

# THÈSE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

## Docteur en Mécanique

*Laboratoires d'accueil :*

*Institut d'Électronique de Microélectronique et de Nanotechnologie, Département I.S.E.N.*

*Institut Français du Pétrole, Division Géophysique*

par

**Madjid BERRAKI**

## ÉTUDE THÉORIQUE ET MODÉLISATION D'UNE SOURCE PIÉZOÉLECTRIQUE ENTERRÉE UNIDIRECTIONNELLE POUR APPLICATIONS SISMIQUES

Soutenue le 24 Novembre 2004 devant la commission d'examen composée de

*Président*

M. Géry de SAXCÉ

*Rapporteurs*

MM. Marc DESCHAMPS

Raúl MADARIAGA

*Examineurs*

Mme Axelle BARONI

MM. Jean - Claude DEBUS

Bertrand DUBUS

Adrianus T. de HOOP

Patrick MEYNIER

*à ma mère, à mon frère,*

*à ma famille et à tous mes amis,*

*à tous ceux qui m'ont aidé à devenir ce que je suis.*

## Avant - Propos

Cette thèse a été réalisée dans la division Géophysique l'I.F.P. (Institut Français du Pétrole) et dans le laboratoire d'acoustique du département I.S.E.N. (Institut Supérieur d'Électronique et de Numérique) de l'I.E.M.N. (Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie).

Je tiens ainsi à remercier Axelle Baroni, responsable scientifique de cette thèse à l'I.F.P., pour la confiance qu'elle m'a témoignée, ses suggestions dans l'élaboration de ce travail, et son soutien financier.

Je voudrais aussi remercier tout particulièrement M. Bertrand Dubus qui a suivi de près, de très près même, l'intégralité de ce travail. Cette thèse n'aurait vraisemblablement pas abouti sans ses multiples suggestions scientifiques, sa persévérance...et son crayon rouge. Je lui exprime mon sincère attachement.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le professeur G. De Saxcé qui a accepté la présidence de ce jury.

Je remercie Messieurs M. Deschamps, Directeur de Recherches au C.N.R.S., et R. Madariaga, Professeur à l'École Normale Supérieure, qui ont gentiment accepté d'être rapporteur de ce travail.

Je remercie Monsieur A. T. De Hoop, Professeur à l'Université de Delft, de sa participation au jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur J.-C. Debus de m'avoir accueilli au sein du laboratoire d'acoustique du département I.S.E.N. de l'I.E.M.N.

Je suis très honoré de leur participation au jury.

Mes remerciements vont également à

- Monsieur Patrick Meynier de l'I.F.P. qui a suivi ce projet,
- Monsieur Michel Bouchon, chercheur au L.G.I.T., qui m'a offert son aide sur une partie de ce travail,
- Tous les membres du laboratoire d'acoustique du département I.S.E.N. de l'I.E.M.N ainsi que les thésards et stagiaires de D.E.A. avec qui j'ai partagé ces années.

Mes pensées vont vers les miens, pour leur affection et leurs encouragements.

*A tous, merci.*

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>VI</b>
<b>Notations</b>	<b>VII</b>
<b>Table des figures</b>	<b>XX</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I</b>	
<b>Principe de sources piézoélectriques directionnelles enfouies pour des applications sismiques</b>	
I.1	Rayonnement de sources ponctuelles en milieu infini élastique homogène isotrope 10
I.1.1	Formulation générale en milieu infini élastique homogène isotrope 10
I.1.2	La sphère pulsante 12
I.1.3	La force ponctuelle 13
I.1.4	Combinaison de forces 15
I.1.4.1	Couple de forces sans moment 16
I.1.4.2	Couple de forces avec moment 18
I.2	Conception d'une source directionnelle pour la sismique 21
I.2.1	Source directionnelle idéale 21
I.2.1.1	Combinaison de deux forces 21
I.2.1.2	Combinaison d'une force et d'un couple de forces 26
I.2.2	Source directionnelle physique 27
I.2.2.1	Les sources piézoélectriques 27
I.2.2.2	Transducteurs directionnels en acoustique sous-marine 29
I.2.2.3	Principe de sources piézoélectriques directionnelles pour application sismique 30
I.3	Problèmes associés à la conception d'un transducteur sismique directionnel 32
I.3.1	Rayonnement de sources directionnelles idéales en milieu réel 32
I.3.1.1	Évaluation du champ proche de la source 32
I.3.1.2	Interaction de la source directionnelle idéale avec la surface et la zone altérée 33
I.3.2	Interaction de la source piézoélectrique avec son environnement géophysique 36

## Chapitre II

### Rayonnement de sources directionnelles idéales en milieu réel

II.1	Calcul de fonctions de Green en demi-espace par la méthode de Cagniard - De Hoop	39
II.1.1	Généralités	39
II.1.1.1	Historique de la méthode de Cagniard - De Hoop	39
II.1.1.2	Principe de la méthode	39
II.1.2	Fonction de Green associée à une force ponctuelle agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope [Johnson, 1974]	40
II.1.2.1	Position du problème	40
II.1.2.2	Solution dans le domaine transformé	42
II.1.2.3	Solution dans l'espace physique	43
II.1.2.3.1	Changement de variable	43
II.1.2.3.2	Contour de Cagniard - De Hoop	44
II.1.3	Fonction de Green associée à un couple de forces ponctuelles agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope	46
II.1.3.1	Détermination de la solution à partir de la fonction de Green associée à la force	46
II.1.3.2	Calcul des dérivées spatiales de la fonction de Green associée à la force	47
II.2	Calcul de fonctions de Green en milieu stratifié : couplage de la méthode de la réflectivité [Müller, 1985] et de la méthode DWN (Discrete Wave Number [Bouchon et Aki, 1977 - Bouchon, 1981])	48
II.2.1	Position du problème	48
II.2.2	Détermination d'une forme intégrale en régime harmonique de la fonction de Green associée à la force par la méthode de la réflectivité	49
II.2.2.1	Historique de la méthode de la réflectivité	49
II.2.2.2	Équations et conditions aux limites	49
II.2.2.3	Calcul de la solution	51
II.2.2.3.1	Potentiels de déplacement en milieu infini	51
II.2.2.3.2	Détermination du champ d'ondes complet	52
II.2.3	Calcul de la fonction de Green associée à la force en régime transitoire par méthode DWN	53
II.2.3.1	Historique de la méthode DWN	53
II.2.3.2	Principe	54
II.2.3.3	Solution en régime harmonique pour le réseau périodique de forces	54

II.2.3.3.1	Calcul du champ rayonné par une distribution annulaire de forces	55
II.2.3.3.2	Calcul du champ rayonné par un réseau périodique de distributions annulaires de forces	56
II.2.3.4	Solutions en régime transitoire pour le réseau périodique de forces Déduction de la fonction de Green associée à la force enfouie dans un demi-espace recouvert d'une couche	58
II.2.4	Calcul de la fonction de Green associée au couple de forces	59
II.3	Rayonnement de la source directionnelle en configuration réelle	60
II.3.1	La réponse du milieu à une force ou un couple de forces ayant une dépendance temporelle arbitraire	60
II.3.2	Modélisation de la source directionnelle	61
II.3.3	Sismogrammes de la source directionnelle	62
II.3.3.1	Validation des méthodes	62
II.3.3.2	La source directionnelle en demi-espace	66
II.3.3.3	La prise en compte de la zone altérée	70
II.4	Conclusion	76

### Chapitre III

#### Modélisation de sources piézoélectriques enterrées

III.1	Formulation par éléments finis du rayonnement d'un transducteur en milieu semi-infini	78
III.1.1	Présentation du problème	78
III.1.2	Équations du problème et conditions aux limites	79
III.1.2.1	Équations du problème	79
III.1.2.2	Conditions aux limites	80
III.1.3	Formulation variationnelle	80
III.1.4	Discretisation : la méthode des éléments finis	81
III.1.5	Description de l'influence du milieu extérieur par la matrice d'impédance	83
III.2	Calcul de la matrice d'impédance sur la surface ( $T$ )	85
III.2.1	Matrice d'impédance du demi-espace élastique homogène isotrope	
	Méthode itérative	85
III.2.1.1	Généralités	85
III.2.1.2	Position du problème	86
III.2.1.3	Équation et conditions aux limites	86
III.2.1.4	Construction de la solution	87

III.2.1.4.1	Construction de $\tilde{\Phi}_0$ et $\tilde{\zeta}_0$	88
III.2.1.4.2	Construction de $\tilde{\Phi}_{2m+1}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+1}$ à partir de potentiels $\tilde{\Phi}_{2m}$ et $\tilde{\zeta}_{2m}$ connus	90
III.2.1.4.3	Construction de $\tilde{\Phi}_{2m+2}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+2}$ à partir de potentiels $\tilde{\Phi}_{2m+1}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+1}$ connus	91
III.2.1.5	Remarque sur la convergence de la méthode	93
III.2.1.6	Formulation discrète de la méthode itérative	94
III.2.1.6.1	Relation entre contraintes et déplacements sur la surface ( $\Gamma$ )	94
III.2.1.6.2	Matrice d'impédance du demi-espace sur la surface ( $\Gamma$ )	96
III.2.2	Matrice d'impédance du demi-espace élastique homogène isotrope recouvert d'une couche - code éléments de frontière MISSAXI	97
III.2.2.1	Présentation du code MISSAXI	97
III.2.2.1.1	Sous-structuration de l'interaction	98
III.2.2.1.2	Formulation des problèmes élastodynamiques locaux par équations intégrales	100
III.2.2.1.3	Discretisation : la méthode des éléments de frontière	101
III.2.2.2	Expression de la matrice d'impédance dans le formalisme éléments finis	103
III.2.2.3	Remarque sur l'implémentation dans le code ATILA de la matrice d'impédance sur les éléments de frontière	105
III.3	Modélisation du rayonnement de transducteurs piézoélectriques enterrés	105
III.3.1	En demi-espace	105
III.3.2	En demi-espace recouvert d'une couche	107
III.4	Validation des développements et modélisation	108
III.4.1	Validation	108
III.4.1.1	Cavité sphérique soumise à une pression uniforme	108
III.4.1.2	Rayonnement de la force ponctuelle en milieu infini	111
III.4.2	Modélisation de transducteurs piézoélectriques	113
III.4.2.1	Le transducteur tonpilz	113
III.4.2.2	Le transducteur Janus directionnel	115
III.4.2.2.1	Modes de résonance du transducteur à vide	116
III.4.2.2.2	Diagrammes de directivité	117
III.4.2.2.3	Sismogrammes	121

<b>Conclusion</b>	124
<b>Références bibliographiques</b>	127
<b>Annexe A</b>	133
<b>Annexe B</b>	145
<b>Annexe C</b>	168
<b>Annexe D</b>	172
<b>Annexe E</b>	177
<b>Annexe F</b>	178
<b>Annexe G</b>	183



## Résumé

Un problème commun de l'acquisition en sismique 4D et de l'imagerie des zones de piémont, est celui de la reproductibilité du signal source. En effet, d'une part, le principe du monitoring est de détecter des variations infimes au niveau du réservoir via des comparaisons de données sismiques ; d'autre part, l'imagerie des zones au relief chaotique requiert un signal peu perturbé.

Aujourd'hui, les sources sismiques classiques, posées en surface, n'assurent pas cette reproductibilité. En premier lieu, il est impossible d'assurer à chaque acquisition un repositionnement de la source (camion vibreur) au même endroit. De plus, au voisinage de la surface du sol, il existe une zone d'une dizaine de mètres d'épaisseur, appelée la zone altérée (Weathered Zone en anglais notée WZ), constituée d'un milieu dont les propriétés mécaniques varient avec les conditions climatiques. Ainsi, un signal émis par la source traversant cette zone peut être modifié par des variations climatiques ; il n'est donc pas reproductible. L'évolution des enregistrements effectués au niveau des récepteurs n'est pas attribuable uniquement aux variations dans le réservoir.

La solution proposée dans cette thèse est la conception une source enterrée unidirectionnelle. La première partie expose un principe de source unidirectionnelle. Il s'agit de la combinaison, en milieu infini et en champ lointain, de forces ponctuelles dont les amplitudes complexes sont ajustées. La seconde partie décrit le rayonnement de la source unidirectionnelle idéale en milieu réel. Le modèle développé repose sur la détermination de la fonction de Green du milieu semi-infini, soit par méthode de Cagniard De Hoop (demi-espace), soit par méthode Réflexivité/DWN (milieu semi-infini stratifié). Un transducteur piézoélectrique unidirectionnel enterré, est modélisé dans la troisième partie. Le code éléments finis ATILA est utilisé pour modéliser la source piézoélectrique. Le milieu extérieur est représenté par sa matrice d'impédance, calculée soit par méthode itérative (demi-espace), soit par le code éléments de frontière MISSAXI (milieu semi-infini stratifié).

## Notations

- $A_d^{P,F_\delta}$  : amplitude des ondes P descendantes associées à la force verticale en demi-espace recouvert d'une couche,
- $A_d^{SV,F_\delta}$  : amplitude des ondes SV descendantes associées à la force verticale en demi-espace recouvert d'une couche,
- $A_{0d}^{P,F_\delta}$  : amplitude des ondes P descendantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $A_{0d}^{SV,F_\delta}$  : amplitude des ondes SV descendantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $A_{0u}^{P,F_\delta}$  : amplitude des ondes P montantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $A_{0u}^{SV,F_\delta}$  : amplitude des ondes SV montantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $A_d^{P,(F_\delta,-F_\delta)}$  : amplitude des ondes P descendantes associées au couple de forces verticales en demi-espace recouvert d'une couche,
- $A_d^{SV,(F_\delta,-F_\delta)}$  : amplitude des ondes SV descendantes associées au couple de forces verticales en demi-espace recouvert d'une couche,
- $\{A_d^{F_\delta}\}$  : vecteur d'amplitude des ondes descendantes associées à la force verticale en demi-espace recouvert d'une couche,
- $\{A_{0d}^{F_\delta}\}$  : vecteur d'amplitude des ondes descendantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $\{A_{0u}^{F_\delta}\}$  : vecteur d'amplitude des ondes montantes associées à la force verticale en milieu infini,
- $\{A_d^{(F_\delta,F_\delta)}\}$  : vecteur d'amplitude des ondes descendantes associées au couple de forces verticales en demi-espace recouvert d'une couche,
- $\{\tilde{A}_r\}$  : composante de  $\tilde{T}_r$  dans une base de polynômes de Legendre et de ses dérivées,
- $\overline{\overline{B}}_i^{F_\delta}$  : contribution dans le domaine des lenteurs du tenseur de Green associé à une force quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,

---

$\overline{\overline{\mathbf{B}}}_i^{(F_\delta, F_\delta)}$	:	contribution dans le domaine des lenteurs du tenseur de Green associé à un couple de forces quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$[B^e]$	:	matrice des dérivées des fonctions d'interpolation du déplacement sur l'élément $e$ ,
$[B_\psi^e]$	:	matrice des dérivées des fonctions d'interpolation du potentiel électrique sur l'élément $e$ ,
$\overline{\mathbf{c}}^E$	:	tenseur de rigidité à champ électrique constant,
$[c^E]$	:	forme condensée du tenseur $\overline{\mathbf{c}}^E$ ,
$\tilde{c}_\alpha$	:	modulation d'amplitude et de phase à appliquer à $\tilde{f}_{F_1}$ pour annuler l'émission en ondes P de la combinaison de deux forces dans la direction $\theta_\alpha$ ,
$\tilde{c}_\beta$	:	modulation d'amplitude et de phase à appliquer à $\tilde{f}_{F_1}$ pour annuler l'émission en ondes S de la combinaison de deux forces dans la direction $\theta_\beta$ ,
$\tilde{c}_\alpha^{eq}$	:	modulation d'amplitude et de phase à appliquer à $\tilde{f}_{F_1}$ pour annuler l'émission en ondes P de la combinaison d'une force et d'un couple de forces dans la direction $\theta_\alpha$ ,
$\tilde{c}_\beta^{eq}$	:	modulation d'amplitude et de phase à appliquer à $\tilde{f}_{F_1}$ pour annuler l'émission en ondes S de la combinaison d'une force et d'un couple de forces dans la direction $\theta_\beta$ ,
$d$	:	distance séparant les points d'application de deux sources,
$\tilde{\mathbf{D}}$	:	vecteur excitation électrique,
$\tilde{\mathbf{D}}^e$	:	vecteur excitation électrique sur l'élément $e$ ,
$det$	:	déterminant d'une matrice,
$div$	:	opérateur divergence,
$\overline{\mathbf{e}}$	:	tenseur piézoélectrique,
$[e]$	:	forme condensée du tenseur $\overline{\mathbf{e}}$ ,
$E$	:	module d'Young du milieu infini ou du demi-espace,
$\tilde{\mathbf{E}}$	:	vecteur champ électrique,
$\tilde{\mathbf{E}}^e$	:	vecteur champ électrique sur l'élément $e$ ,
$[E_{wz}]$	:	matrice de phase de la couche,
$exp$	:	fonction exponentielle,
$f$	:	fonction source localisant spatialement et temporellement la force $\mathbf{F}$ ,
$f_{F_1}, f_{F_2}$	:	fonction source localisant spatialement et temporellement les forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ ,

---

$\tilde{f}$	:	spectre de la force appliquée $F$ ,
$f$	:	vecteur dont les composantes sont l'intensité de la force $F_\delta$ dans les directions $x, y$ et $z$ ,
$\tilde{f}_{F_1}, \tilde{f}_{F_2}$	:	spectre des forces $F_1$ et $F_2$ ,
$f_0$	:	fréquence centrale du signal Ricker,
$f_{RR}$	:	valeur imposée de la contrainte $\tilde{\sigma}_{RR}$ ,
$f_{R\theta}$	:	valeur imposée de la contrainte $\tilde{\sigma}_{R\theta}$ ,
$\tilde{f}_0$	:	densité surfacique de force imposé,
$F, F_1, F_2$	:	force de direction $e_z$ dont la dépendance temporelle est quelconque,
$F_\delta$	:	force impulsionnelle de direction $e_z$ ,
$F_H$	:	force de direction $e_z$ dont la dépendance temporelle est la fonction d'Heaviside,
$\{\tilde{F}_0^e\}$	:	vecteur des forces nodales appliquées sur l'élément $e$ ,
$\{\tilde{F}_r^e\}$	:	vecteur des forces nodales représentant l'effet du milieu extérieur sur l'élément $e$ ,
<b>grad</b>	:	opérateur gradient,
$\tilde{g}_i^{F_\delta}$	:	terme de propagation verticale dans l'expression de $\overline{\hat{N}}_i^{F_\delta}$ , homogène à un temps,
$G^{F_\delta}$	:	fonction de Green dans le domaine physique associée à une force verticale agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$G_i^{F_\delta}$	:	contribution d'une onde donnée à la fonction de Green $G^{F_\delta}$ ,
$G^{F_H}$	:	réponse du demi-espace à l'application d'une force verticale dont la dépendance temporelle est donné par la fonction d'Heaviside,
$G_i^{F_H}$	:	contribution d'une onde donnée à la réponse du demi-espace à l'application d'une force verticale dont la dépendance temporelle est donné par la fonction d'Heaviside,
$\hat{G}^{F_\delta}$	:	fonction de Green dans le domaine transformé, associé à une force verticale agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\hat{G}_i^{F_\delta}$	:	fonction de Green dans le domaine (espace-fréquence), associée à une force verticale agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$G^{(F_\delta, -F_\delta)}$	:	fonction de Green dans le domaine physique associée à un couple de forces verticales agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$G_i^{(F_\delta, -F_\delta)}$	:	contribution d'une onde donnée à la fonction de Green $G^{(F_\delta, -F_\delta)}$ ,

---

---

$\mathbf{G}^{(F_H, -F_H)}$	:	réponse du demi-espace à l'application d'un couple de forces verticales dont la dépendance temporelle est donné par la fonction d'Heaviside,
$\mathbf{G}_i^{(F_H, -F_H)}$	:	contribution d'une onde donnée à la réponse du demi-espace à l'application d'un couple de forces verticales dont la dépendance temporelle est donné par la fonction d'Heaviside,
$\hat{\mathbf{G}}^{(F_\delta, -F_\delta)}$	:	fonction de Green dans le domaine transformé, associé à un couple de forces verticales agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{G}^{WZ,a}$	:	fonction de Green, en régime transitoire, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{G}^{WZ, F_\delta}$	:	fonction de Green, en régime transitoire, associée à l'application d'une force verticale à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{G}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}$	:	fonction de Green, en régime transitoire, associée à l'application d'un couple de forces verticale à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_r^{WZ,a}$	:	composante horizontale de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_\varphi^{WZ,a}$	:	composante polaire de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_z^{WZ,a}$	:	composante verticale de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_r^{WZ,ac}$	:	composante horizontale de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de couples de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_\varphi^{WZ,ac}$	:	composante polaire de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de couples de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\mathbf{G}}_z^{WZ,ac}$	:	composante verticale de la fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'un réseau périodique de distributions annulaires de couples de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,

---

---

$\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}$	:	fonction de Green, en régime harmonique, associée à l'application d'une force verticale à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$[G^{M'}]^e$	:	matrice élémentaire dont le terme général est égal à l'intégrale de la fonction de Green sur la surface d'un élément de frontière,
$h_n$	:	fonction de Hankel sphérique de seconde espèce, d'indice $n$ ,
$H$	:	fonction d'Heaviside,
$\Im$	:	partie imaginaire d'un nombre complexe,
$[I]$	:	matrice identité,
$j$	:	nombre complexe de partie réelle nulle et de partie imaginaire égale à 1,
$j_n$	:	fonction de Bessel sphérique d'indice $n$ ,
$J_n$	:	fonction de Bessel cylindrique d'indice $n$ ,
$k_\alpha$	:	nombre d'onde de l'onde longitudinale se propageant dans le milieu infini ou le demi-espace,
$k_\beta$	:	nombre d'onde de l'onde transversale se propageant dans le milieu infini ou le demi-espace,
$[K_{uu}^e]$	:	matrice élémentaire de rigidité mécanique,
$[K_{u\psi}^e]$	:	matrice élémentaire de rigidité piézoélectrique,
$[K_{\psi\psi}^e]$	:	matrice élémentaire de rigidité diélectrique,
$L$	:	distance séparant chaque distribution annulaire de forces verticales,
$L_t$	:	opérateur de transformation de Laplace par rapport à la variable $t$ ,
$L_{xyz}$	:	opérateur de transformation de Laplace par rapport aux variables $x, y$ et $z$ ,
$L_x^{-1}, L_t^{-1}$	:	opérateur de transformation inverse de $L_{xyz}$ et $L_t$ ,
$\mathbf{M}$	:	vecteur reliant le point $O$ à un point d'observation $M$ ,
$M'$	:	point d'application de la force $\mathbf{F}$ en demi-espace,
$M_0$	:	moment sismique,
$[M^e]$	:	matrice élémentaire de masse cohérente,
$(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$	:	repère des coordonnées cylindriques,
$(M, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$	:	repère des coordonnées sphériques,
$\mathbf{n}_\Gamma$	:	vecteur unitaire normal à la surface $(T)$ ,
$\overset{F_\delta}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}$	:	expression matricielle de l'équation de l'élastodynamique dans l'espace des transformées de Laplace,
$\overset{F_\delta}{\underset{i}{\mathbf{N}}}$	:	contribution dans le domaine physique, du tenseur de Green associé à une force quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,

---

---

$\overline{\overline{N}}_i^{F_H}$	:	contribution dans le domaine physique à la réponse du demi-espace à l'application d'une force quelconque dont la dépendance temporelle est donné par la fonction d'Heaviside,
$\overline{\hat{N}}_i^{F_\delta}$	:	contribution dans le domaine (espace-fréquence), du tenseur de Green associé à une force quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\overline{\hat{\hat{N}}}_i^{F_\delta}$	:	contribution dans le domaine transformé, du tenseur de Green associé à une force quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}$	:	contribution dans le domaine physique, du tenseur de Green associé à un couple de forces quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\overline{\hat{\hat{N}}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}$	:	contribution dans le domaine transformé, du tenseur de Green associé à un couple de forces quelconque agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$[N^e]$	:	matrice des fonctions d'interpolation du déplacement sur l'élément $e$ ,
$[N_y^e]$	:	matrice des fonctions d'interpolation du potentiel électrique sur l'élément $e$ ,
$O$	:	origine des coordonnées,
$(O, e_x, e_y, e_z)$	:	repère des coordonnées cartésiennes,
$p, q$	:	variables transformées de $\xi_x, \xi_y$ dans le changement de variable de Cagniard - De Hoop, homogènes à des lenteurs,
$\mathbf{P}$	:	vecteur de Poynting associé à la source directionnelle,
$P_i(\tau)$	:	borne supérieure d'intégration sur la lenteur $p$ ,
$P_n$	:	polynôme de Legendre d'indice $n$ ,
$P(\theta)$	:	matrice de passage des coordonnées locales sphérique aux coordonnées globales cartésiennes,
$Q$	:	nombre complexe défini par le quotient $\tilde{f}_{F_2} / \tilde{f}_{F_1}$ ,
$Q_0$	:	charge électrique imposée,
$\{\tilde{Q}^e\}$	:	vecteur des charges nodales appliquées sur l'élément $e$ ,
$\Re$	:	partie réelle d'un nombre complexe,
$[R]$	:	matrice de réflectivité du demi-espace recouvert d'une couche,
$R_i^d$	:	matrice des coefficients de réflexion en ondes planes pour une onde plane incidente descendante,
$R_i^u$	:	matrice des coefficients de réflexion en ondes planes pour une onde plane incidente montante,
$rot$	:	opérateur rotationnel,

---

---

$r, \varphi, z$	:	coordonnées cylindriques,
$R, \theta, \varphi$	:	coordonnées sphériques,
$s$	:	variables duales de $t$ par transformation de Laplace, homogène à une fréquence,
$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}$	:	tenseur des déformations,
$\tilde{\mathbf{S}}^e$	:	état de déformation sur l'élément $e$ ,
$t$	:	temps,
$T$	:	quantité homogène à un temps,
$Ti(p)$	:	valeur de $\tau$ à partir de laquelle le contour de Cagniard De Hoop quitte l'axe réel du plan complexe ( $\Re(q), \Im(q)$ ),
$T_i^d$	:	matrice des coefficients de transmission en ondes planes pour une onde plane incidente descendante,
$T_i^u$	:	matrice des coefficients de transmission en ondes planes pour une onde plane incidente montante,
$\tilde{\mathbf{T}}_r$	:	densité surfacique de force appliquée sur la surface de la cavité sphérique,
$\{\tilde{\mathbf{T}}_\Gamma\}$	:	vecteur contenant les valeurs de l'état de contrainte sur les éléments de frontière,
$[T^G]^e$	:	matrice élémentaire dont le terme général est égal à l'intégrale de l'état de contrainte de Green sur la surface d'un élément de frontière,
$\tilde{\mathbf{u}}$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à l'action de la source directionnelle en régime harmonique,
$\tilde{\mathbf{u}}_0$	:	vecteur déplacement imposé,
$\tilde{\mathbf{u}}^e$	:	vecteur déplacement sur l'élément $e$ ,
$\tilde{\mathbf{u}}^{source}$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à une source ponctuelle,
$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}^{source}$	:	champ lointain du rayonnement en régime harmonique associé à une source ponctuelle,
$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}^{source}$	:	contribution des termes d'ordre supérieurs au champ proche du rayonnement en régime harmonique associé à une source ponctuelle,
$\tilde{\mathbf{u}}_{0R}^{sph}$	:	amplitude du rayonnement de la source de dilatation,
$\tilde{\mathbf{u}}^{sph}$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à l'action de la source de dilatation,
$\tilde{\mathbf{u}}^F$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à l'action de la force $\mathbf{F}$ en régime harmonique,

---



---

$\mathbf{u}^{(F,-F)}$	:	champ de déplacement dans le domaine physique associée à un couple de forces verticales, d'intensité $M_0$ et agissant à l'intérieur d'un demi-espace,
$\tilde{\mathbf{u}}^{(F,-F)}$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à l'action du couple de forces sans moment,
$\tilde{\mathbf{u}}^{moment}$	:	champ de déplacement en régime harmonique associé à l'action du couple de forces avec moment,
$\mathbf{u}^F$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}$ à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{u}^{WZ,F}$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}$ à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{u}^{(F,-F)}$	:	champ de déplacement associé à l'application du couple de forces $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$ à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{u}^{WZ,(F,-F)}$	:	champ de déplacement associé à l'application du couple de forces $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$ à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{u}^{F_1}$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}_1$ à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{u}^{WZ,F_1}$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}_1$ à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{u}^{F_2}$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}_2$ à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{u}^{WZ,F_2}$	:	champ de déplacement associé à l'application de la force $\mathbf{F}_2$ à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{u}^{(F_2,-F_2)}$	:	champ de déplacement associé à l'application du couple de forces $(\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_2)$ à l'intérieur d'un demi-espace,
$\mathbf{u}^{WZ,(F_2,-F_2)}$	:	champ de déplacement associé à l'application du couple de forces $(\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_2)$ à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\mathbf{u}^{WZ,F_s}$	:	champ de déplacement, en régime transitoire, en un point d'un demi-espace recouvert d'une couche dans lequel agit une force verticale,
$U_0, V_0$	:	tensions d'excitation des piliers du transducteur Janus directif,
$\tilde{U}_R^P \Big ^{source}$	:	fonction de directivité des ondes P rayonnées en milieu infini et en champ lointain par une source ponctuelle,
$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big ^{source}$	:	fonction de directivité des ondes SV rayonnées en milieu infini et en champ lointain par une source ponctuelle,

---

---

$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big ^{source}$	:	fonction de directivité des ondes SH rayonnées en milieu infini et en champ lointain par une source ponctuelle,
$\tilde{U}_R^P \Big ^F$	:	fonction de directivité des ondes P rayonnées en milieu infini et en champ lointain par la force,
$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big ^F$	:	fonction de directivité des ondes SV rayonnées en milieu infini et en champ lointain par la force,
$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big ^F$	:	fonction de directivité des ondes SH rayonnées en milieu infini et en champ lointain par la force,
$\tilde{U}_R^P \Big ^{(F,-F)}$	:	fonction de directivité des ondes P rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces sans moment,
$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big ^{(F,-F)}$	:	fonction de directivité des ondes SV rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces sans moment,
$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big ^{(F,-F)}$	:	fonction de directivité des ondes SH rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces sans moment,
$\tilde{U}_R^P \Big ^{moment}$	:	fonction de directivité des ondes P rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces avec moment,
$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big ^{moment}$	:	fonction de directivité des ondes SV rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces avec moment,
$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big ^{moment}$	:	fonction de directivité des ondes SH rayonnées en milieu infini et en champ lointain par le couple de forces avec moment,
$\{\tilde{U}^e\}$	:	vecteur des déplacements nodaux sur l'élément e,
$\{\tilde{U}\}$	:	vecteur contenant les valeurs du déplacements sur les éléments de frontière,
$\tilde{\mathbf{v}}$	:	vecteur vitesse associé à la source directionnelle en régime harmonique,
$x, y, z$	:	coordonnées cartésiennes,
$z'$	:	profondeur à laquelle est enfouie la source,
$[W]$	:	matrice permettant de passer de la matrice $[Z]$ à la matrice $[Z]$ .
$[Y_d]$	:	matrice reliant les déplacements nodaux au vecteur $\{\tilde{A}_r\}$ ,
$[Z]$	:	matrice d'impédance sur la surface $(I)$ ,
$[Z_d]$	:	matrice reliant le vecteur $\{\tilde{A}_r\}$ aux déplacements nodaux,

---

---

$[Z_\sigma]$	:	matrice reliant l'état de contrainte au déplacement sur les éléments de frontière,
$[Z]$	:	matrice d'impédance sur les éléments de frontière,
$\alpha$	:	vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le demi-espace,
$\beta$	:	vitesse de propagation des ondes transversales dans le demi-espace,
$(\Gamma)$	:	surface frontière de $\Omega_s$ , orientée vers l'extérieur du domaine $\Omega_s$ ,
$(\Gamma_Q)$	:	surface à charge électrique imposée,
$(\Gamma_u)$	:	surface à déplacements imposés,
$(\Gamma_\sigma)$	:	surface à vecteur contraintes imposé,
$(\Gamma_\psi)$	:	surface à potentiel imposé,
$\delta$	:	fonction de Dirac,
$\Delta$	:	opérateur Laplacien,
$\Delta\omega$	:	pas d'échantillonnage en fréquence angulaire,
$\varepsilon_m$	:	erreur quadratique moyenne permettant pour une source donnée de caractériser l'intensité du champ proche par rapport au champ lointain,
$\varepsilon_n$	:	facteur de Neumann,
$\overline{\varepsilon^s}$	:	tenseur diélectrique à déformation constante,
$\theta_\alpha$	:	direction de l'espace dans laquelle le rayonnement en ondes P de la source, directionnelle est annulé,
$\theta_\beta$	:	direction de l'espace dans laquelle le rayonnement en ondes S de la source directionnelle est annulé,
$\Xi$	:	fonctionnelle de la formulation variationnelle dans le formalisme éléments finis,
$\Xi_s, \Xi_p$	:	composante de la fonctionnelle $\Xi$ ,
$\lambda, \mu$	:	coefficients de Lamé - Navier du milieu infini ou du demi-espace,
$\lambda_\alpha$	:	longueur d'onde de l'onde longitudinale se propageant dans le milieu infini ou le demi-espace,
$\lambda_\beta$	:	longueur d'onde de l'onde transversale se propageant dans le milieu infini ou le demi-espace,
$\lambda_{WZ}, \mu_{WZ}$	:	coefficients de Lamé - Navier de la couche,
$\nu$	:	coefficient de Poisson du milieu infini ou du demi-espace,
$\nu_\alpha, \nu_\beta$	:	variables homogènes à des nombres d'onde,
$\xi_x, \xi_y, \xi_z$	:	variables duales de $x, y$ et $z$ par transformation de Laplace, homogènes à des nombres d'onde,
$\rho$	:	masse volumique du milieu infini ou du demi-espace,
$\rho_{WZ}$	:	masse volumique de la couche,

---

---

$\tilde{\zeta}$	:	composante non nulle du potentiel scalaire du déplacement résultant d'un chargement harmonique appliqué à la surface d'une cavité sphérique,
$\tilde{\zeta}_m$	:	terme général de la série donnant $\tilde{\zeta}$ ,
$\tilde{\zeta}_0^{F_\delta}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\zeta}_{0d}^{F_\delta}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique, pour les ondes descendantes, associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\zeta}_{0u}^{F_\delta}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique, pour les ondes montantes, associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\zeta}^{WZ,a}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique associé à un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales,
$\tilde{\zeta}^{WZ,F_\delta}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur de la fonction de Green en régime harmonique associée à l'application d'une force verticale à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\zeta}^{WZ,F_\delta(M_s)}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique associé à une force élémentaire appartenant à une distribution annulaire de forces verticales,
$\tilde{\zeta}^{WZ(F_\delta, F_\delta)}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur de la fonction de Green en régime harmonique associée à l'application d'un couple de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\zeta}^{WZ,L}$	:	composante non nulle du potentiel vecteur en régime harmonique associé à une distribution annulaire de forces verticales,
$\tilde{\sigma}^e$	:	forme condensée du tenseur des contraintes sur l'élément $e$ ,
$\tilde{\sigma}$	:	tenseur des contraintes en régime harmonique associé à la source directionnelle,
$\tilde{\sigma}^F$	:	tenseur des contraintes associé à la fonction de Green,
$\tilde{\sigma}^{WZ,F_\delta}$	:	champ de contrainte, en régime harmonique, associé à la fonction de Green $\tilde{\mathbf{G}}^{WZ,F_\delta}$ ,
$\tau$	:	variable homogène à un temps, permettant de définir le contour de Cagniard De Hoop,
$\tilde{\Phi}$	:	potentiel scalaire du déplacement résultant d'un chargement harmonique appliqué à la surface d'une cavité sphérique,

---

---

$\tilde{\Phi}_m$	:	terme général de la série donnant $\tilde{\Phi}$ ,
$\tilde{\Phi}^{WZ,F_\delta}$	:	potentiel scalaire de la fonction de Green en régime harmonique associée à l'application d'une force verticale à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\Phi}_0^{F_\delta}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\Phi}_{0d}^{F_\delta}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique, pour les ondes descendantes, associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\Phi}_{0u}^{F_\delta}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique, pour les ondes montantes, associé à l'application d'une force verticale en milieu infini,
$\tilde{\Phi}^{WZ,a}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique associé à un réseau périodique de distributions annulaires de forces verticales,
$\tilde{\Phi}^{WZ,F_\delta(M_\delta)}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique associé à une force élémentaire appartenant à d'une distribution annulaire de forces verticales,
$\tilde{\Phi}^{WZ(F_\delta, F_\delta)}$	:	potentiel scalaire de la fonction de Green en régime harmonique associée à l'application d'un couple de forces verticales à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche,
$\tilde{\Phi}^{WZ,L}$	:	potentiel scalaire en régime harmonique associé à une distribution annulaire de forces verticales,
$\chi_1, \chi_2$	:	fonctions de $x, y, z$ et $t$ ,
$\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$	:	fonctions de $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ et $t$ ,
$\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2$	:	fonctions de $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ et $s$ ,
$\tilde{\Psi}$	:	potentiel électrique,
$\tilde{\Psi}_0$	:	potentiel imposé,
$\tilde{\Psi}^e$	:	potentiel sur l'élément $e$ ,
$\{\tilde{\Psi}^e\}$	:	vecteur des valeurs nodales du potentiel sur l'élément $e$ ,
$\omega$	:	pulsation,
$\omega_0$	:	pulsation centrale du signal Ricker,
$\omega_R$	:	partie réelle de la pulsation,
$\omega_J$	:	partie imaginaire de la pulsation,
$\Omega_p$	:	domaine piézoélectrique,
$\Omega_s$	:	domaine élastique,
$\partial$	:	opérateur de dérivation,

---

$||$  : valeur absolue,  
 $*$  : conjugué d'une quantité complexe,

## Table des figures

I-1	Système de coordonnées sphériques	10
I-2	Diagramme de directivité de la source de dilatation	13
I-3	Force ponctuelle dans une formation élastique infinie	14
I-4	Diagrammes de directivité d'une force ponctuelle	15
I-5	Couple de forces sans moment dans une formation élastique infinie	16
I-6	Diagrammes de directivité du couple de forces sans moment (basse fréquence)	17
I-7	Diagrammes de directivité du couple de forces sans moment ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ )	18
I-8	Couple de forces avec moment dans une formation élastique infinie	19
I-9	Diagrammes de directivité du couple de forces avec moment (basse fréquence)	20
I-10	Diagrammes de directivité du couple de forces avec moment ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ )	21
I-11	Combinaison de deux forces en milieu infini	22
I-12a	Énergie émise dans le demi-plan $z < 0$ normalisée par l'énergie totale rayonnée en fonction de la phase et de l'amplitude de $Q$	23
I-12a	Zoom de la figure I-12a	23
I-13	Diagrammes de directivité de la source directionnelle (I)	24
I-14	Diagrammes de directivité de la source directionnelle (II)	25
I-15	Combinaison d'un couple de forces et d'une force en milieu infini	26
I-16	Présentation schématique d'un transducteur de type Tonpiliz	29
I-17	Principe de fonctionnement du flexenseur de classe IV	30
I-18	Principe de fonctionnement du transducteur Janus directif	31
I-19	Erreur quadratique moyenne sur le rayonnement de la source directionnelle	33
I-20	Modélisation de sources piézoélectriques couplées avec le milieu extérieur	37
II-1	Force enterrée à l'intérieur d'un demi-espace	41
II-2	Couple de forces sans moment enterré dans un demi-espace	46
II-3	Force enterrée dans un demi-espace recouvert d'une couche	49
II-4	Distribution annulaire de forces	55
II-5	Réseau périodique de distribution annulaire de forces	56
II-6	Géométrie utilisée pour la validation des méthodes de calcul	63
II-7	Amplitude des signaux excitateurs en fonction du temps	63

II-8	Modules des spectres des signaux excitateurs en fonction de la fréquence	64
II-9	Sismogrammes de la source directionnelle	65
II-10	Configuration typique de monitoring sismique	66
II-11	Temps d'arrivée des perturbations dans le demi-espace	67
II-12	La source directionnelle en milieu infini et en demi-espace	68
II-13	Amplitude des ondes réfléchies par le couple de forces et la source directionnelle	69
II-14	Géométrie utilisée pour le calcul en demi-espace recouvert d'une couche	70
II-15	Temps d'arrivée des ondes réfléchies à l'interface	70
II-16	Temps d'arrivée des ondes directes et réfléchies à la surface libre	71
II-17	La source directionnelle en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche $f_0 = 32 \text{ Hz}$	72
II-18	Amplitude des ondes réfléchies par le couple de forces et la source directionnelle $f_0 = 32 \text{ Hz}$	73
II-19	La source directionnelle en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche $f_0 = 64 \text{ Hz}$	74
II-20	La source directionnelle en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche $f_0 = 64 \text{ Hz}$	75
III-1	Domaines d'étude pour l'analyse par éléments finis	78
III-2	Discrétisation du domaine d'étude	81
III-3	Modélisation d'un transducteur piézoélectrique enterré dans un milieu semi-infini	84
III-4	Types d'interactions considérés	85
III-5	La géométrie du problème	86
III-6	Maillage de la surface de la cavité sphérique	94
III-7	Types de problème résolu par MISSAXI	97
III-8	Sous-structuration dynamique de l'interaction	99
III-9	Équilibre global après sous-structuration	99
III-10	Géométrie considérée dans MISSAXI pour le calcul de la matrice d'impédance dans un demi-espace	102
III-11	Maillage d'une cavité soumise à un champ de contrainte radial	109
III-12	Module et phase du déplacement radial pour une cavité soumise à un champ de pression	110
III-13	Maillage utilisé pour le calcul du rayonnement de la force ponctuelle	111
III-14	Rayonnement d'une force ponctuelle en milieu infini et en champ lointain	112
III-15	Rayonnement d'une force ponctuelle en milieu infini à la distance $R = 2\lambda_\alpha$	113
III-16	Modèle du transducteur tonpilz (avant maillage)	114



III-17	Rayonnement d'un transducteur tonpilz en milieu infini	114
III-18	Schéma du transducteur Janus étudié	115
III-19	Les deux premiers mode de résonance du Janus étudié	116
III-20	Champ de déplacement et diagrammes de directivité du transducteur Janus à $100\text{ Hz}$ lorsque les piliers sont alimentés en phase	118
III-21	Champ de déplacements et diagrammes de directivité du transducteur Janus à $100\text{ Hz}$ lorsque les piliers sont alimentés en opposition de phase	119
III-22	Diagrammes de directivité du transducteur Janus à $100\text{ Hz}$ lorsque les piliers sont alimentés de manière à satisfaire la condition (III-167) avec $\theta_\alpha = 0$	120
III-23	Principe du calcul de la tension d'alimentation à appliquer pour obtenir un rayonnement directionnel	120
III-24	Diagrammes de directivité de la source directionnelle théorique et du transducteur Janus à excitation adaptée, en milieu infini et en champ lointain	121
III-25	Géométrie de calcul utilisée pour le calcul des sismogrammes en milieu infini	122
III-26	Sismogrammes du transducteur Janus et de la source directionnelle ponctuelle	123

# Introduction générale

Ce mémoire a pour objet la conception d'un transducteur piézoélectrique directionnel pour des applications en acquisition de données sismiques.

Dans cette introduction, les bases de l'environnement géophysique et de l'acquisition sismique sont tout d'abord rappelées ; puis les nouveaux enjeux de l'acquisition sismique sont présentés. Finalement, la problématique menant à la conception d'une source piézoélectrique enterrée directionnelle, et l'organisation du mémoire de thèse, sont successivement exposés.

## Généralités [Lavergne, 1986]

La géophysique est la science qui étudie les phénomènes physiques dont la terre est le siège. En fait, elle s'occupe plus spécialement des tremblements de terre et de leur propagation (séismologie), du magnétisme et de l'électricité terrestre et atmosphérique, du champ de pesanteur ; l'étude de ces phénomènes permet d'obtenir des images du sous-sol ou du globe.

Parmi toutes les méthodes utilisées en géophysique, la sismique a pour but d'obtenir une image de zones bien déterminées du sous-sol pour la recherche d'hydrocarbures, de minerais ou pour les études de soubassement d'ouvrages d'art, de barrages...

Une campagne de prospection sismique comprend généralement trois étapes : l'acquisition des données, le traitement de l'information et l'interprétation.

- L'acquisition des données est obtenue par la mise en œuvre sur le terrain de systèmes appropriés d'émission (sources sismiques), de détection (géophones, hydrophones, accéléromètres) et d'enregistrements. Elle utilise les techniques les plus modernes de l'électronique, permettant l'enregistrement numérique de l'information avec une rapidité et une précision considérables.
- Le traitement a pour but l'amélioration du rapport signal sur bruit et la mise en forme de l'information pour faciliter l'interprétation. À partir des données sismiques acquises, les temps de propagation des ondes élastiques entre un point d'excitation (source) et un certain nombre de sismographes (récepteurs) sont étudiés. Les procédés modernes de traitement de l'information par l'ordinateur ont permis de mettre au point des systèmes logiciels de plus en plus efficaces.
- L'interprétation a pour objet la détermination et la caractérisation des couches géologiques du sous-sol. Effectuée par les géologues, elle fait la synthèse des données de la géologie du forage et de la géophysique

C'est dans le cadre des méthodes d'acquisition sismique que ce travail de thèse s'inscrit.

Remarque :

Il existe d'autres techniques permettant d'imager le sous-sol.

- Les méthodes gravimétriques qui étudient l'effet de la répartition des roches du sous-sol sur le champ de pesanteur terrestre,
- Les méthodes magnétiques qui étudient l'effet de la répartition des roches du sous-sol sur les variations du champ magnétique terrestre d'un point à l'autre de la surface,
- Les méthodes électriques qui étudient en surface les potentiels créés par le passage d'un courant dans le sous-sol.

## La sismique

La sismique est un outil d'investigation du sous-sol extrêmement puissant. La technique consiste à engendrer des ébranlements dans le sous-sol (à partir d'une explosion par exemple) et à écouter les ondes réfléchies ou réfractées par les frontières des couches géologiques (appelées aussi réflecteurs) [Boyer et al., 1994 - Favre, 1958 - Lavergne, 1986]. Ces échos sont enregistrés par des appareils de détection (dits récepteurs) : l'analyse de leur temps de parcours, convertis en profondeur, permet d'établir une carte géologique du sous-sol, l'objectif étant de repérer les roches susceptibles d'être pétrolifères. La représentation des données enregistrées constitue le sismogramme.

Deux types d'ondes se propagent à des vitesses différentes dans le sous-sol :

- les ondes longitudinales, appelées ondes P ou encore ondes L, dont la célérité est notée  $\alpha$ . La vibration d'un point du sous-sol s'effectue dans la direction de propagation.
- les ondes transversales, appelées ondes S ou encore ondes T, dont la célérité est notée  $\beta < \alpha$ . La vibration d'un point du sous-sol s'effectue dans un plan orthogonal à la direction de propagation.

La précision de la reconstitution de la carte géologique est limitée par la longueur d'onde de la vibration sismique. Les hautes fréquences étant rapidement atténuées dans le sol, c'est l'éloignement de l'objectif géologique visé qui détermine la fréquence d'émission optimale de la source. La gamme de fréquence d'émission des ondes sismiques, appelée la bande sismique, est comprise entre 10 Hertz et 200 Hertz.

En sismique de surface, configuration dans laquelle source et récepteurs sont placés en surface assez éloignés des structures observées, la précision de la reconstitution est d'environ 100 mètres pour une fréquence d'émission du signal de l'ordre de 40 Hertz.

La configuration en profil sismique, où la source est placée en surface et les récepteurs dans un puits, permet une précision de l'ordre de 50 mètres (pour une fréquence de la source de l'ordre de 80 Hz).

Une nette amélioration de la précision peut être obtenue avec la sismique entre puits qui est une technique dans laquelle les sources et les récepteurs sont positionnés dans les forages : cette configuration peut s'identifier à celle adoptée pour l'imagerie médicale ; elle permet de se rapprocher de la structure à imager, souvent éloignée de la surface terrestre : les ondes émises puis reçues parcourent un trajet plus faible, elles sont donc moins atténuées. Il est ainsi possible d'utiliser une

source plus haute en fréquence (400 Hertz et même au-delà, [Lee, 1995]), et obtenir une résolution plus fine de l'image reconstituée (précision de l'ordre de quelques mètres).

Le contrôle sur la source sismique est fondamental : il va déterminer la résolution sismique verticale (capacité à séparer les arrivées d'énergies correspondant aux différents contrastes d'impédance) et le pouvoir de pénétration sismique (le plus profond des réflecteurs ou réfracteurs en sismique de surface) visibles sur l'enregistrement.

## Les sources sismiques

Les sources sismiques sont les instruments qui permettent l'émission des ondes dans le sol. Seules les sources utilisées en sismique terrestre sont présentées ici ; en ce qui concerne la sismique marine, le lecteur pourra se reporter à la référence [Favre, 1958].

L'explosif était autrefois traditionnellement utilisé pour l'émission sismique à terre. Aujourd'hui encore, il est employé dans les régions où son utilisation est possible. Des charges de dynamite de 100 grammes à quelques kilogrammes sont enterrées dans des trous de 3 à 15 mètres de profondeur et de 10 à 15 centimètres de diamètre. Plusieurs charges, à quelques mètres d'intervalle, sont mises à feu simultanément afin de diminuer l'émission des ondes de surface et de renforcer l'énergie émise verticalement dans le sous-sol. L'explosif présente l'avantage d'être une source énergétique, émettant dans une large bande de fréquences sismiques. Ses inconvénients majeurs sont les servitudes du stockage et du transport, et le coût du poste de forage qui peut représenter à lui seul plus de la moitié du coût total de la mise en œuvre.

L'émission sismique par vibreur est apparue dans la décennie 1960, à la suite de recherches conduites par la société américaine Continental Oil Company. Elle consiste à émettre dans le sol des trains d'ondes de quelques dizaines de secondes de durée et de fréquence progressivement variable dans la bande sismique. Les sources émettrices sont des camions vibreurs, comportant une plaque pulsante actionnée par un système de servovérins hydrauliques. L'opérateur abaisse la plaque pulsante pour la mettre au contact du sol et appuie la totalité du poids du camion sur celle-ci. Le signal sismique est alors envoyé dans le sol par l'action des servovérins, qui exercent sur la plaque pulsante une force alternative pouvant atteindre 15000 Newton. Le dispositif d'émission est souvent constitué de 3 ou 4 camions vibrant en phase, alignés suivant la direction du profil et espacés de 10 à 15 mètres, de manière à atténuer les ondes de surface et à renforcer les ondes de volume émises verticalement. L'ensemble des vibreurs se déplace progressivement le long du profil, d'une distance de l'ordre de 10 mètres. La mise en œuvre est relativement rapide, sans les servitudes liées au forage et à l'explosif.

D'autres dispositifs d'émission existent mais leur utilisation reste limitée. C'est le cas des sources à percussion simple (chute de poids sur cible comme le Soursile I.F.P.) ou à percussion codée (pilonneuses mécaniques frappant le sol suivant une fréquence contrôlée, comme le Minisiosie

S.N.E.A.P.<sup>1</sup>). Elles sont utilisées pour les investigations sismiques fines, à haut pouvoir de résolution et à moyenne pénétration. Un autre système d'Atlantic Richfield appelé Dinoséis est constitué d'un tube métallique au bout duquel est fixé un diaphragme lui-même plaqué au sol ; un mélange gazeux explose dans le tube et met le diaphragme en vibration. Le canon à air de Bolt est un autre procédé utilisant une décharge d'air comprimé dans de petits réservoirs d'eau disposés à la surface du sol.

## La sismique 4D

Cette section résume quelques arguments et données avancées lors du Workshop intitulé « Time Lapse Reservoir Monitoring and Characterization » tenu en 1996 au siège de l'Energy Research Clearing House Center (EARCH) [Castagna et al., 1996].

Actuellement, le taux de récupération moyen des gisements de pétrole, c'est-à-dire la part des gisements qui est effectivement extraite, est d'environ 30 à 35 %. Il est estimé que les réserves d'hydrocarbures récupérables grâce une meilleure gestion des gisements dépassent celles qui pourraient être trouvées suite à la découverte de nouveaux gisements.

Par conséquent, les méthodes sismiques ont de plus en plus été appliquées dans le but d'enrichir la description des gisements. Ces dernières années, les données de la sismique 3D sont devenues un outil puissant de détection, description, caractérisation et contrôle d'un gisement. Aujourd'hui, les cartes provenant de données de la sismique 3D sont probablement plus utilisées pour le développement d'un gisement que ne le sont les simulations numériques. Cependant, le niveau de précision requis pour une description du gisement entrant dans les simulateurs réservoir est généralement plus fin que celui pouvant être obtenu par l'analyse des données sismiques 3D. En outre, les paramètres critiques du réservoir tels que la saturation d'eau et la perméabilité ne sont pas facilement ou directement extraits des seules données sismiques.

Pour ces raisons, une nouvelle technique est en plein essor : la sismique 4D, également baptisée « 3D répétitive ». Le principe est le suivant : « si des mesures de sismique 3D sont effectuées continûment sur toute la durée d'exploitation du gisement, les différences entre ces mesures sont une estimation directe des changements de position et de propriétés du fluide ». Une condition nécessaire à la sismique 4D est donc la reproductibilité parfaite du signal émis par les sources, afin d'effectuer des mesures continues et comparables entre elles.

Le monitoring sismique est l'usage de la sismique 4D, complétée par la description du réservoir ainsi que sa simulation, afin de suivre la saturation d'un fluide imprégnant dans ce dernier.

En calculant précisément les écarts entre les relevés de mesures effectuées sur un réservoir, la sismique 4D doit pouvoir améliorer l'acquisition de mesures qui est habituellement faite en

---

<sup>1</sup> Société Nationale Elf Aquitaine Production, faisant maintenant partie du groupe Total

sismique 3D pendant l'exploitation de gisement. Ceci permet de localiser des « poches » d'hydrocarbures qu'une simple extrapolation des fronts cartographiés ne pourrait déceler. De ce fait, il devient possible de tenir à jour le modèle dynamique du réservoir, d'optimiser le taux de production ou de prévenir des problèmes lors de l'exploitation des puits.

Par ailleurs, les récents développements en sismique 3D, notamment dans le traitement et la visualisation des données, ainsi qu'une meilleure compréhension de la physique des fluides et des roches, peuvent amener la technologie « sismique 4D » à un point où sa mise en service est envisageable à court terme.

Les enjeux financiers sont énormes. Dans l'édition du 06 novembre 1995 de la revue *Forbes*, de grands noms de l'industrie du pétrole comptent sur la sismique 4D pour améliorer leurs productions. Ainsi, *BP* estime pour ses gisements en Mer du Nord, une augmentation de sa production de 10 millions de barils par jour ; *Texaco* quant à lui, voudrait par ce biais récupérer 2 millions de barils de l'un de ses gisements qui, à l'heure actuelle, n'est plus exploitable...

## La problématique de la thèse

Un des problèmes de l'acquisition en sismique 4D, que ce travail de thèse vise à résoudre, est celui de la reproductibilité du signal source. Aujourd'hui, les sources sismiques classiques n'assurent pas cette reproductibilité : d'une part, il est impossible d'assurer à chaque acquisition un repositionnement de la source (camion vibreur) au même endroit et d'autre part ces sources sont posées en surface. Or, au voisinage de la surface du sol, il existe une zone s'étendant sur une dizaine de mètres d'épaisseur, appelée la zone altérée (Weathered Zone en anglais notée WZ), qui est constituée d'un milieu très hétérogène dont les propriétés mécaniques (densité, célérité des ondes dans le milieu) varient avec les conditions climatiques. Ainsi, un signal émis par la source traversant cette zone peut être modifié par des variations climatiques (figure I) ; il n'est donc pas reproductible. L'évolution des enregistrements effectués au niveau des récepteurs n'est pas attribuable uniquement aux variations dans le réservoir.

Le système SeisMovie® [Meunier et al, 2000a - 2000b - 2001], en cours de développement par C.G.G., G.d.F. et I.F.P., vise à obtenir cette reproductibilité, en mettant en place une source permanente<sup>2</sup> qui peut être enterrée sous la zone altérée. Ce positionnement est un élément clé pour d'assurer la répétabilité des mesures ; cependant, le train d'ondes émis dépendra de la WZ via la réflexion du champ émis vers la surface (qui peut faire partie du train d'onde source).

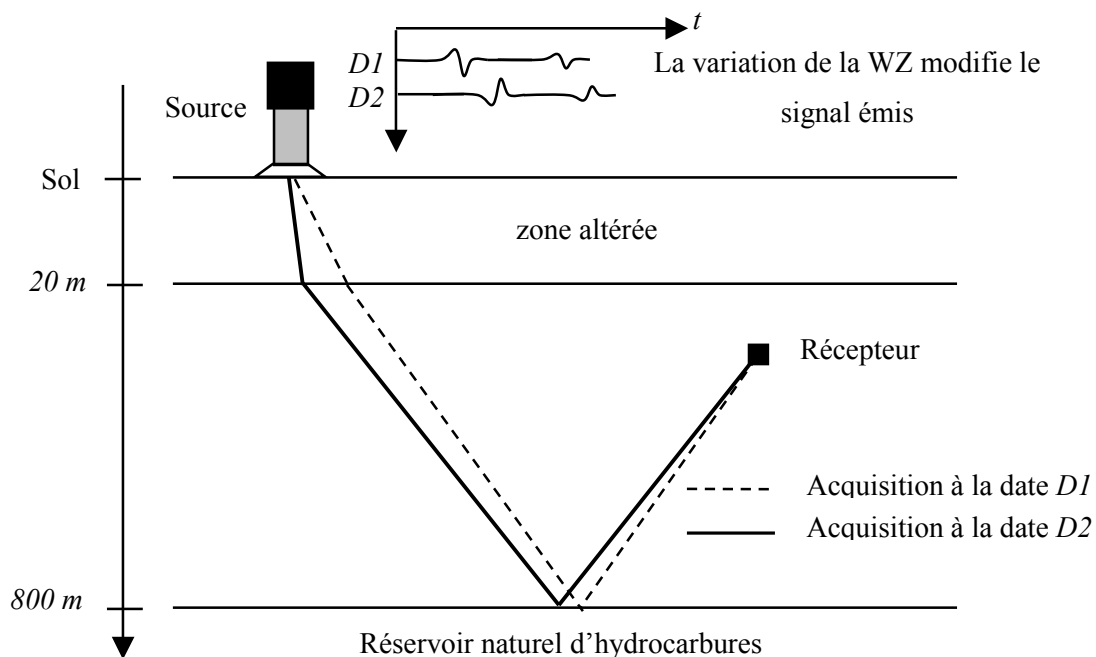
Pour résoudre ce problème, il est proposé dans le cadre de cette thèse de concevoir une source enterrée directionnelle. La réalisation d'une telle source serait une réelle innovation car l'énergie sismique

---

<sup>2</sup> Cette source est à faible énergie (1 heure de vibration est équivalente à 10 secondes d'émission d'un camion vibreur)

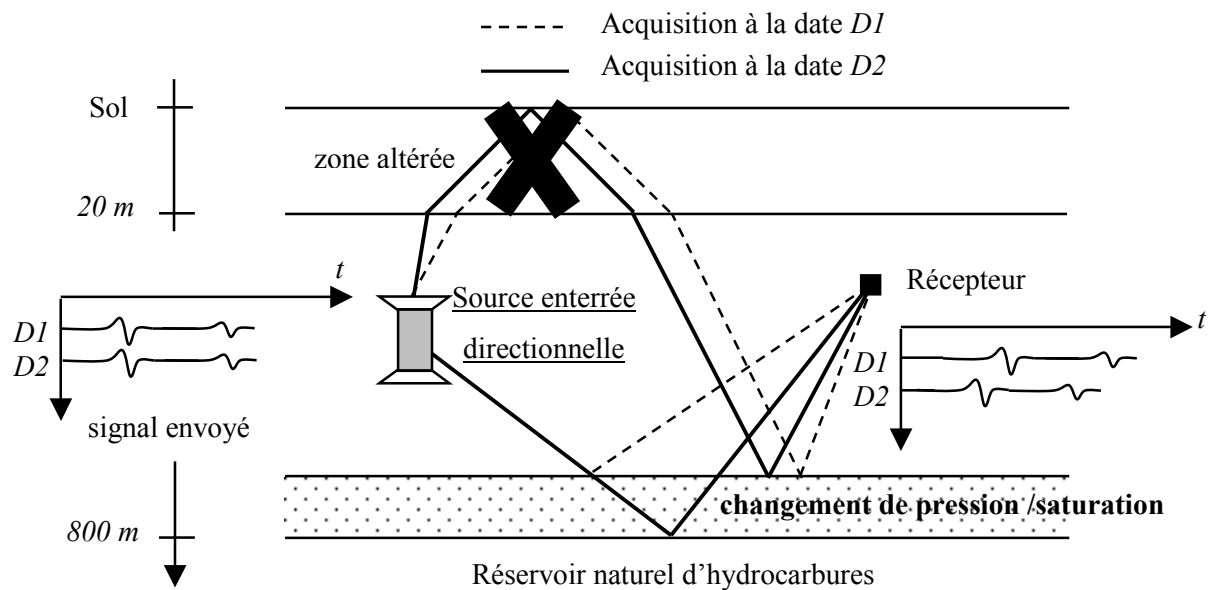
serait envoyée de façon privilégiée vers le bas ; ainsi, le train d'ondes ne serait pas affecté par la variation de la zone altérée (figure II).

Ce type de source peut également avoir un intérêt dans le cadre des acquisitions sismiques en zone de piémont<sup>3</sup> où les expérimentateurs cherchent à mettre en oeuvre des sources directionnelles afin de limiter la génération d'ondes parasites.



**Figure I : un cas simplifié de sismique 4D avec une source en surface (configuration inspirée de SeisMovie® [Meunier et al. 2001]). La différence entre les signaux enregistrés à la date D1 et à la date D2 n'est pas associée à une variation du réservoir**

<sup>3</sup> zone située au pied des montagnes où le relief est important et chaotique



**Figure II : un cas simplifié de sismique 4D avec une source enterrée directionnelle (configuration inspirée de SeisMovie® [Meunier et al. 2001]). La différence entre les signaux enregistrés à la date D1 et à la date D2, initialement émis en direction du réservoir, est associée à une variation du réservoir**

## Organisation des travaux de thèse

Ce rapport est divisé en trois parties.

Le premier chapitre a deux objectifs : le premier est d'établir un principe de source directionnelle idéale en milieu infini élastique homogène isotrope. Pour cela, les rayonnements des sources ponctuelles classiques (source de dilatation, force, couple de forces) sont étudiés ; il est alors montré que la combinaison de deux forces ou d'une force et d'un couple de forces permet d'obtenir un rayonnement directionnel. Le second objectif est de concevoir une source physique fonctionnant sur le principe directionnel théorique. Le choix de la technologie piézoélectrique se justifiant par la contrainte de reproductibilité du signal, un concept de transducteur directionnel est proposé.

Le milieu de propagation réel est caractérisé par la présence d'une surface libre (le sol) et d'une couche du proche sous-sol de caractéristiques physiques inhomogènes et variables (la zone altérée). Ainsi, dans l'application réelle, le rayonnement de la source est susceptible d'interagir avec la surface et la zone altérée. Les problèmes soulevés par la conception d'une source enterrée directionnelle sont alors de deux ordres : d'une part le principe directionnel théorique doit rester valable en milieu réel et d'autre part, l'interaction du transducteur directionnel piézoélectrique avec son environnement doit être prise en compte au niveau de la conception.

La deuxième partie vise à prédire le rayonnement de la source directionnelle idéale en milieu semi-infini. Considérant un demi-espace seul puis un demi-espace recouvert d'une couche, des



méthodologies de calcul sont développées pour obtenir les fonctions de Green de la source directionnelle ponctuelle. Ces fonctions de Green sont utilisées pour vérifier que les interactions source-surface et source-zone altérée ne modifient pas significativement le signal émis vers le réservoir.

Le couplage du transducteur avec son environnement géophysique est susceptible de modifier son comportement vibratoire. L'optimisation de la source nécessite donc une modélisation numérique du transducteur piézoélectrique directionnel couplé avec le milieu environnant, plus particulièrement la surface libre du demi-espace ou la zone altérée : c'est l'objectif de la troisième partie de ce mémoire. Le travail effectué dans cette partie a permis d'incorporer des nouveaux outils de calcul dans le code éléments finis ATILA, développé à l'IEMN/ISEN. Des éléments permettant d'appliquer une condition d'impédance mécanique ont été implémentés afin de coupler le modèle éléments finis du transducteur à une représentation du milieu extérieur. Si ce dernier est un demi-espace homogène isotrope, la condition d'impédance est calculée de manière exacte via la méthode itérative ; si le milieu est un demi-espace recouvert d'une couche, la condition d'impédance est calculée numériquement avec le code éléments de frontière MISSAXI, développé à l'École Centrale de Paris et à l'I.F.P. Les sismogrammes du transducteur directionnel sont présentés et permettent de conclure sur la faisabilité d'une telle source.

## **Chapitre I**

### **Principe de sources piézoélectriques directionnelles enfouies pour des applications sismiques**

Dans ce chapitre, le rayonnement de sources directionnelles idéales, enfouies dans une formation élastique s'étendant à l'infini, est analysé.

Les rayonnements en champ lointain de sources simples sont traités dans une première partie. L'examen de ces sources fournit une base de travail pour la conception d'une source directionnelle idéale, exposée en deuxième partie.

Dans une troisième partie, une discussion est menée sur les problèmes à résoudre pour concevoir un transducteur piézoélectrique directionnel (dont le rayonnement n'est pas affecté par la zone altérée), fonctionnant sur le principe qui établi précédemment.

## I.1 Rayonnement de sources ponctuelles en milieu infini élastique homogène isotrope

La modélisation du rayonnement de sources physiques dans des formations géologiques réalistes est un problème très complexe dans la mesure où il dépend de la géométrie de la source et des discontinuités avoisinantes. Cependant, dans de nombreux cas, l'étude des sources simples en milieu infini permet de comprendre les facteurs influençant le rayonnement de sources plus complexes. C'est pourquoi dans cette partie, après avoir rappelé la formulation générale du rayonnement en milieu infini élastique homogène isotrope, les solutions élémentaires de la sphère pulsante<sup>1</sup>, de la force ponctuelle et de combinaisons simples de forces sont étudiées.

Dans toute la suite, le fonctionnement harmonique est étudié ; la dépendance temporelle des champs d'ondes émis par les sources est  $\exp(j\omega t)$  où  $\omega$  est la pulsation et  $t$  le temps. Cette quantité ne sera pas écrite mais implicitement entendue. De plus, la transformée de Fourier de toute fonction du temps  $f$  est notée  $\tilde{f}$ , fonction de la pulsation.

### I.1.1 Formulation générale en milieu infini élastique homogène isotrope

Soit une formation élastique dont les caractéristiques mécaniques sont le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$ . Pour repérer un point  $M$  de ce milieu, le repère des coordonnées sphériques  $(O, e_R, e_\theta, e_\varphi)$  est considéré (figure I-1) où  $R$  désigne la distance au point d'observation,  $\theta$  l'angle polaire et  $\varphi$  l'angle azimutal ;  $r$  est la distance du point  $M$  à l'axe  $[Oz]$ .

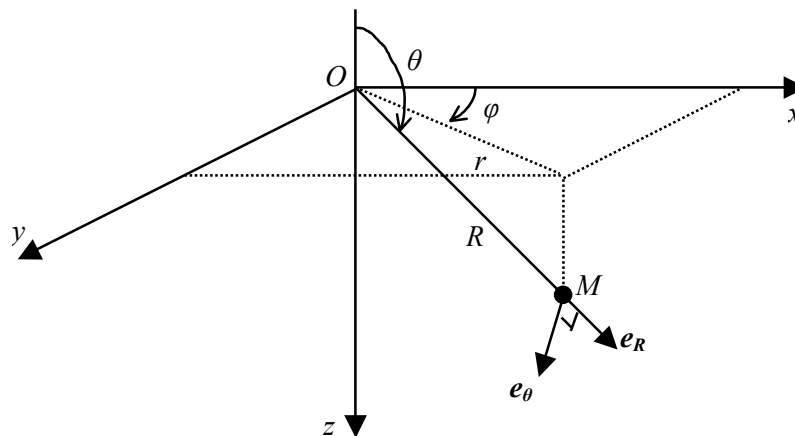


Figure I-1 : système de coordonnées sphériques

Dans un tel milieu, deux types d'ondes se propagent : les ondes longitudinales, ou ondes P, à la vitesse  $\alpha$  définie par

$$\alpha = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (\text{I-1})$$

<sup>1</sup> appelée également source de dilatation, cette source correspond à une expansion à symétrie sphérique

et les ondes transversales, ou ondes S, à la vitesse  $\beta < \alpha$  définie par

$$\beta = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (\text{I-2})$$

En introduisant

$$k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha} \quad (\text{I-3})$$

et

$$k_\beta = \frac{\omega}{\beta}, \quad (\text{I-4})$$

les nombres d'ondes respectifs des ondes P et S, le champ d'ondes élastiques  $\tilde{\mathbf{u}}^{source}(\mathbf{M}; \omega)$  rayonné par toute combinaison de forces peut se décomposer sous la forme [Pilant, 1979]

$$\tilde{\mathbf{u}}_R^{source}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{U}_R^P \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega) \left[ \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R} + \sum_{n=2}^N \left( a_n^{P,R} \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R^n} + a_n^{S,R} \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R^n} \right) \right], \quad (\text{I-5})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\theta^{source}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega) \left[ \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R} + \sum_{n=2}^N \left( a_n^{P,\theta} \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R^n} + a_n^{S,\theta} \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R^n} \right) \right], \quad (\text{I-6})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varphi^{source}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{U}_\varphi^{SH} \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega) \left[ \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R} + \sum_{n=2}^N \left( a_n^{P,\varphi} \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R^n} + a_n^{S,\varphi} \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R^n} \right) \right], \quad (\text{I-7})$$

où l'entier  $N$  ainsi que les coefficients participatifs  $a_n^{P,R}, a_n^{P,\theta}, a_n^{P,\varphi}, a_n^{S,\theta}, a_n^{S,\varphi}$ , et  $a_n^{S,R}$  dépendent de la source étudiée. Les termes en facteur de  $\frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R}$ , prépondérants à grande distance  $R$ , constituent

le champ lointain, noté  $\underline{\tilde{\mathbf{u}}}^{source}(\mathbf{M}; \omega)$ . Les termes en facteur de  $\frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R^n}$  et de  $\frac{\exp(-jk_\beta R)}{R^n}$  ( $n \geq 2$ ), significatifs à faible distance  $R$ , contribuent au champ proche; désignés par le vecteur  $\underline{\tilde{\mathbf{u}}}^{source}(\mathbf{M}; \omega)$ . Si dans les expressions (I-5) à (I-7) seuls les termes en  $\frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R}$  et  $\frac{\exp(-jk_\beta R)}{R}$  sont conservés, la propriété suivante est alors clairement illustrée : en champ lointain, les

ondes P et les ondes S sont découplées.  $\tilde{U}_R^P \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$  est la fonction de directivité des ondes P, portées par le vecteur  $\mathbf{e}_R$  dont la direction est parallèle à la direction de propagation.  $\tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$

et  $\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$  sont les fonctions de directivité respectives des ondes S polarisées verticalement (ondes SV) et horizontalement (ondes SH); les ondes SV et SH sont respectivement portées par les

vecteurs  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$ , normaux à la direction de propagation. À  $\omega$  fixé, les modules de  $\tilde{U}_R^P|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$ ,  $\tilde{U}_\theta^{SV}|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$  et  $\tilde{U}_\varphi^{SH}|^{source}(\theta, \varphi; \omega)$  représentés en fonction des angles d'observation  $\theta$  et  $\varphi$  définissent les diagrammes de directivité de la source considérée.

La suite de cette partie présente les diagrammes de directivité de la sphère pulsante, de la force et de deux combinaisons de forces ; le calcul des solutions complètes pour chacune de ces sources est reporté en annexe A. Le milieu infini élastique homogène isotrope est tel que  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 3$ , et les

diagrammes de directivité de chaque source sont normalisés par le facteur  $\max_{\theta, \varphi} \left| \tilde{U}_R^P|^{source}(\theta, \varphi; \omega) \right|$ .

## I.1.2 La sphère pulsante

Le problème est considéré comme étant à déplacements imposés ; un déplacement radial uniforme est appliqué à la surface d'une sphère de rayon infiniment petit. En l'absence de forces extérieures, l'équation de l'élastodynamique en régime harmonique s'écrit

$$(\lambda + \mu)\mathbf{grad}(\mathit{div}\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega)) + \mu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{I-8})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega)$  est le champ de déplacement et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé - Navier définis par

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (\text{I-9})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (\text{I-10})$$

$\mathbf{grad}$ ,  $\mathit{div}$  et  $\Delta$  sont respectivement les opérateurs gradient, divergence et Laplacien définis en coordonnées cartésiennes par

$$\mathbf{grad} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T, \quad (\text{I-11})$$

$$\mathit{div} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{I-12})$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{I-13})$$

En décomposant le champ émis en partie longitudinale (ondes P) et transversale (ondes S), il est montré (annexe A) qu'une propagation purement sphérique n'est réalisable que par les ondes P. La solution de (I-8) est alors donnée en régime harmonique par [Ekeom, 1997]

$$\tilde{u}_R^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = u_{0R}^{sph} \cdot h_l(k_\alpha R), \quad (\text{I-14})$$

$$\tilde{u}_\theta^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{I-15})$$

$$\tilde{u}_\varphi^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{I-16})$$

où  $u_{0R}^{sph}$  est une constante complexe et  $h_l$  est la fonction de Hankel sphérique de seconde espèce et d'indice  $l$  définie par [Abramovitz et al., 1972]

$$h_l^{(2)}(k_\alpha R) = \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{k_\alpha R} \left(1 + j \frac{l}{k_\alpha R}\right). \quad (\text{I-17})$$

La solution en champ lointain est alors directement donnée par

$$\underline{\tilde{u}}_R^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = u_{0R}^{sph} \cdot \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R}, \quad (\text{I-18})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\theta^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{I-19})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\varphi^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-20})$$

Le terme  $u_{0R}^{sph}$  étant indépendant de  $\theta$  et de  $\varphi$ , le rayonnement d'une source de dilatation est isotrope (figure I-2).

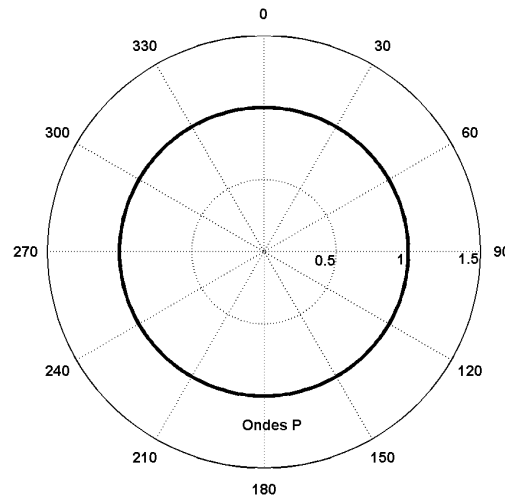


Figure I-2 : diagramme de directivité de la source de dilatation

### I.1.3 La force ponctuelle

Soit un milieu élastique infini, repéré par le système de coordonnées sphériques de la figure I-1. Une force ponctuelle  $\mathbf{F} = \tilde{f}(\omega)\mathbf{e}_z$  est appliquée au point O, origine du repère (figure I-3).

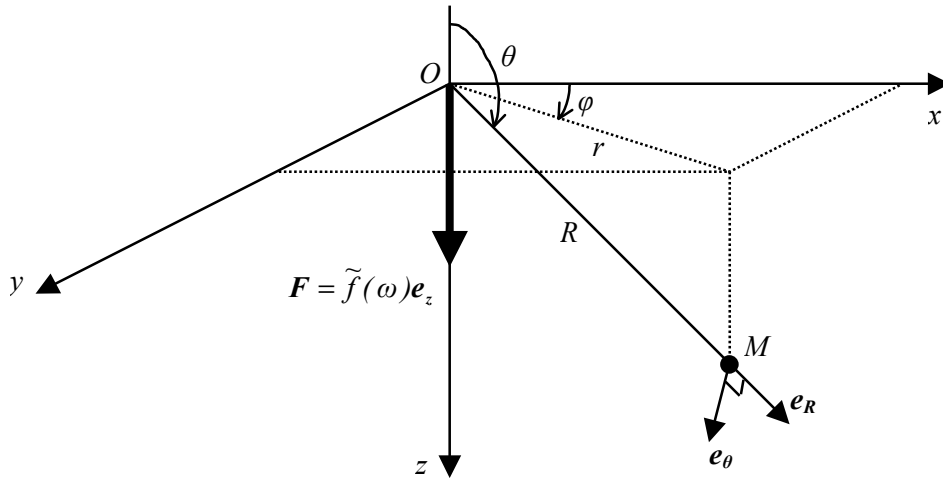


Figure I-3 : force ponctuelle dans une formation infinie élastique homogène isotrope

La réponse  $\tilde{\mathbf{u}}^F(\mathbf{M}; \omega)$  en un point quelconque  $M$  du milieu est donnée par la solution de l'équation de l'élastodynamique en régime harmonique en présence de forces de volume :

$$(\lambda + \mu)\mathbf{grad}(\text{div}\tilde{\mathbf{u}}^F(\mathbf{M}; \omega)) + \mu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^F(\mathbf{M}; \omega) + \rho\mathbf{F} = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}^F(\mathbf{M}; \omega). \quad (\text{I-21})$$

La référence [Pilant, 1979] fournit pour solution de (I-21) :

$$\tilde{\mathbf{u}}_R^F(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)\cos\theta}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ 2 \left[ \frac{e^{-jk_\beta R} - e^{-jk_\alpha R}}{R^3} - j \frac{k_\beta e^{-jk_\beta R} - k_\alpha e^{-jk_\alpha R}}{R^2} \right] + k_\alpha^2 \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R} \right\}, \quad (\text{I-22})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\theta^F(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)\sin\theta}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \left[ \frac{e^{-jk_\beta R} - e^{-jk_\alpha R}}{R^3} - j \frac{k_\beta e^{-jk_\beta R} - k_\alpha e^{-jk_\alpha R}}{R^2} \right] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R}}{R} \right\}, \quad (\text{I-23})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\phi^F(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-24})$$

Négligeant les termes en  $\frac{1}{R^2}$  et en  $\frac{1}{R^3}$ , l'approximation en champ lointain du déplacement est :

$$\tilde{\mathbf{u}}_R^F(\mathbf{M}; \omega) = -\cos\theta \frac{\tilde{f}(\omega)k_\alpha^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-25})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\theta^F(\mathbf{M}; \omega) = \sin\theta \frac{\tilde{f}(\omega)k_\beta^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-26})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\phi^F(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-27})$$

Les ondes P sont portées par la composante radiale  $\tilde{\mathbf{u}}_R^F(\mathbf{M}; \omega)$  et les ondes S par la composante tangentielle  $\tilde{\mathbf{u}}_\theta^F(\mathbf{M}; \omega)$ .

Utilisant un facteur de normalisation égal à  $\frac{\tilde{f}(\omega)}{4\pi\rho\alpha^2}$ , les fonctions de directivité de la force sont données par

$$\tilde{U}_R^P \Big| ^F (\theta, \varphi; \omega) = -\cos \theta, \quad (I-28)$$

$$\tilde{U}_R^{SV} \Big| ^F (\theta, \varphi; \omega) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin \theta, \quad (I-29)$$

$$\tilde{U}_R^{SH} \Big| ^F (\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (I-30)$$

Les figures I-4a et I-4b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et SV. Les fonctions de directivité étant des quantités purement réelles, il est possible d'ajouter sur ces diagrammes une information sur la phase des ondes. Ainsi, les parties du diagramme de directivité représentées en pointillé désignent une opposition de phase par rapport aux parties représentées en trait plein. Par exemple, en termes d'émission en ondes P (figure I-4a), le trait plein désigne un déplacement orienté suivant  $e_R$  et le trait pointillé un déplacement orienté selon  $-e_R$ . Cette convention est par la suite toujours utilisée pour la représentation des diagrammes de directivité. Ces derniers sont représentés dans un plan  $\varphi$  quelconque et sont invariants par symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz)$ .

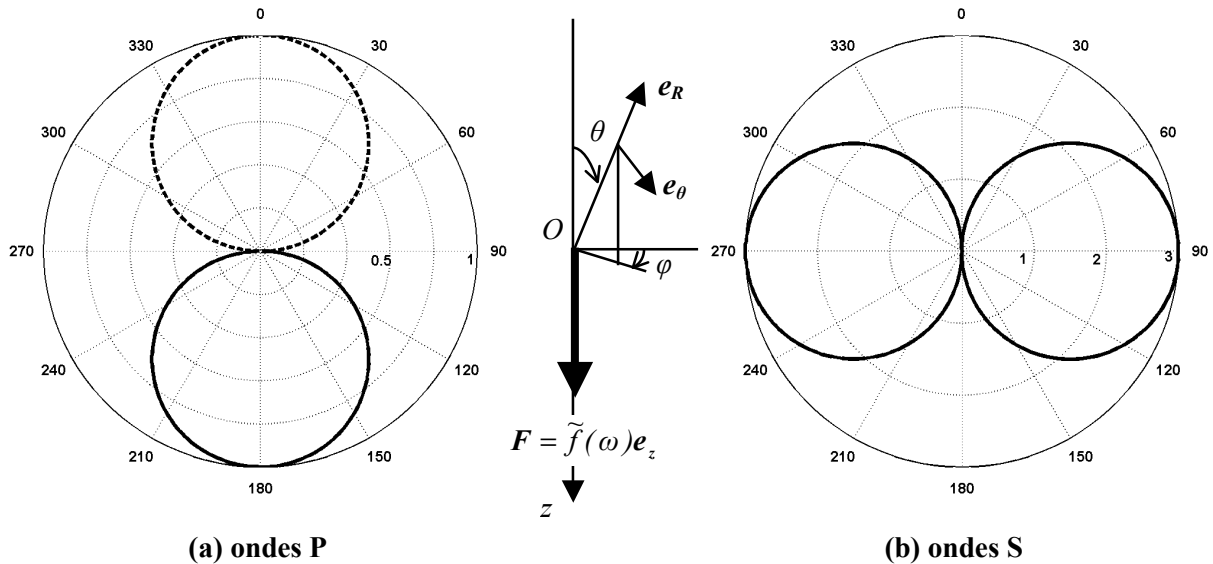


Figure I-4 : diagrammes de directivité d'une force ponctuelle

#### I.1.4 Combinaison de forces

À partir des expressions (I-25) à (I-27), les rayonnements de combinaisons de forces sont calculés. Seuls les résultats en champ lointain sont présentés, les rayonnements complets étant reportés en annexe A.



### I.1.4.1 Couple de forces sans moment

La plus simple des combinaisons est le « couple de forces sans moment » ; il est constitué de deux forces séparées d'une distance  $2d$  et agissant dans la même direction en sens opposé (figure I-5).

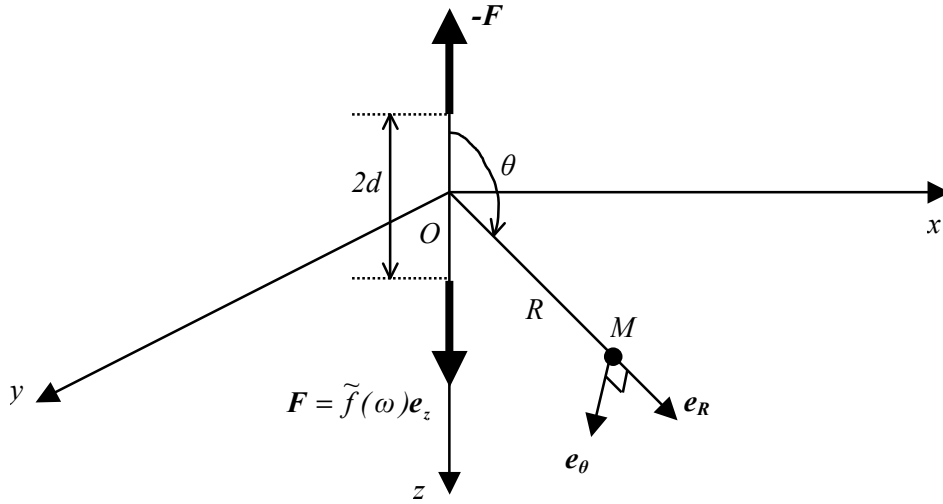


Figure I-5 : couple de forces sans moment dans une formation élastique infinie

Soient  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\beta$ , les longueurs d'onde respectives des ondes P et S, définies par

$$\lambda_\alpha = \frac{2\pi}{\omega} \alpha = \frac{2\pi}{k_\alpha} \quad (\text{I-31})$$

$$\lambda_\beta = \frac{2\pi}{\omega} \beta = \frac{2\pi}{k_\beta} \quad (\text{I-32})$$

Dans le calcul du rayonnement en champ lointain du couple de forces sans moment, deux cas sont à distinguer :

- $\frac{d}{\lambda_\alpha} \ll 1$  ( $\Rightarrow \frac{d}{\lambda_\beta} \ll 1$ ) : la distance entre les forces est négligeable devant les longueurs d'onde.

Il s'agit d'une approximation basse fréquence ; l'expression du rayonnement en champ lointain est

$$\tilde{\underline{u}}_R^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = j \cos^2 \theta \frac{\tilde{f}(\omega) k_\alpha^3 d \exp(-jk_\alpha R)}{2\pi\rho\omega^2 R}, \quad (\text{I-33})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = -j \sin \theta \cos \theta \frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^3 d \exp(-jk_\beta R)}{2\pi\rho\omega^2 R}, \quad (\text{I-34})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-35})$$

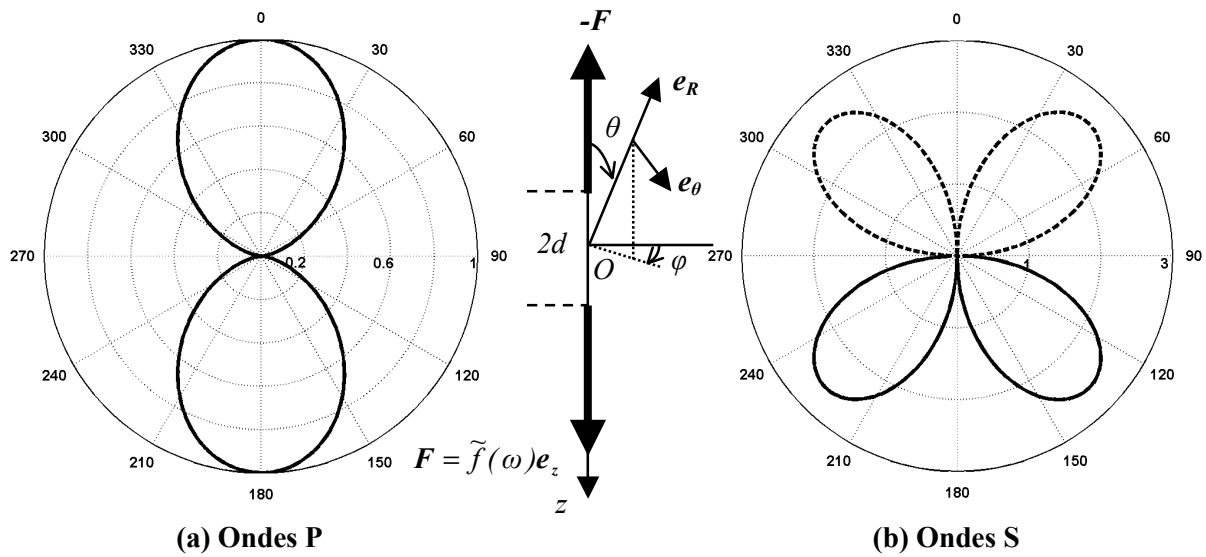
Utilisant un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}(\omega)d}{2\pi\rho\alpha^3}$ , les fonctions de directivité du couple de forces sans moment dans l'approximation basse fréquence sont données par

$$\tilde{U}_R^P \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = \cos^2 \theta, \quad (\text{I-36})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = -\frac{\alpha^3}{\beta^3} \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{I-37})$$

$$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-38})$$

Les figures I-6a et I-6b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S dans l'approximation basse fréquence. Ils sont représentés dans un plan  $\varphi$  quelconque et sont invariants par symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz]$ .



**Figure I-6 : diagrammes de directivité du couple de forces sans moment (basse fréquence)**

- Cas général : la distance  $d$  n'est pas négligeable devant les longueurs d'ondes  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\beta$

Le rayonnement en champ lointain s'écrit

$$\tilde{\underline{u}}_R^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = j \frac{\tilde{f}(\omega) k_\alpha^2}{2\pi\rho\omega^2} \cos \theta \sin(k_\alpha d \cos \theta) \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R}, \quad (\text{I-39})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^2}{2\pi\rho\omega^2} \sin \theta \sin(k_\beta d \cos \theta) \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R}, \quad (\text{I-40})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi^{(F,-F)}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-41})$$

Pour un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}(\omega)}{2\pi\rho\alpha^2}$ , les fonctions de directivité du couple de force sans moment dans le cas général sont données par

$$\tilde{U}_R^P \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = \cos \theta \sin(k_\alpha d \cos \theta), \quad (\text{I-42})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin \theta \sin(k_\beta d \cos \theta), \quad (\text{I-43})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SH} \Big|^{(F,-F)}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-44})$$

Les figures I-7a et I-7b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S pour un rapport  $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ . Ils sont représentés dans un plan  $\varphi$  quelconque et sont invariants par symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz)$ .

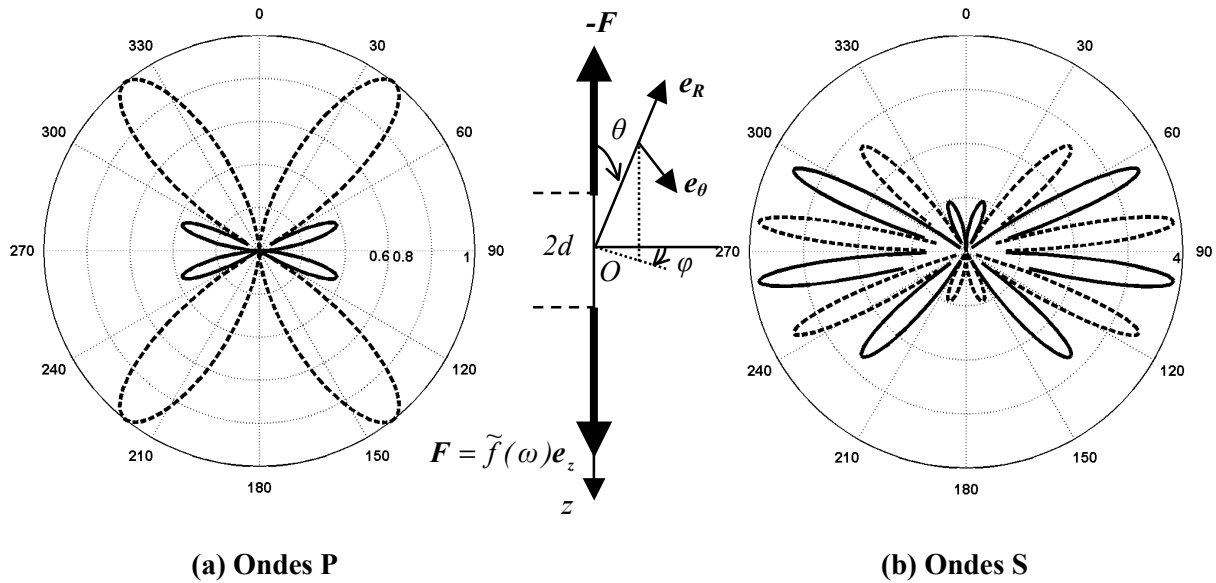


Figure I-7 : diagrammes de directivité du couple de forces sans moment ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ )

Ces diagrammes de directivité mettent en évidence l'apparition de lobes d'interférences lorsque la fréquence augmente.

#### I.1.4.2 Couple de forces avec moment

Il s'agit de la combinaison dans le plan  $(xOz)$  de deux forces d'intensité  $F_0$  séparées d'une distance  $2d$  agissant en sens opposé dans une direction faisant un angle  $\theta_0$  avec la ligne les joignant (figure I-8). En écrivant

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}, \quad (\text{I-45})$$

cette source peut être vue comme la combinaison d'un couple de forces sans moment  $(\mathbf{F}_d, -\mathbf{F}_d)$  et d'un couple de forces  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  agissant dans la direction perpendiculaire à la ligne les joignant.

Le couple de forces sans moment fait l'objet de la section I.1.4.1 ; c'est pourquoi seul le couple  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  est traité ici. La solution complète est donnée en annexe A ; seule la solution en champ lointain dans le plan  $\varphi = 0$  est présentée ici.

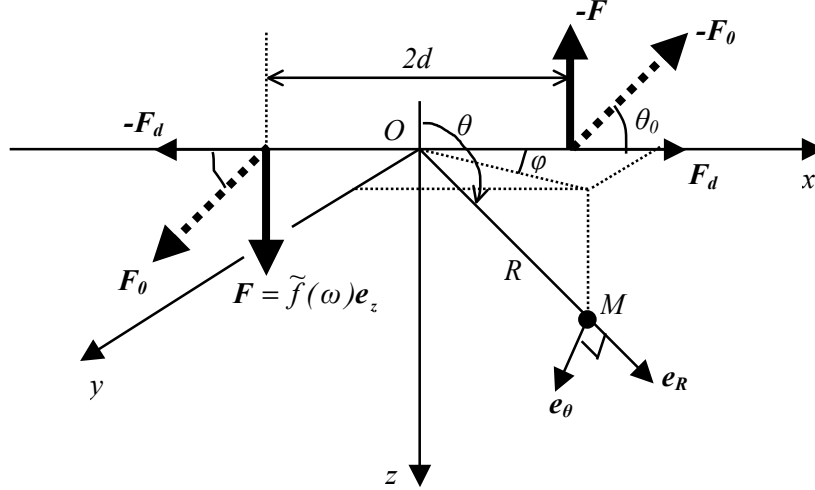


Figure I-8 : couple de forces avec moment dans une formation élastique infinie

De manière analogue au calcul du rayonnement en champ lointain du couple de forces sans moment, deux cas sont à distinguer :

- $\frac{d}{\lambda_\alpha} \ll 1$  ( $\Rightarrow \frac{d}{\lambda_\beta} \ll 1$ ) : approximation basse fréquence

$$\tilde{\underline{u}}_R^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = j \sin \theta \cos \theta \frac{\tilde{f}(\omega) k_\alpha^3 d \exp(-jk_\alpha R)}{2\pi\rho\omega^2 R}, \quad (\text{I-45})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = -j \sin^2 \theta \frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^3 d \exp(-jk_\beta R)}{2\pi\rho\omega^2 R}, \quad (\text{I-46})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-47})$$

Utilisant un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}(\omega)d}{2\pi\rho\alpha^3}$ , les fonctions de directivité du couple de forces

avec moment dans l'approximation basse fréquence sont données par

$$\tilde{U}_R^P \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{I-48})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = -\frac{\alpha^3}{\beta^3} \sin^2 \theta, \quad (\text{I-49})$$

$$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-50})$$

Les figures I-9a et I-9b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S dans l'approximation basse fréquence.

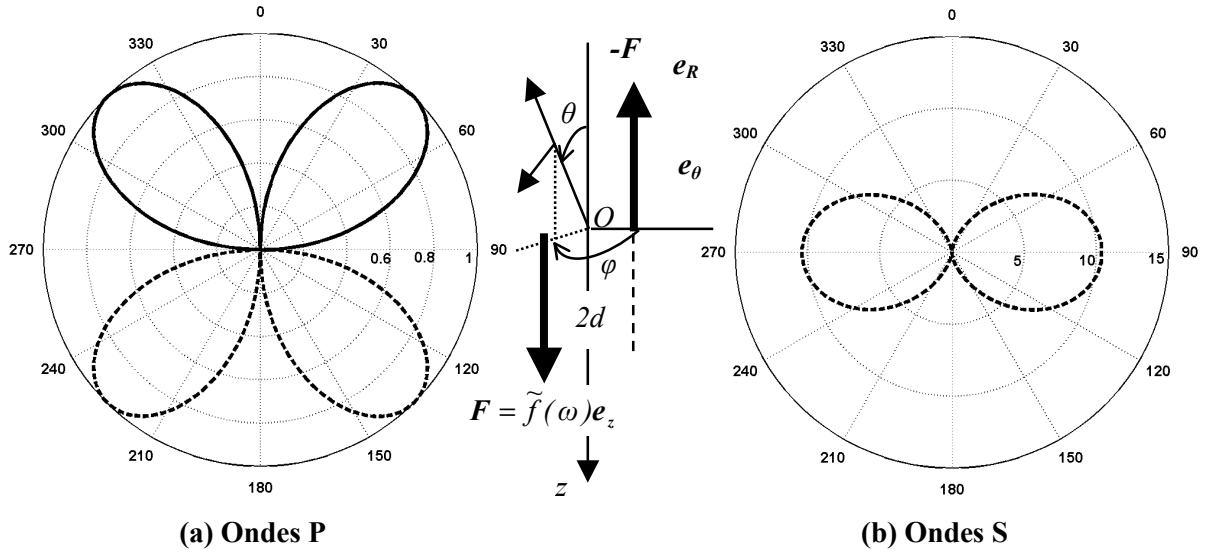


Figure I-9 : diagrammes de directivité du couple de forces avec moment (basse fréquence)

- Cas général : la distance  $d$  n'est pas négligeable devant les longueurs d'ondes  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\beta$

$$\tilde{\underline{u}}_R^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = j \frac{\tilde{f}(\omega) k_\alpha^2}{2\pi\rho\omega^2} \cos\theta \sin(k_\alpha d \sin\theta) \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{R}, \quad (\text{I-51})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^2}{2\pi\rho\omega^2} \sin\theta \sin(k_\beta d \sin\theta) \frac{\exp(-jk_\beta R)}{R}, \quad (\text{I-52})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-53})$$

Pour un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}(\omega)}{2\pi\rho\alpha^2}$ , les fonctions de directivité du couple de force avec moment dans le cas général sont données par

$$\tilde{U}_R^P \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = \cos\theta \sin(k_\alpha d \sin\theta), \quad (\text{I-54})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV} \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin\theta \sin(k_\beta d \sin\theta), \quad (\text{I-55})$$

$$\tilde{U}_\varphi^{SH} \Big|^{moment}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-56})$$

Les figures I-10a et I-10b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S pour un rapport  $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ .

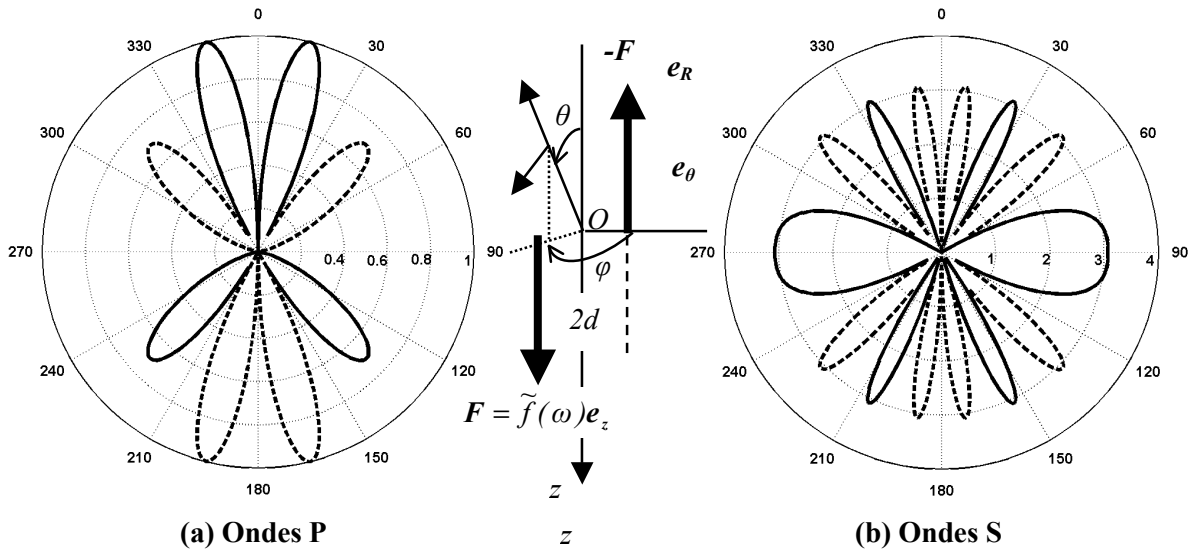


Figure I-10 : diagrammes de directivité du couple de forces avec moment ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} = 1$ )

Dans le cas où la distance  $d$  n'est plus négligeable devant les longueurs d'onde, les diagrammes de directivité du couple de forces avec moment mettent en évidence l'apparition de lobes d'interférences lorsque la fréquence augmente.

## I.2 Conception d'une source directionnelle pour la sismique

Des applications telles que le monitoring sismique requiert un signal source le plus stable possible ; si la source est posée en surface ou enterrée, la variation de la zone altérée avec les conditions climatiques pose un problème de couplage et de « fantôme » non constant qui modifie le signal source. Par ailleurs, dans le cadre de l'imagerie en zones de piémont, le champ incident émis par une source posée en surface traverse des zones dont la structure géologique est très perturbée ; le signal reçu devient alors très complexe à analyser.

Il est donc proposé d'étudier une source enterrée directionnelle, qui rayonnerait de façon privilégiée en direction de sa cible, pour éliminer les problèmes de réflexion sur la surface du sol.

### I.2.1 Source directionnelle idéale

#### I.2.1.1 Combinaison de deux forces

Soit la combinaison de deux forces verticales  $F_1 = \tilde{f}_{F_1}(\omega)e_z$  et  $F_2 = \tilde{f}_{F_2}(\omega)e_z$  séparées d'une distance  $2d$  (figure I-11). Les calculs étant reportés en annexe A, le rayonnement en champ lointain dans l'approximation basse fréquence ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} \ll 1$ ) est donné par

$$\underline{\tilde{u}}_R(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{k_\alpha^2 \cos \theta}{4\pi\rho\omega^2} \left[ (1 - jk_\alpha d \cos \theta) \tilde{f}_{F_1}(\omega) + (1 + jk_\alpha d \cos \theta) \tilde{f}_{F_2}(\omega) \right] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-57})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = \frac{k_\beta^2 \sin \theta}{4\pi\rho\omega^2} \left[ (1 - jk_\beta d \cos \theta) \tilde{f}_{F_1}(\omega) + (1 + jk_\beta d \cos \theta) \tilde{f}_{F_2}(\omega) \right] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-58})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-59})$$

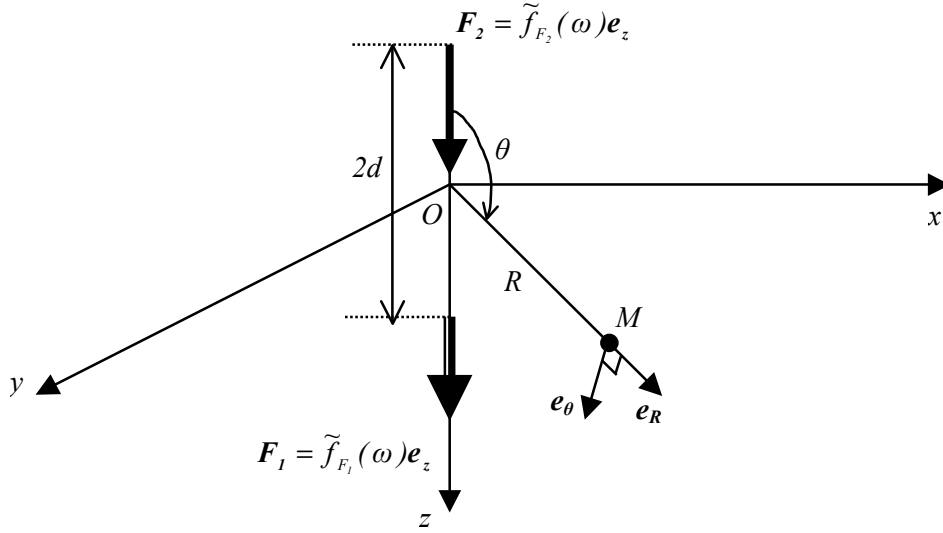


Figure I-11 : combinaison de deux forces en milieu infini

Cette combinaison de sources est rendue directionnelle en ajustant les amplitudes  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  de manière à minimiser l'énergie rayonnée dans la direction opposée à l'objectif à imager (le réservoir par exemple). Ce dernier étant situé dans le demi-plan  $z > 0$ , l'énergie rayonnée dans le demi-plan  $z < 0$  (c'est à dire vers la surface) est évaluée ; cette dernière est définie comme la partie réelle du flux du vecteur de Poynting à travers la demi-sphère supérieure ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ). Le vecteur de Poynting complexe est défini par [Auld, 1990]

$$P(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{M}; \omega)^* \cdot \overline{\overline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{M}; \omega)}}}{2}, \quad (\text{I-60})$$

où  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{M}; \omega)$  est le vecteur vitesse et  $\overline{\overline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{M}; \omega)}}$  le tenseur des contraintes en régime harmonique ; l'exposant \* désigne la quantité complexe conjuguée. À partir de (I-57) et (I-58), de l'expression du tenseur des déformations et de la loi de Hooke, l'énergie émise dans le demi-plan  $z < 0$  ainsi que l'énergie totale sont calculés en champ lointain. La figure I-12a représente le quotient de l'énergie émise dans le demi-plan  $z < 0$  par l'énergie totale rayonnée en fonction du module et de la phase de la quantité complexe  $Q$  définie par

$$Q = \frac{\tilde{f}_{F_2}(\omega)}{\tilde{f}_{F_1}(\omega)}. \quad (\text{I-61})$$

La figure I-12b est un zoom sur le minimum de l'énergie rayonnée dans le demi-plan  $z < 0$  : le domaine  $0.9 \leq |Q| \leq 1.1$  et  $\frac{5\pi}{6} \leq \arg(Q) \leq \frac{35\pi}{36}$  définit une zone où le taux d'énergie rayonnée vers la surface est voisin de -10 dB. Le résultat est obtenu pour une gamme de module et de phase du quotient  $Q$  suffisamment large pour rendre possible la réalisation de la source.

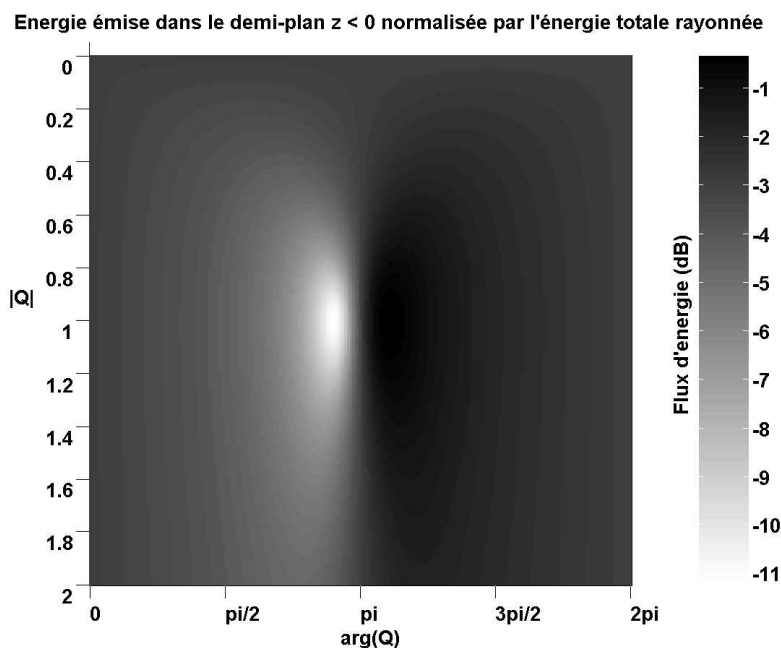


Figure I-12a : énergie émise dans le demi-plan  $z < 0$  normalisée par l'énergie totale rayonnée en fonction de la phase et de l'amplitude de  $Q$

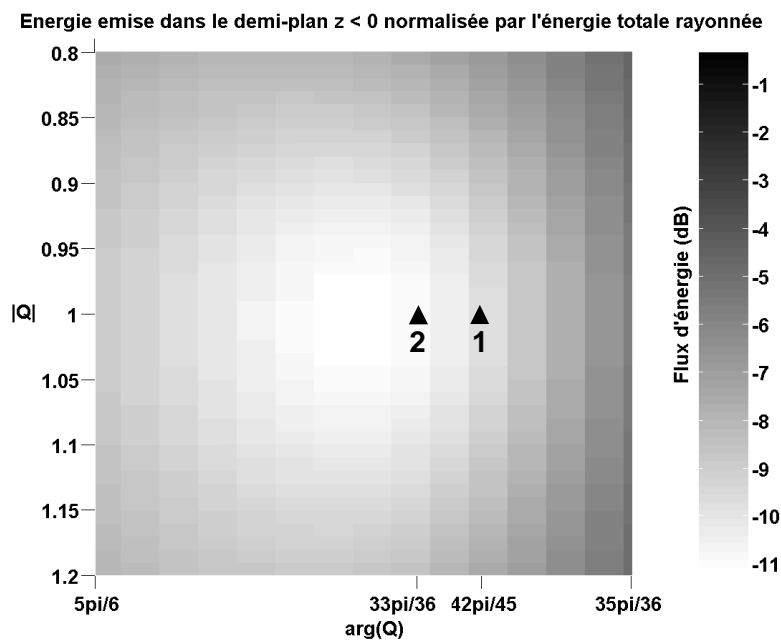


Figure I-12b : zoom de la figure I-12a

$\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  vérifient (I-62) avec  $\theta_\alpha = 0$  (1) et (I-69) avec  $\theta_\beta = \pi/4$  (2)



Un choix physique d'amplitude et de phase est également possible à partir de l'expression (I-57) en remarquant que si  $\tilde{\underline{u}}_R(\mathbf{M}; \omega)$  est nul dans une direction  $\theta_\alpha$ , la relation entre  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  s'écrit

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = \tilde{c}_\alpha(\omega, d, \theta_\alpha) \tilde{f}_{F_2}(\omega) = -\frac{1 + jk_\alpha d \cos \theta_\alpha}{1 - jk_\alpha d \cos \theta_\alpha} \tilde{f}_{F_2}(\omega). \quad (\text{I-62})$$

L'expression du champ rayonné par la source directionnelle est alors

$$\tilde{\underline{u}}_R(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = -j \frac{\tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \frac{k_\alpha^3 d}{(1 - jk_\alpha d \cos \theta_\alpha)} \cos \theta [\cos \theta - \cos \theta_\alpha] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-63})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = j \frac{\tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \frac{k_\beta^3 d}{(1 - jk_\alpha d \cos \theta_\alpha)} \sin \theta \left[ \cos \theta - \frac{k_\alpha}{k_\beta} \cos \theta_\alpha \right] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-64})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = 0. \quad (\text{I-65})$$

Utilisant un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}_{F_2}(\omega)d}{2\pi\rho\alpha^3(1 - jk_\alpha d \cos \theta_\alpha)}$ , les fonctions de directivité de la source directionnelle sont données par

$$\tilde{U}_R^P(\theta, \varphi; \omega) = -\cos \theta [\cos \theta - \cos \theta_\alpha], \quad (\text{I-66})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV}(\theta, \varphi; \omega) = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \sin \theta \left[ \cos \theta - \frac{k_\alpha}{k_\beta} \cos \theta_\alpha \right], \quad (\text{I-67})$$

$$\tilde{U}_\varphi^{SH}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-68})$$

Les figures I-13a et I-13b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S ;  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  est imposée réelle positive et  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  vérifie l'équation (I-62) avec  $\theta_\alpha = 0$ . Ces diagrammes sont représentés dans un plan  $\varphi$  quelconque et sont invariants par symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz]$ .

Un autre choix possible d'amplitude et de phase de  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  consiste à annuler  $\tilde{\underline{u}}_\theta(\mathbf{M}; \omega)$  (équation (I-58)) dans une direction  $\theta_\beta$ ; la relation entre  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  devient

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = \tilde{c}_\beta(\omega, d, \theta_\beta) \tilde{f}_{F_2}(\omega) = -\frac{1 + jk_\beta d \cos \theta_\beta}{1 - jk_\beta d \cos \theta_\beta} \tilde{f}_{F_2}(\omega), \quad (\text{I-69})$$

et le rayonnement en champ lointain de la source directionnelle est donné par

$$\tilde{\underline{u}}_R(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = -j \frac{\tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \frac{k_\alpha^3 d}{(1 - jk_\beta d \cos \theta_\beta)} \cos \theta \left[ \cos \theta - \frac{k_\beta}{k_\alpha} \cos \theta_\beta \right] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-70})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = j \frac{\tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \frac{k_\beta^3 d}{(1 - jk_\beta d \cos \theta_\beta)} \sin \theta [\cos \theta - \cos \theta_\beta] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-71})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = 0. \quad (\text{I-72})$$

Avec un facteur de normalisation égal à  $\frac{j\omega\tilde{f}_{F_2}(\omega)d}{2\pi\rho\alpha^3(1-jk_\beta d \cos\theta_\beta)}$ , les fonctions de directivité sont

$$\tilde{U}_R^P(\theta, \varphi; \omega) = -\cos\theta \left[ \cos\theta - \frac{k_\beta}{k_\alpha} \cos\theta_\beta \right], \quad (\text{I-73})$$

$$\tilde{U}_\theta^{SV}(\theta, \varphi; \omega) = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \sin\theta [\cos\theta - \cos\theta_\beta], \quad (\text{I-74})$$

$$\tilde{U}_\varphi^{SH}(\theta, \varphi; \omega) = 0. \quad (\text{I-75})$$

Les figures I-14a et I-14b représentent respectivement les diagrammes de directivité des ondes P et S ;  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  est imposée réelle positive et  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  vérifie l'équation (I-69) avec  $\theta_\beta = \frac{\pi}{4}$ . Ces diagrammes sont représentés dans un plan  $\varphi$  quelconque et sont invariants par symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz]$ .

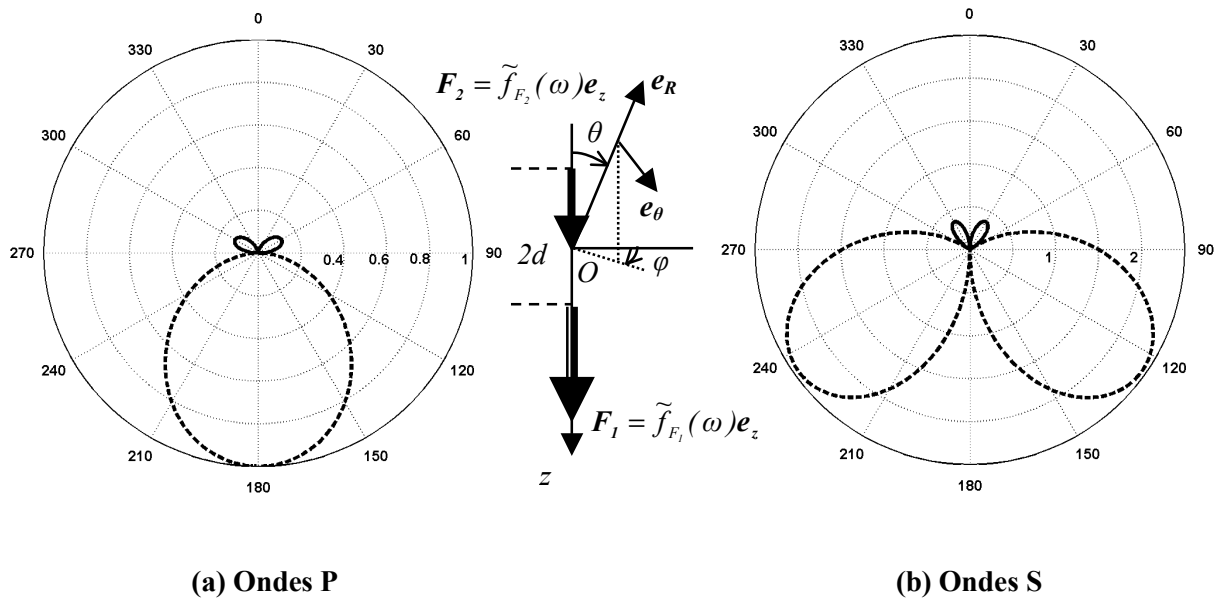


Figure I-13 : diagrammes de directivité de la source directionnelle

$\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  vérifient (I-62) avec  $\theta_\alpha = 0$

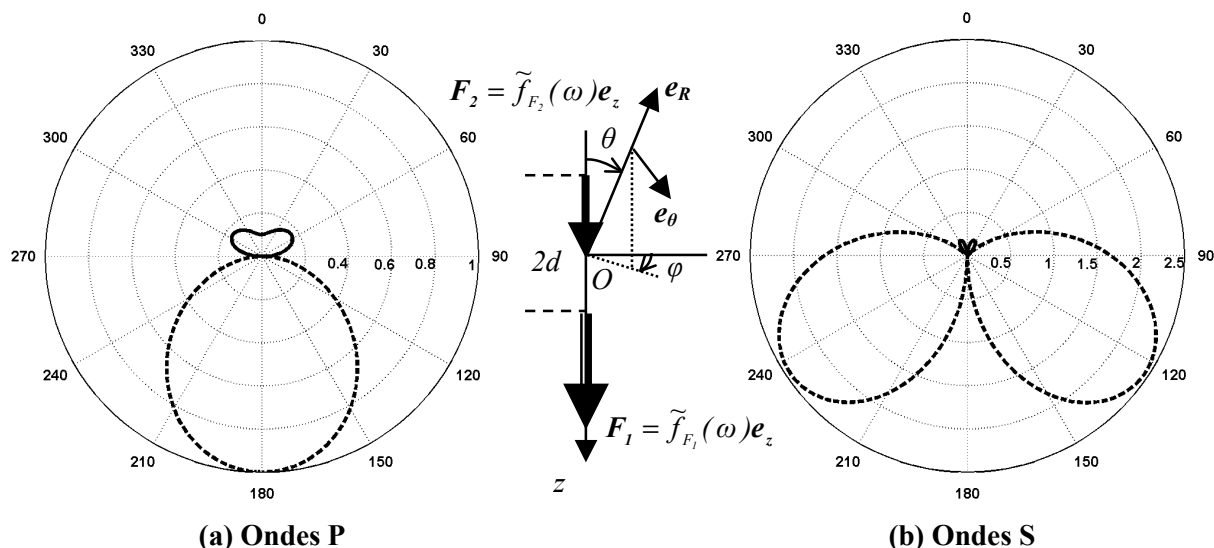


Figure I-14 : diagrammes de directivité de la source directionnelle

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) \text{ et } \tilde{f}_{F_2}(\omega) \text{ vérifiant (I-69) avec } \theta_\beta = \pi/4$$

La figure I-14 présente des diagrammes de directivité similaires à ceux de la figure I-13.

Pour les cas  $\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha)|_{\theta=\theta_\alpha} = 0$  et  $\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta)|_{\theta=\theta_\beta} = 0$ , les valeurs correspondantes des amplitudes et des phases de  $Q$  sont reportées sur la figure I-12b. Les taux d'énergie rayonnée vers la surface sont très proches du choix optimal de module et de phase de  $Q$ .

L'analyse des figures I-13 et I-14 montre que l'énergie rayonnée vers la surface est principalement due aux ondes S se propageant dans le secteur angulaire  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Par ailleurs, ces figures montrent que le rayonnement est directionnel à la fois pour les ondes P et pour les ondes S

### I.2.1.2 Combinaison d'une force et d'un couple de forces

Il est important de noter que la combinaison de deux forces décrite dans la section précédente est équivalente à la combinaison d'une force et d'un couple de forces sans moment, séparés d'une distance  $2d$  (figure I-15).

Les termes de rayonnement en champ lointain de cette combinaison sont aisés à calculer puisque les sources sont toutes deux situées à l'origine du repère ; ainsi, le rayonnement s'écrit comme la somme du rayonnement du couple de forces avec celui de la force.

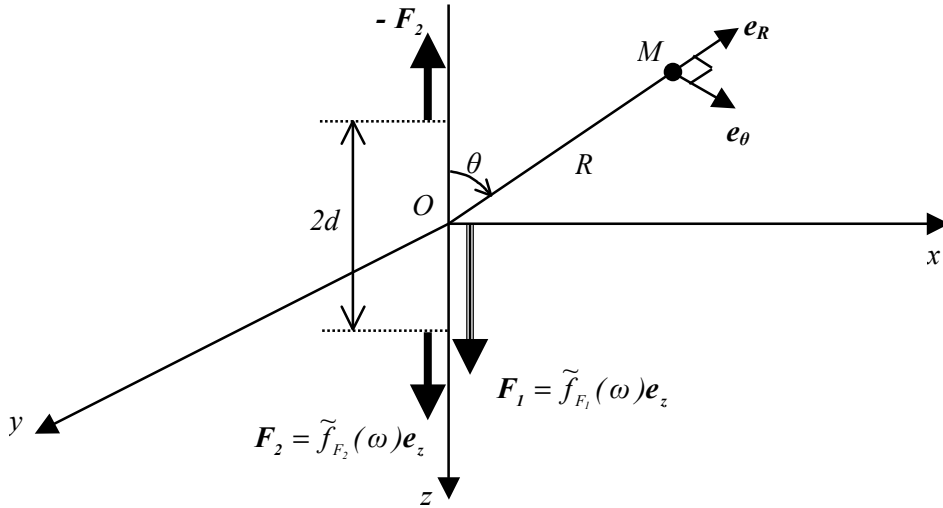


Figure I-15 : combinaison d'un couple de forces et d'une force en milieu infini,

En champ lointain et dans l'approximation basse fréquence, c'est à dire pour  $\frac{d}{\lambda_\alpha} \ll 1$ ,

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{k_\alpha^2 \cos \theta}{4\pi\rho\omega^2} [\tilde{f}_{F_1}(\omega) - (2jk_\alpha d \cos \theta) \tilde{f}_{F_2}(\omega)] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-76})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = \frac{k_\beta^2 \sin \theta}{4\pi\rho\omega^2} [\tilde{f}_{F_1}(\omega) - (2jk_\beta d \cos \theta) \tilde{f}_{F_2}(\omega)] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-77})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-78})$$

Ainsi, si  $\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega)$  est nul dans une direction  $\theta_\alpha$ , la relation entre  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  s'écrit

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = \tilde{c}_\alpha^{eq}(\omega, d, \theta_\alpha) \tilde{f}_{F_2}(\omega) = 2jk_\alpha d \cos \theta_\alpha \tilde{f}_{F_2}(\omega). \quad (\text{I-79})$$

L'expression du champ rayonné par la source directionnelle est alors

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = j \frac{k_\alpha^3 d \tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \cos \theta [\cos \theta - \cos \theta_\alpha] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-80})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = -j \frac{k_\beta^3 d \tilde{f}_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \sin \theta \left[ \cos \theta - \frac{k_\alpha}{k_\beta} \cos \theta_\alpha \right] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-81})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega; \theta_\alpha) = 0. \quad (\text{I-82})$$

De même, si  $\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega)$  s'annule dans une direction  $\theta_\beta$ , la relation entre  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  devient

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = \tilde{c}_\beta^{eq}(\omega, d, \theta_\beta) \tilde{f}_{F_2}(\omega) = 2jk_\beta d \cos \theta_\beta \tilde{f}_{F_2}(\omega), \quad (\text{I-83})$$

et le rayonnement en champ lointain de la source directionnelle est donné par

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = j \frac{k_\alpha^3 \tilde{d}f_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \cos\theta \left[ \cos\theta - \frac{k_\beta}{k_\alpha} \cos\theta_\beta \right] \frac{e^{-jk_\alpha R}}{R}, \quad (\text{I-84})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = -j \frac{k_\beta^3 \tilde{d}f_{F_2}(\omega)}{2\pi\rho\omega^2} \sin\theta \left[ \cos\theta - \cos\theta_\beta \right] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{I-85})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega; \theta_\beta) = 0. \quad (\text{I-86})$$

Après normalisation par  $-j \frac{\omega \tilde{d}f_{F_2}(\omega) d}{2\pi\rho\alpha^3}$  des équations (I-80) à (I-82) et (I-84) à (I-86), les diagrammes de directivité sont les mêmes que ceux présentés dans la section précédente (équations (I-66) à (I-68) et (I-73) à (I-75)).

## I.2.2 Source directionnelle physique

### I.2.2.1 Les sources piézoélectriques

Pour des applications de monitoring sismique, les géophysiciens ont besoin de détecter de faibles variations de la quantité qu'ils mesurent (pression, vitesse, densité, temps d'arrivée,...) à deux dates différentes. Le signal envoyé par les sources classiques (explosifs, vibreurs sismiques) n'est pas totalement reproductible de par leurs modes opératoires ; c'est pourquoi il est proposé d'utiliser la technologie piézoélectrique, qui présente une excellente reproductibilité. Les transducteurs piézoélectriques permettent la conversion directe d'un signal acoustique en signal électrique et la conversion inverse d'un signal électrique en signal acoustique. Leur domaine d'utilisation recouvre notamment les applications industrielles des ultrasons [Decarpigny et Tierce, 1986] (usinage, soudage, nettoyage, génération d'aérosols,...), l'imagerie médicale [Naillon et al., 1983] (échographie), le contrôle non destructif [Nongaillard, 1987] et l'acoustique sous-marine [Wilson, 1989] (système sonar, d'imagerie ou de télécommunication, sondeurs).

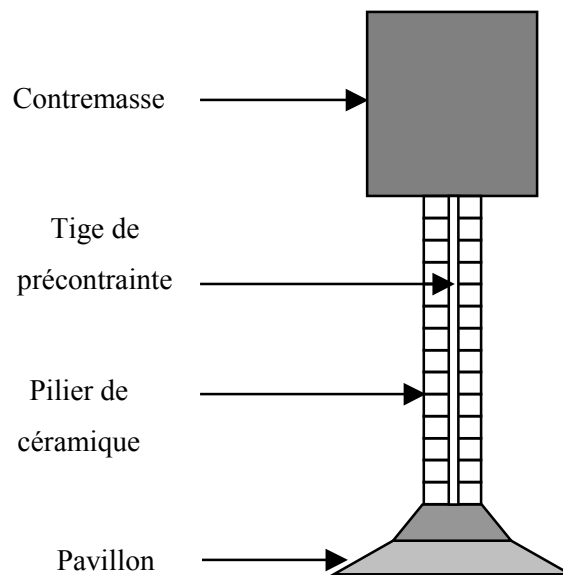
Les applications sismiques visées nécessitent le développement de transducteurs piézoélectriques basse fréquence de forte puissance ; la conception de tels transducteurs suppose de fait la maîtrise de problèmes physiques complexes et de natures différentes [Woollet, 1962, 1963, 1968 - Wilson 1988]. Ainsi, les phénomènes liés à la fatigue et au comportement non-linéaire du matériau peuvent conduire à une rupture du transducteur et définissent une limite mécanique de puissance. Les problèmes de dépolarisation des céramiques piézoélectriques sous champ électrique élevé, de non-linéarité électrique et d'isolation définissent une limite électrique.

Les plus simples transducteurs basse fréquence sont les transducteurs Tonpitz (figure I-16), structures vibrant longitudinalement et généralement constituées par :

- Une colonne motrice formée d'un empilement de céramiques piézoélectriques annulaires, séparées par des électrodes annulaires de même rayon. Les axes de polarisation des céramiques sont parallèles à l'axe du moteur, leurs orientations étant alternées. Les électrodes peuvent être très

minces (quelques dixièmes de millimètres), et assurer seulement une fonction d'excitation électrique, ou épaisse (épaisseur comparable à celle des céramiques), au quel cas elles assurent de plus une fonction mécanique en contribuant à l'élasticité de la colonne.

- Un pavillon, dont la face avant est en contact avec le milieu de propagation. Il assure l'adaptation d'impédance partielle entre la colonne motrice et le milieu et est souvent constitué d'un matériau léger (aluminium par exemple). Ses dimensions transversales sont liées aux conditions de rayonnement.
- Une contremasse, constituée par un matériau de forte densité, destinée à minimiser la vibration arrière de la colonne motrice.
- Une tige de précontrainte, qui assure la cohérence entre céramiques et électrodes et maintient les céramiques en état de compression permanente durant leur excitation, condition indispensable pour éviter leur fracture durant les phases de traction mécanique.



**Figure I-16 : présentation schématique d'un transducteur Tonpiliz**

Ces appareils présentent plusieurs avantages :

- Ils garantissent la reproductibilité des signaux sources dans la mesure où l'échauffement induit par les dissipations d'énergie dans le transducteur est peu élevé,
- Ils nécessitent peu de maintenance.

Deux remarques sont à formuler :

- En acoustique sous-marine, le rendement des transducteurs piézoélectriques, défini comme le rapport de l'énergie vibratoire rayonnée sur l'énergie électrique active en entrée, est de l'ordre de 60 %.
- Les différentes causes de limitations de puissance dans un transducteur piézoélectrique sont sa capacité à stocker un maximum d'énergie électrique et mécanique ; autrement dit, la puissance

d'un transducteur Tonpitz dépend du pilier de céramique et de la contremasse. Pour être enterré, un tel transducteur doit conserver une taille et un poids raisonnable, ce qui diminue d'autant sa puissance. Cet inconvénient peut être compensé par des émissions longue durée ou répétitives qui améliorent le rapport signal sur bruit ;

### I.2.2.2 Transducteurs directionnels en acoustique sous-marine

En acoustique sous-marine, l'évolution des antennes sonars vers les basses fréquences ( $100\text{ Hz}$ ,  $1\text{ kHz}$ ) a conduit au développement de transducteurs fournissant des puissances élevées pour un encombrement réduit : les flextenseurs. Ces derniers sont formés par exemple d'une coque cylindrique, de section ovale, à l'intérieur de laquelle est fixé un moteur constitué de céramiques piézoélectriques. Leur fonctionnement exploite la conversion du mouvement longitudinal de leur moteur en mouvement de flexion de leur coque, pour amplifier la puissance acoustique rayonnée dans le milieu en contact avec la coque [Rolt, 1990]. Afin de réaliser un transducteur sonar directionnel, Butler et al. [Butler, 1992 - Butler et al., 1997] proposent que le moteur soit constitué par deux colonnes de céramiques solidaires mécaniquement (figure I-17).

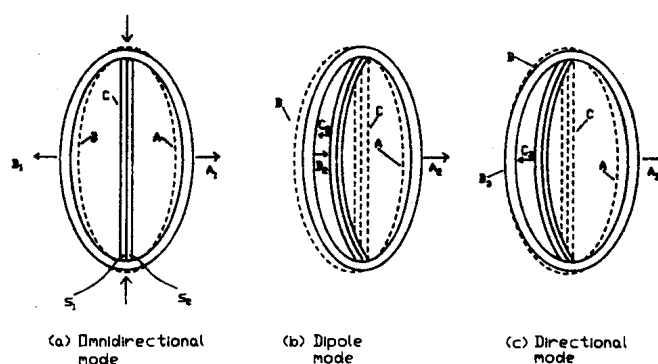


Figure I-17 : principe de fonctionnement du flextenseur de classe IV

Lorsque les colonnes de céramique sont excitées en phase, les moteurs vibrent en dilatation-compression et leur mouvement est converti, via les liaisons, en mouvement de flexion de la coque (figure I-16a) dont le rayonnement est essentiellement monopolaire.

Lorsque les colonnes sont excitées en opposition de phase, cela provoque un mouvement de flexion qui produit une oscillation transversale de la coque (figure I-17b) dont le rayonnement est dipolaire. Il s'agit ensuite de régler l'amplitude et la phase de l'excitation pour combiner ces deux modes à la même fréquence et obtenir un mode directionnel (figure I-17c). La principale difficulté consiste à obtenir que les deux modes de fonctionnement aient des fréquences de résonances suffisamment proches pour obtenir des amplitudes de vibration élevées pour chaque mode et par conséquent un rayonnement directionnel efficace. Plusieurs exemplaires de cette source ont été conçus et réalisés avec succès [Butler & al., 2004]. Le rayonnement obtenu n'est naturellement directionnel que pour l'onde de compression (rayonnement dans un fluide). Ce concept n'est pas directement transposable en sismique car la rigidité du milieu de propagation peut être plus élevée que la rigidité de la coque.

### I.2.2.3 Principe de sources piézoélectriques directionnelles pour application sismique

Pour concevoir un transducteur sismique fonctionnant comme la source directionnelle idéale étudiée à la section précédente, il faut imaginer un système capable de rayonner comme une force et un couple de forces sans moment. La source envisagée (figure I-18) est basée sur un transducteur de type Janus [Boucher, 1988], dont la simplicité de fabrication et la compacité sont adaptés aux applications sismiques.

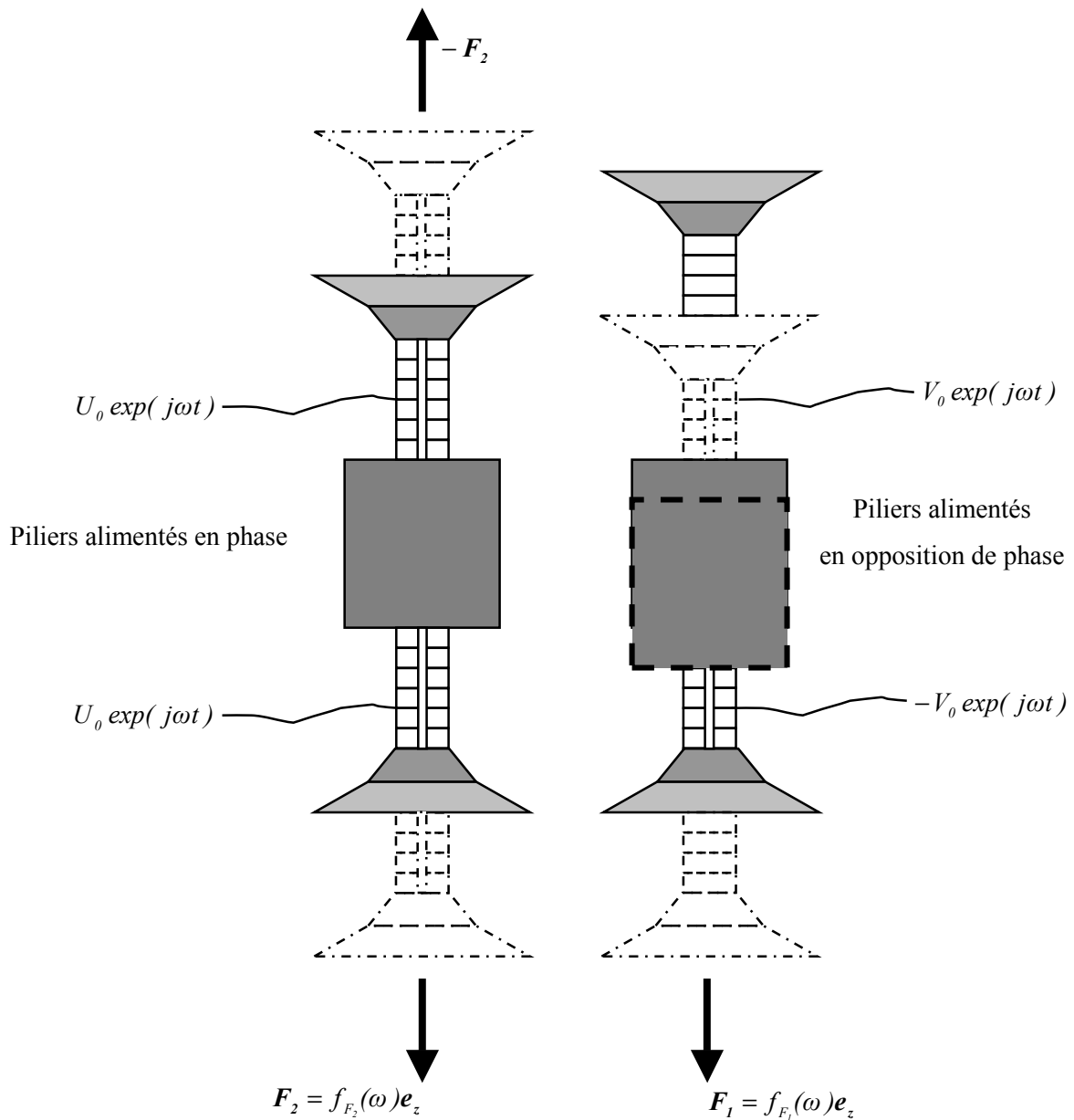


Figure I-18 : principe de fonctionnement du transducteur Janus directif

Le rayonnement de ce transducteur doit être rendu équivalent à celui de la source directionnelle idéale décrite à la section I.2.1 (figure I-11 ou I-15).



Pour cela, il faut adapter l'amplitude et la phase de la tension d'excitation de chaque pilier :

- Si les piliers sont alimentés en phase, ils se dilatent ou se contractent en même temps ; ainsi, la contremasse ne bouge pas et les vibrations des pavillons inférieur et supérieur créent deux forces d'intensité et de direction identique mais de sens opposés  $\pm F_2$  (figure I-18). Dans ce cas, le rayonnement du transducteur Janus est équivalent à celui du couple de forces sans moment.
- Dans le même temps, si les piliers sont alimentés en opposition de phase, l'un va se dilater tandis que l'autre va se contracter ; la contremasse se met en mouvement oscillatoire, les vibrations des pavillons inférieur et supérieur agissent comme une force  $F_1$  (figure I-18) sur le milieu extérieur.

Si les tensions d'excitation sont ajustées de manière à ce que les forces créées  $F_1$  et  $F_2$  satisfassent la condition (I-79) ou (I-83), le rayonnement obtenu doit s'approcher du rayonnement de la source directionnelle idéale.

### I.3 Problèmes associés à la conception d'un transducteur sismique directionnel

Dans la section I-2, une source idéale directionnelle en milieu infini a été conçue et un transducteur piézoélectrique fonctionnant sur le principe directionnel théorique a été proposé. Les questions soulevées par la conception d'une source enterrée directionnelle sont de deux ordres : d'une part le principe directionnel théorique doit rester valable en milieu réel et d'autre part, l'interaction du transducteur directionnel piézoélectrique avec son environnement doit être prise en compte au niveau de la conception. Ces deux points sont développés dans cette partie.

#### I.3.1 Rayonnement de sources directionnelles idéales en milieu réel

Le principe de source directionnelle idéale a été établi en milieu infini homogène isotrope. Le milieu de propagation réel est caractérisé par la présence d'une surface libre (le sol) et d'une couche du proche sous-sol de caractéristiques physiques inhomogènes (la zone altérée). Ainsi, dans l'application réelle, le rayonnement en champ proche de la source est susceptible d'interagir avec la surface et la zone altérée.

##### I.3.1.1 Évaluation du champ proche de la source

Dans le cadre de l'approximation basse fréquence ( $\frac{d}{\lambda_\alpha} \ll 1$ ), les combinaisons de sources vues dans la section précédente sont équivalentes à une source directionnelle en milieu infini et en champ lointain. Il est important de quantifier la valeur de la distance d'observation  $R$  pour laquelle le rayonnement de la source directionnelle est effectivement celui calculé en champ lointain. En effet, pour des raisons de coût, la source directionnelle ne peut être enterrée plus profondément qu'à une vingtaine de mètres. A cette distance, la surface est dans le champ proche de la source et l'interaction

résultante peut profondément modifier le signal enregistré au niveau du réservoir. D'après les expressions (I-5) à (I-7), le rayonnement de toute source peut se décomposer sous la forme

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_{\underline{R}}(R, \theta; \omega) + \tilde{u}_R(R, \theta; \omega), \quad (\text{I-87})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_{\underline{\theta}}(R, \theta; \omega) + \tilde{u}_\theta(R, \theta; \omega), \quad (\text{I-88})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{I-89})$$

$\tilde{u}_{\underline{R}}(R, \theta; \omega)$  et  $\tilde{u}_{\underline{\theta}}(R, \theta; \omega)$  sont les contributions radiales et tangentielles des termes d'ordre supérieur au champ proche ;  $\tilde{u}_R(R, \theta; \omega)$  et  $\tilde{u}_\theta(R, \theta; \omega)$  sont les termes de champ lointain.

Un indicateur de l'importance relative du champ proche par rapport au champ lointain est l'erreur quadratique moyenne  $\varepsilon_m$  ( $m = R$  ou  $\theta$ ) définie comme suit : pour  $N$  valeurs  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) comprises entre  $0$  et  $\pi$ ,

$$\varepsilon_m(R) = \left[ \frac{\sum_{i=1}^N |\tilde{u}_m(R, \theta_i; \omega) - \tilde{u}_{\underline{m}}(R, \theta_i; \omega)|^2}{\sum_{i=1}^N |\tilde{u}_{\underline{m}}(R, \theta_i; \omega)|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I-90})$$

Les quantités  $\varepsilon_m$  ( $m = R$  ou  $\theta$ ) sont calculées et représentées (figure I-18) en fonction de  $R$  pour la combinaison d'un couple de forces et d'une force, rendue directionnelle en champ lointain par la condition (I-62) avec  $\theta_\alpha = 0$  (figure I-19).  $\varepsilon_R$  est représentée en trait épais et  $\varepsilon_\theta$  en trait fin.

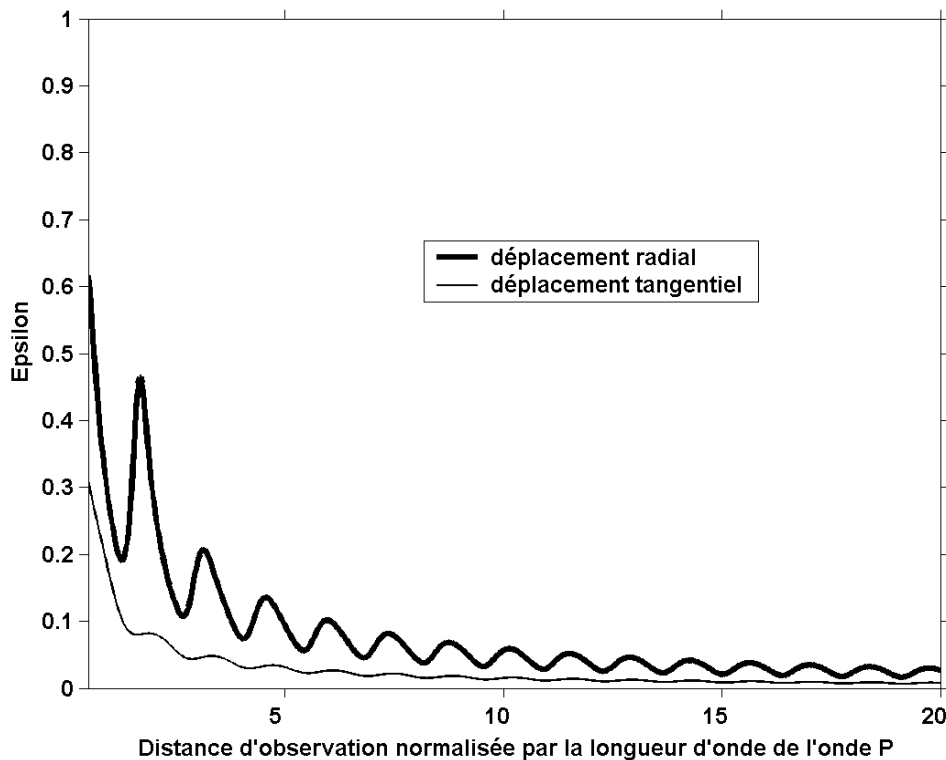


Figure I-19 : erreur quadratique moyenne sur le rayonnement de la source directionnelle

Les oscillations observées sur les courbes sont des effets d'interférences successivement destructives et constructives des ondes P et ondes S, dus au champ proche de la source ; pour le déplacement radial, le critère  $\varepsilon_m(R) \leq 0.1$  est vérifié pour des distances d'observation  $R$  supérieures à  $8\lambda_a$  ; pour le déplacement tangential, ce même critère est vérifié dès que  $R$  devient égal à une longueur d'onde de l'onde P. Ce résultat montre qu'à faible profondeur de la source (de l'ordre d'une longueur d'onde), les interactions avec le sol et la zone altérée doivent être considérées.

### **I.3.1.2 Interaction de la source directionnelle idéale avec la surface et la zone altérée**

Pour valider la robustesse du principe de source directionnelle, il convient de vérifier que les interactions source-surface et source-zone altérée ne modifient pas significativement le signal émis vers le réservoir. La résolution de ce problème passe par la détermination de la réponse d'un milieu semi-infini (stratifié ou non) élastique homogène isotrope à l'action d'une source de type force.

#### **Repères bibliographiques**

Ci-dessous sont présentées quelques-unes des principales références traitant le problème d'une source ponctuelle enfouie dans un demi-espace.

##### ***Lamb, 1903***

L'auteur considère un demi-espace à la surface duquel une force agit normalement ou à l'intérieur duquel une sphère pulsante est introduite. Les solutions à la surface libre en régime harmonique sont calculées dans les cas 2D et 3D. Ce papier fait figure de référence en la matière ; depuis tous les problèmes de source en demi-espace sont appelés « problèmes de Lamb ».

##### ***Cagniard, 1939 - 1962***

Une sphère pulsante agit dans un milieu constitué de deux demi-espace ; Cagniard développe une méthode basée sur des transformations du plan complexe et menant à des solutions intégrales dans le domaine temporel. La version traduite en anglais de 1962 reprend la méthode et en donne pour certains points des justifications mathématiques.

Cette méthode est transposable à tous les problèmes sismiques tridimensionnels et va être reprise par beaucoup d'auteurs.

##### ***Dix, 1954***

Une sphère pulsante agit dans un demi-espace élastique homogène isotrope ; les déplacements en tout point du demi-espace sont calculés par la méthode de Cagniard.

##### ***Pinney, 1954***

Une sphère pulsante ou une source d'ondes S agissent à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope. Les potentiels de déplacements sont décomposés en partie incidente et partie réfléchi ; la partie incidente correspond à la solution en milieu infini connue et la partie réfléchi est calculée en régime harmonique. La solution complète en régime harmonique

permet de déterminer la réponse à une excitation dont la dépendance temporelle est de type Heaviside. La solution pour une source ayant une dépendance temporelle quelconque est ensuite évaluée.

***Pekeris, 1955a, 1955b***

Une force verticale agit à la surface ou à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope. L'auteur calcule les solutions à la surface par une méthode proche de celle de Cagniard.

***Bortfeld 1961, 1962***

Une sphère pulsante agit dans un milieu composé de deux demi-espace ; la source étant située dans le premier milieu cité, les configurations traitées sont : solide/solide, liquide/liquide, solide/liquide, liquide/solide, demi-espace solide ou fluide seul. La méthode utilisée pour calculer les déplacements en tout point du milieu est celle développée par Pinney.

***De Hoop, 1960, 1961***

Une sphère pulsante agit dans un milieu infini ou à l'intérieur d'un demi-espace élastique, homogène, isotrope ; dans le cas du demi-espace les solutions sont données à la surface. L'auteur reprend la méthode de Cagniard et la simplifie en y introduisant un changement de variables ; la méthode a depuis pris le nom de méthode de Cagniard - De Hoop.

***Johnson, 1974***

Une force agit à l'intérieur d'un demi-espace élastique, homogène, isotrope. Par méthode de Cagniard - De Hoop, les solutions à la surface et en tout point du demi-espace sont données. Ce papier est le seul qui donne des résultats complets ; cependant, la méthode de Cagniard - De Hoop n'y est que brièvement rappelée.

***Aki et Richards, 1980***

Dans ce livre, la méthode de Cagniard - De Hoop est expliquée pour des configurations simples. En 2D, tout d'abord où une source d'ondes S agit en milieu infini ou en demi-espace ; puis en 3D, où la source d'ondes S agit dans un milieu composé de deux demi-espace.

***Kennet, 1980 - Müller, 1985***

Une force agit à l'intérieur d'un milieu infini ou d'un demi-espace stratifié ; en tout point du milieu, les solutions en régime harmonique sont calculées par la méthode de la réflectivité. Cette méthode consiste tout d'abord en la décomposition en ondes planes de la solution en milieu infini en régime harmonique; en utilisant alors les coefficients de réflexions et de transmission, cette solution est propagée dans tout le milieu.

***Bouchon, 1981***

Il n'est pas donné ici de solutions analytiques au problème d'une source ponctuelle enfouie dans un demi-espace. L'intérêt de cette référence réside dans le développement de la méthode Discrete Wave Number (DWN). Pour un problème de source ponctuelle enfouie dans un milieu homogène isotrope quelconque, des solutions en régime harmonique peuvent être obtenues sous formes

---

intégrales. La méthode DWN permet d'obtenir des solutions en régime transitoire contenant toutes les contributions pouvant exister dans le milieu (ondes de volume, ondes de surface, ondes guidées,...) Il s'agit d'introduire une répartition périodique de sources dans le milieu afin de discrétiser, dans le domaine des nombres d'onde, le champ rayonné. La réponse impulsionnelle est alors calculée en utilisant la transformation de Fourier à fréquences complexes.

De cette étude bibliographique, il ressort que deux techniques sont parfaitement adaptées pour traiter l'interaction de la source directionnelle avec la surface libre et la zone altérée.

Dans un premier temps, la méthode de Cagniard - De Hoop est choisie pour décrire l'interaction source-surface, c'est à dire pour calculer la fonction de Green associée à une force agissant à l'intérieur d'un demi-espace considéré élastique, homogène et isotrope [Johnson, 1974].

Dans un second temps, pour décrire l'interaction entre le champ émis et la zone altérée, il est nécessaire de connaître la fonction de Green dans un demi-espace élastique homogène isotrope recouvert d'une couche. Dans ce cas, la méthode de Cagniard - De Hoop s'avère complexe à mettre en oeuvre, et coûteuse en temps de calcul ; la méthode de la réflectivité est alors considérée. Cependant, celle-ci donne des résultats dans le domaine des fréquences ; et du fait de la complexité des intégrales, le calcul direct des solutions complètes (ondes de volumes, ondes de surface et ondes guidées) en régime transitoire, par transformation de Fourier inverse, n'est pas trivial. L'alternative proposée, pour calculer les solutions issues de la méthode de la réflectivité en régime transitoire, est la méthode DWN (Discrete Wave Number), proposée par Bouchon et Aki en 1977 et approfondie par Bouchon en 1981. L'ensemble de ces développements et leurs applications au rayonnement de la source directionnelle sont détaillés dans le second chapitre de ce mémoire.

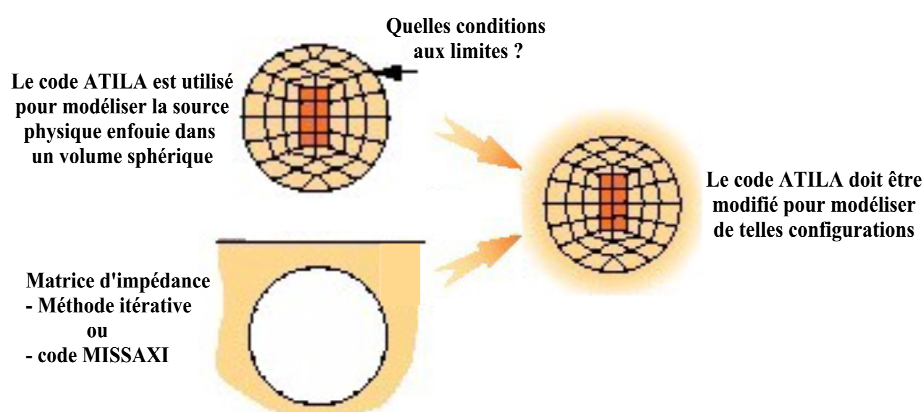
### **I.3.2 Interaction de la source piézoélectrique avec son environnement géophysique**

Le couplage du transducteur avec son environnement géophysique est susceptible de modifier son comportement. Notamment, l'impédance du milieu extérieur « vue » par le transducteur directionnel est différente suivant son mode de fonctionnement (piliers alimentés en phase ou en opposition de phase). L'optimisation de la source nécessite une modélisation numérique du transducteur piézoélectrique couplé avec le milieu environnant (figure I-20). Le code éléments finis ATILA [ATILA, 2002], développé à l'I.E.M.N. / I.S.E.N., est utilisé pour modéliser la source piézoélectrique. Le milieu élastique environnant est également décrit par éléments finis jusqu'à une surface frontière sphérique. Il faut alors déterminer les conditions d'impédance à appliquer sur cette surface.

Si le milieu est considéré comme un demi-espace isotrope, la démarche suivie pour calculer la matrice d'impédance est suggérée par les travaux en sismique et en théorie des explosions souterraines sur l'étude de la réponse dynamique d'un demi-espace élastique homogène isotrope à un chargement

harmonique appliqué sur la surface d'une cavité sphérique enterrée. En 1963, Ben-Menahem et Cisternas [Ben Menahem et Cisternas, 1963] s'intéressent à ce problème et donnent les potentiels de déplacement sous la forme d'un développement en série de « fonctions propres » (produit de la fonction de Hankel par le polynôme de Legendre). Théoriquement, ces solutions satisfont simultanément les conditions aux limites sur la sphère et sur la surface libre. Cependant, les coefficients du développement en série de « fonctions propres » se déterminent à partir d'un système linéaire de dimension infinie et il est impossible de les évaluer numériquement. Une évolution de cette méthode, appelée méthode itérative est proposée par Thiruvengkatachar et Viswanathan à partir de 1965 [Thiruvengkatachar et Viswanathan, 1965a, 1965b, 1967, 1969a, 1969b]. Elle consiste tout d'abord en la détermination de la solution satisfaisant les conditions aux limites sur la surface de la cavité. A cette solution, est ajouté le potentiel permettant de satisfaire les conditions aux limites sur la surface libre. Ainsi de suite, les potentiels adéquats sont sommés, de manière à satisfaire successivement les conditions aux limites sur la surface libre et sur la surface de la cavité. Une erreur apparaît alors suivant que l'une ou l'autre des conditions aux limites n'est pas satisfaite. Si cette erreur tend vers zéro et que les séries sont convergentes, alors la solution requise est obtenue. La convergence de la méthode a été prouvée [Thiruvengkatachar et Viswanathan, 1965b] et son utilisation dans un modèle numérique est possible.

La description de l'interaction de la source avec la zone altérée s'appuie sur un modèle similaire. Le milieu élastique environnant étant décrit par éléments finis jusqu'à une surface frontière sphérique, de nouvelles conditions d'impédance à imposer sur cette surface doivent être déterminées. La solution proposée pour le calcul de la matrice d'impédance est l'utilisation du code éléments de frontière MISSAXI [Dompierre, 1993 - Baroni, 1998 - Svay, 1994], développé à l'I.F.P. Ce code est une extension au cas de milieux axisymétriques du code MISS [Aubry - Clouteau, 1990], développé à l'Ecole Centrale de Paris, qui permet de décrire le rayonnement en milieu élastique multicouche.



**Figure I-20 : modélisation de sources piézoélectriques couplées avec le milieu extérieur**

Les développements relatifs au calcul de la matrice d'impédance et à son couplage avec le code ATILA sont détaillés dans le troisième chapitre de ce mémoire.

## Chapitre II

### Rayonnement de sources directionnelles idéales en milieu réel

En milieu élastique infini, un rayonnement directionnel en champ lointain est obtenu en combinant deux forces ou une force et un couple de forces avec des amplitudes et des phases adéquates. Pour valider la robustesse du principe de source directionnelle, il convient de vérifier que les interactions source-surface et source-zone altérée ne modifient pas significativement le signal émis vers le réservoir. C'est pourquoi ce chapitre est consacré à la modélisation de la source directionnelle idéale en milieu réel.

La première partie de ce chapitre présente le calcul de fonctions de Green par la méthode de Cagniard - De Hoop. Les cas d'une force et d'un couple de forces agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope sont traités.

La seconde partie de ce chapitre décrit l'interaction entre le champ émis par la source directionnelle idéale et la zone altérée. Pour cela, il est nécessaire de connaître les fonctions de Green associées à la force et au couple de forces dans un demi-espace recouvert d'une couche. Dans ce cas, la méthode de Cagniard - De Hoop s'avère complexe à mettre en oeuvre et coûteuse en temps de calcul. L'alternative proposée est la DWN (Discrete Wave Number [Bouchon et Aki, 1977, Bouchon, 1981]) couplée à la méthode de la réflectivité [Müller, 1985].

Dans une troisième partie, le cas de la source directionnelle est traité à partir des fonctions de Green précédemment évaluées. Considérant des géométries typiques étudiées en sismique, les sismogrammes synthétiques de la source directionnelle sont présentés.

## II.1 Calcul de fonctions de Green en demi-espace par la méthode de Cagniard - De Hoop

### II.1.1 Généralités

#### II.1.1.1 Historique de la méthode de Cagniard - De Hoop

En 1939, Cagniard [Cagniard, 1939] développe une méthode de résolution des problèmes sismiques tridimensionnels. Basée sur des transformations du plan complexe, cette méthode mène à des solutions intégrales dans le domaine temporel. À partir de 1960, De Hoop reprend les travaux de Cagniard et y apporte de nouveaux développements afin de simplifier le traitement des problèmes tridimensionnels [De Hoop, 1960, 1961]. La méthode sera par la suite connue sous le nom de méthode de Cagniard - De Hoop ou méthode de Cagniard modifiée. Elle est particulièrement intéressante pour l'étude de l'interaction d'ondes élastiques avec une interface. D'une part, elle donne la solution exacte du problème d'élastodynamique, s'affranchissant alors d'une discussion sur la validité de la solution en fonction de la fréquence ou en fonction des distances d'observation ; d'autre part, elle exprime la solution comme une somme de termes associés chacun à une onde particulière : par exemple, les ondes de tête (ondes latérales) sont distinguées des ondes P ou S.

Les solutions obtenues à l'aide de la méthode de Cagniard - De Hoop minimisent le recours au calcul numérique. Pour les problèmes 2D en milieu homogène et dans quelques cas particuliers en 3D, la méthode fournit des solutions analytiques explicites [Eringen et al., 1975 - Van Der Hijden, 1987]. Les solutions types obtenues pour les problèmes 3D comportent une intégration sur une variable réelle à effectuer à l'aide d'une méthode numérique. Il s'ensuit que la mise en oeuvre de la méthode pour les problèmes 3D est plus délicate que pour les problèmes 2D.

La méthode a été développée à l'origine pour des applications en géophysique mais elle est aussi adaptée aux problèmes d'acoustique. De manière plus générale, elle fournit un cadre méthodologique pour un traitement unifié des problèmes de propagation d'ondes en régime transitoire dans les milieux bornés isotropes ou anisotropes [Van Der Hijden, 1987]. Par ailleurs, cette méthode a été aussi appliquée avec succès à d'autres problèmes transitoires en thermique [Shendevela, 2002a, 2002b] et en électromagnétisme [Abo Seliem, 2003 - Kooij, 1994].

#### II.1.1.2 Principe de la méthode

Soit  $L_{xyz}$  et  $L_t$  les opérateurs respectifs de transformation de Laplace par rapport aux variables d'espace  $x, y$  et  $z$  et de temps  $t$ . Soit  $\chi_I(\mathbf{M}, t) = \chi_I(x, y, z, t)$  une solution de l'équation de l'élastodynamique à déterminer. L'image de  $\chi_I$  dans l'espace des transformées est

$$\tilde{\chi}_I(\xi_x, \xi_y, \xi_z; t) = L_{xyz}[\chi_I(x, y, z; t)], \quad (\text{II-1})$$

$$\hat{\chi}_I(\xi_x, \xi_y, \xi_z; s) = L_t \circ L_{xyz}[\chi_I(x, y, z; t)] = L_{xyz} \circ L_t[\chi_I(x, y, z; t)]. \quad (\text{II-2})$$



Dans l'espace des transformées, l'équation de l'élastodynamique est beaucoup plus simple à manipuler que dans l'espace physique, et il est possible d'obtenir des solutions analytiques dans de nombreux cas ; de plus, du fait de la symétrie du problème par rapport à l'axe  $[Oz]$ , la transformée de Laplace inverse par rapport à la variable  $\zeta_z$  se calcule analytiquement. Supposant donc que la solution  $\hat{\chi}_1(\zeta_x, \zeta_y, z; s)$  est connue, et notant  $L_{xy}^{-1}$  et  $L_t^{-1}$  les opérateurs respectifs de transformation inverse par rapport aux variables  $\zeta_x, \zeta_y$  et à la variable  $s$ , le retour vers l'espace physique s'écrit

$$\chi_1(x, y, z; t) = L_t^{-1} \circ L_{xy}^{-1} \left[ \hat{\chi}_1(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right]. \quad (\text{II-3})$$

La méthode de Cagniard - De Hoop consiste à s'affranchir du calcul de la transformation inverse  $L_t^{-1}$  pour calculer  $\chi_1(x, y, z, t)$ . Dans un premier temps, (II-3) se réécrit

$$\hat{\chi}_1(x, y, z; s) = L_{xy}^{-1} \left[ \hat{\chi}_1(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right]. \quad (\text{II-4})$$

Dans un second temps, une des transformées inverses par rapport aux variables d'espace est réécrite sous la forme de la transformée directe par rapport au temps d'une fonction  $\chi_2(x, y, z, t)$  ; cette opération est effectuée au moyen d'un changement de contour d'intégration dans le plan complexe. Autrement dit, l'essentiel de la méthode consiste à trouver la fonction  $\chi_2(x, y, z, t)$  telle que

$$L_{xy}^{-1} \left[ \hat{\chi}_1(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right] = L_t \left[ \chi_2(x, y, z; t) \right]. \quad (\text{II-5})$$

Ainsi (II-5) permet de mettre (II-4) sous la forme

$$L_t \left[ \chi_1(x, y, z; t) \right] = L_t \left[ \chi_2(x, y, z; t) \right], \quad (\text{II-6})$$

et la transformée inverse est donc obtenue directement par identification

$$\chi_1(x, y, z; t) \equiv \chi_2(x, y, z; t). \quad (\text{II-7})$$

## II.1.2 Fonction de Green associée à une force ponctuelle agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope [Johnson, 1974]

### II.1.2.1 Position du problème

Soit une force verticale impulsionnelle  $F_\delta(t; \mathbf{M}') = f_{F_\delta}(t; \mathbf{M}') \mathbf{e}_z$  agissant au point  $M'$  défini par  $\mathbf{M}' = (0, 0, z')$ , à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope. La fonction source  $f_{F_\delta}(t; \mathbf{M}')$  est localisée à la fois temporellement et spatialement de la manière suivante

$$f_{F_\delta}(t; \mathbf{M}') = f_z \delta(x) \delta(y) \delta(z - z') \delta(t), \quad (\text{II-8})$$

où  $\delta$  désigne la fonction de Dirac. Le déplacement résultant est alors la fonction de Green associée à une force ponctuelle agissant à l'intérieur d'un demi-espace, notée  $\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)$  :

$$\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) = G_x^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)\mathbf{e}_x + G_y^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)\mathbf{e}_y + G_z^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)\mathbf{e}_z \quad (\text{II-9})$$

La surface libre du demi-espace est définie par le plan d'équation  $z = 0$  et les repères des coordonnées cartésiennes  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  et sphériques  $(O, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  sont utilisés (figure II-1).

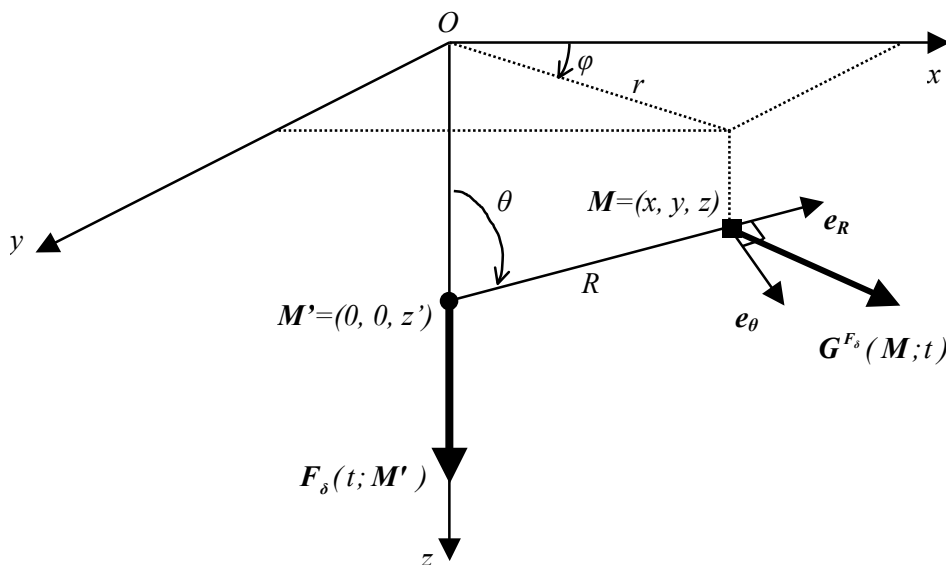


Figure II-1 : force enterrée dans un demi-espace élastique homogène isotrope

Pour un matériau élastique homogène isotrope, l'équation de l'élastodynamique tridimensionnelle en régime transitoire s'écrit

$$(\lambda + \mu)\mathbf{grad}[\mathbf{div}(\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t))] + \mu\Delta\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) + \mathbf{F}_\delta = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t). \quad (\text{II-10})$$

Les contraintes sur chaque plan  $z$  constant s'écrivent

$$\sigma_{xz}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) = \mu \left( \frac{\partial}{\partial z} G_x^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) + \frac{\partial}{\partial x} G_z^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) \right), \quad (\text{II-11})$$

$$\sigma_{yz}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) = \mu \left( \frac{\partial}{\partial z} G_y^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) + \frac{\partial}{\partial y} G_z^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) \right), \quad (\text{II-12})$$

$$\sigma_{zz}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) = \lambda \mathbf{div}(\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)) + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} G_z^{F_\delta}(\mathbf{M}; t). \quad (\text{II-13})$$

Le problème est de résoudre l'équation (II-10) sous la condition que les contraintes définies par les expressions (II-11) à (II-13) s'annulent quand  $z = 0$ .

### II.1.2.2 Solution dans le domaine transformé

Toutes les fonctions du temps et de l'espace sont soumises à une simple transformation de Laplace en temps et une triple transformation de Laplace en espace.

Pour tout champ  $\chi$  des variables  $x, y, z$  et  $t$ , les notations suivantes sont utilisées :

- la transformation de Laplace  $L_t$  s'écrit

$$\hat{\chi}(x, y, z; s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) \chi(x, y, z; t) dt, \quad (\text{II-14})$$

où  $s$  est un réel positif suffisamment grand pour assurer la convergence de l'intégrale (I-5) (le comportement de  $\chi$  quand  $t$  tend vers l'infini est supposé permettre de trouver un tel  $s$ ).

- la transformation de Laplace  $L_{xyz}$  s'écrit

$$\tilde{\chi}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-(\zeta_x x + \zeta_y y + \zeta_z z)] \chi(x, y, z; t) dx dy dz. \quad (\text{II-15})$$

Utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, l'équation différentielle (II-10) se réduit à un système de trois équations à trois inconnues  $\hat{G}_x^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s)$ ,  $\hat{G}_y^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s)$  et  $\hat{G}_z^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s)$ , qui se met sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{N}^{\equiv F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) \cdot \hat{G}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) = \mathbf{f}. \quad (\text{II-16})$$

$\hat{G}^{F_\delta}$  et  $\mathbf{f}$  sont définis par

$$\hat{G}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) = \left[ \hat{G}_x^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s), \hat{G}_y^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s), \hat{G}_z^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) \right]^T, \quad (\text{II-17})$$

$$\mathbf{f} = (0, 0, f_z)^T, \quad (\text{II-18})$$

où  $f_z$  est défini à l'équation (II-18) et l'expression de  $\hat{N}^{\equiv F_\delta}$  est donnée en annexe B. L'inversion de (II-16), la transformation inverse par rapport à la variable  $\zeta_z$  ainsi que la condition de contraintes nulles sur la surface libre définie par  $z = 0$  fournit la solution complète du problème. Dans le domaine transformé, la fonction de Green associée à une force agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope s'écrit donc

$$\hat{G}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \left[ \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \hat{N}_i^{\equiv F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right) \right] \mathbf{f}. \quad (\text{II-19})$$

Les indices P et S désignent respectivement les ondes P et S directes et les indices PP, SS, PS et SP désignent les ondes réfléchies à la surface (le premier indice correspond à l'onde incidente et le second

correspond à l'onde réfléchie). Les expressions de  $\overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}$  ( $i = P, S, PP, SS, PS, SP$ ) sont reportées en annexe B. La solution (II-19) est la somme des contributions des ondes de volume directes P et S et des ondes de volume réfléchies PP, SS, PS et SP. Les ondes de surfaces sont associées aux pôles des fonctions  $\overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}$  et sont donc naturellement prise en compte dans le calcul des ondes de volume.

Suivant le formalisme présenté à la section II.1.2.1, l'opérateur  $L_{xy}^{-1}$  est appliqué à la solution (II-19) ; compte tenu de la propriété de linéarité de la transformation de Laplace et de son inverse, il vient

$$\hat{G}^{F_\delta}(x, y, z; s) = \left\{ \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} L_{xy}^{-1} \left[ \overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right] \right\} \mathbf{f} \quad (\text{II-20})$$

où la transformation inverse  $L_{xy}^{-1}$  est définie pour une contribution  $\overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}$  ( $i = P, S, PP, SS, PS, SP$ ) par

$$\begin{aligned} L_{xy}^{-1} \left[ \overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right] &= \overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}(x, y, z; s) \\ &= -\frac{I}{4\pi^2} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overset{\equiv}{\hat{N}}_i^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \exp(\zeta_x x + \zeta_y y) d\zeta_x d\zeta_y \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

### II.1.2.3 Solution dans l'espace physique

La méthode de Cagniard - De Hoop est ici appliquée à chaque contribution de type (II-21) afin de retrouver la solution dans l'espace physique. Les différentes étapes de la méthode sont rappelées dans les sections suivantes, le détail des calculs étant reporté en annexe B.

#### II.1.2.3.1 Changement de variable

Tout d'abord, les quantités du problème sont exprimées en fonctions des coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  et sphériques  $(R, \theta, \varphi)$  définies à la figure II-1 :

$$x = r \cos \varphi, \quad (\text{II-22})$$

$$y = r \sin \varphi, \quad (\text{II-23})$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II-24})$$

$$r = R \sin \theta, \quad (\text{II-25})$$

$$z = z' - R \cos \theta. \quad (\text{II-26})$$

La première étape de la méthode de Cagniard - De Hoop consiste à effectuer dans (II-21) le changement de variable [Johnson, 1974]

$$\zeta_x = sq \cos \varphi - jsp \sin \varphi \quad (\text{II-27})$$

$$\zeta_y = sq \sin \varphi + jsp \cos \varphi \quad (\text{II-28})$$

où  $p$  est un nombre réel et  $q$  un complexe. Notant que

$$\zeta_x x + \zeta_y y = sqr, \quad (\text{II-29})$$

$$d\zeta_x d\zeta_y = is^2 dpdq, \quad (\text{II-30})$$

(II-21) se réécrit

$$\overline{\hat{N}}_i^{F_s}(x, y, z; s) = -\frac{js}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \tilde{g}_i^{F_s}(p, q, z))] dq \quad (\text{II-31})$$

Les expressions de  $\overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}$  et  $\tilde{g}_i^{F_s}$  sont données en annexe B.

### II.1.2.3.2 Contour de Cagniard - De Hoop

La seconde étape consiste à substituer, dans (II-31), à l'intégration sur  $q$  le long de l'axe imaginaire du plan complexe, le contour de Cagniard - De Hoop, défini par l'équation

$$\tau = -qr + \tilde{g}_i^{F_s}(p, q, z) \quad (\text{II-32})$$

où  $\tau$  est un réel positif qui a la dimension du temps. Pour une valeur de  $p$  fixe, (II-34) définit un chemin  $q(\tau, p)$  dans le plan complexe paramétré par  $\tau$ . Ce contour possède les propriétés suivantes : pour des valeurs de  $\tau$  inférieures à une valeur seuil, le contour est réel ; à partir d'une certaine valeur de  $\tau$ , notée  $T_i(p)$ , le contour quitte l'axe des réels perpendiculairement à celui-ci et devient complexe. Substituant le contour d'intégration  $q(\tau, p)$  dans (II-31), il est montré (annexe B) que (II-31) se réécrit

$$\overline{\hat{N}}_i^{F_s}(x, y, z; s) = \frac{s}{2\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} dp \int_{T_i(p)}^{+\infty} \Im \left[ \overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q(\tau, p), z) \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] \exp[-s\tau] d\tau \quad (\text{II-33})$$

où  $\Im$  désigne la partie imaginaire d'une quantité complexe. En annexe B, outre la justification du changement de contour d'intégration, le lien entre la nature de la contribution  $\overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}$  et la position du contour dans le plan complexe est analysé. À ce stade, la solution pour chaque contribution peut être vue comme une somme continue de contributions temporelles évaluées le long des contours de Cagniard - De Hoop  $q(\tau, p)$ . L'écriture (II-33) est toutefois peu commode d'emploi dans la mesure où l'intégrale en  $p$  est à calculer sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Dans la pratique, seule une fenêtre temporelle finie de la réponse impulsionnelle est intéressante ; il est alors facile d'imaginer que pour des grandes valeurs de  $p$ , les temps d'arrivée  $T_i(p)$  définis par les contours de Cagniard - De Hoop seront plus

grands que la limite supérieure de ladite fenêtre. Ces contributions n'auront donc pas d'utilité. C'est pourquoi, afin d'obtenir une expression se prêtant plus aisément à une application numérique, l'ordre des intégrations sur les variables  $\tau$  et  $p$  est échangé. Reportant le détail de la démonstration en annexe B, il est prouvé qu'en changeant l'ordre d'intégration, l'intégrale sur  $\tau$  s'étend de  $T_i(0)$ , temps d'arrivée de la perturbation, jusqu'à l'infini alors que l'intégrale sur  $p$  s'effectue de  $0$  à  $P_i(\tau)$  qui est solution pour  $p$  de  $\tau = T_i(p)$ . L'expression (II-33) est donc égale à

$$\overline{\hat{N}}_i^{F_s}(x, y, z; s) = \frac{s}{2\pi^2 \rho} \int_{T_i(0)}^{+\infty} \exp[-s\tau] d\tau \int_0^{P_i(\tau)} \mathfrak{S} \left[ \overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q(\tau, p), z) \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] dp \quad (\text{II-34})$$

Par identification de la transformée de Laplace et en tenant compte du fait que l'opérateur de dérivée temporelle se traduit par une multiplication par  $s$  dans l'espace de la transformée, la solution temporelle pour chaque contribution  $\overline{\mathbf{N}}_i^{F_s}(x, y, z; t)$  s'écrit

$$\overline{\mathbf{N}}_i^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t - T_i(0)) \int_0^{P_i(t)} \mathfrak{S} \left[ \overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q(t, p), z) \frac{\partial q}{\partial t} \right] dp \right]. \quad (\text{II-35})$$

La fonction de Green totale  $\mathbf{G}^{F_s}$  est la somme des contributions P, S, PP, SS, PS et SP :

$$\mathbf{G}^{F_s}(x, y, z; t) = \sum_{i=P,S,PP,PS,SP} \mathbf{G}_i^{F_s}(x, y, z; t) = \left[ \sum_{i=P,S,PP,PS,SP} \left( \overline{\mathbf{N}}_i^{F_s}(x, y, z; t) \right) \right] \mathbf{f} \quad (\text{II-36})$$

La somme des contributions directes  $\mathbf{G}_p^{F_s}$  et  $\mathbf{G}_s^{F_s}$  représente la fonction de Green associée à une force ponctuelle en milieu infini homogène isotrope. Par ailleurs, introduisant  $\mathbf{G}^{F_u}$ , la réponse du demi-espace à l'application d'une force ayant une dépendance temporelle de type Heaviside, c'est à dire donnée par

$$H(t) = 1 \text{ si } t \geq 0, \quad (\text{II-37})$$

$$H(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad (\text{II-38})$$

alors

$$\mathbf{G}^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{G}^{F_u}(x, y, z; t)] = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{G}_i^{F_u}(x, y, z; t)] \right). \quad (\text{II-39})$$

Par identification avec (II-35) et (II-36), chaque contribution  $\mathbf{G}_i^{F_u}$  a pour expression

$$\mathbf{G}_i^{F_u}(x, y, z; t) = \overline{\mathbf{N}}_i^{F_s}(x, y, z; t) \mathbf{f}. \quad (\text{II-40})$$

$$\overline{\mathbf{N}}_i^{F_u}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \int_0^{P_i(t)} \mathfrak{S} \left[ \overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q(t, p), z) \frac{\partial q}{\partial t} \right] dp \quad (\text{II-41})$$

### II.1.3 Fonction de Green associée à un couple de forces ponctuelles agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope

Le problème considéré ici est celui de deux forces séparées d'une distance  $2d$  et agissant dans la même direction en sens opposé (figure II-2) à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope dont la surface libre est définie par le plan d'équation  $z = 0$ .

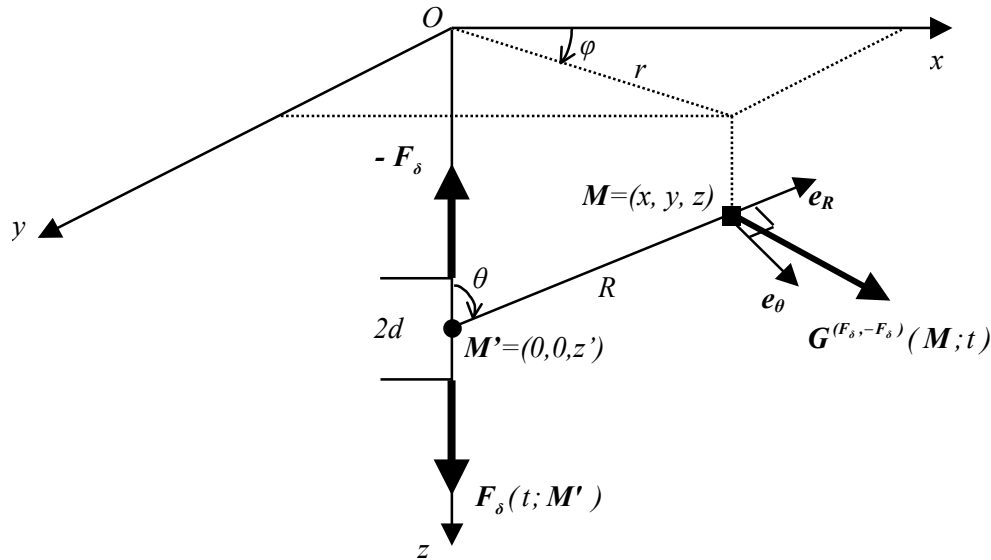


Figure II-2 : couple de forces enterré dans un demi-espace élastique homogène isotrope

#### II.1.3.1 Détermination de la solution à partir de la fonction de Green associée à la force

Soient deux forces verticales quelconques  $F$  et  $-F$  dont les points d'application sont séparées par une distance  $2d$ . Dans le cas où  $d$  est infinitésimale le champ de déplacement  $\mathbf{u}^{(F,-F)}(\mathbf{M}, t)$  associé au couple de forces sans moment  $(F, -F)$  est défini par [Aki et Richards, 1980],

$$\mathbf{u}^{(F,-F)}(\mathbf{M}; t) = M_0 \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \overline{N}_i^{F_\delta}(x, y, z; t; z') \mathbf{e}_z \right) \right] \quad (\text{II-42})$$

où  $M_0$  est le moment sismique correspondant dans ce cas au moment dipolaire du couple de forces verticales  $(F, -F)$ . Prenant  $M_0 = 1$  (moment sismique unitaire), (II-42) est la fonction de Green  $\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; t)$  associée au couple de forces verticales impulsives  $(F_\delta, -F_\delta)$ .

#### II.1.3.2 Calcul des dérivées spatiales de la fonction de Green associée à la force

Les dérivées spatiales de la fonction de Green  $\mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t)$  peuvent être calculées de la même manière que la fonction de Green elle-même. À partir de (II-19), la fonction de Green  $\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; t)$  s'écrit dans le domaine transformé

$$\hat{\mathbf{G}}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) \right] \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{II-43})$$

Ainsi, en posant

$$\overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) = \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \hat{\mathbf{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) \right], \quad (\text{II-44})$$

la fonction de Green  $\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; t)$  s'écrit sous une forme équivalente à (II-19) :

$$\hat{\mathbf{G}}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left\{ \overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; S) \right\} \mathbf{e}_z. \quad (\text{II-45})$$

Appliquant l'opérateur  $L_{xy}^{-1}$  à l'expression (II-45) et suivant le formalisme exposé à la section II.1.2.3,

la fonction de Green  $\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; t)$  est obtenue :

$$\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left\{ \mathbf{G}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) \right\} = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left\{ \overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) \right\} \mathbf{e}_z. \quad (\text{II-46})$$

Les quantités  $\overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t)$  s'écrivent

$$\overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ H(t - T_i(0)) \int_0^{P_i(t)} \Im \left[ \overline{\overline{B}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q(t, p), z) \frac{\partial q}{\partial t} \right] dp \right], \quad (\text{II-47})$$

la démonstration et les expressions de  $\overline{\overline{B}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q(t, p), z)$  étant données en annexe B. Introduisant  $\mathbf{G}^{(F_H, -F_H)}$ , la réponse du demi-espace à l'application d'une force ayant une dépendance temporelle de type Heaviside,

$$\mathbf{G}^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \mathbf{G}^{(F_H, -F_H)}(x, y, z; t) \right] = \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \mathbf{G}_i^{(F_H, -F_H)}(x, y, z; t) \right] \right), \quad (\text{II-48})$$

Par identification avec (II-46) et (II-47), chaque contribution  $\mathbf{G}_i^{(F_H, -F_H)}$  a pour expression

$$\mathbf{G}_i^{(F_H, -F_H)}(x, y, z; t) = \overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) \mathbf{f}, \quad (\text{II-49})$$

où

$$\overline{\overline{N}}_i^{(F_H, -F_H)}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \int_0^{P_i(t)} \Im \left[ \overline{\overline{B}}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q(t, p), z) \frac{\partial q}{\partial t} \right] dp. \quad (\text{II-50})$$



## II.2 Calcul de fonctions de Green en milieu stratifié : couplage de la méthode de la réflectivité [Müller, 1985] et de la méthode DWN (Discrete Wave Number [Bouchon et Aki, 1977 - Bouchon, 1981])

Cette partie a pour but de décrire l'interaction entre le champ émis par la source directionnelle idéale et la zone altérée. Pour cela, il est nécessaire de connaître les fonctions de Green associées à la force et au couple de forces dans un demi-espace recouvert d'une couche.

La méthode de Cagniard - De Hoop fournit pour les cas tridimensionnels des solutions exactes mais d'une manière générale non explicites : l'évaluation de la solution passe par le calcul numérique d'intégrales de type (II-41) ou (II-50) et par la résolution de plusieurs équations avec des méthodes numériques. En milieu semi-infini, le nombre de contributions de type (II-41) est clairement identifié : il s'agit de la somme des contributions directes P et S et des réflexions à la surface PP, SS, PS et SP. En milieu stratifié, les différentes contributions sont non seulement plus nombreuses, du fait des multiples réflexions, mais aussi plus complexes à calculer du fait de l'hétérogénéité du milieu. Dans ce cas, la méthode de Cagniard - De Hoop s'avère difficile à mettre en oeuvre et coûteuse en temps de calcul. L'alternative proposée pour calculer les fonctions de Green associées respectivement à la force et au couple de forces en demi-espace recouvert d'une couche est la suivante : les fonctions de Green sont tout d'abord calculées en régime harmonique sous formes intégrales par la méthode de la réflectivité [Müller, 1985] ; l'expression des solutions en régime transitoire est obtenue en appliquant une méthode numérique appelée Discrete Wave Number [Bouchon et Aki, 1977 - Bouchon, 1981].

### II.2.1 Position du problème

Soit la force verticale impulsionnelle  $F_\delta(t; \mathbf{M}') = f_{F_\delta}(t; \mathbf{M}') \mathbf{e}_z$  agissant en  $M'$  défini par  $\mathbf{M}' = (0, 0, z')$  à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope recouvert d'une couche dont l'interface est située en  $z = z_1$  ( $z_1 < z'$ ). Les propriétés mécaniques du demi-espace et de la couche sont respectivement notées  $(\rho, \lambda, \mu)$  et  $(\rho_{WZ}, \lambda_{WZ}, \mu_{WZ})$ . La fonction source  $f_{F_\delta}(t; \mathbf{M}')$  est donnée par (II-8) ; la surface libre du demi-espace est définie par le plan d'équation  $z = 0$  et le repère des coordonnées cylindriques  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$  est utilisé (figure II-3).

Pour la force  $F_\delta$ , il s'agit de déterminer le déplacement résultant à l'intérieur du demi-espace  $\underline{G}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t)$ , qui compte tenu de la symétrie de révolution du problème, se met sous la forme

$$\underline{G}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) = G_r^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) \mathbf{e}_r + G_z^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) \mathbf{e}_z, \quad (\text{II-51})$$

$$G_\phi^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) = 0. \quad (\text{II-52})$$

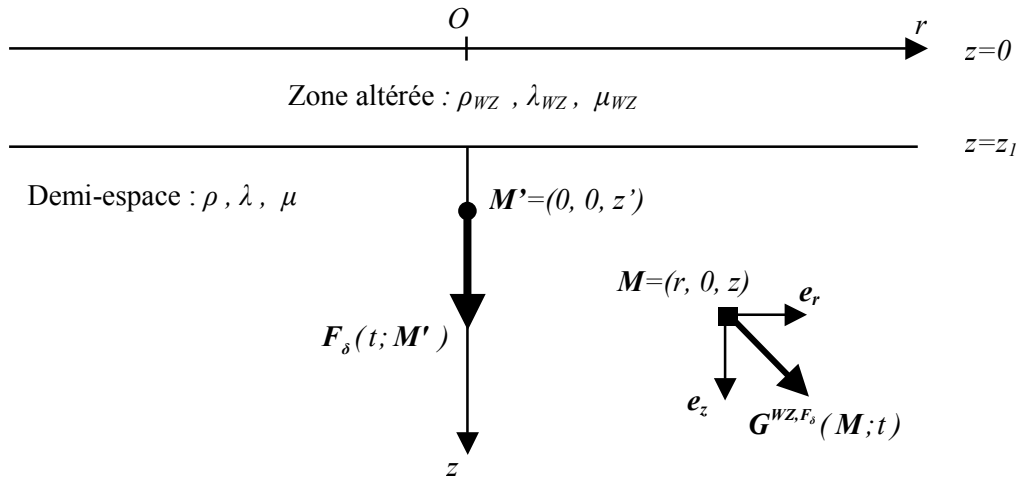


Figure II-3 : force enterrée dans un demi-espace recouvert d’une couche

## II.2.2 Détermination d’une forme intégrale en régime harmonique de la fonction de Green associée à la force par la méthode de la réflectivité

### II.2.2.1 Historique de la méthode de la réflectivité

Parmi les nombreuses méthodes qui permettent de traiter la propagation en milieu stratifié, la méthode de la réflectivité permet d’exprimer les solutions sous la forme d’intégrales sur les nombres d’ondes  $k$ . Le nom de cette méthode provient de la fonction intégrée qui représente le coefficient de réflexion global, ou réflectivité, du milieu stratifié. À l’origine, cette méthode a été développée pour un milieu stratifié sans surface libre et les solutions n’étaient calculées que dans la couche contenant la source [Fuchs, 1968 - Fuchs et Müller, 1971] ; cependant, il a été montré [Kennet et Kerry, 1979 - Kennet, 1983] que pour une source enfouie à une profondeur arbitraire à l’intérieur d’un demi-espace stratifié, l’intégrande est en fait la somme des contributions des couches situées en dessous et au dessus de la source. C’est pourquoi le nom de méthode de la réflectivité a été conservé. Contrairement aux méthodes de rayons telles que la théorie des rayons généralisés [Helmberger, 1968 - Müller, 1969 - Ben-Menahem et Vered, 1973], la méthode « Full Wave » [Cormier et Richards, 1977], ou la WKBJ [Chapman, 1978], la méthode de la réflectivité prend en compte les ondes de surface et permet donc de calculer des sismogrammes complets.

### II.2.2.2 Équations et conditions aux limites

Le problème est ici considéré comme étant à déplacements imposés ; ainsi, pour un matériau élastique homogène isotrope, l’équation de l’élastodynamique tridimensionnelle en régime harmonique s’écrit en l’absence de forces de volume

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}(\mathit{div}(\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega))) - \mu\mathbf{rot}(\mathit{rot}(\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega))) = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{II-53})$$

où  $\mathbf{rot}$  désigne l'opérateur rotationnel défini en coordonnées cylindriques et pour tous vecteurs  $\mathbf{w}$  par

$$\mathbf{rot}(\mathbf{w}) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r w_\varphi) - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right) \right]^T \quad (\text{II-54})$$

Prenant en compte la symétrie de révolution du problème qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad (\text{II-55})$$

le champ de déplacement  $\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)$  est calculé à partir des potentiels  $\tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)$  et  $\tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)$  via les relations

$$\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) = \mathbf{grad}(\tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}) + \mathbf{rot}[\mathbf{rot}(\tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} \mathbf{e}_z)], \quad (\text{II-56})$$

$$\tilde{G}_r^{WZ, F_\delta} = \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial r \partial z}, \quad (\text{II-57})$$

$$\tilde{G}_z^{WZ, F_\delta} = \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial r}, \quad (\text{II-58})$$

$$\tilde{G}_\varphi^{WZ, F_\delta} = 0. \quad (\text{II-59})$$

Le report des relations (II-56) à (II-58) dans (II-53), mène aux équations de Helmholtz

$$\Delta \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} + k_\alpha^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} = 0, \quad (\text{II-60})$$

$$\Delta \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} + k_\beta^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} = 0. \quad (\text{II-61})$$

Les conditions aux limites sont de deux types :

- À l'interface  $z = z_l$  (figure II-3), déplacements et contraintes normales sont continus :

$$\tilde{\sigma}_{rz}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^-) = \tilde{\sigma}_{rz}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^+), \quad (\text{II-62})$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^-) = \tilde{\sigma}_{zz}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^+), \quad (\text{II-63})$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^-) = \tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(z = z_l^+). \quad (\text{II-64})$$

Introduisant les expressions (II-57) à (II-59) dans les équations (II-62) à (II-64), les équations de continuité à l'interface se simplifient de la manière suivante :

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + k_\beta^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} \right) \Big|_{z=z^-} = \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + k_\beta^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} \right) \Big|_{z=z^+}, \quad (\text{II-65})$$

$$\left[ -\lambda k_\alpha^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^3} + k_\beta^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} \right) \right]_{z=z^-} = \left[ -\lambda k_\alpha^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^3} + k_\beta^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} \right) \right]_{z=z^+}, \quad (\text{II-66})$$

$$\left( \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} + \frac{\partial \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z^-} = \left( \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta} + \frac{\partial \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z^+}, \quad (\text{II-67})$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + k_\beta^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} \right) \Big|_{z=z^-} = \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^{WZ, F_\delta}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta}}{\partial z^2} + k_\beta^2 \tilde{\zeta}^{WZ, F_\delta} \right) \Big|_{z=z^+}. \quad (\text{II-68})$$

Les expressions (II-65) à (II-68) ne contiennent pas de dérivées par rapport à  $r$  ; ainsi, par exemple, si (II-67) est continue à l'interface, alors  $\tilde{G}_r^{WZ, F_\delta}$  (équation (II-57)) est continu à l'interface.

- À la surface libre, les contraintes normales sont nulles :

$$\tilde{\sigma}_{rz}^{WZ, F_\delta}(z=0) = \tilde{\sigma}_{zz}^{WZ, F_\delta}(z=0) = 0. \quad (\text{II-69})$$

(II-69) s'écrit en fonction du déplacement

$$\mu_{WZ} \left( \frac{\partial}{\partial r} \tilde{G}_z^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{G}_r^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (\text{II-70})$$

$$\left( \lambda_{WZ} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)) + 2\mu_{WZ} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{G}_z^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{II-71})$$

### II.2.2.3 Calcul de la solution

#### II.2.2.3.1 Potentiels de déplacement en milieu infini

Dans un milieu infini qui possède les propriétés du demi-espace  $\rho, \lambda, \mu$  (figure II-3), les potentiels de déplacements  $\tilde{\Phi}_0^{F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)$  et  $\tilde{\zeta}_0^{F_\delta}(\mathbf{M}; \omega)$  associés à la force verticale  $F_\delta(\mathbf{M}'; t)$  localisée en  $\mathbf{M}' = (0, 0, z')$  sont donnés sous la forme suivante [Müller, 1985]:

- Ondes descendantes ( $z > z'$ )

$$\tilde{\Phi}_{0d}^{F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty k \exp[j(z'-z_1)v_\alpha(k)] J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk \quad (\text{II-72})$$

$$\tilde{\zeta}_{0d}^{F_\delta}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{1}{jk} \left( \frac{k^2\omega^2}{v_\beta} \exp[j(z'-z_1)v_\beta(k)] J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] \right) dk \quad (\text{II-73})$$

- Ondes montantes ( $z < z'$ )

$$\tilde{\Phi}_{0u}^{F_s}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty -k \exp[-j(z'-z_1)v_\alpha(k)] J_0(kr) \exp[j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk \quad (\text{II-74})$$

$$\tilde{\zeta}_{0u}^{F_s}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{1}{jk} \left( \frac{k^2\omega^2}{v_\beta} \exp[-j(z'-z_1)v_\beta(k)] J_0(kr) \exp[j(z-z_1)v_\beta(k)] \right) dk \quad (\text{II-75})$$

Dans les expressions (II-72) à (II-75), les notations suivantes sont utilisées :

$$v_\alpha(k) = [k_\alpha^2 - k^2]^{1/2}, \quad (\text{II-76})$$

$$v_\beta(k) = [k_\beta^2 - k^2]^{1/2}, \quad (\text{II-77})$$

$v_\alpha(k)$  et  $v_\beta(k)$  étant réels purs positifs ou imaginaires purs à parties imaginaires négatives.  $J_0$  et  $J_1$  sont respectivement les fonctions de Bessel cylindriques d'indice 0 et 1.

Pour une utilisation ultérieure, les amplitudes des ondes P et SV descendantes (respectivement montantes) sont respectivement stockées dans un vecteur  $\{A_{0d}^{F_s}\}$  (respectivement  $\{A_{0u}^{F_s}\}$ ). Ces vecteurs, appelés vecteurs d'amplitude, sont définis par

$$\{A_{0d}^{F_s}(k)\} = \left\{ \begin{array}{l} k \exp[j(z'-z_1)v_\alpha(k)] = A_{0d}^{P.F_s}(k) \\ \frac{k^2\omega^2}{v_\beta} \exp[j(z'-z_1)v_\beta(k)] = A_{0d}^{SV.F_s}(k) \end{array} \right\}, \quad (\text{II-78})$$

$$\{A_{0u}^{F_s}(k)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \exp[-j(z'-z_1)v_\alpha(k)] = A_{0u}^{P.F_s}(k) \\ \frac{k^2\omega^2}{v_\beta} \exp[-j(z'-z_1)v_\beta(k)] = A_{0u}^{SV.F_s}(k) \end{array} \right\}. \quad (\text{II-79})$$

### II.2.2.3.2 Détermination du champ d'ondes complet

Il s'agit de déterminer l'ensemble des ondes descendantes au niveau du récepteur situé dans le demi-espace. Ce champ d'onde est la somme de l'onde directe, donnée par (II-72) et (II-73) ou (II-74) et (II-75), et des multiples réflexions et réfractions qui se sont produites à l'interface  $z = z_1$  et à la surface libre. Chacune de ces contributions, et donc leur somme, peut s'écrire sous une forme similaire à (II-74) et (II-75) :

$$\tilde{\Phi}^{WZ.F_s}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty A_d^{P.F_s}(k) J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk, \quad (\text{II-80})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ.F_s}(\mathbf{M}; \omega; \mathbf{M}') = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{1}{jk} \left( A_d^{SV.F_s}(k) J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] \right) dk. \quad (\text{II-81})$$

Le vecteur d'amplitude est alors défini par

$$\{A_d^{F_s}(k)\} = \begin{cases} A_d^{P.F_s}(k) \\ A_d^{SV.F_s}(k) \end{cases}. \quad (\text{II-82})$$

Le calcul des vecteurs d'amplitude pour un demi-espace stratifié composé de  $n$  couches [Müller, 1985] mène aux expressions suivantes pour le vecteur d'amplitude  $\{A_d^{F_s}(k)\}$  :

$$\{A_d^{F_s}(k)\} = \{A_{0u}^{F_s}(k)\} + [R].\{A_{0u}^{F_s}(k)\} \text{ pour } z < z', \quad (\text{II-83})$$

$$\{A_d^{F_s}(k)\} = \{A_{0d}^{F_s}(k)\} + [R].\{A_{0u}^{F_s}(k)\} \text{ pour } z > z'. \quad (\text{II-84})$$

$[R]$  est la matrice de réflectivité qui exprime, pour un point situé en  $z = z_l^+$ , le ratio des amplitudes entre les ondes montantes incidentes et les ondes descendantes réfléchies.  $[R]$  est calculée numériquement en utilisant la relation suivante :

$$[R] = [R_l^u] + [T_l^d].[RR] \quad (\text{II-85})$$

$$[RR] = ([I] - [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][R_l^d])^{-1} [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][T_l^u] \quad (\text{II-86})$$

Dans (II-85) et (II-86),  $[I]$  désigne la matrice identité et  $[E_{wz}]$  est la matrice de phase de la couche ;  $[R_l^u]$  et  $[T_l^u]$  (respectivement  $[R_l^d]$  et  $[T_l^d]$ ) sont les matrices des coefficients de réflexion et de transmission en ondes planes pour une onde plane incidente montante (respectivement descendante) à l'interface  $z = z_l$ .  $[R_0^u]$  est la matrice des coefficients de réflexion à la surface libre. Les expressions de toutes ces matrices sont données en annexe C. En remarquant que

$$([I] - [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][R_l^d])^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} ([I] + [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][R_l^d])^i, \quad (\text{II-87})$$

le résultat (II-76) s'interprète simplement en termes de réflexions multiples. Ainsi, (II-80) à (II-86) permettent de calculer complètement le champ d'ondes au niveau du récepteur, incluant ondes de volume, ondes de surface (ondes de Rayleigh) et ondes guidées (ondes de Love). Ondes de surface et ondes guidées sont reliées aux pôles de l'intégrande (II-83) ou (II-84) via la relation de dispersion :

$$\det([I] - [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][R_l^d])^{-1} = 0 \quad (\text{II-88})$$

## II.2.3 Calcul de la fonction de Green associée à la force en régime transitoire par méthode DWN

### II.2.3.1 Historique de la méthode DWN

Introduite par Bouchon et Aki [Bouchon et Aki, 1977], la DWN permet de calculer les fonctions de Green associées à de nombreux problèmes de propagation en régime transitoire avec un

minimum de développements mathématiques. Le principe de la méthode est dû à Rayleigh [Rayleigh, 1896, 1907] qui, étudiant la réflexion des ondes par une surface sinusoïdale, montre notamment que la périodicité spatiale de la surface a pour effet de périodiser le champ d'ondes réfléchies dans le domaine des nombres d'onde  $k$ . Aki et Larner [Aki et Larner, 1970] approfondissent les travaux de Rayleigh en introduisant la notion de fréquences complexes afin d'étudier la diffusion des ondes planes par une surface périodique. De la même manière, la DWN introduit une périodicité spatiale de sources afin de discrétiser le champ élastique rayonné. Puis, en utilisant la transformation de Fourier à fréquences complexes, la fonction de Green en régime transitoire est calculée. La DWN a été validée dans de nombreux cas par comparaison avec des solutions analytiques et d'autres techniques [Yao et Harkrider, 1983 - Ben-Zion et Aki, 1990] ; elle est à présent utilisée pour tester la précision de diverses méthodes : différences finies, éléments finis, méthode des rayons, techniques pseudo-spectrales [Stephen et al, 1985 - Saikia et Herrman, 1986 - Beydoun et Keho, 1987 - Maupin, 1996 - Aoi et Fujiwara, 1999 - Moczo et al., 1999]. Ses applications sont nombreuses : exploration sismique [Cheng et Toksöz, 1981 - Haartsen et Pride, 1997], sismologie [Campillo et al., 1984 - Plicka et al., 1998], volcanologie [Chouet, 1981 - Nishimura et al., 1995], mais aussi diffusion acoustique [Zeng et al., 1991 - Moinet et Dietrich, 1998]. Par ailleurs, la DWN a été étendue au cas des milieux anisotropes [Mandall et Mitchell, 1986] et diphasiques [Boutin, 1987], et couplée à la méthode des éléments finis pour modéliser la propagation des ondes sismiques dans des structures géologiques complexes [Zahradnik, 1995 - Riepl et al., 2000].

### II.2.3.2 Principe

Dans la section II.2.2, les potentiels en régime harmonique de la fonction de Green associée à la force agissant à l'intérieur d'un demi-espace recouvert d'une couche ont été calculés ; l'intégrande (II-83) ou (II-84) contient pôles et singularités, si bien que l'intégration sur  $k$  devient mathématiquement et numériquement compliquée. Ce problème est contourné dans un premier temps en remplaçant la force seule par un réseau de forces périodiquement réparties dans le plan horizontal. Dans un deuxième temps, la solution dans le domaine temporel est obtenue, par le biais de la transformation de Fourier, pour le réseau de forces. La dernière étape consiste alors à déduire la fonction de Green associée à la force à partir de la solution obtenue pour le réseau.

### II.2.3.3 Solution en régime harmonique pour le réseau périodique de forces

Dans le domaine fréquentiel, la solution est tout d'abord calculée pour des forces uniformément et continûment réparties sur la circonférence d'un cercle de rayon  $L$ . Le rayonnement d'un réseau d'anneaux concentriques situés à égale distance  $L$  les uns par rapport aux autres s'exprime alors comme la superposition du rayonnement de chaque anneau, remplaçant ainsi la sommation continue par une sommation discrète sur les nombres d'onde.

### II.2.3.3.1 Calcul du champ rayonné par une distribution annulaire de forces

La géométrie considérée est représentée à la figure II-4. La force verticale est continûment répartie sur la circonférence d'un cercle de rayon  $L$ , centré en  $M'$  et situé dans le plan horizontal d'un demi-espace recouvert d'une couche identique à celui de la figure II-3.

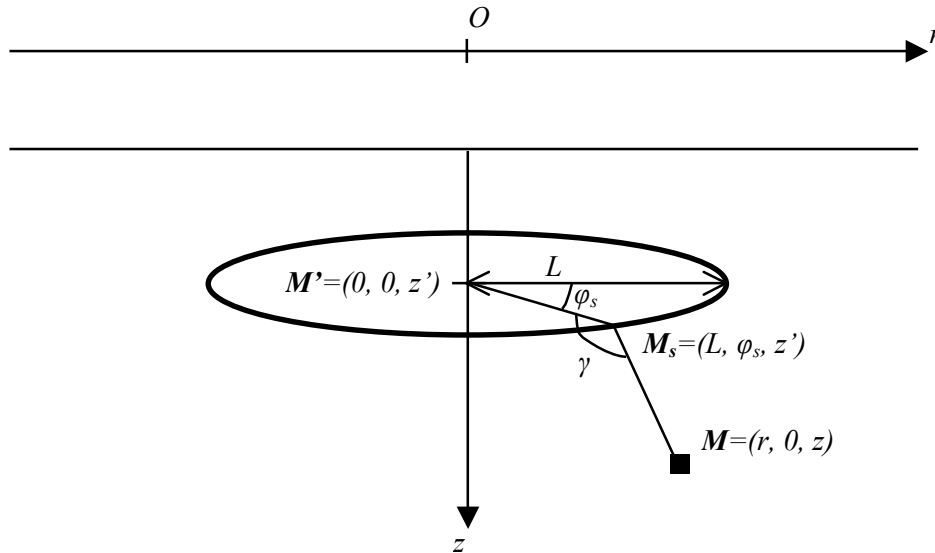


Figure II-4 : distribution annulaire de forces

Soit une force élémentaire appartenant à cet anneau, localisée en  $M_s = (L, \varphi_s, z')$  ; les potentiels de déplacements pour cette force se calculent à partir des potentiels associés à une force agissant en  $M'$  (équations (II-80) et (II-81)) et ont pour expression

$$\tilde{\Phi}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi^2 \rho \omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \exp[2jn\gamma] \times \int_0^{\infty} A_d^{P, F_s}(k) J_{2n}(k\sqrt{r^2 + L^2 - 2Lr \cos \varphi_s}) \exp[-j(z - z_1)\nu_\alpha(k)] dk \quad , \quad (\text{II-89})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi^2 \rho \omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \exp[2jn\gamma] \times \int_0^{\infty} \frac{A_d^{SV, F_s}(k)}{jk} J_{2n}(k\sqrt{r^2 + L^2 - 2Lr \cos \varphi_s}) \exp[-j(z - z_1)\nu_\beta(k)] dk \quad . \quad (\text{II-90})$$

où  $J_{2n}$  est la fonction de Bessel cylindrique d'indice  $2n$  et  $\gamma$  est l'angle formé à la source  $M_s$  entre le point  $M'$  et le récepteur  $M$ .  $\varepsilon_n$  est le facteur de Neumann défini par

$$\varepsilon_0 = 1 \quad , \quad (\text{II-91})$$

$$\varepsilon_n = 2 \text{ si } n \neq 0 \quad . \quad (\text{II-92})$$

L'utilisation du théorème d'addition de Graff pour les fonctions de Bessel permet d'écrire (II-89) et (II-90) sous la forme



$$\tilde{\Phi}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi^2 \rho \omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \times \int_0^{\infty} A_d^{P, F_s}(k) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(kr) J_{2n+m}(kL) \exp[jm\varphi_s] \right) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk, \quad (\text{II-93})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi^2 \rho \omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \times \int_0^{\infty} \frac{A_d^{SV, F_s}(k)}{jk} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(kr) J_{2n+m}(kL) \exp[jm\varphi_s] \right) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] dk, \quad (\text{II-94})$$

$J_m$  étant la fonction de Bessel cylindrique d'indice  $m$ .

À partir de (II-93) et (II-94), le rayonnement d'un ensemble de sources réparties uniformément à intervalle infinitésimal  $d\varphi_s$  sur la circonférence d'un cercle de rayon  $L$  centré en  $M'$  peut être calculé. Les potentiels correspondant s'écrivent

$$\tilde{\Phi}^{WZ, L}(\mathbf{M}; \omega) = \int_0^{2\pi} \tilde{\Phi}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) d\varphi_s, \quad (\text{II-95})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ, L}(\mathbf{M}; \omega) = \int_0^{2\pi} \tilde{\zeta}^{WZ, F_s(M_s)}(\mathbf{M}; \omega) d\varphi_s, \quad (\text{II-96})$$

et après calcul se mettent sous la forme

$$\tilde{\Phi}^{WZ, L}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{2\pi\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \int_0^{\infty} A_d^{P, F_s}(k) J_0(kr) J_{2n}(kL) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk, \quad (\text{II-97})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ, L}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{2\pi\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \int_0^{\infty} \frac{A_d^{SV, F_s}(k)}{jk} J_0(kr) J_{2n}(kL) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] dk. \quad (\text{II-98})$$

### II.2.3.3.2 Calcul du champ rayonné par un réseau périodique de distributions annulaires de forces

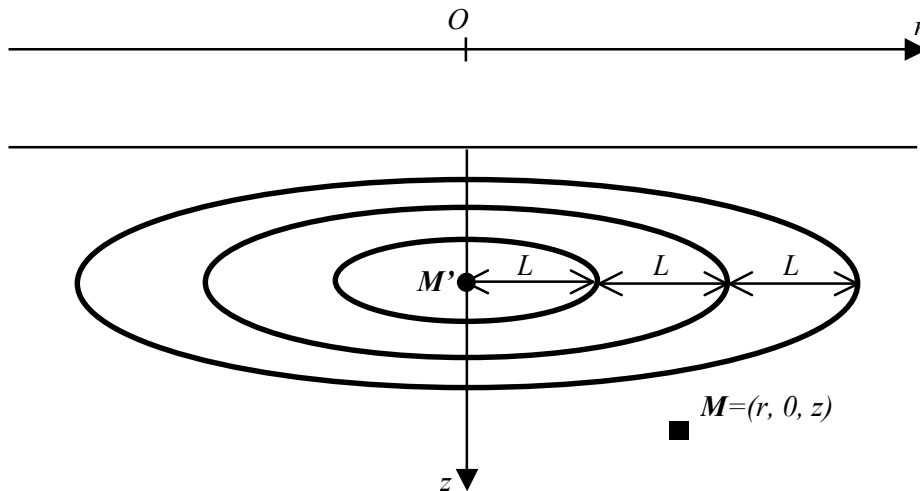


Figure II-5 : réseau périodique de distributions annulaires de forces

Soit un réseau infini périodique constitué d'anneaux de forces similaires à celui de la figure II-4 et situés à intervalles réguliers  $L$  les uns des autres (figure II-5). Le rayonnement de ce réseau s'exprime comme la superposition du rayonnement de chaque anneau (équations (II-97) et (II-98)). Si, à ce réseau, une force agissant en  $M'$  est ajoutée (figure II-5), le champ élastique rayonné s'écrit :

$$\tilde{\Phi}^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \times \int_0^\infty A_d^{P,F_s}(k) J_0(kr) \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_{2n}(kmL) \right) \right] \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk, \quad (\text{II-99})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \times \int_0^\infty \frac{A_d^{SV,F_s}(k)}{jk} J_0(kr) \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_{2n}(kL) \right) \right] \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] dk. \quad (\text{II-100})$$

Le théorème de Jacobi [Watson, 1922] permet d'écrire :

$$1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_{2n}(mkL) \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(kL - 2n\pi) \quad (\text{II-101})$$

Introduisant (II-101) dans (II-99) et (II-100), et posant

$$k_n = n \frac{2\pi}{L}, \quad (\text{II-102})$$

le champ élastique rayonné par le système constitué de la force et du réseau périodique de distributions annulaires de forces s'écrit sous la forme d'une somme discrète sur les nombres d'onde :

$$\tilde{\Phi}^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n A_d^{P,F_s}(k_n) J_0(k_n r) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k_n)], \quad (\text{II-103})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{A_d^{SV,F_s}(k_n)}{jk_n} J_0(k_n r) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k_n)]. \quad (\text{II-104})$$

La périodisation spatiale introduite par le réseau de sources a donc pour effet de discrétiser en nombres d'ondes horizontaux le champ d'ondes rayonné. Les déplacements sont calculés en utilisant les relations de type (II-57) à (II-59) :

$$\tilde{G}_r^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n J_1(k_n r) \left( \begin{array}{l} -k_n A_d^{P,F_s}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k_n)] \\ + v_\beta(k_n) A_d^{SV,F_s}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k_n)] \end{array} \right), \quad (\text{II-105})$$

$$\tilde{G}_z^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{f_z}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n J_0(k_n r) \left( \begin{array}{l} v_\alpha(k_n) A_d^{P,F_s}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k_n)] \\ + k_n A_d^{SV,F_s}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k_n)] \end{array} \right), \quad (\text{II-106})$$

$$\tilde{G}_\varphi^{WZ,a}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{II-107})$$

### II.2.3.4 Solutions en régime transitoire pour le réseau périodique de forces Dédution de la fonction de Green associée à la force enfouie dans un demi-espace recouvert d'une couche

Il s'agit maintenant de calculer, en régime transitoire, les solutions pour le réseau de forces, et d'en déduire la fonction de Green associée à la force originale.

Le premier problème posé est associé à la présence de singularités dans les fonctions  $A_p^d$  et  $A_{SV}^d$ . En attribuant à la fréquence angulaire une partie imaginaire  $\omega_J > 0$  telle que :

$$\omega = \omega_R - j\omega_J, \quad (\text{II-108})$$

les singularités sont déplacées dans les second et quatrième quadrants du plan complexe des nombres d'onde.

Le second problème concerne l'évaluation de la transformée de Fourier inverse des expressions (II-105) et (II-106) ; si celle-ci pouvait être effectuée de manière continue, il serait possible d'isoler la fonction de Green associée à la force pourvu qu'une valeur adéquate de  $L$  ait été choisie. Cependant, dans la pratique, (II-105) et (II-106) ne peuvent être calculées que pour un nombre fini de fréquences et les solutions en régime transitoire sont calculées par un algorithme FFT. Autrement dit, il faut calculer une réponse de durée infinie (puisque le réseau est composé d'un nombre infini d'anneaux) en utilisant un algorithme FFT qui fournit un signal de durée finie  $T$  donné par

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (\text{II-109})$$

où  $\Delta\omega$  est le pas d'échantillonnage en fréquence angulaire utilisé pour calculer (II-105) et (II-106). La solution consiste à effectuer une transformation de Fourier inverse à fréquence complexe :

$$\mathbf{G}^{WZ,a}(\mathbf{M};t) = \int_{-\infty + j\omega_J}^{+\infty + j\omega_J} \tilde{\mathbf{G}}^{WZ,a}(\mathbf{M};\omega) \exp[j\omega t] d\omega \quad (\text{II-110})$$

où la partie imaginaire de la fréquence angulaire  $\omega_J$ , introduite dans (II-101), est telle que

$$\exp[-\omega_J \cdot T] \ll 1. \quad (\text{II-111})$$

(II-111) assure l'atténuation, dans la fenêtre temporelle  $T$ , de la réponse initialement infinie. Ainsi, si  $L$  est choisi suffisamment grand de façon à ce qu'aucune contribution issue du réseau périodique n'arrive au récepteur  $M$  dans la fenêtre temporelle, la fonction de Green en régime transitoire associée à la force est obtenue à partir du calcul (II-110) dans lequel l'effet de la partie imaginaire de la fréquence imaginaire doit être corrigé. Autrement dit, pour tous les temps  $t$  et distances  $L$  tels que

$$r < \frac{L}{2}, \quad (\text{II-112})$$

$$[(L-r)^2 + (z-z')^2]^{1/2} > at, \quad (\text{II-113})$$

alors,

$$\mathbf{G}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) = \exp[\omega_j t] \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{G}}^{WZ, a}(\mathbf{M}; \omega) \exp[j\omega_R t] d\omega_R \quad (\text{II-114})$$

où l'intégrale est calculée en utilisant un algorithme FFT.

## II.2.4 Calcul de la fonction de Green associée au couple de forces

Reprenant les résultats établis dans la section II.1.3.1, la fonction de Green associée au couple de forces enfoui dans un demi-espace recouvert d'une couche s'exprime à partir des dérivées spatiales de la fonction de Green associée à la force (équation II-114) :

$$\mathbf{G}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; t) = \frac{M_0}{f_z} \frac{\partial}{\partial z'} [\mathbf{G}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t; \mathbf{M}')] \quad (\text{II-115})$$

où le moment sismique  $M_0$  est unitaire.

Pour calculer (II-115), il faut évaluer la dérivée spatiale par rapport à la coordonnée  $z'$  de la fonction de Green associée au réseau périodique de forces  $\tilde{\mathbf{G}}^{WZ, a}(\mathbf{M}; \omega)$ . La dépendance en  $z'$  de cette dernière provient de l'exponentielle présente dans les vecteurs d'amplitude  $\{A_d^{F_\delta}(k)\}$  via  $\{A_{0d}^{F_\delta}(k)\}$  et  $\{A_{0u}^{F_\delta}(k)\}$  (équations (II-78), (II-79), (II-83) et (II-84)).

Soient  $\tilde{\Phi}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; \omega)$  et  $\tilde{\zeta}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; \omega)$  les potentiels de déplacement associés au couple de forces ; ces derniers ont pour expression

$$\tilde{\Phi}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty A_d^{P, (F_\delta, -F_\delta)}(k) J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k)] dk, \quad (\text{II-116})$$

$$\tilde{\zeta}^{WZ, (F_\delta, -F_\delta)}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{f_z}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \frac{1}{jk} \left( A_d^{SV, (F_\delta, -F_\delta)}(k) J_0(kr) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k)] \right) dk, \quad (\text{II-117})$$

où compte tenu de la remarque précédente,

$$\{A_d^{(F_\delta, -F_\delta)}(k)\} = \frac{\partial}{\partial z'} \{A_{0u}^{F_\delta}(k)\} ([I] + [R]) \text{ pour } z < z', \quad (\text{II-118})$$

$$\{A_d^{(F_\delta, -F_\delta)}(k)\} = \frac{\partial}{\partial z'} \{A_{0d}^{F_\delta}(k)\} + [R] \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \{A_{0u}^{F_\delta}(k)\} \text{ pour } z > z', \quad (\text{II-119})$$

avec

$$\{A_d^{(F_\delta, -F_\delta)}(k)\} = \left\{ \begin{array}{l} A_d^{P, (F_\delta, -F_\delta)}(k) \\ A_d^{SV, (F_\delta, -F_\delta)}(k) \end{array} \right\}. \quad (\text{II-120})$$

Utilisant les expressions (II-78) et (II-79), il vient

$$\{A_d^{(F_\delta, -F_\delta)}(k)\} = \left\{ \begin{array}{l} -jv_\alpha A_{0u}^{P, F_\delta}(k) \\ -jv_\beta A_{0u}^{SV, F_\delta}(k) \end{array} \right\} ([I] + [R]) \text{ pour } z < z', \quad (\text{II-121})$$

$$\{A_d^{(F_\delta, -F_\delta)}(k)\} = \left\{ \begin{array}{l} jv_\alpha A_{0d}^{P, F_\delta}(k) \\ jv_\beta A_{0d}^{SV, F_\delta}(k) \end{array} \right\} + [R] \cdot \left\{ \begin{array}{l} -jv_\alpha A_{0u}^{P, F_\delta}(k) \\ -jv_\beta A_{0u}^{SV, F_\delta}(k) \end{array} \right\} \text{ pour } z > z'. \quad (\text{II-122})$$

(II-121) ou (II-122) sont ensuite introduits dans (II-105) et (II-106) à la place de  $\{A^d(k)\}$  :

$$\tilde{G}_r^{WZ, ac}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{M_0}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n J_1(k_n r) \left( \begin{array}{l} -k_n A_d^{P, (F_\delta, -F_\delta)}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k_n)] \\ + v_\beta(k_n) A_d^{SV, (F_\delta, -F_\delta)}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k_n)] \end{array} \right), \quad (\text{II-123})$$

$$\tilde{G}_z^{WZ, ac}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{M_0}{4\rho\omega^2 L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n J_0(k_n r) \left( \begin{array}{l} v_\alpha(k_n) A_d^{P, (F_\delta, -F_\delta)}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\alpha(k_n)] \\ + k_n A_d^{SV, (F_\delta, -F_\delta)}(k_n) \exp[-j(z-z_1)v_\beta(k_n)] \end{array} \right), \quad (\text{II-124})$$

$$\tilde{G}_\varphi^{WZ, ac}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{II-125})$$

Suivant alors le formalisme établi à la section II.2.3.4, la fonction de Green associée au couple de forces est obtenue.

## II.3 Rayonnement de la source directionnelle en configuration réelle

### II.3.1 La réponse du milieu à une force ou un couple de forces ayant une dépendance temporelle arbitraire

Soit une force verticale quelconque  $\mathbf{F}$  agissant en  $M'$ , donnée par

$$\mathbf{F} = \delta(x)\delta(y)\delta(z-z')f_F(t)\mathbf{e}_z \quad (\text{II-126})$$

où la dépendance temporelle  $f_F(t)$  est connue. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}^F(\mathbf{M}; t)$ , respectivement  $\mathbf{u}^{WZ, F}(\mathbf{M}; t)$ , résultant de l'application de  $\mathbf{F}$  à l'intérieur du demi-espace, respectivement à l'intérieur du demi-espace recouvert d'une couche, s'écrit sous la forme

$$\mathbf{u}^F(\mathbf{M}; t) = \mathbf{G}^{F_\delta}(\mathbf{M}; t) \otimes f_F(t), \quad (\text{II-127})$$

respectivement

$$\mathbf{u}^{WZ, F}(\mathbf{M}; t) = \mathbf{G}^{WZ, F_\delta}(\mathbf{M}; t) \otimes f_F(t). \quad (\text{II-128})$$

où  $\otimes$  désigne l'opérateur de convolution.

L'évaluation directe de la fonction de Green  $\mathbf{G}^{F_u}(\mathbf{M};t)$  consiste à calculer numériquement  $\mathbf{G}^{F_u}(\mathbf{M};t)$  puis à utiliser un algorithme de dérivation discrète par rapport au temps ; cette procédure est source d'erreurs numériques et d'imprécision dans les résultats du fait de l'instabilité induite par la dérivation discrète. Il est préférable d'utiliser la théorie des distributions qui permet d'appliquer l'opérateur de dérivation temporelle sur la fonction source  $f_F(t)$  et non plus sur la fonction de Green :

$$\mathbf{u}^F(\mathbf{M};t') = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{G}^{F_u}(\mathbf{M};t)] \otimes f_F(t) = \mathbf{G}^{F_u}(\mathbf{M};t) \otimes \frac{\partial}{\partial t} [f_F(t)]. \quad (\text{II-129})$$

Suivant le même principe, le champ de déplacement  $\mathbf{u}^{(F,-F)}(\mathbf{M};t)$  résultant de l'application du couple de forces  $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$  est donné par

$$\mathbf{u}^{(F,-F)}(\mathbf{M};t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{G}^{(F_u,-F_u)}(\mathbf{M};t)] \otimes f_F(t) = \mathbf{G}^{(F_u,-F_u)}(\mathbf{M};t) \otimes \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f_F(t)]. \quad (\text{II-130})$$

Lorsque le milieu considéré est un demi-espace recouvert d'une couche, il est possible d'évaluer directement la réponse  $\mathbf{u}^{WZ,F}(\mathbf{M};t)$  à l'intérieur du demi-espace puisque dans le domaine fréquentiel, (II-128) est équivalente à une multiplication spectrale

$$\tilde{\mathbf{u}}^{WZ,F}(\mathbf{M};\omega) = \tilde{\mathbf{G}}^{WZ,F}(\mathbf{M};\omega) \cdot \tilde{f}_F(\omega). \quad (\text{II-131})$$

Il suffit donc de multiplier les réponses spectrales (II-105) à (II-107) (respectivement (II-123) à (II-125)) par  $\tilde{f}_F(\omega)$  et d'effectuer l'opération de transformation de Fourier inverse (II-114) pour retrouver la solution voulue  $\mathbf{u}^{WZ,F}(\mathbf{M};t)$  (respectivement  $\mathbf{u}^{WZ,(F,-F)}(\mathbf{M};t)$ ).

### II.3.2 Modélisation de la source directionnelle

La source directionnelle établie dans le premier chapitre est la combinaison de deux sources  $S_1$  (force) et  $S_2$  (force ou un couple de forces) dont les amplitudes complexes  $\tilde{f}_{F_1}(\omega)$  et  $\tilde{f}_{F_2}(\omega)$  sont ajustées. De ce fait, la modélisation de la source directionnelle en demi-espace seul (respectivement en demi-espace recouvert d'une couche) est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, les champs de déplacement  $\mathbf{u}^{(F_2,-F_2)}(\mathbf{M};t)$  ou  $\mathbf{u}^{F_2}(\mathbf{M};t)$  (respectivement  $\mathbf{u}^{WZ,(F_2,-F_2)}(\mathbf{M};t)$  ou  $\mathbf{u}^{WZ,F_2}(\mathbf{M};t)$ ) sont calculés pour un couple de force ayant la dépendance temporelle de référence  $f_{F_2}(t)$ . Dans un deuxième temps, les champs de déplacement  $\mathbf{u}^{F_1}(\mathbf{M};t)$  (respectivement  $\mathbf{u}^{WZ,F_1}(\mathbf{M};t)$ ) sont calculés pour une force ayant une dépendance temporelle  $f_{F_1}(t)$  donnée par

$$f_{F_1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{c}(\omega; d) \tilde{f}_{F_2}(\omega) \right) \exp[j\omega t] d\omega. \quad (\text{II-132})$$

La réponse du milieu est obtenue en sommant les solutions calculées pour chaque source.  $f_{F_1}(t)$  peut être calculée analytiquement si la source directionnelle est la combinaison d'une force (source  $S_1$ ) et d'un couple de forces (source  $S_2$ ). Dans ce cas,  $\tilde{c}(\omega; d)$  est donné par

$$\tilde{c}(\omega, d) = \tilde{c}_\alpha^{eq}(\omega, d, \theta_\alpha) = 2jk_\alpha d \cos \theta_\alpha, \quad (\text{II-133})$$

ou

$$\tilde{c}(\omega, d) = \tilde{c}_\beta^{eq}(\omega, d, \theta_\beta) = 2jk_\beta d \cos \theta_\beta, \quad (\text{II-134})$$

et l'expression de  $f_{F_1}(t)$  est

$$f_{F_1}(t) = \frac{2d}{\alpha} \cos \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial t} f_{F_2}(t), \quad (\text{II-135})$$

ou

$$f_{F_1}(t) = \frac{2d}{\beta} \cos \theta_\beta \frac{\partial}{\partial t} f_{F_2}(t). \quad (\text{II-136})$$

De ce fait, pour les calculs numériques, il est préférable de représenter la source directionnelle comme la combinaison d'une force et d'un couple de forces plutôt que comme la combinaison de deux forces.

### II.3.3 Sismogrammes de la source directionnelle

Dans toutes les applications numériques qui suivent, les paramètres constitutifs de la source directionnelle sont les suivants : la distance  $2d$  vaut  $1 \text{ m}$  et  $f_{F_2}(t)$  est le signal Ricker donné par

$$f_{F_2}(t) = [1 - 2(\omega_0 t)^2] \exp[-(\omega_0 t)^2]. \quad (\text{II-137})$$

Dans (II-137),  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0$  étant la fréquence centrale du signal, c'est à dire la valeur de la fréquence pour laquelle le module du spectre  $\tilde{f}_{F_2}$  est maximal ;  $f_{F_1}(t)$  est donné par (II-135) avec  $\theta_\alpha = 0$ . La source directionnelle est enterrée à  $20 \text{ m}$  dans un demi-espace fait de marnes dont les caractéristiques mécaniques sont  $\alpha = 2500 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\beta = \alpha / \sqrt{3} \approx 1443.4 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 3300 \text{ kg.m}^{-3}$ .

#### II.3.3.1 Validation des méthodes

Les sismogrammes de la source directionnelle en demi-espace sont tout d'abord calculés en coordonnées sphériques par la méthode de Cagniard - De Hoop. Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par le couplage réflectivité / DWN dans lequel couche et demi-espace ont mêmes propriétés mécaniques. La fréquence centrale du Ricker est fixée à  $32 \text{ Hz}$  ; les amplitudes en fonction du temps ainsi que les spectres des signaux  $f_{F_1}(t)$  et  $f_{F_2}(t)$  sont donnés en figures II-6 et II-7.

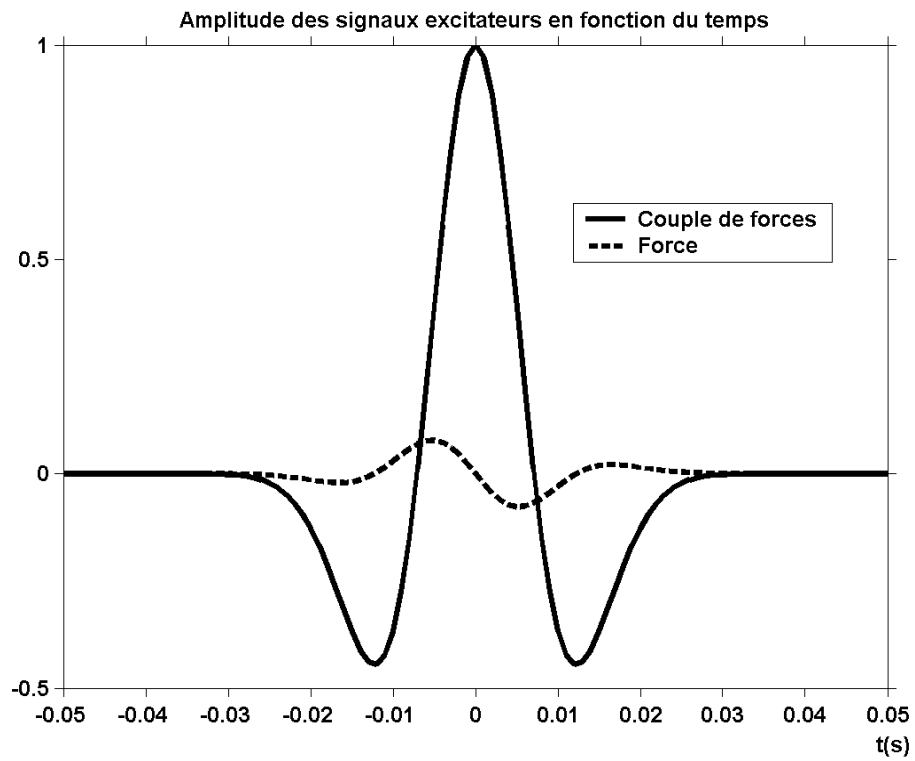


Figure II-6 : amplitudes des signaux excitateurs en fonction du temps

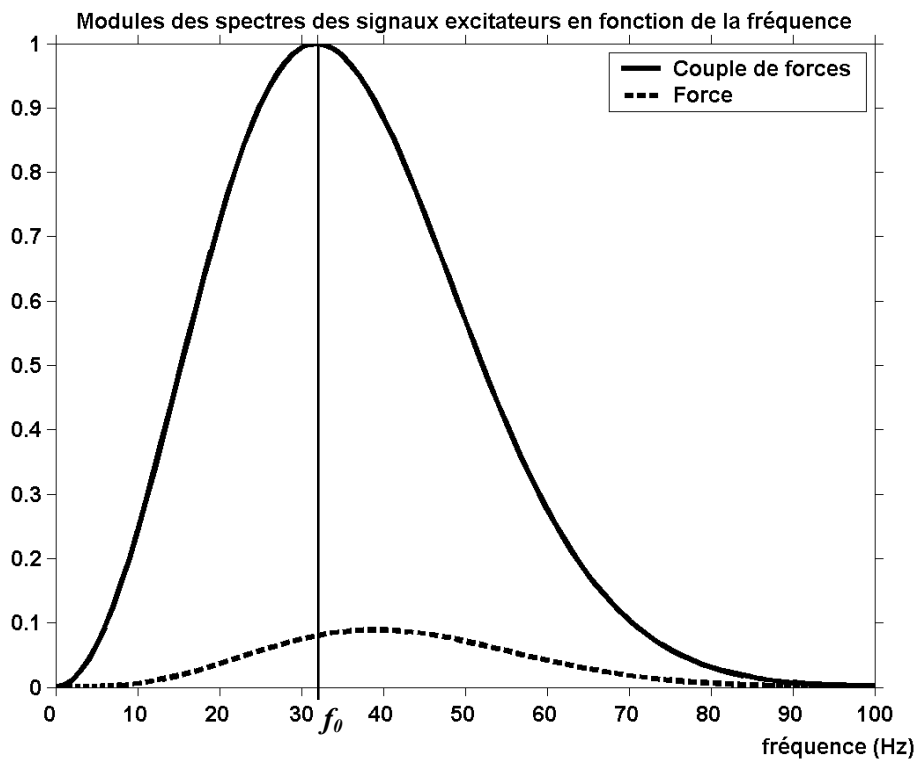


Figure II-7 : modules des spectres des signaux excitateurs en fonction de la fréquence



La figure II-8 représente la géométrie source/récepteurs utilisée pour le calcul des sismogrammes présentés sur la figure II-9. L'excellent accord entre les solutions obtenues par méthode de Cagniard De Hoop et par couplage réflectivité / DWN valide les développements effectués ; par ailleurs, en annexe D, à titre de validation supplémentaire, une comparaison est présentée avec les sismogrammes exposés dans la référence [Johnson, 1974]. En demi-espace, les contributions directes et réfléchies sont calculées séparément (équations II-41) et (II-50)) ; de ce fait, l'identification des temps d'arrivées des ondes sur les sismogrammes est immédiate (figure II-9).

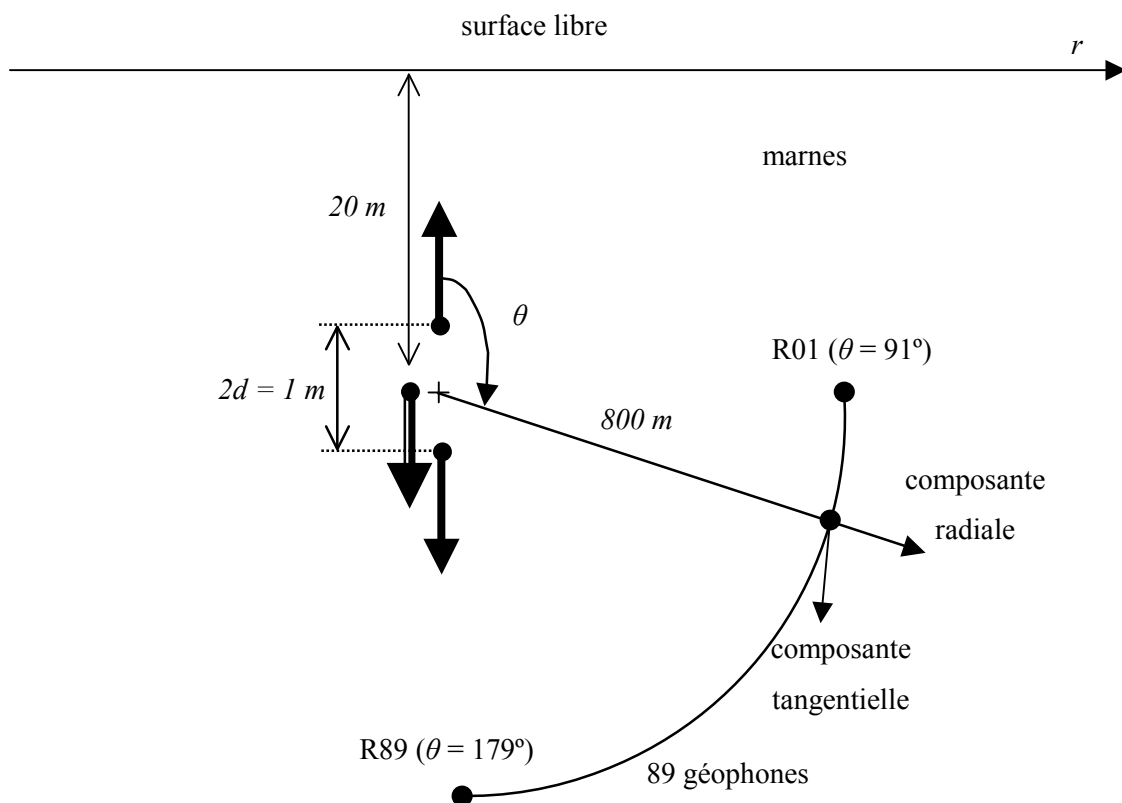
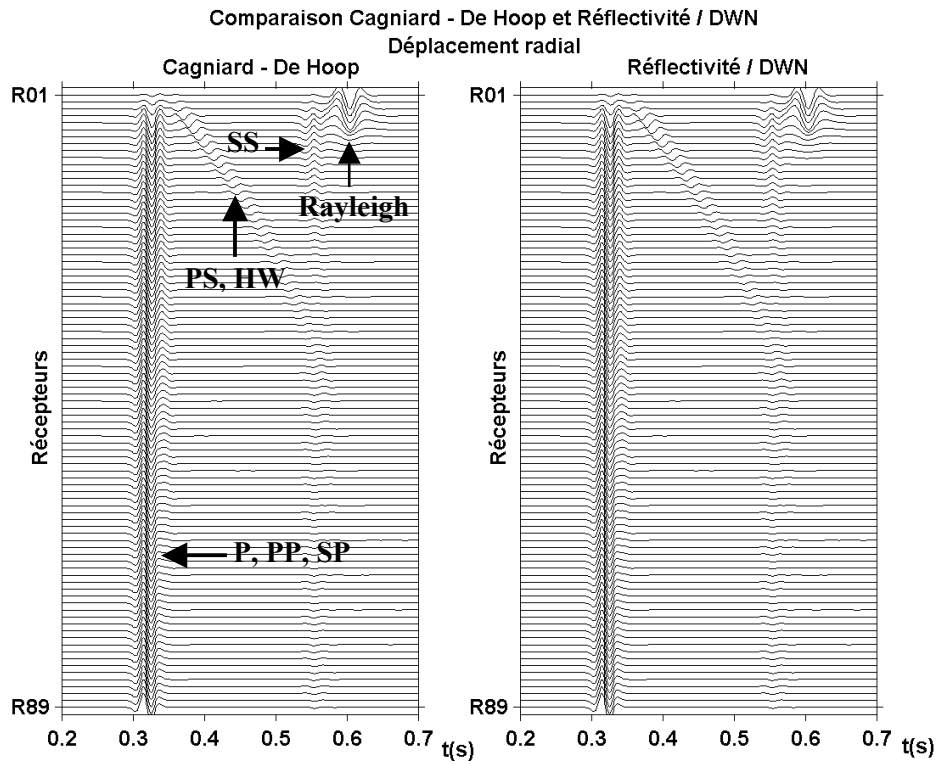


Figure II-8 : géométrie utilisée pour la validation des méthodes de calcul

a)



b)

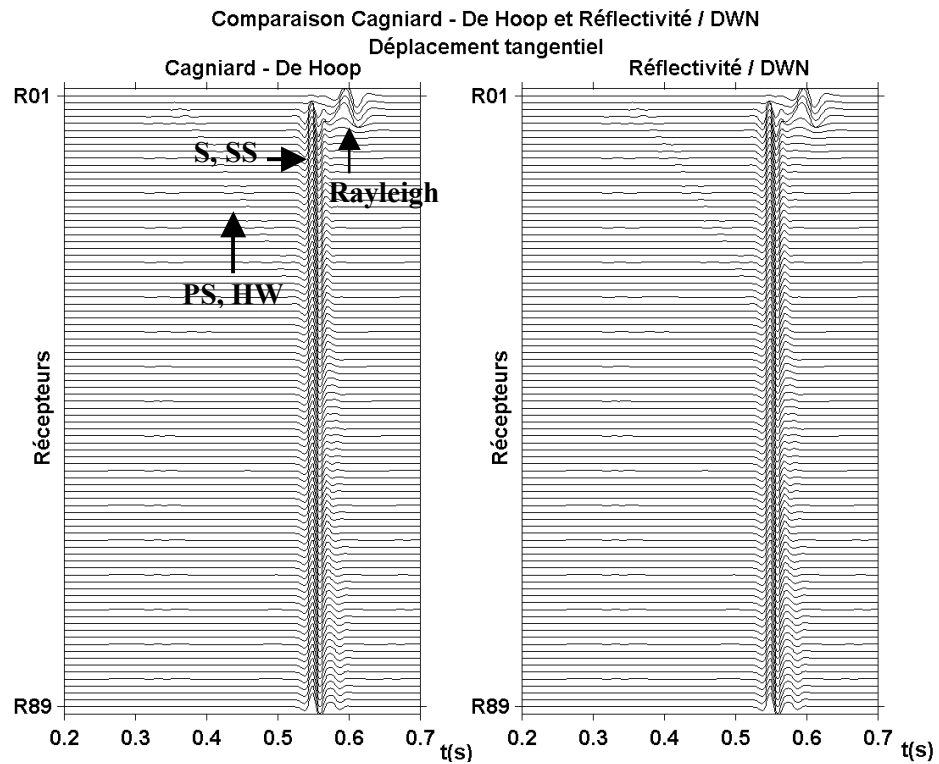
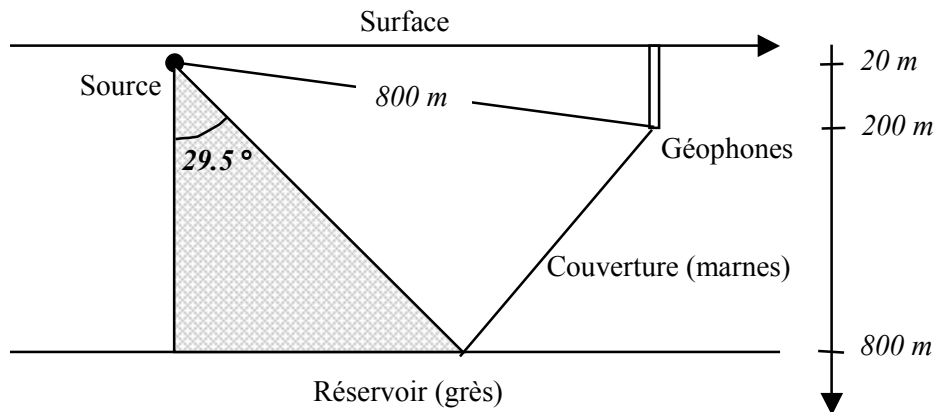


Figure II-9 : sismogrammes de la source directionnelle

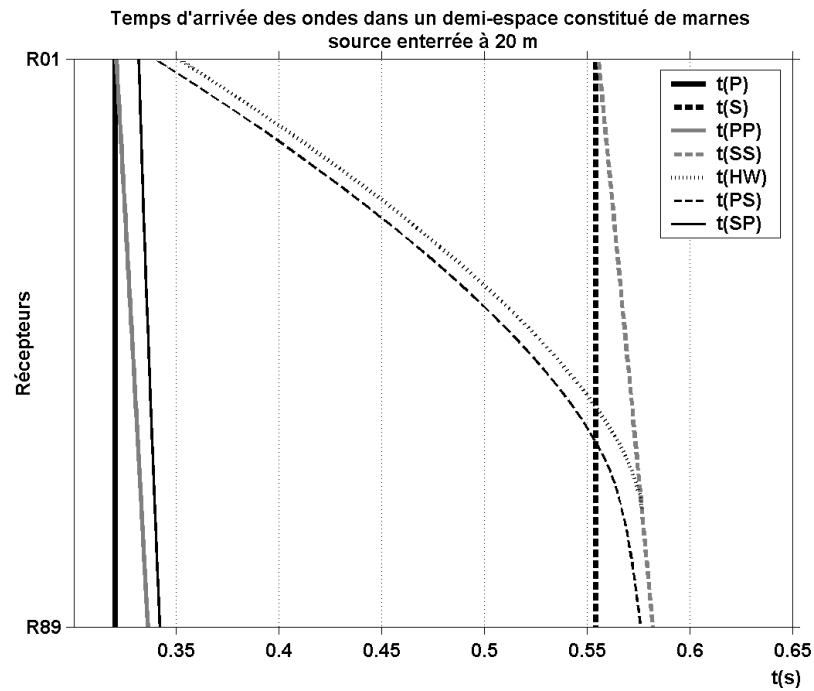
### II.3.3.2 La source directionnelle en demi-espace

Une géométrie typique de monitoring sismique est considérée (figure II-10). Une couche de grès, saturée d'hydrocarbures, est recouverte d'une couche de  $800\text{ m}$  de marnes. Des géophones sont répartis verticalement sur  $200\text{ m}$  et la distance entre la source et le plus profond des récepteurs est égale à  $800\text{ m}$  ; de ce fait, un secteur angulaire de  $29.5^\circ$  doit être « éclairé » par la source.



**Figure II-10 : configuration typique de monitoring sismique**

La géométrie de calcul est indiquée par la figure II-8 et la valeur de la fréquence centrale du signal Ricker reste fixée à  $32\text{ Hz}$  ; les sismogrammes (déplacements radial et tangentiel) du couple de forces et de la source directionnelle sont calculés. Dans la méthode de Cagniard - De Hoop, chaque contribution (P, S, PP, SS, PS, SP) est calculée séparément (équations (II-41 et (II-50)) et l'identification des temps d'arrivée est immédiate. La figure II-11 montre les temps d'arrivée des diverses contributions.

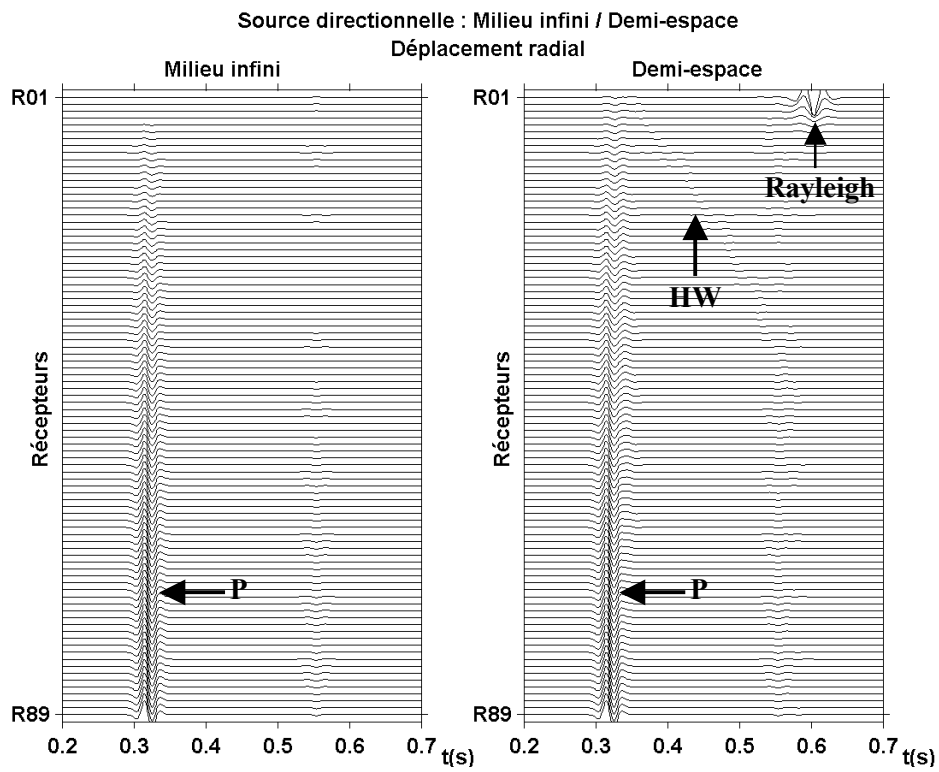


**Figure II-11 : Temps d'arrivée des perturbations dans le demi-espace**

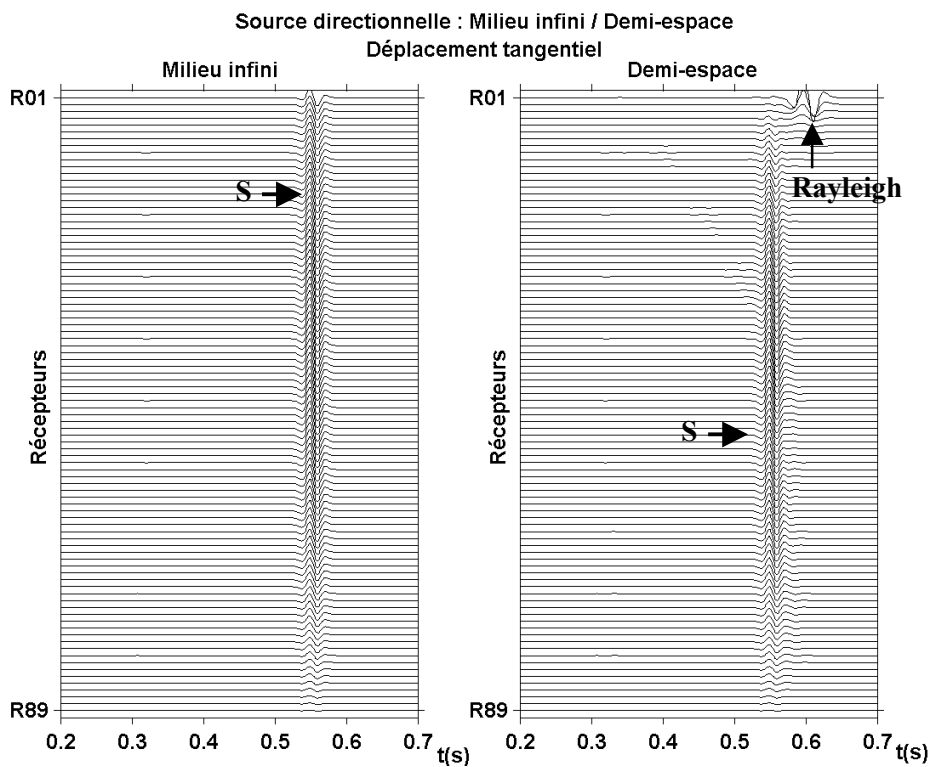
La figure II-12 compare le rayonnement de la source directionnelle (déplacement radial et tangential) en milieu infini et semi-infini.

La source directionnelle peut être vue comme un couple de forces modifié ; c'est pourquoi sa capacité à générer un signal directionnel peut être évaluée en comparant les amplitudes des ondes réfléchies pour la source directionnelle et le couple de forces sans moment (figure II-13). La figure II-13 montre que les amplitudes des ondes réfléchies sont beaucoup plus faibles pour la source directionnelle que pour le couple de forces. De ce fait, les perturbations du signal source due à la surface libre sont fortement atténuées, particulièrement dans le secteur angulaire  $150^\circ - 180^\circ$  (récepteurs R61 à R90, cadres gris), correspondant à l'application visée (figure II-10). Ces résultats constituent une première validation du principe de source directionnelle en demi-espace.

a)

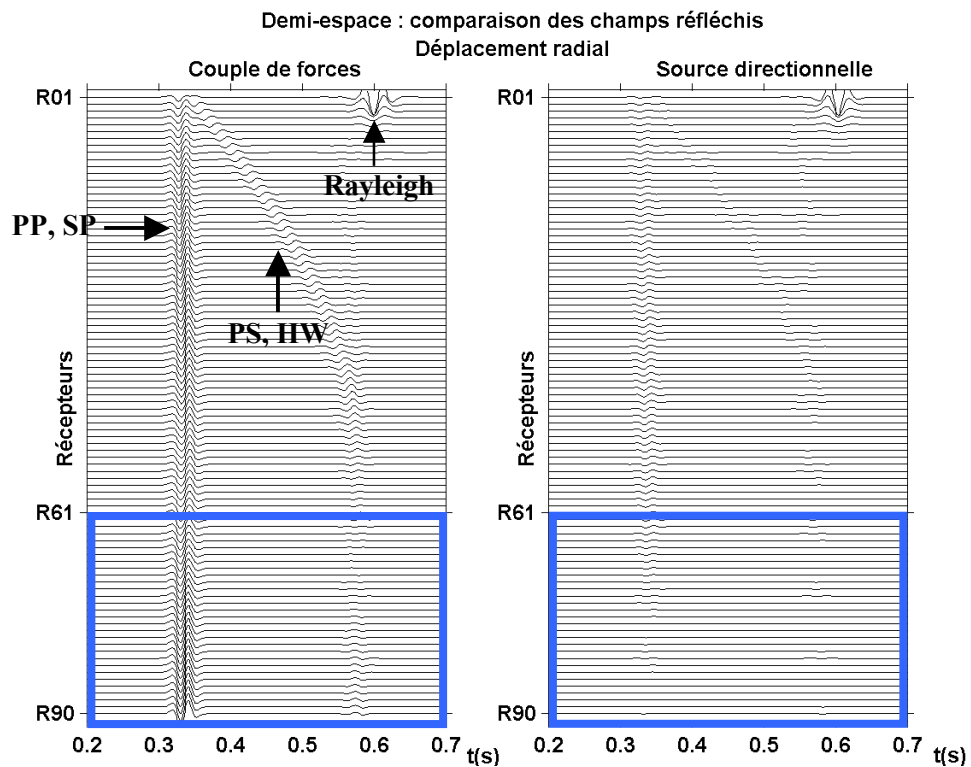


b)

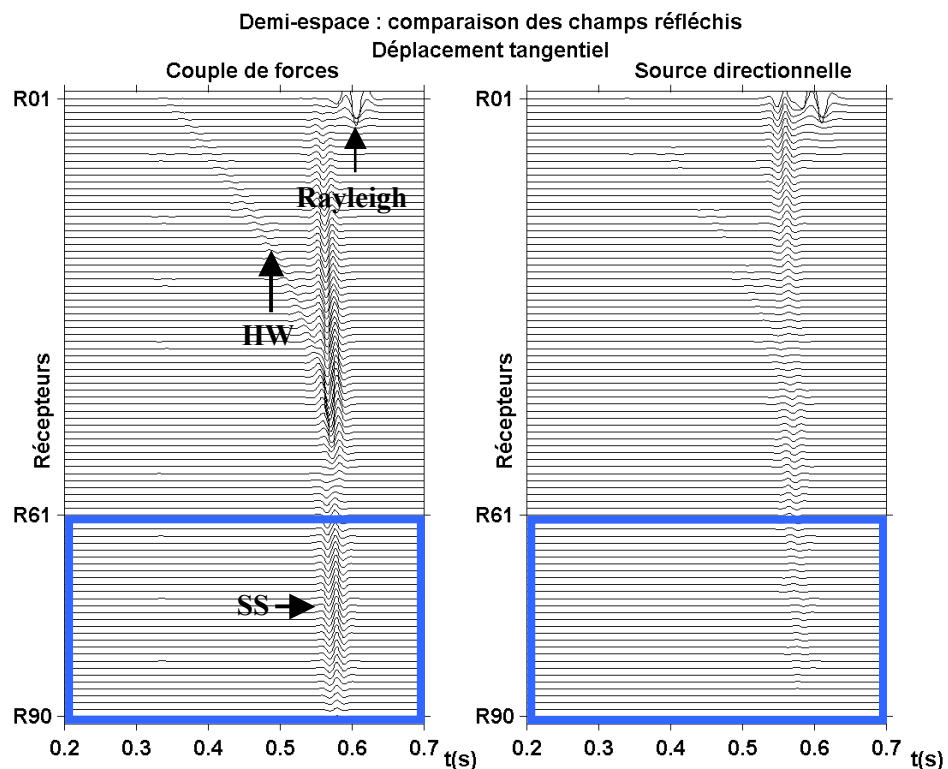


**Figure II-12 : la source directionnelle en milieu infini et en demi-espace**  
**Les sismogrammes sont normalisés par la valeur maximale du déplacement radial (a) ou**  
**tangentiel (b) en milieu infini.**

a)



b)



**Figure II-13 : amplitude des ondes réfléchies par le couple de forces et la source directionnelle**  
**Les sismogrammes du couple de forces (respectivement de la source directionnelle) sont normalisés par la valeur maximale du déplacement radial (a) ou tangentiel (b) créée par le couple de forces (respectivement la source directionnelle) en milieu infini**

### II.3.3.3 La prise en compte de la zone altérée

La source directionnelle est enfouie à  $20\text{ m}$  dans un demi-espace constitué de marnes et recouvert d'une couche de  $15\text{ m}$  d'épaisseur représentant la zone altérée ; les propriétés de la couche sont  $\alpha_{WZ} = 500\text{ m.s}^{-1}$ ,  $\beta_{WZ} = \alpha_{WZ} / \sqrt{3} \approx 288.7\text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho_{WZ} = 1610\text{ kg.m}^{-3}$ . La géométrie utilisée pour le calcul est représentée à la figure II-14 :  $50$  récepteurs sont enterrés entre  $100\text{ m}$  et  $800\text{ m}$  avec un offset par rapport à la source égal à  $200\text{ m}$ .

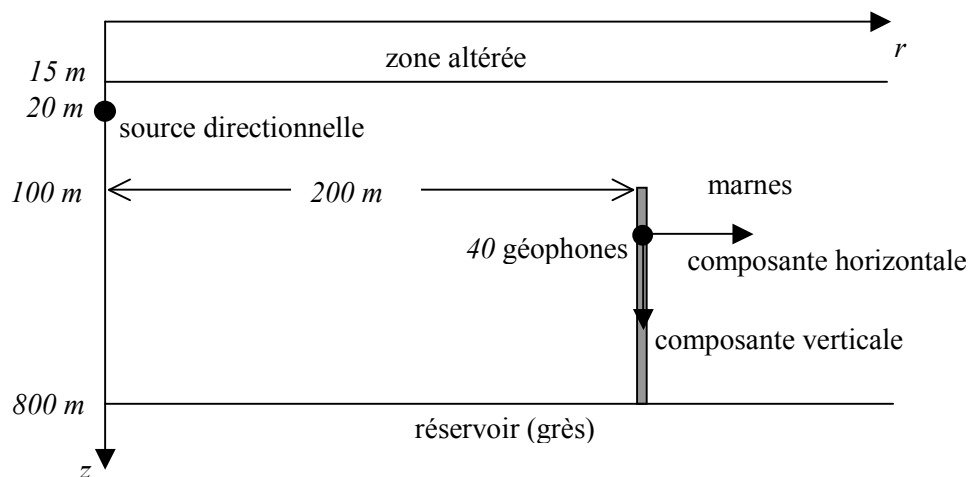


Figure II-14 : géométrie utilisée pour le calcul en demi-espace recouvert d'une couche

La figure II-15 (respectivement II-16) donne les temps d'arrivée des ondes réfléchies par l'interface demi-espace zone altérée (respectivement les temps d'arrivée des ondes directes et des réflexions à la surface).

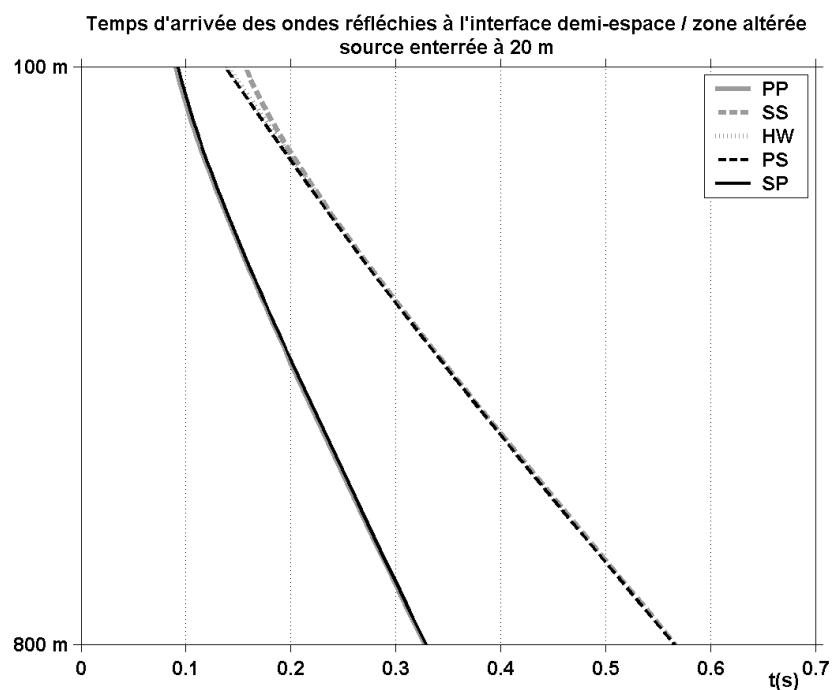
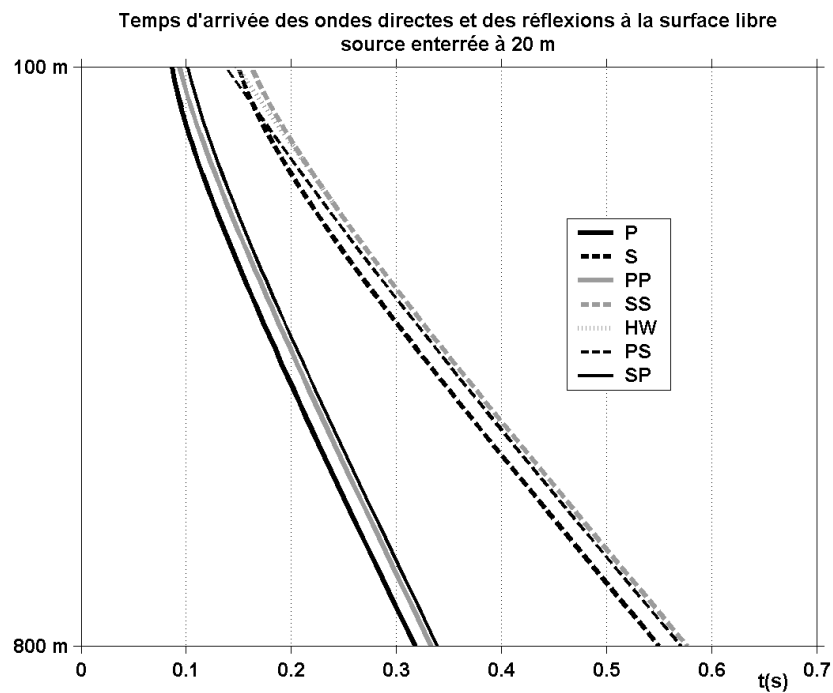


Figure II-15 : Temps d'arrivée des ondes réfléchies à l'interface



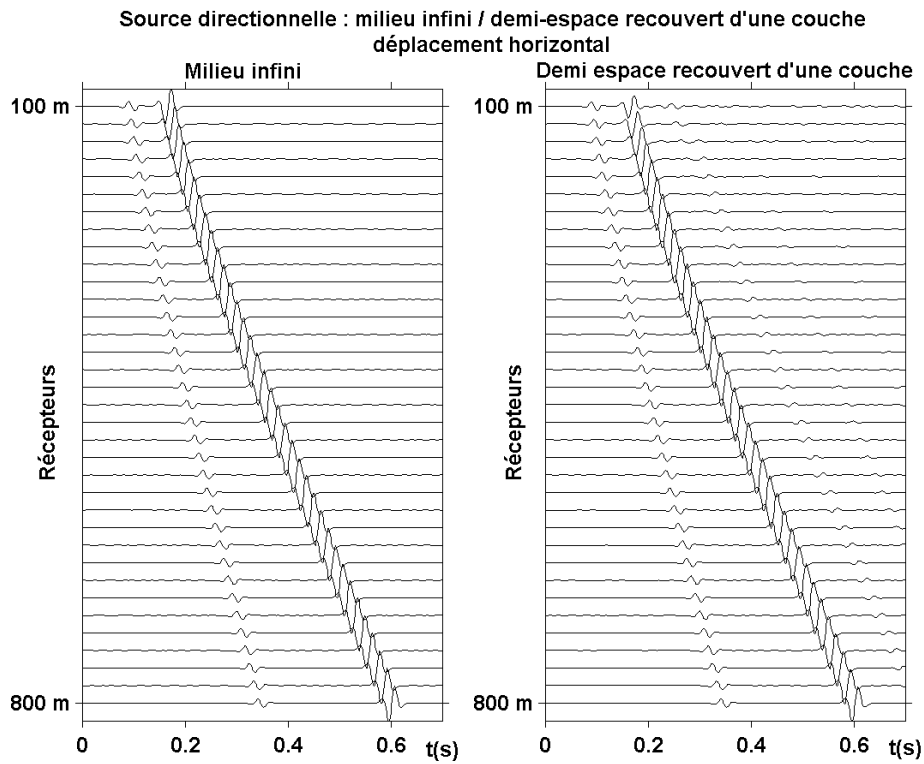
**Figure II-16 : Temps d'arrivée des ondes directes et réfléchies à la surface libre**

La fréquence centrale du signal Ricker valant  $32 \text{ Hz}$  (respectivement  $64 \text{ Hz}$ ), la figure II-17 (respectivement II-19) présente le rayonnement de la source directionnelle (déplacements horizontal et vertical) en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche ; la figures II-18 (respectivement II-20) compare les amplitudes des ondes réfléchies induites par la source directionnelle et le couple de forces.

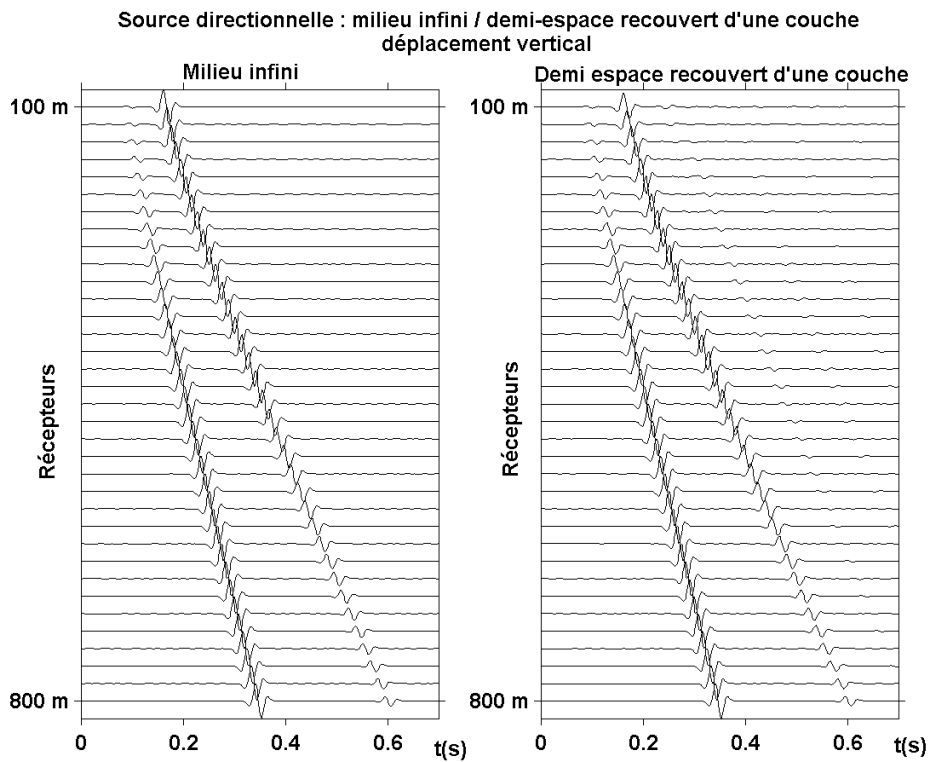
Les sismogrammes II-18 et II-20 montrent que la source directionnelle a pour effet de diminuer les amplitude des ondes réfléchies. De plus, au delà d'une profondeur de  $180 \text{ m}$ , il existe une zone où l'amplitude des ondes réfléchies est très faible et où les réflexions des ondes directes due à la présence d'un réservoir d'hydrocarbure ne seront pas affectées par les fluctuations de la zone altérée.



a)

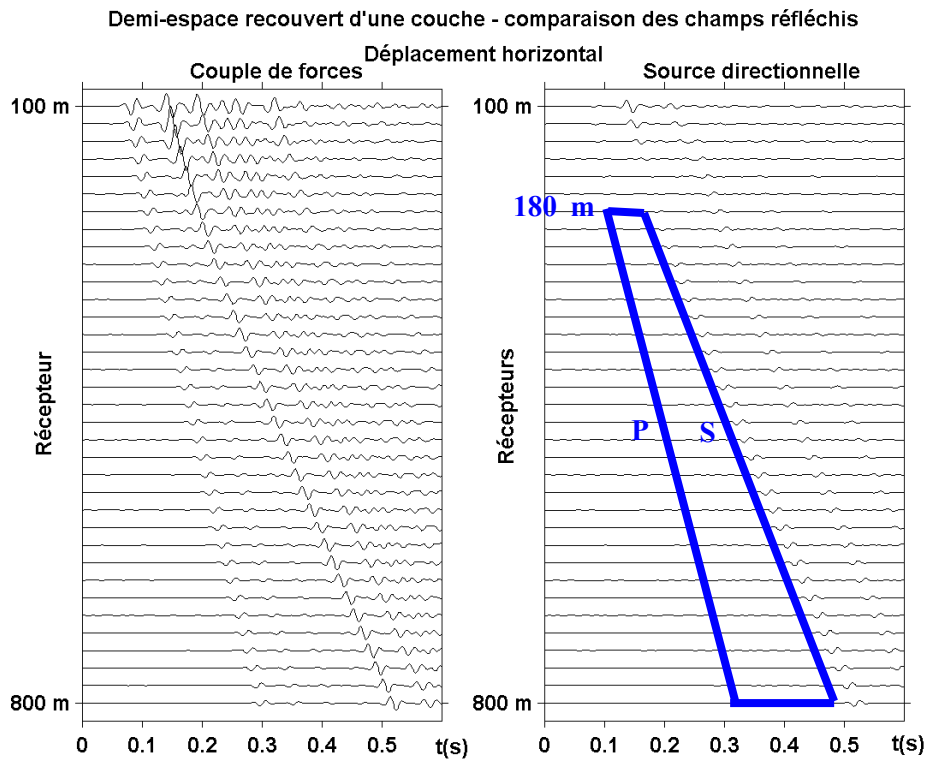


b)

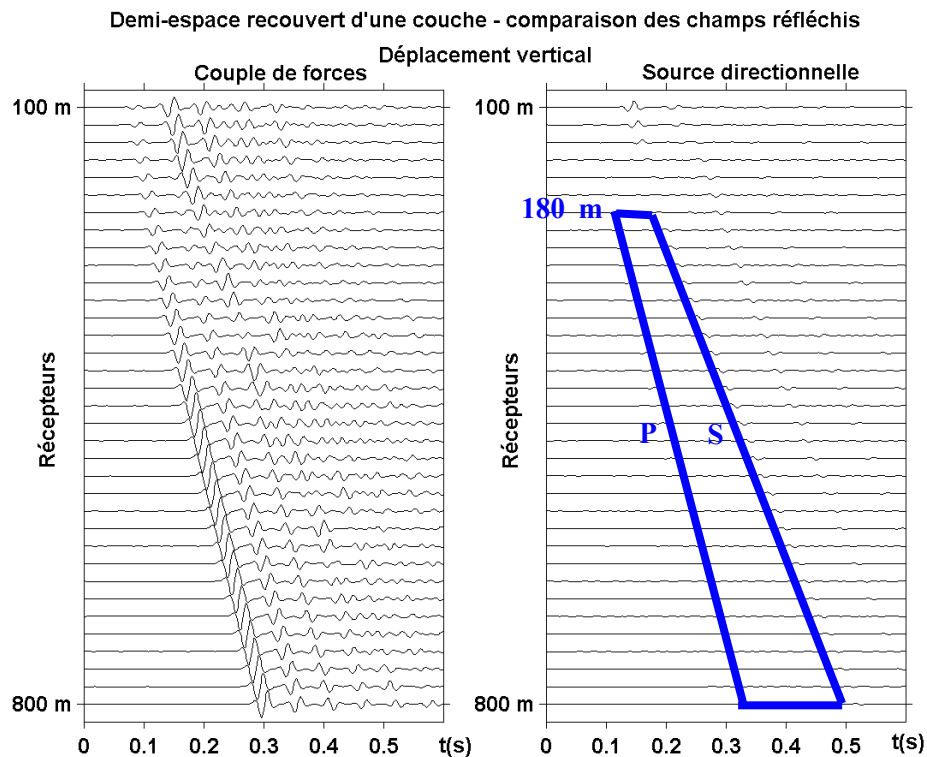


**Figure II-17 : la source directionnelle en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche ( $f_0 = 32 \text{ Hz}$ ). Pour chaque récepteur, les sismogrammes sont normalisés par « traces » par rapport à la solution en milieu infini**

a)

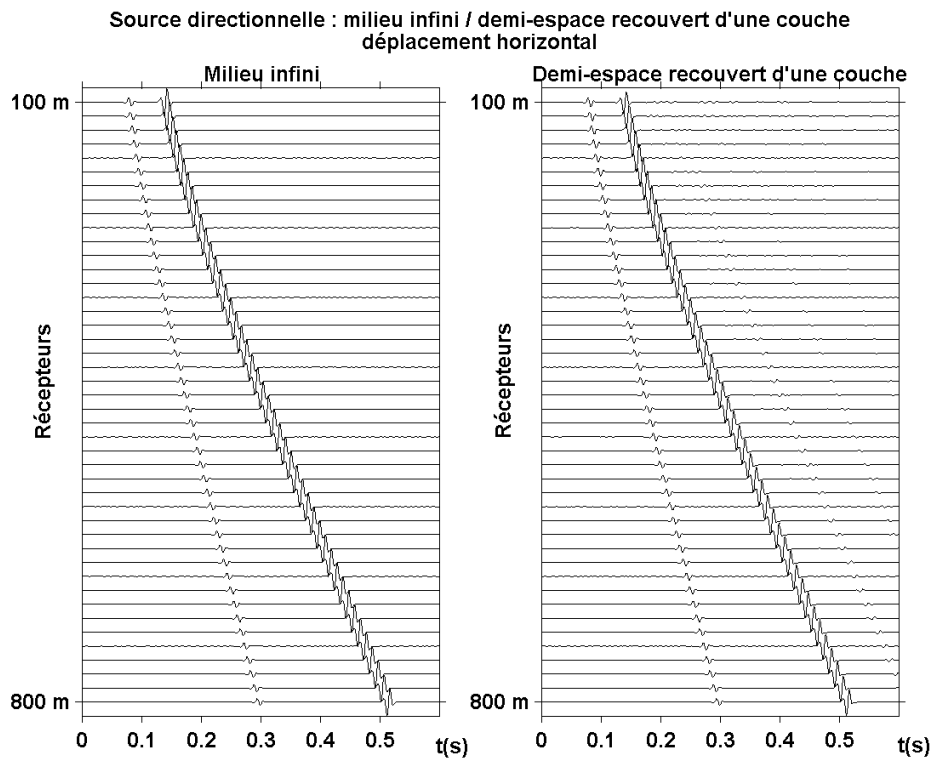


b)

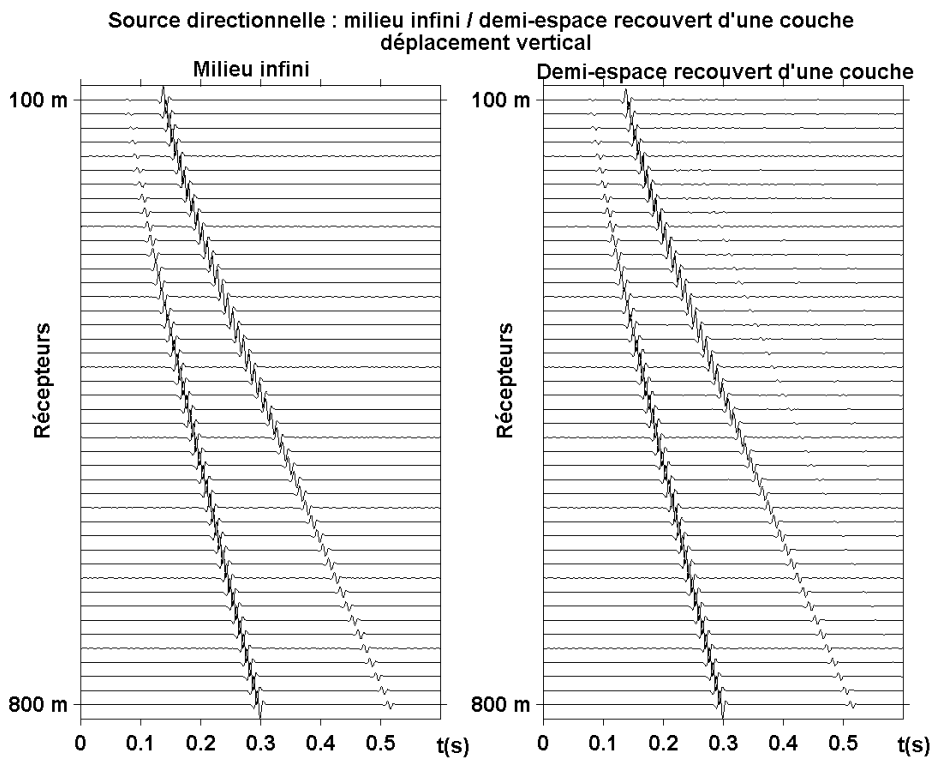


**Figure II-18 : amplitude des ondes réfléchies pour le couple de forces et la source directionnelle ( $f_0 = 32 \text{ Hz}$ ). Les sismogrammes du couple de forces (respectivement de la source directionnelle) sont normalisés par traces par rapport au déplacement horizontal (a) ou vertical (b) créé par le couple de forces (respectivement la source directionnelle) en milieu infini**

a)

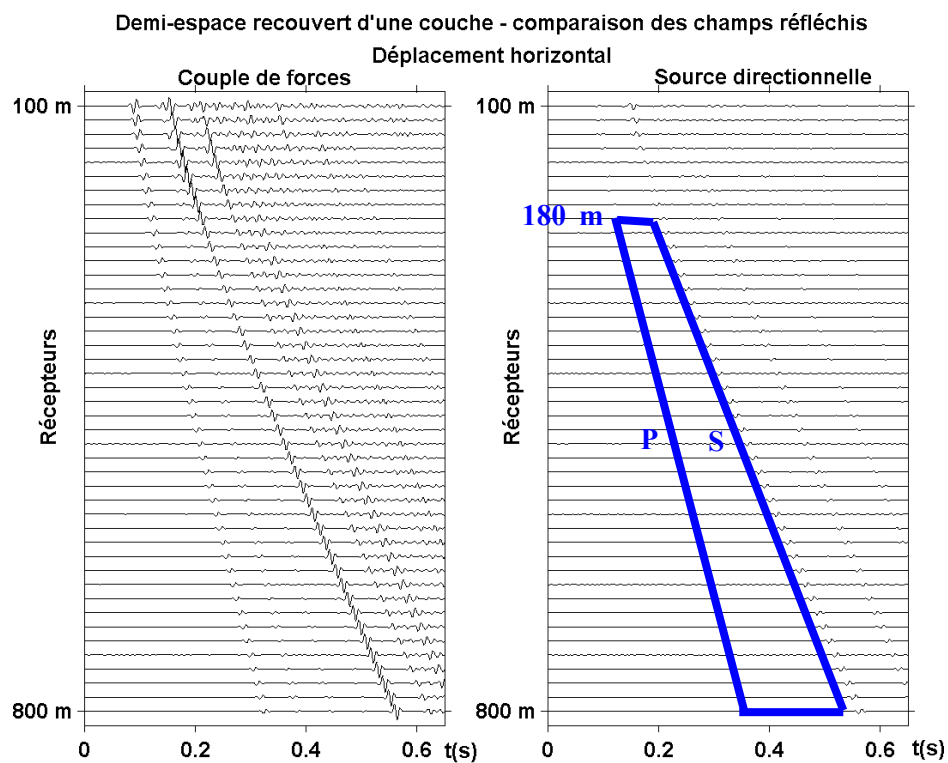


b)

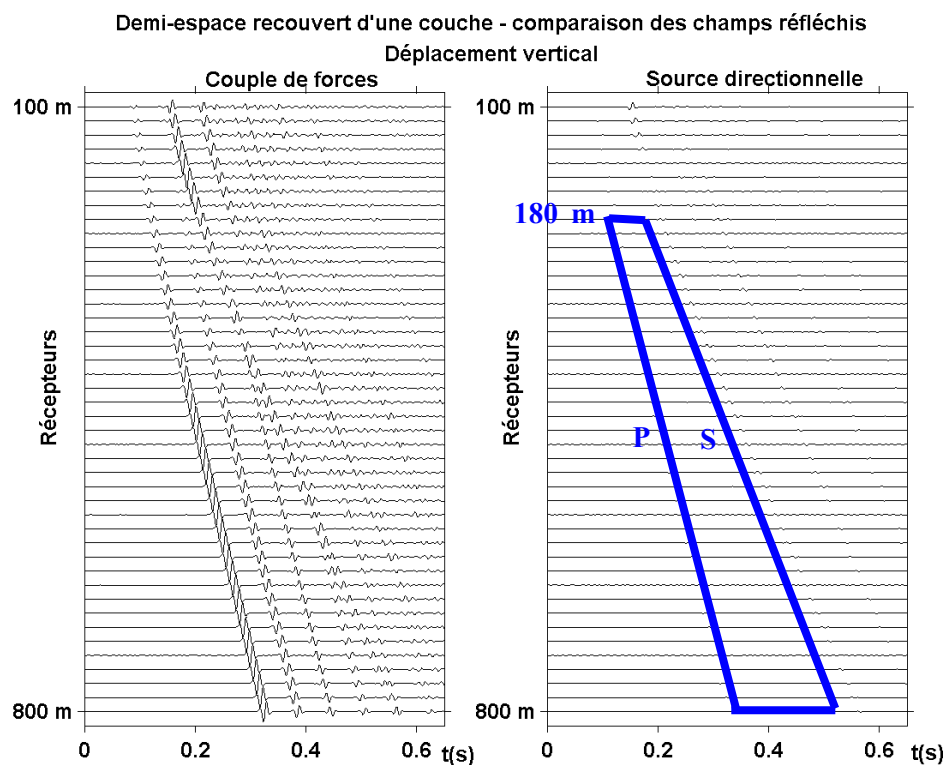


**Figure II-19 : la source directionnelle en milieu infini et en demi-espace recouvert d'une couche ( $f_0 = 64 \text{ Hz}$ ). Pour chaque récepteur, les sismogrammes sont normalisés par « traces » par rapport à la solution en milieu infini**

a)



b)



**Figure II-20 : amplitude des ondes réfléchies pour le couple de forces et la source directionnelle ( $f_0 = 64 \text{ Hz}$ ). Les sismogrammes du couple de forces (respectivement de la source directionnelle) sont normalisés par traces par rapport au déplacement horizontal (a) ou vertical (b) créé par le couple de forces (respectivement la source directionnelle) en milieu infini**

## II.4 Conclusion

Pour étudier le rayonnement de la source directionnelle en milieu réel, deux modèles théoriques ont été développés.

Le premier concerne le rayonnement de la source directionnelle en demi-espace ; il repose sur la méthode de Cagniard - De Hoop pour calculer la fonction de Green associée à une force et à un couple de forces agissant à l'intérieur d'un demi-espace. Les sismogrammes synthétiques calculés avec ce modèle montrent une diminution importante des ondes réfléchies induites par la source directionnelle et valident de ce fait le principe directionnel en demi-espace.

L'extension de la méthode de Cagniard - De Hoop afin de prendre en compte la zone altérée étant complexe de mise en oeuvre, un second modèle a été développé. Il associe la méthode de la réflectivité pour calculer en régime harmonique la fonction de Green associée à la force et la DWN pour calculer la fonction de Green en régime transitoire. Les sismogrammes synthétiques calculés par couplage réflectivité / DWN montrent la nette diminution des amplitudes des ondes réfléchies induites par la source directionnelle par rapport à celles induites par le couple de forces sans moment.

Les résultats obtenus par les deux modèles confirment que le principe directionnel établi en milieu infini est transposable dans un environnement géophysique plus complexe.

## Chapitre III

### Modélisation de sources piézoélectriques enterrées

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'interaction entre les transducteurs piézoélectriques et l'environnement géophysique dans lequel ils sont enterrés.

Pour cela, une modélisation numérique est développée et exposée formellement dans la première partie de ce chapitre. La méthode proposée couple la méthode des éléments finis [ATILA, 2002] avec une condition d'impédance sur la frontière du maillage.

La seconde partie est consacrée au calcul de la matrice d'impédance à introduire dans le formalisme éléments finis : deux modèles sont développés suivant la géométrie du milieu environnant. Le cas d'un demi-espace isotrope est tout d'abord traité : la matrice d'impédance est alors calculée par une méthode itérative [Thiruvengkatachar et al, 1965b]. Un demi-espace recouvert d'une couche est ensuite considéré afin de représenter l'interaction de la source avec la zone altérée. Le calcul de la matrice d'impédance est dans ce cas effectué à l'aide du code éléments de frontière MISSAXI [Clouteau, 1990 - Dompierre, 1993].

Dans une troisième partie, le rayonnement d'un transducteur Janus piézoélectrique directionnel enterré est modélisé. Les sismogrammes calculés sont comparés aux sismogrammes des sources directionnelles idéales.

### III.1 Formulation par éléments finis du rayonnement d'un transducteur en milieu semi-infini

#### III.1.1 Présentation du problème

La description du comportement d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans une formation élastique semi-infinie suppose la résolution d'un problème électrique et d'un problème mécanique. Le caractère semi-infini du milieu extérieur implique qu'il ne peut être considéré entièrement pour la modélisation. C'est pourquoi le problème initial (figure III-1a) est remplacé par un problème où le domaine  $\Omega_p$  est inclus dans un volume sphérique  $\Omega_s$  dont les propriétés mécaniques sont celles du milieu semi-infini (figure III-1b). Le volume sphérique est limité par une surface  $(\Gamma)$  orientée vers l'extérieur, de normale  $n_r$ . Le problème électrique est couplé au problème mécanique à l'intérieur du domaine piézoélectrique  $\Omega_p$ . Pour représenter l'effet du milieu semi-infini sur le domaine  $\Omega_p$ , une condition aux limites particulière de type équation intégrale doit être écrite sur  $(\Gamma)$ .

Dans la suite, seuls les effets linéaires sont considérés, pour les problèmes électrique et mécanique, ce qui exclut les non-linéarités de grands déplacements ou de comportement. Sont également exclus les effets dissipatifs. Par ailleurs, considérant des sollicitations harmoniques, chaque phénomène physique est supposé avoir une dépendance temporelle en  $\exp(+j\omega t)$ , où  $\omega$  désigne la pulsation ; cette dépendance est par la suite implicitement entendue dans les grandeurs surmontées par un tilde.

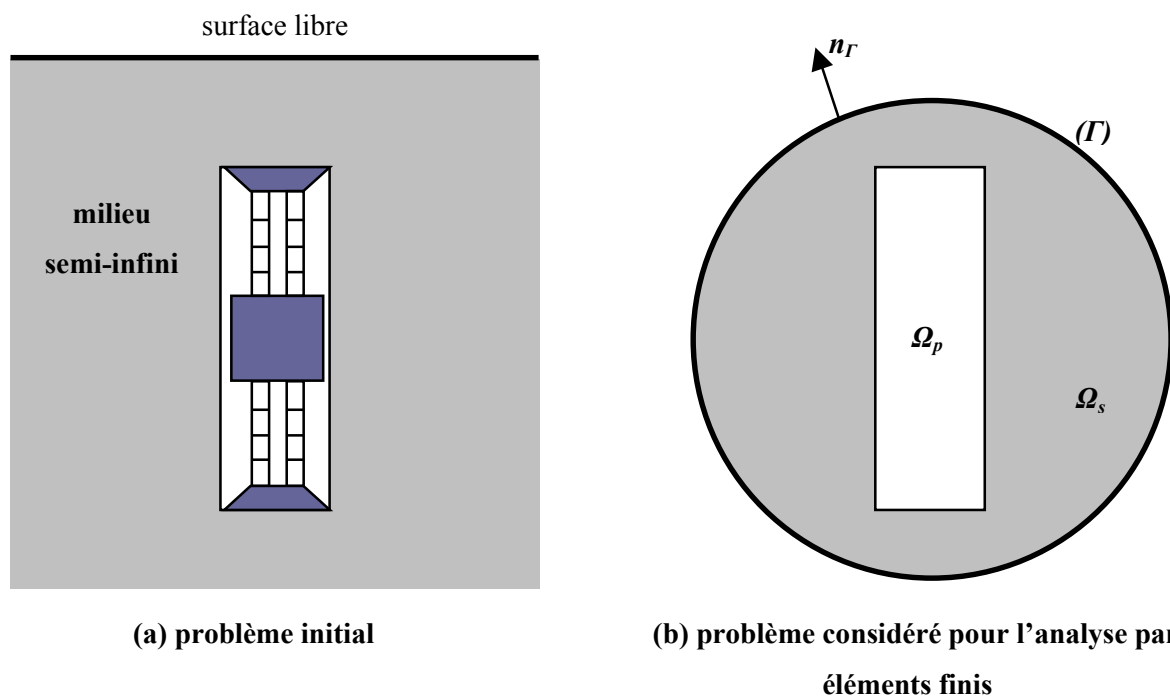


Figure III-1 : domaines d'étude

### III.1.2 Équations du problème et conditions aux limites

#### III.1.2.1 Équations du problème

Dans le domaine  $\Omega_p$ , le couplage entre les grandeurs électriques et mécaniques est décrit par les équations constitutives de la piézoélectricité (annexe E) :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{c}}^E : \overline{\overline{S}} - \overline{\overline{e}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\text{III-1})$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \overline{\overline{e}} : \overline{\overline{S}} - \overline{\overline{\varepsilon}}^S \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\text{III-2})$$

où  $\overline{\overline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes,  $\overline{\overline{S}}$  le tenseur des déformations,  $\tilde{\mathbf{E}}$  le vecteur champ électrique,  $\tilde{\mathbf{D}}$  le vecteur excitation électrique<sup>1</sup> ;  $\overline{\overline{c}}^E$  le tenseur de rigidité à champ électrique constant (tenseur de rang 4),  $\overline{\overline{e}}$  le tenseur piézoélectrique (tenseur de rang 3) et  $\overline{\overline{\varepsilon}}^S$  le tenseur diélectrique à déformation constante (tenseur de rang 2). Le vecteur des déformations est relié au vecteur déplacement  $\tilde{\mathbf{u}}$  par

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad}}} \tilde{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\text{grad}}}^T \tilde{\mathbf{u}} \right) \quad (\text{III-3})$$

et le vecteur champ électrique au potentiel électrique  $\tilde{\Psi}$  par

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\text{grad} \tilde{\Psi}. \quad (\text{III-4})$$

À ces équations, s'ajoutent l'équation de l'élastodynamique

$$\text{div} \overline{\overline{\sigma}} = -\rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (\text{III-5})$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique, et l'équation de Poisson s'il n'y a pas de charges libres en volume dans les matériaux considérés :

$$\text{div} \tilde{\mathbf{D}} = 0. \quad (\text{III-6})$$

À partir des équations (III-1), (III-2), (III-5) et (III-6), le système suivant est obtenu :

$$\text{div} \left( \overline{\overline{c}}^E : \overline{\overline{S}} - \overline{\overline{e}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = -\rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (\text{III-7})$$

$$\text{div} \left( \overline{\overline{e}} : \overline{\overline{S}} - \overline{\overline{\varepsilon}}^S \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) = 0. \quad (\text{III-8})$$

<sup>1</sup> vecteur traduisant l'effet du champ électrique sur la matière, homogène au produit du champ électrique par la permittivité du vide



### III.1.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées à ces équations sont mécaniques ou électriques. Les conditions mécaniques peuvent porter sur le champ de déplacement, en tout point d'une surface appelée  $(\Gamma_u)$  (condition de type Dirichlet) :

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{(\Gamma_u)} = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad (\text{III-9})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  est un champ de déplacement connu. Elles peuvent aussi porter sur le champ de contraintes en tout point d'une surface  $(\Gamma_\sigma)$  (condition de type Neumann) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{n}_{\Gamma_\sigma}|_{(\Gamma_\sigma)} = \tilde{\mathbf{f}}_0, \quad (\text{III-10})$$

où  $\mathbf{n}_{\Gamma_\sigma}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $(\Gamma_\sigma)$ , orienté vers l'extérieur et  $\tilde{\mathbf{f}}_0$  une densité superficielle de force connue.

Les conditions électriques s'appliquent sur des surfaces du domaine  $\Omega_p$ . Pour une surface  $(\Gamma_\psi)$  de  $\Omega_p$  recouverte d'une électrode, il est possible d'imposer le potentiel ; ainsi,  $\tilde{\Psi}_0$  étant un potentiel électrique connu,

$$\tilde{\Psi}|_{(\Gamma_\psi)} = \tilde{\Psi}_0. \quad (\text{III-11})$$

Pour une surface  $(\Gamma_Q)$  de  $\Omega_p$ , il est possible d'imposer la charge portée par cette électrode :

$$\iint_{(\Gamma_Q)} \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{n}_{\Gamma_Q} d\Gamma = \tilde{Q}_0, \quad (\text{III-12})$$

où  $\mathbf{n}_{\Gamma_Q}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $(\Gamma_Q)$ .

### III.1.3 Formulation variationnelle

Les équations (III-7) et (III-8) d'une part, (III-9) à (III-12) d'autre part, sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire  $\bar{\mathcal{E}}$  définie par

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_s + \bar{\mathcal{E}}_p \quad (\text{III-13})$$

où

$$\bar{\mathcal{E}}_s = \iiint_{\Omega_s} \frac{I}{2} \left( \overline{\overline{\mathbf{S}}} : \overline{\overline{\mathbf{c}^E}} : \overline{\overline{\mathbf{S}}} - \rho\omega^2 \tilde{\mathbf{u}}^2 \right) d\Omega - \iint_{(\Gamma_\sigma) \cup (\Gamma_u)} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (\text{III-14})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_p = - \iiint_{\Omega_p} \frac{I}{2} \left( 2\overline{\overline{\mathbf{S}}} : \overline{\overline{\mathbf{e}}} : \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^S}} : \tilde{\mathbf{E}} \right) d\Omega + \iint_{(\Gamma_\psi) \cup (\Gamma_Q)} \tilde{\psi} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{D}} d\Gamma. \quad (\text{III-15})$$

Dans  $\mathcal{E}_s$ , les termes de l'intégrale de volume peuvent être associés à l'énergie élastique de déformation et à l'énergie cinétique. L'intégrale de surface représente le travail des forces extérieures. Dans  $\mathcal{E}_p$ , les termes apportés par l'intégrale de volume, ajoutés au premier terme de l'intégrale de volume de l'équation (III-15) représente la somme de l'énergie élastique de déformation et de l'énergie électrostatique du domaine piézoélectrique. L'intégrale sur les surfaces ( $\Gamma_\psi$ ) et ( $\Gamma_\sigma$ ) décrit l'apport d'énergie électrique par des générateurs extérieurs. L'annulation de la variation de  $\mathcal{E}$  au premier ordre implique la vérification des équations (III-7) et (III-8) ainsi que des conditions aux limites (III-9) à (III-12).

### III.1.4 Discrétisation : la méthode des éléments finis

Lors de la résolution du problème décrit à la figure III-1 par la méthode des éléments finis, le volume sphérique délimité par la surface ( $\Gamma$ ) et entourant le domaine  $\Omega_p$  est découpé en sous domaines appelés éléments, connectés par des points appelés nœuds (figure III-2).

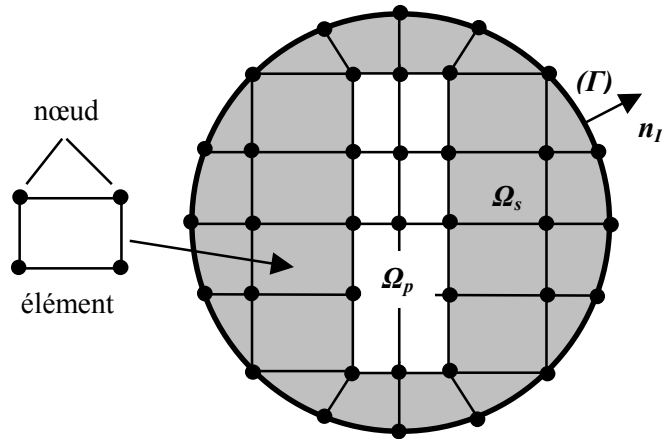


Figure III-2 : discrétisation du domaine d'étude

Le déplacement  $\tilde{\mathbf{u}}^e$  d'un point quelconque situé à l'intérieur d'un élément  $e$  peut être relié aux valeurs nodales du déplacement  $\{\tilde{\mathbf{U}}^e\}$  à l'aide de fonctions d'interpolation dont la description est donnée en annexe F :

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = [N^e] \{\tilde{\mathbf{U}}^e\}, \quad (\text{III-16})$$

où  $[N^e]$  est une matrice regroupant les fonctions d'interpolation du déplacement. L'état de déformation  $\tilde{\mathbf{S}}^e$  de ce même point s'exprime en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation, regroupées dans la matrice  $[B^e]$ , sous la forme

$$\tilde{\mathbf{S}}^e = [B^e] \{\tilde{\mathbf{U}}^e\}. \quad (\text{III-17})$$

Le potentiel  $\tilde{\Psi}^e$  est relié aux valeurs nodales  $\{\tilde{\Psi}^e\}$  par la relation

$$\tilde{\Psi}^e = [N_\psi^e] \{\tilde{\Psi}^e\}, \quad (\text{III-18})$$

où  $[N_\psi^e]$  est une matrice ligne regroupant les fonctions d'interpolation du potentiel électrique ; le champ électrique est donné par

$$\tilde{\mathbf{E}}^e = -[B_\psi^e] \{\tilde{\Psi}^e\}. \quad (\text{III-19})$$

où  $[B_\psi^e]$  est une matrice ligne regroupant les dérivées des fonctions d'interpolation du potentiel électrique . Dès lors, il est possible de déduire le vecteur excitation électrique et le tenseur condensé des contraintes :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = [c^E][B^e]\{\tilde{U}^e\} + [e]^T [B^e] \{\tilde{\Psi}^e\}, \quad (\text{III-20})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^e = [e][B^e]\{\tilde{U}^e\} - [\varepsilon^S][B^e] \{\tilde{\Psi}^e\}, \quad (\text{III-21})$$

où  $[c^E]$  est la matrice obtenue par condensation du tenseur  $\overline{\overline{c^E}}$  ,  $[e]$  est la matrice obtenue par condensation du tenseur  $\overline{e}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e$  est le vecteur obtenu par condensation du tenseur  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$  (annexe E). Le report des équations (III-16) à (III-21) dans les équations (III-14) et (III-15) permet d'exprimer, pour l'ensemble du maillage,  $\Xi_s$  et  $\Xi_p$  sous la forme

$$\Xi_s = \sum_e \left[ \frac{1}{2} \{\tilde{U}^e\}^T ([K_{uu}^e] - \omega^2 [M^e]) \{\tilde{U}^e\} - \{\tilde{U}^e\}^T \{\tilde{F}_0^e\} - \{\tilde{U}^e\}^T \{\tilde{F}_r^e\} \right], \quad (\text{III-22})$$

et

$$\Xi_p = \sum_e \left[ \{\tilde{U}^e\}^T [K_{u\psi}^e] \{\tilde{\Psi}^e\} + \frac{1}{2} \{\tilde{\Psi}^e\}^T [K_{\psi\psi}^e] \{\tilde{\Psi}^e\} + \{\tilde{\Psi}^e\}^T \{\tilde{Q}^e\} \right], \quad (\text{III-23})$$

avec

$$[K_{uu}^e] = \iiint_{\Omega_s^e} [B^e]^T [c^E] [B^e] d\Omega_e, \quad (\text{III-24})$$

$$[M^e] = \iiint_{\Omega_s^e} \rho [N^e]^T [N^e] d\Omega_e, \quad (\text{III-25})$$

$$[K_{u\psi}^e] = \iiint_{\Omega_p^e} [B^e]^T [e] [B_\psi^e] d\Omega_e, \quad (\text{III-26})$$

$$[K_{\psi\psi}^e] = - \iiint_{\Omega_p^e} [B_\psi^e]^T [\varepsilon^S] [B_\psi^e] d\Omega_e. \quad (\text{III-27})$$

Les matrices  $[K_{uu}^e]$  ,  $[K_{u\psi}^e]$  et  $[K_{\psi\psi}^e]$  sont les matrices élémentaires de rigidité respectivement mécanique, piézoélectrique et diélectrique. La matrice  $[M^e]$  est la matrice élémentaire de masse cohérente. Le vecteur des forces appliquées  $\{\tilde{F}_0^e\}$  s'écrit

$$\{\tilde{F}_0^e\} = \iint_{(\Gamma_s^e)} [N^e] \tilde{\mathbf{f}}_0 d\Gamma^e. \quad (\text{III-28})$$

Le vecteur  $\{\tilde{F}_r^e\}$ , traduisant l'effet du milieu extérieur sur la surface  $(\Gamma)$ , s'écrit

$$\{\tilde{F}_r^e\} = \iint_{(\Gamma^e)} [N^e] \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_r d\Gamma^e . \quad (\text{III-29})$$

Le vecteur  $\{\tilde{Q}^e\}$  est défini par

$$\{\tilde{Q}^e\} = \iint_{(\Gamma_0^e)} [N_\psi^e] \tilde{Q}_0 d\Gamma^e , \quad (\text{III-30})$$

où

$$\{\tilde{Q}^e\} = \iint_{(\Gamma_\psi^e)} [N_\psi^e] \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n}_{r_\psi} d\Gamma^e , \quad (\text{III-31})$$

suivant le type de surface considérée. La phase d'assemblage permet d'écrire alors les quantités  $\tilde{\mathcal{E}}_s$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  (équations (III-22) et (III-23)) sous la forme

$$\tilde{\mathcal{E}}_s = \frac{1}{2} \{\tilde{U}\}^T ([K_{uu}] - \omega^2 [M]) \{\tilde{U}\} - \{\tilde{U}\}^T \{\tilde{F}_0\} - \{\tilde{U}\}^T \{\tilde{F}_r\} , \quad (\text{III-32})$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \{\tilde{U}\}^T [K_{u\psi}] \{\tilde{\Psi}\} + \frac{1}{2} \{\tilde{\Psi}\}^T [K_{\psi\psi}] \{\tilde{\Psi}\} + \{\tilde{\Psi}\}^T \{\tilde{Q}\} \quad (\text{III-33})$$

où les matrices  $[M]$ ,  $[K_{uu}]$ ,  $[K_{u\psi}]$  et  $[K_{\psi\psi}]$  résultent de l'assemblage des matrices élémentaires décrites précédemment (équations (III-24) à (III-27)). L'annulation de la variation au premier ordre de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{E}}$ , somme des expressions (III-32) et (III-33), par rapport aux valeurs nodales de  $\tilde{\mathbf{u}}$  et de  $\tilde{\Psi}$ , conduit au système linéaire d'équations

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}]_{\Omega\Omega} - \omega^2 [M]_{\Omega\Omega} & [K_{uu}]_{\Omega\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Omega\Gamma} & [K_{u\psi}] \\ ([K_{uu}]_{\Omega\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Omega\Gamma})^T & [K_{uu}]_{\Gamma\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Gamma\Gamma} & [0] \\ [K_{u\psi}]^T & [0] & [K_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_\Omega \\ \tilde{U}_\Gamma \\ \tilde{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_\Gamma \\ -\tilde{Q} \end{Bmatrix} , \quad (\text{III-34})$$

où l'indice  $\Omega$  s'applique aux degrés de liberté des nœuds maillant le volume  $\Omega_p \cup \Omega_s$  à l'exclusion de la surface  $(\Gamma)$  et l'indice  $\Gamma$  s'applique aux degrés de liberté des nœuds maillant la surface  $(\Gamma)$ . Le vecteur  $\{\tilde{U}_\Omega\}$  (respectivement  $\{\tilde{U}_\Gamma\}$ ) contient les valeurs nodales du déplacement sur  $(\Omega_p \cup \Omega_s)/(\Gamma)$  (respectivement sur  $(\Gamma)$ ).

### III.1.5 Description de l'influence du milieu extérieur par la matrice d'impédance

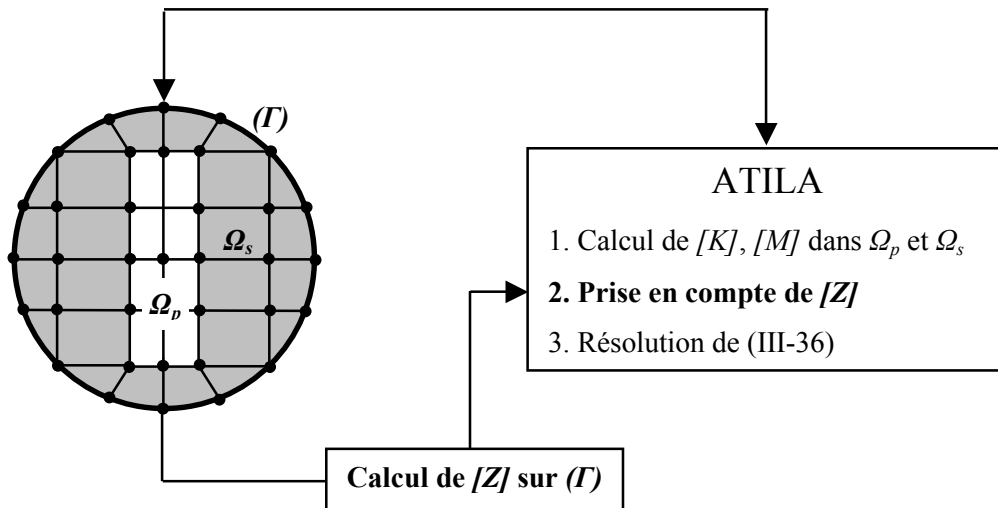
Le système (III-34) ne peut être résolu directement puisque sur la surface  $(\Gamma)$ , les déplacements nodaux  $\{\tilde{U}_\Gamma\}$  et la réaction  $\{\tilde{F}_\Gamma\}$  du milieu extérieur  $\Omega_s$  sont inconnus. Cependant, le milieu extérieur initialement considéré (figure III-1a) étant un milieu linéaire, les déplacements nodaux sur  $(\Gamma)$  peuvent être reliés aux valeurs nodales des réactions par la matrice d'impédance du milieu extérieur  $[Z]$  :

$$\{\tilde{F}_r\} = [Z]\{\tilde{U}_r\}. \quad (\text{III-35})$$

Donc si la matrice d'impédance du milieu semi-infini est connue sur la surface ( $\Gamma$ ), le système d'équations (III-34) se réécrit

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}]_{\Omega\Omega} - \omega^2 [M]_{\Omega\Omega} & [K_{uu}]_{\Omega\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Omega\Gamma} & [K_{u\psi}] \\ ([K_{uu}]_{\Omega\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Omega\Gamma})^T & [K_{uu}]_{\Gamma\Gamma} - \omega^2 [M]_{\Gamma\Gamma} - [Z] & [0] \\ [K_{u\psi}]^T & [0] & [K_{u\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_\Omega \\ \tilde{U}_\Gamma \\ \tilde{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ -\tilde{Q} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-36})$$

et ce système est alors entièrement déterminé. Le code éléments finis ATILA [ATILA, 2002], développé à l'IEMN/ISEN, permet de modéliser des structures piézoélectriques ; pour le maillage considéré à la figure III-3, il calcule les diverses matrices de rigidité et la matrice de masse (figure III-3). L'essentiel du travail réalisé a donc consisté à calculer la matrice d'impédance du milieu semi-infini et à l'implémenter ensuite dans le code ATILA qui résout alors le système complet (III-36) (figure III-3).



**Figure III-3 : modélisation d'un transducteur piézoélectrique enterré dans un milieu semi-infini (développements effectués en gras)**

La suite de ce chapitre est consacré au calcul des matrices d'impédances respectives d'un demi-espace et d'un demi-espace recouvert d'une couche (figure III-4). La matrice d'impédance du demi-espace est calculée par la méthode itérative [Thiruvengkatachar et al., 1965b] et la matrice d'impédance du demi-espace recouvert d'une couche est calculée par le code éléments de frontière MISSAXI [Clouteau, 1990]. Le transducteur directionnel décrit au chapitre I est ensuite modélisé par éléments finis ; son interaction avec la surface libre (respectivement la zone altérée) sera traitée en utilisant la matrice d'impédance du demi-espace (respectivement du demi-espace recouvert d'une couche).

Remarque

Le maillage de l'ensemble de la structure est réalisé à l'aide d'éléments à interpolation quadratique. Tenant compte du fait que les géométries présentées à la figure III-4 possèdent la symétrie de révolution autour de l'axe vertical, le maillage interne de la cavité est réalisé à l'aide d'éléments quadrangulaires ou triangulaires disponibles dans le code ATILA (détails en annexe F) ; la surface ( $\Gamma$ ) est maillée avec des éléments linéaires.

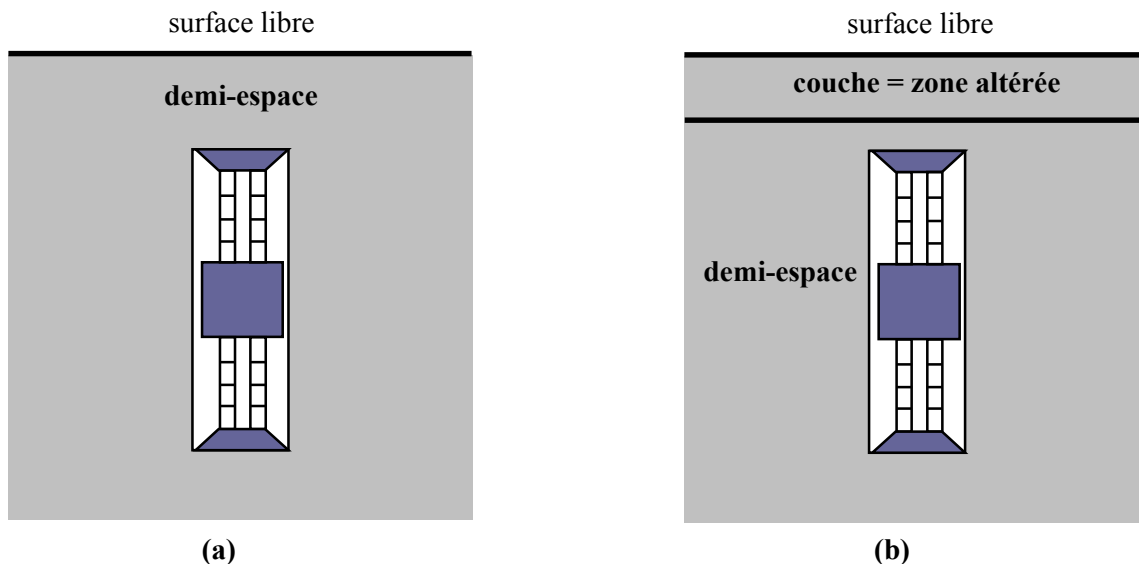


Figure III-4 : types d'interactions considérés

(a) demi-espace (b) demi-espace recouvert d'une couche

## III.2 Calcul de la matrice d'impédance sur la surface ( $\Gamma$ )

### III.2.1 Matrice d'impédance du demi-espace élastique homogène isotrope - méthode itérative

#### III.2.1.1 Généralités

La méthode itérative [Thiruvengkatachar et al., 1965b] trouve ses fondements en sismique et en théorie des explosions souterraines. Elle est utilisée ici pour déterminer la réponse d'un demi-espace élastique homogène isotrope à un chargement harmonique appliqué sur la surface d'une cavité sphérique enterrée. Le principe de la méthode repose initialement sur la détermination, sous forme de potentiels, de la solution satisfaisant les conditions aux limites sur la surface de la cavité. A cette solution, est ajouté le potentiel permettant de vérifier les conditions aux limites sur la surface libre. Ainsi de suite, les potentiels adéquats sont sommés, de manière à vérifier successivement les conditions aux limites sur la surface libre et sur la surface de la cavité. La solution ainsi évaluée se rapproche de la solution exacte, l'erreur faite étant attribuable à la non vérification de la condition aux limites sur la surface de la cavité ou sur la surface libre.

### III.2.1.2 Position du problème

Soit un demi-espace élastique homogène isotrope contenant une cavité sphérique ( $\Gamma$ ) de rayon  $a$  enterrée à une profondeur  $z' > a$  (figure III-5). Le problème considéré est à symétrie de révolution, l'axe de symétrie étant l'axe  $[Oz]$  et les systèmes de coordonnées locales cylindriques ( $M, r, \varphi, z$ ) et sphériques ( $M, R, \theta, \varphi$ ) sont utilisés. Un chargement harmonique étant appliqué sur la surface de la cavité, il s'agit de déterminer la réponse  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega)$  en tout point  $M$  du milieu et en particulier sur la surface de la cavité.

Dans la suite de cette partie, la dépendance temporelle de toutes les quantités physiques est  $\exp(+j\omega t)$ .

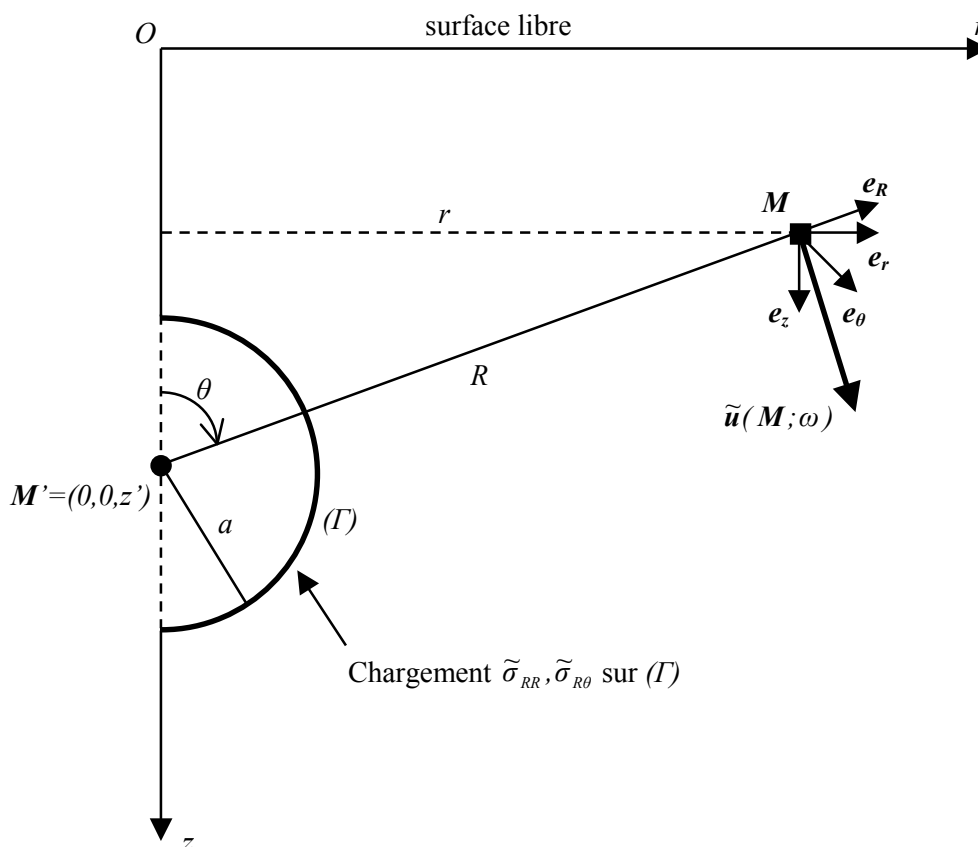


Figure III-5 : la géométrie du problème

### III.2.1.3 Équation et conditions aux limites

Pour un matériau élastique homogène isotrope, l'équation de l'élastodynamique tridimensionnelle en régime harmonique s'écrit en l'absence de forces de volume

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}(\mathit{div}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega))) + \mu\Delta(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega)) = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega). \quad (\text{III-37})$$

Les conditions aux limites sont de deux types :

- À la surface libre, les contraintes normales sont nulles ; autrement dit, en coordonnées cylindriques

$$\tilde{\sigma}_{rz}(z=0) = \tilde{\sigma}_{zz}(z=0) = 0, \quad (\text{III-38})$$

- À la surface de la cavité, le chargement est imposé de la manière suivante :

$$\tilde{\sigma}_{RR}(R=a) = f_{RR}(\theta), \quad (\text{III-39})$$

$$\tilde{\sigma}_{R\theta}(R=a) = f_{R\theta}(\theta). \quad (\text{III-40})$$

$f_{RR}$  et  $f_{R\theta}$  sont des fonctions continues sur l'intervalle  $[\theta; \pi]$  dont les développements en série de Legendre sont supposés connus et donnés par

$$f_{RR}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-41})$$

$$f_{R\theta}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-42})$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des constantes connues et  $P_n$  le polynôme de Legendre d'indice  $n$ . En annexe G, l'expression du champ de contraintes en fonction des composantes du déplacement est donnée.

### III.2.1.4 Construction de la solution

Introduisant le potentiel scalaire  $\tilde{\Phi}$  et le potentiel vecteur  $\tilde{\zeta}$ , une solution de (III-38) est cherchée sous la forme

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega) = \mathbf{grad}(\tilde{\Phi}(\mathbf{M}; \omega)) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\tilde{\zeta}(\mathbf{M}; \omega))). \quad (\text{III-43})$$

Sous l'hypothèse de symétrie de révolution autour de l'axe  $[Oz]$ ,  $\tilde{\zeta}$  n'a qu'une composante axiale

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{\zeta}(\mathbf{M}; \omega) \mathbf{e}_z. \quad (\text{III-44})$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le déplacement s'écrit

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial R} - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r} \right\}, \quad (\text{III-45})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = - \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r} \right\} \right], \quad (\text{III-46})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{III-47})$$

Le report de l'équation (III-43) dans (III-37) mène aux équations de propagation :

$$\Delta \tilde{\Phi} + k_\alpha^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad (\text{III-48})$$

$$\Delta \tilde{\zeta} + k_\beta^2 \tilde{\zeta} = 0. \quad (\text{III-49})$$

où  $k_\alpha$  et  $k_\beta$  sont les nombres d'onde respectifs des ondes P et S définis par

$$k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, \quad (\text{III-50})$$



$$k_\beta = \frac{\omega}{\beta}. \quad (\text{III-51})$$

Les potentiels  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\zeta}$  satisfaisant (III-48), (III-49) ainsi que les conditions aux limites (III-38) à (III-40), sont construits au moyen d'une méthode itérative. Le principe est de chercher les potentiels sous la forme de séries

$$\tilde{\Phi} = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Phi}_m, \quad (\text{III-52})$$

$$\tilde{\zeta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\zeta}_m, \quad (\text{III-53})$$

vérifiant les conditions :

- (i)  $\forall m$ ,  $\tilde{\Phi}_m$  (respectivement  $\tilde{\zeta}_m$ ) est solution de (III-48) (respectivement de (III-49)),
- (ii) Le champ de contrainte associé aux potentiels  $(\tilde{\Phi}_0, \tilde{\zeta}_0)$  satisfait la condition aux limites sur la surface de la cavité (équations (III-39) et (III-40)),
- (iii) Le champ de contrainte associé aux potentiels  $(\tilde{\Phi}_0 + \tilde{\Phi}_1, \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1)$  satisfait la condition aux limites sur la surface libre (équation (III-38)),
- (iv)  $\forall m$  non nul, le champ de contrainte associé aux potentiels  $(\tilde{\Phi}_{2m-1} + \tilde{\Phi}_{2m}, \tilde{\zeta}_{2m-1} + \tilde{\zeta}_{2m})$  s'annule sur la surface de la cavité,
- (v)  $\forall m$  non nul, le champ de contrainte associé aux potentiels  $(\tilde{\Phi}_{2m} + \tilde{\Phi}_{2m+1}, \tilde{\zeta}_{2m} + \tilde{\zeta}_{2m+1})$  s'annule sur la surface libre,
- (vi)  $\forall m$ , les contraintes et les déplacements associés aux potentiels  $(\tilde{\Phi}_m, \tilde{\zeta}_m)$  sont évanescents à l'infini.

Les  $(m+1)$  premiers termes des séries (III-52) et (III-53) sont les solutions d'un problème où soit la condition aux limites sur la surface de la cavité est vérifiée ( $m$  pair), soit la condition de surface libre est vérifiée ( $m$  impair). Les deux types de conditions aux limites ne sont jamais vérifiées simultanément. Si l'erreur ainsi commise tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini, et si les séries (III-52) et (III-53) ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont convergentes, alors leurs sommes convergent vers la solution cherchée.

#### III.2.1.4.1 Construction de $\tilde{\Phi}_0$ et $\tilde{\zeta}_0$

$\forall m$ , les fonctions  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  solutions de (III-48) et (III-49) peuvent s'écrire

$$\tilde{\Phi}_{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2m} h_n(k_a R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-54})$$

$$\tilde{\zeta}_{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{2m} h_n(k_\beta R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-55})$$

où  $h_n$  est la fonction de Hankel sphérique de seconde espèce et d'indice  $n$ , et les coefficients  $a_n^{2m}$  et  $b_n^{2m}$  sont des constantes arbitraires. La solution considérée satisfait uniquement à la condition aux limites sur la surface de la cavité ; il s'agit donc de la solution en milieu infini. Utilisant les propriétés des fonctions de Bessel sphériques [Morse et Feshbach, 1963], (III-55) permet d'écrire que

$$\left\{ -\frac{\partial \tilde{\zeta}_{2m}}{\partial r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{2m} h_n(k_\beta R) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-56})$$

où

$$c_n^{2m} = -k_\beta \left( \frac{b_{n+1}^{2m}}{2n+3} + \frac{b_{n-1}^{2m}}{2n-1} \right). \quad (\text{III-57})$$

Utilisant les expressions du champ de contraintes en coordonnées sphériques données en annexe G, ainsi que les expressions (III-45) à (III-47) et (III-54) à (III-57) dans lesquelles  $m = 0$ , il vient

$$\sigma_{RR} \Big|^{m=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n(R) a_n^0 + B_n(R) c_n^0 \} P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-58})$$

$$\sigma_{R\theta} \Big|^{m=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_n(R) a_n^0 + D_n(R) c_n^0 \} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-59})$$

avec  $c_0^0 = 0$  et

$$A_n(R) = \mu \left[ \left\{ \frac{2(n+1)(n+2)}{R^2} - k_\beta^2 \right\} h_n(k_\alpha R) - \frac{4k_\alpha}{R} h_{n-1}(k_\alpha R) \right], \quad (\text{III-60})$$

$$B_n(R) = 2\mu \frac{n(n+1)}{R^2} [k_\beta R h_{n-1}(k_\beta R) - (n+2) h_n(k_\beta R)], \quad (\text{III-61})$$

$$C_n(R) = \frac{2\mu}{R^2} [k_\alpha R h_{n-1}(k_\alpha R) - (n+2) h_n(k_\alpha R)], \quad (\text{III-62})$$

$$D_n(R) = \mu \left[ \left\{ \frac{2n(n+2)}{R^2} - k_\beta^2 \right\} h_n(k_\beta R) - \frac{2k_\beta}{R} h_{n-1}(k_\beta R) \right]. \quad (\text{III-63})$$

Les conditions aux limites (III-39) et (III-40) fournissent les relations

$$\left. \begin{aligned} A_0(a) &= a_0^0 \\ A_n(a) a_n^0 + B_n(a) c_n^0 &= \alpha_n \\ C_n(a) a_n^0 + D_n(a) c_n^0 &= \beta_n \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{III-64})$$

Le système d'équation (III-64) détermine complètement l'ensemble des constantes  $a_n^0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $c_n^0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ; de ce fait, les fonctions  $\tilde{\Phi}_0$  et  $-\frac{\partial \tilde{\zeta}_0}{\partial r}$  sont complètement déterminées et permettent le calcul du déplacement (équations (III-45) à (III-47)). L'inversion de la relation (III-57), dont la procédure est donnée en annexe G, fournit les coefficients  $b_n^0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $\tilde{\zeta}_0$  est donc complètement déterminé.

### III.2.1.4.2 Construction de $\tilde{\Phi}_{2m+1}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+1}$ à partir de potentiels $\tilde{\Phi}_{2m}$ et $\tilde{\zeta}_{2m}$ connus

Soient les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  établis pour les indices inférieurs ou égaux à  $2m$ , sous les formes (III-54) et (III-55) et vérifiant pour ces indices les conditions (i) à (vi) du paragraphe III.2.1.4. Les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  se déterminent à partir des potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  grâce à la condition aux limites de surface libre (III-38) : les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  sont tout d'abord exprimés sous la forme d'une intégrale de Sommerfeld. Reportant la démonstration en annexe G,  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  s'écrivent pour  $z < z'$

$$\tilde{\Phi}_{2m} = \int_0^{\infty} \frac{k}{v_\alpha} \Phi(2m) J_0(kr) \exp(jv_\alpha(z-z')) dk, \quad (III-65)$$

$$\tilde{\zeta}_{2m} = \int_0^{\infty} \frac{k}{v_\beta} \zeta(2m) J_0(kr) \exp(jv_\beta(z-z')) dk. \quad (III-66)$$

Dans (III-65) et (III-66),  $J_0$  est la fonction de Bessel cylindrique d'indice zéro ;  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  sont définis par

$$v_\alpha = [k_\alpha^2 - k^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (III-67)$$

$$v_\beta = [k_\beta^2 - k^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (III-68)$$

ces quantités étant réelles positives ou imaginaires négatives.

$\Phi(2m)$  et  $\zeta(2m)$  sont donnés par

$$\Phi(2m) = \frac{I}{k_\alpha} \sum_{q=0}^{+\infty} j^q a_q^{2m} P_q\left(-\frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right), \quad (III-69)$$

$$\zeta(2m) = \frac{I}{k_\beta} \sum_{q=0}^{+\infty} j^q b_q^{2m} P_q\left(-\frac{v_\beta}{k_\beta}\right). \quad (III-70)$$

$\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  étant solutions de (III-49) et (III-50), ils peuvent s'écrire sous une forme analogue à (III-65) et (III-66)

$$\tilde{\Phi}_{2m+1} = \int_0^{+\infty} A(k) \frac{k}{v_\alpha} J_0(kr) \exp(-jv_1 z) dk, \quad (\text{III-71})$$

$$\tilde{\zeta}_{2m+1} = \int_0^{+\infty} B(k) \frac{k}{v_2} J_0(kr) \exp(-jv_2 z) dk, \quad (\text{III-72})$$

où  $A(k)$  et  $B(k)$  sont des fonctions arbitraires de  $k$  à déterminer à l'aide de la condition aux limites (v). À partir des expressions du champ de contraintes en coordonnées cylindriques données en annexe G, ainsi que des expressions (III-45) à (III-47), il vient

$$A(k) = - \frac{(2k^2 - k_\beta^2)^2 + 4k^2 v_\alpha v_\beta}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-jv_\alpha z') \Phi(2m) + \frac{4k^2 v_\alpha (2k^2 - k_\beta^2)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-jv_\beta z') \zeta(2m), \quad (\text{III-73})$$

$$B(k) = \frac{4v_\beta (2k^2 - k_\beta^2)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-jv_\alpha h) \Phi(2m) - \frac{(2k^2 - k_\beta^2)^2 + 4k^2 v_\alpha v_\beta}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-jv_\beta h) \zeta(2m). \quad (\text{III-74})$$

Il peut être vérifié [Thiruvengkatachar et al., 1965b] que les formulations intégrales (III-71) et (III-72) sont valides dans tout le demi espace  $z \geq 0$ .

### III.2.1.4.3 Construction de $\tilde{\Phi}_{2m+2}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+2}$ à partir de potentiels $\tilde{\Phi}_{2m+1}$ et $\tilde{\zeta}_{2m+1}$ connus

De manière analogue à (III-54) et (III-55),  $\tilde{\Phi}_{2m+2}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+2}$  s'écrivent sous la forme

$$\tilde{\Phi}_{2m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2m+2} h_n(k_\alpha R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-75})$$

$$\tilde{\zeta}_{2m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{2m+2} h_n(k_\beta R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-76})$$

où  $a_n^{2m+2}$  et  $b_n^{2m+2}$  sont des constantes arbitraires à déterminer à l'aide de la condition aux limites notée (iv). Celle-ci porte sur la surface de la cavité sphérique et nécessite donc des potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  exprimés à l'aide des coordonnées sphériques. Utilisant les propriétés de la fonction de Bessel cylindrique et reportant la démonstration en annexe G, (III-71) et (III-72) s'écrivent

$$\tilde{\Phi}_{2m+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{2m+1} j_n(k_\alpha R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-77})$$

$$\tilde{\zeta}_{2m+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{2m+1} j_n(k_\beta R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-78})$$

où  $j_n$  est la fonction de Bessel sphérique d'indice  $n$ . Les coefficients  $a_n^{2m+1}$  et  $b_n^{2m+1}$  sont donnés par

$$a_n^{2m+1} = \int_0^{+\infty} \frac{k}{v_\alpha} A(k) p_n(k_\alpha) \exp(-jv_\alpha z') dk, \quad (\text{III-79})$$

$$b_n^{2m+1} = \int_0^{+\infty} \frac{k}{v_\beta} B(k) p_n(k_\beta) \exp(-jv_\beta z') dk, \quad (\text{III-80})$$

la quantité  $p_n$  étant définie par

$$p_n(k_{\alpha,\beta}) = j^n (2n+1) P_n\left(-\frac{v_{\alpha,\beta}}{k_{\alpha,\beta}}\right). \quad (\text{III-81})$$

Les séries (III-77) et (III-78) permettant de calculer les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  ne doivent pas nécessairement converger en tout point du demi-espace ; une validité au voisinage de la surface de la cavité est en effet suffisante pour utiliser la condition aux limites (iv). Il est montré [Thiruvengkatachar et al. 1965b] que les séries (III-77) et (III-78) sont uniformément convergentes à l'intérieur d'un cercle de rayon défini  $R_m \geq a$ . À partir des expressions (III-76) et (III-78), des relations analogues à (III-56) et (III-57) peuvent être écrites :

$$\left\{ -\frac{\partial \tilde{\zeta}_{2m+1}}{\partial r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{2m+1} j_n(k_\beta R) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-82})$$

$$\left\{ -\frac{\partial \tilde{\zeta}_{2m+2}}{\partial r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{2m+2} h_n(k_\beta R) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-83})$$

$$c_n^{M=2m+1, 2m+2} = -k_\beta \left( \frac{b_{n+1}^M}{2n+3} + \frac{b_{n-1}^M}{2n-1} \right). \quad (\text{III-84})$$

Les déplacements donnés par les équations (III-45) à (III-47) sont calculés en utilisant les expressions (III-75) à (III-84). Le champ de contraintes en coordonnées sphériques (annexe G) est alors obtenu et l'application de la condition aux limites (iv) fournit le système d'équations

$$\left. \begin{aligned} A_0(a) a_0^{2m+2} &= -S_0(a) a_0^{2m+1} \\ A_n(a) a_n^{2m+2} + B_n(a) c_n^{2m+2} &= -[S_n(a) a_n^{2m+1} + T_n(a) c_n^{2m+1}] \\ C_n(a) a_n^{2m+2} + D_n(a) c_n^{2m+2} &= -[W_n(a) a_n^{2m+1} + X_n(a) c_n^{2m+1}] \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{III-85})$$

où  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont donnés par les expressions (III-60) à (III-63) et

$$S_n(R) = \mu \left[ \left\{ \frac{2(n+1)(n+2)}{R^2} - k_\beta^2 \right\} j_n(k_\alpha R) - \frac{4k_\alpha}{R} j_{n-1}(k_\alpha R) \right], \quad (\text{III-86})$$

$$T_n(R) = 2\mu \frac{n(n+1)}{R^2} [k_\beta R j_{n-1}(k_\beta R) - (n+2) j_n(k_\beta R)], \quad (\text{III-87})$$

$$W_n(R) = \frac{2\mu}{R^2} [k_\alpha R j_{n-1}(k_\alpha R) - (n+2) j_n(k_\alpha R)], \quad (\text{III-88})$$

$$X_n(R) = \mu \left[ \left\{ \frac{2n(n+2)}{R^2} - k_\beta^2 \right\} j_n(k_\beta R) - \frac{2k_\beta}{R} j_{n-1}(k_\beta R) \right]. \quad (\text{III-89})$$

Le système d'équation (III-85) détermine complètement l'ensemble des constantes  $a_n^{2m+2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $c_n^{2m}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ; de ce fait, les fonctions  $\tilde{\Phi}_{2m+2}$  et  $-\frac{\partial \tilde{\zeta}_{2m+2}}{\partial r}$  sont complètement déterminées et permettent le calcul du déplacement (équations (III-45) à (III-47)). L'inversion de la relation (III-84) permet de calculer les coefficients  $b_n^{2m+2}$  et donc de déterminer complètement  $\tilde{\zeta}_{2m+2}$ .

Ainsi se termine la procédure pour la construction de  $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \dots$  et la construction formelle de la solution du problème via les potentiels  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\zeta}$  est complète.

### III.2.1.5 Remarque sur la convergence de la méthode

Une solution mathématique est donc établie pour le problème de la cavité sphérique enterrée dans un demi-espace élastique homogène isotrope, soumise à un champ de contraintes harmoniques. La convergence des séries (III-53) et (II-54) a été rigoureusement établie comme suit [Thiruvengkatachar et al., 1965b] : il est démontré premièrement que les séries donnant les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m}$  (équations (III-54) et (III-55)) sont convergentes dans la région du demi-espace  $R \geq a$  ; la seconde étape consiste en la vérification de la convergence des formes intégrales des potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  (équations (III-71) et (III-72)) dans le demi-espace  $z \geq 0$ . Pour finir, la convergence des séries alternatives donnant les potentiels  $\tilde{\Phi}_{2m+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2m+1}$  est validée au voisinage de la surface de la cavité.

La mise en oeuvre numérique de cette méthode s'avère cependant délicate du fait des formes intégrales (III-71) et (III-72). L'évaluation de ces intégrales est d'autant plus complexe quand la profondeur de la cavité est faible. Jusqu'à présent, les applications pratiques existantes de la méthode itérative n'ont été réalisées que dans le cadre de l'approximation en champ lointain [Thiruvengkatachar, 1967]; cette approximation permet d'évaluer les intégrales du type (III-71) et (III-72) en utilisant la méthode de la phase stationnaire [Aki et Richards, 1980] et simplifie donc beaucoup le problème.

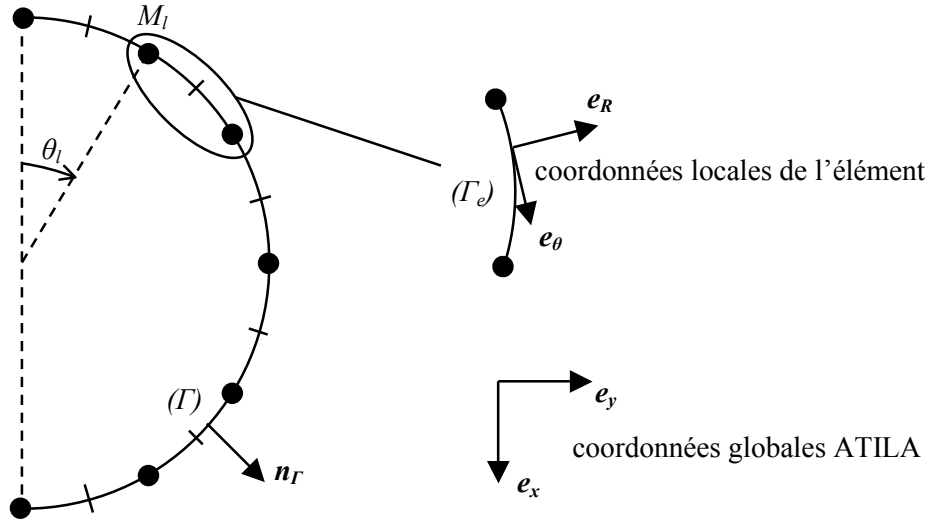
Dans le cadre de cette thèse, seuls les déplacements calculés à partir des potentiels  $\tilde{\Phi}_0$  et  $\tilde{\zeta}_0$  sont, pour le moment, implémentés avec succès. Autrement dit, le problème effectivement résolu est celui de la cavité enfouie dans un milieu infini et soumise sur sa surface à une sollicitation harmonique.

### III.2.1.6 Formulation discrète de la méthode itérative

La méthode itérative est une formulation continue ; dans le repère des coordonnées locales sphériques, elle permet d'exprimer, sur la surface de la cavité, le déplacement résultant de l'application d'un champ de contraintes imposé. Le calcul de la matrice d'impédance  $[Z]$  nécessite une

discrétisation de cette méthode, reliant forces nodales et déplacements nodaux dans le repère global cartésien (équation (III-35)).

Soit un maillage de la surface de la cavité sphérique par  $N$  éléments connectés par les nœuds  $M_l (a, \theta_l)$  ( $1 \leq l \leq 2N+1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ) (figure III-6).



**Figure III-6 : maillage de la surface de la cavité sphérique  
système de coordonnées globales et locales**

### III.2.1.6.1 Relation entre contraintes et déplacements sur la surface ( $\Gamma$ )

Dans le repère des coordonnées locales sphériques, la méthode itérative permet de calculer, pour une densité surfacique de force donnée par (III-41) et (III-42), les déplacements aux points de la surface où se trouvent les nœuds. D'après les propriétés des fonctions d'interpolation, ces déplacements sont identifiés au vecteur des valeurs nodales  $\{\tilde{U}_\Gamma\}$ . Ce vecteur est constitué de  $2N-2$  composantes puisque sur les nœuds  $M_1$  et  $M_N$ , la composante tangentielle est nulle. Soit alors la densité surfacique de force  $\tilde{T}_{\Gamma_{loc}}$  appliquée sur ( $\Gamma$ ) et donnée par

$$\tilde{T}_{\Gamma_{loc}} = \{\tilde{T}_\Gamma^R \quad \tilde{T}_\Gamma^\theta\}^T = [L(\theta)]\{\tilde{A}_\Gamma\}, \quad (III-90)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} P_0(\cos \theta) & 0 & \dots & \dots & P_{N-2}(\cos \theta) & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1(\cos \theta)}{\partial \theta} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial P_{N-1}(\cos \theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad (III-91)$$

$$\{\tilde{A}_\Gamma\} = \{\alpha_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \alpha_{N-2} \quad \beta_{N-1}\}^T, \quad (III-92)$$

où  $\alpha_{i-1}$  et  $\beta_i$  sont des constantes arbitraires et  $P_i$  le polynôme de Legendre d'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ).

Dans le repère des coordonnées globales cartésiennes, la densité surfacique de force  $\tilde{T}_\Gamma$  a pour expression

$$\tilde{\mathbf{T}}_r = \begin{Bmatrix} T_r^x \\ T_r^y \end{Bmatrix} = [P(\theta)] \begin{Bmatrix} T_r^R \\ T_r^\theta \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-93})$$

où la matrice de passage est définie par

$$[P(\theta)] = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{III-94})$$

Introduisant (III-93) dans (III-90), il vient

$$\tilde{\mathbf{T}}_r = [P(\theta)][L(\theta)]\{\tilde{\mathbf{A}}_r\}. \quad (\text{III-95})$$

Le vecteur nodal des déplacements sur les nœuds maillant ( $\Gamma$ ) est noté

$$\{\tilde{\mathbf{U}}_r\} = \{\tilde{U}_x(\theta_1=0) \quad \tilde{U}_x(\theta_2) \quad \tilde{U}_y(\theta_2) \quad \dots \quad \tilde{U}_x(\theta_{N-1}) \quad \tilde{U}_y(\theta_{N-1}) \quad \tilde{U}_x(\theta_N=\pi)\}. \quad (\text{III-96})$$

La méthode itérative est successivement appliquée avec les densités surfaciques de force  $\tilde{\mathbf{T}}_r^i$  ( $1 \leq i \leq 2N-2$ ) données par

$$\tilde{\mathbf{T}}_r^i = [P(\theta)][L(\theta)]\{\tilde{\mathbf{A}}_r^i\}, \quad (\text{III-97})$$

où

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_r^i\} = \{0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{\text{colonne } i}{I} \quad 0 \quad \dots \quad 0\}^T. \quad (\text{III-98})$$

Le vecteur des déplacements nodaux calculé pour le chargement (III-97) par méthode itérative est noté  $\{\tilde{\mathbf{U}}_r^i\}$ . Cette procédure aboutit à la construction de la matrice  $[Y]$  donnée par

$$[Y] = [\{\tilde{\mathbf{U}}_r^1\} \quad \{\tilde{\mathbf{U}}_r^2\} \quad \dots \quad \{\tilde{\mathbf{U}}_r^{2N-2}\}]. \quad (\text{III-99})$$

et le vecteur des déplacements nodaux  $\{\tilde{\mathbf{U}}_r\}$  dans un cas général est

$$\{\tilde{\mathbf{U}}_r\} = [Y_\sigma] \{\tilde{\mathbf{A}}_r\}. \quad (\text{III-100})$$

Inversant (III-100), il vient

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_r\} = [Y_\sigma]^{-1} \{\tilde{\mathbf{U}}_r\} = [Z_\sigma] \{\tilde{\mathbf{U}}_r\}. \quad (\text{III-101})$$

### III.2.1.6.2 Matrice d'impédance du demi-espace sur la surface ( $\Gamma$ )

Dans le repère global cartésien, les forces nodales  $\{\tilde{\mathbf{F}}_r\}$  équivalentes à un champ de contraintes distribué se déduisent du principe des efforts virtuels [Zienkiewicz, 1979]. Celui-ci postule



que, quel que soit le champ de déplacements admissible (c'est à dire satisfaisant les conditions aux limites), imposé sur la surface de la cavité, le travail des efforts virtuels internes est égal au travail des efforts virtuels externes. Soit alors un élément  $e$ , de surface  $\Gamma_e$  et dont la normale  $\mathbf{n}_r$  est orientée vers l'extérieur (figure III-6). Considérant un champ de contrainte  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e$  agissant sur l'élément  $e$ , ainsi qu'un déplacement virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}^e$ , le principe des travaux virtuels s'écrit

$$\iint_{(\Gamma_e)} \tilde{\mathbf{u}}^{eT} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \cdot \mathbf{n}_r d\Gamma = \{\tilde{U}_r^e\}^T \{\tilde{F}_r^e\}, \quad (\text{III-102})$$

où  $\{\tilde{U}_r^e\}$  et  $\{\tilde{F}_r^e\}$  sont les vecteurs contenant les valeurs nodales du déplacement et de la force sur la surface  $(\Gamma)$ . Par ailleurs, le déplacement virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}^e$  s'écrit, de manière analogue à (III-16)

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = [N^e] \{\tilde{U}_r^e\}, \quad (\text{III-103})$$

où  $[N^e]$  est la matrice des fonctions d'interpolation de l'élément  $e$  (annexe F). Introduisant (III-103) dans (III-102), il vient

$$\{\tilde{U}_r^e\}^T \iint_{(\Gamma_e)} [N^e]^T \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \cdot \mathbf{n}_r d\Gamma = \{\tilde{U}_r^e\}^T \{\tilde{F}_r^e\}, \quad (\text{III-104})$$

et le vecteur des forces nodales sur l'élément  $e$   $\{\tilde{F}_r^e\}$  est obtenu par identification

$$\{\tilde{F}_r^e\} = \iint_{(\Gamma_e)} [N^e]^T \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \cdot \mathbf{n}_r d\Gamma. \quad (\text{III-105})$$

Considérant la densité surfacique de force (III-95), il est posé

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \cdot \mathbf{n}_r = \tilde{\mathbf{T}}_r = [P(\theta)][L(\theta)]\{\tilde{A}_r\}, \quad (\text{III-106})$$

ce qui permet de réécrire (III-105) sous la forme

$$\{\tilde{F}_r^e\} = [T^e] \{\tilde{A}_r\}. \quad (\text{III-107})$$

$$[T^e] = \iint_{(\Gamma_e)} [N^e]^T [P(\theta)][L(\theta)] d\Gamma. \quad (\text{III-108})$$

Effectuant la phase d'assemblage, il vient

$$\{\tilde{F}_r\} = [T] \{\tilde{A}_r\}, \quad (\text{III-109})$$

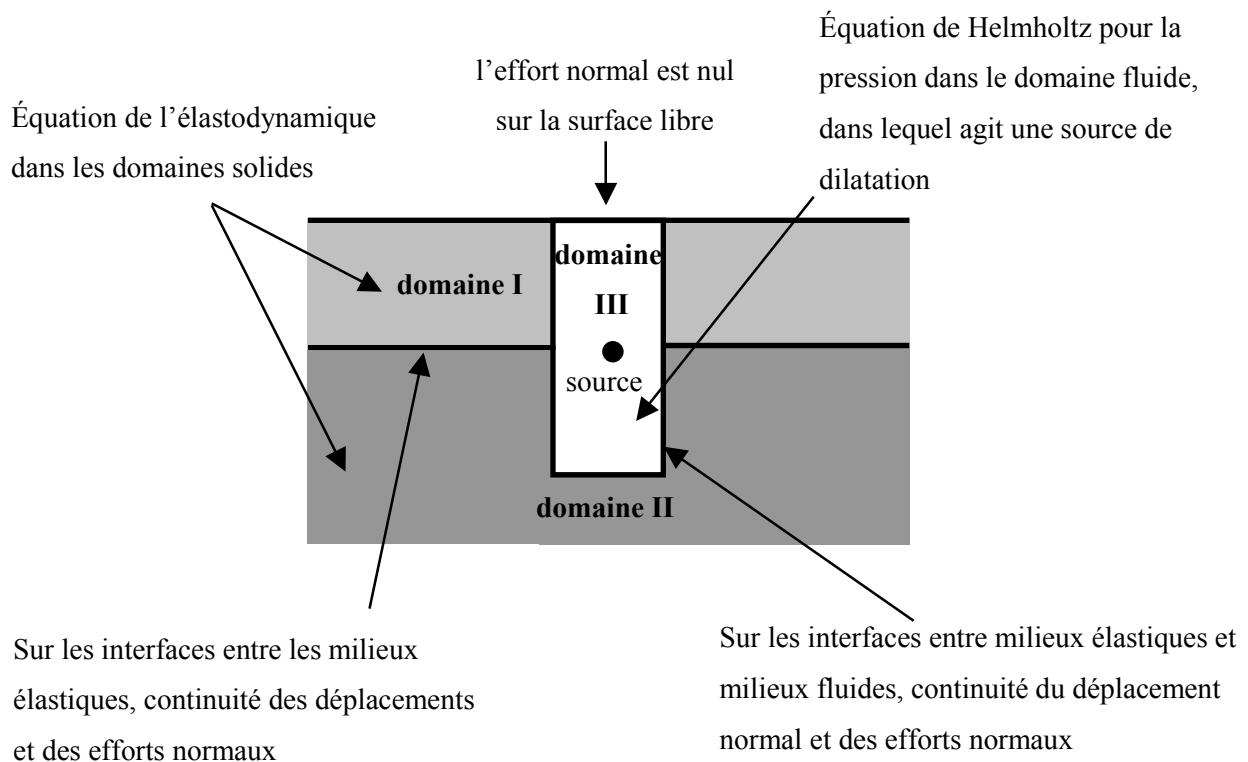
où  $[T]$  est obtenue par assemblage des matrices élémentaires  $[T^e]$ . Le report de (III-102) dans (III-109) donne la matrice d'impédance  $[Z]$  :

$$[Z] = [T][Z_\sigma]. \quad (\text{III-110})$$

### III.2.2 Matrice d'impédance du demi-espace élastique homogène isotrope recouvert d'une couche - code éléments de frontière MISSAXI

#### III.2.2.1 Présentation du code MISSAXI

Le code MISSAXI [Clouteau, 1990 - Dompierre, 1993] a été développé pour modéliser, en milieu stratifié, axisymétrique, la propagation des ondes émises par une source placée dans un puits rempli de fluide. Les types de problèmes considérés par ce code sont donc des problèmes couplés mettant en jeu les équations de l'élastodynamique et de l'acoustique (figure III-7).



**Figure III-7 : types de problème résolu par MISSAXI - équations et conditions aux limites**

##### III.2.2.1.1 Sous-structuration de l'interaction [Baroni, 1996]

Dans MISSAXI, le problème couplé défini précédemment est reformulé en un problème global défini uniquement sur les interfaces, associé à des problèmes locaux à chaque domaine : c'est une méthode de sous-structuration. Ce problème a pour inconnue le déplacement des interfaces, où l'effort appliqué à celles-ci, selon la stratégie choisie (cette sous-structuration sera qualifiée de dynamique ou cinématique respectivement).

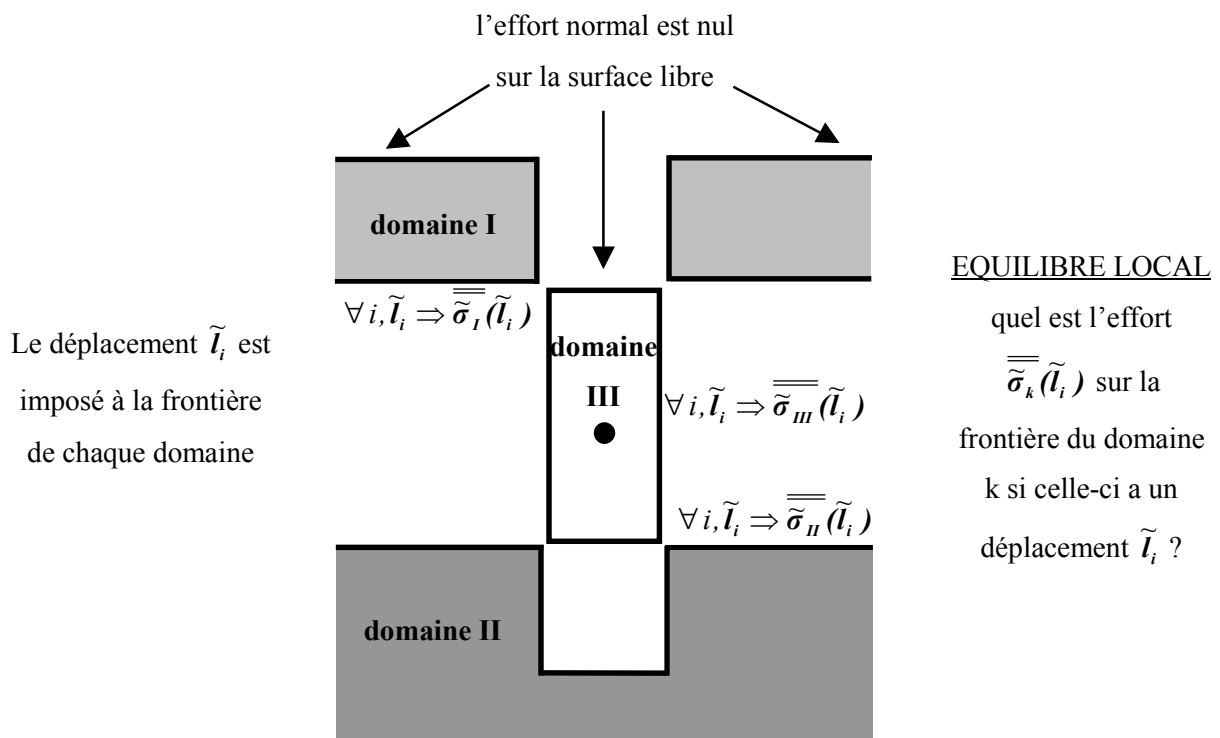
##### *la sous-structuration dynamique*

La sous-structuration dynamique (figure III-8) implique que l'inconnue du problème global est le déplacement sur l'ensemble des interfaces. Le problème global est formulé via l'écriture de la

réciprocité des efforts au sens faible<sup>2</sup> ; pour le résoudre numériquement, le déplacement  $\tilde{u}$  est cherché dans une base de fonctions  $\tilde{l}_i$  générant l'espace sur lequel est défini  $\tilde{u}$  (méthode de Galerkin).

**définition des problèmes locaux**

Le problème local à un domaine  $\Omega$ , occupé par un domaine élastique, définit pour un champ de déplacement donné sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , le champ de déplacement assurant l'équilibre de  $\Omega$  (figure III-8) : la résolution du problème local est appelée relèvement élastodynamique du champ de  $\Gamma$  sur  $\Omega$ . Soit un champ incident quelconque dans  $\Omega$  ; le problème local a pour inconnue le champ de déplacement régnant dans ce milieu, celui-ci étant la somme d'un champ élastodynamique inconnu et du champ incident. Le champ inconnu est décomposé de telle sorte qu'une de ses composantes soit un relèvement élastodynamique du champ imposé sur la frontière du domaine, et que l'autre « équilibre » le déplacement de la frontière dû au champ incident. Les problèmes locaux associent donc des équations d'équilibre à des conditions aux limites de type Neumann, Dirichlet ou mixtes. Ils sont résolus, dans chaque domaine, par une méthode d'équations intégrales.



**Figure III-8 : sous-structuration dynamique de l'interaction - le déplacement  $\tilde{u}$  des interfaces est cherché dans un espace de base  $\tilde{l}_i$  (la continuité des déplacements est alors implicite)**

<sup>2</sup> la condition de réciprocity des efforts peut être violée localement mais elle est satisfaite en moyenne.

**équilibre global**

L'interaction entre les domaines est réalisée en assurant l'équilibre dynamique (ou cinématique) des interfaces (figure III-9). Il s'agit d'assurer la continuité de la contrainte au sens faible.

Ainsi, après discrétisation, dans la phase de sous-structuration, des matrices d'impédances locales vont être calculées sur chacune des interfaces séparant les domaines ; la matrice d'impédance globale de l'ensemble du milieu élastique peut donc être obtenue à partir des matrices d'impédance locales calculées sur les interfaces séparant les domaines solides.

$$\begin{array}{l}
 \text{EQUILIBRE GLOBAL} \\
 \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_I}}(\tilde{l}_i) = \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_{III}}}(\tilde{l}_i) \\
 \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_{II}}}(\tilde{l}_i) = \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_{III}}}(\tilde{l}_i) \\
 \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_I}}(\tilde{l}_i) = \sum d_i \overline{\overline{\tilde{\sigma}_{II}}}(\tilde{l}_i)
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{c}
 \tilde{u} = \sum d_i \tilde{l}_i \\
 \text{Diagramme schématisant un domaine élastique avec une interface et une sous-structure centrale.}
 \end{array}$$

**Figure III-9 : équilibre global après sous-structuration**

**la continuité des contraintes sur les interfaces conduit à la détermination des coordonnées  $d_i$  de  $\tilde{u}$  dans la base  $\tilde{l}_i$**

Dans la suite, la formulation théorique n'est détaillée que pour les problèmes locaux des domaines solides. Concernant les domaines fluides et la formulation finale de l'interaction, le lecteur pourra se reporter à la référence [Baroni, 1996].

### III.2.2.1.2 Formulation des problèmes élastodynamiques locaux par équations intégrales

Les problèmes locaux concernant les domaines élastiques sont traités par une méthode intégrale prenant implicitement en compte les conditions de rayonnement à l'infini et conduisant à un problème formulé uniquement sur les frontières du domaine.

Soit  $\Omega_S$  un domaine occupé par un milieu élastique homogène isotrope, caractérisé par les coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  ; la normale à la frontière ( $T$ ) de  $\Omega_S$  est notée  $\mathbf{n}_T$  et est orientée vers l'extérieur. Le problème local à résoudre est donné par

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}(\text{div}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega))) + \mu\Delta(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega)) = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega) \quad \forall \mathbf{M} \in \Omega_S, \quad (\text{III-111})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}; \omega)|_{(\Gamma_0)} = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{M}; \omega) \quad \forall \mathbf{M} \in \Gamma_u, \quad (\text{III-112})$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{M}; \omega) \cdot \mathbf{n}_r \Big|_{(\Gamma_\sigma)} = \mathbf{f}_0 \quad \forall M \in \Gamma_\sigma. \quad (\text{III-113})$$

La formulation intégrale du problème local est construite à partir du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, découlant lui-même du principe des travaux virtuels. Ce théorème stipule que tout couple de triplets  $(\tilde{\mathbf{u}}^A, \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^A, \tilde{\mathbf{f}}^A)$  et  $(\tilde{\mathbf{u}}^B, \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^B, \tilde{\mathbf{f}}^B)$  d'états élastodynamique<sup>3</sup> sur le domaine  $\Omega_S$  vérifie

$$\iint_{(\Gamma)} \left[ \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^A \cdot \mathbf{n}_r \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^B - \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^B \cdot \mathbf{n}_r \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^A \right] d\Gamma = \iiint_{\Omega} \left[ \tilde{\mathbf{f}}^B \tilde{\mathbf{u}}^A - \tilde{\mathbf{f}}^A \tilde{\mathbf{u}}^B \right] d\Omega. \quad (\text{III-114})$$

L'application de (III-114) au problème local nécessite de définir un état élastodynamique élémentaire. Ce dernier est arbitrairement choisi comme la solution élémentaire en milieu infini associée à une force ponctuelle agissant en  $\mathbf{M}' = (x', y', z')$  appartenant à  $(\Gamma)$  :

$$\tilde{\mathbf{f}}^{M'} = \delta(x - x') \mathbf{e}_x + \delta(y - y') \mathbf{e}_y + \delta(z - z') \mathbf{e}_z. \quad (\text{III-115})$$

Les solutions élémentaires en déplacement induites par la force  $\tilde{\mathbf{f}}^{M'}$  sont notées  $\overline{\overline{\mathbf{G}}}^{M'}(\mathbf{M}; \omega)$ . Les solutions en contraintes associées à la  $k$ -ième composante de  $\tilde{\mathbf{f}}^{M'}$  sont notées  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^k(\mathbf{M}; \omega)$ .

La formulation intégrale s'obtient alors comme suit : en prenant pour couple d'état élastodynamique, l'état élastodynamique élémentaire et l'état élastodynamique vérifiant le problème local, le théorème de réciprocité s'écrit

$$\iint_{(\Gamma)} \left[ \left( \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}_r \right) \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}^{M'} - \overline{\overline{\mathbf{T}}}^G \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] d\Gamma = \iiint_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}}^{M'} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (\text{III-116})$$

où le tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}^G$  est donnée par

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}^G = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_r^{G^x} & \tilde{\mathbf{T}}_r^{G^y} & \tilde{\mathbf{T}}_r^{G^z} \end{bmatrix}, \quad (\text{III-117})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{T}}_r^{G^k} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^k \cdot \mathbf{n}_r \quad (k = x, y, z), \quad (\text{III-118})$$

$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^k$  étant le champ de contraintes associé à la fonction de Green  $\overline{\overline{\mathbf{G}}}^{M'} \cdot \mathbf{e}_k$ . Posant

$$\tilde{\mathbf{T}}_r = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}_r, \quad (\text{III-119})$$

<sup>3</sup> un triplet d'état élastodynamique est constitué d'un champ de déplacement de déplacement vérifiant les conditions de compatibilité et l'équation de l'élastodynamique en présence d'une densité volumique de force, et d'un champ de contraintes vérifiant l'équation de Christoffel.

et effectuant l'intégrale de volume dans (III-116) avec  $M'$  appartenant à  $(I)$ , la formulation intégrale générale du problème élastodynamique local défini par les équations (III-111) à (III-113) s'écrit

$$\iint_{(I)} \left[ \tilde{T}_r \cdot \overline{\tilde{G}^{M'}} - \overline{T_r^G} \cdot \tilde{u} \right] d\Gamma = \frac{I}{2} \tilde{u}(M'), \quad (III-120)$$

$$\tilde{u}(M; \omega)|_{(\Gamma_u)} = \tilde{u}_0(M; \omega) \quad \forall M \in \Gamma_u, \quad (III-121)$$

$$\tilde{T}_r|_{(\Gamma_\sigma)} = f_\theta \quad \forall M \in \Gamma_\sigma. \quad (III-122)$$

### III.2.2.1.3 Discrétisation : la méthode des éléments de frontière

Dans la formulation par éléments de frontière, les interfaces séparant les différents domaines sont décrites par des éléments à deux nœuds sur lesquels le déplacement est uniforme. Le déplacement  $\tilde{u}^i$  sur une interface est donné par le vecteur  $\{\tilde{U}^i\}$  regroupant l'ensemble des valeurs du déplacement sur les éléments maillant l'interface ; de même, le vecteur contrainte  $\tilde{T}^i$  sur une interface est donné par  $\{\tilde{T}^i\}$ . Ainsi, la discrétisation de la représentation intégrale sur l'ensemble des éléments (III-120) donne

$$\{\tilde{T}_r\} [G^{M'}] - [T^G] \{\tilde{U}\} = \frac{I}{2} \{\tilde{U}\}, \quad (III-123)$$

où les matrices  $[G^{M'}]$  et  $[T^G]$  résultent de l'assemblage des matrices  $[G^{M'}]^e$  et  $[T^G]^e$  définies sur un élément de frontière  $(\Gamma_e)$  par

$$[G^{M'}]^e = \iint_{(\Gamma_e)} \overline{\tilde{G}^{M'}} d\Gamma, \quad (III-124)$$

et

$$[T^{G'}]^e = \iint_{(\Gamma_e)} \overline{\tilde{T}^{G'}} d\Gamma. \quad (III-125)$$

La discrétisation du problème local conduit donc à définir une matrice  $[Z_\sigma]$  reliant, sur les éléments de la surface  $(I)$ , les contraintes aux déplacements :

$$\{\tilde{T}_r\} = [G^{M'}]^{-1} \left( [T^G] + \frac{I}{2} [I] \right) \{\tilde{U}\} = [Z_\sigma] \{\tilde{U}\}. \quad (III-126)$$

La géométrie à symétrie de révolution, considérée dans MISSAXI, pour calculer la matrice d'impédance du demi-espace  $\Omega_s^2$  recouvert d'une couche  $\Omega_s^1$  est représentée à la figure III-10 ; la cavité sphérique est constitué d'un milieu indéfini.

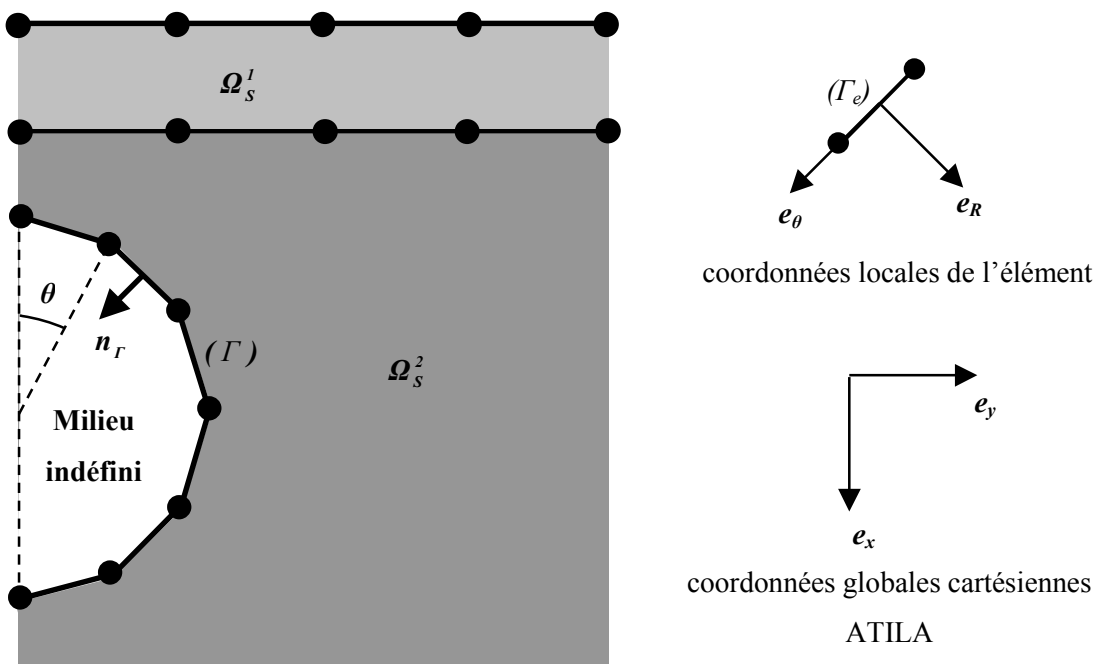


Figure III-10 : géométrie considérée dans MISSAXI pour le calcul de  $[Z_\sigma]$  dans un demi-espace recouvert d'une couche

Pour la géométrie présentée à la figure III-10, la résolution des problèmes locaux dans les domaines solides  $\Omega_S^1$  et  $\Omega_S^2$  conduit au calcul des matrices  $[Z_\sigma]_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) suivant le formalisme décrit plus haut ; en introduisant  $\{\tilde{T}_r^0\}$ , le vecteur des efforts exercés sur l'interface  $(\Gamma)$ , les contraintes et les déplacements  $\{\underline{U}_r\}$  sur l'interface  $(\Gamma)$  sont reliés, en coordonnées locales sphériques, par le système

$$\begin{bmatrix} [Z_\sigma]_{11} & [Z_\sigma]_{12} \\ [Z_\sigma]_{21} & [Z_\sigma]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \underline{U}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{T}_r^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-127})$$

où  $\{\tilde{U}\}$  concerne les éléments des interfaces horizontales.

De la première ligne de (III-127),  $\{\tilde{U}\}$  s'exprime en fonction de  $\{\underline{U}_r\}$  via la relation

$$\{\tilde{U}\} = -[Z_\sigma]_{11}^{-1} [Z_\sigma]_{12} \{\underline{U}_r\}. \quad (\text{III-128})$$

La deuxième ligne fournit alors l'expression de la matrice  $[Z_\sigma]_{loc}$  reliant en coordonnées locales sphériques, contraintes et déplacements sur  $(\Gamma)$  :

$$[Z_\sigma]_{loc} = [Z_\sigma]_{22} - [Z_\sigma]_{21} [Z_\sigma]_{11}^{-1} [Z_\sigma]_{12}. \quad (\text{III-129})$$

La matrice  $[Z_\sigma]$  reliant, en coordonnées globales cartésiennes, contraintes et déplacements sur  $(\Gamma)$  s'écrit

$$[\underline{Z}_\sigma] = [\underline{P}]^{-1} [\underline{Z}_\sigma]_{loc} [\underline{P}]. \quad (III-130)$$

où  $[\underline{P}]$  consiste en l'assemblage sur les éléments de frontière de la matrice  $[\underline{P}]$  définie par l'expression (III-94), la valeur de  $\theta$  correspondant à celle du point milieu de l'élément.

### III.2.2.2 Expression de la matrice d'impédance dans le formalisme éléments finis

Le passage au formalisme éléments finis est conditionné par la différence de choix des fonctions d'interpolation du déplacement sur ( $\Gamma$ ) entre le code ATILA (interpolation quadratique) et le code MISSAXI (déplacement uniforme sur l'élément). Il s'agit de satisfaire en valeur moyenne les conditions cinématiques et dynamiques en coordonnées globales cartésiennes sur l'interface ( $\Gamma$ ). Soit  $\{\underline{\tilde{U}}_\Gamma^e\}$  le vecteur élémentaire sur un élément  $e$  de ( $\Gamma$ ) :

$$\{\underline{\tilde{U}}_\Gamma^e\} = \frac{1}{S^e} \iint_{(\Gamma_e)} \tilde{\mathbf{u}}^T d\Gamma = \left[ \frac{1}{S^e} \iint_{(\Gamma_e)} [\underline{N}^e]^T d\Gamma \right] \{\underline{\tilde{U}}_\Gamma^e\}^T, \quad (III-131)$$

où  $S^e$  est la surface de l'élément  $e$ , donnée par

$$S^e = \iint_{(\Gamma_e)} d\Gamma. \quad (III-132)$$

(III-130) assure en valeur moyenne la continuité du déplacement sur ( $\Gamma_\emptyset$ ). Après avoir posé

$$[\underline{W}^e] = \frac{1}{S^e} \iint_{(\Gamma_e)} [\underline{N}^e]^T d\Gamma, \quad (III-133)$$

l'assemblage des déplacements sur tous les éléments est effectué. Le vecteur des déplacements élémentaires côté éléments de frontière  $\{\underline{\tilde{U}}_\Gamma\}$  s'exprime en fonction du vecteur des déplacements nodaux  $\{\underline{\tilde{U}}_\Gamma\}$  côté éléments finis :

$$\{\underline{\tilde{U}}_\Gamma\} = [\underline{W}]^T \{\underline{\tilde{U}}_\Gamma\}. \quad (III-134)$$

De même, le vecteur des forces nodales s'obtient en écrivant la continuité en valeur moyenne de la force. Considérant un champ de contraintes  $\overline{\underline{\sigma}}^e$  agissant sur l'élément  $e$ , le vecteur des forces élémentaires côté éléments de frontière est défini comme la valeur moyenne de la force sur l'élément  $e$  :

$$\{\underline{\tilde{F}}_\Gamma^e\} = \iint_{(\Gamma_e)} \overline{\underline{\sigma}}^e \cdot \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma. \quad (III-135)$$

Côté éléments finis, il suffit que la somme des forces nodales associées à l'élément soit égale à la force élémentaire pour assurer la continuité en valeur moyenne. La distribution de cette force sur



l'élément peut donc être choisie librement. Dans le développement effectué, le champ de contraintes  $\tilde{\sigma}^e$  est supposé uniforme ; autrement dit,

$$\tilde{\sigma}^e \cdot \mathbf{n}_r = \frac{\{\tilde{F}_r^e\}}{S^e}. \quad (\text{III-136})$$

Le vecteur des forces nodales  $\{F_r^e\}$  s'écrit alors sous la forme

$$\{\tilde{F}_r^e\} = \iint_{(\Gamma_e)} [N^e J]^T \tilde{\sigma}^e d\Gamma = \iint_{(\Gamma_e)} [N^e J]^T \frac{\{\tilde{F}_r^e\}}{S^e} d\Gamma = \left[ \frac{1}{S^e} \iint_{(\Gamma_e)} [N^e J]^T d\Gamma \right] \{\tilde{F}_r^e\} = [W^e] \{\tilde{F}_r^e\} \quad (\text{III-137})$$

Après assemblage sur l'ensemble des éléments,

$$\{\tilde{F}_r\} = [W] \{\tilde{F}_r^e\}. \quad (\text{III-138})$$

La matrice  $[Z_\sigma]$  définie par l'équation (III-130) est telle que, sur l'élément  $e$ ,

$$\tilde{\sigma}^e \cdot \mathbf{n}_r = [Z_\sigma^e] \{U_r^e\}. \quad (\text{III-139})$$

Tenant compte de (III-136), (III-139) se réécrit sous la forme

$$\{\tilde{F}_r^e\} = S^e [Z_\sigma^e] \{U_r^e\}, \quad (\text{III-140})$$

soit, après assemblage,

$$\{\tilde{F}_r\} = [Z] \{U_r\}, \quad (\text{III-141})$$

où  $[Z]$  est obtenue par assemblage des matrices élémentaires  $S^e [Z_\sigma^e]$ . Introduisant (III-134) et (III-138) dans (III-141), il vient

$$[W]^{-1} \{\tilde{F}_r\} = [Z][W]^T \{\tilde{U}_r\}. \quad (\text{III-142})$$

Autrement dit

$$\{\tilde{F}_r\} = [W][Z][W]^T \{\tilde{U}_r\}, \quad (\text{III-143})$$

et la matrice d'impédance du demi-espace recouvert d'une couche est :

$$[Z] = [W][Z][W]^T. \quad (\text{III-144})$$

### III.2.2.3 Remarque sur l'implémentation dans le code ATILA de la matrice d'impédance sur les éléments de frontière

Dans le formalisme éléments de frontière, la matrice d'impédance  $[Z_\sigma]$  est calculée en utilisant le code MISSAXI avec la géométrie représentée à la figure III-9. Le formalisme développé à la section III.2.2.2 a été implémenté dans le code ATILA ; il est actuellement en cours de validation.

## III.3 Modélisation du rayonnement de transducteurs piézoélectriques enterrés

### III.3.1 Rayonnement en demi-espace

La matrice d'impédance du demi-espace étant maintenant connue, il est possible, après résolution du système d'équations (III-36), de calculer le rayonnement de transducteurs piézoélectriques. La démarche proposée est suggérée par la méthode itérative. La solution générale de l'équation de l'élastodynamique (III-37) est (équations (III-54) et (III-55)) :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(k_\alpha R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-145})$$

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(k_\beta R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-146})$$

où les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes arbitraires. Le déplacement est alors donné par

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial R} - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r} \right\}, \quad (\text{III-147})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = - \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r} \right\} \right], \quad (\text{III-148})$$

$$\tilde{u}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{III-149})$$

où la quantité  $-\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r}$  a pour expression

$$\left\{ -\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n h_n(k_\beta R) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-150})$$

où les coefficients  $C_n$  sont des constantes arbitraires. Le report de (III-145) et (III-150) dans les expressions (III-147) à (III-149) permet d'écrire le déplacement sous la forme

$$\tilde{u}_R(\mathbf{M}; \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n^{RR}(k_\alpha R) P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n^{R\theta}(k_\beta R) P_n(\cos \theta), \quad (\text{III-151})$$

$$\tilde{u}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n f_n^{\theta\theta}(k_\beta R) + A_n f_n^{\theta R}(k_\alpha R)] \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{III-152})$$

$$\tilde{u}_\phi(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{III-153})$$

où les fonctions  $f_n^{RR}, f_n^{\theta\theta}, f_n^{R\theta}, f_n^{\theta R}$  sont données par

$$f_n^{RR}(k_\alpha R) = k_\alpha h_{n-1}(k_\alpha R) - \frac{(n+1)}{R} h_n(k_\alpha R), \quad (\text{III-154})$$

$$f_n^{\theta\theta}(k_\beta R) = k_\beta h_{n-1}(k_\beta R) - \frac{n}{R} h_n(k_\beta R), \quad (\text{III-155})$$

$$f_n^{R\theta}(k_\beta R) = \frac{n(n+1)}{R} h_n(k_\beta R), \quad (\text{III-156})$$

$$f_n^{\theta R}(k_\alpha R) = \frac{l}{R} h_n(k_\alpha R). \quad (\text{III-157})$$

Soient  $N$  éléments linéaires maillant la surface de la cavité sphérique reliés par les nœuds  $M_l (a, \theta_l)$  ( $1 \leq l \leq 2N+1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ) (figure III-6). La résolution du système éléments finis (III-36) permet d'obtenir les déplacements nodaux  $\{\tilde{U}_l\}$  à la surface de la cavité. L'écriture des équations (III-151) et (III-152) sur l'ensemble des  $N$  nœuds maillant la surface de la cavité conduit à

$$[F] \{\tilde{\Sigma}\} = \{\tilde{U}_a\}, \quad (\text{III-158})$$

où le vecteur  $\{\tilde{\Sigma}\}$  est défini par

$$\{\tilde{\Sigma}\} = \{A_0, \dots, A_{N-1}, C_1, \dots, C_{N-2}\}^T, \quad (\text{III-159})$$

et la matrice  $[F]$  par

$$[F] = \begin{bmatrix} [F^{RR}] & [F^{R\theta}] \\ [F^{\theta R}] & [F^{\theta\theta}] \end{bmatrix}, \quad (\text{III-160})$$

avec

$$F_{kl}^{RR} = f_{k-1}^{RR}(k_\alpha a) P_{k-1}(\cos \theta_l) \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq N \\ 1 \leq l \leq N \end{cases}, \quad (\text{III-161})$$

$$F_{kl}^{\theta\theta} = f_k^{\theta\theta}(k_\beta a) \frac{\partial P_k}{\partial \theta}(\cos \theta_{l+1}) \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq N-2 \\ 1 \leq l \leq N-2 \end{cases}, \quad (\text{III-162})$$

$$F_{kl}^{R\theta} = f_k^{R\theta}(k_\beta a) P_k(\cos \theta_l) \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq N-2 \\ 1 \leq l \leq N \end{cases}, \quad (\text{III-163})$$

$$F_{kl}^{\theta R} = \delta_{l,k} \delta_{N,k} f_{k-1}^{\theta R} (k_\alpha a) P_{k-1}(\cos \theta_{l+1}) \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq N \\ 1 \leq l \leq N \end{cases} \quad (\text{III-164})$$

Dans (III-164),  $\delta_{l,k}$  désigne le symbole de Kronecker. La résolution du système (III-158) fournit le vecteur et permet le calcul du déplacement (équations (III-151) à (III-153)) en tout point du demi-espace.

### III.3.2 Rayonnement en demi-espace recouvert d'une couche

Le calcul des déplacements en un point quelconque  $M_i$  défini par  $M_i = (x_i, y_i, z_i)$  du milieu est réalisé lorsque les déplacements sur la surface ( $\Gamma$ ) sont connus. Il suffit pour cela d'appliquer de nouveau la méthode des équations intégrales décrites à la section III.2.2.1.2 ; l'équation (III-116) est modifiée en prenant pour état élastodynamique élémentaire la solution élémentaire en milieu infini associée à une force ponctuelle agissant en  $M_i$

$$\iint_{(\Gamma)} \left[ \overline{(\tilde{\sigma} \cdot n_r)} \overline{\tilde{G}^{M_i}} - \overline{T_r^G} \cdot \tilde{u} \right] d\Gamma = \iiint_{\Omega} \tilde{f}^{M_i} \tilde{u} d\Omega, \quad (\text{III-165})$$

où les tenseurs  $\overline{\tilde{G}^{M_i}}$  et  $\overline{T_r^G}$  ont les mêmes définitions que dans l'équation (III-116),  $M'$  étant remplacé par  $M_i$ . Effectuant l'intégrale de volume, il vient

$$\tilde{u}(M_i; \omega) = \iint_{(\Gamma)} \left[ \overline{(\tilde{\sigma} \cdot n_r)} \overline{\tilde{G}^{M_i}} - \overline{T_r^G} \cdot \tilde{u} \right] d\Gamma. \quad (\text{III-166})$$

Après discrétisation de la formulation intégrale (III-166), le déplacement  $\tilde{u}(M_i; \omega)$  s'écrit sous la forme

$$\tilde{u}(M_i; \omega) = \sum_{e \in (\Gamma)} \left[ \underline{\{T_r^e\}} [G^{M_i}] - [T^G] \underline{\{\tilde{U}_r^e\}} \right]. \quad (\text{III-167})$$

où les matrices  $[G^{M_i}]$  et  $[T^G]$  ont les mêmes définitions que dans l'équation (III-123),  $M'$  étant remplacé par  $M_i$ . Les vecteurs  $\underline{\{\tilde{U}_r^e\}}$  et  $\underline{\{T_r^e\}}$  sont respectivement les vecteurs élémentaires du déplacement et de la contrainte sur la surface ( $\Gamma$ ).

## III.4 Validation des développements et modélisation

Compte tenu des remarques formulées aux paragraphes III.2.1.5 et III.2.2.3, les résultats présentés dans cette section sont établis en considérant que le transducteur Janus directionnel est enfoui dans une formation infinie. Le milieu infini choisi pour effectuer les calculs présente les caractéristiques suivantes :  $E = 1.71875 E+10 Pa$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 3300 kg.m^{-3}$ . Ces valeurs correspondent aux célérités des ondes et au coefficient de Poisson suivant :  $\alpha = 2500 m.s^{-1}$ ,  $\beta = \alpha / \sqrt{3}$  et  $\nu = 0.25$ .

### III.4.1 Validation

#### III.4.1.1 Cavité sphérique soumise à une pression uniforme

Le déplacement dans le milieu extérieur est calculé à la surface d'une cavité sphérique de rayon  $l$  m, soumise à un champ de contrainte radial uniforme. La symétrie de révolution est prise en compte dans ATILA par une commande spéciale. Ainsi, un maillage de la surface génératrice suffit pour l'analyse. Pour représenter le chargement radial uniforme, une pression est appliquée sur des éléments d'interface fluide-solide au niveau de la surface de la cavité. Le milieu extérieur est maillé jusqu'à une surface limite par des éléments quadrilatères à huit nœuds. Aux frontières de ce maillage, la condition d'impédance en milieu infini est prise en compte via des éléments linéiques d'impédance mécanique développés dans le cadre de ce travail (figure III-11).

En milieu infini, le déplacement à la surface d'une cavité sphérique de rayon  $a$ , sur laquelle un champ de contraintes radial uniforme  $\tilde{\sigma}_{RR}$  est appliqué, s'écrit [Thiruvengkatachar, 1967]

$$\tilde{u}_R|_{R=a} = \frac{\tilde{\sigma}_{RR} a (1 + k_a a)}{\mu (a^2 k_\beta^2 - 4 j k_a a - 4)}. \quad (\text{III-168})$$

La figure III-12 représente les valeurs du module et de la phase de  $\tilde{u}_R|_{R=a}$  en fonction de la fréquence ; le module est normalisé par la valeur  $\max_\omega [\tilde{u}_R|_{R=a}]$ . L'excellent accord entre les solutions numérique et analytique constitue une première validation du calcul de la matrice d'impédance et de son implémentation dans le code éléments finis.

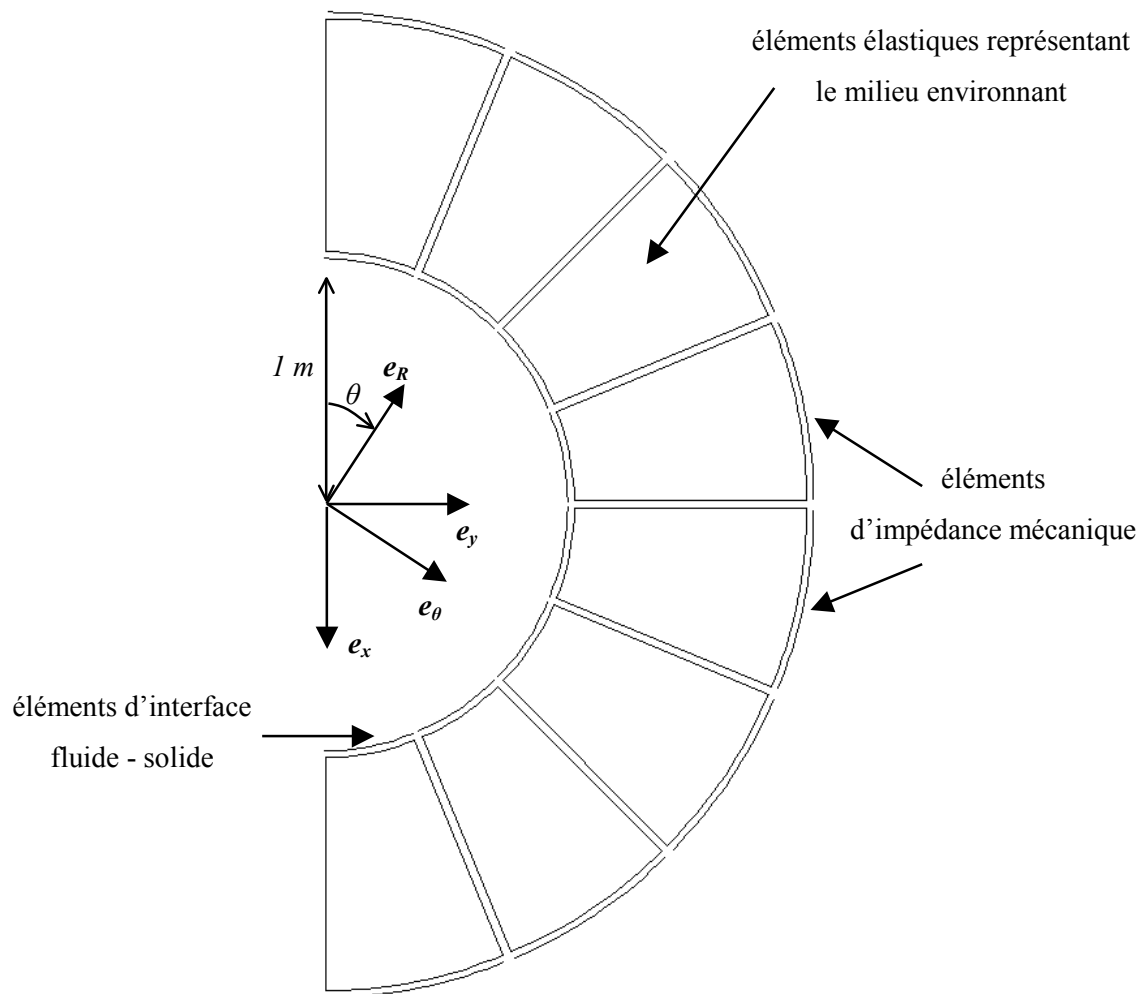


Figure III-11 : maillage d'une cavité soumise à un champ de contrainte radial

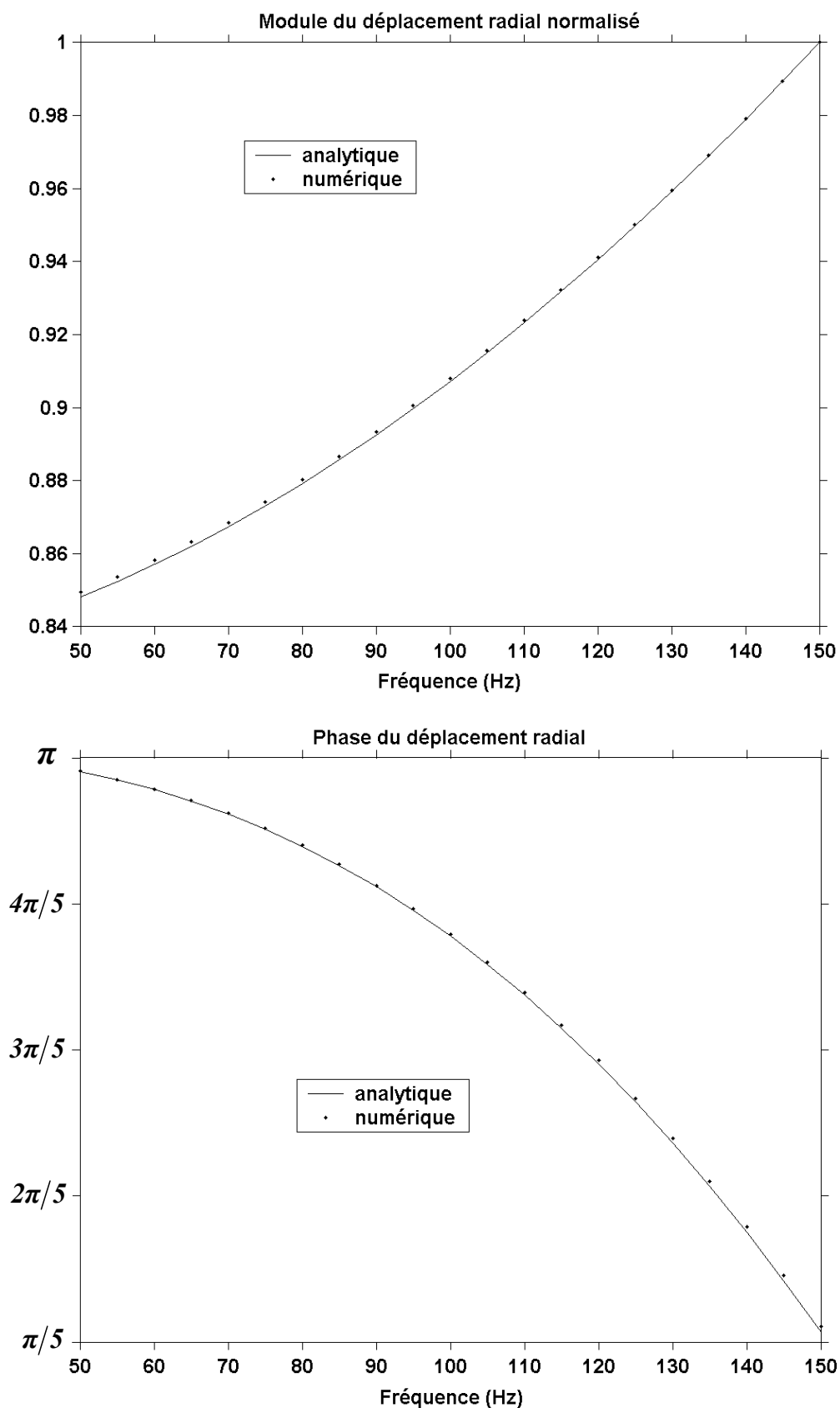


Figure III-12 : module et phase du déplacement radial pour une cavité soumise à un champ de pression

### III.4.1.2 Rayonnement de la force ponctuelle en milieu infini

Un volume sphérique de sol est maillé par des éléments quadrilatères à huit nœuds. La surface est discrétisée par des éléments d'impédance mécanique. Une force ponctuelle est appliquée sur le nœud central (figure III-13). Le rayonnement en champ lointain est calculé par la méthode développée à la figure III.3.1 et comparé au diagramme de directivité de la force ponctuelle présenté au chapitre I (section I.1.3). Les rayonnements en champ lointain sont présentés sur les figures III-14a (onde P) et III-14b (onde S) ; les rayonnements à une distance  $R = 2\lambda_a$ ,  $\lambda_a$  étant la longueur d'onde de l'onde P, sont présentés sur les figures III-14a (déplacement radial) et III-14b (déplacement tangentiel)

L'excellent accord entre les résultats analytiques et numériques valide la méthode développée pour le calcul du rayonnement en champ proche et lointain.

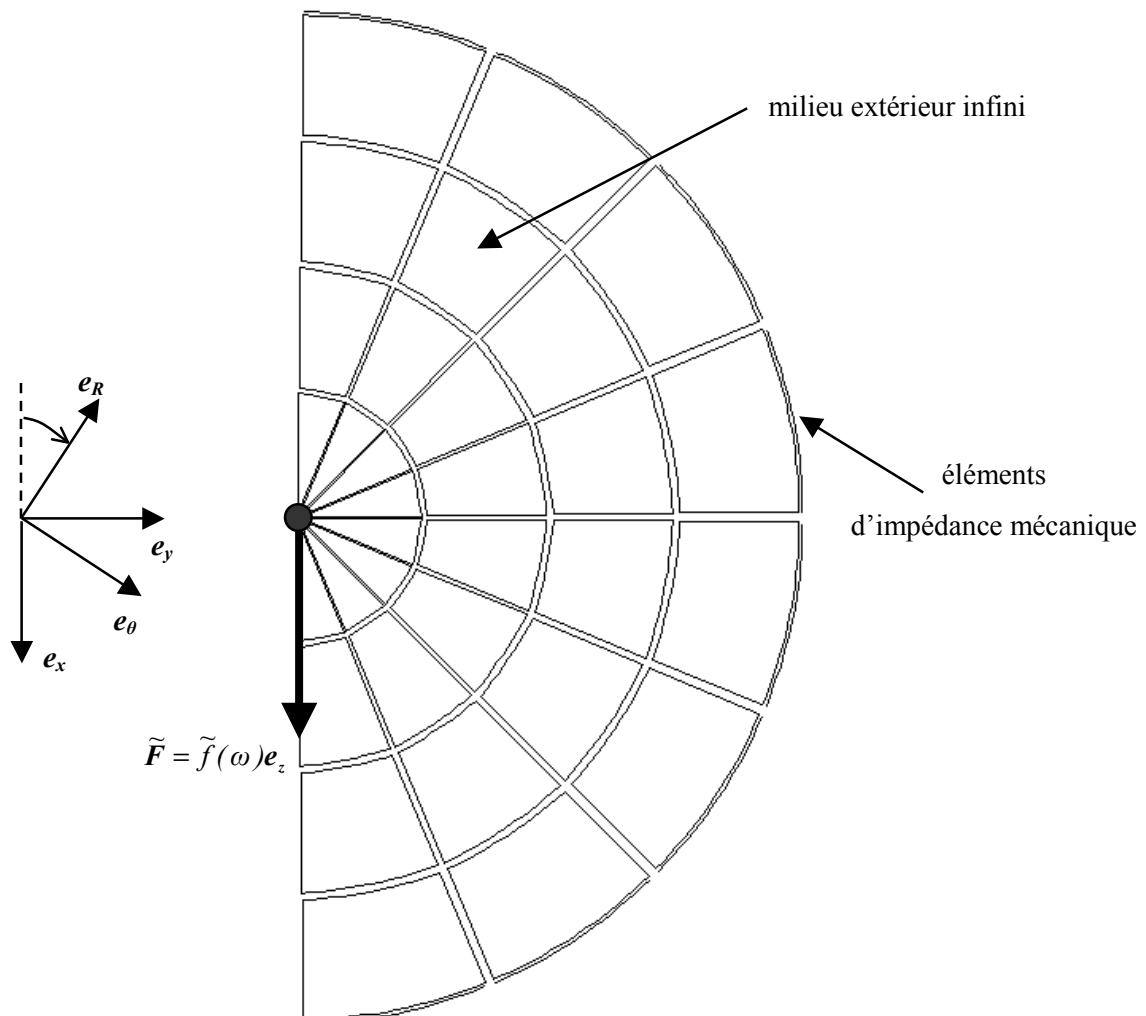


Figure III-13 : maillage utilisé pour le calcul du rayonnement de la force ponctuelle



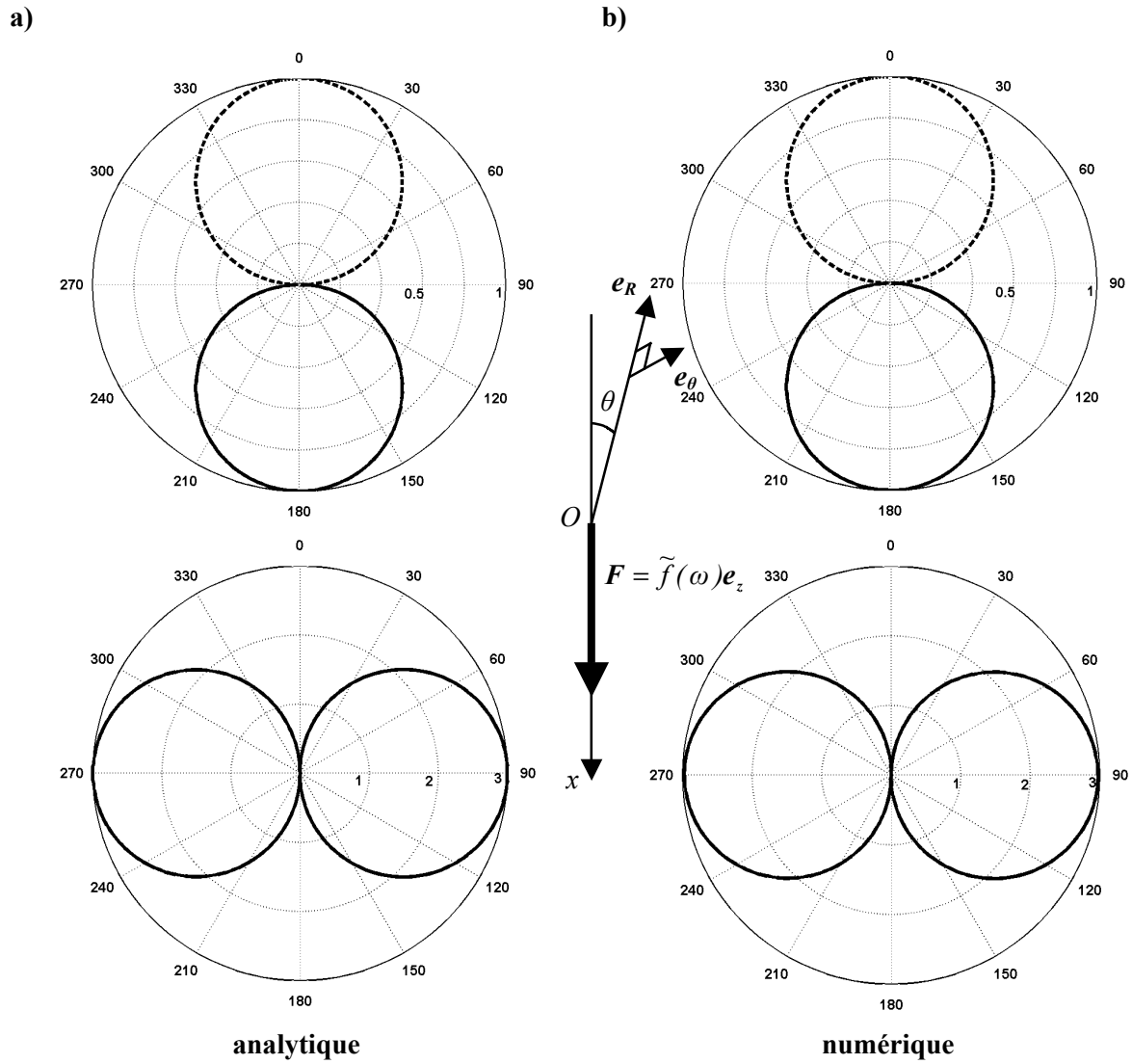


Figure III-14 : rayonnement d'une force ponctuelle en milieu infini et en champ lointain  
 a) ondes P b) ondes S

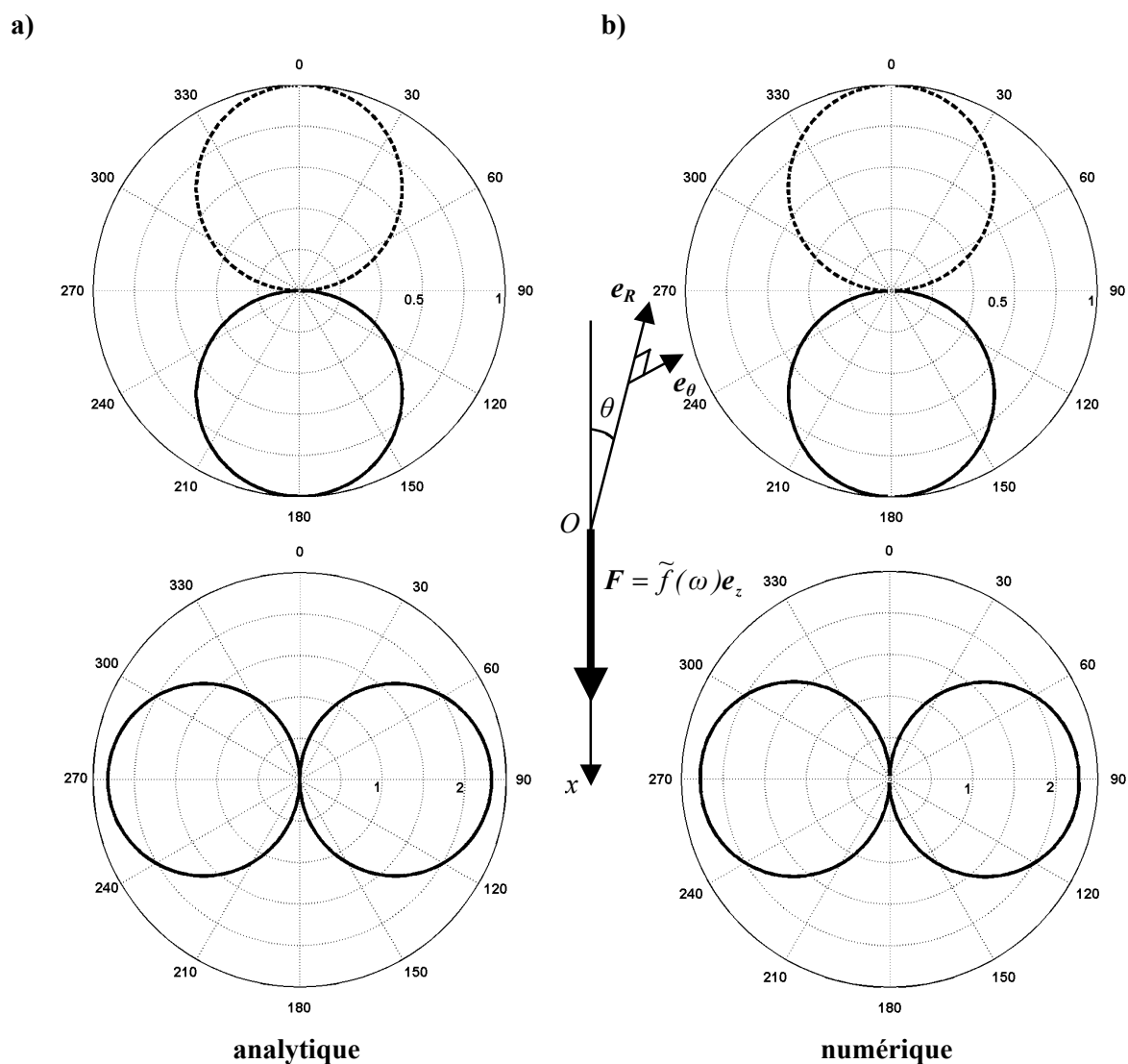


Figure III-15 : rayonnement d'une force ponctuelle en milieu infini à la distance  $R = 2\lambda_\alpha$   
 a) déplacement radial b) déplacement tangentiel

### III.4.2 Modélisation de transducteurs piézoélectriques

#### III.4.2.1 Le transducteur tonpilz

Avant d'étudier le transducteur Janus directionnel, il convient de vérifier que le rayonnement d'un transducteur tonpilz (voir chapitre I, section I.2.2.1) en champ lointain est bien équivalent à celui d'une force ponctuelle. La figure III-16 montre le maillage utilisé ; le transducteur tonpilz est inséré dans un boîtier cylindrique de hauteur  $l$  m, de rayon à la base  $40$  cm et d'épaisseur  $5$  cm ; ce boîtier est tel que seul le pavillon soit en contact avec le sol. Des éléments d'impédance mécanique sont ajoutés sur la surface du volume sphérique pour calculer le rayonnement. Le diagramme de directivité obtenu à  $100$  Hz est représenté à la figure III-17. Les résultats obtenus confirment que le rayonnement du transducteur tonpilz en champ lointain est équivalent à celui de la force ponctuelle.

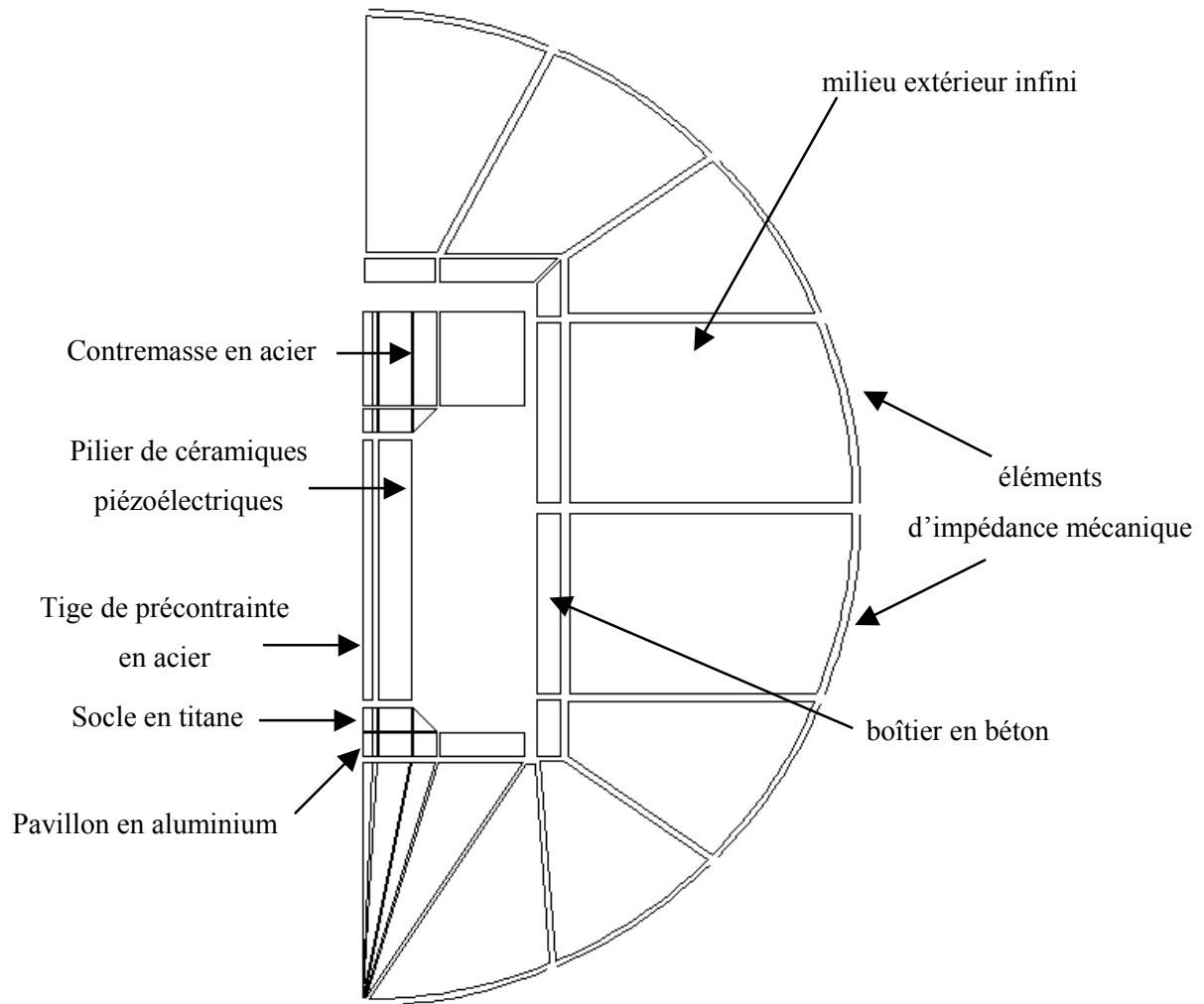


Figure III-16 : modèle du transducteur tonpilz (avant maillage)

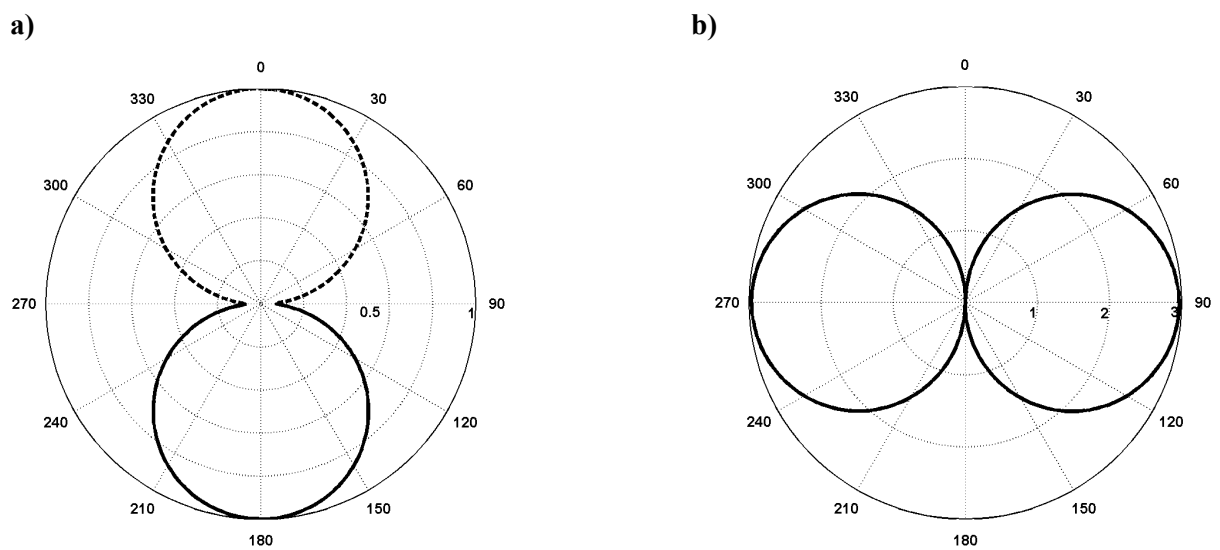


Figure III-17 : rayonnement d'un transducteur tonpilz en milieu infini à 100 Hz  
a) ondes P b) ondes S

### III.4.2.2 Le transducteur Janus directionnel

Le transducteur présenté dans le chapitre I (section I.2.2.3) est modélisé. La figure III-18 présente la géométrie et les dimensions du Janus étudié.

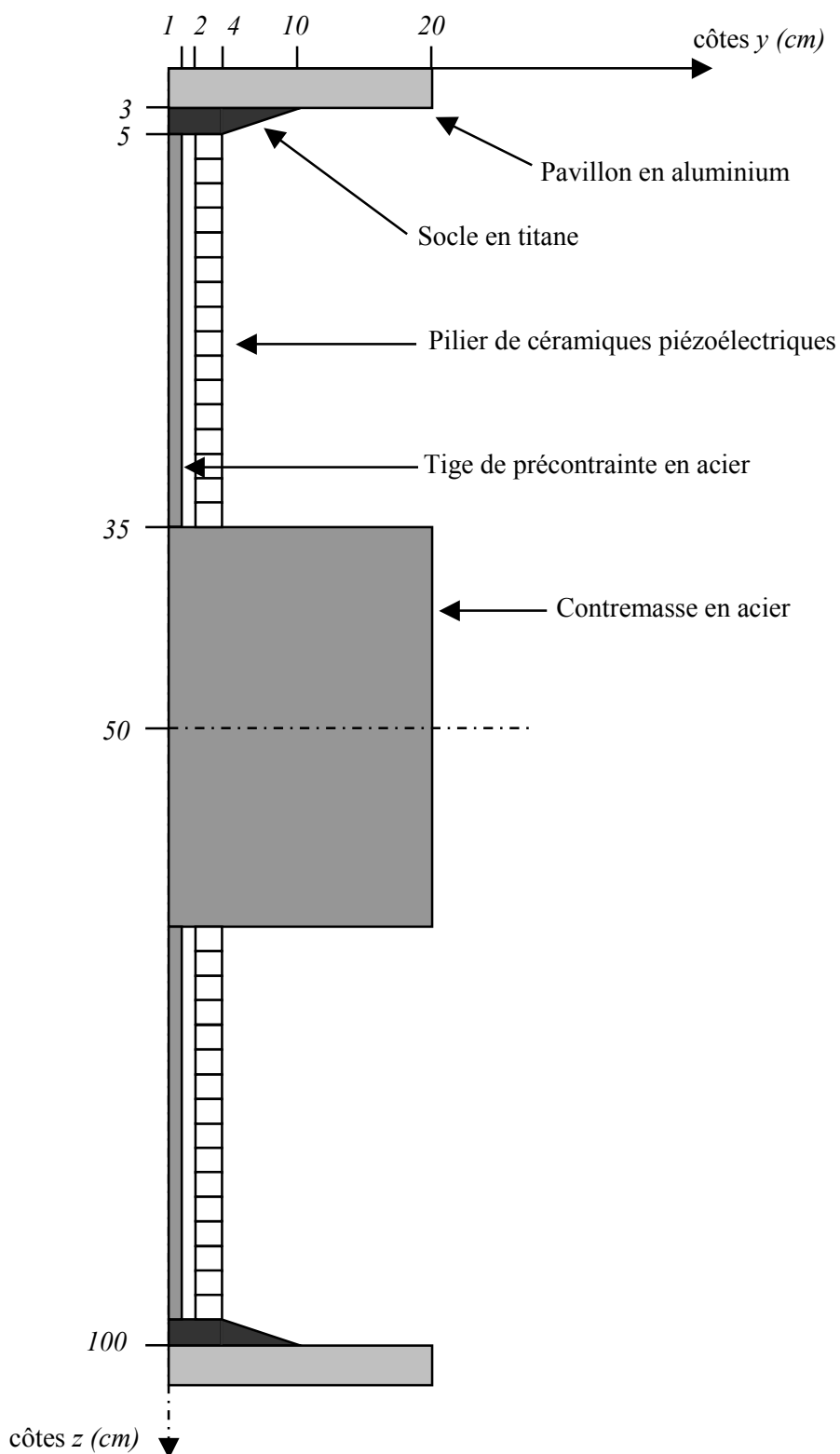


Figure III-18 : schéma du transducteur Janus étudié

### III.4.2.2.1 Modes de résonance du transducteur à vide

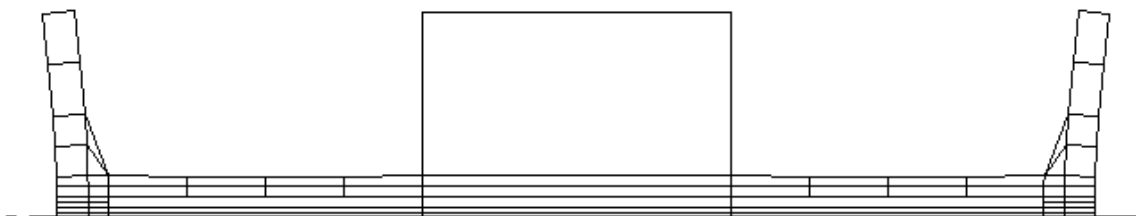
Le code ATILA permet de calculer les modes de vibration d'une structure piézoélectrique. Le tableau III-1 présente les 5 premiers modes de résonance et d'antirésonance du transducteur Janus ainsi que leurs coefficients de couplage pour une excitation symétrique des piliers.

Résonance (Hz)	Antirésonance (Hz)	Coefficient de couplage (%)
971	1063	40.9
1016	1016	0
2269	2579	47.5
2310	2310	0
5132	5140	5.7

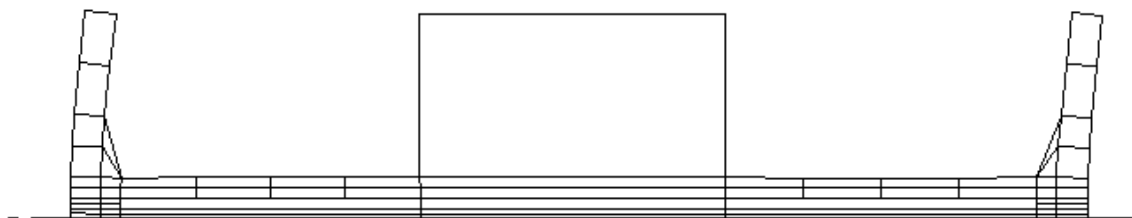
**Tableau III-1 : les 5 premiers modes de résonance du Janus**

La figure III-19 présente les déformations de la structure pour les deux premiers modes de résonance. Le tableau III-1 montre que les résonances sont situées bien au delà de la gamme de fréquences sismiques (entre 10 Hz et 200 Hz). Dans le cadre d'applications sismique, le transducteur sera donc utilisé hors résonance et la puissance émise sera très faible.

a)



b)



**Figure III-19 : les deux premiers mode de résonance du Janus étudié**

a) 971 Hz - b) 1016 Hz

### III.4.2.2.2 Diagrammes de directivité

Le rayonnement de ce transducteur doit être rendu équivalent à celui de la source directionnelle idéale décrite au chapitre I (section I.2.1) ; pour cela, il faut adapter l'amplitude et la phase de la tension d'excitation de chaque pilier :

- Si les piliers sont alimentés en phase, ils se dilatent ou se contractent en même temps ; les vibrations des pavillons inférieur et supérieur créent deux forces d'intensité et de direction identique mais de sens opposés  $\pm \mathbf{F}_2 = \pm \tilde{f}_{F_2}(\omega) \mathbf{e}_z$ . Dans ce cas, le rayonnement du transducteur Janus est équivalent à celui du couple de forces sans moment (figure III-20).
- Dans le même temps, si les piliers sont alimentés en opposition de phase, l'un va se dilater tandis que l'autre va se contracter ; les vibrations des pavillons inférieur et supérieur agissent comme une force  $\mathbf{F}_1 = \tilde{f}_{F_1}(\omega) \mathbf{e}_z$  sur le milieu extérieur (figure III-21).

Si les tensions d'excitation, et donc les forces  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ , sont ajustées de manière à satisfaire la condition

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = 2jk_a d \cos \theta_a \tilde{f}_{F_2}(\omega). \quad (\text{III-169})$$

ou

$$\tilde{f}_{F_1}(\omega) = 2jk_b d \cos \theta_b \tilde{f}_{F_2}(\omega), \quad (\text{III-170})$$

le rayonnement obtenu doit s'approcher du rayonnement de la source directionnelle idéale. La figure III-22 montre qu'en procédant de telle manière, le rayonnement obtenu n'est pas directionnel ; ceci est dû au fait que l'effet du milieu extérieur sur le transducteur est différent pour les modes de fonctionnement symétrique et antisymétrique. Les amplitudes de déplacement de la source directionnelle dans ces deux modes de fonctionnement doivent être évaluées avec des impédances de milieu extérieur différentes. La prise en compte de l'interaction de la source avec son milieu est par conséquent indispensable dans la conception de la source directionnelle.

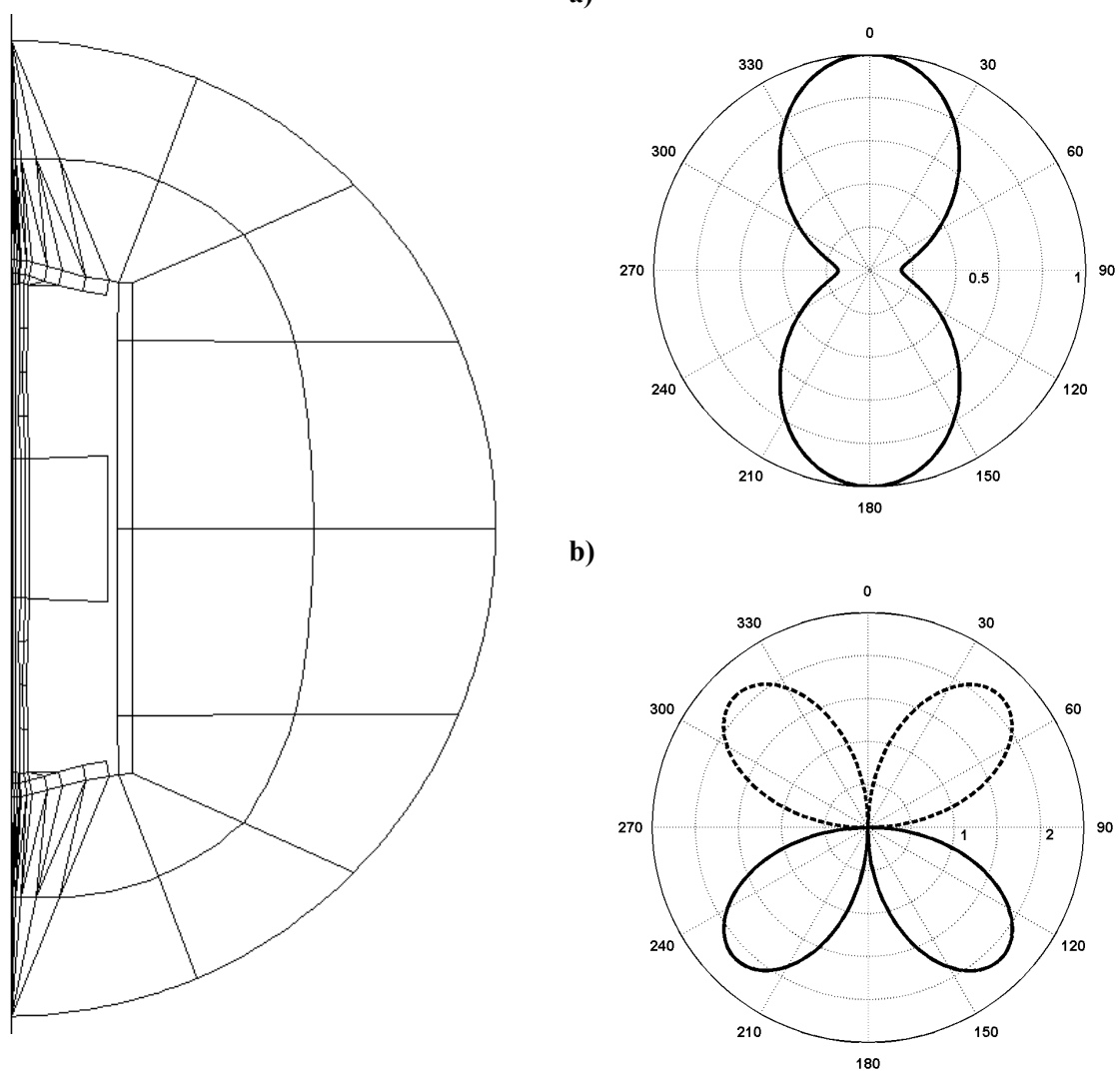
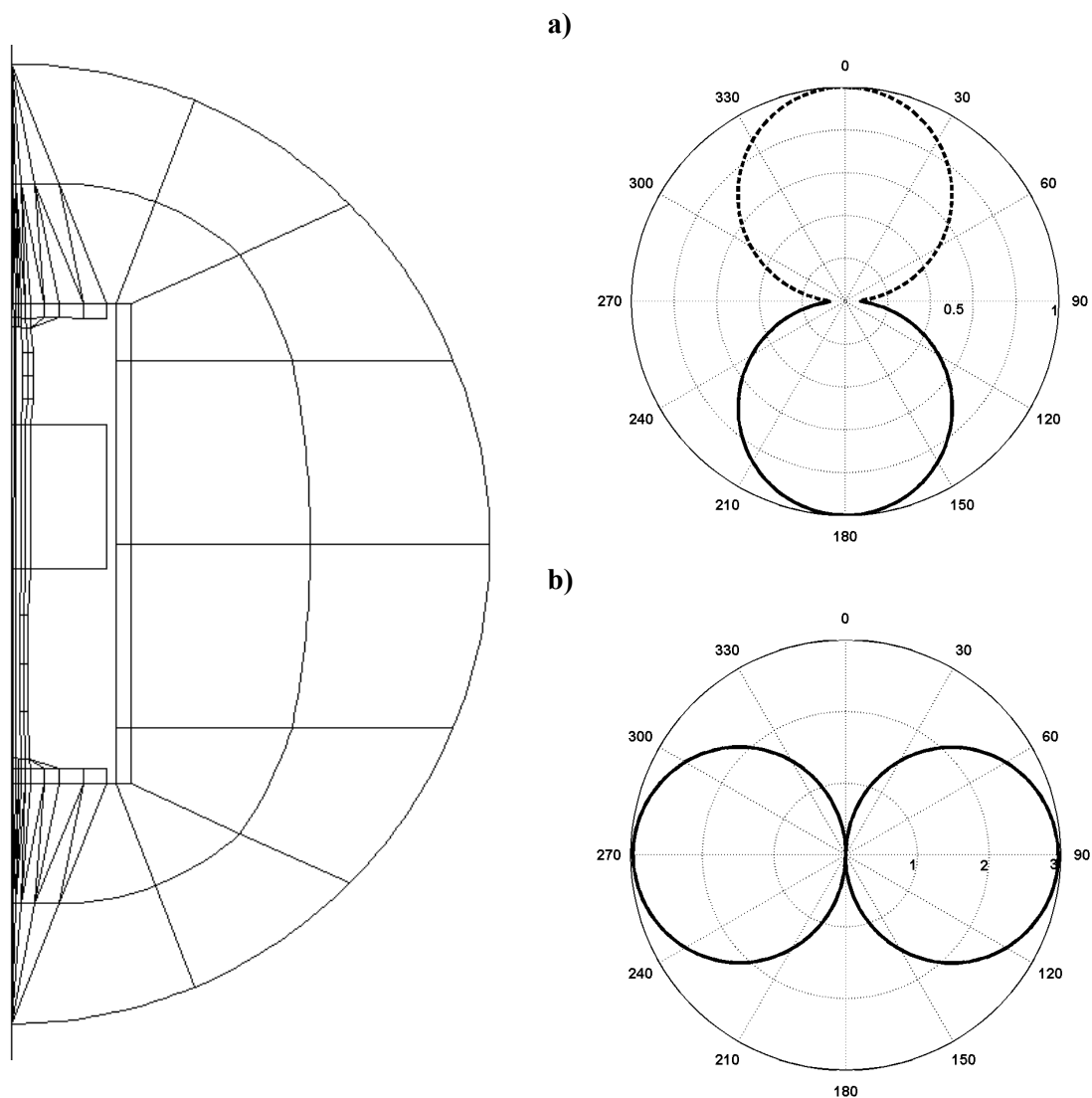


Figure III-20 :

champ de déplacement et diagrammes de directivité du transducteur Janus à 100 Hz lorsque les piliers sont alimentés en phase a) ondes P b) ondes S



**Figure III-21 :**  
**champ de déplacements et diagrammes de directivité du transducteur Janus à 100 Hz lorsque les piliers sont alimentés en opposition de phase a) ondes P b) ondes S**



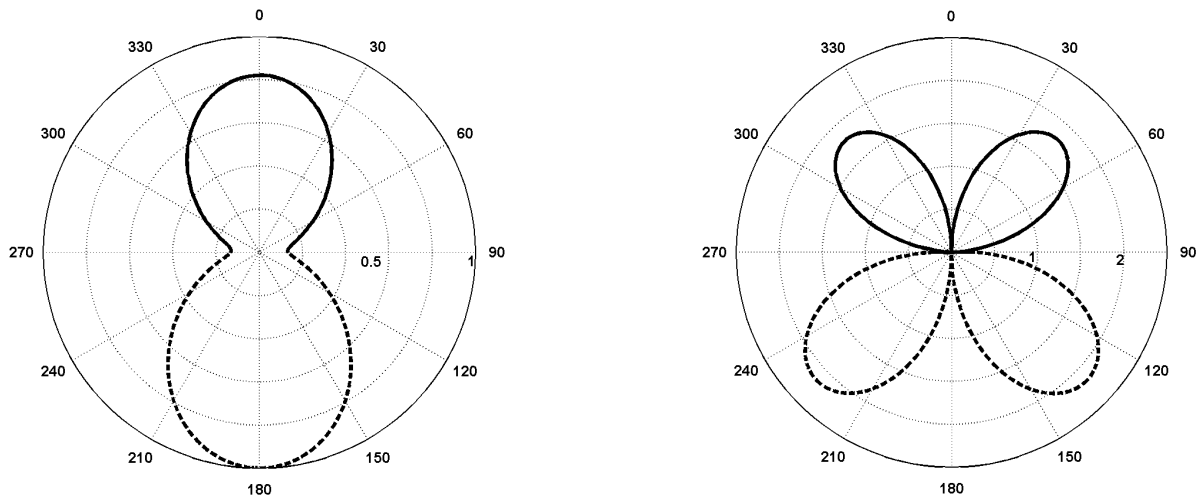


Figure III-22 :

diagrammes de directivité du transducteur Janus à 100 Hz lorsque les piliers sont alimentés de manière à satisfaire la condition (III-169) avec  $\theta_\alpha = 0$  a) ondes P b) ondes S

Le rayonnement directionnel peut être obtenu en modifiant les tensions appliquées de manière à annuler le rayonnement d'une onde dans une direction. Soit  $\tilde{U}_R^{(F,-F)}$  (respectivement  $\tilde{U}_R^F$ ) les valeurs à  $\theta = \pi$  du déplacement radial en champ lointain (ondes P) lorsque le Janus est alimenté en phase (respectivement en opposition de phase). La tension à appliquer sur les piliers du Janus pour annuler

l'onde P en  $\theta = 0$  est donnée par  $I \pm \left( \frac{\tilde{U}_R^{(F,-F)}}{\tilde{U}_R^F} \right)$  (figure III-23).

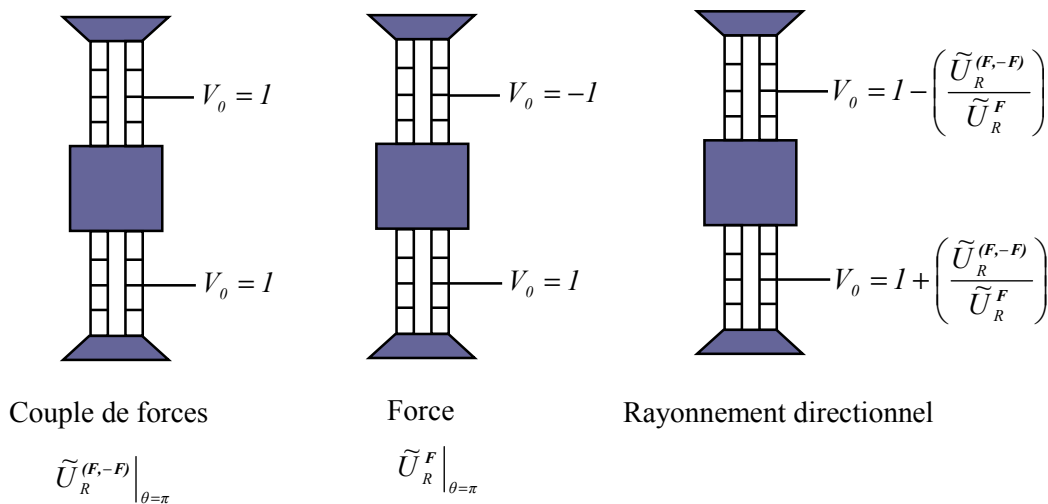


Figure III-23 :

principe du calcul de la tension d'alimentation à appliquer pour obtenir un rayonnement directionnel

Les diagrammes de directivité obtenus à  $100 \text{ Hz}$  pour cette nouvelle excitation sont présentés à la figure III-24. Le rayonnement obtenu est très proche de celui de la source directionnelle théorique (figure III-22). Le concept du transducteur Janus comme transducteur piézoélectrique directionnel est ainsi validé.

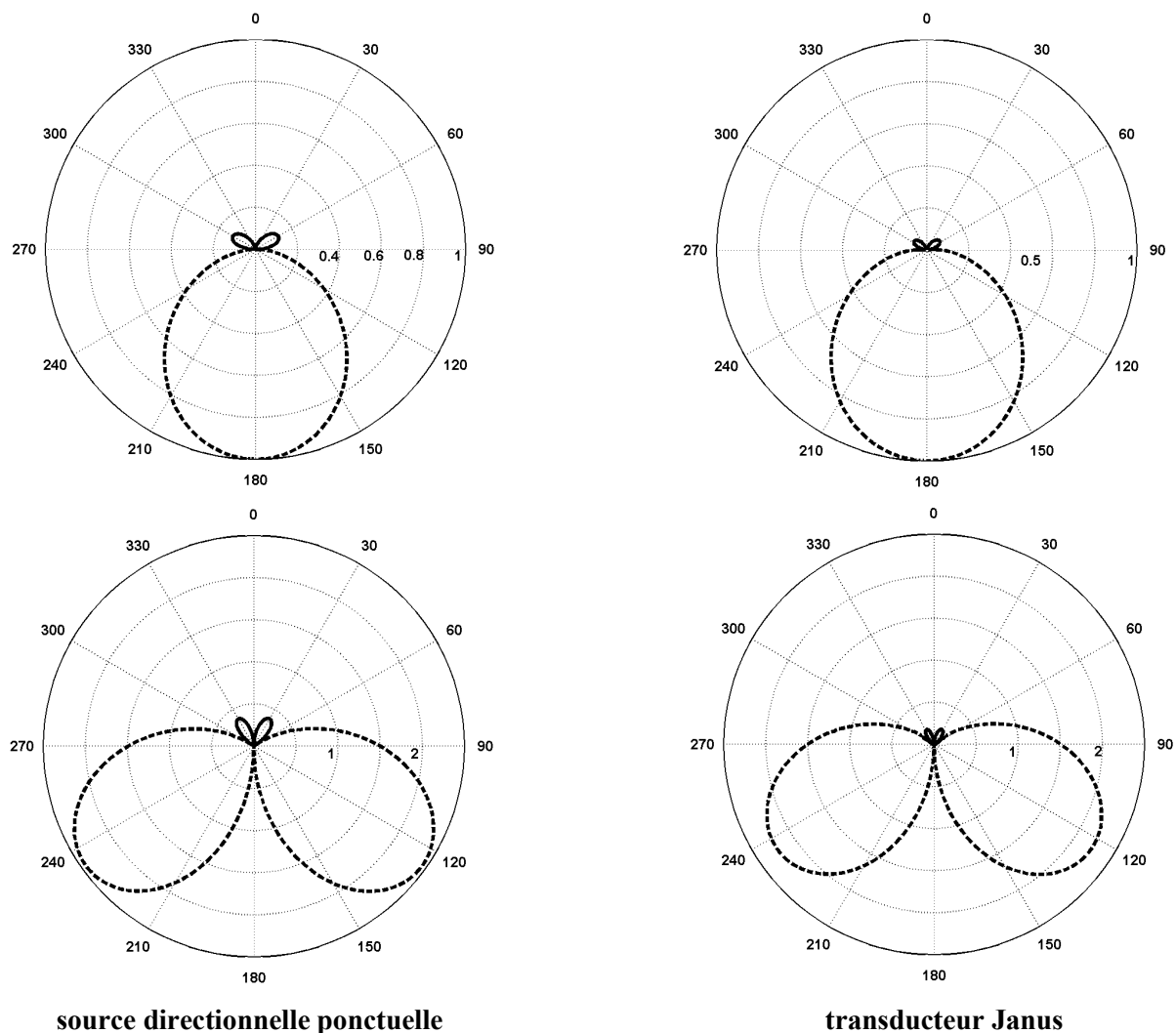


Figure III-24 :

diagrammes de directivité de la source directionnelle théorique et du transducteur Janus à excitation adaptée, en milieu infini et en champ lointain  
a) ondes P b) ondes S

#### III.4.2.2.3 Sismogrammes

À partir des solutions en régime harmonique, les sismogrammes du transducteur Janus sont calculés dans le cas où son rayonnement est directionnel. Pour cela, la procédure décrite à la figure III-23 est répétée pour chaque fréquence de calcul. L'ondelette utilisée pour calculer les sismogrammes est le signal Ricker  $S(t)$  donné par

$$S(t) = [1 - 2(\omega_0 t)^2] \exp[-(\omega_0 t)^2] \quad (\text{III-171})$$

Dans (III-171),  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0$  étant la fréquence centrale du signal, c'est à dire la valeur de la fréquence pour laquelle le module du spectre  $\tilde{S}(\omega)$  est maximal. Le milieu extérieur est constitué de marnes dont les caractéristiques mécaniques sont  $\alpha = 2500 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\beta = \alpha/\sqrt{3} \approx 1443.4 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 3300 \text{ kg.m}^{-3}$ . La figure III-25 représente la géométrie source/récepteurs utilisée pour le calcul ; la figures III-26 présente la comparaison des sismogrammes du transducteur Janus et de la source directionnelle théorique (calculés par méthode de Cagniard De Hoop ou par couplage réflectivité / DWN) avec  $f_0 = 100 \text{ Hz}$ .

Le très bon accord entre les sismogrammes du transducteur Janus directionnel et ceux de la source directionnelle ponctuelle constitue une validation supplémentaire du concept de transducteur Janus directionnel. Les faibles différences observées s'expliquent par le fait que même si le rayonnement du Janus peut être rendu directionnel, celui n'est pas tout à fait équivalent à celui de la source directionnelle ponctuelle (voir figure III-24).

Les temps de calcul sont très courts ; pour les sismogrammes de la figure III-26, les solutions en régime harmonique ont été calculées pour 256 fréquences. Pour chaque fréquence, le temps CPU nécessaire au calcul des déplacements sur l'ensemble des récepteurs est d'environ 40 s sur un ordinateur équipé d'un processeur pentium III à 1 GHz.

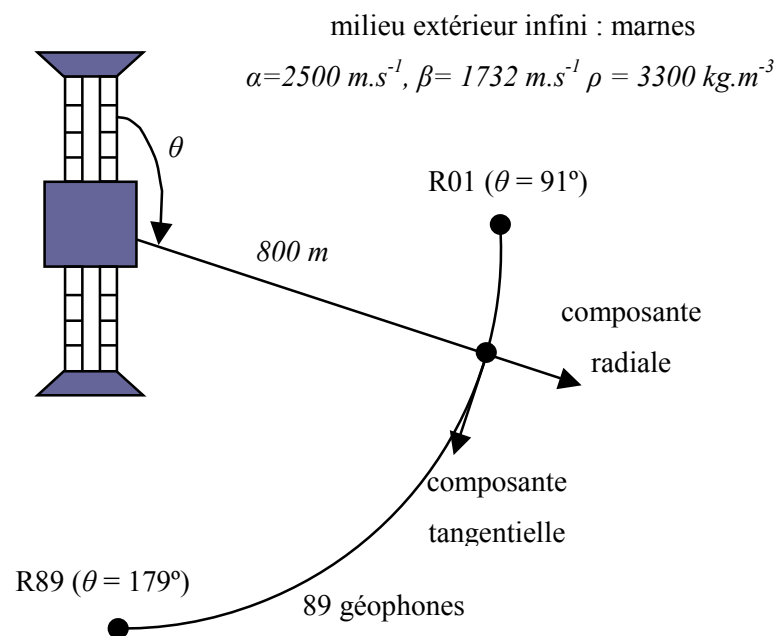
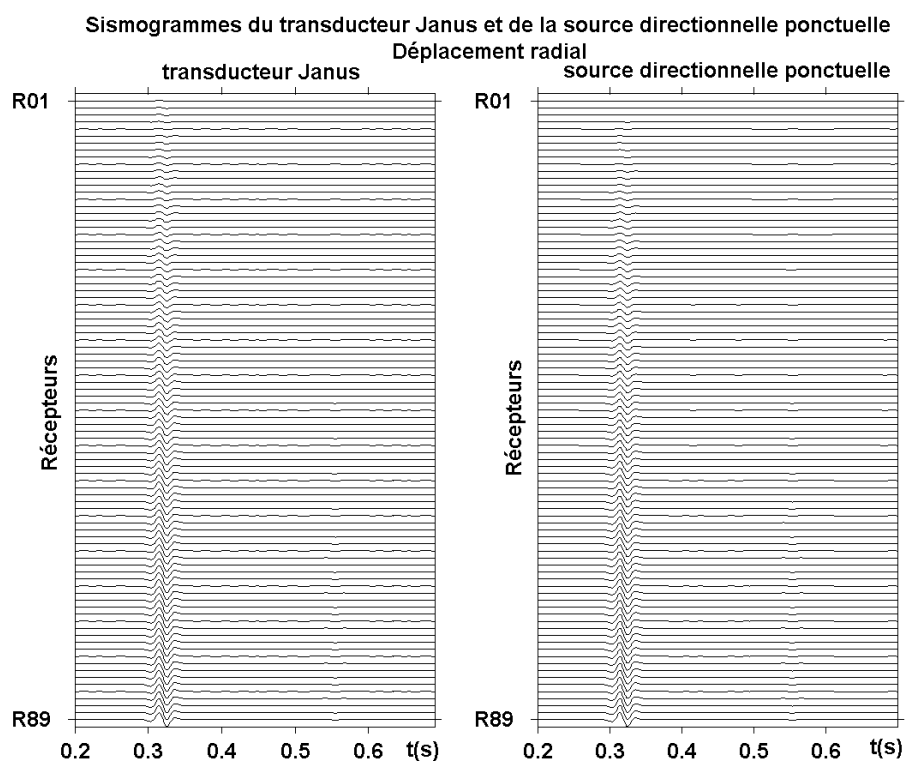
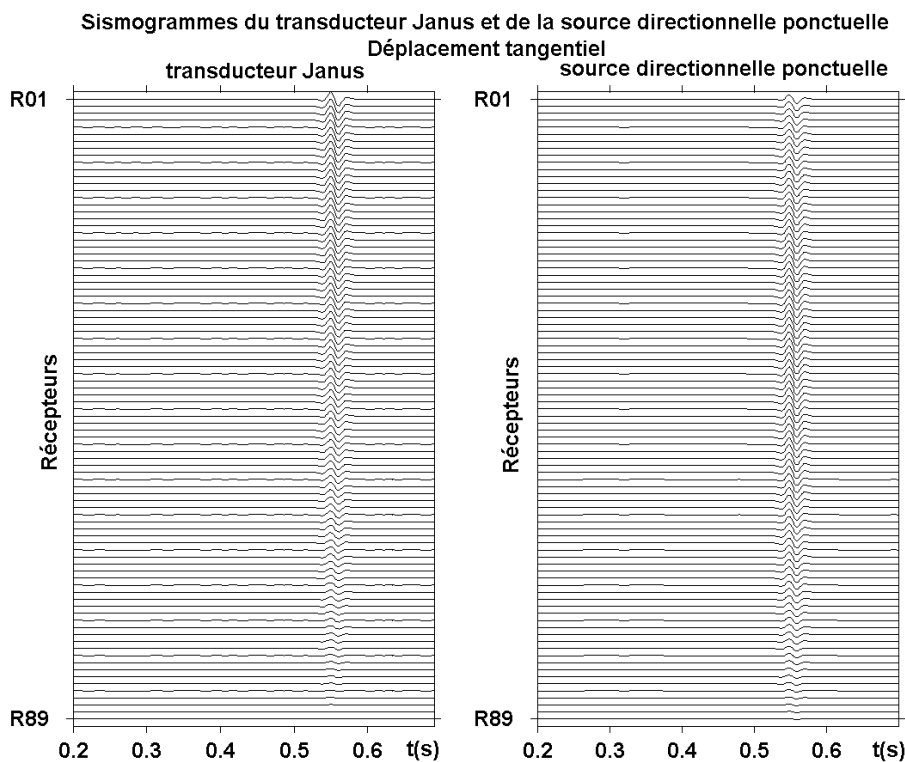


Figure III-25 : géométrie de calcul utilisée pour le calcul des sismogrammes en milieu infini

a)



b)



**Figure III-26 : sismogrammes du transducteur Janus et de la source directionnelle ponctuelle**  
Les sismogrammes sont normalisés par la valeur maximale du déplacement radial (a) ou  
tangentiel (b) de la source considérée

## Conclusion générale

Pour assurer la reproductibilité des acquisitions de données lors des campagnes de sismiques 4D, il faut avoir recours à une source dont le rayonnement n'est pas affecté par les variations de la zone altérée. Les méthodes développées et les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse permettent d'envisager la réalisation d'un transducteur piézoélectrique directionnel, qui, enterré, peut avoir la stabilité recherchée.

Dans le premier chapitre, une source ponctuelle, directionnelle en milieu infini et en champ lointain, a été conçue. Pour cela, le rayonnement de sources ponctuelles classiques (source de dilatation, force, couples de forces) est étudié. L'association d'un couple de forces et d'une force d'amplitudes et de phases ajustables est considérée ; l'annulation, dans une direction de l'espace, de la solution en champ lointain pour l'une ou l'autre des ondes, permet d'obtenir une condition théorique de rayonnement directionnel. Un concept de transducteur piézoélectrique utilisant ce principe directionnel est proposé.

Pour vérifier que le principe directionnel reste valable en milieu réel, deux modèles numériques ont été mis en oeuvre dans le deuxième chapitre, considérant l'interaction avec la surface libre ou la zone altérée.

Le premier modèle vise à prédire le rayonnement de la source directionnelle en demi-espace ; les fonctions de Green en régime transitoire associées à l'action d'une force et d'un couple de forces sont calculées par la méthode de Cagniard - De Hoop. À partir de ces fonctions de Green, la source directionnelle est modélisée et les sismogrammes obtenus montrent que même à une profondeur inférieure à une longueur d'onde, l'interaction de la source avec la surface libre ne modifie pas significativement le signal émis vers le réservoir.

Le second modèle a pour objectif de déterminer le rayonnement de la source directionnelle en demi-espace recouvert d'une couche modélisant la zone altérée. Les fonctions de Green associées à l'action d'une force et d'un couple de forces sont calculées en régime harmonique par la méthode de la réflectivité. La principale difficulté est alors de calculer les solutions en régime transitoire prenant en compte tous les types de contributions (réflexions multiples, ondes guidées, ondes de surface) ; pour cela, la méthode Discrete Wave Number est utilisée. Les sismogrammes calculés montrent que le signal émis en direction du réservoir n'est pas affecté la présence de la zone altérée.

Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent donc de valider le principe directionnel théorique en milieu semi-infini.

Le troisième chapitre traite alors de l'interaction de transducteurs piézoélectriques avec leur environnement. Le travail effectué dans ce chapitre a permis d'incorporer des nouveaux outils dans le code éléments finis ATILA. Des éléments d'impédance mécanique ont été développés afin de coupler le modèle éléments finis du transducteur avec une représentation du milieu extérieur. Dans le cas où ce milieu est un demi-espace, la condition d'impédance est calculée de manière exacte par la méthode itérative ; si le milieu extérieur est un demi-espace recouvert d'une couche, la condition d'impédance est calculée numériquement avec le code éléments de frontière MISSAXI.

Dans le cadre de ce travail, seule la matrice d'impédance en milieu infini calculée par la méthode itérative, ainsi que sa prise en compte dans le code ATILA, a été implémentée avec succès. Les sismogrammes du transducteur Janus, présenté au troisième chapitre, montrent qu'il est bien équivalent à la combinaison d'une force ponctuelle et d'un couple de forces ponctuelles. Cependant, la condition d'alimentation en tension des piliers est différente de la condition théorique rendant la combinaison de sources ponctuelles directionnelle ; ceci s'explique par le fait que le transducteur fonctionnant en mode couple de forces voit le milieu extérieur plus rigide que lorsqu'il fonctionne en mode force. Ainsi, la prise en compte de l'interaction de la source avec le milieu extérieur se révèle indispensable dans la conception d'une source directionnelle.

Les perspectives d'extension de ce travail peuvent être divisées en quatre thèmes majeurs :

- La finalisation des développements réalisés,
- L'étude de nouveaux principes de sources directionnelles,
- La conception de transducteurs piézoélectriques adaptés à la bande de fréquence sismique,
- La validation expérimentale du principe de source directionnelle en monitoring sismique.

Certains développements conduits dans le cadre de cette thèse n'ont pu être menés à terme. Ainsi, l'implémentation complète de la méthode itérative nécessite de résoudre les problèmes d'intégration et de convergence qui y sont liés (section III.2.1.5). A terme, cette méthode pourrait permettre de traiter l'interaction de transducteurs piézoélectriques directionnels avec la surface libre du demi-espace. Cette interaction pourrait se révéler importante dans la mesure où la profondeur d'enfouissement est comparable à la longueur d'onde. La prise en compte de la zone altérée dans la modélisation des sources requiert le couplage ATILA/MISSAXI. Les développements numériques sont présentés et ont été implémentés. La validation de ces développements reste à conduire.

Dans le travail présenté, la source directionnelle est obtenue en combinant deux sources idéales (force et couple de forces) et en adaptant les amplitudes des sources de manière à annuler le rayonnement à l'infini dans une direction donnée. D'autres principes peuvent être mis en oeuvre pour obtenir un rayonnement directionnel :

- Utilisation d'un nouveau critère de détermination de l'amplitude des sources dans le domaine fréquentiel (minimisation de l'énergie rayonnée dans le demi-espace supérieur comme présenté

à la section I.2.1) ou dans le domaine temporel (annulation du déplacement en un point de la surface libre pendant une durée donnée),

- Association de plus de deux sources idéales de manière à augmenter le nombre de degrés de liberté du système et à réduire l'énergie rayonnée vers la surface libre.

Le transducteur piézoélectrique de type Janus, utilisé dans ce mémoire pour réaliser la source directionnelle, n'est que peu efficace sur le plan de l'énergie rayonnée dans la mesure où il ne possède aucune résonance dans la gamme de fréquence sismique. Pour obtenir une source piézoélectrique compacte résonant à basse fréquence, une nouvelle technologie de type flexenseur peut être utilisée. L'outil de modélisation, couplant ATILA et méthode itérative, développé dans cette thèse est particulièrement adapté à la conception et à l'optimisation de ces flexenseurs pour une application sismique.

Enfin, la conclusion logique de ces travaux théoriques est la réalisation d'un transducteur Janus directionnel, de l'électronique de commande associée, et le test de cette source dans une expérimentation à échelle réelle. Seule cette dernière étape pourra confirmer l'intérêt du concept de source directionnelle enfouie dans les applications de monitoring sismique.

## Références bibliographiques

- ABO SELIEM A. A., « Propagation of the transient electromagnetic field above atmospheric surface duct », *Applied Mathematics and Computation*, 145, 2-3, 631-639 (2003)
- ABRAMOVITZ M., STEGUN I., « Handbook of Mathematical functions », Dover Publications, New York (1972)
- AKI K., RICHARDS P. G., « Quantitative Seismology - Theory And Methods », Freeman San Francisco, California (1980)
- AKI K., LARNER K., « Surface motion of a layered medium having an irregular surface due to incident plane SH waves », *J. Geophys. Res.*, 75, 933-954 (1970)
- AOI S., FUJIWARA H., « 3D finite difference method using discontinuous grids », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 89, 918-930 (1999)
- ATILA, « Finite element code for piezoelectric and magnetostictive transducer and actuator modelling », User's manual, version 5.2.2 (2002)
- AULD B. A., « Acoustic fields and waves in solids », Vol. 1, Krieger Publishing Company, 2<sup>nd</sup> edition, 151-161 (1990)
- BARONI A., « Modélisation du couplage sol-fluide pour la sismique entre puits », Thèse de doctorat de l'École Centrale de Paris (Novembre 1996)
- BEN MENAHEM A., CISTERNAS A., « The dynamic response of an elastic half space to an explosion in a spherical cavity », *J. Math. And Phys.*, 42, 112-125 (1963)
- BEN MENAHEM A., VERED M., « Extension and interpretation of the Cagniard-Pekeris method for dislocation sources », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 63, 1611-1636 (1973)
- BEN-ZION Y., AKI K., « Seismic radiation from an SH source in a laterally heterogeneous planar fault zone », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 80, 971-994 (1990)
- BEYDOUN W. B., KEO T. H., « The paraxial ray method », *Geophysics*, 52, 1639-1653 (1987)
- BORTFELD R., « Exact solution of the reflection and refraction of arbitrary spherical compressional waves at liquid-liquid interfaces and at solid-solid interfaces with equal shear velocities and equal densities », Meeting of the European Association of Exploration Geophysicist (31st –3rd June 1961)
- BORTFELD R., « Reflection and refraction of spherical compressional waves at arbitrary plane interface », Meeting of the European Association of Exploration Geophysicist (23rd-25th May 1962)
- BOUCHON M., « A simple method to calculate Green's function for elastic layered media », *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 71, 4, 959-971 (1981)
- BOUCHON M., AKI K., « Discrete wave-number representation of seismic source wave fields », *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 67, 2, 259-277 (1977)



- BOUTIN C., BONNET G., BART P. Y. « Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 90, 2, 521-550 (1987)
- BUTLER S. C., « Directional flextensional transducer », *J. Acoust. Soc. Am.*, 92, 5, 2977 - 2979 (1992)
- BUTLER S. C., BUTLER J.L., BUTLER A. L., CAVANAGH G. H., « A low frequency directional flextensional transducer and line array », *J. Acoust. Soc. Am.*, 102, 1, 308 - 314 (1997)
- BUTLER J. L., BUTLER A. L., RICE J. A., « A tri-modal directional transducer », *J. Acoust. Soc. Am.*, 115, 2, 658 - 665 (2004)
- BOUCHER D., « Trends and problems in low frequency sonar projector design », *Power Sonic and Ultrasonic Transducers Design*, édité par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Springer Verlag, 100-120 (1988)
- BOYER S. et MARI J. L., « Sismique et diagraphe », *Technip* (1994)
- CAGNIARD L., « Réflexion et réfractions des ondes sismiques progressives », *Gauthiers-Villars*, Paris (1939)
- CAGNIARD L., « Reflection and refraction of progressive seismic waves », traduit et révisé par FLINN E. A. et DIX C. H., *Mac Graw - Hill*, New York (1962)
- CAMPILLO M., BOUCHON M., MASSINON B., « Theoretical study of the excitation, spectral characteristics and geometrical attenuation of regional seismic phases », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 74, 79-90 (1984)
- CASTAGNA J. P., SPARKMAN G., GOBRAN B., « Time lapse reservoir monitoring and characterization », *proceedings of the Workshop of the Energy Research Clearing House* (1996)
- CHAPMAN C. H., « A new method for computing synthetic seismograms », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 54, 481-518 (1978)
- CHENG C. H., TOKSÖZ M. N., « Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs », *Geophysics*, 46, 1042-1053 (1981)
- CHOUET B., « Ground motion in the near-field of a fluid-driven crack and its interpretation in the study of shallow volcanic tremor », *J. Geophys. Res.*, 86, 5985-6016 (1981)
- CLOUTEAU D., « Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes, Application à la tenue des ouvrages sous séisme », *Thèse de doctorat de l'École Centrale de Paris* (1977)
- CORMIER V. F., RICHARDS P. G., « Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase : the inner core boundary », *J. Geophys.*, 43, 3-31 (1977)
- DECARPIGNY J. N., « Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques », *Thèse de Doctorat d'État, Université des Sciences et Technologie de Lille* (1984)
- DECARPIGNY J. N., TIERCE P., « Application des sons et ultrasons aux processus industriels de fabrication », *colloque sur les matériaux piézoélectriques, les ultrasons et leurs applications, CAST - INSA* (1986)

- 
- DE HOOP A. T., « A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems », *Appl. Sci. Res., B*, 8, 349-356 (1960)
- DE HOOP A. T., « Theoretical determination of the surface motion of a uniform elastic half space produced by a dilatational, impulsive, point source », *Proc. Colloq. Int. C.N.R.S., Marseille*, 111, 21-32 (1961)
- DE HOOP A. T., « The initial value problem in acoustics, elastodynamics and electromagnetics », *Wave Motion*, 23, 2-3, 121-137 (1996)
- DIX C. H., « The method of Cagniard in seismic pulse problem », *Geophysics*, 19, 722-738 (1954)
- DOMPIERRE J., « Équations intégrales en axisymétrie généralisée, application à la sismique entre puits », Thèse de doctorat, École Centrale de Paris (1993)
- ERDELYI A., « Zum Theorie der kugelwellen », *Physica*, IV, 2, 107-120 (1937)
- EKEOM D., « Modélisation par éléments finis du rayonnement de transducteurs piézoélectriques dans un puits de forage », Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 24-27 (1997)
- ERINGEN A. C., SUHUBI E. S., « Elastodynamics », Vol. 2, Linear Theory, Academic Press, New York (1975)
- FAVRE B., « Cours de géophysique », Technip (1958)
- FUCHS K., « The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density », *J. Phys. Earth*, 16, Special issue, 27-41 (1968)
- FUCHS K., MÜLLER G., « Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 23, 417-433 (1971)
- HAARTSEN M. W., PRIDE S. R., « Electrostatic waves from point sources in layered media », *J. Geophys. Res.*, 102, 24-769 (1997)
- HELMBERGER D. V., « The crust-mantle transition in the Bearing sea », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 58, 179-214 (1968)
- JOHNSON L. R., « Green's Functions for Lamb's Problem », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 37, 99-131 (1974)
- KAWASAKI I., SUZUKI Y., SATO R., « Seismic wave due to a double couple in a semi-infinite space, Part. 1 », *Zisin*, 25, 207-217 (1972)
- KAWASAKI I., SUZUKI Y., R. SATO, « Seismic wave due to a double couple in a semi-infinite space, Part. 2 », *Zisin*, 25, 333-342 (1972)
- KENNET, B. L. N., « Seismic wave propagation in stratified media », Cambridge, Cambridge University Press (1983)
- KENNET, B. L. N., KERRY, N. J., « Seismic waves in a stratified half space », *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 61, 1-10 (1980)
- KOOIJ B. J., « Analysis of transient electromagnetic fields in an electrical utility substation environment », Ph. D. thesis, Delft University of Technology (1994)
-

- LAMB H. B., « On the propagation tremors over the surface of an elastic solid », *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, A, 203, 1-42 (1903)
- LAVERGNE M., « Méthodes sismiques », *Technip* (1986)
- LEE D. S., STEVENSON V. M., MULLEN C. E., « Time lapse crosswell seismic tomography to characterize flow structure in the reservoir during the thermal stimulation », *Geophysics*, 60, 660-666 (1995)
- MANDAL B., MITCHELL B. J., « Complete seismogram synthesis for transversely isotropic media », *J. Geophys.*, 59, 149-156 (1986)
- MAUPIN V., « The radiation modes of a vertically varying half space : a new representation of the complete Green's function in terms of modes », *Geophys. J. Int.*, 126, 762-780 (1996)
- MEUNIER J., HUGUET F., MEYNIER P., « Reservoir monitoring using permanent sources and vertical receiver antennae », *S. E. G. expanded abstracts* (2000a),
- MEUNIER J., HUGUET F., MEYNIER P., « Improving 4D Repeatability with Vertical Cables and Permanent Sources », *S. E. G. workshop on the role of geophysics in intelligent oilfields* (2000b),
- MEUNIER J., HUGUET F., MEYNIER P., « Reservoir monitoring using permanent sources and vertical receiver antennae : The Céré-la-Ronde case study », *The Leading Edge*, 20, 6, 622 (2001)
- MOCZO P., LUCKA M., KRISTEK J., KRISTEKOVA M., « 3D displacement finite differences and a combined memory optimization », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 89, 69-79 (1999)
- MOINET D., DIETRICH M., « Computation of differential seismograms for point and plane scatterers in layered media », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88, 1311-1324 (1998)
- MOINET D., DIETRICH M., « Computation of differential seismograms for point and plane scatterers in layered media », *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88, 1311-1324 (1998)
- MORSE P. M., FESHBACH H., « *Methods of theoretical physics* », New York, Mac Graw Hill (1953)
- MÜLLER G., « The reflectivity method : a tutorial », *J. Geophys.*, 58, 153-174 (1985)
- MÜLLER G., « Theoretical seismograms for some types of point sources in a layered media. Part III : Single force and dipole of arbitrary orientation », *Z. Geophys.*, 35, 347-371 (1969)
- NAILLON M., COURSANT R. H., BESNIER F., *Acta Electronica*, 25, 4 (1983)
- NISHIMURA T., HAMAGUCHI H., UEKI S., « Source mechanism of volcanic tremor and low frequency earthquakes associated with the 1988-1989 eruptive activity of Mt. Tokachi, Hokkaido, Japan », *Geophys. J. Int.*, 121, 444-458 (1995)
- NONGAILLARD B., « L'instrumentation ultrasonore appliquée au contrôle non destructif », *joursées d'études acoustiques Région Nord/Pas de Calais, Villeneuve d'Ascq* (1986)
- PEKERIS C. L., « A pathological case in the numerical solution of integral equation », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 26, 433-437 (1940)
- PEKERIS C. L., « The seismic surface pulse », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41, 469-480 (1955)
- PEKERIS C. L., « The seismic buried pulse », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41, 629-639 (1955)

- 
- PEKERIS C. L., « Solution of an integral equation occurring in impulsive wave propagation problem », Proc. Nat. Acad. Sci., 42, 439-443 (1956)
- PEKERIS C. L., LIFSON H., « Motion of the surface of a uniform elastic half space produced by a buried pulse » J. Acoust. Soc. Am., 29, 11, 1233-1239 (1957)
- PEKERIS C. L., LONGMAN I. M., « Ray theory solution of the problem of propagation of explosive sound in a layered liquid » J. Acoust. Soc. Am., 30, 4, 323-328 (1958)
- PILANT W. L., « Elastic Waves in the Earth », Elsevier Science Publ. Co., pps 53-70 (1979)
- PINNEY E., « Surface motion due to a point source in a semi-infinite elastic medium », Bull. Seismol. Soc. Am. 44, 571-596 (1954)
- PLICKA V., SOKOS E. TSELENTIS G. A., ZAHRADNIK J., « Inverting seismograms of weak events for empirical Green's tensor derivatives », Geophys. J. Int., 132, 471-478 (1998)
- RAYLEIGH L., « The theory of sound », vol. 2, 2<sup>nd</sup> ed., sect. 272, Macmillan, London (1896)
- RAYLEIGH L., « On the dynamical theory of gratings », Proc. Roy. Soc. London, A, 79, 399-416 (1907)
- RIEPL J., ZAHRADNIK J., PLICKA V., BARD P. Y. « About the efficiency of numerical 1-D and 2-D modelling of site effects in basin structures », Pure Appl. Geophys., 157, 319-342 (2000)
- ROLT K. D., « History of the flexensional electroacoustic transducer », J. Acoust. Soc. Am., 87, 3, 1340 - 1349 (1990)
- SAÏKA C. K., HERRMANN R. B., « Moment-tensor solutions for three 1982 Arkansas swarm earthquakes by waveform modeling », Bull. Seismol. Soc. Am., 76, 709-723 (1986)
- SATO R., « Seismic waves in the near field », J. Phys. Earth, 20, 357-375 (1972)
- SHENDEVELA M. L., « Reflection and refraction of a transient temperature field at a plane using Cagniard - De Hoop approach », Phys. Rev., E, 036612-1-036612-7 (2002)
- SHENDEVELA M. L., « Temperature fields generated by impulsive interfacial heat sources », J. Appl. Phys., 91, 3444-3451 (2002)
- STEPHEN R. A., CARDO-CASAS F., CHENG C. H., « Finite difference synthetic acoustic logs », Geophysics, 50, 1588-1609 (1985)
- SVAY LUCAS J., « Équations intégrales en espace à invariance unidirectionnelle, Application à la modélisation de la sismique en puits horizontal », Thèse de doctorat de l'École Centrale de Paris (Mars 1994)
- THIRUVENKATACHAR V. R., VISWANATHAN K., « Dynamic Response Of An Elastic Half-Space with Cylindrical Cavity To Time-Dependent Surface Traction Over the Boundary of the Cavity », Journal of Mathematics and Mechanics, 14, 4, 541-571 (1965a)
- THIRUVENKATACHAR V. R., VISWANATHAN K., « Dynamic Response Of An Elastic Half-Space To Time-Dependent Surface Traction Over an Embedded Spherical Cavity », Proc. R. Soc. Lond., A, 287, 549-567 (1965b)
-

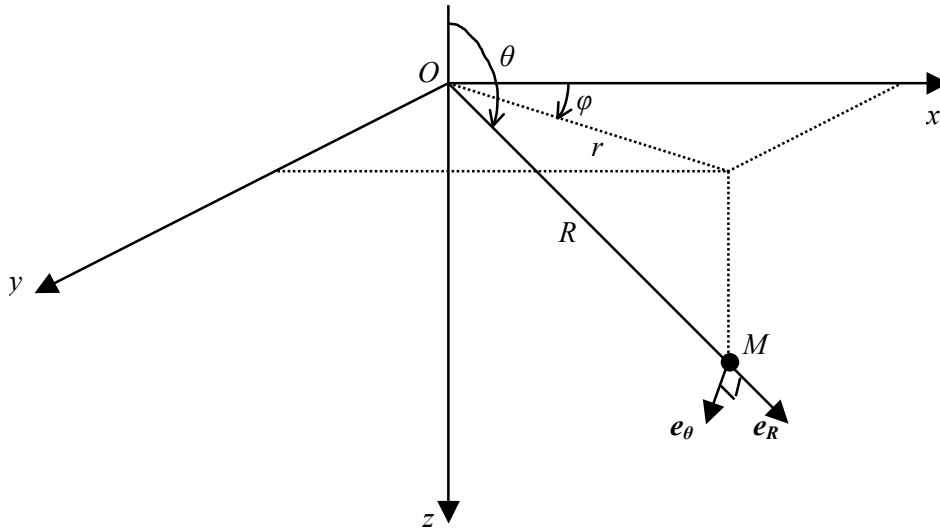
- THIRUVENKATACHAR V. R., VISWANATHAN K., « Dynamic Response Of An Elastic Half-Space To Time-Dependent Surface Traction Over an Embedded Spherical Cavity », Part. II, Proc. R. Soc. Lond., A, 300, 159-186 (1967)
- THIRUVENKATACHAR V. R., VISWANATHAN K., « Dynamic Response Of An Elastic Half-Space To Time-Dependent Surface Traction Over an Embedded Spherical Cavity », Part. III, Proc. R. Soc. Lond., A, 309, 313-329, (1969)
- THIRUVENKATACHAR V. R., VISWANATHAN K., « Dynamic Response Of An Elastic Half-Space To Time-Dependent Surface Traction Over an Embedded Spherical Cavity », Part. IV, Proc. R. Soc. Lond., A, 309, 331-344 (1969)
- VAN DER HIJDEN J. H. M. T., « Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media », Vol. 32, Springer Verlag, New York (1987)
- VAN DER POL B., « A generalization of Maxwell's definition of solid harmonics to waves in  $n$  dimensions », Physica, III, 6, 393-397 (1936)
- WILSON O. B., « Power limitations of piezoelectric length expander transducers », Proceedings of the international workshop on power sonic and ultrasonic transducer design, éd. par B. Hamonic et J.N. Decarpigny, Ed. Springer Verlag, Lille (1988)
- WILSON O. B., « Introduction to theory and design of sonar transducers », Ed. Peninsula Publishing CO., (1989, reprinted from 1985 first edition)
- WOOLLET R. S., « Theoretical power limits of sonar transducers », I.R.E. Int. Con. Rec., 6, 90 (1962)
- WOOLLET R. S., « Power limitations of sonic transducers », I.E.E.E. S.U., 15, 218 (1968)
- WOOLLET R. S., « Trends and problems in sonar transducer design », I.E.E.E. S.U., 10, 116 (1963)
- YAO Z. X., HARKRIDER D. G., « A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms », Bull. Seismol. Soc. Am., 73, 1685-1699 (1983)
- ZAHRADNIK J., « A new program package for modelling seismic ground motions », Proc. Fifth Int. Conf. on Seismic Zonation, Nice (France), 2, 1221-1226 (1995)
- ZENG Y., Su F., AKI K., « Scattering wave energy propagation in random isotropic scattering medium : 1. theory », J. Geophys. Res., 96, 607-619 (1991)
- ZIENKIEWICZ O. C., « The finite element method » Fifth Edition, Mac Graw Hill (1979)

## Annexe A :

### Rayonnement de sources idéales en milieu élastique infini

#### A.1 La source de dilatation

Soit la formation élastique décrite à la section I-1-1. Pour repérer un point M de cette formation, le repère des coordonnées sphériques  $(O, e_R, e_\theta, e_\varphi)$  de la figure I-1 est utilisé. Les principales notations sont rappelées à la figure A-1.



**Figure A-1 : système de coordonnées sphériques utilisé**

Il s'agit de résoudre, l'équation de l'élastodynamique en régime harmonique en l'absence de forces extérieures ; cette équation s'écrit

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega)) + \mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = -\rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-1})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega)$  est le champ de déplacement et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé - Navier donnés par les expressions (I-9) et (I-10). Dans un premier temps, la symétrie de révolution du système conduit à dire qu'il n'y a pas de déplacement suivant  $e_\varphi$ , et donc que toutes les dérivées suivant  $\varphi$  sont identiquement nulles. Dans un second temps, une propagation purement sphérique des ondes P et S est supposée : ainsi, toutes les dérivées suivant  $\theta$  sont identiquement nulles. Toute onde se décompose en une partie longitudinale n'engendrant pas de rotation et une partie transversale ne créant pas de variation de volume ; autrement dit :

$$\mathbf{u}^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = \mathbf{u}^{sph,P}(\mathbf{M}; \omega) + \mathbf{u}^{sph,S}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-2})$$

$$\mathit{rot}(\mathbf{u}^{sph,P}(\mathbf{M};\omega)) = \mathbf{0}, \quad (\text{A-3})$$

$$\mathit{div}(\mathbf{u}^{sph,S}(\mathbf{M};\omega)) = 0. \quad (\text{A-4})$$

Introduisant (A-2) dans (A-1), les équations découplées suivantes sont obtenues :

$$\Delta \mathbf{u}^{sph,P}(\mathbf{M};\omega) + k_\alpha^2 \mathbf{u}^{sph,P}(\mathbf{M};\omega) = \mathbf{0}, \quad (\text{A-5})$$

$$\Delta \mathbf{u}^{sph,S}(\mathbf{M};\omega) + k_\beta^2 \mathbf{u}^{sph,S}(\mathbf{M};\omega) = \mathbf{0}. \quad (\text{A-6})$$

où  $k_\alpha$  et  $k_\beta$  désignent les nombres d'onde respectif des ondes P et S rappelés par les expressions (I-2) et (I-3). La symétrie de révolution naturelle du système ainsi que l'hypothèse d'une propagation purement sphérique des ondes P et S impliquent que

$$\mathbf{u}_\varphi^{sph}(\mathbf{M};\omega) \equiv 0 \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0 \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 \quad (\text{A-9})$$

En coordonnées sphériques, et sous les conditions (A-7) à (A-9), le Laplacien du vecteur  $\mathbf{u}^{sph}$  s'écrit

$$\Delta \mathbf{u}^{sph} = \Delta_R(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) \mathbf{e}_R + \Delta_\theta(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) \mathbf{e}_\theta + \Delta_\varphi(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A-10})$$

$$\Delta_R(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial u_R^{sph}}{\partial R} \right) - \frac{2}{R^2} u_R^{sph} - \frac{2}{R^2} (\cot \theta) u_\theta^{sph}, \quad (\text{A-11})$$

$$\Delta_\theta(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial u_\theta^{sph}}{\partial R} \right) - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} u_R^{sph}, \quad (\text{A-12})$$

$$\Delta_\varphi(u_R^{sph}, u_\theta^{sph}, u_\varphi^{sph}) = 0. \quad (\text{A-13})$$

Le rotationnel a pour expression

$$\mathit{rot}(\mathbf{u}^{sph}) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_\theta^{sph}) \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A-14})$$

et la divergence est donnée par

$$\mathit{div}(\mathbf{u}^{sph}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u_R^{sph}) \quad (\text{A-15})$$

Introduisant les relations (A-10) à (A-15) dans les équations (A-5) et (A-6), il vient deux systèmes d'équations pour les ondes P et les ondes S (la dépendance des déplacements en  $\mathbf{M}$  et  $\omega$  est implicitement entendue) :

- Ondes P

$$R^2 \frac{\partial^2 u_R^{sph,P}}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial u_R^{sph,P}}{\partial R} + (k_\alpha^2 R^2 - 2)u_R^{sph,P} - 2(\cot an\theta)u_\theta^{sph,P} = 0, \quad (A-16)$$

$$R^2 \frac{\partial^2 u_\theta^{sph,P}}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial u_\theta^{sph,P}}{\partial R} + k_\alpha^2 R^2 u_\theta^{sph,P} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\theta^{sph,P} = 0, \quad (A-17)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R u_\theta^{sph,P}) = 0. \quad (A-18)$$

- Ondes S

$$R^2 \frac{\partial^2 u_R^{sph,S}}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial u_R^{sph,S}}{\partial R} + (k_\beta^2 R^2 - 2)u_R^{sph,S} - 2(\cot an\theta)u_\theta^{sph,S} = 0, \quad (A-19)$$

$$R^2 \frac{\partial^2 u_\theta^{sph,S}}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial u_\theta^{sph,S}}{\partial R} + k_\beta^2 R^2 u_\theta^{sph,S} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\theta^{sph,S} = 0, \quad (A-20)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u_R^{sph,S}) = 0. \quad (A-21)$$

Développant (A-18) et (A-21), il vient

$$R \frac{\partial (u_\theta^{sph,P})}{\partial R} = -u_\theta^{sph,P}, \quad (A-22)$$

$$R \frac{\partial (u_R^{sph,S})}{\partial R} = -2u_R^{sph,S}. \quad (A-23)$$

Et la dérivation par rapport à  $R$  de (A-22) et (A-23) fournit

$$R^2 \frac{\partial^2 u_\theta^{sph,P}}{\partial R^2} = 2u_\theta^{sph,P}, \quad (A-24)$$

$$R^2 \frac{\partial^2 (u_R^{sph,S})}{\partial R^2} = 6u_R^{sph,S}. \quad (A-25)$$

Les relations (A-22) et (A-24) reportées dans l'équation (A-17) permettent d'écrire

$$(k_\alpha^2 R^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta})u_\theta^{sph,P} = 0, \quad (A-26)$$

et les relations (A-23) et (A-25) reportées dans (A-19) donnent l'égalité

$$\frac{u_R^{sph,S}}{u_\theta^{sph,P}} = \frac{2 \cot an\theta}{k_\beta^2 R^2} \quad (A-27)$$



(A-26) montre que dans le cas d'une propagation purement sphérique, qui est l'hypothèse principale faite ici, la composante suivant  $\theta$  de l'onde longitudinale est nulle.

En outre, (A-27) combinée avec (A-20) donne

$$R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left( \frac{k_\beta^2 R^2 u_R^{sph,S}}{2 \cot \alpha n \theta} \right) + 2R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{k_\beta^2 R^2 u_R^{sph,S}}{2 \cot \alpha n \theta} \right) + \frac{k_\beta^4 R^4 u_R^{sph,S}}{2 \cot \alpha n \theta} - \frac{k_\beta^2 R^2 u_R^{sph,S}}{2 \cot \alpha n \theta} = 0 \quad (A-28)$$

Tenant compte de (A-21), il reste :

$$\frac{k_\beta^2 R^2}{2 \cot \alpha n \theta} \left( k_\beta^2 R^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) u_R^{sph,S} = 0 \quad (A-29)$$

Et (A-29) reportée dans (A-19) fournit

$$u_\theta^{sph,S} = 0 \quad (A-30)$$

Finalement,

$$u_\theta^{sph,P} = u_R^{sph,S} = u_\theta^{sph,S} = 0 \quad (A-31)$$

et la seule composante non nulle de l'onde est la composante radiale de sa partie longitudinale qui vérifie l'équation de propagation purement sphérique :

$$R^2 \frac{\partial^2 u_R^{sph,P}}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial u_R^{sph,P}}{\partial R} + (k_\alpha^2 R^2 - 2) u_R^{sph,P} = 0 \quad (A-32)$$

Une propagation purement sphérique n'est donc réalisable que par l'onde longitudinale de compression : il n'existe pas d'onde de cisaillement omnidirectionnelle.

La solution exacte de (A-32) est donnée par [20]

$$\tilde{\mathbf{u}}^{sph}(\mathbf{M}; \omega) = u_{0R}^{sph} \cdot h_l^{(2)}(k_\alpha R) \mathbf{e}_R \quad (A-33)$$

où  $u_{0R}^{sph}$  est une constante complexe et  $h_l^{(2)}$  désigne la fonction de Hankel sphérique d'indice  $l$  et de seconde espèce. La référence [2] donne pour expression de cette fonction

$$h_l^{(2)}(k_\alpha R) = \frac{\exp(-jk_\alpha R)}{k_\alpha R} \left( 1 + j \frac{l}{k_\alpha R} \right) \quad (A-34)$$

## A.2 Le couple de forces sans moment

La géométrie du problème est tout d'abord rappelée : le couple de forces sans moment est constitué de deux forces séparées d'une distance  $2d$  et agissant dans la même direction en sens opposé. Au repère  $(O, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ , sont adjoint les repères locaux  $(O_a, \mathbf{e}_{R_a}, \mathbf{e}_{\theta_a}, \mathbf{e}_{\varphi_a})$  et  $(O_b, \mathbf{e}_{R_b}, \mathbf{e}_{\theta_b}, \mathbf{e}_{\varphi_b})$  où

les points  $O_a$  et  $O_b$  sont respectivement les points d'application de la force et de son opposée (figure A-2).

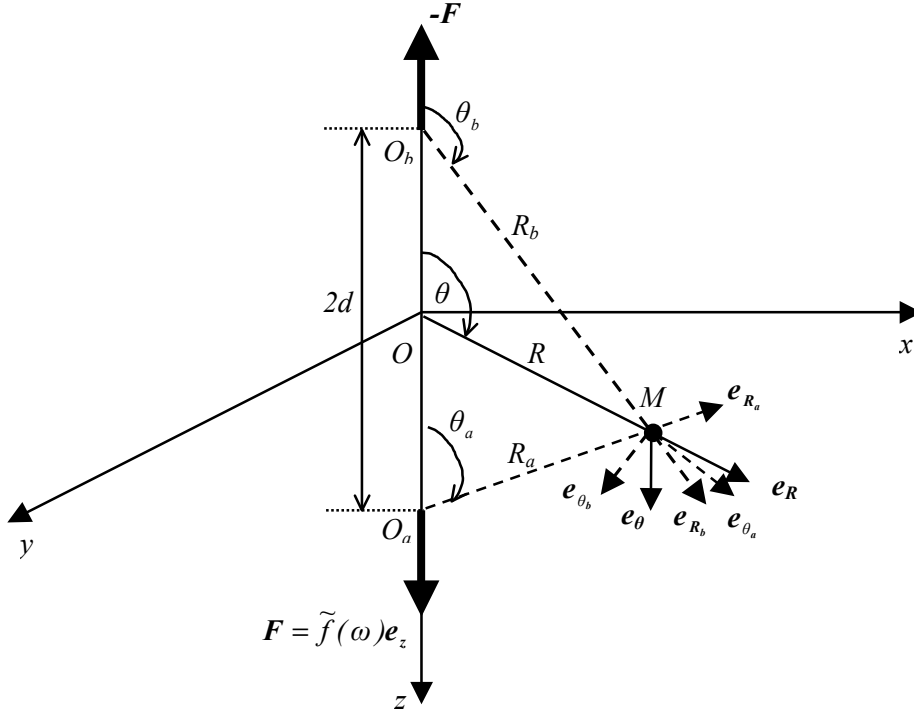


Figure A-2 : Couple de forces sans moment et repères locaux

Soient  $\Omega(R)$  et  $\Psi(R)$  les quantités complexes définies par

$$\Omega(R) = \frac{e^{-jk_\beta R} - e^{-jk_a R}}{R^3}, \quad (\text{A-35})$$

$$\Psi(R) = -j \frac{k_\beta e^{-jk_\beta R} - k_a e^{-jk_a R}}{R^2}. \quad (\text{A-36})$$

Compte tenu des expressions (I-22) à (I-24), il est possible d'exprimer dans les repères locaux le champ de déplacement créé au point  $M$  par chacune des forces sous la forme suivante :

- Déplacement créé par la force  $\mathbf{F}$

$$\tilde{u}_{R_a}^F(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega) \cos \theta_a}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ 2[\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] + k_a^2 \frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a} \right\}, \quad (\text{A-37})$$

$$\tilde{u}_{\theta_a}^F(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega) \sin \theta_a}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ [\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_a}}{R_a} \right\}, \quad (\text{A-38})$$

$$\tilde{u}_{\theta_a}^F(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-39})$$

- Déplacement créé par la force  $-\mathbf{F}$

$$\tilde{u}_{R_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) \cos \theta_b}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ 2[\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] + k_a^2 \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b} \right\}, \quad (\text{A-40})$$

$$\tilde{u}_{\theta_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) \sin \theta_b}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ [\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_b}}{R_b} \right\}, \quad (\text{A-41})$$

$$\tilde{u}_{\varphi_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-42})$$

Afin d'exprimer les solutions (A-37) à (A-42) dans le repère  $(O, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ , les variables  $R_a, R_b, \theta_a$  et  $\theta_b$  sont exprimées en fonction de  $R, \theta$  et  $\varphi$ . Par simple considérations géométriques, les relations suivantes sont obtenues :

$$R_a = R \left[ 1 + 2 \frac{d}{R} \cos \theta + \frac{d^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-43})$$

$$R_b = R \left[ 1 - 2 \frac{d}{R} \cos \theta + \frac{d^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-44})$$

$$\cos \theta_a = (R \cos \theta + d) / R_a, \quad (\text{A-45})$$

$$\sin \theta_a = R \sin \theta / R_a, \quad (\text{A-46})$$

$$\cos \theta_b = (R \cos \theta - d) / R_b, \quad (\text{A-47})$$

$$\sin \theta_b = R \sin \theta / R_b. \quad (\text{A-48})$$

Les projections des vecteurs  $\mathbf{e}_{R_a}, \mathbf{e}_{\theta_a}, \mathbf{e}_{R_b}, \mathbf{e}_{\theta_b}$  dans le repère  $(O, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{e}_{R_a} = \frac{1}{R_a} [(R + d \cos \theta) \mathbf{e}_R - d \sin \theta \mathbf{e}_\theta], \quad (\text{A-49})$$

$$\mathbf{e}_{\theta_a} = \frac{1}{R_a} [d \sin \theta \mathbf{e}_R + (R + d \cos \theta) \mathbf{e}_\theta], \quad (\text{A-50})$$

$$\mathbf{e}_{R_b} = \frac{1}{R_b} [(R - d \cos \theta) \mathbf{e}_R + d \sin \theta \mathbf{e}_\theta], \quad (\text{A-51})$$

$$\mathbf{e}_{\theta_b} = \frac{1}{R_b} [-d \sin \theta \mathbf{e}_R + (R - d \cos \theta) \mathbf{e}_\theta], \quad (\text{A-52})$$

Dans le repère  $(O, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ , le champ de déplacement induit par la force  $\mathbf{F}$  s'écrit

$$\tilde{u}_R^F(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{4\pi\rho\omega^2 R_a^2} \left[ \begin{array}{l} -(R + d \cos \theta)(R \cos \theta + d) \left\{ 2[\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] + k_\alpha^2 \frac{e^{-jk_\alpha R_a}}{R_a} \right\} \\ + R d \sin^2 \theta \left\{ [\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_a}}{R_a} \right\} \end{array} \right], \quad (\text{A-53})$$

$$\tilde{u}_\theta^F(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)}{4\pi\rho\omega^2 R_a^2} \begin{bmatrix} (R \cos \theta + d) d \sin \theta \left\{ 2[\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] + k_a^2 \frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a} \right\} \\ (R + d \cos \theta) R \sin \theta \left\{ [\Omega(R_a) + \Psi(R_a)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_a}}{R_a} \right\} \end{bmatrix}, \quad (\text{A-54})$$

$$\tilde{u}_\phi^F(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-55})$$

Et le champ de déplacement induit par la force  $-\mathbf{F}$  est

$$\tilde{u}_R^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)}{4\pi\rho\omega^2 R_b^2} \begin{bmatrix} -(R \cos \theta - d)(R - d \cos \theta) \left\{ 2[\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] + k_a^2 \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b} \right\} \\ -Rd \sin^2 \theta \left\{ [\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_b}}{R_b} \right\} \end{bmatrix}, \quad (\text{A-56})$$

$$\tilde{u}_\theta^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{4\pi\rho\omega^2 R_b^2} \begin{bmatrix} -(R \cos \theta - d) d \sin \theta \left\{ 2[\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] + k_a^2 \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b} \right\} \\ (R - d \cos \theta) R \sin \theta \left\{ [\Omega(R_b) + \Psi(R_b)] - k_\beta^2 \frac{e^{-jk_\beta R_b}}{R_b} \right\} \end{bmatrix}, \quad (\text{A-57})$$

$$\tilde{u}_\phi^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-58})$$

Finalement, le rayonnement total du couple de forces sans moment, incluant toutes les contributions d'ordre supérieurs au champ proche est donné par

$$\tilde{u}_R^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_R^F(\mathbf{M}; \omega) + \tilde{u}_R^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-59})$$

$$\tilde{u}_\theta^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_\theta^F(\mathbf{M}; \omega) + \tilde{u}_\theta^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-60})$$

$$\tilde{u}_\phi^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-61})$$

Les solutions en champ lointain (I-39) à (I-41) et aussi (I-33) à (I-35) sont les approximations de solutions (A-59) à (A-61) quand la distance d'observation  $R$  devient grande devant les longueurs

d'onde  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\beta$ . Dans un premier temps, seuls les termes en  $\frac{1}{R_a}$  et  $\frac{1}{R_b}$  sont conservés ; il reste alors

$$\underline{\tilde{u}}_R^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) k_a^2 R^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos \theta \left( -\frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a^3} + \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b^3} \right), \quad (\text{A-62})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\theta^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^2 R^2}{4\pi\rho\omega^2} \sin \theta \left( -\frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a^3} + \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b^3} \right), \quad (\text{A-63})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\phi^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-64})$$

En première approximation, les relations (A-43) et (A-44) deviennent

$$R_a \approx R \left[ 1 + \frac{d}{R} \cos \theta \right], \quad (\text{A-65})$$

$$R_b \approx R \left[ 1 - \frac{d}{R} \cos \theta \right]. \quad (\text{A-66})$$

Introduisant (A-65) et (A-66) dans (A-62) et (A-63) puis négligeant les termes d'ordre supérieur à  $\frac{1}{R}$ ,

il vient

$$\underline{\tilde{u}}_R^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = j \frac{\tilde{f}(\omega) k_a^2}{2\pi\rho\omega^2} \cos \theta \frac{e^{-jk_a R}}{R} \sin(k_a d \cos \theta), \quad (\text{A-67})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\theta^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^2}{2\pi\rho\omega^2} \sin \theta \frac{e^{-jk_\beta R}}{R} \sin(k_a d \cos \theta), \quad (\text{A-68})$$

$$\underline{\tilde{u}}_\varphi^{F,-F}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-69})$$

qui est bien la solution dans le cas où la distance  $d$  n'est pas négligeable devant les longueurs d'onde (équations (I-39) à (I-41)). L'approximation du rayonnement dans le cas où  $d$  est négligeable devant la longueur d'onde est immédiate compte tenu du fait que dans ce cas,

$$\sin(k_a d \cos \theta) \approx k_a d \cos \theta. \quad (\text{A-70})$$

### A.3 Le couple de forces avec moment

Le couple de forces avec moment est la combinaison de deux forces séparées d'une distance  $2d$  agissant en sens opposé dans la direction perpendiculaire à la ligne les joignant. Les notations utilisées dans la section A-2 (forces et repères locaux) sont reprises ici ; la géométrie du problème est représentée à la figure A-3. Utilisant les expressions (A-35) et (A-36), les déplacements créés par la force  $\mathbf{F}$  (respectivement  $-\mathbf{F}$ ) sont donnés par les expressions (A-37) à (A-39) (respectivement (A-40) à (A-42)). Les variables  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $\theta_a$  et  $\theta_b$  s'expriment en fonction de  $R$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  de la manière suivante :

$$R_a = R \left[ 1 + 2 \frac{d}{R} \sin \theta \cos \varphi + \frac{d^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-71})$$

$$R_b = R \left[ 1 - 2 \frac{d}{R} \sin \theta \cos \varphi + \frac{d^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-72})$$

$$\cos \theta_a = R \cos \theta / R_a, \quad (\text{A-73})$$

$$\sin \theta_a = \left[ \frac{R^2 \sin^2 \theta + d^2 + 2Rd \sin \theta \cos \varphi}{R_a^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-74})$$

$$\cos \theta_b = R \cos \theta / R_b, \quad (\text{A-75})$$

$$\sin \theta_b = \left[ \frac{R^2 \sin^2 \theta + d^2 - 2Rd \sin \theta \cos \varphi}{R_b^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-76})$$

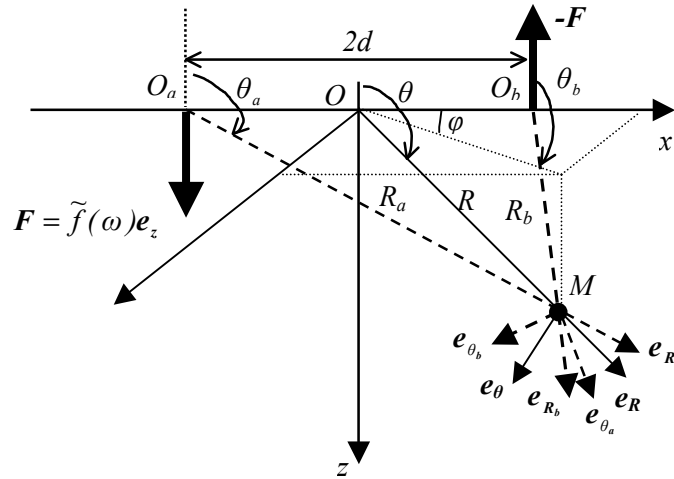


Figure A-3 : Couple de forces avec moment et repères locaux

Les projections des vecteurs  $e_R, e_\theta, e_\varphi$  dans le repère  $e_x, e_y, e_z$  se déterminent à partir des relations

$$e_R = \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y - \cos \theta e_z, \quad (\text{A-77})$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \varphi e_x + \cos \theta \sin \varphi e_y + \sin \theta e_z, \quad (\text{A-78})$$

$$e_\varphi = -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y. \quad (\text{A-79})$$

De même, les projections des vecteurs  $e_{R_a}, e_{\theta_a}, e_{\varphi_a}$  (respectivement  $e_{R_b}, e_{\theta_b}, e_{\varphi_b}$ ) dans le repère  $e_x, e_y, e_z$  se déterminent à partir des relations (A-77) à (A-79) dans lesquelles  $\theta$  est remplacé par  $\theta_a$  (respectivement  $\theta_b$ ).

Dans le repère  $(O, e_x, e_y, e_z)$ , le champ de déplacement induit par la force  $F$  s'écrit

$$\tilde{u}_x^F(\mathbf{M}; \omega) = \sin \theta_a \cos \varphi \tilde{u}_{R_a}^F(\mathbf{M}; \omega) + \cos \theta_a \cos \varphi \tilde{u}_{\theta_a}^F(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-80})$$

$$\tilde{u}_y^F(\mathbf{M}; \omega) = \sin \theta_a \sin \varphi \tilde{u}_{R_a}^F(\mathbf{M}; \omega) + \cos \theta_a \sin \varphi \tilde{u}_{\theta_a}^F(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-81})$$

$$\tilde{u}_z^F(\mathbf{M}; \omega) = -\cos \theta_a \tilde{u}_{R_a}^F(\mathbf{M}; \omega) + \sin \theta_a \tilde{u}_{\theta_a}^F(\mathbf{M}; \omega). \quad (\text{A-82})$$

Et le champ de déplacement induit par la force  $-F$  est

$$\tilde{u}_x^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = \sin \theta_b \cos \varphi \tilde{u}_{R_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) + \cos \theta_b \cos \varphi \tilde{u}_{\theta_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-83})$$

$$\tilde{u}_y^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = \sin \theta_b \sin \varphi \tilde{u}_{R_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) + \cos \theta_b \sin \varphi \tilde{u}_{\theta_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-84})$$

$$\tilde{u}_z^{-F}(\mathbf{M}; \omega) = -\cos \theta_b \tilde{u}_{R_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega) + \sin \theta_b \tilde{u}_{\theta_b}^{-F}(\mathbf{M}; \omega). \quad (\text{A-85})$$

Finalement, le rayonnement total du couple de forces avec moment, incluant toutes les contributions d'ordre supérieurs au champ proche est donné par

$$\tilde{u}_x^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_x^F(\mathbf{M}; \omega) + \tilde{u}_x^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-86})$$

$$\tilde{u}_y^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = \tilde{u}_y^F(\mathbf{M}; \omega) + \tilde{u}_y^{-F}(\mathbf{M}; \omega), \quad (\text{A-87})$$

$$\tilde{u}_z^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-88})$$

Les relations inverses des relations (A-77) à (A-79) sont alors utilisées pour exprimer les solutions dans le repère  $(M, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ .

Dans le plan  $\varphi = 0$ , les approximations en champ lointain sont obtenues en ne conservant dans un

premier temps que les termes en  $\frac{1}{R_a}$  et  $\frac{1}{R_b}$ ; il reste alors

$$\tilde{u}_R^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) k_a^2 R^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos \theta \left( -\frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a^3} + \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b^3} \right), \quad (\text{A-89})$$

$$\tilde{u}_\theta^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega) k_\beta^2 R^2}{4\pi\rho\omega^2} \sin \theta \left( -\frac{e^{-jk_a R_a}}{R_a^3} + \frac{e^{-jk_a R_b}}{R_b^3} \right), \quad (\text{A-90})$$

$$\tilde{u}_\varphi^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-91})$$

En première approximation et dans le plan  $\varphi = 0$ , les relations (A-71) et (A-72) deviennent

$$R_a \approx R \left[ 1 + \frac{d}{R} \sin \theta \right], \quad (\text{A-92})$$

$$R_b \approx R \left[ 1 - \frac{d}{R} \sin \theta \right]. \quad (\text{A-93})$$

Introduisant (A-92) et (A-93) dans (A-89) et (A-90) et ne conservant que les termes en  $\frac{1}{R}$ , il vient

$$\tilde{u}_R^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = j \frac{\tilde{f}(\omega) k_a^2}{2\pi\rho\omega^2} \cos \theta \frac{e^{-jk_a R}}{R} \sin(k_a d \sin \theta), \quad (\text{A-94})$$

$$\tilde{\underline{u}}_{\theta}^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = -j \frac{\tilde{f}(\omega) k_{\beta}^2}{2\pi\rho\omega^2} \sin\theta \frac{e^{-jk_{\beta}R}}{R} \sin(k_{\alpha}d \sin\theta), \quad (\text{A-95})$$

$$\tilde{\underline{u}}_{\varphi}^{moment}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-96})$$

qui est bien la solution dans le cas où la distance  $d$  n'est pas négligeable devant les longueurs d'onde (équations (I-51) à (I-53)).

#### A.4 Combinaison de deux forces équivalente à une source directionnelle en champ lointain

Reprenant les notations précédentes, la figure A-4 présente la géométrie considérée. Il s'agit de la combinaison de deux forces verticales  $\mathbf{F}_1 = \tilde{f}_{F_1}(\omega)\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{F}_2 = \tilde{f}_{F_2}(\omega)\mathbf{e}_z$  séparées d'une distance  $2d$ .

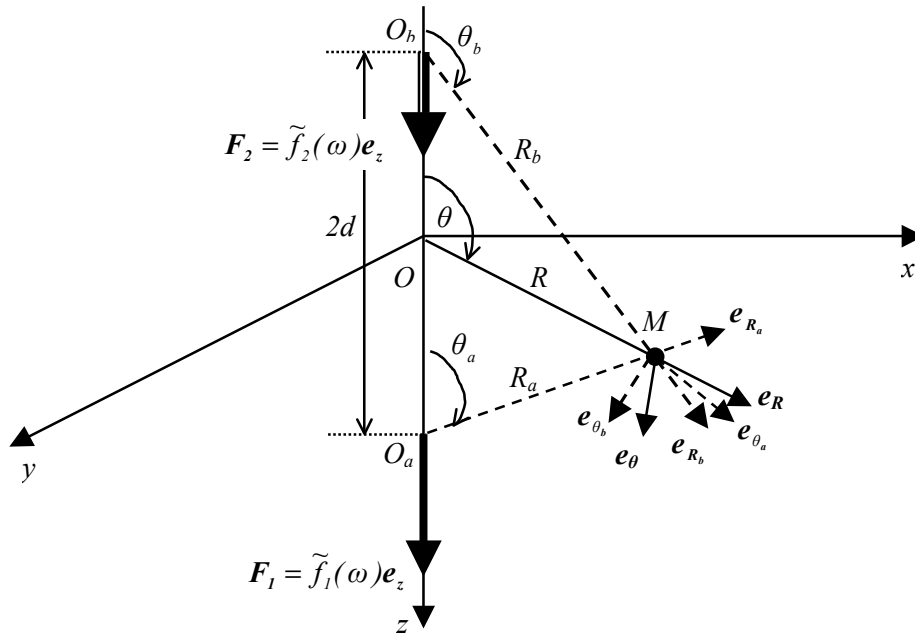


Figure A-4 : Combinaison de forces et repères locaux

Cette association de sources est en fait une modification du couple de forces sans moment ; ainsi, la solution du rayonnement de cette combinaison est donnée par les expressions (A-53) à (A-61) où il faut remplacer  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{F}_1$  et  $-\mathbf{F}$  par  $\mathbf{F}_2$ , les variables  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $\theta_a$  et  $\theta_b$  étant données par les relations (A-43) à (A-48). Les approximations en champ lointain s'écrivent sous la forme

$$\tilde{\underline{u}}_R(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{k_{\alpha}^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos\theta \left[ \tilde{f}_{F_1}(\omega) \frac{e^{-jk_{\alpha}R_a}}{R_a} + \tilde{f}_{F_2}(\omega) \frac{e^{-jk_{\alpha}R_b}}{R_b} \right], \quad (\text{A-97})$$

$$\tilde{\underline{u}}_{\theta}(\mathbf{M}; \omega) = \frac{k_{\beta}^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos\theta \left[ \tilde{f}_{F_1}(\omega) \frac{e^{-jk_{\beta}R_a}}{R_a} + \tilde{f}_{F_2}(\omega) \frac{e^{-jk_{\beta}R_b}}{R_a} \right], \quad (\text{A-98})$$

$$\tilde{\underline{u}}_{\varphi}(\mathbf{M}; \omega) = 0. \quad (\text{A-99})$$



Introduisant les relations (A-43) et (A-44) et considérant que la distance  $d$  est négligeable devant les longueurs d'onde, il vient

$$\tilde{\underline{u}}_R(\mathbf{M}; \omega) = -\frac{k_a^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos\theta \left[ (1 - jk_a d) \tilde{f}_{F_1}(\omega) + (1 + jk_a d) \tilde{f}_{F_2}(\omega) \right] \frac{e^{-jk_a R}}{R}, \quad (\text{A-100})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\theta(\mathbf{M}; \omega) = \frac{k_\beta^2}{4\pi\rho\omega^2} \cos\theta \left[ (1 - jk_\beta d) \tilde{f}_{F_1}(\omega) + (1 + jk_\beta d) \tilde{f}_{F_2}(\omega) \right] \frac{e^{-jk_\beta R}}{R}, \quad (\text{A-101})$$

$$\tilde{\underline{u}}_\varphi(\mathbf{M}; \omega) = 0, \quad (\text{A-102})$$

qui sont les expressions (I-57) à (I-59).

## A.5 Remarque

La section I-2-1-2 présente la combinaison d'un couple de forces et d'une force équivalente à une source directionnelle en champ lointain. Le rayonnement de cette combinaison de sources est très facile à écrire puisque les deux sources considérées agissent à l'origine du repère (figure I-15) : il suffit de sommer les solutions (A-59) à (A-61) avec les solutions (A-37) à (I-39).

## Annexe B :

### Détails du calcul de la fonction de Green pour la force et le couple de forces en demi-espace par la méthode de Cagniard De Hoop

#### B.1 Équation de l'élastodynamique dans le domaine transformé

L'équation de l'élastodynamique (II-10) se met sous la forme (II-16)

$$\overline{\overline{\hat{N}}}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) \cdot \hat{G}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s) = \mathbf{f} ,$$

$\hat{G}^{F_\delta}$  et  $\mathbf{f}$  étant donnés par (II-17) et (II-18).  $\overline{\overline{\hat{N}}}^{F_\delta}$  a pour expression

$$\overline{\overline{\hat{N}}}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z; s; z') = \begin{bmatrix} \zeta_x^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\zeta_z^2 - v_\beta^2) & \zeta_x \zeta_y & \zeta_x \zeta_z \\ \zeta_x \zeta_y & \zeta_y^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\zeta_z^2 - v_\beta^2) & \zeta_y \zeta_z \\ \zeta_x \zeta_z & \zeta_y \zeta_z & \zeta_z^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\zeta_z^2 - v_\beta^2) \end{bmatrix} . \quad (\text{B-1})$$

Dans B-2, les définitions suivantes sont utilisées :

$$v_\alpha = \left( \frac{s^2}{\alpha^2} - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Re\{v_\alpha\} \geq 0, \quad (\text{B-2})$$

$$v_\beta = \left( \frac{s^2}{\beta^2} - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Re\{v_\beta\} \geq 0. \quad (\text{B-3})$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle d'une quantité complexe.

#### B.2 Fonction de Green pour la force dans le domaine transformé

Dans le domaine transformé, la fonction de Green associée à une force agissant à l'intérieur d'un demi-espace élastique homogène isotrope s'écrit sous la forme (II-19)

$$\hat{G}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \left[ \sum_{i=P,S,PP,SS,PS,SP} \left( \overline{\overline{\hat{N}}}_i^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right) \right] \mathbf{f} .$$

Les contributions  $\hat{\overline{N}}_i^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s)$  sont données par les expressions ci-dessous :

$$\hat{\overline{N}}_P^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \begin{bmatrix} \zeta_x^2 & \zeta_x \zeta_y & \zeta_x v_\alpha \operatorname{sgn}(z'-z) \\ \zeta_x \zeta_y & \zeta_y^2 & \zeta_y v_\alpha \operatorname{sgn}(z'-z) \\ \zeta_x v_\alpha \operatorname{sgn}(z'-z) & \zeta_y v_\alpha \operatorname{sgn}(z'-z) & v_\alpha^2 \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\alpha |z'-z|)}{2\rho s^2 v_\alpha} \quad (\text{B-4})$$

$$\hat{\overline{N}}_S^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \begin{bmatrix} \zeta_y^2 + v_\beta^2 & -\zeta_x \zeta_y & -\zeta_x v_\beta \operatorname{sgn}(z'-z) \\ -\zeta_x \zeta_y & \zeta_x^2 + v_\beta^2 & -\zeta_y v_\beta \operatorname{sgn}(z'-z) \\ -\zeta_x v_\beta \operatorname{sgn}(z'-z) & -\zeta_y v_\beta \operatorname{sgn}(z'-z) & \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\beta |z'-z|)}{2\rho s^2 v_\beta} \quad (\text{B-5})$$

$$\hat{\overline{N}}_{PP}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \frac{(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)}{(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)} \begin{bmatrix} -\zeta_x^2 & -\zeta_x \zeta_y & -\zeta_x v_\alpha \\ -\zeta_x \zeta_y & -\zeta_y^2 & -\zeta_y v_\alpha \\ \zeta_x v_\alpha & \zeta_y v_\alpha & v_\alpha^2 \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\alpha (z'+z))}{2\rho s^2 v_\alpha} \quad (\text{B-6})$$

$$\hat{\overline{N}}_{SS}^{F_\delta}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \frac{1}{((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2))} \begin{bmatrix} \hat{N}_{SS}^I & \hat{N}_{SS}^{II} & \hat{N}_{SS}^{III} \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\beta (z'+z))}{2\rho s^2 v_\beta}$$

$$\hat{N}_{SS}^I(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \begin{bmatrix} (v_\beta^2 + \zeta_y^2)((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) - 8v_\alpha v_\beta^3 \zeta_x^2 \\ -\zeta_x \zeta_y ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) + 8v_\alpha v_\beta^3 \\ \zeta_x v_\beta ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$

$$\hat{N}_{SS}^{II}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \begin{bmatrix} -\zeta_x \zeta_y ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) + 8v_\alpha v_\beta^3 \\ (v_\beta^2 + \zeta_x^2)((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) - 8v_\alpha v_\beta^3 \zeta_y^2 \\ \zeta_y v_\beta ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}_{SS}^{III}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \begin{bmatrix} -\zeta_x v_\beta ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \\ -\zeta_y v_\beta ((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \\ -(\zeta_x^2 + \zeta_y^2)((v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 - 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\hat{N}}}_{PS}^{F_s}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) &= \frac{2(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)}{(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \zeta_x^2 v_\beta & \zeta_x \zeta_y v_\beta & \zeta_x v_\alpha v_\beta \\ \zeta_x \zeta_y v_\beta & \zeta_y^2 v_\beta & \zeta_y v_\alpha v_\beta \\ \zeta_x (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) & \zeta_y (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) & v_\alpha (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\alpha z' - v_\beta z)}{\rho s^2} \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\hat{N}}}_{SP}^{F_s}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) &= \frac{2(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)}{(v_\beta^2 - \zeta_x^2 - \zeta_y^2)^2 + 4v_\alpha v_\beta (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \zeta_x^2 v_\beta & \zeta_x \zeta_y v_\beta & -\zeta_x (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \\ \zeta_x \zeta_y v_\beta & \zeta_y^2 v_\beta & -\zeta_y (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \\ -\zeta_x v_\alpha v_\beta & -\zeta_y v_\alpha v_\beta & v_\alpha (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \end{bmatrix} \frac{\exp(-v_\beta z' - v_\alpha z)}{\rho s^2} \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

### B.3 Fonction de Green pour la force dans le domaine physique

#### B.3.1 Inversion de la solution

La première étape de la méthode de Cagniard De Hoop consiste à opérer les changements de variables (II-27) et (II-28) dans (II-21). Les termes contribuant à la fonction de Green se réécrivent alors sous la forme (II-31)

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\hat{N}}}_i^{F_s}(x, y, z; s) &= -\frac{js}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_i^{F_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \tilde{g}_i^{F_s}(p, q, z))] dq \\ i &= P, S, PP, SS, PS, SP \end{aligned}$$

Introduisant les quantités

$$\eta_\alpha = \left( \frac{I}{\alpha^2} + p^2 - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \Re\{\eta_\alpha\} \geq 0, \quad (\text{B-10})$$

$$\eta_\beta = \left( \frac{s^2}{\beta^2} + p^2 - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \Re\{\eta_\beta\} \geq 0, \quad (\text{B-11})$$

les expressions de  $\tilde{g}_i^{F_s}$  et de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_i^{F_s}$  sont :

- Onde P directe

$$\tilde{g}_P^{F_s} = \eta_\alpha R \cos \theta \quad (\text{B-12})$$

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}}_P^{F_s}(p, q, z) = \frac{I}{\eta_\alpha} \begin{bmatrix} q^2 \cos^2 \varphi - p^2 \sin^2 \varphi & (p^2 + q^2) \sin \varphi \cos \varphi & \pm q \eta_\alpha \cos \varphi \\ (p^2 + q^2) \sin \varphi \cos \varphi & q^2 \sin^2 \varphi - p^2 \cos^2 \varphi & \pm q \eta_\alpha \sin \varphi \\ \pm q \eta_\alpha \cos \varphi & \pm q \eta_\alpha \sin \varphi & \eta_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-13})$$

- Onde S directe

$$\tilde{g}_S^{F_s} = \eta_\beta R \cos \theta \quad (\text{B-14})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_S^{F_s}(p, q, z) = \frac{1}{\eta_\beta} \begin{bmatrix} q^2 \sin^2 \varphi - p^2 \cos^2 \varphi + \eta_\beta^2 & -(p^2 + q^2) \sin \varphi \cos \varphi & \mp q \eta_\beta \cos \varphi \\ -(p^2 + q^2) \sin \varphi \cos \varphi & q^2 \cos^2 \varphi - p^2 \sin^2 \varphi + \eta_\beta^2 & \mp q \eta_\beta \sin \varphi \\ \mp q \eta_\beta \cos \varphi & \mp q \eta_\beta \sin \varphi & q^2 - p^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-15})$$

- Onde P réfléchie en onde P

$$\tilde{g}_{PP}^{F_s}(p, q, z) = \eta_\alpha (z + z') \quad (\text{B-16})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{PP}^{F_s}(p, q, z) = \frac{(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)}{\eta_\alpha ((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 + 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2))} \times \begin{bmatrix} p^2 \sin^2 \varphi - q^2 \cos^2 \varphi & -(q^2 + p^2) \sin \varphi \cos \varphi & -q \eta_\alpha \cos \varphi \\ -(q^2 + p^2) \sin \varphi \cos \varphi & p^2 \cos^2 \varphi - q^2 \sin^2 \varphi & -q \eta_\alpha \sin \varphi \\ q \eta_\alpha \cos \varphi & q \eta_\alpha \sin \varphi & \eta_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-17})$$

- Onde S réfléchie en S

$$\tilde{g}_{SS}^{F_s}(p, q, z) = \eta_\beta (z + z') \quad (\text{B-18})$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{B}}}_{SS}^{F_s}(p, q, z) = (\eta_\beta ((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 + 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)))^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{B}}_{SS}^I \quad \tilde{\mathbf{B}}_{SS}^{II} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{SS}^{III} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{SS}^I = \begin{bmatrix} -((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2))((q^2 + p^2) \cos^2 \varphi - p^2) \\ \quad + \frac{1}{\beta^2} (\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2) (2 \cos^2 \varphi - 1) \\ -(q^2 + p^2)((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) + \frac{8}{\beta^2} \eta_\alpha \eta_\beta \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad ((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) q \eta_\beta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B-19})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{SS}^{II} = \begin{bmatrix} -(q^2 + p^2)((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) + \frac{8}{\beta^2} \eta_\alpha \eta_\beta \sin \varphi \cos \varphi \\ -((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2))((q^2 + p^2) \sin^2 \varphi - p^2) \\ \quad + \frac{1}{\beta^2} ((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 + p^2)) (2 \sin^2 \varphi - 1) \\ \quad ((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) q \eta_\beta \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{SS}^{III} = \begin{bmatrix} -((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) q \eta_\beta \cos \varphi \\ -((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2)) q \eta_\beta \sin \varphi \\ -((\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 - 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2))(q^2 - p^2) \end{bmatrix}$$

- Onde P réfléchiée en S

$$\tilde{g}_{PS}^{F_s}(p, q, z) = \eta_\alpha z' + \eta_\beta z \quad (\text{B-20})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{PS}^{F_s}(p, q, z) = \frac{4(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)}{(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 + 4\eta_\alpha\eta_\beta(q^2 - p^2)} \times \begin{bmatrix} \eta_\beta((q^2 + p^2)\cos^2\varphi - p^2) & \eta_\beta(q^2 + p^2)\cos\varphi\sin\varphi & q\eta_\alpha\eta_\beta\cos\varphi \\ \eta_\beta(q^2 + p^2)\cos\varphi\sin\varphi & \eta_\beta((q^2 + p^2)\sin^2\varphi - p^2) & q\eta_\alpha\eta_\beta\sin\varphi \\ q(q^2 - p^2)\cos\varphi & q(q^2 - p^2)\sin\varphi & \eta_\alpha(q^2 - p^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B-21})$$

- Onde S réfléchiée en P

$$\tilde{g}_{SP}^{F_s}(p, q, z) = \eta_\beta z' + \eta_\alpha z \quad (\text{B-22})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{SP}^F(p, q, z) = \frac{4(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)}{(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 + 4\eta_\alpha\eta_\beta(q^2 - p^2)} \times \begin{bmatrix} \eta_\beta((q^2 + p^2)\cos^2\varphi - p^2) & \eta_\beta(q^2 + p^2)\cos\varphi\sin\varphi & -q(q^2 - p^2)\cos\varphi \\ \eta_\beta(q^2 + p^2)\cos\varphi\sin\varphi & \eta_\beta((q^2 + p^2)\sin^2\varphi - p^2) & -q(q^2 - p^2)\sin\varphi \\ -q\eta_\alpha\eta_\beta\cos\varphi & -q\eta_\alpha\eta_\beta\sin\varphi & \eta_\alpha(q^2 - p^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B-23})$$

## B.3.2 Contours de Cagniard De Hoop

### B.3.2.1 Généralités

La seconde étape consiste à substituer, dans (II-31), à l'intégration sur  $q$  le long de l'axe imaginaire du plan complexe, le contour de Cagniard - De Hoop, défini par l'équation

$$\tau = -qr + \tilde{g}_i^{F_s}(p, q, z),$$

où  $\tau$  est un réel positif qui a la dimension du temps.

L'outil mathématique qui permet le changement de contour d'intégration est le théorème de Cauchy.

Ce dernier stipule que l'intégrale d'une quantité le long d'un contour fermé dans le plan complexe est nulle si le domaine délimité par le contour ne contient pas de singularités (pôles, coupures) de l'intégrande, c'est à dire si la fonction à intégrer est analytique dans le domaine. Une conséquence pratique est que l'on peut remplacer un contour par un autre ou par plusieurs si l'ensemble constitue un contour fermé.

Les fonctions  $\eta_\alpha$  et  $\eta_\beta$  sont des fonctions multiformes de la variable de la variable  $q$ . Il convient donc d'équiper le plan complexe ( $\Re(q)$ ,  $\Im(q)$ ) de coupures pour rendre les composantes de  $\overline{\mathbf{B}}_i^{F_s}(p, q, z)$  holomorphes dans tout le plan complexe et utiliser le théorème de Cauchy. Les points de branchement liés à l'annulation des radicaux des fonctions  $\eta_\alpha$  et  $\eta_\beta$  sont définis par

$$q_\alpha^\pm = \pm \left( p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-24})$$

$$q_\beta^\pm = \pm \left( p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-25})$$

Les coupures suivantes sont alors introduites dans le plan complexe ( $\Re(q)$ ,  $\Im(q)$ ) le long de l'axe des réels  $\Im(q) = 0$  :

$$q_\alpha < |\Re(q)| < \infty, \quad (\text{B-26})$$

$$q_\beta < |\Re(q)| < \infty. \quad (\text{B-27})$$

Dès lors, les intégrandes sont uniformes, continus et dérivables, excepté aux points de branchement.

En traçant des contours pour plusieurs valeurs de  $p$ , il est manifeste que tous ont des propriétés communes : pour des valeurs de  $\tau$  inférieure à une valeur seuil, le contour est réel ; à partir d'une certaine valeur de  $\tau$ , notée  $T(p)$ , le contour quitte l'axe des réels perpendiculairement à celui-ci et devient complexe. La partie complexe du contour est symétrique par rapport à l'axe des réels et à une même valeur de  $\tau$  correspondent deux points du contour complexes conjugués. D'autre part, les contours ont comme asymptote quand  $\tau \rightarrow \infty$  une droite qui passe par l'origine.

### B.3.2.2 Contours de Cagniard De Hoop pour les contributions directes

Il s'agit de calculer les contributions de type (II-31)

$$\overline{\hat{N}}_P^{F_\delta}(x, y, z; s) = -\frac{jS}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overline{\mathbf{B}}_P^{F_\delta}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \check{\mathbf{g}}_P^{F_\delta}(p, q, z))] dq,$$

$$\overline{\hat{N}}_S^{F_\delta}(x, y, z; s) = -\frac{jS}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overline{\mathbf{B}}_S^{F_\delta}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \check{\mathbf{g}}_S^{F_\delta}(p, q, z))] dq.$$

Les composantes de l'intégrande  $\overline{\mathbf{B}}_P^{F_\delta}(p, q, z)$  (respectivement  $\overline{\mathbf{B}}_S^{F_\delta}(p, q, z)$ ) sont indépendantes de  $\eta_\beta$  (respectivement de  $\eta_\alpha$ ) ; les processus de déformation de contours pour les contributions  $\overline{\hat{N}}_P^{F_\delta}(x, y, z; s)$  et  $\overline{\hat{N}}_S^{F_\delta}(x, y, z; s)$  sont donc décorrélés. Ainsi, il y a un plan complexe pour chacun de ces problèmes et le raisonnement tenu pour l'onde P est parfaitement applicable pour l'onde S. La démonstration n'est donc détaillée que pour la contribution  $\overline{\hat{N}}_P^{F_\delta}(x, y, z; s)$  : le plan complexe ( $\Re(q)$ ,  $\Im(q)$ ) est muni de la coupure (B-26) et le contour  $q(\tau, p)$  est défini par l'équation

$$\tau = -qr + \eta_\alpha |z - z'|. \quad (\text{B-28})$$

Après avoir posé

$$T_p(p) = R \left( p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-29})$$

l'expression explicite du contour est donnée par

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R} \sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{R} (T_p(p) - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \quad 0 < \tau \leq T_p(p), \quad (\text{B-30})$$

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R} \sin \theta \pm j \frac{\cos \theta}{R} (\tau^2 - T_p(p))^{\frac{1}{2}} \quad T_p(p) \leq \tau < \infty. \quad (\text{B-31})$$

Cette trajectoire possède donc deux parties distinctes : l'une longeant l'axe réel et l'autre située dans le plan complexe ( $\Re(q)$ ,  $\Im(q)$ ). La figure B-1 présente le contour fermé utilisé pour appliquer le théorème de Cauchy :  $I$  est le contour original d'intégration,  $c^+$  et  $\Gamma^+$  (respectivement  $c^-$  et  $\Gamma^-$ ) définissent le contour de Cagniard dans le demi-plan  $\Im(q) > 0$  (respectivement  $\Im(q) < 0$ ) ;  $c^\pm$  est la branche sur l'axe réel rejoignant les contours  $c^+$  et  $c^-$ . Enfin,  $C^{+\infty}$  et  $C^{-\infty}$  sont des trajectoires d'intégration qui ferment le contour global.

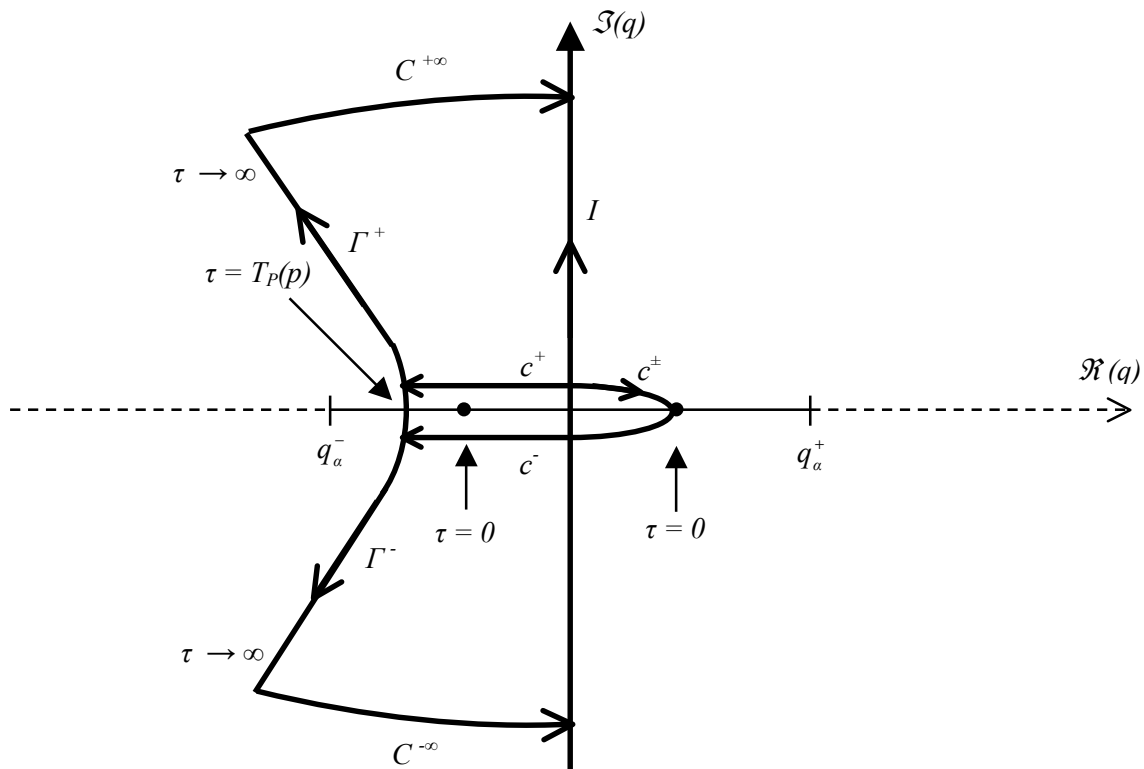


Figure B-1 : contours d'intégrations



Les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q, z)$  ne possédant aucune singularité à l'intérieur du contour fermé, conformément à la figure B-1, le théorème de Cauchy permet d'écrire symboliquement

$$I - C^{+\infty} - \Gamma^+ - c^+ + c^\pm + c^- + \Gamma^- + C^{-\infty} = 0. \quad (\text{B-32})$$

Les contributions à l'intégrale sur les contours  $-c^+$ ,  $c^-$  et  $c^\pm$  se compensent mutuellement car ils constituent un contour fermé sur l'axe réel en dehors de toute coupure. D'autre part, en invoquant le lemme de Jordan, il est possible de montrer que les intégrations le long des arcs  $C^{+\infty}$  et  $C^{-\infty}$  sont nulles, de sorte que

$$I = \Gamma^+ - \Gamma^-, \quad (\text{B-33})$$

où  $\Gamma^+ - \Gamma^-$  est le contour dit de Cagniard De Hoop. Les expressions (B-30) et (B-31) montrent que le point d'intersection de ce contour avec l'axe réel est toujours situé entre deux points de branchement ; ainsi, dans ce processus de déformation, les coupures ne sont jamais franchies. Un autre point important est la propriété de symétrie de la fonction  $\eta_\alpha$  (qui vaut aussi pour  $\eta_\beta$ ) :

$$\eta_\alpha(p, q^*) = \eta_\alpha(p, q), \quad (\text{B-34})$$

où \* désigne la quantité complexe conjuguée. De ce fait, les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q, z)$  (équation (B-13)) profitent elles-aussi de cette symétrie :

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q^*, z) = \overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q, z). \quad (\text{B-35})$$

Dans ce cas, les contours  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  étant symétriques par rapport à l'axe réel, il est possible d'écrire symboliquement que

$$\Gamma^{+*} = \Gamma^-, \quad (\text{B-36})$$

et l'intégrale d'origine  $I$  est telle que

$$I = 2j\mathcal{I}(\Gamma^+). \quad (\text{B-37})$$

Le contour  $\Gamma^+$  étant paramétré par  $\tau \in [T_p(p), +\infty[$  et les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q, z)$  étant par ailleurs des fonctions paires de la variable réelle  $p$ , (II-31) se réécrit sous la forme (II-33) :

$$\overline{\overline{\mathbf{N}}}_p^{F_s}(x, y, z; s) = \frac{S}{2\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} dp \int_{T_p(p)}^{+\infty} \mathcal{I} \left[ \overline{\overline{\mathbf{B}}}_p^{F_s}(p, q(\tau, p), z) \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] \exp[-s\tau] d\tau.$$

Les diagrammes représentés à la figure B-2, relatifs aux domaines d'intégration dans le plan  $(\tau, p)$ , montrent qu'en changeant l'ordre d'intégration, l'intégrale sur  $\tau$  s'étend de  $T_p(0)$  jusqu'à l'infini, alors que l'intégrale sur  $p$  s'effectue de 0 à  $P_p(\tau)$  qui est solution pour  $p$  de  $\tau = T_i(p)$ . (B-29) fournit

$$T_p(0) = \frac{R}{\alpha}, \quad (\text{B-38})$$

$$P_p(\tau) = \left( \frac{\tau^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-39})$$

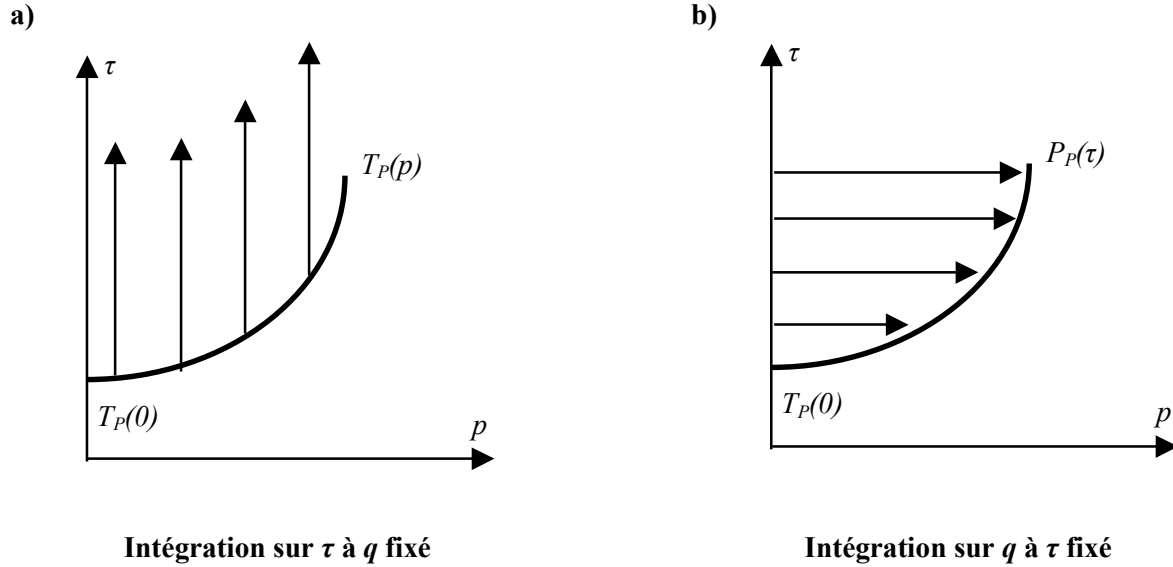


Figure B-2 : Domaines d'intégration dans le plan  $(\tau, p)$

L'expression (II-33) est donc égale à (II-34)

$$\overline{\overline{N}}_p^{F_s}(x, y, z; s) = \frac{s}{2\pi^2 \rho} \int_{T_p(0)}^{+\infty} \exp[-s\tau] d\tau \int_0^{P_p(\tau)} \Im \left[ \overline{\overline{B}}_p^{F_s}(p, q(\tau, p), z) \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] dp.$$

Utilisant (B-31), il vient

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = j\eta_\alpha \left( \tau^2 - (T_p(p))^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-40})$$

qui permet d'écrire (II-34) sous une forme similaire à (II-35)

$$\overline{\overline{N}}_p^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H\left(t - \frac{R}{\alpha}\right) \overline{\overline{P}}_p^{F_s}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-41})$$

où

$$\overline{\overline{P}}_p^{F_s}(x, y, z; t) = \int_0^{P_p(t)} \Re \left[ \eta_\alpha \left( t^2 - (T_p(p))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \overline{\overline{B}}_p^{F_s}(p, q(t, p), z) \right] dp. \quad (\text{B-42})$$

Effectuant le changement de variable

$$p = \left( \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \chi, \quad (\text{B-43})$$

$$0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$$

les intégrales (B-42) se calculent analytiquement ; les composantes de  $\overline{\mathbf{P}}^{F_s}(x, y, z; t)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} P_{11}^{F_s} &= \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \left( \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \\ P_{21}^{F_s} &= \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ P_{31}^{F_s} &= - \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ P_{12}^{F_s} &= P_{21}^{F_s} \\ P_{22}^{F_s} &= \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \left( \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \\ P_{32}^{F_s} &= - \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ P_{13}^{F_s} &= P_{31}^{F_s} \\ P_{23}^{F_s} &= P_{32}^{F_s} \\ P_{33}^{F_s} &= \left( 3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \cos^2 \theta - \left( \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-44})$$

Appliquant le même raisonnement à la contribution  $\overline{\mathbf{N}}_s^{F_s}(x, y, z; s)$ , il vient

$$\overline{\mathbf{N}}_s^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \overline{\mathbf{S}}^{F_s}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-45})$$

où

$$\overline{\mathbf{S}}^{F_s}(x, y, z; t) \int_0^{P_s(t)} \Re \left[ \eta_\beta \left( t^2 - (T_s(p))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{B}}_s^{F_s}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-46})$$

$$T_s(p) = R \left( p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-47})$$

$$P_s(t) = \left( \frac{t^2}{R^2} - \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-48})$$

L'expression explicite du contour  $q(\tau, p)$  est donnée par

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R} \sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{R} (T_s(p) - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \quad 0 < \tau \leq T_s(p), \quad (\text{B-49})$$

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R} \sin \theta \pm j \frac{\cos \theta}{R} (\tau^2 - T_s(p))^{\frac{1}{2}} \quad T_s(p) \leq \tau < \infty, \quad (\text{B-50})$$

et les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{S}}}^{F_s}(x, y, z; t)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{11}^{F_s} &= -\left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{t^2}{R^2} + \frac{1}{\beta^2} \\ S_{21}^{F_s} &= -\left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ S_{31}^{F_s} &= \left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ S_{12}^{F_s} &= S_{21}^F \\ S_{22}^{F_s} &= -\left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{t^2}{R^2} + \frac{1}{\beta^2} \\ S_{32}^{F_s} &= \left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ S_{13}^{F_s} &= S_{31}^F \\ S_{23}^{F_s} &= S_{32}^F \\ S_{33}^{F_s} &= \left(3\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta - 2\left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B-51})$$

### B.3.2.3 Contours de Cagniard De Hoop pour les contributions réfléchies

#### B.3.2.3.1 Onde P réfléchi en P

La contribution

$$\overline{\overline{\hat{N}}}_{PP}^{F_s}(x, y, z; s) = -\frac{js}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{PP}^{F_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \tilde{g}_{PP}^{F_s}(p, q, z))] dq$$

est considérée. Les composantes de l'intégrande  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_{PP}^{F_s}(p, q, z)$  (équation (B-17)) dépendent de  $\eta_\alpha$  et  $\eta_\beta$ ; de ce fait, le plan complexe doit être équipé des coupures (B-26) et (B-27). Par ailleurs, les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_{PP}^{F_s}(p, q, z)$  possèdent des pôles simples  $q_R^+$  et  $q_R^-$ , solutions pour  $q$  de

$$(\eta_\beta^2 + p^2 - q^2)^2 + 4\eta_\alpha \eta_\beta (q^2 - p^2) = 0. \quad (\text{B-52})$$

Ces singularités supplémentaires sont situées sur l'axe réel du plan complexe de  $q$ , au-delà des points de branchement réels. Ces pôles sont attribués à l'onde de Rayleigh, onde guidée se propageant à la

surface d'un demi-espace solide et dont la vitesse de propagation  $c_R$  est inférieure à la vitesse de propagation des ondes S. Cherchant alors  $q_R^+$  et  $q_R^-$  sous la forme

$$q_R^\pm = \pm \left( p^2 + \frac{I}{c_R^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-53})$$

$c_R$  est la racine réelle positive de l'équation

$$\left( \frac{c_R^2}{2\beta^2} - I \right)^2 - \left( I - \frac{c_R^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( I - \frac{c_R^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (\text{B-54})$$

Le contour  $q(\tau, p)$  est défini par l'équation

$$\tau = -qr + \eta_\alpha(z + z'). \quad (\text{B-55})$$

Après avoir posé

$$R' = \left( x^2 + y^2 + (z + z')^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-56})$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left( \frac{R}{z + z'} \right), \quad (\text{B-57})$$

$$T_{pp}(p) = R' \left( p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-58})$$

l'expression explicite du contour est donnée par

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R'} \sin \theta' \pm \frac{\cos \theta'}{R'} \left( T_{pp}(p) - \tau^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad 0 < \tau \leq T_{pp}(p), \quad (\text{B-59})$$

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R'} \sin \theta' \pm j \frac{\cos \theta'}{R'} \left( \tau^2 - T_{pp}(p) \right)^{\frac{1}{2}} \quad T_{pp}(p) \leq \tau < \infty. \quad (\text{B-60})$$

Comme pour la contribution P directe, un contour fermé est défini ; puisque les pôles  $q_R^+$  et  $q_R^-$  ne sont pas à l'intérieur du domaine délimité par ce dernier, le théorème de Cauchy peut alors être appliqué.

Le contour de Cagniard De Hoop est représenté à la figure B-3 ; les expressions (B-59) et (B-60) montrent que le point d'intersection de ce contour avec l'axe réel est toujours situé entre les deux points de branchement  $q_\alpha^+$  et  $q_\alpha^-$  : les coupures ne sont donc jamais franchies. Déformant le contour d'intégration et interchangeant l'ordre des intégrations sur  $p$  et  $q$ , il vient

$$\overline{\overline{N}}_{pp}^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H \left( t - \frac{R'}{\alpha} \right) \overline{\overline{PP}}^{F_s}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-61})$$

où

$$\overline{\overline{\mathbf{PP}}}^{F_s}(x, y, z; t) = \int_0^{P_{PP}(t)} \Re \left[ \eta_\alpha \left( t^2 - (T_{PP}(p))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{PP}^{F_s}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-62})$$

$$P_{PP}(t) = \left( \frac{t^2}{R'^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-63})$$

Les composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{PP}}}^{F_s}(x, y, z; t)$  n'ont pas d'expressions analytiques et il faut alors procéder à une intégration numérique avec un schéma de type Romberg par exemple.

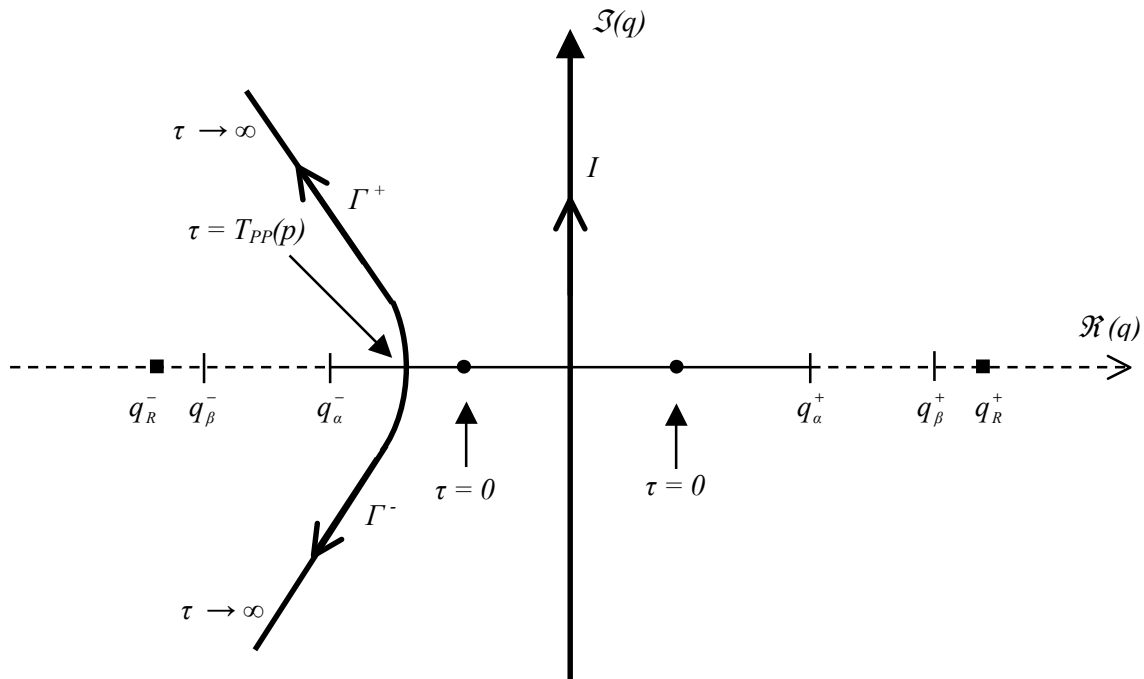


Figure B-3 : plan complexe et contour de Cagniard De Hoop pour la contribution PP

### B.3.2.3.2 Onde S réfléchiée en S

La contribution

$$\hat{\overline{\overline{\mathbf{N}}}}_{SS}^{F_s}(x, y, z; s) = -\frac{jS}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{SS}^{F_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \tilde{g}_{SS}^{F_s}(p, q, z))] dq$$

est considérée. Le plan complexe est le même que celui défini dans la section précédente (figure B-3).

Le contour  $q(\tau, p)$  est défini par l'équation

$$\tau = -qr + \eta_\beta(z + z'). \quad (\text{B-55})$$

Après avoir posé

$$T_{SS}(p) = R' \left( p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B-58})$$

l'expression explicite du contour est donnée par

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R'} \sin \theta' \pm \frac{\cos \theta'}{R'} (T_{ss}(p) - \tau^2)^{\frac{1}{2}} \quad 0 < \tau \leq T_{ss}(p), \quad (\text{B-59})$$

$$q(\tau, p) = -\frac{\tau}{R'} \sin \theta' \pm j \frac{\cos \theta'}{R'} (\tau^2 - T_{ss}(p))^{\frac{1}{2}} \quad T_{ss}(p) \leq \tau < \infty. \quad (\text{B-60})$$

Les expressions (B-59) et (B-60) montrent que le point d'intersection de ce contour avec l'axe réel n'est pas toujours situé entre les deux points de branchement  $q_a^+$  et  $q_a^-$ . Il existe donc une valeur  $\theta'_{lim}$  de l'angle d'incidence  $\theta'$  telle que :

$$- \theta' < \theta'_{lim} :$$

Le théorème de Cauchy peut être employé directement et la déformation des contours d'intégration est similaire au cas de la contribution PP (figure B-3). Déformant le contour d'intégration et interchangeant l'ordre des intégrations sur  $p$  et  $q$ , il vient

$$\overline{\overline{\mathbf{SS}}}^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H\left(t - \frac{R'}{\alpha}\right) \overline{\overline{\mathbf{SS}}}^{F_s}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-61})$$

où

$$\overline{\overline{\mathbf{SS}}}^{F_s}(x, y, z; t) = \int_0^{P_{ss}(t)} \Re \left[ \eta_\beta \left( t^2 - (T_{ss}(p))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{ss}^{F_s}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-62})$$

$$P_{ss}(t) = \left( \frac{t^2}{R'^2} - \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-63})$$

$$- \theta' > \theta'_{lim} :$$

Au-delà de cette valeur, le contour traverse la coupure sur l'axe réel. Ainsi, afin de respecter l'analyticité des composantes de  $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_{ss}^{F_s}(p, q, z)$  lors de l'utilisation du théorème de Cauchy, une intégrale de branche est rajoutée pour le contour  $q(\tau, p)$  afin d'éviter la coupure et de contourner le point de branchement  $q_a^-$  (figure B-4). Cette intégrale de branche représente la contribution des « ondes de tête » (« head waves » en termes anglo-saxon), ou ondes réfractées SPS qui résulte de la réfraction à la surface libre d'une onde latérale de nature longitudinale. Ce dernier agit comme une source mobile à la surface, excitant une onde de volume de nature transverse. La valeur de  $\theta'_{lim}$  se détermine de la manière suivante : le chemin d'intégration (B-60) ne traverse pas la coupure à condition que

$$\Re(q(\tau, p)) = -\frac{\tau}{R'} \sin \theta' = -\left(p^2 + \frac{I}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta' \geq q_a^- ; \quad (\text{B-64})$$

autrement dit, il faut que  $\forall p$ ,

$$\sin \theta' \leq \left(p^2 + \frac{I}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(p^2 + \frac{I}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (\text{B-65})$$

(B-62) n'est vérifiée  $\forall p$  que si

$$\sin \theta' \leq \frac{\beta}{\alpha} = \sin \theta'_{lim} . \quad (\text{B-66})$$

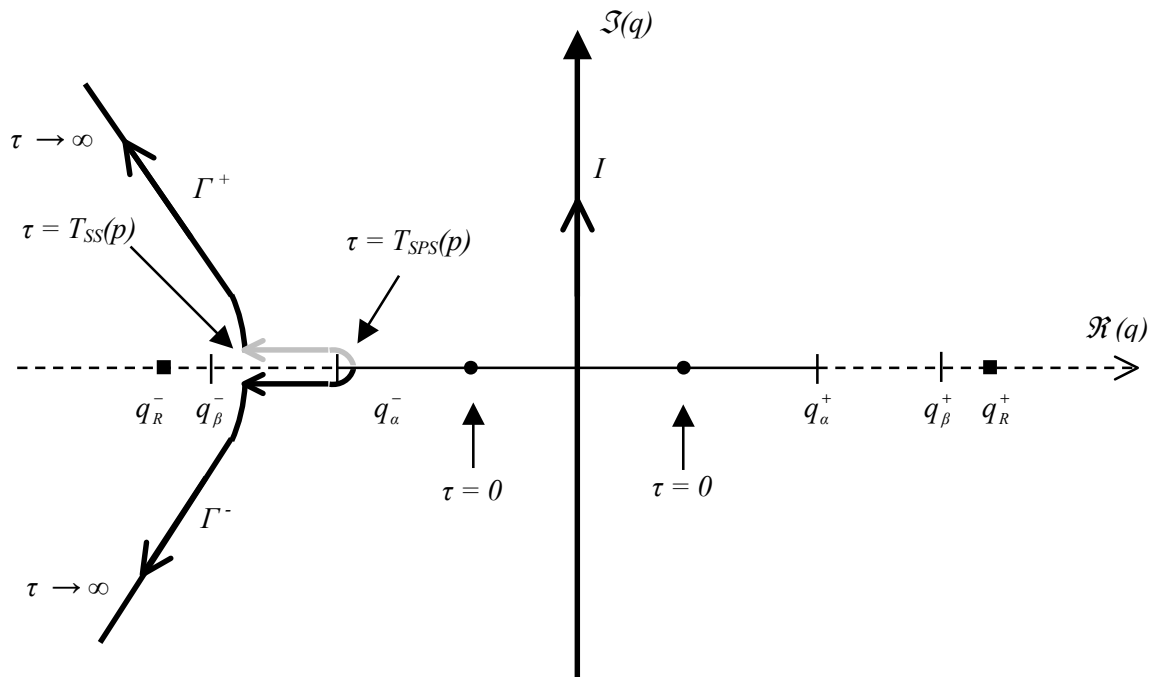


Figure B-3 :

#### plan complexe et contour de Cagniard De Hoop pour la contribution SS et l'onde de tête

L'intégrale sur le contour  $\Gamma^+$  n'est plus dans ce cas strictement égale à l'intégration sur le contour original I : il faut rajouter la contribution de l'intégrale de branche représentée en gris sur la figure B-4. La déformation du contour d'intégration donne dans ce cas



$$\begin{aligned} \overline{\overline{\hat{N}}}_{SS}^{F_s}(x, y, z; s) = & \frac{s}{2\pi^2 \rho} \left( \int_0^{+\infty} dp \int_{T_{SS}(q)}^{+\infty} \Im \left[ \frac{\eta_\beta \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{SS}^{F_s}(p, q(\tau, p), z)}{(\tau^2 - (T_{SS}(p))^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \exp[-s\tau] d\tau \right. \\ & \left. - \int_0^{+\infty} dp \int_{T_{SPS}(p)}^{T_{SS}(q)} \Im \left[ \frac{\eta_\beta \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{SS}^{F_s}(p, q(\tau, p), z)}{((T_{SS}(p))^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \exp[-s\tau] d\tau \right), \end{aligned} \quad (\text{B-67})$$

où

$$T_{SPS}(p) = \tau(q_\alpha^-) = R' \left( p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta' + R' \left( \frac{I}{\beta^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta'. \quad (\text{B-68})$$

Le changement des ordres d'intégration permet alors d'écrire que

$$\overline{\overline{N}}_{SS}^{F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t - \frac{R'}{\beta}) \overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{S}}}^{F_s}(x, y, z; t) \right] + \overline{\overline{N}}_{SS}^{HW F_s}(x, y, z; t), \quad (\text{B-69})$$

$\overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{S}}}^{F_s}(x, y, z; t)$  est donné par (B-62) et  $\overline{\overline{N}}_{SS}^{HW F_s}(x, y, z; t)$  est défini par

$$\overline{\overline{N}}_{SS}^{HW F_s}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t - T_{SPS}(0)) \overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{S}}}_{HW}^{F_s}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-70})$$

où

$$T_{SPS}(p) = \tau(q_\alpha^-) = R' \left( p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta' + R' \left( \frac{I}{\beta^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta', \quad (\text{B-71})$$

$$\overline{\overline{\mathbf{S}\mathbf{S}}}_{HW}^{F_s}(x, y, z; t) = - \int_{P_{SS}(t)}^{P_{SPS}(t)} \Im \left[ \eta_\beta \left( (T_{SS}(p))^2 - t^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \overline{\overline{\mathbf{B}}}_{SS}^{F_s}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-72})$$

$$P_{SPS}(t) = \left[ \left( \frac{t}{R} - \left( \frac{I}{\beta^2} - \frac{I}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right)^2 - \frac{I}{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-73})$$

### B.3.2.3.3 Onde P réfléchie en S et Onde S réfléchie en P

Il s'agit de calculer les contributions de type (II-31)

$$\hat{\hat{N}}_{PS}^{\overline{F}_s}(x, y, z; s) = -\frac{js}{8\pi^2\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{\hat{B}}_{PS}^{\overline{F}_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \check{g}_{PS}(p, q, z))] dq,$$

$$\hat{\hat{N}}_{SP}^{\overline{F}_s}(x, y, z; s) = -\frac{js}{8\pi^2\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{\hat{B}}_{SP}^{\overline{F}_s}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \check{g}_{SP}(p, q, z))] dq.$$

La démarche à suivre étant similaire pour ces deux intégrales, seul le cas de  $\hat{\hat{N}}_{PS}^{\overline{F}_s}(x, y, z; s)$  est traité. Le contour  $q(\tau, p)$  est défini par l'équation

$$\tau = -qr + \eta_\alpha z' + \eta_\beta z. \quad (\text{B-74})$$

Le plan complexe ( $\Re(q)$ ,  $\Im(q)$ ) ainsi que les coupures et les pôles associés, sont identiques à ceux de la figure (B-3). Cependant, une nouvelle difficulté apparaît en regard de l'inversion du changement de variable (B-28). Les valeurs de  $q$  qui rendent cette expression de  $\tau$  réelle positive sont solutions d'une équation d'ordre 4. Cette difficulté est levée par la méthode présentée ci dessous [Cagniard, 1962].

Si  $q$  est solution de (B-74), alors il est toujours possible de trouver deux réels  $r_\alpha$  et  $\tau_\alpha$  tels que

$$\tau_\alpha = -qr_\alpha + \eta_\alpha z' \quad (\text{B-75})$$

Soient

$$r = r_\alpha + r_\beta, \quad (\text{B-76})$$

$$\tau = \tau_\alpha + \tau_\beta. \quad (\text{B-77})$$

Réécrivant (B-75) à l'aide de (B-76) et (B-77), il vient

$$\tau_\alpha + \tau_\beta = -q(r_\alpha + r_\beta) + \eta_\alpha z' + \eta_\beta z, \quad (\text{B-78})$$

qui, combiné avec (B-75) fournit

$$\tau_\beta = -qr_\beta + \eta_\beta z. \quad (\text{B-79})$$

(B-75) et (B-79) élevées au carré donnent

$$q^2(r_\alpha^2 + z'^2) + 2\tau_\alpha r_\alpha q + \tau_\alpha^2 - \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] z'^2 = 0 \quad (\text{B-80})$$

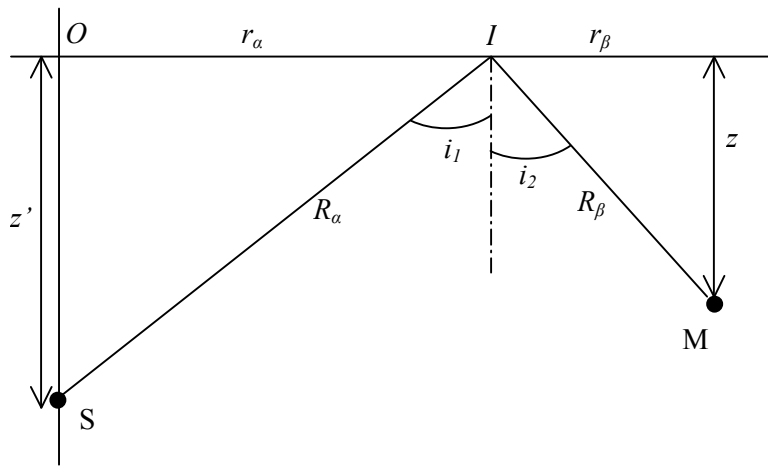
$$q^2(r_\beta^2 + z^2) + 2\tau_\beta r_\beta q + \tau_\beta^2 - \left[ p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right] z^2 = 0 \quad (\text{B-81})$$

Si ces équations sont supposées déterminer un unique  $q$ , alors les coefficients des monômes en  $q$  sont tous réels. Et puisque ces deux équations ont une racine complexe en commun, alors les deux racines sont communes et les coefficients sont proportionnels :

$$\frac{r_\alpha^2 + z'^2}{r_\beta^2 + z^2} = \frac{\tau_\alpha r_\alpha}{\tau_\beta r_\beta} = \frac{\tau_\alpha^2 - \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] z'^2}{\tau_\beta^2 - \left[ q^2 + \frac{I}{\beta^2} \right] z^2} \quad (\text{B-82})$$

L'interprétation géométrique de (B-82) est donnée à la figure (B-5). Les données introduites sur la figure (B-5) permettent de réécrire (B-82) sous la forme

$$\frac{R_\alpha^2}{R_\beta^2} = \frac{\tau_\alpha R_\alpha \sin i_1}{\tau_\beta R_\beta \sin i_2} = \frac{\tau_\alpha^2 - R_\alpha^2 \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \cos^2 i_1}{\tau_\beta^2 - R_\beta^2 \left[ p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right] \cos^2 i_2} \quad (\text{B-83})$$



**Figure B-5 : interprétation géométrique de (B-81)**

Considérant l'égalité de gauche de (B-82)

$$\frac{\tau_\alpha \sin i_1}{R_\alpha} = \frac{\tau_\beta \sin i_2}{R_\beta} = m \quad (\text{B-84})$$

où après calculs

$$m = \left[ \frac{\left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \cos^2 i_1 - \left[ p^2 + \frac{I}{\beta^2} \right] \cos^2 i_2}{\frac{I}{\sin^2 i_1} - \frac{I}{\sin^2 i_2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-85})$$

Soit  $S'$ , le symétrique de  $S$  par rapport au point  $O$ , et  $K$  le point d'intersection entre  $IR$  et le cercle circonscrit au triangle  $ISS'$  (Figure B-6).

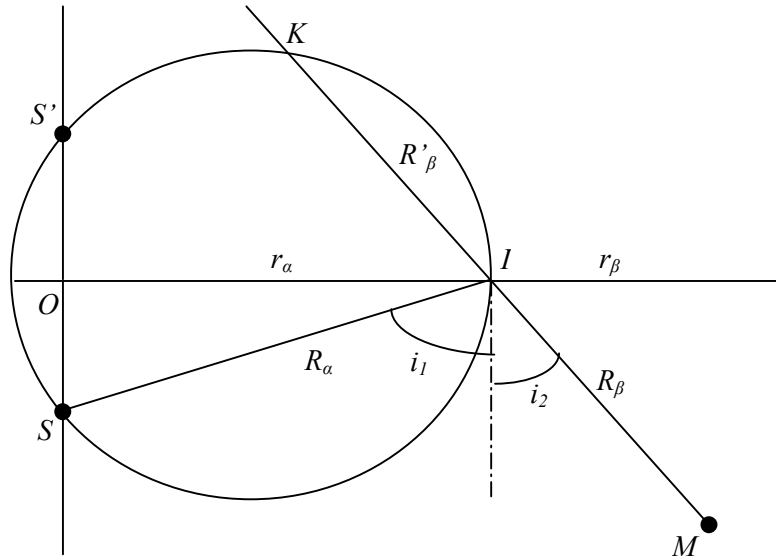


Figure B-6 : construction géométrique du point K

Soit

$$IK = R'_\beta \quad (\text{B-86})$$

Il est montré que [Cagniard, 1962]

$$IK = R'_\beta = R_\alpha \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \quad (\text{B-87})$$

Si bien que

$$\tau_\alpha = m \frac{R_\alpha}{\sin i_1} = m \frac{R'_\beta}{\sin i_2} \quad (\text{B-88})$$

$$\tau = \tau_\alpha + \tau_\beta = m \frac{R_\beta + R'_\beta}{\sin i_2} \quad (\text{B-89})$$

donc

$$t = m \frac{R''}{\sin i_2} \quad (\text{B-90})$$

$$R'' = R_\beta + R'_\beta \quad (\text{B-91})$$

Introduisant la relation (B-90) dans la première des relations (B-80), il vient

$$q^2 + 2mq + \frac{m^2}{\sin^2 i_1} - \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \cos^2 i_1 = 0 \quad (\text{B-92})$$

dont la résolution donne l'équation donne le contour d'intégration déformé

$$q = -m \pm \frac{\cos i_1}{\sin i_1} \left[ \left( p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin^2 i_1 - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad m^2 \leq \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \sin^2 i_1, \quad (\text{B-93})$$

$$q = -m \pm j \frac{\cos i_1}{\sin i_1} \left[ m^2 - \left( p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right) \sin^2 i_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad m^2 \geq \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \sin^2 i_1. \quad (\text{B-94})$$

Compte tenu des relations

$$\tan i_1 = \frac{r_\alpha}{z'} \quad (\text{B-95})$$

$$\tan i_2 = \frac{r_\beta}{z} \quad (\text{B-96})$$

(B-93) et (B-94) se réécrivent

$$q = -m \pm \frac{z'}{r_\alpha} \left[ \frac{p^2 + \frac{I}{\alpha^2}}{1 + \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2} - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad m^2 \leq \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \sin^2 i_1, \quad (\text{B-97})$$

$$q = -m \pm j \frac{z'}{r_\alpha} \left[ m^2 - \frac{p^2 + \frac{I}{\alpha^2}}{1 + \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad m^2 \geq \left[ p^2 + \frac{I}{\alpha^2} \right] \sin^2 i_1. \quad (\text{B-98})$$

$r_\alpha$  et  $r_\beta$  étant définis alors par

$$r_\alpha + r_\beta = r, \quad (\text{B-99})$$

$$\left( r + \frac{z'}{r_\alpha} + \frac{z}{r_\beta} \right) m = \tau, \quad (\text{B-100})$$

où

$$m^2 = \frac{I}{\left[ 1 + \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{z}{r_\beta} \right)^2 \right]} \left[ \frac{\frac{I}{\beta} \left( \frac{z}{r_\beta} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2 \right] - \frac{I}{\alpha^2} \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{r_\beta} \right)^2 \right]}{\left( \frac{z}{r_\beta} \right)^2 - \left( \frac{z'}{r_\alpha} \right)^2} + p^2 \right]. \quad (\text{B-101})$$

Les expressions (B-97) et (B-98) montrent que le point d'intersection de ce contour avec l'axe réel est toujours situé entre les deux points de branchement  $q_\alpha^+$  et  $q_\alpha^-$  : les coupures ne sont donc jamais franchies. Le calcul de l'élément différentiel  $dq$  fournit

$$dq = -\frac{d\tau}{r + q\left(\frac{z'}{\eta_\alpha} + \frac{z}{\eta_\beta}\right)} \quad (\text{B-102})$$

Déformant le contour d'intégration et interchangeant l'ordre des intégrations sur  $p$  et  $q$ , il vient

$$\overline{\overline{N}}_{PS}^{F_\delta}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t - T_{PS}) \overline{\overline{PS}}^{F_\delta}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-103})$$

où

$$\overline{\overline{PS}}^{F_\delta}(x, y, z; t) = \int_0^{P_{PS}(t)} \Re \left[ j \left( r + q \left( \frac{z'}{\eta_\alpha} + \frac{z}{\eta_\beta} \right) \right)^{-1} \overline{\overline{B}}_{PS}^{F_\delta}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-104})$$

$P_{PS}(\tau)$  est tel que

$$m^2(P_{PS}(t)) = \frac{(P_{PS}(t))^2 + \frac{I}{\alpha^2}}{1 + \left(\frac{z'}{r_\alpha}\right)^2}, \quad (\text{B-105})$$

et  $T_{PS}$  est la valeur de  $\tau$  pour laquelle  $P_{PS}(t)$  s'annule.

La contribution  $\overline{\overline{N}}_{SP}^{F_\delta}(x, y, z; t)$  se traite de la même manière et le résultat est

$$\overline{\overline{N}}_{SP}^{F_\delta}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t - T_{SP}) \overline{\overline{SP}}^{F_\delta}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-103})$$

où

$$\overline{\overline{SP}}^{F_\delta}(x, y, z; t) = \int_0^{P_{SP}(t)} \Re \left[ j \left( r + q \left( \frac{z}{\eta_\alpha} + \frac{z'}{\eta_\beta} \right) \right)^{-1} \overline{\overline{B}}_{SP}^{F_\delta}(p, q(t, p), z) \right] dp, \quad (\text{B-104})$$

Dans (B-103) et (B-104), des relations identiques aux expressions (B-97) à (B-101) sont utilisées, en interchangeant  $z$  et  $z'$ .  $P_{SP}(t)$  et  $T_{SP}$  se détermine en utilisant (B-105) où  $z'$  est remplacé par  $z$ .

## B.4 Fonction de Green pour le couple de forces dans le domaine physique

La fonction de Green  $\mathbf{G}^{(F_\delta, rF_\delta)}(\mathbf{M}; t)$  s'écrit sous une forme équivalente à (II-19) :

$$\hat{\mathbf{G}}^{(F_\delta, rF_\delta)}(\xi_x, \xi_y, z; s) = \sum_{i=P, S, PP, SS, PS, SP} \left\{ \overline{\overline{N}}_i^{(F_\delta, rF_\delta)}(\xi_x, \xi_y, z; s) \right\} \mathbf{e}_z,$$

où  $\hat{N}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; s)$  se calcule en utilisant (II-44) :

$$\hat{N}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) = \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \hat{N}_i^{(F_\delta)}(\zeta_x, \zeta_y, z; s) \right].$$

Utilisant les expressions (B-4) à (B-9) et opérant les changements de variables (II-27) et (II-28), (II-44) se réécrit

$$\hat{N}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; s) = -\frac{js^2}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{B}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) \exp[-s(-qr + \check{g}_i^{F_\delta}(p, q, z))] dq \quad (\text{B-105})$$

Les expressions de  $\hat{B}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z)$  sont

$$\hat{B}_p^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\alpha \operatorname{sgn}(z' - z) \hat{B}_p^{(F_\delta)}(p, q, z), \quad (\text{B-106})$$

$$\hat{B}_s^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\beta \operatorname{sgn}(z' - z) \hat{B}_s^{(F_\delta)}(p, q, z), \quad (\text{B-107})$$

$$\hat{B}_{pp}^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\alpha \hat{B}_{pp}^{(F_\delta)}(p, q, z), \quad (\text{B-108})$$

$$\hat{B}_{ss}^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\beta \hat{B}_{ss}^{(F_\delta)}(p, q, z), \quad (\text{B-109})$$

$$\hat{B}_{ps}^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\alpha \hat{B}_{ps}^{(F_\delta)}(p, q, z), \quad (\text{B-110})$$

$$\hat{B}_{sp}^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q, z) = -\eta_\beta \hat{B}_{sp}^{(F_\delta)}(p, q, z). \quad (\text{B-111})$$

La démarche suivie alors est en tous points celle détaillée à la section B.3 ; tenant compte du fait que l'opérateur de dérivée temporelle seconde se traduit par une multiplication par  $s^2$  dans l'espace de la transformée, la solution temporelle pour chaque contribution  $\hat{N}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t)$  s'écrit sous la forme (II-47) :

$$\hat{N}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t) = \frac{I}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ H(t - T_i(0)) \int_0^{P_i(t)} \mathfrak{S} \left[ \hat{B}_i^{(F_\delta, -F_\delta)}(p, q(t, p), z) \frac{\partial q}{\partial t} \right] dp \right].$$

Remarque :

De manière analogue à la force, les contributions  $\hat{N}_p^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t)$  et  $\hat{N}_s^{(F_\delta, -F_\delta)}(x, y, z; t)$  se mettent sous la forme

$$\overline{\overline{N}}_P^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ H\left(t - \frac{R}{\alpha}\right) \overline{\overline{P}}^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-112})$$

$$\overline{\overline{N}}_S^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ H\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \overline{\overline{S}}^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t) \right], \quad (\text{B-113})$$

où  $\overline{\overline{P}}^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t)$  et  $\overline{\overline{S}}^{(F_\delta, F_\delta)}(x, y, z; t)$  ont les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{aligned} P_{11}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] \cos \theta \\ P_{21}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\alpha^2}\right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ P_{31}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\alpha^2}\right) \cos^2 \theta - \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] \sin \theta \cos \varphi \\ P_{12}^{(F_\delta, F_\delta)} &= P_{21}^{F_\delta} \\ P_{22}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\alpha^2}\right) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] \cos \theta \\ P_{32}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\alpha^2}\right) \cos^2 \theta - \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] \sin \theta \sin \varphi \\ P_{13}^{(F_\delta, F_\delta)} &= P_{31}^{F_\delta} \\ P_{23}^{(F_\delta, F_\delta)} &= P_{32}^{F_\delta} \\ P_{33}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\alpha^2}\right) \cos^2 \theta - 3 \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B-114})$$

$$\begin{aligned} S_{11}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \cos \theta \\ S_{21}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ S_{31}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \cos^2 \theta - \left(\frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \sin \theta \cos \varphi \\ S_{12}^{(F_\delta, F_\delta)} &= S_{21}^{F_\delta} \\ S_{22}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \cos \theta \\ S_{32}^{(F_\delta, F_\delta)} &= -\frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \cos^2 \theta - \left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \sin \theta \sin \varphi \\ S_{13}^{(F_\delta, F_\delta)} &= S_{31}^{F_\delta} \\ S_{23}^{(F_\delta, F_\delta)} &= S_{32}^{F_\delta} \\ S_{33}^{(F_\delta, F_\delta)} &= \frac{t}{R} \left[ \left(5 \frac{t^2}{R^2} - \frac{3}{\beta^2}\right) \cos^2 \theta - \left(3 \frac{t^2}{R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B-115})$$



**Annexe C :**  
**Expression de la matrice de réflectivité du demi-espace recouvert  
d'une couche**

$[R]$  est la matrice de réflectivité qui exprime, pour un point situé en  $z = z_i^+$  (c'est à dire dans le demi-espace, juste en dessous de l'interface), le ratio des amplitudes entre les ondes montantes incidentes et les ondes descendantes réfléchies.  $[R]$  est donnée par (II-85) et (II-86)

$$[R] = [R_i^u] + [T_i^d] \cdot [RR],$$

$$[RR] = ([I] - [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][R_i^d])^{-1} [E_{wz}][R_0^u][E_{wz}][T_i^u].$$

Les quantités suivantes sont posées :

$$v_\alpha^{wz}(k) = (k_{\alpha_{wz}}^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (C-1)$$

$$v_\beta^{wz}(k) = (k_{\beta_{wz}}^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (C-2)$$

$$p = \frac{k}{\omega}, \quad (C-3)$$

$$p_{\alpha,\beta} = \frac{v_{\alpha,\beta}}{\omega} = \left( \frac{1}{\alpha^2, \beta^2} - p^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C-4)$$

$$p_{\alpha,\beta}^{wz} = \frac{v_{\alpha,\beta}^{wz}}{\omega} = \left( \frac{1}{\alpha_{wz}^2, \beta_{wz}^2} - p^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C-5)$$

$$D = 2(\mu_{wz} - \mu). \quad (C-6)$$

$v_\alpha^{wz}$  et  $v_\beta^{wz}$  sont soit réels purs positif, soit imaginaires purs à parties imaginaires négatives.

Les expressions des différentes matrices sont

- $[I]$  : matrice identité

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (C-7)$$

- $[E_{wz}]$  : matrice de phase de la couche

$$[E_{wz}] = \begin{bmatrix} \exp(-jv_{\alpha}^{wz} z_l) & 0 \\ 0 & \exp(-jv_{\beta}^{wz} z_l) \end{bmatrix}. \quad (C-8)$$

- $[R_l^u]$  et  $[T_l^u]$  : matrice des coefficients de réflexion et de transmission en ondes planes à l'interface  $z = z_l$  pour une onde plane montante

$$[R_l^u] = \begin{bmatrix} R_{lPP}^u & R_{lSP}^u \\ R_{lPS}^u & R_{lSS}^u \end{bmatrix}$$

$$R_{lPP}^u = \frac{D^u - D_{wz}^u}{D^u + D_{wz}^u}$$

$$R_{lPS}^u = \frac{2pp_{\alpha}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 - \rho_{wz} + \rho)(Dp^2 - \rho_{wz}) + D(Dp^2 + \rho)p_{\alpha}^{wz} p_{\beta}^{wz} \right), \quad (C-9)$$

$$R_{lSP}^u = -\frac{2pp_{\beta}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 - \rho_{wz} + \rho)(Dp^2 - \rho_{wz}) + D(Dp^2 + \rho)p_{\alpha}^{wz} p_{\beta}^{wz} \right)$$

$$R_{lSS}^u = \frac{D^u - D_{wz}^u - 2\rho_{wz}\rho(p_{\alpha}p_{\beta}^{wz} - p_{\alpha}^{wz}p_{\beta})}{D^u + D_{wz}^u}$$

$$[T_l^u] = \begin{bmatrix} T_{lPP}^u & T_{lSP}^u \\ T_{lPS}^u & T_{lSS}^u \end{bmatrix}$$

$$T_{lPP}^u = \frac{2\rho p_{\alpha}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 + \rho)p_{\beta}^{wz} - (Dp^2 - \rho_{wz})p_{\beta} \right)$$

$$T_{lPS}^u = -\frac{2\rho p p_{\alpha}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 - \rho_{wz} + \rho + Dp_{\alpha}^{wz} p_{\beta}) \right)$$

$$T_{lSP}^u = \frac{2\rho p p_{\beta}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 - \rho_{wz} + \rho + Dp_{\beta}^{wz} p_{\alpha}) \right)$$

$$T_{lSS}^u = \frac{2\rho p_{\beta}}{D^u + D_{wz}^u} \left( (Dp^2 + \rho)p_{\alpha}^{wz} - (Dp^2 - \rho_{wz})p_{\alpha} \right)$$

$$D^u = D^2 p^2 p_{\alpha}^{wz} p_{\alpha} p_{\beta}^{wz} p_{\beta} + (Dp^2 - \rho_{wz})^2 p_{\alpha} p_{\beta} + \rho_{wz} \rho p_{\alpha} p_{\beta}^{wz}, \quad (C-10)$$

$$D_{wz}^u = (Dp^2 - \rho_{wz} + \rho)^2 p^2 + (Dp^2 + \rho)^2 p_{\alpha}^{wz} p_{\beta}^{wz} + \rho_{wz} \rho p_{\alpha}^{wz} p_{\beta}, \quad (C-11)$$

- $[R_l^d]$  et  $[T_l^d]$ : matrice des coefficients de réflexion et de transmission en ondes planes à l'interface  $z = z_l$  pour une onde plane montante

$$[R_l^d] = \begin{bmatrix} R_{lPP}^d & R_{lSP}^d \\ R_{lPS}^d & R_{lSS}^d \end{bmatrix}$$

$$R_{lPP}^d = \frac{D^d - D_{WZ}^d}{D^d + D_{WZ}^d}$$

$$R_{lPS}^d = -\frac{2pp_\alpha^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} \left( (Dp^2 - \rho_{WZ} + \rho)(Dp^2 + \rho) + D(Dp^2 - \rho_{WZ})p_\alpha p_\beta \right), \quad (C-12)$$

$$R_{lSP}^d = \frac{2pp_\beta^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} \left( (Dp^2 - \rho_{WZ} + \rho)(Dp^2 + \rho) + D(Dp^2 - \rho_{WZ})p_\alpha p_\beta \right)$$

$$R_{lSS}^d = \frac{D^d - D_{WZ}^d - 2\rho_{WZ}\rho(p_\alpha^{WZ}p_\beta - p_\alpha p_\beta^{WZ})}{D^d + D_{WZ}^d}$$

$$[T_l^d] = \begin{bmatrix} T_{lPP}^d & T_{lSP}^d \\ T_{lPS}^d & T_{lSS}^d \end{bmatrix}$$

$$T_{lPP}^d = \frac{2\rho_{WZ}p_\alpha^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} \left( (Dp^2 + \rho)p_\beta^{WZ} - (Dp^2 - \rho_{WZ})p_\beta \right)$$

$$T_{lPS}^d = -\frac{2\rho_{WZ}pp_\alpha^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} (Dp^2 - \rho_{WZ} + \rho + Dp_\alpha p_\beta^{WZ}) \quad (C-13)$$

$$T_{lSP}^d = \frac{2\rho_{WZ}pp_\beta^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} (Dp^2 - \rho_{WZ} + \rho + Dp_\alpha^{WZ} p_\beta)$$

$$T_{lSS}^d = \frac{2\rho_{WZ}p_\beta^{WZ}}{D^d + D_{WZ}^d} \left( (Dp^2 + \rho)p_\alpha^{WZ} - (Dp^2 - \rho_{WZ})p_\alpha \right)$$

$$D^d = D^2 p^2 p_\alpha^{WZ} p_\alpha p_\beta^{WZ} p_\beta + (Dp^2 + \rho)^2 p_\alpha^{WZ} p_\beta^{WZ} + \rho_{WZ}\rho p_\alpha^{WZ} p_\beta, \quad (C-14)$$

$$D_{WZ}^d = (Dp^2 - \rho_{WZ} + \rho)^2 p^2 + (Dp^2 - \rho_{WZ})^2 p_\alpha p_\beta + \rho_{WZ}\rho p_\alpha p_\beta^{WZ}, \quad (C-15)$$

- $[R_0^u]$  : matrice des coefficients de réflexion en ondes planes à la surface libre pour une onde plane montante

$$[R_0^u] = \begin{bmatrix} R_{0PP}^u & R_{0SP}^u \\ R_{0PS}^u & R_{0SS}^u \end{bmatrix}$$

$$R_{0PP}^u = \frac{(p^2 - (p_\beta^{WZ})^2)^2 - 4p^2 p_\alpha^{WZ} p_\beta^{WZ}}{(p^2 - (p_\beta^{WZ})^2)^2 + 4p^2 p_\alpha^{WZ} p_\beta^{WZ}}$$

$$R_{0PS}^u = \frac{4pp_\alpha((p_\beta^{WZ})^2 - p^2)}{(p^2 - (p_\beta^{WZ})^2)^2 + 4p^2 p_\alpha^{WZ} p_\beta^{WZ}} \quad (C-16)$$

$$R_{0SP}^u = -\frac{4pp_\beta((p_\beta^{WZ})^2 - p^2)}{(p^2 - (p_\beta^{WZ})^2)^2 + 4p^2 p_\alpha^{WZ} p_\beta^{WZ}}$$

$$R_{0SS}^u = R_{0PP}^u$$

## Annexe D :

### Validation de la mise en oeuvre numérique de la méthode de Cagniard De Hoop

Sur toutes les courbes issues de la référence [Johnson, 1974] :

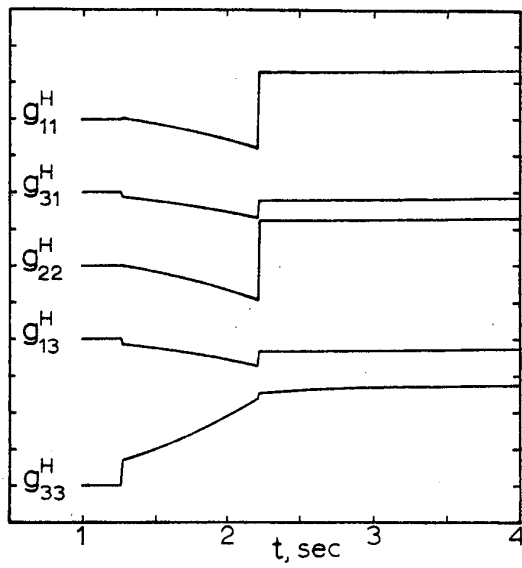
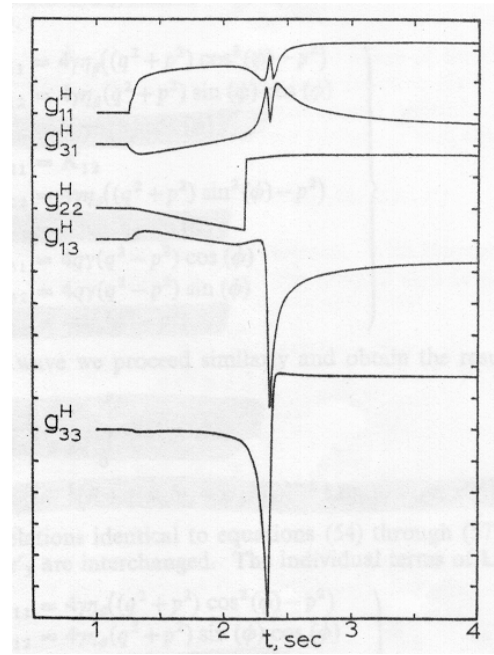
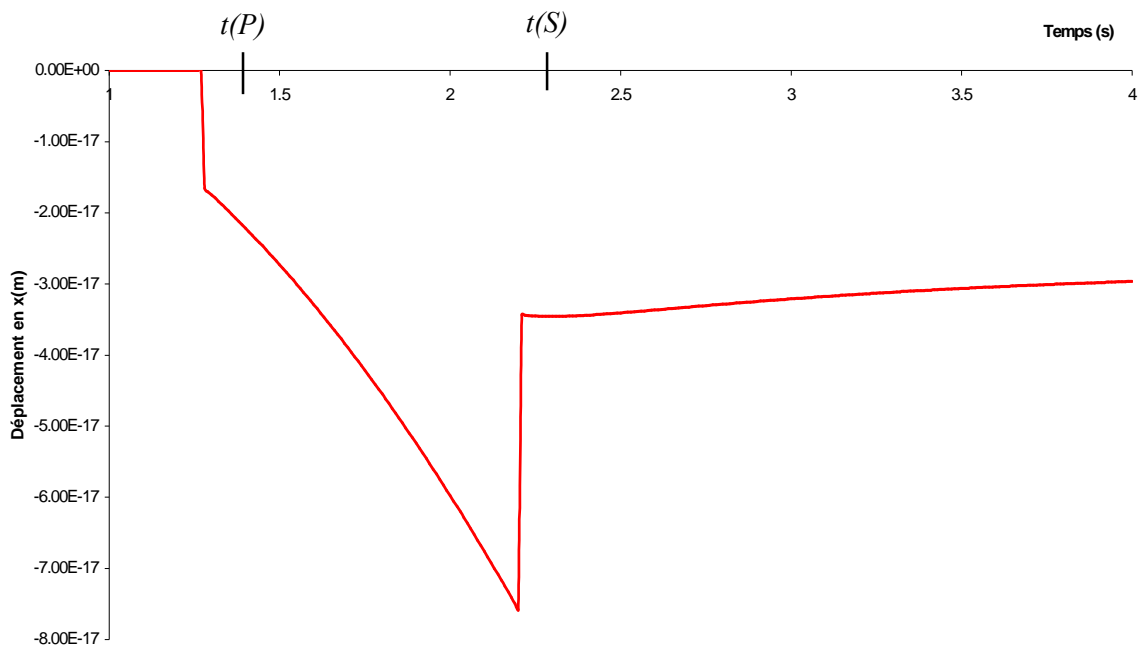
- les composantes  $g_{i3}^H(x, y, z; t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) correspondent aux composantes de  $\mathbf{G}^{F_H}(x, y, z; t)$
- une division sur l'échelle verticale correspond à  $10^{-19} \text{ cm}$ ,
- les coordonnées  $(x', y', z')$  du point d'application de la force et  $(x, y, z)$  du récepteur sont exprimées en  $km$ ,
- $\alpha = 8000 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\beta = 4620 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho = 3300 \text{ kg.m}^{-3}$ .

#### D.1 La solution en un point de la surface libre

Les figures D-1a (respectivement D-1b) présentent les composantes non nulles de  $\mathbf{G}^{F_H}(x, y, z; t)$  pour  $\mathbf{M}' = (0, 0, 10)$  et  $\mathbf{M} = (2, 0, 0)$  (respectivement  $\mathbf{M}' = (0, 0, 0.2)$  et  $\mathbf{M} = (10, 0, 0)$ ) d'après [Johnson, 1974]. Les figures D-2 et D-3 (respectivement D-4 et D-5) présentent le résultat du calcul numérique des composantes  $\mathbf{G}_x^{F_H}(2, 0, 0; t)$  et  $\mathbf{G}_z^{F_H}(2, 0, 0; t)$  (respectivement des composantes  $\mathbf{G}_x^{F_H}(10, 0, 0; t)$  et  $\mathbf{G}_z^{F_H}(10, 0, 0; t)$ ) pour  $\mathbf{M}' = (0, 0, 10)$  (respectivement pour  $\mathbf{M}' = (0, 0, 0.2)$ ). Il y a un excellent accord entre le résultat des calculs et ceux présentés par Johnson [Johnson, 1974].

Dans la géométrie source/récepteur de la figure D-1a ( $\mathbf{M}' = (0, 0, 10)$  et  $\mathbf{M} = (2, 0, 0)$ ), le rapport entre le déport et la profondeur de la source est égal à 0.2, donc faible. La fonction de Green est donc constituée principalement des ondes P et S directes auxquelles s'ajoutent des termes de champ proche.

Dans la géométrie source/récepteur de la figure D-1b ( $\mathbf{M}' = (0, 0, 10)$  et  $\mathbf{M} = (2, 0, 0)$ ), le rapport entre le déport et la profondeur de la source est égal à 50, donc très élevé. L'onde P directe, de très faible amplitude, est immédiatement suivie de l'onde de tête SPS d'amplitude plus importante. L'onde de Rayleigh a une amplitude importante et les courbes montrent la forme classique associée au champ lointain de cette onde dans un demi-espace uniforme.

(a)  $M' = (0, 0, 10)$  et  $M = (2, 0, 0)$ (b)  $M' = (0, 0, 0.2)$  et  $M = (10, 0, 0)$ Figure D-1 : composantes de la fonction de Green  $G^{F_H}(M; t)$  (Johnson, 1974)Figure D-2 : composante  $G_x^{F_H}(2, 0, 0; t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 10)$

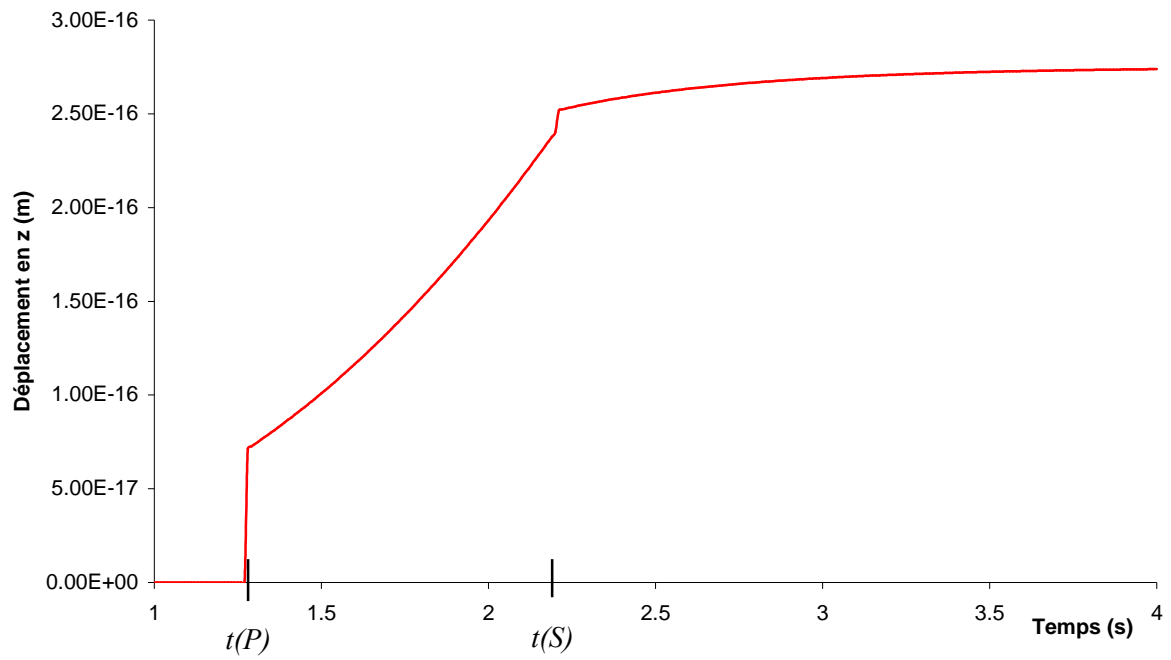


Figure D-3 : composante  $G_z^F(2,0,0;t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 10)$

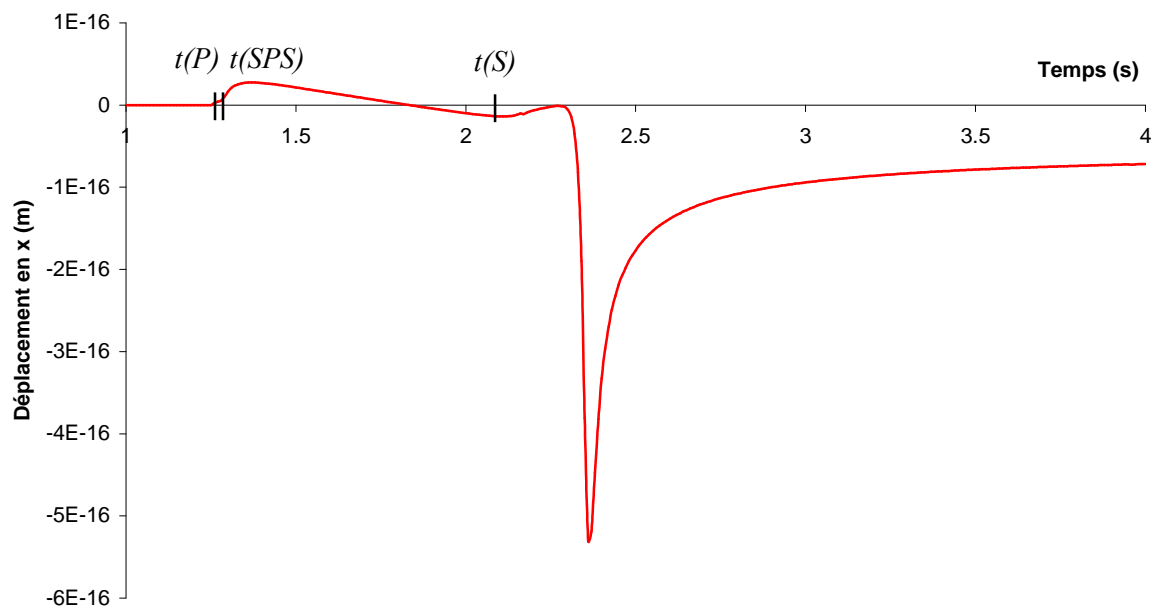


Figure D-4 : composante  $G_x^F(10,0,0;t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 0.2)$

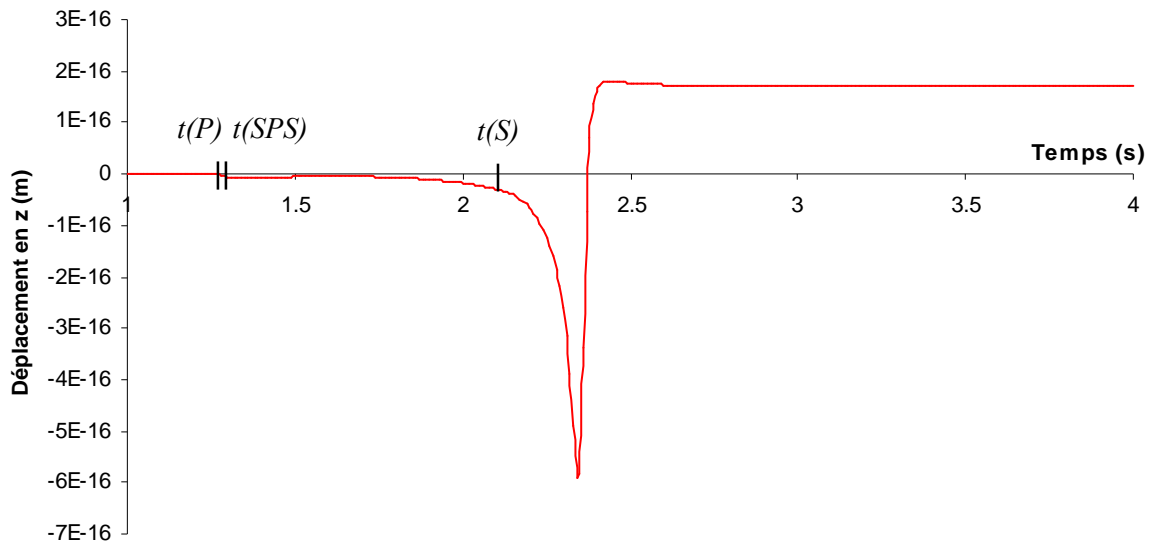


Figure D-5 : composante  $G_z^{Fu}(10,0,0;t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 0.2)$

## D.2 La solution en un point du demi-espace

La figure D-6 présente les composantes non nulles de  $G^{Fu}(x,y,z;t)$  pour  $M' = (0, 0, 2)$  et  $M = (10, 0, 1)$  d'après [Johnson, 1974].

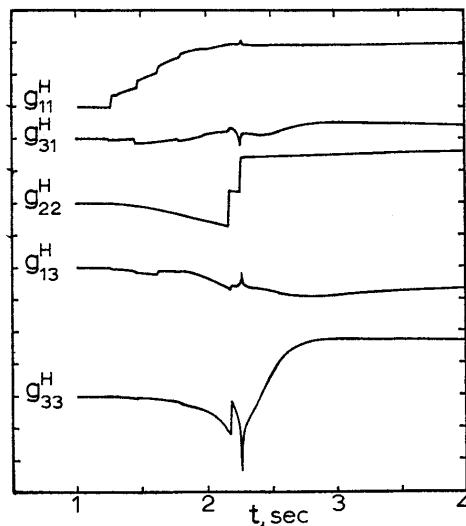


Figure D-6 : composantes de la fonction de Green  $G^{Fu}(10,0,1;t)$  pour  $M' = (0, 0, 2)$   
(Johnson, 1974)

Les figures D-7 et D-8 présentent le résultat du calcul numérique des composantes  $G_x^{Fu}(10,0,1;t)$  et  $G_z^{Fu}(10,0,1;t)$  pour  $M' = (0, 0, 2)$ .



Il y a un excellent accord entre le résultat des calculs et ceux présentés par Johnson [Johnson, 1974].

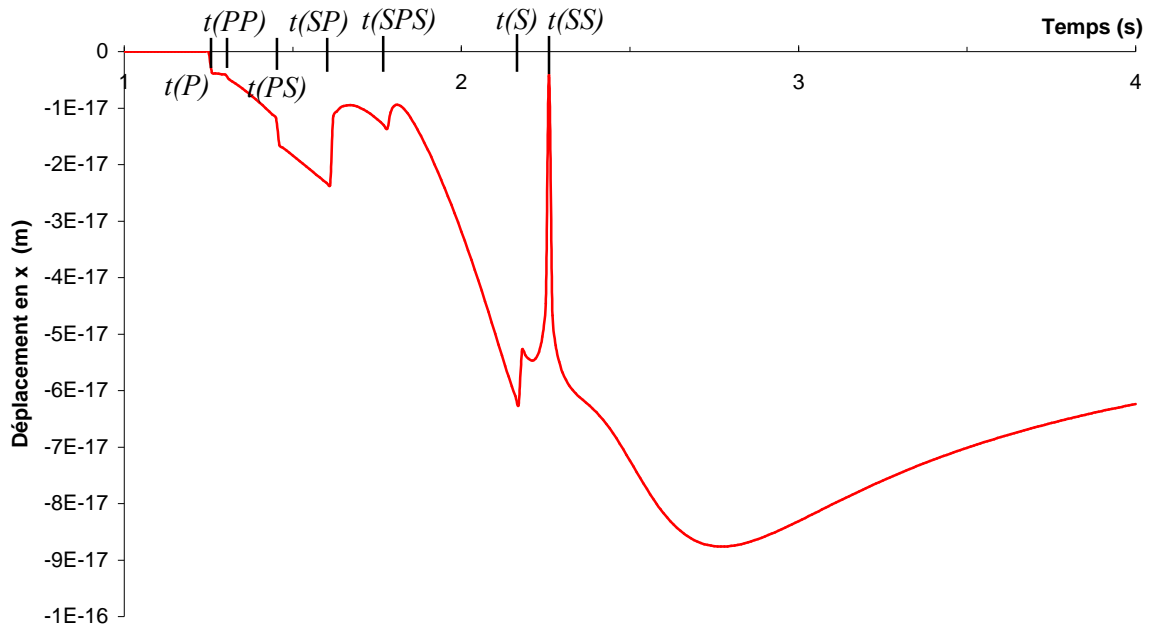


Figure D-7 : composante  $G_x^{F_H}(10,0,1;t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 2)$

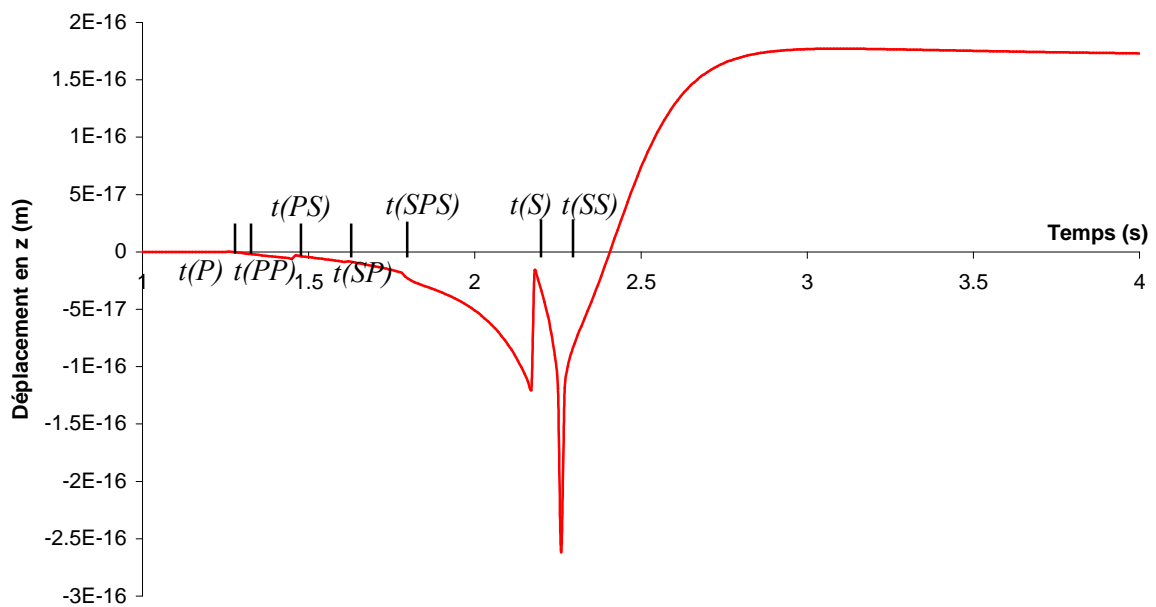


Figure D-8 : composante  $G_z^{F_H}(10,0,1;t)$  calculée pour  $M' = (0, 0, 2)$

## Annexe E :

### Équations constitutives de la piézoélectricité

#### Relations constitutives pour un matériau piézoélectrique

Dans un matériau piézoélectrique, les tenseurs de déformations  $\overline{\overline{\tilde{S}}}$  et des contraintes  $\overline{\overline{\tilde{\sigma}}}$  ainsi que les vecteurs champ électrique  $\tilde{E}$  et excitation électrique  $\tilde{D}$  sont liés par quatre couples équivalents de relations constitutives. En choisissant  $\overline{\overline{\tilde{S}}}$  et  $\overline{\overline{\tilde{\sigma}}}$  comme variables indépendantes les équations s'écrivent :

$$\overline{\overline{\tilde{\sigma}}} = \overline{\overline{c^E}} : \overline{\overline{\tilde{S}}} - \overline{e} \cdot \tilde{E}, \quad (\text{E-1})$$

$$\tilde{D} = \overline{e} : \overline{\overline{\tilde{S}}} - \overline{\overline{\varepsilon^S}} \cdot \tilde{E}, \quad (\text{E-2})$$

où  $\overline{\overline{c^E}}$  est le tenseur de rigidité à champ électrique constant (tenseur d'ordre 4),  $\overline{e}$  le tenseur piézoélectrique (tenseur d'ordre 3) et  $\overline{\overline{\varepsilon^S}}$  le tenseur diélectrique à déformation constante (tenseur d'ordre 2). Les propriétés remarquables des tenseurs  $\overline{\overline{\tilde{S}}}$  et  $\overline{\overline{\tilde{\sigma}}}$  permettent de condenser leurs notations sous forme de vecteurs à six composantes. Le système précédent devient alors :

$$\tilde{\sigma} = \overline{\overline{c^E}} \cdot \tilde{S} - \overline{e} \cdot \tilde{E}, \quad (\text{E-3})$$

$$\tilde{D} = \overline{e} \cdot \tilde{S} - \overline{\overline{\varepsilon^S}} \cdot \tilde{E}, \quad (\text{E-4})$$

où  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{e}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  sont maintenant écrits sous une forme matricielle.

En choisissant  $\overline{\overline{\tilde{S}}}$  et  $\tilde{D}$  comme variables indépendantes, le système précédent est remplacé par

$$\tilde{\sigma} = \overline{\overline{c^D}} : \overline{\overline{\tilde{S}}} - \overline{h} \cdot \tilde{D}, \quad (\text{E-5})$$

$$\tilde{E} = -\overline{h} : \overline{\overline{\tilde{S}}} + \overline{\overline{\beta^S}} \cdot \tilde{D}, \quad (\text{E-6})$$

En choisissant  $\overline{\overline{\tilde{\sigma}}}$  et  $\tilde{E}$  comme variables indépendantes, les équations (E-1) et (E-2) deviennent

$$\overline{\overline{\tilde{S}}} = \overline{\overline{s^E}} : \overline{\overline{\tilde{\sigma}}} + \overline{d} \cdot \tilde{E}, \quad (\text{E-7})$$

$$\tilde{D} = \overline{d} : \overline{\overline{\tilde{\sigma}}} + \overline{\overline{\varepsilon^T}} \cdot \tilde{E}. \quad (\text{E-8})$$

## Annexe F :

### Présentation du code éléments finis ATILA

#### F.1 Méthode des éléments finis

A l'intérieur de chaque élément fini, les variables champ de déplacement, potentiel électrique ou champ de pression sont définies de manière unique par les valeurs qu'elles prennent aux nœuds de l'élément. Cette définition est assurée à l'aide de fonctions d'interpolation. Cette annexe présente les fonctions d'interpolation utilisées dans les éléments du code ATILA, ainsi que la formulation des différents tenseurs qui en découlent.

##### F.1.1 Fonctions d'interpolation

Considérons un élément triangulaire dont les trois sommets sont les trois nœuds et  $\{\tilde{\Psi}^e\}$  le vecteur des valeurs nodales du potentiel électrique sur ces trois nœuds. A partir de ces valeurs et des coordonnées des sommets, il est possible d'exprimer la valeur de  $\tilde{\Psi}$  par une interpolation linéaire

$$\tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \tilde{\Psi}_i^e, \quad (\text{F-1})$$

dont les coefficients  $N_i^e$ , appelés fonctions d'interpolation ou de pondération, sont représentés à la figure F-1. Ces fonctions sont des polynômes en  $x$  et en  $y$  dont les neuf coefficients constants (3x3) sont définis par la relation

$$N_i^e(x_i, y_i) = \delta_{ij}, \quad (\text{F-2})$$

où les indices  $i$  et  $j$  varient de 1 à 3. Pour ce même élément, le champ de déplacement  $\tilde{\mathbf{u}}$  s'écrit

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 [N_i^e(x, y)] \{\tilde{U}_i^e\}, \quad (\text{F-3})$$

où  $\{\tilde{U}_i^e\}$  est le vecteur des valeurs nodales de  $\tilde{\mathbf{u}}$  et

$$[N_i^e(x, y)] = \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 \\ 0 & N_i^e & 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 & N_i^e & 0 \\ 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 & N_i^e \end{bmatrix}. \quad (\text{F-4})$$

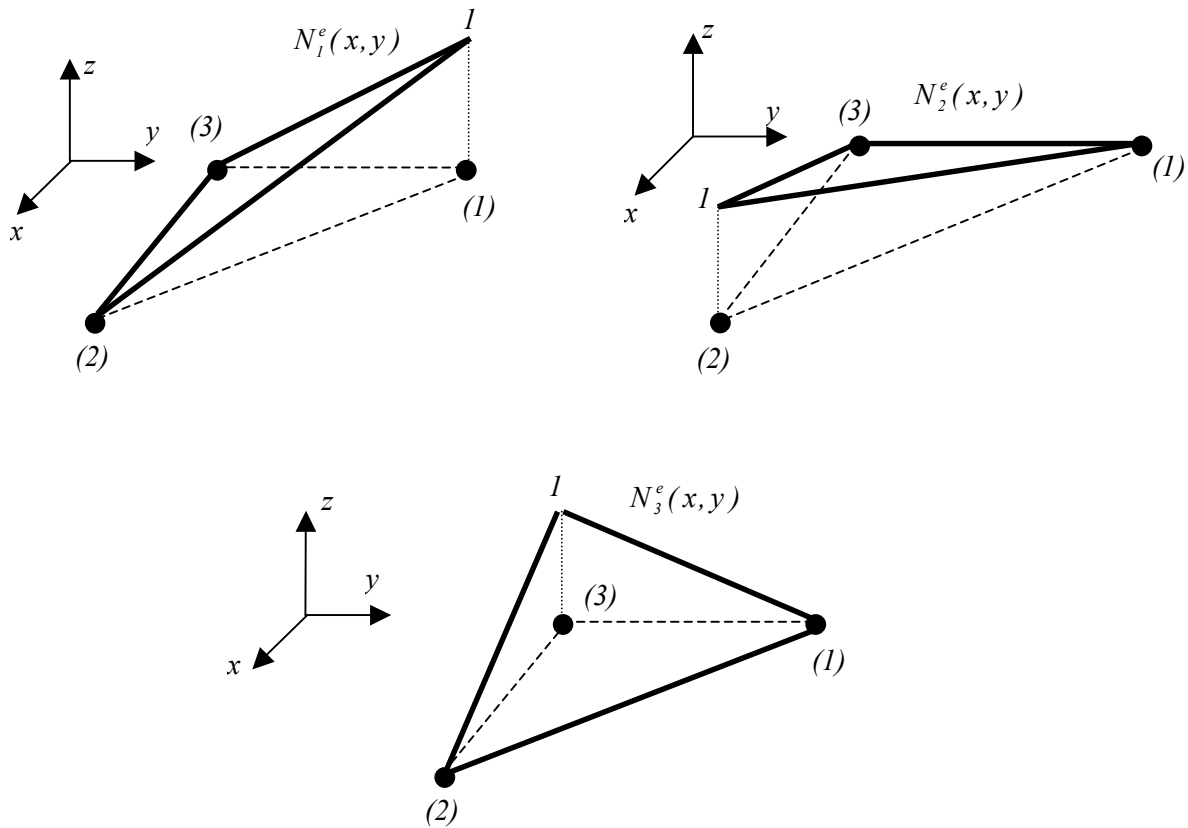


Figure F-1 : fonctions d'interpolation dans un triangle à trois noeuds

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins sont des nœuds, les relations précédentes restent valables à condition de faire varier les indices  $i$  et  $j$  de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur (figure F-2).

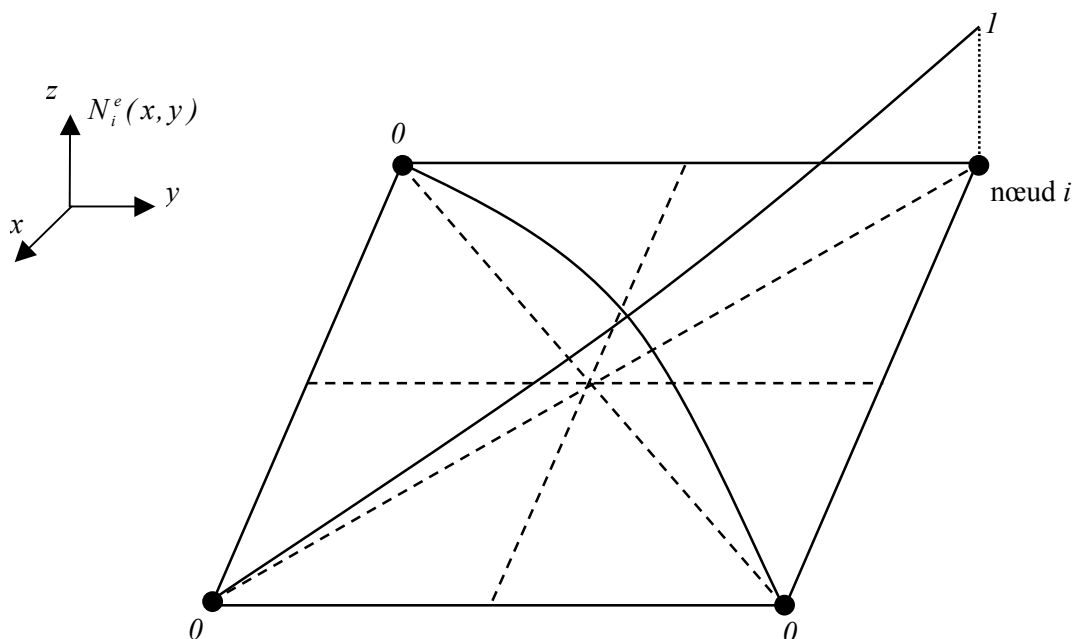


Figure F-2 : fonctions d'interpolation dans un quadrilatère à quatre noeuds

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des quatre côtés sont les huit nœuds, les relations précédentes restent valables en faisant varier les indices  $i$  et  $j$  de 1 à 8. Cette fois, les fonctions d'interpolation deviennent quadratiques sur les côtés (figure F-3). Cette procédure est évidemment généralisable à des interpolations d'ordre plus élevé ou à des éléments tridimensionnels. Tous les détails peuvent être trouvés dans la référence [Zienkiewicz, 1979].

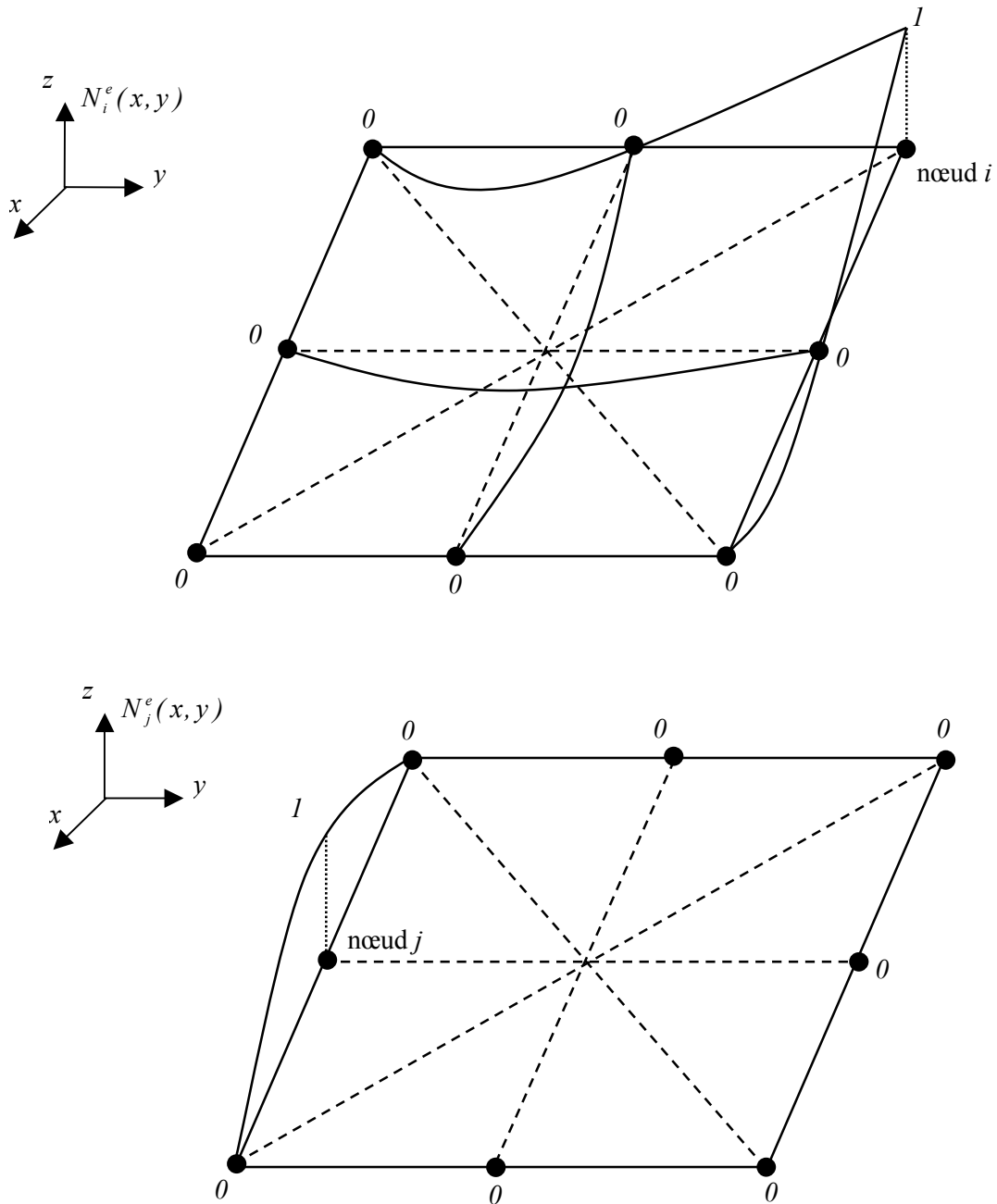


Figure F-3 : fonctions d'interpolation dans un quadrilatère à huit noeuds

### F.1.2 Formulation des différents tenseurs

Dans le cas d'un problème bidimensionnel avec symétrie de révolution, le champ électrique s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad} \tilde{\Psi} . \quad (\text{F-5})$$

ou encore pour un élément  $e$  à  $p$  nœuds,

$$\tilde{\mathbf{E}}^e = -\mathbf{grad} [N_1^e \quad \dots \quad N_p^e] \{ \tilde{\Psi}^e \} . \quad (\text{F-6})$$

En posant :

$$\{ B_i^e \} = \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\}^T \quad (\text{F-7})$$

et

$$[ B^e ] = [ \{ B_i^e \} \quad \dots \quad \{ B_p^e \} ] , \quad (\text{F-8})$$

le champ électrique peut s'écrire:

$$\tilde{\mathbf{E}} = -[ B^e ] \{ \tilde{\Psi}^e \} \quad (\text{F-9})$$

Pour les déformations, en utilisant la notation à six composantes, il vient

$$\tilde{\mathbf{S}}^e = [ B^e ] \{ \tilde{U}^e \} , \quad (\text{F-10})$$

où  $[ B^e ]$  est donnée par (F-8),  $[ B_i^e ]$  étant cette fois une matrice donnée par

$$[ B_i^e ] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial z} & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{F-11})$$

Dès lors, les relations constitutives de la piézoélectricité s'écrivent dans l'élément sous la forme

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{=}{\mathbf{c}}^E . \tilde{\mathbf{S}} - \overset{=}{\mathbf{e}} . \tilde{\mathbf{E}} , \quad (\text{F-12})$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \overset{=}{\mathbf{e}} . \tilde{\mathbf{S}} - \overset{=}{\boldsymbol{\varepsilon}}^S . \tilde{\mathbf{E}} , \quad (\text{F-13})$$

où  $\overset{=}{\mathbf{c}}^E$  est le tenseur de rigidité condensé à champ électrique constant,  $\overset{=}{\mathbf{e}}$  le tenseur piézoélectrique condensé et  $\overset{=}{\boldsymbol{\varepsilon}}^S$  le tenseur diélectrique condensé à déformation constante (Annexe E).

---

## F.2 Présentation des éléments de la bibliothèques du code ATILA

Les éléments du code ATILA sont, en majorité, des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique [Zienkiewicz, 1979] qui permettent une description simple de surfaces courbes. Pour ces éléments, il est nécessaire de distinguer le repère local, le repère global et le repère réduit. Les coordonnées des nœuds du maillage sont exprimées dans le repère global. Le repère local est un repère intermédiaire attaché à l'élément considéré. Le repère réduit est utilisé pour calculer les intégrales relatives aux vecteurs et matrices élémentaires à l'aide d'une technique numérique dite de quadrature de Gauss. Le repère local se déduit du repère global à l'aide d'une matrice de rotation. La transformation des coordonnées des nœuds du repère réduit au repère local est réalisée à l'aide d'une transformation ponctuelle utilisant les fonctions d'interpolation. Les éléments disponibles dans le code peuvent être à deux ou trois dimensions et de formes variées. Seuls les éléments utilisés dans ce travail sont répertoriés ci après :

### *Eléments mécaniques*

Ces éléments peuvent décrire le comportement de structures élastiques isotropes. Ils peuvent être bidimensionnel (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds ) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 nœuds, prisme à 15 nœuds, ou hexaèdre à 20 nœuds). Les éléments à deux dimensions permettent des analyses en contraintes planes, déformations planes ou symétrie axiale.

### *Eléments piézoélectriques*

Ces éléments décrivent des structures constituées d'un matériau piézoélectrique. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 nœuds, prisme à 15 nœuds, ou hexaèdre à 20 nœuds). Les éléments à deux dimensions permettent des analyses en déformations planes ou symétrie axiale. Tout type de matériau, quel que soit son tenseur représentatif, peut être décrit.

### *Eléments d'impédance mécanique*

Ces éléments surfaiques sont simplement attachés aux éléments finis volumiques sur la frontière extérieure du domaine, afin de présenter une condition aux limites qui impose une impédance mécanique complexe. Ils peuvent être unidimensionnels (élément linéique à 3 nœuds) ou bidimensionnels (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds).

## Annexe G :

### Détails de calcul sur la méthode itérative

#### G.1 Expressions du champ de contraintes

##### G.1.1 En coordonnées cylindriques

La loi de comportement en milieu homogène isotrope (loi de Hooke) fournit alors l'expression du champ de contraintes ; ainsi dans le système des coordonnées locales cylindriques ( $M, r, \varphi, z$ ), les composantes non nulles du champ de contraintes sont

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \lambda \tilde{\mathfrak{K}} + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad (\text{G-1})$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \lambda \tilde{\mathfrak{K}} + 2\mu \frac{\tilde{u}_r}{r}, \quad (\text{G-2})$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \lambda \tilde{\mathfrak{K}} + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, \quad (\text{G-3})$$

$$\tilde{\sigma}_{rz} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} \right), \quad (\text{G-4})$$

$$\tilde{\mathfrak{K}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r}, \quad (\text{G-5})$$

##### G.1.2 En coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées locales sphériques ( $M, R, \theta, \varphi$ ), les composantes non nulles du champ de contraintes sont

$$\tilde{\sigma}_{RR} = \lambda \tilde{\Theta} + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_R}{\partial R}, \quad (\text{G-6})$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \lambda \tilde{\Theta} + 2\mu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_R}{R} \right) \quad (\text{G-7})$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \lambda \tilde{\Theta} + 2\mu \left( \frac{\tilde{u}_\theta}{R} \cot \theta + \frac{\tilde{u}_R}{R} \right) \quad (\text{G-8})$$

$$\tilde{\sigma}_{R\theta} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_R}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\theta}{R} \right) \quad (\text{G-9})$$

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \tilde{u}_R \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R \tilde{u}_\theta \sin \theta) \right\} \quad (\text{G-10})$$



## G.2 Détermination des coefficients $b_l^M$ à partir des coefficients $c_l^M$

L'inversion directe de (III-57) donne

$$b_{l+1}^M = -\frac{2n+3}{k_\beta} c_l^M - \frac{2n+3}{2n-1} b_{l-1}^M. \quad (\text{G-10})$$

Soit  $N$  le nombre de coefficients  $c_l^M$  calculés ; (G-10) implique d'une part qu'il n'est possible de calculer les coefficients  $b_l^M$  que pour  $l$  variant de  $1$  à  $N-1$ , et d'autre part qu'il faut poser

$$b_{N+1}^M = b_N^M = 0. \quad (\text{G-11})$$

L'équation (G-11) est physiquement acceptable dans le sens où la série infinie donnant le potentiel  $\tilde{\zeta}_M$  doit converger ; ainsi, à partir d'un certain rang, les termes de cette série peuvent être négligés.

## G.3 Expression des potentiels $\tilde{\Phi}_{2M}$ et $\tilde{\zeta}_{2M}$ sous forme d'une intégrale de Sommerfeld

Il a été démontré que [Van Der Pol, 1936 - Ederlyi, 1937]

$$h_l^{(1,2)}(k_{\alpha,\beta} R) P_l(\cos \theta) = j^{-l} P_l\left(\frac{\partial}{\partial i k_{\alpha,\beta} z}\right) h_0^{(1,2)}(k_{\alpha,\beta} R) \quad (\text{G-12})$$

où  $h_l^{(1,2)}(z)$  est la fonction de Hankel sphérique d'indice  $n$  de première ou de seconde espèce. La représentation de  $h_l^{(1,2)}(z)$  sous forme d'une intégrale de Sommerfeld est [Abramovitz, 1972]

$$h_n^{(2)}(k_{\alpha,\beta} R) = -\frac{j}{k_{\alpha,\beta}} \int_0^{+\infty} \exp(-jv_{\alpha,\beta}|Z|) \frac{J_0(kr)}{v_{\alpha,\beta}} k dk \quad (\text{G-13})$$

$J_0$  étant la fonction cylindrique de Bessel d'indice zéro. Introduisant (G-12) et (G-13) dans (III-54) et (III-55),  $\tilde{\Phi}_{2M}$  et  $\tilde{\zeta}_{2M}$  s'écrivent pour  $Z < 0$

$$\tilde{\Phi}_{2M} = \int_0^{+\infty} \exp(jZv_\alpha) \frac{J_0(kr)}{v_\alpha} \Phi(2M) k dk, \quad (\text{G-14})$$

$$\tilde{\zeta}_{2M} = \int_0^{+\infty} \exp(jZv_\beta) \frac{J_0(kr)}{v_\beta} \zeta(2M) k dk, \quad (\text{G-15})$$

avec

$$\Phi(2M) = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} j^n a_n^{2M} P_n\left(j \frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right), \quad (\text{G-16})$$

$$\zeta(2M) = \frac{1}{k_\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} j^n b_n^{2M} P_n\left(j \frac{v_\beta}{k_\beta}\right). \quad (\text{G-17})$$

#### G.4 Expression des potentiels $\tilde{\Phi}_{2M+1}$ et $\tilde{\zeta}_{2M+1}$ sous forme de séries

Les expressions (III-71) et (III-72) sont transformées en écrivant  $z = Z+h$  et en utilisant la propriété [Morse et Feshbach, 1963]

$$\exp(-v_{\alpha,\beta}Z)J_0(kr) = \sum_{q=0}^{+\infty} p_q(k_{\alpha,\beta})j_q(k_{\alpha,\beta}R)P_q(\cos\theta) \quad (R \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (\text{G-18})$$

$$p_q(k_{\alpha,\beta}) = (2q+1)j^q P_q\left(-\frac{v_{\alpha,\beta}}{k_{\alpha,\beta}}\right) \quad (\text{G-19})$$

Intervertissant les signes de sommation et le signe intégral, les expressions de  $\tilde{\Phi}_{2M+1}$  et  $\tilde{\zeta}_{2M+1}$  sous forme de séries sont obtenues (équations (III-77) et (III-78)). Dans ces expressions, les coefficients  $a_q^{2M+1}$  et  $b_q^{2M+1}$  sont donnés par

$$a_q^{2M+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ j^q (2q+1) \int_0^{+\infty} \frac{j^{n+1} \exp(-j h v_\alpha)}{k_\alpha v_\alpha} R_{PP}(k) P_n\left(-\frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right) P_q\left(-\frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right) k dk \right] a_n^{2m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ j^q (2q+1) \int_0^{+\infty} \frac{j^{n+1} \exp(-j h v_\alpha)}{k_\beta v_\alpha} T_{SP}(k) P_n\left(-\frac{v_\beta}{k_\beta}\right) P_q\left(-\frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right) k dk \right] b_n^{2m}, \quad (\text{G-20})$$

$$b_q^{2M+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ j^q (2q+1) \int_0^{+\infty} \frac{j^{n+1} \exp(-j h v_\beta)}{k_\alpha v_\beta} T_{PS}(k) P_n\left(-\frac{v_\alpha}{k_\alpha}\right) P_q\left(-\frac{v_\beta}{k_\alpha}\right) k dk \right] a_n^{2m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ j^q (2q+1) \int_0^{+\infty} \frac{j^{n+1} \exp(-j h v_\beta)}{k_\beta v_\beta} R_{SS}(k) P_n\left(-\frac{v_\beta}{k_\beta}\right) P_q\left(-\frac{v_\beta}{k_\alpha}\right) k dk \right] b_n^{2m}. \quad (\text{G-21})$$

Dans (G-20) et (G-21), les coefficients  $R_{PP}(k)$ ,  $R_{SS}(k)$ ,  $T_{PS}(k)$  et  $T_{SP}(k)$  sont donnés par

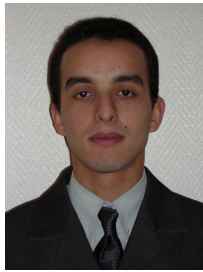
$$R_{PP}(k) = -\frac{(2k^2 - k_\beta^2)^2 + 4k^2 v_\alpha v_\beta \exp(-j v_\alpha h)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta}, \quad (\text{G-22})$$

$$R_{SS}(k) = -\frac{(2k^2 - k_\beta^2)^2 + 4k^2 v_1 v_2 \exp(-j v_\beta h)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta}, \quad (\text{G-23})$$

$$T_{SP}(k) = \frac{4k^2 v_\alpha (2k^2 - k_\beta^2)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-j v_\beta h), \quad (\text{G-24})$$

$$T_{PS}(k) = \frac{4v_\beta (2k^2 - k_\beta^2)}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 v_\alpha v_\beta} \exp(-j v_\alpha h), \quad (\text{G-25})$$

où  $h$  est la profondeur de la cavité.



## Madjid BERRAKI

26 ans

Célibataire

Nationalité française

✉ 39 rue de Loos  
59000 LILLE  
FRANCE

] 03 20 30 40 50 (44 11) (Bur.)  
06 61 19 52 47 (Mob.)

@ madjid.berraki@isen.fr  
madjid.berraki@laposte.net

# Docteur en Mécanique

## Expérience professionnelle

### ▪ Octobre 2001 - Novembre 2004

#### **Chercheur sous contrat C.I.F.R.E**

*Institut Français du Pétrole (I.F.P.) - division géophysique - Rueil-Malmaison*  
*Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie (I.E.M.N.), département Institut Supérieur d'Électronique et de Numérique (I.S.E.N.), U.M.R. C.N.R.S. 8520 - Lille*

- Objectif : conception d'une source sismique innovante pour l'industrie pétrolière
- Application : amélioration de la productivité des puits de pétrole
- Collaboration entre recherche fondamentale (I.E.M.N. - I.S.E.N.) et industrie (I.F.P.)
- Modélisation mathématique et physique d'un nouveau type de source sismique
  - ✓ Développement d'une méthode numérique permettant de modéliser le rayonnement d'une source idéale directionnelle dans un demi-espace stratifié
  - ✓ Conception d'un logiciel couplé avec le code éléments finis ATILA (développé à l'I.E.M.N. - I.S.E.N.) permettant de modéliser des sources piézoélectriques enterrées
- Travail présenté à plusieurs congrès français, européens et internationaux

### ▪ Mars 2001 - Septembre 2001

#### **Stage de D. E. A.**

*I.F.P. / I.E.M.N. - I.S.E.N.*

- Étude de la faisabilité de sources piézoélectriques pour la prospection pétrolière
- Initiation à la recherche dans un cadre industriel (géophysique, acoustique)
  - Acquis en calcul scientifique (maîtrise du code éléments finis ATILA)

## Compétences

### **Langue anglaise**

- Lue couramment, niveau avancé à l'écrit et à l'oral (score TOEIC en Juin 2003 : 875 / 990)
- Rédaction d'articles scientifiques

### **Informatique**

- Maîtrise des systèmes d'exploitation Windows, Mac OS, Unix, Linux
- Programmation en Fortran et Matlab
- Utilisateur avancé des logiciels de bureautique et de traitement de l'image

### **Organisation d'un Workshop (tenu à l' I.S.E.N le 13 Novembre 2003)**

«The Cagniard De Hoop method, a powerful tool for various physical problems»

- Gestion du budget accordé par la Société Française d'Acoustique (S. F. A.)
- Préparation du programme scientifique, prise en charge des participants (20)
- Présence d'un chercheur de renom (A.T. de Hoop, Université de Delft, Pays-Bas)

### **Enseignement (depuis 2002)**

- Travaux dirigés d'informatique : Encadrement de 23 élèves ingénieurs I.S.E.N. de 1<sup>ère</sup> année

## Formation (Université des Sciences et Technologies de Lille)

- 2004 Thèse en mécanique (soutenue le 24 / 11 / 2004, mention très honorable, félicitations du jury)
- 2000 D.E.A. de mécanique, option mécanique des solides, mention Très Bien
- 1999 Licence et Maîtrise de mécanique, mention Bien

## Informations complémentaires

### *Milieu associatif*

- Aide aux devoirs à la mairie de quartier de Lille Wazemmes
- Membre de la Société Française d'Acoustique depuis Octobre 2001

### *Formation aux métiers du secteur pétrolier*

- Économie pétrolière (Septembre 2004)
- Forage - Production - Gisement (Juin 2003)
- Analyse de bassin et exploration pétrolière (Septembre 2002)

### *Emplois occupés pendant les études*

Livreur (société Pizza Paï , 2001), Laveur de vitres (société ONEPI, 2001), Baby-sitter (1999), Barman (1998)

### *Loisirs*

Tennis (pratiqué in club), Littérature classique, Théâtre, Histoire contemporaine

## Présentations orales et publications

### *Congrès*

- 148<sup>th</sup> meeting of the Acoustical Society of America (A. S. A.), 15-19 Novembre 2004, San Diego, Californie, ÉTATS-UNIS
- 74<sup>th</sup> meeting of the Society of Exploration Geophysicists, 05-10 Octobre 2004, Denver, Colorado, ÉTATS-UNIS
- VII<sup>ème</sup> congrès français d'acoustique - 30. deutsche Jahrestagung für Akustik, 22-25 Mars 2004, Strasbourg, FRANCE
- Anglo-French physical acoustic conference '04, 14-16 Janvier 2004, Wye, ANGLETERRE
- Journées du Groupe de Recherche sur les ultrasons, 8-12 Décembre 2003, Aussois, FRANCE « Étude de la propagation ultrasonore en milieu inhomogènes en vue du contrôle non destructif »
- European Association of Geoscientist and Engineers, 02-05 Juin 2003, Stavanger NORVÈGE
- VIII<sup>ème</sup> Journées d'acoustique physique, sous-marine et ultrasonore, 26-28 Mars 2003, Cargèse, FRANCE
- Anglo-French physical acoustic conference '02, 10-13 Décembre 2002, Wissant, FRANCE

### *Publications*

- «Theoretical analysis of a buried directional source for 4D seismic monitoring»  
article soumis à la revue *Wave Motion*

## Référents

- Bertrand Dubus (directeur de thèse), directeur de recherche C.N.R.S I.E.M.N., Lille, France  
*bertrand.dubus@isen.fr*
- Axelle Baroni, Patrick Meynier (responsables de thèse), Ingénieurs de recherche, I.F.P., Rueil Malmaison, France - *axelle.baroni@ifp.fr / patrick.meynier@ifp.fr*
- Raúl Madariaga (rapporteur de thèse), directeur du laboratoire de géologie de l'Ecole Normale Supérieure, Paris, France - *madariag@geologie.ens.fr*
- Adrianus T. de Hoop (examineur), Professeur émérite, Université de Delft, Pays - Bas  
*a.t.deHoop@ewi.tudelft.nl*
- Michel Bouchon, directeur de recherche C.N.R.S., Université Joseph Fourier, Grenoble, France - *Michel.Bouchon@obs.ujf-grenoble.fr*

## **Étude théorique et modélisation d'une source piézoélectrique enterrée unidirectionnelle pour applications sismiques**

Un problème commun de l'acquisition en sismique 4D et de l'imagerie des zones de piémont, est celui de la reproductibilité du signal source. En effet, d'une part, le principe du monitoring est de détecter des variations infimes au niveau du réservoir via des comparaisons de données sismiques ; d'autre part, l'imagerie des zones au relief chaotique requiert un signal peu perturbé.

Aujourd'hui, les sources sismiques classiques, posées en surface, n'assurent pas cette reproductibilité. En premier lieu, il est impossible d'assurer à chaque acquisition un repositionnement de la source (camion vibreur) au même endroit. De plus, au voisinage de la surface du sol, il existe une zone d'une dizaine de mètres d'épaisseur, appelée la zone altérée (Weathered Zone en anglais notée WZ), constituée d'un milieu dont les propriétés mécaniques varient avec les conditions climatiques. Ainsi, un signal émis par la source traversant cette zone peut être modifié par des variations climatiques ; il n'est donc pas reproductible. L'évolution des enregistrements effectués au niveau des récepteurs n'est pas attribuable uniquement aux variations dans le réservoir.

La solution proposée dans cette thèse est la conception une source enterrée unidirectionnelle. La première partie expose un principe de source unidirectionnelle. Il s'agit de la combinaison, en milieu infini et en champ lointain, de forces ponctuelles dont les amplitudes complexes sont ajustées. La seconde partie décrit le rayonnement de la source unidirectionnelle idéale en milieu réel. Le modèle développé repose sur la détermination de la fonction de Green du milieu semi-infini, soit par méthode de Cagniard De Hoop (demi-espace), soit par méthode Réflexivité/DWN (milieu semi-infini stratifié).

Un transducteur piézoélectrique unidirectionnel enterré, est modélisé dans la troisième partie. Le code éléments finis ATILA est utilisé pour modéliser la source piézoélectrique. Le milieu extérieur est représenté par sa matrice d'impédance, calculée soit par méthode itérative (demi-espace), soit par le code éléments de frontière MISSAXI (milieu semi-infini stratifié).

## **Theoretical study and numerical modelling of a buried directional piezoelectric source for seismic applications**

A problem arising in both 4D seismic acquisition and foothills imaging is the repeatability of the source signal. On the one hand, 4d seismic principle is to measure infinitesimal variations in the reservoir via the comparison of seismic data; on the other hand, foothills imaging requires a smooth signal.

Presently, classical seismic surface sources don't succeed in meeting the repeatability requirement. Firstly, the source location may vary from one acquisition to the other. Some more, directly beneath the surface, a zone lies, which mechanical properties vary with weather; thus depending on the weather, emitted signals crossing this zone may be modified and the observed difference may not be associated to a reservoir variation.

To eliminate this perturbation, the proposed solution is the conception of a buried directional source.

The first part expounds a directional source principle. It consists in the combination of point forces which complex amplitudes are adjusted in an infinite medium and in the far field.

The second part describes the radiation of the directional source in actual media. The modelling lies on the calculation of the Green's function for the semi-infinite medium, using either the Cagniard De Hoop method (case of the half space) or the Reflectivity/DWN method (case of the layered half space).

The modelling of a buried directional piezoelectric transducer is developed in the third part. The finite element code ATILA is used to model the piezoelectric source ; the neighbouring environment is described by its impedance matrix, calculated using either the iterative method (case of the half space) or the boundary element code MISSAXI (case of the layered half space).