50376
2005
128

Numéro d'ordre : **3664**

Thèse
présentée au

laboratoire Paul Painlevé (UMR 8524 CNRS),
U.F.R. de Mathématiques,
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex France

Propriétés des lois des fonctionnelles définies sur des processus empiriques : conditions d'absolue continuité.

par

Michael Kaim

UNIVERSITE DES SC. ET TECHN. LILLE
BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'université.
Spécialité : Mathématiques.

devant la commission d'examen :

Président du jury : **M. Roussignol** - *Université de Marne la Vallée*
Directeur de Thèse : **Y. Davydov** - *Université de Lille 1*
Rapporteurs : **M. Lifshits** - *Université de Saint Pétersbourg*
Rapporteurs : **T. Simon** - *Université d'Evry - Val d'Essonne*
Examinateurs : **A. Ayache** - *Université de Lille 1*
Examinateurs : **C. Suquet** - *Université de Lille 1*

L'occassion m'est ici offerte d'exprimer ma reconnaissance aux nombreuses personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

En tout premier lieu, je tiens à remercier vivement **Youri DAVYDOV**, qui a dirigé ce travail, pour m'avoir proposé un sujet original et passionant. Sa disponibilité, sa patience et son dynamisme n'ont cessé de renforcer ma motivation. Ses nombreux conseils et explications m'ont permis de progresser tant professionnellement que personellement.

J'adresse également mes plus vifs remerciements aux autres membres du jury :

- à **Michel ROUSSIGNOL** qui a accepté de présider ce jury et dont le polycopié de cours de licence contribua fortement à me faire comprendre la théorie des probabilités,
- à **Mikhail LIFSHITS** et à **Thomas SIMON** qui ont accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. Je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, les questions posées et les commentaires m'ont permis d'achever la rédaction et d'élargir le champ des perspectives,
- à **Antoine AYACHE** pour avoir accepté de faire partie du jury, pour avoir manifesté un grand intérêt pour mon travail,
- à **Charles SUQUET** pour avoir accepté de faire partie du jury, pour avoir manifesté un grand intérêt pour mon travail et pour son aide tout au long de mes années de travail au sein du laboratoire de Probabilités et Statistique.

Je remercie tous les membres du Laboratoire Paul Painlevé pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié pour mener à bien mon travail

Je remercie également l'ensemble du personnel du secrétariat scientifique et de l'imprimerie de l'UFR de Mathématiques pour avoir répondu à mes demandes avec gentillesse et efficacité.

Que soient remerciés mes collègues doctorants pour leur aide durant la préparation de cette thèse, et plus partièrement lors de son écriture. Je tiens à remercier plus particulièrement **Jean Christophe BRETON** pour sa collaboration à la rédaction de l'article [4] et son aide quant à l'usage de LateX.

Professeur de Mathématiques au collège *Marie Curie* de Tourcoing, puis au lycée européen *Montebello* de Lille, je remercie les collègues pour leur soutien et l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse.

Je remercie enfin mes proches et amis pour l'aide et l'attention dont ils m'entourent, plus particulièrement, mes parents sans qui je n'aurais jamais commencé ce travail.

à mon père,
parti trop tôt.

Table des matières

I Transport des processus empiriques **27**

1 Définition des processus empiriques étudiés **28**
1.1 Le processus F-empirique 28
1.2 Le processus F-empirique pondéré 31
1.3 Le processus F-quantile 33
1.4 Le processus F-séquentiel 34

2 Etude métrique et topologique des supports **39**
2.1 Notion de distance sur les espaces de Skorokhod utilisés 39
2.2 Distance sur les $\mathbb{D}_n$ 41
2.3 Critères de convergence sur les $\mathbb{D}_n$ 42
2.4 Les supports $\mathbb{D}_n$ sont fermés 43
2.5 Un voisinage particulier d'une trajectoire sur les $\mathbb{D}_n$ 43

3 Etude d'une famille adaptée de transformations $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ **45**
3.1 Idée directrice 45
3.2 Nouvelle définition de E_n 46
3.3 Définition explicite des familles de transformations 46
3.4 Voisinage et transformation 48
3.5 Transformation, voisinage et extrémum d'une trajectoire 49
3.6 Diagramme fonctionnel 51
3.7 Application à la loi des processus 52
3.8 Vérification de l'hypothèse $G_{n,c}(x) \to x,\ c \to 0$ 53
3.9 Vérification de l'hypothèse $P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n,\ c \to 0$ 53

4 Transport par une fonctionnelle de type intégrale **56**
4.1 Transport de la loi du processus F-empirique 56
4.2 Transport de la loi du processus F-empirique pondéré 64
4.3 Transport de la loi du processus F-quantile 66
4.4 Transport de la loi du processus F-séquentiel 68

5 Transport par une fonctionnelle de type supremum **73**
5.1 Étude du cas particulier $f(x) = \sup x$ 73
5.2 Absolue continuité du couple $(\inf \xi_n, \sup \xi_n)$ 76

5.3 Cas général des fonctionnelles $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Psi(x(t))$ 82

II Etude des processus ponctuels **86**

6 Résultats préliminaires sue les processus ponctuels **87**

7 Absolue continuité du transport par une fonctionnelle homogène **89**

8 Convergence forte vers un processus poissonnien **94**

III Annexes **100**

A Les espaces $\mathbb{D}_n^p$ et $\mathbb{D}_n^q$ sont fermés **101**

B Distance de Skorohod **104**
B.1 Espaces de Skorohod 104
B.2 Critères de convergence sur les $\mathbb{D}_n$ 106

C Convergence en loi **111**

D Inf, sup et voisinage **113**
D.1 Cas du processus F-empirique. 113
D.2 Cas du processus F-empirique pondéré. 115
D.3 Cas du processus F-quantile. 116
D.4 Cas du processus F-séquentiel. 118

E Transport de type intégrale **121**
E.1 Preuve du théorème 4.2.1 121
E.2 Preuve du théorème 4.4.1 : Vérification directe 123

F Transport de type suprémum **126**
F.1 Étude du cas particulier $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$ 126

G Absolue continuité du couple $(\inf \xi_n, \sup \xi_n)$ **131**
G.1 Cas du processus F-emprique pondéré 131
G.2 Cas du processus F-quantile 134
G.3 Cas du processus F-séquentiel 136

Tables des notations

Espaces et d'ensembles :

X représente un espace quelconque.
$\mathcal{B}(X)$ est la tribu de Borélien de X.
$(\Omega, \mathcal{F})$ est espace probabilisable, avec $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.
$\mathbb{R}^p$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$.

$\mathbb{D}([0,1])$ est l'espace de Skorokhod sur $[0,1]$.
$\mathbb{D}([-m,m])$ est l'espace de Skorokhod sur $[-m,m]$.
$\mathbb{D}(\mathbb{R})$ est l'espace de Skorokhod sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ est l'espace de Skorokhod sur $[0,1[\times\mathbb{R}$.
$\mathbb{D}_n^e$ est le support du processus F-empirique.
$\mathbb{D}_n^p$ est le support du processus F-empirique pondéré.
$\mathbb{D}_n^q$ est le support du processus F-quantile.
$\mathbb{D}_n^s$ est le support du processus F-séquentiel.
$\mathbb{D}_n$ représente indifféremment l'un des quatre supports précédents.
E_n est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < \cdots < x_n\}$.

supp(f) est le support de fonction f.
Λ est l'ensemble des fonctions continues, surjectives et strictement croissantes sur un espace X.

A^c est le complémentaire de l'ensemble A.
A^0 est l'intérieur de l'ensemble A.

Υ est l'enveloppe convexe des points $(x_1, \ldots, x_n)$, de diamètre ϕ_Υ.

Lois, mesures ou probabilités :

$\mathcal{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.
λ est la mesure de Lebesgue unidimensionnelle.
λ_2 est la mesure de Lebesgue bidimensionnelle.
δ_t est la mesure de Dirac concentrée en un point t.

$P_n^{(e)}$ est la loi du processus F-empirique.
$P_n^{(p)}$ est le loi du processus F-empirique pondéré.
$P_n^{(q)}$ est la loi du processus F-quantile.

$P_n^{(s)}$ est la loi du processus F-séquentiel.
P_n représente indifféremment l'une des quatre lois précédentes.

Processus :

ξ représente un processus quelconque.
$\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartion F.
F_n est le processus défini par $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[1_{]-\infty;t]}(\xi_i)\right]$.
$\xi_{n,i}^*$ représentent la i^{ieme}-statistique d'ordre d'un processus de type empirique.

$\{\xi_n^{(e)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus F-empirique.
$\{\xi_n^{(p)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus F-empirique pondéré.
$\{\xi_n^{(q)}(t),\ t \in [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus F-quantile.
$\{\xi_n^{(s)}(t),\ u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus F-séquentiel.
ξ_n représente indifféremment l'un de ses quatre processus.
γ_n, ϵ_n et β_n représentent un processus ponctuel.

η_n est un processus empirique uniforme.
W est le processus de Wiener sur un espace X.

Nombres :

$[t]$ est la partie entière de t.
f_+ est le réel $\sup\{t \in \mathbb{R} | t \in supp(f)\}$.
f_- est le réel $\inf\{t \in \mathbb{R} | t \in supp(f)\}$.
$(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ sont les instants des sauts ou les amplitudes des sauts d'une trajectoire typique.
x_i^j est le i^{ieme} instant de saut dans l'intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$ d'une trajectoire typique du processus F-séquentiel.

M_φ est le supremum d'une fonction φ.

Si $\{c_1, \ldots, c_n\}$ sont des réels non nuls, on pose :

- $C_i = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}$.
- $\sqrt{cc'} = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}^2$.

Fonctions :

π est la projection canonique entre $\mathbb{R}^n$ et E_n.
φ et φ_{t_0} sont des fonctions de t-transformation.
F est une fonction de répartition.
f, g sont des fonctions définies selon les sections.
f^{-1} est la fonction réciproque d'une fonction f.
p est la densité de la fonction de répartition F.

G est une transformation de l'espace X.
$G_{n,c}$ est une transformation de l'espace $\mathbb{D}_n$.
$\widetilde{G}_{n,c}$ est une transformation de l'espace E_n.
$\widehat{G}_{n,c}$ est une transformation de l'espace $\mathbb{R}_n$.

ρ et σ sont des fonctions continues strictement croissantes et surjectives de Λ.
Θ est une fonction définie par $\Theta(\overline{x}) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|}$.

I_e est la bijection entre E_n et $\mathbb{D}_n^e$.
I_p est la bijection entre E_n et $\mathbb{D}_n^p$.
I_q est la bijection entre E_n et $\mathbb{D}_n^q$.
I_s est la bijection entre E_n et $\mathbb{D}_n^s$.
I représente indéfferemment l'une de ses quatre bijections.

Distance :

d distance sur $\mathbb{D}([0,1])$.
$d_{[-m,m]}$ distance sur $\mathbb{D}([-m,m])$.
$d_{\mathbb{R}}$ distance sur $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.
$d_{[0,1[\times\mathbb{R}}$ distance sur $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$.
d_∞ distance uniforme sur un espace quelconque.
d_n distance sur $\mathbb{D}_n$.
r distance sur E_n.

■ marque la fin d'une démonstration.

Introduction

L'étude des propriétés fines de l'image obtenue par transport par une fonctionnelle de la loi d'un processus a toujours été un sujet passionnant : $\{\xi(t), t \in T\}$ étant un processus, de loi P, dans un espace X qui contient presque sûrement les trajectoires de ξ et f une fonctionnelle définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on s'intéresse alors aux propriétés de la loi image Pf^{-1}.

L'existence de la densité nous intéressera dans ce texte.

Citons quelques résultats obtenus précédemment :

- **B.S. Tsirel'son**, [20], obtint, en 1975, le premier résultat significatif en étudiant le cas des processus gaussiens et des fonctionnelles de type supremum.

- **C. Borel** et **A. Ehrhard**, [3], montrèrent, en 1976, que de tels résultats étaient dus à la convexité des mesures gaussiennes.

- **P. Mallavin** développa, en 1978, un puissant calcul stochastique, [13] [19], qui permet de traiter profondément le cas des fonctionnelles lisses et d'obtenir des résultats sur l'existence de densités infiniment dérivables.

- **Yu. Davydov**, [6], développa, en 1978, la méthode de stratification qui permit de prouver l'absolue continuité de loi image obtenue pour un nombre certain de fonctionnelles.

- **M.A. Lifschits**, [12], en 1981-84, appliqua cette méthode pour prouver l'existence de densité bornée pour Pf^{-1}.

- **N.V. Smorodina**, [17], [18], approcha, plus récemment, ce problème grâce aux opérateurs différentiels généralisés.

- La méthode de stratification est depuis très pratiquée soit pour étudier des lois des fonctionnelles, soit pour démontrer des théorèmes-limites locaux pour une suite de mesures $\{P_n f^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$, $P_n \Rightarrow P$, [11].

Il existe donc des résultats liés à certaines classes de processus ξ, et plus particulièrement gaussiens. Un résultat, confirmant ceci, obtenu pour les processus gaussiens, de loi P, à trajectoire dans un espace X, est le suivant :

Théorème 0.0.1 *([11], page 52)*
Soit B un borélien de X Soit f une fonctionnelle mesurable de X à valeurs réelles. Supposons que pour tout $x \in B$, il existe une direction admissible[1] *ℓ et un voisinage V_x de x dans X tels que :*

1. On dit qu'une direction est admissible quand $PG_1^{l\,-1}$ est absolument continue par rapport à P où

∘ $y \longmapsto D_l f(y)$ *est continue sur* $V_x \cap B$,
∘ $D_l f(x) \neq 0$,
où on note D_l *l'opérateur de dérivation selon la direction* l.
Alors, $P_B f^{-1} \ll \lambda$.
De plus, si $P(B) = 1$, *alors* Pf^{-1} *est absolument continue par rappor à* λ.

La propriété de l'absolue continuité semble liée aux propriétés des fonctionnelles. L'une des principales est le fait d'être suffisamment lisse, et d'avoir une dérivée non nulle presque partout.
Par contre, le problème reste ouvert dans bien d'autres domaines où il peut devenir plus délicat quand bien même on considère des fonctionnelles ayant de très bonnes qualités de régularité, on peut obtenir une loi image Pf^{-1} singulière : considérons, par exemple, la fonctionnelle d'évaluation en un point : $f(x) = x(t_0)$, pour $t_0 \in]0, 1[$. Clairement, f est linéaire, donc très lisse.
Un simple calcul permet de calculer $D_h f(x)$, pour une direction h donnée,et l'on a $D_h f(x) = h(t_0)$.
Etudions le transport d'un processus empirique uniforme $\xi_n^{(e)}$, de fonction de répartition $F = 1_{[0,1]}$, de loi $P_n^{(e)}$ qui est concentrée[2] sur l'ensemble des fonctions du type $x(t) = -\sqrt{n}t + \frac{i}{\sqrt{n}}$, $t \in \mathbb{R}$. En choisissant convenablement t_0, on peut supposer que $P_n\{h|h(t_0) = 0\} = 0$.
Ainsi, on a $D_h f(x) \neq 0\, p.p.$. La loi $P_n f^{-1}$ est pourtant singulière, étant concentrée sur l'ensemble fini des points $\{-\sqrt{n}t_0 + \frac{i}{\sqrt{n}}\}_{i \in \{1,\dots n\}}$.

Le but de ce travail est d'étudier plus particulièrement le transport de la loi de processus empiriques pour les deux types de processus qui existent essentiellement, les diverses définitions, bien connues, seront données ultérieurement :

- les **processus empiriques** "classiques" (étudiés dans la partie I) pour lesquels on étudiera le transport par des fonctionnelles de type intégral ou suprémum,
- les **processus empiriques ponctuels** (vus dans la partie II) pour lesquels on étudiera le transport par des fonctionnelles de homogènes ou localement dépendantes.

Un autre intérêt à répondre favorablement à la question de l'absolue continuité est de "créer" un terrain favorable à la recherche de convergence en variation pour les lois $P_n f^{-1}$, c'est à dire à l'obtention de théorèmes limites locaux. Une telle convergence est en effet équivalente à la convergence, dans $\mathcal{L}^1$, des densités des lois.

Ces convergences renforcent celles des lois des processus vers leur processus limite, dans le sens où l'on peut obtenir, par exemple, un théorème du type Donsker-Prokhorov relatif à la convergence du processus empirique vers le pont brownien.

$G_c^l(x) = x + cl$. Pour les mesures gaussiennes, la famille des directions admissibles est très large ([11], page 38)

2. voir section 1.1.1

D'un point de vue technique, on constate facilement, grâce à l'écriture même de chaque processus, que chaque ξ_n se construit à partir de l'échantillon $\xi_1, ..., \xi_n$. Concrètement, on a $f(\xi_n) = g(\xi_1, ..., \xi_n)$ pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Etudier $P_n f^{-1}$ revient alors à étudier $\mathcal{L}_{\xi_1,...\xi_n} g^{-1}$. Cependant, g n'a pas forcément une écriture simple, ce qui ne faciletera pas l'étude. Par exemple, même si f est linéaire rien ne prouve que g le soit.
Il est possible de choisir, pour chaque ξ_i, une fonction de répartition F_i (au lieu de F), admettant une densité p_i. L'indépendance des $\xi_1, \ldots, \xi_n$ assurera le même type de résultats. Toutefois, on conservera dans la suite la même fonction de répartition F pour ne pas surcharger les différentes notations ou démonstrations. En effet, en notant Q la loi de densité $p_1 \times \cdots \times p_n$ et $\mathcal{P}$ la loi de densité $p^{\otimes n}$ normale standart et $H(x_1, \ldots, x_n) = f[\xi_n(x_1, \ldots, x_n)]$, telle que l'on ait $\mathcal{P}\ H^{-1} \ll \lambda$, on a, pour A un ensemble tel que $\lambda(A) = 0$, $\mathcal{P}\ H^{-1}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}\ (H(A)) = 0$.
Comme $Q << \mathcal{P}$, on a $QH^{-1} = 0$, ceci prouve que $QH^{-1} \ll \lambda$.

On souhaite étudier la loi du transport de ξ_i par une fonctionnelle, ce qui se présente sous la forme d'une autre fonctionnelle mais, cette fois, du vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ainsi, on peut supposer, sans perdre la sens général des résultats, que la densité p de F est strictement positive $p.p.$ En effet, la densité du vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, de loi $F^{\otimes n}$, est $(x_1, \ldots, _n) \mapsto \prod_{i=1}^n p(x_i)$. Cette donnée permet de construire un vecteur $(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$, de loi $F^{(k)}$, construit à partir de la densité $\prod_{i=1}^n p^{(k)}(x_i)$ vérifiant :

(i) $p^{(k)} > 0$ partout,

(ii) $p^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{L}^1} p$.

Cette construction est possible, par exemple, par convolution de p avec une densité gaussienne centrée, de faible espérance.
Ainsi, la convergence (ii) implique la convergence en variation des lois :

$$\mathcal{L}^{(k)} \xrightarrow{var} \mathcal{L}.$$

Prouver l'existence d'une densité de la loi $\mathcal{L}^{(k)}$ impliquera automatiquement l'existence de la densité de la loi de $\mathcal{L}$.

Dans la **première partie**, on considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de fonction de répartition F, admettant une densité notée p. Nous associons à cette suite les familles suivantes de processus :

- **F-empiriques** : $\{\xi_n^{(e)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(e)}$, donnés par (1.1.1) :

$$\xi_n^{(e)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{1}_{(-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

- **F-empiriques pondérés** : $\{\xi_n^{(p)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(p)}$, définis par (1.2.1) :

$$\xi_n^{(p)}(t) = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} \left[\mathbf{1}_{(-\infty;\, t]}(\xi_i^*) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

  où les $c_{n,i}$ sont non nuls et en posant, traditionnellement, $cc' = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}^2$.

- **F-quantiles** : $\{\xi_n^{(q)}(t),\ t \in [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(q)}$, donnés par (1.3.1) :

$$\xi_n^{(q)}(t) = \sqrt{n}\left[F_n^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right], \quad t \in [0,1]$$

  en ayant défini par (1.3.2) :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i)\right].$$

- **F-séquentiels** : $\{\xi_n^{(s)}(u,t),\ u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(s)}$, donnés par (1.4.1) :

$$\xi_n^{(s)}(u,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nu]} \left[\mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad u \in [0,1[, t \in \mathbb{R},$$

  où $[nu]$ est la partie entière de nu.

Remarque : Pour parler indifféremment d'un de ces quatre processus, on le notera ξ_n.

Ainsi, on note que, par définition, les trajectoires $\{\xi_n(\omega,t), t \in \mathbb{R}\}$ sont *cadlag* (continues à droite et avec des limites à gauche). Elles possèdent un nombre de sauts fixés, d'amplitudes connues. Ces trajectoires appartiennent à un certain espace de Skorokhod, à expliciter selon le processus.

Nous allons, par la suite, trouver des conditions aussi bien sur la fonctionnelle que sur la fonction de répartition F pour assurer cette absolue continuité. Toutefois, nous ne répondrons à cette question que pour des fonctionnelles des types suivants :

- **intégrale :**
  - *sur* $X = \mathbb{R}$ *ou* $[0,1]$ définie par (4.1.1) :

$$x \longmapsto \int_X h(x(t))\, q(t)\, dt,$$

  - *sur* $[0,1[\times\mathbb{R}$ définie par (4.4.1) :

$$x \longmapsto \int_{[0,1[\times\mathbb{R}} h(x(u,t))\, q(u,t)\, dudt,$$

- **supremum :**
  - *sur* $\mathbb{R}$ *ou* $[0,1]$ définie par (5.0.1) :

$$x \longmapsto \sup_t \Psi(x(t)),$$

  - *sur* $[0,1[\times\mathbb{R}$ définie par (5.0.2) :

$$x \longmapsto \sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} \Psi(x(u,t)),$$

où h, q et Ψ sont parfaitement définies pour donner un sens à ces fonctionnelles.

On étudie les conditions suffisantes pour que Pf^{-1} soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Plus précisément, le propos de ce travail est donc de définir dans quelles mesures la loi de la variable aléatoire $f(\xi_n)$ est, à n fixé, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Dans la **deuxième partie**, on considère des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, de loi F. On suppose que F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m et on notera q la densité de F. On étudiera lois des fonctionnelles $f(\epsilon_n)$ ou $f(\beta_n)$, définies sur les réalisations des processus *ponctuels* ϵ_n et β_n, que l'on a associés aux variables aléatoires $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- les **processus empiriques** construit par (6.0.1) :

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- les **processus empiriques dilatés (ou binomiaux)** construit par (6.0.2) :

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation telles que $b_n \to \infty$ et $\delta_{\{a\}}$ représente la mesure de *Dirac* au point a, sur $\mathbb{R}^m$.

Avant tout, sans aucune condition supplémenataire, on pose la question de l'absolue continuité de ces lois et on l'obtient dans le chapitre 7, théorème 7.0.2, pour les fonctionnelles **homogènes** c'est à dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(cx) = c^p f(x)$. Cette classe comporte entre autres les fonctionnelles caractérisant diverses propriétés géométriques d'une configuration de n points $\varkappa_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ ou de ses différentes enveloppes convexes, notée $\mathcal{C}_l(\varkappa)$.

Toutefois, il est d'usage d'imposer une condition supplémentaire : on suppose que F vérifie la condition suivante, dite de **variation régulière** :

Condition (VR)

Il existe une mesure finie σ sur $\mathcal{S}^{d-1}$ et il existe une suite $\{b_n\}$ croissante vers l'infini telles que pour chaque ensemble $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}^{d-1}}$ tel que $\sigma(\partial B) = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{P}\{\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \in B \ , \ \|\xi_1\| > tb_n\} \ = \ \sigma(B)\mu([t,\infty)), \tag{0.0.1}$$

où μ est une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$, de densité $\frac{d\mu}{d\lambda}(r) = \alpha r^{-1-\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et ∂B est la frontière de B.

Remarques :

(i) Pour $\alpha \in (0,2)$, la condition **(VR)** est celle de l'appartenance de F au domaine d'attraction d'une loi α-stable dont la mesure spectrale serait σ.

(ii) La condition **(VR)** implique que $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$ où h est une fonction à variation *lente*.

Il est bien connu, ([16] proposition 3.21, page 154), que sous la condition ((**VR**)), les processus β_n convergent faiblement vers un processus ponctuel *Poissonnien* limite, noté Π_α (voir 8.0.3) :

Lemme 0.0.1

$$\beta_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\alpha \tag{0.0.2}$$

où Π_α est un processus Poissonien de mesure de contrôle[3] $\sigma \times \mu$.

Cette convergence explique notre intérêt à la question de la convergence forte, c'est à dire en variation totale des lois de $f(\beta_n)$ vers celle de $f(\Pi_\alpha)$, pour une classe de fonctionnelles f définies précisément.

3. On rappelle qu'une mesure de contrôle m d'un processus poissonien ξ est telle que pour tout ensemble A, $E\{\xi(A)\} = m(A)$

Effectivement, supposons que F admet une densité, notée p_n. Si la convergence (6.0.4) suivante était vérifiée :

$$\mathcal{P}_{f(\beta_n)} \stackrel{var}{\to} \mathcal{P}_{f(\Pi_\alpha)}, \quad n \to \infty$$

alors, la loi limite aurait aussi une densité, notée p et, de (6.0.4) découlerait la convergence des densités

$$p_n \stackrel{\mathcal{L}^1}{\longrightarrow} p, \quad n \to \infty.$$

Concrétement, on obtiendrait un théorème locale limite pour les fonctionnelles $f(\beta_n)$.

Avant toute chose, il est indispensable de rappeler la définition de quelques convergences.

Convergence faible

Une suite de mesures $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ définies sur un espace métrique $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_X)$ converge faiblement vers une mesure P si pour toute fonction bornée f définie sur $\mathcal{X}$ on a

$$\int_X f \, dP_n \longrightarrow \int_X f \, dP. \tag{0.0.3}$$

On note $P_n \Longrightarrow P$. Cette notion a été étudiée dans de nombreux ouvrages.

Convergence en Variation

Soit μ une mesure signée sur $\mathcal{B}_X$. On définie une mesure $|\mu|$ par

$$|\mu|(A) = \sup_{\{A_n\}} \sum_n |\mu(A_n)|, \tag{0.0.4}$$

où $\{A_n\}$ est une partition finie de l'ensemble A de $\mathcal{X}$.

On appelle **variation totale de** μ la valeur $||\mu|| = |\mu|(\mathcal{X})$.

On appelle **convergence en variation** la convergence dans l'espace de Banach des mesures sur $\mathcal{X}$, muni de cette mesure. Cela signifie que la différence converge vers 0. On la note $\stackrel{var}{\longrightarrow}$.

Remarques :

(i) Si la mesure μ admet une densité h par rapport à une mesure ν, alors

$$||\mu|| = \int_X |h| d\nu$$

.

(ii) Plus de détails sont donnés dans le livre "Local Properties of Distributions of Stochastic Functionals" de *Davydov, Lifshits, Smorodina* [11].

(iii) La convergence en variation est une notion très forte.

On étudie donc ce problème dans le chapitre 8 où l'on démontre (6.0.4) sous la **condition de variation régulière forte** sur F, (voir (**(FVR)**, (8.0.7)), condition qui implique (**VR**) :

Condition (FVR)

Pour la mesure μ_n définie par $\mu_n(B) = nF(b_nB), \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m\setminus\{0\}}$, la convergence suivante a lieu, $\forall r > 0$,

$$\mu_{n|_{[r,\infty)}} \xrightarrow{var} m_{\alpha|_{[r,\infty)}}$$

où m_α est donnée par (8.0.3) et $\theta_{|A}$ dénote la restriction d'une loi θ à un ensemble A.

Sous la **condition (VR)**, renforcée de $F \ll \lambda_d$, il existe un résultat "plus fort" :

Lemme 0.0.2 *[15] La condition (8.0.7) est équivalente à la convergence forte des lois des restrictions des processus β_n : pour chaque $D \subset \mathcal{B}(0,r)^c$:*

$$\mathcal{L}_{\beta_{n|D}} \overset{var}{\to} \mathcal{L}_{\Pi_{\alpha|D}}. \tag{0.0.5}$$

Toutefois, on se limitera à des fonctionnelles $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la condition de **locale dépendance (LD)** suivante :

Condition (LD)

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un ensemble ouvert $A \subset \mathcal{K}$ tels que, en posant $B = \Upsilon_\delta^{-1}(A)$, on a :

$$P(B) > 1 - \varepsilon.$$

Alors,

$$\forall \varkappa \in B, f(\varkappa) = f(\Upsilon_\delta(\varkappa)).$$

Dans cette condition, apparait une projection Υ_δ, celle-ci se construit ainsi :

Définition 0.0.1 *Considérons un ensemble $A \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. On peut alors définir la projection $\Upsilon_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ par :*

$$\Upsilon_A(\varkappa) = \varkappa \cap A.$$

Si $A = \mathcal{D}_\delta = \{x \mid |x| > \delta\}$, on posera simplement $\Upsilon_\delta(\varkappa) = \Upsilon_{\mathcal{D}_\delta} = \varkappa \cap \mathcal{D}_\delta$.

Par la suite, on notera $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \lambda^m)$.

Toutes les démonstrations seront essentiellement basées sur un des résultats obtenus grâce à la méthode dite de "superstructure", [11], paragraphe 5, pages 23 à 29, utilisée quand on veut établir l'absolue continuité de distributions Pf^{-1} :

Théorème 0.0.2 *(th. 5.2, [11]) Soient (X, d) un espace métrique, séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Supposons que pour P-presque chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x de x et une famille $\{G_c,\ c \in [0, \varepsilon_x]\}$ de transformations de X tels que :*

1. $PG_c^{-1} \xrightarrow[c\to 0]{var} P$;
2. $G_c(x) \xrightarrow[c\to 0]{} x$ *en probabilité* P ;
3. *Pour* P*-presque chaque* y *de* V_x, *il existe* $\varepsilon_y > 0$ *tel qu'avec* $\phi_y(c) = f(G_c(y))$

$$\textit{presque chaque } c \in [0, \varepsilon_y], \quad \phi_y'(c) \textit{ existe et est non nulle.}$$

Alors, $Pf^{-1} \ll \lambda$.

On remarque que la clef de ce théorème est l'existence d'une famille $\{G_c, c \in \mathbb{R}\}$ de transformations de l'espace X possédant des propriétés spéciales. Dans la première partie, après avoir étudié les espaces de Skorohod correspondant à chaque processus, on construira une famille de transformations adaptées au processus ξ_n, pour conclure sur les résultats obtenus tant pour les fonctionnelles de type "intégrale" que pour celles de type "suprémum". Dans la deuxième partie, on étudiera la famille de transformations adaptées aux processus ponctuels pour enchaîner par l'étude du transport par des fonctionnelles de type géométrique.

On passe à présent à une description rapide des différentes sections :

Première Partie : processus empiriques.

Chapitre 1, on étudie les différents processus empiriques :
- Les processus F**-empiriques** $\{\xi_n^{(e)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont donnés par (1.1.1) :

$$\xi_n^{(e)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{1}_{(-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

  dont le support est l'espace $\mathbb{D}_n^e$, voir (1.1.4), l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ pour lesquelles qu'il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ tel que $\forall t \in (x_i, x_{i+1}]$, on a

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}},$$

  en supposant convenu que $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$.
- Les processus F**-empiriques pondérés** $\{\xi_n^{(p)}(t), t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par (1.2.1) :

$$\xi_n^{(p)}(t) = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} \left[\mathbf{1}_{(-\infty;\, t]}\left(\xi_{n,i}^*\right) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

  où les $c_{n,i}$ sont non nuls et où, selon la littéature habituelle, on a noté $cc' = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}^2$.
  On remarque que la pondération permet ici de modifier l'amplitude des sauts des

trajectoires, pour qu'elles ne soient plus constantes. Le support est l'espace $\mathbb{D}_n^p$, voir (1.2.2), l'ensemble des fonctions $\{x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, défini par la formule (1.1.3), tel que pour $t \in (x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$x(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i,$$

en posant $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, et $\mathcal{C}_i = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}$.

- **F-quantiles** : $\{\xi_n^{(q)}(t),\ t \in [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(q)}$, donnés par (1.3.1) :

$$\xi_n^{(q)}(t) = \sqrt{n}\left[F_n^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right], \quad t \in [0,1]$$

en ayant défini par (1.3.2) :

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i)\right].$$

L'étude des trajectoires $t \longmapsto \xi_n^{(q)}(\omega, t)$, $t \in [0,1]\}$ montre qu'elles sont *cadlag* et qu'elles possédent précisément $n-1$ sauts aux points d'abscisses $\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.

Ces trajectoires appartiennent à l'espace de Skorohod $D[a,b]$, $\forall 0 < a < b < 1$.

En notant $(\xi_{n,i}^*)_{i=1,\ldots,n}$ les statistiques d'ordre associés à l'échantillon $\xi_1, \ldots, \xi_n$, on remarque que l'amplitude du saut du processus F-quantile, au point d'abscisse $\frac{i}{n}$ est exactement :
On a exactement, selon la formule (1.3.3) :

$$\sqrt{n}\{\xi_{n,i+1}^* - \xi_{n,i}^*\}.$$

- **F-séquentiels** : $\{\xi_n^{(s)}(u,t),\ u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, de loi $P_n^{(s)}$, donnés par (1.4.1) :

$$\xi_n^{(s)}(u,t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nu]}\left[\mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad u \in [0,1[, t \in \mathbb{R},$$

où $[nu]$ est la partie entière de nu.

Le support de ce processus sera restreint à l'espace $\mathbb{D}_n^s$, voir (1.4.4), l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ telles qu'il existe un $n-1$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\forall (u,t) \in [0,1[\times\mathbb{R}$, $\exists! j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists! i \in \{1, \ldots, j\}$ vérifiant :
$\triangleright$ $\frac{j-1}{n} \leq u < \frac{j}{n}$,

$\triangleright$ $x_i^j \leq t < x_{i+1}^j$ avec $x_0^j = 0$ et $x_{j+1}^j = 1$,
Alors, on a

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}.$$

Chapitre 2, on étudie les métriques et la topologie des espaces de Skorohod adaptés à chacun de ses processus.

Chapitre 3, on définit puis on étudie ici la famille de transformations de l'espace de Skorohod nécessaire à l'utilisation du théorème 0.0.2. Cette construction s'effectue à partir d'une fonction de t_0-transformation ϕ vérifiant les conditions, voir section 3.1.1 :

(i) $\varphi_{t_0}(t_0) = 1$,

(ii) φ_{t_0} est absolument continue et à support compact,

(iii) $\varphi'_{t_0} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall a \neq 0, \lambda\{t \mid \varphi'_{t_0}(t) = a\} = 0$.

- Soit $y \in \mathbb{D}_n^e$ une trajectoire typique d'un processus F-**empirique** $\xi_n^{(e)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
  Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par (3.3.2) :

$$G_{n,c}y(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad \text{si } t \in [\tilde{y}_{c,i}; \tilde{y}_{c,i+1}[.$$

  où

$$\tilde{y}_{c,i} = y_i + c\varphi(y_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

.

- Soit $y \in \mathbb{D}_n^p$ une trajectoire typique d'un processus F-**empirique pondéré** $\xi_n^{(p)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
  Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par (3.3.3) :

$$G_{n,c}y(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i \quad \text{si } t \in [\tilde{y}_{c,i}; \tilde{y}_{c,i+1}[.$$

  où

$$\tilde{y}_{c,i} = y_i + c\varphi(y_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

.

- Soit $y \in \mathbb{D}_n^q$ une trajectoire typique d'un processus F-**quantile** $\xi_n^{(q)}$, associée à la famille de ses amplitudes de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
  Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par (3.3.4) :

$$G_{n,c}y(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + x_i\sqrt{n} + c\sqrt{n}\varphi(t) \quad \text{si } t \in [\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}[.$$

- Soit $y \in \mathbb{D}_n^s$ une trajectoire typique d'un processus F-**séquentiel** $\xi_n^{(s)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
  Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par (3.3.5) :

$$G_{n,c}y(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad \text{si } u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}[\ t \in [\tilde{y}_{c,i}^j; \tilde{y}_{c,i+1}^j[,$$

  où

$$\tilde{y}_{c,i}^j = y_i^j + c\varphi(y_i^j) \quad \forall i \in \{1, \ldots, j\}.$$

Puis, dans cette section, on s'interressera à la vérification des deux premières hypothèses du théorème 0.0.2 :

$$G_{n,c}(x) \longrightarrow x, \ c \to 0,$$

et

$$P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n, \ c \to 0.$$

Chapitre 4, on se consacre au transport de la loi d'un processus empirique par une fonctionnelle de type intégral. On montrera des résultats du type suivant :

Théorème 4.1.1
Soit $\{\xi_n^{(e)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus empirique, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, associés à une fonction de répartition F de densité p. Notons $P_n^{(e)} = \mathbb{P}\xi_n^{(e)-1}$ la loi de $\xi_n^{(e)}$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Soient h et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

1. *h est absolument continue i.e. $\forall s \in \mathbb{R}$, $h(s) = h(0) + \int_0^s h'(t)\, dt$.*
2. *L'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

   (2.1) *h' est localement finie et $q \in L^1(\mathbb{R})$.*

   (2.2) *- q est bornée,*
   - h est localement bornée,
   - il existe $p > 0$ tel que :

   ♦ *au voisinage de 0, $|h(t)| \leq C\,|t|^p$,*

   ♦ *$\exists \delta > 0$ tel que $E\left|\xi_n^{(e)}\right|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$.*

Soit f la fonctionnelle de type intégrale définie parfaitement sur $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ par la formule (4.1.1) :

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x(t))q(t)\, dt.$$

On suppose que :

3. *$h' \neq 0$ presque partout.*
4. *$\lambda\{x \in \mathbb{R} |\, q(x)p(x) \neq 0\} \neq 0$.*
5. *$\lambda\{s \in \mathbb{R} |\, h(s + \frac{1}{\sqrt{n}}) = h(s)\} = 0$.*

Alors, $P_n^{(e)} f^{-1} \ll \lambda$.

Les hypothèses demandées dans ce théorème sont très simples à vérifier dans le cas de fonctions h et q concrètes, comme on peut le remarquer en étudiant les exemples de la section 4.1.3.

Chapitre 5, on discute du transport de la loi des processus par une fonctionelle de type supremum. Dans ce chapitre, pour une fonctionnelle de type suprémum et un

processus F-empirique, on obtient le résulat suivant :

Théorème 5.3.1
Soit $f : \mathbb{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Psi(x(t))$ où Ψ est une fonction convexe vérifiant $\Psi' \neq 0$ p.p. Alors, la loi $P_n f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(e)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Deuxième Partie : processus empiriques ponctuels.

Chapitre 7, on étudie dans ce chapitre les processus empiriques ponctuels : pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, de loi F. On suppose que F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m de densité q, on associe à ces variables aléatoires deux processus *ponctuels* :

– les **processus empiriques**, donnés par (6.0.1) :

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

– les **processus empiriques dilatés (ou binomiaux)**, par (6.0.2) :

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation telles que $b_n \longrightarrow \infty$ et $\delta_{\{a\}}$ représente la mesure de *Dirac* au point a, sur $\mathbb{R}^m$.

Chapitre 8, l'absolue continuité de la loi d'un processus ponctuel par une fonctionnelle de type homogène sera évoquée et l'on montrera des résultats du type :

Théorème 7.0.2 *Soit un processus empirique défini sur $\mathbb{R}^m$, par (7.0.1) :*

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}.$$

de loi P_n sur $\mathcal{K}_n$. Soit $f : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré $p \neq 0$ telle que $f(x) \neq 0$, P-p.p.

Alors, $P_n f^{-1} \ll \lambda$ i.e. la loi $P_n f^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Chapitre 9, on étudie la convergence forte des lois des fonctionnelles étudiées. Puis on étudiera les différentes formes de généralisation possibles. On montrera des résultats

comme celui-ci :

Théorème 8.0.4 *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, de loi F, de densité q par rapport à la mesure de Lebesgue λ_m. On associe à ces variables aléatoires une suite de processus empiriques dilatés définis par (6.0.2)*

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}}$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation.
On note P_n la loi du processus β_n sur $\mathcal{K}$ et on suppose que F vérifie la condition **(FVR)**.
Soit Π_α le processus poissonien limite, de loi P, de mesure de contrôle $\sigma \times \mu$. Soit f une fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ vérifiant la condition de locale dépendance **(LD)**.
Alors,

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P f^{-1}, \qquad n \to \infty.$$

Les **différentes annexes** sont consacrées aux différentes démonstrations qui n'ont pas été données dans le texte afin de permettre une lecture plus agréable.

Première partie

Transport des processus empiriques

Chapitre 1

Définition des processus empiriques étudiés

A présent, revenons sur les définitions des divers processus. Nous soulignons que nous travaillons à n fixé. Cette étude sommaire permettra d'envisager chaque espace de Skorohod adapté ainsi que sa topologie.

Soit $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose, dans la suite, que la fonction de répartition F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et on note p sa densité.

Pour toute la suite, on notera :

$$F_+ = \sup\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \alpha \in supp(F)\}, \tag{1.0.1}$$

$$F_- = \inf\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \alpha \in supp(F)\}, \tag{1.0.2}$$

où l'on note $S = suppF$ le support de la loi F.

1.1 Le processus F-empirique

Le processus F-empirique $\{\xi_n^{(e)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se définit par :

$$\xi_n^{(e)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{1}_{(-\infty;\, t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

L'analyse de la trajectoire $t \longmapsto \xi_n^{(e)}(\omega, t)$, ω fixé, $t \in \mathbb{R}$ montre qu'elle est *cadlag* , possédant exactement n sauts de même amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, les trajectoires appartiennent à l'espace de Skorohod $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ des fonctions *cadlag* sur $\mathbb{R}$; On note $P_n^{(e)}$ la loi de $\xi_n^{(e)}$, dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, pour chaque trajectoire, nous considérons $(\xi_{n,i}^*)_{i=1,\dots,n}$ les instants des sauts réordonnés de manière croissante, du processus empirique appelés statistiques d'ordre. On a, *p.s.*

$$\xi_{n,1}^* < \cdots < \xi_{n,n}^*.$$

Les inégalités strictes découlent de la continuité absolue de la loi commune des variables aléatoires $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Remarque : Effet d'un changement de temps
Le processus empirique uniforme (associé à une suite de variables *i.i.d. uniformes) joue un rôle particulier. On s'y ramène souvent, dans le cas où F est strictement croissante, en faisant le changement de variable $s = F(t)$ qui transforme un F-processus empirique (associé à une fonction de répartition F) en un processus empirique uniforme. En effet, en posant $t = F^{-1}(s)$ dans la définition (1.1.1) d'un F-processus, on a*

$$\xi_n^{(e)}(F^{-1}(s)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty;\, F^{-1}(s)]}(\xi_i) - s\right].$$

Or, $\forall 1 \leq i \leq n$, $\xi_i \leq F^{-1}(s)$ équivaut à $F(\xi_i) \leq s$. Comme $\eta_i := F(\xi_i)$ est une suite de variables indépendantes uniformes, on obtient le processus empirique uniforme :

$$\eta_n := \xi_n^{(e)}(F^{-1}(s)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty;\, s]}(\eta_i) - s\right]. \tag{1.1.2}$$

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 1.1.1 *Soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition F, de statistiques d'ordre $\xi_{n,1}^*, \dots, \xi_{n,n}^*$.*
Alors, $\eta_1 = F(\xi_{n,1}), \dots, \eta_n = F(\xi_{n,n})$ sont des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$, de statistiques d'ordre $\eta_{n,i}^* = F(\xi_{n,i}^*)$.

- Le changement de temps associé n'est pas toujours nécessaire : il dépend des fonctionnelles étudiées et de la situation envisagée.
- Ce changement de temps permet de se ramener à l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}[0,1]$ mieux connu que $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.1 : Ensembles E_n et $\mathbb{D}_n^e$
Pour n fixé, notons

$$E_n = \left\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; z_1 < \cdots < z_n\right\}. \tag{1.1.3}$$

De plus, on note par $\mathbb{D}_n^e$ l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ tel que $\forall t \in (x_i, x_{i+1}]$, on a

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}, \tag{1.1.4}$$

en supposant convenu que $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$.

Lemme 1.1.2 *L'ensemble $\mathbb{D}_n^e$ porte le support de la loi du processus empirique ξ_n.*

Démonstration : Pour $i \neq j$, on a $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j\} = 0$, donc $\mathbb{P}$-presque sûrement $\xi_n^{(e)} \in \mathbb{D}_n^e$.

■

Lemme 1.1.3 : Extrema d'une trajectoire typique
Pour tout $n \geq 2$ fixé, $P_n^{(e)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$ atteint son maximum et son infimum[1] *en deux points uniques distincts de la famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des sauts de x.*

Démonstration : Cette démonstration s'effectue en trois points :
(i) $\forall i \in \{1 \ldots n\}$, $\xi_{n,i}^* \in S^o = (suppF)^o$
(ii) $\forall i \in \{1 \ldots n\}, P\{x(\xi_{n,i}^*) > x(t) > x(\xi_{n,i+1}^*),\ \forall t \in (\xi_{n,i}^*, \xi_{n,i+1}^*)\} = 1$
(iii) l'unicité des indices

en notant $S^o = (suppF)^o$ l'intérieur du support de F.

Clairement, $\forall i$, $\xi_{n,i}^* \in S$ *p.s.* et $S^c = \bigcup_k (a_k, b_k)$, union dénombrable d'ouverts disjoints. Ainsi, par l'absolue continuité de F, $P\{\xi_{n,i}^* = a_k\} = P\{\xi_{n,i}^* = b_k\} = 0$. Ceci démontre que $\xi_{n,i}^* \in S^o$ *ps*. Ceci termine la vérification de **(i)**.

Pour **(ii)**, il suffit de montrer que $P\{F(\xi_{n,i}^*) > F(t)\} = 1$, $\forall t \in [\xi_{n,i}^*, \xi_{n,i+1}^*)$. Par analogie, on aura $P\{F(t) > \xi_{n,i+1}^*\} = 1$. Comme F est une fonction de répartition, l'événement complémentaire est $\{\xi_{n,i}^* = F(t)\}$. Comme F est croissante, $F(\xi_{n,i}^*) = F(t)$ signifie qu'il existe un indice k tel que $\xi_{n,i}^* \in (a_k, b_k)$ et $t \in (a_k, b_k)$.
Ainsi, selon (i), on a $\xi_{n,i}^* \in \{a_k, b_k\}$, ce qui est impossible.

Ceci permet de conclure que sur $[\xi_{n,i}^* \xi_{n,i+1}^*)$, le maximum de x est atteint pour $\xi_{n,i}^*$ et l'infimum l'est pour $\xi_{n,i+1}^*$.

Vérifions **(iii)**. Supposons qu'il existe deux indices i et j assurant le maximum (la démonstration pour l'infimum est équivalente). On a trivialement

$$P\{-\sqrt{n}F(\xi_{n,i}^*) + \frac{i}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}F(\xi_{n,j}^*) + \frac{j}{\sqrt{n}}\} = P\{F(\xi_{n,i}^*) - F(\xi_{n,j}^*) = \frac{i-j}{n}\}.$$

1. Par abus de language, on dira que x atteint son infimum, même si rigoureusement il faut comprendre que l'on parle d'une limite car elle n'est pas continue à gauche.

Le lemme 1.1.1 permettra de conclure que l'on a

$$P\{-\sqrt{n}F(\xi^*_{n,i}) + \frac{i}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}F(\xi^*_{n,j}) + \frac{j}{\sqrt{n}}\} = P\{\eta^*_{n,i} - \eta^*_{n,j} = \frac{i-j}{n}\}$$

Ceci est bien évidemment nul. En conclusion, d'après (1.1.4), pour $x \in \mathbb{D}^e_n$:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \min_{1\leq i\leq n}(-\sqrt{n}F(x_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}), \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \max_{1\leq i\leq n}(-\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}).$$

■

Lemme 1.1.4 : Construction par ses instants de sauts
Soit $I_e : E_n \longrightarrow \mathbb{D}^e_n$ qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, associe la fonction $x = I_e(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}^e_n$ définie par (1.1.4) :

$$\forall t \in (x_i, x_{i+1}]\,,\ x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}.$$

Alors, I_e est une bijection.

Démonstration : I_e est parfaitement définie et clairement surjective par définition de $\mathbb{D}^e_n$. Pour voir qu'elle est injective, considérons $(x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n)$, il existe un premier indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_k \neq y_k$. On peut supposer $x_k < y_k$; sur $(x_k, y_k \wedge x_{k+1}]$ par définition d'une fonction de $\mathbb{D}^e_n$, on constate $x \neq y$ car

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{n}F(t) + \frac{k}{\sqrt{n}}, \\ y(t) &= -\sqrt{n}F(t) + \frac{k-1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

■

Remarque : Pour définir une fonction x de $\mathbb{D}^e_n$, il suffit donc de la définir par la famille de ses sauts $\{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n$ en utilisant la bijection I_e.

1.2 Le processus F-empirique pondéré

Le processus *F-empirique pondéré*, noté $\{\xi^{(p)}_n(t),\ t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, est donné par :

$$\xi^{(p)}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} \left[1_{(-\infty;t]}(\xi^*_i) - F(t)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

où les $c_{n,i}$ sont non nuls, en posant $cc' = \sum_{i=1}^{n} c^2_{n,i}$, selon la littérature habituelle.

Remarques :

◊ Une hypothèse habituelle, supplémentaire, classique est de supposer que pour $n \longrightarrow \infty$, on ait $\max_{1\leq i\leq n}\{\frac{c_{n,i}^2}{\sqrt{cc'}}\} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.
Toutefois, comme nous ne passerons pas à la limite, nous n'effectuerons pas cette supposition.

◊ Cette définition est semblable à celle d'un processus F-empirique, formule (1.1.1). La pondération découle des $c_{n,i}$ et permet de changer d'amplitude au instant des sauts. Il est même évident que ce type de processus est une généralisation de processus F-empirique dans le sens où, en prenant $c_{n,i} \equiv 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, on retrouve la formule (1.1.1).

Les trajectoires sont *cadlag* . Elles appartiennent toutes à l'espace $\mathbb{D}(\mathbb{R})$. On note $P_n^{(p)}$ la loi du processus F- empirique pondéré dans cet espace et les statistiques d'ordre sont notées $\xi_{n,i}^*$.

Définition 1.2.1 : L'ensemble $\mathbb{D}_n^p$
Pour n fixé, on appelle $\mathbb{D}_n^p$ l'ensemble des fonctions $\{x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un $n-uplet(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, défini par la formule (1.1.3), tel que pour $t \in (x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$x(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i \tag{1.2.2}$$

en posant $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, et $\mathcal{C}_i = \frac{1}{\sqrt{cc'}} \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}$.

Cette définition permet, comme $P(\xi_i = \xi_j) = 0, i \neq j$, de prouver le lemme suivant :

Lemme 1.2.1 *$\mathbb{D}_n^p$ est le support de la loi du processus F-empirique pondéré.*

La démonstration du lemme suivant est similaire à celle du lemme 1.1.3

Lemme 1.2.2 : Extrema d'une trajectoire typique
Pour $n \geq 2$, $P_n^{(p)}$-presque chaque x de $\mathbb{D}_n^p$ atteint son maximum et son infimum[2] *en deux points uniques et distincts de la famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des instants des sauts de x. On a*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \min_{1\leq i\leq n} (-\mathcal{C}_n F(x_i) + \mathcal{C}_{i-1}) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \max_{1\leq i\leq n} (-\mathcal{C}_n F(x_i) + \mathcal{C}_i).$$

Lemme 1.2.3 : Construction à partir des instants de sauts
Soit $I_p : E_n \longrightarrow \mathbb{D}_n^p$ qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, associe la fonction $x = I_p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}_n^p$ définie par

$$\forall t \in (x_i, x_{i+1}]\,,\ x(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i. \tag{1.2.3}$$

Alors, I_p est une bijection.

2. De nouveau, par abus de langage.

Démonstration : On comprend aisément que ce lemme est une généralisation du lemme 1.1.4 relatif au processus F-empirique. La démonstration est une simple adaptation.

■

Remarque : Pour définir une fonction x de $\mathbb{D}_n^p$, il suffit donc de la définir par la famille de ses sauts $\{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n$ en utilisant la bijection I_p.

1.3 Le processus F-quantile

On appelle processus *F-quantile* un processus $\{\xi_n^{(q)}(t),\ t \in [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, donné par

$$\xi_n^{(q)}(t) = \sqrt{n}\left[F_n^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right], \quad t \in [0,1], \tag{1.3.1}$$

où F_n est donnée par :

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i). \tag{1.3.2}$$

On rappelle que pour une fonction de répartition f, sa fonction réciproque f^{-1} est définie par, [11] :

$$f^{-1}(t) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) \geq t\}, \quad t \in (0,1).$$

L'étude des trajectoires $t \longmapsto \xi_n^{(q)}(\omega, t),\ t \in [0,1]\}$ montre qu'elles sont *cadlag* et qu'elles possédent précisément $n-1$ sauts aux points d'abscisses $\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.

Ces trajectoires appartiennent à l'espace de Skorohod $D[a,b]$, $\forall 0 < a < b < 1$.

En notant $(\xi_{n,i}^*)_{i=1,\ldots,n}$ les statistiques d'ordre associés à l'échantillon $\xi_1, \ldots, \xi_n$, on remarque que l'amplitude du saut du processus F-quantile, au point d'abscisse $\frac{i}{n}$ est exactement :

$$\sqrt{n}\{\xi_{n,i+1}^* - \xi_{n,i}^*\}. \tag{1.3.3}$$

Définition 1.3.1 : L'ensemble $\mathbb{D}_n^q$
Pour n fixé, on notera par $\mathbb{D}_n^q$ l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}([0,1])$ telles qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, voir section 1.1.1, tels que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $\forall t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, on a

$$x(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}x_{i+1} \tag{1.3.4}$$

où l'on a posé $x_0 = 0$.

La définition précédente permet, comme $P(\xi_i = \xi_j) = 0$, $i \neq j$, de prouver le lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *L'ensemble $\mathbb{D}_n^q$ porte le support de la loi du processus F-quantile.*

Remarque : Extréma d'une trajectoire typique
La notion d'extréma est particulière dans la mesure où il est clair que pour une trajectoire x quelconque, le $\sup_{t\in[0,1]} x(t)$ peut être égal à $+\infty$ et que $\inf_{t\in[0,1]} x(t)$ peut être égal à $-\infty$.
Nous verrons plus tard que, pour rester dans un cadre général, on se réduira à l'intervalle d'étude à $[a,b] \subset [0,1]$, $0 < a < b < 1$, évitant ainsi des discussions quant à la valeur de ces deux notions.

Lemme 1.3.2 : Construction à partir des amplitudes des sauts
Soit $I_q : E_n \longrightarrow \mathbb{D}_n^q$ qui à $(x_1,\ldots,x_n) \in E_n$, associe la fonction $x = I(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{D}_n^q$ définie par (1.2.2) : $\forall t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$,

$$x(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + x_{i+1}\sqrt{n}.$$

Alors, I_q est une bijection.

Démonstration : I_q est parfaitement définie et clairement surjective par définition de $\mathbb{D}_n^q$. Pour voir qu'elle est injective, considérons $(x_1,\ldots,x_n) \neq (y_1,\ldots,y_n)$, il existe un premier indice $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $x_k \neq y_k$. On peut supposer $x_k < y_k$; sur $(x_k, y_k \wedge x_{k+1}]$ par définition d'une fonction de $\mathbb{D}_n^q$, on constate $x \neq y$ car

$$x(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + x_{k+1}\sqrt{n},$$

$$y(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + y_{k+1}\sqrt{n}.$$

■

Remarque : Pour définir une fonction x de $\mathbb{D}_n^q$, il suffit donc de la définir par la famille de ses amplitudes de saut $\{x_1,\ldots,x_n\} \in E_n$ en utilisant la bijection I_q.

1.4 Le processus F-séquentiel

On appelle processus *F-séquentiel* tout processus $\{\xi_n^{(s)}(u,t),\ u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ donné par :

$$\xi_n^{(s)}(u,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nu]} \left[\mathbf{1}_{[-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right], \quad u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}, \tag{1.4.1}$$

où $[nu]$ est la partie entière de nu.

De manière générale, il est possible de supposer que $u \in \mathbb{R}^+$. Dès lors, on remarque que l'on retrouve le processus F-empirique en prenant "$u \equiv 1$".

- Pour chaque ω fixé dans Ω, la trajectoire $\xi_n^{(s)}(\omega, u, t)$ est constituée de "surface" de largeur $\frac{1}{n}$ sur l'axe des "u".

- Si u est fixé de plus, les trajectoires sont cadlag, à $[nu]$ sauts, aux instants réordonnés, de manière croissante, $\xi^*_{i\,1,[nu]}, \ldots, \xi^*_{i\,n,[nu]}$. Ainsi, les trajectoires appartiennent ainsi à l'espace de Skorohod $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$.

Dans le cas d'un processus séquentiel uniforme, il est bien connu, [5], qu'il converge, quand $n \to \infty$, vers le processus de Kiefer uniforme dont on rappelle de suite la définition.

Définition 1.4.1 *On appelle processus de Kiefer un processus* $\{K(u,t) \mid u \in [0,1[, t \in [0,1]\}$ *séparable, gaussien, centré, de fonction de covariance*

$$E\big(K(u_1,t_1); K(u_2,t_2)\big) = (u_1 \wedge u_2)(t_1 \wedge t_2 - t_1 t_2).$$

Dans notre cas, on décide de ne prendre u que dans $[0,1[$. On pourrait étendre la discution à des ensembles plus grands. On peut voir un processus de Kiefer comme un processus de Wiener à deux paramétres $\{W(u,t) \mid (u,t) \in [0,1) \times [0,1]\}$ transformé

$$K(u,t) = W(u,t) - tW(u,1), \quad \textit{pour } u \in [0,1[,\ t \in [0,1],$$

avec $W(u,t)$ un processus gaussien tel que
- $E\big(W(u,t)\big) = 0$,
- $E\big(W(u_1,t_1)W(u_2,t_2) = (u_1 \wedge u_2)(t_1 \wedge t_2)$.

On peut voir le processus de Kiefer comme un pont brownien en "t" et comme un processus de Wiener en "u". Autrement dit, le processus de Kiefer a les propriétés suivantes :
- Pour tout $t_0 \in [0,1]$, le processus $\{W(u) = \frac{1}{\sqrt{t_0(1-t_0)}}K(u,t_0) \mid u \in [0,1)\}$ est un processus de Wiener,
- Pour tout $u_0 \in [0,1[$, le processus $\{B(t) = \frac{1}{\sqrt{u_0}}K(u_0,t) \mid t \in [0,1]\}$ est un pont brownien.

Forme générale d'une trajectoire

Soit x une trajectoire typique du processus $\xi_n^{(s)}$.
Il existe une suite $\{x_k, k \in \{1,\ldots,n-1\}\}$ d'éléments de $\mathbb{R}$, définissant les instants des sauts de x qui sont tous d'amplitudes $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On supposera que les x_k sont ordonnés dans le sens suivant :
- Sur $[0,\frac{1}{n}) \times \mathbb{R}$, la trajectoire est nulle,
- Sur $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \times \mathbb{R}$, x_1 est l'instant du saut,
- Sur $[\frac{2}{n},\frac{3}{n}) \times \mathbb{R}$, x_1, x_2 sont les instants des sauts,
- Sur $[\frac{3}{n},\frac{4}{n}) \times \mathbb{R}$, x_1, x_2, x_3 sont les instants des sauts,
- Sur $[\frac{n-1}{n},1) \times \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les instants des sauts,

Plus généralement, sur $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \times \mathbb{R}$, la surface a exactement i sauts aux points $x_1, \ldots, x_i$, d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il est à remarquer que les x_k ne sont pas ordonnés dans le sens habituel, ils sont ordonnées dans l'ordre d'apparition. Toutefois, pour donner la forme générale d'une trajectoire, il est indispensable d'obtenir de les ordonner dans l'ordre croissant. Pour cela, on donne la définition suivante :

Définition 1.4.2 *On note $x_1^j, \ldots, x_j^j$ les j instants de saut $x_1, \ldots, x_j$ réordonnés dans le sens croissant, d'une trajectoire x sur l'intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$.*

On peut expliquer cette définition en remarquant qu'il existe une permutation s unique de $\{1, \ldots, j\}$ telle que $(x_1^j, \ldots, x_j^j) = (x_{s(1)}, \ldots, x_{s(j)})$. Autrement, on peut dire que les j-uplets $(x_1^j, \ldots, x_j^j)$ et $(x_1, \ldots, x_j)$ sont les mêmes, le premier est rangé dans l'ordre croissant, le second est rangé dans l'ordre d'apparition.

Définition 1.4.3 *Soit x une trajectoire typique du processus F-séquentiel $\xi_n^{(s)}$, associée à ses instants de saut $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Soit $u \in [0, 1[, t \in \mathbb{R}$. Alors, $\exists! j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $\frac{j}{n} \leq u < \frac{j+1}{n}$ et $\exists! i \in \{1, \ldots, j\}$ tel que $x_i^j \leq t < x_{i+1}^j$ tels que l'on ait :*

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \tag{1.4.2}$$

Il est à présent évident que cette trajectoire appartient à l'espace de Skorohod $\mathbb{D}([0, 1[\times\mathbb{R})$. On note alors $P_n^{(s)}$ la loi du processus F-séquentiel sur cet espace.

Définition 1.4.4 : L'ensemble $\mathbb{D}_n^s$
Pour n fixé, on appelle $\mathbb{D}_n^s$ l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}([0, 1[\times\mathbb{R})$ telles qu'il existe un $n-1-$uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\forall (u,t) \in [0, 1[\times\mathbb{R}$, $\exists! j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\exists! i \in \{1, \ldots, j\}$ vérifiant :

- $\triangleright$ $\frac{j-1}{n} \leq u < \frac{j}{n}$,
- $\triangleright$ $x_i^j \leq t < x_{i+1}^j$ *avec* $x_0^j = 0$ *et* $x_{j+1}^j = 1$.

Alors, on a

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}.$$

La définition précédente permet de montrer facilement le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 *L'ensemble $\mathbb{D}_n^s$ porte le support de la loi du processu F-séquentiel $\xi_n^{(s)}$.*

Exemple Concrètement, *dans le cas où $n = 5$*, la situation peut se traduire grâce au tableau suivant. Il faut le comprendre dans le sens suivant :

- En abscisses correspondant à $t \in \mathbb{R}$, on a placé les différents instants de sauts $x_1, \ldots, x_4$, rangés dans l'ordre croissant, ordre qui n'est pas l'ordre dans lequel ils apparaissent,
- En ordonnées correspondant à $u \in [0,1[$, on a subdivisé $[0,1[$ en intervalles $\frac{j-1}{n} \leq u < \frac{j}{n}$,
- A l'intersection des intervalles $[x_i, x_k)$ (*en abscisse*) et $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$ (*en ordonnée*), on obtient la valeur exacte de la trajectoire $\{x(u,t) \mid u \in [0,1[\ t \in \mathbb{R}\}$.

1						
	$x(u,t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}F(t)$	$x(u,t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{2}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{3}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{4}{\sqrt{5}}$	
$\frac{4}{5}$	$-\infty$	x_1^4	x_2^4	x_3^4	x_4^4	∞
$\frac{4}{5}$						
	$x(u,t) = -\frac{3}{\sqrt{5}}F(t)$		$x(u,t) = -\frac{3}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{3}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{2}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{3}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{3}{\sqrt{5}}$	
$\frac{3}{5}$	$-\infty$		x_1^3	x_2^3	x_3^3	∞
$\frac{3}{5}$						
	$x(u,t) = -\frac{2}{\sqrt{5}}F(t)$		$x(u,t) = -\frac{2}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}$	$x(u,t) = -\frac{2}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{2}{\sqrt{5}}$		
$\frac{2}{5}$	$-\infty$		x_1^2	x_2^2		∞
$\frac{2}{5}$						
	$x(u,t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}F(t)$			$x(u,t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}F(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}$		
$\frac{1}{5}$	$-\infty$			x_1^1		∞
$\frac{1}{5}$						
	$x(u,t) = 0$					
0	$-\infty$					∞
	$-\infty$	x_4	x_2	x_1	x_3	∞

Lemme 1.4.2 : Construction à partir de ses instants de sauts
Soit $I_s : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}_n^s$ *qui à* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, *associe la fonction* $x =$

$I(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{D}_n^s$ définie par (1.4.2) :

$$\forall u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \; \forall t \in \left[x_i^j, x_{i+1}^j\right), \; x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}.$$

Alors, I_s est une bijection.

Démonstration : I_s est parfaitement définie et clairement surjective par définition de $\mathbb{D}_n^s$. Pour voir qu'elle est injective, considérons $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq (y_1, \ldots, y_{n-1})$, il existe un premier indice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $x_k \neq y_k$. On peut supposer $x_k < y_k$.

Pour tout l, sur $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}) \times [x_k, y_k \wedge x_{k+1})$, par définition d'une fonction de D_n^s, on constate $x \neq y$ car

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{l}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{k}{\sqrt{n}}, \\ y(t) &= -\frac{l}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{k-1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

■

Remarque : Pour définir une fonction x de $\mathbb{D}_n^s$, il suffit donc de la définir par la famille de ses sauts $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n-1}$ en utilisant la bijection I_s et en prenant bien soin de la réordonner sur chaque $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}) \times \mathbb{R}$.

La démonstration du lemme suivant est proposée en annexe D.4

Lemme 1.4.3 : Extréma d'une trajectoire typique

Pour $P_n^{(s)}$-presque tout $x \in \mathbb{D}_n^s$, x atteint son maximun sur le segment $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i\}$ et son infimum[3] sur le segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \times \{x_l\}$. De plus, les couples (i,j) et (l,k) sont uniques et différents et l'on a :

$$\inf_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} x(u,t) = -\frac{k}{\sqrt{n}}F(x_l^k) + \frac{l-1}{\sqrt{n}}, \qquad \max_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i}{\sqrt{n}}$$

3. par abus de langage.

Chapitre 2

Etude métrique et topologique des supports

L'utilisation du théorème 0.0.2 nécessite une étude métrique et topologique des différents supports.
- Quelle mesure est utilisée sur le support ?
- Quelle est la topologie correspondante ?

Nous allons répondre à ces questions dans ce chapitre.

Remarque : Pour ne pas être trop répétitif lorsque le résultat le permettra, $\mathbb{D}_n$ sera utilisé pour parler indifféremment des supports $\mathbb{D}_n^{(e)}$, formule (1.1.4), $\mathbb{D}_n^{(p)}$, section (1.2.1), $\mathbb{D}_n^{(q)}$, section (1.3.1), ou $\mathbb{D}_n^{(s)}$, section (1.4.4).

2.1 Notion de distance sur les espaces de Skorokhod utilisés

La notion de distance sur un espace de Skorokhod est bien connue :

★ P. Billingsley, [2], a décrit la construction d'une distance sur $\mathbb{D}([0,1])$, en section 12, et sur $\mathbb{D}([0,+\infty))$, en section 16.

★ P.J. Bickel et M.J. Wichura, [1], ont "généralisé" cette notion aux espaces de Skorokhod multidimensionnels.

Ce paragraphe résume brièvement ces constructions et donne une construction sur $\mathbb{D}(\mathbb{R})$, ainsi que quelques propriétés immédiates.

◇ L'ensemble $\mathbb{D}([a,b])$, $\forall a, b$, désigne l'espace des fonctions *cadlag* sur $[a,b]$. On le

munit usuellement de la distance donnée par :

$$d_{[a,b]}(x,y) = \inf_{\rho_{a,b}\in\Lambda_{a,b}} \left[\sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(\rho_{a,b}(t))| + \sup_{t\in[a,b]} |t - \rho_{a,b}(t)| \right] \tag{2.1.1}$$

où $x, y \in \mathbb{D}([a,b])$ et $\Lambda_{a,b}$ est la famille des fonctions continues, strictement croissantes, surjectives de l'intervalle $[a,b]$, *cf* [2].

Muni de la distance (2.1.1), l'espace $\mathbb{D}([0,1])$ est séparable, (*cf.* [2], page 123-130).

Les résultats suivants, démontrés en annexes B.1, relient les distances sur différents espaces de type Skorokhod :

Lemme 2.1.1 *Soient $x, y \in \mathbb{D}([-T,T])$, $S \leq T$ tels que $x(t) = y(t)$ pour $t \in [-T,T] \setminus [-S,S]$, alors $d_{[-T,T]}(x,y) \leq d_{[-S,S]}(x,y)$.*

On n'a pas d'inégalité en sens inverse pour d_T et d_S. Cependant, on a le résultat suivant, réciproque en un certain sens :

Lemme 2.1.2 *Soient x_p, $x \in \mathbb{D}([-T,T])$ tels que $x_p \longrightarrow x$ dans $\mathbb{D}([-T,T])$ et $S < T$. On suppose que x n'a pas de saut dans les points $-S$ et S. Alors*

$$x_p \longrightarrow x, \quad \textit{dans} \ \ \mathbb{D}([-S,S]).$$

◇ Dans la suite, on considère l'espace $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ et on le munit de la distance :

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d_{[-m,m]}(x,y)}{1 + d_{[-m,m]}(x,y)} \tag{2.1.2}$$

où $x, y \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$.

On dispose du résultat suivant qui relie les distances $d_{\mathbb{R}}$ et $d_{[-m,m]}$:

Lemme 2.1.3 *Soient x_p, $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ tels que $x_p(t) = x(t)$ pour $t \in [-N,N]^c$. Si x n'a pas de sauts en les points de $\mathbb{N} \cap [-N,N]$, alors, on a*

$$d_{[-N,N]}(x_p,x) \to 0 \iff d_{\mathbb{R}}(x_p,x) \to 0.$$

◇ Soit Λ l'ensemble des transformations de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans lui-même, de la forme $\lambda(t_1,t_2) = (\lambda_1(t_1), \lambda_2(t_2))$ où λ_1 est une fonction continue, strictement croissante et surjective de $[0,1[$ dans lui-même et λ_2 est une fonction continue, strictement croissante et surjective de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
On définit la distance entre deux éléments x et y de $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ par :

$$d_{[0,1[\times\mathbb{R}}(x,y) = \inf_{\rho\in\Lambda} \left[\sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} |x(u,t) - y(\rho(u,t))| + \sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} |(u,t) - \rho(u,t)| \right]$$

Muni de cette distance, l'espace $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ est séparable, [1].

On dispose alors du lemme suivant, dont la démonstration est évidente dans un sens et dans l'autre il suffit de prolonger une fonction définie sur $[-N,N]$ par l'identité pour la définir sur $\mathbb{R}$:

Lemme 2.1.4 *Soient x_p, $x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ tels que $x_p(u,t) = x(u,t)$ pour $t \notin [-N,N]$. Si x n'a pas de sauts en les points de $\mathbb{N}\cap[-N,N]$, alors, on a*

$$d_{[0,1]\times[-N,N]}(x_m,x) \to 0 \iff d_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_m,x) \to 0.$$

2.2 Distance sur les $\mathbb{D}_n$

Bien qu'il soit évident que chaque support $\mathbb{D}_n$ hérite de la distance de Skorokhod de l'espace dans lequel il est plongé, il est souhaitable d'utiliser une autre distance, plus pratique. Cette distance équivalente utilise la bijection I entre les espaces E_n et $\mathbb{D}_n$.

Soient deux éléments $x,y \in \mathbb{D}_n$, associés à $\bar{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$ et $\bar{y} = \{y_1,\dots,y_n\}$ dans E_n par I (on sait que $x = I(\{x_1,\dots,x_n\})$ et que $y = I(\{y_1,\dots,y_n\})$).

Soit $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\Theta(\bar{x}) = \sum_{i\neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|}. \tag{2.2.1}$$

On définit

$$r(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + |\Theta(\bar{x}) - \Theta(\bar{y})|, \tag{2.2.2}$$

et

$$d_n(x,y) = r(\bar{x},\bar{y}). \tag{2.2.3}$$

Remarque : Le terme supplémentaire avec Θ dans la définition précédente de d_n permet de compléter la topologie métrique associée, cette démarche est très classique. La métrique d_n est définie comme isométrique à r.

On dispose d'abord du critère suivant de convergence dans $\mathbb{D}_n$:
Lemme 2.2.1 *Soit $x \in \mathbb{D}_n$ défini par la famille de ses sauts $\{x_1,\dots,x_n\} \in E_n$ et $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{D}_n$ définie à partir de $\{x_{1,m},\dots,x_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ suite de E_n. Alors,*

$$x^m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n} x \iff \forall 1 \le i \le n,\ x_{i,m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} x_i.$$

Démonstration : Le sens direct est clair. En effet, si $x_m \to x$ dans $\mathbb{D}_n$ alors on a la convergence de la somme $\sum_{i=1}^{n} |x_{m,i} - x_i| \to 0$ et donc pour chaque $1 \leq i \leq n$, on a $x_{i,m} \to x_i$. Le sens réciproque suit classiquement de la continuité de Θ sur E_n.

■

Cette définition nécessite de prouver que les convergences liées à la distance d sont équivalentes aux convergences correspondantes dans les espaces de Skorokhod dans lequel chaque support est plongé. C'est le propos de la section suivante.

2.3 Critères de convergence sur les $\mathbb{D}_n$

Les démonstrations des lemmes suivants sont donnés en annexe B.2

2.3.1 Pour le processus F-emprique

Lemme 2.3.1 *Pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$ on a pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^e, d_n)$:*

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^e} x \iff x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}(\mathbb{R})} x.$$

2.3.2 Pour le processus F-emprique pondéré

Lemme 2.3.2 *Pour $P_n^{(p)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^p$ on a pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^p, d_n)$:*

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^p} x \iff x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}(\mathbb{R})} x.$$

2.3.3 Pour le processus F-quantile

Le lemme suivant traduit le fait que pour le processus F-quantile, il suffit de travailler avec la distance uniforme d_∞ sur $\mathbb{D}([0,1])$. Ce résultat, comme on pourra le constater dans la démonstration, découle du fait qu'ici les instants de saut sont fixes en les points $\frac{i}{n}$.

Lemme 2.3.3 *Pour $P_n^{(q)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^q$, pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^q, d_n)$, on a :*

(i)

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^q} x \implies x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{U}} x.$$

(ii)

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{U}} x \implies x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}([0,1])} x$$

(iii)

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}([0,1])} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^q} x$$

On a noté par $\xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{U}}$ *la convergence uniforme.*

2.3.4 Pour le processus F-séquentiel

Lemme 2.3.4 *Pour $P_n^{(s)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^s$ on a pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^s, d_n)$:*

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^s} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})} x.$$

2.4 Les supports $\mathbb{D}_n$ sont fermés

On a les résultats suivants démontrés en annexe A :
Lemme 2.4.1 *Les espaces $\mathbb{D}_n$ des trajectoires possibles correspondants aux processus empiriques, empiriques pondérés, quantiles et séquentiels sont fermés dans les espaces de Skorohod dans lesquels ils sont plongés. Plus précisément,*

- $\mathbb{D}_n^e$ *est fermé dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$,
- $\mathbb{D}_n^p$ *est fermé dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$,
- $\mathbb{D}_n^q$ *est fermé dans* $\mathbb{D}([0,1])$,
- $\mathbb{D}_n^s$ *est fermé dans* $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$.

Remarque : On a en fait la suite d'inclusions d'ensembles suivante :

$$\mathbb{D}_n^e \subsetneq \mathbb{D}_n^p \subsetneq \mathbb{D}(\mathbb{R})$$

où l'on remarque facilement que ces inclusions sont strictes.

2.5 Un voisinage particulier d'une trajectoire sur les $\mathbb{D}_n$

On remarque que dans le théorème 0.0.2, [11], il est nécessaire de définir un voisinage particulier V_x d'un élément x du support $\mathbb{D}_n$ de la loi du processus ξ_n. Tel est le but de cette section.

Soit x une trajectoire typique dans des supports $\mathbb{D}_n \in \{\mathbb{D}_n^e, \mathbb{D}_n^p, \mathbb{D}_n^q, \mathbb{D}_n^s\}$. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n$ associé à x par la bijection I. Soit $\delta > 0$. Soit $\Delta_i^\delta = (x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2})$.

Lemme 2.5.1 $\mathcal{U}_\delta = \{y \in \mathbb{D}_n \mid \forall i \in \{i, \ldots, n\}, y_i \in \Delta_i^\delta\}$ *est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{D}_n$.*

Démonstration : Il s'agit de voir que

$$U_\delta^c = \{y \in \mathbb{D}_n \big| \ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ y_i \notin \Delta_i^\delta\}$$

est fermé.
Pour cela, soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de U_δ^c qui converge vers y. Comme $\mathbb{D}_n$ est fermé (voir les lemmes de la section 2.4), on a $y \in \mathbb{D}_n$.
De plus, selon les lemmes de la section 2.3, on a

$$y_k \xrightarrow{\mathbb{D}(\mathbb{R})} y \quad \Longleftrightarrow \quad y_k \xrightarrow{\mathbb{D}_n} y.$$

Comme $y_k \notin U_\delta$, on peut définir $i^* \in \{1, \ldots, n\}$ et une sous-suite $(k') \subset (k)$ tels que $y_{k',i^*} \notin \Delta_i^\delta$. Or comme $y_{k'} \to y$ dans $\mathbb{D}_n$, on a $y_{k',i^*} \to y_{i^*}$. Par fermeture de $(\Delta_i^\delta)^c$, on a $y_{i^*} \notin \Delta_i^\delta$. On a donc $y \notin U_\delta$: U_δ est un ensemble ouvert.

■

Chapitre 3

Etude d'une famille adaptée de transformations $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$

Nous allons à présent définir la famille de transformations adaptée à chaque processus ξ_n sur l'ensemble $\mathbb{D}_n \in \{\mathbb{D}_n^e, \mathbb{D}_n^p, \mathbb{D}_n^q, \mathbb{D}_n^s\}$.

3.1 Idée directrice

Pour appliquer le théorème 0.0.2, on doit associer à P_n-presque chaque x une famille de transformations de $\mathbb{D}_n$ dans lui même. C'est l'objet de cette section. Pour cela, fixons $x \in \mathbb{D}_n$. On associe à x, grâce à la bijection I, la famille $\{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n$.

Pour définir la famille $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$, nous introduisons une fonction φ_{t_0} associée à un réel t_0 de la façon suivante :

Définition 3.1.1 *On appelle fonction de t_0-transformation toute fonction φ_{t_0} telle que :*
(i) $\varphi_{t_0}(t_0) = 1$,
(ii) φ_{t_0} *est absolument continue et à support compact,*
(iii) $\varphi'_{t_0} \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\forall a \neq 0, \lambda\{t \mid \varphi'_{t_0}(t) = a\} = 0$.

Remarques :

- Pour toute trajectoire x fixée, on définit $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min_{i\neq j}(|x_i - x_j|)$. On peut même choisir φ_{t_0} avec un support compris dans l'intervalle $]t_0 - \varepsilon_x, t_0 + \varepsilon_x[$.

- L'hypothèse (ii) assure consécutivement que $\varphi'_{t_0} \in L^1(\mathbb{R})$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_{t_0}(t)| < +\infty$.

Rappelons qu'une trajectoire $y \in \mathbb{D}_n$ est donnée par la famille de ses sauts $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ par (1.1.4), (1.2.2), (1.3.4) ou (1.4.2).

Ainsi, pour définir $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n$, il suffit de donner les n instants ou amplitudes [1] de ses sauts donc de définir la transformation $\widehat{G}_{n,c}$ des instants y_i des sauts de

1. Dans le cas du processus F-quantile.

y puis de reconstruire la fonction $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n$. *A priori*, ces transformations ne garantissent pas que l'ordre des instants transformés $\widehat{G}_{n,c}(y_i)$ soit le même que celui des instants y_i (voir cependant le lemme 3.4.1), pour cela, on définit $\widetilde{G}_{n,c}$ sur E_n.

Rappelons qu'on a fixé $x \in \mathbb{D}_n$, on commence alors par choisir $1 \leq i_0 \leq n$ et φ une fonction de x_{i_0}−transformation de support $]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[$ où elle est strictement positive, avec $\varepsilon_x := \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$.

On définit d'abord les transformations $\widehat{G}_{n,c}$ sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{n,c} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_1 + c\,\varphi(x_1), \ldots, x_n + c\,\varphi(x_n)). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

3.2 Nouvelle définition de E_n

Définition 3.2.1 *Deux éléments $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalents, s'il existe une permutation τ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n$, $y_i = x_{\tau(i)}$. On notera alors $x \sim y$.*

Cette relation d'équivalence définit l'espace quotient $\mathbb{R}^n / \sim$ des classes d'équivalence. Dans chaque classe, il existe un élément dont les coordonnées sont ordonnées ; on choisit dans la suite un tel élément comme représentant de la classe d'équivalence. Finalement, l'ensemble E_n peut être vu comme l'espace quotient $\mathbb{R}^n / \sim$. Notons π la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans E_n qui à x associe sa classe $\bar{x}$.

3.3 Définition explicite des familles de transformations

On a défini :

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{n,c} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_1 + c\,\varphi(x_1), \ldots, x_n + c\,\varphi(x_n)). \end{aligned}$$

On definit alors :

$$\tilde{G}_{n,c} : E_n \longrightarrow E_n \quad \text{par} \quad \tilde{G}_{n,c} = \pi \circ \widehat{G}_{n,c}. \tag{3.3.1}$$

Notons pour $y \in \mathbb{D}_n$ avec $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ associé :

$$\begin{aligned} \hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}) = (y_1 + c\,\varphi(y_1), \ldots, y_n + c\,\varphi(y_n)) = \widehat{G}_{n,c}(y_1, \ldots, y_n), \\ \tilde{y}_c = (\tilde{y}_{c,1}, \ldots, \tilde{y}_{c,n}) = \tilde{G}_{n,c}(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Pour le processus F-séquentiel, on comprendra de remplacer E_n par $\mathbb{R}^{n-1}$. On définit finalement, la transformation $G_{n,c}$ par $G_{n,c} = I \circ \tilde{G}_{n,c} \circ I^{-1}$.

On a en fait :

3.3.1 Pour le processus F-empirique

Soit $y \in \mathbb{D}_n^e$ une trajectoire typique d'un processus F-empirique $\xi_n^{(e)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par :

$$G_{n,c}y(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad \text{si } t \in [\tilde{y}_{c,i}; \tilde{y}_{c,i+1}[, \tag{3.3.2}$$

où

$$\tilde{y}_{c,i} = y_i + c\varphi(y_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3.3.2 Pour le processus F-empirique pondéré

Soit $y \in \mathbb{D}_n^p$ une trajectoire typique d'un processus F-empirique $\xi_n^{(p)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par :

$$G_{n,c}y(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i \quad \text{si } t \in [\tilde{y}_{c,i}; \tilde{y}_{c,i+1}[, \tag{3.3.3}$$

où

$$\tilde{y}_{c,i} = y_i + c\varphi(y_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3.3.3 Pour le processus F-quantile

Soit $y \in \mathbb{D}_n^q$ une trajectoire typique d'un processus F-empirique $\xi_n^{(q)}$, associée à la famille de ses amplitudes de sauts $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans E_n.
Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par :

$$G_{n,c}y(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + x_{i+1}\sqrt{n} + c\sqrt{n}\varphi(t) \quad \text{si } t \in [\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}[. \tag{3.3.4}$$

3.3.4 Pour le processus F-séquentiel

Soit $y \in \mathbb{D}_n^s$ une trajectoire typique d'un processus F-empirique $\xi_n^{(s)}$, associée à la famille de ses instants de sauts $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$.
Alors $G_{n,c}(y)$ est définie par :

$$G_{n,c}y(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}, \tag{3.3.5}$$

si

$$u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}[\,,\ t \in [\tilde{y}_{c,i}^j; \tilde{y}_{c,i+1}^j[,$$

où

$$\tilde{y}_{c,i}^j = y_i^j + c\varphi(y_i^j) \quad \forall i \in \{1, \ldots, j\}$$

3.4 Voisinage et transformation

A priori,$(\hat{x}_{c,1}, \ldots, \hat{x}_{c,n}) = \widehat{G}_{n,c}(x_1, \ldots, x_n)$ n'a aucune raison d'être dans E_n. Mais comme φ est localement finie, comme les x_i sont bornés et comme $supp(\varphi) \subset]t_0 - \varepsilon_x, t_0 + \varepsilon_x[$, il est clair cependant que pour c assez petit, l'ordre de la famille $\{\hat{x}_{c,i}, \in \{1, \ldots, n\}\}$ est le même que celui de $\{x_i, \ i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

En fait, l'ordre se conserve localement pour les trajectoires *transformées* de la façon suivante :

Lemme 3.4.1 *Pour toute fonction $x \in \mathbb{D}_n$, il existe V_x voisinage ouvert de x dans $\mathbb{D}_n$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $\forall c \in [0, \varepsilon)$, $\forall y \in V'$, ouvert inclus dans V_x, on a*
- $G_{n,c}y \in V_x$,
- la famille $\tilde{y}_c = \{y_i + c\,\varphi(y_i), \ 1 \leq i \leq n\}$ des sauts de $G_{n,c}(y)$ est ordonnée.

Remarque : On peut considérer que les ouverts V_x et V' sont de la forme donnée par le lemme 2.5.1, c'est à dire, qu'il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que :

$$V_x = \{y \in \mathbb{D}_n \mid \forall i \in \{i, \ldots, n\}, y_i \in \Delta_i^{\delta}\},$$

et

$$V' = \{y \in \mathbb{D}_n \mid \forall i \in \{i, \ldots, n\}, y_i \in \Delta_i^{\delta'}\}.$$

Remarque : Pour y proche de x on peut donc reconstruire directement $G_{n,c}y$ à partir de la transformation des instants de ses sauts $\widehat{G}_{n,c}(y_i)$ sans problème.

Démonstration : Soient $x \in \mathbb{D}_n$ et $0 < \delta < \varepsilon_x = \frac{1}{2}\min_{1 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$. La fonction x est définie par ses sauts $\{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n$.
Soit $\Delta_i^{\delta} = (x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2})$. On rappelle que, par le lemme 2.5.1, on peut définir un voisinage ouvert particulier d'une trajectoire x de $\mathbb{D}_n$ par :

$$\mathcal{U}_{\delta} = \{y \in \mathbb{D}_n \mid \forall i \in \{i, \ldots, n\}, y_i \in \Delta_i^{\delta}\}.$$

- Comme Δ_i^{δ}, pour $1 \leq i \leq n$, sont des intervalles finis, par continuité de φ, on a

$$M_{\varphi} = \sup_{t \in \cup_i \Delta_i^{\delta}} |\varphi(t)| < +\infty.$$

  On considère dans la suite $c < c_0 := \delta/(2M_{\varphi})$.
- Pour toute fonction $y \in U_{\delta}$, la famille $\{y_1, \ldots, y_n\} \in E_n$, de ses sauts la définissant vérifie : $\forall 1 \leq i \leq n$, $y_i \in \Delta_i^{\delta}$. Par définition de la famille de transformations, $G_{n,c}(y)$ est définie par les sauts

$$\{y_i + c\,\varphi(y_i), \ i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

  Par choix de δ, la famille précédente est ordonnée.
- Montrons à présent que $G_{n,c}(y)$ reste au voisinage de x.
  $\forall c \in (-c_0; c_0)$, $\forall y \in U_{\delta}$, $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} |y_i + c\,\varphi(y_i) - x_i| &\leq |y_i - x_i| + |c\varphi(y_i)| \\ &< \delta/2 + c_0 M_{\varphi} \leq \delta. \end{aligned}$$

Finalement, $\forall c \in (-c_0, c_0)$, $\forall y \in U_\delta, \forall i$ tel que $1 \leq i \leq n$, $|y_i + c\,\varphi(y_i) - x_i| \leq \delta$. Par définition des ouverts U_δ, on a donc $\forall c \in (-c_0, c_0)$, $\forall y \in U_\delta$, $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq n$:

$$y_i + c\,\varphi(y_i) \in U_{2\delta}.$$

Ceci signifie que $\forall c \in (-c_0, c_0)$, $\forall y \in U_\delta$, $G_{n,c}(y) \in U_{2\delta}$, voisinage ouvert de x par le lemme 2.5.1.

■

3.5 Transformation, voisinage et extrémum d'une trajectoire

Les lemmes présentés dans cette section seront démontrés exactement en annexes D.1, D.2, D.3 et D.4. Ils sont relatifs à la notion d'extréma d'une trajectoire typique de chacun des processus étudiés, sur un voisinage donné. Toutefois, la démonstration des lemmes "infimum" se déduisent de l'étude des lemmes "maximum" des trajectoires grâce à une simple adaptation des démonstrations. En effet, dans la définition des trajectoires, on montre qu'elles sont *cadlag*. Ceci permet de démontrer l'existence et l'unicité presque sûre du maximum des trajectoires. Un simple changement dans la définition permet d'obtenir des trajectoires continues à gauche et admettant une limite à droite (ce que l'on pourrait nommer *caglad*). L'étude d'une telle trajectoire prouverait, en appliquant la même démarche que pour les trajectoires *cadlag* l'existence et l'unicité presque sûre des minima.

3.5.1 Cas du processus F-empirique.

Lemme 3.5.1 *Maximum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(e)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même indice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Plus précisément, x atteint son maximun pour l'instant de saut x_i, y dans l'instant y_i et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_i + c\varphi(y_i)$.

Lemme 3.5.2 *Infimum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(e)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur infimum[2] respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Plus précisément, cette notion signifie que l'infimum de x est sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j)$, pour l'instant de saut x_j et vaut précisément $-\sqrt{n}F(x_j) + \frac{j-1}{\sqrt{n}}$. De même, l'infimum de y est atteint pour l'instant y_j et celui de $G_{n,c}y$ pour l'instant $y_j + c\varphi(y_j)$.
Pour $n \geq 2$, les indices i et j des ces deux lemmes sont distincts, puisque F possède une densité.

2. Par abus de langage.

3.5.2 Cas du processus F-empirique pondéré.

Lemme 3.5.3 *Maximum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(p)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^p$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même indice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Plus précisément, x atteint son maximun pour l'instant de saut x_i, y dans l'instant y_i et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_i + c\varphi(y_i)$.

Lemme 3.5.4 *Infimum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(p)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^p$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent[3] leur infimum respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Plus précisément, cette notion signifie que l'infimum de x est atteint pour l'instant de saut x_j, sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j)$ et vaut précisément $-\mathcal{C}_n F(x_j) + \mathcal{C}_{j-1}$, l'infimum de y dans l'instant y_j et celui de $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_j + c\varphi(y_j)$.
Pour $n \geq 2$, les indices i et j des ces deux lemmes sont distincts, puisque F possède une densité.

3.5.3 Cas du processus F-quantile.

Bien entendu, la notion d'extréma est limitée sur $[0, 1]$ puisque que le suprémum peut être $+\infty$ et l'infimum peut être $-\infty$. Ainsi, dans les deux lemmes suivants, on se limite à un intervalle $[a, b]$, $0 < a < b < 1$.

Lemme 3.5.5 *Maximum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(q)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^q$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\exists!\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même réel $t_M \in \{a, \frac{i}{n}\}$.

Lemme 3.5.6 *Infimum d'une trajectoire*
Pour $P_n^{(q)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^q$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent[4] leur infimum respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Plus précisément, cela signifie que x atteint son infimum sur l'intervalle $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}) \bigcap [a, b]$ et vaut précisément $-\sqrt{n}F^{-1}(b) + x_j\sqrt{n}$ ou $-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + x_j\sqrt{n}$. L'infimum de y et celui de $G_{n,c}y$ sera atteint pour le même instant b ou $\frac{j}{n}$.
Pour $n \geq 2$, les indices i et j des ces deux lemmes sont distincts, puisque F possède une densité.

3. Par abus de langage.
4. Par abus de langage.

3.5.4 Cas du processus F-séquentiel.

Lemme 3.5.7 *Maximum d'une trajectoire*
Pour P_n^s-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^s$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même couple d'indices $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.
Plus précisèment, x atteint son maximun sur le segment $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i^j\}$, y dans l'instant $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{y_i^j\}$ et $G_{n,c}y$ dans l'instant $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{y_i + c\varphi(y_i)\}$.

Lemme 3.5.8 *Infimum d'une trajectoire*
Pour P_n^s-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^s$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent[5] leur infimum respectif pour le même couple d'indices $(k,l) \in \{1,\ldots,n\}^2$.

Plus précisément, cette notion signifie x atteint son maximun pour l'instant de saut x_j sur le segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \times \{x_l^k\}$ et vaut précisément $-\frac{k}{\sqrt{n}}F(x_l) + \frac{l-1}{\sqrt{n}}$.
Remarque : Pour $n \geq 2$, les segments $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i^j\}$ et $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \times \{x_l^k\}$ des ces deux lemmes sont distincts, puisque $F' > 0$ *pp*.

3.6 Diagramme fonctionnel

Les diagrammes fonctionnels résument la situation :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow[\widehat{G}_{n,c}]{} & \mathbb{R}^n \\
\\
\mathbb{R}^n & & \\
| & & \\
\pi & & \\
\downarrow & & \\
E_n & \xrightarrow[\tilde{G}_{n,c}]{} & E_n \\
| & & | \\
I & & I \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{D}_n & \xrightarrow[G_{n,c}]{} & \mathbb{D}_n
\end{array}$$

La partie basse du diagramme précédent est commutatif car I est bijective. Pour le processus F-séquentiel, on comprendra de remplacer E_n par $\mathbb{R}^{n-1}$.

5. Par abus de langage.

3.7 Application à la loi des processus

Notons $\widehat{P}_n$ la loi définie sur $\mathbb{R}^n$ par la densité $p^{\otimes n}$. Par commutativité du diagramme fonctionnel, il suit les définitions suivantes.

3.7.1 Pour le processus F-empirique

Pour le processus F-empirique $\xi_n^{(e)}$, on construit les trajectoires de $\mathbb{D}_n^e$ grâce à la bijection I_e entre E_n et $\mathbb{D}_n^e$. On a alors :

$$P_n^{(e)} = (\widehat{P}_n \pi^{-1}) I_e^{-1}, \tag{3.7.1}$$

$$P_n^{(e)} G_{n,c}^{-1} = ((\widehat{P}_n \pi^{-1}) \tilde{G}_{n,c}) I_e^{-1}. \tag{3.7.2}$$

3.7.2 Pour le processus F-empirique pondéré

Pour le processus F-empirique $\xi_n^{(p)}$, on construit les trajectoires de $\mathbb{D}_n^p$ grâce à la bijection I_p entre E_n et $\mathbb{D}_n^p$. On a alors :

$$P_n^{(p)} = (\widehat{P}_n \pi^{-1}) I_p^{-1}, \tag{3.7.3}$$

$$P_n^{(p)} G_{n,c}^{-1} = ((\widehat{P}_n \pi^{-1}) \tilde{G}_{n,c}) I_p^{-1}. \tag{3.7.4}$$

3.7.3 Pour le processus F-quantile

Pour le processus F-empirique $\xi_n^{(q)}$, on construit les trajectoires de $\mathbb{D}_n^q$ grâce à la bijection I_q entre E_n et $\mathbb{D}_n^q$. On a alors :

$$P_n^{(q)} = (\widehat{P}_n \pi^{-1}) I_q^{-1}, \tag{3.7.5}$$

$$P_n^{(q)} G_{n,c}^{-1} = ((\widehat{P}_n \pi^{-1}) \tilde{G}_{n,c}) I_q^{-1}. \tag{3.7.6}$$

3.7.4 Pour le processus F-séquentiel

Pour le processus F-empirique $\xi_n^{(s)}$, on construit les trajectoires de $\mathbb{D}_n^s$ grâce à la bijection I_s entre $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{D}_n^s$. On a alors :

$$P_n^{(s)} = (\widehat{P}_n \pi^{-1}) I_s^{-1}, \tag{3.7.7}$$

$$P_n^{(s)} G_{n,c}^{-1} = ((\widehat{P}_n \pi^{-1}) \tilde{G}_{n,c}) I_s^{-1}. \tag{3.7.8}$$

3.8 Vérification de l'hypothèse $G_{n,c}(x) \to x,\ c \to 0$

Dans cette section, on vérifie l'hypothèse $G_{n,c}(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$, du théorème 0.0.2 : *Pour P_n-presque chaque x fixé, il faut vérifier que la distance au sens de Skorokhod $d(G_{n,c}(x), x)$ entre $G_{n,c}(x)$ et x converge vers 0, quand $c \to 0$.* On remarque que cette vérification ne dépend pas de la nature du processus.
Les paragraphes 1.2 et 1.3 nous assurent que l'on peut utiliser les bijections I entre E_n et les ensembles $\mathbb{D}_n$, et, dans le cas du processus F-séquentiel, entre $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{D}_n^s$.

Lemme 3.8.1 *Pour P_n-presque tout x de $\mathbb{D}_n$,*

$$G_{n,c}(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$$

Démonstration : Considérons le cas des deux processus F-empiriques :
Soit x une trajectoire possible définie complètement par le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$.
Considérons une suite $\{c_m, m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers 0.
Par définition, $G_{n,c_m}(x)$ est définie par les instants de ses sauts $(x_1 + c_m\varphi(x_1), \ldots, x_{i_0} + c_m\varphi(x_{i_0}), \ldots, x_n + c_m\varphi(x_n))$.
On peut supposer, sans perdre le sens général de cette démonstration, que c_m est suffisamment petit pour conserver l'ordre des deux n-uplets.

Comme φ est bornée, voir paragraphe 3.1.1, il est clair que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i + c_m\varphi(x_i) \longrightarrow x_i,\ m \longrightarrow \infty.$$

Par le lemme 2.3, on a facilement $G_{n,c}(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$.

■

Dans le cas d'un processus F-quantile, on considère x une trajectoire possible définie complètement par le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. Considérons une suite $\{c_m, m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers 0.
Par définition, $G_{n,c_m}(x)$ est définie par les instants de ses amplitudes et l'on a :

$$G_{n,c_m}(x)(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + x_i\sqrt{n} + c_m\sqrt{n}1^x_{\Delta_i}(t).$$

On étudie alors $\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - G_{n,c_m}(t)|$. Evidemment, $|x(t) - G_{n,c_m}(t)| = |c_m\sqrt{n}1^x_{\Delta_i}(t)|$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(G_{n,c}(x), x) \longrightarrow 0,\ c \to 0$.
Dans le cas du processus F-séquentiel, il suffit de remplacer $(x_1, \ldots, x_n)$ de E_n par $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

■

3.9 Vérification de l'hypothèse $P_nG_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n,\ c \to 0$

Dans cette partie, on vérifie la première hypothèse du théorème 0.0.2. Les quelques lemmes élémentaires suivants sont nécessaires pour démontrer ce résultat ; la démonstration des lemmes qui ne sont pas référencés est proposée en annexe C.

Lemme 3.9.1 (th. 2.5, [11]) *Pour toutes mesures ν et μ et pour toute fonction Ψ mesurable, on a*

$$\|\nu\Psi^{-1} - \mu\Psi^{-1}\|_{var} \leq \|\nu - \mu\|_{var}.$$

Lemme 3.9.2 *Soient ν_i et μ_i des mesures sur X_i, $i = 1, 2$, on a*

$$\|\nu_1 \times \nu_2 - \mu_1 \times \mu_2\|_{var} \leq \|\nu_2 - \mu_2\|_{var}\|\nu_1\|_{var} + \|\nu_1 - \mu_1\|_{var}\|\mu_2\|_{var}. \tag{3.9.1}$$

Lemme 3.9.3 (*cf.* **[8]**) *Soient $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions absolument continues sur $\mathbb{R}$ telles que :*

- $f_p(0) \longrightarrow f(0), \quad p \to +\infty$;
- $f_p' \overset{L^1(\mathbb{R})}{\longrightarrow} f', \quad p \to +\infty$;
- $f' \neq 0$ *p.p.*

Alors, pour toute mesure m finie vérifiant $m \ll \lambda$, on a

$$mf_p^{-1} \overset{var}{\longrightarrow} mf^{-1}, \; p \to +\infty.$$

Les deux lemmes 3.9.4 et 3.9.5 découlent de l'indépendance des $\xi_1, \ldots, \xi_n$, de la forme de $\widehat{P}_n\widehat{G}_{n,c}^{-1}$ et de $\widehat{P}_n$ et du 3.9.2.

Lemme 3.9.4 *Pour tout réel c, la loi du vecteur $(\xi_1 + c\,\varphi(\xi_1), \ldots, \xi_n + c\,\varphi(\xi_n))$, est une mesure à densité, i.e. $\widehat{P}_n\widehat{G}_{n,c}^{-1} \ll \lambda^n$.*

Lemme 3.9.5 $\|\widehat{P}_n\widehat{G}_{n,c}^{-1} - \widehat{P}_n\|_{var} \leq n\,\|\widehat{P}_{\xi_1+c\,\varphi(\xi_1)} - \widehat{P}_{\xi_1}\|_{var}$.

Vérification de l'hypothèse 1 du théorème 0.0.2 : Cette section permet de démontrer que $P_nG_{n,c}^{-1} \overset{var}{\longrightarrow} P_n$, $c \to 0$. Grâce au paragraphe 3.7, on a pour chacun des quatre processus :

$$P_n = (\widehat{P}_n\pi^{-1})I^{-1},$$

$$P_nG_{n,c}^{-1} = ((\widehat{P}_n\pi^{-1})\tilde{G}_{n,c})I^{-1}.$$

En utilisant ces expressions et le lemme 3.9.2, on a

$$\|P_nG_{n,c}^{-1} - P_n\|_{var} \leq \|(\widehat{P}_n\pi^{-1})\tilde{G}_{n,c}^{-1} - \widehat{P}_n\pi^{-1}\|_{var}. \tag{3.9.2}$$

et l'on note $Q_n = \widehat{P}_n\pi^{-1}$ la loi du vecteur réordonné $(\xi_{n,1}^*, \ldots, \xi_{n,n}^*)$ sur $\mathbb{R}^n$.

Il est bien connu, [11], page 7, formule (2.3) , que

$$\|Q_n\tilde{G}_{n,c}^{-1} - Q_n\|_{var} \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Q_n\tilde{G}_{n,c}^{-1}|_{\eta_i=y_i\, i\neq i_o} - Q_n|_{\eta_i=y_i\, i\neq i_o}\|_{var,\mathbb{R}} \quad F_{i\neq i_0}(dy).$$

où les notations $Q_n\tilde{G}_{n,c}^{-1}|_{\eta_i=y_i\, i\neq i_o}$ et $Q_n|_{\eta_i=y_i\, i\neq i_o}$ correspondent respectivement aux mesures $Q_n\tilde{G}_{n,c}^{-1}$ et Q_n dans lesquelles on a fixé la i_0^{ieme} composante.

Pour s'en convaincre, on a le lemme suivant

Lemme 3.9.6 *Soit μ une mesure sur un espace S quelconque, définie à partir d'une autre mesure ν par*

$$\mu = \int_S \mu_s \nu(ds). \tag{3.9.3}$$

Alors, $\| \mu \|_{var} \leq \int_S \| \mu_s \| \nu(ds)$.

Démonstration : Considérons une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de S.

$$\sum_{i\in I} |\mu(A_i)| = \sum_{i\in I} | \int_S \mu_s(A_i)\nu(ds)|,$$

$$\sum_{i\in I} |\mu(A_i)| \leq \sum_{i\in I} \int_S |\mu_s(A_i)|\nu(ds).$$

En interchangeant les deux signes sommes, on obtient

$$\sum_{i\in I} |\mu(A_i)| \leq \int_S \sum_{i\in I} |\mu_s(A_i)|\nu(ds).$$

Ceci se traduit par une borne supérieure uniforme, à savoir

$$\sum_{i\in I} |\mu(A_i)| \leq \int_S \| \mu_s \| \nu(ds).$$

■

Dans ces conditions, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.9.7 *Pour g_c : $x \longmapsto x + c\varphi(x)$ et pour tout $(y_1, \ldots, y_{i_0-1}, y_{i_0+1}, \ldots, y_n)$, on a*

$$Q_n \tilde{G}^{-1}_{n,c}|_{\eta_i = y_i i \neq i_o} = (Q_n \tilde{G}^{-1}_{n,0}|_{\eta_i = y_i i \neq i_o}) g_c^{-1} = (Q_n|_{\eta_i = y_i i \neq i_o}) g_c^{-1}.$$

En utilisant le lemme précédent, dont la démonstration est proposée en annexe C, on obtient trivialement :

$$\|Q_n \tilde{G}^{-1}_{n,c} - Q_n\|_{var} \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|(Q_n|_{\eta_i = y_i i \neq i_o}) g_c^{-1} - Q_n|_{\eta_i = y_i i \neq i_o}\|_{var,\mathbb{R}} F_{i \neq i_0}(dy).$$

Il reste à estimer $\|(Q_n|_{\eta_i = y i i \neq i_o}) g_c^{-1} - Q_n|_{\eta_i = y i i \neq i_o}\|_{var,\mathbb{R}}$.
On utilise pour cela le lemme 3.9.3 avec

$$m = Q_n, \quad f = g_0 = Id, \quad f_n = g_{c_n}$$

où $\{c_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ est une suite convergeant vers 0.

1. $g_{c_p}(0) = c_p \varphi(0) \longrightarrow g_0(0) = 0, \quad p \to +\infty$ puisque φ est bornée ;
2. $\|g'_{c_p} - g'_0\|_{L^1(\mathbb{R})} = |c_p| \int_{\mathbb{R}} |\varphi'| d\lambda \longrightarrow 0$ quand $p \to +\infty$ car $\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$ puisque $\varphi' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$;
3. $g' = h'_0 = 1 \neq 0$.

On a donc

$$\|(Q_n|_{\eta_i = y i i \neq i_o}) g_c^{-1} - Q_n|_{\eta_i = y i i \neq i_o}\|_{var,\mathbb{R}} \longrightarrow 0, \quad p \to +\infty,$$

et on conclut, par la formule (3.9.2), que l'hypothèse 1 du théorème 0.0.2 est vraie.

Chapitre 4

Transport par une fonctionnelle de type intégrale

4.1 Transport de la loi du processus F-empirique

4.1.1 Résultats obtenus pour les processus F-empiriques

Théorème 4.1.1 *Soit $\{\xi_n^{(e)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus empirique, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, associé à une fonction de répartition F de densité p. Notons $P_n^{(e)} = \mathbb{P}\xi_n^{(e)-1}$ la loi de $\xi_n^{(e)}$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.*

Soient h et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

1. *h est absolument continue i.e. $\forall s \in \mathbb{R}$, $h(s) = h(0) + \int_0^s h'(t)\,dt$.*
2. *L'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

   (2.1) *h' est localement finie et $q \in L^1(\mathbb{R})$.*

   (2.2) *– q est bornée,*
   – h est localement bornée,
   – il existe $p > 0$ tel que :
   - ♦ *au voisinage de 0, $|h(t)| \leq C\,|t|^p$,*
   - ♦ *$\exists \delta > 0$ tel que $E\left|\xi_n^{(e)}\right|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$.*

Soit f la fonctionnelle de type intégrale définie parfaitement sur $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x(t))q(t)\,dt. \tag{4.1.1}$$

On suppose que :

3. *$h' \neq 0$ presque partout.*
4. *$\lambda\{x \in \mathbb{R} |\, q(x)p(x) \neq 0\} \neq 0$.*
5. *$\lambda\{s \in \mathbb{R} |\, h(s + \frac{1}{\sqrt{n}}) = h(s)\} = 0$.*

Alors, $P_n^{(e)} f^{-1} \ll \lambda$.
Un corollaire au théorème précédent peut être énoncé sous la forme suivante :

Corollaire 4.1.1 *(Processus empirique uniforme U(0,1))*
Soit $\{\xi_n^{(e)}(t);\, t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de processus empiriques uniformes, sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *de loi* $P_n^{(e)} = \mathbb{P}\xi_n^{(e)-1}$ *dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$. *On considère la fonctionnelle* f *sur* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$, *donnée par (4.1.1), avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.1.1 en remplaçant (4) par (4')*

$$\lambda\{t \in [0,1] \mid q(t) \neq 0\} \neq 0.$$

Alors, $P_n^{(e)} f^{-1} \ll \lambda$.

4.1.2 Discussion des hypothèses du théorème 4.1.1

◇ On suppose d'abord l'hypothèse (2.1) vérifiée. Comme h' est localement finie, h l'est aussi. Or, comme toute fonction x de $\mathbb{D}_n^e$ est bornée, la composée $h(x)$ est bornée par une constante C. On déduit de (4.1.1) $|f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} |q(t)|\, dt$. Il suit alors de l'hypothèse (2.1) que

$$|f(x)| \leq C\|q\|_{L^1} < +\infty.$$

La fonctionnelle f est donc bien définie avec les hypothèses considérées sur le couple (h, q).

◇ On suppose maintenant l'hypothèse (2.2) vérifiée. Soit $x \in \mathbb{D}_n^e$, par définition, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, tel que pour $t \in (x_i, x_{i+1}]$:

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}},$$

avec $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, $|h(t)| \leq C|t|^p$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que :
- $\forall 1 \leq i \leq n,\ x_i \in]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[$,
- $\forall t \in]-\infty, -T_\varepsilon] \cup [T_\varepsilon, +\infty[,\ |x(t)| < \varepsilon$.

Par définition de f, on a $|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |h(x(t))|\, |q(t)|\, dt$, on obtient donc

$$|f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} |h(x(t))|\, dt.$$

Décomposons l'intégrale de la façon suivante $\int_{\mathbb{R}} |h(x(t))|\, dt = I_1 + I_2 + I_3$ avec

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-T_\varepsilon} |h(x(t))|\, dt, \quad I_2 = \int_{-T_\varepsilon}^{T_\varepsilon} |h(x(t))|\, dt, \quad I_3 = \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} |h(x(t))|\, dt.$$

▲ Comme h est localement bornée, on a $I_2 < +\infty$.

Soit $r = \frac{1}{p} + \delta$, pour $|x| \geq T_\varepsilon$, on a $|x(t)| < \varepsilon$ d'où,

$$|h(x(t))| \leq C\,|x(t)|^p.$$

▲ On a $I_1 = \int_{-\infty}^{-T_\varepsilon} |h(x(t))|\,dt \leq C \int_{-\infty}^{-T_\varepsilon} |x(t)|^p\,dt$.

Or, sur $]-\infty, -T_\varepsilon]$, $x(t) = -\sqrt{n}F(t)$ donc, $I_1 \leq C(\sqrt{n})^p \int_{-\infty}^{-T_\varepsilon} |F(t)|^p\,dt$, et

$$F(t) = \mathbb{P}\{\xi_n^{(e)} \leq t\} \leq \mathbb{P}\{|\xi_n^{(e)}| \geq |t|\} \leq \frac{1}{|t|^r} E|\xi_n^{(e)}|^r.$$

Comme par l'hypothèse 2.2, $E|\xi_n^{(e)}|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$, on a $|F(t)| \leq C_1 \left|\frac{1}{t^r}\right|$. D'où

$$I_1 \leq C_2(\sqrt{n})^p \int_{-\infty}^{-T_\varepsilon} \left|\frac{1}{t^r}\right|^p dt < +\infty \text{ car } pr > 1.$$

▲ On a $I_3 = \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} |h(x(t))|\,dt \leq C \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} |x(t)|^p\,dt$.

Or, sur $[T_\varepsilon, +\infty[$, $x(t) = \sqrt{n}(1 - F(t))$ donc

$$I_3 \leq C(\sqrt{n})^p \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} |1 - F(t)|^p\,dt.$$

Or $1 - F(t) = P\{\xi_n^{(e)} > t\} \leq \frac{1}{|t|^r} E|\xi_n^{(e)}|^r$.

Comme $E|\xi_n^{(e)}|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$, on a $|1 - F(t)| \leq C_3 \left|\frac{1}{t^r}\right|$. D'où

$$I_3 \leq C_4(\sqrt{n})^p \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} \left|\frac{1}{t^r}\right|^p dt < +\infty \text{ car } pr > 1.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x(t))|\,dt = I_1 + I_2 + I_3 < +\infty.$$

Donc, $|f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} |h(x(t))|\,dt < +\infty$ et f est bien définie dans cette situation.

◇ Autres hypothèses du théorème 4.1.1. Les hypothèses 1 et 2 sont naturelles pour que f soit bien définie. Par contre, l'hypothèse 3 est *a priori* plus restrictive, mais indispensable. Notons qu'elle interdit, par exemple, les fonctions h à paliers, pour lesquelles la loi $P_n^{(e)} f^{-1}$ a au moins un atome. Par exemple si $h(x) = C$ pour $|x| \leq \delta$, on constate facilement qu'avec une probabilité positive, on a $f(\xi_n^{(e)}) = C \int_{\mathbb{R}} q\,d\lambda$: cela signifie que la loi $P_n^{(e)} f^{-1}$ a un atome en $C \int_{\mathbb{R}} q\,d\lambda$.

Les hypothèses 4 et 5 sont les hypothèses à vérifier en pratique. Notons que l'hypothèse 4 est fondamentale car si elle n'est pas vérifiée alors $f\left(\xi_n^{(e)}\right) = 0$ sur un ensemble de mesure positive, pour le F-processus empirique $\xi_n^{(e)}$.

4.1.3 Exemples

Nous proposons dans cette section quelques exemples pour lesquelles on vérifie les conditions sur les fonctionnelles du théorème 4.1.1. Bien sûr, les hypothèses

$$E|\xi_n^{(e)}|^{1/p+\delta} < +\infty$$

pour $\delta > 0$, et

$$\lambda\{x \mid p(x)\, q(x) \neq 0\} \neq 0.$$

devront être vérifiées dans des exemples encore plus précis. Rappelons que ces hypothèses sont immédiates si on considère le processus empirique uniforme.

Exemple 1 : Type norme $L^p(q\, d\lambda)$.

Considérons pour $p \geq 1$ la fonction réelle $h_p(s) = |s|^p$ et une fonction $q \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction f s'écrit alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p\, q(t)\, dt,$$

c'est à dire que si q est positive, on obtient la puissance p de la norme de x dans $L^p(q\, d\lambda)$ (cette fonction convient toujours pour $0 < p < 1$ mais ne s'interprète plus comme la norme $\|\cdot\|_p$).

Vérification des hypothèses du théorème 4.1.1

(1) La fonction h_p est absolument continue sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$h_p'(s) = ps^{p-1}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(s) + (-1)^p ps^{p-1}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(s).$$

(2.1) Par définition, on a $q \in L^1(\mathbb{R})$; de plus, il est clair que h_p' est localement finie. La fonction f est donc bien définie.

(3) L'expression de h_p' assure immédiatement que $h_p' \neq 0$ p.p.

(5) Cette hypothèse s'écrit $\left|s + \frac{1}{\sqrt{n}}\right|^p = |s|^p$, équation qui admet $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ comme solution.

Exemple 2 : Fonction h convexe, sans palier.

Supposons que la fonction h est une fonction convexe sans palier (c'est à dire qu'il n'existe pas d'intervalle sur lequel la fonction h est constante) et que $q \equiv 1$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x(t))\, dt.$$

Vérification des hypothèses du théorème 4.1.1 Comme h est convexe, les hypothèses 1 et (2.2) du théorème 4.1.1 sont évidentes. Comme h est sans palier, l'hypothèse 3 est vérifiée et l'équation $h(s + \frac{1}{\sqrt{n}}) = h(s)$ admet au plus une solution. L'hypothèse 4 avec $q = 1$ est immédiate.

Exemple 3 : Fonctions trigonométriques.

On considère dans ce paragraphe $h = \sin$ et $q \equiv 1$, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(x(t))\, dt.$$

Vérification des hypothèses du théorème 4.1.1 : D'abord h est évidemment absolument continue et bornée par 1. Au voisinage de 0, $|h(t)| = |\sin(t)| \leq C|t|$. L'hypothèse (3) est vérifiée car $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, équation qui n'admet qu'un nombre dénombrable de solutions, donc $h' \neq 0$ p.p. Puis, l'équation $h(t + \frac{1}{\sqrt{n}}) = h(t)$ possède également un nombre dénombrable de solutions, d'où la vérification de (5).

Exemple 4 : Fonctions indicatrices.

Considérons la fonction réelle $h = \mathbf{1}_A$ associée à $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, de mesure positive. Supposons également que la fonction q est positive et vérifie $\|q\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$. La fonction f s'écrit alors,

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x(t))\, q(t) dt,$$

c'est à dire, pour q positive, $f(x)$ désigne la norme $\|\mathbf{1}_A(x)\|^p_{L^p(qd\lambda)}$.
Dans une telle situation, l'hypothèse 3 n'est pas satisfaite ; on ne peut pas appliquer le théorème 4.1.1. On constate en fait que dans ce cas la loi $P_n^{(e)} f^{-1}$ a au moins un atome.

Conclusion : Les exemples 1, 2 et 3 nous montrent l'efficacité du théorème. Par contre, l'exemple 4 nous prouve que les hypothèses du théorème 4.1.1 sont vraiment indispensables.

4.1.4 Preuve du théorème 4.1.1

Le principe de la démonstration du théorème 4.1.1 repose sur la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. Le choix de la famille de transformations données en (3.3) va nous assurer la vérification des deux premières hypothèses de ce théorème, c'est l'objet des sections 3.9 et 3.8. La troisième hypothèse est étudiée en section 4.1.5.

Principe de la démonstration du Théorème 4.1.1

La démonstration du théorème 4.1.1 consiste en la vérification des hypothèses du résultat suivant, de nouveau énoncé afin de faciliter la lecture :

Théorème 0.0.2 : **[th. 5.2, [11]]** *Soient (X, d) un espace métrique, séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Supposons que pour P-presque chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x de x et une famille $\{G_c,\ c \in [0, \delta_x]\}$ de transformations de X tels que :*

1. $PG_c^{-1} \xrightarrow[c\to 0]{var} P$;
2. $G_c(x) \xrightarrow[c\to 0]{} x$ *en probabilité* P ;
3. *Pour P-presque chaque y de V_x, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel qu'avec $\phi_y(c) = f(G_c(y))$*

$$\text{presque chaque } c \in [0, \varepsilon_y], \quad \phi_y'(c) \text{ existe et est non nulle.}$$

Alors, $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Avant de démontrer le théorème 4.1.1, on a construit, dans le chapitre 3 une famille de transformations de $\mathbb{D}_n$ qui permet d'appliquer le théorème 0.0.2. Elle agit sur le support du processus empirique $\xi_n^{(e)}$, donné par la formule 1.1.1. Le support du processus est presque sûrement l'espace $\mathbb{D}_n^e$ défini comme l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ tel que $\forall t \in (x_i, x_{i+1}]$, on a, 1.1.4,

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}},$$

en supposant convenu que $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$ et que l'ensemble E_n est défini par (1.1.3) :

$$E_n = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_1 < \cdots < z_n \right\}.$$

Je rappelle que la famille de transformations agit sur la famille $\{y_1, \ldots, y_n\}$ des sauts d'une trajectoire y, et on a alors défini $G_{n,c}(y)$ par (3.3.2) :

$$G_{n,c}\, y(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad \text{si } t \in (\tilde{y}_{c,i}; \tilde{y}_{c,i+1}],$$

où

$$\tilde{y}_{c,i} = y_i + c\varphi(y_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Vérification des deux premières hypothèses du théorème 4.1.1

- L'hypothèse $PG_c^{-1} \xrightarrow[c\to 0]{var} P$ a été vérifiée en section 3.9.
- L'hypothèse $G_c(x) \xrightarrow[c\to 0]{} x$ en probabilité P fut quant à elle vérifiée en section 3.8.

Il reste à présent à vérifier la troisième hypothèse du théorème 4.1.1. Cette démonstration peut être effectuée de différentes manières, je propose, dans le cas "simple" du processus F-empirique, deux démonstrations pour montrer leur structure, bien evidemment pour les autres processus on se limitera à une seule démonstration.

4.1.5 Deux vérifications de l'hypothèse 3 du théorème 4.1.1

Vérification dite "classique"

Rappelons qu'on considère f de type intégrale donnée par

$$\forall y \in \mathbb{D}_n^e, \quad f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(y(t))\, q(t)\, dt.$$

On considère x fixé dans un ensemble $P_n^{(e)}$-presque sûr et y dans le voisinage $V(x)$ associé à x par le lemme 3.4.1. Notons toujours $\{y_1, \ldots, y_n\} \in E_n$ instants ordonnés des sauts de $y \in \mathbb{D}_n^e$, Δ_i les intervalles $]y_i, y_{i+1}]$ avec $y_0 = -\infty$ et $y_{n+1} = +\infty$. Comme sur chaque intervalle Δ_i, $y \in \mathbb{D}_n^e$ est bien connue, on peut préciser l'écriture de f de la façon suivante :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Delta_i} h(-\sqrt{n}F(t) + i/\sqrt{n})\, q(t)\, dt. \tag{4.1.2}$$

Commençons par évaluer $f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y))$ pour $y \in V(x)$ avec $q(y_{i_0}) \neq 0$ (*cf.* hypothèse 4 du th. 4.1.1).
Remarquons que par choix de $V(x)$, $\varphi(y_{i_0}) \neq 0$ (car pour $y \in V(x)$, d'après le lemme 3.4.1, $y_{i_0} \in \Delta_{i_0}$, intervalle où φ est strictement positive par définition).
Comme on s'intéresse à une limite pour $d \to 0$, on peut supposer que les intervalles $\delta_i(d) := [y_i + c\,\varphi(y_i), y_i + (c+d)\varphi(y_i)]$ sont disjoints (éventuellement, on échange les bornes de ces intervalles pour les avoir dans le bon sens).
Ainsi, $f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y)) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i(d)} \varepsilon_i \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt \tag{4.1.3}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, selon la position relative des points y_i et $y_i + c\,\varphi(y_i)$.
Revenons maintenant au calcul de $\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} \frac{f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y))}{d}$.

On déduit de l'expression (4.1.3) que $\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} I_n(h, q, y, c, d)$, avec

$$I_n(h,q,y,c,d) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i(d)} \varepsilon_i \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt.$$

On constate facilement que la limite de chaque terme de la somme précédente est donnée par : quand $d \to 0$,

$$\frac{1}{d} \int_{\delta_i(d)} h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) q(t)\, dt \longrightarrow q(y_i)\varphi(y_i) h\left(-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

En utilisant cette expression, on a alors $\phi'_y(c) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q(y_i)\varphi(y_i) \left[h\left(-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Or, rappelons que la fonction φ a été choisie de façon que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[, \\ > 0 & \text{si} \quad t \in]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[. \end{cases}$$

Comme $y \in V(x)$, on a $y_i \in \Delta_i$ et par choix de ces intervalles :

$$y_i \notin]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[\quad \text{et} \quad y_{i_0} \in]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[.$$

On a donc $\varphi(y_{i_0}) > 0$ *ssi* $i \neq i_0$ et il suit $\phi'_y(c) =$

$$\varepsilon_{i_0} q(y_{i_0})\varphi(y_{i_0}) \left[h\left(-\sqrt{n}F(y_{i_0} + c\,\varphi(y_{i_0})) + \frac{i_0}{\sqrt{n}}\right) - h\left(-\sqrt{n}F(y_{i_0} + c\,\varphi(y_{i_0})) + \frac{i_0 - 1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Notons à présent,

$$A_i = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) = h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right) \right\}.$$

Pour conclure, il suffit maintenant de voir $\lambda(A_{i_0}) = 0$. Or d'après l'hypothèse 5 du théorème 4.1.1 :

$$\lambda\{s \in \mathbb{R} \mid h(s + 1/\sqrt{n}) = h(s)\} = 0.$$

En utilisant alors le changement de variable $s(t) = -\sqrt{n}F(t)$, comme $F'(t) > 0$ p.p., on a $s'(t) < 0$ p.p. et donc $\lambda s^{-1} \ll \lambda$ d'où on déduit $\lambda(A_{i_0}) = 0$. On satisfait ainsi la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 et achève la preuve du théorème 4.1.1.

■

Vérification dite "directe"

On a vu précédement que $\forall c$ assez petit, $\forall y \in V_x$, si $\delta_i(c) := [y_i + c\varphi(y_i), y_{i+1} + (c)\varphi(y_{i+1})]$, on a

$$f(G_{n,c}(y))) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i(d)} \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt.$$

Or, par choix de la fonction φ, définie en section 3.1.1, on a en fait :

$$f(G_{n,c}(y))) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i}}^{n} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{j}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt +$$

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i + c\varphi(y_i)} \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt +$$

$$\int_{y_i + c\varphi(y_i)}^{y_{i+1}} \left[h\left(-\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right] q(t)\, dt.$$

Il est à remarquer que la somme $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i-1 \\ j\neq i}}^{n}$ ne dépend pas de c. Ainsi, en dérivant ce terme s'éliminera automatiquement. Par conséquent, on a

$$\phi'_y(c) = q(y_i)\varphi(y_i)\left[h\left(-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

On remarque que l'on a la même dérivée que dans la vérification "classique" et on conclut en utilisant les mêmes arguments que précédemment.

■

4.2 Transport de la loi du processus F-empirique pondéré

4.2.1 Résultats obtenus pour les processus F-empiriques pondérés

Le théorème suivant, relatif aux processus F-empiriques pondérés, est une généralisation du théorème 4.1.1, relatif aux processus F-empiriques.

Théorème 4.2.1 *Soit $\{\xi_n^{(p)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ un processus F-empirique pondéré, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, associés à une fonction de répartition F de densité p. Notons $P_n^{(p)} = \mathbb{P}\xi_n^{(p)-1}$ la loi de $\xi_n^{(p)}$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.*

Soient h et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

1. *h est absolument continue i.e. $\forall s \in \mathbb{R},\ h(s) = h(0) + \int_0^s h'(t)\,dt$.*
2. *L'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

   (2.1) *h' est localement finie et $q \in L^1(\mathbb{R})$.*

   (2.2) *- q est bornée,*
   - h est localement bornée,
   - il existe $p > 0$ tel que :

   ♦ *au voisinage de 0, $|h(t)| \leq C\,|t|^p$,*

   ♦ *$\exists \delta > 0$ tel que $E\left|\xi_n^{(p)}\right|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$.*

Soit f la fonctionnelle de type intégrale définie parfaitement sur $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ selon la formule (4.1.1) par :

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x(t))q(t)\,dt.$$

On suppose que :

3. *$h' \neq 0$ presque partout.*

4. $\lambda\{x \in \mathbb{R} \mid q(x)p(x) \neq 0\} \neq 0$.

5. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda\{s \in \mathbb{R} \mid h(s + c_{n,i}) = h(s)\} = 0$.

Alors, $P_n^{(p)} f^{-1} \ll \lambda$.

Dans le cas du processus pondéré uniforme, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.1 *(Processus empirique pondéré uniforme)*
Soit $\{\xi_n^{(p)}(t); t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ *un processus* F*-empirique uniforme, sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, de loi* $P_n^{(p)} = \mathbb{P}\xi_n^{(p)-1}$ *dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$*. On considère la fonctionnelle* f *sur* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$*, donnée par (4.1.1), avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.2.1 en remplaçant (4) par (4')*

$$\lambda\{t \in [0,1] \mid q(t) \neq 0\} \neq 0.$$

Alors, $P_n^{(p)} f^{-1} \ll \lambda$.

4.2.2 Discussion des hypothèses du théorème 4.2.1

- ◊ Les deux premières hypothèses assurent, comme dans le cas du processus F-empirique (voir section 4.1.2), la parfaite définition de la fonctionnelle f.
- ◊ Les hypothèses (3) et (4) sont les mêmes que celles du théorème 4.1.1.
- ◊ La seule hypothèse qui varie est, en fait, l'hypothèse (5) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda\{s \in \mathbb{R} \mid h(s + c_{n,i}) = h(s)\} = 0$. Elle tient compte de la pondération du processus. Comme on pourra le remarquer dans la démonstration, on peut réduire cette hypothèse à l'existence d'un indice i_0 vérifiant cette condition.

4.2.3 Exemples

Il convient de rééxaminer dans cette section les quelques exemples vus dans la section 4.1.3. De nouveau, il restera ensuite à vérifier les hypothèses $E|\xi_n^{(p)}|^{1/p+\delta} < +\infty$ pour $\delta > 0$ et $\lambda\{x \mid p(x)\, q(x) \neq 0\} \neq 0$.

Exemple 1 : Type normes $L^p(q\, d\lambda)$.
Considérons, de nouveau, pour $p \geq 1$, la fonctionnelle f qui s'écrit

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p\, q(t)\, dt.$$

De nouveau, les hypothèses (1), (2.1) et (3) sont immédiates.
L'hypothèse (5) s'écrit $|s + c_{n,i}|^p = |s|^p$, pour $c_{n,i} > 0$. Cette équation admet au plus deux solutions. Ainsi, la 5ième hypothèse est immédiate.

Exemple 2 : Fonction h convexe, sans palier.

Supposons que la fonction h est une fonction convexe sans palier (c'est à dire qu'il n'existe pas d'intervalle sur lequel la fonction h est constante) et que $q \equiv 1$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x(t))\, dt.$$

Vérification des hypothèses du théorème 4.2.1 Les hypothèses (1), (2.2), (3) et (4) ont déjà été vérifiées dans le cas du théorème 4.1.1. Comme h est sans palier, l'hypothèse (5) est vérifiée puisque l'équation $h(s+c_{n,i}) = h(s)$ admet au plus une solution.

La démonstration du théorème 4.2.1 est très semblable à celle du théorème 4.1.1. Pour cette raison, la démonstration est renvoyée en annexe E.1.

4.3 Transport de la loi du processus F-quantile

4.3.1 Résultat

Théorème 4.3.1 *Soit $\{\xi_n^{(q)}(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ un processus F-quantile, défini par (1.3.1), sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, associés à une fonction de répartition F de densité p. Notons $P_n^{(q)} = \mathbb{P}\xi_n^{(q)^{-1}}$ la loi de $\xi_n^{(q)}$ dans $\mathbb{D}([0,1])$.*

Soient h et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

1. *h est absolument continue i.e. $\forall s \in [0,1],\ h(s) = h(0) + \int_0^s h'(t)\, dt$.*
2. *L'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

   (2.1) *h' est localement finie et $q \in L^1([0,1])$.*

   (2.2) *– q est bornée,*
   - *h est localement bornée,*
   - *il existe $p > 0$ tel que :*
     - ♦ *au voisinage de 0, $|h(t)| \leq C\,|t|^p$,*
     - ♦ *$\exists \delta > 0$ tel que $E\left|\xi_n^{(q)}\right|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$.*

Soit f une fonctionnelle de type intégrale définie sur $\mathbb{D}([0,1])$ par la formule (4.1.1) :

$$\forall x \in \mathbb{D}([0,1]), \quad f(x) = \int_{[0,1]} h(x(t))q(t)\, dt.$$

On suppose que :

3. *$h' \neq 0$ presque partout.*
4. *la fonction Γ, définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\Gamma_k(a,c) = \int\limits_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} \sqrt{n}h'\left(-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}a + c\sqrt{n}\right) q(t)\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ *où elle est non nulle.*
Alors, $P_n^{(q)} f^{-1} \ll \lambda$.
Remarque : On remarque que l'hypothèse 4. n'est pas simple, d'un point de vue de l'écriture et de la vérification. Malheureusement, les processus quantiles ne m'ont pas permis de la formuler différemment.

4.3.2 Preuve du théorème 4.3.1 (Vérification classique)

On utilise de nouveau le théorème 0.0.2. Il est clair que le choix de la famille de transformations données en (3.3.4) va nous assurer la vérification des deux premières hypothèses de ce théorème, tel fut l'objet des sections 3.9 et 3.8.
Il ne reste alors qu'à vérifier la troisième hypothèse, à savoir :
Pour P-presque chaque y *de* V_x*, il existe* $\varepsilon_y > 0$ *tel qu'avec* $\phi_y(c) = f(G_c(y))$

$$\textit{pour presque chaque } c \in [0, \varepsilon_y], \quad \phi_y'(c) \textit{ existe et est non nulle.}$$

Rappelons qu'on considère f de type intégrale donnée :

$$\forall y \in \mathbb{D}_n, \quad f(y) = \int_{[0,1]} h(y(t))\, q(t)\, dt.$$

On considère x fixé dans un ensemble $P_n^{(q)}$-presque sûr et y dans le voisinage $V(x)$ associé à x par le lemme 3.4.1.
Notons $\{y_1, \ldots, y_n\} \in E_n$ les amplitudes des sauts de $y \in \mathbb{D}_n^q$ aux instants $\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.

Soit Δ_i les intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Comme sur chaque intervalle Δ_i, $y \in \mathbb{D}_n^q$ est bien connue, on peut préciser l'écriture de f de la façon suivante :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Delta_i} h(-\sqrt{n} F^{-1}(t) + \sqrt{n} y_{i+1})\, q(t)\, dt. \tag{4.3.1}$$

On rappele que, selon la formule (3.3.4), on choisit l'indice k correspondant aux hypothèses du théorème, on a : $\forall t \in \Delta_i$,

$$G_{n,c}(y)(t) \;=\; -\sqrt{n} F^{-1}(t) + \sqrt{n} y_{i+1} + c\sqrt{n} 1_{\Delta_k}(t).$$

Il convient alors de commencer par évaluer

$$I_d^c(y) \;=\; f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y))$$

pour $y \in V(x)$ avec $q(y_k) \neq 0$ (*cf.* hypothèse 4 du th. 4.3.1).

Ainsi,

$$I_d^c(y)) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Delta_i} \left[h\left(t_c^i + d\sqrt{n}1_{\Delta_k}(t)\right) - h\left(t_c^i\right)\right] q(t)\, dt \tag{4.3.2}$$

en posant $t_c^i = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}y_{i+1} + c\sqrt{n}1_{\Delta_k}(t)$.

Revenons maintenant au calcul de

$$\phi_y'(c) = \lim_{d\to 0} \frac{I_c^d(y))}{d}.$$

On déduit de l'expression (4.3.2) que

$$\phi_y'(c) = \int_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} \sqrt{n}h'\left(-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}y_{k+1} + c\sqrt{n}\right) q(t)\, dt$$

D'où $\phi_y'(c) = \Gamma_k(y_k, c)$. Or, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\Gamma_k(a, c) = \int_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} \sqrt{n}h'\left(-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}a + c\sqrt{n}\right) q(t)\, dt$$

et elle est continue sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et diffère de 0. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall c \in (\varepsilon, \varepsilon)$, $\phi_y'(c) \neq 0$.
On satisfait ainsi la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 et achève la preuve du théorème 4.1.1.

■

4.4 Transport de la loi du processus F-séquentiel

Considèrons le processus *F-séquentiels* $\{\xi_n^{(s)}(t),\ u \in [0,1[, t \in \mathbb{R}\}$, donné par (1.4.1) :

$$\xi_n^{(s)}(u,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nu]} \left[1_{[-\infty;t]}(\xi_i) - F(t)\right].$$

où $[nu]$ est la partie entière de nu.

Son support est l'ensemble $\mathbb{D}_n^s$ défini, section (1.4.4), comme l'ensemble des fonctions $x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ telles qu'il existe un $n-uplet$ $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\forall (u,t) \in [0,1[\times\mathbb{R}$, $\exists! j \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists! i \in \{1, \ldots, j\}$ vérifiant :

▷ $\frac{j-1}{n} \leq u < \frac{j}{n}$,

▷ $x_i^j \leq t < x_{i+1}^j$ avec $x_0^j = 0$ et $x_{j+1}^j = 1$ où les x_i^j sont définis en section (1.4.2),

alors, on a :

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}.$$

4.4.1 Résultats

Théorème 4.4.1 *Soit* $\{\xi_n^{(s)}(u,t),\ u \in [0,1[,\ t \in \mathbb{R}\}$ *un processus* F*-séquentiel, sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, associés à une fonction de répartition* F *de densité* p*.*

Notons $P_n^{(s)} = \mathbb{P}\xi_n^{(s)-1}$ *la loi de* $\xi_n^{(s)}$ *dans* $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$*.*
Soient h *et* q *deux fonctions définies respectivement sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $[0,1[\times\mathbb{R}$ *telles que*

1. h *est absolument continue.*
2. *L'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

   (2.1) h' *est localement finie et* $q \in L^1([0,1[\times\mathbb{R})$*.*

   (2.2) – q *est bornée sur* $[0,1[\times\mathbb{R}$*,*
   – h *est localement bornée,*
   – *il existe* $p > 0$ *tel que :*

   ♦ *au voisinage de* 0*,* $|h(t)| \leq C\,|t|^p$*,*

   ♦ $\exists\delta > 0$ *tel que* $E\left|\xi_n^{(s)}\right|^{\frac{1}{p}+\delta} < +\infty$*.*

Soit f *une fonctionnelle de type intégrale définie sur* $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$ *par :* $\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$*,*

$$f(x) = \iint_{[0,1[\times\mathbb{R}} h(x(u,t))q(u,t)\ d_2\lambda(u,t). \tag{4.4.1}$$

On suppose que :

3. $h' \neq 0$ *presque partout.*
4. *Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} q(u,t_0) = c_{t_0} \neq 0$*.*
5. $\lambda\{s \in \mathbb{R} |\ h(s+\frac{1}{\sqrt{n}}) = h(s)\} = 0$*.*

Alors, $P_n^{(s)} f^{-1} \ll \lambda$*.*
La démonstration du théorème 4.4.1 est directe. Pour cela, elle est renvoyée en annexe E.2.

Corollaire 4.4.1 *(Processus empirique uniforme U(0,1))*
Soit $\{\xi_n^{(s)}(t); t \in \mathbb{R}, u \in [0,1[\}$ *un processus séquentiel uniforme, sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, de loi* $P_n^{(s)} = \mathbb{P}\xi_n^{(s)-1}$ *dans* $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$*. On considère la fonctionnelle* f *sur* $\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$*, donnée par (4.4.1), avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.4.1 en supprimant (4), Alors,* $P_n^{(s)} f^{-1} \ll \lambda$*.*

4.4.2 Discussion des hypothèses du théorème 4.4.1

Avant toute chose, il est nécessaire de vérifier qu'avec les hypothèses du théorème, la fonctionnelle f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$. Notons que la fonction $h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne dépend pas directement de la variable u.

◇ *On suppose d'abord l'hypothèse (2.1) vérifiée.*
Comme h' est localement finie, h l'est aussi. Or, comme toute fonction x de $\mathbb{D}_n^s$ est bornée, la composée $h(x)$ est bornée par une constante C. On déduit de (4.4.1) que, $\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$, $|f(x)| \leq C \int_{[0,1[\times\mathbb{R}} |q(u,t)|\, dt$.
Il suit alors de l'hypothèse (2.1) que

$$|f(x)| \leq C\|q\|_{L^1([0,1[\times\mathbb{R})<+\infty.}$$

La fonctionnelle f est donc bien définie avec les hypothèses considérées sur le couple (h,q).

◇ *On suppose maintenant l'hypothèse (2.2) vérifiée.*
Etudions plus précisément la fonctionnelle $f\ :\ \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Par une simple décomposition sur les intervalles $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, on a : $\forall x \in \mathbb{D}_n^s$,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n})} \int_{\mathbb{R}} h\left(x(u,t)\right) q(u,t)\, d\lambda(u,t)$$

A présent, on utilise, sur chaque $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, les instants des sauts de $x \in \mathbb{D}_n^s$. En effet, par définition, il existe $(x_1,\ldots,x_n) \in E_n$, tel que sur $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, la trajectoire x ait exactement j sauts réordonnés $x_1^j,\ldots,x_j^j$ et l'on ait :
$\forall u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}), \forall t \in \left[x_i^j, x_{i+1}^j\right)$:

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}$$

avec $x_0^j = -\infty$, $x_{j+1}^j = +\infty$.
On a donc, $\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})$,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} h\left(x(u,t)\right) q(u,t)\, d_2\lambda(u,t).$$

Comme sur chaque $[x_i^j, x_{i+1}^j)$, x est parfaitement connue, on a alors :
$\forall u \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, $\forall t \in [x_i^j, x_{i+1}^j)$,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) q(u,t)\, d_2\lambda(u,t). \qquad (4.4.2)$$

Grâce à la formule (4.4.2), $\forall x \in \mathbb{D}_n^s$, on a

$$|f(x)| \leq \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \left|h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right| |q(u,t)|\, d_2\lambda(u,t).$$

Comme q est bornée, il vient alors :

$$|f(x)| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \left| h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \right| d_2\lambda(u,t).$$

Ainsi, facilement, on obtient grâce au théorème de Fubini,

$$|f(x)| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{j} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \left| h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \right| \lambda(dt) \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \lambda(du) \right).$$

Il vient alors

$$|f(x)| \leq \frac{C}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \left| h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \right| \lambda(dt).$$

En faisant le chemin à l'envers, on se rend compte que

$$\sum_{i=0}^{j} \int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \left| h\left(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \right| \lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}} |h(x(t))| \lambda(dt).$$

On obtient ainsi

$$|f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} |h(x(t))| \lambda(dt).$$

Pour conclure, il suffit de reprendre la démarche utilisée dans la discussion des hypothèses dans le cas du processus F-empirique. Donc, on obtient $|f(x)| < \infty$.

◇ Autres hypothèses du théorème 4.1.1.
L'hypothèse (3) interdit toute fonction avec un palier. C'est une hypothèse forte mais nécessaire. Les hypothèses 4 et 5 sont les hypothèses à vérifier en pratique.

4.4.3 Exemples

Nous proposons dans cette section quelques exemples pour lesquels on vérifie les conditions sur les fonctionnelles du théorème 4.1.1. On se limitera ici à vérifier les hypothèses 3, 4 et 5. L'hypothèse 2 dépend du processus étudié.

Exemple 1 : Type norme $L^p(q\, d\lambda)$.

Considérons pour $p \geq 1$ la fonction réelle $h_p(s) = |s|^p$ et une fonction $q \in L^1([0,1[\times\mathbb{R})$. La fonction f s'écrit alors

$$f(x) = \iint_{[0,1[\times\mathbb{R}} |x(u,t)|^p\, q(u,t)\, d\lambda_2(u,t),$$

c'est à dire que si q est positive, on obtient la puissance p de la norme de x dans $L^p(q\, d_2\lambda)$ (cette fonction convient toujours pour $0 < p < 1$ mais ne s'interprète plus comme la norme $\|\cdot\|_p$).

Vérification des hypothèses du théorème 4.4.1

(1) La fonction h_p est absolument continue sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$h_p'(s) = ps^{p-1}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(s) + (-1)^p ps^{p-1}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(s).$$

(2.1) Par définition, q est bornée sur $[0,1[\times\mathbb{R}$; de plus, il est clair que h_p' est localement finie. La fonction f est donc bien définie.

(3) L'expression de h_p' assure immédiatement que $h_p' \neq 0$ p.p.

(5) Cette hypothèse s'écrit $\left|s + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right|^p = |s|^p$, équation qui admet peu de solutions.

Exemple 2 : Fonction h convexe, sans palier.

Nous passons à une forme de généralisation de l'exemple 1, dans la mesure où, dans l'exemple 1, la fonction h est convexe, sans palier.

Supposons que la fonction h est une fonction convexe sans palier (c'est à dire qu'il n'existe pas d'intervalle sur lequel la fonction h est constante) et que $q \equiv 1$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R}), \quad f(x) = \iint_{[0,1[\times\mathbb{R}} h(x(u,t))\, d_2\lambda(u,t).$$

Vérification des hypothèses du théorème 4.4.1 Comme h est convexe, les hypothèses 1 et (2.2) du théorème 4.4.1 sont évidentes. Comme h est sans palier, l'hypothèse 3 est vérifiée et l'équation $h(s + \frac{1}{\sqrt{n-1}}) = h(s)$ admet au plus une solution. L'hypothèse 4 avec $q = 1$ est immédiate.

Exemple 3 : Fonctions indicatrices.

Considérons la fonction réelle $h = \mathbf{1}_A$ associée à $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, de mesure positive. Supposons également que la fonction q est positive et vérifie $\|q\|_{L^1([0,1]\times\mathbb{R})} < +\infty$. La fonction f s'écrit alors,

$$\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R}), \quad f(x) = \iint_{[0,1[\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x(u,t))\, q(u,t) d_2\lambda(u,t),$$

c'est à dire si q est positive, $f(x)$ désigne la norme $\|\mathbf{1}_A(x)\|_{L^p(qd_2\lambda)}$.
Dans une telle situation, l'hypothèse 3 n'est pas satisfaite ; on ne peut pas appliquer le théorème 4.1.1. On constate en fait que dans ce cas la loi $P_n^{(s)} f^{-1}$ a au moins un atome.

Conclusion : Les exemples 1 et 2 nous montrent l'efficacité du théorème. Par contre, l'exemple 3 nous prouve que les hypothèses du théorème 4.4.1 sont vraiment indispensables.

Chapitre 5

Transport par une fonctionnelle de type supremum

Dans ce chapitre, on étudie l'absolue continuité de la loi P_n d'un processus F-empirique, F-empirique pondéré ou F-quantile $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ transportés par une fonctionnelle $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de type supremum définie sur $X = [a, b]$ ou $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sup_t \Psi(x(t)). \tag{5.0.1}$$

On étudie également le cas de l'absolue continuité de la loi d'un processus F-séquentiel par une fonctionnelle $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de type supremum définie par :

$$f(x) = \sup_{(u,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \Psi(x(u,t)). \tag{5.0.2}$$

On supposera que Ψ est une fonction convexe, de dérivée presque partout non nulle.
Remarque : On aura noté que dans le cas du processus F-quantile on se limite à un intervalle $[a, b] \subset (0, 1)$ puisque les extrema d'une trajectoire peuvent atteindre l'infini. Par contre dans le cas où le support de F est borné, on peut considérer le cas général.

Nous allons étudier le cas particulier où $\Psi = id$. Nous étudierons ensuite la loi du couple $(\inf_{t\in\mathbb{R}} \xi_n(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} \xi_n(t))$, pour démontrer finalement le cas général.

5.1 Étude du cas particulier $f(x) = \sup x$

5.1.1 Transport d'un processus F-empirique

Considérons à nouveau un processus F-empirique $\xi_n^{(e)}$ de loi notée $P_n^{(e)}$.

Théorème 5.1.1 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$. Si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors, la loi $P_n^{(e)} f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(e)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

Démonstration du théorème 5.1.1

La démonstration réside en la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. La famille de transformations utilisées étant la même qu'en section 3, les deux premières hypothèses ont déjà été vérifiées en sections 3.8 et 3.9, pour les fonctionnelles de type intégrale.

Pour vérifier la troisième hypothèse du théorème 0.0.2, on utilise de nouveau la famille de transformations $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{D}_n^e$, donnée dans le chapitre 3. Pour cela, d'après le lemme 1.1.2, on choisit $x \in \mathbb{D}_n^e$ dont le maximum est atteint pour un unique indice i et on considère $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ définie à l'aide d'une fonction φ de x_i-transformation.
On a $\phi_y(c) = f(G_{n,c}(y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)$. Par définition, si elle existe, la dérivée est donnée par

$$\phi_y'(c) = \lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c+d}(y) - \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)\right].$$

Pour connaître l'image de $y \in \mathbb{D}_n^e$ par une transformation $G_{n,c}$, il suffit de spécifier les n instants de ses sauts. Rappelons qu'à $y \in \mathbb{D}_n^e$ est associé $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ et qu'alors y est donné par (1.1.4). Notons

$$\begin{aligned} &\forall i = 1, \ldots, n, \quad \hat{y}_{c,i} = x_i + c\,\varphi(y_i), \\ &\hat{y} = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}). \end{aligned}$$

Comme on ne s'intéresse qu'à $c \to 0$, les propriétés sur la conservation de l'ordre des $(\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$ restent valables.(*cf.* lemme 3.4.1).

Comme $G_{n,c}(x)$ est une fonction définie par ses sauts $\hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$, continue et décroissante sur chacun des intervalles $[\hat{y}_{c,i}, \hat{y}_{c,i+1}]$, on constate facilement que pour toute fonction $y \in \mathbb{D}_n$ pour tout réel c, on a $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n^e$ et

$$\phi_y(c) = \max_{1\le i\le n}\left\{-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right\}.$$

On a l'analogue du lemme 3.4.1 :
Lemme 5.1.1 *Pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son maximum pour le même indice que x pour c assez petit.*

Démonstration : Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j,\ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^e$ qui atteignent leur maximum en un unique point est $P_n^{(e)}$-presque sûr. Soient $x \in \mathbb{D}_n^e$ un tel élément et i l'indice tel que $f(x) = -\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}$.
Soit

$$\delta \le \frac{1}{2}\min_{j\neq i}\left((-\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}) - (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n})\right).$$

Par continuité de F en $x_1, \ldots, x_n$, soit $\delta_1 > 0$ tel que

$$|x - x_i| \le 2\delta_1 \Rightarrow |F(x) - F(x_i)| < \delta/\sqrt{n}.$$

Notons $U_{\delta_1} = \{y \in \mathbb{D}_n^e | \, |y_j - x_j| \leq \delta_1\}$, voisinage ouvert de x défini par le lemme 2.5.1.

D'après la preuve du lemme 3.4.1, pour tout $c \leq c_0 := \min_{1\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|/4M_\varphi$ où $M_\varphi = \sup_t |\varphi(t)|$, on a pour $y \in U_{\delta_1}$, $G_c y \in U_{2\delta_1}$.

On a d'abord $f(G_c y) = \max_{1\leq j\leq n}(-\sqrt{n}F(\tilde{y}_j) + j/\sqrt{n})$, puis, comme $|\tilde{y}_j - x_j| \leq 2\delta_1$:

$$\begin{aligned} &- \sqrt{n}F(\tilde{y}_j) + j/\sqrt{n} < \delta + (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n}) \\ &- \sqrt{n}F(\tilde{y}_i) + i/\sqrt{n} > -\delta + (-\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}) \geq \delta + (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n}), \end{aligned}$$

on en déduit que le maximum $f(G_c y)$ est atteint pour l'indice i.

■

Lemme 5.1.2 *Soient*

$$\begin{aligned} \Im &= \{t \in \mathbb{R} \big| \, F'(t) \text{ existe et } F'(t) > 0\}, \\ X_\Im &= \{x \in \mathbb{D}_n \big| \, \forall 1 \leq i \leq n, \, x_i \in \Im\}. \end{aligned}$$

La densité de la loi commune des ξ_i est donnée par

$$p(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t \in \Im \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $P_n^{(e)}$-presque sûrement, une fonction x de $\mathbb{D}_n^e$ n'a de sauts que sur l'ensemble $\Im$, c'est à dire que $P(X_\Im) = 1$.

Démonstration : La définition de p est claire, la seconde partie vient de :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}\{\xi_k \in \Im\} = \int_\Im p \, d\lambda + \int_{\Im^c} 0 \, d\lambda = 1.$$

Ainsi, les trajectoires sont presque sûrement à sauts appartenant à $\Im$.

■

Reprenons, à présent, la justification de la vérification de la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 : soit $y \in V(x)$ voisinage de x donné par le lemme 3.4.1, pour tout c réel, on a

$$\begin{aligned} \phi'_y(c) &= \lim_{d\to 0} \tfrac{1}{d} \left[\sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c+d}(y) - \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)\right], \\ \phi'_y(c) &= \lim_{d\to 0} \tfrac{1}{d} \left[\left\{-\sqrt{n}F(y_i + (c+d)\varphi(y_i)) + \tfrac{i}{\sqrt{n}}\right\} - \left\{-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \tfrac{i}{\sqrt{n}}\right\}\right], \end{aligned}$$

où i est l'indice commun pour lequel $G_{n,c+d}(y)$ et $G_{n,c}(y)$ atteignent leur maximum et φ est une fonction de x_i-transformation.

On a facilement,

$$\phi'_y(c) = -\sqrt{n} \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \left[F(y_i + (c+d)\varphi(y_i)) - F(y_i + c\,\varphi(y_i)) \right].$$

Un calcul élémentaire de limite permet de vérifier que pour tout $y \in V(x)$ et $c \in \mathbb{R}$

$$\phi'_y(c) = -\sqrt{n}\varphi(y_i) F'(y_i + c\,\varphi(y_i)).$$

Comme $y \in V(x)$, y_i est voisin de x_i avec $\varphi(x_i) = 1$, on peut supposer avoir choisi $V(x)$ dans la preuve du lemme 3.4.1 tel que $\varphi(y_i) > 0$ pour $y \in V(x)$. Puis, comme $F' > 0$ p.p., on a bien p.p., $\phi'_y(c) \neq 0$, le théorème 0.0.2 s'applique et donne $P_n f^{-1} \ll \lambda$, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.1.

■

5.1.2 Transport d'un processus F-empirique pondéré

Considérons à nouveau un processus F-empirique $\xi_n^{(p)}$ de loi notée $P_n^{(p)}$. On obtient le théorème suivant, démontré en annexe F

Théorème 5.1.2 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t)$. Si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la loi $P_n^{(p)}\, f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(p)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

5.1.3 Transport d'un processus F-quantile

Considérons un processus F-quantile $\xi_n^{(q)}$ de loi notée $P_n^{(q)}$. On démontrera, en annexe F, le théorème suivant :

Théorème 5.1.3 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t \in [a,b]} x(t)$. Si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la loi $P_n^{(q)}\, f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(q)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

5.1.4 Transport d'un processus F-séquentiel

Considérons un processus F-séquentiel $\xi_n^{(s)}$ de loi notée $P_n^{(s)}$. Le théorème suivant sera étudié en annexe F :

Théorème 5.1.4 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{u \in [0,1[\, t \in \mathbb{R}} x(u,t)$. Si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la loi $P_n^{(s)}\, f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(s)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

5.2 Absolue continuité du couple $(\inf \xi_n, \sup \xi_n)$

Avant de s'intéresser à l'étude de fonctionnelles *supremum* plus générales, on étudie d'abord dans cette section l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2

de la loi du couple

$$(\inf_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(e)}(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(e)}(t)),$$

du couple

$$(\inf_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(p)}(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(p)}(t)),$$

du couple

$$(\inf_{t\in[a,b]} \xi_n^{(q)}(t), \sup_{t\in[a,b]} \xi_n^{(q)}(t)), \quad pour \quad [a,b] \subset (0,1)$$

et du couple

$$(\inf_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} \xi_n^{(s)}((u,t)), \sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} \xi_n^{(s)}((u,t))).$$

Cette question est bien entendue intéressante en elle même et on a :

Théorème 5.2.1 *Soit ξ_n un des quatre processus précédents avec la loi F absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la loi de $(\inf \xi_n, \sup \xi_n)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2.*

Pour ne pas surcharger la lecture, on ne donnera ici la démonstration que dans le cas du processus empirique, on comprendra aisément que l'adaption aux cas des autres processus ne pose aucun problème, elles sont donc proposées en annexe G.

5.2.1 Outil de démonstration : superstructure en dimension supérieure.

La démonstration est fondée sur l'utilisation du résultat suivant, version bidimensionnelle du théorème 0.0.2 qu'on généraliserait de la même façon en dimension supérieure.

Théorème 5.2.2 *Soient X un espace polonais muni de sa tribu $\mathcal{B}_X$ et P une probabilité sur $(X, \mathcal{B}_X)$. Considérons f une fonctionnelle bidimensionnelle $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Supposons qu'il existe une famille $\{G_c,\ c \in [0,\delta]^2\}$ de transformations de X avec*

1. *$PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P$, $c \to 0$;*
2. *Pour P-presque chaque x de X, $\lambda^2_{[0,\delta]^2}\phi_x^{-1} \ll \lambda^2$ où $\phi_x(c) = f(G_c(x))$.*

Alors, $Pf^{-1} \ll \lambda^2$.

Démonstration : du théorème 5.2.2 Fixons $\varepsilon < \delta$ et considérons sur l'espace $X \times [0,\varepsilon]^2$ une probabilité et une fonctionnelle auxiliaires données par

$$Q_\varepsilon = P \times \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda^2_{[0,\varepsilon]^2}, \quad \tilde{f}(x,c) = f(G_c(x)).$$

On a facilement en posant $\phi_x(c) = f(G_c(x))$ pour $c \in [0,\varepsilon]^2$:

$$Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_X \lambda^2_{[0,\varepsilon]^2}\phi_x^{-1} P(dx).$$

D'après l'hypothèse 2 du théorème, on a $Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} \ll \lambda^2$. D'autre part, comme

$$Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} = \left(P \times \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda^2_{[0,\varepsilon]^2}\right) G_c^{-1} f^{-1},$$

on a

$$Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[0,\varepsilon]^2} \left(PG_c^{-1}\right) f^{-1}\, d\lambda^2_{[0,\varepsilon]^2}(c).$$

Il suit

$$\left\|Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} - Pf^{-1}\right\|_{var} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[0,\varepsilon]^2} \left\|\left(PG_c^{-1}\right) f^{-1} - Pf^{-1}\right\|_{var}\, d\lambda^2_{[0,\varepsilon]^2}(c)$$

or, l'hypothèse 1 du théorème assure que $\|PG_c^{-1} - P\|_{var} \to 0$, $c \to 0$.

D'où $Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$, $\varepsilon \to 0$.
Finalement, on a montré que $Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} \ll \lambda^2$ et que $Q_\varepsilon \tilde{f}^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.2.2.

■

Il est possible de modifier l'hypothèse 2 du théorème 5.2.2, de la façon suivante, plus facile à vérifier en pratique [11, th. 4.3] :

Corollaire 5.2.1 *En remplaçant l'hypothèse 2 du théorème 5.2.2 par :*
pour P-presque chaque $x \in X$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel qu'avec $\phi_x(c) = f(G_c(x))$, pour presque chaque $c \in [0, \varepsilon_x]^2$, $D\phi_x(c)$ existe au sens de Fréchet et est différent de 0 (i.e. $\det(D\phi_x) \neq 0$*),*
on a toujours

$$Pf^{-1} \ll \lambda^2.$$

Comme il peut être difficile de trouver une famille de transformations $\{G_c, c \in [0, \delta]^2\}$ définies globalement sur X, on a recours à une procédure de localisation (c'est ce résultat en fait qui généralise le théorème 0.0.2) :

Corollaire 5.2.2 *Soient X un espace métrique, séparable, muni de sa tribu $\mathcal{B}_X$, P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}_X)$ et $f : X \to \mathbb{R}^2$ une fonctionnelle donnée par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.*

Supposons que pour P-presque chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x et une famille $\{G_c, c \in [0, \delta_x]^2\}$ de transformations de X tels que :

1. $PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P$;
2. $G_c(x) \longrightarrow x$ *en probabilité ;*
3. *Pour P-presque chaque y de $V(x)$, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $\forall c \in [0, \varepsilon_y]^2$, $D\phi_y(c)$ existe et est non dégénérée, avec $\phi_y(c) = f(G_c(y))$.*

Alors, $Pf^{-1} \ll \lambda^2$.

Comme pour la démonstration du théorème 4.1.1, la preuve de ce résultat est fondée sur la décomposition de Pf^{-1} à l'aide d'un certain recouvrement $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X dû à la séparabilité de X et sur le lemme suivant, généralisation élémentaire du lemme 5.1 de [11].

Lemme 5.2.1 *Soient X un espace métrique, séparable, muni d'une tribu $\mathcal{B}_X$ et P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}_X)$. Supposons qu'une famille $\{G_c, c \in [0,\delta]^2\}$ de transformations de X vérifie :*

$$G_c(x) \longrightarrow x \quad et \quad PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P, \ c \to 0.$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}_X$,

$$P_A G_c^{-1} \xrightarrow{var} P_A.$$

Démonstration du corollaire 5.2.2.
Soit X_0 l'ensemble de mesure $P(X_0) = 1$ des $x \in X$ tel que les hypothèses 1, 2 et 3 soient vérifiées.
La séparabilité de X assure qu'il existe un recouvrement $\{V_k, k \in \mathbb{N}\}$ de X_0 par des ouverts disjoints. On a alors $Pf^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{V_k} f^{-1}$. D'après les hypothèses du théorème 5.2.2, le lemme 5.2.1 s'applique et donne $P_{V_k} G_c^{-1} \xrightarrow{var} P_{V_k}$, pour chaque k. On peut alors appliquer le théorème 5.2.2 pour avoir $P_{V_k} f^{-1} \ll \lambda$, ce qui achève la justification.

■

5.2.2 Choix de la famille de transformations

On étudie ici le cas du processus F-emprique, le cas des autres processus est renvoyé en annexe G. Soient $x \in \mathbb{D}_n^e$ donné par le lemme 1.1.2 pour lequel les maximum et minimum sont uniquement atteints. Notons $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les instants de ses sauts, i, j les indices distincts où ses maximum et minimum sont atteints.
Soient $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min_{2\le i\le n} |x_i - x_{i-1}|$ et φ_i^x, φ_j^x des fonctions de x_i- et x_j-transformations telles que dans la définition 3.1.1. avec des supports dans respectivement $[x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]$ et $[x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$.

Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit une transformation $\widehat{G}_{n,c}$ de $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{G}_{n,c}(t) = t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t). \tag{5.2.1}$$

On définit alors $\tilde{G}_{n,c}$ et $G_{n,c}$ de la même façon qu'en section 3 à partir de (5.2.1) :

$$\tilde{G}_{n,c} : E_n \longrightarrow E_n \quad \text{par} \quad \tilde{G}_{n,c} = \pi \circ \widehat{G}_{n,c}. \tag{5.2.2}$$

Notons pour $y \in \mathbb{D}_n$ avec $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ associé :

$$\hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}) = (y_1 + c_1\varphi_i^x(y_1) + c_2\varphi_j^x(y_1), \ldots, y_n + c_1\varphi_i^x(y_n) + c_2\varphi_j^x(y_n)) = \widehat{G}_{n,c}(y_1, \ldots, y_n),$$
$$\tilde{y}_c = (\tilde{y}_{c,1}, \ldots, \tilde{y}_{c,n}) = \tilde{G}_{n,c}(y_1, \ldots, y_n).$$

On définit finalement, la transformation $G_{n,c}$ par $G_{n,c} = I \circ \tilde{G}_{n,c} \circ I^{-1}$.

On voit de la même façon que pour le lemme 3.4.1 :

Lemme 5.2.2 *Pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son minimum et son maximum pour les mêmes indices que x pour c assez petit.*

5.2.3 Vérification de $P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n,\ c \to 0.$

On vérifie d'abord la condition 1 du théorème 0.0.2 :

En utilisant les expressions similaires aux formules (3.7.1), (3.7.2) correspondant à la nouvelle famille de transformations considérées et le lemme 3.9.2, on a :

$$\|P_n^{(e)} G_{n,c}^{-1} - P_n^{(e)}\|_{var} = \|\hat{P}_n \hat{G}_{n,c}^{-1} - \hat{P}_n\|_{var} \leq n\ \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1) + c_2\,\varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad (5.2.3)$$

Il reste à estimer $\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1) + c_2\,\varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}$, c'est à dire à évaluer la différence en variation entre les lois de ξ_1 et de $g_c(\xi_1)$ où maintenant $g_c(t) = x + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t)$. Notons que pour $0 < c < c_0 := (x_j - x_i) - 2\varepsilon_x$, on a

$$\varphi_j^x(t + c\varphi_i^x(t)) = \varphi_j^x(t).$$

On a alors

$$\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1) + c_2\,\varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var} = \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1) + c_2\varphi_j^x(\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1))} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad (5.2.4)$$

Or si $m_n \xrightarrow{var} m$ et $h_n \to h$, comme dans le lemme 3.9.3, on a $m_n h_n^{-1} \xrightarrow{var} m h^{-1}$, on applique alors ce lemme avec

$$m = \hat{P}_{\xi_1}, \quad m_n = \hat{P}_{\xi_1 + c_1^n \varphi_i^x(\xi_1)}, \quad h(t) = t, \quad h_n(t) = t + c_2^n \varphi_j^x(t)$$

où c_1^n, c_2^n convergent vers 0. Le deuxième membre de (5.2.4) tend vers 0 et par (5.2.3), on vérifie ainsi l'hypothèse 1 du corollaire 5.2.2 dans cette situation.

■

5.2.4 Vérification de $G_c(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$ en probabilité

A nouveau par définition des transformations G_c, il est clair que x et $G_c(x)$ ne diffèrent que sur un intervalle fini. On trouve donc N entier assez grand tel que $x(t) = G_c(x)(t)$ pour $t \notin [-N, N]$. Considérons la fonction $\sigma_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\sigma_c(t) = t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t). \quad (5.2.5)$$

Un calcul élémentaire donne : $\sigma_c'(t) = 1 + c_1(\varphi_i^x)'(t) + c_2(\varphi_j^x)'(t)$. De plus, par définition, on a $\varphi_k^x(t) = 0$ si $t \notin [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x] \cup [x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$,

$$\begin{array}{rcl} \sigma_c'(t) = 1 + c_1(\varphi_i^x)'t) & \text{si} & t \in [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) = 1 + c_2(\varphi_j^x)'(t) & \text{si} & t \in [x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) = 1 & \text{sinon.} & \end{array}$$

On vérifie ainsi facilement que σ_c est une fonction strictement croissante pour chacune des coordonnées c_1 et c_2 et continue. Puis $\sigma_c(-N) = -N$, $\sigma_c(N) = N$ car N est choisi assez grand pour contenir les supports de φ_i et φ_j (ce qui donne $\varphi_i(\pm N) = 0$, $\varphi_j(\pm N) = 0$). On a alors $\sigma_c \in \Lambda_N$ et il suit de la définition de la distance d_N :

$$\begin{aligned} d(G_{n,c}(x), x) &= \inf_{\rho \in \Lambda_N} \left[\sup_{t \in [-N,N]} |x(\rho(t)) - G_{n,c}(x(t))| + \sup_{t \in [-N,N]} |t - \rho(t)| \right] \\ &\leq \sup_{t \in [-N,N]} |x(\sigma_c(t)) - G_{n,c}(x(t))| + \sup_{t \in [-N,N]} |t - \sigma_c(t)|. \end{aligned}$$

On a alors facilement

$$|x(\sigma_c(t)) - G_{n,c}(x(t))| = 0 \quad \text{et} \quad |t - \sigma_c(t)| = |c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t)|$$

donc

$$\begin{aligned} |t - \sigma_c(t)| &\leq |c_1||\varphi_i^x(t)| + |c_2||\varphi_j^x(t)| \\ &\leq |c_1|M_i + |c_2|M_j \end{aligned}$$

où $M_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_k^x(t)|$ pour $k = i, j$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(G_{n,c}(x), x) \longrightarrow 0$, $c \to 0$.

■

5.2.5 Vérification de la troisième hypothèse du corollaire 5.2.2

On considère la fonctionnelle bidimensionnelle

$$f(x) = \big(\inf_{t \in \mathbb{R}} x(t),\ \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t)\big),$$

on a alors par définition de $G_{n,c}$ en (5.2.2) et pour $y \in V(x)$, voisinage donné par le lemme 5.2.2 :

$$\phi_y(c) = f(G_{n,c}y)$$

$\phi_y(c) = (\inf_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c}y(t),\ \sup_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c}y(t))$,
$\phi_y(c) = \Big(\min_{1 \leq k \leq n} -\sqrt{n}F(y_k + c_1\varphi_i^x(y_k) + c_2\varphi_j^x(y_k)) + (k-1)/\sqrt{n}$,

$$\max_{1\le k\le n} -\sqrt{n}F(y_k + c_1\varphi_i^x(y_k) + c_2\varphi_j^x(y_k)) + k/\sqrt{n}\Big),$$

$$\phi_y(c) = \big(-\sqrt{n}F(y_i + c_1\varphi_i^x(y_i)) + (i-1)/\sqrt{n},\quad -\sqrt{n}F(y_j + c_2\varphi_j^x(y_j)) + j/\sqrt{n}\big).$$

Les min et max de $G_{n,c}y$ sont en effet atteints pour les mêmes indices i et j que pour x, pour $y \in V(x)$ et c assez petit d'après le lemme 5.2.2. On en déduit facilement le jacobien de la dérivée :

$$|D\phi_y(c)| = \varphi_i^x(y_i)\,\varphi_j^x(y_j)\,p(y_i + c_1\varphi_i^x(y_i)\,p(y_j + c_2\varphi_j^x(y_j))$$

où on rappelle que p désigne la densité de la loi des variables considérées ξ_i.
Quitte à restreindre $V(x)$, on peut supposer que

$$y_i \in (x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x) \quad \text{et} \quad y_j \in (x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x),$$

on a alors $\varphi_i^x(y_i)\,\varphi_j^x(y_j) \neq 0$. Puis comme $p' > 0$ presque partout, on a bien pour presque chaque c

$$|D\phi_y(c)| \neq 0.$$

Finalement, on a vérifié toutes les hypothèses du corollaire 5.2.2 qui s'applique et achève de prouver le théorème 5.2.1.

■

5.3 Cas général des fonctionnelles $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Psi(x(t))$

Nous étudions à présent le cas d'une fonctionnelle de type supremum plus générale.

Théorème 5.3.1 *Soit $f : \mathbb{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Psi(x(t))$ où Ψ est une fonction convexe vérifiant $\Psi' \neq 0$ p.p. Alors, la loi $P_n f^{-1}$ de $f(\xi_n)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ où ξ_n représente l'un des quatre processus étudiés.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème 5.2.1 et les lemmes élémentaires suivants. On se convainc facilement du premier :

Lemme 5.3.1 *Soit f la fonctionnelle du théorème 5.3.1. Alors, pour tout $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$, on a*

$$f(x) = \max(\Psi(x_-), \Psi(x_+))$$

où $x_- = \inf_{t\in\mathbb{R}}(x(t))$ et $x_+ = \sup_{t\in\mathbb{R}}(x(t))$.

Lemme 5.3.2 *La loi du couple $(\Psi(\xi_{n,-}), \Psi(\xi_{n,+}))$ est absolument continue par rapport à λ^2.*

Démonstration : comme $\Psi' \neq 0$ p.p., l'application du plan $k : (t_1, t_2) \to (\Psi(t_1), \Psi(t_2))$ est non dégénérée, on a donc $\lambda_2 k^{-1} \ll \lambda_2$. Il suit alors de l'absolue continuité du couple $(\xi_{n,-},\ \xi_{n,+})$ donnée par le théorème 5.2.1 celle recherchée :

$$P_{\xi_{n,-},\xi_{n,+}}(\Psi, \Psi)^{-1} \ll \lambda^2.$$

■

Lemme 5.3.3 *Soit $Q \ll \lambda^2$, alors avec $f(x,y) = \max(x,y)$, $Qf^{-1} \ll \lambda$.*
Démonstration : Ce lemme se démontre simplement en remarquant que pour $Z = max(X,Y)$ et un ensemble $\mathcal{A}$ de mesure nulle, on a $P\{Z \in \mathcal{A}\} \leq P\{X \in \mathcal{A}\} + P\{Y \in \mathcal{A}\}$. Ce qui est evidemment nulle.

■

Demonstration du théorème 5.3.1 Comme $f(\xi_n) = \max(\Psi(\xi_-),\ \Psi(\xi_+))$, l'absolue continuité de la loi de $f(\xi_n)$ suit des lemmes 5.3.2 et 5.3.3 en remarquant que si $Q \ll \lambda^2$ alors $Qf^{-1} \ll \lambda$. On a donc

$$Pf^{-1} \ll \lambda.$$

■

Quelques perspectives sur le processus F-empirique.

Les théorèmes 4.1.1, 5.1.1 et 5.3.1 donnent l'absolue continuité des lois des transports du processus empirique $P_n^{(e)} f^{-1} \ll \lambda$.

Comme on l'indiquait dans l'introduction de ce travail, on se trouve alors dans une situation particulièrement intéressante pour la recherche de convergences en variation de ces lois. Elles donnent en effet, dans ce cas des théorèmes locaux qui renforcent les résultats du type Donsker-Prokhorov pour le pont brownien.

Commençons par préciser ces résultats :

Définition 5.3.1 (F-mouvement brownien sur $[0,1]$)
Étant donnée une fonction de répartition F à support $[0,1]$ et nulle en 0, un F-mouvement brownien W sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur $[0,1]$ est le processus gaussien, centré, à accroissements indépendants et de variance $F(t)$.

Il est facile de vérifier que ce F-mouvement brownien a des propriétés similaires à celles du mouvement brownien standard.

Définition 5.3.2 (F-pont brownien sur $[0,1]$)
Ce processus est le processus centré gaussien indexé sur $[0,1]$ de covariance $\Gamma(s,t) = F(s \wedge t) - F(s)F(t)$.

On voit habituellement ce processus par $\overset{\circ}{W}_t = W_t - tW_1$ où W est un mouvement brownien. Il est clair que $\overset{\circ}{W}_0 = \overset{\circ}{W}_1 = 0$.

Définition 5.3.3 (F-pont brownien sur $\mathbb{R}$)
De façon classique on définit un F-pont brownien $\overset{\circ}{W}_F$ sur $\mathbb{R}$ comme un « étirement » d'un pont brownien sur $[0,1]$, c'est à dire que l'on peut utiliser une bijection entre $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ pour obtenir à partir d'un F-pont brownien sur $[0,1]$ à un F-pont brownien sur $\mathbb{R}$. C'est le seul processus gaussien centré de covariance $\Gamma(s,t) = F(s \wedge t) - F(s)F(t)$.

Le changement de temps de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, déjà vu en section 1.1, permet de transformer un F-processus empirique en un processus empirique uniforme. Ce changement de temps permet également de passer d'un F-pont brownien $\overset{\circ}{W}_F$ à un pont brownien uniforme $\overset{\circ}{W}$. On en déduit alors tous les résultats utiles sur les ponts browniens en particulier l'analogue du théorème de Donsker-Prokhorov (*cf.* [2, th.16.4]),

$$P_n^{(e)} \Rightarrow \overset{\circ}{W}_F, \quad n \to +\infty, \tag{5.3.1}$$

où on rappelle que $P_n^{(e)}$ désigne la loi d'un F-processus empirique.

En partant de tels types de convergences faibles de processus, Davydov renforce les convergences des fonctionnelles stochastiques associées Pf^{-1} pour de nombreuses fonctionnelles [11, §18], pour des processus polygonaux. L'objectif d'un travail à venir est de

généraliser ces résultats dans le cadre des processus empiriques en renforçant (5.3.1) par un théorème de type Donsker-Prokhorov

$$P_n^{(e)} f^{-1} \xrightarrow{var} \overset{\circ}{W}_F f^{-1} \tag{5.3.2}$$

pour f dans une large classe de fonctionnelles. Compte tenu des résultats des théorèmes 4.1.1, 5.1.1 et 5.3.1, on obtient en fait la convergence des densités dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{dP_n^{(e)} f^{-1}}{d\lambda} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} \frac{d\overset{\circ}{W}_F f^{-1}}{d\lambda}.$$

Deuxième partie

Etude des processus ponctuels

Chapitre 6

Résultats préliminaires sue les processus ponctuels

Soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, de loi F. On suppose que F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m et on notera q la densité de F.
On associe à ces variables aléatoires deux processus *ponctuels* :

- les **processus empiriques** :

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.0.1}$$

- les **processus empiriques dilatés (ou binomiaux)** :

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.0.2}$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation telles que $b_n \longrightarrow \infty$ et $\delta_{\{a\}}$ représente la mesure de *Dirac* au point a, sur $\mathbb{R}^m$.

On étudie les lois des fonctionnelles $f(\epsilon_n)$ ou $f(\beta_n)$, définies sur les réalisations des processus ϵ_n et β_n. Avant tout, on pose la question de l'absolue continuité de ces lois et on l'obtient dans le chapitre 7, théorème 7.0.2, pour les fonctionnelles **homogènes**, c'est à dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(cx) = c^p f(x)$. Cette classe comporte entre autres les fonctionnelles caractérisant diverses propriétés géométriques d'une configuration de points $\varkappa_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ ou de ses différentes enveloppes convexes, notées $\mathcal{C}_l(\varkappa)$.

Il est bien connu, [16] proposition 3.21, page 154, que sous la condition dite de **variation régulière** sur F (voir **(VR)**, **??**), à savoir : *Il existe une suite de constantes* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ *croisante et tendant vers* ∞, *il existe* $\alpha > 0$ *et une mesure finie* σ *sur* $\mathcal{S}^{d-1}$ *telle que pour chaque ensemble* $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}^{d-1}}$ *avec* $\sigma(\partial B) = 0$, *et* $\forall r > 0$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{P}\{\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \in B \ , \ \|\xi_1\| > rb_n\} \ = \ \sigma(B)r^{-\alpha}.$$

(i) Pour $\alpha \in (0,2)$, la condition **(VR)** est celle de l'appartenance de F au domaine d'attraction d'une loi α-stable.

(ii) La condition **(VR)** implique que $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$ où h est une fonction à variation *lente*.

(iii) Sous la condition de **(VR)** les processus β_n convergent faiblement vers un processus ponctuel poissonnien Π_α (Riesnick, [16]), c'est à dire

$$\beta_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\alpha \tag{6.0.3}$$

où Π_α est un processus ponctuel poissonien de mesure de contrôle $m_\alpha = \sigma \times \mu_\alpha$, voir (8.0.3) et μ_α est une mesure σ-finie sur $(0,\infty)$ de densité $\frac{d\mu_\alpha}{d\lambda}(x) = \alpha x^{-1-\alpha}$.

Cette convergence explique notre intérêt à la deuxième question sur la convergence forte, c'est à dire en variation totale des lois de $f(\beta_n)$ vers celle de $f(\Pi_\alpha)$.

De plus, si f admet une densité notée p_n et vérifie parallèlement la convergence suivante

$$\mathcal{P}_{f(\beta_n)} \overset{var}{\to} \mathcal{P}_{f(\Pi_\alpha)}, \quad n \to \infty \tag{6.0.4}$$

alors, la loi limite sera aussi de densité notée p.

De plus, de (6.0.4) découle la convergence des densités :

$$p_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} p, \quad n \to \infty, \tag{6.0.5}$$

c'est à dire, on obtient un théorème de limite locale pour les fonctionnelles $f(\beta_n)$.
On étudie ce problème dans la section 8 où l'on démontre (6.0.4) sous la **condition de variation régulière forte** sur F, (voir ((**FVR**), (8.0.7)). Des exemples simples montrent que cette dernière condition est vraiment nécessaire.

Par la suite, on notera $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \lambda^m)$.

Chapitre 7

Absolue continuité du transport par une fonctionnelle homogène

Les processus *empiriques* sont donc définis soit par ϵ_n, (6.0.1), soit par β_n, (6.0.2). Toutefois, dans cette section, n étant fixé, le rôle de b_n est moindre, on remarque que ni $b_n = 1$ et ni le facteur $\frac{1}{n}$ n'ont d'effet sur la continuité absolue, on ne les prendra alors pas en compte pour simplifier les calculs. De plus, comme les fonctionnelles étudiées sont homogènes, il est clair que les résultats obtenus sont valables pour ces trois définitions de processus ponctuels. On considérera donc le processus suivant :

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}. \tag{7.0.1}$$

Sous l'hypothèse de l'absolue continuité de F par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m sur $\mathbb{R}^m$, ce processus sera un processus ponctuel simple de support $\varkappa_n$ contenant *p.s.* exactement n points. On utilise ici et dans la suite la terminologie et les notions de la théorie standard des processus ponctuels (voir [16], chapitre 3). Il nous sera commode de choisir comme espace de phase $E = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et comme espace de configurations

$$\mathcal{K} = \{\varkappa \mid \forall \varepsilon > 0 \;\; card\{\varkappa \cap \mathcal{S}(0,\varepsilon)^c\} < \infty\} \tag{7.0.2}$$

où $\mathcal{S}(0,\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε.

On note $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ la sous famille de configurations finies de cardinalité n. Il est clair que la loi $\mathbb{P}_n$ du processus γ_n est portée par $\mathcal{K}_n$.

Définition 7.0.4 *Considérons une configuration $\varkappa = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{K}$ et $a > 0$. On définit alors la configuration $a\varkappa$ par $a\varkappa = (ax_1, ax_2, \dots,)$.*

Définition 7.0.5 *La fonction $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$) est dite homogène de degré $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\forall a > 0$, $\forall \varkappa \in \mathcal{K}$,*

$$f(a\varkappa) = a^p f(\varkappa). \tag{7.0.3}$$

Dans la suite, on ne considère que des fonctions f homogènes continues.

Voici quelques exemples de fonctions homogènes :
En notant $\mathcal{C}(\varkappa)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\varkappa = \{x_1, \ldots, x_n\}$,

- le *diamètre* de $\varkappa$ défini par :

$$\phi(\varkappa) = \sup_{x,y\in\varkappa} (d(x,y)) = \max_{i,j}(d(\xi_i, \xi_j)). \tag{7.0.4}$$

  On a $p = 1$.

- le *volume* de $\varkappa$ est défini par :

$$V(\varkappa) = \lambda^m(\mathcal{C}(\varkappa)). \tag{7.0.5}$$

  On a $p = m$.
- L'*aire de la surface* de $\varkappa$ est définie par

$$S(\varkappa) = \lambda^{m-1}(\partial\mathcal{C}(\varkappa)). \tag{7.0.6}$$

  Ici, ∂A est la frontière de A. On a $p = m - 1$.

Théorème 7.0.2 *Soit un processus empirique défini sur $\mathbb{R}^m$, par (7.0.1) :*

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\xi_i\}}.$$

de loi P_n sur $\mathcal{K}_n$. Soit $f : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré $p \neq 0$ telle que $f(x) \neq 0$, P-p.p.
Alors, $P_n f^{-1} \ll \lambda$ i.e. la loi $P_n f^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Les conditions à l'absolue continuité de la loi $P_n f^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ se limitent à deux hypothèses simples :
(i) $f(x) \neq 0$ P_n-p.p.
(ii) $p \neq 0$.

- L'hypothèse (i) est vraiment très naturelle. En effet, s'il existait un ensemble de mesure non nulle pour lequel on ait $f(x) = 0$, alors, la loi aurait un atome.

- L'hypothèse (ii) semble plus particulière, toutefois cette condition est indispensable : en effet, supposons $p = 0$ et f est continue en 0 dans le sens suivant :

$$|f(\varkappa_1) - f(\varkappa_2)| \to 0$$

  si $d_H(\varkappa_1; \varkappa_2) \to 0$, où l'on suppose que d_H est la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}$.

  Rappel : Distance de Hausdorff *Soient A et B deux ensembles fermés compacts. Posons $A^\epsilon = \{x \mid d(x, A) < \epsilon\}$ où $d(x, A) = \inf\{|x - y| \mid y \in A\}$.*

Posons alors :

$$\epsilon_1 = \inf\{\epsilon \mid B \subset A^\epsilon\},$$

$$\epsilon_2 = \inf\{\epsilon \mid A \subset B^\epsilon\}.$$

On définit la distance de Haussdoff entre A et B par :

$$d_H(A, B) = \epsilon_1 \vee \epsilon_2 \tag{7.0.7}$$

Revenons à présent à l'exemple :
Soit $\mathcal{S}^1 = \{\varkappa \in \mathcal{K}_n \mid d_H(0; \varkappa) = 1\}$. Pour tout $\varkappa \in \mathcal{K}_n$, il existe $\overline{\varkappa} \in \mathcal{S}^1$ telle que $f(\varkappa) = \|\varkappa\|^p f(\overline{\varkappa})$ par homogénéïté de f (Il suffit de prendre $\overline{\varkappa} = \frac{\varkappa}{\|\varkappa\|}$). Comme $p = 0$, on obtient alors $f(\varkappa) = f(\overline{\varkappa})$. Par continuité de f en 0, il devient alors évident que f est constante sur $\mathcal{K}_n$. La loi $P_n f^{-1}$ est donc dégénérée.

Si l'on supprime l'hypothèse de continuité, le même raisonnement permet de choisir une fonction f sur $\mathcal{S}^1$ non constante. Le débat sur l'absolue continuité de $P_n f^{-1}$ devient moins évident.

L'application directe du théorème 7.0.2 aux exemples cités ci-dessus, nous donne aisément le corollaire suivant :

Corollaire 7.0.1 *Soit la fonction f définie par une des relations (7.0.4), (7.0.5) ou (7.0.6). Alors, $P_n f^{-1} \ll \lambda$.*

Démonstration du théorème 7.0.2. Pour démontrer le théorème 7.0.2, on va revenir à l'échantillon $(\xi_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. On a en effet le diagramme simple suivant :

$$\widetilde{\mathbb{R}^{nm}} \xrightarrow{\pi_n} \mathcal{K}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \longmapsto \varkappa \longmapsto f(\varkappa)$$

où $\widetilde{\mathbb{R}^{nm}}$ est l'espace $\mathbb{R}^{nm}$ privé des "diagonales" $\{x_i = x_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$. Ces diagonales sont négligeables puisque F est diffuse. L'application $\pi_n : \widetilde{\mathbb{R}^{nm}} \to \mathcal{K}_n$ est la projection naturelle qui fait correspondre à l'échantillon $(\xi_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ la configuration possible $\varkappa_n$.

Si l'on note Q_n la loi du vecteur $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, on a bien évidemment

$$P_n = Q_n \pi_n^{-1}. \tag{7.0.8}$$

$$P_n f^{-1} = Q_n \pi_n^{-1} f^{-1} = Q_n (f \circ \pi_n)^{-1}. \tag{7.0.9}$$

Puisque l'homogénéïté de f implique celle de $f \circ \pi_n$, notre théorème découle directement du théorème suivant :

Théorème 7.0.3 *Soit Q une loi sur $\mathbb{R}^m$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_m. Soit $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction homogème continue, de degré $p \neq 0$, telle que $g(x) \neq 0$, $Q - p.p.$ Alors, $Qg^{-1} \ll \lambda$.*

Démonstration du théorème 7.0.3. Elle s'effectue par la vérification des conditions du théorème 0.0.2 (th. 5.2, [11]) dont l'énoncé est rappelé ci-dessous, pour la commodité du lecteur.

Théorème 0.0.2 (th. 5.2, [11]) *Soient (X, d) un espace métrique, séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, Q une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$ et $g : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Supposons que pour Q-presque chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x de x et une famille $\{G_c,\ c \in [0, \varepsilon_x]\}$ de transformations de X tels que :*

1. $QG_c^{-1} \xrightarrow[c \to 0]{var} Q$;
2. $G_c(x) \xrightarrow[c \to 0]{} x$ *en probabilité* Q ;
3. *Pour Q-presque chaque y de V_x, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel qu'avec $\phi_y(c) = g(G_c(y))$ pour presque chaque $c \in [0, \varepsilon_y]$, $\phi'_y(c)$ existe et est non nulle.*

Alors, $Qf^{-1} \ll \lambda$.

Le moment clef de ce théorème est l'existence d'une famille possédant des propriétés spéciales. Soit $c > 0$. On construit alors la transformation $G_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ par :

$$G_c(x) = (1 + c)x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{7.0.10}$$

Autrement dit, G_c est l'homothétie de rapport $1 + c$.
Comme voisinage, on peut choisir $V_x = \mathbb{R}^m$. Il reste à présent à vérifier les trois hypothèses du théorème 0.0.2.

- La vérification de 2 est immédiate dans la mesure où G_c est définie comme une homothétie de $\mathbb{R}^m$ de rapport $1 + c$.
- La vérification de 1 utilise le lemme élémentaire suivant :

  Lemme 7.0.4 *La loi de QG_c^{-1} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m, de densité $q_c(x) = (\frac{1}{1+c})^m\, q(\frac{x}{1+c})$.*

  Remarque : La démonstration de la convergence en variation de QG_c^{-1} vers Q revient alors à démontrer la convergence dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1)$ des densités, soit plus précisément, à montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left| (\frac{1}{1+c})^m\, q(\frac{t}{1+c}) \ - \ q(t) \right| \lambda^m(dt) \underset{c \to 0}{\to} 0.$$

  Le lemme suivant permet de vérifier ce résultat.

  Lemme 7.0.5 *Pour toute fonction g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1)$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |T_c g(t) \ - \ g(t)|\, \lambda^m(dt) \underset{c \to 0}{\to} 0,$$

en notant $T_c\, g(t) = (\frac{1}{1+c})^m\, g(\frac{t}{1+c})$.

Démonstration du lemme. On établit ce résultat d'abord par un calcul direct pour $g(x) = \prod_{i=1}^m 1_{[a_i,b_i)}(x_i)$, pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Le lemme devient alors immédiat dans le cas de fonctions g simples, de la forme de produits des fonctions $\sum_{k=1}^N c_k 1_{[a_k,b_k)}$. Le cas d'une fonction g de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ découle du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_ε simple telle que $\|g - g_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$ ou l'on note $\|\cdot\|_1$ la norme $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m\ \lambda^m)$. Il est évident que par isométrie de l'opérateur T_c on obtient

$$\|T_c g - g\|_1 \leq \|T_c g - T_c g_\varepsilon\|_1 + \|T_c g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g\|_1 < 2\varepsilon + \|T_c g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_1$$

En appliquant le cas des fonctions simples, on obtient le résultat.

■

Ce lemme permet de conclure que

$$QG_c^{-1} \xrightarrow[c\to 0]{var} Q.$$

- La vérification de 3. ne pose pas de problèmes particuliers. Ainsi, pour Q-presque tout x de $\mathbb{R}^m$, et pour tout y de V_x, on a

$$\phi_y(c) = g(G_{n,c}(y)) = g((1+c)y).$$

Comme g est homogène de degré $p \neq 0$, on a évidemment :

$$\phi_y(c) = (1+c)^p g(y). \tag{7.0.11}$$

D'où si $p \neq -1$,

$$\phi_y'(c) = p(1+c)^{p-1} g(y)$$

et si $p = -1$, on a

$$\phi_y'(c) = \ln(1+c) g(y).$$

On conclut aisément dans la mesure où $p \neq 0$ et $g(y) \neq 0$, $y \in V_x = \mathbb{R}^m$.

■

Chapitre 8

Convergence forte vers un processus poissonnien

Dans cette section, on revient aux *processus empiriques dilatés (ou binomiaux)* définis par (6.0.2) :

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}}.$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation telles que $b_n \to \infty$.

Considèrons la condition suivante sur F dite **condition de variation régulière (VR) :**

Il existe une suite de constantes $\{b_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ croissante et tendant vers ∞, il existe $\alpha > 0$ et une mesure finie σ sur $\mathcal{S}^{d-1}$ telle que pour chaque ensemble $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}^{d-1}}$ avec $\sigma(\partial B) = 0$, et $\forall r > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{P}$$

On rappelle qu'il est bien connu, [16], page 154, que :

(i) Pour $\alpha \in (0,2)$, la condition **(VR)** est celle de l'appartenance de F au domaine d'attraction d'une loi α-stable.

(ii) La condition **(VR)** implique que $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$ où h est une fonction à variation *lente.*

(iii) Sous la condition de **(VR)** les processus β_n convergent faiblement vers un processus ponctuel poissonnien Π_α (Riesnick, [16]), c'est à dire

$$\beta_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\alpha \tag{8.0.2}$$

où Π_α est un processus poissonnien de mesure de contrôle

$$m_\alpha = \sigma \times \mu_\alpha \tag{8.0.3}$$

et μ_α est une mesure σ-finie sur $(0,\infty)$ de densité $\frac{d\mu_\alpha}{d\lambda}(x) = \alpha x^{-1-\alpha}$.

On rappelle que l'on a identifié $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ avec $\mathcal{S}^{m-1}\times\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ où $\mathcal{S}^{m-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^m$.

La convergence (8.0.2) entraine évidemment celle des lois de la fonctionnelle f continue presque sûrement par rapport à la loi du processus Π_α, à savoir

$$\mathcal{L}_{f(\beta_n)} \Rightarrow \mathcal{L}_{f(\Pi_\alpha)}. \tag{8.0.4}$$

Notre but est de renforcer (8.0.4) jusqu'à une convergence dans un sens plus fort : "en variation totale"

$$\mathcal{L}_{f(\beta_n)} \xrightarrow{var} \mathcal{L}_{f(\Pi_\alpha)} \tag{8.0.5}$$

L'exemple suivant montre qu'en général la condition de variation régulière n'est pas suffisante pour assurer (8.0.4), même pour des fonctions dites simples.

Exemple. Supposons $d=1$, $\sigma=\delta_{\{1\}}$, $F(\mathbb{R}_+)=1$ et $f(\varkappa)=\max\limits_{x\in\varkappa}\{x\}$.
La condition **(VR)** s'écrit maintenant par :

$$\lim_{n\to\infty} nF(1-rb_n) = c_0 r^{-\alpha} \ , \ \forall r>0. \tag{8.0.6}$$

Si f est la densité de F, alors la densité de $f(\beta_n)$ sera donnée par :

$$q_n(x) = nb_nF^{n-1}(b_nx)q(b_nx), \quad x\in\mathbb{R}_+.$$

La densité de $f(\Pi)$ sera dans ce cas représentée par :

$$q(x) = \alpha x^{-1-\alpha}e^{-x^{-\alpha}}, \quad x\in\mathbb{R}_+.$$

La convergence (8.0.4) est équivalente à la convergence dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ de q_n vers q, convergence plus restrictive que (8.0.6).

On introduit alors la condition **(FVR)** suivante, appelée condition **forte** de *variation régulière* :

Pour la mesure μ_n définie par $\mu_n(B)=nF(b_nB)$, $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m\backslash\{0\}}$, la convergence suivante a lieu

$$\mu_n|_{[r,\infty)} \xrightarrow{var} m_\alpha|_{[r,\infty)}, \quad \forall r>0, \tag{8.0.7}$$

où m_α est donnée par (8.0.3).

Remarques :

(i) La mesure μ_n est la mesure d'intensité du processus β_n.

(ii) La condition (8.0.7) entraine la condition (??).

(iii) Il est bien connu, voir [15], proposition 3.2.1, que la condition (8.0.7) est équivalente à la convergence forte des lois des restrictions des processus β_n : pour chaque $D\subset\mathcal{B}(0,r)^c$:

$$\mathcal{L}_{\beta_n|D} \xrightarrow{var} \mathcal{L}_{\Pi_\alpha|D}. \tag{8.0.8}$$

Définition de la classe des fonctionnelles.
Considérons à présent un ensemble $A \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. On peut alors définir la projection $\Upsilon_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ par :

$$\Upsilon_A(\varkappa) = \varkappa \cap A. \tag{8.0.9}$$

Si $A = \mathcal{D}_\varepsilon = \{x \mid |x| > \varepsilon\}$, on posera simplement

$$\Upsilon_\varepsilon(\varkappa) = \Upsilon_{\mathcal{D}_\varepsilon} = \varkappa \cap \mathcal{D}_\varepsilon.$$

On considère, dans la suite, des fonctionnelles $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition de **locale dépendance (LD)** suivante :

(LD) : *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un ensemble ouvert $A \subset \mathcal{K}$ tels que, en posant $B = \Upsilon_\delta^{-1}(A)$, on a :*

$$P(B) > 1 - \varepsilon. \tag{8.0.10}$$

$$\forall \varkappa \in B, f(\varkappa) = f(\Upsilon_\delta(\varkappa)). \tag{8.0.11}$$

Remarque : L'application Υ_δ étant continue, l'ensemble B est ouvert.

Exemples : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $l \in \mathbb{N}_*$.

1) La fonctionnelle $\mathcal{G}_1(\varkappa) = \|x_l\|$, pour $\varkappa = (x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots) \in \mathcal{K}$, les x_i étant ordonnés dans le sens suivant : $|x_1| > |x_2| > \ldots$, vérifie la condition **(LD)**. Réellement, il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{C}\|x\| < |x| < C\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Choisissons $\gamma > 0$ tel que $P\{|x_l| > \frac{\gamma}{C}\} > 1 - \varepsilon$. Posons $A = \{\varkappa \mid \|x_l\| > \gamma\}$. A est un ensemble ouvert tel que $A \supset \{|x_l| > \frac{\gamma}{C}\}$. C'est pourquoi $P(A) > 1 - \varepsilon$. On a également pour $\varkappa \in A$, $|x_l| > \frac{1}{C}\|x_l\| > \frac{\gamma}{C}$, ce qui donne facilement, si $\delta = \frac{\gamma}{C}$, $\mathcal{G}_1(\Pi_\delta(\varkappa)) = \mathcal{G}_1(\varkappa)$. Pour finir, on remarque que $A = \Upsilon_\delta^{-1}(A)$.

2) Pour toute configuration $\varkappa \in \mathcal{K}$, on effectue le procédé de l'épluchage :
On note $C_0 = \mathrm{conv}(\varkappa)$ l'enveloppe convexe de $\varkappa$. Il est clair que la frontière ∂C_0 ne contient qu'un nombre fini de points de $\varkappa$. La configuration $\varkappa_1$, définie par $\varkappa_1 = \varkappa \setminus \{x \in \varkappa \cap \partial C_0\}$, appartient donc à $\mathcal{K}$, on note alors $C_1 = \mathrm{conv}(\varkappa_1)$. En itérant le processus, on obtient une suite décroissante $\{C_0, C_1, \ldots\}$ des enveloppes consécutives.
Il faut supposer que la mesure σ est telle que le cône convexe engendré par le support de σ est $\mathbb{R}^m$. Considérons la fonctionnelle $\mathcal{G}_2$ définie par :

$$\mathcal{G}_2(\varkappa) = \lambda^m(C_l(\varkappa)), \quad \varkappa \in \mathcal{K},$$

où $C_l(\varkappa)$ est la l^{me} enveloppe convexe de $\varkappa$. Il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $P\{B(0,\delta) \subset C_l(\varkappa)\} > 1 - \varepsilon$. En prenant $A = \{\varkappa \mid B(0,\delta) \subset C_l(\varkappa)\}$, on obtient aisément : A est ouvert, $P(A) > 1 - \varepsilon$, $\forall \varkappa \in A_\varepsilon$, $\mathcal{G}_2(\Pi_\delta(\varkappa)) = \mathcal{G}_2(\varkappa)$. Ce qui prouve que $\mathcal{G}_2$ vérifie la propriété **(LD)**.

3) De la même façon, on pourrait vérifier la propriété **(LD)**, pour les fonctionnelles $\mathcal{G}_3(\varkappa) = \lambda^{m-1}(\partial C_l(\varkappa))$ ou $\mathcal{G}_4(\varkappa) = \mathrm{diam}\ (\varkappa)$.

Notre principal résultat est le théorème suivant :

Théorème 8.0.4 *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, de loi F, de densité q par rapport à la mesure de Lebesgue λ_m. On associe à ces variables aléatoires une suite de processus empiriques dilatés définis par (6.0.2)*

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{\frac{\xi_i}{b_n}\}}$$

où $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de constantes de normalisation.
On note P_n la loi du processus β_n sur $\mathcal{K}$ et on suppose que F vérifie la condition **(FVR)**.
Soit Π_α le processus Poissonien limite, de loi P, de mesure de contrôle $\sigma \times \mu$.
Soit f une fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ vérifiant la condition de locale dépendance **(LD)**.
Alors,

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P f^{-1}, \qquad n \to \infty.$$

Remarque sur les hypothèses du théorème 8.0.4
Dire qu'une fonctionnelle f vérifie une condition de *locale dépendance* signifie que selon un certain "*épluchage*" des configurations, l'image de configuration $\varkappa$ ne dépend que de son comportement "loin de l'origine". La démonstration montrera que cet épluchage n'a qu'un rôle partiel et que l'on peut en changer. Par exemple, on peut concevoir aisément une suite de boules carrées, d'ellipsoïdes,... Seule la vérification de la condition $\forall\varepsilon > 0, \forall\varkappa, f(\varkappa) = f(\Upsilon_\varepsilon(\varkappa))$ sera nécessiare.

Démonstration : Choisissons $\delta > 0$ et $A \subset \mathcal{K}$ de telle manière que les conditions de **(LD)** soient vérifiées. On remarque que l'on a

$$\Delta \;=\; \|P_n f^{-1} \;-\; P f^{-1}\| \leq \Delta_1 \;+\; \Delta_2 \;+\; \Delta_3$$

en posant :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \|P_n f^{-1} \;-\; P_{n,B} f^{-1}\|,\\
\Delta_2 &= \|P_{n,B} f^{-1} \;-\; P_B f^{-1}\|,\\
\Delta_3 &= \|P f^{-1} \;-\; P_B f^{-1}\|,
\end{aligned}$$

où $B = \Upsilon_\delta^{-1}(A)$ et μ_B est la restriction à l'ensemble B de la mesure μ.
Par définition, $\Delta_3 \;=\; \|P f^{-1} \;-\; P_B f^{-1}\|$. Ainsi, on a

$$\Delta_3 \;=\; \|P_{B^{\complement}} f^{-1}\| < \varepsilon. \tag{8.0.12}$$

De la même manière, on obtient aisément $\Delta_1 \;=\; \|P_n f^{-1} \;-\; P_{n,B} f^{-1}\| \;\leq\; 2\, P_n\{B^{\complement}\}$. Comme $B^{\complement}$ est fermé, en appliquant le théorème du portmanteau, ([2], théorème 2.1, page 16), on obtient

$$\overline{\lim}\, \Delta_1 \leq \; 2\, P\{B^{\complement}\}. \tag{8.0.13}$$

Par définition, $\Delta_2 \;=\; \|P_{n,B} f^{-1} \;-\; P_B f^{-1}\|$. Ainsi, on a

$$\Delta_2 \;\leq\; \|(L)_{\beta_n|D_\delta} \;-\; (L)_{\Pi_\alpha|D_\delta}\|. \tag{8.0.14}$$

Les estimations (8.0.12), (8.0.13), (8.0.14) et la propriété 8.0.8 entraînent $\Delta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

■

Corollaire 8.0.2 *Pour les fonctionnelles $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$, on a la convergence :*

$$P_n\mathcal{G}_i^{-1} \overset{var}{\to} P\mathcal{G}_i^{-1}.$$

Corollaire 8.0.3 *Supposons que la fonctionnelle f est homogène et vérifie la condition de locale-dépendance* **(LD)** *et que F vérifie la condition* **(FVR)**. *Alors, $Pf^{-1} \ll \lambda$.*

L'exemple suivant montre qu'il existe des fonctionnelles appartenant à l'ensemble des fonctionnelles homogènes H pour lesquelles la continuité absolue de Pf^{-1} n'a pas lieu :

Exemple : Pour $\varkappa = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{K}$, en supposant $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \dots$ on pose :

$$f(\varkappa) = q\left(\frac{x_1}{|x_1|}\right) \liminf_{k\to\infty}\{k^{\frac{1}{\alpha}}|x_k|\}$$

où $q : \mathcal{S}^{m-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.
On rappelle que l'on a noté P la loi du processus poissonien limite, de mesure de contrôle $\times\mu_\alpha$. Dans ces conditions, il n'est pas compliqué de prouver que P-presque surement : $\lim_k\{k^{\frac{1}{\alpha}}|x_k|\} = 1$. C'est pourquoi f est bien définie P-p.p., non continue partout et homogène de degré 1. Remarquons que c'est bien grâce à la partie "*liminf*" que l'on obtient l'homogénéïté de degré 1. Sans elle, la fonction est homogène de degré 0.

Sous P, la loi de $\frac{x_1}{|x_1|}$ est $\frac{\sigma}{|\sigma(\mathcal{S}^{m-1})|}$. En supposant que σ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{S}^{d-1}$, on remarque que quelque soit la loi Q sur $\mathbb{R}$, on peut choisir la fonction q de telle manière que la loi de $q(\frac{x_1}{|x_1|})$ soit Q. Par conséquent, la fonctionnelle f est homogène de degré 1 de loi donnée Q, pas absolument continue.

Remarque : En analysant la démonstration du théorème, on remarque que le rôle de $\mathbb{R}^d$ est moindre. Il est évident alors que qu'on peut généraliser le théorème 8.0.4 à un espace X polonais quelconque. Toutefois, la continuité absolue de la loi commune F n'a pas de sens, puisqu'il n'y a pas de mesure de Lebesgue sur X. Il suffit de supposer que sa loi est diffuse (non atomique).

Troisième partie

Annexes

BU
LILLE I

Annexe A

Les espaces $\mathbb{D}_n^p$ et $\mathbb{D}_n^q$ sont fermés

Lemme 2.4.1 : $\mathbb{D}_n^e$ *est fermé dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration : Pour montrer ce résultat, considérons une suite $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathbb{D}_n^e$ qui converge vers $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$.
Notons $\{x_k^1, \ldots, x_k^n\} \in E_n$ la famille des sauts de x_k.

Commençons par constater que les sauts de x sont d'amplitude $1/\sqrt{n}$:
Soit t_0 l'instant d'un saut de x d'amplitude $\delta_x(t_0)$ strictement inférieure à $1/\sqrt{n}$; soit $T_0 = [|t_0|] + 1$, on a $d_{T_0}(x_m, x) \longrightarrow 0$. Soit $\varepsilon \leq (1/\sqrt{n} - \delta_x(t_0))/2$ fixé, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \geq m_0$ on trouve $\lambda_{\varepsilon,m} \in \Lambda_{T_0}$ avec

$$\sup_{t\in[-T_0,T_0]} |x(t) - x_m(\lambda_{\varepsilon,m}t)| \leq \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[-T_0,T_0]} |\lambda_{\varepsilon,m}t - t| \leq \varepsilon.$$

Avec $t = t_0 \in [-T_0, T_0]$, on a

$$\delta_x(t_0) - 2\varepsilon \leq \delta_{x_m}(\lambda_\varepsilon t_0) \leq \delta_x(t_0) + 2\varepsilon < 1/\sqrt{n},$$

par choix de ε. Comme nécessairement, $\delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m}t_0) \in \{0, 1/\sqrt{n}\}$, on a $\delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m}t_0) = 0$. On a alors $\delta_x(t_0) \leq 2\varepsilon$, ce qui mène à $\delta_x(t_0) = 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ceci est absurde.

Si maintenant t_0 est l'instant d'un saut de x de module strictement supérieur à $1/\sqrt{n}$, avec $T_0 = [|t_0|] + 1$, on a encore avec $\varepsilon \leq (\delta_x(t_0) - 1/\sqrt{n})/2$, l'existence de $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \geq m_0$, on a $\lambda_{\varepsilon,m} \in \Lambda_{T_0}$ avec

$$\sup_{t\in[-T_0,T_0]} |x(t) - x_m(\lambda_{\varepsilon,m}t)| \leq \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[-T_0,T_0]} |\lambda_{\varepsilon,m}t - t| \leq \varepsilon.$$

En particulier,

$$1/\sqrt{n} < \delta_x(t_0) - 2\varepsilon \leq \delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m}t_0),$$

ce qui est absurde car $\delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m}t_0) \in \{0, 1/\sqrt{n}\}$.

La fonction x a donc tous ses sauts d'amplitude $1/\sqrt{n}$, notons les $t_1 < \cdots < t_N$. Soit $T = [\max_{i\leq N} |x_i|] + 1$ et $\lambda_m \in \Lambda_T$ tel que quand $m \to +\infty$,

$$\sup_{t\in[-T,T]} |x(t) - x_m(\lambda_m t)| \to 0, \qquad \sup_{t\in[-T,T]} |\lambda_m t - t| \to 0.$$

En particulier, on a $\delta_{x_m}(\lambda_m t) - \delta_x(t) \to 0$, $m \to +\infty$ et pour $t_i \in \{t_1, \ldots, t_N\}$, on constate que pour m assez grand on a

$$\delta_x(t_i) = \delta_{x_m}(\lambda_m t_i) = +1/\sqrt{n}.$$

D'où $\lambda_m t_i \in \{x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}\}$ $i = 1, \ldots, N$. Comme λ_m croît et $x_{m,1} < \cdots < x_{m,n}$, il est facile de constater que $N = n$ et $\lambda_m t_i = x_{m,i}$. On a alors $\forall t \in (t_i, t_{i+1}]$, $x_{m,i} < \lambda_m t \leq x_{m,i+1}$ et comme

$$x_m(\lambda_m t) = -\sqrt{n}F(\lambda_m t) + i/\sqrt{n},$$

et $\lambda_m t \to t$, par continuité de F, il suit

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + i/\sqrt{n}.$$

Finalement $x \in \mathbb{D}_n^e$.

■

Lemme : $\mathbb{D}_n^p$ *est fermé dans* $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration : Ce lemme est une adaptation du cas "simple". Il suffit simplement d'adapter la dernière étape.

■

Lemme : $\mathbb{D}_n^q$ *est fermé dans* $\mathbb{D}([0,1])$.

Démonstration : Pour montrer ce résultat, considérons une suite $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathbb{D}_n^e$ qui converge vers $x \in \mathbb{D}([0,1])$ au sens de la distance uniforme.
Notons $\{x_k^1, \ldots, x_k^n\} \in E_n$ la famille des sauts de x_k aux instants $\frac{i}{n}$.
La continuité de x et la convergence uniforme permet de conclure que $x \in \mathbb{D}_n^q$.

■

Lemme : $\mathbb{D}_n^s$ *est fermé dans* $\mathbb{D}([0,1] \times \mathbb{R})$.

Démonstration : Considérons une suite $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathbb{D}_n^s$ qui converge vers $x \in \mathbb{D}([0,1] \times \mathbb{R})$.
Notons $\left\{x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}\right\} \in \mathbb{R}^{n-1}$ la famille des sauts de x_k.

L'idée est de décomposer le segment $[0,1]$ en intervalles $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$. Sur chacun de ces intervalles, x_k est bien définie avec exactement j sauts d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Ainsi, à u_0 fixé, $\{x_k(u_0, t), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire typique d'un processus F-empirique. On a

$$x_k(u_0, t) \longrightarrow x(u_0, t) \; k \to \infty.$$

En reprenant la démonstration du lemme 2.4.1, on montre que $\{x(u_0, t), t \in \mathbb{R}\}$ possède, sur $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, exactement j sauts, d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Cela revient à dire que sur $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \mathbb{R}$, x est de la forme :

$$x(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}), t \in [x_j^i, x_j^{i+1})$$

Ainsi, il est clair que $x \in \mathbb{D}_n^s$.
Donc, $\mathbb{D}_n^s$ est fermé.

■

Annexe B

Distance de Skorohod

B.1 Espaces de Skorohod

Lemme 2.1.1 :
Soient $x, y \in \mathbb{D}([-T,T])$, $S \leq T$ tels que $x(t) = y(t)$ pour $t \in [-T,T] \setminus [-S,S]$, alors $d_{[-T,T]}(x,y) \leq d_{[-S,S]}(x,y)$.

Démonstration : Soit $\rho_S \in \Lambda_S$, on construit $\rho_T \in \Lambda_T$ comme suit :

$$\rho_T(t) = \begin{cases} \rho_S(t) & \text{si } t \in [-S,S] \\ t & \text{si } t \in [-T,T] \setminus [-S,S]. \end{cases}$$

On a

$$d_{[-T,T]}(x,y) \leq \sup_{|t| \leq T} |x(t) - y(\rho_T(t))| + \sup_{|t| \leq T} |\rho_T(t) - t|.$$

Or si $|t| \geq S$, on a $\rho_T(t) = t$ donc $\sup_{|t| \leq T} |\rho_T(t) - t| = \sup_{|t| \leq S} |\rho_T(t) - t|$, et $y(\rho_T(t)) = y(t) = x(t)$. Tandis que si $|t| \leq S$, on a$\rho_T(t) = \rho_S(t)$.
On a donc $\sup_{|t| \leq T} |x(t) - y(\rho_T(t))| = \sup_{|t| \leq S} |x(t) - y(\rho_S(t))|$ et il suit

$$d_{[-T,T]}(x,y) \leq \sup_{|t| \leq S} |x(t) - y(\rho_S(t))| + \sup_{|t| \leq S} |\rho_S(t) - t|.$$

En optimisant par rapport à $\rho_S \in \Lambda_S$, on obtient $d_{[-T,T]}(x,y) \leq d_{[-S,S]}(x,y)$.

■

Lemme 2.1.2 :
Soient x_p, $x \in \mathbb{D}([-T,T])$ tels que $x_p \to x$ dans $\mathbb{D}([-T,T])$ et $S < T$. On suppose que x n'a pas de saut dans les points $-S$ et S. Alors

$$x_p \longrightarrow x, \quad \textit{dans } \mathbb{D}([-S,S]).$$

Démonstration : Soit $\rho_{p,T} \in \Lambda_T$ tel que

$$\sup_{|t| \leq T} |x_p(t) - x(\rho_{p,T}(t))| + \sup_{|t| \leq T} |\rho_{p,T}(t) - t| \longrightarrow 0, \quad p \to +\infty.$$

Comme $\rho_{p,T} \to id$, pour p assez grand on peut définir

$$t_1^p = \inf\{t \mid (t, \rho_{p,T}(t)) \in [-S, S]^2\},$$
$$t_2^p = \sup\{t \mid (t, \rho_{p,T}(t)) \in [-S, S]^2\}.$$

Soit $\delta_p \to 0$, notons $s_1^p = t_1^p + \delta_p$ et $s_2^p = t_2^p - \delta_p$.
On définit alors $\rho_{p,S} \in \Lambda_S$ comme suit :

$$\rho_{p,S}(t) = \begin{cases} \text{linéaire entre } (-S, -S) \text{ et } (s_1^p, \rho_{p,T}(s_1^p)), \\ \rho_{p,T}(t) \text{ si } t \in [s_1^p, s_2^p], \\ \text{linéaire entre } (s_2^p, \rho_{p,T}(s_2^p)) \text{ et } (-S, S), \end{cases}$$

Remarquons que $t_1^p \longrightarrow -S$ en effet sinon soit $t_1 := \overline{\lim}_p t_1^p > -S$. Il existe une sous suite telle que $t_1^{p'} \longrightarrow t_1$; pour p' assez grand, on a alors $t_1^{p'} \geq \frac{t_1 - S}{2} > -S$ et par définition de $t_1^{p'}$, on a pour $t \in]-S, \frac{t_1-S}{2}]$, $(t, \rho_{p',T}(t)) \notin [-S, S]^2$ donc $\rho_{p',T}(t) < -S$, ce qui nie $\rho_{p,T}(t) \longrightarrow t > -S$.
On a donc $\overline{\lim}_p\, t_1^p \leq -S$ or $\lim_p t_1^p \geq -S$ d'où $t_1^p \longrightarrow -S$; de la même façon, on a $t_2^p \longrightarrow S$, $p \to +\infty$.

On a maintenant,

$$d_{[-S,S]}(x, x_p) \leq \sup_{|t| \leq S} |x_p(t) - x(\rho_{p,S}(t))| + \sup_{|t| \leq S} |t - \rho_{p,S}(t)|.$$

Or d'abord $\sup_{|t| \leq S} |t - \rho_{p,S}(t)| =$

$$\max\left(\sup_{t \in [s_1^p, s_2^p]} |t - \rho_{p,S}(t)|, \sup_{-S \leq t \leq s_1^p} |t - \rho_{p,S}(t)|, \sup_{s_2^p \leq t \leq S} |t - \rho_{p,S}(t)| \right)$$

et comme

$$\begin{aligned} &\text{pour } t \in [s_1^p, s_2^p] : && \rho_{p,S}(t) = \rho_{p,T}(t) \\ &\text{pour } t \in [-S, s_1^p] : && \rho_{p,S} \text{ est linéaire donc } \sup_{-S \leq t \leq s_1^p} |t - \rho_{p,S}(t)| \leq |s_1^p - \rho_{p,T}(s_1^p)| \\ &\text{pour } t \in [s_2^p, S] : && \rho_{p,S} \text{ de même } \sup_{s_2^p \leq t \leq S} |t - \rho_{p,S}(t)| \leq |s_2^p - \rho_{p,T}(s_2^p)| \end{aligned}$$

on a finalement

$$\sup_{|t| \leq S} |t - \rho_{p,S}(t)| \leq \sup_{|t| \leq T} |t - \rho_{p,T}(t)| \longrightarrow 0, \quad p \to +\infty.$$

Puis

$$\sup_{|t| \leq S} |x_p(t) - x(\rho_{p,S}(t))| \leq \sup_{|t| \leq S} |x_p(t) - x(\rho_{p,T}(t))| + \sup_{|t| \leq S} |x(\rho_{p,T}(t)) - x(\rho_{p,S}(t))|.$$

Le premier terme tend vers 0 et le deuxième est égal à

$$\sup_{t\in[-S,s_1^p]\cup[s_2^p,S]} |x(\rho_{p,T}(t)) - x(\rho_{p,S}(t))|. \tag{B.1.1}$$

Or comme pour $t \in [-S, s_1^p]$, on a

$$\rho_{p,S}(t) \in [-S, \rho_{p,T}(s_1^p)] \quad \text{et} \quad |\rho_{p,T}(t) + S| \leq \sup_{|t|\leq T} |\rho_{p,T}(t) - t| + |s_1^p + S|,$$

on a $\rho_{p,S}(t), \rho_{p,T}(t) \in \left[-S - \left(|s_1^p + S| + \sup_{|t|\leq T} |\rho_{p,T}(t) - t|\right),\ -S + \left(|s_1^p + S| + \sup_{|t|\leq T} |\rho_{p,T}(t) - t|\right)\right.$
Donc, $\rho_{p,S}(t),\ \rho_{p,T}(t) \subset [-S - \alpha_p, -S + \alpha_p]$.
avec $\alpha_p \to 0$. En désignant par $h \mapsto w_x(t,h)$ le module de continuité de x en t, on majore alors (B.1.1) par $w_x(-S, \alpha_p) \vee w_x(S, \alpha_p)$. Par continuité de x en $-S$ et S, on a alors

$$\sup_{|t|\leq S} |x_p(t) - x(\rho_{p,S}(t))| \to 0, \quad p \to +\infty.$$

Finalement, $d_S(x_p, x) \longrightarrow 0$ quand $p \to +\infty$.

■

Lemme 2.1.3 :
Soient x_p, $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ tels que $x_p(t) = x(t)$ pour $t \notin [-T, T]$. Si x n'a pas de sauts en les points de $\mathbb{N} \cap [-T, T]$, alors, on a

$$d_{[-T,T]}(x_p, x) \to 0 \iff d_{\mathbb{R}}(x_p, x) \to 0.$$

Démonstration : Si $d_{\mathbb{R}}(x_p, x) \to 0$ quand $p \to +\infty$ il est clair d'après (2.1.2) qu'en particulier $d_{[-T,T]}(x_p, x) \to 0$. Réciproquement, si $d_{[-T,T]}(x_p, x) \to 0$ et $x_p(t) = x(t)$ pour $t \notin [-T, T]$, d'après le lemme 2.1.1, on a $d_{[-k,k]}(x_p, x) \leq d_{[-T,T]}(x_p, x)$ pour tout $k \geq T$ et par le lemme 2.1.2, $d_k(x_p, x) \to 0$, $p \to +\infty$ pour $k \leq T$ car x n'a pas de saut en $-k$, k. On a alors

$$d_{\mathbb{R}}(x_p, x) = \sum_{k\leq T} \frac{1}{2^k} \frac{d_{[-k,k]}(x_p, x)}{1 + d_{[-k,k]}(x_p, x)} + \sum_{k>T} \frac{1}{2^k} \frac{d_{[-T,T]}(x_n, x)}{1 + d_{[-T,T]}(x_n, x)}.$$

Le premier terme est une somme finie de termes majoré par $d_{[-T,T]}(x_p, x)$, le deuxième est majoré par $d_{[-T,T]}(x_p, x)/2^T$, qui tend vers 0.

■

B.2 Critères de convergence sur les $\mathbb{D}_n$

B.2.1 Pour le processus F-emprique

Lemme 2.3.1 :
Pour P_n^e-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$ on a pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^e, d_n)$:

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}_n^e} x \iff x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathbb{D}(\mathbb{R})} x.$$

Démonstration : Notons $x_{m,1} < \cdots < x_{m,n}$ les sauts de x_m, $x_1 < \cdots < x_n$ ceux de x.
$\triangleright$ Sens direct : on a pour tout $i \leq n$: $|x_{m,i} - x_i| \leq d(x_m, x) \to 0$, $m \to +\infty$. Soit $N = [|x_1| \vee |x_n|] + 1$, il existe m_0 tel que $\forall m \geq m_0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, $|x_{m,i} - x_i| \leq 1$. En particulier, $x_{m,i} \in [-N, N]$ $\forall m \geq m_0$, $1 \leq i \leq n$. Il est clair alors que

$$\begin{aligned} &\forall t \leq -N, \quad x_m(t) = -\sqrt{n}F(t) = x(t) \\ &\forall t \geq N, \quad x_m(t) = -\sqrt{n}F(t) + \sqrt{n} = x(t). \end{aligned}$$

D'où $x_{/[-N,N]^c} = x_{m/[-N,N]^c}$ et on conclut alors pour l'ensemble P_n-presque sûr des x sans sauts dans $\mathbb{N} \cap [-N, N]$: le lemme 2.1.3 donne en effet dans ce cas quand $m \to +\infty$,

$$d_{[-N,N]}(x_m, x) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0.$$

$\triangleright$ Sens indirect : soit à nouveau $N = [|x_1| \wedge |x_n|] + 1$.
On déduit de $d_{\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0$ que $d_{[-N,N]}(x_m, x) \to 0$.
Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}(\min_{i \neq j}\{|x_i - x_j|\} \wedge 1/\sqrt{n})$, il existe m_0 tel que pour $m \geq m_0$, $d_{[-N,N]}(x_m, x) \leq \varepsilon$. En particulier, il existe $\lambda_{\varepsilon,m} \in \Lambda_N$ tel que pour $|t| \leq N$

$$\begin{gathered} 0 < \delta_x(t) - 2\varepsilon \leq \delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m} t) \leq \delta_x(t) + 2\varepsilon, \\ |\lambda_{\varepsilon,m} t - t| \leq \varepsilon. \end{gathered}$$

A chaque instant x_i d'un saut de x est associé un saut de x_m en $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$. Les $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$ sont tous distincts par choix de ε et sont dans $[-N, N]$. Par croissance de $\lambda_{\varepsilon,m}$, on a facilement, $\lambda_{\varepsilon,m} x_i = x_{i,m}$. On a donc $x_{i,m} \longrightarrow x_i$, $m \to +\infty$ pour tout i. Par le lemme 2.2.1, on a alors $d(x_m, x) \to 0$.

■

B.2.2 Pour le processus F-emprique pondéré

Lemme 2.3.2 :
Pour P_n^p-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^p$ on a pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^p, d_n)$:

$$x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}_n^p} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}(\mathbb{R})} x.$$

Démonstration : Notons $x_{m,1} < \cdots < x_{m,n}$ les sauts de x_m, $x_1 < \cdots < x_n$ ceux de x.
$\triangleright$ Sens direct : on a pour tout $i \leq n$: $|x_{m,i} - x_i| \leq d(x_m, x) \to 0$, $m \to +\infty$. Soit $N = [|x_1| \vee |x_n|] + 1$, il existe m_0 tel que $\forall m \geq m_0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, $|x_{m,i} - x_i| \leq 1$. En particulier, $x_{m,i} \in [-N, N]$ $\forall m \geq m_0$, $1 \leq i \leq n$. Il est clair alors que

$$\begin{aligned} &\forall t \leq -N, \quad x_m(t) = -\mathcal{C}_n F(t) = x(t) \\ &\forall t \geq N, \quad x_m(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_n = x(t). \end{aligned}$$

D'où $x_{/[-N,N]^c} = x_{m/[-N,N]^c}$ et on conclut alors pour l'ensemble P_n-presque sûr des x sans sauts dans $\mathbb{N} \cap [-N, N]$: le lemme 2.1.3 donne en effet dans ce cas quand $m \to +\infty$,

$$d_{[-N,N]}(x_m, x) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0.$$

$\triangleright$ Sens indirect : soit à nouveau $N = [|x_1| \wedge |x_n|] + 1$.
On déduit de $d_{\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0$ que $d_{[-N,N]}(x_m, x) \to 0$.
Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}(\min_{i \neq j}\{|x_i - x_j|\} \wedge 1/\sqrt{n})$, il existe m_0 tel que pour $m \geq m_0$, $d_{[-N,N]}(x_m, x) \leq \varepsilon$. En particulier, il existe $\lambda_{\varepsilon,m} \in \Lambda_N$ tel que pour $|t| \leq N$

$$0 < \delta_x(t) - 2\varepsilon \leq \delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m} t) \leq \delta_x(t) + 2\varepsilon,$$
$$|\lambda_{\varepsilon,m} t - t| \leq \varepsilon.$$

A chaque instant x_i d'un saut de x est associé un saut de x_m en $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$. Les $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$ sont tous distincts par choix de ε et sont dans $[-N, N]$. Par croissance de $\lambda_{\varepsilon,m}$, on a facilement, $\lambda_{\varepsilon,m} x_i = x_{i,m}$. On a donc $x_{i,m} \longrightarrow x_i$, $m \to +\infty$ pour tout i. Par le lemme 2.2.1, on a alors $d_n(x_m, x) \to 0$.

■

B.2.3 Pour le processus F-quantile

Lemme 2.3.3 :
Pour P_n^q-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^q$ on a pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^q, d_n)$, on a :

(i)

$$x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}_n^q} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{U}} x.$$

(ii)

$$x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{U}} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}([0,1])} x$$

(iii)

$$x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}([0,1])} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}_n^q} x$$

On aura noté que $\xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{U}}$ signifie la convergence uniforme.

Démonstration :

(i) On veut montrer ici que :

$$x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathbb{D}_n^q} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{U}} x.$$

Soit $t \in [0, 1]$. On a $|x(t) - x_m(t)| = |(-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}x_i) - (-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}x_{m,i})|$.
Posons $x_{m,t}$ et $x_{m,i,t}$ les amplitutes des sauts sur l'intervalle où se situe t. On a alors évidement : $|x(t) - x_m(t)| = |-\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}x_i - \sqrt{n}x_{m,t} + \sqrt{n}x_{m,t} - \sqrt{n}x_{m,i,t} + \sqrt{n}x_{m,i,t} + \sqrt{n}F^{-1}(t) - \sqrt{n}x_{m,i})|$.
Ainsi, on obtient $|x(t) - x_m(t)| = |\sqrt{n}x_{m,t} - \sqrt{n}x_{m,i})| = \sqrt{n}|x_{m,t} - x_{m,i})|$.
ou alors, $|x(t) - x_m(t)| < \sqrt{n} \max_i |x_m - x_{m,i})|$.

Or, par définition, on a Θ est une fonction définie par $\Theta(\overline{x}) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|}$.
Comme $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{m,i}| + |\Theta(x_1, \ldots, x_n) - \Theta(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})| \longrightarrow 0$, ou en particulier $|x_i - x_{m,i}| \longrightarrow 0$, il devient clair que $\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - x_m(t)| \longrightarrow 0$.

(ii) Il faut démontrer que

$$x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathcal{U}}{\longrightarrow}} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}([0,1])}{\longrightarrow}} x$$

Ceci est trivial dans la mesure où la convergence uniforme est plus "forte".

(iii) On cherche à prouver que

$$x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}([0,1])}{\longrightarrow}} x \quad \Longrightarrow \quad x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}_n^q}{\longrightarrow}} x$$

De manière équivalente, la convergence $x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}([0,1])}{\longrightarrow}} x$ signifie que

$d(x, x_m) = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}; \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - x_{m,i}| \right\} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Il devient alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_i - x_{m,i}| \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or,

$$|\Theta(x_1, \ldots, x_n) - \Theta(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})| < \sum_{i \neq j} \frac{|x_i - x_{m,i}| + |x_j - x_{m,j}|}{|x_i - x_j||x_{m,i} - x_{m,j}|}.$$

où les dénominateurs sont évidemment non nuls.
Donc, $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{m,i}| + |\Theta(x_1, \ldots, x_n) - \Theta(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})| \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

■

B.2.4 Pour le processus F-séquentiel

Lemme 2.3.4 : *Pour P_n^s-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^s$ on a pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbb{D}_n^s, d_n)$:*

$$x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}_n^s}{\longrightarrow}} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_m \underset{m \to +\infty}{\overset{\mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R})}{\longrightarrow}} x.$$

Démonstration : Notons $x_{m,1} < \cdots < x_{m,n-1}$ les sauts de x_m, $x_1 < \cdots < x_{n-1}$ ceux de x.
$\triangleright$ Sens direct : on a pour tout $i \leq n$: $|x_{m,i} - x_i| \leq d(x_m, x) \to 0$, $m \to +\infty$. Soit $N = [|x_1| \vee |x_n|] + 1$, il existe m_0 tel que $\forall m \geq m_0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, $|x_{m,i} - x_i| \leq 1$. En particulier, $x_{m,i} \in [-N, N]$ $\forall m \geq m_0$, $1 \leq i \leq n$. Il est clair alors que

$$\forall u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}),\ \forall t \leq -N, \quad x_m(t) = -\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) = x(t)$$
$$\forall u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}),\ \forall t \geq N, \quad x_m(t) = -\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{j}{\sqrt{n}} = x(t).$$

D'où $x_{/[0,1]\times[-N,N]^c} = x_{m/[0,1]\times[-N,N]^c}$ et on conclut alors pour l'ensemble P_n-presque sûr des x sans sauts dans $\mathbb{N} \cap [-N, N]$: le lemme 2.1.4 donne en effet dans ce cas quand $m \to +\infty$,

$$d_{[0,1[\times[-N,N]}(x_m, x) \to 0 \iff d_{[0,1[\times\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0.$$

$\triangleright$ Sens indirect : soit à nouveau $N = [|x_1| \wedge |x_n|] + 1$.
On déduit de $d_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_m, x) \to 0$ que $d_{[0,1]\times[-N,N]}(x_m, x) \to 0$.
Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}(\min_{i\neq j}\{|x_i - x_j|\} \wedge 1/\sqrt{n})$, il existe m_0 tel que pour $m \geq m_0$, $d_{[0,1]\times[-N,N]}(x_m, x) \leq \varepsilon$. En particulier, il existe $\lambda_{\varepsilon,m} \in \Lambda_{[-N,N]}$ tel que pour $|t| \leq N$, (on n'utilise pas la variation en "u".),

$$0 < \delta_x(t) - 2\varepsilon \leq \delta_{x_m}(\lambda_{\varepsilon,m} t) \leq \delta_x(t) + 2\varepsilon,$$
$$|\lambda_{\varepsilon,m} t - t| \leq \varepsilon.$$

A chaque instant x_i d'un saut de x est associé un saut de x_m en $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$. Les $\lambda_{\varepsilon,m} x_i$ sont tous distincts par choix de ε et sont dans $[-N, N]$. Par croissance de $\lambda_{\varepsilon,m}$, on a facilement, $\lambda_{\varepsilon,m} x_i = x_{i,m}$. On a donc $x_{i,m} \longrightarrow x_i$, $m \to +\infty$ pour tout i. Par le lemme 2.2.1, on a alors $d(x_m, x) \to 0$.

■

Annexe C

Convergence en loi

Lemme 3.9.2 :
Soient ν_i et μ_i des mesures sur X_i, $i = 1, 2$, on a la relation (3.9.1) à savoir :

$$\|\nu_1 \times \nu_2 - \mu_1 \times \mu_2\|_{var} \leq \|\nu_2 - \mu_2\|_{var} \|\nu_1\|_{var} + \|\nu_1 - \mu_1\|_{var} \|\mu_2\|_{var}.$$

Démonstration : Etant donnée $(A_n)_n$ une partition mesurable de $X_1 \times X_2$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_n |\nu_1 \times \nu_2(A_n) - \mu_1 \times \mu_2(A_n)| \\ &\leq \sum_n |\nu_1 \times \nu_2(A_n) - \nu_1 \times \mu_2(A_n)| + \sum_n |\nu_1 \times \mu_2(A_n) - \mu_1 \times \mu_2(A_n)|. \end{aligned} \tag{C.0.1}$$

Or on estime le premier terme de (C.0.1) par :

$$\begin{aligned} |\nu_1 \times \nu_2(A_n) - \nu_1 \times \mu_2(A_n)| &= \left| \int_{X_1 \times X_2} \mathbf{1}_{A_n} d\nu_1 d\nu_2 - \int_{X_1 \times X_2} \mathbf{1}_{A_n} d\nu_1 d\mu_2 \right| \\ &\leq \int_{X_1} \left| \int_{X_2} \mathbf{1}_{A_n}(x_1, x_2)\, d\nu_2 - \int_{X_2} \mathbf{1}_{A_n}(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right| d|\nu_1| \\ &\leq \int_{X_1} |\nu_2(A_{n,x_1}) - \mu_2(A_{n,x_1})|\, d|\nu_1| \end{aligned}$$

avec A_{n,x_1} les ensembles traces des A_n sur $\{x_1\} \times X_2$. Il suit

$$\sum_n |\nu_1 \times \nu_2(A_n) - \nu_1 \times \mu_2(A_n)| \leq \|\nu_2 - \mu_2\|_{var}\, \|\nu_1\|_{var}. \tag{C.0.2}$$

En raisonnant de la même façon, on majore le deuxième terme de (C.0.1) comme en (C.0.2) et on en déduit (3.9.1).

■

Lemme 3.9.4
Pour tout réel c, la loi du vecteur $(\xi_1 + c\,\varphi(\xi_1), \ldots, \xi_n + c\,\varphi(\xi_n))$ *est une mesure à*

densité, i.e. $\widehat{P}_n\widehat{G}_{n,c}^{-1} \ll \lambda^n$, *où la fonction* φ *est une fonction de t-transformation définie au paragraphe 3.1.*

Démonstration : Soit g_c la fonction sur $\mathbb{R}$, définie par $g_c(x) = x + c\,\varphi(x)$. On déduit facilement de la définition 3.1.1 de φ que $g_c'(x) = 1 + c\,\varphi'(x) \neq 0$ p.p. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la loi μ_i de $g_c(\xi_i) = \xi_i + c\,\varphi(\xi_i)$ est absolument continue par rapport à λ. Or, le vecteur

$$\widehat{G}_{n,c}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 + c\,\varphi(\xi_1), \ldots, \xi_n + c\,\varphi(\xi_n))$$

a ses coordonnées indépendantes et identiquement distribuées. Donc, sa loi $\widehat{P}\widehat{G}_{n,c}^{-1}$ est une loi produit absolument continue par rapport à λ^n.

■

Lemme 3.9.7
En reprenant les notations définie dans le paragraphe 3.9, page 52, pour

$$g_c \;:\; x \longmapsto x + c\varphi(x)$$

et pour tout

$$(y_1, \ldots, y_{i_0-1}, y_{i_0+1}, \ldots, y_n),$$

on a

$$Q_n\tilde{G}_{n,c}^{-1}|_{\eta_i = y_i i \neq i_o} \;=\; (Q_n\tilde{G}_{n,0}^{-1}|_{\eta_i = y_i i \neq i_o})g_c^{-1} \;=\; (Q_n|_{\eta_i = y_i i \neq i_o})g_c^{-1}.$$

Démonstration : On remarque que dans l'énoncé de ce lemme, on fixe $n-1$ variables. Ainsi pour simplifier la démonstration, on notera les n-uplets par $(x, \overline{y})$ pour $\overline{y}$ un $(n-1)$-uplet et x le réel subissant la transformation $G_{n,c}$.
Soit h une fonction mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.
Il est clair que l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, \overline{y})\; QG_{n,c}^{-1}(\; dxd\overline{y}\;) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} h(x, \overline{y})\; Q_{\overline{y}}^G(dx)F(d\overline{y})$$

où F est la loi de densité $p^{\otimes n-1}$ et $Q_{\overline{y}}^G$ est la loi Q_n transporté par $G_{n,c}$ à y fixé.

D'un autre point de vue, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, \overline{y})\; QG_{n,c}^{-1}(\; dxd\overline{y}\;) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} h(x + c\varphi(x), \overline{y})\; Q(dxd\overline{y})$$

Par la définition de la loi conditionnelle, en notant $Q_{\overline{y}}$ est la loi Q_n à y fixé, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, \overline{y})\; QG_{n,c}^{-1}(\; dxd\overline{y}\;) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} h(x + c\varphi(x), \overline{y})\; Q_{\overline{y}}(dx)F(d\overline{y})$$

ce qui se traduit facilement par

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, \overline{y})\; QG_{n,c}^{-1}(\; dxd\overline{y}\;) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} h(x, \overline{y})\; Q_{\overline{y}}\; g_c^{-1}(dx)F(d\overline{y})$$

Ainsi, par identification, il est clair que $Q_{\overline{y}}\; g_c^{-1} \;=\; Q_{\overline{y}}^G$.

■

Annexe D

Inf, sup et voisinage

Nous allons reprendre et démontrer les lemmes relatifs à l'existence de voisinage ouvert d'une trajectoire possible x de chacun des processus empiriques pour lequel toute trajectoire y et sa transformée $G_{n,c}y$ admettent leurs extréma pour les mêmes indices que ceux de x.
Les démonstrations proposées sont très proches et pourront semblées redoudantes. Elles sont toutefois proposées dans leur intégralité.

D.1 Cas du processus F-empirique.

Lemme 3.5.1 : Maximum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(e)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même indice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Plus précisemment, x atteint son maximun pour l'instant de saut x_i, y dans l'instant y_i et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_i + c\varphi(y_i)$.

Démonstration : Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j,\ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^{(e)}$ qui atteignent leur maximum en un unique point est $P_n^{(e)}$-presque sûr. Soient $x \in \mathbb{D}_n^{(e)}$ un tel élément et i l'indice unique tel que $\max_{t\in\mathbb{R}}(x(t)) = -\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}$. Soit

$$\delta \leq \frac{1}{2} \min_{j \neq i} \left((-\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}) - (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n}) \right).$$

Par continuité de F en $x_1, \ldots, x_n$, soit $\delta_1 > 0$ tel que

$$|x - x_i| \leq 2\delta_1 \Rightarrow |F(x) - F(x_i)| < \delta/\sqrt{n}.$$

Notons $U_{\delta_1} = \{y \in \mathbb{D}_n^e |\ |y_j - x_j| \leq \delta_1\}$, voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1. D'après la preuve du lemme 3.4.1, pour tout $c \leq c_0 := \min_{1\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|/4M_\varphi$ où $M_\varphi = \sup_t |\varphi(t)|$, on a pour $y \in U_{\delta_1}$, $G_c y \in U_{2\delta_1}$.

On a d'abord $\max_t G_{n,c}(y(t)) = \max_{1\leq j\leq n}(-\sqrt{n}F(\tilde{y}_j) + j/\sqrt{n})$, puis, comme $|\tilde{y}_j - x_j| \leq$

$2\delta_1$:

$$- \sqrt{n}F(\tilde{y}_j) + j/\sqrt{n} < \delta + (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n})$$
$$- \sqrt{n}F(\tilde{y}_i) + i/\sqrt{n} > -\delta + (-\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}) \geq \delta + (-\sqrt{n}F(x_j) + j/\sqrt{n}),$$

on en déduit que le maximum de $G_{n,c}y$ est atteint pour l'indice i, facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.

■

Lemme 3.5.2 : Infimum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(e)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur infimum respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$. Plus précisèment, cette notion signifie x atteint son infimum pour l'instant de saut x_j sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j)$ et vaut précisément $-\sqrt{n}F(x_j) + \frac{j-1}{\sqrt{n}}$, y dans l'instant y_j et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_j + c\varphi(y_j)$.
On propose ici une démonstration directe des lemmes "infimum". Toutefois, il a été montrer que l'existence des infimum dépend de l'existence des maximum et d'un changement dans la définition des trajectoires.

Démonstration : Cette démonstration s'effectue en trois points :
- Existence et unicité de l'indice j pour lequel x atteint son minimum.
- Exitence du voisinage de x satisfaisant les conditions du lemme.
- Correspondance de l'indice pour y et $G_{n,c}y$.

Démontrons ces trois points à présent,
- Existence et unicité de l'indice j pour lequel x atteint son minimum. Par définition, la trajectoire est $P_n^{(e)}$-presque surement de la forme :

$$x(t) = -\sqrt{n}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}}, \; x_{i+1}), \; i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

  où F est continue avec $F' > 0$, $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$.
  Ainsi, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1})$, x est décroissante strictement. Par conséquent, $\min_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \min_{i\in\{1,\ldots,n}\left(-\sqrt{n}F(x_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}\right)$. Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j, \; i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^e$ qui atteignent leur maximum en un unique point est P_n^e-presque sûr. Soient $x \in \mathbb{D}_n^e$ un tel élément et j l'indice unique tel que $\min_{t\in\mathbb{R}}(x(t)) = -\sqrt{n}F(x_i) + i/\sqrt{n}$.
- Exitence du voisinage de x satisfaisant les conditions du lemme. $U_{\delta_1} = \{y \in \mathbb{D}_n^e \mid |y_j - x_j| \leq \delta_1\}$, est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, section 2.5.
- Correspondance de l'indice pour y et $G_{n,c}y$. Soit

$$\delta \leq \frac{1}{2}\min_{j\neq i}\left((-\sqrt{n}F(x_j) + \frac{j-1}{\sqrt{n}}) - (-\sqrt{n}F(x_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}})\right).$$

  Par continuité de F en $x_1, \ldots, x_n$, soit $\delta_1 > 0$ tel que

$$|x - x_i| \leq 2\delta_1 \Rightarrow |F(x) - F(x_i)| < \delta/\sqrt{n}.$$

Ainsi U_{δ_1} est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1. D'après la preuve du lemme 3.4.1, pour tout $c \leq c_0 := \min_{1\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|/4M_\varphi$ où $M_\varphi = \sup_t |\varphi(t)|$, on a pour $y \in U_{\delta_1}$, $G_c y \in U_{2\delta_1}$.
On a d'abord

$$\min_t G_{n,c}(y(t)) = \min_{1\leq i\leq n} (-\sqrt{n}F(\tilde{y}_j) + \frac{i-1}{\sqrt{n}})),$$

puis, comme $|\tilde{y}_i - x_i| \leq 2\delta_1$, on a :

$$-\sqrt{n}F(\tilde{y}_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}) \geq -\delta + (-\sqrt{n}F(x_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}})),$$

et

$$-\sqrt{n}F(\tilde{y}_i) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}) \geq \delta + (-\sqrt{n}F(x_j) + \frac{j-1}{\sqrt{n}})) > -\sqrt{n}F(x_j) + \frac{j-1}{\sqrt{n}}).$$

On en déduit que le minimum de $G_{n,c}y$ est atteint pour l'indice j, facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.

■

D.2 Cas du processus F-empirique pondéré.

Les deux lemmes suivants sont de simples adaptations des démonstrations des lemmes précédents en remplaçant $\sqrt{n}$ par C_n et $\sqrt{j}$ par C_j.

Lemme 3.5.3 : Maximum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(p)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^p$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même indice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Plus précisemment, cette notion signifie x atteint son infimun pour l'instant de saut x_j sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j)$ et vaut précisément $-C_nF(x_j) + C_{j-1}$, y dans l'instant y_j et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_j + c\varphi(y_j)$.

lemme 3.5.4 : Infimum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(p)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^p$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur infimum respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Plus précisèment, cette notion signifie x atteint son infimum pour l'instant de saut x_j sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j)$ et vaut précisément $-C_nF(x_j) + C_{j-1}$, y dans l'instant y_j et $G_{n,c}y$ dans l'instant $y_j + c\varphi(y_j)$.

D.3 Cas du processus F-quantile.

On rappelle que l'on se limite à un intervalle $[a, b] \subset (0, 1)$.

Lemme 3.5.5 : Maximum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(q)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^q$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\exists!\ i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même réel t_M égal soit à a, soit à $\frac{i}{n}$.

Démonstration : Soit x une trajectoire possible, $x \in \mathbb{D}_n^q$, restreinte à l'intervalle $[a, b]$. Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j,\ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^q$ qui atteignent leur maximum en un unique point est $P_n^{(q)}$-presque sûr, ce maximum est atteint soit en a, soit en un des points $\frac{i}{n}$ dans $[a, b]$, mais l'indice est unique et vérifie

$$\max_{t \in [a,b]}(x(t)) = \max\{-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \sqrt{n}x_{i+1}\ ;\ -\sqrt{n}F^{-1}(a) + \sqrt{n}x_{i_a+1}\}.$$

où x_{i_a} est le saut au point $\frac{i_a}{n}$ tel que $a \in (\frac{i_a}{n}, \frac{i_a+1}{n}]$.

$U_{\delta_1} = \{y \in \mathbb{D}_n^q |\ |y_j - x_j| \leq \delta_1\}$, est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, section 2.5.

Il reste à montrer que $G_{n,c}y$ et y atteingnent leur maximum soit en a soit en $\frac{i}{n}$, et au même point que x.

- Supposons que x atteint son maximum en a.
  Soit

  $$\delta \leq \frac{1}{2}\min_i\left((-\sqrt{n}F^{-1}(a) + -\sqrt{n}x_{i_a+1}) - (-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + -\sqrt{n}x_{i+1})\right).$$

  Le minimum s'enttend pour les i tels que $\frac{i}{n} \in [a, b]$.
  Par continuité de F en $x_1, \ldots, x_n$, soit $\delta_1 > 0$ tel que

  $$|x - x_i| \leq 2\delta_1 \Rightarrow |F(x) - F(x_i)| < \delta/\sqrt{n}.$$

  Pour $U_{\frac{\delta_1}{\sqrt{n}}}$, voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, $\tilde{y_{i+1}} \in (x_{i+1} - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x_{i+1} + \frac{\delta}{\sqrt{n}})$.
  Aisément, on a $\forall i$ tel que $\frac{i}{n} \in [a, b]$,

  $$G_{n,c}y(\frac{i}{n}) = -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n})) + -\sqrt{n}\tilde{y_{i+1}} < -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n})) + -\sqrt{n}x_{i+1} + \delta.$$

  Or, par définition de δ,

  $$-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n})) + -\sqrt{n}x_{i+1} + \delta < -\sqrt{n}F^{-1}(a)) + -\sqrt{n}x_{i_a+1} - \delta,$$

et, on a $-\sqrt{n}x_{i_a+1} - \delta < \sqrt{n}y_{i_a+1}$. Ceci prouve que $\forall i$ tel que $\frac{i}{n} \in [a, b]$,

$$G_{n,c}y(\frac{i}{n}) < G_{n,c}y(a).$$

On en déduit que le maximum de $G_{n,c}y$ est atteint pour l'indice i, facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.

- Supposons que x atteint son maximum en $\frac{i}{n}$.
  Il suffit de reprendre la démarche pour

$$\delta \leq \frac{1}{2}min(\theta_a \ , \ \theta_i)$$

où

$$\theta_a \ = \ (-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \sqrt{n}x_{i+1}) - (-\sqrt{n}F^{-1}(a) + \sqrt{n}x_{i+1}),$$

et

$$\theta_i \ = \ \min_{j \neq i} \left((-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \sqrt{n}x_{i+1}) - (-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + \sqrt{n}x_{i+1})\right).$$

■

Lemme 3.5.6 : Infimum d'une trajectoire

Pour $P_n^{(q)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^q$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur infimum respectif pour le même indice $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Plus précisemment, cela signifie que x atteint son infimun sur l'intervalle $[j-1, j) \bigcap [a, b]$ et vaut précisément $-\sqrt{n}F^{-1}(b) + x_j\sqrt{n}$ ou $-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + x_j\sqrt{n}$.

Démonstration : Cette démonstration s'effectue en trois points :

- Existence et unicité de l'indice j pour lequel x atteint son minimum.
- Exitence du voisinage de x satisfaisant les conditions du lemme.
- Correspondance de l'indice pour y et $G_{n,c}y$.

Démontrons successivement ces trois points

- Existence et unicité de l'indice j pour lequel x atteint son minimum.
  Par définition, la trajectoire est $P_n^{(q)}$-presque surement de la forme :

$$x(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) \ + \ x_{i+1}\sqrt{n} \ , \ t \in \ [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}).$$

où F est continue avec $F' > 0$.
Ainsi, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1})$, x est décroissante strictement.
Par conséquent,

$$\min_{t \in [a,b]} x(t) = \left(\min_{i \in \{1, \ldots, n\}} -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i+1}{n}) + x_i\sqrt{n}; -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i_b}{n}) + x_{i_b}\sqrt{n} \right).$$

Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j, \ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^q$ qui atteignent leur maximum en un unique point est $P_n^{(q)}$-presque sûr, soit en b, soit en $\frac{j}{n}$.

- Exitence du voisinage de x satisfaisant les conditions du lemme.
  $U_{\delta_1} = \{y \in \mathbb{D}_n^q | \, |y_j - x_j| \leq \delta_1\}$, est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, section 2.5.
- Correspondance de l'indice pour y et $G_{n,c}y$.
  Il reste à montrer que $G_{n,c}y$ et y atteingnent leur minimum soit en b soit en $\frac{j}{n}$, mais au même point que x.

  - Supposons que x atteint son minimum en $\frac{j}{n}$.
    Posons $m_y = -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + x_j\sqrt{n}$. Soit

$$\delta \leq \frac{1}{2} \min_{j \neq i} \left((-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + x_i\sqrt{n}) - m_y \; ; \; (-\sqrt{n}F^{-1}(b) + \frac{i_b}{\sqrt{n}}) - m_y) \right).$$

    Ainsi $U_{\frac{\delta_1}{\sqrt{n}}}$ est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1. D'après la preuve du lemme 3.4.1, on a pour $y \in U_{\delta_1}$, $G_c y \in U_{\frac{2\delta_1}{\sqrt{n}}}$.
    On a d'abord, pour tout $i \neq j$ tels que $\frac{i}{n} \in [a, b]$,

$$-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \tilde{y}_i\sqrt{n}) > -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + x_i\sqrt{n}) - \delta.$$

    Or, par définition de δ, on a

$$-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \tilde{y}_i\sqrt{n} > \delta + (-\sqrt{n}F(\frac{j}{n}) + x_j\sqrt{n}))$$

    et

$$-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + \tilde{y}_i\sqrt{n}) > -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + \sqrt{n})\tilde{y}_j.$$

    De même, on montre que

$$-\sqrt{n}F^{-1}(b) + \tilde{y}_{i_b}\sqrt{n}) > -\sqrt{n}F^{-1}(\frac{j}{n}) + \sqrt{n})\tilde{y}_j.$$

    on en déduit que le minimum de $G_{n,c}y$ est atteint pour l'indice j, facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.
- Supposons que x atteint son maximum en b.
  On utilise la méthode précédente avec

$$\delta \leq \frac{1}{2} \min_{i} \left((-\sqrt{n}F^{-1}(\frac{i}{n}) + x_i\sqrt{n}) - (-\sqrt{n}F^{-1}(b) + \frac{i_b}{\sqrt{n}})) \right).$$

■

D.4 Cas du processus F-séquentiel.

Lemme 3.5.7 : Maximum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(s)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^s$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de

x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur maximum respectif pour le même couple d'indices $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

Plus précisemment, x atteint son maximun sur le segment $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i^j\}$, y dans l'instant $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{y_i^j\}$ et $G_{n,c}y$ dans l'instant $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{y_i^j + c\varphi(y_i^j)\}$.

Démonstration : Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j,\ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^s$ qui atteignent leur maximum en un unique point est $P_n^{(s)}$-presque sûr. Soient $x \in \mathbb{D}_n^s$ un tel élément et (i,j) l'unique couple d'indices tel que $\max_{t\in\mathbb{R}}(x(t)) = -\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i}{\sqrt{n}}$. Le maximum est atteint sur $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i\}$. Soit

$$\delta \leq \frac{1}{2} \min_{(k,l)\neq(i,j)} \{(-\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i}{\sqrt{n}}) - (-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_k^l) + \frac{k}{\sqrt{n}})\}.$$

Par continuité de F en x_k^l, soit $\delta_k^l > 0$ tel que

$$|x - x_k^l| \leq 2\delta_k^l \Rightarrow |F(x) - F(x_k^l)| < \delta/\sqrt{n}.$$

Alors, $U_{\delta_i^j}$ est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, pour tout $c \leq c_0 := \min_{1\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|/4M_\varphi$ où $M_\varphi = \sup_t |\varphi(t)|$, on a pour $y \in U_{\delta_i^j}$, $G_c y \in U_{2\delta_i^j}$.

On a d'abord $\max_t G_{n,c}(y(t)) = \max_{(k,l)}(-\frac{l}{\sqrt{n}}F(\tilde{y}_k^l) + \frac{k}{\sqrt{n}})$, puis, comme $|\tilde{y}_k^l - x_k^l| \leq 2\delta_1$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{l}{\sqrt{n}}F(\tilde{y}_k^l) + \frac{k}{\sqrt{n}} < \delta + (-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_k^l) + \frac{k}{\sqrt{n}}) \\
&-\frac{j}{\sqrt{n}}F(\tilde{y}_i^j) + \frac{i}{\sqrt{n}} > -\delta + (-\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i}{\sqrt{n}}) \geq \delta + (-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_k^l) + \frac{k}{\sqrt{n}}),
\end{aligned}$$

on en déduit que le maximum de $G_{n,c}y$ est atteint pour l'indice (i,j), facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.

■

Lemme 3.5.8 : Infimum d'une trajectoire
Pour $P_n^{(s)}$-presque toute trajectoire $x \in \mathbb{D}_n^s$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert V_x de x tels que : $\forall c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall y \in V_x$, x, y et $G_{n,c}y$ atteignent leur infimum respectif pour le même couple d'indices $(k,l) \in \{1,\dots,n\}^2$.

Plus précisemment, cette notion signifie x atteint son minimun pour l'instant de saut x_j sur le segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \times \{x_l^k\}$ et vaut précisément $-\frac{k}{\sqrt{n}}F(x_l) + \frac{l-1}{\sqrt{n}}$.

Démonstration :

- Existence et unicité de l'indice (i,j) pour lequel x atteint son minimum. Par définition, le minimum de la trajectoire est $P_n^{(s)}$-presque surement de la forme :

$$\inf_{(u,t)\in[0,1]^2} x(u,t) = \min_{(l,k)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,l\}} \{-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_{k+1}^l) + \frac{k}{\sqrt{n}}\}.$$

  où F est décroissante et continue avec $F' > 0$, $x_0^l = -\infty$ et $x_{l+1}^l = +\infty$.
  Ainsi, sur chaque intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times [x_i^j, x_{i+1}^j)$, x est décroissante strictement.

Comme $\mathbb{P}\{\xi_i = \xi_j,\ i \neq j\} = 0$, il est facile de voir que l'ensemble des $x \in \mathbb{D}_n^q$ qui atteignent leur maximum en un unique point est P_n^e-presque sûr. Soient $x \in \mathbb{D}_n^q$ un tel élément et (i,j) l'indice unique.

- Exitence du voisinage de x. U_{δ_1} est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 2.5.1, section 2.5.
- Correspondance de l'indice pour y et $G_{n,c}y$. Soit

$$\delta \leq \frac{1}{2} \min_{(k,l)\neq(i,j)} \left((-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_k^l) + \frac{k-1}{\sqrt{n}}) - (-\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i-1}{\sqrt{n}})\right).$$

Par continuité de F en x_l^k, soit $\delta_k^l > 0$ tel que

$$|x - x_k^l| \leq 2\delta_k^l \Rightarrow |F(x) - F(x_k^l)| < \delta/\sqrt{n}.$$

Soit $\delta_1 = \min_{(k,l)} \delta_k^l$. Ainsi U_{δ_1} est un voisinage ouvert de x d'après le lemme 3.4.1, pour tout $c \leq c_0 := \min_{1\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|/4M_\varphi$ où $M_\varphi = \sup_t |\varphi(t)|$, on a pour $y \in U_{\delta_1}$, $G_c y \in U_{2\delta_1}$.
On a ainsi aisément :

$$-\frac{l}{\sqrt{n}}F(\tilde{y_k^l}) + \frac{k-1}{\sqrt{n}} > -\delta + (-\frac{l}{\sqrt{n}}F(x_k^l) + \frac{k-1}{\sqrt{n}}),$$

et

$$-\frac{l}{\sqrt{n}}F(\tilde{y_k^l}) + \frac{k-1}{\sqrt{n}} \geq \delta + (-\frac{j}{\sqrt{n}}F(x_i^j) + \frac{i-1}{\sqrt{n}})$$

Ce qui se traduit par

$$-\frac{l}{\sqrt{n}}F(\tilde{y}_k^l) + \frac{k-1}{\sqrt{n}} > -\frac{j}{\sqrt{n}}F(\tilde{y}_i^j) + \frac{i-1}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit que le minimum de $G_{n,c}y$ est atteint pour le couple d'indices (i,j), facilement pour $c = 0$, on obtient le résultat pour y.

■

Annexe E

Transport de type intégrale

E.1 Preuve du théorème 4.2.1

Le principe de la démonstration du théorème 4.2.1 repose sur la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. Le choix de la famille de transformations données en (3.3.3) va nous assurer la vérification des deux premières hypothèses de ce théorème, c'est l'objet des sections 3.9 et 3.8.

Il ne reste qu'à vérifier la troisième hypothèse.

Rappelons qu'on considère f de type intégrale donnée par

$$\forall y \in \mathbb{D}_n, \quad f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(y(t))\, q(t)\, dt.$$

On considère x fixé dans un ensemble $P_n^{(p)}$-presque sûr et y dans le voisinage $V(x)$ associé à x par le lemme 3.4.1. Notons toujours $\{y_1, \ldots, y_n\} \in E_n$ instants ordonnés des sauts de $y \in \mathbb{D}_n^p$, Δ_i les intervalles $]y_i, y_{i+1}]$ avec $y_0 = -\infty$ et $y_{n+1} = +\infty$.

Comme sur chaque intervalle Δ_i, $y \in \mathbb{D}_n^p$ est bien connue, on peut préciser l'écriture de f de la façon suivante :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Delta_i} h(-\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i)\, q(t)\, dt. \tag{E.1.1}$$

On cherche à évaluer $\phi_y'(c)$ pour $\phi_y(c) = f\left(G_{n,c}(y)\right)$.

Commençons par évaluer $f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y))$ pour $y \in V(x)$ avec $q(y_{i_0}) \neq 0$ (*cf.* hypothèse 4 du th. 4.2.1).

Remarquons que par choix de $V(x)$, $\varphi(y_{i_0}) \neq 0$ (car pour $y \in V(x)$, d'après le lemme 3.4.1, $y_{i_0} \in \Delta_{i_0}$, intervalle où φ est strictement positive par définition).

Comme on s'intéresse à une limite pour $d \longrightarrow 0$, on peut supposer que les intervalles $\delta_i(d) := [y_i + c\,\varphi(y_i), y_i + (c+d)\varphi(y_i)]$ sont disjoints (éventuellement, on échange les bornes de ces intervalles pour les avoir dans le bon sens).
Ainsi, $f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y)) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i(d)} \varepsilon_i \left[h\left(\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i\right) - h\left(\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_{i-1}\right)\right] q(t)\, dt \tag{E.1.2}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, selon la position relative des points y_i et $y_i + c\,\varphi(y_i)$.
Revenons maintenant au calcul de

$$\phi'_y(c) = \lim_{d \to 0} \frac{f(G_{n,c+d}(y)) - f(G_{n,c}(y))}{d}.$$

On déduit de l'expression (E.1.2) que $\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} I_n(h, q, y, c, d)$, avec

$$I_n(h, q, y, c, d) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i(d)} \varepsilon_i \left[h\left(-\mathcal{C}_n F(t) + C_i\right) - h\left(-\mathcal{C}_n F(t) + C_{i-1}\right)\right] q(t)\, dt.$$

On obtient alors facilement que la limite de chaque terme de la somme précédente est donnée par : quand $d \longrightarrow 0$,

$$\frac{1}{d} \int_{\delta_i(d)} h\left(-\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i\right) q(t)\, dt \longrightarrow q(y_i)\varphi(y_i) h\left(-\mathcal{C}_n F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \mathcal{C}_i\right).$$

En utilisant cette expression, on a alors $\phi'_y(c) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q(y_i)\varphi(y_i) \left[h\left(-\mathcal{C}_n F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \mathcal{C}_i\right) - h\left(-\mathcal{C}_n F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \mathcal{C}_{i-1}\right)\right].$$

Or, rappelons que la fonction φ a été choisie de façon que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[, \\ > 0 & \text{si} \quad t \in]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[. \end{cases}$$

Comme $y \in V(x)$, on a $y_i \in \Delta_i$ et par choix de ces intervalles :

$$y_i \notin]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[\quad \text{et} \quad y_{i_0} \in]x_{i_0} - \varepsilon_x, x_{i_0} + \varepsilon_x[.$$

On a donc $\varphi(y_i) = 0$ *ssi* $i \neq i_0$ et $\varphi(y_{i_0}) > 0$.

Il suit $\phi'_y(c) =$

$$\varepsilon_{i_0} q(y_{i_0})\varphi(y_{i_0}) \left[h\left(-\mathcal{C}_n F(y_{i_0} + c\,\varphi(y_{i_0})) + \mathcal{C}_{i_0}\right) - h\left(-\mathcal{C}nF(y_{i_0} + c\,\varphi(y_{i_0})) + \mathcal{C}_{i_0-1}\right)\right].$$

Notons à présent,

$$A_i = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; h\left(-\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i\right) = h\left(-\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_{i-1}\right) \right\}.$$

Pour conclure, il suffit maintenant de voir $\lambda(A_{i_0}) = 0$.
Or d'après l'hypothèse 5 du théorème 4.2.1 :

$$\lambda\{s \in \mathbb{R} \mid h(s + 1/\sqrt{n}) = h(s)\} = 0.$$

En utilisant alors le changement de variable $s(t) = -\sqrt{n}F(t)$, comme $F'(t) > 0$ p.p., on a $s'(t) < 0$ p.p. et donc $\lambda s^{-1} \ll \lambda$ d'où on déduit $\lambda(A_{i_0}) = 0$. On satisfait ainsi la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 et achève la preuve du théorème 4.2.1.

■

E.2 Preuve du théorème 4.4.1 : Vérification directe

Le principe de la démonstration du théorème 4.4.1 repose sur la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. Le choix de la famille de transformations données en (3.3.5) va nous assurer la vérification des deux premières hypothèses de ce théorème, c'est l'objet des sections 3.9 et 3.8. Il ne reste à nouveau qu'à vérifier la troisième hypothèse :

Pour $P_n^{(s)}$-presque chaque y de V_x, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel qu'avec $\phi_y(c) = f(G_c(y))$

presque chaque $c \in [0, \varepsilon_y]$, $\phi_y'(c)$ existe et est non nulle.

Rappelons qu'on considère f de type intégrale donnée par : $\forall y \in \mathbb{D}_n^s$,

$$f(y) = \iint_{[0,1[\times\mathbb{R}} h(y(u,t))\, q(u,t)\, d_2\lambda(u,t).$$

On considère x fixé dans un ensemble $P_n^{(s)}$-presque sûr et y dans le voisinage $V(x)$ associé à x par le lemme 3.4.1.

Notons toujours $\{y_1, \ldots, y_n\} \in E_n$ instants ordonnés des sauts de $y \in \mathbb{D}_n^s$, Δ_i les intervalles $]y_i, y_{i+1}]$ avec $y_0 = -\infty$ et $y_{n+1} = +\infty$.

Comme sur chaque intervalle Δ_i, $y \in \mathbb{D}_n^s$ est bien connue, on peut préciser l'écriture de $\phi_y(c) := f(G_{n,c}(y)$ de la façon suivante :

$$\phi_y(c) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{y_i^j + c\varphi(y_i^j)}^{y_{i+1}^j + c\varphi(y_{i+1}^j)} h(-\frac{j}{\sqrt{n}}F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}})\, q(u,t)\, dtdu. \tag{E.2.1}$$

On choisit φ comme une fonction de x_{n-1}-transformation, définie par la formule 3.1.1, ainsi, on remarque que par choix de $V(x)$, $\varphi(y_{n-1}) \neq 0$ et $\forall i \neq n$, $\varphi(y_i) = 0$.

L'équation (E.2.1) met donc en évidence que $\phi_y(c)$ est une somme dont seulement deux termes dépendent de c. Ceci permet de comprendre le lemme suivant :

Lemme E.2.1 *Pour tout $y \in V_x$ et pour tout $c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, on a*

$$\phi_y(c) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

avec

$$\phi_1 = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{j} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{y_i^j}^{y_{i+1}^j} h(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}})\, q(u,t)\, dtdu,$$

$$\phi_2 = \sum_{\substack{i=0 \\ y_{i+1}^{n-1} \neq y_{n-1} \\ y_i^{n-1} \neq y_{n-1}}}^{n-1} \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} \int_{y_i^{n-1}}^{y_{i+1}^{n-1}} h(-\frac{j}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i}{\sqrt{n}})\, q(u,t)\, dtdu,$$

$$\phi_3 = \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} \int_{y_{n-1}+c\varphi(y_{n-1})}^{y_{i_0+1}^{n-1}} h(-\frac{n-1}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i_0}{\sqrt{n}})\, q(u,t)\, dtdu,$$

$$\phi_4 = \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} \int_{y_{i_0-1}^{n-1}}^{y_{n-1}+c\varphi(y_{n-1})} h(-\frac{n-1}{\sqrt{n}} F(t) + \frac{i_0-1}{\sqrt{n}})\, q(u,t)\, dtdu,$$

où i_0 est la place de y_{n-1} dans le classement des y_i dans l'ordre croissant.

Démonstration : On décompose $\phi_y(c)$ sous la forme (E.2.1) en quatre intégrales selon les produits suivants :

- $[0,1] \times [0, \frac{n-1}{n}]$,
- $[\frac{n-1}{n}, 1] \times [0, x_{i_0-1}^{n-1}]$ et $[\frac{n-1}{n}, 1] \times [x_{i_0+1}^{n-1}, 1]$,
- $[\frac{n-1}{n}, 1] \times [x_{i_0}^{n-1}, x_{i_0+1}^{n-1}]$,
- $[\frac{n-1}{n}, 1] \times [x_{i_0-1}^{n-1}, x_{i_0}^{n-1}]$,

  et l'on obtient le résultat souhaité puisque, sur les deux premières zones, $\varphi(y_i) = 0$.

■

Lemme E.2.2 *Pour tout $y \in V_x$ et pour tout $c \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; la fonction $\phi_y(c)$ est dérivable et l'on a :*

$$\phi_y'(c) = \varphi(y_{n-1}) \left[h\left(t_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - h(t_0) \right] \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} q(u, y_{n-1} + c\varphi(y_{n-1}))\, du \qquad \text{(E.2.2)}$$

où $t_0 = -\frac{n-1}{\sqrt{n}} F(y_{n-1} + c\varphi(y_{n-1})) + \frac{i_0}{\sqrt{n}}$, si l'on note i_0 est la place de y_{n-1} quand on range les y_i dans l'ordre croissant.

Démonstration : La dérivabilité de la fonction ϕ et la forme de $\phi_y'(c)$ se déduit des formules de dérivation d'intégrales de fonctions dérivables construites sous un paramétre.

■

Pour finir la vérification, on applique donc ce lemme en posant

$$t_0 = -\frac{n-1}{\sqrt{n}} F(y_{n-1} + c\varphi(y_{n-1})) + \frac{i_0}{\sqrt{n}},$$

on a :

$$\phi'_y(c) = \left[h\left(t_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - h\left(t_0\right)\right] \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} q(u, y_{n-1} + c\varphi(y_{n-1}))\, du.$$

Or, l'hypothèse (4) assure que $\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} q(u, y_{n-1} + c\varphi(y_{n-1}))\, du \neq 0$.
Finalement, l'hypothèse $P\{h(u) = h(u + \frac{1}{\sqrt{n}})\} = 0$ permet d'assurer que l'ensemble $\{t_0 \in \mathbb{R} \mid h\left(t_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = h\left(t_0\right)\}$ est de mesure nulle, on a ainsi $\phi'_y(c) \neq 0$ pp.
On satisfait ainsi la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 et achève la preuve du théorème 4.4.1.

■

Annexe F

Transport de type suprémum

F.1 Étude du cas particulier $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$

F.1.1 Transport d'un processus F-empirique

Théorème (5.1.1) : *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$. Alors, la loi $P_n^{(e)} f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(e)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

Démonstration du théorème 5.1.1

La démonstration réside en la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. La famille de transformations utilisées étant la même qu'en section 3, les deux premières hypothèses ont déjà été vérifiées en sections 3.9, 3.8 pour les fonctionnelles de type intégrale.

Pour vérifier la troisième hypothèse du théorème 0.0.2, on utilise de nouveau la famille de transformations $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{D}_n^e$, donnée en section 3. Pour cela, d'après le lemme 1.1.2, on choisit $x \in \mathbb{D}_n^e$ dont le maximum est atteint pour un unique indice i et on considère $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ définie à l'aide d'une fonction φ de x_i-transformation.
On a $\phi_y(c) = f(G_{n,c}(y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)$. Par définition, si elle existe, la dérivée est donnée par

$$\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c+d}(y)(t) - \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)(t)\right].$$

Pour connaître l'image de $y \in \mathbb{D}_n^e$ par une transformation $G_{n,c}$, il suffit de spécifier les n instants de ses sauts. Rappelons qu'à $y \in \mathbb{D}_n^e$ est associé $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ et qu'alors y est donné par (1.1.4). Notons

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \hat{y}_{c,i} = y_i + c\,\varphi(y_i),$$
$$\hat{y} = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}).$$

Comme on ne s'intéresse qu'à $c \to 0$, les propriétés sur la conservation de l'ordre des $(\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$ restent valables (*cf.* lemme 3.4.1).

Comme $G_{n,c}(x)$ est une fonction définie par ses sauts $\hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$, continue et décroissante sur chacun des intervalles $[\hat{y}_{c,i}, \hat{y}_{c,i+1}]$, on constate facilement que pour toute

fonction $y \in \mathbb{D}_n^e$ pour tout réel c, on a $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n^e$ et

$$\phi_y(c) = \max_{1 \le i \le n} \left\{ -\sqrt{n} F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}} \right\}.$$

On a l'analogue du lemme 3.4.1, voir annexe précédente :

Lemme F.1.1 *Pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(e)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son maximum pour le même indice que x pour c assez petit.*

Lemme F.1.2 *Soient*

$$\Im = \{t \in \mathbb{R} \,|\, F'(t) \text{ existe et } F'(t) > 0\},$$
$$X_\Im = \{x \in \mathbb{D}_n \,|\, \forall 1 \le i \le n,\ x_i \in \Im\}.$$

La densité de la loi commune des ξ_i^e est donnée par

$$p(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t \in \Im \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{F.1.1}$$

De plus, $P_n^{(e)}$-presque sûrement, une fonction x de $\mathbb{D}_n^e$ n'a de sauts que sur l'ensemble $\Im$, c'est à dire que $P(X_\Im) = 1$.

Démonstration : L'égalité (F.1.1) est claire, la seconde partie vient de :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}\{\xi_k \in \Im\} = \int_\Im p\, d\lambda + \int_{\Im^c} 0\, d\lambda = 1.$$

Ainsi, les trajectoires sont presque sûrement à sauts dans $\Im$.

■

Reprenons, à présent, la justification de la vérification de la troisième hypothèse du théorème 0.0.2 : soit $y \in V(x)$ voisinage de x donné par le lemme 3.4.1, pour tout c réel, on a

$$\phi'_y(c) = \lim_{d \to 0} \tfrac{1}{d} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c+d}(y) - \sup_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c}(y) \right],$$
$$\phi'_y(c) = \lim_{d \to 0} \tfrac{1}{d} \left[\left\{ -\sqrt{n} F(y_i + (c+d)\varphi(y_i)) + \tfrac{i}{\sqrt{n}} \right\} - \left\{ -\sqrt{n} F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \tfrac{i}{\sqrt{n}} \right\} \right]$$

où i est l'indice commun pour lequel $G_{n,c+d}(y)$ et $G_{n,c}(y)$ atteignent leur maximum et φ est une fonction de x_i-transformation.

On a facilement,

$$\phi'_y(c) = -\sqrt{n} \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \left[F(y_i + (c+d)\varphi(y_i)) - F(y_i + c\,\varphi(y_i)) \right].$$

Un calcul élémentaire de limite permet de vérifier que pour tout $y \in V(x)$ et $c \in \mathbb{R}$

$$\phi'_y(c) = -\sqrt{n} \varphi(y_i) F'(y_i + c\,\varphi(y_i)).$$

Comme $y \in V(x)$, y_i est voisin de x_i avec $\varphi(x_i) = 1$, on peut supposer avoir choisi $V(x)$ dans la preuve du lemme 3.4.1 tel que $\varphi(y_i) > 0$ pour $y \in V(x)$. Puis comme $F' > 0$ *p.p.*, on a bien *p.p.*, $\phi'_y(c) \neq 0$, le théorème 0.0.2 s'applique et donne $P_n f^{-1} \ll \lambda$, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.1.

■

F.1.2 Transport d'un processus F-empirique pondéré

Théorème 5.1.2 : *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$. Alors, la loi $P_n^{(p)} f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(p)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

Démonstration : Le cas du processus empirique pondéré est de nouveau une généralisation immédiate du cas du processus empirique. Pour cela, il suffit de faire une simple adaption.

■

F.1.3 Transport d'un processus F-quantile

Théorème 5.1.3 : *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t)$. Alors, la loi $P_n^{(q)} f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(q)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

Démonstration : La démonstration réside en la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. La famille de transformations utilisées étant la même qu'en section 3, les deux premières hypothèses ont déjà été vérifiées en sections 3.9, 3.8. Pour cela, d'après le lemme 1.1.2, on choisit $x \in \mathbb{D}_n^q$ dont le maximum est atteint pour un unique indice i et on considère $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ définie à l'aide d'une fonction φ de x_i-transformation.
On a $\phi_y(c) = f(G_{n,c}(y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)$. Par définition, si elle existe, la dérivée est donnée par

$$\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c+d}(y) - \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)\right].$$

Pour connaître l'image de $y \in \mathbb{D}_n^q$ par une transformation $G_{n,c}$, il suffit de spécifier les n instants de ses sauts. Rappelons qu'à $y \in \mathbb{D}_n^q$ est associé $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$ et qu'alors y est donné par (1.3.4). Notons

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \hat{y}_{c,i} = y_i + c\,\varphi(y_i),$$
$$\hat{y} = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}).$$

Comme on ne s'intéresse qu'à $c \to 0$, les propriétés sur la conservation de l'ordre des $(\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$ restent valables.(*cf.* lemme 3.4.1).

Comme $G_{n,c}(x)$ est une fonction définie par ses sauts $\hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$, continue et décroissante sur chacun des intervalles $[\hat{y}_{c,i}, \hat{y}_{c,i+1}]$, on constate facilement que pour toute fonction $y \in \mathbb{D}_n^q$ pour tout réel c, on a $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n^q$ et

$$\phi_y(c) = \max_{1\leq i\leq n}\left\{-\sqrt{n}F(y_i + c\,\varphi(y_i)) + \frac{i}{\sqrt{n}}\right\}.$$

On a l'analogue du lemme 3.4.1, voir annexe précédente :
Lemme F.1.3 *Pour $P_n^{(q)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^q$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(q)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son maximum pour le même indice que x pour c assez petit.*
On a donc

$$\phi(c) = \max_{t_0 \in \{a, \frac{i_0}{n}\}} \big(-\sqrt{n}F^{-1}(t_0) + \sqrt{n}x_{t_0+1} + c\sqrt{n}l_k(t_0)\big).$$

Par simple dérivation, on a

$$\phi(c) = \max\big(\sqrt{n}l_k(a) \ ; \ \sqrt{n}l_k(\frac{i_0}{n})\big).$$

On a bien p.p., $\phi'_y(c) \neq 0$, le théorème 0.0.2 s'applique et donne $P_n^q f^{-1} \ll \lambda$, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.3.

■

F.1.4 Transport d'un processus F-séquentiel

Théorème 5.1.4 : *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sup_{u\in[0,1]\, t\in\mathbb{R}} x(u,t)$. Alors, la loi $P_n^{(s)}\, f^{-1}$ de $f(\xi_n^{(s)})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*
Démonstration : La démonstration réside en la vérification des hypothèses du théorème 0.0.2. La famille de transformations utilisées étant la même qu'en section 3, les deux premières hypothèses ont déjà été vérifiées en sections 3.9, 3.8 pour les fonctionnelles de type intégrale.

Pour vérifier la troisième hypothèse du théorème 0.0.2, on utilise de nouveau la famille de transformations $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{D}_n^s$, donnée en section 3. Pour cela, d'après le lemme 1.1.2, on choisit $x \in \mathbb{D}_n^s$ dont le maximum est atteint pour un unique indice i et on considère $\{G_{n,c}, c \in \mathbb{R}\}$ définie à l'aide d'une fonction φ de x_i-transformation.
On a $\phi_y(c) = f(G_{n,c}(y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)$. Par définition, si elle existe, la dérivée est donnée par

$$\phi'_y(c) = \lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c+d}(y) - \sup_{t\in\mathbb{R}} G_{n,c}(y)\right].$$

Pour connaître l'image de $y \in \mathbb{D}_n^s$ par une transformation $G_{n,c}$, il suffit de spécifier les n instants de ses sauts. Rappelons qu'à $y \in \mathbb{D}_n^s$ est associé $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$. Notons

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \hat{y}_{c,i} = y_i + c\,\varphi(y_i),$$
$$\hat{y} = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n}).$$

Comme on ne s'intéresse qu'à $c \to 0$, les propriétés sur la conservation de l'ordre des $(\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$ restent valables.(*cf.* lemme 3.4.1).

Comme $G_{n,c}(x)$ est une fonction définie par ses sauts $\hat{y}_c = (\hat{y}_{c,1}, \ldots, \hat{y}_{c,n})$, continue et décroissante sur chacun des intervalles $[\hat{y}_{c,i}, \hat{y}_{c,i+1}]$, on constate facilement que pour toute fonction $y \in \mathbb{D}_n^s$ pour tout réel c, on a $G_{n,c}(y) \in \mathbb{D}_n^s$ et

$$\phi_y(c) = \max_{(k,l)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,k\}} \left\{ -\frac{l}{\sqrt{n}} F(y_k^l + c\,\varphi(y_k^l)) + \frac{k-1}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Un calcul élémentaire de limite permet de vérifier que pour tout $y \in V(x)$ et $c \in \mathbb{R}$

$$\phi_y'(c) = -\frac{j}{\sqrt{n}} \varphi(y_i^j) F'(y_i^j \; + \; c\,\varphi(y_i^j)).$$

Comme $y \in V(x)$, y_i^j est voisin de x_i^j avec $\varphi(x_i^j) = 1$, on peut supposer avoir choisi $V(x)$ dans la preuve du lemme 3.4.1 tel que $\varphi(y_i^j) > 0$ pour $y \in V(x)$. Puis comme $F' > 0$ p.p. On a bien p.p., $\phi_y'(c) \neq 0$, le théorème 0.0.2 s'applique et donne $P_n^{(s)} f^{-1} \ll \lambda$, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.1.

■

Annexe G

Absolue continuité du couple $(\inf \xi_n, \sup \xi_n)$

G.1 Cas du processus F-emprique pondéré

On prouve dans cette section le théorème suivant :

Théorème G.1.1 *Soit $\xi_n^{(p)}$ un processus empirique de loi F admettant une densité p, la loi de $(\inf_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(p)}(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} \xi_n^{(p)}(t))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2.*

G.1.1 Choix de la famille de transformations

Soient $x \in \mathbb{D}_n^p$ donné par (1.2.1) pour lequel les maximum et minimum sont uniquement atteints. Notons $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les instants de ses sauts, i, j les indices distincts où ses maximum et minimum sont atteints.
Soient $\varepsilon_x = \frac{1}{2} \min_{2\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$ et φ_i^x, φ_j^x des fonctions de x_i- et x_j-transformations telles que dans la définition 3.1.1. avec des supports dans respectivement $[x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]$ et $[x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$.

Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit une transformation $\widehat{G}_{n,c}$ de $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{G}_{n,c}(t) = t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t). \tag{G.1.1}$$

Pour le processus F-empirique pondéré, on définit alors $\tilde{G}_{n,c}$ et $G_{n,c}$ de la même façon qu'en section 3 à partir de (5.2.1) :

$$G_{n,c}y(t) = -\mathcal{C}_n F(t) + \mathcal{C}_i \quad \text{si } t \in (\tilde{y}_{c,i}, \tilde{y}_{c,i+1}] \tag{G.1.2}$$

où on note $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $\tilde{y}_k = \tilde{G}_{n,c}(y_k)$.

On voit que l'on a aisément le lemme suivant :

Lemme G.1.1 *Pour $P_n^{(p)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^p$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(p)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son minimum et son maximum pour les mêmes indices que x pour c assez petit.*

G.1.2 Vérification de $P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n$, $c \to 0$.

On vérifie d'abord la condition 1 du théorème 0.0.2 :

En utilisant les expressions similaires aux formules (3.7.3) et (3.7.4) correspondant à la nouvelle famille de transformations considérées et le lemme 3.9.2, on a :

$$\|P_n^{(p)} G_{n,c}^{-1} - P_n^{(p)}\|_{var} = \|\hat{P}_n \hat{G}_{n,c}^{-1} - \hat{P}_n\|_{var} \leq n \, \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 \varphi_i^x(\xi_1) + c_2 \varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.1.3)}$$

Il reste à estimer $\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 \varphi_i^x(\xi_1) + c_2 \varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}$, c'est à dire à évaluer la différence en variation entre les lois de ξ_1 et de $g_c(\xi_1)$ où maintenant $g_c(t) = x + c_1 \varphi_i^x(t) + c_2 \varphi_j^x(t)$. Notons que pour $c = (c_1, c_2)$ tel que $\forall i \in \{1, 2\}$, $0 < c_i < c_0 := (x_j - x_i) - 2\varepsilon_x$, on a

$$\varphi_j^x(t + c\varphi_i^x(t)) = \varphi_j^x(t).$$

On a alors

$$\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 \varphi_i^x(\xi_1) + c_2 \varphi_j^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var} = \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 \varphi_i^x(\xi_1) + c_2 \varphi_j^x(\xi_1 + c_1 \varphi_i^x(\xi_1))} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.1.4)}$$

Or si $m_n \xrightarrow{var} m$ et $h_n \to h$, comme dans le lemme 3.9.3, on a $m_n h_n^{-1} \xrightarrow{var} m h^{-1}$, on applique alors ce lemme avec

$$m = \hat{P}_{\xi_1}, \quad m_n = \hat{P}_{\xi_1 + c_1^n \varphi_i^x(\xi_1)}, \quad h(t) = t, \quad h_n(t) = t + c_2^n \varphi_j^x(t)$$

où c_1^n, c_2^n convergent vers 0. Le deuxième membre de (5.2.4) tend vers 0 et par (G.1.3), on vérifie ainsi l'hypothèse 1 du corollaire 5.2.2 dans cette situation.

■

G.1.3 Vérification de $G_c(x) \longrightarrow x$, $c \to 0$ en probabilité

A nouveau par définition des transformations G_c, il est clair que x et $G_c(x)$ ne diffèrent que sur un intervalle fini. On trouve donc N entier assez grand tel que $x(t) = G_c(x)(t)$ pour $t \notin [-N, N]$. Considérons la fonction $\sigma_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\sigma_c(t) = t + c_1 \varphi_i^x(t) + c_2 \varphi_j^x(t). \quad \text{(G.1.5)}$$

Un calcul élémentaire donne : $\sigma_c'(t) = 1 + c_1(\varphi_i^x)'(t) + c_2(\varphi_j^x)'(t)$. De plus, par définition, on a $\varphi_k^x(t) = 0$ si $t \notin [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x] \cup [x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$,

$$\begin{aligned} \sigma_c'(t) &= 1 + c_1(\varphi_i^x)'t) && \text{si} \quad t \in [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) &= 1 + c_2(\varphi_j^x)'(t) && \text{si} \quad t \in [x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) &= 1 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On vérifie ainsi facilement que σ_c est une fonction strictement croissante pour chacun des deux c_i et continue. Puis $\sigma_c(-N) = -N$, $\sigma_c(N) = N$ car N est choisi assez grand pour contenir les supports de φ_i et φ_j (ce qui donne $\varphi_i(\pm N) = 0$, $\varphi_j(\pm N) = 0$). On a alors $\sigma_c \in \Lambda_N$ et il suit de la définition de la distance d_N :

$$\begin{aligned} d(G_{n,c}(x), x) &= \inf_{\rho \in \Lambda_N} \left[\sup_{t \in [-N,N]} |x(\rho(t)) - G_{n,c}(x(t))| + \sup_{t \in [-N,N]} |t - \rho(t)| \right] \\ &\leq \sup_{t \in [-N,N]} |x(\sigma_c(t)) - G_{n,c}(x(t))| + \sup_{t \in [-N,N]} |t - \sigma_c(t)|. \end{aligned}$$

On a alors facilement

$$|x(\sigma_c(t)) - G_{n,c}(x(t))| = 0 \quad \text{et} \quad |t - \sigma_c(t)| = |c_1 \varphi_i^x(t) + c_2 \varphi_j^x(t)|$$

donc

$$\begin{aligned} |t - \sigma_c(t)| &\leq |c_1||\varphi_i^x(t)| + |c_2||\varphi_j^x(t)| \\ &\leq |c_1| M_i + |c_2| M_j \end{aligned}$$

où $M_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_k^x(t)|$ pour $k = i, j$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(G_{n,c}(x), x) \longrightarrow 0$, $c \to 0$.

■

G.1.4 Vérification de la troisième hypothèse du corollaire 5.2.2

On considère la fonctionnelle bidimensionnelle

$$f(x) = \big(\inf_{t \in \mathbb{R}} x(t),\ \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t)\big),$$

on a alors par définition de $G_{n,c}$ en (G.1.2) et pour $y \in V(x)$, voisinage donné par le lemme G.1.1 :

$$\begin{aligned} \phi_y(c) &= f(G_{n,c} y) \\ &= (\inf_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c} y(t),\ \sup_{t \in \mathbb{R}} G_{n,c} y(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Big(\min_{1 \leq k \leq n} -\mathcal{C}_n F(y_k + c_1 \varphi_i^x(y_k) + c_2 \varphi_j^x(y_k)) + \mathcal{C}_{k-1}, \\ &\qquad \max_{1 \leq k \leq n} -\mathcal{C}_n F(y_k + c_1 \varphi_i^x(y_k) + c_2 \varphi_j^x(y_k)) + \mathcal{C}_k \Big) \\ &= \big(\text{-}\mathrm{C}_n F(y_i + c_1 \varphi_i^x(y_i)) + \mathcal{C}_{i-1},\quad -\mathcal{C}_n F(y_j + c_2 \varphi_j^x(y_j)) + \mathcal{C}_j\big) \end{aligned}$$

Les min et max de $G_{n,c} y$ sont en effet atteints pour les mêmes indices i et j que pour x, pour $y \in V(x)$ et c assez petit d'après le lemme G.1.1. On en déduit facilement le jacobien de la dérivée :

$$|D\phi_y(c)| = \varphi_i^x(y_i)\, \varphi_j^x(y_j)\, p(y_i + c_1 \varphi_i^x(y_i)\, p(y_j + c_2 \varphi_j^x(y_j))$$

où on rappelle que p désigne la densité de la loi des variables considérées ξ_i.
Quitte à restreindre $V(x)$, on peut supposer que

$$y_i \in (x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x) \quad \text{et} \quad y_j \in (x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x),$$

on a alors $\varphi_i^x(y_i)\,\varphi_j^x(y_j) \neq 0$. Puis comme $p' > 0$ presque partout, on a bien pour presque chaque c

$$|D\phi_y(c)| \neq 0.$$

Finalement, on a vérifié toutes les hypothèses du corollaire 5.2.2 qui s'applique et achève de prouver le théorème G.1.1.

■

G.2 Cas du processus F-quantile

Théorème G.2.1 *Soit $\xi_n^{(q)}$ un processus empirique de loi F admettant une densité p, la loi de $(\inf_{t\in[a,b]} \xi_n^{(q)}(t), \sup_{t\in[a,b]} \xi_n^{(q)}(t))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2.*

G.2.1 Choix de la famille de transformations

Soient $x \in \mathbb{D}_n^q$ donné par (1.3.1) pour lequel les maximum et minimum sont uniquement atteints sur $[a, b]$. Notons $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les amplitudes de ses sauts, i, j les indices distincts où ses maximum et minimum sont atteints sur l'intervalle $[a, b]$, en sachant bien que ces extréma peuvent être atteints soit en a soit en b.
Soient $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min_{2\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$ et φ_i^x, φ_j^x des fonctions de x_i- et x_j-transformations telles que dans la définition 3.1.1. avec des supports dans respectivement $[x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]$ et $[x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$.

Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit une transformation $\widehat{G}_{n,c}$ de $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{G}_{n,c}(t) = t + c_1\sqrt{n}1_{\Delta_i}^x(t) + c_2\sqrt{n}1_{\Delta_j}^x(t) \tag{G.2.1}$$

où $\Delta_i = (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$.
On définit alors $\tilde{G}_{n,c}$ et $G_{n,c}$ de la même façon qu'en section 3 à partir de (G.2.1) :

$$G_{n,c}y(t) = -\sqrt{n}F^{-1}(t) + \sqrt{n}y_{i+1} + c_1\sqrt{n}1_{\Delta_i}^x(t) + c_2\sqrt{n}1_{\Delta_j}^x(t). \quad \text{si } t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[. \tag{G.2.2}$$

On voit que l'on a le lemme :

Lemme G.2.1 *Pour $P_n^{(q)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^e$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(q)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son minimum et son maximum sur $[a, b]$, pour les mêmes indices que x pour c assez petit.*

G.2.2 Vérification de $P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n,\ c \to 0.$

On vérifie d'abord la condition 1 du théorème 0.0.2 :

En utilisant les expressions similaires aux formules (3.7.5), (3.7.6) correspondant à la nouvelle famille de transformations considérées et le lemme 3.9.2, on a :

$$\|P_n^{(q)} G_{n,c}^{-1} - P_n^{(q)}\|_{var} = \|\hat{P}_n \hat{G}_{n,c}^{-1} - \hat{P}_n\|_{var} \leq n\ \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 1_{\Delta_i}^x(\xi_1) + c_2 1_{\Delta_j}^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.2.3)}$$

Il reste à estimer $\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 1_{\Delta_i}^x(\xi_1) + c_2 1_{\Delta_j}^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}$, c'est à dire à évaluer la différence en variation entre les lois de ξ_1 et de $g_c(\xi_1)$ où maintenant $g_c(t) = x + c_1 1_{\Delta_i}^x(t) + c_2 1_{\Delta_j}^x(t)$.
On a alors

$$\|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 1_{\Delta_i}^x(\xi_1) + c_2 1_{\Delta_j}^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var} = \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1 1_{\Delta_i}^x(\xi_1) + c_2 1_{\Delta_j}^x(\xi_1 + c_1 1_{\Delta_j}^x(\xi_1))} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.2.4)}$$

Or si $m_n \xrightarrow{var} m$ et $h_n \to h$, comme dans le lemme 3.9.3, on a $m_n h_n^{-1} \xrightarrow{var} m h^{-1}$, on applique alors ce lemme avec

$$m = \hat{P}_{\xi_1}, \quad m_n = \hat{P}_{\xi_1 + c_1^n 1_{\Delta_i}^x(\xi_1)}, \quad h(t) = t, \quad h_n(t) = t + c_2^n 1_{\Delta_j}^x(t)$$

où c_1^n, c_2^n convergent vers 0. Le deuxième membre de (G.2.4) tend vers 0 et par (G.2.3), on vérifie ainsi l'hypothèse 1 du corollaire 5.2.2 dans cette situation.

■

G.2.3 Vérification de $G_c(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$ en probabilité

Soit x une trajectoire possible définie complètement par le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. Considérons deux suites $\{c_{1,m}, m \in \mathbb{N}\}$ et $\{c_{2,m}, m \in \mathbb{N}\}$ convergentent vers 0. Posons $c_m = (c_{1,m}, c_{2,m})$, $m \in \mathbb{N}$. Par définition, $G_{n,c_m}(x)$ est définie par les instants de ses amplitudes et l'on a :

$$G_{n,c_m}(x)(t) = \sqrt{n} F^{-1} + x_{i+1}\sqrt{n} + c_{1,m}\sqrt{n} 1_{\Delta_i}^x(t) + c_{2,m}\sqrt{n} 1_{\Delta_j}^x(t).$$

On étudie alors $\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - G_{n,c_m}(t)|$. Evidemment, $|x(t) - G_{n,c_m}(t)| = |c_{1,m}\sqrt{n} 1_{\Delta_i}^x(t) + c_{2,m}\sqrt{n} 1_{\Delta_j}^x(t)| \leq \sqrt{n}(|c_{1,m}| + |c_{2,m}|)$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(G_{n,c}(x),\ x \longrightarrow 0,\ c \to 0$.

■

G.2.4 Vérification de la troisième hypothèse du corollaire 5.2.2

On considère la fonctionnelle bidimensionnelle

$$f(x) = \big(\inf_{t \in [a,b]} x(t),\ \sup_{t \in [a,b]} x(t)\big),$$

on a alors par définition de $G_{n,c}$ en (G.2.2) et pour $y \in V(x)$, voisinage donné par le lemme G.2.1 :

$$\begin{aligned}\phi_y(c) &= f(G_{n,c}y) \\ &= (\inf_{t\in[a,b]} G_{n,c}y(t),\ \sup_{t\in[a,b]} G_{n,c}y(t))\end{aligned}$$

$$= \left(-\sqrt{n}F^{-1}(\tfrac{j}{n}) + x_j\sqrt{n} + c_1\sqrt{n},\quad -\sqrt{n}F^{-1}(\tfrac{i}{n}) + x_{i+1}\sqrt{n} + c_2\sqrt{n}\right).$$

Les min et max de $G_{n,c}y$ sont en effet atteints pour les mêmes indices i et j que pour x, pour $y \in V(x)$ et c assez petit d'après le lemme G.2.1. On en déduit facilement le jacobien de la dérivée :

$$|D\phi_y(c)| = n.$$

On a bien pour presque chaque c

$$|D\phi_y(c)| \neq 0.$$

Finalement, on a vérifié toutes les hypothèses du corollaire 5.2.2 qui s'applique et achève de prouver le théorème G.2.1.

■

G.3 Cas du processus F-séquentiel

Théorème G.3.1 *Soit $\xi_n^{(s)}$ un processus séquentiel, de loi F admettant une densité p. Alors, la loi de $(\inf_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} \xi_n^{(s)}((u,t)), \sup_{(u,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \xi_n^{(s)}((u,t)))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2.*

G.3.1 Choix de la famille de transformations

Soient $x \in \mathbb{D}_n^s$ donné par (1.4.4) pour lequel les maximum et minimum sont uniquement atteints. Notons $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ les instants de ses sauts, (i,j) et (k,l) les couples d'indices distincts où ses maximum et minimum sont atteints, respectivement sur $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}) \times \{x_i\}$ et sur $[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}) \times \{x_k\}$.
Soient $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min_{2\leq i\leq n-1} |x_i - x_{i-1}|$ et φ_i^x, φ_k^x des fonctions de x_i- et x_k-transformations telles que dans la définition 3.1.1. avec des supports dans respectivement $[x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]$ et $[x_k - \varepsilon_x, x_k + \varepsilon_x]$.

Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit une transformation $\widehat{G}_{n,c}$ de $[0,1]^2$ par

$$\widehat{G}_{n,c}(u,t) = t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_k^x(t). \tag{G.3.1}$$

On définit alors $\tilde{G}_{n,c}$ et $G_{n,c}$ de la même façon qu'en section 3 à partir de (G.3.1) :

$$G_{n,c}y(u,t) = -\frac{j}{\sqrt{n}}sqrtnF(t) + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad \text{si } u \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}),\ \ t \in (\tilde{y}_{c,i}, \tilde{y}_{c,i+1}] \tag{G.3.2}$$

où on note $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $\tilde{y}_k = \tilde{G}_{n,c}(y_k)$.

On a facilement le lemme suivant :

Lemme G.3.1 *Pour $P_n^{(s)}$-presque chaque $x \in \mathbb{D}_n^s$, il existe $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que pour $P_n^{(s)}$-presque chaque $y \in V(x)$, $G_{n,c}y$ atteint son minimum et son maximum pour les mêmes indices que x, pour c assez petit.*

G.3.2 Vérification de $P_n G_{n,c}^{-1} \xrightarrow{var} P_n,\ c \to 0.$

On vérifie d'abord la condition 1 du théorème 0.0.2 :

En utilisant les expressions similaires aux formules (3.7.7), (3.7.8) correspondant à la nouvelle famille de transformations considérées et le lemme 3.9.2. D'un point de vue plus intuitif, il faut comprendre que la variation en "u" n'existe pas, ainsi on a :

$$\|P_n^{(s)} G_{n,c}^{-1} - P_n^{(s)}\|_{var} = \|\hat{P}_n \hat{G}_{n,c}^{-1} - \hat{P}_n\|_{var} \leq n\ \|\hat{P}_{\xi_1 + c_1\,\varphi_i^x(\xi_1) + c_2\,\varphi_k^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.3.3)}$$

Il reste à estimer $\|\hat{P}_{\xi_1+c_1\,\varphi_i^x(\xi_1)+c_2\,\varphi_k^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}$, c'est à dire à évaluer la différence en variation entre les lois de ξ_1 et de $g_c(\xi_1)$ où maintenant $g_c(t) = t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_k^x(t)$. Notons que pour $0 < c < c_0 := (x_j - x_i) - 2\varepsilon_x$, on a

$$\varphi_j^x(t + c\varphi_i^x(t)) = \varphi_k^x(t).$$

On a alors

$$\|\hat{P}_{\xi_1+c_1\,\varphi_i^x(\xi_1)+c_2\,\varphi_k^x(\xi_1)} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var} = \|\hat{P}_{\xi_1+c_1\,\varphi_i^x(\xi_1)+c_2\varphi_k^x(\xi_1+c_1\,\varphi_i^x(\xi_1))} - \hat{P}_{\xi_1}\|_{var}. \quad \text{(G.3.4)}$$

Or si $m_n \xrightarrow{var} m$ et $h_n \to h$, comme dans le lemme 3.9.3, on a $m_n h_n^{-1} \xrightarrow{var} mh^{-1}$, on applique alors ce lemme avec

$$m = \hat{P}_{\xi_1}, \quad m_n = \hat{P}_{\xi_1 + c_1^n \varphi_i^x(\xi_1)}, \quad h(t) = t, \quad h_n(t) = t + c_2^n \varphi_k^x(t)$$

où c_1^n, c_2^n convergent vers 0. Le deuxième membre de (5.2.4) tend vers 0 et par (G.3.3), on vérifie ainsi l'hypothèse 1 du corollaire 5.2.2 dans cette situation.

■

G.3.3 Vérification de $G_c(x) \longrightarrow x,\ c \to 0$ en probabilité

A nouveau par définition des transformations G_c, il est clair que x et $G_c(x)$ ne diffèrent que sur un intervalle fini. On trouve donc N entier assez grand tel que $x(u,t) = G_c(x)(u,t)$ pour $t \notin [-N, N]$. Considérons la fonction $\sigma_c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\sigma_c(u,t) = (u, \sigma_c(t)) = (u, t + c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_k^x(t)). \quad \text{(G.3.5)}$$

Un calcul élémentaire donne : $\sigma_c'(t) = 1 + c_1(\varphi_i^x)'(t) + c_2(\varphi_j^x)'(t)$. De plus, par définition, on a $\varphi_k^x(t) = 0$ si $t \notin [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x] \cup [x_j - \varepsilon_x, x_j + \varepsilon_x]$,

$$\begin{aligned} \sigma_c'(t) &= 1 + c_1(\varphi_i^x)'t) \quad \text{si} \quad t \in [x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) &= 1 + c_2(\varphi_k^x)'(t) \quad \text{si} \quad t \in [x_k - \varepsilon_x, x_k + \varepsilon_x]; \\ \sigma_c'(t) &= 1 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

On vérifie ainsi facilement que σ_c est une fonction strictement croissante et continue. Puis $\sigma_c(-N) = -N$, $\sigma_c(N) = N$ car N est choisi assez grand pour contenir les supports de φ_i et φ_j (ce qui donne $\varphi_i(\pm N) = 0$, $\varphi_j(\pm N) = 0$). On a alors $\sigma_c \in \Lambda_N$ et il suit de la définition de la distance :

$$\begin{aligned} & d(G_{n,c}(x), x) \\ &= \inf_{\rho \in \Lambda_N} \left[\sup_{(u,t)\in[0,1]\times[-N,N]} |x(\rho((u,t))) - G_{n,c}(x((u,t)))| + \sup_{(u,t)\in[0,1]\times[-N,N]} |(u,t) - \rho((u,t))| \right]; \\ &\leq \sup_{(u,t)\in[0,1]\times[-N,N]} |x(\sigma_c((u,t))) - G_{n,c}(x((u,t)))| + \sup_{(u,t)\in[0,1]\times[-N,N]} |(u,t) - \sigma_c((u,t))|. \end{aligned}$$

On a alors facilement

$$|x(\sigma_c((u,t))) - G_{n,c}(x((u,t)))| = 0 \quad \text{et} \quad |(u,t) - \sigma_c((u,t))| = |c_1\varphi_i^x(t) + c_2\varphi_j^x(t)|.$$

donc

$$\begin{aligned} |(u,t) - \sigma_c((u,t))| &\leq |c_1||\varphi_i^x(t)| + |c_2||\varphi_k^x(t)| \\ &\leq |c_1|M_i + |c_2|M_k \end{aligned}$$

où $M_l = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_l^x(t)|$ pour $l = i, k$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{D}([0,1[\times\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(G_{n,c}(x), x) \longrightarrow 0 \ \ c \to 0.$$

■

G.3.4 Vérification de la troisième hypothèse du corollaire 5.2.2

On considère la fonctionnelle bidimensionnelle

$$f(x) = \big(\inf_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} x((u,t)),\ \sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} x((u,t))\big),$$

on a alors par définition de $G_{n,c}$ en (G.3.2) et pour $y \in V(x)$, voisinage donné par le lemme G.3.1 :

$$\begin{aligned} \phi_y(c) &= f(G_{n,c}y) \\ &= \big(\inf_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} G_{n,c}y((u,t)),\ \sup_{(u,t)\in[0,1[\times\mathbb{R}} G_{n,c}y((u,t))\big) \end{aligned}$$

$= \left(\text{-j}\frac{}{\sqrt{n}F(y_i+c_1\varphi_i^x(y_i))+i/\sqrt{n},\quad -\frac{l}{\sqrt{n}}F(y_k+c_2\varphi_k^x(y_k))+k/\sqrt{n}}\right).$

Les min et max de $G_{n,c}y$ sont en effet atteints pour les mêmes couples d'indices que pour x, pour $y \in V(x)$ et c assez petit d'après le lemme G.3.1. On en déduit facilement le jacobien de la dérivée, à une constante multiplicative non nulle près :

$$|D\phi_y(c)| = \varphi_i^x(y_i)\,\varphi_k^x(y_k)\,p(y_i + c_1\varphi_i^x(y_i)\,p(y_k + c_2\varphi_k^x(y_k))$$

où on rappelle que p désigne la densité de la loi des variables considérées ξ_i.
Quitte à restreindre $V(x)$, on peut supposer que

$$y_i \in (x_i - \varepsilon_x, x_i + \varepsilon_x) \quad \text{et} \quad y_k \in (x_k - \varepsilon_x, x_k + \varepsilon_x),$$

on a alors $\varphi_i^x(y_i)\,\varphi_k^x(y_k) \neq 0$. Puis comme $p' > 0$ presque partout, on a bien pour presque chaque c

$$|D\phi_y(c)| \neq 0.$$

Finalement, on a vérifié toutes les hypothèses du corollaire 5.2.2 qui s'applique et achève de prouver le théorème 5.2.1.

■

Bibliographie

[1] P. J. BICKEL et M.J. WICHURA, *Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications*, The annals of Mathematical Statistics, 1971, vol. 42, no. 5, 1656-1670.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968, 2d ed.

[3] C. BOREL, *Gaussian radom measures on locally convex spaces*, Math. Scand. 38, 1976, 265-284.

[4] C. BRETON M. KAIM, *Transport de la loi d'un processus empirique*, Publications IRMA de Lille, Volume 57, article XII, 2000.

[5] M. CSÖRGO, *Quantile Processes with Statistical Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematiques, Philadelphia, Pennsylvania, 19103, 1983.

[6] Y. A. DAVYDOV, *On absolute continuity of distributions of functionals of random processes*, Theory Probab. Appl., 23, 1978.

[7] Y. A. DAVYDOV, *Local limit theorems for functionnals of random processes*, Theory Probab. Appl., 33, 1988, 732-738.

[8] Y. A. DAVYDOV, *On convergence in variation of one-dimensional image measures*, J. Math. Sciences, vol. 75, no. 5, 1995, p. 1903–1909.

[9] Y.A. DAVYDOV, M. KAIM, , Publications IRMA de Lille, volume 63, article VIII, 2004.

[10] Y. A. DAVYDOV, M.A. LIFSHITS, *Stratification method in some probability problems*, J. Soviet Math. 37, 1987,no 1.

[11] Y.A. DAVYDOV, M.A. LIFSHITS, N.V. SMORODINA, *Local properties of distributions of stochastic functionals*, American Mathematical Society, 1998.

[12] M. A. LIFSHITS, *Statification method for processes with independent increments*, J. Soviet Math. 27, 1984, no 6.

[13] P. MALLIAVIN, *C^k-hypoellipticity with degeneracy*, I,Stochastic Analysis, Academic Press, New York, 1978, pp. 199-214.

[14] D. POLLARD, *Convergence of stochastic processes*, Springer-Verlag, 1984.

[15] R. D. REISS, *A Course on Point Process*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[16] S. I. RIESNICK, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[17] N. V. SMORODINA, *Differential caculus on mesearable spaces and conditions for smoothness of probability densities of random variables*, Soviet Math. Dokl. 35, 1987.

[18] N. V. SMORODINA, *Differential calculus in configuration space and stable measures*, Theory Probab. Appl. 33, 1988, 488-500.

[19] D. STROOCK, *The Malliavin calculus and its applications*, Lecture Notes in Math., vol. 851,Springer-Verlag, Berlin, 1981, pp. 394-432.

[20] B. TSIREL'SON, *The density of the distribution of the maxumum of a Gaussian process*, Theory Prob. Appl. 20, 1975, 847-856.

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN. LILLE
BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE