No. d'ordre : 3575

Université des Sciences et Technologies de LILLE

Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Discipline : Mécanique

présentée par

Cosmin GRUESCU

Approche par changement d'échelle de l'endommagement des matériaux anisotropes : Application aux composites à matrice fragile

Soutenue le 20 décembre 2004
devant le jury composé de

S. DEGALLAIX	Professeur, Ecole Centrale de Lille	Présidente
A. GIRAUD	Professeur, Université de Metz, Metz	Rapporteur
S. MAGHOUS	Dr. HDR, ENPC, Champs-sur-Marne	Rapporteur
D. HALM	Maître de Conférences, ENSMA, Futuroscope Chasseneuil	
J.-F. MAIRE	Dr., ONERA-DMSE, Châtillon	
D. KONDO	Professeur, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq	Directeur de thèse

© 2005 Tous droits réservés.

Mis en page avec la classe thloria.

© 2005 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

A Lăcrimioara.

Qui, parfois, je ne mérite pas.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Enfin la fin, me voilà au bout du chemin, au moment où il faut tout résumer en quelques lignes...Comment faire maintenant, comment s'y prendre pour parler de tout ? Je me lance sans trop y réfléchir car plus j'essaie de trouver les bonnes phrases, plus je crois que je n'y arriverai pas.

Je me rappelle d'abord le soir du 25 novembre 2000, quand je suis arrivé à Lille. C'était pour moi le début d'une aventure, le moment de faire la connaissance d'une personne dont l'esprit, l'enthousiasme, les qualités humaines et professionnelles, le soutien qu'il m'a apporté pendant ces années passées au LML m'ont marqué à jamais. Il s'agit bien sûr de mon directeur de thèse, Djimedo Kondo, qui trouvera ici le témoignage de mon amitié, mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde reconnaissance pour tout ce qu'il m'a apporté, qu'il s'agisse de la passion pour la recherche, de la rigueur, ou encore du soutien moral. Les longues soirées passées ensemble au labo, son encadrement original, sa bonne humeur sont pour moi autant des souvenirs inoubliables. Je te souhaite, Djim, de continuer sur cette voie et une très grande réussite sur le chemin sinueux de la recherche.

Je tiens ensuite à exprimer ma sincère reconnaissance à M-me Suzanne Degallaix, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma thèse, à Messieurs A. Giraud et S. Maghous qui ont montré un intérêt énorme pour mon travail et qui ont accepté d'examiner mes travaux en tant que rapporteurs. Je salue également Mr. D. Halm et Mr. J.-F. Maire pour le temps qu'ils ont consacré à parcourir le manuscrit, pour les observations très intéressantes dont ils m'ont fait part et pour leur disponibilité. Je remercie G. Caignaert, directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille, pour l'accueil chaleureux et pour les conditions appréciables dans lesquelles j'ai pu effectuer mon travail de thèse. J'exprime ma reconnaissance au M.E.N.R.T. et au C.N.R.S. pour le soutien financier lors de ce travail.

C'est maintenant envers mes collègues de bureau que je tourne le regard. Dans un premier temps me vient à l'esprit Hélène et Vincent. Comment pourrais-je oublier leur soutien, leur patience et disponibilité, la bonne humeur mais surtout l'amitié qu'ils m'ont prouvé dans des nombreuses situations ? Deux vrais amis qui pour moi resteront toujours des modèles à suivre tant sur le plan professionnel que sur le plan humain ! Je garderai aussi à l'esprit Assef, Vincent et Vanessa. Ils ont bien rempli le vide laissé dans le bureau après le départ de Hélène et Vincent, je les remercie pour leur présence, pour leur soutien et encouragements ; ils ont grandement contribué à rendre ce travail agréable. J'adresse maintenant mes remerciements à Céline et Stéphane pour m'avoir rendu si souvent service ; votre aide m'a permis de débloquer de nombreuses situations délicates,

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

qu'il s'agisse de la phase de rédaction ou de mes autres problèmes en tout genre. Le soutien et les encouragements que vous m'avez toujours apporté méritent bien plus que ces quelques lignes !
Je me souviens encore d'une atmosphère unique et particulièrement agréable autour de la grande table dans la cafétéria. Occupent ici des places importantes toutes les personnes qui m'ont fait part de leur expérience et avec lesquelles j'ai eu des nombreuses discutions et débats. Je pense spécialement à la bande des thésards : Alexandre, Anne-Lize, Emilie, Fabien, Florent, Karine, Nicolas, Nidal, Olivier. Entre autres je salue un certain nombre de chercheurs : Malek, Fabrice, les deux Eric, Farzam, Jean-Philippe, Jean-Marc, Olivier, Laurent ainsi que le personnel administratif du laboratoire : Marie-Christine, Natalie, Anne-Marie.

Pour finir je me tourne vers ma famille, qui m'a soutenu et encouragé pendant toute la durée des mes études ; pour eux ces années ont été bien longues, ils méritent toute ma reconnaissance et gratitude. Je pense spécialement à ma grande-mère et surtout à mon épouse, Lăcrimioara. Pendant tout ce temps, elle m'a soutenu et aidé comme personne d'autre n'aurait pas pu le faire..ce travail lui doit beaucoup plus...

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Table des matières

Notations **11**

Introduction générale **13**

Chapitre I Endommagement des matériaux composites à matrice fragile : mécanismes physiques et modélisation **17**

I.1 Microfissuration et comportement mécanique des composites à matrice fragile . . . 17

I.1.1 Aspects microstructuraux des composites à matrice fragile 18

I.1.2 Mécanismes physiques d'endommagement 19

I.1.3 Comportement sous sollicitations mécaniques 22

I.1.4 Evaluation de l'endommagement à l'aide de mesures ultrasonores 25

I.2 Modèles de comportement élastique endommageable de composites anisotropes . . 29

I.2.1 Concepts de base de la Théorie de représentation des fonctions tensorielles 30

I.2.2 Modèle d'endommagement anisotrope de Halm et al. [39] 31

I.2.3 Commentaires 32

I.3 Approches micromécaniques de l'endommagement par microfissuration des milieux anisotropes 32

I.4 Conclusions 34

Chapitre II Comportement macroscopique des milieux orthotropes microfissurés : approche bidimensionnelle [36] **37**

II.1 Concepts de base. Variables d'état macroscopiques. Energie 38

II.1.1 Le Volume Elémentaire Représentatif 38

II.1.2 Homogénéisation des milieux fissurés 39

II.1.3 Introduction des paramètres décrivant la fissuration 40

II.1.4 Principe de détermination de l'énergie libre macroscopique 41

II.1.5 Relation entre les variables microscopiques et les grandeurs macroscopiques 44

II.2 Potentiels et propriétés homogénéisées 45

II.2.1 Enthalpie libre macroscopique. Approche en contraintes 46

II.2.2 Introduction du tenseur de texture 47

II.2.3 Généralisation pour une distribution quelconque de microfissures 49

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

II.3 Critère d'endommagement. Loi d'évolution de l'endommagement 50
II.3.1 Critère d'endommagement 51
II.3.2 Lois d'évolution de l'endommagement 52
II.3.3 Formulation en vitesse de la loi d'endommagement 52
II.3.4 Intégration numérique locale de la loi de comportement 53
II.4 Identification et résultats numériques pour un composite unidirectionnel SiC-SiC 2D 54
II.4.1 Essais de traction simple dans les axes de symétrie et hors axes 54
II.4.2 Evolution des composantes du tenseur de souplesse avec le chargement . . . 60
II.5 Conclusions 63

Chapitre III Approche alternative par tenseur d'Eshelby de l'homogénéisation des milieux anisotropes fissurés 65

III.1 Principe de l'homogénéisation linéaire des milieux anisotropes contenant des fissures 66
III.1.1 Introduction 66
III.1.2 Milieux anisotropes contenant une fissure du type $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \quad |z_3| < \infty$ 68
III.2 Détermination du tenseur $\mathbb{P}$: fissure arbitrairement orientée dans un milieu orthotrope 71
III.2.1 Introduction 71
III.2.2 Cas d'une fissure arbitrairement orientée dans un milieu orthotrope 72
III.2.3 Résultats analytiques issus du calcul du tenseur de Hill $\mathbb{P}$ 73
III.2.4 Composantes du tenseur $\mathbb{T}$ 79
III.3 Validation des résultats obtenus 80
III.3.1 Vérification des résultats dans le cas d'un système de fissures parallèles dont la normale coïncide avec un axe d'orthotropie. 80
III.3.2 Validation par l'étude en élasticité plane d'une cavité elliptique en milieu orthotrope [90] 81
III.4 Estimations des propriétés macroscopiques du milieu orthotrope fissuré 83
III.4.1 Le schéma dilué 84
III.4.2 Le Modèle de Mori Tanaka appliqué aux milieux orthotropes fissurés 85
III.5 Conclusions 87

Chapitre IV Approche macroscopique 3D de l'endommagement des milieux orthotropes de révolution [46] 89

IV.1 Propriétés macroscopiques 3D et endommagement des milieux isotropes transverses fissurés 90
IV.1.1 Homogénéisation des matériaux anisotropes contenant des fissures de type "penny-shaped" 90
IV.1.2 Application des théorèmes de représentation à la modélisation de l'endommagement dans les milieux isotropes transverses 92
IV.1.3 Formulation simplifiée sur la base des résultats de la micromécanique . . . 93
IV.2 Développement du modèle d'endomagement 3D. Mise en oeuvre et validation . . . 94

IV.2.1 Introduction 94
IV.2.2 Critère d'endommagement et lois d'évolution 95
IV.2.3 Application du modèle : essai de traction sur un composite C-SiC 2D . . . 96
IV.3 Modélisation de l'anisotropie induite à l'aide d'un tenseur d'endommagement d'ordre 2100
IV.3.1 Formulation macroscopique basée sur un tenseur d'endommagement d'ordre 2100
IV.3.2 Critère et loi d'évolution 102
IV.3.3 Etude des capacités prédictives du modèle sous sollicitations de traction . . 103
IV.3.4 Prédictions du modèle et validations 104
IV.4 Conclusions 107

Conclusion générale et perspectives **109**

Bibliographie **113**

Annexe A Modèle macroscopique 3D d'endommagement des matériaux orthotropes de révolution de [15] **123**

Annexe B Approche par potentiels complexes des milieux anisotropes fissurés **127**
B.1 Potentiels complexes en élasticité plane anisotrope 127
B.2 Application aux milieux fissurés 129

Annexe C Formulation en déformations du modèle micromécanique 2D **131**
C.1 Enérgie libre macroscopique 131
C.2 Reécriture à l'aide du tenseur de structure décrivant l'anisotropie initiale 133
C.3 Potentiel thermodynamique pour une distribution quelconque de fissures 134
C.4 Lois d'état, critère d'endommagement et loi d'évolution 134

Annexe D Modèle macroscopique 2D basé sur un tenseur du second ordre D **137**
D.1 Introduction 137
D.2 Potentiel thermodynamique 138
D.3 Lois d'état, critère et loi d'évolution de l'endommagement 139

Annexe E Composantes des tenseurs $\mathbb{C}'^s$ et $\mathbb{P}$ **141**
E.1 Expressions des composantes du tenseur $\mathbb{C}'^s$ 141
E.2 Expressions des composantes du tenseur $\mathbb{P}$ 142

Annexe F Force thermodynamique F^d et tenseur $\mathbb{U}$ du modèle 3D **143**

Annexe G Validations complémentaires sur un matériau SiC-SiC isotrope transverse **145**
G.1 Modèle microsmécanique d'endommagement 3D : comparaison calcul/expérience sur un SiC-SiC 145

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

G.2 Modèle macroscopique 3D basé sur un tenseur d'ordre 2 : comparaison calcul/expérience sur un SiC-SiC 148

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire	$.$	contraction simple
$\underline{a}$	vecteur	$:$	double contraction
$\mathbf{a}$	tenseur d'ordre deux	$\otimes$	produit tensoriel
$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre quatre	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé
$\mathbf{1}$	tenseur unité d'ordre deux	$\mathbb{I}$	tenseur unité d'ordre quatre
$\mathbb{J}$	$= \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$	$\mathbb{K}$	$= \mathbb{I} - \mathbb{J}$

$(\mathbf{a}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})$

• Paramètres matériau

$\mathbb{C}^s$	tenseur d'élasticité de la matrice solide ;	$\mathbb{S}^s = (\mathbb{C}^s)^{-1}$
$\mathbb{C}^{hom}$	tenseur d'élasticité homogénéisé ;	$\mathbb{S}^{hom} = (\mathbb{C}^{hom})^{-1}$

• Notations communes à tous les chapitres

$\mathbf{E}$	tenseur de déformation macroscopique
$\mathbf{\Sigma}$	tenseur de contrainte macroscopique
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation microscopique
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur de contrainte microscopique
$\mathbf{A}$	tenseur de structure
β	paramètre caractérisant l'ouverture des microfissures
α	paramètre caractérisant le glissement sur les lèvres des microfissures

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Introduction générale

Les matériaux composites à matrice céramique "CMC" sont conçus pour diverses applications thermostructurales dans des domaines tels que l'aéronautique, les constructions civiles, l'industrie navale. Cette diversité d'applications industrielles est possible car ces matériaux peuvent supporter de manière satisfaisante tant les chargements mécaniques que d'autres types de sollicitations (abrasion, agents chimiques, hautes temperatures) issues des fonctionnalités spécifiques auxquelles sont destinées les structures impliquant ces matériaux, ou encore des environnements auxquels ces matériaux sont exposés.

Un des inconvénients majeurs des matériaux céramiques est leur fragilité, propriété traduite entre autres par une faible résistance à la propagation des microfissures, et donc par une grande susceptibilité à l'endommagement. La solution qui permet de palier au caractère fragile de cette classe de matériaux réside dans l'incorporation de renforts fibreux dans la matrice céramique. Ceci permet d'obtenir une certaine ductilité (dépendant de la nature de l'interface matrice-fibre) et d'améliorer de manière satisfaisante la réponse mécanique sous charges. Un tel procédé de renforcement de la matrice céramique a parallèlement pour conséquence de conférer généralement au composite des propriétés macroscopiques anisotropes. Selon le mode d'élaboration et la structure interne des composites, les symétries matérielles que l'on rencontre sont souvent du type orthotrope ou orthotrope de révolution (isotrope transverse). L'endommagement qui en résulte est relativement complexe, car présentant des interactions avec l'anisotropie primaire (nous dirons aussi de structure, ou initiale) du composite.

L'analyse des phénomènes d'endommagement dans les CMC a fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales que théoriques :

- *Sur le plan expérimental.* A propos de la caractérisation du comportement mécanique macroscopique, on pourra citer entre autres les travaux de thèse d'Aubard [4], de Gasser [32], de Guillaumat [37] ou encore de Pluvinage [77], qui feront l'objet d'une synthèse au chapitre I. S'agissant du suivi de l'endommagement, les études les plus avancées semblent être celles du groupe de S. Baste à l'Université de Bordeaux ; cette équipe a notamment développé des techniques de mesures ultrasonores, avec la grande originalité de permettre un suivi continu de

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

l'évolution des composantes du tenseur d'élasticité au cours du chargement ([3], [68])[1]. Outre ces données, il existe aujourd'hui une somme d'informations et d'observations qui attribuent un rôle prépondérant à la microfissuration matricielle et aux phénomènes de décohésion à l'interface fibre-matrice pour expliquer le comportement non linéaire des CMC.

– *La modélisation théorique de l'endommagement des composites anisotropes et des CMC* en particulier fait l'objet d'un grand nombre de travaux. La plupart d'entre eux se situent dans un contexte macroscopique (cf. par exemple Maire et all. [64], Ladeveze et Latombe [51, 52], Talreja [86], Chaboche et Maire [18], Halm et all. [39] etc...) et portent essentiellement sur la prise en compte de l'anisotropie induite par l'endommagement. Certains de ces travaux s'intéressent à la modélisation des effets unilatéraux, liés à la fermeture des fissures sous certains trajets de sollicitations. On soulignera que très peu d'entre eux abordent clairement la question de l'interaction entre l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite par la microfissuration.

  S'agissant de la modélisation micromécanique, qui a pour but l'intégration de manière précise les micromécanismes actives d'endommagement, on citera les travaux de Morvan, [68], Barret, [7] et ceux de Aristégui [3]. Ces travaux, bien qu'extrêmement intéressants, restent difficiles à appliquer à des situations générales en raison de la limitation des résultats analytiques sur lesquels ils sont basés (Laws [58]) : ces résultats ne concernent qu'une configuration particulière, dans laquelle les fissures se trouvent dans le plan d'isotropie transverse.

La problématique de l'interaction entre anisotropies et le manque de résultats analytiques 3D en micromécanique des milieux anisotropes fissurés justifient à eux seuls les modèles micro-macro et les modèles macroscopiques d'inspiration micromécanique qui seront présentées dans cette thèse. L'intérêt de la démarche développée est de permettre une interprétation précise des réponses macroscopiques des matériaux étudiés en termes de micromécanismes d'endommagement.

Le mémoire est organisé de la manière la suivante :

Le premier chapitre débute par une synthèse bibliographique sur le comportement mécanique non linéaire des composites à matrice fragile, ainsi que les différents micromécanismes qui sont à l'origine de ces comportements. Sur la base de données expérimentales concernant l'évolution des composantes du tenseur d'élasticité, on soulignera en particulier la perte de symétrie matérielle que peut induire l'endommagement. Par souci de brièveté, on présente ensuite les grandes lignes d'un

[1] Ces données fournissent également des informations de premier plan pour ce qui concerne les modifications des symétries matérielles du matériau par les processus d'endommagement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

modèle macroscopique récent de la littérature[2], l'objectif étant simplement de mettre en lumière l'importance d'une prise en compte adéquate de l'interaction entre l'endommagement et l'anisotropie de structure. Le chapitre s'achève par une analyse bibliographique succinte de quelques travaux micromécaniques dédiés aux matériaux composites.

Le second chapitre est consacré à la modélisation micromécanique dans le contexte plan de l'endommagement des matériaux orthotropes. On y présente d'abord les concepts de base de l'approche micro-macro des milieux anisotropes fissurés et la résolution du problème d'homogénéisation associé dans le cadre de l'élasticité plane[3]. La démarche suivie permet d'aboutir à l'expression de l'énergie macroscopique du milieu orthotrope affaibli par un système de fissures parallèles non intéragissantes et arbitrairement orientées.
Une attention particulière est portée à l'analyse de l'impact des fissures fermées sur l'élasticité macroscopique, ainsi qu'au critère décrivant la transition ouverture/fermeture des fissures. Sur la base des résultats obtenus, la modélisation bidimensionnelle proprement dite de l'endommagement est ensuite réalisée en adoptant un critère d'endommagement basé sur le taux de restitution de l'énergie et la règle de normalité.
Le chapitre s'achève sur une comparaison modèle-expérience qui s'avère satisfaisante. Ce chapitre est complété par deux autres annexes, l'un portant sur la formulation en déformation du modèle micromécanique bidimensionnelle, l'autre sur le développement d'une formulation macroscopique inspirée des analyses micromécaniques et utilisant une variable d'endommagement sous la forme d'un tenseur d'ordre 2.

Dans le but d'étendre la portée des analyses présentées au chapitre II, on propose au chapitre III une approche alternative de l'homogénéisation des milieux orthotropes fissurés. Dans cette approche, basée sur la résolution des problèmes d'inclusions d'Eshelby, la fissure est modélisée par un cylindre infini de faible rapport d'aspect. La détermination du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}$ sera réalisée en adoptant une approche de calcul ne nécessitant pas la connaissance de la fonction de Green. Les résultats obtenus sont connus seulement dans le cas d'une fissure dont la normale coïncide avec l'un des axes d'orthotropie ; ils sont entièrement nouveaux dans le cas général d'un système de fissures parallèles arbitrairement orientées. Ces résultats, dont on soulignera les avantages par rapport à ceux du chapitre II et dont certains détails se trouvent dans l'Annexe E, seront validés par rapport à ceux existantes dans la littérature.

[2]Il est utile de préciser que ces modèle n'est pas forcément représentatif de la littérature spécialisée.

[3]Cette résolution s'appuie sur une analyse par potentiels complexes qui remonte à Savin [81]. Un résumé réalisé sur la base des travaux de Mauge et Kachanov [67] est fourni en Annexe B du mémoire.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

La modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par microfissuration des matériaux anisotropes fait l'objet du dernier chapitre. On y rappelle d'abord les seuls résultats analytiques 3D connus en micromécanique des milieux anisotropes fissurés[4]. Compte tenu de la faible généralité de ces résultats analytiques, on opte pour une démarche macroscopique dont l'originalité est de combiner les outils de la théorie de représentation des fonctions tensorielles et les résultats analytiques connus de la micromécanique. Cette approche, qui se révèle particulièrement féconde, permet d'aboutir à un modèle d'endommagement dont la mise en oeuvre est relativement simple en adoptant une procédure d'intégration numérique sur la sphère unité. Afin de fournir également une base d'analyse de la structure mathématique des modèles macroscopiques utilisant un tenseur d'ordre 2 comme variable d'endommagement[5], on propose une seconde version du modèle 3D basée sur l'approximation de la distribution de la densité des fissures à l'aide d'un tenseur du second ordre.

L'ensemble des modélisations proposées dans ce chapitre sont validées de façon détaillée sur deux matériaux composites (C-SiC 2D et SiC-SiC 2D) pour lesquels on dispose de données expérimentales incluant la perte de symétrie matérielle et l'évolution de toutes les composantes du tenseur de souplesse avec l'endommagement.

En guise de conclusion, une synthèse générale des résultats est présentée à la fin du mémoire, ainsi que quelques pistes de développements futurs.

[4]Sans oublier les possibilités d'une évaluation numérique des composantes du tenseur d'Eshelby.

[5]C'est notamment le cas pour ce qui concerne le rôle des interactions entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie induite par le chargement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre I

Endommagement des matériaux composites à matrice fragile : mécanismes physiques et modélisation

Ce premier chapitre du mémoire de thèse est dédié d'une part à l'analyse bibliographique des principaux mécanismes d'endommagement par microfissuration des matériaux composites à matrice fragile (en particulier les composites à matrice céramique renforcée par des fibres), et d'autre part à la présentation de quelques modèles de comportement macroscopique visant à prendre en compte le couplage entre l'endommagement et l'anisotropie initiale.

I.1 Microfissuration et comportement mécanique des composites à matrice fragile

Cette section débute par la présentation d'éléments concernant la microstructure des composites à matrice céramique. On présente ensuite les traits essentiels du comportement de cette classe de matériaux sous chargement mécanique. On s'intéresse en particulier aux sollicitations monotones et/ou cycliques dans les directions des axes de symétrie du matériau ; l'importance des sollicitations hors-axes est également analysée. En s'appuyant sur les données expérimentales produites par l'équipe de S. Baste (Université de Bordeaux ; cf. [3, 7, 68]) à l'aide de méthodes de propagation d'ondes ultrasonores, on analyse le caractère évolutif de l'anisotropie au cours du processus d'endommagement et les contributions des différents mécanismes d'endommagement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

I.1.1 Aspects microstructuraux des composites à matrice fragile

Les principaux constituants d'un composite sont la matrice, les fibres et l'interphase. Regardés séparément, les renforts ou la matrice seule sont classiquement considérés élastiques fragiles, ceci en raison de leur rigidité et de leur limite de rupture très faible (Gasser [32], Morvan [68]).
De manière générale, sous chargement mécanique la matrice s'endommage la première, la présence des fibres étant le facteur qui empêche la rupture brutale. L'introduction des renforts dans l'assemblage permet donc une amélioration significative des caractéristiques mécaniques globales du composite. Leur architecture (géométrie, orientation dans le composite), leur caractéristiques élastiques ou même certaines de leurs propriétés chimiques induisent une anisotropie (que nous qualifierons d'"initiale" ou primaire) dans la réponse globale du composite. La microstructure (et, en définitive, la réponse macroscopique de ces matériaux) étant contrôlable grâce aux paramètres de conception et aux procédés de fabrication, on trouve en pratique une grande variété des structures composites fibreuses (aléatoire, unidirectionnelle, bidirectionnelle, tissée, tridimensionnelle, multidirectionnelle, intermédiaire : renforts tissés aiguilletés avec des fibres, renforts bobinés).

En raison des incompatibilités de déformation entre la matrice et les fibres, dans une configuration "composite à fibres"[6] l'interphase peut jouer un rôle important[7], notamment dans le contrôle de la résistance à la rupture, en déviant ou en arrêtant les microfissures (le chargement mécanique est transféré vers les parties saines du matériau, la rupture étant ainsi retardée). Pour obtenir un comportement macroscopique moins fragile, il est donc impératif d'assurer le transfert de charge entre les fibres et la matrice par une amélioration des propriétés de l'interphase ainsi que de la liaison chimique fibre-matrice (ou fibre-interphase-matrice).

Enfin, s'agissant des CMC, leur caractère anisotrope initial est influencé par la présence d'une porosité qui joue un rôle important en tant que potentiels sites d'amorçage des fissures. On peut dans certains cas presque parler d'un état endommagé dès la fabrication du matériau composite. Cependant, on préférera souvent qualifier l'état initial comme étant "non-endommagé", simplement par rapport au fait qu'il n y a pas de contraintes externes ; ceci n'exclut pas l'existence d'hétérogénéités.

[6] Les fibres ayant des dimensions très faibles (de l'ordre de 8-22 μm pour le diamètre), en pratique les constructeurs fabriquent des assemblages des fibres (torons), utilisés pour tisser les renforts fibreuses.

[7] A titre illustratif on cite les travaux de Lamon [54], Carrère [13], ou encore Majumdar [65] (qui a étudié les composites à matrice métallique).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

I.1.2 Mécanismes physiques d'endommagement

Malgré la fragilité des constituants des composites, leur comportement à l'échelle macroscopique présente une certaine ductilité[8]. On attribue généralement le comportement non linéaire des composites à matrice fragile à la microfissuration et à son évolution sous charge. La compréhension et l'étude des mécanismes de dégradation qui ont lieu à l'échelle microscopique, nécessaires à la modélisation, font l'objet de cette sous section.

De nombreuses études expérimentales (Aubard [4], Guillaumat [37], Talreja [85]) présentent les étapes suivantes, entre l'amorçage des microfissures et la rupture finale, comme les plus marquantes :

- la fissuration matricielle,
- la décohésion fibre-matrice,
- le glissement interfacial,
- les décohésions aux interfaces induites par la fissuration de la matrice intra-toron.

La succession de ces différents mécanismes d'endommagement pour un composite unidirectionnel est illustrée sur la Figure I.1. Avant de poursuivre l'analyse, on notera que ces différents mécanismes d'endommagement peuvent également être couplés.

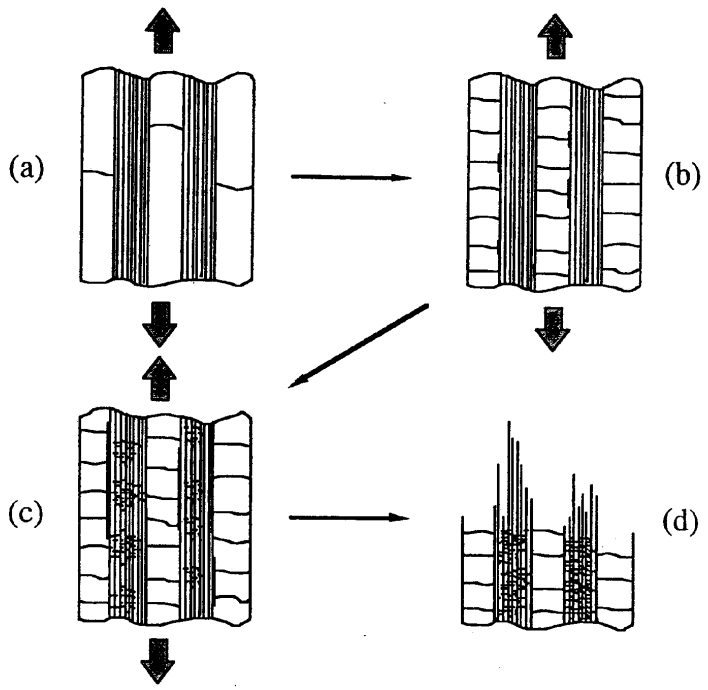

FIGURE *I.1: Evolution de la fissuration durant un essai de traction d'un composite céramique (Morvan [68])*

[8]Cette propriété peut être par exemple modifiée par la manière dont l'interphase influence les phénomènes de microfissuration.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

I.1.2.1 La microfissuration matricielle

C'est le principal mécanisme de dégradation des composites étudiés. La matrice étant le constituant qui s'endommage le premier, sa déformation-seuil d'endommagement est plus faible par rapport à celle des fibres. Sous chargement mécanique, on constate d'abord la création d'un réseau diffus de microfissures qui se développe ensuite progressivement (à mesure que le chargement augmente). Comme précédemment souligné, l'intensité de la microfissuration est directement influencée par les propriétés de l'interphase, de différentes manières (Guillaumat [37]) :

- l'interphase permet une déviation de la fissure le long de la fibre de façon à protéger celle-ci d'une rupture immédiate
- elle favorise le transfert de charge fibre-matrice au delà de la zone décollée.

Une interphase de rigidité trop faible permet la décohésion fibre-matrice ; si la rigidité est trop forte le comportement du matériau se traduit par une rupture brutale, tandis qu'une rigidité intermédiaire permet de prévenir la rupture catastrophique en favorisant un comportement non-linéaire, plus ductile (d'après Morvan [68] dans ce dernier cas les décohésions entre la matrice et les fibres sont limitées).

I.1.2.2 La décohésion fibre-matrice

Suite à la fissuration matricielle, les microfissures arrivent au niveau de l'interphase, où elles sont arrêtées ou réorientées. On constate donc une perte d'énergie, liée à la nécessité de création de nouvelles microfissures dans l'interphase. Parallèlement, des fissures longitudinales apparaissent le long des axes du renfort (ici intervient le phénomène de décohésion fibre-matrice). L'intensité de la liaison matrice-fibre, en relation intime avec les propriétés de l'interphase, est le paramètre qui influence la longueur de décohésion. Selon le chargement appliqué, il est également possible d'observer le phénomène de délaminage local.

En résumé, on soulignera que la fissuration matricielle consiste en la création d'un ou plusieurs réseaux de défauts : des microfissures transversales perpendiculaires par rapport à l'axe de chargement, des microfissures longitudinales dues à la décohésion et des microfissures interstrates, entre les différentes couches du tissus (seulement dans les composites stratifiés).

I.1.2.3 Le glissement interfacial

Les zones de contact créées suite à la décohésion fibre-matrice peuvent supporter une dissipation supplémentaire de l'énergie dont l'origine est le phénomène de glissement relatif entre la matrice et les fibres. Le paramètre qui pilote ce mécanisme est l'état de la surface de la décohésion (sa rugosité). A ceci s'ajoutent les contraintes s'exerçant sur l'interphase (contraintes résiduelles),

qui elles mêmes sont l'origine d'une contrainte seuil de glissement. Le glissement fibre-matrice provoque donc des fissures transverses, dont l'ouverture a un rôle important pour déterminer la déformation macroscopique du composite. Ce phénomène met en lumière à nouveau la forte influence de l'interphase sur l'anélasticité du matériau.

Remarque I.1 *Lorsqu'un composite est soumis à des cycles successifs de charge-décharge, le relâchement de la sollicitation permet un recouvrement quasi-total du glissement et une refermeture partielle des défauts créés durant la charge. En fait, la réversibilité du glissement fibre-matrice induit un mécanisme de refermeture des microfissures (le matériau semble recouvrir une partie ou la totalité de son élasticité). Par voie de conséquence, la déformation anélastique varie sous charges cycliques, le glissement réversible étant le facteur qui intervient dans la fissuration transverse. Ces mécanismes de dissipation aux interfaces sont mis en évidence par l'existence des boucles d'hystérésis sur les courbes contraintes-déformations (les divers changements de pente caractérisent les seuils de contraintes qui influencent l'ouverture, respectivement la refermeture des microfissures transverses).*

I.1.2.4 Le processus de rupture

La non-linéarité du comportement des composites à matrice céramique résulte de la combinaison des mécanismes de microfissuration de leurs constituants et des mécanismes de dissipation dans l'interphase. Une fois que le seuil de déformation de la matrice est atteint, les premiers microdéfauts se forment au niveau de la matrice inter torons (Fig. I.2) ; elles se propagent ensuite

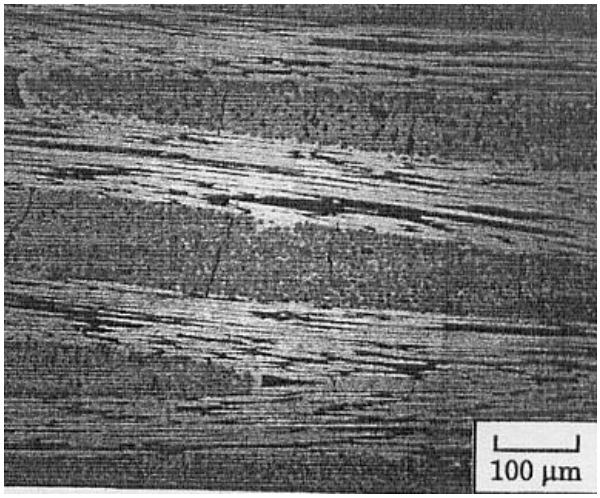

FIGURE *I.2: Micrographie de la fissuration inter toron dans un SiC-SiC 2D (Guillaumat [37]).*

perpendiculairement à la direction de chargement jusqu'au moment ou elles atteignent les zones de

renfort. Selon les propriétés de l'interphase la rupture instantanée peut apparaître, ou au contraire laisser place au processus de déviation ou d'arrêt des microfissures. En second lieu, la fissuration inter-torons se poursuit jusqu'à saturation, phénomène au cours duquel les longueurs de décohésion interfaciales se recouvrent (le chargement est alors transmis à l'intérieur des torons). A ce stade se produit la fissuration intra-toron (Fig. I.3) dont l'orientation dépend de la direction de

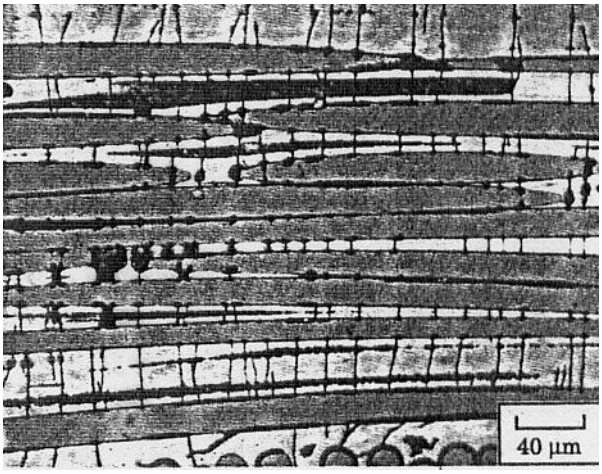

FIGURE *I.3: Micrographie de la fissuration intra toron dans un SiC-SiC 2D (Guillaumat [37]).*

chargement. Cette fissuration intra-toron se produit toujours perpendiculairement par rapport à l'axe de sollicitation. La fissuration intra-toron est suivie par la rupture des fibres dans la phase terminale du processus d'endommagement.

I.1.3 Comportement sous sollicitations mécaniques

Du point de vue des propriétés mécaniques, les composites à fibres sont des matériaux hétérogènes. A l'échelle macroscopique ils sont supposés homogènes anisotropes, les propriétés globales étant déterminées par celles des constituants. Leur comportement sous sollicitations mécaniques est généralement approché par des modèles élastiques anisotropes visant, malgré leur simplicité, à caractériser la dissymétrie de comportement en traction-compression. Pour ce type d'approche simplifiée, les seules propriétés mécaniques requises sont :

- les propriétés élastiques dans les directions des axes de symétrie du matériau (module d'Young E^s, coefficient du Poisson ν^s et module de cisaillement G^s),
- les constantes qui caractérisent la résistance du composite dans les axes de symétrie (résistance aux sollicitations de traction-compression axiale-transversale, et résistance au cisaillement).

En fait, les essais conventionnels (traction simple, compression simple, ou traction-compression combinée) montrent deux phases principales sur les courbes contraintes-déformations : une première phase de comportement élastique linéaire anisotrope, suivie d'une phase non-linéaire dont l'origine se trouve pour l'essentiel dans les phénomènes d'endommagement.

I.1.3.1 Essais de traction-compression

Ces essais (voir Gasser [32]) ont été effectués sur des éprouvettes de SiC-SiC sous forme de plaques ayant des épaisseurs supérieures ou égales à 2 mm, avec réduction de section au centre (procédure qui permet de localiser la rupture dans cette portion de la pièce). Les déformations ont été mesurées en utilisant des jauges sous forme de rosettes, suivant trois directions (longitudinale, transversale et à 45°) par rapport au renfort fibreux. Sur la Figure I.4 est présenté l'essai à 0° (dans

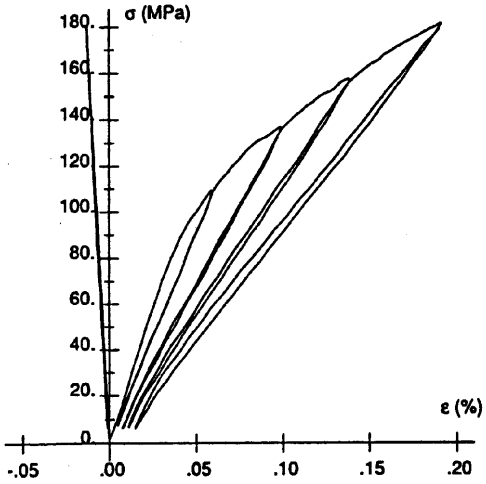

FIGURE *I.4: Essai de traction à 0° sur un composite SiC-SiC (Gasser et all. [33])*

la direction des fibres) : on observe en effet dans un premier temps que le comportement du composite est élastique, suivi d'une phase non-linéaire. L'endommagement est mis en évidence par des cycles de charge-décharge réalisés dans la phase non-linéaire. Ces cycles montrent peu d'hystérésis et faibles déformations résiduelles. En compression (Fig.I.5) le comportement est élastique-linéaire fragile, de même module que celui en traction. On notera le fait qu'une sollicitation de traction préalable n'affecte pas de manière significative le comportement en compression.
Quant au comportement dans la direction longitudinale, il est supposé être similaire au comportement dans la direction des fibres. En fait l'endommagement préalable dans la direction transversale (à 0°) a peu d'influence sur les résultats du test dans la direction longitudinale, car la grande majorité des microfissures se développent perpendiculairement à la direction de chargement. Seuls des essais sur composites SMC (avec des fibres en verre et matrice en polyester) confirment pour le moment ces prédictions (Siqueira [83]).

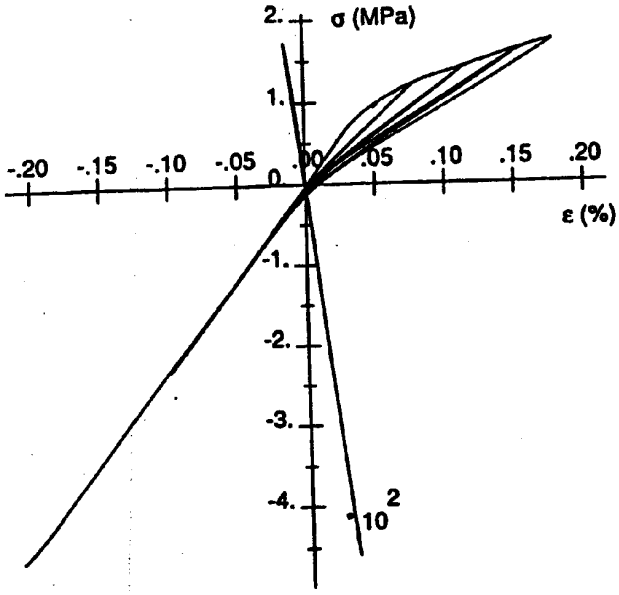

FIGURE *I.5: Résultats de tests en traction-compression à 0° d'un SiC-SiC (d'après Gasser et all. [33])*

I.1.3.2 Essais de traction-compression hors-axes

Les essais hors-axes sont utiles pour l'obtention des informations sur les différents mécanismes d'endommagement, sur leur évolution et sur les modes de couplage entre l'anisotropie primaire et l'anisotropie induite par l'endommagement. Par rapport aux essais à 0° on constate une valeur de

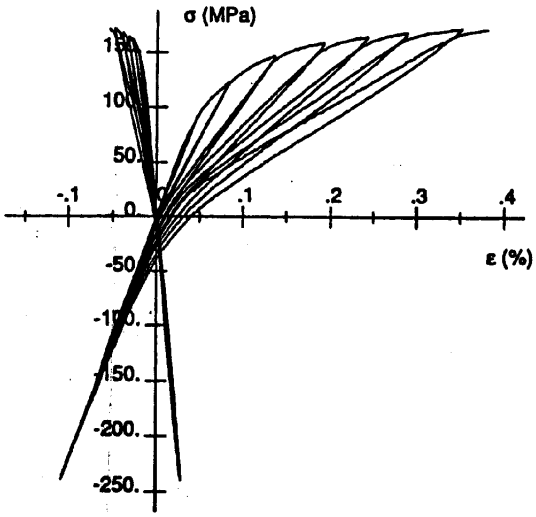

FIGURE *I.6: Résultats de test de traction-compression à 45° sur un matériau composite SiC-SiC (Gasser [32])*

la déformation à la rupture plus élevée et des boucles d'hystérésis plus ouvertes (voir Fig. I.6). La déformation transversale devient non-linéaire mais les ordres de grandeur restent toutefois très faibles.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Les essais de traction-compression simples faits par Aubard [4, 5] (voir la Figure I.7) confirment

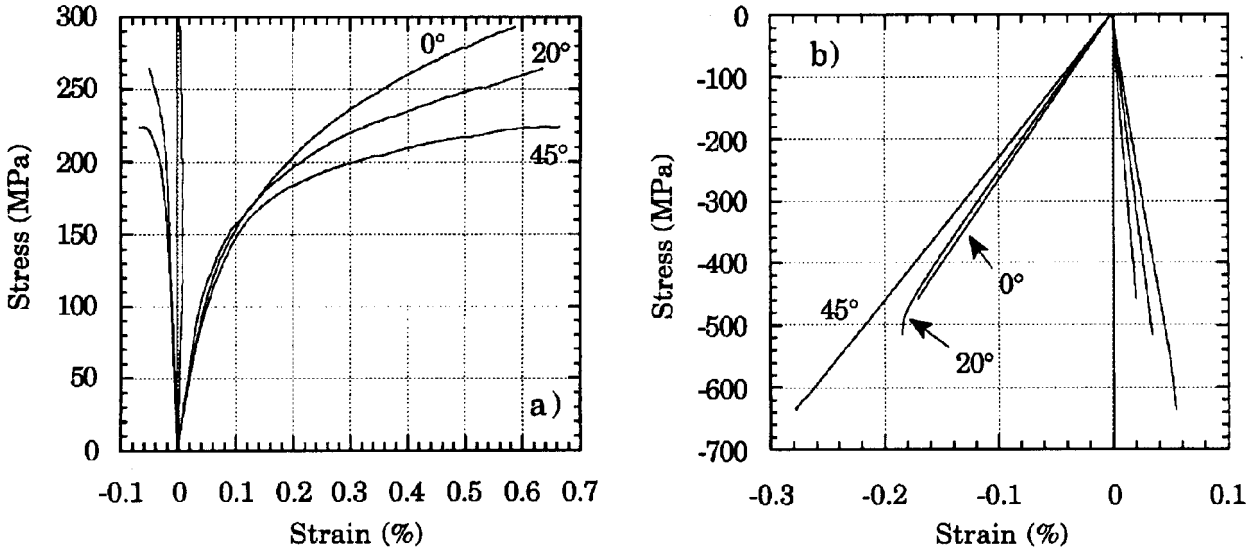

FIGURE *I.7: Résultats d'essais de traction simple et compression simple sur SiC-SiC 2D (Aubard [4])*

les observations de Gasser [32, 33] concernant l'évolution de l'endommagement : en compression le comportement est élastique-linéaire tandis que sous chargement de traction il est de type élastique-endommageable. Cette caractéristique comportementale traduit le caractère unilatéral de la réponse, dû à la transition ouverture/fermeture de certaines fissures lors du passage traction-compression. De plus, on observe une modification de l'intensité de la dégradation avec la direction de sollicitations, Ceci étant une conséquence manifeste de l'anisotropie initiale du composite.

I.1.4 Evaluation de l'endommagement à l'aide de mesures ultrasonores

Les moyens de mesures classiques (extensomètres, jauges, etc.) restent limités pour une évaluation de la dégradation dans le contexte d'une anisotropie résultant de la structure initiale des composites et de l'endommagement induit. Une solution convenable consiste en la mise en oeuvre des méthodes acoustiques, basées sur la propagation d'ondes ultrasonores. L'avantage de ces techniques est de permettre une évaluation directe de l'endommagement sur l'ensemble des composantes du tenseur d'élasticité, fait qui permet d'étudier également les symétries du matériau. On présente dans cette sous section quelques aspects concernant l'évolution des propriétés élastiques anisotropes avec le chargement. On s'appuie notamment sur les travaux de Morvan [68] et d'Aristegui [3] de l'Université de Bordeaux (équipe de S. Baste).

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

I.1.4.1 Evolution de l'endommagement sous sollicitations

Pour un matériau composite 2D SiC-SiC soumis à une sollicitation de traction dans la direction 3 (voir Fig. I.8), qui a été étudié par Morvan [68], l'évolution des composantes du tenseur d'élasticité

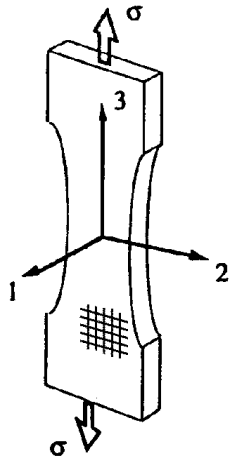

FIGURE *I.8: L'éprouvette de SiC-SiC 2D .*

est indiquée sur la Figure I.9. Les interprétations suivantes sont proposées pour les différentes phases successives du comportement :

- une phase élastique linéaire (jusqu'au seuil d'endommagement, autour de 80MPa) durant laquelle se développe la microfissuration matricielle ;
- la décohésion matrice-fibre, dont l'intensité est captée par la composante C_{22}, suivie par
- le glissement inter-facial et le début de la microfissuration transverse inter-toron, qui provoque une perte de rigidité dans la direction de chargement (chute de la constante C_{33}) ;
- au niveau de 120 MPa de l'effort, est observé le début de la fissuration intra-toron ;
- la phase de rupture, illustrée par la chute de toutes les constantes. Les modules de cisaillement C_{44} et C_{55} subissent eux aussi une chute importante ; on observe que les seules composantes qui ne sont pas affectées par la microfissuration sont celles qui caractérisent le plan d'élasticité normal à celui du tissu, le plan $(1, 2)$.

En couplant les méthodes de mesures ultrasonores avec les méthodes de mesures classiques par extensomètres pour des sollicitations cycliques de charge-décharge sur un matériau composite C-SiC 2D Morvan a également observé que lors d'un cycle il n'y a pas d'endommagement supplémentaire, le mécanisme d'ouverture-fermeture des fissures transversales à la direction de chargement étant le seul qui influence le processus d'endommagement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

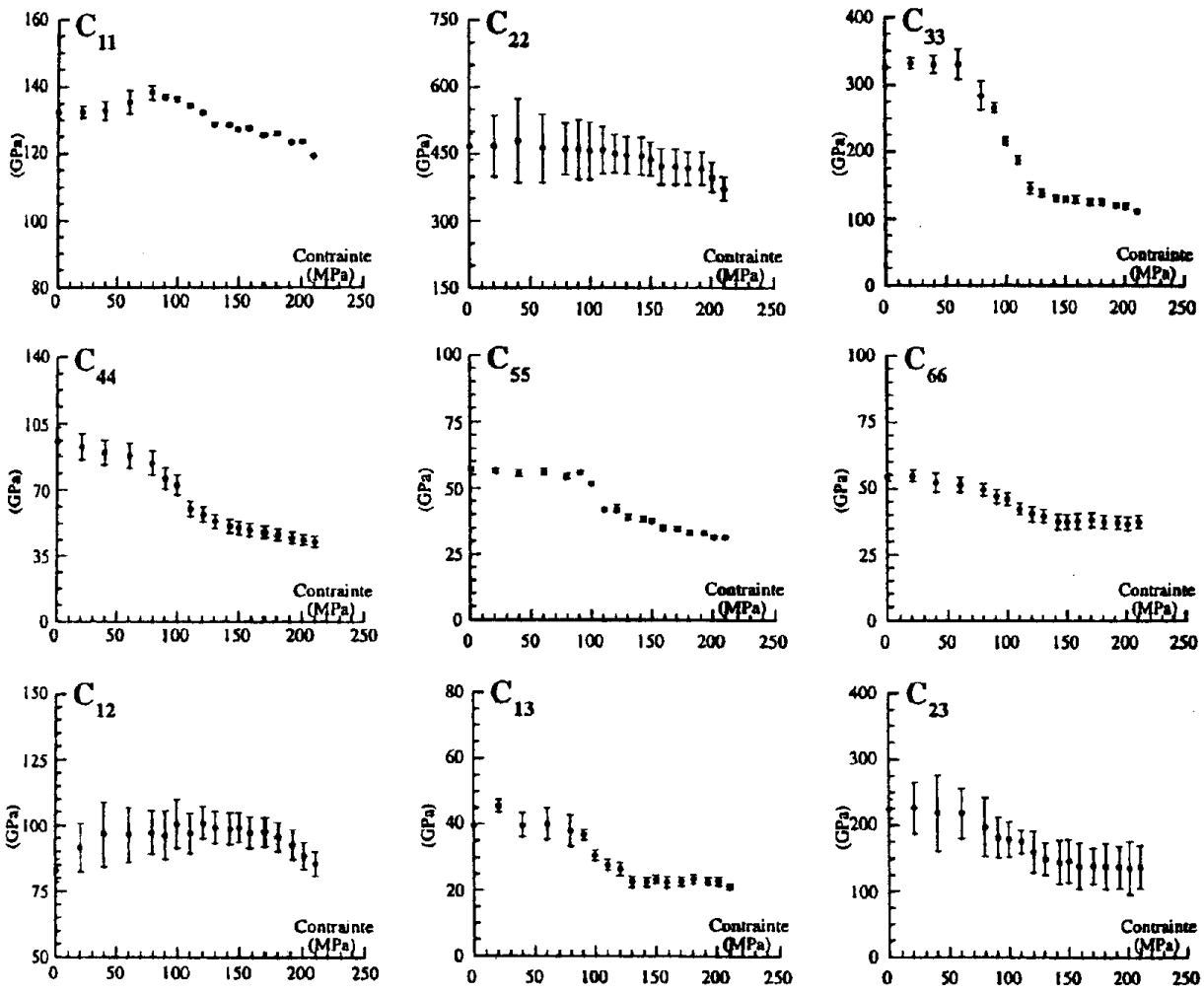

FIGURE *I.9: Evolution des composantes du tenseur d'élasticité du SiC-SiC 2D en fonction de la contrainte de traction (Morvan [68]).*

I.1.4.2 Variation des composantes du tenseur d'élasticité lors des essais hors-axes

Avec un interféromètre ultrasonore à immersion (qui permet de mesurer les vitesses de propagation d'ondes dans une direction quelconque de l'échantillon) Aristegui [3] a mesuré l'évolution de la microfissuration et son effet sur le comportement macroscopique d'un composite C-SiC 2D soumis à un effort de traction uni-axiale suivant plusieurs directions ($0^o, 30^o$ et 45°) par rapport aux directions de renforcement. L'essai de traction selon une des directions du renforcement montre que la fissuration se propage d'abord perpendiculairement à cette direction, puis est déviée par l'interface fibre-matrice. Dans ce cas, l'axe de symétrie du matériau et celui de l'endommagement se superposent.

La traction suivant une direction hors axes (avec un angle de 30° par rapport aux renforts fibreux) a permis d'observer que les modes de fissuration se développent en suivant des orientations différents de celles des fibres. La symétrie matérielle qui en résulte est beaucoup plus forte que celle

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

du matériau non fissuré. A titre d'illustration dans la Figure I.10 sont données les évolutions des composantes du tenseur d'élasticité pour un composite C-SiC 2D sollicité hors axes. A nouveau,

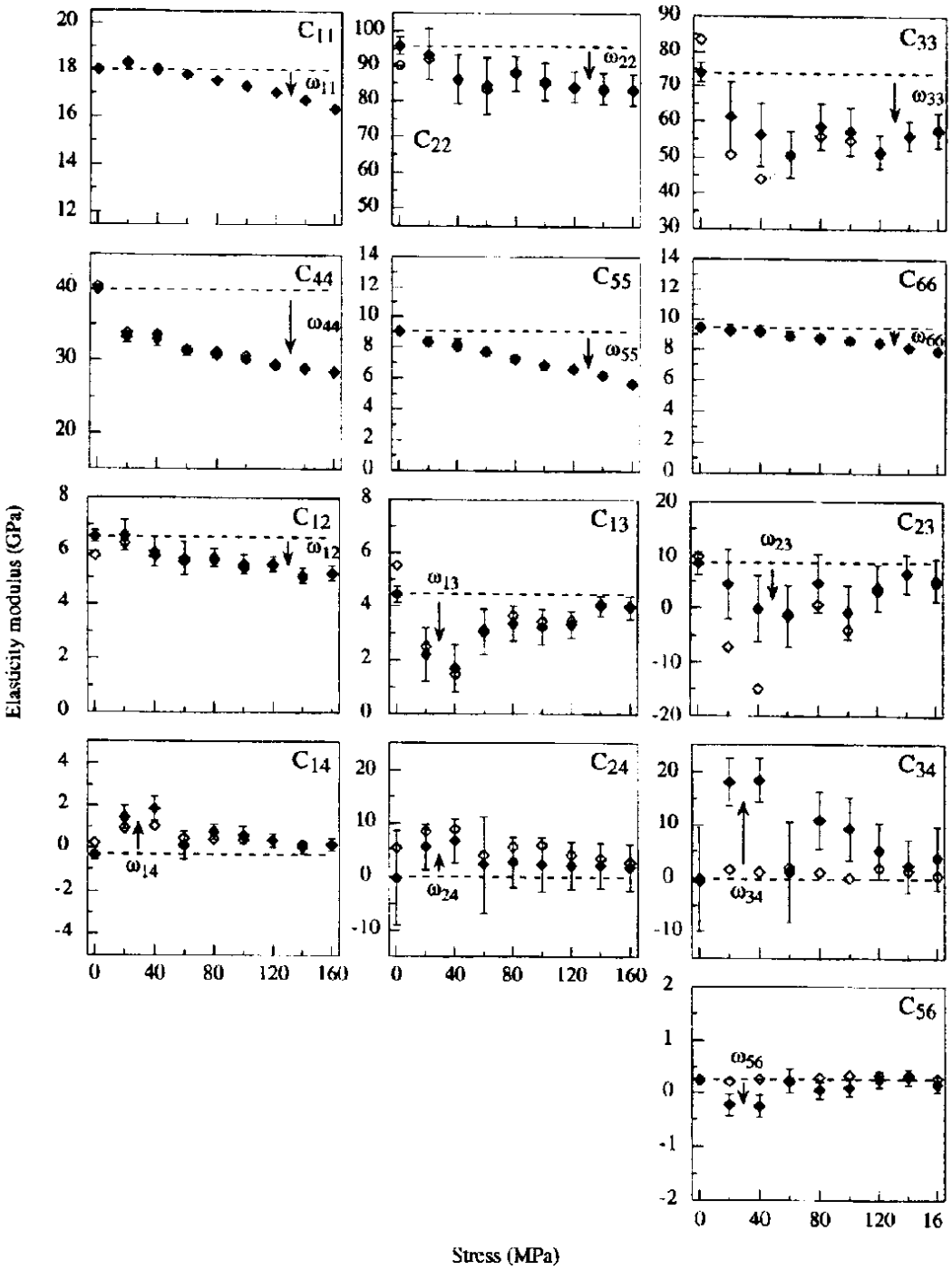

FIGURE *I.10: Evolution des composantes du tenseur d'élasticité du C-SiC 2D en fonction de la contrainte de traction sous sollicitation de traction hors-axes avec un angle de 30° par rapport au tissu fibreux (Aristègui [3]).*

on soulignera l'effet de l'endommagement sur les symétries matérielles. Ceci est clairement illustré par la non-nullité des composantes C_{14}, C_{24}, C_{34} et C_{56} du tenseur d'élasticité. La perte de

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

rigidité dans la direction de traction (montrée par la chute de la composante C_{33} du tenseur des raideurs) est importante et se produit dès le début du chargement. Les variations des constantes $C_{11}, C_{22}, C_{55}, C_{66}$ et C_{12} mettent en évidence la création de nouveaux systèmes de microfissures.

Remarque I.2 *Le suivi de l'évolution des composantes du tenseur d'élasticité à l'aide des techniques de mesures ultrasonores rend également possible la caractérisation de la modification des symétries du matériau. Les questions liées à ce sujet sont traitées dans de nombreux travaux, parmi lesquels on citera notamment la thèse de M. François [31].*

I.2 Modèles de comportement élastique endommageable de composites anisotropes

La mécanique de l'endommagement a connu depuis quelques décennies des progrès remarquables, en particulier dans la modélisation du comportement des matériaux fragiles initialement isotropes. La prise en compte de l'anisotropie induite, ainsi que des effets unilatéraux liés à l'ouverture/fermeture des microfissures a fait l'objet de nombreux travaux tant en micromécanique que dans les approches purement macroscopiques (cf. Krajcinovic [48] et les nombreuses références qui y sont indiquées).

Les recherches sur la modélisation de l'endommagement dans les matériaux initialement anisotropes (composites à matrice fragile, roches sédimentaires etc..) sont également assez développés (voir les travaux de Ladeveze [50, 51], Talreja [86], He et Curnier [40], Biegler et Mehrabadi [8], Lam et Zhang [53], Fitoussi et all. [30], Hochard et all. [42], Halm et all. [39], Chaboche et Maire [17]). La principale difficulté réside dans la modélisation des effets d'interaction et de couplage entre l'anisotropie primaire et l'anisotropie induite par l'endommagement. C'est à travers la résolution de cette difficulté que l'on peut espérer rendre compte par exemple de la réponse sous sollicitations hors axes des composites étudiés.

Dans le contexte des matériaux anisotropes, les modèles d'endommagement existants sont construits dans un cadre macroscopique[9]. Ils s'appuient essentiellement sur le choix de variables internes caractérisant l'endommagement, et utilisent le formalisme classique de la thermodynamique des processus irréversibles. Même si les modèles existants ne considèrent qu'une variable tensorielle d'ordre 2, le choix de la variable reste encore un thème de débats (Krajcinovic [49]). Après un bref rappel sur les théorèmes de représentations des fonctions tensorielles, on présente dans cette section un modèle d'endommagement anisotrope qui illustre bien les préoccupations de recherche dans ce domaine et qui seront les nôtres dans les chapitres suivants.

[9] Les quelques résultats issus des approches micromécaniques feront l'objet d'un résumé dans la section I.3

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

I.2.1 Concepts de base de la Théorie de représentation des fonctions tensorielles

La formulation rigoureuse des modèles d'endommagement macroscopique s'appuie classiquement sur une combinaison des outils issus de la théorie de représentations des fonctions tensorielles (cf. Boehler [10], voir également Zheng [99]) et ceux de la thermodynamique des processus irréversibles. La méthodologie usuelle consiste à se donner un jeu de variables d'état, puis à postuler l'existence d'un potentiel thermodynamique (fonction de ces variables) dont dérivent les lois d'état. La formulation du modèle est complétée par les lois d'évolutions des variables d'endommagement. Le potentiel thermodynamique est une fonction scalaire des variables d'état ; son expression doit prendre en compte les symétries du matériau.
Prenons par exemple le cas d'un matériau orthotrope. Le groupe de symétrie $\mathbf{G}$ du matériau étant le groupe des rotations autour de chacun des axes d'orthotropie (disons, pour simplifier, porté par le vecteur unitaire $\underline{e}_i$), on a :

$$G = \{\, \mathbf{Q} \in O(3) \mid \mathbf{Q} \,.\underline{e}_i = \underline{e}_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{Q} \,.\underline{e}_i = -\underline{e}_i \,\}. \tag{I.1}$$

Il s'agit de trouver une fonction ξ, telle que :

$$\xi(\mathbf{Q} \,.\mathbf{\Sigma} \,.\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \,.\mathbf{A}_i \,.\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \,.\mathbf{D} \,.\mathbf{Q}^T) = \xi(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}_i, \mathbf{D}), \qquad \forall \mathbf{Q} \in O(3). \tag{I.2}$$

S'appuyant sur les théorèmes de représentation, (cf. Boehler [9], [10], Wang [91], Liu [61], etc.), toute fonction anisotrope (scalaire, vectorielle, tensorielle) peut être représentée comme une fonction polynômiale isotrope de ses arguments et de tenseurs dits de structure $\mathbf{A}_i = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, i = 1, 2, 3$ (sans sommation sur i) correspondants à la symétrie matérielle considérée. Par exemple, dans le cadre d'une formulation en contrainte du modèle d'endommagement, basée sur une variable d'endommagement $\mathbf{D}$ (tenseur d'ordre 2), l'enthalpie libre Ψ du matériau élastique anisotrope s'endommageant, s'exprime comme une fonction isotrope de la contrainte macroscopique $\mathbf{\Sigma}$, de l'endommagement $\mathbf{D}$ et des 3 tenseurs de structure $\mathbf{A}_i = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$. Cette expression est une combinaison linéaire des invariants de la base d'intégrité associée à $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}_i, \mathbf{D})$ pour le groupe orthogonal complet :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^3), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}_i), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{A}_i),\\
&\mathrm{tr}(\mathbf{D}), \mathrm{tr}(\mathbf{D}^2), (\mathbf{D}^3), \mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{A}_i), \mathrm{tr}(\mathbf{D}^2\mathbf{A}_i),\\
&\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{D}), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}^2), \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{D}^2),\\
&\mathrm{tr}(\mathbf{A}_i\mathbf{D}\mathbf{\Sigma}), \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i\mathbf{D}\mathbf{\Sigma}^2), \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i\mathbf{D}^2\mathbf{\Sigma}).
\end{aligned} \tag{I.3}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Nous reviendrons sur ce point dans les sous sections I.2.2 et A.

Etant donné qu'en l'absence de contrainte la déformation du matériau est nulle, et que pour un état d'endommagement $\mathbf{D}$ fixé le comportement est élastique linéaire, l'enthalpie est une forme quadratique en $\mathbf{\Sigma}$. De plus, en adoptant l'hypothèse de non-interaction entre les microfissures, on aboutit à une expression de Ψ linéaire en $\mathbf{D}$.

I.2.2 Modèle d'endommagement anisotrope de Halm et al. [39]

Dans le but de simplifier la formulation générale du modèle d'endommagement dans les milieux orthotropes, Halm et al. [39] proposent de construire l'énergie libre du matériau par extension de leurs travaux antérieurs dédiés à l'endommagement des matériaux isotropes (Dragon et all. [24, 38, 25]).

La variable d'endommagement étant un tenseur du second ordre $\mathbf{D}$, la modélisation proposée suppose que tout système de microfissures décomposé en $i = 1, n$ systèmes parallèles pourra se réduire à trois familles orthogonales caractérisées par les densités D_i (qui sont les valeurs propres du tenseur $\mathbf{D}$) et les vecteurs propres orthogonaux 2 à 2.

La démarche d'extension proposée par les auteurs consiste à substituer au tenseur identité d'ordre 2 apparaissant dans le tenseur d'élasticité du milieu isotrope, subissant un endommagement anisotrope, les trois tenseurs de structure. L'expression de l'énergie libre résultant de cette démarche se réduit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{A}) = &\sum_{i=1}^{3}\left[a_i\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}_i.\mathbf{E}) + b_i\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}_i.\mathbf{E}) + c_i\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}_i.\mathbf{E}.\mathbf{E})\right] + \\ &\sum_{i=1}^{3}\left[\alpha_i\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}.\mathbf{A}_i)\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}.\mathbf{D}) + 2\beta_i\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}.\mathbf{A}_i.\mathbf{E}.\mathbf{D})\right]\end{aligned} \tag{I.4}$$

Dans (I.4), la première somme correspond à l'énergie libre du matériau orthotrope non endommagé ; les coefficients a_i, b_i, c_i sont associés aux 9 coefficients définissant le tenseur d'élasticité du milieu orthotrope. La seconde somme représente la contribution de l'endommagement à l'énergie libre. La présence des tenseurs de structure dans cette seconde somme traduit une certaine interaction entre l'anisotropie primaire et l'anisotropie induite par l'endommagement. Les coefficients α_i, β_i (au nombre de 6) sont associés aux effets induits par l'endommagement sur les modules élastiques (en particulier, les β_i n'affectent que les modules de cisaillement G_{12}, G_{13} et G_{23}). Leur identification est possible à partir des essais expérimentaux.

Pour la formulation complète du modèle, Halm et al. [39] (voir également [26]) reconduisent la forme du critère déjà proposé pour les milieux initialement isotropes [24] (ce qui exclut les possibilités de variation directionnelle du seuil d'endommagement du matériau). Il serait intéressant de faire une représentation des surfaces seuil pour vérifier si elles sont en accord avec les constatations

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

expérimentales que l'on peut faire sur la classe de matériaux étudiée.
Un des avantages de ce modèle reste le nombre relativement limité de paramètres requis pour son identification. D'ailleurs, une première validation par confrontation avec des données expérimentales sur un composite à matrice fragile est fournie dans [39]. Malgré ces premières prédictions intéressantes, on soulignera que les interactions entre anisotropies dont ce modèle est susceptible de rendre compte sont relativement faibles.

I.2.3 Commentaires

Le modèle d'endommagement qui vient d'être présenté a la mérite de s'inscrire dans le cadre adapté (pour l'étude des milieux anisotropes) que constitue la la théorie de représentation des fonctions tensorielles. Dans un souci de simplicité, sa formulation procède par extension d'un modèle d'endommagement anisotrope dédié aux matériaux initialement isotropes. Malgré la facilité d'identification de ce modèle[10], on peut observer que, par un tel procédé, le couplage/interaction entre l'anisotropie primaire et l'anisotropie de l'endommagement ainsi obtenu reste un peu sommaire. Cette constatation a motivé une proposition récente (Cazacu et all. [15]) dont l'un des objectifs est d'évaluer l'impact des termes de couplage. Les grandes lignes de cette proposition[11] sont résumées dans l'Annexe A. On notera simplement ici l'importance des effets d'interaction entre les anisotropies sur la perte de symétrie matérielle des matériaux lors de la réponse sous sollicitations hors axes.

I.3 Approches micromécaniques de l'endommagement par microfissuration des milieux anisotropes

On se propose dans cette section de présenter une très brève synthèse des quelques modélisations micromècaniques d'endommagement proposées dans la littérature pour les composites anisotropes. Seules les grandes lignes de la démarche sont décrites ici. On trouvera des détails des modèles synthétisés dans Bouazzaoui et all. [11] (voir également [3], [68])[12].
Le point de départ est l'étude de Laws [55] portant sur l'élasticité macroscopique d'une matrice solide orthotrope (de tenseur de souplesse $\mathbb{S}^s$) affaiblie par un système de fissures parallèles. Les fissures sont modélisées par des cylindres infinis de section elliptique (avec un faible rapport d'as-

[10] Voir les applications proposées par les auteurs.

[11] Bien que la modélisation proposée par ces auteurs ait été explicitée dans le cas de l'orthotropie de révolution, son écriture pour les matériaux initialement orthotropes ne présente pas de difficulté supplémentaire.

[12] Dans les chapitres qui suivent nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur les approches micromécaniques, en liaison avec nos travaux.

pect)[13]. En considèrant que l'endommagement du matériau est engendré par la croissance d'un systèmes de fissures dites transverses non interagissantes, de densité β_T, il découle de [55] que le tenseur de souplesse homogénéisé du matériau est donné par :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{S}^s + \pi\beta_T\mathbb{R}_T, \tag{I.5}$$

dans laquelle $\mathbb{R}_T$ est, suivant la terminologie de Laws[14], le tenseur d'interaction associé au système de fissures considéré. Les composantes non-nulles (au nombre de 3) de ce tenseur d'ordre 4 ne dépendent que des caractéristiques de la matrice solide et sont données dans [55].

La généralisation proposée par Bouazzaoui et all. [11] s'appuie sur l'observation que l'endommagement du matériau est engendré par la croissance de trois systèmes de fissures mutuellement orthogonales : fissuration transverse perpendiculaire à l'axe de chargement, fissuration longitudinale de décohésion fibre/matrice, fissuration de délaminage interstrates (cf. Figure I.11). En notant

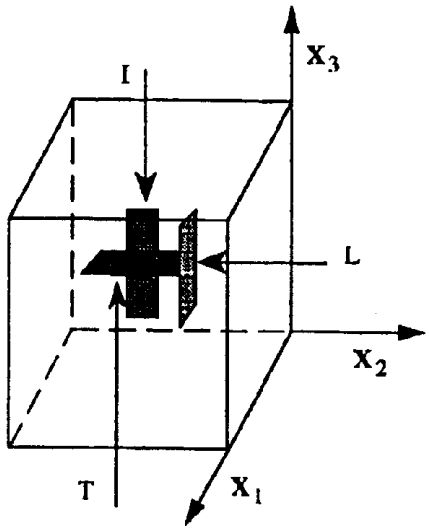

FIGURE *I.11: Représentation des trois systèmes des fissures : transverse, longitudinale et de décohésion [11].*

respectivement $\mathbb{R}_T$, $\mathbb{R}_L$ et $\mathbb{R}_I$ les densités associées à ces trois systèmes de fissures, le tenseur souplesse du matériau endommagé s'écrit par superposition :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{S}^s + \pi\beta_T\mathbb{R}_T + \pi\beta_L\mathbb{R}_L + \pi\beta_I\mathbb{R}_I. \tag{I.6}$$

Les composantes de $\mathbb{R}_L$ et de $\mathbb{R}_L$ sont obtenues par permutation cyclique des indices.

L'adjonction à (I.6) des lois d'évolution des trois densités de fissures déduites des observations expérimentales permet de compléter la modélisation de l'endommagement. Un certain nombre de

[13]Ces fissures sont parfois dites "bandes-plates".

[14]Ce tenseur est souvent noté Λ.

validations ont été proposées sur la base de cette modélisation, par exemple dans [68]. Par ailleurs, ces travaux de grand intérêt ont été poursuivis par l'analyse des fissures inclinées par rapport aux axes d'orthotropie du matériau non fissuré. Dans ce cas, la mise en oeuvre du modèle requiert des calculs numériques des tenseurs d'ordre 4 impliqués (voir par exemple Barret [7] ou Baste et Aristegui [6]). Cette difficulté se retrouve d'ailleurs dans le cas des fissures tridimensionnelles de type "penny-shaped" (c'est à dire en forme de monnaie), même plongées dans une matrice solide orthotrope de révolution : dans ce cas, les seuls résultats analytiques disponibles dans la littérature sont ceux de Laws [58].

I.4 Conclusions

Ce premier chapitre, bibliographique, a pour objectif de proposer une synthèse de travaux tant sur les mécanismes de déformations des matériaux fragiles initialement anisotropes que sur les modèles de comportement existants pour décrire les comportements macroscopiques de ces matériaux. L'analyse de ces mécanismes de déformations a pour l'essentiel porté sur les composites à matrice fragile : le rôle de la microstructure dans la complexité des micromécanismes a été souligné. L'étude a néanmoins permis d'identifier la multifissuration matricielle comme le principal mécanisme dissipatif de déformations aussi bien pour des chargements dans les directions des axes que pour les sollicitations hors axes.

Un aspect également important est la caractérisation expérimentale à l'aide des techniques de mesure de vitesse de propagation d'ondes ultrasonores. Ces techniques présentent l'énorme avantage de permettre une analyse fine de la dégradation des propriétés élastiques par le biais de l'évolution des composantes du tenseur d'élasticité.

Par l'utilisation de ces techniques des expérimentateurs comme Morvan [68] et Aristegui [3] ont montré que :

- *la diminution de la rigidité du matériau et l'augmentation de la déformation anélastique sont dues à la création et à la propagation de nouvelles fissures,*
- *les hystérésis dans les cycles charge-décharge ont comme cause la fissuration initiale dans le matériau.*

La dernière partie de ce chapitre à été dédiée à la présentation des approches de modélisation qui prennent en compte comme mécanisme principal de dégradation l'endommagement par microfissuration. Le principal problème rencontré dans ces approches est, comme pour les expérimentateurs, la description de l'interaction entre l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite par endommagement. Parmi les approches récemment proposées dans la littérature nous avons retenu de résumer celle de Halm et al. [39] qui est une formulation construite en s'appuyant sur les théo-

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

rèmes de représentation des fonctions tensorielles. Nous avons également évoqué une étude récente de Cazacu et al. [15], décrite en Annexe A et dont l'objectif est d'évaluer l'impact des termes d'interaction entre anisotropies.

S'agissant des approches micromécaniques, bien que les modèles existants présentent un intérêt indéniable, leur généralisation pour des sollicitations quelconques ainsi que pour des réseaux de fissures d'orientation aléatoire pose encore des problèmes. Il est utile de rappeler que la principale difficulté dans le traitement des fissures d'orientation arbitraire réside dans la détermination analytique[15] des composantes du tenseur $\mathbb{R}$ (pour lequel $\mathbb{R}_T$ $\mathbb{R}_L$ et $\mathbb{R}_I$ apparaissant dans (I.6) sont des cas particuliers).

Les observations qui viennent d'être faites situent le contexte des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse et en éclairent mieux les objectifs : il s'agit de proposer, sur des bases micromécaniques, une classe de modèles d'endommagement par microfissuration dédiés aux matériaux présentant une anisotropie initiale.

[15]Notre but étant de construire des modèles analytiques d'endommagement, la problématique de la determination numérique du tenseur $\mathbb{R}$ n'est pas traitée dans notre étude. Le lecteur intéressé trouvera dans [35] et dans [34] des éléments pour ce type d'approche.

© 2005 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre II

Comportement macroscopique des milieux orthotropes microfissurés : approche bidimensionnelle [36]

Le comportement non-linéaire des matériaux anisotropes à matrice fragile tels que les composites ou les roches sédimentaires est gouverné par la présence et la propagation de microfissures. Nous avons vu au premier chapitre que la modélisation du comportement de ces matériaux est usuellement réalisée dans le cadre macroscopique de la mécanique d'endommagement. L'une des principales difficultés rencontrée réside alors dans la prise en compte de l'interaction entre l'anisotropie initiale du matériau et l'anisotropie induite par l'endommagement (sous sollicitations mécaniques), ainsi que des effets unilatéraux liés à la fermeture des microfissures sous certains trajets de sollicitations. Sur le plan pratique, cette difficulté se traduit par le nombre très important de paramètres contenus dans les formulations qui en résultent, d'où la préoccupation de simplifications illustrée à travers les deux modèles présentés au premier chapitre.

A l'opposé de la démarche purement macroscopique, l'approche micromécanique des phénomènes d'endommagement se propose de construire des formulations micro-macro intégrant les ou plus exactement des micromécanismes d'endommagement. Outre la base physique qu'elle procure par ce biais au modèle ainsi construit, la modélisation micromécanique présente l'énorme avantage de rendre compte de façon explicite de l'interaction entre les anisotropies via l'étude précise de la microfissuration qui se trouve à l'origine de l'endommagement.
Ce chapitre est consacré à la formulation et à la mise en oeuvre (à des fins de validation) d'une modélisation plane de l'endommagement des milieux orthotropes.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

Deux raisons justifient ce choix :

- ce cadre offre la possibilité de construire des solutions analytiques complètes pour le problème d'homogénéisation des milieux anisotropes fissurés en mettant en oeuvre des méthodes basées sur les potentiels complexes,
- la plupart des tests de laboratoire, par exemple les essais sur des composites, sont réalisés sur plaques de faible épaisseur (hypothèse de contraintes planes). La modélisation plane est bien adaptée à la description de la réponse de ces composites, d'autant plus qu'elle ne s'obtient pas comme une réduction au plan d'une modélisation tridimensionnelle[16].

Après avoir introduit les concepts généraux de l'homogénéisation des milieux fissurés, on construit dans le cas de la matrice solide orthotrope l'énergie macroscopique ainsi que les propriétés élastiques homogénéisées en fonction des paramètres caractérisant la fissuration : deux formulations, l'une en contrainte et l'autre en déformation, sont proposées.

S'appuyant sur les résultats obtenus et adoptant un critère d'endommagement basé sur le taux de restitution de l'énergie, on propose enfin un modèle d'endommagement . Les capacités prédictives du modèle sont évaluées en confrontant ses prédictions à des données expérimentales incluant des essais hors axes.

Dans toute l'étude, on se place en conditions isothermes et en hypothèse de petites déformations.

II.1 Concepts de base. Variables d'état macroscopiques. Energie

II.1.1 Le Volume Elémentaire Représentatif

On se propose dans ce paragraphe de préciser les notions de base ainsi que les grandeurs mécaniques retenues pour caractériser l'endommagement par microfissuration.

Considérons un milieu homogène orthotrope 2D (noté Ω) caractérisé par le tenseur de souplesse $\mathbb{S}^s$ (et de rigidité $\mathbb{C}^s = (\mathbb{S}^s)^{-1}$). Ce milieu est affaibli par un ensemble de microfissures k orientées de manière aléatoire et dont la taille caractéristique est très petite par rapport à celle du Volume Elémentaire Représentatif (v.e.r.).

Le domaine ω occupé par chaque famille de fissures est soumis aux conditions de contact unilatéral ; les faces supérieure et inférieure de chaque microstructure sont désignées par ω^+ et ω^-, tandis que leur orientation est définie par un vecteur unitaire $\underline{n}$, normal à ω.

[16] Pour s'en convaincre il suffit de comparer dans le contexte d'une matrice solide isotrope, les résultats d'une fissure de type penny-shaped et ceux d'une fissure 2D (cf., par exemple, [43]).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

En adoptant la notation $[\underline{u}]= \underline{u}^{\omega^+} - \underline{u}^{\omega^-}$ pour le saut du déplacement $\underline{u}$ en un point repéré par le vecteur position $\underline{x}$ appartenant à ω, les conditions de contact unilatéral s'écrivent :

$$[u_n] \geq 0; \quad \sigma_{nn} \leq 0; \quad [u_n] \cdot \sigma_{nn} = 0, \tag{II.1}$$

où σ_{nn} est la contrainte normale s'appliquant sur les lèvres des microfissures et $[u_n]$ est la composante normale du vecteur déplacement $[\underline{u}]$.
En pratique cette configuration correspond à un composite laminé contenant des fibres.

II.1.2 Homogénéisation des milieux fissurés

Le problème d'homogénéisation est abordé en suivant une démarche initialement proposée par Andrieux et al. [2] (voir, pour plus de détails, [1]) dans le contexte des milieux isotropes fissurés. Pour cela, on considère un Volume Elémentaire Représentatif (v.e.r.) dont le contour est $\partial\Omega$; pour simplifier, ce v.e.r. contient un système de fissures de longueur $2l$ (conf. Fig. II.1) et de normale $\underline{n}$

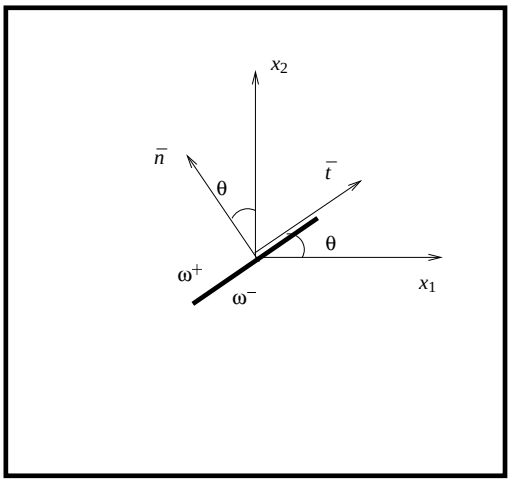

FIGURE *II.1: La cellule contenant une fissure isolée*

à laquelle on associe le vecteur $\underline{t}$, de sorte que $(\underline{n}, \underline{t})$ définisse un repère orthonormé direct. Si on désigne par $\tilde{\Omega}$ le domaine fissuré, on obtient : $\tilde{\Omega} = \Omega - \omega$.
Classiquement, on adopte l'une ou l'autre des conditions aux limites suivantes :

- **contrainte homogène au bord.** $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ étant respectivement le champ de contraintes microscopique et la contrainte macroscopique, la condition de contrainte homogène au bord se définit par :

$$\boldsymbol{\sigma}(x) \cdot \underline{\nu}(x) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{\nu}(x), \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{II.2}$$

  Sous cette hypothèse, on montre que la moyenne du champ contrainte microscopique dans le v.e.r. est égale à la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

De plus, le lemme de Hill[17] (cf. Zaoui [97]) permet de montrer que la déformation macroscopique est la moyenne du champ de déformations microscopiques.

– **déformation homogène au bord**[18]. **E** étant la déformation macroscopique, la condition de déformation homogène au bord se traduit par :

$$\underline{\xi}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} \quad (\forall \underline{z} \in \partial\Omega). \tag{II.3}$$

Dans l'hypothèse de déformations homogènes au bord, on montre que la moyenne du champ déformation microscopique dans le v.e.r. est égale à la déformation macroscopique **E**.
La considération du lemme de Hill, confirme la définition de la contrainte macroscopique comme la moyenne du champ de contraintes microscopiques.

II.1.3 Introduction des paramètres décrivant la fissuration

La description de l'état mécanique du v.e.r. requiert la considération de variables pertinentes, correspondant à l'état de fissuration du milieu. En particulier, les discontinuités de déplacement permettent d'évaluer la contribution des fissures à la déformation macroscopique du v.e.r.
Afin de bien mettre en évidence une telle contribution dans la réponse mécanique du v.e.r., on considère la décomposition suivante du champ de déplacement (décrite sur la Figure II.2) :

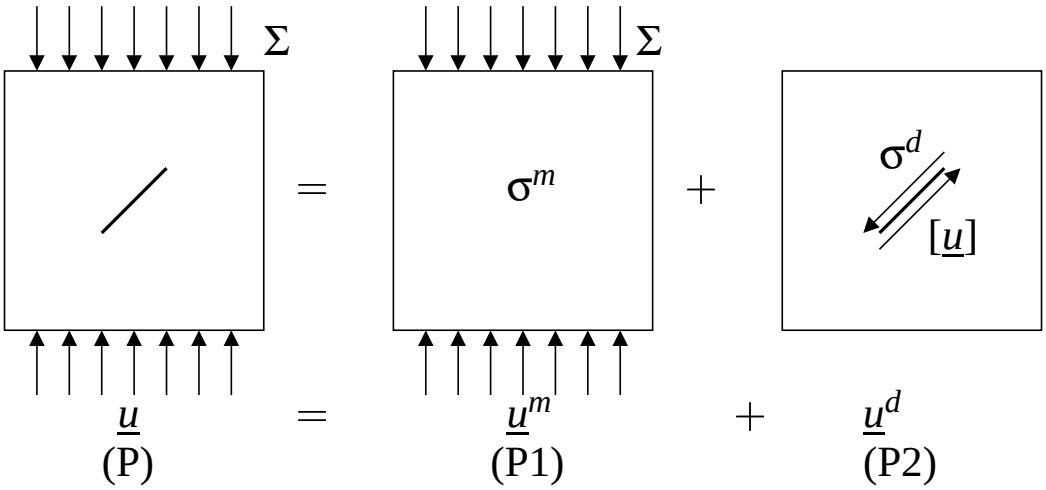

FIGURE *II.2: Décomposition du problème d'homogénéisation*

– (i) le déplacement $\underline{u}^m$ est induit par la contrainte macroscopique $\mathbf{\Sigma}$ qui se produirait en l'absence du système de fissures,
– (ii) un déplacement $\underline{u}^d$ dû aux discontinuités de déplacement sur ω.

[17]Ce lemme traduit la cohérence du travail entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.
[18]Les deux conditions aux limites sont équivalentes pourvu que les conditions de séparation d'échelle soient remplies.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Le champ de déplacement $\underline{u}^m$ est homogène sur le v.e.r., donc le champ de déformation associé est également homogène ; on en déduit la déformation macroscopique :

$$\mathbf{E}^m =< \varepsilon^m >_\Omega = \varepsilon^m(\underline{x}), \qquad \forall \underline{x} \in \Omega. \tag{II.4}$$

Le champ de contraintes microscopique $\boldsymbol{\sigma}^m$ étant statiquement admissible avec la contrainte macroscopique $\mathbf{\Sigma}$, on a :

$$\mathbf{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma}^m >_\Omega = \boldsymbol{\sigma}^m(\underline{x}), \qquad \forall \underline{x} \in \Omega. \tag{II.5}$$

$\boldsymbol{\sigma}^m$ et ε^m sont associés par la loi de comportement de la matrice solide :

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^m. \tag{II.6}$$

Le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^d$ associé au champ de déplacement $\underline{u}^d$ étant auto-équilibré, sa moyenne est nulle sur le v.e.r. : $< \boldsymbol{\sigma}^d >_\Omega = 0$. S'appuyant sur la décomposition du problème d'homogénéisation, on a la partition suivante pour la déformation macroscopique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^m + \mathbf{E}^d, \tag{II.7}$$

Le deuxième terme ($\mathbf{E}^d$), qui caractérise la contribution des microfissures, s'écrit :

$$\mathbf{E}^d = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega^+} (\underline{n} \overset{s}{\otimes} [\underline{u}]). \tag{II.8}$$

On envisage alors l'introduction de deux paramètres α et β pour caractériser les discontinuités de glissement et d'ouverture. Ces pramètres sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{N} \int_{\omega^+} [u_t](\underline{x}) dS \\ \beta &= \mathcal{N} \int_{\omega^+} [u_n](\underline{x}) dS \end{aligned} \tag{II.9}$$

dans laquelle $\mathcal{N}$ représente la densité de fissures, c'est à dire le nombre de fissures par unité de volume. La déformation globale s'exprime alors :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^m + \alpha(\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + \beta(\underline{n} \otimes \underline{n}). \tag{II.10}$$

On rappelle que $(\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})$ désigne la partie symétrique du tenseur $(\underline{n} \otimes \underline{t})$.

II.1.4 Principe de détermination de l'énergie libre macroscopique

On s'intéresse maintenant à la détermination de l'énergie macroscopique du milieu orthotrope fissuré. Il s'agit de l'énergie de la matrice solide :

$$W = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\tilde{\Omega}} w(\varepsilon), \tag{II.11}$$

dans laquelle :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{II.12}$$

est la densité volumique d'énergie libre. Compte tenu de la décomposition du champ de déformation microscopique $\varepsilon(\underline{x}) = \mathbf{E}^m + \varepsilon^d(\underline{x})$, on a la décomposition suivante pour l'énergie libre macroscopique :

$$W = W^m + W^d, \tag{II.13}$$

avec :

- (i) l'énergie libre élastique de la matrice (pour le problème $P1$) :

$$W^m = \frac{1}{2}\mathbf{E}^m : \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^m, \tag{II.14}$$

- (ii) et (si la solution du problème de discontinuité de déplacement est connue) l'énergie libre associée, qui s'écrit :

$$W^d = \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\tilde{\Omega}} \varepsilon^d : \mathbb{C}^s : \varepsilon^d. \tag{II.15}$$

L'équation (II.15) indique que W^d est l'énergie élastique emmagasinée sous forme d'auto-contraintes dans la déformation induite par les discontinuités de déplacement. Les déformations et les contraintes microscopiques étant liées par la relation constitutive de la matrice solide : $\sigma^d = \mathbb{C}^s : \epsilon^d$, il vient :

$$W^d = \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d = \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\omega^+} \{\sigma^d_{nt}[u_t] + \sigma^d_{nn}[u_n]\}, \tag{II.16}$$

soit, en tenant compte des définitions (II.9) :

$$W^d = \frac{1}{2}(\sigma^d_{nt}\alpha + \sigma^d_{nn}\beta). \tag{II.17}$$

On souhaite exprimer maintenant W^d, et par la suite W, en fonction de α et β. Pour cela, on s'appuie sur des résultats analytiques donnant les expressions du saut de déplacement sur les lèvres d'une fissure arbitrairement orientée dans un solide orthotrope plan infini dont le comportement est homogène élastique. Ces résultats sont établis en utilisant le formalisme des potentiels complexes, particulièrement adapté à l'étude des problèmes plans en milieux anisotropes[19]. Dans le cas d'une fissure en milieu infini, *ce qui suppose de fait la non interaction entres fissures présentes dans le v.e.r.*, les résultats analytiques sont dûs à Mauge et Kachanov [67]. La méthode de calcul, que

[19]Pour un développement général et complet de la théorie des potentiels complexes en élasticité linéaire, on peut se référer à l'ouvrage de Mushkhevishli [72].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

l'on pourra trouver également dans Hori et Nemat-Nasser [41], est synthétisée en Annexe B. Les expressions établies se présentent sous la forme :

$$\begin{aligned}[u_n] &= \sqrt{l^2 - x^2}(H_{nt}\sigma^d_{nn} + H_{tt}\sigma^d_{nt}),\\ [u_t] &= \sqrt{l^2 - x^2}(H_{nn}\sigma^d_{nn} + H_{nt}\sigma^d_{nt}),\end{aligned} \tag{II.18}$$

dans laquelle H_{nn}, H_{tt}, H_{nt} et H_{tn} dépendent des caractéristiques élastiques de la matrice solide orthotrope et de l'orientation de la fissure. Comme indiqué en Annexe B :

$$\begin{aligned}H_{nn} &= \pi C(1+D\cos 2\theta)\\ H_{tt} &= \pi C(1-D\cos 2\theta)\\ H_{nt} &= H_{tn} = \pi C D \sin 2\theta.\end{aligned} \tag{II.19}$$

Les coefficients C et D s'écrivent à l'aide des constantes ingénieur :

$$\begin{aligned}C &= \frac{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}{2\sqrt{E_1E_2}}\sqrt{\frac{1}{G_{12}} + \frac{2}{\sqrt{E_1E_2}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}}\\ D &= \frac{\sqrt{E_1}-\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}\end{aligned} \tag{II.20}$$

On notera que, à la différence de la situation où la matrice solide est isotrope ($H_{nt} = H_{tn} = 0$, cf. Andrieux et all. [2]), la présence des termes H_{nt} et H_{tn} dans (II.18) indique un couplage dans les modes de fissuration. Plus précisément, l'application d'une contrainte normale sur les lèvres de la fissure induit non seulement son ouverture, mais également des discontinuités de glissement. De même, un cisaillement des lèvres de la fissure peut également se produire.

En posant $x = l\sin\theta$ (l étant la demi longueur de la fissure), on obtient par intégration des sauts de déplacement (II.18) les expressions suivantes pour α et β :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d}{2}(H_{nt}\sigma^d_{nn} + H_{tt}\sigma^d_{nt})\\ \beta &= \frac{d}{2}(H_{nn}\sigma^d_{nn} + H_{nt}\sigma^d_{nt}),\end{aligned} \tag{II.21}$$

dans laquelle, on fait intervenir le paramètre densité de fissures, initialement introduit par Budiansky et O'Connel [12] :

$$d = \mathcal{N}l^2. \tag{II.22}$$

On a, par l'inversion de (II.21) :

$$\begin{aligned}\sigma^d_{nt} &= \frac{1}{d}(G_{t1}\alpha + G_{t2}\beta),\\ \sigma^d_{nn} &= \frac{1}{d}(G_{n1}\alpha + G_{n2}\beta),\end{aligned} \tag{II.23}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

avec :

$$\begin{aligned} G_{t1} &= \frac{2H_{nn}}{H_{nn}H_{tt} - {H_{nt}}^2}, \\ G_{n2} &= \frac{2H_{tt}}{H_{nn}H_{tt} - {H_{nt}}^2}, \\ G_{t2} = G_{n1} &= \frac{2H_{nt}}{{H_{nt}}^2 - H_{nn}H_{tt}}. \end{aligned} \tag{II.24}$$

L'introduction de (II.23) dans l'expression (II.17) de W^d conduit à :

$$W^d = \frac{1}{2d}\left[G_{t1}\alpha^2 + (G_{n1} + G_{t2})\alpha\beta + G_{n2}\beta^2\right]. \tag{II.25}$$

On notera que dans (II.25), donnant l'énergie d'auto-contraintes W^d, la présence du terme $(G_{n1} + G_{t2})\alpha\beta$ traduit le couplage entre les modes de fissuration précédemment souligné.

En rassemblant (II.14) et (II.25), l'énergie libre macroscopique (II.13) s'exprime :

$$W(\mathbf{E}^m, d, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) : \mathbb{C}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) + \frac{1}{2d}\left[G_{t1}\alpha^2 + (G_{n1} + G_{t2})\alpha\beta + G_{n2}\beta^2\right], \tag{II.26}$$

dans laquelle on a utilisé : $\mathbf{E}^m = \mathbf{E} - \mathbf{E}^d$ issu de la décomposition (II.7).

Remarque II.1 *Il est intéressant de noter qu'outre la prise en compte des effets de couplages des modes de fissuration, (II.26) s'applique aussi bien aux fissures ouvertes qu'aux fissures fermées. Dans ce dernier cas, il suffira de traduire la fermeture du système de fissures considéré par $\beta = 0$.*

II.1.5 Relation entre les variables microscopiques et les grandeurs macroscopiques

On souhaite maintenant exprimer l'énergie libre du matériau à l'aide de la déformation macroscopique $\mathbf{E}$, du paramètre densité de fissures d et, si nécessaire, de α et β. La démarche adoptée (cf. Andrieux [2] dans le cas plan ou Pensée [75], Kondo et all. [45] dans le cas tridimensionnel) consiste à effectuer l'analyse de la dissipation, ce qui conduit dans le contexte des évolutions réversibles à des expressions de α et β en fonction de $\mathbf{E}$ et d.

On rappelle que l'on s'est placé en conditions isothermes et on considère des fissures ouvertes ou fermées sans frottement. A ce stade, la propagation des fissures n'est pas considérée, leurs évolutions sont donc réversibles. Il s'en suit que :

$$\mathcal{D} = \mathbf{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{W} = 0. \tag{II.27}$$

Notant que $\dot{W}$ s'écrit :

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^m} : \dot{\mathbf{E}^m} + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial \beta}\dot{\beta} + \frac{\partial W}{\partial d}\dot{d}, \tag{II.28}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

avec :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^m} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) : \mathbb{C}^s = \mathbf{\Sigma}, \\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = F^\alpha \dot{\alpha} = -\left[\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) - \frac{2G_{t1}\alpha + (G_{n1} + G_{t2})\beta}{2d}\right]\dot{\alpha}, \\
&\frac{\partial W}{\partial \beta}\dot{\beta} = F^\beta \dot{\beta} = -\left[\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{(G_{n1} + G_{t2})\alpha + 2G_{n2}\beta}{2d}\right]\dot{\beta}, \\
&\frac{\partial W}{\partial d}\dot{d} = F^d \dot{d} = \frac{1}{2d^2}\left[G_{t1}\alpha^2 + (G_{n1} + G_{t2})\alpha\beta + G_{n2}\beta^2\right]\dot{d}.
\end{aligned} \tag{II.29}$$

Il vient :

$$\mathcal{D} = -\mathbf{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}^m} - F^\alpha \dot{\alpha} - F^\beta \dot{\beta} = 0. \tag{II.30}$$

Cette équation devant être vérifiée quels que soient $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$, on en déduit le système de deux équations suivant :

$$\begin{aligned}
d\ \mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) &= G_{t1}\alpha + \frac{1}{2}(G_{n1} + G_{t2})\beta, \\
d\ \mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) &= \frac{1}{2}(G_{n1} + G_{t2})\alpha + G_{n2}\beta,
\end{aligned} \tag{II.31}$$

ce qui, par inversion, conduit à l'expression des discontinuités de déplacement sur les lèvres de la fissure en fonction des composantes du champ macroscopique de contraintes :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{d}{2}\left[H_{tt}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + H_{nt}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] \quad (a) \\
\beta &= \frac{d}{2}\left[H_{nt}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + H_{nn}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] \quad (b)
\end{aligned} \tag{II.32}$$

La relation (II.32) sert a obtenir la détermination macroscopique du critère décrivant la transition entre l'état d'ouverture et l'état de fermeture du système de fissures. En effet, cette transition a lieu pour $\beta = 0$, ce qui aboutit au critère dit de fermeture :

$$H_{nt}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + H_{nn}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) = 0. \tag{II.33}$$

On notera que, dans le contexte d'une matrice solide orthotrope, en accord avec le couplage des modes, le processus de fermeture des fissures est affecté non seulement par la contrainte normale mais aussi par la contrainte de cisaillement sur les lèvres de la fissure. Enfin, la prise en compte de (II.33) dans l'expression (II.32 (a)) de α conduit, pour les fissures fermées, à :

$$\alpha = \frac{d}{2}\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})\left(H_{tt} - \frac{{H_{nt}}^2}{H_{nn}}\right). \tag{II.34}$$

II.2 Potentiels et propriétés homogénéisées

Prenant appui sur (II.32) et (II.26), il est maintenant possible d'établir l'expression de l'énergie macroscopique du milieu fissuré. On adopte une écriture en contraintes, la formulation en déformation étant présentée en Annexe C.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

II.2.1 Enthalpie libre macroscopique. Approche en contraintes

On rappelle que l'enthalpie libre macroscopique W^* est obtenue par la transformée de Legendre-Fenchel de l'énergie libre macroscopique : $W^* = \mathbf{\Sigma} : \mathbf{E} - W$. Compte tenu de l'expression : $\mathbf{E} - \mathbf{E}^d = \mathbf{E}^m = (\mathbb{C}^s)^{-1} : \mathbf{\Sigma}$, et de (II.26), on obtient :

$$\begin{aligned} W^* = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : (\mathbb{C}^s)^{-1} : \mathbf{\Sigma} + \alpha\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + \beta\mathbf{\Sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \\ -\frac{1}{2d}\left[G_{t1}\alpha^2 + (G_{n1} + G_{t2})\alpha\beta + G_{n2}\beta^2\right] \end{aligned} \tag{II.35}$$

La relation (II.35) est valide aussi bien pour des fissures ouvertes que pour des fissures fermées (dans ce dernier cas, il suffirait de poser $\beta = 0$). Pour donner une forme plus explicite à (II.35), on s'appuie sur la relation (II.32) entre α, β et la contrainte macroscopique Σ. Pour alléger les écritures, on introduit également les notations suivantes des tenseurs du second ordre : $\mathbf{\Delta} = (\underline{n} \otimes \underline{n})$ et $\mathbf{Q} = (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})$.

Le report de (II.32) dans (II.35) et l'hypothèse d'une densité modérée de fissures permettant de négliger les termes du second ordre en d, conduit au comportement macroscopique du milieu fissuré décrit par :

$$W^* = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : \mathbb{S}^{hom} : \mathbf{\Sigma}, \tag{II.36}$$

où le tenseur de souplesse homogénéisé $\mathbb{S}^{hom}$ a pour expression dans le cas des fissures ouvertes :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{S}^s + \frac{d}{2}\left[H_{nn}(\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta}) + H_{nt}(\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{\Delta}) + H_{tt}(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})\right]; \tag{II.37}$$

et, dans le cas des fissures fermées :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{S}^s + \frac{d}{2}\left[(H_{tt} - \frac{H_{nt}^2}{H_{nn}})(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})\right]. \tag{II.38}$$

On notera que le tenseur de souplesse orthotrope de la matrice solide $\mathbb{S}^s$ est classiquement décrit à l'aide de la formulation invariante :

$$\mathbb{S}^s = f_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + f_2(\mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1}) + f_3(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + f_4(\mathbf{A} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}). \tag{II.39}$$

Les coefficients f_i sont des combinaisons des constantes élastiques "ingénieur" du matériau :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}, \\ f_2 &= \frac{1}{G_{12}}, \\ f_3 &= \frac{1}{E_2} - \frac{2}{G_{12}} + \frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1}, \\ f_4 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \tag{II.40}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

On rappelle que la transition entre l'ouverture et la fermeture des fissures est donnée par le critère (II.33). Par construction, la réponse contrainte-déformation du matériau lors de la transition ouverture/fermeture ($\beta = 0$) est continue. Une autre façon de prouver cette continuité consiste à examiner le saut du tenseur de souplesse à la transition. Dans le cas de la modélisation proposée, ce saut s'écrit :

$$[\mathbb{S}] = \mathbb{S}^{hom}_{ouv} - \mathbb{S}^{hom}_{fer} = \frac{d}{2H_{nn}}\left[{H_{nn}}^2(\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{\Delta}) + H_{nn}H_{nt}(\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\otimes\mathbf{\Delta}) + {H_{nt}}^2(\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q})\right] \tag{II.41}$$

et peut se mettre sous la forme :

$$[\mathbb{S}] = s(\mathbf{\Sigma}, \underline{n})(\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}), \tag{II.42}$$

où le tenseur du deuxième ordre $\mathbf{P} = (H_{nn}\mathbf{\Delta}+H_{nt}\mathbf{Q})$ et s est fonction de $\mathbf{\Sigma}$ et $\underline{n}$, par l'intermédiaire de d et de H_{nn}.

En accord avec les travaux de Curnier et al. [19], la satisfaction de la condition (II.42) assure la continuité à travers l'hypersurface $\mathbf{P} : \mathbf{\Sigma} = 0$ séparant les domaines de chargement induisant respectivement l'ouverture et la fermeture du système de fissures considéré, cette relation étant une condition suffisante pour la continuité. On notera que l'équation de l'hypersurface dérivée de $\mathbf{P} : \mathbf{\Sigma} = 0$ coïncide précisément avec le critère d'ouverture/fermeture déjà établi (II.33).

II.2.2 Introduction du tenseur de texture

Les expressions (II.37) et (II.38) comportent encore des termes croisés $\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\otimes\mathbf{\Delta}$ faisant donc intervenir le vecteur tangent $\underline{t}$. Dans cette écriture on notera de plus que, comme indiqué à la sous section II.1.4, H_{nn}, H_{tt}, H_{nt} et H_{tn} sont également fonction de l'orientation du système de fissures considéré.

On se propose à ce stade de l'étude de rechercher une représentation des résultats de sorte à mettre en évidence le couplage entre l'orthotropie du matériau non fissuré et l'anisotropie induite par la fissuration d'orientation $\underline{n}$. Pour rendre compte de l'orthotropie du matériau, on introduit le tenseur de structure[20] défini par $\mathbf{A} = \underline{e_1}\otimes\underline{e_1}$, et on rappelle que $\underline{e_1}$ est un des deux axes de symétrie du matériau dans le plan. On a alors :

- (i) $\mathbf{A} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) = \sin^2\theta$
- (ii) $\mathbf{A} : (\underline{n}\overset{s}{\otimes}\underline{t}) = -\sin\theta\cos\theta$

[20]Pour plus de détail sur le rôle des tenseurs de structure dans la modélisation du comportement des matériaux anisotropes, on pourra se référer au chapitre 2 de J.P. Boehler [10].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

La considération du tenseur $\mathbf{A}$ permet les écritures suivantes des coefficients H_{nn}, H_{tt}, H_{nt} et H_{tn}, définis par (II.19) :

$$\begin{aligned} H_{nt} &= H_{tn} = 2k_1 \sin\theta\cos\theta = -2k_1\mathbf{A} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}), \\ H_{tt} &= k_2 - k_1\cos 2\theta = k_2 - k_1 + 2k_1\mathbf{A} : (\underline{n} \otimes \underline{n}), \\ H_{nn} &= k_2 + k_1\cos 2\theta = k_2 + k_1 - 2k_1\mathbf{A} : (\underline{n} \otimes \underline{n}). \end{aligned} \tag{II.43}$$

Les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\pi(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2})}{\sqrt{E_1\ E_2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{G_{12}} + \frac{2}{\sqrt{E_1\ E_2}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}} \\ k_2 &= \frac{\pi(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})}{\sqrt{E_1\ E_2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{G_{12}} + \frac{2}{\sqrt{E_1\ E_2}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}}. \end{aligned} \tag{II.44}$$

Avant de procéder à la réécriture de l'expression du tenseur de souplesse homogénéisé, on note également que :

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} = (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) \otimes (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta}) - (\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta}). \tag{II.45}$$

Reportant alors cette identité ainsi que (II.43) dans (II.37) et (II.38), il vient :

– **dans le cas des fissures ouvertes** :

$$\mathbb{S}^{hom}_{ouv} = \mathbb{S}^s + \frac{d}{4}\left\{ \begin{array}{l} 4k_1(\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta}) + [k_2 - k_1 + 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta})]\,(\mathbf{\Delta} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta}) - \\ 2k_1\,[\mathbf{\Delta} \otimes (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}.\mathbf{A}) + (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}.\mathbf{A}) \otimes \mathbf{\Delta}] \end{array} \right\}, \tag{II.46}$$

– **dans le cas des fissures fermées** :

$$\mathbb{S}^{hom}_{fer} = \mathbb{S}^s + \frac{d}{4}\left\{ \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta})}\,[\mathbf{\Delta} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta} - 2(\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta})] \right\}. \tag{II.47}$$

Ces deux expressions constituent le résultat recherché, puisqu'elles définissent, pour un système de fissures parallèles de normale $\underline{n}$ donnée, le tenseur de souplesse des propriétés élastiques homogénéisées à l'aide du tenseur de structure $\mathbf{A}$, du tenseur d'orientation des fissures $\mathbf{\Delta} = \underline{n} \otimes \underline{n}$ et du paramètre densité de fissures d. On notera aussi que les coefficients intervenant dans (II.46) et (II.47) ne dépendent que des constantes élastiques de la matrice solide orthotrope.

Remarque II.2 *Les résultats qui viennent d'être présentés indiquent clairement l'interaction entre l'orthotropie de la matrice solide et la fissuration orientée par $\underline{n}$. On soulignera que par cette interaction la symétrie initiale (orthotropie) du matériau se trouve modifiée lorsque $\mathbf{\Delta} = \underline{n} \otimes \underline{n}$ ne coïncide pas avec $\mathbf{A} = \underline{e_1} \otimes \underline{e_1}$ ou avec $\mathbf{1} - \mathbf{A} = \mathbf{1} - (\underline{e_1} \otimes \underline{e_1}) = \underline{e_2} \otimes \underline{e_2}$. La symétrie résultante,*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

combinaison de l'orthotropie et de l'anisotropie induite, est générale.
Enfin, on notera que les résultats présentés permettent de retrouver ceux déjà connus dans le contexte d'une matrice solide isotrope [21] *pour laquelle* $k_1 = 0$ *et* $k_2 = \frac{4\pi}{E}$.

II.2.3 Généralisation pour une distribution quelconque de microfissures

On se propose ici de généraliser les résultats établis pour un système de fissures parallèles à une distribution quelconque de fissuration. L'hypothèse de non interaction entre fissures, à la base de nos résultats, simplifie cette étape. Pour un nombre $\mathcal{M}$ donné de familles discrètes de fissures, la généralisation est obtenue simplement en sommant les contributions élémentaires de chaque famille.
Dans une situation plus générale, d'une distribution du paramètre densité de fissures donné par $\rho(\underline{n})$ (valeur pour la famille de normale $\underline{n}$), l'enthalpie libre macroscopique (que nous notons Ψ^*) peut être trouvée par intégration de W^* (donné par II.35) sur toutes les directions de l'espace, c'est à dire sur le cercle unité $\mathcal{C} = \{\underline{n}, |\underline{n}| = 1\})$[22] :

$$\Psi^* = \int_{\mathcal{C}} \rho(\underline{n}) W^*(\mathbf{\Sigma}, \underline{n}) dS. \tag{II.48}$$

L'expression du potentiel thermodynamique généralisé est définie par la relation :

$$\begin{aligned}
\Psi^* = & \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : \mathbb{S}^s : \mathbf{\Sigma} + \\
& \int_{\mathcal{C}^+} \rho(\underline{n}) \left\{ \begin{array}{l} k_1(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{\Delta})^2 + \left[\frac{(k_2 - k_1)}{4} + \frac{k_1}{2}(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta})\right] \mathbf{\Sigma} : (\mathbf{\Delta} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta}) : \mathbf{\Sigma} \\ -\frac{k_1}{2}\mathbf{\Sigma} : [\mathbf{\Delta} \otimes (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}.\mathbf{A}) + (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}.\mathbf{A}) \otimes \mathbf{\Delta}] : \mathbf{\Sigma} \end{array} \right\} dS + \\
& \int_{\mathcal{C}^-} \rho(\underline{n}) \left\{ \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{4[k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta})]} \left[\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{\Delta} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta}) : \mathbf{\Sigma} - 2(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{\Delta})^2\right] \right\} dS,
\end{aligned} \tag{II.49}$$

On notera que, si la distribution du paramètre densité ainsi que l'état d'activation (ouverture ou fermeture) des fissures sont connus, le potentiel thermodynamique peut être déterminé analytiquement. Dans les autres cas, seule une intégration numérique est envisageable (impliquant un nombre fini de familles de microfissures).

Remarque II.3 *On s'intéresse ici seulement à la première loi d'état, donnant le tenseur de déformations macroscopiques en fonction de* $\mathbf{\Sigma}$[23] *:*

$$\mathbf{E} = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \mathbb{S}^{hom} : \mathbf{\Sigma}, \tag{II.50}$$

[21] Cf. Andrieux [2] ou travaux de Renaud [80].
[22] La considération des effets unilatéraux impose une partition du cercle unité en deux domaines distincts, un premier (noté $\mathcal{C}^+$) qui correspond aux directions pour lesquelles les microfissures sont ouvertes et un deuxième (noté $\mathcal{C}^-$) qui caractérise les directions associées aux fissures fermées.
[23] La seconde loi d'état est examinée à la section II.3.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

expression où le terme $\mathbb{S}^{hom}$ est obtenu par intégration sur le cercle unité, en s'appuyant sur les expressions élémentaires (II.46) et dans (II.47). $\mathbb{S}^{hom}$ est fonction des paramètres densité de fissures d_i attachés aux familles de fissures i.

II.3 Critère d'endommagement. Loi d'évolution de l'endommagement

On se propose de formuler dans cette section un critère d'endommagement, et par la suite une loi d'évolution des dommages. Le cadre de travail est celui de la thermodynamique des processus irréversibles, sans effet de température et en hypothèse de petites déformations.
La formulation du critère s'appuie sur l'analyse de la dissipation en présence d'endommagement. La dissipation s'écrit :

$$\mathcal{D} = \left(\mathbf{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi}\right), \tag{II.51}$$

où, à l'instar de Ψ^*, on a :

$$\Psi = \int_{\mathcal{C}} \rho(\underline{n}) W(\mathbf{E}, \underline{n}) dS, \tag{II.52}$$

qui est l'énergie libre totale du milieu multifissuré. Sachant que Ψ et Ψ^* sont liés par la transformée de Legendre-Fenchel : $\Psi^* = \mathbf{\Sigma} : \mathbf{E} - \Psi$, la dissipation s'écrit également :

$$\mathcal{D} = \left(-\mathbf{E} : \dot{\mathbf{\Sigma}} + \dot{\Psi}^*\right) \geq 0. \tag{II.53}$$

L'évolution irreversible due à l'endommagement permet d'écrire :

$$\mathcal{D} = (-\mathbf{E} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{\Sigma}}) : \dot{\mathbf{\Sigma}} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial d_i} \dot{d}_i \geq 0. \tag{II.54}$$

Tenant compte de la première loi d'état (II.50) dans (II.54), on obtient :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial d_i} \dot{d} \geq 0. \tag{II.55}$$

Les d_i étant adoptés comme variables d'endommagement, on déduit de l'analyse qui précède que la seconde loi d'état, donnant la force thermodynamique associée à l'endommagement, s'écrit :

– **dans le cas des fissures ouvertes** :

$$\begin{aligned} F^{d^i} = \frac{\partial W^*}{\partial d^i} = -\frac{k_1}{2} \mathbf{\Sigma} : \left[\mathbf{\Delta}^i \otimes (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta}^i + \mathbf{\Delta}^i.\mathbf{A}) + (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta}^i + \mathbf{\Delta}^i.\mathbf{A}) \otimes \mathbf{\Delta}^i\right] : \mathbf{\Sigma} + \\ \frac{1}{4}\left[k_2 - k_1 + 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta}^i)\right] \mathbf{\Sigma} : (\mathbf{\Delta}^i \underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{\Delta}^i) : \mathbf{\Sigma} + k_1(\mathbf{\Delta}^i : \mathbf{\Sigma})^2 \end{aligned} \tag{II.56}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

Cette expression décrit la force thermodynamique F^{d^i} associée à une famille de fissures de normale $\underline{n}_i$. F^{d^i} peut être interprété comme un taux de restitution de l'énergie pour la famille de fissures considérée.

– **dans le cas des fissures fermées** :

$$F^{d^i} = \frac{\partial W^*}{\partial d^i} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{4[k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta}^i)]} \left[\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{\Delta}^i \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{\Delta}^i) : \mathbf{\Sigma} - 2(\mathbf{\Delta}^i : \mathbf{\Sigma})^2\right] \quad \text{(II.57)}$$

II.3.1 Critère d'endommagement

Compte tenu de l'analyse qui vient d'être faite, il apparaît légitime de construire le critère d'endommagement pour chaque famille de fissures, en se basant sur la force thermodynamique F^{d^i} qui lui est associée[24]. Suivant Marigo [66], on adopte la forme suivante :

$$f^i(F^{d^i}, d^i) = F^{d^i} - \mathcal{R}(d^i), \quad \text{(II.58)}$$

dans laquelle la fonction $\mathcal{R}(d^i)$ traduit la résistance à la propagation de l'endommagement. A priori, $\mathcal{R}(d^i)$ peut être déterminée à partir d'investigations expérimentales (cf. travaux de Mai [63] et Ouyang [74] en Mécanique de la rupture). On notera enfin que la dépendance de $\mathcal{R}(d^i)$ de d^i confère à ce dernier le rôle d'une variable d'écrouissage.

Remarque II.4 *Dans le cadre des applications qui seront présentées dans la section II.4, on adoptera pour $\mathcal{R}(d^i)$ la forme :*

$$\mathcal{R}(d^i) = k(1 + \eta d^i), \quad \text{(II.59)}$$

proposée par Marigo [66] pour des modèles d'endommagement isotropes. Les coefficients k et η sont deux constantes caractérisant le seuil d'endommagement ainsi que l'écrouissage. Elles peuvent être identifiées à partir des courbes de réponse mécanique et d'observations concernant l'état de fissuration.

En résumé :

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad F^{d^i} < \mathcal{R}(d^i), \quad \text{alors} \quad \dot{d}^i = 0 \quad (\text{pas de propagation de l'endommagement}) \\ &\text{si} \quad F^{d^i} = \mathcal{R}(d^i), \quad \text{alors} \quad \dot{d}^i \geq 0 \quad (\text{propagation de l'endommagement}). \end{aligned} \quad \text{(II.60)}$$

On notera enfin que l'indépendance du critère attaché à la famille i par rapport à celui des autres familles de fissures (c'est une conséquence de la non interaction entre fissures) simplifie la mise en oeuvre du modèle.

[24] Implicitement, la dissipation macroscopique est perçue comme la somme des dissipations microscopiques, associées à chaque famille de microfissures.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

II.3.2 Lois d'évolution de l'endommagement

Pour l'étude de la loi d'évolution des dommages, on adopte la règle de normalité. Ceci conduit pour une famille de fissures i à :

$$\left|\begin{array}{l} \dot{d^i} = \dot{\Lambda}_{d^i} \dfrac{\partial f^i(F^{d^i}, d^i)}{\partial F^{d^i}} = \dot{\Lambda}_{d^i} \quad ; \quad \dot{\Lambda}_{d^i} \geq 0 \\ \text{soit} \quad \dot{d^i} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f^i < 0 \quad \text{ou} \quad (f^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f^i} < 0) \\ \dot{\Lambda}_{d^i} & \text{si} \quad f^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f^i} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{II.61}$$

Les multiplicateurs d'endommagement $\dot{\Lambda}_{d^i}$ sont donnés par la condition de consistance (ou de Kuhn-Tucker) : $\dot{f} = 0$. Physiquement, cette condition implique que le point représentatif du chargement se trouve sur la surface de charge, donc :

$$\dot{\Lambda}_{d^i} = \frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)} \{\mathbf{B}^i : \dot{\mathbf{\Sigma}}\}^+, \tag{II.62}$$

avec le tenseur $\mathbf{B}$ défini par :

– **dans le cas des fissures ouvertes** :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^i_{ouv} = & -\frac{k_1}{2} \left[\mathbf{\Delta}^i \otimes (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta}^i + \mathbf{\Delta}^i.\mathbf{A}) + (\mathbf{A}.\mathbf{\Delta}^i + \mathbf{\Delta}^i.\mathbf{A}) \otimes \mathbf{\Delta}^i\right] : \mathbf{\Sigma} + \\ & \frac{1}{4} \left[k_2 - k_1 + 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta}^i)\right] (\mathbf{\Delta}^i \,\underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{1} + \mathbf{1} \,\underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{\Delta}^i) : \mathbf{\Sigma} + 2k_1(\mathbf{\Delta}^i : \mathbf{\Sigma})\mathbf{\Delta}^i, \end{aligned} \tag{II.63}$$

– **dans le cas des fissures fermées** :

$$\mathbf{B}^i_{fer} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{4[k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A} : \mathbf{\Delta}^i)]} \left[(\mathbf{\Delta}^i \,\underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{1} + \mathbf{1} \,\underline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{\Delta}^i) : \mathbf{\Sigma} + 4(\mathbf{\Delta}^i : \mathbf{\Sigma})\mathbf{\Delta}^i\right]. \tag{II.64}$$

II.3.3 Formulation en vitesse de la loi d'endommagement

Par la différentiation de la première loi d'état, on a :

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbb{S}}^{hom} : \mathbf{\Sigma} + \mathbb{S}^{hom} : \dot{\mathbf{\Sigma}}. \tag{II.65}$$

Remarque II.5 *Les sollicitations mécaniques peuvent induire certains changements sur l'état d'activation des différentes familles de microfissures présentes dans le matériau. De tels changements rendent difficile, voire analytiquement impossible, l'évaluation de $\dot{\mathbb{S}}^{hom}$. En effet :*

$$\dot{\mathbb{S}}^{hom} = \frac{\partial \mathbb{S}^{hom}}{\partial \mathbf{\Sigma}} : \dot{\mathbf{\Sigma}} + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \varpi^i \frac{\partial \mathbb{S}^{hom}}{\partial d^i} \dot{d^i}, \tag{II.66}$$

équation dans laquelle le terme ϖ^i désigne le poids associé au i^{me} point d'intégration.
La difficulté du calcul vient du fait que $\mathbf{\Sigma}$ n'intervient pas explicitement dans le deuxième terme de l'équation précédente.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Pour un état d'activation inchangé par l'application d'un incrément de contraintes, le tenseur des modules tangents est déterminé en tenant compte de la loi d'évolution de l'endommagement (équations (II.61) et (II.62)) ; on aboutit à la formulation en vitesse du modèle :

$$\text{Ainsi :} \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbb{S}_t^{hom} : \dot{\mathbf{\Sigma}} \ , \quad \text{avec :} \ \ \mathbb{S}_t^{hom} = \mathbb{S}^{hom} - \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \varpi^i \frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)} \mathcal{G}^i \mathbf{B}^i \otimes \mathbf{B}^i, \tag{II.67}$$

$$\text{et :} \ \ \mathcal{G}^i = \begin{cases} 0 \ \ \text{si} \ \ f^i < 0 \ \ \text{ou} \ \ (f^i = 0 \ \ \text{et} \ \ \dot{f}^i < 0) \\ 1 \ \ \text{si} \ \ f^i = 0 \ \ \text{et} \ \ \dot{f}^i = 0, \end{cases} \tag{II.68}$$

le tenseur $\mathbf{B}$ étant déjà introduit dans les équations (II.63) et (II.64).

II.3.4 Intégration numérique locale de la loi de comportement

Pour conclure la présentation du modèle on aborde dans cette sous section le schéma d'intégration numérique des équations constitutives précédemment présentées.

L'état de déformation étant supposé connu au pas j, on impose en principe une évolution élastique jusqu'au pas suivant $j+1$, avec un pilotage du trajet des chargements avec une déformation totale imposée. Les différentes étapes du schéma d'intégration implicite sont les suivantes :

a) Prédiction élastique. Sous l'hypothèse d'une évolution élastique entre les deux pas on vérifie si l'état mécanique est admissible, ce qui se traduit par la condition :

$$f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) \leq 0, \qquad \forall i. \tag{II.69}$$

Si l'équation (II.69) est satisfaite, la prédiction élastique coïncide avec la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{j+1} = \mathbf{E}_j + \Delta\mathbf{E} \\ d_{j+1}^i = d_j^i \ \ (i = 1 \text{ à } \mathcal{M}). \end{cases} \tag{II.70}$$

b) Dans le cas où la condition (II.69) n'est pas vérifiée, c'est à dire que :

$$f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) > 0, \qquad \forall i, \tag{II.71}$$

une correction linéaire s'impose :

$$\begin{cases} \Delta d^i = \dfrac{1}{k\eta} f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) \\ d_{j+1}^i = d_j^i + \Delta d^i \ \ (i = 1 \text{ à } \mathcal{M}). \end{cases} \tag{II.72}$$

En raison de la forme du critère d'endommagement et de la fonction $\mathcal{R}(d^i)$ (équation II.59), l'incrément d'endommagement peut être directement déduit de la résolution d'une équation linéaire.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

II.4 Identification et résultats numériques pour un composite unidirectionnel SiC-SiC 2D

L'objectif de cette section est d'étudier les capacités prédictives du modèle. On se limitera à un composite orthotrope à matrice fragile pour lequel on dispose de données expérimentales. Les tests étant effectués sur des plaques de faible épaisseur, l'application de la modélisation plane proposée à ce matériau nous semble à priori justifiée. Outre le test de traction simple dans les directions des axes de symétrie du matériau, des sollicitations hors axes sont également considérées afin de tester les effets d'interaction entre l'orthotropie initiale et l'anisotropie induite par le chargement. L'analyse des prédictions macroscopiques du modèle sera complétée par celle de l'évolution de l'endommagement, ainsi que des composantes du tenseur de souplesse, en fonction du chargement appliqué.

II.4.1 Essais de traction simple dans les axes de symétrie et hors axes

Le matériau étudié est un composite SiC-SiC 2D dont l'étude expérimentale a été effectuée par X. Aubard [5] (voir également [4]). S'agissant des paramètres à identifier pour la mise en oeuvre du modèle, il est important de rappeler qu'à l'exception des deux constantes k et η du critère d'endommagement, l'avantage de la formulation micro-macro est que ses paramètres sont obtenus comme de simples combinaisons des coefficients élastiques de la matrice solide. Or, on dispose directement à partir des données expérimentales, des valeurs initiales des modules élastiques du matériau : ${E_1}^s = 320$ GPa, ${E_2}^s = 170$ GPa, ${\nu_{12}}^s = 0.18$, ${G_{12}}^s = 90$ GPa.
Le travail d'identification s'est donc essentiellement focalisé sur les deux coefficients k et η. Ceux ci ont été déterminés sur la base des considérations suivantes :
Dans le test effectué dans les directions des axes de symétrie initiale du matériau, on suppose que le seuil d'endommagement est déterminé à l'aide du critère d'endommagement associé aux microfissures de normale parallèle à l'axe de chargement. Ainsi on trouve le paramètre k, en prenant en compte la valeur de la contrainte axiale au seuil d'endommagement, et le paramètre η qui est en fait un paramètre de calage, tout comme la densité initiale de fissuration. Leurs valeurs sont identifiées à partir de la simulation de l'essai de traction simple.

Les valeurs obtenues par cette procédure sont : $k = 3.75$ J.m^{-2} et $\eta = 140$. La valeur retenue pour la densité initiale de fissures (supposée isotrope) est $d_0 = 0.01$.
Les simulations ont été faites à l'aide d'une intégration portant sur un nombre de 60 familles des microfissures dont l'orientation est répartie de manière uniforme (angle θ) entre 0 et π.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

La sollicitation considérée est caractérisée par l'angle φ entre le vecteur $\underline{e}_2$ de l'axe de symétrie du matériau et l'axe de chargement (voire Figure II.3). Pour le test de traction dans les directions des

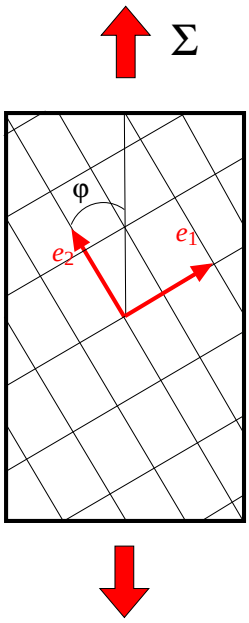

FIGURE *II.3: Sollicitation de traction hors-axes*

axes (essai pour lequel ont été déterminés les paramètres k et η), cet angle prend une valeur de 0^0 [25]

Pour résumer la stratégie retenue, l'essai de traction à 0^0 sert à identifier les paramètres du modèle, les deux autres essais hors-axes servant à la validation du modèle.

Les prédictions du modèle pour la traction simple à 0^0 et la bonne comparaison avec les données expérimentales (cf. Figure II.4) permettent une vérification de la cohérence de l'identification des paramètres du modèle. Les résultats des simulations des tests hors axes à 20^0 et 45^0 sont respectivement présentés sur les Figures II.5, II.6. On note une excellente concordance avec les données expérimentales ; on soulignera en particulier les positions des trois courbes les unes par rapport aux autres, ce qui semble correspondre à une amplification de la dégradation, pour le même niveau de chargement, au fur et à mesure que l'angle de chargement augmente (Fig. II.7). Ce résultat traduit également l'interaction entre l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite par l'endommagement.

[25] On présentera dans la suite des essais de traction hors axes à 20^0 et 45^0.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

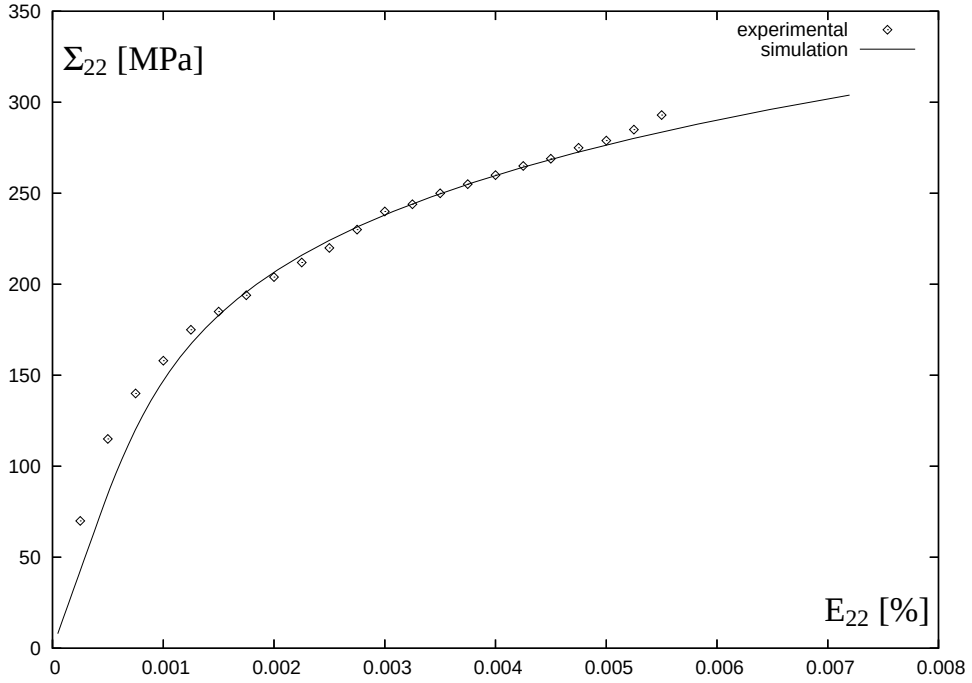

FIGURE *II.4: Comportement en traction simple dans les axes de symétrie (angle de 0^0 entre la direction de chargement et l'axe 2 du matériau) : comparaison modèle-expérience*

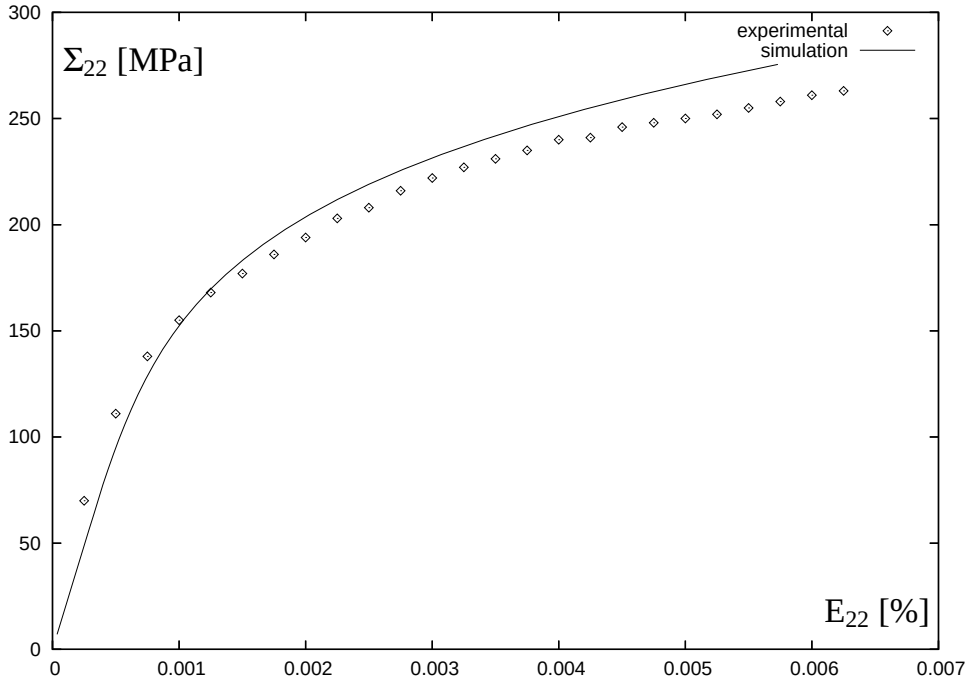

FIGURE *II.5: Comportement en traction simple hors axes de symétrie (angle de 20^0 entre la direction de chargement et l'axe 2 du matériau) : comparaison modèle-expérience.*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

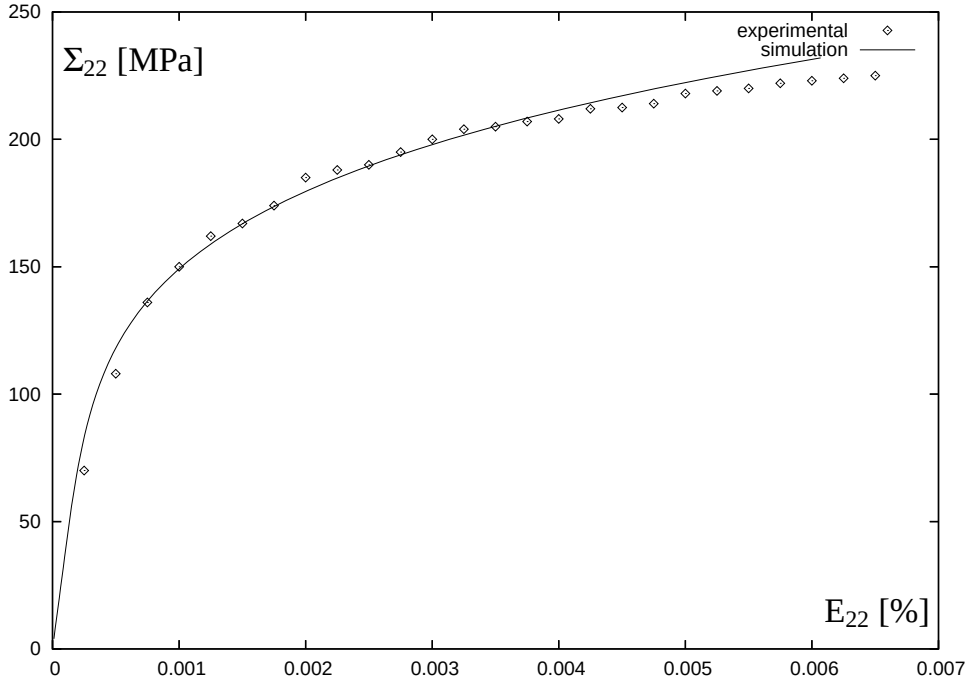

FIGURE *II.6: Comportement en traction simple hors axes de symétrie (angle de 45^0 entre la direction de chargement et l'axe 2 du matériau) : comparaison modèle-expérience.*

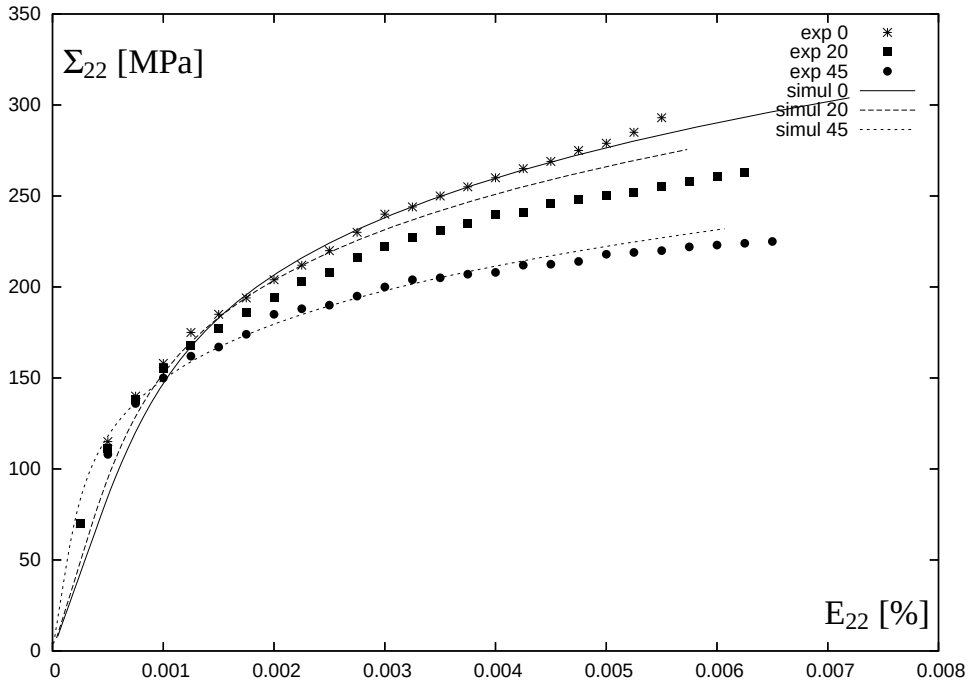

FIGURE *II.7: Comportement en traction simple dans et hors axes de symétrie (angles de $0^0, 20^0$ et 45^0 entre la direction de chargement et l'axe 2 du matériau) : comparaison modèle-expérience.*

© 2005 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Le caractère anisotrope de l'endommagement induit par le chargement est mis en évidence dans les Figures II.8, II.9, II.10, où sont présentées les évolutions des rosettes de densités d'endommagement caractérisant les différentes familles de microfissures pour les trois tests considérés à différents niveaux de contraintes ($\mathbf{\Sigma} = 175, 200$, respectivement 225 MPa). On confirme par exemple pour

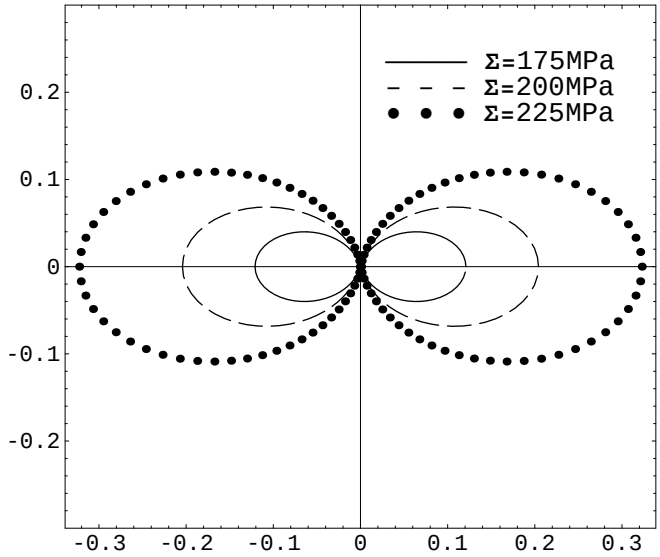

FIGURE *II.8: Evolution de la densité d'endommagement pour l'essai a* 0°

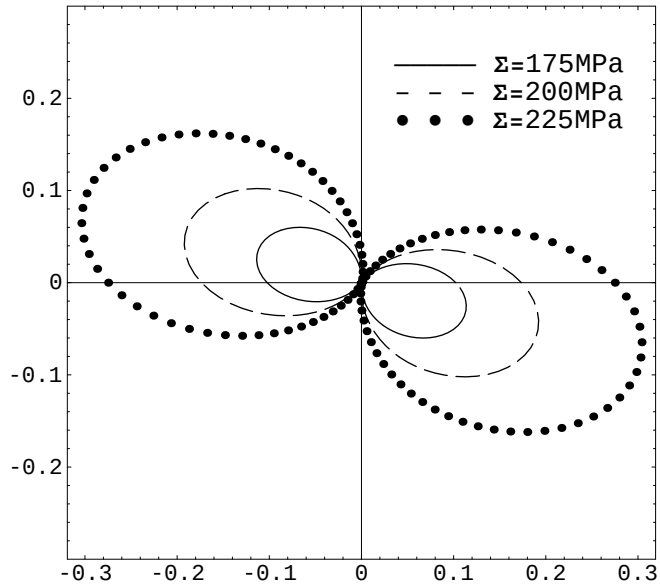

FIGURE *II.9: Evolution de la densité d'endommagement pour l'essai a* 20°

l'essai de traction dans les directions des axes d'orthotropie que les fissures les plus développées sont celles qui sont normales au chargement. De manière plus générale, on distingue pour un même niveau de contraintes $\mathbf{\Sigma} = 200$ MPa la diminution du niveau de densités maximales avec l'angle de sollicitation (par rapport à l'axe de symétrie du matériau), ce qui souligne à nouveau l'influence de l'anisotropie initiale sur le processus d'endommagement (Fig. II.11).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

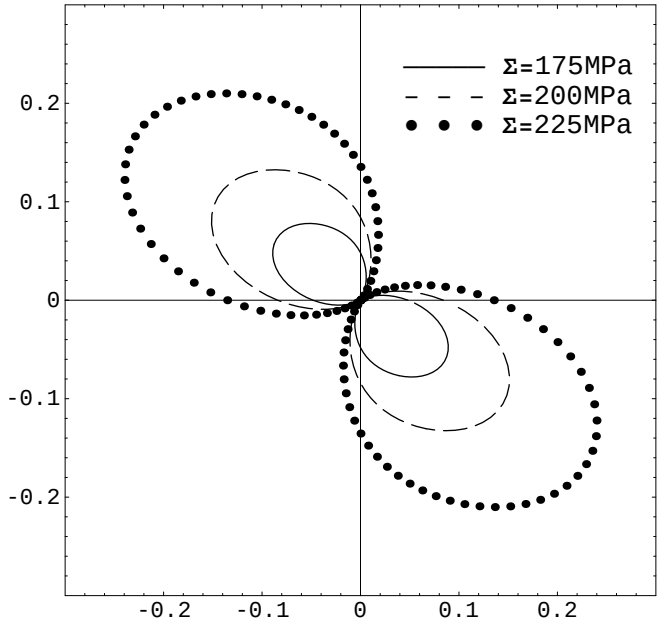

FIGURE *II.10: Evolution de la densité d'endommagement pour l'essai a* 45°

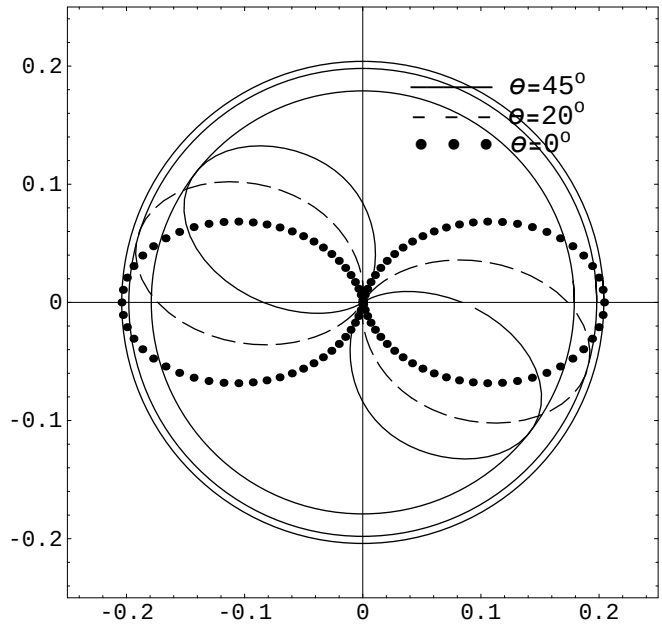

FIGURE *II.11: Evolution de la densité d'endommagement pour une contrainte*

$$\mathbf{\Sigma} = 200\ MPa$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

II.4.2 Evolution des composantes du tenseur de souplesse avec le chargement

Dans cette sous section on souhaite mettre en évidence l'effet de l'endommagement induit par le chargement sur les propriétés élastiques du matériau. Cette étude permettra également d'illustrer la perte de symétrie du matériau lorsqu'il se dégrade[26].

Les Figures II.12, II.13 et II.14 illustrent la manière dont évoluent les composantes du tenseur de souplesse du matériau avec le chargement (pour les trois essais à 0^0, 20^0 et 45^0). La façon dont

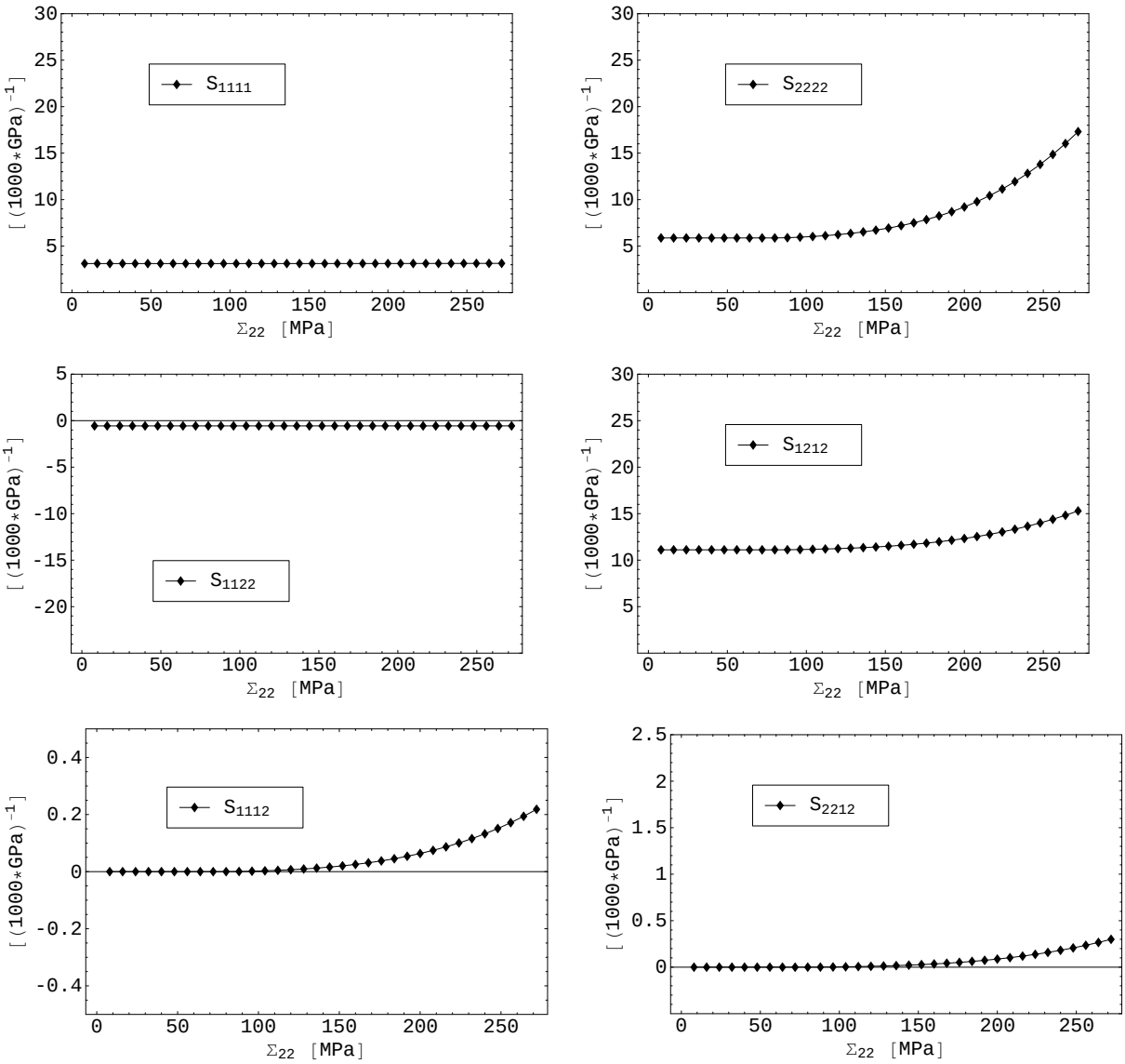

FIGURE *II.12: Evolution des composantes du tenseur de souplesse homogénéisé en fonction du chargement appliqué pour un essai de traction à* 0^0.

[26]Pour confirmer les bonnes capacités prédictives du modèle, il aurait été souhaitable de présenter ici un second niveau de validation expérimentale, portant sur la comparaison modèle-expérience de l'évolution des propriétés élastiques du matériau avec le chargement. Malheureusement nous ne disposons pas de telles données expérimentales. Ce type de validation sera réalisé sur un autre matériau étudié dans le cadre du modèle 3-D qui sera présenté au chapitre IV.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

la contrainte appliquée modifie les propriétés homogénéisées du matériau dans le plan contenant la direction de sollicitation met à nouveau en évidence l'effet de l'anisotropie initiale. De plus, on notera la perte d'orthotropie du matériau à partir d'un certain niveau de chargement (voir les courbes d'évolution de S_{1211} et S_{1222}) ; l'anisotropie obtenue est générale.

Pour les trois essais on constate l'existence d'une phase élastique, suivie d'une deuxième phase, non-linéaire, dans laquelle nous observons une importante dégradation des composantes S_{1212} et surtout S_{2222}. L'essai de traction avec un angle de 20^0 présente, en plus par rapport à l'essai dans la direction de symétrie 2, un assouplissement important pour la composante S_{1111}, similaire à celui de la composante S_{2222} dans l'essai de traction à 45^0.

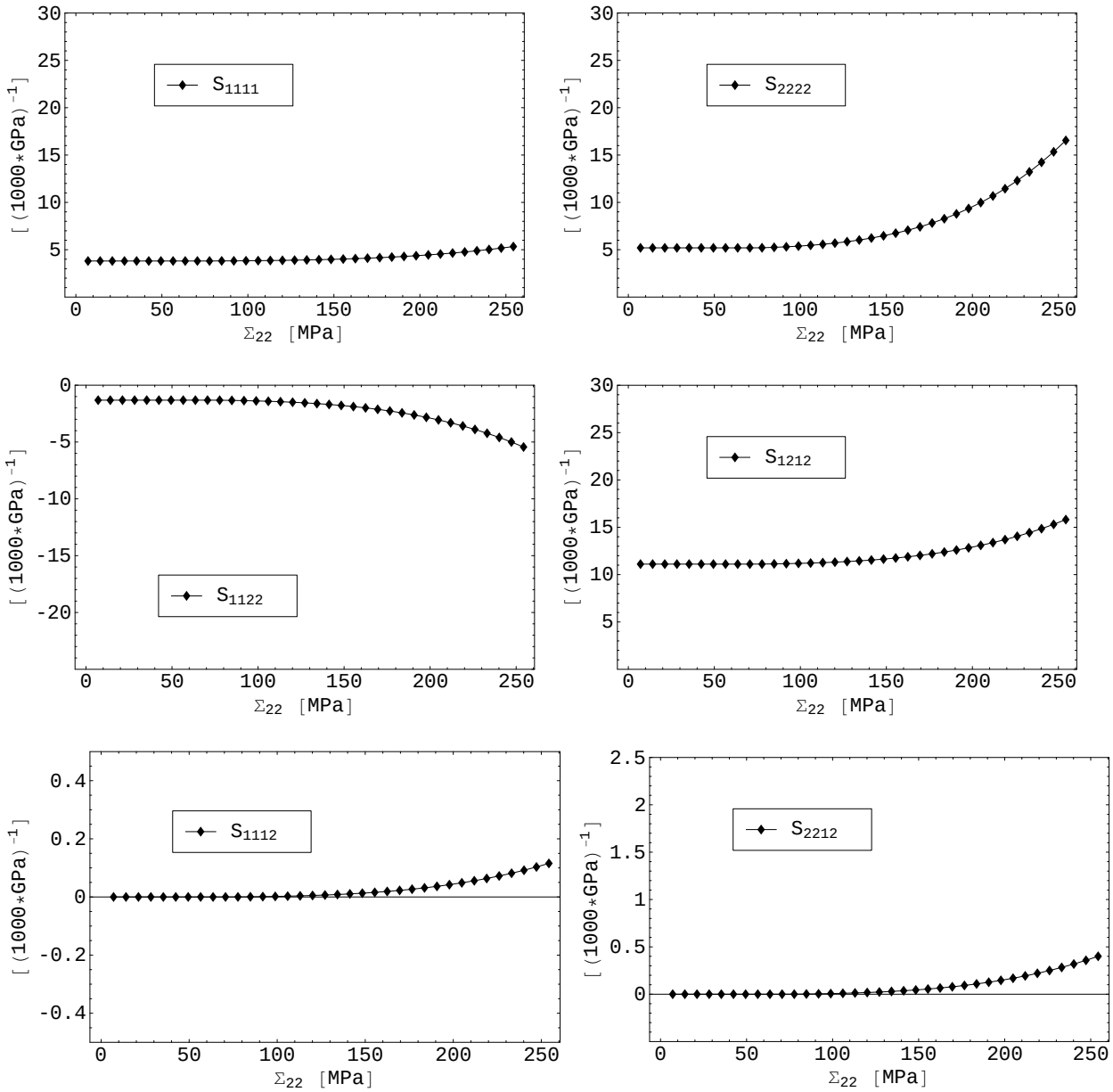

FIGURE *II.13: Evolution des composantes du tenseur de souplesse homogénéisé avec le chargement appliqué pour un essai de traction à* 20^0.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

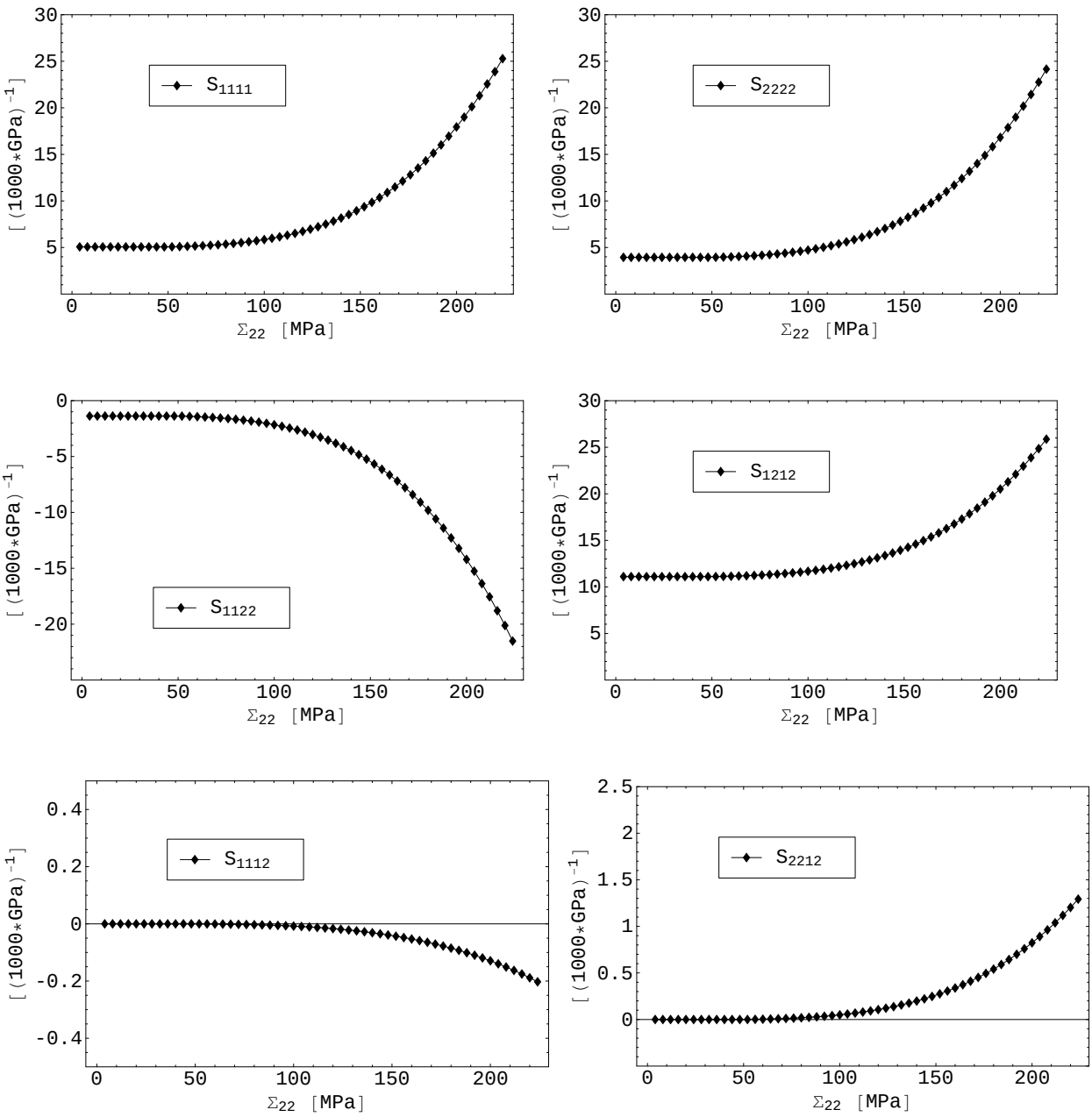

FIGURE *II.14: Evolution des composantes du tenseur de souplesse homogénéisé avec le chargement appliqué pour un essai de traction à* 45^0.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

II.5 Conclusions

A l'issue de ce chapitre nous disposons d'un modèle micromécanique bidimensionnel capable de décrire le comportement élastique endommageable des matériaux initialement orthotropes. Les prédictions de ce modèle sont en très bon accord avec les données expérimentales dont nous disposons pour un composite unidirectionnel SiC-SiC 2D (étude expérimentale effectuée par X. Aubard [5]).

Le modèle micromécanique proposé apporte un éclairage intéressant sur divers aspects de la modélisation de l'endommagement des milieux anisotropes. En particulier des réponses claires sont apportées à la question de l'interaction et du couplage entre l'anisotropie induite par l'endommagement et l'anisotropie initiale du matériau.
Il est possible d'aller plus loin dans ce sens en s'intéressant à la structure mathématique des lois d'endommagement pour cette classe de matériaux lorsque l'anisotropie de l'endommagement est décrite à l'aide d'un tenseur d'ordre 2. La formulation purement macroscopique construite dans cet esprit en s'appuyant sur les résultats de ce chapitre est présentée et détaillée en Annexe D.

Malgré ces résultats encourageants, il reste que le modèle est limité par son caractère bidimensionnel. Les chapitres qui suivent ont pour principal objectif d'apporter des améliorations/extensions pour cette formulation sur deux aspects :

- *proposer au chapitre III une formulation alternative de type Eshelby au modèle 2D disponible.* On montrera de manière détaillée les avantages de cette nouvelle formulation tout à fait originale.
- *Développer une formulation tridimensionnelle de l'endommagement en milieu orthotrope de révolution.* Cette modélisation 3D sera également appliquée et validée sur des données expérimentales plus complètes que celles étudiées dans le présent chapitre.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre III

Approche alternative par tenseur d'Eshelby de l'homogénéisation des milieux anisotropes fissurés

Dans ce chapitre on présente une approche alternative, par tenseur d'Eshelby, de la fissuration des matériaux initialement anisotropes. S'appuyant sur des résultats classiques de la micromécanique, on établit d'abord l'expression du comportement homogénéisé à l'aide du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}$ (ou, de façon équivalente, du tenseur de Hill $\mathbb{P}$) correspondant aux fissures modélisées comme des cylindres aplatis (c'est à dire de faible rapport d'aspect). La détermination du tenseur $\mathbb{P}$ est réalisée en adoptant une approche de calcul ne nécessitant pas la connaissance de la fonction de Green. Dans le cas d'un milieu orthotrope, l'approche est mise en oeuvre pour déterminer de manière analytique le tenseur $\mathbb{P}$ associé à une fissure arbitrairement orientée[27]. Ces résultats, tout à fait nouveaux, sont validés par rapport à ceux existant dans la littérature et à ceux présentés au chapitre II. On en soulignera les avantages.

Remarque III.1 *L'étude menée dans ce chapitre vise à montrer l'équivalence entre l'approche directe du chapitre II et l'approche par tenseur d'Eshelby pour un système de fissures parallèles d'orientation quelconque. L'intérêt d'un tel nouveau résultat réside dans les possibilités d'extension qu'offre l'approche d'Eshelby, par exemple pour la prise en compte des interactions entre fissures dans une matrice solide orthotrope.*

[27] Les difficultés techniques de ces calculs ont pu être surmontées en s'aidant des outils de calcul formel.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

III.1 Principe de l'homogénéisation linéaire des milieux anisotropes contenant des fissures

On se propose dans cette section de rappeler les techniques d'homogénéisation des milieux à microstructure aléatoire et leurs applications aux matériaux fissurés. La présentation est inspirée des travaux de Deudé et al. [20, 21] et Dormieux et al. [22]. Pour simplifier, on considère d'abord un système de fissures parallèles non interagissantes pour lesquelles l'utilisation d'un schéma dilué s'avère suffisante[28].

III.1.1 Introduction

Considérons un v.e.r. (volume élémentaire représentatif) Ω, constitué d'une matrice solide élastique anisotrope linéaire affaiblie par un système de fissures parallèles de normale unitaire $\underline{n}$. On adopte la description continue suivante dans tout le v.e.r. : le champ de déplacements microscopiques $\underline{\xi}$ (et donc le champ de déformation) et le champ des contraintes microscopiques σ sont prolongés dans l'espace poreux (en l'occurence le domaine occupé par les fissures) Ω^f, en relation avec un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^f$ prescrit pour la description mécanique des fissures. Afin de rendre compte de la nullité des contraintes sur les lèvres des fissures ouvertes, on attribue classiquement à celles-ci une élasticité nulle : $\mathbb{C}^f = 0$[29]. Le problème mécanique ainsi défini sur le v.e.r. Ω soumis à une déformation macroscopique $\mathbf{E}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma = 0 & (a) \\ \sigma = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon \quad \text{avec} \begin{cases} \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^f = 0 & \text{pour} \quad \underline{z} \in \Omega^f \\ \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^s & \text{pour} \quad \underline{z} \in \Omega^s \end{cases} & (b) \\ \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{z} \text{ quand } \underline{z} \in \partial\Omega & (c) \end{cases} \tag{III.1}$$

Il s'agit d'un problème linéaire ; en vertu du principe de superposition, la solution correspondante s'exprime linéairement en fonction de la déformation macroscopique $\mathbf{E}$:

$$\varepsilon(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E}. \tag{III.2}$$

Le tenseur de localisation $\mathbb{A}$ permet d'exprimer la déformation microscopique $\varepsilon(\underline{x})$ en fonction de la déformation macroscopique. Il vérifie la condition dite de cohérence, i.e. : $\overline{\mathbb{A}(\underline{x})} = \mathbb{I}$ ($\overline{f}$ désigne

[28] La modélisation des effets d'interaction en adoptant un schéma de type Mori-Tanaka sera traitée dans la section III.4.2.

[29] Dans le contexte isotrope, le cas des fissures fermées a été modélisé en introduisant un concept de matériau élastique fictif destiné à rendre compte de la nullité des efforts de cisaillement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

la moyenne volumique de f sur le v.e.r.).

Sous les conditions aux limites (III.1 (c)), la contrainte macroscopique $\mathbf{\Sigma}$ est définie comme la moyenne des contraintes microscopiques $\sigma(\underline{x})$ sur le v.e.r. :

$$\mathbf{\Sigma} = \overline{\sigma(\underline{x})}. \tag{III.3}$$

En utilisant (III.2) et en prenant la moyenne de (III.1 (b)) sur le v.e.r., on obtient le comportement homogénéisé du matériau :

$$\mathbf{\Sigma} = \overline{\sigma(\underline{x})} = \overline{\mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon(\underline{x})} = \overline{\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})} : \mathbf{E} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E}. \tag{III.4}$$

Le tenseur d'élasticité homogénéisé est donc défini par : $\mathbb{C}^{hom} = \overline{\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})}$. Compte tenu de $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{I}$, il vient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s + \varphi^f(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) : \overline{\mathbb{A}}. \tag{III.5}$$

La détermination de $\mathbb{A}$ s'appuie classiquement sur la solution des problèmes d'inclusion d'Eshelby [27] (voir également [28]). Dans ce cadre, la fissure est traitée comme une inhomogénéité ellipsoidale I, plongée dans un milieu solide infini ω ; les conditions aux limites sont celles d'une déformation homogène à l'infini. Dans le contexte des milieux anisotropes, il est utile de souligner que l'analyse du problème doit d'abord être réalisée dans le repère local de la fissure, ce qui ne facilite pas les calculs.

Les équations qui gouvernent le problème de l'inhomogénéité (représentant une fissure ouverte) plongée dans la matrice solide s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & (a) \\ \sigma = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon \quad \text{avec} \begin{cases} \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^I = 0 & \text{si} \quad \underline{z} \in I \\ \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^s & \text{si} \quad \underline{z} \in \omega \end{cases} & (b) \\ \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{z} \text{ pour } \underline{z} \to \infty & (c) \end{cases} \tag{III.6}$$

dans laquelle $\mathbf{E}$ désigne la déformation macroscopique uniforme à l'infini. En outre, on introduit $\delta\mathbb{C} = \mathbb{C}^I - \mathbb{C}^s$ ($= -\mathbb{C}^s$ pour les fissures ouvertes). Il s'en suivent les résultats suivants :

– La solution du problème d'inhomogénéité est donnée par :

$$\varepsilon^I = (\mathbb{I} + \mathbb{P} : \delta\mathbb{C})^{-1} : \mathbf{E}. \tag{III.7}$$

$\mathbb{I}$ étant le tenseur identité d'ordre 4 symétrique. On notera que ce résultat reste valide pour n'importe quelle valeur de $\delta\mathbb{C}$, et en particulier pour des fissures ouvertes ($\delta\mathbb{C} = -\mathbb{C}^s$). Par commodité, on introduit le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S} = \mathbb{P} : \mathbb{C}^s. \tag{III.8}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

La relation micro-macro (III.7) entre la déformation dans l'inhomogénéité ε^I et la déformation macroscopique $\mathbf{E}$ prend alors la forme suivante pour les fissures ouvertes :

$$\varepsilon^I = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} : \mathbf{E}. \tag{III.9}$$

Le tenseur du quatrième ordre $\mathbb{P}$ apparaissant dans (III.7) est défini à l'aide de la fonction de Green du milieu élastique (cf. par exemple Mura [70], Zaoui [98]) $\mathbf{G}(\underline{z} - \underline{z}')$:

$$P_{ijkl}(\underline{z}) = -\left[\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k}\left(\int_I G_{il}(\underline{z} - \underline{z}')\, dV_{z'}\right)\right]_{(ij),(kl)} \tag{III.10}$$

– **Le schéma dilué.** Ce premier schéma d'estimation correspond à la situation d'une faible fraction volumique d'inhomogénéités, ce qui signifie que celles-ci n'interagissent pas entre elles. L'estimation de la déformation moyenne dans la fissure est alors donnée par la solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby (III.7-III.9), ce qui conduit à un tenseur de localisation en déformation $\overline{\mathbb{A}}^f$:

$$\overline{\mathbb{A}}^f \approx (\mathbb{I} + \mathbb{P} : \delta\mathbb{C})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}. \tag{III.11}$$

$\overline{\mathbb{A}}_f$ désigne la moyenne spatiale du tenseur de localisation dans la fissure. Reportant (III.11) dans l'expression (III.5), on obtient l'estimation suivante du tenseur d'élasticité homogénéisé par le schéma dilué :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \varphi^f \overline{\mathbb{A}}^f) = \mathbb{C}^s : \left[\mathbb{I} - \varphi^f (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}\right], \tag{III.12}$$

expression dans laquelle φ^f représente la fraction volumique des fissures.

III.1.2 Milieux anisotropes contenant une fissure du type $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \qquad |z_3| < \infty$

L'exploitation des résultats de la sous-section III.1.1 peut être effectuée pour différentes géométries de fissures. C'est par exemple le cas des fissures "penny shaped" (sphéroïde en forme de monnaie, de rayon a, rapport d'aspect tendant vers 0 et dont l'axe de symétrie de révolution correspond à la normale $\underline{n}$) dans une matrice solide isotrope, largement étudié dans la littérature (voir par exemple Hori et Nemat-Nasser [41], Deudé [20, 21], Dormieux et all. [22] etc..).
Dans le cas d'une matrice solide anisotrope, l'étude analytique de la fissure penny shaped se heurte à de grandes difficultés et se trouve actuellement hors de portée des investigations pour des raisons que nous préciserons ultérieurement. Ainsi, le chapitre sera pour l'essentiel consacré au cas d'une matrice solide anisotrope contenant un système de fissures parallèles du type :

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \qquad |z_3| < \infty. \tag{III.13}$$

Il s'agit d'une modélisation dans laquelle la fissure correspond à un cylindre d'extension infinie suivant la direction 3, de section elliptique, et dont le rapport d'aspect b/a tend vers 0[30]. La figure

[30] La présente étude a pour objectif de prolonger la modélisation plane effectuée au chapitre II.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

III.1 indique la configuration géométrique d'une telle fissure caractérisée par son orientation par rapport aux axes de symétrie (orthotrope) du matériau et son rapport d'aspect, que l'on note $X = b/a$ (a et b étant respectivement les demi-longueurs dans les directions z_2 et z_1). Dans le

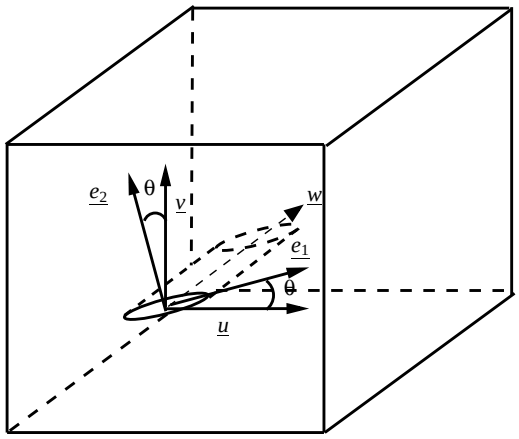

FIGURE *III.1: Fissure modélisée par un cylindre infini de section elliptique*

contexte du schéma dilué précédemment présenté[31], le tenseur de concentration des déformations $\overline{\mathbb{A}}^f$ s'écrit :

$$\overline{\mathbb{A}}^f = [\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n})]^{-1}, \tag{III.14}$$

dans laquelle on précise la dépendance du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}(X, \underline{n})$ associé au système de fissures avec la normale $\underline{n}$ et le rapport d'aspect X. En désignant par $\mathcal{N}$ le nombre de fissures de la famille considérée par unité de surface, la "fraction volumique" s'écrit $\varphi^f = \pi ab\mathcal{N}$. L'introduction de la densité de fissures[32] $d = \mathcal{N}a^2$ conduit à :

$$\varphi^f = \pi X d. \tag{III.15}$$

La combinaison de (III.12, III.14 et III.15) mène immédiatement à :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left[\mathbb{I} - \pi d X \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n})\right]^{-1}\right]. \tag{III.16}$$

La présence de X et $\underline{n}$ dans l'expression du tenseur d'Eshelby indique à priori une dépendance des propriétés macroscopiques avec le rapport d'aspect du sphéroide et avec son orientation. De plus,

[31] On rappelle que cette estimation est effectuée en considérant que la déformation moyenne dans la fissure est donnée par la déformation uniforme obtenue dans le sphéroïde ayant la même orientation $\underline{n}$ et le même rapport d'aspect X, ce sphéroïde (plongé dans une matrice infinie de tenseur d'élasticité anisotrope $\mathbb{C}^s$) étant soumis à la déformation macroscopique $\mathbf{E}$.

[32] Ce paramètre a été introduit par Budiansky et O'Connell [12] pour caractériser l'effet des fissures sur l'élasticité macroscopique des milieux initialement isotropes.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

on a aussi implicitement la dépendance avec les propriétés anisotropes de la matrice solide. La non linéarité géométrique introduite par la variation de X (on s'attend à ce que cette variation soit importante) appelle une analyse incrémentale du problème d'homogénéisation du milieu fissuré, ce qui conduit à la définition d'un tenseur d'élasticité tangent homogénéisé . En fait, on montre que, si le rapport d'aspect X ($X > 0$, fissure ouverte) tend vers 0, $\mathbb{C}_t^{hom} = \mathbb{C}^{hom}$, ce qui permet de justifier à postériori l'analyse linéaire (cf. Dormieux et Kondo [23]). Ce résultat est lié au fait que dans le contexte isotrope (cf. Eshelby [27], Hori [41]), où, pour une matrice solide anisotrope dont la normale coïncide avec un des axes d'orthotropie (Laws [55]) la quantité $[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n})]^{-1}$ est singulière en $1/X$ au premier ordre. Il s'en suit que $X\,[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n})]^{-1}$ admet une limite finie (que l'on notera $\mathbb{T}$) lorsque $X \to 0$. Ce résultat, dont nous admettons pour l'instant la validité générale, sera démontré dans le cas d'une fissure arbitrairement orientée vis à vis des axes d'orthotropie.
Le tenseur d'élasticité homogénéisé s'exprime alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \pi d \mathbb{T}), \qquad \text{avec :} \tag{III.17}$$

$$\mathbb{T} = \lim_{X \to 0} X\,[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n})]^{-1} = \lim_{X \to 0} X\,[\mathbb{I} - \mathbb{P}(X, \underline{n}) : \mathbb{C}^s]^{-1}\,. \tag{III.18}$$

Les résultats qui viennent d'être présentés soulignent que la détermination des propriétés homogénéisées passe par celle du tenseur $\mathbb{T}$ qui requiert lui même l'évaluation de $\mathbb{P}$. Dans le cas anisotrope avec une orientation arbitraire de la fissure (cf. Figure III.2), le calcul de $\mathbb{P}$ à l'aide de (III.10) s'avère délicat puisque l'expression analytique de la fonction de Green n'est pas connue en général[33] : ceci constitue la difficulté majeure de l'homogénéisation des milieux fissurés dont la phase matricielle est élastique anisotrope.

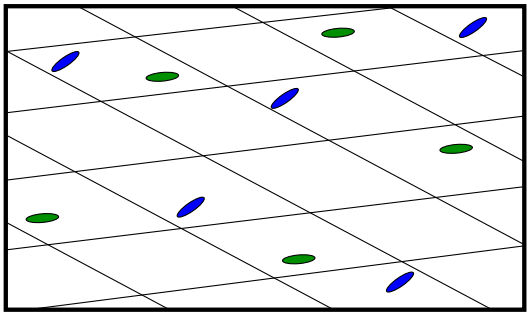

FIGURE *III.2: Schématisation d'un matériau anisotrope contenant des fissures d'orientation arbitraire*

Il existe une formulation alternative du tenseur $\mathbb{P}$ (associé à une inhomogénéité ellipsoïdale I

[33] La détermination de la fonction de Green en élasticité anisotrope constitue encore un champ de recherche active ; le lecteur intéressé par la question pourra se référer à Ting [89].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

plongée dans une matrice solide anisotrope) ne nécessitant pas la connaissance de la fonction de Green[34]. On peut situer l'origine de cette formulation alternative (dont les développements font l'objet de la section III.2) dans les travaux de Faivre [29] et de Kinoshita et Mura [44].

III.2 Détermination du tenseur $\mathbb{P}$: fissure arbitrairement orientée dans un milieu orthotrope

On se restreint au cas d'une matrice solide initialement orthotrope.

III.2.1 Introduction

On s'intéresse dans un premier temps à la situation générale d'une inhomogénéité ellipsoidale plongée dans une matrice solide anisotrope de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^s$. L'inclusion ellipsoïdale est définie par :

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} \leq 1. \tag{III.19}$$

Le point de départ pour le calcul du tenseur $\mathbb{P}$ est l'expression suivante (cf. Faivre [29], Kinoshita et Mura [44], Willis [96], Laws [55, 56, 57], Mura [70]) :

$$P_{ijkl} = \frac{abc}{4\pi} \int_{|\underline{\xi}|=1} \frac{D_{ijkl}}{a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 + c^2\xi_3^2} dS(\underline{\xi}), \tag{III.20}$$

pour laquelle il s'agit d'effectuer une intégration sur la sphère unité centrée à l'origine de l'espace $(\xi_1, \xi_2, \xi_3,)$, définie par $\mid \underline{\xi} \mid = 1$.

Les composantes D_{ijkl} requises dans le calcul des composantes P_{ijkl} de $\mathbb{P}$ sont définies :

$$D_{ijkl} = \frac{1}{4}\left(\xi_i K_{jk}^{-1}\xi_l + \xi_j K_{ik}^{-1}\xi_l + \xi_i K_{jl}^{-1}\xi_k + \xi_j K_{il}^{-1}\xi_k\right), \tag{III.21}$$

dans laquelle $\mathbf{K} = \underline{\xi}.\mathbb{C}^s.\underline{\xi}$ est le tenseur acoustique associé à $\mathbb{C}^s$ et à la direction $\underline{\xi}$:

$$K_{ik}(\underline{\xi}) = C_{ijkl}^s \xi_j \xi_l. \tag{III.22}$$

On notera que c'est précisément au travers du tenseur acoustique $\mathbf{K}$ qu'intervient l'anisotropie de la matrice solide élastique. Par ailleurs, la dépendance de $\mathbb{P}$ avec l'orientation de l'ellipsoide se comprend par le fait que les expressions qui viennent d'être indiquées impliquent des calculs effectués dans le repère associé aux axes de l'ellipsoide[35].

[34] La question d'une inclusion ellipsoidale en milieu anisotrope avait été abordé auparavant dans Willis [94], puis pour les fissures dans [95].

[35] Pour être complet, on soulignera également qu'en vertu de la définie positivité de $\mathbb{D}$, le tenseur $\mathbb{P}$ est défini positif, ce qui assurera la même propriété pour le tenseur d'élasticité ou de souplesse homogénéisé du milieu fissuré qui en seront ultérieurement déduits.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Enfin, il découle de la définition (III.21) que (III.20) se met sous la forme :

$$P_{ijkl} = \frac{1}{4}[\mathcal{M}_{ijkl} + \mathcal{M}_{jikl} + \mathcal{M}_{ijlk} + \mathcal{M}_{jilk}], \tag{III.23}$$

avec :

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \frac{abc}{4\pi} \int_{|\underline{\xi}|=1} \frac{\xi_i K^{-1}_{jk} \xi_l}{a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 + c^2\xi_3^2} dS(\underline{\xi}). \tag{III.24}$$

III.2.2 Cas d'une fissure arbitrairement orientée dans un milieu orthotrope

On reprend l'étude de la fissure décrite dans la sous section III.1.2, avec la modélisation géométrique consistant en un cylindre infini dont la section courante est une ellipse aplatie (cf. figure III.3). Cette fissure (de rapport d'aspect $X = b/a$) est inclinée par rapport aux axes d'orthotropie[36]. Cette inclinaison de la fissure rend les calculs délicats dans le sens où le tenseur d'élasticité

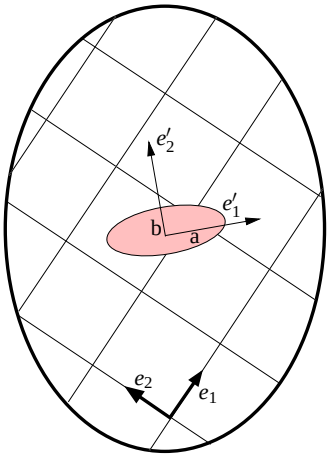

FIGURE *III.3: Définition du rapport d'aspect du cylindre infini de section ellipsoïdale*

$\mathbb{C}^s$ de la matrice solide orthotrope doit être exprimé dans le repère associé aux axes de la fissure. On adopte la notation de Voigt, ce qui conduit à la représentation matricielle suivante pour $\mathbb{C}^s$ dans le repère défini par les axes de symétrie matérielle :

$$\mathbb{C}^s = \begin{pmatrix} C^s_{1111} & C^s_{1122} & C^s_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C^s_{2211} & C^s_{2222} & C^s_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C^s_{3311} & C^s_{3322} & C^s_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^s_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^s_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^s_{1212} \end{pmatrix} \tag{III.25}$$

[36] On rappelle que la fissure est géométriquement décrite par : $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \quad -\infty < z_3 < \infty$.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Les calculs dans le repère local de la fissure, (dont la description géométrique est donnée dans III.13) donnent[37] :

$$C'^s = \begin{pmatrix} C'_{1111} & C'_{1122} & C'_{1133} & 0 & 0 & C'_{1112} \\ C'_{2211} & C'_{2222} & C'_{2233} & 0 & 0 & C'_{2212} \\ C'_{3311} & C'_{3322} & C'_{3333} & 0 & 0 & C'_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{3232} & C'_{3231} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{3132} & C'_{3131} & 0 \\ C'_{1211} & C'_{1222} & C'_{1233} & 0 & 0 & C'_{1212} \end{pmatrix} \tag{III.26}$$

Ces composantes, obtenues à l'aide des formules usuelles de changement de base impliquant l'angle θ qui définit le plan de la fissure, sont données dans l'annexe E, section E.1.

Compte tenu de (III.26), on notera que C'^s correspond apparemment à une symétrie de type monoclinique[38](13 composantes). Pour une telle matrice de composantes, la détermination analytique de $\mathbb{P}$ à l'aide de (III.20) que l'on aborde dans la sous section III.2.3 n'est pas immédiate.

III.2.3 Résultats analytiques issus du calcul du tenseur de Hill $\mathbb{P}$

Pour faciliter le calcul du tenseur $\mathbb{P}$ (équation III.20) dans le cas de la fissure décrite par (III.13) on pose, suivant en cela Laws [55] :

$$\begin{cases} \xi_1 = (1-\xi_3^2)^{1/2} cos\psi; \\ \xi_2 = (1-\xi_3^2)^{1/2} sin\psi; \\ \xi_3 = z_3 = z; \end{cases} \tag{III.27}$$

avec : $0 < \psi < 2\pi$.

Kinoshita et Mura [44] ont montré que pour les points intérieurs du cylindre infini ($c \to \infty$) de section elliptique, on a :

$$P_{ijkl} = \frac{ab}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K_{ijkl}(\xi_1, \xi_2)}{(a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2)} d\psi, \tag{III.28}$$

dans lequel a été adoptée la définition :

$$K_{ijkl}(\xi_1, \xi_2) = D_{ijkl}(\xi_1, \xi_2, 0). \tag{III.29}$$

[37]On souligne à nouveau que ceci complique notablement le calcul de $\mathbb{P}$, par le fait que la fissure se trouve plongée maintenant dans un milieu dont l'anisotropie apparente (dans ses axes) est plus forte que l'orthotropie (de type monoclinique). On notera en particulier la présence des composantes $C'_{1112}, C'_{2212}, C'_{3312}$ et C'_{3231} dans la matrice C'^s des composantes du tenseur d'élasticité dans ce repère.

[38]Naturellement, il ne s'agit pas ici d'un matériau à symétrie monoclinique puisque les composantes sont reliées par les relations E.1 de l'Annexe E.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

De manière équivalente, on a toujours (III.23), avec maintenant :

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \frac{ab}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\xi_i K_{jk}^{-1}\xi_l}{(a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2)} d\psi. \tag{III.30}$$

Malgré la simplicité d'écriture de (III.28), son évaluation analytique reste toujours délicate. Pour cette raison, on adopte la démarche récemment proposée par Suvorov et Dvorak [84][39]. On soulignera que la configuration d'une inclusion arbitrairement orientée dans un milieu orthotrope n'a pas été explicitement étudiée par ces auteurs. C'est en celà que réside l'originalité de l'étude que nous présenterons dans la suite. Le point de départ des calculs de $\mathbb{P}$ est l'expression (III.28) avec les définitions (III.29) et (III.22) dans lequel on rappelle que C^s est maintenant remplacé par C'^s défini en (III.26). *Pour des raisons de simplicité d'écriture, on omettra néanmoins le " ' " tout en sachant que les calculs seront effectués dans un premier temps dans le repère défini par les axes de la fissure. Un dernier changement de base permettra à la fin de se ramener dans le repère lié au matériau.*

En suivant la procédure décrite par Ting [88] et adaptée par Suvorov [84], on introduit deux vecteurs unitaires $\underline{n}$ et $\underline{m}$ orthogonaux et fixes dans le plan $\xi_3 = 0$, de sorte que l'on peut écrire tout vecteur dans ce plan $\underline{\xi} = \cos\psi\underline{n} + \sin\psi\underline{m}$ (pour faire simple, on pourra choisir $\underline{n} = \underline{e}_1$ et $\underline{m} = \underline{e}_2$). Il s'en suit que le tenseur acoustique (associé à $\underline{\xi}$) $\mathbf{K} = \underline{\xi}.\mathbb{C}^s.\underline{\xi}$ dont les composantes sont définies par (III.22), peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K} = (\cos\psi)^2\mathbf{Q} + \cos\psi\sin\psi(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + (\sin\psi)^2\mathbf{T}, \tag{III.31}$$

que l'on peut réécrire, à l'aide du changement de variable :

$$z = \cot\psi \tag{III.32}$$

sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\psi) = (\sin\psi)^2\left[\mathbf{Q}z^2 + z(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{T}\right] = (\sin\psi)^2\mathbf{K}(z), \tag{III.33}$$

avec :

$$\mathbf{K}(z) = z^2\mathbf{Q} + z(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{T}. \tag{III.34}$$

Les tenseurs du second ordre $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, et $\mathbf{T}$ sont définis par les deux vecteurs $\underline{n}$ et $\underline{m}$ introduits antérieurement. En faisant le choix $\underline{n} = \underline{e}_1$ et $\underline{m} = \underline{e}_2$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \underline{e}_1.\mathbb{C}^s.\underline{e}_1 \\ \mathbf{R} &= \underline{e}_1.\mathbb{C}^s.\underline{e}_2 \\ \mathbf{T} &= \underline{e}_2.\mathbb{C}^s.\underline{e}_2, \end{aligned} \tag{III.35}$$

[39] Cette démarche est elle même inspirée des travaux de Ting et Lee [88] initialement proposés dans un contexte d'évaluation de la fonction de Green d'un milieu anisotrope.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

dont les matrices des composantes sont respectivement :

$$Q = \begin{pmatrix} C^s_{1111} & C^s_{1112} & 0 \\ C^s_{1112} & C^s_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & C^s_{3131} \end{pmatrix} \tag{III.36}$$

$$R = \begin{pmatrix} C^s_{1112} & C^s_{1122} & 0 \\ C^s_{1212} & C^s_{2212} & 0 \\ 0 & 0 & C^s_{3231} \end{pmatrix} \tag{III.37}$$

$$T = \begin{pmatrix} C^s_{1212} & C^s_{2212} & 0 \\ C^s_{2212} & C^s_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C^s_{3232} \end{pmatrix} \tag{III.38}$$

Le calcul de $\mathbb{P}$ (équation III.29) nécessite l'inversion de $\mathbf{K}(z)$. Si l'on note $\mid \mathbf{K}(z) \mid$ son déterminant et $\tilde{\mathbf{K}}(z)$ son adjoint, on a :

$$\mathbf{K}(z).\tilde{\mathbf{K}}(z) = \mid \mathbf{K}(z) \mid \mathbf{1}, \tag{III.39}$$

c'est à dire :

$$\mathbf{K}^{-1}(z) = \frac{\tilde{\mathbf{K}}(z)}{\mid \mathbf{K}(z) \mid} \tag{III.40}$$

Il reste maintenant à procéder de manière analogue pour le tenseur $\mathbf{\Delta} = \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}$ qui, avec $\mathbf{K}^{-1}$, entre dans la définition (III.29). On montre que :

$$\mathbf{\Delta}(\psi) = (\sin\psi)^2 \mathbf{\Delta}(z), \qquad \text{avec :} \tag{III.41}$$

$$\mathbf{\Delta}(z) = z^2\mathbf{F} + z(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) + \mathbf{H}, \tag{III.42}$$

et les tenseurs du second ordre $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, et $\mathbf{H}$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \underline{n} \otimes \underline{n} \\ \mathbf{G} &= \underline{n} \otimes \underline{m} \\ \mathbf{H} &= \underline{m} \otimes \underline{m}. \end{aligned} \tag{III.43}$$

De plus, on note que :

$$a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 = (\sin\psi)^2(a'z^2 + 2b'z + c'), \qquad \text{où :} \tag{III.44}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

$$\begin{aligned} a' &= a^2 n_1^2 + b^2 n_2^2; \\ b' &= a^2 n_1 m_1 + b^2 n_2 m_2; \\ c' &= a^2 m_1^2 + b^2 m_2^2. \end{aligned} \tag{III.45}$$

Par le choix précédemment fait : $\underline{n} = \underline{e}_1$ et $\underline{m} = \underline{e}_2$, on a $a' = a^2$, $b' = 0$ et $c' = b^2$, c'est à dire, en définitive :

$$a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 = (\sin\psi)^2(a^2z^2 + b^2). \tag{III.46}$$

Par le changement de variable $z = \cot\psi$, de (III.40), l'expression (III.30) se met sous la forme :

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \frac{ab}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{jk}(z)\Delta_{il}(z)}{(a^2z^2+b^2) \mid \mathbf{K}(z) \mid} dz = \frac{ab}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{jk}(z)\Delta_{il}(z)}{(a^2z^2+b^2) \mid \mathbf{Q} \mid f(z)} dz, \tag{III.47}$$

dans lequel on a utilisé, en vertu de (III.33), l'identité :

$$\mid \mathbf{K}(z) \mid = \mid \mathbf{Q} \mid f(z). \tag{III.48}$$

Ce résultat (III.47) peut être réexprimé à l'aide du rapport d'aspect $X = \frac{b}{a}$:

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X\tilde{K}_{jk}(z)\Delta_{il}(z)}{(z^2+X^2) \mid \mathbf{Q} \mid f(z)} dz \tag{III.49}$$

L'intérêt de (III.49) est de permettre une évaluation de $\mathcal{M}_{ijkl}$ en utilisant le théorème des résidus[40], la fonction à intégrer étant holomorphe en dehors des pôles. Pour celà il est nécessaire de déterminer les pôles de cette fonction.

On note tout d'abord que $z = \pm iX$ sont deux de ces pôles. S'agissant de f(z), il est utile de préciser que dans le cas général c'est un polynôme de degré 6, ayant 6 racines complexes conjuguées. Ce sont naturellement les racines de l'équation $\mathbf{K}(z) = 0$. En notant z_p $(p = 1, 2, 3)$ les racines dont la partie imaginaire est positive, on a :

$$f(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)(z - z_3)(z - \bar{z}_3). \tag{III.50}$$

L'application du théorème des résidus conduit, pour l'évaluation du tenseur $\mathcal{M}$, à l'expression :

$$\mathcal{M}_{ijkl} = 2i\left\{\frac{\tilde{K}_{jk}(iX)\Delta_{il}(iX)}{2i \mid \mathbf{Q} \mid f(iX)} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\tilde{K}_{jk}(z_i)\Delta_{il}(z_i)}{\mid \mathbf{Q} \mid f'(z_i)} \frac{X}{(X^2+z_i^2)}\right\} \tag{III.51}$$

les pôles étant supposés différents pour cette écriture. On rappelle que $\tilde{K}_{jk}$ sont des composantes de l'adjoint de $\mathbf{K}$.

[40] L'évaluation de (III.28) à l'aide du théorème des résidus a été suggérée par Mura [70] après changement de variable impliquant la variable complexe sur le cercle unité ; cette technique nous a semblé lourde pour l'application réalisée ici.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Dans le cas de la fissure arbitrairement orientée (d'un angle θ) par rapport aux axes d'orthotropie, les calculs réalisés avec C'^s donné par (E.1) en annexe E conduisent à une polynôme de degré 6 en z qui se factorise comme produit des deux polynomes f_1, de degré 4 et f_2, de dégré 2 :

$$| \mathbf{K}(z) |=| \mathbf{Q} | f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z). \tag{III.52}$$

Ce résultat est la conséquence de la symétrie monoclinique de $\mathbb{C}'^s$ (III.26), ou de manière équivalente de la structure de $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ définis respectivement par (III.36, III.37, III.38). Le determinant $| \mathbf{Q} |$ qui apparaît également dans cette expression a la forme :

$$| \mathbf{Q} |= C^s_{1111}C^s_{1212}(\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta)(\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta)(C^s_{3232}\sin^2\theta + C^s_{3131}\cos^2\theta). \tag{III.53}$$

Les deux polynômes f_1, f_2 s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} f_1(z) = &\left[C^s_{1111}C^s_{1212}(\cos\theta)^4 + C^s_{2222}C^s_{1212}(\sin\theta)^4 + \chi(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right] z^4 + \\ &\left\{\left[2C^s_{1111}C^s_{1212}(\cos\theta)^2 - 2C^s_{1212}C^s_{2222}(\sin\theta)^2\right] - \chi\cos(2\theta)\right\}\sin(2\theta)z^3 + \\ &\left\{\chi\left[1 - 6(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right] + 6C^s_{1212}(C^s_{1111} + C^s_{2222})(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right\} z^2 + \\ &\left[2C^s_{1212}C^s_{1111}(\sin\theta)^2 + 2C^s_{1212}C^s_{2222}(\cos\theta)^2 + \chi\cos(2\theta)\right]\sin(2\theta)\ z + \\ &C^s_{1212}C^s_{1111}(\sin\theta)^4 + C^s_{1212}C^s_{2222}(\cos\theta)^4 + \chi(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2, \end{aligned} \tag{III.54}$$

où : $\chi = (C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2 - 2C^s_{1122}C^s_{1212})$, et :

$$\begin{aligned} f_2(z) = &\left[(C^s_{3232}(\sin\theta)^2 + C^s_{3131}(\cos\theta)^2\right] z^2 + (C^s_{3232} + C^s_{3131})\sin(2\theta)z + \\ &C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{III.55}$$

Pour faciliter la recherche des racines de $f_1(z) = 0$, on effectue le changement de variable suivant :

$$z = \frac{u\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + u\sin\theta}, \tag{III.56}$$

de sorte que (III.54) se met sous la forme :

$$f_1(z) = \frac{C^s_{1111}C^s_{1212}u^4 + (C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2 - 2C^s_{1122}C^s_{1212})u^2 + C^s_{2222}C^s_{1212}}{(\cos\theta + u\sin\theta)^4}. \tag{III.57}$$

On obtient comme solutions de $f_1(z) = 0$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i\sqrt{\alpha}\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + i\sqrt{\alpha}\sin\theta}; & \overline{z_1} &= \frac{i\sqrt{\alpha}\cos\theta + \sin\theta}{-\cos\theta + i\sqrt{\alpha}\sin\theta}; \\ z_2 &= \frac{i\sqrt{\beta}\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + i\sqrt{\beta}\sin\theta}; & \overline{z_2} &= \frac{i\sqrt{\beta}\cos\theta + \sin\theta}{-\cos\theta + i\sqrt{\beta}\sin\theta}; \end{aligned} \tag{III.58}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

avec α et β les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique du milieu orthotrope bidimensionnel :

$$C^s_{1111}C^s_{1212}x^2 - (C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2 - 2C^s_{1122}C^s_{1212})x + C^s_{2222}C^s_{1212} = 0. \tag{III.59}$$

Le racines du polynôme f_2 de degré 2 sont respectivement :

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{\cos\theta\sin\theta(C^s_{3232}+C^s_{3131}) + i\sqrt{C^s_{3232}C^s_{3131}}\cos(2\theta)}{C^s_{3131}(\cos\theta)^2 + C^s_{3232}(\sin\theta)^2}; \\ \overline{z_3} &= -\frac{\cos\theta\sin\theta(C^s_{3232}+C^s_{3131}) - i\sqrt{C^s_{3232}C^s_{3131}}\cos(2\theta)}{C^s_{3131}(\cos\theta)^2 + C^s_{3232}(\sin\theta)^2}. \end{aligned} \tag{III.60}$$

Il est maintenant possible de réécrire l'équation (III.48), par identification avec (III.54) et (III.60) sous la forme :

$$\mid \mathbf{K}(z) \mid = \mid \mathbf{Q} \mid (z-z_1)(z-\overline{z_1})(z-z_2)(z-\overline{z_2})(z-z_3)(z-\overline{z_3}). \tag{III.61}$$

L'approximation au premier ordre en X autour de $X=0$ dans (III.51) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ijkl} = &\frac{\tilde{K}_{jk}(0)\Delta_{il}(0)}{f(0)\mid \mathbf{Q} \mid} + \\ &\frac{2iX}{\mid \mathbf{Q} \mid}\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{K}_{jk}(z_i)\Delta_{il}(z_i)}{f'(z_i)z_i^2} + \frac{1}{2f(0)}\left[\tilde{K}'_{jk}(0)\Delta_{il}(0) + \tilde{K}_{jk}(0)\Delta'_{il}(0) - \tilde{K}_{jk}(0)\Delta_{il}(0)\frac{f'(0)}{f(0)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{III.62}$$

La partie imaginaire de $\mathcal{M}$ est nulle :

$$\begin{aligned} \Im(\mathcal{M}_{ijkl}) = &\frac{2X}{\mid \mathbf{Q} \mid}\left\{\Re\left[\frac{\tilde{K}_{jk}(z_1)\Delta_{il}(z_1)}{f'(z_1)z_1^2}\right] + \Re\left[\frac{\tilde{K}_{jk}(z_2)\Delta_{il}(z_2)}{f'(z_2)z_2^2}\right] + \Re\left[\frac{\tilde{K}_{jk}(z_3)\Delta_{il}(z_3)}{f'(z_3)z_3^2}\right]\right\} + \\ &\frac{X}{f(0)\mid \mathbf{Q} \mid}\left\{\left[\tilde{K}'_{jk}(0)\Delta_{il}(0) + \tilde{K}_{jk}(0)\Delta'_{il}(0) - \tilde{K}_{jk}(0)\Delta_{il}(0)\frac{f'(0)}{f(0)}\right]\right\} = 0 \end{aligned} \tag{III.63}$$

et sa partie réelle qui correspond au tenseur lui même s'écrit :

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \Re(\mathcal{M}_{ijkl}) = \frac{\tilde{K}_{jk}(0)\Delta_{il}(0)}{f(0)\mid \mathbf{Q} \mid} - \frac{2X}{\mid \mathbf{Q} \mid}\Im\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{K}_{jk}(z_i)\Delta_{il}(z_i)}{f'(z_i)z_i^2}. \tag{III.64}$$

Par un dernier changement de repère, les résultats du calcul qui viennent d'être présentés dans le repère local de la fissure peuvent être exprimés dans le repère global défini par les axes d'orthotropie du matériau. Les expressions détaillées des 9 composantes de $\mathbb{P}$ (tenseur ayant les symétries mineures et majeures) dans le repère global, qui qont obtenues par combinaison de (III.23) et de (III.64) puis changement de repère, sont fournies dans l'Annexe E (équations E.2).

On se propose de procéder dans ce qui suit à une analyse et une validation de ces résultats.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

III.2.4 Composantes du tenseur $\mathbb{T}$

La connaissance des composantes de $\mathbb{P}$ ouvre la voie à la détermination des propriétés homogénéisées via le tenseur $\mathbb{T}$ dont l'expression est fournie par (III.17) avec (III.18)[41].

Pour la fissure arbitrairement orientée d'un angle θ dans un milieu orthotrope, la structure matricielle des composantes du tenseur $\mathbb{T}$ est de la forme :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} & 0 & 0 & T_{1112} \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} & 0 & 0 & T_{2212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{3232} & T_{3231} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{3132} & T_{3131} & 0 \\ T_{1211} & T_{1222} & T_{1233} & 0 & 0 & T_{1212} \end{pmatrix} \tag{III.65}$$

Les expressions des composantes sont :

$$T_{1111} = \frac{{C^s_{1111}}^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2; \qquad T_{1122} = \frac{C^s_{1111}C^s_{1122}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2;$$

$$T_{2211} = \frac{C^s_{1111}C^s_{1122}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2; \qquad T_{2222} = \frac{C^s_{1111}C^s_{2222}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2;$$

$$T_{1133} = \frac{C^s_{1111}C^s_{1133}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2; \qquad T_{2233} = \frac{C^s_{1111}C^s_{2233}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2;$$

$$T_{1112} = -\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta; \qquad T_{2212} = -\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta;$$

$$T_{1211} = -\frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}(C^s_{1122}+C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta;$$

$$T_{1222} = -\frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}(C^s_{2222}+C^s_{1122}\sqrt{\alpha\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta; \tag{III.66}$$

$$T_{1212} = \frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^2+\sqrt{\alpha\beta}(\cos\theta)^2\right](\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};$$

$$T_{1233} = -\frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}(C^s_{2233}+C^s_{1133}\sqrt{\alpha\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta;$$

$$T_{1313} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C^s_{3131}}{C^s_{3232}}}(\cos\theta)^2; \qquad T_{2313} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C^s_{3131}}{C^s_{3232}}}\cos\theta\sin\theta;$$

$$T_{1323} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C^s_{3232}}{C^s_{3131}}}\cos\theta\sin\theta; \qquad T_{2323} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^s_{3232}}{C^s_{3131}}}(\sin\theta)^2.$$

[41] On rappelle que ce calcul implique l'évaluation de $\lim_{X\to 0} X\left[\mathbb{I}-\mathbb{P}(X,\underline{n}) : \mathbb{C}^s\right]^{-1}$.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

On observera également que $\mathbb{T}$ n'a pas les symétries majeures, que toutes ses composantes dépendent de l'orientation de la fissure (définie par l'angle θ) et s'expriment à l'aide des coefficients du tenseur d'élasticité du matériau, par les groupements α et β.

III.3 Validation des résultats obtenus

On propose plusieurs niveaux de validation impliquant soit directement le tenseur $\mathbb{P}$, soit le tenseur $\mathbb{T}$ ou les propriétés élastiques macroscopiques qui s'en déduisent.

III.3.1 Vérification des résultats dans le cas d'un système de fissures parallèles dont la normale coïncide avec un axe d'orthotropie.

A titre de première vérification, on s'intéresse ici au cas d'un système de fissures parallèles dont la normale est portée par un des axes de symétrie de la matrice solide. Cette configuration de la fissure est celle étudiée par Laws [55] et correspond au cas particulier $\theta = 0$ dans nos calculs.
Dans ce cas, les expressions de $\mathbb{P}$ issues de (E.2) sont :

$$P_{1111} = \frac{C^s_{2222} + C^s_{1212}\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{1212}\ \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}X; \qquad P_{2222} = \frac{1}{C^s_{2222}} + \frac{C^s_{2222} - C^s_{1212}(\alpha+\beta+\sqrt{\alpha\beta})}{C^s_{2222}C^s_{1212}\ \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}X$$

$$P_{1122} = P_{2211} = -\frac{C^s_{1122} + C^s_{1212}}{C^s_{1111}C^s_{1212}\ \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}X; \qquad P_{3232} = \frac{1}{4C^s_{3232}} - \frac{\sqrt{C^s_{3131}}}{4{C^s_{3232}}^{3/2}}X; \tag{III.67}$$

$$P_{3131} = \frac{1}{4\sqrt{C^s_{3232}C^s_{3131}}}X; \qquad P_{1212} = \frac{1}{4C^s_{1212}} - \frac{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}{2C^s_{1111}{C^s_{1212}}^2\ \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}X,$$

On note qu'en dehors d'une légère faute de frappe des auteurs dans la composante P_{1111}, les résultats (III.67) présentés ici coïncident avec ceux fournis dans Laws [55].
De même, les composantes non nulles de $\mathbb{T}$ pour $\theta = 0$ conduisent à :

$$T_{1111} = \frac{{C^s_{1111}}^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2;$$

$$T_{2222} = \frac{C^s_{1111}C^s_{2222}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2 : \tag{III.68}$$

$$T_{2233} = \frac{C^s_{1111}C^s_{2233}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2.$$

qui sont exactement, comme on le verra dans la section III.4 les composantes du tenseur noté Λ dans Laws [55].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

III.3.2 Validation par l'étude en élasticité plane d'une cavité elliptique en milieu orthotrope [90]

On propose ici une seconde validation portant sur la fissure d'orientation arbitraire. On s'appuie sur des résultats issus des méthodes d'élasticité plane[42]. Pour cette validation, on s'appuie notamment sur les travaux de Lekhtniski [59] (cf. également l'ouvrage de Savin [81]) et plus récemment de Tsukrov [90] portant sur l'étude du problème plan d'un milieu orthotrope contenant une cavité elliptique de rapport d'aspect b/a (cf. Figure III.3). L'intérêt de cette étude pour la détermination de $\mathbb{P}$ associé à une fissure réside dans le fait qu'elle permet de mettre en évidence l'effet du rapport d'aspect $x = b/a$ de la cavité, avant le passage à la limite[43].
Notre point de départ est la relation dans Tsukrov et Kachanov [90] entre la déformation induite par la présence de la cavité et le champ de contraintes macroscopiques auquel est soumis le v.e.r. :

$$\varepsilon^c = \mathbb{H} : \mathbf{\Sigma} = \pi a^2 X \mathbb{H}' \tag{III.69}$$

Les composantes du tenseur $\mathbb{H}$ de Tsukrov et Kachanov [90] (cf. leur équation 20) sont :

$$\begin{aligned}
H_{1111} &= \frac{\pi L}{A\sqrt{{E_1}^s}}\left[(b^2-a^2)(\cos\theta)^2 + a^2 + \frac{ab}{L\sqrt{{E_1}^s}}\right];\\
H_{1112} &= \frac{\pi(b^2-a^2)L}{2A\sqrt{{E_1}^s}}\sin\theta\cos\theta; \qquad H_{1122} = -\frac{\pi ab}{A\sqrt{{E_1}^s{E_2}^s}};\\
H_{1212} &= \frac{\pi L}{4A\sqrt{{E_1}^s{E_2}^s}}\\
&\quad\left[(a^2-b^2)\left(\sqrt{{E_2}^s}-\sqrt{{E_1}^s}\right)(\cos\theta)^2 + a^2\sqrt{{E_1}^s} + abL\sqrt{{E_1}^s{E_2}^s} + b^2\sqrt{{E_2}^s}\right];\\
H_{1222} &= \frac{\pi(b^2-a^2)L}{2A\sqrt{{E_2}^s}}\sin\theta\cos\theta; \qquad H_{2222} = \frac{\pi L}{A\sqrt{{E_2}^s}}\left[(a^2-b^2)(\cos\theta)^2 + b^2 + \frac{ab}{L\sqrt{{E_2}^s}}\right].
\end{aligned} \tag{III.70}$$

Le terme L s'exprime à l'aide des coefficients élastiques de la matrice orthotrope 2D par :

$$L = \sqrt{\frac{1}{G_{12}^s} + \frac{2}{\sqrt{{E_1}^s\ {E_2}^s}} - \frac{2{\nu_{12}}^s}{{E_1}^s}} \tag{III.71}$$

[42]On attire l'attention du lecteur sur le fait que notre étude est réalisée dans un cadre tridimensionnel, puisque la fissure est modélisée comme un cylindre infini de faible rapport d'aspect.
[43]Ceci n'était pas le cas lors de l'étude de la fissure au chapitre II.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

De même il est possible d'exprimer les modules élastiques ${E_1}^s, {E_2}^s, {\nu_{12}}^s$ et ${G_{12}}^s$ à l'aide des composantes du tenseur de rigidité par :

$$\begin{aligned} {E_1}^s &= \frac{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}{C^s_{2222}}; \qquad & {\nu_{12}}^s &= \frac{C^s_{1122}}{C^s_{2222}}; \\ {E_2}^s &= \frac{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}{C^s_{1111}}; \qquad & {G_{12}}^s &= C^s_{1212}. \end{aligned} \tag{III.72}$$

En outre, le paramètre L (cf. équation.III.71) peut également être exprimé à l'aide des racines de l'équation caractéristique du milieu orthotrope 2D :

$$L = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\sqrt{\frac{C^s_{1111}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}} \tag{III.73}$$

Pour exploiter (III.70) en vue de de notre validation, il est utile de la récrire à l'aide du paramètre densité de fissures $d = \mathcal{N}a^2$ et du rapport d'aspect $X = \frac{b}{a}$. Sachant que l'on a également (cf. par exemple Laws [55]) :

$$\varepsilon^c = dX\mathbb{Q}^{-1} : \mathbf{\Sigma}, \tag{III.74}$$

avec le tenseur $\mathbb{Q}$ donné par :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \mathbb{S}) = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C}^s), \tag{III.75}$$

il est possible de mettre en relation les tenseurs $\mathbb{P}$ et $\mathbb{H}$. Par comparaison entre l'équation (III.69) combinée avec (III.70) et l'équation (III.74), il s'en suit que le tenseur $\mathbb{Q}^{-1}$ correspondant à la cavité elliptique arbitrairement orientée dans la matrice solide orthotrope a pour composantes :

$$\begin{aligned}
Q^{-1}_{1111} &= d\frac{C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\left[X^2(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 + \frac{C^s_{1122}X}{C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}\right]; \\
Q^{-1}_{1112} &= Q^{-1}_{1211} = d\frac{C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\cos\theta\sin\theta(X^2-1); \\
Q^{-1}_{1122} &= Q^{-1}_{2211} = -d\frac{C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}X; \\
Q^{-1}_{1212} &= d\frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{4(C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2)}\cdot \\
&\qquad \left\{X^2\left[(\cos\theta)^2 + \sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2\right] + \left[(\sin\theta)^2 + \sqrt{\alpha\beta}(\cos\theta)^2\right] + X(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\right\} \\
Q^{-1}_{2212} &= Q^{-1}_{1222} = d\frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{2(C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2)}(X^2-1)\cos\theta\sin\theta; \\
Q^{-1}_{2222} &= d\frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\left\{X^2(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 + \frac{X}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right\}
\end{aligned} \tag{III.76}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Il est utile de souligner à nouveau que, compte tenu de la définition (III.75), $\mathbb{Q}^{-1}$ est singulier pour $X \to 0$. Toutefois, le tenseur :

$$\mathbb{T} = \lim_{X \to 0} X\mathbb{Q}^{-1} : \mathbb{C}^s \tag{III.77}$$

déduit de (III.76) est bien défini, et ses composantes dans les axes d'orthotropie du matériau sont :

$$\begin{aligned}
T_{1111} &= \frac{{C^s_{1111}}^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2; & T_{1122} &= \frac{C^s_{1111}C^s_{1122}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\sin\theta)^2;\\
T_{2211} &= \frac{C^s_{1111}C^s_{1122}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2; & T_{2222} &= \frac{C^s_{1111}C^s_{2222}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}(\cos\theta)^2;\\
T_{1112} &= -\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta; & T_{2212} &= -\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin\theta\cos\theta;\\
T_{1211} &= -\frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}(C^s_{1122}+C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin 2\theta;\\
T_{1222} &= -\frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}(C^s_{2222}+C^s_{1122}\sqrt{\alpha\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\sin 2\theta;\\
T_{1212} &= \frac{1}{2}\frac{C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^2+\sqrt{\alpha\beta}(\cos\theta)^2\right](\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}.
\end{aligned} \tag{III.78}$$

On vérifie que ces composantes de $\mathbb{T}$, fournies par l'étude en élasticité plane de la cavité elliptique, sont exactement celles indiquées en (III.66). On notera bien que les résultats plus complets obtenus par l'approche générale dévéloppée dans ce travail (équation III.66) fournissent d'autres composantes, inaccessibles à l'analyse plane. De plus, par leur formulation dans le cadre des méthodes d'Eshelby, ils ouvrent la voie à diverses extensions[44] dont celles de la prise en compte des effets d'interaction entre fissures.

III.4 Estimations des propriétés macroscopiques du milieu orthotrope fissuré

Cette section a pour objectif de présenter diverses estimations (schéma dilué, modèle de Mori Tanaka) des propriétés élastiques macroscopiques issues des résultats obtenus pour le tenseur $\mathbb{T}$ (via le tenseur $\mathbb{P}$).

[44] On en évoquera d'autres possibilités d'extension à la fin de ce chapitre.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

III.4.1 Le schéma dilué

Une première application directe concerne le schéma dilué, dédié aux milieux à faible densité de fissuration. Dans cette configuration, où les interactions entre fissures sont négligées, l'estimation d'Eshelby (ou du schéma dilué) est donnée par l'équation (III.12). La combinaison de cette équation et de (III.66) conduit aux composantes suivantes du tenseur d'élasticité homogénéisé :

$$
\begin{aligned}
C^{hom}_{1111} &= C^s_{1111} - d\pi \frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[{C^s_{1111}}^2\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + {C^s_{1122}}^2(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{2222} &= C^s_{2222} - d\pi \frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[{C^s_{1122}}^2\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + {C^s_{2222}}^2(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{1122} = C^{hom}_{2211} &= C^s_{1122} - d\pi \frac{C^s_{1111}C^s_{1122}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + C^s_{2222}(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{1133} = C^{hom}_{3311} &= C^s_{1133} - d\pi \frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[C^s_{1111}C^s_{1133}\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + C^s_{1122}C^s_{2233}(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{2233} = C^{hom}_{3322} &= C^s_{2233} - d\pi \frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[C^s_{1122}C^s_{1133}\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + C^s_{2222}C^s_{2233}(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{3333} &= C^s_{3333} - d\pi \frac{C^s_{1111}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[{C^s_{1133}}^2\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2 + {C^s_{2233}}^2(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{1112} = C^{hom}_{1211} &= C^s_{1112} + d\pi \frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(C^s_{1122} + C^s_{1111}\sqrt{\alpha\beta})\sin\theta\cos\theta}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{2212} = C^{hom}_{1222} &= C^s_{2212} + d\pi \frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(C^s_{2222} + C^s_{1122}\sqrt{\alpha\beta})\sin\theta\cos\theta}{C_{1111}C_{2222} - C^2_{1122}};\\
C^{hom}_{3312} = C^{hom}_{1233} &= C^s_{3312} + d\pi \frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(C^s_{2233} + C^s_{1133}\sqrt{\alpha\beta})\sin\theta\cos\theta}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2};\\
C^{hom}_{3232} &= C^s_{3232}\left[1 - d\pi\sqrt{\frac{C^s_{3232}}{C^s_{3131}}}(\sin\theta)^2\right]; \qquad C^{hom}_{3131} = C^s_{3131}\left[1 - d\sqrt{\frac{C^s_{3131}}{C^s_{3232}}}(\cos\theta)^2\right];\\
C^{hom}_{3231} = C^{hom}_{3132} &= C^s_{3231} - d\pi\sqrt{C^s_{3232}C^s_{3131}}\sin\theta\cos\theta;\\
C^{hom}_{1212} &= C^s_{1212}\left\{1 - d\pi \frac{C^s_{1111}C^s_{1212}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[(\sin\theta)^2 + \sqrt{\alpha\beta}(\cos\theta)^2\right]}{C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{III.79}
$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

III.4.2 Le Modèle de Mori Tanaka appliqué aux milieux orthotropes fissurés

Dans le but de décrire l'effet des interactions entre fissures, on s'intéresse maintenant à l'application du modèle Mori-Tanaka (MT) au milieu orthotrope fissuré. Pour illustrer de manière simple ce modèle d'homogénéisation, on considère à nouveau le système de fissures ouvertes parallèles arbitrairement orienté dans un milieu orthotrope. La prise en compte des interactions entre fissures dans le cadre du modèle Mori-Tanaka consiste à plonger la fissure dans la matrice solide élastique (de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^s$) soumise, non plus à la déformation macroscopique $\mathbf{E}$, mais à une déformation $\mathbf{E}_0$ qu'il s'agit de déterminer.
En adaptant la règle de localisation (III.9), on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} : \mathbf{E}_0 \tag{III.80}$$

L'application de la règle de moyenne des déformations conduit à :

$$(1 - \varphi^f)\mathbf{E}_0 + \varphi^f \varepsilon^f = \mathbf{E} \tag{III.81}$$

d'où l'on déduit (avec $\varphi^f = \pi d X$) que :

$$\mathbf{E}_0 = \left\{ \mathbb{I} + \pi d X \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n}) \right]^{-1} \right\}^{-1} : \mathbf{E} \tag{III.82}$$

Il s'en suit que le tenseur de localisation, reliant ε^f et $\mathbf{E}$ s'exprime sous la forme :

$$\overline{\mathbb{A}}^f = \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n}) \right]^{-1} : \left\{ \mathbb{I} + \pi d X \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n}) \right]^{-1} \right\}^{-1} \tag{III.83}$$

On rappelle que le tenseur de Hill $\mathbb{P}(X, \underline{n})$ et le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}(X, \underline{n})$ sont liés par (III.8).
Des résultats qui précèdent, on déduit le tenseur d'élasticité macroscopique homogénéisé :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} + \pi d \mathbb{T})^{-1} \quad \text{où} \quad \mathbb{T} = \lim_{X \to 0} X \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n}) \right]^{-1} \tag{III.84}$$

auquel correspond le tenseur de compliance homogenéisé :

$$\mathbb{S}^{hom} = (\mathbb{I} + \pi d \mathbb{T}) : (\mathbb{S}^s) \quad \text{avec} \quad \mathbb{T} = \lim_{X \to 0} X \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(X, \underline{n}) \right]^{-1} \tag{III.85}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

La combinaison de (III.85) et de(III.66) conduit aux composantes non-nulles suivantes pour le tenseur $\mathbb{S}^{hom}$:

$$
\begin{aligned}
&S^{hom}_{1111} = S^s_{1111} + d\pi \frac{(S^s_{2222}S^s_{3333} - {S^s_{2233}}^2)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}(\sin\theta)^2}{S^s_{3333}};\\
&S^{hom}_{1122} = S^{hom}_{2211} = S^s_{1122}; \qquad S^{hom}_{1133} = S^{hom}_{3311} = S^s_{1133}; \qquad S^{hom}_{2233} = S^{hom}_{3322} = S^s_{2233}; \qquad S^{hom}_{3333} = S^s_{3333};\\
&S^{hom}_{2222} = S^s_{2222} + d\pi \frac{(S^s_{2222}S^s_{3333} - {S^s_{2233}}^2)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\cos\theta)^2}{S^s_{3333}};\\
&S^{hom}_{1112} = S^{hom}_{2111} = S^s_{1112} + d\pi \frac{({S^s_{2233}}^2 - S^s_{2222}S^s_{3333})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha\beta}\sin\theta\cos\theta}{2S^s_{3333}};\\
&S^{hom}_{2212} = S^{hom}_{1222} = S^s_{2212} + d\pi \frac{({S^s_{2233}}^2 - S^s_{2222}S^s_{3333})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sin\theta\cos\theta}{2S^s_{3333}};\\
&S^{hom}_{3232} = S^s_{3232} + d\pi(\sin\theta)^2\frac{\sqrt{S^s_{3232}S^s_{3131}}}{2}; \qquad S^{hom}_{3131} = S^s_{3131} + d\pi(\cos\theta)^2\frac{\sqrt{S^s_{3232}S^s_{3131}}}{2};\\
&S^{hom}_{3231} = S^{hom}_{3132} = S^s_{3231} + d\pi\sin\theta\cos\theta\frac{\sqrt{S^s_{3232}S^s_{3131}}}{2};\\
&S^{hom}_{1212} = S^s_{1212} + d\pi \frac{({S^s_{2233}}^2 - S^s_{2222}S^s_{3333})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[(\sin\theta)^2 + \sqrt{\alpha\beta}(\cos\theta)^2\right]}{S^s_{3333}}.
\end{aligned}
\tag{III.86}
$$

Il apparaît ainsi que l'estimation du tenseur de souplesse homogénéisé fournie par le schéma Mori-Tanaka pour une matrice solide orthotrope affaiblie par un système de fissures parallèles ouvertes arbitrairement orientée coïncide avec celle que nous avions établie au chapitre 2 (équation II.46). Comme dans le contexte isotrope, l'interprétation de cette coïncidence se trouve dans le fait que le modèle de Mori-Tanaka correspond à une distribution spatiale de type ellipsoidale aplati, ce qui de fait atténue les interactions (cf. travaux de Ponte Castaneda et Willis [78]).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

III.5 Conclusions

Ce chapitre a été consacré au développement d'une approche alternative pour l'étude du milieu orthotrope fissuré. Cette approche, qui s'appuie sur la résolution des problémes d'inclusion d'Eshelby, permet d'étendre les résultats établis au chapitre II. La difficulté de la tâche réside dans la détermination analytique du tenseur $\mathbb{P}$. Une méthodologie nouvelle a été mise en oeuvre et conduite à terme dans le cas d'une fissure arbitrairement orientée dans une matrice solide orthotrope. Les résultats originaux obtenus sont probants et validés par de nombreuses analyses. Ils ouvrent la voie à diverses extensions dont certaines sont déjà abordées dans ce chapitre.

En terme de perspectives, on s'intéressera à l'étude d'un système de fissures parallèles fermées pour étendre les résultats déjà obtenus. Comme au chapitre II, le contact entre les deux lèvres de la fissure sera supposé non frottant. On s'inspirera des travaux de Deudé et al. [20] (voir également [21], et Pensée et all. [76]) que l'on se propose alors d'étendre au contexte orthotrope. L'idée introduite par ces auteurs dans le cas d'une matrice solide isotrope consiste à prendre en compte le fait qu'une fissure fermée transmet des contraintes normales de compression. Autrement dit, les contraintes de cisaillement demeurent nulles comme dans le cas des fissures ouvertes. Dans le cas d'une orthotropie de la matrice solide, il s'agira précisément de trouver un matériau fictif de tenseur d'élasticité non nul $\mathbb{C}^f$ susceptible de rendre compte des modes de transmission des efforts à travers les lèvres de la fissure fermée. C'est une des perspectives à court terme qui devra aboutir par la proposition d'un nouveau tenseur $\mathbb{T}'$ à la place de $\mathbb{T}$.
Une autre perspective intéressante concerne l'adaptation de la récente approche proposée par Ponte Castaneda et Willis [78] pour incorporer dans l'analyse micromécanique les informations disponibles sur la distribution spatiale des fissures dans la matrice solide orthotrope. Ce travail est en cours.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre IV

Approche macroscopique 3D de l'endommagement des milieux orthotropes de révolution [46]

Ce chapitre est consacré à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement dans les milieux orthotropes de révolution (isotropes transverses). Cette classe de matériaux correspond par exemple à certains composites à matrice fragile ou à des roches sédimentaires tels que les argilites (cf. par exemple l'étude de [73]).

On rappelle d'abord (en section IV.1) quelques résultats d'homogénéisation des milieux orthotropes de révolution contenant des fissures tridimensionnelles en forme de monnaie (penny-shaped). En raison des limitations en terme d'applicabilité de ces résultats, on propose ensuite dans la section IV.1.2 une approche basée sur les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles (cf. par exemple Boehler [10]). La section IV.1.3 est consacrée à la proposition d'une méthodologie consistant à combiner les résultats connus de la micromécanique avec ceux de la théorie de représentation pour simplifier la formulation macroscopique du modèle. Diverses applications issues de la démarche macroscopique proposée sont présentées, ce qui permet de tester ses capacités prédictives et de la valider sur des données expérimentales. Enfin, on présente une seconde formulation macroscopique issue de la précédente et basée sur l'approximation de l'endommagement par un tenseur d'ordre 2. La pertinence de cette seconde formulation est également analysée.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

IV.1 Propriétés macroscopiques 3D et endommagement des milieux isotropes transverses fissurés

IV.1.1 Homogénéisation des matériaux anisotropes contenant des fissures de type "penny-shaped"

Dans cette section on reprend les grandes lignes de l'approche par tenseur d'Eshelby des milieux anisotropes que nous avons étudié au chapitre III. Plus particulièrement, on s'intéresse à un volume élémentaire représentatif (v.e.r.) Ω composé d'une matrice solide élastique contenant des fissures ouvertes parallèles de type penny-shaped (voir Figure IV.1). La matrice solide présente la symétrie orthotrope de révolution (avec un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^s$, ou de souplesse $\mathbb{S}^s$).

Du point de vue géométrique, ces fissures sont considérées comme des ellipsoïdes aplatis, c'est à

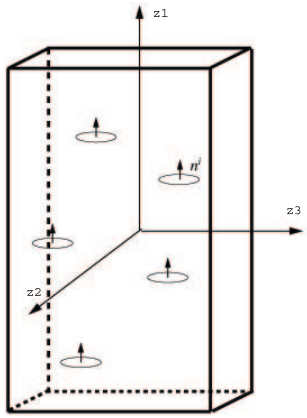

FIGURE *IV.1: Volume élémentaire représentatif 3D : matrice solide orthotrope de révolution contenant des fissures de type "penny-shaped"*

dire de faible rapport d'aspect $X = \frac{c}{a} \ll 1$ (a et c représentant respectivement le rayon et la demi ouverture de la fissure). D'un point de vue mécanique (comme au chapitre III) elles sont assimilées à des vides (tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^f = 0$).

Les propriétés homogénéisées du matériau sont déterminées sous l'approximation de non-interaction entre les fissures. En raisonnant sous les conditions de contraintes uniformes sur le contour du v.e.r., l'enthalpie libre macroscopique s'écrit sous la forme (voir par exemple Laws [58]) :

$$W^* = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : (\mathbb{S}^s + \mathbb{S}^d) : \mathbf{\Sigma}. \tag{IV.1}$$

Le terme $\mathbb{S}^s$ est le tenseur de souplesse de la matrice solide :

$$\mathbb{S}^s = 2b_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + b_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}) + 2b_3(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + 2b_4(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + b_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}), \tag{IV.2}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\nu_{23}^s}{2E_3^s}, \qquad b_2 = \frac{\nu_{23}^s E_1^s - \nu_{12}^s E_3^s}{E_1^s E_3^s}, \qquad b_3 = \frac{1+\nu_{23}^s}{2E_3^s} \\ b_4 &= \frac{1}{2E_1^s} + \frac{1}{2E_3^s} - \frac{1}{G_{13}^s} + \frac{\nu_{12}^s}{E_1^s}, \qquad b_5 = \frac{E_3^s - G_{13}^s(1+\nu_{23}^s)}{E_1^s G_{13}^s}. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Le terme $\mathbb{S}^d$ caractérise l'effet de l'endommagement sur le tenseur de souplesse. Il est obtenu après évaluation de la limite $\lim_{X\to 0} X\mathbb{Q}^{-1}$; le terme $\mathbb{Q}$ est relié au tenseur $\mathbb{P}$ de Hill (Mura [70]) par l'expression : $\mathbb{Q} = \mathbb{C}^s - \mathbb{C}^s : \mathbb{P} : \mathbb{C}^s$.

Comme nous avons vu au chapitre III, la principale difficulté réside dans la détermination analytique[45] du tenseur $\mathbb{P}$, ceci en raison du caractère anisotrope de la matrice solide. Les seuls résultats disponibles pour un système de fissures penny-shaped en milieu orthotrope de révolution sont ceux de Laws [58][46]. De plus, ils concernent la configuration de fissures ayant la normale orientée suivant la direction d'orthotropie de révolution, que nous noterons $\underline{m}$. Introduisant alors le tenseur de structure : $\mathbf{A} = \underline{m} \otimes \underline{m}$ (tenseur caractérisant l'anisotropie initiale), et le paramètre densité de fissures $\rho(\underline{m}) = \mathcal{N}a^3$ ($\mathcal{N}$ étant le nombre de fissures par unité de volume et a le rayon des fissures penny-shaped), les résultats obtenus par Laws [58] s'expriment sous la forme d'une enthalpie libre macroscopique :

$$W^*(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : \mathbb{S}^0 : \mathbf{\Sigma} + \rho(\underline{m}) \left\{ s_1[(\mathbf{A} : \mathbf{\Sigma})^+]^2 + s_2[(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}) : \mathbf{A} - \mathbf{\Sigma} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{\Sigma}] \right\}. \tag{IV.4}$$

dans laquelle s_1 et s_2 dépendent des coefficients élastiques du matériau isotrope transverse :

$$\begin{aligned} s1 &= \frac{4\pi}{3}(\Lambda_{nt} - \Lambda_{nn}); \\ s_2 &= \frac{2\pi}{3}\Lambda_{nn}, \end{aligned} \tag{IV.5}$$

et les coefficients sont $\Lambda_{nt}, \Lambda_{nn}$ donnés par Laws [57] :

$$\begin{aligned} \Lambda_{nt} &= \frac{4(\gamma_1+\gamma_2)({S_{1111}^s}^2 - {S_{1122}^s}^2)\sqrt{2S_{3232}^s}}{\pi[S_{1111}^s\sqrt{2S_{3232}^s} + (\gamma_1+\gamma_2)(S_{1111}^s + S_{1122}^s)\sqrt{S_{1111}^s - S_{1122}^s}]} \\ \Lambda_{nn} &= \frac{2\gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)({S_{1111}^s}^2 - {S_{1122}^s}^2)}{\pi S_{1111}^s}. \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Ces coefficients font intervenir les composantes du tenseur de souplesse de la matrice solide S_{ijkl} et les solutions γ_1, γ_2 de l'équation caractéristique du milieu isotrope transverse :

$$({S_{1111}^s}^2 - {S_{1122}^s}^2)x^2 - [S_{1111}^s S_{3131}^s + 2S_{1133}^s(S_{1111}^s - S_{1122}^s)]\, x + S_{1111}^s S_{3333}^s - {S_{1133}^s}^2 = 0 \tag{IV.7}$$

On notera que le terme $(\mathbf{A} : \mathbf{\Sigma})^+$ (dans IV.4) représente la partie positive de $(\mathbf{A} : \mathbf{\Sigma})$; il permet de faire une extension des résultats de Laws [58] au cas des fissures fermées.

[45] On rappelle à nouveau que le but étant de construire un modèle analytique, la problématique de la determination numérique du tenseur $\mathbb{P}$, abordée dans Ghahremani [35] et dans Gavazzi et Lagoudas [34], n'est pas traitée ici.

[46] On notera également les publications plus récentes de Barret [7] et Morvan [68] (Université de Bordeaux) I dont nous avions fait état au chapitre I.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

IV.1.2 Application des théorèmes de représentation à la modélisation de l'endommagement dans les milieux isotropes transverses

Compte tenu du peu de résultats analytiques disponibles dans le cadre des approches micromécaniques, on se propose d'aborder la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement dans les milieux orthotropes de révolution. Une partie de ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec le groupe de O. Cazacu de l'Université de Floride (Graduate Engineering Research Center). La formulation simplifiée de Halm et al. [39] (voir également Dragon et Halm [26]) que nous avons présenté au chapitre I s'inscrit aussi dans ce type de démarche. L'objectif visé en premier lieu dans cette sous section est de construire l'expression de l'énergie libre macroscopique du matériau endommagé.

Pour commencer, nous rappelons quelques considérations déjà énoncées au chapitre I.2 :

- dans l'état initial non-endommagé le groupe de symétrie du matériau G est un groupe de rotations par rapport à une direction privilégiée, par exemple le vecteur unité $\underline{m}$:

$$G = \{\, \mathbf{Q} \in O(3) \mid \mathbf{Q}\,.\underline{m} = \underline{m} \quad \text{or} \quad \mathbf{Q}\,.\underline{m} = -\underline{m}\,\}; \tag{IV.8}$$

- le tenseur de deuxième ordre $\mathbf{A} = \underline{m} \otimes \underline{m}$ caractérise la symétrie du matériau non-endommagé, ce qui permet de réécrire la relation (IV.8) sous la forme :

$$G = \{\, \mathbf{Q} \in O(3) \mid \mathbf{Q}\,.\mathbf{A}\,.\mathbf{Q}^T = \mathbf{A}\,\}; \tag{IV.9}$$

- en accord avec la théorie de représentation des fonctions tensorielles (cf. Wang [91], Boehler [10], Liu [61]), toute fonction anisotrope (scalaire, vectorielle ou tensorielle) avec un certain nombre d'arguments est exprimable comme fonction isotrope de ces arguments originaux et des tenseurs de structure caractérisant la symétrie en question.

Plus concrètement, pour un matériau isotrope transverse affaibli par un système de microfissures parallèles de normale $\underline{n}$, il s'en suit que l'enthalpie libre W^* du matériau endommagé peut être représentée par rapport au groupe G comme une fonction isotrope des variables suivantes :

- *(i) le tenseur de contraintes macroscopiques $\mathbf{\Sigma}$;*
- *(ii) le tenseur d'orientation $\mathbf{N} = \underline{n} \otimes \underline{n}$[47] caractérisant l'orientation du système de fissures de normale $\underline{n}$ (c'est à dire l'anisotropie de l'endommagement) et*
- *(iii) le tenseur de structure $\mathbf{A}$ du matériau orthotrope de révolution.*

En accord avec les théorèmes de représentation, W^* s'exprime comme une combinaison des invariants suivants : $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}.\mathbf{A})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{N})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N})$. Sous l'hypothèse de non interaction entre fissures, W^* prend la forme :

$$W^*(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}, \underline{n} \otimes \underline{n}) = W_0^* + \rho(\underline{n}) W_d^*. \tag{IV.10}$$

[47] S'agissant de ce point précis, notre démarche s'inspire des travaux de Welemane [92], voir aussi [93].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

W_0^* désigne l'enthalpie libre du matériau en absence d'endommagement. Il correspond donc à la symétrie orthotrope de révolution décrite comme suit :

$$W_0^* = b_1 \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + b_2 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}) + b_3 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) + b_4 \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + b_5 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{A}). \tag{IV.11}$$

Le terme W_d^*, qui représente la contribution de l'endommagement à l'enthalpie libre du matériau, s'exprime par :

$$\begin{aligned} W_d^* = \operatorname{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{N}) \left[b_6 \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + b_7 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}) + b_8 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) + b_9 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{A}) + b_{10} \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) \right] + \\ b_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}) + b_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) + b_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{N}) + \\ b_{14} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + b_{15} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + b_{16} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + \\ b_{17} \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) + b_{18} \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + b_{19} \operatorname{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}). \end{aligned} \tag{IV.12}$$

On notera que W^* est choisi quadratique en $\mathbf{\Sigma}$, afin de garantir la linéarité de la réponse contrainte-déformation à un niveau d'endommagement fixé.

IV.1.3 Formulation simplifiée sur la base des résultats de la micromécanique

En raison du nombre relativement important de paramètres intervenant dans l'expression de l'enthalpie libre (équation IV.10), on se propose d'apporter un certain nombre de simplifications en s'appuyant sur les résultats connus de la micromécanique (dont ceux présentés dans la section IV.1.1). Plus exactement, profitant de l'écriture de la formulation macroscopique en terme du tenseur d'orientation des fissures $\mathbf{N} = \underline{n} \otimes \underline{n}$, l'idée consiste à imposer dans (IV.10) une vérification exacte des résultats connus de la micromécanique correspondant à :

- un système de fissures parallèles de normale $\underline{m}$ plongé dans un milieu isotrope transverse (cas étudié dans la sous section IV.1.1)
- un système de fissures parallèles arbitrairement orienté dans une matrice solide isotrope.

Considérons donc dans un premier temps une configuration dans laquelle les fissures se trouvent dans le plan d'isotropie transverse ; dans ce cas $\mathbf{N} = \underline{n} \otimes \underline{n}$ est identique au tenseur de structure $\mathbf{A} = \underline{m} \otimes \underline{m}$. L'expression de l'enthalpie libre (IV.10) devant alors coïncider avec celle donnée par la micromécanique (IV.4), on aboutit à une première identification de certains coefficients intervenant dans l'énergie macroscopique :

$$\begin{aligned} & b_6 = 0; && b_8 = 0; \\ & b_{14} = -(b_7 + b_{11}); && b_{16} = s_2 - (b_9 + b_{13}); \\ & b_{19} = \frac{s_1}{2} - (b_{10} + b_{12} + b_{15} + b_{17} + b_{18}). \end{aligned} \tag{IV.13}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

La seconde identification envisagée impose que pour un milieu isotrope l'on retrouve les résultats connus pour un système de fissures parallèles de normale quelconque $\underline{n}$ (cf. par exemple Hori et Nemat-Nasser [41], Kachanov [43], Pensée [75] ou Kondo et all. [45]). Ceci conduit à :

$$b_7 = b_{12} + b_{15} = -b_{10}; \qquad b_9 = 0. \tag{IV.14}$$

La méthodologie de simplification proposée sur la base des considérations micromécaniques indiquées permet donc de réduire le nombre total de paramètres du modèle, en les exprimant comme combinaison des cinq constantes élastiques de la matrice solide élastique et de six autres coefficients restant à identifier sur la base de données expérimentales.

IV.2 Développement du modèle d'endomagement 3D. Mise en oeuvre et validation

IV.2.1 Introduction

Comme au chapitre II, on s'appuie sur l'expression de l'enthalpie libre[48] correspondant à un système de fissures parallèles pour proposer une extension au cas d'une distribution quelconque de fissures. L'intégration sur la sphère unité de l'enthalpie libre $W^*(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}, \underline{n}\otimes\underline{n})$ conduit à l'expression généralisée :

$$\Psi^* = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : \mathbb{S}^s : \mathbf{\Sigma} + \frac{1}{4\pi}\int_{S^{2+}} \rho(\underline{n}) W_d^*(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A}, \underline{n}\otimes\underline{n}) dS, \tag{IV.15}$$

avec :

$$\begin{aligned} W_d^* = {} & b_{11}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}) - (b_{10}+b_{15})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) + b_{13}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{N}) + \\ & b_{10}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{N})\left[\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) - \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\right] + (b_{10}-b_{11})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + \\ & b_{15}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + (s_2 - b_{13})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + b_{17}\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N}) + \\ & b_{18}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{N})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}) + \left(\frac{s_1}{2} - b_{17} - b_{18}\right)\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{N}). \end{aligned} \tag{IV.16}$$

La première loi d'état permet d'obtenir le tenseur de déformations macroscopiques en fonction de la contrainte $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \mathbb{S}(\mathbf{A}, \underline{n}\otimes\underline{n}) : \mathbf{\Sigma}. \tag{IV.17}$$

[48] On précise a nouveau que cette énergie s'exprime à l'aide des constantes élastiques du matériau non endommagé et des paramètres $b_{10}, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}, b_{18}$ qui restent à identifier.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

Par un raisonnement similaire à celui du chapitre II.3 on obtient, en tenant compte de la première loi d'état, la dissipation en présence de l'endommagement :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial d_i} \dot{d}_i \geq 0. \tag{IV.18}$$

En adoptant donc comme variable d'endommagement les paramètres densité de fissure d^i correspondant à une famille de fissures i de normale $\underline{n}^i$, la force thermodynamique associée est définie comme :

$$F^{d^i} = \frac{\partial W^*}{\partial d^i}. \tag{IV.19}$$

Son expression détaillée est fournie en annexe F.

IV.2.2 Critère d'endommagement et lois d'évolution

Comme dans les modélisations du chapitre II, le critère d'endommagement est choisi sous la forme :

$$f^i(F^{d^i}, d^i) = F^{d^i} - \mathcal{R}(d^i), \tag{IV.20}$$

la fonction $\mathcal{R}(d^i)$ décrivant la résistance à la propagation du dommage. Pour les applications du modèle qui seront présentées par la suite, on adopte la forme : $\mathcal{R}(d^i) = k(1 + \eta d^i)$, où k est le seuil d'endommagement et η caractérise l'effet d'écrouissage.
On rappelle également que :

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad F^{d^i} < \mathcal{R}(d^i), \quad \text{alors} \quad \dot{d}^i = 0 \quad (\text{pas de propagation de l'endommagement}) \\ &\text{si} \quad F^{d^i} = \mathcal{R}(d^i), \quad \text{alors} \quad \dot{d}^i \geq 0 \quad (\text{propagation de l'endommagement}) \end{aligned} \tag{IV.21}$$

En adoptant la règle de normalité, la loi d'évolution de la l'endommagement s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{d}^i = \dot{\Lambda}_{d^i} \dfrac{\partial f^i(F^{d^i}, d^i)}{\partial F^{d^i}} = \dot{\Lambda}_{d^i} \quad ; \quad \dot{\Lambda}_{d^i} \geq 0 \\ \text{soit} \quad \dot{d}^i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f^i < 0 \quad \text{ou} \quad (f^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}^i < 0) \\ \dot{\Lambda}_{d^i} & \text{si} \quad f^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}^i = 0 \end{cases} \end{array} \right. \tag{IV.22}$$

pour une famille de microfissures donnée. La condition de Kuhn-Tucker ($\dot{f} = 0$) fournit le multiplicateur d'endommagement :

$$\dot{\Lambda}_{d^i} = \frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)} \{\mathbf{U}^i : \dot{\mathbf{\Sigma}}\}^+. \tag{IV.23}$$

L'expression du tenseur $\mathbb{U}$ est également donnée en Annexe F.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

IV.2.3 Application du modèle : essai de traction sur un composite C-SiC 2D

Pour l'analyse des capacités prédictives du modèle nous avons considéré les prédictions de la réponse à une sollicitation de traction simple dans une direction identique à une des axes de symétrie matérielle. Le matériau considéré est un composite C-SiC 2D testé par Baste et Aristegui [6]. Du fait qu'il s'agit d'un composite tissé, ce matériau est considéré comme orthotrope de révolution, avec le plan d'isotropie suivant les directions 2 et 3. L'ensemble des expériences sont accompagnées (voir Figure IV.2) d'un suivi (à l'aide des techniques acoustiques)[49] de l'évolution des proprétés élastiques avec le chargement. Les prédictions des réponses mécaniques seront comparées aux données expérimentales[50]. Les valeurs des coefficients élastiques ont été calculées à partir des données

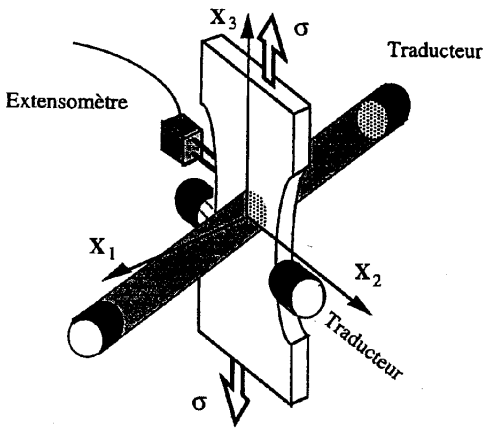

FIGURE *IV.2: Montage expérimental pour caractérisation ultrasonore sous charge des matériaux composites*

expérimentales [6]. On obtient : ${E_1}^s = 17.84$ GPa, ${E_3}^s = 89.07$ GPa, ${\nu_{12}}^s = 0.058$, ${\nu_{23}}^s = 0.165$, ${G_{13}}^s = 8.02$ GPa. Pour les six coefficients du modèle restant à identifier ($b_{10}, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}$ et b_{18}), une procédure de calage itératif a été retenue. Enfin, l'identification des valeurs des coefficients k et η intervenant dans le terme $\mathcal{R}(d^i)$ du critère d'endommagement est réalisée de la même manière qu'au chapitre II, c'est à dire en utilisant notamment le seuil de premier endommagement sur la courbe expérimentale. Les valeurs obtenues sont les suivantes : $k = 0.05\ J \cdot m^{-2}$ et $\eta = 1802 * 10^3$. L'identification des autres paramètres conduit aux valeurs respectives suivantes : $b_{10} = 0.19$ GPa, $b_{11} = 0.006$ GPa, $b_{13} = 0.856$ GPa, $b_{15} = 0.38$ GPa, $b_{17} = 0.003$ GPa, $b_{18} = 0.0032$ GPa.

[49]Plus précisément, il s'agit de mesures de vitesses de propagation d'ondes ultrasonores suivant des directions judicieusement choisies.

[50]Les données concernant l'évolution de l'endommagement ainsi que celle des proprétés élastiques avec le chargement seront analysées ici ainsi que dans la section IV.3.4, en liaison avec une seconde version simplifiée du modèle macroscopique.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

Pour faciliter la mise en oeuvre il est utile de se placer dans un système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3), avec l'axe x_3 correspondant à la direction de chargement faisant un angle θ par rapport à l'axe de symétrie de rotation $\underline{e}_1$ du matériau[51]. Dans ce système le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\mathbf{\Sigma} = \Sigma \mathbf{B}, \tag{IV.24}$$

expression où Σ représente le niveau de chargement et :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{IV.25}$$

De même, dans le système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) considéré, le tenseur de structure $\mathbf{A}$ s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{IV.26}$$

On précise également que l'intégration sur les différentes orientations est effectuée en retenant sur la sphère unité les mêmes 33 familles de fissures utilisées par V. Pensée [75] dans ses travaux de modélisation de l'endommagement en milieux initialement isotropes, avec une densité initiale de microfissuration $d = 0.01$.

La figure IV.3 présente les résultats de la simulation comparés à la courbe contrainte-déformation

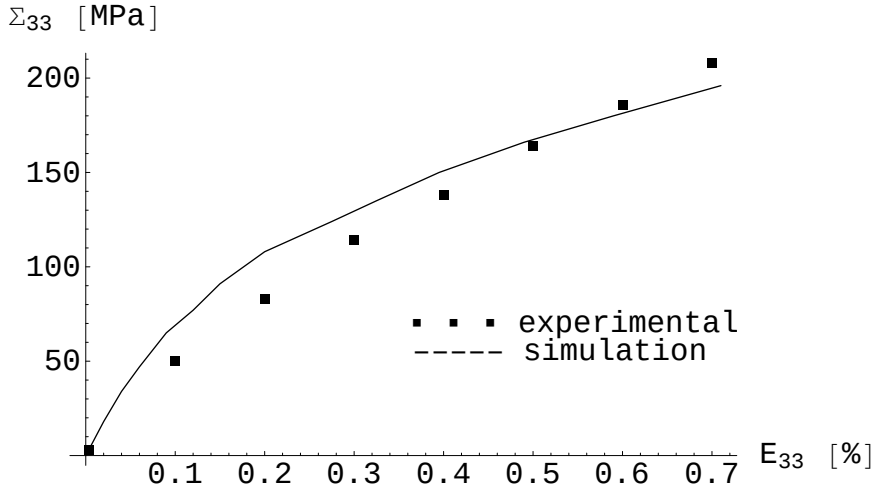

FIGURE *IV.3: Composite C-SiC sollicité en traction dans la direction 3 appartenant au plan d'isotropie transverse. Comparaison simulation données expériementales (Baste et Aristegui. [6])*

obtenue par voie expérimentale pour une traction appliquée suivant la direction 3 appartenant au

[51] On suit ici une procédure proposée dans [15].

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

plan d'isotropie transverse. On constate un bon accord entre les résultats du modèle et la réponse expérimentale, en dépit du fait que ce matériau est fortement endommageable (le seuil de premier endommagement est très bas, de l'ordre de 3 MPa). On propose également un deuxième niveau de comparaison, permis par le suivi expérimental de l'évolution des composantes du tenseur de souplesse du matériau durant le chargement (cf. Baste et Aristegui [6]). En dehors de quelques différences notables sur certaines composantes (en très faible nombre), on distingue sur la Figure IV.4 une reproduction qualitative correcte des variations des différents termes du tenseur de souplesse, en accord avec les mesures expérimentales. On constate également le fait que le matériau (qui dans l'état initial était isotrope transverse) devient orthotrope. Pour confirmer la pertinence de la modélisation proposée dans cette section, un complément de validation est fourni en Annexe G (section G.1).

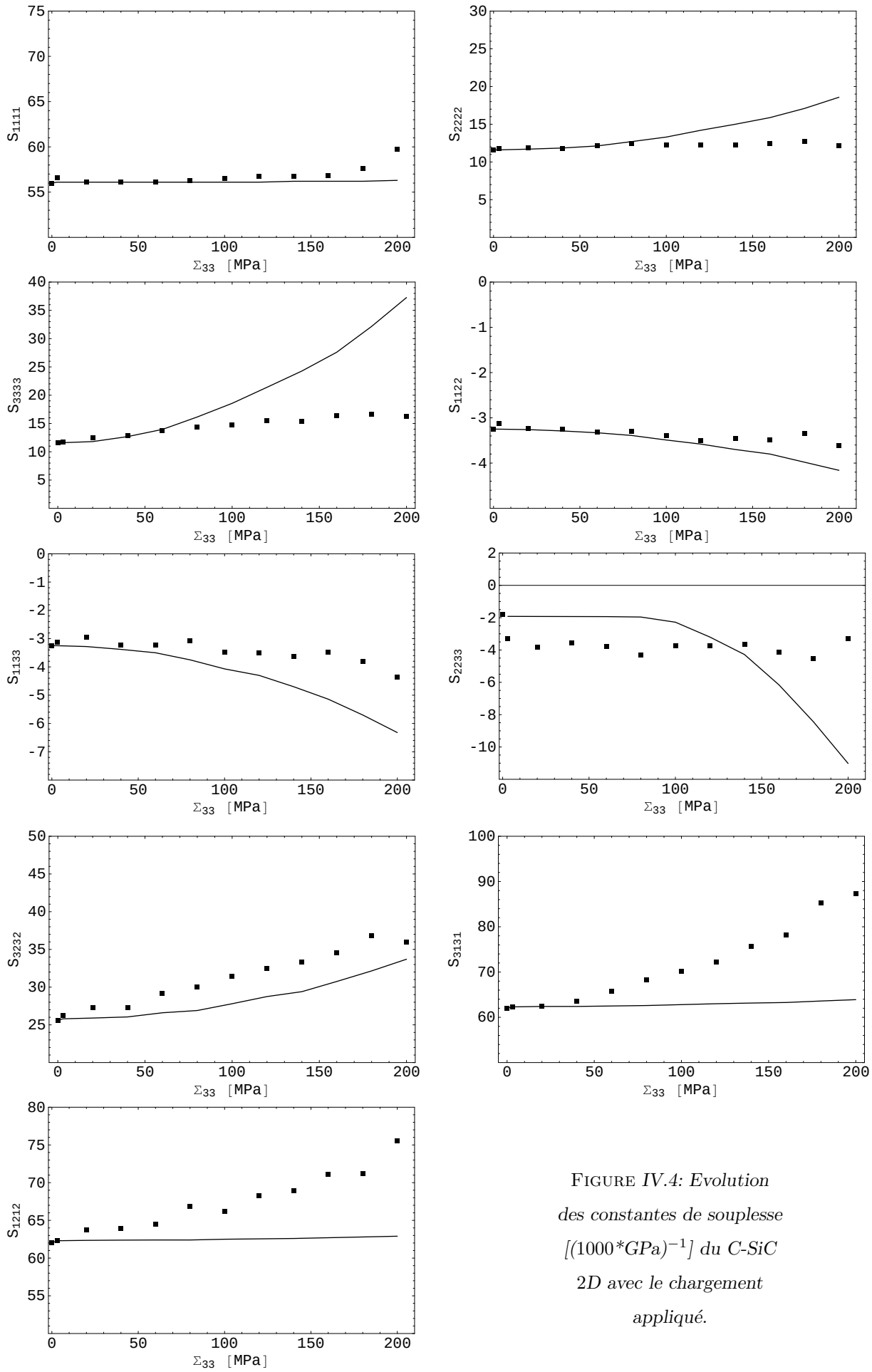

FIGURE *IV.4: Evolution des constantes de souplesse [(1000*GPa)$^{-1}$] du C-SiC 2D avec le chargement appliqué.*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

IV.3 Modélisation de l'anisotropie induite à l'aide d'un tenseur d'endommagement d'ordre 2

Cette section est consacrée au développement d'un modèle macroscopique 3D de l'endommagement des milieux orthotropes de révolution, qui s'appuie sur les résultats de la section IV.1 . La particularité de la modélisation qui sera explicitée dans ce qui suit réside dans l'approximation de la distribution du paramètre densité de fissures via un tenseur de second ordre $\mathbf{D}$.

L'intérêt de cette nouvelle construction est double :

- a l'instar des approches micromécaniques et de la démarche de la section IV.1 dont elle est issue, elle confère une certaine base physique au modèle macroscopique envisagé, en autorisant une interprétation des résultats en termes d'évolution de microstructure ;
- elle suggère également la structure mathématique des lois d'endommagement des milieux orthotropes de révolution ; en particulier, elle facilitera l'analyse des interactions entre anisotropies primaire et induite dans le contexte relativement courant d'un endommagement modélisé par un tenseur du second ordre. Le modèle macroscopique ainsi construit est directement comparable à ceux présentés au chapitre I (dans la section I.2) et dans l'annexe A qui est associé à ce chapitre.

Au delà de ce double intérêt, le modèle 3D basé sur l'approximation de l'endommagement par le tenseur $\mathbf{D}$ est mis en oeuvre pour simuler le test présenté en IV.2.3. La comparaison avec les données expérimentales portera aussi bien sur la réponse mécanique globale que sur l'analyse de l'évolution des propriétés élastiques macroscopiques avec le chargement appliqué.

IV.3.1 Formulation macroscopique basée sur un tenseur d'endommagement d'ordre 2

On souhaite donc reformuler l'expression du potentiel d'énergie en adoptant une représentation simplifiée (à l'aide d'un tenseur d'ordre deux) de la distribution en orientation du paramètre densité de fissures $\rho(\underline{n})$[52]. On suit ici la démarche proposée par Pensée [75] sur la base des travaux de Lubarda et Krajcinovic [62] (cf. également Thikomirov et all. [87] et Qiang et all. [79]). On montre alors que, si on définit comme variable macroscopique d'endommagement le tenseur d'ordre deux $\mathbf{D}$ (l'intégration portant sur la sphère unité $\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{R}^3, n.n = 1\}$) :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}^2} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) d\varphi, \tag{IV.27}$$

[52] On rappelle que, même dans le contexte des milieux initialement isotropes, le choix de l'ordre de tensorialité adéquat pour la variable d'endommagement suscite encore de nombreuses discussions (voir par exemple Chaboche [16] ou Krajcinovic [49, 47]).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

l'approximation de la distribution du paramètre densité de fissures qui en résulte est :

$$\rho(\underline{n}) = \frac{3}{2}\,[5\mathbf{D} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \mathrm{tr}(\mathbf{D})]. \tag{IV.28}$$

Il s'agit maintenant de reporter (IV.28) dans (IV.15) pour obtenir une expression du potentiel d'énergie ayant comme un de ses arguments le tenseur $\mathbf{D}$. L'intégration sur la sphère unité, qui porte notamment sur des produits tensoriels du vecteur unitaire $\underline{n}$ exprimés dans la base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est facilitée par les identités suivantes (voir Lubarda et Krajcinovic [62], ou He et Curnier [40]) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{4\pi} n_i n_j \; dS = \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij},\\
&\int_0^{4\pi} n_i n_j n_k n_l \; dS = \frac{4\pi}{5}\,I_{ijkl},\\
&\int_0^{4\pi} n_i n_j n_k n_l n_\alpha n_\beta \; dS = \frac{4\pi}{7}\,\mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{IV.29}$$

avec les tenseurs d'ordre quatre et six définis respectivement par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{ijkl} &= \frac{1}{3}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\\
\mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta} &= \frac{1}{5}\,(\delta_{ij}\mathbb{I}_{kl\alpha\beta} + \delta_{ik}\mathbb{I}_{jl\alpha\beta} + \delta_{il}\mathbb{I}_{jk\alpha\beta} + \delta_{i\alpha}\mathbb{I}_{jkl\beta} + \delta_{i\beta}\mathbb{I}_{jkl\alpha}).
\end{aligned} \tag{IV.30}$$

Il découle alors de l'intégration que l'enthalpie libre du milieu endommagé s'exprime sous la forme :

$$\psi^* = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} : \mathbb{S}(\mathbf{D}) : \mathbf{\Sigma}. \tag{IV.31}$$

avec, comme tenseur de souplesse du matériau endommagé :

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(\mathbf{D}) = {} & c_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + c_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + c_3(\mathbf{1} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{1}) + c_4(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{D} + \mathbf{D}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) +\\
& c_5(\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}) + c_6(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + c_7(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + c_8(\mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{A}) +\\
& c_9\,[\mathbf{1} \otimes (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) + (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \otimes \mathbf{1}] + c_{10}\,[\mathbf{A} \otimes (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) + (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \otimes \mathbf{A}] +\\
& c_{11}\,[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) + (\mathbf{AD} + \mathbf{DA})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}]\,.
\end{aligned} \tag{IV.32}$$

Les coefficients c_i sont donnés par :

$$\begin{aligned}
&c_1 = g_1 + g_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + g_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}), && c_2 = g_4 + g_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + g_6\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}),\\
&c_3 = g_7, \qquad c_4 = g_8, && c_5 = g_9 + g_{10}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + g_{11}\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}),\\
&c_6 = g_{12} + g_{13}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}), && c_7 = g_{14} + g_{15}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + g_{16}\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}),\\
&c_8 = g_{17}, \qquad c_9 = g_{18}, \qquad c_{10} = g_{19}, \qquad c_{11} = g_{20}.
\end{aligned} \tag{IV.33}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Il est à nouveau essentiel de noter que tous ces termes sont exprimés à l'aide des 5 constantes élastiques du matériau non endommagé et des 6 coefficients $b_{10}, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}$, et b_{18} :

$$\begin{aligned}
&g_1 = 2b_1, \qquad g_2 = \frac{s_1}{14} - \frac{b_{17}}{5} + \frac{b_{18}}{7}, \qquad g_3 = \frac{1}{14}\left(2b_{17} - 2b_{18} - s_1\right),\\
&g_4 = 2b_3, \qquad g_5 = \frac{1}{7}\left(\frac{b_{17}}{5} - b_{18} - \frac{s_1}{2}\right), \qquad g_6 = -g_3,\\
&g_7 = b_{11} + \frac{1}{7}\left(3b_{17} - b_{18} - \frac{s_1}{2}\right), \qquad g_8 = b_{13} + \frac{1}{7}\left(3b_{17} + b_{18} + \frac{s_1}{2}\right),\\
&g_9 = b_2, \qquad g_{10} = \frac{1}{7}\left(b_{17} - \frac{6}{5}b_{18} - \frac{s_1}{2}\right), \qquad g_{11} = -b_{10},\\
&g_{12} = b_5, \qquad g_{13} = \frac{2}{35}\left(s_1 - 2b_{17} + 2b_{18}\right), \qquad g_{14} = 2b_4,\\
&g_{15} = \frac{2}{35}\left(2b_{17} + 2b_{18} - s_1\right), \qquad g_{16} = -2g_{11}, \qquad g_{17} = -b_{10} - b_{15} + \frac{b_{18}}{7},\\
&g_{18} = \frac{1}{2}(b_{10} - b_{11}) + \frac{1}{14}\left(s_1 - 2b_{17} + 3b_{18}\right),\\
&g_{19} = \frac{b_{15}}{2} + \frac{1}{7}\left(s_1 - 2b_{17} - 2b_{18}\right), \qquad g_{20} = -\frac{b_{13}}{2} + \frac{s_2}{2} + \frac{1}{28}\left(2b_{17} - 2b_{18} - s_1\right).
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

Remarque IV.1 *On note que l'expression (IV.32) a la même structure mathématique de base que celle proposée par Cazacu et all. [15] (voir également [14]) et qui est synthétisée en Annexe A. En particulier, on observe que dans les effets de l'endommagement la presence de termes en* $\mathrm{tr}(\mathbf{D})$ *ne modifie pas la symétrie initiale du matériau. Les termes en* $\mathrm{tr}(\mathbf{AD})$*, qui au contraire modifie cette symétrie initiale, traduisent les interactions entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie induite par l'endommagement.*

IV.3.2 Critère et loi d'évolution

Pour compléter la formulation du modèle, un critère d'endommagement basé sur le taux de restitution de l'énergie est retenu sous la forme :

$$f(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) = \|\mathbf{Y}\| - [h_0 + h_1 tr\mathbf{D} + h_2 tr(\mathbf{DA})], \tag{IV.35}$$

dans laquelle la force thermodynamique $\mathbf{Y}$ associée à l'endommagement est obtenue par dérivation partielle de l'enthalpie libre ψ^* :

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{D}}. \tag{IV.36}$$

h_0, h_1, et h_2 sont des paramètres du modèle pour le matériau considéré :

- h_0 est le seuil initial d'endommagement
- h_1 et h_2 sont des constantes qui prennent en compte la variation de la résistance à l'endommagement en fonction de la dégradation induite dans le matériau ; en particulier le terme h_2

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

caractérise dans cette variation l'effet de couplage entre l'endommagement et l'anisotropie initiale.

En adoptant ensuite la règle de normalité pour $\mathbf{D}$ on écrit la loi d'évolution :

$$\dot{\mathbf{D}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f < 0 \quad \text{ou} \quad (f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} < 0) \\ \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}} & \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = 0. \end{cases} \tag{IV.37}$$

Enfin, par la condition de Kuhn-Tucker : $\dot{f} = 0$ on obtient le multiplicateur d'endommagement $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{tr(\mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{Y}})}{h_1 tr(\mathbf{Y}) + h_2 tr(\mathbf{Y}.\mathbf{A})} \tag{IV.38}$$

IV.3.3 Etude des capacités prédictives du modèle sous sollicitations de traction

A présent, on se propose (dans un but de validation) d'étudier la réponse prédite par la loi d'endommagement résumée par la donnée du potentiel (IV.31), du critère d'endommagement (IV.35) et de la loi d'évolution (IV.37) qui en résulte. Le test analysé est l'essai de traction uniaxiale qui a été considéré dans la sous section IV.2.3.

En adoptant les mêmes choix (IV.24, IV.25 et IV.26) qu'en IV.2.3, on peut réécrire la force thermodynamique (éqn. IV.36) sous la forme :

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{T}, \tag{IV.39}$$

avec le tenseur du second ordre $\mathbf{T}$ exprimé par la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{1}{2}\left[g_2 + g_5 + 2(g_{10} + g_{13})(\cos\theta)^2 + g_{15}(\cos\theta)^4\right]\mathbf{1} + \\ & \frac{1}{2}\left[g_3 + g_6 + 2g_{11}(\cos\theta)^2 + g_{16}(\cos\theta)^4\right]\mathbf{A} + \\ & \left[g_7 + g_8 + g_{17}(\cos\theta)^2\right]\mathbf{B} + \left[2g_{18} + 2g_{19}(\cos\theta)^2 + 2g_{20}\right](\mathbf{AB} + \mathbf{BA}). \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Par substitution de l'équation (IV.39) dans (IV.37) et (IV.38), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \frac{2\mathbf{\Sigma}\|\mathbf{T}\|}{m}\mathbf{T} \qquad \text{pour} \qquad f(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) = 0, \qquad (a) \\ & m = h_1\,\mathrm{tr}(\mathbf{T}) + h_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{TA}) \qquad (b). \end{aligned} \tag{IV.41}$$

D'où l'on peut déduire (en tenant compte de IV.35 et de IV.39) le seuil initial d'endommagement h_0 :

$$h_0 = \mathbf{\Sigma_0}^2 \|\mathbf{T}\|. \tag{IV.42}$$

$\mathbf{\Sigma_0}$ représente le niveau de contrainte du premier seuil d'endommagement. A l'aide de l'équation (IV.41(a)), on montre que l'endommagement prend la forme :

$$\mathbf{D} = \frac{\|\mathbf{T}\|(\mathbf{\Sigma}^2 - \mathbf{\Sigma_0}^2)}{m}\mathbf{T}, \qquad \forall \mathbf{\Sigma} > \mathbf{\Sigma_0}. \tag{IV.43}$$

Finalement la substitution de la variable d'endommagement (équation IV.43) dans le tenseur de souplesse du matériau endommagé (éqn. IV.32) donne :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^s + \frac{\|\mathbf{T}\|(\mathbf{\Sigma}^2 - \mathbf{\Sigma_0}^2)}{m}\mathbb{M}, \tag{IV.44}$$

où le tenseur $\mathbb{M}$ est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} = {} & \mathrm{tr}(\mathbf{T})\left[g_2(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + g_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + g_{10}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + g_{15}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + g_{13}(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1})\right] + \\
& \mathrm{tr}(\mathbf{TA})\left[g_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + g_6(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + g_{11}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + g_{16}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\right] + \\
& g_7(\mathbf{1}\otimes\mathbf{T} + \mathbf{T}\otimes\mathbf{1}) + g_8(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{T} + \mathbf{T}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + g_{17}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{T} + \mathbf{T}\otimes\mathbf{A}) + \\
& g_{18}\left[\mathbf{1}\otimes(\mathbf{AT}+\mathbf{TA}) + (\mathbf{AT}+\mathbf{TA})\otimes\mathbf{1}\right] + g_{19}\left[\mathbf{A}\otimes(\mathbf{AT}+\mathbf{TA}) + (\mathbf{AT}+\mathbf{TA})\otimes\mathbf{A}\right] + \\
& g_{20}\left[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{AT}+\mathbf{TA}) + (\mathbf{AT}+\mathbf{TA})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}\right].
\end{aligned} \tag{IV.45}$$

On observe en examinant les expressions (IV.43) et (IV.40) que les directions principales d'endommagement ne se confondent avec les directions des sollicitations que pour des chargements effectués suivant les axes de symétrie du matériau (soit dans le plan d'isotropie transverse, ce qui correspond à un angle $\theta = \pi/2$, soit dans l'axe de symétrie rotationnelle, avec $\theta = 0$). En conséquence, le tenseur de souplesse endommagé reste isotrope transverse seulement pour un chargement appliqué dans la direction perpendiculaire au plan d'isotropie du matériau. Dans les autres cas, la réponse mécanique conduit à une orthotropie générale. On soulignera enfin que tout chargement en dehors des axes du matériau produira une perte de symétrie plus forte que l'orthotropie.

IV.3.4 Prédictions du modèle et validations

Comme annoncé, on applique le modèle proposé pour simuler le comportement mécanique sous sollicitation uniaxiale de traction du matériau composite C-SiC 2D. Les valeurs des coefficients élastiques ont été déjà calculées à partir des données expérimentales de Baste et Aristegui [6], qui proposent de plus un suivi (à l'aide de techniques de mesure par ultrasons) de l'évolution des composantes du tenseur de souplesse ; ces mesures sont couplées avec des méthodes d'extensométrie plus classiques. Les valeurs expérimentales ont été introduites dans la section IV.2.3.
Les observations expérimentales ayant montré que le principal mécanisme d'endommagement est la microfissuration de la matrice, on peut supposer que les termes caractérisant le fort couplage

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

entre l'anisotropie de structure et celle induite par l'endommagement peuvent être négligés, ce qui implique que : $g_{18} = g_{19} = g_{20} = 0$. Cette simplification permet d'exprimer les coefficients b_{10}, b_{13} et b_{15} en fonction des trois autres paramètres b_{11}, b_{17}, b_{18} qui, tout comme les paramètres h_1 et h_2 du critère d'endommagement, restent à identifier. Ces choix facilitent la procédure de calage. Les paramètres ainsi identifiés ont les valeurs suivantes : $b_{11} = 0.006$ GPa, $b_{17} = 0.003$ GPa, $b_{18} = 0.0032$ GPa, $h_1 = 2634.602$ et $h_2 = -7.758$.

La Figure IV.5 montre le bon accord entre la simulation et les données expérimentales pour la sollicitation de traction appliquée dans la direction 3 (se trouvant dans le plan d'isotropie transverse). Comme précédemment annoncé, une comparaison des prédictions du modèle avec les variations

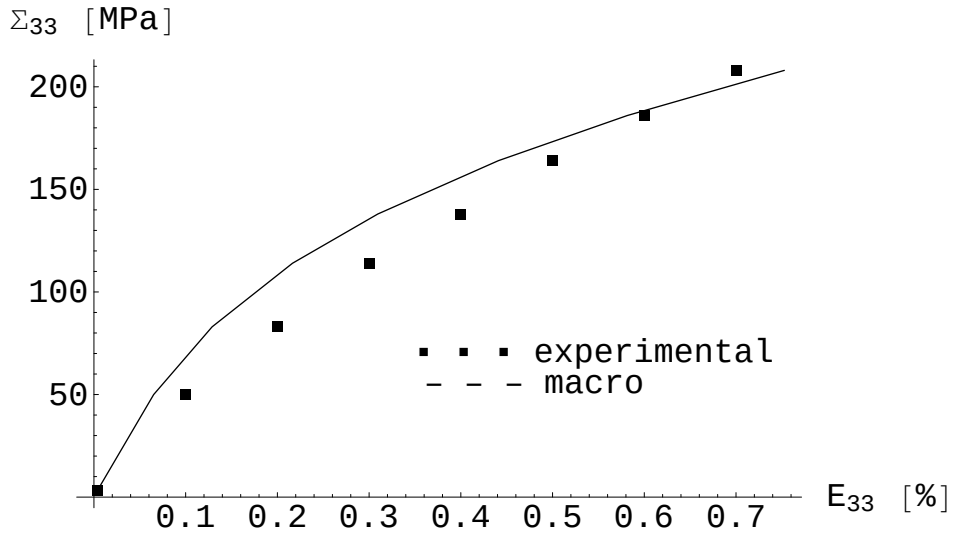

FIGURE *IV.5: Composite C-SiC sollicité en traction dans la direction 3 du plan d'isotropie transverse.*

expérimentales des composantes du tenseur de souplesse $\mathbb{S}^s$ avec la sollicitation de traction est présentée sur la Figure IV.6. On constate en premier lieu que, par rapport à l'état initial non-endommagé, la symétrie du matériau endommagé est de type orthotrope ; en clair, le modèle rend compte de la perte de symétrie induite par ce type de chargement considéré. De plus, on observe une bonne reproduction qualitative et quantitative de l'évolution des composantes de $\mathbb{S}^s$, à l'exception de $S^s_{1133}, S^s_{3131}, S^s_{3333}$ (on soulignera pour cette dernière que les valeurs expérimentales semblent présenter une incohérence avec la courbe globale de comportement, Fig. IV.5).

Pour cette seconde version du modèle on propose également un complément de validation en Annexe G (section G.2).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

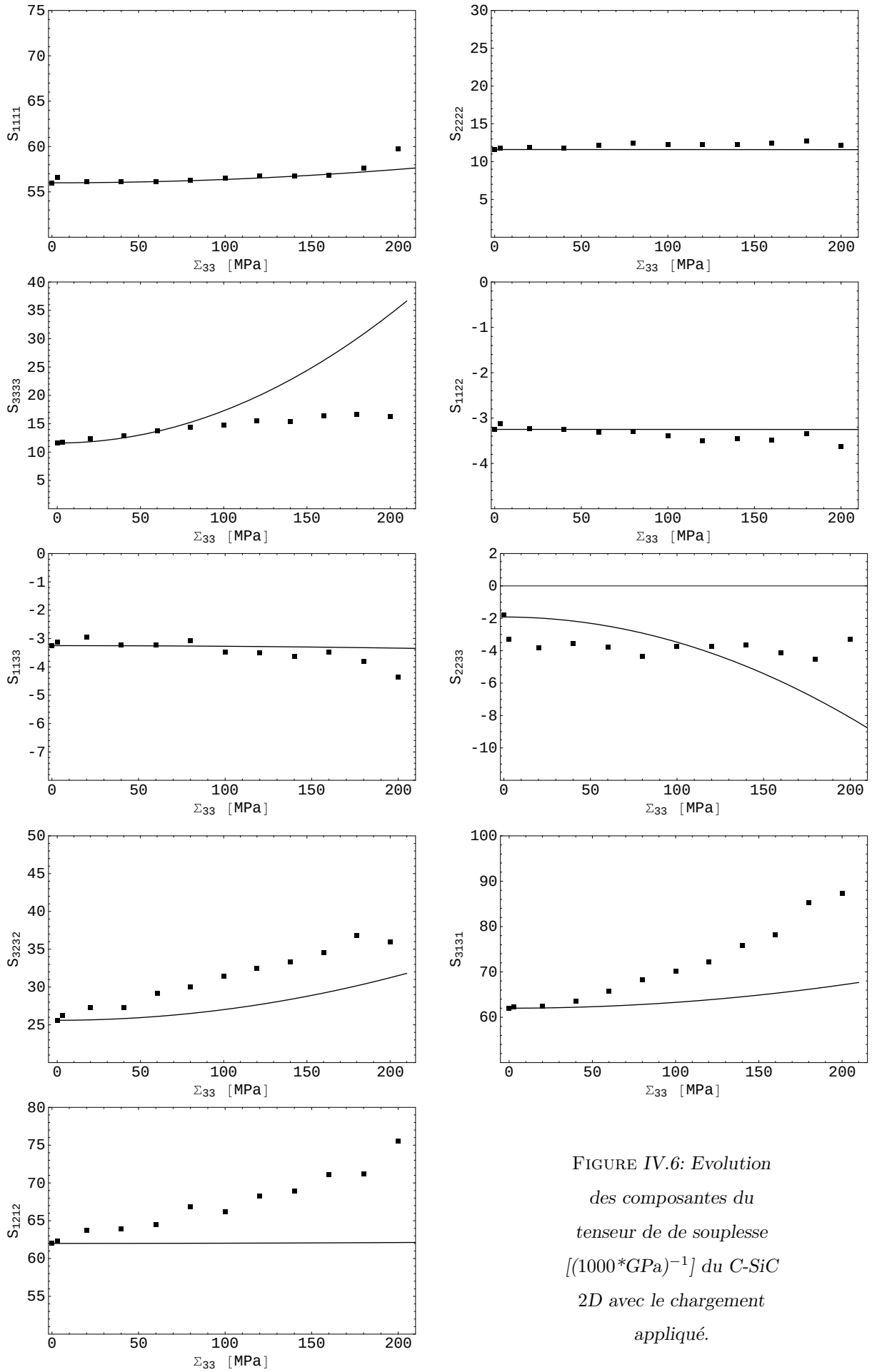

FIGURE *IV.6: Evolution des composantes du tenseur de de souplesse [(1000*GPa)$^{-1}$] du C-SiC 2D avec le chargement appliqué.*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

IV.4 Conclusions

Le modèle d'endommagement tridimensionnel formulé et mis en oeuvre dans ce chapitre selon deux versions semble être en mesure de décrire les phénomènes de microfissuration qui influencent le comportement macroscopique non-linéaire de composites à matrice fragile.

Une des originalités du travail mené dans cette partie de l'étude réside dans la mise en place et l'exploitation d'une demarche combinant les approches macroscopiques basées sur les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles et des résultats issus de l'homogénéisation des milieux fissurés. On rappelle que cette démarche se trouve en partie justifié par le manque de résultats généraux issus des approches micromécaniques dans le contexte tridimensionnel des milieux anisotropes fissurés. Le modèle d'endommagement macroscopique auquel on aboutit par cette démarche est physiquement cohérent et se révèle assez probant au vu des validations expérimentales réalisées sur un composite SiC-SiC 2D et le composite SiC-SiC étudié en G. Ce travail de validation sera poursuivi par l'investigation des sollicitations hors axes.

Enfin, on soulignera que la démarche proposée dans la section IV.3 fournit également une base d'analyse de la structure mathématique des modèles macroscopiques utilisant un tenseur d'ordre 2 comme variable d'endommagement, notamment pour ce qui concerne le rôle des interactions entre l'anisotropie de structure et l'anisotropie induite par le chargement.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Conclusion générale et perspectives

L'étude présentée dans ce mémoire a été consacrée à la modélisation des phénomènes de dégradation par mésofissuration des matériaux initialement anisotropes. Son cadre général est celui des méthodes de changement d'échelle. L'objectif visé était de formuler un ou des modèles d'endommagement anisotrope de cette classe de matériaux, mettant en relation les comportements macroscopiques avec les micromécanismes de déformation, dont en particulier la microfissuration. Cet objectif nous semble pleinement atteint, puisque nous disposons maintenant d'un outil d'analyse (bidimensionnel et tridimensionnel) et de prédiction de l'endommagement de ces matériaux, physiquement cohérent et dont la mise en oeuvre est relativement simple. Le travail effectué a également permis de clarifier de nombreuses questions telles que l'interaction entre l'anisotropie structurale et l'anisotropie induite par l'endommagement, ou encore la perte de symétrie matérielle due à l'endommagement.

La démarche adoptée dans nos travaux est progressive. Pour l'asseoir, nous avons considéré et développé au chapitre II une modélisation plane qui a permis d'établir l'expression générale de l'énergie libre macroscopique d'un milieu affaibli par un système de fissures parallèles arbitrairement orientées par rapport aux axes d'orthotropie. Afin de simplifier la formulation, l'hypothèse de non interaction des fissures a été adoptée. La construction qui s'en déduit a abouti à un critère macroscopique déterminant la transition ouverture/fermeture des fissures. On a noté dans ce critère, en raison de l'orthotropie initiale des matériaux étudiés, que les modes de fissuration sont fortement couplés : le critère de transition ouverture/fermeture s'avère ainsi très différent de celui existant pour les milieux initialement isotropes. Fort de ces résultats et de leur généralisation à une distribution quelconque en orientation des mésofissures, nous avons alors proposé une modélisation complète du processus d'endommagement anisotrope, incluant le caractère unilatéral du comportement lié à la fermeture des mésofissures. Cette modélisation a été mise en oeuvre en adoptant une procédure d'intégration numérique du potentiel thermodynamique du milieu endommagé. Les applications et validations expérimentales présentées à ce stade de la modélisation ont permis de démontrer le caractère opérationnel de la démarche pour l'étude des modes d'endommagement

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Cosmin Gruescu, Lille 1, 2004

sous sollicitations de traction dans les axes et hors des axes de symétrie initiale du matériau. Bien qu'encourageant, cet ensemble de résultats mérite d'être replacé dans un cadre plus général qui en assurerait des extensions futures.

C'est ainsi que nous avons été amenés à développer au chapitre III une formulation alternative par tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}$ (ou de Hill $\mathbb{P}$). Dans ce contexte, la modélisation géométrique de la fissure a consisté en un cylindre infini de faible rapport d'aspect. Les résultats analytiques obtenus au prix de nombreux développements sont très concluants. Ils sont nouveaux dans le cas d'une fissure arbitrairement orientée par rapport aux axes d'orthotropie, et mettent en évidence l'interaction entre l'orthotropie initiale et l'orientation de la fissuration. Une validation détaillée de ces résultats est proposée à la fin du chapitre III. Ces résultats ouvrent la voie à diverses perspectives dont :

- *a court terme, l'étude de l'impact des fissures fermées dans le cadre des méthodes basées sur le tenseur d'Eshelby.* En supposant dans un premier temps un contact non frottant, on pourra s'inspirer des travaux de Deudé [21] pour lequel il faudra proposer une extension au contexte orthotrope. Plus précisément, il s'agira de trouver un matériau fictif de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^f$ non nul, susceptible de rendre compte des modes de transmission des efforts à travers les lèvres de la fissure fermée.
- *la prise en compte dans l'analyse micromécanique d'informations disponibles sur la distribution spatiale des fissures dans la matrice solide orthotrope.* Cette étude, qui s'appuiera sur les travaux de Ponte Castaneda et Willis [78], permettra d'incorporer de manière indirecte certains aspects microstructuraux de la fissuration des CMC liés à la présence des renforts.

La dernière partie de notre étude a été consacrée à la modélisation 3D de l'endommagement dans certains CMC. L'absence de résultats analytiques généraux pour une étude tridimensionnelle de la fissuration en milieux anisotropes nous a conduit à proposer une approche combinant la théorie de représentation des fonctions tensorielles et les résultats de la micromécanique lorsqu'ils sont disponibles. Cette démarche nous a semblé pertinente, même si l'on peut envisager d'aborder le problème d'un point de vue numérique[53]. Elle a abouti à un modèle dont la cohérence physique et la pertinence ont permis d'en démontrer les grandes capacités prédictives. Les nombreuses validations expérimentales présentées pour les composites C-SiC 2D et SiC-SiC 2D ouvrent des perspectives intéressantes parmi lesquelles, on peut mentionner :

[53] On souligne néanmoins les difficultés qui surgiront pour l'écriture des lois d'évolution.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

- *l'introduction dans le modèle 3D des effets de fermeture de fissures ainsi que les phénomènes de frottement associés*, extension pour laquelle on pourra s'appuyer sur les travaux de Pensée [75]. Les questions liées à la modélisation de la décohésion de l'interface fibre/matrice sont également à envisager.
- *Le calcul numérique des structures composites endommagées.* Compte tenu des premières évaluations des modèles présentés dans ce mémoire, on peut envisager une implémentation numérique dans un code de calcul par éléments finis, ce qui permettra d'aborder un niveau supplémentaire de validation et de prédiction des modèles proposés.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Bibliographie

[1] **Andrieux, S.**
"Un modèle de matériau microfissuré - Applications aux roches et aux bétons". Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.

[2] **Andrieux, S., Bamberger, Y., Marigo, J.J.**
"Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons", Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, No. 5, 471-513, 1986.

[3] **Aristégui, Ch.**
"Anisotropie élastique totale naturelle ou induite", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1997.

[4] **Aubard, X.**
"Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC-SiC ", Thèse de doctorat, Université Paris VI , 1992.

[5] **Aubard, X.**
"Modelling of the mechanical behaviour of a 2D SiC-SiC composite at a meso-scale", Composites Science and Technology, No. 54, 371-378, 1995.

[6] **Baste, S., Aristegui C.**
"Induced anisotropy and crack systems orientetations of a ceramic matrix composite under off-principal axis loading", Mechanics of Materials, No. 29, 19-41, 1998.

[7] **Barret, C.**
"Endommagement induit par des fissures ellipsoïdales d'orientations multiples dans des matériaux composites à matrice céramique ", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I , 1999.

[8] **Biegler, M. W., Mehrabadi, M. M.**
"An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage", Mechanics of Materials, No. 19, 151-164, 1995.

[9] **Boehler, J.-P.**
"Lois de comportement anisotrope des milieux continus", J. Méc, Vol. 17, 153-190, 1978.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[10] **Boehler, J.-P.**
"Applications of tensor functions in solid mechanics", Springer-Verlag-Wien-New York, CISM Courses and Lectures No.292, 1987.

[11] **Bouazzaoui, R., Baste, S., Camus, G.**
"Development of damage in a 2D woven C/SiC composite under mechanical loading : II. Ultrasonic characterization", Composites Science and Technology, Vol. 56, No. 12, 1373-1382, 1996.

[12] **Budiansky, B., O'Connell, R.-J.**
"Elastic moduli of a cracked solid ", International Journal of Solids and Structures, No. 12, 81-97, 1976.

[13] **Carrère, N., Martin, E., Lamon, J.**
"The influence of the interphase and associated interfaces on the deflection of matrix cracks on ceramic matrix composites", Composites : PartA, No. 31, 1179-1190, 2000.

[14] **Cazacu, O.**
"Contributions à la modélisation de l'anisotropie du comportement non-linéaire des matériaux", Dossier d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004.

[15] **Cazacu, O., Soare, S., Kondo, D.**
"On modelling the interaction between initial and damage induced anisotropy in transversely isotropic solids", soumis pour publication à la revue Mechanics of Materials, 2004.

[16] **Chaboche, J.-L.**
"Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with active/passive unilateral condition ", International Journal of Damage Mechanics, No. 1, 148-171, 1992.

[17] **Chaboche, J.-L., Maire, J.-F.**
"A new micromechanics based CDM model and it's application to CMC's", Aerospace Science and Technology, No. 6, 131-145, 2002.

[18] **Chaboche, J.-L., Maire, J.-F.**
"New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMCs", Composites Science and Technology, Vol. 61, No. 15, 2239-2246, 2001.

[19] **Curnier, A., He, Qi-Chang, Zysset, P.**
"Conewize linear elastic materials", Journal of Elasticity , Vol.37, 001-038, 1995.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[20] **Deudé, V., Dormieux, L., Kondo, D., Maghous, S.**
"Micromechanical approach to non-linear poroelasticity : application to cracked rocks", Journal of Engineering Mechanics, Vol.128, No. 8, 848-855, 2002.

[21] **Deudé, V.**
"Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthode de changement d'échelle", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.

[22] **Dormieux, L., Lemarchand, E., Kondo, D, Fairbairn, E.**
"Elements of Poro-Micromechanics Applied to Concrete", Concrete Science Engineering, Pro. 37, No. 265, 31-42, 2004.

[23] **Dormieux, L., Kondo, D.**
"Poroelasticity and damage theory for cracked media", chapitre à paraître dans : Applied Micromechanics of Porous Media, CISM, ed : L. Dormieux et F.J. Ulm, 2005.

[24] **Dragon, A., Cormery, F., Désoyer, T., Halm, D.**
"Localized failure analysis using damage models", dans Localisation and Bifurcation Theory for Solids and Rocks, Ed. R. Chambon et all., Balkema, Rotterdam, 127-140, 1994.

[25] **Dragon, A., Halm, D., Désoyer, T.**
"Anisotropic damage in quasi-brittle solids : modelling, computational issues and applications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 183, 331-352, 2000.

[26] **Dragon, A., Halm, D.**
"Damage Mechanics. Some modelling challenges", Institute of Fundamental Technological Research, Polysh Academy of Science, Editeur : IPPT PAN, Warsaw, Poland, 2004.

[27] **Eshelby, J. D.**
"The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 241, 376-396, 1957.

[28] **Eshelby, J. D.**
"Elastic inclusions and inhomogeneities", Progress in Solid Mechanics, Vol. 2, Chap. 3, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1961.

[29] **Faivre, G.**
"Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope", Le Journal de Physique, Tome. 32, Vol. 252, 325-331, 1971.

[30] **Fitoussi, J., Guo, G., Baptiste, D.**
"Determination of a tridimensional failure criterion at the fibre/matrix interface of an

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

organic-matrix/discontinuous-reinforcement composite", Composite Science and Technology , Vol 56, 755-760, 1996.

[31] **François, M.**
"Détermination des symétries matérielles de matériaux anisotropes", Thèse de doctorat, Univ. Pierre et Marie Curie Paris6, 1995.

[32] **Gasser, A.**
"Sur la modélisation du comportement mécanique des composites céramique-céramique à temperature ambiante", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.

[33] **Gasser, A., Ladevèze, P., Poss, M.**
"Damage mechanisms of a woven SiC-SiC composite : modelling and identification", Composites Science and Technology, Vol. 56, 779-784, 1996.

[34] **Gavazzi, A. C., Lagoudas, D. C.**
"On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and it's application to elastoplastic fibrous composites", Computational Mechanics, Vol. 7, 13-19, 1990.

[35] **Ghahremani, F.**
"Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusions in an anisotropic elastic material", Mechanics Research Communications, Vol. 4, No. 2, 89-91, 1977.

[36] **Gruescu, C., Kondo, D., Shao, J.F., Pensée, V.**
"A 2D micromechanical damage model for initially orthotropic materials", Numerical Models in Geomechanics IX, Ottawa(Canada), 25-27 août 2004.

[37] **Guillaumat, L.**
"Microfissuration des CMC : relation avec la microstructure et le comportement mécanique", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1994.

[38] **Halm, D., Dragon, A.**
"A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect", International Journal of Damage Mechanics, Vol.5, 384-402, 1996.

[39] **Halm, D., Dragon, A., Charles, Y.**
"A modular damage model for quasi-brittle solids-interaction between initial and induced anisotropy", Archive of Applied Mechanics, Vol. 72, 498-510, 2002.

[40] **He, Q.-C., Curnier, A.**
"A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations", International Journal of Solids and Structures, Vol. 32, No. 10, 1433-1457, 1995.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[41] **Hori, H., Nemat-Nasser, S.**
"Overall moduli of solids with microcracks : load induced anisotropy", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 31, 155-171, 1983.

[42] **Hochard, Ch., Aubourg, P.-A., Charles, J.-P.**
"Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure", Composites Science and Technology, Vol. 61, 221-230, 2001.

[43] **Kachanov, M.**
"Elastic solids with many cracks and related problems", Advances in Applied Mechanics, No. 30, 259-445, 1993.

[44] **Kinoshita, N., Mura, T.**
"Elastic field of inclusions in anisotropic media", Phys. Stat. Sol. (a), Vol. 5, 759-769, 1971.

[45] **Kondo, D., Pensée, V., Gruescu, C.**
"Micromechanics of three dimensional anisotropic damage with unilateral effects", Proceedings of the International Simposium on Anisotropic Behavior of Damaged Solids, Krakow (Pologne), 2002.

[46] **Kondo, D., Gruescu, C., Cazacu, O.**
"A micromechanics inspired damage model for initially transversely isotropic materials", 11th International Conference on Fracture, Turin(Italie), 20-25 mars 2005.

[47] **Krajcinovic, D., Mastilovic, S.**
"Some fundamental issues of damage mechanics", Mechanics of Materials, Vol. 21, 217-230, 1995.

[48] **Krajcinovic, D.**
"Damage mechanics", North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[49] **Krajcinovic, D.**
"Selection of damage parameter-Art or science ?", Mechanics of Materials, Vol. 28, 165-179, 1998.

[50] **Ladeveze P.**
"Sur une theorie de l'endommagement anisotrope", Report LMT-Cachan, No. 34, 1983.

[51] **Ladeveze P., Letombe S.**
"Recent advances on an anisotropic damage theory including unilateral effects", Continuous Damage Fracture, Elsevier, Ed. : A. Benallal, 2000.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[52] **Ladeveze P., Letombe S.**
"Inelastic strains and damage", Chap. 4 dans Damage Mechanics of Composite Materials, Vol. 9, Editeur : R. Talreja, Springer - Verlag, Wien - New York, 1994.

[53] **Lam, K. Y., Zhang, J.M.**
"On damage effect tensor", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 75, 51-59, 1995.

[54] **Lamon, J., Rebillat, F., Evans, AG**
"Microcomposite test procedure for evaluating the interface properties of ceramic matrix composites ", Journal of the American Ceramic Society, Vol. 78, No. 2, 401-405, 1995.

[55] **Laws, N.**
"A note on interaction energies associated with cracks in anisotropic media", Philosophical Magazine, Vol. 36, 367-372, 1977.

[56] **Laws, N.**
"The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material", Journal of Elasticity, Vol. 7, No. 1, 91-97, 1977.

[57] **Laws, N.**
"Stiffness changes in unidirectional composites caused by crack systems", Mechanics of Materials, Vol. 2, 123-137, 1983.

[58] **Laws, N.**
"A note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials", Mechanics of Materials, No. 4, 209-212, 1985.

[59] **Lekhnitski, S. G.**
"Stresses in an infinitely large anisotropic plate which is weakened by an elliptical hole", Dokl. Akad. Nauk, SSSR, Vol. 4, No.3, 25-45,1936.

[60] **Lekhnitsky, S., G.**
"Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body", OGIZ (en Russe), Traduite en Anglais : Mir Publishers, 1961.

[61] **Liu, I-S.**
"On representations of anisotropic invariants", International Journal of Engineering Sciences, Vol. 20, 1099-1109, 1982.

[62] **Lubarda, V., A., Krajcinovic, D.**
"Damage tensors and the crack density distribution", International Journal of Solids and Structures , Vol. 30, No. 20, 2859-2877, 1993.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[63] **Mai, Y.W.**
"Failure characterization of fibre-reinforced cement composites with R-curve characteristics", dans : Toughening Mechanisms in Quasi-Brittle Materials, Ed. S. P. Shah, Kluwer Publisher, New-York, 489-527, 1991.

[64] **Maire, J.-F., Lesne, P. M.**
"An explicit damage model for the design of composite structures", Composites Science and Technology, Vol. 58, 773-778, 1998.

[65] **Majumdar, B., S.**
"Interfaces in metal matrix composites", dans : Titanium matrix composites, Editeurs : Mall, S., Nicholas, T., Ed. Technomic, 1996.

[66] **Marigo, J. J.**
"Formulation d'une loi d'endomagement d'un matériau élastique", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, II , Vol. 292, 1309-1312, 1981.

[67] **Mauge, C., Kachanov, M.**
"Effective elastic properties of an isotropic material with arbitrarily oriented interacting cracks", Journal Mech. Phys. Solids , Vol. 42, No. 4, 561-584, 1994.

[68] **Morvan, J.M.**
"Comportement anélastique des matériaux composites à matrice céramique ", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1997.

[69] **Morvan, J.M., Baste, S.**
"Efects of two-scale transverse crack-systems on the non-linear behavoiur of a 2D SiC-SiC composite", Materials Science and Engineering A250, Vol. 2, 231-240, 1998.

[70] **Mura, T.**
"Micromechanics of defects in solids", M. Nijhoff Publ., The Hague, The Netherlands, 1987.

[71] **Murakami, S., Kamiya, K.**
"Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics", International Journal of Mechanical Sciences, No. 4, 473-486, 1997.

[72] **Muskhelishvili, N. I.**
"Some basic problems of the mathematical theory of elasticity", Izd. Akad. Nauk, SSSR, 1949.

[73] **Niandou, H., Shao, J. F., Henry, J. P., Fourmaintraux, D.**
"Laboratory investigation of the mechanical behaviour of Tournemire shale", International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences, No. 34, 3-16, 1997.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[74] **Ouyang, Ch., Mobasher, B., Shah, S. P.**
"An R-curve approach for fracture of quasi-brittle materials", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 37, 901-913, 1990.

[75] **Pensée, V.**
"Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionelle de l'endommagement par mésofissuration", Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.

[76] **Pensée, V., Kondo, D., Dormieux, L.**
"Three-dimensional micromechanical approach of brittle anisotropic damage and related issues", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 128, No. 8, 889-897, 2002.

[77] **Pluvinage, P.**
"Etude expérimentale et simulation numérique du comportement mécanique de matériaux composites SiC-SiC. Influence des paramètres de stratification et d'élaboration", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1991.

[78] **Ponte-Castaneda, P., Willis, J. R.**
"The effect of spatial distribution on the behavior of composite materials and cracked media", Journal of Mechanics and Physics of Solids, No. 43, 1919-1951, 1995.

[79] **Qiang, Y., Zhongkui, L., Tham, L.G.**.
"An explicit expression of the second-order fabric-tensor dependent elastic compliance tensor", Mechanics Research Communications, Vol. 28, No.3, 255-260, 2001.

[80] **Renaud, V.**
"Contributions à l'étude d'un modèle de mésofissuration : application au comportement d'un grés", Thèse de doctorat, Université de Sciences et Technologies de Lille 1, 1998.

[81] **Savin, G. N.**
"Stress Concentration around Holes", Gostekhteoretizdat (en Russe), Traduite en Anglais : Pergamon Press, 1960.

[82] **Sih, G.C., Paris, P.C. and Irwin G.R.**
"On cracks in rectilinear anisotropic bodies", International Journal of Fracture, Vol. 1, 189-203, 1965.

[83] **Siqueira, C.**
"Développemet d'un essai biaxial sur plaques composites et utilisation pour modélisation du comportement d'un matériau SMC", Thèse de doctorat, Université Franche-Comté, 1993.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[84] **Suvorov, A. P., Dvorak, G. J.**
"Rate form of the Eshelby and Hill tensors", International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, 5659-5678, 2002.

[85] **Talreja, R.**
"Continuum modelling of damage in ceramic matrix composites", Mechanics of Materials, No. 12, 165-180, 1991.

[86] **Talreja, R.**
"Damage mechanics of composite materials", Vol. 9, Series Editor : R. B. Pipes, Springer - Verlag, Wien - New York, 1994.

[87] **Thikomirov, D., Niekamp, R., Stein, E.**
"On three-dimensional microcrack density distribution", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, No. 81, 3-16, 2001.

[88] **Ting, T. C. T., Lee, Ven-Gen.**
"The three-dimensional elastostatic Green's function for general anisotropic linear elastic solids", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 50, No. 3, 407-426, 1997.

[89] **Ting, T. C. T.**
"Recent developments in anisotropic elasticity ", International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, No.1-2, 401-409, 2000.

[90] **Tsukrov, I., Kachanov, M.**
"Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution ", International Journal of Solids and Structures , Vol. 37, 5919-5941, 2000.

[91] **Wang, C. C.**
"A new representation theorem for isotropic functions", Part I. et II., Archives Rational Mechanics Anal. , Vol. 36, 166-223, 1970.

[92] **Welemane, H.**
"Une modélisation des matériaux microfissurés - Application aux roches et aux bétons ", Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.

[93] **Welemane, H., Cormery, F.**
"An alternative 3D model for damage induced anisotropy and unilateral effect in microcraked materials", Journal of Physics IV, Vol. 105, 329-338, 2003.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

[94] **Willis, J. R.**
"Anisotropic elastic inclusion problems", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 17, 157-174, 1964.

[95] **Willis, J.R.**
"Th stress field arround an elliptical crack in an anisotropic elastic medium ", International Journal of Enginnering Sciences, No. 6, 253-263, 1968.

[96] **Willis, J. R.**
"Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 25, 185-202, 1977.

[97] **A. Zaoui**.
"Matériaux hétérogènes et composites", Cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.

[98] **Zaoui, A.**
"Continuum Micromechanics : Survey", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 128, No. 8, 808-816, 2002.

[99] **Zheng, Q.-S.**
"Theory of representations for tensor functions-an unified invariant approach to constitutive equations", Applied Mechanics Revue, Vol. 47, No 11, 545-586, 1994.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe A

Modèle macroscopique 3D d'endommagement des matériaux orthotropes de révolution de [15]

Ce modèle d'endommagement dédié aux matériaux orthotropes de révolution s'appuie également sur le formalisme décrit en I.2.1, avec un souci de simplification. L'expression de l'enthalpie libre proposée par Cazacu et all. [15] dans le contexte des milieux orthotropes de révolution est la suivante :

$$\begin{aligned}\psi^* = &\frac{1}{2}\left\{a_1\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + a_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) + 2a_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}) + a_4\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + 2a_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{A})\right\} + \\ &\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{D})}{2}\left\{b_1\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + b_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) + 2b_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}) + b_4\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + 2b_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{A})\right\} + \\ &\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{A})}{2}\left\{c_1\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + c_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) + 2c_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}) + c_4\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + 2c_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{A})\right\} + \\ &d_1\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}) + d_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{D}) + d_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + 2d_4\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{D}) + \\ &2d_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}) + 2d_6\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{A}\mathbf{D}),\end{aligned} \tag{A.1}$$

où $\mathbf{A}$ est le tenseur de structure du matériau associé à l'axe de révolution. Les a_i (les 5 coefficients élastiques du matériau non endommagé), $b_i, c_i, i = 1...5$, et $d_j, j = 1...6$ sont 21 paramètres du modèle à déterminer à partir d'expériences de laboratoire.

La première loi d'état donne le tenseur de déformation macroscopique $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{\Sigma}} = \mathbb{S}(\mathbf{D}) : \mathbf{\Sigma}, \tag{A.2}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

avec le tenseur de souplesse :

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(\mathbf{D}) = {} & s_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + s_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + s_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + s_4(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + s_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A}+\mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + \\ & d_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{D}+\mathbf{D}\otimes\mathbf{1}) + d_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{D}+\mathbf{D}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + d_3(\mathbf{A}\otimes\mathbf{D}+\mathbf{D}\otimes\mathbf{A}) + \\ & d_4\left[\mathbf{1}\otimes(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})+(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\otimes\mathbf{1}\right] + d_5\left[\mathbf{A}\otimes(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})+(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\otimes\mathbf{A}\right] + \\ & d_6\left[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})+(\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}\right].\end{aligned} \tag{A.3}$$

Les coefficients $s_i, i = 1...5$ sont des combinaisons linéaires des invariants $\mathrm{tr}(\mathbf{D}), \mathrm{tr}(\mathbf{AD})$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + c_1\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}) \\ s_2 &= a_2 + b_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + c_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}) \\ s_3 &= a_3 + b_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + c_3\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}) \\ s_4 &= a_4 + b_4\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + c_4\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}) \\ s_2 &= a_5 + b_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + c_5\,\mathrm{tr}(\mathbf{AD}). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Remarque A.2 *On notera que la substitution du tenseur identité du second ordre* $\mathbf{I}$ *à la place de* $\mathbf{A}$ *dans (A.3) conduit bien à la représentation générale classique du tenseur de souplesse effective d'un matériau isotrope endommagé (voir par exemple Murakami et Kamya [71]) :*

$$\mathbb{S}(\mathbf{D}) = \mathbb{S}^s_{iso} + \alpha\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + \beta\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + \gamma(\mathbf{1}\otimes\mathbf{D}+\mathbf{D}\otimes\mathbf{1}) + \eta(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{D}+\mathbf{D}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}), \tag{A.5}$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ *sont des constantes et* $\mathbb{S}^0_{iso}$ *le tenseur de souplesse du matériau isotrope non endommagé.*

Dans Cazacu et all. [15] est proposée une simplification de la formulation du modèle basée sur la décomposition suivante du tenseur de souplesse du matériau endommagé (A.3) :

$$\mathbb{S}(\mathbf{D}) = \mathbb{S}^s + \mathbb{S}^D, \tag{A.6}$$

avec le tenseur de souplesse du matériau sain :

$$\mathbb{S}^s = a_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + a_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + a_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + a_4(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + a_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A}+\mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}), \tag{A.7}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

et la partition : $\mathbb{S}^D = \mathbb{S}^1 + \mathbb{S}^2 + \mathbb{S}^3$, telle que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^1 &= \mathrm{tr}(\mathbf{D})\left[b_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + b_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + b_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + b_4(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + b_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1})\right] \\
\mathbb{S}^2 &= \mathrm{tr}(\mathbf{AD})\left[c_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + c_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + c_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + c_4(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + c_5(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1})\right] \\
\mathbb{S}^3 &= d_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{D} + \mathbf{D}\otimes\mathbf{1}) + d_2(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{D} + \mathbf{D}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + d_3(\mathbf{A}\otimes\mathbf{D} + \mathbf{D}\otimes\mathbf{A}) + \\
&\quad d_4\left[\mathbf{1}\otimes(\mathbf{AD}+\mathbf{DA}) + (\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\otimes\mathbf{1}\right] + d_5\left[\mathbf{A}\otimes(\mathbf{AD}+\mathbf{DA}) + (\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\otimes\mathbf{A}\right] + \\
&\quad d_6\left[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{AD}+\mathbf{DA}) + (\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}\right].
\end{aligned} \tag{A.8}$$

En effet, on remarque que :

- le terme $\mathbb{S}^1$ est une combinaison linéaire des tenseurs caractérisant l'orthotropie de révolution. Il s'agit d'un effet isotrope de l'endommagement qui n'affecte pas la symétrie initiale du matériau,
- le deuxième terme ($\mathbb{S}^2$) se présente aussi comme une combinaison des générateurs tensoriels de la symétrie initiale, mais la présence du terme $\mathrm{tr}(\mathbf{AD})$ indique une interaction entre l'endommagement et l'anisotropie structurale que les auteurs qualifient de faible, puisque n'affectant pas la symétrie initiale.
- le terme $\mathbb{S}^3$ caractérise la perte de symétrie du matériau, qui traduit en fait une forte interaction entre la symétrie matérielle et l'endommagement anisotrope.

C'est sur la base de ces observations que Cazacu et al. [15] proposent la simplification consistant à supposer que les coefficients b_i, c_i sont des multiples des coefficients a_i caractérisant la symétrie initiale du matériau :

$$b_i = k_b a_i \qquad et \qquad c_i = k_c a_i\ , \qquad \forall i = 1...5, \tag{A.9}$$

avec k_b et k_c deux constantes à déterminer.

Cette hypothèse permet de réduire considérablement le nombres de paramètres du modèle. Après adjonction d'un critère d'endommagement basé sur le taux de restitution de l'énergie, sa validation par confrontation avec des données expérimentales est présentée dans Cazacu et all. [15] (voir également [14]).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe B

Approche par potentiels complexes des milieux anisotropes fissurés

Cette annexe présente de manière succincte quelques résultats classiques de l'élasticité plane anisotrope, puis leur application aux milieux fissurés. Elle est inspirée des travaux de Hori et Nemat-Nasser [41] et de Mauge et Kachanov [67].

B.1 Potentiels complexes en élasticité plane anisotrope

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être abordés de façon adéquate à l'aide des méthodes de potentiels complexes (Lekhnitski [60]) : de manière schématique, la détermination des solutions en déplacements et contraintes requiert deux fonctions complexes, $\Phi(z_1)$ et $\Psi(z_2)$, avec : $z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y$. Les variables complexes μ_1, μ_2 sont les racines de l'équation caractéristique du problème d'élasticité plane :

$$S^s_{1111}\mu^4 - 2S^s_{1112}\mu^3 + (2S^s_{1122} + S^s_{1212})\mu^2 - 2S^s_{2212}\mu + S^s_{2222} = 0, \tag{B.1}$$

et S_{ijkl} les composantes du tenseur de souplesse du matériau dans un système de référence noté xy. En raison de la définie positivité de $\mathbb{S}^s$, on montre que μ_1 et μ_2 sont des complexes non réels. En utilisant les notations $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k > 0$, les contraintes et les déformations

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2Re\left[\mu_1^2\phi^{'}(z_1 + \mu_2^2\psi^{'}(z_2)\right], \\
\sigma_{yy} &= 2Re\left[\phi^{'}(z_1) + \psi^{'}(z_2)\right], \\
\sigma_{xy} &= -2Re\left[\mu_1\phi^{'}(z_1 + \mu_2\psi^{'}(z_2)\right], \\
u_1(x,y) &= 2Re\left[p_1\phi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right], \\
u_2(x,y) &= 2Re\left[q_1\phi(z_1) + q_2\psi(z_2)\right],
\end{aligned} \tag{B.2}$$

avec $p_k = S^s_{1111}\mu_k^2 - S^s_{1112}\mu_k + S^s_{1122}$, $\quad q_k = \mu_k^{-1}(S^s_{1122}\mu_k^2 - S^s_{2212} + S^s_{2222})$. Dans le cas particulier d'un matériau présentant la symétrie orthotrope 2D[54], l'équation caractéristique se réduit à une équation bicarrée :

$$S^s_{1111}\mu^4 + (2S^s_{1122} + S^s_{1212})\mu^2 + S^s_{2222} = 0. \tag{B.3}$$

dont les racines, imaginaires, $\mu_{1,2}$ et $\overline{\mu}_{1,2} = -\mu_{1,2}$ sont :

$$\mu_{1,2} = \frac{i}{\sqrt{2S^s_{1111}}}\sqrt{(2S^s_{1122} + S^s_{1212}) \pm \sqrt{(2S^s_{1122} + S^s_{1212})^2 - 4S^s_{1111}S^s_{2222}}}, \tag{B.4}$$

Ces racines peuvent également être exprimées à l'aide des constantes "ingénieurs" sous la forme :

$$\mu_{1,2} = i\beta_{1,2} = \frac{i}{2}\left(\sqrt{\frac{E^s_1}{G^s_{12}} - 2\nu^s_{12} + 2\sqrt{\frac{E^s_1}{E^s_2}}} \pm \sqrt{\frac{E^s_1}{G^s_{12}} - 2\nu^s_{12} - 2\sqrt{\frac{E^s_1}{E^s_2}}}\right). \tag{B.5}$$

en précisant que E^s_1, E^s_2, ν^s_{12} et G^s_{12} sont respectivement les modules élastiques du matériau orthotrope dans le plan, le tenseur de souplesse ayant pour matrice de composantes :

$$\mathbf{S}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1{}^s} & -\frac{\nu^s_{12}}{E_1{}^s} & 0 \\ -\frac{\nu^s_{12}}{E_1{}^s} & \frac{1}{E_2{}^s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G^s_{12}} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

Ayant la solution de l'équation caractéristique pour le système des coordonnées $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$, il est possible d'exprimer les racines $\widehat{\mu}_k$ correspondant à un système x_1, x_2 par(cf. Lekhnitski [60])[55] :

$$\mu_k = \frac{\widehat{\mu}_k \cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \widehat{\mu}_k \sin\theta} \tag{B.7}$$

θ représente l'angle que fait la direction de la fissure avec l'axe x_1 de la matrice solide orthotrope (voir figure B.1).

[54] C'est typiquement le cas lorsque l'on considère en milieu orthotrope une fissure dont la normale coincide avec l'un des axes d'orthotropie, le repère local de la fissure et celui attaché au matériau étant confondus.

[55] Cette relation est d'un grand intérêt pour la solution élastique correspondant à une fissure arbitrairement orientée par rapport aux axes d'orthotropie.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

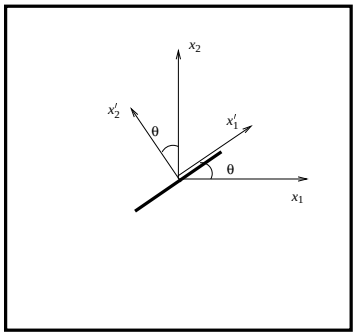

FIGURE *B.1: Orientation de la fissure dans le repère du matériau ortotrope 2D*

B.2 Application aux milieux fissurés

On se place dans le cas général d'une matrice orthotrope contenant une fissure d'orientation arbitraire. Les discontinuités de déplacement sur les lèvres de la fissure peuvent être obtenues à partir des solutions en déplacement (Savin [81], Leknhitski [60]) en se plaçant dans le système de coordonnées Cartésiennes xy associé à la fissure. Les composantes normale et tangentielle du déplacement s'écrivent :

a) pour un effort unitaire de traction normale à la fissure :

$$\begin{aligned} u_x^{\pm}(x,y) &= \pm S^s_{1111}\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)\sqrt{l^2-x^2}+x[S^s_{1111}\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right)-S^s_{1122}], \\ u_y^{\pm}(x,y) &= \pm S^s_{2222}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1^2+\alpha_1^2}+\frac{\beta_2}{\beta_2^2+\alpha_2^2}\right)\sqrt{l^2-x^2}- \\ &\quad x\left[S^s_{2222}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^2+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{\beta_2^2+\alpha_2^2}\right)+S^s_{2212}\right], \end{aligned} \tag{B.8}$$

b) pour un effort unitaire de cisaillement :

$$\begin{aligned} u_x^{\pm}(x,y) &= \pm S^s_{1111}\left(\beta_1+\beta_2\right)\sqrt{l^2-x^2}+x[S^s_{1111}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-S^s_{1112}], \\ u_y^{\pm}(x,y) &= \pm S^s_{1111}\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)+x\left[S^s_{1111}\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right)-S^s_{1122}\right] \end{aligned} \tag{B.9}$$

Les exposants "s" correspondent à l'élasticité orthotrope de la matrice solide ; α_i et β_i pour $i=1,2$ sont les parties réelle et imaginaire des nombres complexes μ_i. Pour l'écriture de ces expressions, les identités suivantes ont été utilisées :

$$\begin{aligned} S^s_{1111}\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right) &= S^s_{2222}\frac{(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}{(\beta_1^2+\alpha_1^2)(\beta_2^2+\alpha_2^2)} \\ S^s_{1111}\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right) &= 2S^s_{1122}-S^s_{2222}\frac{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)}{(\beta_1^2+\alpha_1^2)(\beta_2^2+\alpha_2^2)}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Il découle des solutions (B.8) et (B.9) que les composantes normale et tangentielle du saut de déplacement $[\underline{u}]=\underline{u}^+-\underline{u}^-$ sur les lèvres de la fissure s'écrivent respectivement (cf. également Sih

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

et all. [82]) :

$$\begin{aligned}[u_n] &= \sqrt{l^2 - x^2}(H_{nt}\sigma^d_{nn} + H_{tt}\sigma^d_{nt}),\\ [u_t] &= \sqrt{l^2 - x^2}(H_{nn}\sigma^d_{nn} + H_{nt}\sigma^d_{nt}),\end{aligned} \tag{B.11}$$

où les termes σ_{nn} et σ_{nt} représentent les contraintes microscopiques de traction et de cisaillement, et dans lesquelles on a posé :

$$\begin{aligned}H_{nn} &= 2S^s_{2222}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1^2+\alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{\beta_2^2+\alpha_2^2}\right)\\ H_{tt} &= 2S^s_{1111}\left(\beta_1+\beta_2\right)\\ H_{nt} &= H_{tn} = 2S^s_{1111}\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right).\end{aligned} \tag{B.12}$$

On démontre que ces termes peuvent être explicitement écrits sous la forme :

$$\begin{aligned}H_{nn} &= \pi C(1+D\cos 2\theta),\\ H_{tt} &= \pi C(1-D\cos 2\theta),\\ H_{nt} &= H_{tn} = \pi CD\sin 2\theta,\end{aligned} \tag{B.13}$$

avec :

$$\begin{aligned}C &= \frac{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}{2\sqrt{E_1E_2}}\sqrt{\frac{1}{G_{12}} + \frac{2}{\sqrt{E_1E_2}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}}\\ D &= \frac{\sqrt{E_1}-\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}.\end{aligned} \tag{B.14}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe C

Formulation en déformations du modèle micromécanique 2D

Dans cette annexe est présentée la formulation en déformations du modèle d'endommagement bidimensionnel pour un milieu orthotrope ; la formulation se base sur les résultats généraux établis au chapitre II dans les sous sections II.1.3, II.1.4 et II.1.5.

C.1 Enérgie libre macroscopique

Pour établir des relations simples entre les discontinuités de déplacement et la déformation macroscopique on adopte l'hypothèse d'une densité modérée des microfissures. Cette hypothèse permet notamment de négliger les termes du second ordre en d dans les développements. Le point de départ est l'équation (II.32). Par substitution des expressions (II.6) et (II.7) dans cette équation, on obtient les relations suivantes pour le glissement respectivement pour l'ouverture sur les lèvres de la fissure :

– dans le cas des fissures ouvertes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{2}\left[H_{tt}\mathbb{C}^s : (\mathbf{E}-\mathbf{E}^d) : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + H_{nt}\mathbb{C}^s : (\mathbf{E}-\mathbf{E}^d) : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] \\ \beta &= \frac{d}{2}\left[H_{nt}\mathbb{C}^s : (\mathbf{E}-\mathbf{E}^d) : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}) + H_{nn}\mathbb{C}^s : (\mathbf{E}-\mathbf{E}^d) : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] \end{aligned} \tag{C.1}$$

– pour les fissures fermées (en substituant à nouveau (II.6) et (II.7), mais dans (II.34))

$$\alpha = \frac{d}{2}\mathbb{C}^s : (\mathbf{E}-\mathbf{E}^d) : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})\left(H_{tt} - \frac{{H_{nt}}^2}{H_{nn}}\right) \tag{C.2}$$

Introduisant les tenseurs d'ordre deux $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ définis à partir de l'orientation de la fissure :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbb{C}^s : (\underline{n} \otimes \underline{n}), \\ \mathbf{T} &= \mathbb{C}^s : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}), \end{aligned} \tag{C.3}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

il est possible de relier la déformation macroscopique $\mathbf{E}$ à la variable d'endommagement d et aux paramètres α, β. On note auparavant que le tenseur des raideurs du milieu orthotrope se met sous la forme :

$$\mathbb{C}^s = a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + a_2(\mathbf{1} \underline{\overline{\otimes}} \mathbf{1}) + a_3(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + a_4(\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}), \tag{C.4}$$

où les coefficients a_i sont fonction des constantes élastiques du matériau :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E_1^s E_2^s - 2G_{12}^s(E_1^s - E_2^s {\nu_{12}^s}^2)}{E_1^s - E_2^s {\nu_{12}^s}^2}, \qquad a_2 = 2G_{12}^s, \\ a_2 &= \frac{E_1^{s2} + E_1^s E_2^s - 4G_{12}^s(E_1^s - E_2^s {\nu_{12}^s}^2) + 2E_1^s E_2^s \nu_{12}^s}{(E_1^s - E_2^s {\nu_{12}^s}^2)}, \\ a_3 &= \frac{(E_1^s - 2\nu_{12}^s G_{12}^s)\nu_{12}^s E_2^s + E_1^s E_2^s(\nu_{12}^s - 1)}{(E_1^s - E_2^s {\nu_{12}^s}^2)}. \end{aligned} \tag{C.5}$$

D'où, par (C.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= a_1\mathbf{1} + a_2\mathbf{A}\left[\mathbf{A} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] + a_3\mathbf{A} + a_3\mathbf{1}\left[\mathbf{A} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] + a_4(\underline{n} \otimes \underline{n}), \\ \mathbf{T} &= a_2\mathbf{A}\left[\mathbf{A} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})\right] + a_3\mathbf{1}\left[\mathbf{A} : (\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t})\right] + a_4(\underline{n} \overset{s}{\otimes} \underline{t}). \end{aligned} \tag{C.6}$$

L'introduction des équations (C.3) dans les expressions (C.1) suivie du remplacement de cette dernière dans l'expression de l'énergie libre macroscopique (éqn. II.25) donne :

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E}. \tag{C.7}$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique est défini dans le cas des fissures ouvertes par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \frac{d}{2}\left[H_{nn}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + H_{nt}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}) + H_{tt}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})\right], \tag{C.8}$$

et dans le cas des fissures fermées par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \frac{d}{2}\left[\left(H_{tt} - \frac{H_{nt}^2}{H_{nn}}\right)(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})\right]. \tag{C.9}$$

Le passage entre les états ouvert-fermé est donné par la condition $\beta = 0$, ce qui conduit au critère d'ouverture/fermeture :

$$H_{nt}\mathbf{E} : \mathbf{T} + H_{nn}\mathbf{E} : \mathbf{N} = 0. \tag{C.10}$$

Le saut du tenseur d'élasticité macroscopique à la transition ouverture/fermeture de la fissure s'écrit :

$$[\mathbb{C}] = \mathbb{C}_{ouv}^{hom} - \mathbb{C}_{fer}^{hom} = \frac{d}{2H_{nn}}\left[{H_{nn}}^2(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + H_{nn}H_{nt}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}) + H_{nt}^2(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})\right], \tag{C.11}$$

ce qui peut se mettre sous la forme : $[\mathbb{C}] = h(\mathbf{E}, \underline{n})(\mathbf{M} \otimes \mathbf{M})$. Utilisant la même argumentation que pour (II.42), on conclut que la réponse du matériau est continue au passage entre l'état ouvert et l'état fermé de la fissure. On note que h est une fonction scalaire de $\mathbf{E}$ et $\underline{n}$, et le tenseur du deuxième ordre $\mathbf{M}$ prend la forme $\mathbf{M} = (H_{nn}\mathbf{N} + H_{nt}\mathbf{T})$. La condition de continuité au passage de l'état ouvert à l'état fermé est donc $\mathbf{M} : \mathbf{E} = 0$, qui correspond bien au critère (C.10).

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

C.2 Reécriture à l'aide du tenseur de structure décrivant l'anisotropie initiale

De manière similaire à la démarche en contraintes macroscopiques présentée au chapitre II, on introduit à nouveau le tenseur de structure $\mathbf{A}$ dans les coefficients H_{nn}, H_{nt}, H_{tt}.
Ce procédé permet de réécrire l'équation (C.8) donnant le tenseur d'élasticité macroscopique à fissures ouvertes sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{hom}_{ouv} = \mathbb{C}^s - d\{&p_1(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + p_2(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + p_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) + p_4(\mathbf{1}\otimes\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{1})+\\ &p_5(\mathbf{A}\otimes\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{A}) + p_6(\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{\Delta}) + p_7(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1})+\\ &p_8\left[\mathbf{1}\otimes(\mathbf{A\Delta}+\mathbf{\Delta A}) + (\mathbf{A\Delta}+\mathbf{\Delta A})\otimes\mathbf{1}\right] + p_9\left[\mathbf{A}\otimes(\mathbf{A\Delta}+\mathbf{\Delta A}) + (\mathbf{A\Delta}+\mathbf{\Delta A})\otimes\mathbf{A}\right]+\\ &p_{10}\left[\mathbf{\Delta}\otimes(\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta A}) + (\mathbf{A\Delta}+\mathbf{\Delta A})\otimes\mathbf{\Delta}\right]\}\end{aligned} \tag{C.12}$$

Les coefficients p_i s'expriment en fonction de $a_1, a_2, a_3, a_4, k_1, k_2$, qui sont eux même des combinaisons des modules élastiques :

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{{a_1}^2}{2}(k_1+k_2) + \left[(a_1a_3 + \frac{{a_3}^2}{2})(k_1-k_2) + {a_1}^2k_1\right](\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})+\\
&\quad 2{a_3}^2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2 - 2a_3^2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^3,\\
p_2 &= -\frac{{a_3}^2}{2}(k_1+k_2) + \left[(a_2a_3 + \frac{{a_2}^2}{2})(k_1-k_2) + {a_3}^2k_1\right](\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})+\\
&\quad 2{a_2}^2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2 - 2a_2^22k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^3,\\
p_3 &= -\frac{a_1a_3}{2}(k_1+k_2) + \left[(\frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_2a_3}{2} + \frac{{a_3}^2}{2})(k_1-k_2) + a_1a_3k_1\right](\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})+\\
&\quad 2a_2a_3k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2 - 2a_2a_3k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^3,\\
p_4 &= -\frac{a_1a_4}{2}(k_1+k_2) - 2a_3a_4k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2, \qquad p_5 = -\frac{a_3a_4}{2}(k_1+k_2) - 2a_2a_4k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2,\\
p_6 &= -a_4^2k_1 - 2a_4^2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}), \qquad p_7 = \frac{a_4^2}{4}(k_1-k_2) + \frac{a_4^2}{4}k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}),\\
p_8 &= \left[\frac{a_3a_4}{4}(k_1-k_2) + \frac{a_1a_4}{2}k_1\right] + a_3a_4k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}),\\
p_9 &= \left[\frac{a_2a_4}{4}(k_1-k_2) + \frac{a_3a_4}{2}k_1\right] + a_2a_4k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}), \qquad p_{10} = \frac{{a_4}^2}{2}k_1.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Dans le cas des fissures fermées le tenseur $\mathbb{C}^{hom}$ prend la forme :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{hom}_{fer} = \mathbb{C}^s - \frac{d(k_2^2 - k_1^2)}{2[k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})]} \\ \{\left[(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}) - (\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})^2\right]\left[a_3^2(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + a_2^2(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + a_2a_3(\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1})\right] - \\ a_3a_4(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{1}) + \frac{a_4^2}{2}(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) - \\ a_2a_4(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})(\mathbf{A}\otimes\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{A}) - a_4^2(\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{\Delta}) + \\ \frac{a_3a_4}{2}\left[\mathbf{1}\otimes(\mathbf{A}\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\mathbf{A})\otimes\mathbf{1}\right] + \\ \frac{a_2a_4}{2}\left[\mathbf{A}\otimes(\mathbf{A}\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}\mathbf{A})\otimes\mathbf{A}\right]\}\end{aligned} \tag{C.14}$$

De manière analogue à la formulation en contraintes, les propriétés macroscopiques dépendent de l'orientation de la fissure, du paramètre densité de fissures d, des coefficients élastiques de la matrice solide et du tenseur de structure décrivant l'anisotropie de celle-ci.

C.3 Potentiel thermodynamique pour une distribution quelconque de fissures

L'énergie libre macroscopique Ψ associée à une distribution quelconque de microfissures peut être obtenue par intégration sur toutes les orientations (c'est à dire sur le cercle unité) de l'énergie libre W associée à la présence d'un seul système de fissures parallèles. Il vient :

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{2}\mathbf{E}:\mathbb{C}^s:\mathbf{E} - \frac{1}{2}\int_{C^-}\rho(\underline{n})\left\{\frac{(k_2^2 - k_1^2)}{k_2 + k_1 - 2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})}(\mathbf{E}:\mathbf{T})^2\right\}dS - \\ \frac{1}{2}\int_{C^+}\rho(\underline{n})\left\{\begin{array}{l}[k_2 - k_1 + 2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})](\mathbf{E}:\mathbf{T})^2 - [k_1 + k_2 - 2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta})](\mathbf{E}:\mathbf{N})^2 - \\ 2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{Q})[\mathbf{E}:(\mathbf{N}\otimes\mathbf{T} + \mathbf{T}\otimes\mathbf{N}):\mathbf{E}]\end{array}\right\}dS,\end{aligned} \tag{C.15}$$

avec les tenseurs d'ordre deux $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ provenant des équations (C.6).

C.4 Lois d'état, critère d'endommagement et loi d'évolution

La première loi d'état donne le tenseur des contraintes macroscopiques (en dérivant l'énergie macroscopique par rapport à la déformation) :

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^{hom}:\mathbf{E}. \tag{C.16}$$

La deuxième loi d'état fournit la force thermodynamique associée à l'endommagement. Dans le cas des fissures ouvertes, on a :

$$\begin{aligned} F^{d^i} = -\frac{\partial W}{\partial d^i} = k_1(\mathbf{A}:\mathbf{Q}^i)\left[\mathbf{E}:(\mathbf{N}^i\otimes\mathbf{T}^i+\mathbf{T}^i\otimes\mathbf{N}^i):\mathbf{E}\right] - \\ \frac{1}{2}\left[k_2-k_1+2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right](\mathbf{T}^i:\mathbf{E})^2+\frac{1}{2}\left[k_1+k_2-2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right][(\mathbf{N}^i:\mathbf{E})^+]^2, \end{aligned} \tag{C.17}$$

et, dans le cas des fissures fermées :

$$F^{d^i} = -\frac{\partial W}{\partial d^i} = -\frac{(k_2^2-k_1^2)}{2\left[k_2+k_1-2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right]}(\mathbf{T}^i:\mathbf{E})^2. \tag{C.18}$$

Comme dans la section II.3, on adopte un critère d'endommagement sous la forme : $f^i(F^{d^i},d^i) = F^{d^i}-\mathcal{R}(d^i)$, avec $\mathcal{R}(d^i)=k(1+\eta d^i)$.

En faisant l'hypothèse de la loi de normalité, on établit la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{d}^i = \dot{\Lambda}_{d^i}\frac{\partial f^i(F^{d^i},d^i)}{\partial F^{d^i}} = \dot{\Lambda}_{d^i} \quad , \quad \dot{\Lambda}_{d^i}\geq 0. \tag{C.19}$$

La condition du Kuhn-Tucker : $\dot{f}=0$ donne le multiplicateur d'endommagement $\dot{\Lambda}_{d^i}$ pour une famille de fissures i ; par conséquent :

$$\dot{d}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } \ f^i<0 \ \text{ ou } \ (f^i=0 \ \text{ et } \ \dot{f}^i<0) \\ \dot{\Lambda}_{d^i} & \text{si } \ f^i=0 \ \text{ et } \ \dot{f}^i=0. \end{cases} \tag{C.20}$$

La formulation en vitesse s'obtient par différentiation de la première loi d'état. On a :

$$\dot{\mathbf{\Sigma}} = \mathbb{C}_t^{hom}:\dot{\mathbf{E}}, \tag{C.21}$$

avec le tenseur tangent $\mathbb{C}_t^{hom}$:

$$\mathbb{C}_t^{hom} = \begin{cases} \mathbb{C}_t^{hom} & \text{si } \ f^i<0 \ \text{ ou } \ (f^i=0 \ \text{ et } \ \dot{f}^i<0) \\ \mathbb{C}^{hom}-\sum_{i=1}^{\mathcal{P}}\varpi^i\frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)}\mathcal{G}^i\mathbf{H}^i\otimes\mathbf{H}^i & \text{si } \ f^i=0 \ \text{ et } \ \dot{f}^i=0 \end{cases} \tag{C.22}$$

ϖ^i désigne le poids associé au i^{me} point d'intégration. Le tenseur $\mathbf{H}^i$ est défini pour les fissures ouvertes par :

$$\begin{aligned} \mathbf{H^i} = k_1(\mathbf{A}:\mathbf{Q}^i)\left[(\mathbf{N}^i\otimes\mathbf{T}^i+\mathbf{T}^i\otimes\mathbf{N}^i):\mathbf{E}\right]-\frac{1}{2}\left[k_2-k_1+2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right](\mathbf{T}^i:\mathbf{E})\mathbf{T}^i+ \\ \frac{1}{2}\left[k_1+k_2-2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right][(\mathbf{N}^i:\mathbf{E})^+]\mathbf{N}^i, \end{aligned} \tag{C.23}$$

Dans le cas des fissures fermées, on a :

$$\mathbf{H^i} = -\frac{(k_2^2-k_1^2)}{2\left[k_2+k_1-2k_1(\mathbf{A}:\mathbf{\Delta}^i)\right]}(\mathbf{T}^i:\mathbf{E})\mathbf{T}^i. \tag{C.24}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe D

Modèle macroscopique 2D basé sur un tenseur du second ordre D

D.1 Introduction

Cette annexe est consacrée à la modélisation macroscopique plane de l'endommagement des milieux orthotropes, celui ci étant décrit à l'aide d'un tenseur d'ordre 2. L'idée de base consiste à approcher la distribution du paramètre densité de fissures à l'aide d'un tenseur du second ordre $\mathbf{D}$ pour en déduire une modèle macroscopique (bidimensionnel)[56] dont la structure est directement comparable à ceux issus des démarches purement macroscopiques présentés dans la section I.2.
De la même façon que dans la section IV.3, nous adoptons une approximation de l'endommagement par un tenseur d'ordre deux telle qu'elle a été proposée par Lubarda et Krajcinovic [62] et développée dans Pensée [75] dans le contexte 3D. Le paramètre densité de fissures (noté ρ) est approché à l'aide d'un tenseur de deuxième ordre $\mathbf{d}$ tel que : $\rho(\underline{n}) = \mathbf{d} : (\underline{n} \otimes \underline{n})$. Dans l'objectif d'une formulation macroscopique, on introduit un tenseur d'ordre deux macroscopique $\mathbf{D}$ relié à la distribution globale en orientation des fissures :

$$\mathbf{D} = \int_{2\pi} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) d\varphi. \tag{D.1}$$

On montre alors que la distribution de densités prend la forme :

$$\rho(\underline{n}) = \frac{1}{2\pi}[4\ \mathbf{D} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - tr(\mathbf{D})]. \tag{D.2}$$

En claire, bien que $\mathbf{D}$ soit de nature macroscopique, sa connaissance, dé par sa construction, détermine l'approximation de la distribution du paramètre densité de fissures.

[56] Ce type de démarche a été également mis en oeuvre au chapitre IV dans un contexte 3D.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

D.2 Potentiel thermodynamique

En nous plaçant dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes restreint au cas isotherme et à l'hypothèse de petites déformations, on s'intéresse par souci de clarté au cas où toutes les fissures sont ouvertes.
Par substitution de (D.2) dans l'expression (II.49) de l'énergie libre (section II.2.3), puis procédant à l'intégration analytique sur le cercle unité $\mathcal{C}$[57] conduit à l'expression suivante du potentiel thermodynamique macroscopique :

$$\begin{aligned}\Psi^*(\mathbf{\Sigma},\mathbf{D}) = {} & f_1\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) - \frac{k_1}{12}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + \frac{k_1}{24}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{D})\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}) + f_4\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}) + \\ & \frac{5k_1}{12}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{D})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}) - \frac{k_1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{D}) + \frac{f_2}{2}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}) - \\ & \frac{k_1}{48}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}) - \frac{k_1}{8}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{D})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}) + \frac{k_2+k_1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{D}) + \\ & \frac{k_1}{48}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + \frac{11k_1}{96}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) + \frac{f_3}{2}\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}) - \\ & \frac{5k_1}{96}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{D}) - \frac{k_1}{32}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}.\mathbf{D}).\end{aligned} \tag{D.3}$$

[57] Pour un matériau bidimensionnel, l'intégration sur le cercle unité $\mathcal{C} = \{n \in \mathbb{R}^2, n.n = 1\}$ des produits tensoriels d'un vecteur unitaire $\underline{n}$ exprimés dans la base orthonormée (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ conduit aux expressions suivantes (cf. Lubarda et Krajcinovic [62], He et Curnier [40]) :

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} n_i n_j\ dS = \pi\ \delta_{ij},\\ &\int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l\ dS = \frac{3\pi}{4}\ (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),\\ &\int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l n_\alpha n_\beta\ dS = \frac{5\pi}{8}\ \mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta},\\ &\int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta\ dS = \frac{35\pi}{64}\ \mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta\gamma\delta},\end{aligned}$$

avec les tenseurs d'ordre supérieur quatre, six et huit :

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \tfrac{1}{3}\ (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta} = \tfrac{1}{5}\ (\delta_{ij}\mathbb{I}_{kl\alpha\beta} + \delta_{ik}\mathbb{I}_{jl\alpha\beta} + \delta_{il}\mathbb{I}_{jk\alpha\beta} + \delta_{i\alpha}\mathbb{I}_{jkl\beta} + \delta_{i\beta}\mathbb{I}_{jkl\alpha})$$

$$\mathbb{I}_{ijkl\alpha\beta\gamma\delta} = \tfrac{1}{7}\ \left[\begin{array}{l}\delta_{ij}\mathbb{I}_{kl\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{ik}\mathbb{I}_{jl\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{il}\mathbb{I}_{jk\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{i\alpha}\mathbb{I}_{jkl\beta\gamma\delta}\\ +\delta_{i\beta}\mathbb{I}_{jkl\alpha\gamma\delta} + \delta_{i\gamma}\mathbb{I}_{jkl\alpha\beta\delta} + \delta_{i\delta}\mathbb{I}_{jkl\alpha\beta\gamma}\end{array}\right]$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

On notera la dépendance des coefficients intervenant dans cette expression par rapport aux quatre paramètres élastiques caractérisant l'orthotropie de la matrice solide :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{E_1^s} - \frac{1}{G_{12}^s}, \qquad f_2 = \frac{1}{G_{12}^s}, \\
f_3 &= \frac{1}{E_1^s} - \frac{2}{G_{12}^s} + \frac{1}{E_2^s} + \frac{2\nu_{12}^s}{E_2^s}, \\
f_4 &= -\frac{\nu_{12}^s}{E_2^s} - \frac{1}{E_1^s} + \frac{1}{G_{12}^s}, \\
k_1 &= \frac{\pi(\sqrt{E_1^s} - \sqrt{E_2^s})}{\sqrt{E_1^s\ E_2^s}} \cdot \sqrt{\frac{1}{G_{12}^s} + \frac{2}{\sqrt{E_1^s\ E_2^s}} - \frac{2\nu_{12}^s}{E_1^s}} \\
k_2 &= \frac{\pi(\sqrt{E_1^s} + \sqrt{E_2^s})}{\sqrt{E_1^s\ E_2^s}} \cdot \sqrt{\frac{1}{G_{12}^s} + \frac{2}{\sqrt{E_1^s\ E_2^s}} - \frac{2\nu_{12}^s}{E_1^s}}.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

C'est en cela et dans la relation (D.2) que réside essentiellement l'inspiration micromécanique de la formulation macroscopique proposée.

D.3 Lois d'état, critère et loi d'évolution de l'endommagement

On obtient la loi de comportement élastique par la dérivation du potentiel thermodynamique :

$$\mathbf{E} = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{\Sigma}} = \mathbb{S}(\mathbf{D}) : \mathbf{\Sigma}, \tag{D.5}$$

expression dans laquelle le tenseur de souplesse du matériau endommagé est déterminé par $\mathbf{D}$ et par le tenseur de structure $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(\mathbf{D}) = &\left[f_1 - \frac{k_1}{4}tr(\mathbf{D}) + \frac{k_1}{6}tr(\mathbf{AD})\right](\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + \left[f_2 + \frac{5k_1}{24}tr(\mathbf{D}) - \frac{k_1}{4}tr(\mathbf{AD})\right](\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) + \\
&f_3(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) + \left[f_4 + \frac{37k_1}{96}tr(\mathbf{D})\right](\mathbf{1}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{1}) - \frac{3k_1}{16}tr(\mathbf{D})(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) - \\
&\frac{k_1}{6}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{D} + \mathbf{D}\otimes\mathbf{1}) + \frac{k_2 - k_1}{4}(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{D} + \mathbf{D}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) - \frac{k_1}{8}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{D} + \mathbf{D}\otimes\mathbf{A}) - \\
&\frac{19k_1}{48}\left[(\mathbf{1}\otimes(\mathbf{AD}+\mathbf{DA}) + (\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\otimes\mathbf{1})\right] + \frac{k_1}{12}\left[(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{AD}+\mathbf{DA}) + (\mathbf{AD}+\mathbf{DA})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1})\right].
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Le taux de restitution de l'énergie (force thermodynamique associée à l'endommagement décrit par $\mathbf{D}$) est donnée par :

$$F^D = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{D}}. \tag{D.7}$$

En s'aidant des identités :

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{1}, \qquad \frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}, \qquad \frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{\Sigma}, \tag{D.8}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

on obtient la décomposition suivante pour la force thermodynamique :

$$\begin{aligned} F^D = & -\frac{k_1}{12}\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma})\mathbf{1} + \frac{k_1}{24}\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{\Sigma})\mathbf{A} + \frac{5k_1}{12}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\mathbf{\Sigma} - \frac{k_1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\mathbf{\Sigma} - \frac{k_1}{48}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma})\mathbf{1} - \\ & \frac{k_1}{8}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma})\mathbf{A} + \frac{k_2+k_1}{4}\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma} + \frac{k_1}{48}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\mathbf{1} + \frac{11k_1}{96}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A})\mathbf{1} - \\ & \frac{5k_1}{96}\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A} - \frac{k_1}{32}\mathbf{\Sigma}.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{D.9}$$

Comme auparavant, on suppose que la force motrice contrôlant la propagation de l'endommagement est le taux de restitution de l'énergie, et que le domaine de réversibilité est décrit par :

$$f(\mathbf{F}^D, \mathbf{D}) \leq 0. \tag{D.10}$$

On propose pour la fonction seuil d'endommagement un critère de la forme :

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{F}^D : \mathbf{F}^D} - \left[q_0 + q_1 tr(\mathbf{D}) + q_2 tr(\mathbf{AD}) + q_3 tr(\mathbf{F}^D\mathbf{D})\right] \leq 0. \tag{D.11}$$

Conformément à la règle de normalité, la loi d'évolution s'écrit :

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} = \dot{\lambda}\left(\frac{\mathbf{F}^D}{\sqrt{2\mathbf{F}^D : \mathbf{F}^D}} - q_3\mathbf{D}\right). \tag{D.12}$$

Le multiplicateur d'endommagement $\dot{\lambda}$ est donné par la condition de consistance $\dot{f} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{f} = & \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} : \dot{\mathbf{F}}^D + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} = \\ & \left(\frac{\mathbf{F}^D}{\sqrt{2\mathbf{F}^D : \mathbf{F}^D}} + q_4\mathbf{D}\right) : \dot{\mathbf{F}}^D - \left(q_1\mathbf{1} + q_2\mathbf{A} + q_3\mathbf{F}^D\right) : \dot{\mathbf{D}} = 0. \end{aligned} \tag{D.13}$$

En adoptant la notation : $\mathbf{G} = q_1\mathbf{1} + q_2\mathbf{A} + q_3\mathbf{F}^D$, il vient :

$$\mathbf{G} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} : \dot{\mathbf{F}}^D. \tag{D.14}$$

Ainsi :

$$\dot{\lambda}\mathbf{G} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} : \dot{\mathbf{F}}^D. \tag{D.15}$$

L'équation précédente permet de calculer le multiplicateur d'endommagement :

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D} : \dot{\mathbf{F}}^D\right)\left(\mathbf{G} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D}\right)^{-1}. \tag{D.16}$$

Le tenseur des modules tangents associé à la loi d'évolution pour un état d'endommagement non affecté par l'incrément de contraintes détermine la formulation en vitesse de la loi d'endommagement. Ainsi : $\dot{\mathbf{E}} = \mathbb{S}_t(\mathbf{D}) : \dot{\mathbf{\Sigma}}$, avec comme expression du tenseur des modules tangents :

$$\mathbb{S}_t(\mathbf{D}) = \begin{cases} \mathbb{S}(\mathbf{D}) & \text{si } f < 0 \text{ ou } (f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0) \\ \mathbb{S}(\mathbf{D}) + \left(\mathbf{G} : \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^D}\right)^{-1}\mathbf{H}\otimes\mathbf{H} & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0, \end{cases} \tag{D.17}$$

pour lequel le tenseur $\mathbf{H}$ est défini par :

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\mathbf{F}^D}{\sqrt{2\mathbf{F}^D : \mathbf{F}^D}} + q_4\mathbf{D}\right) : \frac{\partial \mathbb{S}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{\Sigma}. \tag{D.18}$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe E

Composantes des tenseurs $\mathbb{C}'^{S}$ et $\mathbb{P}$

E.1 Expressions des composantes du tenseur $\mathbb{C}'^{S}$

Le tenseur de rigidité du matériau s'exprime dans le repère lié à la fissure (qui fait un angle θ avec l'axe de symétrie du matériau) à l'aide des relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&C'_{1111} = C^s_{1111}(\cos\theta)^4 + C^s_{2222}(\sin\theta)^4 + 2\left(C^s_{1122} + 2C^s_{1212}\right)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2;\\
&C'_{1122} = C'_{2211} = C^s_{1122}\left[(\cos\theta)^4 + (\sin\theta)^4\right] + (C^s_{1111} + C^s_{2222} - 4C^s_{1212})(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2;\\
&C'_{1133} = C'_{3311} = C^s_{1122}(\cos\theta)^2 + C^s_{2233}(\sin\theta)^2;\\
&C'_{1112} = C'_{1211} = (C^s_{1122} - C^s_{2222} + 2C^s_{1212})(\cos\theta)(\sin\theta)^3 + (C^s_{1111} - C^s_{1122} - 2C^s_{1212})(\sin\theta)(\cos\theta)^3;\\
&C'_{2222} = C^s_{1111}(\sin\theta)^4 + C^s_{2222}(\cos\theta)^4 + 2\left(C^s_{1122} + 2C^s_{1212}\right)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2;\\
&C'_{2233} = C'_{3322} = C^s_{1122}(\sin\theta)^2 + C^s_{2233}(\cos\theta)^2;\\
&C'_{2212} = C'_{1222} = (C^s_{1122} - C^s_{2222} + 2C^s_{1212})(\sin\theta)(\cos\theta)^3 + (C^s_{1111} - C^s_{1122} - 2C^s_{1212})(\cos\theta)(\sin\theta)^3;\\
&C'_{3312} = C'_{1233} = (C^s_{1122} - C^s_{2233})(\sin\theta)(\cos\theta);\\
&C'_{3232} = \frac{(C^s_{2222} - C^s_{2233})}{2}(\cos\theta)^2 + C^s_{1212}(\sin\theta)^2;\\
&C'_{3131} = \frac{(C^s_{2222} - C^s_{2233})}{2}(\sin\theta)^2 + C^s_{1212}(\cos\theta)^2;\\
&C'_{3231} = C'_{3132} = \left[C^s_{1212} - \frac{(C^s_{2222} - C^s_{2233})}{2}\right](\sin\theta)(\cos\theta);\\
&C'_{1212} = C^s_{1122}\left[(\cos\theta)^4 + (\sin\theta)^4\right] + \left[C^s_{1111} + C^s_{2222} - 2(C^s_{1122} + C^s_{1212})\right](\sin\theta)^2(\cos\theta)^2.
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

E.2 Expressions des composantes du tenseur $\mathbb{P}$

Le calcul des composantes P_{ijkl} par combinaison de (III.23) et de (III.64) donne, dans le repère global associé aux axes de symétrie du matériau, les expressions suivantes :

$$P_{1111} = \frac{\left[C^s_{2222}(\cos\theta)^2 + C^s_{1212}(\sin\theta)^2\right](\sin\theta)^2}{C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X}{C^s_{1111}C^s_{1212}(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\alpha}\left[\alpha(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right](\alpha C^s_{1212} - C^s_{2222})}{\left[\alpha(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2} - \frac{\sqrt{\beta}\left[\beta(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right](\beta C^s_{1212} - C^s_{2222})}{\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2}\right\};$$

$$P_{1122} = -\frac{(C^s_{1122} + C^s_{1212})(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2}{C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X(C^s_{1122} + C^s_{1212})}{C^s_{1111}C^s_{1212}(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\alpha}\left[\alpha(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right]}{\left[\alpha(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2} - \frac{\sqrt{\beta}\left[\beta(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right]}{\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2}\right\};$$

$$P_{2222} = \frac{\left[C^s_{1111}(\sin\theta)^2 + C^s_{1212}(\cos\theta)^2\right](\cos\theta)^2}{C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X}{C^s_{1111}C^s_{1212}(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\left[\alpha(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right](C^s_{1212} - \alpha C^s_{1111})}{\sqrt{\alpha}\left[\alpha(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2} - \frac{\left[\beta(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right](C^s_{1212} - \beta C^s_{1111})}{\sqrt{\beta}\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2}\right\};$$

$$P_{1112} = \frac{\left[C^s_{2222}(\cos\theta)^2 - C^s_{1122}(\sin\theta)^2\right]\sin 2\theta}{4C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X\sin 2\theta}{2C^s_{1111}C^s_{1212}(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha C^s_{1122} + C^s_{2222})}{\left[\alpha(\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right]^2} - \frac{\sqrt{\beta}(\beta C^s_{1122} + C^s_{2222})}{\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2}\right\}; \tag{E.2}$$

$$P_{2212} = \frac{\left[C^s_{1111}(\sin\theta)^2 - C^s_{1122}(\cos\theta)^2\right]\sin 2\theta}{4C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} - \frac{X\sin 2\theta}{2C^s_{1111}C^s_{1212}(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha C^s_{1111} + C^s_{1122})}{\left[\alpha(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2} - \frac{\sqrt{\beta}(\beta C^s_{1111} + C^s_{1122})}{\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2}\right\};$$

$$P_{1212} = \frac{\left[C^s_{1111}(\sin\theta)^4 + C^s_{2222}(\cos\theta)^4 - 2C^s_{1122}(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2\right]}{4C^s_{1111}C^s_{1212}\left[(\sin\theta)^4 + \alpha\beta(\cos\theta)^4 + (\alpha+\beta)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X(C^s_{1111}C^s_{2222} - {C^s_{1122}}^2)}{4C^s_{1111}{C^s_{1212}}^2(\alpha-\beta)}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\alpha}\left[\alpha(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right]}{\left[\alpha(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]^2} - \frac{\sqrt{\beta}\left[\beta(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right]}{\left[\beta(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)^2\right]}\right\};$$

$$P_{1313} = \frac{(\sin\theta)^2}{4\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]} + \frac{X}{4}\sqrt{\frac{C^s_{3232}}{C^s_{3131}}}\frac{\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 - C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]}{\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]^2};$$

$$P_{2323} = \frac{(\cos\theta)^2}{4\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]} - \frac{X}{4}\sqrt{\frac{C^s_{3131}}{C^s_{3232}}}\frac{\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 - C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]}{\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]^2};$$

$$P_{1323} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{4\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}(\sin\theta)^2\right]} - \frac{X\sqrt{C^s_{3131}C^s_{3232}}\sin 2\theta}{4\left[C^s_{3232}(\cos\theta)^2 + C^s_{3131}\sin^2\theta\right]^2}.$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe F

Force thermodynamique F^d et tenseur $\mathbb{U}$ du modèle 3D

E. 1. Modèle 3D : expression de la force thermodynamique associée à d^i :

$$
\begin{aligned}
F^{d^i} = \frac{\partial W^*}{\partial d^i} &= b_{11}\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma} - (b_{10} + b_{15})\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{\Sigma} + \\
& b_{13}\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma} + \mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{N}^i)\left[2b_{10}(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{A})^2 - b_{10}\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma}\right] + \\
& \frac{1}{2}(b_{10} - b_{11})\mathbf{\Sigma} : \left[\mathbf{1} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) \otimes \mathbf{1}\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& \frac{1}{2}b_{15}\mathbf{\Sigma} : \left[\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& \frac{1}{2}(s_2 - b_{13})\mathbf{\Sigma} : \left[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}\right] : \mathbf{\Sigma} + 2b_{17}(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{N}^i)^2 + \\
& \frac{1}{2}b_{18}\mathbf{\Sigma} : \left[\mathbf{N}^i\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{N}^i\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& (\frac{s_1}{4} - \frac{b_{17}}{2} - \frac{b_{18}}{2})\left[\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\right]^2.
\end{aligned}
\tag{F.1}
$$

E.2. Modèle 3D : expression du tenseur U intervenant dans la formulation en vitesse

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}^i = & 2b_{11}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma} - (b_{10} + b_{15})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{\Sigma} + \\
& b_{13}(\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma} + \mathrm{tr}(\mathbf{A}.\mathbf{N}^i)\left[4b_{10}(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{A})\mathbf{A} - b_{10}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{\Sigma}\right] + \\
& \frac{1}{2}(b_{10} - b_{11})\left[\mathbf{1} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) \otimes \mathbf{1}\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& \frac{1}{2}b_{15}\left[\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& \frac{1}{2}(s_2 - b_{13})\left[\mathbf{1}\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{1}\right] : \mathbf{\Sigma} + 4b_{17}(\mathbf{\Sigma} : \mathbf{N}^i)\mathbf{N}^i + \\
& \frac{1}{2}b_{18}\left[\mathbf{N}^i\underline{\overline{\otimes}}(\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\underline{\overline{\otimes}}\mathbf{N}^i\right] : \mathbf{\Sigma} + \\
& (\frac{s_1}{2} - b_{17} - b_{18})\left[\mathbf{\Sigma} : (\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A})\right](\mathbf{A}\mathbf{N}^i + \mathbf{N}^i\mathbf{A}).
\end{aligned}
\tag{F.2}
$$

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Annexe G

Validations complémentaires sur un matériau SiC-SiC isotrope transverse

G.1 Modèle microsmécanique d'endommagement 3D : comparaison calcul/expérience sur un SiC-SiC

Les simulations mises en oeuvre concernent un composite SiC-SiC 2D. Pour le modèle micromécanique nous avons utilisé les valeurs suivantes des coefficients :

- coefficients élastiques calculés à partir des données expérimentales (Morvan [69]) :$E_1{}^s$ = 116.279 GPa, $E_3{}^s = 307.692$ GPa, $\nu_{12}{}^s = 0.211$, $\nu_{23}{}^s = 0.456$, $G_{13}{}^s = 28.57$ GPa
- paramètres du critère d'endommagement identifiés par calage :$k = 88\ J \cdot\ m^{-2}$ et $\eta = 980.2$
- les autres paramètres prennent les valeurs : $b_{10} = 0.066$ GPa, $b_{11} = 0.008$ GPa, $b_{13} = 0.11$ GPa, $b_{15} = 0.077$ GPa, $b_{17} = 0.004$ GPa, $b_{18} = 0.0064$ GPa.

La courbe contraintes-déformations présentée dans la Figure G.1 reproduit de manière satisfaisante l'evolution de l'endommagement sous la sollicitation de traction appliquée. On présente également (sur la Figure G.2) l'évolution du tenseur de souplesse avec le chargement. Comme c'était le cas dans le chapitre IV, le modèle est capable de reproduire l'effet de l'endommagement sur les propriétés élastiques, ce qui confirme ses bonnes capacités prédictives.

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

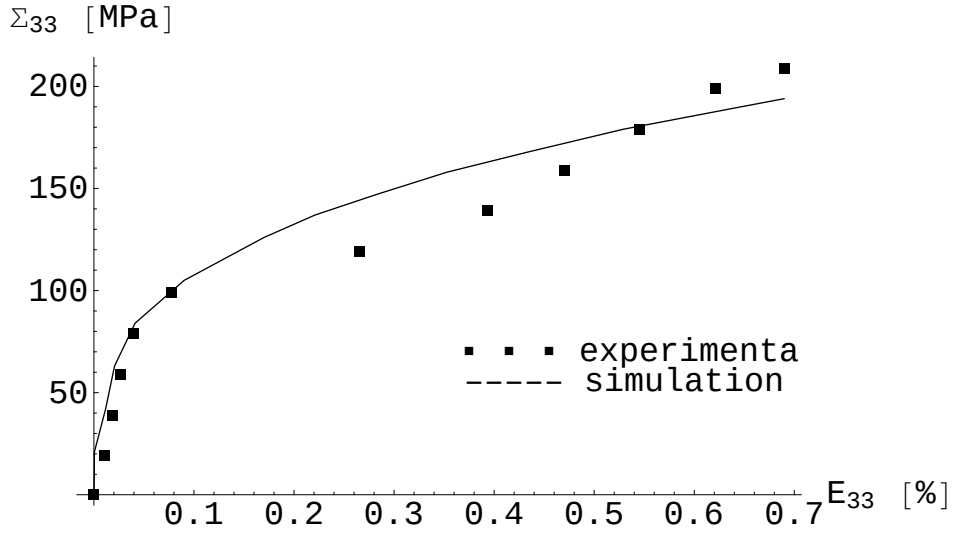

FIGURE *G.1: Modèle microscopique d'endommagement 3D : Application à un composite SiC-SiC sollicité en traction dans la direction 3 du plan d'isotropie transverse.*

© 2005 Tous droits réservés.

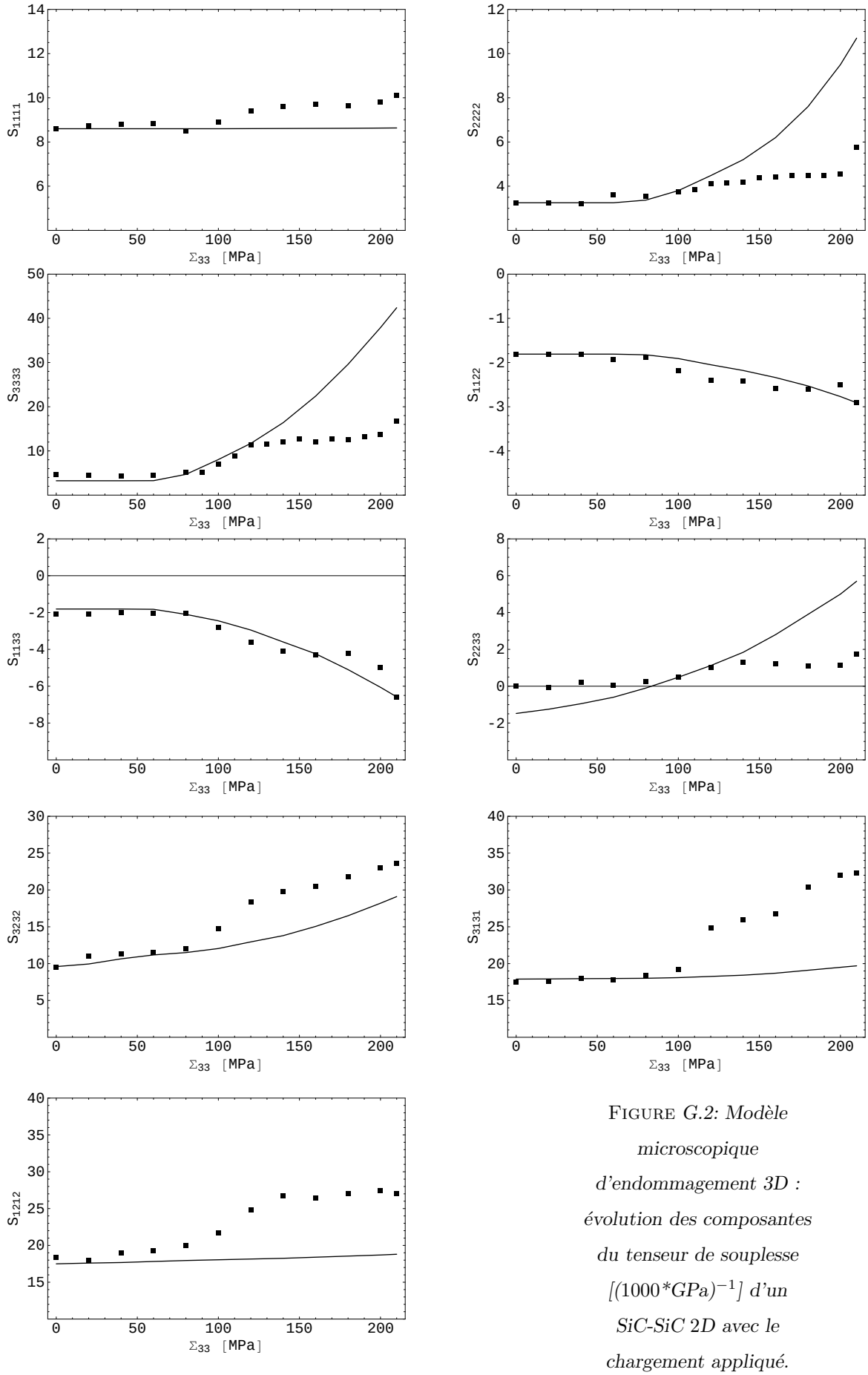

FIGURE G.2: *Modèle microscopique d'endommagement 3D : évolution des composantes du tenseur de souplesse [(1000*GPa)$^{-1}$] d'un SiC-SiC 2D avec le chargement appliqué.*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

G.2 Modèle macroscopique 3D basé sur un tenseur d'ordre 2 : comparaison calcul/expérience sur un SiC-SiC

Pour la mise en oeuvre du modèle macroscopique utilisant comme variable d'endommagement un tenseur du second ordre, nous avons recouru, de la même manière que pour le matériau composite C-SiC, au calage des valeurs numériques pour les paramètres non-élastiques du modèle : $b_{11} = 0.008$ GPa, $b_{17} = 0.004$ GPa, $b_{18} = 0.0064$ GPa. Les coefficients intervenant dans le critère d'endommagement obtenus prennent les valeurs : $h_1 = 10.686$ et $h_2 = 2.555$. Dans la Figure G.3 on présente la comparaison simulation-experience pour la sollicitation dans la direction 3 appartenant au plan d'isotropie transverse ; l'évolution des composantes du tenseur de souplesse est également illustrée sur la Figure G.4.

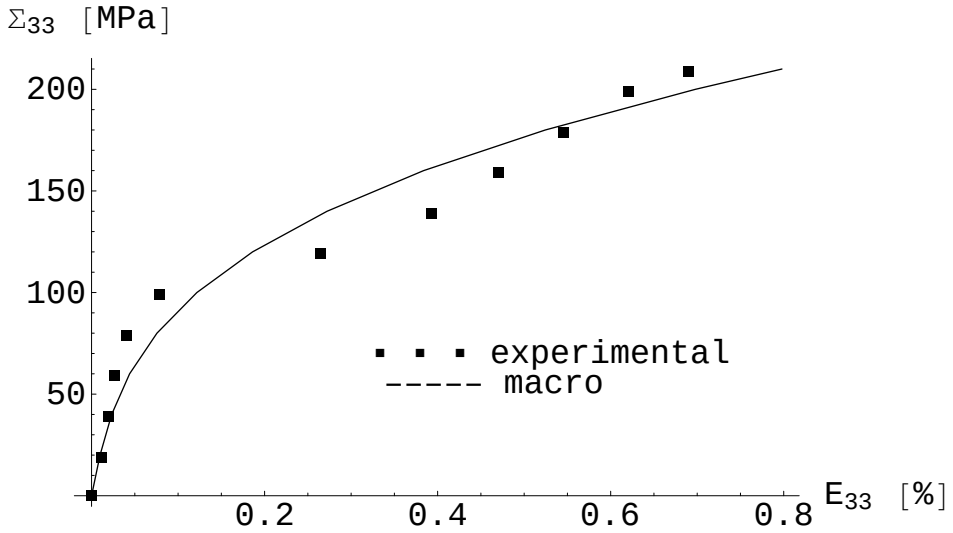

FIGURE *G.3: Modèle macroscopique 3D basé sur un tenseur d'endommagement d'ordre 2 : application à un composite SiC-SiC sollicité en traction dans la direction 3, dans le plan d'isotropie transverse.*

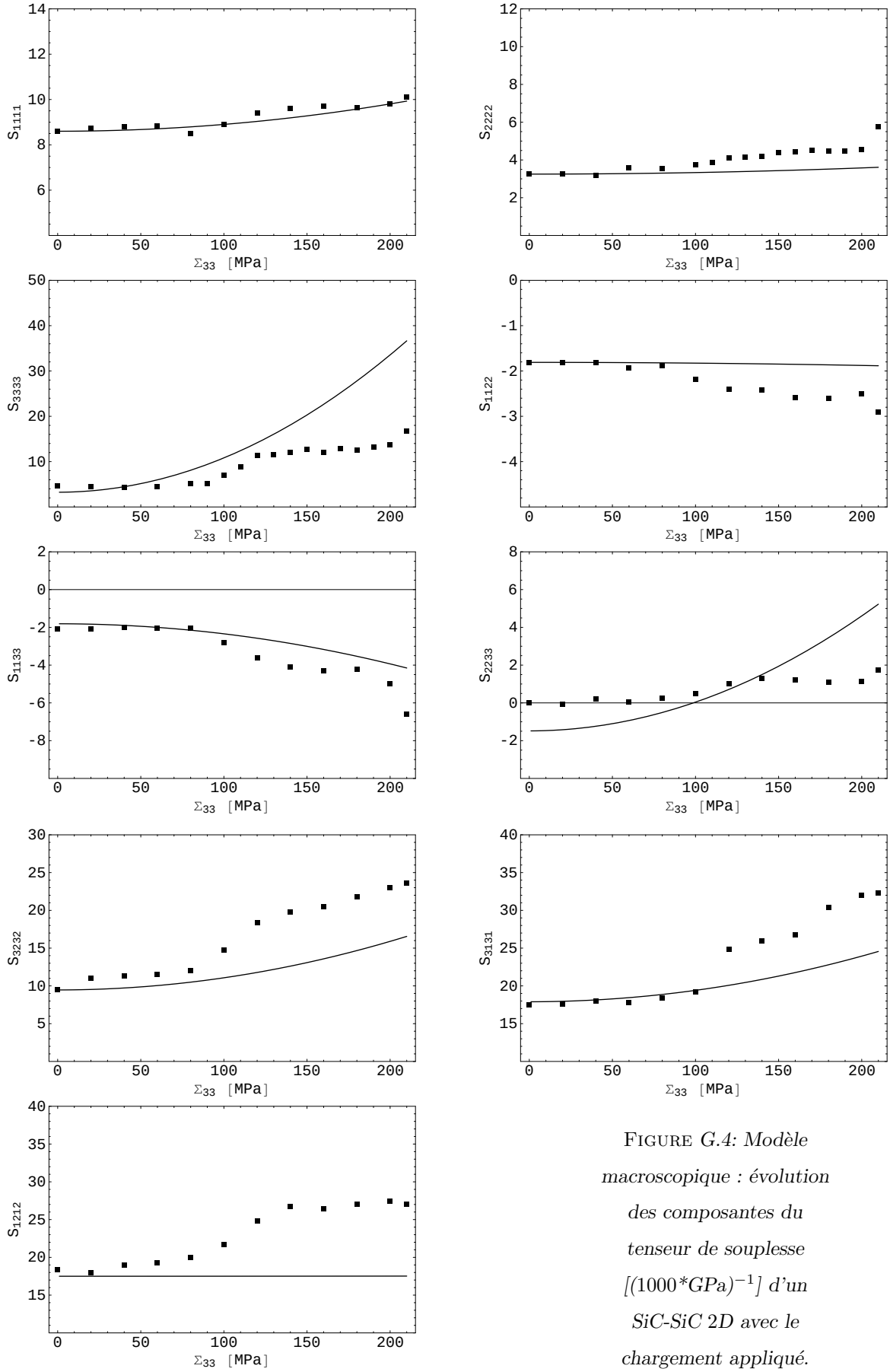

FIGURE G.4: *Modèle macroscopique : évolution des composantes du tenseur de souplesse* $[(1000*GPa)^{-1}]$ *d'un SiC-SiC 2D avec le chargement appliqué.*

© 2005 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl