espaces qui peuvent être interprétés comme des espaces de modules de variétés particulières** (notamment de certains types de surfaces $K3$ polarisées, voir les travaux de V.Nikulin [N1], [N2], ou de certaines variétés abéliennes), ce qui a également des répercussions en géométrie algébrique. **On obtiendra ainsi**, au paragraphe 6.3.3, **quelques exemples d'espaces de modules dont le genre géométrique est positif.**

Afin de parvenir à ces résultats, il faudra réunir un certain nombre d'exemples de formes de Jacobi, obtenus par la mise en oeuvre de diverses méthodes de construction, qui feront l'objet des chapitres 3 et 4.

Le chapitre 3 concerne des constructions réalisées à partir de formes de Jacobi dites "classiques".
Dans un premier paragraphe, sont introduites **les séries thêta** d'indice $m = 1$, 2, 3 ou 4, ce qui nécessite dans chaque cas la description d'un système de représentants du groupe $\widetilde{A_2}/mA_2$, et permet d'obtenir des formes de Jacobi singulières (voir la définition 1.2.3) pour ces premiers indices. On obtient notamment le corollaire 3.1.1 qui donne la relation :

$$\Big(\theta_{2u,1} - \theta_{u,1}\Big)(\tau,2z) = \Big(\theta_{\delta_1,4} - \theta_{\delta_2,4} - \theta_{\delta_3,4} + \theta_{\delta_4,4} + \theta_{\delta_5,4} - \theta_{\delta_6,4} - \theta_{\delta_7,4} + \theta_{\delta_8,4}\Big)(\tau,z).$$

Le deuxième paragraphe de ce chapitre est consacré à l'étude de **la forme dénominateur** notée $\mathcal{A}$, qui possède 2 descriptions, liées à la formule du dénominateur des algèbres de Lie affines (voir [KP]), données par la proposition-définition 3.2.1 et la proposition 3.2.4 :

$$\mathcal{A} = \theta_{\alpha_1+\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_2,3} - \theta_{-\alpha_1-\alpha_2,3}$$

$$\mathcal{A}(\tau,z) = \eta(\tau)^{-1} \prod_{\alpha\in\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\}} (i\vartheta(\tau, <\alpha,z>)\ ),$$

où ϑ est la série thêta classique à une variable déjà mentionnée.

Cette fonction dénominateur permet de préciser la structure de l'espace des formes de Jacobi $W(A_2)$-anti-invariantes au paragraphe 3.2.2, et permet aussi de définir un analogue des fonctions $\wp$ et σ de Weierstrass à une variable, comme l'exposent les paragraphes 3.2.4 et 3.2.5, susceptibles de fournir des résultats en arithmétique, qui ne font cependant pas l'objet d'une étude approfondie ici.

Un troisième paragraphe étudie l'**introduction** de ce qui sera appelé **des "caractéristiques"**.
Ce principe, qui aboutit par exemple, dans le cas de 1 variable, aux fonctions notées θ_{00}, θ_{01}, et θ_{10}, par D.Mumford ([Mu]), qui permettent la construction de formes de Jacobi citées au paragraphe 3.3.1, se généralise au cas de plusieurs variables.
Au paragraphe 3.3.2, on définira une nouvelle fonction à partir d'une forme de Jacobi ϕ d'indice m, relative au réseau A_2, dont on connaît les zéros, la forme $\mathcal{A}$ ou la forme $a_{-3,1}$ dans le cas présent.
Pour q entier naturel non nul, α, β appartenant à $\frac{1}{q}\widetilde{A_2}$, on pose :

$$\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) := e^{\pi i m\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi i m<\beta,z+\alpha>}\phi(\tau,z+\alpha+\beta\tau).$$

Si $\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)$ est non nul, on peut alors considérer le quotient :

$$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) := \frac{\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)}{\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)},$$

et en étudier les propriétés (corollaire 3.3.1).
On démontre (voir la proposition 3.3.3) que certains polynômes symétriques en ces fonctions sont des formes de Jacobi de poids 0, $W(A_2)$-invariantes.
Des propriétés arithmétiques des coefficients de Fourier des formes $\mathcal{A}$ et $a_{-3,1}$ utilisées, découlent certaines propriétés arithmétiques des nouvelles formes construites. C'est ainsi qu'on démontre au chapitre 5, en utilisant des exemples construits notamment au corollaire 3.3.3 et à la proposition 3.3.12, avec $q = 2$ ou $q = 3$, que certaines des formes de Jacobi introduites sont à coefficients entiers (voir les paragraphes 5.3 et 5.4).

Le chapitre 4 exploite des formes de Jacobi à plusieurs variables, connues, définies relativement à des réseaux autres que le réseau A_2.
Ainsi, dans le premier paragraphe de ce chapitre, une forme de Jacobi Ψ pour une réalisation du réseau $A_1 \oplus A_1^{\perp}$ dans A_2, donne une forme de Jacobi $\Phi(\tau,z) = \Psi(\tau,2z)$ pour le réseau A_2.

On peut encore citer comme exemples les coefficients du développement de Taylor d'une correction modulaire de la forme construite à l'aide des séries thêta d'indice 1 pour les réseaux A_2 et E_6 au paragraphe 4.2 :

$$\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) := {}^t\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}).\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6}).$$

D'après la proposition 4.2.2, on a l'écriture suivante :

$$\exp(-4\pi^2 G_2(\tau)(<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}))\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})$$
$$= \sum_{(k_1,\ldots,k_2)\in\mathbb{N}^6} f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})x_1^{k_1}\ldots x_6^{k_6},$$

en notant $\vec{z_6} := (x_1,\ldots,x_6)$ dans une base de E_6 fixée, et les fonctions $f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})$ sont des formes de Jacobi holomorphes, définies relativement au réseau A_2, d'indice 1, de poids respectifs $4+k_1+\ldots+k_6$.
En particulier, ceci permet d'écrire, à la proposition 4.2.3, la série d'Eisenstein $E_{4,1}^{(A_2)}$, définie de façon classique (par analogie avec le cas à une variable présenté par M.Eichler et D.Zagier [EZ]) dès le paragraphe 1.2.7, sous la forme :

$$E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}) = {}^t\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}).\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{0}).$$

Enfin, l'utilisation des séries thêta de Jacobi définies à l'aide d'un réseau Λ unimodulaire (comme le font M.Eichler et D.Zagier [EZ] dans le cas classique à une variable) permet également d'obtenir des formes de Jacobi pour A_2, à la proposition 4.3.2.
On obtient par cette approche des corollaires arithmétiques : en utilisant l'identité décrite à la proposition 4.3.3 :

$$\theta_{\mathbb{E}_8,y_1',y_2'} = E_{4,1}^{(A_2)}$$

et la description précise faite des coefficients de Fourier de cette série d'Eisenstein à la proposition 1.2.18, on peut donner **une expression exacte de certains cardinaux, faisant intervenir une série de type** $L(1,\chi)$.
On peut également fournir **une valeur exacte de ces coefficients de Fourier**, obtenue avec l'aide du logiciel pari-gp.

Tous ces exemples permettront d'aboutir, au chapitre 5, à la description de l'anneau $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}[2^{-1}]}$, modulo l'idéal, noté $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}[2^{-1}]}(q)$, des formes de coefficient $[\ ]_{q^0}$ nul.

On démontre en effet un résultat principal (voir les propositions-définitions 5.2.1, 5.3.1, 5.4.1, et les théorèmes 5.3.1, 5.4.1) : **l'existence de cinq formes de Jacobi faibles,** $W(A_2)$**-invariantes, notées** $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, **de poids** 0, d'indices respectifs 1, 2, 2, 3 et 3, construites explicitement, **à coefficients de Fourier entiers** et vérifiant :

$$[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2$$
$$[\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0} = 6 + P_1 + P_2$$
$$[\psi_{0,2}^{(11)}]_{q^0} = 27 + P_1 P_2$$
$$[\psi_{0,3}^{(1)}]_{q^0} = 2 + P_1 + P_2$$
$$[\psi_{0,3}^{(11)}]_{q^0} = 15 + P_1 P_2$$

où P_1 et P_2 sont les polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants définis au paragraphe 2.2.
Le logiciel pari-gp permet même de calculer précisément tous leurs coefficients de Fourier.
Toute forme de Jacobi faible de poids 0, $W(A_2)$-invariante, à coefficients de Fourier dans $B' := \mathbb{Z}[\ 2^{-1},\ 3^{-1}\ ]$, sera, modulo l'idéal $J_{0,\star}^{W(A_2),f,B'}(q)$, un polynôme à coefficients dans B' en ces cinq fonctions. (Voir la remarque 5.8.2 .)
En introduisant **la forme supplémentaire** $\psi_{0,4}^{(11)}$ définie au paragraphe 5.5, **qui est elle**

à coefficients de Fourier dans $\mathbb{Z}[2^{-1}]$, comme on parvient à le démontrer au lemme 5.8.1 en utilisant les résultats des chapitres précédents, **on aboutit alors au résultat de structure énoncé au théorème** 5.8.1, **qui constitue la meilleure réponse quant à la recherche d'une structure arithmétique sur** $J_{0,\star}^{W(A_2),f}$:
pour tout entier naturel m,

$$J_{0,m}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}[2^{-1}]}/J_{0,m}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}[2^{-1}]}(q) \subset \mathbb{Z}[2^{-1}][\psi_{0,1}^{(1)},\, \psi_{0,2}^{(1)},\, \psi_{0,2}^{(11)},\, \psi_{0,3}^{(1)},\, \psi_{0,3}^{(11)}, \psi_{0,4}^{(11)}]$$

Mais ces exemples construits aux chapitres 3 et 4, tendront aussi à montrer **la difficulté d'obtenir la structure complète sur** $\mathbb{Z}$ **de l'anneau** $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$.

L'étude particulière du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$, effectuée au paragraphe 5.5, poursuivie au paragraphe 5.7, révèle que, contrairement à ce qui se passait dans le cas des formes à une variable ([G1], [G2]), la seule étude du coefficient $[\Phi]_{q^0} = \sum_l c(0,l)e^{2i\pi<z,l>}$ (voir la notation 1.1.1) ne permet pas de conclure quant à la structure arithmétique de ces algèbres graduées. Les formes $\psi_{0,4}^{(11)}$ et $\psi_{0,4}^{(1)}$ (définies à la proposition-définition 5.5.1) essentielles dans la construction des formes faibles, $W(A_2)$-invariantes, de poids 0, d'indice 4, (voir le corollaire 5.5.1) ne sont pas à coefficients de Fourier entiers (voir la proposition 5.5.1 et la remarque 5.7.2). Il faut nécessairement, comme le décrit la proposition 5.7.1, introduire un terme correctif provenant de l'idéal $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}(q)$ pour obtenir (peut-être), comme semblent l'indiquer les premiers calculs effectués à l'aide du logiciel pari-gp, mais sans cependant trouver de justification mathématique, des formes (notées χ_1 et χ_2 au paragraphe 5.7.3) à coefficients de Fourier entiers. Le même problème se présente pour des indices plus élevés.

Cependant, comme on le mentionne plus haut, si elles ne suffisent pas à décrire la structure de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$, **ces premières formes** $\psi_{0,1}^{(1)},\, \psi_{0,2}^{(1)},\, \psi_{0,2}^{(11)},\, \psi_{0,3}^{(1)},\, \psi_{0,3}^{(11)}$, **à coefficients de Fourier entiers, sont susceptibles d'être utilisées dans divers domaines.**

Outre l'application de la construction de produits de Borcherds présentés au premier paragraphe du dernier chapitre, ou encore le fait qu'elles permettront d'exhiber, à la proposition 6.3.6, des exemples de variétés de genre géométrique non nul, qui peuvent s'interpréter comme espaces de modules de certaines variétés, **ces formes seront à l'origine de la construction, comme l'expose le paragraphe 6.2, de formes automorphes réflectives associées, dans la théorie de Borcherds** (voir [B]), **à des algèbres de Kac-Moody hyperboliques**.
En effet, en appliquant à ces 5 formes de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$ ainsi qu'à **la forme** Φ_1, **de poids** 0, **d'indice** 1, **également à coefficients de Fourier entiers**, définie à la proposition-définition 6.2.2, dont le développement de Fourier commence par $q^{-1} + 90 + \ldots$, le relèvement exponentiel décrit par V.Gritsenko et V.Nikulin (voir [GN]) et rappelé à la proposition-définition 6.2.1, on parviendra à l'obtention (voir la proposition 6.2.2, le théorème 6.2.1, la proposition-définition 6.2.2, et la remarque 6.2.3) de 6 **formes modulaires réflectives**, définies sur $L_1 \otimes \mathbb{C}$, où $L_1 = \mathbb{Z} \oplus A_2 \oplus \mathbb{Z}$, **dont les diviseurs sont tous de multiplicité** 1.
Ces 6 formes seront alors associées à des **algèbres de Kac-Moody hyperboliques de type de Borcherds**, étudiées notamment par V.Gritsenko et V.Nikulin (voir [GN], [GN I], [GN II]), de signature (3,1), dont il restera à déterminer les caractéristiques précises en exploitant les coefficients de Fourier des formes de Jacobi utilisées.
En particulier, **les formules du dénominateur de certaines de ces algèbres seront fournies par l'égalité entre certains relèvements exponentiels et certains**

relèvements arithmétiques de formes de Jacobi. On obtient par exemple, à la proposition 6.3.5, le fait que le relèvement arithmétique de la forme cuspidale $\Delta(\tau)a_{-3,1}$ (voir la proposition 2.5.10), où $\Delta(\tau)$ est la forme classique de Dedekind (voir le paragraphe 1.1.3) et le relèvement exponentiel de la forme $\psi_{0,1}^{(1)} = 24a_{0,1}$ à coefficients de Fourier entiers introduite au paragraphe 5.2, coïncident :

$$F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}(Z) = Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)}),$$

ce qui donne l'identité suivante, soulignée à la remarque 6.3.3, utile dans l'étude de l'algèbre de Kac-Moody hyperbolique de type de Borcherds associée à la forme $\psi_{0,1}^{(1)}$:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{-1}\Big(\Delta(\tau)a_{-3,1}\Big)|_{T_-(m)}(\tau,z)e^{2i\pi m\tau'}$$

$$= e^{2i\pi\tau}\ e^{2i\pi z_1}\ e^{2i\pi\tau'} \prod_{\substack{n,\, t\in\mathbb{Z} \\ l\in\widetilde{A_2} \\ (n,l,t)>0}} \Big(1-e^{2i\pi(n\tau+<z,l>+t\tau')}\Big)^{f(nt,l)},$$

où les $f(n,l)$ désignent les coefficients de Fourier de la forme $\psi_{0,1}^{(1)}$.

Trois autres identités de ce type sont décrites à la remarque 6.3.4.
Ces résultats constituent **une étape principale dans la construction et la classification des algèbres de Kac-Moody hyperboliques de signature** (3,1).

Un dernier paragraphe montrera que l'étude spécifique des formes hermitiennes de degré 2 déterminées sur l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, développée par exemple par A.Krieg et T.Dern [KD], est rejointe par le travail effectué sur les formes de Jacobi définies relativement à un réseau de racines, dans le cas particulier du réseau A_2 et de l'indice 1.
Le point de vue adopté ici semble ainsi offrir une approche plus générale du problème de la structure des divers espaces de formes de Jacobi à plusieurs variables.

Chapitre 1

Formes définies pour un réseau L entier pair

1.1 Définitions et propriétés générales

1.1.1 Notations

Les notations et les définitions qui suivent sont celles de l'article de V.Gritsenko, [G]. On utilise aussi l'ouvrage de W.Ebeling [E], pour les définitions concernant les réseaux.

Soit L un réseau entier, pair, de rang r. On note $<\ ,\ >$ le produit scalaire dont il est muni, et $U_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ l'espace vectoriel réel de dimension r qui lui est associé.
Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ une $\mathbb{Z}$-base de L et S_0 la matrice de $<\ ,\ >$ dans cette base.
On notera $U = U_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = L \otimes \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur complexe.
Le réseau dual noté $\widetilde{L}$ est par définition :

$$\widetilde{L} = \{y \in U_{\mathbb{R}} / \forall x \in L \ \ < y,\, x > \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour m entier naturel fixé, on notera $G_m(L)$ le groupe fini $\widetilde{L}/mL$.

1.1.2 Définitions

Définition 1.1.1. (Voir [EZ], [KP], [W], [G].)
Soient k, m deux entiers relatifs.
Une fonction $\Phi(\tau,z)$ définie et holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée *forme de Jacobi faible de poids k, d'indice m, définie relativement au réseau L*, si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, $\Phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{i\pi m \frac{c<z,z>}{c\tau+d}} \Phi(\tau,z)$,

2) pour tout couple (α,β) d'éléments de L, $\Phi(\tau, z+\beta\tau+\alpha) = e^{-i\pi m(2<\beta,z>+\tau<\beta,\beta>)}\Phi(\tau,z)$,

3) Φ admet un développement de Fourier du type :

$$\Phi(\tau,\, z) = \sum_{\substack{l \in \widetilde{L} \\ n \geq 0}} f(n,\, l) e^{2\pi i(n\tau + <l,z>)}.$$

Notation 1.1.1. *On notera, pour n entier naturel, $[\Phi]_{q^n}$ le coefficient de q^n dans le développement de Fourier de Φ, c'est à dire :*

$$[\Phi]_{q^n} = \sum_{l \in \widetilde{L}} f(n,\, l) e^{2\pi i <l,z>}.$$

Les coefficients $f(n,l)$ sont appelés coefficients de Fourier de la forme Φ.

Définition 1.1.2. Soit Φ une forme de Jacobi faible d'indice m.
- Si les seuls coefficients $f(n,l)$ non nuls sont ceux dont la norme hyperbolique (c'est à dire $2nm- < l,l >$) est supérieure ou égale à 0, alors la forme Φ est appelée *forme de Jacobi holomorphe*.
- Si les seuls coefficients de Fourier qui sont non nuls sont ceux dont la norme hyperbolique est strictement positive, alors la forme est dite *cuspidale*.

Remarque 1.1.1. On dira qu'une fonction $\Phi(\tau,z)$ holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$ est une forme de Jacobi *presque holomorphe* s'il existe un entier n_0 tel que la forme $\Delta(\tau)^{n_0}\phi(\tau,z)$ soit une forme de Jacobi holomorphe, où $\Delta(\tau)$ est la première forme modulaire cuspidale pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, voir le paragraphe 1.1.3.
Dans ce cas, il existe un réel M_0 tel que, pour tout coefficient $f(n,l)$ non nul, on ait : $2nm- < l,l > \geq M_0$.

Notation 1.1.2. *On notera $J_{k,m}^{f,L}$, respectivement $J_{k,m}^{hol,L}$, respectivement $J_{k,m}^{cusp,L}$, respectivement $J_{k,m}^{nh,L}$, l'espace vectoriel des formes de Jacobi faibles, respectivement holomorphes, respectivement cuspidales, respectivement presque holomorphes, de poids k, d'indice m définies relativement au réseau L. La notation $J_{k,m}^{mer,L}$ désignera l'espace des fonctions méromorphes sur $\mathbb{H} \times U$ et ayant les propriétés 1) et 2) des formes de Jacobi pour le poids k et l'indice m, qui seront appelées formes de Jacobi méromorphes.*

Remarque 1.1.2. Il existe aussi des formes de Jacobi ayant un caractère ou un système multiplicatif, ou encore des formes de Jacobi pour des sous-groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$, ou encore des formes de Jacobi de poids ou d'indice demi-entier.

Remarque 1.1.3. On peut également donner ces définitions en introduisant la notion de groupe de Jacobi et de facteur d'automorphie. (Voir [EZ], [G].)
On appelle groupe de Jacobi et on note Γ^J le groupe regroupant les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ et ceux de $H(A_2) = A_2 \times A_2$, obtenu par produit semi-direct. Pour en donner une description plus précise, on peut utiliser une réalisation de ce groupe comme sous-groupe particulier du groupe $GL_6(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles de taille 6, à coefficients réels, comme le fait V.Gritsenko (voir [G] et les précisions apportées plus loin à la notation 6.3.1).
Ce groupe agit sur $\mathbb{H} \times U$, et on définit le facteur d'automorphie noté $J_{k,m}(g;(\tau,z))$ ainsi : pour $g = \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$J_{k,m}(g;(\tau,z)) := (c\tau + d)^k e^{\pi i m \frac{c}{c\tau+d} <z,z>}$$

pour $g = (\alpha,\beta)$ appartenant à $H(A_2)$,

$$J_{k,m}(g;\tau,z) := e^{-\pi i m(2<\beta,z>+<\beta,\beta>\tau)},$$

et $J(gg';(\tau,z)) = J(g';(\tau,z))J(g;g'(\tau,z))$, pour g, g' appartenant à Γ^J.

Les deux premières propriétés d'une forme de Jacobi de poids k, d'indice m, avec un système multiplicatif v, s'écrivent alors :

$$\forall\ g \in\ \Gamma^J,\ \phi(g.(\tau,z)) = v(g)J_{k,m}(g;(\tau,z))\phi(\tau,z).$$

On trouvera aussi parfois $\phi|_{k,m}(g) = v(g)g$, avec $\phi|_{k,m}(g)(\tau,z) = J^{-1}_{k,m}(g;(\tau,z))\phi(g.(\tau,z))$.

1.1.3 Exemples classiques

(a) Fonction ϑ.
L'un des premiers exemples de forme de Jacobi classique à une variable est la série thêta de Jacobi notée ϑ, décrite par E.T.Whittaker et G.N.Watson [WW], citée notamment par V.Gritsenko [G1], et encore notée ϑ_{11} par D.Mumford [Mu].

Faisons quelques rappels concernant cette forme.
La forme ϑ est définie par :

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau,z) &= iq^{\frac{1}{8}}(\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}})\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)(1-q^m\zeta^{-1})(1-q^m\zeta)\\ &= -iq^{\frac{1}{8}}\zeta^{\frac{-1}{2}}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n),\end{aligned}$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$ et $\zeta = e^{2\pi iz}$.

Elle s'écrit aussi :

$$\vartheta(\tau,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(\pi i(n+\frac{1}{2})^2\tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2}))\ .$$

Cette fonction vérifie l'équation connue sous le nom "équation de chaleur" :

$$4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}.$$

La fonction ϑ est une forme de Jacobi holomorphe, définie pour le réseau A_1 (réseau de rang 1 muni de la forme quadratique de matrice (2)), de poids $\frac{1}{2}$, d'indice $\frac{1}{2}$, admettant le système multiplicatif $v_\eta^3 \ltimes v_H$, où $v_H(\lambda,\mu) = (-1)^{\lambda+\mu}$, pour tout couple d'entiers (λ,μ), et où η est la fonction de Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m).$$

On rappelle les valeurs de v_η en les générateurs $S = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$: $v_\eta(S) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $v_\eta(T) = e^{\frac{i\pi}{12}}$.

On rappelle également que η^{24} est la forme modulaire cuspidale de poids 12 pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ habituellement notée $\Delta(\tau)$.

Plus explicitement, la fonction ϑ vérifie les relations :

1) $\vartheta(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = v_\eta^3(\gamma)(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\frac{cz^2}{c\tau+d}}\vartheta(\tau,z)$, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$

2) $\vartheta(\tau,z+\mu\tau+\lambda) = (-1)^{\lambda+\mu}e^{-i\pi(2\mu z+\mu^2\tau)}\vartheta(\tau,z)$, pour tout couple d'entiers relatifs (λ,μ).

La forme ϑ admet pour seuls zéros les points du type (τ,z) où z appartient à $\mathbb{Z}\ +\ \tau\mathbb{Z}$.

On notera ϑ_{z^k} la k-ième dérivée partielle de la fonction ϑ par rapport à la variable z. Les équations fonctionnelles vérifiées par la forme ϑ permettent d'écrire les relations suivantes :

(i) pour μ et λ entiers, $(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z+\lambda+\mu\tau) = -2\pi i\mu + (\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z)$

(ii) $(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = 2\pi icz + (c\tau+d)(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z)$, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$.

On peut également mentionner les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lcllcl}
\vartheta(\tau,-z) & = & -\vartheta(\tau,z) & \vartheta_z(\tau,-z) & = & \vartheta_z(\tau,z) \\
\vartheta_{z^2}(\tau,-z) & = & -\vartheta_{z^2}(\tau,z) & \vartheta_{z^3}(\tau,-z) & = & \vartheta_{z^3}(\tau,z) \\
\vartheta(\tau,0) & = & 0 & \vartheta_z(\tau,0) & = & -2\pi\eta(\tau)^3 \\
\vartheta_{z^2}(\tau,0) & = & 0 & \vartheta_{z^3}(\tau,0) & = & -48\pi^3\eta(\tau)^3G_2(\tau)
\end{array}$$

où $G_2(\tau)$ est la forme quasi-modulaire de poids 2 définie par :

$$G_2(\tau) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \ = \ -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)q^n,$$

avec $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

On peut rappeler que G_2 vérifie l'équation fonctionnelle :
$G_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2G_2(\tau) - \frac{c}{4\pi i}(c\tau+d)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.

(b) Quelques formes de Jacobi classiques à une variable.
La forme ϑ permet de définir toutes les formes de Jacobi classiques à une variable, voir [G1], [G2], [EZ], [GN II].
On peut rappeler les formes de Jacobi classiques à une variable $\varphi_{0,1}^{(A_1)}$, $\varphi_{-2,1}^{(A_1)}$, mentionnées par Eichler et Zagier [EZ], et les formes $\varphi_{0,4}^{(A_1)}$, $\varphi_{-1,1/2}^{(A_1)}$, $\varphi_{0,3/2}^{(A_1)}$, citées par exemple par V.Gritsenko [G1], [G2], et définies comme suit :

$$\varphi_{0,4}^{(A_1)}(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,3z)}{\vartheta(\tau,z)} \in J_{0,4}^{A_1,f}$$

$$\varphi_{0,3/2}^{(A_1)}(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)} \in J_{0,3/2}^{A_1,f}$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-1,1/2}(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,z)}{i\eta^3(\tau)} \in J^{A_1,f}_{-1,1/2}$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-2,1}(\tau,z) = \Big(\frac{\vartheta(\tau,z)}{i\eta^3(\tau)}\Big)^2 \in J^{A_1,f}_{-2,1}$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-1,2} = \varphi^{(A_1)}_{0,\frac{3}{2}} \times \varphi^{(A_1)}_{-1,\frac{1}{2}} \in J^{A_1,f}_{-1,2}$$

$$\varphi^{(A_1)}_{0,1}(\tau,z) = \frac{3}{\pi^2}\Big(\frac{\vartheta(\tau,z)}{\eta^3(\tau)}\Big)^2 \times \wp(\tau,z) \in J^{A_1,f}_{0,1},$$

où $\wp$ désigne la fonction $\wp$ de Weierstrass (voir [WW], [K]) rappelée ci-dessous :
$\wp(\tau,z) = 8\pi^2 G_2(\tau) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\log\vartheta(\tau,z)$,
c'est à dire :
$\wp(\tau,z) = 4\pi i\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} - \frac{\vartheta_{z^2}}{\vartheta}(\tau,z) + (\frac{\vartheta_z}{\vartheta})^2(\tau,z)$.

On peut rappeler également que la fonction $\wp$ appartient à $J^{A_1,mer}_{2,0}$, que ses pôles sont les points (τ,z) avec z appartenant à $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$, et qu'ils sont d'ordre 2.

Ces formes sont à coefficients de Fourier entiers.
On a par exemple :
$\varphi^{(A_1)}_{0,3/2}(\tau,z) = (\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}})\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^n\zeta^{-2})(1-q^n\zeta^2)}{(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n\zeta)}$.

On peut donner ici les premiers termes de leurs développements de Fourier, en notant $y = e^{2i\pi z}$:

$$\varphi^{(A_1)}_{0,4}(\tau,z) = (y+1+y^{-1}) + q(\dots)$$

$$\varphi^{(A_1)}_{0,3/2}(\tau,z) = (y^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}) + q(\dots)$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-1,1/2}(\tau,z) = (y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}) + q(\dots)$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-2,1}(\tau,z) = (y-2+y^{-1}) + q(\dots)$$

$$\varphi^{(A_1)}_{-1,2}(\tau,z) = (y-y^{-1}) + q(\dots)$$

$$\varphi^{(A_1)}_{0,1}(\tau,z) = (y+10+y^{-1}) + q(\dots).$$

On peut également rappeler un résultat de structure formulé par exemple dans l'ouvrage de M.Eichler et D.Zagier, [EZ], théorèmes 8.1 et 9.3 : les formes $\varphi^{(A_1)}_{-2,1}$ et $\varphi^{(A_1)}_{0,1}$ sont algébriquement indépendantes sur $M_\star$,
et on a :

$$J^{A_1,f}_{2\star,\star} = \oplus_{k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}} J^{A_1,f}_{2k,m} = M_\star[\varphi^{(A_1)}_{-2,1}, \varphi^{(A_1)}_{0,1}],$$

autrement dit, toute forme de Jacobi faible à une variable, de poids pair, est un polynôme en les formes $\varphi^{(A_1)}_{-2,1}$, $\varphi^{(A_1)}_{0,1}$, à coefficients dans l'espace $M_\star$ des formes modulaires.
De plus, d'après le théorème 9.4 [EZ], toute forme de Jacobi faible à une variable, de poids entier, est un polynôme en les formes $\varphi^{(A_1)}_{-2,1}$, $\varphi^{(A_1)}_{0,1}$, $\varphi^{(A_1)}_{-1,2}$, à coefficients dans l'anneau $M_\star$.

(c) Fonctions θ_{00}, θ_{01}, θ_{10}.

En effectuant des translations de demi-périodes sur la variable z de la fonction ϑ, on obtient trois autres séries classiques qui sont des formes de Jacobi pour des sous-groupes de congruence, qui s'écrivent également sous la forme d'un produit infini, et dont les équations fonctionnelles sont résumées dans des tables (voir [Mu]).

On a :

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(\tau,z) &= -q^{1/8}e^{\pi iz}\vartheta(\tau,z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2}),\\
\theta_{01}(\tau,z) &= iq^{1/8}e^{\pi iz}\vartheta(\tau,z+\tfrac{\tau}{2}),\\
\theta_{10}(\tau,z) &= -\vartheta(\tau,z+\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Les formes θ_{00}, θ_{01} et θ_{10} admettent les expressions suivantes :

$$\theta_{00}(\tau,z)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-2\pi iz}\Big)\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}e^{2\pi iz}\Big)$$

$$\theta_{01}(\tau,z)=\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}e^{2\pi iz}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-2\pi iz}\Big)$$

$$\theta_{10}(\tau,z)=q^{1/8}(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)\Big(1+q^ne^{2\pi iz}\Big)\Big(1+q^ne^{-2\pi iz}\Big).$$

Pour étudier les formes de Jacobi classiques de poids 0, V.Gritsenko introduit les formes à une variable $\xi_{ab}(\tau,z):=\frac{\theta_{ab(\tau,z)}}{\theta_{ab}(\tau,0)}$, voir [G1].

Les fonctions ξ_{00}, ξ_{01} et ξ_{10} admettent les expressions suivantes :

$$\xi_{00}(\tau,z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1+q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-2\pi iz}}{1+q^{\frac{2n-1}{2}}}\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1+q^{\frac{2n+1}{2}}e^{2\pi iz}}{1+q^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$\xi_{01}(\tau,z)=\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1-q^{\frac{2n+1}{2}}e^{2\pi iz}}{1-q^{\frac{2n+1}{2}}}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-2\pi iz}}{1-q^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$\xi_{10}(\tau,z)=\frac{(e^{\pi iz}+e^{-\pi iz})}{2}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\Big(1+q^ne^{2\pi iz}\Big)\Big(1+q^ne^{-2\pi iz}\Big)}{\Big(1+q^n\Big)\Big(1+q^n\Big)},$$

ce qui permet d'affirmer que les fonctions ξ_{00}, ξ_{01} et $2\xi_{10}$ sont à coefficients de Fourier entiers.

A partir des tables de relations vérifiées par les fonctions θ_{ab}, citées par exemple dans le livre de Mumford, [Mu], on peut écrire les tables analogues qui concernent les fonctions ξ_{ab}.

table I	table II
$\xi_{00}(\tau+1,z) = \xi_{01}(\tau,z)$	$\xi_{00}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{z^2}{\tau}}\ \xi_{00}(\tau,z)$
$\xi_{01}(\tau+1,z) = \xi_{00}(\tau,z)$	$\xi_{01}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{z^2}{\tau}}\ \xi_{10}(\tau,z)$
$\xi_{10}(\tau+1,z) = \xi_{10}(\tau,z)$	$\xi_{10}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{z^2}{\tau}}\ \xi_{01}(\tau,z)$

Ces fonctions vérifient également, pour λ et μ entiers, les équations fonctionnelles suivantes :

$$\xi_{00}(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = e^{-\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\xi_{00}(\tau,z)$$
$$\xi_{01}(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{\lambda}e^{-\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\xi_{01}(\tau,z)$$
$$\xi_{10}(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{\mu}e^{-\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\xi_{10}(\tau,z).$$

Comme le fait V.Gritsenko [G2], on peut donner l'expression de certaines formes de Jacobi classiques à l'aide de polynômes symétriques en ces fonctions.

$$\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z) = 4(\xi_{00}^2+\xi_{10}^2+\xi_{01}^2)$$
$$\varphi_{0,2}^{(A_1)}(\tau,z) := 2\Big((\xi_{00}\xi_{10})^2+(\xi_{00}\xi_{01})^2+(\xi_{10}\xi_{01})^2\Big)$$
$$\varphi_{0,3}^{(A_1)}(\tau,z) := \Big(\varphi_{0,3/2}^{(A_1)}(\tau,z)\Big)^2 = 4\Big(\xi_{00}\xi_{10}\xi_{01}\Big)^2$$

Ces forme appartiennent respectivement à $J_{0,1}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$, $J_{0,2}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$, $J_{0,3}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$.
Elles vérifient :

$$[\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z)]_{q^0} = y+10+y^{-1}$$
$$[\varphi_{0,2}^{(A_1)}(\tau,z)]_{q^0} = y+4+y^{-1}$$
$$[\varphi_{0,3}^{(A_1)}(\tau,z)]_{q^0} = y+2+y^{-1}$$

où $y = e^{2i\pi z}$.

Ces fonctions jouent un rôle déterminant dans la structure du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$, comme le montre V.Gritsenko, [G1], théorème 1.9 :

$$J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\varphi_{0,1}^{(A_1)}, \varphi_{0,2}^{(A_1)}, \varphi_{0,3}^{(A_1)}, \varphi_{0,4}^{(A_1)}]$$

où $\varphi_{0,1}^{(A_1)}, \varphi_{0,2}^{(A_1)}, \varphi_{0,3}^{(A_1)}$ sont algébriquement indépendantes et

$$4\varphi_{0,4}^{(A_1)} = \varphi_{0,1}^{(A_1)}\varphi_{0,3}^{(A_1)} - \Big(\varphi_{0,2}^{(A_1)}\Big)^2.$$

1.1.4 Nature de l'indice m

Remarque 1.1.4. Si Φ est une forme de Jacobi faible d'indice nul, alors la fonction Φ ne dépend que de la variable τ et est une forme modulaire pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve.
Soit $\Phi(\tau,z)$ une forme d'indice nul définie sur $\mathbb{H}\times U$. Notons $z := (z_1,z_2,\ldots,z_r)$.
D'après la relation (2) mentionnée dans la définition 1.1.1, pour chaque $(\tau,\, z_2,\ldots,\, z_r)$ fixé, la fonction $z_1 \mapsto \Phi(\tau,\, z_1\,,\, z_2,\ldots,\, z_r)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et double périodique, donc constante.
Ceci est valable pour chaque variable z_j, ainsi $\Phi(\tau,z)$ coïncide en tout point z avec $\Phi(\tau,0)$.
La première relation de cette même définition permet de montrer que la forme $\Phi(\tau,0)$ est modulaire pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

On pourra consulter les ouvrages de T.Miyake [Mi] et de N.Koblitz [K], pour l'étude de la structure de l'espace des formes modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

En reprenant un raisonnement analogue à celui effectué par M.Eichler et D.Zagier, voir [EZ], on peut établir le résultat suivant :

Proposition 1.1.1. *Il n'existe pas de forme de Jacobi faible non nulle d'indice strictement négatif.*

Preuve.
Soient Φ une forme de Jacobi faible de poids k, d'indice m et τ, $z_2, \ldots, z_r$ fixés dans $\mathbb{H} \times U$. On considère la fonction à une variable f définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z_1) := \Phi(\tau, z_1 , z_2, \ldots, z_r).$$

Alors, d'après la relation (2) de la définition 1.1.1, la fonction f vérifie, aux points z_1 où elle ne s'annule pas :

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f'}{f}\right) (z_1 + 1) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f'}{f}\right) (z_1)$$
$$\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f'}{f}\right) (z_1 + \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f'}{f}\right) (z_1) - m < \alpha_1, \alpha_1 > .$$

D'après ces propriétés, si f est non identiquement nulle sur $\mathbb{C}$, l'intégrale de la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'}{f}$ le long du contour d'un domaine fondamental F de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ bien choisi, c'est à dire le nombre de zéros de f à l'intérieur de F , est égal à $m < \alpha_1, \alpha_1 >$, ce qui permet de conclure que m est positif ou nul.

1.1.5 Propriétés des coefficients de Fourier

Lemme 1.1.1. *(voir : lemma 2.1, [G])*
D'après les propriétés 1) et 2) des formes de Jacobi faibles, les coefficients $f(n,l)$ d'une forme de Jacobi de poids k et d'indice m, vérifient :

$$f(n, -l) = (-1)^k f(n, l),$$

et pour tout β appartenant à L :

$$f(n,l) = f(n+ < l, \beta > + \frac{m}{2} < \beta, \beta > , l + m\beta).$$

Ce dernier résultat permet d'affirmer que le coefficient $f(n,l)$ ne dépend que de la norme hyperbolique $2mn- < l , l >$ et de la classe de l dans $\widetilde{L}$ modulo mL.

Proposition 1.1.2. *Soit m un entier naturel fixé.*
Il existe une constante C_m telle que, si Φ est une forme de Jacobi faible d'indice m, alors ses coefficients de Fourier notés $f(n,l)$ vérifient :

$$f(n,l) \neq 0 \Rightarrow 2nm- < l,l > \geq C_m.$$

Preuve.
Soient m un entier naturel et $\mathcal{S}$ un système de représentants de $\widetilde{L}$ modulo mL fixés.
Soit Φ une forme de Jacobi faible d'indice m, et $f(n,l)$ l'un de ses coefficients de Fourier non nuls.
D'après le lemme, $f(n,l) = f(n',h)$, où h appartenant à $\mathcal{S}$ est tel que : $h \equiv l \ mod \ mL$,

et où l'entier n' vérifie : $r = 2nm- < l,l >= 2n'm- < h,h >$.
Puisque Φ est une forme faible et qu'on a supposé $f(n,l)$ non nul, n' ne peut être que supérieur ou égal à 0, ce qui implique l'inégalité $r \geq - < h,h >$.
Or le groupe $G_m(L) = \widetilde{L}/mL$ est fini, donc il existe une constante M_m majorant l'ensemble des normes $< h,h >$, pour h décrivant ce groupe. On en déduit que si $f(n,l)$ est non nul, $r = 2nm- < l,l >$ est supérieur ou égal à la constante $-M_m$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque 1.1.5. L'évaluation de la meilleure constante possible est une autre question qu'il faut traiter en choisissant judicieusement le système de représentants.

Corollaire 1.1.1. *Si Φ est une forme de Jacobi faible, pour chaque entier naturel n fixé il n'existe qu'un nombre fini de coefficients de Fourier $f(n,l)$ non nuls.*

Preuve.
Soient Φ une forme de Jacobi faible d'indice m, et n un entier naturel fixé.
D'après la proposition précédente, si le coefficient $f(n,l)$ est non nul, alors on a :

$$< l,l > \leq 2nm - C_m.$$

Cette condition restreint l'ensemble des éléments l de $\widetilde{A_2}$ tels que $f(n,l)$ soit non nul à un ensemble fini d'éléments.

1.1.6 Représentation vectorielle

Définition 1.1.3.
Soient m un entier positif et μ un élément de $\widetilde{L}$.
La fonction thêta relative au réseau L, d'indice m et de caractéristique μ, est définie sur $\mathbb{H} \times U$ de la façon suivante :

$$\theta^L_{\mu,m}(\tau,z) := \sum_{\gamma \in L + \frac{\mu}{m}} \exp(\pi i m \tau < \gamma,\, \gamma > -2\pi i m < \gamma,\, z >).$$

Proposition 1.1.3. *(Voir par exemple [KP].)*
La fonction thêta d'indice m et de caractéristique μ, relative au réseau L de rang r, ne dépend que de μ modulo mL et possède les propriétés :

$$\begin{array}{lll}
(1) \quad \theta^L_{\mu,m}(\tau+1,z) & = & e^{\frac{\pi i}{m}<\mu,\mu>}\theta^L_{\mu,m}(\tau,z) \\[2ex]
(2) \quad \theta^L_{\mu,m}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) & = & e^{-2\pi i m<\beta,z>}e^{-\pi i m<\beta,\beta>\tau}\theta^L_{\mu,m}(\tau,z), \textit{ pour } \alpha,\ \beta \textit{ dans } L \\[2ex]
(3) \quad \theta^L_{\mu,m}(\frac{-1}{\tau},\frac{z}{\tau}) & = & |\widetilde{L}/mL|^{-\frac{1}{2}}(-i\tau)^{\frac{r}{2}}e^{\pi i m\frac{<z,z>}{\tau}}\displaystyle\sum_{\nu\in\widetilde{L}/mL}\exp(\frac{-2\pi i}{m}<\nu,\mu>)\theta^L_{\nu,m}(\tau,z)
\end{array}$$

De plus, pour m fixé, les formes $\theta^L_{\mu,m}$ sont linéairement indépendantes sur l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$.

Proposition 1.1.4. *Ces propriétés peuvent s'écrire sous forme vectorielle.*
Soit m un entier naturel. On pose :

$$\overrightarrow{\Theta_m^L} := (\theta_{\mu,m}^L)_{\mu \in \widetilde{L}/mL}.$$

Les relations (2) et (3) vérifiées par les formes $\theta_{\mu,m}^L$ s'écrivent alors à l'aide du vecteur colonne $\overrightarrow{\Theta_m^L}$:

(2) $\overrightarrow{\Theta_m^L}(\tau+1,z) = U_m(T).\overrightarrow{\Theta_m^L}(\tau,z)$,
avec $U_m(T) = \left(\delta_{\mu,\mu'} e^{\frac{i\pi}{m}<\mu,\mu'>}\right)_{\mu,\mu' \in \widetilde{L}/mL}$, $\delta_{.,.}$ *désignant le symbole de Kronecker*

(3) $\overrightarrow{\Theta_m^L}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \tau^{\frac{r}{2}} e^{\pi i m \frac{<z,z>}{\tau}} U_m(S).\overrightarrow{\Theta_m^L}(\tau,z)$,
avec $U_m(S) = \left(|\widetilde{L}/mL|^{-\frac{1}{2}}(-i)^{\frac{r}{2}} e^{\frac{-2i\pi}{m}<\mu,\nu>}\right)_{\mu,\nu \in \widetilde{L}/mL}$.

De façon générale, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, on peut écrire :*

$$\overrightarrow{\Theta_m^L}(\gamma.(\tau,z)) = (c\tau+d)^{\frac{r}{2}} e^{\pi i m c \frac{<z,z>}{c\tau+d}}\; U_m(\gamma)\;.\overrightarrow{\Theta_m^L}(\tau,z),$$

avec $U_m(\gamma)$ matrice unitaire.

Proposition 1.1.5. *(Voir [G], lemme 2.3)*
Soient k un entier, m un entier positif et Φ un élément de $J_{k,m}^{f,L}$.
Alors il existe un ensemble de fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, notées g_μ, μ appartenant à $\widetilde{L}/mL$, telles que :

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\mu \in \widetilde{L}/mL} g_\mu(\tau)\; \theta_{\mu,m}^L(\tau,z).$$

Remarque 1.1.6.
(i) Le résultat reste valable si la forme Φ est une forme de Jacobi pour un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ contenant l'élément $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(ii) Si Φ est une forme holomorphe, respectivement presque holomorphe, alors les fonctions g_μ sont holomorphes, respectivement presque holomorphes, à l'infini.

Preuve.
Le principe de démonstration de ce résultat (voir [G], lemme 2.3) repose sur l'écriture du développement de Fourier de la forme Φ et l'utilisation des propriétés des coefficients de Fourier.

Proposition 1.1.6. *On peut aussi traduire la proposition précédente à l'aide de l'écriture vectorielle.*
Soient k un entier, m un entier positif et ϕ un élément de $J_{k,m}^{f,L}$. Alors il existe un vecteur colonne dont les $|\ \widetilde{L}/mL\ |$ composantes sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, noté $\vec{A}(\tau)$ tel que :

$$\Phi(\tau,z) = {}^t\vec{A}(\tau).\overrightarrow{\Theta_m^L}(\tau,z).$$

Le vecteur $\vec{A}(\tau)$ vérifie les propriétés suivantes :

$${}^t\vec{A}(\tau+1).\, U_m(T) = {}^t\vec{A}(\tau)$$

et

$$ {}^t\vec{A}(\frac{-1}{\tau}).\ U_m(S) = \tau^{k-\frac{r}{2}}.\ {}^t\vec{A}(\tau) $$

ou encore, plus généralement, pour γ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$ {}^t\vec{A}(\gamma.\tau).\ U_m(\gamma) = (c\tau+d)^{k-\frac{r}{2}}.\ {}^t\vec{A}(\tau). $$

Preuve.
Les propriétés du vecteur $\vec{A}(\tau)$ sont obtenues en utilisant les propriétés modulaires de la forme de Jacobi Φ, ainsi que les propriétés (2) et (3) citées dans la proposition 1.1.4 vérifiées par les fonctions $\theta^L_{\mu,m}$.

Notation 1.1.3. *Sous-groupes de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ et formes modulaires.*
On notera $M_k(\Gamma')$ l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour un sous-groupe Γ' de $SL_2(\mathbb{Z})$, et M_k l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier.

Rappel de quelques sous-groupes classiques de $SL_2(\mathbb{Z})$.
On suivra ici les notations de T.Miyake ([Mi]).
Soit N un entier naturel non nul.

$$ \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ c \equiv 0 \ mod \ N \right\} $$

$$ \Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ c \equiv 0 \ mod \ N,\ a \equiv d \equiv 1 \ mod \ N \right\} $$

$$ \Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ b \equiv c \equiv 0 \ mod \ N,\ a \equiv d \equiv 1 \ mod \ N \right\}. $$

Le groupe $\Gamma_1(N)$ est appelé sous-groupe principal de congruence de niveau N.

On a les inclusions évidentes suivantes :

$$ \Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) $$

Proposition 1.1.7. *(Voir : lemma 2.5, [G])*
Soient k un entier, m un entier positif et Φ un élément de $J^{hol,L}_{k,m}$, que l'on écrit à l'aide de la représentation précédente :

$$ \phi(\tau,z) = \sum_{\mu \in \widetilde{L}/mL} g_\mu(\tau)\ \theta^L_{\mu,m}(\tau,z). $$

Alors les fonctions holomorphes g_μ, μ décrivant $\widetilde{L}/mL$, sont des formes modulaires de poids $k - \frac{r}{2}$ pour le groupe principal de congruence $\Gamma_1(mq)$, où r est le rang du réseau L, et où q est le niveau de la forme quadratique S_0, (voir notation 1.1.1) c'est à dire le plus petit entier naturel non nul tel que la forme quadratique qS_0^{-1} soit entière et paire.

Preuve.
Voir l'article de V.Gritsenko, [G].

Corollaire 1.1.2. *Evaluation de la dimension de $J^{hol,L}_{k,m}$.*
Soient k un entier relatif et m un entier naturel.

L'espace vectoriel complexe $J_{k,m}^{hol,L}$ *des formes de Jacobi holomorphes de poids* k *et d'indice* m, *est de dimension finie, et on peut donner la majoration suivante :*

$$dim_{\mathbb{C}}\ J_{k,m}^{hol,L}\ \leq |\ G_m(L)\ |\ \ dim_{\mathbb{C}}\ \Big(M_{k-\frac{r}{2}}(\Gamma_1(mq))\Big).$$

Preuve.
On utilise les notations précédentes et on considère l'application :

$$\begin{array}{lcl} J_{k,m}^{hol,L} & \longrightarrow & \Big(M_{k-\frac{r}{2}}(\Gamma_1(mq))\Big)^{|G_m(L)|} \\ \Phi & \longmapsto & \Big(g_\mu(\tau)\Big)_{\mu\in G_m(L)} \end{array}.$$

Cette application est un morphisme d'espaces vectoriels injectif, l'espace vectoriel $M_{k-\frac{r}{2}}(\Gamma_1(mq))$ est de dimension finie, donc l'espace vectoriel $J_{k,m}^{hol,L}$ est de dimension finie et on a l'inégalité annoncée.

1.2 Illustration dans le cas du réseau A_2

1.2.1 Description du réseau A_2

Réseau A_2
Dans tout ce qui suit, on se réfèrera à la réalisation de N.Bourbaki, [B].

On considère le sous-espace vectoriel $U_{\mathbb{R}}$ de dimension 2 de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U_{\mathbb{R}} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / \sum_{j=1}^{3} x_j = 0\}.$$

On notera $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ la base canonique et $<\,,\,>$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^3$.
$L = \{(n_1,n_2,n_3) \in \mathbb{Z}^3 / \sum_{j=1}^{j=3} n_j = 0\}$ est un réseau de $U_{\mathbb{R}}$ et est une réalisation du réseau de racines A_2 .
On notera désormais A_2 le réseau L.
Ce réseau admet pour $\mathbb{Z}$-base (α_1,α_2) où $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$.

La matrice de $<\,,\,>$ dans cette base s'écrit : $S_0 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Le réseau A_2 admet 6 racines (c'est à dire 6 vecteurs de norme égale à 2) qui sont : $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ -\alpha_1,\ -\alpha_2,\ -(\alpha_1+\alpha_2)$.
On notera Δ_+ l'ensemble des racines dites positives :

$$\Delta_+ = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\}.$$

Un élément de l'espace vectoriel complexe $U = U_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = L \otimes \mathbb{C}$ sera écrit $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$, avec $(z_1,\ z_2)$ dans $\mathbb{C}^2$ ou encore $z = z_1'\epsilon_1 + z_2'\epsilon_2 + z_3'\epsilon_3$, avec (z_1',z_2',z_3') dans $\mathbb{C}^3$ et $\sum_{j=1}^{3} z_j' = 0$.
On a alors :

$$z_1' = z_1,\ z_2' = z_2 - z_1,\ z_3' = -z_2$$
$$< z,z >= 2\ (z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2) = {z_1'}^2 + {z_2'}^2 + {z_3'}^2.$$

Réseau dual
Le réseau dual, qui est par définition le réseau constitué par l'ensemble $\widetilde{A_2} = \{y \in U_{\mathbb{R}} / \forall x \in A_2 < y,\, x >\in \mathbb{Z}\}$, admet pour $\mathbb{Z}$-base $\{u,u_2\}$ où $u = \epsilon_3 - \frac{1}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$, $u_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3 = \alpha_2$.
On peut remarquer que $\{3u,\ u_2\}$ constitue une $\mathbb{Z}$-base du réseau A_2.
On peut aussi considérer la $\mathbb{Z}$-base de $\widetilde{A_2}$ constituée des poids fondamentaux notés λ_j, où
$\lambda_1 = \epsilon_1 - \frac{1}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) = \frac{1}{3}(2,-1,-1) = \frac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)$,
$\lambda_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 - \frac{2}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) = \frac{1}{3}(1,1,-2) = \frac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2)$.
Cette base vérifie la propriété suivante :

$$< \lambda_j,\alpha_i >= \delta_{ij},\ \text{pour } i,\ j \text{ appartenant à } \{1,2\}.$$

Ainsi on a : $< l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2,\ z > = l_1z_1 + l_2z_2$, pour $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$.
On peut noter que $u = -\lambda_2$, et que $\{\alpha_2,\lambda_2\}$ constitue donc également une $\mathbb{Z}$-base de $\widetilde{A_2}$.

Groupe discriminant
Le groupe discriminant $G(A_2) := \widetilde{A_2}/A_2$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
La forme bilinéaire $<\,,\,>$ induit sur $G(A_2)$ une forme bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (voir

les travaux de V.Nikulin [N]) définie de la façon suivante :

$$b_G(\mu + A_2, \nu + A_2) := <\mu, \nu> + \mathbb{Z}, \text{ pour } \mu, \nu \text{ appartenant à } \widetilde{A_2}.$$

On peut également considérer la forme quadratique qui lui est associée et qui est à valeurs dans $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$:

$$q_G(\mu + A_2) := <\mu, \mu> + 2\mathbb{Z}, \text{ pour } \mu \text{ appartenant à } \widetilde{A_2}.$$

En notant, pour μ appartenant à $\widetilde{A_2}$, $\bar{\mu} := \mu + A_2$, on a la relation, pour μ, ν appartenant à $\widetilde{A_2}$:

$$q_G(\bar{\mu} + \bar{\nu}) = q_G(\bar{\mu}) + q_G(\bar{\nu}) + 2b_G(\bar{\mu}, \bar{\nu}).$$

Proposition 1.2.1. *Soit m un entier supérieur ou égal à 1.*
Le groupe $G_m(A_2) = \widetilde{A_2}/mA_2$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/3m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, d'ordre $3m^2$.

Preuve.
On considère la base $\{\alpha_2, \lambda_2\}$ de $\widetilde{A_2}$.
Soit λ appartenant à $\widetilde{A_2}$, on écrit λ sous la forme $\lambda = s\alpha_2 + t\lambda_2$, où s et t sont deux entiers relatifs.
Alors $\lambda = (s + \frac{2}{3}t)\alpha_2 + \frac{t}{3}\alpha_1$ appartient à mA_2 si et seulement si $s + \frac{2}{3}t$ et $\frac{t}{3}$ appartiennent à $m\mathbb{Z}$, ou encore, si et seulement si $3m$ divise t et m divise s dans $\mathbb{Z}$.
Ceci permet d'affirmer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \lambda = s\alpha_2 + t\lambda_2 & \longmapsto & (\ t \ mod \ 3m \ , \ s \ mod \ m \ ) \\ \widetilde{A_2} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif de noyau mA_2, d'où le résultat annoncé.

Lemme 1.2.1. *Exemples de systèmes de représentants de $G_m(A_2)$.*
(1) Les ensembles $\{0,\ \lambda_1,\ 2\lambda_1\}$ et $\{0,\ u,\ 2u\}$ (on rappelle que $u = -\lambda_2$, voir le paragraphe 1.2.1) sont des systèmes de représentants de $G_1(A_2)$.
(2) L'ensemble $\{0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \pm\lambda_1,\ \pm(\lambda_1-\alpha_1),\ \pm(\lambda_1-\alpha_2),\ \pm(\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2))\}$ constitue un système de représentants de $G_2(A_2)$.
(3) L'ensemble $\{0,\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_2+\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-2\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-3\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-4\lambda_2),\ \pm(\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2),\ \pm\lambda_2,\ \pm2\lambda_2,\ \pm3\lambda_2,\ \pm(2\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(3\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(4\lambda_2-2\alpha_2)\}$ constitue un système de représentants de $G_3(A_2)$.

Principe de la démonstration.
On utilise l'isomorphisme décrit dans la preuve de la proposition précédente, ainsi que les propriétés suivantes :
(i) $3\lambda_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, et pour n entier relatif, et j valant 1 ou 2, $n\lambda_j$ appartient à A_2 si et seulement si n est divisible par 3
(ii) $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ appartient à A_2
(iii) $2\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha_1$, $2\lambda_2 - \lambda_1 = \alpha_2$ appartiennent à A_2.

Notation 1.2.1.
On notera :

$$\zeta_1 := e^{2i\pi z_1} = e^{2i\pi <z,\ \lambda_1>}$$

$$\zeta_2 := e^{2i\pi z_2} = e^{2i\pi <z,\ \lambda_2>}$$

Proposition 1.2.2. *Soit k un entier relatif fixé.*
(1) Si Φ appartient à $J_{k,1}^{A_2,f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ (voir la notation 1.1.1) est de la forme :

$$[\Phi]_{q^0} = \begin{cases} f(0,0) + f(0,\lambda_1)(\zeta_1 + \zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_1^{-1} + \zeta_2 + \zeta_1\zeta_2^{-1}), & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ f(0,\lambda_1)(\zeta_1 + \zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-1}\zeta_2 - (\zeta_1^{-1} + \zeta_2 + \zeta_1\zeta_2^{-1})), & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases}$$

(2) Si Φ appartient à $J_{k,2}^{A_2,f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} [\Phi]_{q^0} = \; & f(0,0) \\ & +f(0,\lambda_1)[\zeta_1 + (-1)^k\zeta_1^{-1}] \\ & +f(0,\lambda_2)[\zeta_2 + (-1)^k\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,\lambda_1 - \lambda_2)[(-1)^k\zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,2\lambda_1 - \lambda_2)[\zeta_1^2\zeta_2^{-1} + (-1)^k\zeta_1^{-2}\zeta_2] \\ & +f(0,-\lambda_1 + 2\lambda_2)[\zeta_1^{-1}\zeta_2^2 + (-1)^k\zeta_1\zeta_2^{-2}] \\ & +f(0,\lambda_1 + \lambda_2)[\zeta_1\zeta_2 + (-1)^k\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,2\lambda_1)[(\zeta_1^2 + \zeta_2^{-2} + \zeta_1^{-2}\zeta_2^2) + (-1)^k(\zeta_1^{-2} + \zeta_2^2 + \zeta_1^2\zeta_2^{-2})] \end{aligned}$$

(3) Si Φ appartient à $J_{k,3}^{A_2,f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} [\Phi]_{q^0} = \; & f(0,0) \\ & +f(0,\lambda_1)[\zeta_1 + (-1)^k\zeta_1^{-1}] \\ & +f(0,\lambda_2)[\zeta_2 + (-1)^k\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,\lambda_1 - \lambda_2)[(-1)^k\zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,2\lambda_1 - \lambda_2)[\zeta_1^2\zeta_2^{-1} + (-1)^k\zeta_1^{-2}\zeta_2] \\ & +f(0,-\lambda_1 + 2\lambda_2)[\zeta_1^{-1}\zeta_2^2 + (-1)^k\zeta_1\zeta_2^{-2}] \\ & +f(0,\lambda_1 + \lambda_2)[\zeta_1\zeta_2 + (-1)^k\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}] \\ & +f(0,2\lambda_1)[\zeta_1^2 + (-1)^k\zeta_1^{-2}] \\ & +f(0,2\lambda_2)[\zeta_2^2 + (-1)^k\zeta_2^{-2}] \\ & +f(0,2\lambda_2 - 2\lambda_1)[\zeta_1^{-2}\zeta_2^2 + (-1)^k\zeta_1^2\zeta_2^{-2}] \\ & +f(0,3\lambda_1 - 2\lambda_2)[\zeta_1^3\zeta_2^{-2} + \zeta_1^{-3}\zeta_2 + (-1)^k(\zeta_1^{-3}\zeta_2^2 + \zeta_1^3\zeta_2^{-1})] \\ & +f(0,\lambda_1 + 2\lambda_2)[\zeta_1\zeta_2^2 + \zeta_1^{-2}\zeta_2^{-1} + (-1)^k(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-2} + \zeta_1^2\zeta_2)] \\ & +f(0,-\lambda_1 + 3\lambda_2)[\zeta_1^{-1}\zeta_2^3 + \zeta_1^2\zeta_2^{-3} + (-1)^k(\zeta_1\zeta_2^{-3} + \zeta_1^{-2}\zeta_2^3)] \\ & +f(0,3\lambda_1)[\zeta_1^3 + \zeta_2^{-3} + \zeta_1^{-3}\zeta_2^3 + (-1)^k(\zeta_1^{-3} + \zeta_2^3 + \zeta_1^3\zeta_2^{-3})] \end{aligned}$$

Preuve.
On va traiter ici le cas $m = 2$, les autres cas se traitant de façon analogue.
Soit donc Φ appartenant à $J_{k,2}^{A_2,f}$. On note $f(n,l)$ ses coefficients de Fourier.
D'après la proposition 1.1.2 et la majoration précisée dans la preuve, en prenant pour système de représentants de $G_2(A_2)$ le système indiqué dans le lemme 1.2.1, si $f(0,l)$ est non nul, alors on a :

$$< l,l > \leq \frac{8}{3},$$

ou encore, en écrivant l sous la forme $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$, avec l_1 et l_2 entiers relatifs :

$$(2l_1 + l_2)^2 + 3l_2^2 \ \leq 16.$$

Ceci permet d'affirmer que seuls les termes 1, correspondant à $l=0$ de norme 0, les termes ζ_1, ζ_1^{-1}, ζ_2, ζ_2^{-1}, $\zeta_1^{-1}\zeta_2$, $\zeta_1\zeta_2^{-1}$, correspondant aux éléments l de $\widetilde{A_2}$ de norme $\frac{2}{3}$, les termes $\zeta_1^2\zeta_2^{-1}$, $\zeta_1^{-2}\zeta_2$, $\zeta_1^{-1}\zeta_2^2$, $\zeta_1\zeta_2^{-2}$, $\zeta_1\zeta_2$, $\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}$, correspondant aux éléments l de $\widetilde{A_2}$ de norme $\frac{6}{3}$, et les termes ζ_1^2, ζ_2^{-2}, $\zeta_1^{-2}\zeta_2^2$, ζ_1^{-2}, ζ_2^2, $\zeta_1^2\zeta_2^{-2}$ correspondant aux éléments l de $\widetilde{A_2}$ de norme $\frac{8}{3}$, peuvent apparaître dans le coefficient $[\Phi]_{q^0}$.
Par ailleurs, d'après le lemme 1.1.1, le coefficient $f(0,l)$ ne dépend que de $< l,l >$ et de l modulo $2A_2$, donc $f(0,2\lambda_1)=f(0,-2\lambda_2)=f(0,2(-\lambda_1+\lambda_2))$, car $2(\lambda_1+\lambda_2)$ et $2(2\lambda_1-\lambda_2)$ appartiennent à $2A_2$.
On termine la détermination de la forme de ce coefficient $[\Phi]_{q^0}$ en utilisant le fait que $f(n,-l)=(-1)^k f(n,l)$, toujours d'après le lemme 1.1.1.

1.2.2 Premières constructions : utilisation de formes à une variable

Les premières méthodes de construction consistent à utiliser des formes de Jacobi classiques à une variable.

Proposition 1.2.3.
Soient f_1, f_2, f_3 trois formes de Jacobi à une variable, de même indice m, appartenant respectivement aux espaces $J^{A_1,f}_{k_1,m}(v_1)$, $J^{A_1,f}_{k_2,m}(v_2)$, $J^{A_1,f}_{k_3,m}(v_3)$, où k_1, k_2, k_3 sont des entiers relatifs, et v_1, v_2, v_3 des systèmes multiplicatifs.
On pose :

$$\Phi(\tau,z) := f_1(\tau,z_1')f_2(\tau,z_2')f_3(\tau,z_3').$$

Alors, la forme Φ, qui est une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{H}\times U$, appartient à l'espace $J^{A_2,f}_{k_1+k_2+k_3,2m}(v_1\times v_2\times v_3)$.

Preuve.
Pour vérifier cette proposition, il suffit d'utiliser les propriétés de chacune des formes f_j.
(1) On a, pour chaque j et pour tout $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,
$f_j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{w}{c\tau+d})=v_j(\gamma)(c\tau+d)^{k_j}e^{2i\pi m\frac{cw^2}{c\tau+d}}f_j(\tau,z)$, d'où :

$$\Phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d})=\prod_{j=1}^{3}f_j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z_j'}{c\tau+d})$$

$$=\prod_{j=1}^{3}v_j(\gamma)(c\tau+d)^{k_j}e^{2i\pi m\frac{cz_j'^2}{c\tau+d}}f_j(\tau,z_j')$$

$$=(c\tau+d)^{k_1+k_2+k_3}\Big(\prod_{j=1}^{3}v_j(\gamma)\Big)e^{2i\pi m\frac{c}{c\tau+d}(z_1'^2+z_2'^2+z_3'^2)}\Phi(\tau,z)$$
$$=(c\tau+d)^{k_1+k_2+k_3}\Big(\prod_{j=1}^{3}v_j(\gamma)\Big)e^{2i\pi m\frac{c}{c\tau+d}<z,z>}\Phi(\tau,z).$$

(2) On a, pour chaque j et pour tout couple d'entiers relatifs (λ,μ) :

$$f_j(\tau,w+\lambda\tau+\mu)=v_j(\mu,\lambda)e^{-2i\pi m(\mu^2\tau+2\mu w)}f_j(\tau,w)$$

d'où, pour tout couple (α,β) d'éléments de A_2, en écrivant α sous la forme $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ où a_1, a_2, a_3 sont des entiers tels que $a_1+a_2+a_3=0$, et $\beta=(b_1,b_2,b_3)$ où b_1, b_2, b_3 sont des entiers tels que $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\phi(\tau,z+\beta\tau+\alpha) &= \prod_{j=1}^{3} f_j(\tau,z'_j+b_j\tau+a_j)\\ &= \prod_{j=1}^{3} v_j(a_j,b_j)e^{-2i\pi m(b_j^2\tau+2b_jz'_j)}f_j(\tau,z'_j)\\ &= \Big(\prod_{j=1}^{3} v_j(a_j,b_j)\Big)e^{-2i\pi m(<\beta,\beta>\tau+2<\beta,z>)}\Phi(\tau,z).\end{aligned}$$

(3) Pour chaque j, f_j admet un développement du type :
$$f_j(\tau,w) = \sum_{l\in r_j\mathbb{Z},n\geq 0} c_j(n,l)q^n e^{2\pi ilw},$$
donc Φ admet bien un développement de Fourier où n'apparaissent que des puissances positives de q.

Remarque 1.2.1. Notons $\Delta^\star := \{\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_1\}$.
Soit f une forme de Jacobi classique à une variable, de poids k, d'indice m.
Alors la forme $\Phi(\tau,z) := \prod_{\gamma\in\Delta^\star} f(\tau, < z,\gamma >)$ est un cas particulier de la construction précédente, et appartient à $J^{A_2,f}_{3k,2m}$.

Proposition 1.2.4. *Soient f_1, f_2, f_3 trois formes de Jacobi à une variable, de même indice m, appartenant respectivement aux espaces $J^{A_1,f}_{k_1,m}(v_1)$, $J^{A_1,f}_{k_2,m}(v_2)$, $J^{A_1,f}_{k_3,m}(v_3)$, où k_1, k_2, k_3 sont des entiers relatifs, et v_1, v_2, v_3 des systèmes multiplicatifs.*
On pose :

$$\Phi(\tau,z) := f_1(\tau, < z,\alpha_1 >)f_2(\tau, < z,\alpha_2 >)f_3(\tau, < z,\alpha_1+\alpha_2 >).$$

Alors, la forme Φ, qui est une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{H}\times U$, appartient à l'espace $J^{A_2,f}_{k_1+k_2+k_3,6m}(v_1\times v_2\times v_3)$.

Preuve.
On rappelle la notation $\Delta_+ := \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2\}$. (voir le paragraphe 1.2.1)
On vérifie facilement que, pour tout couple (z,z') d'éléments de U, on a :

$$\sum_{\gamma\in\Delta_+} < \gamma,z >< \gamma,z' >= 3 < z,z' > .$$

En procédant comme dans la preuve de la proposition précédente, on obtient alors le résultat annoncé.

Remarque 1.2.2. Cas particulier.
Comme ci-dessus on peut considérer le cas particulier où $f_1 = f_2 = f_3 = f$, dans $J^{A_1,f}_{k,m}$, alors la forme $\Phi(\tau,z) := \prod_{\alpha\in\Delta_+} f(\tau, < \alpha,z >)$ appartient à $J^{A_2,f}_{3k,6m}$.

1.2.3 Utilisation d'un opérateur

On peut obtenir de nouvelles formes de Jacobi en appliquant certains opérateurs à des formes déjà construites.

(i) Opérateur différentiel d'ordre 1

On s'inspire ici de l'opérateur différentiel construit par M.Eichler et D.Zagier (voir [EZ]) dans le cas des formes à une variable.

Lemme 1.2.2. *Soit k un entier relatif.*
Si ϕ appartient à $J_{k,0}^{mer,A_2}$, alors la fonction $\frac{\partial \phi}{\partial z_j}$ appartient à $J_{k+1,0}^{mer,A_2}$, pour j valant 1 *ou* 2.

Principe de la démonstration.
Pour obtenir ce résultat, il suffit de dériver partiellement par rapport à la variable z_j chacun des termes des égalités suivantes :

$\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k \phi(\tau,z)$,

$\forall(\alpha,\beta) \in A_2 \times A_2 \quad \phi(\tau,z+\beta\tau+\alpha) = \phi(\tau,z)$.

Lemme 1.2.3. *Soient k_1, k_2, m_1, m_2 quatre entiers.*
Soient ϕ_1 appartenant à J_{k_1,m_1}^{f,A_2} et ϕ_2 appartenant à J_{k_2,m_2}^{f,A_2}.
Alors, pour j valant 1 *ou* 2*, la fonction $m_2\frac{\partial \phi_1}{\partial z_j}\phi_2 - m_1\frac{\partial \phi_2}{\partial z_j}\phi_1$ appartient à $J_{k_1+k_2+1,m_1+m_2}^{f,A_2}$.*

Preuve.
On obtient ce résultat en appliquant le résultat du lemme précédent à la forme méromorphe d'indice 0, de poids $k_1m_2 - k_2m_1$, $\phi_1^{m_2}\phi_2^{-m_1}$, puis en considérant le produit $\phi_1^{1-m_2}\phi_2^{1+m_1} \times \frac{\partial}{\partial z_j}(\phi_1^{m_2}\phi_2^{-m_1})$.

Proposition 1.2.5. *Soient k_1, k_2, m_1, m_2 quatre entiers.*
Soient ϕ_1 appartenant à J_{k_1,m_1}^{f,A_2} et ϕ_2 appartenant à J_{k_2,m_2}^{f,A_2}.
On pose :

$$[\phi_1,\, \phi_2] := \sum_{j=1}^{2} m_2\frac{\partial \phi_1}{\partial z_j}\phi_2 - m_1\frac{\partial \phi_2}{\partial z_j}\phi_1.$$

Alors $[\ ,\ ]$ définit un opérateur de $J_{k_1,m_1}^{f,A_2} \times J_{k_2,m_2}^{f,A_2}$ dans $J_{k_1+k_2+1,m_1+m_2}^{f,A_2}$.

Preuve.
C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

(ii) Opérateur différentiel d'ordre 2

Les opérateurs définis ci-dessous et leurs propriétés ont été étudiés par V.Gritsenko (voir [G] et [G3]), ainsi que dans le cadre d'un groupe de travail.

On rappelle que la matrice de $<\ ,\ >$ dans la base $(\alpha_1,\, \alpha_2)$ est notée S_0.
On va définir ici une généralisation dans le cas à deux variables, de l'opérateur classique dit "de chaleur" $\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Définition 1.2.1. Soit m un entier naturel.

On considère l'opérateur noté $D_0^{(m)}$ suivant :

$$D_0^{(m)} := 2i\pi m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}S_0^{-1}[\frac{\partial}{\partial z}],$$

où la notation $S_0^{-1}[\frac{\partial}{\partial z}]$ désigne l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2})S_0^{-1}(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2})^t$, où la variable z est écrite (z_1,z_2) dans la base (α_1,α_2).

Proposition 1.2.6. *Soit f appartenant à l'espace $J_{k,m}^{A_2,f}$.*
Alors, la fonction $(D_0^{(m)})f$ admet les propriétés suivantes :
(1) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$,
$(D_0^{(m)})(f)(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^{k+2}e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}(D_0^{(m)}(f)(\tau,z) + (2k-2)\frac{\pi imc}{c\tau+d}f(\tau,z))$

(2) pour tout (α,β) de $A_2\times A_2$,
$(D_0^{(m)})(f)(\tau,z+\beta\tau+\alpha) = e^{-i\pi m(2<\beta,z>+\tau<\beta,\beta>)}(D_0^{(m)})(f)(\tau,z)$

(3) Si $f(\tau,z) = \sum_{l\in\widetilde{A_2},\ n\geq 0} a(n,l)e^{2\pi i(n\tau+<l,z>)}$,
alors $(D_0^{(m)})(f)(\tau,z) = \sum_{l\in\widetilde{A_2},\ n\geq 0} -4\pi^2 a(n,l)(mn - \frac{<l,l>}{2})e^{2\pi i(n\tau+<l,z>)}$.
En particulier, si f appartient à $J_{1,m}^{A_2,f}$ alors $D_0^{(m)}(f)$ appartient à $J_{3,m}^{A_2,f}$.

D'après cette proposition, pour les formes de poids distinct de 1, la fonction obtenue n'est pas une forme de Jacobi, mais on peut apporter une correction à cet opérateur pour obtenir les propriétés voulues.

Lemme 1.2.4. *Soient k un entier relatif, m un entier naturel et f une forme de Jacobi faible de poids k et d'indice m.*
Alors, la forme $(D_0^{(m)})(\eta^{2-2k}\times f)\times\eta^{-2+2k}$ appartient à l'espace $J_{k+2,m}^{A_2,f}$.

Preuve.
Il suffit d'appliquer l'opérateur $D_0^{(m)}$ à la forme $\eta^{2-2k}\times f$ qui, elle, est de poids 1.
La forme obtenue est une forme de Jacobi faible,de poids 3, d'indice m, avec le système multiplicateur v_η^{2-2k}.

Proposition-Définition 1.2.1. *Soient k et m deux entiers fixés et f une forme de Jacobi faible de poids k et d'indice m.*
On pose :

$$(\Delta_{k,m})(f) := (D_0^{(m)})(\eta^{2-2k}\times f)\times\eta^{2k-2}.$$

On peut donner une autre expression de cet opérateur en faisant le calcul suivant :
$D_0^{(m)}(\eta^{2-2k}f)(\tau,z) = 2\pi im\Big[2(1-k)\eta'(\tau)\eta(\tau)^{1-2k}f(\tau,z)+\eta(\tau)^{2-2k}\frac{\partial f}{\partial\tau}(\tau,z)\Big]-\frac{1}{2}\eta(\tau)^{2-2k}S_0^{-1}[\frac{\partial}{\partial z}](f(\tau,z))$

$$= \eta(\tau)^{2-2k}D_0^{(m)}(f)(\tau,z) + 4\pi im(1-k)\eta'(\tau)\eta(\tau)^{1-2k}f(\tau,z),$$

d'où :
$(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z) = D_0^{(m)}(f)(\tau,z) + 4\pi im(1-k)\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}f(\tau,z)$

$$= D_0^{(m)}(f)(\tau,z) + 8\pi^2 m(1-k)G_2(\tau)f(\tau,z).$$

(On rappelle que la fonction G_2 est définie par :
$G_2(\tau) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)q^n$.)

Finalement, on a :

$$(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z) = D_0^{(m)}(f)(\tau,z) + 4\pi^2 m(2-2k)G_2(\tau)f(\tau,z).$$

Le terme $4\pi^2 m(2-2k)G_2(\tau)f(\tau,z)$ est la correction qu'il faut apporter à l'opérateur $D_0^{(m)}$ pour obtenir, à partir d'une forme de Jacobi de poids k, une forme qui soit encore une forme de Jacobi .

Proposition 1.2.7. *L'opérateur $\Delta_{k,m}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\forall\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$,
$(\Delta_{k,m})(f)(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^{k+2}e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z)$

(2) $\forall\ (\alpha,\beta) \in A_2 \times A_2$,
$(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z+\beta\tau+\alpha) = e^{-i\pi m(2<\beta,z>+\tau<\beta,\beta>)}(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z)$

(3) Si $f(\tau,z) = \sum_{l\in\widetilde{A_2},\ n\geq 0} a(n,l)e^{2\pi i(n\tau+<l,z>)}$,
alors $(\Delta_{k,m})(f)(\tau,z) = \sum_{l\in\widetilde{A_2},\ n\geq 0} c(n,l)e^{2\pi i(n\tau+<l,z>)}$ avec :
$c(0,l) = 2\pi^2 < l,l > a(0,l) - \frac{\pi^2 m(2-2k)}{6}a(0,l)$
$c(n,l) = \pi^2\Big(2 < l,l > -4mn - \frac{m(2-2k)}{6}\Big)a(n,l)$
$\quad +4\pi^2 m(2-2k)\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(j)a(n-j,l)$
où $\sigma_1(j) = \sum_{d\geq 1, d|n} d$.

Ainsi, si f appartient à $J_{k,m}^{A_2}$ alors $\Delta_{k,m}(f)$ appartient à $J_{k+2,m}^{A_2}$, et si f est une forme faible, respectivement holomorphe, $\Delta_{k,m}(f)$ est encore une forme de Jacobi faible, respectivement holomorphe.

Idée de la preuve.
On établit les propriétés de l'opérateur $\Delta_{k,m}$ en utilisant celles de l'opérateur $D_0^{(m)}$. L'expression des coefficients de Fourier permet de justifier la dernière affirmation.

Remarque 1.2.3. Opérateur différentiel logarithmique.
(i) L'opérateur $\Delta_0 := 2S_0^{-1}[\frac{\partial}{\partial z}]$, ou encore :

$$\Delta_0 = \frac{4}{3}\Big(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}\Big),$$

vérifie les propriétés suivantes. Soit f appartenant à $J_{k,m}^{A_2}$, alors :
(1) $(\Delta_0 \log(f))(\tau,z+\beta\tau+\alpha) = (\Delta_0 \log(f))(\tau,z)$, pour tout (α,β) de $A_2 \times A_2$
(2) $(\Delta_0 \log(f))(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2 \times \Big[(\Delta_0 \log(f))(\tau,z) + \frac{8\pi imc}{c\tau+d}\Big]$,
pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.

(ii) Correction modulaire.
Pour tout entier naturel m, l'opérateur défini par $D_m(\phi) := \Delta_0(\log(\phi)) - 32m\pi^2 G_2(\tau)$, transforme une forme de Jacobi faible de poids k , d'indice m, en une forme de Jacobi méromorphe de poids 2 et d'indice 0.

Preuve.
(i) Pour prouver les relations vérifiées par $\Delta_0 \log(f)$, on écrit d'abord $\Delta_0 \log(f)$ sous la forme suivante :

$$\Delta_0 \log(f) = \frac{4}{3}\frac{1}{f^2} \times \Big[f \times \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) - \Big((\frac{\partial f}{\partial z_1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z_2})^2 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_2}\Big)\Big]$$

On dérive ensuite partiellement les relations vérifiées par la forme de Jacobi f, on obtient par exemple :
$\frac{1}{c\tau+d}(\frac{\partial f}{\partial z_1})(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{\frac{\pi imc}{c\tau+d}<z,z>} \times \Big[\frac{2\pi imc}{c\tau+d}(2z_1 - z_2) + (\frac{\partial f}{\partial z_1})(\tau,z)\Big]$

En écrivant alors $(\Delta_0 \log(f))(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d})$ à l'aide de ces expressions, on obtient, après une simple sommation, le résultat annoncé. On procède de la même façon pour la première relation.
Ces calculs montrent que si la forme f est une forme de Jacobi avec un système multiplicateur, $\Delta_0 \log(f)$ vérifie encore les mêmes relations (le système multiplicateur disparaît du fait de la division par f^2 dans l'expression de $\Delta_0 \log(f)$).

(ii) Pour obtenir une forme de Jacobi, il faut apporter une correction modulaire, que l'on construit à partir de la fonction $G_2(\tau)$ qui possède la propriété de semi-modularité :

$$G_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - \frac{c}{4\pi i}(c\tau+d)$$

(voir le paragraphe 1.1.3).

(iii) Opérateur de Hecke
On se contente de rappeler dans ce paragraphe une définition et un résultat décrits par V.Gritsenko, voir [G], qui nous seront utiles par la suite, sans démonstration.

Définition 1.2.2. Soit q un entier naturel non nul.
Soient k un entier relatif, m un entier naturel.
L'action de l'opérateur de Hecke $T_-(q)$ sur un élément Φ de $J^{L,f}_{k,m}$, est définie par :

$$\Big(\Phi \,|_{k,m}\, T_-(q)\Big)(\tau,z) := \sum_{\substack{ad=q \\ b \bmod d}} a^k\, \Phi\Big(\frac{a\tau+b}{d},\, az\Big).$$

Proposition 1.2.8. *Voir [G] (corollaire 2.9), ou [GN II] (paragraphe 3).*
On reprend les notations de la définition ci-dessus.
Si Φ est un élément de $J^{L,f}_{k,m}$, alors la fonction $\Big(\Phi \,|_{k,m}\, T_-(q)\Big)$ appartient à l'espace $J^{L,f}_{k,mq}$.
De plus, si on note $f(n,l)$ les coefficients de Fourier de la forme Φ, alors les coefficients

de Fourier, notés $f_q(n,l)$, de la forme $\Big(\Phi\mid_{k,m} T_{-}(q)\Big)$, sont donnés par la relation :

$$f_q(n,l) = q \sum_{\substack{a \mid (n,\, l,\, q) \\ a \,\in \mathbb{N}^{\star}}} a^{k-1} f\Big(\frac{qn}{a^2}, \frac{l}{a}\Big),$$

la notation $a \mid (n,\, l,\, q)$ signifiant que a est un entier naturel divisant à la fois n, q dans $\mathbb{Z}$ et l dans $\widetilde{L}$.

1.2.4 Formes de Jacobi à 2 variables et formes de Jacobi à 1 variable

(i) Spécialisation

Proposition 1.2.9. *Soient $a_1 = \frac{p'_1}{q'_1}$, $b_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $a_2 = \frac{p'_2}{q'_2}$, $b_2 = \frac{p_2}{q_2}$ des nombres rationnels, avec $(p'_j,q'_j) = 1$, et $(p_j,q_j) = 1$.*
On pose $\gamma := a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, et $\nu := b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$.
Soit Φ un élément de $J_{k,m}^{f,A_2}$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ par :

$$f(\tau,z) := \Phi(\tau,\, z\gamma + \nu).$$

Alors, la fonction f est une forme de Jacobi à une variable, pour un sous-groupe de congruence, avec un certain système multiplicateur.

Plus précisément, f appartient à $J^{f,A_1}_{k,\,\frac{m<\gamma,\gamma>}{2}}(\ \Gamma_1(q_0) \ltimes q'_0\mathbb{Z},\ \chi_m \ltimes v_m\ )$, où q_0 est le plus petit commun multiple des q_j, q'_0 celui des q'_j, (voir la notation 1.1.3), et où :

$$\chi_m\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big) = e^{\pi i m<\nu,\nu>c(d-2)},\ \textit{pour}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ \textit{appartenant à}\ \ \Gamma_1(q_0)$$

$v_m(\lambda,\mu) = e^{-2\pi i m\mu<\gamma,\nu>}$, pour λ, μ appartenant à $q'_0\mathbb{Z}$.

De plus, si on note $a(n,l)$ les coefficients de Fourier de Φ, alors la forme f admet le développement suivant :

$$f(\tau,z) = \sum_{l\in\widetilde{A_2},n\geq 0} a(n,l)e^{2\pi i<l,\nu>}q^n e^{2i\pi<l,\gamma>z}.$$

Preuve.
La démonstration de cette proposition s'écrit en exploitant les propriétés de la forme de Jacobi Φ. (Voir la définition 1.1.1.)
On obtient les équations fonctionnelles suivantes :

(1) Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma_1(q_0)$,

$$f\big(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}, \tfrac{z}{c\tau+d}\big) = \chi_m\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big)\ (c\tau+d)^k\ e^{2i\pi\frac{m<\gamma,\gamma>}{2}\frac{cz^2}{c\tau+d}}\ f(\tau,z),$$

avec $\chi_m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = e^{\pi i m <\nu,\nu> c(d-2)}$

(2) Si λ, μ appartiennent à $q'_0\mathbb{Z}$,
$f(\tau,z+\lambda+\mu\tau) = v_m(\mu)\ e^{-2i\pi \frac{m<\gamma,\gamma>}{2}(\mu^2\tau+2\mu z)} f(\tau,z)$,
avec $v_m(\lambda,\mu) = e^{-2\pi i m\mu <\gamma,\nu>}$

Remarque 1.2.4. Cas particulier.
Dans le cas particulier où les a_j sont des entiers, autrement dit γ appartient à A_2, alors f est une forme de Jacobi faible, à une variable, de poids k, d'indice $\frac{m<\gamma,\gamma>}{2}$, pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_1(q_0)$, avec le système multiplicateur $\chi_m \ltimes v_m$.

On a par exemple, si $\Phi(\tau,z) = \Phi(\tau,z_1,z_2)$ appartient à $J^{f,A_2}_{k,m}$:

(i) $\Phi(\tau,z_1,2z_1) = \Phi(\tau,z_1(\alpha_1+2\alpha_2)) \in J^{f,A_1}_{k,3m}$

(ii) $\Phi\left(\tau,z_1,\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\tau,z_1\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}\right) \in J^{f,A_1}_{k,m}(\ \Gamma_1(2),\chi_m \ltimes v_m)$
où :

$$\chi_m\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e^{\pi i m\frac{c(d-2)}{2}}, \text{ pour } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ appartenant à } \Gamma_1(2)$$

$v_m(\lambda,\mu) = e^{\pi i m\mu}$, pour λ, μ appartenant à $\mathbb{Z}$.

(ii) Utilisation de l'inclusion $A_1 \oplus A_1^{\perp} \subset A_2$

Lemme 1.2.5. *On note* $\alpha_1^{\perp} := \{\ x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \in A_2\ /\ <x,\alpha_1>= 0\ \}$.
Alors $\alpha_1^{\perp} = \mathbb{Z}u_1$, *avec* $u_1 := \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3\lambda_2$, $<\alpha_1,\alpha_1>= 2$, $<u_1,u_1>= 6$,
et $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}u_1$ *est une réalisation dans* A_2 *de* $A_1 \oplus^{\perp} A_1 \subset A_2$.
L'ensemble $\{\ \alpha_1,\ u_1\ \}$ *constitue une* $\mathbb{R}$*-base de* $U_{\mathbb{R}}$*, et on peut introduire le système de coordonnées suivant dans U :*

$$z = y_1\alpha_1 + y_2u_1 = (y_1,y_2).$$

Proposition 1.2.10. *Soient* m *un entier naturel,* k *un entier relatif et* Φ *appartenant à* $J^{A_2,f}_{k,m}$.
On pose :

$$\varphi_1 := \Phi|_{\mathbb{C}\alpha_1}$$

$$\varphi_2 := \Phi|_{\mathbb{C}u_1}.$$

Alors la fonction φ_1 *appartient à* $J^{A_1,f}_{k,m}$*, la fonction* φ_2 *appartient à* $J^{A_1,f}_{k,3m}$*, et si la forme* Φ *est une forme de Jacobi holomorphe, alors les formes de Jacobi à une variable* φ_1 *et* φ_2 *sont aussi des formes de Jacobi holomorphes.*

Preuve.
On utilise le système de coordonnées lié à la base $\{\ \alpha_1,\ u_1\ \}$ introduite dans le lemme 1.2.5.
Par définition, on a :

$$\varphi_1(\tau,y_1) = \Phi(\tau,y_1,0)$$

$$\varphi_2(\tau,y_2) = \Phi(\tau,0,y_2).$$

On exprime les équations fonctionnelles vérifiées par la forme Φ en utilisant le système de coordonnées (y_1,y_2) (voir la définition 1.1.1) :

(1) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{y_1}{c\tau+d},\frac{y_2}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{2i\pi m\frac{cy_1^2}{c\tau+d}} e^{6i\pi m\frac{cy_2^2}{c\tau+d}}\Phi(\tau,z)$$

(2) pour tous entiers λ_1, λ_2, μ_1, μ_2,

$$\Phi(\tau,y_1+\lambda_1+\mu_1\tau,y_2+\lambda_2+\mu_2\tau) = e^{-i\pi m[(2\mu_1^2+6\mu_2^2)\tau+2(2\mu_1 y_1+6\mu_2 y_2)]}\Phi(\tau,y_1,y_2)$$

(3) $\Phi(\tau,y_1,y_2) = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ (l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2}} f(n,l_1\lambda_1+l_2\lambda_2)q^n e^{2\pi i l_1 y_1} e^{2\pi i(l_1+2l_2)y_2}$.

En spécialisant ces équations en $y_2 = 0$ ou en $y_1 = 0$, on obtient alors les propriétés des formes de Jacobi faibles à une variable, avec les poids et indices annoncés.

De plus, on peut remarquer que la norme hyperbolique $2nm - < l,l >$ s'écrit, pour $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$:

$$2nm - < l,l > = 2nm - \frac{1}{2}l_1^2 - \frac{1}{6}(2l_2+l_1)^2,$$

donc, si $2nm - < l,l > \geq 0$, alors $4nm - l_1^2 \geq 0$ et $12nm - (2l_2+l_1)^2 \geq 0$, ce qui permet, d'après la forme du développement de Fourier de Φ, de justifier la dernière affirmation.

1.2.5 Formes de Jacobi et formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$

On utilise dans ce paragraphe une méthode analogue à celle employée par V.Gritsenko dans le cas des formes de Jacobi classiques à une variable (voir [G1], lemmes 1.6 et 1.10, [G2], proposition 1.5), et qui consiste à introduire une "correction automorphe".

(i) Développement de Taylor "holomorphe"

Lemme 1.2.6. *Correction holomorphe.*
Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{f,A_2}$.
On pose

$$\Psi(\tau,z) := \exp(-4\pi^2 m G_2(\tau) < z,z >)\Phi(\tau,z).$$

Alors, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, la fonction Ψ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Psi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^k\Psi(\tau,z).$$

Preuve.
Cette égalité s'obtient en utilisant la propriété (1) d'une forme de Jacobi (voir la définition 1.1.1) et en exploitant l'équation fonctionnelle de semi-modularité vérifiée par la fonction

$G_2(\tau)$ (voir le paragraphe 1.1.3) et rappelée ci-dessous :

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$G_2\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - \frac{c}{4i\pi}(c\tau+d).$$

Proposition 1.2.11. *Soit Φ appartenant à $J^{f,A_2}_{k,m}$.*
On considère la correction automorphe Ψ de la forme Φ suivante :

$$\Psi(\tau,z) := \exp(-4\pi^2 m G_2(\tau) < z,z >)\ \Phi(\tau,z),$$

la fonction Ψ est holomorphe en les 2 variables z_1 , z_2 et s'écrit :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

où pour chaque couple d'entiers naturels $(k_1,\ k_2)$, la fonction $f_{(k_1,\ k_2)}$ est une forme modulaire de poids $k+k_1+k_2$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve.
En utilisant la propriété modulaire de Ψ indiquée dans le lemme 1.2.6, on obtient, pour tout $(k_1,\ k_2)$,

$$f_{(k_1,\ k_2)}\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^{k+k_1+k_2} f_{(k_1,\ k_2)}(\tau).$$

La fonction Ψ admet un développement où n'apparaissent que des puissances positives de q, c'est donc aussi le cas des fonctions $f_{(k_1,\ k_2)}$, qui sont alors des formes modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, de poids respectifs $k+k_1+k_2$.

En utilisant la structure connue de l'espace des formes modulaires, on pourra trouver la forme de certains de ces coefficients de Taylor.

Corollaire 1.2.1. *Si Φ appartient à $J^{A_2,f}_{0,m}$, alors, en notant $f(n,l)$ ses coefficients de Fourier, on obtient la relation :*

$$m\sum_l f(0,l) = 6\sum_l f(0,l) < l\ ,\ \alpha_1 >^2 .$$

Preuve.
D'après les notations et le résultat de la proposition précédente, la fonction $f_{(2,\ 0)}$, c'est à dire le coefficient de z_1^2 dans le développement de Taylor en les variables z_1 et z_2 de la correction automorphe Ψ de Φ, est une forme modulaire de poids 2, ce qui permet d'affirmer, d'après la structure connue de l'espace des formes modulaires, que c'est la fonction nulle, en particulier on a :

$$[f_{(2,\ 0)}]_{q^0} = 0.$$

Or, d'après la forme du développement de Fourier de $G_2(\tau)$, (voir le paragraphe 1.1.3), on peut écrire :

$$[\Psi(\tau,z)]_{q^0} = \exp\Big(\pi^2\frac{m}{6} < z,z > \Big) \sum_{l\in\widetilde{A_2}} f(0,l) e^{2\pi i<l,z>}.$$

Il reste à exprimer la nullité du coefficient de z_1^2 dans le développement de Taylor en les variables z_1 et z_2 de l'expression ci-dessus.
On utilise pour cela $< z,z >= 2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2)$, ce qui amène à calculer le coefficient de 1 dans le développement de Taylor en les variables z_1 et z_2 de la somme $\sum_{l\in \widetilde{A_2}} f(0,l)e^{2\pi i<l,z>}$, qui vaut $\sum_{l\in \widetilde{A_2}} f(0,l)$, et celui de z_1^2.
On obtient que ce dernier vaut $\sum_{l\in \widetilde{A_2}} f(0,l)\frac{(2\pi i < l,\alpha_1 >)^2}{2}$, puisqu'en écrivant un élément l de $\widetilde{A_2}$ sous la forme $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$, on a $< l,z >= l_1z_1 + l_2z_2$ et $l_1 =< l,\alpha_1 >$.
On a finalement :

$$2\frac{\pi^2 m}{6}\sum_{l\in \widetilde{A_2}} f(0,l) + \sum_{l\in \widetilde{A_2}} f(0,l)\frac{(2\pi i < l,\alpha_1 >)^2}{2} = 0,$$

ce qui permet d'obtenir la relation annoncée.

La suite de ce paragraphe a pour but de donner une évaluation du nombre de coefficients de Taylor qui déterminent une forme de Jacobi.

Lemme 1.2.7. *Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{A_2,f}$.*
On considère le développement de Taylor de Φ par rapport aux variables y_1 et y_2 du système de coordonnées relatif à la base orthogonale $\{\ \alpha_1,\ u_1\ \}$:

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2} g_{k_1,k_2}(\tau)y_1^{k_1}y_2^{k_2}$$

(voir le lemme 1.2.5).
Alors, si pour tout couple (k_1,k_2) tel que $k_1 + k_2 \leq 8m$, le coefficient $g_{k_1,k_2}(\tau)$ est nul, la forme Φ est nulle.

Preuve.
Supposons que pour tout couple (k_1,k_2) tel que $k_1 + k_2 \leq 8m$, le coefficient $g_{k_1,k_2}(\tau)$ soit nul, et posons :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{k_2\in\mathbb{N}} \varphi_{k_2}(\tau,y_1)y_2^{k_2}.$$

Soit $k_2 \leq 6m$.
Soit τ fixé dans $\mathbb{H}$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f_{k_2}(y_1) := \varphi_{k_2}(\tau,y_1)$. Cette fonction s'écrit :

$$f_{k_2}(y_1) = \sum_{k_1\in\mathbb{N}} g_{k_1,k_2}(\tau)y_1^{k_1}$$

$$= \sum_{k_1\geq 2m+1} g_{k_1,k_2}(\tau)y_1^{k_1},$$

et admet donc un zéro d'ordre au moins $2m + 1$ en 0.
Par ailleurs (voir la preuve de la proposition 1.2.10), on sait que, pour tous entiers λ_1, λ_2, μ_1, μ_2,

$$\Phi(\tau,y_1 + \lambda_1 + \mu_1\tau,y_2 + \lambda_2 + \mu_2\tau) = e^{-i\pi m[(2\mu_1^2+6\mu_2^2)\tau+2(2\mu_1y_1+6\mu_2y_2)]}\Phi(\tau,y_1,y_2)\ (\star)$$

on a donc :
$$f_{k_2}(y_1+\lambda_1+\mu_1\tau) = e^{-2i\pi m(\mu_1^2\tau+2\mu_1 y_1)} f_{k_2}(y_1).$$

Supposons f_{k_2} non identiquement nulle. La relation qui précède permet d'écrire qu'en un point y_1 où f_{k_2} est non nulle on a :

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f'_{k_2}}{f_{k_2}}\right)(y_1+1) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f'_{k_2}}{f_{k_2}}\right)(y_1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f'_{k_2}}{f_{k_2}}\right)(y_1+\tau) = -2m \;+\; \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f'_{k_2}}{f_{k_2}}\right)(y_1),$$

et en tenant le raisonnement de M.Eichler et D.Zagier ([EZ]), déjà utilisé au paragraphe 1.1.4, on obtient que le nombre de zéros de f_{k_2} à l'intérieur d'un domaine fondamental de $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ est égal à $2m$.
Cette dernière affirmation contredit le fait que f_{k_2} admette un zéro d'ordre au moins $2m+1$, on en déduit que la fonction f_{k_2} est identiquement nulle.
Comme ce raisonnement est valable pour chaque $k_2 \leq 6m$, et chaque τ fixé dans $\mathbb{H}$, on obtient l'écriture de $\Phi(\tau,y_1,y_2)$ suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(\tau,z) &= \sum_{k_2\geq 6m+1} \varphi_{k_2}(\tau,y_1) y_2^{k_2} \\ &= \sum_{k_2\geq 6m+1}\sum_{k_1\in\mathbb{N}} g_{k_1,k_2}(\tau) y_1^{k_1} y_2^{k_2} \\ &= \sum_{k_2\geq 6m+1} y_2^{k_2}\Big(\sum_{k_1\in\mathbb{N}} g_{k_1,k_2}(\tau) y_1^{k_1}\Big).\end{aligned}$$

Soit maintenant (τ,y_1) fixé .
On considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(y_2) := \Phi(\tau,y_1,y_2).$$

Elle admet un zéro d'ordre au moins $6m+1$ en 0, et par ailleurs elle vérifie, d'après la relation $(\star)$ rappelée ci-dessus, pour tous entiers λ_2, μ_2 :

$$f(y_2+\lambda_2+\mu_2\tau) = e^{-6i\pi m(\mu_2^2\tau+2\mu_2 y_2)} f(y_2).$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient que si f est non nulle, elle admet $6m$ zéros dans un domaine fondamental de $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$, ce qui contredit le fait que f admette un zéro d'ordre au moins $6m+1$. On en déduit que la fonction f est identiquement nulle.
Comme ce raisonnement est valable pour chaque (τ,y_1) fixé, on peut conclure que la forme $\Phi(\tau,y_1,y_2)$ est identiquement nulle, le lemme est établi.

Proposition 1.2.12. *Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{A_2,f}$.*
On considère le développement de Taylor de Φ par rapport aux variables z_1 et z_2 du système de coordonnées relatif à la base $\{\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \}$:

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2} f_{h_1,h_2}(\tau) z_1^{h_1} z_2^{h_2}.$$

Alors, si pour tout couple (h_1,h_2) tel que $h_1+h_2 \leq 8m$, le coefficient $f_{h_1,h_2}(\tau)$ est nul, la forme Φ est la forme nulle.

Preuve.
On suppose que pour tout couple (h_1,h_2) tel que $h_1 + h_2 \leq 8m$, le coefficient $f_{h_1,h_2}(\tau)$ est nul.
Ecrivons le développement de Taylor de Φ par rapport aux variables y_1 et y_2.
On rappelle que $u_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, d'où

$$z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 = y_1\alpha_1 + y_2u_1 = (y_1 + y_2)\alpha_1 + 2y_2\alpha_2$$

et on a donc les formules de changement de système de coordonnées suivantes :

$$z_1 = y_1 + y_2,\ z_2 = 2y_2.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2} f_{h_1,h_2}(\tau)(y_1 + y_2)^{h_1}(2y_2)^{h_2},$$

d'où, après calculs :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2} g_{k_1,k_2}(\tau)y_1^{k_1}y_2^{k_2},$$

avec

$$g_{k_1,k_2}(\tau) = \sum_{k_1\leq h_1\leq k_1+k_2} C_{h_1}^{k_1}2^{k_1+k_2-h_1}f_{h_1,k_1+k_2-h_1}(\tau).$$

Soit maintenant un couple d'entiers (k_1,k_2) tel que $k_1 + k_2 \leq 8m$.
Alors, d'après l'expression de $g_{k_1,k_2}(\tau)$ et l'hypothèse faite sur les $f_{h_1,h_2}(\tau)$, le coefficient $g_{k_1,k_2}(\tau)$ est nul.
Le lemme précédent permet de conclure que la forme Φ est identiquement nulle.

Corollaire 1.2.2. *Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{A_2,f}$.*
Les $(8m+1)(4m+1)$ coefficients $f_{h_1,h_2}(\tau)$ avec $h_1+h_2 \leq 8m$ du développement de Taylor $\Phi(\tau,z) = \sum_{(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2} f_{h_1,h_2}(\tau)z_1^{h_1}z_2^{h_2}$ suffisent pour déterminer la forme Φ.

Preuve.
D'après la proposition précédente, il suffit de calculer le cardinal de l'ensemble des couples d'entiers naturels (h_1,h_2) vérifiant $h_1 + h_2 \leq 8m$.

Corollaire 1.2.3. *Evaluation de la dimension des espaces vectoriels $J_{k,m}^{A_2,f}$.*
Soient k un entier relatif et m un entier naturel fixés. L'espace vectoriel complexe $J_{k,m}^{A_2,f}$ est de dimension finie et on peut écrire la majoration suivante :

$$dim_{\mathbb{C}}J_{k,m}^{A_2,f} \ \leq \sum_{k_1+k_2\leq\ 8m} dim_{\mathbb{C}}M_{k+k_1+k_2}\Big(SL_2(\mathbb{Z})\Big)$$

Preuve.
Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{A_2,f}$.
On considère la correction modulaire de la forme Φ utilisée à la proposition 1.2.11 :

$$\begin{aligned}\Psi(\tau,z) &:= \exp(-4\pi^2mG_2(\tau) < z,z >)\ \Phi(\tau,z),\\ &= \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} g_{k_1,k_2}(\tau)z_1^{k_1}z_2^{k_2},\end{aligned}$$

où pour chaque couple d'entiers naturels $(k_1,\ k_2)$, la fonction $g_{k_1,\ k_2}$ est une forme modulaire de poids $k + k_1 + k_2$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Supposons que pour tout couple (k_1,k_2) tel que $k_1+k_2 \leq 8m$, le coefficient $g_{k_1,k_2}(\tau)$ est nul, et montrons que la forme Φ est alors la forme nulle.
On reprend les notations de la proposition 1.2.12 et on pose :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2} f_{h_1,h_2}(\tau) z_1^{h_1} z_2^{h_2}.$$

On a alors :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} g_{k_1,k_2}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

et

$$\Psi(\tau,z) = \exp(-8\pi^2 m G_2(\tau)(z_1^2+z_2^2-z_1z_2)) \sum_{(h_1,h_2)\in\mathbb{N}^2} f_{h_1,h_2}(\tau) z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

On en déduit que chaque coefficient $g_{k_1,k_2}(\tau)$ s'écrit sous la forme d'une somme du type :

$$g_{k_1,k_2}(\tau) = f_{k_1,k_2}(\tau) + \sum_{\substack{0\leq i\leq k_1 \\ 0\leq j\leq k_2 \\ (i,j)\neq(0,0)}} a_{i,j}(\tau)\ f_{k_1-i,\ k_2-j}(\tau),$$

où les coefficients $a_{i,j}(\tau)$ sont des fonctions non nulles.
(On a par exemple : $-a_{1,1}(\tau) = a_{2,0}(\tau) = a_{0,2}(\tau) = -8\pi^2 m G_2(\tau)$.)
D'après cette écriture et l'hypothèse faite sur la nullité des premiers coefficients $g_{k_1,k_2}(\tau)$, pour tout couple (k_1,k_2) tel que $k_1+k_2 \leq 8m$, le coefficient $f_{k_1,k_2}(\tau)$ est nul, ce qui permet d'affirmer, d'après la proposition 1.2.12, que la forme Φ est la forme nulle.

On peut ainsi considérer, en utilisant les notations introduites ci-dessus, le morphisme d'espaces vectoriels injectif suivant :

$$\begin{array}{ccc} J_{k,m}^{A_2,f} & \longrightarrow & \oplus_{k_1+k_2\leq 8m} M_{k_1+k_2+k} \\ \Phi & \longmapsto & \Big(\ g_{k_1,k_2}(\tau)\ \Big)_{k_1+k_2\leq 8m} \end{array}$$

Et on déduit ainsi le résultat annoncé.

Remarque 1.2.5. Cette évaluation du nombre de coefficients de Taylor qui déterminent une forme de Jacobi pour le réseau A_2, et donc de la dimension de l'espace $J_{k,m}^{A_2,f}$, n'est peut-être pas la meilleure possible, puisque pour l'établir on se place dans le cadre plus large des formes de Jacobi pour le sous-réseau $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}u_1$.

(ii) Développement de Taylor "méromorphe"

Dans ce paragraphe, on introduit un autre type de terme correctif qui permet également d'obtenir un développement de Taylor dont les coefficients sont modulaires, mais pas forcément holomorphes.

Lemme 1.2.8. *Correction méromorphe.*
Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{f,A_2}$.
On considère la correction Ψ_1 de la forme Φ suivante :

$$\Psi_1(\tau,z) := \exp\Big[-8\pi^2 m G_2(\tau) z_2^2 + m z_2 \Big(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\Big)(\tau,z_1)\Big] \Phi(\tau,z),$$

la fonction Ψ_1 est holomorphe en la variable z_2 et s'écrit :

$$\Psi_1(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(\tau,z_1) z_2^n,$$

où, pour chaque entier naturel n, la fonction f_n appartient à $J_{k+n,m}^{A_1,mer}$.
Pour τ fixé, les seuls pôles éventuels de la fonction $z_1 \mapsto f_n(\tau,z_1)$ sont les points de $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, ce sont des pôles d'ordre au plus n.

Preuve.
Le principe de démonstration est le même que pour le lemme 1.2.6, on exploite cette fois les propriétés de la fonction ϑ rappelées ci-dessous (voir le paragraphe 1.1.3):
(i) pour μ et λ entiers, $(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z+\lambda+\mu\tau) = -2\pi i\mu + (\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z)$

(ii) $(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = 2\pi icz + (c\tau+d)(\frac{\vartheta_z}{\vartheta})(\tau,z)$, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.

On obtient pour Ψ_1 les relations suivantes :

- pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Psi_1(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi imc}{c\tau+d}z_1^2}\Psi_1(\tau,z) ,$$

- pour μ et λ entiers,

$$\Psi_1(\tau,z_1+\lambda+\mu\tau,z_2) = e^{-2\pi im(2\mu z_1+\mu^2\tau)}\Psi_1(\tau,z),$$

ce qui permet de déduire les équations fonctionnelles vérifiées par chaque fonction f_n.

On rappelle que Φ est une fonction holomorphe en la variable z_1. Ainsi, le caractère méromorphe de la fonction f_n ne peut provenir que du terme correctif ajouté.
Or, dans le coefficient de z_2^n du développement de Taylor en la variable z_2 du terme correctif, la fonction $\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau,z_1)$ ne peut apparaître qu'à des puissances inférieures ou égales à n, et on peut rappeler (voir le paragraphe 1.1.3) que les seuls zéros, à τ fixé, de la fonction $\vartheta(\tau,.)$ sont les points de $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, et que ce sont des zéros d'ordre 1.
On peut donc conclure que les seuls pôles éventuels de la fonction $f_n(\tau,z_1)$, à τ fixé, sont les points de $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, et que ce sont des pôles d'ordre au plus n.

Remarque 1.2.6. On conserve les notations du lemme.
En utilisant la même méthode qu'au paragraphe précédent, on peut montrer que pour (τ,z_1) fixé, si la fonction Φ n'est pas identiquement nulle, la fonction $z_2 \mapsto \Phi(\tau,z_1,z_2)$ admet $2m$ zéros à l'intérieur d'un domaine fondamental de $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$.
Par conséquent, si $f_0,\ldots,f_{2m}$ sont nuls, alors la fonction Φ est nulle.
Autrement dit, les coefficients $f_0(\tau,z_1),\ldots,f_{2m}(\tau,z_1)$ suffisent pour déterminer la forme Φ.

Proposition 1.2.13. *Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{f,A_2}$.*
On considère la correction automorphe Ψ_2 de la forme Φ suivante :

$$\Psi_2(\tau,z) := \exp\Big[-8\pi^2 mG_2(\tau)(z_1^2+z_2^2) + mz_2\Big(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\Big)(\tau,z_1)\Big]\Phi(\tau,z),$$

la fonction Ψ_2 s'écrit :

$$\Psi_2(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n'\geq -n} g_{n,n'}(\tau) z_1^{n'} z_2^n,$$

où, pour chaque couple d'entiers (n,n'), la fonction $g_{n,n'}$ est une fonction modulaire de poids $k+n+n'$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve.
On reprend les notations du lemme précédent (lemme 1.2.8), on a alors :

$$\Psi_2(\tau,z) = e^{-8\pi^2 m G_2(\tau) z_1^2} \Psi_1(\tau,z),$$

d'où :

$$\Psi_2(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(e^{-8\pi^2 m G_2(\tau) z_1^2} f_n(\tau,z_1)\Big) z_2^n,$$

ou encore :

$$\Psi_2(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(\tau,z_1) z_2^n,$$

en posant $F_n(\tau,z_1) = e^{-8\pi^2 m G_2(\tau) z_1^2} f_n(\tau,z_1)$.
En utilisant la propriété modulaire de $G_2(\tau)$, et l'équation fonctionnelle vérifiée par Ψ_1 suivante (voir la preuve du lemme 1.2.8) :
pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Psi_1\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi imc}{c\tau+d} z_1^2} \Psi_1(\tau,z) \ ,$$

on obtient, pour tout entier n et pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$F_n\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z_1}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^{k+n} F_n(\tau,z_1).$$

De plus, d'après les propriétés de f_n, la fonction F_n est méromorphe en la variable z_1, et les seuls pôles éventuels de la fonction $F_n(\tau,z_1)$, à τ fixé, sont les points de $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, et sont d'ordre au plus n.
Finalement, on peut écrire F_n sous la forme :

$$F_n(\tau,z_1) = \sum_{n'\geq -n} g_{n,n'}(\tau) z_1^{n'},$$

où les fonctions $g_{n,n'}$ vérifient, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, l'équation fonctionnelle :

$$g_{n,n'}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^{k+n+n'} g_{n,n'}(\tau),$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

1.2.6 Séries thêta

(i) Sous-groupe de congruence commun

Le lemme suivant rappelle la définition et les équations fonctionnelles des séries thêta dans le cas du réseau A_2 (voir le paragraphe 1.1.6 et la proposition 1.1.3).

Lemme 1.2.9. *Soient m un entier positif et μ un élément de $\widetilde{A_2}$.*
La fonction thêta relative au réseau A_2, d'indice m et de caractéristique μ, notée $\theta_{\mu,m}$, est définie sur $\mathbb{H} \times U$ par :

$$\theta_{\mu,m}(\tau,z) := \sum_{\gamma \in A_2 + \frac{\mu}{m}} \exp(\pi i m \tau < \gamma,\gamma > -2\pi i m < \gamma,z >).$$

Elle ne dépend que de μ modulo mA_2 et vérifie :

$$\begin{array}{lll} (1) & \theta_{\mu,m}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) & = e^{-2\pi i m<\beta,z>}e^{-\pi i m<\beta,\beta>\tau}\theta_{\mu,m}(\tau,z), \text{ pour } \alpha,\ \beta \text{ dans } A_2 \\ (2) & \theta_{\mu,m}(\tau+1,z) & = e^{\frac{\pi i}{m}<\mu,\mu>}\theta_{\mu,m}(\tau,z) \\ (3) & \theta_{\mu,m}(\frac{-1}{\tau},\frac{z}{\tau}) & = \frac{\tau}{im\sqrt{3}}e^{\pi i m\frac{<z,z>}{\tau}} \displaystyle\sum_{\nu \in \widetilde{A_2}/mA_2} \exp(\frac{-2\pi i}{m} < \nu,\mu >)\theta_{\nu,m}(\tau,z) \end{array}$$

Les séries thêta ne sont pas en général des formes de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier. Le but de ce paragraphe est de trouver un sous-groupe par rapport auquel toutes les séries thêta sont des formes de Jacobi.

Notation 1.2.2. *Symbole de Kronecker.*
Le symbole de Kronecker (voir l'ouvrage de T.Miyake [Mi]) généralise le symbole de Legendre (encore appelé symbole de résidu quadratique) $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$, où p est un nombre premier impair.
Pour a, b deux entiers relatifs non tous deux nuls, on a :

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 1 & si\ a \equiv 1 \ mod\ 8 \\ -1 & si\ a \equiv 5 \ mod\ 8 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & si\ a \geq 0 \\ -1 & si\ a < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{a}{0}\right) = \begin{cases} 1 & si\ a = 1 \\ 0 & si\ a \neq 1 \end{cases}$$

Si b s'écrit $b = \epsilon \prod_{p\ premier} p$, où ϵ vaut -1 ou 1, alors $\left(\frac{a}{b}\right)$ est défini par :

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{\epsilon}\right) \times \prod_{p\ premier} \left(\frac{a}{p}\right).$$

Proposition 1.2.14. *Sous-groupe commun.*
(i) Soient m un entier naturel non nul et μ appartenant à $\widetilde{A_2}$.

Alors la forme $\theta_{\mu,m}$ *appartient à* $J_{1,m}^{A_2,f}(\Gamma_1(3m),\chi_{\mu,m})$,

avec $\chi_{\mu,m}(\gamma) = e^{\frac{\pi i b}{m}<\mu,\mu>}$, *pour* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *appartenant à* $\Gamma_1(3m)$.
Remarque : $\chi_{\mu,m}$ *est trivial sur* $\Gamma(3m)$.

(ii) Soit m *un entier naturel non nul.*

Alors la forme $\theta_{0,m}$ *appartient à* $J_{1,m}^{A_2,f}(\Gamma_0(3m),\chi)$,

avec $\chi(\gamma) = \left(\frac{-3}{d}\right)$, *pour* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *appartenant à* $\Gamma_0(3m)$.
Remarque : χ *est trivial sur* $\Gamma_1(3m)$.

(Voir la notation 1.1.3 des sous-groupes de congruence.)

Preuve.
La preuve de cette proposition est basée sur un résultat mentionné par V.G.Kac et D.H.Peterson [KP] (proposition 3.17, p189) concernant les séries thêta de Jacobi associées à un réseau L quelconque, et adapté ici dans le cas particulier du réseau A_2.
Enonçons ce résultat dans le cas du réseau A_2.
Soient m un entier naturel non nul et μ appartenant à $\widetilde{A_2}$.
Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$ et vérifiant :
(1) pour tout α tel que $c\alpha$ soit dans A_2 et $m\alpha$ dans $\widetilde{A_2}$, $mac < \alpha,\alpha >$ appartient à $2\mathbb{Z}$
(2) pour tout l appartenant à $\widetilde{A_2}$, $\frac{c}{m} < l,l >$ appartient à $2\mathbb{Z}$.

Alors :

$$\theta_{\mu,m}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{-3}{d}\right)(c\tau+d)\ e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}} \times \sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}[cd<\alpha,\alpha>+2bc<\alpha,\mu>+ab<\mu,\mu>]}\theta_{a\mu+c\alpha,m}(\tau,z)$$

Traduisons les propriétés (1) et (2) en termes de congruence.
(1) Soit α tel que $c\alpha$ soit dans A_2 et $m\alpha$ dans $\widetilde{A_2}$. Alors, il existe des entiers n_1, n_2, k_1, k_2 tels que $c\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ et $m\alpha = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$, d'où, par définition de λ_1 et λ_2, $n_1 = \frac{c}{3m}(2k_1+k_2)$, $n_2 = \frac{c}{3m}(k_1+2k_2)$, et $mac < \alpha,\alpha >= \frac{ac}{3m}(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1k_2)$.
Pour que $mac < \alpha,\alpha >$ appartienne à $2\mathbb{Z}$, il suffit que $\frac{ac}{3m}$ soit dans $\mathbb{Z}$.

(2) On sait que pour l appartenant à $\widetilde{A_2}$, $< l,l >$ appartient à $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$ (et par exemple $< \lambda_1,\lambda_1 >= \frac{2}{3}$).
On aura donc (2) si et seulement si c appartient à $3m\mathbb{Z}$.

Ainsi, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$ avec c appartenant à $3m\mathbb{Z}$, alors γ vérifie les conditions (1) et (2).

Supposons c appartenant à $3m\mathbb{Z}$, et cherchons à quelle condition γ vérifie aussi la condition (3) suivante :

(3) pour tout μ appartenant à $\widetilde{A_2}$, et pour tout α de $\widetilde{A_2}$ ($c\alpha$ défini modulo mA_2) on a : $a\mu + c\alpha \equiv \mu \ mod \ mA_2$.
Puisque c appartient à $3m\mathbb{Z}$, $c\alpha$ appartient à mA_2 pour tout α de $\widetilde{A_2}$, la condition (3) revient donc à la condition : pour tout μ appartenant à $\widetilde{A_2}$, $(a-1)\mu$ appartient à mA_2, ou encore, $a-1$ appartient à $3m\mathbb{Z}$.

Finalement, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma_1(3m)$, la relation décrite par V.G.Kac et D.H.Peterson devient :

$$\theta_{\mu,m}(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d},\tfrac{z}{c\tau+d}) = \left(\tfrac{-3}{d}\right)(c\tau+d)\ e^{i\pi m \frac{c<z,z>}{c\tau+d}} \\ \times \sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}[cd<\alpha,\alpha>+2bc<\alpha,\mu>+ab<\mu,\mu>]}\theta_{\mu,m}(\tau,z)$$

(En effet, en imposant la condition (3), on impose à la forme $\theta_{a\mu+c\alpha,m}$ de coïncider avec la forme $\theta_{\mu,m}$.)

Il reste alors à étudier le terme $\left(\frac{-3}{d}\right) \times \displaystyle\sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}[cd<\alpha,\alpha>+2bc<\alpha,\mu>+ab<\mu,\mu>]}$.

On suppose désormais que $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma_1(3m)$.

Soient α et μ appartenant à $\widetilde{A_2}$.
Alors, $\frac{\pi i}{m}cd < \alpha,\alpha >$ appartient à $2\pi i\mathbb{Z}$, puisque $< \alpha,\alpha >$ appartient à $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$, et que c est dans $3m\mathbb{Z}$.
D'après un raisonnement analogue, $\frac{\pi i}{m}ab < \mu,\mu >$ appartient à $\frac{\pi i}{m}b < \mu,\mu > +2\pi i\mathbb{Z}$, et $\frac{\pi i}{m}2bc < \alpha,\mu >$ appartient à $2\pi i\mathbb{Z}$, car $< \alpha,\mu >$ appartient à $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$.
Finalement, on a :

$$\sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}[cd<\alpha,\alpha>+2bc<\alpha,\mu>+ab<\mu,\mu>]} = \sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}b<\mu,\mu>} \\ = e^{\frac{\pi i}{m}b<\mu,\mu>} \times\ Card\ \{\alpha \in \widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2\} \\ = e^{\frac{\pi i}{m}b<\mu,\mu>},$$

car, puisque c appartient à $3m\mathbb{Z}$, pour tout α appartenant à $\widetilde{A_2}$, $c\alpha$ appartient à mA_2.

On s'intéresse maintenant au terme $\left(\frac{-3}{d}\right)$. (Voir la notation 1.2.2.)

Comme $d \equiv 1 \ mod \ 3m$, on peut écrire d sous la forme :

$$d = \epsilon \prod_{\substack{p\ premier \\ p\equiv 1\ mod\ 3}} p^{n_p} \times \prod_{\substack{p\ premier \\ p\equiv -1\ mod\ 3}} p^{n_p},$$

où ϵ vaut -1 ou 1, et les n_p sont des entiers naturels avec $\displaystyle\sum_{\substack{p\ premier \\ p\equiv -1\ mod\ 3}} n_p$ pair, si $\epsilon = 1$, et impair sinon.

En utilisant l'écriture de d, la définition du symbole de Legendre, et le fait que, pour p premier distinct de 3, $\left(\frac{-3}{p}\right)$ vaut 1 si p est congru à 1 modulo 3 et -1 sinon, on montre que $\left(\frac{-3}{d}\right)$ vaut 1 dès que d est divisible par 3.

On a donc, pour tout μ appartenant à $\widetilde{A_2}$, et tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\Gamma_1(3m)$:

$$\theta_{\mu,m}\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)\ e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}\, e^{\frac{\pi i b}{m}<\mu,\mu>}\theta_{\mu,m}(\tau,z).$$

D'après ce résultat, la propriété (1) de "quasi-périodicité vis à vis du réseau A_2" vérifiée par toutes les formes thêta, ainsi que la forme de leur développement, on conclut que les formes $\theta_{\mu,m}$ sont dans l'espace des formes de Jacobi $J_{1,m}^{A_2,f}(\Gamma_1(3m),\chi_{\mu,m})$.
Enfin, on peut remarquer que si, de plus, b appartient à $3m\mathbb{Z}$, alors $e^{\frac{\pi i b}{m}<\mu,\mu>}$ est égal à 1, ainsi le résultat (i) est établi, et on a donné ici, pour chaque entier naturel m fixé, un sous-groupe de congruence commun à toutes les fonctions $\theta_{\mu,m}$, μ décrivant $\widetilde{A_2}$, modulo mA_2.

Dans le cas particulier où μ est fixé égal à 0, on peut obtenir un groupe de congruence plus grand pour lequel la fonction $\theta_{0,m}$ est modulaire.
En effet, en reprenant la relation écrite plus haut dans ce cas particulier, on obtient, pour c appartenant à $3m\mathbb{Z}$ (c'est à dire γ appartenant à $\Gamma_0(3m)$), puisqu'alors les conditions (1) et (2) sont vérifiées :

$$\theta_{0,m}\Big(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d},\tfrac{z}{c\tau+d}\Big) = \Big(\tfrac{-3}{d}\Big)(c\tau+d)\ e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}} \times \textstyle\sum_{\alpha\in\widetilde{A_2},\ c\alpha\ mod\ mA_2} e^{\frac{\pi i}{m}[cd<\alpha,\alpha>]}\theta_{c\alpha,m}(\tau,z),$$

ou encore, comme, pour tout α de $\widetilde{A_2}$, $c\alpha$ appartient à mA_2 et $\frac{\pi i}{m}c<\alpha,\alpha>$ à $2\pi i\mathbb{Z}$:

$$\theta_{0,m}\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big) = \Big(\frac{-3}{d}\Big)(c\tau+d)\ e^{i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}\,\theta_{0,m}(\tau,z).$$

On en déduit la deuxième partie de la proposition.

Remarque 1.2.7. Cas particulier des séries thêta d'indice 1.
Il existe trois séries thêta d'indice 1, qui sont $\theta_{0,1}$, $\theta_{u,1}$ et $\theta_{2u,1}$. (Voir le système de représentants de $\widetilde{A_2}/A_2$, donné au paragraphe 1.2.1.)

En appliquant la proposition précédente, on obtient :

$$\theta_{0,1}\ \in J_{1,1}^{A_2}\Big(\Gamma_0(3),\Big(\frac{-3}{d}\Big)\ \Big)$$

$$\theta_{\mu,1}\ \in J_{1,1}^{A_2}\Big(\Gamma_1(3),v\Big),\qquad \text{où } v(\gamma) = e^{2\pi i\frac{b}{3}}$$

$$\theta_{2\mu,1}\ \in J_{1,1}^{A_2}\Big(\Gamma_1(3),v\Big),\qquad \text{où } v(\gamma) = e^{2\pi i\frac{b}{3}}$$

(ii) Formes singulières

Définition 1.2.3. On appelle *forme de Jacobi singulière une forme de Jacobi dont les seuls coefficients de Fourier $f(n,l)$ non nuls vérifient la condition $2nm- < l,l >= 0$.*
Une forme singulière non nulle est en particulier une forme holomorphe, mais non cuspidale.

Proposition 1.2.15. *Séries thêta.*
Toute série thêta $\theta_{\mu,m}$ est une forme singulière.

Preuve.
Par définition, on a :

$$\theta_{\mu,m}(\tau,z) = \sum_{\gamma \in A_2 + \frac{\mu}{m}} \exp(\pi i m \tau < \gamma,\gamma > -2\pi i m < \gamma,z >),$$

d'où l'écriture suivante d'un coefficient de Fourier $f(n,l)$ quelconque :

$$f(n,l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l \in mA_2 - \mu \text{ et } n = \frac{<l,l>}{2m} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui induit la conclusion annoncée.

Remarque 1.2.8. Définition équivalente.
On peut, de façon équivalente, dire qu'une forme d'indice m est singulière si elle appartient au noyau de l'opérateur différentiel $D_0^{(m)}$ défini au paragraphe 1.2.3.
En effet, on rappelle que si Φ est une forme de Jacobi d'indice m dont le développement de Fourier est écrit :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{n,l} f(n,l) q^n e^{2\pi i <z,l>},$$

alors $D_0^{(m)}(\Phi)$ admet le développement suivant (voir la proposition 1.2.6) :

$$D_0^{(m)}(\Phi)(\tau,z) = (2\pi i)^2 \sum_{n,l} f(n,l)(mn - \frac{1}{2} < l,l >) q^n e^{2\pi i <z,l>}.$$

Lemme 1.2.10. *Représentation vectorielle.*
Si une fonction Φ appartenant à l'espace $J_{\star,m}^{A_2}(\Gamma',\chi)$, où m est un entier naturel, χ un système multiplicatif et Γ' un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$, est singulière, alors Φ s'écrit :

$$\Phi(\tau,\ z) = \sum_{\mu \in \widetilde{A_2}/mA_2} a_\mu \theta_{\mu,m}(\tau,z),$$

où les a_μ sont des constantes. La forme Φ est de poids 1.

Preuve.
Ce résultat est établi dans un cadre plus général dans la preuve du lemme 4.1 de l'article de V.Gritsenko [G].

Proposition 1.2.16.
Toute forme de Jacobi singulière, d'indice m, définie relativement au réseau A_2, appartient à l'espace $J_{1,m}^{A_2,hol}(\Gamma(3m))$, où (voir la notation 1.1.3) :

$$\Gamma(3m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ / \ b \equiv c \equiv 0 \ mod\ 3m,\ a \equiv d \equiv 1 \ mod\ 3m \right\}.$$

Preuve.
D'après la proposition 1.2.14, chaque série $\theta_{\mu,m}$ est dans $J_{1,m}^{A_2,f}(\Gamma(3m))$.

Le lemme précédent permet alors d'obtenir le résultat annoncé.

Remarque 1.2.9. Cas de l'indice 1.
A l'aide des résultats exprimés dans le cas particulier des séries thêta d'indice 1, on peut également formuler des résultats dans le cas particulier des formes singulières d'indice 1. De façon générale, si Φ est une forme singulière d'indice 1, alors Φ appartient à $J_{1,1}^{A_2,hol}(\Gamma(3))$, mais si Φ appartient à $\mathbb{C}\theta_{0,1}$, alors Φ est dans l'espace $J_{1,1}^{A_2,hol}\Big(\Gamma_0(3),\Big(\frac{-3}{d}\Big)\Big)$, et si Φ appartient à $\mathbb{C}\theta_{\mu,1}\oplus\mathbb{C}\theta_{2\mu,1}$, alors Φ fait partie de l'espace $J_{1,1}^{A_2,hol}\Big(\Gamma_1(3),v\Big)$, où $v(\gamma)=e^{2\pi i\frac{b}{3}}$.

1.2.7 Séries d'Eisenstein

(i) Définition

Notation 1.2.3. - *On note Γ^J le groupe de Jacobi agissant sur $\mathbb{H}\times U$, c'est à dire le produit semi-direct de $SL_2(\mathbb{Z})$ du groupe d'Heisenberg $H(A_2)$ (extension centrale de $A_2\times A_2$), décrit au paragraphe 2 de l'article de V.Gritsenko [G], et qui peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe orthogonal $O(2,4)$. (Voir aussi la remarque 1.1.3).*

- On note, pour une forme de Jacobi Φ de poids k, d'indice m :

$$\Phi|_{k,m}\Big((\alpha,\beta)\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Big)(\tau,z)=(c\tau+d)^{-k}e^{-i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}$$

$$\times e^{i\pi m(2<\beta,z/(c\tau+d)>+\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>)}\Phi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\,,\,\frac{z}{c\tau+d}+\alpha+\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\,\beta\Big)$$

pour $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$ et (α,β) appartenant à $A_2\times A_2$.

- On note Γ^J_∞ le sous-groupe de Γ^J formé des éléments g tels que $1|g=1$.

Proposition-Définition 1.2.2. *Soient k un entier relatif et m un entier naturel non nul, on pose :*

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z):=\sum_{\gamma\in\Gamma^J/\Gamma^J_\infty}1|_{k,m}\gamma.$$

Pour k impair, ces séries sont nulles, et pour k pair, supérieur ou égal à 4, ces séries convergent et s'écrivent :

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z)=\frac{1}{2}\sum_{c,d\in\mathbb{Z}\;,\;(c,d)=1}\sum_{\beta\in A_2}(c\tau+d)^{-k}e^{\pi im(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}\;.$$

Preuve.
On procède comme le font, dans le cas classique à une variable, M.Eichler et D.Zagier [EZ].
Détaillons cette écriture dans le cas où k est un entier pair supérieur ou égal à 4.
Le groupe Γ^J_∞ est engendré par les éléments du type $\{[\alpha,0,t]\}$, α appartenant à A_2, t appartenant à $\mathbb{Z}$, et les éléments de la forme $\Big\{\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big\}$, avec n appartenant à $\mathbb{Z}$.
On choisit un système de représentants de Γ^J modulo Γ^J_∞ en considérant les éléments

du type $\{[0,\beta,0]\}$, β appartenant à A_2, et les éléments de la forme $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$, avec $(c,d) = 1$, a, b choisis tels que $ad - bc = 1$, et en ne prenant qu'un couple (c,d) parmi $\pm(c,d)$.
On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces derniers éléments.

Par définition, on a donc :

$$\begin{aligned}
E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) &:= \sum_{\gamma\in\Gamma^J/\Gamma^J_\infty} 1|_{k,m}\gamma \ , \\
&= \sum_{g.n\in\Gamma^J/\Gamma^J_\infty} 1|_{k,m}g.n \ , \\
&= \sum_{g\in SL_2(\mathbb{Z}) \bmod \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}} \ \sum_{n \bmod \{[\alpha,0,t)]\}} 1|_{k,m}g.n \ , \\
&= \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{S}} \ \sum_{\beta\in A_2} 1|_{k,m}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.(0,\beta,0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c,d\in\mathbb{Z}}} \ \sum_{\beta\in A_2} (c\tau+d)^{-k}e^{-i\pi m\frac{c<z,z>}{c\tau+d}}e^{i\pi m(2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>+\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>)}.
\end{aligned}$$

(ii) Propriétés

Proposition 1.2.17. *Soient k et m deux entiers naturels, avec k pair, supérieur ou égal à 4.*
(1) La série $E_{k,m}^{(A_2)}$ admet l'écriture suivante :

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) = \theta_{0,m}(\tau,z) \ + \sum_{n\in\mathbb{Z},\ l_1,l_2\in\mathbb{Z}} e_{k,m}(n,\ l_1,l_2)q^n\zeta_1^{l_1}\zeta_2^{l_2},$$

où $\zeta_j = e^{2i\pi z_j}$, $q = e^{2\pi i\tau}$,

$$e_{k,m}(n,l) = \begin{cases} 0, & si\ 2mn- <l,l> \ \leq \ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{i^k}{(k-2)!}\ (\frac{\pi}{m})^{k-1}\ \zeta(k-2)^{-1}(2mn- <l,l>)^{k-2}\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{N_a(Q)}{a^{k-1}}, & si\ 2mn- <l,l> \ > \ 0 \end{cases}$$

avec $Q(\ b_1,\ b_2\ ) = m(b_1^2 + b_2^2 - b_1b_2) + l_1b_1 + l_2b_2 + n$,

$N_a(Q) = Card\{\ (b_1,b_2)\ mod\ a/\ Q(b_1,b_2) \equiv 0\ mod\ a\ \},$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, *la série zêta de Riemann,*
et $\theta_{0,m}(\tau,z) = \sum_{\beta\in A_2} e^{\pi im(<\beta,\beta>\tau+2<\beta,z>)}$.

(2) La fonction $E_{k,m}^{(A_2)}$ est une forme de Jacobi holomorphe, de poids k, d'indice m, pour le groupe de Jacobi tout entier.

(3) Le coefficient $[\ ]_{q^0}$ de la forme $E_{k,m}^{(A_2)}$ est donné par :

$$[E_{k,m}^{(A_2)}]_{q^0} = 1.$$

Preuve.
Pour démontrer la propriété (1), on reproduit les calculs effectués dans le cas classique par M.Eichler et D.Zagier [EZ].

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \sum_{\beta \in A_2} (c\tau+d)^{-k} e^{\pi i m (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}.$$

On écrit tout d'abord cette somme en séparant les termes avec $c=0$, $d=1$, les termes avec $c=0$, $d=-1$, les termes où c est strictement positif, et les termes où c est strictement négatif.

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{\beta\in A_2} e^{\pi i m(2<\beta,z>+<\beta,\beta>\tau)}\Big] + \frac{1}{2}\Big[\sum_{\beta\in A_2} e^{\pi i m(-2<\beta,z>+<\beta,\beta>\tau)}\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ c>0}} \sum_{\beta \in A_2} (c\tau+d)^{-k} e^{\pi i m (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ c<0}} \sum_{\beta \in A_2} (c\tau+d)^{-k} e^{\pi i m (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}\Big]$$

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) = \theta_{0,m}(\tau,z) + \Big[\sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ c>0}} \sum_{\beta \in A_2} (c\tau+d)^{-k} e^{\pi i m (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}\Big].$$

On s'intéresse maintenant au deuxième terme, noté (1), de cette expression.
On peut écrire, pour c non nul :

$\frac{a\tau+b}{c\tau+d} < \beta,\beta > +2 < \beta,\frac{z}{c\tau+d} > -\frac{c<z,z>}{c\tau+d} = -c\frac{<z-\frac{\beta}{c},z-\frac{\beta}{c}>}{c\tau+d} + a\frac{<\beta,\beta>}{c}$ d'où :

$$(1) = \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ c>0}} \sum_{\beta \in A_2} (c\tau+d)^{-k} e^{\pi i m (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}<\beta,\beta>+2<\beta,\frac{z}{c\tau+d}>-\frac{c<z,z>}{c\tau+d})}$$
$$= \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \sum_{\beta \in A_2} (\tau+\frac{d}{c})^{-k} e^{\pi i m(-\frac{<z-\frac{\beta}{c},z-\frac{\beta}{c}>}{\tau+\frac{d}{c}}+a\frac{<\beta,\beta>}{c})}$$

$$= \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{\substack{d' \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ (c,d')=1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\beta'\in A_2 \ mod \ cA_2} \sum_{\alpha\in A_2} (\tau+\frac{d'}{c}+j)^{-k} e^{\pi i m(-\frac{<z-\frac{\beta'}{c}+\alpha, z-\frac{\beta'}{c}+\alpha>}{\tau+\frac{d'}{c}+j}+a\frac{<\beta'-c\alpha,\beta'-c\alpha>}{c})}$$

$$= \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{\substack{d' \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ (c,d')=1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\beta'\in A_2 \ mod \ cA_2} \sum_{\alpha\in A_2} (\tau+\frac{d'}{c}+j)^{-k} e^{\pi i m(-\frac{<z-\frac{\beta'}{c}+\alpha, z-\frac{\beta'}{c}+\alpha>}{\tau+\frac{d'}{c}+j}+a\frac{<\beta',\beta'>}{c})},$$

car $\pi i m a\frac{<\beta'-c\alpha,\beta'-c\alpha>}{c}$ appartient à $\pi i m\frac{a}{c} < \beta',\beta' > +2\pi i\mathbb{Z}$.

On pose :
$F_{k,m}(\tau,z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\alpha\in A_2} (\tau + j)^{-k} e^{\pi i m(-\frac{<z+\alpha,z+\alpha>}{\tau+j})}$,

on a alors :
$F_{k,m}(\tau + 1,z) = F_{k,m}(\tau,z)$
$F_{k,m}(\tau,z + \mu) = F_{k,m}(\tau,z)$, pour μ appartenant à A_2,
et :

$$(1) = \sum_{c=1}^{+\infty} c^{-k} \sum_{\substack{d' \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ (c,d')=1}} \sum_{\beta'\in A_2 \ mod \ cA_2} F_{k,m}(\tau + \frac{d'}{c}, z - \frac{\beta'}{c}) e^{\pi i m\frac{a}{c}<\beta',\beta'>}.$$

On peut écrire $F_{k,m}(\tau,z)$ sous la forme :

$$F_{k,m}(\tau,z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2}} \gamma(n,l_1,l_2) q^n \zeta_1^{l_1}\zeta_2^{l_2},$$

avec $\gamma(n,l_1,l_2) = \int_{Im\tau=C}\int_{Imz_1=C_1}\int_{Imz_2=C_2} \tau^{-k} e^{-2\pi i n\tau} e^{-\pi i m\frac{<z,z>}{\tau}} e^{-2\pi i(l_1z_1+l_2z_2)} dz_1dz_2d\tau$,

où $C > 0$, C_1, C_2 sont des constantes réelles arbitrairement fixées.
En menant un calcul intégral classique, utilisant notamment :

$$\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-zx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}, \text{ pour } Re(z) > 0,$$

on obtient :
$\gamma(n,l_1,l_2) = \frac{1}{im\sqrt{3}} \int_{Im\tau=C} \tau^{1-k} e^{2\pi i\tau(-n+\frac{l_2^2}{4m}+\frac{1}{3m}(l_1+\frac{l_2}{2})^2)} d\tau$,
d'où, en utilisant la méthode décrite par M.Eichler et D.Zagier, et en rappelant que pour $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$ dans $\widetilde{A_2}$, on a $< l,l >= \frac{2}{3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1l_2)$, on obtient :

$$\gamma(n,l_1,l_2) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{m})^{k-1}\frac{i^k}{(k-2)!}(2mn- < l,l >)^{k-2}, & \text{si } 2mn- < l,l > > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Revenons à l'expression du terme (1) :

$$(1) = \sum_{c=1}^{+\infty} c^{-k} \Bigg(\sum_{\substack{d' \in \mathbb{Z}\ mod\ c \\ (c,d')=1}} \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\ mod\ c} e^{\pi i m \frac{a}{c} <b_1\alpha_1+b_2\alpha_2, b_1\alpha_1+b_2\alpha_2>}$$

$$\times \Bigg[\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2) \in \mathbb{Z}^2}} \gamma(n,l_1,l_2) q^n e^{2\pi i n \frac{d'}{c}} \zeta_1^{l_1} \zeta_2^{l_2} e^{-2\pi i l_1 \frac{b_1}{c}} e^{-2\pi i l_2 \frac{b_2}{c}} \Bigg] \Bigg)$$

$$= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2) \in \mathbb{Z}^2}} e_{k,m}(n,l_1,l_2) q^n \zeta_1^{l_1} \zeta_2^{l_2},$$

avec :

$$e_{k,m}(n,l_1,l_2) = \Bigg(\sum_{c=1}^{+\infty} c^{-k} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ mod\ c \\ (c,d)=1}} \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} mod\ c} e^{\pi i m \frac{a}{c} <b_1\alpha_1+b_2\alpha_2, b_1\alpha_1+b_2\alpha_2>} e^{2\pi i n \frac{d}{c}} e^{-\frac{2\pi i}{c}(l_1 b_1 + l_2 b_2)} \Bigg)$$

$$\times \gamma(n,l_1,l_2).$$

On s'intéresse maintenant au terme noté (2) suivant :

$$(2) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}\ mod\ c \\ (c,d)=1}} \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\ mod\ c} e^{\pi i m \frac{a}{c} <b_1\alpha_1+b_2\alpha_2, b_1\alpha_1+b_2\alpha_2>} e^{2\pi i n \frac{d}{c}} e^{-\frac{2\pi i}{c}(l_1 b_1 + l_2 b_2)}.$$

En remarquant que lorsque b_1' parcourt un système de représentants de $\mathbb{Z}\ mod\ c\mathbb{Z}$, il en va de même pour $-db_1'$, si $(c,d) = 1$, on peut remplacer b_1 par $-db_1'$ et b_2 par $-db_2'$. On obtient :

$$(2) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}\ mod\ c \\ (c,d)=1}} \sum_{b_1',b_2' \in \mathbb{Z}\ mod\ c} e^{\pi i m \frac{a}{c} d^2 <b_1'\alpha_1+b_2'\alpha_2, b_1'\alpha_1+b_2'\alpha_2>} e^{2\pi i n \frac{d}{c}} e^{\frac{2\pi i d}{c}(l_1 b_1' + l_2 b_2')}.$$

En utilisant l'égalité $ad - bc = 1$, on a :

$$(2) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}\ mod\ c \\ (c,d)=1}} \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\ mod\ c} e^{2\pi i \frac{d}{c}(\frac{m}{2} <b_1\alpha_1+b_2\alpha_2, b_1\alpha_1+b_2\alpha_2> + n + l_1 b_1 + l_2 b_2)}$$

$$= \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}\ mod\ c \\ (c,d)=1}} \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\ mod\ c} e^{2\pi i \frac{d}{c} Q_{m,n,l}(b_1,b_2)},$$

avec $Q_{m,n,l}(b_1,b_2) = \frac{m}{2} < b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 > + n + l_1 b_1 + l_2 b_2$,
ou encore :
$Q_{m,n,l}(b_1,b_2) = m(b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2) + n + l_1 b_1 + l_2 b_2$.

Pour simplifier les notations, $Q_{m,n,l}$ sera noté Q dans la suite du calcul.

$$(2) = \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ c} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ (c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{d}{c} Q(b_1,b_2)},$$

d'où, en utilisant, comme M.Eichler et D.Zagier, l'identité :

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ (c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{d}{c} N} = \sum_{a|(c,N)} \mu(\frac{c}{a})a, \text{ où } \mu \text{ est la fonction de Möbius,}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
(2) &= \sum_{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ c} \sum_{a|(c,Q(b_1,b_2))} \mu(\frac{c}{a})a \\
&= \sum_{a|c} \sum_{\substack{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ c \\ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a}} \mu(\frac{c}{a})a \\
&= \sum_{a|c} a\mu(\frac{c}{a}) \times Card\{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ c \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\} \\
&= \sum_{a|c} a\mu(\frac{c}{a}) \times \ (\frac{c}{a})^2 \ \times Card\{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ a \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\}.
\end{aligned}$$

Posons :
$N_a(Q) := Card\{b_1,b_2 \in \mathbb{Z} \ mod \ a \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\}$,

on a alors :

$$\begin{aligned}
e_{k,m}(n,l_1,l_2) &= \Big(\sum_{c=1}^{+\infty} c^{-k} \sum_{a|c} a\mu(\frac{c}{a})(\frac{c}{a})^2 N_a(Q)\Big)\gamma(n,l_1,l_2) \\
&= \gamma(n,l_1,l_2) \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \mu(b)b^{-(k-2)} \frac{N_a(Q)}{a^{k-1}} \\
&= \gamma(n,l_1,l_2)\zeta(k-2)^{-1} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{N_a(Q)}{a^{k-1}}, \text{ car } \sum_{b=1}^{+\infty} \mu(b)b^{-s} = \zeta(s)^{-1}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) \ = \ \theta_{0,m}(\tau,z) \ + \ (1) \ = \ \theta_{0,m}(\tau,z) \ + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2) \in \mathbb{Z}^2}} e_{k,m}(n,l_1,l_2) q^n \zeta_1^{l_1} \zeta_2^{l_2},$$

avec :
$$e_{k,m}(n,l_1,l_2) = \gamma(n,l_1,l_2)\zeta(k-2)^{-1} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{N_a(Q)}{a^{k-1}},$$
et :
$$\gamma(n,l_1,l_2) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{m})^{k-1} \frac{i^k}{(k-2)!}(2mn - < l,l >)^{k-2}, & \text{si } 2mn - < l,l > > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
d'où la propriété (3) annoncée.

La définition même de la fonction $E_{k,m}^{(A_2)}$ lui assure de vérifier les équations fonctionnelles d'une forme de Jacobi (voir le paragraphe 1.1.1).
De plus, d'après la nouvelle expression de $E_{k,m}^{(A_2)}$ qui vient d'être établie, comme la série $\theta_{0,m}(\tau,z)$ est une forme singulière (voir le paragraphe 1.2.6) et que les coefficients $e_{k,m}(n,l)$ sont nuls dès que $2nm- < l,l >$ est négatif, la fonction $E_{k,m}^{(A_2)}$ est une forme de Jacobi holomorphe.

Montrons la propriété (3).
D'après l'expression des coefficients de Fourier de la série $\theta_{0,m}(\tau,z)$, on peut aussi écrire :

$$E_{k,m}^{(A_2)}(\tau,z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 \in \widetilde{A_2}}} c_{k,m}(n,l)\ q^n\ e^{2\pi i < z,l >},$$

$$\text{avec } c_{k,m}(n,l) = \begin{cases} e_{k,m}(n,l)\ , & \text{si } < l,l > < \ 2mn \\ 1\ , & \text{si } < l,l > = \ 2mn \text{ et } l \in mA_2 \\ & \text{ou encore } < l,l > = 2mn\ ,\ l_1 \ \equiv \ 0 \ mod\ m\ ,\ l_2 \ \equiv \ l_1 \ mod\ 3m \\ 0\ , & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, en écrivant $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$ appartenant à $\widetilde{A_2}$ sous la forme $l = (\frac{2}{3}l_1 + \frac{1}{3}l_2)\alpha_1 + (\frac{1}{3}l_1 + \frac{2}{3}l_2)\alpha_2$, on obtient le fait que l appartient à mA_2 si et seulement si $l_1 \equiv 0\ mod\ m$ et $l_1 \equiv l_2\ mod\ 3m$.

En particulier, on a bien :

$$[E_{k,m}^{(A_2)}]_{q^0} = 1.$$

(iii) Coefficients de Fourier de $E_{4,1}^{(A_2)}$

Notation 1.2.4. *Le symbole* $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ *désigne le symbole de Legendre. (Voir [Mi].)*
On rappelle que $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ *est un caractère de Dirichlet modulo* p *pour* p *premier, et il est défini par :*

$$\left(\frac{n}{p}\right) := \begin{cases} 0, & si\ p|n \\ 1, & si\ p \nmid n\ et\ si\ n\ est\ un\ \ carré\ modulo\ \ p \\ -1, & si\ p \nmid n\ et\ si\ n\ n'est\ pas\ un\ \ carré\ modulo\ \ p \end{cases}.$$

On emploiera aussi la notation :

$$L(1,\chi) \ = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \chi(n)n^{-1}.$$

On notera $\mathcal{P}$ *l'ensemble des nombres premiers distincts de* 2 *et* 3.

Proposition 1.2.18. *Le calcul des coefficients de Fourier, notés* $c_{4,1}(n,l_1,l_2)$, *de la série* $E_{4,1}^{(A_2)}$ *donne l'expression suivante :*

$$c_{4,1}(n,l_1,l_2) = \begin{cases} 0, & si\ 2n- < l,l > < 0 \\ 0, & si\ 2n- < l,l > = 0\ et\ l_1 \neq l_2 mod\ 3 \\ 1, & si\ 2n- < l,l > = 0\ et\ l_1 \equiv l_2 mod\ 3 \\ e_{4,1}(n,l_1,l_2), & si\ 2n- < l,l > > 0 \end{cases}$$

où l est écrit $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$ et donc $< l,l >= \frac{2}{3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)$,
et où $e_{4,1}(n,l_1,l_2)$ est décrit ci-dessous.
Pour $2n- < l,l > > 0$, on note $R := 6(< l,l > -2n)$. (Remarque : 4 divise R et R est congru à 0 ou 1 modulo 3.)
On a :

$$e_{4,1}(n,l_1,l_2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}(2n- < l,l >)^2 \times \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{T_R(a)}{a^3} \times \omega(l_1,l_2)\ ,$$

où $\omega(l_1,l_2) = \begin{cases} 1, & si\ l_1 \equiv l_2\ mod\ 3 \\ \frac{1}{2}, & sinon \end{cases}$

et où $T_R(a) = N_R(12a)$, avec $N_R(q) := Card\ \{\ (x,y)\ mod\ q\ /\ 3x^2 + y^2 \equiv R\ mod\ q\ \}$.

Le calcul de la somme apparaissant dans l'expression de ces coefficients donne une expression de la forme :

$$\sum_{a=1}^{+\infty} \frac{T_R(a)}{a^3} = 2^6 3^3 A_2(R)\ A_3(R)\ S(R)\ T(R) \times L\Big(\ 1,\ \chi_R(.)\Big(\frac{.}{3}\Big)\ \Big),$$

où $A_2(R)$, $A_3(R)$, $S(R)$ et $T(R)$ sont des constantes que l'on précisera au cours de la preuve qui suit, et où, en écrivant l'entier naturel n sous la forme $n = \prod_{p\ premier} p^{v_p(n)}$,
avec $v_p(n)$ entiers naturels, et en posant $d_n := \sum_{p\ premier} v_p(n)$:

$$\chi_R(n) := \begin{cases} (-1)^{d_n}, & si\ (n,R) = 1,\ (n,3) = 1,\ et\ si,\ pour\ p\ premier\ ,\ p|n \Rightarrow p^2|n \\ 0, & sinon \end{cases}$$

(χ_R n'est pas un caractère mais seulement une fonction multiplicative).

Preuve.
La démonstration s'inspire de la méthode exposée par M.Eichler et D.Zagier (voir [EZ]) dans le cas classique à une variable.

Soient n, l tels que $2n- < l,l > > 0$.
On note :
$R := \pm 2^{\alpha_2} \times 3^{\alpha_3} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$, avec α_j entiers naturels. D'après la forme de R, α_2 est supérieur ou égal à 2.
Détaillons maintenant ce calcul.

Soient n et l fixés.
On rappelle qu'on note $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$, avec l_1 et l_2 deux entiers relatifs, et qu'on a alors $R = 6(< l,l > -2n) = 4(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2) - 12n$.

D'après le paragraphe précédent, on peut écrire, si $2n- < l,l > > 0$:

$$e_{4,1}(n,l) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{2}\ \pi^3\ \zeta(2)^{-1}(2n- < l,l >)^2 \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{N_a(Q)}{a^3}$$

avec $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $Q(\ b_1,\ b_2\ )=(b_1^2+b_2^2-b_1b_2)+l_1b_1+l_2b_2+n$,

$N_a(Q)=Card\{\ (b_1,b_2)\ mod\ a/\ Q(b_1,b_2)\equiv 0\ mod\ a\ \}$.

Exprimons $\displaystyle\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{N_a(Q)}{a^3}$.

On a :
$Q(b_1,b_2)=\frac{1}{12}(\ 3(2b_1-b_2+l_1)^2+(3b_2+l_1+2l_2)^2+12n-6<l,l>\ )$,
donc $Q(b_1,b_2)$ est congru à 0 modulo a si et seulement si $3(2b_1-b_2+l_1)^2+(3b_2+l_1+2l_2)^2+12n-6<l,l>)$ est congru à 0 modulo $12a$.
Soit (x,y) appartenant à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que :

$$3x^2+y^2\equiv 6(<l,l>-2n)\ mod\ 12a$$

c'est à dire tel que :

$$3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a$$

On a alors :

$$\Big(\exists(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases} x=2b_1-b_2+l_1\\ y=3b_2+l_1+2l_2\end{cases}\Big)\Leftrightarrow\Big(\exists(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases} b_2=\frac{1}{3}(y-l_1-2l_2)\\ b_1=\frac{1}{3}(\frac{3x+y}{2}-2l_1-l_2)\end{cases}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\begin{cases} y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\\ 3x+y\equiv 2(2l_1+l_2)\ mod\ 6\end{cases}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\begin{cases} 2y\equiv 2l_1+4l_2\ mod\ 6\\ 3x+3y\equiv 6l_1+6l_2\ mod\ 6\end{cases}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\begin{cases} y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\\ x+y\equiv 2l_1+2l_2\ mod\ 2\end{cases}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\begin{cases} y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\\ x\equiv y\ mod\ 2\end{cases}\Big).$$

Or, si (x,y) appartenant à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifient $3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a$, alors x et y sont de même parité, puisque 4 divise R, donc divise y^2-x^2, donc on a finalement, si x et y vérifient $3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a$, l'équivalence suivante :

$$\Big(\exists(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases} x=2b_1-b_2+l_1\\ y=3b_2+l_1+2l_2\end{cases}\Big)\Leftrightarrow\Big(y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\Big).$$

Ces résultats permettent d'établir une bijection entre les ensembles
$\Big\{(x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases} 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\\ y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\end{cases}\Big\}$ et
$\Big\{(b_1,b_2)\in\mathbb{Z}/2a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\ /\ Q(b_1,b_2)\equiv 0\ mod\ a\Big\}$ en posant :
$\varphi(x,y):=(\frac{1}{3}(y-l_1-2l_2),\frac{1}{3}(\frac{3x+y}{2}-2l_1-l_2))$.

On a donc :

$$Card\Big\{\ (b_1,b_2)\in\mathbb{Z}/2a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\ /\ Q(b_1,b_2)\equiv 0\ mod\ a\Big\}$$
$$=Card\Big\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases} 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\\ y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\end{cases}\Big\}$$

Or, on a l'égalité :

$$8 \times Card\Big\{ (b_1,b_2) \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\Big\}$$
$$= Card\Big\{ (b_1,b_2) \in \mathbb{Z}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\Big\},$$

en effet, si $(\bar{b_1'},\bar{b_2'})$ appartenant à $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ est tel que $\overline{Q(b_1',b_2')} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, c'est à dire tel que $Q(b_1',b_2')$ est congru à 0 modulo a, alors (b_1',b_2'), $(b_1',b_2'+a)$, $(b_1',b_2'+2a)$, $(b_1',b_2'+3a)$, $(b_1'+a,b_2')$, $(b_1'+a,b_2'+a)$, $(b_1'+a,b_2'+2a)$, $(b_1'+a,b_2'+3a)$ sont huit solutions (b_1'',b_2'') distinctes dans $\mathbb{Z}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}$ de l'équation $Q(b_1'',b_2'') \equiv 0 \ mod \ a$ et ce sont les seules vérifiant $b_1'' \equiv b_1' \ mod \ a$, $b_2'' \equiv b_2' \ mod \ a$.

Ainsi, on obtient :

$$N_a(Q) = Card\Big\{ (b_1,b_2) \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \ / \ Q(b_1,b_2) \equiv 0 \ mod \ a\Big\}$$
$$= \frac{1}{8} \times Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv l_1 + 2l_2 \ mod \ 3 \end{cases} \Big\}$$

Il reste ainsi à évaluer le cardinal de l'ensemble

$$\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv l_1 + 2l_2 \ mod \ 3 \end{cases} \Big\}.$$

On peut remarquer que R s'écrit $(2l_2+l_1)^2+3l_1^2-12n$, et que donc si $3x^2+y^2$ est congru à R modulo $12a$, alors y^2 est congru à $(2l_2+l_1)^2$ modulo 3, donc y est congru à $2l_2+l_1$ modulo 3, ou à $-(2l_2+l_1)$ modulo 3. Comme $-(2l_2+l_1)$ est congru à $2l_2+l_1$ modulo 3 si et seulement si l_1 est congru à l_2 modulo 3, deux cas sont à distinguer :

premier cas : l_1 est congru à l_2 modulo 3, alors :

$$Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv l_1 + 2l_2 \ mod \ 3 \end{cases} \Big\}$$
$$= Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a\Big\}$$

deuxième cas : l_1 n'est pas congru à l_2 modulo 3, alors :

$$Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv l_1 + 2l_2 \ mod \ 3 \end{cases} \Big\}$$
$$+Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv -(l_1 + 2l_2) \ mod \ 3 \end{cases} \Big\}$$
$$= Card\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a\Big\},$$

or l'application $(x,y) \longmapsto (x,-y)$ établit une bijection entre les ensembles

$$\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv -(l_1 + 2l_2) \ mod \ 3 \end{cases} \Big\} \text{ et}$$
$$\Big\{ (x,y) \in \mathbb{Z}/4a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12a\mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 3x^2+y^2 \equiv R \ mod \ 12a \\ y \equiv l_1 + 2l_2 \ mod \ 3 \end{cases} \Big\},$$

donc, on a finalement, si l_1 n'est pas congru à l_2 modulo 3 :

$$Card\Big\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ \begin{cases}3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\\ y\equiv l_1+2l_2\ mod\ 3\end{cases}\Big\}$$
$$=\tfrac{1}{2}Card\Big\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\Big\}.$$

On s'intéresse donc maintenant au cardinal de l'ensemble :

$$\Big\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\Big\}.$$

On pose :
$T_R(a):=Card\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}/\ 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\ \}$,

et on a, en tenant un raisonnement analogue à celui rencontré plus haut :

$T_R(a)=3\times Card\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/4a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12a\mathbb{Z}\ /\ 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ 12a\ \}$.

On peut alors écrire :

$$N_a(Q)=\begin{cases}\frac{1}{24}T_R(a), & \text{si } l_1\equiv l_2\ mod\ 3\\ \\ \frac{1}{48}T_R(a), & \text{sinon}\end{cases}$$

et on a donc :

$$\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{N_a(Q)}{a^3}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{24}\frac{T_R(a)}{a^3}, & \text{si } l_1\equiv l_2\ mod\ 3\\ \displaystyle\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{48}\frac{T_R(a)}{a^3}, & \text{sinon}\end{cases}.$$

On a maintenant :

$$e_{4,1}(n,l)=\tfrac{\pi}{4\sqrt{3}}\ (2n-<l,l>)^2\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{T_R(a)}{a^3}\times\begin{cases}1, & \text{si } l_1\equiv l_2\ mod\ 3\\ \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon}\end{cases}.$$

On pose, pour tout entier naturel m non nul :

$$N_R(m):=Card\{\ (x,y)\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\ /\ 3x^2+y^2\equiv R\ mod\ m\}.$$

On a : $N_R(1)=1$ et $T_R(a)=N_R(12a)$.

En écrivant $12a$ sous la forme suivante :

$$12a:=2^{k_1}3^{k_2}\times\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{k_p},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers distincts de 2 et 3, et où les k_j sont des entiers naturels, avec k_1 et k_2 respectivement supérieurs ou égaux à 2 et 1, on obtient, en utilisant le théorème chinois :
$T_R(a)=N_R(12a)=N_R(2^{k_1})N_R(3^{k_2})\prod_{p\in\mathcal{P}}N_R(p^{k_p})$.

On peut ainsi donner de la somme $\displaystyle\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{T_R(a)}{a^3}$ l'expression suivante :

$$\sum_{a=1}^{+\infty} \frac{T_R(a)}{a^3} = \sum_{k_1\geq 0, k_2\geq 0, k_p\geq 0} \frac{N_R(2^{k_1+2}) N_R(3^{k_2+1}) \prod_{p\in\mathcal{P}} N_R(p^{k_p})}{2^{3k_1} 3^{3k_2} \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{3k_p}}$$
$$= 2^6 3^3 \sum_{k_1\geq 0, k_2\geq 0, k_p\geq 0} \frac{N_R(2^{k_1+2}) N_R(3^{k_2+1}) \prod_{p\in\mathcal{P}} N_R(p^{k_p})}{2^{3(k_1+2)} 3^{3(k_2+1)} \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{3k_p}}$$
$$= 2^6 3^3 \Big(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}}\Big) \times \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}\Big) \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}\Big).$$

On va maintenant étudier les sommes du type $\displaystyle\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}$.

Par définition, on a :
$N_R(2) = Card\{\ (x,y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ /\ 3x^2 + y^2 \equiv R\ mod\ 2\}$
$\quad = Card\{\ (x,y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ /\ x^2 + y^2 \equiv R\ mod\ 2\}\ =\ 2.$

De même, on a l'égalité suivante :
$N_R(3) = Card\{\ (x,y) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ /\ 3x^2 + y^2 \equiv R\ mod\ 3\}$
$\quad = Card\{\ (x,y) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ /\ y^2 \equiv R\ mod\ 3\},$
d'après la forme des carrés de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on peut donc écrire :

$$N_R(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } R \equiv 0\ mod\ 3 \\ 6 & \text{si } R \equiv 1\ mod\ 3 \\ 0 & \text{si } R \equiv -1\ mod\ 3 \end{cases}$$

Pour évaluer les autres termes $N_R(q)$, on utilisera les propriétés classiques des sommes de Gauss. (Voir [BC], [S].)
En effet, d'une façon générale, en évaluant la somme S définie ci-dessous, on peut donner de $N_R(q)$ une description à l'aide de ces sommes.

$$S := \sum_{x,y\ mod\ q} \sum_{b\ mod\ q} e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{b}{q}}$$

$$S = \sum_{x,y\ mod\ q} \sum_{b\ mod\ q} e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{b}{q}}$$
$$= \sum_{\substack{x,y\ mod\ q \\ 3x^2+y^2-R\equiv 0\ mod\ q}} \sum_{b\ mod\ q} e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{b}{q}} + \sum_{\substack{x,y\ mod\ q \\ 3x^2+y^2-R\neq 0\ mod\ q}} \sum_{b\ mod\ q} e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{b}{q}}$$
$$= \sum_{\substack{x,y\ mod\ q \\ 3x^2+y^2-R\equiv 0\ mod\ q}} q + \sum_{\substack{x,y\ mod\ q \\ 3x^2+y^2-R\neq 0\ mod\ q}} \frac{1-e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)q\frac{1}{q}}}{1-e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{1}{q}}}$$
$$= q \times Card\{(x,y)\ mod\ q\ /\ 3x^2+y^2-R \equiv 0\ mod\ q\} = q \times N_R(q).$$

On a donc :

$$N_R(q) = \frac{1}{q} \times \Big(\sum_{x,y \ mod \ q} \ \sum_{b \ mod \ q} e^{2\pi i(3x^2+y^2-R)\frac{b}{q}} \Big)$$

ou encore :

$$N_R(q) = \frac{1}{q} \times \Big(\sum_{b \ mod \ q} e^{-2\pi i R\frac{b}{q}} \sum_{x \ mod \ q} e^{2\pi i\frac{3b}{q}x^2} \sum_{y \ mod \ q} e^{2\pi i\frac{b}{q}y^2} \Big).$$

Comme dans l'ouvrage de S.A.Stepanov ([S], chapitre 1), on utilise la notation suivante : pour a et q deux entiers premiers entre eux, et q supérieur ou égal à 1 :

$$T(a,q) = \sum_{x \ mod \ q} e^{2\pi i\frac{ax^2}{q}}.$$

On rappelle les formules suivantes :

$$T(a,q) = \begin{cases} \left(\frac{a}{q}\right) i^{(\frac{q-1}{2})^2} \sqrt{q}, & \text{si } q \equiv 1 \ mod \ 2 \\ \left(\frac{a}{q}\right)(1+i^a)\sqrt{q}, & \text{si } q \equiv 0 \ mod \ 4 \\ 0, & \text{si } q \equiv 2 \ mod \ 4 \end{cases}$$

Soit p un nombre premier distinct de 3.

D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{aligned} pN_R(p) &= \Big(\sum_{b \ mod \ p} e^{-2\pi i R\frac{b}{p}} \sum_{x \ mod \ p} e^{2\pi i\frac{3b}{p}x^2} \sum_{y \ mod \ p} e^{2\pi i\frac{b}{p}y^2} \Big). \\ &= \sum_{x,y \ mod \ p} 1 + \sum_{\substack{b \ mod \ p \\ b \neq 0 \ mod \ p}} \Big[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p}} \times \Big(\sum_{x \ mod \ p} e^{2\pi i\frac{3x^2 b}{p}} \Big) \times \Big(\sum_{y \ mod \ p} e^{2\pi i\frac{y^2 b}{p}} \Big) \Big] \\ &= p^2 + \sum_{\substack{b \ mod \ p \\ b \neq 0 \ mod \ p}} \Big[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p}} \times T(3b,p) \times T(b,p) \Big]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour p premier distinct de 3, on a :

$$N_R(p) = p + \frac{1}{p} \sum_{\substack{b \ mod \ p \\ b \neq 0 \ mod \ p}} \Big[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p}} \times T(3b,p) \times T(b,p) \Big].$$

D'après les formules rappelées ci-dessus, on a donc, pour p distinct de 2 et 3 :

$$N_R(p) = p + \left(\frac{3}{p}\right) \sum_{\substack{b \ mod \ p \\ b \neq 0 \ mod \ p}} e^{-2\pi i\frac{Rb}{p}} (-1)^{(\frac{p-1}{2})^2},$$ ce qui s'écrit encore :

$$N_R(p) = p + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{p}\right) \times \begin{cases} p-1 & \text{si } R \equiv 0 \ mod \ p \\ -1 & \text{si } R \neq 0 \ mod \ p \end{cases}$$

ou encore, puisque d'après la loi de réciprocité quadratique

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right),$$

$$N_R(p)=p\ -\left(\tfrac{p}{3}\right)+\begin{cases} p\left(\tfrac{p}{3}\right) & \text{si } R\equiv 0 \ mod\ p\\ 0 & \text{si } R\not\equiv 0\ mod\ p\end{cases}$$

Soient k un entier supérieur ou égal à 2, et p un nombre premier distinct de 3.

On peut écrire :

$$N_R(p^k)=\tfrac{1}{p^k}\sum_{b\ mod\ p^k}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times\left(\sum_{x\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{3x^2b}{p^k}}\right)\times\left(\sum_{y\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{y^2b}{p^k}}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{p^k}\sum_{\substack{b\ mod\ p^k\\(b,p)=1}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times T(3b,p^k)T(b,p^k)\right]$$

$$+\ \tfrac{1}{p^k}\sum_{\substack{b\ mod\ p^k\\ p\mid b}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times\left(\sum_{x\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{3x^2b}{p^k}}\right)\times\left(\sum_{y\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{y^2b}{p^k}}\right)\right]\ (\star).$$

En écrivant, dans le deuxième terme de la somme $(\star)$, la variable b sous la forme $b=pb'$, x sous la forme $x=x_1p^{k-1}+x_2$, avec x_1 considéré modulo p et x_2 considéré modulo p^{k-1}, et y sous la forme $y=y_1p^{k-1}+y_2$, avec y_1 considéré modulo p et y_2 considéré modulo p^{k-1}, on obtient :

$$\sum_{\substack{b\ mod\ p^k\\ p\mid b}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times\left(\sum_{x\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{3x^2b}{p^k}}\right)\times\left(\sum_{y\ mod\ p^k}e^{2\pi i\frac{y^2b}{p^k}}\right)\right]$$

$$=\sum_{b'\ mod\ p^{k-1}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb'}{p^{k-1}}}\times\left(p\sum_{x_2\ mod\ p^{k-1}}e^{2\pi i\frac{3x_2^2b'}{p^{k-1}}}\right)\times\left(p\sum_{y_2\ mod\ p^{k-1}}e^{2\pi i\frac{y_2^2b'}{p^{k-1}}}\right)\right]$$

$$=p^2N_R(p^{k-1})\times p^{k-1}$$

D'après les formules ci-dessus, dans le cas où p est distinct de 2, le premier terme de la somme $(\star)$ s'écrit :

$$\tfrac{1}{p^k}\sum_{\substack{b\ mod\ p^k\\(b,p)=1}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times T(3b,p^k)T(b,p^k)\right]$$

$$=\tfrac{1}{p^k}\sum_{\substack{b\ mod\ p^k\\(b,p)=1}}\left[e^{-2\pi i\frac{Rb}{p^k}}\times\left(\frac{3b}{p^k}\right)\left(\frac{b}{p^k}\right)p^k i^{(\frac{p^k-1}{2})^2}i^{(\frac{p^k-1}{2})^2}\right]$$

ou encore, en exploitant les relations suivantes :

(1) $\left(\frac{3b}{p^k}\right)\left(\frac{b}{p^k}\right) = \left(\frac{3b}{p}\right)^k\left(\frac{b}{p}\right)^k = \left(\frac{3}{p}\right)^k\left(\frac{b}{p}\right)^{2k} = \left(\frac{3}{p}\right)^k$

(2) $i^{(\frac{p^k-1}{2})^2} i^{(\frac{p^k-1}{2})^2} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \ mod\ 4 \text{ ou si } p \equiv -1 \ mod\ 4 \text{ et } k \equiv 0 \ mod\ 2 \\ -1, & \text{si } p \equiv -1 \ mod\ 4 \text{ et } k \equiv 1 \ mod\ 2 \end{cases}$

$= (-1)^{k\frac{p-1}{2}}$

(3) $$\sum_{\substack{b \ mod\ p^k \\ (b,p)=1}} e^{-2\pi i \frac{Rb}{p^k}} = \sum_{b''=1}^{p-1} \sum_{b' \ mod\ p^{k-1}} e^{-2\pi i \frac{R(pb'+b'')}{p^k}}$$

$$= \sum_{b''=1}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{Rb''}{p^k}} \sum_{b' \ mod\ p^{k-1}} e^{-2\pi i \frac{Rb'}{p^{k-1}}}$$

$$= \sum_{b''=1}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{Rb''}{p^k}} \times \begin{cases} p^{k-1}, & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p^{k-1}(p-1), & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^k \\ -p^{k-1}, & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \text{ et } R \not\equiv 0 \ mod\ p^k \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{1}{p^k} \sum_{\substack{b \ mod\ p^k \\ (b,p)=1}} \left[e^{-2\pi i \frac{Rb}{p^k}} \times T(3b,p^k)T(b,p^k)\right]$$

$$= (-1)^{k\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{p}\right)^k \times \begin{cases} p^{k-1}(p-1), & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^k \\ -p^{k-1}, & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \text{ et } R \not\equiv 0 \ mod\ p^k \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \end{cases}$$

Finalement, on a, dans le cas où p est distinct de 2 et 3 :

$$N_R(p^k) = pN_R(p^{k-1}) + (-1)^{k\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{p}\right)^k \times \begin{cases} p^{k-1}(p-1), & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^k \\ -p^{k-1}, & \text{si } R \equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \text{ et } R \not\equiv 0 \ mod\ p^k \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod\ p^{k-1} \end{cases}$$

Dans le cas où p est égal à 2, le premier terme de la somme ($\star$) s'écrit :

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\substack{b \ mod\ 2^k \\ (b,2)=1}} \left[e^{-2\pi i \frac{Rb}{2^k}} \times T(3b,2^k)T(b,2^k)\right]$$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{\substack{b \ mod\ 2^k \\ (b,2)=1}} \left[e^{-2\pi i \frac{Rb}{2^k}} \times \left(\frac{3b}{2^k}\right)\left(\frac{b}{2^k}\right)(1+i^{3b})(1+i^b)2^k\right]$$

$$= \sum_{\substack{b \ mod\ 2^k \\ (b,2)=1}} \mid 1+i^b \mid^2 e^{-2\pi i \frac{Rb}{2^k}}$$

$$= \sum_{b' \ mod \ 2^{k-1}} | \, 1 + i(-1)^{b'} \, |^2 \, e^{-2\pi i \frac{Rb'}{2^{k-1}}} e^{-2\pi i \frac{R}{2^k}}$$
$$= 2e^{-2\pi i \frac{R}{2^k}} \times \Big(\sum_{b' \ mod \ 2^{k-1}} e^{-2\pi i \frac{Rb'}{2^{k-1}}} \Big)$$
$$= 2e^{-2\pi i \frac{R}{2^k}} \times \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{si } R \equiv 0 \ mod \ 2^{k-1} \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod \ 2^{k-1} \end{cases}$$

Finalement, on a, dans le cas où p est égal à 2 :

$$N_R(2^k) = 2N_R(2^{k-1}) + 2e^{-2\pi i \frac{R}{2^k}} \times \begin{cases} 2^{k-1}(p-1), & \text{si } R \equiv 0 \ mod \ 2^{k-1} \\ 0, & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod \ 2^{k-1} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2N_R(2^{k-1}), & \text{si } R \not\equiv 0 \ mod \ 2^{k-1} \\ 2N_R(2^{k-1}) - 2^k, & \text{si } R \equiv 0 \ mod \ 2^{k-1}, \ R \not\equiv 0 \ mod \ 2^k \\ 2N_R(2^{k-1}) + 2^k, & \text{si } R \equiv 0 \ mod \ 2^k \end{cases}$$

On s'intéresse maintenant au cas où $p = 3$.

$$N_R(3^k) = \tfrac{1}{3^k} \sum_{b \ mod \ 3^k} \Big[e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} \times \Big(\sum_{x \ mod \ 3^k} e^{2\pi i \frac{3x^2 b}{3^k}} \Big) \times \Big(\sum_{y \ mod \ 3^k} e^{2\pi i \frac{y^2 b}{3^k}} \Big) \Big]$$
$$= \tfrac{1}{3^k} \sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ (b,3) = 1}} \Big[e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} \times \Big(\sum_{x \ mod \ 3^k} e^{2\pi i \frac{3x^2 b}{3^k}} \Big) \times T(b,3^k) \Big]$$
$$+ \tfrac{1}{3^k} \sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ 3 \mid b}} \Big[e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} \times \Big(\sum_{x \ mod \ 3^k} e^{2\pi i \frac{3x^2 b}{3^k}} \Big) \times \Big(\sum_{y \ mod \ 3^k} e^{2\pi i \frac{y^2 b}{3^k}} \Big) \Big] \ (\star).$$

En utilisant des raisonnements analogues à ceux tenus ci-dessus, on obtient :

$$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) + \tfrac{1}{3^k} \Big[\sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ (b,3) = 1}} e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} \times 3T(b,3^{k-1}) \times T(b,3^k) \Big].$$

D'après l'écriture des termes $T(b,3^k)$ et $T(b,3^{k-1})$ pour b premier à 3, on a :

$T(b,3^{k-1}) \times T(b,3^k) = i\Big(\frac{b}{3}\Big)3^{k-\frac{1}{2}}$. On peut donc écrire :

$$\Big[\sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ (b,3) = 1}} e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} \times 3T(b,3^{k-1}) \times T(b,3^k) \Big]$$
$$= \sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ b \equiv 1 \ mod \ 3}} e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} i\Big(\frac{b}{3}\Big)3^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{\substack{b \ mod \ 3^k \\ b \equiv 2 \ mod \ 3}} e^{-2\pi i \frac{Rb}{3^k}} i\Big(\frac{b}{3}\Big)3^{k-\frac{1}{2}}$$

$$= i\left(\tfrac{1}{3}\right)3^{k-\frac{1}{2}} \sum_{b' \ mod\ 3^{k-1}} e^{-2\pi i \frac{R}{3^k}} e^{-2\pi i \frac{Rb'}{3^{k-1}}} + i\left(\frac{2}{3}\right)3^{k-\frac{1}{2}} \sum_{b' \ mod\ 3^{k-1}} e^{-2\pi i \frac{2R}{3^k}} e^{-2\pi i \frac{Rb'}{3^{k-1}}}$$

$$= i\, 3^{k-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \frac{R}{3^k}} \times \begin{cases} 0, \text{ si } R \neq 0 \ mod\ 3^{k-1} \\ 3^{k-1}, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1} \end{cases} -i\, 3^{k-\frac{1}{2}} e^{-4\pi i \frac{R}{3^k}} \times \begin{cases} 0, \text{ si } R \neq 0 \ mod\ 3^{k-1} \\ 3^{k-1}, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ si } R \neq 0 \ mod\ 3^{k-1} \\ 3^{2k-1-\frac{1}{2}} i (e^{-2\pi i \frac{R}{3^k}} - e^{-4\pi i \frac{R}{3^k}}), \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ si } R \neq 0 \ mod\ 3^{k-1} \\ 0, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^k \\ 3^{2k-1}, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1},\ \frac{R}{3^{k-1}} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ -3^{2k-1}, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1},\ \frac{R}{3^{k-1}} \equiv 2 \ mod\ 3 \end{cases}$$

Finalement, on a donc :

$$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) + \begin{cases} 0, \text{ si } R \neq 0 \ mod\ 3^{k-1} \\ 0, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^k \\ 3^k, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1},\ \frac{R}{3^{k-1}} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ -3^k, \text{ si } R \equiv 0 \ mod\ 3^{k-1},\ \frac{R}{3^{k-1}} \equiv 2 \ mod\ 3 \end{cases}$$

Considérons la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}}$.

On rappelle que dans l'écriture de R, α_2 est supérieur ou égal à 2.
D'après les résultats précédents, on a :
$N_R(2) = 2$

$$N_R(2^k) = 2N_R(2^{k-1}) + \begin{cases} 0, & \text{si } k > \alpha_2 + 1 \\ -2^{\alpha_2+1}, & \text{si } k = \alpha_2 + 1 \\ 2^k, & \text{si } 1 \leq\ k \leq \alpha_2 \end{cases}$$

On peut donc, de proche en proche, exprimer $N_R(2^k)$ de la façon suivante :

(1) si $k > \alpha_2 + 1$:

$$\begin{aligned} N_R(2^k) &= 2N_R(2^{k-1}) \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} N_R(2^{\alpha_2+1}) \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} \left[2N_R(2^{\alpha_2}) - 2^{\alpha_2+1}\right] \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} \left[2 \times \left(2N_R(2^{\alpha_2-1}) + 2^{\alpha_2}\right) - 2^{\alpha_2+1}\right] \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} \left[2^2 N_R(2^{\alpha_2-1}) + 2^{\alpha_2+1} - 2^{\alpha_2+1}\right] \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} \left[2^s N_R(2^{\alpha_2+1-s}) + (s-1)2^{\alpha_2+1} - 2^{\alpha_2+1}\right], \text{ pour } 2 \leq s \leq \alpha_2 \\ &= 2^{k-(\alpha_2+1)} \left[2^{\alpha_2} N_R(2) + (\alpha_2 - 2)2^{\alpha_2+1}\right] \\ &= 2^k + (\alpha_2 - 2)2^k \\ &= 2^k(\alpha_2 - 1). \end{aligned}$$

(2) si $k = \alpha_2 + 1$:

$N_R(2^k) = N_R(2^{\alpha_2+1}) = \left[2N_R(2^{\alpha_2}) - 2^{\alpha_2+1}\right]$,
et on retrouve le calcul précédent, avec $k = \alpha_2 + 1$, on obtient donc :
$N_R(2^{\alpha_2+1}) = 2^{\alpha_2+1}(\alpha_2 - 1)$, la formule précédente reste vraie pour $k = \alpha_2 + 1$.

(3) si $2 \leq k \leq \alpha_2$:

$$\begin{aligned} N_R(2^k) &= 2N_R(2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^{s+1}N_R(2^{k-(s+1)}) + s2^k + 2^k, \text{ pour } 0 \leq s \leq k-2 \\ &= 2^{k-1}N_R(2) + (k-1)2^k = k2^k. \end{aligned}$$

On peut remarquer que la formule reste vraie pour $k = 1$.

On peut alors calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}} &= \sum_{k=2}^{\alpha_2} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}} + \sum_{k=\alpha_2+1}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}} \\ &= \sum_{k=2}^{\alpha_2} \frac{k2^k}{2^{3k}} + (\alpha_2 - 1) \sum_{k=\alpha_2+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \sum_{k=2}^{\alpha_2} \frac{k}{4^k} + (\alpha_2 - 1)\frac{1}{3 \times 4^{\alpha_2}} \\ &= \tfrac{7}{36} - \tfrac{7}{9\times 4^{\alpha_2}}, \text{ d'après un calcul classique.} \end{aligned}$$

On notera cette expression $\displaystyle A_2(R) := \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}} = \frac{7}{36} - \frac{7}{9 \times 4^{\alpha_2}}$.

De la même manière, on s'intéresse maintenant à la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}$.

On rappelle que R est congru à 0 ou 1 modulo 3.
D'après les résultats précédents, on a :

$$N_R(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } R \equiv 0 \; mod \; 3 \\ 6 & \text{si } R \equiv 1 \; mod \; 3 \end{cases}$$

$$N_R(3^k) = \begin{cases} 3N_R(3^{k-1}), & \text{si } 0 \leq k \leq \alpha_3 \text{ ou } k > \alpha_3 + 1 \\ 3N_R(3^{\alpha_3}) + 3^{\alpha_3+1}, & \text{si } k = \alpha_3 + 1 \text{ et } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv 1 \; mod \; 3 \\ 3N_R(3^{\alpha_3}) - 3^{\alpha_3+1}, & \text{si } k = \alpha_3 + 1 \text{ et } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv -1 \; mod \; 3 \end{cases}$$

On peut donc, de proche en proche, exprimer $N_R(3^k)$, puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}$.

(i) Premier cas : $\alpha_3 = 0$, autrement dit $3 \nmid R$, ou encore $R \equiv 1 \; mod \; 3$.
Pour $k \geq 2$, on a :
$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) = \ldots = 3^{k-1}N_R(3) = 2 \times 3^k$, d'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}} = \frac{N_R(3)}{3^3} + 2\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{4}.$$

(ii) Deuxième cas : $\alpha_3 = 1$, autrement dit $3 \mid R$, et $9 \nmid R$, ou encore $R \equiv 0 \; mod \; 3$, et

$\frac{R}{3} \equiv \pm 1 \ mod\ 3$.

Pour $k = 2$ on a :

$$N_R(3^2) = 3N_R(3) + \begin{cases} 9 & \text{si } \frac{R}{3} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ -9 & \text{si } \frac{R}{3} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 18 & \text{si } \frac{R}{3} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ 0 & \text{si } \frac{R}{3} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$

Pour $k > 2$ on a :

$$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) = \ldots = 3^{k-(\alpha_3+1)} N_R(3^{\alpha_3+1}) = 3^{k-2} N_R(9)$$
$$= 3^{k-2} \times \begin{cases} 18, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ 0, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$

On remarque que cette formule est valable aussi pour $k = 2$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}} = \frac{3}{3^3} + \begin{cases} 18 \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k-2}}{3^{3k}}, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ 0, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{5}{36}, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ \frac{1}{9}, & \text{si } \frac{R}{3} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$

(iii) Troisième cas : $\alpha_3 \geq 2$, autrement dit $9 \mid R$.

Pour $2 \leq k \leq \alpha_3$ on a :
$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) = \ldots = 3^{k-1} N_R(3) = 3^k$,
d'où :

$$\sum_{k=2}^{\alpha_3} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}} = \sum_{k=2}^{\alpha_3} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{9 \times 8}\left(1 - \frac{1}{9^{\alpha_3 - 1}}\right).$$

Pour $k = \alpha_3 + 1$ on a :

$$N_R(3^{\alpha_3+1}) = 3N_R(3^{\alpha_3}) + \begin{cases} 3^{\alpha_3+1}, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ -3^{\alpha_3+1}, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2 \times 3^{\alpha_3+1}, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ 0, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$

Pour $k > \alpha_3 + 1$, on a :

$$N_R(3^k) = 3N_R(3^{k-1}) = \ldots = 3^{k-(\alpha_3+1)} N_R(3^{\alpha_3+1})$$
$$= \begin{cases} 2 \times 3^k, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv 1 \ mod\ 3 \\ 0, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}} \equiv -1 \ mod\ 3 \end{cases}$$

On remarque que cette formule est valable aussi pour $k = \alpha_3 + 1$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{N_R(3^k)}{3^{3k}} = \frac{3}{3^3}+\sum_{k=2}^{\alpha_3}\frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}+\sum_{k=\alpha_3+1}^{+\infty}\frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}$$

$$= \tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9\times 8}(1-\tfrac{1}{9^{\alpha_3-1}})+\begin{cases} 2\displaystyle\sum_{k=\alpha_3+1}^{+\infty}\frac{1}{3^{2k}}, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv 1 \ mod\ 3\\ 0, & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv -1 \ mod\ 3\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8}(1+\frac{1}{9^{\alpha_3}}), & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv 1 \ mod\ 3\\ \frac{1}{8}(1-\frac{1}{9^{\alpha_3}}), & \text{si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv -1 \ mod\ 3\end{cases}$$

On notera $A_3(R)$ l'expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{N_R(3^k)}{3^{3k}}$.

En résumé on a :

$$A_3(R)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } \alpha_3=0\\ \frac{5}{36}, & \text{si } \alpha_3=1 \quad \text{et si } \frac{R}{3}\equiv 1\ mod\ 3\\ \frac{1}{9}, & \text{si } \alpha_3=1 \quad \text{et si } \frac{R}{3}\equiv -1\ mod\ 3\\ \frac{1}{8}(1+\frac{1}{9^{\alpha_3}}), & \text{si } \alpha_3\geq 2 \quad \text{et si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv 1\ mod\ 3\\ \frac{1}{8}(1-\frac{1}{9^{\alpha_3}}), & \text{si } \alpha_3\geq 2 \quad \text{et si } \frac{R}{3^{\alpha_3}}\equiv -1\ mod\ 3\end{cases}$$

On s'intéresse maintenant à la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}$, où p est un nombre premier distinct de 2 et 3.

D'après les résultats précédents, on a :

$$N_R(p)=p\ -\left(\frac{p}{3}\right)+\begin{cases} p\left(\frac{p}{3}\right), & \text{si } R\equiv 0\ mod\ p\\ 0, & \text{si } R\neq 0\ mod\ p\end{cases}$$

$$N_R(p^k)=\begin{cases} pN_R(p^{k-1}), & \text{si } k\geq \alpha_p+2\\ pN_R(p^{\alpha_p})-\left(\frac{p}{3}\right)^k p^{\alpha_p}, & \text{si } k=\alpha_p+1\\ pN_R(p^{k-1})+\left(\frac{p}{3}\right)^k p^{k-1}(p-1), & \text{si } 0\leq k\leq \alpha_p\end{cases}$$

On peut donc, de proche en proche, exprimer $N_R(p^k)$, puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}$.

(1)Etudions le cas où α_p est non nul.

(i)Pour $k\geq \alpha_p+2$, on a :

$N_R(p^k)=pN_R(p^{k-1})=\ldots=p^{k-(\alpha_p+1)}N_R(p^{\alpha_p+1})$.

$N_R(p^{\alpha_p+1}) = pN_R(p^{\alpha_p}) - \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p+1} p^{\alpha_p}.$

Si $\alpha_p \geq 2$:
$pN_R(p^{\alpha_p}) = p^2 N_R(p^{\alpha_p-1}) + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p} p^{\alpha_p}(p-1)$
$= p^3 N_R(p^{\alpha_p-2}) + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p-1} p^{\alpha_p}(p-1) + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p} p^{\alpha_p}(p-1)$
$= p^s N_R(p^{\alpha_p-s+1}) + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p-s+2} p^{\alpha_p}(p-1) + \ \ldots\ + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p} p^{\alpha_p}(p-1),$
pour s compris entre 2 et α_p.

Finalement :

$$pN_R(p^{\alpha_p}) = \begin{cases} p^{\alpha_p} N_R(p) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 p^{\alpha_p}(p-1) + \ \ldots\ + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p} p^{\alpha_p}(p-1), \text{ si } \alpha_p \geq 2 \\ pN_R(p), \text{ si } \alpha_p = 1 \end{cases}.$$

Dans le cas où α_p est non nul, R est congru à 0 modulo p, donc :

$$N_R(p) = p + (p-1)\left(\frac{p}{3}\right).$$

Si $\alpha_p \geq 2$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} pN_R(p^{\alpha_p}) &= p^{\alpha_p+1} + \left(\frac{p}{3}\right) p^{\alpha_p}(p-1) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 p^{\alpha_p}(p-1) + \ \ldots\ + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p} p^{\alpha_p}(p-1) \\ &= p^{\alpha_p+1}\left(1 + \left(\frac{p}{3}\right) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \ \ldots\ + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p}\right) - p^{\alpha_p}\left(\left(\frac{p}{3}\right) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \ \ldots\ + \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p}\right) \\ &= p^{\alpha_p+1} \times \begin{cases} \alpha_p + 1, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ \frac{1-(-1)^{\alpha_p+1}}{2}, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases} - p^{\alpha_p} \times \begin{cases} \alpha_p, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ -\frac{1-(-1)^{\alpha_p+1}}{2}, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases} \\ &= p^{\alpha_p} \times \begin{cases} p\ \alpha_p + p - \alpha_p, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ \frac{1-(-1)^{\alpha_p+1}}{2}(p+1), & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Et dans le cas où $\alpha_p = 1$, on a : $pN_R(p^{\alpha_p}) = pN_R(p) = p^2 + \left(\frac{p}{3}\right)p(p-1)$.

Ainsi, pour $k \geq \alpha_p + 1$:
$N_R(p^k) = p^{k-(\alpha_p+1)}\left(pN_R(p^{\alpha_p}) - \left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p+1} p^{\alpha_p}\right),$

$$\text{avec : } pN_R(p^{\alpha_p}) = \begin{cases} p^{\alpha_p} \times \begin{cases} p\ \alpha_p + p - \alpha_p, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ \frac{1-(-1)^{\alpha_p+1}}{2}(p+1), & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases}, \text{ si } \alpha_p \geq 2 \\ \\ p^2 + \left(\frac{p}{3}\right)p(p-1), \text{ si } \alpha_p = 1 \end{cases}.$$

Exprimons alors la somme $M_p := \displaystyle\sum_{k=\alpha_p+1}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}$, dans le cas où α_p est non nul.

$$\begin{aligned} M_p &= N_R(p^{\alpha_p})p^{-\alpha_p} \sum_{k=\alpha_p+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} - \frac{1}{p}\left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p+1} \sum_{k=\alpha_p+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \\ &= \left(\frac{N_R(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} - \frac{1}{p}\left(\frac{p}{3}\right)^{\alpha_p+1}\right) \times \frac{1}{p^{2\alpha_p}} \frac{1}{p^2-1}. \end{aligned}$$

(ii) Si $\alpha_p \geq 2$, pour $2 \leq k \leq \alpha_p$, on a :

$$\begin{aligned}
N_R(p^k) &= pN_R(p^{k-1}) + \left(\tfrac{p}{3}\right)^k p^{k-1}(p-1) \\
&= p^2 N_R(p^{k-2}) + \left(\tfrac{p}{3}\right)^{k-1} p^{k-1}(p-1) + \left(\tfrac{p}{3}\right)^k p^{k-1}(p-1) \\
&= \ldots \\
&= p^{k-1}N_R(p) + \left(\tfrac{p}{3}\right)^2 p^{k-1}(p-1) + \ldots + \left(\tfrac{p}{3}\right)^k p^{k-1}(p-1).
\end{aligned}$$

Ce qui donne, dans la cas où $\alpha_p \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{\alpha_p} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} = \sum_{k=2}^{\alpha_p} \frac{1}{p^{2k+1}} N_R(p) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{1}{p^{2k+1}}(p-1) + \ldots + \left(\frac{p}{3}\right)^k \frac{1}{p^{2k+1}}(p-1)$$
$$= \sum_{k=2}^{\alpha_p} \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{p^{2k}}\left(\frac{p}{3}\right) - \frac{1}{p^{2k+1}}\left(\frac{p}{3}\right) + \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{1}{p^{2k+1}}(p-1) + \ldots + \left(\frac{p}{3}\right)^k \frac{1}{p^{2k+1}}(p-1),$$

car $N_R(p) = p \ - \left(\frac{p}{3}\right) + p\left(\frac{p}{3}\right)$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\alpha_p} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} &= \frac{1}{p^4}\frac{1-(\frac{1}{p^2})^{\alpha_p-1}}{1-\frac{1}{p^2}} + \sum_{k=2}^{\alpha_p}\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{p-1}{p^{2k+1}}\left(\frac{p}{3}\right)^j\right] \\
&= \tfrac{1}{p^4}\tfrac{1-(\frac{1}{p^2})^{\alpha_p-1}}{1-\frac{1}{p^2}} + \sum_{k=2}^{\alpha_p}\frac{p-1}{p^{2k+1}} \times \begin{cases} k & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=1 \\ -\frac{1-(-1)^k}{2} & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=-1 \end{cases} \\
&= \tfrac{1}{p^4}\tfrac{1-(\frac{1}{p^2})^{\alpha_p-1}}{1-\frac{1}{p^2}} + \tfrac{p-1}{p} \times \begin{cases} u_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=1 \\ -v_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

avec :

$$u_p = \sum_{k=2}^{\alpha_p}\frac{k}{p^{2k}} = \frac{1}{(p^2-1)^2}\frac{1}{p^{2(\alpha_p-1)}}(2p^{2\alpha_p} - p^{2\alpha_p-2} - (\alpha_p+1)p^2 + \alpha_p),$$

et :

$$v_p = \sum_{k=2}^{\alpha_p}\frac{1}{p^{2k}}\frac{1-(-1)^k}{2} = \frac{1}{p^{2\alpha_p}(p^4-1)}\left[p^{2(\alpha_p-1)} - \begin{cases} p^2, & \text{si } \alpha_p \equiv 0 \ mod\ 2 \\ 1, & \text{si } \alpha_p \equiv 1 \ mod\ 2 \end{cases}\right].$$

Dans le cas où $\alpha_p \geq 2$, on a finalement, avec les notations introduites ci-dessus :

$$\begin{aligned}
S_p := \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} &= 1 + \frac{N_R(p)}{p^3} + \sum_{k=2}^{\alpha_p}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} + \sum_{k=\alpha_p+1}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} \\
&= 1 + \tfrac{1}{p^2} + \left(\tfrac{p}{3}\right)\tfrac{p-1}{p^3} + \tfrac{p^{2(\alpha_p-1)}-1}{p^{2\alpha_p}(p^2-1)} + M_p + \tfrac{p-1}{p} \times \begin{cases} u_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=1 \\ -v_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right)=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha_p = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
T_p := \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} &= 1 + \frac{N_R(p)}{p^3} + \sum_{k=\alpha_p+1}^{+\infty}\frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} \\
&= 1 + \tfrac{1}{p^2} + \left(\tfrac{p}{3}\right)\tfrac{p-1}{p^3} + M_p.
\end{aligned}$$

(2) Etudions le cas où $\alpha_p = 0$.

$$U_p := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} = 1 + \frac{N_R(p)}{p^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}.$$

Or, on a, dans le cas où $\alpha_p = 0$, pour $k \geq 2$:

$N_r(p^k) = pN_r(p^{k-1}) = \ \dots \ = p^{k-1}N_R(p)$, avec ici $R \neq 0 \ mod \ p$, donc $N_R(p) = p - \left(\frac{p}{3}\right)$.

On obtient :

$$\begin{aligned} U_p &= 1 + \tfrac{N_R(p)}{p^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(p)}{p^{2k+1}} \ = \ 1 + N_R(p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k+1}} \\ &= 1 + \left(p - \left(\tfrac{p}{3}\right)\right) \tfrac{1}{p\ (p^2-1)} \ = \ 1 + \frac{1}{p\ \left(p + \left(\frac{p}{3}\right)\right)}. \end{aligned}$$

On note $A_p(R)$ l'expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}}$.

En résumé, pour p premier distinct de 2 et 3, on a, en utilisant les notations introduites ci-dessus :

$$A_p(R) = \begin{cases} S_p, & \text{si } \alpha_p \geq 2 \\ T_p, & \text{si } \alpha_p = 1 \\ U_p, & \text{si } \alpha_p = 0 \end{cases}$$

avec :

$$S_p = 1 + \tfrac{1}{p^2} + \left(\tfrac{p}{3}\right) \tfrac{p-1}{p^3} + \tfrac{p^{2(\alpha_p-1)}-1}{p^{2\alpha_p}(p^2-1)} + M_p + \tfrac{p-1}{p} \times \begin{cases} u_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ -v_p & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$$T_p = 1 + \tfrac{1}{p^2} + \left(\tfrac{p}{3}\right) \tfrac{p-1}{p^3} + M_p$$

$$U_p = 1 + \frac{1}{p\ \left(p + \left(\frac{p}{3}\right)\right)}$$

et $u_p = \frac{1}{(p^2-1)^2} \frac{1}{p^{2(\alpha_p-1)}} (2p^{2\alpha_p} - p^{2\alpha_p-2} - (\alpha_p+1)p^2 + \alpha_p)$,

$$v_p = \tfrac{1}{p^{2\alpha_p}(p^4-1)} \left[p^{2(\alpha_p-1)} - \begin{cases} p^2, & \text{si } \alpha_p \equiv 0 \ mod \ 2 \\ 1, & \text{si } \alpha_p \equiv 1 \ mod \ 2 \end{cases} \right],$$

$$M_p = \left(\tfrac{N_R(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} - \tfrac{1}{p} \left(\tfrac{p}{3}\right)^{\alpha_p+1} \right) \times \tfrac{1}{p^{2\alpha_p}} \tfrac{1}{p^2-1},$$

$$\text{où : } N_R(p^{\alpha_p}) = \begin{cases} p^{\alpha_p-1} \times \begin{cases} p\ \alpha_p + p - \alpha_p, & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \\ \frac{1-(-1)^{\alpha_p+1}}{2}(p+1), & \text{si } \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \end{cases}, \text{ si } \alpha_p \geq 2 \\ \\ p + \left(\frac{p}{3}\right)(p-1), \text{ si } \alpha_p = 1 \end{cases}.$$

On peut maintenant terminer la description des coefficients de Fourier de la série $E_{4,1}^{(A_2)}$.

On rappelle qu'on a :

$$e_{4,1}(n,l) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\,(2n- < l,l >)^2 \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{T_R(a)}{a^3} \times \begin{cases} 1, & \text{si } l_1 \equiv l_2 \ mod\ 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{avec : } \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{T_R(a)}{a^3} = 2^6 3^3 \Big(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{N_R(2^k)}{2^{3k}} \Big) \times \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_R(3^k)}{3^{3k}} \Big) \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N_R(p^k)}{p^{3k}} \Big)$$
$$= 2^6 3^3 A_2(R) A_3(R) \prod_{p\in\mathcal{P}} A_p(R).$$

On rappelle aussi qu'on a noté $R = \pm 2^{\alpha_2} \times 3^{\alpha_3} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$, avec α_j entiers naturels, et $\alpha_2 \geq 2$.

Considérons le produit $\prod_{p\in\mathcal{P}} A_p(R)$.

On a :

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} A_p(R) = \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p\geq 2} A_p(R) \times \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=1} A_p(R) \times \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=0} A_p(R)$$
$$= \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p\geq 2} S_p \times \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=1} T_p \times \prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=0} U_p.$$

On notera respectivement $S(R)$ et $T(R)$ les valeurs des deux premiers produits qui sont des produits finis, et dont on peut donner l'expression exacte à l'aide des résultats précédents.

On s'intéresse maintenant à l'expression du produit infini $\prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=0} U_p$.

$$U_p = 1 + \frac{1}{p\left(p + \left(\frac{p}{3}\right)\right)} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{p}\Big(\frac{p}{3}\Big)\Big)^k.$$

Donc, en écrivant un entier naturel n sous la forme $n = \prod_{p\ premier} p^{v_p(n)}$, avec $v_p(n)$ entiers naturels, et en posant $d_n := \sum_{p\ premier} v_p(n)$,

on obtient le résultat suivant :

$$\prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=0} U_p = \sum_{n\in\mathcal{E}_R} \Big(\frac{n}{3}\Big)(-1)^{d_n} n^{-1},$$

où $\mathcal{E}_R$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls, produits de termes du type $p_j^{r_j}$, avec p_j appartenant à $\mathcal{P}$, ne divisant pas R, et r_j entier naturel distinct de 1, ou encore : $\mathcal{E}_R = \{\ n \in \mathbb{N}^\star\ /\ (n,R) = 1,\ (n,3) = 1,\ v_p(n) \in \mathbb{N} - \{1\},\ \text{pour tout } p \text{ premier } \}$.

Posons :

$$\chi_R(n) := \begin{cases} (-1)^{d_n}, & \text{si } (n,R) = 1,\ (n,3) = 1, \text{ et si, pour } p\ premier\ ,\ p|n \Rightarrow p^2|n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(χ_R n'est pas un caractère mais seulement une fonction multiplicative, c'est à dire vérifiant $\chi_R(n_1 n_2) = \chi_R(n_1)\chi_R(n_2)$, si $(n_1,n_2) = 1$.)

On peut alors écrire :

$$\prod_{p\in\mathcal{P},\ \alpha_p=0} U_p = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \chi_R(n)\Big(\frac{n}{3}\Big)n^{-1} \ = \ L\Big(\ 1,\ \chi_R(.)\Big(\frac{.}{3}\Big)\ \Big),$$

où $L(1,\chi) \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\chi(n)n^{-1}$.

Finalement, on a donc :

$$\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{T_R(a)}{a^3} = 2^6 3^3 A_2(R)\ A_3(R)\ S(R)\ T(R)\times L\Big(\ 1,\ \chi_R(.)\Big(\frac{.}{3}\Big)\ \Big),$$

où $A_2(R)$, $A_3(R)$, $S(R)$ et $T(R)$ sont les constantes que l'on a précisées ci-dessus.

1.2.8 Utilisation de formes pour un sous-groupe de congruence d'indice fini

On emploie dans ce paragraphe les notations introduites dans la remarque 1.1.3 concernant le groupe de Jacobi.
Précisons qu'une fonction est appelée forme de Jacobi méromorphe de poids k, d'indice m, pour un groupe Γ', si elle est méromorphe sur $\mathbb{H}\times U$, et si elle vérifie $(\phi|_{k,m}\gamma) = \phi$, pour tout élément γ de Γ'.

Proposition 1.2.19. *Soit Γ' un sous-groupe du groupe de Jacobi Γ^J, d'indice fini, noté d, dans Γ^J.*
Alors , si ϕ est une forme de Jacobi méromorphe pour le groupe Γ', de poids k et d'indice m, la fonction $\widehat{\phi}$ définie par :

$$\widehat{\phi}(\tau,z) := \prod_{\gamma\in\Gamma^J/\Gamma'} J_{k,m}^{-1}(\gamma;\tau,z)\phi(\gamma.(\tau,z))$$

est une forme de Jacobi méromorphe pour le groupe Γ^J, de poids dk et d'indice dm.

Preuve.
On rappelle que le facteur d'automorphie vérifie les propriétés suivantes :
(i)$J_{dk,dm}(\gamma;\tau,z) = (J_{k,m}(\gamma;\tau,z))^d$

(ii) pour γ, γ' appartenant à Γ^J, $J_{k,m}(\gamma\gamma';\tau,z) = J_{k,m}(\gamma';\tau,z)J_{k,m}(\gamma;\gamma'.(\tau,z))$.

Soit $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_d\}$ un système de représentants de Γ^J modulo Γ', le groupe Γ^J est alors la réunion disjointe des classes $\Gamma'.\gamma_j$, j décrivant $\{1,\ldots,d\}$. On a donc :

$$\widehat{\phi}(\tau,z) = \prod_{j=1}^{d} J_{k,m}^{-1}(\gamma_j;\tau,z)\phi(\gamma_j.(\tau,z)).$$

Soit γ appartenant à Γ^J. Calculons $\widehat{\phi}|_{dk,dm}\gamma$.

$$\begin{aligned}(\widehat{\phi}|_{dk,dm}\gamma)(\tau,z) &= J_{dk,dm}^{-1}(\gamma;\tau,z)\widehat{\phi}(\gamma.(\tau,z))\\ &= \prod_{j=1}^{d} J_{k,m}^{-1}(\gamma;\tau,z)J_{k,m}^{-1}(\gamma_j;\gamma.(\tau,z))\phi(\gamma_j\gamma.(\tau,z))\\ &= \prod_{j=1}^{d} J_{k,m}^{-1}(\gamma_j\gamma;\tau,z)\phi(\gamma_j\gamma.(\tau,z)).\end{aligned}$$

Pour chaque j compris entre 1 et d, il existe un élément γ'_j de Γ' et un élément γ_{i_j} avec i_j appartenant à $\{1,\dots,d\}$, et les i_j deux à deux distincts, tels que $\gamma_j\gamma$ s'écrive : $\gamma_j\gamma = \gamma'_j\gamma_{i_j}$. On a alors :

$$(\widehat{\phi}|_{dk,dm}\gamma)(\tau,z) = \prod_{j=1}^{d} J^{-1}_{k,m}(\gamma'_j\gamma_{i_j};\tau,z)\phi(\gamma'_j\gamma_{i_j}.(\tau,z))$$

$$= \prod_{j=1}^{d} J^{-1}_{k,m}(\gamma'_j\gamma_{i_j};\tau,z)J_{k,m}(\gamma'_j;\gamma_{i_j}.(\tau,z))\phi(\gamma_{i_j}.(\tau,z)),$$

en utilisant le fait que ϕ est une forme de Jacobi pour Γ',
d'où :

$$(\widehat{\phi}|_{dk,dm}\gamma)(\tau,z) = \prod_{j=1}^{d} J^{-1}_{k,m}(\gamma_{i_j};\tau,z)J^{-1}_{k,m}(\gamma'_j;\gamma_{i_j}.(\tau,z))J_{k,m}(\gamma'_j;\gamma_{i_j}.(\tau,z))\phi(\gamma_{i_j}.(\tau,z))$$

$$= \prod_{j=1}^{d} J^{-1}_{k,m}(\gamma_{i_j};\tau,z)\phi(\gamma_{i_j}.(\tau,z)) \ = \ \widehat{\phi}(\tau,z).$$

Ainsi, la fonction $\widehat{\phi}$ est bien une forme de Jacobi pour le groupe Γ^J, de poids dk et d'indice dm.

Remarque 1.2.10. Il se peut que la forme ainsi construite soit nulle .

Remarque 1.2.11. Exemple d'utilisation de cette construction.
On peut appliquer cette construction aux formes singulières d'indice un entier naturel m fixé, qui sont, comme on l'a vu au paragraphe 1.2.6, des éléments de l'espace $J^{A_2,hol}_{1,m}\Big(\Gamma(3m)\Big)$.
On sait que $\Gamma(3m)$ est un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini noté δ_m.
(On peut trouver l'expression de δ_m dans l'ouvrage de T.Miyake [Mi] par exemple, $\delta_m = (3m)^3 \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid 3m}} (1 - \frac{1}{p^2})$.)

On note $G := \Gamma(3m) \ltimes H(A_2)$, G est un sous-groupe du groupe de Jacobi d'indice δ_m.
Soit donc ϕ une forme singulière d'indice m, on pose :

$$\widehat{\phi} := \prod_{\gamma \in \Gamma^J/G} J^{-1}_{1,m}(\gamma;\tau,z)\phi(\gamma.(\tau,z)).$$

Alors, $\widehat{\phi}$ est une forme de Jacobi pour le groupe de Jacobi Γ^J tout entier, de poids δ_m, d'indice $m\delta_m$.

Dans le cas où ϕ appartient à $\mathbb{C}\theta_{0,m}$, alors $\widehat{\phi} := \prod_{\gamma\in\Gamma^J/G'} J^{-1}_{1,m}(\gamma;\tau,z;\chi)\phi(\gamma.(\tau,z))$ est une forme de Jacobi pour le groupe de Jacobi entier, de poids δ'_m, d'indice $m\delta'_m$, avec pour système multiplicatif $\chi^{\delta'_m}$, où $\delta'_m = 3m \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid 3m}} (1 + \frac{1}{p})$, est l'indice de $\Gamma_0(3m)$ dans le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, $G' = \Gamma_0(3m) \ltimes H(A_2)$, et $\chi = \Big(\frac{-3}{d}\Big)$.

Par exemple, la forme $\widehat{\theta_{0,1}}$ appartient à l'espace $J^{A_2,mer}_{4,4}(\Gamma^J)$, car $\delta'_1 = 4$.

Chapitre 2

Formes de Jacobi et action du groupe de Weyl $W(A_2)$

2.1 Définitions

Proposition-Définition 2.1.1. *Groupe de Weyl. (Voir Planche V [B])*
Le groupe de Weyl du réseau A_2, qui est par définition le groupe engendré par les 2 réflexions σ_{α_1} et σ_{α_2} définies par $\sigma_{\alpha_i}(z) = z - < \alpha_i, z > \alpha_i$, pour z appartenant à U, s'identifie au groupe des permutations $\mathcal{S}_3$ et agit sur un élément z par permutations de ses coordonnées (z'_1, z'_2, z'_3) :

$$\sigma_{\alpha_1}(z) = (z'_2, z'_1, z'_3),$$
$$\sigma_{\alpha_2}(z) = (z'_1, z'_3, z'_2).$$

Tout élément du groupe de Weyl préserve le produit scalaire $<,>$.

Tout élément σ du groupe de Weyl préserve aussi le réseau A_2, ce qui permet de définir, pour tout entier naturel m, une action de $W(A_2)$ sur le groupe $G_m(A_2) = \widetilde{A_2}/mA_2$, en posant, avec une notation évidente, $\sigma(\bar{x}) := \sigma(x)$ mod mA_2.

Preuve.
Ces propriétés se vérifient par le calcul de façon immédiate.

Définition 2.1.1. Action du groupe de Weyl.
Le groupe de Weyl du réseau A_2 agit sur $\mathbb{H} \times U$ de la façon suivante :
pour tout σ appartenant à $W(A_2)$ et pour tout (τ,z) appartenant à $\mathbb{H} \times U$,

$$\sigma.(\tau,z) := (\tau,\sigma(z)).$$

Définition 2.1.2. Formes de Jacobi $W(A_2)$-invariantes.
Une forme de Jacobi Φ, définie relativement au réseau A_2 sera dite $W(A_2)$-*invariante*, respectivement $W(A_2)$-*anti-invariante*, si pour tout σ de $W(A_2)$ elle vérifie $\Phi(\sigma.(\tau,z)) = \Phi(\tau,z)$, respectivement si pour tout σ de $W(A_2)$, $\Phi(\sigma.(\tau,z)) = sgn(\sigma)\Phi(\tau,z)$, où $sgn(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Notation 2.1.1. *On notera $J_{k,m}^{W(A_2),f}$, respectivement $J_{k,m}^{AW(A_2),f}$, l'espace vectoriel des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$-invariantes, respectivement anti-invariantes, de poids k, d'indice m, et on emploiera des notations analogues pour les formes holomorphes, pour les formes cuspidales, pour les formes presque holomorphes et pour les formes méromorphes.*

2.2 Polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants et écriture du coefficient $[\Phi]_{q^n}$

Proposition-Définition 2.2.1. *Polynômes exponentiels fondamentaux $W(A_2)$-invariants. (On suit ici les résultats décrits par G.Rousseau [R].)*
On définit les polynômes exponentiels fondamentaux $W(A_2)$-invariants de la façon suivante :
pour j appartenant à $\{1,2\}$, $P_j(z) := \sum_{\lambda \in W(A_2)\lambda_j} \exp(-2\pi i < \lambda \ , \ z >)$.
Plus explicitement on a, en notant $\zeta_j := e^{2i\pi <z,\lambda_j>}$:

$$P_1(z) = \zeta_1^{-1} + \zeta_1\zeta_2^{-1} + \zeta_2,$$

$$P_2(z) = \zeta_1 + \zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_2^{-1},$$

car $W(A_2).\lambda_1 = \{\lambda_1, -\lambda_2, -(\lambda_1 - \lambda_2)\}$, *et* $W(A_2).\lambda_2 = \{-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2\}$.
L'algèbre des polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants est engendrée par ces 2 polynômes : il s'agit de $\mathbb{C}[P_1, P_2]$.
Les polynômes P_1 et P_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$.

Remarque 2.2.1. Quelques exemples utiles.
On peut donner ici les expressions de quelques polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants en fonction de P_1, P_2, qui seront utiles par la suite .

$P_1 = \zeta_1^{-1} + \zeta_1\zeta_2^{-1} + \zeta_2$
$P_2 = \zeta_1 + \zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_2^{-1}$

$P_1^2 - 2P_2 = \zeta_1^{-2} + \zeta_1^2\zeta_2^{-2} + \zeta_2^2$
$P_2^2 - 2P_1 = \zeta_1^2 + \zeta_1^{-2}\zeta_2^2 + \zeta_2^{-2}$

$P_1P_2 - 3 = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-1}\zeta_2^2 + \zeta_1\zeta_2^{-2} + \zeta_1^{-2}\zeta_2 + \zeta_1^2\zeta_2^{-1}$

$P_1^3 - 3P_1P_2 + 3 = \zeta_1^{-3} + \zeta_1^3\zeta_2^{-3} + \zeta_2^3$
$P_2^3 - 3P_1P_2 + 3 = \zeta_1^3 + \zeta_1^{-3}\zeta_2^3 + \zeta_2^{-3}$

$P_1^2P_2^2 - 2(P_1^3 + P_2^3) + 4P_1P_2 - 3 = \zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2} + \zeta_1^2\zeta_2^2 + \zeta_1^{-4}\zeta_2^2 + \zeta_1^4\zeta_2^{-2} + \zeta_1^2\zeta_2^{-4} + \zeta_1^{-2}\zeta_2^4$

$P_1^2P_2 - 2P_2^2 - P_1 = \zeta_1^3\zeta_2^{-2} + \zeta_1\zeta_2^2 + \zeta_1^{-2}\zeta_2^{-1} + \zeta_1^2\zeta_2^{-3} + \zeta_1^{-3}\zeta_2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^3$
$P_2^2P_1 - 2P_1^2 - P_2 = \zeta_1^{-2}\zeta_2^3 + \zeta_1^2\zeta_2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-2} + \zeta_1^{-3}\zeta_2^2 + \zeta_1\zeta_2^{-3} + \zeta_1^3\zeta_2^{-1}$

$P_1^4 - 4P_1^2P_2 + 4P_1 + 2P_2^2 = \zeta_1^{-4} + \zeta_1^4\zeta_2^{-4} + \zeta_2^4$
$P_2^4 - 4P_1P_2^2 + 4P_2 + 2P_1^2 = \zeta_1^4 + \zeta_1^{-4}\zeta_2^4 + \zeta_2^{-4}$

$P_1^3P_2 - 3P_1P_2^2 - P_1^2 + 5P_2 = \zeta_1\zeta_2^3 + \zeta_1^{-3}\zeta_2^{-1} + \zeta_1^4\zeta_2^{-3} + \zeta_1^3\zeta_2^{-4} + \zeta_1^{-4}\zeta_2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^4$
$P_1P_2^3 - 3P_1^2P_2 - P_2^2 + 5P_1 = \zeta_1^3\zeta_2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-3} + \zeta_1^{-3}\zeta_2^4 + \zeta_1^{-4}\zeta_2^3 + \zeta_1\zeta_2^{-4} + \zeta_1^4\zeta_2^{-1}$

Proposition 2.2.1. *Si Φ est une forme de Jacobi $W(A_2)$-invariante, les coefficients $f(n,l)$ vérifient $f(n,l) = f(n,\sigma.l)$ pour tout σ appartenant à $W(A_2)$, les polynômes exponentiels $[\Phi]_{q^n}$ (voir la notation 1.1.1) sont $W(A_2)$-invariants et s'écrivent donc sous forme de polynômes en les polynômes exponentiels fondamentaux $W(A_2)$-invariants P_1 et P_2 définis ci-dessus.*

Preuve.
La démonstration de cette proposition est immédiate : il suffit d'écrire le développement de Fourier de la forme Φ ainsi que la relation $\Phi(\sigma.(\tau,z)) = \Phi(\tau,z)$, pour tout σ de $W(A_2)$.

Proposition 2.2.2. *Si Φ est une forme de Jacobi $W(A_2)$-invariante de poids pair, alors les polynômes exponentiels $[\Phi]_{q^n}$ s'écrivent sous forme de polynômes symétriques en les polynômes exponentiels fondamentaux $W(A_2)$-invariants P_1 et P_2.*

Preuve.
Soit n un entier naturel. D'après la proposition précédente, $[\Phi]_{q^n}$ est un polynôme en P_1 et P_2. Soient i et j deux entiers naturels, $(i,j) \neq (0,0)$.
D'après la définition de P_1 et P_2, le coefficient de $P_1^i P_2^j$ dans le polynôme $[\Phi]_{q^n}$, est égal au coefficient de $\zeta_1^{-i}\zeta_2^{-j}$ dans $[\Phi]_{q^n}$, c'est à dire au coefficient de Fourier $f(n,-i\lambda_1 - j\lambda_2)$.
Or, pour tout l appartenant à $\widetilde{A_2}$, $f(n,-l) = f(n,l)$, car Φ est de poids pair. (Voir les propriétés des coefficients de Fourier au paragraphe 1.1.5).
Donc $f(n,-i\lambda_1 - j\lambda_2) = f(n,i\lambda_1 + j\lambda_2)$, qui est le coefficient de $\zeta_1^i\zeta_2^j$ dans $[\Phi]_{q^n}$, ou encore le coefficient de $P_1^j P_2^i$ dans le polynôme $[\Phi]_{q^n}$.
Ainsi les coefficients de $P_1^i P_2^j$ et $P_1^j P_2^i$ coïncident, et le polynôme $[\Phi]_{q^n}$ est bien un polynôme symétrique en les polynômes P_1 et P_2.

La proposition qui suit précise les résultats obtenus dans la proposition 1.2.2 concernant la forme du coefficient $[\Phi]_{q^0}$ pour une forme de Jacobi d'indice 1, 2 ou 3, dans le cas particulier où la forme de Jacobi est $W(A_2)$-invariante.

Proposition 2.2.3. *Soit k un entier relatif fixé.*
(1) Si Φ appartient à $J_{k,1}^{W(A_2),f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ est de la forme :

$$[\Phi]_{q^0} = \begin{cases} f(0,0) + f(0,\lambda_1)(P_1 + P_2), & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ \\ f(0,\lambda_1)(P_2 - P_1), & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases}$$

(2) Si Φ appartient à $J_{k,2}^{W(A_2),f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ est de la forme :

$$[\Phi]_{q^0} = \begin{cases} f(0,0) + f(0,\lambda_1)[P_1 + P_2] + f(0,\lambda_1 + \lambda_2)[P_1P_2 - 3] & \\ +f(0,2\lambda_1)[P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 - 2P_2], & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ \\ f(0,0) + f(0,\lambda_1)[P_2 - P_1] & \\ +f(0,2\lambda_1)[(P_2^2 - 2P_1) - (P_1^2 - 2P_2)], & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases}$$

(3) Si Φ appartient à $J_{k,3}^{A_2,f}$, alors $[\Phi]_{q^0}$ est de la forme :

$$[\Phi]_{q^0} = \begin{cases} f(0,0) + f(0,\lambda_1)[P_1 + P_2] + f(0,\lambda_1 + \lambda_2)[P_1P_2 - 3] & \\ +f(0,2\lambda_1)[P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 - 2P_2] & \\ +f(0,\lambda_1 + 2\lambda_2)[P_1^2P_2 + P_2^2P_1 - 2P_2^2 - 2P_1^2 - P_1 - P_2] & \\ +f(0,3\lambda_1)[P_1^3 + P_2^3 - 6P_1P_2 + 6], & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ \\ f(0,\lambda_1)[P_2 - P_1] + f(0,2\lambda_1)[P_2^2 - P_1^2 + 2P_2 - 2P_1] & \\ +f(0,\lambda_1 + 2\lambda_2)[P_1^2P_2 - P_2^2P_1 + 2P_1^2 - 2P_2^2 - P_1 + P_2] & \\ +f(0,3\lambda_1)[P_2^3 - P_1^3], & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases}$$

Preuve.
On utilise les résultats de la proposition 1.2.2, l'expression des premiers polynômes $W(A_2)$-invariants donnés dans la remarque 2.2.1, ainsi que, d'après les égalités :

$$\sigma_{\alpha_1+\alpha_2}(l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = -(l_1\lambda_2 + l_2\lambda_1)$$

$$\sigma_{\alpha_1}(l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = -l_1\lambda_1 + (l_1 + l_2)\lambda_2,$$

et la $W(A_2)$-invariance de Φ, les relations :
$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = f(n, -(l_1\lambda_2 + l_2\lambda_1)) = (-1)^k f(n,l_1\lambda_2 + l_2\lambda_1)$
$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = f(n, -l_1\lambda_1 + (l_1 + l_2)\lambda_2))$.

2.3 Représentation vectorielle

Proposition 2.3.1. *Soient m un entier naturel, et μ un élément de $\widetilde{A_2}$.
Pour tout σ appartenant à $W(A_2)$, la foonction $\theta_{\mu,m}$ vérifie :*

$$\theta_{\mu,m}(\tau,\sigma.z) = \theta_{\sigma^{-1}.\mu,m}(\tau,z).$$

Preuve.
Il suffit de reprendre l'écriture de la série $\theta_{\mu,m}$ (voir le paragraphe 1.1.6) :

$$\theta_{\mu,m} = \sum_{\gamma\in A_2+\frac{\mu}{m}} \exp(\pi i m\tau < \gamma,\gamma > -2\pi i m < \gamma,\, z >),$$

et d'utiliser le fait que σ préserve A_2 et $<\,,\,>$.

Corollaire 2.3.1. *Les séries thêta d'indice 1 sont $W(A_2)$-invariantes.*

Preuve.
D'après un résultat énoncé dans la proposition 1.2.6, les séries thêta d'indice 1 ne dépendent que de la caractéristique μ modulo A_2.
Or, pour tout μ appartenant à $\widetilde{A_2}$, et pour tout σ de $W(A_2)$, $\sigma.\mu - \mu$ appartient à A_2, donc $\theta_{\mu,1}(\tau,\sigma^{-1}.z) = \theta_{\sigma\mu,1}(\tau,z) = \theta_{\mu,1}(\tau,z)$.

Corollaire 2.3.2. *Formes de Jacobi d'indice* 1.
Si Φ est une forme de Jacobi faible définie relativement au réseau A_2, d'indice 1, alors Φ est $W(A_2)$-invariante .

Preuve.
C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.1 et de la représentation vectorielle de la fonction Φ (voir le paragraphe 1.1.6) :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{\mu\in\widetilde{A_2}/A_2} g_\mu(\tau)\ \theta^{A_2}_{\mu,1}(\tau,z).$$

Proposition 2.3.2. *Représentation vectorielle.*
Soient k un entier, m un entier positif et Φ un élément de $J^{W(A_2),f}_{k,m}$.
Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants de $G_m(A_2) = \widetilde{A_2}/mA_2$ sous l'action de $W(A_2)$. (Voir

la proposition-définition 2.1.1.)
Alors, Φ s'écrit sous la forme :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{h\in\mathcal{S}} g_h(\tau)\Big(\sum_{\sigma\in W(A_2)} \theta_{\sigma.h,m}(\tau,z)\Big),$$

où les $g_h(\tau)$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$.

Preuve.
On écrit une fois encore la représentation vectorielle de la fonction Φ donnée au paragraphe 1.1.6 :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{\mu\in G_m(A_2)} f_\mu(\tau)\ \theta^{A_2}_{\mu,m}(\tau,z),$$

où les fonctions $f_\mu(\tau)$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$.
Pour σ appartenant à $W(A_2)$, on a alors, d'après la proposition 2.3.1 :

$$\Phi(\tau,\sigma.z) = \sum_{\mu\in G_m(A_2)} f_\mu(\tau)\ \theta^{A_2}_{\sigma^{-1}\mu,m}(\tau,z),$$

ou encore :

$$\Phi(\tau,\sigma.z) = \sum_{\mu\in G_m(A_2)} f_{\sigma.\mu}(\tau)\ \theta^{A_2}_{\mu,m}(\tau,z),$$

d'où, d'après la $W(A_2)$-invariance de Φ et, pour m fixé, d'après la proposition 1.1.3, l'indépendance linéaire des séries $\theta^{A_2}_{\mu,m}$ sur l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, la relation suivante, pour chaque μ appartenant à $\widetilde{A_2}$:

$$f_{\sigma.\mu}(\tau) = f_\mu(\tau),$$

ce qui permet d'écrire Φ sous la forme annoncée.

2.4 Développement de Taylor utilisant les polynômes symétriques

Dans ce qui suit, on précise dans le cas où la forme de Jacobi est $W(A_2)$-invariante, l'étude faite au paragraphe 1.2.5, permettant de faire apparaître les coefficients d'un certain développement de Taylor de la forme de Jacobi à deux variables comme des formes modulaires.

Notation 2.4.1. *On utilise dans ce paragraphe les coordonnées (z'_1,z'_2,z'_3), et on note $\sigma_1 = z'_1 + z'_2 + z'_3 = 0$, $\sigma_2 = z'_1z'_2 + z'_1z'_3 + z'_2z'_3$, $\sigma_3 = z'_1z'_2z'_3$ les trois polynômes symétriques homogènes fondamentaux en les variables z'_1, z'_2, z'_3.*

Notation 2.4.2. *La notation $E_j(\tau)$ désigne la série d'Eisenstein classique de poids j.*
On peut rappeler qu'il s'agit d'une forme modulaire de poids j pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, et qu'elle vérifie : $[E_j(\tau)]_{q^0} = 1$.
On peut préciser que les formes $E_4(\tau)$ et $E_6(\tau)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et engendrent sur $\mathbb{C}$ l'algèbre $M_\star$ des formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$. (Voir l'ouvrage de N.Koblitz [K] ou de T.Miyake [Mi].)
Dans les lignes qui suivent, on notera : $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

$$E_4(\tau) = 1\ +\ 240\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_3(n) \qquad E_6(\tau) = 1\ -\ 504\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_5(n)$$

$$E_8(\tau) = 1 \ + \ 480 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_7(n) \qquad E_{10}(\tau) = 1 \ - \ 264 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_9(n)$$
$$E_{12}(\tau) = 1 \ + \ \tfrac{65520}{691} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{11}(n) \quad E_{14}(\tau) = 1 \ - \ 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{13}(n)$$

La première forme cuspidale est notée $\Delta(\tau)$, elle est de poids 12 et vérifie :

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = \eta(\tau)^{24}.$$

On peut également rappeler les relations classiques suivantes :

$$E_8 = E_4^2,\ E_{10} = E_4E_6,\ E_{14} = E_6E_8$$

$$E_{12} = E_6^2 + c\Delta,\ \textit{avec}\ c = \frac{2^6 3^5 7^2}{691}$$

ou encore :

$$E_4^3 = E_{12} + \frac{432000}{691}\Delta.$$

Proposition 2.4.1. *Soient k un entier relatif, m un entier naturel et Φ appartenant à $J_{k,m}^{W(A_2),f}$.*
La fonction $\Psi(\tau,z) = exp(-4\pi^2 mG_2(\tau) < z,z >)\Phi(\tau,z)$ admet un développement du type suivant :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)},$$

où, pour tout entier naturel d, $\mathcal{B}_d = \{\ p_j^{(d)},\ 1 \leq j \leq r_d\ \}$ est la base des polynômes symétriques homogènes de degré d en (z_1',z_2',z_3') constituée des monômes en les polynômes symétriques fondamentaux en ces variables,
et où, pour tout entier naturel d et tout entier j compris entre 1 et r_d, la fonction $g_j^{(d)}(\tau)$ est une forme modulaire de poids $k+d$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve.
On utilise les coordonnées (z_1',z_2',z_3'), et on écrit (voir la correction automorphe introduite dans le lemme 1.2.6) :

$$\Psi(\tau,z) = exp(-4\pi^2 mG_2(\tau) < z,z >)\Phi(\tau,z)$$
$$= \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} f_{k_1,k_2,k_3}(\tau) {z_1'}^{k_1} {z_2'}^{k_2} {z_3'}^{k_3}.$$

Comme Φ est $W(A_2)$-invariante, et que $W(A_2)$ préserve le produit scalaire, on a, pour tout σ appartenant à $W(A_2)$, $\Psi(\tau,\sigma.z) = \Psi(\tau,z)$, d'où :

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} f_{k_1,k_2,k_3}(\tau) {z_{\sigma.1}'}^{k_1} {z_{\sigma.2}'}^{k_2} {z_{\sigma.3}'}^{k_3} = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} f_{k_1,k_2,k_3}(\tau) {z_1'}^{k_1} {z_2'}^{k_2} {z_3'}^{k_3}.$$

(On rappelle (voir la proposition-définition 2.1.1) que le groupe $W(A_2)$ agit par permutation sur les coordonnées (z_1',z_2',z_3').)
Finalement, on obtient :

$$f_{\sigma.(k_1,k_2,k_3)}(\tau) = f_{k_1,k_2,k_3}(\tau),\ \text{pour toute permutation } \sigma.$$

On peut alors écrire, en notant $\mathcal{S}$ un système de représentants de $\mathbb{N}^3$ sous l'action du groupe des permutations :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathcal{S}} f_{k_1,k_2,k_3}(\tau) \times \Big(\sum_{\sigma\in W(A_2)} {z'_{\sigma.1}}^{k_1} {z'_{\sigma.2}}^{k_2} {z'_{\sigma.3}}^{k_3} \Big),$$

ou encore, en écrivant le polynôme symétrique en les (z'_1,z'_2,z'_3) à l'aide des polynômes homogènes symétriques fondamentaux :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)}.$$

On démontre, de la même façon que dans la proposition 1.2.11, que le coefficient $g_j^{(d)}(\tau)$ de chaque polynôme $p_j^{(d)}$ est une forme modulaire de poids $k+d$.

Remarque 2.4.1. Exemples des premières bases $\mathcal{B}_d$.

(*i*) Pour $d=0$, $\mathcal{B}_0 = \{\ 1\ \}$, $r_0 = 1$.
(*ii*) Pour $d=1$, $\mathcal{B}_1 = \varnothing$, $r_1 = 0$.
(*iii*) Pour $d=2$, $\mathcal{B}_2 = \{\ \sigma_2\ \}$, $r_2 = 1$.
(*iv*) Pour $d=3$, $\mathcal{B}_3 = \{\ \sigma_3\ \}$, $r_3 = 1$.
(*v*) Pour $d=4$, $\mathcal{B}_4 = \{\ \sigma_2^2\ \}$, $r_4 = 1$.
(*vi*) Pour $d=5$, $\mathcal{B}_5 = \{\ \sigma_2\sigma_3\ \}$, $r_5 = 1$.
(*vii*) Pour $d=6$, $\mathcal{B}_6 = \{\ \sigma_2^3,\ \sigma_3^2\ \}$, $r_6 = 2$.
(*viii*) Pour $d=7$, $\mathcal{B}_7 = \{\ \sigma_2^2\sigma_3\}$, $r_7 = 1$.
(*ix*) Pour $d=8$, $\mathcal{B}_8 = \{\ \sigma_2^4,\ \sigma_2\sigma_3^2\ \}$, $r_8 = 2$.

Le cas (ii), par exemple, se justifie par le fait que le seul polynôme symétrique homogène de degré 1 est le polynôme σ_1, qui est nul d'après le choix de la réalisation du réseau A_2. Plus généralement, tout monôme $\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^k$ avec $i \geq 1$ est le polynôme nul.

Proposition 2.4.2. *Soit Φ appartenant à $J_{k,m}^{W(A_2),f}$.*
On considère la correction automorphe $\Psi(\tau,z)$ écrite sous la forme précédente :

$$\Psi(\tau,z) = exp(-4\pi^2 mG_2(\tau) < z,z >)\Phi(\tau,z)$$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)}.$$

Alors, si pour tout entier d tel que $d \leq 8m$, et pour tout entier j compris entre 1 et r_d, le coefficient $g_j^{(d)}(\tau)$ est nul, la forme Φ est la forme nulle.
Autrement dit, les coefficients $g_j^{(d)}(\tau)$, $0 \leq d \leq 8m$, $1 \leq j \leq r_d$ sont suffisants pour déterminer la forme Φ.

Preuve.
D'après la proposition 1.2.11, la correction Ψ s'écrit aussi :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

où pour chaque couple d'entiers naturels $(k_1,\ k_2)$, la fonction $f_{(k_1,\ k_2)}$ est une forme modulaire de poids $k+k_1+k_2$ pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, ou encore :

$$\Psi(\tau,z) = \sum_{d\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(k_1,\, k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1+k_2=d}} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

En identifiant les deux expressions de Ψ, on obtient, pour chaque entier d :

$$\sum_{\substack{(k_1,\, k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1+k_2=d}} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)}.$$

Supposons que pour tout entier d tel que $d \leq 8m$, et pour tout entier j compris entre 1 et r_d, le coefficient $g_j^{(d)}(\tau)$ soit nul.
On a alors, d'après la ligne précédente, pour tout entier $d \leq 8m$,

$$\sum_{\substack{(k_1,\, k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ k_1+k_2=d}} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2} = 0,$$

d'où, pour tout couple (k_1,k_2) tel que $k_1 + k_2 \leq 8m$, le coefficient $f_{k_1,k_2}(\tau)$ est nul, et par conséquent, d'après la proposition 1.2.12, la forme Φ est identiquement nulle.

Remarque 2.4.2. Exemples de $E_{4,1}^{(A_2)}$ et de $E_{6,1}^{(A_2)}$. (Voir le paragraphe 1.2.7.)
On pose :

$$\begin{aligned} \widehat{E_{4,1}^{(A_2)}}(\tau,z) &:= \exp(-4\pi^2 G_2(\tau) < z,z >) E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,z) \\ &= \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \widehat{E_{6,1}^{(A_2)}}(\tau,z) &:= \exp(-4\pi^2 G_2(\tau) < z,z >) E_{6,1}^{(A_2)}(\tau,z) \\ &= \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} h_j^{(d)}(\tau)\ p_j^{(d)}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4.1, les coefficients $g_j^{(d)}(\tau)$ et $h_j^{(d)}(\tau)$ sont des formes modulaires de poids respectifs $4 + d$ et $6 + d$, pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, et d'après la proposition 2.4.2, les 10 coefficients (voir la remarque 2.4.1 concernant les premières bases $\mathcal{B}_d$) $g_j^{(d)}$, $0 \leq d \leq 8$, $1 \leq j \leq r_d$, respectivement $h_j^{(d)}$, $0 \leq d \leq 8$, $1 \leq j \leq r_d$, sont suffisants pour déterminer $E_{4,1}^{(A_2)}$, respectivement $E_{6,1}^{(A_2)}$.

La structure connue de l'espace $M_\star$ des formes modulaires (voir les ouvrages de N.Koblitz [K] ou T.Miyake [Mi]) permet d'énoncer les résultats suivants :

si $d \equiv\ 1\ mod\ 2$	$g_j^{(d)}(\tau) = 0$
si $d \in\ \{0,\, 2,\, 4,\, 6,\, 10\}$	$g_j^{(d)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{4+d}(\tau)$
si $d = 8$ ou $d \geq 12$	$g_j^{(d)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{4+d}(\tau) \oplus \Delta(\tau).M_{d-8}$

si $d \equiv \ 1 \ mod \ 2 \qquad h_j^{(d)}(\tau) = 0$

si $d \in \ \{0, \ 2, \ 4, \ 8\} \quad h_j^{(d)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{6+d}(\tau)$

si $d = 6$ ou $d \geq 10 \quad h_j^{(d)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{6+d}(\tau) \oplus \Delta(\tau).M_{d-6}$

Par ailleurs ces coefficients vérifient :

$$[g_j^{(d)}]_{q^0} = [h_j^{(d)}]_{q^0} = \begin{cases} \frac{1}{k!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^k, & \text{si } p_j^{(d)} \text{ est de la forme } \sigma_2^k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, d'après la forme de $G_2(\tau)$ (voir le paragraphe 1.1.3), comme $[E_{k,m}^{(A_2)}]_{q^0} = 1$, (voir la proposition 1.2.17) et en remarquant aussi que :

$$< z,z >= {z'_1}^2 + {z'_2}^2 + {z'_3}^2 = -2\sigma_2,$$

on obtient :

$$[\widehat{E_{4,1}^{(A_2)}}(\tau,z)]_{q^0} = e^{\frac{-\pi^2}{3}\sigma_2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\sigma_2\right)^k = \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} [g_j^{(d)}(\tau)]_{q^0} \ p_j^{(d)},$$

et de même :

$$[\widehat{E_{6,1}^{(A_2)}}(\tau,z)]_{q^0} = e^{\frac{-\pi^2}{3}\sigma_2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\sigma_2\right)^k = \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r_d} [h_j^{(d)}(\tau)]_{q^0} \ p_j^{(d)}.$$

On peut finalement écrire le début de ces développements de la façon suivante (voir la forme des premières bases $\mathcal{B}_d$ dans la remarque 2.4.1) :

$$\widehat{E_{4,1}^{(A_2)}}(\tau,z) = E_4(\tau) - \frac{\pi^2}{3}E_6(\tau)\sigma_2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^2 E_8(\tau)\sigma_2^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^3 E_{10}(\tau)\sigma_2^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)^4 E_{12}(\tau)\sigma_2^4 + \Delta(\tau)(c_{1,8}\sigma_2^4 + c_{2,8}\sigma_2\sigma_3^2) + \frac{1}{5!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^5 E_{14}(\tau)\sigma_2^5 + \sum_{d\geq 12} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau) \ p_j^{(d)},$$

où $c_{1,8}$ et $c_{2,8}$ sont des constantes, et

$$\widehat{E_{6,1}^{(A_2)}}(\tau,z) = E_6(\tau) - \frac{\pi^2}{3}E_8(\tau)\sigma_2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^2 E_{10}(\tau)\sigma_2^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^3 E_{12}(\tau)\sigma_2^3$$

$$+\Delta(\tau)(d_{1,6}\sigma_2^3 + d_{2,6}\sigma_3^2) + \frac{1}{4!}\left(\frac{-\pi^2}{3}\right)^4 E_{14}(\tau)\sigma_2^4 + \sum_{d\geq 10} \sum_{j=1}^{r_d} g_j^{(d)}(\tau) \ p_j^{(d)},$$

où $d_{1,6}$ et $d_{2,6}$ sont des constantes.

On peut remarquer que ces écritures permettent aussi d'obtenir les coefficients f_{k_1,k_2} et g_{k_1,k_2} introduits selon la proposition 1.2.11 :

$$\widehat{E_{4,1}^{(A_2)}}(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} f_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad \widehat{E_{6,1}^{(A_2)}}(\tau,z) = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} g_{(k_1,k_2)}(\tau) z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

On a notamment :

$$\begin{array}{ll}
f_{0,0}(\tau) = E_4(\tau) & g_{0,0}(\tau) = E_6(\tau) \\
f_{2,0}(\tau) = f_{0,2}(\tau) = \frac{\pi^2}{3}E_6(\tau) & g_{2,0}(\tau) = g_{0,2}(\tau) = \frac{\pi^2}{3}E_8(\tau) \\
f_{1,1}(\tau) = -\frac{\pi^2}{3}E_6(\tau) & g_{1,1}(\tau) = -\frac{\pi^2}{3}E_8(\tau) \\
f_{2,2}(\tau) = \frac{\pi^4}{6}E_8(\tau) & g_{2,2}(\tau) = \frac{\pi^4}{6}E_{10}(\tau) \\
f_{1,3}(\tau) = f_{3,1}(\tau) = -\frac{\pi^4}{9}E_8(\tau) & g_{1,3}(\tau) = g_{3,1}(\tau) = -\frac{\pi^4}{9}E_{10}(\tau) \\
f_{4,0}(\tau) = f_{0,4}(\tau) = \frac{\pi^4}{18}E_8(\tau) & g_{4,0}(\tau) = g_{0,4}(\tau) = \frac{\pi^4}{18}E_{10}(\tau)
\end{array}$$

2.5 Premières constructions

2.5.1 Construction initiale et exemple de $a_{-3,1}$, $a_{-2,1}$

Dans ce paragraphe, on applique la méthode naturelle qui consiste à utiliser des formes de Jacobi à une variable pour construire des formes de Jacobi pour A_2 (voir le paragraphe 1.2.2). Sous certaines conditions, on peut obtenir des formes de Jacobi $W(A_2)$-invariantes, et exhiber de premiers exemples de telles formes.

Proposition 2.5.1. *Soit φ une forme de Jacobi faible à une variable, appartenant à $J_{k,m}^{A_1,f}(v)$, où k est un entier relatif, m un entier naturel, et v un système multiplicatif. On pose :*

$$\Phi(\tau,z) := \varphi(\tau,z_1')\varphi(\tau,z_2')\varphi(\tau,z_3').$$

Alors, la forme Φ, qui est une forme de Jacobi définie relativement à A_2, de poids k, d'indice $2m$, de système multiplicatif v^3, est une forme $W(A_2)$-invariante.

Preuve.
Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition 1.2.3 et de constater que la forme obtenue est invariante par toute permutation des coordonnées z_j'.

Proposition-Définition 2.5.1. *On pose, comme le fait K. Wirthmüller [W] :*

$$a_{-3,1}(\tau,\ z_1',z_2',z_3') = \omega(\tau,\ z_1') \times \omega(\tau,\ z_2') \times \omega(\tau,\ z_3'),$$

où $\omega(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,z)}{i\eta(\tau)^3}$ appartient à $J_{-1,\frac{1}{2}}^{A_1,f}$, et admet pour seuls zéros les points du type (τ,z) où z appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. (Voir le paragraphe 1.1.3.)
La forme $a_{-3,1}$ obtenue appartient à $J_{-3,1}^{W(A_2),f}$, et admet pour seuls zéros les points du type $(\tau,\ z_1',\ z_2',\ z_3')$ où l'un au moins des z_j' appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

Proposition 2.5.2. *On définit sur $\mathbb{H} \times U$ la fonction suivante :*

$$s_1(\tau,z) := \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau,z_j').$$

La fonction s_1 appartient à l'espace $J_{1,0}^{mer,W(A_2)}$, elle admet un développement dans lequel n'apparaissent que des puissances positives de q, ses pôles éventuels sont les points (τ,z) où l'un des z_j' appartient à $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, ils sont d'ordre au plus 1.

Preuve.
La fonction s_1 est méromorphe et clairement $W(A_2)$-invariante d'après sa définition.
En utilisant le fait que le système de coordonnées dans U utilisé ici vérifie $z'_1+z'_2+z'_3=0$ et les propriétés de la fonction $\frac{\vartheta_z}{\vartheta}$ (voir le paragraphe 1.1.3, (a)), on obtient les équations fonctionnelles :

(i) $s_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)s_1(\tau,z)$, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$

(ii) $s_1(\tau,z+\beta\tau+\alpha)=s_1(\tau,z)$, pour tout (α,β) appartenant à $A_2\times A_2$

En utilisant la forme produit de la fonction ϑ, on constate également qu'il n'apparaît que des puissances positives de q dans le développement de Fourier de $\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau,z)$, donc aussi dans celui de $s_1(\tau,z)$. Enfin, la forme des zéros de la fonction ϑ permet de déduire celle des pôles éventuels de s_1.

Proposition-Définition 2.5.2. *On pose :*

$$a_{-2,1}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3):=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\vartheta_z}{\vartheta}(\tau,z'_j)\right)\times\prod_{k=1}^{3}\frac{\vartheta(\tau,z'_k)}{\eta(\tau)^3}\ ,$$

ou encore

$$a_{-2,1}(\tau,\ z'_1,z'_2,z'_3)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\eta(\tau)^9}\sum_{j=1}^{3}\left[\vartheta_z(\tau,z'_j)\times\prod_{k=1,k\neq j}^{3}\vartheta(\tau,z'_k)\right].$$

Alors la fonction $a_{-2,1}$ n'est autre que la forme $-\frac{i}{2\pi}s_1(\tau,z)\times a_{-3,1}(\tau,z)$, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}\times U$ et elle appartient à $J_{-2,1}^{W(A_2),f}$.

Preuve.
C'est une conséquence immédiate de la proposition-définition 2.5.1 et de la proposition 2.5.2.

2.5.2 Opérateur différentiel et exemple de $a_{0,1}$

Proposition 2.5.3. *Les opérateurs différentiels $D_0^{(m)}$ et $\Delta_{k,m}$ respectent les propriétés de $W(A_2)$-invariance ou anti-invariance.*

Preuve.
C'est une conséquence des définitions, voir la deuxième partie du paragraphe 1.2.3.

Proposition-Définition 2.5.3. *On pose :*

$$a_{0,1}:=-\frac{1}{4\pi^2}\Delta_{-2,1}a_{-2,1},$$

ou encore, de façon plus explicite :

$$a_{0,1}(\tau,z_1,z_2)=-\tfrac{1}{4\pi^2}\times\Big[2i\pi\tfrac{\partial a_{-2,1}}{\partial\tau}(\tau,z_1,z_2)-\tfrac{1}{3}\Big(\tfrac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial z_2^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}\Big)(a_{-2,1})(\tau,z_1,z_2)$$
$$+24\pi^2G_2(\tau)a_{-2,1}(\tau,z_1,z_2)\Big].$$

La forme $a_{0,1}$ appartient à l'espace $J_{0,1}^{W(A_2),f}$.

2.5.3 Propriétés de $a_{-3,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{0,1}$

(i) Développements de Fourier

Proposition 2.5.4. *Les formes* $a_{-3,1}$, $a_{-2,1}$ *et* $a_{0,1}$ *admettent les écritures suivantes :*

$$a_{-3,1}(\tau,z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{-9}$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))}\zeta_1^{n_1-n_2}\zeta_2^{n_2-n_3} ,$$

$$a_{-2,1}(\tau,z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{-9}$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z}} (n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2})e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))}\zeta_1^{n_1-n_2}\zeta_2^{n_2-n_3},$$

$$a_{0,1}(\tau,z) = \sum_{n\geq 0,\ l\in\widetilde{A_2}} c(n,l)q^n e^{2\pi i<l,z>} \ , \ avec$$

$$\begin{aligned} c(0,l) &= (\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}<l,l>)a(0,l) \ , \\ c(n,l) &= \tfrac{-1}{4}(\ (2<l,l>-4n-1)a(n,l)+24\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(j)a(n-j,l)\ )\ , \ si\ n\geq 1 \\ a_{-2,1}(\tau,z) &= \sum_{n\geq 0, l\in\widetilde{A_2}} a(n,l)q^n e^{2\pi i<l,z>} \end{aligned}$$

Preuve.
Pour obtenir les expressions de $a_{-3,1}$ et $a_{-2,1}$, on utilise l'écriture de la fonction ϑ sous la forme d'une somme infinie, mentionnée au paragraphe 1.1.3, ainsi que la définition de la fonction $\eta(\tau)$.
Pour obtenir celle de $a_{0,1}$, on utilise la relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction et ceux de sa transformée par l'opérateur différentiel $\Delta_{-2,1}$, précisée dans la proposition 1.2.7.

Corollaire 2.5.1. *Les formes* $a_{-3,1}$, $2a_{-2,1}$ *et* $24a_{0,1}$ *sont à coefficients de Fourier entiers.*

Preuve.
C'est une conséquence immédiate des expressions données à la proposition 2.5.4.

Corollaire 2.5.2.

$$[24a_{0,1}]_{q^0} = 18+P_1+P_2$$
$$[2a_{-2,1}]_{q^0} = 6-P_1-P_2$$
$$[a_{-3,1}]_{q^0} = P_2-P_1.$$

Preuve.
D'après les expressions données à la proposition 2.5.4, on a par exemple :

$$[a_{-3,1}]_{q^0} = \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z},\\ n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1)=0}} e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)}\zeta_1^{n_1-n_2}\zeta_2^{n_2-n_3}$$

$$= -\zeta_1^{-1} - \zeta_1\zeta_2^{-1} - \zeta_2 + \zeta_1 + \zeta_1^{-1}\zeta_2 + \zeta_2^{-1} = \; P_2 - P_1.$$

On calcule de même les premiers coefficients de $a_{-2,1}$, puis ceux de $a_{0,1}$ à l'aide de ceux de $a_{-2,1}$.

Remarque 2.5.1. On peut calculer tous les coefficients de Fourier des formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$ en utilisant le logiciel pari-gp.

(ii) Restrictions aux hyperplans $z'_j = 0$

Proposition 2.5.5. *Restrictions aux hyperplans $z'_j = 0$.*
(1) La forme $a_{-3,1}$ est nulle sur chacun des hyperplans $z'_j = 0$.
(2) La restriction de la forme $a_{-2,1}$ à un hyperplan du type $z'_j = 0$ coïncide avec la forme classique à une variable $-\varphi_{-2,1}^{(A_1)}$ (voir le paragraphe 1.1.3)
(3) La restriction de la forme $a_{0,1}$ à un hyperplan du type $z'_j = 0$ coïncide avec la forme classique à une variable $\frac{1}{12}\varphi_{0,1}^{(A_1)}$.

Preuve.
(1) La première affirmation est évidente, d'après la proposition-définition 2.5.1.

(2) On vérifie par exemple que $a_{-2,1}(\tau,0,z_2,-z_2)$ coïncide bien avec $-\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_2)$, c'est à dire $-\left(\frac{\vartheta(\tau,z_2)}{i\eta(\tau)^3}\right)^2$, en utilisant les propriétés classiques $\vartheta(\tau,0) = 0$ et $\vartheta_z(\tau,0) = -2\pi\eta(\tau)^3$, rappelées au paragraphe 1.1.3.
Par $W(A_2)$-invariance, on obtient la même conclusion pour les restrictions aux hyperplans $z'_2 = 0$ et $z'_3 = 0$.

(3) Décrivons plus explicitement l'action de l'opérateur $\Delta_{-2,1}$ sur la forme $a_{-2,1}$.
En exploitant la description de $a_{-2,1}$ à l'aide de la fonction ϑ, et en utilisant la relation $4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \vartheta_{z^2}$, (voir le paragraphe 1.1.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
2\pi\Delta_{-2,1}a_{-2,1}(\tau,z) = \tfrac{1}{\eta(\tau)^9} \times \Big[\tfrac{1}{6} \times \Big(&\vartheta_{z^3}(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_3) + \vartheta_{z^3}(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_3) \\
&+\vartheta_{z^3}(\tau,z'_3)\vartheta(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_1) \Big) + \vartheta_z(\tau,z'_1)\vartheta_z(\tau,z'_2)\vartheta_z(\tau,z'_3) + \tfrac{1}{2} \times \Big(\vartheta_z(\tau,z'_1)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_3) \\
&+\vartheta_z(\tau,z'_2)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_3) + \vartheta_z(\tau,z'_3)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_1) + \vartheta_z(\tau,z'_3)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_2) \\
&+\vartheta_z(\tau,z'_1)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_3)\vartheta(\tau,z'_2) + \vartheta_z(\tau,z'_2)\vartheta_{z^2}(\tau,z'_3)\vartheta(\tau,z'_1) \Big) \Big] \\
&-6i\pi\tfrac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)^{10}} \times \Big[\vartheta_z(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_3) + \vartheta_z(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_3) + \vartheta_z(\tau,z'_3)\vartheta(\tau,z'_1)\vartheta(\tau,z'_2) \Big].
\end{aligned}$$

On obtient alors, en utilisant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lclclcl}
\vartheta(\tau,0) & = & 0, & \quad & \vartheta_z(\tau,0) & = & -2\pi\eta(\tau)^3, \\
\vartheta_{z^2}(\tau,0) & = & 0, & & \vartheta_{z^3}(\tau,0) & = & -24i\pi^2\eta'(\tau)\eta(\tau)^2, \\
\vartheta(\tau,-z) & = & -\vartheta(\tau,z), & & \vartheta_z(\tau,-z) & = & \vartheta_z(\tau,z), \\
\vartheta_{z^2}(\tau,-z) & = & -\vartheta_{z^2}(\tau,z), & & \vartheta_{z^3}(\tau,-z) & = & \vartheta_{z^3}(\tau,z),
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\Delta_{-2,1}a_{-2,1}(\tau,(0,z'_2,z'_3)) &= \tfrac{-2\pi^3}{3} \Big[\tfrac{12}{\pi}\tfrac{\eta'(\tau)}{\eta^7(\tau)} i\vartheta^2(\tau,z'_2) - \tfrac{3}{\pi^2\eta(\tau)^6}\vartheta_{z^2}(\tau,z'_2)\vartheta(\tau,z'_2) + \tfrac{3}{\pi^2}\vartheta_z^2(\tau,z'_2)\tfrac{1}{\eta(\tau)^6} \Big], \\
&= -8\pi^3 \times \tfrac{1}{12}\, \varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z'_2),
\end{aligned}$$

d'où (voir le paragraphe 1.1.3) la restriction de $a_{0,1}$ sur l'hyperplan $z_1' = 0$ coïncide avec la fonction $\frac{1}{12}\,\varphi_{0,1}^{(A_1)}$.

Remarque 2.5.2. On a ainsi donné une construction explicite des formes de Jacobi pour le réseau A_2 ayant des propriétés de restriction particulières, dont l'existence a été prouvée par K.Wirthmüller [K].

(iii) Autre exemple de spécialisation et relations avec des formes à une variable classiques.
Voir les notations employées dans le paragraphe 1.1.3.

Proposition 2.5.6.
$24a_{0,1}(\tau,z_1,2z_1) = \varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{0,2}^{(A_1)}(\tau,z_1) - 12\varphi_{0,3}^{(A_1)}(\tau,z_1)$

$48a_{-2,1}(\tau,z_1,2z_1) = \Big(\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^2\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1) - E_4(\tau)\Big(\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^3$

$a_{-3,1}(\tau,z_1,2z_1) = -i\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{-1,2}^{(A_1)}(\tau,z_1)$

Preuve.
(1) D'après la remarque 1.2.4, la forme $f(\tau,z_1) := 24a_{0,1}(\tau,z_1,2z_1)$ appartient à $J_{0,3}^{A_1,f}$ et est à coefficients de Fourier entiers, d'après le corollaire 2.5.1.
D'après la structure du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$ (voir le paragraphe 1.1.3 (c)), la forme f s'écrit donc :

$$f(\tau,z_1) = a\Big(\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^2 + b\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{0,2}^{(A_1)}(\tau,z_1) + c\varphi_{0,3}^{(A_1)}(\tau,z_1)$$

où a, b, c sont des entiers.
Pour obtenir les entiers a, b, c, on utilise l'identification des coefficients $[\ ]_{q^0}$.
D'après le corollaire 2.5.2, avec la notation $y^{\pm k} = e^{2\pi ikz} + e^{-2\pi ikz}$, on obtient :

$$[f(\tau,z_1)]_{q^0} = 18 + 2y^{\pm1} + y^{\pm2},$$

par ailleurs, d'après le paragraphe 1.1.3 on a :
$\Big[a\Big(\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^2 + b\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{0,2}^{(A_1)}(\tau,z_1) + c\varphi_{0,3}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big]_{q^0}$
$= a(10+y^{\pm1})^3 + b(10+y^{\pm1})(4+y^{\pm1}) + c(2+y^{\pm1})$ d'où le résultat :

$$a = 0,\ b = 1,\ c = -12.$$

(2) On procède de façon analogue pour la fonction $f(\tau,z_1) := 48a_{-2,1}(\tau,z_1,2z_1)$.
D'après la remarque 1.2.4, la forme $f(\tau,z_1)$ appartient à $J_{-2,3}^{A_1,f}$.
D'après la structure de l'algèbre bigraduée $J_{\star,\star}^{A_1,f}$, (voir le paragraphe 1.1.3, (b)) f s'écrit donc :

$$f(\tau,z_1) = a\Big(\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^2\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1) + bE_4(\tau)\Big(\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^3$$

où a, b sont des nombres complexes.
On utilise encore la forme des coefficients $[\ ]_{q^0}$:
$[f(\tau,z_1)]_{q^0} = 24(6 - 2y^{\pm1} - y^{\pm2})$
$\Big[\ a\Big(\varphi_{0,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^2\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1) + bE_4(\tau)\Big(\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\Big)^3\ \Big]_{q^0}$
$= (164a + 20b) + (-63a - 15b)y^{\pm1} + (-18a + 6b)y^{\pm2} - (a+b)y^{\pm3}$
d'où le résultat :

$$a = 1,\ b = -1.$$

(3) D'après la définition de $a_{-3,1}$ exprimée à l'aide de la forme ϑ, (voir la proposition-définition 2.5.1), la fonction $f(\tau,z_1) := a_{-3,1}(\tau,z_1,2z_1)$ s'écrit :

$$f(\tau,z_1) = \frac{-i}{\eta(\tau)^9}\vartheta(\tau,z_1)^2\vartheta(\tau,2z_1)$$

d'où, d'après les définitions de $\varphi_{-2,1}^{(A_1)}$ et $\varphi_{-1,2}^{(A_1)}$, voir le paragraphe 1.1.3 :

$$f(\tau,z_1) = -\varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{-1,2}^{(A_1)}(\tau,z_1).$$

(Ceci confirme le fait que d'après la remarque 1.2.4 la forme f appartient à $J_{-3,3}^{A_1,f}$, et s'écrit donc, d'après la structure de l'algèbre bigraduée $J_{\star,\star}^{A_1,f}$:

$$f(\tau,z_1) = a\ \varphi_{-2,1}^{(A_1)}(\tau,z_1)\varphi_{-1,2}^{(A_1)}(\tau,z_1)$$

où a est un nombre complexe.)

(iv) Ecriture à l'aide d'une série thêta de Jacobi

Le but de ce paragraphe est d'écrire les formes $a_{-3,1}$ et $a_{-2,1}$ comme des séries thêta de Jacobi.

Notation 2.5.1. *On note, dans ce paragraphe, Q la forme quadratique et B la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée, définies sur $\mathbb{R}^3$, respectivement par :*

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \ \ B((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' + zz'.$$

On note Θ la série thêta de Jacobi associée au réseau $\mathbb{Z}^3$ et définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^3$ par :

$$\Theta(\tau,\vec{z}) := \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} e^{\pi i\tau Q(\vec{n})}e^{2\pi iB(\vec{n},\vec{z})}.$$

Pour $\vec{a}$, $\vec{b}$ appartenant à $\mathbb{Q}^3$, on pose :

$$\Theta_{\vec{a},\ \vec{b}}(\tau,\vec{z}) := e^{2\pi iB(\vec{a},\vec{z}+\vec{b})}e^{\pi i\tau Q(\vec{a})}\Theta(\tau,\vec{z}+\vec{b}+\tau\vec{a})$$

ou encore :

$$\Theta_{\vec{a},\ \vec{b}}(\tau,\vec{z}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} e^{\pi i\tau Q(\vec{n}+\vec{a})}e^{2\pi iB(\vec{n}+\vec{a},\vec{z}+\vec{b})}.$$

Lemme 2.5.1. *On utilise ici les coordonnées (x,y,z) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $\mathcal{D}$ l'opérateur différentiel défini par :*

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Soient k un entier relatif, m un entier naturel, et ϕ appartenant à $J_{k,m}^{\mathbb{Z}^3,f}$. Alors la fonction $\left(\mathcal{D}\phi\right)$ vérifie :

(1) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Big(\mathcal{D}\phi\Big)\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{\vec{z}}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^k e^{i\pi m\frac{cQ(\vec{z})}{c\tau+d}}\Big[2\pi imc(x+y+z)\phi(\tau,\vec{z})+(c\tau+d)\Big(\mathcal{D}\phi\Big)(\tau,\vec{z})\Big]$$

(2) pour tout $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$ *appartenant à* $\mathbb{Z}^3$,

$$\Big(\mathcal{D}\phi\Big)(\tau,\vec{z}+\vec{\beta}\tau+\vec{\alpha}) = e^{-i\pi m(2B(\vec{\beta},\vec{z})+Q(\vec{\beta})\tau)}\Big[-2\pi im(b_1+b_2+b_3)\phi(\tau,\vec{z})+\Big(\mathcal{D}\phi\Big)(\tau,\vec{z})\Big]$$

(3) si $\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ \vec{l}\in\widetilde{\mathbb{Z}^3}=\mathbb{Z}^3}} c(n,\vec{l})q^n e^{2\pi iB(\vec{z},\vec{l})}$, *alors*

$$\Big(\mathcal{D}\phi\Big)(\tau,\vec{z}) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ \vec{l}=(l_1,l_2,l_3)\in\mathbb{Z}^3}} 2\pi i\ (l_1+l_2+l_3)\ c(n,\vec{l})\ q^n\ e^{2\pi iB(\vec{z},\vec{l})}.$$

Preuve.
La démonstration de ce lemme se fait de façon naturelle en dérivant tour à tour par rapport à chacune des variables les équations fonctionnelles vérifiées par la forme ϕ.

Remarque 2.5.3. D'après ces résultats, si $\vec{z}=(x,y,z)$ vérifie $x+y+z=0$, autrement dit, si $\vec{z}$ appartient à $A_2\otimes\mathbb{C}$, alors $\Big(\mathcal{D}\phi\Big)(\tau,\vec{z})$ vérifie les relations satisfaites par une forme de Jacobi de poids $k+1$, d'indice m, pour le réseau A_2. (Voir la définition 1.1.1.)

Proposition 2.5.7. *Soit* $\vec{h} := \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$.
Les formes $a_{-3,1}$ *et* $a_{-2,1}$ *sont les restrictions à l'hyperplan de* $\mathbb{C}^3$ *d'équation* $x+y+z=0$ *de fonctions définies à l'aide de la série* $\Theta_{\vec{h},\vec{h}}$.
Plus précisément, on a :

$$a_{-3,1}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3) = i\eta(\tau)^{-9}\Big(\Theta_{\vec{h},\vec{h}}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3)\Big)|_{z'_1+z'_2+z'_3=0}$$

$$a_{-2,1}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3) = \frac{1}{2\pi}\eta(\tau)^{-9}\Big(\mathcal{D}\Theta_{\vec{h},\vec{h}}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3)\Big)|_{z'_1+z'_2+z'_3=0}.$$

Preuve.
Pour démontrer cette proposition, il suffit d'écrire l'expression des développements de Fourier des formes $a_{-3,1}$ et $a_{-2,1}$ cités dans la proposition 2.5.4, en utilisant le système de coordonnées (z'_1,z'_2,z'_3), et de remarquer les égalités suivantes :

$$e^{2\pi iB(\vec{n}+\vec{h},\vec{h})} = -ie^{\pi i(n_1+n_2+n_3)},\ \text{pour}\ \vec{n}=(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3,$$

$$\mathcal{D}\Big(e^{2\pi iB(\vec{n}+\vec{h},\vec{z}+\vec{h})}\Big) = 2\pi i\Big(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\Big)e^{2\pi iB(\vec{n}+\vec{h},\vec{z}+\vec{h})}.$$

(v) Développements de Taylor

Dans ce paragraphe, on emploiera l'écriture suivante (voir la proposition 1.2.11) :

$$\widehat{a_{-3,1}}(\tau,z) := \exp(-4\pi^2G_2(\tau) < z,z >)\ a_{-3,1}(\tau,z)\ =\ \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} h_{(k_1,k_2)}(\tau)z_1^{k_1}z_2^{k_2},$$

où le coefficient $h_{(k_1,k_2)}(\tau)$ est une forme modulaire de poids $-3+k_1+k_2$ pour $SL_2(\mathbb{Z})$.

Lemme 2.5.2. *Pour tout couple d'entiers naturels* $(k_1,\, k_2)$ *on a :*

$$h_{(k_1,k_2)}(\tau) = (-1)^{k_1+k_2} h_{(k_2,k_1)}(\tau).$$

Preuve.
On utilise l'égalité $a_{-3,1}(\tau,\sigma_{\alpha_1+\alpha_2}.z) = a_{-3,1}(\tau,z)$, ou encore :

$$a_{-3,1}(\tau,z_1,z_2) = a_{-3,1}(\tau,-z_2,-z_1).$$

La structure connue de $M_\star$ permet d'énoncer les résultats suivants.

Proposition 2.5.8.

si $k_1 \equiv k_2$ *mod* 2	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) = 0$
si $k_1+k_2 < 3$ *ou* $k_1+k_2 = 5$	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) = 0$
si $k_1+k_2 = 3$	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) \in \mathbb{C}$
si $k_1+k_2 \in \{7,\, 9,\, 11,\, 13,\, 17\}$	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{-3+k_1+k_2}(\tau)$
si $k_1+k_2 = 15$	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) \in \mathbb{C}.\Delta(\tau) \oplus \mathbb{C}.E_{12}(\tau)$
si $k_1+k_2 \geq 19$	$h_{(k_1,k_2)}(\tau) \in \mathbb{C}.E_{-3+k_1+k_2}(\tau) \oplus \Delta(\tau) M_{k_1+k_2-15}$

Rappel : la notation $E_j(\tau)$ désigne la série d'Eisenstein classique de poids j. (Voir la notation 2.4.2.)

Proposition 2.5.9. *Pour tous entiers naturels* $l_1,\, l_2$ *tels que* $l_1+l_2 \equiv 1(2)$, *on a :*

$$[h_{(l_1,l_2)}(\tau)]_{q^0} = 2\sum_{k_1=0}^{l_1} \frac{(2i\pi)^{l_1-k_1}}{(l_1-k_1)!}\, c_{k_1,l_2} \;-\; 2\sum_{k_2=0}^{l_2} \frac{(2i\pi)^{l_2-k_2}}{(l_2-k_2)!}\, c_{l_1,k_2}$$
$$+\; 2 \sum_{0\leq k_1\leq l_1,\; 0\leq k_2\leq l_2} \frac{(2i\pi)^{l_1+l_2-k_1-k_2}}{(l_1-k_1)!\;(l_2-k_2)!}(-1)^{l_1-k_1}\; c_{k_1,k_2},$$

où les coefficients c_{k_1,k_2} *sont définis par :*

$$c_{k_1,k_2} = \begin{cases} 0, & si\ k_1+k_2 \equiv 1 \ mod\ 2 \\ \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{(k_1+k_2)/2} \times (1/(\frac{k_1+k_2}{2})!) \times (-1)^{k_2} & \\ \quad \times \displaystyle\sum_{k=0}^{(k_1+k_2)/2} C^k_{(k_1+k_2)/2} C_k^{2k-k_2}, & si\ k_1 \equiv k_2 \ mod\ 2 \end{cases}$$

(La notation C_n^k, $0 \leq k \leq n$ *désigne le nombre* $\frac{n!}{(n-k)!\ k!}$. *)*

Remarque 2.5.4. On peut donner quelques exemples de résultats :

$$h_{1,2}(\tau) = \frac{28i\pi^3}{3}, \quad h_{0,7}(\tau) = 0, \quad h_{1,6}(\tau) = -\frac{4i\pi^7}{45}E_4(\tau).$$

Preuve.
D'après la définition des $h_{(k_1,k_2)}$ on a :
$$[\ \exp(-4\pi^2 G_2(\tau) < z,z >) a_{-3,1}(\tau,z)\ ]_{q^0} = \sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} [h_{(k_1,k_2)}(\tau)]_{q^0} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$
d'où, d'après le développement de Fourier de G_2 et l'égalité $[a_{-3,1}]_{q^0} = P_2 - P_1$,

l'écriture : $\quad e^{\frac{\pi^2}{6}<z,z>}(P_2 - P_1) = \displaystyle\sum_{(k_1,\ k_2)\in\mathbb{N}^2} [\ h_{(k_1,k_2)}(\tau)\ ]_{q^0} z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$

Le terme $[h_{(k_1,k_2)}(\tau)]_{q^0}$ est donc le coefficient de $z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ dans le développement de Taylor de $e^{\frac{\pi^2}{6}<z,z>}(P_2 - P_1)$.

On écrit $e^{\frac{\pi^2}{6}<z,z>} = \displaystyle\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{N}} c_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$, et on obtient le résultat annoncé après avoir calculé explicitement les développements de Taylor de P_1 et P_2 en les variables z_1 et z_2.

Corollaire 2.5.3. *Si l_2 est impair, $[h_{(0,l_2)}(\tau)]_{q^0} = 0$, la forme $h_{(0,l_2)}$ appartient donc à l'espace des formes modulaires cuspidales de poids $l_2 - 3$, c'est à dire $\Delta(\tau) Mod_{l_2-15}$.*
Il en va de même pour les formes $h_{(l_1,0)}$, avec l_1 impair.

Remarque 2.5.5. On pourrait effectuer un raisonnement semblable pour calculer les premiers coefficients de Taylor d'une correction des formes $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$, mais ces coefficients peuvent aussi s'obtenir à l'aide de ceux des formes $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$ donnés dans la remarque 2.4.2, comme on le verra d'après une relation obtenue plus loin (voir la remarque 2.7.4).

(vi) Premiers multiples holomorphes ou cuspidaux

Les formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$ sont des formes de Jacobi faibles.
Dans ce paragraphe, on va chercher par quelles puissances minimales de $\eta(\tau)$ les multiplier pour obtenir des formes holomorphes ou cuspidales, éventuellement avec un système multiplicatif.

Proposition 2.5.10. *Multiples holomorphes ou cuspidaux.*
(1) $\eta(\tau)^8$ est la plus petite puissance de η par laquelle multiplier $a_{0,1}$, respectivement $a_{-2,1}$ ou $a_{-3,1}$, pour obtenir une forme de Jacobi holomorphe.
On a alors :

$$\eta(\tau)^8 a_{0,1} \in J_{4,1}^{W(A_2),hol}(v_\eta^8)$$

$$\eta(\tau)^8 a_{-2,1} \in J_{2,1}^{W(A_2),hol}(v_\eta^8)$$

$$\eta(\tau)^8 a_{-3,1} \in J_{1,1}^{W(A_2),hol}(v_\eta^8)$$

(2) $\eta(\tau)^9$ est la plus petite puissance de η par laquelle multiplier $a_{0,1}$, respectivement $a_{-2,1}$ ou $a_{-3,1}$, pour obtenir une forme de Jacobi cuspidale.
On a alors :

$$\eta(\tau)^9 a_{0,1} \in J_{9/2,1}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^9)$$

$$\eta(\tau)^9 a_{-2,1} \in J_{5/2,1}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^9)$$

$$\eta(\tau)^9 a_{-3,1} \in J_{3/2,1}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^9)$$

(3) si k est un entier supérieur à 9, les formes $\eta(\tau)^k a_{0,1}$, $\eta(\tau)^k a_{-2,1}$, et $\eta(\tau)^k a_{-3,1}$ sont cuspidales.

Preuve.
On considère d'abord le cas de la forme $a_{-3,1}$.
Soit k un entier naturel.
On rappelle (voir le paragraphe 1.1.3) que la fonction η de Dedekind est définie par :

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n).$$

La fonction $\eta(\tau)^k$ se met donc sous la forme :

$$\eta(\tau)^k = q^{\frac{k}{24}} \ (1 + \sum_{j \geq 1, j \in \mathbb{N}} a_j q^j)$$

où les a_j sont des nombres entiers.
On a alors :
$\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z) = q^{\frac{k}{24}}[a_{-3,1}]_{q^0} + q^{1+\frac{k}{24}}(\ldots)$
la parenthèse $(\ldots)$ ne comportant pas de puissance négative de q.

On écrit encore :
$\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z) = \sum_{n,l} f(n,l) q^n e^{2i\pi<z,l>}$.

Notons $c(n,l)$ les coefficients de Fourier de $a_{-3,1}$, on a alors :

$$f\left(\frac{k}{24},l\right) = c(0,l).$$

Or, $[a_{-3,1}]_{q^0} = P_2 - P_1$, donc $c(0,\lambda_1)$ est non nul, donc le coefficient $f(\frac{k}{24},\lambda_1)$ est non nul. Donc, si $\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z)$ est holomorphe, respectivement cuspidale, la norme hyperbolique $2\frac{k}{24} - < \lambda_1, \lambda_1 >$ est positive ou nulle, respectivement strictement positive, ce qui donne k supérieur ou égal à 8, respectivement strictement supérieur à 8.

Il reste à vérifier que $\eta(\tau)^8 a_{-3,1}$ et $\eta(\tau)^9 a_{-3,1}$ sont effectivement respectivement holomorphe et cuspidale.

On utilise pour cela l'expression de $a_{-3,1}$ donnée dans la proposition 2.5.4 :

$$a_{-3,1}(\tau,z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)^{-9}$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))} \zeta_1^{n_1-n_2} \zeta_2^{n_2-n_3} \ .$$

On peut donc écrire $\eta(\tau)^k a_{-3,1}$ sous la forme :

$$\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z) = q^{k/24} \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)^{k-9}$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))} \zeta_1^{n_1-n_2} \zeta_2^{n_2-n_3}$$

ou encore

$$\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z) = q^{k/24} [\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j q^j]$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))} \zeta_1^{n_1-n_2} \zeta_2^{n_2-n_3} \ ,$$

où les b_j sont des nombres entiers.

Si le coefficient de Fourier $f(n,l)$ de $\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z)$ est non nul, c'est donc qu'il existe un entier naturel j, des entiers relatifs n_1, n_2 et n_3 tels que :

$$\frac{k}{24} + j + \frac{1}{2}(n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) + n_3(n_3+1)) = n,$$

$$n_1 - n_2 = l_1 \quad \text{et } n_2 - n_3 = l_2,$$

où les entiers l_1 et l_2 sont définis par $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$.

Ainsi il existe un entier naturel j et un entier relatif n_2 tels que :
$3n_2^2 + n_2(3 + 2l_1 - 2l_2) + l_1 + l_1^2 - l_2 + l_2^2 + 2\frac{k}{24} + 2j - 2n = 0$.
Il existe donc un entier naturel j tel que le discriminant de ce polynôme du second degré en n_2 soit positif ou nul. Pour j fixé, le calcul du discriminant de ce polynôme, effectué en tenant compte de l'égalité $< l,l >= \frac{2}{3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)$, donne :

$$\Delta = 9 - k + 12(2n- < l,l >) - 24j.$$

On peut donc conclure que si le coefficient de Fourier $f(n,l)$ de la forme $\eta(\tau)^k a_{-3,1}(\tau,z)$ est non nul, il existe un entier naturel j, tel que :

$$2n- < l,l > \geq 2j + \frac{k-9}{12},$$

ou encore qu'on a l'inégalité : $2n- < l,l > \geq \frac{k-9}{12}$.

Supposons $k = 8$.
Soient n et l tels que $f(n,l)$ soit non nul.
On a donc : $2n- < l,l > \geq \frac{-1}{12}$.
Or $3(2n- < l,l >) = 6n - 2(\ l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2\ )$ appartient à $2\mathbb{Z}$, (car les l_i sont des entiers et n est de la forme $\frac{8}{24} + j + \frac{1}{2}(n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) + n_3(n_3+1))$ où j, n_1, n_2, n_3 sont aussi des entiers) donc $2n- < l,l >$ est en fait positif ou nul.
On en conclut que la forme $\eta(\tau)^8 a_{-3,1}(\tau,z)$ est bien holomorphe.

Si $k > 9$, alors si $f(n,l)$ est non nul, on a $2n- < l,l > > 0$, la forme est bien cuspidale.

Supposons maintenant $k = 9$.
Soient n et l tels que $f(n,l)$ soit non nul.
On a donc : $2n- < l,l > \geq 0$.
Mais peut-on avoir simultanément $f(n,l)$ non nul et $2n- < l,l >= 0$?
La réponse est non : on a vu que si $f(n,l)$ est non nul, alors n est de la forme $\frac{9}{24} + j + \frac{1}{2}(n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) + n_3(n_3+1))$ où j, n_1, n_2, n_3 sont des entiers, donc n appartient à $\frac{9}{24} + \mathbb{Z}$, par ailleurs $< l,l >$ appartient à $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$, donc $2n$ et $< l,l >$ ne peuvent être égaux.
Finalement, si $f(n,l)$ est non nul, alors $2n- < l,l >$ est strictement positif.
La forme $\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)$ est bien cuspidale.

Les cas des formes $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ se traitent de la même façon.
En effet, les coefficients de Fourier $c(\ 0,\lambda_1)$ de chacune de ces deux formes sont également non nuls, donc le coefficient de Fourier $f(\frac{k}{24},\lambda_1)$ de chacune des formes $\eta(\tau)^k a_{0,1}(\tau,z)$ et $\eta(\tau)^k a_{-2,1}(\tau,z)$ est non nul, ce qui force k à être supérieur ou égal à 8, respectivement strictement supérieur à 8, si la forme $\eta(\tau)^k a_{i,1}(\tau,z)$ est holomorphe, respectivement cuspidale.

Comme dans le cas de $a_{-3,1}$, on utilise les écritures de la proposition 2.5.4 pour montrer qu'effectivement (pour i dans $\{0,2\}$) $\eta(\tau)^k a_{i,1}(\tau,z)$ avec $k=8$, respectivement $k=9$, est une forme holomorphe, respectivement cuspidale.
Dans chacun de ces cas, on montre que si le coefficient de Fourier $f(n,l)$ de $\eta(\tau)^k a_{i,1}(\tau,z)$ est non nul, alors il existe un entier naturel j' et des entiers relatifs n_1, n_2 et n_3 tels que $\frac{k}{24}+j'+\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))=n$, $n_1-n_2=l_1$ et $n_2-n_3=l_2$, où les entiers l_1 et l_2 sont définis par $l=l_1\lambda_1+l_2\lambda_2$.
On obtient donc la même condition sur n et l si $f(n,l)$ est non nul :

$$2n- < l,l > \geq \frac{k-9}{12},$$

et n appartient encore à $\frac{k}{24}+\mathbb{Z}$, tandis que $< l,l >$ appartient toujours à $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$.
Ainsi, en tenant le même raisonnement que précédemment, on conclut que la forme $\eta(\tau)^8 a_{i,1}(\tau,z)$ est holomorphe et que $\eta(\tau)^9 a_{i,1}(\tau,z)$ est cuspidale.

2.6 Résultat de K.Wirthmüller : structure de l'algèbre bigraduée $J_{\star,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{C}}$

Notation 2.6.1. *On emploie les notations suivantes :*

$$M_\star = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\, M_k \qquad J_{k,\star}^{W(A_2),f} = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} J_{k,m}^{W(A_2),f}$$

$$J_{\star,\star}^{W(A_2),f} = \oplus_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2} J_{k,m}^{W(A_2),f} \qquad J_{\star,m}^{W(A_2),f} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} J_{k,m}^{W(A_2),f}$$

Proposition 2.6.1. *Résultat de structure donné par K.Wirthmüller.*
Il existe trois formes de Jacobi faibles, $W(A_2)$-invariantes, d'indice 1, de poids respectifs 0, -2, et -3, algébriquement indépendantes sur l'espace des formes modulaires $M_\star$, et telles que toute forme de Jacobi faibles, $W(A_2)$-invariante, s'écrive comme un polynôme en ces trois formes, à coefficients dans $M_\star$.

K.Wirthmüller, dans son article [W], démontre ce résultat d'existence dans le cadre d'une approche différente des formes de Jacobi, faisant appel à des raisonnements de cohomologie.

On peut donner ici une description explicite des formes dont K.Wirthmüller a démontré l'existence, et redémontrer par une autre méthode ce résultat de structure.

Proposition 2.6.2. *Structure de l'algèbre bigraduée.*
(1) Les formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ sont algébriquement indépendantes sur $M_\star$.
(2) La structure de l'algèbre bigraduée $J_{\star,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{C}}$ est donnée par :

$$J_{\star,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{C}} = M_\star[a_{0,1},\, a_{-2,1},\, a_{-3,1}].$$

Preuve.
(1) Montrons d'abord que tout polynôme homogène $P(T_1,T_2,T_3)$ à coefficients dans $M_\star$, vérifiant $P(a_{0,1},\, a_{-2,1},\, a_{-3,1})=0$, est nul.
On raisonne par l'absurde.
Soit P un polynôme homogène non nul de degré minimal $m_0>0$ tel que

$$P(a_{0,1},\, a_{-2,1},\, a_{-3,1})=0.$$

On écrit P sous la forme :

$$P(T_1,T_2,T_3) = \sum_{\substack{r,s,t \in \mathbf{N} \\ r+s+t=m_0}} a_{r,s,t} T_1^r T_2^s T_3^t$$

où les coefficients $a_{r,s,t}$ sont dans $M_\star$.

Evaluons $P(a_{0,1},\ a_{-2,1},\ a_{-3,1})$ en $(\tau\ ,\ 0,\ z_2)$ (c'est à dire sur l'hyperplan $z'_1\ =\ 0$), en utilisant les propriétés des restrictions à cet hyperplan des formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$ données à la proposition 2.5.3.
On obtient : $0 = \sum_{\substack{r,s \in \mathbf{N} \\ r+s=m_0}} a_{r,s,0}(\frac{1}{12}\varphi_{0,1}^{(A_1)})^r(-\varphi_{-2,1}^{(A_1)})^s$.
Or les formes $\varphi_{0,1}^{(A_1)}$ et $\varphi_{-2,1}^{(A_1)}$ sont algébriquement indépendantes sur $M_\star$ (voir le paragraphe 1.1.3), donc pour tout (r,s) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $r+s=m_0$, $a_{r,s,0}$ est nul.
Ainsi $P(T_1,T_2,T_3) = T_3\ Q(T_1,T_2,T_3)$, où Q est un polynôme homogène de degré $m_0 - 1$, à coefficients dans $M_\star$, non nul, vérifiant $Q(a_{0,1},\ a_{-2,1},\ a_{-3,1}) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité de m_0.
Finalement, tout polynôme homogène $P(T_1,T_2,T_3)$ à coefficients dans $M_\star$, vérifiant la condition $P(a_{0,1},\ a_{-2,1},\ a_{-3,1}) = 0$, est nul.

. Considérons maintenant un polynôme arbitraire $P(T_1,T_2,T_3)$ à coefficients dans $M_\star$, non nul, vérifiant $P(a_{0,1},\ a_{-2,1},\ a_{-3,1}) = 0$.
On se ramène au cas précédent en écrivant P comme une somme de polynômes homogènes et en utilisant le fait que $J_{\star,\star}^{W(A_2)}$ est la somme directe sur les indices k et m des espaces $J_{k,m}^{W(A_2)}$. On obtient alors la nullité du polynôme P.

(2) On démontre par récurrence sur m la propriété $\mathcal{P}_m$ suivante :

$$\mathcal{P}_m : \Phi \in J_{\star,m}^{W(A_2),f,\mathbb{C}} \Rightarrow \Phi \in M_\star[a_{0,1},\ a_{-2,1},\ a_{-3,1}].$$

. La propriété $\mathcal{P}_0$ est immédiate d'après la remarque 1.1.4 : une forme de Jacobi d'indice nul est une forme modulaire pour $SL_2(\mathbb{Z})$, donc un polynôme (constant) en les formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ à coefficients dans $M_\star$.

. Supposons $\mathcal{P}_0,\ \ldots,\ \mathcal{P}_{m-1}$ vraies et montrons $\mathcal{P}_m$.
Soit Φ appartenant à $J_{\star,m}^{W(A_2),f,\mathbb{C}}$. On notera k le poids de Φ.
- Si k est pair, on pose $\varphi(\tau,z_2) := \Phi(\tau,0,z_2)$.
Alors φ est une forme de Jacobi faible à une variable, de poids pair, donc un polynôme en les formes $\varphi_{0,1}^{(A_1)}$, $\varphi_{-2,1}^{(A_1)}$ à coefficients dans $M_\star$, (voir le paragraphe 1.1.3) que l'on écrit $P(\varphi_{0,1}^{(A_1)},\ \varphi_{-2,1}^{(A_1)})$. On pose :

$$\Phi' := \Phi - P(12a_{0,1},\ -a_{-2,1}).$$

Alors Φ' est un élément de $J_{\star,m}^{W(A_2),f,\mathbb{C}}$ et sa restriction à l'hyperplan $z'_1 = 0$ est nulle .

- Si k est impair, Φ est nulle sur l'hyperplan $z'_1 = 0$.
En effet, d'une part, $\Phi(\tau,-z) = -\Phi(\tau,z)$ donc $\Phi(\tau,(0\ ,z'_2\ ,-z'_2)) = -\Phi(\tau,(0,-z'_2\ ,\ z'_2))$,

et d'autre part, par $W(A_2)$-invariance, $\Phi(\tau,(0,z'_2\ ,-z'_2)) = \Phi(\tau,(0,-z'_2\ ,z'_2))$, d'où $\Phi(\tau,(0,z'_2,-z'_2)) = 0$. On pose :

$$\Phi' := \Phi.$$

Dans les deux cas, par $W(A_2)$-invariance, Φ' est également nulle sur les hyperplans $z'_2 = 0$ et $z'_3 = 0$, donc Φ' est divisible par la forme $a_{-3,1}$, dont les seuls zéros sont les points des hyperplans $z'_j = 0$.

On constate, en vérifiant les puissances de q de son développement de Fourier, que la fonction $\Phi'/a_{-3,1}$ appartient bien à $J^{W(A_2),f,\mathbb{C}}_{\star,m-1}$, d'après la forme produit de la fonction $a_{-3,1}$. (Voir la proposition-définition 2.5.1.)

D'après $\mathcal{P}_{m-1}$, la forme $\Phi'/a_{-3,1}$ est donc un polynôme en les formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ à coefficients dans $M_\star$. Il en va donc de même pour Φ' et finalement pour Φ. Ainsi $\mathcal{P}_m$ est établie, et la proposition est démontrée.

Remarque 2.6.1. Les formes $a_{-2,1}$ et $a_{0,1}$ sont entièrement déterminées par leurs restrictions respectives aux hyperplans $z'_j = 0$, car, d'une part si une forme est nulle sur les trois hyperplans $z'_1 = 0$, $z'_2 = 0$, $z'_3 = 0$, alors elle est divisible dans $J^{f,W(A_2)}_{\star,\star}$ par la forme $a_{-3,1}$, et d'autre part les espaces $J^{f,W(A_2)}_{3,0}$ et $J^{f,W(A_2)}_{1,0}$ sont réduits à l'espace $\{0\}$, d'après la structure de $J^{f,W(A_2)}_{\star,\star}$ donnée par la proposition 2.6.2.

Remarque 2.6.2.
M.Bertola, voir [Be], propose une autre construction des générateurs de l'algèbre bigraduée $J^{W(A_2),f,\mathbb{C}}_{\star,\star}$. Il introduit une fonction génératrice (voir la proposition 1.5 et le théorème 1.4 de son article) et exploite les propriétés de la fonction $\wp$ de Weierstrass (voir par exemple [WW]).
Il obtient (dans l'exemple 1.2) les formes $a_{-2,1}$ et $a_{0,1}$ comme des multiples constants des fonctions :

$$\phi_2(\tau,z'_1,z'_2,z'_3) = a_{-3,1}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3)\ \frac{\wp'(\tau,z'_1) - \wp'(\tau,z'_2)}{\wp(\tau,z'_1) - \wp(\tau,z'_2)}$$

$$\phi_0(\tau,z'_1,z'_2,z'_3) = a_{-3,1}(\tau,z'_1,z'_2,z'_3)\ \frac{\wp(\tau,z'_1)\wp'(\tau,z'_2) - \wp'(\tau,z'_1)\wp(\tau,z'_2)}{\wp(\tau,z'_2) - \wp(\tau,z'_1)}$$

où la notation $\wp'$ désigne $\frac{\partial\wp}{\partial z}\ (\tau,z)$.

2.7 Corollaires : structures de sous-espaces

2.7.1 Structure de $J^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}_{0,\star}$

Notation 2.7.1. *La notation $J^{W(A_2),f,R}_{k,m}$, où R est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, désigne l'ensemble des formes de Jacobi appartenant à $J^{W(A_2),f}_{k,m}$, à coefficients de Fourier dans R.*

Proposition 2.7.1. *Structure sur $\mathbb{Q}$ de $J^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}_{0,\star}$.*
On pose :

$$\varphi_1 := a_{0,1} \qquad \varphi_2 := E_4 a^2_{-2,1}$$
$$\varphi_3 := E_6 a^2_{-3,1} \qquad \varphi_4 := E_4^2 a_{-2,1} a^2_{-3,1}$$
$$\varphi_5 := E_6 a^3_{-2,1} \qquad \varphi_6 := E_4^3 a^4_{-3,1}$$

(Voir la notation 2.4.2, et les propositions-définitions 2.5.3, 2.5.2, 2.5.1.) Alors :
(1)
$$J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ \varphi_6].$$
(2) Les formes φ_1, φ_2, φ_3 et φ_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et on a les relations :

$$\varphi_4^2 = \varphi_6 \times \varphi_2\ ,\quad \varphi_2^2 \times \varphi_3 = \varphi_4 \times \varphi_5\ ,\quad (\ \varphi_2^3 \times \varphi_3^2 = \varphi_5^2 \times \varphi_6\ ).$$

Preuve.
En utilisant les propriétés des formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$, E_4 et E_6, on vérifie que les formes φ_k introduites appartiennent bien à $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$.

Pour démontrer la première partie de cette proposition, on procède par récurrence sur l'indice m.

Le cas des formes d'indice nul est trivial : $J_{0,0}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, puisqu'une forme de Jacobi de poids et d'indice nuls est une constante.

Soit m un entier naturel non nul.
Supposons que toute forme de Jacobi faible $W(A_2)$-invariante, à coefficients rationnels, de poids nul et d'indice inférieur ou égal à $m-1$ appartient à $\mathbb{Q}[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ \varphi_6]$, et montrons qu'il en va de même pour une forme d'indice m.
Soit Φ une forme appartenant à $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$.

D'après la proposition 2.6.2, la forme Φ s'écrit :

$$(\star)\ \Phi = \sum_{\substack{r,\ s,\ t \geq 0 \\ r+s+t=m}} \ \sum_{\substack{i,\ j \geq 0 \\ 4i+6j=2s+3t}} a_{(i,j)}^{(s,t)} E_4^i E_6^j a_{0,1}^r a_{-2,1}^s a_{-3,1}^t,$$

où les $a_{(i,j)}^{(s,t)}$ appartiennent à $\mathbb{C}$.

Cette écriture est unique, puisque $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ sont algébriquement indépendants sur $M_\star$ (toujours d'après la proposition 2.6.2), et que E_4 et E_6 le sont sur $\mathbb{C}$. (Voir le rappel fait dans la notation 2.4.2.)

Or Φ, $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ ainsi que E_4 et E_6 sont à coefficients de Fourier rationnels (voir le corollaire 2.5.1), donc les coefficients $a_{(i,j)}^{(s,t)}$ sont également rationnels (en tant qu'unique solution du système (inversible) à coefficients rationnels obtenu par identification des coefficients de Fourier de chaque membre de l'égalité $(\star)$).

Montrons maintenant qu'un élément $E_4^i E_6^j a_{0,1}^r a_{-2,1}^s a_{-3,1}^t$ apparaissant dans cette somme (et noté $f_{i,\ j,\ r,\ s,\ t}$) est divisible dans $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$ par l'une des formes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$.

Si $t=0$ alors $r+s=m$, et si $s=0$ alors $f_{i,\ j,\ r,\ s,\ t}$ est divisible par $a_{0,1}^m$,
sinon $1 \leq s = 2i+3j$ donc $s \geq 2$, alors, si $i=0$, $s \geq 3$, donc φ_5 divise $f_{i,\ j,\ r,\ s,\ t}$,
mais si $i \geq 1$, alors φ_2 divise $f_{i,\ j,\ r,\ s,\ t}$.

Si t est non nul, alors t est pair donc supérieur ou égal à 2, supposons que φ_1, φ_5, et φ_2 n'apparaissent pas dans l'écriture de $f_{i,\ j,\ r,\ s,\ t}$, alors $r=0$ et ($j=0$ ou $s<3$) et ($i=0$ ou $s<2$).

Le cas $r=0$, $i=j=0$ est exclu.
Si $r=0$, $j=0$, $s=0$, alors $4i=3t$ d'où $i\geq 3$, $t\geq 4$, et φ_6 divise $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$.
Si $r=0$, $j=0$, $s=1$, alors $4i=2+3t\geq 8$ d'où $i\geq 2$, et φ_4 divise $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$.
Si $r=0$, $i=0$, $s<3$, alors $6j=2s+3t\geq 6$ d'où $j\geq 1$, et φ_3 divise $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$.
Enfin, suivant le même principe, si $r=0$, $s<3$, $s<2$, on obtient la divisibilité de $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$ par φ_3, φ_6, ou φ_4.

La fonction $g^{(k)}_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}=\frac{f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}}{\varphi_k}$ obtenue après division de $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$ par la forme φ_k est bien à coefficients de Fourier rationnels, puisque $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$ et φ_k le sont.
La fonction $g^{(k)}_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$ appartient alors à $J^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}_{0,m'}$, où m' est un entier naturel inférieur ou égal à $m-1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions du type $g^{(k)}_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$ obtenues appartiennent alors à $\mathbb{Q}[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6]$, et on en déduit qu'il en va de même des formes $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$.
Finalement, la fonction Φ, en tant que combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de fonctions $f_{i,\,j,\,r,\,s,\,t}$, appartient elle aussi à $\mathbb{Q}[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6]$, la récurrence est donc établie, la première partie du théorème est démontrée :

$$J^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}_{0,\star}=\mathbb{Q}[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6].$$

(2) Les relations annoncées sont évidentes d'après la définition des formes φ_j.

Il reste à montrer l'indépendance algébrique de φ_1, φ_2, φ_3 et φ_6 sur $\mathbb{Q}$.
Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ vérifiant

$$P(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_6)=0.$$

On peut écrire :
$P(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_6)=\sum_{i,\,j,\,k,\,l\in\mathbb{N}} u_{i,\,j,\,k,\,l}\varphi_1^i\varphi_2^j\varphi_3^k\varphi_6^l=0$, avec $u_{i,\,j,\,k,\,l}$ dans $\mathbb{Q}$,

ou encore :

$$P(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_6)=\sum_{m\in\mathbb{N}}\ \sum_{\substack{i,\,j,\,k,\,l\,\in\,\mathbb{N}\\ i+2j+2k+4l=m}} u_{i,\,j,\,k,\,l}\varphi_1^i\varphi_2^j\varphi_3^k\varphi_6^l=0.$$

Pour chaque entier m fixé distinct, la somme

$$\sum_{\substack{i,\,j,\,k,\,l\,\in\,\mathbb{N}\\ i+2j+2k+4l=m}} u_{i,\,j,\,k,\,l}\varphi_1^i\varphi_2^j\varphi_3^k\varphi_6^l$$

appartient à $J^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}_{0,m}$, donc est nulle (on utilise ici la structure graduée de l'algèbre $J^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}_{0,\star}$), d'où, pour tout m fixé,

$$\sum_{\substack{i,\,j,\,r\,\in\,\mathbb{N}\\ i+2j+r=m}}\ \sum_{\substack{k,\,l\,\in\,\mathbb{N}\\ 2k+4l=r}} u_{i,\,j,\,k,\,l}a^i_{0,1}a^{2j}_{-2,1}a^r_{-3,1}E_4^{j+3l}E_6^k=0.$$

D'après l'indépendance algébrique de $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ sur $M_\star$, on obtient, pour tout m, et pour tout i, j, r tels que $i+2j+r=m$,

$$\sum_{k,l,\ 2k+4l=r} u_{i,\,j,\,k,\,l}E_4^{j+3l}E_6^k=0,$$

d'où finalement $u_{i,\ j,\ k,\ l} = 0$ pour tout i, j, k, l, car les formes E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.
Ainsi le polynôme P est le polynôme nul, et les formes φ_1, φ_2, φ_3 et φ_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Le résultat annoncé est démontré.

Remarque 2.7.1. Structure sur $\mathbb{C}$.
On a le même résultat sur le corps des nombres complexes :

$$J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{C}} = \mathbb{C}[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ \varphi_6]$$

Les formes φ_1, φ_2, φ_3 et φ_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$ et on a les relations :

$$\varphi_4^2 = \varphi_6 \times \varphi_2 \ , \quad \varphi_2^2 \times \varphi_3 = \varphi_4 \times \varphi_5 \ , \quad (\ \varphi_2^3 \times \varphi_3^2 = \varphi_5^2 \times \varphi_6\ ).$$

2.7.2 Structure de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}(q)$

Notation 2.7.2. *On note $J_{0,\star}^{W(A_2),f,R}(q)$ l'ensemble des formes Φ appartenant à $J_{0,\star}^{W(A_2),f,R}$ telles que $[\Phi]_{q^0} = 0$.*

Proposition 2.7.2. *Structure de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}(q)$.*
On pose :

$$\xi_{0,4} := \Delta(\tau)a_{-3,1}^4 = \frac{1}{1728}(\varphi_6 - \varphi_3^2),$$
$$\xi_{0,5} := \Delta(\tau)a_{-2,1}^3 a_{-3,1}^2 = \frac{1}{1728}(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3\varphi_5),$$
$$\xi_{0,6} := \Delta(\tau)a_{-2,1}^6 = \frac{1}{1728}(\varphi_2^3 - \varphi_5^2)$$

(1) $\xi_{0,j}$ appartient à $J_{0,j}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q)$ et on a, pour tout entier naturel m :

$$J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q) = \xi_{0,4}\ .\ J_{0,m-4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}\ +\ \xi_{0,5}\ .\ J_{0,m-5}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}\ +\ \xi_{0,6}\ .\ J_{0,m-6}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}.$$

En particulier :

$J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q) = \{0\}$, *si* $m < 4$,

$J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q) = \mathbb{Q}\ .\ \xi_{0,4}$

$J_{0,5}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q) = \mathbb{Q}\ .\ \xi_{0,5}\ \oplus\ \xi_{0,4}\ .\ J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$

(2) On a, dans $J_{0,10}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q)$, la relation suivante :

$$\xi_{0,6}\ \times\ \xi_{0,4}\ =\ \xi_{0,5}^2.$$

(3) Les formes $\xi_{0,6}$ et $\xi_{0,4}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Preuve.
Il est facile de vérifier que chaque forme $\xi_{0,j}$ appartient effectivement à $J_{0,j}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q)$.
Soit m un entier naturel non nul fixé. Un élément Φ de $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q)$ est divisible par $\Delta(\tau)$ et Φ/Δ appartient à $J_{-12,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$. Comme dans le paragraphe précédent, la fonction

Φ s'écrit donc comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de fonctions du type $\Delta(\tau)\ g_{s,t}(\tau)\ a_{0,1}^{m-s-t} a_{-2,1}^{s} a_{-3,1}^{t}$, où $g_{s,\ t}$ est une forme modulaire de poids $-12+2s+3t$, à coefficients de Fourier rationnels.
Comme précédemment, on étudie les termes $g_{s,t} a_{0,1}^{m-s-t} a_{-2,1}^{s} a_{-3,1}^{t}$ non nuls, suivant la valeur des indices s et t.
Si $t=0$, alors $s \geq 6$, et la forme $\Delta(\tau) g_{s,t} a_{0,1}^{m-s-t} a_{-2,1}^{s} a_{-3,1}^{t}$ est divisible dans $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$ par la fonction $\Delta(\tau) a_{-2,1}^{6} = \xi_{0,6}$.
Si $t \geq 4$, alors $\Delta(\tau) g_{s,t} a_{0,1}^{m-s-t} a_{-2,1}^{s} a_{-3,1}^{t}$ est divisible dans $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$ par $\Delta(\tau) a_{-3,1}^{4} = \xi_{0,4}$.
Si $t=2$, alors $s \geq 3$, et $\Delta(\tau) g_{s,t} a_{0,1}^{m-s-t} a_{-2,1}^{s} a_{-3,1}^{t}$ est divisible dans $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$ par la fonction $\Delta(\tau) a_{-2,1}^{3} a_{-3,1}^{2} = \xi_{0,5}$.
Ceci permet d'obtenir l'affirmation (1).

La relation (2) est triviale d'après les définitions des formes $\xi_{0,6}$, $\xi_{0,4}$ et $\xi_{0,5}$.

L'assertion (3) est une conséquence immédiate de l'indépendance algébrique de $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$ sur $M_\star$.

Remarque 2.7.2. Structure sur $\mathbb{C}$.
On obtient le même résultat sur le corps des nombres complexes :
pour tout entier naturel m :

$$J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q) = \xi_{0,4}\ .\ J_{0,m-4}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}\ +\ \xi_{0,5}\ .\ J_{0,m-5}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}\ +\ \xi_{0,6}\ .\ J_{0,m-6}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}.$$

2.7.3 Structure de $J_{\star,1}^{A_2,hol}$ et de $J_{\star,1}^{A_2,cusp}$

Remarque 2.7.3. On peut rappeler que les formes de Jacobi d'indice 1 définies pour le réseau A_2 sont toutes $W(A_2)$-invariantes, voir le corollaire 2.3.2.
On notera $J_{\star,1}^{A_2,hol}$ l'espace vectoriel complexe des formes de Jacobi holomorphes d'indice 1, à coefficients de Fourier dans $\mathbb{C}$, et $J_{\star,1}^{A_2,cusp}$ celui des formes de Jacobi cuspidales d'indice 1, à coefficients de Fourier dans $\mathbb{C}$.

Lemme 2.7.1. *Deux exemples primordiaux.*
Les séries d'Eisenstein $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$ appartiennent respectivement à $J_{4,1}^{A_2,hol}$ et $J_{6,1}^{A_2,hol}$ et vérifient les relations :

$$\begin{aligned} E_{4,1}^{(A_2)} &= E_4\ a_{0,1}\ +\ \frac{1}{12} E_6\ a_{-2,1}, \\ E_{6,1}^{(A_2)} &= E_6\ a_{0,1}\ +\ \frac{1}{12} E_8\ a_{-2,1}. \end{aligned}$$

Preuve.
Les séries d'Eisenstein $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$, d'après le paragraphe 1.2.7, sont des formes de Jacobi holomorphes, $W(A_2)$-invariantes, de coefficient $[\ ]_{q^0}$ égal à 1, d'indice 1 et de poids respectifs 4 et 6. En particulier, ce sont des formes faibles, de poids pair et d'indice 1, et d'après la proposition 2.6.2, on peut donc les exprimer à l'aide de $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} E_{4,1}^{(A_2)} &= a\ E_4\ a_{0,1}\ +\ bE_6\ a_{-2,1}, \\ E_{6,1}^{(A_2)} &= c\ E_6\ a_{0,1}\ +\ dE_8\ a_{-2,1}, \end{aligned}$$

où a, b, c, d sont des constantes, que l'on détermine par identification des coefficients $[\ ]_{q^0}$ (voir les propositions-définitions 2.5.3 et 2.5.2). On obtient :

$$1 = \frac{a}{24}(18 + P_1 + P_2) + \frac{b}{2}(6 - P_1 - P_2)$$

$$1 = \frac{c}{24}(18 + P_1 + P_2) + \frac{d}{2}(6 - P_1 - P_2)$$

d'où finalement : $a = 1$, $b = \frac{1}{12}$, $c = 1$, $d = \frac{1}{12}$.

Corollaire 2.7.1. *(Voir la notation 2.4.2.)*

$$a_{0,1} = \frac{1}{1728}\frac{E_4^2 E_{4,1}^{(A_2)} - E_6 E_{6,1}^{(A_2)}}{\Delta},$$

$$a_{-2,1} = \frac{1}{144}\frac{E_4 E_{6,1}^{(A_2)} - E_6 E_{4,1}^{(A_2)}}{\Delta}.$$

Remarque 2.7.4. Grâce aux formules liant les formes $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ aux séries $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$, on peut obtenir, à partir des développements de Taylor des corrections $\widehat{E_{4,1}^{(A_2)}}$ et $\widehat{E_{6,1}^{(A_2)}}$ (voir la remarque 2.4.2), les développements de Taylor des corrections $\widehat{a_{0,1}}$ et $\widehat{a_{-2,1}}$.

Proposition 2.7.3. *Structure de $J_{\star,1}^{A_2,hol}$.*
Pour tout entier k on a :

$$J_{k,1}^{A_2,hol} = M_{k-4}\, E_{4,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-6}\, E_{6,1}^{(A_2)} \oplus S_{k+3}\, a_{-3,1},$$

où $M_{k'}$ est l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k', éventuellement réduit à $\{0\}$, et $S_{k'}$ celui des formes modulaires cuspidales (encore appelées paraboliques) de poids k', lui aussi éventuellement réduit à $\{0\}$.

Preuve.
Soit k un entier impair.
Soit Φ appartenant à $J_{k,1}^{A_2,hol}$. A fortiori, Φ est une forme faible, d'indice 1, de poids impair k, donc s'écrit $\Phi(\tau,z) = f(\tau) \times a_{-3,1}(\tau,z)$, où f est une forme modulaire de poids $k+3$, d'après la structure de l'espace des formes de Jacobi faibles.
Si $k < -3$, ou $k = -1$, $J_{k,1}^{A_2,hol} = \{0\}$.
Si $k = -3$, alors $M_{k+3} = \mathbb{C}$, or $a_{-3,1}^{(A_2)}$ est une forme faible non holomorphe (le coefficient de Fourier $c(0,\lambda_1)$, c'est à dire le coefficient de $q^0\zeta_1$ est non nul alors que $2\times 0- < \lambda_1,\lambda_1 >$ est strictement négatif), donc $J_{k,1}^{A_2,hol} = \{0\}$.
Si $4 \le k+3 < 12$, $M_{k+3} = \mathbb{C}E_{k+3}$, où $E_{k+3}(\tau)$ est la série d'Eisenstein de poids $k+3$. Or $[E_{k+3}]_{q^0} = 1$, donc la forme faible $E_{k+3}(\tau) \times a_{-3,1}(\tau,z)$ n'est pas holomorphe (Il suffit de même de considérer le coefficient $c(0,\lambda_1)$.)
Donc $J_{k,1}^{A_2,hol} = \{0\}$.
Si $k+3 \ge 12$, $M_{k+3} = \mathbb{C}E_{k+3} \oplus S_{k+3}$, (et $S_{k+3} = \Delta(\tau).M_{k-9}$). La forme $f(\tau)$ s'écrit donc $f(\tau) = g(\tau) + \lambda E_{k+3}(\tau)$, avec λ appartenant à $\mathbb{C}$. Le coefficient de Fourier $c(0,\lambda_1)$ de Φ vaut alors λ, ce qui force λ à être nul, puisque Φ est une forme holomorphe. Ainsi on a : $J_{k,1}^{A_2,hol} \subset a_{-3,1}S_{k+3} = \Delta(\tau)a_{-3,1}.M_{k-9}$. Or la forme $\Delta(\tau)a_{-3,1}$ est holomorphe (voir la proposition 2.5.10), donc on a finalement : $J_{k,1}^{A_2,hol} = a_{-3,1}S_{k+3}$, ou encore $J_{k,1}^{A_2,hol} = \Delta(\tau)a_{-3,1}.M_{k-9}$.
Cette formule est valable en fait pour tous les cas où k est impair, si on emploie la notation $M_{k'}$ précisée en début de paragraphe.

Soit k un entier pair.
$J_{k,1}^{A_2,hol} \subset J_{k,1}^{f,A_2} \subset a_{-2,1}M_{k+2} \oplus a_{0,1}M_k$, d'après la structure de l'espace des formes de Jacobi faibles.
Comme $a_{-3,1}$, les formes $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ sont des formes de Jacobi faibles non holomorphes

(leur coefficient $c(0,\lambda_1)$ est non nul), et un raisonnement analogue au précédent donne $J_{k,1}^{A_2,hol} = \{0\}$, pour $k \leq 2$, pair.

Supposons désormais k pair supérieur ou égal à 4.
En s'inspirant du cas classique à une variable traité par M.Eichler et D.Zagier ([EZ], théorème 3.5), on introduit l'homomorphisme d'espaces vectoriels i suivant :

$$\begin{array}{rcccl} i: & M_{k-4} \oplus M_{k-6} & \rightarrow & J_{k,1}^{A_2,hol} \\ & (\ f\ ,\ g\ ) & \mapsto & f(\tau)E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,z) + g(\tau)E_{6,1}^{(A_2)}(\tau,z) \end{array}$$

En utilisant les relations données dans le lemme 2.7.1 :

$$E_{4,1}^{(A_2)} = E_4 a_{0,1} + \frac{1}{12}E_6 a_{-2,1} \text{ et } E_{6,1}^{(A_2)} = E_6 a_{0,1} + \frac{1}{12}E_8 a_{-2,1},$$

et l'indépendance algébrique des formes $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ sur l'espace des formes modulaires, on montre que i est injectif .

Evaluons la dimension de l'espace vectoriel $J_{k,1}^{A_2,hol}$.
Soit Φ appartenant à $J_{k,1}^{A_2,hol}$.
Φ s'écrit $\Phi(\tau,z) = (f(\tau) + \lambda E_k(\tau))\ a_{0,1}(\tau,z) + (g(\tau) + \mu E_{k+2}(\tau))\ a_{-2,1}(\tau,z)$, où λ, μ sont des nombres complexes et f, g des formes modulaires cuspidales de poids respectifs k et $k+2$, d'après la structure des espaces $M_{k'}$.
D'après la forme des premiers coefficients de Fourier des fonctions E_k, $a_{0,1}$, E_{k+2} et $a_{-2,1}$, le coefficient $c(0,\lambda_1)$ de Φ est égal à $\frac{\lambda}{24} - \frac{\mu}{2}$. D'autre part, ce coefficient est nul, puisque Φ est une forme holomorphe.
Donc Φ s'écrit :

$$\Phi(\tau,z) = f(\tau)\ a_{0,1}(\tau,z) + g(\tau)\ a_{-2,1}(\tau,z) + \lambda\ (\ E_k(\tau)\ a_{0,1}(\tau,z) + \frac{1}{12}E_{k+2}(\tau)\ a_{-2,1}(\tau,z)\ ).$$

Ainsi on a démontré l'inclusion de $J_{k,1}^{A_2,hol}$ dans l'espace $a_{0,1}S_k + a_{-2,1}S_{k+2} + \mathbb{C}\ (\ E_k a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{k+2}a_{-2,1}\ )$.
En utilisant l'indépendance algébrique des fonctions $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ sur l'espace des formes modulaires, on montre que cette somme est directe . Ainsi :

$$J_{k,1}^{A_2,hol} \subset a_{0,1}S_k \oplus a_{-2,1}S_{k+2} \oplus \mathbb{C}\ (\ E_k a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{k+2}a_{-2,1}\ ).$$

Par conséquent on a :

$$dim_{\mathbb{C}}(J_{k,1}^{A_2,hol}) \leq dim_{\mathbb{C}}(S_k) + dim_{\mathbb{C}}(S_{k+2}) + 1,$$

d'où

$$dim_{\mathbb{C}}(J_{k,1}^{A_2}) \leq dim_{\mathbb{C}}(M_{k-4}) + dim_{\mathbb{C}}(M_{k-6}),$$

car pour $k \geq 4$, selon la relation rappelée par M.Eichler et D.Zagier, on a :

$$dim_{\mathbb{C}}(S_k) + dim_{\mathbb{C}}(S_{k+2}) + 1 = dim_{\mathbb{C}}(M_k) + dim_{\mathbb{C}}(S_{k+2}) = dim_{\mathbb{C}}(M_{k-4}) + dim_{\mathbb{C}}(M_{k-6}).$$

D'après les résultats précédents, i établit donc un isomorphisme entre les espaces $M_{k-4} \oplus M_{k-6}$ et $J_{k,1}^{A_2,hol}$. Plus précisément, pour k pair supérieur ou égal à 4, on a :

$$J_{k,1}^{A_2,hol} = M_{k-4}\ E_{4,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-6}\ E_{6,1}^{(A_2)}.$$

En employant la notation $M_{k'}$ précisée en début de paragraphe, cette écriture est valable pour tous les cas où k est pair.
Pour tout entier k on peut alors écrire :

$$J_{k,1}^{A_2,hol} = M_{k-4}\, E_{4,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-6}\, E_{6,1}^{(A_2)} \oplus S_{k+3}\, a_{-3,1},$$

ou encore :

$$J_{k,1}^{A_2,hol} = M_{k-4}\, E_{4,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-6}\, E_{6,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-9}\, \Delta(\tau)a_{-3,1},$$

et la somme est bien directe, car les formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$ sont algébriquement indépendantes sur $M_\star$, ce qui achève la preuve de la proposition.

Corollaire 2.7.2. *L'ensemble $J_{\star,1}^{A_2,hol}$ des formes de Jacobi holomorphes d'indice 1 est un module libre de rang 3 sur $M_\star$, de générateurs $E_{4,1}^{(A_2)}$, $E_{6,1}^{(A_2)}$, $\Delta(\tau)a_3^{(A_2)}$.*

Proposition 2.7.4. *Structure de $J_{\star,1}^{A_2,cusp}$.*
On note :

$$\begin{array}{lllll}
\Phi_{9,1}^{(A_2)} & := & \Delta(\tau)a_{-3,1} & & \\
\Phi_{10,1}^{(A_2)} & := & \Delta(\tau)a_{-2,1} & = & \frac{1}{144}(\ E_4E_{6,1}^{(A_2)} - E_6E_{4,1}^{(A_2)}\ ) \\
\Phi_{12,1}^{(A_2)} & := & \Delta(\tau)a_{0,1} & = & \frac{1}{1728}(\ E_8E_{4,1}^{(A_2)} - E_6E_{6,1}^{(A_2)}\ ).
\end{array}$$

Pour tout entier k on a :

$$J_{k,1}^{A_2,cusp} = Mod_{k-9}\ \Phi_{9,1}^{(A_2)} \oplus Mod_{k-10}\ \Phi_{10,1}^{(A_2)} \oplus Mod_{k-12}\ \Phi_{12,1}^{(A_2)}.$$

Preuve.
D'après la proposition 2.5.10, les formes $\Phi_{9,1}^{(A_2)}$, $\Phi_{10,1}^{(A_2)}$ et $\Phi_{12,1}^{(A_2)}$ sont bien des formes cuspidales.
Supposons k impair .
D'après la proposition 2.7.3, on a :

$$J_{k,1}^{A_2,cusp} \subset J_{k,1}^{A_2,hol} = \Delta(\tau)a_{-3,1}\ Mod_{k-9},$$

or $\Delta(\tau)a_{-3,1} = \Phi_{9,1}^{(A_2)}$ est une forme de Jacobi cuspidale,
donc $J_{k,1}^{A_2,cusp} = J_{k,1}^{A_2,hol} = \Delta(\tau)a_{-3,1}\ Mod_{k-9}$.

Supposons k pair.
Soit ϕ appartenant à $J_{k,1}^{A_2,cusp}$.
Alors ϕ est divisible dans $J_{k,1}^{f,A_2}$ par $\Delta(\tau)$, car $[\phi]_{q^0} = 0$, et d'après la structure de $J_{k-12,1}^{f,A_2}$, $\frac{\phi}{\Delta(\tau)}$ s'écrit $\frac{\phi}{\Delta(\tau)} = f_{k-12}(\tau)a_{0,1} + f_{k-10}(\tau)a_{-2,1}$, où f_{k-10} et f_{k-12} appartiennent respectivement à M_{k-10} et M_{k-12}. Donc ϕ s'écrit $\phi = f_{k-10}\Phi_{10,1}^{(A_2)} + f_{k-12}\Phi_{12,1}^{(A_2)}$, avec f_{k-s} appartenant à M_{k-s}.
On considère l'homomorphisme d'espaces vectoriels j défini par :

$$\begin{array}{llll}
j: & M_{k-10} \oplus M_{k-12} & \rightarrow & J_{k,1}^{A_2,cusp} \\
 & (\ f,\ g\ ) & \mapsto & f(\tau)\Phi_{10,1}^{(A_2)}(\tau,z) + g(\tau)\Phi_{12,1}^{(A_2)}(\tau,z)
\end{array}$$

D'après ce qui précède, j est surjectif, et grâce à l'indépendance algébrique des fonctions $a_{0,1}$ et $a_{-2,1}$ sur l'espace des formes modulaires, on montre que j est injectif, ce qui fait de j un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Par conséquent, pour k pair, on a :

$$J_{k,1}^{A_2,cusp} = M_{k-10}\ \Phi_{10,1}^{(A_2)} \oplus M_{k-12}\ \Phi_{12,1}^{(A_2)},$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

Chapitre 3

Exemples de formes "classiques"

3.1 Utilisation des séries thêta

3.1.1 Cas de l'indice 1

D'après le lemme 1.2.1 et la proposition 1.2.6, il existe trois séries thêta d'indice 1, pour le réseau A_2, qui sont $\theta_{0,1}$, $\theta_{u,1}$ et $\theta_{2u,1}$.

Ecrivons la représentation vectorielle (voir le paragraphe 1.1.6) d'une forme de Jacobi d'indice 1.

Proposition 3.1.1. *Soit Φ une forme de Jacobi pour le réseau A_2, faible, de poids k, d'indice 1, et de caractère χ.*
Alors il existe trois fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, notées $a_0(\tau)$, $a_u(\tau)$, $a_{2u}(\tau)$ telles que $\Phi(\tau,z) = a_0(\tau)\theta_{0,1} + a_u(\tau)\theta_{u,1} + a_{2u}(\tau)\theta_{2u,1}$.
Si on pose ${}^t\vec{A}(\tau) := (a_0(\tau), a_u(\tau), a_{2u}(\tau))$, et si $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors

$$\Phi(\tau,z) = {}^t\vec{A}(\tau).\overrightarrow{\Theta_1}(\tau,z),$$

et le vecteur $\vec{A}$ vérifie :

$$\vec{A}(\tau+1) = \chi(T)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}\vec{A}(\tau)$$

et

$$\vec{A}(-\frac{1}{\tau}) = i\sqrt{3}\chi(S)\tau^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^{-1}\vec{A}(\tau).$$

Preuve.
Il suffit d'appliquer les résultats de la proposition 1.1.6, en ajoutant le caractère χ dans les relations.

Proposition 3.1.2. *Formes singulières d'indice 1.*
Les seules formes singulières d'indice 1 qui soient des formes de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, sont les multiples complexes de la forme :

$$\theta_{2u,1}^{A_2} - \theta_{u,1}^{A_2}.$$

Ces formes appartiennent à l'espace $J_{1,1}^{A_2,hol}(v_\eta^8)$.

Preuve.
D'après le lemme 1.2.10, si Φ est une forme de Jacobi singulière d'indice 1, de caractère χ, pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, Φ est de la forme :

$$\Phi(\tau,z) = a_0\theta_{0,1} + a_u\theta_{u,1} + a_{2u}\theta_{2u,1},$$

où les coefficients a_j sont des constantes qui vérifient, d'après la proposition 3.1.1, les systèmes d'équations suivants :

$$\frac{-i}{\sqrt{3}}\chi(S)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_u \\ a_{2u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_u \\ a_{2u} \end{pmatrix},$$

et

$$\chi(T)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_u \\ a_{2u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_u \\ a_{2u} \end{pmatrix}.$$

Premier cas : $\chi(T) = 1$.
On obtient $a_u = a_{2u} = 0$, d'après le deuxième système, puis $a_0 = 0$ d'après le premier. Il n'y a donc pas de solution non nulle dans ce cas.

Deuxième cas : $\chi(T) = j = v_\eta(T)^8$.
Alors, d'après le deuxième système, $a_0 = 0$.
Le premier système devient alors :

$$\begin{cases} a_u + a_{2u} & = 0 \\ (j - i\sqrt{3}\chi(S))a_u + j^2 a_{2u} & = 0 \\ j^2 a_u + (j - i\sqrt{3}\chi(S))a_{2u} & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour seules solutions $a_u = -a_{2u}$, et $\chi(S) = 1 = v_\eta(S)^8$.
En posant $\Phi := \theta^{A_2}_{2u,1} - \theta^{A_2}_{u,1}$, on a alors :

$$\Phi(\tau+1,z) = j\ \Phi(\tau,z)$$

$$\Phi(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \tau e^{\pi i \frac{<z,z>}{\tau}}\Phi(\tau,z),$$

ou encore :

$$\Phi(\tau+1,z) = v_\eta^8(T)\Phi(\tau,z)$$

$$\Phi(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = v_\eta^8(S)\tau e^{\pi i \frac{<z,z>}{\tau}}\Phi(\tau,z).$$

La forme $\Phi = \theta^{A_2}_{2u,1} - \theta^{A_2}_{u,1}$ est donc une forme de Jacobi holomorphe, singulière, de poids 1, d'indice 1, avec le système multiplicatif v_η^8, pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, et toutes les formes de Jacobi singulières, d'indice 1, pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, sont des multiples complexes de cette forme.

Remarque 3.1.1. On peut démontrer (voir la proposition-définition 2.5.1) que :

$$a_{-3,1} = \eta(\tau)^{-8}(\theta^{A_2}_{2u,1} - \theta^{A_2}_{u,1}).$$

En effet, posons $\Phi := \theta^{A_2}_{2u,1} - \theta^{A_2}_{u,1}$.
Les formes $\theta^{A_2}_{2u,1}$ et $\theta^{A_2}_{u,1}$ s'écrivent respectivement (voir le paragraphe 1.1.6) :

$$\theta^{A_2}_{u,1}(\tau,z) = \sum_{\gamma\in A_2+u} e^{\pi i\tau<\gamma,\gamma>-2\pi i<\gamma,z>}$$
$$\theta^{A_2}_{2u,1}(\tau,z) = \sum_{\gamma\in A_2+2u} e^{\pi i\tau<\gamma,\gamma>-2\pi i<\gamma,z>}$$

ou encore (en rappelant que $u = -\lambda_2$, voir le paragraphe 1.2.1) :

$$\theta^{A_2}_{u,1}(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}}\zeta_2 \sum_{\gamma\in A_2} e^{\pi i\tau(<\gamma,\gamma>+2<\gamma,u>)}e^{-2\pi i<\gamma,z>}$$
$$\theta^{A_2}_{2u,1}(\tau,z) = q^{\frac{4}{3}}\zeta_2^2 \sum_{\gamma\in A_2} e^{\pi i\tau(<\gamma,\gamma>+4<\gamma,u>)}e^{-2\pi i<\gamma,z>}$$

Donc la forme Φ admet pour développement de Fourier le développement suivant :
$$\Phi(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}}\zeta_2 \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} q^{k_1^2+k_2^2-k_1k_2-k_2}\zeta_1^{k_2-2k_1}\zeta_2^{k_1-2k_2}(-1+\zeta_2 q^{1-k_2}),$$
qui peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c(n,l)q^n e^{2\pi i<z,l>},$$
car $k_1^2+k_2^2-k_1k_2-k_2 = (k_2-\frac{1+k_1}{2})^2+\frac{3}{4}(k_1-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$ est un entier supérieur ou égal à $-\frac{1}{3}$, donc supérieur ou égal à 0.

D'après la forme produit de $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)$, la dernière écriture de Φ permet de s'assurer que la forme $\frac{\Phi}{\eta(\tau)^8}$ n'a que des puissances positives de q dans son développement de Fourier et appartient donc, d'après le résulat de la proposition 3.1.2, à l'espace $J^{A_2,f}_{-3,1}$. Or, d'après la structure de $J^{W(A_2),f}_{\star,\star}$ (voir la proposition 2.6.2) :

$$J^{A_2,f}_{-3,1} = \mathbb{C}a_{-3,1}.$$

La forme $\eta(\tau)^{-8}\Phi = \eta(\tau)^{-8}(\theta^{A_2}_{2u,1}-\theta^{A_2}_{u,1})$ s'écrit donc $\lambda a_{-3,1}$, où λ est un nombre complexe.

Enfin, comme $[a_{-3,1}]_{q^0} = P_2 - P_1$, en identifiant les coefficients de Fourier de la forme $\eta(\tau)^{-8}(\theta^{A_2}_{2u,1}-\theta^{A_2}_{u,1})$, notés $f(n,l)$, et ceux de $\lambda\, a_{-3,1}$, on obtient, par exemple, $f(0,\lambda_1) = \lambda$. Or on a :

$$f(0,\lambda_1) = \sum_{\begin{cases}(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\\ k_1^2+k_2^2-k_1k_2-k_2=0\\ k_2-2k_1=1\\ 1+k_1-2k_2=0\end{cases}} (-1) \;+\; \sum_{\begin{cases}(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\\ k_1^2+k_2^2-k_1k_2-2k_2+1=0\\ k_2-2k_1=1\\ 2+k_1-2k_2=0\end{cases}} 1$$

ou encore :
$$f(\ 0,\lambda_1) = 1,$$
donc
$$\lambda = 1.$$
Finalement, $\eta(\tau)^{-8}(\theta^{A_2}_{2u,1}-\theta^{A_2}_{u,1}) = a_{-3,1}$.

Remarque 3.1.2. “Dualité” entre les réseaux A_2 et E_6.
On voit ici apparaître une certaine “dualité” avec le réseau E_6 dont le groupe discriminant est également isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: une forme de Jacobi pour le réseau E_6, faible, de poids k

et d'indice 1, s'écrit $\phi(\tau,z) = b_0(\tau)\theta_{0,1}^{(E_6)} + b_\mu(\tau)\theta_{\mu,1}^{(E_6)} + b_{2\mu}(\tau)\theta_{2\mu,1}^{(E_6)}$, où $b_0(\tau)$, $b_\mu(\tau)$, $b_{2\mu}(\tau)$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$, et$\{0,\mu,2\mu\}$ un système de représentants de $\widetilde{E_6}/E_6$. En posant ${}^t\vec{B}(\tau) := (b_0(\tau),\, b_\mu(\tau),\, b_{2\mu}(\tau))$, on obtient cette fois :

$$\vec{B}(\tau+1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \vec{B}(\tau)$$

et

$$\vec{B}(-\frac{1}{\tau}) \;=\; -i\sqrt{3}\;\tau^{k-3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{B}(\tau).$$

On constate que les matrices qui apparaissent sont les matrices complexes conjuguées des matrices de la proposition 3.1.1. On obtient notamment une forme pour E_6, faible, de poids -5 et d'indice 1, en considérant la forme $\eta(\tau)^{-16}(\theta_{2\mu,1}^{E_6} - \theta_{\mu,1}^{E_6})$.

3.1.2 Cas de l'indice 2

Lemme 3.1.1. *Séries thêta d'indice* 2.
On note : $\mu_0 := 0$, $\nu_1 := \alpha_1$, $\nu_2 := \alpha_2$, $\nu_3 := \alpha_1+\alpha_2$, $\gamma_1 := \lambda_1$, $\gamma_2 := \lambda_1-\alpha_1$, $\gamma_3 := \lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)$, $\gamma_1' := -\lambda_1$, $\gamma_2' := -(\lambda_1-\alpha_1)$, $\gamma_3' := -(\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2))$, $\delta = \lambda_1-\alpha_2$, $\delta' = -(\lambda_1-\alpha_2)$. *Alors* $\mathcal{S}_2 := \{\mu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \delta, \delta'\}$ *est un système de représentants de* $\widetilde{A_2}/2A_2$, *(voir le lemme 1.2.1) et si on pose, en considérant les éléments de ce système dans l'ordre indiqué :*

$$\overrightarrow{\Theta_2} := (\theta_{\mu,2})_{\mu\in\mathcal{S}_2},$$

on a alors, d'après les résultats de la proposition 1.1.4 :

(1) $\overrightarrow{\Theta_2}(\tau+1,z) = U_2(T).\overrightarrow{\Theta_2}(\tau,z)$

(2) $\overrightarrow{\Theta_2}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \tau e^{2\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\; U_2(S).\overrightarrow{\Theta_2}(\tau,z)$,

avec $U_2(S) = \left(\frac{1}{2i\sqrt{3}}\; e^{-i\pi<\mu,\nu>}\right)_{(\mu,\nu)\in\mathcal{S}_2^2}$,

et $U_2(T) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\xi&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\xi&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\xi&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\xi&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\xi&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi^4&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi^4 \end{pmatrix}$, *où* $\xi = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Proposition 3.1.3. *Formes de Jacobi singulières d'indice 2 pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier.*
Les seules combinaisons linéaires (à multiple complexe près) à coefficients constants, des séries thêta d'indice 2, qui soient des formes de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier (avec éventuellement un caractère) sont les fonctions du type :

$$\Phi_c := \theta_{\gamma_1,2} - \theta_{\gamma_1',2} + (-1+c)\ \theta_{\gamma_2,2} - (-1+c)\ \theta_{\gamma_2',2} - c\ \theta_{\gamma_3,2} + c\ \theta_{\gamma_3',2},$$

où c est une constante.

La forme Φ_c appartient à $J_{1,2}^{A_2,f}(v_\eta^4)$, et les premiers termes de son développement de Fourier sont :

$$\Phi_c(\tau,z) = q^{\frac{1}{6}}[(\zeta_1^{-1} - \zeta_1 - \zeta_1\zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-1}\zeta_2 + c\zeta_1\zeta_2^{-1} - c\zeta_1^{-1}\zeta_2 - c\zeta_2 + c\zeta_2^{-1}) + q(\ldots)]$$

Preuve.
Soit

$$\Phi := a\theta_{\mu_0,2} + b_1\theta_{\nu_1,2} + b_2\theta_{\nu_2,2} + b_3\theta_{\nu_3,2} + c_1\theta_{\gamma_1,2} + c_2\theta_{\gamma_2,2} + c_3\theta_{\gamma_3,2}$$
$$+c_1'\theta_{\gamma_1',2} + c_2'\theta_{\gamma_2',2} + c_3'\theta_{\gamma_3',2} + d\theta_{\delta,2} + d'\theta_{\delta',2},$$

où a, b_1, $\ldots$,d' sont des constantes.
Supposons que Φ soit une forme de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, avec un caractère noté χ.
D'après les relations (1) et (2) du lemme 3.1.1, Φ a pour poids 1 et pour indice 2.
D'après la relation (1), on a :

$$\Phi(\tau+1,z) = a\theta_{\mu_0,2} - b_1\theta_{\nu_1,2} - b_2\theta_{\nu_2,2} - b_3\theta_{\nu_3,2} + \xi(c_1\theta_{\gamma_1,2} + c_2\theta_{\gamma_2,2} + c_3\theta_{\gamma_3,2}$$
$$+c_1'\theta_{\gamma_1',2} + c_2'\theta_{\gamma_2',2} + c_3'\theta_{\gamma_3',2}) + \xi^4(d\theta_{\delta,2} + d'\theta_{\delta',2})(\tau,z),$$

ce qui permet d'affirmer, d'après l'indépendance linéaire des séries thêta d'indice 2, que seuls 4 cas se présentent :
(i) $\chi(T) = 1$ ou $a = 0$
(ii) $\chi(T) = -1$ ou $b_1 = b_2 = b_3 = 0$
(iii) $\chi(T) = \xi$ ou $c_1 = c_2 = c_3 = c_1' = c_2' = c_3' = 0$
(iv) $\chi(T) = \xi^4$ ou $d = d' = 0$.

La fonction Φ est donc de l'un des quatre types suivants :

$$\Phi_a := a\theta_{\mu_0,2}$$

$$\Phi_b := b_1\theta_{\nu_1,2} + b_2\theta_{\nu_2,2} + b_3\theta_{\nu_3,2}$$

$$\Phi_c := c_1\theta_{\gamma_1,2} + c_2\theta_{\gamma_2,2} + c_3\theta_{\gamma_3,2} + c_1'\theta_{\gamma_1',2} + c_2'\theta_{\gamma_2',2} + c_3'\theta_{\gamma_3',2}$$

$$\Phi_d := d\theta_{\delta,2} + d'\theta_{\delta',2}.$$

Exploitons maintenant la relation (2).
On a par exemple :
$\Phi_a(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \frac{1}{2i\sqrt{3}}\tau e^{\frac{2i\pi<z,z>}{\tau}} a(\theta_{\mu_0,2} + \theta_{\nu_1,2} + \theta_{\nu_2,2} + \theta_{\nu_3,2} + \theta_{\gamma_1,2} + \theta_{\gamma_2,2} + \theta_{\gamma_3,2} + \theta_{\gamma_1',2} + \theta_{\gamma_2',2} + \theta_{\gamma_3',2} + \theta_{\delta,2} + \theta_{\delta',2})(\tau,z)$,

donc, la relation $\Phi_a(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \chi(S)\tau e^{\frac{2i\pi<z,z>}{\tau}}\Phi_a(\tau,z)$ est vérifiée si et seulement si $a = 0$.

Dans le cas de Φ_c on a :

$$\Phi_c(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) = \tfrac{1}{2i\sqrt{3}}\tau e^{\frac{2i\pi<z,z>}{\tau}}\Big(c_1\ [(\xi^6\theta_{\mu_0,2} + \xi^3\theta_{\nu_1,2} + \xi^6\theta_{\nu_2,2} + \xi^3\theta_{\nu_3,2} + \xi^4\theta_{\gamma_1,2}$$
$$+\xi\theta_{\gamma_2,2} + \ldots + \xi^2\theta_{\delta',2})(\tau,z)]$$
$$+c'_1\ [\xi^6\theta_{\mu_0,2} + \xi^3\theta_{\nu_1,2} + \xi^6\theta_{\nu_2,2} + \xi^3\theta_{\nu_3,2} + \xi^2\theta_{\gamma_1,2} + \xi^4\theta_{\gamma'_1,2} + \ldots]$$
$$+c_2\ [\ldots] + \ldots +\ c'_3[\ldots]\Big)$$

(Les coefficients devant les fonctions thêta sont obtenus en calculant les coefficients $e^{-i\pi<\mu,\nu>}$ de la matrice $U_2(S)$.)

Ceci permet d'écrire que Φ_c vérifie l'équation fonctionnelle $\Phi_c(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \chi(S)\tau e^{\frac{2i\pi<z,z>}{\tau}}\Phi_c(\tau,z)$ si et seulement si les 6 coefficients c_1, $c'_1, \ldots c'_3$ vérifient un certain système de 12 équations (qu'il serait trop long de détailler entièrement ici), du type :

$$\begin{cases}
\frac{1}{2i\sqrt{3}}(\xi^6c_1 + \xi^6c'_1 + \ldots + \xi^6c'_3) & = & 0 \\
\frac{1}{2i\sqrt{3}}(\xi^3c_1 + \xi^3c'_1 + \ldots) & = & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{1}{2i\sqrt{3}}(\xi^4c_1 + \xi^2c'_1 + \ldots + \xi^5c'_3) & = & \chi(S)c_1 \\
\ldots & & \\
\frac{1}{2i\sqrt{3}}(\ldots c_1 + \ldots + \ldots c'_3) & = & \chi(S)c'_3
\end{cases}$$

En s'aidant par exemple du logiciel de calcul maple pour résoudre le système d'équations obtenu, on obtient que les coefficients c_1, $c'_1, \ldots c'_3$ sont de la forme $c_1 = 1$, $c'_1 = -1$, $c_2 = -1 + c$, $c'_2 = 1 - c$, $c_3 = -c$, $c'_3 = c$, et $\chi(S) = 1$.

En raisonnant de la même manière, on obtient que Φ_b et Φ_d ne peuvent vérifier cette équation fonctionnelle à moins d'être nulles.

Enfin, il reste à calculer les premiers termes du développement de Fourier de Φ_c, ce qui se fait en utilisant l'expression générale des séries thêta, voir le paragraphe 1.1.6 :

$$\theta_{\mu,2}(\tau,z) = \sum_{\gamma\in A_2+\frac{\mu}{2}} \exp(2\pi i\tau < \gamma,\gamma > -4\pi i < \gamma,z >)$$
$$= q^{\frac{<\mu,\mu>}{4}} \sum_{\alpha\in A_2} e^{2\pi i\tau(<\alpha,\alpha>+<\alpha,\mu>)}e^{-4\pi i<\alpha,z>}e^{-2\pi i<\mu,z>}.$$

Pour $\mu = \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\gamma'_3$, on a $\frac{<\mu,\mu>}{4} = \frac{1}{6}$, et, en écrivant $\gamma = \alpha + \frac{\mu}{2}$,

$$< \gamma,\gamma > = < \alpha + \frac{\mu}{2},\ \alpha + \frac{\mu}{2} > = < \alpha,\alpha > + < \alpha,\mu > + \frac{1}{4} < \mu,\mu > \geq 0$$

donc $< \alpha,\alpha > + < \alpha,\mu > \geq -\frac{1}{6}$,
d'où, puisque $< \alpha,\alpha > + < \alpha,\mu >$ est entier, $< \alpha,\alpha > + < \alpha,\mu > \geq 0$.
La fonction Φ_c est donc de la forme :

$$\Phi_c(\tau,z) = q^{\frac{1}{6}}\Big(\sum_{j\geq 0}\ldots q^j\Big).$$

Pour calculer explicitement les premiers coefficients, on utilise le fait que les séries thêta sont des formes singulières, donc, si le coefficient $f(\frac{1}{6},l)$ de la série $\theta_{\mu,2}$ est non nul, alors $< l,l > = \frac{2}{3}$, ce qui impose à l d'appartenir à $\{\pm\lambda_1,\ \pm\lambda_2,\ \pm(\lambda_1 - \lambda_2)\}$.

D'après la définition des séries thêta, on a :

$$f\Big(\frac{1}{6},\, l\Big) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\mu+l}{2} \notin A_2, \text{ ou } < l,l > \neq \frac{2}{3} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant ces expressions, on obtient les premiers coefficients de Φ_c annoncés.

Lemme 3.1.2. *Les orbites de $\widetilde{A_2}/2A_2$ sous l'action de $W(A_2)$ sont :*

$$\begin{array}{ll} W(A_2).< 0 > & = \{0\} \\ W(A_2).< \nu_1 > & = \{\nu_1,\, \nu_2,\, \nu_3\} \\ W(A_2).< \gamma_1 > & = \{\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3\} \\ W(A_2).< \gamma_1' > & = \{\gamma_1',\, \gamma_2',\, \gamma_3'\} \\ W(A_2).< \delta > & = \{\delta\} \\ W(A_2).< \delta' > & = \{\delta'\} \end{array}.$$

Preuve.
C'est une conséquence des résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \sigma_{\alpha_1}(\alpha_1) = -\alpha_1 \equiv \alpha_1 \; mod \; 2A_2 & \sigma_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 & \sigma_{\alpha_2}(\alpha_2) = -\alpha_2 \equiv \alpha_2 \; mod \; 2A_2 \\ \sigma_{\alpha_1}(\lambda_1) = \lambda_1 - \alpha_1 & \sigma_{\alpha_2}(\lambda_1) = \lambda_1 \end{array}$$

Proposition 3.1.4.
La forme que l'on obtient en "symétrisant" la fonction Φ_c pour la rendre $W(A_2)$-invariante est la forme nulle .

Preuve.
On rappelle (voir la proposition 2.3.1) que, pour σ appartenant à $W(A_2)$, $\theta_{\mu,2}(\tau,\sigma.z) = \theta_{\sigma^{-1}.\mu,2}$.
D'après le lemme précédent, ainsi que les résultats énoncés dans sa preuve, on a donc :

$$\Phi_c(\tau,\sigma_{\alpha_1}.z) = \theta_{\gamma_2,2} - \theta_{\gamma_2',2} + (-1+c)\theta_{\gamma_1,2} - (-1+c)\theta_{\gamma_1',2} - c\theta_{\gamma_3,2} + c\theta_{\gamma_3',2},$$

$$\Phi_c(\tau,\sigma_{\alpha_2}.z) = \theta_{\gamma_1,2} - \theta_{\gamma_1',2} + (-1+c)\theta_{\gamma_3,2} - (-1+c)\theta_{\gamma_3',2} - c\theta_{\gamma_2,2} + c\theta_{\gamma_2',2}.$$

On constate qu'il n'existe aucune valeur de c telle que Φ_c soit $W(A_2)$-invariante, puisqu'il faudrait avoir simultanément par exemple $-1+c=1$, et $-c=-1+c$.
D'après la forme des orbites de $\widetilde{A_2}/2A_2$ sous l'action de $W(A_2)$ (voir lemme ci-dessus), il faut, pour obtenir à partir de Φ_c une forme $W(A_2)$-invariante, poser :

$$\Phi_c^W(\tau,z) := \Big(\theta_{\gamma_1,2} + \theta_{\gamma_2,2} + \theta_{\gamma_3,2}\Big) - \Big(\theta_{\gamma_1',2} + \theta_{\gamma_2',2} + \theta_{\gamma_3',2}\Big) + (-1+c)\Big(\theta_{\gamma_1,2} + \theta_{\gamma_2,2} + \theta_{\gamma_3,2}\Big)$$

$$+(1-c)\Big(\theta_{\gamma_1',2} + \theta_{\gamma_2',2} + \theta_{\gamma_3',2}\Big) - c\Big(\theta_{\gamma_1,2} + \theta_{\gamma_2,2} + \theta_{\gamma_3,2}\Big) + c\Big(\theta_{\gamma_1',2} + \theta_{\gamma_2',2} + \theta_{\gamma_3',2}\Big)$$

mais on obtient alors :

$$\Phi_c^W(\tau,z) = 0.$$

3.1.3 Cas de l'indice 3

Lemme 3.1.3. *Séries thêta d'indice* 3.
Soit $\mathcal{S}_3 := \Big\{ x_1\alpha_2 + x_2\lambda_2 / x_1 \in \{0,\ \pm 1\},\ x_2 \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4\}\Big\}$.
Alors $\mathcal{S}_3$ *constitue un système de représentants de* $\widetilde{A_2}/3A_2$*, et si on pose, en considérant les éléments de ce système dans l'ordre indiqué :*

$$\overrightarrow{\Theta_3} := (\theta_{\mu,3})_{\mu\in\mathcal{S}_3},$$

on a alors, d'après les résultats de la proposition 1.2.6 :

$$(1) \quad \overrightarrow{\Theta_3}(\tau+1,z) = U_3(T).\overrightarrow{\Theta_3}(\tau,z)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{\Theta_3}\Big(-\tfrac{1}{\tau},\ \tfrac{z}{\tau}\Big) = \tau e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ U_3(S).\overrightarrow{\Theta_3}(\tau,z),$$

avec $U_3(S) = \Big(\frac{1}{3i\sqrt{3}}\ e^{-\frac{2i\pi}{3}<\mu,\nu>}\Big)_{(\mu,\nu)\in\mathcal{S}_3^2}$,
et $U_3(T) = \Big(\delta_{\mu,\mu'} e^{\frac{i\pi}{3}<\mu,\mu'>}\Big)_{(\mu,\mu')\in\mathcal{S}_3^2}$, δ *désignant le symbole de Kronecker.*

Preuve.
Pour obtenir ce système de représentants, on utilise la $\mathbb{Z}$-base $\{\alpha_2,\lambda_2\}$ de $\widetilde{A_2}$, et on peut remarquer que $x = x_1\alpha_2 + x_2\lambda_2$, avec x_1, x_2 appartenant à $\mathbb{Z}$, est dans $3A_2$ si et seulement si $\frac{x_2}{3}$ et $x_1 + \frac{2}{3}x_2$ appartiennent à $3\mathbb{Z}$, puisque $\lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, ce qui est encore équivalent à x_2 appartient à $9\mathbb{Z}$, et x_1 à $3\mathbb{Z}$.
Le reste du lemme a déjà été vu.

Proposition 3.1.5. *Formes de Jacobi singulières d'indice* 3 *pour le groupe* $SL_2(\mathbb{Z})$ *entier. Les seules combinaisons linéaires (à multiple complexe près) à coefficients constants des séries thêta d'indice* 3*, qui soient des formes de Jacobi pour le groupe* $SL_2(\mathbb{Z})$ *tout entier, avec un caractère qui soit un puissance entière de* v_η*, sont les multiples complexes de la forme* Φ_γ *suivante :*

$$\Phi_\gamma := -\theta_{\alpha_1,3} - \theta_{-\alpha_1-\alpha_2,3} + \theta_{\alpha_1+\alpha_2,3} + \theta_{-\alpha_1,3} - \theta_{\alpha_2,3} + \theta_{-\alpha_2,3}.$$

La forme Φ_γ *appartient à* $J_{1,3}^{A_2,f}(v_\eta^8)$.

Preuve.
On utilise le même schéma d'étude que dans le cas de l'indice 2.
On s'intéresse d'abord à l'équation fonctionnelle donnée par l'action de T.
Classons les éléments μ de $\mathcal{S}_3$ selon la valeur de $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>}$.
Soit $\mu_{18} := e^{i\frac{\pi}{9}}$. Pour simplifier les notations on écrira $x_1\alpha_2 + x_2\lambda_2$ sous la forme (x_1,x_2).

On a $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>} = 1$ pour les éléments $(0,0),\ \pm(0,3)$.

On a $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>} = \mu_{18}^2$ pour les éléments $\pm(0,1),\ \pm(1,-1),\ \pm(1,-2)$.

On a $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>} = \mu_{18}^6$ pour les éléments $\pm(1,0),\ \pm(1,3),\ \pm(1,-3)$.

On a $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>} = \mu_{18}^8$ pour les éléments $\pm(0,2),\ \pm(1,2),\ \pm(1,4)$.

On a $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>} = \mu_{18}^{14}$ pour les éléments $\pm(1,1),\ \pm(1,-4),\ \pm(0,4)$.

Parmi ces coefficients $e^{i\frac{\pi}{3}<\mu,\mu>}$, seuls 1 et μ_{18}^6 sont des puissances entières de $v_\eta(T) = e^{i\frac{\pi}{12}}$. (Les autres valeurs ne sont même pas égales à $x.v_\eta(T)$, où $x = \pm 1$ ou $\pm i$.)
On s'intéresse donc uniquement aux combinaisons linéaires du type :

$$\Phi_\beta := b_1\theta_{\beta_1,2} + b_2\theta_{\beta_2,2} + b_3\theta_{\beta_3,2},$$

où $\beta_1 = (0,3)$, $\beta_2 = (0,-3)$, $\beta_3 = (0,0)$,
et

$$\Phi_\gamma := \sum_{j=1}^{6} c_j\theta_{\gamma_j,3},$$

où $\gamma_1 = (1,3)$, $\gamma_2 = (1,-3)$, $\gamma_3 = (-1,3)$, $\gamma_4 = (-1,-3)$, $\gamma_5 = (1,0)$, $\gamma_6 = (-1,0)$.
On peut noter que, modulo $3A_2$, les γ_j décrivent l'ensemble des racines de A_2. Plus précisément, modulo $3A_2$ on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 \equiv \alpha_1 & \gamma_2 \equiv -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \gamma_3 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 & \gamma_4 \equiv -\alpha_1 \\ \gamma_5 \equiv \alpha_2 & \gamma_6 \equiv -\alpha_2 \end{array}$$

Ces deux types de combinaisons linéaires sont les seuls donnant une forme vérifiant la première équation fonctionnelle, avec $\chi(T)$ égal à une puissance entière de $v_\eta(T)$.

On s'intéresse maintenant à l'équation fonctionnelle donnée par l'action de S.
On cherche s'il existe des coefficients tels que :

$$\Phi(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \chi(S)\tau e^{\frac{3i\pi<z,z>}{\tau}}\Phi(\tau,z).$$

En procédant comme dans le cas de l'indice 2, pour la fonction Φ_β on obtient un système de 27 équations que doivent vérifier les coefficients b_1, b_2, b_3. Ce système admettant pour unique solution la solution nulle, la seule combinaison linéaire du type Φ_β qui soit une forme de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier est la forme nulle.

Dans le cas de la fonction Φ_γ, le système de 27 équations que doivent vérifier les 6 coefficients c_j donne les solutions $c_1 = -c$, $c_2 = -c$, $c_3 = c$, $c_4 = c$, $c_5 = -c$, $c_6 = c$, et $\chi(S) = 1 = v_\eta^8(S)$.
On obtient ainsi avec des coefficients de ce type une forme appartenant à $J_{1,3}^{A_2,f}(v_\eta^8)$, et le raisonnement précédent montre qu'il s'agit de la seule combinaison linéaire des séries thêta d'indice 3 qui soit une forme de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, avec un caractère qui soit un puissance entière de v_η.

3.1.4 Cas de l'indice 4

Lemme 3.1.4. *Séries thêta d'indice* 4.
Soit $\mathcal{S}_4 := \Big\{ x_1\alpha_2 + x_2\lambda_2/x_1 \in \{0,\ \pm 1,\ 2\},\ x_2 \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ 6\}\Big\}$.
Alors $\mathcal{S}_4$ *constitue un système de représentants de* $\widetilde{A_2}/4A_2$, *et si on pose :*

$$\overrightarrow{\Theta_4} := (\theta_{\mu,4})_{\mu\in\mathcal{S}_4},$$

on a alors, d'après les résultats de la proposition 1.2.6 :

$$(1)\quad \overrightarrow{\Theta_4}(\tau+1,z) = U_4(T).\overrightarrow{\Theta_4}(\tau,z)$$

$$(2)\quad \overrightarrow{\Theta_4}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \tau e^{4\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ U_4(S).\overrightarrow{\Theta_4}(\tau,z),$$

avec $U_4(S) = \left(\frac{1}{4i\sqrt{3}}\ e^{-\frac{i\pi}{2}<\mu,\nu>}\right)_{(\mu,\nu)\in\mathcal{S}_4^2}$,

et $U_4(T) = \left(\delta_{\mu,\mu'}e^{\frac{i\pi}{4}<\mu,\mu'>}\right)_{(\mu,\mu')\in\mathcal{S}_4^2}$, *$\delta$ désignant le symbole de Kronecker.*

Preuve.
La démonstration se fait comme dans le cas de l'indice 3.

Lemme 3.1.5. *Soit* $\mu_{12} := e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Comme dans le cas de l'indice 3*, pour simplifier les notations on écrira* $x_1\alpha_2 + x_2\lambda_2$ *sous la forme* (x_1,x_2).
Le classement des éléments de $\mathcal{S}_4$ *selon la valeur de* $e^{\frac{i\pi}{4}<\mu,\mu>}$ *donne :*

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = 1$ *pour les éléments* $\nu_1 = (0,0)$, $\nu_2 = (0,6)$, $\nu_3 = (2,0)$, $\nu_4 = (2,6)$.

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = \mu_{12}$ *pour les éléments* $\beta_1 = (0,1)$, $\beta_2 = (0,-1)$, $\beta_3 = (0,5)$, $\beta_4 = (0,-5)$, $\beta_5 = (1,-1)$, $\beta_6 = (1,2)$, $\beta_7 = (1,-2)$, $\beta_8 = (1,-5)$, $\beta_9 = (-1,1)$, $\beta_{10} = (-1,2)$, $\beta_{11} = (-1,-2)$, $\beta_{12} = (-1,5)$.

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = -\mu_{12}$ *pour les éléments* $\beta'_1 = (1,1)$, $\beta'_2 = (1,4)$, $\beta'_3 = (1,-4)$, $\beta'_4 = (1,5)$, $\beta'_5 = (-1,-1)$, $\beta'_6 = (-1,4)$, $\beta'_7 = (-1,-4)$, $\beta'_8 = (-1,-5)$, $\beta'_9 = (2,1)$, $\beta'_{10} = (2,-1)$, $\beta'_{11} = (2,5)$, $\beta'_{12} = (2,-5)$.

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = \mu_{12}^3$ *pour les éléments* $\gamma_1 = (1,0)$, $\gamma_2 = (1,-3)$, $\gamma_3 = (-1,0)$, $\gamma_4 = (-1,3)$, $\gamma_5 = (2,3)$, $\gamma_6 = (2,-3)$

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = -\mu_{12}^3$ *pour les éléments* $\gamma'_1 = (0,3)$, $\gamma'_2 = (0,-3)$, $\gamma'_3 = (1,3)$, $\gamma'_4 = (1,6)$, $\gamma'_5 = (-1,-3)$, $\gamma'_6 = (-1,6)$

$e^{i\frac{\pi}{4}<\mu,\mu>} = \mu_{12}^4$ *pour les éléments* $\delta_1 = (0,2)$, $\delta_2 = (0,-2)$, $\delta_3 = (0,4)$, $\delta_4 = (0,-4)$, $\delta_5 = (2,2)$, $\delta_6 = (2,-2)$, $\delta_7 = (2,4)$, $\delta_8 = (2,-4)$.

Proposition 3.1.6. *Formes de Jacobi singulières d'indice* 4 *pour le groupe* $SL_2(\mathbb{Z})$ *entier. Les seules combinaisons linéaires (à multiple complexe près) à coefficients constants, des séries thêta d'indice* 4*, qui soient des formes de Jacobi pour le groupe* $SL_2(\mathbb{Z})$ *tout entier avec éventuellement un caractère, sont les multiples complexes des formes suivantes :*

(1) $\Phi_b := \theta_{\beta_1,4}+\theta_{\beta_2,4}-\theta_{\beta_3,4}-\theta_{\beta_4,4}+\theta_{\beta_5,4}-\theta_{\beta_6,4}+\theta_{\beta_7,4}-\theta_{\beta_8,4}+\theta_{\beta_9,4}+\theta_{\beta_{10},4}-\theta_{\beta_{11},4}-\theta_{\beta_{12},4}$.

La forme Φ_b *appartient à* $J_{1,4}^{A_2,f}(\chi_2)$*, avec* $\chi_2(T) = v_\eta^2(T)$, $\chi_2(S) = -v_\eta^2(S)$*, et son développement de Fourier est de la forme :*

$$\Phi_b(\tau,z) = q^{\frac{1}{12}}[0 + q(\sum_{r\geq 0}\dots q^r)]$$

(2) $\Phi_{b'} := -\theta_{\beta'_1,4}-\theta_{\beta'_2,4}+\theta_{\beta'_3,4}+\theta_{\beta'_4,4}-\theta_{\beta'_5,4}+\theta_{\beta'_6,4}-\theta_{\beta'_7,4}+\theta_{\beta'_8,4}+\theta_{\beta'_9,4}+\theta_{\beta'_{10},4}-\theta_{\beta'_{11},4}-\theta_{\beta'_{12},4}$.

La forme $\Phi_{b'}$ *appartient à* $J_{1,4}^{A_2,f}(\chi_{14})$*, avec* $\chi_{14}(T) = v_\eta^{14}(T)$, $\chi_{14}(S) = -v_\eta^{14}(S)$*, et, en désignant l'expression* $r + r^{-1}$ *par* $r^{\pm}$*, son développement de Fourier est de la forme :*

$$\Phi_{b'}(\tau,z) = q^{\frac{7}{12}}[-(\zeta_1\zeta_2^{-3})^{\pm}-(\zeta_1^{-3}\zeta_2^{2})^{\pm}+(\zeta_1\zeta_2^{2})^{\pm}+(\zeta_1^{-3}\zeta_2)^{\pm}+(\zeta_1^{-2}\zeta_2^{3})^{\pm}-(\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-1})^{\pm}+q(\sum_{r\geq 0}\dots q^r)].$$

(3) $\Phi_d := \theta_{\delta_1,4} - \theta_{\delta_2,4} - \theta_{\delta_3,4} + \theta_{\delta_4,4} + \theta_{\delta_5,4} - \theta_{\delta_6,4} - \theta_{\delta_7,4} + \theta_{\delta_8,4}$.

La forme Φ_d appartient à $J_{1,4}^{A_2,f}(v_\eta^8)$, et son développement de Fourier est de la forme :

$$\Phi_d(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}}[-P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 + 2P_2 + q(\sum_{r\geq 0} \dots q^r)]$$

Preuve.
On procède exactement de la même manière que dans le cas des indices 2 et 3, en utilisant les informations données par les deux lemmes précédents.
(Les seules combinaisons linéaires du type $\Phi_n := \sum_{j=1}^{4} n_j \theta_{\nu_j,4}$, ou $\Phi_c := \sum_{j=1}^{6} c_j \theta_{\gamma_j,4}$ ou $\Phi'_c := \sum_{j=1}^{6} c'_j \theta_{\gamma'_j,4}$ qui soient des formes de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, avec éventuellement un caractère, sont nulles.)

Remarque 3.1.3. Les formes Φ_b et $\Phi_{b'}$ ne sont pas $W(A_2)$-invariantes.
En effet, on a par exemple, en utilisant le résultat de la proposition 2.3.1 et certaines égalités modulo $4A_2$ dans $\widetilde{A_2}$:
$\Phi_b(\tau,\sigma_{\alpha_1}.z) := (\theta_{\beta_1,4} + \theta_{\beta_2,4} - \theta_{\beta_3,4} - \theta_{\beta_4,4} + \theta_{\beta'_4,4} - \theta_{\beta'_3,4} + \theta_{\beta'_2,4} - \theta_{\beta'_1,4} + \theta_{\beta'_8,4} + \theta_{\beta'_7,4} - \theta_{\beta'_6,4} - \theta_{\beta'_5,4})(\tau,z)$.
En posant $\Phi_b^W := \sum_{\sigma\in W(A_2)} \Phi_b(\tau,\sigma.z)$, on obtient une forme $W(A_2)$-invariante, qui est une forme de Jacobi pour le sous-groupe de congruence commun à toutes les séries thêta d'indice 4, c'est à dire $\Gamma(12)$. (Voir la proposition 1.2.14.)

La forme Φ_b^W n'est pas une forme de Jacobi pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, car c'est en fait une combinaison linéaire de séries thêta de type $\theta_{\beta_j,4}$ et de type $\theta_{\beta'_j,4}$, comme le montre le calcul exact :
$\Phi_b^W = 2\theta_{\beta_1,4} + 2\theta_{\beta_2,4} - 2\theta_{\beta_3,4} - 2\theta_{\beta_4,4} - \theta_{\beta_5,4} - 3\theta_{\beta_6,4} + 3\theta_{\beta_7,4} + \theta_{\beta_8,4} - \theta_{\beta_9,4} + 3\theta_{\beta_{10},4} - 3\theta_{\beta_{11},4} + \theta_{\beta_{12},4} + \theta_{\beta'_1,4} + 3\theta_{\beta'_2,4} - 3\theta_{\beta'_3,4} - 3\theta_{\beta'_6,4} + 3\theta_{\beta'_7,4} - \theta_{\beta'_8,4} + 4\theta_{\beta'_9,4} + 4\theta_{\beta'_{10},4} - 4\theta_{\beta'_{11},4} - 4\theta_{\beta'_{12},4}$.

On constate le même phénomène lorsque l'on considère la forme $\Phi_{b'}^W$.

Lemme 3.1.6.
Les orbites de l'ensemble $\{\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta_5,\ \delta_6,\ \delta_7,\ \delta_8\ \}$ sous l'action du groupe $W(A_2)$ sont :

$$W(A_2).<\delta_3>=\{\ \delta_3\ \} \qquad W(A_2).<\delta_1>=\{\ \delta_1,\ \delta_5,\ \delta_8\ \}$$
$$W(A_2).<\delta_4>=\{\ \delta_4\ \} \qquad W(A_2).<\delta_2>=\{\ \delta_2,\ \delta_6,\ \delta_7\ \}.$$

Preuve.
On utilise les relations :

$$\sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = 3\lambda_2 - \alpha_2$$
$$\sigma_{\alpha_1}(\lambda_2) = \lambda_2$$
$$\sigma_{\alpha_2}(\lambda_2) = \lambda_2 - \alpha_2$$

Proposition 3.1.7.
La forme Φ_d est $W(A_2)$-invariante, et vérifie :

$$\Phi_d(\tau,z) = \Big(\theta_{2u,1} - \theta_{u,1}\Big)(\tau,2z).$$

Preuve.
La $W(A_2)$-invariance de la fonction Φ_d s'obtient d'après la définition de la fonction Φ_d et le lemme précédent, donnant la forme des orbites de l'ensemble des δ_j sous l'action de $W(A_2)$.

D'après les propriétés de Φ_d et les premiers termes de son développement de Fourier (voir la proposition 3.1.6), on peut affirmer que la forme $\frac{\Phi_d}{\eta(\tau)^8}$ appartient à l'espace $J_{-3,4}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$\left[\frac{\Phi_d}{\eta(\tau)^8}\right]_{q^0} = -P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 + 2P_2.$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier, à l'aide des propriétés de $a_{-3,1}$ (voir la proposition-définition 2.5.1), que la forme $a_{-3,1}(\tau,2z)$ appartient à ce même ensemble et possède le même polynôme $[\ ]_{q^0}$.
Les formes $\frac{\Phi_d}{\eta(\tau)^8}$ et $a_{-3,1}(\tau,2z)$ coïncident donc modulo $J_{-3,4}^{W(A_2),f}(q)$, et donc sont égales, car ce dernier espace est réduit à $\{0\}$, puisque $\Delta(\tau).J_{-15,4}^{W(A_2),f}$ est lui-même réduit à $\{0\}$, d'après la structure donnée dans la proposition 2.6.2.
En utilisant l'écriture de $a_{-3,1}$ sous la forme $a_{-3,1} = \eta(\tau)^{-8}\ (\theta_{2u,1} - \theta_{u,1})$ (voir la remarque 3.1.1), on arrive à la conclusion annoncée.

On en déduit un corollaire immédiat :

Corollaire 3.1.1. *On a la relation suivante liant des séries thêta d'indice* 1 *et des séries thêta d'indice* 4 *:*

$$\Big(\theta_{2u,1} - \theta_{u,1}\Big)(\tau,2z) = \Big(\theta_{\delta_1,4} - \theta_{\delta_2,4} - \theta_{\delta_3,4} + \theta_{\delta_4,4} + \theta_{\delta_5,4} - \theta_{\delta_6,4} - \theta_{\delta_7,4} + \theta_{\delta_8,4}\Big)(\tau,z).$$

3.2 La forme dénominateur

3.2.1 Définition et expression sous forme produit

Proposition-Définition 3.2.1. *Forme dénominateur.*
On note $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\}$ l'ensemble des racines positives du réseau A_2 (définies relativement à la base $\{\alpha_1\ ,\alpha_2\}$). (Voir la planche I de N.Bourbaki [B].)
En s'inspirant de la fonction dénominateur dans les algèbres de Lie affines (voir [KP], [Ka], [Z]), on construit la forme notée $\mathcal{A}$ suivante :

$$\mathcal{A} := \sum_{\sigma \in W(A_2)} (det\ \sigma)\theta_{\sigma(\rho'),\ g},$$

où ρ' est la demi-somme des racines positives du réseau A_2, encore appelé vecteur de Weyl du réseau A_2, (voir par exemple [E]) c'est à dire $\rho' = \alpha_1 + \alpha_2$, et où g est le nombre de Coxeter du réseau, c'est à dire ici $g = 3$.
Plus précisément, on a :

$$\mathcal{A} = \theta_{\alpha_1+\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_2,3} - \theta_{-\alpha_1-\alpha_2,3}.$$

Remarque 3.2.1. D'après la proposition 3.1.5, il s'agit de la seule forme de Jacobi singulière d'indice 3, pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ tout entier, ayant un caractère qui soit une puissance entière de v_η, à un multiple complexe près.

Proposition 3.2.1.
La fonction $\mathcal{A}$ est une forme de Jacobi faible, définie pour le réseau A_2, de poids 1, d'indice 3, de caractère v_η^8.

Preuve.
C'est une conséquence immédiate de la remarque précédente et des résultats énoncés à la proposition 3.1.5.

Proposition 3.2.2.
La forme $\mathcal{A}$ est $W(A_2)$-anti-invariante.

Preuve.
C'est un résulat énoncé dans un cadre plus général par V.G.Kac et D.H.Peterson, par exemple, voir [KP], que l'on peut retrouver en étudiant les orbites de $\widetilde{A_2}/3A_2$ sous l'action du groupe $W(A_2)$.

Proposition 3.2.3. *Développement de Fourier.*

$$\mathcal{A}(\tau,z) = \sum_{(k_1,k_2)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \epsilon(k_1,k_2) q^{\frac{1}{3}(k_1^2+k_2^2-k_1k_2)} \zeta_1^{k_2-2k_1} \zeta_2^{k_1-2k_2}\ ,$$

où $\zeta_j = e^{2i\pi z_j}$, avec $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$, et où :
$\epsilon(k_1,k_2) = 0$ *si* $k_1 + k_2 \equiv 0$ *mod* 3
$\epsilon(k_1,k_2) = -1$ *si* $k_1 + k_2 \equiv 1$ *mod* 3
$\epsilon(k_1,k_2) = 1$ *si* $k_1 + k_2 \equiv -1$ *mod* 3
ou encore, en notant $\epsilon(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) := \epsilon(k_1,k_2)$, pour k_1, k_2 appartenant à $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\tau,z) &= \sum_{k\in A_2} \epsilon(k)\ q^{\frac{1}{6}<k,k>} \zeta_1^{-<k,\alpha_1>} \zeta_2^{-<k,\alpha_2>} \\ &= \sum_{k\in A_2} \epsilon(k)\ q^{\frac{1}{6}<k,k>} e^{-2i\pi<z,k>}.\end{aligned}$$

Preuve.
On obtient cette expression en utilisant la définition des fonctions thêta (voir le paragraphe 1.1.6) :

$$\theta_{\alpha_1,3}(\tau,z) = \sum_{\gamma\in A_2+\frac{1}{3}\alpha_1} e^{3\pi i\tau<\gamma,\gamma>-6\pi i<\gamma,z>}$$
$$= \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} \exp(6\pi i\tau[(n_1+\frac{1}{3})^2+n_2^2-(n_1+\frac{1}{3})n_2]-12\pi i[z_1(n_1+\frac{1}{3})+z_2n_2-\frac{1}{2}z_1n_2-$$
$$\frac{1}{2}z_2(n_1+\frac{1}{3})])$$
$$= \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2,\\ k_1\equiv 1 \; mod \; 3,\\ k_2\equiv 0 \; mod \; 3}} \exp\Big(\frac{2}{3}\pi i\tau[k_1^2+k_2^2-k_1k_2]-\frac{4}{3}\pi i[3z_1k_1+3z_2k_2-\frac{3}{2}k_2z_1-\frac{3}{2}z_2k_1]\Big)$$

En écrivant de manière analogue les autres formes $\theta_{\mu,3}$ concernées, et en remarquant alors que dans la somme $\mathcal{A} = \theta_{\alpha_1+\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_2,3} - \theta_{-\alpha_1-\alpha_2,3}$ le terme $\exp\Big(\frac{2}{3}\pi i\tau[k_1^2+k_2^2-k_1k_2]-\frac{4}{3}\pi i[3z_1k_1+3z_2k_2-\frac{3}{2}k_2z_1-\frac{3}{2}z_2k_1]\Big)$ apparaît précédé d'un signe $+$, si $k_1+k_2\equiv -1 \; mod \; 3$, et précédé d'un signe $-$, si $k_1+k_2\equiv 1 \; mod \; 3$, on obtient le résultat annoncé.

Proposition 3.2.4. *Forme produit.*
La formule du dénominateur dans les algèbres de Lie affines permet d'écrire la fonction $\mathcal{A}$ sous forme de produit. (Voir la notation rappelée à la proposition-définition 3.2.1.) On obtient :

$$\mathcal{A}(\tau,z) = q^{\frac{<\rho',\rho'>}{6}} e^{-2i\pi<\rho',z>} \times \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^2$$
$$\times \prod_{\alpha\in\Delta^+}\Big[(1-e^{2i\pi<\alpha,z>})\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^ne^{2i\pi<\alpha,z>})(1-q^ne^{-2i\pi<\alpha,z>})\Big].$$

On peut encore écrire $\mathcal{A}$ sous la forme :

$$\mathcal{A}(\tau,z) = \eta(\tau)^{-1}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(i\vartheta(\tau,<\alpha,z>)\;),$$

ou encore :

$$\mathcal{A}(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\prod_{n=0}^{+\infty}(1-q^{n+1})^2\times\prod_{n=0}^{+\infty}((1-q^{n+1}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1})(1-q^{n+1}\zeta_1\zeta_2^{-2})(1-q^{n+1}\zeta_1^{-2}\zeta_2))$$
$$\times\prod_{n=0}^{+\infty}((1-q^n\zeta_1^2\zeta_2^{-1})(1-q^n\zeta_1\zeta_2)(1-q^n\zeta_1^{-1}\zeta_2^2))\;.$$

Corollaire 3.2.1. *Zéros de $\mathcal{A}$.*
A τ fixé, $\mathcal{A}(\tau,.)$ s'annule exclusivement aux points z pour lesquels il existe α appartenant à Δ^+ tel que $<\alpha,z>$ appartienne à $\mathbf{Z}\tau+\mathbf{Z}$. Chacun de ses zéros est d'ordre 1.

Preuve.
On utilise la proposition 3.2.4 et la forme des zéros de ϑ. (Voir le paragraphe 1.1.3.)

Corollaire 3.2.2. *La fonction $\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$ est une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-anti-invariante, de poids -3, d'indice 3.*
Elle s'écrit :

$$\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}(\tau,z) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{i\vartheta(\tau, <\alpha,z>)}{\eta(\tau)^3} \ ,$$

ses coefficients de Fourier sont donc entiers.

Remarque 3.2.2. D'après la forme des zéros de $\mathcal{A}$ ainsi que celle de son développement de Fourier, on peut affirmer que la fonction $\frac{\mathcal{A}(\tau,nz)}{\mathcal{A}(\tau,z)}$, pour un entier naturel non nul n fixé, est une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-invariante, de poids 0, d'indice $3(n^2-1)$.

3.2.2 Structure de l'espace des formes $W(A_2)$-anti-invariantes

Proposition 3.2.5. *Formes $W(A_2)$-anti-invariantes.*
Soient k et m deux entiers fixés. Alors :

$$J_{k,m}^{AW(A_2),f} = \frac{\mathcal{A}}{\eta^8} \cdot J_{k+3,m-3}^{W(A_2),f}.$$

Preuve.
Il s'agit de démontrer qu'une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-anti-invariante est divisible dans l'espace des formes de Jacobi faibles par la forme $\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$.
Soit Φ une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-anti-invariante. Soit (τ,z) un zéro de $\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$.
Alors, d'après le corollaire 3.2.1, il existe une racine positive α telle que $< z,\alpha >$ soit dans $\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$. Considérons la réflexion $\sigma = \sigma_\alpha$.
D'une part, d'après la $W(A_2)$-anti-invariance de Φ, on a :

$$\Phi(\tau,\sigma.z) = -\Phi(\tau,z),$$

et d'autre part, en écrivant $< \alpha,z >= m'\tau + n'$ avec m' et n' entiers relatifs, on a :
$\Phi(\tau,\sigma.z) = \Phi(\tau,z - m'\alpha\tau - n'\alpha)$
d'où, en utilisant les propriétés d'une forme de Jacobi (voir la définition 1.1.1) :
$\Phi(\tau,\sigma.z) = e^{-\pi i m(2<-m'\alpha,z>+\tau<m'\alpha,m'\alpha>)}\Phi(\tau,z)$
et, en exploitant les égalités $< z,\alpha >= m'\tau + n'$, $< \alpha,\alpha >= 2$, on obtient :

$$\Phi(\tau,\sigma.z) = \Phi(\tau,z).$$

On en déduit $\Phi(\tau,z) = 0$.
Ainsi, la forme Φ s'annule en tout zéro de $\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$.

D'après les propriétés de la forme $\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$, (et en particulier de son développement en puissances de q obtenu en considérant la forme produit), on déduit que le quotient $\Phi/\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$ est une forme de Jacobi faible (en particulier, son développement de Fourier ne comporte que des puissances positives de q), $W(A_2)$-invariante.

Ainsi, si Φ appartient à $J_{k,m}^{AW(A_2),f}$, alors $\Phi/\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}$ est un élément de $J_{k+3,m-3}^{W(A_2),f}$.

3.2.3 Relation avec $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$

Proposition 3.2.6. *Posons :* $\Psi(\tau,z) := 2^6 \times 3^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)(\tau,z)$.
Alors, on obtient , pour chaque τ *dans* $\mathbb{H}$:

$$(\Psi)^2 \ = \ P_\tau(\ 24a_{0,1},\ 2a_{-2,1},\ a_{-3,1}\ ),$$

où $P_\tau(X_1,X_2,X_3) = -9\ X_1^4X_3^2 \ - \ 4\ X_1^3X_2^3 \ + \ 30E_4(\tau)\ X_1^2X_2^2X_3^2 + 12E_6(\tau)\ X_1^2X_3^4$
$+\ 12E_4(\tau)\ X_1X_2^5 \ + \ 24E_6(\tau)\ X_1X_2^3X_3^2 \ + \ 24E_4(\tau)^2\ X_1X_2X_3^4 + 3E_4(\tau)^2\ X_2^4X_3^2$
$+\ 12E_4(\tau)E_6(\tau)\ X_2^2X_3^4 \ + \ 8E_6(\tau)\ X_2^6 \ + \ 4(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2)\ X_3^6$.

Preuve.
D'après le corollaire 3.2.2, la forme $\left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2$ appartient à l'espace $J_{-6,6}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}$ et peut donc s'écrire, d'après le théorème de structure énoncé à la proposition 2.6.2 :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2 \ = \ \lambda_1E_{12}a_{-3,1}^6 + \lambda_2E_{10}(2a_{-2,1})^2a_{-3,1}^4 + \lambda_3E_8(2a_{-2,1})^4a_{-3,1}^2 + \lambda_4E_6(2a_{-2,1})^6$$

$$+\lambda_5E_8(24a_{0,1})(2a_{-2,1})a_{-3,1}^4 + \lambda_6E_6(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^3a_{-3,1}^2 + \lambda_7E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^5$$

$$+\lambda_8E_6(24a_{0,1})^2(a_{-3,1})^4 + \lambda_9E_4(24a_{0,1})^2(2a_{-2,1})^2(a_{-3,1})^2 + \lambda_{10}(24a_{0,1})^3(2a_{-2,1})^3$$

$$+\lambda_{11}(24a_{0,1})^4a_{-3,1}^2 + \lambda_{12}\Delta a_{-3,1}^6\ ,$$

où les λ_j sont des nombres complexes.
On trouve ces coefficients λ_j (à l'aide des logiciels maple et pari-gp) en calculant les polynômes $[.]_{q^0}$ et $[.]_{q^1}$ pour chaque terme de cette égalité, et en établissant par identification des coefficients des polynômes en P_1 et P_2 obtenus, un système d'équations vérifiées par les λ_j. (On rappelle que P_1 et P_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$, voir le paragraphe 2.2.)

Donnons ici quelques précisions de ces calculs.
En effectuant un calcul direct à partir de la forme produit donnée à la proposition 3.2.4, on a :
$\left[\left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2\right]_{q^0} = \left[\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}(1-\zeta_1^2\zeta_2^{-1})(1-\zeta_1\zeta_2)(1-\zeta_1^{-1}\zeta_2^2)\right]^2$
$= -4(P_1^3+P_2^3) + P_1^2P_2^2 + 18P_1P_2 - 27$

$\left[\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right]_{q^1} = \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}(1-\zeta_1^2\zeta_2^{-1})(1-\zeta_1\zeta_2)(1-\zeta_1^{-1}\zeta_2^2) \times \Big[6 - \zeta_1^{-1}\zeta_2^2 - \zeta_1\zeta_2 - \zeta_1^2\zeta_2^{-1} - \zeta_1^{-2}\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2^{-2} - \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\Big] = \left[\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right]_{q^0} \times (9 - P_1P_2)$

$\left[\left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2\right]_{q^1} = 2 \times \left[\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right]_{q^0} \times \left[\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right]_{q^1} = 2 \times \left[\left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2\right]_{q^0} \times (9 - P_1P_2)$
$= 2 \times (-4(P_1^3+P_2^3) + P_1^2P_2^2 + 18P_1P_2 - 27) \times (9 - P_1P_2)$
$= -486 + 378P_1P_2 - 18P_1^2P_2^2 - 2P_1^3P_2^3 - 72(P_1^3+P_2^3) + 8(P_1P_2^4 + P_1^4P_2)$

et en utilisant le logiciel pari-gp, on obtient :

$[24a_{0,1}]_{q^1} = 324 - 84(P_1+P_2) + 18P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2$
$[2a_{-2,1}]_{q^1} = 36 - 12(P_1+P_2) + 6P_1P_2 - (P_1^2+P_2^2)$
$[a_{-3,1}]_{q^1} = 6(P_2 - P_1) + P_1^2 - P_2^2$.

Finalement, en résolvant le système d'équations en les λ_i à l'aide du logiciel maple, et en utilisant $E_{10} = E_4E_6$, $E_8 = E_4^2$, $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$, voir la notation 2.4.2, on obtient :

$$2^{12} \times 3^3 \times \left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2 = 12(E_4E_6(2a_{-2,1})^2a_{-3,1}^4 + E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^5 + E_6(24a_{0,1})^2a_{-3,1}^4)$$
$$+3E_4^2(2a_{-2,1})^4a_{-3,1}^2 + 8E_6(2a_{-2,1})^6 + 24(E_4^2(24a_{0,1})(2a_{-2,1})a_{-3,1}^4 + E_6(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^3a_{-3,1}^2)$$
$$+30E_4(24a_{0,1})^2(2a_{-2,1})^2a_{-3,1}^2 - 4(24a_{0,1})^3(2a_{-2,1})^3 - 9(24a_{0,1})^4a_{-3,1}^2 + 4(E_4^3 - E_6^2)a_{-3,1}^6.$$

En posant $\Psi(\tau,z) := 2^6 \times 3^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)(\tau,z)$, on obtient alors le résultat annoncé.

Remarque 3.2.3. Autres écritures.
(i) En utilisant cette relation, on peut donner l'écriture de la fonction Φ définie par : $\Phi := 2^{12} \times 3^3 \times E_6 \times \left(\frac{\mathcal{A}}{\eta^8}\right)^2$, qui est un élément de $J_{0,6}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, sous la forme d'un polynôme en les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ (voir la proposition 2.7.1) à coefficients complexes (on constate qu'ils sont entiers), ou encore (en utilisant des relations établies au paragraphe 5.6.1 à venir), sous la forme d'un polynôme à coefficients entiers, en $\xi_{0,4}$, définie à la proposition 2.7.2, et en les fonctions définies dans le chapitre 5 (paragraphes 5.2, 5.3, 5.4) notées $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$.
On obtient :

$$\Phi = 2^43\varphi_2\varphi_3^2 + 2^{10}3^2\varphi_1\varphi_2\varphi_5 + 2^83^3\varphi_1^2\varphi_3^2 + 2^43\varphi_2^2\varphi_3 + 2^9\varphi_5^2 + 2^73^2\varphi_1\varphi_3\varphi_4 + 2^93^2\varphi_1\varphi_3\varphi_5 + 2^93^35\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3 - 2^{14}3^3\varphi_1^3\varphi_5 - 2^{12}3^6\varphi_1^4\varphi_3 - 4\varphi_3^3 + 4\varphi_3\varphi_6$$

$$\Phi = 2^23.7(\psi_{0,1}^{(1)})^6 - 2^53^311(\psi_{0,1}^{(1)})^4\psi_{0,2}^{(1)} + 2^43^3(\psi_{0,1}^{(1)})^4\psi_{0,2}^{(11)} + 2^73^5(\psi_{0,1}^{(1)})^3\psi_{0,3}^{(1)} + 2^73^2(\psi_{0,1}^{(1)})^3\psi_{0,3}^{(11)} -$$
$$2^93^3(\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + 2^93^317(\psi_{0,1}^{(1)})^2(\psi_{0,2}^{(1)})^2 - 2^73(\psi_{0,1}^{(1)})^2(\psi_{0,2}^{(11)})^2 - 2^{10}3^57\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)}$$
$$-2^{10}3^4\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} + 2^{10}3^2\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(11)} + 2^{10}3^3\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(1)} + 2^{12}3^5(\psi_{0,2}^{(1)})^3$$
$$-2^{10}3^37(\psi_{0,2}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)} + 2^{10}3^2\psi_{0,2}^{(1)}(\psi_{0,2}^{(11)})^2 + 2^{13}3^6(\psi_{0,3}^{(1)})^2 + 2^73^3\xi_{0,4}(-8\psi_{0,2}^{(11)} - (\psi_{0,1}^{(1)})^2 + 72\psi_{0,2}^{(1)})$$

Remarque 3.2.4. Interprétation géométrique.
(i) Pour τ fixé dans $\mathbb{H}$, le polynôme P_τ est un polynôme de $\mathbb{C}[\ X_1,\ X_2,\ X_3\ ]$ homogène de degré 6.
A tout $z = (z_1,z_2)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, on peut associer le point M_z de $\mathbb{C}^4$ défini par $M_z := (24\ a_{0,1}(\tau,z),\ 2\ a_{-2,1}(\tau,z),\ a_{-3,1}(\tau,z),\ \Psi(\tau,z))$.
M_z est alors un point de $\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\ \in\ \mathbb{C}^4/\ \ x_4^2 = P_\tau(x_1,x_2,x_3)\ \}$.

(ii) On peut aussi associer à z le point N_z de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^5) = \mathbb{P}^4$ défini à l'aide des coordonnées projectives :

$$N_z := (24\ a_{0,1}(\tau,z)\ :\ 2\ a_{-2,1}(\tau,z)\ :\ a_{-3,1}(\tau,z)\ :\ \Psi(\tau,z)\ :\ 1).$$

Le point N_z est alors un point de :

$$\{\ (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)\ \in\ \mathbb{P}^4/\ \ x_4^2x_5^4 = P_\tau(x_1,x_2,x_3)\ \}\ ,$$

soit encore un point de la sextique de $\mathbb{P}^4$ définie par :

$$V := V(\ X_4^2X_5^4 - P_\tau(X_1,X_2,X_3)\ ).$$

Pour τ fixé, notons $L_\tau := \mathbb{Z}\ +\ \mathbb{Z}\tau$.
On pourrait alors étudier l'application h suivante :

$$h\ :\ z\ \in \mathbb{C}^2/(L_\tau \times L_\tau)\ \longmapsto N_z\ \in\ V\ .$$

3.2.4 Un analogue de la fonction $\wp$ de Weierstrass

On peut construire un analogue de la fonction $\wp$ de Weierstrass à une variable (voir le paragraphe 1.1.3 et [Sk], [WW], [K], [G2]), en utilisant la forme $\mathcal{A}$ et l'opérateur différentiel logarithmique décrit dans la remarque 1.2.3.

Proposition-Définition 3.2.2.
On applique l'opérateur D_3 à la fonction $\mathcal{A}$ et on pose :

$$\wp(\tau,z) := -D_3\Big(\mathcal{A}\Big) = -\Delta_0(\log(\mathcal{A})) + 96\pi^2 G_2(\tau).$$

Alors, d'après la remarque 1.2.3, la fonction méromorphe ainsi obtenue est une forme de Jacobi pour A_2, de poids 2, et d'indice 0.

Proposition 3.2.7. *Pôles de la fonction $\wp$.*
Les seuls pôles de la fonction $\wp$ sont les points $(\tau,w_1\lambda_1+w_2\lambda_2)$ avec w_1 ou w_2 ou w_1+w_2 appartenant à $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Ce sont des pôles d'ordre 2.

Preuve.
Pour déterminer les pôles de la fonction $\wp$, on utilise l'expression de $\mathcal{A}$ et de Δ_0 dans la base de U formée des poids fondamentaux $\{\lambda_1,\lambda_2\}$. (Cette base présente l'intérêt de mettre en évidence les zéros de $\mathcal{A}$.) La variable z sera ainsi écrite dans cette base : $z = w_1\lambda_1+w_2\lambda_2$.
D'après la proposition 3.2.4, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\tau,z) &= \eta(\tau)^{-1}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(i\vartheta(\tau,<\alpha,z>))\\ &= -i\eta(\tau)^{-1}\vartheta(\tau,w_1)\vartheta(\tau,w_2)\vartheta(\tau,w_1+w_2).\end{aligned}$$

L'expression de l'opérateur Δ_0 dans la nouvelle base, obtenue en utilisant la matrice de $<,>$ dans la base $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, est :

$$\Delta_0 = 2\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial w}\right] = 4\left(\frac{\partial^2}{\partial w_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial w_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial w_1\partial w_2}\right), \text{ d'où :}$$

$$\Delta_0\log(f) = 4\frac{1}{f^2}\times\left[f\times\left(\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial w_2^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_2}\right)-\left(\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial w_2}\right)^2-\frac{\partial f}{\partial w_1}\frac{\partial f}{\partial w_2}\right)\right]$$

Après calculs, on obtient donc :

$$\Delta_0\log(\mathcal{A})(\tau,w_1\lambda_1+w_2\lambda_2) = 4\Big[\left(\frac{\vartheta_{z^2}}{\vartheta}\right)(\tau,w_1)+\left(\frac{\vartheta_{z^2}}{\vartheta}\right)(\tau,w_2)+\left(\frac{\vartheta_{z^2}}{\vartheta}\right)(\tau,w_1+w_2)-\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)^2(\tau,w_1)-\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)^2(\tau,w_2)-\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)^2(\tau,w_1+w_2)\Big]. \quad (\star)$$

On sait que G_2 est holomorphe sur $\mathbb{H}$ et que les seuls zéros de la fonction ϑ sont les (τ,z) avec z appartenant à $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, (voir le paragraphe 1.1.3) on peut donc en déduire que les seuls pôles de la fonction $\wp$ construite sont les points $(\tau,w_1\lambda_1+w_2\lambda_2)$ avec w_1 ou w_2 ou w_1+w_2 appartenant à $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, et que ce sont des pôles d'ordre 2.

Corollaire 3.2.3. *La fonction $\wp\times\mathcal{A}^2$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}\times U$.*

Preuve.
On utilise la nature des pôles de $\wp$ et le fait que les zéros de $\mathcal{A}$ sont exactement les points $(\tau,w_1\lambda_1+w_2\lambda_2)$ avec w_1 ou w_2 ou w_1+w_2 appartenant à $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, et qu'ils sont d'ordre 1.

Lemme 3.2.1. *La forme $\wp$ est $W(A_2)$-invariante.*

Preuve.
On établit ce résultat en utilisant l'expression $(\star)$ de $\Delta_0 \log(\mathcal{A})$ donnée au cours de la preuve de la proposition 3.2.7, les égalités suivantes :
$\sigma_{\alpha_1}(w_1\lambda_1 + w_2\lambda_2) = -w_1\lambda_1 + (w_1 + w_2)\lambda_2$
$\sigma_{\alpha_2}(w_1\lambda_1 + w_2\lambda_2) = (w_1 + w_2)\lambda_1 - w_2\lambda_2,$
et les relations $\vartheta(\tau, -w) = -\vartheta(\tau,w)$, $\vartheta_z(\tau, -w) = \vartheta_z(\tau,w)$, $\vartheta_{z^2}(\tau, -w) = -\vartheta_{z^2}(\tau,w)$.

Corollaire 3.2.4. *La fonction $\wp \times (\mathcal{A}/\eta^8(\tau))^2$ appartient à l'espace $J_{-4,6}^{W(A_2),f}$.*

Preuve.
D'après les résultats précédents, la fonction $\wp \times (\mathcal{A}/\eta^8(\tau))^2$ est holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$, elle vérifie les équations fonctionnelles citées dans la définition 1.1.1, pour le poids $k = -4$, et l'indice $m = 6$, elle est $W(A_2)$-invariante, et, d'après la forme produit infini de ϑ et l'expression $(\star)$ de $\Delta_0 \log(\mathcal{A})$ donnée au cours de la preuve de la proposition 3.2.7, il n'apparaît dans son développement de Fourier que des puissances positives de q, d'où la conclusion annoncée.

3.2.5 Un analogue de la fonction σ de Weierstrass

Remarque 3.2.5. On rappelle (voir par exemple [WW], [Sk]) que dans le cas classique à une variable, la fonction σ de Weierstrass est égale à :

$$\sigma(\tau,w) = \frac{\vartheta(\tau,w)}{\eta^3(\tau)}\ e^{-4\pi^2 G_2(\tau) w^2}$$

et vérifie :

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} \log \sigma(\tau,w) = -\wp(\tau,z),$$

la forme ϑ étant la forme dénominateur (ou l'un de ses multiples constants) dans le cas classique à une variable.
La fonction $\sigma(\tau,w)$ n'est pas une forme de Jacobi, mais les coefficients $f_n(\tau)$ qui apparaissent dans le développement de Taylor par rapport à la variable w sont des formes modulaires.

Proposition-Définition 3.2.3.
Par analogie avec le cas classique, on introduit la forme pour le réseau A_2 encore notée σ et définie par :

$$\sigma(\tau,z) = \frac{\mathcal{A}(\tau,z)}{\eta^8(\tau)}\ e^{-12\pi^2 G_2(\tau) < z,z >}.$$

Cette forme est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$, dont les zéros coïncident avec ceux de la forme $\mathcal{A}$.
Ce n'est pas une forme de Jacobi, mais les coefficients $f_{k_1,k_2}(\tau)$ qui apparaissent dans son développement de Taylor en les variables z_1 et z_2 sont des formes modulaires.
La fonction σ vérifie une propriété analogue à celle du cas de une variable :

$$\Delta_0 \log \sigma = -\wp.$$

Preuve.
La propriété des coefficients $f_{k_1,k_2}(\tau)$ est une application de la proposition 1.2.11.
On vérifie la dernière relation en écrivant :

$$\begin{aligned}\Delta_0 \log(\sigma) &= \Delta_0 \log(\mathcal{A}) - 12\pi^2 G_2(\tau) \times \Delta_0(< z,z >)\\ &= -\wp + 96\pi^2 G_2(\tau) - 12\pi^2 G_2(\tau) \times 8 = -\wp.\end{aligned}$$

3.3 Introduction de caractéristiques

3.3.1 Utilisation des fonctions à une variable ξ_{00}, ξ_{01}, ξ_{10}

Dans ce paragraphe, on utilise les fonctions ξ_{00}, ξ_{01}, ξ_{10} (voir le paragraphe 1.1.3), citées par V.Gritsenko dans son article [G2], qui sont des formes à une variable, définies à partir de la fonction ϑ en introduisant des caractéristiques d'ordre 2.

Proposition-Définition 3.3.1. *On utilise ici le système de coordonnées* (z'_1,z'_2,z'_3) *de* U. *On pose :*

$$\xi'_{00}(\tau,z) := \xi_{00}(\tau,z'_1)\xi_{00}(\tau,z'_2)\xi_{00}(\tau,z'_3)$$
$$\xi'_{01}(\tau,z) := \xi_{01}(\tau,z'_1)\xi_{01}(\tau,z'_2)\xi_{01}(\tau,z'_3)$$
$$\xi'_{10}(\tau,z) := \xi_{10}(\tau,z'_1)\xi_{10}(\tau,z'_2)\xi_{10}(\tau,z'_3).$$

Ces trois fonctions vérifient les relations suivantes :

$$\begin{array}{lclclcl}
\xi'_{00}(\tau+1,z) & = & \xi'_{01}(\tau,z) & \quad & \xi'_{00}\Big(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\Big) & = & e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi'_{00}(\tau,z)\\
\xi'_{01}(\tau+1,z) & = & \xi'_{00}(\tau,z) & & \xi'_{01}\Big(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\Big) & = & e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi'_{10}(\tau,z)\\
\xi'_{10}(\tau+1,z) & = & \xi'_{10}(\tau,z) & & \xi'_{10}\Big(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\Big) & = & e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi'_{01}(\tau,z)
\end{array}$$

Pour tous α, β *appartenant à* A_2 *:*

$$\xi'_{00}(\tau,z+\alpha+\beta\tau) = e^{-\pi i(<\beta,\beta>\tau+2<\beta,z>)}\xi'_{00}(\tau,z)$$
$$\xi'_{01}(\tau,z+\alpha+\beta\tau) = e^{-\pi i(<\beta,\beta>\tau+2<\beta,z>)}\xi'_{01}(\tau,z)$$
$$\xi'_{10}(\tau,z+\alpha+\beta\tau) = e^{-\pi i(<\beta,\beta>\tau+2<\beta,z>)}\xi'_{10}(\tau,z)$$

Les fonctions ξ'_{00}, ξ'_{01}, $8\ \xi'_{10}$ *sont à coefficients de Fourier entiers et leurs développements de Fourier ont pour premiers termes :*

$$[\xi'_{00}]_{q^0} = 1$$
$$[\xi'_{01}]_{q^0} = 1$$
$$[\xi'_{10}]_{q^0} = \frac{1}{8}(\ 2+P_1+P_2\ ).$$

Preuve.
Les équations fonctionnelles vérifiées par ces trois formes s'obtiennent en consultant les tables de relations vérifiées par les fonctions à une variable ξ_{00}, ξ_{01}, ξ_{10}, (voir le paragraphe 1.1.3), et en écrivant α et β sous les formes respectives (a'_1,a'_2,a'_3) et (b'_1,b'_2,b'_3), avec les a'_j et b'_j entiers et $a'_1+a'_2+a'_3=0$, $b'_1+b'_2+b'_3=0$.
Les propriétés concernant les coefficients de Fourier s'obtiennent en utilisant le fait que ξ_{00}, ξ_{01}, $2\xi_{10}$ sont à coefficients de Fourier entiers, ainsi que les égalités :

$$[\xi_{00}(\tau,z)]_{q^0} = 1$$
$$[\xi_{01}(\tau,z)]_{q^0} = 1$$
$$[\xi_{10}(\tau,z)]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{2}.$$

En considérant certains polynômes symétriques en ces fonctions, on peut obtenir des formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2.

Proposition 3.3.1. *Exemples de formes de Jacobi obtenues.*

$$\Phi_1 := 8(\xi'_{00} + \xi'_{01} + \xi'_{10}) \textit{ appartient à } J_{0,1}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi_1]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2$$
$$\Phi_2 := 64({\xi'_{00}}^2 + {\xi'_{01}}^2 + {\xi'_{10}}^2) \textit{ appartient à } J_{0,2}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi_2]_{q^0} = 132 + 4(P_1 + P_2) + 2P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2$$
$$\Phi'_2 := 8(\xi'_{00}\xi'_{01} + \xi'_{01}\xi'_{10} + \xi'_{00}\xi'_{10}) \textit{ appartient à } J_{0,2}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi'_2]_{q^0} = 12 + 2(P_1 + P_2)$$
$$\Phi_3 := 8\xi'_{00}\xi'_{01}\xi'_{10} \textit{ appartient à } J_{0,3}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi_3]_{q^0} = 2 + P_1 + P_2$$
$$\Phi'_3 := 8^3({\xi'_{00}}^3 + {\xi'_{01}}^3 + {\xi'_{10}}^3) \textit{ appartient à } J_{0,3}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi'_3]_{q^0} = 1032 + 12(P_1 + P_2) + 12P_1P_2 + 6(P_1^2 + P_2^2) + P_1^3 + P_2^3 + 3(P_1P_2^2 + P_1^2P_2)$$
$$\Phi''_3 := 64(\xi'_{00}{\xi'_{01}}^2 + {\xi'_{00}}^2\xi'_{01} + {\xi'_{01}}^2\xi'_{10} + \xi'_{01}{\xi'_{10}}^2 + {\xi'_{00}}^2\xi'_{10} + \xi'_{00}{\xi'_{10}}^2) \textit{ appartient à } J_{0,3}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi''_3]_{q^0} = 168 + 24(P_1 + P_2) + 4P_1P_2 + 2(P_1^2 + P_2^2)$$
$$\Phi_4 := 64\Big((\xi'_{00}\xi'_{01})^2 + (\xi'_{00}\xi'_{10})^2 + (\xi'_{01}\xi'_{10})^2\Big) \textit{ appartient à } J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi_4]_{q^0} = 64 + 2(2 + P_1 + P_2)^2$$
$$\Phi'_4 := 8^4({\xi'_{00}}^4 + {\xi'_{01}}^4 + {\xi'_{10}}^4) \textit{ appartient à } J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi'_4]_{q^0} = 2 \times 8^4 + (2 + P_1 + P_2)^4$$
$$\Phi''_4 := 8^3(\xi'_{00}{\xi'_{01}}^3 + {\xi'_{00}}^3\xi'_{01} + {\xi'_{01}}^3\xi'_{10} + \xi'_{01}{\xi'_{10}}^3 + {\xi'_{00}}^3\xi'_{10} + \xi'_{00}{\xi'_{10}}^3) \textit{ appartient à } J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi''_4]_{q^0} = 2\Big(8^3 + 8^2(2 + P_1 + P_2) + (2 + P_1 + P_2)^3\Big)$$
$$\Phi'''_4 := 8^2(\xi'_{00}\xi'_{01}{\xi'_{10}}^2 + \xi'_{00}{\xi'_{01}}^2\xi'_{10} + {\xi'_{00}}^2\xi'_{01}\xi'_{10}) \textit{ appartient à } J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$$
$$\textit{et } [\Phi'''_4]_{q^0} = 36 + 20(P_1 + P_2) + 2P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2$$

Preuve.
Ces résultats s'obtiennent grâce aux propriétés énoncées à la proposition-définition 3.3.1.

3.3.2 Utilisation de fonctions à deux variables

(i) Généralités

Dans le paragraphe précédent, on a utilisé l'introduction de caractéristiques d'ordre 2 sur la fonction classique à une variable ϑ, ce qui a conduit aux formes ξ_{00}, ξ_{01}, ξ_{10}.
De façon analogue, on va introduire dans ce paragraphe des caractéristiques sur les fonctions à deux variables, en particulier sur des formes dont on connaît bien les zéros, ce qui nous permettra de déterminer ceux des nouvelles formes obtenues, et de considérer des quotients dans certains cas favorables.

Définition 3.3.1. Si ϕ est une forme de Jacobi d'indice m définie relativement à A_2, pour α et β appartenant à $A_2 \otimes \mathbb{Q}$, on pose :

$$\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) := e^{\pi i m\tau<\beta,\beta>} e^{2\pi i m<\beta,z+\alpha>} \phi(\tau,z + \alpha + \beta\tau).$$

On dira alors qu'on a *introduit les caractéristiques α et β.*

Proposition 3.3.2. *Soient k un entier relatif, m un entier naturel, χ un caractère, et ϕ appartenant à $J_{k,m}^{W(A_2),f}(\chi)$. Soient α et β appartenant à $A_2 \otimes \mathbb{Q}$.*
La fonction $\phi^{[\alpha,\beta]}$ vérifie alors les propriétés suivantes.

1) $\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau+1,z) = \chi(T)e^{-\pi im<\beta,\beta>}\phi^{[\alpha+\beta,\beta]}(\tau,z)$

2) $\phi^{[\alpha,\beta]}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = \chi(S)\tau^k e^{2\pi im<\alpha,\beta>}e^{\pi im\frac{<z,z>}{\tau}}\phi^{[-\beta,\alpha]}(\tau,z)$

3) pour l', l'' appartenant à A_2,
$\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z+l'+l''\tau) = \chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'')e^{\pi im(-2<l'',z>-\tau<l'',l''>)}\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$,
avec $\chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'') = e^{-2\pi im<l'',\alpha>}e^{2\pi im<l',\beta>}$

4) pour l appartenant à A_2, $\phi^{[\alpha+l,\beta]}(\tau,z) = e^{2\pi im<\beta,l>}\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$

5) pour l appartenant à A_2, $\phi^{[\alpha,\beta+l]}(\tau,z) = \phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$

6) si σ appartient à $W(A_2)$, $\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,\sigma.z) = \epsilon(\sigma).\phi^{[\sigma^{-1}.\alpha,\sigma^{-1}.\beta]}(\tau,z)$,

$$\text{où } \epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \phi \text{ est } W(A_2)-\text{invariante} \\ sign(\sigma), & \text{si } \phi \text{ est } W(A_2)-\text{anti-invariante} \end{cases}$$

Preuve.
On utilise la définition de la fonction $\phi^{[\alpha,\beta]}$, et les équations fonctionnelles vérifiées par la forme ϕ.

1)
$$\begin{aligned}\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau+1,z) &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{\pi im<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}\phi(\tau+1,z+\alpha+\beta+\beta\tau)\\ &= \chi(T)e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{\pi im<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}\phi(\tau,z+\alpha+\beta+\beta\tau)\\ &= \chi(T)e^{\pi im<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}e^{-2\pi im<\beta,z+\alpha+\beta>}\phi^{[\alpha+\beta,\beta]}(\tau,z)\\ &= \chi(T)e^{-\pi im<\beta,\beta>}\phi^{[\alpha+\beta,\beta]}(\tau,z).\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\phi^{[\alpha,\beta]}(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) &= e^{-\pi i\frac{m<\beta,\beta>}{\tau}}e^{2\pi im<\beta,\frac{z}{\tau}+\alpha>}\phi(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}-\tfrac{\beta}{\tau}+\alpha)\\ &= e^{-\pi i\frac{m<\beta,\beta>}{\tau}}e^{2\pi im<\beta,\frac{z}{\tau}+\alpha>}\phi(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z-\beta+\alpha\tau}{\tau})\\ &= \chi(S)\tau^k e^{-\pi i\frac{m<\beta,\beta>}{\tau}}e^{\frac{2\pi im}{\tau}<\beta,z+\alpha\tau>}e^{\frac{\pi im}{\tau}<z-\beta+\alpha\tau,z-\beta+\alpha\tau>}\\ &\times\phi(\tau,z-\beta+\alpha\tau)\\ &= \chi(S)\tau^k e^{\frac{\pi im}{\tau}<z+\alpha\tau,z+\alpha\tau>}\phi^{[-\beta,\alpha]}(\tau,z)e^{-\pi im\tau<\alpha,\alpha>}e^{-2\pi im<\alpha,z-\beta>}\\ &= \chi(S)\tau^k e^{\pi i\frac{m}{\tau}<z,z>}e^{2\pi im<\alpha,\beta>}\phi^{[-\beta,\alpha]}(\tau,z)\end{aligned}$$

3) Soient l', l'' appartenant à A_2,
$$\begin{aligned}\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z+l'+l''\tau) &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+l'+l''\tau+\alpha>}\phi(\tau,z+l'+\alpha+\beta\tau+l''\tau)\\ &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}e^{2\pi im<\beta,l'>}e^{2\pi im\tau<\beta,l''>}e^{-2\pi im<l'',z+\alpha+\beta\tau>}\\ &e^{-\pi im<l'',l''>\tau}\phi(\tau,z+\alpha+\beta\tau)\\ &= e^{\pi im(-2<l'',z>-\tau<l'',l''>)}\chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'')\ \phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z),\end{aligned}$$
avec $\chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'') = e^{-2\pi im<l'',\alpha>}e^{2\pi im<l',\beta>}$

4) soit l appartenant à A_2,
$$\begin{aligned}\phi^{[\alpha+l,\beta]}(\tau,z) &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}e^{2\pi im<\beta,l>}\phi(\tau,z+\alpha+\beta\tau+l)\\ &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}e^{2\pi im<\beta,l>}\phi(\tau,z+\alpha+\beta\tau)\\ &= e^{2\pi im<\beta,l>}\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)\end{aligned}$$

5) soit l appartenant à A_2,
$$\begin{aligned}\phi^{[\alpha,\beta+l]}(\tau,z) &= e^{\pi im\tau<\beta,\beta>}e^{\pi im\tau<l,l>}e^{2\pi im\tau<\beta,l>}e^{2\pi im<\beta,z+\alpha>}e^{2\pi im<l,z>}e^{2\pi im<l,\alpha>}\\ &\times\ \phi(\tau,z+\alpha+l\tau+\beta\tau)\end{aligned}$$

$= e^{\pi i m\tau<\beta,\beta>} e^{\pi i m\tau<l,l>} e^{2\pi i m\tau<\beta,l>} e^{2\pi i m<\beta,z+\alpha>} e^{2\pi i m<l,z>} e^{2\pi i m<l,\alpha>} e^{-\pi i m\tau<l,l>}$
$\times\ e^{-2\pi i m<l,z+\alpha+\beta\tau>} \phi(\tau,z+\alpha+l\tau+\beta\tau)$
$= \phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$

6) soit σ appartenant à $W(A_2)$,
$\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,\sigma.z) = e^{\pi i m\tau<\beta,\beta>} e^{2\pi i m<\beta,\sigma.z+\alpha>} \phi(\tau,\sigma.z+\alpha+\beta\tau)$
$= e^{\pi i m\tau<\sigma^{-1}.\beta,\sigma^{-1}.\beta>} e^{2\pi i m<\sigma^{-1}.\beta,z+\sigma^{-1}.\alpha>} \epsilon(\sigma)\phi(\tau,z+\sigma^{-1}.\alpha+\sigma^{-1}.\beta\tau)$
$= \epsilon(\sigma)\phi^{[\sigma^{-1}.\alpha,\sigma^{-1}.\beta]}(\tau,z)$.

Corollaire 3.3.1. *On reprend les notations de la proposition précédente, et, si $\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)$ est non nul, on pose :*

$$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) := \frac{\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)}{\phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)}.$$

Alors la fonction $f^{[\alpha,\beta]}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) $f^{[\alpha,\beta]}(\tau+1,z) = f^{[\alpha+\beta,\beta]}(\tau,z)$

2) $f^{[\alpha,\beta]}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i m\frac{<z,z>}{\tau}} f^{[-\beta,\alpha]}(\tau,z)$

3) pour l', l'' appartenant à A_2,
$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z+l'+l''\tau) = \chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'')e^{\pi i m(-2<l'',z>-\tau<l'',l''>)} f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$,
avec $\chi_{\alpha,\beta,m}(l',l'') = e^{-2\pi i m<l'',\alpha>} e^{2\pi i m<l',\beta>}$

4) pour l appartenant à A_2, $f^{[\alpha+l,\beta]}(\tau,z) = f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$

5) pour l appartenant à A_2, $f^{[\alpha,\beta+l]}(\tau,z) = f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$

6) si σ appartient à $W(A_2)$, $f^{[\alpha,\beta]}(\tau,\sigma.z) = f^{[\sigma^{-1}.\alpha,\sigma^{-1}.\beta]}(\tau,z)$.

Preuve.
C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

On va s'intéresser maintenant à la construction de formes de Jacobi à partir de fonctions de ce type.
On choisira une fonction dont on connaît les zéros (la forme $a_{-3,1}$ ou la forme dénominateur notée $\mathcal{A}$, voir le paragraphe 3.2.1) et on lui appliquera ce procédé, avec différentes caractéristiques.
Les formes $a_{-3,1}$ et $\mathcal{A}$ admettent des écritures sous forme de produits infinis qui permettent de constater que si la fonction $f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$ est bien définie, elle admet un développement de Fourier où n'apparaissent que des puissances positives de q.

Dans la suite on limitera l'étude au cas où α et β appartiennent à $\frac{1}{q}\widetilde{A_2}$, où q est un entier naturel non nul.

Proposition 3.3.3. *Soient q un entier naturel non nul et $\mathcal{S}$ un système de représentants de $\frac{1}{q}\widetilde{A_2}$ modulo A_2. (Card $\mathcal{S} = 3q^2$.)*
On pose $\mathcal{F} := \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.
La notation ϕ désignera dans cette proposition la forme $a_{-3,1}$ ou $\mathcal{A}$, on notera k son poids, m son indice.
On pose :

$$\mathcal{F}' := \left\{ \ (\alpha,\beta) \in \mathcal{F} \ / \ \phi^{[\alpha,\beta]}(\tau,0) \neq 0 \ \right\}.$$

Soit $\mathcal{F}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}'$, de cardinal d_0, vérifiant les égalités suivantes modulo $A_2 \times A_2$:

$$\begin{array}{lll} (i) & \{\ (\alpha+\beta,\beta)\ /\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_0\ \} & = \mathcal{F}_0 \\ (ii) & \{\ (-\beta,\alpha)\ /\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_0\ \} & = \mathcal{F}_0 \\ (iii) & \{\ (\sigma.\alpha,\sigma.\beta)\ /\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_0\ \} & = \mathcal{F}_0, \text{ pour tout } \sigma \text{ de } W(A_2) \end{array}$$

Soient r appartenant à $\frac{q}{pgcd(q,m)}\mathbb{N}$, et j un entier compris entre 1 et d_0.

On pose, avec les notations de la définition 3.3.1 :

$$\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)} := \sigma_j\Big((f^{[\alpha,\beta]})^r_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} \Big),$$

où σ_j désigne le polynôme homogène symétrique fondamental de degré j à d_0 indéterminées.

Alors, la fonction $\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)}$ appartient à $J_{0,mjr}^{W(A_2),f}$.

Preuve.
Remarque préliminaire : d'après les propriétés (4) et (5) du corollaire 3.3.1 précédent, la fonction $f^{[\alpha,\beta]}$ ne dépend que de α et β modulo A_2, ce qui justifie le fait de ne considérer qu'un système de représentants de $\frac{1}{q}\widetilde{A_2}$ modulo A_2.

Soit r appartenant à $\frac{q}{pgcd(q,m)}\mathbb{N}$.
D'après la forme de $\chi_{\alpha,\beta,m}$, donnée dans le corollaire 3.3.1, pour tous α, β appartenant à $\mathcal{S}$, et pour tous l', l'' appartenant à A_2, $\chi^r_{\alpha,\beta,m}(l',l'') = e^{-2\pi i m r <l'',\alpha>} e^{2\pi i m <l',\beta>} = 1$, car $2mr < l'',\alpha >$ et $2mr < l',\beta >$ sont dans $2\mathbb{Z}$.
D'après la propriété (3), pour tous α, β appartenant à $\mathcal{S}$, la fonction $\left(f^{[\alpha,\beta]}\right)^r$ vérifie donc : pour l', l'' appartenant à A_2,
$\left(f^{[\alpha,\beta]}\right)^r(\tau,z+l'+l''\tau) = e^{\pi i m r(-2<l'',z>-\tau<l'',l''>)}\left(f^{[\alpha,\beta]}\right)^r(\tau,z)$.

Soit maintenant $\mathcal{F}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}'$, vérifiant les égalités (i), (ii), et (iii) modulo $A_2 \times A_2$, de cardinal d_0, soit j un entier compris entre 1 et d_0, et soit σ_j le polynôme homogène symétrique fondamental de degré j à d_0 indéterminées.
Alors, d'après les propriétés de stabilité de $\mathcal{F}_0$, et les propriétés énoncées dans le corollaire 3.3.1, on peut vérifier facilement que la fonction $\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)} := \sigma_j\Big((f^{[\alpha,\beta]})^r_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} \Big)$ possède toutes les propriétés d'une forme de Jacobi faible, $W(A_2)$-invariante, de poids 0, d'indice mrj, avec un caractère trivial.

Notation 3.3.1. *Orbites de $\frac{1}{q}\widetilde{A_2} \times \frac{1}{q}\widetilde{A_2}$ modulo $A_2 \times A_2$.*
Soient α et β appartenant à $\frac{1}{q}\widetilde{A_2}$, on note $\Omega(\alpha,\beta)$ l'orbite de (α,β) sous l'action de $W(A_2)$, modulo $A_2 \times A_2$.
Autrement dit, $\Omega(\alpha,\beta)$ est un système de représentants modulo $A_2 \times A_2$ de l'ensemble $\{\ (\sigma.\alpha,\sigma.\beta)\ /\ \sigma \in W(A_2)\ \}$.

Proposition 3.3.4. *Forme de $\mathcal{F}_0$.*
On reprend les notations de la proposition 3.3.3.
Soit $\mathcal{F}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{F} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.
Alors $\mathcal{F}_0$ est inclus dans $\mathcal{F}'$ et vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) si et seulement si $\mathcal{F}_0$ est de la forme :

$$\mathcal{F}_0 = \cup_{j=1}^{t}\ \Omega(\alpha_j,\beta_j),$$

où t est un entier naturel non nul et où pour tout entier j compris entre 1 *et t, le couple* (α_j,β_j) *appartient à $\mathcal{F}'$ et vérifie :*

$$\begin{array}{lll} (a) & (\alpha_j+\beta_j,\beta_j) & \in \mathcal{F}_0 \\ (b) & (-\beta_j,\alpha_j) & \in \mathcal{F}_0 \end{array}$$

Preuve.
Soit $\mathcal{F}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}=\mathcal{S}\times\mathcal{S}$.
Il est clair que $\mathcal{F}_0$ vérifie la propriété (iii) si et seulement si $\mathcal{F}_0$ est une réunion d'orbites du type $\Omega(\alpha,\beta)$.
On peut désormais écrire $\mathcal{F}_0$ sous la forme :

$$\mathcal{F}_0=\cup_{j=1}^{t}\ \Omega(\alpha_j,\beta_j),$$

où t est un entier naturel non nul et où pour tout entier j compris entre 1 et t, le couple (α_j,β_j) appartient à $\mathcal{F}$.

L'ensemble $\mathcal{F}_0$ est alors inclus dans $\mathcal{F}'$ si et seulement si chaque couple (α_j,β_j) est lui-même dans $\mathcal{F}'$, puisque $\phi(\tau,\alpha+\beta\tau)\neq 0$ équivaut à $\phi(\tau,\sigma.\alpha+\sigma.\beta\tau)\neq 0$, pour tout σ de $W(A_2)$, par $W(A_2)$-invariance ou anti-invariance de ϕ.

Si $\mathcal{F}_0$ vérifie la propriété (ii), alors pour tout entier j, le couple (α_j,β_j) vérifie la propriété (b).
Réciproquement, supposons que pour tout entier j, le couple (α_j,β_j) vérifie la propriété (b).
Soit (α,β) appartenant à $\mathcal{F}_0$.
D'après la forme de $\mathcal{F}_0$, il existe σ appartenant à $W(A_2)$ et j compris entre 1 et t, tels que $(\alpha,\beta)=(\sigma.\alpha_j,\sigma.\beta_j)$.
Mais alors, $(-\beta,\alpha)=(-\sigma.\beta_j,\sigma.\alpha_j)$ appartient à $\Omega(-\beta_j,\alpha_j)$, qui est inclus dans $\mathcal{F}_0$, puisque par hypothèse $(-\beta_j,\alpha_j)$ appartient à $\mathcal{F}_0$, et que $\mathcal{F}_0$ vérifie (iii) (autrement dit, $\mathcal{F}_0$ est stable par $W(A_2)$).
Donc $(-\beta,\alpha)$ appartient à $\mathcal{F}_0$, et $\mathcal{F}_0$ vérifie la propriété (ii).

On montre, par un raisonnement analogue, que $\mathcal{F}_0$ vérifie la propriété (i) si et seulement si, pour tout entier j, le couple (α_j,β_j) vérifie la propriété (a), ce qui achève la preuve de la proposition.

L'application de cette méthode de construction de formes de Jacobi se ramène au problème de l'étude des orbites de $\mathcal{F}:=\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ sous l'action de $W(A_2)$, et de leurs propriétés.

Remarque 3.3.1. Les paragraphes qui suivent sont consacrés à l'application de cette méthode de construction dans les cas où q est inférieur à 3.
Cependant, l'étude systématique des cas $q=2$, 3 serait trop longue à détailler, et on se contentera de donner des exemples intéressants obtenus par cette méthode dans le cadre de restrictions du cas général.

Remarque 3.3.2. Cette méthode de construction se généralise à tout réseau de racines, en prenant pour ϕ une forme de Jacobi dont on connaît les zéros, par exemple la forme dénominateur, ou une fonction construite sur le modèle de $a_{-3,1}$ pour les réseaux de type A_n ou D_n, notamment.
La construction semble également applicable à un réseau quelconque, en utilisant une forme de Jacobi dont on connaît les zéros, mais sans toutefois pouvoir exploiter les propriétés relatives au groupe de Weyl.

(ii) Caractéristiques d'ordre 1 : $q = 1$

Lemme 3.3.1.
On prend $\mathcal{S} := \{\ 0,\ \lambda_2,\ 2\lambda_2\ \}$ comme système de représentants de $\widetilde{A_2}/A_2$. (Voir le lemme 1.2.1). Pour tout (α,β) appartenant à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, on a :

$$\Omega(\alpha,\beta) = \{\ (\alpha,\beta)\ \}$$

Preuve.
Il suffit de remarquer les égalités suivantes :

$$\sigma_{\alpha_1}(\lambda_2) = \lambda_2$$

$$\sigma_{\alpha_2}(\lambda_2) = \lambda_2 - \alpha_2 \ \equiv\ \lambda_2 \ mod\ A_2.$$

Lemme 3.3.2. *Soit τ fixé dans $\mathbb{H}$.*
(1) Pour tout (α,β) appartenant à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, $\mathcal{A}(\tau,\alpha+\beta\tau) = 0$.

(2) Le seul couple (α,β) appartenant à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, tel que $a_{-3,1}(\tau,\alpha+\beta\tau) = 0$, est le couple $(\alpha,\beta) = (0,0)$.

Preuve.
D'après le corollaire 3.2.1, $\mathcal{A}(\tau,\alpha+\beta\tau) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} & \Big(<\alpha,\alpha_1>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\alpha_1>\in\mathbb{Z}\Big) \\ ou & \Big(<\alpha,\alpha_2>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\alpha_2>\in\mathbb{Z}\Big) \\ ou & \Big(<\alpha,\alpha_1+\alpha_2>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\alpha_1+\alpha_2>\in\mathbb{Z}\Big) \end{cases}$$

Pour vérifier la première affirmation, il suffit donc de constater que pour tout (α,β) appartenant à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, $<\alpha,\alpha_1>$ et $<\beta,\alpha_1>$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

D'après la définition-proposition 2.5.1, $a_{-3,1}(\tau,\alpha+\beta\tau) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} & \Big(<\alpha,\lambda_1>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\lambda_1>\in\mathbb{Z}\Big) \\ ou & \Big(<\alpha,\lambda_2>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\lambda_2>\in\mathbb{Z}\Big) \\ ou & \Big(<\alpha,\lambda_2-\lambda_1>\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad <\beta,\lambda_2-\lambda_1>\in\mathbb{Z}\Big) \end{cases}$$

Or, le seul α appartenant à $\mathcal{S}$, tel que $<\alpha,\lambda_1>$ soit entier, est $\alpha = 0$, car $<\lambda_2,\lambda_1> = \frac{1}{3}$, de même pour $<\alpha,\lambda_2>$ ou $<\alpha,\lambda_2-\lambda_1>$, d'où l'affirmation (2).

Lemme 3.3.3. *On peut résumer dans les tableaux suivants les résultats obtenus modulo $A_2\times A_2$ lors des opérations $(\alpha,\beta)\mapsto\ (-\beta,\alpha)$ et $(\alpha,\beta)\mapsto\ (\alpha+\beta,\beta)$.*

(α,β)	$(0,0)$	$(0,\lambda_2)$	$(0,2\lambda_2)$	$(\lambda_2,0)$	(λ_2,λ_2)
$(-\beta,\alpha)$	$(0,0)$	$(2\lambda_2,0)$	$(\lambda_2,0)$	$(0,\lambda_2)$	$(2\lambda_2,\lambda_2)$
$(\alpha+\beta,\beta)$	$(0,0)$	(λ_2,λ_2)	$(2\lambda_2,2\lambda_2)$	$(\lambda_2,0)$	$(2\lambda_2,\lambda_2)$

(α,β)	$(\lambda_2,2\lambda_2)$	$(2\lambda_2,0)$	$(2\lambda_2,\lambda_2)$	$(2\lambda_2,2\lambda_2)$
$(-\beta,\alpha)$	(λ_2,λ_2)	$(0,2\lambda_2)$	$(2\lambda_2,2\lambda_2)$	$(\lambda_2,2\lambda_2)$
$(\alpha+\beta,\beta)$	$(0,2\lambda_2)$	$(2\lambda_2,0)$	$(0,\lambda_2)$	$(\lambda_2,2\lambda_2)$

Preuve.
Il suffit d'utiliser le fait que $3\lambda_2$ est dans A_2, et que donc $-\lambda_2 \equiv\ 2\lambda_2\ mod\ A_2$.

Corollaire 3.3.2. *Application de la méthode de construction dans le cas $q=1$.*
(1) D'après le résultat (1) du lemme 3.3.2, il est impossible d'obtenir une fonction du type $\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)}$ avec $\phi=\mathcal{A}$ et $q=1$.

(2) D'après le résultat (2) du lemme 3.3.2, en reprenant les notations de la proposition 3.3.3, l'ensemble $\mathcal{F}'$ pour $q=1$ est l'ensemble $\mathcal{F}'=\mathcal{F}-\{\ (0,0)\ \}$.
D'après les résultats des lemmes 3.3.1 et 3.3.3, le seul sous-ensemble $\mathcal{F}_0$ vérifiant alors les propriétés (i),(ii) et (iii) est alors :

$$\mathcal{F}_0 := \{\ (0,\lambda_2),\ (0,2\lambda_2),\ (\lambda_2,0),\ (\lambda_2,\lambda_2),\ (\lambda_2,2\lambda_2),\ (2\lambda_2,0),\ (2\lambda_2,\lambda_2),\ (2\lambda_2,2\lambda_2)\ \},$$

de cardinal $d_0=8$. D'après la proposition 3.3.3, on pose, pour r entier naturel non nul et j entier compris entre 1 et 8 :

$$\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)} := \sigma_j\Big((f^{[\alpha,\beta]})^r_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} \Big),$$

où σ_j désigne le polynôme homogène symétrique fondamental de degré j à 8 indéterminées.

Alors, la fonction $\Phi_{r,j}^{(\mathcal{F}_0)}$ appartient à $J_{0,jr}^{W(A_2),f}$.

Lemme 3.3.4. *On note $x_1:=(0,\lambda_2)$, $x_2:=(0,2\lambda_2)$, $x_3:=(\lambda_2,0)$, $x_4:=(\lambda_2,\lambda_2)$, $x_5:=(\lambda_2,2\lambda_2)$, $x_6:=(2\lambda_2,0)$, $x_7:=(2\lambda_2,\lambda_2)$, $x_8:=(2\lambda_2,2\lambda_2)$, et $f^{[x_j]}$ les 8 fonctions du type $f^{[\alpha,\beta]}$ correspondantes obtenues.*
On a alors :

$$[f^{[x_1]}]_{q^0} = [f^{[x_2]}]_{q^0} = [f^{[x_4]}]_{q^0} = [f^{[x_5]}]_{q^0} = [f^{[x_7]}]_{q^0} = [f^{[x_8]}]_{q^0} = 1$$

$$[f^{[x_3]}]_{q^0} = \frac{1}{3i\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{i\pi}{3}}\zeta_1^{-1} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\zeta_1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\zeta_2 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\zeta_2^{-1} + e^{\frac{i\pi}{3}}\zeta_1\zeta_2^{-1} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\zeta_1^{-1}\zeta_2 \Big)$$

$$[f^{[x_6]}]_{q^0} = -\frac{1}{3i\sqrt{3}}\Big(- e^{\frac{2i\pi}{3}}\zeta_1^{-1} + e^{-\frac{2i\pi}{3}}\zeta_1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\zeta_2 + e^{-2\frac{i\pi}{3}}\zeta_2^{-1} - e^{\frac{2i\pi}{3}}\zeta_1\zeta_2^{-1} + e^{-2\frac{i\pi}{3}}\zeta_1^{-1}\zeta_2 \Big)$$

Preuve.
On utilise la forme produit de la fonction $a_{-3,1}$, et on effectue un calcul analogue aux calculs détaillés un peu plus loin (voir par exemple le cas $q=3$, $\phi=\mathcal{A}$).

Proposition 3.3.5.
On obtient les exemples suivants (que l'on peut exprimer à l'aide des formes qui seront

précisées aux paragraphes 5.2, 5.3, 5.4) :

$$\Phi_{1,1} \in J_{0,1}^{W(A_2),f} \qquad [\Phi_{1,1}]_{q^0} = \tfrac{1}{3}(18 + P_1 + P_2)$$

$$d\text{'où } \Phi_{1,1} = \tfrac{1}{3}\psi_{0,1}^{(1)}$$

$$\Phi_{1,2} \in J_{0,2}^{W(A_2),f} \qquad [\Phi_{1,2}]_{q^0} = \tfrac{1}{27}(P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2) + 2(P_1 + P_2) + 15$$

$$d\text{'où } \Phi_{1,2} = \tfrac{1}{27}(\psi_{0,2}^{(2)} + \psi_{0,2}^{(11)}) + 2\psi_{0,2}^{(1)}$$

$$\Phi_{2,1} \in J_{0,2}^{W(A_2),f} \qquad [\Phi_{2,1}]_{q^0} = \tfrac{1}{27}(4P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2) + 6$$

$$d\text{'où } \Phi_{2,1} = \tfrac{1}{27}(\psi_{0,2}^{(2)} + 4\psi_{0,2}^{(11)})$$

$$\Phi_{1,3} \in J_{0,3}^{W(A_2),f} \qquad [\Phi_{1,3}]_{q^0} = \tfrac{2}{9}(P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2) + 5(P_1 + P_2) + 20$$

$$d\text{'où } \Phi_{1,3} = \tfrac{2}{9}(\psi_{0,3}^{(2)} + \psi_{0,3}^{(11)}) + 5\psi_{0,3}^{(1)}$$

$$\Phi_{3,1} \in J_{0,3}^{W(A_2),f} \qquad [\Phi_{3,1}]_{q^0} = 6 + \tfrac{1}{27}(P_1^2P_2 + P_1P_2^2)$$

$$d\text{'où } \Phi_{3,1} = \tfrac{1}{27}\psi_{0,3}^{(12)}$$

(iii) Caractéristiques d'ordre 2 : $q = 2$

Lemme 3.3.5. *On prend* $\mathcal{S} := \{\ 0,\ \frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\ \pm\frac{\lambda_1}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-(\alpha_1-\alpha_2)}{2},\ \}$ *comme système de représentants de* $\left(\frac{1}{2}\widetilde{A_2}\right)/A_2$. *(Voir le système de représentants de* $\widetilde{A_2}/2A_2$ *cité dans le lemme 1.2.1).*

Notation 3.3.2. *On pose :*

$$\mathcal{E}_0 := \left\{\ 0,\ \frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\ \right\}$$

$$\mathcal{E}_0' := \left\{\ \frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\ \right\}$$

$$\mathcal{E}_1 := \{\ \pm\frac{\lambda_1}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2},\ \pm\frac{\lambda_1-(\alpha_1-\alpha_2)}{2}\ \Big\}.$$

(iii)-(a) Utilisation de la forme $a_{-3,1}$

Lemme 3.3.6. *Pour* $\phi = a_{-3,1}$, *on a la description suivante de* $\mathcal{F}'$ *:*

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} - \Big(\ \{0\} \times \mathcal{E}_0\ \cup\ \mathcal{E}_0 \times\ \{0\}\ \cup\ \{\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{E}_0' \times \mathcal{E}_0',\ \alpha = \beta\ \}\Big)$$

ou encore :

$$\mathcal{F}' = \{\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{E}_0' \times \mathcal{E}_0',\ \alpha \neq \beta\ \}\ \cup\ \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1\ \cup\ \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_0\ \cup\ \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_1$$

Preuve.
D'après la forme des zéros de $a_{-3,1}$ (voir la preuve du lemme 3.3.2), pour (α,β) appartenant à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, $a_{-3,1}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)=0$ si et seulement si (α,β) appartient à :

$$\{0\}\times\mathcal{E}_0' \ \cup\ \mathcal{E}_0'\times\ \{0\}\ \cup\ \{\ (0,0)\ \}\ \cup\ \{\ (\alpha,\beta)\in\mathcal{E}_0'\times\mathcal{E}_0',\ \alpha=\beta\ \}.$$

Remarque 3.3.3. On peut constater (voir la notation 3.3.1) l'égalité :

$$\Omega\Big(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2}\Big)=\{\ (\alpha,\beta)\in\mathcal{E}_0'\times\mathcal{E}_0',\ \alpha\neq\beta\ \}.$$

Lemme 3.3.7. *Les ensembles* $\Omega\Big(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2}\Big)$ *et* $\mathcal{E}_0\times\mathcal{E}_1\ \cup\ \mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_0\ \cup\ \mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_1$ *vérifient tous deux les conditions (i), (ii), (iii) de la proposition 3.3.3, pour la forme* $\phi=a_{-3,1}$*, et permettent donc de construire des formes de Jacobi faibles* $W(A_2)$*-invariantes.*
On peut noter que dans ce cas, r *appartient à* $2\mathbb{N}$*.*

Preuve.
La propriété (ii) est facile à vérifier.

Pour s'assurer de la propriété (iii), il suffit d'utiliser les orbites de $\frac{1}{2}\widetilde{A_2}/A_2$ sous l'action de $W(A_2)$ (voir le lemme 3.1.2) rappelées ci-dessous :

$$\begin{array}{ll}
W(A_2).<0> & =\{0\}\\
W(A_2).<\frac{\alpha_1}{2}> & =\{\frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_2}{2}\}\\
W(A_2).<\frac{\lambda_1}{2}> & =\{\frac{\lambda_1}{2},\ \frac{\lambda_1-\alpha_1}{2},\ \frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}\}\\
W(A_2).<-\frac{\lambda_1}{2}> & =\{-\frac{\lambda_1}{2},\ -\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2},\ -\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}\}\\
W(A_2).<\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}> & =\{\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}\}\\
W(A_2).<-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}> & =\{-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}\}
\end{array}$$

Pour vérifier la propriété (i), on écrit les tableaux donnant les résultats de l'opération $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha+\beta$, modulo A_2.

$\alpha\setminus\beta$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	0	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$
$-\frac{\lambda_1}{2}$	0	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	0
$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	0	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$
$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$
0	$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$
$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$

$\alpha \diagdown \beta$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$
$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	0	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$
$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	0	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	0
$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	0	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$
0	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$
$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$

$\alpha \diagdown \beta$	0	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$-\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$
$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$
$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$
$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$\frac{\lambda_1}{2}$
$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_2}{2}$	$-\frac{\lambda_1-\alpha_1}{2}$	$-\frac{\lambda_1}{2}$
0	0	$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
$\frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	0	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$
$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	0	$\frac{\alpha_1}{2}$
$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\alpha_1}{2}$	0

Premier cas : on considère $\mathcal{F}_0 := \Omega\left(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2}\right)$, de cardinal 6.

On obtient 6 fonctions du type $a_{-3,1}^{[\alpha,\beta]}$, que l'on notera, en écrivant $\alpha = \frac{i_1}{2}\alpha_1 + \frac{i_2}{2}\alpha_2$ et $\beta = \frac{j_1}{2}\alpha_1 + \frac{j_2}{2}\alpha_2$, avec i_1, i_2, j_1, j_2 valant 0 ou 1 :

$$\varphi_{i_1,i_2,j_1,j_2}(\tau,z) := e^{\pi i\tau<\beta,\beta>}e^{2\pi i<\beta,z+\alpha>}a_{-3,1}(\tau,z+\alpha+\beta\tau).$$

Plus précisément, les 6 fonctions obtenues par cette méthode sont :

$$\varphi_{1,1,1,0},\quad \varphi_{1,1,0,1},\quad \varphi_{1,0,0,1},\quad \varphi_{1,0,1,1},\quad \varphi_{0,1,1,0}\quad \text{et}\quad \varphi_{0,1,1,1}.$$

On peut alors considérer les fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}\times U$ suivantes :

$$\psi_{1110}(\tau,z) := \frac{\varphi_{1,1,1,0}(\tau,z)}{\varphi_{1,1,1,0}(\tau,0)} \quad \psi_{1101}(\tau,z) := \frac{\varphi_{1,1,0,1}(\tau,z)}{\varphi_{1,1,0,1}(\tau,0)}$$

$$\psi_{1001}(\tau,z) := \frac{\varphi_{1,0,0,1}(\tau,z)}{\varphi_{1,0,0,1}(\tau,0)} \qquad \psi_{1011}(\tau,z) := \frac{\varphi_{1,0,1,1}(\tau,z)}{\varphi_{1,0,1,1}(\tau,0)}$$

$$\psi_{0110}(\tau,z) := \frac{\varphi_{0,1,1,0}(\tau,z)}{\varphi_{0,1,1,0}(\tau,0)} \qquad \psi_{0111}(\tau,z) := \frac{\varphi_{0,1,1,1}(\tau,z)}{\varphi_{0,1,1,1}(\tau,0)}$$

Proposition 3.3.6. *On peut écrire ces fonctions à l'aide des formes à une variable* $\xi_{ab}(\tau,w) := \frac{\theta_{ab}(\tau,w)}{\theta_{ab}(\tau,0)}$, *citées par V.Gritsenko [G1] (voir le paragraphe 1.1.3).*

$$\begin{aligned}
\psi_{1110}(\tau,z) &= \xi_{00}(\tau,z_1')\xi_{01}(\tau,z_2')\xi_{10}(\tau,z_3')\\
\psi_{1101}(\tau,z) &= \xi_{10}(\tau,z_1')\xi_{01}(\tau,z_2')\xi_{00}(\tau,z_3')\\
\psi_{1001}(\tau,z) &= \xi_{10}(\tau,z_1')\xi_{00}(\tau,z_2')\xi_{01}(\tau,z_3')\\
\psi_{1011}(\tau,z) &= \xi_{00}(\tau,z_1')\xi_{10}(\tau,z_2')\xi_{01}(\tau,z_3')\\
\psi_{0110}(\tau,z) &= \xi_{01}(\tau,z_1')\xi_{00}(\tau,z_2')\xi_{10}(\tau,z_3')\\
\psi_{0111}(\tau,z) &= \xi_{01}(\tau,z_1')\xi_{10}(\tau,z_2')\xi_{00}(\tau,z_3').
\end{aligned}$$

Preuve.
On obtient ces écritures en utilisant la définition des fonctions ξ_{ab}, celle de la forme $a_{-3,1}$ (voir la proposition-définition 2.5.1), et les relations classiques données au paragraphe 1.1.3 et rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\vartheta(\tau,z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2}) &= -q^{-1/8}e^{-\pi iz}\theta_{00}(\tau,z)\\
\vartheta(\tau,z+\tfrac{\tau}{2}) &= -iq^{-1/8}e^{-\pi iz}\theta_{01}(\tau,z),\\
\vartheta(\tau,z+\tfrac{1}{2}) &= -\theta_{10}(\tau,z)\\
\vartheta(\tau,z+\lambda\tau+\mu) &= (-1)^{\lambda+\mu}e^{-\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\vartheta(\tau,z), \text{ si } \lambda,\ \mu \text{ sont des entiers}
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.8. *Les fonctions* $2\psi_{1110}$, $2\psi_{1101}$, $2\psi_{1001}$, $2\psi_{1011}$, $2\psi_{0110}$, $2\psi_{0111}$ *sont à coefficients de Fourier entiers.*

Preuve.
Cela vient du fait que les fonctions ξ_{00}, ξ_{01} et $2\xi_{10}$ sont elles-même à coefficients de Fourier entiers (voir le paragraphe 1.1.3).

Remarque 3.3.4. On pourrait se contenter d'exhiber les formes de Jacobi obtenues par l'application de la proposition 3.3.3, mais il est naturel ici d'écrire en détail les relations liant ces 6 formes, compte tenu des tables de relations classiques qui concernent les fonctions ξ_{ab} (voir le paragraphe 1.1.3), conséquences de celles liant les fonctions θ_{ab}, citées par exemple dans le livre de D.Mumford, [Mu].

table I	table II
$\psi_{1110}(\tau+1,z) = \psi_{0110}(\tau,z)$	$\psi_{1110}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{1011}(\tau,z)$
$\psi_{1101}(\tau+1,z) = \psi_{1001}(\tau,z)$	$\psi_{1101}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{0111}(\tau,z)$
$\psi_{1001}(\tau+1,z) = \psi_{1101}(\tau,z)$	$\psi_{1001}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{0110}(\tau,z)$
$\psi_{1011}(\tau+1,z) = \psi_{0111}(\tau,z)$	$\psi_{1011}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{1110}(\tau,z)$
$\psi_{0110}(\tau+1,z) = \psi_{1110}(\tau,z)$	$\psi_{0110}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{1001}(\tau,z)$
$\psi_{0111}(\tau+1,z) = \psi_{1011}(\tau,z)$	$\psi_{0111}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\ \psi_{1101}(\tau,z)$

On peut également rappeler les propriétés :
(i) pour tout α appartenant à A_2, $\psi_{i_1i_2j_1j_2}(\tau,z+\alpha) = \psi_{i_1i_2j_1j_2}(\tau,z)$
(ii) pour tout β appartenant à A_2,:
$\psi_{i_1i_2j_1j_2}(\tau,z+\beta\tau) = e^{-2\pi i<\beta,z>}e^{-\pi i\tau<\beta,\beta>}\psi_{i_1i_2j_1j_2}(\tau,z) \times (-1)^{<\beta,\epsilon_r>}$,
où $\psi_{i_1i_2j_1j_2}(\tau,z) = \xi_{01}(\tau,z'_r)\xi_{10}(\tau,z'_s)\xi_{00}(\tau,z'_t)$, avec r, s, t distincts et prenant les valeurs 1, 2 ou 3, $(\epsilon_j)_j$ désignant les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.3.7. *Ces 6 fonctions permettent de construire les formes appartenant à $J_{0,2jr'}^{W(A_2),f}$ du type :*

$$\Phi_{2r',j}^{(\mathcal{F}_0)} := \sigma_j\Big(((f^{[\alpha,\beta]})^{2r'})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0}\Big),$$

où σ_j désigne le polynôme homogène symétrique fondamental de degré j à 6 indéterminées, et où r' est un entier naturel non nul.

En particulier, si j est un entier compris entre 1 et 6, alors, la forme $4^j\sigma_j(\psi_{1110}^2, \psi_{1101}^2, \psi_{1001}^2, \psi_{1011}^2, \psi_{0110}^2, \psi_{0111}^2)$ appartient à l'espace $J_{0,2j}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$.

Corollaire 3.3.3. *Exemples.*
- La forme $f_2 := \psi_{1110}^2+\psi_{1101}^2+\psi_{1001}^2+\psi_{1011}^2+\psi_{0110}^2+\psi_{0111}^2$ appartient à l'espace $J_{0,2}^{W(A_2),f}$, et la forme $4f_2$ appartient à $J_{0,2}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$.

$$[f_2]_{q^0} = \frac{1}{2}(6+P_1+P_2).$$

- On peut également obtenir la forme notée f_4, appartenant à $J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$:

$$f_4 := 16\sigma_2(\psi_{1110}^2, \dots, \psi_{0111}^2).$$

$$[f_4]_{q^0} = P_1^2 + P_2^2 + 22(P_1+P_2) + 4P_1P_2 + 54$$

Preuve.
On peut calculer $[f_2]_{q^0}$, en utilisant (voir le paragraphe 1.1.3):

$$[\xi_{00}]_{q^0} = 1$$

$$[\xi_{01}]_{q^0} = 1$$

$$[\xi_{10}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iw}+e^{-\pi iw}}{2}$$

d'où :

$$[\psi_{1110}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_3}+e^{-\pi iz'_3}}{2} \qquad [\psi_{1011}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_2}+e^{-\pi iz'_2}}{2}$$

$$[\psi_{1101}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_2}+e^{-\pi iz'_2}}{2} \qquad [\psi_{0110}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_1}+e^{-\pi iz'_1}}{2}$$

$$[\psi_{1001}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_1}+e^{-\pi iz'_1}}{2} \qquad [\psi_{0111}]_{q^0} = \frac{e^{\pi iz'_3}+e^{-\pi iz'_3}}{2}$$

ce qui entraine :

$$[4\psi_{1110}^2]_{q^0} = 2+\zeta_2+\zeta_2^{-1} \qquad [4\psi_{1101}^2]_{q^0} = 2+\zeta_1\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2$$

$$[4\psi_{1001}^2]_{q^0} = 2+\zeta_1+\zeta_1^{-1} \qquad [4\psi_{1011}^2]_{q^0} = 2+\zeta_1\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2$$

$$[4\psi^2_{0110}]_{q^0} = 2 + \zeta_1 + \zeta_1^{-1} \qquad [4\psi^2_{0111}]_{q^0} = 2 + \zeta_2 + \zeta_2^{-1},$$

et finalement :

$$[f_2]_{q^0} = \frac{1}{2}(6 + P_1 + P_2)$$
$$[f_4]_{q^0} = P_1^2 + P_2^2 + 22(P_1 + P_2) + 4P_1P_2 + 54.$$

Remarque 3.3.5. On a remarqué (dans un cadre général) que la forme $4f_2$ est à coefficients de Fourier entiers, on démontrera (voir le chapitre 5) que c'est aussi le cas de la forme $2f_2$.

Deuxième cas : on considère $\mathcal{F}_0 := \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1 \ \cup \ \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_0 \ \cup \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_1$.

Cet ensemble est de cardinal $d_0 = 128$, on obtient donc 128 fonctions du type $a^{[\alpha,\beta]}_{-3,1}$, qui permettent de construire les formes appartenant à $J^{W(A_2),f}_{0,2jr'}$ du type :

$$\Phi^{(\mathcal{F}_0)}_{2r',j} := \sigma_j\Big(((f^{[\alpha,\beta]})^{2r'})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0}\Big),$$

où σ_j désigne le polynôme homogène symétrique fondamental de degré j à 128 indéterminées, et où r' est un entier naturel non nul.

Proposition 3.3.8. *En applicant la proposition 3.3.3, on obtient notamment la fonction appartenant à* $J^{W(A_2),f}_{0,2}$ *définie par :*

$$\Phi_2 := \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} \Big((f^{[\alpha,\beta]})\Big)^2.$$

Des calculs du même type que ceux détaillés au paragraphe prochain donnent :

$$[\Phi_2]_{q^0} = \frac{28}{27}(P_1^2 + P_2^2) + 8(P_1 + P_2) - \frac{32}{27}P_1P_2 + 72$$

d'où, en employant les notations définies aux paragraphes 5.2 et 5.3 :

$$\Phi_2 = 28(\psi_{0,1})^2 - 792\psi^{(1)}_{0,2} - 88\psi^{(11)}_{0,2}.$$

(iii)-(b) Utilisation de la forme $\mathcal{A}$

On ne s'intéresse dans ce paragraphe qu'aux couples (α,β) appartenant à $(\frac{1}{2}A_2)/A_2$.

Proposition-Définition 3.3.2.
On considère α *et* β *de la forme* $\frac{i_1}{2}\alpha_1 + \frac{i_2}{2}\alpha_2$, *avec* i_1, i_2 *valant* 0 *ou* 1.
Parmi les 16 fonctions du type $\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}$ *obtenues, six vérifient la condition* $\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0) \neq 0$.
Il s'agit de :

$$\begin{array}{llll} \psi_1 & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_2}{2},\frac{\alpha_1}{2}]} & \psi_{1'} & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2}]} \\ \psi_2 & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\frac{\alpha_1}{2}]} & \psi_{2'} & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\frac{\alpha_2}{2}]} \\ \psi_3 & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}]} & \psi_{3'} & = \mathcal{A}^{[\frac{\alpha_2}{2},\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}]}. \end{array}$$

On peut donc former, pour chacune de ces fonctions, la fonction holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$ *définie par :*

$$\xi_j(\tau,z) := \frac{\psi_j(\tau,z)}{\psi_j(\tau,0)}.$$

Comme ci-dessus, le nombre de fonctions en jeu n'étant pas trop important, on peut décrire précisément les tables de relations qui concernent les fonctions ξ_j.

Proposition 3.3.9. *Tables de relations.*

table I

$$\begin{array}{lcl} \xi_1(\tau+1,z) &=& \xi_2(\tau,z)\\ \xi_{1'}(\tau+1,z) &=& \xi_{2'}(\tau,z)\\ \xi_2(\tau+1,z) &=& \xi_1(\tau,z)\\ \xi_{2'}(\tau+1,z) &=& \xi_{1'}(\tau,z)\\ \xi_3(\tau+1,z) &=& \xi_{3'}(\tau,z)\\ \xi_{3'}(\tau+1,z) &=& \xi_3(\tau,z) \end{array}$$

table II

$$\begin{array}{lcl} \xi_1(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_{1'}(\tau,z)\\ \xi_{1'}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_1(\tau,z)\\ \xi_2(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_3(\tau,z)\\ \xi_{2'}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_{3'}(\tau,z)\\ \xi_3(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_2(\tau,z)\\ \xi_{3'}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &=& e^{3\pi i\frac{<z,z>}{\tau}}\xi_{2'}(\tau,z) \end{array}$$

table III

On considère l' et l'' appartenant à A_2

$$\begin{array}{lcl} \xi_1(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_1,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_2,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_1(\tau,z)\\ \xi_{1'}(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_2,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_1,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_{1'}(\tau,z)\\ \xi_2(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_1,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_1+\alpha_2,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_2(\tau,z)\\ \xi_{2'}(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_2,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_1+\alpha_2,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_{2'}(\tau,z)\\ \xi_3(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_1+\alpha_2,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_1,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_3(\tau,z)\\ \xi_{3'}(\tau,z+l'+l''\tau) &=& e^{3\pi i<\alpha_1+\alpha_2,l'>}e^{-3\pi i<\alpha_2,l''>}e^{3\pi i[-2<l'',z>-\tau<l'',l''>]}\xi_{3'}(\tau,z) \end{array}$$

table IV

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \xi_1(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_2(\tau,z) & \xi_1(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_{3'}(\tau,z)\\ \xi_{1'}(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_3(\tau,z) & \xi_{1'}(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_{2'}(\tau,z)\\ \xi_2(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_1(\tau,z) & \xi_2(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_3(\tau,z)\\ \xi_{2'}(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_{3'}(\tau,z) & \xi_{2'}(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_{1'}(\tau,z)\\ \xi_3(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_{1'}(\tau,z) & \xi_3(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_2(\tau,z)\\ \xi_{3'}(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) &=& \xi_{2'}(\tau,z) & \xi_{3'}(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) &=& \xi_1(\tau,z) \end{array}$$

Remarque 3.3.6. Etude des coefficients de Fourier.
On peut donner des fonctions ξ_j une expression précise (voir la démonstration qui suit) qui permet de constater qu'elles admettent bien des développements de Fourier où n'apparaissent que des puissances positives de q, et que leurs coefficients de Fourier appartiennent à l'anneau $\mathbb{Z}[2^{-1}]$, avec la notation :

$$\mathbb{Z}[2^{-1}] = \left\{ \frac{a}{2^s} \ / \ a \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut calculer les termes $[\xi_j]_{q^0}$:

$$[\xi_1]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\frac{1}{2}} + \zeta_1\zeta_2^{-\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{1'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2)$$

$$[\xi_2]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\frac{1}{2}} + \zeta_1\zeta_2^{-\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{2'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2)$$

$$[\xi_3]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2^{-\frac{1}{2}} + \zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{3'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2^{-\frac{1}{2}} + \zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{\frac{1}{2}}).$$

Preuve.
En utilisant la forme produit de $\mathcal{A}$ on obtient celle des fonctions ξ_j.
Rappelons en effet le résultat suivant (voir le paragraphe 3.2.1) :

$$\mathcal{A}(\tau,z) = q^{\frac{1}{3}}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\prod_{n=0}^{+\infty}(1-q^{n+1})^2 \times \prod_{n=0}^{+\infty}\Big[(1-q^{n+1}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1})(1-q^{n+1}\zeta_1\zeta_2^{-2})(1-q^{n+1}\zeta_1^{-2}\zeta_2))$$
$$\times(1-q^n\zeta_1^2\zeta_2^{-1})(1-q^n\zeta_1\zeta_2)(1-q^n\zeta_1^{-1}\zeta_2^2)\Big].$$

Posons $\Pi(z,\tau) := \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1} \times \prod_{n=0}^{+\infty}\Big[(1-q^{n+1}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1})(1-q^{n+1}\zeta_1\zeta_2^{-2})(1-q^{n+1}\zeta_1^{-2}\zeta_2))$

$\times(1-q^n\zeta_1^2\zeta_2^{-1})(1-q^n\zeta_1\zeta_2)(1-q^n\zeta_1^{-1}\zeta_2^2)\Big].$

On peut alors écrire :

$$\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) = e^{3\pi i\tau<\beta,\beta>}e^{6\pi i<\beta,z+\alpha>}q^{\frac{1}{3}}\prod_{n=0}^{+\infty}(1-q^{n+1})^2 \times \Pi(\tau,z+\alpha+\beta\tau),$$

d'où

$$\frac{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)}{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)} = e^{6\pi i<\beta,z>} \times \frac{\Pi(\tau,z+\alpha+\beta\tau)}{\Pi(\tau,\alpha+\beta\tau)},$$

ce qui permet de donner des fonctions ξ_j l'écriture suivante.

Détaillons le cas de la fonction ξ_1.

$$\xi_1(\tau,z) = e^{6\pi i<\frac{\alpha_1}{2},z>}\frac{\Pi(\tau,z+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_1}{2}\tau)}{\Pi(\tau,\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_1}{2}\tau)}.$$

En remplaçant ζ_1 par $q^{\frac{1}{2}}\zeta_1$ et ζ_2 par $-\zeta_2$ dans l'écriture de $\Pi(\tau,z)$, on obtient l'écriture de $\Pi(\tau,z+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_1}{2}\tau)$, puis finalement celle de ξ_1 :

$$\xi_1(\tau,z) = \zeta_1^2\zeta_2^{-\frac{5}{2}}\prod_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{1+q^{n+\frac{1}{2}}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}}{1+q^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1-q^{n+\frac{1}{2}}\zeta_1\zeta_2^{-2}}{1-q^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1+q^n\zeta_1^{-2}\zeta_2}{1+q^n}$$
$$\times\frac{1+q^{n+1}\zeta_1^2\zeta_2^{-1}}{1+q^{n+1}} \times \frac{1+q^{n+\frac{1}{2}}\zeta_1\zeta_2}{1+q^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1-q^{n-\frac{1}{2}}\zeta_1^{-1}\zeta_2^2}{1-q^{n-\frac{1}{2}}}\Big].$$

L'écriture de $\xi_{1'}$ sera obtenue en remplaçant, dans le produit Π, ζ_1 par $-\zeta_1$ et ζ_2 par $q^{\frac{1}{2}}\zeta_2$,
celle de ξ_2 sera obtenue en remplaçant, dans le produit Π, ζ_1 par $-q^{\frac{1}{2}}\zeta_1$ et ζ_2 par $-\zeta_2$,
celle de $\xi_{2'}$ sera obtenue en remplaçant, dans le produit Π, ζ_1 par $-\zeta_1$ et ζ_2 par $-q^{\frac{1}{2}}\zeta_2$,
celle de ξ_3 sera obtenue en remplaçant, dans le produit Π, ζ_1 par $-q^{\frac{1}{2}}\zeta_1$ et ζ_2 par $q^{\frac{1}{2}}\zeta_2$,
celle de $\xi_{3'}$ sera obtenue en remplaçant, dans le produit Π, ζ_1 par $q^{\frac{1}{2}}\zeta_1$ et ζ_2 par $-q^{\frac{1}{2}}\zeta_2$.

Ces écritures permettent de vérifier que les formes ξ_j admettent bien des développements de Fourier où n'apparaissent que des puissances positives de q, et que les formes $2\xi_j$ sont à coefficients de Fourier entiers.
Elles permettent aussi de calculer les termes $[\xi_j]_{q^0}$, on obtient :

$$[\xi_1]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\frac{1}{2}}+\zeta_1\zeta_2^{-\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{1'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2)$$

$$[\xi_2]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{\frac{1}{2}}+\zeta_1\zeta_2^{-\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{2'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2)$$

$$[\xi_3]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2^{-\frac{1}{2}}+\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{\frac{1}{2}}) \qquad [\xi_{3'}]_{q^0} = \frac{1}{2}(\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2^{-\frac{1}{2}}+\zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{\frac{1}{2}}).$$

On peut à présent donner quelques exemples de polynômes symétriques en ces fonctions ξ_j qui sont des formes de Jacobi.

Proposition 3.3.10. *Exemples de formes de Jacobi.*
(i) $\phi(\tau,z) := 2^6\xi_1(\tau,z)\xi_{1'}(\tau,z)\xi_2(\tau,z)\xi_{2'}(\tau,z)\xi_3(\tau,z)\xi_{3'}(\tau,z)$ *appartient à* $J_{0,18}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$

(ii) $\varphi(\tau,z) := 4(\xi_1^2+\xi_{1'}^2+\xi_2^2+\xi_{2'}^2+\xi_3^2+\xi_{3'}^2)$ *appartient à* $J_{0,6}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$
et on a : $[\varphi]_{q^0} = 2(3+P_1P_2)$.

(iii) De façon générale, pour $1 \leq k \leq 6$, *si* σ_k *désigne le* k*-ième polynôme symétrique fondamental à 6 indéterminées, et si* r *est un entier naturel, alors, la fonction définie par la formule* $2^{2kr}\sigma_k(\xi_1^{2r},\xi_{1'}^{2r},\xi_2^{2r},\xi_{2'}^{2r},\xi_3^{2r},\xi_{3'}^{2r})$, *appartient à* $J_{0,6kr}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$.

(iv) Caractéristiques d'ordre 3 : $q=3$

On ne s'est intéressé dans ce paragraphe qu'aux fonctions construites à partir de la forme dénominateur $\mathcal{A}$.
(Comme on le verra, l'application de caractéristiques d'ordre 3 à $\mathcal{A}$ permet d'obtenir les deux formes essentielles d'indice 3, utiles au chapitre 5, que sont $\psi_{0,3}^{(1)}$ et $\psi_{0,3}^{(11)}$, et il ne semble pas nécessaire de s'attarder ici sur la construction utilisant la forme $a_{-3,1}$, qui donnerait des formes d'indice un multiple de 3, d'après la proposition 3.3.3.)
On s'intéresse ici aux caractéristiques α, β appartenant à $\frac{1}{3}\widetilde{A_2}$.

Lemme 3.3.9. *Lorsque* $\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)$ *ne s'annule pas, la forme :*

$$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) := \frac{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)}{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)}$$

possède le coefficient $[\ ]_{q^0}$ *suivant :*

$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<\beta,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}P_{\alpha_1}^{[\alpha,\beta]}P_{\alpha_2}^{[\alpha,\beta]}P_{\alpha_1+\alpha_2}^{[\alpha,\beta]}$, *avec :*

$$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = \left(\begin{cases} 1 & si\ <\gamma,\beta> \ >\ 0 \\ e^{2\pi i<\gamma,z>} & si\ <\gamma,\beta> \ <\ 0 \\ \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}} & si\ <\gamma,\beta> \ =\ 0 \end{cases}\right) \times \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^\star,\ n+<\gamma,\beta>\ <0} e^{2\pi i<\gamma,z>}\right)$$
$$\times\left(\begin{cases} 1 & si\ <\gamma,\beta> \notin -\mathbb{N}^\star \\ \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}} & si\ <\gamma,\beta> \in -\mathbb{N}^\star \end{cases}\right) \times \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^\star,\ n-<\gamma,\beta>\ <0} e^{-2\pi i<\gamma,z>}\right)$$
$$\times\left(\begin{cases} 1 & si\ <\gamma,\beta> \notin \mathbb{N}^\star \\ \frac{1-e^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\gamma,\alpha>}} & si\ <\gamma,\beta> \in \mathbb{N}^\star \end{cases}\right)$$

Preuve
Comme dans le paragraphe précédent, pour obtenir une écriture de $f^{[\alpha,\beta]}$ à l'aide de puissances de q, on utilise la forme produit de $\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}$. (Voir la proposition 3.2.4.)

$$\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) = e^{3\pi i\tau<\beta,\beta>}e^{6\pi i<\beta,z+\alpha>}q^{\frac{<\rho',\rho'>}{6}}e^{-2i\pi<\rho',z+\alpha+\tau\beta>} \times \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^2$$
$$\times \prod_{\gamma\in\Delta^+}[(1-e^{2i\pi<\alpha,z+\alpha+\tau\beta>})\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^ne^{2i\pi<\alpha,z+\alpha+\tau\beta>})(1-q^ne^{-2i\pi<\alpha,z+\alpha+\tau\beta>})],\text{ d'où :}$$

$$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) = e^{6\pi i<\beta,z>}e^{-2i\pi<\rho',z>}$$

$$\times \prod_{\gamma\in\Delta^+}\Big[\Big(\frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^ne^{2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-q^ne^{2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-q^ne^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-q^ne^{-2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\Big].$$

D'après cette écriture (on rappelle que $\rho' = \alpha_1 + \alpha_2$), la fonction $f^{[\alpha,\beta]}$ admet bien un développement où n'apparaissent que des puissances positives de q.

On peut, à partir de ce résultat, exprimer le coefficient de q^0.
D'une façon générale, on a d'abord, pour tout entier naturel n et pour ϵ valant 1 ou -1 :

$$\left[\frac{1-q^n e^{\epsilon 2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-q^n e^{\epsilon 2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\right]_{q^0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n+\epsilon<\gamma,\beta> \; > \; 0 \\ e^{\epsilon 2\pi i<\gamma,z>} & \text{si } n+\epsilon<\gamma,\beta> \; < \; 0 \\ \frac{1-e^{\epsilon 2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{\epsilon 2i\pi<\gamma,\alpha>}} & \text{si } n+\epsilon<\gamma,\beta> \; = \; 0 \end{cases} .$$

Posons, pour α, β fixés et γ appartenant à Δ^+ :

$$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = \left(\begin{cases} 1 & \text{si } <\gamma,\beta> \; > \; 0 \\ e^{2\pi i<\gamma,z>} & \text{si } <\gamma,\beta> \; < \; 0 \\ \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}} & \text{si } <\gamma,\beta> \; = \; 0 \end{cases}\right) \times \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^\star,\ n+<\gamma,\beta>\ <0} e^{2\pi i<\gamma,z>}\right)$$
$$\times\left(\begin{cases} 1 & \text{si } <\gamma,\beta> \notin -\mathbb{N}^\star \\ \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}} & \text{si } <\gamma,\beta> \in -\mathbb{N}^\star \end{cases}\right) \times \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^\star,\ n-<\gamma,\beta>\ <0} e^{-2\pi i<\gamma,z>}\right)$$
$$\times\left(\begin{cases} 1 & \text{si } <\gamma,\beta> \notin \mathbb{N}^\star \\ \frac{1-e^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\gamma,\alpha>}} & \text{si } <\gamma,\beta> \in \mathbb{N}^\star \end{cases}\right)$$

On a alors, d'après la forme produit de $f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)$:

$$[f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)]_{q^0} = e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>} P_{\alpha_1}^{[\alpha,\beta]} P_{\alpha_2}^{[\alpha,\beta]} P_{\alpha_1+\alpha_2}^{[\alpha,\beta]}.$$

Lemme 3.3.10.
Les lignes qui suivent décrivent le système $\mathcal{S}$ de représentants de $\frac{1}{3}\widetilde{A_2}$ modulo A_2 que l'on choisit ici. Ses éléments sont rangés suivant les 10 orbites obtenues sous l'action de $W(A_2)$.
1) 0
2) λ_1
2) λ_2
4) $\frac{1}{3}\lambda_1,\ \frac{1}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ -\frac{1}{3}\lambda_2$
5) $\frac{2}{3}\lambda_1,\ \frac{2}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ -\frac{2}{3}\lambda_2$
6) $\frac{4}{3}\lambda_1,\ \frac{4}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ -\frac{4}{3}\lambda_2$
7) $-\frac{1}{3}\lambda_1,\ -\frac{1}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ \frac{1}{3}\lambda_2$
8) $-\frac{2}{3}\lambda_1,\ -\frac{2}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ \frac{2}{3}\lambda_2$
9) $-\frac{4}{3}\lambda_1,\ -\frac{4}{3}(\lambda_2-\lambda_1),\ \frac{4}{3}\lambda_2$
10) $\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2),\ \frac{1}{3}(2\lambda_2-\lambda_1),\ \frac{1}{3}(2\lambda_1-\lambda_2),\ \frac{1}{3}(\lambda_1-2\lambda_2),\ \frac{1}{3}(\lambda_2-2\lambda_1),\ \frac{1}{3}(-\lambda_1-\lambda_2)$

Notation 3.3.3. *On notera les éléments de cette dernière orbite, elle-même notée $\mathcal{S}_{10}$, de la façon suivante :*

$$u_1 := \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2) \qquad u_2 := \frac{1}{3}(2\lambda_2-\lambda_1)$$
$$u_3 := \frac{1}{3}(2\lambda_1-\lambda_2) \qquad u_4 := \frac{1}{3}(\lambda_1-2\lambda_2)$$
$$u_5 := \frac{1}{3}(\lambda_2-2\lambda_1) \qquad u_6 := \frac{1}{3}(-\lambda_1-\lambda_2)$$

Proposition 3.3.11. *L'ensemble $\mathcal{F}_0$ de cardinal 72, défini par :*

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{S}_{10}\times\mathcal{S}_{10}\ \cup\ \mathcal{S}_{10}\times\{0,\lambda_1,\lambda_2\}\ \cup\ \{0,\lambda_1,\lambda_2\}\times\mathcal{S}_{10},$$

est contenu dans $\mathcal{F}'$, et répond aux conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 3.3.3 pour la forme $\phi = \mathcal{A}$.

Preuve.
Tout d'abord, si (α,β) appartient à $\mathcal{F}_0$, alors le calcul de $< \alpha + \beta\tau, \alpha_1 >$, $< \alpha + \beta\tau, \alpha_2 >$ et $< \alpha + \beta\tau, \alpha_1 + \alpha_2 >$, ne donne pas un élément de $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, ce qui, d'après le corollaire 3.2.1, permet d'affirmer que $\mathcal{F}_0$ est inclus dans $\mathcal{F}'$.

Ensuite, par le calcul encore, en utilisant le fait que $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ appartient à A_2, autrement dit que $-\lambda_2$ est congru à λ_1 modulo A_2, et le fait que $3\lambda_1$ et $3\lambda_2$ appartiennent à A_2, on montre que $\mathcal{F}_0$ admet les propriétés (i) et (ii).
En particulier, on a $-\mathcal{S}_{10} = \mathcal{S}_{10}$, et pour vérifier la propriété (i), on peut consulter le tableau qui donne $\alpha + \beta$ modulo A_2 suivant.

$\alpha \diagdown \beta$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
u_1	u_6	λ_2	λ_1	u_3	u_2	0	u_1	u_4	u_5
u_2	λ_2	u_4	u_1	0	λ_1	u_5	u_2	u_6	u_3
u_3	λ_1	u_1	u_5	λ_2	0	u_4	u_3	u_2	u_6
u_4	u_3	0	λ_2	u_2	u_6	λ_1	u_4	u_5	u_1
u_5	u_2	λ_1	0	u_6	u_3	λ_2	u_5	u_1	u_4
u_6	0	u_5	u_4	λ_1	λ_2	u_1	u_6	u_3	u_2
0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
λ_1	u_4	u_6	u_2	u_5	u_1	u_3	λ_1	λ_2	0
λ_2	u_5	u_3	u_6	u_1	u_4	u_2	λ_2	0	λ_1

Enfin, le fait d'avoir utilisé, pour la construction de $\mathcal{F}_0$, des orbites sous l'action de $W(A_2)$, permet d'obtenir facilement la troisième propriété.

Corollaire 3.3.4. *De façon générale, si r est un entier naturel non nul, le j-ième polynôme symétrique fondamental à 72 indéterminées en les fonctions $\left(f^{[\alpha,\beta]}\right)^r$, (α,β) décrivant l'ensemble $\mathcal{F}_0$, est une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-invariante, de poids 0 et d'indice $3jr$.*

Preuve.
C'est une application de la proposition 3.3.3.

Proposition 3.3.12. *Exemple d'une forme ainsi obtenue.*
On considère :

$$\Phi_{0,3} := \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} f^{[\alpha,\beta]}.$$

La fonction $\Phi_{0,3}$ appartient à l'espace $J_{0,3}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$[\Phi_{0,3}]_{q^0} = 3 \times (15 + P_1 P_2).$$

Remarque 3.3.7.
On peut démontrer (voir le chapitre 5) que la forme $\Phi_{0,3}$ est à coefficients de Fourier entiers.

Preuve.
On donne ici les grandes lignes de ce calcul.
D'après la forme des $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}$, il convient d'étudier la nature du terme $<\gamma,\beta>$, pour β dans $\mathcal{S}_{10} \cup \{0,\lambda_1,\lambda_2\}$, et γ appartenant à Δ_+.

On obtient le tableau donnant $<\gamma,\beta>$ suivant :

$<\gamma,\beta>$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
α_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0
α_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
$\alpha_1+\alpha_2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	1

Or, d'après la définition de $P_\gamma^{[\alpha,\beta]}$, on a :

$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}}$, si $<\gamma,\beta> = 0$,

$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = \frac{1-e^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\gamma,\alpha>}}$, si $<\gamma,\beta> = 1$,

$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = e^{2i\pi<\gamma,z>}$, si $<\gamma,\beta> = -\frac{1}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$,

$P_\gamma^{[\alpha,\beta]} = 1$, si $<\gamma,\beta> = \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$.

On peut donc maintenant calculer pour chaque couple (α,β) de l'ensemble $\mathcal{F}_0$, le coefficient $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}$, grâce à l'expression :
$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<\beta,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}P_{\alpha_1}^{[\alpha,\beta]}P_{\alpha_2}^{[\alpha,\beta]}P_{\alpha_1+\alpha_2}^{[\alpha,\beta]}$.

Si (α,β) appartient à $\mathcal{S}_{10} \times \{0\}$, on a :
$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}$

Si (α,β) appartient à $\mathcal{S}_{10} \times \{\lambda_1\}$, on a :
$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<\lambda_1,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}$

Si (α,β) appartient à $\mathcal{S}_{10} \times \{\lambda_2\}$, on a :
$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<\lambda_2,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}$

Pour (α,β) appartenant à $(\mathcal{S}_{10} \cup \{0,\lambda_1,\lambda_2\}) \times \mathcal{S}_{10}$, on a :
si $\beta = u_1$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_1,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$

si $\beta = u_2$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_2,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}e^{2\pi i<\alpha_1,z>}$

si $\beta = u_3$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_3,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}e^{2\pi i<\alpha_2,z>}$

si $\beta = u_4$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_4,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}e^{2\pi i<\alpha_1+2\alpha_2,z>}$

si $\beta = u_5$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_5,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}e^{2\pi i<2\alpha_1+\alpha_2,z>}$

si $\beta = u_6$, $[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<u_6,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}e^{2\pi i<2\alpha_1+2\alpha_2,z>}$.

En regroupant tous ces calculs on obtient :

$$[\Phi_{0,3}]_{q^0} = e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\Big[\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}} \frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}$$
$$+\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}} e^{6\pi i<\lambda_1,z>}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}$$
$$+\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}} e^{6\pi i<\lambda_2,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\frac{1-e^{2i\pi<\alpha_1,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\frac{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}\Big]$$
$$+9\times\Big(e^{6\pi i<u_1,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}+e^{6\pi i<u_2,z>}e^{-2\pi i<\alpha_2,z>}+e^{6\pi i<u_3,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1,z>}$$
$$+e^{6\pi i<u_4,z>}e^{2\pi i<\alpha_2,z>}+e^{6\pi i<u_5,z>}e^{2\pi i<\alpha_1,z>}+e^{6\pi i<u_6,z>}e^{2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\Big).$$

Il reste à exprimer ce résultat en fonction de ζ_1 et ζ_2, en utilisant :

$$\begin{array}{lll}
e^{2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}=\zeta_1\zeta_2 & e^{6\pi i<u_1,z>}=\zeta_1\zeta_2 & e^{6\pi i<u_4,z>}=\zeta_1\zeta_2^{-2}\\
e^{2\pi i<\alpha_1,z>}=\zeta_1^2\zeta_2^{-1} & e^{6\pi i<u_2,z>}=\zeta_1^{-1}\zeta_2^2 & e^{6\pi i<u_5,z>}=\zeta_1^{-2}\zeta_2\\
e^{2\pi i<\alpha_2,z>}=\zeta_1^{-1}\zeta_2^2 & e^{6\pi i<u_3,z>}=\zeta_1^2\zeta_2^{-1} & e^{6\pi i<u_6,z>}=\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\\
e^{6\pi i<\lambda_1,z>}=\zeta_1^3 & e^{6\pi i<\lambda_2,z>}=\zeta_2^3 &
\end{array}$$

$j = e^{2\pi i<u_1,\alpha_1>} = e^{2\pi i<u_1,\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_2,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_3,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_4,\alpha_1>}$
$\quad = e^{2\pi i<u_4,\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_5,\alpha_1>} = e^{2\pi i<u_5,\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_6,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et
$j^2 = e^{2\pi i<u_1,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_2,\alpha_1>} = e^{2\pi i<u_2,\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_3,\alpha_1>} = e^{2\pi i<u_3,\alpha_2>}$
$\quad = e^{2\pi i<u_4,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_5,\alpha_1+\alpha_2>} = e^{2\pi i<u_6,\alpha_1>} = e^{2\pi i<u_6,\alpha_2>}$.

Au terme de tous les calculs, on obtient :

$$[\Phi_{0,3}]_{q^0} = 3(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}+\zeta_1\zeta_2^{-2}+\zeta_1^{-2}\zeta_2+\zeta_1\zeta_2+\zeta_1^2\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2^2)+54 = 3(15+P_1P_2).$$

Proposition 3.3.13. *Autre sous-ensemble de $\mathcal{F}$ convenable.*
On considère l'ensemble $\mathcal{F}_{00}$ de cardinal 432, défini par :

$$\mathcal{F}_{00} = \bigcup_{\substack{i\neq j\\ 1\le i,j\le 3}}\Big(\mathcal{S}'_i\times\mathcal{S}'_j\Big)\ \cup \bigcup_{1\le i\le 3}\Big(\mathcal{S}'_i\times\mathcal{S}_{10}\Big)\ \cup \bigcup_{1\le j\le 3}\Big(\mathcal{S}_{10}\times\mathcal{S}'_j\Big),$$

avec : $\mathcal{S}'_1 = \{\pm\frac{1}{3}\lambda_2,\ \pm\frac{2}{3}\lambda_2,\ \pm\frac{4}{3}\lambda_2\}$, $\mathcal{S}'_2 = \{\pm\frac{1}{3}\lambda_1,\ \pm\frac{2}{3}\lambda_1,\ \pm\frac{4}{3}\lambda_1\}$
$\mathcal{S}'_3 = \{\pm\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2),\ \pm\frac{2}{3}(\lambda_1-\lambda_2),\ \pm\frac{4}{3}(\lambda_1-\lambda_2)\}$.

L'ensemble $\mathcal{F}_{00}$ ainsi défini est inclus dans $\mathcal{F}'$ et répond aux conditions (i),(ii) et (iii) pour la forme $\phi = \mathcal{A}$.

Preuve.
On utilise encore les notations de la proposition 3.3.3.
On peut vérifier, d'après la forme des zéros de $\mathcal{A}$, (corollaire 3.2.1) que l'ensemble $\mathcal{E} := \mathcal{F}-\mathcal{F}'$ s'écrit :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{3}\Big[\Big(\{0,\lambda_1,\ \lambda_2\}\times\mathcal{S}'_j\Big)\ \cup\ \Big(\mathcal{S}'_j\times\{0,\lambda_1,\ \lambda_2\}\Big)\ \cup\ \Big(\mathcal{S}'_j\times\mathcal{S}'_j\Big)\Big].$$

L'ensemble $\mathcal{F}_{00}$ est donc bien inclus dans $\mathcal{F}' = \mathcal{F}-\mathcal{E}$, et on vérifie facilement qu'il répond aux conditions (ii) et (iii). Par ailleurs, on peut aussi l'écrire :

$$\mathcal{F}_{00} = \mathcal{S}\times\mathcal{S} - \Big[\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{E}\Big] = \mathcal{S}\times\mathcal{S} - \Big[\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{E}_0 \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j \times \{0,\lambda_1,\, \lambda_2\}\Big) \cup \{0,\lambda_1,\, \lambda_2\} \times \{0,\lambda_1,\, \lambda_2\}\Big],$$

avec $\mathcal{F}_0$ l'ensemble de cardinal 72 introduit à la proposition 3.3.11,

et $\mathcal{E}_0 = \Big(\{0,\lambda_1,\, \lambda_2\} \times \bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j \times \mathcal{S}'_j\Big)$.

On montre par des calculs similaires à ceux déjà réalisés plus haut pour l'ensemble $\mathcal{F}_0$, que les ensembles $\mathcal{E}_0$, $\Big(\bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j \times \{0,\lambda_1,\, \lambda_2\}\Big)$, et $\{0,\lambda_1,\, \lambda_2\} \times \{0,\lambda_1,\, \lambda_2\}$ vérifient la propriété (i), et donc qu'il en va de même de l'ensemble $\mathcal{F}_{00}$.

Comme ci-dessus, on peut donc utiliser l'ensemble $\mathcal{F}_{00}$ pour construire des formes de Jacobi.

Corollaire 3.3.5.
De façon générale, si r est un entier naturel non nul, le j-ième polynôme symétrique fondamental à 432 indéterminées en les fonctions $\Big(f^{[\alpha,\beta]}\Big)^r$, (α,β) décrivant l'ensemble $\mathcal{F}_{00}$, est une forme de Jacobi faible $W(A_2)$-invariante, de poids 0 et d'indice $3jr$.

Preuve.
Il suffit d'appliquer de nouveau la proposition 3.3.3.

Proposition 3.3.14. *Exemple d'une autre forme ainsi obtenue. On pose :*

$$\Psi_{0,3} := \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_{00}} f^{[\alpha,\beta]}.$$

La fonction $\Psi_{0,3}$ appartient à l'espace $J_{0,3}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$[\Psi_{0,3}]_{q^0} = 54 \times (2 + P_1 + P_2).$$

Preuve.
Donnons les grandes lignes du calcul de $[\Psi_{0,3}]_{q^0}$.

On écrit d'abord $[\Psi_{0,3}]_{q^0}$ en séparant les termes où β appartient à $\mathcal{S}_{10}$ des autres termes :

$$[\Psi_{0,3}]_{q^0} = \sum_{\alpha\in \bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j} \sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} + \sum_{\beta\notin\mathcal{S}_{10}} \sum_{\alpha} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}.$$

D'après les calculs faits pour $[\Phi_{0,3}]_{q^0}$, on a donc :

$$[\Psi_{0,3}]_{q^0} = 6 \times Card \bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}'_j + \sum_{\beta\notin\mathcal{S}_{10}} \sum_{\alpha} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}.$$

$$= 6 \times 18 + \sum_{\beta\notin\mathcal{S}_{10}} \sum_{\alpha} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}.$$

On s'intéresse alors au deuxième terme de la somme, que l'on notera $(\star)$.

$$(\star) = \sum_{\beta\notin\mathcal{S}_{10}} \sum_{\alpha} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = \sum_{(\alpha,\beta)\in \bigcup_{i\neq j} \mathcal{S}'_i \times \mathcal{S}'_j} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} + \sum_{(\alpha,\beta)\in \bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{S}_{10} \times \mathcal{S}'_j} [f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0}.$$

Rappelons que :

$[f^{[\alpha,\beta]}]_{q^0} = e^{6\pi i<\beta,z>}e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}P^{[\alpha,\beta]}_{\alpha_1}P^{[\alpha,\beta]}_{\alpha_2}P^{[\alpha,\beta]}_{\alpha_1+\alpha_2}$.

On a aussi :

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = \frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}}$, si $<\gamma,\beta> = 0$,

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = \frac{1-e^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha>}}{1-e^{-2i\pi<\gamma,\alpha>}}$, si $<\gamma,\beta> = 1$,

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = e^{2i\pi<\gamma,z>}$, si $<\gamma,\beta> = -\frac{1}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$,

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = 1$, si $<\gamma,\beta> = \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$.

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = e^{-2i\pi<\gamma,z>}$, si $<\gamma,\beta> = \frac{4}{3}$,

$P^{[\alpha,\beta]}_{\gamma} = e^{4i\pi<\gamma,z>}$, si $<\gamma,\beta> = -\frac{4}{3}$,

et en notant ici $\epsilon = 1$ ou -1,

$<\gamma,\beta>$	$\epsilon\frac{1}{3}\lambda_2$	$\epsilon\frac{2}{3}\lambda_2$	$\epsilon\frac{4}{3}\lambda_2$	$\epsilon\frac{1}{3}\lambda_1$	$\epsilon\frac{2}{3}\lambda_1$	$\epsilon\frac{4}{3}\lambda_1$	$\epsilon\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2)$	$\epsilon\frac{2}{3}(\lambda_1-\lambda_2)$	$\epsilon\frac{4}{3}(\lambda_1-\lambda_2)$
α_1	0	0	0	$\epsilon\frac{1}{3}$	$\epsilon\frac{2}{3}$	$\epsilon\frac{4}{3}$	$\epsilon\frac{1}{3}$	$\epsilon\frac{2}{3}$	$\epsilon\frac{4}{3}$
α_2	$\epsilon\frac{1}{3}$	$\epsilon\frac{2}{3}$	$\epsilon\frac{4}{3}$	0	0	0	$-\epsilon\frac{1}{3}$	$-\epsilon\frac{2}{3}$	$-\epsilon\frac{4}{3}$
$\alpha_1+\alpha_2$	$\epsilon\frac{1}{3}$	$\epsilon\frac{2}{3}$	$\epsilon\frac{4}{3}$	$\epsilon\frac{1}{3}$	$\epsilon\frac{2}{3}$	$\epsilon\frac{4}{3}$	0	0	0

En utilisant aussi les tableaux déjà écrits dans le cas de $\mathcal{F}_0$, on peut finalement écrire, en considérant la somme pour β appartenant à $\mathcal{S}'_1$, puis $\mathcal{S}'_2$, puis $\mathcal{S}'_3$:

$$\begin{aligned}(\star) = {} & e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\Big[\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_2\cup\mathcal{S}'_3} 3(\zeta_2+\zeta_2^2)\frac{1-\zeta_1^2\zeta_2^{-1}e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}\Big] \\ & +e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\Big[\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_1\cup\mathcal{S}'_3} 3(\zeta_1+\zeta_1^2)\frac{1-\zeta_1^{-1}\zeta_2^2e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}\Big] \\ & +e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}\Big[\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_1\cup\mathcal{S}'_2} 3(\zeta_1+\zeta_2)\frac{1-\zeta_1\zeta_2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}\Big].\end{aligned}$$

Posons :

$$a := \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_2\cup\mathcal{S}'_3} 3(\zeta_2+\zeta_2^2)\frac{1-\zeta_1^2\zeta_2^{-1}e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1,\alpha>}}$$

$$b := \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_1\cup\mathcal{S}'_3} 3(\zeta_1+\zeta_1^2)\frac{1-\zeta_1^{-1}\zeta_2^2e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_2,\alpha>}}$$

$$c := \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{10}\cup\mathcal{S}'_1\cup\mathcal{S}'_2} 3(\zeta_1+\zeta_2)\frac{1-\zeta_1\zeta_2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}{1-e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\alpha>}}.$$

En utilisant les tableaux suivants (où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$) :

$e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}$	$\frac{\lambda_2}{3}$	$-\frac{\lambda_2}{3}$	$\frac{2\lambda_2}{3}$	$-\frac{2\lambda_2}{3}$	$\frac{4\lambda_2}{3}$	$-\frac{4\lambda_2}{3}$	$\frac{\lambda_1}{3}$	$-\frac{\lambda_1}{3}$	$\frac{2\lambda_1}{3}$	$-\frac{2\lambda_1}{3}$	$\frac{4\lambda_1}{3}$	$-\frac{4\lambda_1}{3}$
α_1	1	1	1	1	1	1	j	j^2	j^2	j	j^2	j^2
α_2	j	j^2	j^2	j	j	j^2	1	1	1	1	1	1
$\alpha_1+\alpha_2$	j	j^2	j^2	j	j	j^2	j	j^2	j^2	j	j^2	j^2

$e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}$	$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$	$-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$	$2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$	$-2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$	$4\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$	$-4\frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$
α_1	j	j^2	j^2	j	j	j^2
α_2	j^2	j	j	j^2	j^2	j
$\alpha_1+\alpha_2$	1	1	1	1	1	1

$e^{2i\pi<\gamma,\alpha>}$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
α_1	j	j^2	j^2	j	j	j^2
α_2	j	j^2	j^2	j	j	j^2
$\alpha_1+\alpha_2$	j^2	j	j	j^2	j^2	j

on obtient alors :

$$\begin{aligned}\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\ a &= \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1} \times 3(\zeta_2+\zeta_2^2) \times 9\left(\tfrac{1-j\zeta_1^2\zeta_2^{-1}}{1-j} + \tfrac{1-j^2\zeta_1^2\zeta_2^{-1}}{1-j^2}\right)\\ &= 27\ \zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}(\zeta_2+\zeta_2^2+\zeta_1^2+\zeta_1^2\zeta_2)\\ &= 27\ (\zeta_1+\zeta_1^{-1}+\zeta_1\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2)\end{aligned}$$

et de même :

$$\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\ b = 27\ (\zeta_2+\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2+\zeta_1\zeta_2^{-1})$$

$$\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}\ c = 27\ (\zeta_2+\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}+\zeta_1).$$

Finalement on obtient :

$$(\star) = 27 \times 2\ (\zeta_1\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}\zeta_2+\zeta_2+\zeta_2^{-1}+\zeta_1^{-1}+\zeta_1) = 54(P_1+P_2),$$

et donc : $[\Psi_{0,3}]_{q^0} = 54(2+P_1+P_2)$.

Chapitre 4

Constructions faisant appel à d'autres réseaux

4.1 Utilisation de l'inclusion $A_1 \oplus A_1^{\perp} \subset A_2$ (sous-réseau)

On note ici L' le sous-réseau de A_2 défini par $L' := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}u_1$, et on utilise le système de coordonnées (y_1,y_2) de U. (Voir le lemme 1.2.5).

Remarque 4.1.1. Quelques propriétés de L'.
(i) $2A_2 \subset L' \subset A_2$,
(ii) A_2/L' est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Preuve.
Soit α appartenant à A_2. On écrit α sous la forme : $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, où a_1, a_2 sont deux entiers, alors $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2(\frac{u_1-\alpha_1}{2})$, ou encore $\alpha = (a_1 - \frac{a_2}{2})\alpha_1 + \frac{a_2}{2}u_1$, ce qui permet de conclure que 2α appartient à L', et que α appartient à L' si et seulement si a_2 appartient à $2\mathbb{Z}$, d'où les résultats annoncés.

Lemme 4.1.1. *Soient k_1, k_2 deux entiers relatifs, m un entier naturel, et soient φ_1, φ_2 deux formes de Jacobi faibles à une variable, de poids respectifs k_1 et k_2, d'indices respectifs m et $3m$. Alors la forme définie sur $U \times \mathbb{H}$ par :*

$$\Psi(\tau,y_1,y_2) := \varphi_1(\tau,y_1) \times \varphi_2(\tau,y_2),$$

est une forme de Jacobi faible, de poids $k_1 + k_2$, d'indice m, pour le réseau L'.

Preuve.
La démonstration de ce lemme est immédiate en écrivant les équations fonctionnelles vérifiées par les formes φ_1 et φ_2, (voir la définition 1.1.1) et en exploitant l'égalité $< z,z >= 2y_1^2 + 6y_2^2$.

Proposition 4.1.1. *Soient k un entier relatif et m un entier naturel.*
Si Ψ est une forme de Jacobi faible, de poids k, d'indice m, définie relativement au sous-réseau $L' = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}u_1$ de A_2, alors la fonction Φ définie par :

$$\Phi(\tau,z) := \Psi(\tau,2z),$$

appartient à $J_{k,4m}^{A_2,f}$.

Preuve.
La démonstration de cette proposition est immédiate en écrivant les équations fonctionnelles vérifiées par la forme Ψ et en utilisant l'inclusion $2A_2 \subset L'$ (voir la remarque 4.1.1).

Corollaire 4.1.1. *Soient k_1, k_2 deux entiers relatifs, m un entier naturel, et soient φ_1, φ_2 deux formes de Jacobi faibles à une variable, de poids respectifs k_1 et k_2, d'indices respectifs m et $3m$. Alors la forme définie sur $U \times \mathbb{H}$ par :*

$$\Phi(\tau,y_1,y_2) := \varphi_1(\tau,2y_1) \times \varphi_2(\tau,2y_2),$$

est une forme de Jacobi faible, de poids $k_1 + k_2$, d'indice $4m$, pour le réseau A_2.

Preuve.
Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme et de la proposition précédents.

Remarque 4.1.2. Généralisation.
Cette construction s'applique également à d'autres réseaux.
On peut notamment obtenir des formes de Jacobi pour le réseau E_8 en utilisant les inclusions $E_6 \oplus^\perp A_2 \subset E_8$ et $E_7 \oplus^\perp A_1 \subset E_8$.
Comme $E_8/(E_6 \oplus^\perp A_2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, respectivement $E_8/(E_7 \oplus^\perp A_1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si ϕ est une forme de Jacobi de poids k, d'indice m pour le réseau $E_6 \oplus^\perp A_2$, respectivement $E_7 \oplus^\perp A_1$, alors $\phi(\tau,3z)$, respectivement $\phi(\tau,2z)$, est une forme de Jacobi de poids k, d'indice $9m$, respectivement $4m$, pour E_8.

4.2 Coefficients de Taylor d'une forme de Jacobi pour un réseau contenant A_2 (sur-réseau)

La méthode décrite ici consiste à utiliser une forme de Jacobi pour un réseau contenant A_2, que l'on spécialise ou, dans un cadre plus général, dont on considère les coefficients de Taylor, dans un développement par rapport à certaines variables. Dans les lignes qui suivent, on explicitera ce principe de construction sur un exemple précis.

Notation 4.2.1. *Réseau $A_2 \oplus E_6$.*
(1) On considère un réseau entier pair de rang 6, admettant une base de racines $\{ \beta_1, \ldots, \beta_6 \}$, dans laquelle la matrice du produit scalaire dont il est muni s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce réseau de type E_6 sera noté E_6. (Voir [B], [E].)
Le groupe discriminant $\widetilde{E_6}/E_6$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et admet le système de représentants $\{ 0, \omega_6, 2\omega_6 \}$, où $\omega_6 = \frac{1}{3}(2\beta_1+3\beta_2+4\beta_3+6\beta_4+5\beta_5+4\beta_6)$ est l'un des poids fondamentaux associés au système de racines $\{ \beta_1, \ldots, \beta_6 \}$. (Voir [B], planche V.)
On a : $< \omega_6, \omega_6 >= \frac{4}{3}$.

(2) On considèrera le réseau contenant A_2 constitué de la somme directe orthogonale des réseaux A_2 et E_6, notée $A_2 \oplus E_6$. (Voir [E].)
On note $< .,. >_{A_2}$ le produit scalaire du réseau A_2, et $< .,. >_{E_6}$ celui du réseau E_6.
Le produit scalaire considéré sur le réseau $A_2 \oplus E_6$, de rang 8, est la somme des produits scalaires précédents : $< .,. >_{A_2} + < .,. >_{E_6}$, et le réseau dual est alors $\widetilde{A_2} \oplus \widetilde{E_6}$, la somme directe des réseaux duaux de A_2 et E_6.
On écrira un élément $\vec{z}$ de $(A_2 \oplus E_6) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^8$, sous la forme : $\vec{z} = (\vec{z_2},\vec{z_6})$.

Remarque 4.2.1. Rappels.
Il existe trois séries thêta d'indice 1 pour le réseau A_2, qui sont notées $\theta_{0,1}^{(A_2)}$, $\theta_{u,1}^{(A_2)}$ et $\theta_{2u,1}^{(A_2)}$, et de même il existe trois séries thêta d'indice 1 pour le réseau E_6, qui sont notées $\theta_{0,1}^{(E_6)}$, $\theta_{\mu,1}^{(E_6)}$ et $\theta_{2\mu,1}^{(E_6)}$, $\{0,\mu,2\mu\}$ désignant un système de représentants de $\widetilde{E_6}/E_6$. On peut prendre par exemple $\mu = \omega_6$. (Voir le paragraphe 1.1.6, et en particulier la proposition 1.1.4.)

On emploie encore les notations suivantes :

$$\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)} = \begin{pmatrix} \theta_{0,1}^{(A_2)} \\ \theta_{u,1}^{(A_2)} \\ \theta_{2u,1}^{(A_2)} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)} = \begin{pmatrix} \theta_{0,1}^{(E_6)} \\ \theta_{\mu,1}^{(E_6)} \\ \theta_{2\mu,1}^{(E_6)} \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs vérifient les relations :

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau+1,\vec{z_2}) = N_T.\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2})$, avec $N_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\frac{-1}{\tau},\frac{\vec{z_2}}{\tau}) = \tau e^{\pi i \frac{<\vec{z_2},\vec{z_2}>_{A_2}}{\tau}} N_S.\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2})$, avec $N_S = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

et de façon génerale, pour γ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\gamma.(\tau,\vec{z_2})) = (c\tau+d)e^{\pi i c \frac{<\vec{z_2},\vec{z_2}>_{A_2}}{c\tau+d}} N_\gamma.\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}),$$

où N_γ est une matrice unitaire (c'est à dire vérifiant ${}^tN_\gamma.\overline{N_\gamma} = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité de taille 3).

On a de manière "duale" :

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau+1,\vec{z_6}) = \overline{N_T}.\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_2})$,

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\frac{-1}{\tau},\frac{\vec{z_6}}{\tau}) = \tau^3 e^{\pi i \frac{<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}}{\tau}} \overline{N_S}.\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_2})$,

et de façon génerale, pour γ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\gamma.(\tau,\vec{z_6})) = (c\tau+d)^3 e^{\pi i c \frac{<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}}{c\tau+d}} \overline{N_\gamma}.\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6}).$$

On rappelle également que, pour $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ appartenant à A_2, on a :

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}+\vec{\alpha}+\vec{\beta}\tau) = e^{-2\pi i<\vec{\beta},\vec{z_2}>_{A_2}} e^{-\pi i \tau <\vec{\beta},\vec{\beta}>_{A_2}} \overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2})$,

et de même, pour $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ appartenant à E_6, on a :

$\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6}+\vec{\alpha}+\vec{\beta}\tau) = e^{-2\pi i<\vec{\beta},\vec{z_6}>_{E_6}} e^{-\pi i \tau <\vec{\beta},\vec{\beta}>_{E_6}} \overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6})$.

Enfin, on rappelle que les séries thêta sont des formes singulières (voir la définition 1.2.3 et la proposition 1.2.15).

On s'intéressera, dans ce paragraphe, à la fonction Ψ définie sur $\mathbb{H}\times\mathbb{C}^8$ par :

$$\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) := {}^t\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}).\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6}).$$

Proposition 4.2.1. *La forme* $\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) = {}^t\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}).\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{z_6})$, *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *appartenant à* $SL_2(\mathbb{Z})$ *:*

$\Psi(\gamma.(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})) = (c\tau+d)^4 e^{\pi i c \frac{<\vec{z_2},\vec{z_2}>_{A_2}+<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}}{c\tau+d}} \Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})$,

(2) pour $\vec{\alpha} = \vec{\alpha_2}+\vec{\alpha_6}$, $\vec{\beta} = \vec{\beta_2}+\vec{\beta_6}$ *appartenant à* $A_2\oplus E_6$, *on a :*

$\Psi(\tau,(\vec{z_2},\vec{z_6})+\vec{\alpha}+\vec{\beta}\tau) = e^{-2\pi i(<\vec{\beta_2},\vec{z_2}>_{A_2}+<\vec{\beta_6},\vec{z_6}>_{E_6})} e^{-\pi i \tau(<\vec{\beta_2},\vec{\beta_2}>_{A_2}+<\vec{\beta_6},\vec{\beta_6}>_{E_6})} \Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})$, *(3) Ψ admet un développement de Fourier du type :*

$$\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \vec{l}=\vec{l_2}+\vec{l_6}\in\widetilde{A_2\oplus E_6}}} a(n,\vec{l}\,)q^n e^{2i\pi(<\vec{l_2},\vec{z_2}>_{A_2}+<\vec{l_6},\vec{z_6}>_{E_6})},$$

avec $a(n,\vec{l}\,)\neq 0 \Rightarrow 2n =<\vec{l_2},\vec{l_2}>_{A_2} + <\vec{l_6},\vec{l_6}>_{E_6}$.

Ces propriétés font de Ψ une forme de Jacobi singulière de poids 4, d'indice 1, définie relativement au réseau $A_2\oplus E_6$.

Preuve.
Ces propriétés sont des conséquences des relations rappelées ci-dessus.

On peut maintenant introduire une correction modulaire de la forme Ψ et considérer le développement de Taylor de cette correction par rapport à la variable $\vec{z_6}$.

Proposition 4.2.2. *Correction modulaire. On pose :*

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) &:= \exp(-4\pi^2 G_2(\tau) < \vec{z_6},\vec{z_6} >_{E_6})\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})\\ &= \sum_{(k_1,\ldots,k_6)\in\mathbb{N}^6} f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})x_1^{k_1}\ldots x_6^{k_6},\end{aligned}$$

en notant $\vec{z_6} := (x_1,\ldots,x_6)$ dans une base de E_6 fixée.

Alors les fonctions $f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})$ sont des formes de Jacobi holomorphes, définies relativement au réseau A_2, d'indice 1, de poids respectifs $4+k_1+\ldots+k_6$.

Preuve.
On montre que les fonctions $f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})$ sont des formes de Jacobi holomorphes, définies relativement au réseau A_2, d'indice 1, de poids respectifs $4+k_1+\ldots+k_6$, en tenant un raisonnement analogue à ceux menés au paragraphe 1.2.5, et en utilisant le fait que Ψ est une forme singulière pour déduire le caractère positif ou nul de la norme hyperbolique $2n- <\vec{l_2},\vec{l_2}>_{A_2}$ des coefficients de Fourier non nuls des formes $f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})$ considérées.

Remarque 4.2.2. Par un calcul analogue à celui réalisé dans l'étude des coefficients de Taylor de la correction modulaire de $a_{-3,1}$ (voir la proposition 2.5.9), on obtient une expression de $[f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0}$.

On a en effet, d'après la forme des développements des séries thêta et de la fonction $G_2(\tau)$:

$\widehat{\Psi}(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) = e^{\frac{\pi^2}{6}<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}}\Big(1+q(\cdots)\Big) \times \Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})$, avec $\Psi(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6}) = 1+q(\cdots)$,

donc $[\widehat{\Psi}(\tau,\vec{z_2},\vec{z_6})]_{q^0} = e^{\frac{\pi^2}{6}<\vec{z_6},\vec{z_6}>_{E_6}}$

$$= \sum_{(k_1,\ldots,k_2)\in\mathbb{N}^6} [f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0}\; x_1^{k_1}\ldots x_6^{k_6},$$

d'où finalement, après calculs, on obtient l'expression suivante pour $[f_{(k_1,\ldots,k_6)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0}$:

$$(-1)^{k_1+k_4+k_6} \sum_{\begin{cases} (s_1,\ldots,s_6) \in \mathbb{N}^6 \\ (u_1,\ldots,u_5) \in \mathbb{N}^5 \\ 2s_1+u_1 = k_1 \\ 2s_2+u_5 = k_2 \\ 2s_3+u_1+u_2 = k_3 \\ 2s_4+u_2+u_3+u_5 = k_4 \\ 2s_5+u_3+u_4 = k_5 \\ 2s_6+u_4 = k_6 \end{cases}} \frac{1}{s_1!}\cdots\frac{1}{s_6!}\frac{1}{u_1!}\cdots\frac{1}{u_5!}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{s_1+\ldots+s_6+u_1+\ldots+u_5}.$$

Proposition 4.2.3. *Exemples.*
(1) La forme $f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})$ appartient à l'espace $J_{4,1}^{A_2,hol}$, et vérifie :

$$f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2}) = E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}),$$

ce qui s'écrit :

$$E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}) = {}^t\overrightarrow{\Theta_1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2}).\overrightarrow{\Theta_1}^{(E_6)}(\tau,\vec{0}).$$

(2) La forme $f_{(2,0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})$, (qui est le coefficient de x_1^2 dans le développement de Taylor considéré) appartient à l'espace $J_{6,1}^{A_2,hol}$, et vérifie :

$$f_{(2,0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2}) = \frac{\pi^2}{3}E_{6,1}^{(A_2)}.$$

Preuve.
(1) D'après la proposition 4.2.2, la forme $f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})$ appartient à l'espace $J_{4,1}^{A_2,hol}$, et, d'après la remarque précédente, elle vérifie $[f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0} = 1$, ce qui permet d'affirmer qu'elle coïncide avec la série d'Eisenstein $E_{4,1}^{(A_2)}$.
En effet, la forme $f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2}) - E_{4,1}^{(A_2)}$ appartient alors à $J_{4,1}^{W(A_2),f}(q)$, (voir la notation 2.7.2) puisque $[E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0} = 1$ (voir le paragraphe 1.2.7).
Or cet espace est réduit à { 0 }, car, d'après le résultat de structure donné à la proposition 2.6.2, $J_{-8,1}^{W(A_2),f} = \{ 0 \}$, donc la fonction $f_{(0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2}) - E_{4,1}^{(A_2)}$ est bien identiquement nulle.

(2) La forme $f_{(2,0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})$, qui est le coefficient de x_1^2 dans le développement de Taylor considéré, appartient, elle, à l'espace $J_{6,1}^{A_2,hol}$, et, d'après la remarque 4.2.2, vérifie $[f_{(2,0,\ldots,0)}(\tau,\vec{z_2})]_{q^0} = \frac{\pi^2}{3}$, ce qui permet d'affirmer, selon un raisonnement analogue, qu'elle coïncide avec le multiple $\frac{\pi^2}{3}E_{6,1}^{(A_2)}$ de la série d'Eisenstein $E_{6,1}^{(A_2)}$.

Remarque 4.2.3.
Selon le même principe, on peut obtenir une forme de Jacobi pour le réseau A_2 en construisant une forme de Jacobi $\phi(\tau,z_1,z_2,z_3)$ définie relativement au réseau A_3, et en considérant par exemple la restriction $\phi(\tau,z_1,z_2,0)$, ou plus généralement, les coefficients du développement de Taylor d'une correction de ϕ par rapport à la variable z_3.

4.3 Séries de type Θ_Λ où Λ est un réseau unimodulaire

4.3.1 Définition

Notation 4.3.1. *Soit Λ un réseau entier, pair, unimodulaire (c'est à dire égal à son réseau dual), on note B la forme bilinéaire symétrique définie positive dont il est muni, (on a pour tout couple (x,y) d'éléments de Λ, $B(x,y)$ entier et pour tout x de Λ, $B(x,x)$ appartient à $2\mathbb{Z}$), on note aussi $Q(x) := \frac{1}{2}B(x,x)$, et n le rang du réseau (on considèrera les cas $n = 8$, $n = 16$, et $n = 24$).*

En s'inspirant de la série classique notée $\theta_{Q,y}$ mentionnée par M.Eichler et D.Zagier, [EZ] (paragraphe 7), on définit, relativement au réseau A_2, une série thêta de Jacobi pour Λ.

Définition 4.3.1. Soient y'_1, y'_2 appartenant à Λ.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{H} \times U$ (en écrivant $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$) par :

$$\theta_{\Lambda,\ y'_1,\ y'_2}(\tau,z) := \sum_{x\in\Lambda} e^{2i\pi\tau Q(x)}\ e^{2i\pi B(x,z_1y'_1+z_2y'_2)}.$$

4.3.2 Propriétés générales et formes de Jacobi pour A_2

Proposition 4.3.1. *Soient y'_1, y'_2 appartenant à Λ.*
La fonction $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ vérifie les propriétés suivantes :
1) $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau+1,z) \ = \ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)$
2) $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) \ = \ \tau^{\frac{n}{2}}\ e^{\pi i\frac{1}{\tau}B(w,w)}\ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)$,
où $w = z_1y'_1 + z_2y'_2$
3) $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) \ = \ e^{-\pi i\tau B(w',w')}\ e^{-2\pi iB(w',w)}\ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)$, pour α, β appartenant à A_2, et en notant $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, $w = z_1y'_1 + z_2y'_2$, $w' = b_1y'_1 + b_2y'_2$
4) la fonction $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ admet un développement de Fourier où n'apparaissent que des puissances positives de q, et ses coefficients de Fourier sont entiers.
5) $[\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}]_{q^0} = 1$.

Preuve.
1)4)5) Les première, quatrième et cinquième propriétés sont évidentes, d'après la définition de $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$.

2) Par définition, on a :

$$\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) \ = \sum_{x\in\Lambda} e^{-\frac{2i\pi}{\tau}Q(x)}\ e^{\frac{2i\pi}{\tau}B(x,z_1y'_1+z_2y'_2)}$$
$$= \Big(\sum_{x\in\Lambda} e^{-\frac{i\pi}{\tau}B(x-w,x-w)}\Big)e^{\frac{i\pi}{\tau}B(w,w)},\text{ avec } w = z_1y'_1 + z_2y'_2.$$

D'après la formule de Poisson (voir par exemple l'ouvrage de W.Ebeling [E]), en exploitant le fait que le réseau Λ est unimodulaire, on obtient :

$$\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(-\tfrac{1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) \ = \Big(\sum_{x\in\Lambda}\Big(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\Big)^n e^{\pi i\tau B(x,x)}e^{2\pi iB(-w,x)}\Big)e^{\frac{i\pi}{\tau}B(w,w)} = \tau^{\frac{n}{2}}e^{\frac{i\pi}{\tau}B(w,w)}\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z).$$

3) Soient α, β appartenant à A_2, que l'on écrit respectivement : $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, et $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, avec a_1, a_2, b_1, b_2 appartenant à $\mathbb{Z}$.

$$\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) \ = \sum_{x\in\Lambda} e^{2i\pi\tau Q(x)}\ e^{2i\pi B(x,[z_1+a_1+\tau b_1]y'_1+[z_2+a_2+\tau b_2]y'_2)}$$
$$= \sum_{x\in\Lambda} e^{2i\pi\tau Q(x)}\ e^{2i\pi B(x,z_1y'_1+z_2y'_2)}e^{2\pi i\tau B(x,y'_1)b_1}e^{2\pi i\tau B(x,y'_2)b_2}$$

$$= \sum_{x\in\Lambda} e^{\pi i\tau[B(x,x)+2B(x,y'_1b_1+y'_2b_2)]}\ e^{2\pi iB(x,z_1y'_1+z_2y'_2)}$$
$$= \sum_{x\in\Lambda} e^{\pi i\tau[B(x+y'_1b_1+y'_2b_2,x+y'_1b_1+y'_2b_2)-B(y'_1b_1+y'_2b_2,y'_1b_1+y'_2b_2)]}\ e^{2\pi iB(x,z_1y'_1+z_2y'_2)}.$$

En effectuant, dans Λ, le changement de variables $x' := x + y'_1b_1 + y'_2b_2$, on obtient :

$$\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) = e^{-\pi i\tau B(b_1y'_1+b_2y'_2,b_1y'_1+b_2y'_2)}\ e^{-2\pi iB(b_1y'_1+b_2y'_2,z_1y'_1+z_2y'_2)}$$
$$\times\Big(\sum_{x'\in\Lambda} e^{\pi i\tau B(x',x')}\ e^{2\pi iB(x',z_1y'_1+z_2y'_2)}\Big)$$
$$= e^{-\pi i\tau B(w',w')}\ e^{-2\pi iB(w',w)}\ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)\ , \text{ en notant } w := z_1y'_1+z_2y'_2,\ w' := b_1y'_1+b_2y'_2.$$

Remarque 4.3.1. D'après les propriétés (2) et (3), en général, une forme $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ n'est pas une forme de Jacobi. La proposition qui suit donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle forme soit une forme de Jacobi.

Proposition 4.3.2. *Soient m un entier naturel non nul et y'_1, y'_2 des éléments de Λ. La forme $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ est une forme de Jacobi d'indice m si et seulement si y'_1, y'_2 vérifient la condition $\mathcal{C}_m$ suivante :*

$$\textit{pour tout}\ \ (i,j)\ \textit{de}\ \{1,2\}^2 \quad B(y'_i,y'_j) \ = \ m < \alpha_i,\alpha_j > .$$

Dans ce cas, la fonction $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ appartient à $J^{f,A_2,\mathbb{Z}}_{\frac{n}{2},m}$.

Preuve.
D'après les quatre premières propriétés citées à la proposition 4.3.1 ci-dessus, pour que $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ soit une forme de Jacobi d'indice m, il faut et il suffit que y'_1, y'_2 vérifient $B(w,w) = m < z,z >$, où $w = z_1y'_1 + z_2y'_2$, pour tout $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$ de U.
(Cette condition est en effet la condition nécessaire et suffisante pour avoir :
2) $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) \ = \ \tau^{\frac{n}{2}}\ e^{\pi i\frac{m}{\tau}<z,z>}\ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)$,

3) $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z+\alpha+\tau\beta) \ = \ e^{-\pi im\tau<\beta,\beta>}\ e^{-2\pi im<\beta,z>}\ \theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}(\tau,z)$, pour α, β appartenant à A_2,
car on obtiendra alors aussi $B(z_1y'_1 + z_2y'_2,\ t_1y'_1 + t_2y'_2) = m < z,t >$, pour tout z, t appartenant à U.)

Or $B(w,w) = m < z,z >$ s'écrit aussi :
$z_1^2B(y'_1,y'_1) + z_2^2B(y'_2,y'_2) + 2z_1z_2B(y'_1,y'_2) = 2m(z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2)$,
donc cette égalité est vérifiée pour tout z de U si et seulement si y'_1, y'_2 vérifient exactement la condition $\mathcal{C}_m$.

Ainsi, on peut remarquer qu'on obtient une forme d'indice 1 si les éléments y'_1, y'_2 sont générateurs d'un réseau de type A_2.

4.3.3 Obtention de formes d'indice 1

Ce paragraphe est consacré à l'étude de quelques exemples de formes d'indice 1 obtenues par cette méthode.

(i) Cas où Λ est de rang 8

Notation 4.3.2. *Réseau $\mathbb{E}_8$.*
On rappelle que le seul réseau unimodulaire de rang 8 est le réseau de type $\mathbb{E}_8$. (Voir par exemple [E].)
On considère la réalisation du réseau $\mathbb{E}_8$ donnée, comme dans l'ouvrage de M.Eichler et D.Zagier ([EZ]), par :
$\mathbb{E}_8 = \{ \ x = (\ x_1, \dots, \ x_8 \ ) \in \mathbb{Z}^8 \cup \mathbb{Z}^8 + \frac{1}{2}(1, \dots, 1 \ ) \ / \ \sum_{i=1}^{8} x_i \in 2\mathbb{Z} \ \}$.
On note : $B(x,y) := \displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_i y_i$ *et* $Q(x) := \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \ = \ \frac{1}{2} B(x,x)$.

Proposition 4.3.3. *On considère les éléments de $\mathbb{E}_8$ définis par :*

$$y_1' = \frac{1}{2}(\ -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , 1 \ , 1 \ ),$$

$$y_2' = \frac{1}{2}(\ 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ ).$$

La série $\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'}$ appartient à $J_{4,1}^{A_2,f} \ = \ J_{4,1}^{W(A_2),f}$, et vérifie l'identité :

$$\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'} \ = \ E_{4,1}^{(A_2)}.$$

Preuve.
Les éléments $y_1' = \frac{1}{2}(\ -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , 1 \ , 1 \ )$, et $y_2' = \frac{1}{2}(\ 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ )$ vérifient la condition $\mathcal{C}_1$, donc, d'après la proposition 4.3.2, la série $\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'}$ appartient à $J_{4,1}^{A_2,f} \ = \ J_{4,1}^{W(A_2),f}$. (Voir le corollaire 2.3.2.) De plus, d'après la proposition 4.3.1 :

$$[\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'}]_{q^0} \ = \ 1.$$

On obtient donc, selon le raisonnement déjà tenu lors de la preuve de la proposition 4.2.3 :

$$\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'} \ = \ E_{4,1}^{(A_2)}.$$

Corollaire 4.3.1. *Tout autre couple y_1', y_2' vérifiant la condition $\mathcal{C}_1$ donnera la même fonction $\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'} \ = \ E_{4,1}^{(A_2)}$.*

Preuve.
C'est une conséquence du fait que la forme $E_{4,1}^{(A_2)}$ soit la seule forme appartenant à $J_{4,1}^{W(A_2),f}$ et vérifiant $[\ ]_{q^0} \ = \ 1$.

Remarque 4.3.2. On a l'égalité : $\theta_{\mathbb{E}_8, y_1', y_2'}(\tau, 0, z_2) = \theta_{Q,y}^{(A_1)}(\tau, z_2) = E_{4,1}^{(A_1)}(\tau, z_2)$, en suivant la notation employée par M.Eichler et D.Zagier au paragraphe 7 de leur ouvrage [EZ].

Corollaire 4.3.2.
Les formes $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{6,1}^{(A_2)}$ sont à coefficients de Fourier entiers.

Preuve.
La forme $E_{4,1}^{(A_2)}$ est à coefficients de Fourier entiers en tant que série du type $\Theta_{\Lambda, y_1', y_2'}$, d'après les propositions précédentes. Par ailleurs, d'après les relations établies au lemme 2.7.1, on a :

$$(1) \ E_{4,1}^{(A_2)} \ = \ \frac{1}{24} \left(E_4 \ 24 \ a_{0,1} \ + \ E_6 \ 2 \ a_{-2,1} \right),$$

$$(2) \ E_{6,1}^{(A_2)} \ = \ \frac{1}{24} \left(E_6 \ 24 \ a_{0,1} \ + \ E_8 \ 2 \ a_{-2,1} \right),$$

où les formes $24\ a_{0,1}$ et $2\ a_{-2,1}$ sont à coefficients de Fourier entiers, et avec :

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \ \equiv \ 1 \ mod \ 24$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n \ \equiv \ 1 \ mod \ 24$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n \ \equiv \ 1 \ mod \ 24.$$

Comme $E_{4,1}^{(A_2)}$ est à coefficients de Fourier entiers, l'identité (1) permet alors d'écrire la relation de congruence suivante :

$$24\ a_{0,1} \ + \ 2\ a_{-2,1} \ \equiv \ 0 \ mod \ 24,$$

d'où on déduit, grâce à l'identité (2), que la forme $E_{6,1}^{(A_2)}$ est également à coefficients de Fourier entiers.

(ii) Cas où Λ est de rang 16

Lemme 4.3.1. *Si Λ est un réseau unimodulaire de rang 16, alors Λ est un réseau de racines (c'est à dire engendré par $\Lambda_2 = \{x \in \Lambda / B(x,x) = 2\}$) et Λ_2 est du type D_{16} ou $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$.(Voir par exemple [E], paragraphe 3.2.)*

Notation 4.3.3. *Réalisation du réseau $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$.*
On considère Λ de type $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$, et on utilise la réalisation du réseau $\mathbb{E}_8$ présentée dans la notation 4.3.2.
Un élément x de $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$ est écrit $x = (\hat{x},\tilde{x})$, avec $\hat{x}$ et $\tilde{x}$ appartenant à $\mathbb{E}_8$ et écrits respectivement $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_8)$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_8)$.
On a : $B(x,y) := \sum_{i=1}^{8} \hat{x}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^{8} \tilde{x}_i \tilde{y}_i$.

Proposition 4.3.4. *Séries de type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ de rang 16*
(1) On considère les éléments x et y de $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$ définis par :

$$\hat{y}'_1 = \frac{1}{2}(-1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , -1 \ , 1 \ , 1 \ ) \qquad \tilde{y}'_1 = (0,0,\ldots,0)$$

$$\hat{y}'_2 = \frac{1}{2}(\ 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ , 1 \ ) \qquad \tilde{y}'_2 = (0,0,\ldots,0)$$

Alors la série $\theta_{\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}$ appartient à $J_{8,1}^{A_2,f} \ = \ J_{8,1}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$\theta_{\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8,y'_1,y'_2} = E_4(\tau)\ E_{4,1}^{(A_2)}.$$

(2) Cette fonction est la seule fonction du type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ réseau unimodulaire de rang 16, qui soit une forme de Jacobi pour le réseau A_2.

Preuve.
(1) Les éléments x et y vérifient bien la condition $\mathcal{C}_1$, donc la série $\theta_{\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}$ appartient à $J_{8,1}^{A_2,f} \ = \ J_{8,1}^{W(A_2),f}$, d'après la proposition 4.3.2. De plus, $\theta_{\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}$ s'écrit :

$\theta_{\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}(\tau,z) = \sum_{x\in\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8} e^{2i\pi\tau Q(x)}\ e^{2i\pi B(x,z_1y_1'+z_2y_2')}$,
avec, d'après le choix de y_1' et y_2', $B(x,z_1y_1'+z_2y_2') =< \hat{x},z_1\hat{y}_1'+z_2\hat{y}_2' >_{\mathbb{E}_8}$, où $< , >_{\mathbb{E}_8}$ désigne ici le produit scalaire relatif à $\mathbb{E}_8$ dans la réalisation décrite dans la notation 4.3.2.
On a donc :
$\theta_{\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}(\tau,z) = \sum_{x=\hat{x}+\tilde{x}\in\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8} e^{i\pi\tau<\hat{x},\hat{x}>_{\mathbb{E}_8}} e^{i\pi\tau<\tilde{x},\tilde{x}>_{\mathbb{E}_8}} e^{2i\pi<\hat{x},z_1\hat{y}_1'+z_2\hat{y}_2'>_{\mathbb{E}_8}}$
$= \sum_{\tilde{x}\in\mathbb{E}_8} e^{i\pi\tau<\tilde{x},\tilde{x}>_{\mathbb{E}_8}} \theta_{\mathbb{E}_8,\hat{y}_1',\hat{y}_2'}(\tau,z) \ = \ \theta_{\mathbb{E}_8,\hat{y}_1',\hat{y}_2'}(\tau,z)\times\theta_{\mathbb{E}_8,\hat{y}_1',\hat{y}_2'}(\tau,0)$
$= E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,z)\times E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,0) \ = \ E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,z)\times E_4(\tau)$,
en utilisant : $\theta_{\mathbb{E}_8,\hat{y}_1',\hat{y}_2'} = E_{4,1}^{(A_2)}$ et $E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,0) = E_4(\tau)$. (Voir la proposition 4.3.3 et la remarque 4.3.2.)

(2) Toute fonction du type $\theta_{\Lambda,y_1',y_2'}$, avec Λ de rang 16, et y_1',y_2' vérifiant $\mathcal{C}_1$, appartient à $J_{8,1}^{W(A_2),f}$. Soit $\theta_{\Lambda,y_1',y_2'}$ une telle fonction.
D'après la structure de l'espace des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$-invariantes (voir la proposition 2.6.2), on peut écrire $\theta_{\Lambda,y_1',y_2'}$ comme une combinaison linéaire des formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$, à coefficients dans $M_\star$. Elle s'écrit alors :

$$\theta_{\Lambda,y_1',y_2'} = \mu E_8(\tau)a_{0,1} + \nu E_{10}(\tau)a_{-2,1},$$

où μ et ν sont des constantes.
En utilisant l'information supplémentaire $[\theta_{\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}]_{q^0} = 1$, (donnée par la proposition 4.3.1) et l'écriture de $[a_{0,1}]_{q^0}$ et $[a_{-2,1}]_{q^0}$, (voir les propositions-définitions 2.5.3, 2.5.2) on obtient :

$$1 = \mu\frac{1}{24}(18+P_1+P_2) + \nu\frac{1}{2}(6-P_1-P_2),$$

d'où, en utilisant l'indépendance algébrique de P_1 et P_2 sur $\mathbb{C}$, $\mu = 1$ et $\nu = \frac{1}{12}$.
Ainsi, toute fonction du type $\theta_{\Lambda,y_1',y_2'}$, avec Λ de rang 16, et y_1',y_2' vérifiant $\mathcal{C}_1$ coïncide avec la fonction $E_8(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{10}(\tau)\ a_{-2,1}$, ce qui prouve l'unicité d'une telle forme.

Remarque 4.3.3. On peut vérifier que l'exemple construit ci-dessus correspond bien à cette unique fonction, car :

$$E_8(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{10}(\tau)\ a_{-2,1} = E_4(\tau)\ E_{4,1}^{(A_2)},$$

d'après les relations $E_4(\tau)^2 = E_8(\tau)$, $E_4(\tau)E_6(\tau) = E_{10}(\tau)$ (voir la notation 2.4.2) et $E_{4,1}^{(A_2)} = E_4(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_6(\tau)\ a_{-2,1}$, (voir le lemme 2.7.1).

(iii) Cas où Λ est de rang 24

Remarque 4.3.4. Il existe 24 réseaux unimodulaires pairs de rang 24. (Voir [E].)

Notation 4.3.4. *On considère Λ de type $\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8$, et on utilise la même réalisation du réseau $\mathbb{E}_8$ que ci-dessus. (Voir la notation 4.3.2.)*
Un élément x de $\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8$ est écrit $x = (\hat{x},\tilde{x},\breve{x})$, avec $\hat{x}$, $\tilde{x}$ et $\breve{x}$ appartenant à $\mathbb{E}_8$ et écrits respectivement $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_8)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_8)$, et $\breve{x} = (\breve{x}_1,\ldots,\breve{x}_8)$.
On a : $B(x,y) := \sum_{i=1}^{8}\hat{x}_i\hat{y}_i + \sum_{i=1}^{8}\tilde{x}_i\tilde{y}_i + \sum_{i=1}^{8}\breve{x}_i\breve{y}_i.$

Proposition 4.3.5. *Séries de type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ de rang 24.*
(1) On considère les éléments x et y de $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$ définis par :

$$\hat{y}'_1 = \frac{1}{2}(\,-1\,,-1\,,-1\,,-1\,,-1\,,-1\,,1\,,1\,) \qquad \tilde{y}'_1 = \check{y}'_1 = (0,0,\ldots,0)$$

$$\hat{y}'_2 = \frac{1}{2}(\,1\,,1\,,1\,,1\,,1\,,1\,,1\,,1\,) \qquad \tilde{y}'_2 = \check{y}'_2 = (0,0,\ldots,0).$$

Alors, la série $\theta_{\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}$ appartient à $J_{12,1}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$\theta_{\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8,y'_1,y'_2} = E_4(\tau)E_4(\tau)E_{4,1}^{(A_2)}.$$

(2) Toute fonction du type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ de rang 24, et y'_1,y'_2 vérifiant $\mathcal{C}_1$, est de la forme $E_{12}(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{14}(\tau)\ a_{-2,1} + \nu\Delta(\tau)\ a_{0,1}$, où ν est une constante.

Preuve.
(1) Les éléments x et y vérifient bien la condition $\mathcal{C}_1$, donc la série $\theta_{\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}$ appartient à $J_{12,1}^{A_2,f} = J_{12,1}^{W(A_2),f}$. L'identité annoncée s'obtient par un calcul semblable au calcul fait dans l'étude du cas $n = 16$.

(2) Soit Φ une fonction du type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ de rang 24, et y'_1,y'_2 vérifiant $\mathcal{C}_1$. Alors Φ appartient à $J_{12,1}^{W(A_2),f}$, et d'après la proposition 2.6.2, elle s'écrit alors :

$$\Phi = \mu E_{12}(\tau)a_{0,1} + \nu\Delta(\tau)a_{0,1} + \xi E_{14}(\tau)a_{-2,1},$$

où μ, ν et ξ sont des constantes.
En utilisant l'information supplémentaire $[\theta_{\mathbb{E}_8,y'_1,y'_2}]_{q^0} = 1$, et l'écriture de $[a_{0,1}]_{q^0}$ et $[a_{-2,1}]_{q^0}$, on obtient :

$$1 = \mu\frac{1}{24}(18 + P_1 + P_2) + \xi\frac{1}{2}(6 - P_1 - P_2),$$

ce qui donne, comme dans le cas précédent : $\mu = 1$ et $\xi = \frac{1}{12}$.
Ainsi, toute fonction du type $\theta_{\Lambda,y'_1,y'_2}$, avec Λ de rang 24, et y'_1,y'_2 vérifiant $\mathcal{C}_1$, est de la forme $E_{12}(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{14}(\tau)\ a_{-2,1} + \nu\Delta(\tau)\ a_{0,1}$, où ν est une constante.

Remarque 4.3.5. L'exemple construit ci-dessus est bien de cette forme, car, d'après les relations $E_4(\tau)^2 = E_8(\tau)$, $E_8(\tau)E_6(\tau) = E_{14}(\tau)$
$E_8(\tau)E_4(\tau) = E_{12}(\tau) + \lambda\Delta(\tau)$, avec $\lambda = 720 - \frac{65520}{691} = \frac{432000}{691}$
et $E_{4,1}^{(A_2)} = E_4(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_6(\tau)\ a_{-2,1}$,
on a : $E_4(\tau)E_4(\tau)E_{4,1}^{(A_2)} = E_{12}(\tau)\ a_{0,1} + \frac{1}{12}E_{14}(\tau)\ a_{-2,1} + \lambda\Delta(\tau)\ a_{0,1}$.

(iv) Récapitulation

Proposition 4.3.6.
(1) Il n'existe qu'une seule série du type $\theta_{\Lambda,\ y'_1,y'_2}$ qui soit une forme de Jacobi de poids 4 et d'indice 1, il s'agit de $\theta_{\mathbb{E}_8,y'_1,y'_2} = E_{4,1}^{(A_2)}$.

(2) Il n'existe qu'une seule série de ce type qui soit une forme de Jacobi de poids 8 et d'indice 1, il s'agit de $E_4(\tau)\ E_{4,1}^{(A_2)}$, on peut par exemple l'obtenir à l'aide d'une réalisation de $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$.

(3) Les séries de ce type qui sont des formes de Jacobi de poids 12 *et d'indice* 1*, sont toutes égales à* $E_8(\tau)\ E_{4,1}^{(A_2)}$ *modulo* $\mathbb{C}\Delta(\tau)\ a_{0,1}$*, l'ensemble des formes de Jacobi* $W(A_2)$*-invariantes cuspidales de poids* 12 *et d'indice* 1*. On peut en obtenir un exemple à l'aide d'une réalisation de* $\mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$.

4.3.4 Corollaire arithmétique

En identifiant les coefficients de Fourier de $E_{4,1}^{(A_2)}$, exprimés au paragraphe 1.2.7, et ceux de la fonction $\theta_{\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}$, introduite dans la proposition 4.3.3, notés $f(n,l)$ et décrits ci-dessous, on pourra obtenir des résultats arithmétiques.

Lemme 4.3.2. *On note* $f(n,l)$ *les coefficients de Fourier de la fonction* $\theta_{\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}$*, introduite dans la proposition 4.3.3.*
Pour n*,* l_1*,* l_2 *appartenant à* $\mathbb{Z}$ *on a :*

$$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = \ Card\ \{\ (\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8\ )\ \in \mathbb{Z}^8\ /\ x_1 \equiv \ldots \equiv x_8\ mod\ 2, \\ \sum_{i=1}^{8} x_i = 4l_2,\ -\sum_{i=1}^{6} x_i + x_7 + x_8 = 4l_1,\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 8n\ \}.$$

Preuve.
D'après la définition générale des séries de type $\theta_{\mathbb{E}_8,y_1',y_2'}$ (voir la définition 4.3.1), on a :
$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = \ Card\ \{\ x \in \mathbb{E}_8\ /\ Q(x) = n\ ,\ B(x,y_1') = l_1\ ,\ B(x,y_2') = l_2\ \}$.
En choisissant y_1', y_2' comme dans la proposition 4.3.3, on obtient alors, d'après l'écriture précisée dans la notation 4.3.2 :

$$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = \ Card\ \{\ (\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8\ )\ \in \mathbb{Z}^8\ \cup\ \mathbb{Z}^8 + \tfrac{1}{2}(1,\ldots,1)\ / \\ \sum_{i=1}^{8} x_i \in 2\mathbb{Z},\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = n,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} x_i = l_2,\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} x_i + \frac{1}{2}\ x_7 + \frac{1}{2}\ x_8 = l_1\ \},$$

ou encore :

$$f(n,l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2) = \ Card\ \{\ (\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8\ )\ \in \mathbb{Z}^8\ /\ x_1 \equiv \ldots \equiv x_8\ mod\ 2, \\ \sum_{i=1}^{8} x_i = 4l_2,\ -\sum_{i=1}^{6} x_i + x_7 + x_8 = 4l_1,\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 8n\ \}.$$

Corollaire 4.3.3.
Pour n*,* l_1*,* l_2 *entiers relatifs fixés, on obtient une expression du cardinal de l'ensemble :*
$\{\ (\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8\ )\ \in \mathbb{Z}^8\ /\ x_1 \equiv \ldots \equiv x_8\ mod\ 2\ ,\ \sum_{i=1}^{8} x_i = 4l_2\ ,\ -\sum_{i=1}^{6} x_i + x_7 + x_8 = 4l_1\ ,\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 8n\ \}$,
qui ne dépend que de $R = 6\ (\ \frac{2}{3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2) - 2n\ )$ *et de* $l_1 - l_2\ mod\ 3$.
Plus précisément, ce cardinal est égal au coefficient $c_{4,1}(n,l_1,l_2)$ *de la série d'Eisenstein* $E_{4,1}^{(A_2)}$ *exprimé à la proposition 1.2.18.*

Remarque 4.3.6.
On peut également donner la valeur exacte de ce cardinal en utilisant le logiciel pari-gp pour calculer le coefficient de Fourier $c_{4,1}(n,l_1,l_2)$ de la série d'Eisenstein $E_{4,1}^{(A_2)}$.

Chapitre 5

Problème de la structure sur $\mathbb{Z}$ de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$

5.1 Préliminaires : forme de $[\ ]_{q^0}$

On s'intéresse dans ce paragraphe au coefficient $[\varphi]_{q^0}$, (voir la notation 1.1.1), qui détermine la forme φ modulo $J_{0,\star}^{f,W(A_2),B}(q)$.

Lemme 5.1.1. *Soient m un entier naturel fixé et φ appartenant à $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.*
Le coefficient $[\varphi]_{q^0}$ est un polynôme symétrique en P_1, P_2, de degré inférieur ou égal à m.

Preuve.
D'après la proposition 2.6.2, la forme φ s'écrit

$$\varphi = \sum_{r,s,t\ \geq 0,\ r+s+t\ =\ m} g_{r,s,t}\ a_{0,1}^r\ a_{-2,1}^s\ a_{-3,1}^t,$$

avec $g_{r,s,t}$ appartenant à M_{2s+3t} et on a, d'après les propositions-définitions 2.5.3, 2.5.2, 2.5.1 : $[24a_{0,1}]_{q^0} = 18+P_1+P_2$, $[2a_{-2,1}]_{q^0} = 6-P_1-P_2$, $[a_{-3,1}]_{q^0} = P_2-P_1$, ce qui permet d'obtenir la conclusion annoncée.

Proposition 5.1.1. *Forme de $[\varphi]_{q^0}$ pour les premiers indices.*
Soit φ appartenant à $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
Si $m=1$, alors il existe un entier b tel que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(18+P_1+P_2).$$

Si $m=2$, alors il existe 3 entiers b, c, d tels que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(6+P_1+P_2)+c(27+P_1P_2)+d(54+P_1^2+P_2^2).$$

Si $m=3$, alors il existe 5 entiers b, c, d, e, f tels que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(2+P_1+P_2)+c(15+P_1P_2)+d(30+P_1^2+P_2^2)+e(162+P_1^3+P_2^3)+f(162+P_1^2P_2+P_1P_2^2).$$

Si $m=4$, alors il existe 8 entiers b, c, d, e, f, g, h, l tels que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(P_1+P_2)+c(9+P_1P_2)+d(18+P_1^2+P_2^2)+e(108+P_1^3+P_2^3)+f(108+P_1^2P_2+P_1P_2^2)$$
$$+g(486+P_1^4+P_2^4)+h(486+P_1^3P_2+P_1P_2^3)+l(243+P_1^2P_2^2).$$

Preuve.
D'après le corollaire 1.2.1, si $\varphi(\tau,z) = \sum_{n\geq 0, l\in\widetilde{A_2}} c(n,l)\ q^n\ e^{2i\pi<z,l>}$, appartient à $J_{0,m}^{A_2,f}$, on a la relation suivante entre les coefficients de Fourier :

$$m \sum_{l\in\widetilde{A_2}} c(0,l) = 6 \sum_{l\in\widetilde{A_2}} c(0,l) < l\ ,\ \alpha_1 >^2 \quad (\star).$$

On peut alors calculer les relations obtenues pour les premiers indices m.

Cas où $m = 1$.
D'après le lemme précédent, le polynôme $[\varphi]_{q^0}$ est de la forme $[\varphi]_{q^0} = a + b(P_1 + P_2)$, avec a, b appartenant à $\mathbb{Z}$, puisque les coefficients de Fourier de φ sont entiers.
De plus, $a + b(P_1 + P_2) = a + b(\zeta_1 + \zeta_1^{-1} + \zeta_2 + \zeta_2^{-1} + \zeta_1\zeta_2^{-1} + \zeta_1^{-1}\zeta_2)$,
donc les seuls coefficients $c(0,l)$ éventuellement non nuls sont :
$c(0,0) = a$
$c(0,\lambda_1) = c(0,-\lambda_1) = c(0,\lambda_2) = c(0,-\lambda_2) = c(0,\lambda_1 - \lambda_2) = c(0,-\lambda_1 + \lambda_2) = b$,
d'où, la relation $(\star)$ s'écrit :
$a + 6b = 6 \times [a \times 0 + b \times (1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1)]$, ce qui donne : $a = 18b$.

Cas où $m = 2$.
Toujours d'après le lemme, le polynôme $[\varphi]_{q^0}$ est de la forme $[\varphi]_{q^0} = a + b(P_1 + P_2) + cP_1P_2 + d(P_1^2 + P_2^2)$, avec a, b, c, d appartenant à $\mathbb{Z}$, et un calcul analogue à celui fait ci-dessus donne la relation : $a = 6b + 27c + 54d$.

Les cas $m = 3$ et $m = 4$ se traitent également de cette façon.

Proposition 5.1.2. *Soient m un entier naturel fixé et φ appartenant à $J_{0,m}^{f,W(A_2)}$.*
(1) Si le coefficient $[\varphi]_{q^0}$ est de la forme $[\varphi]_{q^0} = a + b\ (P_1 + P_2)$, où a et b sont deux constantes, alors a et b vérifient la relation :

$$\frac{m}{(24,m)}\ a = \frac{24 - 6m}{(24,m)}\ b,$$

en notant $(24,m)$ le pgcd de 24 et m.
(2) Si le coefficient $[\varphi]_{q^0}$ est de la forme $[\varphi]_{q^0} = a + b\ P_1P_2$, où a et b sont deux constantes, alors a et b vérifient la relation :

$$\frac{m}{(72,m)}\ a = \frac{72 - 9m}{(72,m)}\ b.$$

Preuve.
C'est une application immédiate de la relation $(\star)$ du corollaire 1.2.1.

Remarque 5.1.1. Rappels : espaces $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ pour $1 \leq m \leq 4$.
D'après la proposition 2.7.2, les espaces $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$, $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ et $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ (voir la notation 2.7.2) sont réduits à $\{0\}$, et $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{C}} = \mathbb{C}.\xi_{0,4}$, où $\xi_{0,4} = \Delta(\tau)(a_{-3,1})^4$ est une forme de Jacobi à coefficients de Fourier entiers.
On a : $[\xi_{0,4}]_{q^1} = (P_1 - P_2)^4 = P_1^4 + P_2^4 - 4(P_1P_2^3 + P_1^3P_2) + 6P_1^2P_2^2$.

5.2 $\mathbb{Z}$-module $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$

Proposition-Définition 5.2.1. *On pose :*

$$\psi_{0,1}^{(1)} := 24a_{0,1}.$$

Alors $\psi_{0,1}^{(1)}$ *est une forme de Jacobi faible,* $W(A_2)$*-invariante, de poids* 0*, d'indice* 1*, à coefficients de Fourier entiers, et vérifiant :*

$$[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2.$$

Preuve.
Voir la proposition-définition 2.5.3 et les corollaires 2.5.1 et 2.5.2.

Théorème 5.2.1. *Structure de* $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
Le $\mathbb{Z}$*-module* $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang* 1 *et on a :*

$$J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}.\psi_{0,1}^{(1)}.$$

Preuve.
Soit φ une forme appartenant à $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
D'après la proposition 5.1.1, il existe un entier b tel que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(18 + P_1 + P_2).$$

On a donc, d'après la définition de $\psi_{0,1}^{(1)}$:

$$[\varphi]_{q^0} = b\ [\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0}.$$

Or (voir la remarque 5.1.1) l'ensemble $J_{0,1}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ est réduit à $\{0\}$, donc la forme φ s'écrit $b\ \psi_{0,1}^{(1)}$.

5.3 $\mathbb{Z}$-module $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$

Proposition-Définition 5.3.1. *On pose :*

$$\psi_{0,2}^{(1)} := \frac{1}{48}((24a_{0,1})^2 - E_4(2a_{-2,1})^2)$$

$$\psi_{0,2}^{(11)} := \frac{1}{16}((24a_{0,1})^2 + 3E_4(2a_{-2,1})^2 - 4E_6(a_{-3,1})^2)$$

$$\psi_{0,2}^{(2)} := (\psi_{0,1}^{(1)})^2 - 36\psi_{0,2}^{(1)} - 2\psi_{0,2}^{(11)}.$$

Ces trois formes sont des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$-invariantes, de poids 0, d'indice 2, et vérifient :

$$[\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0} = 6 + P_1 + P_2$$

$$[\psi_{0,2}^{(11)}]_{q^0} = 27 + P_1P_2$$

$$[\psi_{0,2}^{(2)}]_{q^0} = 54 + P_1^2 + P_2^2.$$

Preuve.
Voir les propositions-définitions 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 5.2.1, et le corollaire 2.5.2.

Théorème 5.3.1.
Les formes $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$ et $\psi_{0,2}^{(2)}$ sont à coefficients de Fourier entiers.

Preuve.
(1) Cas de la forme $\psi_{0,2}^{(1)}$.
On va utiliser l'expression de cette forme comme un polynôme symétrique en des fonctions à caractéristiques d'ordre 2, vue au paragraphe 3.3.2.

D'après le corollaire 3.3.3, la forme f_2 définie par $f_2 := \psi_{1110}^2 + \psi_{1101}^2 + \psi_{1001}^2 + \psi_{1011}^2 + \psi_{0110}^2 + \psi_{0111}^2$, appartient à l'espace $J_{0,2}^{W(A_2),f}$, et vérifie :

$$[2f_2]_{q^0} = 6 + P_1 + P_2 = [\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0}.$$

Ceci permet d'affirmer que la forme $2f_2$ coïncide avec la forme $\psi_{0,2}^{(1)}$, puisque l'espace $J_{0,2}^{W(A_2),f}(q)$ est réduit à $\{0\}$. (Voir la remarque 5.1.1.)
Toujours d'après ce corollaire, la forme $4f_2$ est à coefficients de Fourier entiers, il reste à démontrer que c'est aussi le cas de la forme $2f_2$.
En reprenant les notations introduites lors de la définition de f_2, on peut écrire la fonction $\psi_{0,2}^{(1)} = 2f_2$ sous la forme $\psi_{0,2}^{(1)} = s_1 + s_2 + s_3$, avec :
$s_1 = 2\Big(\xi_{00}^2(\tau,z_1')\xi_{01}^2(\tau,z_2')\xi_{10}^2(\tau,z_3') + \xi_{01}^2(\tau,z_1')\xi_{00}^2(\tau,z_2')\xi_{10}^2(\tau,z_3')\Big)$,
$s_2 = 2\Big(\xi_{10}^2(\tau,z_1')\xi_{00}^2(\tau,z_2')\xi_{01}^2(\tau,z_3') + \xi_{10}^2(\tau,z_1')\xi_{01}^2(\tau,z_2')\xi_{00}^2(\tau,z_3')\Big)$,
$s_3 = 2\Big(\xi_{00}^2(\tau,z_1')\xi_{10}^2(\tau,z_2')\xi_{01}^2(\tau,z_3') + \xi_{01}^2(\tau,z_1')\xi_{10}^2(\tau,z_2')\xi_{00}^2(\tau,z_3')\Big)$.

Etudions le terme s_1.

On emploiera ici la notation : $\chi_j := e^{2i\pi z_j'}$. On a donc : $\chi_1 = \zeta_1$, $\chi_2 = \zeta_1^{-1}\zeta_2$, $\chi_3 = \zeta_2^{-1}$.
On utilisera ici les expressions données au paragraphe 1.1.3.

$s_1 = 2\xi_{10}^2(\tau,z_3')\Big(\xi_{00}^2(\tau,z_1')\xi_{01}^2(\tau,z_2') + \xi_{01}^2(\tau,z_1')\xi_{00}^2(\tau,z_2')\Big)$

$$= 2^{\frac{2+\chi_3+\chi_3^{-1}}{4}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+q^n\chi_3\right)^2\left(1+q^n\chi_3^{-1}\right)^2}{\left(1+q^n\right)^4}$$
$$\times\Bigg[\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}}{1+q^{\frac{2n-1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1}{1+q^{\frac{2n+1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2}{1-q^{\frac{2n+1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}}{1-q^{\frac{2n-1}{2}}}\Big)^2$$
$$+\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1}{1-q^{\frac{2n+1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}}{1-q^{\frac{2n-1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}}{1+q^{\frac{2n-1}{2}}}\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2}{1+q^{\frac{2n+1}{2}}}\Big)^2\Bigg]$$

$$= \frac{2+\chi_3+\chi_3^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+q^n\chi_3\right)^2\left(1+q^n\chi_3^{-1}\right)^2}{\left(1+q^n\right)^4}$$
$$\times\Bigg[\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2$$
$$+\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2\Bigg]$$
$$\times\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\Big)^{-2}\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\Big)^{-2}\prod_{n=0}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\Big)^{-2}\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}\Big)^{-2}$$

Montrons que l'expression entre crochets, qui est à coefficients entiers, est en fait à coefficients dans $2\mathbb{Z}$, ainsi, d'après la forme des autres termes, s_1 sera à coefficients entiers.

On pose, pour n entier strictement positif :

$$P_n := \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2$$

et

$$Q_n := \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2$$

L'expression entre crochets s'écrit alors :

$$\Big[\;\Big] = \Big[\Big(1+q^{\frac12}\chi_1\Big)^2\Big(1-q^{\frac12}\chi_2\Big)^2P_n+\Big(1-q^{\frac12}\chi_1\Big)^2\Big(1+q^{\frac12}\chi_2\Big)^2Q_n\Big].$$

Considérons maintenant ces expressions modulo 2, ou, plus précisément les coefficients des termes du type $q^r\chi_j$ modulo 2. On peut écrire :

$$P_n \equiv \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2 \; mod\; 2$$
$$Q_n \equiv \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_1\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_1^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n-1}{2}}\chi_2^{-1}\Big)^2\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+q^{\frac{2n+1}{2}}\chi_2\Big)^2 \; mod\; 2$$
$$\equiv P_n \; mod\; 2.$$

L'expression entre crochets devient alors, modulo 2 :

$$\Big[\;\Big] \equiv \Big[\Big(1+q^{\frac12}\chi_1\Big)^2\Big(1+q^{\frac12}\chi_2\Big)^2P_n+\Big(1+q^{\frac12}\chi_1\Big)^2\Big(1+q^{\frac12}\chi_2\Big)^2P_n\Big] \equiv 0 \; mod\; 2$$

Ainsi, la fonction s_1 est à coefficients entiers, et, en remarquant que s_2 et s_3 sont obtenues à partir de s_1 par permutation des variables z'_j, on en déduit que c'est aussi le cas de s_2 et s_3, et donc finalement de la forme $\psi_{0,2}^{(1)} = s_1 + s_2 + s_3$.

(2) Cas de la forme $\psi_{0,2}^{(11)}$.
Par définition :

$$\psi_{0,2}^{(1)} := \frac{1}{48}((24a_{0,1})^2 - E_4(2a_{-2,1})^2)$$

$$\psi_{0,2}^{(11)} := \frac{1}{16}((24a_{0,1})^2 + 3E_4(2a_{-2,1})^2 - 4E_6(a_{-3,1})^2).$$

Posons :
$F := (24a_{0,1})^2 + 3E_4(2a_{-2,1})^2 - 4E_6(a_{-3,1})^2$
et $G := (24a_{0,1})^2 - E_4(2a_{-2,1})^2$.

Il s'agit donc ici de démontrer que tous les coefficients de Fourier de F sont dans $16\,\mathbb{Z}$, autrement dit, que F est congru à 0 modulo 16.

D'une part, on a (voir la notation 2.4.2) :
$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n) q^n, \quad E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n) q^n,$
donc :
$G \equiv (24a_{0,1})^2 - (2a_{-2,1})^2 \; mod \; 48,$
et $F \equiv (24a_{0,1})^2 + 3(2a_{-2,1})^2 - 4(a_{-3,1})^2 \; mod \; 16.$

D'autre part, on vient de démontrer que $\psi_{0,2}^{(1)}$ est à coefficients de Fourier entiers, donc G est congru à 0 modulo 48, d'où :
$(24a_{0,1})^2 - (2a_{-2,1})^2 \equiv 0 \; mod \; 16,$
et par conséquent :
$F \equiv 4(2a_{-2,1})^2 - 4(a_{-3,1})^2 \; mod \; 16.$

Considérons maintenant les coefficients des fonctions connues $2a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$. D'après les écritures données à la proposition 2.5.4, on a :

$$2a_{-2,1}(\tau,z) - a_{-3,1}(\tau,z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)^{-9}$$

$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}} 2(n_1+n_2+n_3+1) e^{\pi i (n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))} \zeta_1^{n_1-n_2} \zeta_2^{n_2-n_3},$$

ce qui permet d'affirmer que $(2a_{-2,1}) - a_{-3,1}$ est à coefficients de Fourier dans $2\mathbb{Z}$, ou encore que $(2a_{-2,1})$ est congru à $a_{-3,1}$ modulo 2.
On peut donc en déduire que $(2a_{-2,1})^2$ est congru à $(a_{-3,1})^2$ modulo 4, et finalement que F est congru à 0 modulo 16, ce qu'il fallait obtenir.
Ainsi, la forme $\psi_{0,2}^{(11)}$ est à coefficients de Fourier entiers.

(3) Cas de la forme $\psi_{0,2}^{(2)}$.
Par définition : $\psi_{0,2}^{(2)} = (\psi_{0,1}^{(1)})^2 - 36\psi_{0,2}^{(1)} - 2\psi_{0,2}^{(11)}$,
donc, d'après les résultats précédents, la forme $\psi_{0,2}^{(2)}$ est également à coefficients de Fourier entiers.

Théorème 5.3.2. *Structure de* $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
Le $\mathbb{Z}$*-module* $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang* 3 *admettant pour* $\mathbb{Z}$*-base le système* $\{\ \psi_{0,2}^{(1)},\ \psi_{0,2}^{(11)},\ \psi_{0,2}^{(2)}\ \}$.

Preuve.
D'après le théorème précédent, les formes $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$ et $\psi_{0,2}^{(2)}$ appartiennent à $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Soit une forme φ appartenant à $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
D'après la proposition 5.1.1, il existe 3 entiers b, c, d tels que :

$$[\varphi]_{q^0} = b(6 + P_1 + P_2) + c(27 + P_1P_2) + d(54 + P_1^2 + P_2^2),$$

ou encore, d'après la définition de $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$et $\psi_{0,2}^{(2)}$:

$$[\varphi]_{q^0} = b[\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0} + c[\psi_{0,2}^{(11)}]_{q^0} + d[\psi_{0,2}^{(2)}]_{q^0},$$

ce qui permet d'écrire, puisque $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ est réduit à $\{0\}$, d'après la remarque 5.1.1 :

$$\varphi = b\psi_{0,2}^{(1)} + c\psi_{0,2}^{(11)} + d\psi_{0,2}^{(2)}.$$

Par ailleurs, les trois formes $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$ et $\psi_{0,2}^{(2)}$, sont libres sur $\mathbb{Z}$. (On obtient ce résultat en utilisant la forme de leur coefficient $[\ ]_{q^0}$ et le fait que les polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants P_1 et P_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$.)
On en déduit finalement que $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 3 admettant le système $\{\psi_{0,2}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(11)}, \psi_{0,2}^{(2)}\}$ pour $\mathbb{Z}$-base.

Remarque 5.3.1. La forme de $\psi_{0,2}^{(2)}$ permet d'affirmer que le système $\{\psi_{0,2}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(11)}, (\psi_{0,1}^{(1)})^2\}$ constitue également une base du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,2}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

5.4 $\mathbb{Z}$-module $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$

Proposition-Définition 5.4.1. *On pose :*

$$\psi_{0,3}^{(1)} := \frac{1}{2^6 3^3}\Big((24a_{0,1})^3 - 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 2E_6(2a_{-2,1})^3 \Big)$$

$$\psi_{0,3}^{(11)} := \frac{1}{2^6 3^2}\Big((24a_{0,1})^3 + 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6E_6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 + 4E_6(2a_{-2,1})^3 -6E_8(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 \Big)$$

$$\psi_{0,3}^{(2)} := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} - 24\psi_{0,3}^{(1)} - 2\psi_{0,3}^{(11)}$$

$$\psi_{0,3}^{(12)} := -27\psi_{0,3}^{(1)} + \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} - 18\psi_{0,3}^{(11)}$$

$$\psi_{0,3}^{(3)} := -54\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} + 3^4 5\psi_{0,3}^{(1)} - 3\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + 54\psi_{0,3}^{(11)} + (\psi_{0,1}^{(1)})^3.$$

Ces formes appartiennent à $J_{0,3}^{W(A_2),f}$ et vérifient :
$[\psi_{0,3}^{(1)}]_{q^0} = 2 + P_1 + P_2$
$[\psi_{0,3}^{(11)}]_{q^0} = 15 + P_1P_2$
$[\psi_{0,3}^{(2)}]_{q^0} = 30 + P_1^2 + P_2^2$
$[\psi_{0,3}^{(3)}]_{q^0} = 162 + P_1^3 + P_2^3$
$[\psi_{0,3}^{(12)}]_{q^0} = 162 + P_1^2P_2 + P_1P_2^2.$

Preuve.
Voir les propositions-définitions 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 5.2.1, 5.3.1 et le corollaire 2.5.2.

Théorème 5.4.1.
Les formes $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(2)}$, $\psi_{0,3}^{(3)}$, $\psi_{0,3}^{(12)}$ sont à coefficients de Fourier entiers.

Preuve.
(1) Cas de la forme $\psi_{0,3}^{(1)}$.
Comme $\psi_{0,2}^{(1)}$, la forme $\psi_{0,3}^{(1)}$ admet une autre expression qui va permettre de vérifier que ses coefficients de Fourier sont entiers.
Considérons en effet la forme de Jacobi suivante :

$$f_3(\tau,z) := \varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}(\tau,z_1')\varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}(\tau,z_2')\varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}(\tau,z_3'),$$

où la fonction $\varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}$ est la forme de Jacobi classique à une variable, de poids 0, d'indice $\frac{3}{2}$, dont les coefficients de Fourier sont entiers, définie par $\varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}(\tau,z) := \frac{\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}$, et qui vérifie $[\varphi_{0,\frac{3}{2}}^{(A_1)}]_{q^0} = e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}$. (Voir le paragraphe 1.1.3.)

La forme f_3 ainsi construite (voir la proposition 2.5.1) est une forme de Jacobi faible, $W(A_2)$-invariante, de poids 0, d'indice 3, dont les coefficients de Fourier sont entiers.
On a de plus :
$[f_3]_{q^0} = (e^{\pi i z_1'} + e^{-\pi i z_1'})(e^{\pi i z_2'} + e^{-\pi i z_2'})(e^{\pi i z_3'} + e^{-\pi i z_3'})$

$\quad = (\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_1^{-\frac{1}{2}})(\zeta_1^{-\frac{1}{2}}\zeta_2^{\frac{1}{2}} + \zeta_1^{\frac{1}{2}}\zeta_2^{-\frac{1}{2}})(\zeta_2^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}})$

$\quad = 2 + P_1 + P_2 \;=\; [\psi_{0,3}^{(1)}]_{q^0},$

ce qui permet de dire que f_3 et $\psi_{0,3}^{(1)}$ coïncident, d'après la remarque 5.1.1.
Ainsi, finalement, la forme $\psi_{0,3}^{(1)}$ est à coefficients de Fourier entiers. (On aurait également pu utiliser la forme Φ_3 définie à la proposition 3.3.1 : $\Phi_3 = 8\xi'_{00}\xi'_{01}\xi'_{10} = \psi_{0,3}^{(1)}$.)

(2) Cas de la forme $\psi_{0,3}^{(11)}$.
Par définition :
$\psi_{0,3}^{(11)} = \frac{1}{2^6 3^2}\Big((24a_{0,1})^3 + 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6E_6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 + 4E_6(2a_{-2,1})^3$
$-6E_8(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 \Big)$. On pose :
$H := (24a_{0,1})^3 + 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6E_6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 + 4E_6(2a_{-2,1})^3 - 6E_8(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2$.

Or (voir la notation 2.4.2) $E_8(\tau) = 1 + 480\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_7(n)q^n$, d'où :
$H \equiv (24a_{0,1})^3 + 3(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3$
$-6(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 \ mod\ 9 \times 16$.

Etudions H modulo 9×8.
Pour cela on utilisera les propriétés des fonctions $24a_{0,1}$, $2a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ suivantes :
(i) $(24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}) \equiv 0 \ mod\ 3$
(ii) $(24a_{0,1})^3 + (2a_{-2,1})^3 \equiv 0 \ mod\ 9$
(iii) $(24a_{0,1})^2 - (2a_{-2,1})^2 \equiv 0 \ mod\ 16$
(iv) $(24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}) \equiv 0 \ mod\ 4$.

Démontrons tout d'abord ces propriétés.
Les propriétés (i) et (iv) sont des conséquences directes de la définition des formes $a_{-2,1}$ et $a_{0,1}$.
On rappelle les relations suivantes entre leurs coefficients de Fourier :
$a_{0,1}(\tau,z) = \sum_{n\geq 0,\ l\in\widetilde{A_2}} c(n,l)q^n e^{2\pi i<l,z>}$, avec

$$\begin{aligned} c(0,l) &= (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} < l,l >)a(0,l) , \\ c(n,l) &= \tfrac{-1}{4}(\ (2 < l,l > -4n-1)a(n,l) + 24\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(j)a(n-j,l)\ ) \text{ , si } n \geq 1 \end{aligned}$$

où $a_{-2,1}(\tau,z) = \sum_{n\geq 0, l\in\widetilde{A_2}} a(n,l)q^n e^{2\pi i<l,z>}$, car $a_{0,1} = -\frac{1}{4\pi^2}\Delta_{-2,1}(a_{-2,1})$.

Les coefficients de Fourier des formes $(2a_{-2,1})$ et $(24a_{0,1})$ (qui sont tous entiers), notés respectivement $a'(n,l) = 2a(n,l)$ et $c'(n,l) = 24c(n,l)$ vérifient donc :

$a'(0,l) + c'(0,l) = (3 - 6 < l,l >)a'(0,l) + a'(0,l) \ = \ (4 - 6 < l,l >)a'(0,l)$,

$a'(n,l) + c'(n,l) = (-6 < l,l > +12n + 4)a'(n,l) - 3 \times 24\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(j)a'(n-j,l)$, pour n non nul.
Or, tout l de $\widetilde{A_2}$ s'écrit $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$, avec l_1 et l_2 dans $\mathbb{Z}$, et $< l,l >= \frac{2}{3}(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)$ appartient à $\frac{2}{3}\mathbb{Z}$, donc :

$$a'(0,l) + c'(0,l) \equiv 0 \ mod\ 4$$

$$a'(n,l) + c'(n,l) \equiv 0 \ mod\ 4, \text{ pour } n \text{ non nul.}$$

La propriété (iv) est donc établie.

En utilisant encore ces expressions, avec $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$, on obtient aussi :
$c'(0,l) \equiv 2(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)a'(0,l)$ mod 3 $(\star)$
$c'(n,l) \equiv 2(l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2)a'(n,l)$ mod 3 $(\star)$, pour n non nul.

On vérifie que si $l_1 \neq l_2$ mod 3, alors $l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2$ est congru à 1 modulo 3, ce qui permet de déduire des lignes précédentes que, dans ce cas, on a : $a'(n,l)+c'(n,l) \equiv 0$ mod 3.

Etudions le coefficient $a'(n,l)$ dans le cas où l_1 et l_2 sont congrus modulo 3.
On rappelle (voir la proposition 2.5.4) que la forme $2a_{-2,1}$ s'écrit :

$$2a_{-2,1}(\tau,z_1,z_2) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{-9}$$
$$\times \sum_{n_1,n_2,n_3\in\mathbb{Z}} (2n_1+2n_2+2n_3+3)e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)}q^{\frac{1}{2}(n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1))}\zeta_1^{n_1-n_2}\zeta_2^{n_2-n_3}$$
$$= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{-9} \quad \times \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ l \in \widetilde{A_2}}} b(m,l)q^m e^{2\pi i<z,l>},$$

avec, pour $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$:

$$b(m,l) = \sum_{\begin{cases} n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z} \\ n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1) \\ +n_3(n_3+1) = 2m \\ n_1-n_2 = l_1,\ n_2-n_3 = l_2 \end{cases}} (2n_1+2n_2+2n_3+3)e^{\pi i(n_1+n_2+n_3)}.$$

Ainsi, si on note : $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{-9} := \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j q^j$, on a : $a'(n,l) = \sum_{\substack{(j,m) \in \mathbb{N}^2 \\ j+m=n}} u_j b(m,l)$.

Or, si $l_1 \equiv l_2$ mod 3, on a, pour tout (n_1,n_2,n_3) de $\mathbb{Z}^3$ tel que $n_1 - n_2 = l_1$, $n_2 - n_3 = l_2$:

$$\begin{aligned} 2n_1+2n_2+2n_3+3 &= 2n_2+2l_1+2n_2+2n_2-2l_2+3 \\ &= 6n_2+2(l_1-l_2)+3 \\ &\equiv 0 \ mod\ 3, \end{aligned}$$

et par conséquent, d'après l'écriture des $b(m,l)$, et des coefficients $a'(n,l)$, on a donc aussi, si $l_1 \equiv l_2$ mod 3, $a'(n,l) \equiv 0$ mod 3.
On déduit de ce résultat et de la relation $(\star)$ que $c'(n,l)$ est également congru à 0 modulo 3, et finalement que $c'(n,l) + a'(n,l)$ est aussi congru à 0 modulo 3, même dans le cas où l_1 et l_2 sont congrus modulo 3, ce qui établit la propriété (i).

La propriété (ii) est une conséquence de la propriété (i).
En effet, d'après la propriété (i), on a : $(24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}) \equiv 0$ mod 3. D'où :

$$\begin{aligned} (24a_{0,1})^3 + (2a_{-2,1})^3 &= ((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))((24a_{0,1})^2 - (24a_{0,1})(2a_{-2,1}) + (2a_{-2,1})^2) \\ &\equiv ((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))((24a_{0,1})^2 + 2(24a_{0,1})(2a_{-2,1}) + (2a_{-2,1})^2) \ mod\ 9 \\ &\equiv ((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))^2 \ mod\ 9 \\ &\equiv ((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))^3 \ mod\ 9 \\ &\equiv 0 \ mod\ 9. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer la propriété (iii) : $(24a_{0,1})^2 - (2a_{-2,1})^2 \equiv 0$ mod 16.
Cette propriété est une conséquence du fait que la forme $\psi_{0,2}^{(1)} = \frac{1}{48}((24a_{0,1})^2 - E_4(2a_{-2,1})^2)$ est à coefficients de Fourier entiers, puisque $E_4 \equiv 1$ mod 16.

On rappelle l'égalité modulo 9×16 :
$H \equiv (24a_{0,1})^3 + 3(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3 - 6(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2$.

On a alors, en utilisant les propriétés (i) et (ii) :
$H \equiv -(2a_{-2,1})^3 - 3(2a_{-2,1})(2a_{-2,1})^2 + 6(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3 - 6(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 \; mod\, 9$
d'où : $H \equiv 0 \; mod\; 9$.

En utilisant la propriété (iii), on obtient :
$H \equiv (24a_{0,1})((24a_{0,1})^2 + 3(2a_{-2,1})^2) - 6((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3 \; mod\; 16$
$H \equiv (24a_{0,1})((2a_{-2,1})^2 + 3(2a_{-2,1})^2) - 6((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3 \; mod\; 16$
$H \equiv 4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^3 \; mod\; 16$
$H \equiv ((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))(-6(a_{-3,1})^2 + 4(2a_{-2,1})^2) \; mod\; 16$
$H \equiv 2((24a_{0,1}) + (2a_{-2,1}))(-3(a_{-3,1})^2 + 2(2a_{-2,1})^2) \; mod\; 16$,
et, en utilisant la propriété (iv), on obtient : $H \equiv 0 \; mod\; 8$.

On a ainsi démontré que la forme $8\psi_{0,3}^{(11)} = \frac{1}{8\times 9}H$ est à coefficients de Fourier entiers.

On va maintenant utiliser une seconde écriture de cette forme pour démontrer qu'un autre de ses multiples est à coefficients de Fourier entiers.
On considère pour cela l'application de caractéristiques d'ordre 3 à la forme dénominateur. La forme $\Phi_{0,3}$, construite à la proposition 3.3.12, appartient à $J_{0,3}^{W(A_2),f}$ et vérifie :

$$[\Phi_{0,3}]_{q^0} = 3(15 + P_1P_2),$$

ce qui permet d'affirmer que cette forme coïncide avec la fonction $3\psi_{0,3}^{(11)}$, puisque l'espace $J_{0,3}^{W(A_2),f}$ est réduit à $\{0\}$.

On va maintenant montrer que la forme $\Phi_{0,3}$ est à coefficients de Fourier entiers.
Par définition, on a :

$$\Phi_{0,3} := \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{F}_0} f^{[\alpha,\beta]},$$

avec

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{S}_{10}\times\mathcal{S}_{10} \;\cup\; \mathcal{S}_{10}\times\{0,\lambda_1,\lambda_2\} \;\cup\; \{0,\lambda_1,\lambda_2\}\times\mathcal{S}_{10},$$

où $\mathcal{S}_{10} = \{\; u_1 = \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2),\; u_2 = \frac{1}{3}(2\lambda_2-\lambda_1),\; u_3 = \frac{1}{3}(2\lambda_1-\lambda_2),\; u_4 = \frac{1}{3}(\lambda_1-2\lambda_2),\; u_5 = \frac{1}{3}(\lambda_2-2\lambda_1),\; u_6 = \frac{1}{3}(-\lambda_1-\lambda_2)\;\}$,

et $f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) = \frac{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,z)}{\mathcal{A}^{[\alpha,\beta]}(\tau,0)}$.

On peut rappeler (voir la preuve du lemme 3.3.9) l'écriture suivante de $f^{[\alpha,\beta]}$:
$f^{[\alpha,\beta]}(\tau,z) = e^{6\pi i<\beta,z>}e^{-2i\pi<\rho',z>}$

$$\times \prod_{\gamma\in\Delta^+}\Big[\Big(\frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-q^ne^{2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-q^ne^{2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-q^ne^{-2i\pi<\gamma,z+\alpha+\tau\beta>}}{1-q^ne^{-2i\pi<\gamma,\alpha+\tau\beta>}}\Big)\Big],$$

avec $\rho' = \alpha_1+\alpha_2$, et $\Delta^+ = \{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_1+\alpha_2\}$.
Par la suite on utilisera les résultats suivants :

$e^{2i\pi<\gamma,\beta>}$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
α_1	j	j^2	j^2	j	j	j^2	1	1	1
α_2	j	j^2	j^2	j	j	j^2	1	1	1
$\alpha_1+\alpha_2$	j^2	j	j	j^2	j^2	j	1	1	1

$e^{2i\pi<\gamma,\beta>\tau}$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
α_1	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	$q^{\frac{2}{3}}$	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{2}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	1	q	1
α_2	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{\frac{2}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{2}{3}}$	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	1	1	q
$\alpha_1+\alpha_2$	$q^{\frac{2}{3}}$	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{1}{3}}$	$q^{-\frac{2}{3}}$	1	q	q

β	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	0	λ_1	λ_2
$e^{6\pi i<\beta,z>}$	$\zeta_1\zeta_2$	$\zeta_1^{-1}\zeta_2^2$	$\zeta_1^2\zeta_2^{-1}$	$\zeta_1\zeta_2^{-2}$	$\zeta_1^{-2}\zeta_2$	$\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}$	1	ζ_1^3	ζ_2^3

On peut alors écrire $\Phi_{0,3}$ sous la forme :

$$\Phi_{0,3} = \sum_{\alpha\in\{0,\lambda_1,\lambda_2\}} \mathcal{U}_\alpha + \sum_{\alpha\in\{u_1,u_4,u_5\}} \mathcal{V}_\alpha + \sum_{\alpha\in\{u_2,u_3,u_6\}} \mathcal{W}_\alpha,$$

avec :

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}} e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$$
$$\times \prod_{\gamma\in\Delta^+} \Big[\Big(\frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-q^n e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-q^n e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-q^n e^{-2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-q^n e^{-2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big],$$

$$\mathcal{V}_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}\cup\{0,\lambda_1,\lambda_2\}} e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$$
$$\times \Bigg[\prod_{\gamma\in\{\alpha_1,\alpha_2\}} \Big[\Big(\frac{1-je^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-je^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-jq^n e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big]\Bigg]$$
$$\times\Big[\Big(\frac{1-j^2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-j^2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-j^2q^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-jq^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big],$$

$$\mathcal{W}_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}\cup\{0,\lambda_1,\lambda_2\}} e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$$
$$\times \Bigg[\prod_{\gamma\in\{\alpha_1,\alpha_2\}} \Big[\Big(\frac{1-j^2e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-j^2e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-j^2q^n e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-jq^n e^{-2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{-2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big]\Bigg]$$
$$\times\Big[\Big(\frac{1-je^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-je^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-jq^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big].$$

On peut remarquer que $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{V}_\alpha$, $\mathcal{W}_\alpha$ ne dépendent pas de α, on les notera respectivement $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, et on a donc :

$$\Phi_{0,3} = 3\mathcal{U} + 3\mathcal{V} + 3\mathcal{W}.$$

Etudions le terme $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} = \sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}} e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$$
$$\times \prod_{\gamma\in\Delta^+} \Big[\Big(\frac{1-e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-q^n e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-q^n e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-q^n e^{-2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-q^n e^{-2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big].$$

Le terme de cette somme obtenu avec $\beta = u_1$ est :

$$\Big[\prod_{\gamma \in \{\alpha_1,\alpha_2\}} \Big[\Big(\frac{1-q^{\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\gamma,z>}}{1-q^{\frac{1}{3}}}\Big) \times \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-q^{n+\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\gamma,z>}}{1-q^{n+\frac{1}{3}}}\Big)\Big(\frac{1-q^{n-\frac{1}{3}}e^{-2i\pi<\gamma,z>}}{1-q^{n-\frac{1}{3}}}\Big)\Big] \Big]$$
$$\times \Big[\Big(\frac{1-q^{\frac{2}{3}}e^{2i\pi<\gamma,z>}}{1-q^{\frac{2}{3}}}\Big) \times \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-q^{n+\frac{2}{3}}e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-q^{n+\frac{2}{3}}}\Big)\Big(\frac{1-q^{n-\frac{2}{3}}e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-q^{n-\frac{2}{3}}}\Big)\Big].$$

En considérant la forme des termes qui apparaissent dans ces produits, on peut constater que le développement de Fourier de ce terme sera à coefficients entiers. Il en sera de même pour les autres termes de la somme $\mathcal{U}$, puisque pour tout β appartenant à $\mathcal{S}_{10}$ et pour tout γ de Δ_+, le terme $e^{2\pi i<\gamma,\beta\tau>}$ donne une puissance non entière de q.
On en déduit que $\mathcal{U}$ a un développement de Fourier à coefficients entiers.

Etudions le terme $\mathcal{V}$.

$$\mathcal{V} = \sum_{\beta \in \mathcal{S}_{10} \cup \{0,\lambda_1,\lambda_2\}} e^{6\pi i<\beta,z>} e^{-2\pi i<\alpha_1+\alpha_2,z>}$$
$$\times \Big[\prod_{\gamma \in \{\alpha_1,\alpha_2\}} \Big[\Big(\frac{1-je^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-je^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-jq^n e^{2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\gamma,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\gamma,\tau\beta>}}\Big)\Big] \Big]$$
$$\times\Big[\Big(\frac{1-j^2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-j^2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-j^2q^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-j^2q^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big(\frac{1-jq^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z+\tau\beta>}}{1-jq^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,\tau\beta>}}\Big)\Big].$$

Ecrivons par exemple le terme qui apparaît dans cette somme pour $\beta = 0$. On obtient :

$$\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1} \times \Big[\Big(\frac{1-je^{2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-j}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-jq^n e^{2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-jq^n}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-j^2q^n}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\Big(\frac{1-je^{2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-j}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-jq^n e^{2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-jq^n}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^n e^{-2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-j^2q^n}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\Big(\frac{1-j^2e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-j^2}\Big) \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1-j^2q^n e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-j^2q^n}\Big)\Big(\frac{1-jq^n e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-jq^n}\Big)\Big].$$

En regardant la forme de ces produits, on constate que ce terme peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1-j^2}{9} \times [\ r_0(q,\zeta_1,\zeta_2) + js_0(q,\zeta_1,\zeta_2) + j^2t_0(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ],$$

avec r_0, s_0, t_0 appartenant à $\mathbb{Z}[\ q,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1^{-1},\zeta_2^{-1}\ ]$.

Un calcul analogue montre que les termes qui apparaissent dans la somme $\mathcal{V}$ pour $\beta = \lambda_1$ et $\beta = \lambda_2$ s'écriront respectivement :

$$\frac{1-j^2}{9} \times [\ r_{\lambda_1}(q,\zeta_1,\zeta_2) + js_{\lambda_1}(q,\zeta_1,\zeta_2) + j^2t_{\lambda_1}(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ],$$

et

$$\frac{1-j^2}{9} \times [\ r_{\lambda_2}(q,\zeta_1,\zeta_2) + js_{\lambda_2}(q,\zeta_1,\zeta_2) + j^2t_{\lambda_2}(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ],$$

avec r_{λ_1}, s_{λ_1}, t_{λ_1}, r_{λ_2}, s_{λ_2}, t_{λ_2} appartenant à $\mathbb{Z}\ [\ q,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1^{-1},\zeta_2^{-1}\ ]$.

Ecrivons maintenant le terme qui apparaît dans la somme pour $\beta = u_1$. On obtient :

$$\Big[\Big(\tfrac{1-jq^{\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-jq^{\frac{1}{3}}}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-jq^{n+\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-jq^{n+\frac{1}{3}}}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^{n-\frac{1}{3}}e^{-2i\pi<\alpha_1,z>}}{1-j^2q^{n-\frac{1}{3}}}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\Big(\tfrac{1-jq^{\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-jq^{\frac{1}{3}}}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-jq^{n+\frac{1}{3}}e^{2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-jq^{n+\frac{1}{3}}}\Big)\Big(\frac{1-j^2q^{n-\frac{1}{3}}e^{-2i\pi<\alpha_2,z>}}{1-j^2q^{n-\frac{1}{3}}}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\Big(\tfrac{1-j^2q^{\frac{2}{3}}e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-j^2q^{\frac{2}{3}}}\Big)\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-j^2q^{n+\frac{2}{3}}e^{2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-j^2q^{n+\frac{2}{3}}}\Big)\Big(\frac{1-jq^{n-\frac{2}{3}}e^{-2i\pi<\alpha_1+\alpha_2,z>}}{1-jq^{n-\frac{2}{3}}}\Big)\Big].$$

En regardant la forme des produits qui apparaissent, on constate que ce terme peut se mettre sous la forme suivante :

$$r_{u_1}(q,\zeta_1,\zeta_2)+js_{u_1}(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2t_{u_1}(q,\zeta_1,\zeta_2),$$

avec r_{u_1}, s_{u_1}, t_{u_1} appartenant à $\mathbb{Z}[\ q,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1^{-1},\zeta_2^{-1}\ ]$.

D'une façon générale, le terme de la somme $\mathcal{V}$ qui apparaît pour β appartenant à $\mathcal{S}_{10}$ s'écrira :

$$r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+js_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2t_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2),$$

avec r_β, s_β, t_β appartenant à $\mathbb{Z}[\ q,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1^{-1},\zeta_2^{-1}\ ]$.

On peut remarquer par ailleurs que la somme $\mathcal{W}$ s'obtient à partir de la somme $\mathcal{V}$ en remplaçant le nombre complexe j par j^2.
Le terme de la somme $\mathcal{W}$ qui apparaît pour β appartenant à $\{0,\ \lambda_1,\ \lambda_2\}$ s'écrira donc :

$$\frac{1-j}{9}\times[\ r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+jt_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ],$$

et, de même, le terme de la somme $\mathcal{W}$ qui apparaît pour β appartenant à $\mathcal{S}_{10}$ s'écrira :

$$r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+jt_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2).$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}+\mathcal{W}=&\sum_{\beta\in\{0,\ \lambda_1,\ \lambda_2\}}\Big(\frac{1-j^2}{9}\times[\ r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+js_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2t_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ]\\&+\tfrac{1-j}{9}\times[\ r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+jt_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ]\Big)\ +\sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}}\Big([\ r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\\&+js_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2t_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ]+[\ r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+j^2s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+jt_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\ ]\Big)\\&=\tfrac{1}{3}\sum_{\beta\in\{0,\ \lambda_1,\ \lambda_2\}}\Big(r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)-s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\Big)+\sum_{\beta\in\mathcal{S}_{10}}\Big(-t_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)-s_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)+2r_\beta(q,\zeta_1,\zeta_2)\Big).\end{aligned}$$

On en déduit que les coefficients de Fourier qui apparaissent dans l'expression $3(\mathcal{V}+\mathcal{W})$ sont tous entiers, et, puisqu'on a vu que c'est également le cas de ceux de $\mathcal{U}$, on peut finalement conclure que la forme $3\psi_{0,3}^{(11)}=\Phi_{0,3}=3\mathcal{U}+3\mathcal{V}+3\mathcal{W}$ est à coefficients de Fourier entiers.

Ainsi, les formes $3\psi_{0,3}^{(11)}$ et $8\psi_{0,3}^{(11)}$ sont à coefficients de Fourier entiers, ce qui permet d'affirmer que la forme $\psi_{0,3}^{(11)}=2\times 8\psi_{0,3}^{(11)}-5\times 3\psi_{0,3}^{(11)}$ appartient bien elle aussi à $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

(3) Cas des formes $\psi_{0,3}^{(2)}$, $\psi_{0,3}^{(12)}$, $\psi_{0,3}^{(3)}$.
On rappelle qu'on a :

$$\psi_{0,3}^{(2)}:=\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}-24\psi_{0,3}^{(1)}-2\psi_{0,3}^{(11)}$$

$$\psi_{0,3}^{(12)} := -27\psi_{0,3}^{(1)} + \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} - 18\psi_{0,3}^{(11)}$$
$$\psi_{0,3}^{(3)} := -54\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} + 3^4 5\psi_{0,3}^{(1)} - 3\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + 54\psi_{0,3}^{(11)} + (\psi_{0,1}^{(1)})^3.$$

Donc, d'après les résultats précédents, ces trois formes sont également à coefficients de Fourier entiers.

Théorème 5.4.2. *Structure de* $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
Le $\mathbb{Z}$*-module* $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang* 5 *admettant pour* $\mathbb{Z}$*-base le système* $\{\ \psi_{0,3}^{(1)}, \psi_{0,3}^{(11)}, \psi_{0,3}^{(2)}, \psi_{0,3}^{(12)}, \psi_{0,3}^{(3)}\ \}$.

Preuve.
D'après le théorème précédent, les formes $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(2)}$, $\psi_{0,3}^{(12)}$, et $\psi_{0,3}^{(3)}$ appartiennent à $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Soit une forme φ appartenant à $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.
D'après la proposition 5.1.1, il existe 5 entiers b, c, d, e, f tels que :
$[\varphi]_{q^0} = b(2 + P_1 + P_2) + c(15 + P_1P_2) + d(30 + P_1^2 + P_2^2) + e(162 + P_1^3 + P_2^3) + f(162 + P_1^2P_2 + P_1P_2^2)$,
ou encore :

$$[\varphi]_{q^0} = b[\psi_{0,3}^{(1)}]_{q^0} + c[\psi_{0,3}^{(11)}]_{q^0} + d[\psi_{0,3}^{(2)}]_{q^0} + e[\psi_{0,3}^{(3)}]_{q^0} + f[\psi_{0,3}^{(12)}]_{q^0},$$

donc la forme φ s'écrit :

$$\varphi = b\psi_{0,3}^{(1)} + c\psi_{0,3}^{(11)} + d\psi_{0,3}^{(2)} + e\psi_{0,3}^{(3)} + f\psi_{0,3}^{(12)},$$

puisque l'espace $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$ est réduit à $\{0\}$.

Par ailleurs, les cinq formes $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(2)}$, $\psi_{0,3}^{(12)}$ et $\psi_{0,3}^{(3)}$ sont libres sur $\mathbb{Z}$. (Comme pour l'indice 2, on obtient ce résultat en utilisant la forme de leur coefficient $[\ ]_{q^0}$ et le fait que les polynômes exponentiels $W(A_2)$-invariants P_1 et P_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$.)

On en déduit finalement que $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 5 admettant le système $\{\psi_{0,3}^{(1)}, \psi_{0,3}^{(11)}, \psi_{0,3}^{(2)}, \psi_{0,3}^{(12)}, \psi_{0,3}^{(3)}\}$ pour $\mathbb{Z}$-base.

Remarque 5.4.1. La forme de $\psi_{0,3}^{(2)}$, $\psi_{0,3}^{(12)}$ et $\psi_{0,3}^{(3)}$ permet d'affirmer que le système $\{\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, $\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}$, $(\psi_{0,1}^{(1)})^3\}$ constitue également une base du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,3}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Remarque 5.4.2. Conséquences arithmétiques.
Le fait que les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ soient à coefficients de Fourier entiers donne des relations de congruence vérifiées par les coefficients de Fourier des formes $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{-3,1}$.

5.5 $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$

Lemme 5.5.1. *Structure de* $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q)$.

$$J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q) = \mathbb{Z}.\xi_{0,4}.$$

Preuve.
D'après la remarque 5.1.1, $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{C}} = \mathbb{C}.\xi_{0,4}$, où $\xi_{0,4} = \Delta(\tau)(a_{-3,1})^4$ est une forme de Jacobi à coefficients de Fourier entiers, avec :

$$[\xi_{0,4}]_{q^1} = (P_1 - P_2)^4 = P_1^4 + P_2^4 - 4(P_1P_2^3 + P_1^3P_2) + 6P_1^2P_2^2.$$

Si φ appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q)$, il existe donc un nombre complexe λ tel que $\varphi = \lambda.\xi_{0,4}$, et vérifiant alors $[\varphi]_{q^1} = \lambda.[\xi_{0,4}]_{q^1}$, ce qui permet en particulier d'écrire que le coefficient de $q\zeta_1^4$ dans le développement de Fourier de la forme φ est égal à λ, et donc d'en déduire que λ est un entier. Ainsi on obtient le résultat :

$$J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q) = \mathbb{Z}.\xi_{0,4}.$$

Remarque 5.5.1. Forme $\xi_{0,4}$.
On peut vérifier, par exemple à l'aide du logiciel maple, que $\xi_{0,4}$ n'appartient pas à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\ \psi_{0,1}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(11)}, \psi_{0,3}^{(1)}, \psi_{0,3}^{(11)}\ ]$: aucune forme non nulle d'indice 4 appartenant à cette algèbre n'a pour coefficient $[\ ]_{q^0}$ le nombre 0.

Proposition-Définition 5.5.1. *On pose :*

$$\psi_{0,4}^{(1)} := \tfrac{1}{8}(\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^2)$$

$$\psi_{0,4}^{(11)} := -\tfrac{1}{12}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + \tfrac{1}{12}\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} + \psi_{0,4}^{(1)}$$

$$\psi_{0,4}^{(2)} := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - 20\psi_{0,4}^{(1)} - 2\psi_{0,4}^{(11)}$$

$$\psi_{0,4}^{(12)} := \psi_{0,3}^{(11)}\psi_{0,1}^{(1)} - 15\psi_{0,4}^{(1)} - 18\psi_{0,4}^{(11)}$$

$$\psi_{0,4}^{(13)} := \psi_{0,2}^{(2)}\psi_{0,2}^{(11)} - 54\psi_{0,4}^{(11)} - 27\psi_{0,4}^{(2)}$$

$$\psi_{0,4}^{(3)} := (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(1)} - 3\psi_{0,4}^{(12)} - 84\psi_{0,4}^{(11)} - 42\psi_{0,4}^{(2)} - 540\psi_{0,4}^{(1)}$$

$$\psi_{0,4}^{(22)} := (\psi_{0,2}^{(11)})^2 - 54\psi_{0,4}^{(11)}$$

$$\psi_{0,4}^{(4)} := (\psi_{0,1}^{(1)})^4 - 2^3 3^5\psi_{0,4}^{(2)} - 3888\psi_{0,4}^{(11)} - 6\psi_{0,4}^{(22)} - 4\times 18^3\psi_{0,4}^{(1)} - 72\psi_{0,4}^{(3)} - 216\psi_{0,4}^{(12)} - 4\psi_{0,4}^{(13)}$$

Ces formes appartiennent à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$, *et vérifient :*
$[\psi_{0,4}^{(1)}]_{q^0} = P_1 + P_2$
$[\psi_{0,4}^{(11)}]_{q^0} = 9 + P_1P_2$
$[\psi_{0,4}^{(2)}]_{q^0} = 18 + P_1^2 + P_2^2$
$[\psi_{0,4}^{(3)}]_{q^0} = 108 + P_1^3 + P_2^3$
$[\psi_{0,4}^{(12)}]_{q^0} = 108 + P_1^2P_2 + P_1P_2^2$
$[\psi_{0,4}^{(13)}]_{q^0} = 486 + P_1^3P_2 + P_1P_2^3$
$[\psi_{0,4}^{(22)}]_{q^0} = 243 + P_1^2P_2^2$
$[\psi_{0,4}^{(4)}]_{q^0} = 486 + P_1^4 + P_2^4$.

Remarque 5.5.2. On peut constater que les formes $\psi_{0,4}^{(1)}$, $\psi_{0,4}^{(11)}$, $\psi_{0,4}^{(2)}$, $\psi_{0,4}^{(3)}$, $\psi_{0,4}^{(12)}$, $\psi_{0,4}^{(13)}$, $\psi_{0,4}^{(22)}$, $\psi_{0,4}^{(4)}$ sont des polynômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}]$.

Corollaire 5.5.1. *Structure du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$.*
- Les formes $\psi_{0,4}^{(1)}$, $\psi_{0,4}^{(11)}$, $\psi_{0,4}^{(2)}$, $\psi_{0,4}^{(3)}$, $\psi_{0,4}^{(12)}$, $\psi_{0,4}^{(13)}$, $\psi_{0,4}^{(22)}$, $\psi_{0,4}^{(4)}$, $\xi_{0,4}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.
- Le système $\{ \psi_{0,4}^{(1)}, \psi_{0,4}^{(11)}, \psi_{0,4}^{(2)}, \psi_{0,4}^{(3)}, \psi_{0,4}^{(12)}, \psi_{0,4}^{(13)}, \psi_{0,4}^{(22)}, \psi_{0,4}^{(4)}, \xi_{0,4} \}$ est une base sur $\mathbb{Q}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 9 que constitue $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$.

Preuve.
- La première affirmation est dûe, comme dans les cas $m = 2$, ou $m = 3$, à la forme du polynôme $[\ ]_{q^0}$, et à la remarque 5.5.1.

- Soit φ appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}$.
On a alors (voir le raisonnement de la proposition 5.1.1, encore valable en utilisant des coefficients rationnels) :
$[\varphi]_{q^0} = b(P_1+P_2)+c(9+P_1P_2)+d(18+P_1^2+P_2^2)+e(108+P_1^3+P_2^3)+f(108+P_1^2P_2+P_1P_2^2)$ $+g(486 + P_1^4 + P_2^4)$ $+h(486 + P_1^3P_2 + P_1P_2^3)$ $+l(243 + P_1^2P_2^2)$
avec b, c, d, e, f, g, h, l appartenant à $\mathbb{Q}$.
Ainsi, la forme $\varphi-[b\psi_{0,4}^{(1)}+c\psi_{0,4}^{(11)}+d\psi_{0,4}^{(2)}+e\psi_{0,4}^{(3)}+f\psi_{0,4}^{(12)}+g\psi_{0,4}^{(4)}+h\psi_{0,4}^{(13)}+l\psi_{0,4}^{(22)}]$ appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Q}}(q) = \mathbb{Q}.\xi_{0,4}$ (voir le raisonnement du lemme 5.5.1, encore valable sur le corps $\mathbb{Q}$), d'où le résulat annoncé.

Cependant toutes ces formes ne sont pas à coefficients de Fourier entiers, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 5.5.1. *Etude des coefficients de Fourier.*
(1) $8\psi_{0,4}^{(1)}$ est le plus petit multiple de $\psi_{0,4}^{(1)}$ appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

(2) $12(\psi_{0,4}^{(11)} - \psi_{0,4}^{(1)})$ et $24\psi_{0,4}^{(11)}$ appartiennent à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Preuve.
Le calcul à l'aide du logiciel pari-gp du coefficient de $q\,\zeta_2^4$ dans le développement de Fourier de $\psi_{0,4}^{(1)}$ donne $-\frac{1}{8}$.
Par ailleurs, $8\psi_{0,4}^{(1)} = \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^2$, est à coefficients de Fourier entiers car les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$ et $\psi_{0,2}^{(1)}$ le sont, d'où la conclusion annoncée.

D'après la définition de $\psi_{0,4}^{(11)}$, $12(\psi_{0,4}^{(11)} - \psi_{0,4}^{(1)}) = -\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)}$ est à coefficients de Fourier entiers, car c'est le cas des formes $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,1}^{(1)}$ et $\psi_{0,3}^{(11)}$. Par conséquent, puisque $8\psi_{0,4}^{(1)}$ appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, la forme $24\psi_{0,4}^{(11)}$ appartient aussi à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Corollaire 5.5.2.
Les formes $8\psi_{0,4}^{(1)}$, $24\psi_{0,4}^{(11)}$, $12\psi_{0,4}^{(2)}$, $8\psi_{0,4}^{(12)}$, $4\psi_{0,4}^{(13)}$, $8\psi_{0,4}^{(3)}$, $4\psi_{0,4}^{(22)}$, $2\psi_{0,4}^{(4)}$, $\xi_{0,4}$ constituent un système libre sur $\mathbb{Z}$ du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Comme vont en témoigner les exemples ci-dessous, ce système n'est cependant pas un système générateur sur $\mathbb{Z}$ du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et chose plus fondamentale encore pour montrer que la structure de l'algèbre graduée $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ n'est pas simple, ils prouvent qu'il existe des formes appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, qui n'appartiennent pas au $\mathbb{Z}$-module engendré par les monômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, donnant des formes de Jacobi d'indice 4.

Notation 5.5.1.
On note $\mathcal{M}_4$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ constitué des formes de Jacobi de poids 0, d'indice 4, écrites comme des polynômes à coefficients entiers en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$.

Lemme 5.5.2.
Le module $\mathcal{M}_4$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 8, et admet par exemple comme $\mathbb{Z}$-base le système $\{ (\psi_{0,1}^{(1)})^4, (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(1)}, (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)}, \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)}, \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)}, (\psi_{0,2}^{(1)})^2, \psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}, (\psi_{0,2}^{(11)})^2 \}$.

Notation 5.5.2.
On notera ici :
$A := (\psi_{0,1}^{(1)})^4$, $B := (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(1)}$, $C := (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)}$, $D := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)}$, $E := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)}$, $F := (\psi_{0,2}^{(1)})^2$, $H := \psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}$, $K := (\psi_{0,2}^{(11)})^2$.

Lemme 5.5.3.
Soit φ appartenant à $\mathcal{M}_4$. La forme φ s'écrit alors :
$\varphi = aA+bB+cC+dD+eE+fF+hH+kK$, *avec a, b, c, d, e, f, h, k appartenant à $\mathbb{Z}$. On peut alors donner la forme de son polynôme $[\ ]_{q^0}$ en fonction des coefficients $a, \ldots, k$, en s'aidant par exemple du logiciel maple. On obtient :*

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{q^0} = {} & [104976a+1944b+8748c+36d+270e+36f+729k+162h]\\
&+[23328a+540b+972c+20d+15e+12f+27h](P_1+P_2)\\
&+[3888a+84b+378c+2d+18e+2f+54k+6h](P_1P_2)\\
&+[1944a+42b+27c+d+f](P_1^2+P_2^2)\\
&+[216a+3b+36c+e+h](P_1^2P_2+P_1P_2^2)\\
&+[4a+c](P_1^3P_2+P_1P_2^3)\\
&+[6a+2c+k](P_1^2P_2^2)\\
&+[72a+b](P_1^3+P_2^3)\\
&+[a](P_1^4+P_2^4).
\end{aligned}$$

Proposition-Définition 5.5.2. *On pose :*

$$g_1(\tau,z) := (24a_{0,1})(\tau,2z)$$

$$g_2 := f_4 = 4^2\sigma_2(\psi_{1110}^2,\ldots,\psi_{1101}^2).$$

(Voir la proposition-définition 2.5.3 et le corollaire 3.3.3.)
Les formes g_1 et g_2 ainsi définies appartiennent au $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, mais pas à $\mathcal{M}_4$.

Preuve.
On vérifie facilement en utilisant les propriétés de $a_{0,1}$ (voir la proposition-définition 2.5.3 et les corollaires 2.5.1 et 2.5.2), que g_1 appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et vérifie :

$$[g_1]_{q^0} = 18+P_1^2+P_2^2-2(P_1+P_2).$$

Cependant, il n'existe aucun $(a, \ldots, k)$ appartenant à $\mathbb{Z}^8$ tels que $[aA+bB+cC+dD+eE+fF+hH+kK]_{q^0} = 18+P_1^2+P_2^2-2(P_1+P_2)$: la seule solution du système d'équations obtenu par identification des coefficients des polynômes $[aA + bB + cC + dD + eE + fF + hH + kK]_{q^0}$ et $18 + P_1^2 + P_2^2 - 2(P_1 + P_2)$ (voir le lemme 5.5.3) est $a = b = c = k = 0$, $f = 3$, $d = -2$, $h = \frac{1}{6}$, $e = -\frac{1}{6}$, comme le précise le logiciel maple. Ainsi g_1 n'appartient pas à $\mathcal{M}_4$.

D'après le corollaire 3.3.3, g_2 appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et on a :

$$[g_2]_{q^0} = P_1^2 + P_2^2 + 4P_1P_2 + 22(P_1 + P_2) + 54.$$

Cependant, comme ci-dessus, il n'existe aucun $(a, \ldots, k)$ appartenant à $\mathbb{Z}^8$ tels que $[aA + bB + cC + dD + eE + fF + hH + kK]_{q^0} = [g_2]_{q^0}$, car la seule solution au système obtenu est : $a = b = c = k = 0$, $f = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$, $h = -\frac{1}{6}$, $e = \frac{1}{6}$. Ainsi g_2 n'appartient pas non plus à $\mathcal{M}_4$.

Remarque 5.5.3. On montre en employant la même méthode (c'est à dire en considérant la forme du polynôme $[\ ]_{q^0}$) que g_2 n'appartient pas au $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{M}_4 \oplus \mathbb{Z}g_1$, et que de même, g_1 n'appartient pas à $\mathcal{M}_4 \oplus \mathbb{Z}g_2$. Il semble donc bien qu'il faille encore ajouter des générateurs (au moins g_1 et g_2) pour écrire toute fonction de $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Remarque 5.5.4. Un problème similaire se produit pour l'indice 6 : on peut exhiber une forme appartenant à $J_{0,6}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, mais pas au $\mathbb{Z}$-module libre noté de façon analogue $\mathcal{M}_6$, de rang 19, constitué des polynômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ni même au $\mathbb{Z}$-module libre de rang 25, constitué des polynômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, g_1, g_2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On peut par exemple considérer la forme $\varphi_6 := 4(\xi_1^2 + \xi_{1'}^2 + \xi_2^2 + \xi_{2'}^2 + \xi_3^2 + \xi_{3'}^2)$ construite à l'aide de la forme dénominateur et des caractéristiques d'ordre 2 (voir la proposition 3.3.10), qui appartient à $J_{0,6}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ et vérifie : $[\varphi_6]_{q^0} = 6 + 2P_1P_2$.

Il faudra donc apparemment ajouter au moins encore un générateur pour écrire les éléments de $J_{0,6}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et donc de $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Ceci laisse à penser que la structure sur $\mathbb{Z}$ de l'algèbre $J_{0,\star}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$ ne sera pas établie de façon immédiate.

5.6 Autres écritures des premières formes définies sur $\mathbb{Z}$.

5.6.1 Relations entre les premières formes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et les générateurs sur $\mathbb{Q}$

Proposition 5.6.1.
On peut écrire les formes φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 et φ_5, introduites dans la proposition 2.7.1, lors de l'étude de la structure de $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
24\varphi_1 &= \psi_{0,1}^{(1)} \\
4\varphi_2 &= 48\ \psi_{0,2}^{(1)} - (\psi_{0,1}^{(1)})^2 \\
2\varphi_3 &= -8\ \psi_{0,2}^{(11)} - (\psi_{0,1}^{(1)})^2 + 72\ \psi_{0,2}^{(1)} \\
4\varphi_4 &= -5(\psi_{0,1}^{(1)})^3 + 168\ \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} + 8\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + 2^7 \times 3^2\psi_{0,3}^{(1)} - 2^6 \times 3\psi_{0,3}^{(11)} \\
8\varphi_5 &= -36 \times 24\ \psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,1}^{(1)})^3 + 3 \times 24\ \psi_{0,2}^{(1)}\ \psi_{0,1}^{(1)}.
\end{aligned}$$

On a aussi : $\xi_{0,4} = \frac{1}{1728}(\varphi_6 - \varphi_3^2)$.

Remarque 5.6.1.
Ces relations et la proposition 2.7.1 permettent de constater que toute forme appartenant à $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}$ est un polynôme à coefficients rationnels en les fonctions $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\xi_{0,4}$, et que les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, et $\xi_{0,4}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 5.6.2.
Les relations entre les fonctions φ_j (voir la proposition 2.7.1) permettent d'établir des relations entre les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\xi_{0,4}$: les relations $\varphi_2^2 \times \varphi_3 = \varphi_4 \times \varphi_5$ et $\varphi_4^2 = \varphi_6 \times \varphi_2$ donnent deux relations polynômiales dans $J_{0,6}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}$, tandis que l'identité $\varphi_2^3 \times \varphi_3^2 = \varphi_5^2 \times \varphi_6$ donne une relation dans $J_{0,10}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}$. Les coefficients de ces polynômes peuvent se calculer à l'aide par exemple du logiciel pari-gp.

5.6.2 Relations entre les premières formes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et les formes ξ'_{00}, ξ'_{01}, ξ'_{10}.

Lemme 5.6.1. *Identités. (Voir le paragraphe 3.3.1.)*

$$\Phi_1 = 8(\xi'_{00} + \xi'_{01} + \xi'_{10}) = \psi_{0,1}^{(1)}$$

$$\Phi_2 = 64({\xi'_{00}}^2 + {\xi'_{01}}^2 + {\xi'_{10}}^2) = (\psi_{0,1}^{(1)})^2 - 32\ \psi_{0,2}^{(1)}$$

$$\Phi'_2 = 8(\xi'_{00}\xi'_{01} + \xi'_{01}\xi'_{10} + \xi'_{00}\xi'_{10}) = 2\ \psi_{0,2}^{(1)}$$

$$\Phi_3 = 8\xi'_{00}\xi'_{01}\xi'_{10} = \psi_{0,3}^{(1)}$$

$$\Phi'_3 = 8^3({\xi'_{00}}^3 + {\xi'_{01}}^3 + {\xi'_{10}}^3) = 192\ \psi_{0,3}^{(1)} - 48\ \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} + \psi_{0,1}^{(1)3}$$

$$\Phi''_3 = 64(\xi'_{00}{\xi'_{01}}^2 + {\xi'_{00}}^2\xi'_{01} + {\xi'_{01}}^2\xi'_{10} + \xi'_{01}{\xi'_{10}}^2 + {\xi'_{00}}^2\xi'_{10} + \xi'_{00}{\xi'_{10}}^2) = -24\ \psi_{0,3}^{(1)} + 2\ \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4 &= 64\Big((\xi'_{00}\xi'_{01})^2 + (\xi'_{00}\xi'_{10})^2 + (\xi'_{01}\xi'_{10})^2 \Big) \\
&\equiv\ 2\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - 32\psi_{0,4}^{(1)} \quad mod \quad J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi'_4 &= 8^4({\xi'_{00}}^4 + {\xi'_{01}}^4 + {\xi'_{10}}^4) \\
&\equiv\ \psi_{0,1}^{(1)4} + 768\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - 4096\psi_{0,4}^{(1)} - 64\psi_{0,1}^{(1)2}\psi_{0,2}^{(1)} \quad mod \quad J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi''_4 &= 8^3(\xi'_{00}{\xi'_{01}}^3 + {\xi'_{00}}^3\xi'_{01} + {\xi'_{01}}^3\xi'_{10} + \xi'_{01}{\xi'_{10}}^3 + {\xi'_{00}}^3\xi'_{10} + \xi'_{00}{\xi'_{10}}^3) \\
&\equiv\ -72\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} + 512\psi_{0,4}^{(1)} + 2\psi_{0,1}^{(1)2}\psi_{0,2}^{(1)} \quad mod \quad J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi'''_4 &= 8^2(\xi'_{00}\xi'_{01}{\xi'_{10}}^2 + \xi'_{00}{\xi'_{01}}^2\xi'_{10} + {\xi'_{00}}^2\xi'_{01}\xi'_{10}) \\
&\equiv \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} \quad mod \quad J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}(q)
\end{aligned}$$

Preuve.
Ces résultats sont des conséquences de la forme des coefficients $[\ ]_{q^0}$ de ces différentes fonctions donnés dans la proposition 3.3.1, et des structures des espaces $J_{0,m}^{W(A_2),f}(q)$ concernés, décrites dans la remarque 5.1.1.

Corollaire 5.6.1.
On obtient la nouvelle expression de la forme $\psi_{0,4}^{(1)} = \frac{1}{8}\Big(\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^2\Big)$ *suivante :*

$$\psi_{0,4}^{(1)} = -2\Big((\xi'_{00}\xi'_{01})^2 + (\xi'_{00}\xi'_{10})^2 + (\xi'_{01}\xi'_{10})^2 \Big) \ +\ 4\Big(\xi'_{00}\xi'_{01}{\xi'_{10}}^2 + \xi'_{00}{\xi'_{01}}^2\xi'_{10} + {\xi'_{00}}^2\xi'_{01}\xi'_{10} \Big).$$

5.7 Eléments supplémentaires en vue de la structure du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$

5.7.1 Formes obtenues à l'aide des fonctions $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$

Lemme 5.7.1. *Eléments de $\mathcal{M}_4$. (Voir la notation 5.5.1.)*
(1) Les formes suivantes appartiennent à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$:

$$\begin{array}{ll} F_2 := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} & F_{12} := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} \\ F_3 := (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(1)} & F_{22} := (\psi_{0,2}^{(11)})^2 \\ F_{13} := (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)} & F_4 := (\psi_{0,1}^{(1)})^4 \end{array}$$

Et on peut rappeler (voir le lemme 5.5.3) :

$$[F_2]_{q^0} = 36 + 20(P_1+P_2) + 2P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2$$

$$[F_{12}]_{q^0} = 270 + 15(P_1+P_2) + 18P_1P_2 + P_1^2P_2 + P_1P_2^2$$

$$[F_3]_{q^0} = 1944 + 540(P_1+P_2) + 84P_1P_2 + 3(P_1^2P_2 + P_1P_2^2) + 42(P_1^2+P_2^2) + P_1^3 + P_2^3$$

$$[F_{22}]_{q^0} = 729 + 54P_1P_2 + P_1^2P_2^2$$

$$[F_{13}]_{q^0} = 8748 + 972(P_1+P_2) + 378P_1P_2 + 27(P_1^2+P_2^2) + 36(P_1^2P_2 + P_1P_2^2) \\ +2P_1^2P_2^2 + P_1^3P_2 + P_1P_2^3$$

$$[F_4]_{q^0} = 104976 + 23328(P_1+P_2) + 3888P_1P_2 + 1944(P_1^2+P_2^2) \\ +216(P_1^2P_2 + P_1P_2^2) + 72(P_1^3+P_2^3) + 6P_1^2P_2^2 + 4(P_1^3P_2 + P_1P_2^3) + P_1^4 + P_2^4$$

(2) On a aussi, en utilisant les deux derniers monômes possibles :

$$[\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}]_{q^0} = 162 + 27(P_1+P_2) + 6P_1P_2 + P_1^2P_2 + P_1P_2^2$$

$$[(\psi_{0,2}^{(1)})^2]_{q^0} = 36 + 12(P_1+P_2) + 2P_1P_2 + P_1^2 + P_2^2,$$

ce qui donne encore les formes suivantes dans $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$:

$12F_{11} := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} - \psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}$, *avec* $[12F_{11}]_{q^0} = -12(P_1+P_2) + 12(P_1P_2+9)$,

et $8F_1 := \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^2 = 8\psi_{0,4}^{(1)}$, *avec* $[8F_1]_{q^0} = 8(P_1+P_2)$.

On a : $F_{11} + F_1 = \psi_{0,4}^{(11)}$.

5.7.2 Autres constructions

Remarque 5.7.1. Rappels (voir la proposition-définition 5.5.2).
- La forme g_1, définie par $g_1(\tau,z) := (24a_{0,1})(\tau,2z)$ appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et vérifie :

$$[g_1]_{q^0} = 18 + P_1^2 + P_2^2 - 2(P_1+P_2).$$

- La forme g_2, définie par $g_2(\tau,z) := 4^2\sigma_2(\psi_{1110}^2,\ldots,\psi_{1101}^2)$, appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et vérifie :

$$[g_2]_{q^0} = P_1^2 + P_2^2 + 4P_1P_2 + 22(P_1+P_2) + 54.$$

Proposition-Définition 5.7.1. *On pose :*
$G_2 := g_2 - g_1 - 3 \times 8\psi_{0,4}^{(1)}$,
$G'_2 := 6g_1 - 5g_2 - F_2 + 18 \times 8\psi_{0,4}^{(1)} + 24\psi_{0,4}^{(11)}$,
$G'_1 := 2G'_2 - G_2$.

Ces trois formes appartiennent à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$*, et on a :*

$$[G_2]_{q^0} = 4(P_1P_2 + 9)$$
$$[G'_2]_{q^0} = 2(P_1P_2 + 9) + 2(P_1 + P_2)$$
$$[G'_1]_{q^0} = 4(P_1 + P_2).$$

Proposition-Définition 5.7.2.
Considérons la forme h *obtenue en appliquant l'opérateur de Hecke noté* $T_-(2)$ *(voir la définition 1.2.2), à la forme* $\psi_{0,2}^{(1)}$*. D'après la définition de cet opérateur, on obtient :*

$$h(\tau,z) = \psi_{0,2}^{(1)}(2\tau,2z) + \psi_{0,2}^{(1)}(\frac{\tau+1}{2},z) + \psi_{0,2}^{(1)}(\frac{\tau}{2},z).$$

La forme h *appartient à* $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$*, et vérifie :*

$$[h]_{q^0} = 18 + P_1^2 + P_2^2.$$

Preuve.
Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition 1.2.8, et de constater que, d'après la formule (appliquée avec $k = 0$, $q = 2$) donnant les coefficients de Fourier, comme $\psi_{0,2}^{(1)}$ est à coefficients de Fourier entiers, h est également à coefficients de Fourier entiers.

Corollaire 5.7.1. *On pose alors :*
$H_2 := h - F_2 + 5G'_1 + G_2$
$H_1 := G'_2 - H_2$.
Ces deux formes appartiennent à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$*, et vérifient :*

$$[H_2]_{q^0} = 2(P_1P_2 + 9) \qquad [H_1]_{q^0} = 2(P_1 + P_2).$$

5.7.3 Conclusion à propos de la structure de $J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$

Il reste à répondre à la question suivante :
existe-t'il des formes appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et ayant respectivement pour coefficient $[\ ]_{q^0}$, les expressions $P_1P_2 + 9$ et $P_1 + P_2$?

Proposition-Définition 5.7.3. *Posons :*

$$\chi_1 := \psi_{0,4}^{(1)} + \frac{1}{8}\ \xi_{0,4},$$

$$\chi_2 := \psi_{0,4}^{(11)} - \frac{1}{8}\ \xi_{0,4}.$$

Alors :

$$[\chi_1]_{q^0} = P_1 + P_2$$
$$[\chi_2]_{q^0} = P_1P_2 + 9.$$

Remarque 5.7.2. Les calculs des premiers coefficients de Fourier donnent :

$[\psi_{0,4}^{(1)}]_{q^1} = -\frac{1}{8}\zeta_2^4 - \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2^3 + \dots,$

$[\psi_{0,4}^{(11)}]_{q^1} = \frac{9}{8}\zeta_2^4 + \dots,$

$[\xi_{0,4}]_{q^1} = (P_1 - P_2)^4 = P_1^4 + P_2^4 - 4(P_1P_2^3 + P_1^3P_2) + 6P_1^2P_2^2 \ = \ \zeta_2^{\pm 4} + \dots.$

Remarque 5.7.3. Rappels.
- La forme $8\psi_{0,4}^{(1)}$ est le plus petit multiple de $\psi_{0,4}^{(1)}$ appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$. (Voir la proposition 5.5.1.)

- La forme $24\psi_{0,4}^{(11)}$ est un multiple de $\psi_{0,4}^{(11)}$ appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

- La forme $\xi_{0,4} = \Delta(\tau)(a_{-3,1})^4$ est une forme de Jacobi à coefficients de Fourier entiers, vérifiant $[\xi_{0,4}]_{q^1} = \zeta_2^{\pm 4} + \dots$, et on a : $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q) = \mathbb{Z}.\xi_{0,4}$. (Voir le lemme 5.5.1.)

Lemme 5.7.2. *La forme $\psi_{0,4}^{(1)}$, respectivement $\psi_{0,4}^{(11)}$, est la seule fonction de $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}$, modulo $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{C}}(q)$, ayant pour coefficient $[\ ]_{q^0}$ le polynôme $P_1 + P_2$, respectivement $P_1P_2 + 9$.*

Preuve.
On utilise, pour établir ce résultat, l'écriture d'une forme faible à l'aide des formes $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$, $a_{0,1}$, $a_{-2,1}$, $a_{-3,1}$ (voir la proposition 2.6.2), la forme des coefficients $[\ ]_{q^0}$, ainsi que l'aide du logiciel maple pour s'assurer qu'il n'y a qu'une seule combinaison linéaire possible de ces coefficients donnant $P_1 + P_2$, respectivement $P_1P_2 + 9$.

Proposition 5.7.1.
On a les équivalences suivantes :
il existe une fonction appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et ayant pour coefficient $[\ ]_{q^0}$ le polynôme $P_1 + P_2$ (respectivement $P_1P_2 + 9$) si et seulement si χ_1 (respectivement χ_2) appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Preuve.
D'après les rappels et le lemme précédents, s'il existe une fonction φ appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et ayant pour coefficient $[\ ]_{q^0}$ le polynôme $P_1 + P_2$ (respectivement $P_1P_2 + 9$), elle est du type $\varphi = \psi_{0,4}^{(1)} + \mu\xi_{0,4}$, (respectivement $\varphi = \psi_{0,4}^{(11)} + \nu\xi_{0,4}$), avec μ appartenant à $\frac{1}{8} + \mathbb{Z}$, (respectivement avec ν appartenant à $-\frac{9}{8} + \mathbb{Z} = -\frac{1}{8} + \mathbb{Z}$).

Ainsi, finalement, d'après la définition des formes χ_1 et χ_2 (voir la proposition-définition 5.7.3), il existe une fonction appartenant à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$, et ayant pour coefficient $[\ ]_{q^0}$ le polynôme $P_1 + P_2$ (respectivement $P_1P_2 + 9$) si et seulement si χ_1 (respectivement χ_2) appartient à $J_{0,4}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}$.

Le problème qui reste à résoudre est donc le suivant :
les formes χ_1 et χ_2 sont-elles à coefficients de Fourier entiers ?
D'après le calcul des premiers coefficients de Fourier réalisé à l'aide du logiciel pari-gp, il semblerait que oui, mais cela reste à démontrer.

5.8 Structure de $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}[2^{-1}]}/J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}[2^{-1}]}(q)$ sur $\mathbb{Z}[2^{-1}]$

Notation 5.8.1.
On notera B l'extension de l'anneau $\mathbb{Z}$ suivante :

$$B := \mathbb{Z}[\ 2^{-1}] = \left\{\ \frac{a}{2^k}\ /\ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\ \right\}.$$

Lemme 5.8.1.
Les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\psi_{0,4}^{(11)}$ appartiennent à $J_{0,\star}^{f,W(A_2),B}$.

Preuve.
Ce résultat a déjà été établi pour les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, qui sont en fait à coefficients de Fourier entiers (voir la proposition-définition 5.2.1 et les théorèmes 5.3.1 et 5.4.1).
D'après la proposition-définition 5.7.1 et la proposition 5.5.1, la forme $G_2 - 4\psi_{0,4}^{(11)}$ appartient à $J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Q}}(q)$, espace qui coïncide avec $\mathbb{Q}.\xi_{0,4}$ (voir le raisonnement tenu dans la preuve du lemme 5.5.1, encore valable sur $\mathbb{Q}$), d'où l'existence d'un nombre rationnel a vérifiant :

$$G_2 = 4\psi_{0,4}^{(11)} + a\xi_{0,4}.$$

On a donc, d'après la nature des premiers termes du développement de Fourier de ces fonctions (voir la remarque 5.7.2 et la preuve du lemme 5.5.1) :

$$[G_2]_{q^1} = 4\Big(\frac{9}{8}\zeta_2^4 + \dots\Big) + a\Big(\zeta_2^4 + \dots\Big).$$

Comme, toujours d'après la proposition-définition 5.7.1, la forme G_2 est à coefficients de Fourier entiers, $4 \times \frac{9}{8} + a$ est un entier, ce qui permet de dire que a appartient à B, et que finalement la forme $\psi_{0,4}^{(11)} = \frac{1}{4}G_2 - a\xi_{0,4}$ appartient à $J_{0,\star}^{f,W(A_2),B}$.

Remarque 5.8.1. La relation de congruence suivante est vérifiée :

$$\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} - \psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} \equiv\ 0\ mod\ 3$$

C'est une conséquence immédiate du fait que les formes $\psi_{0,4}^{(1)}$ et $\psi_{0,4}^{(11)} = -\frac{1}{12}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)} + \frac{1}{12}\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} + \psi_{0,4}^{(1)}$ soient à coefficients de Fourier dans $\mathbb{Z}[2^{-1}]$.

Théorème 5.8.1. *Structure sur B.*
(i) Pour chaque entier naturel m, le B-module $J_{0,m}^{f,W(A_2),B}/J_{0,m}^{f,W(A_2),B}(q)$ admet un système de générateurs du type

$$\{\ f_{0,m}^{(i,j)},\ 0 \le i \le j \le m,\ i+j \le m,\ (i,j) \neq (0,0)\ \},$$

avec :
- pour $0 \le i \le j \le m$, $i+j \le m$, $(i,j) \neq (0,0)$, $(i,j) \neq (0,1)$ et $i \neq j$,

$$[f_{0,m}^{(i,j)}]_{q^0} = P_1^i P_2^j + P_1^j P_2^i + \sum_{r+s<i+j} \alpha_{m,r,s,i,j} P_1^r P_2^s,$$

où $\displaystyle\sum_{r+s<i+j} \alpha_{m,r,s,i,j} P_1^r P_2^s$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2,
- pour $0 \le i \le m$, $i \neq 0$,

$$[f_{0,m}^{(i,i)}]_{q^0} = P_1^i P_2^i + \sum_{r+s<2i} \alpha_{m,r,s,i} P_1^r P_2^s,$$

où $\sum_{r+s<2i} \alpha_{m,r,s,i} P_1^r P_2^s$ *est un polynôme symétrique en* P_1 *et* P_2,
- et avec $[f_{0,m}^{(0,1)}]_{q^0}$ *polynôme de degré* 1 *en* P_1, P_2.

(ii) Les fonctions $f_{0,m}^{(i,j)}$ *peuvent s'écrire comme des polynômes en* $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, *et* $\psi_{0,4}^{(11)}$, *à coefficients dans l'anneau* B.

(iii) Pour chaque entier naturel m, *on a :*

$$J_{0,m}^{f,W(A_2),B} / J_{0,m}^{f,W(A_2),B}(q) \subset B\ [\ \psi_{0,1}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(1)}, \psi_{0,2}^{(11)}, \psi_{0,3}^{(1)}, \psi_{0,3}^{(11)}, \psi_{0,4}^{(11)}\ ].$$

Preuve.
A) Construction des $f_{0,m}^{(i,j)}$.

Etape 0 : préliminaires.
a) Construction de formes $\psi_{0,m}^{(1)}$ de poids 0, d'indice m, vérifiant :

$$[\psi_{0,m}^{(1)}]_{q^0} = \frac{m}{(24,m)}\ (P_1 + P_2) + \frac{24-6m}{(24,m)}.$$

On rappelle que $\psi_{0,4}^{(1)}$ est définie par :

$$\psi_{0,4}^{(1)} = \frac{1}{8}(\ \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^2\ )$$

$$[\psi_{0,4}^{(1)}]_{q^0} = P_1 + P_2.$$

On pose :

$$\psi_{0,6}^{(1)} := \frac{1}{2}(\ \psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,4}^{(1)} - (\psi_{0,3}^{(1)})^2\ )$$

$$[\psi_{0,6}^{(1)}]_{q^0} = -2 + P_1 + P_2.$$

Pour $m \geq 5$, $m \neq 6$ on construit de proche en proche les formes $\psi_{0,m}^{(1)}$, en posant :

$$\psi_{0,m}^{(1)} := \begin{cases} \text{si } 3 \nmid m, \\ \frac{1}{2(24,m)}[(24,m-4)\ \psi_{0,m-4}^{(1)}\psi_{0,4}^{(1)} + (24,m-2)\ \psi_{0,m-2}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)} - 2(24,m-3)\ \psi_{0,m-3}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)}], \\ \\ \text{si } 3 \mid m,\ m > 6, \\ \frac{3}{(24,m)}[\frac{1}{3}(24,m-3)\ \psi_{0,m-3}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} + \frac{1}{6}(24,m-6)\ \psi_{0,m-6}^{(1)}\psi_{0,6}^{(1)} - \frac{1}{2}(24,m-4)\ \psi_{0,m-4}^{(1)}\psi_{0,4}^{(1)}] \end{cases}$$

Dans chacun de ces cas, les coefficients qui apparaissent sont dans B, les fonctions construites de proche en proche sont des polynômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\psi_{0,4}^{(11)}$ à coefficients dans B, et on a :

$$[\psi_{0,m}^{(1)}]_{q^0} = \frac{m}{(24,m)}(P_1 + P_2) + \frac{24-6m}{(24,m)}.$$

b) Construction de formes $\psi_{0,m}^{(11)}$ de poids 0, d'indice m, vérifiant :

$$[\psi_{0,m}^{(11)}]_{q^0} = \frac{m}{(72,m)}\ P_1P_2 + \frac{72-9m}{(72,m)}.$$

On pose :
$\psi_{0,5}^{(11)} := -\frac{3}{16}\Big(\psi_{0,1}^{(1)}(\psi_{0,2}^{(1)})^2 - (\psi_{0,1}^{(1)})^2\psi_{0,3}^{(1)}\Big) + \frac{5}{4}\Big(\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} - \psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(1)}\Big) - \frac{3}{2}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)}$,
on a : $[\psi_{0,5}^{(11)}]_{q^0} = 27 + 5P_1P_2$.

On pose :
$\psi_{0,6}^{(11)} := \frac{1}{2}\psi_{0,3}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} + \frac{1}{16}\Big((\psi_{0,2}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)} - \psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(1)}\Big) + \frac{3}{8}\Big(\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(1)} - (\psi_{0,2}^{(1)})^3\Big) - 3\psi_{0,3}^{(1)2}$
on a : $[\psi_{0,6}^{(11)}]_{q^0} = 3 + P_1P_2$.

On pose :
$\psi_{0,9}^{(11)} := -\frac{15}{32}\,\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(1)}(\psi_{0,3}^{(1)})^2 + \frac{49}{16}(\psi_{0,3}^{(1)})^3 - \frac{5}{16}\,(\psi_{0,3}^{(1)})^2\psi_{0,3}^{(11)} + \frac{1}{32}\,\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,2}^{(11)}(\psi_{0,3}^{(1)})^2 + \frac{13}{32}\,(\psi_{0,2}^{(1)})^3\psi_{0,3}^{(1)} +$
$\frac{1}{64}\,(\psi_{0,2}^{(1)})^3\psi_{0,3}^{(11)} - \frac{3}{64}\,(\psi_{0,2}^{(1)})^2\psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(1)} + \frac{1}{256}\,\Big((\psi_{0,1}^{(1)})^3(\psi_{0,3}^{(1)})^2 - \psi_{0,1}^{(1)}(\psi_{0,2}^{(1)})^4\Big)$
on a : $[\psi_{0,9}^{(11)}]_{q^0} = -1 + P_1P_2$.

Pour $m \geq 7$, $m \neq 9$, on pose :

$$\psi_{0,m}^{(11)} := \begin{cases} \text{si } 3 \nmid m, \\ \frac{1}{(72,m)}\,\Big(\frac{1}{8}\,(72,m-1)\,\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,m-1}^{(11)} - \frac{1}{4}\,(72,m-2)\,\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,m-2}^{(11)} \\ +\frac{1}{8}\,(72,m-3)\,\psi_{0,3}^{(1)}\psi_{0,m-3}^{(11)}\Big), \\ \\ \text{si } 3 \mid m, \text{ et } 9 \nmid m, \\ \frac{1}{(72,m)}\,\Big(\frac{3}{8}\,(24,m-1)\,\psi_{0,1}^{(1)}\psi_{0,m-1}^{(1)} - \frac{3}{4}\,(24,m-2)\,\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,m-2}^{(1)} \\ +\frac{3}{8}\,(24,m-3)\,\psi_{0,3}^{(1)}\psi_{0,m-3}^{(1)} + \frac{3}{4}\,(72,m-6)\,\psi_{0,6}^{(1)}\psi_{0,m-6}^{(11)} - \frac{3}{4}\,(24,m-6)\,\psi_{0,6}^{(11)}\psi_{0,m-6}^{(1)} \\ -\frac{1}{4}\,(72,m-9)\,\psi_{0,9}^{(1)}\psi_{0,m-9}^{(11)} + \frac{3}{4}\,(24,m-9)\,\psi_{0,9}^{(11)}\psi_{0,m-9}^{(1)}\Big), \\ \\ \text{si } 9 \mid m,\ m > 9, \\ \frac{1}{(72,m)}\Big(\frac{9}{4}\,(72,m-3)\,\psi_{0,3}^{(1)}\psi_{0,m-3}^{(11)} - \frac{15}{8}\,(24,m-3)\,\psi_{0,3}^{(11)}\psi_{0,m-3}^{(1)} \\ -\frac{33}{4}\,(72,m-6)\,\psi_{0,6}^{(1)}\psi_{0,m-6}^{(11)} + \frac{15}{2}\,(24,m-6)\,\psi_{0,6}^{(11)}\psi_{0,m-6}^{(1)} \\ -\frac{45}{8}\,(24,m-9)\,\psi_{0,9}^{(11)}\psi_{0,m-9}^{(1)} + 2\,(72,m-9)\,\psi_{0,9}^{(1)}\psi_{0,m-9}^{(11)}\Big). \end{cases}$$

Dans tous les cas, les coefficients qui apparaissent sont dans B, ce qui permet de vérifier que les fonctions construites sont bien des polynômes en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\psi_{0,4}^{(11)}$ à coefficients dans B, et on a :

$$[\psi_{0,m}^{(11)}]_{q^0} = \frac{m}{(72,m)}P_1P_2 + \frac{72-9m}{(72,m)}.$$

Etape 1 : construction des $f_{0,m}^{(01)}$.
Pour $m \geq 1$, on pose : $f_{0,m}^{(01)} := \psi_{0,m}^{(1)}$.

Etape 2 : construction des $f_{0,m}^{(11)}$.
Pour $m \in \{2, 3, 4\}$, on pose : $f_{0,m}^{(11)} := \psi_{0,m}^{(11)}$.
On pose :
$f_{0,5}^{(11)} := \frac{1}{4}(\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,3}^{(11)} - \psi_{0,2}^{(11)}\psi_{0,3}^{(1)})$,

on a :
$$[f^{(11)}_{0,5}]_{q^0} = 9 - 3(P_1 + P_2) + P_1P_2.$$
On pose :
$f^{(11)}_{0,6} := \frac{3}{16}\left(\psi^{(1)}_{0,1}\psi^{(1)}_{0,2}\psi^{(1)}_{0,3} - (\psi^{(1)}_{0,2})^3\right) + \frac{1}{16}\left((\psi^{(1)}_{0,2})^2\psi^{(11)}_{0,2} - \psi^{(1)}_{0,1}\psi^{(11)}_{0,2}\psi^{(1)}_{0,3}\right) + \frac{1}{2}\ \psi^{(1)}_{0,3}\psi^{(11)}_{0,3} - \frac{3}{2}\ (\psi^{(1)}_{0,3})^2$,

on a :
$$[f^{(11)}_{0,6}]_{q^0} = 9 - 3(P_1 + P_2) + P_1P_2.$$
Pour $m \geq 7$, on pose :

$$f^{(11)}_{0,m} := \begin{cases} \text{si } m \equiv\ 0\ mod\ 3 \\ \frac{1}{12}(72,m)\ \psi^{(11)}_{0,m} - \frac{1}{4}(24,m)\psi^{(1)}_{0,m} + \frac{1}{48}\Big((24,m-6)\ \psi^{(1)}_{0,m-6}\psi^{(11)}_{0,6} \\ -(72,m-6)\ \psi^{(11)}_{0,m-6}\psi^{(1)}_{0,6}\Big) \\ \\ \text{si } m \equiv\ 1\ mod\ 3 \\ -\frac{1}{4}(72,m)\ \psi^{(11)}_{0,m} - \frac{3}{8}(24,m)\psi^{(1)}_{0,m} + \frac{1}{24}(72,m-1)\ \psi^{(11)}_{0,m-1}\psi^{(1)}_{0,1} \\ +\frac{1}{16}\Big(\frac{1}{3}(24,m-4)\ \psi^{(1)}_{0,m-4}\psi^{(11)}_{0,4} - (72,m-2)\ \psi^{(11)}_{0,m-2}\psi^{(1)}_{0,2}\Big) \\ \\ \text{si } m \equiv\ -1\ mod\ 3 \\ \frac{1}{4}(72,m)\ \psi^{(11)}_{0,m} - \frac{3}{4}(24,m)\psi^{(1)}_{0,m} + \frac{1}{16}\Big(\frac{1}{3}(24,m-2)\ \psi^{(1)}_{0,m-2}\psi^{(11)}_{0,2} \\ -\frac{1}{3}(72,m-2)\ \psi^{(11)}_{0,m-2}\psi^{(1)}_{0,2}\Big) \end{cases}$$

Dans tous les cas, les coefficients qui apparaissent devant les fonctions sont dans B, ce qui permet de vérifier, d'après la construction des formes $\psi^{(1)}_{0,m'}$, et $\psi^{(11)}_{0,m'}$, que les fonctions construites sont bien des polynômes en les formes $\psi^{(1)}_{0,1}$, $\psi^{(1)}_{0,2}$, $\psi^{(11)}_{0,2}$, $\psi^{(1)}_{0,3}$, $\psi^{(11)}_{0,3}$ et $\psi^{(11)}_{0,4}$ à coefficients dans B, et on a :

$$[f^{(11)}_{0,m}]_{q^0} = 9 - 3(P_1 + P_2) + P_1P_2.$$

Etape 3 : construction des $f^{(02)}_{0,m}$.
On pose :
$f^{(02)}_{0,2} := \psi^{(2)}_{0,2} = (\psi^{(1)}_{0,1})^2 - 36\psi^{(1)}_{0,2} - 2\psi^{(11)}_{0,2}$, on a $[f^{(02)}_{0,2}]_{q^0} = 54 + P_1^2 + P_2^2$
$f^{(02)}_{0,3} := \psi^{(2)}_{0,3} = \psi^{(1)}_{0,1}\psi^{(1)}_{0,2} - 24\psi^{(1)}_{0,3} - 2\psi^{(11)}_{0,3}$, on a $[f^{(02)}_{0,3}]_{q^0} = 30 + P_1^2 + P_2^2$
$f^{(02)}_{0,4} := \psi^{(2)}_{0,4} = \psi^{(1)}_{0,1}\psi^{(1)}_{0,3} - 2\psi^{(11)}_{0,4} - 20\psi^{(1)}_{0,4}$, on a $[f^{(02)}_{0,4}]_{q^0} = 18 + P_1^2 + P_2^2$

Pour $m \geq 5$, on pose :
$f^{(02)}_{0,m} := -(24,m-3)\ \psi^{(1)}_{0,m-3}\psi^{(1)}_{0,3} + (m-2,24)\ \psi^{(1)}_{0,m-2}\psi^{(1)}_{0,2} - 2f^{(11)}_{0,m}$,
on a : $[f^{(02)}_{0,m}]_{q^0} = 114 - 24m + (4m-6)(P_1 + P_2) + P_1^2 + P_2^2$.

Etape 4 : construction des $f^{(ij)}_{0,m}$, où ($i = 1$, $3 \leq j \leq m-1$) ou ($2 \leq i \leq j \leq m-1$, avec $i + j \leq m$), pour $m \geq 4$.
On pose : $f^{(ij)}_{0,m} := f^{(i-1\ j-1)}_{0,m-2} \times \psi^{(11)}_{0,2}$.
On a alors, par exemple dans le cas où $i \neq j$:
$$[f^{(ij)}_{0,m}]_{q^0} = \Big(\ P_1^{i-1}P_2^{j-1} + P_1^{j-1}P_2^{i-1} + \sum_{r+s<i+j-2} \alpha_{m-2,r,s,i-1,j-1}P_1^rP_2^s\Big) \times \Big(\ P_1P_2 + 27\ \Big)$$

$[f_{0,m}^{(ij)}]_{q^0}$ est donc bien de la forme voulue ; de même si $i = j$.

Etape 5 : construction des $f_{0,m}^{(12)}$, $m \geq 3$.
On pose : $f_{0,m}^{(12)} := f_{0,m-1}^{(11)} \times \psi_{0,1}^{(1)}$.
On vérifie, par récurrence sur m, que $[f_{0,m}^{(12)}]_{q^0}$ est de la forme voulue :
$[f_{0,m}^{(12)}]_{q^0} = (P_1P_2 + a_{m-1}(P_1 + P_2) + b_{m-1}) \times (P_1 + P_2 + 18)$.

Etape 6 : construction des $f_{0,m}^{(0j)}$, $3 \leq j \leq m-2$, pour $m \geq 5$.
On pose : $f_{0,m}^{(0j)} := f_{0,m-3}^{(0\ j-1)} \times \psi_{0,3}^{(1)} - f_{0,m}^{(1\ j-1)}$.
On a alors :

$$[f_{0,m}^{(0j)}]_{q^0} = \Big(P_1^{j-1} + P_2^{j-1} + \sum_{r+s<j-1} \alpha_{m-3,r,s,0,j-1} P_1^r P_2^s \Big) \times \Big(P_1 + P_2 + 2 \Big)$$
$$-\Big(P_1P_2^{j-1} + P_1^{j-1}P_2 + \sum_{r+s<j} \alpha_{m,r,s,1,j-1} P_1^r P_2^s \Big)$$

donc $[f_{0,m}^{(0j)}]_{q^0} = \Big(P_1^j + P_2^j + \sum_{r+s<j} \beta_{r,s} P_1^r P_2^s \Big)$ a bien la forme voulue (la somme reste un polynôme symétrique en P_1 et P_2).

Etape 7 : construction des $f_{0,m}^{(0\ m-1)}$, pour $m \geq 4$.
On pose :

$$f_{0,m}^{(0\ m-1)} := (\psi_{0,1}^{(1)})^{m-2} \times \psi_{0,2}^{(1)} - \sum_{\substack{0 < r \leq \frac{m-1}{2}, \\ r \in \mathbb{N}}} b_{r,m-1-r} f_{0,m}^{(r\ m-1-r)},$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\Big(P_1 + P_2 + 18 \Big)^{m-2} \times \Big(P_1 + P_2 + 6\Big) = P_1^{m-1} + P_2^{m-1} + \sum_{r+s<m-1} b_{r,s} P_1^r P_2^s$$
$$+ \sum_{\substack{r+s=m-1, \\ 0<r<s}} b_{r,s}(P_1^rP_2^s + P_1^sP_2^r) + \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ est pair} \\ b_{(\frac{m-1}{2}\ \frac{m-1}{2})} P_1^{\frac{m-1}{2}} P_2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

On vérifie que $[f_{0,m}^{(0\ m-1)}]_{q^0}$ est bien de la forme $(P_1^{m-1} + P_2^{m-1} + \sum_{r+s<m-1} d_{r,s} P_1^r P_2^s)$, où la somme $\sum_{r+s<m-1} d_{r,s} P_1^r P_2^s$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2.

Etape 8 : construction des $f_{0,m}^{(0\ m)}$, pour $m \geq 3$.
On pose :

$$f_{0,m}^{(0\ m)} := (\psi_{0,1}^{(1)})^m - \sum_{\substack{0<r\leq \frac{m}{2} \\ r \in \mathbb{N}}} c_{r,m-r} f_{0,m}^{(r\ m-r)},$$

où les coefficients sont donnés par :

$$(P_1+P_2+18)^m = P_1^m + P_2^m + \sum_{\substack{r+s=m,\\ 0<r<s}} c_{r,s}(P_1^r P_2^s + P_1^s P_2^r)$$
$$+ \sum_{r+s<m} c_{r,s} P_1^r P_2^s + \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ est impair} \\ c_{(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2})} P_1^{\frac{m}{2}} P_2^{\frac{m}{2}}, & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

On vérifie que $[f_{0,m}^{(0\ m)}]_{q^0}$ a bien la forme voulue, c'est à dire $(P_1^m + P_2^m + \sum_{r+s<m} e_{r,s} P_1^r P_2^s)$, où la somme $\sum_{r+s<m} e_{r,s} P_1^r P_2^s$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2.

On a ainsi construit tous les $f_{0,m}^{(i,j)}$, $0 \le i \le j \le m$, $i+j \le m$, $(i,j) \ne (0,0)$, on peut constater, de proche en proche, que pour tout m et pour tout $(i,\,j)$, la forme $f_{0,m}^{(i,j)}$ appartient à $J_{0,m}^{f,W(A_2),B}$ et est un polynôme en $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$ et $\psi_{0,4}^{(11)}$ à coefficients dans B.

B) Système générateur.

Il reste à montrer que pour tout entier naturel m non nul, les $f_{0,m}^{(i,j)}$, $0 \le i \le j \le m$, $i+j \le m$, $(i,j) \ne (0,0)$, engendrent le B-module $J_{0,m}^{f,W(A_2),B} / J_{0,m}^{f,W(A_2),B}(q)$.
L'assertion (iii) sera alors également prouvée.

Soit m un entier naturel non nul et soit Φ appartenant à $J_{0,m}^{f,W(A_2),B}$.

Si $m=1$, $[\Phi]_{q^0}$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2, somme de polynômes homogènes de degré inférieur ou égal à 1, que l'on peut écrire : $[\Phi]_{q^0} = a + b\,(P_1+P_2)$, où a et b sont dans B.
On pose $\Phi^{(m-1)} := \Phi \ = \Phi^{(0)}$.

Supposons $m \ge 2$.
$[\Phi]_{q^0}$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2, somme de polynômes homogènes de degré inférieur ou égal à m, que l'on peut écrire :

$$[\Phi]_{q^0} = \sum_{\substack{0\le k\le m,\\ k\ \equiv 1\ (2)}} \ \sum_{\substack{r+s=k,\\ 0\le r<s\le m}} a_{r,s}\ (\ P_1^r P_2^s\ +\ P_1^s P_2^r\ )$$
$$+ \sum_{\substack{0\le k\le m,\\ k\ \equiv 0\ (2)}} \left(\sum_{\substack{r+s=k,\\ 0\le r<s\le m}} a_{r,s}\ (\ P_1^r P_2^s\ +\ P_1^s P_2^r\ ) + a_{\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}}\ P_1^{\frac{k}{2}} P_2^{\frac{k}{2}} \right)$$

Posons :

$$\Phi^{(1)} := \Phi - \sum_{\substack{r+s=m,\\ 0\le r<s\le m}} a_{r,s} f_{0,m}^{(r\ s)} - \begin{cases} a_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}} f_{0,m}^{(\frac{m}{2}\ \frac{m}{2})}, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $[\Phi^{(1)}]_{q^0}$ est un polynôme symétrique en P_1 et P_2, somme de polynômes homogènes de degré inférieur ou égal à $m-1$.
On réitère le procédé jusqu'à obtenir $\Phi^{(m-2)}$, de la forme $\Phi - \sum a_{i,j} f_{0,m}^{(i,j)}$ avec les $a_{i,j}$ appartenant à B, $0 \le i \le j \le m$, $i+j \le m$, $(i,j) \ne (0,0)$, tel que $[\Phi^{(m-2)}]_{q^0}$ soit un

polynôme symétrique en P_1 et P_2, somme de polynômes homogènes de degré inférieur ou égal à 2.
On écrit : $[\Phi^{(m-2)}]_{q^0} = a_{0,1} + a_1(P_1 + P_2) + a_{11}P_1P_2 + a_2(P_1^2 + P_2^2)$,
et on pose :

$$\Phi^{(m-1)} := \Phi^{(m-2)} - a_{11}f_{0,m}^{(11)} - a_2 f_{0,m}^{(02)}.$$

On a alors : $[\Phi^{(m-1)}]_{q^0} = a + b\ (P_1 + P_2)$, où a et b sont dans B.
D'après la relation $(\star)$ du corollaire 1.2.1 rappelée au cours de la preuve de la proposition 5.1.1, on a :

$$m(6b + a) = 24b.$$

Or a et b sont dans B, donc il existe un entier relatif k tel que $a' := 2^k \times a$ et $b' := 2^k \times b$ soient dans $\mathbb{Z}$.
On a alors $m\ (6b' + a') = 24\ b'$, d'où $\frac{m}{(24,m)}\ (6b' + a') = \frac{24}{(24,m)}\ b'$, donc $\frac{m}{(24,m)}$ divise b'.
Ainsi il existe b'' appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $b' = \frac{m}{(24,m)}\ b''$ ou encore,
$[2^k\ \Phi^{(m-1)}]_{q^0} = b''\ (\ \frac{m}{(24,m)}\ (\ P_1 + P_2\ )\ +\ \frac{24-6m}{(24,m)}\ )$,
c'est à dire :

$$[\Phi^{(m-1)}]_{q^0} = \frac{b''}{2^k}\ [\psi_{0,m}^{(1)}]_{q^0}.$$

Posons $\Phi^{(m)} := \Phi^{(m-1)} - \frac{b''}{2^k}\ \psi_{0,m}^{(1)}$.
Alors $\Phi^{(m)}$ s'écrit sous la forme $\Phi - \sum a_{i,j} f_{0,m}^{(i,j)}$ avec les $a_{i,j}$ appartenant à B, et $\Phi^{(m)}$ appartient à $J_{0,m}^{W(A_2),f,B}(q)$, car $[\Phi^{(m)}]_{q^0} = 0$.
Finalement, Φ, modulo $J_{0,m}^{W(A_2),f,B}(q)$, s'écrit comme une combinaison linéaire des $f_{0,m}^{(i,j)}$ à coefficients dans B. La structure annoncée est démontrée.

Remarque 5.8.2.
Une étude analogue suggérée par le résultat de la remarque 5.5.2, montre que les générateurs $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, et $\psi_{0,3}^{(11)}$, sont suffisants sur l'anneau $\mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}]$, défini par :

$$\mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}] = \left\{\ \frac{a}{2^k 3^l}\ /\ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}\ \right\}.$$

5.9 Problème de la structure sur $\mathbb{Z}$ de $J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}/J_{0,m}^{f,W(A_2),\mathbb{Z}}(q)$

Ce paragraphe présente une autre approche du problème de la détermination de la structure sur $\mathbb{Z}$ de l'anneau gradué $J_{0,\star}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$.
Dans la construction réalisée au théorème 5.8.1, on peut remarquer que toutes les fonctions $f_{0,m}^{(ij)}$, pour $m \geq 5$ et $(ij) \neq (01), (11)$, sont obtenues comme polynômes à coefficients entiers en les formes $\psi_{0,1}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,2}^{(11)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(11)}$, $\psi_{0,4}^{(1)}$, $\psi_{0,4}^{(11)}$ et les fonctions du type $f_{0,m'}^{(ij)}$, construites lors d'une étape précédente.

Le problème est donc ramené à la construction des générateurs des quatre $\mathbb{Z}$-modules $J_{0,m}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$ pour $m = 1, 2, 3, 4$, (ce qui a fait l'objet de paragraphes précédents) et à la construction des formes $f_{0,m}^{(01)}$, et $f_{0,m}^{(11)}$, pour $m \geq 5$.

On s'intéresse tout d'abord à la construction des formes $\psi_{0,m}^{(1)}$ et $\psi_{0,m}^{(11)}$, ou plus précisément, à la construction de formes de Jacobi faibles, $W(A_2)$-invariantes, de poids 0 et d'indice m et vérifiant respectivement (voir la proposition 5.1.2) :

$$[\psi_{0,m}^{(1)}]_{q^0} = \frac{m}{(24,m)}(P_1 + P_2) + \frac{24-6m}{(24,m)}$$

$$[\psi_{0,m}^{(11)}]_{q^0} = \frac{m}{(72,m)}(P_1 P_2) + \frac{72-9m}{(72,m)}.$$

On s'inspire ici de la méthode suggérée par V.Gritsenko (voir [G1], théorème 1.9), dans le cas de l'étude de l'anneau $J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$.
On reprendra les notations du paragraphe 5.8.

Notation 5.9.1. *(a,b) désigne le pgcd de a et b.*
On pose, en suivant la notation de V.Gritsenko ([G1]) :

$$\tilde{\psi}_m^{(1)} := (24,m)\psi_{0,m}^{(1)}$$

$$\tilde{\psi}_m^{(11)} := (72,m)\psi_{0,m}^{(11)}.$$

On désignera d'une façon particulière les formes $\psi_{0,m}^{(1)}$, et les formes $\psi_{0,m}^{(11)}$, pour m divisant 72, c'est à dire pour m appartenant à $\mathcal{D} := \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 \}$: avec une notation évidente, on notera les premières $\Phi_j^{(1)}$, et les secondes $\Phi_j^{(11)}$.

Le principe de cette méthode est, pour $m \geq 72$, d'obtenir les formes $\psi_{0,m}^{(1)}$, et $\psi_{0,m}^{(11)}$, à partir des formes $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, et des formes $\psi_{0,m'}^{(1)}$, et $\psi_{0,m'}^{(11)}$, avec $m' < m$.
(Il restera ensuite à s'intéresser à la construction des formes $\psi_{0,m}^{(1)}$, et $\psi_{0,m}^{(11)}$, pour $m \leq 72$, et en particulier à celle des formes $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, pour j dans $\mathcal{D}$.)

Pour cela, on tente de construire des formes notées $\Psi_{m,D}^{(1)}$, D divisant 24, et $\Psi_{m,D'}^{(11)}$, D' divisant 72, comme polynômes en les formes $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, $\psi_{0,m-j}^{(1)}$ et $\psi_{0,m-j}^{(11)}$ pour j dans $\mathcal{D}$, à coefficients entiers, vérifiant :

$$[\Psi_{m,D}^{(1)}]_{q^0} = \frac{m}{D}(P_1 + P_2) + \frac{24-6m}{D}$$

$$[\Psi_{m,D'}^{(11)}]_{q^0} = \frac{m}{D'}(P_1 P_2) + \frac{72-9m}{D'},$$

où $D = (24{,}m)$, et $D' = (72{,}m)$. On posera alors :

$$\psi_{0,m}^{(1)} := \Psi_{m,D}^{(1)}, \text{ avec } D = (24{,}m)$$

$$\psi_{0,m}^{(11)} := \Psi_{m,D'}^{(11)}, \text{ avec } D' = (72{,}m).$$

Proposition-Définition 5.9.1. *Soit m un entier naturel supérieur à 72 fixé.*
On suppose construites les formes $\Phi_j^{(1)}$ et $\Phi_j^{(11)}$, pour j appartenant à $\mathcal{D}$, ainsi que les formes $\psi_{0,m'}^{(1)}$ et $\psi_{0,m'}^{(11)}$ pour $m' < m$.

(1) On pose :

$$\Psi_{m,I}^{(1)} := 8\ \tilde{\psi}_{m-24}^{(1)}\Phi_{24}^{(1)} - 37\ \tilde{\psi}_{m-12}^{(1)}\Phi_{12}^{(1)} + 33\ \tilde{\psi}_{m-8}^{(1)}\Phi_{8}^{(1)} - 4\ \tilde{\psi}_{m-3}^{(1)}\Phi_{3}^{(1)}$$

Alors :

$$[\Psi_{m,I}^{(1)}]_{q^0} = m(P_1 + P_2) + 24 - 6m.$$

- Si $m \equiv 0 \bmod 2$, alors $2 \mid (m-12{,}24)$, $2 \mid (m-8{,}24)$, donc $\frac{1}{2}\Psi_{m,I}^{(1)}$ est encore un polynôme en les formes du type $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, $\psi_{0,m-j}^{(1)}$ et $\psi_{0,m-j}^{(11)}$ à coefficients entiers.
On peut donc poser :

$$\Psi_{m,II}^{(1)} := \frac{1}{2}\Psi_{m,I}^{(1)},$$

et on a :

$$[\Psi_{m,II}^{(1)}]_{q^0} = \frac{m}{2}(P_1 + P_2) + \frac{24 - 6m}{2}.$$

- De même, si $m \equiv 0 \bmod k$, avec k égal à 3, 4, 6 ou 12, alors $k \mid 8(m-24{,}24)$, $k \mid 37(m-12{,}24)$, $k \mid 33(m-8{,}24)$, et $k \mid 4(m-3{,}24)$, donc $\frac{1}{k}\Psi_{m,I}^{(1)}$ est encore un polynôme en les formes du type $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, $\psi_{0,m-j}^{(1)}$ et $\psi_{0,m-j}^{(11)}$ à coefficients entiers.
On peut donc poser :

$$\Psi_{m,III}^{(1)} := \frac{1}{3}\Psi_{m,I}^{(1)},$$

$$\Psi_{m,IV}^{(1)} := \frac{1}{4}\Psi_{m,I}^{(1)},$$

$$\Psi_{m,VI}^{(1)} := \frac{1}{6}\Psi_{m,I}^{(1)},$$

$$\Psi_{m,XII}^{(1)} := \frac{1}{12}\Psi_{m,I}^{(1)}.$$

- Les fonctions $\frac{1}{8}\Psi_{m,I}^{(1)}$, et $\frac{1}{24}\Psi_{m,I}^{(1)}$ ne sont pas des polynômes en les formes du type $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, $\psi_{0,m-j}^{(1)}$ et $\psi_{0,m-j}^{(11)}$ à coefficients entiers a priori. On ne peut donc pas obtenir les formes $\Psi_{m,VIII}^{(1)}$ et $\Psi_{m,XXIV}^{(1)}$ de cette façon.

(2) On pose :

$$\Psi_{m,I}^{(11)} := 2\ \tilde{\psi}_{m-18}^{(11)}\Phi_{18}^{(11)} - 3\ \tilde{\psi}_{m-24}^{(11)}\Phi_{24}^{(11)} + \tilde{\psi}_{m-36}^{(1)}\Phi_{36}^{(11)}$$

Alors :

$$[\Psi_{m,I}^{(11)}]_{q^0} = mP_1P_2 + 72 - 9m.$$

- *Si* $m \equiv 0 \mod 2$, *alors* $2 \mid (m-24{,}72)$, $2 \mid (m-36{,}72)$, *donc* $\frac{1}{2}\Psi^{(11)}_{m,I}$ *est encore un polynôme en les formes du type* $\Phi^{(1)}_j$, $\Phi^{(11)}_j$, $\psi^{(1)}_{0,m-j}$ *et* $\psi^{(11)}_{0,m-j}$ *à coefficients entiers. On peut donc poser :*

$$\Psi^{(11)}_{m,II} := \frac{1}{2}\Psi^{(11)}_{m,I},$$

et on a :

$$[\Psi^{(1)}_{m,II}]_{q^0} = \frac{m}{2}P_1P_2 + \frac{72-9m}{2}.$$

- *De même, si* $m \equiv 0 \mod k$, *avec* k *égal à* 3, 4, 6, 9, 12, 18, *ou* 36, *alors* $k \mid 2(m-18{,}72)$, $k \mid 3(m-24{,}72)$, $k \mid (m-36{,}72)$, *donc* $\frac{1}{k}\Psi^{(11)}_{m,I}$ *est encore un polynôme en les formes du type* $\Phi^{(1)}_j$, $\Phi^{(11)}_j$, $\psi^{(1)}_{0,m-j}$ *et* $\psi^{(11)}_{0,m-j}$ *à coefficients entiers. On peut donc poser :*

$$\begin{array}{ll}
\Psi^{(11)}_{m,III} := \frac{1}{3}\Psi^{(11)}_{m,I} & \Psi^{(11)}_{m,IV} := \frac{1}{4}\Psi^{(11)}_{m,I} \\
\Psi^{(11)}_{m,VI} := \frac{1}{6}\Psi^{(11)}_{m,I} & \Psi^{(11)}_{m,IX} := \frac{1}{9}\Psi^{(11)}_{m,I} \\
\Psi^{(11)}_{m,XII} := \frac{1}{12}\Psi^{(11)}_{m,I} & \Psi^{(11)}_{m,XVIII} := \frac{1}{18}\Psi^{(11)}_{m,I} \\
\Psi^{(11)}_{m,XXXVI} := \frac{1}{36}\Psi^{(11)}_{m,I} &
\end{array}$$

- *Les fonctions* $\frac{1}{8}\Psi^{(11)}_{m,I}$, $\frac{1}{24}\Psi^{(11)}_{m,I}$, *et* $\frac{1}{72}\Psi^{(11)}_{m,I}$ *ne sont pas des polynômes en les formes du type* $\Phi^{(1)}_j$, $\Phi^{(11)}_j$, $\psi^{(1)}_{0,m-j}$ *et* $\psi^{(11)}_{0,m-j}$ *à coefficients entiers a priori.*
On ne peut donc pas obtenir les formes $\Psi^{(11)}_{m,VIII}$, $\Psi^{(11)}_{m,XXIV}$, $\Psi^{(11)}_{m,LXXII}$ *de cette façon.*

Lemme 5.9.1. *Coefficient* $[\ ]_{q^0}$ *des formes* $\Phi^{(1)}_j$ *et* $\Phi^{(11)}_j$, *pour* j *appartenant à* $\mathcal{D}$.

$$\begin{array}{ll}
[\Phi^{(1)}_1]_{q^0} = P_1+P_2+18 & \\
[\Phi^{(1)}_2]_{q^0} = P_1+P_2+6 & [\Phi^{(11)}_2]_{q^0} = P_1P_2+27 \\
[\Phi^{(1)}_3]_{q^0} = P_1+P_2+2 & [\Phi^{(11)}_3]_{q^0} = P_1P_2+15 \\
[\Phi^{(1)}_4]_{q^0} = P_1+P_2 & [\Phi^{(11)}_4]_{q^0} = P_1P_2+9 \\
[\Phi^{(1)}_6]_{q^0} = P_1+P_2-2 & [\Phi^{(11)}_6]_{q^0} = P_1P_2+3 \\
[\Phi^{(1)}_8]_{q^0} = P_1+P_2-3 & [\Phi^{(11)}_8]_{q^0} = P_1P_2 \\
[\Phi^{(1)}_9]_{q^0} = 3(P_1+P_2)-10 & [\Phi^{(11)}_9]_{q^0} = P_1P_2-1 \\
[\Phi^{(1)}_{12}]_{q^0} = P_1+P_2-4 & [\Phi^{(11)}_{12}]_{q^0} = P_1P_2-3 \\
[\Phi^{(1)}_{18}]_{q^0} = 3(P_1+P_2)-14 & [\Phi^{(11)}_{18}]_{q^0} = P_1P_2-5 \\
[\Phi^{(1)}_{24}]_{q^0} = P_1+P_2-5 & [\Phi^{(11)}_{24}]_{q^0} = P_1P_2-6 \\
[\Phi^{(1)}_{36}]_{q^0} = 3(P_1+P_2)-16 & [\Phi^{(11)}_{36}]_{q^0} = P_1P_2-7 \\
[\Phi^{(1)}_{72}]_{q^0} = 3(P_1+P_2)-17 & [\Phi^{(11)}_{72}]_{q^0} = P_1P_2-8
\end{array}$$

Proposition 5.9.1. *Soit* $m \geq 72$. *On pose :*

$$W := \sum_{j\in\mathcal{D}} a_j[\tilde{\psi}^{(1)}_{m-j}]_{q^0}[\Phi^{(1)}_j]_{q^0} + \sum_{j\in\mathcal{D}} b_j[\tilde{\psi}^{(11)}_{m-j}]_{q^0}[\Phi^{(1)}_j]_{q^0} + \sum_{j\in\mathcal{D}} u_j[\tilde{\psi}^{(1)}_{m-j}]_{q^0}[\Phi^{(11)}_j]_{q^0}$$
$$+ \sum_{j\in\mathcal{D}} v_j[\tilde{\psi}^{(11)}_{m-j}]_{q^0}[\Phi^{(11)}_j]_{q^0}.$$

On note :

$$a_j := \frac{a'_j}{(24{,}m-j)}, \quad b_j := \frac{b'_j}{(72{,}m-j)}, \quad u_j := \frac{u'_j}{(24{,}m-j)}, \quad v_j := \frac{v'_j}{(72{,}m-j)}$$

Alors, si $m \equiv 0 \ mod\ 8$, *les équations*

$$W = \frac{m}{D}(P_1 + P_2) + \frac{24 - 6m}{D}$$

$$W = \frac{m}{D'}P_1P_2 + \frac{72 - 9m}{D'}$$

n'admettent aucune solution entière en les inconnues a'_j, b'_j, u'_j, v'_j.

Preuve.
On utilise le logiciel maple pour étudier la résolution des systèmes obtenus.

Corollaire 5.9.1.
Pour $(m,24) = 8$, *on ne peut pas construire les formes* $\psi_{0,m}^{(1)}$ *et* $\psi_{0,m}^{(11)}$ *comme polynômes en les formes du type* $\Phi_j^{(1)}$, $\Phi_j^{(11)}$, $\psi_{0,m-j}^{(1)}$ *et* $\psi_{0,m-j}^{(11)}$, *à coefficients entiers.*

Preuve.
La proposition précédente montre qu'il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients convenables des polynômes $[\ ]_{q^0}$ donnant $[\psi_{0,m}^{(1)}]_{q^0}$ ou $[\psi_{0,m}^{(11)}]_{q^0}$.

Remarque 5.9.1. L'étude du terme $[\ ]_{q^0}$ ne semble pas suffisante pour résoudre le problème de la structure sur $\mathbb{Z}$, contrairement à ce qui se produit dans le cas de l'étude de l'anneau gradué des formes classiques à une variable $J_{0,\star}^{A_1,f,\mathbb{Z}}$ (voir [G1]).
Il faut peut-être apporter une correction avec des fonctions de $J_{0,\star}^{W(A_2),f}(q)$ pour obtenir des fonctions à coefficients de Fourier entiers, comme le suggère l'étude du $\mathbb{Z}$-module $J_{0,4}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$ au paragraphe 5.7.
On ne peut apparemment pas réduire le problème de la structure sur $\mathbb{Z}$ à l'étude de $[\ ]_{q^0}$.

Chapitre 6

Applications

6.1 Construction de formes de Jacobi à l'aide du produit de Borcherds

On applique dans ce paragraphe la construction de produits automorphes introduite par R.Borcherds (voir [Bo1], théorème 6.5, [Bo2]). V.Gritsenko et V.Nikulin ont proposé une variante qui utilise les formes de Jacobi à une variable (voir [GN II], théorème 2.1 et [GN3]), rappelée également dans un cours de V.Gritsenko [G3]. Le cas des formes de Jacobi à n variables a été traité dans le cours [G4].
Dans la suite, on suit le principe de cette construction dans le cas des formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2.

Notation 6.1.1. *Pour l appartenant à $\widetilde{A_2}$, écrit $l = l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2$ dans la base $\{\lambda_1,\, \lambda_2\}$ de $\widetilde{A_2}$, la notation $l > 0$ signifiera ($l_1 > 0$) ou ($l_1 = 0$ et $l_2 > 0$).*

Proposition 6.1.1.
Soit m un entier naturel non nul et Φ une forme de Jacobi faible, de poids 0, d'indice m, à coefficients de Fourier entiers :

$$\Phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ l \in \widetilde{A_2}}} c(n,l)\; q^n e^{2\pi i <l,z>} \quad \in \; J_{0,m}^{A_2,f,\mathbb{Z}}.$$

On considère le produit de Borcherds Π_Φ défini par :

$$\Pi_\Phi(\tau,z) := \prod_{l>0} \vartheta(\tau, <z,l>)^{c(0,l)}.$$

Alors, la fonction Π_Φ appartient à $J_{\frac{A'}{2},mA}^{A_2,mer}(v_\eta^{3A'} \ltimes \chi_\Phi)$,
où $A := \frac{1}{24}\sum_l c(0,l)$, $A' := \sum_{l>0} c(0,l)$, et $\chi_\Phi(\alpha,\beta) := e^{\pi i m A(<\alpha,\alpha>+<\beta,\beta>)}$.
La forme Π_Φ admet pour pôles les points (τ,z) où $< z,l >$ appartient à $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, pour un $l > 0$ vérifiant $c(0,l) < 0$.
En particulier, si tous les coefficients $c(0,l)$ de la forme Φ sont positifs, la forme Π_Φ est une forme de Jacobi faible.

Preuve.
La démonstration de cette proposition repose sur la propriété suivante, soulignée notamment par V.Gritsenko au cours d'un groupe de travail, et qui n'est autre qu'une variante

du corollaire 1.2.1, obtenue en considérant la partie quadratique en la variable z de la “correction automorphe ” $e^{-4\pi^2 mG_2(\tau)<z,z>}\Phi(\tau,z)$. Pour tous les éléments z, z' de $A_2\otimes\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{l>0} c(0,l) < z',l >< z,l >= mA < z,z' > \quad (\star\star).$$

Cette propriété permet de constater que $\{c(0,l),\ l\}$ constitue un système de vecteurs au sens donné par R.Borcherds : $c(0,l)=c(0,-l)$ et l'application $z\mapsto \sum_l c(0,l) < z,l >^2$ est constante sur $B_1=\{\ z\in A_2\otimes\mathbb{R},\ < z,z >= 1\ \}$.
Ceci permet de vérifier que le produit ainsi construit est bien une forme de Jacobi, avec les caractéristiques indiquées (voir [Bo1] et [GN II]).

Remarque 6.1.1. Cette propriété reste valable pour toute forme de Jacobi faible définie par rapport à un réseau entier L. On peut donc généraliser cette construction et obtenir, à l'aide de produits de ce type, des formes de Jacobi pour tout réseau entier L.

Proposition 6.1.2. *Comportement sous l'action du groupe $W(A_2)$.*
Soit Φ une forme de Jacobi faible, de poids 0, d'indice m, à coefficients de Fourier entiers, $W(A_2)$-invariante.

On reprend les notations précédentes, et on pose $S:=\sum_{a=1}^{+\infty} c(0,\ a\alpha_1)$. Alors :
- si S est un nombre pair, la forme de Jacobi Π_Φ est $W(A_2)$-invariante
- si S est un nombre impair, la forme de Jacobi Π_Φ est $W(A_2)$-anti-invariante.

Preuve.
D'après la définition de Π_Φ et de la fonction ϑ, on peut écrire :

$$\Pi_\Phi(\tau,z)=\Big(\prod_{l>0}(iq^{\frac{1}{8}})^{c(0,l)}(e^{\pi i<z,l>}-e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big)\times\Big(\prod_{l>0}\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)^{c(0,l)}\Big)$$
$$\times\Big(\prod_{l>0}\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m\ e^{-2\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big)\times\Big(\prod_{l>0}\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m\ e^{2\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big)$$

ou encore, en utilisant $c(0,l)=c(0,-l)$, (valable puisque Φ est de poids pair) :

$$\Pi_\Phi(\tau,z)=\Big(iq^{\frac{1}{8}}\times\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)\Big)^{A'}\times\Big(\prod_{l\neq 0}\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m\ e^{2\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big)$$
$$\times\Big(\prod_{l>0}(e^{\pi i<z,l>}-e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big).$$

Par hypothèse, Φ est $W(A_2)$-invariante, ce qui permet d'affirmer que pour tout σ appartenant à $W(A_2)$, et pour tout l de $\widetilde{A_2}$, on a $c(0,\sigma.l)=c(0,l)$.
Les deux premiers produits infinis qui apparaissent dans l'écriture ci-dessus sont donc $W(A_2)$-invariants, et il reste à étudier le produit

$$f_\Phi(\tau,z):=\Big(\prod_{l>0}(e^{\pi i<z,l>}-e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}\Big).$$

Considérons l'action de σ_{α_1}.
Soit $l=l_1\lambda_1+l_2\lambda_2>0$ appartenant à $\widetilde{A_2}$.
On a : $\sigma_{\alpha_1}(l)=-l_1\lambda_1+(l_1+l_2)\lambda_2$.
D'après l'ordre choisi sur $\widetilde{A_2}$, ($l_1>0$) ou ($l_1=0$ et $l_2>0$).
Premier cas, supposons ($l_1=0$ et $l_2>0$).
Alors $\sigma_{\alpha_1}(l)$ est encore positif.

Si $\sigma_{\alpha_1}(l) = l$, le terme $(e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}$ est invariant sous l'action de σ_{α_1}.
Si $\sigma_{\alpha_1}(l) \neq l$, le terme $(e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}(e^{\pi i<z,\sigma_{\alpha_1}l>} - e^{-\pi i<z,\sigma_{\alpha_1}l>})^{c(0,\sigma_{\alpha_1}l)}$ qui intervient dans f_Φ est lui aussi invariant sous l'action de σ_{α_1}.

Deuxième cas, supposons ($l_1 > 0$).
Alors $\sigma_{\alpha_1}(l)$ est négatif, et $-\sigma_{\alpha_1}(l)$ est positif.
Si $-\sigma_{\alpha_1}(l) \neq l$, le terme $(e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}(e^{\pi i<z,-\sigma_{\alpha_1}l>} - e^{-\pi i<z,-\sigma_{\alpha_1}l>})^{c(0,-\sigma_{\alpha_1}l)}$ qui intervient dans f_Φ est invariant sous l'action de σ_{α_1}.
Si $-\sigma_{\alpha_1}(l) = l$, seul le terme $(e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}$ apparaît et devient $(-1)^{c(0,l)}(e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)}$ sous l'action de σ_{α_1}.
Or $-\sigma_{\alpha_1}(l) = l$ si et seulement si $l_1 = -2l_2$, ou encore $l = -l_2(2\lambda_1 - \lambda_2)$,
donc la seule partie non forcément invariante sous l'action de σ_{α_1} de la fonction f_Φ, est le produit :

$$g_\Phi(\tau,z) := \Big(\prod_{l=l_2(2\lambda_1-\lambda_2)>0,} (e^{\pi i<z,l>} - e^{-\pi i<z,l>})^{c(0,l)} \Big)$$

et on a, en posant $S_{\alpha_1} := \sum_{a=1}^{+\infty} c(0,\, a\ (2\lambda_1 - \lambda_2))$:

$$g_\Phi(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) = (-1)^{S_{\alpha_1}} g_\Phi(\tau,z),$$

d'où finalement :

$$\Pi_\Phi(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) = (-1)^{S_{\alpha_1}} \Pi_\Phi(\tau,z).$$

On fait une étude analogue pour l'action de σ_{α_2}.
On a : $\sigma_{\alpha_2}(l) = (l_1 + l_2)\lambda_1 - l_2\lambda_2$.
On a $l > 0$ et $\sigma_{\alpha_2}(l) < 0$ uniquement dans le cas où $l_1 > 0$ et $l_1 + l_2 < 0$, et on a de plus $-\sigma_{\alpha_2}(l) = l$ (seuls cas qui entrainent éventuellement un changement de signe de f_Φ) si et seulement si $l = l_1(\lambda_1 - 2\lambda_2)$.
On obtient donc, en posant $S_{\alpha_2} := \sum_{a=1}^{+\infty} c(0,\, a\ (\lambda_1 - 2\lambda_2))$,

$$\Pi_\Phi(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) = (-1)^{S_{\alpha_2}} \Pi_\Phi(\tau,z).$$

Or $S_{\alpha_2} = S_{\alpha_1}$, puisque $\lambda_1 - 2\lambda_2 = -\alpha_2 = \sigma_{\alpha_1+\alpha_2}.\alpha_1 = \sigma_{\alpha_1+\alpha_2}.(2\lambda_1 - \lambda_2)$, et que Φ est $W(A_2)$-invariante.
En notant S cette somme, on a finalement :

$$\Pi_\Phi(\tau,\sigma_{\alpha_2}z) = (-1)^S \Pi_\Phi(\tau,z)$$

$$\Pi_\Phi(\tau,\sigma_{\alpha_1}z) = (-1)^S \Pi_\Phi(\tau,z),$$

ce qui permet de déduire le résultat annoncé.

Remarque 6.1.2. Cette propriété se généralise à tout réseau de racines L de la façon suivante. Soient L un réseau de racines, $W(L)$ son groupe de Weyl, Φ une forme de Jacobi faible de poids 0, à coefficients de Fourier entiers, définie relativement à ce réseau L. Soit α une racine quelconque du réseau L, on note $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha := \widetilde{L} \cap \mathbb{Z}\ \frac{\alpha}{2}$.
(Plus précisément, on a :

$$\mathcal{E}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}\ \alpha, & \text{si la base de racines n'est pas orthogonale} \\ \mathbb{Z}\ \frac{\alpha}{2}, & \text{si la base de racines est orthogonale} \end{cases}$$

car si α et α' sont deux éléments d'une base de racines, alors $<\alpha,\alpha'>$ vaut 0, 1 ou 2, voir [E].)
On note encore S la somme $S := \sum_{l>0,\ l\in\mathcal{E}_\alpha} c(0,l)$, où $l = l_1\lambda_1+\cdots+l_r\lambda_r$ écrit dans le système de poids fondamental associé à une base de racines de L, est dit *positif* si $(l_1,\cdots,l_r)$ est positif pour l'ordre lexicographique. Cette somme est indépendante de la racine α choisie. Alors, si S est un nombre pair, la forme $\Pi_\Phi(\tau,z) := \prod_{l>0} \vartheta(\tau,<z,l>)^{c(0,l)}$ est $W(L)$-invariante, et si S est impair, Π_Φ est $W(L)$-anti-invariante.

Pour démontrer cette propriété, on tient le même raisonnement que ci-dessus, en constatant qu'un changement de signe lors de l'action de σ_α n'intervient que dans le cas où $l>0$ est tel que $\sigma_\alpha l = -l$, ou encore l appartient à $\mathbb{Z}\frac{\alpha}{2}$, ce qui permet d'écrire, en posant $S_\alpha := \sum_{l>0,\ l\in\mathcal{E}_\alpha} c(0,l)$:

$$\Pi_\Phi(\tau,\sigma_\alpha z) = (-1)^{S_\alpha}\Pi_\Phi(\tau,z).$$

Il reste à vérifier que la somme S_α ne dépend pas de la racine α choisie.
Soit α' une autre racine du réseau L. Il existe alors σ appartenant à $W(L)$ tel que $\alpha' = \sigma\alpha$.
Par définition, $\mathcal{E}_{\alpha'} = \{ \frac{a}{2}\ \alpha' \ /\ a\in\mathbb{Z},\ \frac{a}{2}\ \alpha' \in \widetilde{L} \} \ = \ \sigma\Big(\mathcal{E}_\alpha\Big)$.
En exploitant une nouvelle fois les propriétés $c(0,l) = c(0,\sigma.l)$ et $c(0,-l) = c(0,l)$ des coefficients de Fourier de Φ, on a donc :

$$\begin{aligned}
S_{\alpha'} &= \sum_{l>0,\ l\in\mathcal{E}_{\alpha'}} c(0,l) \ = \sum_{\sigma.l>0,\ l\in\mathcal{E}_\alpha} c(0,\sigma.l) \ = \sum_{\sigma.l>0,\ l\in\mathcal{E}_\alpha} c(0,l) \\
&= \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l>0 \\ \sigma.l>0}} c(0,l) + \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l<0 \\ \sigma.l>0}} c(0,l) \ = \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l>0 \\ \sigma.l>0}} c(0,l) + \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l<0 \\ \sigma.l>0}} c(0,-l) \\
&= \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l>0 \\ \sigma.l>0}} c(0,l) + \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l>0 \\ \sigma.l<0}} c(0,l), \ \text{car } -\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha
\end{aligned}$$

donc $S_{\alpha'} = \sum_{\substack{l\in\mathcal{E}_\alpha \\ l>0}} c(0,l) \ = \ S_\alpha$, ce qui achève la démonstration.

La proposition suivante donne quelques exemples de formes obtenues par cette construction en utilisant les premières formes de Jacobi relatives au réseau A_2, à coefficients de Fourier entiers, de poids 0, construites dans les chapitres précédents.

Proposition 6.1.3.
1) Si Φ appartient à $J_{0,1}^{A_2,f,\mathbb{Z}}$, alors $\Pi_\Phi(\tau,z) = (-i\eta(\tau)^9)^{c(0,\lambda_1)}(a_{-3,1}(\tau,z))^{c(0,\lambda_1)}$.
En particulier, $\Pi_{\psi_{0,1}^{(1)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)$ appartient à $J_{\frac{3}{2},1}^{W(A_2),f}(v_\eta^9)$.

2) Si Φ appartient à $J_{0,2}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$, alors :
$\Pi_\Phi(\tau,z) = \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)\Big)^{c(0,\lambda_1)} \times \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,2z)\Big)^{c(0,2\lambda_1)} \times \Big(-i\eta(\tau)\mathcal{A}(\tau,z)\Big)^{c(0,\lambda_1+\lambda_2)}.$

En particulier :

$$\Pi_{\psi_{0,2}^{(1)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)$$

$$\Pi_{\psi_{0,2}^{(11)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)\mathcal{A}(\tau,z)$$

$$\Pi_{\psi_{0,2}^{(2)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,2z) \times \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)\Big)^2$$

3) Si Φ appartient à $J_{0,3}^{W(A_2),f,\mathbb{Z}}$, alors :

$$\begin{aligned}\Pi_\Phi(\tau,z) = &\Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)\Big)^{c(0,\lambda_1)} \times \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,2z)\Big)^{c(0,2\lambda_1)} \\ &\times \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,3z)\Big)^{c(0,3\lambda_1)} \times \Big(-i\eta(\tau)\mathcal{A}(\tau,z)\Big)^{c(0,\lambda_1+\lambda_2)} \\ &\times \Big(\vartheta(\tau,z_1+2z_2)\vartheta(\tau,3z_1-2z_2)\vartheta(\tau,2z_1+z_2)\vartheta(\tau,2z_1-3z_2)\vartheta(\tau,3z_1-z_2)\vartheta(\tau,z_1-3z_2) \Big)^{c(0,\lambda_1+2\lambda_2)}.\end{aligned}$$

En particulier :

$\Pi_{\psi_{0,3}^{(1)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)$

$\Pi_{\psi_{0,3}^{(11)}}(\tau,z) = -i\eta(\tau)\mathcal{A}(\tau,z)$

$\Pi_{\psi_{0,3}^{(12)}}(\tau,z) = \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,z)\Big)^5 \times \Big(-i\eta(\tau)^9 a_{-3,1}(\tau,2z)\Big)^2 \times \Big(\vartheta(\tau,z_1+2z_2)\vartheta(\tau,3z_1 - 2z_2)\vartheta(\tau,2z_1+z_2)\vartheta(\tau,2z_1-3z_2)\vartheta(\tau,3z_1-z_2)\vartheta(\tau,z_1-3z_2) \Big)$

4) L'utilisation de formes d'indice 4 donne encore des formes qui s'expriment à l'aide des précédentes, mais un multiple entier de la forme $\psi_{0,4}^{(13)}$ par exemple, fait également apparaître le produit :

$F(\tau,z) = \vartheta(\tau,z_1+3z_2)\ \vartheta(\tau,4z_1-3z_2)\ \vartheta(\tau,3z_1+z_2)\ \vartheta(\tau,3z_1-4z_2)\ \vartheta(\tau,4z_1-z_2)\ \vartheta(\tau,z_1-4z_2)$

Preuve.

Il suffit d'appliquer la proposition 6.1.1 en utilisant la forme connue des polynômes $[\ ]_{q^0}$ pour les formes de Jacobi faibles $W(A_2)$-invariantes, à coefficients de Fourier entiers, de poids 0, d'indice 1, 2, 3, ou 4, étudiées aux paragraphes 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, en écrivant précisément les termes $< z,l >$ qui apparaissent, et en exploitant les relations données à la remarque 2.2.1. (Voir la proposition-définition 2.5.1 et la proposition 3.2.4 pour les expressions de $a_{-3,1}$ et $\mathcal{A}$.)

6.2 Relèvement exponentiel et formes modulaires réflectives

6.2.1 Etude préliminaire des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative

Notation 6.2.1. *Soient m un entier naturel et Φ appartenant à $J^{A_2,f}_{\star,m}$.*
On note $f(n,l)$ ses coefficients de Fourier.
On notera $N_m(n,l)$ la norme hyperbolique correspondante, c'est à dire :

$$N_m(n,l) := 2nm - < l,l > .$$

Lemme 6.2.1. *Système de représentants de $G_m(A_2)$.*
(Voir les lemmes 1.2.1 et 3.1.4.)
Cas où $m = 1$.
$\mathcal{S}_1 := \{\ 0,\ \lambda_2,\ -\lambda_2\}$ est un système de représentants de $\widetilde{A_2}/A_2$.
Le tableau suivant donne la norme de ses éléments.

l	0	λ_2	$-\lambda_2$
$< l,l >$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Cas où $m = 2$.
$\mathcal{S}_2 := \{\ 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \pm\lambda_1,\ \pm(\lambda_1-\alpha_1),\ \pm(\lambda_1-\alpha_2),\ \pm(\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2))\}$ est un système de représentants de $\widetilde{A_2}/2A_2$.
Le tableau suivant donne la norme de ses éléments.

l	0	$\pm\lambda_1$	$\pm(\lambda_1-\alpha_1)$	$\pm(\lambda_1-(\alpha_1+\alpha_2))$	α_1	α_2	$\alpha_1+\alpha_2$	$\pm(\lambda_1-\alpha_2)$
$< l,l >$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	2	2	$\frac{8}{3}$

Cas où $m = 3$.
$\mathcal{S}_3 := \{\ 0,\ \pm\lambda_2,\ \pm(\alpha_2-\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-2\lambda_2),\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_2-3\lambda_2),\ \pm(3\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm2\lambda_2,\ \pm(2\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(4\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2),\ \pm(\alpha_2+\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-4\lambda_2),\ \pm3\lambda_2\ \}$ est un système de représentants de $\widetilde{A_2}/3A_2$.

l	0	$\pm\lambda_2$	$\pm(\alpha_2-\lambda_2)$	$\pm(\alpha_2-2\lambda_2)$	$\pm\alpha_2$	$\pm(\alpha_2-3\lambda_2)$	$\pm(-2\alpha_2+3\lambda_2)$
$< l,l >$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	2	2

$\pm2\lambda_2$	$\pm(2\lambda_2-2\alpha_2)$	$\pm(4\lambda_2-2\alpha_2)$	$\pm(\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)$	$\pm(\alpha_2+\lambda_2)$	$\pm(\alpha_2-4\lambda_2)$	$\pm3\lambda_2$
$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	6

Cas où $m = 4$.
$\mathcal{S}_4 := \{\ 0,\ \pm\lambda_2,\ \pm(\alpha_2-\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-2\lambda_2),\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_2-3\lambda_2),\ \pm(-2\alpha_2+3\lambda_2),\ \pm2\lambda_2,\ \pm(2\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(4\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(\lambda_2+\alpha_2),\ \pm(-3\alpha_2+4\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-4\lambda_2),\ \pm(-3\alpha_2+5\lambda_2),\ \pm(-2\alpha_2+\lambda_2),\ \pm(-2\alpha_2+5\lambda_2),\ \pm3\lambda_2,\ \pm(-3\alpha_2+6\lambda_2),\ 6\lambda_2-4\alpha_2,\ 2\alpha_2,\ -2\alpha_2+6\lambda_2,\ \pm(5\lambda_2-4\alpha_2),\ \pm(\alpha_2+2\lambda_2),\ \pm(-\alpha_2+5\lambda_2),\ \pm4\lambda_2,\ \pm(-3\alpha_2+3\lambda_2)\ \}$ est un système de représentants de $\widetilde{A_2}/4A_2$.

l	0	$\pm\lambda_2$	$\pm(\alpha_2-\lambda_2)$	$\pm(\alpha_2-2\lambda_2)$	$\pm\alpha_2$	$\pm(\alpha_2-3\lambda_2)$	$\pm(-2\alpha_2+3\lambda_2)$
$< l,l >$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	2	2

$\pm 2\lambda_2$	$\pm(2\lambda_2 - 2\alpha_2)$	$\pm(4\lambda_2 - 2\alpha_2)$	$\pm(\lambda_2 + \alpha_2)$	$\pm(-3\alpha_2 + 4\lambda_2)$	$\pm(\alpha_2 - 4\lambda_2)$
$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$

$\pm(-3\alpha_2 + 5\lambda_2)$	$\pm(-2\alpha_2 + \lambda_2)$	$\pm(-2\alpha_2 + 5\lambda_2)$	$6\lambda_2 - 4\alpha_2$	$2\alpha_2$	$-2\alpha_2 + 6\lambda_2$
$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	8	8	8

$\pm 3\lambda_2$	$\pm(-3\alpha_2 + 6\lambda_2)$	$\pm(-3\alpha_2 + 3\lambda_2)$	$\pm(5\lambda_2 - 4\alpha_2)$	$\pm(\alpha_2 + 2\lambda_2)$	$\pm(-\alpha_2 + 5\lambda_2)$	$\pm 4\lambda_2$
6	6	6	$\frac{26}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{32}{3}$

Proposition 6.2.1. *Coefficients de Fourier dont la norme hyperbolique est négative.*
Soient m un entier naturel et Φ appartenant à $J^{A_2,f}_{\star,m}$.
On note $f(n,l)$ les coefficients de Fourier de la forme Φ.
Supposons $f(n,l) \neq 0$ et $N_m(n,l) < 0$.
On a alors les résultats suivants.
Si $m = 1$:

$$f(n,l) = f(0,h), \text{ avec } h \text{ appartenant à } \{\pm\lambda_2\}, \text{ et } N_m(n,l) = -\frac{2}{3}$$

Si $m = 2$:

$$f(n,l) = \begin{cases} f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm\lambda_1, \pm(\lambda_1 - \alpha_1), \pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2))\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -\frac{2}{3} \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -2 \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm(\lambda_1 - \alpha_2)\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Si $m = 3$:

$$f(n,l) = \begin{cases} f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm\lambda_2, \pm(\lambda_2 - \alpha_2), \pm(2\lambda_2 - \alpha_2)\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -\frac{2}{3} \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm\alpha_2, \pm(\alpha_2 - 3\lambda_2), \pm(3\lambda_2 - 2\alpha_2)\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -2 \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm(2\lambda_2), \pm(2\lambda_2 - 2\alpha_2), \pm(4\lambda_2 - 2\alpha_2)\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -\frac{8}{3} \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm(\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \lambda_2), \pm(\alpha_2 - 4\lambda_2)\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -\frac{14}{3} \\ \text{ou} & \\ f(0,h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{\pm 3\lambda_2\}, \\ & \text{et } N_m(n,l) = -6 \end{cases}$$

Si $m = 4$ *:*

$$f(n,l) = \begin{cases} f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm\lambda_2,\ \pm(\lambda_2-\alpha_2),\ \pm(2\lambda_2-\alpha_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{2}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_2-3\lambda_2),\ \pm(3\lambda_2-2\alpha_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -2 \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm(2\lambda_2),\ \pm(2\lambda_2-2\alpha_2),\ \pm(4\lambda_2-2\alpha_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{8}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm(\lambda_2+\alpha_2),\ \pm(-3\alpha_2+4\lambda_2),\ \pm(\alpha_2-4\lambda_2), \\ & \pm(-3\alpha_2+5\lambda_2),\ \pm(-2\alpha_2+\lambda_2),\ \pm(-2\alpha_2+5\lambda_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{14}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm 3\lambda_2,\ \pm(-3\alpha_2+6\lambda_2),\ \pm(-3\alpha_2+3\lambda_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -6 \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ 6\lambda_2-4\alpha_2,\ 2\alpha_2,\ -2\alpha_2+6\lambda_2 \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -8 \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm(5\lambda_2-4\alpha_2),\ \pm(\alpha_2+2\lambda_2),\ \pm(-\alpha_2+5\lambda_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{26}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(1,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm(5\lambda_2-4\alpha_2),\ \pm(\alpha_2+2\lambda_2),\ \pm(-\alpha_2+5\lambda_2) \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{2}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(0,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm 4\lambda_2 \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{32}{3} \\ \textit{ou} & \\ f(1,h), & \textit{avec } h \textit{ appartenant à } \{ \pm 4\lambda_2 \}, \\ & \textit{et } N_m(n,l) = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Preuve.
Notons $\mathcal{S}_m$ le système de représentants de $G_m(A_2)$ utilisé.
D'après le résultat du lemme 1.1.1, pour n, l donnés, $f(n,l) = f(n',h)$, où n' est un entier, h appartient à $\mathcal{S}_m$, $N_m(n,l) = N_m(n',h)$, et $l \equiv h \ mod\ mA_2$.
Si $f(n,l)$ est non nul et $N_m(n,l) < 0$, alors $f(n',h)$ est non nul, d'où $n' \geq 0$, car Φ est une forme faible, et $N_m(n',h) = 2n'm - < h,h > < 0$.
On déduit des valeurs prises par $< h,h >$ précisées dans le lemme 6.2.1, les différentes possibilités pour $f(n,l)$ décrites par cette proposition, selon la valeur de m.

6.2.2 Relèvement exponentiel

On se réfère dans ce paragraphe à l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin [GN II], dont on reprend les notations (en particulier aux résultats énoncés dans le théorème 2.1) et au cours [G4]. Le résultat principal utilisé ici est rappelé dans la proposition-définition suivante.

Proposition-Définition 6.2.1. *Soit Φ une forme de Jacobi faible, de poids 0 et à coefficients de Fourier entiers (notés $f(n,l)$), définie ici relativement au réseau A_2, d'indice noté m.*
En suivant l'article cité ci-dessus, on considère la généralisation du produit de Borcherds suivante :

$$Exp-Lift(\Phi)(\tau,z,\tau') := q^A s^C e^{2i\pi<z,B>} \prod_{\substack{n,t\in\mathbb{Z}\\ l\in\widetilde{A_2}\\ (n,l,t)>0}} (1-q^n e^{2i\pi<z,l>} s^{mt})^{f(nt,l)},$$

où $A = \frac{1}{24}\sum_l f(0,l)$, $B = \frac{1}{2}\sum_{l>0} l f(0,l)$, $C = \frac{1}{4}\sum_l <l,l> f(0,l)$, $q = e^{2i\pi\tau}$, $s = e^{2i\pi\tau'}$, *et où $(n,l,t)>0$ signifie ($t>0$) ou ($t=0$ et $n>0$) ou ($n=t=0$ et $l<0$, pour un ordre à préciser sur $\widetilde{A_2}$).*
La fonction $Exp-Lift(\Phi)$ définie sur $L\otimes\mathbb{C}$ où $L := \mathbb{Z}\oplus A_2\oplus\mathbb{Z}$, est une forme modulaire de poids $\frac{f(0,0)}{2}$, avec un système multiplicateur $v_\eta^{24A}\times\chi_C$, où χ_C est trivial dès que C est entier, pour un certain groupe isomorphe à un sous-groupe de $O(2,4)$, noté $\widetilde{\Gamma}((A_2)_m)$, et explicité au prochain paragraphe : voir la remarque 6.3.2 ([GN II]). Les diviseurs de la fonction $Exp-Lift(\Phi)$ sont des diviseurs modulaires de Humbert (diviseurs quadratiques rationnels), et chacun d'entre eux est associé à un vecteur $\vec{v}=(n,l,m)$ correspondant à un coefficient de Fourier $f(n,l)$ de Φ non nul, de norme hyperbolique $N_m(n,l) = 2nm- <l,l>$ négative.
Ces diviseurs ne dépendent en fait que de $N_m(n,l)$ et de l modulo mA_2.
La notation $H_{\vec{v}}$ ou encore $H_{-D}^{(m)}(l)$ désignera le diviseur associé à $\vec{v}=(n,l,m)$ de norme hyperbolique $-D$.
La multiplicité du diviseur est donnée par la formule :

$$M_{\vec{v}} = \sum_{j>0} f(j^2 n, jl).$$

(On peut remarquer que cette somme est finie, car pour (n,l,m) fixé de norme hyperbolique $-D$ négative, si $f(j^2n,jl)$ est non nul, on a l'inégalité $j^2(2nm- <l,l>) \geq C_m$, où C_m est la constante décrite à la proposition 1.1.2, d'où $j^2 \leq -C_m/D$.)

Remarque 6.2.1. En utilisant la relation $(\star\star)$ donnée dans la preuve de la proposition 6.1.1, appliquée successivement avec $z=z'=\alpha_1$, $z=z'=\alpha_2$, et $z=\alpha_1$, $z'=\alpha_2$, ainsi que l'égalité $<l,l>= \frac{2}{3}(<l,\alpha_1>^2 + <l,\alpha_2>^2 + <l,\alpha_1><l,\alpha_2>)$, on obtient : $C = mA$.

Remarque 6.2.2. On peut écrire (voir [GN II]) la fonction $Exp-Lift(\Phi)$ sous la forme :

$$Exp-Lift(\Phi)(\tau,z,\tau') = \eta(\tau)^{f(0,0)} \prod_{l>0}\Big(\frac{-i\vartheta(\tau,<z,l>)e^{\pi i\tau'<l,l>}}{\eta(\tau)}\Big)^{f(0,l)}$$
$$\times\, exp\Big(-\sum_{t\geq 1} t^{-1}\widetilde{\Phi}|_{T_-(t)}(\tau,z,\tau')\Big),$$

où $\widetilde{\Phi}|_{T_-(t)}$ désigne l'action de l'opérateur de Hecke $T_-(t)$ sur la fonction $e^{2i\pi m\tau'}\Phi(\tau,z)$.

Ce sont cette écriture et les propriétés du produit $\Pi_\Phi(\tau,z)$, défini à la proposition 6.1.1, qui permettent d'obtenir le système multiplicateur de la forme $Exp-Lift(\Phi)$.

De plus, si Φ est $W(A_2)$-invariante, puisque la fonction $Exp-Lift(\Phi)$ est le produit d'une fonction invariante sous l'action du groupe de Weyl $W(A_2)$ (on vérifie facilement que la partie exponentielle de cette écriture est $W(A_2)$-invariante) et de la fonction $\Pi_\Phi(\tau,z)$, d'après la proposition 6.1.2, on obtient, en rappelant la notation $S=\sum_{a=1}^{+\infty} f(0,\, a\alpha_1)$:
- si S est un nombre pair, la forme $Exp-Lift(\Phi)$ est $W(A_2)$-invariante
- si S est un nombre impair, la forme $Exp-Lift(\Phi)$ est $W(A_2)$-anti-invariante.

Le résultat de la proposition-définition joint à l'étude des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative des premières formes de Jacobi $\psi_{0,m}^{(ij)}$ (qui sont à coefficients de Fourier entiers), permet de donner les exemples suivants.

Proposition 6.2.2.
La forme $Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$ *est de poids* 9, *de système multiplicateur trivial,* $W(A_2)$-*invariante, et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2/3}^{(1)}(\lambda_2)$ *et* $H_{-2/3}^{(1)}(-\lambda_2)$, *tous deux sont de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(1)})$ *est de poids* 3, *de système multiplicateur* v_η^{12}, *et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_1+\lambda_2)$, *tous de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(2)})$ *est de poids* 27, *de système multiplicateur trivial, et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(2)}(-\lambda_1+\lambda_2)$, *de multiplicité* 3, *et* $H_{-8/3}^{(2)}(2\lambda_1)$, $H_{-8/3}^{(2)}(-2\lambda_1)$, *de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(11)})$ *est de poids* 15, *de système multiplicateur* v_η^{12}, *et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2}^{(2)}(\lambda_1+\lambda_2)$, $H_{-2}^{(2)}(\lambda_1-2\lambda_2)$, *et* $H_{-2}^{(2)}(2\lambda_1-\lambda_2)$, *de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(1)})$ *est de poids* 1, *de système multiplicateur* v_η^{8}, *et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_1+\lambda_2)$, *tous de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(2)})$ *est de poids* 15, *de système multiplicateur trivial, et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_1)$, $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2/3}^{(3)}(-\lambda_1+\lambda_2)$, *de multiplicité* 3, *et* $H_{-8/3}^{(3)}(2\lambda_1)$, $H_{-8/3}^{(3)}(-2\lambda_1)$, $H_{-8/3}^{(3)}(2\lambda_2)$, $H_{-8/3}^{(3)}(-2\lambda_2)$, $H_{-8/3}^{(3)}(2\lambda_1-2\lambda_2)$, $H_{-8/3}^{(3)}(-2\lambda_1+2\lambda_2)$, *de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(11)})$ *est de poids* 9, *de système multiplicateur trivial, et admet pour seuls diviseurs* $H_{-2}^{(3)}(\lambda_1+\lambda_2)$, $H_{-2}^{(3)}(\lambda_1-2\lambda_2)$, $H_{-2}^{(3)}(2\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2}^{(3)}(-\lambda_1-\lambda_2)$, $H_{-2}^{(3)}(-\lambda_1+2\lambda_2)$, $H_{-2}^{(3)}(-2\lambda_1+\lambda_2)$, *de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(3)})$ *est de poids* 87, *de système multiplicateur trivial, et ad-*

met pour seuls diviseurs $H^{(3)}_{-2}(\lambda_1+\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2}(\lambda_1-2\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2}(2\lambda_1-\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2}(-\lambda_1-\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2}(-\lambda_1+2\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2}(-2\lambda_1+\lambda_2)$, *de multiplicité* 6, $H^{(3)}_{-2/3}(\lambda_1)$, $H^{(3)}_{-2/3}(-\lambda_1)$, $H^{(3)}_{-2/3}(\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2/3}(-\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2/3}(\lambda_1-\lambda_2)$, $H^{(3)}_{-2/3}(-\lambda_1+\lambda_2)$, *de multiplicité* 1, *et* $H^{(3)}_{-6}(3\lambda_1)$, $H^{(3)}_{-6}(-3\lambda_1)$, *de multiplicité* 1.

La forme $Exp-Lift(\psi^{(12)}_{0,3})$ *est de poids* 81, *de système multiplicateur trivial, et admet pour seuls diviseurs les* 6 *diviseurs de type* $H^{(3)}_{-2/3}(l)$, *avec multiplicité* 7, *les* 6 *diviseurs de type* $H^{(3)}_{-14/3}(l)$, *avec multiplicité* 1, *et les* 6 *diviseurs de type* $H^{(3)}_{-8/3}(l)$, *avec multiplicité* 2.

Preuve.
On obtient ces résultats d'après l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin, en utilisant, pour trouver les vecteurs $\vec{v}$ associés à un diviseur, le coefficient connu $[\ ]_{q^0}$ de la fonction $\psi^{(ij)}_{0,m}$ concernée, ainsi que la proposition 6.2.1, qui donne pour chaque m la forme des coefficients $f(n,l)$ de norme hyperbolique négative éventuellement non nuls.
On rappelle que le diviseur $H^{(m)}_{-D}(l)$ ne dépend que de D et de l modulo mA_2. Les relations :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1=2\lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_2=\frac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2) & \alpha_2=-\lambda_1+2\lambda_2 \end{array}$$

permettent les changements de représentants modulo mA_2 effectués.

Donnons un exemple de calcul de multiplicité.
On considère le cas du diviseur $H^{(3)}_{-2/3}(\lambda_1)$, de la forme $Exp-Lift(\psi^{(1)}_{0,3})$.
Ce diviseur est associé au vecteur $\vec{v}=(0,\lambda_1,3)$.
D'après la formule rappelée ci-dessus,

$$M_{\vec{v}}=\sum_{j>0}f(0,j\lambda_1).$$

Or, d'après la proposition 6.2.1, les seuls coefficients du type $f(0,j\lambda_1)$ éventuellement non nuls sont $f(0,\pm\lambda_1)$, $f(0,\pm 2\lambda_1)$, $f(0,\pm 3\lambda_1)$.
La multiplicité s'écrit donc :

$$M_{\vec{v}}=f(0,\lambda_1)+f(0,2\lambda_1)+f(0,3\lambda_1).$$

Finalement, d'après l'égalité $[\psi^{(1)}_{0,3}]_{q^0}=2+P_1+P_2$, on obtient $M_{\vec{v}}=1$.

6.2.3 Formes réflectives

Lemme 6.2.2.
Pour un entier naturel t, *on note* L_t *le réseau de rang* 4 *muni de la forme quadratique notée* $<\,,\,>_{L_t}$, *définie par* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -tS_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où* $S_0=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{v}=(n,l,m)$ *appartenant à* L_t, *on a :*

$$<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}=2nm-t<l,l>_{A_2}.$$

Le réseau dual associé est noté $\widetilde{L_t}$, *et vérifie :* $\widetilde{L_t}=\mathbb{Z}\oplus\frac{1}{t}\left(\widetilde{A_2}\right)\oplus\mathbb{Z}$.
Soit $\vec{v}=(n,l,m)$ *non nul appartenant à* $\widetilde{L_t}$.

La réflexion $\sigma_{\vec{v}}$ associée à $\vec{v}$ est une réflexion de $\widetilde{L_t}$ si et seulement si $\vec{v}$ vérifie les conditions suivantes, pour j décrivant $\{ 1, 2 \}$:

$$(1)\ 2\frac{mn}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}},\ 2\frac{m^2}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}},\ 2\frac{n^2}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}} \qquad \in \mathbb{Z}$$

$$(2)\ 2\frac{m}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ < l,\lambda_j >_{A_2},\ 2\frac{n}{<\vec{v},\vec{v}>_{L}}\ < l,\lambda_j >_{A_2} \quad \in \mathbb{Z}$$

$$(3)\ 2\frac{<l,\lambda_j>_{A_2}}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ l,\ 2\frac{m}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ l,\ 2\frac{n}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ l \qquad \in \frac{1}{t}\left(\widetilde{A_2}\right)$$

Preuve.
On rappelle que la réflexion $\sigma_{\vec{v}}$ associée à $\vec{v}$ est définie par :

$$\sigma_{\vec{v}}(n',l',m') = (n',l',m') - 2\frac{< (n',l',m'),\vec{v} >_{L_t}}{< \vec{v},\vec{v} >_{L_t}}\ \vec{v},$$

avec $< (n',l',m'),\vec{v} >_{L_t} = n'm + nm' - t < l,l' >_{A_2}$.
Elle est donc une réflexion de $\widetilde{L_t}$ si et seulement si, pour tout (n',l',m') de $\widetilde{L_t}$, le vecteur $\frac{2}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}} < (n',l',m'),\vec{v} >_{L_t} \vec{v}$ est encore un élément de $\widetilde{L_t}$.
Il est nécessaire et suffisant que cette condition soit valable pour les éléments $(0,\frac{1}{t}\lambda_1,0)$, $(0,\frac{1}{t}\lambda_2,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, qui constituent une $\mathbb{Z}$-base de $\widetilde{L_t}$.
Il est donc nécessaire et suffisant que les vecteurs $\frac{2}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ < l,\lambda_j >_{A_2}\ \vec{v}$, pour j décrivant l'ensemble $\{1, 2\}$, $\frac{2n}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ \vec{v}$, et $\frac{2m}{<\vec{v},\vec{v}>_{L_t}}\ \vec{v}$, appartiennent au réseau dual $\widetilde{L_t}$, d'où les conditions exprimées dans le lemme.

Théorème 6.2.1.
Les diviseurs des formes $Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(1)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(11)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(1)})$, et $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(11)})$, sont tous déterminés par des réflexions de $\widetilde{L_t}$, t valant respectivement 1, 2, 2, 3, et 3, ces formes sont donc dites formes automorphes réflectives, ce qui n'est pas le cas des formes $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(2)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(12)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(2)})$ et $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(3)})$.

Preuve.
Le lemme précédent permet de vérifier que les réflexions associées aux vecteurs définissant les diviseurs des premières formes, c'est à dire par exemple aux vecteurs $(0,\lambda_1,1)$, $(0,\lambda_1,2)$, $(0,\lambda_1,3)$, $(0,\lambda_1+\lambda_2,2)$, $(0,\lambda_1+\lambda_2,3)$, etc. sont des réflexions de $\widetilde{L_t}$, t valant 1, 2 ou 3 suivant les cas. En revanche, les réflexions associées aux vecteurs $(0,2\lambda_1,2)$, $(0,2\lambda_1,3)$, $(0,3\lambda_1,3)$, par exemple, n'en sont pas.

Proposition-Définition 6.2.2.
On peut également appliquer le relèvement exponentiel aux formes de Jacobi presque holomorphes (voir [GN II] et [G3]). Considérons en particulier la forme de Jacobi notée Φ_1 et définie par :

$$\Phi_1(\tau,z) := \frac{E_8(\tau)\ E_{4,1}^{(A_2)}(\tau,z)}{\Delta(\tau)}\ -\ 27\ \psi_{0,1}^{(1)}(\tau,z).$$

Cette forme appartient à $J_{0,1}^{W(A_2),n.h,\mathbb{Z}}$, car les formes $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $\psi_{0,1}^{(1)}$ sont à coefficients de Fourier entiers, et le début de son développement de Fourier (que l'on peut vérifier grâce au logiciel pari-gp) s'écrit :

$$\Phi_1(\tau,z) = q^{-1}\ +\ 90\ + (\zeta_1\zeta_2)^{\pm 1} + (\zeta_1\zeta_2^{-2})^{\pm 1} + (\zeta_1^2\zeta_2^{-1})^{\pm 1}\ + q\ (\ \cdots\ )$$

La fonction $Exp - Lift(\Phi_1)$ est une forme modulaire de poids 45, de système multiplicateur trivial, $W(A_2)$-anti-invariante (car $S = 1$, voir la remarque 6.2.2), et admet pour seul diviseur $H_{-2}^{(1)}(0)$, associé au vecteur $\vec{v} = (-1,0,1)$.
Cette fonction est holomorphe, car $f(-1,0)$ est positif (voir [GN II] et [G3]), et son diviseur est de multiplicité 1.
La réflexion associée au vecteur $\vec{v}$ est une réflexion de $\widetilde{L}$, la forme $Exp - Lift(\Phi_1)$ est donc réflective.
Enfin, on peut remarquer que la forme $Exp - Lift(\Phi_1)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$Exp - Lift(\Phi_1)(\tau',z,\tau) = -Exp - Lift(\Phi_1)(\tau,z,\tau').$$

Preuve.
Il s'agit d'une application directe des résultats de V.Gritsenko et V.Nikulin, le diviseur et sa multiplicité sont obtenus comme précédemment. On obtient la dernière remarque en revenant à la définition du relèvement exponentiel (voir la proposition-définition 6.2.1) :

$$\begin{aligned}
Exp - Lift(\Phi_1)(\tau,z,\tau') &= q^4 e^{2\pi i<\alpha_1,z>} e^{6\pi i\tau'} \prod_{\substack{n,t \in \mathbb{Z} \\ l \in \widetilde{A_2} \\ (n,l,t)>0}} (1 - q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \\
&= \Big(q^4 \; e^{6\pi i\tau'} \prod_{\substack{t>0,\; n<0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} (1 - q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \Big) \\
&\times \Big[e^{2\pi i<\alpha_1,z>} \times \prod_{\substack{t>0,\; n>0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} (1 - q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \\
&\times \prod_{\substack{t>0,\; n=0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} (1-q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \times \prod_{\substack{t=0,\; n>0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} (1-q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \\
&\times \prod_{\substack{t=0,\; n=0 \\ l<0}} (1 - q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)} \Big]
\end{aligned}$$

On constate que l'expression entre crochets est invariante si on inverse les rôles des variables τ et τ'.
Exprimons le terme restant :

$$H(\tau,z,\tau') := q^4 \; e^{6\pi i\tau'} \prod_{\substack{t>0,\; n<0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} (1 - q^n e^{2i\pi<z,l>} e^{2\pi i t\tau'})^{f(nt,l)}$$

En utilisant le fait que le seul coefficient de Fourier $f(k,l)$ non nul avec $k < 0$ de la forme Φ_1 est le coefficient $f(-1,0) = 1$, on obtient :
$H(\tau,z,\tau') = q^4 \; e^{6\pi i\tau'} \; (\; 1 - q^{-1} e^{2\pi i\tau'} \;) \; = \; q^4 s^3 - q^3 s^4$, avec $q = e^{2\pi i\tau}$, $s = e^{2\pi i\tau'}$.
On a donc finalement : $H(\tau,z,\tau') = -H(\tau',z,\tau)$, ce qui permet d'obtenir le résulat annoncé.

Remarque 6.2.3. Algèbres de Kac-Moody.
Les diviseurs des formes réflectives $Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(1)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(11)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(1)})$, $Exp-Lift(\psi_{0,3}^{(11)})$, et $Exp-Lift(\Phi_1)$ sont tous de multiplicité 1.
En utilisant ces fonctions, il sera donc possible de décrire des algèbres de Kac-Moody hyperboliques de signature (3,1) de type de Borcherds associées. (Voir [GN] .)
On verra plus loin (voir la remarque 6.3.4), que l'on peut écrire des formules dites du “dénominateur” pour 4 de ces algèbres.

6.3 Relèvement arithmétique et formes différentielles canoniques

6.3.1 Préliminaires : premiers multiples holomorphes ou cuspidaux de quelques formes de Jacobi essentielles

Proposition 6.3.1.
Si Φ appartient à $J_{\star,1}^{A_2,f}$, alors

$$\begin{array}{lll} \eta(\tau)^8\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,1}^{A_2,hol}(v_\eta^8) \\ \eta(\tau)^k\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,1}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ \textit{pour}\ k\ \geq\ 9 \end{array}$$

Si Φ appartient à $J_{\star,2}^{A_2,f}$, alors

$$\begin{array}{lll} \eta(\tau)^{16}\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,2}^{A_2,hol}(v_\eta^{16}) \\ \eta(\tau)^k\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,2}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ \textit{pour}\ k\ \geq\ 17 \end{array}$$

Si Φ appartient à $J_{\star,3}^{A_2,f}$, alors

$$\begin{array}{lll} \eta(\tau)^{24}\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,3}^{A_2,hol} \\ \eta(\tau)^k\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ \textit{pour}\ k\ \geq\ 25 \end{array}$$

Si Φ appartient à $J_{\star,4}^{A_2,f}$, alors

$$\begin{array}{lll} \eta(\tau)^{32}\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,4}^{A_2,hol}(v_\eta^8) \\ \eta(\tau)^k\ \Phi & \textit{appartient à} & J_{\star,4}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ \textit{pour}\ k\ \geq\ 33 \end{array}$$

Preuve.
Ces résultats sont des conséquences de l'étude des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative réalisée au paragraphe précédent, et en particulier des résultats énoncés à la proposition 6.2.1.
Pour k entier naturel fixé, on notera :

$$\eta(\tau)^k = q^{\frac{k}{24}} \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\ q^j,$$

où les a_j sont des nombres entiers.
On a alors :

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^k \Phi(\tau,z) &= q^{\frac{k}{24}} \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\ q^j \Big) \Big(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \widetilde{A_2}}} f(n,l)\ q^n e^{2i\pi <l,z>} \Big) \\ &= \sum_{\substack{r \geq 0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} c(r,l)\ q^r e^{2i\pi <l,z>}. \end{aligned}$$

Supposons le coefficient $c(r,l)$ non nul.
Alors, il existe deux entiers naturels n et j, tels que $f(n,l)$ soit non nul, et $r = j + n + \frac{k}{24}$.
On a donc :

$$N_m(r,l) = 2rm - < l,l > = 2(n + \frac{k}{24}\ )\ m - < l,l > + 2jm$$

$$N_m(r,l) \geq N_m(n,l) + \frac{k}{12}\, m.$$

Si $N_m(n,l) \geq 0$, $N_m(r,l) \geq \frac{k}{12}\, m \geq 0$.
Si $N_m(n,l) < 0$, d'après la proposition 6.2.1, étant donné que $f(n,l)$ est non nul, $N_m(n,l)$ ne peut prendre que certaines valeurs. On peut donc choisir k tel que, pour tout couple (r,l) tel que $c(r,l) \neq 0$, $N_m(r,l)$ soit positif, respectivement strictement positif.
La forme $\eta(\tau)^k\Phi$ est alors une forme de Jacobi holomorphe, respectivement cuspidale.
(Donnons l'exemple du cas $m = 2$:
si $N_m(n,l) < 0$ et $f(n,l) \neq 0$, alors $N_m(n,l)$ vaut $-\frac{2}{3}$, -2, ou $-\frac{8}{3}$.
En prenant $k = 16$, (respectivement $k \geq 17$) on a donc $N_2(r,l)$ positif (respectivement strictement positif) pour tout couple (r,l) tel que $c(r,l)$ soit non nul.)

Dans certains cas, on peut améliorer ces résultats en regardant précisément quels coefficients $f(0,h)$ ou $f(1,h)$ sont non nuls.
La proposition qui suit détaille quelques exemples.

Proposition 6.3.2.
Cas où $m = 1$. (Voir le paragraphe 5.2 pour les notations.)

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^8\psi_{0,1}^{(1)} &\in J_{4,1}^{A_2,hol}(v_\eta^8) \\ \eta(\tau)^k\psi_{0,1}^{(1)} &\in J_{k/2,1}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 9 \end{aligned}$$

La forme $\eta(\tau)^7\psi_{0,1}^{(1)}$ n'est pas une forme de Jacobi holomorphe.

Cas où $m = 2$. (Voir le paragraphe 5.3.)

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^4\psi_{0,2}^{(1)} &\in J_{2,2}^{A_2,hol}(v_\eta^4) \\ \eta(\tau)^k\psi_{0,2}^{(1)} &\in J_{k/2,2}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^{12}\psi_{0,2}^{(11)} &\in J_{6,2}^{A_2,hol}(v_\eta^{12}) \\ \eta(\tau)^k\psi_{0,2}^{(11)} &\in J_{k/2,2}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^{16}\psi_{0,2}^{(2)} &\in J_{8,2}^{A_2,hol}(v_\eta^{16}) \\ \eta(\tau)^k\psi_{0,2}^{(2)} &\in J_{k/2,2}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 17 \end{aligned}$$

Les formes $\eta(\tau)^3\psi_{0,2}^{(1)}$, $\eta(\tau)^{11}\psi_{0,2}^{(11)}$, $\eta(\tau)^{15}\psi_{0,2}^{(2)}$ ne sont pas des formes de Jacobi holomorphes.

Cas où $m = 3$. (Voir le paragraphe 5.4.)

$$\eta(\tau)^k\psi_{0,3}^{(1)} \in J_{k/2,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 3$$

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^8\psi_{0,3}^{(11)} &\in J_{4,3}^{A_2,hol}(v_\eta^8) \\ \eta(\tau)^k\psi_{0,3}^{(11)} &\in J_{k/2,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 9 \end{aligned}$$

$$\eta(\tau)^k\psi_{0,3}^{(2)} \in J_{k/2,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k), \textit{ pour } k \geq 11$$

$$\eta(\tau)^k\psi_{0,3}^{(12)} \quad \in J_{k/2,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ pour\ k \geq 19$$

$$\eta(\tau)^{24}\psi_{0,3}^{(3)} \quad \in J_{12,3}^{A_2,hol}$$
$$\eta(\tau)^k\psi_{0,3}^{(3)} \quad \in J_{k/2,3}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ pour\ k \geq 25$$

Les formes $\eta(\tau)^2\psi_{0,3}^{(1)}$, $\eta(\tau)^7\psi_{0,3}^{(11)}$, $\eta(\tau)^{10}\psi_{0,3}^{(2)}$, $\eta(\tau)^{18}\psi_{0,3}^{(12)}$, $\eta(\tau)^{23}\psi_{0,3}^{(3)}$, ne sont pas des formes de Jacobi holomorphes.

Cas où $m = 4$. (Voir la proposition-définition 5.7.3.)

$$\eta(\tau)^2\chi_1 \quad \in J_{1,4}^{A_2,hol}(v_\eta^2)$$
$$\eta(\tau)^k\chi_1 \quad \in J_{k/2,4}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ pour\ k \geq 3$$

$$\eta(\tau)^8\chi_2 \quad \in J_{4,4}^{A_2,hol}(v_\eta^8)$$
$$\eta(\tau)^k\chi_2 \quad \in J_{k/2,4}^{A_2,cusp}(v_\eta^k),\ pour\ k \geq 9$$

Les formes $\eta(\tau)\chi_1$ et $\eta(\tau)^7\chi_2$ ne sont pas des formes de Jacobi holomorphes.
(Rappel : $\chi_1 = \psi_{0,4}^{(1)} + \frac{1}{8}\xi_{0,4}$, $\chi_2 = \psi_{0,4}^{(11)} - \frac{1}{8}\xi_{0,4}$.)

Preuve.
(1) Cas où $m = 1$.
Ce cas a déjà été étudié par une autre méthode, faisant appel à l'expression particulière de la forme $a_{0,1}$, à la proposition 2.5.10.

(2) Cas où $m = 2$, ou $m = 3$.
On traite ici l'exemple de la forme $\psi_{0,2}^{(1)}$, les autres résultats sont obtenus suivant un raisonnement analogue, utilisant l'expression connue du coefficient $[\ ]_{q^0}$.
On rappelle le résultat suivant : $[\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0} = 6 + P_1 + P_2$.
Les seuls coefficients $f(0,h)$ non nuls sont donc ceux tels que h appartient à l'ensemble $\{\ 0,\ \pm\lambda_1,\ \pm(\lambda_1 - \alpha_1),\ \pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2))\ \}$.
Donc, si $N_m(n,l) < 0$ et $f(n,l) \neq 0$, alors $f(n,l) = f(0,h)$ avec h appartenant à l'ensemble $\{\ \pm\lambda_1,\ \pm(\lambda_1 - \alpha_1),\ \pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2))\ \}$, et $N_m(n,l)$ vaut alors $-\frac{2}{3}$. (Voir le cas $m = 2$ de la proposition 6.2.1.)
En utilisant les notations introduites dans la preuve de la proposition précédente, pour $k = 4$, (respectivement $k \geq 5$) on a donc $N_2(r,l) \geq -\frac{2}{3} + 2\ \frac{k}{12}$ positif (respectivement strictement positif) pour tout couple (r,l) tel que le coefficient $c(r,l)$ de la forme $\eta(\tau)^k\psi_{0,2}^{(1)}$ soit non nul.
La forme $\eta(\tau)^4\psi_{0,2}^{(1)}$ est donc une forme de Jacobi holomorphe, et la forme $\eta(\tau)^5\psi_{0,2}^{(1)}$ est cuspidale.

Il reste à vérifier que la forme $\eta(\tau)^3\psi_{0,2}^{(1)}$ n'est pas une forme de Jacobi holomorphe.
On note toujours $f(n,l)$ les coefficients de Fourier de la forme $\psi_{0,2}^{(1)}$. On pose :

$$\eta(\tau)^3\psi_{0,2}^{(1)}(\tau,z) = q^{\frac{1}{8}}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j q^j\Big)\Big(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \widetilde{A_2}}} f(n,l)\ q^n e^{2i\pi<l,z>}\Big) = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ l \in \widetilde{A_2}}} c(r,l)\ q^r e^{2i\pi<l,z>}.$$

Alors on a, d'après les premiers coefficients de $\eta(\tau)$ et $\psi_{0,2}^{(1)}$:

$$c\Big(\frac{1}{8},\ \lambda_1\Big) = a_0\ f(0,\lambda_1) = 1 \neq 0,\ \text{ et }\ N_2\Big(\frac{1}{8},\ \lambda_1\Big) = 4 \times \frac{1}{8} - \frac{2}{3}\ <\ 0,$$

ce qui montre que la forme $\eta(\tau)^3\psi_{0,2}^{(1)}$ n'est pas une forme de Jacobi holomorphe.

(3) Cas où $m = 4$.
On traite ici l'exemple de la forme χ_1, le cas de χ_2 s'étudie selon un raisonnement analogue.
Le début du développement de Fourier de la forme χ_1, obtenu à l'aide du logiciel pari-gp, s'écrit :
$\chi_1(\tau,z) = \zeta_1^{\pm 1} + \zeta_2^{\pm 1} + (\zeta_1\zeta_2^{-1})^{\pm 1} + q\Big(2[\zeta_1^{\pm 1} + \zeta_2^{\pm 1} + (\zeta_1\zeta_2^{-1})^{\pm 1}] - [(\zeta_1\zeta_2^{3})^{\pm 1} + (\zeta_1^{3}\zeta_2)^{\pm 1}$
$+(\zeta_1^{-1}\zeta_2^{4})^{\pm 1} + (\zeta_1^{4}\zeta_2^{-1})^{\pm 1} + (\zeta_1^{-3}\zeta_2^{4})^{\pm 1} + (\zeta_1^{-4}\zeta_2^{3})^{\pm 1}]\Big) \ + q^2 \ \Big(\ \dots \ \Big).$

Les seuls coefficients $f(0,h)$ non nuls sont donc ceux tels que h appartient à l'ensemble $\{ \ \pm\lambda_2, \ \pm(\lambda_2 - \alpha_2), \ \pm(2\lambda_2 - \alpha_2) \ \}$, et les seuls coefficients $f(1,h)$ non nuls mentionnés dans la proposition 6.2.1 sont ceux tels que h appartient à $\{ \ \pm(5\lambda_2 - 4\alpha_2), \ \pm(\alpha_2 + 2\lambda_2), \ \pm(-\alpha_2 + 5\lambda_2) \ \}$.
Donc, d'après cette même proposition, si $N_4(n,l) < 0$ et $f(n,l) \neq 0$, alors $f(n,l) = f(0,h)$ avec h appartenant à $\{ \ \pm\lambda_2, \ \pm(\lambda_2 - \alpha_2), \ \pm(2\lambda_2 - \alpha_2) \ \}$, ou $f(n,l) = f(1,h)$ avec h appartenant à $\{ \ \pm(5\lambda_2 - 4\alpha_2), \ \pm(\alpha_2 + 2\lambda_2), \ \pm(-\alpha_2 + 5\lambda_2) \ \}$.
Dans tous ces cas, $N_4(n,l)$ vaut alors $-\frac{2}{3}$.
On a donc cette fois, pour un coefficient $c(r,l)$ de $\eta(\tau)^k\chi_1$ non nul :

$$N_4(r,l) \geq -\frac{2}{3} + 4 \times \frac{k}{12},$$

ce qui permet d'obtenir la conclusion annoncée.

On peut remarquer que le coefficient de Fourier $c\Big(\frac{1}{24}, \ \lambda_1\Big)$ de la forme $\eta(\tau)\chi_1$ est non nul (il vaut $f(0, \ \lambda_1) = 1$), alors que la norme hyperbolique $N_4\Big(\frac{1}{24}, \ \lambda_1\Big)$ est négative, on en déduit que la forme $\eta(\tau)\chi_1$ n'est pas une forme de Jacobi holomorphe.

$\Big($ Dans le cas de la forme χ_2, on utilise :
$\chi_2(\tau,z) = 12 + (\zeta_1\zeta_2)^{\pm 1} + (\zeta_1^{-1}\zeta_2^{2})^{\pm 1} + (\zeta_1^{-2}\zeta_2)^{\pm 1} + q\Big([\zeta_1^{\pm 4} + \zeta_2^{\pm 4} + (\zeta_1\zeta_2^{-1})^{\pm 4}] + \dots\Big).$
Si $N_4(n,l) < 0$ et $f(n,l) \neq 0$, on a donc $N_4(n,l) \geq -\frac{8}{3}$, et on conclut par un raisonnement analogue aux précédents.
On montre que la forme $\eta(\tau)^7\chi_2$ n'est pas une forme de Jacobi holomorphe en considérant par exemple le coefficient $c\Big(1 + \frac{7}{24}, 4\lambda_2\Big) = f(1,4\lambda_2) + a_1 f(0,4\lambda_2) = 1$, qui est de norme hyperbolique $N_4\Big(1 + \frac{7}{24}, 4\lambda_2\Big) = 8(1 + \frac{7}{24}) - < 4\lambda_2, 4\lambda_2 >$ négative. $\Big)$

6.3.2 Relèvement arithmétique

On utilise dans tout ce paragraphe les notations et les résultats exposés par V.Gritsenko dans son article [G], en particulier les résultats du théorème 3.1.

Notation 6.3.1. *Soit N un entier naturel non nul fixé.*
Soit L un réseau pair de signature $(2,N+2)$ contenant deux plans hyperboliques. (On note $< , >_L$ la forme bilinéaire considérée sur L.)
On choisit dans L une base telle que :

$$L \ = \ \mathbb{Z}e_1 \perp \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2} \perp \mathbb{Z}e_{-1} \ ,$$

où L_0 est un sous-réseau défini négatif de rang N, muni de la forme notée $-S_0$, ou encore $-<\,,\,>$, et e_1, e_2, e_{-1}, e_{-2} sont quatre vecteurs isotropes vérifiant $<e_i,e_j>=\delta_{i,-j}$.
La forme $<\,,\,>_L$ a pour matrice dans cette base la matrice S suivante :

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -S_0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $V_{\mathbb{R}} := L\otimes\mathbb{R}$ et $V_{\mathbb{C}} := L\otimes\mathbb{C}$.
On note $L_1 := \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2}$ et S_1 la matrice de la restriction de $<\,,\,>_L$ à $\mathbb{R}\otimes L_1$.

On note $G_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $O(V_{\mathbb{R}})$ formé des éléments de norme spinorielle 1. (Voir l'article de V.Gritsenko, paragraphe 2.)
On considèrera par la suite les deux sous-groupes arithmétiques de $O(V_{\mathbb{R}})$ suivants :
$\Gamma_L := O(L)\cap G_{\mathbb{R}}$
et $\widetilde{\Gamma_L} := \{\ g\in\Gamma_L \ /\ \forall\ l\in\widetilde{L} \quad g.l\equiv l \ mod\ L\ \}$.
Remarque : $\widetilde{L} \ = \ \mathbb{Z}e_1 \perp \mathbb{Z}e_2 \perp \widetilde{L_0} \perp \mathbb{Z}e_{-2} \perp \mathbb{Z}e_{-1}$.

La notation $\Gamma^J = \Gamma^J(L)$ désigne le sous-groupe $\Gamma^J(\mathbb{R})\cap\Gamma_L$ où $\Gamma^J(\mathbb{R})$ est le groupe de Jacobi réel, c'est à dire le sous-groupe du groupe parabolique $P_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ préservant l'espace vectoriel isotrope $<e_1,e_2>$, engendré par les éléments :
$\{\ A\ \}=\begin{pmatrix} I\,{}^tA^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & E_N & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$ *où $A \in SL_2(\mathbb{R})$, et E_N désigne la matrice identité de taille N,*

et $\{\ x,y;r\ \}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^tyS_0 & {}^txS_0y-r & \frac{1}{2}S_0[y] \\ 0 & 1 & {}^txS_0 & \frac{1}{2}S_0[x] & r \\ 0 & 0 & E_N & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où $x,\ y \in M_{N,1}(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{R}$.*
On a : $\Gamma^J \ = \ \Gamma^J(L) \simeq \ SL_2(\mathbb{Z})\ltimes H(L_0)$.

Soit $\mathcal{H}_{N+2}$ le domaine suivant :

$$\mathcal{H}_{N+2} := \ \{\ {}^tZ=(\tau,z,\tau')\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}^N\times\mathbb{H} \ /\ \frac{1}{2}S_1[ImZ]>0\ \}.$$

Soit ${}^tZ$ appartenant à $\mathcal{H}_{N+2}$, on note

$$proj(Z) :=^t (-\frac{1}{2}S_1[Z] : \tau' : z_1 : \ldots : z_N : \tau : 1).$$

Ceci permet de définir l'action d'un élément de $O(V_{\mathbb{R}}) \subset GL_{N+4}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_{N+2}$:
on pose $proj(g.Z) := \frac{1}{J(g,Z)}\ g.proj(Z)$,
où $J(g,Z)$, appelé facteur d'automorphie de $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{N+4}$ est défini par :

$$J(g,Z) := -\frac{1}{2}g_{N+4,1}S_1[Z]+g_{N+4,2}\tau'+\sum_{j=3}^{N+2}g_{N+4,j}z_{j-2}+g_{N+4,N+3}\tau+g_{N+4,N+4}.$$

On peut préciser que le groupe $G_{\mathbb{R}}$ est le sous-groupe de $O(V_{\mathbb{R}})$ qui préserve le domaine

$\mathcal{H}_{N+2}$, qui est en fait une réalisation de l'une des deux composantes connexes du domaine $\mathcal{D} = \{ \ z \ \in P(V_{\mathbb{C}}) \ / \ < z,z >_L = 0, \ < z,\bar{z} >_L > 0 \ \}$. (Voir [G].)

Soient k un entier relatif, G un sous-groupe de Γ_L et F une fonction définie et holomorphe sur $\mathcal{H}_{N+2}$.
On dit que F est une forme modulaire de poids k pour le groupe G si, pour tout g appartenant à G on a :

$$F(g.Z) \ = \ J(g,Z)^k F(Z) \ .$$

Une forme modulaire pour Γ_L admet deux types de développement :

- un développement du type développement de Fourier :

$$F(Z) = \sum_{l_1 \in \widetilde{L_1}, \ S_1[l_1] \geq 0} a(l_1) \ e^{2\pi i^t Z S_1 l_1} \ ,$$

qui s'écrit encore :

$$F(Z) = \sum_{(n,l,m) \in \widetilde{L_1}, \ S_1[(n,l,m)] \geq 0} a(n,l,m) \ e^{2\pi i^t Z S_1 (n,l,m)} \ ,$$

$$F(Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, l_0 \in \widetilde{L_0}, \ m \in \mathbb{Z}, \ 2nm - <l_0,l_0> \geq 0} a(n, \ l_0, \ m) \ e^{2\pi i (n\tau + <l_0,z> + m\tau')}$$

- un développement du type développement de Fourier-Jacobi :

$$F(Z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(\tau,z) \ e^{2\pi i m \tau'}$$

On peut vérifier que les coefficients $\psi_m(\tau,z)$ de ce développement satisfont les propriétés des formes de Jacobi vis à vis de l'action des groupes $H(L_0)$ et $SL_2(\mathbb{Z})$.

Il existe une transformation orthogonale ϵ telle que $\epsilon.l - l$ appartienne à L pour tout l appartenant à $\widetilde{L}$, et telle que son action sur le domaine $\mathcal{H}_{N+2}$ soit donnée par :

$$\epsilon.(\tau',z,\tau) = (\tau,z,\tau').$$

Dans le cas où $L_0 = -A_2$, on peut poser :

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ est engendré par la transformation ϵ et le groupe $\Gamma^J \ = \ \Gamma^J(L)$, autrement dit par les éléments :

$$\{ \ A \ \} = \begin{pmatrix} I^t A^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & E_N & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \ \text{où } A \ \in \ SL_2(\mathbb{Z}) \ ,$$

$$\{\ \alpha,\beta;t\ \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha S_0 & <\alpha,\beta>-r & \frac{1}{2}<\alpha,\alpha> \\ 0 & 1 & \beta S_0 & \frac{1}{2}<\beta,\beta> & r \\ 0 & 0 & E_N & {}^t\beta & {}^t\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha,\ \beta\ \in\ L_0$, $t \in \mathbb{R}$, $r = t + \frac{1}{2} < \alpha,\beta > \in \mathbb{Z}$

et la transformation ϵ.

On peut rappeler l'action de ces éléments sur le domaine $\mathcal{H}_{N+2}$ *:*

$$\{\ A\ \}.(\tau,z,\tau') = \Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, \tau' - \frac{c<z,z>}{2(c\tau+d)}\Big)$$

$$\{\ \alpha,\beta;t\ \}.(\tau,z,\tau') = \Big(\tau,\ z+\alpha+\beta\tau,\ \tau'+r+<\beta,z>+\frac{1}{2}<\beta,\beta>\tau\Big).$$

On notera $\mathcal{M}_k(G)$ *(respectivement* $\mathcal{M}_k^{cusp}(G)$ *), l'espace des formes modulaires (respectivement cuspidales) de poids* k *pour le groupe* G.

On peut maintenant rappeler le théorème de relèvement arithmétique énoncé par V.Gritsenko (théorème 3.1).

Proposition-Définition 6.3.1. *Relèvement arithmétique.*
Soient k *un entier fixé et* φ *un élément de* $J_{k,1}^{L_0,hol}$.
On note $\varphi(\tau,z) := \sum_{n\in\mathbb{Z},l\in\widetilde{L_0},2n-S_0[l]\geq 0} f(n,l)e^{2i\pi(n\tau+{}^tlS_0z)}$.
Si $f(0,0)$ *est non nul on suppose de plus* k *supérieur ou égal à 4.*
Alors, la fonction F_φ *définie sur le domaine* $\mathcal{H}_{N+2}$ *par :*

$$F_\varphi(\tau,z,\tau') := f(0,0)E_k(\tau)\ +\ \sum_{m=1}^{+\infty}(m^{-1}\varphi|_{k,1}T_-(m))(\tau,z)e^{2i\pi m\tau'},$$

où l'action de l'opérateur $T_-(m)$ *est donnée par :*

$$(\varphi|_{k,1}T_-(m))(\tau,z) = \sum_{\substack{a,\ d\in\mathbb{N},\ ad=m \\ b \bmod d}} a^k\varphi\Big(\frac{a\tau+b}{d},az\Big),$$

est une forme modulaire de poids k *pour le groupe* $\widetilde{\Gamma_L}$.
Si de plus le réseau L *est maximal (c'est à dire qu'il n'existe aucun réseau entier pair qui le contienne et dans lequel il soit d'indice fini), alors, si* φ *est une forme de Jacobi cuspidale,* F_φ *est une forme modulaire cuspidale.*

Autrement dit, $\varphi \longmapsto F_\varphi$ *définit une application de* $J_{k,1}^{L_0,f}$ *dans* $\mathcal{M}_k(\widetilde{\Gamma_L})$*, et, si* L *est maximal, de* $J_{k,1}^{L_0,cusp}$ *dans* $\mathcal{M}_k^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L})$.

Preuve.
Voir l'article de V.Gritsenko.

Proposition 6.3.3. *Exemples de réseaux de racines L_0 tels que L soit maximal.*
Si $L_0 = -A_r$, le réseau L est maximal si et seulement si $r+1$ n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier.
En particulier, pour $r < 7$, L est maximal.

Preuve.
On utilise la proposition 1.4.1.a énoncée par V.Nikulin [N] et rappelée ci-dessous.
Soit S un réseau entier pair.
L'application $S' \longmapsto S'/S$ définit une bijection entre l'ensemble des sur-réseaux de S, c'est à dire les réseaux entiers pairs S' contenant S tels que S soit d'indice fini dans S', et l'ensemble des sous-groupes isotropes du groupe discriminant $G_S = \widetilde{S}/S$.
(On dit qu'un sous-groupe H de G_S est isotrope si la restriction de q_S à H est identiquement nulle, où q_S désigne l'application de G_S dans $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ définie par :

$$q_S \;:\; t+S \;\mapsto <t,t> +2\mathbb{Z}\ .)$$

Dans le cas d'un réseau $L = \mathbb{Z}e_1 \perp \mathbb{Z}e_2 \perp L_0 \perp \mathbb{Z}e_{-2} \perp \mathbb{Z}e_{-1}$, le groupe discriminant G_L est isomorphe au groupe discriminant de L_0, noté G_{L_0}.
Si L_0 est du type $-A_r$, on sait alors que G_{L_0} est un groupe cyclique d'ordre $r+1$, engendré par exemple par la classe de λ_1 modulo A_r, notée $\bar{\lambda_1}$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ désigne le système de poids fondamental associé à la base de racines $\alpha_1, \cdots \alpha_r$. (Voir la planche I de Bourbaki, [B].)
Les sous-groupes de G_{L_0} sont les sous-groupes engendrés par un élément $d\bar{\lambda_1}$, où d est un diviseur de $r+1$.
On a par ailleurs : $q_L(d\bar{\lambda_1}) = d^2\frac{r}{r+1} + 2\mathbb{Z}$.
On peut donc déterminer à quelle condition sur r le groupe G_{L_0} admet un sous-groupe isotrope : il faut et il suffit qu'il existe un diviseur non trivial d de $r+1$ tel que $d^2\frac{r}{r+1}$ soit un entier pair.

Après calculs, on obtient finalement :
si $L_0 = -A_r$, le réseau L est maximal si et seulement si r vérifie la condition $(\star)$ suivante :

$$(\star) \quad 8 \nmid r+1 \text{ et, pour tout premier impair } p, \quad p^2 \nmid r+1\ .$$

En particulier, pour $r < 7$, L est maximal.

Remarque 6.3.1. Dans certains cas (voir les précisions de V.Gritsenko [G4]), il n'est pas nécessaire que le réseau L soit maximal pour que le relèvement d'une forme de Jacobi cuspidale soit une forme modulaire cuspidale.

Proposition 6.3.4.
Exemples de formes obenues en appliquant ce relèvement aux formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2. (Ici $L_0 = -A_2$, L est maximal.)

$$\begin{array}{ll}
F_{E_{4,1}^{(A_2)}} & \in \mathcal{M}_4(\widetilde{\Gamma_L}) \\
F_{E_{6,1}^{(A_2)}} & \in \mathcal{M}_6(\widetilde{\Gamma_L}) \\
F_{\Delta(\tau)a_{0,1}} & \in \mathcal{M}_{12}^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L}) \\
F_{\Delta(\tau)a_{-2,1}} & \in \mathcal{M}_{10}^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L}) \\
F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}} & \in \mathcal{M}_{9}^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L})
\end{array}$$

Remarque 6.3.2. Les formes modulaires obtenues par le relèvement exponentiel, défini au paragraphe 6.2.2, de formes de Jacobi de poids 0, d'indice m, à coefficients de Fourier entiers, sont des formes modulaires pour le groupe noté $\widetilde{\Gamma}((A_2)_m)$, c'est à dire le groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ associé au réseau L défini avec $L_0 = -(A_2)_m$, la notation $(A_2)_m$ désignant un réseau de rang 2 muni de la forme quadratique $m \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (Voir l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin [GN II].)

Proposition 6.3.5.
La forme $Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$ *appartient à l'espace* $\mathcal{M}_9^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L})$*, où* L *est le réseau défini avec* $L_0 = -A_2$*, et on a :*

$$Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)}) = F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}.$$

Preuve.
D'après la remarque précédente et la proposition 6.2.2, la forme $Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$ appartient à $\mathcal{M}_9^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L})$, et admet pour seuls diviseurs $H_{-2/3}^{(1)}(\lambda_2)$ et $H_{-2/3}^{(1)}(-\lambda_2)$, tous deux de multiplicité 1.
Montrons que cette forme coïncide avec la forme $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$.
D'après la remarque 6.2.2, et l'égalité $[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2$, on peut écrire :

$$Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)})(\tau,z,\tau') = \eta(\tau)^{18}\ (-i)^3\ e^{2\pi i\tau'}\ \frac{\vartheta(\tau,z_1)}{\eta(\tau)}\ \frac{\vartheta(\tau,z_1-z_2)}{\eta(\tau)}\ \frac{\vartheta(\tau,z_2)}{\eta(\tau)}$$

$$\times\ exp\Big(-\sum_{t\geq 1} t^{-1}\widetilde{\psi_{0,1}^{(1)}}|_{T_-(t)}(\tau,z,\tau')\Big),$$

ou encore :
$$Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)})(\tau,z,\tau') = \Delta(\tau)\ e^{2\pi i\tau'}\ \ a_{-3,1}(\tau,z)\ \times\ exp\Big(-\sum_{t\geq 1} t^{-1}\widetilde{\psi_{0,1}^{(1)}}|_{T_-(t)}(\tau,z,\tau')\Big).$$

Par ailleurs, d'après la proposition-définition 6.3.1, la forme $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$ s'écrit :
$$F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}(\tau,z,\tau') = \sum_{m=1}^{+\infty}(m^{-1}\Delta(\tau)a_{-3,1}|_{9,1}T_-(m))(\tau,z)e^{2i\pi m\tau'},$$
avec :
$$(\Delta(\tau)a_{-3,1}|_{9,1}T_-(m))(\tau,z) = \sum_{\substack{a,\ d\in\mathbb{N},\ ad=m \\ b\ mod\ d}} a^9\Delta\Big(\frac{a\tau+b}{d}\Big)a_{-3,1}\Big(\frac{a\tau+b}{d},az\Big),$$

ce qui permet de constater que cette forme s'annule sur l'ensemble des zéros de la fonction $Exp - Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$. En effet, on peut rappeler que la fonction $a_{-3,1}$ s'annule uniquement sur les hyperplans d'équation $z'_j = 0$ modulo $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. (On utilise ici les coordonnées ($z'_1 = z_1$, $z'_2 = z_2 - z_1$, $z'_3 = -z_2$).) On peut ensuite vérifier par exemple que, si z'_1 appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, alors, pour a, b, $d \neq 0$, trois entiers naturels quelconques, az'_1 appartient à $\mathbb{Z} + \frac{a\tau+b}{d}\mathbb{Z}$, ce qui permet de conclure que la forme $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$ est nulle sur l'hyperplan d'équation $z'_1 = 0$ modulo $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, puisque, pour tout entier m, $(m^{-1}\Delta(\tau)a_{-3,1}|_{9,1}T_-(m))(\tau,z)$ est nulle sur cet hyperplan.

On peut alors considérer le quotient $\frac{F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}}{Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})}$ qui est une fonction modulaire, holomorphe, de poids 0 définie sur le domaine $\mathcal{H}_4$, et qui, d'après le principe de Koecher, ne peut donc être qu'une constante.

Ainsi, les formes $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$ et $Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$ sont égales à une constante multiplicative près, qui, d'après le premier coefficient de Fourier-Jacobi de chacune des deux fonctions, ne peut valoir que 1.
Cela termine la démonstration.

Remarque 6.3.3.
On peut ainsi écrire, en revenant aux définitions de ces formes (voir les propositions-définitions 6.3.1 et 6.2.1), et en notant $f(n,l)$ les coefficients de Fourier de la forme $\psi_{0,1}^{(1)}$:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(m^{-1}\Delta(\tau)a_{-3,1}|_{9,1}T_{-}(m))(\tau,z)e^{2i\pi m\tau'}$$

$$= e^{2\pi i\tau}e^{2\pi i\tau'}e^{2i\pi<z,\lambda_1>}\prod_{\substack{n,t\,\in\,\mathbb{Z}\\ l\,\in\,\widetilde{A_2}\\ (n,l,t)>0}}(1-e^{2\pi in\tau}e^{2i\pi<z,l>}e^{2\pi it\tau'})^{f(nt,l)}.$$

Cette identité permettra d'obtenir la formule du dénominateur de l'algèbre de Kac-Moody associée à la forme $Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$. (Voir la remarque 6.2.3.)

Remarque 6.3.4. Généralisation du relèvement arithmétique à des formes de Jacobi à caractère non trivial, et autres formules du dénominateur.
Le théorème 1.12 de l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin [GN II] définit un relèvement arithmétique dans un cadre plus général, en utilisant des opérateurs de Hecke relatifs à des sous-groupes de congruence. Ce théorème est écrit pour des formes de Jacobi à une variable, mais on peut en obtenir une généralisation au cas des formes de Jacobi définies relativement à un réseau entier pair L_0, de façon analogue à ce qui est fait pour le relèvement arithmétique des formes à caractère trivial, au théorème 3.1 de l'article [G].

En particulier, si Φ est une forme de Jacobi cuspidale (voire seulement holomorphe, sous certaines conditions, d'après la remarque 2 consécutive au théorème 1.12 [GN II]), non nulle, de poids k, d'indice t, avec pour caractère v_η^D, D divisant 24, alors le relèvement noté $Lift_1(\Phi)(Z)$ en reprenant les notations de [GN II], sera une forme modulaire (cuspidale si Φ est cuspidale), non nulle, de poids k, avec un caractère d'ordre $Q=\frac{24}{D}$ noté χ_Q, pour le groupe $\widetilde{\Gamma}((A_2)_{Qt})$, où la notation $\widehat{\Gamma}((A_2)_t)$ désigne le groupe $\widehat{\Gamma_L}$ associé au réseau L défini avec le réseau $L_0=-(A_2)_t$, la notation $(A_2)_t$ désignant un réseau de rang 2 muni de la forme quadratique $t\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.
En appliquant ce résultat, on obtient les formes :

$$Lift_1(\eta(\tau)^8a_{-3,1})\in\mathcal{M}_1(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3),\chi_3)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{12}a_{-3,1})\in\mathcal{M}_3(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2),\chi_2)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{16}\mathcal{A}(\tau,z))\in\mathcal{M}_9(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3))$$

(voir, pour la fonction $\mathcal{A}$, la proposition-définition 3.2.1 et la remarque affirmant que cette forme est une forme singulière).

En tenant un raisonnement analogue à celui de la proposition 6.3.5, on peut démontrer les identités suivantes :

$$Exp-Lift(\psi_{0,2}^{(1)})=Lift_1(\eta(\tau)^{12}a_{-3,1})\in\mathcal{M}_3(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2),v_\eta^{12})$$

$$Exp - Lift(\psi_{0,3}^{(1)}) = Lift_1(\eta(\tau)^8 a_{-3,1}) \in \mathcal{M}_1(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3), v_\eta^8)$$

$$Exp - Lift(\psi_{0,3}^{(11)}) = Lift_1(\eta(\tau)^{16}\mathcal{A}(\tau,z)) \in \mathcal{M}_9(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3)),$$

susceptibles de fournir les formules du dénominateur des algèbres de Kac-Moody de type de Borcherds associées aux formes de Jacobi $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$ et $\psi_{0,3}^{(11)}$, voir la remarque 6.2.3.

6.3.3 Forme différentielle canonique et conséquences géométriques

On applique ici, les résultats que V.Gritsenko décrit dans l'article [G], aux paragraphes 5 et 6.

Proposition-Définition 6.3.2. *Formes différentielles définies sur $\mathcal{H}_{N+2}$.*
On reprend les notations du paragraphe précédent.
On considère la forme différentielle $\bar{\omega}$ définie sur $\mathcal{H}_{N+2}$ par :

$$\bar{\omega} := d\tau' \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_N \wedge d\tau.$$

Pour g appartenant au sous-groupe d'indice 2 de $\widetilde{\Gamma_L}$ formé des éléments de déterminant 1, noté $\widehat{\Gamma_L}$, on a : $g^\star\bar{\omega} = J(g,Z)^{-(N+2)}\bar{\omega}$.

A une forme modulaire F de poids $N+2$ pour le groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ définie sur $\mathcal{H}_{N+2}$, est associée la forme différentielle ω_F définie par :

$$\omega_F := F(Z)\ \bar{\omega}.$$

La forme différentielle obtenue est invariante sous l'action du groupe $\widehat{\Gamma_L}$, c'est à dire que pour tout g appartenant à $\widehat{\Gamma_L}$, on a : $g^\star\omega_F = \omega_F$.

Si F est une forme cuspidale, alors la forme différentielle ω_F associée est de carré intégrable et il en existe donc (d'après un résultat de Freitag, utilisé par V.Gritsenko) un prolongement sur un modèle non singulier d'une compactification de la variété $\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}$, noté $\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}}$.

Preuve.
Ces résultats sont précisés dans l'article de V.Gritsenko.

Corollaire 6.3.1. *Conséquences géométriques.*
Ceci permet, dans le cas où L est maximal ou dans les cas suggérés par la remarque 6.3.1, de donner l'évaluation du genre géométrique de la variété $\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}}$, noté $\rho_g(\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}})$, suivante :

$$\rho_g(\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}})\ \geq\ dim_{\mathbb{C}}(J_{N+2,1}^{W(L_0),cusp}).$$

Preuve.
D'après tout ce qui précède, dans le cas où L est maximal, ou dans quelques cas particuliers mentionnés par la remarque 6.3.1, on a :

$$\rho_g(\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}})\ =\ dim_{\mathbb{C}}H^0(\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}}, \Omega_{N+2})\ \geq\ dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_{N+2}^{cusp}(\widehat{\Gamma_L}))\ \geq\ dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_{N+2}^{cusp}(\widetilde{\Gamma_L}))$$
$$\geq\ dim_{\mathbb{C}}(J_{N+2,1}^{W(L_0),cusp}),$$

où Ω_{N+2} désigne le faisceau des formes différentielles d'ordre $N+2$. Une évaluation de la dimension de $J_{N+2,1}^{W(L_0),cusp}$ donne donc une évaluation du genre géométrique $\rho_g(\overline{\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}})$.

Remarque 6.3.5. En exploitant la relation entre les deux variétés $\mathcal{H}_{N+2}/\widehat{\Gamma_L}$ et $\mathcal{H}_{N+2}/\widetilde{\Gamma_L}$, il semble possible d'obtenir également des renseignements sur cette dernière.

Remarque 6.3.6. Interprétation de ces variétés comme espaces de modules.
Dans son article, V.Gritsenko interprète la variété $\mathcal{H}_{19}/\Gamma$ où Γ est un certain sous-groupe arithmétique du groupe $O(2{,}19)$, comme l'espace de modules de surfaces $K3$ polarisées, avec une certaine polarisation.
Il paraît possible, pour $N \leq 17$, de voir $\mathcal{H}_{N+2}$ comme un sous-espace de $\mathcal{H}_{19}$ et, après avoir établi un lien entre les groupes Γ et $\widetilde{\Gamma_L}$, d'essayer d'interpréter $\mathcal{H}_{N+2}/\widetilde{\Gamma_L}$ comme l'espace de modules de surfaces $K3$ polarisées avec une particularité supplémentaire à préciser.

Proposition 6.3.6. *Quelques exemples .*
(1) Cas où $L_0 = -A_5$.
Il existe une forme de Jacobi cuspidale de poids 7, *d'indice* 1, *non nulle, ce qui permet de donner l'estimation :*

$$\rho_g(\overline{\mathcal{H}_7/\widehat{\Gamma_L}}) \ \geq \ 1 \ .$$

(2) Cas où $L_0 = -A_2$.
L'existence des trois formes de Jacobi cuspidales, de poids 4, *suivantes :*

$$\eta(\tau)^8\psi_{0,2}^{(1)} \ \in J_{4,2}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^8), \ \ \eta(\tau)^8\psi_{0,3}^{(1)} \ \in J_{4,3}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^8), \ \ \eta(\tau)^8\chi_1 \ \in J_{4,4}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^8)$$

permet de donner les estimations des genres géométriques suivants :

$$\rho_g\left(\overline{\mathcal{H}_4/\widehat{\Gamma}((A_2)_6) \cap Ker\ \chi_3}\right) \ \geq \ 1$$

$$\rho_g\left(\overline{\mathcal{H}_4/\widehat{\Gamma}((A_2)_9) \cap Ker\ \chi_3}\right) \ \geq \ 1$$

$$\rho_g\left(\overline{\mathcal{H}_4/\widehat{\Gamma}((A_2)_{12}) \cap Ker\ \chi_3}\right) \ \geq \ 1 \ ,$$

où la notation $\widehat{\Gamma}((A_2)_t)$ *désigne le groupe* $\widehat{\Gamma_L}$ *associé au réseau* L *défini avec le réseau* $L_0 = -(A_2)_t$, *la notation* $(A_2)_t$ *désignant un réseau de rang* 2 *muni de la forme quadratique* $t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *et où* χ_3 *est un caractère d'ordre* 3 *pour ce groupe.*

Preuve.
(1) D'après la proposition 6.3.3, dans le cas où $L_0 = -A_5$, L est maximal, et on a donc, d'après le corollaire 6.3.1, l'inégalité :

$$\rho_g(\overline{\mathcal{H}_7/\widehat{\Gamma_L}}) \ \geq \ dim_{\mathbb{C}}(J_{7,1}^{W(A_5),cusp}).$$

Or, on peut construire pour le réseau A_5 une forme de Jacobi $a_{-5,1}^{(A_5)}$ analogue à la forme $a_{-3,1}$ construite pour le réseau A_2, en posant :

$$a_{-5,1}^{(A_5)}(\tau,z'_1,\ \cdots,\ z'_6) := \sum_{j=1}^{6} \frac{\vartheta_z}{\vartheta}(\tau,z'_j) \ \times \ \prod_{j=1}^{6} \frac{\vartheta(\tau,z'_j)}{\eta(\tau)^3},$$

où $(z'_1,\ \cdots,\ z'_6)$, avec $z'_1 + \cdots + z'_6 = 0$, est le système de cordonnées choisi dans $A_5 \otimes \mathbb{C}$.
D'après une étude analogue à celle réalisée dans le cas de A_2 à la proposition 2.5.10, qui reste valable pour $r < 7$, la forme $\Delta(\tau)a_{-5,1}^{(5)}(\tau,z)$ est une forme de Jacobi non nulle,

cuspidale, de poids 7, d'indice 1, donc l'espace vectoriel $J_{7,1}^{W(A_5),cusp}$ est de dimension supérieure ou égale à 1.
Ainsi on obtient :

$$\rho_g(\overline{\mathcal{H}_7/\widehat{\Gamma}_L}) \ \geq \ 1 \ .$$

(2) Dans le cas où $L_0 = -A_2$, pour obtenir une forme différentielle canonique, il est nécessaire de relever des formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2, cuspidales, d'indice 1, et de poids 4.
On peut considérer une forme de Jacobi d'indice t, relative au réseau A_2, comme une forme de Jacobi d'indice 1, mais définie relativement à un réseau de rang 2 muni de la forme quadratique $t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, noté $(A_2)_t$.
D'après les résultats de la proposition 6.3.2, les formes citées sont de telles formes, d'indices respectifs 2, 3, 4, avec un caractère non trivial.
En appliquant le relèvement arithmétique défini dans ce cadre plus général par le théorème 1.12 de l'article de V.Gritsenko et V.Nikulin [GN II] et décrit à la remarque 6.3.4, on obtient les formes modulaires suivantes :

$$F_2 := Lift_1(\eta(\tau)^8 \psi_{0,2}^{(1)}) \in \mathcal{M}_4^{cusp}(\widetilde{\Gamma}((A_2)_6),\chi_3)$$
$$F_3 := Lift_1(\eta(\tau)^8 \psi_{0,3}^{(1)}) \in \mathcal{M}_4^{cusp}(\widetilde{\Gamma}((A_2)_9),\chi_3)$$
$$F_4 := Lift_1(\eta(\tau)^8 \chi_1) \in \mathcal{M}_4^{cusp}(\widetilde{\Gamma}((A_2)_{12}),\chi_3)$$

où χ_3 désigne dans chaque cas un caractère d'ordre 3 pour le groupe correspondant.
On déduit ensuite le résultat énoncé sur les genres géométriques, comme dans le cas précédent.

6.4 Formes modulaires hermitiennes

On montre dans ce paragraphe que la théorie des formes hermitiennes de degré 2 déterminées sur l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, peut apparaître comme un cas particulier dans l'approche générale des formes de Jacobi associées à un réseau de racines ; ce cas particulier étant celui des formes de Jacobi d'indice 1, définies relativement au réseau de racines A_2.

6.4.1 Formes modulaires définies sur le domaine $\mathcal{H}_4$

On reprend ici les notions introduites dans la notation 6.3.1 et à la proposition-définition 6.3.1, avec $N = 2$ et $L_0 = -A_2$. Dans ce cas précis, L est maximal.
On peut appliquer la construction du relèvement arithmétique :
si φ appartient à $J_{k,1}^{A_2,hol}$, (respectivement $J_{k,1}^{A_2,cusp}$) alors la forme $F_\varphi(\tau,z_1,z_2,\tau')$ définie sur $\mathcal{H}_4$ est une forme modulaire (respectivement cuspidale) de poids k pour le groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ associé au réseau A_2.
On peut rappeler que ce groupe est engendré par la transformation ϵ, les éléments du type $\{ A \}$, A appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, et les éléments du type $\{ \alpha,\beta;t \}$, α, β appartenant à A_2, et t réel tel que $r = t + \frac{1}{2} < \alpha,\beta >$ soit dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.4.1. *Propriétés supplémentaires.*
(1) Si la forme φ est $W(A_2)$-invariante (ce qui est le cas de toute forme de Jacobi pour A_2 d'indice 1, voir le corollaire 2.3.2) alors la forme F_φ reste invariante sous l'action de $W(A_2)$, autrement dit : $F_\varphi(\tau,\sigma.(z_1,z_2),\tau') = F_\varphi(\tau,z_1,z_2,\tau')$, pour tout σ appartenant au groupe $W(A_2)$.

(2) La forme F_φ vérifie la relation : $F_\varphi(\tau,z_1 - z_2, - z_2,\tau') = (-1)^k F_\varphi(\tau,z_1,z_2,\tau')$.

Preuve.
(1) Pour obtenir cette première propriété, il suffit, d'après la définition de F_φ, de vérifier que l'action de $W(A_2)$ commute avec celle de l'opérateur de Hecke $T_-(m)$, ce qui est immédiat d'après l'expression donnée de l'action de cet opérateur sur φ.
(2) En appliquant la propriété (1) avec $\sigma_{\alpha_1}(z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2) = (z_2 - z_1)\alpha_1 + z_2\alpha_2$, et en utilisant l'action de $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ sur la forme F_φ, on obtient :
$F_\varphi(\tau,z_1 - z_2, - z_2,\tau') = F_\varphi(\tau, - \sigma_{\alpha_1}(z_1,z_2),\tau') = (-1)^k F_\varphi(\tau,z_1,z_2,\tau')$.

6.4.2 Formes modulaires hermitiennes de degré 2 définies sur l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

On utilise ici les notations et les définitions des travaux de A.Krieg et T.Dern [KD].

Notation 6.4.1. *On considère le demi-plan hermitien de degré 2 :*

$$H_2(\mathbb{C}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \ , \ \frac{1}{2i}(Z -{}^t \bar{Z}) \ > 0 \right\}$$

On note K le corps quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, et $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers : $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \delta\mathbb{Z}$, où $\delta = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Définition 6.4.1. Groupe modulaire hermitien.
Le groupe modulaire hermitien de degré 2 sur K est défini par :

$$\Gamma_2(\mathcal{O}_K) := \left\{ \; M \;\in\; \mathcal{O}_K^{4\times 4} \;,\; MJ^t\bar{M} = J \;\right\} = U(2,2)_{\mathcal{O}_K},$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$, et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Son action sur $H_2(\mathbb{C})$ est donnée par :

$$M < Z >:= (AZ+B)(CZ+D)^{-1},$$

pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Définition 6.4.2. Forme modulaire hermitienne.
Une fonction $f : H_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, est une forme modulaire hermitienne, de poids l'entier relatif k, avec le caractère ν, pour un sous-groupe d'indice fini Γ de $\Gamma_2(\mathcal{O}_K)$, si elle vérifie, pour tout M appartenant à Γ :

$$f|_k M(Z) = \nu(M)\; f(Z),$$

où $f|_k M(Z) = det(CZ+D)^{-k}\; f(M < Z >)$.

L'espace de telles formes est noté $[\Gamma,k,\nu]$.

Remarque 6.4.1. (Voir l'identité (7), dans [KD].)
$[\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l] = \{0\}$, si $k \;\neq\; l \; mod \; 3$
$[\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l] = [SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,1]$, si $k \;\equiv\; l \; mod \; 3$.

Définition 6.4.3. Forme modulaire hermitienne symétrique.
I_{tr} désigne la transformation définie sur $H_2(\mathbb{C})$ par :

$$\begin{array}{rccc} I_{tr} : & H_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) \\ & Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} & \longmapsto & {}^tZ = \begin{pmatrix} \tau & \omega \\ z & \tau' \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour tout M de $\Gamma_2(\mathcal{O}_K)$, $M \;.\; I_{tr} = I_{tr} \;.\; \bar{M}$.
Les espaces des forme modulaires hermitiennes symétriques ou antisymétriques sont définis respectivement par :

$$[\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l]^{sym} := \left\{ \; f \;\in\; [\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l] \;,\; f.I_{tr} = f \;\right\}$$

$$[\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l]^{skew} := \left\{ \; f \;\in\; [\Gamma_2(\mathcal{O}_K),k,det^l] \;,\; f.I_{tr} = -f \;\right\}.$$

En particulier, les formes modulaires hermitiennes symétriques sont des formes que l'on peut dire modulaires pour le groupe engendré par I_{tr} et les transformations appartenant à $\Gamma_2(\mathcal{O}_K)$, noté :

$$< \;\{ \; Z \mapsto M < Z > \,,\; M \in\; \Gamma_2(\mathcal{O}_K) \;\} \cup \{ \; I_{tr} \;\} \; >$$

Remarque 6.4.2.
Le théorème 6 de A.Krieg et T.Dern (voir [KD]), décrit la structure de l'anneau gradué $\oplus_{k\in 2\mathbb{Z}}[\; \Gamma_2(\mathcal{O}_K),\; k,\; det^k \;]^{sym}$, autrement dit, d'après la remarque 6.4.1, de l'anneau $\oplus_{k\in 2\mathbb{Z}}[\; SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K),\; k,\; 1 \;]^{sym}$, celle de l'anneau $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}[\; \Gamma_2(\mathcal{O}_K),\; k,\; det^k \;]$, ou encore $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}[\; SL_4(K)\cap\Gamma_2(\mathcal{O}_K), k, 1 \;]$, et celle de l'idéal des formes cuspidales de ce dernier anneau.

6.4.3 Passage du domaine $\mathcal{H}_4$ au demi-plan hermitien de degré 2

Proposition-Définition 6.4.1. *On peut définir l'isomorphisme entre les espaces $\mathcal{H}_4$ et $H_2(\mathbb{C})$ suivant :*

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) \\ & (\tau, z_1, z_2, \tau') & \longmapsto & \begin{pmatrix} \tau & z = z_1 - z_2\delta \\ \omega = z_1 - z_2\bar{\delta} & \tau' \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{-1}: & H_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_4 \\ & \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} & \longmapsto & (\tau, z_1 = \frac{\delta\omega - \bar{\delta}z}{i\sqrt{3}}, z_2 = \frac{\omega - z}{i\sqrt{3}}, \tau') \end{array}$$

Remarque 6.4.3.
(i) On peut rappeler les relations utiles suivantes :

$$\delta + \bar{\delta} = 1,\ \delta - \bar{\delta} = i\sqrt{3},\ \delta.\bar{\delta} = 1,\ \bar{\delta}^2 = -\delta,\ \delta^2 = -\bar{\delta}.$$

(ii) En posant $z = z_1 - z_2\delta$, et $\omega = z_1 - z_2\bar{\delta}$, on a :

$$\omega.z = \frac{1}{2} < z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2,\ z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 >_{A_2}.$$

Proposition-Définition 6.4.2. *Correspondance entre les groupes modulaires agissant sur chacun des domaines $\mathcal{H}_4$ et $H_2(\mathbb{C})$.*
On s'inspire ici de la description du groupe hermitien faite par K.Haverkamp, [H].
Pour A appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$, on pose :

$$\{\{A\}\} := \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'action de $\{\{A\}\}$ sur $H_2(\mathbb{C})$ est donnée par :

$$\{\{A\}\} \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a\tau+b}{c\tau+d} & \frac{z}{c\tau+d} \\ \frac{\omega}{c\tau+d} & \tau' - \frac{c\omega z}{c\tau+d} \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, appartenant à A_2, (autrement dit, a_1, a_2, b_1, b_2 appartenant à $\mathbb{Z}$) et t réel tel que $r = t + \frac{1}{2} < \alpha,\beta >$ soit dans $\mathbb{Z}$, on pose :

$$\{\{\alpha,\ \beta\ ;\ t\}\} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \bar{\lambda} & 1 & \bar{\mu} & \nu \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\lambda = b_1 - b_2\delta$, $\mu = a_1 - a_2\delta$, $\nu + \lambda\bar{\mu} = r$. On a alors $\lambda\bar{\lambda} = \frac{1}{2} < \beta,\beta >_{A_2}$.

L'action de $\{\{\alpha,\ \beta\ ;\ t\}\}$ sur $H_2(\mathbb{C})$ est donnée par :

$$\{\{\alpha,\ \beta\ ;\ t\}\} \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & z + \mu + \lambda\tau \\ \omega + \bar{\mu} + \bar{\lambda}\tau & \tau' + \lambda\omega + \lambda\bar{\lambda}\tau + \bar{\lambda}z + r \end{pmatrix}$$

On a alors les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ \{A\} & \downarrow & & \downarrow & \{\{A\}\} \\ & \mathcal{H}_4 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ & & \Psi^{-1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ \{\alpha,\, \beta\ ;\ t\} & \downarrow & & \downarrow & \{\{\alpha,\, \beta\ ;\ t\}\} \\ & \mathcal{H}_4 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ & & \Psi^{-1} & & \end{array}$$

Preuve.
Il s'agit de simples vérifications à faire par le calcul, en tenant compte des remarques précédentes, et des actions décrites au cours de la notation 6.3.1.

Proposition-Définition 6.4.3.
On pose :

$$M_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'action de M_0 sur $H_2(\mathbb{C})$ est donnée par :

$$M_0 \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau' & \omega \\ z & \tau \end{pmatrix}$$

L'action de $I_{tr}.M_0$ sur $H_2(\mathbb{C})$ est alors donnée par :

$$I_{tr}.M_0 \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau' & z \\ \omega & \tau \end{pmatrix}$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ \epsilon & \downarrow & & \downarrow & I_{tr}.M_0 \\ & \mathcal{H}_4 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ & & \Psi^{-1} & & \end{array}$$

Notation 6.4.2. *Action du groupe de Weyl.*
Pour σ appartenant à $W(A_2)$, on notera $\{\sigma\}$ la transformation induite par σ sur le domaine $\mathcal{H}_4$, et $\{\{\sigma\}\}$ la transformation induite par σ sur le domaine $H_2(\mathbb{C})$.

Proposition 6.4.2.
(1) Action de $W(A_2)$ sur $\mathcal{H}_4$.

$$\begin{array}{ll}
\{id\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,z_1,z_2,\tau') & \{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,-z_2,z_1-z_2,\tau') \\
\{\sigma_{\alpha_1}\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,-z_1+z_2,z_2,\tau') & \{\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,-z_1+z_2,-z_1,\tau') \\
\{\sigma_{\alpha_2}\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,z_1,z_1-z_2,\tau') & \{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}(\tau,z_1,z_2,\tau') = (\tau,-z_2,-z_1,\tau')
\end{array}$$

(2) Action de $W(A_2)$ sur $H_2(\mathbb{C})$.

$$\{\{id\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -\delta z \\ -\bar{\delta}\omega & \tau' \end{pmatrix}$$

$$\{\{\sigma_{\alpha_1}\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -\omega \\ -z & \tau' \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -\bar{\delta} z \\ -\delta\omega & \tau' \end{pmatrix}$$

$$\{\{\sigma_{\alpha_2}\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & \bar{\delta}\omega \\ \delta z & \tau' \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}\}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & \delta\omega \\ \bar{\delta} z & \tau' \end{pmatrix}$$

On a les identités suivantes :

$$\{\{id\}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\}\} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$\{\{\sigma_{\alpha_1}\}\} = I_{tr}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}\} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

$$\{\{\sigma_{\alpha_2}\}\} = I_{tr}.\begin{pmatrix} -\bar{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \qquad \{\{\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\}\} = I_{tr}.\begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

(3) Pour σ appartenant à $W(A_2)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Psi & & \\
 & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\
\{\sigma\} & \downarrow & & \downarrow & \{\{\sigma\}\} \\
 & \mathcal{H}_4 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\
 & & \Psi^{-1} & &
\end{array}$$

Proposition 6.4.3.

On peut remarquer que l'action de $\{\{\sigma_{\alpha_1}\}\}o\Big\{\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\}\Big\}$ *sur* $H_2(\mathbb{C})$ *coïncide avec l'action de* I_{tr}*, qui consiste à échanger* ω *et* z*.*
On peut écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & \\ & \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ \{\sigma_{\alpha_1}\}o\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\} & \downarrow & & \downarrow & I_{tr} \\ & \mathcal{H}_4 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{C}) & \\ & & \Psi^{-1} & & \end{array}$$

Remarque 6.4.4. Toutes les matrices définies ci-dessus sont dans $SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K)$, qui n'est autre que le groupe spécial unitaire défini sur $\mathcal{O}_K$, noté $SU(2,2)_{\mathcal{O}_K}$.

6.4.4 Formes modulaires définies sur $\mathcal{H}_4$ et formes modulaires définies sur $H_2(\mathbb{C})$

Lemme 6.4.1. *Le groupe* $SU(2,2)_{\mathcal{O}_K}$ *est engendré par les matrices suivantes, r décrivant l'ensemble* $\{\ 1,\ \omega_0 = -2+\delta\ \}$*:*

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & \bar{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \\ \bar{r} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\bar{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_8 = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{r} & 1 \end{pmatrix}$$

Preuve.
C'est une application du théorème 2.1 cité par T.Dern, [D], lui-même se référant au théorème 9.2.6 de A.J.Hahn et O.O'Meara, [HO].

Proposition 6.4.4.
1) Si la fonction F *définie sur* $\mathcal{H}_4$*, est une forme modulaire de poids* k*, pour le groupe* $\widetilde{\Gamma}_L$*, alors la fonction* $\widehat{F} := Fo\Psi^{-1}$ *définie sur* $H_2(\mathbb{C})$*, appartient à* $[\ SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K),\ k,\ 1\ ]$*. De plus, si* F *est invariante, respectivement anti-invariante, sous l'action de la transformation* $\{\sigma_{\alpha_1}\}o\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\}$*, alors* $\widehat{F}$ *est une forme hermitienne symétrique, respectivement antisymétrique (voir la définition 6.4.3).*

2) Si $\widehat{F}$ est une forme modulaire hermitienne définie sur $H_2(\mathbb{C})$, appartenant à l'espace $[\ SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K),\ k,\ 1\ ]$, alors la fonction $F := \widehat{F} o \Psi$ définie sur $\mathcal{H}_4$, est une forme modulaire de poids k, pour le sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_L$ engendré par $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes H(A_2)$ et $\epsilon.\{\sigma_{\alpha_1}\}$. Si de plus $\widehat{F}$ est invariante sous l'action de $I_{tr} o M_0$, alors F est une forme modulaire pour le groupe $\widetilde{\Gamma}_L$.

Preuve.
1) D'après la forme des générateurs du groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ mentionnés au paragraphe 6.4.1, le passage du domaine $\mathcal{H}_4$ au domaine $H_2(\mathbb{C})$, décrit au paragraphe 6.4.3, et les diagrammes commutatifs précisés dans ce même paragraphe, la forme $\widehat{F}$ définie sur $H_2(\mathbb{C})$, est une forme modulaire pour le sous-groupe noté G de $< \{\Gamma_2(\mathcal{O}_K) \cap SL_4(K)\} \cup \{I_{tr}\} >$ engendré par les éléments :
(1) $\{\{A\}\}$, où A décrit $SL_2(\mathbb{Z})$,
(2) $\{\{\alpha,\ \beta\ ;\ t\}\}$, où α, β, appartiennent à A_2, et t est un réel tel que $r = t + \frac{1}{2} < \alpha,\beta >$ soit dans $\mathbb{Z}$,
(3) $I_{tr}.M_0$,
(On peut dire que le groupe G est l'image dans $< \{\Gamma_2(\mathcal{O}_K) \cap SL_4(K)\} \cup \{I_{tr}\} >$ du groupe $\widetilde{\Gamma_L}$.)

Le comportement de la forme $\widehat{F}$ sous l'action de la transformation I_{tr} est obtenu grâce à la correspondance établie à la proposition 6.4.3, entre l'action de $\{\sigma_{\alpha_1}\} o \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ et celle de I_{tr}.

Il reste à vérifier que le groupe G contient le groupe $\Gamma_2(\mathcal{O}_K) \cap SL_4(K) = SU(2,2)_{\mathcal{O}_K}$. On utilise pour cela le lemme 6.4.1 précédent, et on vérifie que l'action de chaque générateur de $SU(2,2)_{\mathcal{O}_K}$ est bien l'image de celle d'un élément du groupe $\widetilde{\Gamma_L}$.
On constate facilement les identités suivantes :

$G_1 = \{\{\ [\ \alpha,\ \beta\ ;\ t\ ]\ \}\}$, avec $\mu = r$, $\lambda = 0$, $\nu = 0$, ou encore $\beta = 0$, $t = 0$, $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, avec $a_1 - a_2\delta = r$ (voir les notations introduites à la proposition 6.4.2),

$G_5 = \{\{\ [\ 0,\ 0;\ 1\ ]\ \}\}$,

$G_7 = \{\{\ [\ \alpha,\ \beta\ ;\ t\ ]\ \}\}$, avec $\mu = 0$, $\lambda = \bar{r}$, $\nu = 0$, ou encore $\alpha = 0$, $t = 0$, $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, avec $b_1 - b_2\delta = \bar{r}$,

$G_3 = \left\{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}\right\}$ (voir la proposition 6.4.2),

$G_6 = \left\{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}\right\}$.

Des calculs directs montrent que l'action de G_4 , respectivement G_8, sur $H_2(\mathbb{C})$, correspond à celle, sur $\mathcal{H}_4$, de ϵ . $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. ϵ, respectivement ϵ . $\{\ [0,\beta,\ 0]\}$. ϵ, avec $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, où $b_1 - b_2\delta = r$ (on peut établir des diagrammes commutatifs analogues aux précédents). Comme ϵ . $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. ϵ et ϵ . $\{\ [0,\beta,\ 0]\}$. ϵ sont des éléments de $\widetilde{\Gamma}_L$, G_4 et G_8 sont bien dans le groupe image G.

Il reste à considérer le cas de G_2.
De nouveau par calculs directs, on constate que l'action de G_2 sur $H_2(\mathbb{C})$ correspond à la transformation suivante sur $\mathcal{H}_4$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{H}_4 & \longrightarrow & \mathcal{H}_4 \\ (\tau,\, z_1,\, z_2,\, \tau') & \longmapsto & (\frac{\tau}{D},\, \frac{z_1 - xS_1[Z]/2}{D},\, \frac{z_2 - yS_1[Z]/2}{D},\, \frac{\tau'}{D}) \end{array}$$

où $-\frac{1}{2}S_1[Z] = \frac{1}{2} < z,z >_{A_2} - \tau\tau'$,

$D = 1 - \frac{1}{2}S_1[Z]r\bar{r} + sz_1 + tz_2$,

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}Im(\delta\bar{r})$, $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}Im(r)$, $s = 2R\acute{e}(r)$, $t = -2R\acute{e}(r\bar{\delta})$.

On peut préciser ces derniers éléments :

$$r\bar{r} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1 \\ 3 & \text{si } r = \omega_0 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1 \\ -2 & \text{si } r = \omega_0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1 \\ -1 & \text{si } r = \omega_0 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 2 & \text{si } r = 1 \\ -3 & \text{si } r = \omega_0 \end{cases} \qquad t = \begin{cases} -1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r = \omega_0 \end{cases}$$

On revient maintenant à la définition initiale du groupe $\widetilde{\Gamma}_L$, introduite dans la notation 6.3.1, et on vérifie que l'action décrite correspond à la matrice notée $g(r)$, r appartenant à $\{\ 1,\, \omega_0\ \}$, suivante :

$$g(r) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r\bar{r} & 0 & s & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à s'assurer que, pour chacune des 2 valeurs de r, $g(r)$ appartient $\widetilde{\Gamma}_L$, c'est à dire à $G_{\mathbb{R}} \cap O(L)$, avec $g(r).l - l$ appartenant à L pour tout l de $\widetilde{L}$. (Voir la notation 6.3.1.)
En utilisant les égalités $x^2 + y^2 - xy = r\bar{r}$, $x - 2y + t = 0$, $-2x + y + s = 0$ valables dans chaque cas, on montre que ${}^t g(r)\ S\ g(r) = S$, ce qui permet d'affirmer que $g(1)$ et $g(\omega_0)$ sont dans $O(V_{\mathbb{R}})$.

Pour vérifier que $g(r)$ appartient à $G_{\mathbb{R}}$, il suffit de constater que cette transformation préserve le domaine $\mathcal{H}_4$, ou encore de vérifier qu'un point particulier choisi dans $\mathcal{H}_4$ est transformé par $g(r)$ en un point de $\mathcal{H}_4$, puisque ce domaine est la réalisation de l'une des 2 composantes connexes du domaine noté $\mathcal{D}$ dans la notation 6.3.1.
Prenons par exemple le point particulier $Z = (i{,}0{,}i)$ appartenant à $\mathcal{H}_4$. (On a bien $S_1[ImZ] >\ 0.$)
Alors, $g(r).Z = (\frac{i}{D},\, \frac{x}{D},\, \frac{y}{D},\, \frac{i}{D})$, avec $D = 1 + r\bar{r}$, donc $S_1[Im(g(r).Z)] = \frac{2}{(1+r\bar{r})^2} >\ 0$, ce qui prouve que $g(r).Z$ est encore dans $\mathcal{H}_4$. Ainsi, $g(r)$ appartient bien à $G_{\mathbb{R}}$.

Montrons maintenant que $g(r)$ préserve le réseau L.

Soit $l = r_1e_1 + r_2e_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + r_{-2}e_{-2} + r_{-1}e_{-1}$ appartenant à L. (Les coordonnées r_{-1}, r_{-2}, l_1, l_2, r_1, r_2, appartiennent à $\mathbb{Z}$.) Alors $g(r).l$ s'écrit :
$g(r).l = r_1e_1 + r_2e_2 + (l_1 + xr_1)\ \alpha_1 + (l_2 + yr_1)\ \alpha_2 + r_{-2}e_{-2} + (r_{-1} + r\bar{r}r_1 + sl_1 + tl_2)\ e_{-1}$, et appartient donc bien à L.

Avec les même notations, mais en supposant cette fois l dans $\widetilde{L}$, c'est à dire r_{-1}, r_{-2}, r_1, r_2, entiers et $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$ appartenant à $\widetilde{A_2}$, on obtient :
$g(r).l\ -\ l = xr_1\alpha_1 + yr_1\alpha_2 + (r\bar{r}r_1 + sl_1 + tl_2)\ e_{-1}$.
L'élément $xr_1\alpha_1 + yr_1\alpha_2 + r\bar{r}r_1e_{-1}$ appartient à L, et il reste donc à montrer, pour s'assurer que $g(r)$ vérifie la propriété $g(r).l - l$ appartient à L pour tout l de $\widetilde{L}$, que pour tout $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$ de $\widetilde{A_2}$, $sl_1 + tl_2$ appartient à $\mathbb{Z}$.
Il suffit en fait de constater cette propriété pour λ_1 et λ_2, c'est à dire pour $(l_1,l_2) = (\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, respectivement $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, ce qui se fait facilement en utilisant les valeurs connues de s et t.
Ainsi, $g(1)$ et $g(\omega_0)$ appartiennent bien à $\widetilde{\Gamma}_L$.

Ceci permet finalement de conclure que la forme $\widehat{F}$ est modulaire pour le groupe spécial unitaire $SU(2,2)_{\mathcal{O}_K} =\ SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K)$.

2) Grâce à la remarque 6.4.4, la démonstration de cette deuxième partie s'effectue en utilisant uniquement la correspondance entre les deux domaines $\mathcal{H}_4$ et $H_2(\mathbb{C})$ et l'action sur ces domaines des groupes dont il est question.

Remarque 6.4.5. On peut vérifier qu'une forme $\widehat{F}$ modulaire hermitienne définie sur $H_2(\mathbb{C})$, est invariante sous l'action de $I_{tr}oM_0$ si et seulement si elle est symétrique et de poids pair, ou antisymétrique et de poids impair.
En effet, en notant k le poids de $\widehat{F}$, et ι valant 0 si $\widehat{F}$ est symétrique, 1 si $\widehat{F}$ est antisymétrique, on obtient, d'après l'action sur $H_2(\mathbb{C})$ de M_0 :

$$\widehat{F}(I_{tr}oM_0.Z) = (-1)^{\iota}\widehat{F}(M_0.Z) = (-1)^{\iota+k}\widehat{F}(Z).$$

Corollaire 6.4.1.
Soit φ une forme de Jacobi appartenant à $J_{k,1}^{W(A_2),hol}$.
On considère la forme modulaire $F_{\varphi}(\tau,z_1,z_2,\tau')$ définie sur $\mathcal{H}_4$ qui lui est associée (voir la proposition-définition 6.3.1) et on pose, pour $\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix}$ appartenant à $H_2(\mathbb{C})$:

$$\widehat{F_{\varphi}}\Big(\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix}\Big) := F_{\varphi}\Big(\Psi^{-1}\begin{pmatrix} \tau & z \\ \omega & \tau' \end{pmatrix}\ \Big).$$

Alors la forme $\widehat{F_{\varphi}}$ appartient à [$SL_4(K) \cap \Gamma_2(\mathcal{O}_K)$, k, 1].
De plus, si k est pair, $\widehat{F_{\varphi}}$ est une forme hermitienne symétrique, et si k est impair, $\widehat{F_{\varphi}}$ est une forme hermitienne antisymétrique.

Preuve.
Le fait que $\widehat{F_{\varphi}}$ soit une forme modulaire hermitienne de poids k est une conséquence immédiate de la première partie de la proposition précédente 6.4.4, et des propriétés de la forme modulaire F_{φ}, citées au cours de la proposition-définition 6.3.1.

D'après la correspondance entre I_{tr} et $\{\sigma_{\alpha_1}\}o\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\}$, précisée à la proposition 6.4.3, le comportement de cette forme vis à vis de l'action de la transformation I_{tr} est obtenu grâce à la relation suivante (conséquence de l'invariance de F_φ sous l'action de $W(A_2)$, voir la propriété (2) de la proposition 6.4.1) :

$$F_\varphi\Big(\{\sigma_{\alpha_1}\}o\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\}.(\tau,z,\tau')\Big) = (-1)^k F_\varphi(\tau,z,\tau')$$

Remarque 6.4.6. Comparaison entre le point de vue des formes modulaires hermitiennes de degré 2 définies sur l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et celui des formes modulaires pour un groupe orthogonal du type $\widetilde{\Gamma}_L$, associé au réseau A_2.
(1) D'après la proposition 6.4.4, on peut retrouver, à partir des formes modulaires pour le groupe $\widetilde{\Gamma}_L$, associé au réseau A_2, les formes hermitiennes de degré 2 définies sur l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

(2) En appliquant le corollaire 6.4.1, on peut établir certaines correspondances entre les formes construites par relèvement arithmétique ou exponentiel de formes de Jacobi pour A_2 que l'on connaît, et les formes modulaires hermitiennes introduites par A.Krieg et T.Dern [KD], et faire le rapprochement avec les résultats concernant ces formes hermitiennes, exposés notamment au théorème 6 de leur article (voir la remarque 6.4.2).
Ainsi, les formes $\widehat{F_{E_{4,1}^{(A_2)}}}$, et $\widehat{F_{E_{6,1}^{(A_2)}}}$, correspondent aux formes hermitiennes symétriques notées E_4 et E_6 dans [KD], d'après leur poids et la forme de leurs premiers coefficients de Fourier.
Les formes hermitiennes symétriques notées E_{10} et E_{12}, respectivement de poids 10 et 12, peuvent être obtenues en considérant par exemple les relèvements arithmétiques $F_{E_6(\tau)E_{4,1}^{(A_2)}}$, et $F_{E_8(\tau)E_{4,1}^{(A_2)}}$.
De même, les formes cuspidales $F_{\Delta(\tau)a_{0,1}}$ et $F_{\Delta(\tau)a_{-2,1}}$ donnent, peut-être à une constante multiplicative près, les formes cuspidales hermitiennes f_{12} et f_{10}.
La forme hermitienne obtenue à partir de $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}} = Exp-Lift(\psi_{0,1}^{(1)})$ (voir la proposition 6.3.5), est une forme de poids 9, elle est bien antisymétrique d'après le corollaire 6.4.1, et correspond donc, également à une constante multiplicative près, à la forme cuspidale antisymétrique Φ_9 de A.Krieg et T.Dern (introduite au corollaire 3 de leur article), qui est un produit de Borcherds et admet un relèvement de Maass.
La forme $Exp-Lift(\Phi_1)$ (voir la proposition-définition 6.2.2), qui est de poids 45, semble, elle, correspondre, toujours à une constante multiplicative près, à la forme cuspidale symétrique Φ_{45} de A.Krieg et T.Dern (introduite au même corollaire) qui est un produit de Borcherds et n'admet pas de relèvement de Maass. On peut constater que la forme hermitienne obtenue à partir de $Exp-Lift(\Phi_1)$ est bien symétrique, puisqu'elle est anti-invariante sous l'action de $W(A_2)$ et de poids impair, donc invariante sous l'action de la transformation $\{\{\sigma_{\alpha_1}\}o\Big\{\Big\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big\}\Big\}$.
On a ainsi obtenu tous les générateurs qu'introduisent A.Krieg et T.Dern dans le théorème 6 ([KD]) décrivant certains anneaux de formes modulaires hermitiennes (voir la remarque 6.4.2).

(3) On a vu qu'il est possible, en utilisant un relèvement arithmétique de certaines formes de Jacobi définies pour le réseau A_2, dans le cadre plus général faisant intervenir des caractères non triviaux (voir le théorème 1.12 dans [GN II], adapté dans le cas de plusieurs variables, cité à la remarque 6.3.4 et lors de la construction des exemples donnés à la proposition 6.3.6), d'obtenir des formes supplémentaires qui n'apparaissent pas dans la théorie des formes hermitiennes de degré 2 définies sur l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

On peut citer les formes suivantes, obtenues à partir de formes de Jacobi holomorphes ou cuspidales, construites dans les chapitres précédents (voir la proposition 2.5.10 et la proposition-définition 3.2.1) :

$$Lift_1(\eta(\tau)^8 a_{-3,1}) \in \mathcal{M}_1\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3),\, \chi_3\Big)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{12} a_{0,1}) \in \mathcal{M}_6^{cusp}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2),\, \chi_2\Big)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{12} a_{-2,1}) \in \mathcal{M}_4^{cusp}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2),\, \chi_2\Big)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{28} \mathcal{A}) \in \mathcal{M}_{15}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_6),\, \chi_2\Big)$$

$$Lift_1(\eta(\tau)^{88} \mathcal{A}) \in \mathcal{M}_{45}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3)\Big)$$

où on rappelle que χ_j désigne un caractère d'ordre j, et $\widetilde{\Gamma}((A_2)_t)$ désigne le groupe $\widetilde{\Gamma_L}$ associé au réseau L défini avec $L_0 = -(A_2)_t$, la notation $(A_2)_t$ désignant un réseau de rang 2 muni de la forme quadratique $t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi notamment les formes à caractère trivial suivantes :

$$\Big(Lift_1(\eta(\tau)^8 a_{-3,1})\Big)^3 \in \mathcal{M}_3\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_3)\Big)$$

$$\Big(Lift_1(\eta(\tau)^{12} a_{0,1})\Big)^2 \in \mathcal{M}_{12}^{cusp}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2)\Big)$$

$$\Big(Lift_1(\eta(\tau)^{12} a_{-2,1})\Big)^2 \in \mathcal{M}_8^{cusp}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_2)\Big)$$

$$\Big(Lift_1(\eta(\tau)^{28} \mathcal{A})\Big)^2 \in \mathcal{M}_{30}\Big(\widetilde{\Gamma}((A_2)_6))$$

Ces remarques témoignent du fait que le point de vue du groupe orthogonal $\widetilde{\Gamma}_L$ associé au réseau L et à la forme quadratique S de signature $(2{,}N+2)$ adopté ici avec $N = 2$ et $L_0 = -A_2$, est un point de vue plus large que celui du groupe hermitien $SU(2{,}2)_{\mathcal{O}_K}$, avec $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Bibliographie

[Ba] W.L.Baily, *Fourier-Jacobi series, Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proc. Symp. Pure Math., Vol.IX, eds Borel, G.D.Mostow, Amer. Math. Soc, Providence, Rhode Island, 1966, 296-300.

[Be] M.Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi groups ; Part I, II*, Differential Geometry and its Applications, North-Holland, 13 (2000), 19-41, 213-233.

[Bo1] R.Borcherds, *Automorphic forms on* $O_{s+2,2}$ *and infinite products*, Invent.Math. Vol. 120, 1995, 161-213.

[Bo2] R.Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*, Invent.Math. 132, 1998, 491-562.

[Bo3] R.Borcherds, *Reflexion groups of Lorentzian lattices*, Duke Math.J., Vol. 104, 2000, 319-366

[B] N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5, 6.

[BC] Z.I.Borevitch, I.R.Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Monographies internationales de Mathématiques modernes, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.

[D] T.Dern, *Multiplikatorsysteme und Charaktere Hermitescher Modulgruppen*, Monatshefte für Mathematik, 126, 109-116, 1998.

[Di] R.Dijkgraaf, *The mathematics of fivebranes*, Proc. Int. Congr. Math. Berlin 1998, Vol. 3, 133-142.

[DMVV] R.Dijkgraaf, G.Moore, E.Verlinde, H.Verlinde, *Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings*, Jour. Commun. Math. Phys. 1997, 197-209.

[Du] B.Dubrovin, *Geometry of* $2D$ *topological field theories.* Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120-348, Lecture Notes in Math., 1620, Springer, Berlin, 1996.

[E] W.Ebeling, *Lattices and Codes. A course partially based on lectures by F.Hirzebruch*, Advanced lectures in Marhematics.

[EZ] M.Eichler, D.Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math. 55, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985.

[G] V.A.Gritsenko, *Modular forms and moduli spaces of abelian and* $K3$ *surfaces*, Algebra i Analyz, 6:6, 1994, 65-102. Engl. tr. in St.Petersburg Math. J., Vol.6, 1995, No.6, 1179-1208.

[G1] V.A.Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi-Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms*, Algebra i Analiz 11, 1999, N.5, 100-125. Engl. tr. in St. Petersburg Math. J., Vol. 11:5, 2000, 781-805.

[G2] V.A.Gritsenko, *Complex vector bundles and Jacobi forms*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Preprint Series, 1999 (76).

[G3] V.A.Gritsenko, *Cours sur les formes de Jacobi*, Lille, 2000-2001.

[G4] V.A.Gritsenko, *Cours sur les formes automorphes*, Lille, 2001-2002.

[G5] V.A.Gritsenko, *Jacobi functions of* n*-variables*, Zap. Nauk. Sem. LOMI 168, 1988, 32-45. Engl. tr. in J. Soviet. Math., Vol. 53, 1991, 243-252.

[G6] V.A.Gritsenko, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces*, The International Mathematics Research Notices, Vol. 6, 1994, 235-243.

[G7] V.A.Gritsenko, *The action of modular operators on the Fourier-Jacobi coefficients of modular forms*, Matem. Sbornik 119, 1982, 248-277. Engl. tr. in Math. USSR Sbornik, Vol. 47, 1984, 237-268.

[G8] V.A.Gritsenko, *Arithmetical lifting and its applications*, Number Theory. Proceedings of Paris Seminar, 1992-1993, eds S.David, Cambridge University Press, 1995, 103-126.

[G9] V.A.Gritsenko, *Construction of hermitian modular forms of genus* 2 *from cusp forms of genus* 1, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 144, 1985, 51-67. Engl. tr. in J. Soviet Math., 38, 1987, 2065-2078.

[G10] V.A.Gritsenko, *Maass space for* $SU(2{,}2)$. *Hecke ring and zeta-functions*, Trugy Steklov Math. Inst., 183, 1990, 68-77. Engl. tr. in Proc. Steklov Inst. of Math. 183, 1991, 75-86.

[G11] V.A.Gritsenko, *Jacobi functions and Euler products for Hermitian modular forms*, Zap. Nauk. Sem. LOMI 183, 1990, 77-123. Engl. tr. in J. Soviet Math., 62, 1992, 2883-2914.

[GH] V.A.Gritsenko, K.Hulek, *The modular form of the Bart-Nieto quintic*, Intern. Math. Res. Notices, Vol. 17, 1999, 915-938.

[GN I] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac-Moody Algebras. Part I*, Int. J. of Math., Vol. 9, No. 2, (1998) 153-199.

[GN II] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac-Moody Algebras. Part II*, Int. J. of Math., Vol. 9, No. 2, (1998) 201-275.

[GN] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *On classification of Lorentzian Kac-Moody Algebras*, Russian Math. Survey, Vol. 57, 2002, 79-139.

[GN3] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras*, Amer. J. Math., Vol. 119, 1997, 181-224.

[GN4] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *The Igusa modular forms and the "simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras*, Mat. Sb., Vol. 187, 27-66, 1996. Engl. tr. in Sb. Math., Vol. 187, 1601-1641.

[GN5] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *$K3$-surfaces, Lorentzian Kac-Moody algebras and mirror symmetry*, Math. Res. Lett., 1996, Vol.3, 211-229.

[GN6] V.A.Gritsenko, V.V.Nikulin, *The arithmetic mirror symmetry and Calabi-Yau manifolds*, Comm. Math. Phys., 2000, Vol. 210, 1-11.

[GZ] L.Gottsche, D.Zagier, *Jacobi forms and the structure of Donaldson invariants for* 4*-manifolds with* $b_+ = 1$, Selecta Math. (N.S.), 4, 1998.

[H] K.Haverkamp, *Hermitesche Jacobiformen*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, 3.Serie, Heft 15, April 1995.

[Ho] G.Höhn, *Komplex elliptische Geschlechter und S^1-äquivariante Kobordismustheorie*, 1991, Bonn.

[HKW] K.Hulek, C.Kahn, S.H.Weintraub, *Moduli spaces of abelian surfaces : compactification, degenerations and theta-functions*, De Gruyter Expositions in Mathematics 12, Walter De Gruyter, Berlin, 1993.

[HO] A.J.Hahn, O.O'Meara, *The Classical Groups and K-Theory*, Berlin, Heidelberg, New-York : Springer, 1989.

[Ka] V.G.Kac, *Infinite dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, second edition, 1985.

[Kaw] T.Kawai, *String duality and modular forms*, Phys. Lett., B397, 1997, 51-62.

[K] N.Koblitz, *Introduction to Elliptic curves and Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, second edition, 1997.

[KD] A.Krieg, T.Dern, *Graded Rings of Hermitian Modular Forms of Degree 2*, manuscripta math. 110, 251-272, 2003.

[Ko] M.Kontsevich, *Product formulas for modular forms on* O(2,n) *(after R.Borcherds)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/1997, Astérisque No 245, 1997, Exp. No 821, 3, 41-56.

[KP] V.G.Kac, D.H.Peterson, *Infinite dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms*, Advances in Mathematics 53, 125-264, 1984.

[KS] W.Kohnen, N.P.Skoruppa, *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*, Invent. Math. Vol. 95, 1989, 449-476.

[KY] T.Kawai, K.Yoshioka, *String partition functions and infinite products*, Adv. Theor. Math. Phys., Vol. 4, 2000, 397-485.

[KYY] T.Kawai, Y.Yamada, S.K.Yang, *Elliptic Genera and N=2 Superconformal Field Theory*, Journ. Nucl. Phys., Vol B414, 1994, 191-212.

[L1] E.Looijenga, *Root systems and elliptic curves*, Invent. Math. 38, 1976, 17-32.

[L2] E.Looijenga, *Invariant theory for generalized root systems*, Invent. Math. 61, 1980, 1-32.

[Ma] Yu.I.Manin, *Cubic Forms. Algebras, Geometry, Arithmetic*, North-Holland publishing company, 1974.

[M] H.Maass, *Uber eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades I, II, III*, Invent. Math., Vol. 52, 53, 1979, 95-104, 249-253, 255-265.

[Mi] T.Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, 1989.

[Mu] D.Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Progress in Mathematics, vol.28, Birkhäuser, 1983.

[N] V.V.Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol.43, 1979, 111-117. Engl. tr. in Math. USSR Izvestija, vol.14, No.1, 1980.

[N1] V.V.Nikulin, *Finite Automorphism groups of Kähler $K3$-surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obsh. 38, 73-137, 1979. Engl. tr. in Trans. Moscow Math. Soc. 38, 1980.

[N2] V.V.Nikulin, *Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces* , Proc. Int. Congr. Math. Berkeley 1986:1, 654-669.

[PS] I.I.Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains*, Gordon and Breach, New-York, London, Paris, 1969.

[R] G.Rousseau, *Le groupe fondamental de certains espaces d'orbites régulières de groupes de Weyl affines*, Geometrica Dedicata 35, 31-42, 1990.

[Sa] K.Saito, *Around the Theory of the generalized weight system : relations with singularity theory, the generalized Weyl group and its invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. , 183-2, 1988, 1001-143.

[Sat] I.Satake, *Flat structure for the simple elliptic singularity of type $\tilde{E}_6$ and Jacobi form*, Proc. Japan Acad. Serv. A Math. Sci. 69 (1993), no 7, 247-251.

[Sk1] N.P.Skoruppa, *Uber den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts*, Bonner Math. Schriften, 1985.

[Sk] N.P.Skoruppa, *Modular Forms*, Appendix I, Aspects of Mathematics, dans "Manifolds and Modular Forms", par F.Hirzebruch, T.Berger, R.Jung.

[SkZ] N.P.Skoruppa, D.Zagier, *Jacobi forms and a certain space of modular forms*, Invent. Math., Vol. 94, 1988, 113-146.

[S] S.A.Stepanov, *Arithmetic of algebraic curves*, Monographs in Contemporary Mathematics.

[W] K.Wirthmüller *Root systems and Jacobi forms*, Compositio Mathematica 82, 293-354, 1992.

[WW] E.T.Whittaker, G.N.Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, fourth edition, 1927.

[Z] Wan Zhe-Xian *Introduction to Kac-Moody Algebra*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1991.