

Numéro d'ordre : 3326

THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Mécanique

par

Ève LENGLET

CONTRIBUTION AU DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE D'HOMOGENEISATION DES COMPOSITES A FIBRES ACTIVES

-

APPLICATION A LA TORSION DE PALES D'HELICOPTERE

Soutenue le 10 Juillet 2003 devant la Commission d'Examen :

Président du jury : Monsieur D. Buisine (Professeur à l'USTL)
Rapporteurs : Monsieur C. Richard (Maître de Conférence, INSA Lyon)
Monsieur M. Lethiecq (Professeur à l'Université de Tours)
Examineurs : Monsieur J. P. Grellier (Ingénieur, DGA)
Monsieur M. Brussieux (docteur, GESMA)
Monsieur D. Osmont (Ingénieur, ONERA-Châtillon)
Monsieur J.-C. Debus (Professeur à l'IUT d'Amiens)
Madame A.-C. Hladky-Hennion (C.R. au CNRS)
Monsieur E. Deletombe (Ingénieur, ONERA-Lille)

Parce que c'est une tradition :

A Marc

A mes parents,

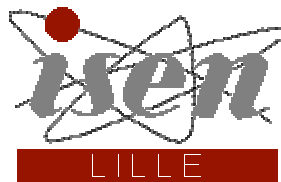
A mes grands-parents,

Et surtout à moi car je le mérite !

*Toutes ces personnes m'ont soutenue et m'ont
patiemment écoutée râler. Je les en remercie
sincèrement.*

En mémoire de mon grand-père

Cette thèse a été préparée à l'ONERA (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales) au sein du DMSE/RCS et à l'IEMN (Institut d'Électronique et de Microélectronique du Nord) (UMR – CNRS 8520), au sein de l'équipe d'Acoustique du département ISEN (Institut Supérieur d'Électronique du Nord)



Ce travail a été financé par l'ONERA.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur D. Buisine, professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour avoir accepté de présider le jury.

J'exprime mes profonds remerciements à Messieurs C. Richard, Maître de Conférence, Habilité à Diriger des Recherches à l'INSA de Lyon et Monsieur M.Lethiecq, professeur à l'Université François Rabelais de Tours qui ont eu à juger ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Grellier de la DGA, Monsieur Brussieux du GESMA et Monsieur Osmont de l'ONERA pour leur participation au jury.

Je remercie sincèrement Monsieur le professeur Jean Claude Debus¹, directeur de thèse et Responsable du laboratoire d'Acoustique de l'ISEN, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire et permis de participer à des congrès et pour avoir contribué à l'avancée de la thèse.

Je remercie également Madame Anne Christine Hladky-Hennion², Chargé de Recherches au CNRS et Habilité à Diriger des Recherches pour avoir encadré ma thèse durant trois ans. Ton optimisme, tes conseils, ta disponibilité m'ont été indispensables.

Je remercie Christian Granger, ingénieur de recherche à l'ISEN pour avoir pris le temps de m'expliquer les subtilités de l'expérimentation. Ma formation mécanique ne me permettait de manipuler seule mais il a pris de son précieux temps.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Eric Deletombe³, ingénieur à l'ONERA-Lille qui m'a permis d'avoir un financement pendant plus de trois ans et qui m'a accueilli au sein de son unité de recherche.

I wish to thank Dr George Rossetti from the Continuum Photonics, for his contribution to the experimental work and his advices.

Je remercie David Delsart, Benoit Malherbe, Bertrand Langrand, Jean-Luc Petitniot et Mathilde Lapie pour m'avoir supportée, dans tous les sens du terme, à l'ONERA.

Je souhaite très sincèrement remercier toute l'équipe du laboratoire d'acoustique de l'ISEN pour leur accueil, leur sympathie, leur bonne humeur et le caractère humain qu'ils ont su apporter à cette thèse. Je remercie donc Christelle Fouque, secrétaire super-active, Pascal Mosbah, enseignant-chercheur super-débordé, Bertrand Dubus enseignant-chercheur super-diplomate, Arnaud Devos enseignant-chercheur super-laser, Marc Lippert docteur super-cinéphile, Gérard Haw professeur super-nicotiné, et Patricia Maincent super-décoratrice. Je dois également remercier les doctorants qui vont désormais retrouver calme et tranquillité : un

¹ Laboratoire d'Acoustique, département ISEN, IEMN, 41 boulevard Vauban, 59046 Lille Cedex, Mèl : jean-claude.debus@isen.fr, Tél : +33 (0)3 20 30 40 31

² Laboratoire d'Acoustique, département ISEN, IEMN, 41 boulevard Vauban, 59046 Lille Cedex, Mèl : anne-christine.hladky@isen.fr, Tél : +33 (0)3 20 30 40 36

³ DMSE/RCS, ONERA-Lille, 5 boulevard Paul Painlevé, 59045 Lille Cedex, Mèl : deletombe@imf-lille.fr, Tél : +33 (0)3 20 49 69 36

grand merci à Boris et Renaud, vacancier patenté. Je n'oublie pas non plus les stagiaires qui ont croisé mon chemin, Ludovic, Olivier, Said, Djamila, Vincent, Alexandre et Jean-François. Et enfin, il a eu peur d'être oublié : je remercie platement Madjid pour cette ambiance conviviale qu'il a su préserver au sein du bureau et je te souhaite bonne chance pour ta thèse (parce que "Hah, ben, c'est bien parti ! Plus haut Plus haut !")

Enfin, je souhaite remercier Jocelyne Coutte car c'est elle qui m'a donné le goût de la recherche au cours de mon stage de DEA. Jo, c'est quand tu veux pour la magnétostriction !

Olivia, je te remercie car c'est grâce à toi que j'ai tenu le coup au début de la thèse. J'espère que notre amitié perdura.

Je remercie également Madame Florence Breuzard que j'ai rencontrée à la fin de ma thèse. Elle m'a accompagné dans une expérience très intéressante qui est la "Valorisation des Compétences – Nouveau Chapitre de Thèse". Elle m'a permis de prendre du recul et de me rendre compte du progrès accompli tant sur le plan scientifique que personnel.

Merci à tous ceux que j'ai oubliés et surtout à mon entourage. Je remercie mon pc qui ne m'a jamais lâché ! Il avait parfois des matins capricieux mais dans l'ensemble, il a toujours répondu présent.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	7
SOMMAIRE	9
INTRODUCTION	15
CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROBLEME	21
NOTATIONS	23
1. LE CONTROLE DE FORME	25
1.1. Les matériaux	25
1.1.1. Les céramiques piézoélectriques	25
1.1.2. Les films polymères piézoélectriques	26
1.1.3. Les matériaux piézocomposites	26
1.1.4. Les matériaux électrostrictifs	28
1.1.5. Les matériaux magnétostrictifs	28
1.1.6. Les alliages à mémoire de forme	29
1.2. Les actionneurs pour les pales	29
1.2.1. Les empilements libres	30
1.2.2. Les actionneurs en boîtier précontraint	30
1.2.3. Les actionneurs à fibres actives	31
1.2.4. Les Composites Macro-Fibres	33
1.3. Le contrôle de forme pour les pales d'hélicoptère	34
1.3.1. Le braquage de volet	34
Concept du Servo-Flap	34
Nose Droop	35
Intégration de Matériaux Magnétostrictifs	36
1.3.2. La torsion active	36
Intégration de fibres piézoélectriques	36
Intégration de céramiques piézoélectriques	37
2. LA PIEZOELECTRICITE	38

2.1.	Définitions et historique	38
2.2.	L'effet piézoélectrique	39
2.2.1.	Propriétés diélectriques et élastiques	39
2.2.1.1.	Propriétés diélectriques	39
2.2.1.2.	Propriétés élastiques	40
2.2.2.	Les équations de la piézoélectricité	42
3.	L'HOMOGENEISATION	43
3.1.	Position du problème	43
3.2.	Les techniques d'homogénéisation existantes	44
3.2.1.	Méthodes d'homogénéisation basées sur les hypothèses de Voigt et Reuss	44
3.2.1.1.	La méthode de Newnham	44
3.2.1.2.	La méthode de Benveniste & Dvorak	45
3.2.1.3.	La méthode de K. Schulgasser	46
3.2.1.4.	La méthode de Hagood	47
3.2.1.5.	La méthode de Yamaguchi & Hashimoto	50
3.2.2.	Méthodes d'homogénéisation faisant appel au tenseur d'Eshelby	51
3.2.2.1.	Modèle dilué	52
3.2.2.2.	Modèle de Mori et Tanaka	53
3.2.2.3.	Modèle auto-cohérent	53
3.2.3.	Les méthodes basées sur d'autres principes	53
3.2.3.1.	La méthode de Poizat	53
3.2.3.2.	La méthode de Abgossou & Pastor	55
3.3.	Tableau récapitulatif des différentes méthodes d'homogénéisation	55
4.	CONCLUSION	56
	CHAPITRE II : TECHNIQUE D'HOMOGENEISATION DEVELOPPEE	57
	NOTATIONS	59
1.	LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE A LA PIEZOELECTRICITE	61
1.1.	Les relations fondamentales et géométriques	61
1.2.	La formulation variationnelle	63
1.3.	Discrétisation par la méthode des éléments finis	64

2.	METHODE DU VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF	67
2.1.	Définition et cas général du matériau élastique	67
2.2.	VER : application au cas du matériau piézoélectrique	68
2.2.1.	Détermination des coefficients mécaniques effectifs	68
	Détermination du coefficient effectif s_{11}^{Eff}	68
	Détermination du coefficient effectif s_{21}^{Eff}	70
	Détermination du coefficient effectif s_{31}^{Eff}	71
	Détermination du coefficient effectif s_{33}^{Eff}	72
	Détermination du coefficient effectif s_{66}^{Eff}	74
2.2.2.	Détermination des coefficients piézoélectriques effectifs	75
	Détermination des coefficients effectifs d_{31}^{eff} et d_{33}^{eff}	76
2.2.3.	Détermination des coefficients diélectriques effectifs	78
	Détermination du coefficient ϵ_{11}^{Teff}	79
	Détermination du coefficient ϵ_{33}^{Teff}	80
2.2.4.	Tableau récapitulatif	81
3.	LA PROPAGATION D'ONDES	81
3.1.	Définition et cas général	82
3.2.	Propagation d'Ondes : Application au cas du matériau piézoélectrique	83
3.2.1.	Détermination des constantes mécaniques	86
	Détermination du coefficient effectif s_{44}^{Eff}	87
	Détermination du coefficient effectif s_{66}^{Eff}	88
3.2.2.	Détermination du coefficient piézoélectrique e_{15}^{eff}	89
3.3.	Tableau récapitulatif	89
4.	VALIDATION	90
4.1.	Courbes de Validation	91
4.2.	Analyse des courbes	97
5.	APPLICATION A UN PIEZOCOMPOSITE 1-3	98

6.	CONCLUSION	101
	CHAPITRE III : EXPERIMENTATION	103
	NOTATIONS	105
1.	DESCRIPTION	107
2.	DONNEES MESUREES EXPERIMENTALEMENT	109
2.1.	Description du montage et mesure	109
2.2.	Calcul du coefficient diélectrique ϵ_{33}^T	112
2.3.	Calcul du coefficient élastique s_{33}^E	112
2.4.	Calcul du coefficient piézoélectrique d_{33}	113
3.	DONNEES ISSUES DE L'HOMOGENEISATION	113
4.	MESURE DU DEPLACEMENT DE L'ACTIONNEUR	114
4.1.	Dispositif	114
4.2.	Traitement des résultats	116
5.	COMPARAISON AVEC LES MESURES	118
5.1.	Déplacement analytique	118
5.2.	Déplacement numérique	119
6.	MODELE AVEC ENCASTREMENT DES ELECTRODES	120
6.1.	Étude de la chute de potentiel engendrée par la matrice	121
6.2.	Nouvelle homogénéisation	122
6.2.1.	Calcul des constantes piézoélectriques	122
6.2.2.	Traitement des résultats	124
6.3.	Discussion	126
7.	ADAPTATION A L'ACTIONNEUR COMPLET	127
8.	APPLICATION NUMERIQUE DE L'ACTIONNEUR SUR UNE PLAQUE	129
9.	CONCLUSION	131

CONCLUSION	133
CONCLUSION	135
BIBLIOGRAPHIE	137
BIBLIOGRAPHIE	139
ANNEXE	147
NOTATIONS	149
ANNEXE A : RELATIONS CONSTITUTIVES POUR UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE	151
<i>Relations constitutives :</i>	151
<i>Relations entre les constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques :</i>	152
ANNEXE B : FORMULATION UTILISEE DANS LES ELEMENTS DU CODE ATILA	153
<i>Transformation du domaine</i>	153
<i>Fonction d'interpolation</i>	153
<i>Formulation des différents tenseurs</i>	155
ANNEXE C : DETERMINATION DES COEFFICIENTS HOMOGENEISES	157
<i>Détermination des coefficients élastiques</i>	157
<i>Détermination du coefficient piézoélectrique</i>	162
<i>Détermination du coefficient diélectrique</i>	162
ANNEXE D : CONSTANTES UTILISEES POUR LA VALIDATION	163
ANNEXE E : DEVELOPPEMENT D'UN ELEMENT DE MEMBRANE	165
<i>Élément contenu dans le code ATILA</i>	165
<i>Condition imposée par l'élément de membrane</i>	166
<i>Relation générale dans le cas de la membrane piézoélectrique</i>	166
<i>Construction de l'élément fini quadrilatère pour un film mince</i>	170

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Dans une étude menée par l'INSEE en Octobre 2002, l'enquête révèle que le bruit est la principale préoccupation des français, devant les problèmes liés à la sécurité. La notion de bruit englobe toutes les provenances qu'elles soient ménagères, industrielles,.... Les transports sont également source de bruit et notamment les hélicoptères. Un hélicoptère de type alouette II émet un bruit de 90dB sur une échelle de 0 à 140dB (niveau de douleur). Certes, le moteur contribue énormément à ce facteur mais les pales du rotor sont un facteur non négligeable. Lors de la rotation des pales, une torsion se crée et engendre des nuisances sonores et de pilotage. Pour contrôler cette torsion, il est possible d'incorporer des matériaux intelligents.

Les matériaux intelligents ou aussi appelés adaptatifs sont composés entre autres de matériaux piézoélectriques, de matériaux électrostrictifs, de matériaux magnétostrictifs, des alliages à mémoire de forme et des fluides électro-rhéologiques. Ils modifient leurs propriétés physiques comme la rigidité ou la viscosité en fonction d'un stimulus extérieur tel que la contrainte mécanique, un champ électrique ou un changement de température. Chaque type de matériaux a des qualités différentes qui sont mises à profit, au mieux, selon le domaine d'utilisation demandé. Les matériaux sur lesquels nos efforts se sont concentrés sont les matériaux piézoélectriques qui ont la capacité de transformer une énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa. Ces matériaux sont notamment beaucoup utilisés comme actionneurs et capteurs. Mais l'apparition de composites, alliant céramiques et matériaux élastiques, a permis de palier de nombreux inconvénients des céramiques massives tels que le poids et la rigidité. La tolérance des composites au dommage est supérieure à celle de céramiques massives. Les applications utilisant ces composites se multiplient alors telles que les transducteurs ultrasonores [NSC78], les actionneurs anisotropes [BHR95] et l'amortissement [Les93]. Des études sont menées sur ces différents matériaux afin de les optimiser mais aussi de minimiser les pertes en les plaçant de façon appropriée. Pour ces matériaux, il faut allier efficacité et poids. En effet, l'incorporation du matériau intelligent ne doit pas nuire aux performances. Le composite est le compromis idéal à ce type d'applications.

Les composites étudiés sont formés de fibres piézoélectriques de quelques micromètres de diamètre, maintenues par un autre matériau matrice et alimentées par des électrodes interdigitées (cf figure).

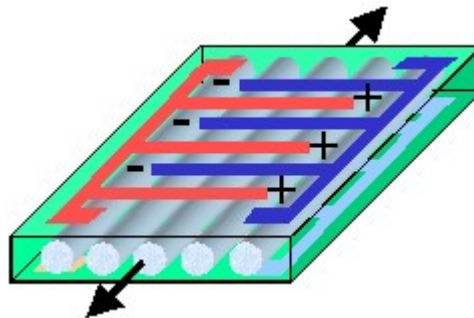


Figure : Actionneur à base de fibres, matrice et des électrodes interdigitées

Mais les coûts de mise en place de ce système sont élevés. Afin de limiter le nombre d'essais mais aussi d'optimiser ces matériaux, il est conseillé de faire appel à une simulation numérique. Lors de cette simulation, il faut prendre en compte tous les éléments de ces composites ce qui implique une grande complexité de maillage. Il faut donc homogénéiser les composites afin de limiter la modélisation. L'homogénéisation consiste à utiliser les caractéristiques d'un matériau hétérogène pour en déduire les caractéristiques d'un matériau homogène équivalent. La structure est alors simplifiée. Le travail de la thèse consiste à développer une méthode d'homogénéisation numérique à l'aide du logiciel développée par l'ISEN, le code éléments finis ATILA [ATI02] et d'appliquer ensuite la méthode à l'étude d'un actionneur pour contrôler la torsion des pales d'hélicoptère.

Le rapport de thèse est divisé en plusieurs parties.

La première partie porte sur l'état de l'art. Tout d'abord, le problème est posé. Un état des lieux des différents principes de contrôle de forme est présenté en mettant l'accent sur les différents matériaux et types d'actionneurs pour les pales d'hélicoptères. Ensuite, la notion de piézoélectricité est exposée. Les différentes techniques d'homogénéisation déjà existantes sont présentées.

Dans la deuxième partie, la technique d'homogénéisation développée est décrite. La méthode combine deux méthodes. Tout d'abord, la méthode du Volume Élémentaire Représentatif est exposée. Puis la méthode de la Propagation d'Ondes complète la première. La validation entérine les résultats. Une application est effectuée pour comparer les résultats obtenus numériquement et analytiquement à des valeurs obtenues expérimentalement.

Enfin, le troisième chapitre a une optique plus expérimentale. Après avoir décrit l'actionneur utilisé, les valeurs homogénéisées sont comparées aux valeurs expérimentales. Ces valeurs sont aussi comparées à celles fournies par le fabricant. Les résultats permettent de mettre en avant le caractère particulier de l'actionneur. Enfin, l'efficacité de l'actionneur pour contrôler la torsion des pales d'hélicoptère est discutée.

CHAPITRE I : Présentation du Problème

Ce chapitre présente l'état de l'art sur le contrôle de forme des pales d'hélicoptères. Après une description des différents matériaux et actionneurs utilisés pour le contrôle de forme, une des solutions retenue par l'ONERA implique l'utilisation de fibres piézoélectriques. C'est pourquoi, la piézoélectricité est présentée dans une seconde partie, aussi bien d'un point de vue des définitions que des équations. En particulier, les différents matériaux composites piézoélectriques sont décrits. Du fait des difficultés pour modéliser ces matériaux pour le contrôle de forme des pales d'hélicoptères, les techniques d'homogénéisation sont présentées en troisième partie. Les avantages et limites de chacun des modèles sont soulignés.

NOTATIONS

$\underline{\quad}^{\text{eff}}$	Grandeur homogénéisée
A^{AC}	Tenseur résultat pour la méthode auto-cohérente
A^{MT}	Tenseur résultat pour la méthode de Mori & Tanaka
A^{dil}	Tenseur résultat pour la méthode Diluée
$A^{(r)}(x), B^{(r)}(x)$	Fonctions d'influence
$a^{(r)}(x), b^{(r)}(x)$	Fonctions d'influence
$[A_r], [B_r]$	Moyenne des fonctions d'influence sur la phase r
$[a_r], [b_r]$	Moyenne des fonctions d'influence sur la phase r
$[c^E]$	Tenseur des constantes de rigidité à champ électrique constant
$[d]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
$\underset{\sim}{D}$	Vecteur déplacement électrique
$\underset{\sim}{E}$	Vecteur champ électrique
$\underset{\sim}{G}$	Vecteur regroupant les quantités uniformes le long du front d'onde
$\underset{\sim}{H}$	Vecteur regroupant les quantités non uniformes le long du front d'onde
$[I], [i]$	Matrices identité
$[L]$	Tenseur des constantes à homogénéiser
$\underset{\sim}{P}$	Vecteur polarisation diélectrique
$[P]$	Tenseur donné par : $P_{ij} = -1$ pour $ij=33, 44, 55$ ou 99 , $P_{ij} = 0$ sinon
$\underset{\sim}{P}^0$	Vecteur champ de polarisation pour la phase r
$[Q]$	Tenseur donné par la relation $[Q]=[P]+[I]$
$[S]$	Tenseur des déformations
$\underset{\sim}{S}$	Vecteur condensé des déformations
S^{esh}	Tenseur d'Eshelby

[T]	Tenseur des contraintes
\tilde{T}	Vecteur condensé des contraintes
\tilde{u}	Vecteur déplacement
(x_1, x_2, x_3)	Système de coordonnées
[ϵ]	Tenseur des permittivités diélectriques
[ϵ_0]	Tenseur des permittivités du vide
$\lambda^0_{\sim r}$	Vecteur contraintes internes pour la phase r
$v_{f,m}$	Fraction volumique de fibre et de matrice
v_r	Fraction volumique
ϕ	Potentiel électrique

1. LE CONTROLE DE FORME

Le contrôle de forme est utilisé depuis longtemps mais l'application à la torsion de pale est relativement récente. Tout d'abord, il est bon de se demander pourquoi chercher à contrôler la torsion induite par la pale. Les problèmes engendrés par cette déformation sont de deux types mais touchent toujours le confort. L'activation en torsion de la pale a pour but d'augmenter le confort de pilotage. Les vibrations engendrées nuisent aux pilotes. Mais de façon primordiale, la maîtrise de la déformation a pour but de réduire les nuisances sonores. Les rotors d'hélicoptères sont une source de bruit incontestable et il est bon de vouloir le limiter.

1.1. Les matériaux

Différents types de matériaux actifs peuvent être utilisés pour le contrôle de forme. Les caractéristiques décideront du choix. Le matériau doit présenter un ajout de masse négligeable comparativement à celle de la pale. La bande passante et l'hystérésis doivent être faibles pour limiter la perte lors d'un usage en boucle. La stabilité doit être importante dans l'environnement en résistant aux aléas du temps, par exemple. La déformation maximale et la densité d'énergie doivent être conséquentes pour améliorer les performances de l'actionneur. Outre toutes ces conditions élémentaires, un problème de robustesse doit être résolu ainsi qu'une capacité à la résistance et à la tolérance au dommage [CPMR99]. La déformation de la pale entraîne un niveau de contrainte élevé qui devra être toléré par le matériau actif. Six différentes classes de matériaux actifs peuvent être considérées. La comparaison est basée sur une comparaison quantitative effectuée à l'aide d'un tableau relevé dans la littérature. Ce tableau est fourni par le Midé Technology Corporation. C'est un document industriel qui n'a pas une réelle valeur scientifique. Et pourtant des personnes telles que Bent et Hagood se servent également de cette documentation pour des rapports. Donc, le tableau est utilisé comme base comparative tout en prenant en considération que les chiffres fournis ont uniquement un but informatif.

1.1.1. Les céramiques piézoélectriques

Les céramiques piézoélectriques [QS-SG] ont la propriété de présenter une déformation sous l'influence d'un champ électrique. Lorsqu'un champ électrique est appliqué à un matériau piézoélectrique, il se déforme. Lorsqu'une contrainte est appliquée à la céramique, elle crée un

champ électrique. En fait, ils transforment l'énergie mécanique en électrique et inversement. Les céramiques ont un potentiel d'allongement d'une valeur de 0.13% ainsi qu'une rigidité de 60.6 GPa. Par contre, comparativement aux films, le cas suivant, la masse volumique de 7500 kg/m³ est importante. Il en est de même en ce qui concerne le coefficient de couplage, de l'ordre de 40 à 70 % [Bou02].

1.1.2. Les films polymères piézoélectriques

Certains polymères peuvent acquérir des propriétés piézoélectriques. Les polymères sont caractérisés par une faible impédance acoustique. Les films polymères piézoélectriques sont peu rigides avec une rigidité de 2GPa petite devant celle des céramiques. La déformation maximale est de 0.07%. L'avantage est le faible poids ajouté par un tel matériau avec une masse volumique de 1780 kg/m³. Le coefficient de couplage (de l'ordre de 14%) est beaucoup plus faible que dans le cas précédent [Bou02]. L'échelle de température, pour une utilisation optimale, est peu étendue. Ce n'est pas le matériau le mieux adapté à une utilisation sur les pales. Les coefficients de couplage sont inférieurs à ceux des céramiques.

1.1.3. Les matériaux piézocomposites

Les premiers piézocomposites étaient formés de plots piézoélectriques [NBKC80] maintenus par une matrice polymère. Au regard des valeurs du tableau I.1, les piézocomposites sont les matériaux bien adaptés au contrôle de forme dans l'aéronautique et le spatial. Dans le cas du contrôle de forme, ils sont formés de fibres piézoélectriques noyées dans une matrice élastique. La forte densité des fibres est compensée par celle de la matrice. La déformation maximale est importante en comparaison avec les précédents matériaux. La rigidité est de 35Gpa, faible par rapport aux céramiques seules. L'hystérésis est non négligeable mais la plage de fonctionnement en température qui peut atteindre 200°C est bonne.

Le fait de prendre un piézocomposite 1-3 (fibre) n'est pas anodin mais est plutôt le fruit d'une réflexion portant sur le rapport poids/action. La capacité d'activation est importante et le composite atténue la forte rigidité de la céramique seule. Le couplage entre céramique et matériau élastique est un bon compromis qui de plus, ne pénalise pas au niveau des contraintes de poids. Mais les matériaux composites ont une représentation géométrique complexe accentué par une utilisation de matériaux actifs.

La connectivité utilisée est très importante. Il faut connaître l'utilisation faite du composite afin de choisir l'orientation et la forme des inclusions.

Chaque phase d'un composite peut être connectée suivant 0, 1, 2 ou 3 dimensions (fig. I.1). Si les composites sont limités à des diphasiques (deux phases), il existe dix connectivités référencées à la figure I.1 [NSC78, NBKC80]. Un composite diphasé est caractérisé par deux entiers. Le premier indique la connectivité de la céramique [NSC78]. Le second donne la connectivité du polymère.

Par exemple, dans le cas d'un composite 3-1, la céramique a des connectivités suivant trois directions. Le polymère est interconnecté dans une direction.

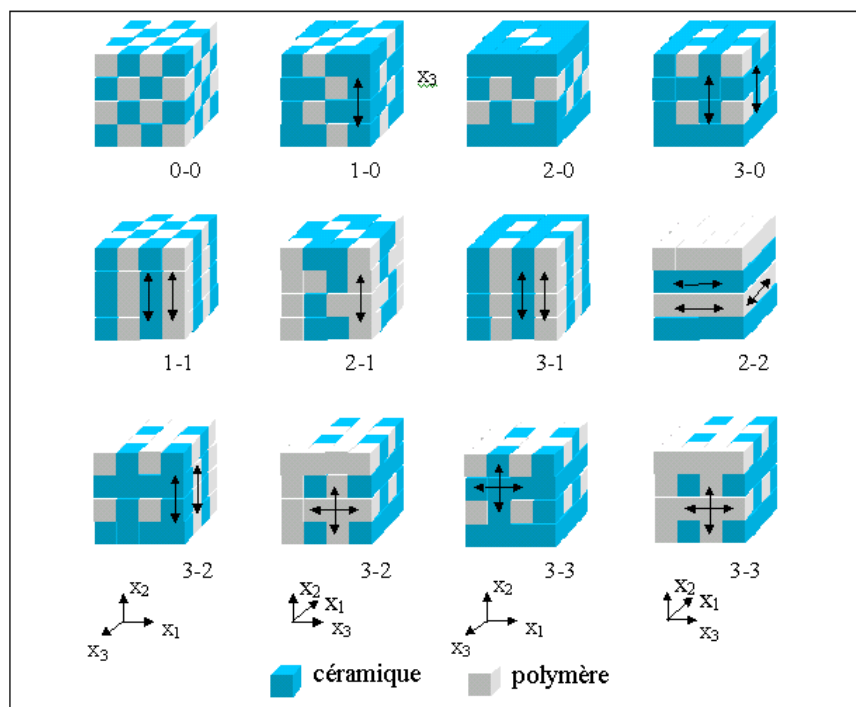


Figure I. 1 Types de connectivité pour un composite diphasé [NSC78]

De plus, il existe la notion de réseau hexagonal ou cubique (fig. I.2).

Par exemple, dans le cas de composite 1-3, on peut avoir les réseaux présentés à la figure I.2 :

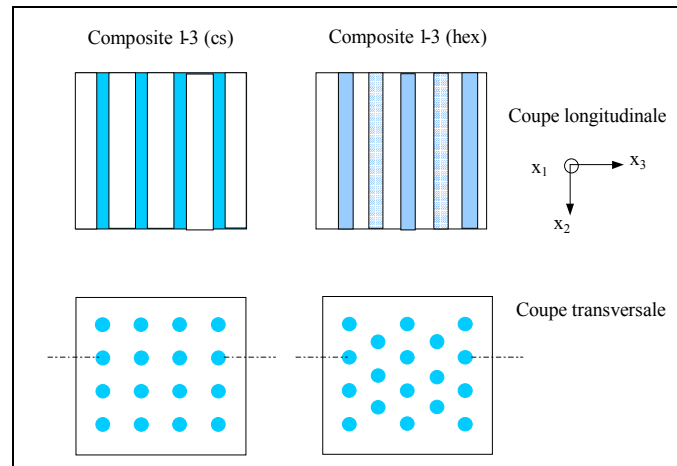


Figure I. 2 Réseaux possibles des piézocomposites 1-3

1.1.4. Les matériaux électrostrictifs

Sous l'action d'un champ électrique, le matériau électrostrictif [DN92] tel que le PMN-PT se déforme proportionnellement au carré de sa polarisation. Il ne réside pas de polarisation rémanente à la différence des matériaux piézoélectriques. Le champ électrique appliqué peut donc être plus grand (soit de zéro au champ entraînant la polarisation de saturation soit uniquement sur la partie linéaire). (Les matériaux électrostrictifs et piézoélectriques doivent être polarisés avant leur utilisation. C'est à dire, les cristaux sont orientés dans une direction pour augmenter la déformation dans cette direction). La capacité de déformation de 0.1% est équivalente aux céramiques piézoélectriques. L'avantage porte sur un faible hystérésis, inférieure à 1%, mais par contre la température d'utilisation de 40°C maximum est très faible. Cela peut poser un énorme problème dans le cas du contrôle de pale.

1.1.5. Les matériaux magnétostrictifs

La magnétostriction [TC95-Len99] est le phénomène qui conduit à la déformation d'un solide lorsqu'il est soumis à un champ magnétique. L'effet inverse est également observé. La capacité de déformation de 0.2% représente le double de celle des matériaux électrostrictifs et place le matériau parmi les plus déformable. La rigidité de 29.7Gpa et la densité 9250 kg/m³ sont moins favorables à l'utilisation en activation. Par contre, l'échelle de température est meilleure. Le coefficient de couplage est très élevé et de l'ordre de 75%. L'inconvénient majeur de ces matériaux est le mode d'alimentation (comme dans certains cas les bobines) complexe en comparaison avec les matériaux piézoélectriques.

1.1.6. Les alliages à mémoire de forme

Différents types d'alliages à mémoire de forme [FM99] existent et sont regroupés en cinq catégories : la superélasticité, l'effet mémoire simple sens, l'effet mémoire double sens, l'effet caoutchoutique et l'effet amortissant. Le dernier est le plus approprié pour l'amortissement de choc ou de vibration. D'un point de vue général, une variation de température entraîne une modification de phase de l'alliage qui provoque un changement de volume. L'effet est réversible. Le potentiel de déformation de 2% à 8%, est supérieur à celui de tous les autres matériaux actifs. La rigidité égale à 28Gpa est importante surtout dans le cas des austénites. Les alliages à mémoires de forme ont une densité faible. Par contre, l'hystérésis est importante. La plage de fonctionnement en température de 300°C est grande et la transformation du matériau est lente.

Le tableau suivant (tab I.1) récapitule ces données [Midé].

	PZT5H	PVDH	CFA	PMN	Terfenol D	Nitinol
Matériaux	piézocéramiques	films piézoélectriques	composites à fibres actives	électrostrictifs	magnétostrictifs	alliages à mémoire de forme
Déformation maximale	0.13%	0.07%	0.18%	0.1%	0.2%	2% - 8%
Rigidité, Gpa	60.6	2	35	64.5	29.7	28 m, 90 a
Densité, kg/m ³	7500	1780	4650	7800	9250	7100 – 7100
Densité d'énergie	6.83	0.275	12.2	4.13	6.42	252-4032
Hystérésis	10%	>10%	15%	<1%	2%	Haut
Température de fonctionnement	-20 à 200°C	-70 à 70°C	0 à 200°C	0 à 40°C	-20 à 180%	-100 à 200°C
Bande passante	100kHz	100kHz	>10kHz	100kHz	<10kHz	<5Hz

Tableau I. 1 Comparaison des différents matériaux actifs [Midé]

De nombreux matériaux actifs existent donc. Après avoir brièvement rappelé leurs caractéristiques, les actionneurs pour la conception desquels ils sont utilisés sont maintenant présentés.

1.2. Les actionneurs pour les pales

Différents types d'actionneurs existent avec des applications variées. L'une des caractéristiques principales de ces actionneurs concerne leur sens d'activation : d_{33} ou d_{31} [CPMR99].

1.2.1. Les empilements libres

Les empilements (stacks) sont obtenus par assemblage de composants élémentaires de 20 à 40 disques d'épaisseur de 80 à 120 μm (fig. I.3). Ces actionneurs travaillent dans le mode d_{33} . Deux types de stacks existent : basse tension (400V max – multicouches) et haute tension (2000V max-disques usinés puis empilés avec les électrodes).

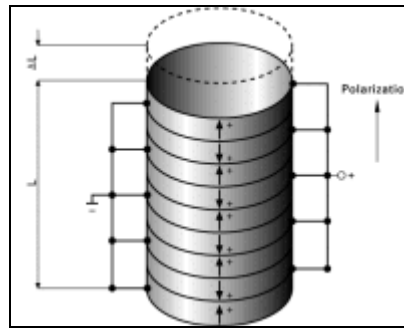


Figure I. 3 Actionneur à empilements libres [phy]

1.2.2. Les actionneurs en boîtier précontraint

Les actionneurs linéaires sont constitués de céramiques piézoélectriques. Ils sont constitués de stacks (empilements) précontraints dans une enveloppe cylindrique en acier inoxydable. Ils peuvent travailler en compression autant qu'en traction. L'efficacité est moindre par rapport aux stacks seuls.

Des actionneurs amplifiés elliptiques (fig. I.4) reposent également sur la mise en œuvre de stacks montés dans un anneau elliptique, servant d'amplificateur géométrique de la déformation du stack piézoélectrique (breveté).

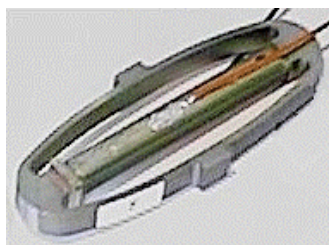


Figure I. 4 Actionneur elliptique

1.2.3. Les actionneurs à fibres actives

Les composites à fibres piézoélectriques sont formés de trois constituants : les fibres de céramiques actives, la matrice polymère et les électrodes interdigitées métalliques. Afin de permettre la diffusion du champ électrique au cœur du matériau, la matrice est chargée de poudre de PZT. Plusieurs paramètres sont associés aux fibres : la forme, la longueur, le matériau utilisé. De plus il faut prendre en compte l'épaisseur du composite (liée à celle de la section de la fibre).

Deux buts sont visés : augmenter l'influence de l'actionneur et l'anisotropie. Ceci est possible en maximisant la fraction volumique de fibre. Il faut noter également que le but est d'avoir une alimentation comprise entre 2 kV et 4 kV (pour les électrodes dont les peignes sont espacés de 1 mm environ) pour avoir un champ significatif dans le composite. Il est nécessaire d'avoir un composite d'au moins 20 % d'épaisseur par rapport à l'espacement des peignes. L'épaisseur du composite est limitée à 200 microns au moins. La fabrication limite la production de fibres à un diamètre compris entre 30 et 250 microns.

En ce qui concerne la forme des fibres, des tests comparant des fibres carrées et circulaires ont permis de mettre en avant un léger avantage des secondes par rapport aux premières. Le choix entre ces deux types de fibres repose principalement sur l'application visée. La fibre circulaire est difficile à mettre en place et le coût d'élaboration rend le problème encore plus complexe. La fibre carrée est utile pour dimensionner plus facilement les propriétés piézoélectriques.

Les matériaux plus couramment utilisés sont les PZT5A et PZT5H. Il est bon de ne pas écarter les PZT4S et PZT8M qui ont de nombreux avantages par rapport aux précédents. Dans le cas d'une comparaison des propriétés longitudinales, le coefficient de couplage, de l'ordre de 0.67 pour le PZT4S et pour le PZT8M sont en dessous du coefficient de couplage du PZT5A (approximativement 0.774). La déformation maximale obtenue pour les matériaux PZT5A et PZT5H est bien au-dessus de celle du PZT4S et PZT8M.

La matrice a deux rôles : assurer la distribution de chargement le long des fibres et permettre la propagation du champ électrique. L'important dans la matrice est d'avoir une bonne permittivité diélectrique pour ne pas court-circuiter l'alimentation fournie des électrodes qui sont fournies par la poudre PZT (la poudre de Nickel peut également être utilisée). Elle influence également la fabrication, la performance et la fiabilité de composites. La poudre augmente la viscosité qui peut-être réduite à haute température. Dans la littérature, il est relevé que la poudre de carbone est également utilisée [BH97b]. Les propriétés diélectriques, la résistivité et la dissipation varient en fonction des poudres de PZT et de carbone.

Les fibres sont alignées perpendiculairement aux peignes de l'électrode inférieure (fig. I.5-I.6). Ensuite, la résine d'époxy à faible viscosité est introduite entre les deux membranes de kapton qui servent de protecteur. L'électrode supérieure est posée en respectant l'alignement [RH98].

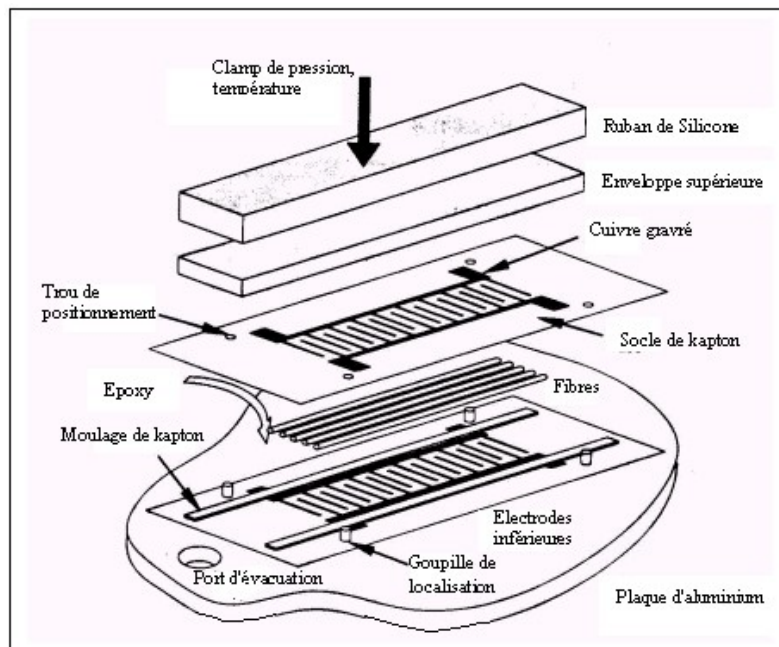


Figure I. 5 Fabrication d'un actionneur d'après [BH97]

Le procédé de fabrication est davantage détaillée, avec des photographies, dans le rapport de A.A. Bent et N.W. Hagood [BH97].

Les composites à fibres piézoélectriques sont utilisés car leur poids est faible. Ils sont de plus facilement adaptable à la forme de la structure. La structure composite rend, de plus, l'actionneur moins fragile tout en gardant les mêmes capacités d'activation (k_{33}). Ils sont activés par des électrodes placées de part et d'autres de la membrane [BH97b] (fig. I.6).

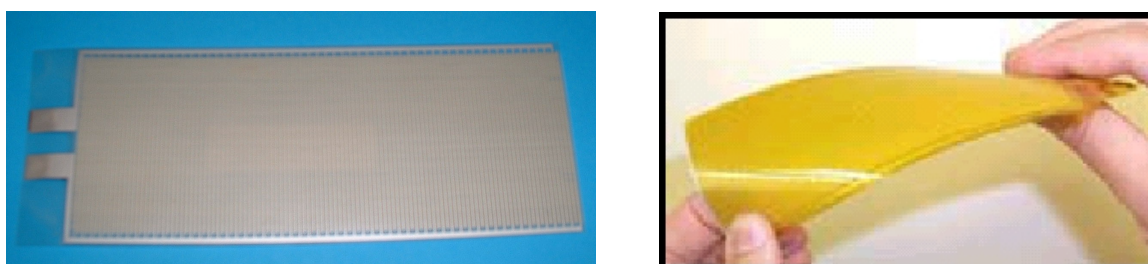


Figure I. 6 Actionneur à fibres piézoélectriques et électrodes interdigitées

D'autres techniques sont également utilisées. Ainsi le Fraunhofer Institut Keramische Technologien und Sinterwerkstoffe [IKTS] actionne les membranes uniquement par des électrodes placées sur une face. Il les utilise en flexion. Leur technique de fabrication est également différente. Ils noient les fibres placées parallèlement dans un bloc de époxy. Puis, ils coupent ce bloc en élément de membrane (fig. I.7). Ainsi, l'électrode placée en surface a un contact direct avec une partie des fibres qui peuvent elles-mêmes en toucher d'autres. Le principal inconvénient repose sur le nombre de fibres effectivement actives. Cela dépend du nombre de fibres en surface (côté électrode) et du nombre de fibres qui se touchent (fig. I.7).

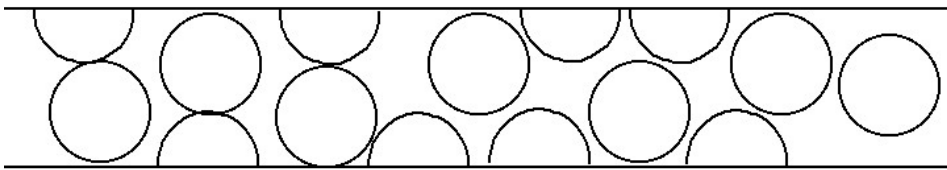


Figure I. 7 Disposition des fibres dans la membrane

1.2.4. Les Composites Macro-Fibres

Toujours dans un souci d'amélioration des composites précédemment cités, la NASA et notamment le Langley Research Center (LaRC) ont développé un composite à base de macro-fibres [WBH00]. Les fibres sont rectangulaires. L'actionneur est composé d'une couche de fibres rectangulaires piézocéramiques, de membranes, d'électrodes interdigitées et d'une matrice époxy adhésive comme le précédent matériau (fig. I.8). La fabrication est plus aisée du fait de la forme rectangulaire des fibres.

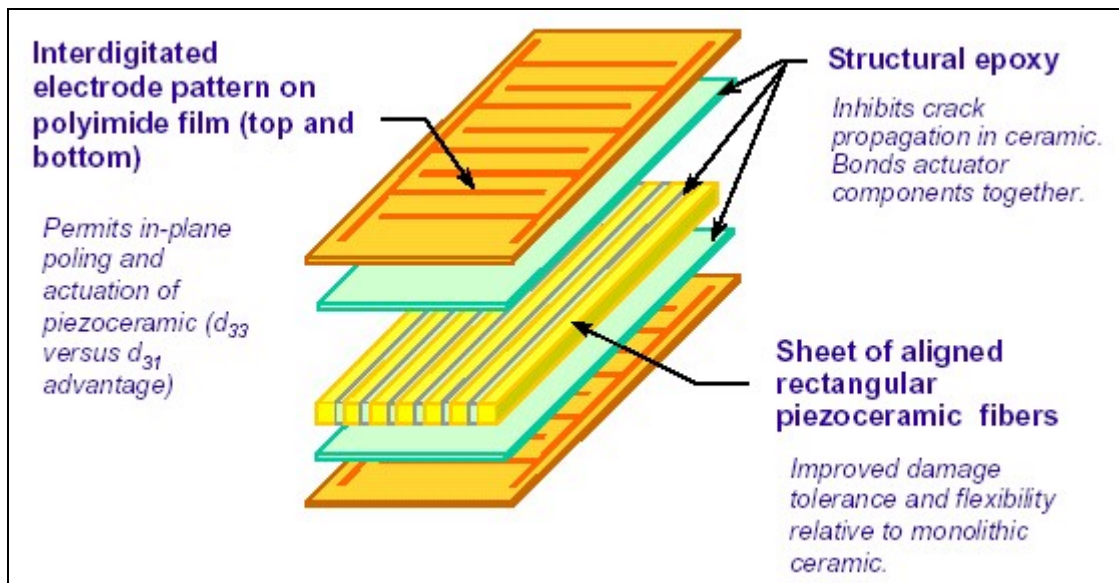


Figure I. 8 Compositions de l'actionneur composite à macro-fibres Langley d'après [WBH00]

Ces actionneurs sont performants lorsqu'ils sont soumis à des charges mécaniques statiques modérées.

Tous ces actionneurs ont bien entendu des applications propres dans le domaine contrôle de forme des pales d'hélicoptère entre autres.

1.3. Le contrôle de forme pour les pales d'hélicoptère

La recherche sur les rotors de pales hélicoptères se focalise sur l'augmentation des performances aérodynamiques et la réduction des vibrations et des émissions acoustiques [G00a] : en général, vibrations et bruits résultent de l'interaction entre un phénomène aérodynamique hautement non-stationnaire induit par la rotation du rotor de pales et des phénomènes comme l'effet transsonique à l'avant de la pale [BBH96]. De nombreuses méthodes existent pour diminuer ces effets. Les techniques et les applications sur lesquelles elles ont été testées ne permettent pas d'établir une véritable comparaison quantifiée.

1.3.1. Le braquage de volet

Concept du Servo-Flap

Le principe est basé sur l'utilisation des moteurs électriques et électro-hydrauliques [GCR94-GCR95] (fig. I.9).

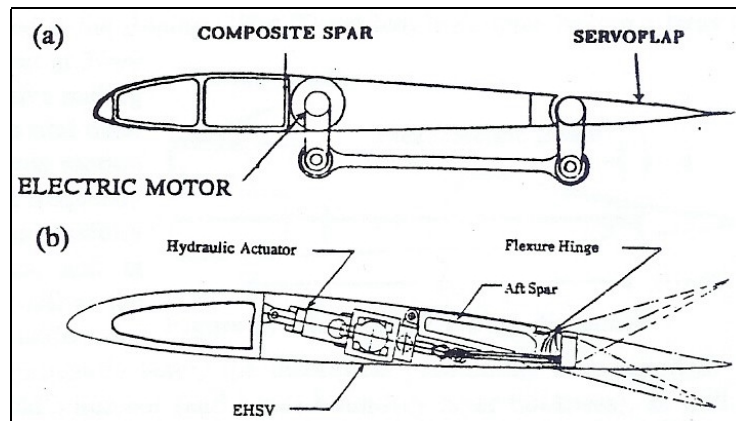


Figure I. 9 Système de contrôle avancé du rotor (ARCS) Concept du Servo-Flap : a) moteur électrique (Mc Donnell Douglas Helicopter Co) [SC90], b) cylindre hydraulique (Bell Helicopter Textron Inc) [PM90] d'après [GCR95]

Un matériau piézoélectrique est inséré dans la pale. Celui-ci est relié par un lien mécanique au volet. Des tests ont été menés au Centre "Rotorcraft Education and Research" à l'Université du Maryland. La pale a été placée dans un tunnel. Il a été constaté que l'amplitude de torsion diminue avec l'augmentation de la vitesse de l'air.

Nose Droop

Ce principe (fig. I.10) repose sur la déformation du bord d'attaque de la pale grâce à un actionneur, de façon à modifier l'angle d'attaque [SC94].

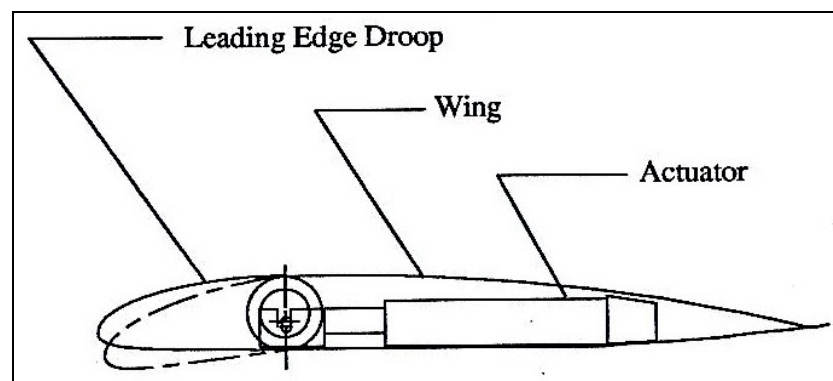


Figure I. 10 Actionneur du type Nose Droop [SC94]

Les caractéristiques aérodynamiques sont ainsi modifiées et par la même occasion le décrochage au niveau du bord de fuite est retardé. La déformation du nez de la pale se fait grâce à des empilements piézoélectriques. Les résultats obtenus avec ce type de procédé n'ont

pas donné les performances escomptées [SC94]. L'équipe de l'Université du Maryland opte donc pour une combinaison "Servo Flap" et Nose Droop".

Intégration de Matériaux Magnétostrictifs

Les principaux handicaps des matériaux magnétostrictifs, comme le Terfenol-D, sont leur coût et leur masse. Une étude a été menée au Salton Technology Corporation, visant à l'intégration de ce type de matériau pour le contrôle de forme de pales d'hélicoptère.

Lors de l'allongement des barres de Terfenol-D, celles-ci interagissent l'une avec l'autre et se déportent vers l'avant entraînant une tige reliée au volet de la pale (fig. I.11).

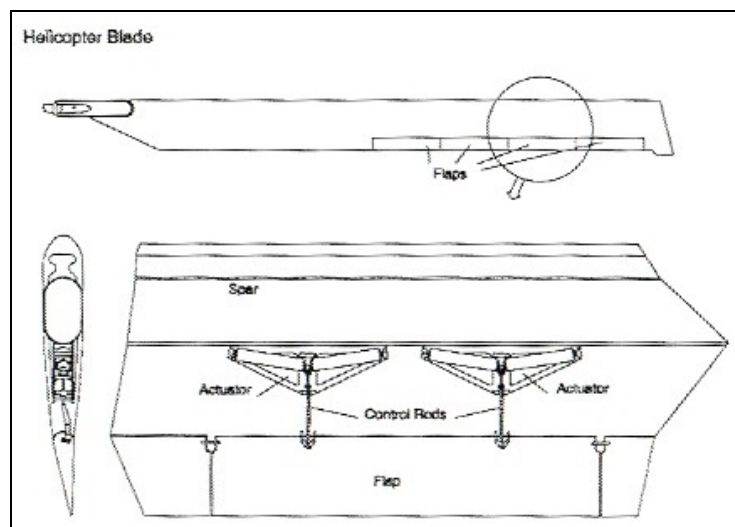


Figure I. 11 Configuration de l'actionneur au Terfenol-D [SC94]

Comme la partie sur les matériaux l'a montré, le Terfenol-D remplit bien les conditions nécessaires de poids et de consommation d'énergie. Mais les performances ne semblent pas compenser le coût excessif de ce type de matériau. L'étude semble être restée à l'état de projet.

1.3.2. La torsion active

Intégration de fibres piézoélectriques

La torsion intégrale a pour principe de tordre le longeron de la pale sur toute sa longueur pour modifier l'angle d'attaque local. Une partie du longeron est équipée de fibres piézoélectriques (fig. I.12). Elles sont directement intégrées sous la peau. Elles sont placées à $\pm 45^\circ$ sur les faces inférieures et supérieures de la pale. En alimentant la face supérieure et la face

inférieure en opposition de phase, un phénomène de torsion est induit. Une torsion linéaire de la pale est alors observable [BHR95-BHR96].

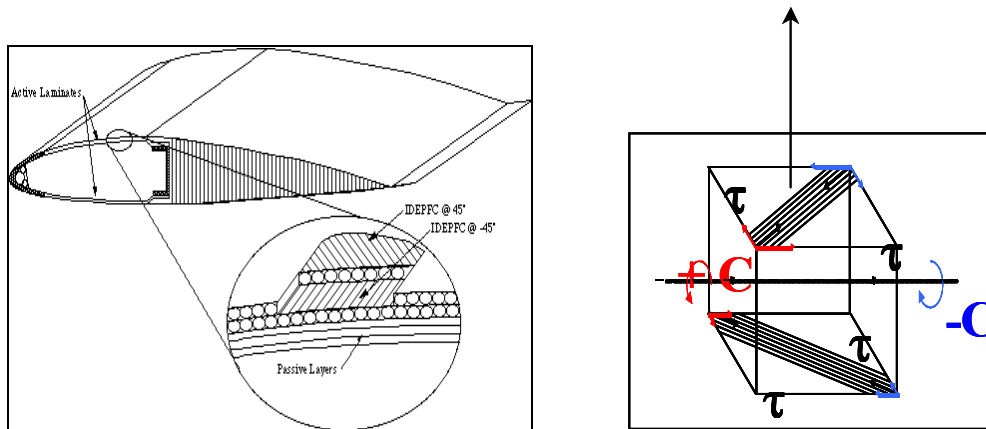


Figure I. 12 Intégration de fibres piézoélectriques : a) intégration dans le longeron [BHR98], b) effet de cisaillement.

Intégration de céramiques piézoélectriques

Des actionneurs à base de barreaux céramiques piézoélectriques sont intégrés à $\pm 45^\circ$ (fig. I.13). La dimension de ces actionneurs est choisie de manière à réduire au maximum l'activation transverse. Ils sont alimentés par des électrodes placées à l'interface [CC95-GCR95].

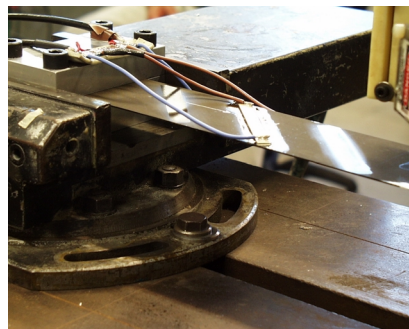


Figure I. 13 Céramiques collées [Del00]

Des tests dynamiques ont été effectués dans des conditions de non-rotation et de rotation. Des réponses significatives ont été observées pour une excitation inférieure aux fréquences de torsion (95Hz dans le cas de Giurgiutiu) [GCR95]. La torsion maximale, observée dans ce cas, est de 1.1° . Des essais ont également été effectués sur des hélicoptères miniatures [G00b]

La difficulté pour comparer ces différentes techniques de contrôle de forme réside dans le fait que les essais ont été faits sur des pales différentes et dans des conditions différentes. Il n'est pas réellement possible de voir quelle méthode est donc la meilleure mais peut-être le choix peut se porter sur la facilité de mise en place. Dans ce cas, l'intégration de céramiques semble la plus adaptée.

Les actionneurs qui viennent d'être présentés ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients. Toutefois, après une étude effectuée au sein du laboratoire de Résistance et Conception des Structures de l'ONERA-Lille, portant sur l'utilisation de barreaux de céramiques piézoélectriques, celle-ci ne s'est pas montrée concluante et une autre optique a été retenue : l'utilisation des composites à fibres actives. Ces composites répondent à la fois à des contraintes de masse, de volume et d'adaptabilité aux structures sur lesquelles elles agissent. Même si un cahier des charges n'a pas été établi noir sur blanc, elles semblent répondre à de nombreuses attentes induites par le contrôle de torsion dans les pales d'hélicoptère. Le principal point dur, pour l'instant des composites à fibres actives concerne leur fabrication, et en particulierité l'extrusion des fibres, celles-ci étant très fragiles.

2. LA PIEZOELECTRICITE

Le phénomène piézoélectrique est connu de longue date et l'application de ces matériaux est de plus en plus étendue. Cette partie permet de faire un bref rappel sur le comportement, les règles et les relations de ces matériaux.

2.1. Définitions et historique

La piézoélectricité est l'aptitude de certains matériaux cristallins à produire une charge électrique proportionnelle à la contrainte mécanique qui les déforme [SG]. C'est l'effet piézoélectrique direct et ce phénomène est réversible et réciproque : l'application d'un champ électrique externe provoque une déformation mécanique (effet piézoélectrique indirect). La déformation est due à l'influence du champ électrique sur la position d'équilibre des cristaux.

Ce comportement peut être observé naturellement grâce à la structure cristalline. La piézoélectricité est découverte en 1880 par Pierre et Jacques Curie. Le phénomène est observé dans différents cristaux comme les cristaux naturels tels que la tourmaline, le sel de Rochelle et le quartz. Le terme de « piézoélectricité » est proposé par Handel en parallèle de la

« pyroélectricité » (1824, Brewster). « piézo » est tiré du grec qui veut dire pression tandis que « pyro » signifie feu.

Après la découverte et l'utilisation de l'ADP, ce n'est en 1946 que le BaTiO₃, premier matériau polycristallin est découvert et répertorié comme un premier matériau piézoélectrique. Cette nouvelle donne économique lance alors l'utilisation des céramiques piézoélectriques. De nombreuses piézocéramiques ainsi que des matériaux de la famille des Plomb Ziconate et Titanate, plus connue sous l'abréviation PZT, sont utilisés depuis 1956. Depuis 1995, un travail important est mené afin de travailler avec des monocristaux tel que le PMN-PT et le PZM-PT [PS97].

Parmi ces cristaux piézoélectriques, il existe les cristaux ferroélectriques dont la direction de la polarisation naturelle peut être réorientée et même inversée sous l'influence d'un champ électrique externe. En 1935, Muller a choisi le terme de ferroélectricité pour rappeler l'analogie entre le comportement hystérétique de la polarisation électrique macroscopique en fonction du champ électrique appliqué et celle de l'aimantation en fonction du champ magnétique dans les substances ferromagnétiques.

2.2.L'effet piézoélectrique

2.2.1. Propriétés diélectriques et élastiques

De brefs rappels sont faits et permettent la mise en place des relations piézoélectriques.

2.2.1.1. Propriétés diélectriques

Lorsque le matériau est isotrope non-conducteur, deux relations matricielles relient le vecteur champ électrique \vec{E} , le vecteur déplacement électrique \vec{D} et le vecteur polarisation diélectrique \vec{P} .

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} \quad (I.1)$$

et

$$\vec{D} = [\epsilon_0] \vec{E} + \vec{P} \quad (I.2)$$

où $[\epsilon]$ est le tenseur des permittivités diélectriques et $[\epsilon_0]$, le tenseur des permittivités du vide qui prend pour valeur $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m (SI).

2.2.1.2. Propriétés élastiques

Deux variables d'état matériau sont définies : la contrainte et la déformation.

- Le vecteur contrainte \vec{T} a pour unité SI le Pascal. Il dépend de l'orientation de la surface sur laquelle intervient la contrainte. Considérons un parallélépipède élémentaire (fig. I.14). Sur chaque face, s'appliquent trois contraintes soit au total 18 coefficients à déterminer. Mais compte tenu des conditions d'équilibre, le tableau des composantes est un tenseur à six coefficients représenté par la relation (I.3). Le repère cartésien est représenté par le repère (x_1, x_2, x_3) . Par définition, la direction de polarisation est suivant l'axe 3.

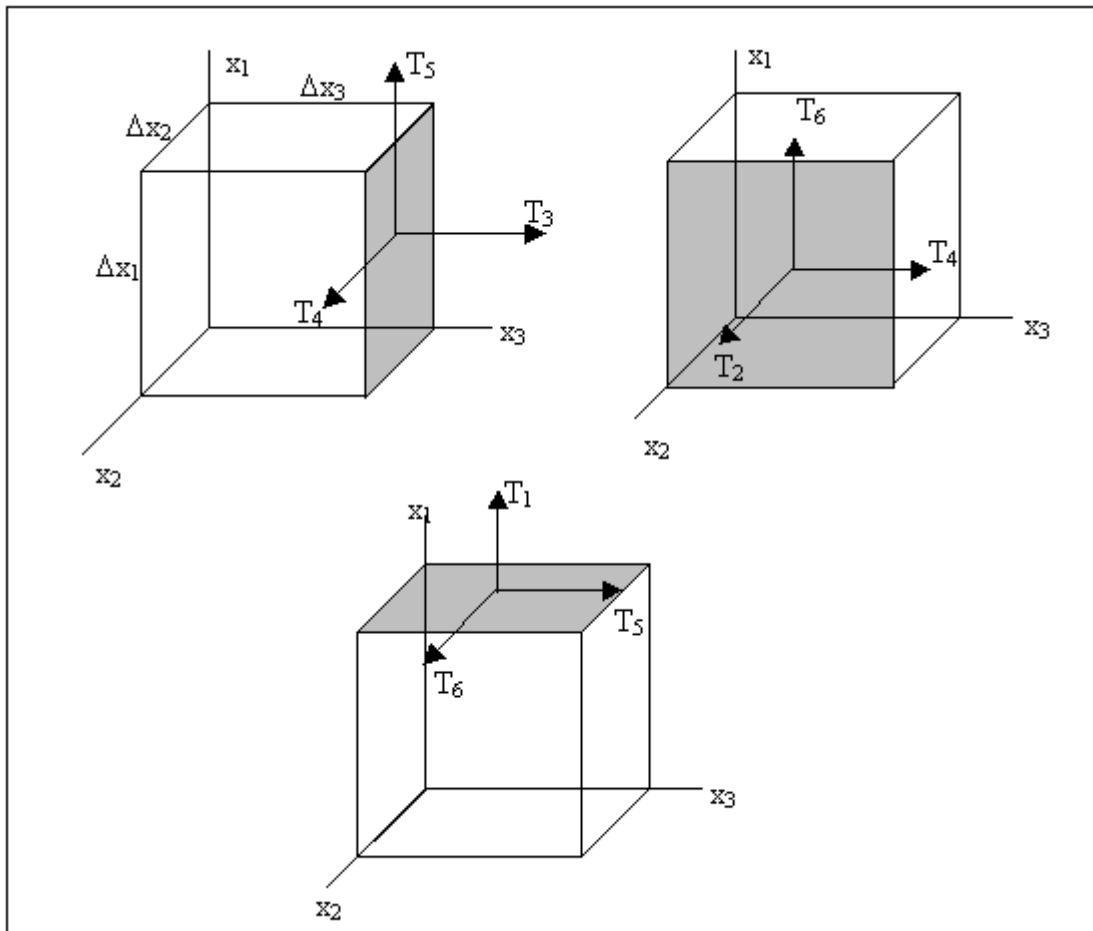


Figure I. 14 Parallélépipède soumis à un état de contrainte

Dans un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

La notation condensée est plus souvent utilisée.

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_1 & T_{23} &= T_{32} = T_4 \\ T_{22} &= T_2 & T_{13} &= T_{31} = T_5 \\ T_{33} &= T_3 & T_{12} &= T_{21} = T_6 \end{aligned} \quad (I.4)$$

T_4 , T_5 et T_6 sont les contraintes de cisaillement.

- La déformation est également représentée par un tenseur à six composantes indépendantes, définies par les dérivées spatiales des composantes du déplacement. Dans un système de coordonnées spatiales (x_1, x_2, x_3) , les composantes pour une déformation infinitésimale en fonction des composantes du déplacement le long des axes (u_1, u_2, u_3) s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & S_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & S_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ S_{21} = S_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & S_{31} = S_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & S_{32} = S_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (I.5)$$

La forme condensée de la notation de ces termes est :

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_1 & 2S_{23} &= 2S_{32} = S_4 \\ S_{22} &= S_2 & 2S_{13} &= 2S_{31} = S_5 \\ S_{33} &= S_3 & 2S_{12} &= 2S_{21} = S_6 \end{aligned} \quad (I.6)$$

S_1 , S_2 et S_3 sont des déformations de traction ce qui est généralement assimilé à un changement de volume. S_4 , S_5 et S_6 sont des déformations de cisaillement ce qui est assimilé uniquement à un changement de forme du volume sollicité. La figure suivante (fig. I.15) présente les déformations les plus couramment rencontrées.

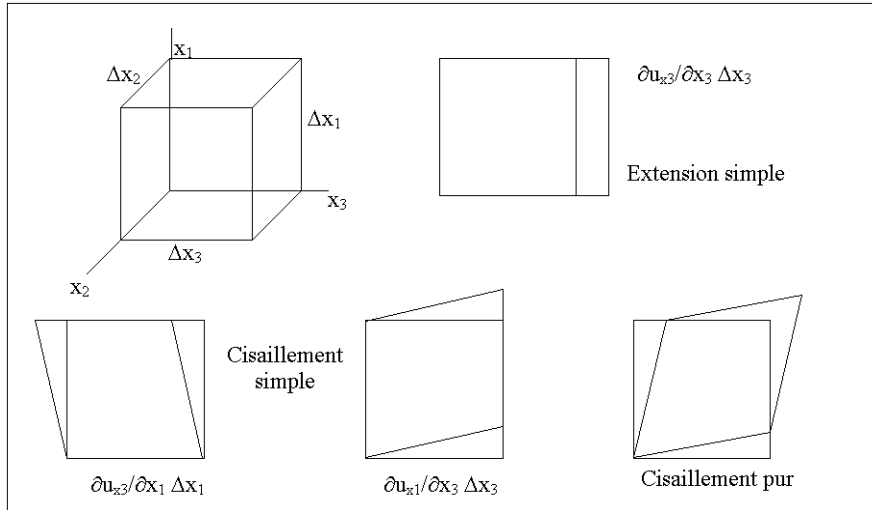


Figure I. 15 Déformations de base

2.2.2. Les équations de la piézoélectricité

Les équations de la piézoélectricité sont basées sur les relations fondamentales de la thermodynamique [Mas64].

Pour la déformation et le déplacement électrique, les équations deviennent :

$$\begin{cases} S_i = s_{ij}^E T_j + d_{ni} E_n \\ D_m = d_{mj} T_j + \varepsilon_{mn}^T E_n \end{cases} \quad (I.7)$$

Les autres systèmes d'équations ainsi que les relations entre les coefficients sont répertoriés en Annexe A.

Le système d'équations peut également être exprimé sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S} \\ \tilde{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [s^E] & [d]^t \\ [d] & [\varepsilon^T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{E} \end{Bmatrix} \quad (I.8)$$

tel que

$$\tilde{S} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad \tilde{T} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad \tilde{E} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (I.9)$$

3. L'HOMOGENEISATION

Les matériaux composites sont formés d'au moins deux matériaux. Ils peuvent être plus ou moins complexes. Leur conception est généralement coûteuse et il est souvent nécessaire d'optimiser la structure. Pour cela, la modélisation par éléments finis permet de s'affranchir d'expériences laborieuses. Cependant compte tenu de la taille très petite du motif élémentaire du composite devant celle de la structure à laquelle elles s'appliquent, il est difficile de modéliser l'ensemble du dispositif. Il faut donc homogénéiser les propriétés du matériau qui constitue le composite.

3.1. Position du problème

Les composites piézoélectriques sont constitués de différentes phases (matériaux). Chaque phase possède ses caractéristiques propres.

Modéliser par éléments finis une grande structure faite d'inclusions peut s'avérer très difficile et coûteuse en temps de calcul. Tout d'abord, il faut savoir mailler avec précision la structure et ensuite savoir gérer les conditions limites qui sont appliquées. C'est pourquoi, il est intéressant d'homogénéiser. Il s'agit de trouver un matériau équivalent qui présente, de façon macroscopique, le comportement mécanique et électrique du composite.

Pour cela, il faut calculer les valeurs "effectives" des caractéristiques élémentaires du composite.

$$\begin{Bmatrix} \bar{T} \\ \sim \\ \bar{D} \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c^{Eeff}] & -[e^{eff}]^t \\ [e^{eff}] & [\epsilon^{Seff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S} \\ \sim \\ \bar{E} \\ \sim \end{Bmatrix} \quad (I. 10)$$

Les grandeurs surmontées d'une barre représentent les grandeurs moyennes. L'exposant "eff" représente les grandeurs "effectives" c'est à dire homogénéisées.

Dans le cas d'un solide piézoélectrique isotrope transverse, il y a onze coefficients effectifs à calculer en ne tenant pas compte de la relation qui lie les coefficients c_{11}^E , c_{12}^E et c_{66}^E .

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{T}_5 \\ \bar{T}_1 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{Eff} & c_{12}^{Eff} & c_{13}^{Eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31}^{eff} \\ c_{12}^{Eff} & c_{22}^{Eff} & c_{13}^{Eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31}^{eff} \\ c_{13}^{Eff} & c_{13}^{Eff} & c_{33}^{Eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33}^{eff} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{Eff} & 0 & 0 & 0 & -e_{15}^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{Eff} & 0 & -e_{15}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{Eff} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{eff} & 0 & \varepsilon_{11}^{Seff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^{eff} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^{Seff} & 0 & 0 \\ e_{31}^{eff} & e_{31}^{eff} & e_{33}^{eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^{Seff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \\ \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{Bmatrix} \quad (I. 11)$$

3.2. Les techniques d'homogénéisation existantes

Les techniques analytiques peuvent être réparties en trois catégories : celles reposant sur les lois de Voigt et Reuss, celles utilisant le tenseur d'Eshelby et celles qui sont basées sur d'autres principes. Le tenseur d'Eshelby a pour caractéristique de prendre en compte la forme de l'inclusion.

3.2.1. Méthodes d'homogénéisation basées sur les hypothèses de Voigt et Reuss

Les méthodes reposent sur l'addition en série des deux phases (Reuss, équivalent au modèle du module transverse équivalent de la loi des mélanges) [Reu29] et parallèles (Voigt, équivalent au modèle du module longitudinal équivalent de la loi des mélanges) [Voi29]. Les calculs de ces méthodes sont ensuite différents.

3.2.1.1. La méthode de Newnham

Le Professeur Newnham est l'un des premiers à avoir développé une méthode d'homogénéisation basé sur les lois série-parallèle. L'équipe du Professeur Newnham de l'Université de Pennstate, a développé quelques formules analytiques pour calculer les constantes piézo-électriques dans le cas de composites 3-1 (fig. I.16) ainsi qu'une constante diélectrique [KBN80]. Leur théorie est basé sur la théorie de la connexité.

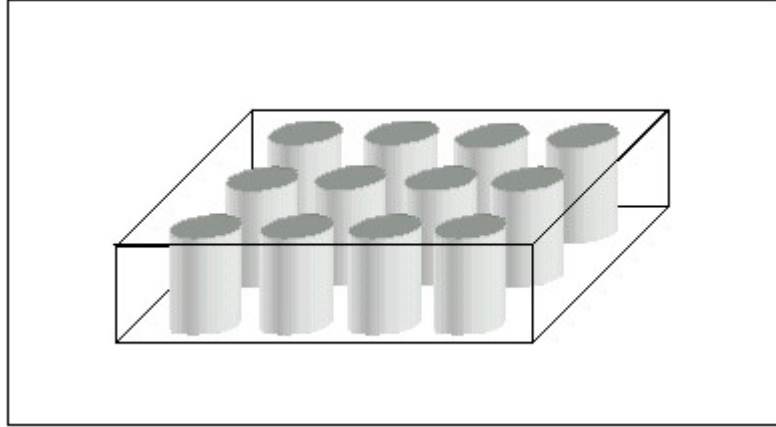


Figure I. 16 Composite 1-3

$$d_{33}^{\text{eff}} = \frac{v_f d_{33}^f s_{33}^m + v_m d_{33}^m s_{33}^f}{v_f s_{33}^m + v_m s_{33}^f} \quad (\text{I. 12})$$

$$d_{31}^{\text{eff}} = v_f d_{31}^f + v_m d_{31}^m \quad (\text{I. 13})$$

$$\epsilon_{33}^{\text{Seff}} = v_f \epsilon_{33}^{\text{Sf}} + v_m \epsilon_{33}^{\text{Sm}} \quad (\text{I. 14})$$

L'avantage principal de cette méthode est la détermination facile de trois des coefficients.

3.2.1.2. La méthode de Benveniste & Dvorak

La théorie de Benveniste & Dvorak est basée sur l'hypothèse des champs uniformes [Dvo90] dans des milieux hétérogènes avec des conditions limites particulières. Le milieu est considéré comme diphasique. Les frontières entre les milieux sont cylindriques. Les constituants sont isotropes transversalement. Le composite est soumis à des conditions limites de déformation et de champ électrique.

Les surfaces entre les phases sont parallèles à l'axe 3.

Benveniste et Dvorak obtiennent quatre équations distinctes donnant tour à tour des systèmes homogènes pour plusieurs constantes. Ils en concluent qu'un champ de déformation et un champ électrique homogènes à travers le composite sont induits.

Ces résultats ont été utilisés par Benveniste et Dvorak [BD92] pour la détermination des fonctions d'influence.

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{S}^0 + \mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{S}^0 + \mathbf{b}^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{E}^0 \end{cases} \quad r = f, m \quad (\text{I. 15})$$

Tels que $\mathbf{A}^{(r)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}^{(r)}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{b}^{(r)}(\mathbf{x})$ sont les matrices représentant les fonctions d'influence. Benveniste et Dvorak parviennent à démontrer l'existence d'un champ uniforme utilisé précédemment. Ensuite, les considérations précédentes sont supposées vraies et ils peuvent alors en déduire les relations calculant les valeurs effectives du matériau homogène en fonction des valeurs des deux constituants du composite [BD92-Ben93].

$$\begin{cases} \mathbf{c}^{\text{Eeff}} = \mathbf{c}_m^{\text{E}} + \nu_f (\mathbf{c}_f^{\text{E}} - \mathbf{c}_m^{\text{E}}) \mathbf{A}^{(f)} - \nu_f (\mathbf{e}_f^{\text{T}} - \mathbf{e}_m^{\text{T}}) \mathbf{a}^{(f)} \\ \mathbf{e}^{\text{Teff}} = \mathbf{e}_m^{\text{T}} + \nu_f (\mathbf{e}_f^{\text{T}} - \mathbf{e}_m^{\text{T}}) \mathbf{b}^{(f)} - \nu_f (\mathbf{c}_f^{\text{E}} - \mathbf{c}_m^{\text{E}}) \mathbf{B}^{(f)} \\ \mathbf{e}^{\text{eff}} = \mathbf{e}_m + \nu_f (\mathbf{e}_f - \mathbf{e}_m) \mathbf{A}^{(f)} + \nu_f (\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\text{S}} - \boldsymbol{\varepsilon}_m^{\text{S}}) \mathbf{a}^{(f)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Seff}} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^{\text{S}} + \nu_f (\mathbf{e}_f - \mathbf{e}_m) \mathbf{B}^{(f)} + \nu_f (\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\text{S}} - \boldsymbol{\varepsilon}_m^{\text{S}}) \mathbf{b}^{(f)} \end{cases} \quad (\text{I. 16})$$

où ν_f représente la fraction volumique de l'inclusion. Les matrices $\mathbf{A}^{(f)}$, $\mathbf{B}^{(f)}$, $\mathbf{a}^{(f)}$ et $\mathbf{b}^{(f)}$ sans l'argument \mathbf{x} représentent la moyenne des fonctions d'influence appelées "facteurs de concentration". Le système d'équation doit satisfaire une équation supplémentaire pour la consistence :

$$(\mathbf{e}_f - \mathbf{e}_m) \mathbf{A}^{(f)} + (\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\text{S}} - \boldsymbol{\varepsilon}_m^{\text{S}}) \mathbf{a}^{(f)} = \mathbf{b}^{(f)\text{T}} (\mathbf{e}_f - \mathbf{e}_m) - \mathbf{B}^{(f)\text{T}} (\mathbf{c}_f^{\text{T}} - \mathbf{c}_m^{\text{T}}) \quad (\text{I. 17})$$

Une fois les facteurs de concentration déterminés, les coefficients effectifs sont obtenus.

3.2.1.3. La méthode de K. Schulgasser

K. Schulgasser [Sch92] a développé la méthode d'homogénéisation la plus simple à utiliser. Il considère un piézocomposite à deux phases. Il considère avoir dix coefficients effectifs à déterminer car il conserve la loi sur le coefficient c_{66} propre aux matériaux de classe 6mm.

$$c_{66}^{\text{E}} = \frac{1}{2} (c_{11}^{\text{E}} - c_{12}^{\text{E}}) \quad (\text{I. 18})$$

Il parvient à déterminer cinq relations indépendantes de la géométrie de l'inclusion et qui relie six coefficients effectifs.

Schulgasser considère que l'échantillon de composite considéré est long dans la direction axiale en comparaison des autres directions. En invoquant une extension des théorèmes de

moyenne énoncés par Hill [Hill63] et Hashin [HS63], Schulgasser obtient six relations dont cinq indépendantes reliant six coefficients effectifs.

$$\frac{k^f - k^{\text{eff}}}{c_{13}^f - c_{13}^{\text{eff}}} = \frac{k^m - k^{\text{eff}}}{c_{13}^m - c_{13}^{\text{eff}}} = \frac{v_f c_{13}^f + v_m c_{13}^m - c_{13}^{\text{eff}}}{v_f c_{33}^f + v_m c_{33}^m - c_{33}^{\text{eff}}} = \frac{v_f e_{31}^f + v_m e_{31}^m - e_{31}^{\text{eff}}}{v_f e_{33}^f + v_m e_{33}^m - e_{33}^{\text{eff}}} \quad (\text{I. 19})$$

$$\frac{k^f - k^{\text{eff}}}{e_{31}^f - e_{31}^{\text{eff}}} = \frac{k^m - k^{\text{eff}}}{e_{31}^m - e_{31}^{\text{eff}}} = \frac{v_f c_{13}^f + v_m c_{13}^m - c_{13}^{\text{eff}}}{v_f e_{33}^f + v_m e_{33}^m - e_{33}^{\text{eff}}} = \frac{-v_f e_{31}^f - v_m e_{31}^m + e_{31}^{\text{eff}}}{v_f e_{33}^f + v_m e_{33}^m - e_{33}^{\text{eff}}}$$

Avec

$$k = c_{11}^E + c_{12}^E \quad (\text{I. 20})$$

Il considère les fractions volumiques de la fibre v_f et celle de la matrice v_m . ^{eff} signifie que la valeur est homogénéisée, ^m pour matrice et ^f pour fibre. Schulgasser a montré que le problème aux valeurs limites implique deux équations couplées de Laplace. Il suffit donc de considérer le déplacement suivant l'axe 3. Une analogie peut être faite entre le calcul des modules de cisaillement axial effectif et la conductivité transverse effective pour les composites à fibres déjà bien connus [Has83]. Milgrom et Shtrikman [MS89] ont prouvé le théorème donnant les conditions de compatibilité entre les constantes effectives pour les problèmes couplés quand chaque force n'induit pas seulement son flux conjugué mais aussi les autres flux. Ils l'ont appliqué à la magnétostriction et Schulgasser l'a transcrit pour la piézoélectricité. L'équation suivante est alors obtenue :

$$\det = \begin{vmatrix} c_{55}^{\text{eff}} & e_{11}^{\text{eff}} & e_{15}^{\text{eff}} \\ c_{55}^f & e_{11}^f & e_{15}^f \\ c_{55}^m & e_{11}^m & e_{15}^m \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I. 21})$$

Schulgasser conserve donc une équation reliant deux constantes. Il n'a pas pu déterminer de loi sur la constante $(c_{11} - c_{12})$. Il ne prend pas réellement en compte la forme de l'inclusion et il est donc difficile de considérer d'autres inclusions.

3.2.1.4. La méthode de Hagood

Les méthodes développées par Hagood et Bent [BH97a] reposent sur deux principes. La comparaison des résultats obtenus avec ces deux méthodes a permis de valider leurs résultats. La particularité de ces méthodes est qu'elles prennent en compte les électrodes. En d'autres termes, les constantes homogénéisées du composite à fibres actives sont calculées mais en

plus, ces constantes prennent en considération l'emplacement, le pas, les dimensions des électrodes.

La méthode des Eléments Finis

Les chercheurs ont tout d'abord utilisé l'outil de modélisation par éléments finis. Ils considèrent un composite à fibres actives (fig. I.17) avec des électrodes interdigitées pour les charger électriquement [BH97b].

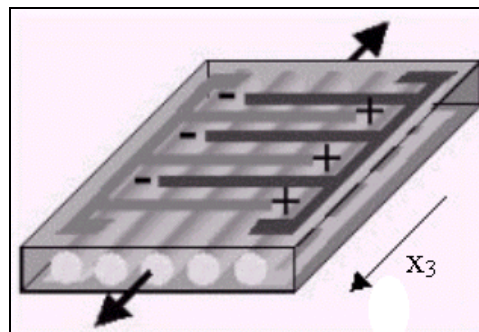


Figure I. 17 Géométrie du Composite à Fibres Actives avec Electrodes Interdigitées

Les fibres sont alignées dans le plan, avec une orientation le long de l'axe x_3 . Les électrodes ont des branches alimentées alternativement. Elles sont placées à la fois sur la surface supérieure et sur la surface inférieure. Les fibres se déforment suivant l'axe x_3 car elles sont chargées électriquement dans ce sens. Le sens de polarisation est suivant l'axe x_3 .

Pour leur modélisation, Bent & Hagood considèrent uniquement un quart de la fibre (fig. I.18) en prenant en compte les plans de symétrie suivant les trois axes.

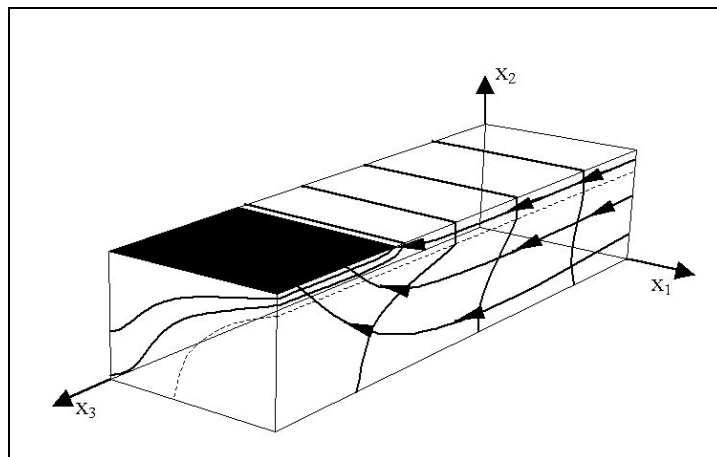


Figure I. 18 Représentation de la modélisation de quart de fibre

La méthode des Champs Uniformes

La méthode des Champs Uniformes est basée sur celle développée par Banno reposant sur une approche par des cubes modélisant des renforts discontinus. La méthode "Uniform Fields Model" (Modélisation des Champs Uniformes) est une généralisation de la méthode des Mélanges. De plus, comme le nom de la méthode l'indique, les champs mécaniques et électriques sont uniformes dans chaque phase. La méthode des Champs Uniformes viole en fait les lois d'équilibre et de compatibilité aux interfaces. Cependant, la grande variété de matériau rend cette méthode souhaitable pour modéliser les composites. De plus, elle a l'avantage de procurer une solution proche qui donne un aperçu physique du problème.

La méthode repose sur une combinaison de plusieurs cas de Champs Uniformes (fig. I.19) pour résumer la description géométrique [HB93]. Dans le cas des composites à fibres actives, le Volume Élémentaire Représentatif est divisé en trois parties. Les cas A et B représentent la réponse à prédominance mécanique et la réponse électrique à l'écart des électrodes.

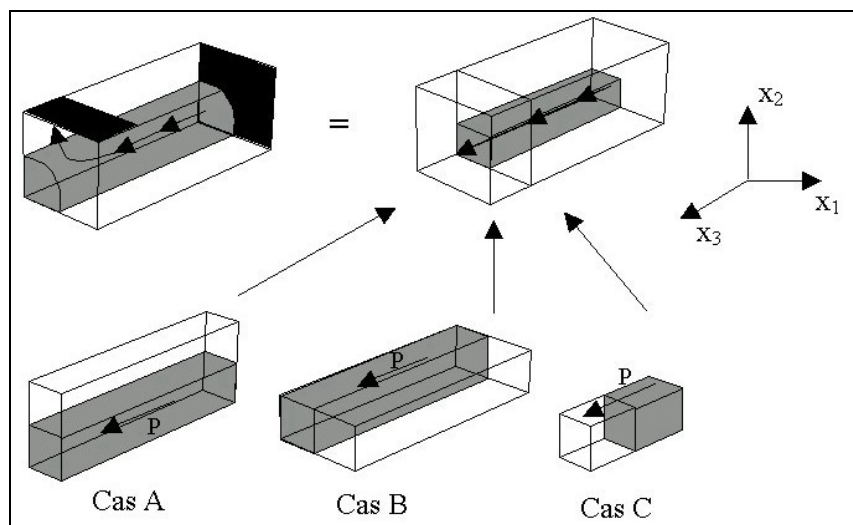


Figure I. 19 Géométrie du Modèle à Champ Uniforme

Le cas C représente les propriétés électriques locales dans la région des électrodes. Le cas C est considéré comme une combinaison purement électrique de la fibre et de la matrice.

Comme le montre la figure, le volume de la fibre est modifié. Le modèle ne considère pas la forme circulaire. Il s'agit déjà là d'une approximation. Chaque cas est analysé séparément pour obtenir les propriétés macroscopiques.

Bent et Hagood ne prennent pas en considération des coefficients de cisaillement car ils sont dissociés des autres coefficients. Les relations constitutives se réduisent alors au système suivant :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & -e_{32} \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & -e_{33} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{I. 22})$$

Le système est donc limité aux coefficients de compressibilité mécaniques, piézoélectriques et diélectriques. Sans entrer dans le détail des calculs, il faut savoir que le premier cas étudié, lors d'un composite ordonné est le cas C. Les coefficients effectifs sont calculés pour ce cas et insérés pour ensuite les appliquer au cas A. Ces nouveaux coefficients sont alors utilisés pour le calcul du cas B. Les coefficients effectifs sont alors déterminés pour le matériau piézoélectrique en considérant les électrodes. Afin de valider le modèle, Bent & Hagood ont comparé leurs résultats à des théories classiques. Il s'agit de la deuxième méthode utilisée par les chercheurs : la modélisation par Eléments Finis. À l'aide du programme ANSYS, ils modélisent un quart de fibre en faisant appel aux plans de symétrie pour réduire la taille du modèle. Cette méthode est reprise dans cette thèse (avec le code ATILA). Mais Bent et Hagood se limitent au calcul des coefficients calculés avec la précédente méthode. En appliquant les conditions aux limites appropriées au volume, ils obtiennent les coefficients. Ils font varier la fraction volumique en changeant le diamètre de la fibre. Ainsi, ils peuvent valider leur résultats. Ils obtiennent une très bonne concordance.

3.2.1.5. La méthode de Yamaguchi & Hashimoto

À l'Université du Japon, au département d'ingénierie électrique, K.Y. Hashimoto et M. Yamaguchi déterminent les coefficients piézoélectriques analytiques pour une structure multicouche [HY86]. La principale hypothèse consiste à considérer que la périodicité de la structure est très petite devant la longueur de l'onde élastique. Pour déterminer les coefficients, ils utilisent la méthode de la propagation d'ondes couplée au théorème de Floquet. La condition limite impose que la contrainte et la densité de flux perpendiculaires à l'interface soient continues et que la déformation et le champ électrique parallèles à l'interface soient continus. Pour simplifier, les champs sont supposés uniformes le long du front d'onde. Yamaguchi et Hashimoto dissocient en deux vecteurs les quantités uniformes le long du front d'onde G, et celles non uniformes H.

$$G = (S_1, S_2, T_3, T_4, T_5, S_6, E_1, E_2, D_3) \quad (I. 23)$$

$$H = (T_1, T_2, S_3, S_4, S_5, T_6, D_1, D_2, E_3) \quad (I. 24)$$

Considérant la matrice P suivante,

$$P_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{pour } ij = 33, 44, 55 \text{ ou } 99 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (I. 25)$$

Le système à résoudre se présente sous la forme :

$$\{[L][P] + [Q]\}H = \{[L][Q] + [P]\}G \quad (I. 26)$$

où $[Q] = [P] + [I]$ et $[I]$ est la matrice identité.

Une fois le système résolu, la matrice $[L]$ qui contient les coefficients à homogénéiser est déterminée. On se rend compte en fait que le système est identique à celui de Benveniste et Dvorak. Les résultats sont totalement identiques car les conditions limites sont identiques. Cette méthode ne fait aucune restriction de direction.

3.2.2. Méthodes d'homogénéisation faisant appel au tenseur d'Eshelby

Yakov Benveniste considère un composite multiphase. Une distribution des contraintes internes statistiquement homogène et de champs de polarisation spontanés est admise. L'étude est basée sur la théorie des travaux virtuels [Ben93].

Il considère un composite multiphase à N phases, défini par les lois constitutives :

$$\begin{cases} \tilde{T}_r(x) = [c_r^E(x)] \tilde{S}_r(x) - [e_r(x)]^t \tilde{E}_r(x) + \lambda_r^0 \\ \tilde{D}_r(x) = [e_r(x)] \tilde{S}_r(x) + [\epsilon_r^S(x)] \tilde{E}_r(x) + P_r^0 \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (I. 27)$$

avec λ_r^0 le vecteur contraintes internes et P_r^0 le vecteur champ de polarisation qui sont constants dans les phases.

Les coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques effectifs sont déterminés en considérant le vecteur contraintes internes et le vecteur champ de polarisation nuls. De plus, on soumet la surface du corps à un chargement électromécanique. On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{S}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}_r] \underset{\sim}{S}^0 + [\mathbf{B}_r] \underset{\sim}{E}^0 \\ \underset{\sim}{E}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}_r] \underset{\sim}{S}^0 + [\mathbf{b}_r] \underset{\sim}{E}^0 \end{cases} \quad (\text{I. 28})$$

où $[\mathbf{A}_r]$, $[\mathbf{B}_r]$, $[\mathbf{a}_r]$, $[\mathbf{b}_r]$ sans argument (\mathbf{x}) représentent la moyenne des fonctions d'influence sur la phase r dans le volume élémentaire représentatif. Ils sont appelés facteurs de concentration.

Dans le cas de N phases distinctes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{A}_r] &= [\mathbf{I}] & \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{B}_r] &= [\mathbf{0}] \\ \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{a}_r] &= [\mathbf{0}] & \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{b}_r] &= [\mathbf{i}] \end{aligned} \quad (\text{I. 29})$$

v_r représente la fraction volumique de la phase r . $[\mathbf{I}]$ et $[\mathbf{i}]$ sont respectivement les matrices identité d'ordre 6 et 3.

On obtient alors les relations reliant les coefficients effectifs aux valeurs dans chaque phase.

$$\begin{cases} [\mathbf{c}^{\text{eff}}] = \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{c}_r] [\mathbf{A}_r] - \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{e}_r]^t [\mathbf{a}_r] \\ [\mathbf{e}^{\text{eff}}] = \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{e}_r] [\mathbf{A}_r] + \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{\varepsilon}_r^S] [\mathbf{a}_r] \\ [\mathbf{\varepsilon}^{\text{Seff}}] = \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{e}_r] [\mathbf{B}_r] + \sum_{r=1}^N v_r [\mathbf{\varepsilon}_r^S] [\mathbf{b}_r] \end{cases} \quad (\text{I. 30})$$

Il reste donc à déterminer les facteurs de concentration avec le tenseur d'Eshelby. Ce dernier permet d'inclure au système une sensibilité à la forme de l'inclusion.

Les méthodes qui vont être évoquées vont faire appel à la théorie de l'inclusion équivalente d'Eshelby [Esh57 – Mu82].

Dans leur article, Dunn et Taya [DT93] ont opté pour la notation de Barnett et Lothe [BL75]. Elle permet de traiter à la fois les constantes élastiques et piézoélectriques, de façon condensée. Deux méthodes permettent de déterminer ce tenseur. La première est la méthode diluée et la seconde est celle de Mori Tanaka.

3.2.2.1. Modèle dilué

La méthode diluée suppose que le milieu environnant l'hétérogénéité est la matrice. Cette méthode est valable uniquement à faible fraction volumique mais elle constitue une base pour

la méthode suivante. On ne prend pas en compte l'interaction entre les inclusions. La matrice de localisation est :

$$A^{dil} = [I + S^{esh} : (L^1)^{-1} : (L^2 - L^1)]^{-1} \quad (I. 31)$$

S^{esh} est le tenseur d'Eshelby [Esh57]. Des valeurs sont données pour des inclusions sphériques, cylindriques dans l'article de Dunn et Taya [DT93].

3.2.2.2. Modèle de Mori et Tanaka

La méthode représente une base pour celle de Mori et Tanaka qui reporte l'interaction entre les fibres sur le champ de déformation de la matrice. La matrice de localisation est :

$$A^{MT} = A^{dil} [v_1 I + v_2 A^{dil}]^{-1} \quad (I. 32)$$

Ce modèle appartient à la classe des théories des champs effectifs. Il est supposé fournir d'excellents résultats et sert souvent de base de comparaison pour d'autres méthodes.

La matrice de localisation ainsi déterminée, permet de calculer les valeurs effectives avec, entre autres, la méthode de Benveniste précédemment exposée.

3.2.2.3. Modèle auto-cohérent

Le matériau composite formé de fibres identiques, ellipsoïdales et de même orientation est soumis à une déformation macroscopique. Le modèle auto-cohérent est basé sur l'idée d'isoler une fibre quelconque et de la considérer comme une hétérogénéité plongée dans un milieu effectif de propriétés. L'analogie avec la théorie de l'inclusion d'Eshelby (si l'inclusion est de forme ellipsoïdale et si la transformation qu'elle subit conduit à une déformation libre homogène, alors l'état d'équilibre est tel que la déformation finale dans l'inclusion est homogène) est alors immédiate.

$$A^{AC} = [I + S^{esh} : (L^{eff})^{-1} : (L^2 - L^{eff})]^{-1} \quad (I. 33)$$

3.2.3. Les méthodes basées sur d'autres principes

3.2.3.1. La méthode de Poizat

Christophe Poizat a utilisé le logiciel ABAQUS pour modéliser le volume élémentaire représentatif. En partant des équations de la piézoélectricité et en imposant des conditions aux

limites adéquates, Poizat parvient à déterminer les coefficients effectifs [Poi00]. Par exemple, sur le volume suivant (fig. I.20) :

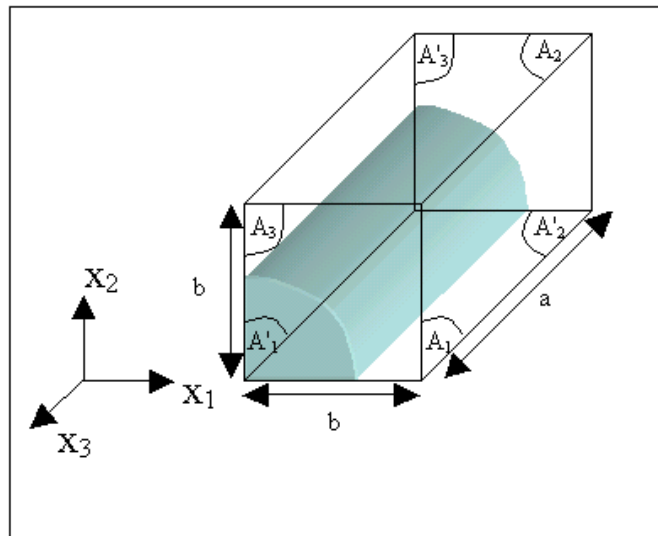


Figure I. 20 Volume élémentaire représentatif

Si on impose les conditions limites suivantes :

Sur A'_1	$u_1 = 0$
Sur A'_2	$u_2 = 0$
Sur A'_3	$u_3 = 0, \varphi = 0$

Sur A_1	u_1 identique sur A_1
Sur A_2	u_2 identique sur A_2
Sur A_3	u_3 identique sur $A_3, \varphi = a \cdot \langle E_3 \rangle$

On peut déterminer d_{33}^{eff} tel que :

$$d_{33}^{\text{eff}} = \frac{\bar{S}_3}{\bar{E}_3} = \frac{u_{A_3}}{\varphi} \quad (\text{I. 34})$$

Christophe Poizat a ainsi déterminé d_{33}^{eff} , d_{31}^{eff} , e_{33}^{eff} et e_{31}^{eff} . Il se limite aux modules longitudinaux et transversaux pour que la cellule parallélépipédique reste parallélépipédique. Il a comparé ses résultats avec des valeurs expérimentales [CU89] et la méthode de Mori Tanaka. Ses résultats pour d_{33}^{eff} sont proches des valeurs obtenues par ces auteurs. Il a également observé l'influence de la distribution des fibres sur son modèle. Les résultats restent excellents quelle que soit cette distribution. L'intérêt majeur de sa démarche est qu'il a abordé les piézocomposites 0-3. Il est important de considérer ce type de matériau équivalent à des fibres courtes car dans le cas d'actionneurs utilisés dans notre méthode, parfois les fibres se cassent lors des manipulations.

3.2.3.2. La méthode de Abgossou & Pastor

Abgossou propose l'implémentation d'une technique d'homogénéisation pour des milieux piézoélectriques périodiques [AVP99]. Il se propose de comparer la méthode développée par Joseph Pastor [Pas97] à d'autres méthodes analytiques.

Le travail de Pastor est basé sur la formulation variationnelle. Le raisonnement est le même que celui adopté par le code ATILA. Les inconnues sont le déplacement et le potentiel. De plus, des termes particuliers permettent d'inclure dans les équations, comme inconnues, les moyennes de la déformation et du champ électrique.

Les valeurs obtenues sont comparées à celles obtenues par la méthode de Schulgasser [Schul92] et de Mori Tanaka [DT93].

Les résultats numériques sont proches des résultats analytiques pour la valeur de d_{33} quelle que soit la fraction volumique de fibres. Mais cette méthode est difficile à implémenter. Les inconnues supplémentaires imposent un travail algorithmique conséquent. Il faut retravailler complètement le logiciel afin d'intégrer de nouvelles variables, ce qui n'a pas été envisagé.

3.3. Tableau récapitulatif des différentes méthodes d'homogénéisation

Le tableau I.2 résume les différentes méthodes d'homogénéisation précédemment présentées.

	Méthodes	Coefficients élastiques	Coefficients piézoélectriques	Coefficients diélectriques	Prise en compte de la forme de l'inclusion ou connexion	Prise en compte des électrodes	Facilité de mise en place
Méthodes basées sur les conditions de Voigt et Reuss	Newnham	Aucun	Tous sauf d_{13}^{eff}	Tous	Oui connexion	Non	*****
	Benveniste & Dvorak	Tous	Tous	Tous	Oui (connexion)	Non	**
	Schulgasser	Tous sauf c_{11}^{Eff} , c_{12}^{Eff} et c_{66}^{Eff}	Tous	Tous	Non	Non	*****
	Hagood (2 méthodes)	Tous sauf c_{44}^{Eff} et c_{66}^{Eff}	Tous sauf e_{13}^{eff}	Tous sauf ϵ_{33}^{eff}	Oui	Oui	***
	Yamaguchi & Hashimoto	Tous	Tous	Tous	Oui (connexion)	Non	**
Méthodes reposant sur Eshelby	Dilué	Tous	Tous	Tous	Oui	Non	****
	Mori & Tanaka	Tous	Tous	Tous	Oui	Non	***
	Autocohérent	Tous	Tous	Tous	Oui	Non	***
Méthodes diverses	Poizat	Aucun	Tous sauf e_{13}^{eff}	Aucun	Oui	Non	***
	Pastor	Tous	Tous	Tous	Oui	Non	**

Tableau I. 2 Tableau récapitulatif des techniques d'homogénéisation

4. CONCLUSION

Ce chapitre a permis de présenter un état de l'art sur le contrôle de forme de pales et ainsi de voir que le sujet est étendu. Les matériaux utilisés ont été présentés ainsi que leurs applications en tant qu'actionneurs. Certaines méthodes d'homogénéisation analytiques déjà existantes ont été programmées et ont servi de moyen de comparaison. La difficulté de mise en place de la modélisation des matériaux par le contrôle de forme a conduit naturellement au développement d'une nouvelle technique d'homogénéisation numérique, faisant l'objet du chapitre suivant. Cette méthode est rapide dès que les fibres (constituants et formes ainsi que la matrice sont paramétrées. De plus, de nouvelles inclusions peuvent être prises ne compte.

CHAPITRE II : Technique d'Homogénéisation développée

Étant donné les limites des techniques d'homogénéisation existantes, une méthode numérique d'homogénéisation a été développée et présentée dans ce chapitre. Elle repose sur la méthode des éléments finis, et utilise le code ATILA. Deux techniques numériques sont proposées. La méthode du Volume Élémentaire Représentatif et la méthode de Propagation d'Ondes. Le couplage entre les deux méthodes permet d'obtenir l'ensemble des constantes homogénéisées de la structure. Dans ce chapitre, après la description de la Méthode des Éléments Finis, chacune des deux techniques d'homogénéisation est présentée. La validation des méthodes est effectuée en comparant les résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes. Une application est ensuite décrite dans le cas d'un matériau piézocomposite 1-3 [EH03].

NOTATIONS

a	Dimension d'un côté du VER
$[B]$	Matrice des dérivées des fonctions d'interpolations
$[c^E]$	Tenseur des constantes de rigidité à champ électrique constant
c_L	Vitesse de propagation de l'onde longitudinale
c_T	Vitesse de propagation de l'onde transversale
$[d]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
\tilde{D}	Vecteur déplacement électrique
$[e]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
\tilde{E}	Vecteur champ électrique
\tilde{f}	Vecteur densité superficielle de force connue
\tilde{F}	Vecteur des forces appliquées
FFVS	Free Field Voltage Sensitivity
\tilde{k}	Vecteur d'onde
$[K]$	Matrice de rigidité
l	Dimension de la longueur du VER
$[M]$	Matrice masse
\tilde{n}	Vecteur unitaire normal du domaine piézoélectrique
$[N^e]$	Matrice regroupant les fonctions d'interpolation
$[N_\phi^e]$	Matrice ligne regroupant les tenseurs d'interpolation
PO	Propagation d'Onde
\tilde{Q}	Vecteur des charges appliquées
Q_p	Charge électrique

[S]	Tenseur des déformations
$[s^E]$	Tenseur des constantes d'élasticité à champ électrique constant
[T]	Tenseur des contraintes
TVR	Transmitting Voltage Response
\tilde{u}	Vecteur déplacement
\tilde{U}^e	Valeurs nodales du déplacement
\tilde{x}	Vecteur repère d'origine
V	Volume
VER	Volume Elémentaire Représentatif
Γ	Surface du domaine piézoélectrique
[Γ]	Tenseur de Christoffel
$[\epsilon^S]$	Tenseur des constantes diélectriques à déformation constante
$\tilde{\theta}$	Vecteur des forces appliquées
θ et φ	Angles directeurs du vecteur d'onde
λ	Longueur d'onde
$v_{f,m}$	Fraction volumique de la fibre et de la matrice
$\rho, \rho_{f,m}$	Masse volumique, masse volumique de la fibre et de la matrice
φ	Potentiel électrique
φ_p	Potentiel électrique connu
ω	Pulsation
Ω	Domaine piézoélectrique

1. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE A LA PIEZOELECTRICITE

1.1. Les relations fondamentales et géométriques

Un domaine piézoélectrique noté Ω , limité par une surface Γ , de normale \vec{n} orientée vers l'extérieur est considéré (fig. II.1). Le problème électrique est couplé au problème mécanique à l'intérieur du domaine piézoélectrique.

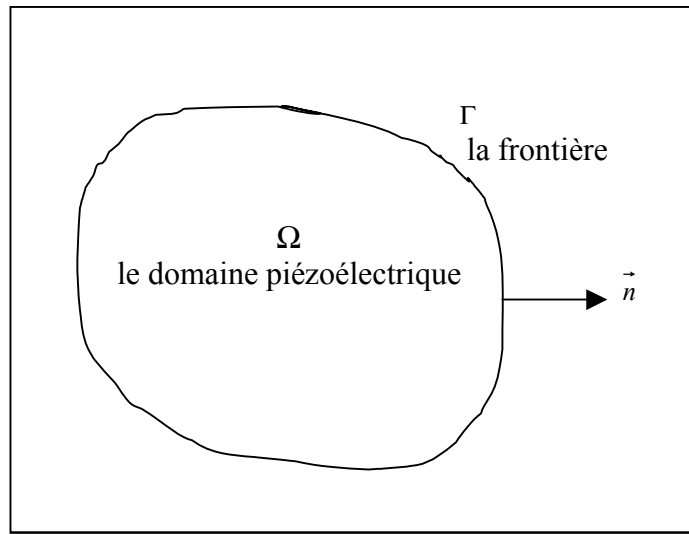


Figure II. 1 Domaine étudié

Dans le domaine Ω , le couplage entre les grandeurs électriques et mécaniques est décrit à travers des équations constitutives de la piézoélectricité détaillées en Annexe A.

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_i \end{cases} \quad (II. 1)$$

où $[T]$ est le tenseur des contraintes, $[S]$ le tenseur des déformations, \vec{E} le vecteur champ électrique, \vec{D} le vecteur déplacement électrique, $[c^E]$ le tenseur de rigidité à champ électrique constant, $[e]$ le tenseur piézoélectrique et $[\epsilon^S]$ le tenseur diélectrique à déformation constante. Le tenseur des déformations peut être relié au vecteur déplacement \vec{u} par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II. 2})$$

De plus, le champ électrique \underline{E} dérive du potentiel φ .

$$E_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\varphi_{,j} \quad (\text{II. 3})$$

La relation fondamentale de la dynamique s'exprime comme [DR74] :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{ou encore} \quad T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II. 4})$$

Dans le cas quasi statique :

$$T_{ij,j} = 0 \quad (\text{II. 5})$$

Une autre équation d'équilibre est obtenue à partir de l'équation de Poisson.

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \text{div } \underline{D} = 0 \quad (\text{II. 6})$$

Dans cette dernière équation, l'absence de toute charge libre est considérée comme hypothèse, ce qui est le cas dans un diélectrique parfait.

De ces équations, il est possible d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} -\rho \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (e_{ekl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j) = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 7})$$

En supposant \underline{u} harmonique.

Pour un domaine purement élastique, les équations se déduisent des équations précédentes en ignorant la grandeur électrique.

Les conditions aux limites associées à cette relation sont mécaniques et électriques. Dans un premier temps, les conditions mécaniques portent sur le champ de déplacement. En tout point de la surface de Dirichlet, le déplacement suppose :

$$u_i = u_i' \quad (\text{II. 8})$$

où u_i' est un déplacement connu. Dans un deuxième temps, les conditions mécaniques portent sur le champ de contrainte (condition de Neumann) :

$$T_{ij} n_j = -f_i \quad (\text{II. 9})$$

où \tilde{n} est un vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'intérieur et \tilde{f} une densité superficielle de force connue.

Ensuite, les conditions électriques imposent une absence de charges superficielles en absence d'électrode :

$$D_i n_i = 0 \quad (\text{II. 10})$$

Ceci prend en compte la permittivité diélectrique élevée des matériaux piézoélectriques considérés. Pour une surface quelconque recouverte d'une électrode, la condition limite devient :

$$\varphi = \varphi_p \quad (\text{II. 11})$$

Où φ_p représente un potentiel électrique connu, soit la charge portée par l'électrode :

$$-\iint_{\Gamma} D_i n_i d\Gamma = Q_p \quad (\text{II. 12})$$

où Q_p est une charge électrique connue.

1.2. La formulation variationnelle

Le système d'équations ainsi que celles qui précèdent représentent les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L définie par :

$$\begin{aligned} L = & \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - \rho \omega^2 u_i^2) d\Omega - \iint_{S_u} (u_i - u_i') n_j (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) dS_u \\ & - \iint_{S_T} f_i u_i dS_T - \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (2S_{kl} e_{ikl} E_i + E_i \varepsilon_{ij}^S E_j) d\Omega \\ & - \sum_{p=0}^M \iint_{S_p} (\varphi - \varphi_p) n_i (e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j) dS_p + \sum_{p=0}^M \varphi_p Q_p \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

Les trois premiers termes se rapportent au solide élastique (potentiel de déformation et énergie cinétique / déplacements imposés / travail des forces extérieures). Les trois termes suivants permettent d'ajouter les composantes électriques afin de considérer un matériau piézoélectrique. [Lew61-EN67-HEN68-HEN69-AH70]

1.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

Lors de la résolution d'un problème à l'aide de la méthode des éléments finis, le domaine étudié est découpé en sous-domaines appelés éléments, interconnectés aux points appelés nœuds. Au sein du code ATILA [ATI02], l'interpolation utilisée est généralement quadratique et les éléments constitués sont iso paramétriques (fig. II.2) (nœuds aux coins et aux milieux des segments – cf Annexe B).

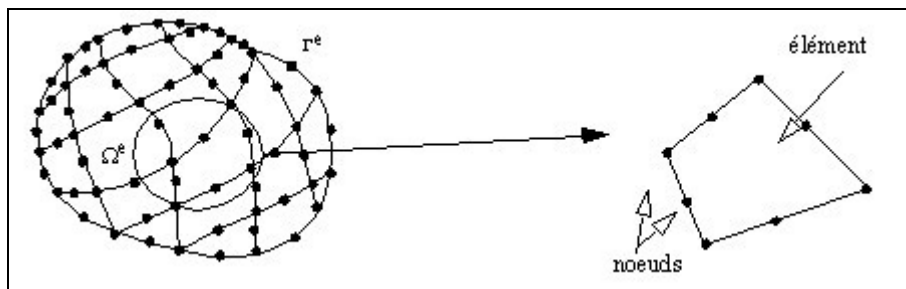


Figure II. 2 Discrétisation du domaine d'étude

Le déplacement et le potentiel électrique en un point quelconque, situé à l'intérieur d'un élément, peuvent être reliés aux valeurs nodales du déplacement \tilde{U}^e et du potentiel $\tilde{\Phi}^e$ à l'aide de fonctions d'interpolation (Annexe B) [Dec84].

$$\tilde{u} = [N^e] \tilde{U}^e \quad (\text{II. 14})$$

$$\tilde{\varphi} = [N_\varphi^e] \tilde{\Phi}^e \quad (\text{II. 15})$$

avec $[N_\varphi^e]$ et $[N^e]$ les matrices regroupant les fonctions d'interpolation. La déformation en ce point s'exprime en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation mentionnées dans la matrice $[B^e]$.

$$\tilde{S}^e = [B^e] \tilde{U}^e \quad (\text{II. 16})$$

La grandeur L exprimée dans l'équation (II.13) doit être décomposée en une somme d'intégrales sur tous les éléments e du maillage. L'indice e fait référence à l'élément :

$$L = \sum_e \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} (U^{et} [B^e]^t [c^E] [B^e] U^e) d\Omega_e - \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_{\Omega_e} (\rho U^{et} [N^e]^t [N^e] U^e) d\Omega_e \\ & + \iiint_{\Omega_e} (U^{et} [B^e]^t [e] [B_\phi^e] \phi^e) d\Omega_e - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_e} (\phi^{et} [B_\phi^e]^t [\epsilon^S] [B_\phi^e] \phi^e) d\Omega_e \\ & - \iint_{\Gamma_e} U^{et} [N^e]^t f d\Gamma_e + \sum_{p=0}^M \phi_p Q_p \end{aligned} \right] \quad (\text{II. 17})$$

Les vecteurs U^e et Φ^e ne dépendent pas des variables d'intégration. L peut alors s'écrire :

$$L = \sum_e \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} U^{et} [K_{uu}^e] U^e - \frac{1}{2} \omega^2 U^{et} [M^e] U^e \\ & + U^{et} [K_{u\phi}^e] \phi^e + \frac{1}{2} \phi^{et} [K_{\phi\phi}^e] \phi^e - U^{et} F^e + \sum_{p=0}^M \phi_p Q_p^e \end{aligned} \right] \quad (\text{II. 18})$$

Avec les matrices [K] définies selon :

→ matrice de rigidité mécanique :

$$[K_{uu}] = \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_u^e] [c^{Ee}] [B_u^e] d\Omega^e \quad (\text{II. 19})$$

→ matrice de couplage électromécanique :

$$[K_{u\phi}] = \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_u^e]^t [e^e]^t [B_\phi^e] d\Omega^e \quad (\text{II. 20})$$

→ matrice de rigidité diélectrique :

$$[K_{\phi\phi}] = - \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_\phi^e]^t [\epsilon^{Se}] [B_\phi^e] d\Omega^e \quad (\text{II. 21})$$

De plus :

→ vecteur des valeurs nodales des forces appliquées :

$$F^e = \iint_{\Gamma^e} [N_u^e]^t f d\Gamma^e \quad (\text{II. 22})$$

→ vecteur des valeurs nodales de la charge appliquée :

$$Q^e = \iint_{\Gamma^e} [N_\phi^e]^t Q d\Gamma^e \quad (\text{II. 23})$$

→ matrice élémentaire de masse cohérente :

$$[M] = \iiint_{\Omega_e} \rho [N^e]^t [N^e] d\Omega^e \quad (\text{II. 24})$$

L'application du principe variationnel conduit à minimiser L par rapport aux valeurs nodales.

Le système d'équations linéaires obtenu en analyse statique est :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F} \\ -Q \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 25})$$

La structure piézoélectrique est supposée posséder plusieurs électrodes dont l'une servir de référence de potentiel (masse) tandis que les autres sont dites "chaudes".

D'autres analyses sont également possibles comme:

→ Analyse modale :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2[M] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 26})$$

Le système est obtenu en posant $\tilde{F}=0$ et en ajoutant un terme cinétique. Si toutes les électrodes sont en court-circuit (masse), leurs potentiels électriques sont nuls et les valeurs propres sont appelées pulsations de résonance. Si le système est en circuit ouvert (isolé), la somme des charges nodales sur chaque électrode est nulle. Les valeurs propres du système sont appelées pulsations d'anti-résonance.

→ Analyse harmonique :

$$([K_{uu}] - \omega^2[M])\tilde{U} = -[K_{u\phi}]\tilde{\Phi} \quad (\text{II. 27})$$

La structure est mécaniquement libre et excitée de façon sinusoïdale par les électrodes. Il est possible de calculer l'admittance en ne considérant qu'une électrode chaude.

→ Analyse transitoire :

$$[M]\ddot{\tilde{U}} + \frac{1}{\omega_0} \begin{bmatrix} [K''_{uu}] & [K''_{u\phi}] \\ [K''_{u\phi}]^t & [K''_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{U}} \\ \dot{\tilde{\Phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K'_{uu}] & [K'_{u\phi}] \\ [K'_{u\phi}]^t & [K'_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F} \\ -Q \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 28})$$

' et '' sont respectivement les dérivées première et seconde par rapport au temps. [K'] et [K''] représente respectivement la partie réelle et imaginaire du tenseur [K].

2. METHODE DU VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF

2.1. Définition et cas général du matériau élastique

A l'échelle des fibres, les composites sont des matériaux hétérogènes. Lors de la détermination des propriétés effectives, la prise en compte de l'ensemble du matériau et de toutes ses hétérogénéités représente une tâche compliquée. Il est donc nécessaire de réduire le domaine étudié afin de déterminer les caractéristiques du composite. Le volume sur lequel les propriétés sont moyennées est appelé Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.). Ce volume doit satisfaire les critères suivants :

- Il doit être suffisamment petit pour prendre en compte la structure microscopique du matériau et suffisamment grand pour pouvoir décrire le comportement global de ce matériau.
- Ses propriétés doivent être indépendantes de l'endroit du matériau où il a été "prélevé".

Des conditions de contrainte et de déformation étant imposées à la frontière du VER, le calcul d'homogénéisation consiste à déterminer les champs de contrainte et de déformation au sein du VER. Il est alors possible de calculer la contrainte moyenne dans la direction m au sein de l'élément de volume :

$$\bar{T}_m = \frac{1}{V} \int_V T_m dV \quad (\text{II. 29})$$

avec $m = 1, \dots, 6$. De la même façon, la déformation est donnée par :

$$\bar{S}_m = \frac{1}{V} \int_V S_m dV \quad (\text{II. 30})$$

A partir de la moyenne des contraintes et des déformations sur le VER, il est alors possible de déterminer les propriétés effectives du matériau homogénéisé.

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, malheureusement, ce n'est pas aussi simple que dans un matériau élastique. Il faut prendre en compte le couplage des grandeurs élastiques avec les grandeurs électriques du matériau.

2.2. VER : application au cas du matériau piézoélectrique

2.2.1. Détermination des coefficients mécaniques effectifs

La détermination des constantes mécaniques implique que le matériau soit purement élastique, soit à champ électrique constant. Pour ce faire, il est indispensable d'imposer un champ électrique nul (différence de potentiels sur la longueur) par exemple en considérant le potentiel nul dans le matériau.

$$\varphi = 0 \quad (\text{II. 31})$$

Pour la suite des calculs, a représente le coté du VER et l la longueur du VER.

Détermination du coefficient effectif s_{11}^{Eff}

Reprenons les équations constitutives de la piézoélectricité.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccc} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^T & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} \quad (\text{II. 32})$$

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \quad (\text{II. 33})$$

Le matériau est considéré comme purement élastique, compte tenu du potentiel nul partout :

$$E_3 = 0 \quad (\text{II. 34})$$

En appliquant une contrainte dans la direction 1, la relation se réduit à :

$$S_1 = s_{11}^E T_1 \quad (\text{II. 35})$$

Compte tenu des plans de symétrie, le Volume Élémentaire Représentatif se réduit à un quart de fibre (fig. II.3). Il faut d'abord appliquer une contrainte sur la face B. Les faces marquées

d'une lettre primée sont les faces représentant la symétrie. Les faces restantes ont des déplacements plans.

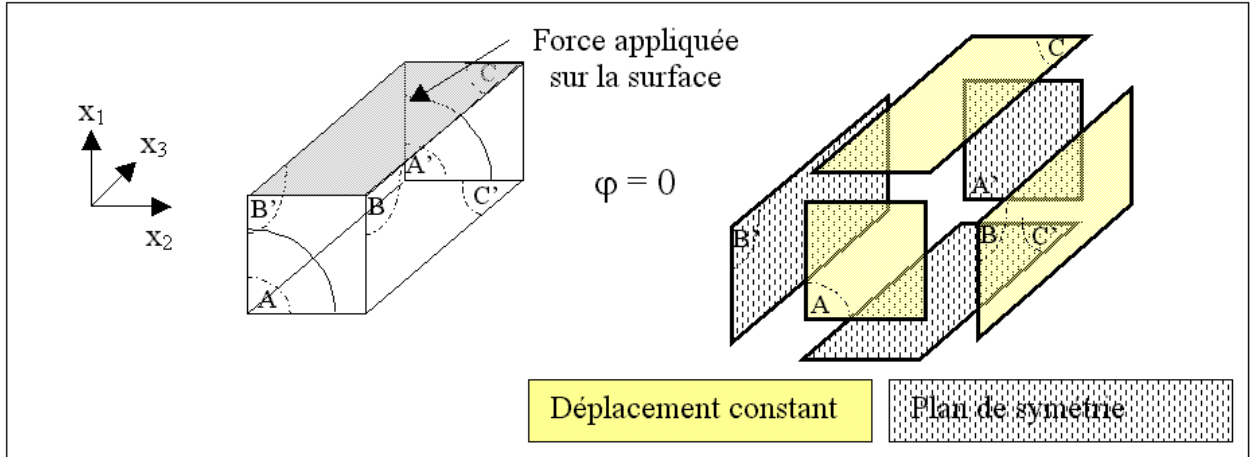


Figure II. 3 Volume Élémentaire Représentatif

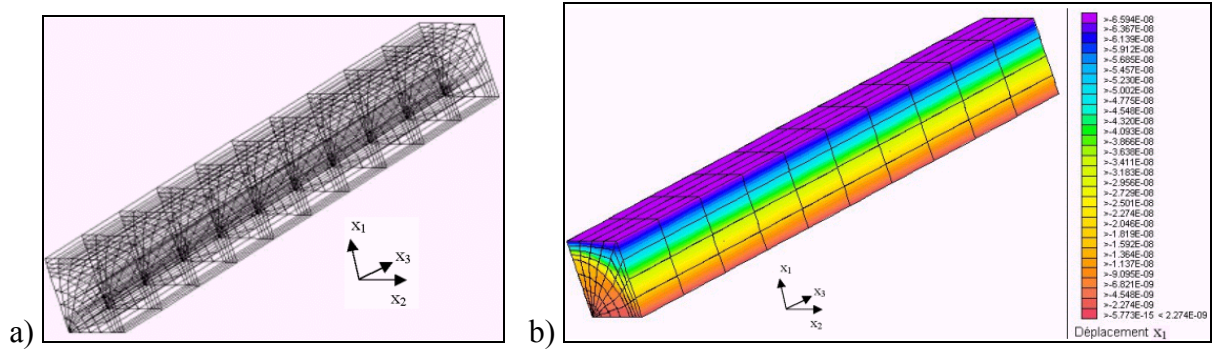


Figure II. 4 a) Maillage du Volume Élémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_1

Le déplacement de la face C est relevé et la déformation est calculée.

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (\text{II. 36})$$

La contrainte appliquée sur la face C est calculée.

$$T_1 = \frac{F}{a * l} \quad (\text{II. 37})$$

Il est alors aisé de calculer le coefficient élastique effectif.

$$s_{11}^{\text{Eff}} = \frac{S_1}{T_1} \quad (\text{II. 38})$$

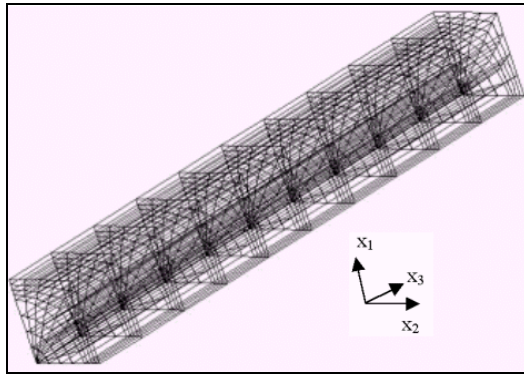
La figure II. 4 a) montre le maillage utilisé pour le calcul du coefficient effectif. Aucun effet de facteur de forme des éléments n'a été observé. Un maillage plus précis a donné des résultats équivalents.

Détermination du coefficient effectif s_{21}^{Eff}

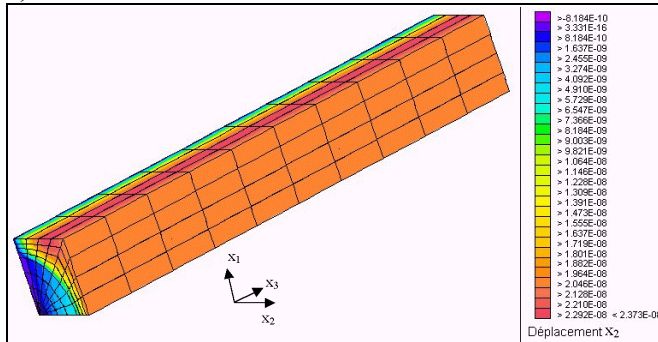
Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_2 = s_{21}^E T_1 + s_{22}^E T_2 + s_{23}^E T_3 + d_{32} E_3 \tag{II. 39}$$

Les conditions sont les mêmes que pour le cas précédent.



a)



b)

Figure II. 5 a) Maillage du Volume Elémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_2

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= 0 \\ T_3 &= 0 \\ E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{II. 40}$$

$$S_2 = s_{21}^E T_1 \tag{II. 41}$$

$$S_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{II. 42}$$

$$T_1 = \frac{F}{a * l} \tag{II. 43}$$

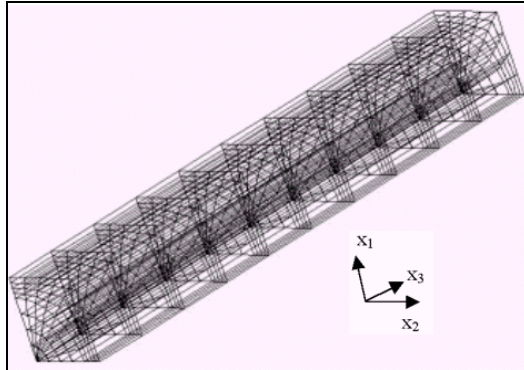
$$s_{21}^{Eff} = \frac{S_2}{T_1} \tag{II. 44}$$

Détermination du coefficient effectif s_{31}^{Eff}

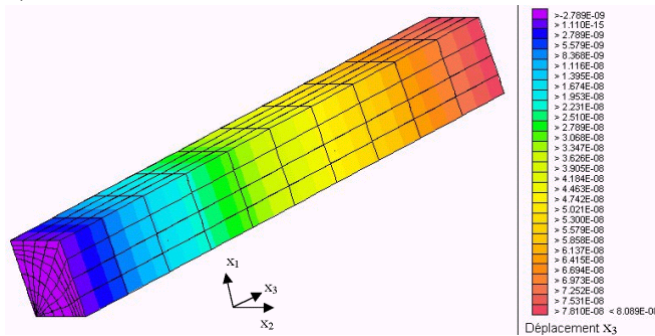
Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans l'équation suivante :

$$S_3 = s_{31}^E T_1 + s_{32}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \tag{II. 45}$$

Les conditions limites sont les mêmes.



a)



b)

Figure II. 6 a) Maillage du Volume Elémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_3

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= 0 \\ T_3 &= 0 \\ E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{II. 46}$$

$$S_3 = s_{31}^E T_1 \tag{II. 47}$$

$$S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{II. 48}$$

$$T_1 = \frac{F}{a * l} \tag{II. 49}$$

$$s_{31}^{Eff} = \frac{S_3}{T_1} \tag{II. 50}$$

Détermination du coefficient effectif s_{33}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_3 = s_{31}^E T_1 + s_{32}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \quad (II. 51)$$

Le matériau est considéré comme purement élastique :

$$E_3 = 0 \quad (II. 52)$$

En appliquant une contrainte dans la direction 3, la ligne se réduit à :

$$S_3 = s_{33}^E T_3 \quad (II. 53)$$

Compte tenu des plans de symétrie, le Volume Élémentaire Représentatif se réduit à un quart de fibre. Il faut d'abord appliquer une contrainte sur la face A (fig. II.7). Les faces marquées d'une lettre primée sont les faces représentant la symétrie. Les faces restantes ont des déplacements plans.

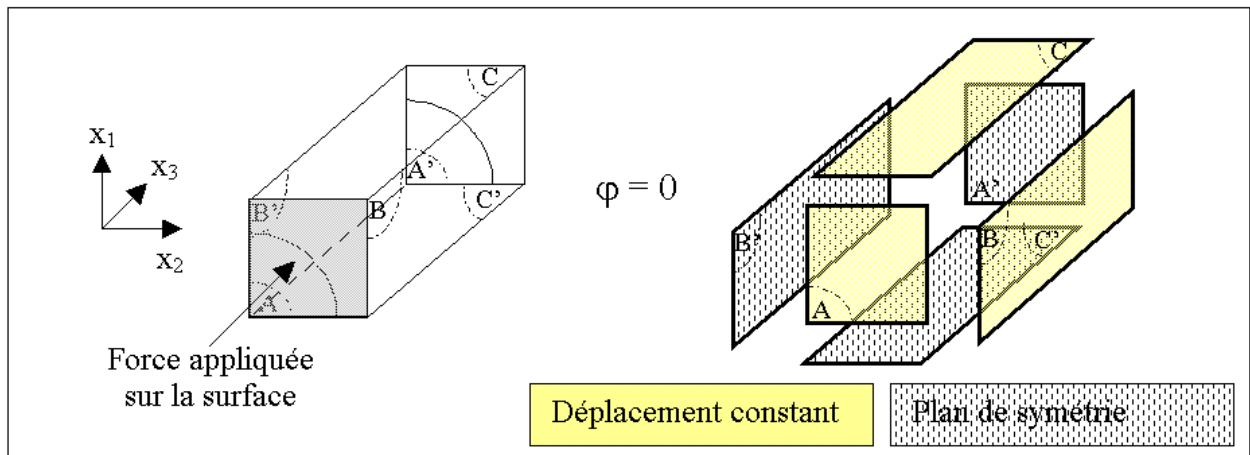
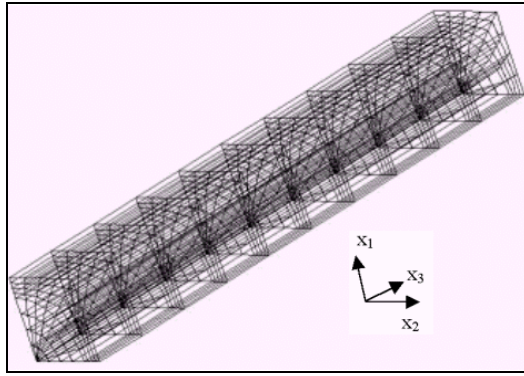
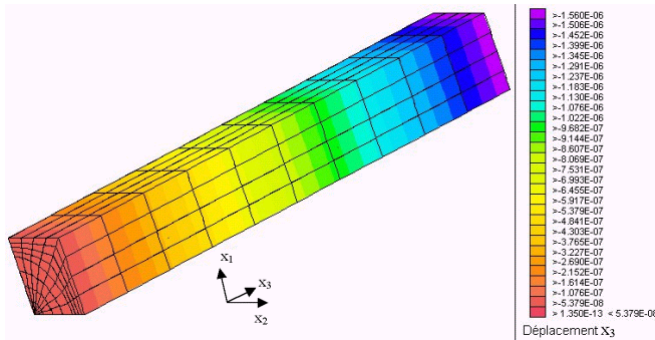


Figure II. 7 Volume Élémentaire Représentatif



a)



b)

Figure II. 8 a) Maillage du Volume Élémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_3

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 0 \\ T_2 &= 0 \\ E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 54})$$

$$S_3 = s_{33}^E T_3 \quad (\text{II. 55})$$

$$S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{II. 56})$$

$$T_3 = \frac{F}{a^2} \quad (\text{II. 57})$$

$$s_{33}^{\text{Eeff}} = \frac{S_3}{T_3} \quad (\text{II. 58})$$

Le calcul des autres coefficients élastiques s_{12}^{Eeff} , s_{13}^{Eeff} , s_{22}^{Eeff} , s_{23}^{Eeff} et s_{32}^{Eeff} n'est pas nécessaires compte tenu de la symétrie du système. Toutefois, les calculs sont en Annexe C.

Pour le calcul des coefficients élastiques de cisaillement, le problème qui se pose concerne le nombre élevé de conditions limites à appliquer. Ce nombre est trop important sauf pour le calcul de s_{66}^{Eeff} car le volume élémentaire peut être considérablement réduit.

Détermination du coefficient effectif s_{66}^{Eff}

Dans le cas du calcul de la constante homogénéisée de cisaillement, le volume élémentaire est différent. Il s'agit d'un maillage 2D en déformation plane (fig. II.9). Le volume est limité par un plan de symétrie et un plan d'antisymétrie (fig. II.10) [EH02].

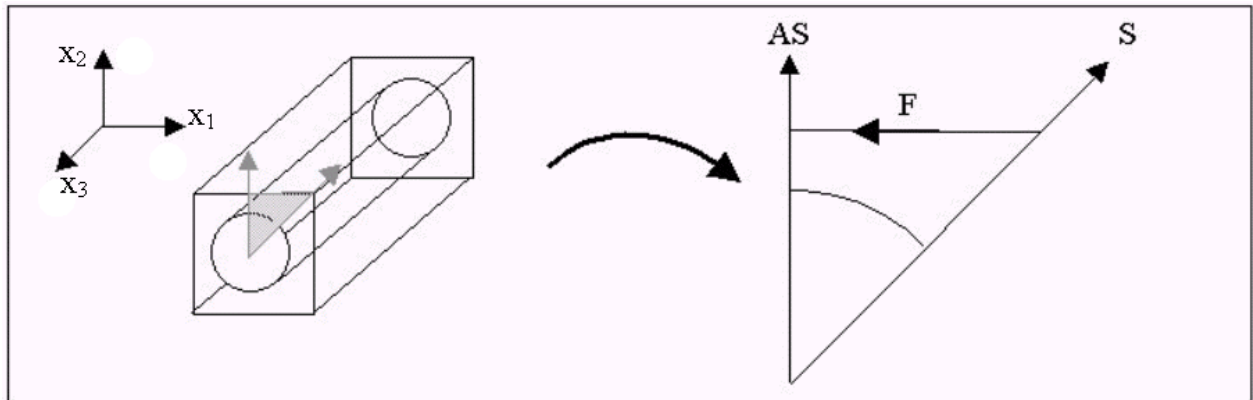


Figure II. 9 Volume Élémentaire Représentatif 2D pour le calcul du s_{66}^{Eff}

Le maillage et la déformation obtenue sont représentés sur le dessin suivant :

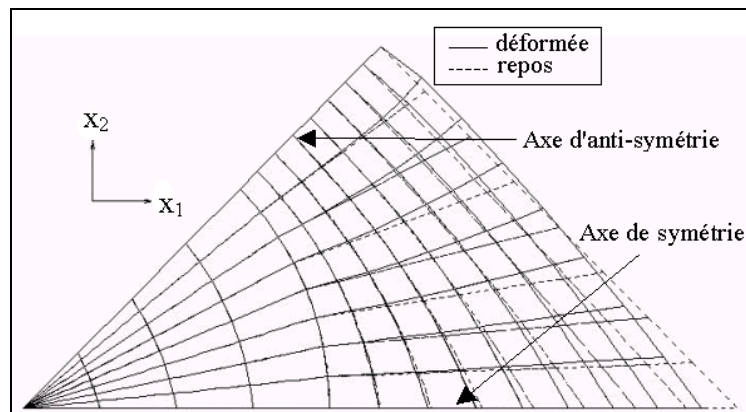


Figure II. 10 Cisaillement du VER 2D

En considérant le système d'équations, s_{66}^{Eff} s'exprime sous la forme :

$$s_{66}^{Eff} = \frac{S_6}{T_6} \quad (II. 59)$$

avec

$$T_6 = \frac{\sum F_e}{a/2} \quad (\text{II. 60})$$

et

$$S_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II. 61})$$

s_{66}^{Eff} est ainsi déterminé grâce à une moyennation des grandeurs mécaniques que sont la contrainte et le déplacement.

Utiliser ce volume réduit permet de limiter le nombre des conditions limites à appliquer pour le détermination de la constante. Le problème se pose dans le cas du calcul du coefficient effectif s_{44}^{Eff} . Le volume élémentaire ne peut pas être réduit et le nombre de conditions limites est trop grand à gérer. Une autre solution s'offre alors à nous : utiliser la méthode de la propagation d'ondes.

2.2.2. Détermination des coefficients piézoélectriques effectifs

Le volume élémentaire choisi est le même que pour les calculs précédents. La particularité par rapport au maillage précédent est que le le potentiel électrique n'est pas nul. On impose sur les deux phases grisées, pour l'une un potentiel nul et pour l'autre un potentiel non nul. La polarisation est dans le sens de la fibre.

Détermination des coefficients effectifs d_{31}^{eff} et d_{33}^{eff}

Les conditions limites appliquées sont représentées sur la figure II.11.

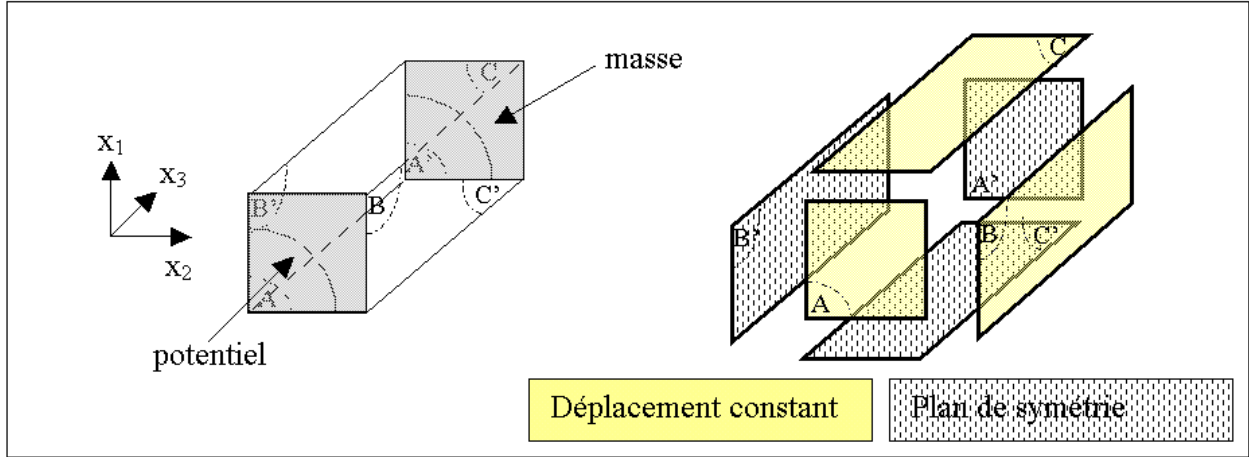


Figure II. 11 Volume Élémentaire Représentatif

Considérant l'équation (II. 32), les coefficients effectifs qui nous intéressent apparaissent dans l'équation suivante :

$$S_1 = s_{11}T_1 + s_{12}T_2 + s_{13}T_3 + d_{31}E_3 \quad (II. 62)$$

Le Volume Élémentaire Représentatif est libre de contrainte donc il est possible de déterminer la constante d_{31} :

$$d_{31}^{eff} = \frac{S_1}{E_3} \quad (II. 63)$$

avec le déplacement suivant l'axe x_1 :

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (II. 64)$$

et le champ électrique suivant la fibre :

$$E_3 = \frac{\varphi}{l} \quad (II. 65)$$

φ étant le potentiel et l la longueur du VER.

Les figures suivantes (fig. II.12) représente le déplacement et le champ de potentiel.

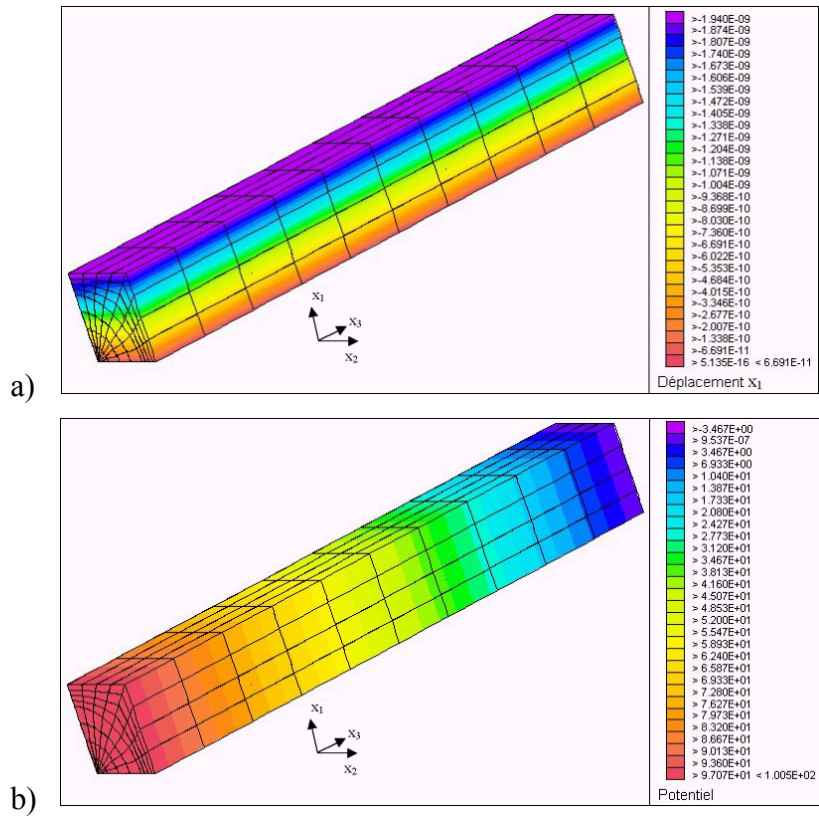


Figure II. 12 a) Maillage représentant le champ de déplacement suivant x_1 ; b) Maillage représentant le champ de potentiel

Le calcul de d_{33} s'effectue de la même manière :

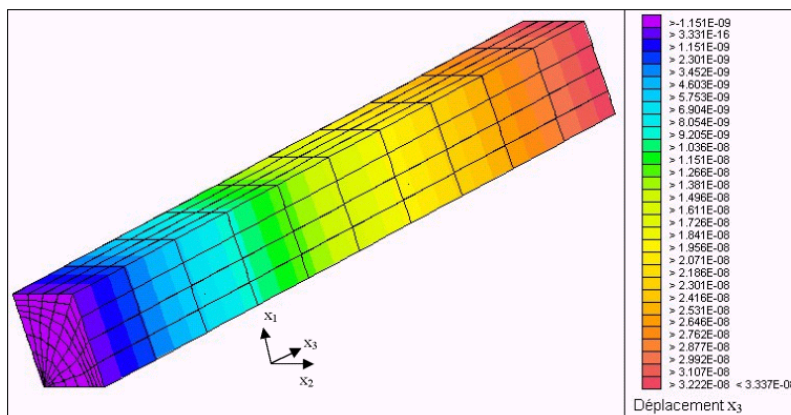


Figure II. 13 Maillage représentant le champ de déplacement suivant x_3

$$d_{33}^{eff} = \frac{S_3}{E_3} \quad (\text{II. 66})$$

$$S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{II. 67})$$

$$E_3 = \frac{\varphi}{l} \quad (\text{II. 68})$$

Le calcul de d_{32}^{eff} n'est pas nécessaire compte tenu de la symétrie du système. Le calcul est effectué en Annexe C.

Il reste à déterminer le coefficient effectif d_{15}^{eff} . Mais par cette méthode, c'est difficile. La détermination se fera par la suite, grâce à la méthode de la propagation d'onde.

2.2.3. Détermination des coefficients diélectriques effectifs

Le Volume Élémentaire choisi est similaire au cas précédent. L'élément est polarisé dans le sens de la fibre.

Détermination du coefficient ϵ_{11}^{Teff}

Pour la détermination du coefficient effectif ϵ_{11}^{Teff} , les phases grisées de la figure II.14 sont placées soit à la masse soit à un potentiel non nul.

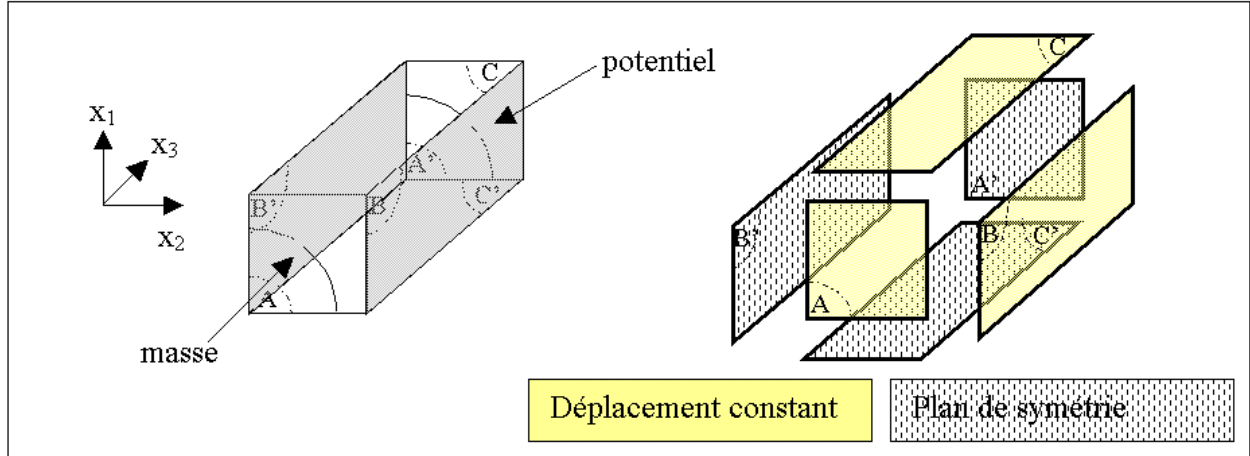


Figure II. 14 Volume Élémentaire Représentatif

Considérant l'équation (II. 32), le coefficient effectif qui nous intéresse apparaît dans la relation suivante :

$$D_1 = d_{15}T_5 + \epsilon_{11}^T E_1 \quad (II. 69)$$

Si un champ électrique est appliqué et en conservant le volume libre de contrainte, l'équation précédente se réduit à :

$$D_1 = \epsilon_{11}^T E_1 \quad (II. 70)$$

sachant que le déplacement électrique D_1 s'exprime par :

$$D_1 = \frac{\phi^* C}{a * l} \quad (II. 71)$$

et le champ électrique est donné par :

$$E_3 = \frac{\phi}{a} \quad (II. 72)$$

avec l la longueur du VER, a la largeur, ϕ le potentiel et C la capacitance.

Il est possible de déterminer le coefficient effectif :

$$\epsilon_{11}^{Teff} = \frac{D_1}{E_1} \quad (II. 73)$$

Détermination du coefficient $\epsilon_{33}^{\text{Teff}}$

Pour la détermination du coefficient effectif $\epsilon_{33}^{\text{Teff}}$, les phases grisées de la figure II.15 sont placées soit à la masse soit à un potentiel non nul.

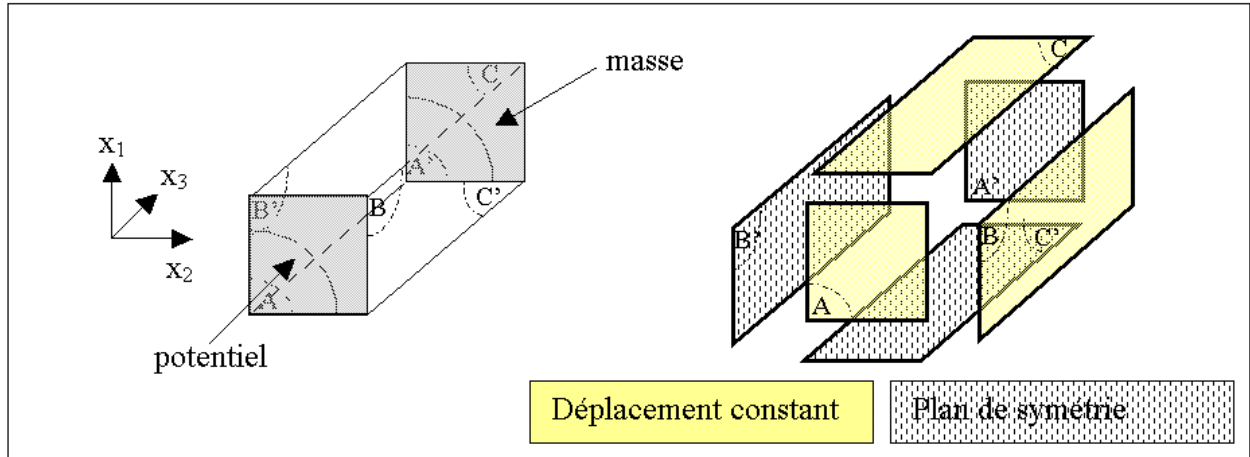


Figure II. 15 Volume Élémentaire Représentatif

La démarche est la même pour une autre direction de champ :

$$D_3 = d_{31}T_1 + d_{32}T_2 + d_{33}T_3 + \epsilon_{33}^T E_3 \quad (\text{II. 74})$$

$$D_3 = \epsilon_{33}^T E_3 \quad (\text{II. 75})$$

Avec :

$$D_3 = \frac{\varphi^* C}{a^2} \quad (\text{II. 76})$$

Et :

$$E_3 = \frac{\varphi}{l} \quad (\text{II. 77})$$

Il est possible de déterminer le coefficient effectif :

$$\epsilon_{33}^{\text{Teff}} = \frac{D_3}{E_3} \quad (\text{II. 78})$$

Ainsi tous les coefficients effectifs diélectriques sont déterminés en tenant compte de la symétrie de la structure.

2.2.4. Tableau récapitulatif

Le tableau suivant (tab II.1) résume les conditions imposées pour la détermination de chaque coefficient.

coefficients	2D/3D	Direction Force	Direction déplacement mécanique	Plan à potentiel non nul	Direction du déplacement électrique	Calcul
s_{11}^{Eff}	3D	1	1			$s_{11}^{Eff} = \frac{S_1}{T_1}$
s_{12}^{Eff}	3D	2	1			$s_{12}^{Eff} = \frac{S_1}{T_2}$
s_{13}^{Eff}	3D	3	1			$s_{13}^{Eff} = \frac{S_1}{T_3}$
s_{33}^{Eff}	3D	3	3			$s_{33}^{Eff} = \frac{S_3}{T_3}$
s_{66}^{Eff}	2D	12	12			$s_{66}^{Eff} = \frac{S_{12}}{T_{12}}$
d_{31}^{eff}	3D		1	A		$d_{31}^{eff} = \frac{S_1}{E_3}$
d_{32}^{eff}	3D		2	A		$d_{32}^{eff} = \frac{S_2}{E_3}$
d_{33}^{eff}	3D		3	A		$d_{33}^{eff} = \frac{S_3}{E_3}$
ε_{11}^{Teff}	3D			B	1	$\varepsilon_{11}^{Teff} = \frac{D_1}{E_1}$
ε_{22}^{Teff}	3D			C	2	$\varepsilon_{22}^{Teff} = \frac{D_2}{E_2}$
ε_{33}^{Teff}	3D			A	3	$\varepsilon_{33}^{Teff} = \frac{D_3}{E_3}$

Tableau II. 1 Tableau récapitulatif

3. LA PROPAGATION D'ONDES

La détermination de certains coefficients, notamment les coefficients de cisaillement pose une difficulté avec la méthode précédente. Une seconde méthode est alors proposée. Cette méthode est dynamique. Cependant, les calculs sont faits dans la limite des grandes longueurs d'onde, c'est à dire à très basse fréquence. C'est pourquoi, les résultats obtenus par la méthode du VER, qui est statique, sont retrouvés par cette méthode.

Les modes de cisaillement ne semblent pas primordiaux au vue de la forme de l'actionneur. Et pourtant, l'ONERA s'intéresse de près à ce type d'étude dans le cadre du contrôle de forme.

3.1. Définition et cas général

Une onde acoustique plane et harmonique dans un milieu est repérée par la vitesse, la fréquence et le vecteur d'onde \vec{k} qui définit la direction de la propagation de l'onde dans le milieu [DR74 – Lan93].

Un réseau, défini par trois vecteurs et une maille élémentaire, sert à décrire un matériau périodique suivant les trois directions de l'espace. La méthode utilise la modélisation par éléments finis de cette maille élémentaire [LHD92]. Elle exploite également les relations de Bloch-Floquet (relations de phase entre les nœuds séparés par une période) appliquées aux valeurs nodales du déplacement.

Les conditions aux limites entre les cellules élémentaires voisines sont ainsi définies sur les plans S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6 (fig II.16). Le vecteur d'onde \vec{k} étant fixé, les déphasages entre les faces sont déduits des produits scalaires de \vec{k} avec les vecteurs du réseau.

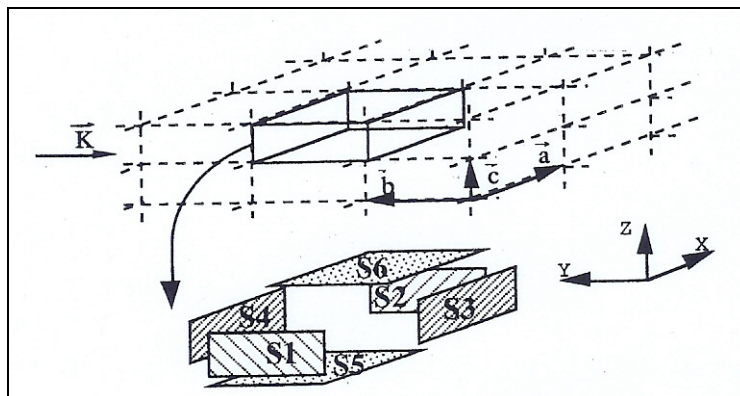


Figure II. 16 Structure périodique 3D

Les relations de Bloch-Floquet se traduisent, en terme d'éléments finis, comme une condensation des degrés de liberté appartenant aux faces S_2, S_4 et S_6 . Le système à résoudre est :

$$([K] - \omega^2[M])U = 0 \quad (\text{II. 79})$$

avec $[K]$ et $[M]$ les matrices de rigidité et de masse cohérente.

Les matrices $[K]$ et $[M]$ réduites sont hermétiques et les valeurs propres du système sont réelles.

La pulsation ω étant périodique dépendant de \tilde{k} , l'étude peut être restreinte à la 1^{ère} zone de Brillouin. Le diagramme de dispersion, pour une direction donnée, est construit en faisant varier \tilde{k} sur la demi-zone de Brillouin (l'autre moitié est déduite par symétrie). Le cas considéré ici est le cas particulier des grandes longueurs (\tilde{k} petit). Dans ce cas, les courbes de dispersion peuvent être assimilées à des droites passant par l'origine.

La norme du vecteur d'onde \tilde{k} est égale à :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{II. 80})$$

où λ est la longueur d'onde.

Le vecteur d'onde \tilde{k} est repéré dans l'espace par les angles θ et φ (fig. II.17).

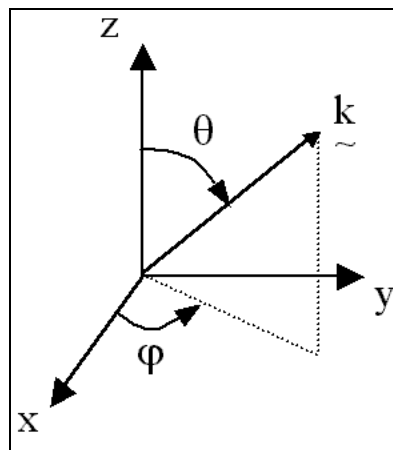


Figure II. 17 Définition des angles directeurs du vecteur d'onde dans un réseau 3D

3.2. Propagation d'Ondes : Application au cas du matériau piézoélectrique

La propagation d'ondes élastiques dans les matériaux périodiques permet de calculer les coefficients homogénéisés des composites.

D'après les systèmes d'équations qui régissent l'effet piézoélectrique, les grandeurs électriques et mécaniques sont liées, donc, les ondes élastiques et électromagnétiques le sont également. Il faut résoudre simultanément les équations de Newton et de Maxwell. Les solutions au problème sont de deux types [DR74]

- Ondes élastiques + champ électrique,
- Ondes électromagnétiques + déformation mécanique.

Dans les deux cas, l'une des deux grandeurs est négligeable devant l'autre.

L'interaction entre les trois ondes élastiques et les deux ondes électromagnétiques est faible [DR74]. Si on considère l'approche quasi statique, la propagation des ondes élastiques est la seule traitée.

En utilisant le tenseur de Christoffel [DR74], le système peut être résolu.

Il faut prendre en considération l'équation fondamentale de la dynamique et l'équation de Poisson. Ces deux équations sont combinées avec les équations de la piézoélectricité, puis on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \\ e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{jk}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 81})$$

Dans le cas d'une onde plane se propageant dans la direction n_j à la vitesse V :

$$\begin{cases} u_i = u_i^0 F\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right) \\ \phi = \phi_0 F\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right) \end{cases} \quad (\text{II. 82})$$

Dans ce cas, le champ électrique est longitudinal.

$$E_j = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{n_j}{V} \phi_0 F' \quad (\text{II. 83})$$

tel que F' est la dérivée de F .

Dans les deux équations précédemment trouvées :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = u_i^0 F'' \\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} u_l^0 F'' \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} \phi_0 F'' \end{cases} \quad (\text{II. 84})$$

En posant :

$$\begin{cases} \Gamma_{il} = c_{ijkl}^E n_j n_k \\ \gamma_i = e_{kij} n_j n_k \\ \varepsilon = \varepsilon_{jk}^S n_j n_k \end{cases} \quad (\text{II. 85})$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \rho V^2 u_i^0 = \Gamma_{il} u_l^0 + \gamma_i \varphi_0 \\ \gamma_l u_l^0 - \varepsilon \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 86})$$

En éliminant φ_0 :

$$\rho V^2 u_i^0 = \left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \right) u_l^0 \quad (\text{II. 87})$$

Il suffit de déterminer les valeurs propres d'un tenseur de rang deux.

$$\bar{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \quad (\text{II. 88})$$

Concrètement, lorsqu'une onde se propage dans le plan xy , le schéma est représenté sur la figure II.18 :

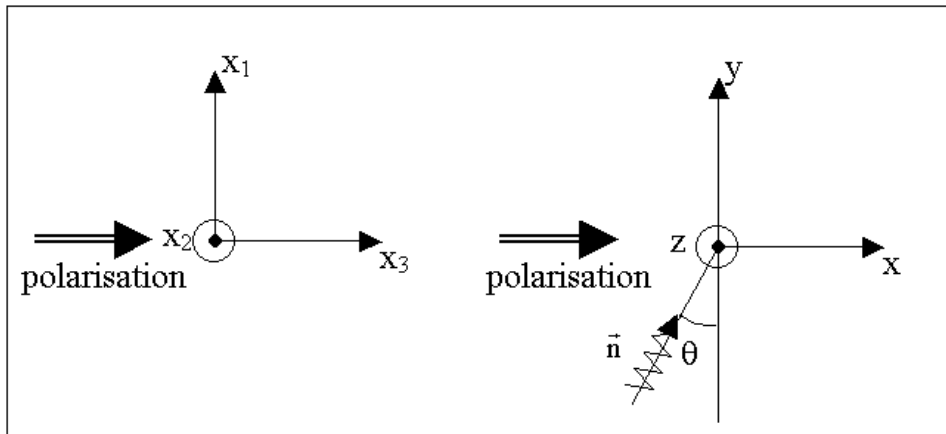


Figure II. 18 Propagation d'onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11} = c_{11}^E (\cos \theta)^2 + c_{44}^E (\sin \theta)^2 + \frac{(e_{15} + e_{31})^2 (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^2}{\varepsilon_{11}^S (\cos \theta)^2 + \varepsilon_{33}^S (\sin \theta)^2} \\ \Gamma_{22} = c_{66}^E (\cos \theta)^2 + c_{44}^E (\sin \theta)^2 \\ \Gamma_{13} = (c_{13}^E + c_{44}^E) \cos \theta \sin \theta + \frac{(e_{15} + e_{31}) \cos \theta \sin \theta [e_{15} (\cos \theta)^2 + e_{33} (\sin \theta)^2]}{\varepsilon_{11}^S (\cos \theta)^2 + \varepsilon_{33}^S (\sin \theta)^2} \\ \Gamma_{33} = c_{44}^E (\cos \theta)^2 + c_{33}^E (\sin \theta)^2 + \frac{[e_{15} (\cos \theta)^2 + e_{33} (\sin \theta)^2]^2}{\varepsilon_{11}^S (\cos \theta)^2 + \varepsilon_{33}^S (\sin \theta)^2} \end{array} \right. \quad (\text{II. 89})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_{T1}^2 = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{33}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\Gamma_{11} - \Gamma_{33})^2 + \Gamma_{13}^2} \\ \rho c_{T2}^2 = \Gamma_{22} \\ \rho c_L^2 = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{33}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\Gamma_{11} - \Gamma_{33})^2 + \Gamma_{13}^2} \end{array} \right. \quad (\text{II. 90})$$

Philippe Langlet [Lan93] a développé une technique d'homogénéisation utilisant la propagation d'onde. Pour le cas de matériaux élastiques seuls, des constantes ont été obtenues. L'extension de la méthode à des composites piézoélectriques a permis d'obtenir facilement certaines constantes homogénéisées (c_{11}^{Eff} , c_{44}^{Eff} et c_{66}^{Eff}). En revanche, l'identification des autres constantes semble plus délicate.

3.2.1. Détermination des constantes mécaniques

Les coefficients de cisaillement s_{44}^{Eff} et s_{66}^{Eff} ainsi que le coefficient c_{11}^{Eff} peuvent être déterminés par la méthode de la propagation. Tout d'abord, il faut modéliser une cellule élémentaire (fig. II.19).

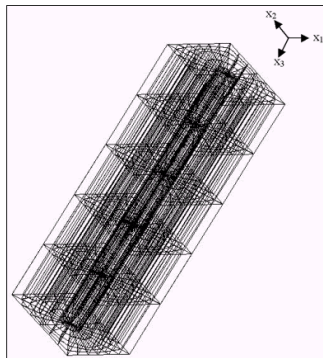


Figure II. 19 Maillage utilisé dans le cadre de la Propagation d'Ondes

Détermination du coefficient effectif s_{44}^{Eff}

En supposant la propagation d'une onde selon l'axe x (axe x_3) ($\theta=90^\circ$), les équations de Christoffel deviennent :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = c_{44}^E \\ \Gamma_{22} = c_{44}^E \\ \Gamma_{13} = 0 \\ \Gamma_{33} = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \end{cases} \quad (II. 91)$$

En utilisant (II.90), les équations donnent :

$$\begin{cases} \rho c_{T_1}^2 = c_{44}^E \\ \rho c_{T_2}^2 = c_{44}^E \\ \rho c_L^2 = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \end{cases} \quad (II. 92)$$

Un coefficient et une relation sont alors obtenus facilement :

$$c_{44}^{Eff} = \rho c_{T_1}^2 = \rho c_{T_2}^2 \quad (II. 93)$$

$$\rho c_L^2 = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \quad (II. 94)$$

Avec :

$$c_{T_1} = \frac{2\pi f_1}{k} \quad (II. 95)$$

$$c_{T_2} = \frac{2\pi f_2}{k} \quad (II. 96)$$

$$c_L = \frac{2\pi f_L}{k} \quad (II. 97)$$

et :

$$\rho = v_f \rho_f + v_m \rho_m \quad (II. 98)$$

avec $c_{T_1}^2$ la première vitesse de propagation transversale, $c_{T_2}^2$ la deuxième vitesse de propagation transversale, c_L^2 la vitesse de propagation longitudinale, f_1 la première fréquence de propagation, k la longueur d'ondes.

v_f et v_m sont les fractions volumiques de la fibre et de la matrice. ρ_f et ρ_m sont les masses volumiques de la fibre et de la matrice.

Donc le coefficient effectif de cisaillement s'écrit :

$$s_{44}^{\text{Eff}} = \frac{k}{\rho c_{T_1}^2} \quad (\text{II. 99})$$

Détermination du coefficient effectif s_{66}^{Eff}

En supposant la propagation d'une onde selon l'axe y (axe x_1) ($\theta=0^\circ$), les équations de Christoffel (II.89) deviennent :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = c_{11}^E \\ \Gamma_{22} = c_{66}^E \\ \Gamma_{13} = 0 \\ \Gamma_{33} = c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \end{cases} \quad (\text{II. 100})$$

En utilisant (II.90), les équations donnent :

$$\begin{cases} \rho c_{T_1}^2 = c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \\ \rho c_{T_2}^2 = c_{66}^E \\ \rho c_L^2 = c_{11}^E \end{cases} \quad (\text{II. 101})$$

Deux coefficients sont alors obtenus facilement c_{66}^{Eff} et c_{11}^{Eff} :

$$c_{66}^{\text{Eff}} = \rho c_{T_2}^2 \quad \text{d'où} \quad s_{66}^{\text{Eff}} = \frac{1}{\rho c_{T_2}^2} \quad (\text{II. 102})$$

Avec :

$$c_{T_2} = \frac{2\pi f_2}{k} \quad (\text{II. 103})$$

3.2.2. Détermination du coefficient piézoélectrique e_{15}^{eff}

Si l'équation (II.100) est conservée, une relation supplémentaire est mise en évidence.

$$\rho c_{T_1}^2 = c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \quad (\text{II. 104})$$

De cette relation émane un coefficient piézoélectrique :

$$e_{15}^{\text{eff}} = \sqrt{(\rho c_{T_1}^2 - c_{44}^{\text{Eff}}) \epsilon_{11}^{\text{Seff}}} \quad (\text{II. 105})$$

Cette dernière équation permet la détermination du coefficient piézoélectrique homogénéisé de cisaillement. Elle repose sur la connaissance de c_{44}^{Eff} et $\epsilon_{11}^{\text{Seff}}$ obtenus précédemment ou par la méthode VER ou par la méthode de propagation d'ondes.

En changeant l'angle de propagation, les relations de Christoffel couplées à celles des vitesses longitudinale et transversales donnent de nouvelles relations liant tous les coefficients. Le système non linéaire obtenu est difficilement résoluble. La méthode de Newton-Raphson a été tenté mais la convergence de la résolution n'a jamais été atteinte. La méthode de PO permet toutefois d'obtenir des relations parfois simples dans le cas d'angle de propagation simple (0° , 30° , 60° et 90°). Ces relations permettent de valider les coefficients déjà obtenus par la précédente méthode.

3.3. Tableau récapitulatif

Le tableau suivant (tab. II.2) résume les coefficients obtenus par la méthode de la propagation d'ondes.

Coefficients	θ	φ	Calcul
c_{11}^{Eeff}	0°	90°	$c_{11}^{Eeff} = \frac{k}{\rho c_L^2}$
s_{44}^{Eeff}	90°	0°	$s_{44}^{Eeff} = \frac{k}{\rho c_{T_1}^2}$
s_{66}^{Eeff}	0°	90°	$s_{66}^{Eeff} = \frac{1}{\rho c_{T_2}^2}$
e_{15}^{eff}	0°	90°	$e_{15}^{eff} = \sqrt{(\rho c_{T_1}^2 - c_{44}^{Eeff}) \epsilon_{11}^{Seff}}$

Tableau II. 2 Tableau récapitulatif

Le tableau II.3 est un récapitulatif de la détermination des constantes. X signifie que la méthode est déterminée facilement, 0 signifie que la constante peut être déterminée avec des conditions limites compliquées, Y signifie que la constante est obtenue par combinaison des deux méthodes VER et PO [ED02].

Constantes	c_{11}^{Eeff}	c_{12}^{Eeff}	c_{13}^{Eeff}	c_{33}^{Eeff}	c_{44}^{Eeff}	c_{66}^{Eeff}	d_{31}^{eff}	d_{33}^{eff}	d_{15}^{eff}	ϵ_{11}^{Teff}	ϵ_{33}^{Teff}
VER	X	X	X	X	0	X	X	X	0	X	X
PO	X				X	X			Y		

Tableau II. 3 Identification des constantes utilisant la méthode VER et PO.

4. VALIDATION

Afin de valider la méthode numérique développée, les résultats obtenus sont comparés à des résultats de méthodes analytiques. Un matériau composite piézoélectrique est considéré. La matrice est constituée de matériau élastique chargé de particules de PZT. Ceci se traduit par des coefficients piézoélectriques et diélectriques non nuls en plus des coefficients élastiques. La fibre est un matériau piézoélectrique PZT5A. Les constantes utilisées pour chaque matériau sont répertoriés en Annexe D. Afin de valider les résultats, il est possible de multiplier les comparaisons en faisant varier le rayon de la fibre, c'est à dire la fraction volumique (fig. II.20). Les coefficients homogénéisés sont calculés. La logique veut que la fraction volumique ne puisse pas dépasser 78% ($\pi/4$), compte tenu de la forme circulaire de la section de fibre et carrée de la cellule.

0% correspond à une cellule uniquement constitué de matrice.

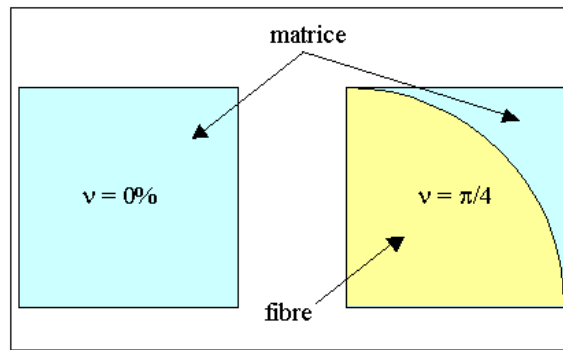
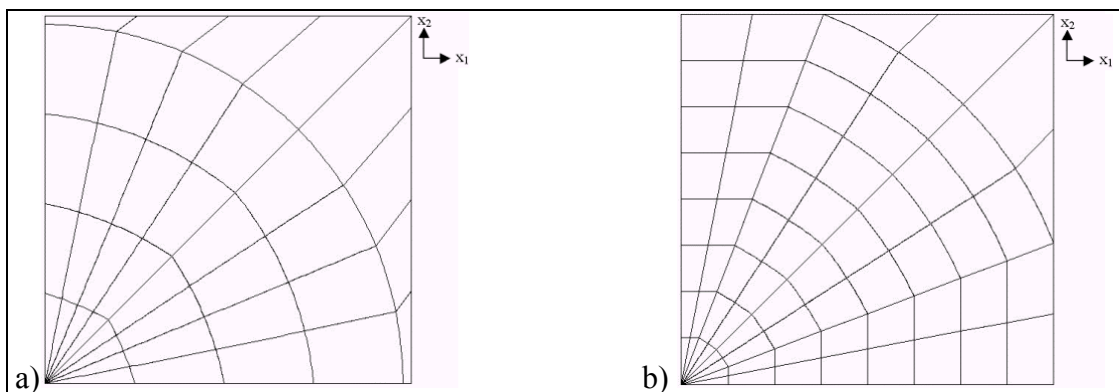


Figure II. 20 Variation de la fraction volumique

Il est possible d'utiliser les méthodes analytiques pour des fractions volumiques de phase piézoélectrique supérieures à $\pi/4$. En modifiant le maillage (fig. II.21), il est aussi possible de considérer une fraction volumique supérieure mais dans ce cas, la fibre n'est plus circulaire. Dans le cas des méthodes analytiques, ce problème ne se pose pas car les formules fonctionnent quelle que soit la fraction volumique

Figure II. 21 Maillage de la fibre : a) $v < \pi/4$; b) $v > \pi/4$

4.1. Courbes de Validation

Les résultats numériques (Volume Élémentaire Représentatif [VER] et Propagation d'Onde [PO]) sont comparés à des résultats des méthodes analytiques (fig. II.22 à II.32): La méthode de Mori et Tanaka [MT], de Bent & Hagood [BH] et Schulgasser [Sch]. Dans le cas de Hagood, il est bien entendu que la présence des électrodes n'est pas prise en compte.

Ces courbes représentent le ratio entre les coefficients effectifs et les coefficients de la fibre pour différentes fractions volumiques.

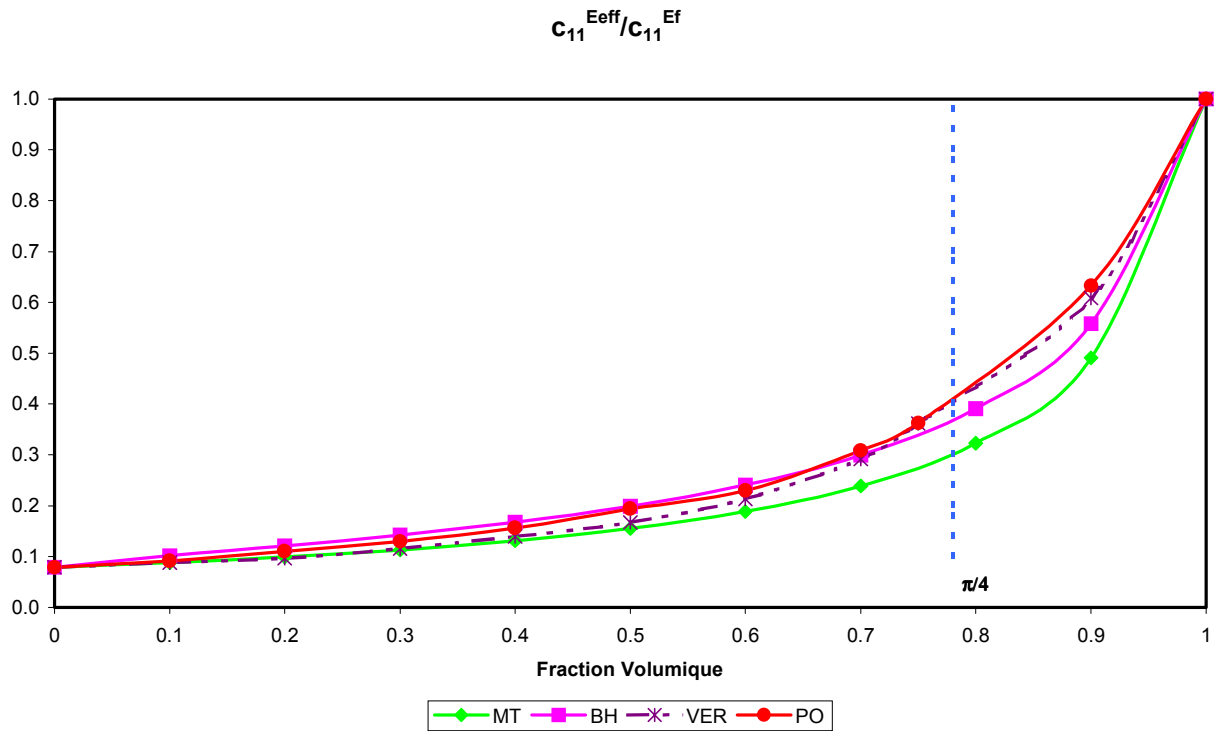


Figure II. 22 Variation du ratio c_{11}^{Eff}/c_{11}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

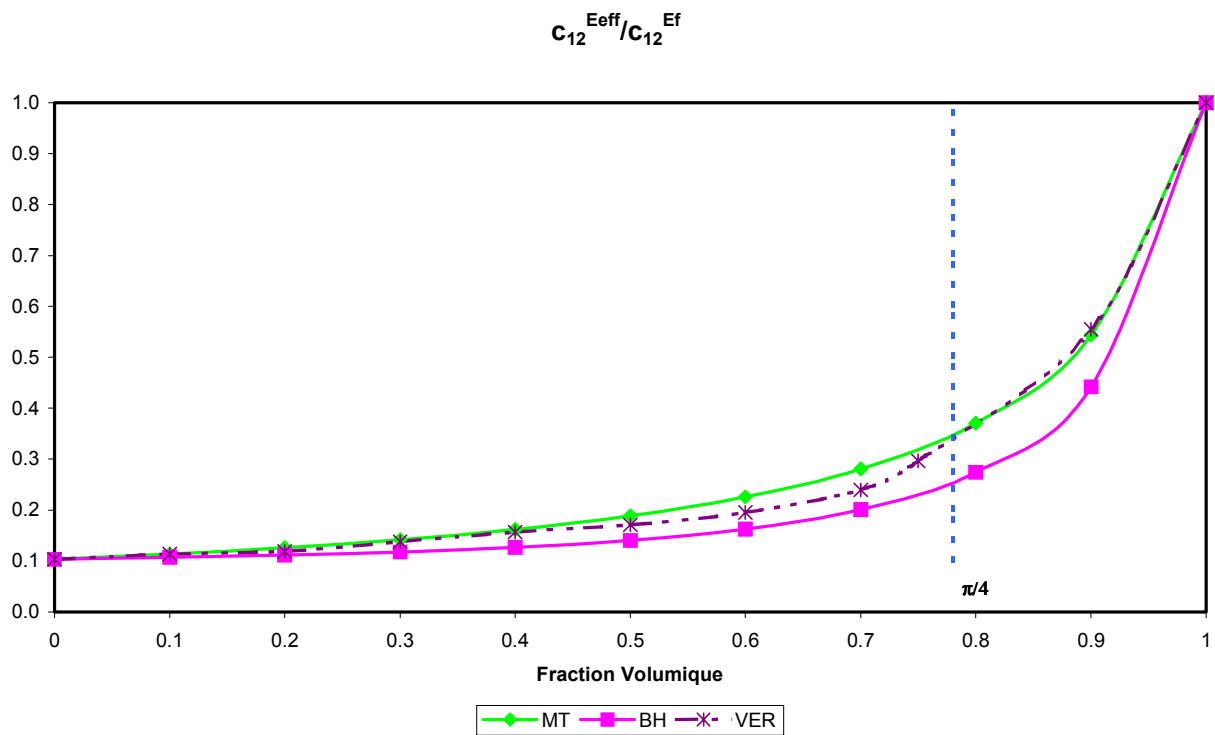


Figure II. 23 Variation du ratio c_{12}^{Eff}/c_{12}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

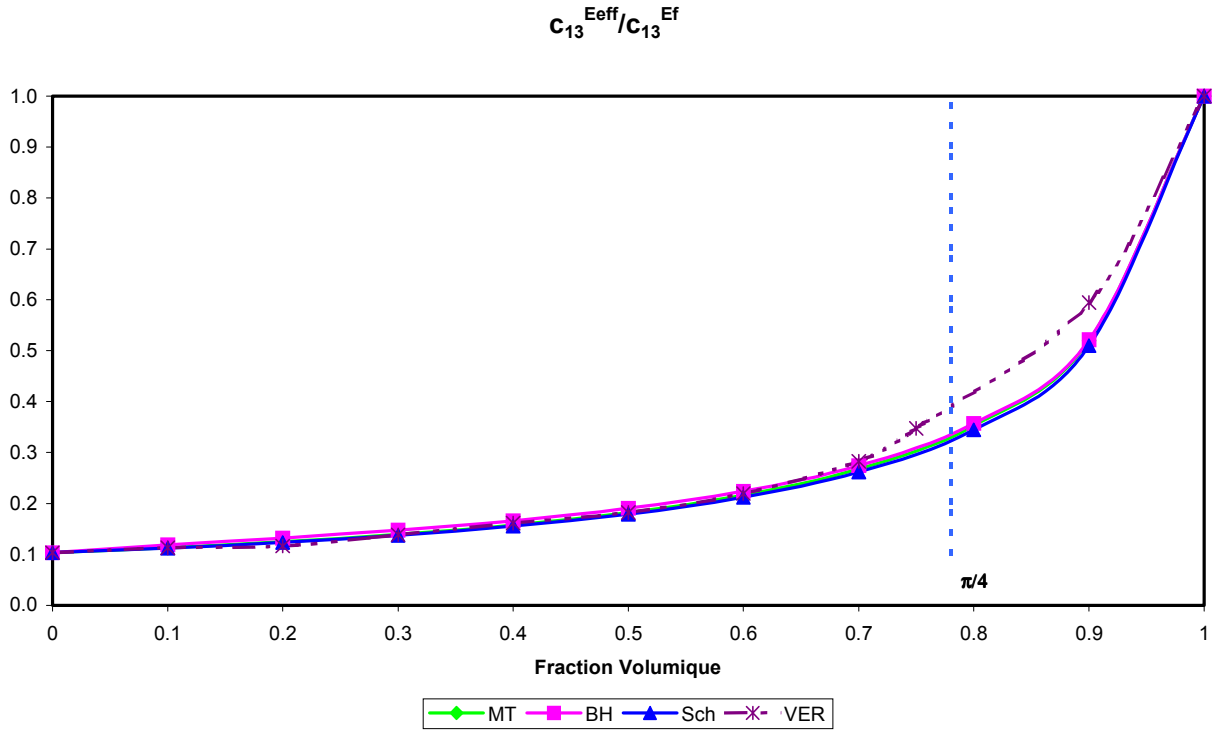


Figure II. 24 Variation du ratio c_{13}^{Eff}/c_{13}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

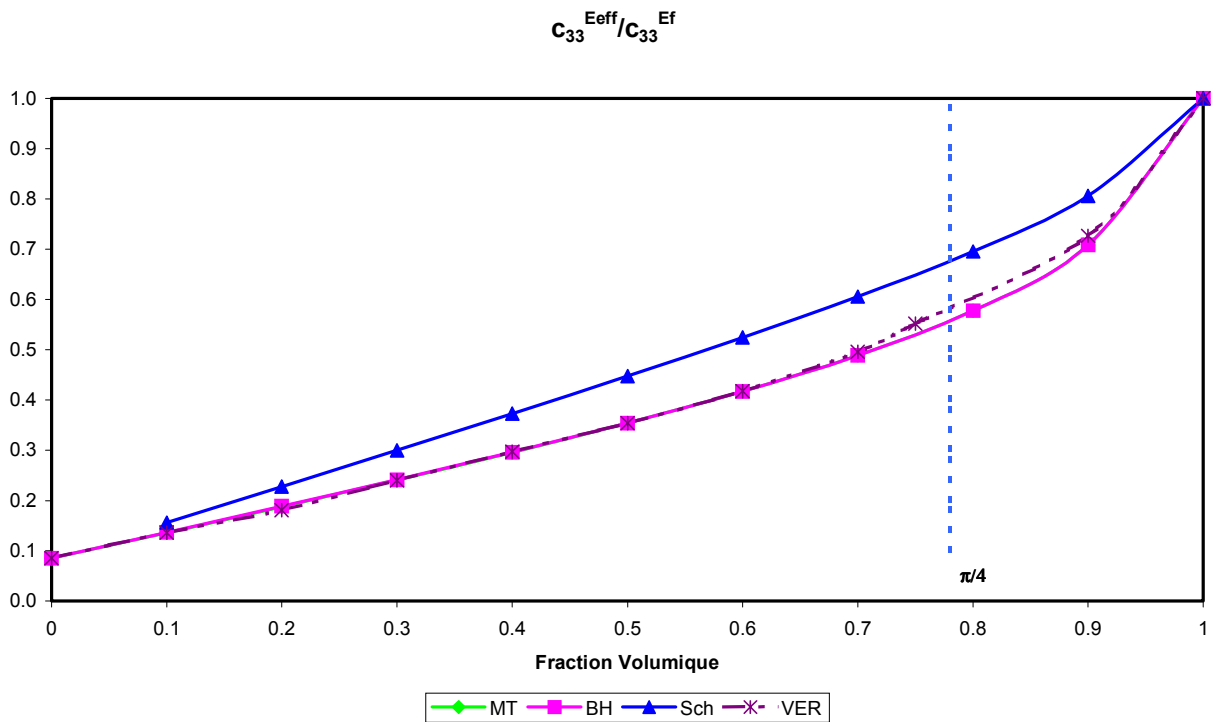


Figure II. 25 Variation du ratio c_{33}^{Eff}/c_{33}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

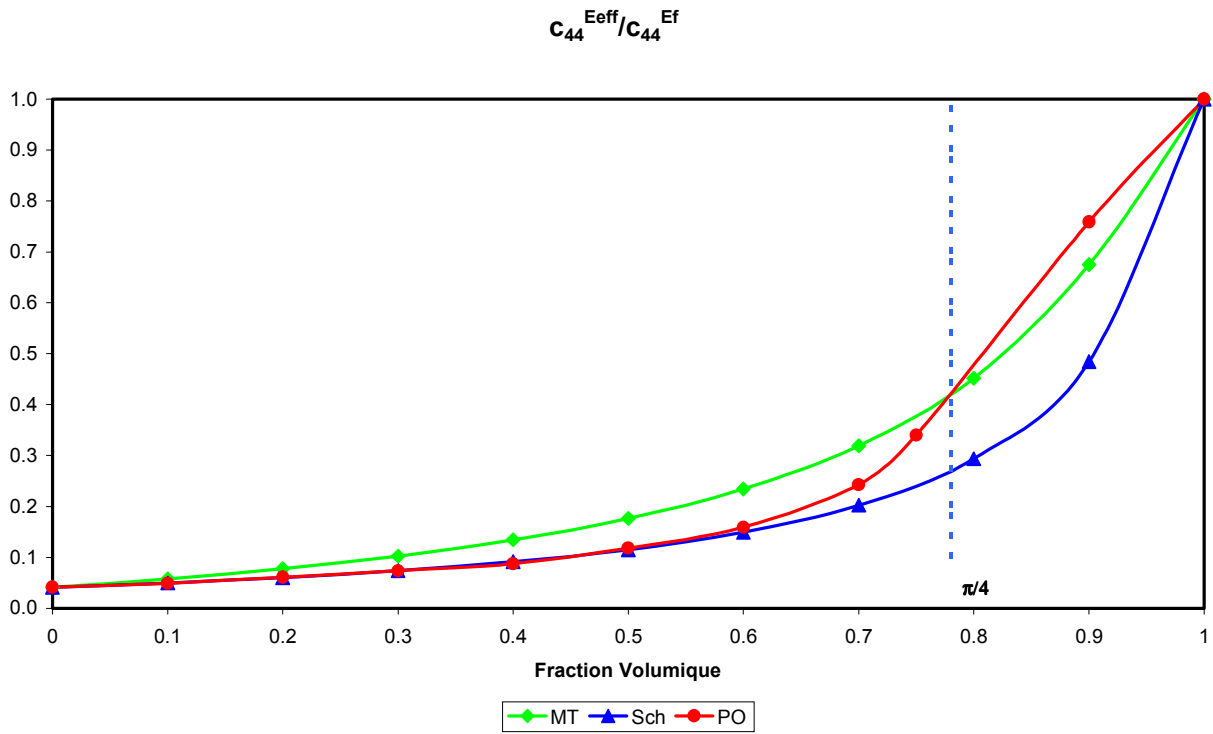


Figure II. 26 Variation du ratio c_{44}^{Eff}/c_{44}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

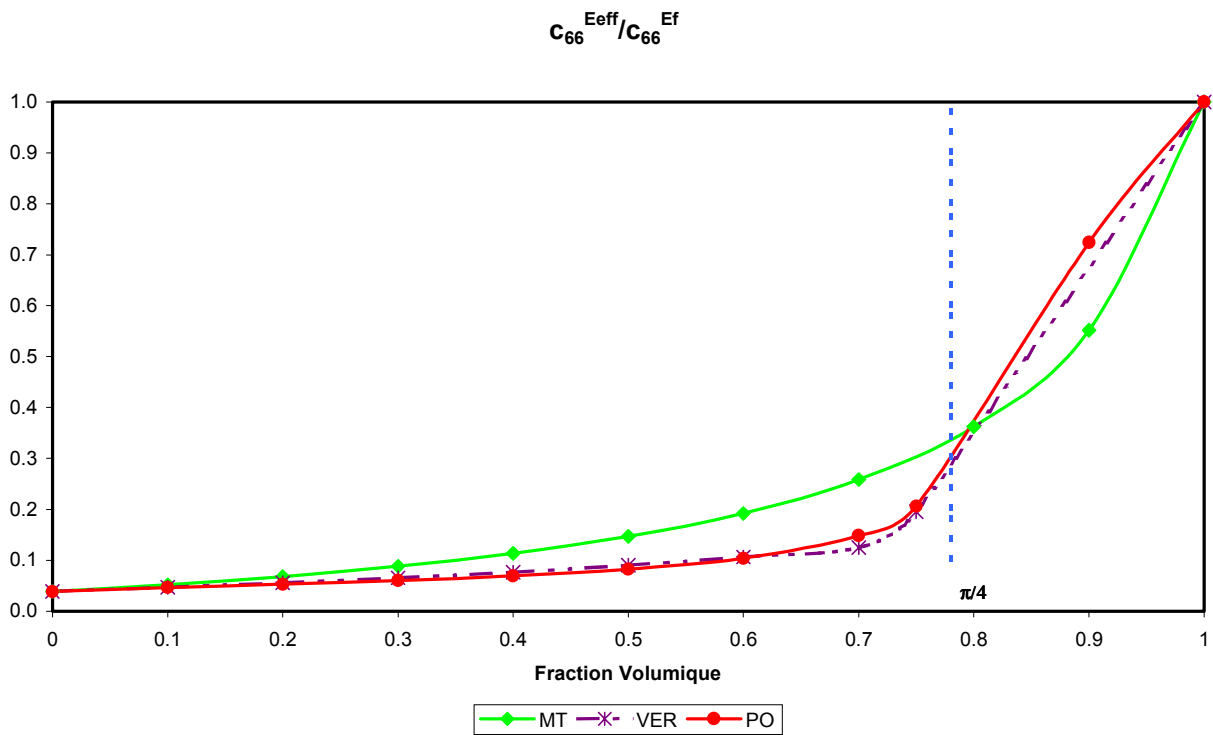


Figure II. 27 Variation du ratio c_{66}^{Eff}/c_{66}^{Ef} en fonction de la fraction volumique de fibre

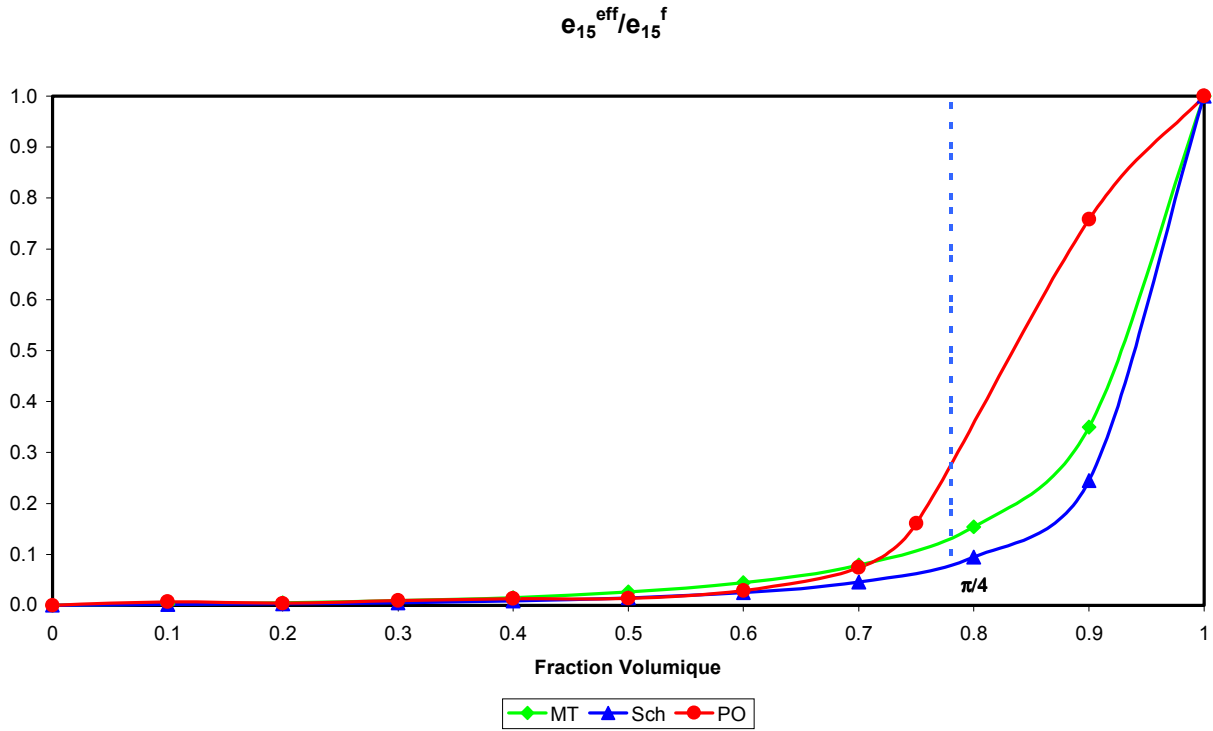


Figure II. 28 Variation du ratio e_{15}^{eff}/e_{15}^f en fonction de la fraction volumique de fibre

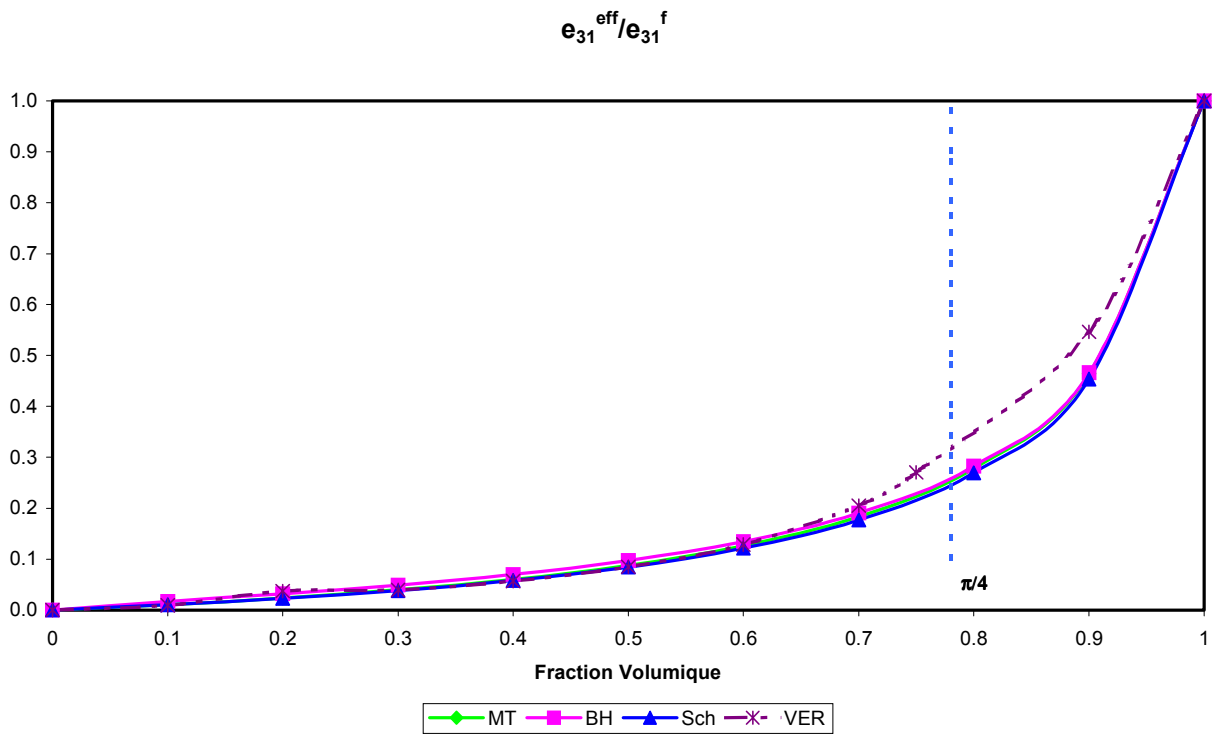


Figure II. 29 Variation du ratio e_{31}^{eff}/e_{31}^f en fonction de la fraction volumique de fibre

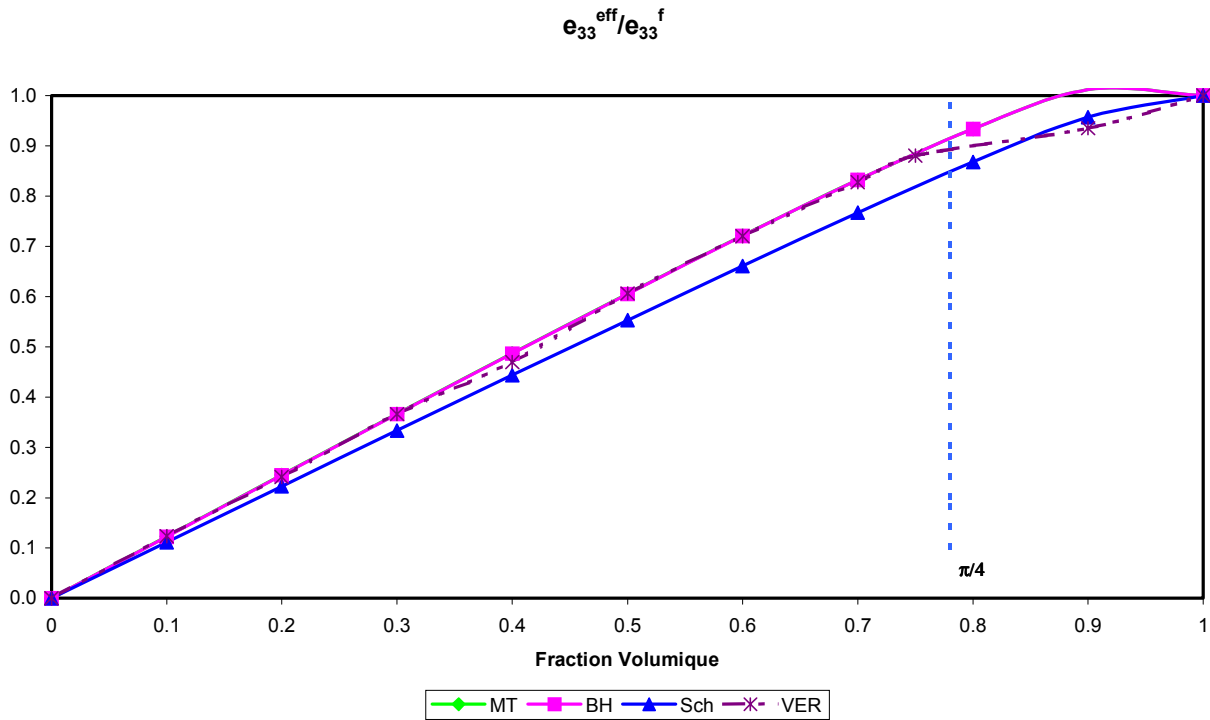


Figure II. 30 Variation du ratio e_{33}^{eff} / e_{33}^f en fonction de la fraction volumique de fibre

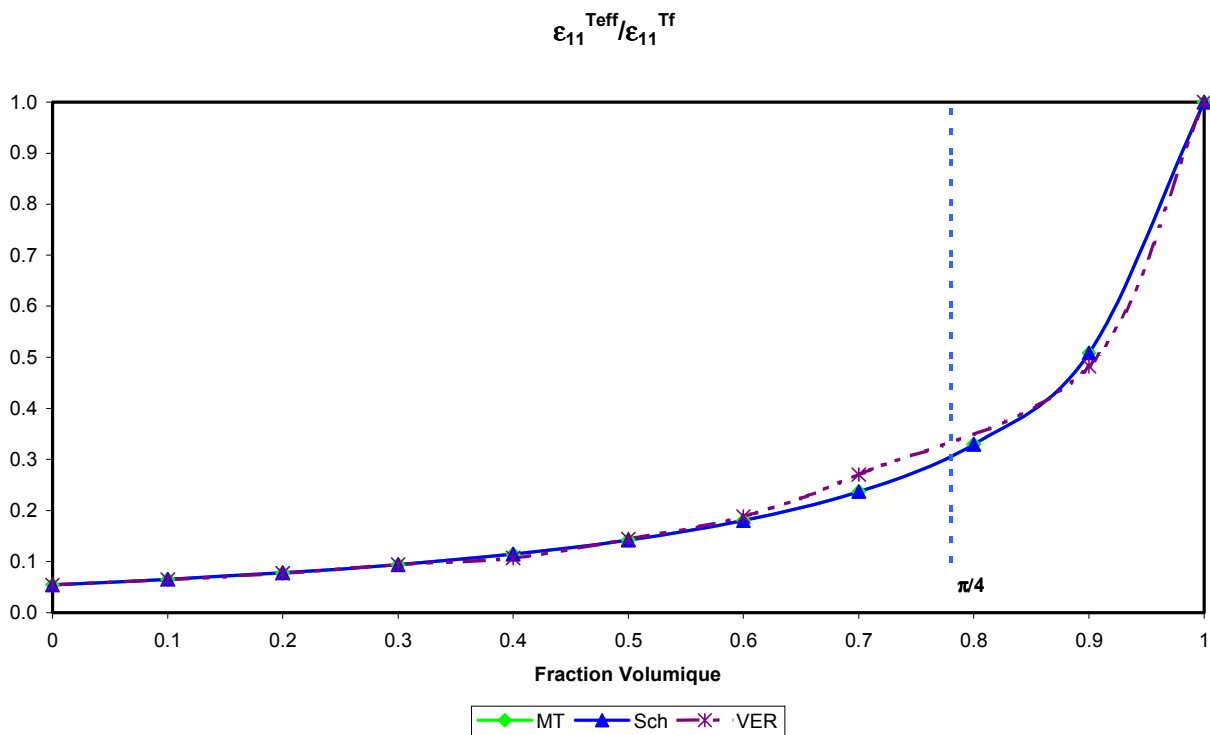


Figure II. 31 Variation du ratio $\epsilon_{11}^{Teff} / \epsilon_{11}^{Tf}$ en fonction de la fraction volumique de fibre

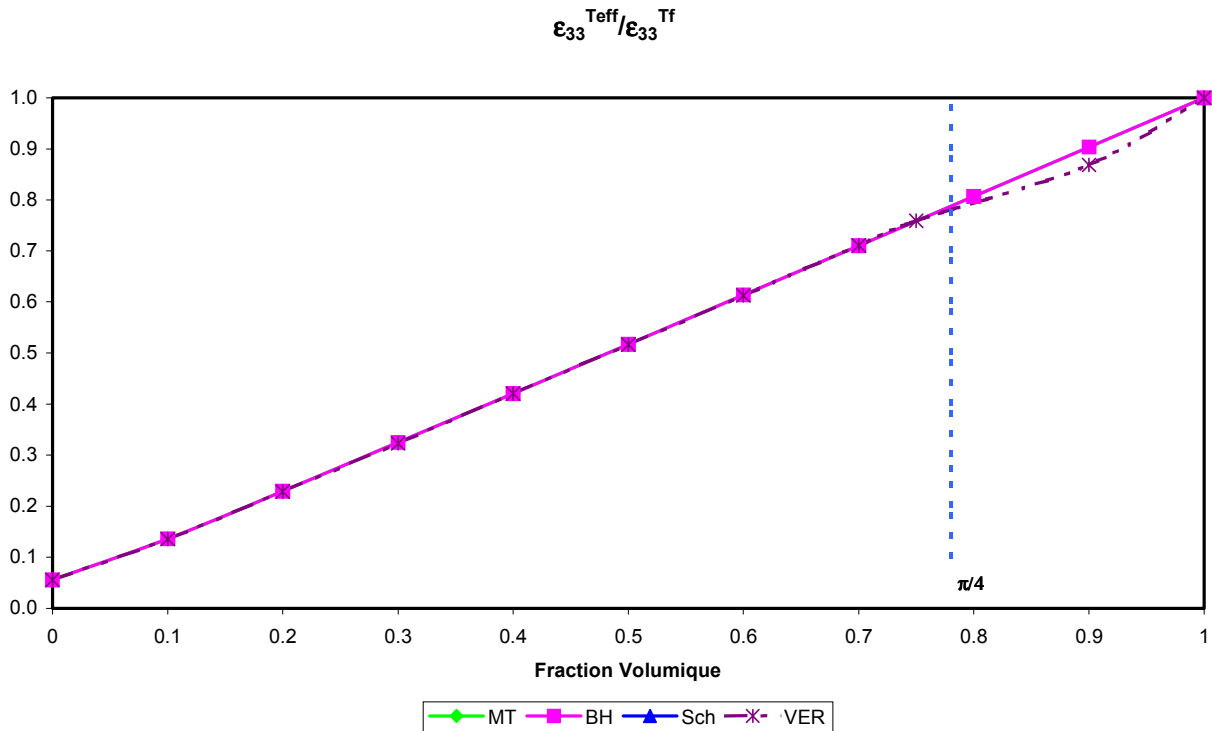


Figure II. 32 Variation du ratio $\epsilon_{33}^{Teff} / \epsilon_{33}^{Tf}$ en fonction de la fraction volumique de fibre

4.2. Analyse des courbes

Les figures précédentes présentent une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode développée et d'autres méthodes connues de longue date. Ces courbes nous montrent une similitude importante entre les résultats des différentes méthodes. Les résultats sont très proches pour des valeurs de fraction volumique inférieures à 75%. Dans le cas de Schulgasser, même si les résultats sont bons, la méthode a l'avantage d'être simple d'utilisation. Mais en revanche, la méthode ne calcule pas tous les coefficients et ne tient pas compte de la forme de l'inclusion. Les résultats ne peuvent donc pas être validés dans n'importe quel cas de figure. Dans le cas de Hagood & Bent, les résultats obtenus pour des fractions volumiques différentes sont bons. Leurs résultats avaient déjà été validés [BH97] avec une méthode numérique. Mais le désavantage est que la méthode ne calcule pas tous les coefficients et notamment ceux du cisaillement. Enfin, les résultats numériques sont comparés à ceux donnés par la méthode de Mori & Tanaka. Cette méthode fournit tous les coefficients et prend en compte la forme de l'inclusion. Elle semble la plus complète. L'inconvénient réside toutefois dans la forme de l'inclusion limitée par le tenseur d'Eshelby. De plus, la prise en compte de plusieurs phases rend cette méthode très complexe. Pour une fraction volumique inférieure à 75%, les résultats numériques sont proches de ceux fournis par Mori & Tanaka.

Entre 75% et 78%, la différence observée sur les courbes est due à la faible épaisseur de matrice entre la fibre et la surface. Le maillage est trop dense à cet endroit.

Pour une fraction volumique supérieure à 78%, des différences sont observables [EH03]. Une campagne expérimentale permettrait de valider les résultats mais la complexité de la mise en place est importante. En effet, il faut des fibres coupées en surface et ces fibres doivent avoir un diamètre croissant. On note que les courbes de résultats sont observées, on peut voir qu'elles se rejoignent toutes pour une fraction volumique de 100% ce qui équivaut à une cellule uniquement constituée de céramique piézoélectrique. Un intérêt particulier est porté sur les figures II.22 et II.27. Les coefficients sont calculés par les deux méthodes numériques, VER et PO. Ceci permet de valider les deux méthodes entre elles.

5. APPLICATION A UN PIEZOCOMPOSITE 1-3

L'application considérée traite le cas d'un matériau piézo-composite 1-3 dont des résultats expérimentaux existent [GSC85]. Ces résultats sont représentés sur les courbes par l'appellation "Expérimental". L'échantillon est constitué de plots cylindriques de PZT5A dans une matrice Spurr's epoxy chargée de poudre de PZT (fig II.33). Les plots représentent une fraction volumique de 20%. La masse volumique de l'epoxy est de 1100 kg/m^3 , la vitesse de l'onde longitudinale est de 2200 m/s et la vitesse de l'onde transverse de 1000 m/s . Les pertes pour les vitesses sont respectivement de 3% et 10%. Le diamètre du plot est de 0.45 mm , la périodicité est de 90 mm et l'épaisseur de 0.66 mm . Une cellule unitaire de cette structure, incluant les barreaux piézoélectriques et la matrice d'epoxy a déjà été maillée avec les Eléments Finis [HD93]. Les résultats numériques obtenus sont reportés dans les courbes en tant que "Numérique exact".

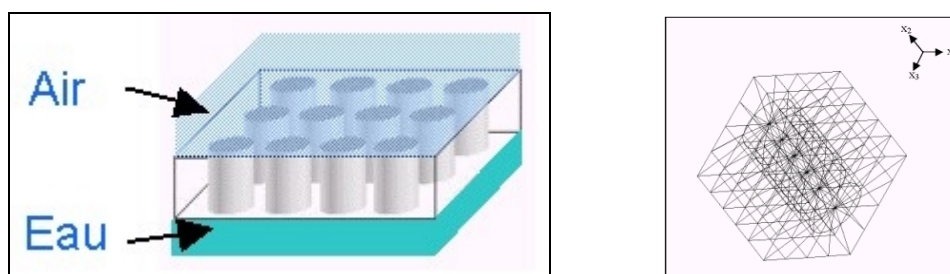


Figure II. 33 Problème posé et maillage utilisé

Le matériau piézocomposite a ensuite été homogénéisé avec la méthode numérique et la méthode de Mori & Tanaka. C'est la seule méthode analytique qui fournit tous les coefficients homogénéisés. Les coefficients homogénéisés par les deux méthodes sont intégrés à un maillage uniforme (fig. II.34). Les résultats obtenus sont représentés sur les courbes par "Mori Tanaka avec pertes" pour les résultats obtenus avec les coefficients homogénéisés par Mori & Tanaka et "Numérique homogénéisé avec pertes" pour les résultats obtenus avec les coefficients homogénéisés de la méthode numérique. Dans les deux cas, un facteur de pertes est considéré.

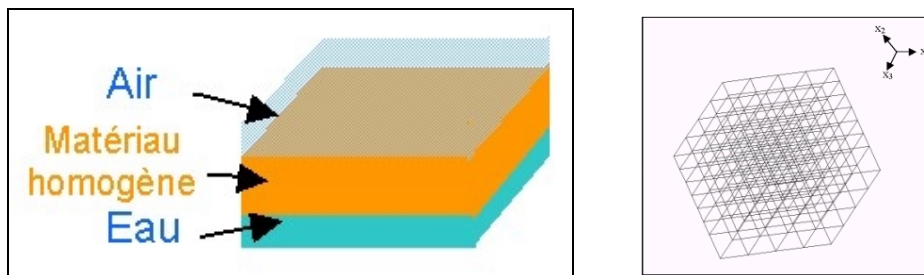


Figure II. 34 Problème simplifié et maillage utilisé

Les figures suivantes (fig II.35 & II.36) représentent les résultats obtenus pour la Sensibilité en Réception (FFVS) et la Sensibilité en Emission (TVR) en fonction de la fréquence.

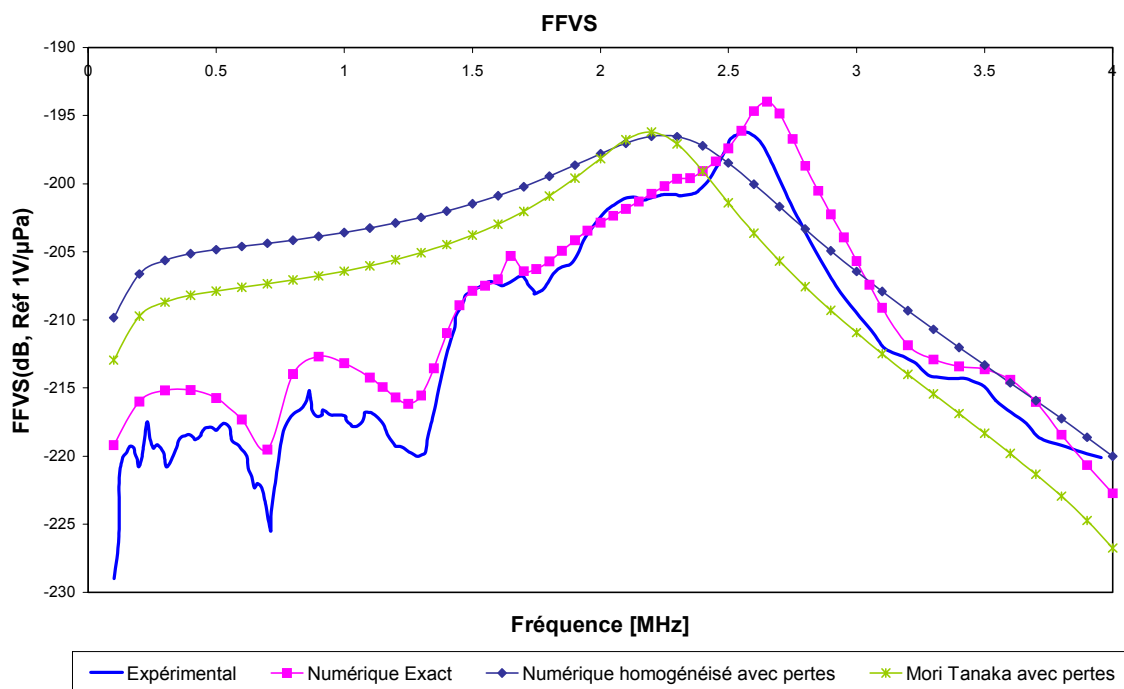


Figure II. 35 Sensibilité en Réception en fonction de la Fréquence

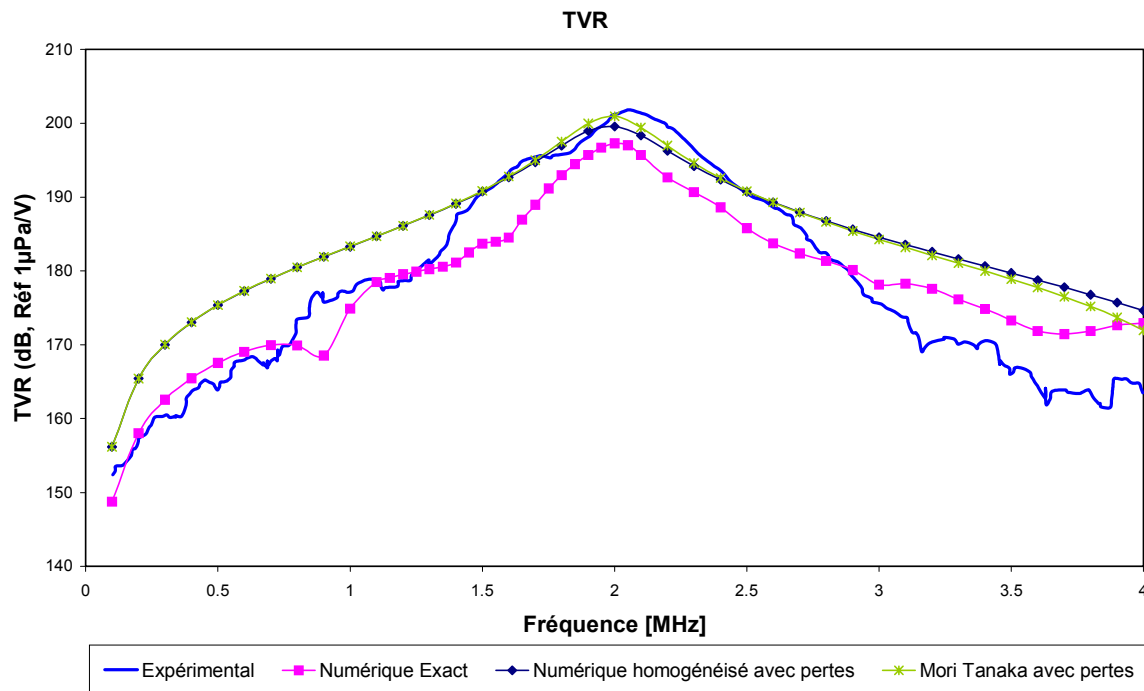


Figure II. 36 Sensibilité en Emission en fonction de la Fréquence

Plusieurs résultats sont à notre disposition sur deux courbes. La première courbe (fig II.35) représente la Sensibilité en Réception (FFVS). Les premiers maximums ne sont pas représentés par les méthodes homogénéisées car ils représentent les modes de résonance latérale dus à la périodicité du réseau. Les résultats du modèle "Numérique Exact" sont bons par rapport aux valeurs expérimentales bien que le maximum soit un peu supérieur. On constate une différence de niveau importante pour les premiers modes notamment avec les constantes homogénéisées numériquement. Ensuite, la position du maximum principal est légèrement décalée pour les deux méthodes d'homogénéisation. Par contre, le niveau du maximum est très bon, grâce à la prise en compte des pertes..

La deuxième série de résultats se trouve sur la courbe représentant la Sensibilité en Emission (TVR) (fig. II.36). Là encore, les modes de résonance latérale ne sont pas observables sur les méthodes homogénéisées. La position du maximum est bonne quelles que soient les valeurs observées. Le niveau est correct pour toutes les méthodes [EH03]. On note, cependant, dans tous les cas, que les constantes homogénéisées surévaluent la longueur de bande.

6. CONCLUSION

Ce chapitre a permis de présenter la méthode d'homogénéisation numérique développée. Cette méthode fait appel à deux procédés : la méthode du Volume Élémentaire Représentatif et la méthode de la Propagation d'Ondes permettant la connaissance de tous les coefficients. Tous les coefficients homogénéisés, dans leur globalité, sont donc obtenus. Les résultats ont été validés par comparaison avec des résultats de méthodes analytiques présentées dans le précédent chapitre. La comparaison avec un résultat expérimental a permis de montrer l'intérêt et les limites de la méthode d'homogénéisation.

CHAPITRE III : Expérimentation

Ce chapitre a pour but d'appliquer la méthode d'homogénéisation à un actionneur réel. Une campagne expérimentale est menée afin de mesurer le déplacement de l'actionneur lorsqu'il est alimenté en statique. Puis les valeurs sont comparées avec les valeurs obtenues numériquement et analytiquement. Les résultats permettent de mettre en avant les particularités de l'actionneur. En conséquence, une nouvelle approche permet de mieux comprendre le fonctionnement et d'adapter l'homogénéisation. Les résultats obtenus sont à nouveau comparés avec succès aux résultats expérimentaux. Enfin, l'efficacité de l'actionneur pour contrôler la flexion des poutres est discutée.

NOTATIONS

C	Capacité
[d]	Tenseur des constantes piézoélectriques
e	Épaisseur de l'actionneur
élec	Largeur de l'électrode
f_a	Fréquence d'anti-résonance
f_r	Fréquence de résonance
k_{33}	Facteur de couplage
l	Largeur de l'actionneur
L	Longueur de l'actionneur
n	Nombre de pas
pas	Longueur du VER
pas'	Pas entre les électrodes
$[s^D]$	Tenseur des constantes élastiques à déplacement électrique constant
$[s^E]$	Tenseur des constantes d'élasticité à champ électrique constant
[T]	Tenseur des contraintes
\vec{u}	Vecteur déplacement
u_{3total}	Déplacement de l'actionneur dans la direction des fibres
ϵ^0	Constante diélectrique du vide
$[\epsilon^T]$	Tenseur des constantes diélectriques à contrainte constante
κ_{33}^T	Rapport de la permittivité diélectrique à T constant et de la constante du vide ϵ^0
ϕ	Potentiel

1. DESCRIPTION

Cette section décrit l'actionneur qui pourra être utilisé pour le cas du contrôle de forme. Plusieurs actionneurs sont disponibles sur le marché international. L'un des premiers établissements à avoir conçu ce type de matériau est Continuum Photonics®. Un actionneur a donc été acquis auprès de Continuum Photonics® par l'intermédiaire de Monsieur Rossetti.

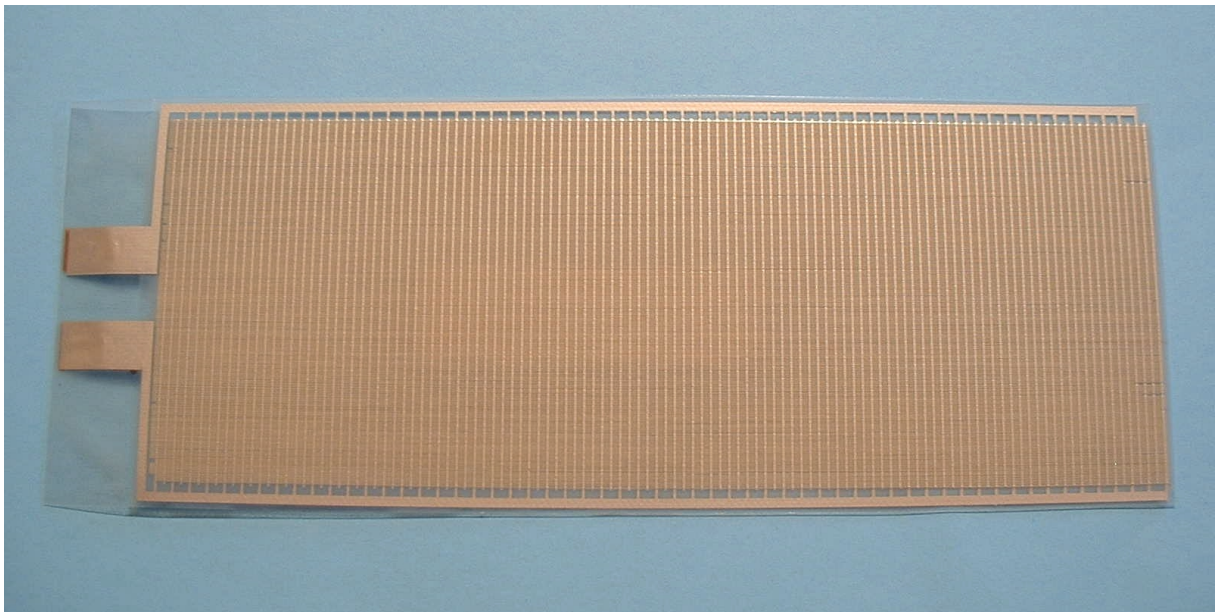


Figure III. 1 Actionneur de Continuum Photonics

Cet actionneur (fig. III.1) est constitué de fibres de PZT5A alignées parallèlement les unes par rapport aux autres. La matrice d'époxy permet de maintenir les fibres. Les électrodes interdigitées alimentent l'actionneur. Les fibres sont polarisées dans le sens d_{33} (direction de la fibre). Le tableau III.1 regroupe les constantes utilisées pour chaque matériau. La permittivité relative de la matrice est de 11 dans le cas de la matrice et 1811 dans le cas de la fibre^(*). Il est donc évident que la capacité d'activation est essentiellement portée par la fibre. Il est probable que la matrice va représenter un frein au passage du champ électrique en provenance des électrodes.

^(*) Les valeurs de la fibre, fournies par le concepteur semblent élevées. Elles correspondent, davantage, aux propriétés massives. Il est donc nécessaire de rester prudent lors de l'utilisation de ces valeurs.

Constantes/matériaux	Matrice : Epoxy	Fibre : PZT5A ^(*)
s_{11}^E	1.818E-10	1.64E-11
s_{12}^E	-5.99E-11	-5.74E-12
s_{13}^E	-5.99E-11	-7.22E-12
s_{33}^E	1.818E-10	1.88E-11
s_{44}^E	4.834E-10	4.75E-11
s_{66}^E	4.834E-10	4.75E-11
d_{15}	0	5.84E-10
d_{31}	0	-1.71E-10
d_{33}	0	3.74E-10
ϵ_{11}^S	9.735E-11	9.16E-09
ϵ_{33}^S	9.735E-11	8.30E-09

Tableau III. 1 Caractéristiques des constituants de l'actionneur

Les dimensions sont présentées sur le schéma suivant (fig. III.2).

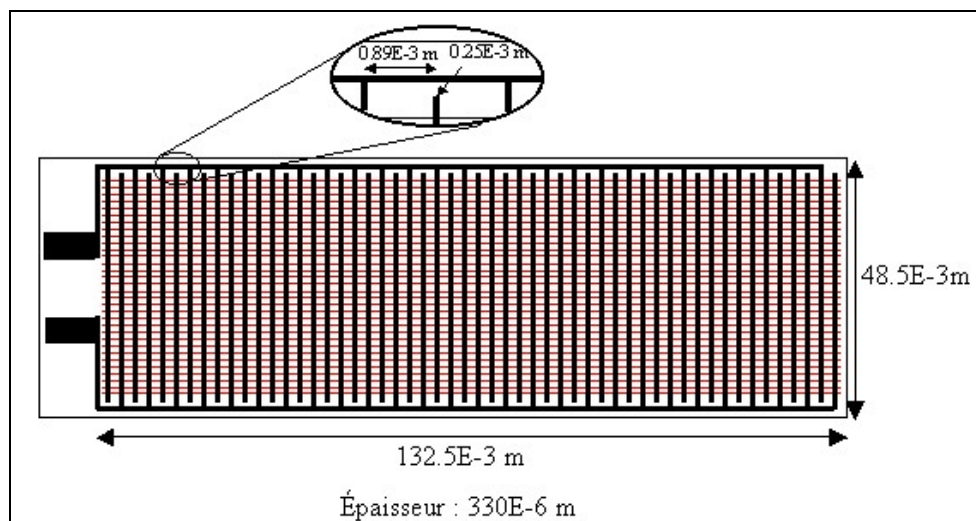


Figure III. 2 Actionneur

^(*)Les valeurs de la fibre, fournies par le concepteur semblent élevées. Elles correspondent, davantage, aux propriétés massives. Il est donc nécessaire de rester prudent lors de l'utilisation de ces valeurs.

Le nombre d'espacement entre les électrodes interdigitées est de 115.

Le constructeur a fourni quelques valeurs concernant l'actionneur (tab. III.2).

s_{11}^E (m ² /N)	6.00E-11
s_{13}^E (m ² /N)	-1.10E-11
s_{33}^E (m ² /N)	4.00E-11
d_{33} (m/V)	1.50E-10
κ_{33}^T	495
Capacité (nF)	Entre 8 et 12

Tableau III. 2 Valeurs globales de l'actionneur

Avec κ_{33}^T le rapport entre la valeur de la permittivité diélectrique de l'actionneur à contrainte constante dans le sens de la fibre ϵ_{33}^T et la constante diélectrique du vide $\epsilon^0 = 8.85E-12$ F/m. La valeur de la constante piézoélectrique d_{33} semble basse. Cette valeur est peut-être la valeur issue de la linéarisation des résultats du déplacement en fonction du champ électrique.

La fraction volumique de fibre est approximativement de 45%.

2. DONNEES MESUREES EXPERIMENTALEMENT

2.1. Description du montage et mesure

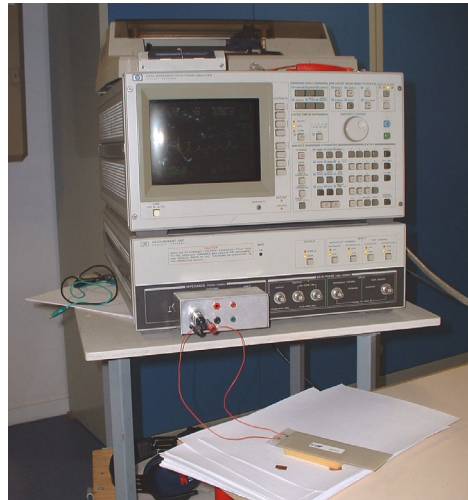


Figure III. 3 Montage expérimental

Différentes étapes sont nécessaires pour obtenir les valeurs fournies par le fabricant.

Les fils sont soudés à l'actionneur afin d'assurer un meilleur contact et limiter les perturbations (fig. III.3 & III.4).

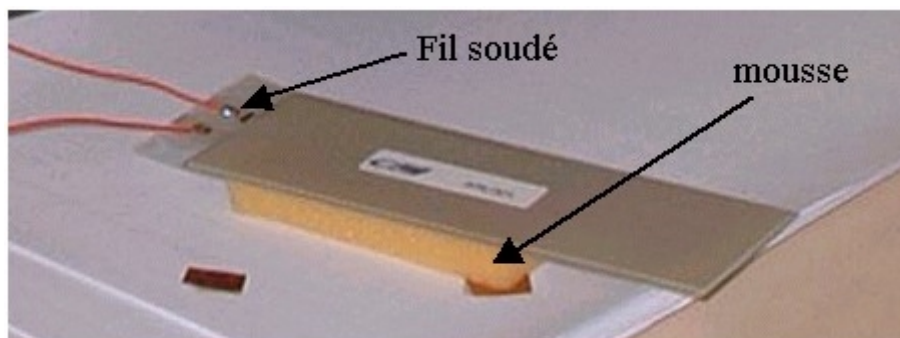


Figure III. 4 Actionneur alimenté

La figure III.5 présente les variations du module de l'admittance en fonction de la fréquence. Les fréquences de résonance et d'anti-résonance, observées sur la courbe, permettent de calculer les coefficients s_{33}^E , d_{33} et ϵ_{33}^T de l'actionneur. Pour faire les mesures, il faut limiter le frottement dans la déformation de l'actionneur. L'actionneur est très sensible et il est impossible de maintenir l'actionneur à une extrémité sans induire des perturbations. L'actionneur est donc placé sur une mousse pour limiter les frottements.

Les autres mesures du fabricant ont certainement été effectuées sans les électrodes interdigitées et en utilisant un autre mode d'alimentation ou de façon mécanique en imposant une contrainte. Il est également possible de calculer les coefficients s_{11}^E , s_{13}^E en notant les

fréquences de résonance latérale à plus haute fréquence. Mais les perturbations sont telles que les résultats sont inexploitable. Les fréquences de résonance, d'anti-résonance et la capacité sont notées lors des mesures (fig. III.5).

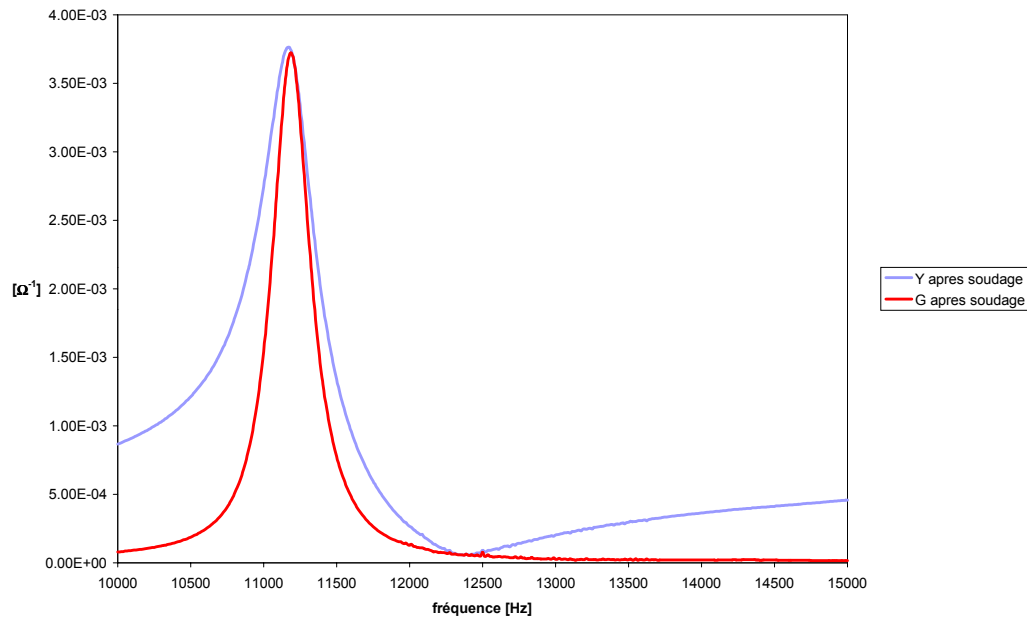


Figure III. 5 Courbes donnant les fréquences de résonance et d'anti-résonance

La capacité relevée est de 8.6 nF. La valeur est comprise entre les bornes données par ce fabricant qui sont de 8 à 12 nF.

Pour la suite, les notations suivantes sont utilisées :

- l : la largeur de l'actionneur
- L : la longueur de l'actionneur
- e : l'épaisseur de l'actionneur
- pas' : le pas entre les électrodes
- $elec$: la largeur de l'électrode
- n : le nombre d'espacement entre les électrodes
- φ : le potentiel
- C : la capacité
- f_r : fréquence de résonance
- f_a : fréquence d'anti-résonance

2.2. Calcul du coefficient diélectrique ϵ_{33}^T

L'équation liant D_3 et E_3 est dans ce cas :

$$D_3 = \epsilon_{33}^T E_3 \quad (\text{III. 1})$$

D_3 s'exprime sous la forme suivante :

$$D_3 = \frac{C * \varphi}{n * l * e} \quad (\text{III. 2})$$

E_3 s'exprime sous la forme suivante :

$$E_3 = \frac{\varphi}{\text{pas}'} \quad (\text{III. 3})$$

D'où la relation donnant ϵ_{33}^T est :

$$\epsilon_{33}^T = \frac{C * \text{pas}'}{n * l * e} = \frac{8.6E-9 * 0.89E-3}{115 * 48.5E-3 * 330E-6} = 4.20E-9 \text{ F/m} \quad (\text{III. 4})$$

Le fabricant donne une valeur de ϵ_{33}^T de $4.366E-9$ F/m.

La valeur obtenue est donc proche de celle fournie par le fabricant. La légère différence est peut-être due à la sensibilité du contact avec l'alimentation et l'effet de frottement.

2.3. Calcul du coefficient élastique s_{33}^E

Les calculs suivants présentent des relations valables dans le cas du barreau. Ces relations sont donc utilisables quand le diamètre de la fibre est supérieur à un cinquième de sa longueur. Elles ne sont donc pas totalement adaptées au cas de la fibre. Toutefois, il est bon de noter que les fibres ne sont pas toutes continues dans le sens de la longueur et que certaines sont cassées à cause, par exemple, de la manipulation. La décision est prise de considérer, néanmoins, ces relations afin d'approcher les valeurs des constantes.

Le calcul du coefficient élastique se divise en plusieurs étapes [IEEE87]. Dans un premier temps, il faut calculer le facteur de couplage qui a pour expression :

$$k_{33} = \sqrt{\frac{\pi f_r}{2 f_a} * \cot\left(\frac{\pi f_r}{2 f_a}\right)} = \sqrt{\frac{\pi 11187.5}{2 12400} * \cot\left(\frac{\pi 11187.5}{2 12400}\right)} = 0.4684 \quad (\text{III. 5})$$

De ce coefficient de couplage peut être déduit le coefficient élastique à déplacement électrique constant :

$$s_{33}^D = \frac{1}{4\rho * f_a^2 (L - (n + 1) * elec)} \quad (III. 6)$$

Une simple relation permet d'obtenir le coefficient élastique à champ électrique constant :

$$s_{33}^E = \frac{s_{33}^D}{1 - k_{33}^2} \quad (III. 7)$$

Et après calcul, la valeur du coefficient pour l'actionneur est :

$$s_{33}^E = 4.356E - 11 \text{ m}^2/\text{N} \quad (III. 8)$$

La valeur du fabricant pour le coefficient élastique est de $4E-11 \text{ m}^2/\text{N}$. On constate une légère différence entre les deux valeurs. Le résultat expérimental signifie que l'actionneur est moins rigide qu'en réalité. Les frottements engendrés par la mousse sont probablement aussi un facteur pouvant expliquer la différence observée.

2.4. Calcul du coefficient piézoélectrique d_{33}

Il reste à calculer le coefficient diélectrique. Le résultat du facteur de couplage doit être réutilisé ainsi que les précédents résultats [IRE61].

$$d_{33} = k_{33} \sqrt{\epsilon_{33}^T * s_{33}^E} \quad (III. 9)$$

$$d_{33} = 0.4684 * \sqrt{4.2E - 9 * 4.3562E - 11} = 2.10E - 10 \text{ C/N} \quad (III. 10)$$

La valeur fournie par le fabricant est de $1.50E-10 \text{ C/N}$. La différence est due notamment au cumul des erreurs sur les autres résultats. Les valeurs pour le coefficient diélectrique et pour le coefficient élastique sont supérieures. Il est normal que le produit nous donne un résultat supérieur à celui escompté. Néanmoins, un bémol a été porté sur la valeur du d_{33} du fabricant qui semble un peu trop faible pour un composite à base de fibres de PZT5A.

3. DONNEES ISSUES DE L'HOMOGENEISATION

Grâce aux données de chaque matériau (tab. III.1), une campagne de validation numérique a été menée. La démarche expliquée dans le chapitre II est appliquée à ces nouvelles données. Les valeurs homogénéisées sont obtenues pour tous les coefficients.

Le tableau III.3 permet de comparer les valeurs fournies par le fabricant, l'expérimentation, la méthode d'homogénéisation numérique développée, les méthodes analytiques (Mori & Tanaka et Benveniste) utilisées dans le chapitre II pour la validation de la méthode.

Méthodes/ Coefficients	fabricant	expérimental	numérique	Analytique Mori-Tanaka	Analytique Benveniste
s_{33}^E	4E-11	4.35E-11	3.71E-11	3.71E-11	3.71E-11
d_{33}	1.5E-10	2.1E-10	3.32E-10	3.32E-10	3.31E-10
ϵ_{33}^T	4.38E-9	4.20E-9	6.89E-9	6.88E-9	6.88E-9

Tableau III. 3 Comparaison des différentes méthodes aux valeurs expérimentales

Les méthodes numériques et analytiques donnent des résultats similaires ce qui confirme les validations et l'application présentées dans le chapitre II. Toutefois, ces valeurs sont très différentes de celles fournies par le fabricant notamment pour les coefficients piézoélectrique et diélectrique. Plusieurs explications sont possibles pour justifier ces écarts :

- Une connaissance imprécise de certains coefficients pour les constituants de la matrice et des fibres. Ceci explique la similitude entre les méthodes analytiques et numériques. Ces deux méthodes utilisent les mêmes coefficients.
- Lors de sa fabrication, le système a pu être modifié localement ou globalement.

4. MESURE DU DEPLACEMENT DE L'ACTIONNEUR

4.1. Dispositif

Il s'agit d'une étude en statique. L'actionneur est soumis à une alimentation couplée à un boîtier haute-tension (fig. III.6). Le boîtier est assimilable à un générateur haute-tension avec un dispositif de commutation. (self, interrupteur et transformateur). Afin de contrôler la tension délivrée, un voltmètre est placé en parallèle. L'une des électrodes interdigitées est reliée à la masse. L'autre est alimentée puis déchargée.

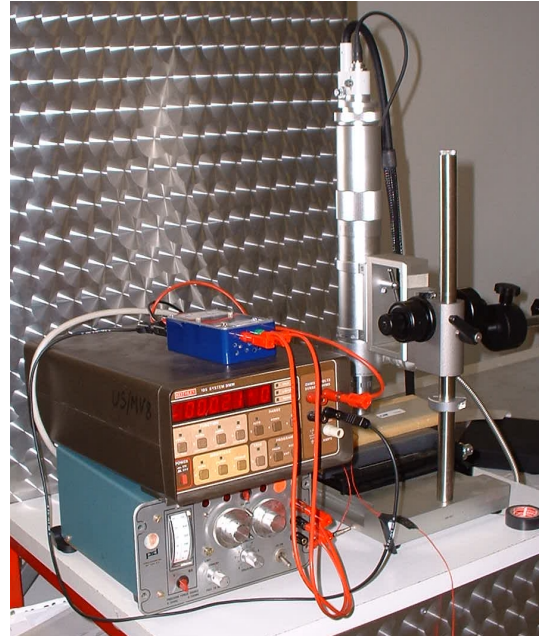
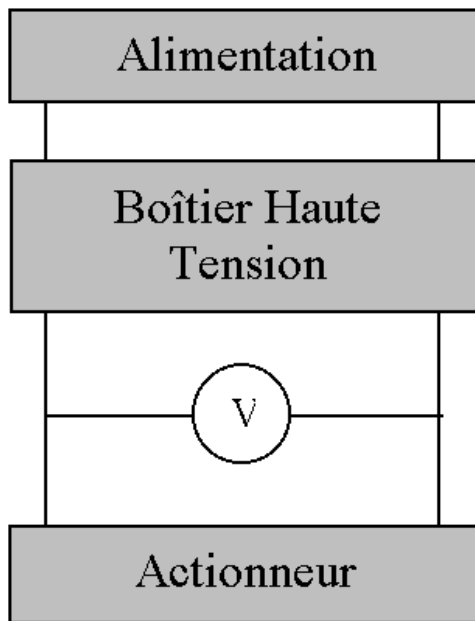


Figure III. 6 Dispositif d'alimentation et montage électrique



Figure III. 7 Dispositif de mesure et appareil de mesure

Afin de mesurer la déformation de l'actionneur qui est très petite (de l'ordre du micron), l'utilisation d'un microscope est nécessaire (MX1060Z). L'unité de contrôle comprend une caméra de contrôle (fig. III.7) et une source lumineuse ainsi qu'une tête de caméra et une lentille d'interface connectée via un câble vidéo et une fibre optique (Hi Scope KH2400®). [Hi]

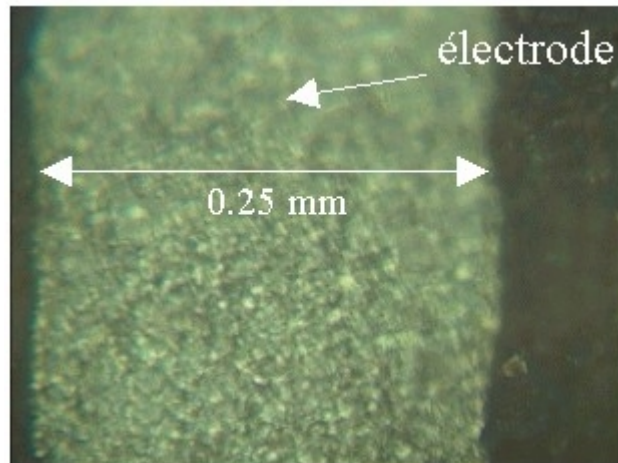


Figure III. 8 Photographie obtenue grâce au microscope et capteur d'image

Le microscope est placé à une extrémité de l'actionneur, au dessus de la dernière électrode. Une photographie (fig. III.8) est faite alors que les électrodes ne sont pas alimentées (à vide) puis en présence d'un champ électrique. Le déplacement de l'électrode est alors mesuré.

4.2. Traitement des résultats

Il faut ensuite traiter les images ainsi obtenues. Il est possible d'utiliser deux logiciels qui permettent de traiter l'image et de l'analyser. Avec le premier (AlgoLab Photo Vector®) [A1], la photo est transformée en faisant apparaître les bords de l'électrode. C'est un logiciel d'amélioration des images graphiques. Il crée des lignes et des formes fines et convertit les dessins architecturaux, mécaniques et techniques du format de trame en format vectoriel. Le résultat est présenté figure III.9.

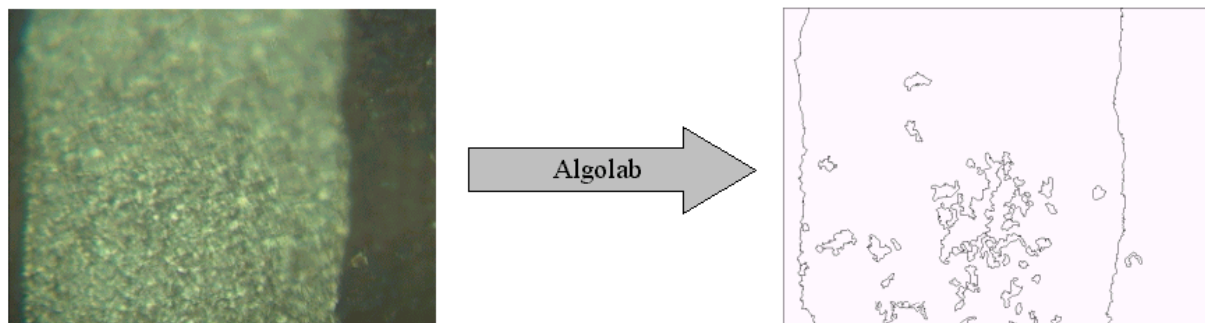


Figure III. 9 Transformation par AlgoLab

Ensuite, les photos (au repos et alimentée) transformées par Algolab sont superposées avec Powerpoint. Cette nouvelle image est alors traitée par "Precision Image Digitizer®". Ce logiciel permet de calculer le nombre de pixels entre deux points sélectionnés sur l'écran par la souris.

Compte tenu de la forme peu régulière des électrodes, différentes mesures sont effectuées sur les photos afin de moyenner les déplacements. De plus, l'actionneur n'étant pas tenu, les mesures sont effectuées à chaque extrémité (sur chaque électrode d'extrémité). Le déplacement de l'électrode est ainsi calculé. Différents potentiels sont appliqués : 340V et 415V (fig. III.10 & III.11).

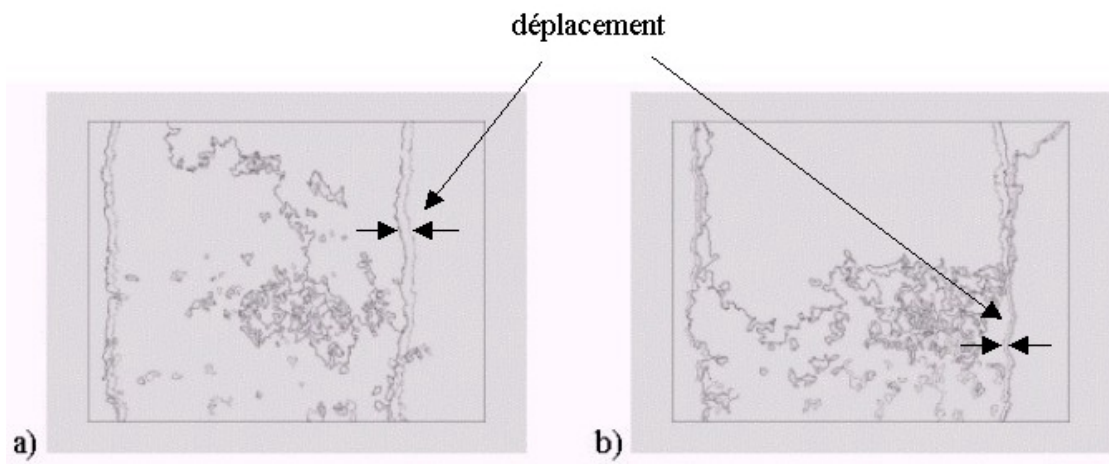


Figure III. 10 Alimentation à 340V : a) déplacement à l'extrémité, b) déplacement du côté de l'alimentation

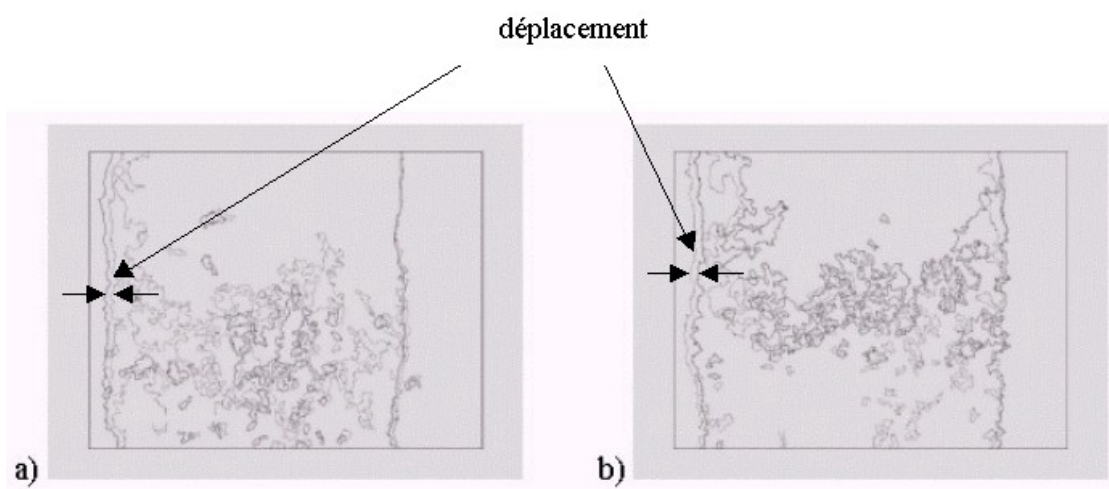


Figure III. 11 Alimentation à 415V : a) déplacement à l'extrémité, b) déplacement du côté de l'alimentation

Les déplacements totaux sont de **9.5E-6 m** pour une alimentation de 340V et **12.26E-6 m** pour une alimentation de 415V. L'erreur effectuée lors des mesures et du calcul est évalué à 10%. En effet, une première erreur est faite lors de l'estimation de la largeur de l'électrode en comparaison avec la valeur fournie par le fabricant. Et une seconde erreur est faite lors de l'exploitation des résultats et le calcul du déplacement en utilisant les différents logiciels. Cela est accentué par le caractère non plan de l'électrode.

5. COMPARAISON AVEC LES MESURES

On distingue deux cas de calcul pour le déplacement :

- le déplacement dit analytique, utilisant les coefficients homogénéisés et les équations de la piézoélectricité
- le déplacement dit numérique, utilisant le maillage d'une cellule élémentaire, incluant fibre, matrice et électrodes

5.1. Déplacement analytique

Du point de vue analytique, avec un calcul simple calqué sur les équations de la piézoélectricité, il est facile de se faire une idée du déplacement à obtenir.

$$S_3 = d_{33}E_3 \quad (\text{III. 11})$$

Avec

$$E_3 = \frac{\varphi}{\text{pas}} \quad \& \quad S_3 = \frac{u_3}{\text{pas}} \quad (\text{III. 12})$$

et

$$u_3 = d_{33} * \varphi \quad (\text{III. 13})$$

Ensuite, il faut multiplier par le nombre de pas pour avoir le déplacement total.

Les résultats obtenus, pour un potentiel de 340V, avec les différents coefficients, sont présentés dans le tableau III.4.

	d_{33} [C/N]	u_3 [m]
Expérimental (mesure direct du déplacement)	2.43E-10	9.5E-6
Fabricant	1.50E-10	5.86E-6
Expérimental (mesure du d_{33})	2.1E-10	8.21E-6
Homogénéisé numérique	3.32E-10	12.9E-6

Tableau III. 4 Comparaison des déplacements analytiques

Les valeurs sont très différentes compte tenu du fait de la disparité dans les valeurs de d_{33} .

Deux mesures différentes sont effectuées. La première consiste en une mesure de déplacement. La seconde porte sur la mesure du d_{33} de l'actionneur entier, puis à partir de cette valeur et des équations de la piézoélectricité, le déplacement est calculé.

Les déplacements obtenus par ces deux mesures sont proches (tab. III.4), pourtant le moyen pour les trouver est différent. Il reste à expliquer pourquoi la simulation donne des résultats différents.

Un calcul inverse est effectué dans le cas "Expérimental". d_{33} est calculé par la même méthode que pour le calcul du déplacement. La valeur obtenue est plus élevée et pourtant elle semble la plus proche du d_{33} réel (dans le cas d'une fibre et non d'un matériau massif).

5.2. Déplacement numérique

Du point de vue numérique, différents maillages sont effectués afin de comparer les résultats :

- un maillage complet fibre, matrice, électrodes,
- un maillage avec les constantes homogénéisées (tab. III.5) et les électrodes,
- un maillage avec les constantes homogénéisées du fabricant (tab. III.2) et les électrodes.

Les résultats sont présentés dans le tableau III.6.

Constantes homogénéisées	s_{11}^E	s_{12}^E	s_{13}^E	s_{33}^E	s_{44}^E	s_{66}^E
Valeurs	7.48E-11	-2.36E-11	-1.33E-11	3.71E-11	2.037E-10	2.68E-10
Constantes homogénéisées	d_{15}	d_{31}	d_{33}	ϵ_{11}^S	ϵ_{33}^S	
Valeurs	1.40E-12	-1.33E-10	3.32E-10	2.57E-10	3.91E-9	

Tableau III. 5 Valeurs des constantes homogénéisées numériquement

Type de maillage	Déplacement total obtenu (déplacement VER* nbre de pas)
(1) Expérimentalement (mesure du déplacement)	9.50E-6
(2) Fabricant $d_{33}=1.50E-10$	5.86E-6
(3) Homogénéisation + Electrodes	3.51E-6
(4) Fibre + Matrice + Electrodes	1.06E-6

Tableau III. 6 Comparaison des déplacements numériques avec les électrodes

De gros écarts sont observables (tab. III.6). Les valeurs sont très éloignées du déplacement obtenu expérimentalement. Les valeurs numériques sont différentes entre elles. Il est normal de ne pas obtenir le même déplacement pour le (3) et (4). L'alimentation est la même mais l'effet de chute de potentiel dans la matrice du cas (4) n'est pas pris en compte dans le cas (3). En effet, la permittivité de la matrice est très faible et le champ est fortement diminué lorsqu'il arrive au niveau de la fibre. Le déplacement est donc moindre. Il est maintenant certain qu'une erreur a été faite au niveau de l'évaluation du champ électrique car la modélisation de la fibre, de la matrice et des électrodes (4) aurait dû donner des valeurs très proches des valeurs expérimentales.

6. MODELE AVEC ENCASTREMENT DES ELECTRODES

Renseignements pris auprès du fabricant, une deuxième approche est utilisée. Lors de la fabrication de l'actionneur, les électrodes interdigitées sont posées sur la matrice et les fibres et une pression est appliquée afin de créer un contact entre les électrodes et les fibres (fig. III.12).

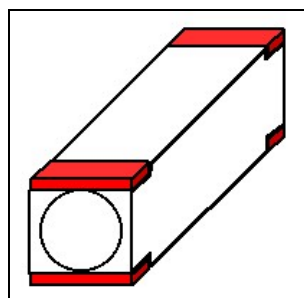


Figure III. 12 Electrode incrustée dans la matrice pour avoir un contact avec la fibre

6.1. Étude de la chute de potentiel engendrée par la matrice

Lorsque l'électrode n'est pas en contact avec la fibre, les simulations numériques montrent une chute très nette du potentiel entre l'électrode et la fibre, ce qui nuit très fortement à l'efficacité de l'actionneur. C'est pourquoi, différents maillages ont été effectués en faisant varier l'épaisseur de l'époxy entre la fibre et les électrodes afin de mettre en avant la chute de potentiel engendrée par la matrice. Pour un potentiel de 340V appliqué en surface de la matrice (sans encastrement de l'électrode), le potentiel mesuré à la surface de la fibre est de 180V environ. Le potentiel a donc chuté de moitié dans la matrice.

La figure III.13 montre la chute de potentiel dans la matrice, la chute dans la fibre et la chute entre l'électrode et le centre de la fibre en fonction de la distance entre l'électrode et la fibre. Les électrodes sont alimentées à 340V/0V. De plus, la figure III.14 montre la diminution de déplacement de l'extrémité de la fibre. Si l'électrode est en contact avec la fibre, la chute de potentiel est nulle et l'efficacité est maximale (déplacement maximal).

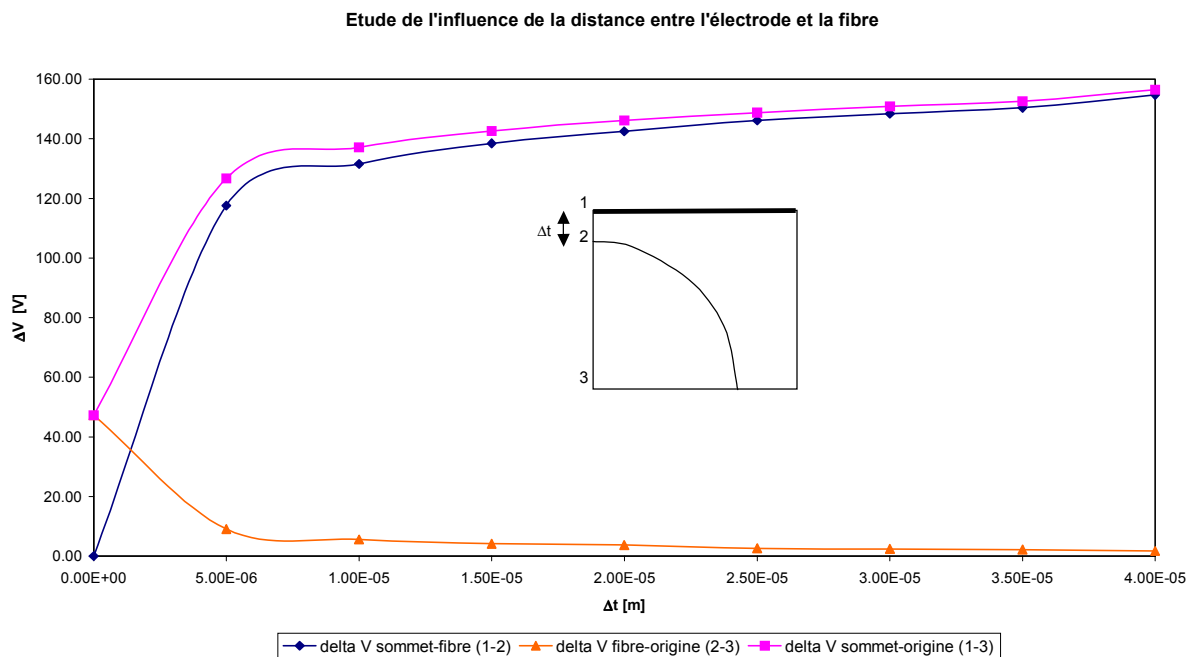


Figure III. 13 Mesure de la chute de potentiel dans la matrice

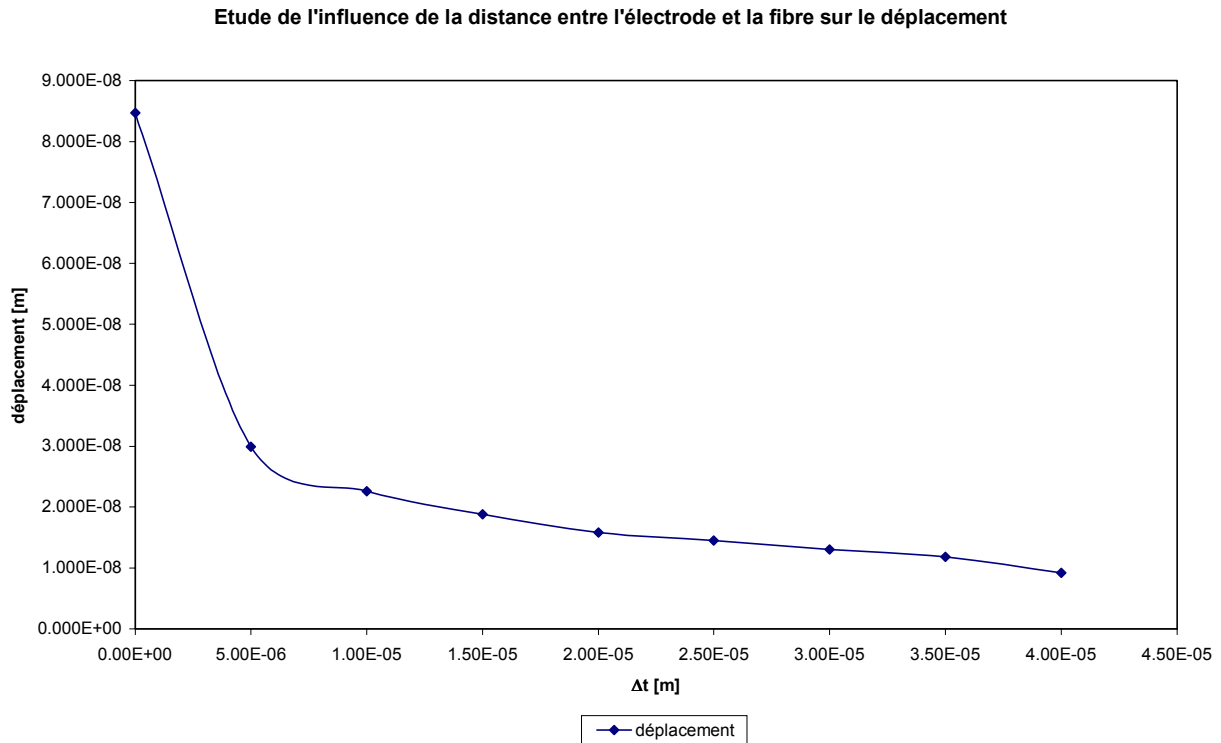


Figure III. 14 Mesure de la diminution de déplacement de l'extrémité du VER

On constate que la chute de potentiel est considérable dans la matrice compte tenu de sa faible constante diélectrique. Pour une alimentation de 340V, lorsque l'électrode est collée à la fibre, le déplacement obtenu est de **8.47E-8 m**. Pour obtenir le déplacement total de l'actionneur, il faut multiplier par le nombre de pas, soit 115. Le déplacement obtenu est alors de **9.74E-6 m** pour un déplacement mesuré expérimentalement de **9.5E-6 m**. Les résultats sont très proches, puisque l'actionneur est décrit de façon plus exacte.

6.2. Nouvelle homogénéisation

Étant donné que la cellule élémentaire a été modifiée, les constantes homogénéisées doivent être recalculées, les constantes élastiques ne changent pas mais les constantes piézoélectriques et diélectriques sont différentes. L'effet des électrodes est évident dans le calcul. L'homogénéisation se fait donc en tenant compte de ce changement.

6.2.1. Calcul des constantes piézoélectriques

Il faut prendre en compte les électrodes (fig. III.15).

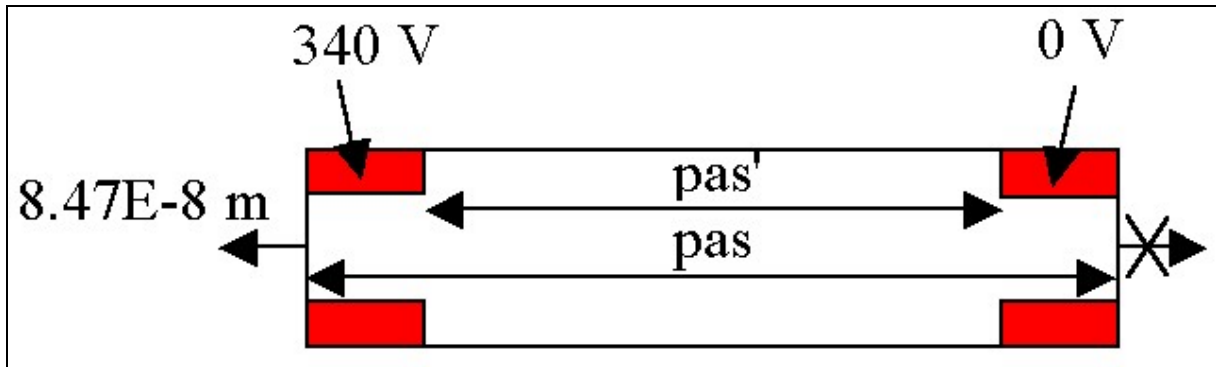


Figure III. 15 Détermination de la constante piézoélectrique

$$d_{33} = \frac{u_3}{\phi} = \frac{8.47E-8}{340} = 2.49E-10 \text{ m/V} \quad (\text{III. 14})$$

Pour mémoire, le coefficient piézoélectrique donné par le fabricant est de $1.5E-10$ m/V et celui déterminé expérimentalement est de $2.1E-10$ m/V. Les valeurs sont beaucoup plus proches que dans le cas précédent.

La démarche est la même pour les autres coefficients piézoélectriques en tenant compte de la non symétrie.

$$d_{31} = -7.72E-11 \text{ m/V} \quad (\text{III. 15})$$

$$d_{32} = -8.76E-11 \text{ m/V} \quad (\text{III. 16})$$

Il reste à définir les constantes diélectriques. Il faut noter la valeur de la capacité.

$$\epsilon_{33}^T = 3.93E-9 \text{ F/m} \quad (\text{III. 17})$$

La valeur du fabricant est de $4.38E-9$ F/m et expérimentalement $4.20E-9$ F/m. Les valeurs sont donc proches.

Les autres coefficients diélectriques ne sont pas changés car ils n'ont pas une énorme influence sur les résultats finaux et ne sont pas impliqués réellement dans le changement du VER.

Les nouveaux coefficients calculés, il est possible d'étudier le déplacement suivant l'axe des fibre. La démarche est la même que précédemment.

Le tableau III.7 présente une comparaison entre les valeurs homogénéisées lors de la première version et celles calculées après correction.

Coefficients	1 ^{ère} homogénéisation	2 ^{ème} homogénéisation
d_{31}	-8.76E-11 m/V	-7.72E-11
d_{32}	-8.76E-11 m/V	-8.76E-11 m/V
d_{33}	3.32E-10 m/V	2.49E-10 m/V
ϵ_{33}^T	6.89E-9 F/m	3.93E-9 F/m
k_{33}	0.6566	0.6521

Tableau III. 7 Comparaison des coefficients homogénéisés avant et après rectification

6.2.2. Traitement des résultats

- Les résultats numériques sont obtenus avec un maillage représentant la fibre, la matrice et les électrodes (fig. III.16).

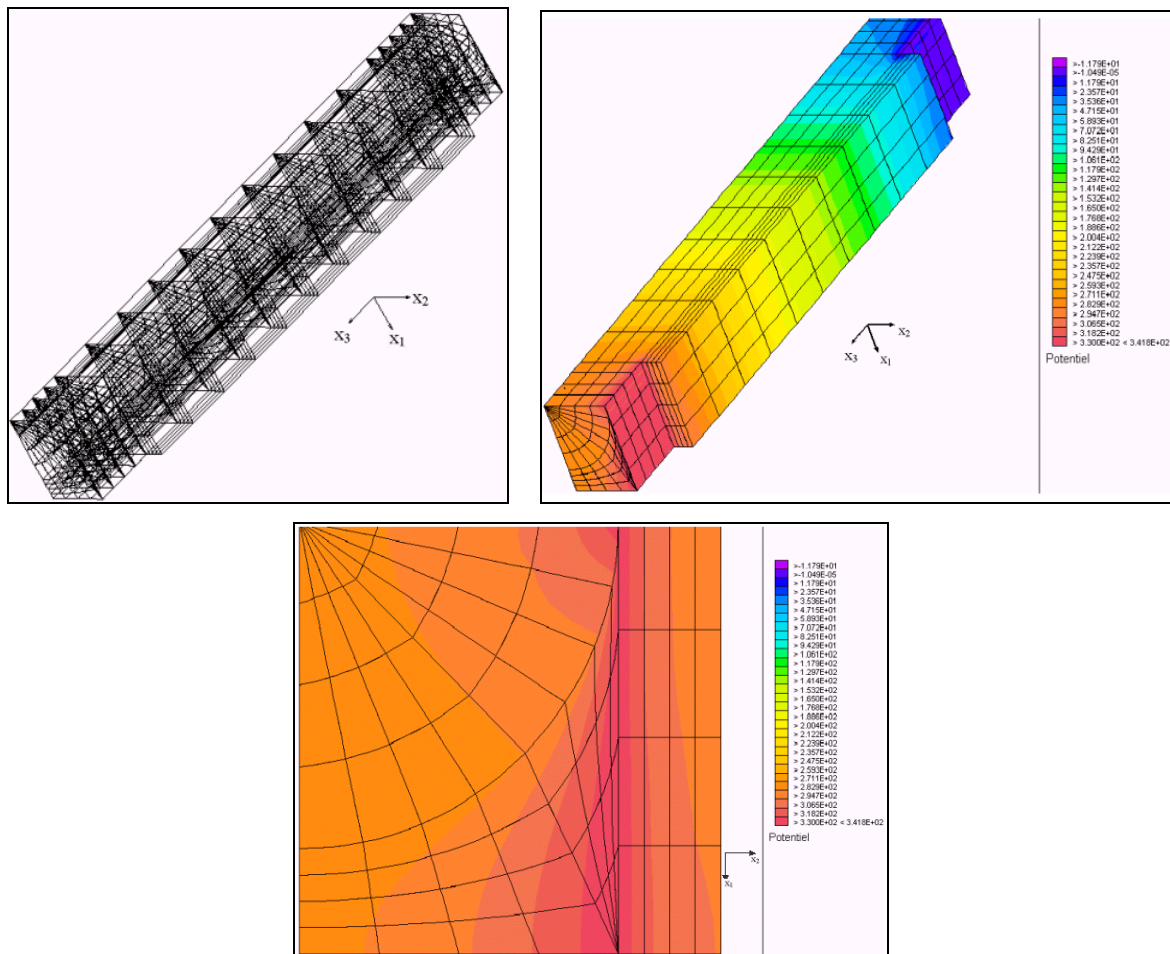


Figure III. 16 Maillage du VER, potentiel le long du VER, potentiel dans la fibre

Le déplacement calculé est multiplié par le nombre de pas (115). La déformation totale obtenue est de **9.74E-6 m** pour une alimentation de 340V.

- Les valeurs homogénéisées (tab III.7) sont utilisées pour un maillage représentant un matériau uniforme (fig. III.17). Le champ est appliqué par des électrodes placées à chaque bout.

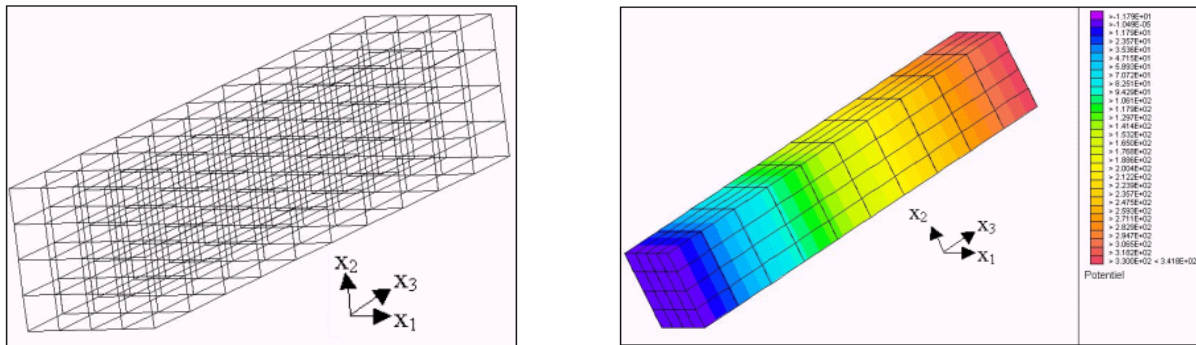


Figure III. 17 Maillage du modèle homogénéisé alimenté en bout

Ce maillage donne un déplacement de $8.44E-8$ m. De manière à ramener le résultat à l'actionneur total, il faut d'abord calculer le déplacement pour un pas puis le multiplier par le nombre de pas.

$$u_{3total} = u * 115 = 9.71E - 6 \text{ m} \quad (\text{III. 18})$$

Les valeurs sont très proches. L'erreur provient du cas particulier des électrodes. Il faut considérer les électrodes comme encastrées dans la matrice de manière à avoir un contact avec la fibre. Cela permet de limiter les chutes de potentiel dues à la matrice.

Le tableau III.8 regroupe les résultats obtenus expérimentalement, analytiquement, numériquement et en utilisant les constantes homogénéisées. Les résultats sont donnés pour deux tensions qui demeurent dans le domaine de linéarité des matériaux piézoélectriques.

Type de résultats : déplacement	Valeurs du déplacement de l'actionneur pour un champ de 340 V	Valeurs du déplacement de l'actionneur pour un champ de 415 V
E.F. maillage complet (fibre + matrice + électrodes)	1.06E-6 m	1.66E-6 m
E.F. maillage complet (fibre + matrice + électrodes encastrées)	9.74E-6 m	11.89E-6 m
E.F. modèle homogénéisé	9.71E-6 m	11.86E-6 m
Expérimental	9.50E-6 m	12.26E-6 m

Tableau III. 8 Validation des déplacements obtenus

6.3.Discussion

Deux points importants sont à mettre en avant dans la discussion de cette partie. Dans un premier temps, il est bon d'émettre des réserves sur les données fournies par le constructeur qui sont davantage assimilable aux données du matériau massif différentes de celles de la fibre. Ces données semblent trop élevées. Et pourtant, les résultats sont corrects si on compare les résultats expérimentaux à ceux de l'homogénéisation utilisant ces données. Et c'est à cet instant qu'une deuxième remarque a été suggérée. Il est fort probable que les caractéristiques sont moins élevées donc il faut combler ce manque par un autre procédé. L'hypothèse d'électrodes interdigitées enveloppant les fibres est alors posée. Si la figure III.16 est analysée, on peut voir que le potentiel diminue fortement en dehors du point de contact. Qu'en est-il lors de l'utilisation d'électrodes qui suivent le contour de la fibre ? (fig III.18)

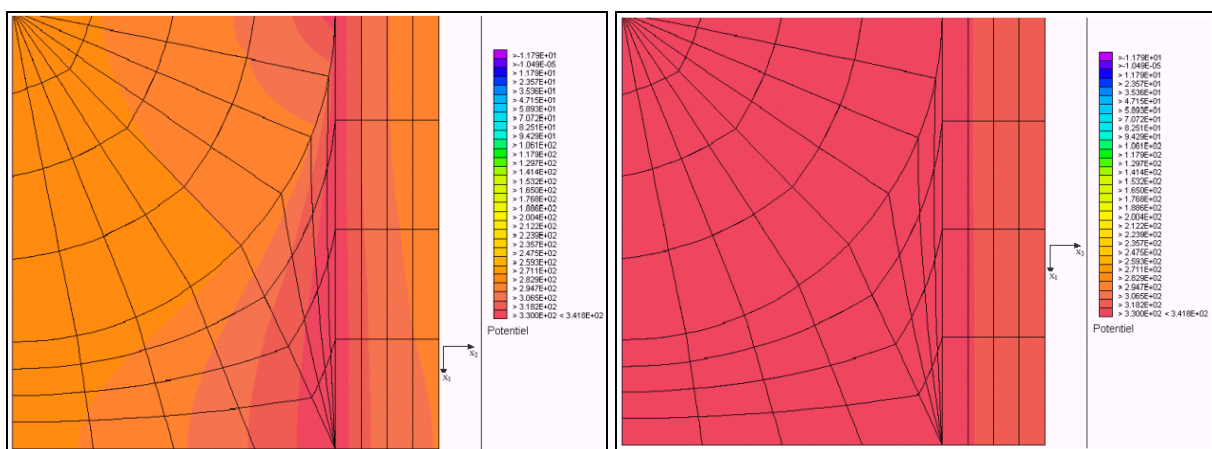


Figure III. 18 Evolution du potentiel, électrode avec un simple contact et électrode enveloppante

On constate que dans le cas d'une électrode enveloppante la chute de champ est minimale (-3V au centre de la fibre). Le déplacement de la fibre est donc supérieur. Ainsi, dans le cas d'une électrode de simple contact, le déplacement est de $8.47E-08$ m tandis que dans le cas de l'électrode enveloppante, le déplacement est de $1.095E-07$ m. Ce type d'alimentation compenserait donc les caractéristiques inférieures de la fibre par rapport à celles du matériau massif.

Seules deux cas de tension ont été relevé dans ce rapport. D'autres mesures ont été effectuées en prenant garde de rester dans le domaine linéaire. Les résultats sont donc similaires pour les autres mesures.

7. ADAPTATION A L'ACTIONNEUR COMPLET

L'utilisation de la méthode d'homogénéisation réside dans le fait de simplifier la modélisation. L'actionneur doit être limité à sa plus simple représentation. Les résultats précédents sont utilisés et adaptés.

L'actionneur a les dimensions mentionnées au début du chapitre. Il est alimenté par des électrodes en bout (fig. III.20). Le potentiel se calcule comme suit (en tenant compte des caractéristiques de la figure III.19) :

Pour une alimentation de 340V sur les électrodes interdigitées, le potentiel équivalent est de :

$$\Phi_{\text{actionneur}} = \Phi_{\text{électrodes}} \frac{\text{pas}}{\text{pas}'} * n \quad (\text{III. 19})$$

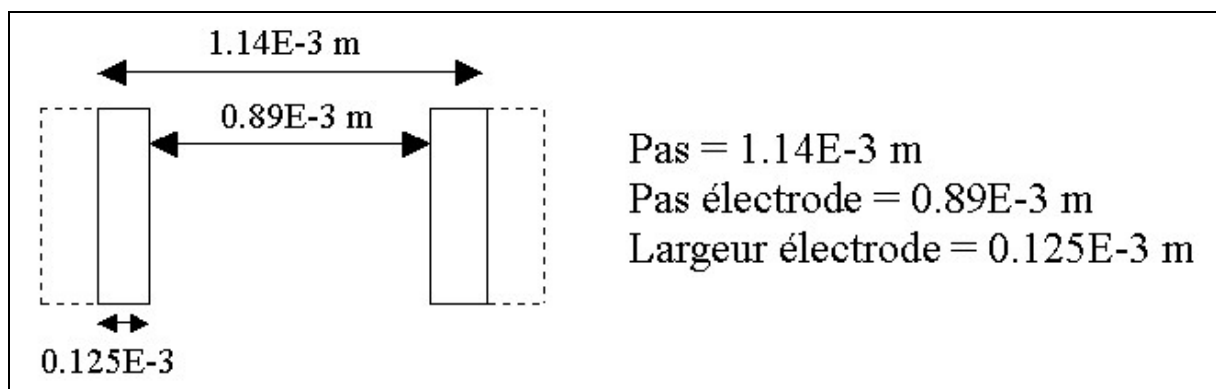


Figure III. 19 Dimension par rapport aux électrodes

Ainsi dans le cas de l'actionneur précédemment utilisé, l'alimentation calculée est donc de 50083 V. Il est évident que c'est valeur n'a pas de sens pratique. C'est une alimentation très importante équivalente à celle des électrodes interdigitées alimentées à 0V/340V.

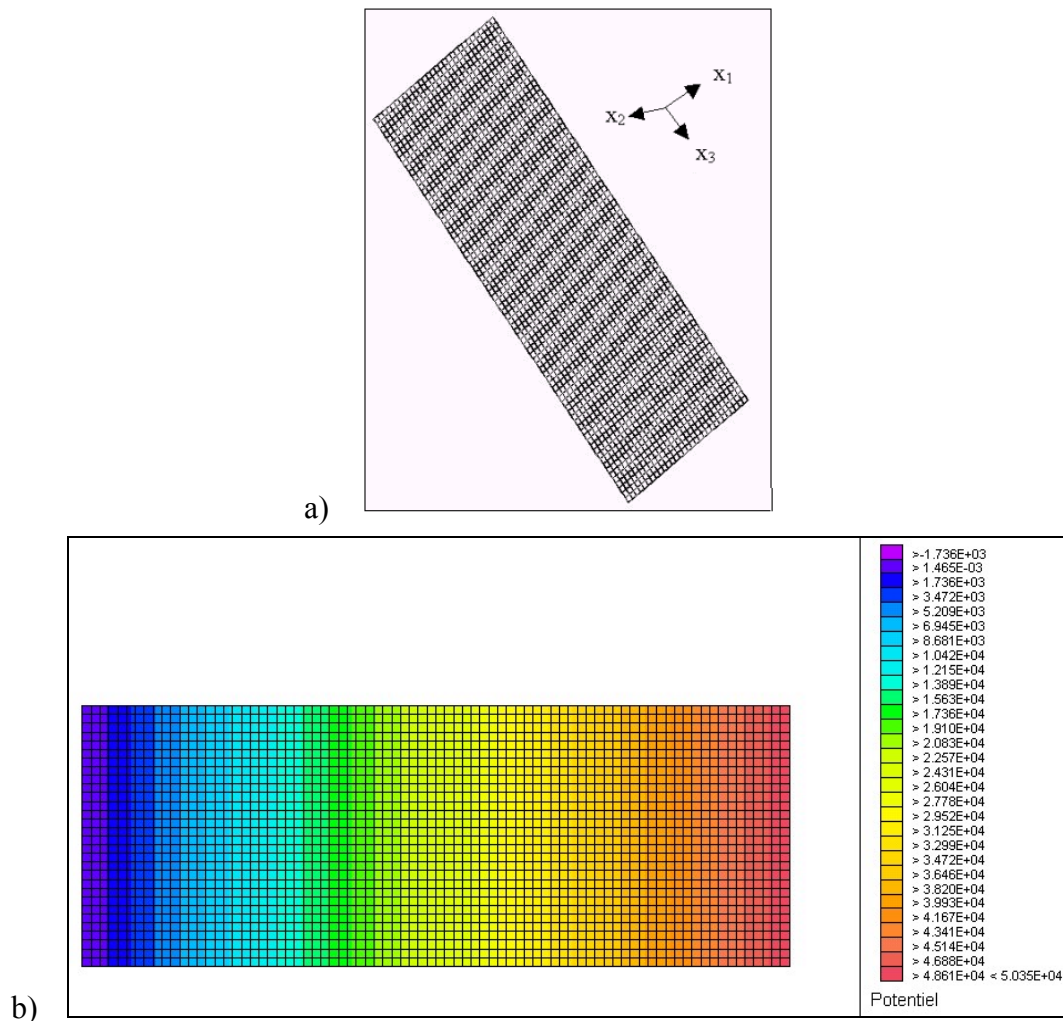


Figure III. 20 a) Modélisation de l'actionneur; b) application du potentiel

Le déplacement calculé numériquement pour l'actionneur avec une alimentation de 340 V est de **9.71E-6 m**. Cette valeur est précisément la valeur obtenue par le calcul du VER et adapté à toute la totalité de l'actionneur. Il n'y a donc pas de pertes par cette méthode de calcul le long de l'actionneur. Le calcul est linéaire. Il n'y a pas de perturbations.

Le maillage est très fin compte tenu de la faible épaisseur de l'actionneur. En effet, il faut que le rapport entre les longueurs de côtés n'excède pas 5 afin d'avoir des matrices conditionnées. **Un élément de membrane** a été développé dans le code ATILA (cf. Annexe E). Le déplacement mesuré sous les mêmes conditions avec l'élément de membrane est le même. L'intérêt de cet élément est un gain de temps de calcul compte tenu de la simplicité du maillage nécessaire.

8. APPLICATION NUMERIQUE DE L'ACTIONNEUR SUR UNE PLAQUE

Cette partie présente une étude numérique sur l'efficacité de l'actionneur pour le contrôle de forme d'une plaque en flexion.

L'actionneur précédent est appliqué sur une plaque en aluminium d'1 mm d'épaisseur de façon numérique. La modélisation est la suivante :

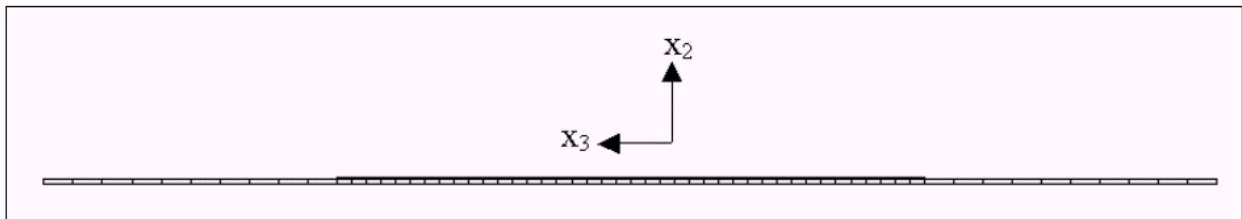


Figure III. 21 Modélisation d'une plaque et de l'actionneur

Il s'agit d'une vue de profil représentant la plaque et l'actionneur placé en son milieu. L'actionneur est maillé avec les propriétés homogénéisées. Il est alimenté par des électrodes à chaque extrémité (équivalent à des électrodes interdigitées à 340V). La plaque est encastree à un bout. La flèche est mesurée. La déformation est représentée sur les schémas suivants :

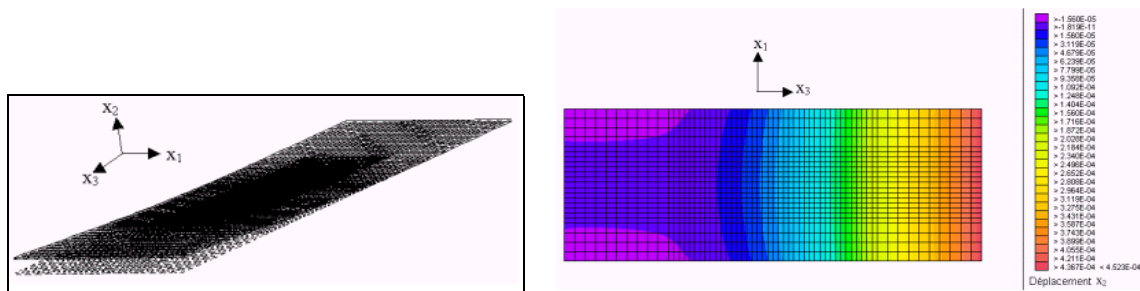


Figure III. 22 Flèche de la plaque

La flèche relevée pour un actionneur placé en son centre est de $446\mu\text{m}$ (soit $1.31\mu\text{m}/\text{V}$). Une même expérience est faite pour une plaque de 5 mm d'épaisseur. Dans ce cas, la flèche est de $19\mu\text{m}$ (soit $0.05\mu\text{m}/\text{V}$).

L'emplacement de l'actionneur a une importance primordiale pour optimiser la flexion de la plaque. Une étude est menée afin d'optimiser l'emplacement de l'actionneur sur la plaque pour obtenir une flèche maximale.

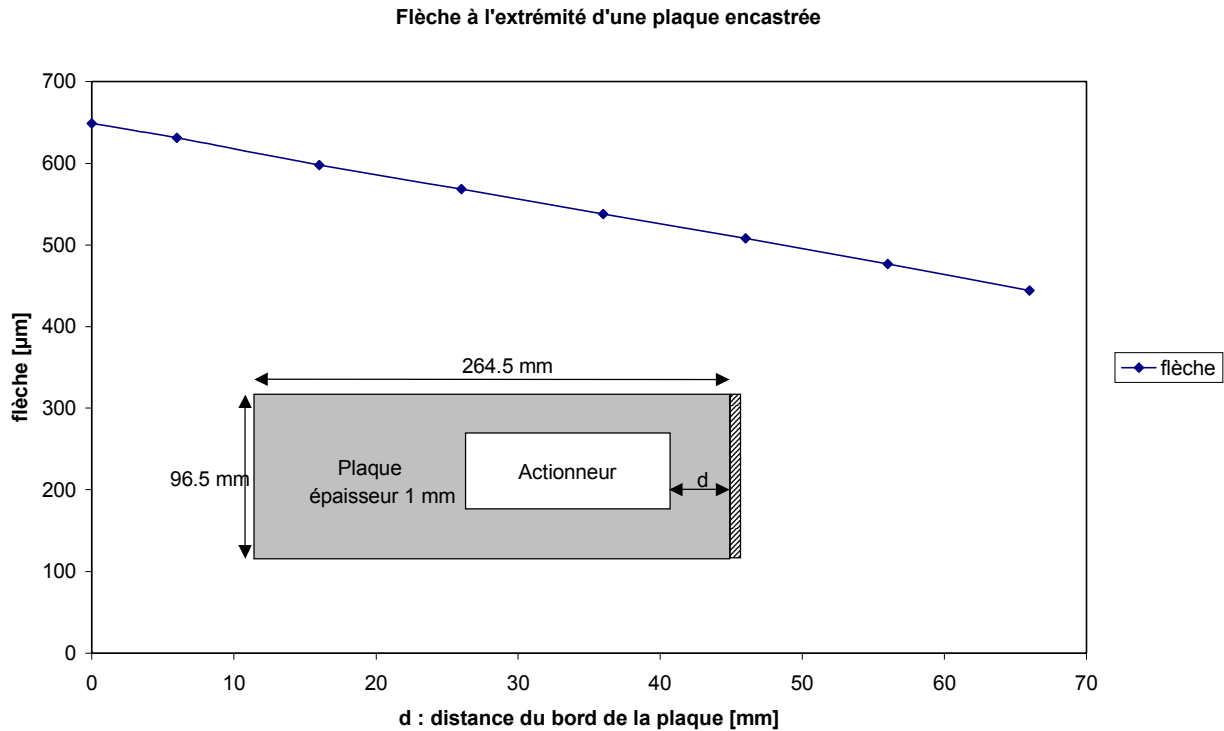


Figure III. 23 Courbe d'influence de l'emplacement de l'actionneur sur la plaque

Plus la plaque est près de l'encastrement, plus la flèche est importante. Une différence de 30% a lieu entre la première (0mm du bord) et la dernière mesure (66mm du bord = centre). Il est donc préférable de placer l'actionneur le plus près possible du bord d'encastrement. Le positionnement de l'actionneur est donc optimisé plus aisément avec ce genre de modélisation. Cette simplification est possible grâce à l'homogénéisation effectuée au préalable.

La même démarche est appliquée à l'élément de membrane (fig. III.24). Le maillage est moins important et le temps de calcul est, de ce fait, moins long.

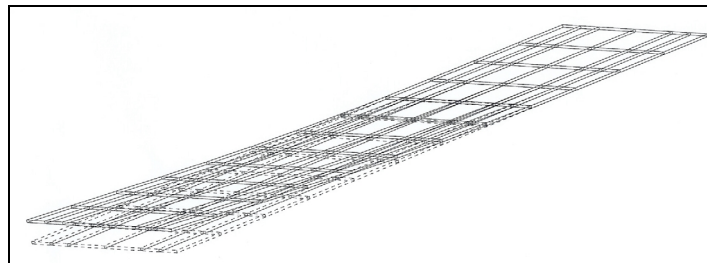


Figure III. 24 Modélisation de l'actionneur par un élément de membrane

L'élément est placé au centre de la plaque. La flèche observée est moins importante. Cela est certainement dû au phénomène de bras de levier. L'actionneur modélisé avec des éléments 3D est excentré. Il est placé au-dessus de la plaque tandis que l'élément de membrane se fonde dans la plaque. La différence est moindre lors de l'utilisation d'une plaque plus épaisse. Plus l'actionneur s'éloigne de la ligne médiane de la plaque, plus l'écart entre la flèche de l'élément 3D et celle de la membrane est petit.

9. CONCLUSION

Cette partie expérimentale a permis de montrer l'influence très importante du procédé de fabrication de l'actionneur. Le fait que les électrodes soient en contact avec la fibre modifie de façon considérable les résultats. Cela a un effet important sur l'homogénéisation particulièrement dans le cas des coefficients piézoélectriques et diélectriques. Toutefois, cela ne remet pas en cause la méthode qui permet d'optimiser le composite. La méthode doit s'adapter à la conception réelle de l'actionneur. Il est donc désormais possible de passer d'une application compliquée (actionneur composé de fibres, matrice et électrodes interdigitées) à un schéma plus simple (actionneur homogène alimenté par deux électrodes). La simplification a permis de vérifier, plus facilement, l'influence de la position de l'actionneur sur la plaque. Le gain de temps et de coût de calcul est considérable. L'actionneur a un poids négligeable et pourtant sa capacité d'activation est importante et la contrainte qu'il développe permet de déformer la plaque avec une flèche de 0.6 mm lorsqu'il est à l'extrémité et alimenté à 340V. Il est évident, au vu de ces premiers résultats, que le contrôle actif de pale est possible. Il faut bien entendu tapisser la pale de ces actionneurs mais compte tenu du faible poids, la surcharge est négligeable. Des essais ont déjà été effectués sur une pale d'échelle 1/6^{ème} CH-47D [G00a] à Philadelphia. Quarante deux actionneurs à base de fibres actives ont été apposés sur la pale dont onze ne pouvaient pas être alimentées. La démonstration s'est faite à une fréquence de 67.5 Hz entraînant une torsion entre 1° et 1.5° pic à pic. La méthode décrite dans ce mémoire permettra d'évaluer l'efficacité des actionneurs à base de fibres piézoélectriques pour le contrôle de torsion des pales d'hélicoptère.

Conclusion

Conclusion

Le travail effectué dans le cadre de la thèse concerne le développement d'une méthode d'homogénéisation des composites à fibres piézoélectriques en vue d'une application au contrôle de forme des pales d'hélicoptères. La principale difficulté réside dans le fait de déterminer tous les coefficients, en ayant pour objectif, de travailler éventuellement en cisaillement (application déjà en cours d'étude à l'ONERA). Les résultats validés permettent d'avoir un gain de temps pour l'optimisation des actionneurs.

La technique d'homogénéisation numérique développée combine deux méthodes : le Volume Élémentaire Représentatif et la Propagation d'Ondes. Les **avantages** de cette technique d'homogénéisation numérique portent sur différents aspects. La détermination de tous les coefficients est possible. La méthode permet la prise en compte de la forme de la fibre (circulaire, rectangulaire, hexagonale,...). La méthode n'est pas limitée en nombre de phases. Enfin, la rapidité de calcul est un bon avantage, notamment pour l'optimisation. Lors de la validation, la méthode développée a justifié les autres méthodes déjà existantes avec pour avantage de déterminer tous les coefficients.

Les **perspectives** à donner à ce travail sont nombreuses :

- Au niveau expérimental :

- L'influence de l'actionneur collé sur une plaque est mise en avant de façon numérique. Il est maintenant nécessaire de passer à la phase expérimentale où l'actionneur sera placé au meilleur endroit afin d'obtenir une flèche maximale. Pour cela, l'optimisation numérique effectuée dans la thèse est utile.

- L'application principale réside dans le contrôle de la torsion des pales d'hélicoptère. Afin d'obtenir un effet de torsion avec les actionneurs, il faut les coller l'un au-dessus à $+45^\circ$ et l'autre au-dessous à -45° . Les premiers tests sont encourageants.

- Il serait également intéressant de faire toutes les expériences précédentes en statique et également en dynamique.

- Au niveau numérique :

- Il serait bon de se pencher sur le problème de l'homogénéisation inverse. Les propriétés des fibres sont mal connues et leur détermination est difficile. Il faut passer par une

démarche expérimentale. Connaissant les valeurs globales, il faut ensuite remonter aux coefficients de la fibre et la méthode d'homogénéisation doit être adaptée à cette démarche.

- Pour les fabricants d'actionneurs à base de fibres piézoélectriques, la méthode d'homogénéisation permet d'optimiser les composites par le choix des matériaux mais aussi de la forme des fibres afin d'avoir le meilleur rendement du point de vue macroscopique

- Au niveau des applications et débouchés :

- Bien que la bibliographie montre de bons résultats dans le contrôle de forme avec ce type d'actionneur, il serait bon d'analyser la fatigue engendrée par le matériau lors d'une activation en dynamique.

- Les applications sont nombreuses et pas uniquement dans le domaine de l'aéronautique. La mise en place de ces actionneurs sur une pale d'hélicoptère n'est pas une expérience aisée. Toutefois, ce genre d'actionneur est également utilisé dans des domaines autrement variés. Ainsi, les skis et les raquettes de tennis bénéficient déjà de ces progrès techniques. D'autres domaines que le contrôle de forme peuvent également être enrichis par ce type de matériau. Le contrôle de vibration (toit ouvrant de voiture [SM03]) ou le contrôle santé (impact sur aile d'avion) utilisent les composites à fibres ou rubans actifs. La technique d'homogénéisation peut optimiser ce genre d'applications.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [AH70] **H. Allik & T.J.R Hughes**
Finite element method for piezoelectric vibrations
Int. J. Num. Meth. Engr. 2, pp 151-157, 1970
- [Al] <http://www.algolab.com>
- [ATI02] **ATILA**
Finite Element Code for Piezoelectric and Magnetstrictive Transducer and Actuator Modeling, Version 5.2.2, User's Manual, Institut Supérieur d'Électronique du Nord, Acoustics Laboratory, 2002
- [AVP99] **V. Agbossou, H.N. Viet & J. Pastor**
Homogenization techniques and application to piezoelectric composite materials
Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics 00, 1999
- [BD92] **J.-L. Batoz & G. Dhatt**
Modélisation des structures par éléments finis, Volume 3
Ed. Hermès, 1992
- [BBH96] **V. Büter, E. Breitbach & H. Hanselka**
The main sources of helicopter vibration and noise emissions and adaptive concepts to reduce them
Smart Mat. Struct., Vol. 5 No 1, pp 58-67, 1996
- [BCJ64] **D.A. Berlincourt, D.R. Curran & H. Jaffe**
Physical Acoustics principles and methods
Vol. 1 part A, éd. W.P. Mason, Ed. Academic Press., 1964
- [BD92] **Y. Benveniste & G.J. Dvorak**
Uniform Fields and Universal Relations in Piezelectric Composites
J. Mech. Phys. Solids vol. 40, No. 6, pp 1295-1312, 1992
- [Ben93] **Y. Benveniste**
Universal Relations in Piezoelectric Composites With Eigenstress and Polarization Fields, Part I : Binary Media – Local Fields and Effective Behavior
J. App. Mech., Vol. 60, pp 265-269, 1993
- [Ber94] **M. Bernadou**
Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces
Ed. Masson, 1994
- [BH97a] **A.A. Bent & N.W. Hagood**
Piezoelectric Fiber Composites with Interdigitated Electrodes
J. Int. Mat. Sys. Struct., Vol. 8, pp903-919, Novembre 1997

- [BH97b] **A.A. Bent & N.W. Hagood**
Active Fiber Composites For Structural Actuation
Report AMSL #97-1, 1997
- [BHR95] **A.A. Bent, N.W. Hagood & J.P. Rodgers**
Anisotropic Actuation with Piezoelectric Fiber Composites
J. Int. Mat. Sys. Struct., Vol. 6 No 3, pp 338-349, 1995
- [BHR96] **A.A. Bent, N.W. Hagood & J.P. Rodgers**
Characterization of Interdigitated Electrode Piezoelectric Fiber Composites for High Electrical and Mechanical Loading
SPIE paper, Proceeding of the SPIE Symposium on Smart Mat. And Struct., San Diego, pp 2717-2760, 1996
- [BHR98] **J.P. Rodgers & N.W. Hagood**
Preliminary Mach-scale hover testing of an integral twist-actuated rotor blade
SPIE Vol.3329, pp 291-308, 1998
- [BL75] **D.M. Barnett & J. Lothe**
Dislocations and Line Charges in Anisotropic Piezoelectric Insulators
Phys. Stat. Sol. 67, pp 105-111, 1975
- [Bou02] **E. Boucher**
Elaboration et caractérisation de céramiques PZT bi-substituées et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique
Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002
- [CC95] **P.C. Chen & I. Chopra**
Hover testing of a smart rotor with induced-strain actuation of blade twist
AIAA, pp 2836-2853, 1995
- [CGR94] **V. Giurgiutiu, Z. Chaudhry & C.A. Rogers**
Active Control of Helicopter Rotor Blades with Induced Strain Actuators
AIAA, pp 288-297, 1994
- [CPMR99] **B. Camus, J.-L. Petitniot & H. Mercier des Rochettes**
Matériaux et actionneurs pour le contrôle de forme des structures
3^{ème} journée d'Etudes, Lyon, 1999
- [CU89] **H.L.W. Chan & J. Unsworth**
Simple Model for Piezoelectric Ceramic/Polymer1-3 Composites Used in Ultrasonic Transducer Applications
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 36, No 4, July 1989
- [Dec84] **J.-N. Decarpigny**
Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques.
Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1984

-
- [Del00] **V. Delplace**
Torsion de plaques composites par adhésion de céramiques piézoélectriques
Rapport de DESS, ONERA-Lille, 2000
- [Des90] **Ph. Destuynder**
Modélisation des coques minces élastiques
Ed Masson, 1990
- [DN92] **D. Damajanovic & R.E Newnham**
Electrostrictive and piezoelectric materials for actuator applications
J. of Int. Mat. Struct., Vol. 3, pp 190-208, 1992
- [DR74] **E. Dieulesaint & D. Royer**
Ondes élastiques dans les solides – Application au traitement du signal,
Ed. Masson, 1974
- [DT93] **M.L. Dunn & M. Taya**
Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites
Int. J. Solids Structures, Vol.30; No 2, pp 161-175, 1993
- [Dvo90] **G.J. Dvorak**
On Uniform Fields in Heterogeneous Media
Proc. R. Soc. London, A431, pp 89-110, 1990
- [ED02] **E. Lenglet, E. Deletombe, A.-C. Haldky-Hennion & J.-C. Debus**
Numerical Homogenization Techniques for Active Fiber Composites Materials used in Active Control Applications
IEEE UFFC, Munich, pp 1167-1170, 2002
- [EH02] **E. Lenglet, A.-C. Haldky-Hennion, J.-C. Debus & E. Deletombe,**
Techniques d'homogénéisation des composites à fibres actives
CFA2002, pp 252-255, Lille, 2002
- [EH03] **E. Lenglet, A.-C. Haldky-Hennion & J.-C. Debus**
Numerical homogenisation techniques applied to piezoelectric composites
J. Acoust. Soc. Am, Vol. 113, No 2, pp 826-833, Février 2003
- [EN67] **E.P. Eer Nisse**
Variational method for electroelastic vibration analysis
IEEE SU 14, pp 153-160, 1967
- [Esh57] **J.D. Eshelby**
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems
Proc. R. Soc. London, Vol. 241, No 1226, pp 376-396, 1957
-

- [FDBG93] **R.C. Fenn, J.R. Drowner, D.A. Bushko & V. Gondhalekar**
Terfenol-D driven flaps for helicopter vibration reduction
SPIE Vol. 1917, pp 407-418, 1993
- [FM99] **M. Fremont & S. Miyazaki**
Shape Memory Alloys
SpinglerWienNewYork, 1996
- [G00a] **V. Giurgiutiu**
Active-Materials Induced-Strain Actuation for Aeroelastic Vibration Control
The Shock and Vibration Digest, pp 355-368, 2000
- [G00b] **V. Giurgiutiu**
Review of Smart-Materials Actuation Solutions for Aeroelastic and Vibration Control
J. Int. Mat. Sys. Struct., Vol. 11, pp 525-544, 2000
- [GCR95] **V. Giurgiutiu, Z. Chaudhry & C.A. Rogers**
Engineering Feasibility of Induced Strain Actuators for Rotor Blade Active Vibration Control
SPIE, Vol 2190, pp 107-122, 1995
- [GSC85] **T.R. Gururaja, W.A. Schulze, L.E. Cross, R.E. Newhnam, B.A. Auld & Y.J. Wang**
Piezoelectric Composite Materials for Ultrasonic Transducer Applications, Part I & Part II
IEEE Trans. Sonics Ultrason., SU-32, 1985
- [Has83] **Z. Hashin**
Analysis of composite materials : A survey
J. Appl. Mech. 50(3), pp 481-505, 1983
- [HB93] **N.W. Hagood & A.A. Bent**
Development of Piezoelectric Fiber Composites for Structural Actuation
AIAA Paper No 93-1717, Proceedings of the 34th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, La Jolla, CA, 1993
- [HD93] **A.C. Hladky-Hennion, J.N. Decarpigny**
Finite element modeling of active periodic structures : Application to 1-3 piezocomposites
J. Acoust. Soc. Am., Vol. 94 (2), 1993
- [HEN68] **R. Holland & E.P. Eer Nisse**
Variational evaluation of admittances of multielectroded three-dimensionnal piezoelectric structures
IEEE SU 15, pp 119-132, 1968

-
- [HEN69] **R. Holland & E.P. Eer Nisse**
Design of resonant piezoelectric devices
Research Monograph n°56, M.I.T. Press, 1969
- [Hi] <http://www.hiscopesystems.com/digital.html>
- [Hill63] **R. Hill**
Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles
J. Mech. Phys. Solids 11, pp 357-372, 1963
- [Hill64] **R. Hill**
Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I elastic behaviour,
J. Mech. Phys. Solids 12, pp 199-212, 1964
- [HS63] **Z. Hashin & S. Shtrickman**
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials
J. Mech. Phys. Sol., Vol. 11, p127
- [HY86] **K.Y. Hashimoto & M. Yamaguchi**
Elastic, Piezoelectric and Dielectric Properties of Composites Materials
Ultrasonics Symposium, pp 697-702, 1986
- [IEEE87] **ANSI/IEEE**
IEEE Standard on Piezoelectricity
ANSI/IEEE, Std 176, 54p, 1987
- [IKTS] <http://www.ikts.fhg.de>
- [Lan93] **P. Langlet**
Analyse de la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux périodiques à l'aide de la méthode des éléments finis
Thèse, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1993
- [Len99] **E. Lenglet**
Développement dans le code ATILA d'un élément fini pour un matériau magnétostrictif – Comportement non linéaire
Rapport de DEA, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1999
- [Les93] **G.A. Lesieutre**
Passively damped structural composite materials using resistively shunted piezoceramic fibers
Journal of Materials Engineering and Performance, Vol. 2, n°6, pp 887-892, 1993
- [Lew61] **J.A. Lewis**
B.S.T.J. 60, pp 1259, 1961
-

- [LHD92] **P. Langlet, A.-C. Hladky-Hennion & J.-N. Decarpigny**
Analyse de la propagation d'ondes acoustiques dans les structures périodiques à l'aide de la méthode des éléments finis
J. de Phys. III, Vol.2, 1992
- [Mas64] **W.P. Mason**
Piezoelectric Crystals and their Applications to Ultrasonics
D.V. Nostrand Company, Inc. New York, 1964
- [Midé] **Midé Technology Corporation**
200 Boston Avenue, Suite 2500, Medford, MA 02155, USA, www.mide.com
- [MS89] **M. Milgrom & S. Shtrikman**
Linear response of two-phase composites with cross-moduli : exact universal relations
Physical Review Vol.40, pp1568-1575, 1989
- [Mu82] **T. Mura**
Micromechanics of Defects in Solids – Second Revised Edition
Martinus Nijhoff Publishers, 1982
- [NBKC80] **R.E. Newnham, L.J. Bowen, K.A. Klicher & L.E. Cross**
Composite Piezoelectric Transducers
Materials in Engineering, Vol.2, pp 93-106, December 1980
- [NSC78] **R.E. Newnham, D.P. Skinner & L.E. Cross**
Connectivity and Piezoelectric-Pyroelectric Composites
Int. Res. Bull. Vol.13, pp 525-536, 1978
- [Nye57] **J.F. Nye**
Physical properties of crystals
Clarendon Press, Ed Oxford Univ. Press, 1957
- [Pas97] **J. Pastor**
Homogenization of linear piezoelectric media
Mechanics Research Communication, Vol. 24, No 2, pp 145-150, 1997
- [phy] <http://www.physikinstrumente.com/tutorial/>
- [PID] [wysiwyg://3/http://fortunecity.com/oasis/tahoe/414/help/html](http://fortunecity.com/oasis/tahoe/414/help/html)
- [PM90] **N.B. Philips & M.R. Murphy**
Preliminary Assessment of Advanced Rotor/Control System Concepts
Bell Helicopter Textron Inc, Aviation Applied Technology Directorate, US Army Aviation Systems Command; Fort Eustis, VA, USAAVSCOM TR 90-D-18, 1990

-
- [Poi00] **C. Poizat**
Modélisation numérique de matériaux et structures composites à fibres piézoélectriques
Thèse, Université de Technologies de Troyes, 2000
- [PS97] **S.E. Park & T.R. Shrout**
Relaxor based ferroelectric single crystals for electro-mechanical actuators
Mat. Res. Innov. , Vol. 1, pp 20-25, 1997
- [Reu29] **J. Reuss**
Berechnung des fleissgrenze von mischkristallen auf grund der platizitatsbedingung für einkristalle : Z. Angrew Math.Mech., 9(1), 49-58, 1929
- [SC90] **F.K. Straub & B.D. Charles**
Preliminary Assessment of Advanced Rotor/Control System Concepts (ARCS)
McDonnell Douglas Helicopter Co, Aviation Applied Technology Directorate, US Army Aviation Systems Command; Fort Eustis, VA, USAAVSCOM TR 90-D-3, 1990
- [SC94] **D.K. Samak & I. Chopra**
Design of High Force, High Displacement Actuators for Helicopter Rotors
SPIE Vol 2190, pp 86-98, 1994
- [Sch92] **K. Schulgasser**
Relationships between the effective properties of transversely isotropic piezoelectric composites
J. Mech. Phys. Solids, Vol.40, No2, pp 473-479, 1992
- [SG] **Saint Gobain**
Céramiques piézoélectriques
Quartz & Silice, B.P.102, 77793 Nemours Cedex, France
- [SM03] **Smart Materials Advanced Piezo Composites**
Smart Materials shape our future. Sensible, fast and reliable.
Smart Materials Corporation, P.O.Box 1115, Osprey, FL 34229, USA
info@smart-materials.com
- [TC95] **E. Du Tremolet de la Cheisserie & F. Clayssen**
Les matériaux magnétostrictifs, des matériaux qui bougent au gré des aimants
La Recherche, Vol. 26, pp 900-905, 1995
- [Voi29] **W. Voigt**
Lehzbook der Kristallphysik
2nd edition, 962pp, Teuber, Leipzig, 1928

- [WBH00] **W. Keats Wilkie, Robert G. Bryant, James W. High, Robert L. Fox, Richard F. Hellbaum, Antony Jalink Jr., Bruce D. Little and Paul Mirick**
Low-Cost Piezocomposite Actuator for Structural Control Applications
SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Struct. and Mat., Newport Beach, CA, 5-9 Mars, 2000
- [Wil89] **O.B. Wilson**
Introduction to theory and Design of Sonar Transducers
Peninsula Publishing, Los Altos, 1989
- [Zie77] **O.C. Zienkiewicz**
The finite element method
Mc Graw Hill, New York, 1977

Annexe

Annexe A : Relations constitutives pour un matériau piézoélectrique

Annexe B : Formulation utilisée dans les éléments du code ATILA

Annexe C : Détermination des coefficients homogénéisés

Annexe D : Coefficients utilisés pour la validation

Annexe E : Développement d'un élément de membrane

NOTATIONS

a	Côté du VER
\tilde{B}	Tenseur de courbure
\tilde{B}^e	Tenseur des dérivées des fonctions d'interpolation
\tilde{C}_i	Capacitance
$[c^D]$	Tenseur des constantes de rigidité à déplacement électrique constant
$[c^E]$	Tenseur des constantes de rigidité à champ électrique constant
\tilde{D}	Vecteur déplacement électrique
$[e]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
$[e^*]$	Matrice des constantes piézoélectriques en contrainte plane
\tilde{E}	Vecteur champ électrique
\tilde{F}	Vecteur des forces appliquées
$[g]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
$[h]$	Tenseur des constantes piézoélectriques
$[K]$	Matrice de rigidité
l	Longueur du VER
\tilde{N}^e	Fonctions d'interpolation
p	Densité surfacique
\tilde{Q}	Vecteur des charges appliquées
$[S]$	Tenseur des déformations
$[s^D]$	Tenseur des constantes d'élasticité à déplacement électrique constant
$[s^E]$	Tenseur des constantes d'élasticité à champ électrique constant
$\left[\begin{array}{c} E \\ s_{cp} \end{array} \right]$	Matrice réduite en contrainte plane
$\left[\begin{array}{c} E^* \\ s_{cp} \end{array} \right]^{-1}$	Inverse de la matrice réduite en contrainte plane

$[T]$	Tenseur des contraintes
u	Champ de déplacement
\tilde{u}	
U^e	Valeurs nodales du déplacement
\tilde{U}^e	
$[\beta^S]$	Tenseur des constantes diélectriques à déformation constante
$[\beta^T]$	Tenseur des constantes diélectriques à contrainte constante
$[\epsilon^S]$	Tenseur des constantes diélectriques à déformation constante
$[\epsilon^{S*}]$	Matrice des constantes diélectriques en contrainte plane
$[\epsilon^T]$	Tenseur des constantes diélectriques à contrainte constante
Φ^e	Vecteur nodal
$\tilde{\Phi}^e$	
φ	potentiel

Annexe A : Relations constitutives pour un matériau piézoélectrique

Relations constitutives :

Dans un matériau piézoélectrique, les tenseurs de déformation [S] et de contrainte [T], les vecteurs de déplacement électrique \tilde{D} et de champ électrique \tilde{E} sont liés par quatre couples équivalents de relations constitutives [BCJ64-Nye57]. En choisissant [S] et \tilde{E} comme variables indépendantes, on obtient :

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (\text{A. 1})$$

où $[c^E]$ est le tenseur d'ordre quatre des constantes de rigidité à champ électrique constant, $[e]$ le tenseur d'ordre trois des constantes piézoélectriques et $[\epsilon^S]$ le tenseur d'ordre deux des constantes diélectriques à déformation constante, les indices i, j, k et l variant de 1 à 3. Les propriétés remarquables des tenseurs [S] et [T] permettent de condenser leurs notations sous la forme de vecteurs à six composantes [DR74-BCJ64]. Le système précédent devient alors :

$$\begin{cases} T = c_{mn}^E S_n - e_{jn} E_j \\ D_i = e_{in} S_n + \epsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (\text{A. 2})$$

où les indices m et n varient de 1 à 6 et les indices i et j de 1 à 3. Les éléments c_{mn}^E et e_{jm} se déduisent simplement des éléments c_{ijkl}^E et e_{kij} [DR74-BCJ64]. En choisissant [S] et \tilde{D} comme variables indépendantes, on substitue au système précédent :

$$\begin{cases} T_m = c_{mn}^D S_n - h_{jm} D_j \\ E_i = -h_{in} S_n + \beta_{ij}^S D_j \end{cases} \quad (\text{A. 3})$$

En choisissant [T] et \tilde{E} , on obtient :

$$\begin{cases} S_m = s_{mn}^E T_n + d_{jm} E_j \\ D_i = d_{in} T_n + \varepsilon_{ij}^T E_j \end{cases} \quad (\text{A. 4})$$

Enfin en choisissant $[T]$ et D , on obtient :

$$\begin{cases} S_m = s_{mn}^D T_n + g_{jm} D_j \\ E_i = -g_{in} T_n + \beta_{ij}^T D_j \end{cases} \quad (\text{A. 5})$$

Relations entre les constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques :

$$d_{im} = \varepsilon_{ij}^T g_{jm} = e_{in} s_{nm}^E \quad (\text{A. 6})$$

$$e_{im} = \varepsilon_{ij}^S h_{jm} = d_{in} c_{nm}^E \quad (\text{A. 7})$$

$$g_{im} = \beta_{ij}^T d_{jm} = h_{in} s_{nm}^D \quad (\text{A. 8})$$

$$h_{im} = \beta_{ij}^S e_{jm} = g_{in} c_{nm}^D \quad (\text{A. 9})$$

i et j sont les indices électriques et sont compris entre 1 et 3.

m et n sont les indices mécaniques et sont compris entre 1 et 6.

L'exposant ^E signifie à champ constant (électrodes court-circuitées), ^D à induction constante (électrodes en circuit ouvert), ^T à effort constant (éprouvette libre), ^S à déformation constante (éprouvette encastrée).

Annexe B : Formulation utilisée dans les éléments du code ATILA

Transformation du domaine

Le domaine étudié par la méthode des éléments finis, dans lequel sont calculés le déplacement et le potentiel électrique, est découpé, par des lignes, en éléments interconnectés par des points appelés nœuds [Dec84]. L'ensemble des éléments constitue le maillage.

Dans un élément du domaine, le champ de déplacement et le potentiel électrique sont uniques et définis par des valeurs prises aux nœuds. Cette relation est assurée par les fonctions d'interpolation.

Fonction d'interpolation

Les valeurs du champ de déplacement et du potentiel électrique dans un élément fini sont définies par les valeurs qu'elles prennent aux nœuds de l'élément. Les fonctions d'interpolation permettent de faire le lien entre ces valeurs. Dans cette annexe, sont présentées les fonctions d'interpolation utilisées par le code ATILA.

On considère un élément triangulaire dont les trois sommets sont les trois nœuds et Φ_1^e , Φ_2^e et Φ_3^e les valeurs nodales du potentiel électrique sur ces trois nœuds. A partir de ces valeurs et des coordonnées des sommets, il est possible d'exprimer la valeur de φ par une interpolation linéaire.

$$\varphi^e = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \Phi_i^e \quad (\text{A. 10})$$

dont les coefficients N_i^e , appelés fonctions d'interpolation ou de pondération, sont représentés figure A.1.

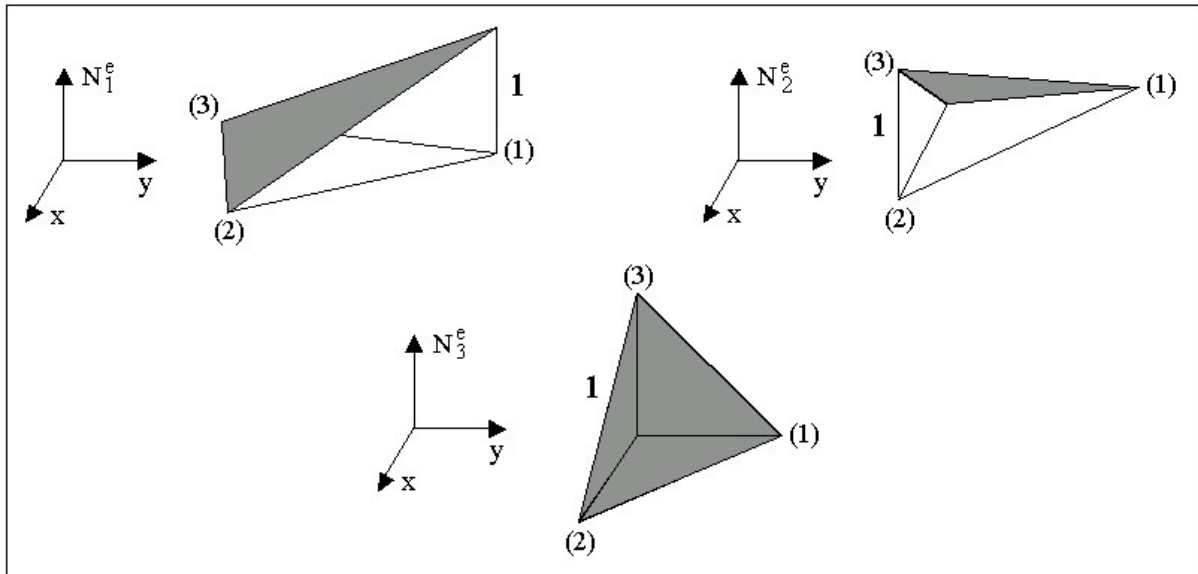


Figure A. 1 Fonctions d'interpolation dans un triangle à trois nœuds

Ces fonctions sont des polynômes en x et en y dont les neuf coefficients constants (3×3) sont définis par les relations :

$$N_i^e(x_i, y_i) = \delta_{ij} \quad (\text{A. 11})$$

où les indices i et j varient de 1 à 3. Pour ce même élément, si on s'intéresse au champ de déplacement \tilde{u} dont les valeurs nodales sont \tilde{U}_1 , \tilde{U}_2 et \tilde{U}_3 , on a :

$$\tilde{u}^e = \sum_{i=1}^3 [N_i^e] \tilde{U}_i^e \quad (\text{A. 12})$$

avec

$$[N_i^e] = N_i^e(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 13})$$

Pour un élément quadratique dont les quatre coins sont les nœuds, les relations précédentes restent valables à condition de faire varier les indices i et j de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur (Fig A. 2).

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des autres côtés sont les huit nœuds, les relations précédentes restent valables en faisant varier i et j de 1 à 8. Cette fois, les fonctions d'interpolation deviennent quadratiques sur les côtés (Fig A. 3). Cette procédure est évidemment généralisable à des interpolations d'ordre plus élevé ou à des éléments

tridimensionnels. Tous les détails peuvent être trouvés dans le livre de O.C. Zienkiewicz [Zie77].

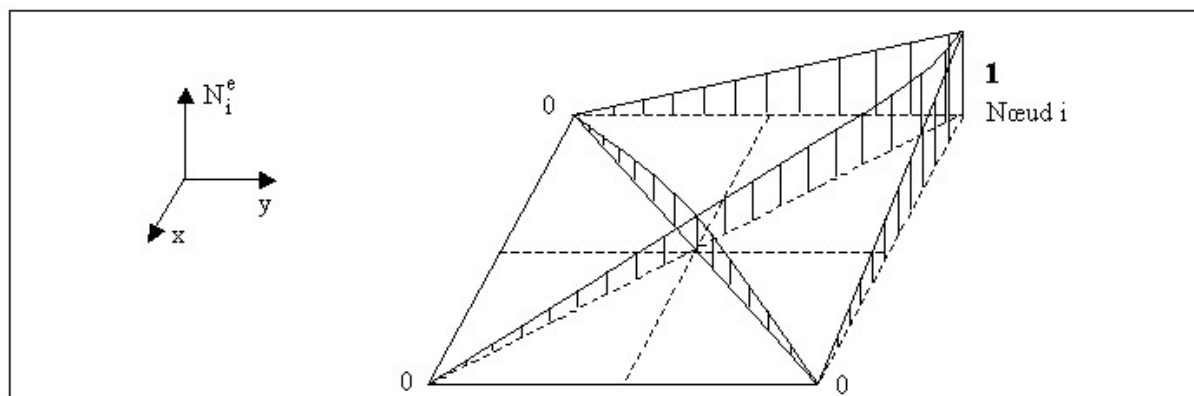


Figure A. 2 Exemple de fonction d'interpolation dans un quadrilatère à quatre nœuds

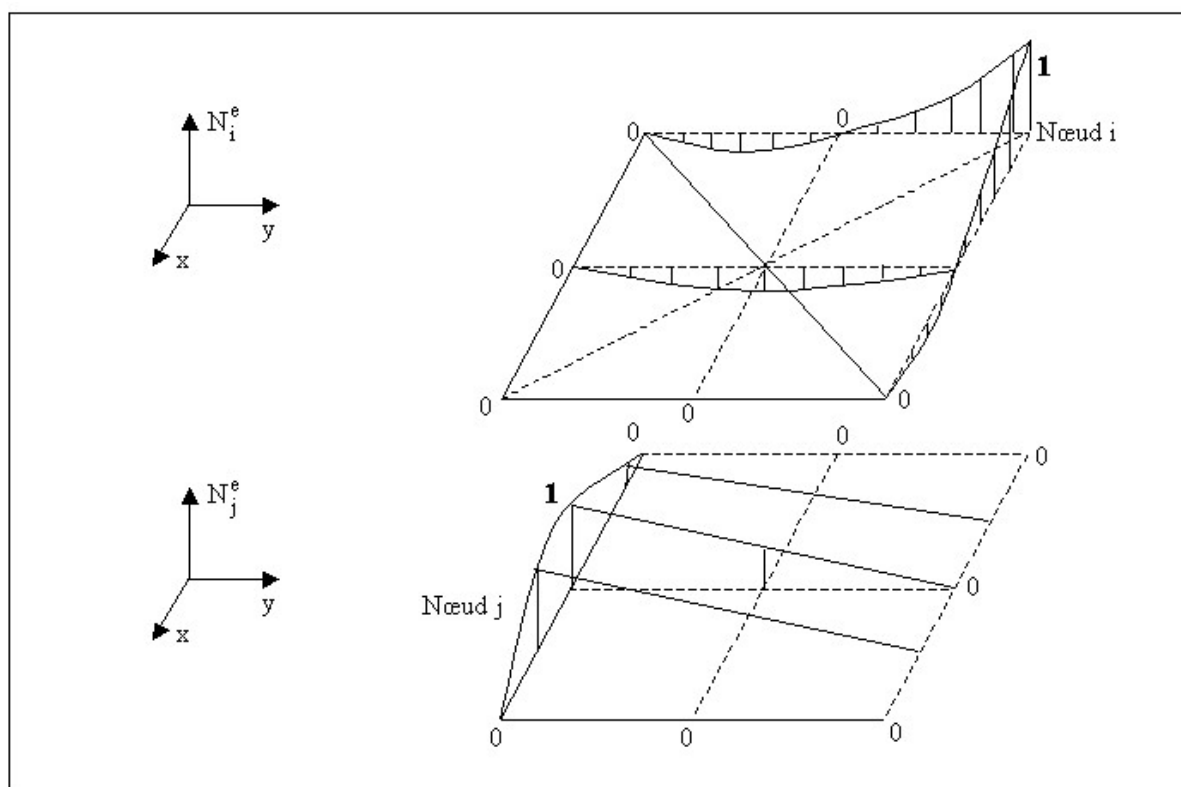


Figure A. 3 Exemples de fonctions d'interpolation dans un quadrilatère à huit nœuds

Formulation des différents tenseurs

Dans le cas d'un problème tridimensionnel, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (\text{A. 14})$$

ou encore, pour un élément à p nœuds :

$$\vec{E}^e = -[\overrightarrow{\text{grad}} N_1^e, \dots, \overrightarrow{\text{grad}} N_p^e] \Phi^e \quad (\text{A. 15})$$

En posant :

$$\vec{B}_{\varphi_i}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 16})$$

et

$$[\vec{B}_{\varphi}^e] = [\vec{B}_{\varphi_1}^e, \vec{B}_{\varphi_2}^e, \dots, \vec{B}_{\varphi_p}^e] \quad (\text{A. 17})$$

le champ électrique peut s'écrire :

$$\vec{E}^e = [\vec{B}_{\varphi}^e] \Phi^e \quad (\text{A. 18})$$

Pour les déformations, on obtient, en utilisant la notation à six composantes :

$$\vec{S}^e = [\vec{B}_u^e] U^e \quad (\text{A. 19})$$

Avec

$$[\vec{B}_u^e] = [\vec{B}_{u_1}^e, \vec{B}_{u_2}^e, \dots, \vec{B}_{u_p}^e] \quad (\text{A. 20})$$

Et

$$[\vec{B}_i^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 21})$$

Annexe C : Détermination des coefficients homogénéisés

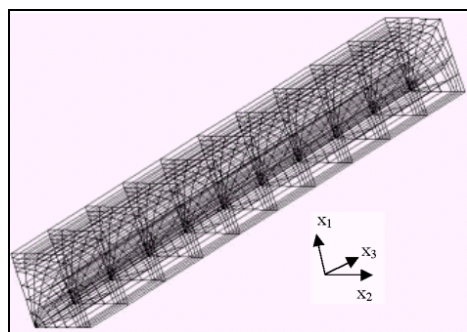
Cette Annexe récapitule les coefficients qui n'ont pas besoin d'être calculés au cours de l'homogénéisation d'un VER symétrique. La symétrie permet de faire des équivalences. Toutefois, leur calcul permet de vérifier au fur et à mesure les résultats obtenus. C'est pourquoi, leurs calculs sont exposés.

Détermination des coefficients élastiques

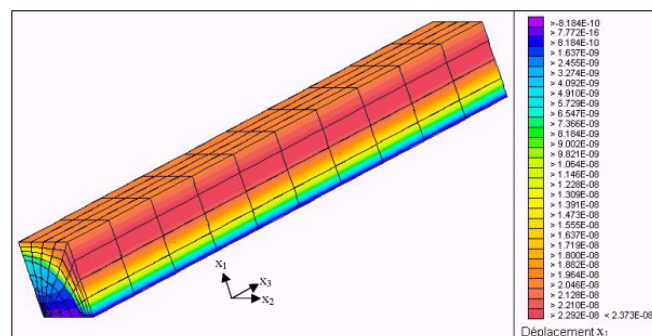
Détermination du coefficient effectif s_{12}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \quad (\text{A. 22})$$



a)



b)

Figure A. 4 a) Maillage du Volume Élémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_1

$$E_3 = 0 \quad (\text{A. 23})$$

$$S_1 = s_{12}^E T_2 \quad (\text{A. 24})$$

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (\text{A. 25})$$

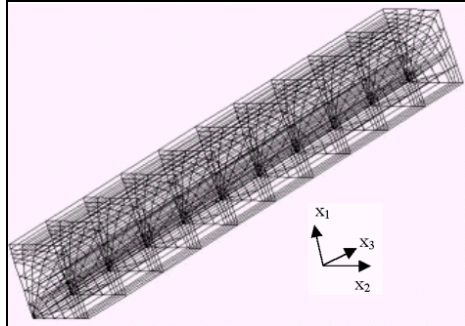
$$T_2 = \frac{F}{a * l} \quad (\text{A. 26})$$

$$s_{12}^{Eff} = \frac{S_1}{T_2} \quad (\text{A. 27})$$

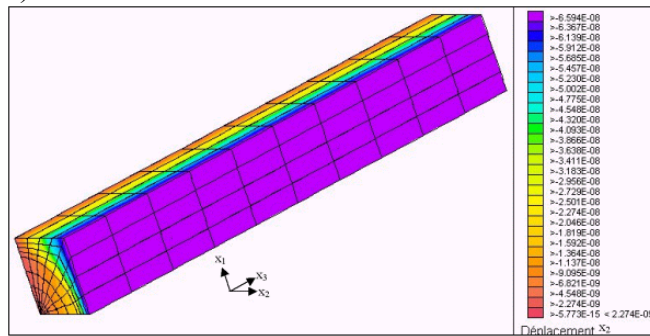
Détermination du coefficient effectif s_{22}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_2 = s_{21}^E T_1 + s_{22}^E T_2 + s_{23}^E T_3 + d_{32} E_3 \tag{A. 28}$$



a)



b)

Figure A. 5 a) Maillage du Volume Elémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_2

$$E_3 = 0 \tag{A. 29}$$

$$S_2 = s_{22}^E T_2 \tag{A. 30}$$

$$S_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{A. 31}$$

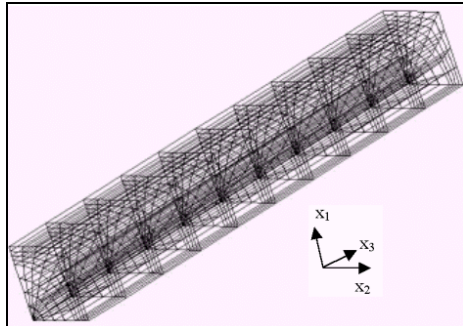
$$T_2 = \frac{F}{a * l} \tag{A. 32}$$

$$s_{22}^{Eff} = \frac{S_2}{T_2} \tag{A. 33}$$

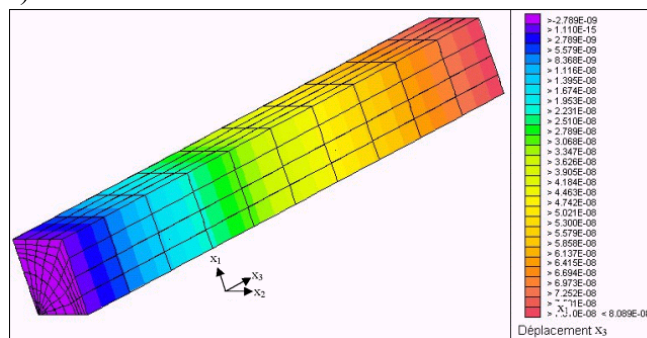
Détermination du coefficient effectif s_{32}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans l'équation suivante :

$$S_3 = s_{31}^E T_1 + s_{32}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \quad (A. 34)$$



a)



b)

Figure A. 6 a) Maillage du Volume Élémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_3

$$E_3 = 0 \quad (A. 35)$$

$$S_3 = s_{32}^E T_2 \quad (A. 36)$$

$$S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (A. 37)$$

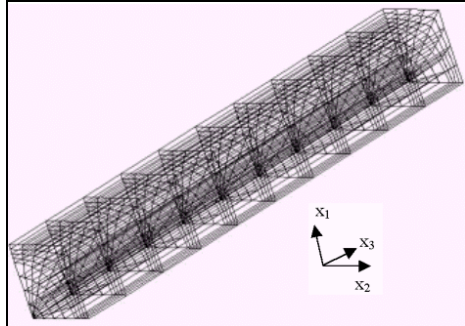
$$T_2 = \frac{F}{a * l} \quad (A. 38)$$

$$s_{32}^{Eff} = \frac{S_3}{T_2} \quad (A. 39)$$

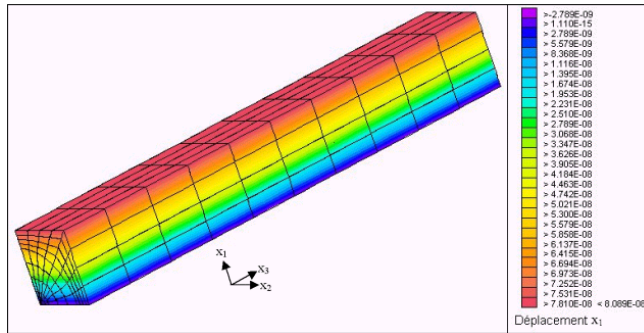
Détermination du coefficient effectif s_{13}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la relation suivante :

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \tag{A. 40}$$



a)



b)

Figure A. 7 a) Maillage du Volume Elémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_1

$$E_3 = 0 \tag{A. 41}$$

$$S_1 = s_{13}^E T_3 \tag{A. 42}$$

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{A. 43}$$

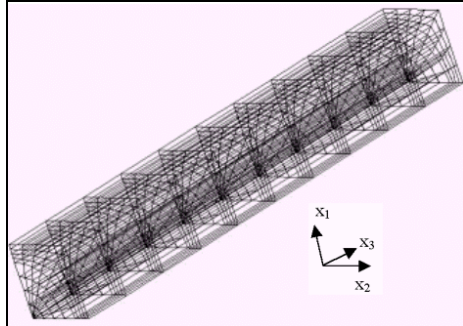
$$T_3 = \frac{F}{a^2} \tag{A. 44}$$

$$s_{13}^{Eff} = \frac{S_1}{T_3} \tag{A. 45}$$

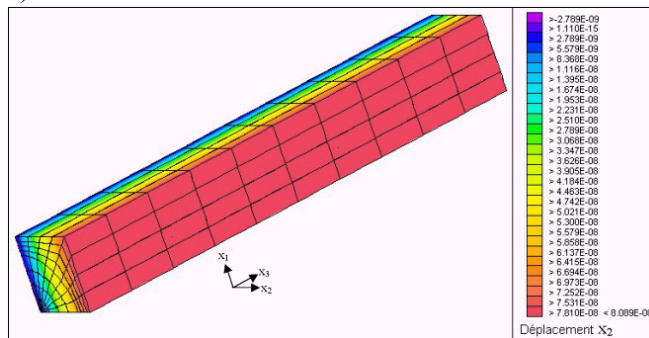
Détermination du coefficient effectif s_{23}^{Eff}

Le coefficient qui nous intéresse est exprimé dans la ligne suivante :

$$S_2 = s_{21}^E T_1 + s_{22}^E T_2 + s_{23}^E T_3 + d_{32} E_3 \quad (\text{A. 46})$$



a)



b)

Figure A. 8 a) Maillage du Volume Elémentaire Représentatif ; b) Maillage représentant le champ de déplacement suivant l'axe x_2

$$E_3 = 0 \quad (\text{A. 47})$$

$$S_2 = s_{23}^E T_3 \quad (\text{A. 48})$$

$$S_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (\text{A. 49})$$

$$T_3 = \frac{F}{a^2} \quad (\text{A. 50})$$

$$s_{23}^{\text{Eff}} = \frac{S_2}{T_3} \quad (\text{A. 51})$$

Détermination du coefficient piézoélectrique

Détermination du coefficient effectif d_{32}^{eff}

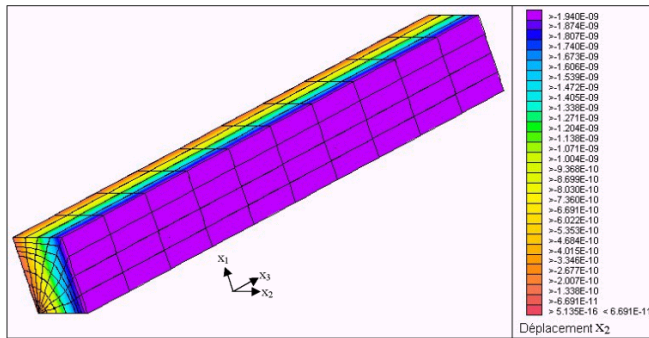


Figure A. 9 Maillage représentant le champ de déplacement suivant x_2

$$S_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (\text{A. 52})$$

$$E_3 = \frac{\Phi}{l} \quad (\text{A. 53})$$

$$d_{32}^{\text{eff}} = \frac{S_2}{E_3} \quad (\text{A. 54})$$

Détermination du coefficient diélectrique

Détermination du coefficient $\epsilon_{22}^{\text{Teff}}$

$$D_2 = d_{24} T_4 + \epsilon_{22}^T E_2 \quad (\text{A. 55})$$

$$D_2 = \epsilon_{22}^T E_2 \quad (\text{A. 56})$$

Avec :

$$D_2 = \frac{\Phi * C}{a * l} \quad (\text{A. 57})$$

Et :

$$E_2 = \frac{\Phi}{a} \quad (\text{A. 58})$$

Il est possible de déterminer le coefficient effectif :

$$\epsilon_{22}^{\text{Teff}} = \frac{D_2}{E_2} \quad (\text{A. 59})$$

Annexe D : Constantes utilisées pour la validation

Les coefficients utilisés pour la validation sont répertoriés dans le tableau suivant :

Coefficients	Matrice	Fibre : PZT5A
ρ [kg/m ³]	1200	7750
s_{11}^E [m ² /N]	4.00E-10	1.64E-11
s_{12}^E [m ² /N]	-1.80E-10	-5.74E-12
s_{13}^E [m ² /N]	-1.80E-10	-7.22E-12
s_{33}^E [m ² /N]	4.00E-10	1.88E-11
s_{44}^E [m ² /N]	1.16E-09	4.75E-11
s_{66}^E [m ² /N]	1.16E-09	4.43E-11
d_{15} [C/N]	0.	5.84E-10
d_{31} [C/N]	0.	-1.71E-10
d_{33} [C/N]	0.	3.74E-10
ϵ_{11}^S [F/m]	8.85E-10	9.16E-09
ϵ_{33}^S [F/m]	8.85E-10	8.30E-09

Annexe E : Développement d'un élément de membrane

Cette Annexe décrit la mise en place d'un élément fini de membrane dans le code ATILA. Dans un premier temps, un bref rappel des possibilités déjà existantes dans le code est exposé. Ensuite, la mise en place de l'élément fini est proposée. Le principe repose sur le dédoublement des nœuds qui sont soit électriques soit élastiques.

Élément contenu dans le code ATILA

Le code élément Fini ATILA contient déjà une bibliothèque d'éléments. La plupart sont isoparamétriques. Ils sont définis de manière à suivre des surfaces même courbes. La contrainte majeure est d'éviter la distorsion. Une distorsion trop importante entraîne parfois des problèmes de calcul comme un jacobien nul. Dans le cas d'élément courbé, le radian à la courbe sur chaque face ne doit pas excéder la longueur maximale du côté. Le ratio entre la plus petite et la plus grande longueur de l'élément ne doit pas excéder 5 dans le cas d'un calcul en double précision.

Le code ATILA a acquis au fil des années un panel important de types de matériaux et chacun d'entre eux peut être représenté par des éléments finis. Le tableau A.1 récapitule les différents matériaux représentés et les éléments qui le caractérisent [ATI02].

type	Type d'élément	Matériaux	Nombre de noeuds
2D	linéaire	Élastique Interface Couplage FEM-BEM Impédance mécanique locale	2/3 6 3 3
	triangulaire	Élastique Fluide Magnétique Magnétostrictive Piézoélectrique	6
	quadrilatère	Composite Élastique Fluid Magnétique Magnétostrictif Piézoélectrique	8
3D	triangulaire	Composite Interface Piézoélectrique Couplage FEM-BEM Impédance mécanique locale	6 12 6 6 6

quadrilatère	Composite	8
	Élastique	8
	Interface	16
	Magnétostrictif	16
	Piézoélectrique	8
Tétraédrique	Couplage FEM-BEM	8
	Impédance mécanique locale	8
	Élastique	10
	Fluide	13
Pyramidal	Magnétique	15
Prismatique	Magnétostrictif	
Hexaédrique	Piézoélectrique	20

Tableau A. 1 Tableau récapitulatif des Eléments Finis existant dans le code ATILA

Condition imposée par l'élément de membrane

Une membrane est un voile dont la surface moyenne est un plan. Les conditions sont donc celles des plaques (chargement uniquement normal) et celles des voiles (pas de moments linéiques) [Des90-Ber94-BD92].

Les équations d'équilibre de l'étude des coques se réduisent dans le cas des membranes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{T}} &= 0 \\ \tilde{p}^3 + \tilde{\mathbf{T}} \otimes \tilde{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 60})$$

Avec $\tilde{\mathbf{T}}$ la contrainte, \tilde{p} la densité surfacique de force extérieure et $\tilde{\mathbf{B}}$ le tenseur de courbure normale. Ces équations d'équilibre ne sont valables que sur la configuration déformée. En théorie des membranes, cette approximation est considérée, $\tilde{\mathbf{B}} = 0$, les équations se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{T}} &= 0 \\ \tilde{p}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 61})$$

Cela signifie qu'une membrane ne peut pas résister à un chargement normal.

Relation générale dans le cas de la membrane piézoélectrique

Reprenons le système d'équation de la piézoélectricité

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^T & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 62})$$

Dans le cas de la polarisation suivant l'axe 3 :

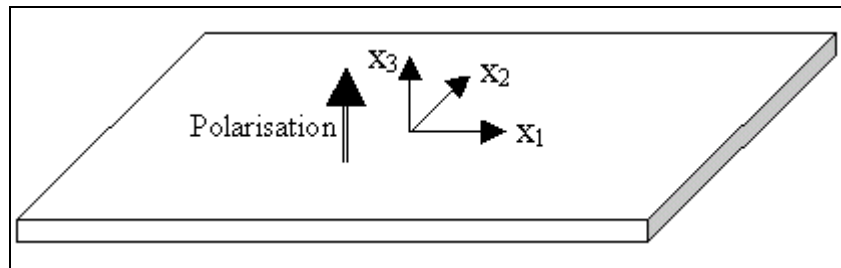


Figure A. 10 Membrane polarisée dans le sens de l'épaisseur (axe 3)

Les conditions de membrane (contraintes planes) s'expriment sous la forme :

$$T_3 = T_4 = T_5 = 0 \quad (\text{A. 63})$$

et

$$S_3 = 0 \quad (\text{A. 64})$$

Le système se réduit donc à :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 65})$$

Si la matrice est inversée, le système reliant les grandeurs physiques devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & \frac{-s_{12}^E}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & 0 & -d_{31} \frac{(s_{11}^E - s_{12}^E)}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} \\ \frac{-s_{21}^E}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & \frac{s_{22}^E}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & 0 & -d_{32} \frac{(s_{11}^E - s_{12}^E)}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_{66}^E} & 0 \\ d_{31} \frac{(s_{11}^E - s_{12}^E)}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & d_{32} \frac{(s_{11}^E - s_{12}^E)}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} & 0 & \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2 \frac{(s_{11}^E - s_{12}^E)}{s_{11}^E s_{22}^E - s_{21}^{E2}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A. 66})$$

Sous la forme générale, en notant $[s_{cp}^E]$, la matrice réduite en contrainte plane de $[s^E]$ et

$[s_{cp}^{E*}]^{-1}$ l'inverse de cette matrice.

En ôtant les lignes et les colonnes inutiles en contrainte plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T} = [s_{cp}^{E*}]^{-1} \tilde{S} - [s_{cp}^{E*}]^{-1} [d]^t \tilde{E} \\ \tilde{D} = [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} \tilde{S} - [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} [d]^t \tilde{E} + [\varepsilon^T] \tilde{E} \end{array} \right. \quad (\text{A. 67})$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T} = [s_{cp}^{E*}]^{-1} \tilde{S} - [e^*]^t \tilde{E} \\ \tilde{D} = [e^*] \tilde{S} + [\varepsilon^{S*}] \tilde{E} \end{array} \right. \quad (\text{A. 68})$$

Avec :

$$[e^*] = [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} \quad (\text{A. 69})$$

Et

$$[\varepsilon^{S*}] = [\varepsilon^T] - [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} [d]^t \quad (\text{A. 70})$$

avec

$$[\varepsilon^T] = [\varepsilon^S] + [d][s^E]^{-1} [d]^t \quad (\text{A. 71})$$

d'où la relation donnant le tenseur des constantes diélectriques à déformation constante en contrainte plane :

$$[\varepsilon^{S*}] = [\varepsilon^S] - [d] \left([s^E]^{-1} - [s_{cp}^{E*}]^{-1} \right) [d]^t \quad (\text{A. 72})$$

Il faut maintenant vérifier si cette relation reste vraie pour le cas d'une polarisation dans la membrane, par exemple dans la direction 1 :

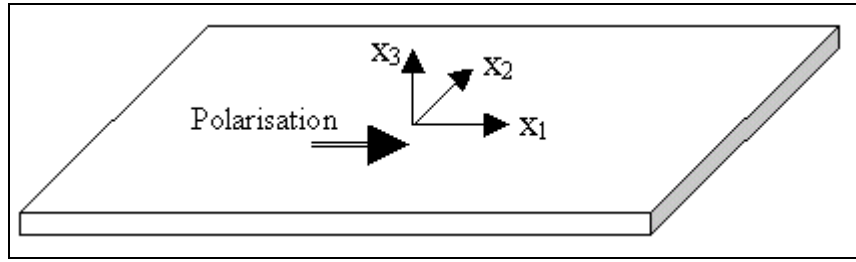


Figure A. 11 Membrane polarisée dans le sens de la membrane (axe 1)

Le système devient :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33}^E & s_{31}^E & s_{32}^E & 0 & 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{11}^E & s_{12}^E & 0 & 0 & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ s_{23}^E & s_{21}^E & s_{22}^E & 0 & 0 & 0 & d_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 \\ d_{33} & d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 73})$$

Les conditions de membrane (contraintes planes) s'expriment sous la forme :

$$T_3 = T_4 = T_5 = 0 \quad (\text{A. 74})$$

et

$$S_3 = 0 \quad (\text{A. 75})$$

Le système précédent se réduit donc à :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33}^E & s_{31}^E & 0 & d_{33} \\ s_{13}^E & s_{11}^E & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ d_{33} & d_{31} & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ E_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 76})$$

Si la matrice est inversée, le système reliant les grandeurs physiques devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{31}^E{}^2} & \frac{-s_{31}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{31}^E{}^2} & 0 & -d_{33} \frac{(s_{33}^E - s_{31}^E)}{s_{33}^E s_{11}^E - s_{31}^E{}^2} \\ \frac{-s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{31}^E{}^2} & \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{31}^E{}^2} & 0 & -d_{31} \frac{(s_{33}^E - s_{31}^E)}{s_{33}^E s_{11}^E - s_{31}^E{}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_{55}^E} & 0 \\ d_{33} \frac{(s_{33}^E - s_{31}^E)}{s_{33}^E s_{11}^E - s_{31}^E{}^2} & d_{31} \frac{(s_{33}^E - s_{31}^E)}{s_{33}^E s_{11}^E - s_{31}^E{}^2} & 0 & \epsilon_{33}^T - d_{33}{}^2 \frac{(s_{33}^E - s_{31}^E)}{s_{33}^E s_{11}^E - s_{31}^E{}^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_1 \end{array} \right\} \quad (\text{A. 77})$$

Dans le cas général, les relations sont donc bien les mêmes que pour le cas précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T} = [s_{cp}^{E*}]^{-1} \tilde{S} - [s_{cp}^{E*}]^{-1} [d]^t \tilde{E} \\ \tilde{D} = [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} \tilde{S} - [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} [d]^t \tilde{E} + [\epsilon^T] \tilde{E} \end{array} \right. \quad (\text{A. 78})$$

$$[e^*] = [d][s_{cp}^{E*}]^{-1} \quad (\text{A. 79})$$

$$[\epsilon^{S*}] = [\epsilon^S] - [d]([s^E]^{-1} - [s_{cp}^{E*}]^{-1})[d]^t \quad (\text{A. 80})$$

Le principe fonctionne également pour une polarisation suivant x_2 .

Construction de l'élément fini quadrilatère pour un film mince

Les matrices de rigidité mécanique, piézoélectrique et diélectrique ont été définies dans le chapitre II [Zie77]. En statique, le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{cc} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}] & [K_{\phi\phi}] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{U} \\ \tilde{\Phi} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{F} \\ -\tilde{Q} \end{array} \right\} \quad (\text{A. 81})$$

Avec

$$[K_{uu}] = \iiint_V [B_u]^t [c_{cp}^E] [B_u] dV \quad (\text{A. 82})$$

$$[K_{u\phi}] = \iiint_V [B_u]^t [e^*] [B_\phi] dV \quad (\text{A. 83})$$

$$[K_{\phi\phi}] = -\iiint_V [B_\phi]^t [\epsilon^{S*}] [B_\phi] dV \quad (\text{A. 84})$$

Les films piézoélectriques ont une épaisseur très faible (quelques centaines de microns) qui permettent de les assimiler à des membranes travaillant en contrainte plane. Le potentiel peut varier tant dans le sens de l'épaisseur que dans le sens de la membrane.

L'élément quadrilatère comporte deux couches de huit nœuds chacun. La première couche comprend les nœuds (1 à 4 et 9 à 12) ayant trois degrés de liberté (u_x , u_y et φ). La deuxième couche comprend les nœuds (5 à 8 et 13 à 16) ayant un seul degré de liberté par nœud, le potentiel φ . Les nœuds de la couche supérieure et de la couche inférieure ont les mêmes coordonnées géométriques.

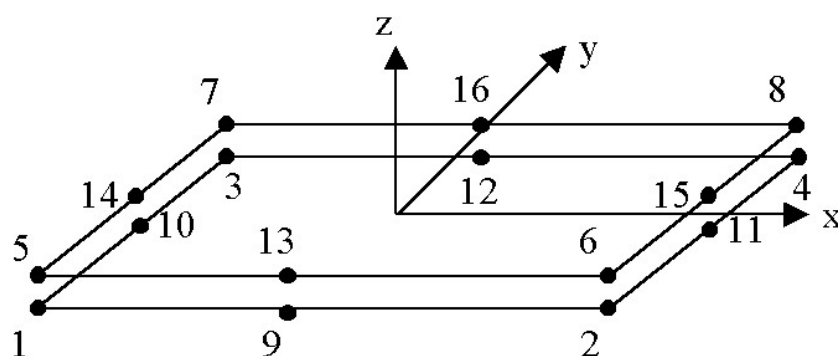


Figure A. 12 Élément de film mince

Les variations linéaires du potentiel suivant l'épaisseur et la membrane sont prises en compte dans le calcul des matrices.

L'élément a été développé dans le cas d'une polarisation suivant l'axe z . Il faut prendre en compte la variation du potentiel selon l'épaisseur de la membrane dans le calcul des matrices $[K]$. L'intégration selon l'épaisseur est réalisée analytiquement.

Résumé

Les composites à fibres piézoélectriques sont utilisés dans l'aéronautique pour leur légèreté et leur capacité d'activation. Mais leur coût de fabrication demeure élevé et la modélisation est une solution rentable pour les optimiser. Cependant, compte tenu de la taille très petite des composites en comparaison à la structure sur laquelle ils agissent telle que les pales d'hélicoptère, les techniques d'homogénéisation sont couramment utilisées pour modéliser ces composites. Une nouvelle technique purement numérique, à l'aide du code éléments finis ATILA, est développée afin de palier aux inconvénients des méthodes analytiques précédentes : la géométrie peut être complexe et plusieurs phases peuvent être présentes dans le composite. La technique d'homogénéisation est basée sur la combinaison de deux méthodes (Volume Élémentaire Représentatif et Propagation des Ondes). Le tenseur entier est obtenu. La méthode est validée par la comparaison des résultats obtenus aux résultats issus d'autres méthodes d'homogénéisation.

Des expériences sont ensuite menées sur un actionneur réel : les constantes homogénéisées sont comparées aux constantes fournies par le fabricant et celles déduites des expériences. Un bon accord est trouvé. C'est pourquoi, l'actionneur est enfin placé sur une plaque élastique et ses performances pour le contrôle de forme sont discutées.

Mots clés : contrôle de forme, piézoélectricité, composites, méthode d'homogénéisation, méthode des éléments finis

Summary

Composite materials made of piezoelectric fibres are mainly used in aeronautics because of their light mass and their high actuation capability. Due to their high manufacturing cost, modelling seems to be a well-suited approach for their optimisation. In the meantime, their size is very small in comparison with the structure on which they act, rotor blade for instance. Therefore, homogenisation techniques are often used to model active fibre composites. A new numerical homogenisation technique is developed, based on the ATILA finite element code. It overcomes the limitations of previous analytical methods : the geometry can be complex and more than two phases can be taken into account in the model. The homogenisation technique is based on the combination of two methods (Representative Volume Elementary & Wave Propagation), allowing the full tensor of constants to be known. The results obtained with the method are in good agreement with the results obtained by other analytical methods.

Experiences are then carried out on an actual actuator: numerical homogenised constants are compared with the constants given by the manufacturer and with the constants deduced from the experience. A good agreement is obtained. Therefore, the actuator is set on an elastic plate and its actuating performances are discussed.

Keywords : shape control, piezoelectricity, composites, homogenisation method, finite element method