

Université des Sciences et Technologies de Lille

Modélisation de l'impact hydrodynamique par un couplage fluide-structure

Thèse de Doctorat en Mécanique soutenue par

AQUELET Nicolas

devant le jury suivant:

Président: P.A. Bois, Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille

Rapporteurs: T. Coupez, Professeur, CEMEF Ecole des Mines de Paris

F. Chinesta, Professeur, ENSAM, Paris

B. Peseux, Professeur, Ecole Centrale de Nantes

Examineurs: E. Longatte, Ingénieur de Recherche, EDF, Chatou

A. Hamdouni, Professeur, LEPTAB, Université de La Rochelle

E. Deletombe, Ingénieur de Recherche, ONERA, Lille

N. Pentecôte, Ingénieur de Recherche, German Aerospace Center, Stuttgart

N. Couty, Ingénieur de Recherche, Principia Marine, Nantes

Directeur de Thèse: M. Souli, Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille

Date prévue de la soutenance: 14 décembre 2004

Lieu: Laboratoire de Mécanique

Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

3.1.5	Conclusion	54
3.2	Formulation ALE et Eulérienne multi-matériaux pour le fluide	55
3.2.1	Forme forte	58
3.2.2	Forme faible	59
3.2.3	Discrétisation en éléments briques: Calcul des grandeurs cinématiques	64
3.2.4	Viscosités numériques	66
3.2.5	Calcul de l'énergie interne et de la pression	70
3.2.6	Méthodes d'advection	72
3.2.7	Conclusion	81
3.3	Modélisation de l'interaction fluide/structure	81
3.3.1	Etat de l'art des algorithmes de couplage	82
3.3.2	Couplage Euler/Lagrange	86
3.4	Conclusion	93
4	Etude de problèmes 1D	95
4.1	Impact d'une colonne d'eau	95
4.1.1	Etude du pas de temps	96
4.1.2	Comparaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode par pénalisation	97
4.1.3	Etude de pf	98
4.2	Etude du piston	98
4.2.1	Comparaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode par pénalisation	98
4.2.2	Origine des oscillations dans la méthode de pénalisation	99
4.2.3	Introduction d'un effet dissipatif dans le couplage	101
4.3	Conclusion	102
5	Etude de problèmes 2D	108
5.1	Description du modèle	108
5.1.1	Vérification des hypothèses théoriques	109
5.1.2	Conditions aux limites	110
5.1.3	Conclusion	112
5.2	Couplage par pénalisation	112
5.2.1	Etude de l'effet de l'amortissement numérique	113

5.2.2	Etude de la raideur de pénalisation	114
5.3	Couplage par les multiplicateurs de Lagrange	117
5.3.1	Première approche	117
5.3.2	Modification de l'approche	118
5.3.3	Dièdre déformable	121
5.4	Conclusion	124
6	Etude de problèmes 3D	144
6.1	Calcul parallèle	145
6.1.1	Machine parallèle	145
6.1.2	Application: Entrée d'un cône dans l'eau	147
6.1.3	Conclusion	150
6.2	Initialisation des fractions volumiques	151
6.2.1	Méthode VCE	152
6.2.2	Schéma de l'algorithme	152
6.2.3	Applications numériques	155
6.2.4	Ballotement dans un réservoir	155
6.2.5	Conclusion	157
7	Conclusion	166
	Bibliographie	170

Table des figures

2.1	Modèle d'impact de Von Karman	9
2.2	Modèle de Wagner sur l'impact de vague	11
2.3	Définition de la notation et du système de coordonnées. Approximation du dièdre par une plaque plane en expansion	14
2.4	Plans complexes de la transformation de Schwarz Christoffel	15
2.5	AB le dièdre, AC l'axe de symétrie, BC la surface libre,(Dobrovolskaya,1968)	19
2.6	Schéma du contact par pénalisation	24
2.7	Modélisation Lagrangienne du fluide	26
2.8	Définition des surfaces de contrôle utilisées par la méthode des éléments frontières	27
2.9	Schéma du couplage SPH/FEM	31
2.10	Modélisation SPH, [Gallet,2001]	32
2.11	Evolution de la force verticale globale, [Gallet,2001]	32
3.1	Structure dans la configuration initiale et courante	40
3.2	Eléments quadrangles dans la configuration initiale et courante et l'élément parent associé	45
3.3	Schéma du système de coordonnées locales corotationnelles,(Hallquist,1998)	49
3.4	Fluide dans les trois configurations	57
3.5	Loi de contact unilatéral	88
3.6	Schéma du couplage par pénalisation	88
4.1	Pression exercée sur la plaque pour différents Δt : (A) $\Delta t = 0.06\mu s$ (B) $\Delta t = 0.6\mu s$ (C) $\Delta t = 1\mu s$	103

4.2	(a) Modèle d'impact de la colonne en couplage, (b) Modèle d'impact de la colonne en bloquant les nœuds, (c) Modèle d'impact de la colonne en couplage pour un maillage différent	103
4.3	Pressions exercées sur la structure: (A) Courbe de référence, (B) Couplage par pénalisation avec $pf=1$, (C) Méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange	104
4.4	Pressions exercées sur la structure: (A) Couplage par pénalisation avec $pf=1000$, (B) Couplage par pénalisation avec $pf=100$, (C) Couplage par pénalisation avec $pf=10$, (D) Courbe de référence	104
4.5	Pressions exercées sur la structure:(A) Couplage par pénalisation pour un maillage différent avec $pf=10$, (B) Courbe de référence	105
4.6	Modèle de référence du piston	105
4.7	Modèle du piston en couplage	105
4.8	Pressions exercées sur le piston: (A) Couplage par pénalisation, (B) Méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange, (C) Courbe de référence	106
4.9	Spectre fréquentiel du signal en pression (C) de la figure précédente	106
4.10	Schéma du couplage en pénalité avec amortissement	106
4.11	Schéma du couplage en pénalité	107
4.12	Pressions exercées sur la plaque: (A) Courbe de référence (B) Couplage par pénalisation avec damping	107
4.13	Pressions exercées sur le piston: (A) Couplage par pénalisation avec damping (B) Courbe de référence	107
5.1	Présentation du modèle pour l'entrée du dièdre dans l'eau	109
5.2	Dièdre à 30° : Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes largeurs de grille	125
5.3	Dièdre à 1° : Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes largeurs de grille	125
5.4	Dièdre à 30° : Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes hauteurs de grille	126
5.5	Dièdre à 1° : Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes hauteurs de grille	126
5.6	Dièdre à 4° :(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping	127
5.7	Dièdre à 10° :(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping	127

5.8	Dièdre à 4° avec $pf = 0.034$:(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping	128
5.9	Dièdre à 15° :(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping	128
5.10	Dièdre à 20° :(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping	129
5.11	Dièdre à 20° :(A) Pression sur l'élément 50 (B) Pression sur l'élément 51	129
5.12	Dièdre à 20° : Isocontour de la fraction volumique à 0.5	130
5.13	Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 30° : (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) Courbe de référence	130
5.14	Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 20° : (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) Courbe de référence	131
5.15	Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 10° : (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) $tssf=0.3$ (E) Courbe de référence	131
5.16	Cylindre : Pression maximale en fonction de la pénétration par un couplage par pénalisation	132
5.17	Cylindre: Erreur relative sur la pression maximale en fonction de la pénétration par un couplage par pénalisation	132
5.18	Dièdre à 5° : (A) Pression locale théorique obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (B) Pression de référence	133
5.19	Dièdre à 30° : (A) Pression locale obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (B) Pression de référence	133
5.20	Dièdre à 5° : Pression obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins	134
5.21	Dièdre à 30° : Pression obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins	134
5.22	Dièdre à 30° : Isocontour de la fraction volumique à 0.5	135
5.23	Dièdre à 30° : Pression obtenue par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins	135
5.24	Dièdre à 30° : (A) Pression pour $pr = 0.001$, (B) Pression de référence	136
5.25	Dièdre à 30° : (A) Pression pour $tssf = 0.1$, (B) Pression pour $tssf = 0.65$	136

5.26	Dièdre à 30° : (A) Pression pour $tssf = 0.1$ et $pr = 0.00016$, (B) Pression de référence	137
5.27	Dièdre à 5° : Répartition de la fraction volumique de l'eau (blanc: $f_{v^{eau}} < 0.5$, gris: $f_{v^{eau}} > 0.5$)	137
5.28	Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 30° : (A) Maillage initial (B) Pression de référence (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Maillage deux fois plus fin	138
5.29	Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 20° : (A) Maillage initial (B) Maillage deux fois plus fin (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Pression de référence	138
5.30	Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 10° : (A) Maillage initial (B) Maillage deux fois plus fin (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Pression de référence	139
5.31	Cylindre : Pression maximale en fonction de la pénétration par la méthode des multiplicateurs de Lagrange	139
5.32	Erreur relative sur la pression maximale exercée sur le cylindre en fonction de pénétration: (A) Méthode des multiplicateurs de Lagrange, (B) Méthode par pénalisation	140
5.33	Déformation du dièdre: points de mesure	140
5.34	Déformation du dièdre: (A) Force globale pour $pr = 0.001$, (B) Force globale pour $pr = 0.01$	141
5.35	Déformation du dièdre: (A) Pression pour $pr = 0.001$, (B) Pression pour $pr = 0.01$	141
5.36	Déformation du dièdre: (A) Impulse pour $pr = 0.001$, (B) Impulse pour $pr = 0.01$	142
5.37	Déformation du dièdre: (A) Déplacement du nœud 132 pour $pr = 0.001$, (B) Déplacement du nœud 132 pour $pr = 0.01$	142
5.38	Déformation du dièdre: (A) Déplacement du nœud 170 pour $pr = 0.001$, (B) Déplacement du nœud 170 pour $pr = 0.01$	143

5.39	Déformation du dièdre: (A) Contrainte de Von Mises pour $pr = 0.001$, (B) Contrainte de Von Mises pour $pr = 0.01$	143
6.1	Cône à 10° : Décomposition du domaine de calcul par défaut	158
6.2	Cône à 10° : Décomposition du domaine en tranches verticales	158
6.3	Cône à 10° : Décomposition radiale du domaine	158
6.4	Cône à 10° : (A) Pression obtenue avec 1CPU (B) Pression obtenue avec 4CPU (B) Pression théorique	159
6.5	Schéma d'une structure Lagrangienne coupant un maillage ALE rectangulaire	159
6.6	Division de la cellule "A" en sous-cellules	159
6.7	Méthode basée sur la moyenne des normales au nœud: Description du problème	160
6.8	Condition 1 pour $\alpha > \pi$	160
6.9	Condition 2 pour $\alpha < \pi$	160
6.10	Remplissage d'un réservoir en deux étapes	161
6.11	Répartition de la fraction volumique initiale	161
6.12	Iso-surface de la fraction volumique à 0.5 pour $t=0\text{ms}$	161
6.13	Propagation de l'onde à $t=0\text{ms}$	162
6.14	Propagation de l'onde à $t=0.03\text{ms}$	162
6.15	Profil de pression à 19m du centre	162
6.16	Géométrie du réservoir industriel	163
6.17	Initialisation des fractions volumique dans le réservoir	163
6.18	Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=0\text{ms}$	163
6.19	Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=6\text{ms}$	164
6.20	Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=11\text{ms}$	164
6.21	Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=17\text{ms}$	165
6.22	Décomposition du domaine de calcul pour le sloshing	165

Liste des tableaux

5.1	Caractéristiques du calcul en fonction de l'angle d'incidence α	112
5.2	Valeurs de pf en fonction de l'angle d'incidence α	114
5.3	Valeurs de pr en fonction de l'angle d'incidence α	119

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce rapport est de présenter des travaux de recherches réalisés dans le cadre d'une thèse financée par le Ministère de l'Education Nationale et en collaboration avec la société d'ingénierie en construction navale, Principia Marine. Cette thèse préparée au Laboratoire de Mécanique de Lille présente un modèle numérique de couplage fluide/structure pour des impacts hydrodynamiques.

Le contexte industriel: l'impact hydrodynamique

Un impact hydrodynamique définit un choc entre une structure et la surface d'un liquide supposé faiblement compressible (en général de l'eau). Un des impacts hydrodynamiques les plus courants est le tossage dans l'industrie navale: ce phénomène apparaît lorsque la carène d'un navire frappe la surface de l'eau avec une vitesse importante. Un autre exemple est le ballotement dans un réservoir à moitié rempli: le liquide contenu frappe la paroi interne par vagues successives. La probabilité d'un impact fort augmente naturellement avec la vitesse relative entre la structure et le liquide. Si la fréquence des impacts croît (par exemple, pour les navires à grandes vitesses "ricochant" sur les vagues), une ruine prématurée par fatigue peut menacer l'intégrité de la structure. Dans des cas extrêmes, la rupture de cette dernière est tout à fait envisageable. Dans ces conditions, il est alors important de savoir prédire les efforts hydrodynamiques appliqués à la structure pour la dimensionner correctement lors de sa conception ou pour prévenir un éventuel endommagement (pour un navire en mer par exemple, la vitesse de progression est diminuée si la fréquence des impacts sévères devient trop importante).

La durée d'une pression d'impact est de l'ordre de quelques millisecondes et elle est aussi très localisée dans l'espace. Les caractéristiques de cette pression locale dépendent essentiellement de l'angle d'incidence α et de la vitesse relative v . Une estimation théorique de la pression maximale peut être effectuée en appliquant la relation suivante obtenue pour un dièdre entrant dans l'eau à vitesse constante:

$$P_{max} = \frac{\pi^2 \rho v^2}{8 \tan(\alpha)^2} \quad (1.1)$$

Ce pic de pression est obtenu aux points d'arrêt. Si on connaît la vitesse tangentielle de ce point le long du dièdre (voir Eq.(2.16)) par le théorème de Bernoulli, on peut montrer la relation Eq.(1.1). On remarque que plus l'angle α sera petit, plus l'impact sera violent. Pour un angle de 10° et une vitesse d'impact de l'ordre de $6m/s$, le pic sera de $1.5MPa$ alors que pour 5° , il sera 4 fois plus important. Bien que la relation Eq.(1.1) permet déjà de dimensionner le niveau de pression exercée sur une structure pour une incidence donnée, la complexité d'un problème industriel ne permet pas de se limiter au cadre d'une approche théorique.

L'approche envisagée: construire un modèle numérique

Au niveau de la modélisation théorique, le problème d'impact hydrodynamique a fait l'objet de nombreuses études: Von Karman [von Karman, 1929] a été un précurseur dans ce domaine en étudiant l'amerrissage d'hydravions, la théorie de Wagner [Wagner, 1932] est une pierre angulaire dans l'analyse asymptotique des problèmes de perforation de surfaces libres et encore aujourd'hui (c'est le cas de cette thèse), ces travaux sont repris comme une référence. Par la suite, d'autres développements théoriques ont suivi et tous sont basés sur des hypothèses restrictives ne permettant pas de traiter un problème industriel réaliste. Avec l'essor des outils numériques, il est possible de lever ces hypothèses en construisant des modèles de plus en plus complexes. Le modèle idéal serait un modèle numérique capable de simuler des impacts hydrodynamiques complets et concrets tout en s'assurant que la précision du calcul n'est pas perdue par la généralité de l'approche. Cependant, il est difficile de concevoir un code généraliste précis sur les différents aspects d'un problème d'impact incluant l'effet "coussin d'air" (l'air est emprisonné entre la structure et le liquide lors de l'impact), la compressibilité du liquide (dans les premiers instants de l'impact, une onde

de choc peut être générée), la cavitation (pour des vitesses importantes, la tension dans le liquide implique un changement de phase), etc... Certains codes modélisent précisément un ou plusieurs de ces aspects mais rarement tous. Un code d'éléments finis explicite, LS-DYNA, est choisi pour la modélisation de notre problème car il a la capacité de modéliser des problèmes de dynamique rapide complets. Dans cette thèse, il est appliqué à l'impact hydrodynamique dans un cadre d'hypothèses précises afin de vérifier sa validité.

Pour traiter le problème, une formulation éléments finis en contact est une solution envisageable. Une formulation Lagrangienne pourrait être alors utilisée pour le fluide et pour la structure. Cette approche est simple et précise. Cependant, le maillage Lagrangien a la particularité de suivre le mouvement du matériau de manière à ce que toute particule matérielle initialement présente dans une maille reste dans celle-ci au cours du calcul. Les déformations d'une structure sont, en général, faibles et cette formulation est alors adaptée. Par contre, pour le fluide, de fortes distorsions de mailles apparaissent dans les zones où les mouvements du fluide sont importants. Une autre formulation est alors employée: la formulation Eulérienne pour laquelle le maillage reste fixe et le liquide traverse la grille. A présent, il faut pouvoir coupler ces deux formulations pour traiter le problème d'impact entre la structure et le fluide.

Le cœur du problème: le couplage fluide-structure

La principale problématique de cette thèse est: comment transmettre correctement les efforts d'interaction entre le modèle Eulérien pour le fluide et le modèle Lagrangien pour la structure? Les méthodes de couplage mises en œuvre pour répondre à cette question sont appelées couplages Euler/Lagrange. Le premier réflexe est d'imposer, à la frontière du fluide et de la structure, une même cinématique. Par exemple, les vitesses des nœuds Lagrangiens composant la frontière de la structure peuvent être déterminées en interpolant les vitesses Eulériennes des nœuds voisins. Les rôles du "maître" (celui qui impose la vitesse) et de "l'esclave" (celui qui subit) peuvent être inversés en cours de calcul. On peut aussi imposer l'accélération de la même manière. L'inconvénient d'une telle approche est qu'elle est souvent très dissipative: l'énergie totale du système tend à chuter dramatiquement. A la place de cette première approche et pour assurer la conservation de la quantité de mouvement, le champ des forces d'interaction est évalué et appliqué en respectant le principe de l'action et de la réaction. La force d'interaction est estimée par une méthode de pénalisation consistant

à permettre une légère pénétration entre les deux maillages. Une force de rappel proportionnelle à cette distance est alors évaluée par Eq.(1.2) et elle est appliquée, par symétrie, sur le fluide et la structure.

$$F = -k.d \quad (1.2)$$

où F , d et k sont respectivement la force, la pénétration et une raideur. Cette dernière est l'objet du problème car il est difficile d'estimer sa valeur précisément pour un problème quelconque. Si la raideur est trop faible, les interpénétrations deviendront inacceptables et le fluide traversera la structure. En théorie, la raideur devrait être très grande afin de limiter les pénétrations. Cependant, si la raideur est trop importante, la force de rappel trop grande devant les forces physiques déstabilisera le calcul. Le choix de la raideur est un problème non-linéaire délicat qui repose sur l'expérience de l'utilisateur qui doit avoir une idée de la solution physique recherchée. Pour le problème de l'impact hydrodynamique, une étude recherchant la raideur optimale pour différents angles d'incidence sera mise en œuvre. L'idée par la suite serait de pouvoir étendre cette analyse à un grand nombre de cas d'impacts.

Plan du mémoire

Le plan du mémoire est le suivant:

Le chapitre 2 est consacré à une étude bibliographique de l'impact hydrodynamique d'un dièdre sur une surface libre. Les premières approches mises en œuvre pour traiter le problème sont théoriques et elles sont présentées dans un premier temps. Deux méthodes générales ressortent de la revue: la méthode asymptotique et la méthode des similitudes. Plusieurs approches numériques sont mentionnées: elles visent à dépasser le cadre analytique des méthodes théoriques. Bien que chacune des ces approches ait un degré élevé de validité et de précision dans la résolution de l'impact hydrodynamique, ces méthodes reposent sur des hypothèses qui ne leur permettent pas d'être étendues à des objectifs industriels réalistes. Il s'agit alors, dans la suite, de développer une méthode numérique suffisamment générale pour traiter des problèmes complexes mettant en jeu plusieurs phénomènes d'un impact réaliste (l'interaction fluide-structure, la cavitation, le cushioning,...)

Le chapitre 3 propose une formulation Euler-Lagrange permettant de traiter le problème de l'impact hydrodynamique dans un cadre général. Une formulation Lagrangienne est développée pour calculer les champs de la structure. Elle est basée sur une approche variation-

nelle en éléments finis des équations du mouvement. L'approche Lagrangienne ne permet pas de traiter des modèles à grandes déformations. Le fluide est ainsi modélisé par une formulation Eulérienne basée sur une méthode "split" chargée de décomposer le pas de calcul en deux cycles: un cycle Lagrangien qui détermine les inconnues du problème par une approche en éléments finis et un cycle d'advection limitant les distorsions issues du premier cycle en ramenant le maillage à sa position initiale. Les variables physiques sont alors projetées, de la configuration déformée à la configuration initiale, par une méthode d'advection. Cette approche est un cas particulier d'une formulation plus générale, la formulation ALE (Arbitrary Lagrange Euler) pour laquelle le maillage, au cours du second cycle, peut être placé à une position arbitraire. Les formulations Eulériennes et ALE sont multi-matériaux: elles ont ainsi la capacité de modéliser l'écoulement de plusieurs fluides dans un même maillage. Finalement, un couplage entre la formulation Eulérienne ou ALE et la formulation Lagrangienne sera décrit en précisant deux algorithmes: une méthode par pénalisation et une méthode explicite basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

Le chapitre 4 présente une étude de problèmes simples en 1D comparant les méthodes de couplage employées. Pour ces problèmes simples, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une approche directe et précise de la solution. Par contre, la précision de la méthode par pénalisation dépend de la détermination de la raideur de pénalisation: trop grande, le calcul peut être instable, trop petite, la pénétration relative devient inacceptable. Lorsqu'une valeur optimale est évaluée, les efforts numériques peuvent être perturbés par des oscillations dont l'origine numérique est liée au couplage. Un effet dissipatif est introduit dans la méthode par pénalisation pour amortir ces perturbations.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de l'entrée d'un dièdre dans l'eau avec la formulation Lagrange-Euler décrite dans le chapitre 3. Une base de données pour les paramètres contrôlant la force de couplage est établie. Cette base est construite en estimant la magnitude de la pression locale exercée sur un dièdre pour différents angles d'incidence. Par la suite, ces données sont employées pour l'impact d'un cylindre sur l'eau. L'idée est d'étendre les résultats obtenus pour le dièdre à une géométrie quelconque. Les deux méthodes de couplage du chapitre précédent sont, à nouveau, comparées: l'approche par pénalisation et celle reposant sur les multiplicateurs de Lagrange.

Dans le dernier chapitre, les modélisations tridimensionnelles sont plus exigeantes en coût de calcul et requièrent des approches spécifiques aux simulations réalistes. Pour diminuer la durée d'un calcul, une formulation Euler-Lagrange parallélisée est appliquée de manière

à répartir la charge d'un modèle 3D sur plusieurs CPU. La construction d'une machine parallèle est décrite, dans un premier paragraphe, et sa performance est illustrée dans le cas de l'impact hydrodynamique d'un cône. Les modélisations 3D sont aussi coûteuses dans leur construction, notamment si la géométrie du problème est complexe. Les structures industrielles qui seront amenées à entrer en contact avec un ou plusieurs fluides reposent sur un design complexe. Le maillage Eulérien ou ALE multi-matériaux chargé de modéliser l'écoulement des interfaces matérielles peut être construit en déterminant la répartition de la fraction volumique de chaque fluide. Comme une grille multi-matériaux 3D peut comporter un nombre important de cellules coupées irrégulièrement par la structure, l'initialisation des fractions volumiques requiert un algorithme que nous décrirons dans une seconde partie.

Chapitre 2

Etat de l'art

Depuis 1929, date à laquelle Von Karman [von Karman, 1929] a développé la première théorie sur l'impact hydrodynamique, jusqu'à nos jours, de nombreux développements théoriques, numériques et expérimentaux ont exploré les différentes facettes du problème. Ainsi, ce dernier ne se réduit pas au cas idéal d'un impact entre un dièdre rigide et une surface libre. En plus de l'élévation de la surface libre et de la répartition des efforts locaux le long du dièdre, faut-il aussi tenir compte, par exemple, du cushioning définissant l'effet "cousin d'air" pour des angles d'impact petits, la réponse de la structure, l'interaction fluide-structure etc...

Néanmoins, nous envisagerons le scénario le plus simple: un dièdre rigide pénètre l'eau à vitesse constante. Les hypothèses sont les suivantes:

- Modèle 2D,
- Dièdre rigide,
- Vitesse de pénétration constante,
- Absence de gravité,
- La surface libre est initialement plane,
- Fluide incompressible et irrotationnel.

Nous vérifierons si les approches envisagées peuvent dépasser le cadre de ces hypothèses pour traiter des impacts plus complexes.

Dans le cadre de ces hypothèses, il y a deux approches théoriques du problème: la théorie de Wagner [Wagner, 1932] qui dérive de celle de Von Karman [von Karman, 1929] et la théorie non-linéaire des similitudes [Pierson, 1950], [Garabedian, 1953], [Cumberbatch, 1960], [Dobrovolskaya, 1969]. Bien qu'il soit difficile d'étendre ces théories à des cas très

complexes, elles donnent des résultats de référence sur lesquels les résultats des méthodes numériques peuvent compter pour leurs validations.

Pour les méthodes numériques, les difficultés résident dans le suivi de la surface libre et dans la gestion de l'interaction entre la formulation fluide et la formulation structure. Pour cette dernière, une formulation Lagrangienne en éléments finis est suffisante pour bien la modéliser. Par contre, pour le fluide, une approche éléments finis Lagrangienne est limitée par les distorsions de mailles qui peuvent apparaître au niveau de la formation du jet le long du dièdre. La méthode des éléments frontières ou la méthode mixte Euler Lagrange développée par Longuet-Higgins et Cokelet [Longuet-Higgins and Cokelet, 1976] et Faltinsen [Faltinsen, 1977] consiste à disposer des marqueurs sur la surface libre et à les suivre au cours du mouvement. Cette approche reprise par de nombreux auteurs tels que [Zhao and Faltinsen, 1993] permet de discrétiser uniquement la surface libre. Néanmoins, l'hypothèse d'incompressibilité est fondamentale pour cette méthode et elle ne peut donc être levée pour étudier les effets de la compressibilité de l'eau sur le mouvement de la surface libre et sur la distribution de la pression le long de la structure. La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode particulière qui peut être qualifiée de "Lagrangienne" car les particules modélisent naturellement le mouvement de la surface libre. En contrepartie, il faut souvent un grand nombre de particules pour construire un modèle valable. Ainsi les coûts CPU pour les cas 3D deviennent très importants. La méthode VOF est une autre méthode de suivi de l'interface à laquelle est associé un code en volumes finis ou en différences finies. Cette approche est moins onéreuse mais nécessite un maillage complet du domaine fluide contrairement aux deux précédentes méthodes. Nous verrons que cette méthode est employée, dans cette thèse, pour modéliser le fluide.

2.1 Méthodes analytiques

Pour présenter les deux approches analytiques dominantes permettant la résolution du problème d'impact, on peut effectuer un rapide parallèle entre elles en définissant leurs limites (cf.[Zhao and Faltinsen, 1992]). Chacune de ces méthodes a ses propres caractéristiques :

- La méthode des similitudes respecte les conditions de surface libre et elle n'est applicable que pour des dièdres entrant à vitesse constante dans le fluide.
- La méthode asymptotique est limitée à des angles d'incidence petits, inférieurs à 30°

d'après [Zhao and Faltinsen, 1993].

Cette dernière méthode est le fruit d'une succession d'articles dont le premier est [von Karman, 1929]. Von Karman fut, en effet, le pionnier dans l'étude du tossage et c'est pourquoi sa théorie fera l'objet d'un premier paragraphe. Comme les hypothèses sur lesquelles elle repose s'avèrent restrictives, Wagner développa une théorie plus évoluée [Wagner, 1932] mais l'expression de la pression est singulière sur le bord du dièdre. Watanabe améliora cette théorie pour contrecarrer ce problème [Watanabe, 1966] et développa l'expression de la pression en prenant en compte le jet: il raccorda la solution de Wagner avec la solution du jet sur une plaque. Cointe [Cointe, 1989] donna, indépendamment, une théorie similaire. Zhao et Faltinsen, dans l'article [Zhao and Faltinsen, 1992], reprirent aussi l'expression de la pression de Wagner pour la raccorder asymptotiquement avec une solution externe pour le jet.

La méthode des similitudes repose sur la théorie de Dobrovolskaya développée dans [Dobrovolskaya, 1969]. Cette théorie qui fut aussi l'objet des articles [Pierson, 1950], [Garabedian, 1953], [Borg, 1957] et [Cumberbatch, 1960], considère que l'écoulement est auto-similaire réduisant ainsi l'étude à la résolution d'une équation intégrale non-linéaire unidimensionnelle.

2.1.1 Approche de la masse ajoutée

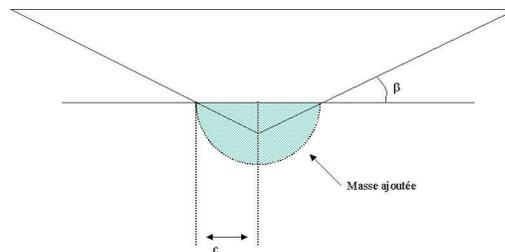


FIG. 2.1 – *Modèle d'impact de Von Karman*

La théorie de Von Karman repose sur l'impact en 2 dimensions entre un dièdre et la surface libre d'une eau au repos. On utilise les notations de Fig.2.1. Von Karman suppose que l'effet de la gravité et le mouvement de la surface libre sont négligeables. De ce fait, la masse ajoutée du fluide représentée sur Fig.2.1 en hachuré est donnée par $m'=(1/2)\rho\pi c^2$ avec ρ , la masse volumique du fluide et c , la demi-base du triangle immergé. Si β est l'angle

représenté sur la Fig.2.1, la relation géométrique qui lie V , la vitesse de pénétration du dièdre dans l'eau et c est : $V/\tan(\beta) = dc/dt$. Le chargement P dû à l'impact est donné en combinant les 3 équations suivantes :

- La conservation de la quantité de mouvement : $mV_0 = mV + m'V$ avec V_0 , la vitesse initiale du dièdre.

- $V/\tan(\beta) = dc/dt$

- Le principe fondamental de la dynamique appliqué au dièdre : $mdv/dt = P$

On obtient :

$$P = V_0^2 \cot(\beta) \frac{\rho\pi c}{\left(1 + \frac{\rho\pi c^2}{2m}\right)} \quad (2.1)$$

L'évaluation de la pression d'impact par cette théorie donne un bon ordre de grandeur. Cependant, comme elle ne prend pas en compte l'élévation de la surface libre, l'estimation de la partie immergée est imprécise ce qui entraîne une sous-estimation du chargement à l'impact. Wagner démontre que la largeur mouillée réelle est $\pi/2$ plus grande que c (voir Eq.(2.15)). La masse d'eau ajoutée est alors estimée selon Fig.2.2. La théorie asymptotique de Wagner est un modèle plus réaliste pour de petits angles β qui tient compte des effets hydrodynamiques.

2.1.2 Approche asymptotique

En linéarisant les équations du problème, Wagner approxima l'écoulement autour des dièdres aplatis (donc avec un angle β petit) par l'écoulement autour d'une plaque plongée dans un écoulement uniforme V . Cette théorie corrobore ainsi l'approche intuitive de Von Karman et peut d'ailleurs s'appliquer à n'importe quelle forme de solide à condition que l'angle β ne soit pas trop petit afin de rester dans un cadre incompressible ou éventuellement limiter le cushioning. Le potentiel des vitesses de l'écoulement est donné par:

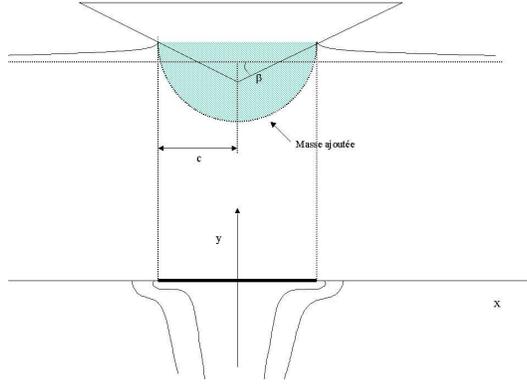


FIG. 2.2 – Modèle de Wagner sur l'impact de vague

$$\phi = -V\sqrt{c^2 - z^2} \quad \text{avec} \quad z = x + iy \quad (2.2)$$

Sur la plaque représentant le dièdre, ϕ prend la forme particulière suivante:

$$\phi = -V\sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{sur} \quad |x| < c(t) \quad (2.3)$$

La vitesse le long de la plaque suivant x est donnée par:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{V}{\sqrt{\frac{c^2}{x^2} - 1}} \quad \text{sur} \quad |x| < c(t) \quad (2.4)$$

Comme précédemment, c représente la largeur de la ligne de flottaison du corps. L'équation de Bernoulli donne, le long d'une ligne de courant proche de la plaque:

$$\frac{P(x)}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 = \sqrt{c^2 - x^2} \frac{dV}{dt} + V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{1}{2} \frac{V^2 x^2}{c^2 - x^2} \quad (2.5)$$

Pour le cas particulier d'un dièdre, $dc/dt = \pi/2 \cdot V \cdot \cot(\beta)$ (voir Eq.(2.15)). L'équation précédente devient :

$$P(x) = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[\frac{\pi \cot(\beta)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} - \frac{\frac{x^2}{c^2}}{1 - \frac{x^2}{c^2}} + \frac{2V}{V^2} \sqrt{c^2 - x^2} \right] \quad (2.6)$$

Cette fonction devient singulière à la limite du dièdre en $x = c$. Pour surmonter cette singularité, Wagner fut le premier à proposer de raccorder asymptotiquement cette fonction à une

solution décrivant un jet dans le voisinage de l'intersection. Watanabee [Watanabe, 1986a] et [Watanabe, 1986b] propose aussi une solution analogue dans le plan complexe. Zhao et Faltinsen [Zhao and Faltinsen, 1993] reprennent les travaux de Wagner pour obtenir une solution composite pour la pression et compare cette approche à la méthode des similitudes (voir paragraphe 2.1.4) et la méthode des éléments frontières (voir paragraphe 2.2.2).

2.1.3 Raccord asymptotique

Les approches asymptotiques sont nombreuses et découlent de l'analyse de Wagner. Elles ont en commun la décomposition du problème en deux régions, décomposition proposée initialement par Wagner dans [Wagner, 1932] sous les termes de "dynamique d'impact" et "dynamique glissante". En particulier, Cointe [Cointe, 1991] montre que l'étude asymptotique de l'écoulement autour d'un dièdre peut être divisée en trois régions (voir Fig.2.3):

- une région externe, pour $|x| < c(t)$ ($c(t)$ est donnée par Eq.(2.15)) dans laquelle se développe l'écoulement potentiel d'un doublet c'est à dire l'écoulement autour d'une plaque,
- une région interne au voisinage de $|x| = c(t)$ limitant le développement d'un jet d'épaisseur constante égale à $V.t.tan\beta$,
- une zone sur laquelle le jet se prolonge avec une épaisseur décroissante linéairement sur une largeur équivalente à $c(t)$. Watanabe [Watanabe, 1986a] et [Watanabe, 1986b], Cointe [Cointe, 1989] proposent ainsi, sur ce schéma, une solution asymptotique de la pression en raccordant la solution de la région interne et celle de la région externe. De la même manière, Zhao et Faltinsen [Zhao and Faltinsen, 1993] se basent sur la théorie de Wagner en raccordant asymptotiquement l'écoulement du jet sur une plaque inclinée pour la solution interne et l'écoulement autour d'une plaque en expansion pour la solution externe. Une solution composite est alors construite pour la distribution de pression le long du dièdre qui sera comparée aux résultats numériques de cette thèse .

Dans la région externe, les hypothèses permettent d'introduire le potentiel complexe défini par ϕ . Le dièdre est représenté par une plaque plane en expansion de demi-longueur $c(t)$. Ainsi, en reprenant les expressions de la théorie de Wagner, le potentiel de l'écoulement contournant la plaque s'exprime, dans le plan complexe, par Eq.(2.3) et la pression sur le dièdre dans le domaine externe, p_{out} , est donnée par l'équation de Bernoulli, Eq.(2.5). Comme l'angle du dièdre est très ouvert, la longueur Vt est plus petite que $c(t)$. Les ordres de grandeurs des termes quadratiques et du premier ordre de l'équation de Bernoulli en-

traînent les relations suivantes:

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{(\vec{\nabla} \phi)^2} \sim \frac{[Vc/t]}{[V^2]} = \frac{[c]}{[Vt]} \gg 1 \quad (2.7)$$

L'équation de Bernoulli devient alors:

$$\frac{p_{out}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$= V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} \quad (2.9)$$

On retrouve naturellement le terme central de la relation Eq.(2.5) en négligeant le terme quadratique et en supposant V constante.

La demi-longueur du dièdre immergé, $c(t)$, peut être déterminée par une expression donnant l'élévation de la surface libre $\eta(x,t)$. A partir des conditions aux limites décrites par Fig.2.3, on peut obtenir Eq.(2.10):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Vx}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}} - V \quad \text{pour } y = 0, \quad |x| > c(t) \quad (2.10)$$

L'intégration de Eq.(2.10) donne l'élévation de la surface libre $\eta(x,t)$:

$$\eta(x,t) = \int_0^t \frac{Vx}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}} dt - Vt \quad \text{pour } y = 0, \quad |x| > c(t) \quad (2.11)$$

Avec Eq.(2.11), $\eta_b(x)$, l'élévation maximale de la surface libre par rapport au sommet du dièdre (voir Fig.2.3), est déterminée par Eq.(2.12).

$$\eta_b(x) = \int_0^x \frac{x\mu(c)}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}} dc \quad \text{avec } \mu(c) = V dt/dc \quad (2.12)$$

La fonction $\mu(c)$ est approchée par $\mu(c) \approx A_0 + A_1c$ avec A_0 et A_1 , des constantes. Eq.(2.12) prend alors la forme Eq.(2.13). La relation géométrique pour la hauteur entre le sommet du dièdre et l'élévation de la surface libre donne la relation Eq.(2.14).

$$\eta_b(x) = A_0 \frac{\pi}{2} x + A_1 x^2 \quad (2.13)$$

$$\eta_b(x) = x \cdot \tan(\beta) \quad (2.14)$$

Ces deux équations déterminent l'expression de $c(t)$:

$$c(t) = \frac{\pi V t}{2 \tan(\beta)} \quad (2.15)$$

On en déduit la vitesse constante de l'écoulement le long du dièdre:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\pi V}{2 \tan(\beta)} \quad (2.16)$$

Dans la région interne, la pression sur la surface du dièdre est trouvée par l'étude locale de l'écoulement du jet par Wagner [Wagner, 1932]. Sa théorie [Wagner, 1932] décrit tout

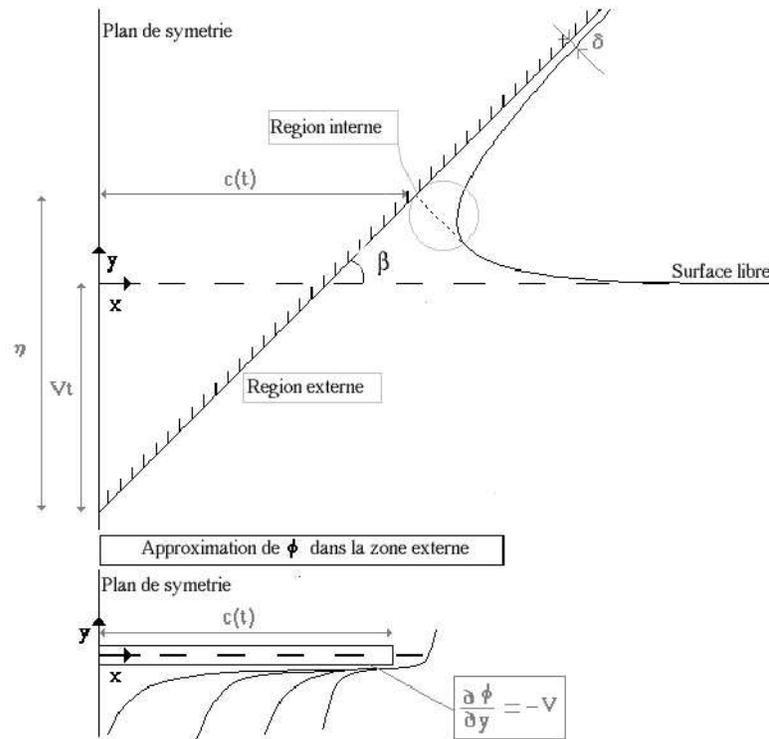


FIG. 2.3 – Définition de la notation et du système de coordonnées. Approximation du dièdre par une plaque plane en expansion

à tout la solution dans la zone du jet par la transformation de Schwarz-Christoffel et la solution autour de la plaque en expansion. Voyons la solution proposée dans la zone du jet voisine de $x = c$. D'après le théorème de Schwarz-Christoffel, le potentiel complexe f de l'écoulement d'un jet incliné sur un plan infini peut être défini à partir de la transformation entre le plan complexe τ et le plan complexe physique z de Fig.2.4, de la manière suivante:

$$\frac{df}{d\tau} = K \frac{\tau + 1}{\tau} \quad (2.17)$$

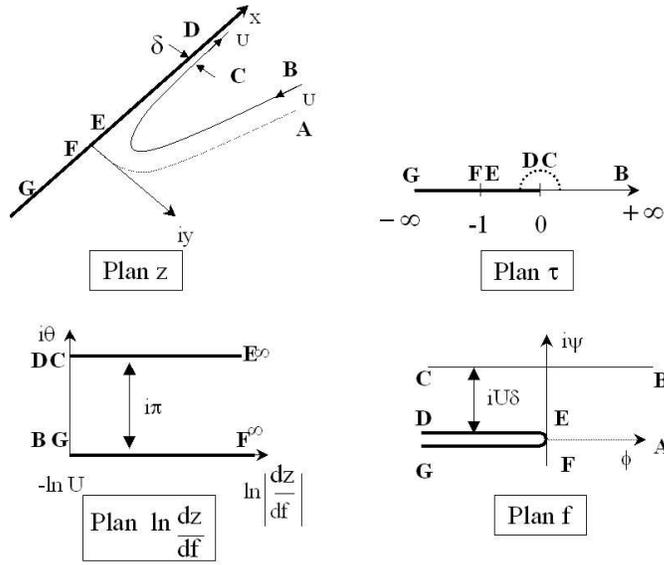


FIG. 2.4 – Plans complexes de la transformation de Schwarz Christoffel

Ainsi, Eq.(2.17) devient:

$$f = K'(\ln(\tau) + \tau + Co) \quad (2.18)$$

Lorsque $\tau = -1 = \exp(i\pi)$, f s'annule au point F (ou au point E) du plan complexe f (voir Fig.2.4). On a alors:

$$Co = 1 - i\pi \quad (2.19)$$

Lorsque τ croit de D vers C, $|\tau| \rightarrow 0$ $\arg(\tau)$ passe de π à 0. En C, la partie réelle de f tend alors vers $-\infty$ et sa partie imaginaire, ψ , vaut $-K'\pi$. Or, en supposant que, dans le plan physique z de Fig.2.4, la vitesse à l'infini en C est U , ψ est égale à δU en C. Donc, $K' = -\frac{U\delta}{\pi}$.

Si on applique la même transformation entre le plan $\ln(-U\frac{dz}{df})$ et le plan τ , on obtient, d'après le théorème de Schwarz-Christoffel:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{dz}{df} \right) = K'' \frac{1}{(\tau + 1)\sqrt{\tau}} \quad \text{avec } K'' \text{ un nombre complexe.} \quad (2.20)$$

Après quelques manipulations qui font apparaître le facteur $(\sqrt{\tau} + i)^2$, Eq.(2.20) devient:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{dz}{df} \right) = -K'' i \left(\frac{(\sqrt{\tau} - (\sqrt{\tau} - i)) (\sqrt{\tau} + i)^2}{(\tau + 1)\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau} + i)^2} \right) \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{dz}{df} \right) = -K''i \left(\frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}+i)} \right) \quad (2.22)$$

D'où,

$$\frac{dz}{df} = K''' \left(\frac{\sqrt{\tau}+i}{\sqrt{\tau}-i} \right)^{K''i} \quad (2.23)$$

D'après Fig.2.4, on déduit aisément que $K''' = 1/U$ et $K'' = -i$.

Ensuite, on peut obtenir la relation entre z et τ :

$$z = \frac{\delta}{\pi} (-\ln(-\tau) + 4i\sqrt{\tau} + \tau + 5) \quad (2.24)$$

La pression sur le dièdre se déduit de l'équation de Bernoulli pour τ réel négatif:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_o}{\rho} - \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi^2}{\partial x} \quad (2.25)$$

avec $p_o = 1/2\rho U^2$ la pression au point d'arrêt et $\frac{d\phi}{dt}$, la dérivée particulière du potentiel de vitesse ϕ . On peut remarquer que si τ est un réel négatif alors $\frac{df}{dz}$ de Eq.(2.23) devient réel:

$$\frac{df}{dz} = U \frac{\sqrt{-\tau}-1}{\sqrt{-\tau}+1} = \frac{d\phi}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.26)$$

Ainsi $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{df}{dz}^2$. Après quelques manipulations dans Eq.(2.25), on obtient pour τ réel négatif:

$$p = 2\rho U^2 \frac{\sqrt{-\tau}}{(1+\sqrt{-\tau})^2} \quad (2.27)$$

On en déduit ainsi la pression dans la région interne:

$$\frac{p_{in}}{\rho} = 2 \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 |\tau|^{\frac{1}{2}} (1+|\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} \quad \text{pour } 0 < \tau < \infty \quad (2.28)$$

La relation entre la variable intermédiaire $|\tau|$ et la variable physique x est donnée par Eq.(2.29):

$$x - c = \frac{\delta}{\pi} (-\ln|\tau| - 4|\tau|^{\frac{1}{2}} - |\tau| + 5) \quad (2.29)$$

δ , l'épaisseur du jet obtenu en raccordant asymptotiquement la solution interne et la solution externe, vaut $\pi V^2 2c [4 \frac{dc}{dt}]^{-2}$. Quand le paramètre $|\tau|$ tend vers 0,1 et ∞ , x tend vers ∞ , $c(t)$ et $-\infty$ respectivement. Pour de grandes valeurs de $|\tau|$, les équations Eq.(2.28) et Eq.(2.29)

deviennent $2[dc/dt]^2|\tau|^{1/2}$ et $-(\delta/\pi)|\tau|$ respectivement. De ce fait, Eq.(2.28) devient

$$\frac{p_{in}}{\rho} \sim Vc\left(\frac{dc}{dt}\right)^2[2c(c-x)]^{-1/2} \quad (2.30)$$

Ainsi, une distribution composite de la pression peut être obtenue en additionnant Eq.(2.28) et Eq.(2.9) et en soustrayant Eq.(2.30):

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & V \frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}} \frac{dc}{dt} + 2\left(\frac{dc}{dt}\right)^2|\tau|^{1/2}(1+|\tau|^{1/2})^{-2} \\ & - Vc\left(\frac{dc}{dt}\right)^2[2c(c-x)]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cette expression de la pression est reprise, dans la suite, pour vérifier les résultats issus de la simulation numérique du tossage d'un dièdre.

Des extensions de la méthode des développements asymptotiques raccordées existent et font l'objet de travaux récents. Ainsi, cette méthode est utilisée, dans [Fontaine et al., 1997] et [Wu et al., 2000], pour justifier une approche par tranches du problème d'impact d'un corps de forme allongée et plate sur une surface libre. Dans [Faltinsen, 2002], Faltinsen apporte une solution pour le domaine interne valable pour n'importe quels angles et une généralisation de l'impact à des vitesses d'entrée dépendantes du temps. Scolan et Korobkin [Scolan and Korobkin, 2000], [Scolan and Korobkin, 2001] étendent l'approximation de la plaque plate de Wagner à un problème de tossage 3D d'un corps émoussé. Afin de traiter des impact hydrodynamiques de corps déformables ou rigides, Donguy [Donguy, 2002] couple une formulation éléments finis pour résoudre la structure et le problème fluide asymptotique. Pour ce dernier, une équation de Laplace est résolue pour un potentiel des vitesses et un potentiel de déplacement. Le potentiel de déplacement permet de déterminer la position de la surface libre et celui en vitesse permet d'évaluer la pression exercée sur la structure.

2.1.4 Méthode des similitudes

Le premier à fournir une analyse théorique des écoulements similaires de fluides incompressibles fut encore Wagner [Wagner, 1932]. Il démontra que l'écoulement est auto-semblable et qu'il pouvait ainsi être décrit par deux variables: $\xi = x/Vt$ et $\eta = y/Vt$. Il introduit aussi une fonction $h(\zeta)$ transformant le domaine physique en un domaine constitué de segments de droites. Par la suite, en s'appuyant sur les développements de Wagner, le problème des

écoulements similaires fut l'objet de nombreuses autres études, notamment Pierson [Pierson, 1950], Garabedian [Garabedian, 1953] qui démontra que l'angle à l'intersection de la surface libre et du dièdre ne pouvait être supérieur à 45° , Mackie [Mackie, 1969] qui précisa l'encadrement précédent de l'angle à l'intersection en prouvant qu'il est inférieur à $\beta_o = \pi/2 - \beta$ (voir Fig.2.5), Borg [Borg, 1957] qui donna l'expression de la masse ajoutée pour un dièdre dissymétrique,... Avec le développement des processeurs dans les années soixante, la solution numérique du problème fait son apparition. Ainsi, Dobrovolskaya propose une théorie non linéaire sous la forme d'une équation intégrale unidimensionnelle dont la solution ne peut être approchée que numériquement. Le principe est le suivant: l'objectif est de déterminer la solution du problème d'un écoulement bidimensionnel le long d'un dièdre entrant dans l'eau, en utilisant le potentiel des vitesses $\phi(x,y,t)$. Ce potentiel doit respecter la condition dynamique, la condition cinématique sur la surface libre et les conditions d'imperméabilité sur les frontières solides. On adimensionne le potentiel des vitesses $\phi(x,y,t) = V^2/t\Phi(\xi,\eta)$ avec $\xi=x/Vt$ et $\eta=y/Vt$ et $\Phi(\xi,\eta)$ une fonction harmonique de ξ et η dans la région CBAC (Fig.2.5).

$\Phi(\xi,\eta)$ doit satisfaire les conditions de surface libre d'équation $\eta = \eta(\xi)$

La pression sur la surface libre est constante. De ce fait, l'équation de Bernoulli donnée sur la surface libre, $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{grad}(\phi) \right|^2 = 0$ (la pression est prise nulle sur la surface libre), devient:

$$\Phi(\xi,\eta) - \xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \eta(\xi) \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)^2 = 0 \quad (2.32)$$

La condition cinématique s'écrit :

$$\frac{dg(x,z,t)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

avec $g(x,y,t) = y(x,t) - y = \eta(\xi) - \eta$

En utilisant le changement de variable, on obtient :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \eta'(\xi) \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \xi\eta(\xi) - \eta(\xi) = 0 \quad (2.34)$$

La condition de glissement sur la surface du dièdre et sur l'axe symétrique du dièdre (voir Fig.2.5) donne:

$$\left(\vec{V}_{fluide} - \vec{V}_{AB}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.35)$$

$$\left(\vec{V}_{fluide} - \vec{V}_{CA}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.36)$$

Cette condition devient en considérant le changement de variables et le schéma de Fig.2.5:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \alpha_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sin \alpha_0 = \sin \alpha_0 \quad (2.37)$$

sur AB

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \quad (2.38)$$

sur CA

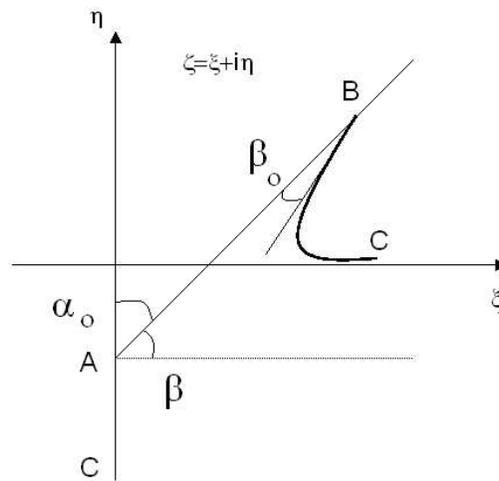


FIG. 2.5 – AB le dièdre, AC l'axe de symétrie, BC la surface libre, (Dobrovolskaya, 1968)

En utilisant le théorème sur la transformée de Schwarz-Christoffel et la fonction de Wagner, on peut ramener le problème à l'équation intégrale non-linéaire suivante:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{c_0^2}{c^2} \int_0^t \frac{(1-t)^{-1-\alpha} \exp \left[t \int_0^1 \frac{f(\tau)}{\tau(\tau-1)} d\tau \right]}{\int_t^1 t^{-\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}+\alpha} \exp \left[-t \int_0^1 \frac{f(\tau)}{\tau(\tau-1)} d\tau \right]} dt \\
\frac{c_0^2}{c^2} &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 r^{-\frac{3}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}+\alpha} (2r-1)^{-\alpha} \exp \left[- \int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau \left\{ \tau \left[2 - \frac{1}{r} \right] - 1 \right\}} \right] dr}{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-r)^{-1-\alpha} (2r-1)^{-1-\alpha} \exp \left[\int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau \left\{ \tau \left[2 - \frac{1}{r} \right] - 1 \right\}} \right] dr} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

où t est un paramètre variant de 0 à 1 et $f(t)$ une fonction bornée aussi par 0 et 1, solution de cette équation. Fraenkel [Fraenkel, 1991] démontra l'unicité et l'existence de cette solution intégrale quel que soit l'angle α . Etant donné sa forte non-linéarité, la relation Eq.(2.39) ne peut se résoudre analytiquement. Dobrovolskaya donne une approche numérique pour des angles α_0 inférieurs à 30° concordant avec les résultats donnés par Mackie [Mackie, 1969] pour le problème linéarisé du dièdre entrant dans l'eau. A 45° , Hughes [Hughes, 1972] donne une solution numérique par une méthode similaire. Zhao et Faltinsen [Zhao and Faltinsen, 1992] améliorent cette approche et donnent des résultats numériques précis pour une plus grande gamme d'angles β (de 4° à 81°). Ils comparent ces solutions à des résultats numériques issus d'une méthode des éléments frontières, objet d'un paragraphe suivant (2.2.2).

Ces approches théoriques, la théorie asymptotique et la méthode des similitudes, permettent de résoudre le problème de la pénétration d'un dièdre rigide à vitesse constante dans un fluide incompressible. Les hypothèses étaient restrictives; néanmoins, l'approche numérique développée dans cette thèse restera dans le cadre de ces hypothèses afin de la comparer à l'approche asymptotique de Wagner.

2.1.5 Conclusion

Bien que les hypothèses restrictives des approches analytiques ne permettent pas le traitement de problèmes industriels complexes, ces théories forment une base intéressante pour les développements numériques. En particulier, dans le cadre de cette thèse, on confrontera la pression Eq.(2.31) donnée par la théorie de Zhao et Faltinsen [Zhao and Faltinsen, 1993] et celle obtenue par la modélisation numérique de dièdres entrant dans l'eau. Plusieurs mé-

thodes numériques ont aussi été développées afin de résoudre ce problème, le but étant, à l'avenir, d'étendre les approches à des cas plus complexes.

2.2 Méthodes Numériques

La structure n'est pas un problème numérique: elle est, en général, résolue par une formulation classique en éléments finis. Le problème du couplage dièdre/eau réside dans la recherche d'une solution numérique pour le problème fluide. Une fois, cette solution trouvée, il faut la coupler à la formulation en éléments finis pour la structure afin de résoudre le problème d'interaction. Pour modéliser l'impact hydrodynamique d'un dièdre ou d'une carène, les méthodes numériques doivent être conçues pour suivre les grandes déformations du fluide. Nous verrons, dans un premier temps, la formulation Lagrangienne ou ALE en éléments finis. L'interaction fluide/structure est alors gérée par des méthodes de contact. Nous verrons que, dans ce cas, cette approche est limitée par la distorsion des mailles. Des méthodes de remaillage peuvent être envisagées mais leur coût CPU est très important. Dans un deuxième temps, les solutions apportées par la méthode des éléments frontières (BEM) ou par la méthode SPH seront décrites: elles permettent de s'affranchir du maillage et donnent des résultats très proches des solutions physiques. Néanmoins, l'extension de ces approches à des problèmes 3D complexes reste difficile. Enfin, en volumes finis et en différences finies, la méthode VOF sera brièvement présentée. Elle permet de résoudre le problème fluide sur un maillage fixe. Cette méthode sera utilisée et détaillée, dans la suite de cette thèse.

2.2.1 Méthodes de contact

Communément, l'algorithme de contact gère, en formulation éléments finis ou différences finies, l'interaction entre deux maillages Lagrangiens, ALE ou encore Lagrangien-ALE. Cependant, un algorithme de contact spécifique peut être aussi utilisé pour coupler une méthode particulière Lagrangienne (SPH) et une méthode éléments finis. On peut noter que le point commun aux formulations Lagrangiennes, ALE ou SPH est que la description du contact est Lagrangienne: les mailles ou les particules en contact sont décrites par une ap-

proche Lagrangienne et suivent la déformation de l'interface matérielle. Les algorithmes de contact gèrent l'interface entre deux maillages distincts en empêchant qu'un nœud Lagrangien d'un maillage ou qu'une particule Lagrangienne ne passe à travers la surface Lagrangienne de l'autre maillage. Pour différencier les deux formulations en contact, l'une est désignée comme étant l'esclave et l'autre étant le maître. Les nœuds ou les particules se trouvant dans la zone de l'interface sont aussi appelés maîtres ou esclaves. En général, le fluide est le maître et la structure est l'esclave. Néanmoins, une permutation des rôles peut être faite. Pour assurer une symétrie, certains algorithmes permutent le rôle de l'esclave et du maître régulièrement en cours de calcul.

Selon Zhong [Zhong, 1993], la résolution numérique en éléments finis d'un problème d'interaction par un algorithme de contact est composée de 8 parties:

- 1 - Les formulations variationnelles qui sont les bases de la discrétisation.
- 2 - Les formulations de la discrétisation (triangles, quadrangles, ...).
- 3 - Les formulations du matériau liant la contrainte et la déformation.
- 4 - Les lois de frottements.
- 5 - Les méthodes de contact qui calculent les forces de contact.
- 6 - Les algorithmes de recherche du contact qui, comme le nom l'indique, identifient les nœuds des éléments en contact pour amorcer les algorithmes de l'étape 5.
- 7 - Les méthodes d'intégration en temps (dans le cadre de cette thèse, une méthode de différences finies centrées)
- 8 - Les méthodes de linéarisation qui transforment un problème géométrique non-linéaire en une série de problèmes linéaires.

Le cinquième point est l'objet de cette partie. Selon les points 5 et 6, les algorithmes de contact peuvent être décomposés en deux étapes : la recherche du contact vérifiant les conditions de contact, et l'application de l'algorithme. Les forces à l'interface ne sont calculées que si les conditions de contact sont vérifiées. Deux approches permettent de calculer les forces de contact. Cette force est évaluée soit par les multiplicateurs de Lagrange, soit par la méthode par pénalisation.

Les méthodes donnant les forces à l'interface, la méthode par pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange, sont considérées dans un cas en deux dimensions. Un nœud esclave pénètre un segment maître constitué de deux nœuds dans un système de coordonnées locales défini par la normale (direction z) et la tangente au segment (direction y).

L'extension du raisonnement, pour cet exemple, à un cas tridimensionnel est aisée. Dans le système local, seules les forces normales au segment sont considérées et elles s'appliquent sur le nœud esclave $F_{m \rightarrow s}$ et, par réaction, sur les nœuds maîtres $F_{s \rightarrow m}$. Les équations d'équilibre donnent Eq.(2.40), Eq.(2.41) et Eq.(2.42):

$$F_{s \rightarrow m1} = -(1 - \xi)F_{m \rightarrow s} \quad (2.40)$$

$$F_{s \rightarrow m2} = -\xi F_{m \rightarrow s} \quad (2.41)$$

$$\xi = \frac{y_s - y_{m1}}{y_{m2} - y_{m1}} \quad (2.42)$$

où y_s , y_{m1} et y_{m2} sont les coordonnées, dans le repère local, du nœud esclave et des deux nœuds maîtres. Le principal enjeu est de calculer $F_{m \rightarrow s}$. Deux méthodes pour déterminer cette valeur sont disponibles: soit la méthode des multiplicateurs de Lagrange, soit la méthode par pénalisation.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange introduit, dans l'équation d'équilibre des quantités de mouvement, la condition suivante sur le contact :

$$\phi = y_s - (1 - \xi)y_{m1} + \xi y_{m2} \quad (2.43)$$

Comme la force sur le nœud i est donnée par $\lambda \partial \phi / \partial y_i$, les relations Eq.(2.40) et Eq.(2.41) peuvent être retrouvées:

$$\phi = y_s - (1 - \xi)y_{m1} + \xi y_{m2} \quad (2.44)$$

$$F_{m1} = -(1 - \xi)\lambda \quad (2.45)$$

$$F_{m2} = -\xi\lambda \quad (2.46)$$

$$F_{m \rightarrow s} = \lambda \quad (2.47)$$

Les méthodes itératives sont souvent utilisées pour résoudre les équations plutôt qu'une résolution directe. Par exemple, Carpenter et al. [Carpenter et al., 1991] résolvent le système d'équations avec une méthode de Gauss-Seidel.

La méthode par pénalisation

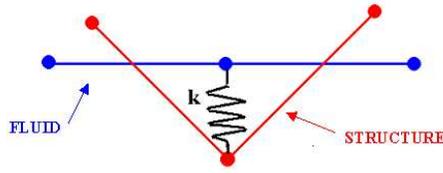


FIG. 2.6 – Schéma du contact par pénalisation

La méthode par pénalisation impose une force de rappel sur le nœud esclave (voir Fig.2.6) qui est proportionnelle à la pénétration à travers le segment maître:

$$F_{m \rightarrow s} = -k(z_s - z_m) \quad (2.48)$$

k représente la raideur du ressort. Cette méthode consiste, en fait, à disposer, à l'interface, des ressorts fictifs en tension entre tous les nœuds pénétrant et la surface de contact, la position d'équilibre de ces ressorts correspondant à un nœud esclave positionné sur le segment maître. La raideur pour ce dernier est donnée par Eq(2.49) en terme du module de compressibilité K , du volume V et de la face A de l'élément contenant le segment:

$$k = \frac{pfKA^2}{V} \quad (2.49)$$

dans lequel pf est un facteur scalaire adimensionnel, dit facteur par pénalisation, sa valeur par défaut est 0.1. Des valeurs plus grandes que cette dernière peuvent entraîner des instabilités. En effet, après un impact fort, le maître et l'esclave peuvent se séparer. Si la force par pénalisation est très importante, l'impact et la séparation des corps peuvent avoir lieu dans le même pas de temps. L'élément fini en contact est alors traversé par une onde de compression et par une onde de dépression dans le même pas de temps. Ceci viole la condition CFL (Courant Levy Friedrich) impliquant que:

$$C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (2.50)$$

où C est le nombre de courant, c la vitesse de propagation des ondes, Δt le pas de temps du calcul et Δx la plus petite longueur de l'élément en contact dans la direction de propagation. Cette anomalie peut être levée en imposant une limite supérieure à la force $F_{m \rightarrow s}$. Ainsi, Belytschko et Neal [Belytschko and Neal, 1991] imposent un maximum calculé à partir de

la force de contact entre deux sphères donnée par Eq.(2.51) pour un impact plastique (les sphères restent en contact après l'impact):

$$F_{m \rightarrow s} \leq \frac{M_s M_m |v_m - v_s|}{\delta t (M_s + M_m)} \quad (2.51)$$

dans lequel $F_{m \rightarrow s}$ est la force d'interaction entre les deux sphères, M_s et M_m , sont respectivement les masses de l'élément maître et esclave, et v_m et v_s sont les vitesses de ces sphères.

La modélisation d'un impact d'une structure sur un plan d'eau par une méthode de contact a déjà été réalisée par Ribet [Ribet, 1997] et dans le cadre du projet SEAWORTH par Portemont [Portemont et al., 2002]. Ces études mirent en évidence de fortes distorsions des mailles au cours du calcul. Candy [Candy et al., 1998] et Seddon [Seddon and Moatamedi, 2003] entreprirent, par cette méthode, l'étude numérique de la chute d'une capsule spatiale dans l'eau. Le déplacement de la capsule était correctement prédit au début du calcul. Cependant, l'évolution numérique différait de la courbe expérimentale vers la fin du calcul. En 1994, Brooks et Anderson [Brooks and Anderson, 1994] utilisèrent une modélisation éléments finis pour étudier l'entrée dans l'eau du module de commande d'Appolo pour lequel une grande quantité de données expérimentales existait. Le modèle fut validé en comparant les données et les résultats expérimentaux sur une courte durée. Après 30ms, les résultats numériques et expérimentaux divergeaient. Ces études montrent que la formulation Lagrangienne pour le fluide est limitée par les fortes déformations du maillage comme le montre Fig.2.7. Il est possible d'employer des algorithmes de remaillage mais leur coût de calcul est important. Une formulation ALE n'est d'ailleurs guère plus adaptée et les études précédentes montrent que le maillage ALE subit aussi de fortes distorsions. Ces dernières entament sérieusement la précision du calcul et dans le cas d'une intégration explicite, la condition CFL (Courant-Friedrich-Levy) impose une chute considérable du pas de temps pour des éléments finis écrasés. Soit le calcul devient interminable, soit il débouche sur une erreur arrêtant le processus.

Pour résoudre le problème fluide, d'autres solutions ont été envisagées et il fallait alors coupler la structure en éléments finis aux formulations employées pour le fluide.

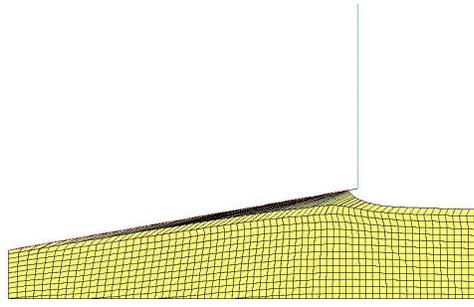


FIG. 2.7 – Modélisation Lagrangienne du fluide

2.2.2 Méthode des éléments frontières (BEM method)

Longuet-Higgins et Cokelet [Longuet-Higgins and Cokelet, 1976] furent les premiers à introduire cette technique connue aussi sous le nom de méthode Euler-Lagrange mixte. Des variantes de cette méthode ont été appliquées à une large gamme de problèmes 2D et 3D par de nombreux auteurs tels que Faltinsen [Faltinsen, 1977], Vinje et Brevig [Vinje and Brevig, 1981], Cointe [Cointe et al., 1990],... Pour présenter cette approche, nous choisissons de présenter les travaux de Zhao et Faltinsen pour cette méthode. Ils présentèrent, dans [Zhao and Faltinsen, 1993], une méthode numérique permettant de calculer la répartition de pression sur le dièdre à partir d'une méthode non-linéaire d'éléments frontières. Cette méthode numérique s'applique à des problèmes linéaires elliptiques dont les équations partielles peuvent être reformulées sous formes intégrales. Dans notre cas, l'écoulement étant irrotationnel et le fluide incompressible, le potentiel des vitesses satisfait l'équation de Laplace dans le domaine fluide:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.52)$$

Les conditions aux limites associées à cette équation sont les conditions cinématiques et dynamiques de surface libre:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{n} \quad (2.53)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \quad (2.54)$$

et la condition à frontière du dièdre:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V \cdot \vec{e}_y \quad (2.55)$$

Dans [Zhao and Faltinsen, 1993], le domaine fluide proposé (voir Fig.(2.8) pour résoudre

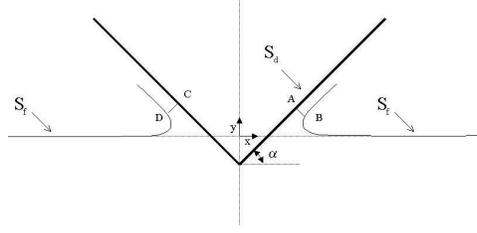


FIG. 2.8 – Définition des surfaces de contrôle utilisées par la méthode des éléments frontières

ce problème est limité par une frontière S incluant la surface libre S_f , le dièdre S_d , des segments AB et CD tronquant les jets de manière à négliger les parties exerçant une faible pression sur le dièdre et S_∞ , une frontière suffisamment éloignée du dièdre pour considérer, la surface libre, non perturbée dans le voisinage du raccord entre S_f et S_∞ . La seconde identité de Green peut être utilisée sur S transformant ainsi le problème en une équation intégrale non linéaire:

$$2\pi\phi(x,y) = \int_S \left[\frac{\partial\phi(\xi,\zeta)}{\partial n(\xi,\zeta)} \log(r) - \phi(\xi,\zeta) \frac{\partial \log r}{\partial n(\xi,\zeta)} \right] ds(\xi,\zeta) \quad (2.56)$$

avec $r = [(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2]^{1/2}$

Comme la contribution de S_∞ dans cette équation est négligeable, l'équation intégrale sur S_f est formulée de manière à ce qu'elle soit bornée par $\pm b(t)$, une fonction arbitraire du temps donnant des valeurs suffisamment grandes. Pour $|x| > b(t)$, la solution de l'écoulement est donnée par un dipôle vertical dans un domaine fluide infini, modifiant ainsi l'intégrale de Eq.(2.56) sur l'ouvert $] - \infty, - b] \cup [b, \infty[$:

$$\phi(x,y) = A(t) \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.57)$$

La discrétisation de S (sans S_∞ puisque son effet est négligeable) introduit des particules reliées entre elles par des segments sur lesquels les inconnues ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ sont supposées constantes. Sur le dièdre, $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ est connu et on recherche ϕ . Sur la surface libre, c'est l'inverse. AB et CD sont représentés par un seul élément et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ est constante afin de respecter l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel dans cette zone. Initialement, S_f et S_d ont une particule en commun et AB et CD ne sont introduit que lorsque l'angle entre S_f et S_d devient plus petit qu'une valeur limite, inférieure à $\pi/4$, d'après la solution proposée

par Dobrovolskaya [Dobrovolskaya, 1969] dans le cadre de l'approche par les similitudes. L'approximation numérique de l'intégrale Eq.(2.56) et de Eq.(2.57) conduit à un système linéaire d'équations qui peut être résolu, à chaque pas de temps, par une décomposition LU ou par une méthode itérative. La position de la surface libre est mise à jour en s'appuyant sur la condition cinématique Eq.(2.53). Cette intégration est effectuée en vérifiant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Zhao et Faltinsen comparèrent cette approche avec la méthode des similitudes du paragraphe 2.1.4 et la théorie asymptotique décrite précédemment dans le paragraphe 2.1.2 et 2.1.3. De bonnes corrélations furent trouvées.

Le choix de Zhao de tronquer le jet n'est valable que si l'angle entre le dièdre et le plan d'eau initiale est petit et l'avantage est de s'affranchir de la singularité à l'intersection de la surface libre et du solide. Cette singularité est un point difficile dans la résolution du problème: les segments du fluide et de la structure liés par cette intersection ont deux normales et deux vitesses différentes tandis que le potentiel ϕ est continu à cette intersection. On observe des instabilités dans le calcul et suivant les auteurs, des précautions sont prises pour s'affranchir de cette singularité. Ainsi, Dommermuth et Yue [Dommermuth and Yue, 1987] intégrèrent les conditions Eq.(2.53) et Eq.(2.54) avec un schéma de Runge-Kutta du 4ième ordre. Comme Yim et Taylor [Yim and Taylor, 1985], ils constatèrent cette instabilité qu'ils éliminèrent en remaillant la frontière, près de l'intersection, après chaque pas de temps. Un remaillage est aussi effectué dans [Wu et al., 2000] et les auteurs imposent une variation linéaire de ϕ et de $\frac{\partial\phi}{\partial n}$. Pour stabiliser le calcul, Scorpio [Scorpio, 1997], Beck et al. [Beck et al., 1994] employèrent une méthode DELTA (Desingularized Euler Lagrange Time-domain Approach) introduit initialement par Webster [Webster, 1975]. Le but est de calculer l'intégrale Eq.(2.56) sur des singularités légèrement décalées par rapport aux surfaces physiques. Il en résulte un calcul rapide et stable. D'autres auteurs gèrent les fortes non-linéarités du jet en approximant son écoulement. Greco et al. [Greco and Faltinsen, 2000] prennent un pas de temps plus petit et une discrétisation spatiale élaborée (quadratique au lieu de linéaire comme précisé précédemment). Dans [Donguy, 2002], la singularité est levée en raccordant la solution éléments finis du problème asymptotique extérieur avec la solution intérieure du jet.

L'approche proposée par Zhao et Faltinsen fut reprise par Campana et Carcaterra [Campana et al., 2000]. Dans cette étude, seule la vitesse initiale d'impact est imposée et les forces de réaction hydrostatiques et hydrodynamiques sont calculées pour déterminer la décélération

et la vitesse relative à chaque pas de temps. En utilisant cette même méthode, Iafrati et Carcaterra [Iafrati et al., 2000] comparèrent leurs résultats numériques aux résultats analytiques issus d'un dièdre, entrant dans l'eau, supporté par un système masse-ressort. Ils en tirèrent la force maximale du tassage et la force dans le ressort comme une expression dépendant de l'angle d'incidence, de la vitesse initiale d'impact, de la raideur et de la masse du support et du dièdre. Une validation expérimentale de ces résultats analytiques fut finalement réalisée dans [Carcaterra and Ciappi, 2004].

Felippa, Geers, Park et Deruntz couplèrent une formulation FEM et une formulation BEM développée par Geers (Doubly Asymptotic Approximation) [Geers, 1971], [Geers, 1980], [Geers and Felippa, 1971], [Geers, 1983] pour traiter, à l'origine, un problème d'interaction entre une onde de choc sous-marine et une structure élastique, [Park et al., 1977]. La méthode de couplage fut généralisée dans [Felippa and Park, 1980], [Felippa and DeRuntz, 1984]. Dans [Bereznitski, 2003], l'étude du comportement hydroélastique d'une plaque fut abordée par Bereznitski en couplant une approche BEM pour le fluide et une formulation MEF pour la structure. Lu, He et Wu [Lucy et al., 2000] couplèrent la méthode des éléments frontières de Zhao et Faltinsen avec une formulation en éléments finis pour la structure afin de prédire les contraintes locales subies par une plaque tombant dans l'eau. Le modèle 2D pour le fluide et la structure fut résolu dans un même pas de temps. Sur des résultats en pression comparées à ceux données par [Zhao and Faltinsen, 1993], ils montrèrent la différence entre un couplage fort et un couplage étagé où la vitesse de la structure du pas de temps précédent est utilisée dans la BEM comme une condition aux limites.

La méthode aux éléments frontières par rapport aux formulations classiques a l'avantage que seules les frontières sont discrétisées. Cependant, les matrices résultantes sont pleines contrairement aux matrices rencontrées en éléments finis ou en volumes finis. Des problèmes tridimensionnelles complexes peuvent être traités mais les calculs deviennent plus lourds étant donné le grand nombre d'inconnues requis. Dans [Young and Kinnas, 2003], Young propose un modèle 3D d'une hélice semi-immersée basé sur un code éléments frontières. Néanmoins, des hypothèses sur la cavitation, sur la position des interfaces air/eau et les conditions cinématiques appliquées sur ces interfaces ont dû être émises pour appliquer la méthode. Les hypothèses à la base de la formulation en éléments frontières restreignent son application à une gamme de problèmes industriels. Il est difficile d'étendre cette méthode à un problème où la compressibilité du fluide jouera un rôle important, comme dans le cas d'un impact sur une surface libre d'une structure à incidence rasante. D'autres solutions

numériques ont été développées pour traiter l'impact hydrodynamique.

2.2.3 Méthode SPH

En 1977, les travaux de Lucy et Monaghan [Lucy, 1977] donnent lieu à une nouvelle méthode numérique: la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Cette méthode particulière s'affranchit d'une connectivité géométrique, contrairement aux formulations classiques. Les domaines physiques sont discrétisés par des particules qui suivent le mouvement du matériau. Pour le tossage, la formation du jet ne pose ainsi plus de problèmes de modélisation. Cette méthode fut d'abord appliquée en astrophysique, [Lucy, 1977] et [Gingold and Monaghan, 1977], avant d'être utilisée par la suite en Mécanique, [Monaghan and Gingold, 1983]. Les particules représentent les points d'interpolation où les inconnues mécaniques du problèmes sont déterminées. La méthode SPH se caractérise par la masse des particules et par deux grandeurs de discrétisation, la distance interparticulaire et la longueur de lissage. Le principe est d'approximer un champ \vec{u} sur un domaine ω par un ensemble de points de discrétisation appelés particules. En chacune de ces particules, on peut écrire une formulation intégrale du champ \vec{u} :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_{\omega} \vec{u}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\omega \quad (2.58)$$

où δ est la fonction de Dirac. Elle peut être approchée par une fonction de lissage W introduisant la notion de longueur de lissage h qui définit la zone d'influence de chaque particule. $W(\vec{x} - \vec{y}, h)$ tend vers $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ si h tend vers 0. Le champ \vec{u} est alors approximé par:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_{\omega} \vec{u}(\vec{y}) W(\|\vec{x} - \vec{y}\|, h) d\omega \quad (2.59)$$

avec

$$\int_{\omega} W(\|\vec{x} - \vec{y}\|, h) d\omega = 1 \quad (2.60)$$

Si ρ_j et m_j représentent respectivement la masse volumique et la masse d'une particule j , l'intégrale dans Eq.(2.59) peut être approximée par une quadrature de type Monte Carlo:

$$\vec{u}(\vec{x}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \vec{u}(\vec{x}_j) W(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|, h) \quad (2.61)$$

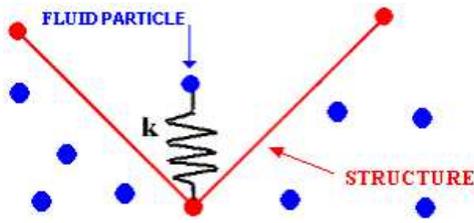


FIG. 2.9 – Schéma du couplage SPH/FEM

Appliquée à la conservation de la masse, on obtient l'approximation suivante:

$$\frac{d\rho(\vec{x}_i)}{dt} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \text{grad}W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (2.62)$$

Il est clair que la conservation de la masse est vérifiée étant donné que chaque particule a une masse constante. Les interactions interparticulaires dépendent du choix de la longueur de lissage h . Les forces d'interactions respectent la loi de l'action et de la réaction donc la conservation de la quantité de mouvement est aussi vérifiée.

Le couplage SPH/FEM repose sur une méthode de contact par pénalisation similaire à celle présentée dans le paragraphe 2.2.1. Les particules fluides sont les "nœuds" esclaves. Si l'une d'elle pénètre un élément structure d'une distance d (voir Fig.2.9), la force appliquée est proportionnelle à cette distance: $f = k.d$ dans laquelle k est la raideur par pénalisation. Ce couplage et la méthode SPH sont détaillées dans [Lacome, 1998].

Dans le cadre de la simulation d'impact hydrodynamique, la méthode SPH a déjà été utilisée par Rompteaux [Rompteaux and VILA, 1999], Pentecôte [Pentecote et al., 2003], Fontaine [Fontaine, 2000], Gallet [Gallet, 2001], Lacerda [Lacerda, 2000], Lacôme [Lacome, 1998]. Les résultats obtenus corroborent les résultats de référence. En général, les courbes d'effort présentent des oscillations (voir Fig.2.11) qui nécessitent un filtre fréquentiel passe-bas. L'origine de ces oscillations n'est pas évidente. On peut supposer raisonnablement qu'il y a deux sources à "ce bruit": la méthode par pénalisation (voir la partie concernant le contact) gérant l'interaction particule/structure ou la compressibilité trop importante liée à la modélisation SPH ou encore une conjugaison de ces deux effets. L'hypothèse d'incompressibilité peut être imposée suivant différentes méthodes [Monaghan, 1994], [Cummins and Rudman, 1999], [Shao and Lo, 2003]. L'inconvénient de l'approche est le coût CPU. Le nombre de particules doit être suffisamment grand pour répondre à la précision requise. Pour le modèle de Fig.2.10, le temps de calcul est d'environ 15 heures sur un pentium III de 1GHz (avec 512Mo de RAM) pour un plan de 57800 particules. Un modèle 3D d'une carène tom-

bant dans l'eau demanderait un temps de calcul très important et exigerait des ordinateurs puissants (nous verrons que dans le cadre de cette thèse, un cluster (grappe d'ordinateurs) a été créé pour répondre aux exigences des modèles 3D). La méthode VOF peut être une alternative moins coûteuse.

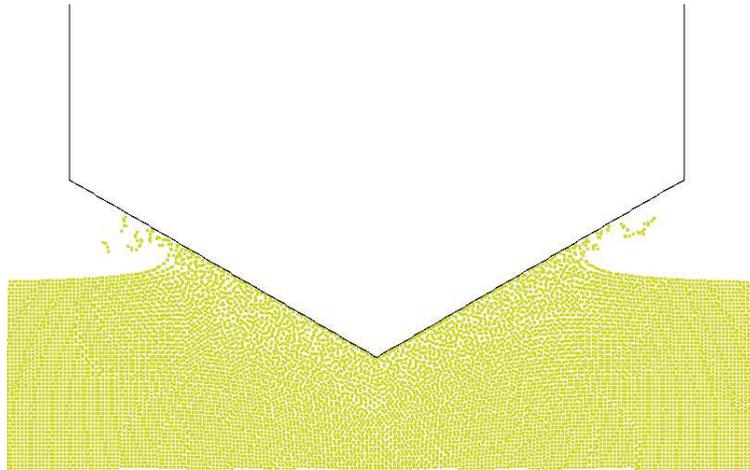


FIG. 2.10 – *Modélisation SPH, [Gallet,2001]*

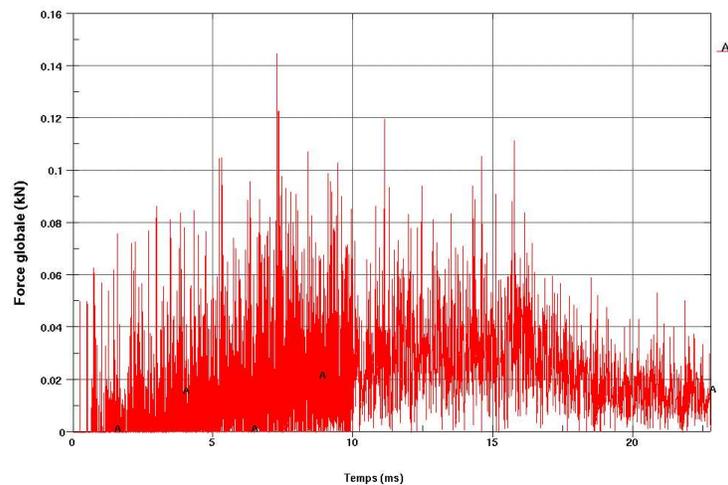


FIG. 2.11 – *Evolution de la force verticale globale, [Gallet,2001]*

2.2.4 Méthode VOF

Cette méthode a été introduite la première fois par Hirt et Nichols [Nichols and Hirt, 1981] dans un code appelé SOLA-VOF pour traquer les interfaces matérielles dans une grille Eulerienne. La méthode est liée à la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes par

un schéma de différences finies ou de volumes finis. Le principe du suivi d'interface est de déterminer la quantité de fluide dans chaque volume de contrôle (cellule) en évaluant une quantité appelée fraction volumique. Si cette dernière vaut 1 alors la cellule est remplie de fluide; si elle vaut 0, la cellule est soit vide, soit remplie d'un autre fluide. Les fractions volumiques comprises entre 0 et 1 déterminent la position de l'interface matérielle ou de la surface libre. En connaissant la distribution de la fraction volumique d'un fluide, il est possible de déterminer les limites physiques du domaine fluide dans un maillage. Pour cela, Young [Youngs, 1982] propose une technique pour calculer précisément la position de l'interface dans une cellule en utilisant les fractions volumiques des cellules voisines. La méthode VOF a les trois caractéristiques nécessaires à une technique de suivi des interfaces matérielles: un schéma localisant l'interface, un algorithme déterminant précisément la position de l'interface dans le maillage et un algorithme appliquant les conditions aux limites sur cette frontière. La méthode ne sera pas détaillée dans cette partie puisqu'elle est employée dans cette thèse. Elle fera l'objet d'un paragraphe dans le second chapitre. Des prédictions numériques de chargements de tossage sur un dièdre ont été menées en utilisant des techniques CFD reposant sur des formulations en différences finies ou en volumes finis pour la discrétisation des équations de l'écoulement et sur des schémas VOF pour capturer la surface libre. Pour les auteurs qui suivent, aucun algorithme de couplage n'a été employé, seules des conditions de contact sur une des frontières du domaine fluide représentaient le solide. Arai et al. [Arai et al., 1994] utilisèrent la méthode des différences finies pour la discrétisation des équations d'Euler et la méthode VOF afin d'obtenir les pressions de chargement sur des sections 2D en supposant une vitesse d'entrée constante. Ils obtinrent des tendances favorables mais les pressions ne corrélaient pas très bien les résultats des drop tests. Ces différences sont probablement liées à la variation des vitesses d'impact qui n'est pas prise en compte dans le modèle numérique. Sames et al. [Schellin et al., 1999] et Muzaferija et al. [Muzaferija et al., 1999] employèrent une formulation en volumes finis pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes et un schéma HRIC (High Resolution Interface Capturing) pour traquer la surface libre afin de prédire les chargements hydrodynamiques sur des sections 2D en appliquant des vitesses d'entrée évoluant avec la chute. Sames et al. conclurent que l'évolution des vitesses imposées affectait la détermination des niveaux de pressions. Muzaferija et al. obtinrent des pressions de chargement sur des sections diédriques en prenant en compte les effets 3D pour corrélérer raisonnablement les résultats expérimentaux de Zhao et al. [Zhao et al., 1996]. Varyani et Gatiganti, [Varyani et al., 2000]

et [Gatiganti et al., 1999] développèrent une méthode semblable aux auteurs précédents. Reddy et al. [Reddy et al., 2002] présentèrent une étude numérique des techniques CFD et de la méthode VOF pour des sections en forme de V entrant dans l'eau. Ils mirent en évidence plusieurs facteurs affectant les évolutions de chargement recherchées: la taille du domaine fluide, la variation de la vitesse d'entrée, les effets 3D. Les résultats numériques en tenant compte de cette étude corrôlaient correctement les résultats expérimentaux.

Comme pour les méthodes précédentes modélisant l'écoulement du fluide, dans certains articles, la méthode VOF a été couplée avec une formulation éléments finis pour la structure pour traiter des problèmes d'interactions fluide-structure. Dans les années 90, la modélisation par éléments finis connut une avancée intéressante: le fluide et la structure étaient couplés dans un même modèle volumes finis / éléments finis, on parle aussi de couplage Euler/Lagrange. Cette innovation permettait de résoudre des problèmes 3D complexes impliquant la déformation de la structure, une évolution fortement non linéaire du fluide, la compressibilité de ce dernier, l'effet "coussin d'air",... Des problèmes industriels complexes pouvaient être ainsi traités dans leur totalité ce qui n'aurait pas pu être le cas en utilisant les méthodes précédentes. Anghilleri et Spizzica [Anghileri and Spizzica, 1995] modélisèrent l'impact sur l'eau d'une sphère déformable par le code MSC-Dytran dans lequel est implémenté le couplage Euler/Lagrange et ils validèrent le modèle en comparant l'accélération de cette sphère avec les résultats expérimentaux. Ils mirent en évidence l'efficacité de l'approche en modélisant une large gamme d'impacts pour lesquels les géométries, les vitesses et les angles d'impact différaient. Candy, Kirk et Murrel [Candy et al., 2000] analysèrent le crash en mer d'un hélicoptère en utilisant le code LS-DYNA3D [Hallquist, 1998], un code d'éléments finis explicite incluant aussi le module de couplage Euler/Lagrange. La validation du modèle fut difficile puisque aucune donnée expérimentale n'existait. Néanmoins, les premiers résultats montraient le potentiel de la méthode. Dans le cadre du projet SEAWORTH, Dambra et al. [Dambra et al., 2000] appliquèrent le code MSC-Dytran à un problème d'impact sur un plan d'eau d'une plaque déformable à faible incidence en prenant en compte l'effet de l'air emprisonné. En comparant avec les résultats de drop test, ils obtinrent de bonnes corrôlations pour des angles d'incidence inférieurs à 2° . Souli et Olovsson [Souli and Olovsson, 2003] présentèrent quelques applications industrielles illustrant les possibilités du couplage Euler/Lagrange: l'impact d'oiseaux sur un fuselage d'un Jet, le gonflement d'un airbag,... Actuellement, l'engouement pour cette approche est tel que des projets ambitieux sont montés comme le développement au Canada d'un laboratoire virtuel

de dynamique maritime basé sur plusieurs codes ANSYS, LS-DYNA, ICE-FOR, GEDAP, [Derradji-Aouat, 2002]. Le concept est de modéliser complètement les manœuvres d'un navire et tous les scénarios possibles.

Cependant, des validations doivent encore être menées pour atteindre de tels objectifs car tous les cas d'impacts ne donnent pas des résultats indiscutables. Ainsi, dans [Clarke and Shen,], la modélisation de la chute d'un dièdre dans l'eau avec le module de couplage de MSC-Dytran montre que les pressions exercées sur ce dièdre à 15° sont perturbées par des pics. De la même manière, dans le rapport [Couty, 2002], de fortes oscillations perturbent aussi la force exercée sur un dièdre à 30° chutant dans l'eau.

Ces perturbations sont liées au couplage Euler/Lagrange. Cet algorithme sera présenté dans le prochain chapitre. Le principe de l'algorithme est identique à la méthode par pénalisation décrit dans le paragraphe 2.2.1 pour le contact en éléments finis. On verra, dans les chapitres suivants, comment améliorer l'algorithme de couplage pour éviter que les courbes d'effort d'interaction entre le dièdre et le fluide ne soient "bruitées".

2.3 Conclusions et contributions de la thèse

Ce chapitre a été consacré à une revue (non exhaustive) des théories et des méthodes numériques permettant de résoudre le problème d'impact d'un dièdre rigide sur un plan d'eau en se limitant aux hypothèses posées dans l'introduction. Nous avons vu que certaines approches pouvaient dépasser ces hypothèses pour modéliser des cas plus complexes. Dans les méthodes théoriques, deux écoles sont mises en évidence: la méthode des développements asymptotiques raccordés et la méthode des similitudes. Alors que l'approche asymptotique offre des ouvertures pour des développements plus élaborées, notamment en éléments finis dans [Donguy, 2002], la théorie des similitudes repose sur des hypothèses restrictives qui laissent peu de place à des extensions de l'approche à des cas plus complexes. Les limites théoriques des deux méthodes nous ont poussé à nous intéresser aux approches numériques. Les algorithmes de contact en éléments finis permettent de traiter des impacts hydrodynamiques de dièdres pour des déformations modérées c'est à dire dans les premiers instants du calcul. Au-delà, un jet se forme et comme les mailles suivent les déformations du fluide, les distorsions qui s'en suivent limitent la validité et la durée du calcul. D'autres solutions pour traiter l'écoulement du fluide voient le jour et elles sont couplées à une formulation en

éléments finis pour la structure. La méthode des éléments frontières testée et validée pour de nombreuses applications impliquant la génération de houle a un avantage certain sur les formulations classiques: seules les frontières du domaine fluide sont maillées. Cependant, le fluide doit satisfaire l'équation de Laplace à savoir l'hypothèse d'incompressibilité. Pour de faibles angles d'incidence, la compressibilité du fluide dans les premiers instants de l'impact doit avoir un effet sur la force d'interaction entre le dièdre et l'eau qui n'est pas pris en compte par cette méthode. La méthode particulière de type SPH apporte une solution pratique dans le suivi de la surface libre et elle peut aisément traiter des cas complexes. Néanmoins, le coût CPU d'un modèle SPH est important surtout si on s'intéresse à des cas 3D. La méthode VOF associée à une formulation en volumes finis ou en différences finies est une alternative moins coûteuse puisque, par contrôle de volume, seule la fraction volumique est mise en mémoire. Elle permet de traiter des problèmes multiphasiques 3D complexes. Le couplage d'une formulation éléments finis pour la structure et d'une méthode volumes finis + VOF pour le fluide permet de modéliser complètement des problèmes industriels complexes jusqu'alors inaccessibles. Néanmoins, les codes explicites proposant cet avantage exigent encore des efforts de développements et de validations pour qu'ils soient optimaux.

La méthode de couplage Euler / Lagrange reposant sur la méthode par pénalisation est sujet à cet effort car les forces d'interaction évaluées par cette méthode pour un impact entre une structure quelconque et l'eau ne sont pas encore satisfaisantes. Le but de cette thèse est donc d'apporter des développements au module de couplage afin d'améliorer l'évolution des efforts d'interaction.

Les contributions de cette thèse sont les suivantes:

- Introduction d'un effet dissipatif dans la méthode de couplage.

La méthode de couplage repose sur une méthode par pénalisation. L'algorithme par pénalisation est amorcé dès qu'une masse fluide pénètre la structure. Une force de rappel est alors appliquée sur la masse fluide et sur la masse structure. L'effet de l'algorithme peut être représenté par un ressort liant la masse fluide et la masse structure. L'idée est de compléter ce schéma par un amortissement pour limiter les oscillations de ce ressort.

- Etude systématique des raideurs par pénalisation pour différents cas d'impacts hydrodynamiques de dièdres.

Précédemment, nous avons évoqué le fait que l'algorithme de couplage pouvait être représenté par un ressort. La raideur de ce ressort n'est pas un problème évident et cette raideur

change suivant le problème traité puisqu'elle dépend des efforts d'interaction recherchés (le problème du "serpent qui se mord la queue"). Néanmoins, on donnera une méthode permettant de déterminer la valeur d'un ressort pour un angle de dièdre donné. L'extension de cette approche à des corps quelconques reste encore un problème ouvert.

- Algorithme d'initialisation des fractions volumiques.

On a vu que la méthode VOF reposait sur l'évaluation des fractions volumiques. Cependant, il faut pouvoir déterminer la répartition initiale des fractions volumiques autour de structures quelconques. Nous verrons qu'un algorithme a été développé permettant de construire un maillage pour plusieurs fluides en contact avec des structures complexes.

- Développement d'un cluster de processeurs.

Les calculs 3D exigent des temps de calcul très long. En regroupant des processeurs, un cluster a été créé permettant les calculs parallèles en MPI (Messag Passing Interface). Les temps de calcul se trouvent alors réduits en fonction du nombre de processeurs utilisés.

Chapitre 3

Formulation Euler-Lagrange d'un problème d'interaction fluide-structure

Dans le premier volet de ce chapitre, une formulation Lagrangienne est développée pour calculer les champs de la structure. Elle est basée sur une approche variationnelle en éléments finis des équations du mouvement. La conservation de la masse est automatiquement satisfaite (elle se résume à une équation algébrique) car l'une des caractéristiques des contrôles de volume Lagrangiens est de se déformer avec le matériau modélisé de manière à ce que chaque particule matérielle initialement présente dans la maille reste dans cette maille au cours du temps. Si cette formulation était employée pour modéliser l'écoulement d'un fluide, les mailles Lagrangiennes se distordraient dans les zones à fort gradient de vitesses. La méthode d'intégration en temps étant explicite, le pas de temps chuterait puisqu'il est lié à la taille des mailles par la condition CFL (Courant Friedrich Levy). Un remaillage coûteux devrait être alors employé pour préserver le pas du calcul. Pour éviter cette difficulté, une formulation Eulérienne est employée pour modéliser le fluide. Elle est basée sur une méthode "split" chargée de décomposer le pas de calcul en deux cycles:

- Dans le premier cycle du calcul (cycle Lagrangien), une méthode en éléments finis détermine les champs inconnus du problème. Ce cycle s'apparente à un calcul Lagrangien et le maillage se déforme avec le fluide.
- Dans le deuxième cycle (cycle d'advection), le maillage est remis à sa position initiale et une méthode en volumes finis projette les champs physiques sur la position initiale.

L'approche est, en fait, un cas particulier de la formulation ALE pour laquelle le maillage, au cours du second cycle, peut être placé à une position arbitraire. Dans le cadre de cette thèse, la formulation Eulérienne ou ALE a la particularité de pouvoir modéliser l'écoulement d'une surface libre. Ces formulations multi-matériaux peuvent ainsi simuler l'écoulement de plusieurs fluides et elles seront l'objet d'un second paragraphe. Finalement, l'impact hydrodynamique implique une interaction entre le fluide et la structure, donc un couplage entre la formulation Eulérienne ou ALE et la formulation Lagrangienne. Dans un dernier paragraphe, l'algorithme de couplage sera décrit en précisant deux approches: une méthode par pénalisation et une autre basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

3.1 Formulation Lagrangienne pour la structure

Les formulations Lagrangiennes sont souvent utilisées en mécanique des structures. En effet, les nœuds et les éléments d'un maillage Lagrangien suivent les mouvements du matériau modélisé de manière à ce que les frontières matérielles restent coïncidentes avec les frontières des éléments. Ainsi, si le matériau se déforme fortement, les mailles sont soumises à des distorsions. Les déformations d'une structure sont, en général, suffisamment raisonnables pour que le maillage Lagrangien reste régulier. De plus, comme les points de quadrature se déplacent aussi avec le domaine physique, les équations constitutives sont toujours aisément évaluées aux mêmes points matériels. Les conditions aux limites sont aussi facilement imposées puisque les frontières du maillage traquent les limites du domaine physique (ici la structure) pendant le calcul. Pour ces raisons, les formulations Lagrangiennes sont très appréciées en calcul des structures. Ces formulations sont classées en deux familles : celles qui sont mises à jour et les formulations totales. Les premières résolvent le problème de la structure dans la configuration courante : on calcule les inconnues à l'instant $t + \Delta t$ (les champs de déplacements, de vitesses,...) à partir de leur valeur à l'instant t . Dans la deuxième formulation, la résolution du problème se fait dans la configuration courante : à chaque instant du calcul, les inconnues sont déterminées à partir de leur valeur initiale (à $t = 0$). On s'intéressera à la formulation Lagrangienne mise à jour et dans la suite, pour y faire référence, on parlera simplement de "formulation Lagrangienne". Les inconnues dépendent du temps et des coordonnées matérielles ou Lagrangiennes qui définissent, en fait, les coordonnées de la configuration initiale. Les dérivées sont, par contre, fonctions du

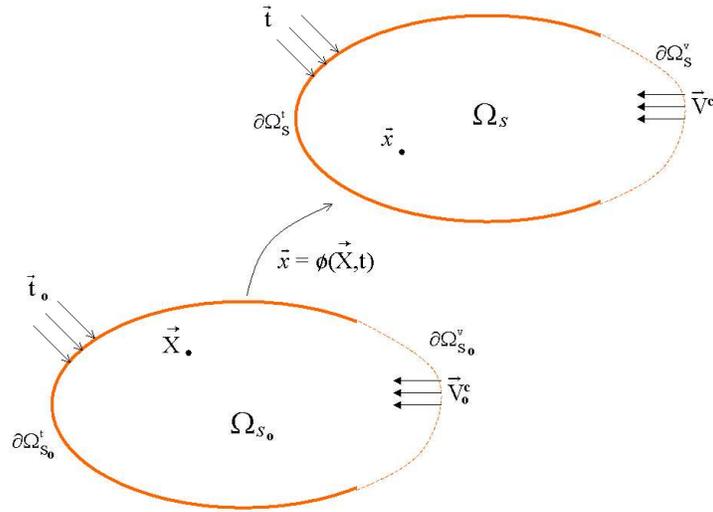


FIG. 3.1 – Structure dans la configuration initiale et courante

temps et des coordonnées spatiales ou Eulériennes qui sont les coordonnées de la configuration déformée ou courante. La mesure des déformations est le tenseur taux de déformations et les contraintes sont évaluées par le tenseur de Cauchy. Une forme forte des équations gouvernant le mouvement de la structure sera d'abord établie. Ensuite, le principe des puissances virtuelles permettra d'écrire une forme faible sur la configuration déformée. Cette intégrale sera discrétisée par des éléments quadrangles de type Belytschko-Tsay.

3.1.1 Forme forte

A l'instant $t = 0$, la structure occupe un domaine Ω_{s_0} de frontière $\partial\Omega_{s_0}$. Le mouvement de la structure ϕ transforme, à l'instant t , ce domaine dans la configuration Ω_s avec une frontière $\partial\Omega_s$ (voir Fig.3.1). Les transferts d'énergie ne sont pas pris en compte. Les équations gouvernant le comportement de la structure sont données sous la forme suivante.

- Conservation de la masse :

$$\rho(\vec{X}, t) J(\vec{X}, t) = \rho_o(\vec{X}) J_o(\vec{X}) = \rho_o(\vec{X}) \quad (3.1)$$

où ρ est la masse volumique, J le jacobien de la transformation ϕ . \vec{X} est la coordonnée de la configuration initiale (on parle aussi de coordonnées Lagrangiennes ou matérielles). Les indices "o" du second membre indiquent que les quantités précédentes sont prises à $t = 0$. Puisque le maillage Lagrangien se déforme avec le matériau de manière à ce qu'il n'y ait

aucun flux entre les éléments, la conservation de la masse est automatiquement vérifiée par à une équation algébrique qui est aisément résolue.

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad \text{sur } \Omega_s \quad (3.2)$$

où $i, j = 1, 2, 3$, D/Dt représente la dérivée matérielle, v_i , les composantes de la vitesse et x_j celles de la coordonnée de la configuration courante (on parle aussi de coordonnées Eulériennes ou spatiales). σ est le tenseur de contrainte de Cauchy. b_i représente les composantes de la force de volume (gravité).

- Equation constitutive : Loi hypoélastique

$$\frac{D\hat{\sigma}_{ij}}{Dt} = C_{ijkl} \hat{d}_{kl} \quad (3.3)$$

où $i, j, k, l = 1, 2, 3$, $\hat{\sigma}$ et \hat{d} représentent, respectivement, les tenseurs de contrainte de Cauchy et taux de déformations exprimés dans le repère local de l'élément aux points de quadrature (On parle aussi de repère corotationnel). C_{ijkl} est le tenseur du 4ieme ordre des modules élastiques. Les composantes d'un vecteur $v\vec{e}_c$ dans le système corotationnel sont liées aux composantes globales par la relation suivante :

$$v\vec{e}_c = \mathbf{R} v\hat{\vec{e}}_c \quad (3.4)$$

où \mathbf{R} est la matrice de transformation orthogonale passant du repère corotationnel au repère global. D'une manière générale, les indices "chapeau" indiqueront les composantes exprimées dans le repère local de l'élément. Pour la contrainte de Cauchy, on a la relation suivante:

$$\sigma = \mathbf{R} \hat{\sigma} \mathbf{R}^T \quad (3.5)$$

On peut remarquer que la contrainte corotationnelle est objective: elle ne dépend pas du repère considéré.

- Taux de déformation:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

On peut s'assurer que le taux de déformation est bien nul pour une rotation rigide afin d'éviter une modification anormale de la contrainte due à une transformation rigide. Il suffit de remplacer dans Eq.(3.6) la vitesse par la relation suivante:

$$v_i = W_{ij}x_j \quad \text{avec } i,j = 1,2,3 \quad (3.7)$$

où W_{ij} est une matrice anti-symétrique.

- Conditions aux limites:

$$n_j \sigma_{ji} = t_i \quad \text{sur } \partial\Omega_s^t \quad (3.8)$$

et

$$v_i = v_i^c \quad \text{sur } \partial\Omega_s^v \quad (3.9)$$

où $i,j = 1,2,3$, \vec{t} est la traction imposée sur la frontière $\partial\Omega_s^t$ et \vec{v}^c , la vitesse imposée sur la frontière $\partial\Omega_s^v$. Les deux frontières précédentes sont complémentaires comme le précise Fig.3.1. Les efforts de couplage sont appliqués sur la frontière $\partial\Omega_s^t$.

- Conditions initiales:

$$\vec{v}(\vec{X},0) = \vec{v}_0(\vec{X}) \quad (3.10)$$

et

$$\sigma_{ij}(\vec{X},0) = \sigma_{ij0}(\vec{X}) \quad \text{avec } i,j = 1,2,3 \quad (3.11)$$

3.1.2 Forme faible

Le principe des puissances virtuelles est appliqué pour développer une forme faible de Eq.(3.2) et Eq.(3.8). Pour cela, nous définissons l'espace des fonctions tests (ou l'espace des vitesses cinématiquement admissibles à 0) U_o et celui des vitesses cinématiquement admissibles U :

$$\delta v_i(\vec{X}) \in U_o, \quad U_o = \{ \delta v_i | \delta v_i \in H^1, \delta v_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_s^v \} \quad (3.12)$$

et

$$v_i(\vec{X},t) \in U, \quad U = \{ v_i | v_i \in H^1, v_i = v_i^c \quad \text{sur } \partial\Omega_s^v \} \quad (3.13)$$

H^1 désigne l'espace de Sobolev de degré 1. On peut remarquer que les espaces U_o et U sont identiques à cela près que les vitesses tests s'annulent là où les vitesses de U sont imposées. La forme faible est obtenue en multipliant Eq.(3.2) par une fonction test δv_i et d'intégrer ce produit sur la configuration courante:

$$\int_{\Omega_s} \delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Cette intégrale est exprimée en fonction des coordonnées x_i . Néanmoins, pour l'implémentation, l'intégrant n'a pas à être formulé en fonction de x_i . La technique standard en éléments finis consiste à exprimer les variables en fonction des coordonnées de l'élément, qui sont parfois appelées "coordonnées parentes" ou "coordonnées naturelles" (voir Fig.3.2). En utilisant ces coordonnées, nous pouvons toujours exprimer une variable en fonction des coordonnées courantes ou des coordonnées initiales. Le premier terme dans Eq.(3.14) peut être développé sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\delta v_i \sigma_{ji})}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} \right] d\Omega \quad (3.15)$$

Le théorème de Gauss implique que le premier terme du second membre de Eq.(3.15) se réduit à une intégrale sur $\partial\Omega_s^t$ car les fonctions tests sont nulles sur le complémentaire de cette frontière: $\partial\Omega_s^v$. On a l'égalité suivante:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i \sigma_{ji})}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega_s^t} \delta v_i t_i d\partial\Omega \quad (3.16)$$

En substituant Eq.(3.15) et Eq.(3.16) dans Eq.(3.14), on obtient la forme faible suivante:

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega_s} \delta v_i \rho b_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_s^t} \delta v_i t_i d\partial\Omega + \int_{\Omega_s} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

Pour discrétiser Eq.(3.17), des éléments quadrilatéraux à un point d'intégration sont utilisés pour leur efficacité et pour éliminer le locking. Les modes à énergie nulle sont contrôlés avec une viscosité de hourglass. Le pas de temps de calcul est résumé ci-dessous:

- 1) Connaissant les forces de hourglass et le champ de contraintes à l'instant t^n dans chaque élément, les forces nodales sont calculées. Les accélérations des nœuds sont déterminées en divisant les forces nodales par les masses nodales.
- 2) Les accélérations nodales sont intégrées pour fournir le champ de vitesses à l'instant $t^{n+1/2}$

- 3) Les nouvelles positions des nœuds à l'instant t^{n+1} sont déterminées par l'intégration des vitesses.
- 4) Les contraintes sont calculées à partir des vitesses précédentes et l'équation constitutive est intégrée de t^n à t^{n+1} pour donner les forces internes.
- 5) Les forces de houghlass ajoutées aux forces internes sont calculées à partir du champ de vitesses à $t^{n+1/2}$
- 6) Le pas de temps est déterminé en se basant sur la vitesse du son et de la géométrie de l'élément quadrangle.
- 7) Retour à 1) pour avancer le calcul d'un pas de temps

Les étapes 1) à 3) avec 6) sont détaillées dans le paragraphe consacré à la discrétisation de la forme faible Eq.(3.17). Les étapes 4) et 5) dépendent de l'élément quadrangle pris pour intégrer les contraintes et déterminer les forces nodales internes. Ces étapes sont décrites dans un paragraphe suivant dans lequel les éléments de Belytschko-Lin-Tsay seront considérés.

3.1.3 Discrétisation en éléments quadrangles: Calcul des grandeurs cinématiques

Le domaine Ω_s est décomposé en éléments de coque quadrangles Ω_s^e (éléments à 4 nœuds comme le montre Fig.3.2). Les coordonnées nodales dans la configuration courante sont notées $x_{iI}, I = 1, \dots, 4$. L'indice "i" indique la composante tandis que l'indice "I" donne le numéro du nœud.

Les fonctions de forme bilinéaire sont données par:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.18)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.19)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.20)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.21)$$

La fonction test est approximée par:

$$\delta v_i(\vec{X}) = \delta v_{iI} N_I(\vec{X}) \quad (3.22)$$

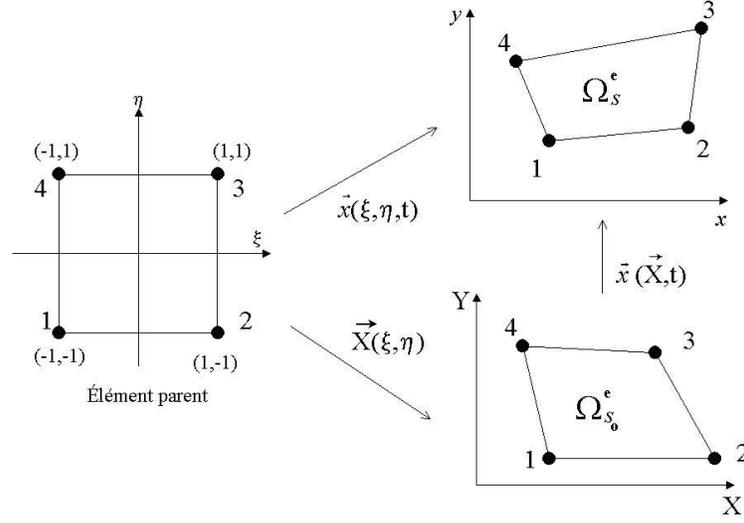


FIG. 3.2 – *Eléments quadrangles dans la configuration initiale et courante et l'élément parent associé*

En substituant cette dernière équation dans Eq.(3.17), on obtient la discrétisation suivante:

$$\sum_e \left[\delta v_{iI} \int_{\Omega_s^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\Omega_s^e} N_I \rho b_i d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\partial\Omega_s^e} N_I t_i d\partial\Omega + \delta v_{iI} \int_{\Omega_s^e} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega \right] = 0 \quad (3.23)$$

En utilisant le fait que la vitesse test est arbitraire dans Ω_s^e sauf sur $\partial\Omega_s^{ev}$, la forme faible devient:

$$\forall (i, I) \notin \partial\Omega_s^{ev}, \quad \int_{\Omega_s^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega_s^e} N_I \rho b_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_s^{et}} N_I t_i d\partial\Omega + \int_{\Omega_s^e} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Le premier terme de Eq.(3.24) est l'expression standard des forces nodales internes (et moments nodaux):

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega_s^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (3.25)$$

L'évaluation de ces forces dans le repère corotationnel impose que:

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{x}_k} R_{jk} \quad (3.26)$$

ce qui s'écrit encore:

$$N_{I, \vec{x}} = R N_{I, \hat{x}} = R \hat{B}_I \quad (3.27)$$

où \mathbf{R} est la matrice orthogonale de Eq.(3.4). En utilisant Eq.(3.5) et Eq.(3.27) dans le transposé de Eq.(3.25), on obtient l'expression suivante:

$$\vec{f}_I^{intT} = \int_{\Omega_s^e} \hat{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R}^T d\Omega \quad (3.28)$$

Comme \mathbf{R} est orthogonale:

$$\vec{f}_I^{intT} = \int_{\Omega_s^e} \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R}^T d\Omega \quad (3.29)$$

En posant $\hat{\vec{f}}_I$ comme étant les forces nodales internes dans le repère local, Eq.(3.29) devient:

$$\vec{f}_I^{int} = \mathbf{R} \hat{\vec{f}}_I \quad (3.30)$$

avec

$$\vec{f}_I^{intT} = \int_{\Omega_s^e} \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega \quad (3.31)$$

Les forces nodales de Eq.(3.31) sont intégrées sur le domaine parent et sur l'épaisseur de l'élément suivant \hat{z} :

$$\vec{f}_I^{intT} = \int_{\Omega_s^e} \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} J_{\xi} d\xi d\eta d\hat{z} \quad (3.32)$$

avec

$$J_{\xi} = \frac{1}{8} (\hat{x}_{24} \hat{y}_{31} + \hat{x}_{31} \hat{y}_{42} + (\hat{x}_{21} \hat{y}_{34} + \hat{x}_{34} \hat{y}_{12}) \xi + (\hat{x}_{14} \hat{y}_{32} + \hat{x}_{32} \hat{y}_{41}) \eta) \quad (3.33)$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$ et $y_{ij} = y_i - y_j$. En $\xi = 0$ et $\eta = 0$ de l'élément parent (voir Fig.3.2), le jacobien donne:

$$J_{\xi} = \frac{A}{4} \quad (3.34)$$

où A est l'aire de l'élément quadrangle. Les forces externes constituées des 2ieme et 3ieme termes de Eq.(3.24) sont intégrées sur l'élément parent de la même manière. En sachant que $\dot{v}_i = N_J \dot{v}_{iJ}$, les forces d'inertie (4ieme terme de Eq.(3.24)) donne la matrice masse suivante:

$$M_{ijIJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega_s^e} \rho N_I N_J d\Omega = \delta_{ij} \tilde{M}_{IJ} \quad (3.35)$$

L'équation Eq.(3.24) prend la forme condensée suivante:

$$\delta_{ij} \tilde{M}_{IJ} \dot{v}_{jJ} + f_{iI}^{int} = f_{iI}^{ext} \quad (3.36)$$

On peut remarquer que la matrice masse ne dépend pas du temps dans une formulation Lagrangienne. En effet, d'après Eq.(3.1), on a la propriété suivante:

$$\tilde{M}_{IJ} = \int_{\Omega_s^e} \rho N_I N_J d\Omega = \int_{\Omega_s^e} \rho N_I N_J J d\Omega_o = \int_{\Omega_s^e} \rho_o N_I N_J d\Omega_o \quad (3.37)$$

Il est nécessaire d'évaluer la matrice masse qu'une seule fois au début du calcul. Dans un calcul explicite, il est intéressant et avantageux de diagonaliser la matrice masse pour limiter les coûts CPU dans la détermination des accélérations. La technique "row-sum" somme les termes d'une ligne de la matrice pour estimer le terme sur la diagonale correspondante:

$$\tilde{M}_{II} = \sum_{J=1}^4 \int_{\Omega_s^e} \rho_o N_I N_J d\Omega_o = \int_{\Omega_s^e} \rho_o N_I \sum_{J=1}^4 N_J d\Omega_o = \int_{\Omega_s^e} \rho_o N_I d\Omega_o \quad (3.38)$$

Les intégrales des forces nodales et des autres matrices élémentaires telles que la matrice masse sont déterminées pour un point de quadrature de Gauss centré en $\xi = 0$ et $\eta = 0$. La masse nodale est alors simplement donnée par:

$$\tilde{M}_{II} = \frac{1}{4} \rho_o A_o \text{epais}_o \quad (3.39)$$

où A_o et epais_o sont l'aire initiale et l'épaisseur initiale de l'élément. Les accélérations d'un nœud I à l'instant t^n sont alors aisément obtenues de Eq.(3.36):

$$\dot{v}_{iI}^n = \frac{(f_{iI}^{ext})^n - (f_{iI}^{int})^n}{\tilde{M}_{II}} \quad (3.40)$$

De là, un schéma d'intégration sur le pas de temps Δt , en différences finies centrées permet de déduire la vitesse nodale à l'instant $t^{n+1/2}$ et la nouvelle position du nœud I à l'instant t^{n+1} :

$$v_{iI}^{n+1/2} = v_{iI}^{n-1/2} + \dot{v}_{iI}^n \Delta t \quad (3.41)$$

$$x_{iI}^{n+1} = x_{iI}^{n-1} + v_{iI}^{n+1/2} \Delta t \quad (3.42)$$

Pour les éléments coques, le pas de temps Δt est donné par le minimum des pas de temps Δt_e calculé pour chaque élément par:

$$\Delta t_e = \frac{L}{c} \quad (3.43)$$

où L est une dimension caractéristique donnée par:

$$L = \frac{A}{\max(diag_1, diag_2)} \quad (3.44)$$

avec $diag_i$, les diagonales de l'élément et c , la vitesse du son définie par:

$$c^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)} \quad (3.45)$$

L'intégration en un point de quadrature est largement répandue dans les éléments coques à 4 nœuds. Par contre sur l'épaisseur, le nombre de points de quadrature dépend de la complexité de la réponse du matériau en flexion. Plus cette dernière sera fortement non-linéaire, plus il faudra de points de quadrature (Lobatto ou Gauss). La première coque à un point de quadrature utilisée dans les calculs explicites est l'élément de Belytschko-Lin-Tsay [Belytschko and Tsay, 1981]. Nous allons l'utiliser dans cette thèse pour modéliser la structure.

3.1.4 Les coques Belytschko-Lin-Tsay: Calcul des forces internes

Ces éléments coques à 4 nœuds sont dus aux travaux de Belytschko, Lin et Tsay [Belytschko and Tsay, 1981]. Cette formulation a été implémentée, par défaut, dans le code explicite d'éléments finis, LS-DYNA3D. Ces éléments sont basés sur une combinaison entre un système local de coordonnées dites corotationnelles et une formulation en taux de déformation.

Coordonnées corotationnelles

Le système de coordonnées corotationnelles est local à l'élément coque et suit la déformation de la coque puisque les quatre nœuds sont utilisés dans la définition de ce repère local. Le premier vecteur unitaire du repère local est calculé à partir du produit vectoriel des vecteurs formant les 2 diagonales du quadrilatère (voir Fig.3.3). La relation Eq.(3.46) définissant ce vecteur unitaire est donnée ci-dessous :

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|} \quad (3.46)$$

$$|\vec{s}_3| = \sqrt{s_{31}^2 + s_{32}^2 + s_{33}^2} \quad (3.47)$$

$$\vec{s}_3 = \vec{r}_{31} \wedge \vec{r}_{42} \quad (3.48)$$

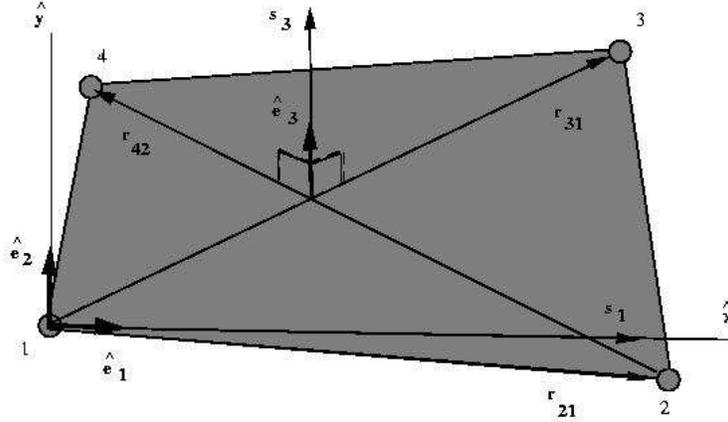


FIG. 3.3 – Schéma du système de coordonnées locales corotationnelles, (Hallquist, 1998)

Si on regarde le schéma de Fig.3.3, on remarque que le second vecteur unitaire \vec{e}_1 est presque parallèle à \vec{r}_{21} car il est défini par les relations Eq.(3.49) et Eq.(3.50) ci-dessous:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|} \quad (3.49)$$

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_{21} - (\vec{r}_{21} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 \quad (3.50)$$

Le dernier vecteur est construit à partir du produit vectoriel des deux précédents:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \quad (3.51)$$

Comme l'élément se déforme, la fibre peut prendre une direction \vec{f} , différente de la direction du vecteur \vec{e}_3 . Si la condition Eq.(3.52) est réalisée pour des valeurs de δ petites, de l'ordre de 10^{-2} ce qui correspond à une grande partie des applications, on peut alors considérer que la différence entre la rotation du matériau et la rotation du système de coordonnées corotationnelles est petite. Par cette condition, les déformations hors du plan médian de l'élément sont petites: on autorise seulement un faible gauchissement de l'élément.

$$|\vec{f} \cdot \vec{e}_3 - 1| < \delta \quad (3.52)$$

Dans la suite, les indices $i=1,2,3$ de \hat{x}_i , par exemple, et les indices x,y,z représenteront la même direction. De la même manière, on aura naturellement: $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$ et $\hat{x}_3 = \hat{z}$.

Relations entre les déplacements et les taux de déformations

De part la restriction Eq.(3.52), les relations entre les déplacements et les taux de déformations sont traitées dans le cadre des petites déformations. Le déplacement de n'importe quel point de l'élément coque est décomposé en un déplacement sur le plan médian de l'élément et une rotation rigide des fibres de l'élément. La théorie de Reissner-Mindlin sur les plaques et les coques donne la vitesse d'un point de l'élément par la relation Eq.(3.53).

$$\vec{v} = v^m \vec{e}_3 - \hat{z} \vec{e}_3 \wedge \vec{\theta} \quad (3.53)$$

Les taux de déformations dans le repère corotationnel sont donnés par Eq.(3.54).

$$\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \quad (3.54)$$

En remplaçant Eq.(3.53) dans cette dernière, on obtient les relations suivantes:

$$\hat{d}_x = \frac{\partial \hat{v}_x^m}{\partial \hat{x}} + \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial \hat{x}} \quad (3.55)$$

$$\hat{d}_y = \frac{\partial \hat{v}_y^m}{\partial \hat{y}} - \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial \hat{y}} \quad (3.56)$$

$$2\hat{d}_{xy} = \frac{\partial \hat{v}_x^m}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_y^m}{\partial \hat{x}} + \hat{z} \left(\frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial \hat{x}} \right) \quad (3.57)$$

$$2\hat{d}_{yz} = \frac{\partial \hat{v}_z^m}{\partial \hat{y}} + \hat{\theta}_x \quad (3.58)$$

$$2\hat{d}_{xz} = \frac{\partial \hat{v}_z^m}{\partial \hat{x}} + \hat{\theta}_y \quad (3.59)$$

On approxime les relations ci-dessus aux points de quadrature de la surface médiane de l'élément. Pour cela, une interpolation bilinéaire de la vitesse, de la vitesse angulaire et des coordonnées est donnée par les relations suivantes en utilisant les relations Eq.(3.18) à Eq.(3.21):

$$v^m = N_I(\xi, \eta) v_I \quad (3.60)$$

$$\theta^m = N_I(\xi, \eta) \theta_I \quad (3.61)$$

$$x^m = N_I(\xi, \eta) x_I \quad (3.62)$$

dans lesquelles l'indice I représente un nœud de l'élément ($I = 1, \dots, 4$); les vitesses nodales sont obtenues en dérivant par rapport au temps les coordonnées x_I .

Un élément à un point de quadrature est pris, donc $\xi = 0$ et $\eta = 0$. Les taux de déformation de l'élément sont obtenus au centre de l'élément, pour $\xi = 0$ et $\eta = 0$, en substituant Eq.(3.60) et Eq.(3.61) dans les relations Eq.(3.54) à Eq.(3.59):

$$\hat{d}_x = B_{1I} \hat{v}_{xI} + \hat{z} B_{1I} \hat{\theta}_{yI} \quad (3.63)$$

$$\hat{d}_y = B_{2I} \hat{v}_{yI} + \hat{z} B_{2I} \hat{\theta}_{xI} \quad (3.64)$$

$$2\hat{d}_{xy} = B_{2I} \hat{v}_{xI} + B_{1I} \hat{v}_{yI} + \hat{z} (B_{2I} \hat{\theta}_{yI} - B_{1I} \hat{\theta}_{xI}) \quad (3.65)$$

$$2\hat{d}_{xz} = B_{1I} \hat{v}_{zI} + N_I \hat{\theta}_{yI} \quad (3.66)$$

$$2\hat{d}_{yz} = B_{2I} \hat{v}_{zI} - N_I \hat{\theta}_{xI} \quad (3.67)$$

avec

$$B_{1I} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{x}} \quad (3.68)$$

$$B_{2I} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{y}} \quad (3.69)$$

Ces fonctions de forme sont aussi évaluées au centre de l'élément pour $\xi = 0$ et $\eta = 0$.

Contraintes résultantes et forces nodales

Les contraintes résultantes sont intégrées sur l'épaisseur de l'élément pour obtenir les forces et les moments résultants locaux:

$$f^{\hat{R}}_{\alpha\beta} = \int \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z} \quad (3.70)$$

$$m^{\hat{R}}_{\alpha\beta} = - \int \hat{z} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z} \quad (3.71)$$

Les forces et les moments aux nœuds sont liés à la force et au moment au centre de l'élément par les relations Eq.(3.72) à Eq.(3.77) en utilisant un point de quadrature.

$$\hat{f}_{xI} = A(B_{1I}\hat{f}_{xx}^R + B_{2I}\hat{f}_{xy}^R) \quad (3.72)$$

$$\hat{f}_{yI} = A(B_{2I}\hat{f}_{yy}^R + B_{1I}\hat{f}_{xy}^R) \quad (3.73)$$

$$\hat{f}_{zI} = A\kappa(B_{1I}\hat{f}_{xz}^R + B_{2I}\hat{f}_{yz}^R) \quad (3.74)$$

$$\hat{m}_{xI} = A(B_{2I}m_{yy}^{\hat{R}} + B_{1I}\hat{m}_{xy}^R - \frac{\kappa}{4}\hat{f}_{yz}^R) \quad (3.75)$$

$$\hat{m}_{yI} = -A(B_{1I}\hat{m}_{xx}^R + B_{2I}\hat{m}_{xy}^R - \frac{\kappa}{4}\hat{f}_{xz}^R) \quad (3.76)$$

$$\hat{m}_{zI} = 0 \quad (3.77)$$

dans lesquelles A est l'aire de l'élément et κ est le facteur de cisaillement de la théorie de Mindlin. Dans la formulation de Belytschko-Lin-Tsay, κ est un paramètre de pénalisation permettant d'assurer la condition de normalité de Kirchhoff dès que la coque devient fine. Pour supprimer les modes de hourglass accompagnant les intégrations à 1 point de quadrature dans le plan de l'élément, un contrôle a été développé dans [Belytschko and Tsay, 1981]. Le principe est de généraliser la définition du mode de hourglass suivante:

$$h_I = (-1)^I \quad (3.78)$$

On peut montrer que B_{iI} est le covecteur de x_{iI} . En effet, on a la propriété suivante:

$$\sum_{I=1}^4 B_{iI}x_{jI} = \delta_{ij} \quad (3.79)$$

En posant $s_I = 1$ pour $I = 1, \dots, 4$, l'opérateur de stabilisation du hourglass ou le vecteur forme du hourglass généralisant la définition Eq.(3.78) est définie dans la base $(s_I, B_{1I}, B_{2I}, h_I)$:

$$\phi_I = C_1s_I + C_2B_{1I} + C_3B_{2I} + C_4h_I \quad (3.80)$$

où C_i sont des constantes. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt impose au vecteur forme du hourglass d'être orthogonal à un polynôme linéaire arbitraire en x_{iI} . ϕ_I

prend la forme suivante:

$$\phi_I = \frac{1}{4}h_I - \sum_{k=1}^4 [(h_k \hat{x}_{1k})B_{1I} + (h_k \hat{x}_{2k})B_{2I}] \quad (3.81)$$

On définit les taux de déformations de hourglass généralisés en fonction de ϕ_I suivant:

$$\dot{q}_\alpha^b = \phi_I \hat{\theta}_{\alpha I} \quad (3.82)$$

$$\dot{q}_{\hat{x}_3}^b = \phi_I v_{\hat{x}_3 I} \quad (3.83)$$

$$\dot{q}_\alpha^m = \phi_I v_{\hat{\alpha} I} \quad (3.84)$$

où les superscripts b et m désignent les taux de déformations de flexion et membranaires.

Les taux de contraintes de hourglass correspondant sont données par:

$$\dot{Q}_\alpha^b = \frac{r_\theta E \text{epais}^3 A}{192} B_{aI} B_{aI} \dot{q}_\alpha^b \quad (3.85)$$

$$\dot{Q}_{\hat{x}_3}^b = \frac{r_w \kappa G \text{epais}^3 A}{12} B_{aI} B_{aI} \dot{q}_{\hat{x}_3}^b \quad (3.86)$$

$$\dot{Q}_\alpha^m = \frac{r_m E \text{epais} A}{8} B_{aI} B_{aI} \dot{q}_\alpha^m \quad (3.87)$$

où *epais* est l'épaisseur de la coque, E le module d'Young, G le module de cisaillement. r_θ , r_w et r_m sont des paramètres généralement fixés entre 0.01 et 0.05. La contrainte de hourglass est mise à jour par l'intégration sur le pas de temps de Eq.(3.85), Eq.(3.86) et Eq.(3.87). Les forces nodales Eq.(3.72) à Eq.(3.76) sont aussi mises par jour par les contraintes de hourglass ainsi obtenues:

$$\hat{f}_{xI} = A(B_{1I} \hat{f}_{xx}^R + B_{2I} \hat{f}_{xy}^R) + \phi_I Q_x^m \quad (3.88)$$

$$\hat{f}_{yI} = A(B_{2I} \hat{f}_{yy}^R + B_{1I} \hat{f}_{xy}^R) + \phi_I Q_y^m \quad (3.89)$$

$$\hat{f}_{zI} = A\kappa(B_{1I} \hat{f}_{xz}^R + B_{2I} \hat{f}_{yz}^R) + \phi_I Q_z^b \quad (3.90)$$

$$\hat{m}_{xI} = A(B_{2I} m_{yy}^{\hat{R}} + B_{1I} \hat{m}_{xy}^R - \frac{\kappa}{4} f_{yz}^{\hat{R}}) + \phi_I Q_x^b \quad (3.91)$$

$$\hat{m}_{yI} = -A(B_{1I} \hat{m}_{xx}^R + B_{2I} \hat{m}_{xy}^R - \frac{\kappa}{4} \hat{f}_{xz}^R) + \phi_I Q_y^b \quad (3.92)$$

pour $I = 1, \dots, 4$.

Les forces nodales locales et les moments nodaux locaux sont alors transformés dans le repère globale par la matrice de passage de Eq.(3.93) tirée de l'analyse du système de coordonnées corotationnelles.

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

3.1.5 Conclusion

La formulation Lagrangienne développée dans cette partie permet de modéliser une structure à l'aide d'éléments quadrangles de type Belytschko-Lin-Tsay. Cette formulation ayant la particularité de suivre le matériau dans ses mouvements, elle est simple et précise dans la détermination d'un champ de déformation peu important. Ainsi, les mouvements d'une structure sont correctement calculés par une telle formulation. Comme les frontières du maillage coïncident avec les limites matérielles, quel que soit l'instant du calcul, la formulation Lagrangienne serait une approche simple à la simulation des milieux composés de plusieurs matériaux. Dans notre cas, la formulation devrait modéliser l'écoulement de la surface libre séparant l'air et l'eau. Cependant, au cours du calcul, l'approche Lagrangienne ne supporte pas longtemps les grandes déformations liées aux écoulements des fluides. Les déformations très importantes dans ce cas entraînent une distorsion des mailles Lagrangiennes dans les zones à fort gradient de vitesses. Cette distorsion pénalise la précision du calcul et implique aussi une chute du pas de temps puisque ce dernier est contrôlé par la condition CFL (Courant Friedrich Levy). Il est alors nécessaire d'employer une formulation en grande déformation qui soit capable de prendre en charge plusieurs fluides. L'approche Eulérienne multi-matériaux repose sur une formulation en volumes finis dont le maillage fixe est indépendant du mouvement des fluides. Cette modélisation est décrite, dans la suite, avec une formulation plus générale: la formulation ALE.

3.2 Formulation ALE et Eulérienne multi-matériaux pour le fluide

Les formulations ALE et Eulérienne multi-matériaux ont été, à l'origine, développées pour résoudre des problèmes impliquant de fortes pressions tels que des explosions (pression supérieure à 1Mbar). A de telles pressions, les contraintes déviatoriques sont souvent ignorées. De la même manière, dans cette étude, les forces visqueuses ne seront pas prises en compte. La capacité des formulations multi-matériaux à modéliser de grandes déformations matérielles et à générer de nouvelles surfaces libres permet de résoudre une large gamme de problèmes fortement non linéaires en mécanique des fluides. La formulation Eulérienne est un cas particulier de la formulation ALE. C'est pourquoi cette dernière sera l'objet d'une attention particulière dans cette partie. Une description Eulérienne d'écoulements incompressibles à été développée par Hughes et al [Hughes and Stephenson, 1981] pour résoudre des écoulements à surface libre et des problèmes d'interaction fluide-structure. Cette théorie générale est une base aux approches Lagrangiennes, Eulériennes et ALE. Les auteurs définissent trois domaines pour décrire le mouvement du fluide: un domaine spatial ou Eulérien qui correspond à la configuration courante Ω dans le précédent paragraphe, un domaine matériel ou Lagrangien correspondant à la configuration initiale Ω_0 du paragraphe 3.1 et enfin un domaine dit de référence ou ALE, Ω_{ale} , qui est un nouveau domaine où la particule est décrite par la variable χ et le temps. Ce domaine représente, en fait, le maillage. On peut remarquer que la formulation Lagrangienne est obtenue lorsque le domaine ALE est Lagrangien, c'est à dire lorsque $\Omega_0 = \Omega_{ale}$. Lorsque le domaine ALE est Ω ($\Omega_{ale} = \Omega$), la description est Eulérienne.

Nous avons vu précédemment que les variables Eulériennes (\vec{x}, t) sont exprimées en fonction des coordonnées de la configuration initiale (\vec{X}, t) :

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) \quad (3.94)$$

Cette relation injective donne en fait le mouvement du matériau. Si une quantité physique, f , est exprimée dans la configuration Eulérienne, on a la relation suivante:

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{\varphi}(\vec{X}, t), t) = f^0(\vec{X}, t) \quad (3.95)$$

La dérivée matérielle $\frac{D}{Dt}$ définie dans le paragraphe 3.1.1 est une dérivée temporelle prise

dans le repère Lagrangien:

$$\dot{f} = \frac{Df^0(\vec{X},t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f^0(\vec{X},t)}{\partial t} \right)_{\vec{X}} \quad (3.96)$$

Si on applique la dérivée matérielle à la relation Eq(3.95), on obtient la dérivation suivante:

$$\left(\frac{\partial f^0}{\partial t} \right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \varphi(\vec{X},t)}{\partial t} \right)_{\vec{X}} \cdot \frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}} \quad (3.97)$$

Avec Eq.(3.96), on a:

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \frac{D\vec{x}}{Dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f \quad (3.98)$$

$\vec{v} = \frac{D\vec{x}}{Dt}$ représente la dérivée matérielle du mouvement du fluide c'est à dire la vitesse matérielle. Si, à présent, on considère l'application injective $\vec{\psi}$ liant les coordonnées Eulériennes (\vec{x},t) et les coordonnées ALE $(\vec{\chi},t)$ (voir Eq.(3.99))

$\vec{\psi}$ représente le déplacement du domaine ALE, Ω_{ale} :

$$\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{\chi},t) \quad (3.99)$$

f s'exprime donc dans le repère ALE sous la forme suivante:

$$f(\vec{x},t) = f(\vec{\psi}(\vec{\chi},t),t) = f^{ale}(\vec{\chi},t) \quad (3.100)$$

La dérivée de $f^{ale}(\vec{\chi},t)$ prise dans le repère ALE donne:

$$\left(\frac{\partial f^{ale}(\vec{\chi},t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \psi(\vec{\chi},t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} \cdot \frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}}$$

On voit apparaître la vitesse du repère ALE: $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \psi(\vec{\chi},t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}}$ D'où:

$$\left(\frac{\partial f^{ale}(\vec{\chi},t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{v}_{ale} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \quad (3.101)$$

Si on soustrait Eq.(3.98) et Eq.(3.101), on a une relation entre la dérivée par rapport au

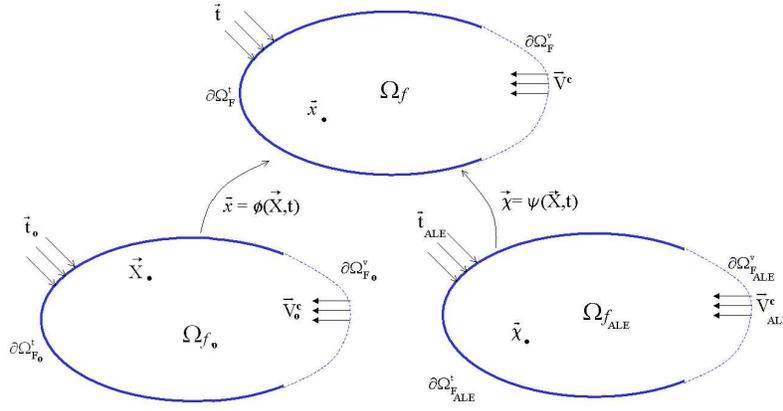


FIG. 3.4 – *Fluide dans les trois configurations*

repère ALE et la dérivée matérielle:

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} + (\vec{v} - \vec{v}_{ale}) \cdot \nabla_{\vec{x}} f \quad (3.102)$$

On note $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_{ale}$, la vitesse de convection (différence entre la vitesse du fluide et la vitesse du domaine ALE). Dans la suite, comme Ω_{ale} représente le maillage, \vec{v}_{ale} sera la vitesse du maillage.

Si $\Omega_{ale} = \Omega_0$, $\vec{\chi} = \vec{X}$ et $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t) = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$ puisque les applications sont injectives. De ce fait, $\vec{v} = \vec{v}_{ale}$ et obtient la description Lagrangienne avec une vitesse convective nulle ($\vec{w} = \vec{0}$).

Si $\Omega_{ale} = \Omega$, $\vec{\chi} = \vec{x}$ et $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \vec{\psi}(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial \vec{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}}$. Avec Eq.(3.99), $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} = \vec{0}$.

On obtient alors la description Eulérienne pour laquelle la vitesse convective est la vitesse matérielle ($\vec{w} = \vec{v}$). A présent, on écrit la formulation ALE forte des équations du mouvement pour le fluide.

3.2.1 Forme forte

- Conservation de la masse:

La dérivée matérielle de Eq.(3.1) donne la conservation de la masse pour le fluide:

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0 \quad (3.103)$$

Comme $\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \vec{v}$, on obtient:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (3.104)$$

En substituant Eq.(3.102) dans l'équation précédente, on a l'équation ALE de la conservation de la masse.

$$\left(\frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \rho = -\rho \operatorname{div} \vec{v} \quad \text{sur } \Omega_F \quad (3.105)$$

- Conservation de la quantité de mouvement:

De la même manière, la conservation de la quantité de mouvement pour le fluide dans le repère ALE est dérivée de Eq.(3.2) en substituant la relation Eq. (3.98):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{v} = \operatorname{div} \sigma + \rho \vec{b} \quad \text{sur } \Omega_F \quad (3.106)$$

- Conservation de l'énergie:

La conservation de l'énergie en ALE suit le même raisonnement que précédemment et on obtient:

$$\rho \left(\frac{\partial e^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} e = \sigma : \mathbf{grad} \vec{v} + \rho \vec{b} \cdot \vec{U} \quad (3.107)$$

- Equation constitutive: Fluide newtonien

$$\sigma_{ij} = 2\mu d_{ij}^{dev} - p\delta_{ij} \quad (3.108)$$

On peut remarquer une différence avec la loi hypoélastique utilisée pour la structure dans le paragraphe 3.1.1: la loi hypoélastique est une relation entre le taux de contrainte et le taux

de déformation, \mathbf{d} , tandis que l'équation constitutive Newtonienne est une relation linéaire entre la contrainte et \mathbf{d} . De ce fait, dans une grande rotation rigide, la contrainte suit \mathbf{d} . Comme le taux de déformation se comporte correctement pour de grandes transformations rigides, aucune précaution n'est nécessaire pour s'assurer que la contrainte est invariante dans une rotation rigide.

- Conditions aux limites :

$$n_j(\vec{\chi}, t) \sigma_{ji}(\vec{\chi}, t) = t_i(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f^t \quad (3.109)$$

et

$$v_i(\vec{\chi}, t) = v_i^c(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f^v \quad (3.110)$$

où \vec{t} est la traction imposée sur la frontière $\partial\Omega_f^t$ et \vec{v}^c , la vitesse imposée sur la frontière $\partial\Omega_f^v$. Les deux frontières précédentes sont complémentaires comme le précise Fig.3.4. Les efforts de couplage sont appliqués sur la frontière $\partial\Omega_f^t$.

- Conditions initiales:

$$\vec{v}(\vec{\chi}, 0) = \vec{v}_0(\vec{\chi}) \quad (3.111)$$

et

$$\sigma_{ij}(\vec{\chi}, 0) = \sigma_{ij0}(\vec{\chi}) \quad (3.112)$$

3.2.2 Forme faible

Il y a deux approches différentes pour mettre à jour les variables à partir des équations précédentes. La première résout ces équations en 1 seule étape en mettant en œuvre une forme faible directement à partir de la formulation forte précédente. La deuxième approche, appelée "opérateur split", sépare, dans Eq.(3.105), Eq.(3.106) et Eq.(3.107), les termes Lagrangiens des termes d'advection. Le pas de temps est divisé en deux cycles de calcul: un cycle Lagrangien qui détermine les inconnues physiques du problème et un cycle d'advection qui ramène la solution physique soit sur le domaine ALE fixe (le maillage initial fixe: $\vec{v}_{ale} = \vec{0}$) pour un cycle Eulérien, soit sur une configuration ALE mobile (maillage mobile de vitesse arbitraire \vec{v}_{ale}) dans le cas d'un calcul ALE. Le calcul Lagrangien implique que le maillage se déforme avec le fluide et peut se distordre. La seconde étape permet d'éviter

cette distorsion en déplaçant le maillage de manière à préserver la régularité de ce dernier. Le mouvement du maillage est indépendant du mouvement du fluide ce qui entraîne des flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie. Ces flux sont calculées à partir de schémas d'advections de Godunov.

Forme faible directe

Les formulations faibles de Eq.(3.105), Eq.(3.106), Eq.(3.107) et Eq.(3.109) sont données par:

$$\int_{\Omega_f} \delta\rho \frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta\rho \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega_f} \delta\rho w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.113)$$

où $\delta\rho \in H^1(\Omega_f)$ est une fonction test,

$$\int_{\Omega_f} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_f^t} \delta v_i t_i d\partial\Omega \quad (3.114)$$

où les fonctions δv_i et v_i sont définies dans le paragraphe 3.1.2,

$$\int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial e^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e \rho w_j \frac{\partial e}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e v_i \rho b_i d\Omega \quad (3.115)$$

où $\delta e \in H^1(\Omega_f)$ est une fonction test.

La formulation standard de Galerkin pose des problèmes lorsque le terme d'advection dans Eq.(3.114) est important. L'équation linéaire de l'advection-diffusion d'une grandeur g est caractéristique de ce problème:

$$\vec{v} \cdot \vec{grad}(g) = \nu \Delta(g) \quad (3.116)$$

où ν es la viscosité cinématique. La stabilité de Eq.(3.116) est liée au nombre de Péclet, Pe , de l'élément:

$$Pe = \frac{\|\vec{v}\|L}{\nu} \quad (3.117)$$

où L est une dimension caractéristique de l'élément. Une discrétisation classique de Galerkin de Eq.(3.116) montre que, si $Pe < 2$, la solution est proche de la solution exacte et si $Pe > 2$, des oscillations spatiales non physiques se superposent à la solution recherchée.

Une fonction test pour Eq.(3.114) est ajoutée à la fonction classique de manière à introduire une viscosité artificielle dans la direction de l'écoulement:

$$\delta v_i^{PG} = \delta v_i + \alpha \frac{L}{2} \frac{w_j}{\|\vec{w}\|} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \quad (3.118)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre qui peut être déterminé dans le cas 1D de Eq.(3.116) par:

$$\alpha = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (3.119)$$

Cette approche est connue sous le nom de formulation SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin). Cette méthode largement répandue a été appliquée par Brooks et Hughes [Brooks and Hughes, 1982] aux équations de Navier-Stokes en incompressible. D'autres méthodes permettent de résoudre directement Eq.(3.113), Eq.(3.114) et Eq.(3.115). La formulation GLS (Galerkin Least Square) introduite par Hughes et al. [Hughes et al., 1986] a été appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes en compressible par Shakib [Shakib, 1988] et en incompressible par Johnson et al. [Johnson and Saranem, 1986]. Cette approche est reprise par [Souli and Zolesio, 2001] pour résoudre le problème d'un fluide visqueux incompressible avec de grandes déformations de surfaces libres. Pour des écoulements dominés par la convection, Glowinski et Pironneau [Glowinski and Pironneau, 1992] appliquent avec succès une formulation de Galerkin à des écoulements incompressibles. Bien que ces méthodes soient précises devant la méthode "split", cette dernière fournit un moyen simple d'obtenir une formulation robuste et efficace.

Méthode split

La méthode split est pratique pour diviser des problèmes complexes en une série de problèmes plus simples. La division d'un calcul Eulérien ou ALE en deux phases: une phase Lagrangienne et une phase Eulérienne est une application de cette méthode. Elle est aussi fréquemment utilisée pour construire des algorithmes d'advection 2D ou 3D à partir d'algorithmes 1D. Le pas de calcul d'un écoulement par une formulation Eulérienne ou ALE basée sur un opérateur split procède par les 2 étapes suivantes:

I) La formulation faible de Eq.(3.114) peut être réécrite sous une forme Lagrangienne en uti-

lisant la relation Eq.(3.102) liant la dérivée matérielle ou Lagrangienne à la dérivée donnée dans le repère ALE:

$$\int_{\Omega_f} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_f^t} \delta v_i t_i d\partial\Omega \quad (3.120)$$

$$\int_{\Omega_f} \delta e \frac{De}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e v_i \rho b_i d\Omega \quad (3.121)$$

La conservation de la masse est une simple équation algébrique décrite dans le paragraphe 3.1.1. On retrouve naturellement dans Eq.(3.120) la forme faible donnée pour les coques dans la partie précédente (Eq.(3.17)). Des similitudes apparaissent donc dans la résolution du problème fluide dans un cycle Lagrangien et l'exécution d'un pas de calcul Lagrangien pour la structure. La solution est déterminée dans un cycle Lagrangien comprenant les sous-étapes suivantes:

- 1) Connaissant le champ de contraintes, de pression, les forces de hourglass et la viscosité de choc (voir page 68) à l'instant t^n dans chaque élément, les forces aux nœuds sont calculées. On en déduit les accélérations en divisant ces forces par la masse nodale.
- 2) Les accélérations sont intégrées pour donner les vitesses à l'instant $t^{n+1/2}$.
- 3) Les vitesses sont intégrées à leur tour pour fournir le champ de déplacements à l'instant t^{n+1} mettant ainsi à jour la position Lagrangienne du maillage.
- 4) La viscosité de choc artificielle et la viscosité de hourglass sont calculées à partir de $v^{n+1/2}$.
- 5) L'énergie interne est mise à jour.
- 6) La pression est déterminée à partir de l'équation d'état en utilisant la masse volumique et l'énergie interne par unité de volume.
- 7) Un nouveau pas de temps est calculé en se basant sur la condition CFL (Courant Friedrichs Levy).

II) La phase Eulérienne ou d'advection résout le problème hyperbolique de l'advection des grandeurs trouvées dans le cycle précédent quand le maillage est déplacé librement vis à vis du fluide. Les équations de transport sont données en considérant les formes homogènes de Eq.(3.105),Eq.(3.106) et Eq.(3.107):

$$\left(\frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \rho = 0 \quad (3.122)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \nabla_{\vec{x}} \vec{v} = 0 \quad (3.123)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \nabla e = 0 \quad (3.124)$$

Le temps t est fictif: il ne correspond pas au temps physique car les équations de transport ne gouvernent pas la convection physique du fluide. En fait, le mouvement du fluide est figé dans le repère physique et seul le maillage se déplace. Le mouvement des mailles par rapport au fluide entraîne des flux entre les mailles. Les conditions initiales sont données par les valeurs déterminées par le cycle Lagrangien:

$$\rho^{ale}(\chi, 0) = \rho_{lagrangien} \quad (3.125)$$

$$\vec{v}^{ale}(\chi, 0) = \vec{v}_{lagrangien} \quad (3.126)$$

$$e^{ale}(\chi, 0) = e_{lagrangien} \quad (3.127)$$

Ce problème est résolu par une formulation en volumes finis. Il est alors préférable de considérer la forme conservative des équations d'advection. Pour cela, on définit le jacobien de la transformation $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t)$ donné par:

$$\left(\frac{\partial J_{\psi}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} = J_{\psi} \text{div}(\vec{v}_{ale}) \quad (3.128)$$

Pour une formulation purement Eulérienne ou purement Lagrangienne, $J_{\psi} = 1$. Une combinaison linéaire permet d'obtenir les formes conservatives de Eq.(3.122), Eq.(3.123) et Eq.(3.124) en multipliant chacune de ces équations par J_{ψ} et en factorisant Eq.(3.128) par ρ ou \vec{v} ou e :

$$\left(\frac{\partial \rho J_{\psi}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + J_{\psi} \text{div}(\rho \vec{w}) = 0 \quad (3.129)$$

$$\left(\frac{\partial \rho \vec{v} J_{\psi}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + J_{\psi} \text{div}(\rho \vec{w} \otimes \vec{v}) = 0 \quad (3.130)$$

$$\left(\frac{\partial \rho e J_{\psi}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + J_{\psi} \text{div}(\rho \vec{w} e) = 0 \quad (3.131)$$

On remarquera qu'une grandeur g^{ale} exprimée dans Ω_{ale} peut être donnée dans Ω_f en inversant $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t)$: $g^{ale}(\vec{\chi}, t) = g^{ale}(\vec{\psi}^{-1}(\vec{\chi}, t), t) = g(\vec{x}, t)$. Suivant Eq.(3.129), Eq.(3.130) et Eq.(3.131), le cycle Eulérien projette, sur le nouveau maillage, la solution physique déter-

minée dans le cycle Lagrangien en procédant par les sous-étapes suivantes:

- 8) Un nouveau maillage est généré en relaxant le maillage Lagrangien dans un calcul ALE ou en revenant à la configuration fixe initiale dans un calcul Eulérien.
- 9) Les variables centrées dans l'élément (contrainte, énergie interne,...) sont projetées par un algorithme d'advection de type Godunov.
- 10) Les vitesses aux nœuds sont projetées à leur tour sur le nouveau maillage par une technique HIS (Half Index Shift): on crée un nouveau maillage décalé d'un demi-pas dans les 3 directions de manière à ce que les centres des mailles soient les nœuds du maillage original. Chacune des étapes du cycle Lagrangien et du cycle Eulérien est décrite dans les paragraphes suivants.

3.2.3 Discrétisation en éléments briques: Calcul des grandeurs cinématiques

Pour un maillage d'éléments à 8 nœuds, Ω_f est décomposé en éléments Ω_f^e . Le mouvement du maillage est donné par:

$$\vec{x}(\vec{\xi}, t) = \sum_{I=1}^8 \vec{x}_I(t) N_I(\vec{\xi}) \quad (3.132)$$

où $\vec{\xi}$ et \vec{x}_I représentent les coordonnées de l'élément parent associé et du nœud I respectivement et N_I est la fonction forme définie par:

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_I) (1 + \eta \eta_I) (1 + \zeta \zeta_I) \quad (3.133)$$

avec ξ_I, η_I et ζ_I prenant suivant I les valeurs $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dans le cadre de cette approximation, les coordonnées ALE sont données par:

$$\vec{\chi}(\vec{\xi}) = \sum_{I=1}^8 \vec{\chi}_I N_I(\vec{\xi}) \quad (3.134)$$

La dérivée matérielle d'une grandeur g donnée par Eq.(3.102) est approximée par:

$$\frac{Dg}{Dt} = \sum_{I=1}^8 \frac{dg_I(t)}{dt} N_I(\vec{\xi}) + w(\vec{\xi}, t) \cdot \vec{\nabla} N_I(\vec{\xi}) g_I(t) \quad (3.135)$$

La forme faible dans le cycle Lagrangien de Eq.(3.120) prend la forme discrétisée ci-dessous; la conservation de l'énergie requiert un traitement particulier que l'on verra dans un autre paragraphe:

$$M \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.136)$$

avec

$$M = \mathbf{Id} \left[\int_{\Omega_f^e} \rho N_I N_J d\Omega \right] = \mathbf{Id} [\tilde{M}_{IJ}] \quad (3.137)$$

$$\mathbf{f}_{int} = \left[\int_{\Omega_f^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \right] \quad (3.138)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \left[\int_{\Omega_f^e} \rho N_I b_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_f^e} N_I t_i d\partial\Omega \right] \quad (3.139)$$

$$\mathbf{v} = [\vec{v}_J] \quad (3.140)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left[\frac{D\vec{v}_J}{Dt} \right] \quad (3.141)$$

où \mathbf{Id} est la matrice d'identité de dimension 3. Comme dans le paragraphe 3.1.3, la matrice masse est diagonalisée en sommant les termes d'une ligne de $[\tilde{M}_{IJ}]$:

$$\tilde{M}_{II} = \sum_{J=1}^8 \int_{\Omega_f^e} \rho N_I N_J d\Omega = \int_{\Omega_f^e} \rho N_I \sum_{J=1}^8 N_J d\Omega = \int_{\Omega_f^e} \rho N_I d\Omega \quad (3.142)$$

Les intégrales précédentes sont évaluées avec un point de quadrature centré en $\xi = 0$, $\eta = 0$ et $\zeta = 0$. Cependant, des modes à énergie nulle apparaissent dans ce cas: il faut alors inclure un contrôle du hourglass qui sera l'objet du paragraphe suivant. Le calcul de la matrice masse avec un point de quadrature permet d'obtenir:

$$\tilde{M}_{II} = \frac{1}{8} \rho Vol(\Omega_f^e) \quad (3.143)$$

où $Vol(\Omega_f^e)$ est le volume de l'élément Ω_f^e . L'accélération est déduite de l'équation de quantité de mouvement: on peut reprendre Eq.(3.40) pour évaluer les accélérations nodales. De la même manière, les autres grandeurs cinématiques (vitesse et position) sont intégrées par une méthode de différences finies centrées: de ce fait, le champ de vitesses est déterminé par Eq.(3.41) et la mise à jour de la position du maillage pour le cycle Lagrangien est obtenue par Eq.(3.42). Dans les relations précédentes, on a besoin de connaître le pas de temps du calcul. Il est donné en prenant le minimum des pas de calcul Δt_e déterminés pour chaque élément brique par:

$$\Delta t_e = \frac{L}{Q + (Q^2 + c^2)^{1/2}} \quad (3.144)$$

avec Q , une fonction des coefficients de la viscosité de choc C_0 et C_1 (voir paragraphe suivant) :

$$Q = C_1 c + C_0 L |div(\mathbf{d})| \quad \text{pour } div(\mathbf{d}) < 0 \quad (3.145)$$

où \mathbf{d} est le taux de déformation. Si $div(\mathbf{d}) \geq 0$, alors $Q = 0$. L est une dimension caractéristique de l'élément:

$$L = \frac{Vol(\Omega_f^e)}{A_{max}(\Omega_f^e)} \quad (3.146)$$

où $A_{max}(\Omega_f^e)$ est l'aire de la plus grande face de Ω_f^e . La vitesse du son isentropique, c est définie par:

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (3.147)$$

avec s l'entropie. Quand s est constante c'est à dire lorsque Ω_f^e n'échange pas de chaleur à travers sa frontière $\partial\Omega_f^e$, on parle aussi de "vitesse du son adiabatique". Les étapes du calcul 1), 2), 3) et 7) ont été décrites. Il reste à évoquer les viscosités numériques ajoutées aux schémas de calcul dont le contrôle du hourglass et la viscosité de choc font partie (étape 4), et le calcul de l'énergie interne (étape 5) qui servira dans l'équation d'état (étape 6). Détaillons d'abord les viscosités numériques.

3.2.4 Viscosités numériques

Viscosité de hourglass

Pour les éléments briques comme pour les éléments quadrangles du paragraphe 3.1.4, le désavantage d'une intégration avec un seul point d'intégration est la nécessité de contrôler les modes à énergie nulle appelés aussi modes de hourglass. Ces modes impliquent des déformations nulles aux points de quadrature:

$$d_{ij}(\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_I(0,0,0)}{\partial x_i} v_{jI} + \frac{\partial N_I(0,0,0)}{\partial x_j} v_{iI} \right) \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.148)$$

or

$$\frac{\partial N_1(0,0,0)}{\partial x_i} = - \frac{\partial N_7(0,0,0)}{\partial x_i} \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial N_3(0,0,0)}{\partial x_i} = - \frac{\partial N_5(0,0,0)}{\partial x_i} \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial N_2(0,0,0)}{\partial x_i} = -\frac{\partial N_8(0,0,0)}{\partial x_i} \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial N_4(0,0,0)}{\partial x_i} = -\frac{\partial N_6(0,0,0)}{\partial x_i} \quad (3.152)$$

et lorsque les vitesses des nœuds opposés diagonalement sont égales pour $i = 1,2,3$:

$$v_{i1} = v_{i7} \quad (3.153)$$

$$v_{i2} = v_{i8} \quad (3.154)$$

$$v_{i3} = v_{i5} \quad (3.155)$$

$$v_{i4} = v_{i6} \quad (3.156)$$

alors le taux de déformation $d_{ij}(\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0)$ s'annule au point de quadrature. Ce mode entraîne alors un travail nul d'où le nom de mode à énergie nulle. L'interprétation géométrique de ce phénomène est que le plan parallèle au gradient de vitesses passant par le point de quadrature ne se déforme pas dans un mode de hourglass. La raideur de ce mode est, en général, plus petite que la plus basse des raideurs physiques et ainsi la fréquence associée est aussi plus petite que la plus petite fréquence du problème physique. On observe alors des oscillations perturbant les grandeurs physiques. De plus, le hourglass est une instabilité spatiale visible dans la déformation des mailles lors d'un calcul Lagrangien. Cette instabilité peut se communiquer et se développer sur l'ensemble du maillage comme une instabilité d'advection-diffusion évoquée dans le paragraphe 3.2.2. Pour pallier cette instabilité, 12 forces d'amortissement f_i^α pour $\alpha = 1..4$ et $i = 1,2,3$ sont introduites. Pour cela, on définit des vecteurs de forme du hourglass ϕ_I^α comme étant covecteurs des vecteurs de base du hourglass h_I^α . Les vecteurs ϕ_I^α sont orthogonaux à un mouvement rigide et à un champ de vitesses linéaire en x_{iI} pour que les forces d'amortissement ne perturbent pas la physique de l'écoulement :

$$\phi_I^\alpha = \frac{1}{8} h_I^\alpha - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_I(0,0,0)}{\partial x_i} \sum_{k=1}^8 x_{ik} h_k^\alpha \quad (3.157)$$

On peut vérifier que les covecteurs de x_{iI} sont les vecteurs $\frac{\partial N_I}{\partial x_i}$:

$$\sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial x_i} x_{iI} = \delta_{ij} \quad (3.158)$$

Les taux de déformations du hourglass généralisés sont donnés par :

$$\dot{q}_i^\alpha = \sum_{I=1}^8 v_{iI} \phi_I^\alpha \quad (3.159)$$

Les 12 forces nodales résistant aux 12 modes de hourglass sont alors écrites sous la forme suivante:

$$f_{iI}^\alpha = a_h \dot{q}_i^\alpha \phi_I^\alpha \quad (3.160)$$

avec a_h , une constante définie par:

$$a_h = C_h \rho vol(\Omega_f^e)^{2/3} \frac{c}{4} \quad (3.161)$$

C_h est une constante définie par l'utilisateur entre 0.05 et 0.15.

Viscosité de choc (bulk viscosity)

Le fluide étant faiblement compressible, des ondes de chocs peuvent se produire au moment de l'impact entre la structure et la surface libre. Il est possible de traiter l'onde de choc comme une frontière interne en appliquant les équations de Rankine-Hugoniot. Cependant, l'onde étant en mouvement par rapport au maillage, l'application des conditions est difficile. La non-linéarité des conditions aux limites implique que le mouvement de la surface de choc est déterminée par les conditions aux limites. Par cette approche, le traitement des ondes de chocs débute à partir d'une configuration arbitraire et la solution est optimisée en bouclant dans un même pas de temps (technique "trial-and-error"). Cette procédure peut être utilisée pour des problèmes simples unidimensionnels mais elle est difficilement applicable à des cas 3D complexes puisqu'elle repose essentiellement sur l'expérience de l'utilisateur; de plus elle exige de grands temps de calcul. La méthode proposée par Von Neumann et Richtmyer [Neumann and Richtmyer, 1950] permet un traitement automatique des ondes de chocs sans avoir à rechercher la position de l'onde pour appliquer les conditions de chocs. A la traversée d'un choc fort, l'irréversibilité thermodynamique est traduite par une augmentation de l'entropie. L'idée est d'introduire, dans les équations, un terme dissipatif qui traduirait cette irréversibilité. Le choc est alors approché par une surface ayant une épaisseur comparable sinon plus grande que le pas de maille dans la direction de propagation. Le mécanisme de dissipation est représenté par une pression q ajoutée à la pression physique.

q est supposée négligeable sauf dans la région des ondes de choc. Cette viscosité artificielle appelée aussi "bulk viscosity" permet d'étendre l'onde de choc sur plusieurs mailles et de vérifier néanmoins les équations de Rankine-Hugoniot à condition que l'épaisseur de l'onde ainsi approximée soit petite devant les autres dimensions du problèmes. En 1D, la viscosité de choc proposée dans [Neumann and Richtmyer, 1950] a la forme suivante:

$$q = C_0 \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \quad (3.162)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \quad (3.163)$$

où C_0 est une constante sans dimension déjà évoquée dans le paragraphe 3.2.3. q est ajoutée à la pression dans la conservation de quantité de mouvement Eq.(3.120) et dans l'équation de l'énergie interne Eq.(3.121). Ainsi, les forces internes de Eq.(3.138) sont déterminées en ajoutant q au terme de pression de σ_{ij} . En 1955, Landshoff [Landshoff, 1955] suggère d'ajouter un terme linéaire à q :

$$q = C_0 \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + C_1 c \rho \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \quad (3.164)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \quad (3.165)$$

En 2 et 3 dimensions, la divergence de la vitesse est donnée par d_{ii} , la trace du tenseur taux de déformations, et la longueur caractéristique est la racine carrée de l'aire ou la racine cubique du volume de l'élément Ω_f^e :

$$q = C_0 \rho L^2 d_{ii}^2 + C_1 c \rho L d_{ii} \quad \text{si} \quad d_{ii} < 0 \quad (3.166)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad d_{ii} \geq 0 \quad (3.167)$$

Les valeurs prises pour C_0 et C_1 sont 1.5 et 0.06 respectivement. Pour dépasser les limites d'une viscosité scalaire, un tenseur de viscosités peut être développé en évaluant le terme en pression indépendamment de la direction i et en considérant la partie déviatorique comme une fonction linéaire du taux de déformation déviatorique d'_{ij} , la densité et la distance ca-

ractéristique L:

$$q_{ij} = (C_0 \rho L^2 d_{ii}^2 + C_1 c \rho L d_{ii}) \delta_{ij} + C \rho L d'_{ij} \quad (3.168)$$

3.2.5 Calcul de l'énergie interne et de la pression

Comme pour le champ de vitesses, le calcul de l'énergie interne repose sur une intégration en un point de quadrature décrite dans le paragraphe 3.2.3 ce qui simplifie Eq.(3.121). En effet, l'énergie interne, la fonction test δe , ρ , le taux de déformations et le champ de contraintes sont centrés au point de quadrature donc constants dans Ω_f^e . La forme faible Eq.(3.121) devient avec $V = vol(\Omega_f^e) = \int_{\Omega_f^e} d\Omega$:

$$\delta e \rho \frac{De}{Dt} V = \delta e d_{ij} \sigma_{ij} V + \delta e \rho \vec{g} \vec{v}_{moy}^e V \quad (3.169)$$

avec $\vec{v}_{moy}^e V = \int_{\Omega_f^e} \vec{v} d\Omega$ et $\vec{b} = \vec{g}$, la gravité. Par définition, δe est une fonction test arbitraire et on suppose pour simplifier que les forces à distances b_i sont nulles (dans les applications numériques, la gravité n'est pas en général prise en compte):

$$\rho \frac{De}{Dt} V = d_{ij} \sigma_{ij} V \quad (3.170)$$

Les tenseurs du second membre sont décomposés en une partie déviatorique d'indice $(.)'$ et une partie moyenne $\frac{1}{3}(\cdot)_{ii}$. En incluant le tenseur des viscosités de choc \mathbf{q} (voir paragraphe précédent) que l'on suppose symétrique, Eq.(3.170) devient:

$$\rho \frac{De}{Dt} V = \left(\frac{1}{3} d_{kk} \delta_{ij} + d'_{ij} \right) \left(\sigma'_{ij} - P \delta_{ij} + q'_{ij} + \frac{1}{3} q_{ii} \delta_{ij} \right) V \quad (3.171)$$

La trace du taux de déformation est égale au taux de déformation volumétrique $\frac{\Delta V}{V \Delta t}$. En introduisant l'énergie interne totale de l'élément $E = \rho e V$, on discrétise Eq.(3.171) sur un schéma de différences finies centrées:

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t \left((\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} + q'_{ij}{}^{n+1/2}) d'_{ij}{}^{n+1/2} V^{n+1/2} \right) + \left(\frac{1}{3} q_{kk}{}^{n+1/2} - P^{n+1/2} \right) \Delta V^{n+1/2} \quad (3.172)$$

avec

$$\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\sigma'_{ij}{}^n + \sigma'_{ij}{}^{n+1} \right) \quad (3.173)$$

$$q'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (q'_{ij}{}^n + q'_{ij}{}^{n+1}) \quad (3.174)$$

$$P'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (P'_{ij}{}^n + P'_{ij}{}^{n+1}) \quad (3.175)$$

L'énergie dépend de la pression à t^{n+1} rendant ainsi Eq.(3.172) implicite puisque la pression dépend de l'énergie par la relation d'état suivante:

$$P(E, \rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho) \frac{E}{V} \quad (3.176)$$

L'équation d'état est un polynôme de l'énergie interne par unité de volume et du taux relatif de la fraction volumique définie par $\mu = \frac{\rho - \rho_{ref}}{\rho_{ref}}$ où ρ_{ref} est la masse volumique de référence:

$$A_1(\rho) = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 \quad (3.177)$$

$$A_2(\rho) = C_3 + C_4\mu + C_5\mu^2 + C_6\mu^3 \quad (3.178)$$

où C_i sont des constantes. Les équations d'état pour l'eau et pour l'air considérées dans les applications numériques sont définies respectivement par:

$$P = C_1\mu \quad \text{avec} \quad C_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 2, \dots, 6 \quad \text{et} \quad C_1 = \rho_{ref} c^2 \quad (3.179)$$

$$P = \frac{\rho}{\rho_{ref}} (\gamma - 1) E \quad \text{avec} \quad C_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, 3, 6 \quad \text{et} \quad C_4 = C_5 = \gamma - 1 \quad (3.180)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques. En utilisant Eq.(3.176), on peut réécrire Eq.(3.172) sous la forme explicite suivante:

$$E^{n+1} = \frac{E^n + \Delta t \left((\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} + q'_{ij}{}^{n+1/2}) d'_{ij}{}^{n+1/2} V^{n+1/2} \right) + \left(\frac{1}{3} q_{kk}{}^{n+1/2} - \frac{1}{2} P^n \right) \Delta V^{n+1/2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta V^{n+1/2}}{V^{n+1/2}} A_2(\rho^{n+1})} - \frac{1}{2} A_1(\rho^{n+1}) \Delta V \quad (3.181)$$

Une fois E^{n+1} déterminée, Eq.(3.176) donne la pression à t^{n+1} .

Les étapes (1) à (7) du cycle Lagrangien sont complétées: toutes les variables physiques sont connues. Il reste à présent à exécuter le cycle Eulérien (étapes restantes: (8) à (10)) pour limiter les distorsions de mailles.

3.2.6 Méthodes d'advection

Dans le cycle Eulérien, pour maintenir des mailles régulières, le maillage est soit replacé à sa position initiale pour un calcul Eulérien, soit déplacé vers une position arbitraire pour un calcul ALE. Le déplacement des mailles est indépendant du mouvement du fluide. De ce fait, des flux de matières entre les mailles sont créés. Ces flux sont caractérisés par le transport des inconnues physiques de la position du maillage donnée par le cycle Lagrangien vers sa nouvelle position. La projection des variables centrées telles que la masse, l'énergie, la contrainte,... se fait par des algorithmes de Godunov: par exemple, l'algorithme de la cellule donneuse est une méthode de Godunov du premier ordre tandis que la méthode Van Leer est du second ordre. C'est cette dernière qui est utilisée dans les applications numériques. Les méthodes d'advection doivent être précises, stables, conservatives et monotones c'est à dire qu'aucun minimum ou maximum local ne doit être créé par l'advection. Les grandeurs centrées dans la maille sont représentées par g et la forme générique des équations hyperboliques Eq.(3.129), Eq.(3.130),Eq.(3.131) gouvernant le transport de ces variables physiques est donnée par:

$$\left(\frac{\partial g J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + J_\psi \operatorname{div}(g \vec{w}) = 0 \quad (3.182)$$

avec

$$g(\vec{x}, 0) = g_{\text{lagrangien}}(\vec{x}) \quad (3.183)$$

On considère, dans les applications numériques, une formulation Eulérienne: $J_\psi = 1$. En identifiant, dans g , la masse volumique ou la composante i de la quantité de mouvement par unité de volume (ρv_i) ou encore l'énergie interne par unité de volume (ρe), on retrouve Eq.(3.129), Eq.(3.130), et Eq.(3.131) respectivement. Le transport de la quantité de mouvement exige un traitement particulier étant donné que les vitesses sont déterminées aux nœuds de la maille et non au centre de celle-ci. Comme déjà précisé dans le paragraphe 3.2.2, le transport de g est purement géométrique et la grandeur t n'est pas le temps physique. Ainsi, quand g passe de l'état n à $n + 1$, cette grandeur n'est pas avancée dans le temps: elle est projetée du maillage à l'état n sur le nouveau maillage à l'état $n + 1$. Pour assurer la stabilité des schémas d'advection, le déplacement du maillage dans un pas de temps Δt doit être inférieur à une dimension caractéristique du maillage L . Cette condition

est imposée en précisant que le nombre de courant C doit être inférieur à 1:

$$C = \frac{|\vec{w}|\Delta t}{L} \leq 1 \quad (3.184)$$

Le maillage ne se déplaçant pas sur un pas de temps physique, Δt est arbitraire et $V = \vec{w}\Delta t$ est le volume transporté entre les mailles adjacentes. $f = g\vec{w}\Delta t = gV$ constitue un flux de masse si g est la masse volumique ou un flux d'énergie interne si g est l'énergie interne volumique, ou encore un flux de quantité de mouvement si g représente une quantité de mouvement par unité de volume (ρv_i).

Remarque concernant la notation:

Les volumes des mailles sont associés aux centres des mailles décalées d'un demi-pas par rapport au nœuds. Ainsi, on note $V_{(i+1/2, j+1/2, k+1/2)}$, le volume de la maille $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$. Par contre, les volumes transportés entre les mailles associent une position de nœud dans une direction donnée. Par exemple, $V_{(i, j+1/2, k+1/2)}$ est un volume passant de la maille $(i - 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ et $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$. En général, si tous les indices sont décalés d'un 1/2, la grandeur concernée est centrée dans la maille. Sinon, cette grandeur est sur la frontière de la maille voire sur le nœud pour des indices exclusivement entiers.

Méthode de la cellule donneuse (Donor Cell)

On présente l'algorithme pour une advection en 1D. Bien que cette approche soit du premier ordre, elle respecte les principales caractéristiques d'un algorithme d'advection: elle est stable et monotone:

$$g_{j+1/2}^{n+1} = g_{j+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x}(f_j - f_{j+1}) \quad (3.185)$$

avec

$$f_j = \frac{1}{2}w_j\Delta t(g_{j-1/2}^n + g_{j+1/2}^n) + \frac{1}{2}|w_j|\Delta t(g_{j-1/2}^n - g_{j+1/2}^n) \quad (3.186)$$

j définit un nœud. $g_{j+1/2}^n$ et $g_{j-1/2}^n$ sont les valeurs de g centrées dans les mailles à droite et à gauche de j respectivement. La valeur de f_j dépend du signe de la vitesse au nœud j , w_j :

- Si $w_j > 0$, alors $f_j = w_j g_{j-1/2}^n \Delta t = g_{j-1/2}^n V_j$, le flux de g va de la gauche vers la droite (vers les indices croissants en j)

- Si $w_j < 0$, alors $f_j = w_j g_{j+1/2}^n \Delta t = g_{j+1/2}^n V_j$, le flux de g va de la droite vers la gauche (vers les indices décroissants en j)

L'algorithme de la cellule donneuse est une méthode de Godunov du premier ordre. Van Leer [Leer, 1977] a introduit une méthode de Godunov d'ordre plus élevée.

Algorithme de Van Leer (MUSCL)

L'algorithme d'advection présenté ici est connue aussi sous le nom d'algorithme MUSCL (Monotone Upwind Schemes for Conservations Laws). La méthode de la cellule donneuse suppose que g est constante sur la maille. Van Leer remplace cette distribution constante par morceaux par une distribution d'un ordre plus élevée. Une distribution linéaire par morceaux peut être utilisée:

$$g_{j+1/2}^n(x) = S_{j+1/2}^n(x - x_{j+1/2}^n) + g_{j+1/2}^n \quad (3.187)$$

où x est la coordonnée dans le volume de l'élément, $x_{j+1/2}^n$, la coordonnée du centre de la maille et $S_{j+1/2}^n$, la pente de la droite. Pour assurer la monotonicité, cette pente est limitée par:

$$S_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left(\text{sgn}(s^L) + \text{sgn}(s^R) \right) \min(|s^L|, |s_{j+1/2}^n|, |s^R|) \quad (3.188)$$

avec

$$S^L = \frac{1}{2\Delta x_{j+1/2}} \left(g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n \right) \quad (3.189)$$

et

$$S^R = \frac{1}{2\Delta x_{j+1/2}} \left(g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n \right) \quad (3.190)$$

où $s_{j+1/2}^n$ est une approximation de la pente du second ordre obtenue en interpolant par une parabole les valeurs de g aux centres des 3 mailles adjacentes:

$$s_{j+1/2}^n = \frac{(g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n)\Delta x_j^2 + (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n)\Delta x_{j+1}^2}{\Delta x_{j+1}\Delta x_j(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)} \quad (3.191)$$

avec

$$\Delta x_j = x_{j+1/2}^n - x_{j-1/2}^n \quad (3.192)$$

Un second minimum peut être envisagé en remplaçant Eq.(3.190) et Eq.(3.191) par ce qui suit:

$$S^L = \frac{g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n}{x_{j+1/2} - (x_j + \frac{1}{2} \max(0, w_j) \Delta t)} \quad (3.193)$$

$$S^R = \frac{g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n}{x_{j+1} - \frac{1}{2} \min(0, w_{j+1} \Delta t) - x_{j+1/2}} \quad (3.194)$$

Le flux f_j au nœud j est alors évalué en utilisant un schéma similaire à la méthode Donor Cell:

$$f_j = \frac{1}{2} w_j (g_j^- + g_j^+) \Delta t + \frac{1}{2} |w_j| (g_j^- - g_j^+) \Delta t \quad (3.195)$$

avec

$$g^- = S_{j-1/2}^n (x^c - x_{j-1/2}^n) + g_{j-1/2}^n \quad (3.196)$$

$$g^+ = S_{j+1/2}^n (x^c - x_{j+1/2}^n) + g_{j+1/2}^n \quad (3.197)$$

et

$$x^c = x_j^n + \frac{1}{2} \Delta t w_j \quad (3.198)$$

On obtient la nouvelle valeur de g , après l'advection, par Eq.(3.185)

$$g_{j+1/2}^{n+1} = g_{j+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x} (f_j - f_{j+1}) \quad (3.199)$$

Cette méthode d'advection est adoptée dans les applications numériques. Les autres variables évaluées au centre de la maille lors du cycle Lagrangien sont aussi projetées sur le nouveau maillage par l'algorithme d'advection présenté. Les vitesses n'étant pas centrées dans la maille mais déterminées au nœuds, il faut modifier cet algorithme pour l'adapter à l'advection de la quantité de mouvement.

Advection de la quantité de mouvement

La vitesse, contrairement aux autres champs, est évaluées aux nœuds du maillage. La quantité de mouvement est advectée à la place du champ de vitesses pour assurer la conservation de la quantité de mouvement. L'algorithme présenté précédemment doit être modifié pour advecter les quantités de mouvements nodales. L'idée est de décaler d'un demi-pas (dans les trois directions de l'espace pour le cas 3D) les indices de l'algorithme donné par Eq.(3.199). Le premier code à proposer ce concept fut YAQUI [Amsden and Hirt, 1973]. De

cette manière, les nœuds deviennent les centres d'un maillage fictif sur lequel est appliqué l'algorithme 1D de Van Leer.

$$M'_j v'_j = M_j v_j + (\rho v)_{j-1/2} V_{j-1/2} - (\rho v)_{j+1/2} V_{j+1/2} \quad (3.200)$$

où M_j représente la masse nodale du nœud j du maillage et l'indice $'$ indique une quantité projetée sur le nouveau maillage. L'advection de la masse nodale est interpolée en fonction des masses advectées des centres de mailles: $M'_{j\pm 1/2} = \rho_{j\pm 1/2} V_{j\pm 1/2}$ avec $V_{j\pm 1/2}$ le volume de la maille $j \pm 1/2$; dans le cas 1D, $V_{j\pm 1/2} = \Delta x_{j\pm 1/2}$. On obtient:

$$\begin{aligned} M'_j &= \frac{M'_{j+1/2} + M'_{j-1/2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(M_{j+1/2} + (\rho V)_j - (\rho V)_{j+1} + M_{j-1/2} + (\rho V)_{j-1} - (\rho V)_j \right) \\ &= M_j + \frac{1}{2} (f_j - f_{j+1} + f_{j-1} - f_j) \end{aligned} \quad (3.201)$$

L'algorithme SALE (Simple Arbitrary Lagrangian Eulerian code) [Amsden et al., 1981] approxime, dans Eq.(3.200), les quantités de mouvement centrées en prenant simplement la moyenne des quantités de mouvement nodales. La variation de la quantité de mouvement au centre d'une maille ($j + 1/2$) est donnée par $(\rho v)_{j-1/2} V_{j-1/2} - (\rho v)_{j+1/2} V_{j+1/2}$. En prenant la moitié de cette quantité pour chaque élément partageant le nœud j , on obtient la variation de quantité de mouvement de ce nœud:

$$M'_j v'_j = M_j v_j + \frac{1}{2} ((\rho v)_{j-1} V_{j-1} - (\rho v)_{j+1} V_{j+1}) \quad (3.202)$$

L'inconvénient de cet algorithme est qu'il disperse les chocs parce qu'elle est du premier ordre. Un algorithme du second ordre est obtenue par Margolin [Margolin and Beason, 1988] en développant, dans le code SHALE, un schéma similaire à ce qui précède mais en prenant en plus de la moyenne de la quantité de mouvement, la moyenne de sa dérivée. Les algorithmes SALE et SHALE sont monotones vis à vis des variables centrées mais ils n'assurent pas la monotonicité des variables nodales. Pour y remédier, Benson propose une méthode appelée algorithme HIS (Half Index Shift) [Benson, 1992] dans laquelle il se base sur les analyses précédentes mais en prenant des précautions dans la projection donnant les vitesses nodales en fonction des quantités de mouvement centrées. Il s'assure que la matrice de transformation entre les variables centrées et nodales est diagonale. Dans les applications numériques, l'algorithme HIS est utilisée avec la méthode d'advection de Van Leer pour projeter le champ de vitesses sur le nouveau maillage issu du cycle Eulérien.

Comme les applications numériques sont 2D ou 3D, il est nécessaire d'étendre la méthode de Van Leer 1D, à des problèmes de convection suivant les trois directions de l'espace.

Advection 3D

La plus simple approche pour étendre l'algorithme d'advection présenté précédemment à trois dimensions est l'opérateur split spatial ou la méthode des directions d'advection alternées. Considérons l'advection entre un élément $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ d'indice 1 pour simplifier l'écriture et ses éléments voisins. Si le flux est dirigé suivant i ou j ou k , l'algorithme 1D de Van Leer peut être appliqué directement. En général, l'écoulement est 3D et la matière passe entre les éléments partageant une même arête ou un même coin. Si l'algorithme 1D est appliqué dans les 3 directions simultanément dans un même pas de temps, aucun flux de g ne sera calculé entre des éléments diagonaux. Pour y remédier, l'opérateur split applique l'algorithme 1D successivement dans les 3 directions pour un même pas de temps. Si on suppose que l'écoulement est positive dans les 3 directions, l'élément $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ donnera un volume $V_{(i+1,j+1,k+1)}$ à l'élément $(i + 3/2, j + 3/2, k + 3/2)$. Pour évaluer ce volume, on décompose le calcul en trois étapes:

- un volume $V_{12} = V_{(i+1,j+1/2,k+1/2)}$ passe de l'élément 1 $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ à l'élément 2 $(i + 3/2, j + 1/2, k + 1/2)$,
- un volume $V_{23} = V_{(i+3/2,j+1,k+1/2)}$ passe de l'élément 2 $(i + 3/2, j + 1/2, k + 1/2)$ à l'élément 3 $(i + 3/2, j + 3/2, k + 1/2)$,
- un volume $V_{34} = V_{(i+3/2,j+3/2,k+1)}$ passe de l'élément 3 $(i + 3/2, j + 3/2, k + 1/2)$ à l'élément 4 $(i + 3/2, j + 3/2, k + 3/2)$.

En utilisant, pour alléger l'écriture, les indices 1,2,3,4 donnés à chaque élément, la valeur g de l'élément 4 projetée sur le nouveau maillage est donnée par:

$$g'_4 V'_4 = g_4 V_4 + g_3 \frac{V_3}{V'_3} V_{34} + g_2 \frac{V_2}{V'_2 V'_3} V_{23} V_{34} + g_1 \frac{1}{V'_2 V'_3} V_{12} V_{23} V_{34} \quad (3.203)$$

L'indice ' indique une valeur donnée après l'advection. Dans chacun des termes de Eq.(3.203), on peut identifier les transports de volume entre la cellule 4 et ses voisines. Par exemple, le dernier terme représente le volume $V_{(i+1,j+1,k+1)}$ entre 1 et 4:

$$V_{(i+1,j+1,k+1)} = \frac{1}{V'_2 V'_3} V_{12} V_{23} V_{34} \quad (3.204)$$

Un algorithme du second ordre peut être construit en choisissant de passer 1/3 du volume transporté par chaque face de l'élément 1 successivement. Ainsi, l'advection se déroule en 5 pas et on change la numérotation des éléments:

- une advection suivant i transporte un volume $V_{12} = 1/3V_{(i+1,j+1/2,k+1/2)}$ de l'élément 1 ($i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$) à l'élément 2 ($i + 3/2, j + 1/2, k + 1/2$),

- une advection suivant j transporte un volume $V_{14} = 1/3V_{(i+1/2,j+1,k+1/2)}$ de l'élément 1 ($i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$) à l'élément 4 ($i + 1/2, j + 3/2, k + 1/2$) et $V_{23} = 1/3V_{(i+3/2,j+1,k+1/2)}$ de l'élément 2 ($i + 3/2, j + 1/2, k + 1/2$) à 3 ($i + 3/2, j + 3/2, k + 1/2$)

- une advection suivant k transporte un volume $V_{15} = 1/3V_{(i+1/2,j+1/2,k+1)}$ de l'élément 1 ($i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$) à l'élément 5 ($i + 1/2, j + 1/2, k + 3/2$), un volume $V_{37} = 1/3V_{(i+3/2,j+3/2,k+1)}$ de l'élément 3 ($i + 3/2, j + 3/2, k + 1/2$) à l'élément 7 ($i + 3/2, j + 3/2, k + 3/2$) et un volume $V_{48} = 1/3V_{(i+1/2,j+3/2,k+1)}$ de l'élément 4 ($i + 1/2, j + 3/2, k + 1/2$) à l'élément 8 ($i + 1/2, j + 3/2, k + 3/2$),

- une nouvelle advection suivant i transporte un volume $V_{56} = 1/3V_{(i+1,j+1/2,k+3/2)}$ de l'élément 5 ($i + 1/2, j + 1/2, k + 3/2$) à l'élément 6 ($i + 3/2, j + 1/2, k + 3/2$) et un volume $V_{87} = 1/3V_{(i+1,j+3/2,k+3/2)}$ de l'élément 8 ($i + 1/2, j + 3/2, k + 3/2$) à l'élément 7 ($i + 3/2, j + 3/2, k + 3/2$).

- une nouvelle advection suivant j transporte un volume $V_{67} = 1/3V_{(i+3/2,j+1,k+3/2)}$ de l'élément 6 ($i + 3/2, j + 1/2, k + 3/2$) à l'élément 7 ($i + 3/2, j + 3/2, k + 3/2$).

On obtient alors:

$$\begin{aligned}
g'_7 V'_7 &= g_7 V_7 + \frac{1}{3} \left(V_{37} g_3 \frac{V_3}{V'_3} + V_{87} g_8 \frac{V_8}{V'_8} + V_{67} g_6 \frac{V_6}{V'_6} \right) \\
&+ \frac{1}{3} \left(V_{23} V_{37} \frac{g_2}{V'_2} \frac{V_2}{V'_2} + V_{48} V_{87} \frac{g_4}{V'_4} \frac{V_4}{V'_4} + V_{56} V_{67} \frac{g_5}{V'_5} \frac{V_5}{V'_5} \right) \\
&+ \frac{g_1}{3} \left(\frac{V_{12} V_{23} V_{37}}{V'_2 V'_3} + \frac{V_{15} V_{56} V_{67}}{V'_5 V'_6} + \frac{V_{14} V_{48} V_{87}}{V'_4 V'_8} \right)
\end{aligned} \tag{3.205}$$

Dans ce cas, le volume transporté diagonalement est donné par:

$$V_{(i+1,j+1,k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{V_{12} V_{23} V_{37}}{V'_2 V'_3} + \frac{V_{15} V_{56} V_{67}}{V'_5 V'_6} + \frac{V_{14} V_{48} V_{87}}{V'_4 V'_8} \right) \tag{3.206}$$

Les advections entre éléments partageant une même arête sont aisément obtenues à partir des équations précédentes. Les advections tiennent aussi compte de la distribution des fluides dans une maille. Les applications numériques recherchées impliquent que l'air et l'eau peuvent coexister dans une même cellule et la détermination des interfaces matérielles est essentielle pour appliquer les conditions aux limites sur la surface libre. Pour cela, une

approche en éléments multi-matériaux est développée pour évaluer la distribution de plusieurs fluides dans une même maille.

Equilibre des pressions et calcul d'interface

Un élément est supposé contenir plusieurs matériaux m . Chaque matériau occupe une fraction $f v^m$ du volume total de l'élément et possède leur propres propriétés et leurs propres variables. Des conditions thermodynamiques sont imposées pour définir un système d'équations non-linéaires dont $f v^m$ est l'inconnue. En supposant que la température est constante et égale pour tous les matériaux, on impose soit un équilibre des pressions, soit des taux de déformations égaux pour tous les matériaux. Ce dernier cas suppose que deux fluides, eau et air, de compressibilités très différentes doivent avoir des déformations égales. Dans l'eau, de fortes contraintes irréalistes sont alors calculées. Dans un élément contenant de l'air et de l'eau, l'air fortement compressible prend une grande part de la déformation de l'élément. L'équilibre des pressions est une approche largement répandue dans les théories des mélanges. Elle est prise en compte dans la formulation multi-matériaux de cette thèse. Les pressions $P^m(e^m, \rho^m)$ issues des équations d'état pour chaque matériau sont imposées égales à une même pression d'équilibre $P_T = P^m f v^m$.

$$P^m(e^m, \rho^m) - P_T = 0 \quad (3.207)$$

et la somme des fraction volumique doit être égale à 1 : $\sum_m |f v^m| = 1$. La pression est exprimée en fonction de $f v^m$ avec l'équation d'état Eq.(3.176). La méthode de Newton-Raphson permet de résoudre itérativement les équations non-linéaires Eq.(3.207) pour chaque m :

$$\Delta f v^m = \frac{P_T - P^m}{\frac{\partial P^m}{\partial f v^m}} \quad (3.208)$$

P_T est obtenue en utilisant Eq.(3.208) et en sachant que $\sum_m (f v^m + \Delta f v^m) = 1$:

$$P_T = \frac{1 + \sum_m \left(\frac{P^m}{\frac{\partial P^m}{\partial f v^m}} - f v^m \right)}{\sum_m \left(\frac{1}{\frac{\partial P^m}{\partial f v^m}} \right)} \quad (3.209)$$

Une fois obtenue le champ de fractions volumiques dans le maillage, on calcule la position de l'interface en utilisant la méthode de Young [Youngs, 1982]. La méthode de Young est

développée pour traquer les interfaces matérielles dans les éléments multi-matériaux. Pour deux fluides dans un problème 2D, par exemple, la frontière matérielle dans une cellule est calculée en utilisant les fractions volumiques de cette cellule et des 8 voisines (dans un cas 3D, on utiliserait les fractions volumiques de toutes les cellules adjacentes). L'interface est approximée par une droite (un plan en 3D) dont la pente est déterminée par:

$$\vec{n} = \frac{\vec{grad}(fv)}{|\vec{grad}(fv)|} \quad (3.210)$$

où \vec{n} est une normale à la droite (au plan en 3D). Par exemple, dans le cas 2D, on considère un carré de 9 cellules centrées sur la maille $(i + 1/2, j + 1/2)$. La pente est donnée par:

$$\frac{\partial fv}{\partial x} = \frac{fv_{(i+3/2, j+1/2)} - fv_{(i-1/2, j+1/2)}}{x_{(i+3/2, j+1/2)} - x_{(i-1/2, j+1/2)}} \quad (3.211)$$

$$\frac{\partial fv}{\partial y} = \frac{fv_{(i+1/2, j+3/2)} - fv_{(i+1/2, j-1/2)}}{y_{(i+1/2, j+3/2)} - y_{(i+1/2, j-1/2)}} \quad (3.212)$$

avec

$$fv_{(i+3/2, j+1/2)} = \frac{fv_{(i+3/2, j+3/2)} + 2fv_{(i+3/2, j+1/2)} + fv_{(i+3/2, j-1/2)}}{4} \quad (3.213)$$

$$fv_{(i-1/2, j+1/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j+3/2)} + 2fv_{(i-1/2, j+1/2)} + fv_{(i-1/2, j-1/2)}}{4} \quad (3.214)$$

$$fv_{(i+1/2, j+3/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j+3/2)} + 2fv_{(i+1/2, j+3/2)} + fv_{(i+3/2, j+3/2)}}{4} \quad (3.215)$$

$$fv_{(i+1/2, j-1/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j-1/2)} + 2fv_{(i+1/2, j-1/2)} + fv_{(i+3/2, j-1/2)}}{4} \quad (3.216)$$

Ensuite, on ajuste la position de la droite de manière à obtenir la fraction volumique de la cellule centrale: $fv_{(i+1/2, j+1/2)}$. Il suffit d'étendre cette analyse à un cube de 27 éléments pour approximer l'interface matérielle dans un cas 3D. Un test sur la fraction volumique permet de déterminer si l'élément est un élément multi-matériaux ou non. Par exemple un écoulement de surface libre entre l'air et l'eau, si $fv^m = 1$ ou $fv^m = 0$, l'élément contient soit de l'eau, soit de l'air respectivement. Si $0 < fv^m < 1$, l'élément contient la surface libre.

3.2.7 Conclusion

Dans ce paragraphe, on a décrit la formulation Eulérienne multi-matériaux utilisée pour modéliser l'écoulement de surface libre. Cette formulation est un cas particulier de la formulation ALE multi-matériaux: si la vitesse convective \vec{w} est différente de zéro, les étapes du calcul décrites dans ce paragraphe restent les mêmes. Dans le chapitre 6, nous verrons une application employant la formulation ALE multi-matériaux. A présent, l'impact hydrodynamique nécessite une modélisation des interactions entre le fluide et la structure. Une partie de la frontière $\partial\Omega_f^t$ complémentaire de la surface libre est contrainte par le couplage entre la structure et le fluide. Dans la suite, l'algorithme couplant la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne est présenté. Cette algorithme est aussi applicable à un couplage entre une formulation ALE et une formulation Lagrangienne.

3.3 Modélisation de l'interaction fluide/structure

Cette partie décrit la modélisation des interactions mécaniques entre le fluide et la structure. Par "interaction mécanique", on écarte du champ d'investigation les interactions thermiques mettant en jeu des échanges de chaleurs aux frontières communes des systèmes. Seuls sont étudiés les efforts d'interaction à la frontière des deux systèmes mécaniques: le fluide et la structure. Selon Zhong [Zhong, 1993] et Volgers [Volgers, 1997], les problèmes d'interaction commencèrent avec l'étude des problèmes de contact, il y a une centaine d'années et on peut identifier ainsi deux approches classiques : le contact en mécanique Newtonienne et le contact Hertzien. Avec le développement des microprocesseurs, l'approche numérique prenait le pas sur ces théories pour traiter des problèmes de plus en plus complexes. A la base des méthodes numériques, la formulation variationnelle est le pilier de la modélisation de l'interaction entre deux systèmes mécaniques. Dans les problèmes classiques de contact pour lesquels les déformations de l'interface de contact sont faibles et suffisamment simples, une approche analytique suffit à résoudre le problème (Contact Hertzien). Puis, les déformations devenant importantes et complexes, de nouvelles solutions apportées par la formulation variationnelle du contact entre en jeu: les algorithmes de contact déjà évoqués dans le chapitre précédent. Enfin, lorsque les déformations de l'interface géométrique du contact deviennent fortement non-linéaires, pour des problèmes transitoires d'interactions

fluide/structure par exemple, on doit faire appel à de nouvelles approches numériques en couplant, dans la résolution du problème, plusieurs méthodes numériques. Par exemple, pour traiter un problème de vibroacoustique entre une structure et l'air, il est possible d'associer une formulation en éléments frontières pour l'air et une formulation en éléments finis pour la structure [Park et al., 1977]. Le rôle de l'algorithme de couplage est alors de transmettre correctement les efforts de pression et les déplacements de la structure entre les deux formulations. Une revue des méthodes de couplages sera effectuée et on présentera, en particulier le couplage Euler/Lagrange par pénalisation. On verra notamment comment cet algorithme a été amélioré dans le cadre de cette thèse.

3.3.1 Etat de l'art des algorithmes de couplage

Les méthodes de couplage permettent de profiter des avantages des approches numériques couplées afin de lever les difficultés liées à la modélisation du problème d'interaction. En général, les algorithmes de couplage sont utilisés pour traiter des problèmes d'interaction fluide/structure fortement non-linéaire. Une classification des différents types de couplage permet de mettre en évidence deux familles: le couplage monolithique et le couplage partitionné.

Différents types de couplage

Une méthode de couplage doit permettre de faire évoluer le système fluide/structure dans le temps. Si le fluide et la structure avancent, à chaque pas de temps, simultanément, la méthode de couplage est dite monolithique. Pour de telles méthodes, en général, il est difficile de résoudre le système complet à cause de l'inhomogénéité des matrices de raideur du problème. Une autre possibilité est de faire avancer la structure et le fluide, séquentiellement. Le couplage est dit alors partitionné. Deux codes différents et distincts peuvent alors traiter le fluide et la structure. Cette méthode est, certes, flexible mais elle a le désavantage d'être dissipative et d'avoir des problèmes de convergence. A contrario, la méthode de couplage monolithique est plus précise et possède une convergence optimale mais elle pose des difficultés d'implémentation.

Pour illustrer la différence entre ces deux méthodes de couplage, on considère un problème simple d'interaction entre deux masses, m_1 et m_2 , reliées entre elles par un ressort de rai-

deur k . Le système d'équation régissant le mouvement de ces deux masses peut être écrit sous la forme suivante:

$$m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} + k \cdot (u_1 - u_2) = 0 \quad (3.217)$$

$$v_1 = \frac{du_1}{dt} \quad (3.218)$$

$$m_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} + k \cdot (u_2 - u_1) = 0 \quad (3.219)$$

$$v_2 = \frac{du_2}{dt} \quad (3.220)$$

Un schéma de différences finis centrées classique, d'ordre 2 permet de discrétiser et d'intégrer ce problème sur un pas de temps dt :

$$\frac{m_1}{dt} \cdot (v_1^{n+1} - v_1^n) + \frac{k}{2} \cdot (u_1^{n+1} + u_1^n) - \frac{k}{2} \cdot (u_2^{n+1} + u_2^n) = 0 \quad (3.221)$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \frac{dt}{2} \cdot (v_1^{n+1} + v_1^n) \quad (3.222)$$

$$\frac{m_2}{dt} \cdot (v_2^{n+1} - v_2^n) + \frac{k}{2} \cdot (u_2^{n+1} + u_2^n) - \frac{k}{2} \cdot (u_1^{n+1} + u_1^n) = 0 \quad (3.223)$$

$$u_2^{n+1} = u_2^n + \frac{dt}{2} \cdot (v_2^{n+1} + v_2^n) \quad (3.224)$$

Couplage monolithique

Avec les conditions initiales u_1^0 et u_2^0 , l'approche simultanée ou monolithique résout à chaque pas de temps dt le système suivant:

$$\begin{bmatrix} m_1/dt & 0 & k/2 & -k/2 \\ -dt/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2/dt & -k/2 & k/2 \\ 0 & -dt/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^n \cdot m_1/dt - k/2 \cdot u_1^n + k/2 \cdot u_2^n \\ v_1^n \cdot dt/2 + u_1^n \\ v_2^n \cdot m_2/dt - k/2 \cdot u_2^n + k/2 \cdot u_1^n \\ v_2^n \cdot dt/2 + u_2^n \end{bmatrix}$$

Dans cette approche classique, ce schéma est stable et d'ordre 2 en temps. L'idée de la formulation monolithique des systèmes mécaniques et des conditions de couplage est de poser le problème en une unique équation ce qui permet des analyses d'erreurs et de stabilité du système couplé. En général, la convergence de ce type d'approche est optimale. Hübner et Walhorn montrent ainsi qu'une formulation éléments finis en espace et en temps développée dans [Walhorn et al., 2003] pour un problème d'interaction fluide-structure est au

moins précise à l'ordre 2. Une résolution simultanée du problème en une seule équation est retrouvée dans les publications [F.J.Blom, 1998], [Morton et al., 1997], [Erath et al., 1998]. De la même manière, une résolution directe des systèmes couplés en vibroacoustique et hydroélastique (sloshing de faible amplitude) [Morand and Ohayon, 1995] est approchée en linéarisant les équations du mouvement.

Couplage partitionné

Dans la méthode du couplage partitionné, une prédiction des valeurs u_1^{n+1} et u_2^{n+1} permet de décomposer le calcul en 3 étapes:

- D'abord, les valeurs prédites, u_{1p}^{n+1} et u_{2p}^{n+1} , sont choisies. Deux possibilités peuvent être envisagées: soit $u_{ip}^{n+1} = u_i^n$ soit $u_{ip}^{n+1} = u_i^n + v_i^n .dt$ pour $i = 1,2$.
- Ensuite, la résolution du sous-système aux inconnues u_1, v_1 permet de mettre à jour la position u_1 .
- Enfin, le sous-système aux inconnues u_2, v_2 est mis à jour en prenant compte la nouvelle valeur u_1 .

Dans l'équation matricielle suivante, on distingue les deux sous-systèmes u_1, v_1 et u_2, v_2 qui sont calculées successivement:

$$\begin{bmatrix} m_1/dt & k/2 & 0 & 0 \\ -dt/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2/dt & k/2 \\ 0 & 0 & -dt/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^n .m_1/dt - k/2 .u_1^n + k/2 .(u_2^n + u_{2p}^{n+1}) \\ v_1^n .dt/2 + u_1^n \\ v_2^n .m_2/dt - k/2 .u_2^n + k/2 .(u_1^n + u_{1p}^{n+1}) \\ v_2^n .dt/2 + u_2^n \end{bmatrix}$$

Les méthodes de couplage partitionné commence à émerger dans le milieu des années 70 avec trois équipes de chercheurs:

- Belytschko et Mullen [Belytschko and Mullen, a], [Belytschko and Mullen, c], [Belytschko and Mullen, b] étudièrent une méthode de couplage partitionné nœud-à-nœud.
- Hughes et Liu s'intéressèrent, a contrario [Hughes and Liu, 1939],[Hughes et al., 1979],[Hughes and Stephenson, 1981] à un partitionnement élément-à-élément dans un cadre implicite ou explicite. Par la suite, une autre approche partitionné élément-à-élément fut présentée dans [Hughes, 1987]
- Felippa, Geers, Park et Deruntz couplèrent une formulation FEM et une formulation BEM

développée par Geers (Doubly Asymptotique Approximation) [Geers, 1971], [Geers, 1980], [Geers and Felippa, 1971], [Geers, 1983] pour traiter, à l'origine, un problème d'interaction entre une onde de choc sous-marine et une structure élastique, [Park et al., 1977]. La méthode de couplage fut généralisée dans [Felippa and Park, 1980], [Felippa and DeRuntz, 1984].

Par la suite, dans les années 80, des revues des méthodes de couplage partitionné furent développées: [Park and Felippa, 1984], [Park and Felippa, 1983], [Felippa and Geers, 1988]. En 1987, Farta commença ses recherches en aéroélasticité numérique [Farhat et al., 1991] tandis que Park amorçait son travail sur l'interaction structure contrôlée/fluide, [Belvin and Park, 1990], [Park and Belvin, 1984].

Couplage mixte

Pour le cas simple d'un système masse-ressort-masse, les calculs numériques montrent que le schéma monolithique et le schéma partitionné sont très proches.

Dans le cas d'un problème industriel complexe fortement non-linéaire tel que le tissage, la méthode du couplage partitionné peut introduire des problèmes de stabilité et de précision si le choix des valeurs prédites n'est pas judicieux. Cette décision révèle la notion de "chemin de calcul", [Felippa and Park, 1978] qui distinguent les deux méthodes de couplage. Dans un schéma monolithique, le problème du choix de la prédiction n'apparaît évidemment pas; le schéma est, en général précis et stable. Néanmoins, pour des problèmes complexes, il exige un coût CPU plus important que pour les méthodes partitionnées pour un même pas de temps. La mise en œuvre d'un algorithme monolithique est en général assez lourde tandis que l'approche partitionnée est flexible puisqu'elle permet de coupler des codes de calcul déjà existants. En pratique, on tente de combiner les avantages de ces deux approches. Ainsi, par exemple, Meynen et Schäfer [Meynen and Schäfer, 1999] introduisent une technique itérative "prédicteur-correcteur" dans une approche partitionnée la rendant ainsi plus robuste. Une autre possibilité est exploitée par Schäfer et Teschauer [Schäfer and Teschauer, 2001] en combinant une approche multi-grille monolithique avec un schéma partitionné agissant comme un correcteur du champ de pression. D'autres variantes sont exposées dans [Casadei et al., 2001], [Tallec and Mouro, 2001], [Lesoinne and Farhat, 1998].

3.3.2 Couplage Euler/Lagrange

Ce paragraphe est consacré à la description du couplage Euler/Lagrange. On s'intéressera, plus particulièrement, au couplage par pénalisation. Cet algorithme repose sur le même principe que le contact par pénalisation. C'est pourquoi le contact par pénalisation a été décrit en détail dans le paragraphe 2.2.1 afin de mieux comprendre la base du couplage par pénalisation. Ici, on abordera les particularités de l'algorithme du couplage par pénalisation, notamment, la recherche des nœuds fluide et structure en interaction, différente du contact par pénalisation puisque pour ce dernier, un contact géométrique existe. Dans le cadre du couplage par pénalisation, il n'y a pas de contact géométrique entre deux maillages distincts. En général, le maillage structure est immergé dans une grille Eulérienne et on couple une particule fluide (la particule fluide est assimilée à un nœud) et un élément structure ce qui introduit la notion d'interface matérielle qui correspond à l'interface géométrique rencontrée dans le contact. La méthode de couplage présentée dans cette thèse peut être qualifiée de couplage mixte car elle ne peut pas être classée clairement comme un couplage monolithique ou un couplage partitionné. Cette méthode a les caractéristiques d'une approche monolithique:

- un code unique pour le fluide et la structure,
- une avancée simultanée de la solution pour le fluide et de la solution pour la structure, mais aussi les caractéristiques d'un couplage partitionné:
- la force d'interaction est prédite par: $F_s = k.d$ dans lequel k est la raideur prédite par l'utilisateur et d le déplacement relatif,
- un schéma d'intégration explicite en temps.

La méthode de couplage est néanmoins plus proche d'un schéma partitionné que d'un schéma monolithique.

Les conditions d'interaction fluide/structure seront d'abord établies et on décrira le couplage par pénalisation. Cet algorithme sera, par la suite, l'objet de notre étude dans les applications numériques.

Conditions d'interaction fluide/structure

Pour modéliser numériquement ou mathématiquement l'interaction entre deux corps, les conditions de non-interpénétration ou de contact unilatéral doivent être établies. De nom-

breux travaux ont déjà été menés sur ce sujet: [Laursen and Simo, 1993a], [Laursen and Simo, 1993b], [Laursen and Oancea, 1994], [Laursen and Parker, 2002] [Klarbring, 1986], [Curnier et al., 1995]. Une revue détaillée des lois de frottement de Coulomb, de Shaw, de Tresca,... est présentée dans [Oudin et al., 1989]. Le frottement n'est cependant pas pris en compte. Pour distinguer les deux systèmes mécaniques en interaction, un des corps est appelé maître et l'autre esclave. Les termes "cible" et "contacteur" sont parfois usités. Une particule de la surface esclave \vec{x}_s est ainsi étudiée par rapport à la surface maître. Le corps esclave est décrit en fonction du maître et une dissymétrie apparaît alors dans la mise en équation du problème du contact. Cependant, il est possible de régler numériquement cette dissymétrie en alternant par des algorithmes nommés "one-pass" ou "two-pass" [Benson and Hallquist, 1990], le rôle du maître et celui de l'esclave. La particule maître \vec{x}_m la plus proche de \vec{x}_s introduit la notion de vecteur distance [Chertier, 1997] \vec{g} et de distance normale de contact g_n :

$$\vec{g} = \vec{x}_s - \vec{x}_m \quad (3.225)$$

$$g_n = (\vec{x}_s - \vec{x}_m) \cdot \vec{N}_m \quad (3.226)$$

Que l'étude porte sur le maître ou l'esclave, les relations sont écrites de la même manière. La première condition de non- interpénétration peut être alors écrite en fonction de g_n et du champ de déplacement $u(\vec{x}, t)$ sous la forme suivante:

$$g_n(\vec{x}, t) = g_{n0}(\vec{x}) - u_n(\vec{x}, t) \geq 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.227)$$

où Γ^c est la surface de contact commune à l'esclave et au maître; $g_{n0}(\vec{x})$ est le gap initial, $u_n(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{N}$. Une autre condition est la condition de compression:

$$t_n(\vec{x}, t) \leq 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.228)$$

où t_n est la composante normale du vecteur des contraintes de Cauchy du corps esclave ou du corps maître. Les composantes normales esclave et maître sont identiques en module, d'après la loi de l'action et de la réaction qui peut être considérée comme la loi fondamentale en contact. La dernière condition est la condition de contact unitaire liant g_n et t_n :

$$g_n(\vec{x}, t) \cdot t_n(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.229)$$

Cette dernière équation indique (voir figure 3.5) que si t_n est non-nulle, c'est à dire, si une

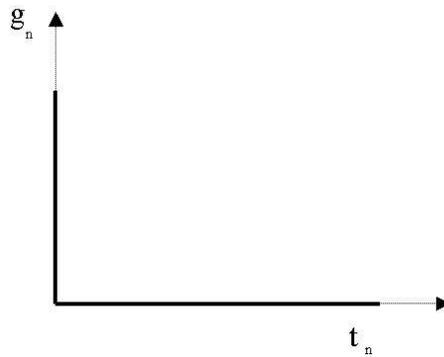


FIG. 3.5 – Loi de contact unilatéral

compression s'exerce à l'interface séparant le maître et l'esclave, alors g_n est nulle et il y a un contact. Inversement, s'il n'y a pas de contact, g_n est non-nulle et aucune pression n'est exercée sur les frontières maître et esclave.

La condition de non-interpénétration n'est respectée qu'approximativement puisque, comme pour le contact par pénalisation décrit dans le paragraphe 2.2.1, une pénétration est autorisée.

Couplage par pénalisation et par multiplicateurs de Lagrange

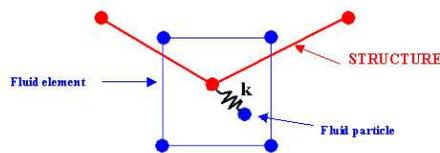


FIG. 3.6 – Schéma du couplage par pénalisation

Les dénominations "maître" et "esclave" sont, en général, attribuées au fluide et à la structure respectivement. Néanmoins, une inversion des rôles peut être effectuée même en cours de calcul. Aussi parlerons-nous ici directement du fluide et de la structure sans passer par ces dénominations. Le comportement masse-ressort du contact, décrit dans le paragraphe 2.2.1, est repris pour construire l'algorithme du couplage par pénalisation. La principale différence est l'algorithme de recherche des nœuds en interaction. En effet, contrairement aux algorithmes précédents, il n'y a pas, dans le cadre du couplage, une frontière géométrique franche entre deux maillages distincts: ces derniers ne sont pas mis en "contact". Le couplage est utilisé pour gérer l'interaction fluide/structure entre un maillage Lagrangien,

pour la structure, et un maillage Eulérien pour le fluide, le maillage Lagrangien étant immergé dans la grille Eulérienne. De ce fait, il est naturel que la recherche des nœuds du fluide ou de la structure en interaction soit différente de l'algorithme de recherche utilisée dans le contact. Ainsi, on ne vérifie pas la pénétration effective des nœuds esclaves dans le segment maître, donnée, dans le cas du contact, par la distance relative entre les positions Lagrangiennes des nœuds mais la distance relative entre une particule fluide et un point interne de l'élément de la structure. Ces points sont, en général et par défaut, utilisés pour le couplage à la place des nœuds de la structure. La position de ces points dépend de leur nombre. Dans les applications, on considère 4 points par élément et il sont décalés d'un quart de pas de maille vers l'intérieur de l'élément. Les quantités aux points internes telles que les forces d'interaction, les masses ou les vitesses sont reliées aux quantités nodales par les fonctions de forme N_I . De la même manière, la particule fluide couplée au point interne de la structure peut être assimilée à un nouveau nœud et elle est physiquement liée aux autres nœuds par les fonctions de forme Eulériennes, la force de couplage exercée sur cette particule étant ensuite distribuée aux nœuds de l'élément par l'inverse de ces mêmes fonction de forme. Un déplacement relatif construit à partir des variables Eulériennes est donné par le produit du pas de temps de calcul par la vitesse relative normale à l'élément structure: $\Delta t.(v_{structure}^{n+1/2} - v_{fluide}^{n+1/2})$. La pénétration à chaque cycle est mise à jour par:

$$d^{n+1} = d^n + \Delta t.(v_{structure}^{n+1/2} - v_{fluide}^{n+1/2}) \quad (3.230)$$

Si $d^{n+1} \cdot \vec{n}^s$ où \vec{n}^s est le vecteur normal à la structure, l'algorithme de couplage est amorcé.

Une fois la pénétration déterminée, comme pour le contact par pénalisation, une force de rappel, $F_{s \rightarrow f}$ est appliquée sur la particule fluide, la réaction à cette force étant distribuée aux nœuds structures, par les fonctions de formes nodales N_I :

$$N_I F_{f \rightarrow s}^{n+1} = -N_I k \cdot d^{n+1} \quad (3.231)$$

Le gros inconvénient de l'approche par pénalisation est la détermination de la raideur. En général, elle est déterminée à partir des masses des points internes de la structure et des masses des particules fluides en interaction. La raideur peut être déterminée de trois manières différentes:

- Hallquist [Hallquist, 1998] évalue la raideur comme le rapport entre une masse fonction

des nœuds esclaves et maîtres et le pas de temps du calcul au carré, un facteur adimensionnel, pf multiplie ce rapport: $pf \cdot M(m_{maitre}, m_{esclave}) / \Delta t^2$. La fonction M dépend de la configuration géométrique des nœuds. Le facteur adimensionnel, pf , est le facteur de pénalisation. Comme, dans l'algorithme du contact par pénalisation, sa fonction est de régler la raideur du ressort entre la particule fluide et le point interne de la structure. Les efforts d'interaction dépendant de la raideur des ressorts, la difficulté de cette approche est de pouvoir calibrer correctement ce facteur de pénalisation pour une modélisation d'un problème d'interaction fluide/structure quelconque.

- Zhong [Zhong, 1993], dans le cadre des méthodes de contact en éléments finis, détermine la force d'interaction en calculant la force de contact entre deux nœuds en 1D par une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Cette approche, similaire à la théorie de Flanagan-Taylor [Taylor and Flanagan, 1987] utilisée dans PRONTO, est implémentée dans un algorithme de contact appelé DENA (Defence Node Algorithm). Il est possible d'adapter son approche au couplage étant donné la similitude du couplage par pénalisation avec le contact par pénalisation. La particule fluide et le point interne de la structure ont les caractéristiques des nœuds. Ils peuvent ainsi être assimilés aux nœuds utilisés dans la théorie de Zhong. Ainsi, la particule fluide est le nœud contacteur de masse M_f et le point interne de la structure est le nœud cible M_s . On considère un choc frontal entre ces deux nœuds:

$$M_f \frac{dv_f}{dt} = F_f + F_{s \rightarrow f} \quad (3.232)$$

$$M_s \frac{dv_s}{dt} = F_s + F_{f \rightarrow s} \quad (3.233)$$

où F_f et F_s représentent, au temps t^n , les forces nodales sans la force d'interaction $F_{s \rightarrow f} = -F_{f \rightarrow s}$. F_f et F_s contiennent les contributions des autres forces d'interaction au temps t^n qui ne sont pas encore connues. Pour obtenir un schéma explicite, on découple toutes les autres forces des forces d'interaction. Pour un couple contacteur-cible, les forces d'interactions des autres couples sont prises à t^{n-1} . Ainsi, F_f et F_s sont connues à t^n . Puisque le pas de temps est petit, l'erreur commise est acceptable. Après une combinaison linéaire de Eq.(3.232) et Eq.(3.233), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \frac{d(v_f - v_s)}{dt} = \frac{M_f}{M_s + M_f} F_s + \frac{M_s}{M_s + M_f} F_f + F_{f \rightarrow s} \quad (3.234)$$

Il est possible d'intégrer Eq.(3.234) par une méthode en différences finies centrées:

$$\frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \frac{(v_f - v_s)^{n+1/2} - (v_f - v_s)^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{M_f}{M_s + M_f} F_s + \frac{M_s}{M_s + M_f} F_f + F_{f \rightarrow s} \quad (3.235)$$

La contrainte cinématique de contact impose qu'à t^{n+1} , la pénétration soit nulle: $d^{n+1} = 0$. En incluant Eq.(3.230) dans Eq.(3.235), la force d'interaction appliquée au nœud cible (au point interne de la structure) est donnée par:

$$F_{f \rightarrow s} = \frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \left(\frac{(v_s - v_f)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{d^n}{\Delta t^2} + \frac{F_s}{M_s} - \frac{F_f}{M_f} \right) \quad (3.236)$$

La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange sera une des méthodes employées pour coupler le fluide et la structure.

- On peut enfin adapter la méthode de pénalisation en contact présentée dans le paragraphe 2.2.1 au couplage par pénalisation. En effet, la relation Eq.(2.49) donnant la raideur peut être retrouvée si on considère l'équation d'état Eq.(3.179) pour l'eau.

$$P = C_1 \mu = C_1 \frac{\rho - \rho_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (3.237)$$

On suppose qu'il existe un contrôle de volume de volume V_{ref} pour lequel la masse volumique moyenne ρ_{ref} peut être trouvée. Si ce contrôle de volume se déforme avec le fluide du volume V_{ref} au volume V , la masse de ce volume de contrôle est donnée par $\rho_{ref} V_{ref} = \rho V$. La pression est alors réécrite sous la forme suivante:

$$P = C_1 \frac{V_{ref} - V}{V} \quad (3.238)$$

or la variation de volume est due au mouvement relatif entre le fluide et la structure supposée rigide: $V_{ref} - V = A_q d$ où d est donnée par Eq.(3.230) et $A_q = Aire(\Omega_s^e)/4$. En fait, A_q est l'aire de l'élément structure divisée par le nombre de points internes (en l'occurrence, dans les applications numériques, il y a 4 points par élément). On retrouve ainsi aisément la force de pénalisation en multipliant Eq.(3.237) par A_q et par le paramètre pf :

$$F_{f \rightarrow s} = \frac{pf C_1 A_q^2}{V} d \quad (3.239)$$

avec $C_1 = \rho c^2$ où c représente la vitesse du son et ρ , la masse volumique. Le volume V peut être estimé en considérant que la masse de fluide comprimée est un cylindre de volume

$V = L.A_q$ où L est la longueur suivant la directrice de ce cylindre. Pour un piston ayant une longueur infiniment grande, $L = c\Delta t$ et le volume du fluide accéléré est donné par $A_q c \Delta t_f$ où Δt_f est le pas de temps associé au fluide. Dans le cas du tossage, le domaine fluide Ω_f est effectivement très grand pour limiter les effets des bords de la grille Eulérienne sur la solution et on conserve la définition $L = c\Delta t$. L représente alors la taille caractéristique des mailles Ω_f^e . Ainsi, la raideur peut être évaluée à partir de Eq.(3.237) par la relation suivante:

$$k = \frac{pf\rho c A_q}{\Delta t_f} \quad (3.240)$$

Les méthodes de contact [Hallquist, 1998] déterminent la raideur du fluide par Eq.(3.240).

Pour la structure, la raideur est donnée par une formulation équivalente:

$$k_s = \frac{pfKA_q}{\max(\text{diagonales}\Omega_s^e)} \quad (3.241)$$

où K est le module de compressibilité de la structure. Une raideur équivalente k_{eq} d'un système couplé peut alors être évaluée par:

$$k_{eq} = \frac{k_s k_f}{k_s + k_f} \quad (3.242)$$

avec k_f , la raideur donnée par Eq.(3.240). Le maillage est construit de manière à ce que les mailles du fluide et celles de la structure aient des dimensions équivalentes dans la zone du couplage. Ainsi, les diagonales d'un élément Ω_s^e sont de l'ordre de la longueur caractéristique d'une maille fluide $L = c\Delta t_f$. De ce fait, en posant $K_f = \rho c^2$ dans Eq.(3.240) et $K_s = K$ dans Eq.(3.241), k_{eq} est du même ordre que $pf \frac{K_s K_f}{K_s + K_f}$ où K_i avec $i = f, s$ représentent la compressibilité de chaque matériau. Comme K_s est, en général, grand devant K_f ($K_{acier} = 160GPa$ ou $K_{aluminium} = 70GPa$ devant $K_{eau} = \rho c^2 = 2.25GPa$), k_{eq} est proche de k_f . Ainsi, dans les applications numériques, la raideur du couplage est estimée par Eq.(3.240). En effet, comme les résultats de référence sont données pour des structures rigides, la plupart des résultats numériques sont obtenus pour des cas rigides et lorsque la structure est déformable, la rigidité de cette dernière reste importante devant le fluide (on considère, soit de l'acier, soit de l'aluminium).

Note: La raideur de Eq.(3.240) est calculée, dans les chapitres suivants, par unité d'aire:

$$k = \frac{pf\rho c}{\Delta t_f} \quad (3.243)$$

k représente alors une "densité surfacique de raideur" dont les unités sont $GPa.m^{-1}$. Malgré cette unité, dans la suite, elle est appelée "raideur" pour plus de commodités.

3.4 Conclusion

La formulation Lagrangienne a été, premièrement, décrite. Des éléments quadrangles basés sur une approche Reissner-Mindlin (Eléments de type Belytschko-Lin-Tsay) composent la structure. La méthode Lagrangienne est précise et simple pour calculer la déformée d'une structure. Cependant, elle n'est pas adaptée à un calcul en grandes déformations à cause des distorsions de mailles. Une formulation Eulérienne basée sur des éléments hexaédriques est alors mise en œuvre pour déterminer le mouvement du fluide. Le maillage est fixe et le fluide peut traverser les mailles. Le pas de calcul Eulérien se fait en deux temps: d'abord un calcul Lagrangien détermine les variables physiques du problème; ensuite le maillage est remplacé à sa position initiale et les inconnues sont projetées sur cette position par une méthode d'advection (Van Leer). Dans un calcul ALE, le maillage est déplacé, à la convenance de l'utilisateur, en fixant arbitrairement une vitesse convective. La caractéristique de la formulation Eulérienne et ALE est de prendre en charge plusieurs fluides dans un même maillage. Un nouveau champ d'inconnues est alors ajouté aux variables physiques: la fraction volumique. Ce champ permet de situer la position de la surface libre (d'une manière générale, la position d'une interface matérielle). Si la grille multi-matériaux est composée d'air et d'eau (comme ce sera le cas dans les applications suivantes), une fraction volumique valant 0 correspond à une cellule remplie d'air, et 1, à une cellule remplie d'eau. Les fractions comprises entre 0 et 1 indiquent des cellules composées d'air et d'eau. L'équilibre des pressions dans ces cellules permet de déterminer la valeur de la fraction volumique et la position de l'interface matérielle est calculée par une méthode de Young. Pour coupler la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne, deux approches sont utilisées et comparées dans la suite: la méthode par pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour la méthode par pénalisation, la question qui reste en filigrane dans cette thèse est comment déterminer correctement la raideur de pénalisation pour calculer un champ de pression phy-

sique lors d'un impact hydrodynamique. Nous tentons de répondre à cette question dans les deux chapitres suivants.

Chapitre 4

Etude de problèmes 1D

Ce chapitre présente une étude de deux problèmes simples en 1D qui ont l'avantage de mettre en évidence certaines caractéristiques des méthodes de couplage employées. Pour ces problèmes simples, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une approche directe et précise de la solution. Par contre, la méthode par pénalisation exige un choix de l'utilisateur qui dépend de l'expérience de ce dernier. Ce choix porte sur la détermination de la raideur de pénalisation: trop grande, le calcul peut être instable, trop petite, la pénétration relative devient inacceptable. De plus, lorsqu'une valeur garantit la proximité avec la solution, les efforts numériques peuvent être perturbés par des oscillations dont l'origine numérique est inhérente au couplage. Pour assurer une comparaison optimale avec les solutions de référence, un effet dissipatif est introduit dans la méthode par pénalisation. Dans un premier temps, l'impact d'une colonne d'eau sur un mur rigide est étudiée. Le temps caractéristique de l'impact est le temps de la simulation. Ainsi, seuls les premiers instants de l'impact sont analysés, l'écoulement du liquide le long du mur n'est pas considéré. La deuxième application est un piston écrasant une quantité de liquide à vitesse constante. Les perturbations issues du couplage seront alors mises en évidence et un amortissement numérique est introduit pour limiter ces oscillations.

4.1 Impact d'une colonne d'eau

On considère une colonne d'eau tombant sur une plaque horizontale avec une vitesse d'impact $v_{impact} = 5m.s^{-1}$. Le temps de l'impact est le temps de la simulation : on arrête la

simulation avant qu'il n'y ait un écoulement le long de la plaque. Ce temps étant court (0.2ms), une première étude devra être faite sur le pas de temps permettant aux méthodes de converger. Le maillage employé pour le fluide est une grille Eulérienne et, pour la structure, un maillage Lagrangien est composé d'éléments quadrangles (voir Fig.4.2(a)). La solution théorique est un impulse de pression dont la magnitude est donnée par : $\rho cv_{impact} = 7.7MPa$. Cette application est étudiée en utilisant les méthodes de couplage décrites précédemment. Dans un premier temps, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est mise en œuvre seule afin de vérifier quel pas de temps permettra de converger vers la solution physique. Ensuite, en conservant le pas trouvé, cette méthode est comparée à la méthode par pénalisation. Dans une dernière partie, la méthode par pénalisation est étudiée pour différent paramètre de pénalisation pf .

4.1.1 Etude du pas de temps

La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange décrite précédemment dans le paragraphe 3.3.2 est appliquée pour gérer l'interaction entre le fluide et la plaque. Comme la structure est rigide, cette dernière est une simple condition aux limites pour le fluide. Pour représenter cette condition aux limites, on fait tendre la rigidité k_s de Eq.(3.242) et la masse M_s de Eq.(3.236) vers l'infini. La relation Eq.(3.236) devient:

$$F_{f \rightarrow s} = M_f \left(\frac{(v_s - v_f)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{d^n}{\Delta t^2} + -\frac{F_f}{M_f} \right) \quad (4.1)$$

Dans un premier temps, on examine l'influence du pas de temps Δt défini par $\Delta t = tssf\Delta t_f$ où $tssf$ est un scalaire inférieur à 1. Par défaut, $tssf$ vaut 0.65. La pression exercée sur la plaque est tracée en fonction du temps pour différentes valeurs de $tssf$ (voir Fig.4.1). On voit que la méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange converge vers la valeur attendue quand Δt diminue. On conserve, dans la suite liée à cette application, le pas de temps permettant la convergence. La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'atteindre un résultat précis pour cet exemple sans avoir à choisir un paramètre, contrairement à la méthode par pénalisation. Dans la suite, nous comparons les deux méthodes.

4.1.2 Comparaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode par pénalisation

A présent, nous reprenons l'étude faite par Zhong dans [Zhong, 1993] de l'impact d'une barre sur un mur. Il compara la méthode par pénalisation et la méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange introduite par l'algorithme DENA. Deux modèles sont créés:

- un modèle de référence (voir Fig.4.2(b)) pour lequel la grille Eulérienne est utilisée uniquement et la plaque est modélisée en bloquant les nœuds,
- le modèle précédent (voir Fig.4.2(a)) pour lequel la grille Eulérienne est couplée à une plaque constituée d'éléments quadrangles (voir le paragraphe 3.1.4) en utilisant l'algorithme explicite des multiplicateurs de Lagrange.
- et un dernier modèle basé sur les formulations précédentes et sur une méthode par pénalisation. La raideur est évaluée par Eq.(3.240). $L = 0.025m$ est la taille caractéristique des mailles Eulériennes d'où $\Delta t_f = \Delta x/c = 1.666\mu s$. Δt_f est le pas de temps associé au fluide. On en déduit une raideur valant $90GPa.m^{-1}$.

On obtient les courbes de pressions de Fig.(4.3) :

- La courbe A montre la pression obtenue à partir du modèle illustré sur Fig.4.2(b) pour lequel la condition de glissement (nœuds bloqués) représente la plaque,
- la courbe B donne la pression obtenue en couplant par pénalisation une plaque d'éléments quadrangles et la grille Eulérienne,
- la courbe C donne la pression obtenue en couplant une plaque d'éléments quadrangles et la grille Eulérienne par la méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange décrite dans [Zhong, 1993] et dans la chapitre précédent.

Les trois impulsions de pression sont très proches de la solution théorique: $\rho cv_{impact} = 7.7MPa$. Néanmoins, la courbe de pression obtenue par la méthode de pénalisation rejoint la pression nulle tardivement et oscille faiblement. Comme Zhong l'a fait remarquer dans [Zhong, 1993], il faut adapter le facteur de pénalisation pf pour obtenir une solution physique. Si pf est trop important, le calcul est déstabilisé pour les mêmes raisons que celles évoquées pour les méthodes de contact dans le paragraphe 2.2.1: la force d'interaction trop grande inverse la vitesse relative dans le même pas de temps. L'élément Eulérien contenant la particule fluide est alors traversé par une onde de compression et ensuite par une onde de dépression dans le même pas de temps ce qui viole la condition CFL de stabilité. Si pf est trop petit, le fluide peut traverser la structure et la pression exercée sur la structure est faible

devant la pression physique. Ce comportement est visible dans l'évolution de la courbe (B). Il faut alors augmenter le facteur pf .

4.1.3 Etude de pf

En reprenant le modèle par pénalisation décrit précédemment, on choisit successivement $pf = 10$, $pf = 100$ et $pf = 1000$. Les courbes de pressions sont comparées, sur Fig.4.4 à la courbe de référence (A) de Fig.4.3. Plus pf augmente, plus on s'approche de la solution physique mais, dans le même temps, plus la courbe est oscillante. Pour $pf = 1000$, la courbe est fortement oscillante et l'erreur sur la solution est aussi très importante. Les paramètres $pf = 10$ et $pf = 100$ sont proches de la solution. Ainsi, on observe ici qu'il n'y a pas qu'une solution unique pour pf mais une plage de valeurs garantissant un résultat proche de la solution recherchée. Néanmoins, trouver un domaine de valeurs pf pour lequel une solution numérique est valide n'est pas un problème évident. Si ce domaine existe, il devrait être indépendant du maillage employé. Par exemple, pour $pf = 10$, on crée un nouveau maillage avec un rapport de forme différent pour les mailles fluides (voir Fig.4.2(c)). Si on compare la courbe de référence et la courbe (B), on remarque que la seconde serait quasiment confondue avec la première si des oscillations ne perturbaient pas la pression. Pour mettre en évidence l'origine de ces oscillations, une autre application est traitée: le piston.

4.2 Etude du piston

Un piston comprime un fluide (une quantité d'eau) à vitesse constante, $v = 5m/s$. La colonne d'eau est, en fait, un cube de $0.5m$ de coté. Comme précédemment, la pression exercée sur le piston est l'objet de cette étude.

4.2.1 Comparaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode par pénalisation

On compare trois cas:

- Un modèle de référence (voir Fig.4.6) auquel les résultats pourront être comparés, est

construit en modélisant le fluide et la structure par une formulation Lagrangienne. Les nœuds de la structure et ceux du fluide sont confondus de sorte que la condition cinématique imposée sur le piston est directement appliquée sur la frontière du fluide.

- Un modèle de couplage où l'algorithme de Zhong gère l'interaction entre une formulation Lagrangienne pour la structure et une formulation Eulérienne pour le fluide (voir Fig.4.3). Comme précédemment, le piston est considéré comme rigide. On reprend alors la relation Eq.(4.1).

- Un modèle de couplage par pénalisation (voir Fig.4.3) dans lequel la raideur est évaluée à partir de Eq.(3.240) avec un pas de temps de $1.66\mu s$: $k = 9000GPa.m^{-1}$. Ici, le facteur de pénalisation pf est fixé à 1.

Contrairement à l'application précédente, une calibration du pas de temps de calcul n'est pas nécessaire étant donné que l'étude se fait sur une durée plus longue ($10ms$). Les courbes de pression exercées sur le piston sont tracées sur Fig.4.3. Comme dans l'application de l'impact de la colonne d'eau, la méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange converge après quelques oscillations vers la solution de référence. Par contre, la pression obtenue par la méthode par pénalisation est fortement oscillante et elle semble (comme pour Fig.4.5) osciller autour de la solution recherchée.

4.2.2 Origine des oscillations dans la méthode de pénalisation

Pour déterminer l'origine des oscillations, on évalue la fréquence de celles-ci en appliquant, au signal (C) de Fig.4.3, une transformée de Fourier (FFT). Le spectre présenté sur Fig.4.3 donne une fréquence de $26,7kHz$.

Fréquence propre du piston

Pour vérifier que cette fréquence n'a pas d'origine physique, on reprend Eq.(3.238) en affectant à V et à V_{ref} le volume courant et le volume initial du piston, respectivement. Comme $V = A.D$ où A représentent la section du piston et D , la hauteur d'eau, la relation Eq.(3.238) devient:

$$P = C_1 \frac{\Delta D}{D} \quad (4.2)$$

La valeur initiale D^0 diminue de 10% sur le temps du calcul: $10ms$ (sur Fig.4.3 et Fig.4.6, la vitesse du piston est plus importante pour que son déplacement soit visible). La hauteur d'eau finale est de $D^f = 0.45m$ et la raideur équivalente du piston passe de: $\frac{C_1}{D} = \frac{\rho c^2}{D^0} = 4.5GPa.m^{-1}$ à $\frac{C_1}{D} = \frac{\rho c^2}{D^f} = 5GPa.m^{-1}$. En sachant que la masse d'eau par unité d'aire comprimée par le piston est déterminée par ρD , la fréquence propre du piston $freq_p$ est donnée par:

$$freq_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{\rho c^2}{D}}{\rho D}} = \frac{c}{2\pi D} \quad (4.3)$$

Cette fréquence est comprise alors dans l'intervalle suivant: [477Hz,530Hz]. Elle correspond au nombre d'aller-retour par seconde parcourus par l'onde dans le piston et elle diffère de la fréquence déterminée par FFT.

Fréquence propre du couplage

A présent, on recherche la fréquence propre du système $[M_f - k - M_s]$ représenté sur Fig.4.11. Le schéma 1 de cette figure représente le principe du couplage: dès qu'il y a une interpénétration entre les masses M_s et M_f , une force de rappel représentée par un ressort de raideur k est appliquée sur les deux masses. Le schéma 2 de Fig.4.11 est équivalent au schéma 1 pour une masse équivalente $M_{eq} = \frac{M_s M_f}{M_s + M_f}$ et un ressort de raideur k . Cette équivalence est aisément démontrée par la relation Eq.(3.234) résultante de la combinaison de Eq.(3.232) et Eq.(3.233). Les masses des points interne de la structure et des particules fluides sont évaluées par les fonctions de forme N_I et les masses nodales M_I : la modélisation numérique donne une masse équivalente variant de $M_{eq} = 28kg.m^{-2}$ à $M_{eq} = 44kg.m^{-2}$ suivant la position du point interne le long du piston (comme pour la raideur, la masse est en fait une masse par unité d'aire). La fréquence propre du couplage $freq_c$ est alors donnée par:

$$freq_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M_{eq}}} \quad (4.4)$$

La fréquence propre du couplage est alors comprise entre: $freq_c = 22.5kHz$ et $freq_c = 28.5kHz$. Ces valeurs sont très proches de la valeur déterminée sur le spectre fréquentiel de Fig.4.3. Comme cette fréquence est distincte d'une fréquence physique, nous introduisons un amortissement qui filtrera cette fréquence.

4.2.3 Introduction d'un effet dissipatif dans le couplage

En général, l'amortissement numérique dans les algorithmes altère la simulation du phénomène physique et on recherche à limiter cette dissipation. Ainsi, Piperno et al., dans [S. Piperno, 1993] tente de compenser les erreurs liées à la dissipation numérique engendrée par leur schéma de couplage. A contrario, ici, on introduit un facteur dissipatif qui permettrait d'atténuer les fortes oscillations mises en évidence dans [Couty, 2002]. Le procédé est simple: au système masse-ressort décrit précédemment, on ajoute un amortisseur comme illustré sur Fig.4.10. L'équation d'équilibre, Eq.(4.5), des forces numériques de couplage est écrite en fonction du déplacement relatif Z des masses du fluide, m_{fluide} , et de la structure, $m_{structure}$ en interaction:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \xi \cdot \frac{dZ}{dt} + \omega^2 \cdot Z \quad (4.5)$$

avec ξ le facteur d'amortissement et $\omega = \sqrt{\frac{k \cdot (M_s + M_f)}{M_s \cdot M_f}}$.

Afin d'optimiser l'amortissement des oscillations numériques indésirables, ξ est fixé à une valeur critique $\xi = 2\omega$. Cet amortissement est aussi nommé "damping" dans cette thèse. Dès lors, pour vérifier l'efficacité de cette méthode, on traite les deux exemples précédents:

- Une colonne d'eau entre en collision avec une plaque rigide et on trace l'évolution de l'impulse de pression. Deux cas sont comparés: le cas de référence décrit dans le paragraphe 4.1.2 pour lequel les nœuds du fluide et ceux de la structure sont confondus et le cas du couplage par pénalisation avec damping où la structure Lagrangienne est couplée à une formulation Eulérienne pour le fluide. Les courbes de pression présentées sur Fig.4.12 sont très proches et les oscillations qui apparaissaient sur Fig.4.5 sont amorties.

- Un piston comprime un fluide à vitesse constante et on cherche l'évolution de la pression dans le fluide. Deux cas sont considérés: une modélisation du problème du piston reposant sur un couplage en pénalité avec amortissement et une autre modélisation pour laquelle les nœuds du fluide et de la structure sont confondus afin d'assurer un couplage cinématique entre les deux maillages. Les courbes de pressions sont tracées sur Fig.4.13. La courbe de référence présente des oscillations dont la période correspond au temps mis par l'onde de compression pour se propager dans le fluide, se réfléchir sur la paroi du fond et revenir au piston. Lorsqu'on ajoute un amortissement numérique dans le couplage en pénalité, on voit que la courbe est moins oscillante et qu'elle est proche de la courbe de référence.

Ainsi, l'implémentation de l'algorithme de l'amortissement dans le couplage en pénalité permet de limiter les oscillations numériques parasites sans affecter l'évolution physique de la pression.

4.3 Conclusion

La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange permet de converger rapidement vers la solution pour ces problèmes unidimensionnels. Il faudra vérifier, dans la suite, si cette approche tient ses promesses pour des problèmes plus complexes en 2D. Le couplage par pénalisation est tributaire du choix de la raideur et, vis à vis de l'approche directe des multiplicateurs de Lagrange qui n'exige aucun choix de l'utilisateur, la méthode par pénalisation apporte plus d'inconvénients que d'avantages pour traiter de simples problèmes 1D. Une raideur trop faible implique des interpénétrations inacceptables et une raideur trop forte perturbe les efforts d'interaction par des oscillations. Néanmoins, dans ce cas, l'évolution moyenne de la pression appliquée à la structure est proche de la solution physique et l'introduction d'un amortissement numérique permet de dissiper l'énergie emmagasinée dans les ressorts de pénalisation. Cependant, deux critiques peuvent être émises à propos de l'introduction d'une dissipation numérique dans le couplage. Premièrement, elle exige quelques précautions dans son application car il faut effectivement s'assurer que les fréquences physiques soient loins des fréquences numériques à amortir. En général, la fréquence du couplage par pénalisation est suffisamment grande devant la fréquence physique maximale pour éviter que le couplage ne perturbe déjà le phénomène physique. Deuxièmement, les cas présentés dans ce chapitre et les applications des chapitres suivants n'incluent pas de viscosités physiques. Il est donc naturel que l'introduction d'une viscosité numérique ait un effet si positif et si spectaculaire sur les résultats. Si un impact plus réaliste incluant les viscosités physiques était réalisé, le damping serait certainement déjà assuré. Pour cette thèse, l'effet dissipatif introduit dans le couplage permet de comparer les forces d'interaction numériques et théoriques en absence d'oscillations. Nous verrons, dans la suite, que le damping n'a pas toujours l'effet dissipatif escompté et que toutes les perturbations impliquant le couplage ne sont pas amorties.

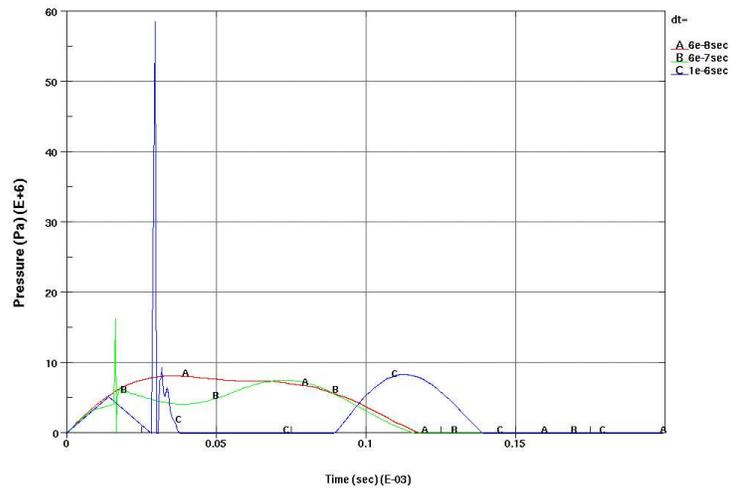


FIG. 4.1 – Pression exercée sur la plaque pour différents Δt : (A) $\Delta t = 0.06\mu s$ (B) $\Delta t = 0.6\mu s$ (C) $\Delta t = 1\mu s$

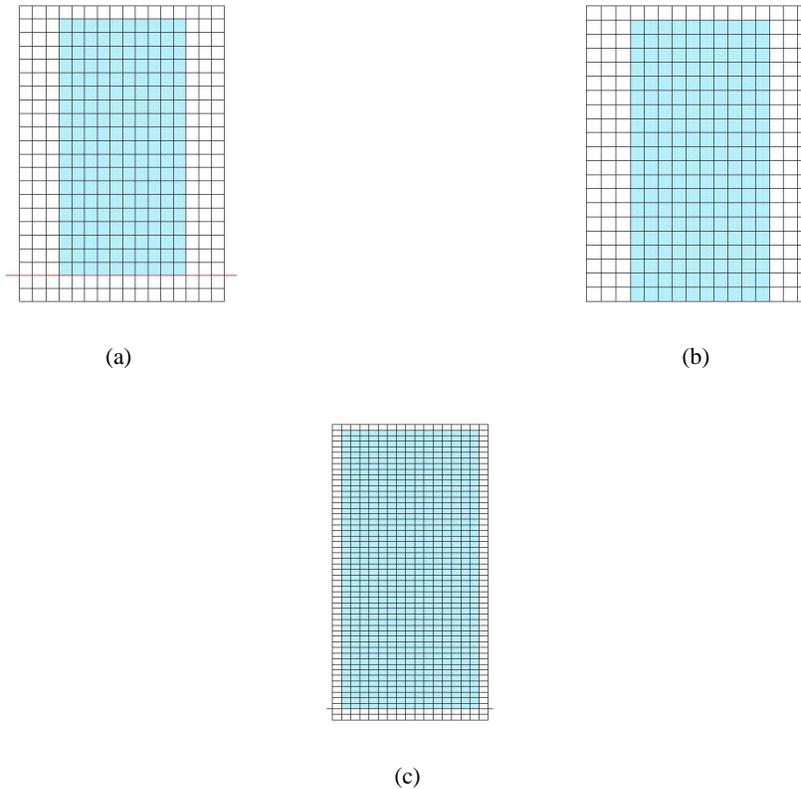


FIG. 4.2 – (a) Modèle d'impact de la colonne en couplage, (b) Modèle d'impact de la colonne en bloquant les nœuds, (c) Modèle d'impact de la colonne en couplage pour un maillage différent

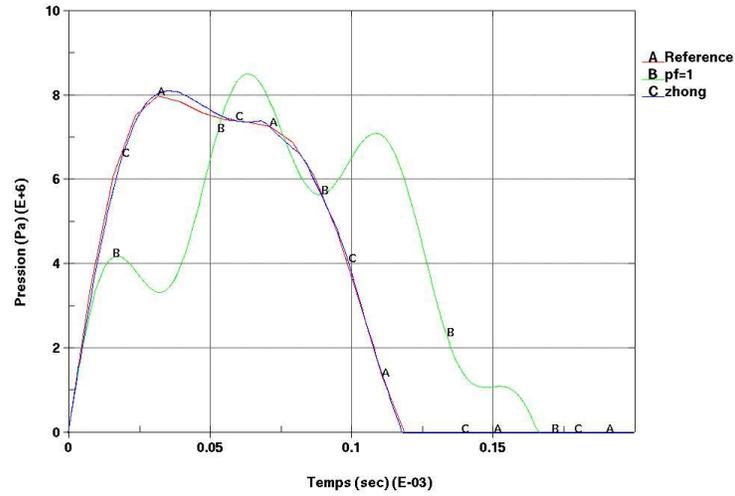


FIG. 4.3 – Pressions exercées sur la structure: (A) Courbe de référence, (B) Couplage par pénalisation avec $pf=1$, (C) Méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange

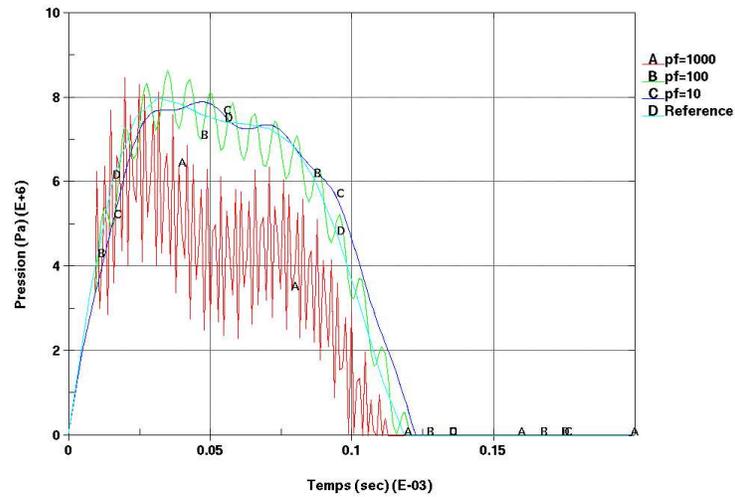


FIG. 4.4 – Pressions exercées sur la structure: (A) Couplage par pénalisation avec $pf=1000$, (B) Couplage par pénalisation avec $pf=100$, (C) Couplage par pénalisation avec $pf=10$, (D) Courbe de référence

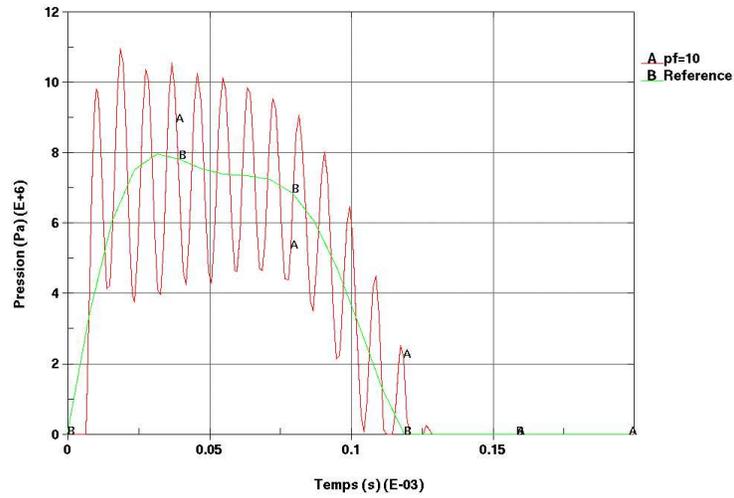


FIG. 4.5 – Pressions exercées sur la structure:(A) Couplage par pénalisation pour un maillage différent avec $pf=10$, (B) Courbe de référence

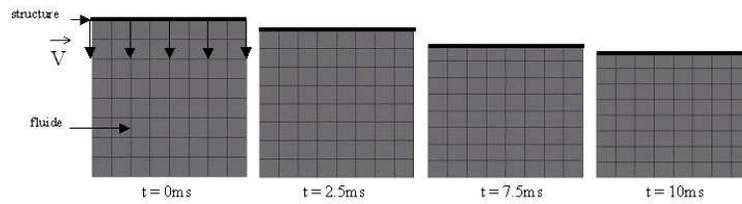


FIG. 4.6 – Modèle de référence du piston

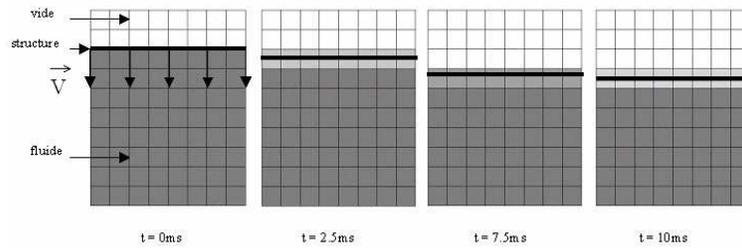


FIG. 4.7 – Modèle du piston en couplage

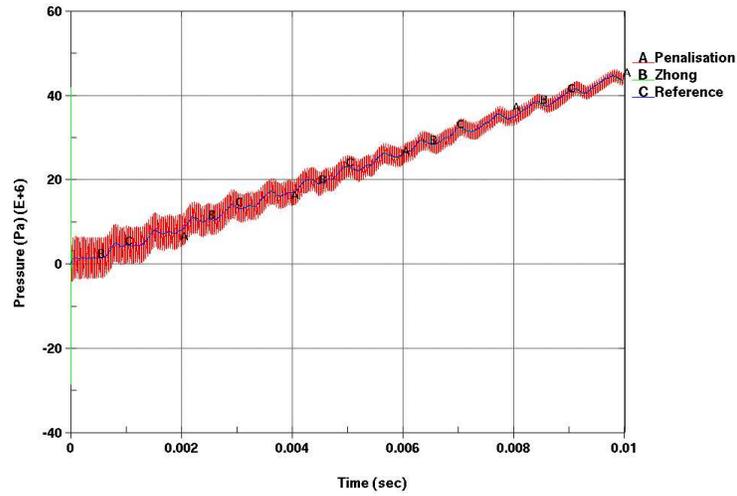


FIG. 4.8 – Pressions exercées sur le piston: (A) Couplage par pénalisation, (B) Méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange, (C) Courbe de référence

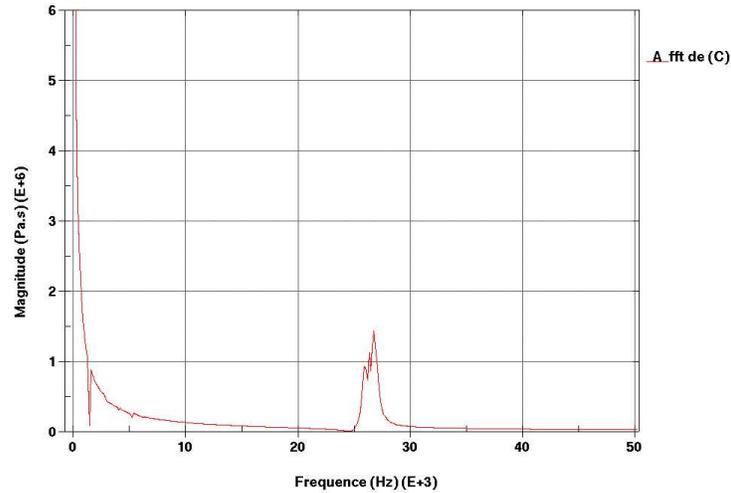


FIG. 4.9 – Spectre fréquentiel du signal en pression (C) de la figure précédente

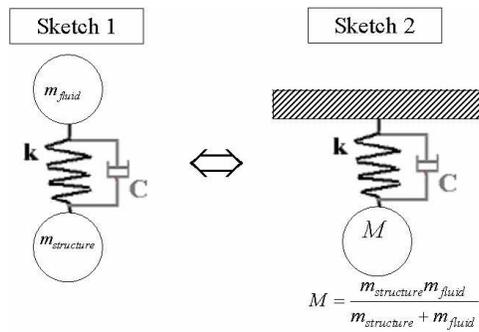


FIG. 4.10 – Schéma du couplage en pénalité avec amortissement

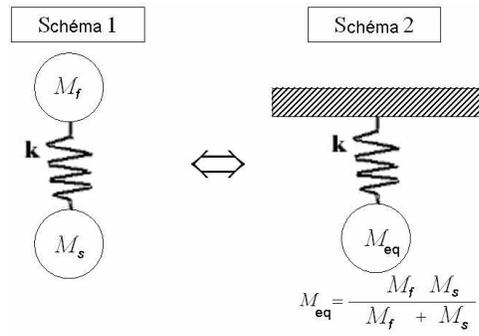


FIG. 4.11 – Schéma du couplage en pénalité

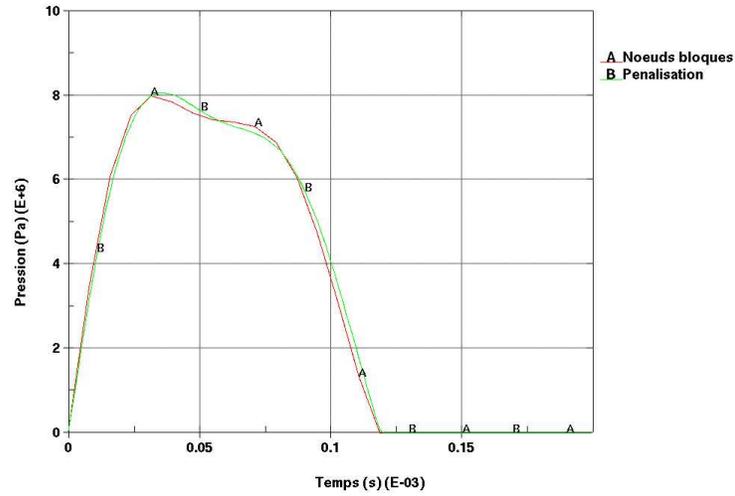


FIG. 4.12 – Pressions exercées sur la plaque: (A) Courbe de référence (B) Couplage par pénalisation avec damping

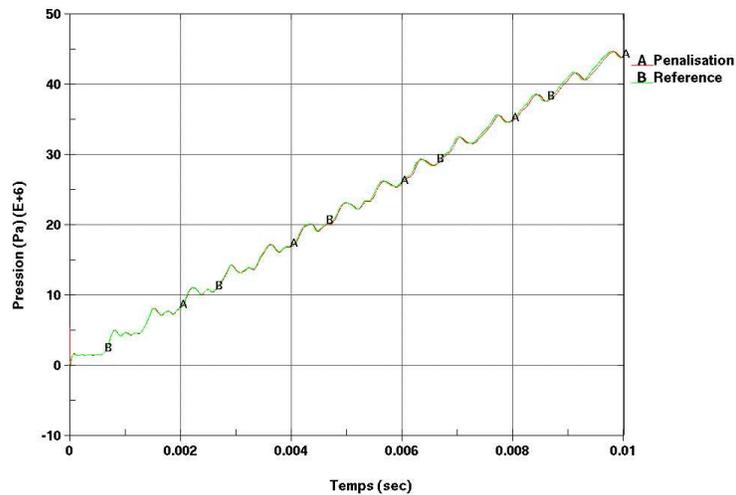


FIG. 4.13 – Pressions exercées sur le piston: (A) Couplage par pénalisation avec damping (B) Courbe de référence

Chapitre 5

Etude de problèmes 2D

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'entrée d'un dièdre dans l'eau avec la formulation Lagrange-Euler décrite dans le chapitre 3. Le modèle étudié est basé sur les hypothèses de l'étude bibliographique faite dans le chapitre 2. Les éléments quadrangles de la structure reposent sur une formulation Lagrangienne de type Belytschko-Lin-Tsay décrite dans le paragraphe 3.1.4 et les éléments hexaédriques pour l'eau et pour l'air sont basées sur une formulation Eulérienne multi-matériaux décrite dans le paragraphe 3.2. On se propose d'établir une base de données pour les paramètres contrôlant la force de couplage. Cette base est construite en estimant la magnitude de la pression locale exercée sur un dièdre pour différents angles d'incidence. Par la suite, ces données sont employées pour l'impact d'un cylindre sur l'eau. L'idée est d'étendre, les résultats obtenus pour le dièdre, à une géométrie quelconque. Deux méthodes de couplage sont comparées: l'approche par pénalisation et celle reposant sur les multiplicateurs de Lagrange.

5.1 Description du modèle

Le modèle est un demi-dièdre constitué d'éléments quadrangles en formulation Lagrangienne immergé dans une grille Eulérienne modélisant l'écoulement d'une surface libre séparant l'air et l'eau (voir Fig.5.1). On profite de la symétrie du problème pour réduire, par deux, la taille du domaine de calcul en imposant une condition de glissement le long de l'axe de symétrie du dièdre. La largeur de ce dernier est de $250mm$. La dimension du domaine de calcul pour le fluide est étudiée dans un paragraphe suivant afin de vérifier que les

conditions aux frontières n'influencent pas les résultats recherchés. Le dièdre composé de 99 éléments quadrangles sur la partie inclinée entre dans l'eau à vitesse constante et égale à 6150mm/s . Plusieurs angles d'incidence α sont considérés ; de 1° à 30° . Pour chacun de ces angles, on s'intéresse à la pression locale exercée sur la structure.

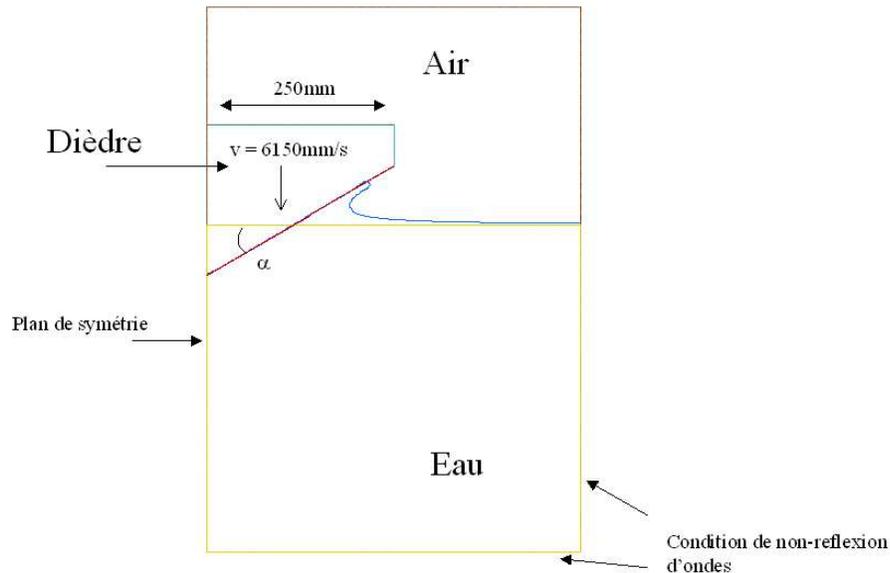


FIG. 5.1 – Présentation du modèle pour l'entrée du dièdre dans l'eau

5.1.1 Vérification des hypothèses théoriques

L'équation d'état liant la pression et la densité est donnée par Eq.(3.179). Cette relation linéaire implique que l'incompressibilité du fluide est assurée approximativement: puisque la valeur du module de compressibilité est très important ($\rho c^2 = 2.25\text{GPa}$), à une variation de la densité correspond une forte pression. Ainsi, lorsque le dièdre entre en contact avec la surface libre, la masse d'eau accélérée par le couplage entraîne une brutale compression et donc une augmentation de la densité. Cette onde de choc est plus ou moins forte suivant l'angle d'incidence considéré et si ce dernier est faible, un écoulement peut devenir compressible. Communément, un nombre de Mach inférieur à 0.3 correspond à des variations de densité faibles et donc à un écoulement incompressible. En reprenant la vitesse théorique du glissement du point de stagnation le long du dièdre (Eq.2.16), l'angle d'incidence ne devrait pas être plus petit que l'angle suivant:

$$\alpha > \arctan\left(\frac{\pi v}{0.6c}\right) = 1.23 \quad (5.1)$$

Pour 1^o, les comparaisons avec la théorie ne seront alors pas appropriées; néanmoins, cet angle d'incidence sera étudié. D'une manière générale, pour s'assurer que l'écoulement sera quasiment incompressible pour un angle donné, la pression est prise loin du point d'impact.

En théorie, l'écoulement est non-visqueux et dans un impact sur l'eau, le champ de pression est très important devant le champ de contraintes déviatoriques. On peut ainsi négliger le terme déviatorique dans la loi de comportement données par Eq.(3.108) . On peut alors considérer l'écoulement comme étant irrotationnel. Comme il est aussi incompressible, l'analyse du paragraphe 2.1.4 permet de conclure que l'écoulement est auto-similaire à condition d'être loin du point d'attaque du dièdre et loin du bord de fuite. Pour s'assurer de cette propriété et pour vérifier l'incompressibilité, les pressions sont alors prises en un élément du dièdre situé à égale distance des limites de la partie inclinée. Suivant la théorie décrite dans le paragraphe 2.1.3, la pression doit être alors égale à:

$$\frac{p}{\rho} = V \frac{x_{max}}{\sqrt{x_{max}^2 - x^2}} \frac{dx_{max}}{dt} + 2 \left(\frac{dx_{max}}{dt} \right)^2 |\tau|^{\frac{1}{2}} (1 + |\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} - V x_{max} \left(\frac{dx_{max}}{dt} \right)^2 [2x_{max}(x_{max} - x)]^{-1/2} \quad (5.2)$$

où x_{max} et x représentent, respectivement, la position du point d'arrêt et la position du centre de l'élément où est prise la pression suivant l'axe horizontal (on a remplacé c par x_{max} pour éviter toutes confusions avec la vitesse du son). τ est donné en résolvant Eq.(2.29) dans le paragraphe 2.1.3.

5.1.2 Conditions aux limites

Condition de non-réflexion d'ondes

Quand le dièdre atteint la surface libre, une onde de choc peut se développer et se réfléchir sur la frontière de la grille Eulérienne si cette dernière est bloquée. Aussi impose-t-on une condition de non réflexion d'ondes sur les frontières de la grille modélisant l'eau (sauf naturellement sur l'axe de symétrie). Ces conditions discutées par [Cohen and Jennings, 1983] appliquent, à la frontière, un champ de pression proportionnelle à la vitesse de la particule:

$$p = -\rho c v_n \quad (5.3)$$

où ρ , c et v_n représentent la masse volumique, la vitesse du son et la vitesse particulaire normale à la frontière respectivement. Ainsi, lorsqu'une onde de choc atteint la frontière, une pression opposée en magnitude est imposée sur la frontière de manière à ce que la résultante de l'onde incidente et de l'onde générée par la frontière soit nulle. Ces frontières permettent de représenter, pour le champ de pression, un domaine infini. A présent, on doit vérifier que les conditions appliquées aux frontières de la grille ne perturbent les champs locaux, notamment la pression exercée sur la structure.

Dimensions de la grille Eulérienne

Les dimensions de la grille Eulérienne sont évaluées de manière à ce que les frontières de cette dernière n'influencent pas le champ de pression exercé sur le dièdre. Dans un premier temps, la largeur de la grille est égale à deux fois la largeur du dièdre. D'après l'analyse faite dans le paragraphe précédent consacré aux vérifications des hypothèses, on trace la pression au milieu du dièdre pour deux angles différents: 1° et 30° . Ensuite, on multiplie par 2 la largeur de la grille et on compare la pression pour le même point. Si les courbes sont différentes, on augmente à nouveau la largeur jusqu'à ce que les courbes pour deux grilles de tailles successives soient proches. On observe sur Fig.5.2 pour 30° que la pression obtenue pour une largeur de $1000mm$ (x2) est confondue avec celle calculée avec une largeur de $2000mm$ (x4). De même, pour 1° , les courbes de pression pour deux largeurs différentes, $500mm$ (x1) et $1000mm$ (x2), sont très proches entre elles. La largeur de grille devrait être fixée à $1000mm$ pour toutes les simulations. De la même manière, la hauteur d'eau dans la grille Eulérienne est fixée initialement à $400mm$, puis on augmente cette hauteur jusqu'à ce que la courbe de pression ne soit plus influencée par la condition de non-réflexion d'ondes appliquée sur la frontière basse de la grille. Comme précédemment, sur Fig.5.4 et sur Fig.5.5, on remarque que la pression ne varie plus au-delà du double de la hauteur initiale, donc, la hauteur entre la surface libre et la frontière basse devrait être fixée à $800mm$. Cependant, pour réduire les coûts de calcul, on choisit de garder la largeur et la hauteur initiale car on peut remarquer que les différences entre les courbes sont petites. Changer la largeur ou la hauteur de la grille n'affecte pas la pression qu'après l'instant du pic et pour de larges angles tels que 30° : on remarque la pression est plus élevée à la fin du calcul lorsque la grille est petite. Par contre, les dimensions de la grille n'affectent pas les maxima de pression, principal objet de cette étude. La suite est ainsi consacrée à une évaluation des pics de

pression en employant soit la méthode par pénalisation soit la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

5.1.3 Conclusion

En résumé, le modèle d'impact est constitué d'un dièdre rigide (il sera déformable dans une dernière partie) de $250mm$ de largeur composé d'éléments quadrangle basé sur une formulation Lagrangienne. Ce dièdre percute une surface libre séparant un milieu air/eau modélisé par une grille Eulérienne multimatérielle de $500mm$ de largeur sur $800mm$ d'hauteur pour l'eau. Aux frontières de cette grille, des conditions de non-réflexion d'ondes sont appliquées qui influencent peu le champ de pression évoluant localement le long du dièdre. Les caractéristiques du calcul évoluent suivant l'angle étudié et elles sont regroupées dans le tableau 5.1. :

Angle	1	2	3	4	5	10	20	30
Temps CPU (s)	1109	615	553	972	391	981	1099	3106
Durée simulé (ms)	0.6	1	1.6	2	1	4	10	15
Nombre d'éléments Eulériens	9950	9353	9353	9741	9761	9425	9801	9801
$\Delta t_f = \Delta t / tssf (\mu s)$	0.96	0.84	1.26	1.08	1.44	1.57	4.04	3.17

TAB. 5.1 – Caractéristiques du calcul en fonction de l'angle d'incidence α

Dans le tableau 5.1, Δt_f est le pas de temps associé au fluide, Δt le pas de temps de calcul et $tssf$ un facteur inférieur à 1. Le processeur employé pour les calculs du tableau 5.1. est un intel(R) celeron(R) de 1.7GHz avec 1Go de RAM et un cache L1 de 8Ko et un cache L2 de 128Ko. Ces calculs ont été menés, successivement, dans le cadre de l'étude du couplage par pénalisation et dans celui du couplage par les multiplicateurs de Lagrange.

5.2 Couplage par pénalisation

Le couplage par pénalisation utilisé pour résoudre le problème 2D du slamming repose sur la formulation en contact développée dans le paragraphe 3.3.2. Pour le calcul de la raideur, on reprend la relation Eq.(3.240) dans laquelle la raideur est donnée par unité de surface mais on continue à la noter raideur pour plus de simplicité.

5.2.1 Etude de l'effet de l'amortissement numérique

D'abord, on s'intéresse à l'effet du damping introduit dans le paragraphe 4.2.3 pour différents angles d'incidence. La raideur de pénalisation est choisie suffisamment grande pour éviter que l'eau ne traverse la structure ("fuites"). Dans la suite, on verra comment la raideur est choisie en fonction de l'angle de pénétration.

Dièdre avec un angle d'incidence inférieur à 15°

Dans un premier temps, les angles d'entrée dans l'eau sont inférieurs à 15° . On compare les pressions obtenues avec un couplage en pénalisation sans effet dissipatif et avec un amortissement numérique. Les pressions sont prises, comme précédemment, au milieu de la partie inclinée du dièdre. Deux angles d'incidence sont choisis: 4° et 10° . Sur Fig.5.4 et sur Fig.5.4, les courbes d'indice (A) montrent clairement des oscillations qui sont amorties sur les courbes (B) lorsque le damping est introduit dans le couplage. Néanmoins, les raideurs sont importantes pour que ces oscillations apparaissent car les pics de pression devraient, en théorie, être plus petits. En effet, en appliquant le théorème de Bernoulli avec la relation Eq.(2.16), on obtient l'équation suivante pour le maximum de pression:

$$\frac{P_{max} - P_o}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{\pi^2}{4} \cotan(\alpha)^2 \quad (5.4)$$

Pour $\alpha = 4^\circ$ et $\alpha = 10^\circ$, les maxima théoriques de pression sont respectivement $9.8 MPa$ et $1.5 MPa$. Sur Fig.5.4 et sur Fig.5.4, les pics numériques atteignent $25 MPa$ pour 4° et $6 MPa$ pour 10° . Si la raideur était plus petite et plus proche de la valeur optimale permettant de retrouver les évolutions physiques, les oscillations seraient plus petites voire inexistantes. Par exemple, on reprend le cas à 4° et on cherche à retrouver le pic physique en ajustant le paramètre pf . Pour $pf = 0.034$, on retrouve le maximum physique et on observe qu'il y a peu de différences entre la pression avec damping et la pression sans damping (voir Fig.5.4). L'effet de l'amortissement numérique introduit dans le couplage par pénalisation est aussi très faible si l'angle du dièdre devient grand.

Dièdre avec un angle d'incidence supérieur à 15°

A présent, dans un second temps, l'angle α est supérieur à 15° et deux cas sont étudiés: le cas limite à 15° et un autre cas à 20° . Sur Fig.5.4 et sur Fig.5.4, les oscillations numériques associées au couplage par pénalisation sont tellement faibles qu'on ne voit pas de différences entre les courbes (A) et les courbes (B). Les pressions avec et sans damping sont quasiment confondues. Par contre, d'autres oscillations apparaissent. L'origine de ces oscillations peut être aisément comprise si on compare les pressions exercées sur deux éléments voisins de la partie inclinée du dièdre à 20° . Sur Fig.5.4, les évolutions de ces pressions sont liées: à un sommet sur une courbe correspond un creux de pression sur l'autre à un instant fixé. Des ondes transportées par le fluide se déplacent alors le long du dièdre et perturbent les pressions locales. Ces ondes peuvent être visualisées en déterminant l'isocontour à 0.5 de la fraction volumique. Sur Fig.5.4, cet isocontour représente la frontière du domaine fluide sur laquelle sont appliquées les forces d'interaction et indique aussi la pénétration du fluide dans la structure. Cette frontière oscille et ces oscillations se retrouvent dans le champ de pression exercé sur la structure. Cette analyse est reprise dans le couplage par les multiplicateurs de Lagrange. Pour limiter ces oscillations et pour retrouver des évolutions proches des courbes de référence, il est nécessaire d'étudier et d'adapter le facteur de pénalisation.

5.2.2 Etude de la raideur de pénalisation

Etude du facteur pf

Comme l'effort exercé par l'eau sur la structure dépend de l'angle du dièdre α , le facteur de pénalisation pf doit être ajusté suivant l'angle α . On établit un tableau donnant pf pour 9 angles compris entre 0° et 30° .

Les valeurs de pf sont déterminées pour un couplage avec l'eau uniquement. La valeur

Angle	0	1	2	3	4	5	10	20	30
pf	10	7	0.34	0.085	0.034	0.018	0.009	0.008	0.002
Raideur $MPa.mm^{-1}$	9e+5	11e+3	620	103	48	20	9	3	0.95

TAB. 5.2 – Valeurs de pf en fonction de l'angle d'incidence α

de pf pour l'angle nul avait déjà été établie, dans le paragraphe 4.1.3, pour l'impact de la colonne d'eau à incidence nulle. Les autres valeurs ont été évaluées en cherchant une pres-

sion d'interaction la plus proche possible de la solution théorique. Cette approche pour 1° et 2° est discutable étant donné que, d'après le paragraphe 5.1.1, l'eau devient compressible pour un angle inférieur à 2°. Les raideurs de la 2ième ligne du tableau 5.2 sont déterminées en utilisant la relation Eq.(3.243) et les pas de temps du tableau 5.1. Il faut s'assurer que les valeurs de pf ne dépendent pas des paramètres de la modélisation et, en particulier, il faut vérifier l'indépendance de pf vis à vis du maillage employé. Pour cela, on compare les pressions pour 3 angles différents (10°, 20°, 30°) et dans 3 cas différents:

- Pour un maillage donné et pour une taille de mailles pour le fluide deux fois plus importante que celle de la structure,
- Pour un maillage deux fois plus fin que le maillage précédent en conservant le même rapport de mailles fluide/structure (1 pour 2),
- Pour un rapport entre les mailles des deux domaines identiques.

Sur Fig.5.13, Fig.5.14 et Fig.5.15, la comparaison des cas de calcul montre des pressions peu différentes de la pression obtenue avec le maillage initial et les courbes restent proches de la solution théorique. Pour 10°, un autre cas a été ajouté en diminuant le pas de temps par $tssf = 0.3$ (par défaut, $tssf = 0.65$). La courbe (D) tracée dans ce cas est alors quasiment confondue avec la courbe (A). Néanmoins, l'évolution de la pression diffère lorsque le maillage est raffiné: la courbe (A) est différente de la courbe (B) (une erreur relative de 50%) bien que cette dernière soit plus proche de la courbe de référence (E) à cause du raffinement des mailles. Pour 20°, les courbes numériques sont, par contre, groupées mais différentes de la solution théorique (une erreur relative de 30% environ). Des différences sont donc à noter malgré la calibration du paramètre de pénalisation mais l'ensemble des résultats concordent approximativement. En plus de vérifier l'indépendance de cette calibration vis à vis de paramètres numériques, il faut aussi s'assurer que cette étude est applicable à d'autres géométries. C'est pourquoi la modélisation de l'impact hydrodynamique d'un cylindre est mise en œuvre.

Modélisation de l'entrée dans l'eau d'un cylindre par un couplage par pénalisation

Le dièdre est remplacé par une structure cylindrique de rayon $R = 250mm$ entrant dans l'eau à la même vitesse que le dièdre: $v = 6150mm/s$. Il est nécessaire, dans un premier temps, d'établir une solution de référence. Il suffit, pour cela, de reprendre l'analyse faite dans le paragraphe 2.1.3 avec la relation Eq.(2.13) donnant l'élévation η_b de la surface libre

par rapport au premier point de contact:

$$\eta_b(x) = A_0 \frac{\pi}{2} x + A_1 x^2 \quad (5.5)$$

La géométrie du cylindre implique que:

$$x^2 + (R - \eta_b)^2 = R^2 \quad (5.6)$$

Soit, en négligeant le terme en η_b du second ordre:

$$x^2 = 2\eta_b R \quad (5.7)$$

Par identification, on obtient $A_0 = 0$ et $A_1 = 1/(2R)$. En utilisant la relation Eq.(2.12), la relation donnant la position du point d'arrêt x_{max} en fonction du temps est déterminée par la relation suivante: (dans laquelle on a remplacé c par x_{max} pour éviter toute confusion avec la vitesse du son).

$$x_{max}(t) = 2\sqrt{vRt} \quad (5.8)$$

La vitesse du point d'arrêt le long du cylindre est alors évaluée par:

$$\frac{dx_{max}}{dt} = \frac{vR}{\sqrt{vRt}} \quad (5.9)$$

En appliquant le théorème de Bernoulli, la relation Eq.(5.9) permet d'estimer la pression maximale par:

$$\frac{P_{max} - P_o}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{R}{vt} \quad (5.10)$$

Suivant sa position le long du cylindre, un élément de la structure est incliné d'un angle α vis à vis de la position initiale de la surface libre. En interpolant linéairement les valeurs du tableau 5.2, il est possible de déterminer la valeur pf de cet élément. Pour chaque élément de la structure cylindrique, on compare les pics de pression numériques et l'évolution du maximum de pression en fonction de la pénétration vt . Sur Fig.5.16, la courbe théorique obtenue avec Eq.(5.10) est une hyperbole et les maxima numériques sont pris jusqu'au milieu du cylindre, soit pour $\alpha = 45^\circ$. On extrapole les valeurs de 5.2 pour les angles supérieurs à 30° en posant une valeur constante pour pf valant 0.001. Pour mettre en évidence les erreurs commises, on trace l'erreur relative sur le pic de pression en fonction de la pénétration. Au début de l'impact, la solution théorique sur Fig.5.16 surestime la pres-

sion acoustique $\rho_{cv} = 9.5MPa$. C'est pourquoi l'erreur sur Fig.5.17 est remarquablement importante au début de l'impact. De fortes erreurs apparaissent aussi pour des pénétrations comprises entre $5mm$ et $10mm$. Pour le reste, l'erreur relative est voisine de 40% ce qui est raisonnable. Néanmoins, l'erreur maximale de 120% laisse entendre que la base de données pour pf et, plus largement, la méthode par pénalisation reste une approche grossière du problème d'impact. Dans la suite, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est appliquée aux mêmes problèmes pour étudier la précision de ce couplage.

5.3 Couplage par les multiplicateurs de Lagrange

5.3.1 Première approche

Dans cette partie, on couple la formulation Eulérienne pour le fluide et la formulation Lagrangienne pour la structure par la méthode des multiplicateurs de Lagrange présentée dans le paragraphe 3.3.2. Pour 5° et 30° , on trace la pression exercée au milieu du dièdre (élément de structure 50) et on compare la courbe ainsi obtenue avec l'évolution de la pression théorique rappelée par Eq.(2.28). On observe de fortes oscillations perturbant la courbe numérique de sorte que l'erreur sur l'évaluation du pic de pression ou la différence entre les évolutions est très importante. Néanmoins, après le pic de pression, les pressions moyennes sont proches. Si, à présent, on compare cette pression (prise en l'élément 50) avec celle d'un élément voisin, l'élément 51, on remarque que les pressions tracées sur Fig.5.20 pour 5° et Fig.5.21 pour 30° ont des évolutions quasi-symétriques par rapport l'axe du temps. A une valeur maximale sur une courbe correspond, en général, un minimum sur l'autre courbe. Ainsi, ces remarques tendent à montrer que les évolutions ne sont pas indépendantes et qu'il est possible de corrélérer les pressions d'éléments voisins. Le couplage fluide-structure en un élément donné influence et est influencé par les couplages des éléments voisins parce que la force calculée avec Eq.(4.1) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange valable pour un choc frontal est très grande. On voit sur Fig.5.21 et Fig.5.20 que les valeurs physiques sont nettement surévaluées par les pressions numériques. Cette importante énergie mise en jeu par le couplage est transportée sous forme de paquets d'ondes dans le fluide, le long de la structure. En effet, si on trace par exemple, pour le dièdre à 30 degrés, l'isocontour de la fraction volumique à 0.5 (voir Fig.5.22), on remarque que les déformations de la surface

fluide sont couplées à la structure. Cette "interaction entre couplages voisins" contredit la propriété d'autosimilarité de l'écoulement. Pour limiter l'"interaction" entre les efforts de couplage de deux éléments voisins, il faut diminuer la force évaluée par le relation Eq.(4.1) en la multipliant par un paramètre inférieur à 1.

5.3.2 Modification de l'approche

Introduction du facteur pr

On reprend la relation Eq.(3.236) donnant la force d'interaction par les multiplicateurs de Lagrange en la multipliant par un facteur $pr < 1$ permettant de réduire et d'ajuster la force de couplage:

$$F_{f \rightarrow s} = pr M_f \left(\frac{(v_f - v_s)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{d^n}{\Delta t^2} + -\frac{F_f}{M_f} \right) \quad (5.11)$$

On cherche, par exemple pour le cas à 30° , la valeur assurant l'auto-similarité de l'écoulement, autrement dit une valeur qui permet une indépendance des profils de pression pour deux éléments voisins. Cependant, pr ne doit pas être trop faible pour éviter que les pénétrations des particules dans le dièdre ne soient trop importantes. Pour $pr = 0.001$, il n'y a pas de fuites et on retrace, sur Fig.5.23, les pressions exercées sur l'élément 50 et 51. Les évolutions sont très proches et décalées en temps de $12\mu s$, durée approximative correspondant au temps mis par le point de stagnation pour glisser de l'élément 50 à l'élément 51. A présent, si on compare la pression numérique et la pression théorique, on observe, sur Fig.5.24, que les courbes sont proches l'une de l'autre et que le maximum de pression (14MPa pour 30°) est correctement estimé. La relation Eq.(3.236) calculant la force d'interaction dépend du pas de calcul Δt . De sorte que si on change le facteur $tssf$ introduit dans le paragraphe 4.1.1 pour évaluer Δt , le paramètre pr devra aussi alors être de nouveau ajusté. Ainsi, par exemple, à 30° , on refait le calcul pour $tssf = 0.1$ et on observe, sur Fig.5.25, que la nouvelle pression prend des valeurs plus importantes que celles obtenues pour $tssf = 0.65$. Notamment, on remarque que le maximum de pression est 6 fois plus grand avec $tssf = 0.1$ qu'avec $tssf = 0.65$. Il suffit alors de diviser pr par 6 pour retrouver un résultat proche de la théorie comme le montre Fig.5.26. Néanmoins, on ne peut appliquer la méthode avec $pr = 0.001$ quel que soit l'angle envisagé. Les forces physiques d'interaction dépendent de l'angle d'incidence et de ce fait, le facteur pr doit être alors ajusté. En effet, pour 5° , si on prend le même facteur, une fuite apparaît (voir Fig.5.27) car

les efforts de couplage ne sont alors pas suffisants devant les forces de pression exercées par l'eau sur le dièdre. A la lumière du paragraphe sur l'étude du facteur pf , il faudrait formuler une approche restant valide quel que soit l'angle et quel que soit le maillage utilisé. Dans la suite, on s'efforce de mettre en œuvre une telle approche.

Etude du facteur pr

Comme pour le paramètre pf , une base de données pour pr est construite en fonction de l'angle d'incidence de pénétration du dièdre:

Angle	0	1	2	3	4	5	10	20	30
pr	1	1	0.14	0.06	0.02	0.01	0.005	0.001	0.001

TAB. 5.3 – Valeurs de pr en fonction de l'angle d'incidence α

La valeur de pr pour l'angle nulle avait déjà été établie, dans le paragraphe 4.1.2, pour l'impact de la colonne d'eau à incidence nulle. Les autres valeurs ont été évaluées en cherchant une pression d'interaction la plus proche possible de la solution théorique. De la même manière que dans l'étude de pf , la comparaison avec la théorie pour 1° et 2° est discutable étant donné que, d'après le paragraphe 5.1.1, l'eau devient compressible pour un angle inférieur à 2° .

Pour que cette étude ne se restreigne pas à la modélisation employée pour déterminer les valeurs de pr , on doit vérifier que les valeurs du tableau 5.3 restent indépendantes des paramètres de la modélisation et en particulier, du maillage employé. Comme dans l'étude sur pf , on compare les pressions pour 3 angles différents (10° , 20° , 30°) et dans 3 cas différents:

- Pour un maillage donné et pour une taille de mailles pour le fluide deux fois plus importante que celle de la structure,
- Pour un maillage deux fois plus fin que le maillage précédent en conservant le même rapport de mailles fluide/structure (1 pour 2),
- Pour un rapport entre les mailles des deux domaines identiques.

Les pressions sont comparées sur Fig.5.30, Fig.5.29 et Fig.5.28. Les évolutions sont proches entre elles, notamment les maxima de pressions sont du même ordre de grandeur. Cependant, à 20° et à 10° , des différences apparaissent et elles sont identiques à celles déjà obser-

vées dans le cadre du couplage par pénalisation, à savoir:

- Pour 10° , l'évolution de la pression diffère lorsque le maillage est raffiné: la courbe (A) est différente de la courbe (B) et le raffinement du maillage permet de converger vers la courbe de référence (E). L'erreur la plus importante sur le pic de pression est 53%.

- Pour 20° , les courbes numériques sont groupées et elles sont différentes de la solution théorique. L'erreur la plus importante est de 30%.

Ces erreurs montrent qu'il est difficile de déterminer précisément la valeur du maximum de pression. Bien que les erreurs paraissent grossières, l'estimation des pressions locales reste correcte. On verra que l'ordre de grandeurs de ces erreurs est retrouvée dans la modélisation de l'impact hydrodynamique d'un cylindre.

Modélisation de l'entrée dans l'eau d'un cylindre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Il faut à présent vérifier que l'étude précédente est applicable à d'autres géométries. Comme pour le couplage par pénalisation, le dièdre est remplacé par un cylindre pour vérifier si la table 5.3 est indépendante de la solution recherchée. A chaque élément de la structure, on calcule une valeur de pr en interpolant les valeurs du tableau 5.3. Un élément est incliné initialement d'un angle α pour lequel un encadrement est déterminé dans le tableau 5.3. L'interpolation de ces valeurs permet d'évaluer le facteur pr associé à l'élément structure. On reprend la relation Eq.(5.10) pour déterminer l'évolution théorique du pic de pression en fonction de la pénétration et les maxima de pressions exercés sur chaque élément du cylindre sont relevés de $\alpha = 0^\circ$ à $\alpha = 45^\circ$. Au delà de 30° , les valeurs pr sont extrapolées en posant $pr = 0.001$. L'erreur relative sur la pression maximale en fonction de la pénétration est comparée à l'erreur commise en employant la méthode par pénalisation. Sur Fig.5.32, on remarque que l'erreur faite par la méthode des multiplicateurs de Lagrange est plus petite dans les zones où la méthode par pénalisation commet la plus grande erreur. D'une manière générale, l'erreur relative pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange est voisine de 40% et elle est proche de l'erreur faite par la méthode de pénalisation. L'erreur pour les deux approches est ponctuellement forte vers $vt = 50mm$ c'est à dire pour $\alpha = 45^\circ$. Aucune signification n'est réellement accordée à cela, étant donné que, dans les deux cas, l'erreur retombe au voisinage de 40%. Comme pour la méthode de pénalisation, l'erreur importante au début de l'impact (voir Fig.5.31) est due à la mauvaise évaluation théorique

de l'impact à incidence nulle. Après le point d'impact, les erreurs diminuent jusqu'à 40%: il y a une transition entre la région où l'eau est compressible (à $t=0$) et la région où elle est incompressible. Cette zone de transition pour une pénétration de 0 à 2mm environ n'est naturellement pas prédite par la théorie qui suppose un fluide uniquement incompressible ce qui explique les erreurs importantes du début de calcul. En résumé, le champ de pression autour d'un profil de structure quelconque telle une proue de navire entrant dans l'eau peut être estimée, par cette approche, à 40% près pour les pics de pression. Une évaluation plus précise des maxima de pression est difficile dans le cadre de cette méthode. Néanmoins, on a pu remarquer dans ce paragraphe qu'après l'instant du pic de pression, les courbes théoriques et numériques sont en général très proches ce qui laisse entendre que la quantité de mouvement globale transmise à la structure doit être correcte malgré l'erreur commise sur le pic. Dans la suite, une étude d'un dièdre déformable permet de mettre en évidence l'indépendance de la quantité de mouvement transmis à la structure vis à vis du facteur pr employé.

5.3.3 Dièdre déformable

Un dièdre de 30° entre dans l'eau avec une vitesse initiale de 6150mm/s . Le dièdre est constitué d'éléments fins quadrangles en aluminium d'épaisseur 1mm et le couplage fluide-structure repose sur une formulation plus complète incluant les accélérations de la structure. On reprend alors la relation Eq.(3.236) en affectant le paramètre pr :

$$F_{f \rightarrow s} = pr \frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \left(\frac{(v_f - v_s)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{d^n}{\Delta t^2} + \frac{F_s}{M_s} - \frac{F_f}{M_f} \right) \quad (5.12)$$

Dans la suite, on s'intéressera d'abord à l'effort global exercé sur la structure, ensuite à l'impulsion de pression (on verra plus loin sa définition) et enfin, aux déplacements et à la contrainte de Von Mises. Ces dernières grandeurs sont prises aux positions mises en évidence sur Fig.5.33: les déplacements sont pris aux nœuds 132 et 170 et la contrainte de Von Mises est évaluée sur l'élément quadrangle 50. Deux modèles sont construits et ils diffèrent par la valeur affectée à pr : soit 0.001, soit 0.01. On compare alors les deux calculs pour étudier la dépendance des grandeurs précédentes vis à vis du paramètre pr .

Effort global

La force globale est verticale, dirigée suivant y , et elle est rapportée à l'épaisseur du modèle suivant z ; ainsi, ses unités sont ceux d'une raideur: N/m. Pour évaluer cette force, on somme les forces locales exercées sur les éléments de la structure qui sont issues de l'intégration des pressions locales sur les surfaces de ces éléments. Sur Fig.5.34, les courbes d'effort pour $pr = 0.001$ et $pr = 0.01$ sont très proches. On peut remarquer que la courbe la plus oscillante est la courbe (B) et que cette dernière est légèrement en avance sur la courbe (A). Ceci est caractéristique d'une comparaison d'une raideur forte et d'une raideur faible: $pr = 0.01$ implique une évolution plus perturbée et un temps de réponse plus petit à une interpénétration que $pr = 0.001$. Les évolutions étant très proches, on peut conclure que la force globale est quasiment indépendante du paramètre pr à condition que ce dernier ne soit ni trop élevé pour éviter les instabilités numériques, ni trop faible pour limiter les interpénétrations. Il existe alors un domaine autour d'une valeur pr optimale dans lequel le paramètre peut être choisi sans affecter l'effort global. A présent, nous faisons une étude identique pour l'impulsion.

Impulsion

Pour la modélisation du slamming sur un dièdre, nous avons vu qu'il est difficile d'obtenir des efforts locaux réguliers et proches des efforts théoriques avec le couplage par les multiplicateurs de Lagrange ou par pénalisation. Optimiser la raideur de pénalisation ou trouver systématiquement les valeurs pr de manière à obtenir des efforts locaux précis reste un problème ouvert. C'est pourquoi les résultats ici ne sont pas axés sur les efforts locaux mais sur une autre grandeur caractéristique des impacts: l'impulsion. L'impulsion est définie comme l'intégrale de la force sur un intervalle de temps donné. Dans ce chapitre, on considère l'impulsion par unité de surface, I définie, dans la relation Eq.(5.13), comme l'intégrale de la pression $p(t)$ entre le temps de naissance de la pression t_o et t . Dans toute la suite, la dénomination "impulsion" fera référence à cette définition.

$$I = \int_{t_o}^t p(t) dt \quad (5.13)$$

Pour comprendre l'intérêt de cette grandeur, on considère deux pressions différentes $p_1(t)$ et $p_2(t)$ appliquées sur un même élément de structure de surface S et de masse M_s pendant la période $[t_o, t]$. Sur ce même intervalle de temps, on suppose que les impulsions, $I_1(t)$ et $I_2(t)$, données par les relations Eq.(5.14) et Eq.(5.15) sont identiques (voir Eq.(5.16)).

$$I_1(t) = \int_{t_o}^t p_1(t) dt \quad (5.14)$$

$$I_2(t) = \int_{t_o}^t p_2(t) dt \quad (5.15)$$

$$I_1(t).S = I_2(t).S = M_s.(V_s(t) - V_s(t_o)) \quad (5.16)$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, Eq.(5.16) indique que l'élément de structure a reçu la même quantité de mouvement dans la direction normale à cet élément. Ainsi, l'impulsion représente l'évolution du chargement que subit la structure [Bagnold, 1939]. Certains scientifiques [Richert, 1968] affirment que l'impulsion est plus pertinente que la pression maximale pour caractériser un impact. Lorsqu'on compare deux pressions exercées sur un élément de la structure pour deux pr différents, on remarque sur Fig.5.35 que les maxima de pression sont différents. La différence entre les pics est d'environ 30%. La durée du pic pour $pr = 0.001$ est d'environ 0.42ms tandis que pour $pr = 0.01$, elle est approximativement de 0.29ms. La différence de durée équilibre la différence des maxima, de manière à ce que les aires soient approximativement les mêmes. Ainsi, sur Fig.5.36, les impulsions pour $pr = 0.001$ et $pr = 0.01$ sont proches, dans les premiers instants de la naissance du pic et sur une courte durée (de 4.6ms à 5.1ms). Sur cette durée, les quantités de mouvement transmises à la structure sont quasiment identiques dans les deux cas. Néanmoins, plus le pic aura un maximum élevé et plus il sera proche d'un pic de Dirac. La transformée de Fourier d'un tel pic est alors un spectre s'étalant sur une large gamme de fréquences. De ce fait, plus le pic de la pression locale sera aigü et plus les déformations de la structure atteindront des fréquences élevées. Cette remarque corréle l'étude de la force globale dans laquelle l'effort pour $pr = 0.01$ oscille à des fréquences qui n'apparaissent pas dans l'évolution de la force pour $pr = 0.001$.

Déplacements de la structure et contrainte de Von Mises

Les quantités de mouvement étant sensiblement les mêmes pour deux pr différents, les grandeurs cinématiques qui en dérivent devraient être proches aussi. En effet, les déplacements nodaux de la structure tracés sur Fig.5.37 et Fig.5.38 présentent des évolutions quasiment identiques. Si les contraintes sont évaluées en un élément centré sur la partie inclinée (50), on observe aussi que les courbes (A) et (B) sont voisines hormis les quelques oscillations dont l'origine a déjà été discutée précédemment.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a établi une base de données pour la raideur de pénalisation et pour le paramètre introduit dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ces tables associent, à chaque incidence, une valeur du paramètre pf ou pr ce qui permet, pour une structure quelconque présentant des géométries à différentes incidences, d'estimer la raideur associée à celles-ci. Néanmoins, les deux approches, le couplage par pénalisation et le couplage par les multiplicateurs de Lagrange, mènent à des erreurs similaires sur l'évaluation du pic de pression, voisines de 40% dans le cas du cylindre. L'ordre de grandeur de cette erreur se retrouve lors de la détermination des facteurs ajustant la force d'interaction pour le cas du dièdre. Il est difficile de déterminer précisément la valeur du pic de pression avec ces méthodes. Par contre, l'impulsion, l'intégrale du pic de pression, varie peu si on choisit, pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, des paramètres pr différents (à condition qu'ils soient choisis voisins des valeurs de la table 5.3). L'indépendance de cette grandeur vis à vis de pr montre que la quantité de mouvement transmise à la structure dépend peu de la paramétrisation du couplage. De ce fait, les déplacements et les contraintes de la structure évoluent indifféremment du paramètre pr employé dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Un résultat similaire peut être attendu avec l'approche par pénalisation. Dans la suite, l'analyse faite en 2D sur un dièdre est appliquée à un cône de 10° en couplant par pénalisation et en utilisant la table 5.2.

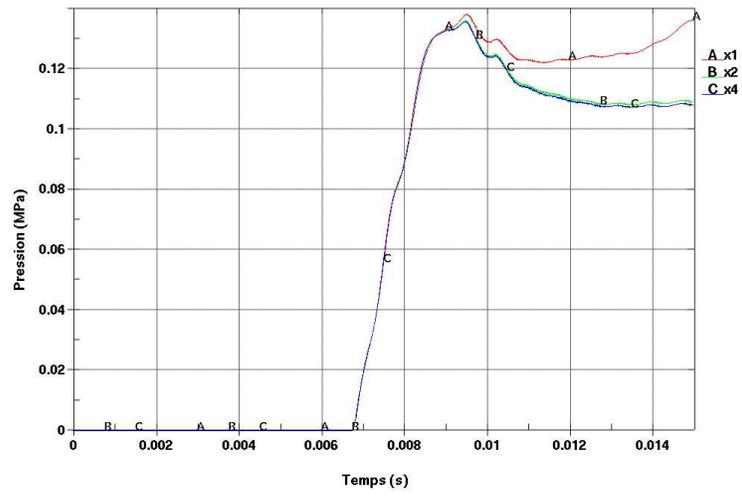


FIG. 5.2 – Dièdre à 30°: Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes largeurs de grille

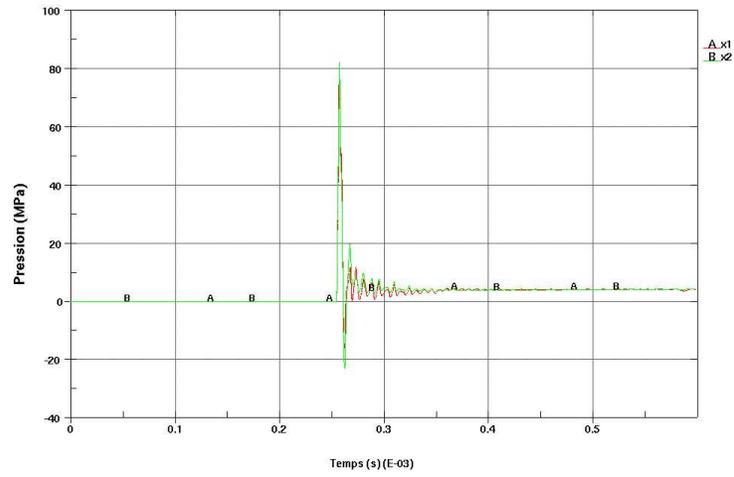


FIG. 5.3 – Dièdre à 1°: Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes largeurs de grille

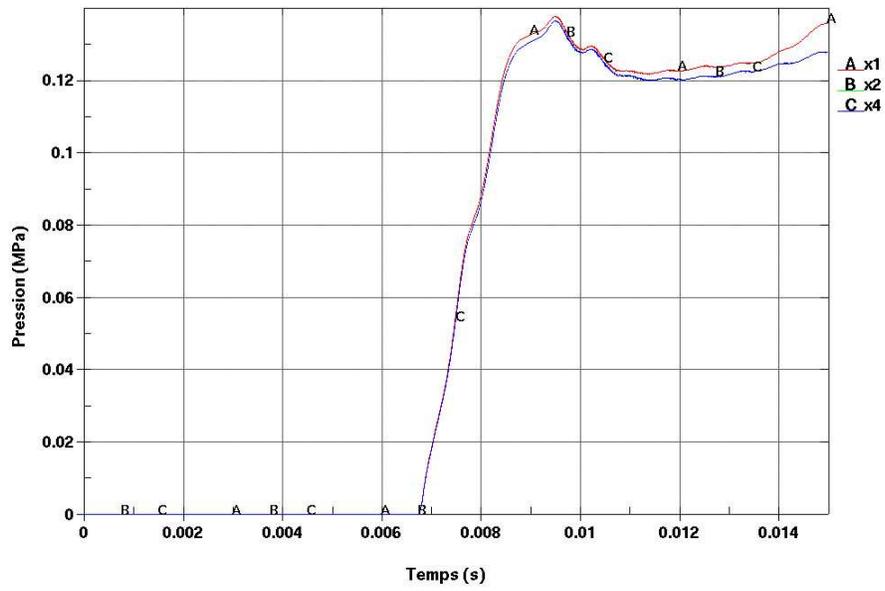


FIG. 5.4 – Dièdre à 30°: Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes hauteurs de grille

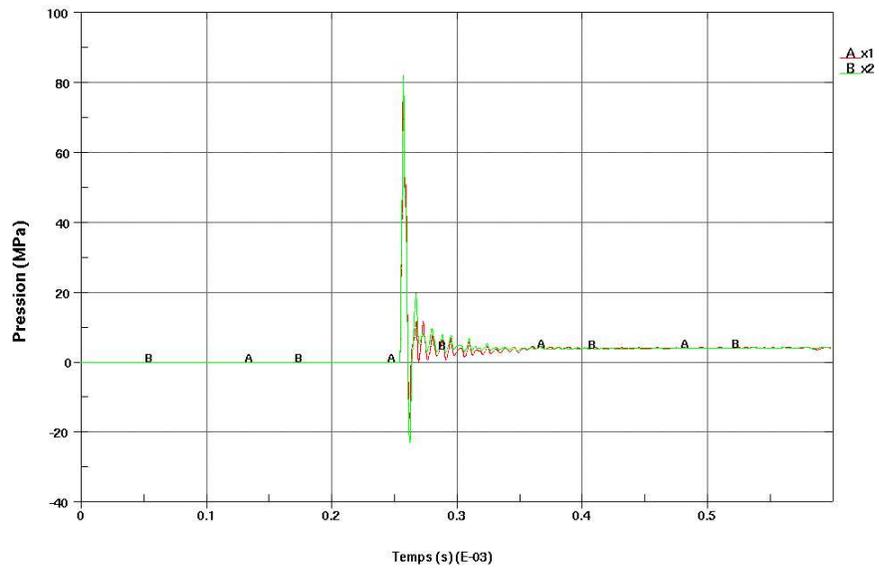


FIG. 5.5 – Dièdre à 1°: Comparaison de la pression au milieu du dièdre pour différentes hauteurs de grille

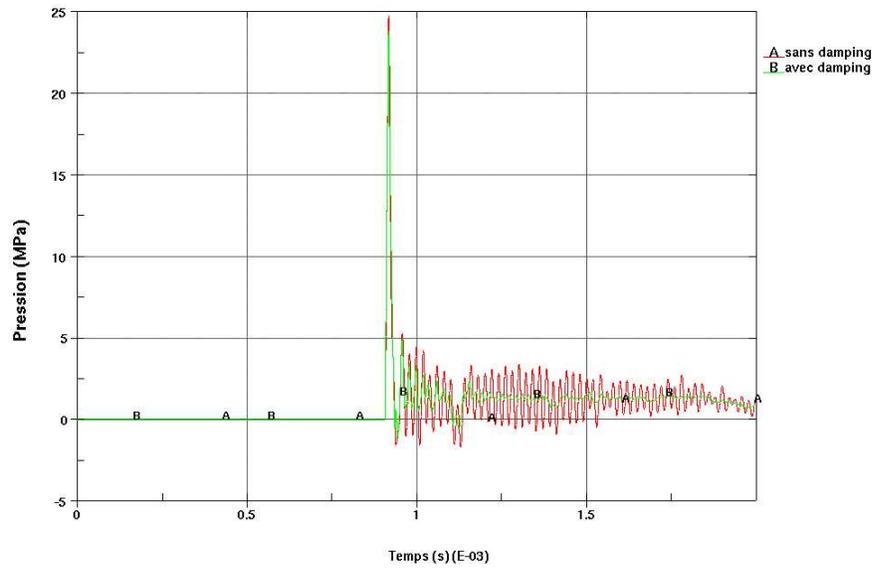


FIG. 5.6 – Dièdre à 4° : (A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

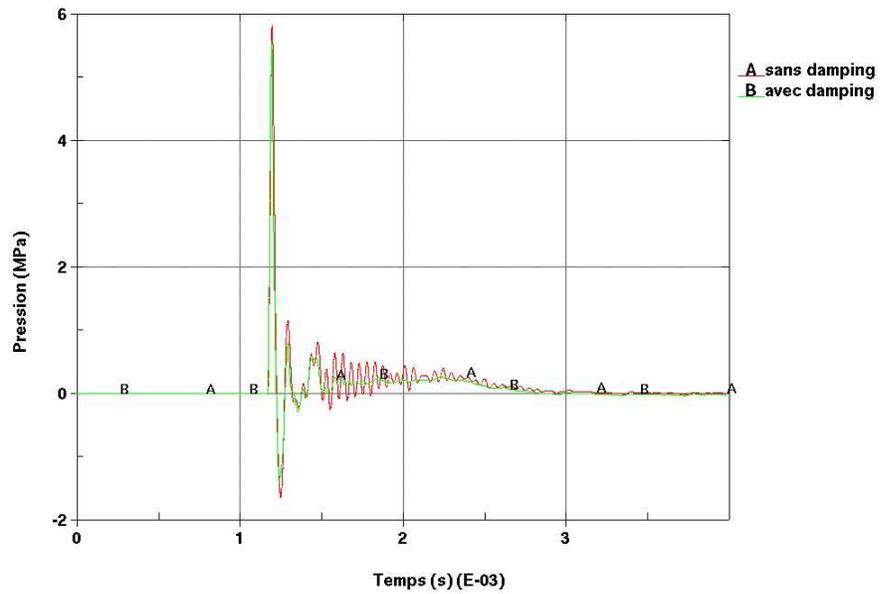


FIG. 5.7 – Dièdre à 10° : (A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

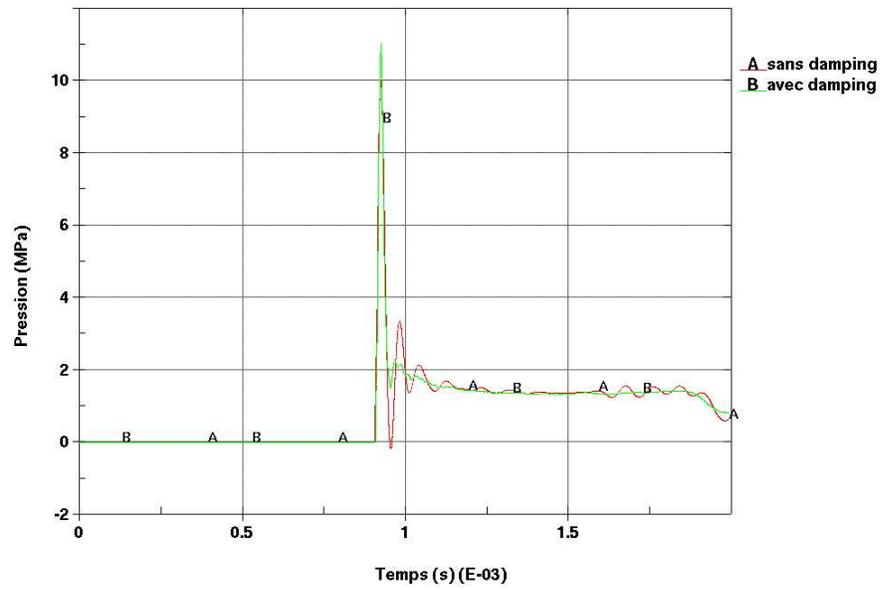


FIG. 5.8 – Dièdre à 4° avec $pf = 0.034$:(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

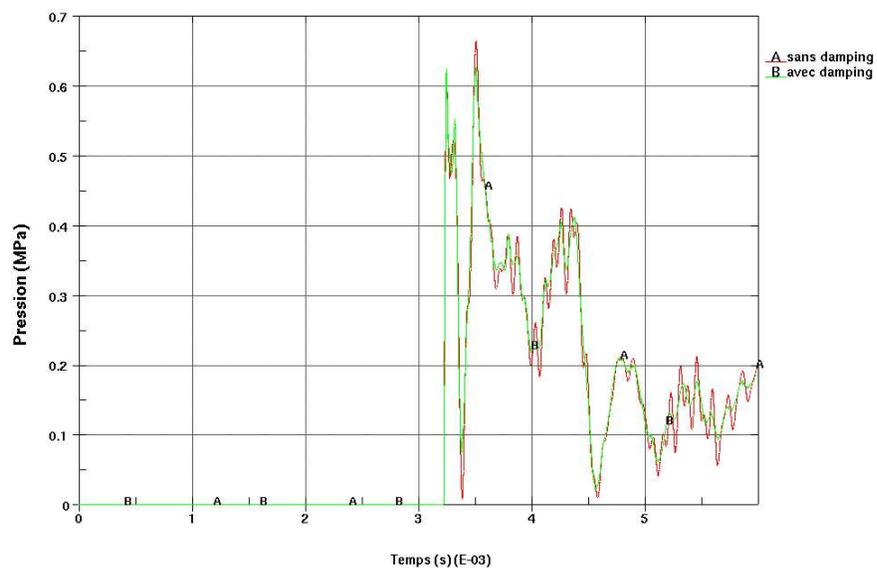


FIG. 5.9 – Dièdre à 15° :(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

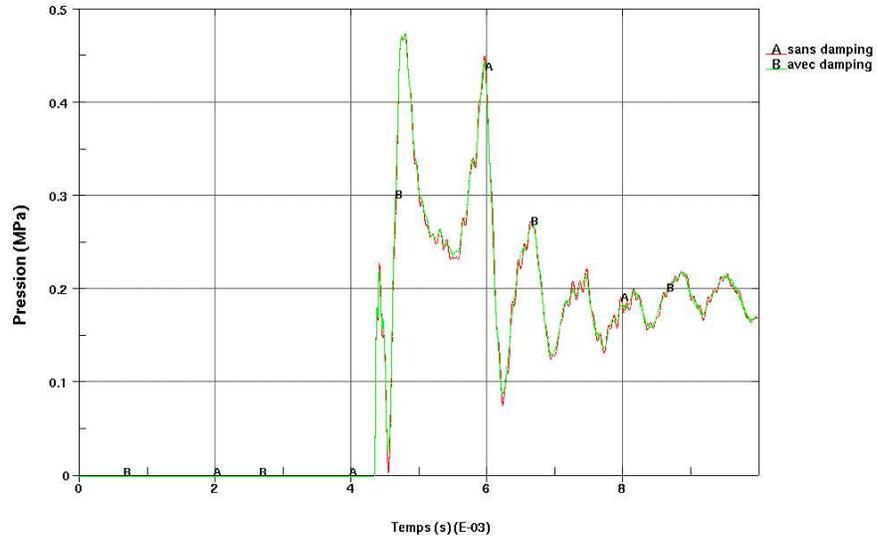


FIG. 5.10 – Dièdre à 20°:(A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

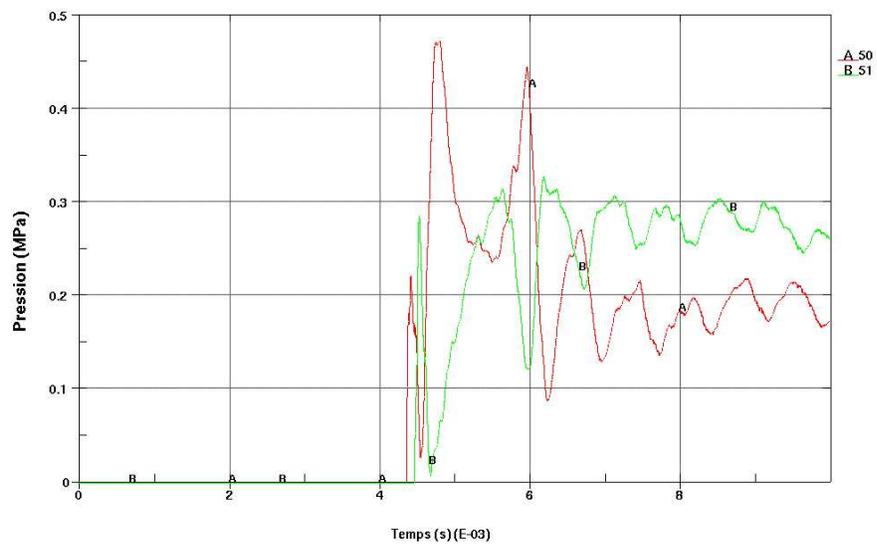


FIG. 5.11 – Dièdre à 20°:(A) Pression sur l'élément 50 (B) Pression sur l'élément 51

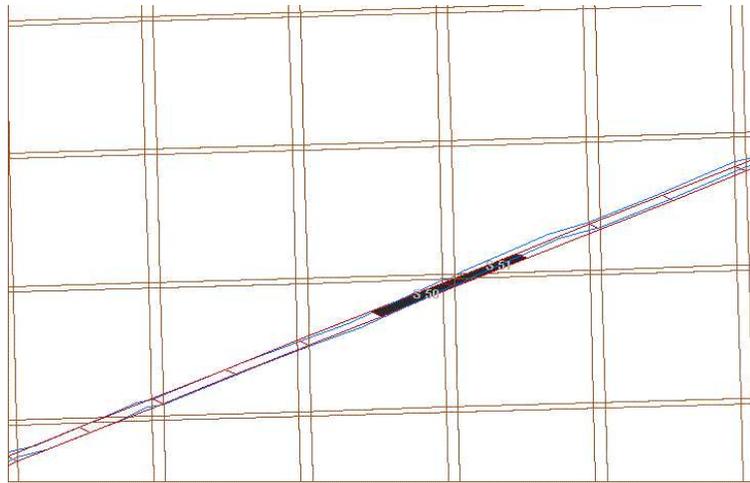


FIG. 5.12 – Dièdre à 20°: Isocontour de la fraction volumique à 0.5

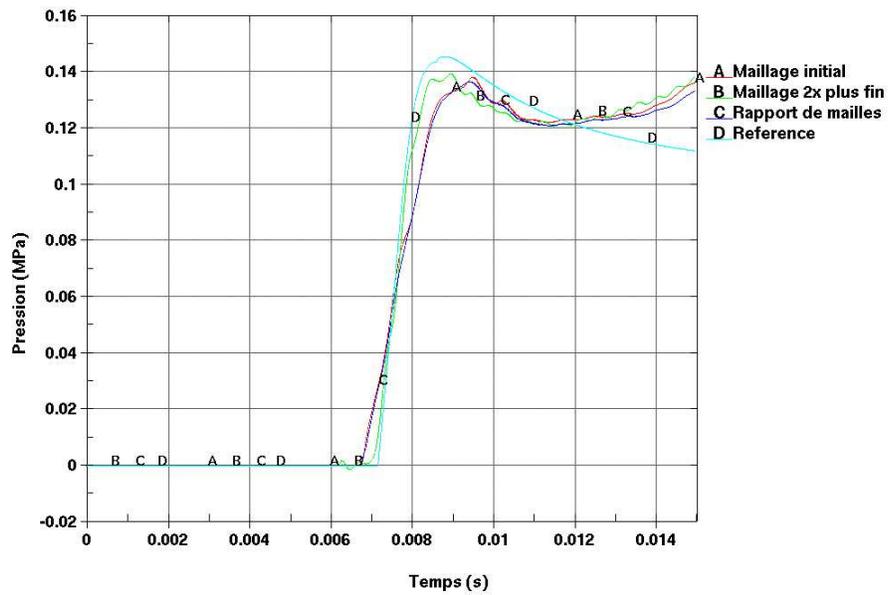


FIG. 5.13 – Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 30°: (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) Courbe de référence

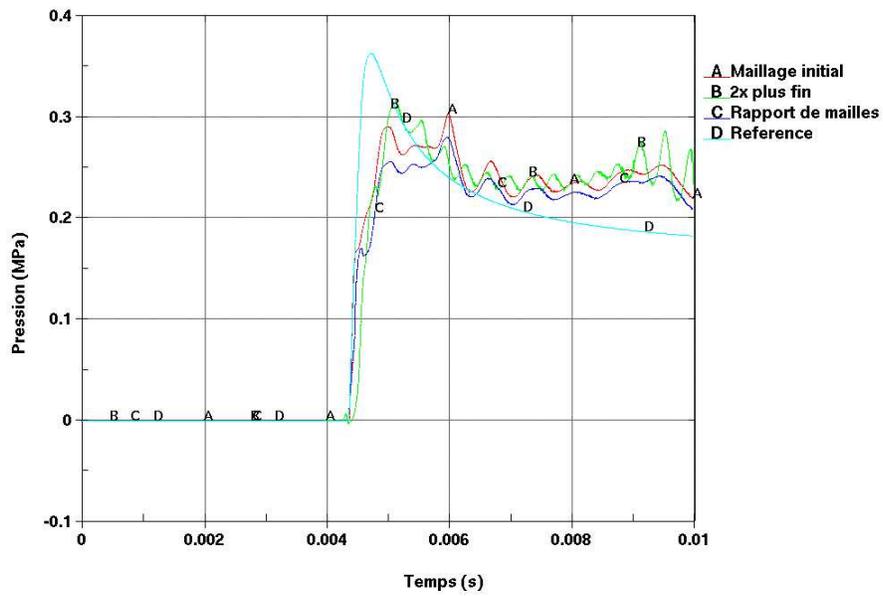


FIG. 5.14 – Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 20°: (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) Courbe de référence

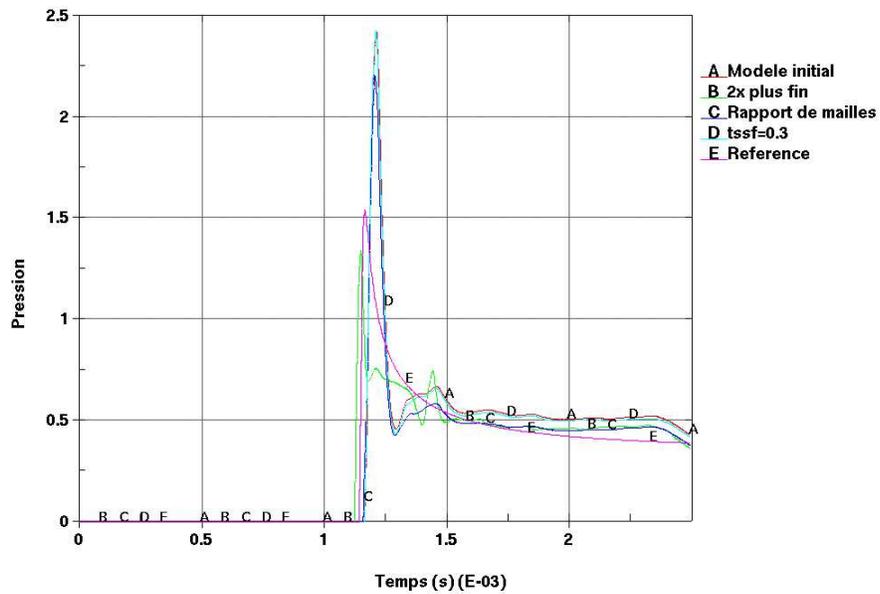


FIG. 5.15 – Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 10°: (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) tssf=0.3 (E) Courbe de référence

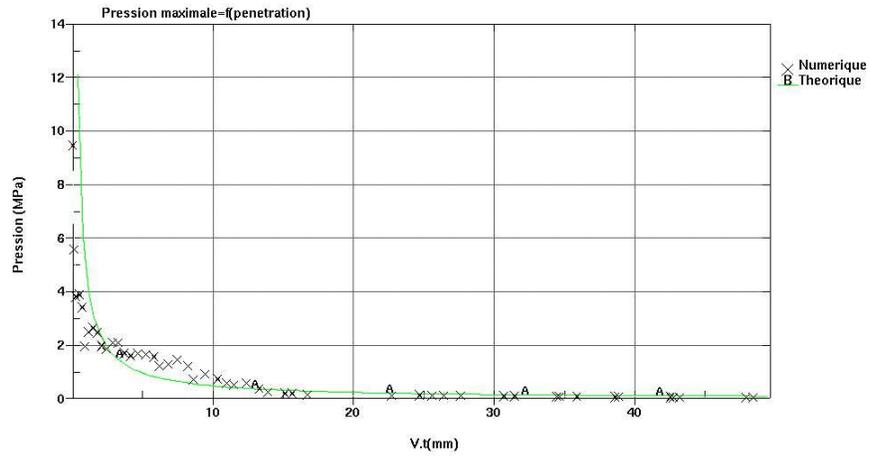


FIG. 5.16 – *Cylindre : Pression maximale en fonction de la pénétration par un couplage par pénalisation*

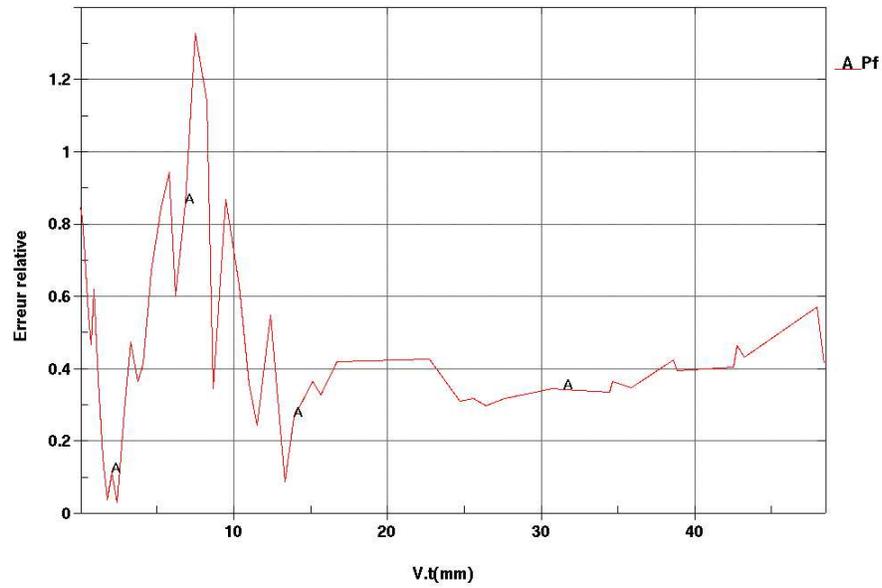


FIG. 5.17 – *Cylindre: Erreur relative sur la pression maximale en fonction de la pénétration par un couplage par pénalisation*

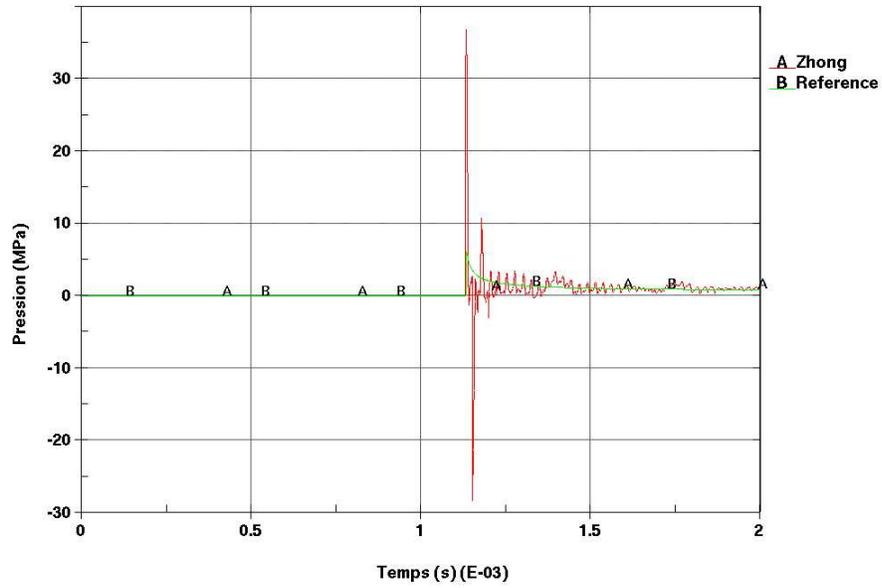


FIG. 5.18 – Dièdre à 5° : (A) Pression locale théorique obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (B) Pression de référence

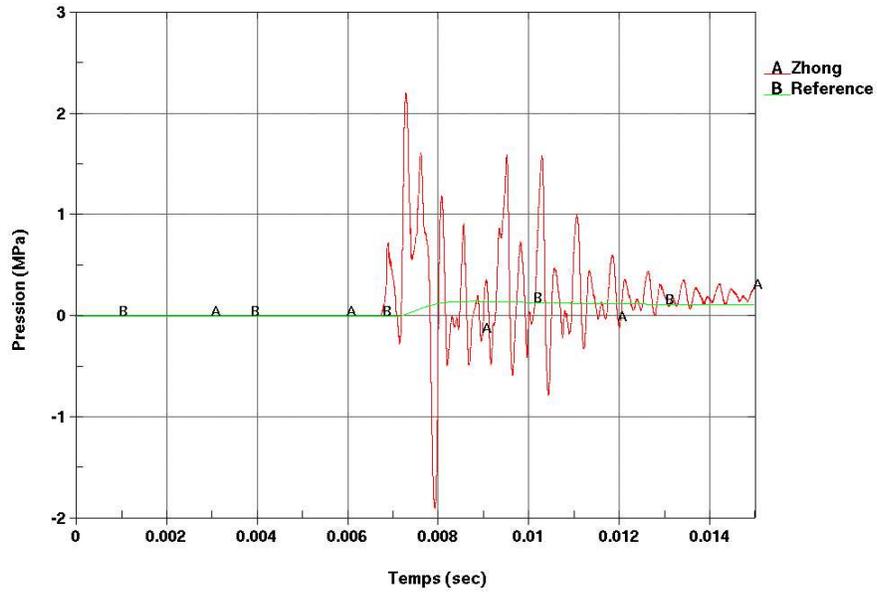


FIG. 5.19 – Dièdre à 30° : (A) Pression locale obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (B) Pression de référence

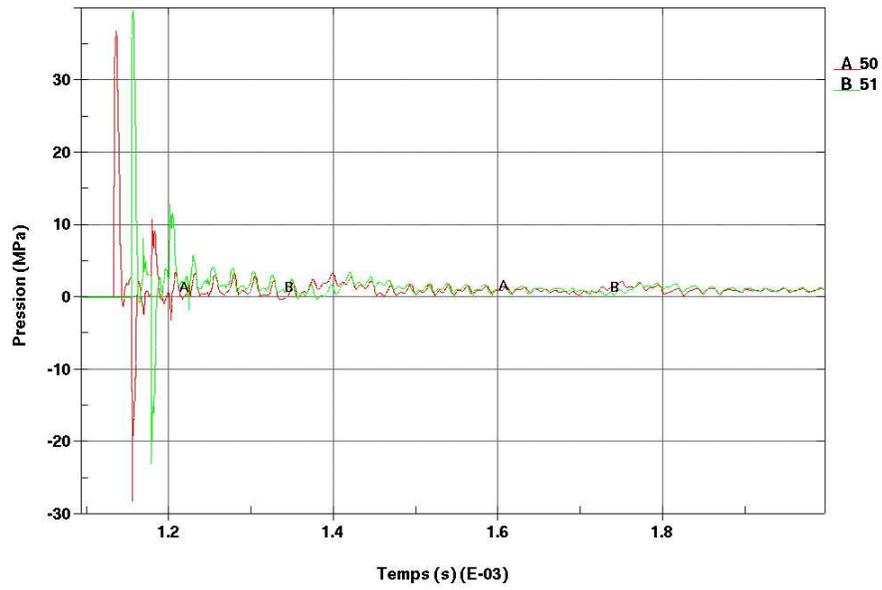


FIG. 5.20 – Dièdre à 5°: Pression obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins

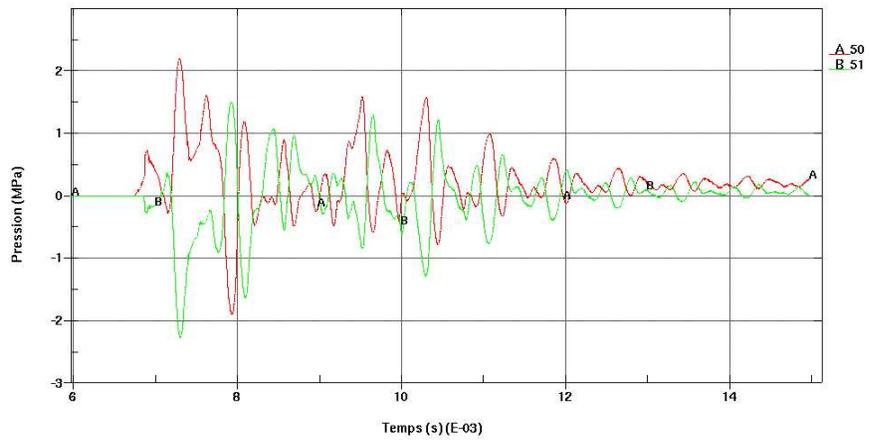


FIG. 5.21 – Dièdre à 30°: Pression obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins

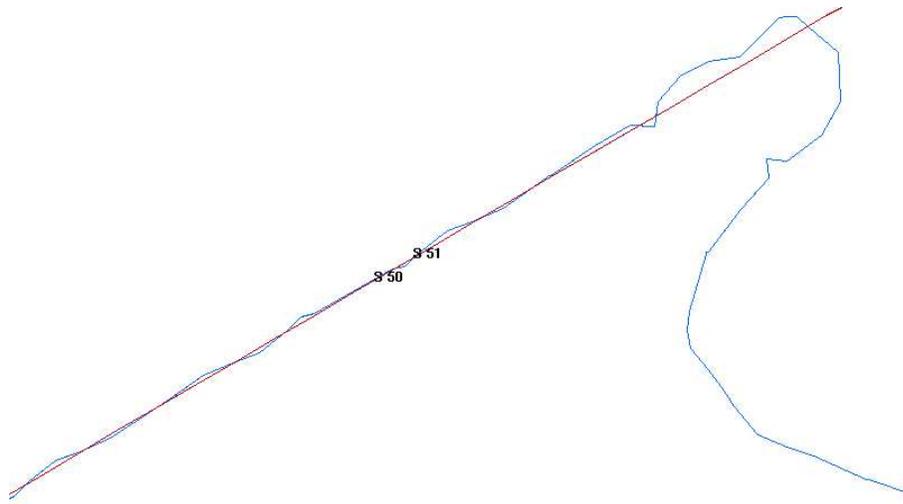


FIG. 5.22 – Dièdre à 30°: Isocontour de la fraction volumique à 0.5

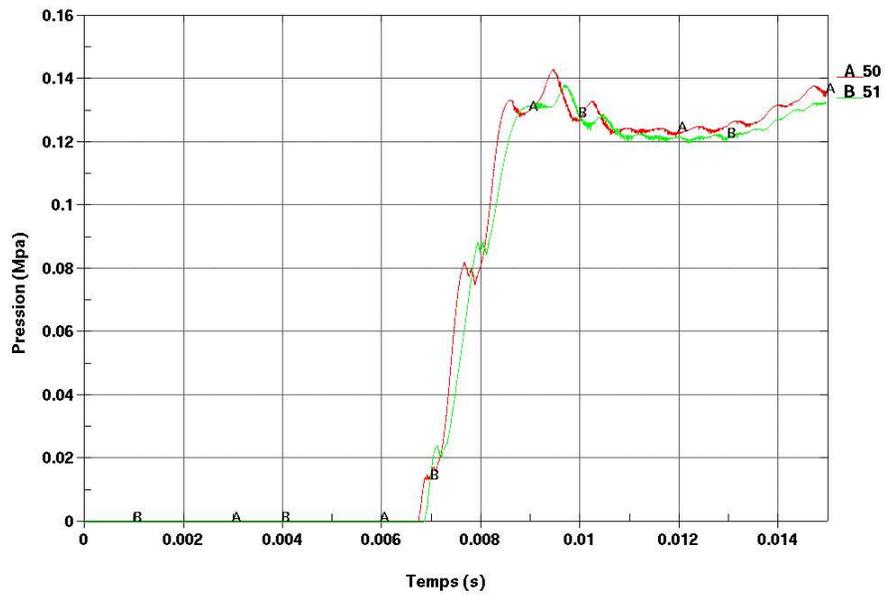


FIG. 5.23 – Dièdre à 30°: Pression obtenue par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange en deux éléments voisins

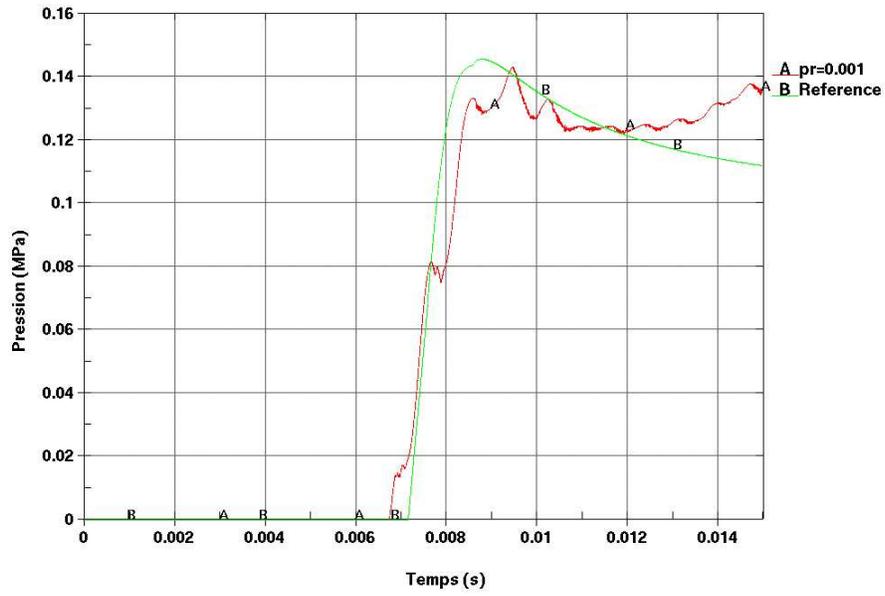


FIG. 5.24 – Dièdre à 30°: (A) Pression pour $pr = 0.001$, (B) Pression de référence

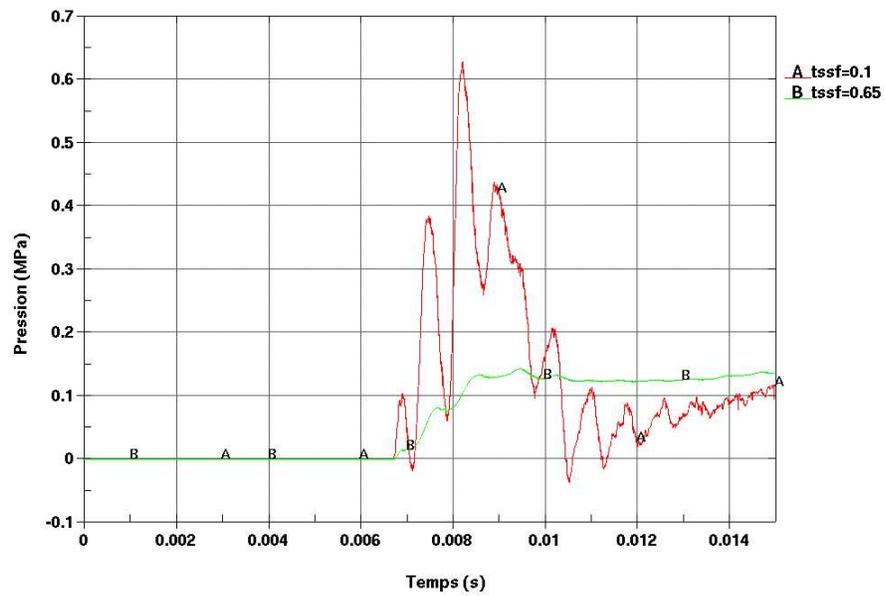


FIG. 5.25 – Dièdre à 30°: (A) Pression pour $tssf = 0.1$, (B) Pression pour $tssf = 0.65$

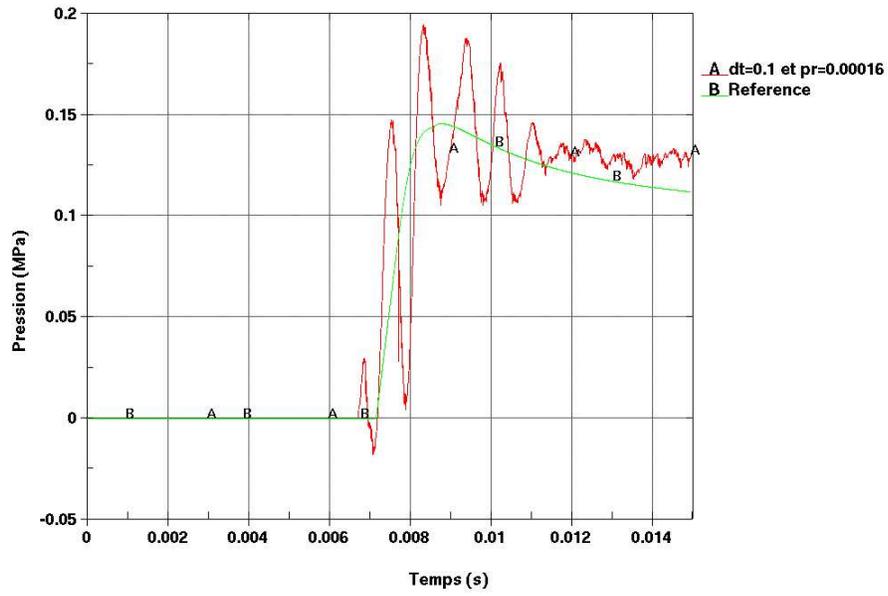


FIG. 5.26 – Dièdre à 30° : (A) Pression pour $t s f = 0.1$ et $pr = 0.00016$, (B) Pression de référence

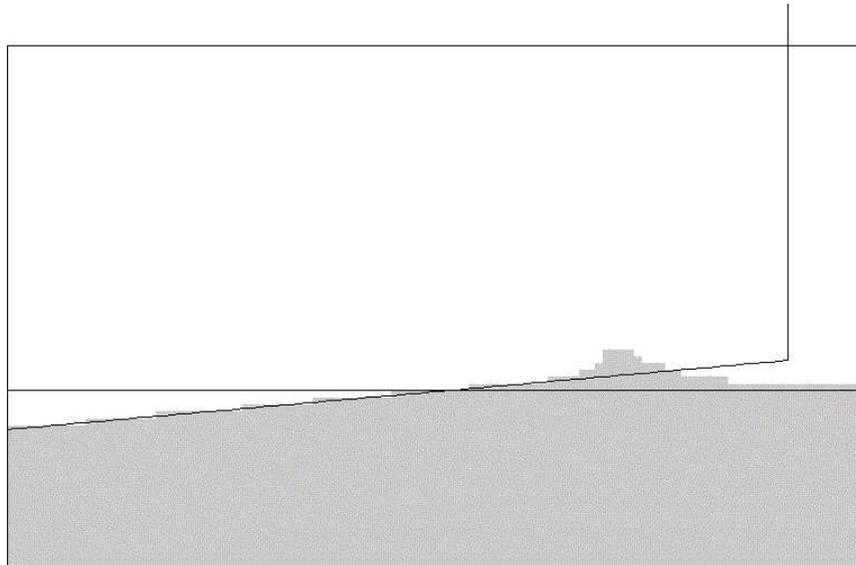


FIG. 5.27 – Dièdre à 5° : Répartition de la fraction volumique de l'eau (blanc: $f v^{eau} < 0.5$, gris: $f v^{eau} > 0.5$)

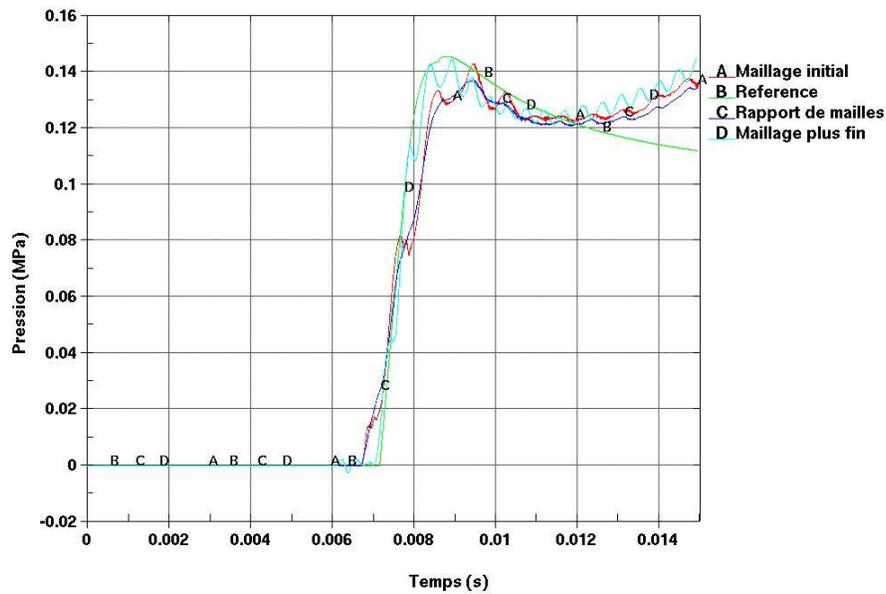


FIG. 5.28 – Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 30°: (A) Maillage initial (B) Pression de référence (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Maillage deux fois plus fin

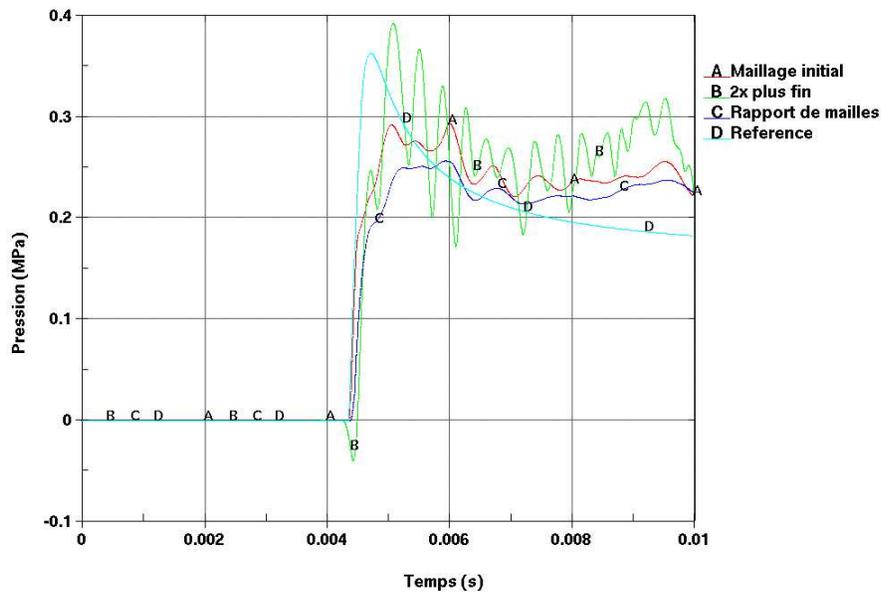


FIG. 5.29 – Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 20°: (A) Maillage initial (B) Maillage deux fois plus fin (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Pression de référence

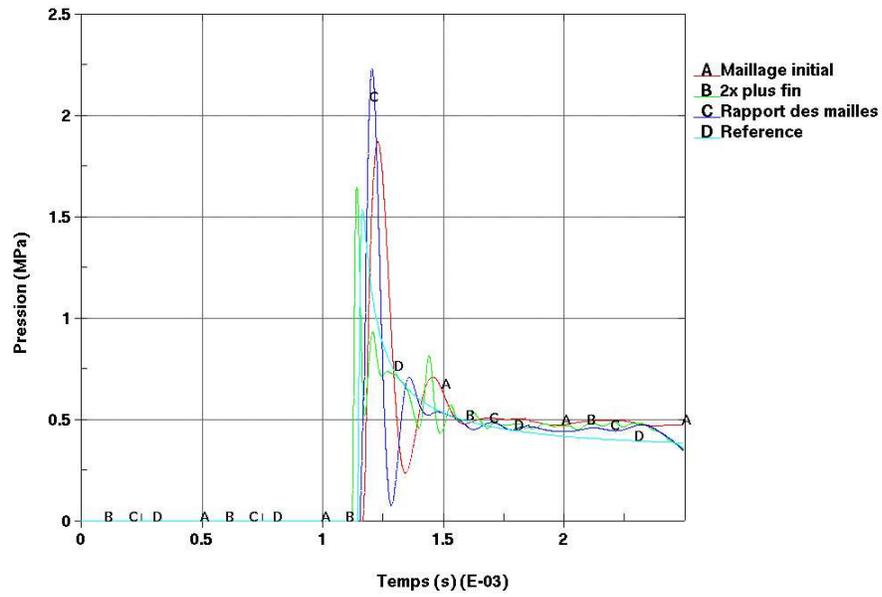


FIG. 5.30 – Comparaison des pressions locales obtenues par la méthode modifiée des multiplicateurs de Lagrange pour un dièdre à 10° : (A) Maillage initial (B) Maillage deux fois plus fin (C) 1 maille fluide pour une maille structure (D) Pression de référence

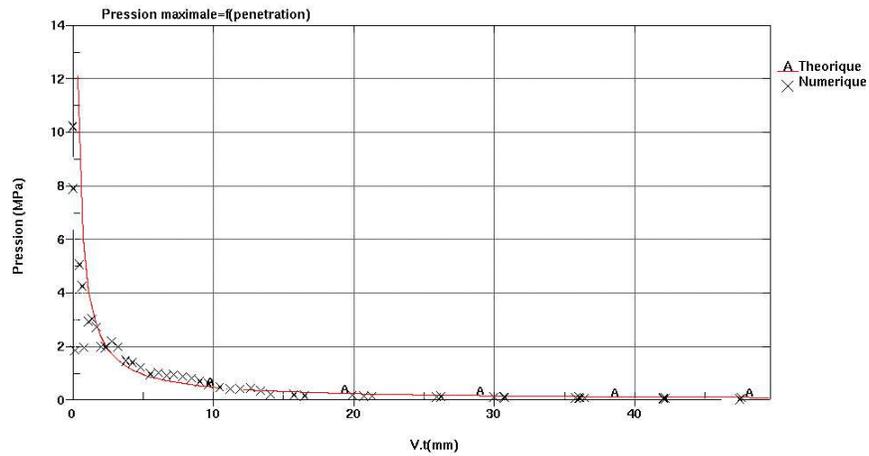


FIG. 5.31 – Cylindre : Pression maximale en fonction de la pénétration par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

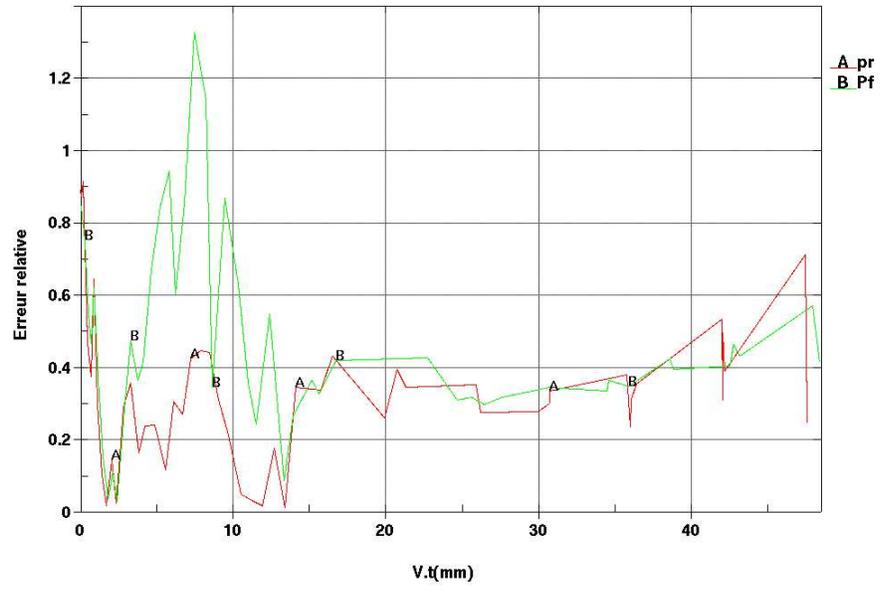


FIG. 5.32 – Erreur relative sur la pression maximale exercée sur le cylindre en fonction de pénétration: (A) Méthode des multiplicateurs de Lagrange, (B) Méthode par pénalisation

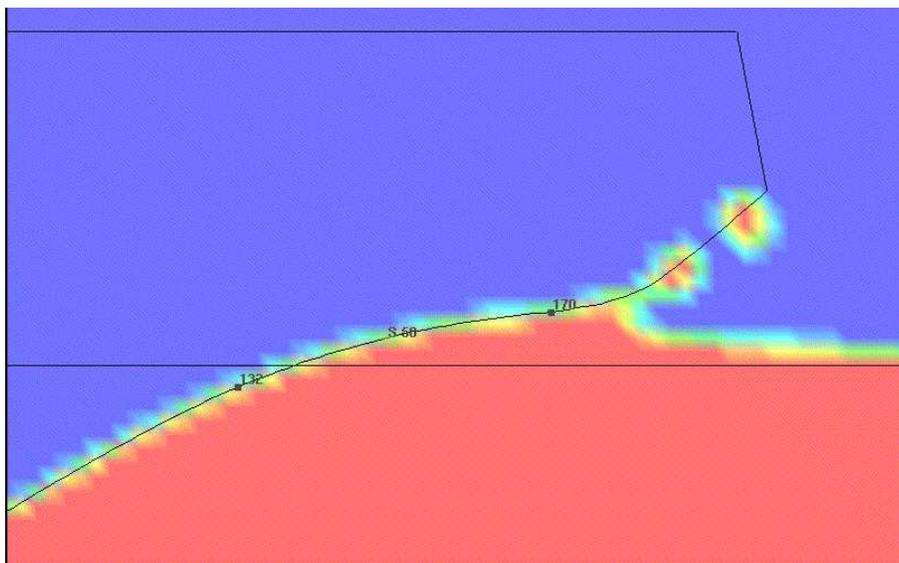


FIG. 5.33 – Déformation du dièdre: points de mesure

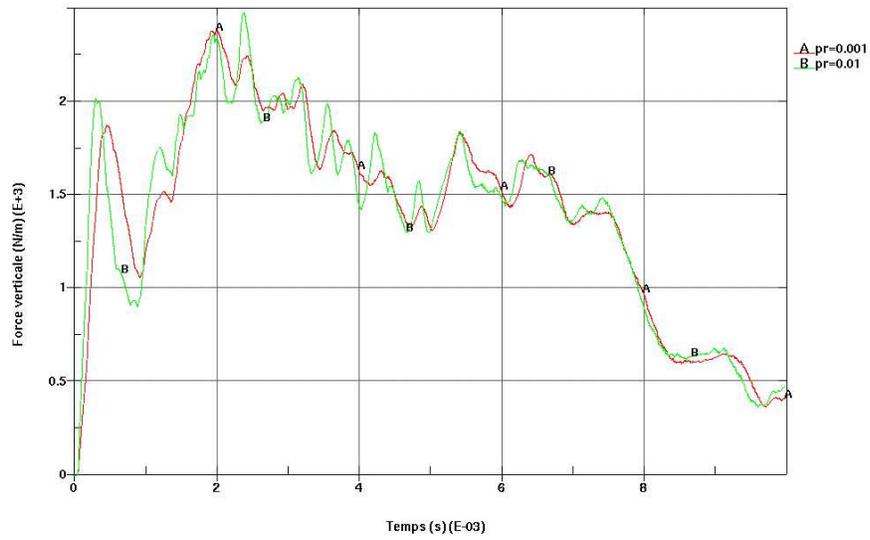


FIG. 5.34 – Déformation du dièdre: (A) Force globale pour $pr = 0.001$, (B) Force globale pour $pr = 0.01$

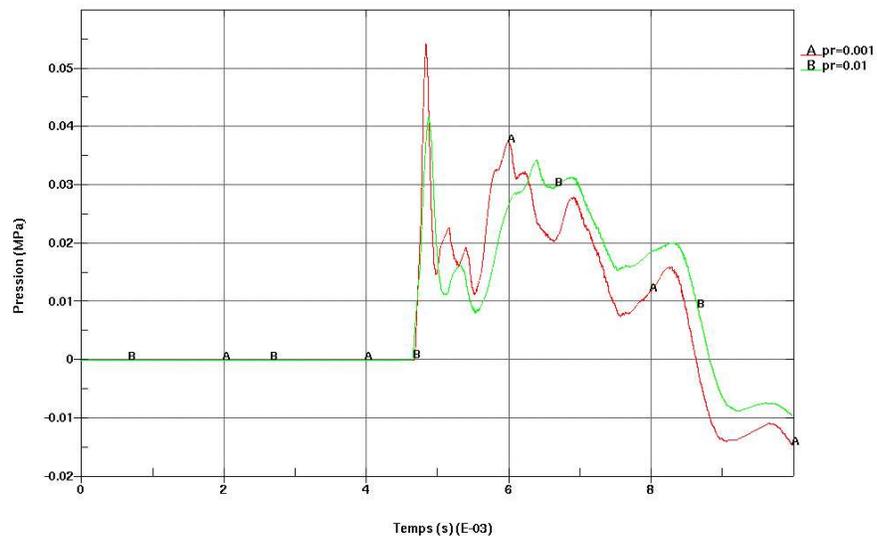


FIG. 5.35 – Déformation du dièdre: (A) Pression pour $pr = 0.001$, (B) Pression pour $pr = 0.01$

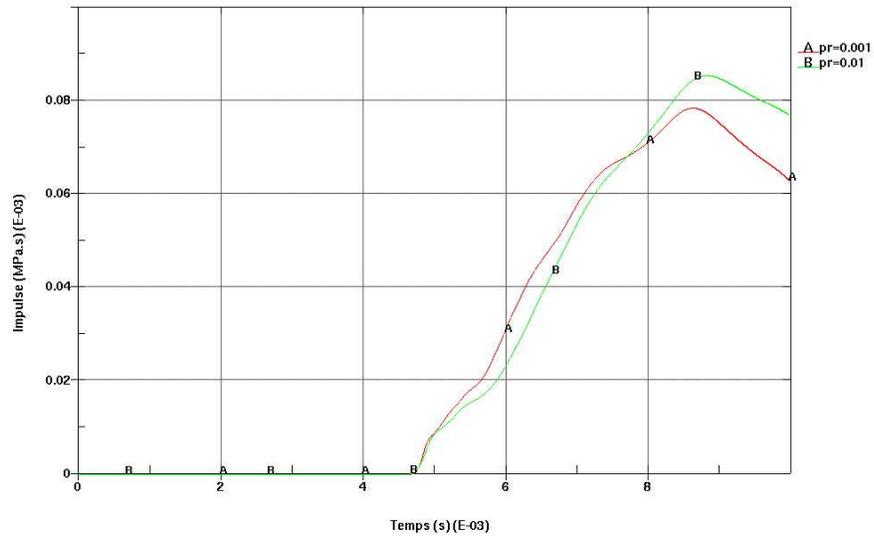


FIG. 5.36 – Déformation du dièdre: (A) Impulse pour $pr = 0.001$, (B) Impulse pour $pr = 0.01$

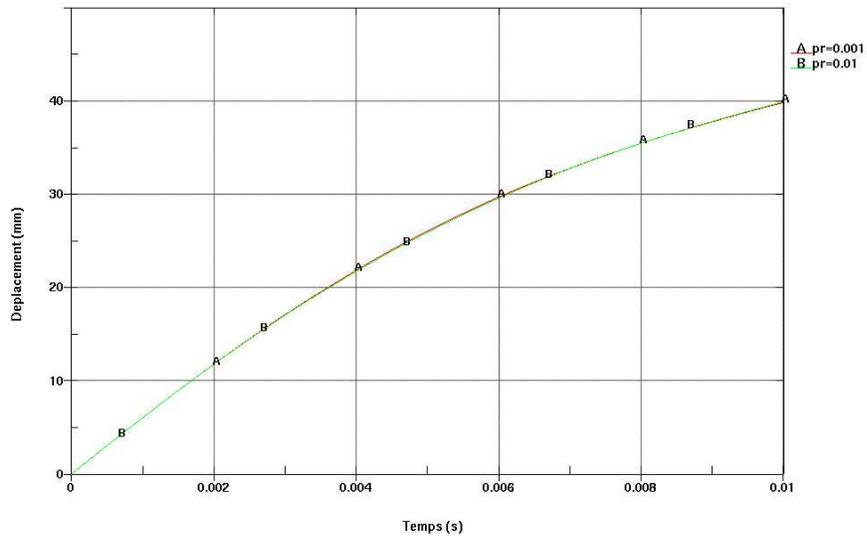


FIG. 5.37 – Déformation du dièdre: (A) Déplacement du nœud 132 pour $pr = 0.001$, (B) Déplacement du nœud 132 pour $pr = 0.01$

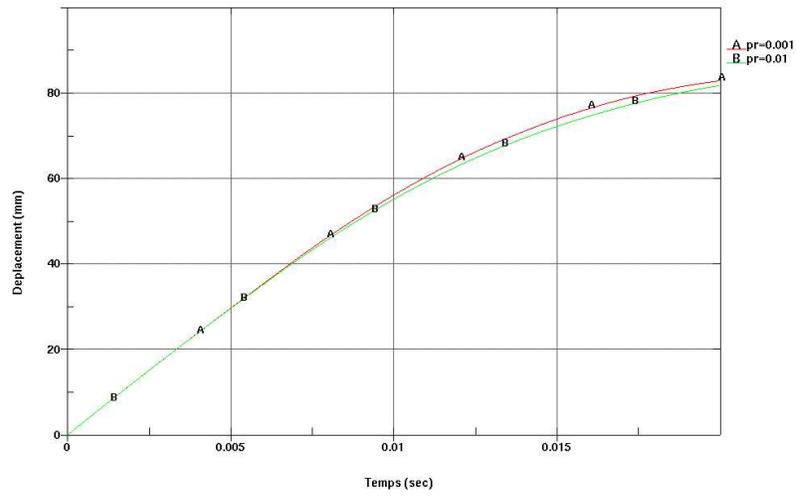


FIG. 5.38 – Déformation du dièdre: (A) Déplacement du nœud 170 pour $pr = 0.001$, (B) Déplacement du nœud 170 pour $pr = 0.01$

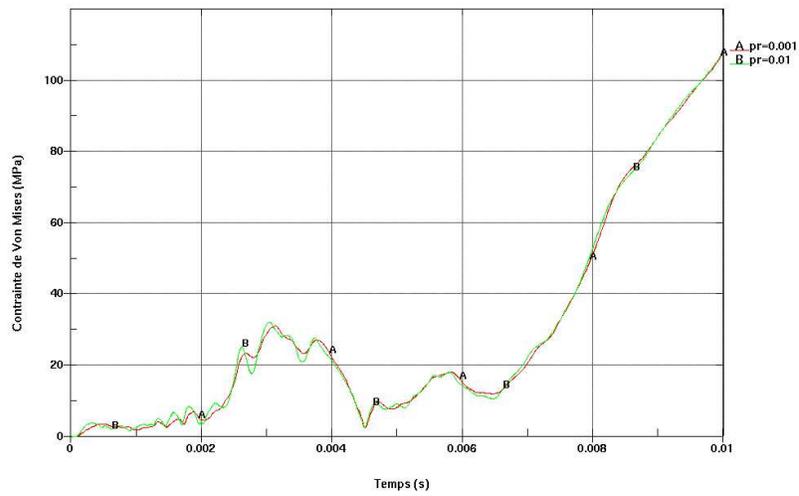


FIG. 5.39 – Déformation du dièdre: (A) Contrainte de Von Mises pour $pr = 0.001$, (B) Contrainte de Von Mises pour $pr = 0.01$

Chapitre 6

Etude de problèmes 3D

Dans ce chapitre, les modélisations traitées sont plus exigeantes en coût de calcul et requièrent des approches spécifiques aux simulations réalistes. Bien que la durée d'un impact hydrodynamique soit courte, un modèle 3D demande un coût CPU important. Le ballonnement d'un liquide dans un réservoir ou l'entrée d'une étrave de navire dans l'eau sont des modèles lourds et ils exigent souvent des semaines de calcul, le pas de temps étant petit dans le cadre d'un calcul explicite. Pour diminuer la durée d'un calcul, la charge d'un modèle 3D peut être répartie sur plusieurs CPU. Le domaine de calcul est divisé en un nombre de sous-domaines correspondant au nombre de CPU. Chaque sous-domaine a une taille en nombre d'éléments approximativement équivalente. Les processeurs travaillent, de concert, en communiquant aux frontières des sous-domaines. Ce parallélisme est mis en œuvre, dans un premier paragraphe, dans le cas de l'impact hydrodynamique d'un cône. Les modélisations 3D sont coûteuses dans leur construction, notamment, si la géométrie du problème est complexe. Les structures industrielles qui seront amenées à entrer en contact avec un ou plusieurs fluides, reposent sur un design difficile à appréhender directement sans faire appel à des algorithmes spécifiques (lors du preprocessing). Une grille Eulérienne ou ALE multi-matériaux modélise, en général, l'écoulement de plusieurs fluides en interaction avec une structure Lagrangienne complexe. Ce maillage multi-matériaux peut être construit en déterminant la répartition de la fraction volumique. Une même cellule de cette grille peut contenir, par exemple, 3 fluides différents et être coupée par une structure. Dans une telle cellule, si la géométrie du problème le permet, un calcul direct des fractions volumiques initiales est abordable. Cependant, une grille multi-matériaux 3D peut comporter un nombre important de cellules coupées irrégulièrement par la structure. L'initialisation des fractions

volumiques en tenant compte de la géométrie complexe du problème repose alors nécessairement sur un algorithme que nous proposons de décrire dans une seconde partie.

6.1 Calcul parallèle

Pour les modèles 3D prenant un coût CPU important, une machine parallèle a été construite en regroupant 4PC en une grappe de processeur ou cluster. Sur cette machine est installée une version parallèle du code LS-DYNA3D écrite en MPI (Message Passing Interface). Le calcul d'un cône percutant une surface libre permettra de mettre en évidence les difficultés rencontrées lors de la décomposition du domaine de calcul.

6.1.1 Machine parallèle

Architecture

La machine parallèle est une grappe de 4PC (ou cluster de 4PC). Chaque processeur ou nœud est un intel(R) celeron(R) de 1.7GHz avec 1Go de mémoire vive, $12K \mu ops$ (micro-opérations) en cache L1 et 8Ko en cache L2. Selon la classification de Flynn, cette machine est de type MIMD (Multiple Instruction Multiple Data) à mémoire distribuée. Le câblage est de catégorie 5e avec une bande passante de 100Mhz et une baie de brassage. Ce support de transmission sert de base à un protocole Fast Ethernet de 100Mb/s (100base-TX) en full duplex. Au-dessus de ce protocole réseau se trouvent le protocole internet (IP) et le protocole de services (TCP). Le système d'exploitation est la distribution Linux Red Hat 8.0. Pour assurer un répertoire de travail commun à tous les nœuds, un serveur nfs (Network File System) est installé sur le nœud maître (qui est le nœud collectant les calculs de chaque processeur). Ce dernier devient le nœud serveur et les autres sont les nœuds clients. Afin de partager la charge du calcul entre les processeurs, le cluster repose sur des applications de type client-serveur. Comme le code LS-DYNA et le modèle ne sont pas présents sur les nœuds clients, il est primordial de diffuser, vers les machines clientes, les sources du code et les sous-domaines issus de la décomposition (voir la paragraphe suivant). Cette diffusion est effectuée grâce à une librairie de passage de messages entre les machines : MPI (Message Passing Interface).

Parallélisme de tâches

Le parallélisme de tâches implique une décomposition d'un travail en sous-tâches réparties par processus ou thread. En l'occurrence, dans le cas du cluster, un calcul est réparti sur les 4 CPU. Chacune de ces sous-tâches est exécutée localement sur le CPU et une synchronisation de ces processus implique une communication par messages. La norme MPI 1.1 (Message Passing Interface) sert de base au code parallèle de LS-DYNA3D. Cette norme utilise une communication de type TCP/IP et elle est installée sur le cluster sous la version LAM 6.5.6 (Local Area Multicomputer) du standard MPI. LAM est, en fait, un environnement commun aux 4 CPU dans lequel des applications MPI et LAM peuvent être lancées. Cet environnement est mis en place lorsque le démon lamd est activé sur les nœuds. Ce démon pourvoit les services requis par le code MPI de LS-DYNA. Il est une application servant d'interface entre le protocole de services TCP et les bibliothèques MPI. Ces dernières regroupent des fonctions en fortran (compilateur fortran intel) servant à passer des messages entre les nœuds. Les principales fonctions employées sont:

- MPI_Init(...) pour initialiser l'environnement parallèle. Les différents arguments du code sont passer en paramètre.
- MPI_Comm_size(...) pour connaître le nombre de processus.
- MPI_Send(...) envoie un message contenant une variable (entier, tableau,...).
- MPI_Recv(...) reçoit des données.
- MPI_Reduce(...) permet au processus maître, de collecter un ensemble de valeurs détenues par les processus esclave et d'appliquer une opération sur cet ensemble (une somme, une recherche d'extremum,...).
- etc...

Des petits programmes tests en MPI ont été mis en œuvre pour vérifier la performance ou l'accélération (speedup) de la machine. Une accélération voisine de 4 a été notée pour ces petits programmes qui exigent peu de communications entre les processeurs. Le coût du transfert des données entre processus dépend de la taille du problème et de la division du domaine de calcul. En effet, les communications se font à la frontière entre les sous-domaines affectés à chaque processus et il est important que chaque processus ait le même temps de communication. Pour cela, il faut diviser le domaine de manière à équilibrer les charges de calcul. Sa décomposition est effectuée par une méthode RCB (Recursive Coordinate Bisection) appliquée à l'impact hydrodynamique du cône.

6.1.2 Application: Entrée d'un cône dans l'eau

On considère un cône rigide pénétrant l'eau à une vitesse constante et égale à 6150mm/s. Le rayon du cône est de 128mm. L'angle choisi est de 10° . Comme pour l'impact hydrodynamique du dièdre, le modèle repose sur un couplage entre une grille Eulérienne multi-matériaux modélisant l'écoulement de la surface libre et une structure conique composée d'éléments quadrangles (de type Belytschko-Lin-Tsay). L'interaction fluide-structure est modélisée par un couplage par pénalisation. La raideur est évaluée en se servant du tableau 5.2 pour 10° : avec la relation Eq.(3.243) et un pas de temps associé au fluide valant $\Delta t_f = 0.57\mu s$, la raideur vaut $24MPa.mm^{-1}$. Nous voyons d'abord comment le domaine de calcul est décomposé par la méthode RCB (Recursive Coordinate Bisection) et nous étudions l'influence de cette décomposition sur l'accélération du calcul. Ensuite, nous examinerons les résultats en pression locale obtenue avec le calcul parallèle et le calcul sur un cpu.

Décomposition de domaines

La méthode RCB (Recursive Coordinate Bisection) permet de diviser itérativement le domaine de calcul en deux, perpendiculairement à l'une des 3 directions pour laquelle le domaine possède la plus grande dimension. Ce découpage tend à générer des sous-domaines de forme cubique alignés le long des axes (voir Fig.6.2.5). Si le nombre de processeurs est paire, la méthode RCB divise le domaine de calcul, en deux parts égales, suivant la plus grande dimension dans la direction x, y ou z. Si ce nombre est impaire, la méthode décompose, dans la direction de la plus grande dimension, le domaine de calcul en sous-domaine inégaux dans des proportions équivalentes aux entiers les plus proches du demi-nombre de CPU (s'il y a 5 CPU, le domaine est divisé en une part de 2/5 et une autre de 3/5). La méthode RCB itère ce procédé sur les sous-domaines jusqu'à ce que chaque processeur ait une charge de travail. Dans notre cas, le nombre de CPU est 4 et la grille Eulérienne de base carré est plus large que haute. Donc, en suivant cette méthode, la grille est divisée, suivant x et y, en 4 quartiers égaux (voir Fig.6.2.5).

Résultats

La décomposition du domaine de calcul joue un rôle important pour assurer une répartition équilibrée du calcul sur les 4 nœuds afin de limiter l'attente d'informations entre les processeurs. Un processus peut seulement résoudre un pas de temps avant d'attendre que les autres aient terminé leur tâche. De la même manière, l'efficacité du calcul parallèle est augmentée si on parvient à réduire le nombre d'éléments à la frontière entre les sous-domaines car cela permet de réduire le temps de communication MPI entre les processus. En absence de couplage, la décomposition idéale serait celle où chaque CPU mettrait un temps identique à traiter chaque élément. Cependant, des éléments différents requièrent des temps de calcul différents. En l'occurrence, dans le cas de cette application, les éléments hexaédriques pour le fluide devraient avoir un coût CPU largement supérieur à un élément quadrangle rigide. D'ailleurs, le nombre d'éléments composant la structure est très faible devant le nombre d'éléments Eulériens: 14994 éléments quadrangles contre 373856 éléments hexaédriques, soit 1 pour 25. S'il n'y avait pas de couplage, le temps de calcul serait quasiment monopolisé par le fluide et il suffirait de diviser le domaine en 4 parts égales (voir Fig.6.2.5). L'algorithme de couplage complique les choses car le temps CPU passé à coupler les deux formulations dépend de la surface mouillée du cône. Un calcul sur un seul nœud montre qu'il prend 3% du temps CPU ce qui est peu. Si, à présent, on divise, en part égale, la grille Eulérienne par le nombre de processeurs, ce pourcentage va nécessairement augmenter. Pour quantifier l'importance du couplage, le calcul est lancé avec la décomposition par défaut. La durée du calcul sur un CPU est de 68h58min tandis que celle sur les 4 CPU donne un temps de 26h09min. Le calcul est environ 2.6 fois plus rapide mais cette accélération aurait dû être, théoriquement, de l'ordre de 4. Le pourcentage de CPU consommé par le couplage est au maximum de 16% pour les 4CPU. Cette part reste encore faible et n'explique donc pas la faible accélération observée. Plusieurs autres décompositions ont pu être tentées. Par exemple, le domaine est découpé en tranches verticales (voir Fig.6.2.5) mais la durée du calcul reste proche de 26h. Une transformation des coordonnées dans un repère cylindrique est choisie de manière à découper le domaine radialement: on obtient la décomposition affichée sur Fig.6.2.5. On remarque que chaque sous-domaine a deux frontières communes avec ces voisins de manière à ce que le coût des communications entre CPU soit équilibré. La charge CPU pour chaque processeur est voisine de $6.4 \times 10^4 s$. Ce temps est proche du quart de la durée du calcul sur un CPU ($69h = 24.8 \times 10^4 s$). Néan-

moins, la durée du calcul croît: 37h 55min. Ces calculs et, notamment le dernier, indiquent un coût de communication très important. En effet, lorsqu'on passe de la décomposition par défaut à la décomposition radiale, la taille des frontières entre les sous-domaines augmente, et ainsi, d'un calcul durant 26h, on passe à un calcul durant 37h. Pour la décomposition par tranches, les frontières possèdent la même dimension que celle par défaut, c'est pourquoi la durée du calcul dans ces deux cas est approximativement la même. L'accélération du calcul est aussi limitée par les parties du code restées non-parallélisées (par exemple, l'initialisation des paramètres de calcul comme la fraction volumique qu'on étudiera dans le paragraphe suivant). Si s est la fraction du code restée séquentiel, la durée d'exécution minimum, T_n , sur n processeurs, est alors donnée par la loi d'Amdahl [Amdahl, 1967]:

$$T_n = T_{seq} \left(s + \frac{1-s}{n} \right) \quad (6.1)$$

où T_{seq} est la durée du calcul sur le code séquentiel de LS-DYNA. L'accélération du calcul peut être évaluée par:

$$A_c = \frac{T_n}{T_{seq}} = s + \frac{1-s}{n} \quad (6.2)$$

Sur les différentes décompositions proposées, la meilleure accélération est celle donnée par la décomposition par défaut: 2.6. Dans cette accélération, il faut tenir compte du temps des communications. De la relation Eq.(6.2), on en déduit, avec $n = 4$, que la partie séquentielle doit être inférieure à 17%, soit environ 20% pour fixer les idées. Si on veut accélérer, de manière significative, l'application parallèle, il faut réduire au maximum le pourcentage de la partie séquentielle. En supposant, par exemple, que les coûts de communication sont négligeables, une accélération A_c de l'ordre de 3.5 serait possible si la partie séquentielle était réduite à 5% sur l'ensemble du code.

A présent, on s'intéresse à la pression locale exercée sur la structure conique. En adaptant la théorie décrite dans le paragraphe 2.1.3 au cas d'un cône, il est possible d'évaluer la partie mouillée du cône par une expression proche de Eq.(2.15):

$$c(t) = \frac{4vt}{\pi \tan(\beta)} \quad (6.3)$$

La vitesse du point de stagnation, le long du cône, est alors aisément obtenue en dérivant, par rapport au temps, la relation Eq.(6.3). La pression maximale en ce point est alors donnée

par la relation suivante issue du théorème de Bernoulli:

$$\frac{P_{max} - P_o}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{16}{\pi^2} \cotan(\alpha)^2 \quad (6.4)$$

Sur Fig.6.2.5, la pression numérique comporte des valeurs fortes devant la pression ce qui indique que le couplage est fort devant le champ de pression recherché. La calibration de l'algorithme étant faite sur un dièdre, on sait qu'en théorie, la pression 2D tend à être plus importante que la pression 3D. Chuang [Chuang, 1969] confirme expérimentalement que les effets 3D réduisent la pression d'impact. Une adaptation de l'analyse 2D au cas 3D devrait alors être faite en ajustant le paramètre pr . Néanmoins, la pression maximale théorique déterminée par Eq.(6.4) étant de 1.1MPa, on remarque que la courbe numérique passe par un maximum proche de cette valeur. La courbe théorique est obtenue en adaptant la relation composite Eq.(2.31) au cas du cône et elle est aussi proche de la courbe numérique tracée sur Fig.6.2.5. Le temps de naissance du pic est correctement prédit. Bien que la courbe numérique soit oscillante, elle corrèle la courbe de référence. La comparaison des courbes (A) obtenue avec 1CPU et (B) calculée avec 4CPU donnent des évolutions quasiment identiques.

6.1.3 Conclusion

Pour réduire les coûts de calcul d'un modèle 3D, une approche parallèle de la formulation Euler-Lagrange a été mise en œuvre pour traiter l'impact hydrodynamique d'un cône. Une machine parallèle a été construite en utilisant 4 processeurs de 1.7GHz. L'accélération théorique de cette machine est vérifiée pour un problème ayant des coûts de communications faibles devant la charge CPU et avec un code complètement parallélisé. Cependant un code de calcul comporte toujours des parties séquentielles (sur la version parallèle de LS-DYNA3D, on estime que leur part est environ inférieure à 20%) et les communications pour un modèle 3D ne sont pas négligeables. L'accélération réaliste du code parallèle LS-DYNA sur le cluster varie entre 2.5 et 3 suivant l'application traitée. La pression locale obtenue par le code parallèle est proche de la pression théorique et de la pression déterminée par la version séquentielle. Seul le calcul parallèle permet actuellement une augmentation des performances du code LS-DYNA. Cependant, l'utilisation d'une machine parallèle pose des difficultés de programmation et d'utilisation. Les communications prennent beaucoup

de temps CPU et ils faut diminuer leur coût soit en optimisant les échanges MPI, soit en réduisant la taille des frontières lors de la décomposition d'un problème donné, soit encore en les recouvrant par du calcul. Dans ce dernier cas, la charge du calcul peut être augmentée en raffinant le maillage, par exemple. Cette approche rejoint la loi de Gustafson [Gustafson, 1988] dans laquelle la taille du problème est proportionnelle au nombre de processeurs composant la machine parallèle. Dans la suite, on s'intéresse à un autre problème lié aux grands modèles 3D: le pre-traitement d'un maillage ALE modélisant plusieurs fluides autour d'une structure géométriquement complexe.

6.2 Initialisation des fractions volumiques

Dans cette partie, nous présentons un algorithme qui permet de calculer la distribution initiale des fractions volumiques dans des grilles ALE ou Eulériennes pour des problèmes d'interaction fluide-structure. Cette approche améliore la flexibilité et l'efficacité des formulations multi-matériaux en permettant de gérer des problèmes de couplage fluide-structure pour lesquels des structures de géométries complexes sont immergées dans un maillage ALE cartésien modélisant plusieurs fluides. Ce nouvel algorithme est implémenté dans LS-DYNA3D et il sera fort utile dans la modélisation de problèmes d'interaction fluide-structure impliquant le calcul précis de la fraction volumique de chaque cellule ALE coupée par une structure complexe. Si l'initialisation des fractions volumiques n'est pas correctement menée, le couplage (par pénalisation ou par les multiplicateurs de Lagrange) peut conduire à des fuites à travers la structure et à une solution alors erronée. La première caractéristique de l'algorithme est de construire des grilles ALE comportant des interfaces matérielles complexes. Les éléments quadrangles Lagrangiens pour la structure sont, en général, des frontières entre les différents fluides dans les problèmes d'interaction fluide-structure. De ce fait, une large part du code concerne la distribution de la fraction volumique dans le voisinage de la structure qui peut posséder des singularités telles que des points selles ou des angles aigus. Un traitement particulier est présenté pour évaluer les fraction volumiques autour de ces singularités. Dans un premier temps, la méthode VCE (Virtual Cell Embedding) développée par Landsberg [Landsberg et al., 1997] est décrite: cet algorithme qui est inclus dans notre schéma propose une approche pour calculer la fraction volumique de cellules coupées par un corps ayant une géométrie arbitraire.

6.2.1 Méthode VCE

Le calcul des fractions volumiques est basé sur une méthode dite VCE (Virtual Cell Embedding) développée par Landsberg [Landsberg et al., 1997]. Cette méthode peut générer une grille multi-matériaux pour n'importe quelle géométrie placée d'une manière arbitraire. Quelques surfaces classiques (sphère, ellipse, plan,...) sont disponibles dans le code implémenté pour construire des interfaces matérielles simples entre les fluides. Mais, dans des problèmes d'interaction fluide-structure, la structure est, en général, une paroi séparant deux ou plusieurs fluides. Si deux fluides sont séparés par une structure Lagrangienne (voir Fig.6.6), l'algorithme procède en plusieurs étapes. Supposons qu'un des deux fluides remplit initialement tous les contrôles de volume ALE, par la suite, les autres fluides remplacent le premier en prenant en compte l'orientation des surfaces ou des structures limitant le domaine ALE à remplir. La première étape est alors de calculer une normale pour chaque élément quadrangle (voir Fig.6.6). La seconde étape est de déterminer la position des nœuds ALE vis à vis des normales de la structure. Les normales sont dirigées vers le domaine "externe" et on veut remplir le domaine interne avec le deuxième fluide. Si un élément ALE n'est pas coupé par la structure, cette cellule est alors remplie par un des deux fluides suivant qu'elle est située à "l'extérieur" ou à "l'intérieur" de la structure. Si la cellule est coupée, elle est divisée en sous-cellules (voir Fig.6.6). Le centre de chacune de ces sous-cellules est marquée comme étant "externe" ou "interne" (par rapport à l'orientation des normales). La somme des sous-cellules internes détermine la fraction volumique du second fluide (et la somme de celles externes, la fraction volumique du premier).

6.2.2 Schéma de l'algorithme

Les géométries des structures ne sont pas aussi régulières qu'une sphère ou qu'une ellipse. Pour ces formes, une approche classique basée uniquement sur un produit scalaire permet d'identifier les domaines externes et internes correctement. Des singularités telles que des points selles ou des coins apparaissent souvent sur une structure réaliste et peut impliquer des erreurs d'estimation dans la répartition des fractions volumiques autour de ces points. L'initialisation des fractions volumiques près de ces singularités requiert des précautions particulières. Examinons l'approche classique du calcul de la fraction volumique sur un cas simple: une structure constituée d'éléments quadrangles est immergée dans une grille

ALE remplit initialement d'un seul fluide (les fractions volumiques de chaque cellule ALE valent 0). Le but est de remplir l'intérieur du domaine par le second fluide (les fractions volumiques des cellules complètement internes vaudront 1). Si une cellule est divisée par la structure, sa fraction volumique sera comprise entre 0 et 1. La méthode classique procède par les étapes suivantes:

- 1 - Pour chaque nœud de la cellule ALE, ($i = 1, \dots, 4$ en 2D et $i = 1, \dots, 8$ en 3D) le nœud structure i_s le plus proche est recherché.
- 2 - Une normale $\vec{n}(i_s)$ est construite en i_s en faisant la moyenne des normales des éléments structures connectés à ce nœud. Les normales des éléments de la structure sont orientées vers le domaine fluide externe.
- 3 - On vérifie le signe du produit scalaire $\vec{n}(i_s) \cdot \vec{d}$ avec \vec{d} , un vecteur unitaire dirigé de i_s vers i_f . S'il est positif, le nœud i_f est déclaré à l'extérieur de la structure. S'il est négatif, il est à l'intérieur de la structure.
- 4 - Si les 8 nœuds sont internes, la fraction volumique de la cellule est fixée à 1 et si les 8 nœuds sont externes, elle reste à 0.
- 5 - Si au moins un des nœuds est situé à l'intérieur de la structure, l'élément ALE est considéré comme coupé par la structure et un algorithme reposant sur la méthode VCE est appelé pour faire une évaluation précise de la fraction volumique. Cette méthode est souvent utilisée pour reconstruire les interfaces matérielles [Emery et al., 1997].

Cependant, pour une géométrie ayant des singularités, cet algorithme peut donner une fraction volumique non nulle pour un élément ALE complètement à l'extérieur du domaine. Considérons l'exemple sur Fig.6.7. Si on suit l'algorithme, le calcul du produit scalaire est négatif pour le nœud A de l'élément hachuré. Ce nœud est considéré comme interne à la structure et l'élément possède alors une fraction volumique non nulle. Etant donné que cet élément n'est pas coupé par la structure, au cours du calcul qui suivra l'initialisation des fractions volumiques, l'algorithme de couplage fluide/structure calculera une force d'interaction erronée et une fuite peut s'amorcer et s'étendre à l'extérieur de la structure.

Pour améliorer les conditions déterminant si le nœud fluide est interne ou externe à la structure, on recherche le nœud structure le plus proche et on considère les centres c_i des éléments structures qui lui sont voisins (avec $i = 1, 2$ en 2D et $i = 1, \dots, 4$ en 3D). Pour chacun de ces centres, on définit un produit scalaire par $\vec{d}_i \cdot \vec{n}_i$ dans lequel \vec{n}_i est la normale en c_i et \vec{d}_i , le vecteur dirigé de c_i vers le nœud fluide considéré. Les conditions vérifiant la position du nœud fluide vis à vis de la structure dépendent de l'angle α qui est déterminé par les tan-

gentes au point de singularité. Si $\alpha > \pi$ (cette condition est notée 1 et elle est représentée sur Fig.6.8), le nœud fluide A est à l'extérieur de la structure si au moins un des produits scalaires $\vec{d}_i \cdot \vec{n}_i$ est positif. Si $\alpha < \pi$ (cette condition est notée 2 et elle est représentée sur Fig.6.9), le nœud fluide A est à l'extérieur de la structure si tous les produits scalaires sont positifs. L'extension de ces conditions à un cas tridimensionnel est simple et permet de traiter n'importe quelles irrégularités à la surface d'une structure 3D.

L'autre intérêt de l'algorithme est de générer des cellules ALE cartésiennes contenant plusieurs matériaux. En effet, les conditions sélectionnant les cellules ALE pour un calcul de la fraction volumique ne se réduisent pas à la vérification de la position de la cellule vis à vis de la structure. Le calcul de la fraction volumique ne s'effectue que si le matériau contenu dans la cellule est effectivement le matériau à remplacer. Ainsi, l'algorithme peut être appliqué successivement à une cellule afin qu'elle contienne plusieurs matériaux. Pour illustrer ce propos, on considère un réservoir rectangulaire immergé dans une grille ALE contenant initialement de l'air: un modèle de ce réservoir contenant du carburant et du gaz se construit en deux étapes. Dans un premier temps, l'air est identifié comme étant le matériau à remplacer et on remplit alors complètement le réservoir de carburant. Le calcul des fractions volumiques s'appuie sur la description de l'algorithme donnée précédemment en tenant compte de l'orientation des normales. Les cellules internes sont alors complètement remplies de carburant et, dans les cellules coupées par la structure, coexistent l'air et le carburant (voir Fig.6.10). Dans un deuxième temps, l'algorithme est appliqué aux cellules possédant du carburant et situées au-dessus d'un plan horizontal coupant à mi-hauteur le réservoir. Ces cellules sont alors remplies de gaz et trois fonctions donnent alors la distribution de la fraction volumique entre le gaz et le carburant, entre le gaz et l'air et entre l'air et le carburant. Il est possible ainsi de mettre, dans une cellule ALE, un grand nombre de matériaux fluides, la limite étant la capacité de la formulation ALE multi-matériaux à effectuer le calcul. Ainsi, dans la cellule mise en évidence sur Fig.6.10, trois matériaux coexistent: 25% de carburant, 25% de gaz et 50% d'air. La validation de l'algorithme est démontrée sur un problème similaire où la structure possède, cette fois-ci, une forme géométrique plus complexe, prouvant ainsi la capacité du code à construire des modèles industriels réalistes.

6.2.3 Applications numériques

Problème du tube à choc en 2D

Une version cylindrique du problème linéaire du tube à choc est considéré pour valider l'initialisation des fractions volumiques. La propagation 2D dans l'air d'un choc issu d'un gaz à haute pression est modélisée avec la masse volumique initiale et l'énergie interne par unité de volume suivantes:

- Pour $r > 5m$, $\rho_{air} = 1.29kg/m^3$, $e_o = 0MPa$,

- Pour $r < 5m$, la densité du gaz est proche de celle de l'air, $e_o = 2.5MPa$,

L'équation d'état Eq.(3.180) pour les gaz parfait est considérée. Deux modèles différents sont comparés sur Fig.6.2.5:

- *Cas 1*: l'initialisation des fractions volumiques est appliquée sur une grille cartésienne afin de construire une interface cylindrique entre l'air et le gaz de rayon $5m$

- *Cas 2*: les maillages pour l'air et pour le gaz sont projetés sur une frontière circulaire de rayon $5m$. Aucun élément n'est initialement partagé par les matériaux.

Sur Fig.6.2.5, la répartition de la fraction volumique dans le cas 2 montre l'exacte limite initiale entre l'air et le gaz contrairement au cas 1. Pour vérifier le calcul de la fraction volumique dans le cas 1, l'isocontour à 0.5 est tracé sur Fig.6.2.5. La forme initiale de la frontière air/gaz est correctement modélisé dans les deux cas. Sur Fig.6.2.5 et Fig.6.2.5, la modélisation de la propagation de l'onde de choc dans les cas 1 et 2 est synchrones. A 19m du centre, les profils de pression de Fig.6.2.5 concordent dans les deux cas. Une grille cartésienne multi-matériaux, pour laquelle les interfaces matérielles sont construites par l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques donne des résultats aussi précis que ceux obtenus par un maillage multi-matériaux projeté sur les frontières matérielles.

6.2.4 Ballotement dans un réservoir

Dans cette partie, on s'intéresse au ballotement d'un carburant dans un réservoir (sloshing). Comme le réservoir possède une géométrie complexe, cette application permet de mettre en valeur l'intérêt de l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques. On emploie une formulation ALE qui a la propriété de se déplacer rigidement avec le réservoir de sorte qu'un maillage Eulérien de grandes dimensions n'est pas nécessaire à la modélisation.

Construction du modèle

Le modèle est basé sur une formulation Lagrangienne pour le réservoir et sur une formulation ALE pour le fluide. Le réservoir est supposé rigide. Les impacts entre le liquide et la paroi interne du réservoir sont modélisés par un algorithme de couplage par pénalisation. Le facteur pf vaut 1. Le réservoir étant rempli de deux fluides de densités très différentes, les accélérations de ce dernier entraînent un ballonnement du fluide le plus lourd. Ce problème industriel est connu, par exemple, pour des réservoirs à carburant partiellement remplis: le gaz et le liquide coexistent et la différence de densité est telle que l'interface n'est pas contrainte. Sous ces conditions, l'approche Lagrangienne serait la méthode la plus simple et la plus directe. Cependant, la distorsion de mailles due aux mouvements de la surface libre rendrait la formulation Lagrangienne instable. La formulation ALE multi-matériaux permet d'utiliser un maillage régulier en prenant en compte plus d'un fluide dans une cellule ALE. Le réservoir présenté sur Fig.6.2.5 est composé de 15326 éléments de coque disposés suivant un design industriel complexe. Pour construire la grille ALE multi-matériaux composée de 79800 cellules, l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques est appliquée comme démontrée sur Fig.6.10. L'air est le premier fluide présent dans la grille ALE et le but est de remplir le réservoir de gaz et de carburant. Sur Fig.6.2.5, l'initialisation est mise en évidence avec des iso-surfaces de la fraction volumique. Les iso-surfaces à 0.5 pour le gaz et pour le carburant sont toutes les deux proches du maillage de la structure. Donc la construction du modèle est correcte et fidèle à la réalité. On peut remarquer, au passage, que le maillage pour le fluide est plus petit qu'un maillage Eulérien car la formulation ALE employée a la particularité de se déplacer avec le réservoir. Nous voyons cette caractéristique dans la suite.

Mouvement de la grille ALE

Dans le chapitre 3.2, nous avons présenté trois domaines: le domaine matérielle (configuration initiale ou Lagrangienne), le domaine spatial (configuration courante ou Eulérienne) et le domaine ALE. Jusqu'ici, ce dernier était confondu avec le domaine spatial (puisque la formulation employée pour le fluide était Eulérienne) et la vitesse du maillage \vec{v}_{ale} était nulle. Dans cette partie, le champ de vitesse \vec{v}_{ale} est non nul et il est déterminé de manière à ce que le maillage ALE se déplace rigidement avec la structure ([Aquelet et al., 2003]).

Cette nouvelle caractéristique du maillage ALE permet de réduire la taille du domaine de calcul puisqu'il suffit de créer un maillage autour du réservoir. Dans le cas d'une formulation Eulérienne, il faudrait créer un maillage pour le fluide suffisamment grand pour qu'il contienne le réservoir dans tous ses déplacements. Pour mettre en œuvre cette nouvelle formulation, le champ de vitesses du maillage ALE est calculée en prenant la vitesse d'un repère attaché à la structure. Ce repère est construit en prenant 3 points de la structure. Aucune condition n'est appliquée sur les frontières de la grille: on ne s'intéresse pas à l'écoulement de l'air autour du réservoir. Le réservoir accélère violemment, dans la direction x , en imposant une vitesse de $10m/s$. Le carburant est alors projeté sur la paroi interne du réservoir comme le démontre, à différents instants du mouvement, Fig.6.18, Fig.6.19, Fig.6.20 et Fig.6.21. Sur ces figures, on peut remarquer que grâce au couplage, le carburant monte le long de la paroi interne sans qu'il n'y ait de fuites. Le sloshing est un problème semblable au slamming: les pressions locales issues de l'impact du fluide contre la paroi peuvent endommager la structure interne d'un réservoir. Ce modèle permettrait de dimensionner ces efforts. Afin de le valider, une étude expérimentale sera menée au laboratoire de Visteon à Détroit (Etats-Unis). Le calcul prend 2h8min sur un CPU de la machine parallèle décrite dans le paragraphe 6.1.1. En version parallèle, sa durée est réduite à 44min en utilisant les 4 nœuds et en décomposant le domaine de calcul avec l'approche RCB par défaut (voir Fig.6.22). L'accélération de la machine parallèle pour ce calcul est de 2.9 . Pour un modèle différent, on retrouve une performance de la machine parallèle proche du speedup estimé dans le paragraphe précédent pour l'impact du cône sur l'eau. Cette remarque corrobore les conclusions précédentes concernant la perte du temps de calcul dans les communications et dans les parties séquentielles du code.

6.2.5 Conclusion

La première caractéristique de l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques est un calcul précis de la distribution de la fraction volumique autour de singularités telles que les coins. La deuxième caractéristique est sa capacité à construire un maillage ALE comportant plusieurs interfaces matérielles autour de structures complexes. Les applications traitées ont montré la possibilité de construire un modèle d'interaction fluide-structure industriel réaliste. Pour diminuer la taille du maillage fluide, une formulation ALE spécifique permet de construire un maillage multi-matériaux dans le voisinage du réservoir qui a la ca-

pacité de se déplacer avec ce dernier. Cependant, même dans cette approche, les problèmes comportent un grand nombre de cellules ALE et la méthode d'initialisation des fractions volumiques peut être coûteuse. Pour réduire ce coût, il faudrait une version de l'algorithme en parallélisme de données. Le domaine ALE serait divisé par le nombre de CPU employés et à chaque CPU serait affecté un sous-domaine dans lequel la distribution de la fraction volumique serait déterminée.

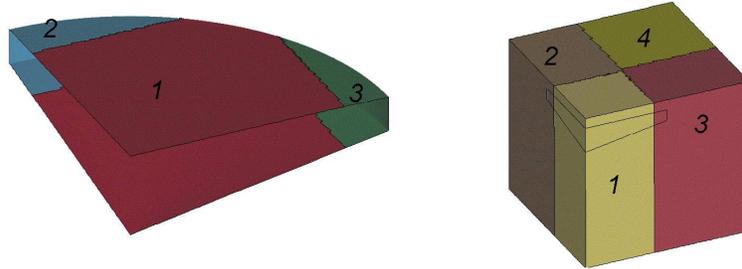


FIG. 6.1 – Cône à 10° : Décomposition du domaine de calcul par défaut

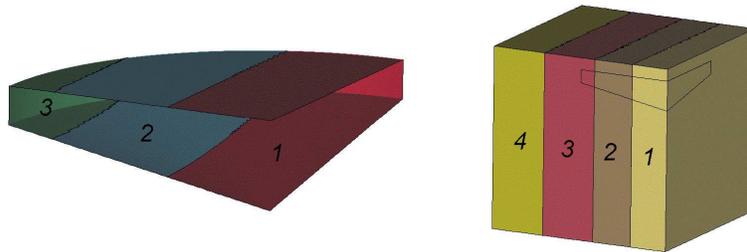


FIG. 6.2 – Cône à 10° : Décomposition du domaine en tranches verticales

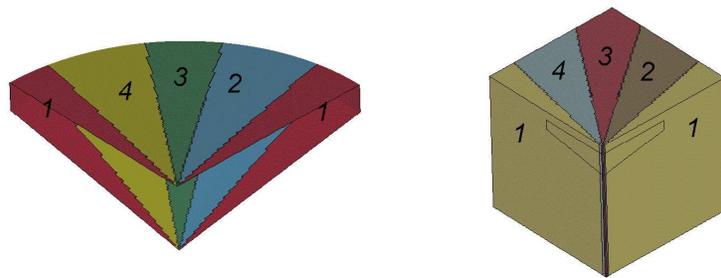


FIG. 6.3 – Cône à 10° : Décomposition radiale du domaine

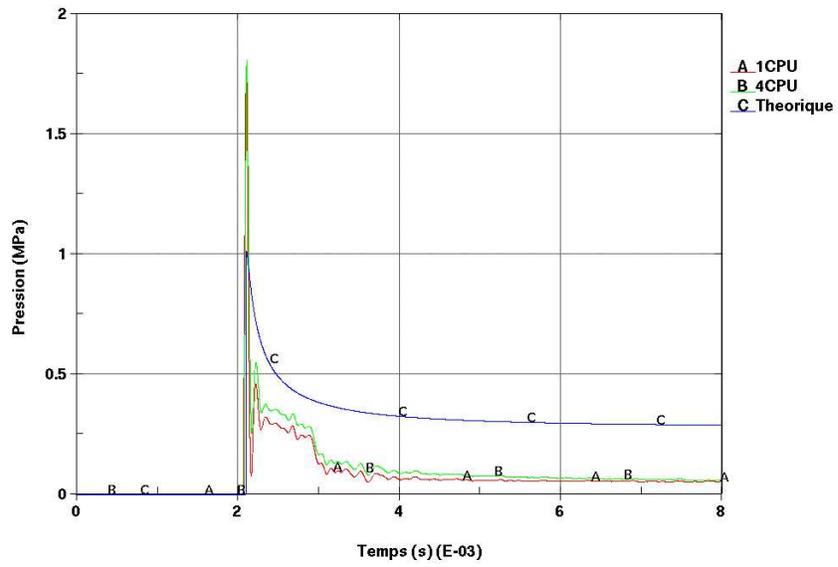


FIG. 6.4 – Cône à 10°: (A) Pression obtenue avec 1CPU (B) Pression obtenue avec 4CPU (C) Pression théorique

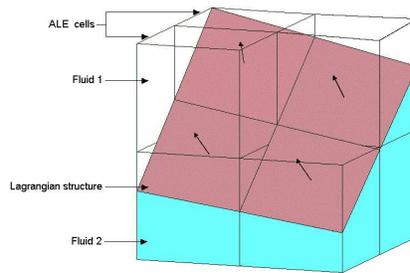


FIG. 6.5 – Schéma d'une structure Lagrangienne coupant un maillage ALE rectangulaire

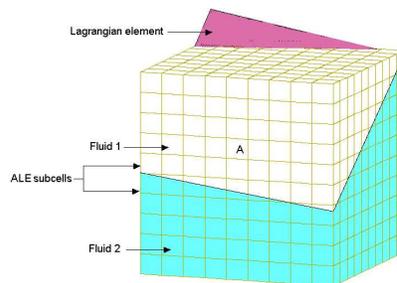


FIG. 6.6 – Division de la cellule "A" en sous-cellules

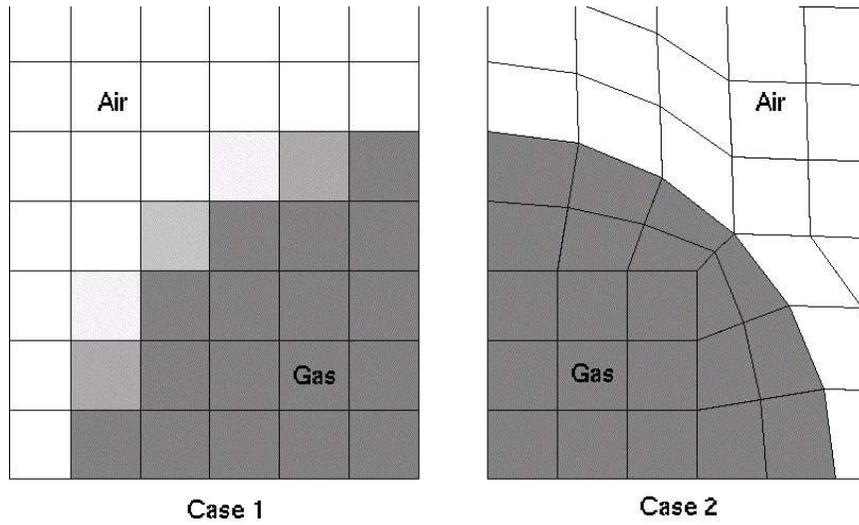


FIG. 6.7 – Méthode basée sur la moyenne des normales au nœud: Description du problème

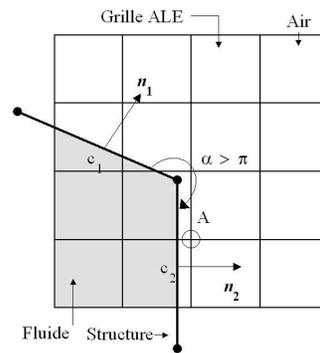


FIG. 6.8 – Condition 1 pour $\alpha > \pi$

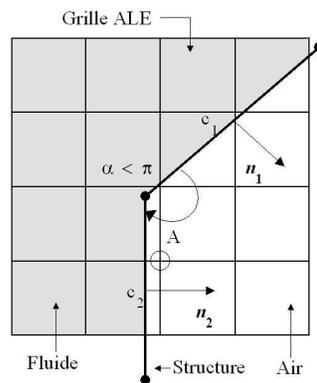


FIG. 6.9 – Condition 2 pour $\alpha < \pi$

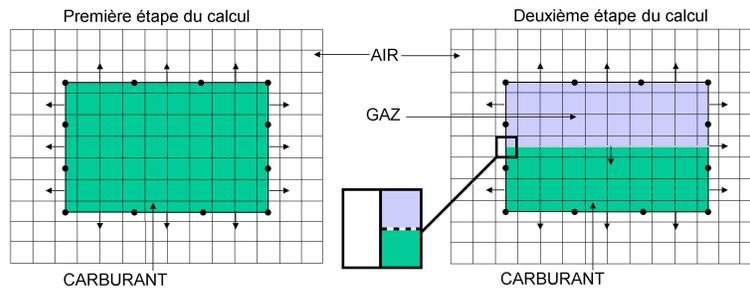


FIG. 6.10 – Remplissage d'un réservoir en deux étapes

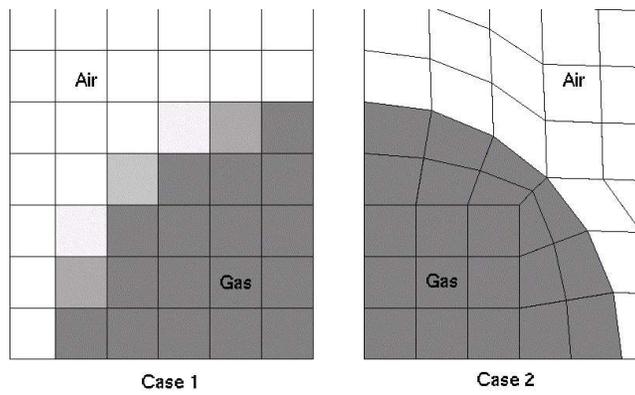


FIG. 6.11 – Répartition de la fraction volumique initiale

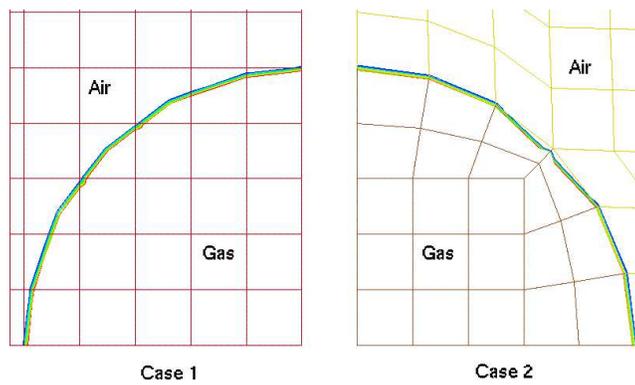


FIG. 6.12 – Iso-surface de la fraction volumique à 0.5 pour $t=0ms$

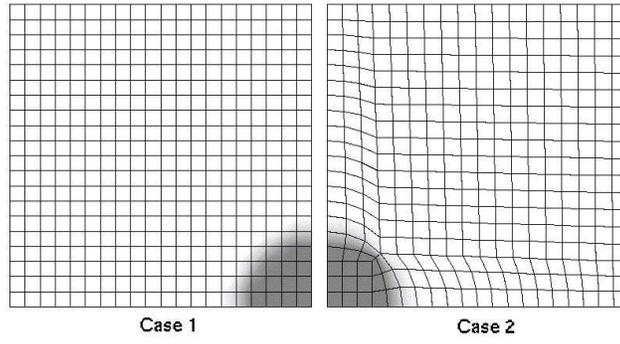


FIG. 6.13 – Propagation de l'onde à $t=0ms$

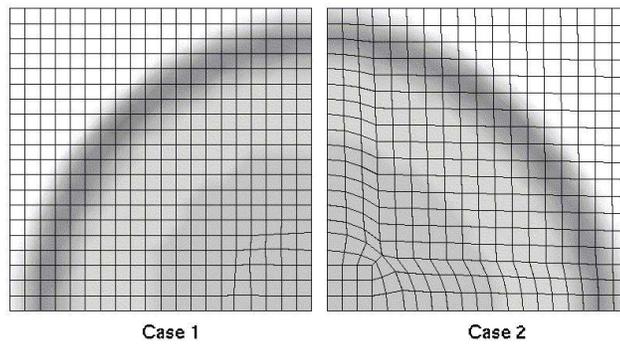


FIG. 6.14 – Propagation de l'onde à $t=0.03ms$

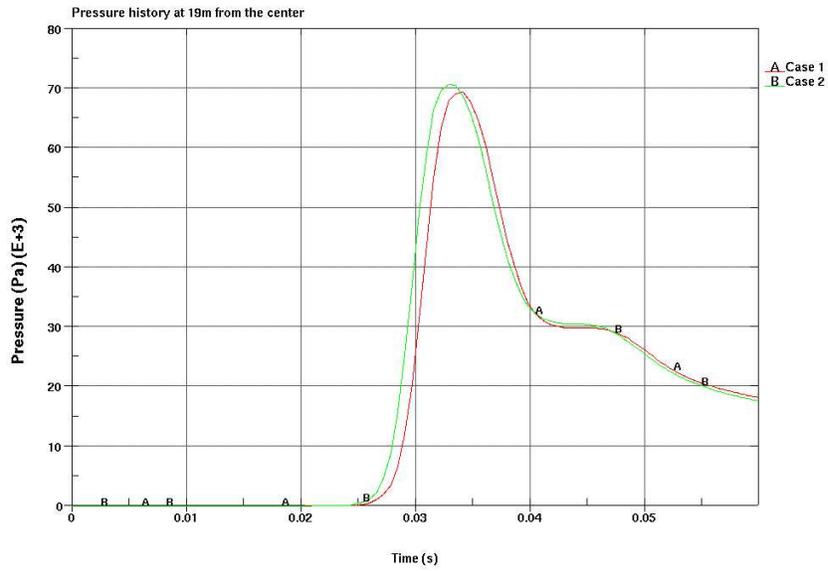


FIG. 6.15 – Profil de pression à 19m du centre



FIG. 6.16 – *Géométrie du réservoir industriel*

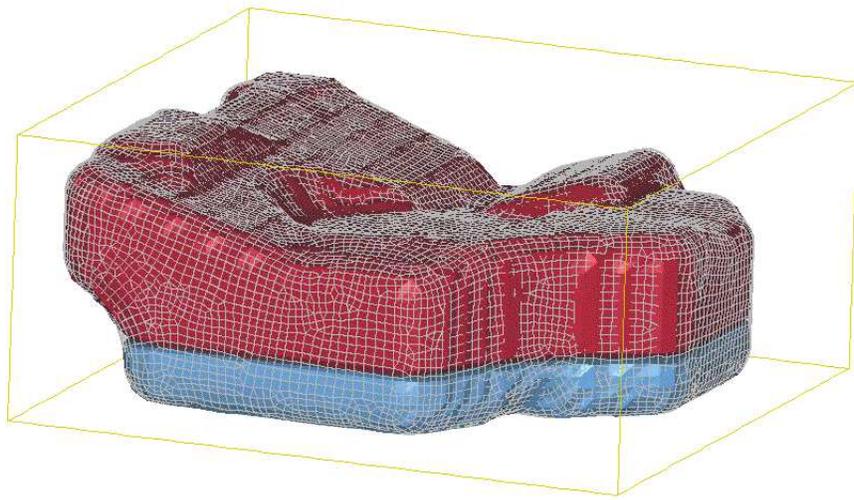


FIG. 6.17 – *Initialisation des fractions volumique dans le réservoir*

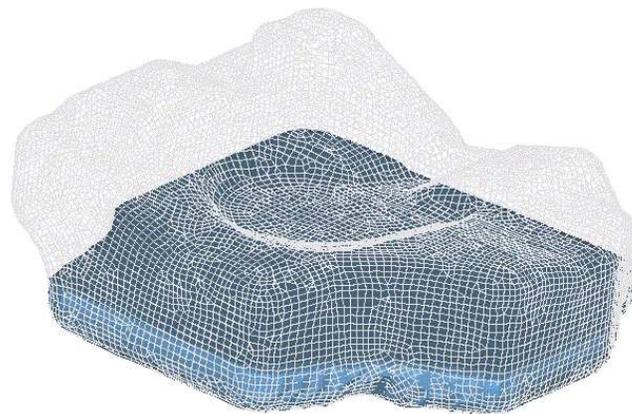


FIG. 6.18 – *Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=0ms$*

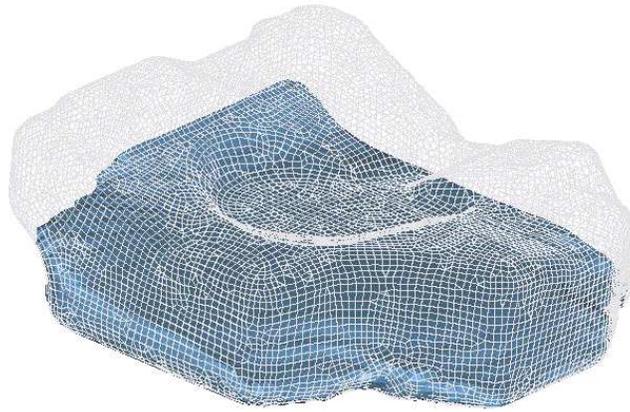


FIG. 6.19 – *Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=6\text{ms}$*



FIG. 6.20 – *Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=11\text{ms}$*



FIG. 6.21 – *Ballotement du carburant dans le réservoir à $t=17\text{ms}$*

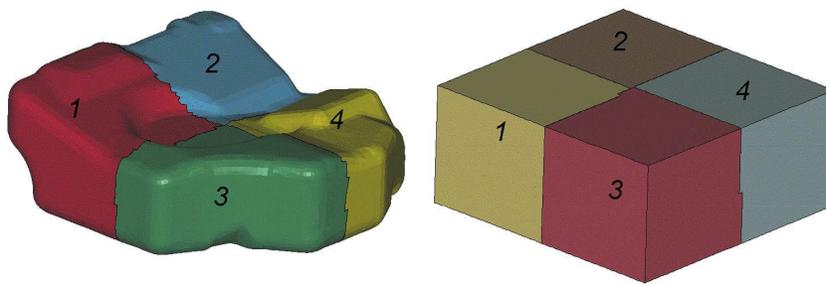


FIG. 6.22 – *Décomposition du domaine de calcul pour le sloshing*

Chapitre 7

Conclusion

Cette thèse est consacrée à la simulation numérique de l'impact entre une surface libre et une structure. Un exemple d'application de cette étude est le dimensionnement des efforts de tossage (slamming) exercés sur la carène d'un navire progressant dans une mer agitée. Une autre application est la modélisation du ballotement d'un carburant dans un réservoir (sloshing). Ces travaux de recherches visent à proposer une méthode numérique pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure tridimensionnel de l'impact hydrodynamique. En particulier, l'analyse des efforts d'interaction locaux est confrontée aux résultats analytiques issus d'une théorie asymptotique supposant un écoulement incompressible, irrotationnel et non-visqueux. Néanmoins, l'approche numérique peut être étendue à des cas d'impacts plus complexes incluant l'effet d'emprisonnement de l'air pour de petites incidences (cushioning), la déformation de la structure, la cavitation, etc... Dans le cadre de cette étude, une validation de la méthode sur l'impact hydrodynamique d'un dièdre décrit dans la revue bibliographique est le principal enjeu de nos recherches.

Dans le chapitre II présentant la revue bibliographique, nous avons présenté différentes études du problème de l'impact hydrodynamique mettant en évidence un état de l'art des développements théoriques et numériques réalisés sur le sujet. Ces approches permettent une modélisation précise de l'application envisagée mais elle ne sont pas extensibles à des objectifs industriels de plus en plus exigeants. Deux approches théoriques permettent de résoudre le problème de l'impact hydrodynamique dans le cadre d'hypothèses restrictives: la méthode des développements asymptotiques raccordés et la méthode des similitudes. Ces hypothèses ne permettent pas une extension de ces théories à des cas complexes et indus-

triels. Ces limites théoriques nous ont poussé à nous intéresser aux approches numériques: les méthodes de contact en éléments finis, la formulation en éléments frontières, le couplage de formulations (éléments finis - éléments frontières, éléments finis - particule SPH,...). Ces méthodes numériques toutes aussi précises que les approches théoriques comportent certains points non-maîtrisés: la compressibilité du fluide dans les premiers instants de l'impact pour la méthode des éléments frontières, la distorsion des mailles pour les méthodes de contact en éléments finis, le coût CPU important des modèles SPH tridimensionnels. Le couplage d'une formulation éléments finis pour la structure et d'une méthode volumes finis + VOF pour le fluide permet de modéliser complètement des problèmes industriels complexes jusqu'alors inaccessibles. Néanmoins, les codes explicites proposant cet avantage exigent encore des efforts de développements et de validations que nous envisageons dans les chapitres suivants.

Dans le chapitre III, une formulation Lagrangienne modélisant le mouvement de la structure est, premièrement, décrite. Des éléments quadrangles basés sur une approche Reissner-Mindlin (Eléments de type Belytschko-Lin-Tsay) composent la structure. La distorsion des mailles évoquées pour les méthodes de contact sont dues à l'emploi d'une formulation Lagrangienne pour le fluide. Une formulation Eulérienne basée sur des éléments hexaédriques doit être utilisée pour déterminer le mouvement du fluide. Le pas de calcul Eulérien se fait en deux temps: d'abord un calcul Lagrangien détermine les variables physiques du problème; ensuite ces champs inconnus sont projetés sur la position initiale par une méthode d'advection. La formulation Eulérienne a la capacité de prendre en charge plusieurs fluides dans un même maillage en situant la position des interfaces matérielles par la distribution de la fraction volumique des fluides dans le maillage Eulérien. La position de l'interface matérielle est déterminée par la méthode de Young. Pour coupler la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne, deux approches sont utilisées et comparées dans la suite: la méthode de pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Dans le chapitre IV, la comparaison des deux méthodes débute par des problèmes 1D. La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange permet de converger rapidement vers la solution pour ces problèmes unidimensionnels. Le couplage par pénalisation est tributaire du choix de la raideur et, vis à vis de l'approche directe des multiplicateurs de Lagrange

qui n'exige aucun choix de l'utilisateur, la méthode par pénalisation apporte plus d'inconvénients que d'avantages pour traiter de simples problèmes 1D. Une raideur trop faible implique des interpénétrations inacceptables et une raideur trop forte perturbe les efforts d'interaction par des oscillations. Néanmoins, dans ce cas, l'évolution moyenne de la pression appliquée à la structure est proche de la solution physique et l'introduction d'un amortissement numérique permet de dissiper l'énergie emmagasinée dans les ressorts de pénalisation.

Pour la raideur de pénalisation ajustée par le paramètre pf et pour le paramètre pr introduit dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le chapitre V établit des tables associant, à chaque incidence d'impact, une valeur de ces paramètres. Cette approche permet, pour une structure quelconque entrant dans l'eau verticalement, d'estimer la raideur associée à chaque partie de la structure ayant une incidence propre avec la surface libre. Néanmoins, le couplage par pénalisation et le couplage par les multiplicateurs de Lagrange, mènent à des erreurs similaires sur l'évaluation du pic de pression, voisines de 40% dans les problèmes 2D étudiés. La valeur du maximum de pression par ces méthodes est difficile à appréhender précisément. D'un autre côté, l'impulsion, l'intégrale du pic de pression, varie peu suivant le paramètre choisi ce qui montre que la quantité de mouvement transmise à la structure dépend peu de la paramétrisation du couplage. De ce fait, les déplacements et les contraintes de la structure évolue indifféremment de l'erreur commise sur le maximum de pression.

Le chapitre VI comporte deux études. Premièrement, comme les modèles 3D requiert des coûts de calcul importants, une version parallèle de la formulation Euler-Lagrange est mise en œuvre pour traiter, à titre d'application, l'impact hydrodynamique d'un cône. Une machine parallèle a été construite en utilisant 4 processeurs de 1.7GHz. Sur la version parallèle de LS-DYNA3D, on estime que les parties non-parallélisées sont approximativement inférieures à 20%. A cela s'ajoute le coût des communications qui, pour un modèle 3D, ne sont pas négligeables. L'accélération réel du code parallèle LS-DYNA sur le cluster oscille entre 2.5 et 3 suivant le modèle. Pour le modèle de l'impact du cône, l'accélération est voisine de 2.6 et la pression locale obtenue par le code parallèle est proche de la pression théorique et de la pression déterminée par la version séquentielle. Dans la deuxième étude, un algorithme est proposé pour calculer la distribution initiale des fractions volumiques dans des grilles ALE ou Eulériennes multi-matériaux pour des problèmes d'interaction fluide-structure.

Cette approche améliore la flexibilité et l'efficacité des formulations multi-matériaux en permettant de gérer des problèmes de couplage fluide-structure pour lesquels des structures de géométries complexes sont immergées dans un maillage ALE cartésien modélisant plusieurs fluides. Ce nouvel algorithme est implémenté dans LS-DYNA3D et il sera fort utile dans la modélisation de problèmes d'interaction fluide-structure impliquant le calcul précis de la fraction volumique de chaque cellule ALE coupée par une structure complexe. La première caractéristique de l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques est un calcul précis de la distribution de la fraction volumique autour de singularités telles que les coins de la structure. La deuxième caractéristique est sa capacité à construire un maillage ALE comportant plusieurs interfaces matérielles autour de structures complexes. Les applications traitées ont montré la possibilité de construire un modèle d'interaction fluide-structure industriel réaliste. Cependant, dans des problèmes comportant un grand nombre de cellules ALE, la méthode d'initialisation des fractions volumiques peut être coûteuse. Pour réduire ce coût, il faudrait une version de l'algorithme en parallélisme de données. Le domaine ALE serait divisé par le nombre de CPU employés et à chaque CPU serait affecté un sous-domaine dans lequel la distribution de la fraction volumique serait déterminée. A la suite de cette étude, plusieurs développements sont envisageables:

- Dans la formulation Eulerienne, une détermination semi-implicite de la pression permettrait d'améliorer le calcul des forces de couplage au voisinage de la structure. A chaque pas de temps, la pression serait évaluée à la convergence d'un critère d'équilibre qui reste néanmoins à déterminer. Dans cette même boucle, les forces d'interaction pourraient aussi être calculées plus précisément en choisissant un critère de pénétration adéquat.
- Une implémentation des bases de données pour les paramètres du couplage par pénalisation et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange permettrait d'adapter la valeur du paramètre en fonction de la géométrie locale et de la position de la surface libre.
- Une optimisation du calcul parallèle pourrait aussi être envisagée en réduisant les parties séquentielles du code. Une augmentation de l'efficacité du parallélisme pourrait aussi passer par un choix optimal dans les bibliothèques de passage des messages ce qui réduirait les coûts de communication.
- Ce point a déjà été signalé: une version parallèle de l'algorithme d'initialisation des fractions volumiques accélérerait le pré-traitement des modèles multi-matériaux 3D volumineux.

Bibliographie

- Amdahl, G. [1967]. Validity of single-processor approach to achieving large-scale computing capability. In *AFIPS Conference* (pp. 483–485). Reston VA.
- Amsden, A. and Hirt, C. [1973]. Yaqui: An arbitrary lagrangian-eulerian computer program for fluid flow at all speeds. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory. LA-5100.
- Amsden, A., Ruppel, H. and Hirt, C. [1981]. Sale: A simplified ale computer program for fluid flow and all speeds. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory.
- Anghileri, M. and Spizzica, A. [1995]. Experimental validation of finite element models for water impacts. In *Proceeding of the 2nd International Crash Users Seminar*. Cranfield, UK.
- Aquelet, N., Souli, M. and Gabrys, J. [2003]. Ale formulation for fuel slosh analysis. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(4), 423–440.
- Arai, M., Cheng, L. and Inoue, Y. [1994]. A computing method for the analysis of water impact of arbitrary shaped bodies. *J. Soc. Nav. Arch.*, 176, 233–240.
- Bagnold, R. [1939]. Interim report on wave pressure research. *J. Ind. Civil Eng*, 12.
- Beck, R., Cao, Y., Scorpio, S. and Schultz, W. [1994]. Nonlinear ship motion computations using the desingularized method. In *20th Symposium on Naval Hydrodynamics* (pp. 227–246).
- Belvin, W. K. and Park, K. C. [1990]. Structural tailoring and feedback control synthesis: an interdisciplinary approach. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 13(3), 424–429.
- Belytschko, T. and Mullen, R. Mesh partitions of explicit-implicit time integration. *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*.
- Belytschko, T. and Mullen, R. Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17, 259–275.

- Belytschko, T. and Mullen, R. Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12.
- Belytschko, T. and Neal, M. [1991]. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 547–572.
- Belytschko, T. and Tsay, C. [1981]. Explicit algorithms for nonlinear dynamics of shells. *ASME*, 209-231, 48.
- Benson, D. [1992]. Momentum advection on a staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, 100, 143–162.
- Benson, D. and Hallquist, J. [1990]. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 78, 141–163.
- Bereznitski, A. [2003]. *Local hydroelastic response of ship structures under impact loads from water*. PhD thesis, Delft University of Technology, Saint-Petersbourg, Russie.
- Borg, S. [1957]. Some contributions to the wedge-water entry problem. *Amer. Soc. Civil Eng. Mech. Div.*, 83. EM2/1214.
- Brooks, A. and Hughes, T. [1982]. Streamline upwind petrov-galerkin methods for advection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199–259.
- Brooks, J. and Anderson, L. [1994]. Dynamics of a space module impacting water. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 34(3), 509–515.
- Campana, E., Carcaterra, A. and Ciappi, E. [2000]. Parametric analysis of slamming forces: compressible and incompressible phases. *Journal of Ship and Ocean Technology*, 4(1), 21–27.
- Candy, E., Kirk, N. and Murrell, P. [1998]. Helicopter water impact analysis using ls dyna3d. In *IMECHE Seminar Publication*, Volume 9 (pp. 115–126).
- Candy, E., Kirk, N. and Murrell, P. [2000]. Airframe water impact analysis. *International Journal of Crashworthiness*, 5(1), 51–62.
- Carcaterra, A. and Ciappi, E. [2004]. Hydrodynamic shock of elastic structures impacting on the water: theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 271, 411–439.
- Carpenter, N., Taylor, R. and Katoma, M. [1991]. Lagrange constraints for transient surface contact. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 32.
- Casadei, F., Halleux, J., Sala, A. and Chille, F. [2001]. Transient fluid-structure interaction

- algorithms for large industrial applications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190, 3081–3110.
- Chertier, O. [1997]. *Contact et frottement entre solides déformables en grandes déformations*. PhD thesis, Université de la Méditerranée.
- Chuang, S. [1969]. Theoretical investigations on slamming of cone-shaped bodies. *J.S.R.*, 13.
- Clarke, C. and Shen, Y. The development of a rotorcraft water-impact analysis methodology. Internet Web Page. URL <http://www.mscsoftware.com/assets/202WaterImpactMethodology.pdf>.
- Cohen, M. and Jennings, P. [1983]. Silent boundary methods for transient analysis. *Computational Methods for Transient Analysis*, 187, 301–360.
- Cointe, R. [1989]. Two-dimensional water-solid impact. *ASME J. Offshore Mech. Arc. Eng.*, 111.
- Cointe, R. [1991]. Free-surface flows close to a surface piercing body. *Mathematical Approaches in Hydrodynamics, Soc. Ind. Appl. Maths* (pp. 318–334).
- Cointe, R., Geyer, P., King, B., Motin, B. and Tramoni, M. [1990]. Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in a perfect fluid. In *Proceedings 18th Symposium on Naval Hydrodynamics* (pp. 85–99). Ann Arbor, MI.
- Couty, N. [2002]. *Projet performances, innovation, sécurité et compétitivité des navires à passagers; sous-projet 1: Grands navires rapides*. Technical report, Principia Marine, Nantes, France.
- Cumberbatch, E. [1960]. the impact of water wedge on a wall. *JFM*, 7.
- Cummins, S. and Rudman, M. [1999]. An sph projection method. *J. Computational Physics*, 152, 587–607.
- Curnier, A., He, Q. and Klarbing, A. [1995]. Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. *Contact Mechanics* (pp. 141–158).
- Dambra, R., Hoogeland, M. and Vredeveldt, A. [2000]. Drop test analyses of flat panels using a finite element hydrocode. In *Proc. NAV'2000* (pp. 1–12).
- Derradji-Aouat, A. [2002]. Emerging trends in numerical predictive technologies in offshore and marine engineering. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 125(4), 293–296.

- Dobrovolskaya, Z. [1969]. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. *JFM*, 36.
- Dommermuth, D. and Yue, D. [1987]. Numerical simulation of nonlinear axisymmetric flows with a free surface. *JFM*, 178, 178–195.
- Donguy, B. [2002]. *Etude de l'interaction fluide structure lors de l'impact hydrodynamique*. PhD thesis, Université de Nantes.
- Emery, M. H., Landsberg, A., Boris, J., Felker, F., Souli, M. and Dyka, C. [1997]. The dynamic virtual cell embedding cell technique (dvce) for coupling hydrodynamic and structural mechanics codes. In *Structures Under Extreme Loading Conditions*. ASME. PVP-Vol 351.
- Erath, W., Nowotny, B. and Maetz, J. [1998]. Simultaneous coupling of the calculation of pressure waves and pipe oscillations. In *3R international*, Volume 37 (pp. 501–508). en allemand.
- Faltinsen, O. [1977]. Numerical solution of transient nonlinear free-surface motion outside or inside moving bodies. In Wehausen, J. and N.Salvesen (Eds.), *Proceedings 2nd Conf. on Num. Ship. Hydro* (pp. 347–357). U.C.Berkeley: University Extension Publications.
- Faltinsen, O. [2002]. Water entry of a wedge with finite deadrise angle. *Journal of Ship Research*, 46(1), 39–51.
- Farhat, C., Park, K. C. and Pelerin, Y. D. [1991]. An unconditionally stable staggered algorithm for transient finite element analysis of coupled thermoelastic problems. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg*, 85, 349–365.
- Felippa, C. A. and DeRuntz, J. A. [1984]. Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg*, 44, 297–337.
- Felippa, C. A. and Geers, T. L. [1988]. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Eng. Comput.*, 5, 123–133.
- Felippa, C. A. and Park, K. C. [1978]. Computational aspects of time integration procedures in structural dynamics: I implementation. *J. Appl. Mech.*, 45, 595–602.
- Felippa, C. A. and Park, K. C. [1980]. Staggered transient analysis procedures for coupled-field mechanical systems: formulation. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg*, 24, 61–111.
- F.J.Blom [1998]. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167, 369–391.

- Fontaine, E. [2000]. On the smoothed particle hydrodynamics to model extreme waves and their interaction with a structure. In *Rogue wave 2000, Acte du colloque 32* (pp. 283–286). Athanassoulinis IFREMER: M. Olagnon-G.
- Fontaine, E., Boudet, L., Leguen, J. and Magee, A. [1997]. 6ieme journées de l’hydrodynamique. In *Impact Hydrodynamique d’un corps allongé et plat*. Nantes.
- Fraenkel, E. [1991]. On the water entry of a wedge. In *The mathematic of Nonlinear Systems, SERC Meeting*. Bath.
- Gallet, C. [2001]. Validation de la méthode sph au sein du logiciel ls-dyna. Technical report, Dynalis, Toulouse.
- Garabedian, P. [1953]. Oblique water entry of wedge. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 6.
- Gatiganti, R., Varyani, K. and Gerigk, M. [1999]. Numerical prediction of slamming loads acting on catamaran section (pp. 434–439).
- Geers, T. L. [1971]. Residual potential and approximate methods for three-dimensional fluid-structure interaction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 1505–1510.
- Geers, T. L. [1980]. Doubly asymptotic approximations for transient motions of general structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 1500–1508.
- Geers, T. L. [1983]. Boundary element methods for transient response analysis. *Chapter 4 of Computational Methods for Transient Analysis* (pp. 221–244).
- Geers, T. L. and Felippa, C. A. [1971]. Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73, 1152–1159.
- Gingold, R. and Monaghan, J. [1977]. Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 181, 375–389.
- Glowinski, R. and Pironneau, O. [1992]. Finite element methods for navier-stokes equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24, 167–204.
- Greco, M. and Faltinsen, O. [2000]. Basic studies of water deck. In *23rd symposium on Naval Hydrodynamics*. Val de Reuil, FRANCE.
- Gustafson, J. [1988]. Reevaluating amdahl’s law. *CACM*, 31(5), 532–533.
- Hallquist, J. [1998]. *LS DYNA Theoretical Manual*. Livermore CA: Livermore Software Technology Corporation.
- Hughes, O. [1972]. Solution of the wedge entry problem by numerical conformal mapping. *JFM*, 56, 173–192.

- Hughes, T., Franca, L. and Hulbert, G. [1986]. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54, 223–234.
- Hughes, T. and Liu, W.-K. [1939]. Implicit-explicit finite element in transient analysis: I. stability theory, ii. implementation and numerical examples. *J. Appl. Mech.*, 45, 371–378.
- Hughes, T. J. R. [1987]. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Hughes, T. J. R., Pister, K. S. and Taylor, R. L. [1979]. Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17, 159–182.
- Hughes, T. J. R. and Stephenson, R. S. [1981]. Stability of implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. *Int. J. Engrg. Sci.*, 19, 295–302.
- Iafrati, A., Carcaterra, A., Ciappi, E. and Campana, E. [2000]. Hydroelastic analysis of a simple oscillator impacting the free surface. *Journal of Ship Research*, 44(4), 278–289.
- Johnson, C. and Saranem, J. [1986]. Diffusion methods for the compressible euler and navier-stokes equations. *Math. Comput.*, 47, 1–18.
- von Karman, T. [1929]. The impact on seaplane floats during landing. *NACA TN*, 321.
- Klarbring, A. [1986]. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58, 175–200.
- Lacerda, D. [2000]. Simulation d'impact à haute vitesse par la méthode sph de ls-dyna. Technical report, ENSICA, Toulouse.
- Lacome, J. [1998]. *Analyse de la méthode particulière SPH. Applications à la Détonique*. PhD thesis, INSA, Toulouse.
- Landsberg, A., Alexandra, M. and Boris, J. P. [1997]. The virtual cell embedding gridding method: A simple approach for complex geometries. In *13th AIAA CFD Conference*. AIAA Paper No. 97-1982.
- Landshoff, R. [1955]. A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory. Rept. LA-1930.
- Laursen, T. and Oancea, V. [1994]. Automation and assessment of augmented lagrangian method for frictional contact problems. *Journal of Applied Mechanics*, 61, 956–963.

- Laursen, T. and Parker, B. [2002]. An augmented lagrangian quasi-newton solver for constrained non linear finite element applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 3571–3590.
- Laursen, T. and Simo, J. [1993a]. Algorithmic symmetrization of coulomb frictional problems using augmented lagrangians. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108, 133–146.
- Laursen, T. and Simo, J. [1993b]. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 3451–3485.
- Leer, B. V. [1977]. Towards the ultimate conservative difference scheme. iv. a new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys.*, 23, 276–299.
- Lesoinne, M. and Farhat, C. [1998]. Improved staggered algorithms for the serial and parallel solution of three dimensional nonlinear transient aeroelastic problems.
- Longuet-Higgins, M. and Cokelet, E. [1976]. The deformation of steep surface waves on water: I. a numerical method of computation. *Proc. R. Soc. Lond*, 350, 1–26.
- Lucy, C., He, Y. and Wu, G. [2000]. Coupled analysis of nonlinear interaction between fluid and structure during impact. *Journal of Fluids and Structures*, 14, 127–146.
- Lucy, L. [1977]. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82, 1013–1024.
- Mackie, A. [1969]. The water entry problem. *Q.J. Mech. Appl. Maths*, 22, 1–17.
- Margolin, L. and Beason, C. [1988]. Remapping on the staggered mesh. In *Fifth NECDC*.
- Meynen, S. and Schäfer, M. [1999]. Numerical simulation of fluid-structure interaction for fluid damped oscillations. In Wunderlich, W. (Ed.), *Proceedings of the ECCM. München*.
- Monaghan, J. [1994]. Simulating free surface flows with sph. *J. Comput. Phys.*, 110(2), 399–406.
- Monaghan, J. and Gingold, R. [1983]. Shock simulation with the particle method sph. *J. Comp. Phys.*, 52, 374–389.
- Morand, H.-P. and Ohayon, R. [1995]. *Fluid Structure Interaction*. Paris: Wiley.
- Morton, S., Melville, R. and Visbal, M. [1997]. Accuracy and coupling issues of aeroelastic navier-stokes solutions on deforming meshes. In *AIAA 38th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Orlando. AIAA Paper 97-1085.

- Muzaferija, S., Peric, M., Sames, P. and Schellin, T. [1999]. A two-fluid navier-stokes solver to simulate water entry (pp. 638–651).
- Neumann, J. V. and Richtmyer, R. [1950]. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. *J. Appl. Phys.*, 21, 232–237.
- Nichols, B. and Hirt, C. [1981]. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(201).
- Oudin, J., Rigaut, J.-M., Gelin, J.-C. and Ravalard, Y. [1989]. Lois de contact et de frottement. modèles et méthodes numériques en grandes déformations plastiques, applications à la mise en forme des matériaux et au calcul des structures. In *Institut pour la promotion des Sciences de l'Ingénieur*.
- Park, K. C. and Belvin, W. K. [1984]. A partitioned solution procedure for control-structure interaction simulations. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14, 59–67.
- Park, K. C. and Felippa, C. A. [1983]. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Chapter 3 of Computational Methods for Transient Analysis* (pp. 157–219).
- Park, K. C. and Felippa, C. A. [1984]. Recent advances in partitioned analysis procedures. *Chapter 11 of Numerical Methods in Coupled Problems* (pp. 327–352).
- Park, K. C., Felippa, C. A. and DeRuntz, J. A. [1977]. Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis. *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems*, 26, 95–124.
- Pentecote, N., Kohlgrüber, D. and Kamoulakos, A. [2003]. Simulation of water impact problems using the smoothed particle hydrodynamics method. In *ICD2003 Proceedings (Tome 3)*.
- Pierson, J. [1950]. The penetration of fluid surface by a wedge. *Stevens Inst. Tech., Expt. Towing Tank Report*, 387.
- Portemont, G., Roland, O., Deletombe, E., Markiewicz, E. and Drazetic, P. [2002]. Methodology for comparison of the contact pressure between experiment and fe models for coupling fluid/structure problems. In *7th International Conference on Structures under Shock and Impact*. Montréal, CANADA.
- Reddy, D., Scanlon, T. and Cheng, K. [2002]. Prediction of slam loads on wedge section using computational fluid dynamics (cfd) techniques. In *24th symposium on naval hydrodynamics*. Fukuoka, JAPAN.
- Ribet, H. [1997]. Modélisation numérique de l'impact sur l'eau d'une structure souple

- pa rune méthode éléments finis explicite. In *6ieme Journées de l'Hydrodynamique*. Nantes, FRANCE.
- Richert, G. [1968]. Experimental investigation of shock pressures against breakwaters. In *Proc. 11th Conf. Coastal Engng. ASCE* (pp. 954–973).
- Rompoteaux, A. and VILA, J. [1999]. Calcul du tossage avec smart fluids, un code de calcul particulaire compressible. In *7ieme Journée de l'Hydrodynamique*. Marseille.
- S. Piperno, B. L. e. M. L. [1993]. Analysis and compensation of numerical damping in a one-dimensional aeroelastic problem. Technical report, SOPHIA, SOPHIA ANTIPO-LIS.
- Schäfer, M. and Teschauer, I. [2001]. Numerical simulation of coupled fluid-solid problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190, 3645–3667.
- Schellin, P. S. T., Muzafferija, S. and Peric, M. [1999]. Application of a two fluid finite volume method to ship slamming. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE)*, 121(1).
- Scolan, Y. and Korobkin, A. [2000]. Design of three-dimensional bodies subject to water impact. In *Proc. 15th Int. Workshop on Water-waves and Floating Bodies* (pp. 162–165).
- Scolan, Y. and Korobkin, A. [2001]. The energy distribution from impact of a three-dimensional body into a liquid free surface. In *Proc. 16th Int. Workshop on Water-waves and Floating Bodies* (pp. 141–144).
- Scorpio, S. [1997]. *Fully Nonlinear Ship-Wave Computations Using a Multipole Accelerated Desingularized Method*. PhD thesis, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, University of Michigan.
- Seddon, C. and Moatamedi, M. [2003]. Dynamic failure of aircraft structures upon water. In GRRT (Ed.), *International Crashworthiness and Design Symposium*, Volume 3 (pp. 1215–1222). Lille, FRANCE.
- Shakib, F. [1988]. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Stanford University.
- Shao, S. and Lo, E. [2003]. Incompressible sph method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, 26(7), 787–800.
- Souli, M. and Olovsson, L. [2003]. Fluid-structure interaction in ls-dyna: Industrial applications. In *4th European LS-DYNA Conference* (pp. 35–42). Ulm, GERMANY.

- Souli, M. and Zolesio, J. [2001]. Arbitrary lagrangian-eulerian and free surface methods in fluids mechanics. *Computational Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 191, 451–466.
- Taltec, P. L. and Mouro, J. [2001]. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190, 3091–3067.
- Taylor, L. and Flanagan, D. [1987]. Pronto 2d: A two-dimensional transient solid dynamics program. Technical report, Sandia National Laboratories. SAND86-0594.
- Varyani, K., Gatiganti, R. and Gerigk, M. [2000]. Motions and slamming impact on catamaran. *Ocean Engineering*, 27, 729–747.
- Vinje, T. and Brevig, P. [1981]. Nonlinear ship motions. In *Proceedings 3rd International Symp. Num. Ship Hydro*. Paris, FRANCE.
- Volgers, P. [1997]. *Contact in Finite Elements*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- Wagner, H. [1932]. über stoss- und gleitvorgänge an der oberfläche von flüssigkeiten. *ZAMM*, 12.
- Walhorn, E., Kölke, A., Hübner, B. and Dinkler, D. [2003]. Fluid-structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. In *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003, Proceedings Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* (pp. 1560–1563). Oxford: K. J. Bathe (Hrsg.).
- Watanabe, I. [1986a]. Analytical expression of hydrodynamic impact pressure by matched asymptotic expansion technique. *T. West-Japan Soc. Nav. Arch.*, 71.
- Watanabe, I. [1986b]. Theoretical investigation of wave impact loads on ships. Volume 16. Berkeley.
- Watanabe, Y. [1966]. On the properties of hydrodynamic impact pressure by matched asymptotic expansion technique. *T. West-Japan Soc. Nav. Arch.*, 32.
- Webster, W. [1975]. The flow about arbitrary, three-dimensional smooth bodies. *Journal of Ship Research*, 19, 206–218.
- Wu, M., Tulin, M. and Fontaine, E. [2000]. On the simulation of amplified bow waves induced by motion in head seas. *Journal of Ship Research*, 44(4), 290–299.
- Yim, B. and Taylor, D. [1985]. Numerical solution for two-dimensional wedge slamming with a non-linear free-surface condition. Technical report, Naval Ship Research and Development Center, Bethesda.
- Young, Y. L. and Kinnas, S. A. [2003]. A bem technique for the modeling of supercavitating

- and surface-piercing propellers flows. In *24th Symposium on Naval Hydrodynamics*. Fukuoka, JAPAN.
- Youngs, D. [1982]. Time dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics* (pp. 273–285).
- Zhao, R. and Faltinsen, O. [1992]. Slamming loads on high-speed vessels. In *19th ONR Conference*. Korea.
- Zhao, R. and Faltinsen, O. [1993]. Water entry of two-dimensional bodies. *JFM*, 246.
- Zhao, R., Faltinsen, O. and Aarnes, J. [1996]. Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation. *21th Symposium on Naval Hydrodynamics* 408-423.
- Zhong, Z.-H. [1993]. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*. Oxford: Oxford Science Publications.