UNIVERSITE LILLE I
UFR CUEEP

Mathématiques de proximité en formation d'adultes.

Thèse de doctorat en Sciences de l'Education

présentée par Jean-Noël GERS

le 4 février 2004

directeur de thèse :
Daniel Poisson, professeur à LilleI

rapporteurs :
Raymond Duval, professeur émérite
Gérard Vergnaud, professeur à Paris VIII

examinateurs :
Marie-Alix Girodet, maître de conférence à Paris V
Dominique Lanthier-Reuter, maître de conférence à LilleIII

UNIVERSITE LILLE I
UFR CUEEP

Mathématiques de proximité en formation d'adultes.

Thèse de doctorat en Sciences de l'Education

présentée par Jean-Noël GERS

le 4 février 2004

directeur de thèse :
Daniel Poisson, professeur à LilleI

rapporteurs :
Raymond Duval, professeur émérite
Gérard Vergnaud, professeur à Paris VIII

examinateurs :
Marie-Alix Girodet, maître de conférence à Paris V
Dominique Lanthier-Reuter, maître de conférence à LilleIII

Je remercie

Daniel, mon directeur de thèse, pour la souplesse de sa direction,

Gérard Vergnaud, pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ma recherche et l'amélioration qu'il m'a permis d'apporter à la rédaction de cette thèse,

mes collègues du département mathématiques, pour le soutien qu'ils m'ont accordé pendant plusieurs années,

et tous les adultes qui se sont aventurés en formation avec moi, pour leur bonne humeur et le plaisir de travailler ensemble…

Sommaire

Introduction

Le siècle dernier a vu se produire des progrès décisifs dans l'étude du développement cognitif, sous l'impulsion de grandes figures comme Vygotski et Piaget. Ces progrès ont pourtant surtout concerné le développement cognitif de l'enfant : comme le souligne Gérard Vergnaud (1999, p.189), *« longtemps, la perspective développementale n'a été considérée comme pertinente que pour les enfants et les adolescents. Aujourd'hui encore, les travaux qui portent sur l'adulte sont d'une extrême rareté. »*.

Ces travaux, bien que peu nombreux, montrent cependant que le développement cognitif se poursuit pendant l'âge adulte ; certaines études mettent en évidence le développement de *« compétences critiques »* [1] par des opérateurs de production ; d'autres le développement de la conceptualisation et de l'argumentation chez des syndicalistes[2]... Il apparaît bien que *« le développement des compétences concerne toute la vie »*[3]. Ce développement *« s'appuie sur trois sources principales : la formation initiale, l'expérience, la formation continue »*[4].

L'interaction entre formation continue et développement cognitif est encore mal connue. Les recherches concernent surtout le public de faible niveau scolaire. Mais alors que la formation professionnelle de ce public se développe et suscite des recherches en didactique et en psychologie cognitive, comme dans l'opération Quadrature[5], sa formation générale se réduit souvent à un entraînement cognitif dont la pertinence est très discutée : l'évaluation par l'équipe de l'I.N.E.T.O.P[6] de la méthode P.E.I[7], est plutôt sévère[8].

En son temps, Vygotski (1934, pp.254-258) a pourtant défendu avec ardeur et courage le rôle des disciplines formelles dans le développement cognitif. Je partage cette conviction et cet engagement : l'enseignement des mathématiques comme discipline formelle peut selon moi contribuer efficacement au développement cognitif des adultes de faible niveau scolaire. Mes travaux prolongent ceux de Jean-Pierre Leclere (2001) : *« Faire faire des mathématiques à des adultes illettrés : le contraire d'une utopie »*. Ils concernent un public plus avancé que celui auquel il s'est intéressé.

---

[1] Vergnaud (1999) pp.190-191.
[2] Vilar de Melo (1999)
[3] Vergnaud (1999) p.202
[4] ibid. p.202
[5] Ginsbourger (1992)
[6] Institut National d'Etude du Travail et d'Orientation Professionnelle
[7] Programme d'Enrichissement Instrumental
[8] Pacteau (1992)

Ce public est composé d'adultes de la formation de base désireux d'accéder à des formations qualifiantes de niveau V voire IV. Dans les années 90, ce public a rapidement grossi mais a connu aussi beaucoup d'échecs. Manifestement l'obtention du C.F.G [9], qui était à l'époque le critère d'une formation de base achevée, ne constituait pas un passeport pour une formation qualifiante. Etant alors responsable du département mathématique du C.U.E.E.P[10], j'ai entrepris, à l'appel de mes collègues, de m'attaquer à ce problème.

Le département avait en effet l'expérience d'une transition réussie entre les niveaux V et IV : l'expérimentation[11] dans les années 80 des C.A.P.U.C[12] et de l'E.S.E.U[13] par unités capitalisables nous avait permis de mettre en place une stratégie de formation cohérente sur l'ensemble de ces deux niveaux. Cette stratégie de formation aux mathématiques[14] est centrée sur les personnes, en particulier sur une validation des acquis au service de la formation. Elle est issue d'une interaction étroite entre enseignement et recherche[15].

L'application de cette stratégie en formation de base m'a conduit à remettre en cause l'objet même de l'enseignement du calcul : le calcul décimal me paraissait en effet un objectif trop lointain pour une large partie des adultes. Par contre, en formalisant leur savoir faire quotidien, il était possible de construire avec eux une théorie alternative. Ce savoir théorique, issu d'une pratique spontanée, pouvait leur servir, aussi bien de substitut du savoir académique que d'un tremplin pour y accéder, s'ils le désiraient. De là m'est venue l'idée de théorie mathématique de proximité. Cette notion, en rapport avec le concept de proche développement de Vygotski, est au centre de ma thèse. Elle se situe aux antipodes de la remédiation cognitive : plutôt que d'administrer aux adultes des remèdes cognitifs, je procède, avec eux, à une nouvelle médiation, à une re-médiation, de la connaissance académique.

Mon propos dans cette thèse est de constituer la notion de théorie de proximité en concept scientifique. Il s'inscrit dans le cadre théorique de Vygotski d'un double point de vue : du fait des concepts auxquels il se réfère, mais aussi en raison du processus de conceptualisation que je mets en œuvre : en effet, la notion de théorie de proximité sous jacente à mon enseignement peut être vue comme un concept spontané, et mon travail de thèse peut-être considéré comme l'élaboration d'un concept scientifique qui formalise ce concept spontané.

---

[9] Certificat de Formation Générale

[10] Centre Université Economie d'Education Permanente

[11] le C.U.E.E.P a pu s'investir sur ces deux chantiers du fait de son statut universitaire d'une part , et d'autre part du fait de son implication sur les terrains des A.C.F (Actions Collectives de Formation) de Roubaix, Tourcoing et Sallaumines.

[12] Certificats d'Aptitude Professionnelle par Unités Capitalisables

[13] Examen Spécial d'Entrée à l'Université

[14] D'Halluin, Poisson (1988)

[15] Le département a participé activement à la création en 1986 d'un laboratoire de recherche associé au C.U.E.E.P, le laboratoire Formation, Technologies Nouvelles, Développement (Laboratoire Trigone).

J'aurai en conséquence une double personnalité dans la suite de cet écrit : en tant que formateur d'une part, pratiquant du concept spontané de théorie de proximité et en tant que chercheur d'autre part, analyste de cette pratique et en charge de sa formalisation. Dans le premier cas j'utiliserai le « je » personnel du praticien engagé sur le terrain, dans le second cas le « nous » collectif de la démarche réflexive d'une communauté scientifique.

Ce travail de recherche s'est effectué dans un « paysage pédagogique » bien décrit par Astolfi (1998), au sein d'une communauté de pratique et de pensée qui en détermine largement la nature et la forme.

La communauté de pratique est celle du département mathématiques du C.U.E.E.P, un microorganisme de formation continue entraîné à construire des enseignements « sur mesure », que ce soit pour répondre à la commande des entreprises ou à l'appel des pouvoirs publics : il est rare en effet que ces mandants expriment de façon précise une demande de formation en mathématiques : nous avons toujours dû sélectionner nous-mêmes dans les mathématiques ce qu'il était pertinent d'enseigner ou pas pour répondre aux besoins de nos usagers ou de nos clients (Gers, Losfelt, Poisson 1981, Gers, Poisson 1982).

La communauté de pensée est celle du laboratoire Trigone dont certaines recherches sont tout particulièrement dirigées vers l'auto formation, les formations ouvertes (Carré, Clenet, D'Halluin, Poisson 1999), l'alternance (Clenet 2003), la motivation (Carré 1998, 1999) ainsi que les environnements interactifs d'apprentissage (Gers 1984, 1993)... Ces recherches placent l'apprenant au centre du dispositif de formation et portent une attention particulière au public, à ses caractéristiques, à ses besoins.

Le souci du « sur mesure » nous a conduit à mettre systématiquement en cause les dispositifs, les méthodes, et les contenus traditionnels de la formation, jusqu'à atteindre le savoir lui-même dans sa forme et sa structure. C'est ainsi que nous en sommes venus, à réorganiser la matière à enseigner en fonction du public à qui elle était destinée, à la structurer en formes inédites : les théories de proximité. Ces théories sont de mini théories mathématiques construites à partir d'objets et d'opérations mathématiques sélectionnés pour leur proximité supposée avec le public.

Le concept de théorie de proximité est donc issu d'une démarche pragmatique. Nous avons longtemps construit et utilisé des théories de proximité dans nos formations sans avoir conscience de le faire. C'est seulement au cours de l'avancement de ce travail de recherche que le concept a émergé : il a pris forme au fur et à mesure de l'explicitation de nos pratiques. Du coup, la nature même de cette recherche changeait : d'une recherche action elle évoluait vers une recherche à caractère plus fondamental dont l'objectif devenait la définition et l'étude du concept de théorie de proximité.

La lecture de Vygotski a joué un rôle décisif dans cette évolution. J'ai trouvé chez cet auteur une connivence de pensée motivante et des concepts adéquats à la formalisation de nos pratiques. Il est, au départ, ma seule référence théorique. Bien que de nombreuses recherches[16] aient été menées depuis plusieurs décennies sur l'acquisition des concepts du calcul de base par les enfants et les adolescents, j'ai préféré ne pas approfondir la connaissance, très parcellaire, que j'en avais ; je ne voulais pas me laisser influencer par les résultats de ces études, je voulais garder un regard neuf sur la question pour mieux discerner, le cas échéant, un phénomène cognitif propre aux adultes.. Je ne me suis intéressé à ces études que dans un deuxième temps, une fois explicité l'essentiel de mes idées.

Le plan de ma thèse rend compte de cette démarche.

Dans le premier chapitre, j'expose les raisons qui m'ont conduit à développer et à enseigner une théorie alternative du calcul en formation de base : le calcul sur les grandeurs. Je décris ce calcul, je montre sa légitimité mathématique et son accord avec les pratiques spontanées des adultes.

Dans le deuxième chapitre je considère le calcul sur les grandeurs comme le prototype d'un concept : le concept de théorie de proximité ; je définis ce concept dans le cadre de la théorie de l'activité de Vygotski. J'étudie son caractère opérationnel à partir d'un corpus d'écrits produits par des adultes en formation au C.U.E.E.P de Tourcoing.

Dans le troisième chapitre je mets le concept de théorie de proximité à l'épreuve de quelques théories fondatrices de la didactique : théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1983, 1985, 1988, 1990), théorie des situations didactiques (Brousseau 1986, 1998), théorie de la transposition didactique (Chevallard 1991). Cet examen fait apparaître quelques propriétés caractéristiques d'une théorie de proximité, utiles à sa reconnaissance.

Dans le dernier chapitre je m'intéresse à l'étendue du concept : le concept de théorie de proximité concerne-t-il d'autres domaines et d'autres publics que ceux de la formation de base ? De nombreux indices donnent à penser que oui : entre autres candidats, le public du D.A.E.U[17] et des domaines comme le calcul différentiel et intégral ou la théorie des tests.

[16] Jean-Pierre Levain (1994) fait un état intéressant de la question.
[17] Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires, anciennement nommé Examen Spécial d'Entrée à l'Université (E.S.E.U).

Chapitre I : quel calcul de base enseigner aux adultes ?

Introduction

A l'école comme au collège, l'objet du calcul est le nombre (entier, décimal ou rationnel). En formation d'adultes j'ai été conduit à faire un autre choix. Ce choix est fondé sur mes observations des pratiques de calcul des adultes ; il a eu d'importantes conséquences sur mon enseignement, que j'analyse en me référant à la théorie de l'activité de Vygotski.

Dans ce chapitre, je montre d'abord la nécessité d'une théorie mathématique de référence pour l'enseignement du calcul de base (§1). Je fais ensuite état de la distance qui existe entre le concept de nombre décimal et l'usage commun du calcul de base ; je mets en évidence le rôle de la notion de grandeur dans cet usage, et les questions que pose sa théorisation en formation de base (§2).

Je présente alors, en alternative au calcul académique fondé sur le nombre décimal, un calcul fondé sur le concept de grandeur : la théorie du calcul entier sur les grandeurs (§3). Cette théorie développe un traitement additif des situations de proportionnalité entre grandeurs qui s'accorde assez bien avec les pratiques spontanées des adultes dans ce domaine (§4).

La théorie du calcul entier sur les grandeurs se prolonge naturellement en une théorie du calcul décimal sur les grandeurs (§5). J'en fais un exposé formel (§6) et je montre qu'elle constitue un cadre favorable à l'introduction du concept de nombre décimal (§7).

1. Nécessité d'une théorie mathématique de référence.

Le calcul de base n'est pas si simple qu'il y paraît à première vue. Et il y a loin du « savoir-faire les opérations » à la compréhension de leur sens et à leur emploi judicieux dans la résolution des problèmes. Un système conceptuel complexe sous tend notre bon vieux calcul décimal et ses quatre opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Pour qu'un adulte parvienne à la maîtrise de ces opérations, il doit prendre conscience des concepts qui leurs sont liés et parvenir à les formaliser. J'ai fait l'hypothèse qu'il avait besoin pour cela d'une théorie mathématique de référence. Les études de Vygotski sur les rapports entre développement et apprentissage confirment, me semble-t-il, cette hypothèse d'action.

1.1 Concepts et langages du calcul.

La pensée prend forme par le langage, et les mots prennent sens dans l'expression d'une pensée. Vygotski situe la naissance du sens dans cette articulation entre pensée et langage. Il estime qu'une pensée n'existe sous forme aboutie que lorsqu'elle réussit à s'exprimer par des mots. Et, en retour, les mots ne trouvent une signification définitive que saisis dans le contexte d'un acte de parole. Plus précisément, Vygotski distingue deux sortes de concepts : les concepts spontanés et les concepts scientifiques.

La caractéristique des concepts spontanés est d'être opératoires et non conscients – ce qui ne veut pas dire inconscients –. Ce sont des concepts que nous mettons en œuvre dans l'action de façon consciente, mais sans les reconnaître en tant que tels, sans savoir ni les nommer ni les relier à un savoir théorique. La caractéristique des concepts scientifiques est, au contraire, d'être formulés et d'être organisés en systèmes. Un concept scientifique possède un nom et est défini à l'aide d'autres concepts scientifiques au sein d'un système conceptuel. On peut savoir définir un concept scientifique sans pour autant savoir l'utiliser.

Selon Vygotski, le sens naît du rapprochement que nous pouvons faire entre ces deux types de concepts : soit que nous réussissions à identifier dans notre action spontanée un concept scientifique, soit que nous réussissions à mettre en œuvre un concept scientifique dans notre action. Ce rapprochement n'est pas immédiat.

Vygotski a constaté par exemple que de jeunes enfants russes de cinq ou six ans savent décliner correctement les substantifs russes lorsqu'ils s'expriment spontanément, mais sont incapables de réciter la déclinaison d'un substantif isolé de son contexte. Ces enfants possèdent un concept spontané de déclinaison, mais n'ont pas de concept scientifique de déclinaison. A l'inverse, Vygotski remarque que des enfants de treize à quatorze ans sont capable d'énoncer correctement le principe d'Archimède sur la flottaison des corps, mais que bien peu sont en mesure de l'appliquer dans une situation concrète. Ces enfants ont appris un concept scientifique, mais ce concept n'est pas opératoire[18].

De même, en formation de base, il arrive de rencontrer des adultes ignorant la soustraction, et qui pourtant savent rendre la monnaie correctement et rapidement. Ces personnes possèdent un concept spontané de soustraction, mais n'en ont pas de concept scientifique. A l'inverse on trouve des adultes qui savent utiliser la division pour partager 500F entre 17 personnes, mais pas pour compter combien de paquets de cigarettes à 17F ils peuvent acheter avec cette somme. Ils ont un concept scientifique de division. Mais celui-ci n'est pas totalement opératoire.

[18] Beaucoup d'adultes, bien qu'instruits du principe d'Archimède, pensent que la fonte de la banquise ferait monter le niveau des océans.

Les concepts du calcul s'expriment à l'aide de langages multiples : les langages courants avec des variantes d'un pays à l'autre (notamment dans l'expression des nombres[19]), mais aussi des langages propres, et en premier lieu l'écriture de position des nombres, avec ses chiffres, sa virgule et sa syntaxe. Vient ensuite le langage des opérations avec ses symboles (+ - × ÷ ...), ses noms (addition, somme, soustraction, différence, multiplication, produit...)[20], et ses algorithmes...(les opérations « posées »). Enfin, aux frontières du calcul de base, on aborde le langage des fractions (la moitié, le tiers, le pourcentage..) et celui des formules algébriques (la fameuse formule de l'aire du rectangle...).

L'aptitude à manier les langages (courants ou mathématiques) favorise, selon Vygotski, la formation des concepts ; elle n'est pas pour autant le gage de leur présence. Par exemple, l'exécution d'un algorithme est une performance langagière. Elle n'est pas forcément révélatrice d'un concept. J'ai connu, jeune moniteur d'alphabétisation, un stagiaire qui savait exécuter les divisions à la main, mais n'avait aucune idée de leur emploi pour résoudre un problème. Il connaissait un algorithme de division mais n'avait pas de concept de division. A l'inverse, il est possible de posséder un concept de division, sans connaître d'algorithme de cette opération. C'est le cas de Micheline[21] qui a inventé elle-même un algorithme pour diviser 135 par 5 :

135 | 5

1	2	3	4	5
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
5	5	5	5	5
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

50
50
100
25
125
5
130
5
135

[19] Girodet (1996)

[20] Sans oublier la variété très grande de déclinaisons de ces mots dans les situations problèmes ; pour la seule opération de soustraction on relève les substantifs « baisse », « rabais », « ristourne », « diminution », « remise », « réduction », le verbe « ôter » ...

[21] Le corpus des productions sera défini au deuxième chapitre : il s'agit de tests de contrôle interne réalisés en séances de formation. La production de Micheline n'y figure pas : elle a été réalisée avant formation.

Ces observations rejoignent celles de Brousseau (1998, p.119) en milieu scolaire : *« (la) séparation entre mécanismes (des opérations) et raisonnement n'est ni nécessaire, ni même utile… Si les conditions l'exigent, l'élève peut lui-même résumer en « automatismes » des activités complexes… Mais pour que ces automatismes puissent être utilisés, il faut qu'ils soient mis en place par le sujet lui-même. »*

Un enseignement du calcul de base ne doit donc pas se donner comme objectif l'acquisition du « savoir faire les opérations » mais bien se centrer sur la compréhension des concepts liés à ces opérations.

1.2 Le cas de la division.

Examinons plus avant les concepts du calcul de base dans le cas de la division : le mot « division » correspond à plusieurs concepts spontanés, à plusieurs concepts scientifiques, et à plusieurs algorithmes différents.

Il existe en effet deux concepts spontanés différents de division : le partage et le mesurage. Inutile d'insister sur ce qu'est un partage, si ce n'est pour préciser que nous l'entendons au sens d'un partage en parts égales. Quiconque sait réaliser un partage possède un concept spontané de division. Nous dirons qu'il possède un concept spontané de partage, pour préciser dans quel type de situation ce concept spontané de division se manifeste. Mais il existe un autre concept spontané de division : le concept spontané de mesurage. J'appelle mesurage l'action de compter combien de fois une grandeur est contenue dans une autre. Par exemple combien de sacs de pommes de terre de 3kg on peut remplir avec un sac de 50kg, combien il faut de canettes de 33cl pour vider un tonnelet de 50ℓ, combien de minutes à 4,20F on achète avec une carte prépayée à 150F...Quiconque sait effectuer de tels mesurages possède un concept spontané de division. Nous dirons qu'il possède un concept spontané de mesurage. Il est fréquent en formation de base de trouver des adultes qui n'associent pas la division au mesurage alors qu'ils l'associent au partage. Bell, Fischbein et Greer (1984) font une observation analogue, soulignant que les enfants réussissent mieux les problèmes de « partition » que les problèmes de « quotition »[22].

Il existe également deux concepts scientifiques différents de division des nombres : la division euclidienne et la division décimale. La division euclidienne fournit un quotient entier et un reste entier : par exemple, le quotient euclidien de 9876 par 43 est 229 et le reste 29. Cette division est rarement implantée dans les calculettes ; on la trouve cependant dans les calculettes de type « collège » de certaines marques. La division décimale fournit un quotient décimal à l'ordre que l'on veut. Par exemple, le quotient décimal de 9876 par 43 à l'ordre 2 est 229,67 . Cette division est toujours disponible sur les calculettes[23].

Il existe aussi plusieurs algorithmes de division : la division euclidienne de deux nombres entiers peut être réalisée aussi bien par l'algorithme de division à la « française » que par l'algorithme de division à la « russe »[24].

---

[22] Le terme « quotition » est synonyme de « mesurage ». Concernant des grandeurs, je préfère ce dernier terme, car il s'agit bien de mesurer une grandeur en prenant une grandeur plus petite comme unité. Un mesurage produit une mesure, un partage produit des parts.

[23] Avec la réserve que l'ordre de la division effectuée par la machine n'est pas fixe ; c'est le nombre de chiffres significatifs du résultat qui est fixe, du moins tant que l'affichage ne bascule pas en notation scientifique.

[24] Cet algorithme était aussi utilisé dans l'Egypte ancienne.

Voici le calcul du quotient euclidien de 9876 par 43 par chacun de ces algorithmes :

$$\begin{array}{r|l} 9876 & 43 \\ \cline{2-2} 127 & 229 \\ 416 & \\ 29 & \end{array}$$

1	43
~~2~~	~~86~~
4	172
~~8~~	~~344~~
~~16~~	~~688~~
32	1376
64	2752
128	5504
229	9847

Dans l'algorithme à la « russe » on calcule les doubles successifs de 43 sans dépasser 9876. Puis, à partir du bas, on ajoute toutes les lignes qui peuvent l'être, toujours sans dépasser 9876 : on prend les trois lignes du bas parce que 5504 + 2752 + 1376 = 9632 < 9876, mais on barre la ligne suivante parce que 9632 + 688 = 10320 > 9876, et ainsi de suite... Le quotient apparaît en bas à gauche. L'algorithme à la « russe » est moins concis que l'algorithme à la « française », mais il ne nécessite pas la connaissance des tables de multiplication, ni la technique de la soustraction.

L'algorithme de division à la « russe » construit deux colonnes de nombres proportionnelles : il met ainsi particulièrement en évidence le fait que les opérations de multiplication et de division engagent le concept de proportionnalité.

L'analyse que nous venons de mener de la division est loin d'épuiser le sujet. Elle a seulement pour but de situer les concepts de Vygotski dans le contexte du calcul de base et de montrer leur pertinence dans ce domaine d'activité.

1.3 Développement et apprentissage.

Selon Vygotski (1934, pp.254-258), les concepts spontanés et les concepts scientifiques évoluent selon des cours différents, des temporalités différentes, et des lois différentes. Mais il y a interaction entre le développement des concepts spontanés et l'apprentissage des concepts scientifiques. Au delà du fait, largement admis avant lui, que l'on ne peut apprendre un concept scientifique donné sans une maturation suffisante de certains concepts spontanés, il a établi que l'apprentissage des concepts scientifiques pouvait accélérer la maturation des concepts spontanés en « les tirant vers le haut ». Selon lui, un enseignement efficace doit porter sur les concepts en voie de développement, il doit se situer dans ce qu'il appelle la « zone de proche développement » et viser une formulation et une théorisation de ces concepts.

De nombreuses recherches ont étudié le développement des concepts du calcul de base chez l'enfant et l'adolescent. Elles ont mis en lumière l'abondance et la complexité des concepts qui se trouvent impliqués dans ce développement, en particulier les concepts de proportionnalité et de grandeur. Les liens entre tous ces concepts sont patiemment tissés au fil de la scolarité, mais **ils ne se constituent en un réseau bien structuré de concepts scientifiques que tardivement avec la construction du concept de nombre rationnel**. Kieren (1975) et, à sa suite, beaucoup d'autres auteurs, Behr (1983,1988), Freudenthal (1983), Vergnaud (1983,1988), soulignent la structure « componentielle » de ce concept. Avant l'achèvement de sa construction, les concepts du calcul restent fragiles car ils n'ont pas encore le caractère des concepts scientifiques d'être précisément définis les uns par rapport aux autres au sein d'une théorie.

Il n'est pas possible, en général, d'adopter la même stratégie en formation d'adultes. Beaucoup d'adultes de la formation de base, faute de temps ou de motivation, ne parviendraient pas jusqu'à la maîtrise du concept de nombre rationnel et donc ne disposeraient pas d'un savoir théorique en matière de calcul... c'est pourquoi j'ai tenté de trouver une alternative théorique, c'est à dire une théorie mathématique plus « légère » du calcul de base. Cela supposait de sélectionner et d'organiser un ensemble de concepts scientifiques qui réponde aux deux contraintes suivantes :

- d'une part constituer une théorie mathématique cohérente au sein de laquelle les concepts fondamentaux du calcul de base se trouvent bien définis.
- d'autre part n'impliquer dans cette construction que des concepts appartenant à la zone de proche développement des adultes de la formation de base.

Et en premier lieu, il importait d'examiner de plus près l'objet même du calcul.

2. Les grandeurs comme objets du calcul.

Il semble, à première vue, que l'on calcule avec des nombres. Mais une attention plus soutenue à la pratique courante dément cette idée. Dans la vie quotidienne, les objets du calcul sont le plus souvent des couples constitués d'un nombre décimal et d'une unité de mesure : par exemple 0,840kg ou 1,40m ou 5,80F [25]... Les premiers termes de ces couples, à savoir 0,840 ou 1,40 ou 5,80 , ne sont pas toujours compris comme des nombres décimaux ; pour ne pas préjuger de l'interprétation qui peut être faite de ces termes, nous dirons qu'il s'agit de « formalismes décimaux ». Le nombre décimal est l'interprétation savante du formalisme décimal ; dans l'usage courant ce n'est pas cette interprétation qui prévaut.

[25] Compte tenu de la période pendant laquelle j'ai effectué ma recherche, les grandeurs monétaires sont exprimées en francs et non en euros.

2.1 Interprétations savante et usuelle du formalisme décimal.

L'interprétation savante du formalisme décimal, c'est le nombre décimal, c'est à dire une fraction décimale ; ainsi 0,840 se définit comme la fraction 840/1000 = 840‰ ou 84/100 = 84% ou même 42/50 ou encore 21/25 ...L'interprétation savante donne du sens au formalisme décimal sans qu'il soit besoin de le lier à une unité. Selon l'interprétation savante, il faut comprendre 0,840kg comme 840/1000 ou 84% du kilogramme, comprendre 1,40m comme 140% ou 14/10 du mètre et comprendre 5,80F comme 580% ou 58/10 du franc... Cette interprétation n'est pas la première qui vient à l'esprit !

Dans la vie quotidienne 1,800kg [26] se comprend comme 1 kilo 800 grammes ; 1,40m se comprend comme 1 mètre et 40 centimètres et 5,80F se comprend comme 5 francs et 80 centimes. La virgule s'interprète comme un séparateur entre un nombre entier d'unités et un nombre entier de sous unités, unités et sous unités formant des couples de grandeurs standard : le franc avec les centimes, le mètre avec les centimètres, le kilogramme avec les grammes... Nous dirons qu'il s'agit de **l'interprétation usuelle du formalisme décimal.**

Par exemple 1,800kg est lu couramment « un kilo huit cent » ; le processus de lecture consiste en premier lieu à **remplacer la virgule par l'unité mentionnée** ; le résultat de cette substitution, à savoir « 1kg800 » est ensuite interprété comme « 1kg 800g » par référence au couple standard (kilogramme, gramme).

Certaines erreurs d'écriture étonnantes s'expliquent par cette interprétation du formalisme décimal ; par exemple pour transcrire « 1kg 800g » en écriture décimale, beaucoup d'adultes écrivent « 1,800g » au lieu d'écrire 1,800kg ; cette erreur se comprend bien si l'on se reporte au processus de substitution décrit plus haut ; l'adulte inverse ce processus : dans l'écriture « 1kg 800g » l'adulte remplace le symbole « kg » par une virgule et obtient l'écriture erronée « 1,800g » !

On retrouve le même type d'erreur d'écriture pour les longueurs : par exemple « 1m 40cm » est souvent écrit « 1,40cm » au lieu d'être écrit 1,40m. A contrario, les écritures académiques 1,8kg ou 1,4m ne se trouvent pratiquement jamais dans les productions des adultes de la formation de base ; les adultes préfèrent les écritures (correctes) 1,800kg ou 1,40m.

Le processus de substitution de l'interprétation usuelle rend aussi compte de certaines erreurs de lecture :

Par exemple 1,5F est souvent compris par les adultes comme 1F et 5cts : les adultes substituent d'abord l'unité « F » à la virgule, ils lisent en fait « 1F5 » puis « 1F 5cts » en référence au couple standard (franc, centimes). Les commerçants connaissent

[26] J'ai choisi de coller le formalisme décimal à l'unité pour rendre compte de la lecture globale qui en est faite dans la vie quotidienne.

apparemment ce phénomène : on ne trouve jamais une étiquette de prix avec un seul chiffre après la virgule !

Certaines erreurs de lecture sur les pèse-personne électronique s'expliquent également de la même manière : par exemple 1,25kg est souvent lu « 1kg 25g » au lieu de « 1kg 250g »

Beaucoup d'adultes ne disposent que de l'interprétation usuelle du formalisme décimal. Ils ne savent donner sens au formalisme décimal que dans le cas où celui-ci est lié à une unité. Brousseau (1998, p.131) fait la même observation en milieu scolaire :

« le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique ».

Le concept scientifique qui peut prendre sens à partir de l'interprétation usuelle du formalisme décimal n'est donc pas le concept de nombre décimal mais le concept de grandeur. Le formalisme décimal et l'unité forment un tout insécable exprimant une grandeur.

Mais qu'est-ce qu'une grandeur ?

Il s'agit de prix, de longueurs, de poids, de surfaces, de volumes, de durées. Dans les situations de la vie quotidienne, une grandeur est définie en référence à un système de grandeurs unités[27], le plus souvent décimal : francs, centimes, grammes, kilogrammes, mètres, centimètres, kilomètres, etc.... Son expression dans ce système de grandeurs unités peut prendre des formes multiples : par exemple une même longueur peut s'écrire 1m 32cm, ou 132cm, ou 1,32m... Certaines expressions comportent un seul entier et une seule unité, d'autres comportent un formalisme décimal et une unité. Je parle d'expressions entières de la grandeur dans le premier cas et d'expressions décimales de la grandeur dans le second cas.

Il est possible de donner à l'interprétation usuelle du formalisme décimal une assise scientifique. Il suffit pour cela de la rendre consciente et de la corriger en abandonnant la notion de couple standard d'unités : **les chiffres à droite de la virgule doivent être affectés aux sous unités décimales successives de l'unité mentionnée :** par exemple 1,2m doit se lire « 1m 2dm » et non « 1m 2cm », ou encore 1,85kg doit se lire « 1kg 85dag» et non « 1kg 85g » ... Toute expression décimale d'une grandeur peut ainsi être traduite en un couple d'expressions entières de grandeurs ; ce couple peut lui-même se réduire à une seule expression entière de grandeur : par exemple 1,2m peut se lire 12dm, 1,85kg peut se lire 185dag, etc... **Les adultes disposent ainsi d'une interprétation correcte du formalisme décimal qui ne fait pas référence au concept de nombre décimal et qui est proche de l'usage courant.**

[27] Par le terme d'unité j'entends aussi bien l'unité principale que les sous unités et unités multiples.

Partant de là je me suis posé les questions suivantes :

- quelles sont les théories mathématiques du calcul qui prennent les grandeurs comme objets du calcul?

- parmi ces théories, y en a-t-il qui se situent dans la zone de proche développement des adultes de la formation de base ?

Nous allons examiner maintenant ces questions. Mais il ne faut pas se méprendre sur ma démarche : il s'agit de trouver une théorie mathématique de référence et non de proposer un modèle conceptuel. Un modèle conceptuel renvoie à des phénomènes cognitifs observables, il a l'ambition de représenter la réalité du fonctionnement conceptuel des personnes, tandis qu'une théorie mathématique n'a pas cette ambition. Il lui suffit d'être cohérente pour être légitime.

2.2 La multiplication, pierre d'achoppement du calcul des grandeurs.

L'addition et la soustraction de deux grandeurs se définissent sans difficulté : ils suffit pour cela qu'elles soient de même espèce. Par contre, la définition de la multiplication de deux grandeurs pose des problèmes redoutables ! Il n'est pas possible, en général, de multiplier deux grandeurs entre elles, en particulier lorsqu'elles sont de même espèce. On peut le faire pour les longueurs parce que leur produit s'identifie à la surface d'un rectangle. Cette identification est due au fait que la surface d'un rectangle est doublement proportionnelle à sa longueur et à sa largeur.

De façon générale on peut multiplier deux espèces de grandeurs s'il existe une espèce de grandeurs qui leur est doublement proportionnelle. Malheureusement, dans les cas les plus courants, on est obligé de recourir à la notion d'espèce quotient. Cette notion est assez abstraite et mène à des calculs plutôt formels ; par exemple le calcul d'un prix nécessite d'introduire une grandeur quotient « prix par unité de poids » : le prix peut alors être considéré comme le produit du poids par cette grandeur quotient. On a dès lors affaire à des calculs du genre suivant :

$$0{,}180\text{kg} \times 70\text{F/kg} = (0{,}180 \times 70)(\text{kg} \times \text{F/kg}) = 12{,}60\text{F}$$
$$12{,}60\text{F} / 0{,}180\text{kg} = (12{,}60 / 0{,}180)(\text{F} / \text{kg}) = 70\text{F/kg}$$
$$12{,}60\text{F} / 70\text{F/kg} = (12{,}60 / 70)(\text{F} / \text{F/kg}) = 0{,}18\text{kg}$$

J'appelle **calcul <u>entre</u> grandeurs** ce genre de calcul. Le calcul entre grandeurs est couramment utilisé en sciences expérimentales, mais sous une forme déguisée : les unités sont traitées à part des valeurs numériques par les « équations de dimensions ». Dans un article récent[28], Yves Chevallard propose son introduction franche dans l'enseignement des mathématiques en collège. Il estime préférable de calculer avec des grandeurs plutôt qu'avec des nombres.

La théorie du calcul entre grandeurs est-elle un bon choix de référence pour l'enseignement du calcul de base aux adultes ? Deux arguments m'ont retenu de faire ce choix : un argument empirique et un argument historique. Ces arguments concernent les deux concepts fondamentaux du calcul entre grandeurs : le concept de proportionnalité double et le concept de grandeur quotient.

---

[28]Chevallard (2000)

- un argument empirique tout d'abord : le concept de proportionnalité double ne me semble pas partagé par le grand public. J'ai été frappé il y a quelques années par les réactions des animateurs et des auditeurs d'une émission radiophonique à la question suivante :

  3 poules pondent 3 œufs en 3 jours.
  Combien 6 poules pondent-elles d'œufs en 6 jours ?

  Un vent de panique avait soudain soufflé sur les ondes...

- un argument historique ensuite : le physicien et épistémologue F. Halbwachs (Halbwachs 1974) rapporte que Galilée, dans son traité sur le mouvement des planètes, s'emploie pendant une dizaine de pages à justifier la division des distances par les temps mis pour les parcourir. S'il faut dix pages à un savant de l'envergure de Galilée pour se convaincre du concept de grandeur quotient, alors il ne s'agit pas d'un concept très évident !

Par ailleurs, de nombreuses études sur le développement conceptuel des enfants et des adolescents font état d'une appropriation tardive et laborieuse des concepts de proportionnalité double et de grandeur quotient.

J'ai donc décidé d'inventer un calcul des grandeurs qui ne fasse pas appel à ces deux concepts. Pour éviter ces deux concepts, je renonce à définir la multiplication de deux grandeurs entre elles et **je me contente de définir la multiplication d'une grandeur par un entier.** La multiplication d'une grandeur par un entier est tout simplement une addition répétée, ainsi :

$5 \times 1{,}2\text{kg}$ signifie $1{,}2\text{kg} + 1{,}2\text{kg} + 1{,}2\text{kg} + 1{,}2\text{kg} + 1{,}2\text{kg}$.

Ce genre de définition est courant en mathématiques. D'un point de vue didactique, de nombreux chercheurs avec Greer et Mangan (1984) s'accordent à considérer qu'il s'agit là d'une conception précoce et répandue de la multiplication.

Nous allons voir dans la section suivante comment une théorie du calcul complète et cohérente peut mathématiquement se construire à partir de cette définition de la multiplication d'une grandeur par un entier. Je l'appelle **théorie du calcul <u>entier sur</u> les grandeurs**.

3. La théorie du calcul entier sur les grandeurs.

Dans cette section je présente la théorie du calcul entier sur les grandeurs à partir d'exemples tirés de la vie quotidienne ou professionnelle ; cette présentation est destinée à donner une idée des concepts, formalismes et algorithmes en jeu. Mais il s'agit bien, je le rappelle, d'exposer une théorie mathématique du calcul et non de proposer un modèle conceptuel. Cela dit, la théorie du calcul entier sur les grandeurs présente de grandes analogies structurelles avec le modèle conceptuel décrit par Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985).

La théorie du calcul entier sur les grandeurs développe les conséquences mathématiques d'un double choix didactique :

- le choix des grandeurs comme objets du calcul.
- la définition de la multiplication comme addition répetée.

Une fois ces choix didactiques arrêtés, je développe la théorie indépendamment de toute considération didactique, en ayant comme seul objectif de constituer une entité mathématique bien définie, cohérente et de taille minimum.

Nous examinerons seulement plus tard dans quelle mesure les concepts de cette théorie appartiennent à la zone de proche développement des adultes de la formation de base, et dans ce cas nous nous intéresserons aux moyens de les développer et de les formaliser.

3.1 Les divisions de la théorie du calcul entier sur les grandeurs.

La multiplication d'une grandeur par un entier donne naissance, par inversion, à deux divisions différentes : la division d'une grandeur par une grandeur (de même espèce) dont le résultat est un entier, division associée au mesurage, et la division d'une grandeur par un entier, dont le résultat est une grandeur (de même espèce), division associée au partage.

Par exemple diviser 987,60F par 4,30F c'est chercher combien de fois on peut payer 4,30F avec 987,60F. Pour réaliser cette opération, l'algorithme de division à la « russe » déjà exposé au paragraphe 1.2 s'adapte de la façon suivante :

1	4,30F
~~2~~	~~8,60F~~
4	17,20F
~~8~~	~~34,40F~~
~~16~~	~~68,80F~~
32	137,60F
64	275,20F
128	550,40F
229	984,70F

On peut payer au maximum 229 fois 4,30F avec 987,60F. Nous écrirons :

$$987{,}60F \div 4{,}30F = 229$$

L'opération peut se traiter à la machine, mais il faut prendre garde que les deux grandeurs soient exprimées dans la même unité, et ne tenir compte que de la partie entière du résultat qui apparaît à l'écran (229.6744186).

Soit maintenant par exemple à diviser 9876F par 43. Il s'agit d'un partage. Pour réaliser cette opération, on peut adapter l'algorithme de division à la « française » :

9876,00F	43
127	229,67F
416	
290	
320	
19	

On partage d'abord 98 billets de 100F, puis 127 pièces de 10F, puis 416 pièces de 1F, puis 290 pièces de 10 centimes et enfin 320 centimes ; il reste finalement 19 centimes, et chacun a reçu 229,67F. L'abaissement du chiffre 7 revient à faire la monnaie des billets de 100F restants, l'abaissement du chiffre 6 revient à faire la monnaie des pièces de 10F restantes, et ainsi de suite[29]...Nous écrirons l'opération[30] :

9876F / 43 = 229,67F

Il existe aussi un autre algorithme de partage tout à fait différent : on imagine 43 personnes assises autour d'une table, et on procède par tours de table : à chaque tour chacun reçoit 1 centime et donc 43 centimes sont distribués ; le mesurage de 9876F par 0,43F fournit le nombre de tours : 9876F ÷ 0,43F = 22967 . En fin de compte chacun a reçu 22967 centimes soit 229,67F. Cette dernière façon de procéder ramène le partage entier au mesurage entier. Le concept de partage entier peut donc se définir à partir du concept de mesurage entier.

La division peut se faire à la machine ; la partie décimale du résultat est à conserver jusqu'à la précision souhaitée.

La construction algorithmique de la structure multiplicative du calcul entier sur les grandeurs à partir de sa structure additive peut se résumer par le schéma de la Figure I.1

[29] L'opération s'arrête « naturellement » aux centimes faute de pièces d'une valeur inférieure ; mais en toute rigueur il faudrait préciser à quelle précision doit s'effectuer le partage (ici au centime près).
[30] Il me semble aujourd'hui souhaitable de choisir une notation différente pour chaque division, mais j'ai longtemps hésité à ce propos, répugnant à encombrer les adultes de trop de conventions.

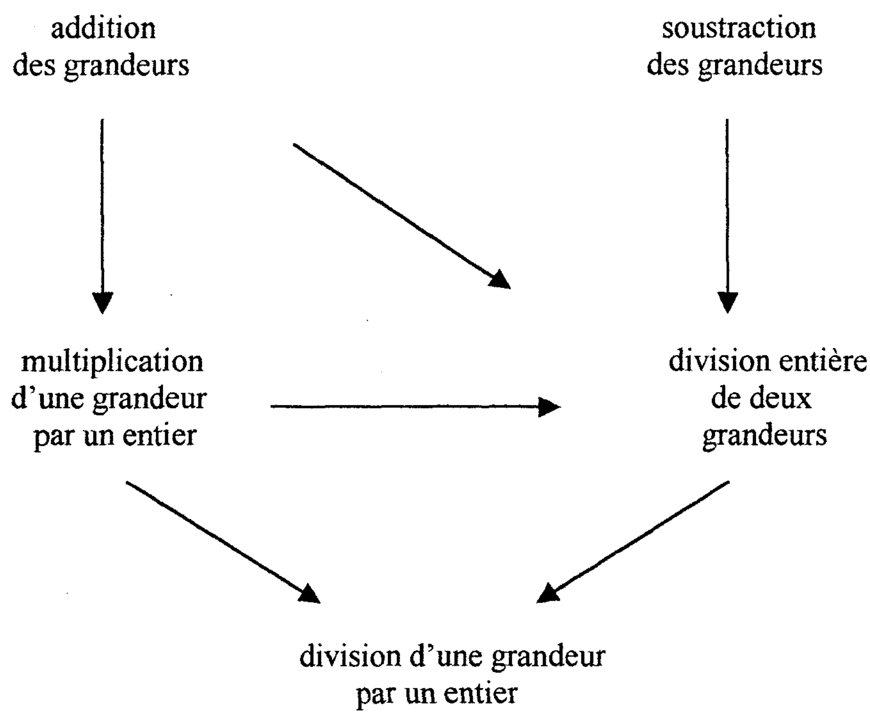


Figure I.1 : Construction algorithmique de la structure multiplicative du calcul sur les grandeurs.

3.2 Le traitement des situations de proportion simple.

Dans toute théorie du calcul de base, le traitement des situations de proportion simple engage l'usage d'opérateurs multiplicatifs. Mais dans la théorie du calcul entier sur les grandeurs **il n'existe pas d'opérateur multiplicatif entre grandeurs d'espèces différentes.** Les seuls opérateurs multiplicatifs disponibles sont des opérateurs multiplicatifs entiers entre grandeurs de même espèce. Or **les situations de proportion simple les plus courantes concernent des grandeurs d'espèces différentes :** (poids, prix), (volume, prix), etc. ...

Dans le cadre de la théorie entière du calcul entier sur les grandeurs, **ces situations ne peuvent donc pas être traitées par une approche fonctionnelle** : la théorie ne permet pas de modéliser la situation par un opérateur entre les deux espèces. Elle oblige à un traitement sur les couples de grandeurs proportionnelles. Ce traitement met en jeu des opérateurs multiplicatifs agissant « en parallèle » sur les grandeurs proportionnelles. Il faut noter que ce traitement conserve une parfaite symétrie entre les deux espèces de grandeurs, il n'oriente pas le problème, contrairement à l'approche fonctionnelle.

Examinons d'abord les cas où un seul opérateur suffit à traiter la situation.

Schéma n°1 : l'opérateur multiplicatif est appliqué dans le sens direct.

Soit par exemple à calculer le prix de 365 paquets de cigarettes à 26,80F le paquet. Nous avons la solution suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{1paquet} & \text{coûte} & \text{26,80F} & \\ \times 365 & \downarrow & & \downarrow & \times 365 \\ & \text{365paquets} & \text{coûtent} & \text{9782F} & \end{array}$$

L'opérateur × 365 agit en parallèle sur les paquets et les prix ; c'est en fait un opérateur sur le couple (paquet, prix). Il faut considérer les deux opérations en parallèle :

$$365 \times 1\text{paquet} = 365\text{paquets}$$
$$365 \times 26{,}80\text{F} = 9782\text{F}$$

Schéma n°2 : l'opérateur multiplicatif est appliqué en sens inverse.

Soit par exemple à trouver le prix du kilo de pomme de terre, sachant qu'un sac de 25kg est vendu 32F. Nous avons la solution suivante :

$$\begin{tikzcd} 25\text{kg} \arrow[d, "\div 25"'] & \text{coûtent} & 32\text{F} \arrow[d, "\div 25"] \\ 1\text{kg} & \text{coûte} & 1{,}28\text{F} \end{tikzcd}$$

L'opérateur ÷ 25 agit en parallèle sur les poids et les prix. C'est un opérateur sur les couples (poids, prix). C'est l'opérateur inverse de l'opérateur × 25. Il faut considérer les deux opérations en parallèle :

$$25\text{kg} \div 25 = 1\text{kg}$$
$$32\text{F} \div 25 = 1{,}28\text{F}$$

Schéma n°3 : l'opérateur multiplicatif doit être identifié.

Soit par exemple à calculer combien on peut acheter de journaux à 3,80F avec un billet de 500F. Le problème se présente ainsi :

$$\begin{tikzcd} 1\text{journal} \arrow[d, "\times ?"'] & \text{coûte} & 3{,}80\text{F} \arrow[d, "\times ?"] \\ \text{journaux ?} & \text{pour} & 500\text{F} \end{tikzcd}$$

Pour identifier l'opérateur multiplicatif il faut regarder du côté des prix : combien de fois peut-on payer 3,80F avec 500F ? Il s'agit d'un mesurage entier. La division suivante donne la réponse :

$$500\text{F} \div 3{,}80\text{F} = 131$$

L'opérateur recherché est l'opérateur × 131

$$\begin{tikzcd} 1\text{journal} \arrow[d, "\times 131"'] & \text{coûte} & 3{,}80\text{F} \arrow[d, "\times 131"] \\ 131\text{journaux} & \text{coûtent} & 497{,}80\text{F} \end{tikzcd}$$

Comme précédemment l'opérateur agit en parallèle sur les journaux et les prix :

$$131 \times 1\text{journal} = 131\text{journaux}$$
$$131 \times 3{,}80F = 497{,}80F$$

C'est un opérateur sur les couples (journaux, prix).

Nous avons ensuite une série de trois cas correspondant aux trois schémas précédents composés avec un opérateur $\times\ 10^k$ ou $\div\ 10^k$ (k est un entier naturel).

Schéma n°1 bis : composition du schéma n°1 avec l'opérateur $\div\ 10^k$.

Soit par exemple à calculer le prix d'un steak de 180g, le prix du kilo de steak étant de 70F.

$$\begin{array}{rcccl} & 1\text{kg} & \text{coûte} & 70F & \\ \div\ 1000 & \downarrow & & \downarrow & \div\ 1000 \\ & 1\text{g} & \text{coûte} & 0{,}07F & \\ \times\ 180 & \downarrow & & \downarrow & \times\ 180 \\ & 180\text{g} & \text{coûtent} & 12{,}60F & \end{array}$$

Les opérateurs $\div$ 1000 et $\times$ 180 sont composés et appliqués en parallèle sur les poids et les prix. On peut dire qu'il s'agit de la composition d'opérateurs agissant sur les couples (poids, prix).

Schéma n°2 bis : composition du schéma n°2 avec l'opérateur $\times\ 10^k$

Soit par exemple à calculer le prix au kilo d'un poulet de 840g vendu 25,20F.

$$\begin{array}{rcccl} & 840\text{g} & \text{coûtent} & 25{,}20F & \\ \div\ 840 & \downarrow & & \downarrow & \div\ 840 \\ & 1\text{g} & \text{coûte} & 0{,}03F & \\ \times 1000 & \downarrow & & \downarrow & \times 1000 \\ & 1\text{kg} & \text{coûte} & 30F & \end{array}$$

Ce schéma correspond à l'inversion du schéma précédent. Les opérateurs $\div$ 840 et $\times$ 1000 sont composés et appliqués en parallèle sur les poids et les prix. On peut encore dire qu'il s'agit de la composition d'opérateurs agissant sur les couples (poids, prix).

Schéma n°3 bis : composition du schéma n°3 avec l'opérateur $\div\, 10^k$.

Soit par exemple à trouver combien doit peser un sachet de fromage râpé vendu 7F si le kilo de râpé est à 50F.

$$\begin{tikzcd}
1\text{kg} \arrow[d, swap, "\div 1000"] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\div 1000"] \\
1\text{g} \arrow[d, swap, "\times ?"] & \text{coûte} & 0{,}05\text{F} \arrow[d, "\times ?"] \\
\text{grammes ?} & \text{pour} & 7\text{F}
\end{tikzcd}$$

L'opérateur se calcule en regardant du côté des prix : combien de fois peut-on payer 0,05F avec 7F ? Il s'agit d'un mesurage. La division suivante donne la réponse :

$$7\text{F} \div 0{,}05\text{F} = 140$$

D'où la solution du problème :

$$\begin{tikzcd}
1\text{kg} \arrow[d, swap, "\div 1000"] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\div 1000"] \\
1\text{g} \arrow[d, swap, "\times 140"] & \text{coûte} & 0{,}05\text{F} \arrow[d, "\times 140"] \\
140\text{g} & \text{pour} & 7\text{F}
\end{tikzcd}$$

Les opérateurs $\div 1000$ et $\times 140$ sont composés et appliqués en parallèle sur les poids et les prix. On peut encore dire qu'il s'agit de la composition d'opérateurs agissant sur les couples (poids, prix).

Le schéma d'opérateur n°3 bis permet en fait de traiter n'importe quelle situation de proportion simple. En effet la situation la plus générale de proportionnalité simple est la recherche de la quatrième proportionnelle. Cette situation résume toutes les précédentes. Elle est illustrée par la figure suivante où A, B et C sont des grandeurs avec A et C de même espèce :

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ & \\ C & ? \end{array}$$

Le schéma n°3 bis permet de traiter cette situation de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\div 10^k"'] & B \arrow[d, "\div 10^k"] \\
A' \arrow[d, "\times n"'] & B' \arrow[d, "\times n"] \\
C & ?
\end{tikzcd}$$

k est un entier naturel choisi suffisamment grand pour que la grandeur A' soit significativement plus petite que la grandeur C ; n est un entier déterminé par le mesurage : $n = C \div A'$. La quatrième proportionnelle est $n \times B'$.

Les adultes disposent donc, avec la théorie du calcul entier sur les grandeurs, d'un savoir théorique qui permet de traiter toutes les situations de proportionnalité simple. Dans ces traitements, **le mesurage d'une grandeur par une autre joue un rôle clef. Ce concept doit donc être la cible privilégiée de l'apprentissage.**

La façon dont les adultes peuvent s'approprier ce concept fera l'objet d'une étude approfondie dans les prochains chapitres. Je donne cependant un premier aperçu de la question dans la section suivante.

4. Un concept clef : le mesurage d'une grandeur par une autre.

Cette section présente trois calculs produits par des adultes en formation au C.U.E.E.P de Tourcoing. Il s'agit de situations où un opérateur multiplicatif entier doit être identifié. Ces situations sont correctement traitées, mais les adultes n'identifient pas forcément l'opérateur multiplicatif. Ils procèdent par tâtonnements additifs ou multiplicatifs. Ce faisant, ils réalisent de façon non consciente le mesurage entier d'une grandeur par une autre. Ils semblent proches de ce concept.

4.1 Analyse de Sophie/1/11/99/3.

Combien peut-on remplir de bouteilles de 0,75ℓ
avec un tonnelet de 250ℓ ?

1 bouteille 0,75 litres.
~~2 bouteilles 150 cent litres~~
4 bouteilles 3 litres
8 bouteilles 6 litres
~~16 bouteilles 12 litres~~
~~32 bouteilles 24 litres~~
64 bouteilles 48 litres
~~128 bouteilles 96 litres~~
256 bouteilles 192 litres.
332 bouteilles 249 litres

On pourrait penser que Sophie applique l'algorithme de division « à la russe » décrit dans la section précédente. Contrairement aux apparences, il n'en est rien ! Sophie n'est pas consciente d'effectuer une division, sinon elle l'aurait effectuée à la machine ... Elle a seulement appris qu'on pouvait gérer la proportionnalité par doublements successifs, et s'est approprié une façon commode de disposer les calculs. Ce faisant elle réalise de façon non consciente le mesurage entier de la grandeur 250litres par la grandeur 0,75litre.

Cette production est, me semble-t-il, révélatrice d'une proximité entre la pratique spontanée des adultes et la théorie du calcul entier sur les grandeurs.

4.2 Analyse de Marjorie/1/10/00/1.

Combien peut-on acheter de journaux à 3,80F avec 500F ?

1) 1 journal → 3,80F
10 journaux → 38F
100 journaux → 380F
~~1000 journaux → 3800F~~
~~200 journaux → 760F~~
~~150 journaux → 570F~~
130 journaux → 494F
~~135 " → 513F~~
~~133 " → 505,40F~~
~~132 " → 501,60F~~
$\boxed{131}$ " → $\boxed{497,80F}$

500F ÷ 3,80F = 131 journaux.

Marjorie gère par tâtonnements la proportionnalité entre le nombre de journaux et leur prix : elle utilise d'abord la multiplication par dix systématique du couple de base, puis une approche plus souple et intuitive.

Elle réalise ainsi de façon spontanée le mesurage entier de 500F par 3,80F. A la fin du calcul, elle prend conscience de la nature de l'opération qu'elle vient de réaliser, et l'effectue à la machine pour confirmer son résultat.

4.3 Un calcul de Dabhia (Dabhia/1/04/00/1).

Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F
(la minute coûte 0,27F) ?

La minute de téléphone coûte 0,27^F

0,27 x 60 = 16,20^F

16,20 x 6 = 97,20^F reste 2,80^F sur 100^F

0,27 x 10 = 2,70^F

Avec 100^F je peux téléphoner 6 heures 10 MN

6 heures 10 MN coûte 99,90^F reste 0,10^F pour faire 100^F

Dahbia gère la proportionnalité entre durée et coût de la communication en utilisant les particularités du système d'unités sexagésimal : elle cherche d'abord le nombre d'heures de communication. Elle réalise de façon spontanée le mesurage de 100F par 16,20F puis celui de 2,80F par 0,27F. Elle n'est pas consciente d'effectuer des divisions.

Ces travaux donnent une idée de la façon dont les adultes s'approprient le calcul entier sur les grandeurs. Le concept de proportionnalité sous sa forme additive (« si on ajoute les bouteilles on ajoute les litres ») y joue un rôle premier. La reconnaissance des opérations de multiplication et de division vient après coup. Marjorie et Dabhia sont en voie de formalisation de ces concepts.

5. La théorie du calcul décimal sur les grandeurs.

La théorie du calcul entier sur les grandeurs constitue un savoir théorique du calcul de base qui peut se suffire à lui-même : elle permet en effet de résoudre toutes les situations de proportionnalité simple. Cependant il est possible, avec les adultes qui le souhaitent, d'aller au delà.

La théorie du calcul entier sur les grandeurs traite en effet les situations se rapportant aux schémas n°1 bis , n°2 bis et n°3 bis en composant des opérateurs multiplicatifs entiers et leurs inverses avec les opérateurs $\times 10^k$ ou $\div 10^k$. Les opérateurs composés ainsi obtenus définissent des opérateurs décimaux sur les grandeurs. Nous construisons à partir de là une extension de la théorie du calcul entier sur les grandeurs : **la théorie du calcul décimal sur les grandeurs.**

5.1 La multiplication d'une grandeur par un formalisme décimal.

Reprenons le schéma d'opérateur n°1 bis.

Soit à calculer le prix d'un steak de 180g, pour un prix au kilo de 70F.

Nous avions la solution suivante dans laquelle les opérateurs $\div$ 1000 et $\times$ 180 sont composés :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{1kg} & \text{coûte} & \text{70F} & \\ \div 1000 & \downarrow & & \downarrow & \div 1000 \\ & \text{1g} & \text{coûte} & \text{0,07F} & \\ \times 180 & \downarrow & & \downarrow & \times 180 \\ & \text{180g} & \text{coûtent} & \text{12,60F} & \end{array}$$

Nous définissons l'opérateur décimal $\times$ 0,180 comme le composé des opérateurs $\div$ 1000 et $\times$ 180 .

Nous obtenons ainsi la solution suivante du problème :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{1kg} & \text{coûte} & \text{70F} & \\ \times 0{,}180 & \downarrow & & \downarrow & \times 0{,}180 \\ & \text{180g} & \text{coûtent} & \text{12,60F} & \end{array}$$

avec les opérations suivantes en parallèle sur les poids et les prix :

$$0{,}180 \times 1\text{kg} = 180\text{g}$$
$$0{,}180 \times 70\text{F} = 12{,}60\text{F}$$

5.2 La division d'une grandeur par un formalisme décimal.

Reprenons le schéma d'opérateurs n°2 bis.

Soit à calculer le prix au kilo d'un poulet de 840g vendu 25,20F.

Nous avions la solution suivante où les opérateurs $\div$ 840 et $\times$ 1000 sont composés :

$$\begin{tikzcd}
840\text{g} \arrow[d, "\div 840"'] & \text{coûtent} & 25{,}20\text{F} \arrow[d, "\div 840"] \\
1\text{g} \arrow[d, "\times 1000"'] & \text{coûte} & 0{,}03\text{F} \arrow[d, "\times 1000"] \\
1\text{kg} & \text{coûte} & 30\text{F}
\end{tikzcd}$$

Nous définissons l'opérateur décimal $\div$ 0,840 comme le composé des opérateurs $\div$ 840 et $\times$ 1000 . Cet opérateur est l'opérateur inverse de l'opérateur $\times$ 0,840

Nous avons ainsi la solution suivante du problème :

$$\begin{tikzcd}
840\text{g} \arrow[d, "\div 0{,}840"'] & \text{coûtent} & 25{,}20\text{F} \arrow[d, "\div 0{,}840"] \\
1\text{kg} & \text{coûte} & 30\text{F}
\end{tikzcd}$$

avec les opérations suivantes en parallèle sur les poids et les prix :

$$840\text{g} \div 0{,}840 = 1\text{kg}$$
$$25{,}20\text{F} \div 0{,}840 = 30\text{F}$$

5.3 La division décimale d'une grandeur par une autre.

Abordons enfin le schéma d'opérateurs n°3 bis.

Soit à trouver combien doit peser un sachet de fromage râpé vendu 7F si ce râpé vaut 50F le kilo.

Le problème se présentait ainsi :

$$\begin{tikzcd} 1\text{kg} \arrow[d, "\div 1000"'] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\div 1000"] \\ 1\text{g} \arrow[d, "\times ?"'] & \text{coûte} & 0{,}05\text{F} \arrow[d, "\times ?"] \\ \text{grammes ?} & \text{pour} & 7\text{F} \end{tikzcd}$$

Nous pouvons désormais le poser ainsi :

$$\begin{tikzcd} 1\text{kg} \arrow[d, "\times ?"'] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\times ?"] \\ \text{grammes ?} & \text{pour} & 7\text{F} \end{tikzcd}$$

où l'opérateur à identifier est un opérateur décimal. Nous dirons qu'il s'agit d'un mesurage décimal.

Nous avions la solution suivante :

$$
\begin{tikzcd}
1\text{kg} \arrow[d, "\div 1000"'] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\div 1000"] \\
1\text{g} \arrow[d, "\times 140"'] & \text{coûte} & 0{,}05\text{F} \arrow[d, "\times 140"] \\
140\text{g} & \text{pour} & 7\text{F}
\end{tikzcd}
$$

où l'opérateur $\times 140$ était identifié par la division :

$$7\text{F} \div 0{,}05\text{F} = 140$$

Nous avons maintenant la solution suivante :

$$
\begin{tikzcd}
1\text{kg} \arrow[d, "\times 0{,}140"'] & \text{coûte} & 50\text{F} \arrow[d, "\times 0{,}140"] \\
140\text{g} & \text{pour} & 7\text{F}
\end{tikzcd}
$$

où l'opérateur $\times 0{,}140$ s'identifie par la division :

$$7\text{F} \div 50\text{F} = 0{,}140$$

qui est inverse de l'opération :

$$0{,}140 \times 50\text{F} = 7\text{F}$$

Nous disposons en fin de compte :

- de la multiplication d'une grandeur par un formalisme décimal
- de la division d'une grandeur par un formalisme décimal
- de la division décimale d'une grandeur par une autre

J'appelle **théorie du calcul décimal sur les grandeurs** la structure de calcul ainsi construite ; cette structure est une extension de la théorie du calcul entier sur les grandeurs. J'en fais un exposé formel dans la section suivante.

6. Légitimité mathématique de la théorie du calcul sur les grandeurs.

Cette section présente un exposé formel de la théorie du calcul sur les grandeurs, laquelle regroupe la théorie du calcul entier sur les grandeurs et la théorie du calcul décimal sur les grandeurs qui en est le prolongement. Sa lecture requiert une certaine familiarité avec les textes mathématiques et n'est pas indispensable à une bonne compréhension des chapitres suivants. Le propos de cette section est de fonder la légitimité mathématique de la théorie du calcul sur les grandeurs.

6.1 Objets et opérations du calcul sur les grandeurs.

Il n'est pas facile de définir ce qu'est une grandeur. Par contre il est assez facile de définir ce que l'on peut en faire : on peut ajouter[31] deux grandeurs de même espèce, les comparer, faire leur différence ; il existe une grandeur nulle et si une grandeur n'est pas nulle, on peut, en la cumulant, dépasser n'importe quelle autre grandeur de même espèce (propriété d'Archimède). Ces propriétés reviennent à poser la définition suivante :

Définition : Une espèce de grandeur est la partie positive d'un groupe commutatif, totalement ordonné, archimédien.

Ce groupe a une structure canonique de Z-module. Nous noterons « + » l'opération interne, « - » l'opération inverse, et « × » la multiplication externe de ce module. Ces opérations admettent des restrictions à la partie positive du groupe et aux entiers naturels ; ces restrictions constituent l'addition, la soustraction, et la multiplication entière du calcul sur les grandeurs.

Les divisions du calcul entier sur les grandeurs se définissent comme suit :

Soient deux grandeurs A et B de même espèce avec B non nul. Le quotient entier de A par B est le plus grand entier n tel que $n \times B$ soit inférieur ou égal à A. La propriété d'Archimède assure l'existence de n. Nous écrirons $A \div B = n$.

Soient n un entier positif, A une grandeur et U une unité[32] de même espèce. Le quotient de A par n à U près, est la grandeur pU où p est le quotient entier[33] de A par nU . Nous le noterons A/n .

---

[31] Il s'agit de ce que les physiciens appellent des grandeurs extensives.
[32] Une unité d'une espèce est une grandeur non nulle arbitraire de cette espèce.
[33] p est le nombre de tours de table, voir la troisième section de ce chapitre.

Le calcul décimal sur les grandeurs ne peut être défini que pour des espèces décimables de grandeurs. Une espèce de grandeurs est décimable si toutes les grandeurs de l'espèce sont divisibles[34] par dix.

Alors, pour un formalisme[35] décimal $d = n/10^k$ (n et k entiers naturels) et une grandeur A, la multiplication décimale se définit ainsi :

$$d \times A = n \times A/10^k$$

Les divisions du calcul décimal sur les grandeurs se définissent comme suit :

Soient deux grandeurs A et B d'une même espèce décimable avec B non nul. Le quotient décimal de A par B à l'ordre k est le formalisme décimal $d = n/10^k$ où n est le quotient entier de A par $B/10^k$. Nous écrirons $A \div B = d$.

Soient d un formalisme décimal non nul, A une grandeur d'une espèce décimable et U une unité de cette espèce. Le quotient de A par d à U près, est la grandeur pU où p est le quotient entier de A par dU. Nous le noterons A/d .

Les espèces courantes de grandeurs sont constituées des multiples décimaux d'une grandeur unité. Ce sont des espèces décimables si l'on suppose que l'unité est indéfiniment divisible par dix.

---

[34] Une grandeur A est divisible par dix s'il existe une grandeur B telle que $A=10\times B$.

[35] Il n'est pas question ici de fraction décimale : la notation fractionnaire est utilisée par commodité, pour signifier où se trouve la virgule dans la suite de chiffres du formalisme décimal « d ».

6.2 Les proportions du calcul sur les grandeurs.

Nous entendons par proportion une famille de couples de grandeurs proportionnelles. Une telle famille a les propriétés d'une espèce de grandeurs : on peut en effet ajouter deux couples de la proportion, les comparer, faire leur différence ... D'où notre définition :

Définition : Une proportion entre deux espèces de grandeurs est une espèce de leur produit cartésien.

Le produit cartésien de deux espèces de grandeurs n'est pas lui-même une espèce de grandeurs, car il n'est pas totalement ordonné. La structure d'espèce de grandeurs ne peut s'étendre qu'à certaines de ses parties : ce sont précisément les proportions. La théorie du calcul sur les grandeurs met en évidence le fait que **les notions de grandeur et de proportionnalité sont intrinsèquement liées.**

Notre définition d'une proportion rejoint la définition traditionnelle. On a en effet le théorème suivant :

Théorème : Si deux couples (A,B) et (C,D) de grandeurs non nulles appartiennent à une même proportion, alors :

$$A \div C = B \div D$$

où le symbole $\div$ désigne la division entière ou la division décimale de deux grandeurs à un ordre quelconque (dans le cas d'espèces décimables).

Démonstration[36] : Supposons $(A,B) \geq (C,D)$. Posons $n = (A,B) \div (C,D)$. Par définition du quotient entier dans la proportion on a :

$$n \times (C,D) \leq (A,B) < (n+1) \times (C,D)$$

et donc par définition de la multiplication et de l'ordre du produit cartésien :

$$\begin{aligned} n \times C &\leq A < (n+1) \times C \\ n \times D &\leq B < (n+1) \times D \end{aligned}$$

soit, par définition du quotient entier dans chaque espèce :

$$n = A \div C \quad \text{et} \quad n = B \div D \quad \text{cqfd.}$$

[36] Dans le cas de la division entière. Le cas de la division décimale s'en déduit facilement

6.3 Les opérateurs multiplicatifs du calcul sur les grandeurs.

Définition : Un opérateur multiplicatif entier sur une espèce de grandeur est une fonction, notée $\times n$, de cette espèce dans elle-même définie, pour un entier naturel n donné, et pour toute grandeur A de l'espèce, par : $\times n\,(A) = n \times A$.

Un opérateur multiplicatif décimal sur une espèce décimable de grandeurs est une fonction, notée $\times d$, de cette espèce dans elle-même définie, pour un formalisme décimal donné d, et pour toute grandeur A de l'espèce, par : $\times d\,(A) = d \times A$.

Remarque : Les opérateurs multiplicatifs sur une proportion opèrent sur les couples de grandeurs de cette proportion. C'est ce type d'opérateur multiplicatif que nous avons utilisés en §3 et en §5 dans le traitement des situations de proportionnalité.

Théorème : La somme et le composé de deux opérateurs multiplicatifs sur une même espèce sont des opérateurs sur cette espèce. Plus précisément, soient $\times d$ et $\times d'$ deux opérateurs ; leur somme est l'opérateur $\times(d+d')$ et leur composé l'opérateur $\times(d\times d')$.

Théorème : Les opérateurs multiplicatifs décimaux d'une espèce décimable de grandeurs s'identifient à D+ . L'addition des opérateurs s'identifie à l'addition des nombres décimaux et la composition des opérateurs s'identifie à la multiplication des nombres décimaux. Cette identification vaut aussi pour l'ordre (les opérateurs sont ordonnés au sens des fonctions : $\times d > \times d'$ signifie que pour toute grandeur A, $\times d\,(A) > \times d'(A)$).

Ces deux théorèmes sont une simple conséquence des propriétés des opérations et de l'ordre sur les grandeurs.

La théorie du calcul sur les grandeurs peut donc être considérée, d'un point de vue mathématique, comme une construction de l'ensemble D+ des nombres décimaux.

Je donne dans la section suivante un aperçu du processus d'enseignement de cette construction.

7. Un processus d'enseignement des nombres décimaux.

J'ai démontré dans la section précédente que les opérateurs multiplicatifs décimaux du calcul sur les grandeurs pouvaient, d'un point de vue mathématique, s'identifier aux nombres décimaux. Dans cette section je donne un aperçu d'un processus d'enseignement des nombres décimaux basé sur cette identification.

Les opérations sur les nombres décimaux sont associées à la somme et à la composition des opérateurs multiplicatifs décimaux, c'est à dire à un calcul dont les objets sont des fonctions. Un enseignement des nombres décimaux à partir du calcul sur les grandeurs suppose donc de créer des situations dans lesquelles **l'aspect fonctionnel des opérateurs multiplicatifs décimaux** est mis en valeur. Or, rappelons-le, dans le cadre de la théorie du calcul sur les grandeurs, il n'existe pas d'opérateur multiplicatif entre grandeurs d'espèces différentes. Pour mettre en relief le comportement des opérateurs multiplicatifs décimaux comme fonctions, il faut donc choisir **des situations de proportionnalité entre grandeurs de même espèce**.

Les problèmes de pourcentage conviennent à cet effet ; ils offrent une grande variété de situations tant dans le domaine économique que géométrique qui mettent en jeu l'inversion, la somme et la composition des opérateurs décimaux entre grandeurs de même espèce. Je donne deux exemples de telles situations.

7.1 L'inversion d'un nombre décimal.

J'introduis l'inversion d'un nombre décimal à partir de l'inversion d'un opérateur multiplicatif décimal.

Soit par exemple à calculer le prix hors taxe d'une voiture vendue 58900F TTC, sachant qu'il y a 33,33% de TVA sur ce genre de produit.

Cette situation de « pourcentage inverse » n'est bien sûr abordée qu'après des situations de « pourcentage direct », et après des situations où le pourcentage doit être calculé. La définition du pourcentage sur laquelle je m'appuie est une définition « a minima » renvoyant au seul concept de proportionnalité : 33,33% de TVA signifie que la TVA est de 33,33F pour 100F, donc de 66,66F pour 200F, et ainsi de suite…).

La situation peut être schématisée comme dans le cas d'une proportion entre grandeurs d'espèces différentes (voir § 5) :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{100F HT} & \qquad & \text{133,33F TTC} & \\ \times ? & \downarrow & & \downarrow & \times ? \\ & ?\ \text{HT} & & \text{58900F TTC} & \end{array}$$

L'opérateur est identifié par un mesurage décimal approché :

$$58900\text{F} \div 133{,}33\text{F} = 441{,}761$$

d'où la solution :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{100F HT} & \qquad & \text{133,33F TTC} & \\ \times 441{,}761 & \downarrow & & \downarrow & \times 441{,}761 \\ & \text{44176F HT} & & \text{58900F TTC} & \end{array}$$

(les prix sont arrondis au franc le plus proche)

Les adultes sont donc en présence d'un type de situation qu'ils sont habitués à résoudre. Mais, du fait que les grandeurs proportionnelles sont de même espèce, d'autres schémas d'opérateurs sont possibles.

La situation peut être schématisée en mettant en valeur l'aspect fonctionnel de la situation, par exemple en faisant apparaître le prix TTC comme fonction du prix HT :

$$100\text{F HT} \xrightarrow{\times ?} 133{,}33\text{F TTC}$$

$$?\ \text{HT} \xrightarrow{\times ?} 58900\text{F TTC}$$

L'opérateur est alors identifié comme étant l'opérateur $\times 1{,}3333$

$$100\text{F HT} \xrightarrow{\times 1{,}3333} 133{,}33\text{F TTC}$$

$$?\ \text{HT} \xrightarrow{\times 1{,}3333} 58900\text{F TTC}$$

L'opérateur $\times 1{,}3333$ est ensuite inversé en l'opérateur $\div 1{,}3333$:

$$100\text{F HT} \xleftarrow{\div 1{,}3333} 133{,}33\text{F TTC}$$

$$44176\text{F HT} \xleftarrow{\div 1{,}3333} 58900\text{F TTC}$$

Un schéma symétrique du précédent est également possible :

$$100\text{F HT} \xleftarrow{\times ?} 133{,}33\text{F TTC}$$

$$?\ \text{HT} \xleftarrow{\times ?} 58900\text{F TTC}$$

Ce schéma met aussi en valeur l'aspect fonctionnel de la situation, en faisant apparaître le prix HT comme fonction du prix TTC. Cet opérateur est identifié par un mesurage décimal approché :

$$100F \div 133{,}33F = 0{,}75$$

$$100F\ HT \xleftarrow{\times 0{,}75} 133{,}33F\ TTC$$

$$44175F\ HT \xleftarrow{\times 0{,}75} 58900F\ TTC$$

A 1F près, l'opérateur $\times\, 0{,}75$ donne le même résultat que l'opérateur $\div 1{,}3333$.

La question se pose alors naturellement d'examiner si les deux opérateurs donnent toujours le même résultat, quelque soit la grandeur sur laquelle ils s'appliquent : il est nécessaire de faire « jouer » les deux opérateurs sur des situations diverses pour se convaincre de l'invariance de cette propriété. L'opérateur $\times\, 0{,}75$ peut alors être compris comme inverse (approché) de l'opérateur $\times 1{,}3333$.

L'inversion de l'opérateur décimal donne sens à l'inversion du nombre décimal.

7.2 La multiplication des nombres décimaux.

J'introduis le produit de deux nombres décimaux à partir de la composition des opérateurs décimaux. Les situations « d'enchaînement » de deux proportions conviennent bien à cet effet, par exemple « l'enchaînement » de deux réductions de prix en pourcentages et en « cascade » :

Une entreprise de vente par correspondance fait des soldes de 30% sur ses prix catalogues. Les clients fidèles bénéficient en plus d'une remise de 20% sur leur commande. Quel pourcentage de réduction cela fait-il au total ?

Un tableau de calcul est d'abord établi pour un certain nombre d'articles :

Article	Prix catalogue	Prix soldé	Prix fidélité
Chemisier	230F	161F	128,80
Jupe	450F	315F	252,00
Pull over	380F	266F	212,80

Puis les opérateurs permettant de passer d'une colonne à l'autre sont identifiés :

$$\text{Prix catalogue} \xrightarrow{\times 0,7} \text{Prix soldé} \xrightarrow{\times 0,8} \text{Prix fidélité}$$

$$\text{Prix catalogue} \xrightarrow{\qquad\qquad \times 0,56 \qquad\qquad} \text{Prix fidélité}$$

L'opérateur $\times 0,56$ apparaît comme l'opérateur composé des opérateurs $\times 0,7$ et $\times 0,8$. Cette composition des opérateurs décimaux peut s'expliquer en référence aux opérateurs entiers qui les constituent :

L'opérateur $\times 0,7$ est composé des opérateurs $\div 10$ et $\times 7$
L'opérateur $\times 0,8$ est composé des opérateurs $\div 10$ et $\times 8$
L'opérateur $\times 0,56$ est composé des opérateurs $\div 100$ et $\times 56$

La composition des opérateurs multiplicatifs décimaux donne ainsi sens à la multiplication des nombres décimaux.

Remarquons que la composition des opérateurs décimaux est en fait toujours sous jacente à la multiplication des nombres décimaux. Considérons par exemple la multiplication suivante :

$$0,7 \times 0,8\text{kg}\,.$$

Si l 'on voit dans cette expression la multiplication des nombres décimaux 0,7 et 0,8 cela sous entend que l'on interprète 0,8kg comme le produit du kilo par le nombre décimal 0,8 et donc il faut lire la multiplication de la façon suivante :

$$0,7 \times (\ 0,8 \times 1\text{kg}\ )$$

Ce calcul renvoie implicitement à la composition des opérateurs décimaux $\times\, 0,7$ et $\times\, 0,8$!

Conclusion

Le public adulte de la formation de base est la cible d'un nombre impressionnant de méthodes de remédiation cognitive. Parmi les plus connues, citons les ARL (Ateliers de Raisonnement Logique), le PEI (Programme d'Enrichissement Instrumental créé par R. Feuerstein), la gestion mentale (créée par La Garanderie) ...L'hypothèse sous jacente, qui semble admise par beaucoup, est qu'il souffre d'une déficience cognitive particulière.

Pour ma part, j'ai retenu une autre hypothèse d'action, celle d'un défaut de proximité entre ses pratiques quotidiennes et le savoir académique qui lui est enseigné. Cette hypothèse est à l'origine de ma stratégie de formation et de l'invention du calcul sur les grandeurs que je viens d'exposer. Elle reste maintenant à vérifier.

La lecture de Vygotski m'a conforté dans mon intuition. La dynamique qu'il met à jour entre pratique et théorie, entre concepts spontanés et concepts scientifiques, me paraît très éclairante quant à la naissance du sens. Je m'appuie sur elle pour fonder la notion de proximité qui est au cœur de mon étude.

Chapitre II : définition d'une théorie de proximité.

Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de fonder la notion empirique de proximité qui est à l'origine de l'invention du calcul sur les grandeurs. Il s'agit de donner un sens précis et une réponse argumentée aux deux questions suivantes :

- **le public de la formation de base est-il plus proche du calcul sur les grandeurs que du calcul décimal ?**

- **le calcul sur les grandeurs lui donne-t-il accès au calcul décimal ?**

Nous présentons d'abord le contexte théorique et expérimental (§1).

Nous énonçons ensuite une première hypothèse (§2) portant sur la proximité du concept de nombre décimal. Pour vérifier cette hypothèse (§5), nous étudions au préalable le développement du concept spontané de mesurage entier (§3), puis la genèse du concept spontané de mesurage décimal (§4).

Après quoi nous énonçons une seconde hypothèse (§6) portant sur la proximité des opérations du calcul décimal. Afin de vérifier cette hypothèse (§8), nous étudions auparavant la genèse du concept spontané d'inversion d'un nombre décimal (§7).

Finalement nous donnons une réponse aux deux questions posées sous la forme d'une troisième hypothèse (§9).

En conclusion nous définissons le concept de théorie de proximité.

1. Le contexte théorique et expérimental.

Nous donnons dans cette section une définition opérationnelle de la proximité d'un concept. Cette définition s'appuie sur le concept de zone de proche développement défini par Vygotski. Elle servira dans les sections suivantes à évaluer la proximité des adultes des concepts du calcul décimal. Nous décrivons le corpus de calculs qui sera l'objet de cette évaluation et nous précisons les conditions dans lesquelles il a été produit.

1.1 La proximité conceptuelle.

La zone de proche développement recouvre les activités qu'une personne est capable de mener à bien en étant aidée, et qu'elle peut assez vite accomplir seule. Il s'agit d'une activité accompagnée, en voie d'être autonome. Les concepts spontanés que la personne développe avec l'aide de ses compagnons, ne sont pas encore complètement constitués, il s'agit de concepts spontanés en gestation : ce sont des concepts spontanés « de proximité ».

Existe-t-il des concepts scientifiques « de proximité » ? Selon Vygotski, l'acquisition d'un concept scientifique suppose le développement de formes spontanées de ce concept. En effet le concept scientifique n'est maîtrisé que lorsqu'il est mis en œuvre de façon efficace. Or pour le mettre en œuvre, l'adulte doit pouvoir l'associer à des concepts spontanés qu'il utilise dans son activité. Il est donc raisonnable de lier la proximité d'un concept scientifique à celle de ses formes spontanées. D'où la définition :

Une personne est proche d'un concept scientifique si elle est capable d'en produire des formes spontanées.

Par exemple Dahbia, Marjorie et Sophie, dont les mesurages spontanés ont été exposées dans le chapitre précédent, sont proches du concept scientifique de division entière des grandeurs.

Nous définissons la proximité d'une théorie à partir de celle de ses concepts :

Une personne est proche d'une théorie si elle est proche de tous les concepts scientifiques de cette théorie.

Cette définition ne suppose pas qu'une théorie se réduise à la somme de ses concepts ; elle tient à ce que les concepts spontanés se manifestent au coup par coup, selon les besoins des situations abordées. Cela dit, il est rare que les concepts spontanés apparaissent de façon isolée, ils sont en général intégrés au sein d'organisations conceptuelles locales qui sont en quelque sorte les « germes » d'une organisation théorique générale et systématique.

1.2 Le contexte expérimental.

Rappelons qu'au départ cette recherche était une recherche action. Le contexte expérimental préexiste donc à la recherche. Le public, en particulier, n'a pas été choisi en fonction des objectifs de la recherche : c'est le public, ordinaire et très hétérogène, de la formation de base de notre centre de Tourcoing. Les épreuves soumises à ce public n'ont pas non plus été pensées en fonction des hypothèses de la recherche, mais en fonction des objectifs de formation de nos modules[1]. Ce contexte expérimental nous a cependant paru apte à valider l'essentiel de notre recherche.

Le corpus des écrits est un recueil de calculs réalisés par des adultes inscrits dans les modules MA1 et MA2 de notre centre de Tourcoing entre septembre 1998 et juin 2001. Ces calculs ont été produits en ma présence pendant des séances d'évaluation[2]. Je ne suis pas intervenu dans ces calculs pendant leur production, que ce soit pour les orienter, les diriger, ou les corriger. Je peux ainsi assurer qu'il s'agit de productions authentiques des adultes dans lesquelles il est légitime de chercher la trace de leur pensée propre.

Les conditions de production de ces écrits ont été les suivantes : chacun a pu utiliser tous les documents et outils de son choix et faire appel à moi pour une aide linguistique (aide à la lecture de l'énoncé) ou psychologique (en cas de blocage j'encourage à poursuivre ou je conseille d'abandonner). Les règles de communication ont varié : jusqu'en avril 1999, les adultes ont travaillé en petits groupes de trois ou quatre, sur les mêmes exercices, mais avec des données numériques différentes pour chacun ; cette façon de procéder avait l'avantage d'éviter le stress, mais biaisait l'auto évaluation personnelle. Après cette date, nous avons convenu que l'évaluation serait strictement individuelle.

J'ai effectué en général une évaluation à mi-module et une autre en fin de module. Les modules étant semestriels, l'évaluation intermédiaire d'un module se situe aux alentours de novembre ou d'avril, et l'évaluation finale se situe en janvier ou en juin. Chaque évaluation consiste en une série d'exercices indépendants. La solution que donne une personne à un exercice est référencée par un index comportant 5 champs : prénom de l'auteur / niveau du module / mois de l'évaluation / année de l'évaluation / numéro de l'exercice dans l'évaluation.

Par exemple, l'index « Sophie/1/11/99/2 », désigne la solution donnée par Sophie en MA1 dans l'évaluation de novembre 1999 à l'exercice n°2, l'index Sophie/1/11/99/2,5,6 les solutions aux exercices n°2, n°5 et n°6, et l'index Sophie/1/11/99/1-6 les solutions aux exercices n°1 à n°6. Dans le cas de prénoms communs, un chiffre est accolé au prénom.

[1] La recherche a permis, il est vrai, de formuler ces objectifs plus précisément, mais ils existaient implicitement dans ma pratique dès le départ.

[2] Mis à part le document Marjorie/1/10/00 qui offre cependant les mêmes garanties d'authenticité.

Un champ vide désigne tous les choix possibles du champ. Par exemple, l'index « Sophie/1/11/99 » désigne l'évaluation complète produite en MA1 par Sophie en novembre 1999.

Enfin le mot « Sujet » dans le champ des prénoms désigne le sujet de l'évaluation : par exemple l'index « Sujet/1/11/99/2 » désigne le sujet de l'exercice 2 de l'évaluation proposée en novembre 1999 en MA1.

L'ensemble du corpus est fourni en annexe.

Notre méthode, qui consiste à analyser après coup les réponses des sujets, est très fréquemment utilisée en psychologie cognitive et développementale. Elle est habituellement complétée par une entrevue clinique entre l'examinateur et le sujet, par exemple sous la forme d'un « entretien d'explicitation » tel que le propose Vermersch (1989). Ce complément ne nous a pas paru nécessaire pour les besoins de cette recherche. Les productions du corpus sont, la plupart du temps, suffisamment explicite. Il est quasiment toujours possible de reconstituer le fil conducteur des calculs, même en l'absence de tout commentaire écrit ou oral de la part de leurs auteurs.

2. Première hypothèse : la proximité du concept de nombre décimal.

Beaucoup d'adultes n'ont pas acquis le concept de nombre décimal alors qu'ils utilisent couramment le formalisme décimal. Cela n'est pas surprenant : nous avons vu que l'interprétation usuelle du formalisme décimal ne fait pas appel au concept de nombre décimal. Parmi ces adultes beaucoup sont proches du concept de nombre décimal. Mais pas tous. C'est ce dernier public qui nous intéresse : nous faisons l'hypothèse que certains adultes sont proches du calcul entier sur les grandeurs alors qu'ils ne sont pas proches du concept de nombre décimal. Nous faisons en outre l'hypothèse que l'apprentissage du calcul entier sur les grandeurs les rapproche du concept de nombre décimal.

2.1 L'hypothèse et son public.

Notre première hypothèse de proximité est la suivante :

1a. Des adultes peuvent être proches de la théorie du calcul entier sur les grandeurs,
1b. sans être proches du concept de nombre décimal.
1c. Ils sont capables de s'approprier le calcul entier sur les grandeurs.
1d. La pratique de ce calcul les rapproche du concept de nombre décimal.

Cette hypothèse concerne en particulier le public des groupes MA1 du C.U.E.E.P. Nous orientons dans ces groupes des adultes dont le profil dans le domaine du calcul est le suivant :

- ils ont un concept spontané de grandeur, c'est à dire une expérience[3] des grandeurs courantes : franc, centime, kilogramme, gramme, mètre, centimètre, kilomètre, litre, centilitre, heure, minute.

- ils savent additionner ces grandeurs.

- ils ont un concept spontané de proportion entre ces grandeurs, à savoir la conservation de la proportion par addition des grandeurs proportionnelles.

L'objectif de nos groupes MA1, en matière de calcul, est de développer l'utilisation des opérateurs multiplicatifs entiers dans les situations de proportion et de formaliser les concepts de la théorie du calcul entier sur les grandeurs qui sont sous jacents à cet usage.

[3] Il s'agit de connaissances « ethnomathématiques », voir D'Ambrosio (1985).

2.2 La méthode de validation.

Nous considérons que le concept de nombre décimal met nécessairement en jeu le concept de mesurage décimal. Cela posé, nous validons l'hypothèse en montrant qu'il existe en MA1 des adultes qui satisfont l'ensemble des critères suivants :

- critère 1.a : en début de module, ils sont proches du calcul entier sur les grandeurs, en particulier ils sont capables de produire des mesurages entiers spontanés,

- critère 1.b : par contre, ils ne sont pas capables de produire de mesurage décimal spontané ; ils ne sont donc pas proches du concept de nombre décimal,

- critère 1.c : en cours de module, ils s'approprient le calcul entier sur les grandeurs,

- critère 1.d : en fin de module, ils sont capables de produire des mesurages décimaux spontanés ; ils sont désormais proches du concept de nombre décimal.

La vérification du critère 1.b pose problème, car il n'est pas facile de prouver l'incapacité d'une personne à produire un concept spontané : l'absence de production ne suffit pas pour se prononcer ! Pour trancher la question, nous nous intéressons aux concepts précurseurs du concept spontané recherché, c'est à dire à des concepts nécessairement requis pour sa production ; si nous n'observons pas ces concepts précurseurs dans les productions de la personne, nous estimons qu'elle n'est pas capable de produire le concept spontané en cause.

Pour déterminer les concepts précurseurs du concept spontané de mesurage décimal, nous étudions le développement du concept spontané de mesurage entier, puis la genèse du concept spontané de mesurage décimal.

3. Le développement du concept spontané de mesurage entier.

Nous retenons la définition suivante du mesurage entier spontané :

Le mesurage entier spontané d'une grandeur A par une grandeur B (plus petite) consiste à décomposer A en une somme de multiples entiers de B.

Nous pouvons observer dans le corpus des formes très variées de décomposition. L'usage de bases de décomposition s'observe de façon systématique dans les productions des adultes, en particulier la décomposition en base deux et la décomposition en base dix. La décomposition en base dix apparaît comme la plus difficile à mettre en œuvre et la plus tardive à se manifester.

3.1 Des exemples de mesurages entiers spontanés.

Des formes rudimentaires de décomposition sont obtenues en ajoutant B à lui-même autant de fois que nécessaire. Bien sûr cette stratégie trouve rapidement ses limites : elle est en échec dès que la mesure de A par B excède quelques dizaines.

Des formes de décomposition plus élaborées se trouvent en abondance dans le corpus ; nous en donnons ci-dessous des expressions algébriques condensées ; les trois premières formes correspondent aux productions présentées au chapitre I :

Dans Sophie/1/11/99/3, on trouve, pour l'exercice suivant :

> Combien de bouteilles de 75 centilitres peut-on remplir
> avec un tonneau de 300 litres ? (1 litre vaut 100 centilitres)

la décomposition suivante, en posant A = 250 litres et B = 0,75 litre :

$$A = 256B + 64B + 8B + 4B + B$$

Dans Marjorie/1/10/00/3, on trouve, pour l'exercice suivant :

> Avec 500F, combien peut-on acheter de journaux à 3,80F ?

la décomposition suivante, en posant A = 500F et B = 3,80F :

$$A = 100B + 30B + B$$

Dans Dabhia/1/04/00/1, on trouve, pour l'exercice suivant :

> Une publicité récente annonce la minute de téléphone à 0,27F.
> Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F ?

la décomposition suivante, en posant A = 100F et B = 0,27F :

$$A = 6\,(\,60B\,) + 10B$$

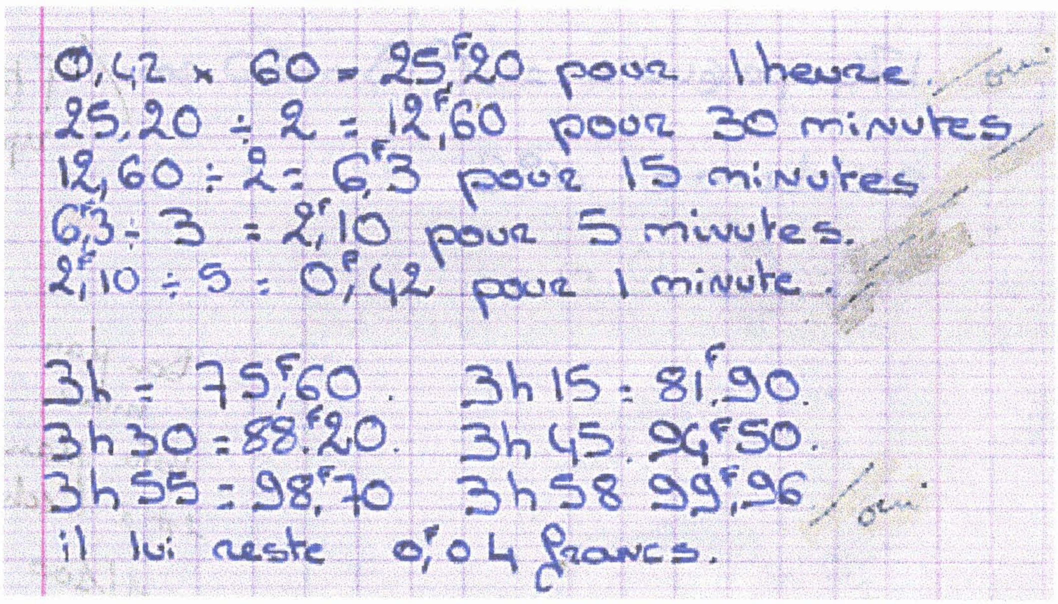
De nombreuses autres formes de décomposition se trouvent dans le corpus :

Dans Sophie/1/11/99/2, on trouve, pour l'exercice suivant :

> La minute de téléphone coûte 0,42F.
> Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F ?

La décomposition suivante, en posant A = 100F et B = 0,42 F :

$$A = 3 (60B) + (60B) / 2 + 3 (60B / 4) + 2 (60B /12) + 3B$$


0,42 x 60 = 25F20 pour 1 heure. oui
25,20 ÷ 2 = 12F60 pour 30 minutes
12,60 ÷ 2 = 6F3 pour 15 minutes
6F3 ÷ 3 = 2F10 pour 5 minutes.
2F10 ÷ 5 = 0F42 pour 1 minute.

3h = 75F60. 3h15 = 81F90.
3h30 = 88F20. 3h45 96F50.
3h55 = 98F70 3h58 99F96 oui
il lui reste 0F04 francs.

Sophie/1/11/99/2

Dans Marjorie/1/10/00/2, on trouve, pour l'exercice suivant :

> Avec 500F, combien de temps peut-on téléphoner
> si la minute coûte 0,61F ?

la décomposition suivante, en posant A = 500F et B = 0,61F :

$$A = 13 (60B) + 30B + 9B$$

0,61 F la minute –

1 min → 0,61 F
10 min → 6,10 F
50 min → 30,50 F
60 min → 36,60 F
(1 Heure)
(2H) 120 min → 72,20 F
(3H) 180 min → 109,80 F
(4H) 240 min → 146,40 F
(7H) 420 min → 256,20 F
(11H) 660 min → 402,60 F
~~(15H) 900 min → 549 F~~
(13H) 780 min → 475,80 F
~~(14H) 840 min → 512,40 F~~

~~13H50 min → 506,30 F~~
13H10 min → 481,90 F
13H 15 min → 484,95 F
13H 20 min → 488 F
13H 30 min → 494,10 F
~~13H 40 min → 500,20 F~~
3H 35 min → 497,60 F
3H 36 min → 497,76 F
3H 37 min → 498,37 F
3H 38 min → 498,98 F
3H 39 min → 499,59 F

15 min → 9,15 F
5 min → 3,05 F
6 " → 3,66 F
7 " → 4,27 F
8 " → 4,88 F
9 " → 5,49 F
20 " → 12,20 F
30 " → 18,30 F
40 " → 24,40 F

35 " → 21,80 F
33 " → 20,13 F
36 " → 21,96 F
37 " → 22,57 F
38 " → 23,18 F
39 " → 23,79 F
reste → 0,41 F

500 –

Marjorie/1/10/00/2

3.2 L'usage de bases de décomposition.

L'observation des exemples précédents, et plus généralement l'observation de l'ensemble des productions du corpus permettent de faire les constats suivants :

- le développement du concept spontané de mesurage entier suppose l'usage de bases de décomposition :

Base B, 10B, 100B, 1000B ...(mesurage entier spontané en base dix)
Base B, 2B, 4B, 8B... (mesurage entier spontané en base deux)
Base B, 60B, 3600B ... (mesurage entier spontané en base soixante)
Plusieurs bases sont quelquefois utilisées dans un même calcul.

- le mesurage entier en base dix est en concurrence avec d'autres mesurages :

Le mesurage en base deux est apprécié par les adultes pour sa simplicité car, dans ce mesurage, A est simplement la somme de certains termes de la base (Sophie/1/11/99/3), aucune table n'est nécessaire.
Quant au mesurage en base soixante, il est commode dans les situations faisant intervenir la grandeur temps (Dabhia/1/04/00/1)

- le mesurage entier en base dix se heurte à des difficultés propres.

D'une part le calcul des termes de la base, 10B, 100B,... pose problème : les règles de multiplication par déplacement de la virgule ou adjonction de zéro prennent du temps à être découvertes et intégrées à la pratique de calcul. Sans le contrôle qu'elles permettent, les erreurs de calcul sont fréquentes, même avec une calculette.

D'autre part le mesurage entier spontané en base dix, pour être efficace, nécessite d'établir, au moins partiellement, une table de multiplication à pas variable : premiers multiples de B, premiers multiples de 10B, premiers multiples de 100B...Or changer de pas dans la construction d'une table n'est pas évident. Certains adultes produisent des tables interminables donnant les valeurs de 11B, 12B, 13B ...ou bien celles de 110B, 120B, ...jusqu'à perdre le fil de ce qu'ils font...

Le mesurage spontané en base dix est plus élaboré que le mesurage spontané en base deux. L'observation du développement de ce concept dans les productions du corpus confirme cette analyse : le mesurage spontané en base dix est plus tardif à se manifester chez les adultes du corpus que le mesurage spontané en base deux.

4. La genèse du concept spontané de mesurage décimal.

Nous retenons la définition suivante du mesurage décimal spontané :

Le mesurage décimal spontané d'une grandeur A par une grandeur B (éventuellement plus grande que A) consiste à effectuer le mesurage entier de A par un sous multiple décimal de B (B/10, B/100,ou B/1000...).

Le corpus permet d'identifier deux grandes variétés de mesurages décimaux spontanés : une première variété, optimisée, qui utilise la division entière et une deuxième variété, plus élémentaire, qui est une adaptation du mesurage entier spontané. Nous en déduisons les concepts précurseurs du concept spontané de mesurage décimal.

4.1 La variété optimisée de mesurage décimal spontané.

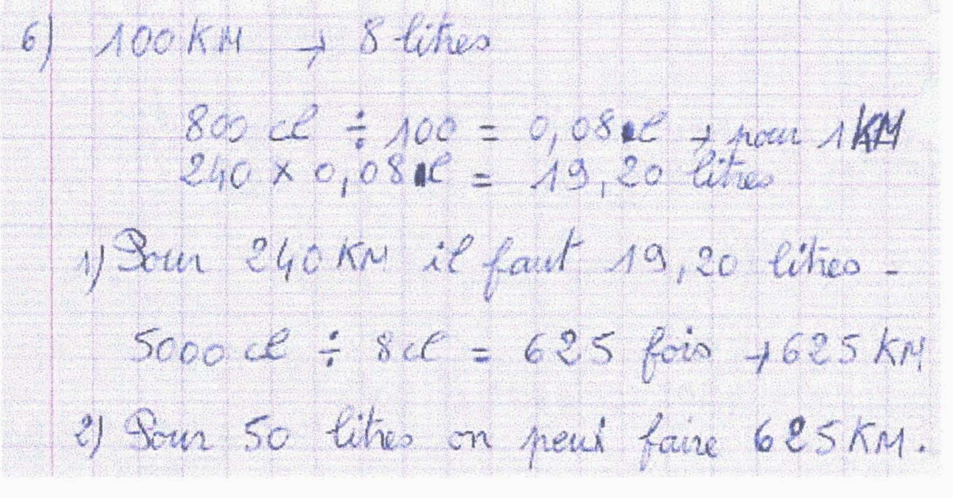
La variété optimisée de mesurage décimal spontané consiste à effectuer le mesurage en utilisant la division entière de A par B /10, B/100, ou B/1000, selon le cas. En voici quelques exemples :

On trouve dans Dabhia/1/01/01/6, pour l'exercice suivant :

Une voiture consomme 8 litres aux 100km :
Quelle distance peut-elle parcourir avec 50 litres ?

la division suivante, en posant A = 50 litres et B = 8 litres :

A / (B/100) = 625


6) 100 KM → 8 litres

800 cl ÷ 100 = 0,08 cl → pour 1 KM
240 x 0,08 cl = 19,20 litres

1) Pour 240 KM il faut 19,20 litres.

5000 cl ÷ 8 cl = 625 fois → 625 KM

2) Pour 50 litres on peut faire 625 KM.

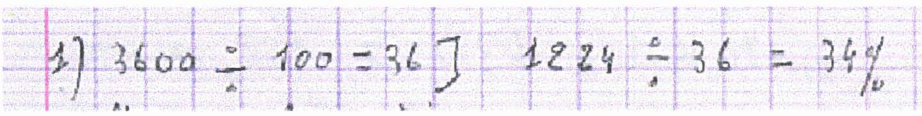
Dabhia/1/01/01/6

On trouve dans Laurent/1/01/01/1, pour l'exercice suivant :

> Un candidat a obtenu 1224 voix sur 3600 votants.
> Quel pourcentage cela fait-il ?

la division suivante, en posant A = 1224 voix et B = 3600 voix :

$$A / (B/100) = 34$$



1) 3600 ÷ 100 = 36] 1224 ÷ 36 = 34%

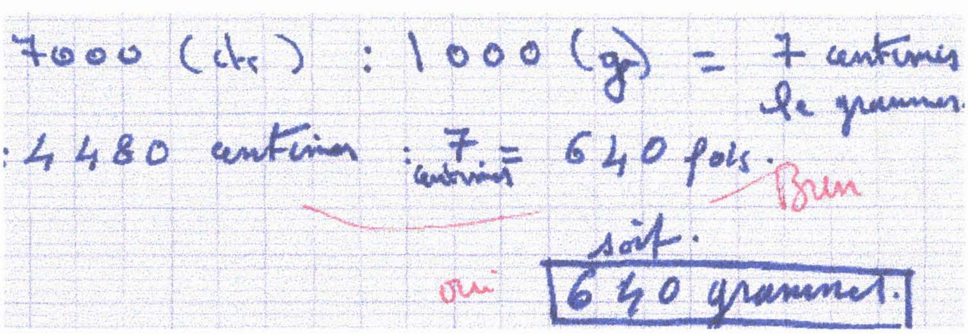
Laurent/1/01/01/1

On trouve dans Olivier/1/01/00/3, pour l'exercice suivant :

> L'étiquette d'une barquette de viande indique 44,80 F
> pour un prix au kilo de 70 F.
> Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?

la division suivante, en posant A = 44,80F et B = 70F :

$$A / (B/1000) = 640$$



7000 (cts) : 1000 (g) = 7 centimes le gramme.
:4480 centimes : 7 centimes = 640 fois. Bien
soit.
ou 640 grammes.

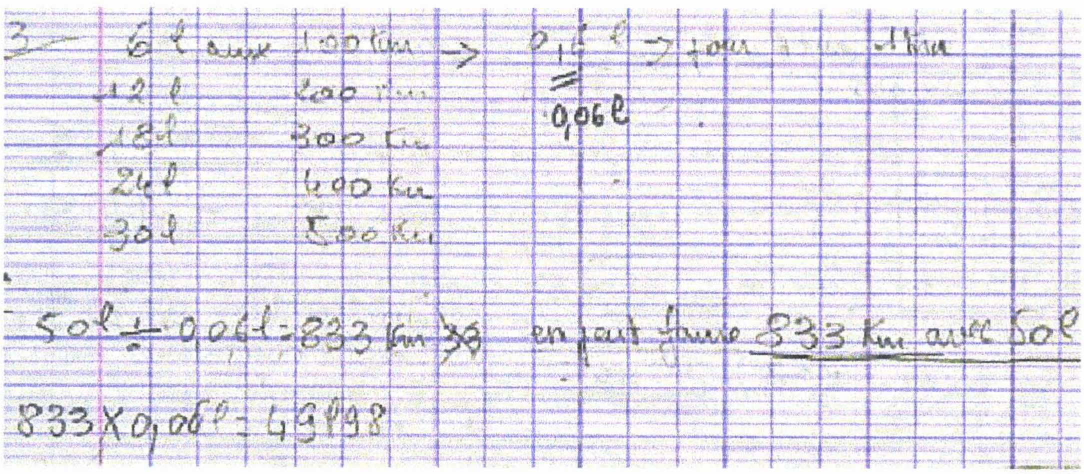
Olivier/1/01/00/3

On trouve dans Sylvie/1/06/01/3, pour l'exercice suivant :

> Une voiture consomme 6 litres aux 100km.
> Combien de kilomètres peut-elle faire avec 50 litres d'essence?

la division suivante, en posant A = 50 litres et B = 6 litres :

$$A / (B/100) = 833$$



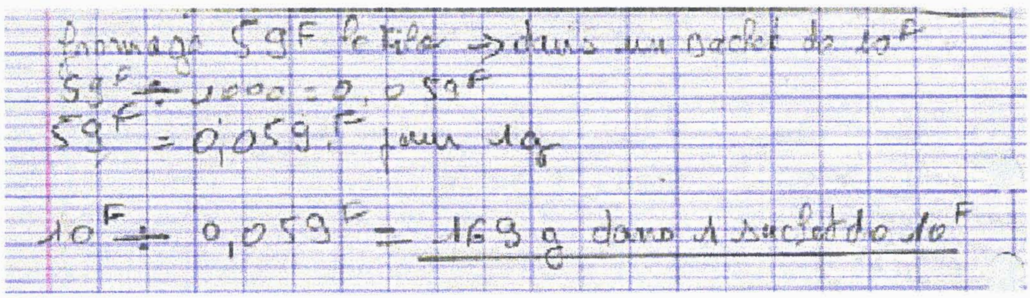
Sylvie/1/06/01/6

On trouve dans Sylvie/1/06/01/6, pour l'exercice suivant :

> Le fromage râpé vaut 59F le kilo.
> Combien doit-il y avoir de râpé dans un sachet vendu 10F ?

la division suivante, en posant A = 10F et B = 59F :

A / (B/1000) = 169



fromage 59F le kilo → dans un sachet de 10F
59F ÷ 1000 = 0,059F
59F = 0,059 F pour 1g
10F ÷ 0,059F = 169 g dans 1 sachet de 10F

Sylvie/1/06/01/3

Cette variété optimisée de mesurage décimal spontané ne peut évidemment être produite que par les adultes qui se sont appropriés le concept scientifique de division entière de deux grandeurs.

Le concept scientifique de division entière de deux grandeurs est un concept précurseur de la variété optimisée de mesurage décimal.

4.2 La variété élémentaire de mesurage décimal spontané.

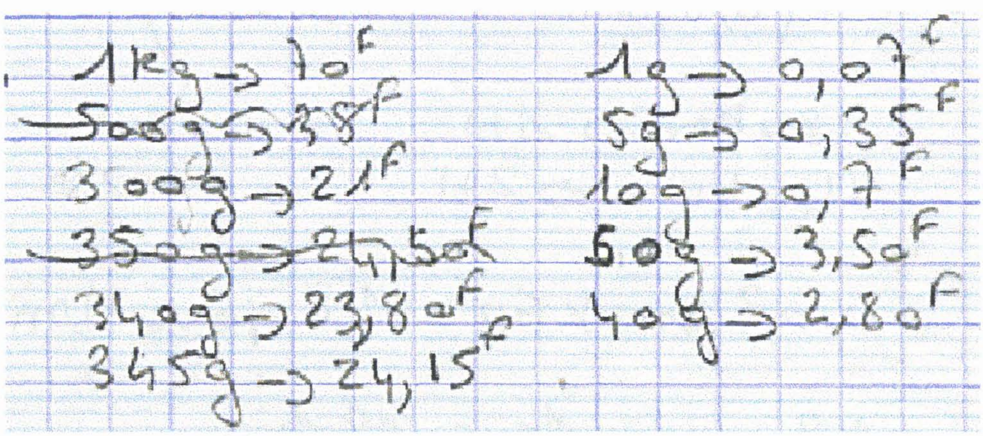
La variété élémentaire de mesurage décimal spontané consiste à décomposer directement A en une somme de multiples entiers de B, B/10, B/100 et B/1000… sans utiliser la division. Cette variété de mesurage décimal est souvent la première produite par les adultes. En voici quelques exemples :

On trouve dans Marjorie/1/12/00/2, pour l'exercice suivant :

> J'ai payé 24,15F un morceau de fromage à 70F le kilo.
> Quel doit être le poids de ce morceau ?

la décomposition suivante, en posant A = 24,15F et B = 70F :

$$A = 3\ (B/10) + 40\ (B/1000) + 5\ (B/1000)$$



1kg → 70F	1g → 0,07F
~~500g → 35F~~	5g → 0,35F
300g → 21F	10g → 0,7F
~~350g → 24,50F~~	50g → 3,50F
340g → 23,80F	40g → 2,80F
345g → 24,15F	

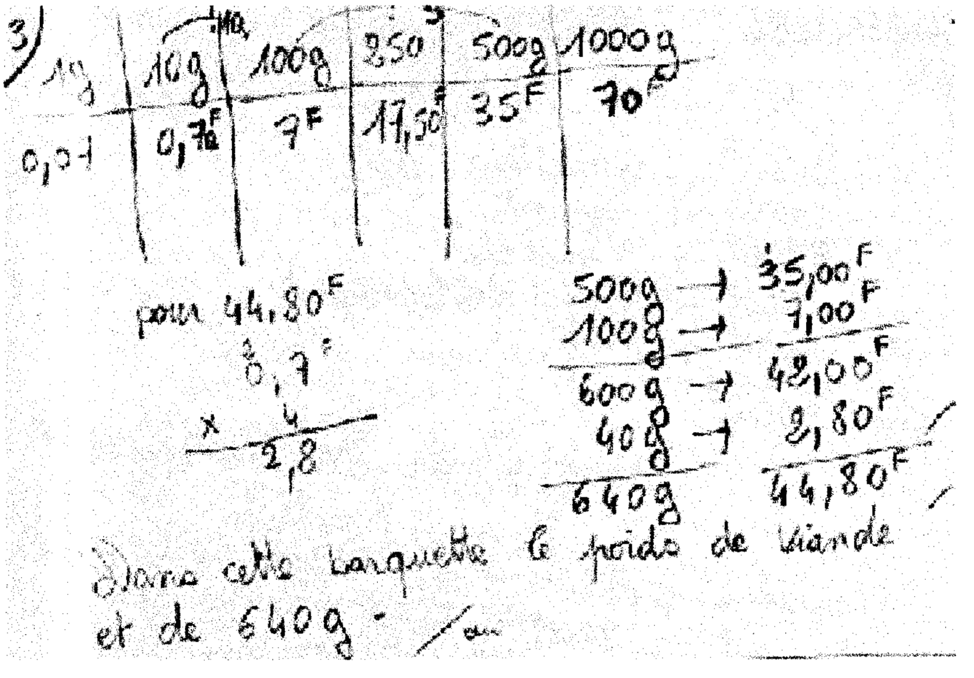
Marjorie/1/12/00/2

On trouve dans Dabhia/1/06/00/3, pour l'exercice suivant :

> L'étiquette d'une barquette de viande indique un prix au kilo de 70F.
> La barquette vaut 44,80F.
> Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?

la décomposition suivante, en posant A = 44,80F et B = 70F :

$$A = B/2 + B/10 + 4\,(B/100)$$



3)

1g	10g	100g	250	500g	1000g
0,07	0,7F	7F	17,50	35F	70F

pour 44,80F

0,7F
x 4
2,8

500g → 35,00F
100g → 7,00F
600g → 42,00F
40g → 2,80F
640g → 44,80F

Dans cette barquette le poids de viande et de 640g.

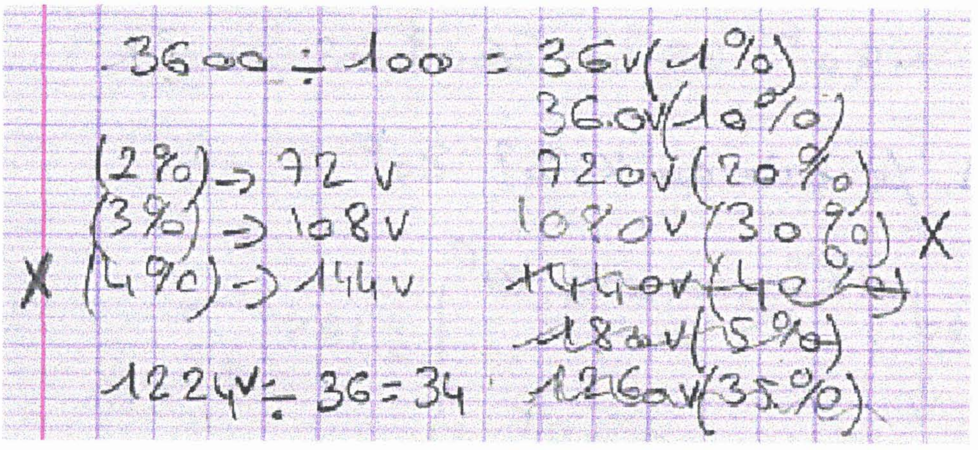
Dabhia/1/06/00/3

On trouve dans Marjorie/1/01/01/1, pour l'exercice suivant :

> Un candidat a obtenu 1224 voix sur 3600 votants.
> Quel pourcentage cela fait-il ?

la décomposition suivante, en posant A = 1224 voix et B = 3600voix :

$$A = 30(B/100) + 4\,(B/100)$$



3600 ÷ 100 = 36v (1%)
360v (10%)
(2%) → 72 v 720v (20%)
(3%) → 108 v 1080v (30%) X
X (4%) → 144 v ~~1440v (40%)~~
~~180v (5%)~~
1224v ÷ 36 = 34 ~~1260v (35%)~~

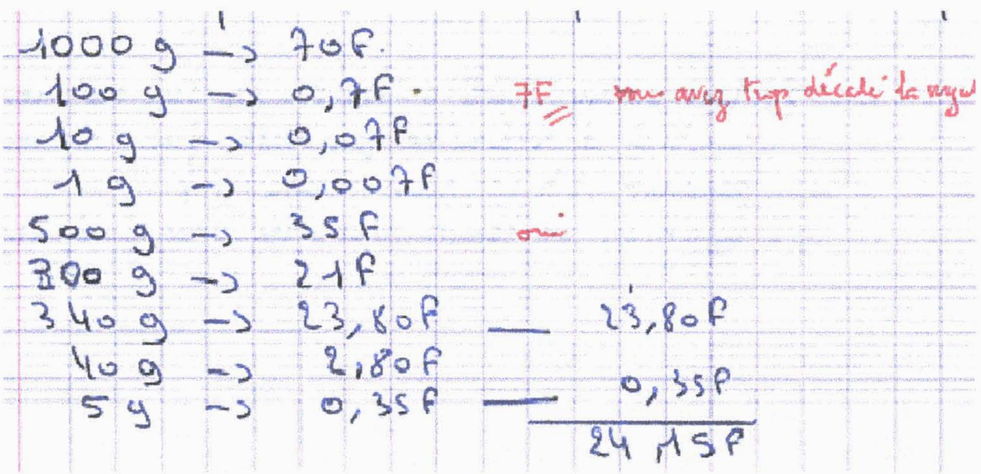
Marjorie/1/01/01/1

On trouve dans Samia/1/12/00/2, pour l'exercice suivant :

> J'ai payé 24,15F un morceau de fromage à 70F le kilo.
> Quel doit être le poids de ce morceau ?

la décomposition suivante, en posant A = 24,15F et B = 70F :

$$A = 3\ (B/10) + 4\ (B/100) + 5\ (B/1000)$$



1000 g → 70F.
100 g → 0,7F. 7F = vous avez trop décalé la virgule
10 g → 0,07F
1 g → 0,007F
500 g → 35 F oui
300 g → 21F
340 g → 23,80F — 23,80F
40 g → 2,80F
5 g → 0,35F — 0,35F
24,15F

Samia/1/12/00/2

On trouve dans Marjorie/1/12/00/4, pour l'exercice suivant :

> Je consomme 5 litres aux 100km.
> Combien de kilomètres puis-je parcourir avec 56 litres ?

la décomposition suivante, en posant A = 56litres et B = 5litres :

$$A = 10B + B + 2(B/10)$$

100km → 5 litres	1km → 0,05 litres
200km → 10 litres	10km → 0,5 litres
	20km → 1 litres
240km → 12 litres	30km → 1,5 litres
	40km → 2 litres
500km → 25 litres	60km → 3 litres
700km → 35 litres	70km → 3,5 litres
900km → 45 litres	90km → 4,5 litre
1000km → 50 litres	
1120km → 56 litres	

Marjorie/1/12/00/4

Dans le corpus, cette variété élémentaire de mesurage décimal spontané n'apparaît que chez les adultes qui maîtrisent le mesurage entier spontané en base dix.

4.3 Une hypothèse d'accommodation.

La variété élémentaire de mesurage décimal est sans doute une adaptation du mesurage entier spontané en base dix : effectuant une sorte d'inversion, les adultes substituent la base de décomposition B, B/10, B/100…à la base de décomposition B, 10B, 100B, … On peut comparer de ce point de vue Marjorie/1/04/99/1 et Marjorie/1/12/00/2.

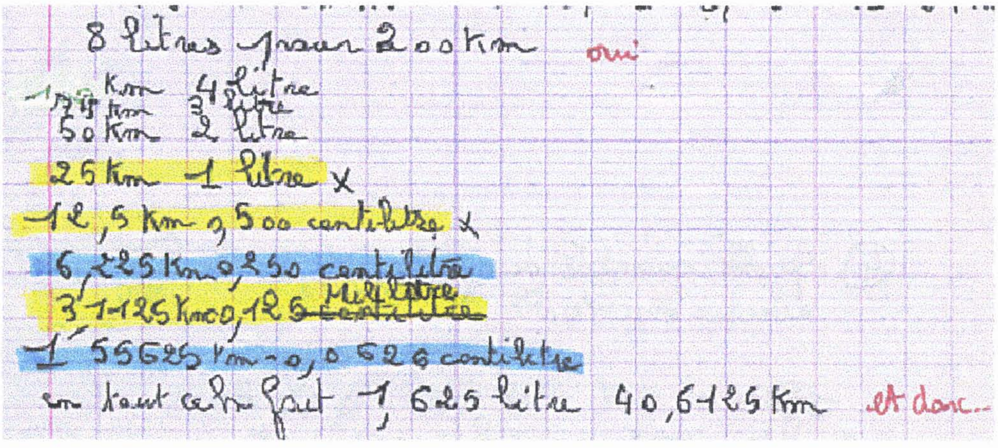
Une observation confirme ce jugement : on retrouve le même phénomène dans le cas du mesurage entier en base deux. Par exemple, Sébastien et Farid qui sont des pratiquants de ce mesurage spontané, utilisent aussi spontanément la base B, B/2, B/4, B/8, …

On trouve dans Sébastien/1/01/00/2, pour l'exercice suivant :

> Une voiture consomme 4 litre aux 100 km.
> Combien consomme-t-elle pour parcourir 240 km ?

la décomposition suivante, en posant A = 240km et B = 100km :

$$A = 2B + B/4 + B/8 + B/32$$


8 litres pour 200 km oui
100 km 4 litre
75 km 3 litre
50 km 2 litre
25 km 1 litre x
12,5 km 0,500 centilitre x
6,225 km 0,250 centilitre
3,1125 km 0,125 Millilitre ~~centilitre~~
1,55625 km 0,0626 centilitre
en tout cela fait 1,625 litre 40,6125 km et donc…

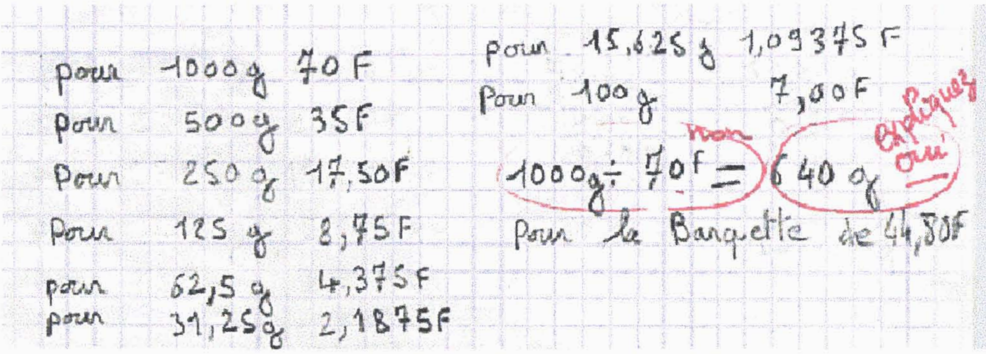
Sébastien/1/01/00/2

On trouve dans Farid/1/01/00/3, pour l'exercice suivant :

> L'étiquette d'une barquette de viande indique 44,80 F
> pour un prix au kilo de 70 F.
> Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?

la décomposition suivante, en posant A = 44,80F et B = 70F :

$$A = B/2 + B/8 + B/64$$



pour 1000g 70 F
pour 500g 35F
Pour 250 g 17,50F
Pour 125 g 8,75 F
pour 62,5 g 4,375 F
pour 31,25g 2,1875F
pour 15,625 g 1,09375 F
Pour 100 g 7,00 F
non
expliquez
1000g ÷ 70F = 640 g
oui
Pour la Barquette de 44,80F

Farid/1/01/00/3

Cette hypothèse d'accommodation paraît très vraisemblable ; elle n'est cependant pas indispensable à notre démonstration, puisque la variété élémentaire de mesurage décimal constitue en elle même un mesurage entier en base dix (en considérant le plus petit sous multiple de B comme base du mesurage de A). Nous pouvons donc conclure que la variété élémentaire de mesurage décimal spontané ne peut apparaître que chez les adultes qui sont capables de produire des mesurages entiers en base dix.

Le concept spontané de mesurage entier en base dix est donc un concept précurseur de la variété élémentaire de mesurage décimal.

4.4 Les concepts précurseurs du concept spontané de mesurage décimal.

D'après nos observations, il n'existe que deux variétés de concepts spontanés de mesurage décimal : la variété optimisée et la variété élémentaire. Bien entendu, rien ne prouve que des observations sur un public plus large ou dans un autre contexte, ne mettent en évidence d'autres variétés du concept spontané de mesurage décimal. Mais cela nous semble peu vraisemblable. A cette réserve près nous pouvons dire :

Il y a deux concepts précurseurs possibles du concept spontané de mesurage décimal : le concept scientifique de division entière de deux grandeurs <u>ou</u> le concept spontané de mesurage entier en base dix.

Si aucun de ces concepts n'est observable dans les productions d'une personne, nous estimerons qu'elle n'est pas en mesure de produire le concept spontané de mesurage décimal.

5. Validation de la première hypothèse.

Nous suivons dans cette section les performances de Sophie qui a fait partie d'un groupe MA1 avec moi de septembre 1999 à janvier 2000. Nous nous appuyons sur les évaluations réalisées en décembre 1999 et janvier 2000. Il s'agit des documents Sophie/1/11/99 et Sophie/1/01/00. Nous vérifions à l'aide de ces documents que Sophie vérifie les critères 1.a, 1.b, 1.c et 1.d énoncés dans la section 2.2 de ce chapitre.

5.1 Analyse de Sophie/1/11/99

Sujet/1/11/99

1. Un gros fumeur fume deux paquets de cigarettes par jour à 17,90F le paquet.
   a. Combien dépense-t-il en un mois ?
   b. Combien de jours peut-il tenir avec 500F ?
2. La minute de téléphone coûte 0,38F.
   a. Combien coûte une heure de téléphone ?
   b. Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F ?
3. Combien de bouteilles de 75 centilitres peut-on remplir avec un tonneau de 300 litres ? (1 litre vaut 100 centilitres)
4. Un sac de 25kg de pommes de terre coûte 37,50 F. Quel est le prix du kilo ?
5. En mettant bout à bout les cigarettes achetées par un gros fumeur en une année, est-ce qu'on peut atteindre le sommet de la Tour Eiffel (300m) ?
6. Un jardin mesure 8m de large sur 12m de long.
   a. De combien de mètres carrés dispose le jardinier ?
   b. Quelle est la longueur de la clôture ?
   c. Combien faut-il de poteaux ? (Il faut au moins 3m entre deux poteaux)
   d. Dessinez le plan du jardin à l'échelle 1/50.

Dans Sophie/1/11/99/1,2,3,5, Sophie produit avec aisance des mesurages entiers spontanés : elle résout tous les exercices où ce concept est en jeu, à un détail près (oubli du premier terme de l'addition dans Sophie/1/11/99/3). Sophie est donc proche du concept scientifique de division entière de deux grandeurs.

Par ailleurs elle maîtrise déjà les concepts de multiplication (Sophie/1/11/99/1,2) et de division d'une grandeur par un entier (Sophie/1/11/99/4).

Elle est donc proche du calcul entier sur les grandeurs (critère 1.a).

Mais, pour effectuer ses mesurages entiers, Sophie n'utilise jamais la décomposition en base dix, elle utilise exclusivement la décomposition en base deux. De plus, Sophie ne s'est pas encore appropriée le concept scientifique de division entière de deux grandeurs. Il n'y a donc, dans les productions de Sophie, à ce moment de son apprentissage, aucune trace d'un concept précurseur du concept spontané de mesurage décimal. Nous en concluons que Sophie, en ce début de module MA1, n'est pas proche de ce concept.

Elle n'est donc pas proche du concept de nombre décimal (critère 1.b).

problème N°1

18,90 x 2 = 37,80 F par jour
37,80 x 30 = 1134 F pour 1 mois oui
1134 ÷ 2 = 567 F pour 15 jours
567 - 75,6 = 491,40 F pour 15 jours. oui
puis il lui restera 8,60 F

problème N°2.

0,42 x 60 = 25,20 F pour 1 heure
25,20 ÷ 2 = 12,60 F pour 30 minutes
12,60 ÷ 2 = 6,3 F pour 15 minutes
6,3 F ÷ 3 = 2,10 F pour 5 minutes.
2,10 F ÷ 5 = 0,42 F pour 1 minute.

3h = 75,60 F   3h15 = 81,90 F.
3h30 = 88,20 F.   3h45 94,50 F.
3h55 = 98,70 F   3h58 99,96 F
il lui reste 0,04 F francs.

problème N°4
38,50 ÷ 25 = 1,54 F le kilo. TBien

problème N°5
1 cigarette = 7 cm
20 x 7 = 140 cm ~~pour~~ pour 1 paquet.
pour 2 paquet 280 cm. oui

1 paquet 140 cm = 1 m 40 cm

2x 2 paquets 280 cm = 2 m 80 cm

2x 4 paquets 560 cm = 5 m 60 cm

~~16 paquets 28 m~~ 8 paquets 1120 cm

32 paquets 56 m

~~64 paquets 112 m~~

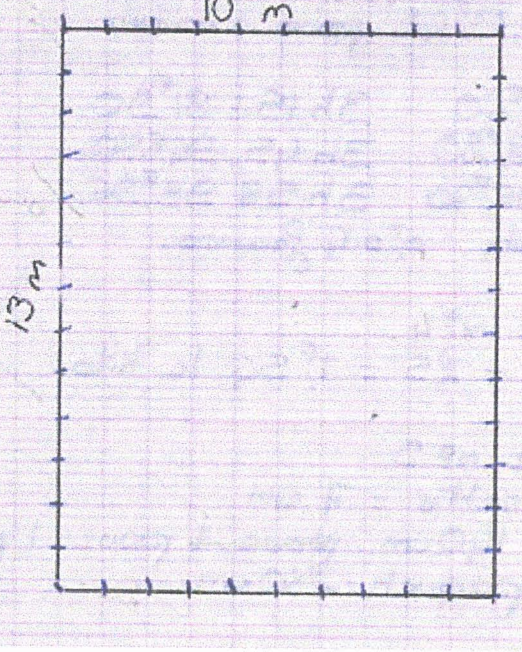
~~128 paquets 224 m~~

~~256 paquets 448 m~~

130 paquets. 226 m 80 cm

174 paquets = 299 m 60 cm. / Bien mais répondez à la question.

problème N° 6.



Bon plan mais votre plan est à l'échelle 1/100 problème 6.

10 x 13 = 130 m carré /oui m^2

10m x 2 = 20m + 13 x 2 = 26m /oui

20 m + 26 m = 46 m de clôture /oui

1 poteau tous les 1 mètre

46 poteaux. /oui

problème n° 3

1 bouteille 0,75 litres.

~~2 bouteilles 150 centilitres~~

4 bouteilles 3 litres

8 bouteilles 6 litres

~~16 bouteilles 12 litres~~

~~32 bouteilles 24 litres~~

64 bouteilles 48 litres

~~128 bouteilles 96 litres~~

256 bouteilles 192 litres.

332 bouteilles 249 litres

Sophie/1/11/99/6,3

5.2 Analyse de Sophie/1/01/00.

Sujet/1/01/00

1. Une famille dépense, par mois, 3600 F pour la nourriture, 2700 F pour son logement, 1800 F pour les transports, 600 F pour les loisirs et l'habillement, 300 F pour le reste.
    a. Représentez ce budget par un camembert.
    b. Quel est le pourcentage de chaque poste de dépense ?
2. Une voiture consomme 4 litre aux 100 km.
    a. Combien consomme-t-elle pour parcourir 240 km ?
    b. Quelle distance peut-elle parcourir avec 30 litre ?
3. L'étiquette d'une barquette de viande indique 44,80 F pour un prix au kilo de 70 F. Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?
4. Quelle quantité de gazole à 4,80 F le litre peut-on acheter avec 150 F ?
5. Le graphique ci-joint donne la position d'un train à chaque instant entre la gare A et la gare B.
    a. A quelle heure passe-t-il dans la gare C ?
    b. Est-ce qu'il s'arrête dans cette gare ?
    c. Où est-il à 9 h 45 ?
    d. Combien de kilomètres parcourt-il en une heure?

Le document Sophie/1/01/00 ne fournit pas la preuve que Sophie a acquis la maîtrise de la division entière de deux grandeurs : elle n'utilise en effet toujours pas explicitement cette opération pour effectuer le mesurage entier de deux grandeurs, que ce soit dans Sophie/1/01/00/2, ou dans Sophie/1/01/00/4 (je lui avais signalé ce fait en marge de l'évaluation : « manque la reconnaissance des opérations »). A cette réserve près, Sophie s'est appropriée les concepts du calcul entier sur les grandeurs (critère 1.c).

Ce document prouve par contre que Sophie est proche du concept de division décimale de deux grandeurs : en effet, dans Sophie/1/01/00/1, Sophie réussit le calcul des pourcentages des divers postes du budget et dans Sophie/1/01/00/3, Sophie produit un mesurage décimal spontané de B = 44,80F par A = 70F. En fin de MA1, Sophie est donc proche du concept de nombre décimal (critère 1.d).

L'évolution des performances de Sophie satisfait l'ensemble des critères de la première hypothèse de proximité, qui se trouve ainsi validée.

Sophie n'est pas la seule à vérifier ces critères : c'est aussi le cas par exemple de Laurent. Mais la plupart du temps le corpus ne permet pas de vérifier le critère 1.b. Par contre le corpus permet d'établir qu'un grand nombre d'adultes de MA1 vérifient les trois autres critères. Dans le groupe de février 2001 à juin 2001, on peut citer Franck, Freddy, Hocine, Jacky, Jacques, Najoi, Pascal et Sylvie. Dans le groupe de septembre 2000 à janvier 2001, Dabhia, Elodie, Giuseppe, Maria, Marjorie, Mohamed et Samia. Dans le groupe de février 2000 à juin 2000, Boualem, Jennyfer, Michel, Souhila et Yannick ...

Très bon travail. Manque la reconnaissance des opérations.

Sophie Une voiture consome 4 litre pour 100Km.

2) Combien consomme t'elle pour parcourir 240 Km. réponse?

Quelle distance peut-elle parcourir avec 30Litre 750 Km. oui

1L = 25 Km
2L = 50 Km
4L = 100 Km
8L = 200 Km
10L = 250 Km.

---

(3) l'Etiquette d'une barquette de viande indique 44,^{F}80 pour 1Kg. pour 70^F quel poids de viande a dans la barquette. 640 g. pour 44,79^F oui

70.^{F} pour 1Kg.
35^F pour 500g.
17,5 pour 250g
7^F pour 100g
3,5^F pour 50 g
1,75^F pour 25
0,35. pour 5 g.
0,07 pour 1 g. oui F

Quelle quantité de gazole
peut on acheter avec 150F

4,80F pour 1Litre
48F pour 10 litres.
72F pour 15 Litres
96F pour 20 Litres.
144F pour 30 Litres
148,8F pour 31 Litres. /oui

il me reste 1,2F sur 150F
Combien de centilitres avec 1,20F ?

Le graphique

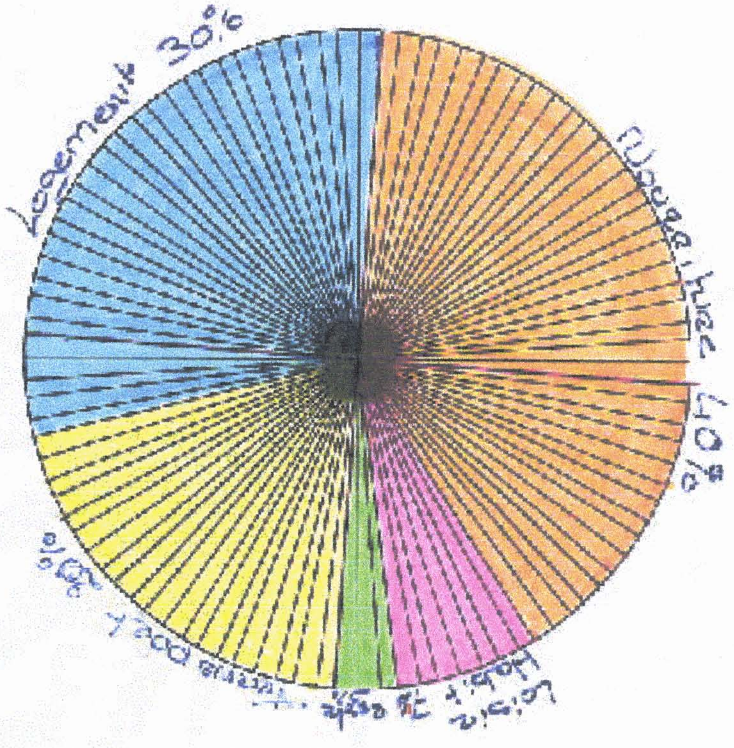
il passe dans la gare C à 9h20. oui

il est à 9h45 à 125 km de la gare A. oui

il parcourt ~~50km~~ en 1heure. non
100Km

Sophie/1/01/00/4,5

1 part : 90°



Sophie/1/01/00/1

6 Deuxième hypothèse : la proximité du concept d'opération décimale.

Beaucoup d'adultes qui savent utiliser les opérateurs multiplicatifs décimaux ne conçoivent pas que l'on puisse inverser un opérateur multiplicatif décimal par un autre opérateur multiplicatif : ils ont le concept de nombre décimal mais n'ont pas pour autant le concept d'inversion d'un nombre décimal. Parmi eux, certains sont proches de ce concept, d'autres non. C'est ce dernier public qui nous intéresse : nous faisons l'hypothèse que certains adultes sont proches du calcul décimal sur les grandeurs alors qu'ils ne sont pas proches du calcul entre nombres décimaux. Nous faisons en outre l'hypothèse que l'apprentissage du calcul décimal sur les grandeurs les rapproche du calcul entre nombres décimaux.

6.1 L'hypothèse et son public.

Notre deuxième hypothèse de proximité est la suivante :

2a. Des adultes peuvent être proches de la théorie du calcul décimal sur les grandeurs,
2b. sans être proches de la théorie du calcul entre nombres décimaux.
2c. Ils sont capables de s'approprier le calcul décimal sur les grandeurs.
2d. La pratique de ce calcul les rapproche du calcul entre nombres décimaux.

Cette hypothèse concerne en particulier le public des groupes MA2 du C.U.E.E.P. Nous orientons dans ces groupes des adultes dont le profil dans le domaine du calcul est le suivant :

- ils ont un concept spontané de grandeur, c'est à dire une expérience[4] des grandeurs courantes : franc, centimes, kilogramme, gramme, mètre, centimètre, kilomètre, heure, minute.

- ils savent utiliser les opérations du calcul entier sur les grandeurs.

- ils ont un concept spontané de proportionnalité accordé à ces opérations, à savoir la conservation de la proportionnalité dans la multiplication ou la division par un entier des grandeurs proportionnelles.

L'objectif des groupes MA2, en matière de calcul, est de développer l'usage des opérateurs décimaux dans la gestion de la proportionnalité entre grandeurs et de formuler les concepts de la théorie du calcul décimal sur les grandeurs sous jacents à cet usage.

[4] Même remarque qu'en 2.1.

6.2 La méthode de validation.

Pour valider cette hypothèse nous montrons qu'il existe en MA2 des adultes qui satisfont l'ensemble des critères suivants :

- critère 2.a : en début de module, ils sont proches du calcul décimal sur les grandeurs, en particulier ils sont capables de réaliser le mesurage décimal spontané d'une grandeur par une autre,

- critère 2.b : par contre, ils ne sont pas capables d'effectuer l'inversion spontanée d'un nombre décimal : ils ne sont donc pas proches du calcul entre nombres décimaux,

- critère 2.c : en cours de module, ils s'approprient le calcul décimal sur les grandeurs,

- critère 2.d : en fin de module, ils sont capables de produire des inversions spontanées d'un nombre décimal.

Le critère 2.b est délicat à valider : les raisons sont les mêmes que pour le critère 1.b. et nous procédons selon la même méthode : pour juger de l'incapacité d'une personne à produire le concept spontané d'inversion d'un nombre décimal, nous examinons s'il existe ou non dans ses productions des manifestations des concepts précurseurs de ce concept spontané.

7 La genèse de l'inversion spontanée d'un nombre décimal.

Nous décrivons dans cette section le concept spontané d'inversion d'un nombre décimal. Nous en déterminons les concepts précurseurs et nous étudions leurs diverses manifestations dans les productions du corpus.

7.1 L'inversion spontanée d'un nombre décimal et ses concepts précurseurs.

Nous considérons que le concept d'inversion d'un nombre décimal met nécessairement en jeu le concept d'opérateur. Deux nombres décimaux sont inverses si les opérateurs multiplicatifs associés sont inverses.

C'est par exemple le cas des nombres décimaux 1,25 et 0,80 . Pour toute grandeur G on a :

$$G \xrightarrow{\times 1,25} G'$$

$$G \xleftarrow{\times 0,80} G'$$

Mais le concept d'opérateur n'est pas seul impliqué dans l'affaire ; en effet le schéma suivant réalise aussi bien l'inversion de l'opérateur $\times$ 1,25 :

$$G \xrightarrow{\times 1,25} G'$$

$$G \xleftarrow{\div 1,25} G'$$

Pour en venir à l'inversion du décimal 1,25 il faut concevoir que l'opérateur $\div$1,25 soit en fait un opérateur multiplicatif. Cet opérateur multiplicatif s'identifie en divisant G par G' ; on obtient ainsi 0,80 qui est la mesure de G par G' , tandis que 1,25 est la mesure de G' par G. L'inversion d'un nombre décimal met donc aussi en jeu le concept de mesurage inverse.

Notre analyse conduit à la définition suivante de l'inversion spontanée d'un nombre décimal :

L'inversion spontanée d'un nombre décimal « a » consiste à identifier un opérateur ×a' inverse de l'opérateur ×a. L'identification de « a' » s'obtient par mesurage inverse, c'est à dire en effectuant le mesurage d'une grandeur arbitraire G par la grandeur G' = a $\times$ G.

Les deux concepts d'opérateur et de mesurage inverse sont nécessairement engagés. Le concept de mesurage inverse ne peut suffire, car il faut garantir que le décimal « a' » produit par l'inversion du mesurage de G par G' ne dépend pas du choix de G. Inverser un nombre décimal revient à inverser une infinité de mesurages !

On peut toujours envisager que dans un autre contexte apparaissent des formes spontanées d'inversion d'un nombre décimal totalement différentes de celle que nous venons de décrire. Mais cela nous semble peu vraisemblable. Cette réserve faite nous pouvons dire :

Il y a deux concepts précurseurs de l'inversion spontanée d'un nombre décimal : le concept d'opérateur décimal <u>et</u> le concept de mesurage inverse.

Par conséquent, si l'un ou l'autre de ces concepts ne se manifeste pas dans les productions d'une personne, nous estimons que cette personne n'est pas en mesure de produire l'inversion spontanée d'un nombre décimal.

7.2 Des exemples d'inversion spontanée d'un nombre décimal.

Un exemple se trouve dans Linda/2/04/99/10 : il s'agit d'une inversion approchée ; cette situation est la plus fréquente car un nombre décimal n'a que rarement un inverse décimal exact. Le problème est le suivant (Sujet/2/04/99/10) :

> Il y a quelques années, la TVA était de 18,6% sur le prix hors taxe.
> Quel pourcentage cela fait-il sur le prix TTC ?

L'énoncé tient pour acquis que le pourcentage recherché est indépendant du prix hors taxe. Le fait que Linda choisisse un prix hors taxe arbitraire P = 150F montre qu'elle joue le jeu et fait sien cet implicite. Elle applique l'opérateur ×18,6% à P :

$$P \xrightarrow{\times 18{,}6\%} T$$

Puis identifie par mesurage l'opérateur :

$$T + P \xrightarrow{\times 15{,}7\%} T$$

Linda réalise ainsi l'inversion spontanée de l'opérateur +18,6% en l'opérateur -15,7%, ce qui revient à inverser l'opérateur ×1,186 en l'opérateur ×0,843, et donc le décimal 1,186 en le décimal 0,843.

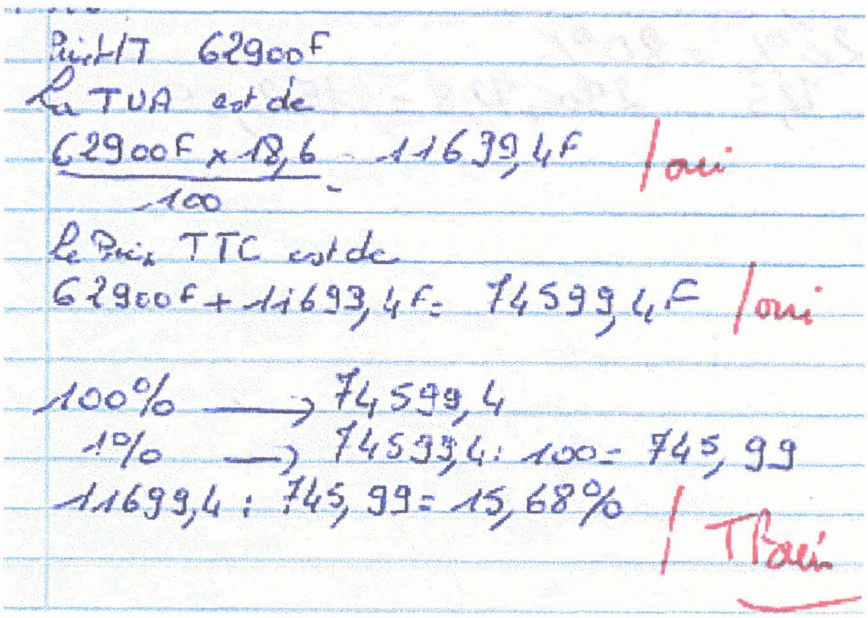
150F → 100 %
150 : 100 = 1,5 → 1 %
18,6 x 1,5 = 27,90F → TVA
150F + 27,90F = 177,90F → TTC

177,90F = 100 %
177,90F : 100 = 1,77F → 1 %
27,90F : 1,77F = 15,76 → 15,76 %

Le Pourcentage est de 15,76 %.

Linda/2/04/99/10

Des exemples voisins se trouvent dans Didier/2/04/99/10, Annie/2/04/99/10, Nathalie/2/04/99/10 et Benhalima/2/12/00/10. Ces exemples confirment notre définition de l'inversion spontanée d'un nombre décimal : dans chaque exemple sont mis en jeu, de façon explicite ou implicite, à la fois un opérateur et un mesurage inverse.


Prix HT 62900F
La TVA est de
$\frac{62900F \times 18,6}{100}$ = 11699,4F /oui
Le Prix TTC est de
62900F + 11699,4F = 74599,4F /oui
100% → 74599,4
1% → 74599,4 : 100 = 745,99
11699,4 : 745,99 = 15,68% / TB oui

Annie/2/04/99/10

Il existe peu de tels exemples dans le corpus. Cela tient au fait que l'opérateur ÷a permet à moindres frais d'inverser l'opérateur ×a sans recourir à l'inversion du nombre décimal « a ». Pour obtenir cette dernière inversion, il faut la demander (comme par exemple dans Sujet/2/04/99/10). Or il se trouve qu'à l'époque où j'ai élaboré les sujets d'évaluation du corpus, il ne me semblait pas nécessaire d'évaluer systématiquement la capacité à inverser un nombre décimal.

Il existe par contre dans le corpus de nombreuses manifestations du concept d'opérateur décimal. Il convient, pour la validation de notre seconde hypothèse de proximité, d'en recenser les diverses formes.

7.3 Les diverses formes spontanées du concept d'opérateur décimal.

Dans le corpus, le concept d'opérateur décimal se manifeste sous les formes suivantes :

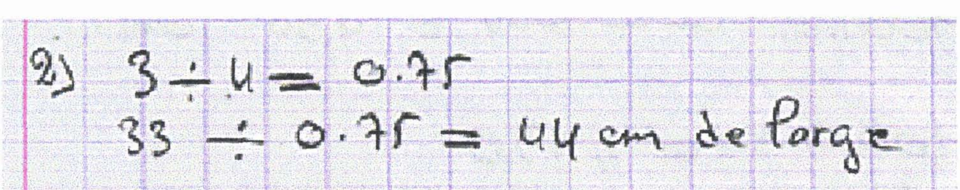
- De façon implicite par l'identification d'une mesure invariante :

On peut observer cette forme dans les exemples précédemment cités : Linda/2/04/99/10, Didier/2/04/99/10, Annie/2/04/99/10, Nathalie/2/04/99/10 et Benhalima/2/12/00/10. Tous effectuent des mesurages à partir de prix hors taxe arbitrairement choisis et ne doutent pas de l'invariance des mesures qui en résultent : ils utilisent donc implicitement un opérateur.

Autre exemple : dans Mohamed3/2/01/01/2, Mohamed associe le décimal 0,75 au format 4/3 d'un écran de télévision, puis divise la hauteur par 0,75 pour trouver la largeur. Mohamed suppose en fait l'invariance de la mesure décimale de la hauteur par la largeur quelles que soient les dimensions de l'appareil ; il utilise implicitement l'opérateur :

$$\text{largeur} \xrightarrow{\times 0,75} \text{hauteur}$$

Sujet/2/01/01/2 : Quelle est la largeur d'un écran de télévision de 33cm de haut (format 4/3) ?


2) 3 ÷ 4 = 0.75
33 ÷ 0.75 = 44 cm de Large

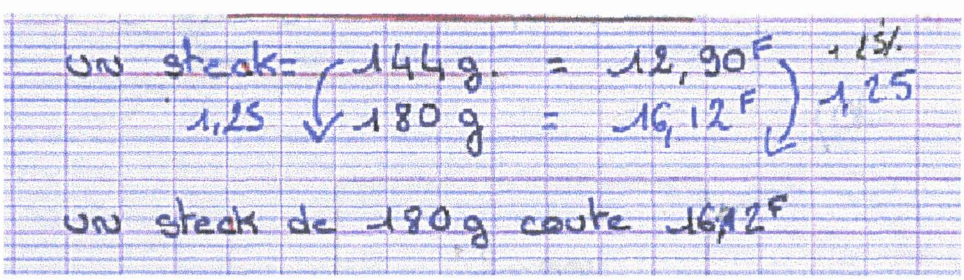
Mohamed3/2/01/01/2

- De façon explicite par la production d'un schéma de calcul :

Dans Sophie/2/01/01/5, Sophie met en place le schéma de calcul suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{poids} & \qquad & \text{prix} \\ \times 1{,}25 \ \big\downarrow & & \big\downarrow \ \times 1{,}25 \\ \text{poids'} & & \text{prix'} \end{array}$$

Sophie utilise explicitement l'opérateur $\times 1{,}25$ entre les couples (poids, prix). Elle identifie l'opérateur sur la composante poids et l'applique à la composante prix.



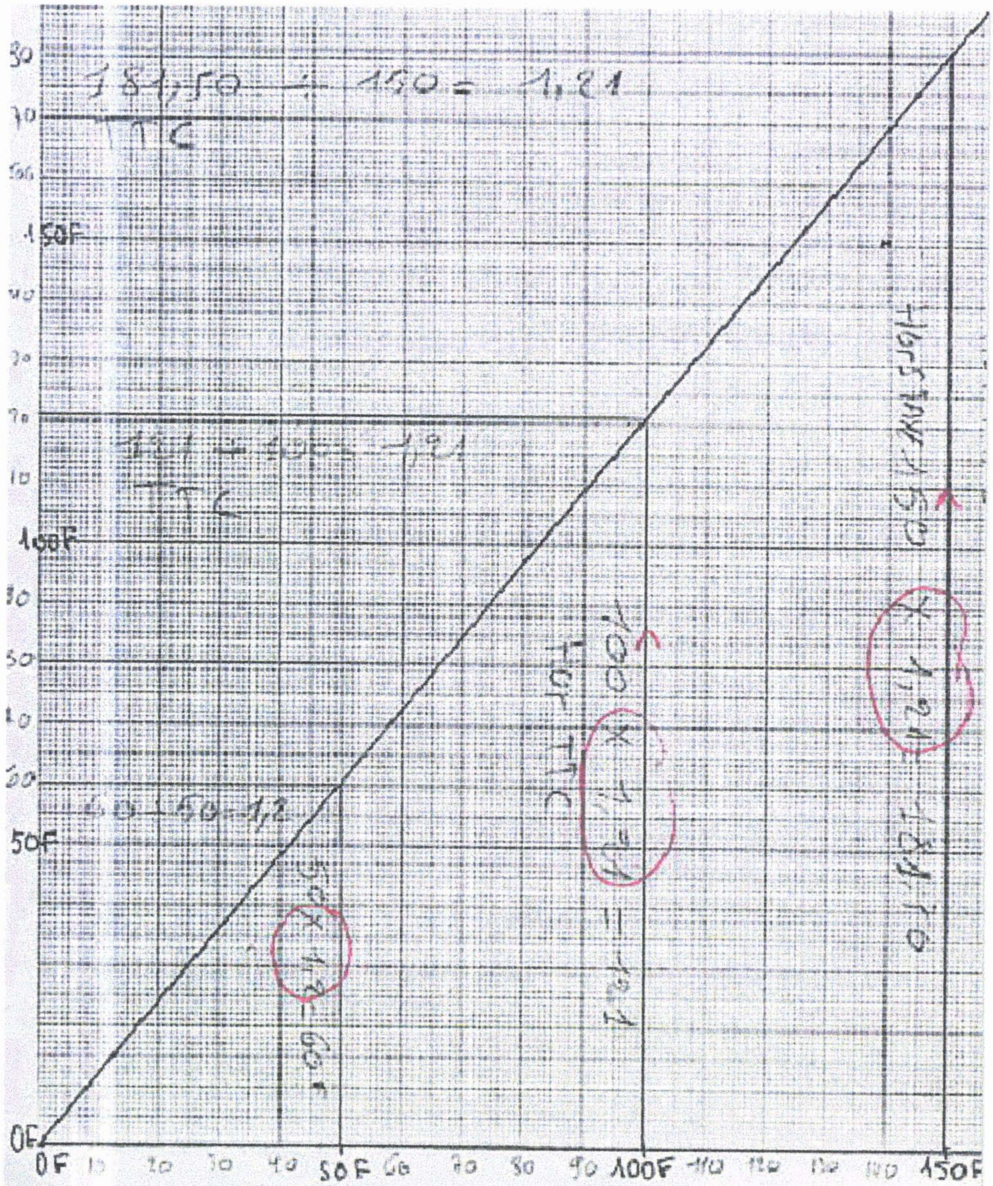
Sophie/2/01/01/5

- De façon explicite sur un graphique :

Dans Mohamed3/2/06/00/5, Mohamed identifie l'opérateur $\times 1{,}21$ entre prix hors taxe et prix TTC sur le graphique fourni.

Dans Rachid/2/06/00/5, Rachid identifie l'opérateur $\times 1{,}2$ entre prix hors taxe et prix TTC sur le graphique fourni.

Dans Bernadette/2/06/00/5, Bernadette identifie l'opérateur $\times 1{,}20$ entre prix hors taxe et prix TTC sur le graphique et l'inverse en $\div 1{,}20$; de même, dans Virginie/2/06/00/5, Virginie identifie l'opérateur $\times 1{,}210$ sur le graphique et l'inverse en $\div 1{,}210$.



Mohamed3/2/06/00/5

8 Validation de la deuxième hypothèse.

Nous sommes maintenant en mesure de valider notre seconde hypothèse de proximité. Nous retenons à nouveau à cet effet le cas de Sophie. Après avoir effectué un MA1 avec moi, Sophie, a suivi un MA2 avec un autre formateur de février 2000 à juin 2000, puis un autre MA2 avec moi de septembre 2000 à janvier 2001. L'évolution des performances de Sophie pendant cette période, satisfait tous les critères de l'hypothèse 2. En témoignent les évaluations réalisées en janvier 2000, décembre 2000, et janvier 2001. Il s'agit des documents Sophie/1/01/00, Sophie/2/12/00 et Sophie/2/01/01.

8.1 Analyse de Sophie/1/01/00.

Nous avons déjà examiné cette évaluation dans la section 5.1. Nous avons vu que Sophie s'y montre capable de produire des mesurages décimaux spontanés ainsi que des multiplications décimales spontanées. Mis à part peut-être la division d'une grandeur par un nombre décimal (le corpus ne permet pas de vérifier ce point), elle est donc proche du calcul décimal sur les grandeurs (critère 2.a).

Toutefois, elle produit ces mesurages décimaux spontanés seulement lorsque la mesure résultat est inférieure à 1 ; par exemple, dans Sophie/1/01/00/4, Sophie ne prolonge pas le mesurage entier de B = 150F par A = 4,80F en un mesurage décimal. De même dans Sophie/1/01/00/2, Sophie ne réalise pas le mesurage décimal de B = 240Km par A = 100km. Vraisemblablement, Sophie n'a pas encore conscience que l'on peut effectuer le mesurage décimal de A par B quand A est plus grand que B. Dans ces conditions, Sophie ne peut pas imaginer l'existence de mesures décimales inverses l'une de l'autre (mesurages de A par B et de B par A), et donc l'existence de deux décimaux inverses l'un de l'autre.

Par ailleurs, Sophie utilise uniquement les opérateurs $\times 2$, $\times 5$, $\times 10$, entre couples de grandeurs proportionnelles. Elle n'utilise pas d'opérateur entier quelconque, à fortiori pas d'opérateur décimal : il n'y a donc pas trace, dans les productions de Sophie à cette époque, des concepts précurseurs du concept spontané d'inversion d'un nombre décimal.

Nous pouvons donc en conclure que Sophie, en fin de MA1, n'est pas capable de produire l'inversion spontanée d'un nombre décimal. Elle n'est donc pas proche du calcul entre nombres décimaux. Le critère 2.b se trouve validé.

8.2 Analyse de Sophie/2/12/00.

Sujet/2/12/00

1. Lors d'une élection triangulaire, un candidat obtient 4851 voix, l'autre 7848 voix, le troisième 6413voix :
   a. exprimez ces résultats en pourcentages.
   b. représentez les par un demi camembert.
2. Un pantalon à 150F est soldé 120F. Quel est le pourcentage de solde ?
3. Je paie 250F une veste soldée à 20%. Quel était son prix avant les soldes ?
4. Un fromage blanc contient 20% de matière grasse[5] :
   a. combien y a-t-il de matière grasse dans un pot de 250g ?
   b. une ration doit contenir 10g de matière grasse ; quel doit être son poids ?
5. La population d'un village est passée de 1850 habitants à 1282 habitants.
   a. quelle est la perte de population en pourcentage ?
   b. de quel pourcentage la population doit-elle augmenter pour compenser cette perte ?
6. Monsieur (140 Kg) et madame (90Kg) font une cure d'amaigrissement. Monsieur perd 30 Kg et madame 20Kg. Qui a le plus maigri ?
7. La circonférence d'un arbre vaut 314% de son diamètre.
   a. quelle est la circonférence d'un arbre de 50cm de diamètre ?
   b. quel est le diamètre d'un arbre de 3m de circonférence ?
8. La surface d'un disque vaut 78,5% de celle de sa pochette.
   a. la pochette a une surface de 1dm² ; que vaut la surface du disque?
   b. le disque a une surface de 1dm² ; que vaut la surface de la pochette ?
9. Dans la zone « libre de taxe » de l'aéroport, j'ai acheté pour 485F de produit détaxé. Si j'avais fait mes achats à l'extérieur j'aurais dû payer 33,33% de taxe en plus !
   a. combien aurais-je payé à l'extérieur ?
   b. quelle est l'économie en pourcentage ?
10. L'état décide de prélever 15% de taxe sur le chiffre d'affaire d'un commerçant. De quel pourcentage celui-ci doit-il augmenter ses prix pour compenser cette taxe ?

Il apparaît clairement, à travers tous les exercices de cette évaluation, que Sophie s'est appropriée le concept de division décimale de deux grandeurs : tous les mesurages décimaux qu'elle effectue utilisent maintenant la division décimale, et le nombre décimal quotient est correctement interprété en termes de pourcentages (Sophie/2/12/00/2-6). La multiplication d'une grandeur par un nombre décimal est sûrement acquise aussi (Sophie/2/12/00/4a et Sophie/2/12/00/7a), bien que Sophie ne donne pas de réponse dans Sophie/2/12/00/8a .

Par contre, il semble que Sophie n'ait pas encore complètement acquis la division d'une grandeur par un nombre décimal. Tout se passe bien quand le décimal diviseur est supérieur à 1 (Sophie/2/12/00/7b), mais pas lorsque le diviseur est inférieur à 1 (Sophie/2/12/00/4b et Sophie/2/12/00/8b). A cette dernière réserve près, Sophie a acquis la maîtrise du calcul décimal sur les grandeurs et le critère 2.c se trouve ainsi validé.

[5] Cet exercice est impossible, mais je ne m'en suis pas rendu compte à temps : en effet le pourcentage de matière grasse est évalué par rapport à la matière sèche…

1).

1er 4851 voix — 4851 ÷ 19112 = 0,25 = 25%
2em 7848 voix — 7848 ÷ 19112 = 0,41 = 41%
3eme 6413 voix — 6413 ÷ 19112 = 0,33 = 33%
19112 voix.

2)

Bien
120 ÷ 150 = 0,8
100 − 80 = 20%.

3)

10% = 240F
300 ÷ 250 = 1,2
1,2 x 100 = 120
120 − 100 = 20%.

4).

oui
250 x 0,2 = 50g de matière grasse.
mais
0,2 ÷ 10 = 0,02 g de fromage blanc = 10g de matière grasse.
10g ÷ 0,2 = 50g

5)

1252 h ÷ 1850 h = 0,67
100 − 67 = 33%. perte

Bien

1850 ÷ 1252 = 1,47
100 + 47 = 147%. augmentation.
47%

6)

30 kg. ÷ 140 = 0,21.
100 − 21 = 79% pour monsieur.
20 kg ÷ 90 = 0,22.
100 − 22 = 78 %. pour madame.

oui, Conclusion ?

Sophie/2/12/00/1-6

7)

TBien

$50 \times 3,14 = 157$ m

$3 \div 3,14 = 0,95$ m.

8).

9) 485^F prix aéroport

$646,65 \div 485 = 0,75$.

TBien

$100 - 75 = 25$ %.

économie de 25%.

8.3 Analyse de Sophie/2/01/01.

Sujet/2/01/01

1. D'après le graphique joint,
   a. quel est le prix de 290g de Comté ?
   b. quel poids de Comté peut-on acheter avec 50F ?

   Un morceau de gruyère de 580g coûte 29F. Tracez le graphique du gruyère.
2. Quelle est la largeur d'un écran de télévision de 33cm de haut (format 4/3)?
3. Sur une carte de randonnée à l'échelle 1/25000 un trajet mesure 48cm. Combien cela fait-il en réalité ?
4. Un article à 469F est soldé 299F. Quel est le pourcentage de solde ?
5. Un steak de 144g est vendu 12,90F. Quel est le prix d'un steak de 180g ?
6. Une voiture coûte 69900F. La TVA sur les voitures est de 33,33%. Quel est le prix hors taxe de cette voiture?
7. Un candidat a obtenu 579 voix sur 2479 votants dans un bureau de vote et 385 voix sur 1786 votants dans un autre.
   a. Dans quel bureau a-t-il fait le meilleur score ?
   b. Quel est son score sur l'ensemble des deux bureaux ?
8. Un vélo a des roues de 65 cm de diamètre.
   a. De quelle distance avance-t-il à chaque tour de roue ?
   b. Combien de tours de roues pour parcourir 1km ?
9. Actuellement 100 euros valent environ 84 dollars. Combien d'euros pour 100 dollars ?
10. Un écran de cinéma de $100m^2$ a une hauteur de 7,50m. Quelle est sa largeur ?

Dans Sophie/2/01/01/5, déjà analysé en section 7, Sophie utilise explicitement un opérateur décimal. Dans Sophie/2/01/01/8,9 Sophie effectue des mesurages inverses : distance par tour de roue et nombre de tours par kilomètre dans l'exercice 8 ; dollar par euro et euro par dollar dans l'exercice 9. Elles dispose donc des concepts nécessaires pour effectuer l'inversion spontanée d'un opérateur décimal ; dans Sophie/2/01/01/6 elle effectue même l'inversion de l'opérateur $\times 1,33$ par l'opérateur $\div 1,33$; mais la question n'est malheureusement pas posée d'évaluer l'opérateur multiplicatif équivalent. Nous considérons cependant qu'elle serait capable d'effectuer cette évaluation, et donc qu'elle est proche du concept d'inversion d'un nombre décimal. Le critère 2.d est ainsi validé.

Notre deuxième hypothèse de proximité se trouve du même coup validée. A noter que le terme « rapproche » n'exige pas que tous les concepts du calcul décimal soient devenus proches, mais seulement certains !

1). avec 50^F j'achète 690 g de comté
290 g = 21^F.
580 g de gruyère 29^F
avec 20^F j'achète 290g de comté.
avec 14^F j'achète 290g de gruyère.

3). 25000 x 48 = 12 000 00 cm = 12 Km
48 cm sur la carte = 12 Km en réalité

4). un article a 469^F est soldé 299^F

299 ÷ 469 = 0,63 = 63% 100 - 63 = 37%.
le pourcentage de solde est de 37%.

5) un steak = 144 g = 12,90^F
1,25 180 g = 16,12^F
+25%
1,25

un steak de 180 g coute 16,12^F

6). 69900^F ÷ 1,33 = 52556,39^F
le prix hors taxe est de 52556,39^F

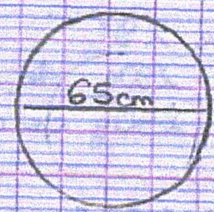
7). 1^er bureau 579 voix sur 2479 votant
2^em bureau 385 voix sur 1786 votant.
964 voix 4265 votant

579 ÷ 2479 = 0,23 = 23%.
385 ÷ 1786 = 0,21 = 21%.
Le meilleur score est le 1^er bureau 23%.

le score sur l'ensemble des deux est de 22%

964 ÷ 4265 = 0,22 = 22%

8)

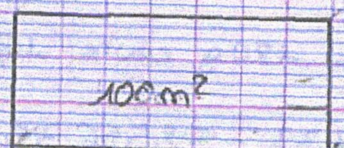


65 x 22 ÷ 7 = 204,28 cm de périmètre
100000 ÷ 204,28 = 489 tour de roue pour 1 km.

9) 84 ÷ 100 = 0,84 pour 1 euro.

100 ÷ 0,84 = 119 euro = 100 dollars.

10).



100 ÷ 7,5 = 13,33 m de large

La largeur de mon écran est de 13,33 m

Une bonne part du public de MA2 est proche, en fin de module, de l'inversion des nombres décimaux. Mais c'était peut-être déjà le cas au départ, le corpus ne permet pas toujours d'en juger.

En effet le public de nos groupes MA2 est très hétérogène ; certains y sont en apprentissage initial, mais d'autres y sont en révision de notions oubliées ou mal comprises. Ainsi la moitié des adultes qui entrent en MA2 n'ont pas suivi de MA1 auparavant. Je ne dispose donc pas d'évaluation de leurs capacités antérieure à leur entrée en MA2.

En outre nous avons l'habitude d'inciter les adultes à changer de formateur d'un semestre à l'autre ; ce qui restreint encore le nombre de personnes que j'ai pu suivre sur les deux modules. Il s'agit le plus souvent de personnes qui ont « doublé » l'un des deux modules, ou suspendu leur formation entre-temps.

Le corpus permet néanmoins d'observer l'évolution de sept personnes, et de vérifier qu'elles satisfont les critères de l'hypothèse2. Il s'agit de :

- Annie d'après Annie/1/04/99 et Annie/2/06/00.
- Cathy d'après Cathy/1/12/97 et Cathy/2/04/99.
- Christine d'après Christine/1/10/98, Christine/1/12/98 et Christine/2/04/99.
- Didier d'après Didier/1/10/98, Didier/1/12/98 et Didier/2/04/99.
- Mohamed d'après Mohamed/1/06/99, Mohamed/2/04/00, Mohamed/2/06/00, Mohamed/2/06/00, Mohamed/2/12/00 et Mohamed/2/01/01.
- Rachid d'après Rachid/1/04/99 et Rachid/2/06/00.
- Virginie d'après Virginie/2/01/00 et Virginie/2/06/00.

9 Troisième hypothèse de proximité.

L'étude que nous venons de mener permet d'avancer une troisième hypothèse de proximité, plus faible que les hypothèses 1 et 2 précédentes, mais mieux assurée par le corpus ; elle concerne le public des groupes MA1 de Tourcoing :

3.a Des adultes peuvent être proches de la théorie du calcul entier sur les grandeurs,
3.b sans être proches de la théorie du calcul entre nombres décimaux.
3.c Ils sont capables de s'approprier le calcul entier sur les grandeurs.
3.d La pratique de ce calcul les rapproche du calcul entre nombres décimaux.

Vérifions cette hypothèse :

- sous hypothèses 3.a et 3.c : nous avons vu que le public de MA1 était proche de la théorie du calcul entier sur les grandeurs (hypothèse 1.a) et capable, dans une large mesure, de s'approprier cette théorie (hypothèse 1.c).

- sous hypothèse 3.b : par contre, on ne trouve pas, dans les productions de ce public, de manifestation des concepts précurseurs du concept d'inversion d'un nombre décimal : le corpus ne comporte que de rares traces d'une utilisation correcte des opérateurs multiplicatifs décimaux. Le public de MA1 n'est donc pas proche de la théorie du calcul entre nombres décimaux.

- sous hypothèse 3.d : cependant, la pratique du calcul entier sur les grandeurs rapproche ce public du calcul entre nombres décimaux, puisqu'elle le rapproche du concept de nombre décimal (hypothèse 1.d). En outre cette pratique lui permet de s'approprier les opérateurs multiplicatifs entiers, et l'introduit ainsi à l'usage des opérateurs multiplicatifs décimaux.

La troisième hypothèse est donc largement validée par le corpus. Nous dirons, pour résumer, que la théorie du calcul entier sur les grandeurs est plus accessible au public MA1 que la théorie du calcul entre nombres décimaux et qu'elle lui donne accès à cette théorie.

Conclusion.

Nous avons montré que la théorie du calcul entier sur les grandeurs est plus accessible au public MA1 de Tourcoing que la théorie du calcul entre nombres décimaux et qu'elle lui donne accès à cette théorie.

Nous conjecturons que la théorie du calcul sur les grandeurs peut être considérée comme le prototype d'une classe de théories mathématiques à vocation andragogique que nous appelons théories de proximité. En voici la définition :

Une théorie de proximité d'une théorie de référence est une théorie :

- **plus accessible que la théorie de référence, à savoir qu'il existe un public proche de la théorie de proximité sans l'être de la théorie de référence,**

- **et qui donne accès à cette théorie de référence, c'est à dire qu'elle permet à ce public d'en produire des concepts spontanés.**

Nous avons montré que **la théorie du calcul entier sur les grandeurs est une théorie de proximité de la théorie du calcul entre nombres décimaux**.

Dans le chapitre suivant nous allons élargir le cadre de notre recherche et tenter d'insérer notre concept de théorie de proximité au sein d'un réseau conceptuel plus étendu.

Chapitre III : caractéristiques didactiques d'une théorie de proximité.

Introduction.

Dans ce chapitre, nous examinons le calcul sur les grandeurs et son enseignement du point de vue de quelques théories fondatrices de la didactique : théorie des champs conceptuels, théorie des situations didactiques, théorie de la transposition didactique ; cet examen fait apparaître quelques propriétés remarquables qui sont de nature à caractériser une théorie de proximité. Ces propriétés constituent autant de nouveaux liens conceptuels qui viennent préciser et conforter notre définition de la proximité.

1. La théorie des champs conceptuels.

La théorie des champs conceptuels est, selon son auteur, Gérard Vergnaud, une théorie *« de la conceptualisation du réel : elle permet de repérer et d'étudier les filiations et les ruptures entre connaissances du point de vue de leur contenu conceptuel »* [1]. Elle s'inspire à la fois de Vygotski, dont elle reprend le processus de conceptualisation et de Piaget à qui elle emprunte le concept de schème.

Nous mettons d'abord en évidence une concordance entre la proximité des concepts du calcul de base et leurs positions dans les champs conceptuels. Puis nous montrons que le traitement de la proportionnalité entre grandeurs dans les productions du corpus est organisé selon un schème dont le calcul sur les grandeurs formalise les invariants.

---

[1] Vergnaud (1990) p.133

1.1 Le rôle des schèmes dans la conceptualisation.

La théorie des champs conceptuels considère que la conceptualisation s'opère à travers l'activité du sujet en situation :

« un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens » [2].

Ce sens est produit par la mise en relation *«des savoirs exprimés et des savoir-faire »* [3] dans lesquels il faut voir deux formes de concepts, *« les concepts comme connaissances explicites ... (et) les invariants opératoires implicites dans les conduites des sujets en situation»*[4]. On reconnaît là une description du processus de conceptualisation très proche de celle de Vygotski.

La théorie des champs conceptuels fait d'autre part appel au concept de schème introduit par Piaget. Le schème est *« l'organisation invariante de la conduite (d'un sujet) pour une classe de situations donnée »*[5]. Vergnaud cite notamment : le schème du saut en hauteur chez l'athlète, le schème de dénombrement d'une petite collection chez l'enfant, le schème de résolution d'une équation du premier degré chez le collégien. Selon lui :

« dans la résolution des problèmes d'arithmétique dite élémentaire... c'est en termes de schèmes qu'il faut analyser le choix des bonnes opérations et des bonnes données pour résoudre un problème... » [6] ; *« c'est dans les schèmes »*, poursuit-il, *« qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet »* [7]

Par l'observation et l'analyse des schèmes, la théorie des champs conceptuels met en évidence plusieurs types de concepts spontanés : les *« concepts en acte »* et les *« théorèmes en acte »* ; par exemple, dans une activité de dénombrement, elle identifie le *« concept en acte »* de cardinal d'un ensemble mais aussi des *« théorèmes en acte »* tels celui-ci :

$$« \; card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B) \;\; si \;\; card\,(A \cap B) = 0 \; »$$

La théorie des champs conceptuels décrit ces *« théorèmes en acte »* en termes d'arguments, de propositions et de fonctions propositionnelles. Le type et le nombre d'arguments, de propositions et de fonctions mis en oeuvre sont pris comme indicateurs de complexité. La théorie des champs conceptuels parvient ainsi à organiser les concepts en *« champs conceptuels »* et à les classer selon leur complexité.

---

[2] ibid. p.135
[3] ibid. p.135
[4] ibid. p.133
[5] ibid. p.136
[6] ibid. p.141
[7] ibid. p.136

1.2 La complexité des concepts du calcul de base.

Vergnaud distingue, dans le domaine de l'arithmétique « *dite élémentaire* », deux champs conceptuels : le « *champ des structures additives* » qui met en jeu des relations ternaires[8] et le « *champ des structures multiplicatives* » qui met en jeu des relations quaternaires. Il situe une « *rupture conceptuelle* » à l'articulation de ces deux champs. Or, le calcul sur les grandeurs organise précisément une transition entre structure additive et structure multiplicative du calcul de base, comme cela apparaît sur la figure I.1 du premier chapitre. Nous pouvons donc énoncer une première propriété du calcul sur les grandeurs :

La théorie du calcul sur les grandeurs formalise une articulation entre champ additif et champ multiplicatif.

Après avoir distingué « *champ des structures additives* » et « *champ des structures multiplicatives* », Vergnaud entreprend la classification, selon leur complexité, des situations et concepts ressortant de chacun de ces deux champs. Dans son exploration du « *champ des structures multiplicatives* » [9], il établit la filiation suivante, dans l'ordre de complexité croissant :

- la proportion simple
- l'enchaînement fonctionnel des proportions[10]
- la proportion double

Situons chacune des théories du calcul de base que nous avons identifiées dans cette échelle de complexité :

- Le calcul sur les grandeurs se situe au niveau de la proportion simple : en effet les opérations de multiplication et de division de ce calcul se définissent dans le cadre de la proportion simple entre deux espèces de grandeurs.

- Le calcul entre nombres décimaux, se situe au niveau de l'enchaînement fonctionnel des proportions : en effet, la multiplication entre nombres décimaux correspond à la composition des opérateurs multiplicatifs décimaux (voir chapitre1 §7.2).

- Le calcul entre grandeurs se situe au niveau de la proportion double : en effet, la multiplication entre grandeurs se définit à partir de la proportion double (voir chapitre1 §2.2).

---

[8] les opérations binaires (par exemple l'addition) sont des relations ternaires et les opérations ternaires (par exemple la règle de trois) sont des relations quaternaires
[9] ibid. p.154
[10] c'est à dire la composition des opérateurs multiplicatifs.

Nous pouvons donc associer les niveaux de complexité du « *champ des structures multiplicatives* » et les théories du calcul de base selon le schéma suivant :

Complexité croissante ↓			Proximité décroissante ↓
	Proportion simple	⟷	Calculs sur les grandeurs
	Enchaînement fonctionnel des proportions	⟷	Calcul entre nombres décimaux
	Proportion double	⟷	Calcul entre grandeurs.

L'ordre de complexité mis à jour par la théorie des champs conceptuels correspond à l'ordre inverse de proximité que nous avons établi ou conjecturé dans notre étude du chapitre précédent à propos des théories du calcul de base. La théorie des champs conceptuels nous permet en particulier d'affirmer :

La théorie du calcul sur les grandeurs est moins complexe que la théorie du calcul décimal (calcul entre nombres décimaux).

1.3 Classification des situations de proportion simple.

Dans son étude, Vergnaud se livre à une analyse plus fine des situations de proportion simple. Il identifie quatre classes de « *problèmes élémentaires* »[11] , chacune correspondant à un schème particulier : « *la multiplication, la division partition, la division-quotition, la quatrième proportionnelle* » :

1	a
b	□

la multiplication

1	□
b	c

la division-partition

1	a
□	c

la division-quotition

a	b
c	□

la quatrième proportionnelle

Cette classification a été établie en milieu scolaire dans le cadre d'un calcul dont les objets sont des nombres. En formation d'adultes, dans le cadre d'un calcul dont les objets sont des grandeurs, la distinction entre ces quatre classes de situations est moins nette.

Prenons par exemple, un problème classé « *problème de multiplication* » selon les critères précédents :

1kg	64F
1,480kg	□

Jacques donne, en MA1, la solution suivante à ce problème (Jacques/1/06/01/4) :

10g	0,64F
1g	0,064F
480g	30,72F
1kg480	94,72F

[11] ibid. p.153.

Il ne considère pas 1kg comme une unité mais interprète cette grandeur comme 1000g ; il pose en fait le problème ainsi :

1000g	64F
1480g	□

Il s'agit donc pour lui d'un problème de quatrième proportionnelle. D'autres exemples peuvent s'observer dans le corpus.

La démarche de Jacques n'est pas surprenante : Jacques ne calcule pas avec des nombres décimaux, comme le montre l'écriture « 1kg480 », mais avec des grandeurs, or dans la théorie du calcul sur les grandeurs il n'y a pas de grandeur unité intrinsèque[12] : les grandeurs unités sont des grandeurs arbitraires, consacrées par l'usage, et plusieurs choix sont possibles dans chaque espèce, kilogramme ou gramme pour les masses, mètre ou centimètres pour les longueurs, heures ou minutes pour les durées, etc ...

La classification que nous proposons ci-dessous s'inscrit dans le cadre d'un enseignement du calcul sur les grandeurs. Elle met en avant la possibilité ou non de traiter la situation en utilisant uniquement l'opération d'addition des grandeurs.

Dans un premier temps, nous considérons toutes les situations de proportion simple comme des situations de quatrième proportionnelle répondant au schéma suivant :

A	B
C	□

où A et C sont des grandeurs de même espèce et B une grandeur d'espèce quelconque.

Nous distinguons les situations associées à ce schéma selon qu'elles peuvent, ou pas, se traiter par addition répétée du couple de grandeurs (A,B) , soit :

[12] sauf dans le cas d'une espèce de grandeur discrète.

- les situations où la grandeur C est significativement plus grande que la grandeur A (au moins deux fois plus grande que A). Nous associons à ce cas un schème particulier que nous appelons schème d'ajustement proportionnel simple.

- les situations où la grandeur C est plus petite que A ou pas beaucoup plus grande. Nous associons à ce cas un schème qui généralise le précédent et que nous appelons schème d'ajustement proportionnel.

A l'intérieur de la première classe de situation nous distinguons seulement ensuite deux sous classes particulières de situations : celles où A est une grandeur unité d'une espèce discrète (situations de « multiplication »), et celles où B est une grandeur unité d'une espèce discrète (situations de « mesurage »). On ne trouve bien entendu pas de situation de « partage » dans cette première classe de situations.

1.4 Le schème d'ajustement proportionnel simple.

Le schème d'ajustement proportionnel simple s'applique aux situations de proportion entre grandeurs :

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ C & \square \end{array}$$

où A et C sont des grandeurs de même espèce et C significativement plus grand que A.

Le but du schème est de trouver un couple de grandeurs (C,D) proportionnel au couple de base (A,B). La règle d'action du schème consiste à générer, par addition, des couples de grandeurs (A',B') multiples entiers du couple (A,B) de façon que la grandeur A' soit la plus proche possible de la grandeur C, sans la dépasser. Cette règle (règle 1) repose sur deux théorèmes en acte :

- le premier postule que la somme de deux couples d'une proportion est un couple de cette proportion.(conservation de la proportion par addition).
- le second postule qu'en ajoutant suffisamment A à lui-même, on peut atteindre ou dépasser C (propriété d'Archimède).

Le schème d'ajustement proportionnel simple est évolutif : l'observation du corpus montre que les adultes s'approprient progressivement de nouvelles règles de génération, plus efficaces, qui viennent s'ajouter à la règle 1 d'addition des couples :

- la multiplication par deux des couples de grandeurs (règle 2),
- la multiplication par dix des couples de grandeurs (règle 3),
- la multiplication par un entier quelconque des couples de grandeurs (règle 4).

Ces règles mettent en jeu, implicitement ou explicitement, la multiplication d'une grandeur par un entier et la division entière de deux grandeurs. Il faut ajouter deux règles utilisées lorsque l'objectif est dépassé :

- une règle de soustraction des couples (règle 1', inverse de la règle 1),
- plus rarement, une règle de division par deux (règle 2', inverse de le règle 2).

On aboutit finalement à la règle la plus élaborée (règle 5), à savoir :

- la multiplication directe du couple de base par l'entier C÷A (où « ÷ » désigne la division entière de deux grandeurs).

Cette règle produit la solution :

$$D = (C \div A) \times B$$

où « ÷ » et « × » désignent respectivement la division entière de deux grandeurs et la multiplication des grandeurs par un entier.

Notons que le schème ne peut être associé à une opération unique. La multiplication et la division coexistent, même quand A ou B est une grandeur unité. Soit par exemple la situation suivante (Dahbia/1/11/00/6) :

1,82F	1min
150F	□

Dahbia écrit avec raison : « 150F ÷1,82F = 82 fois » et en conclut (voir la flèche) qu'on peut acheter 82 × 1min de communication, soit, en écriture condensée :

$$D = (150F \div 1{,}82F) \times 1min$$

En résumé nous pouvons affirmer :

Les opérations de la théorie du calcul entier sur les grandeurs sont des invariants du schème d'ajustement proportionnel simple.

Remarquons que le schème d'ajustement proportionnel simple ne fait pas intervenir, en principe, la division d'une grandeur par un entier.

1.5 Le schème d'ajustement proportionnel.

Le schème d'ajustement proportionnel s'applique à une situation de proportion entre grandeurs :

A	B
C	□

où A et C sont des grandeurs quelconques de même espèce. La grandeur C peut par exemple être plus petite que A, elle ne peut donc pas être atteinte par les règles du schème d'ajustement proportionnel simple ; les adultes utilisent alors la division par deux des couples de grandeurs (règle 2' inverse de la règle 2) . Cette règle de dichotomie permet de produire, à partir du couple (A,B), des couples de grandeurs proportionnels (A',B') plus petits que (A,B) et ainsi d'approcher la grandeur C d'aussi près qu'on le désire. La conviction que ce processus d'approche peut réussir fait appel à un théorème en acte de « convergence ».

Le schème d'ajustement proportionnel est évolutif et son évolution prolonge celle du schème d'ajustement proportionnel simple : les adultes inversent peu à peu toutes les règles de ce schème, pour obtenir :

- la division des couples de grandeurs par dix (règle 3' inverse de la règle 3),
- la division des couples de grandeurs par un entier quelconque (règle 4' inverse de la règle 4).

Ces règles visent, en fait, à ramener l'ajustement proportionnel à un ajustement proportionnel simple, en divisant le couple de base (A,B) par un entier suffisamment grand.

Avec la règle 3' apparaissent les concepts spontanés de multiplication d'une grandeur par un décimal et de division décimale de deux grandeurs. La formalisation de ces opérations conduit à la règle suivante :

- la multiplication directe du couple de base par le décimal $C \div A$ où « $\div$ » désigne la division décimale de deux grandeurs.

Cette règle produit la solution :

$$D = (C \div A) \times B$$

où « $\times$ » désigne la multiplication des grandeurs par un décimal, « $\div$ » la division décimale de deux grandeurs. Cette règle généralise la règle 5 par extension des opérations entières aux opérations décimales.

La règle 4' est utilisée lorsque la grandeur A est exprimée comme multiple entier d'une unité usuelle U, soit A = nU. Elle produit le couple de base (U,B/n) ; on est ramené au cas de l'ajustement proportionnel simple ; d'où la solution :

$$D = (C \div U) \times B/n$$

où « ÷ » désigne la division entière de deux grandeurs et « / » la division d'une grandeur par un entier. C'est une règle de « passage par l'unité ».

A signaler aussi la règle suivante dans les cas où la grandeur C est significativement plus petite que A :

- la division du couple de base par l'entier A÷C (règle 5', inverse de la règle 5)

Cette règle produit la solution :

$$D = B/(A \div C)$$

où « ÷ » désigne la division entière de deux grandeurs et « / » la division d'une grandeur par un entier. Il est rare de voir cette règle étendue aux divisions décimales.

En conclusion nous pouvons affirmer :

Les opérations de la théorie du calcul sur les grandeurs sont des invariants du schème d'ajustement proportionnel.

Remarquons que le schème d'ajustement proportionnel ne fait pas intervenir, en principe, la division d'une grandeur par un formalisme décimal.

Nous conjecturons que les propriétés du calcul sur les grandeurs que nous venons d'établir peuvent se généraliser à toute théorie de proximité :

Une théorie de proximité formalise une articulation entre deux champs conceptuels.

Elle est moins complexe que sa théorie de référence.

Elle est associée à un schème ; les concepts de la théorie sont des invariants du ce schème.

2. La théorie des situations didactiques.

« Comment élaborer des situations[13] *qui fassent réellement fonctionner une notion ? C'est à dire qu'on ne peut pas répondre sans mettre en œuvre cette notion et sans lui donner un sens. »*[14].

Telle est la question principale à laquelle la théorie des situations didactiques veut répondre. Le concept d'activité y est clairement mis en avant : c'est en situation que l'usage et le sens d'une notion se développent, comme nous en avons convenu jusqu'ici. Mais le mot situation a chez Brousseau une acception particulière et les situations doivent s'organiser en un processus didactique répondant à des exigences précises. Nous étudierons de ce point de vue le processus d'enseignement du calcul sur les grandeurs.

Une autre caractéristique de la théorie des situations didactiques est le recours à l'épistémologie pour l'élaboration des processus didactiques. Brousseau estime que l'histoire des mathématiques est riche d'enseignements pour comprendre la genèse des concepts[15]. Il qualifie d'ailleurs lui-même son travail *« d'épistémologie expérimentale »*. Cette approche le conduit à définir le concept d'obstacle didactique. Nous verrons que le calcul sur les grandeurs a son origine dans un obstacle didactique.

---

[13] Dans tout cette section, le mot « situation » est pris au sens de la théorie des situations didactiques.
[14] Brousseau (1998) p.199
[15] Par exemple les algorithmes en base deux produits spontanément par les adultes se retrouvent dans le calcul de l'ancienne Egypte.

2.1 Les obstacles didactiques.

Brousseau remarque que les progrès des mathématiques ne se sont pas déroulés selon le cours d'un long fleuve tranquille ; certaines connaissances utiles et bien établies ont fait barrage, quelquefois pendant plusieurs siècles, à l'apparition d'un nouveau concept : ainsi le concept de quantième a longtemps empêché le concept de fraction de se développer[16]. Brousseau postule qu'un phénomène analogue peut se produire dans l'apprentissage des mathématiques : certaines connaissances de l'apprenant peuvent se constituer en obstacle à l'acquisition d'un nouveau concept : il qualifie ces connaissances d'obstacles didactiques.

Les obstacles didactiques peuvent avoir diverses origines : une origine ontogénique, épistémologique ou didactique :

- *« les obstacles d'origine ontogénique surviennent du fait des limitations du sujet à un moment de son développement »*[17] : par exemple un enfant de six ans sait dénombrer des collections de six ou sept objets à l'aide de procédés basés sur la perception, mais il échoue au delà parce qu'il n'a pas encore développé de stratégie générale de dénombrement.

- *« les obstacles d'origine épistémologique sont constitutifs de la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes... On ne peut ni ne doit y échapper. »*[18]. Ainsi, par exemple, la multiplication entière fait obstacle à la multiplication décimale car la première est associée à un agrandissement et pas la seconde... Il faut pourtant bien apprendre la multiplication entière avant la multiplication décimale !

- *« les obstacles d'origine didactique sont (par contre) ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire : associés à un système de mesure... les décimaux sont pour les élèves, des entiers naturels avec un changement d'unité... Cette conception va faire obstacle jusqu'à l'université à une bonne compréhension des réels... »*[19]. Guy Brousseau a démontré qu'une autre présentation des décimaux est possible, qui évite la constitution de cette connaissance obstacle chez les enfants.

[16] ibid. p.151
[17] ibid. p.124
[18] ibid. p.125
[19] ibid. p.125

L'interprétation usuelle du formalisme décimal, que nous avons mise à jour chez les adultes, correspond traits pour traits à la connaissance obstacle identifiée chez les enfants par Guy Brousseau. Mais, avec les adultes, il ne saurait être question d'une stratégie d'évitement : la connaissance obstacle est déjà solidement installée. Il m'a semblé qu'il n'y avait dès lors pas d'autre alternative, que de s'appuyer sur elle, de la développer et de lui donner une assise scientifique ; ainsi s'est constitué le calcul sur les grandeurs : **la théorie du calcul sur les grandeurs développe et formalise la connaissance obstacle « interprétation usuelle du formalisme décimal »**.

Mon plan était le suivant :

- d'une part certains adultes en resteraient à l'interprétation usuelle du formalisme décimal : il n'auraient pas le loisir ou le désir de construire une autre interprétation ; il s'agissait donc de rendre leur savoir faire le plus fiable, le plus efficace, et surtout le plus transférable possible ; et pour cela, il fallait le formaliser ; le calcul sur les grandeurs répond à cet objectif : il met en effet à portée des adultes des concepts scientifiques convenables pour traiter les situations de proportion simple.

- quant aux adultes qui poursuivraient leur formation, le calcul sur les grandeurs devait pouvoir constituer une étape vers l'interprétation savante du formalisme décimal : il devait bien en effet exister un processus didactique praticable pour passer du calcul sur les grandeurs au calcul décimal; le détour par le concept de grandeur étant, au demeurant, utile à une bonne compréhension de l'environnement physique, économique et social.

Il s'agit maintenant de vérifier si la théorie des situations didactiques valide cette dernière hypothèse : peut-on, à partir du calcul sur les grandeurs organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de nombre décimal ? Nous examinerons simplement si le processus didactique que j'ai développé augure favorablement de cette possibilité. En effet, la vérification rigoureuse d'une telle hypothèse demanderait la mise en place d'un dispositif expérimental important qui sort du cadre de ce travail.

2.2 Des grandeurs aux décimaux : ébauche d'un processus didactique.

L'analyse que nous allons mener sera nécessairement sommaire pour deux raisons : d'une part, le processus didactique que je développe n'est fixé que dans ses grandes lignes et varie d'un semestre à l'autre, d'autre part, pour des raisons conjoncturelles, je n'ai pas eu récemment l'occasion de conduire ce processus de bout en bout.

La théorie des situations didactiques soumet un processus didactique à trois analyses successives : l'analyse mathématique, l'analyse épistémologique et l'analyse proprement didactique. L'analyse mathématique définit la construction mathématique envisagée, l'analyse épistémologique s'intéresse aux diverses conceptions en jeu et à leur évolution historique, enfin l'analyse didactique évalue la capacité des situations à faire émerger les concepts espérés.

Il existe deux grands types de constructions mathématiques : par restriction ou par extension. Ainsi, les décimaux sont traditionnellement construits comme extension des entiers; mais Brousseau a expérimenté une autre façon de procéder[20]: il construit d'abord les rationnels à partir des entiers, puis les décimaux comme restriction des rationnels. En ce qui concerne notre étude, il s'agit d'une construction d'un genre particulier puisque nous ne construisons pas les décimaux à partir d'un autre type de nombres, mais à partir d'un autre type d'objets. Les décimaux sont définis comme opérateurs sur les grandeurs. Nous pouvons cependant considérer qu'il s'agit d'une construction par extension : **la théorie du calcul décimal est une extension de la théorie du calcul décimal sur les grandeurs.**

En ce qui concerne l'analyse épistémologique, on constate que la notion de décimal est connue dès l'antiquité, mais seulement de manière implicite dans les usages et les pratiques de mesurage pour représenter des quantités, *« elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil »*[21] : il s'agit d'une notion *« paramathématique »*, selon la nomenclature établie par Yves Chevallard. Il faut attendre un millénaire pour qu'émerge, avec Al Uqlidisi, vers 952, une notion *« protomathématique »* du décimal, c'est à dire un usage conscient de l'outil décimal, désigné et reconnu comme tel :

« le décimal est montré dans son fonctionnement (pré construit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité... Mais il n'est pas traité comme un objet d'étude »[22].

C'est seulement avec Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de notion mathématique. Il est enfin reconnu comme un nombre, appelé *« nombre géométrique »* :

« Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes algébriques de son époque ... (ils) deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné... »[23]

---

[20] ibid. p.225
[21] ibid. p.206
[22] ibid. p.206
[23] ibid. p.207

Il y a une surprenante similitude entre l'évolution historique de la notion de décimal que nous venons de résumer, **et celle qu'elle connaît dans le processus d'enseignement du calcul sur les grandeurs** : dans les deux cas, le décimal est d'abord utilisé de façon implicite comme expression d'une grandeur : c'est le stade « *paramathématique* » de la notion. Puis est introduite la multiplication d'une grandeur par un formalisme décimal : dans cet emploi, le décimal est un outil de transformation des grandeurs, il est explicité dans son fonctionnement, reconnu, désigné, mais il n'est pas perçu comme un objet d'étude en soi ; c'est encore seulement une notion « *protomathématique* ». Enfin, dans une dernière étape, le décimal désigne une fonction : c'est l'opérateur décimal ; il est reconnu lui-même comme un objet d'étude : on additionne, on compose les opérateurs décimaux et on étudie les propriétés de ce nouvel objet de calcul. Par le concept d'opérateur, le décimal acquiert dès lors le statut de notion mathématique.

Venons en maintenant à l'analyse didactique. Pour les raisons évoquées plus haut, je n'ai pas eu récemment l'occasion de mener mon public jusqu'à la maîtrise des nombres décimaux. D'autres l'ont fait, en utilisant les situations didactiques mises au point par le département. Ces situations didactiques n'ont jamais été décrites. Seuls sont écrits, sous forme de fiches pédagogiques, les énoncés des problèmes au cœur des situations. Le département a fait le choix de laisser les formateurs libres d'utiliser ces fiches à leur façon, tout en essayant cependant de leur communiquer, par une formation de formateurs « *en double piste* »[24], l'esprit dans lequel nous souhaitions qu'ils les mettent en scène, les gèrent et les exploitent. Voici un exemple d'énoncé problème que nous utilisons pour produire la genèse expérimentale, chez des adultes, du concept de composition des opérateurs décimaux :

Faites des économies d'énergie sur le chauffage de votre maison !

- 20% en isolant les combles,
- 20% en installant des doubles vitrages,
- 20% en changeant de chaudière,
- 20% par une commande à distance,
- 20% en utilisant une pompe à chaleur.

Si on réalise tous ces aménagements, quelle sera l'économie?

Le premier réflexe des adultes devant ce problème est d'ajouter les pourcentages, mais ils jugent rapidement le résultat absurde. Implicitement ou explicitement, il leur faut bien composer les pourcentages... On trouvera d'autres énoncés de ce type dans la brochure I.R.E.M « *Les mathématiques du consommateur, le consommateur de mathématiques* »[25]. Ces énoncés me semblent de bons arguments, au sens théâtral du terme, pour la mise en scène de situations propres à générer les concepts d'opérations entre décimaux.

L'analyse didactique que nous venons d'esquisser demanderait a être fort approfondie ; cependant elle donne du crédit à l'hypothèse avancée : **il doit exister une genèse expérimentale du calcul décimal à partir du calcul sur les grandeurs.**

---

[24] Poisson (1984)

[25] Gers, Losfelt, Poisson (1981)

Nous postulons que le processus didactique que nous venons de décrire peut se généraliser à toute théorie de proximité :

Une théorie de proximité développe et formalise une connaissance obstacle.

La théorie de référence peut se construire à partir de la théorie de proximité.

Ce dernier critère doit être compris dans un triple sens : la construction envisagée doit être mathématiquement possible, elle doit sembler raisonnable d'un point de vue épistémologique et s'avérer viable d'un point de vue didactique.

Un autre aspect du processus est peut-être susceptible d'être généralisé. La formalisation du calcul sur les grandeurs se heurte en effet à une difficulté persistante : les adultes sont troublés par la présence de deux sortes différentes d'objets dans le calcul, à savoir les nombres et les grandeurs.

Dans le document Marjorie/1/10/00/1 présenté au premier chapitre, le problème posé est le suivant :

> Un journal vaut 3,80F le numéro.
> Combien peut-on acheter de journaux avec un billet de 500F ?

Marjorie écrit « 500F ÷ 3,80F = 136journaux », or la division signifie seulement qu'avec 500F, on peut payer 136 fois 3,80F. S'agit-il d'un simple raccourci d'écriture ou de pensée ?

Le document Samia/1/11/00/6 laisse à penser que la confusion est plus profonde ; le problème posé est le suivant :

> La minute de téléphone coûte 1,82F.
> Combien de temps peut-on téléphoner pour 150F ?

Samia calcule d'abord le prix d'une heure de communication : « 1,82F × 60 = 109,20F pour une heure » puis elle fait la division : « 150 ÷ 109,20 = 1,37 » et conclut, à tort, que « le temps est de 1 heure 37 minutes ».

Sans doute les adultes ont-ils du mal à maîtriser le concept d'opération externe, c'est à dire la coexistence de deux types d'objets dans les opérations du calcul :

un nombre × une grandeur = une grandeur

une grandeur ÷ une grandeur = un nombre

une grandeur / un nombre = une grandeur

En effet, dans la vie quotidienne, ils utilisent essentiellement l'addition et la soustraction qui sont des opérations internes, ne faisant intervenir qu'un seul type d'objet dans le calcul.

une grandeur + une grandeur = une grandeur

une grandeur - une grandeur = une grandeur

Le concept d'opération interne pourrait donc constituer une connaissance obstacle au concept d'opération externe. Le calcul sur les grandeurs surmonterait un obstacle ... pour en créer un autre ; faut-il s'attendre à ce qu'il en soit ainsi pour toute théorie de proximité ? Dans ce cas **un enseignement par théories de proximité ne supprimerait pas mais déplacerait seulement les obstacles?**

3. La théorie de la transposition didactique.

« L'enseignant dans sa classe, le rédacteur de programmes, le faiseur de manuels, chacun dans leur registre, sont les instituteurs d'une norme didactique qui tend à constituer un objet d'enseignement comme distinct de l'objet à enseigner qui le motive »[26].

Telle est l'hypothèse centrale de la théorie de la transposition didactique : le système didactique transforme un objet du savoir savant en un objet à enseigner, puis en un objet d'enseignement ; ainsi dans l'enseignement primaire, le concept mathématique de fonction a donné naissance aux *« opérateurs machine »* et le concept d'ensemble aux fameux *« diagrammes de Venn »* ; ces objets à enseigner ont été livrés dans les années 70 aux instituteurs qui s'en sont emparés pour en faire, avec des fortunes diverses, l'objet de leur enseignement.

Selon Chevallard les acteurs du système didactique sont en général portés à nier ce processus de transposition et à vivre leur métier dans l'illusion de la transparence ; de ce fait, le fonctionnement du système échappe en grande partie à leur contrôle. Chevallard propose au contraire de *« prendre acte de la spécificité du projet de construction didactique des savoirs, de son hétérogénéité, à priori, avec les pratiques savantes des savoirs »*[27]. Notre concept de théorie de proximité s'inscrit dans cette direction de recherche. Le calcul sur les grandeurs, prototype des théories de proximité, est en effet une création didactique revendiquée comme telle, un *« objet à enseigner »* conçu pour un public spécifique : il est le produit d'une transposition didactique assumée et située qu'il s'agit maintenant d'analyser.

[26] Chevallard (1991) p.45
[27] ibid. p.48

3.1 Le calcul sur les grandeurs comme « *objet à enseigner* ».

La communication du savoir scientifique passe par l'écrit ; c'est vrai dans la sphère savante comme dans l'enseignement. Mais cette « *mise en texte* » inévitable du savoir à enseigner conduit souvent à une « *mise en pièces* » préjudiciable :

« *la textualisation du savoir amène ... la délimitation de savoirs partiels, ...fictivement autonomes. Ce procès produit une désintrication du savoir, soit sa désyncrétisation* »[28].

Ce phénomène que relève Chevallard peut s'observer en formation de base : par exemple, la proportionnalité est rarement traitées en même temps que les quatre opérations, alors qu'elle leur est pourtant intimement liée ; il arrive même que l'articulation entre structure additive et structure multiplicative du calcul soit esquivée ! Le savoir est considéré comme l'ensemble de ses parties, une théorie comme la somme de ses concepts. C'est oublier que les concepts scientifiques ne trouvent sens que dans les liens réciproques qu'ils entretiennent au sein d'un système conceptuel, comme l'a justement fait remarquer Vygotski. Et Chevallard souligne qu'une théorie ne formule jamais complètement un système conceptuel, c'est à dire qu'elle invoque toujours certains concepts (le « *préconstruit* ») sans les définir, comme allant de soi.

Peut-on enseigner le calcul décimal (le calcul entre nombre décimaux) sans le « *désyncrétiser* » ? C'est un défi didactique que les théories du calcul sur les grandeurs (calcul entier sur les grandeurs et calcul décimal sur les grandeurs) essaient de relever : celles-ci ne sont en effet pas des théories partielles du calcul décimal, mais des théories voisines d'une étendue conceptuelle comparable ; elles donnent en effet chacune un sens à l'ensemble des opérations du calcul décimal et résolvent l'ensemble des problèmes que celui-ci résout. Nous pouvons dire :

Les théories du calcul sur les grandeurs ne sont pas des composantes mais des approches globales du calcul décimal.

---

[28] ibid. p.58

Il faut remarquer maintenant que le passage du calcul entier sur les grandeurs au calcul décimal sur les grandeurs et le passage de ce dernier au calcul décimal exigent une *« reprise des concepts »* : la multiplication décimale d'une grandeur ne se conçoit pas comme la multiplication entière d'une grandeur, et elle ne se conçoit pas non plus comme la multiplication de deux nombres décimaux. A chaque passage le savoir doit être déconstruit et reconstruit ; sous l'effet de cette déconstruction/reconstruction, il acquiert un sens nouveau, c'est à dire que les liens entre concepts sont défaits et renoués autrement :

Le passage du calcul entier sur les grandeurs au calcul décimal sur les grandeurs, et le passage de ce dernier au calcul décimal nécessitent une *« reprise des concepts »*.

Chevallard attribue à cette *« reprise des concepts »* un rôle central dans l'élaboration du savoir. Je l'institue couramment dans les groupes dont je suis formateur. Il s'agit bien sûr d'une institution très confidentielle puisque j'en suis à la fois l'auteur et l'acteur. Quel effet aurait une telle institution dans un système didactique plus large ? Inverserait-elle la tendance didactique à *« désyncrétiser »* le calcul ? Il faut sans doute avoir à ce sujet un *« optimisme tempéré »*, selon la formule de Chevallard, car si un effet est certain, d'après la théorie de la transposition didactique, il est aussi largement imprévisible[29].

Notons qu'il existe en formation de base une approche didactique qui peut paraître syncrétique : elle consiste à traiter le calcul en appoint de l'enseignement linguistique, selon les situations rencontrées : la feuille de paie, les courses, les déplacements... Cette approche ne donne pas les moyens aux adultes de construire les concepts du calcul ; elle produit ou renforce des savoir-faire isolés, inutilisables hors de leurs contextes : on ne peut pas parler d'enseignement du calcul mais seulement d'entraînements à des tâches spécifiques.

Nous généralisons les considérations précédentes aux théories de proximité :

Une théorie de proximité a une étendue conceptuelle comparable à celle de la théorie de référence. Le passage d'une théorie de proximité à sa théorie de référence requiert une *« reprise des concepts »*.

[29] La question de la transférabilité de mon travail, l'usage qui sera fait des idées et des pratiques qu'il expose, seront bien sûr au centre de recherches post thèse de ma part.

3.2 Le calcul sur les grandeurs comme « *objet d'enseignement* ».

Etudions maintenant le calcul sur les grandeurs comme « *objet d'enseignement* », c'est à dire, en l'occurrence, de mon enseignement, puisque je suis, à l'heure actuelle, le seul à enseigner ce calcul ! Nous nous en tiendrons à l'enseignement du calcul entier sur les grandeurs, celui du calcul décimal sur les grandeurs lui étant très semblable. Nous examinerons en particulier, comme nous y invite Chevallard, la « *chronogenèse* » de cet enseignement :

« (Le problème de l'enseignement lui-même) a été posé, par certains d'entre nous, en termes d'élaboration de situations et de suites de situations appropriées à la construction de tel ou tel concept (dont l'acquisition est visée). Tant que l'on fait dépendre ce projet d'une conception linéaire du temps, on se condamne à essayer de respecter des contraintes en réalité intenables, en proposant une définition trop rigide des processus didactiques, conçus selon le modèle dominant d'une flèche temporelle irréversible. La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes. » [30]

Qu'en est-il de mon enseignement ? L'enseignement que je donne du calcul entier sur les grandeurs s'adresse à un groupe d'adultes capables de produire, dans des situations familières et sous des formes élémentaires, le schème d'ajustement proportionnel simple. Il s'agit d'un enseignement par situations. Les concepts sont construits progressivement au fur et à mesure des situations, il sont utilisés avant d'être nommés et nommés avant d'être formalisé. Dans la logique de cet enseignement, l'objet d'enseignement ne peut donc être exposé d'emblée.

Je m'efforce d'abord de convaincre les adultes, dès les premières séances de formation, de leur capacité à produire le schème d'ajustement proportionnel et à traiter ainsi des situations qui les tenaient jusque là en échec, notamment les situations de mesurage qui ont un caractère fondamental dans le cadre de la théorie du calcul entier sur les grandeurs, par exemple les situations déjà citées suivantes :

> Un journal vaut 3,80F le numéro.
> Combien peut-on acheter de journaux avec un billet de 500F ?
>
> La minute de téléphone coûte 1,82F.
> Combien de temps peut-on téléphoner pour 150F ?

[30] Ibid. p.88

Au cours de ces séances inaugurales une grande diversité se manifeste dans le groupe quant à la façon de gérer le schème d'ajustement proportionnel : certains en restent à un traitement élémentaire par additions successives, d'autres essaient de mettre en œuvre des stratégies plus évoluées faisant appel à la multiplication ou à la division. Je montre au groupe la variété des solutions produites et leurs qualités propres : les unes robustes mais fastidieuses, les autres élégantes mais d'un emploi délicat...

Je propose alors le contrat de formation suivant :

- Le but de la formation est de savoir reconnaître et résoudre une catégorie de problèmes très courants dans la vie quotidienne et professionnelle.
- Vous avez constaté qu'ensemble vous êtes déjà capables de résoudre certains d'entre eux ; nous allons continuer ; je vous aiderai à partager vos solutions, à les rendre plus sûres et plus efficaces, à les faire évoluer, à en découvrir de nouvelles.
- Le calcul que je vous enseigne s'appuie sur votre pratique : il concerne des grandeurs (de l'argent, des poids, des distances...) et pas des nombres abstraits.

L'objet d'enseignement est enfin là... sans être là : il ne trouvera son expression définitive qu'en fin de formation. La question se pose alors de sa gestion dans le temps. Selon la théorie de la transposition didactique, un objet d'enseignement a *« deux faces, contradictoires l'une de l'autre »* :

« D'une part ... il doit apparaître comme nouveau, opérant une ouverture dans l'univers de connaissances déjà exploré ; sa nouveauté permet que se noue à son sujet, entre enseignant et enseignés, le contrat didactique : il peut être l'objet d'un enseignement et l'enjeu d'un apprentissage. Mais d'autre part, en un second moment de la dialectique d'enseignement, il doit apparaître comme ancien, c'est à dire autorisant une identification (par les enseignés) qui l'inscrive dans la perspective de l'univers de connaissances ancien. »[31]

Examinons comment fonctionne cette dialectique à propos de notre *« objet d'enseignement »*. En fait plusieurs dialectiques ancien/nouveau jouent simultanément :

- la nouveauté du schème : le schème apparaît au départ comme un moyen nouveau d'aller de l'ancien maîtrisé (l'addition, la soustraction, par exemple) à l'ancien non maîtrisé (la multiplication et la division) En cela, le schème répond bien aux contraintes contradictoires que nous venons d'énoncer ; mais comme il est d'un emploi permanent, sa nouveauté risque très vite de s'émousser.

[31] ibid. p.66

- la nouveauté des situations de mise en œuvre du schème : à chaque nouvelle séance, je suis bien sûr tenu d'offrir une nouvelle situation à l'appétit du groupe ; la variété des situations de proportionnalité est donc une source de renouveau mais il s'agit d'une nouveauté de surface, puisque toutes ces situations sont construites sur le même moule[32].

- la nouveauté des règles d'action du schème : ce sont en fait elles qui entretiennent la nouveauté du schème et constituent le ressort de la formation. Nous allons le voir en examinant le déroulement d'une séance puis celui de la formation dans son ensemble.

Lors d'une séance de formation, quand la plupart des adultes ont résolu un problème, j'expose au tableau les différentes solutions trouvées – et elles sont toujours nombreuses - ; j'explicite les règles mises en jeu par ces solutions, ainsi que leur intrication. Dans cet exposé des règles d'action, la nouveauté n'est pas la même pour tous : l'un découvre la multiplication par dix d'une grandeur, l'autre la multiplication d'une grandeur par un entier, l'autre la division de deux grandeurs...La nouveauté d'une règle est relative à l'état d'avancement de chacun dans son apprentissage : une même règle sera nouvelle pour l'un, ancienne pour l'autre.

Le calcul sur les grandeurs se construit ainsi à un rythme variable selon les personnes. Et puisque de nombreuses règles différentes sont toujours exposées, des reprises sont possibles : tel adulte qui savait, par exemple, utiliser la division n'y parvient soudain plus ; il peut alors sans dommage revenir à une solution moins élaborée et, « après coup », lors d'une séance ultérieure, renouer le lien avec la division.

D'une séance sur l'autre la situation change, mais ce sont les mêmes règles qui reviennent et que j'expose dans leur nouveau contexte. Le temps de l'enseignement s'enroule ainsi autour d'un corps de règles quasiment stable d'une séance sur l'autre. Et c'est précisément cet enroulement du temps de l'enseignement sur lui-même qui permet aux divers temps individuels de l'apprentissage de se déployer.

Peu à peu cependant, au cours de la formation, le corps des règles en usage dans le groupe évolue : certaines règles d'action élémentaires tombent en désuétude, alors que de nouvelles règles apparaissent. Le temps de l'enseignement se déroule donc, mais avec une lenteur qui lui permet de s'articuler avec les temps d'apprentissage. Tous dans le groupe progressent, de concert, et pourtant chacun à son rythme.

---

[32] Sauf de temps en temps une situation de non proportionnalité pour faire prendre conscience de la notion de proportionnalité !

Qu'on l'examine du point de vue de l'objet à enseigner ou du point de vue de l'objet d'un enseignement, le calcul sur les grandeurs apparaît donc comme le produit d'une transposition didactique qui tente de rompre avec les fictions habituelles en ces domaines : fiction d'un savoir totalement désyncrétisé, fiction d'un apprentissage purement linéaire. Nous pouvons dire :

Le calcul sur les grandeurs est le produit d'une transposition didactique non mystifiante, respectueuse des temps et des processus d'apprentissage.

Nous postulons qu'il doit en aller de même de toute théorie de proximité.

Une théorie de proximité est le produit d'une transposition didactique non mystifiante, respectueuse des temps et des processus d'apprentissage.

Conclusion.

L'étude que nous venons de mener dans le cadre des théories fondatrices de la didactique fait apparaître un ensemble de propriétés que nous regroupons selon trois volets : le premier volet précise les conditions de production d'une théorie de proximité, le second décrit la dynamique de son apprentissage, le troisième définit ses relations avec la théorie de référence :

Une théorie de proximité est le produit d'une transposition didactique non mystifiante, respectueuse des temps et des processus d'apprentissage.

Une théorie de proximité se situe à la frontière de deux champs conceptuels ; elle est associée à une connaissance obstacle et à un schème : le schème met en œuvre la connaissance obstacle, et la théorie de proximité formalise les invariants du schème.

Une théorie de proximité est une théorie moins complexe que la théorie de référence mais d'étendue conceptuelle comparable ; elle peut lui servir de fondement.

Ces caractéristiques vont nous permettre d'identifier des théories de proximité dans d'autres domaines que le calcul de base. Il se peut que nos exigences soient trop sévères. Nous pourrons éventuellement les réviser à la baisse.

Chapitre IV : quelques exemples de théories de proximité.

Introduction

Le concept de théorie de proximité est né dans le contexte de la formation de base : nous ne disposons pour l'instant que d'un seul exemple de théorie de proximité, à savoir le calcul sur les grandeurs. Le concept de théorie de proximité est-il une création « ad hoc » ou bien est-il un concept général et fécond ? En d'autres termes, existe-t-il des théories de proximité dans d'autres domaines que le calcul de base ? Nous ne pourrons pas apporter de réponse définitive à cette question dans le cadre de cette thèse. Il faudrait en effet pour cela mettre à jour les concepts spontanés d'adultes en situation d'apprentissage de ces théories, selon la méthode que nous avons utilisée dans le chapitre II ; or je n'ai pas constitué le corpus[33] de productions nécessaire à cette étude.

Cependant, les caractéristiques didactiques d'une théorie de proximité que nous avons établies au chapitre précédent nous fournissent des critères de reconnaissance sur un matériau plus disponible que les productions d'apprenants, à savoir les productions des formateurs (manuels, fiches de travail, logiciels, exposés théoriques ...) ; nous examinons dans ce chapitre quelques unes de ces productions dans le domaine de l'enseignement du calcul algébrique, du calcul des probabilités, du calcul différentiel et intégral, ainsi que du calcul infinitésimal.

Nous nous intéressons particulièrement à la stratégie d'enseignement du département mathématiques du C.U.E.E.P, la *« mathématisation de situation intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée »* [34]. Elle présente en effet de nombreux caractères d'un enseignement par théories de proximité et elle nous permet de proposer des théories candidates à cette qualité.

[33] Cela peut-être l'objet d'un travail d'après thèse dans le cadre du projet européen Passeport.

[34] D'Halluin, Poisson (1988)

1. La « *mathématisation de situation intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée* ».

Cette stratégie de formation résulte de l'interaction entre un enseignement des mathématiques à partir de situations et une utilisation de l'informatique comme outil et comme mode de pensée :

« *le mode de pensée informatique a induit dans la pédagogie des situations le concept de support de gestion de l'information. L'organisation de données sur des supports, les manipulations structurantes permettent de reconnaître sur différents supports des analogies entre plusieurs situations pour dégager des modèles mathématiques sans avoir dans un premier temps recours au formalisme et à la théorie. La formalisation et la théorisation viennent ensuite quand les élèves peuvent lui donner un sens.* »[35].

Les concepts de situation, de support et de modèle constituent un triptyque caractéristique dont l'articulation est représentée par le schéma[36] de la figure IV.1. L'organisation stratégique décrite par ce schéma semble propice à l'invention de théories de proximité.

[35] ibid. p.14
[36] ibid. p.61

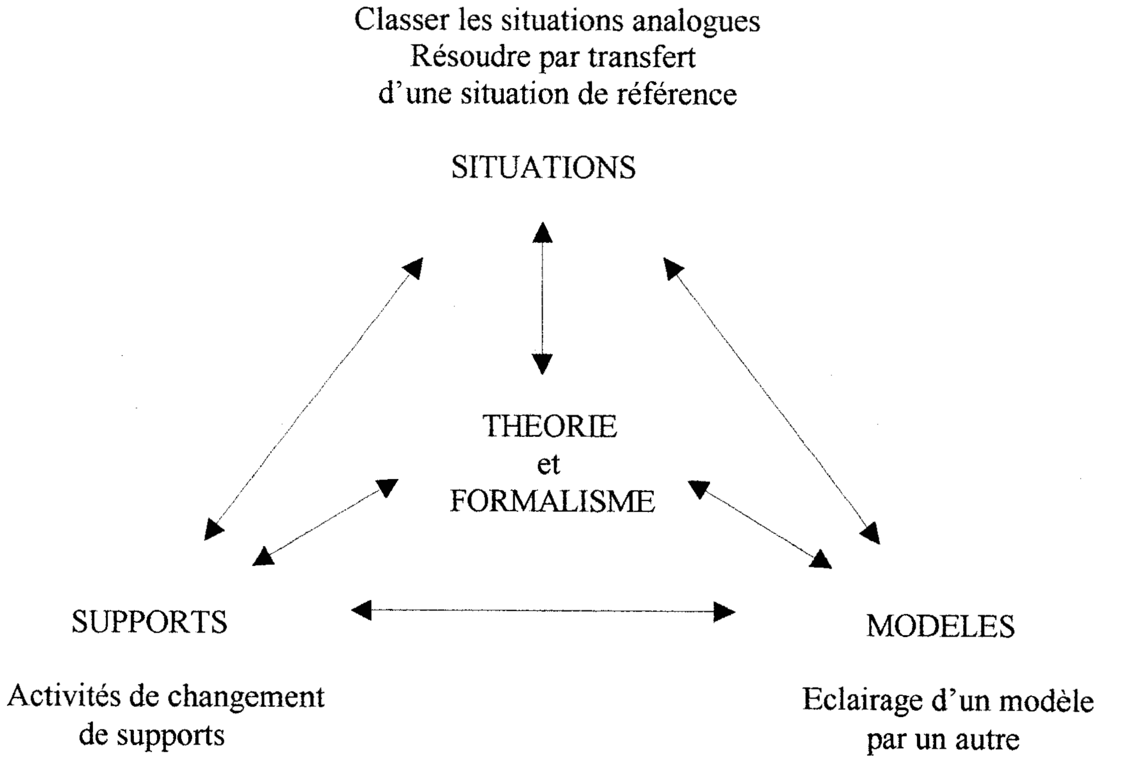


Figure IV.1 : le triptyque situations, supports, modèles.

Par son organisation non linéaire et interactive, le triptyque de la figure IV.1 augure bien d'**une transposition didactique respectueuse des temps et des processus d'apprentissage,** selon les termes du premier critère énoncé à la fin du chapitre précédent.

L'intention en est d'ailleurs exprimée par les auteurs eux-mêmes :

« le symbolisme, le formalisme sont introduits progressivement comme des outils performants de résolution de problèmes. L'activité de formalisation doit être continue et progressive pour ne pas inhiber les connaissances antérieures mais au contraire s'appuyer sur elles, les dépasser, monter d'un degré dans l'abstraction. »[37].

On peut même lire un peu plus loin une préfiguration du concept de théorie de proximité :

« ... cette dynamique ... (aboutit à) ... court-circuiter provisoirement, par le biais de mini théorisations, les théories globalisantes pour les introduire en temps et en heure. »[38]

Par ailleurs les activités périphériques du schéma semblent favorables à l'émergence de schèmes chez l'apprenant :

« nous voulons, à partir du couple situations/supports faire apparaître des modèles mathématiques en découvrant des règles de fonctionnement sur les supports... On en arrive à définir des situations particulières qui servent de référence. Ce sont des schématisations de situations réelles ne retenant que les informations pertinentes » [39].

Les termes « règles de fonctionnement » et « schématisations » évoquent le concept de schème.

Il ressort de cette rapide présentation de *« la mathématisation de situation intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée »* que cette stratégie d'enseignement présente de nombreux signes de l'utilisation implicite de théories de proximité. Nous allons examiner cette hypothèse de plus près à partir des monographies présentées dans D'Halluin, Poisson (1988) ; nous nous intéresserons particulièrement à des monographies concernant la résolution algébrique des problèmes, les tests statistiques, la dérivation et l'intégration des fonctions, le calcul des limites.

---

[37] ibid. p.53
[38] ibid. p.123
[39] ibid. p.44

2. Une théorie de proximité du calcul algébrique.

Le « *modèle équations où la variable n'apparaît qu'une fois* » décrit dans D'Halluin, Poisson (1988) construit implicitement une théorie de proximité du calcul algébrique que nous appelons théorie des équations à simple entrée ; cette théorie se situe à la frontière du calcul arithmétique et du calcul algébrique ; elle introduit aux concepts fondamentaux d'équation, d'inconnue et de résolution algébrique ; elle formalise les invariants d'un schème qui s'appuie sur les compétences arithmétiques des adultes.

2.1 La théorie des équations à simple entrée.

Le *« modèle » « équations où la variable n'apparaît qu'une fois »* est ainsi décrit[40] :

« il s'agit d'équations traitables en une chaîne de calculs. C'est un outil pour résoudre des situations-problèmes séquentiels, par exemple :

LE CHOUX : Un producteur vend un choux. Le camionneur majore le prix de 50 centimes. Le grossiste majore le prix camionneur de 25%. Le demi grossiste rajoute 80 centimes. Le détaillant prend 40% de bénéfice sur son prix d'achat. Le client achète ce choux 5,20F. Quel est le prix producteur ?

Résoudre le problème revient à inverser la chaîne d'opérateurs :

$$\boxed{} \xrightarrow{+\,0{,}50} \xrightarrow{\times\,1{,}25} \xrightarrow{+0{,}80} \xrightarrow{\times\,1{,}40} \boxed{5{,}20}$$

Il est possible de traiter ainsi tous les problèmes qui se traduisent en une chaîne sur le réseau d'opérateurs.

C.U.E.E.P F 413

EQUATIONS OU LA VARIABLE N'APPARAIT QU'UNE FOIS

Résoudre les équations suivantes :

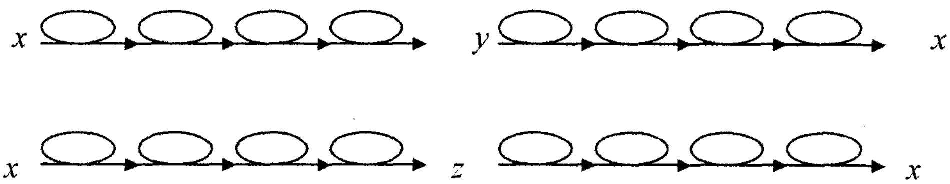
$\frac{d}{-4}=-2$	$2(u+3)^2-5=0$
$\sqrt{e}=2$	$\sqrt{5v^2-4}=5$
$(f+1)^2=1{,}44$	$7\left(\frac{w}{2}-5\right)=12$
$-2g+5=7$	$1+\sqrt{1-x}=10$

[40] ibid. p.47

Des fiches techniques, des logiciels adaptés ont été créés comme outils d'aide :

$y=1+\sqrt{1-x}$

$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$



Ce modèle est utile dans tout problème où intervient une inversion de formule (...) :

CALCULS FINANCIERS :

a) $C = D + I$; $I =$

b) $a = 1 + A/100$; $A =$

c) $C = Da^6$; $a =$

d) $C = D(1+A/100)^n$; $A =$

e) $m=\sqrt[3]{t}$; $t=$

f) $a = t^4$; $t =$

ELECTRICITE :

a) $V = RI$; $R =$

b) $W = RI^2t$; $I =$

c) $Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$; $L =$

d) $Z=\sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}$; $C =$ ... »

Par le truchement des opérateurs, le *« modèle équations où la variable n'apparaît qu'une fois »* assure une transition entre calcul arithmétique et calcul algébrique :

« le langage des opérateurs induit par les calculettes est intermédiaire entre l'arithmétique où l'on ne s'intéresse qu'au résultat opération après opération (stratégie à une étape) et l'algèbre où l'on s'intéresse au résultat final grâce à une formule globale. »[41].

Le *« modèle « équations où la variable n'apparaît qu'une fois » »* définit les concepts d'inconnue, d'équation, de résolution : selon ce modèle, une équation est un programme linéaire de calcul dont la sortie est connue et l'entrée inconnue ; la résolution consiste à inverser le programme. Ce modèle constitue une théorie des équations particulière que nous appelons théorie des équations à simple entrée. Cette théorie a une étendue conceptuelle comparable à celle de la théorie générale des équations à une variable puisqu'elle en définit les concepts fondamentaux.

Elle fournit même les prototypes des équations résolubles par formules. En effet, pour résoudre ces dernières, une méthode classique consiste à réduire les occurrences de l'inconnue à une seule, c'est à dire à se ramener à une équation à simple entrée : c'est notamment le cas des équations du premier degré et des équations du second degré[42].

Cependant les savoirs requis pour réduire le nombre d'occurrences de l'inconnue dans une équation sont beaucoup plus complexes que les savoirs requis pour résoudre une équation à simple entrée ! En effet la résolution d'une équation à simple entrée fait seulement appel à la notion de réversibilité d'un calcul, tandis que la réduction des occurrences de l'inconnue dans une équation fait appel à la notion de transformation algébrique d'un calcul : il ne s'agit plus de traiter un calcul particulier, mais d'envisager une pluralité de calculs équivalents ! Nous pouvons donc affirmer à coup sûr que la théorie des équations à simple entrée est moins complexe que la théorie des équations à une inconnue résolubles par formules. En résumé :

La théorie des équations à simple entrée est une théorie moins complexe que la théorie des équations à une inconnue, mais d'étendue conceptuelle comparable ; cette dernière en est une extension par adjonction du concept de transformation algébrique.

---

[41] ibid. p.71
[42] ibid. p.120

2.2 Le schème de fausse position.

La méthode de fausse position est surtout utilisée aujourd'hui pour traiter les problèmes à deux inconnues. Elle était aussi employée autrefois pour résoudre les problèmes à une inconnue (fausse position simple). Voici la définition que donne Legendre (1789) :

« L'usage de la Règle de fausse position est de trouver une chose requise par une supposition autre que la vérité, participant néanmoins aux conditions de la chose demandée. Cette règle est double, simple ou composée. »

La démarche proposée aux adultes pour résoudre les problèmes traitables par une équation à simple entrée s'inspire de cette définition :

« LE CHOUX : Un producteur vend un choux. Le camionneur majore le prix de 50 centimes. Le grossiste majore le prix camionneur de 25%. Le demi grossiste rajoute 80 centimes. Le détaillant prend 40% de bénéfice sur son prix d'achat. Le client achète ce choux 5,20F. Quel est le prix producteur ?

Supposons que ce prix soit de 1,50F. Est-ce que ça marche ?

1,50 + 0,50 = 2 × 1,25 = 2,50 + 0,80 = 3,30 × 1,40 = 4,62 ... au lieu de 5,20

J'efface les résultats faux et j'entoure les bons. Je remplace les « = » par des flèches. J'obtiens le schéma :

$$\xrightarrow{+\,0,50}\xrightarrow{\times\,1,25}\xrightarrow{+\,0,80}\xrightarrow{\times\,1,40}$$

qui fournit la structure du problème, ainsi que sa solution par inversion du sens de parcours :

$$\xleftarrow{-\,0,50}\xleftarrow{\div 1,25}\xleftarrow{-\,0,80}\xleftarrow{\div\,1,40}\ 5,20\ \ldots$$ »[43]

Cette démarche a tous les caractères d'un schème ; nous l'appelons schème de fausse position en référence à la Règle de fausse position rappelée ci-dessus ; le but de ce schème est de trouver une grandeur inconnue (par exemple le prix producteur) répondant à une contrainte donnée (par exemple le prix client). Ses règles d'action sont les suivantes :

[43] ibid. p.77

a. donner une valeur arbitraire à la grandeur inconnue,
b. vérifier si cette valeur répond à la contrainte donnée, en notant à chaque pas l'opération effectuée,
c. dans le calcul pris en note, entourer les opérations et effacer les résultats,
d. inverser la chaîne d'opérateurs obtenue,
e. exécuter cette chaîne à partir de la valeur exacte de la contrainte.

Le savoir-faire arithmétique est décisif dans l'application de la règle « b » du schème ; la vérification proposée se calque en effet sur le processus de résolution arithmétique des problèmes : on va du connu vers l'inconnu. Le schème exploite la capacité des adultes à produire des solutions de type arithmétique.

Des logiciels ont été créés pour traiter la formalisation algébrique des étapes « c » et « d » du schème. Ils se trouvent dans l'ensemble multimédia *« Mathématiques à la Carte pour le niveau V (MAC 5) »*[44]. Le logiciel *« REGICALC »*[45] aide à la construction de l'équation du problème. Le logiciel *« FORMULUN »* accompagne l'inversion algébrique de cette équation. Nous trouvons là une formalisation assistée par ordinateur des invariants du schème de fausse position[46] ; cette formalisation constitue la théorie des équations à simple entrée.

La maîtrise de cette théorie se heurte cependant à une difficulté majeure. En effet, le passage d'une résolution arithmétique des problèmes à une résolution algébrique exige une double révolution de pensée :

- on inverse le processus de calcul, puisqu'au lieu de partir des données connues et de cheminer vers la grandeur inconnue , on part de la grandeur inconnue pour exprimer en fonction d'elle une contrainte connue ;

- on ne s'intéresse plus aux résultats numériques mais aux opérations elle-mêmes que l'on représente et traite symboliquement.

Il est donc raisonnable de penser que le savoir-faire arithmétique sur lequel s'appuie le schème constitue aussi une connaissance obstacle à l'acquisition de la méthode algébrique. Il faut sans doute comprendre ainsi les difficultés qu'ont connues, au C.U.E.E.P dans les années 1975-1985, des adultes pourtant très compétents en arithmétique, lorsqu'ils ont voulu se mettre à l'algèbre.. Nous pouvons conclure :

La théorie des équations à simple entrée se situe à la frontière des champs de l'arithmétique et de l'algèbre ; elle est associée au schème de fausse position et à une connaissance obstacle arithmétique ; le schème met en œuvre cette connaissance obstacle et la théorie formalise les invariants du schème.

---

[44] *MAC5* est une boîte à idée et une boîte à outils destinée aux formateurs d'adultes en mathématiques. Elle est diffusée par T.N.T (Technologies Nouvelles et Tranferts), 4 rue Archimède, 59650 Villeneuve d'Ascq.
[45]voir aussi Gers (1987,1993)
[46] D'Halluin, Gers (1991)

Avec cette dernière affirmation nous achevons de constater que la théorie des équations à simple entrée vérifie les critères d'une théorie de proximité que nous avons énoncés à la fin du chapitre précédent.

La théorie des équations à simple entrée est sans doute une théorie de proximité de la théorie des équations à une inconnue.

3. Une théorie de proximité de la théorie des tests.

La théorie des tests est habituellement enseignée seulement dans les cursus universitaires, souvent en second cycle de ces cursus, en faisant appel à des théories générales (calcul différentiel et intégral, voire théorie de la mesure…). Dans Poisson (1988) une approche de cette théorie est exposée, qui met en jeu le seul calcul des pourcentages. Cette approche entremêle des simulations aléatoires liées à la situation « *Loterie* » et des activités de dénombrement liées à la situation « *Ville de New York* ». Les protocoles de simulation permettent d'identifier un schème ; les invariants de ce schème sont formalisés dans le cadre des activités de dénombrement.

3.1 Le schème de simulation aléatoire.

La situation *« Loterie »* est construite autour d'un logiciel de simulation d'une machine de fête foraine dite *« machine Pin-Ball »* inspirée de la planche à clous de Galton (Figure IV.2). Ce logiciel sert à présenter la situation de départ puis permet de simuler et de visualiser les résultats d'une série de tirages (Figure IV.3).

Les expériences aléatoires ainsi réalisées font apparaître des invariants : la fréquence de gain de chaque lot oscille autour d'une valeur théorique. Cette valeur théorique s'obtient en imaginant que les boules se répartissent pour moitié à droite et à gauche de chaque plot. Pour le lot B on trouve la fréquence théorique 25%.

Afin d'étudier les fluctuations autour de ces valeurs théoriques, il est fait appel à des logiciels moins expressifs mais plus efficaces, les logiciels *« LGN »* et *« BINEX » :* ces derniers prennent le relais pour multiplier le nombre d'observations et représenter les résultats.

De véritables protocoles d'expérimentation sont établis qui aboutissent à formuler une loi empirique des grands nombres. Ces protocoles font varier le nombre de simulations, et le nombre de parties jouées à chaque simulation. L'étude graphique avec *« LGN »* des courbes de gain[47] du lot B aboutit à une première formulation :

« ...

- *presque toutes les courbes restent dans une zone de sécurité qui a toujours à peu près la même forme,).*
- *plus le nombre de parties est grand, plus la zone de sécurité s'écrase sur la droite correspondant à la valeur théorique...*

Ces formulations débouchent qualitativement sur la notion d'intervalle de confiance, de fourchette. »[48].

[47] La courbe de gain exprime le pourcentage de lots gagnés en fonction du nombre de parties jouées au cours d'une simulation.
[48] Ibid. p.156

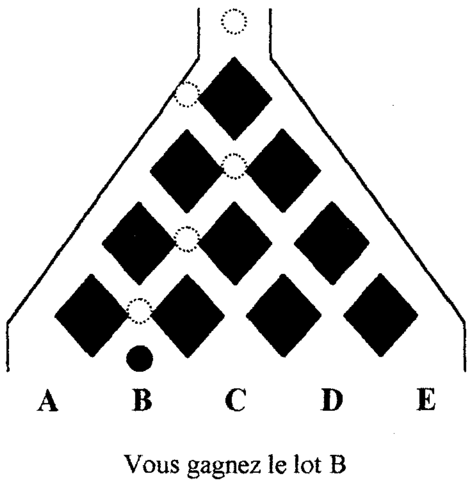


Figure IV.2 : la « Loterie » en mode jeu.

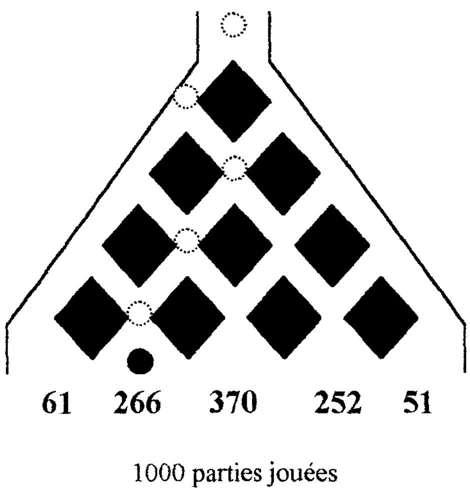


Figure IV.3 : la « Loterie » en mode simulation.

L'étude numérique avec *« BINEX »* vient préciser quantitativement ces notions :

« Le logiciel BINEX fournit la série statistique du nombre de lots B distribués à chaque essai :

Recherche de la fourchette à 96% pour 100 simulations de 50 parties :

8	7	11	14	11	8	9	11	15	10	9	15	13	19	11	17	15	11	9	19
14	13	9	15	13	16	11	12	15	10	12	17	9	15	12	11	12	11	7	9
9	11	14	10	11	10	6	14	17	8	15	13	10	15	12	12	13	15	12	11
12	16	18	12	19	13	10	20	16	8	13	14	12	17	12	13	14	13	10	14
13	13	9	11	13	13	13	13	15	8	8	14	9	5	7	19	13	14	13	17

En éliminant les 2 cas sur 100 les plus faibles et les 2 cas sur 100 les plus forts, on trouve entre 7 et 19 lots gagnés pour 50 parties, soit une fourchette de 14% à 38%. Le risque de sortir de cette fourchette est de 4%.

»[49].

L'expérimentation[50] qui est ainsi menée a tous les caractères d'un schème:

- le but du schème est d'établir empiriquement des lois du hasard, c'est à dire de mettre en évidence des invariants dans la variété des échantillons aléatoires produits par simulation.

- les règles d'action consistent à agir sur les paramètres de la simulation : choix du lot étudié, nombre de parties jouées à chaque simulation, nombre de simulations effectuées, ainsi qu'à agir sur le point de vue de l'observation : observation qualitative et graphique avec *« LGN »*, observation quantitative et numérique avec *« BINEX »*.

Nous appelons ce schème schème de simulation aléatoire. Sa gestion n'exige pas d'autres connaissances mathématiques que le calcul des pourcentages et la lecture graphique.

---

[49] Ibid. p.157

[50] Cette approche des probabilités et des statistiques par la simulation a récemment été proposée pour les nouveaux programmes des Lycées.

3.2 La théorie des cheminements.

La « *situation-modèle « Ville de New York »* » présente un quadrillage constitué de rues et d'avenues numérotées de zéro à l'infini. Le « *modèle théorique* »[51] sous jacent à cette situation constitue une théorie que nous appelons théorie des cheminements. Cette théorie dénombre les chemins allant du carrefour origine aux autres carrefours (on progresse uniquement de gauche à droite et de bas en haut) (Figure IV.4).

Les chemins provenant du carrefour origine peuvent s'identifier aux courbes de gain des lots B et D dans la situation « Loterie » : si l'on gagne B ou D, on prend une rue, sinon on prend une avenue. Les deux alternatives ont la même chance de se produire. On peut ainsi représenter dans la « *Ville de New York* » les simulations effectuées dans la situation « *Loterie* » (Figure IV.5). Une fourchette de gain pour un nombre de parties donné peut être associé à une fenêtre d'arrivée des chemins sur la diagonale correspondant à ce nombre de parties. Le rétrécissement relatif de la fourchette lorsque le nombre de parties jouées augmente se traduit par un rétrécissement relatif de la fenêtre associée lorsque la diagonale s'éloigne de l'origine.

Une interaction continuelle est ainsi possible entre l'approche statistique de la « *Loterie* » et l'approche probabiliste de la « *Ville de New York* » :

« ... *nous avons donc une spirale de modélisations successives avec alternance entre modèle théorique lié aux probabilités et expériences aléatoires liées aux statistiques.* »[52]

La théorie des cheminements permet d'établir par calcul les fourchettes obtenues précédemment par simulation : elle formalise les invariants du schème de simulation aléatoire.

La théorie des cheminements s'appuie constamment sur la connaissance des pourcentages : c'est à partir d'elle qu'elle construit les notions de seuil et d'intervalle de confiance. Mais cette connaissance constitue sans doute aussi un obstacle didactique à la compréhension des tests ; j'ai été frappé, il y a quelques années, par une interprétation abusivement déterministe du pourcentage chez des opérateurs de production ; ces personnes devaient être initiées au contrôle qualité ; malgré les simulations que nous effectuions ensemble, elles persistaient longtemps à confondre taux d'erreur dans les échantillons prélevés et taux d'erreur dans la production !

---

[51] ibid. p.165. Un exposé complet de ce « *modèle théorique* » se trouve dans Poisson (1978).

[52] ibid. p.145

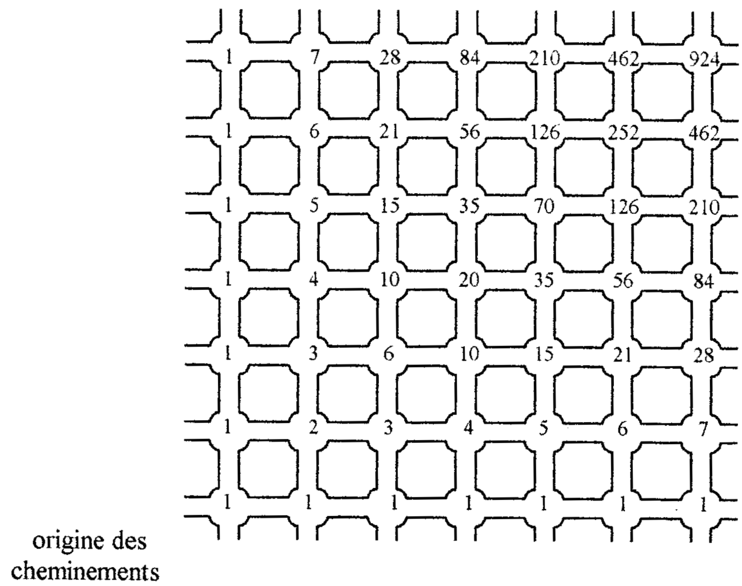
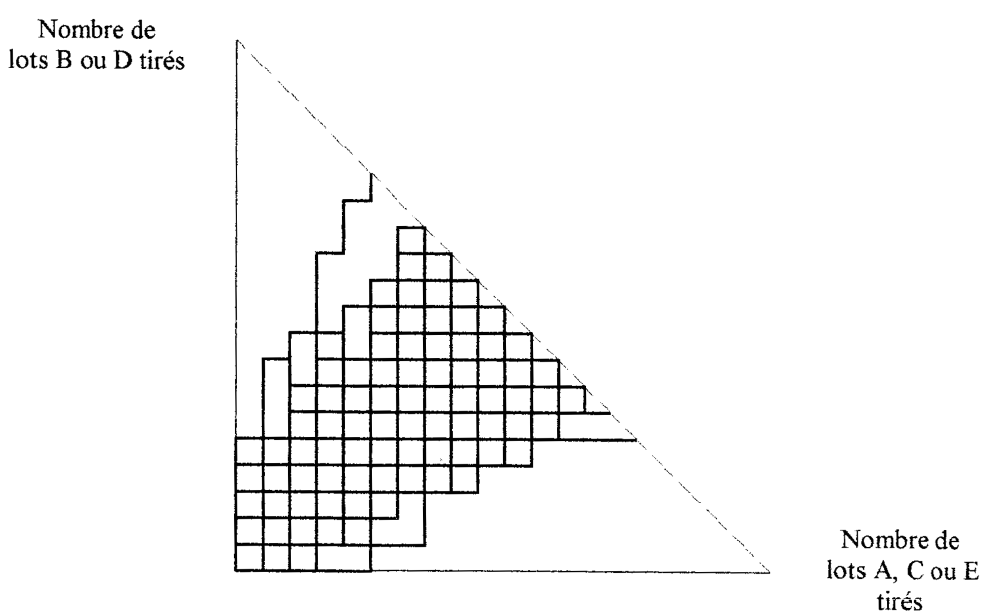


Figure IV.4 : la « Ville de New York ».



50 simulations de 20 parties

Figure IV.5 : la « Loterie » dans la « Ville de New York »

En conclusion nous dirons :

La théorie des cheminements se situe à la frontière entre le champ du déterminé et le champ de l'aléatoire ; elle est associée au schème de simulation aléatoire et à la connaissance obstacle des pourcentages ; le schème met en œuvre la connaissance obstacle et la théorie formalise les invariants du schème.

La théorie des cheminements est une théorie évidemment moins complexe que la théorie classique des tests. Mais elle a une étendue conceptuelle comparable : elle définit, comme elle, les concepts d'intervalle et de seuil de confiance :

« Les résultats fournis sont quasiment ceux obtenus par la théorie classique ... »[53]

Elle construit plusieurs lois standard de la théorie des probabilité :

« nous avons... construit des modèles de référence : loi binomiale, loi des grands nombres. »[54]

Et par passage à la limite permet la construction d'autres lois importantes (Poisson, Gauss, Khi deux...) :

« Uniquement avec ces outils, on peut faire une démonstration de la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson »[55].

Nous pouvons affirmer en résumé :

La théorie des cheminements est moins complexe que la théorie des tests, mais d'étendue conceptuelle comparable ; cette dernière en est une extension par passage à la limite de la loi binomiale.

La théorie des cheminements vérifie bien l'ensemble des critères d'une théorie de proximité que nous avons énoncés à la fin du chapitre précédent.

La théorie des cheminements est sans doute une théorie de proximité de la théorie des tests.

---

[53] ibid. p.158
[54] ibid. p.170
[55] ibid. p.242

4. Une théorie de proximité du calcul différentiel et intégral.

Le calcul différentiel et intégral est habituellement fondé sur le concept de limite ; or il s'agit là d'un concept difficile que les adultes ont du mal à formaliser et à mettre en oeuvre. Dans leur thèse, C. D'Halluin et D. Poisson montrent qu'il est possible de *« rendre opérationnel le concept de dérivation-intégration sans pré requis sur les limites »*[56]. Ils s'appuient pour cela sur une stratégie dite *« stratégie TGF »* [57], liée à la manipulation des supports Tableaux, Graphiques, Formules, et *« ancrée sur des savoirs arithmétiques »* [58]. Cette stratégie reprend en partie l'approche historique de Newton dans son calcul des fluxions ; elle développe un schème d'exploration des relations fonctionnelles et a pour but implicite la maîtrise d'une théorie de proximité dans le domaine de l'analyse.

[56] ibid. p.172
[57] ibid. p.172
[58] ibid. p.172

1.1 Le schème d'exploration fonctionnelle.

L'approche « *TGF* » proposée aux adultes est ainsi décrite :

« - *choisir un support adapté au type d'informations données,*
- *formaliser le problème dans le support choisi,*
- *changer de support et repérer les invariants,*
- *reconnaître des modèles mathématiques connus sur les différents supports,*
- *utiliser les supports pour construire des modèles nouveaux.* »[59]

Avant de l'étudier plus en détail, précisons le terme de « *modèle* ». Ce terme a dans D'Halluin, Poisson (1988) une acception très générale. Dans le chapitre qui nous intéresse ici, il a le sens plus particulier de « *modèle fonctionnel* ». La situation dite « *des choux fleurs* » (Figure IV.6) est présentée comme un prototype de ce modèle : il s'agit, nous dit-on, « *d'une situation d'ancrage pour les « modèles droite et parabole »* ». Il y est demandé d'étudier un chiffre d'affaire en fonction d'une quantité de choux vendue. L'approche « *TGF* » dont il est question ici consiste donc en l'exploration d'une relation fonctionnelle entre deux grandeurs.

Nous considérons que cette approche définit un schème :

- le but du schème est de déterminer les variations d'une relation fonctionnelle entre deux grandeurs : quand y a-t-il croissance ou décroissance d'une grandeur en fonction d'une autre ? Quand y a-t-il un maximum ou un minimum ? Comment quantifier les variations de l'une en fonction de celles de l'autre ?

- ses moyens d'investigation sont numériques et graphiques, les calculs algébriques sont toujours secondaires :

« *Le support algèbre est rarement utilisé seul, il est pratiquement toujours introduit en situation et en interaction avec les supports graphique et tableau et le support « programme de calcul » (opérateur ou algèbre des registres).* »[60]

Nous appelons ce schème schème d'exploration fonctionnelle.

---

[59] ibid. p.125
[60] ibid. p.140

C.U.E.E.P
Mars 1978

F 904

LES CHOUX FLEURS

Sur un grand marché en plein air, plus le prix du choux fleur baisse, plus on en vend (voir tableau).
Un marchand astucieux est sûr de vendre tous ses choux fleurs, étant donné sa très belle situation sur la place.
Plus les prix sont bas, moins on y gagne. Il décide donc de diminuer sa vente de choux fleurs quand les prix baissent, en fonction d'une table qu'il se fixe. (voir tableau).

Prix d'un choux fleur en francs	Quantité vendue sur le marché	Quantité vendue par le marchand
0,50	4500	80
0,60	4380	84
0,80	4140	92
1,00	3900	100
1,20	3660	108
1,50	3300	120
1,80	2940	132
2,00	2700	140
2,40	2220	156
3,00	1500	180

Etudiez le chiffre d'affaire du marché et celui du commerçant

Figure IV.6 : la situation des choux fleurs

Le schème d'exploration fonctionnelle introduit les adultes dans un nouveau champ d'action sur des objets globaux, matérialisés par le triptyque « *TGF* » :

« *Notons ... qu'au cours de la construction des modèles, on est passé de tableaux de données numériques au concept de variable (c'est le prix de vente qui détermine la quantité vendue et le chiffre d'affaires) et au concept de relation fonctionnelle entre la quantité vendue et le chiffre d'affaires et le prix de vente.* »[61]

Le nouveau champ ainsi décrit est celui de l'analyse. Concluons :

Le schème d'exploration fonctionnelle se situe à la frontière des champs de l'arithmétique et de l'analyse. Il s'appuie sur des capacités de traitement arithmétique et met en jeu des concepts de l'analyse.

[61] ibid. p.144

1.2 Le calcul des pentes et surfaces.

Ce calcul est exposé dans le chapitre *« Opérationnaliser le concept dérivation/intégration sans prérequis sur les limites »*. Comme le titre du chapitre l'indique, ce calcul prend en compte les concepts fondamentaux du calcul différentiel et intégral, à savoir les concepts de dérivation et d'intégration d'une fonction dont il donne une définition géométrique et globale, sans faire appel au concept de limite. De ce fait, il est plus abordable que le calcul traditionnel :

« la notion de réversibilité (de la dérivation et de l'intégration) est opératoire dès les niveaux VI et V de la formation. »[62]

Il s'agit cependant d'une authentique théorie qui, à l'instar de la théorie traditionnelle, unifie des concepts issus de champs éloignés les uns des autres, tels les concept de vitesse en mécanique et de densité en statistiques [63] et qui établit des théorèmes fondamentaux :

« bien que fondée sur des notions intuitives de courbes, de tangentes, de surfaces, la démonstration de la réversibilité des calculs de pente et de surface est une vraie activité déductive et constitue à ce niveau une démonstration. » [64].

Nous pouvons dire :

Le calcul des pentes et surfaces est une théorie moins complexe que le calcul différentiel et intégral mais d'étendue conceptuelle comparable ; ce dernier en est une extension par adjonction du concept de limite.

D'autre part, le calcul des pentes et surfaces formalise les invariants du schème d'exploration fonctionnelle :

« ces approches théoriques (de la dérivation et de l'intégration) ne sont pas essentiellement des approches descriptives et intuitives pour « introduire le sujet et passer aux choses sérieuses ensuite » (la chose sérieuse étant dans ce cas la notion de limite). Elles sont construites sur les savoirs et savoirs faire de l'étape précédente, c'est à dire la structuration des données sur le support tableau, les activités de changement de support »[65].

---

[62] ibid. p.212
[63] ibid. p.189 et p.196
[64] ibid. p.197
[65] ibid. p.212

« Il y a interaction entre les calculs numériques structurés sur le support tableau et la vision globale du problème sur le support graphique... les calculs de pentes sont associés à des quotients de différences tabulaires, les calculs de surfaces sont associés à des sommations tabulaires de produits. Le tracé graphique permet de visualiser globalement la « courbe pente » ou la « courbe surface » »[66].

Nous pouvons conclure :

Le calcul des pentes et surfaces se situe à la frontière des champs de l'arithmétique et de l'analyse ; il est associée au schème d'exploration fonctionnelle dont il formalise les invariants.

Le calcul des pentes et surfaces vérifie donc la plupart des critères d'une théorie de proximité ; il manque le critère obstacle didactique... La proportionnalité joue peut-être ici le rôle de connaissance obstacle : on constate souvent une confusion persistante entre vitesse moyenne et vitesse instantanée dans les situations cinématiques, une confusion entre coût moyen et coût marginal dans les situations économiques, des difficultés à comprendre la notion de densité dans les situations statistiques.

Nous formulons la conjecture suivante :

Le calcul des pentes et surfaces est sans doute une théorie de proximité du calcul différentiel et intégral.

[66] ibid. p.197

5. Une théorie de proximité du calcul infinitésimal.

C'est sans doute dans le chapitre XI de Poisson (1988) que l'on trouve la formulation la plus aboutie d'une théorie de proximité ; en effet la section 2 de ce chapitre, intitulée « *Un exemple d'interaction situation/théorie : optimalisation du calcul numérique d'un nombre dérivé.* », donne l'exposé explicite d'une théorie à vocation didactique. Cette théorie sera dite théorie du calcul en précision finie. La présentation de cette théorie prend appui sur une étude expérimentale du nombre dérivé qui met en œuvre un schème d'exploration numérique.

5.1 Le schème d'exploration infinitésimale.

L'étude expérimentale présentée est un calcul approché de la dérivée de la fonction $F(x) = x^3$ pour x=1.

Le calcul consiste à évaluer à l'aide d'une calculette ou d'un ordinateur, les quotients de F(1+H)-F(1-H)), de F(1)-F(1-H) et de F(1+H)-F(1) par H pour des valeurs de H de plus en plus petites. Le premier quotient doit converger vers la dérivée symétrique, le second vers la dérivée à gauche et le troisième vers la dérivée à droite.

L'observation des résultats fait apparaître une stabilisation vers la valeur 3 de ces trois quotients ; mais des oscillations anormales se produisent pour des valeurs de H « trop petites » ; les résultats deviennent de plus en plus aberrants (ce phénomène peut s'observer sur les tableurs actuels, voir Figure IV.7 les calculs avec EXCEL).

L'investigation menée sur cet exemple est transférable aux calculs de limite d'un polynôme quelconque et donc aux calculs de limite de toutes les fonctions usuelles [67] : il s'agit d'un schème ; nous l'appelons schème d'exploration infinitésimale :

- le but du schème est d'obtenir une stabilisation des résultats en calculant avec une machine sur des valeurs de plus en plus petites ;
- le contrôle du schème consiste à repérer à quel moment la précision de la machine est dépassée et à vérifier la cohérence des résultats obtenus sur des machines différentes.

Le schème d'exploration infinitésimale assure une transition entre le calcul fini et le calcul des limites. Nous dirons qu'il se situe à la frontière entre le champ du fini et celui de l'infini.

[67] les calculettes et les ordinateurs calculent les fonctions usuelles à l'aide de polynômes.

H	((F(1+H)-F(1-H))/H	((F(1)-F(1-H))/H	((F(1+H)-F(1))/H
0,001	3,0000010000	2,9970010000	3,0030010000
0,0009	3,0000008100	2,9973008100	3,0027008100
0,0008	3,0000006400	2,9976006400	3,0024006400
0,0007	3,0000004900	2,9979004900	3,0021004900
0,0006	3,0000003600	2,9982003600	3,0018003600
0,0005	3,0000002500	2,9985002500	3,0015002500
0,0004	3,0000001600	2,9988001600	3,0012001600
0,0003	3,0000000900	2,9991000900	3,0009000900
0,0002	3,0000000400	2,9994000400	3,0006000400
1E-04	3,0000000100	2,9997000100	3,0003000100
9E-05	3,0000000081	2,9997300081	3,0002700081
8E-05	3,0000000064	2,9997600064	3,0002400064
7E-05	3,0000000049	2,9997900049	3,0002100049
6E-05	3,0000000036	2,9998200036	3,0001800036
5E-05	3,0000000025	2,9998500025	3,0001500025
4E-05	3,0000000016	2,9998800016	3,0001200016
3E-05	3,0000000009	2,9999100009	3,0000900009
2E-05	3,0000000004	2,9999400004	3,0000600004
1E-05	3,0000000001	2,9999700001	3,0000300001
9E-06	3,0000000001	2,9999730001	3,0000270001
8E-06	3,0000000001	2,9999760001	3,0000240001
7E-06	3,0000000001	2,9999790000	3,0000210001
6E-06	3,0000000000	2,9999820000	3,0000180000
5E-06	3,0000000001	2,9999850000	3,0000150001
4E-06	3,0000000000	2,9999880000	3,0000119999
3E-06	3,00000 oscillations	2,9999910000	3,0000090000
2E-06	3,00000 anormales	2,9999939999	3,0000060001
1E-06	3,0000000000	2,9999970002	3,0000029998
9E-07	3,0000000001	2,9999972998	3,0000027003
8E-07	3,0000000001	2,9999976001	3,0000024001
7E-07	2,9999999999	2,9999978998	3,0000021001
6E-07	2,9999999998	2,9999982000	3,0000017996
5E-07	3,0000000001	2,9999984996	3,0000015006
4E-07	3,0000000002	2,9999988002	3,0000012002
3E-07	2,9999999995	2,9999990995	3,0000008996
2E-07	2,9999999990	2,9999994000	3,0000005979
1E-07	3,0000000001	2,9999996987	3,0000003015
9E-08	2,9999999978	2,9999997301	3,0000002655
8E-08	2,9999999991	2,9999997583	3,0000002399
7E-08	3,0000000008	2,9999997915	3,0000002102
6E-08	3,0000000003	2,9999998189	3,0000001816
5E-08	2,9999999984	2,9999998508	3,0000001461
4E-08	2,9999999970	2,9999998791	3,0000001150
3E-08	3,0000000040	2,9999999152	3,0000000928
2E-08	3,0000000095	2,9999999374	3,0000000817
1E-08	2,9999999929	2,9999999818	3,0000000040
9E-09	3,0000000077	2,9999999646	3,0000000509
8E-09	2,9999999985	2,9999999707	3,0000000262
7E-09	2,9999999787	2,9999999945	2,9999999628
6E-09	3,0000000170	3,00000 oscillations	3,00000 oscillations
5E-09	2,9999999819	2,99999 anormales	2,99999 anormales
4E-09	3,0000000402	2,9999999986	3,0000000818
3E-09	3,0000000264	3,0000000264	3,0000000264
2E-09	2,9999999987	3,0000000820	2,9999999154
1E-09	3,0000000822	2,9999999157	3,0000002488

Figure IV.7

5.2 La théorie du calcul en précision finie.

L'exposé de la *« machine à calculer à n chiffres »* qui est donné dans la section 2 du chapitre XI de Poisson (1988) définit une théorie du calcul en virgule flottante que nous appelons théorie du calcul en précision finie. Le calcul en précision finie d'ordre n consiste à négliger[68] les termes dont la valeur relative est inférieure à 10^{-n}. Cette théorie permet de formaliser la stabilisation numérique observée dans le schème d'exploration infinitésimale :

« L'approche expérimentale aboutit assez vite à la nécessité de passer à la théorie et aux calculs formels pour lever les doutes et mieux comprendre les phénomènes observés. »[69].

Le calcul en précision finie rend en particulier compte d'un fait observable sur la Figure IV.7 : le calcul de la dérivée à droite ou à gauche est fiable jusqu'à la demi précision de la machine, tandis que le calcul de la dérivée symétrique n'est fiable qu'au tiers de précision de la machine.

Le calcul en précision finie formalise bien les invariants du schème d'exploration infinitésimale ; il est évidemment moins complexe que le calcul infinitésimal proprement dit mais donne cependant une définition des concepts fondamentaux de ce calcul : concept d'équivalent et concept de développement limité.

Le calcul infinitésimal apparaît comme un calcul en précision infinie :

« Les calculs dans R apparaissent donc, par le biais du concept de limite, comme des calculs en précision infinie »[70].

Nous pouvons conclure :

Le calcul en précision finie se situe à la frontière des champs du fini et de l'infini ; il est associé au schème d'exploration infinitésimale dont il formalise les invariants.

Le calcul en précision finie est moins complexe que le calcul infinitésimal, mais d'étendue conceptuelle comparable ; ce dernier en est une extension par passage à la précision infinie.

Comme précédemment, la plupart des critères d'une théorie de proximité se trouvent vérifiés. Il manque l'identification d'un obstacle didactique. Néanmoins :

Le calcul en précision finie est sans doute une théorie de proximité du calcul infinitésimal.

---

[68] $x + \Delta$ est identifié à x si $|\Delta| < |x| \times 10^{-n}$

[69] ibid. p.224

[70] ibid. p.228

Conclusion

Notre intérêt pour la stratégie d'enseignement du département mathématiques du C.U.E.E.P, la *« mathématisation de situation intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée »* [71] était justifié : il nous a permis d'identifier quatre candidates sérieuses à la qualité de théorie de proximité : la théorie des équations à simple entrée, la théorie des cheminements aléatoires, la théorie des pentes et surfaces d'une fonction, la théorie du calcul en précision finie.

Il aurait été souhaitable que j'étende ma quête à des productions andragogiques extérieures à notre institut. Je n'en ai pas eu le temps. Sans doute serait-il intéressant d'étudier des manuels de formation professionnelle du niveau B.T.S ou I.U.T.

Quoiqu'il en soit, il semble très probable qu'il existe des théories de proximité dans des domaines et pour des publics variés. Nous pronostiquons que le concept de théorie de proximité est un concept général et fécond en formation d'adultes.

[71] D'Halluin, Poisson (1988)

Conclusion

Lors de son dépôt au fichier central, cette thèse avait pour titre : *« Calcul et formation de base : le sens des opérations en question »*. Ce titre révèle le point de départ de mon travail de recherche. A l'origine se trouve mon étonnement de formateur : pourquoi certains adultes ont-ils tant de mal à acquérir le sens des opérations décimales alors qu'ils ont une bonne pratique de calcul dans la vie quotidienne, notamment dans la gestion de leur budget ?

J'ai trouvé dans la lecture de Vygotski une façon intéressante de poser le problème comme celui des rapports entre pratique et théorie ; j'ai pu ainsi donner une réponse à mon interrogation de formateur en terme de distance entre les conceptions des adultes et les concepts enseignés. M'appuyant sur le concept de proche développement, j'ai alors défini une sorte d'idéal andragogique censé réduire au mieux cette distance : le concept de théorie de proximité. Ce faisant, je déplaçais la question d'une interrogation sur le sens à un problème d'existence : existe-t-il des théories de proximité, ou bien ce concept n'est-il qu'une fiction ?

Le prototype que j'en ai présenté est la théorie du calcul sur les grandeurs. Ce calcul, bien que différent de ce que l'on entend habituellement par calcul des grandeurs, constitue une authentique théorie mathématique qui est à la portée d'un large public de la formation de base, nous n'avons pas eu de peine à le montrer. Ce calcul est-il plus accessible que le calcul décimal traditionnel ? Nous le pensons, mais pour le montrer nous nous heurtons à une difficulté théorique importante.

Cette difficulté théorique tient à un paradoxe : il est facile de prouver la capacité d'un adulte à produire un concept spontané, mais difficile de la contester : en effet relever la trace d'un concept spontané prouve la capacité à le produire ; par contre, l'absence de trace, en toute rigueur, ne prouve rien : peut-être n'a-t-on pas su placer cet adulte en situation de produire le concept spontané recherché ! Pour pallier cette difficulté, nous avons introduit la notion de concepts précurseurs d'un concept spontané ; cette notion nous permet de donner du poids à nos hypothèses, mais, en fait, nous n'avons fait que repousser d'un cran la difficulté : il en va du concept spontané comme d'une éruption volcanique... l'absence de signes précurseurs ne permet pas d'en nier complètement la possibilité !

Par ailleurs notre étude porte sur un échantillon de petite taille : le corpus de productions examiné concerne un public de quelques dizaines de personnes seulement. Une étude sur un public plus large serait souhaitable. Cette faiblesse expérimentale ne nuit pas vraiment à la démonstration mais pourrait faire douter de l'intérêt du concept de théorie de proximité : cet intérêt est en effet directement lié à l'importance du public concerné.

Si l'on examine maintenant notre étude à la lumière des recherches de ces dernières années, notamment anglo-saxonnes, concernant l'apprentissage du calcul en formation initiale, nous pouvons constater un certain nombre de convergences. Je rappelle que je n'ai pris connaissance de la plupart de ces recherches qu'après la fin de mon étude ; les convergences que nous allons relever en sont d'autant plus remarquables.

Une première convergence concerne l'importance accordée aux concepts d'unité et de grandeur. En cela notre étude se situe dans le prolongement des recherches initiées par Schwartz (1988) et Kaput (1985), mais ces auteurs se situent de façon implicite dans le cadre de la théorie du calcul entre grandeurs, en introduisant d'emblée la notion de grandeur quotient (les « quantités intensives »). Steffe (1988) par contre propose un processus de conceptualisation de la multiplication qui s'apparente beaucoup à la définition que nous donnons de la multiplication des grandeurs par un entier. Tous (Steffe et al., Lesh et al., Lamon etc...) s'accordent à souligner, comme nous l'avons fait, une rupture, en ce qui concerne le statut des unités, entre le champ des structures additives et celui des structures multiplicatives.

Une autre convergence concerne la place privilégiée qu'occupe dans notre étude le concept de mesurage. Dans ses recherches sur la conceptualisation des nombres rationnels Freudenthal (1983) met en avant le concept de « norming » ; il nomme ainsi un processus de reconceptualisation des situations à partir de nouvelles unités. C'est précisément ce qui se passe dans un mesurage : compter par exemple combien on peut remplir de bouteilles de 0,75litre avec un tonneau de 200litres, c'est bien reconceptualiser la situation en choisissant l'unité « bouteille » au lieu de l'unité « litre ».

Une dernière convergence est d'ordre plus général : depuis les études de Karplus, un mouvement d'ensemble s'est dessiné chez les chercheurs intéressés par le développement des concepts du calcul, pour contester la théorie des stades de Piaget et donner une nouvelle orientation à la recherche (Bell, Fischbein, Greer, Hart, Vergnaud ...). Ces travaux s'appuient sur diverses typologies des situations qui font appel à une analyse mathématique de ces situations. On assiste ainsi à une introduction de la matière mathématique dans la problématique du développement cognitif. Il apparaît que la structuration disciplinaire des connaissances a quelque chose à voir avec leur conceptualisation. Le concept de théorie de proximité s'inscrit bien entendu tout à fait dans ce mouvement.

C'est sans doute dans le cadre de la théorie des champs conceptuel qu'il faut situer notre recherche. Selon cette théorie, l'acquisition des concepts doit en effet s'envisager sous trois aspects : l'analyse et la catégorisation des différentes situations, la description et l'analyse des différents schèmes utilisés par le sujet, l'étude des représentations symboliques. Le concept de théorie de proximité prend bien en compte ces trois aspects.

Notre recherche a aussi bien des points communs avec la didactique professionnelle[72] : celle-ci se préoccupe en effet de valoriser l'expérience des adultes ; par une observation attentive de leur pratique professionnelle, elle essaie d'identifier des points d'appui cognitifs sur lesquels baser une formation qualifiante. Un enseignement par théories de proximité a le même souci de valoriser l'expérience professionnelle ou quotidienne des adultes et de s'en servir pour réduire la distance entre les personnes et le savoir.

La suite de la thèse est consacrée à la recherche de théories de proximité dans d'autres domaines que le calcul de base. La méthode retenue à cet effet est d'isoler quelques propriétés didactiques du prototype et de les constituer en critères de reconnaissance d'une théorie de proximité. C'est en quelque sorte une nouvelle définition d'une théorie de proximité par extrapolation de certaines propriétés du prototype. Le nombre de propriétés retenues est sans doute trop grand : par exemple il n'est pas certain qu'une théorie de proximité ait toujours son origine dans une connaissance obstacle. Par contre il semble beaucoup plus sûr qu'une théorie de proximité soit systématiquement liée à un schème dont elle formalise les invariants. Cette seule propriété fournit des pistes de recherche très utiles ; en particulier elle oriente l'investigation vers un contexte d'enseignement qui favorise l'activité spontanée des adultes.

Les premiers résultats de notre recherche nous semblent prometteurs : bien que notre méthode ne puisse fournir à ce sujet une certitude, nous pensons avoir identifié quelques théories de proximité dans les domaines de l'algèbre, des probabilités et de l'analyse. Pour confirmer notre conjecture, une étude expérimentale devrait répondre à quatre questions :

- est-il possible, par des situations adéquates, de susciter chez les adultes l'expression des schèmes associés à ces diverses théories ?

- une fois ces schèmes mis en place, est-il possible de conduire ces adultes à en formaliser les invariants ?

- la maîtrise des théories de proximité ainsi construites donne-t-elle accès aux théories académiques de référence ?

- cette accès médiatisé aux théories académiques de référence est-il plus efficace qu'un accès direct ?

La dernière question est redoutable : on connaît la difficulté et les biais des études comparatives dans le domaine pédagogique ! Cependant notre méthode nous semble offrir un angle d'attaque original du problème puisqu'elle ne compare pas directement les stratégies de formation mais compare les distances conceptuelles entre un public et les théories susceptibles de lui être enseignées.

---

[72] Pastré (1997,1999)

En supposant une réponse positive à toutes ces questions, il s'en poserait une dernière, et non des moindres : celle de l'appropriation par les formateurs des théories de proximités ainsi définies. Nous prévoyons à priori une forte résistance sur un point crucial, celui de la « reprise » des concepts. Les théories de proximité donnent en effet une définition provisoire et non conventionnelle des concepts à enseigner qui est destinée à être abandonnée ultérieurement au profit d'une définition plus large, ou plus satisfaisante, ou plus conforme à la norme en vigueur. Il est probable que bon nombre de formateurs hésiteront à s'écarter, même provisoirement, des définitions académiques. La « reprise » des concepts est pourtant une démarche scientifique fondamentale, particulièrement en usage chez les physiciens et les chimistes. Qu'un adulte puisse en faire l'expérience à tout niveau de formation, y compris en formation de base, l'aiderait sûrement à se faire une idée plus juste des sciences, et favoriserait sans doute, de façon générale, son développement cognitif.

Bibliographie

Astolfi J.P. (1998), Les mutations du paysage pédagogique, in Ruano-Borbalan J.C., *Eduquer et Former,* Editions Sciences Humaines, Auxerre.

Bell A.W. (1984), Structures, contexts and learning: some points of contact between cognitive psychologie and mathematical education, *Journal of structural learning,* n° 8, pp. 165-171.

Bell A.W., Fischbein E. and Greer B. (1984), Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context, *Educational Studies in Mathematics,* vol.2, pp.129-147.

Behr M., Lesh R., Post T., Silver E.A. (1983), Rational Number concepts, in Lesh R. and Landau M. , *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Academic Press, New York.

Brousseau G. (1986), *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* Thèse, Bordeaux I.

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Carré P. et al. (1998), *Motivation et engagement en formation,* Education permanente, n°136.

Carré P. (1999), Motivation et rapport à la formation, in Carré P. et Caspar P., *Traité des sciences et des techniques de la Formation,* Dunod, Paris, pp.267-287.

Carré P, Clenet J., D'Halluin C., Poisson D. (1999), Ingénierie pédagogique et formations ouvertes, in Carré P. et Caspar P., *Traité des sciences et techniques de la Formation,* Dunod, Paris, pp.379-400.

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1997), Les grandeurs en mathématiques au collège, *« petit x »*, n°55, pp.5-32.

Clenet J. (2003), *L'ingénierie des formations en alternance*, L'Harmattan, Paris.

D'Ambrosio U. (1985), Ethnomathematics and its place in the history of pedagogy of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), pp.44-48.

Département mathématiques du C.U.E.E.P (1986), *Ensemble Multimédia MAC5*, T.N.T (Technologies Nouvelles et Transferts), Villeneuve d'Ascq.

Derycke A., Gers J.N. (1994), Mathematical Objects in a Visual Interactive Environment (M.O.V.I.E), *Actes du congrès Ed-Media 94, World Conference on Educational Multimedia and Hypermedia*, Vancouver, Canada.

D'Halluin C., Gers J.N. (1991), Learning algebra or learning to formalize, the role and place of pocket-calculators and computers, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, pp.178-183.

D'Halluin C., Poisson D. (1988), *Une stratégie d'enseignement des mathématiques : la mathématisation de situation intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée*, thèse d'état, Université des Sciences et Technologies, Lille.

Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.7.2, pp.5-31.

Dupuis C., Pluvinage F. (1981), La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.2, pp.165-212.

Fischbein E., Deri M., Nello M. And Marino M. (1985), The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, n°16, pp.3-17.

Freudenthal H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Reidel, Boston.

Gers J.N. (1984), De la calculette au micro-ordinateur, un enseignement actif des mathématiques, *Actes du colloque EAO 84,* Lyon.

Gers J.N., Poisson D. (1982), Premier bilan de l'utilisation des ordinateurs en insertion jeunes, *Education Permanente,* n°66, pp.53-59.

Gers J.N. (1987), *Une formulette*, DEA d'informatique, LilleI.

Gers J.N., Losfelt P., Poisson D. (1981), *Les mathématiques du consommateur, le consommateur de mathématiques,* I.R.E.M, Lille.

Gers J.N. (1993), Icônes dynamiques et enseignement des mathématiques, in Collectif, *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur,* Eyrolles, Paris.

Ginsbourger F. et al (1992), *Actes du colloque : Formation et apprentissage des adultes peu qualifiés,* La Documentation Française, Paris.

Girodet M.A. (1996), *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes de calcul,* Didier, Paris.

Greer B. (1987), Understanding of arithmetical operations as models of situations, in Sloboda J.A., Rodgers D., *Cognitive Processes in Mathematics,* Clarendon Press, Oxford, pp.60-80.

Greer B. (1988), Non conservation of multiplication and division, *The Journal of Mathematical Behavior,* vol.7.3, pp.281-298.

Halbwachs F. (1974), *La pensée physique chez l'enfant et le savant,* Delachaux Niestlé, Genève.

Hart K.M. (1988), Ratio and Proportion, in Hiebert J. And Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdalle N.J., pp.198-219.

Inhelder B., Piaget J. (1955), *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent,* PUF, Paris.

Kaput J. (1985), *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response,* Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center.

Karplus R., Karplus E.F. (1972), Intellectual development beyond elementary school : Ratio, a longitudinal study, *School, Science and Mathemeatics*, pp.813-820.

Karplus R., Peterson R.W. (1970), Intellectual development beyond elementary school II : Ratio, a survey, *School, Science and Mathematics*, pp.813-820.

Karplus R., Pulos S. and Stage E.K. (1983), Proportional reasoning of early adolescents, in Lesh R. and Landau M., *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Academic Press, New-york, pp.45-90.

Kieren T. (1988), Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale N.J., pp.162-180.

Lamon S.J. (1990), *Ratio and Proportion : Cognitive Foundations in Unitizing and Norming,* Marquette University, Milwaukee.

Legendre F. (1789), *L'arithmétique en sa perfection*, P.Ferrand, Rouen.

Lesh R., Post T., Behr M. (1988), Proportional reasoning, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale N.J., pp.93-118.

Levain J.P. (1994), *Proportionnalité et acquisition des concepts d'agrandissement et d'échelle,* thèse de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant, ParisV.

Leclere J.P. (2001), *Faire faire des mathématiques à des adultes illettrés : le contraire d'une utopie*, thèse de Sciences de l'Education, Université des Sciences et Technologies, Lille.

Ohlson S. (1988), Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Hillsdale N.J., pp.53-92.

Pacteau C. (1992), L'éducabilité cognitive : un miroir aux alouette ?, *Sciences Humaines*, n°21.

Pastré P. (1997), Didactique professionnelle et développement, *Psychologie française*, tome 42-1, pp.89-100.

Pastré P. (1999), L'ingénierie didactique professionnelle, in Carré P. et Caspar ., *Traité des sciences et des techniques de la Formation*, Dunod, Paris, pp.403-416.

Piaget J. (1962), Commentaires sur les remarques critiques de Vygotski, in Vygotski L. (1934), *Pensée et Langage*, Traduction de Françoise Sève (1985), Messidor/Editions sociales, Paris, pp.387-399.

Piaget J. (1974), *Réussir et comprendre*, PUF, Paris.

Piaget J., Inhelder B. (1977), *La représentation de l'espace chez l'enfant*, troisième édition, PUF, Paris.

Piaget J., Inhelder B. (1978), *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, quatrième édition, Delachaux et Niestlé, Paris.

Piaget J., Inhelder B. (1980), *La genèse des structures logiques élémentaires*, quatrième édition, Delachaux et Niestlé, Paris.

Piaget J. Inhelder B. (1980), *La genèse du nombre chez l'enfant*, sixième édition, Delachaux et Niestlé, Paris.

Poisson D. (1978), *Analyse de la Ville de New York*, I.R.E.M, Lille.

Poisson D. (1984), La formation de formateurs en « double piste », *Actes du colloque C.D.E.F.O.P*, Lille.

Schwartz B. (1993), *Moderniser sans exclure,* La Découverte, Paris.

Schwartz J.L. (1988), Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale, N.J., pp.41-52.

Steffe L. (1988), Children's construction of number squences and multiplying schemes, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale, N.J., pp.119-140.

Vergnaud G. (1983), Multiplicatives structures, in Lesh R. and Landau M., *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Academic Press, New York, pp.127-174.

Vergnaud G. (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, in Ehrlich S., Les représentations, *Psychologie française,* tome 30-3/4, pp.245-252.

Vergnaud G. (1988), Multiplicatives structures, in Hiebert J. and Behr M., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale N.J., pp.141-161.

Vergnaud G. (1990), Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives, in Netchine-Grynberg G., *Développement et fonctionnement cognitif chez l'enfant,* PUF, Paris, pp.261-277.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10, n°2.3, pp.133-170.

Vergnaud G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in Vingt ans de didactique des mathématiques en France (Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud), *Recherches en didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.177-191.

Vergnaud G. (1999), Le développement cognitif de l'adulte, in Philippe Carré et Pierre Caspar, *Traité des sciences et techniques de la Formation,* Dunod, Paris, pp.189-203.

Vergnaud G. (2000), *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps*, Hachette, Paris.

Vermersch P. (1989), Expliciter l'expérience, *Education Permanente*, n°100/101.

Vilar de Melo M.F. (1999), *Le développement de la conceptualisation et de l'argumentation chez des syndicalistes de faible niveau de formation de base*, thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris.

Vygotski L. (1934), *Pensée et Langage*, Traduction de Françoise Sève (1985), Messidor /Editions Sociales, Paris.

Table des matières

Annexes

Les annexes sont constituées d'une annexe dactylographiée figurant dans les pages qui suivent et d'une annexe numérique enregistrée sur le CD joint à cette thèse.

L'annexe dactylographiée comprend les énoncés des exercices proposés en évaluation. Ces exercices sont indexés à l'aide du mot clé Sujet. Le premier champ numérique indique le niveau du module, les deux suivants le mois et l'année pendant lesquels l'évaluation a été effectuée. Par exemple l'index Sujet/1/01/00 désigne l'évaluation proposée dans le module MA1 au mois de janvier 2000.

L'annexe numérique contient le corpus des productions enregistrées en fichiers .TIF. Ces fichiers ont été produits à l'aide du logiciel IMAGING sur PC et compressés au format JPEG. Les fichiers sont indexés de la même manière que leur contenu, à ceci près que le séparateur entre les champs est une virgule et non une barre. Par exemple le fichier Sophie,1,01,00 contient la production Sophie/1/01/00.

Sujet/1/10/98

1. L'eau coûte 15F le mètre cube. Combien de mètre cube pour une consommation de 795F (ou 895F ou 985F ou 995F) ?
2. Un appareil photo coûte 1290F (ou 1390F ou 1490F ou 1590F). Combien cela fait-il en euros ? (1€ vaut 6,56F)
3. Le premier étage de la tour Eiffel est à 90m au dessus du sol. Combien monterez-vous de marches si vous prenez l'escalier ? (hauteur de la marche : 15cm ou 16cm ou 17cm ou 18cm).
4. Combien de bandes faut-il pour tapisser une pièce de 10m sur 12m (ou 11m sur 12m ou 12m sur 12m ou 12m sur 13m) ?
5. Combien de canettes de bière peut-on remplir avec une cuve de 150 litres (ou 200 litres ou 250 litres ou 350 litres) ? (une canette contient 33cl) ?
6. Chaque jour nous jetons environ 1,2kg de déchets. Nous sommes deux millions et demi d'habitants dans le Nord (ou un million et demi dans le Pas de Calais). Combien cela fait-il de tonnes d'ordures à traiter chaque jour ?

Sujet/1/12/98

1. Combien de mètre carré peut-on enfermer avec 170m (ou 180m ou 190m ou 210m) de clôture ?
2. Faites le plan d'une pièce de 6,50m sur 5m (ou 6m sur 5,50m ou 7m sur 4,50m ou 7m sur 6,50m) carrelée avec des carreaux de 25cm de côté. Combien faut-il de carreaux ? Combien faut-il acheter de mètre carré ?
3. La hauteur entre deux étages d'un immeuble doit être 2,50m minimum et 2,80m maximum. Quel peut-être le nombre d'étages d'un immeuble de 30m (ou 35m ou 40m ou 45m) de haut ?
4. Quel est le prix de 230g (ou 260g ou 280g ou 320g) de haché à 56F le kilo ?
5. Combien pèsent 20F (ou 30F ou 40F ou 50F) de haché à 56F le kilo ?
6. Un steak de 130g (ou 140g ou 150g ou 160g) coûte 12,50 F. Quel est le prix du kilo ?

Sujet/1/04/99

1. Le paquet de cigarettes coûte 14,90F (ou 15,90F ou 16,90F ou 17,90F). Combien de paquets peut-on acheter avec un billet de 500F ? Quelle est la dépense en un an si on fume un paquet par jour ?
2. Un tissus coûte 64F (ou 74F ou 84F ou 94F) le mètre. Quelle longueur de tissus peut-on acheter avec un billet de 500F ?
3. Un paquet de 284g de râpé est vendu 16,85F (ou 17,85F ou 18,85F ou 19,85F). Quel est le prix du kilo ?
4. Le kilo de foie coûte 69F (ou 79F ou 89F ou 99F). J'ai payé une tranche 17,80F. Combien doit-elle peser ?
5. Un bureau de vote compte 1100 (ou 1200 ou 1300 ou 1400) inscrits. La participation est de 56 %. Combien de personnes ont-elles voté ?
6. Une pièce mesure 4,40m sur 5,80m (ou 5,40m sur 6,80m ou 6,40m sur 7,80m ou 7,40m sur 5,80m). Combien faut-il de bandes pour la tapisser ?

Sujet/1/06/99

1. 1€ vaut environ 6,56F. Combien valent 500F ?
2. Un article marqué 400F est soldé 320F. Quel est le pourcentage de solde ?
3. J'ai payé en 12 mensualités de 150F un appareil vendu 1500F comptant. Quel est le taux du crédit ?
4. Téléphoner en Allemagne coûte 1,80F la minute. Combien de temps peut-on téléphoner pour 500F ?
5. Un TGV roule à 240km/h. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 100km ?
6. Une voiture consomme 11 litres aux 100km. Combien de kilomètres peut-elle parcourir avec 60 litres ?
7. Un maître baigneur dispose d'une ligne flottante de 100m pour délimiter une zone de bain en bordure de plage. Combien de mètres carrés peut-il enfermer à l'intérieur de sa ligne flottante ?
8. Pour carreler une pièce de 6m sur 5m avec des carreaux de 25cm sur 25 cm,
   - combien de carreaux faut-il poser ?
   - combien de mètres carrés de carreaux faut-il acheter ?
9. Commentez le graphique ci-contre.
10. Un poulailler industriel rectangulaire mesure 40m de long sur 15m de large.
    - Combien cela fait-il de mètres carrés ?
    - Chaque poule doit disposer de 500cm². Combien peut-on mettre de poules dans ce poulailler ?
    - Dessinez l'espace vital d'une poule.

Sujet/1/11/99.

1. Un gros fumeur fume deux paquets de cigarettes par jour à 17,90F le paquet.
   - Combien dépense-t-il en un mois ?
   - Combien de jours peut-il tenir avec 500F ?
2. La minute de téléphone coûte 0,42F.
   - Combien coûte une heure de téléphone ?
   - Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F ?
3. Combien de bouteilles de 75cl peut-on remplir avec un tonneau de 300 litres ?
4. Un sac de 25kg de pommes de terre coûte 37,50F. Quel est le prix du kilo ?
5. En mettant bout à bout les cigarettes que fumerait un gros fumeur en une année, est-ce qu'on peut atteindre le sommet de la Tour Eiffel (300m) ?
6. Un jardin mesure 8m de large sur 12m de long.
   - De combien de mètres carrés dispose le jardinier ?
   - Quelle est la longueur de la clôture ?
   - Combien faut-il de poteaux (il doit y avoir au moins 3m entre deux poteaux) ?
   - Dessinez le plan du jardin à l'échelle 1/50.

Sujet/1/01/00

1. Une famille dépense, par mois, 3600F pour la nourriture, 2700F pour son logement, 1800F pour les transports, 600F pour les loisirs et l'habillement, 300F pour le reste.
   - Représentez ce budget par un camembert.
   - Quel est le pourcentage de chaque poste de dépense ?
2. Une voiture consomme 4 litre aux 100km.
   - Combien consomme-t-elle pour parcourir 240km ?
   - Quelle distance peut-elle parcourir avec 30 litre ?
3. L'étiquette d'une barquette de viande indique 44,80F pour un prix au kilo de 70F. Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?
4. Quelle quantité de gazole à 4,80F le litre peut-on acheter avec 150F ?
5. Le graphique ci-joint donne la position d'un train à chaque instant entre la gare A et la gare B.
   - A quelle heure passe-t-il dans la gare C ?
   - Est-ce qu'il s'arrête dans cette gare ?
   - Où est-il à 9h45 ?
   - Combien de kilomètre parcourt-il en une heure?

Sujet/1/04/00

1. Une publicité récente annonce la minute de téléphone à 0,27F.
   - A ce tarif, combien coûte une heure de téléphone ?
   - Combien de temps peut-on téléphoner avec 100F ?
2. La Tour Eiffel a une hauteur de 300m. Combien faut-il monter de marche pour aller jusqu'au sommet par les escaliers ? Choisissez votre hauteur de marche.
3. Combien faut-il prévoir de bouteilles de 1,5 litre pour commercialiser 1000 litres d'eau de source?
4. Un sac de 25kg de pommes de terre est vendu 35F. Quel prix cela fait-il au kilo ?
5. Combien y a-t-il environ de voitures dans un bouchon de 1km sur une autoroute à deux voies ?
6. Soit une pièce de 6m sur 5m avec un plafond de 2,40m.
   - Combien faut-il de rouleaux pour la tapisser ?
   - Combien faut-il de carreaux de 25 cm pour la carreler ?

Sujet/1/06/00

1. Une famille dépense, par mois, 3600F pour la nourriture, 2700F pour son logement, 1800F pour les transports, 600F pour les loisirs et l'habillement, 300F pour le reste. Représentez ce budget par un camembert. Quel est le pourcentage de chaque poste de dépense ?
2. Un article marqué 600F est soldé 420F. Quel est le pourcentage de solde ?
3. L'étiquette d'une barquette de viande indique un prix au kilo de 70F. La barquette vaut 44,80F. Quel doit être le poids de viande dans cette barquette ?
4. J'ai acheté 160g de fromage pour 12,80F. Quel est le prix du kilo ?
3. Le litre de gazole coûte 5,40F. Quelle quantité de gazole peut-on acheter avec 150F ?
4. Une voiture consomme 9 litres aux 100km.
   - Quelle est la consommation pour 500km ?
   - Combien de kilomètres peut-elle parcourir avec 60 litres ?
5. Un TGV roule à 240km/h. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 140km ?

Sujet/1/10/00

1. Avec 500F, combien peut-on acheter de paquets de cigarettes à 14,90F ?
2. Avec 500F, combien peut-on acheter de paquets de bonbons à 7,40F ?
3. Avec 500F, combien peut-on acheter de journaux à 3,80F ?
4. Avec 500F, combien de temps peut-on téléphoner si la minute coûte 0,61F ?

Sujet/1/11/00

1. 17 personnes se partagent les 500F de location d'un car. Combien chacune doit-elle payer ?
2. Une bouteille d'eau pèse environ 1,5Kg. Combien faut-il de bouteilles pour faire votre poids ?
3. Si je roule à 130 km/h sans m'arrêter pendant 1h50, quelle distance puis-je parcourir?
4. Avec un billet de 500F, combien de paquets de cigarettes à 17F peut-on acheter ?
5. Combien coûtent 340g de râpé à 59F le kilo ?
6. La minute de téléphone coûte 1,82F. Combien de temps peut-on téléphoner avec une carte prépayée de 150F ?
7. Un steak de 270g coûte 21,60F. Quel est le prix du kilo ?
8. Combien de temps faut-il pour parcourir 200Km en roulant à 90Km/h ?
9. Il y a 8Km de bouchon sur une autoroute à 3 voies. On compte environ 5m par voiture, et chaque conducteur a en moyenne 2 passagers. Combien y a-t-il de voitures dans le bouchon, et combien de personnes bloquées dans cet embouteillage ?

Sujet/1/12/00

1. Combien coûtent 1,248kg de pommes de terre à 7,50F le kilo ?
2. J'ai payé 24,15F un morceau de fromage à 70F le kilo. Quel doit être le poids de ce morceau ?
3. J'ai payé 9,90F un steak de 180g. Quel est le prix au kilo ?
4. Je consomme 5 litres aux 100km.
   - Combien de litres me faut-il pour parcourir 240km ?
   - Combien de kilomètres puis-je parcourir avec 56 litres ?
5. Une voiture roule à 120km/h sur autoroute.
   - Combien de kilomètre fait-elle en roulant pendant 2h10 sans s'arrêter ?
   - Combien de temps met-elle pour faire 100km ?
6. Une pièce mesure 5,20m sur 4,80m et a une hauteur de plafond de 2,40m.
   - Quelle est sa surface ?
   - Quel est son périmètre ?
   - Combien faut-il de carreaux de 40cm pour la carreler ?
   - Combien faut-il de rouleaux pour la tapisser ?

Sujet/1/01/01

1. Un candidat a obtenu 1224 voix sur 3600 votants. Quel pourcentage cela fait-il ?
2. Un article valant 450F est soldé 360F. Quel est le pourcentage de solde ?
3. Une télévision valant 3900F se paie à crédit en 12 mensualités de 375F. Quel est le taux du crédit ?
4. J'ai payé 360F un article soldé à 25%. Quel était son prix avant les soldes ?
5. 185g de gruyère coûtent 14,80F. Quel est le prix du kilo ?
6. Une voiture consomme 8 litres aux 100km.
   - Combien de litres faut-il pour parcourir 240 km ?
   - Combien de kilomètres peut-on faire avec 50 litres ?
7. Une voiture roule à 130km/h sur autoroute.
   - Combien de kilomètres peut-elle faire en roulant pendant 2h10 sans s'arrêter ?
   - Combien de temps met-elle pour faire 100km ?
8. Pour 20F on a environ 3€.
   - Quelle est la valeur en euros d'un billet de 100F ?
   - Quelle est la valeur en francs d'un billet de 100€ ?

Sujet/1/04/01

1. Le paquet de cigarettes est à 23,90F. Combien de paquets peut-on acheter avec 500F ?
2. Au péage de l'autoroute de Fresnes on compte environ 2 voitures par seconde. Chaque voiture paie environ 70F. Quelle est la recette en une heure ?
3. Un habitant de la Somme a 1,20m d'eau dans sa maison. Le niveau de l'eau baisse de 1,5cm par heure. Dans combien de temps sera-t-il au sec ?
4. Une carte prépayée de 190F permet de téléphoner pendant 40 minutes avec un portable. Quel est le prix de la minute ?
5. Avec un téléphone fixe la minute coûte 0,22F. Combien de temps peut-on téléphoner pour 190F ?
6. Le son parcourt environ 300m par seconde. Si je compte 10 secondes entre l'éclair et le coup de tonnerre, à quelle distance est tombée la foudre ?
7. Le TGV parcourt 240 km en une heure. Quelle distance parcourt-il en une seconde ?
8. Dans une boîte il y a 20 sachets de 500mg d'aspirine. Combien de boîtes peut-on fabriquer avec un kilogramme d'aspirine ?
9. Un carton contient 50 packs de 6canettes à 25cl. Combien y-a-t-il de litres dans le carton ?
10. Une pièce rectangulaire de 6m sur 8m a un plafond de 2,60m.
    - Combien faut-il de rouleaux pour tapisser les murs (on ne tient pas compte des ouvertures) ?
    - Combien faut-il de carreaux de 40cm pour carreler cette pièce ?
11. Dessinez un carré dont la surface soit la moitié de cette feuille.

Sujet/1/06/01

1. Un tissu vaut 85F le mètre. Combien coûtent 3,80m de ce tissu ?
2. L'essence est à 7,20F le litre.
   - Quelle quantité d'essence peut-on acheter avec 300F ?
   - Combien coûte un plein de 54,80litres ?
3. Une voiture consomme 6 litres aux 100km. Combien de kilomètres peut-elle faire avec 50 litres d'essence?
4. La côte de Bœuf est à 64F le kilo. Combien coûte une côte de 1.480Kg ?
5. J'ai acheté 67,20F un poulet de 1,280Kg. Quel est le prix du kilo ?
6. Le fromage râpé vaut 59F le kilo. Combien doit-il y avoir de râpé dans un sachet vendu 10F ?
7. Le TGV méditerranée roule à 300km/h.
   - Quelle distance parcourt-il en 5 minutes ?
   - Combien de temps lui faut-il pour faire 1km ?
8. Un coureur cycliste sur piste roule à une vitesse moyenne de 42km/h. La piste mesure 400m.
   - En combien de temps le coureur fait-il un tour de piste ?
   - Combien de tours fait-il en une heure ?
9. Lors d'une élection, un candidat a obtenu 5735 voix sur 65800 votants.
   - Quel est son score en pourcentage ?
   - Combien de voix lui manque-t-il pour atteindre la barre des 10% ?
10. Un article affiché à 79F est soldé 59F. Quel est le pourcentage de solde sur cet article ?
11. Un magasin solde à 20%.
    - Un article valait 179F avant les soldes. A combien est-il soldé ?
    - Un article est soldé 176F. Combien valait-il avant les soldes ?

Sujet/2/04/99

1. Un candidat a obtenu 335 voix (ou 463 ou 592 ou 720) sur 1285 voix exprimées. Quel est son résultat en pourcentage ?
2. Sur ma facture je lis :
   - PRIX HT.......................16675,00F
     (ou 17675,00F ou 18675,00F ou 19675,00F)
   - PRIX TTC (TVA 20,6 %)..22822,05F
     (ou 20310,05F ou 21616,05F ou 23028,05F)

   Vérifiez cette facturation.
3. La population d'une ville a augmenté de 5% (ou 6% ou 7% ou 8%) depuis 1980. Elle est aujourd'hui de 85740 habitants. Combien y avait-il d'habitants en 1980 ?
4. La voiture neuve que j'avais payée 52900F (ou 62900F ou 72900F ou 82900F) est maintenant cotée 36500F (ou 46500F ou 56500F ou 66500F) à l'Argus. Quel pourcentage de sa valeur a-t-elle perdu ?
5. Un article est soldé 190F (ou 290F ou 390F ou 490F). Les soldes sont annoncées à 20%. Quel était le prix de l'article avant les soldes ?
6. Une personne a perdu 12kg (ou 15kg ou 18kg) en deux mois de régime, soit 12% (ou 15% ou 16%) de son poids. Quel était son poids quand elle a commencé son régime ?
7. Trois partis se partagent les voix des électeurs : le parti de la Liberté (12% ou 42% ou 52%), le parti de l'Egalité (17% ou 27% ou 37%), le parti de la Fraternité (11% ou 31% ou 51%). Représentez les résultats de cette élection par un diagramme circulaire.
8. Un steak est vendu 19,85F. Le prix au kilo est 59,90F (ou 69,90F ou 79,90F ou 89,90F). Combien doit-il peser ?
9. Une feuille de format A4 mesure 21cm de large sur 29,7 cm de haut
   (ou une feuille de format A3 mesure 29,7cm de large sur 42cm de haut
   ou une feuille de format A2 mesure 42cm de large sur 59,4cm de haut
   ou une feuille de format A1 mesure 59,4cm de large sur 84 cm de haut)
   - Elle est plus haute que large : de quel pourcentage ?
   - Elle est aussi moins large que haute : de quel pourcentage ?
10. Il y a quelques années, la TVA était de 17,6 % (ou 18,6% ou 19,6% ou 20,6%) sur le prix hors taxe. Quel pourcentage cela fait-il sur le prix TTC ?

Sujet/2/06/99

1. 1000 euros valent 6559,57 F. Quelle est la valeur en euros de 7854,42 F (ou 8854,42F ou 9854,42F) ?
2. Dans un litre de lait entier, il y a 900g d'eau.
   - Combien de litres de lait peut-on fabriquer avec 180g (ou 280g ou 780g) de lait en poudre ?
   - Combien faut-il rajouter d'eau ?
3. Un vélo a des roues de 55cm (ou 70cm ou 75cm) de diamètre.
   - De combien avance le vélo quand ses roues font un tour ?
   - Quelle est la vitesse du vélo en km/h quand ses roues font 3 tours par seconde ?
4. Le tour d'un tronc arbre mesure 1,20m (ou 2,20m ou 3,20m). Quel est son diamètre ?
5. Le graphique ci-contre fournit la distance de freinage d'une voiture selon sa vitesse.
   - Quelle est la distance de freinage à 60km/h (ou 90km/h ou 130km/h) ?
   - Quelle est la vitesse maximum pour s'arrêter en 50m (ou 70m ou 110m) ?
   - Un piéton traverse à 30m (ou 100m ou 150m) devant une voiture qui roule à 50km/h (ou respectivement 80km/h ou 100km/h).
     La voiture peut-elle s'arrêter à temps ?
6. D'après le code, le nombre de mètres nécessaires au freinage d'une voiture est le carré du nombre de dizaines de km/h.
   - Tracez la courbe de freinage correspondante.
   - Quelle est la vitesse maximum pour s'arrêter en 50m (ou 70m ou 110m) ?
7. La distance Lille Bordeaux à vol d'oiseau est de 700km.
   - D'après la carte ci-contre, quelle est la distance Brest Nice (ou Brest Strasbourg ou Dunkerque Perpignan ou Bayonne Strasbourg) ?
   - Est-ce qu'une carte de France à l'échelle 1/1000000 (ou 1/5000000) ou serait plus grande ou plus petite que celle qui vous est fournie ?
8. Quelle est la surface de l'hexagone Dunkerque Brest Bayonne Perpignan Nice Strasbourg,
   - Sur la carte ?
   - En réalité ?
9. On découpe un disque dans un morceau de papier carré.
   - Quel est le pourcentage de chute ?
   - Quel poids de papier faut-il pour fabriquer 1kg de confettis ronds ?
10. Suite à la récente crise de l'élevage industriel du poulet, l'espace vital par animal va passer de 450cm² à 550cm².
    - Si un éleveur souhaite maintenir sa production, de quel pourcentage doit-il agrandir son poulailler ?
    - Sinon, de quel pourcentage doit-il réduire sa production ?

Sujet/2/11/99

1. Dessiner un carré, un rectangle et un triangle de mêmes surfaces.
2. Donner des dimensions pour un jardin de $1000m^2$.
3. Combien mesure le côté d'une place carrée de $1000m^2$?
4. Une moquette se vend en 1,50m de large. Quelle longueur peut-on avoir pour $10m^2$?
5. Combien de livres de 15cm de large, 20cm de hauteur, 2cm d'épaisseur, peut-on mettre dans un conteneur de 2m de large, 2m de haut et 5m de long ?
6. Un aquarium a une hauteur de 30cm et un fond hexagonal. Les côtés de l'hexagone mesurent 15cm et la distance entre deux côtés opposés vaut 12cm. Combien de litres faut-il pour remplir cet aquarium ?
7. Dessinez un trapèze et partagez le en trois parts d'égales surfaces.

Sujet/2/01/00

1. Lors d'une élection, un candidat a obtenu 2560 voix, soit 32 % des votes.
   - Quel est le nombre des votants ?
   - Un autre candidat a obtenu 1024 voix. Quel est son score en pourcentage ?
2. La population d'une ville a augmenté de 5 % entre 1990 et 2000, soit 2360 habitants.
   - Combien y avait-il d'habitants en 1990 ?
   - Combien y en a-t-il en 2000 ?
3. Un article est soldé à 88 F . Les soldes sont à 20 %. Quel devait être le prix de cet article avant les soldes ?
4. Le graphique en annexe permet à un commerçant de lire le prix TTC d'un produit connaissant le prix HT.
   - Quel est le prix TTC d'un article qui vaut 150 F HT.
   - Quel est le prix HT d'un article qui vaut 150 F TTC ?
   - Est-ce qu'il s'agit de produits de luxe (taxés à 33,33 %), de produits de base (taxés à 5,5 %), ou de produits ordinaires (taxés à 20,6 %) ?
   - Expliquez comment le commerçant peut calculer le prix TTC à partir du prix HT. Expliquez comment il peut calculer le prix HT à partir du prix TTC.
5. Sur une carte de France à l'échelle 1/1000000 on mesure 7 cm entre Lille et Dunkerque.
   - Quelle est la distance réelle à vol d'oiseau ?
   - Quelle doit être la distance entre ces deux villes sur une carte Michelin à l'échelle 1/200000 ?
6. Le tour d'un arbre mesure 4,50 m. Quel est le diamètre de cet arbre ?
7. Un vélo a des roues de diamètre 650 mm.
   - De combien avance ce vélo quand les roues font un tour ?
   - Combien de tours de roues faut-il pour parcourir 1km ?
8. 240 g de haché sont vendus 16,80 F. Quel est le prix du kilo ?

Sujet/2/04/00

1. Trois partis se partagent les voix des électeurs : le parti de la Liberté (42%), le parti de l'Egalité (27%), et le parti de la Fraternité (31%). Représentez les résultats de cette élection sous la forme d'un demi camembert.
2. En cinquante ans la population française est passée de 39 millions à 59 millions. Quelle augmentation cela fait-il en pourcentage ?
3. Dans un magasin qui solde à 20% j'ai fait pour 236F d'achats. Combien aurais-je payé en temps normal ?
4. Monsieur Poilour a maigri de 24kg. Il pèse maintenant 126kg. Quelle a été sa perte de poids en pourcentage ?
5. La TVA est passée récemment de 20,6% à 19,6%. Sur mon dernier achat cela m'a fait gagner 356F.
   - Est-ce que j'ai acheté une voiture ou une machine à laver ?
   - Combien l'ai-je payée ?
6. J'ai payé 18,90F un steak de 280g.
   - Quel est le prix du kilo ?
   - Quel doit être le poids d'un steak vendu 16,20F ?
7. Il faut 120g de lait en poudre pour faire un litre de lait.
   - Combien en faut-il pour faire 75cl ?
   - Combien de lait peut-on obtenir avec 3kg de lait en poudre ?
8. Le tunnel sous la Manche a une longueur de 39 km. Si le TGV roule à 90 km/h dans le tunnel, combien de temps met-il à le franchir ?

Sujet/2/06/00

1. J'ai acheté 152F un article soldé à 20%. Quel était le prix de cet article avant les soldes ?
2. Une dame a fait un régime pour maigrir. Son poids est passé de 128 kg à 96 kg. Son mari pèse 156 kg et décide de suivre le même régime. Quel poids peut-il espérer peser à la fin du régime si la perte de poids en pourcentage est la même pour les hommes et pour les femmes ?
3. Un TGV traverse deux tunnels à la suite l'un de l'autre. Le premier tunnel fait 1600m de long, le second 1400m. Il met 24 secondes à traverser le premier tunnel. Combien de temps met-il à traverser le second ?
4. Une voiture a consommé 42 litres pour parcourir 640 km d'autoroute. Combien consommera-t-elle pour parcourir 800 km dans les mêmes conditions ?
5. Le graphique ci-contre donne les prix TTC (Toutes Taxes Comprises) en fonction des prix HT (Hors Taxes).
   - Donnez une formule pour calculer le prix TTC à partir du prix HT.
   - Donnez une formule pour calculer le prix HT à partir du prix TTC.
6. Quelle est l'aire du champ dessiné sur le plan ci-contre (échelle : 1mm pour 1m) ?
7. Les disques « vinyle » avaient un diamètre de 30cm.
   - Quelle était l'aire de leur pochette ?
   - Quelle était l'aire du disque ?
8. On veut découper un disque de $1m^2$ dans un carré de papier.
   - Quelle doit être l'aire de ce carré ?
   - Quelles doivent être les dimensions du papier ?
9. La distance de freinage d'une voiture s'obtient à partir de la vitesse en multipliant le chiffre des dizaines par lui-même.
   - Tracez la courbe de freinage.(Prendre 1cm pour 10 km/h pour les vitesses et 1cm pour 10m pour les distances de freinage.)
   - Lisez sur cette courbe la vitesse limite pour s'arrêter en moins de 150m

Sujet/2/11/00

1. Peut-on recouvrir une pièce de 6m sur 5m avec une ramette de 500 feuilles de format A4 ?
2. Tracer un triangle de côtés 10cm, 12cm, 14cm. Calculer son aire.
3. Une moquette est vendue en rouleau de 5m de large. Quelle longueur faut-il couper pour avoir $24m^2$?
4. Que vaut la surface du plus grand carré qu'il est possible de fabriquer avec une feuille de format A4 ? Que vaut la surface du plus grand disque qu'il est possible de fabriquer avec ce carré ?
5. Un dessus de table ronde est emballé dans un carton carré de 1,50m sur 1,50m.
   - Quelle est la longueur maximum du bord de cette table ?
   - Le vendeur prétend qu'on peut manger à 8 à cette table. Cela fait combien d'espace par personne ?
6. Le tour d'un lac fait 12.5cm quand on le mesure sur une carte à l'échelle 1/50000. Quelle est la valeur réelle ?
7. Un appartement a la forme d'un rectangle de 12m sur 9m.
   - A quelle échelle faire son plan pour qu'il tienne sur une feuille de format A4 ?
   - Dessinez ce plan.
8. Une carte routière a l'échelle 1/200000 couvre une zone de 200km sur 50km. Quelles sont les dimensions de cette carte ?
9. Un grain de poussière grossi 600 fois mesure 3cm. Quelle est sa taille réelle ?
10. La maquette d'une voiture à l'échelle 1/25 mesure 15cm de long. Quelle est la longueur réelle de cette voiture ?

Sujet/2/12/00

1. Lors d'une élection triangulaire, un candidat obtient 4851 voix, l'autre 7848 voix, le troisième 6413voix :
   - Exprimez ces résultats en pourcentages.
   - Représentez les par un demi camembert.
2. Un pantalon à 150F est soldé 120F. Quel est le pourcentage de solde ?
3. Je paie 250F une veste soldée à 20%. Quel était son prix avant les soldes ?
4. Un fromage blanc contient 20% de matière grasse.
   - Combien y a-t-il de matière grasse dans un pot de 250g?
   - Une ration doit contenir 10g de matière grasse. Quel doit être son poids ?
5. La population d'un village est passée de 1850 habitants à 1282 habitants.
   - Quelle est la perte de population en pourcentage ?
   - De quel pourcentage la population doit-elle augmenter pour compenser cette perte ?
6. Monsieur (140 Kg) et madame (90Kg) font une cure d'amaigrissement. Monsieur perd 30 Kg et madame 20Kg. Qui a le plus maigri ?
7. La circonférence d'un arbre vaut 314% de son diamètre.
   - Quelle est la circonférence d'un arbre de 50cm de diamètre ?
   - Quel est le diamètre d'un arbre de 3m de circonférence ?
8. La surface d'un disque vaut 78,5% de celle de sa pochette.
   - La pochette a une surface de $1dm^2$; que vaut la surface du disque?
   - Le disque a une surface de $1dm^2$; que vaut la surface de la pochette ?
9. Dans la zone « libre de taxe » de l'aéroport, j'ai acheté pour 485F de produit détaxé. Si j'avais fait mes achats à l'extérieur j'aurais dû payer 33,33% de taxe en plus !
   - Combien aurais-je payé à l'extérieur ?
   - Quelle est l'économie en pourcentage ?
10. L'état décide de prélever 15% de taxe sur le chiffre d'affaire d'un commerçant. De quel pourcentage celui-ci doit-il augmenter ses prix pour compenser cette taxe ?

Sujet/2/01/01

1. D'après le graphique joint.
   - Quel est le prix de 290g de Comté ?
   - Quel poids de Comté peut-on acheter avec 50F ?
   - Un morceau de gruyère de 580g coûte 29F. Tracez le graphique du gruyère.
2. Quelle est la largeur d'un écran de télévision de 33cm de haut (format 4/3) ?
3. Sur une carte de randonnée à l'échelle 1/25000 un trajet mesure 48cm. Combien cela fait-il en réalité ?
4. Un article à 469F est soldé 299F. Quel est le pourcentage de solde ?
5. Un steak de 144g est vendu 12,90F. Quel est le prix d'un steak de 180g ?
6. Une voiture coûte 69900F. La TVA sur les voitures est de 33,33%. Quel est le prix hors taxe de cette voiture?
7. Un candidat a obtenu 579 voix sur 2479 votants dans un bureau de vote et 385 voix sur 1786 votants dans un autre.
   - Dans quel bureau a-t-il fait le meilleur score ?
   - Quel est son score sur l'ensemble des deux bureaux ?
8. Un vélo a des roues de 65 cm de diamètre.
   - De quelle distance avance-t-il à chaque tour de roue ?
   - Combien de tours de roues pour parcourir 1km ?
9. Actuellement 100€ valent environ 84$. Combien valent 100$?
10. Un écran de cinéma de $100m^2$ a une hauteur de 7,50m. Quelle est sa largeur ?