

Université des Sciences et Technologies de Lille I

Modélisation du comportement dynamique d'éoliennes de moyenne et forte puissance à axe horizontal

Doctorat

Spécialité mécanique

Mathilde LAPIE

Présentée le 20 Septembre 2005

Composition du jury

Président :

M. G. Caignaert Professeur de l'E.N.S.A.M. de Lille

Rapporteurs :

M. C. Vallée Professeur de l'Université de Poitiers

M. Z.-Q. Feng Professeur de l'Université d'Evry-Val d'Essonne

Examineurs :

M. G. DeSaxcé Professeur de l'U.S.T. de Lille I, directeur de thèse

M. B. Paluch Ingénieur de l'O.N.E.R.A., Encadrant

M. J.-B. Tritsch Maître de Conférence de Polytech' Lille, Co-encadrant

M^{me} S. Degallaix Professeur de l'Ecole Centrale de Lille

M. D. Coutellier Professeur de l'E.N.S.I.M.E. de Valenciennes (L.A.M.I.H.)

M. L. Bousshine Professeur de l'E.N.S.E.M. de Casablanca

Résumé : Face à un marché concurrentiel, les constructeurs d'éoliennes doivent proposer des machines fiables et performantes, à moindre coût et de taille croissante. Il s'avère donc crucial de disposer d'outils capables de calculer rapidement les efforts subis en service, pour les dimensionner correctement. Les éoliennes sont des systèmes mécaniques complexes composés de corps rigides ou flexibles. La plupart des codes actuels ne traitent correctement que la partie relative au calcul des efforts aérodynamiques et reposent sur des hypothèses pouvant s'avérer trop simplificatrices en ce qui concerne le calcul des efforts dynamiques, surtout si la taille des rotors augmente. Le but de ce travail a donc été de modéliser le comportement dynamique des machines en évitant toute simplification qui pourrait nuire à la précision des résultats. Pour cela, le formalisme de Kane employé, ainsi que la description de la chaîne cinématique de la machine par arborescence topologique, permet une construction récursive et numérique des équations, facilitant son traitement algorithmique, sans simplification. La méthode développée pour le cas le plus général permet ainsi de modéliser tout type d'éolienne, grâce aux améliorations apportées au formalisme de base. Elle prend en compte le comportement des corps rigides (nacelle) et flexibles (pales), pour lesquels la souplesse a été introduite par l'intermédiaire d'une représentation modale. Un code de calcul a été écrit et validé sur quelques cas simples par comparaison avec des solutions analytiques exactes. Le calcul des efforts aérodynamiques a ensuite été couplé afin de modéliser le comportement mécanique d'une éolienne à partir de données réalistes.

Mots clefs : éoliennes à axe horizontal - Dynamique - Modèles mathématiques, Systèmes mécaniques multicorps - Modèles mathématiques, Equations de Kane, Arborescence (Topologie), Calculs numériques, Charges aérodynamiques

High Power Horizontal Axis Wind Turbines Dynamic Behaviour Modelisation

Abstract : Facing to a very competing market, the manufacturers have to propose increasingly reliable and powerful turbines, at lower cost, with greater and greater rotor diameter. In this context, it proves to be crucial to have tools able to quickly calculate the loads, in order to be able to design them correctly. The wind turbines are complex mechanical systems composed of rigid or flexible bodies. The major part of the current codes treat correctly only the part relating to the aerodynamic loads, and lie on assumptions which can be too simplified with regard to the calculation of the dynamic loads, especially when the size of the rotor increases. Consequently, the aim of this work was then to model the wind turbine dynamic behaviour avoiding drastic simplifications, which could affect the precision of the results. To do this, the Kane's formalism was employed, as well as the description of the kinematic chain through a topological treelike structure, which allows a recursive and purely numerical building of equations of motion, facilitating its algorithmic treatment, without any simplification. The method developed for the most general case makes possible to model any type of wind turbine, thanks to the improvements made to the basic formalism. It takes into account the behaviour of the rigid bodies (nacelle) as well as flexible ones (blades), for which the flexibility was introduced through a modal representation basis. A computer code was written and validated on some simple cases, by comparison with exact analytical solutions. The calculation of the aerodynamic loads was then coupled to model the mechanical behaviour of an wind turbine starting from realistic data.

Key words : Horizontal Axis Wind Turbines - Dynamic - mathematical models, multibody mechanical systems - mathematical models, Kane's equations, topologic treelike, numerical calculations, aerodynamic loads

Laboratoire de Mécanique de Lille I - U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Remerciements

Ma thèse de doctorat a été effectuée à l'O.N.E.R.A.¹ Centre de Lille, financée par l'A.D.E.M.E.² et par la Région Nord-Pas de Calais.

Je tiens donc à remercier :

- M. Bernard Paluch, mon responsable scientifique et à l'origine du sujet de la thèse. Je le remercie aussi pour les méthodes de travail et les connaissances qu'il a su m'inculquer, ainsi que
- M. Géry DeSaxcé, directeur de thèse de l'U.S.T. de Lille,
- M. Jean-Bernard Tritsch, professeur de Mécanique à l'Ecole Polytechnicum de Lille,
- Mmes L. Lesne et F. Leduc, respectivement du service de documentation et du service administratif de l'O.N.E.R.A.,
- Mme V. Pineau, du service administratif de l'A.D.E.M.E.,
- le service informatique de l'O.N.E.R.A. pour la prise en main du langage informatique Fortran, L^AT_EX et Latex, ainsi que O. Masek, J.-F. Sobry et E. Fabre pour leurs conseils précieux,
- le personnel du Département DMSE/RCS,
- des anciens : E. Lenglet, P. A. Faye, J.-C. Devillers.

¹Office Nationale Etudes et Recherches Aérospatiales

²Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie

A mes parents

A Marcel Madelle

Tourner le dos aux canyons arides
Aux éoliennes qui tournent dans le vide
S'il y a des mots qu'il faudrait que j'écrase
C'est sur les murs que seule mon ombre rase
J'ai pris le temps d'apprendre la patience
A mon allure, de prendre mes distances
F. Pagny (2003)

L'*ourangan* sur la montagne, de Julien Duvivier (1922)
Gone with the *wind* (Autant en emporte le vent), de Victor Fleming (1939)
Tempête sur Paris, de Bernard-Deschamps (1940)
The mortal *storm*, de Frank Borzage (1940)
Un condamné à mort s'est échappé ou Le *vent* souffle où il veut, de Robert Bresson (1956)
Written on the *wind*, de Douglas Sirk (1956)
Wind across the Everglades, de Nicholas Ray (1958)
Whistle down the *wind*, de Bryan Forbes (1961)
A high *wind* in Jamaica, de Alexander Mackendrick (1965)
The other side of the *wind*, de Orson Wells (1972)
Le *vent* de la violence (The wilby conspiracy), de Ralph Nelson (1975)
Wind and the Lion, de John Milius (1975)
Un second *souffle*, de Gérard Blain (1978)
Hurricane, de Jan Troell (1979)
La couleur du *vent*, de Pierre Granier-Deferre (1988)
King of the *wind*, de Peter Duffell (1989)
Waiting for the *wind*, de Don Schroeder (1990)
Eye of the *storm*, de Yuri Zeltser (1991)
The dark *wind* (Le *vent* sombre), de Errol Morris (1991)
Wind, de Carroll Ballard (1992)
Vent d'Est, de Robert Enrico (1993)
Le *vent* du Wyoming, de André Forcier (1994)
The *wind* in the willows, de Terry Jones (1996)
Twister, de Jan de Bont (1996)
The ice *storm*, de Ang Lee (1997)
Le *vent* de la nuit, de Philippe Garrel (1998)
Wind River, de Tom Shell (1998)
Crinière au *vent*, une âme indomptable, de Sergeï Bodrov (1999)
Même le *vent*, de Laurence Attali (1999)
Storm, de Harris Done (1999)
The *Hurricane*, de Norman Jewison (1999)
The perfect *storm*, de Wolfgang Petersen (2000)
After the *storm*, de Guy Ferland (2001)
Bride of the *wind* (Alma, la fiancée du *vent*), de Bruce Beresford (2001)
Windtalkers, les messagers du vent, de John Woo (2002)
A mighty *wind*, de Christopher Guest (2003)
Any way the *wind* blows, de Tom Barman (2003)
Les fils du *vent*, de Julien Seri (2003)
The *Wind* in the Willows, de Guillermo Del Toro (2003)

Table des matières

1	Introduction générale	12
2	Introduction	14
2.1	Le contexte éolien	14
2.1.1	La place et le développement de l'énergie renouvelable dans le monde	14
2.1.2	Le développement des éoliennes dans le monde	16
2.1.3	Intérêt de l'implantation d'éoliennes	18
2.1.4	Projets envisagés	20
2.1.5	Problématique	20
2.2	Description de l'éolienne	21
2.2.1	Typologie	22
2.2.2	Les différents constituants de la machine	25
3	Présentation des différentes méthodes de modélisation	29
3.1	Méthodes de modélisation dynamique	29
3.1.1	Modélisation des systèmes multicorps rigides	29
3.1.2	Modélisation des systèmes multicorps souples	32
3.2	Modélisation du comportement aérodynamique	34
3.2.1	Caractéristiques de la machine et du vent	34
3.2.2	Modèles aérodynamiques	35
3.3	Modélisation du système électrique	38
3.3.1	Description d'une génératrice	39
3.3.2	Le raccordement au réseau	40
4	Modélisation dynamique	44
4.1	Introduction	44
4.2	Modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps rigides .	45
4.2.1	Cinématique des systèmes multicorps rigides	45
4.2.2	Prise en compte des efforts	73
4.2.3	Equations de mouvement	77
4.2.4	Prise en compte des contraintes cinématiques	79
4.2.5	Intégration temporelle	90
4.2.6	Synthèse de l'algorithme de calcul	92
4.2.7	Programmation	98
4.2.8	Conclusion	100
4.3	Modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps souples .	100

4.3.1	Cinématique d'un système multicorps souple	100
4.3.2	Vitesses et accélération des centres de masse d'un élément d'un corps souple	102
4.3.3	Force d'inertie généralisée	106
4.3.4	Equation de mouvement	108
4.3.5	Réduction de l'équation de mouvement sur une base modale	110
4.3.6	Conclusion	111
4.4	Calcul des efforts aérodynamiques	112
4.4.1	Description de la géométrie du rotor	112
4.4.2	Construction des données de la géométrie du rotor	116
4.4.3	Relation entre la vitesse du vent et la vitesse angulaire du rotor	116
4.4.4	Caractéristiques aérodynamiques d'un profil	117
4.4.5	Méthode de calcul des vitesses induites (Glauert)	119
4.5	Mise sur le réseau de la génératrice	125
5	Validation du code	128
5.1	Introduction	128
5.2	Validation sur différents systèmes multicorps rigides	128
5.2.1	Cas des systèmes MC non contraints	128
5.2.2	Cas des systèmes MC contraints en rotation : Pendule tournant	155
5.3	Validation sur des systèmes multicorps souples	159
5.4	Validation de la modélisation aérodynamique	160
5.4.1	Présentation de l'éolienne de démonstration	160
5.4.2	Les résultats numériques en comparaison avec une machine réelle	160
5.5	Modélisation d'une machine réelle	172
5.5.1	Introduction	172
5.5.2	Modélisation nécessaire pour le code	172
5.5.3	Tentative de comparaison avec le code ADAMS	179
6	Conclusion générale	181
A	Matrice de vitesse angulaire	184
B	Relation entre les matrices rotation et leurs dérivées	186
C	Quelques propriétés des matrices antisymétriques	188
D	Calcul du moment d'inertie généralisée	190
E	Méthode de transformation de Householder	192
F	Exemple de fichiers, de modules consistant le code numérique relatif aux corps rigides	195
F.1	Exemple d'un fichier de données géométriques : pend1.geo	195
F.2	Exemple d'un module de la bibliothèque de procédures écrivant des messages d'erreur : mod_message.f90	196
F.3	Exemple d'un module dédié : mod_adams.f90	198

F.4	Module déclaratif	203
F.5	Exemple de fichier de résultats	205
G	Complément sur les matrices d'interpolation	208
H	Intégration numérique	212
I	Méthode du sous-espace	214
I.1	Méthode de l'itération inverse	214
I.2	Méthode du sous-espace	215
J	Présentation des résultats intermédiaires pour l'éolienne	217
K	Détermination analytique des équations de mouvement des pendules simple et double	223
K.1	Le pendule simple	223
K.1.1	Solution exacte	224
K.1.2	Solution linéarisée	226
K.2	Le pendule double	227
L	Détermination analytique des équations de mouvement d'un pendule tournant	232
M	Détermination des pulsations propres d'une poutre	234
M.1	Résolution analytique	234
M.2	Résolution numérique	235
N	Explicitation des données utiles des différents éléments composant le moyeu	237

Notations générales

Conventions :

\cdot	Produit scalaire
$[\]$	Matrice
$[\]^T$	Transposé de la matrice
$\{ \ }$	Vecteur colonne
$(\)$	Vecteur ligne

Latines :

$\{a^{k0}\}$	Vecteur accélération du centre de masse de B^k , exprimé dans la base du référentiel \mathfrak{R}^0
c^k	Grandeur c relative à B^k
$c^{i(j)}$	Grandeur c relative à l'élément i du corps B^j
d^{kj}	Grandeur d relative à B^k dont le corps précédent est B^j
$\{f^k\}$	Vecteur force généralisée de B^k , somme de toutes les forces extérieures (gravité, ...) subies par B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{f_g^k\}$	Vecteur force généralisée de gravité de B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{f\}$	Vecteur force généralisée du système multicorps, exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{f_c\}$	Vecteur force de contrainte généralisée du système multicorps, exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{f^{*k}\}$	Vecteur force généralisée d'inertie de B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{f^*\}$	Vecteur force généralisée d'inertie du système multicorps, exprimé dans le repère \mathfrak{R}^0
ℓ	Corde du profil au rayon r
m^k	Masse de B^k
m^{ji}	Masse de l'élément i de B^j
$\{m\}$	Vecteur masse
n_{cg}	Nombre de coordonnées généralisées
n_{conn}	Nombre de connexions maximales sur l'ensemble du système multicorps
n_{contr}	Nombre d'équations de contraintes que subit le système multicorps
n_{ddl}	Nombre de degrés de liberté
n_{elt}^j	Nombre d'éléments dans le corps souples B^j
n_{elt}^{tot}	Nombre total d'éléments dans le multicorps $\left(N^{tot} = \sum_{j=1}^{n_{sol}} N^j \right)$

\vec{n}_i^k	Vecteur unitaire de la base orthonormée directe relative à B^k
n_{noeud}^j	Nombre de noeuds dans le corps souples B^j
n_{noeud}^{tot}	Nombre total de noeuds du multicorps
n_{pale}	Nombre de pales de l'éolienne
n_{qmc}	Nombre d'extrémités « libres » du système multicorps
n_{sol}	Nombre de corps du système multicorps
n_{vp}	Nombre de valeurs propres
r	Rayon courant d'une pale d'éolienne
$\{r^{i(j)}\}$	Vecteur des coordonnées du centre d'inertie $G^{i(j)}$ de l'élément i de B^j , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^j
$\{r^k\}$	Vecteur des coordonnées du centre d'inertie G^k de B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^k
$\{q^k\}$	Vecteur des coordonnées du centre du repère relatif à B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^j , adjacent à B^k
u	Vitesse induite tangentielle
v	Vitesse induite axiale
$\{v^{k0}\}$	Vecteur vitesse du centre de masse de B^k , exprimé dans \mathfrak{R}^0
$\{x\}$	Vecteur des coordonnées généralisées exprimées dans le repère relatif de chaque corps
$\{\dot{x}\}$	Vecteur des vitesses généralisées exprimées dans le repère relatif de chaque corps
$\{\ddot{x}\}$	Vecteur des accélérations généralisées exprimées dans le repère relatif de chaque corps
$\{y\}$	Vecteur des vitesses généralisées exprimées dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{\dot{y}\}$	Vecteur des accélérations généralisées exprimées dans le repère \mathfrak{R}^0
$\{y_g\}$	Vecteur des coordonnées généralisées d'un système souple, exprimées dans le repère relatif à chaque corps
B^0	Corps d'indice 0 qui est confondu avec la base du corps
B^k	Corps d'indice k
$[B]$	Matrice jacobienne des contraintes, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[\dot{B}]$	Dérivée de la matrice jacobienne des contraintes, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[B_j]$	Matrice jacobienne des contraintes égale à $[B][W]$, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[\dot{B}_j]$	Dérivée de la matrice jacobienne des contraintes égale à $[\dot{B}][W]$, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[B_{jred}]$	Matrice jacobienne réduite des contraintes, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[\dot{B}_{jred}]$	Dérivée de la matrice jacobienne réduite des contraintes, de dimension $n_{contr} \times n_{cg}$
$[C]$	Matrice d'amortissement d'un système multicorps rigide
C_d	Coefficient de traînée
C_l	Coefficient de portance

$\{F^k\}$	Vecteur force résultante agissant sur B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^k
$\{F^{*k}\}$	Vecteur force résultante d'inertie agissant sur B^k , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^k
$F_{aéro}$	Foyer aérodynamique de du profil au rayon r
G^k	Centre d'inertie ou barycentre de B^k
G^k	Centre d'inertie ou barycentre de B^k
$\{H\}$	Vecteur de connexions des indices des corps du système
$\{H_{libre}\}$	Vecteur de connexions des indices des extrémités libres du système
$[I]$	Matrice identité
$\overline{\overline{I}}^k$	Dyadique d'inertie du corps B^k , relative au centre de masse G^k
$[I^k]$	Matrice d'inertie de B^k , exprimée dans les bases de \mathfrak{R}^k par rapport à G^k
$[I^{k0}]$	Matrice d'inertie de B^k par rapport à B^0 , exprimée dans \mathfrak{R}^0
$[K]$	Matrice de rigidité d'un système multicorps rigide
$[M]$	Matrice masse d'un système multicorps rigide
$\{M^k\}$	Vecteur moment résultant agissant sur B^k , exprimé dans \mathfrak{R}^k
$\{M^{*k}\}$	Vecteur moment résultant d'inertie agissant sur B^k , exprimé dans \mathfrak{R}^k
$[N]$	Matrice d'interpolation des translations
\mathfrak{R}^0	Repère galiléen orthonormé direct, de centre 0^0 et de base orthonormée directe $\left[\begin{array}{ccc} \{n_1^0\} & \{n_2^0\} & \{n_3^0\} \end{array} \right]$
\mathfrak{R}^k	Repère orthonormé direct lié à B^k , de centre O^k et de base orthonormée directe $\left[\begin{array}{ccc} \{n_1^k\} & \{n_2^k\} & \{n_3^k\} \end{array} \right]$
$[S^{kj}]$	Matrice de passage entre les référentiels \mathfrak{R}^k de B^k vers \mathfrak{R}^j de B^j , corps adjacent à B^k
$[\dot{S}^{kj}]$	Dérivée de la matrice de passage $[S^{kj}]$
$[T]$	Matrice orthogonale complémentaire de $[B_{jmin}]$, de dimension $(n_{cg} - n_{contr}) \times n_{cg}$
U_0	Vitesse tangentielle
$[V^k]$	Matrice de vitesse partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0
$[\dot{V}^k]$	Matrice d'accélération partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0
V_0	Vitesse de l'écoulement amont
$[V_w^k]$	Matrice de vitesse partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0 et proportionnelle à $[V^k]$
$[\dot{V}_w^k]$	Matrice d'accélération partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0 et proportionnelle à $[\dot{V}^k]$
$[VP^j]$	Matrice regroupant l'ensemble des vecteurs propres relatifs à B^j
$[W]$	Matrice transformant $\{y\}$ en $\{\dot{x}\}$
W	Vitesse relative du vent tenant compte des vitesses induites
W_0	Vitesse relative du vent amont

Grecques :

$\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$	Angles similaires à ceux d'Euler de B^k de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^j
$\dot{\alpha}^k, \dot{\beta}^k, \dot{\gamma}^k$	Dérivée des angles $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ de B^k
α	Angle d'incidence du profil de la pale au rayon r , pour une vitesse de vent relative W
α_0	Angle d'incidence du profil de la pale au rayon r , pour une vitesse de vent relative W_0
β_c	Angle de calage du même profil
β_v	Angle de vrillage du même profil
β	Somme des angles de calage β_c et de vrillage β_v du même profil
δ_{ij}	Symbole de Kronecker qui vaut 1 si i égal à j et zéro sinon
$\{\lambda\}$	Multiplicateur de Lagrange
$[\omega^k]$	Matrice de vitesse angulaire partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0
$[\dot{\omega}^k]$	Matrice d'accélération angulaire partielle de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0
ϕ_i	$i^{\text{ième}}$ équation de contrainte cinématique
ϕ	Somme de l'angle β et de l'angle d'incidence α
ϕ_0	Somme de l'angle β et de l'angle d'incidence α_0
$\{\xi^k\}$	Valeur de translation de B^k dans la base \mathfrak{R}^k
$\{\zeta^k\}$	Vecteur déplacement entre le corps B^k et le corps qui le précède dans la base \mathfrak{R}^k
$[\psi]$	Matrice d'interpolation des déplacements angulaires
ρ	Masse volumique de la pale
$\{\rho\}$	Vecteur des toutes les coordonnées nodales des centres de masse G^{ji} de l'élément i de B^j , exprimé dans le repère \mathfrak{R}^j
$\{\dot{\rho}\}, \{\ddot{\rho}\}$	Dérivée première et seconde de $\{\rho\}$
$[\Lambda^{ji}]$	Matrice antisymétrique du vecteur $\{\rho^{ji}\}^T [N]^T$
$[\Lambda_K]$	Matrice antisymétrique, associée au vecteur \vec{K}
$[\Omega^{kj}]$	Matrice opérateur de dérivation temporelle
Ω_{rot}	Vitesse de rotation du rotor éolien
$[\Gamma]$	Matrice d'arborescence du système
$[\Gamma_{libre}]$	Matrice d'arborescence du système par rapport aux « extrémités libres »

Chapitre 1

Introduction générale

L'utilisation de l'énergie éolienne à des fins de production électrique est récente (fin du *XIX^{ème}* siècle) et, grâce à des études principalement menées en Europe depuis quelques décennies, les constructeurs sont capables de proposer des machines de plus en plus fiables, performantes et de grandes tailles. Les machines tri pales à axe horizontal, d'une puissance nominale moyenne dépassant 1 *MW*, dominent actuellement le marché.

Les principales sources d'amélioration restent l'aérodynamique du rotor (ensemble moyeu et pales). Cependant, la dynamique de l'ensemble de la machine tournante (pylône, nacelle et rotor) n'est pas à négliger dans la modélisation de son comportement car la réponse dynamique du système peut affecter le niveau des efforts dans les différents composants et compromettre ainsi leur fiabilité. C'est dans le but de déterminer plus précisément ces efforts qu'a été effectué ce travail.

Après avoir exposé, dans la première partie, la place de l'énergie éolienne dans le concert des énergies renouvelables et donné un bref état de la technologie actuelle des différentes machines présentes sur le marché, la deuxième partie passe en revue les différentes méthodes capables de modéliser le comportement dynamique des corps rigides et souples ainsi que les différentes méthodes de modélisations des efforts aérodynamiques, tout en montrant leurs avantages et leurs limites. En effet, même si des logiciels existent, leurs résultats ne sont pas toujours précis, en raison des simplifications qu'ils adoptent au niveau de la résolution des équations de la dynamique, ou alors se concentrent principalement sur le calcul des efforts aérodynamiques. Cette étape présente les avantages et les inconvénients des formulations qui servent à la création du code.

La troisième partie développe ensuite le formalisme qui a servi à l'écriture du code de calcul, auquel des améliorations ont été apportées. Elle est décomposée en quatre parties : une réservée aux corps rigides, une aux corps souples, une à l'aérodynamique et la dernière à la connexion au réseau électrique. Cette phase constitue le noyau du code numérique. Elle décrit comment sont construites les matrices décrivant les équations de mouvement, à partir des données initiales, géométriques et cinématiques, de chaque composant du système étudié, jusqu'au schéma d'intégration temporelle.

Dans la quatrième partie, les résultats du code sont validés sur un certain nombre de cas tests en les comparant avec ceux obtenus analytiquement dans la littérature.

Les objectifs du travail de thèse sont donc les suivants :

- développer le formalisme de Kane en se basant sur l'arborescence topologique,

- mettre en oeuvre la technique de la réduction de l'équation de mouvement sur une base modale pour les corps souples,
- écrire un code de calcul qui modélise le comportement d'une éolienne en tenant compte de l'ensemble de ces composants, de leurs caractéristiques (rigidité, souplesse) et soumis à certains efforts et qui étudie les réponses selon un schéma d'intégration temporelle,
- intégrer à ce code l'aérodynamique des pales et la mise en réseau de la génératrice,
- étudier les réponses données par ce programme au cours du temps.

Chapitre 2

Introduction

2.1 Le contexte éolien

L'énergie renouvelable (EnR) rassemble différents éléments des ressources énergétiques :

- l'eau,
- le soleil,
- le vent,
- la biomasse,
- la géothermie.

Pour des raisons politiques, économiques et environnementales, l'utilisation de ces énergies inépuisables est primordiale, en particulier celle éolienne. C'est pourquoi ces machines sont implantées partout dans le monde, surtout en Europe. Cependant, depuis une dizaine d'années, les dimensions de ces machines ne cessent de croître. Les constructeurs d'éoliennes sont tous en compétition pour proposer des éoliennes essentiellement fiables et performantes, ce qui prouve l'utilité du travail de thèse.

2.1.1 La place et le développement de l'énergie renouvelable dans le monde

Afin de lutter contre les changements climatiques, on prône de plus en plus l'utilisation d'énergie propre et durable. Ceci aura pour but de réduire les émissions de gaz à effet de serre (six en tout : Dioxyde de carbone, méthane, oxyde nitreux, hydrofluorocarbone, hydrocarbure perfluoré, hexafluorure de soufre). Celles-ci sont principalement produites par les énergies fossiles (pétrole, gaz et charbon). A cause du réchauffement de la planète, on s'inquiète de l'avenir de notre Planète. C'est pourquoi le protocole de Kyoto¹ a imposé aux Etats membres, des pays industrialisés, de réduire leurs émissions des six gaz [1, 2] :

- de 8% pour l'Union Européenne,
- de 7% pour les Etats-Unis,
- de 6% pour le Japon et le Canada de 2008 à 2012,
- mais de 0% pour la Russie et l'Ukraine.

Seuls l'Australie et l'Islande peuvent augmenter leur émissions respectivement de 8% et 10%. Une quatrième Conférence des parties à la Convention des Nations Unies sur les changements

¹Le protocole de Kyoto a été adopté le 11 décembre 1997

climatiques a eu lieu, à Buenos Aires en Argentine, du 2 au 14 novembre 1998. Il devait être vérifié si le Protocole de Kyoto était appliqué mais aucune décision concrète n'a été prise. L'énergie renouvelable reste un bon moyen pour réduire, comme il est prévu, les gaz à effet de serre.

De plus, l'exploitation excessive des énergies fossiles (gaz, pétrole, charbon) par les pays industrialisés va provoquer, d'ici moins d'un siècle, leur raréfaction, voire leur disparition. Il est donc indispensable, et même vital, d'exploiter plus les énergies renouvelables.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, l'énergie renouvelable regroupe les cinq éléments naturels suivants.

2.1.1.1 L'eau

L'hydroélectricité est fournie grâce à des barrages et des turbines hydrauliques, des centrales hydroélectriques, des moulins à eau, des usines marée-motrices, des turbines hydrocinétiques et des machines houlomotrices. Sa puissance installée en 1996 est de :

- 115 590 MW pour l'UE², soit 25 329 MW pour la France en première position devant l'Italie,
- 99 541 MW pour les Etats-Unis,
- 65 660 MW pour le Canada.

Cette puissance mondiale est passée de 646,6 GW de 1990 à 721,4 GW en 1996, soit une croissance de 1,8% par an. En 2002, la France produit 12% de son électricité par ce moyen, alors que la Norvège en développe 99% [3]. Comme presque tous les sites ont été exploités, cette énergie ne connaîtra plus de progression considérable.

2.1.1.2 Le soleil



FIG. 2.1 – Maison utilisant l'énergie solaire

Il produit de l'électricité photovoltaïque et de l'énergie solaire thermique. Le programme Hélios 2006, lancé par l'ADEME³ en avril 2000, engage à produire de la chaleur et de l'eau chaude solaire pour les usages individuels et collectifs (*figure 2.1*). L'objectif est d'installer

²Union Européenne

³Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie

550 000 m^2 supplémentaires entre 2000 et 2006, c'est-à-dire de doubler la surface installée en 6 ans et donc de parvenir à une économie de 1 $Mtep$ ⁴ en 2006 [3, 4].

2.1.1.3 Le vent

Ce point sera développé ci-dessous.

2.1.1.4 la biomasse

La biomasse comprend :

- le bois,
- les biocarburants : La production en 2002 en France est de 90 500 t d'éthanol et 350 000 t de biodiesel,
- le biogaz : Il est issu de la digestion de matières organiques par des bactéries ; 140 000 tep par an en France. L'UE envisage de produire 75 Millions de tep de biogaz en 2010,
- les eaux usées : elles sont un sous-produit de l'élevage et de l'agriculture. Exemple : le Danemark retraite 500 000 t de lisier d'élevage de porcs par an et 150 000 t de déchets industriels organiques, soit 25 $M m^3$ de biogaz.

2.1.1.5 La géothermie

La géothermie est un excellent véhicule thermique, on en produit donc de l'électricité géothermique. Sa puissance installée en UE en 1997 est de 4 611 $MWth$ [3].

2.1.2 Le développement des éoliennes dans le monde

Même si certaines EnR sont sous-exploitées, l'énergie éolienne est aujourd'hui celle dont la croissance est la plus importante. En effet, la puissance installée mondiale est passée de 10 MW en 1980, à 1930 MW en 1990, puis à 18 500 MW à la fin de l'année 2000 et 39 294 MW en 2003.

L'Europe est sans aucun doute le premier producteur d'énergie éolienne (28 706 MW , soit 73%), alors que l'Amérique, principalement du Nord, produit 6 691 MW et le reste du monde, c'est-à-dire l'Inde, la Chine, le Japon et l'Australie, 3 897 MW , soit 10%.

En Europe, fin 2003, les premiers producteurs sont l'Allemagne (14 609 MW , elle couvre 4% de ses besoins en électricité), l'Espagne (6 202 MW), le Danemark (3 110 MW , 5% de ses besoins) et la France se place en 9^{ème} place (239 MW , 273,64 MW en juin 2004) (*tableau 2.1*). A la suite de la Conférence Européenne sur l'énergie éolienne, à Nice, en 1999, il est prévu une production de 5 000 MW d'électricité éolienne, en France, en 2010 [5].

En France, les éoliennes se situent majoritairement dans les régions suivantes (*figure 2.2*) :

- Languedoc-Roussillon : 117,58 MW soit 42,85%,
- Midi-Pyrénées : 23,6 MW soit 8%,
- Nord- Pas de Calais : 21,33 MW soit 7,77%,
- Bretagne : 21 MW ,
- DOM : 19,975 MW ,

⁴1 $Mtep$ d'énergie bois représente un bénéfice pour l'environnement de 3,03 Mt de CO_2 et 1 tep contient l'équivalent énergétique d'une tonne de pétrole (Tonne Equivalent Pétrole)

Pays	<i>Puissance totale installée (GW) à la fin 2002</i>	<i>Puissance totale installée (GW) à la fin 2003</i>
Total Amérique du Nord	4,921 (16%)	6,691 (17%)
Canada	0,236	0,317
USA	4,685	6,374
Total U.E. (15 pays)	23,098 (74,5%)	28,440 (73%)
Allemagne	11,994	14,609
Espagne	4,825	6,202
Danemark	2,889	3,110
Pays-Bas	0,693	0,912
Italie	0,788	0,904
Royaume-Unis	0,552	0,649
Suède	0,345	0,399
Grèce	0,297	0,375
France	0,148	0,239
Autriche	0,140	0,415
Portugal	0,195	0,299
Irlande	0,137	0,186
Belgique	0,035	0,068
Finlande	0,043	0,051
Luxembourg	0,017	0,022
Total autres pays de l'UE	0,061	0,102
Pologne	0,027	0,057
Lettonie	0,024	0,024
République Tchèque	0,003	0,010
Hongrie	0,003	0,003
Estonie	0,002	0,003
Chypre	0,002	0,002
Lituanie	0	0
Malte	0	0
Slovaquie	0	0,003
Slovénie	0	0
Autres pays de l'Europe	0,149	0,164
Norvège	0,097	0,101
Ukraine	0,046	0,057
Suisse	0,005	0,005
Roumanie	0,001	0,001
Total reste du monde	2,999 (9,5%)	3,897 (10%)
Inde	1,702	2,110
Chine	0,468	0,568
Japon	0,414	0,686
Australie	0,105	0,198
Autres pays	0,310	0,335
TOTAL	31,228	39,294

TAB. 2.1 – Puissance installée globale dans le monde en 2002 et 2003 [7]

- Pays de la Loire : 19,5 MW,
- Corse : 18 MW,
- Picardie : 15,25 MW,
- TOM : 12,12 MW,
- Rhône-alpes : 3,6 MW,
- Les autres régions : Centre, Champagne-Ardenne, Ile-de-France, Région PACA comptent moins de 1% des éoliennes.

En tout, depuis 1991, on compte 538 machines [6].

POURCENTAGE D'IMPLANTATION D'EOLIENNES EN FRANCE (en 2004)

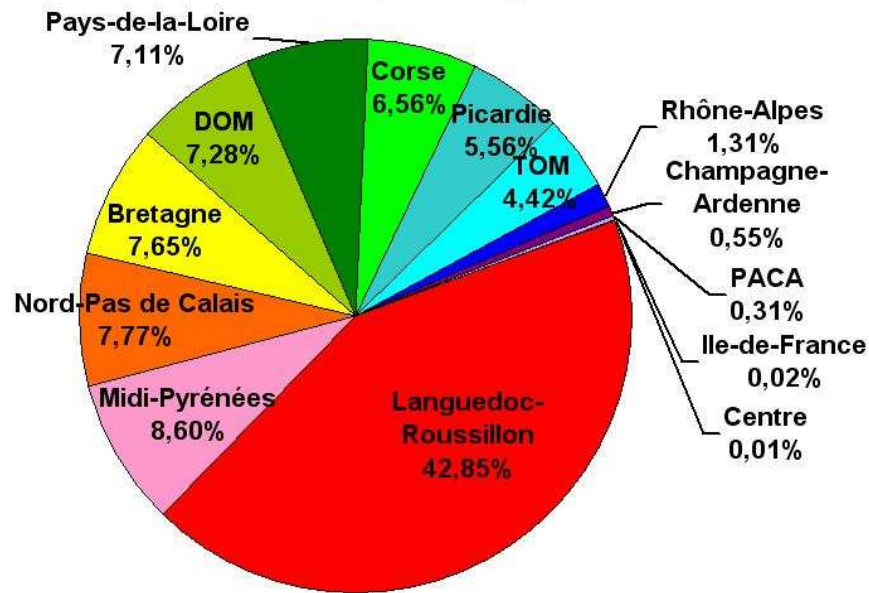


FIG. 2.2 – Puissance éolienne installée en France, en 2004 [6]

Il est important de signaler que le parc nucléaire fournit environ 77% de la production d'électricité en France. A titre de comparaison, la centrale nucléaire de Gravelines développe 5 400 MW alors qu'une éolienne, en général, 1 MW.

2.1.3 Intérêt de l'implantation d'éoliennes

Avant d'implanter une ou plusieurs éoliennes (*figure 2.3*), l'observation du potentiel éolien, c'est-à-dire l'histoire des vents du site, depuis au moins une décennie, est fondamentale. De plus, pour avoir une idée des variations durant l'année, une étude de la répartition du vent est réalisée sur place pendant cette période [5, 8].

En général, un lieu en hauteur et éloigné des habitations (à 300 m au Danemark et en Suède, et à 150 m des exploitations agricoles protégées) est privilégié pour la mise en place de l'éolienne.

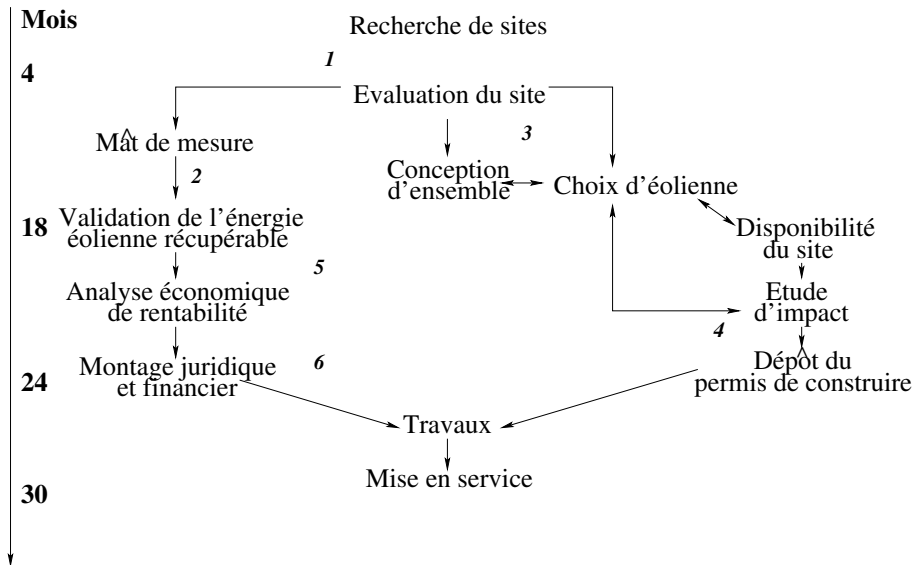


FIG. 2.3 – Phases d'implantation d'une éolienne

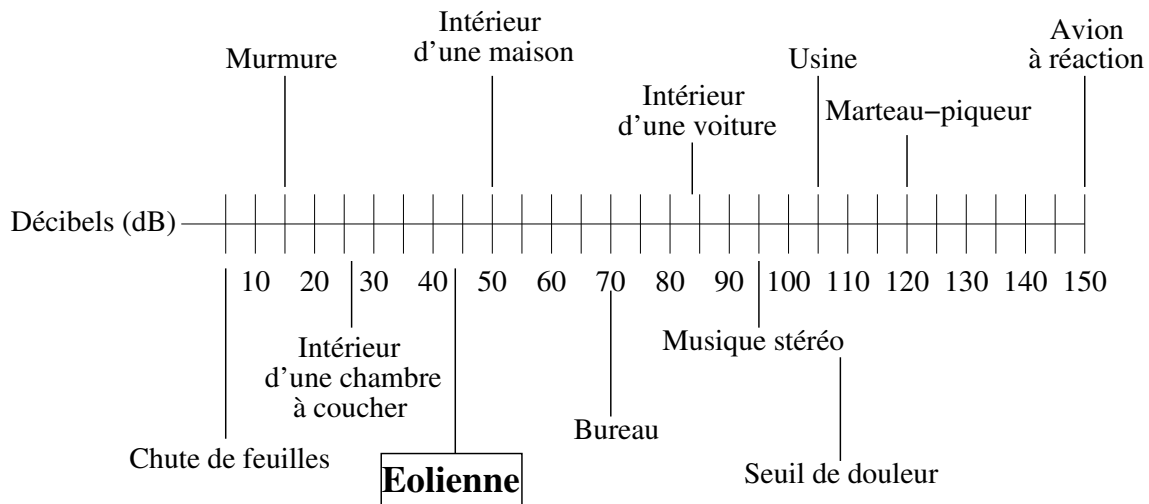


FIG. 2.4 – Echelle des décibels, avec un certain nombre d'émissions sonores connues par rapport au bruit moyen émis par une éolienne située à 250 m [9]

Ce mode d'énergie compte un certain nombre d'opposants. Pour eux, elle présente des nuisances [9] :

- sonores : elles émettent entre 38 dB et 56 dB pour un vent de respectivement de 38 et 56 km/h, alors que l'intérieur d'une maison propage 50 dB et la musique d'une stéréo 95 dB (figure 2.4).
- visuelles : Pour ses détracteurs, elles ne s'intègrent pas dans le paysage .
- électriques : Elles peuvent provoquer des perturbations des ondes radioélectriques. Dans ce cas, le choix d'un site adéquat est privilégié.

- environnementales : Toujours selon quelques personnes, elles tuent beaucoup d’oiseaux. Pourtant, des études ornithologiques ont été entreprises pour connaître les couloirs migratoires éventuels, les espèces protégées et menacées. En Hollande, 1 500 000 oiseaux par an sont tués par des vitres, 1 000 000 par les lignes électriques, 2 000 000 par la circulation routière alors que 20 000 le sont par des éoliennes.

Il est avant tout nécessaire d’informer la population, qui risque d’être perturbée par ce changement. Une étude d’impact (sur la population et sur le milieu naturel) est alors accomplie par des services de la direction régionale (DRIRE, DIREN, ...) [8]. D’autres conditions relatives au projet doivent être réalisées : la ligne de raccordement au réseau enfouie dans le sol, les voies d’accès créées ou élargies, la couleur des éoliennes adaptée à l’environnement.

Si toutes ces conditions sont favorables, le préfet du département délivrera le permis de construire.

L’installation d’éoliennes offre plusieurs avantages : aucune pollution atmosphérique et du sol (contrairement aux centrales nucléaires qui laissent des « traces » radioactives).

2.1.4 Projets envisagés

Centrales Eoliennes de la Haute-Lys	37,5 MW
Centrales Eoliennes de Montjoyer-Rochefort	17,25 MW
Centrale Eolienne de Saint-Simon Clastres	10,0 MW
Centrale Eolienne de Ploumoguier	5,25 MW
Centrale Eolienne de Peyrelevade	9,0 MW

TAB. 2.2 – Projets d’installation d’éoliennes en France en 2004, avec Espace Eoliennes Développement [10]

L’achat d’une éolienne représente entre 75 et 80% de l’investissement de départ. En plus, sont comptés les coûts d’ingénierie (études et gestion du projet) [5%], de raccordement électrique [10%], de mise en place (transport et levage) [2%], d’aménagement du site (fondation, accès au site, équipements techniques, ...) [8%] [9].

Les centrales éoliennes prévues en 2004, avec « Espace Eoliennes Développement », sont dans le *tableau 2.2* [10].

Différents projets ont lieu ou non dans le cadre du programme EOLE 2005. Théoriquement, le programme EOLE 2005 doit permettre d’ici 2002, en France, la mise en service d’environ 650 éoliennes totalisant 360 MW de puissance installée, soit 1,04 TWh d’énergie par an [11]. Ainsi, si cet objectif est respecté, la puissance installée en 2005 pourra alors être comprise entre 250 MW et 500 MW [8].

2.1.5 Problématique

Tous ces projets de montage d’éoliennes déclenchent de la concurrence entre leurs fabricants. En effet, ces machines sont de plus en plus gigantesques, elles doivent donc être fiables et performantes afin qu’elles puissent avoir une durée de vie d’au moins vingt ans. C’est

pourquoi elles ne doivent pas être sous ou surdimensionnées. Des normes sont donc imposées aux industriels. Ceci les oblige à employer des méthodes prouvant la fiabilité de leurs produits, par l'intermédiaire de codes. Cependant, ceux-ci existent mais en général, seule la partie aérodynamique est modélisée (voir la *section 3.2*) ou certains résultats sont inexacts en raison des linéarisations de certains systèmes d'équations décrivant le comportement des différents composants.

Ce qui est nécessaire aux constructeurs est donc une méthode qui modélise, de façon optimale, l'ensemble de l'éolienne pour connaître les efforts subis en service. C'est pourquoi il paraissait très intéressant d'élaborer un code numérique correspondant exactement aux attentes des industriels : l'objectif est donc d'étudier n'importe quel système tournant, en tenant compte des perturbations environnementales (vent stationnaire ou en rafale, ...).

2.2 Description de l'éolienne

Les premières machines, utilisant le vent comme force motrice, remontent à l'époque des Perses (*X^{ème}* siècle). Il faut attendre le *XII^{ème}* siècle pour trouver les premiers moulins à vent en Europe (*figure 2.5*). L'intérêt principal de ces machines est qu'elles ont délivré les animaux, voire même les hommes, de leurs labeurs : pomper l'eau, moudre le grain,



FIG. 2.5 – Moulin à grain en France, en 1902

C'est seulement à partir de la fin du *XIX^{ème}* siècle, que les éoliennes servent à produire de l'électricité [12]. La première, datant de 1888, a été construite par F. Brush, aux Etats Unis. Elle se composait de 144 pales et produisait 12 kW en courant continu. Depuis cette époque, elles ont évolué. P. Berlu [12] a fait une recherche assez exhaustive sur le développement de ces « nouveaux moulins », au cours du temps et dans différents pays (principalement en Europe et aux Etats Unis).

Avant tout, afin de comprendre comment fonctionne une éolienne, il est essentiel de connaître le vocabulaire correspondant à cette technologie. Cette partie présente donc quelques éléments de base sur les éoliennes. Après avoir exposé les différents types d'éoliennes existantes, le rôle de ces différents composants sera détaillé.

2.2.1 Typologie



FIG. 2.6 – Eoliennes de Darieus , verticale de Cap Chat, Québec

Les éoliennes capturent l'énergie du vent par l'intermédiaire du rotor, attaché à une génératrice. Sa forme change si la direction du vent est perpendiculaire ou parallèle à l'axe de rotation de la génératrice. Ainsi, deux types de machines sont caractérisées par leur axe qui est soit :

- (1) vertical : les VAWT (Vertical Axis Wind Turbine) sont rares.
- La plus connue, EOLE4 (*figure 2.6*), est une éolienne de Darrieus à Cap Chat, au Québec. Elle a un rotor en forme de C et mesure 110 m de haut. Elle est une des plus puissantes éoliennes (4,2 MW) et présente plusieurs avantages théoriques : elle n'a pas besoin de tour ; elle n'a pas besoin de s'orienter face aux vents car elle est omnidirectionnelle. Mais elle a surtout des inconvénients : elle ne démarre pas seule, son rendement est faible, elle tient grâce à des haubans et son encombrement au sol est considérable ; pour remplacer le rotor, toute la machine doit être démontée ; sa vitesse de rotation est lente et le couple est trop élevé. C'est pourquoi elle n'est plus en fonctionnement [13].
- Il existe aussi l'éolienne Savonius, du nom de l'ingénieur finnois qui l'a inventée en 1924. Elle est constituée de deux demi-cylindres légèrement désaxés (*figure 2.7*) et a les mêmes caractéristiques (ci-dessus) que sa « soeur ».
- (2) horizontal : les HAWT (Horizontal Axis Wind Turbine) sont les plus répandues. Maintenant, toutes les éoliennes commercialisées et qui sont raccordées au réseau électrique sont à axe horizontal.

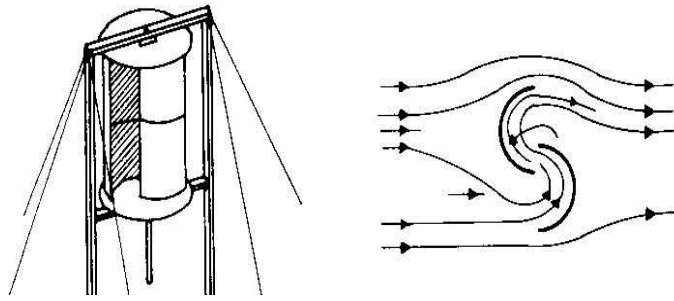


FIG. 2.7 – Eoliennes de Savonius

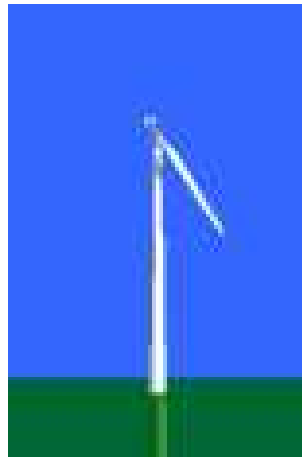


FIG. 2.8 – Eolienne monopale



FIG. 2.9 – Eolienne bipale

- Parmi elles, il en existe plusieurs dont les caractéristiques sont différentes :
- les monopales, équilibrées par un balancier (*figure 2.8*),
 - les bipales (*figure 2.9*),
 - les tripales, les plus courantes (*figure 2.10*).

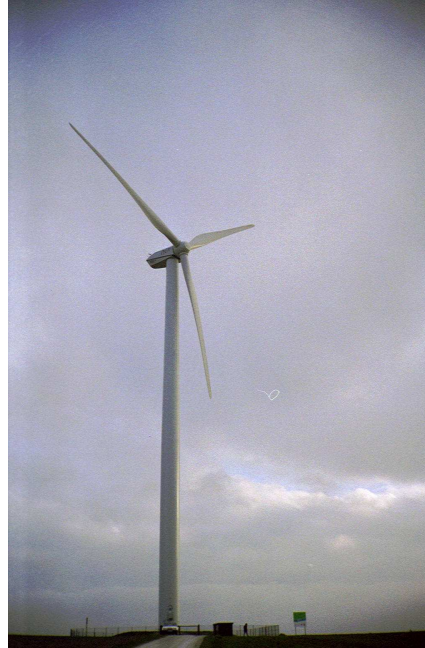


FIG. 2.10 – Eolienne tripale

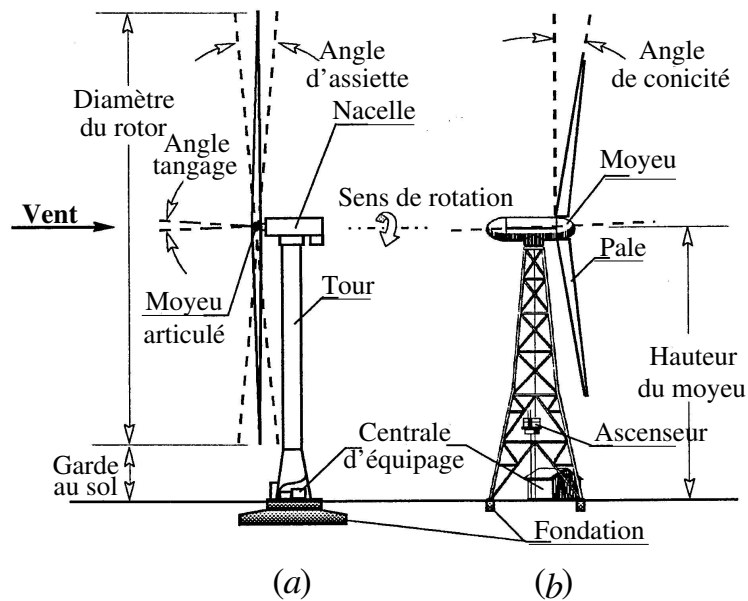


FIG. 2.11 – Eolienne bipale « dans le vent » (a) et « sous le vent » (b)[12]

Pour des raisons de stabilité, les éoliennes n'ont plus un nombre pair ou unitaire de pales : la pale supérieure est plus fléchie, quand la pale inférieure est protégée par « l'ombre de la tour ». Dans ce cas, le rotor doit être muni d'un rotor basculant pour compenser le déséquilibre subi par la pale passant devant la tour. Elle risque donc de casser plus facilement si le vent est trop fort. C'est pour cette raison que les éoliennes tripales sont plus communes.

Même pour celles-ci, il existe encore deux autres configurations, celles dites (*figure 2.11*) :

- « dans le vent » (*a*) : elle est orientée dans la direction du vent, grâce à un mécanisme. Elle est la plus présente sur le marché éolien.
- « sous le vent » (*b*) : le mécanisme cité ci-dessous n'est pas indispensable, car la nacelle s'oriente d'elle-même selon les changements de direction du vent. Comme le vent passe à travers l'ombre de la tour, cela provoque des variations trop importantes de production d'électricité et donc de charge en fatigue.

L'éolienne tripale à axe horizontal « dans le vent » est celle modélisée dans la suite des travaux.

Dans la plupart des cas, ces machines tournantes sont sur terre. Pourtant, des éoliennes « offshore » ont leurs pieds dans l'eau, comme par exemple au Danemark (Copenhague). Leur exploitation est prometteuse dans des sites à forte densité de population ou inaccessibles sur terre. L'intérêt d'employer ce type de machine est que le vent est moins turbulent que celui sur terre (La durée de vie des éoliennes offshore est donc prolongée) car il ne rencontre aucun obstacle. Ainsi, les vitesses du vent sont plus élevées. Cependant la maintenance sur le site, en milieu corrosif, présente quelques inconvénients.

Par exemple, pour couvrir complètement ses besoins en électricité, une île au Danemark, Samsø, a établi une ferme de 10 éoliennes de 2,3 MW chacune [13]. En France, les parcs éoliens sont commandés par des sociétés privées. Elles revendent l'électricité à EDF⁵ et les communes où sont implantées ces « fermes »⁶ perçoivent des indemnités sous forme de taxes foncières. Par exemple, Goulien, dans le Finistère, reçoit entre 400 et 500 KF, soit entre 61 KEuros et 76 KEuros, pour ses 6 MW installés [5].

2.2.2 Les différents constituants de la machine

L'éolienne est composée en plusieurs parties : le pylône, la nacelle et le rotor (le moyeu et les pales).

2.2.2.1 Le pylône

Puissance (<i>kW</i>)	Diamètre du rotor (<i>m</i>)	Hauteur (<i>m</i>)
225	27	30
600	44	40 à 52
750	48	40 à 81
1 500	64	60 – 80

TAB. 2.3 – Différentes caractéristiques relatives au pylône

⁵Electricité de France

⁶Terme définissant une exploitation d'un certain nombre d'éolienne, sur un même site

Il repose sur des fondations solides, en béton et supporte la nacelle et le rotor. Il est réalisé à partir de métal (pylône tubulaire de forme conique), rarement en béton ou en treillis métallique. Ces derniers ne sont plus utilisés pour des raisons esthétiques, aérodynamiques et économiques (l'entretien est trop considérable).

La taille de la tour varie en hauteur selon la puissance produite (*tableau 2.3*). Effectivement, il serait inconcevable de construire une éolienne de forte puissance (60 m de diamètre rotor par exemple) sur une tour haute de moins de 30 m car plus une éolienne est grande plus elle capte de vent donc plus sa capacité énergétique est élevée.

La hauteur de tour équivaut au diamètre du rotor (*tableau 2.3*). Cette proportion est adéquate et harmonieuse.

En ce qui concerne l'éolienne Jeumont J48 (750 kW), la tour en forme de cône mesure 45 m et pèse 40 tonnes. Le diamètre à la base vaut 3,7 m et celui en haut de la tour 2,3 m.

2.2.2.2 La nacelle

Elle est constituée d'une génératrice. Pour des raisons de sécurité, un frein mécanique arrête le système, si le vent souffle trop vite.

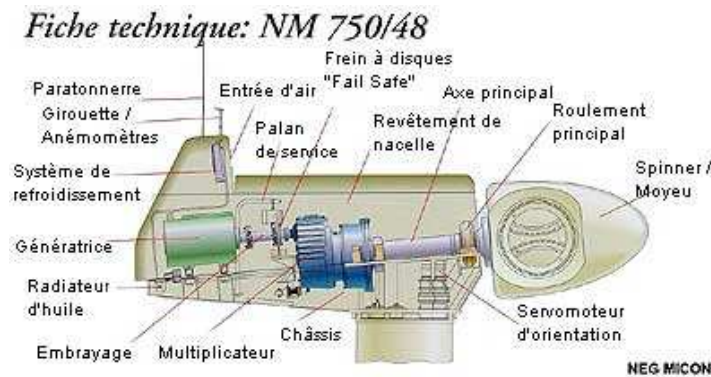


FIG. 2.12 – Les différents composants de la nacelle Micon

La génératrice convertit l'énergie mécanique en énergie électrique. Il en existe deux types : synchrone (à entraînement direct) et asynchrone (avec un arbre rapide, un multiplicateur et un arbre lent : *figure 2.12*). Les moteurs synchrones ont un aimant central qui tourne à vitesse constante, ils sont rares. Les plus fréquents sont les génératrices asynchrones triphasés ou à induction (voir partie suivante).

Le multiplicateur transforme la vitesse de rotation lente du rotor en une vitesse de rotation rapide pour la génératrice asynchrone. Il est indispensable car si un rotor de 43 m de diamètre, produisant environ 60 kW, n'était pas relié à la génératrice par un multiplicateur, la vitesse tangentielle des pales devrait être de deux fois la vitesse du son, ce qui est inconcevable.

Les éoliennes les plus courantes sont celles de 750 kW, mais il en existe de 1,5 MW jusque 2 ou 2,5 MW, voire même 45 MW en Allemagne. La nacelle de la J48 pèse 30 tonnes.

2.2.2.3 Le rotor

Le rotor est formé par le moyeu et les pales. Le moyeu est le support des pales (*figure 2.12*).

2.2.2.4 Les pales

La plupart des pales modernes des grandes éoliennes sont fabriquées en plastique (polyester ou époxy) renforcé par des fibres de verre (en anglais, appelé aussi GRP - glass fibre reinforced plastics). L'utilisation de fibres de carbone ou d'aramide comme matériaux de renforcement est une autre possibilité, mais en général, une telle solution s'avérera trop chère pour les grandes éoliennes. Les matériaux composites de bois, bois-époxy ou bois-fibres-époxy n'ont pas encore pénétré le marché des pales, bien qu'on explore toujours les possibilités de leur utilisation pour la fabrication des pales. Les alliages d'acier et d'aluminium posent respectivement des problèmes de poids et de fatigue du métal. Par conséquent, ces alliages sont actuellement utilisés seulement pour les pales très petites.

Les 3 pales utilisées à La Chaussée sur Marne (éolienne de 1,5 MW et de 125 m de haut) mesurent 38 m et pèsent 6 tonnes chacune (*figure 2.10*).

Les pales sont soit calage fixe (« stall »), soit à pas variable (« pitch »). Dans le premier cas, la vitesse du rotor est stabilisée par décrochage aérodynamique. Dans le deuxième cas, elle est réglée par un ajustement de l'angle de calage des pales. Le vent est alors exploité au mieux [14].

2.2.2.5 Le raccordement au réseau électrique

Le courant continu, fluctuant tout de même, à la sortie de la génératrice, est converti en courant alternatif (50 Hz), à la même fréquence que celle du réseau, grâce à un transformateur.

Bibliographie

- [1] Protocole de Kyoto sur les changements climatiques, Décision 2002/358/CE du Conseil du 25 Avril 2002, Journal Officiel L130, 15 Mai 2002
- [2] Mise en oeuvre du Protocole de Kyoto, DGEMP (Direction Générale de l'Énergie et des Matières Premières)-DIDEME, Juillet 2005
- [3] LHOMME Jean-Christophe, Les énergies renouvelables, La bibliothèque du naturaliste, deuxième édition, Delachaux et Niestlé, 2004
- [4] BIRRAUX C., LE DEAUT J.Y., Rapport N°3415, L'Etat actuel et les perspectives Techniques des énergies renouvelables, Chapitre 2
- [5] www.ademe.fr/bretagne/actions_phares/energies_renouvelables : Les actions phares de la délégation en Bretagne de l'A.D.E.M.E.
- [6] www.suivi-eolien.com/francais : Recensement des éoliennes implantées en France, 2004
- [7] REAL DE AZUA C., COLASIMORE L. , Global Wind Power Growth continues to Strengthen - Record 8 Billion Euros Wind Power installed in 2003, Association américaine de l'énergie éolienne, 2003
- [8] Circulaire n°68 du 22 Février 1999 relative au Programme Eole 2005 et environnement
- [9] Des éoliennes dans votre environnement, brochure n°4375, ADEME et CLER, Novembre 2002
- [10] BRUYERRE P., Gérant de Espace Eolien Développement (Spécialistes de l'énergie éolienne), Lille, Création en Juillet 1992
- [11] L'énergie éolien en France, Ecole d'été de Physique (<http://e2phy.in2p3.fr>)
- [12] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, Thèse de doctorat de l'Université de Lille I, Janvier 1999
- [13] www.windpower.org : Association danoise de l'industrie éolienne, 2003
- [14] CLOES DU COTA G., Guide des Energies Renouvelables, Ministère de la Région Wallonne Edition, 1994

Chapitre 3

Présentation des différentes méthodes de modélisation

L'éolienne peut être considérée comme un système multicorps dont les solides sont articulés entre eux par des liaisons de type pivot. Pour connaître les efforts qu'elles subissent, il est primordial de choisir une méthode permettant de modéliser le comportement dynamique du système afin de calculer ces efforts.

L'objectif de ce chapitre est donc d'exposer brièvement l'état de l'art sur les différentes méthodes de modélisation des systèmes dynamiques qu'ils soient éoliens ou non. On rappellera ensuite les principes relatifs au calcul des efforts aérodynamiques.

3.1 Méthodes de modélisation dynamique

Avant tout, il est primordial de distinguer les notions de corps rigide et de corps souple. Le mouvement d'un corps rigide est décrit par des translations et des rotations d'ensemble alors qu'un corps souple combine ces déplacements avec ceux qui leur sont propres, c'est-à-dire correspondant aux déformations qu'il subit (*paragraphe 4.2.1.1*).

Depuis une trentaine d'années, certains domaines - l'aérospatial ou la robotique - se sont penchés sur la formulation des systèmes d'équations des systèmes multicorps complexes, composés de corps rigides et/ou souples, et la résolution des équations qui en découlent [1, 2]. On présente donc ici les différentes méthodes existant dans la littérature, avec leurs avantages et leurs inconvénients, à savoir :

- Newton,
- Lagrange et
- Kane pour les corps rigides.

3.1.1 Modélisation des systèmes multicorps rigides

3.1.1.1 Formulation de Newton-Euler

Newton a établi les lois de mouvement en 1687 et Euler a exprimé ces équations de mouvement en termes d'accélération et de forces agissant sur le système. Les forces et les couples d'interaction sont éliminés en ajoutant des équations qui correspondent à l'orthogonalité des

vecteurs couples par rapport à l'axe de rotation de l'articulation. C'est pourquoi le principe de d'Alembert est employé afin d'éviter les erreurs dans l'introduction de ces équations supplémentaires des efforts d'interaction [2].

Certains auteurs utilisent ces équations de la dynamique généralisées de Newton-Euler, applicable à tous corps rigides. Mais cette méthode classique implique que chaque corps d'un système soit traité numériquement indépendamment des autres corps du système et que tous les types de forces soient explicités (Coriolis, Inertie, ...), ce qui devient difficile à utiliser dans le cas de structures complexes, c'est-à-dire dans lesquels le nombre de degrés de liberté est élevé [3].

Il est donc préférable d'envisager d'employer d'autres procédés de modélisation, qui intègre ces efforts d'interaction.

3.1.1.2 Formalisme de Lagrange

La dynamique Lagrangienne, qui fait suite à celle de Newton, emploie l'énergie cinétique et potentielle afin de traiter le concept de déplacement virtuel [1]. L'avantage des équations de Lagrange est qu'elles intègrent automatiquement les contraintes relatives au contact entre les composants d'un multicorps, c'est-à-dire les efforts d'interaction entre chaque corps. La combinaison du système d'équations de mouvement d'un multicorps contraint et des équations des efforts d'interaction peut être exprimé grâce à l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange $\{\lambda\}$ pour résoudre ce système d'équations différentielles [4]. Deux choix sont alors possible : déterminer $\{\lambda\}$ ou le supprimer. Dans le premier cas, la démarche revient à calculer la matrice Jacobienne par itérations successives et à résoudre ensuite le système linéarisé. Alors que pour le deuxième cas, la procédure employée est plus simple [4]. L'équation des contraintes est dérivée deux fois par rapport au temps, afin qu'apparaisse la dérivée seconde des paramètres utilisés afin que $\{\lambda\}$ soit éliminé dans le système d'équations différentielles. Cependant du fait de la résolution numérique approchée, le respect absolu des équations algébriques relatives aux contraintes n'est pas assuré.

En ce qui concerne ces méthodes, les domaines comme l'aérospatial ou la robotique les ont utilisés, mais se sont heurtés aux difficultés suivantes [2] :

- le choix des variables,
- une description cinématique du système devant être précise,
- la programmation des équations et leur résolution.

Même si le formalisme de Lagrange semble plus efficace que celui de Newton, il présente néanmoins quelques inconvénients. En effet, écrire les équations de la dynamique devient d'autant plus difficile que le nombre de degrés de liberté augmente. C'est pourquoi, il faut trouver une méthode plus adaptée à l'étude d'un problème à grand nombre de degrés de liberté tel que les systèmes éoliens. Le développement d'un tel type de code de calcul, à partir du formalisme de Lagrange, doit être aussi général qu'un programme éléments finis par exemple, mais plus efficace. De plus, le but est de modéliser précisément la dynamique de l'ensemble de la structure d'éoliennes et de minimiser le temps de calcul qui devient important au cas où les éoliennes sont très grandes. Cependant l'utilisation du principe des travaux virtuels peut conduire à des résultats imprécis [5].

Des logiciels sont employés industriellement pour des systèmes multicorps rigides ou souples, liés les uns aux autres par des liaisons pivots ou des translations. Ainsi le logi-

ciel ESA-MIDAS [6] propose de donner les résultats des équations de mouvement par deux types de programmes. Le premier utilise les équations de Lagrange pour chaque corps pris de façon isolé et la résolution de ce système d'équations de mouvement passe par l'intermédiaire du multiplicateur de Lagrange. De plus, l'un des codes de simulation basé sur le formalisme de Lagrange, ADAMS ¹, est un programme qui n'est pas spécifique aux éoliennes mais permet d'analyser la dynamique d'autres multicorps comme les robots, les engins spatiaux ou quelques types de turbines que ce soit mais ne donne pas des résultats précis [7]. Ces divergences sont sans doute dues aux couplages entre le mouvement des corps rigides et ceux des corps élastiques, ainsi qu'au calcul aérodynamique. Apparemment, le modèle sous-prédit ces résultats, sans savoir quelle est la cause exacte de cette divergence.

3.1.1.3 Formalisme de Kane

Le formalisme de Kane est en fait une reformulation des équations de Lagrange adapté au calcul numérique et le principe de récursivité a été introduit afin de construire plus facilement les équations de systèmes à grand nombre de degrés de liberté, par exemple des bras de robots articulés dans l'espace [1, 8].

Dans les années 70, des systèmes à boucle fermée ont été modélisés grâce à la méthode d'Euler et Newton alors que ceux à boucle ouverte ont été mis en équation grâce à la formulation de Kane, qui a pour intérêt de ne pas introduire les efforts de contraintes entre chaque corps [2, 9]. Chaque corps du système est étudié de façon isolée. Puis l'assemblage des équations de mouvement de tous les corps forme le système complet des équations de mouvement [9], grâce à la description topologique du système - le cheminement des liaisons entre chaque corps. Pour cela, comme pour Lagrange, la géométrie de chaque corps (masse, matrice d'inertie, position du centre d'inertie, ...) ainsi que les inconnues significatives des efforts doivent être paramétrées. Ceci permet alors de construire les matrices utiles vérifiant ce système global d'équations [1].

Comme dit précédemment, des logiciels sont employés industriellement pour des systèmes multicorps rigides ou souples, liés les uns aux autres par des liaisons pivots ou des translations. Ces systèmes peuvent aussi avoir des boucles fermées, un mouvement prescrit ou non, et être soumis ou non à des forces externes ou internes. Ainsi le deuxième programme du logiciel ESA-MIDAS [6] est basé sur la formulation de Kane où la dimension du système d'équations est réduite en utilisant des multiplicateurs. Afin de montrer que le formalisme de Kane est plus efficace que celui de Lagrange, des résultats numériques d'un simulateur à quatre corps liés entre eux par trois joints ont été comparés. Pour les corps rigides, les résultats obtenus par ces deux méthodes correspondent à ceux obtenus théoriquement. La méthode de Kane est toutefois plus rapide que celle de Lagrange, quel que soit le type de corps étudiés (rigides ou souples). Mais pour les corps souples, les résultats n'ont pas été comparés. D'après [6], la méthode de Kane semble plus efficace que celle de Lagrange.

De nombreux systèmes ont été écrits grâce aux équations de Kane. Par exemple, un modèle dérive de la méthode de Kane, où les contraintes non-holonomiques sont intégrées dans les équations de la dynamique et qui ne se sert pas des multiplicateurs de Lagrange [10]. Son intérêt est de réduire l'ordre du système d'équations et sa complexité [10]. La validité de ce calcul a été vérifiée sur un robot à une roue, en comparant les résultats de cette étude

¹Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems

et ceux obtenus analytiquement à partir de la formulation de Lagrange présentés dans des travaux précédents [11]. De même, un autre modèle a été développé grâce aux équations dynamiques de Kane [12]. Suite à cela, les formulations de Kane et de Lagrange ont été comparées sur un manipulateur mobile. La méthode de Kane exige moins d'opérations (par exemple, la détermination du multiplicateur de Lagrange n'est pas requis), est plus simple et donne plus rapidement des résultats en simulation, ce qui est d'autant plus intéressant quand le nombre de corps composant le système (donc le nombre de degrés de liberté) augmente. De plus, le formalisme de Kane, par convention, incorpore les efforts de contraintes dans les équations de la dynamique. Ces efforts ont été calculés afin de préciser ces contraintes de mouvement [12]. En effet, cette contrainte intervient dans le système d'équations déterminant la dynamique du système multicorps par l'intermédiaire du multiplicateur de Lagrange. Ainsi l'intérêt de la formulation de Kane est que ce multiplicateur est éliminé dans les équations de mouvement [10]. Il démontre aussi que cette méthode est adaptée pour des systèmes non holonomiques.

Un auteur tel qu'Amirouche [1, 2], qui prône aussi l'utilisation de la méthode de Kane, y a ajouté quelques améliorations :

- le choix des variables cinématiques indépendantes définissant la morphologie de la structure,
- la description de la topologie adoptée afin d'organiser la géométrie du système de façon unique.

Cette formulation permet surtout de traiter un système d'équations de dimension minimum [1]. Ainsi pour modéliser les corps rigides, nous avons retenu la méthode d'Amirouche, c'est-à-dire celle de Kane en précisant l'arborescence topologique de la structure, car cette technique est plus simple à mettre en place.

3.1.2 Modélisation des systèmes multicorps souples

Le mouvement de chaque corps déformable résulte de la superposition d'un mouvement de grande amplitude du repère lié au corps considéré comme rigide et de ses petites déformations élastiques dans ce même repère [2]. C'est la raison pour laquelle il est préférable de combiner une méthode de simulation pour les systèmes multicorps rigides et une méthode de calcul modal pour les corps souples [13, 14, 15]. Il est donc important d'étudier déjà très précisément le mouvement relatif aux corps rigides. En revanche, les modes propres de déformations de la pale sont obtenus lorsque celle-ci est à l'arrêt [16].

L'étude des systèmes multicorps flexibles nécessite d'utiliser de préférence les coordonnées nodales pour la partie des corps souples . En effet, la partie flexible est modélisée sous forme discrétisée et les coordonnées absolues sont utilisées à cet effet dans les équations de Lagrange. Puis une réduction conduit le système d'équations aux équations de Newton-Euler. Cette méthode, appelée co-rotation, présente plusieurs avantages :

- L'utilisation des éléments linéaires solides,
- Les contraintes élastiques internes, qui ne rentrent pas dans le modèle des corps rigides et dont la présence ne fait pas augmenter le nombre de contraintes au niveau des pivots,
- La méthode qui représente une généralisation naturelle de la formulation des coordonnées nodales absolues pour la poutre d'Euler-Bernoulli à deux dimensions.

Cette méthode conduit à des difficultés lors du calcul des termes d'inertie et de charge du modèle avec les contraintes internes. En raison du mouvement local de la structure de l'élément, la matrice masse dépend de la configuration. C'est pourquoi il faut donc décomposer les corps souples en plusieurs corps rigides selon les coordonnées nodales caractérisant la pale. En effet, la dynamique des corps souples est une extension de celle des corps rigides où les coordonnées relatives à la déformation des corps souples correspondent aux coordonnées nodales. Pour simplifier la méthode, il est alors plus intéressant de passer par l'intermédiaire de coordonnées modales, proportionnelles aux coordonnées nodales par l'intermédiaire d'un vecteur Φ regroupant les premiers vecteurs propres. Ainsi le système d'équations de mouvement décrit au départ par l'intermédiaire des coordonnées nodales est transformé avec ce vecteur Φ afin que ce système d'équations soit écrit en terme des coordonnées modales. Suite à la résolution de ce système au pas de temps suivant, l'étape inverse est utilisée pour retrouver les coordonnées nodales correspondantes. Les fréquences propres peuvent être obtenues :

- par un logiciel ou
- expérimentalement.

Dans ce cas, ce type de logiciels, comme NASTRAN [17, 18], est basé sur une étude en éléments finis [17, 19, 20]. En revanche, la connaissance des modes propres à partir de tests grandeur nature nécessite d'effectuer l'inventaire des caractéristiques de l'éolienne choisie et l'instrumentation de la machine afin de prendre des mesures atmosphériques dans le but de collecter des informations [21]. Quelques mesures supplémentaires seront effectuées pour améliorer leur connaissance sur la dynamique de ce type d'éoliennes souples et la mesure des fréquences propres, en basse fréquence, va permettre de comprendre l'endommagement par fatigue [7].

Après avoir combiné les équations différentielles non linéaires et les avoir résolues, la solution obtenue se décompose en deux parties : un état stable périodique non linéaire et une solution linéarisée sur l'état stable périodique. Cependant, cette méthode a ses limites. De plus, en raison du couplage avec le modèle aérodynamique, les équations dynamiques de la structure forment un système dont la matrice n'est pas creuse, ce qui conduit à des coûts de calcul plus élevés [14, 15].

En conséquence, la méthode basée sur celle de Kane (Amirouche) s'appliquant aux systèmes multicorps rigides et la mesure des modes propres précisant le comportement des corps souples à petites déformations ont été choisies pour l'étude de modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps.

Le *chapitre 4*, c'est-à-dire la partie relative à la modélisation dynamique, est l'explication des différentes étapes de construction des matrices décrivant le système d'équations de leurs mouvements. Et ainsi ces dernières, par intégration temporelle, permettent de déduire le mouvement de chaque corps constituant l'éolienne. De plus, comme les calculs sont numériques, n'importe quelle machine peut être étudiée, car aucune équation de mouvement analytique n'est à réécrire [22].

Après avoir justifié la sélection de la méthode pour traiter les équations de mouvement afin de connaître le comportement d'un système multicorps, nous nous attacherons à choisir le formalisme la plus adaptée à l'étude de l'éolienne, concernant la partie aérodynamique.

3.2 Modélisation du comportement aérodynamique

Pour modéliser une éolienne de façon précise, il est nécessaire de calculer correctement les efforts aérodynamiques pour compléter l'étude dynamique. Ces méthodes vont être rapidement passées en revue. Mais avant de les citer, nous allons voir quel taux d'énergie maximal est récupéré pour le calcul de la puissance produite par l'éolienne.

3.2.1 Caractéristiques de la machine et du vent

La fonction de l'éolienne étant de capturer l'énergie du vent pour la transformer en énergie électrique, l'unité fondamentale est la densité de puissance du vent, P_v , en W/m^2 [2] :

$$P_v = \frac{1}{2}\rho V^3$$

avec ρ la densité de l'air (Kg/m^3) et V l'intensité de la composante horizontale de la vitesse du vent (m/s).

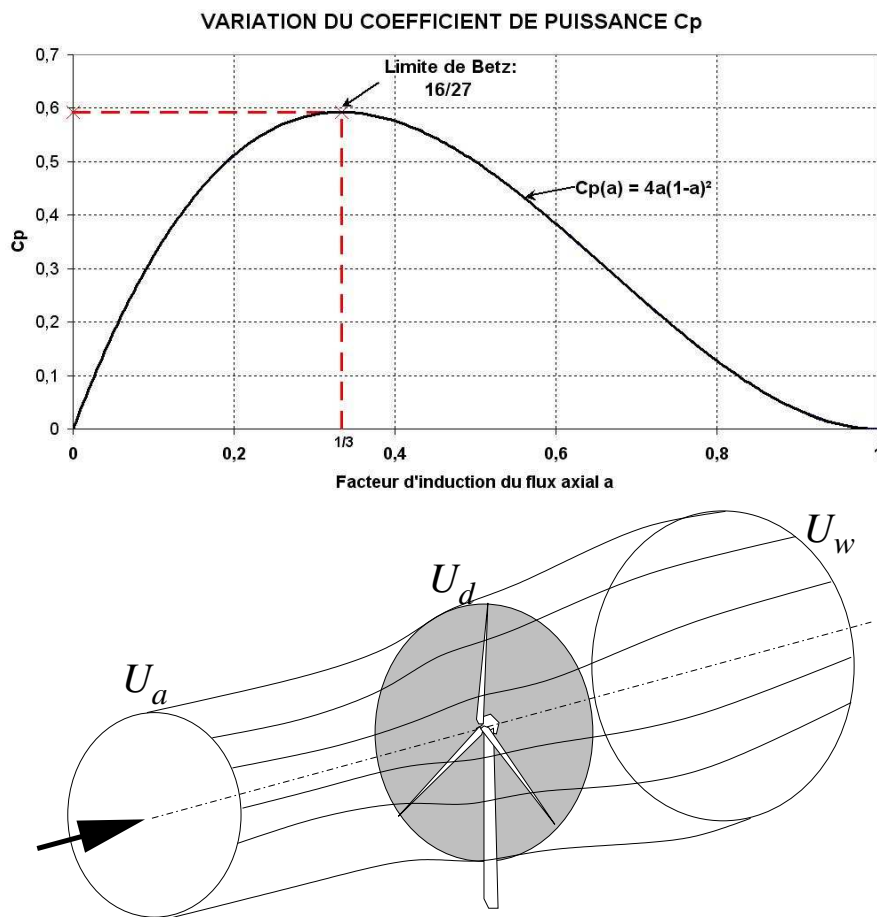


FIG. 3.1 – Variation du coefficient de puissance C_p en fonction du facteur d'induction axial a , d'après [23]

L'éolienne fonctionne dans des conditions optimales pour des vitesses de vent de faible à modéré, en faisant varier l'angle de calage des pales (*section 4.4*). La position de l'angle de calage optimise le coefficient de puissance C_p et donc la puissance produite par la machine [24]. Ce coefficient vaut :

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{P_e}{P_v} < 1 \\ &= 4a(1-a)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où P_e est la puissance extraite par le rotor, P_v la puissance incidente du rotor et a le facteur d'induction du flux axial puisque la vitesse à la sortie n'est pas nulle. En effet, la composante du flux induit dans le sens de l'écoulement au niveau du disque du rotor correspond à $-aU_a$, avec U_a la vitesse d'écoulement en amont de l'éolienne telles que (*figure 3.1*) [23] :

$$\begin{aligned} U_d &= (1-a)U_a : \text{vitesse au niveau du disque} \\ U_w &= (1-2a)U_a : \text{vitesse en aval} \end{aligned}$$

D'après Rankine et Froude, ce coefficient ne peut dépasser une valeur maximale, notée limite de Betz, qui vaut [2, 23] :

$$C_{pmax} = \frac{16}{27} = 0,597 \quad (3.2)$$

Cependant le calcul de ce coefficient ne peut pas suffire à connaître la valeur des efforts aérodynamiques conditionnés par l'écoulement autour des profils des pales. Il faut donc disposer des méthodes plus détaillées.

3.2.2 Modèles aérodynamiques

Quelle que soit la nature de l'écoulement, la plupart des modèles supposent que le fluide est parfait et incompressible car les premières modélisations, datant de la fin du *XIX^{ème}* se rapportent aux hélices marines étudiées par Rankine [25] et Froude [26] et avaient, comme hypothèses de base, un écoulement idéal, qualifié de « monodimensionnel », c'est-à-dire uniforme, stationnaire et perpendiculaire au plan du rotor. Ils donnaient des informations sur les performances aérodynamiques mais, malheureusement, ne tiennent pas compte de la géométrie réelle du rotor et du nombre fini de pales [2, 25, 26]. Pour avoir une modélisation plus appropriée du rotor, il faut tenir compte de l'influence de la géométrie des pales sur l'écoulement de l'air autour du rotor. Les premières études se sont intéressées à un disque rotor avec un nombre infini de pales (1912-1929, d'après la théorie de la quantité de mouvement) puis fini (à partir de 1929, pour un écoulement purement axial, selon Goldstein) [2].

Différents modèles aérodynamiques existent afin de calculer les efforts aérodynamiques sur les pales et dépendent de la nature du vent :

- stationnaire et
- instationnaire (rafales, turbulences).

Dans un calcul par intégration temporelle (comme celui que l'on envisage par la suite), on considérera des vents instationnaires comme une succession d'états stationnaires, pour un pas de temps suffisamment petit.

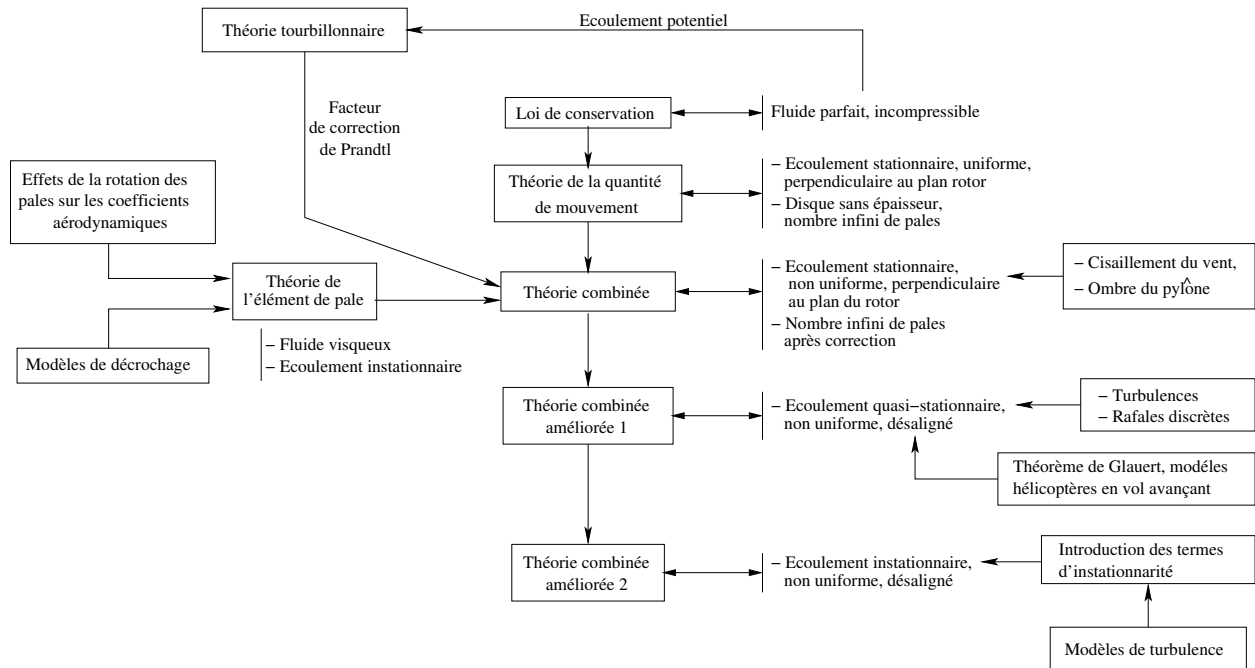


FIG. 3.2 – Présentation des modèles aérodynamiques (a), d'après [2]

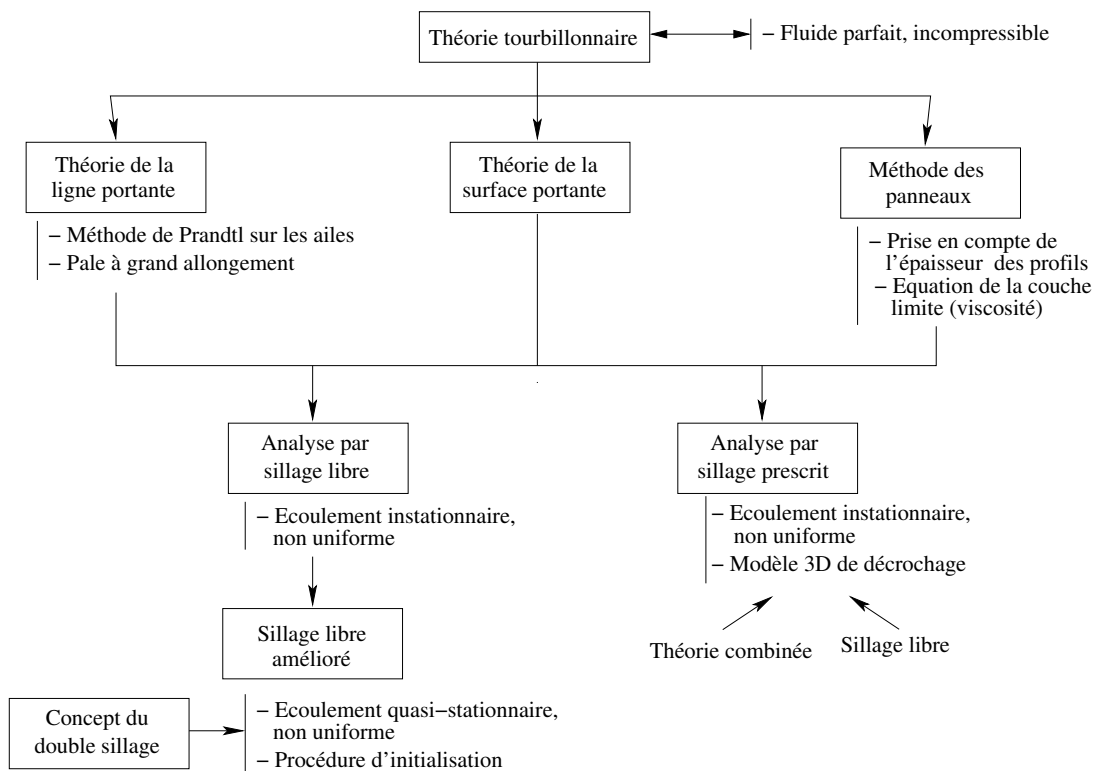


FIG. 3.3 – Présentation des modèles aérodynamiques (b), d'après [2]

Les figures 3.2 et 3.3 font la synthèse de l'ensemble des modèles et résument leurs spéci-

cités. Les modèles aérodynamiques présentés dans ce qui suit, pour des types d'écoulements différents, sont :

- la théorie de l'élément de pale et
- l'analyse par sillage libre et prescrit.

Avant tout, quel que soit le modèle utilisé, l'étude de la trajectoire d'une particule de fluide autour d'une pale d'envergure finie montre la présence d'un tourbillon qui est le lieu d'une recirculation des filets d'air. L'ensemble de ces tourbillons en bord de fuite définissent une nappe dite tourbillonnaire (*figure 3.4*).

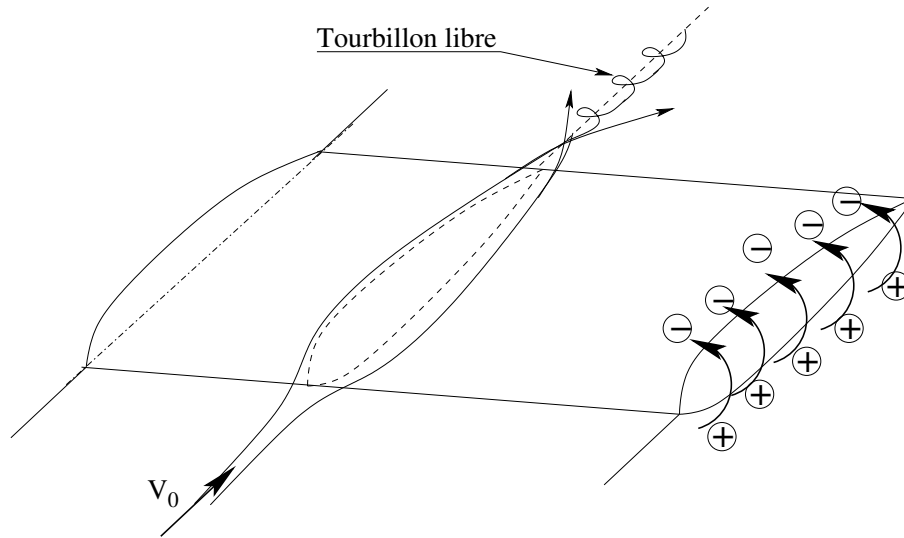


FIG. 3.4 – Présence d'un tourbillon libre dur une envergure finie, d'après [2]

- Plusieurs codes existants ont été répertoriés par Berlu [2] et sont basés sur le modèle de l'**élément de pale** principalement utilisé par bons nombre de codes de calcul industriels. Dans cette description, l'écoulement autour des profils est supposé bidimensionnel (compris dans le plan du profil), incompressible où les premiers modèles supposent que l'envergure de la pale est infinie. Maintenant dans la théorie de l'élément de pale, l'envergure de la pale est considérée comme finie et le calcul des efforts aérodynamiques s'expriment à partir des coefficients aérodynamiques des profils (portance, traînée). De plus, Glauert proposa en 1935 de rendre compte du phénomène de nappe tourbillonnaire par l'intermédiaire du calcul des vitesses induites. Le détail de ce calcul est présenté dans la *section 4.4*. Cette méthode de Glauert, basée sur les lois de conservation, est simple et rend bien compte de la réalité car elle permet d'introduire les variations de l'intensité du vent suivant l'altitude. Cependant elle présente certaines limites.
- En effet, si on visualise l'écoulement en aval du rotor, sa structure est complexe et à base d'enroulements tourbillonnaires instationnaires qui représente le sillage du rotor. La détermination complète du sillage repose sur une analyse par **sillage libre** pour modéliser les pales. Dans ce cas, le sillage évolue en fonction des conditions de l'écoulement en amont et peut être instationnaire. Le calcul des composantes de la vitesse de l'écoulement sont écrites au niveau du plan rotor et non dans le sillage.

- Par contre l'**analyse par sillage prescrit** utilise les vitesses induites sur les pales afin de caractériser le sillage en aval du rotor par l'intermédiaire de sa géométrie. L'intérêt ici est qu'on ne raisonne ni sur un nombre infini de pale corrigé par un facteur, ni sur un rotor plan. Avec une description très fine du sillage, les efforts aérodynamiques peuvent être prédits de façon réaliste. La procédure de calcul est basée sur deux processus : la modélisation de la géométrie du sillage et la détermination des vitesses induites.
- Le modèle le plus complet consisterait à résoudre les équations de Navier-Stokes pour des **écoulements entièrement tridimensionnels** et instationnaire car les autres modèles utilisés ne considèrent que des écoulements de sillage restreints.

Le modèle le plus adapté doit tenir compte au final des vitesses induites qui rendent compte précisément de l'écoulement de l'air le long de la pale. Dans ce travail qui n'avait pas pour but d'écrire un code de calcul aérodynamique mais plutôt de reprendre le travail effectué par Berlu [2], la théorie de Glauert a été utilisée au niveau de notre code afin de calculer les efforts aérodynamiques. Cette théorie permettra aussi, par la suite, de prendre en compte des rafales ou des turbulences en considérant une succession d'états stationnaires.

3.3 Modélisation du système électrique

Les éoliennes peuvent être classées par leur production électrique, soit en trois catégories (*tableau 3.1*). Ce travail s'intéresse particulièrement aux deux dernières de ce *tableau 3.1*.

	Puissance	Diamètre du rotor
Petite éolienne	$< 40 \text{ kW}$	$< 12 \text{ m}$
Eolienne Moyenne	$40 \text{ kW} < P < 1\,000 \text{ kW}$	$12 \text{ m} < D_r < 45 \text{ m}$
Grande éolienne	$> 1\,000 \text{ kW}$	$> 45 \text{ m}$

TAB. 3.1 – Classement des différentes catégories d'éolienne

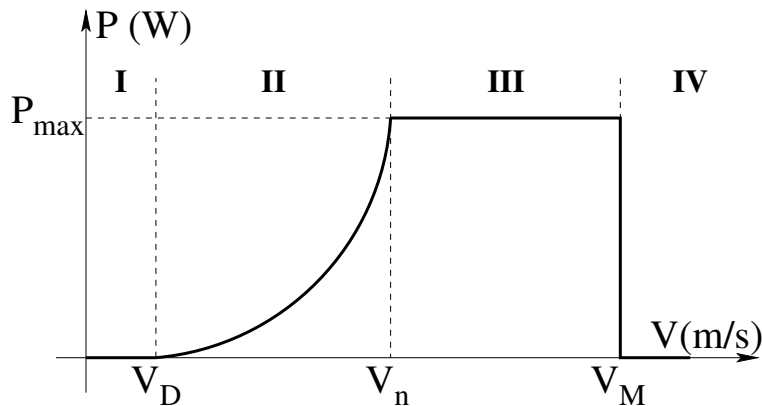


FIG. 3.5 – Diagramme de puissance utile sur l'arbre, en fonction de la vitesse du vent

Les génératrices les plus utilisées dans la nacelle sont soit synchrones ou asynchrones, pour les plus courantes.

La génératrice est dimensionnée afin de développer une puissance maximale P_n , à partir d'une vitesse de vent V_n , dite nominale. Dès que le vent atteint la vitesse V_D , la génératrice est branchée sur le réseau électrique. Jusqu'à une vitesse de vent maximal V_m , la puissance fournie est constante. Elle est réglée grâce au changement de pas des pales. Si le vent dépasse cette vitesse V_m , le rotor s'arrête grâce à un système de sécurité, pour que la turbine ne soit pas endommagée par des efforts trop grands (*figure 3.5*).

Il existe plusieurs types de génératrices. Elles sont décrites dans la section suivante.

3.3.1 Description d'une génératrice

3.3.1.1 La génératrice synchrone

Il en existe de deux types :

- Synchrone à aimants permanents à vitesse variable, comme la J48 de Jeumont,
- Synchrone à inducteur bobiné à vitesse variable.

Ces deux types ont un entraînement direct et fournissent une fréquence variable grâce à un convertisseur de fréquences. Leur utilisation a pour objectif d'améliorer la fiabilité et le rendement et de réduire la maintenance et le bruit de la machine. L'avantage de cette technologie permet de se passer d'un multiplicateur mécanique (entraînement direct). En revanche, un convertisseur sur la 1^{ère} génératrice est obligatoire pour que la fréquence soit fixe lors du raccordement au réseau [27]. Il régule aussi la puissance pour un fonctionnement à vitesse variable [28]. En raison de son coût élevé, de sa complexité et de sa technologie récente dans certains cas, sa présence sur le marché est rare.

3.3.1.2 La génératrice asynchrone

Il en existe trois classes, tournant à 1500 tour/min :

- Asynchrone à cage à vitesse sensiblement constante,
- Asynchrone à rotor bobiné,
- Asynchrone à double alimentation.

Dans les trois cas, la vitesse nominale de la génératrice nécessite d'interposer un multiplicateur afin d'adapter celle-ci à celle du rotor (*figure 3.6*).

La première est reliée directement au réseau, grâce à un transformateur. Son rotor tourne à une vitesse plus grande que celle de synchronisme. Dans ce cas, il est indispensable qu'elle soit branchée au réseau (à fréquence constante), à des batteries de condensateurs ou à des compensateurs actifs (à fréquence variable) dans le cas de sites isolés, pour produire la puissance réactive nécessaire à son démarrage. Les génératrices à fréquence constante sont préconisées dans le cas de sites où le vent est régulier. Ainsi la vitesse de rotation change peu et le glissement varie de quelques pourcents. Le glissement g est la différence relative entre la vitesse de synchronisme N_s et la vitesse réelle N tel que [29] :

$$g = \frac{(N_s - N)}{N_s} \quad (3.3)$$

La deuxième s'ajuste aux variations de puissance de la turbine, grâce à un réglage du glissement. Comme dans le cas précédent, la génératrice n'est pas autonome : elle est toujours reliée au réseau.

La troisième paraît être la plus favorable car la fréquence du stator peut être synchronisée avec celle du réseau. Ce système est raccordé au réseau deux fois, d'où son nom : la première directement par le stator et la deuxième par un convertisseur électronique lié au rotor. L'intérêt de ce système par rapport aux deux autres est qu'il a un bon rendement. Cette génératrice est la plus répandue sur le marché.

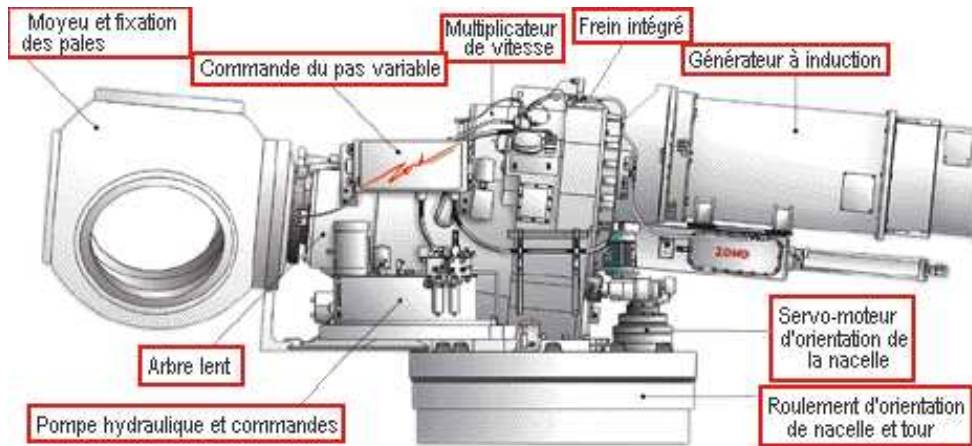


FIG. 3.6 – Description d'une nacelle avec une génératrice à induction

3.3.2 Le raccordement au réseau

Quel que soit le type de génératrice montée dans la nacelle, le raccordement au réseau se produit progressivement lorsque le régime est fixe, c'est-à-dire à vitesse de rotation désirée atteinte. Si la connexion sur le réseau est trop brutale, alors un appel de courant puis un pic de courant produisant de l'électricité sont provoqués. Cette action trop brusque sur le frein mécanique, sur la ligne d'arbre, ... peut endommager toute la machine [30].

Un premier programme fournit la modélisation des corps rigides, un deuxième pour celles des corps souples, un troisième pour la modélisation aérodynamique des corps souples, en particulier des pales, et un dernier se consacre à la modélisation de la progression de la puissance électrique fournie au réseau en fonction de la vitesse du vent que le rotor subit en service.

Bibliographie

- [1] AMIROUCHE F.L., Computational methods in multibody dynamics, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1992
- [2] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, Thèse de doctorat, Université de Lille I, Janvier 1999
- [3] BARRETO J.P., TRIGO A. *et al*, FBD - The Free Body Diagram Method. Kinematic and Dynamic Modeling of a Six Leg Robot, Institute of Systems and Robotics, Leira et Coimbra, Portugal, 1998
- [4] ISNARD F., Génération des équations du mouvement de systèmes polyarticulés avec prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Décembre 1997
- [5] GANANDER H., The Use of a Code-generating System for th Derivation of the Equations for Wind Turbine Dynamics, Journal of Progress and Applications in Wind Power Conversion Technology, Wiley & Sons, Wind Energy, Volume 6, N° 4, pp 333 – 345, Octobre-Décembre 2003
- [6] MINH TRAN D., Equations of motion of multibody systems in the ESA-MIDAS, International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing ESTEC, Holland, 24-26 Avril 1991
- [7] KELLEY N.D., WRIGHT A.D., OSGOOD R.M., Validation of a Model for a Two-Bladed Flexible Rotor System : Progress to Date, National Wind Technology Center, National Renewable Energy Laboratory, Wind Energy Symposium, Reno, Nevada, 11-14 Janvier 1999
- [8] KANE T.R., LEVINSON D.A., Dynamics : Theory and applications, McGraw Hill Book Compagny, 1985
- [9] HANSEN M.H., Improved Modal Dynamics of Wind Turbines to Avoid Stall-induced Vibrations, Journal of Progress and Applications in Wind Power Conversion Technology, Wiley & Sons, Wind Energy, Volume 6, N° 2, p 179 – 195, Avril-Juin 2003
- [10] NUKULWUTHIOPAS W., LAOWATTANA S., MANEEWARN T., Dynamic Modeling of a One-wheel Robot by Using Kane's method, Institute of Field Robotic, Thailand, 2002
- [11] XU Y. *et al*, Dynamic Mobility with Single-Wheel Configuration, International Journal of Robotics Research, Vol. 18, N°7, pp. 728-38, 1999
- [12] TANNER H.G., KYRIAKOPOULOS K.J., Mobile manipulator modelling with Kane's approach, National Technical University of Athens, Février 2001

- [13] BAUMJOHANN F. *et al*, 3D-Multi Body Simulation of Wind Turbines with Flexible Components, University of Applied Sciences Bielefeld, DEWI Magazine n°21, Août 2002
- [14] SHABANA A.A., Dynamics of Multibody Systems, The University of Illinois at Chicago, Cambridge University Press, 1997
- [15] DONGHOON L. *et al*, Multi-flexible-body Dynamic Analysis of Horizontal Axis Wind Turbines, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, Avril 2002
- [16] SERVERA G., Développement d'une méthodologie de couplage dynamique/aérodynamique pour les rotors d'hélicoptère, Université d'Orléans, Thèse de doctorat soutenue en Avril 2002
- [17] THRESHER R.W., Structural dynamic analysis of wind turbine systems, Mechanical Engineering, Oregon State University, 1981
- [18] LOBITZ D.W., A Nastran-Based Computer Program For Structural Dynamic Analysis Of Horizontal Axis Wind Turbine, Sandia National Laboratories, Wind Turbine Technology, D.A. Spera, DOE/NASA/5776-2, NASA CR-195432, pp 89-97, Albuquerque, Nouveau Mexique, Mai 1984
- [19] WRIGHT A.D. *et al*, SWECS Tower Dynamics Analysis Methods and Results, Proceedings for the Wind Turbine Dynamics Workshop, NASA Conference Publication 2185/DOE CONF-810226, 24-26 Février 1981
- [20] BARLAM D., FELDMAN E., Solution of Contact Problems in missile stage connections : NASTRAN versus MARC, Israel Aircraft Industry, European Congress of Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Jyväskylä, 24-28 Juillet 2004
- [21] KELLEY N.D., WRIGHT A.D., OSGOOD R.M., A progress Report on the Characterization and Modeling of a very flexible Wind Turbine Design, National Wind Technology Center, National Renewable Energy Laboratory, Wind Energy Symposium, Reno, Nevada, 11-14 Janvier 1999
- [22] BERLU P., PALUCH B., A computer-aided approach of loads prediction for HAWT based on flexible multibody dynamics, ECWEC, 1999
- [23] BURTON T. *et al*, Wind Energy Handbook, Wiley & Sons, 2001
- [24] MULJADI E., BUTTERFIELD C.P., Pitch-Controlled Variable-Speed Wind Turbine Generation, Presented at the 19th IEEE Industry Applications, Phoenix, Arizona, 3-7 Octobre 1999
- [25] RANKINE W.J.M., On the mechanical principle of the action of propellers, Transaction of The Institute of Naval Architects, vol 6, 1865
- [26] FROUDE W., On the elementary relation between pitch, slip and propulsive efficiency, Transaction of The Institute of Naval Architects, vol 19, 1978
- [27] MULTON B. *et al*, Etat de l'art dans les aérogénérateur électriques, Lésir Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, Extrait du rapport de synthèse ECRIN « L'Electronique de Puissance Vecteur d'Optimisation Pour les Energies Renouvelables, Mai 2002
- [28] www.espace-eolien.fr/Eolien/generat.htm : site sur l'énergie éolienne précisant les caractéristiques de la génératrice

- [29] DESSOUDE M., Moteurs asynchrones - Choix et problèmes connexes, Techniques et de l'Ingénieur, Traité Génie électriques, D3490, 1996
- [30] LECONTE P., RAPIN M., SZECHENYI E., Eoliennes, Techniques et de l'Ingénieur, Traité Génie mécanique, BM4640, 1999

Chapitre 4

Modélisation dynamique

4.1 Introduction

Le formalisme de Kane, auquel Amirouche [1] a apporté des améliorations, a donc été choisi afin de modéliser le comportement dynamique de la machine étudiée. Cette méthode repose sur la mise en équation du système étudié, ce qui permettra de remonter aux efforts, et faciliter son traitement algorithmique. Elle est basée sur une formulation des systèmes multicorps souples avec arborescence topologique et sur la notion de vitesse partielle. L'arborescence décrit le cheminement entre chaque corps et permet une description cinématique univoque de la machine [1, 2]. Les expressions récursives des équations de la dynamique, associées à l'utilisation du formalisme de Kane, facilitent la mise en équation du système et son traitement algorithmique et informatique, sans qu'il soit nécessaire de procéder à une quelconque simplification.

Ce formalisme est appliqué aux corps aussi bien rigides que souples. La première étape traite de la mise en place d'un programme de calcul pour les corps rigides. Tandis que la deuxième est consacrée au formalisme des corps souples. Pour cela, nous avons d'abord présenté la cinématique du système multicorps et la modélisation des efforts qui agissent sur le système. Ceci a ensuite permis de construire des coefficients vérifiant l'équation de mouvement et celles des contraintes cinématiques que subit ou non le système [1]. Ceci a finalement abouti à un système d'équations qui a été résolu par une méthode d'intégration temporelle. La troisième partie s'attache à décrire le modèle utilisé pour le calcul de forces aérodynamiques sur les pales. La dernière *section 5.5* aborde l'intégration des autres composants (génératrice) ainsi que la connexion au réseau électrique, afin de disposer d'un modèle complet.

4.2 Modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps rigides

4.2.1 Cinématique des systèmes multicorps rigides

4.2.1.1 Description d'un système multicorps

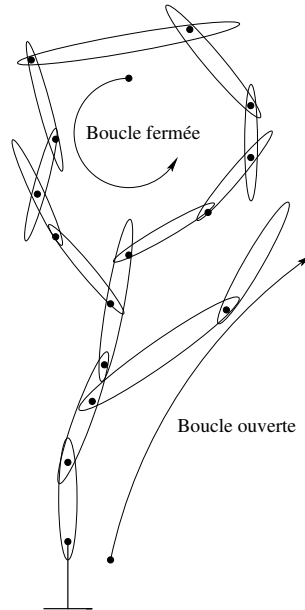


FIG. 4.1 – Système multicorps à boucles fermée et ouverte

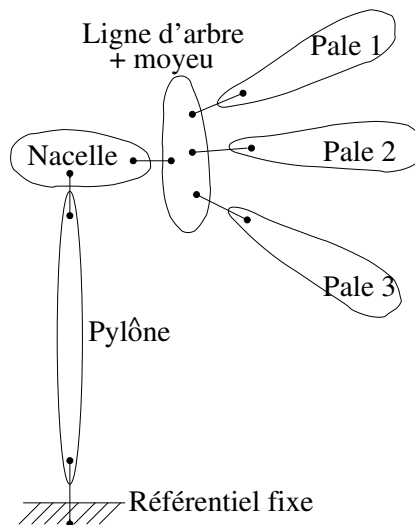


FIG. 4.2 – Topologie arborescente d'une éolienne tripale

Un système multicorps peut être décrit comme un ensemble de corps rigides ou souples, liés les uns aux autres par des contraintes cinématiques et pouvant former des boucles ouvertes

ou fermées (*figure 4.1*). En ce qui concerne notre travail, l'éolienne est considérée comme un système multicorps dont les différents corps sont (*figure 4.2*) :

- le pylône,
- la nacelle,
- la ligne d'arbre,
- le moyeu
- et les pales.

Dans le cas d'une modélisation de corps rigides, les mouvements relatifs entre les différents corps ne sont composés que de rotations (la nacelle tourne autour du pylône, la ligne d'arbre tourne dans la nacelle, les pales autour du moyeu (angle de calage), ainsi de suite ...).

Puisque l'on ne traite ici que le cas des corps rigides, la formulation qui va être développée ne prendra en compte que les rotations.

Par la suite, on appellera n_{sol} le nombre de corps composant le système multicorps et B^i le corps d'indice i .

4.2.1.2 Expression des matrices de rotation

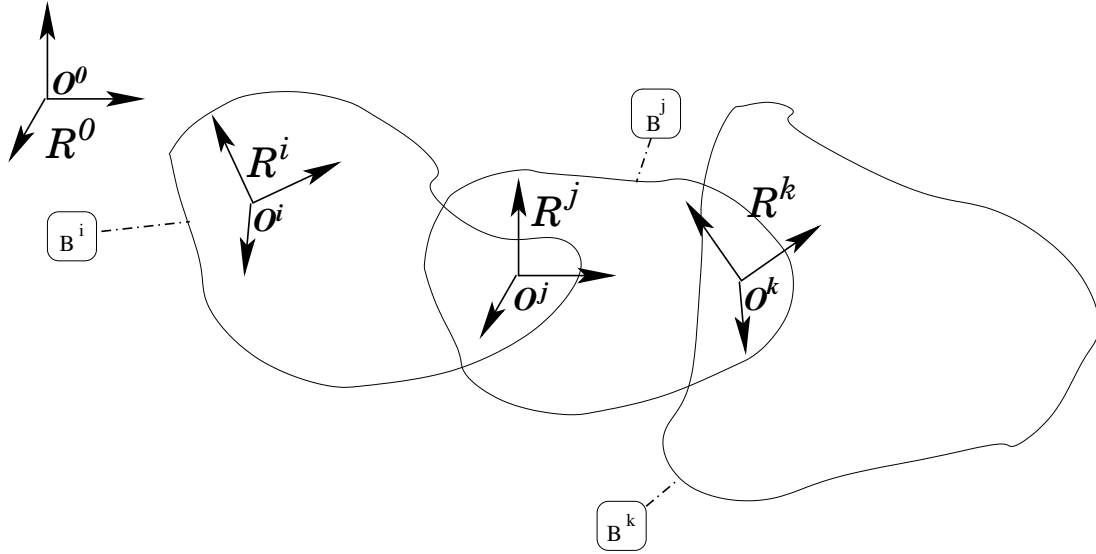


FIG. 4.3 – Modélisation d'une chaîne cinématique comportant trois corps adjacents B^i , B^j et B^k

Dans un problème de dynamique, il est facile d'exprimer dans un repère galiléen \mathfrak{R}^0 le mouvement de rotation des corps en utilisant des repères attachés à ces derniers. Un changement de base est alors traité comme une succession de rotations d'angles finis. Pour connaître les valeurs de ces rotations par rapport au référentiel \mathfrak{R}^0 , le changement de base associé à chaque corps a besoin d'être explicité. Dans ce qui suit, nous allons adopter, par convention, les notations suivantes (*figure 4.3*) :

- 0 sera l'indice du référentiel galiléen \mathfrak{R}^0 ,
- 1 sera l'indice du premier corps attaché à la base B^0 ,
- k sera l'indice de B^k , attaché au référentiel \mathfrak{R}^k

- j sera l'indice de B^j , corps adjacent à B^k , c'est-à-dire précédent B^k ,
- i sera l'indice de B^i , corps adjacent à B^j .

Comme la transformation n'est pas commutative, il existe plusieurs façons de définir l'ordre dans lequel interviennent les différentes rotations. Pour cela nous avons adopté le changement de base d'Euler, qui demeure le plus utilisé. Pour un changement de base quelconque, il faut alors trois angles similaires à ceux d'Euler, sans reprendre la dénomination normalisée à ceux d'Euler, pour passer de \mathfrak{R}^j à \mathfrak{R}^k , soient :

- α^k pour passer de \mathfrak{R}^j à \mathfrak{R}''^k ,
- β^k pour passer de \mathfrak{R}''^k à \mathfrak{R}'^k et
- γ^k pour passer de \mathfrak{R}'^k à \mathfrak{R}^k .

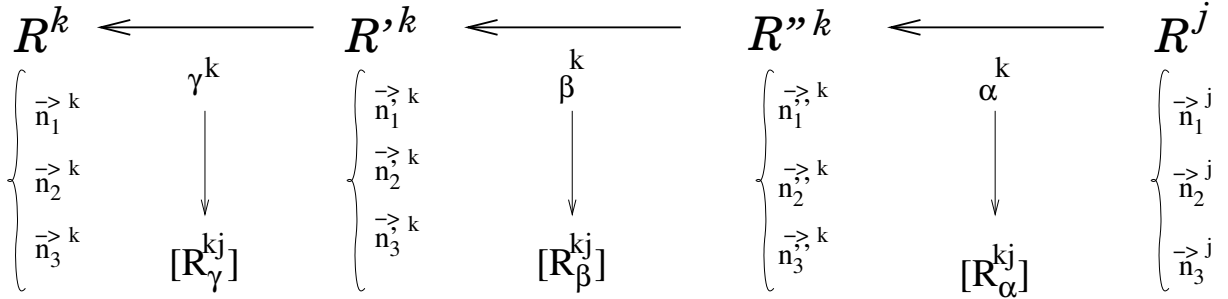


FIG. 4.4 – Changement de base du corps B^j vers B^k

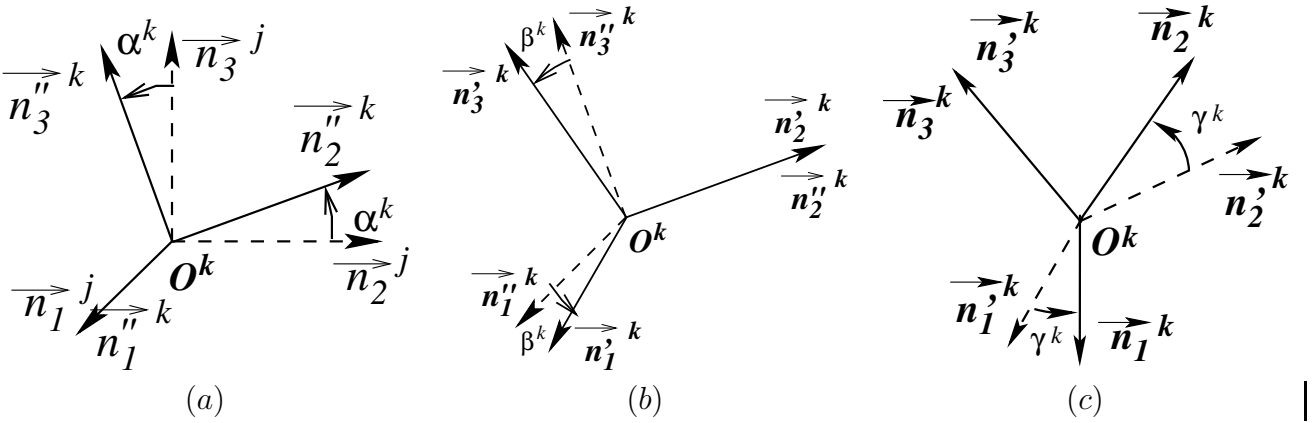


FIG. 4.5 – Ordre des transformations d'Euler pour passer du repère \mathfrak{R}^k à \mathfrak{R}^j

A ces trois angles sont associés des matrices de passage dont les expressions sont données par (4.1), (4.2) et (4.3). La matrice $[R_\alpha^{kj}]$ de changement de base de \mathfrak{R}^j à \mathfrak{R}''^k (figure 4.4) lorsque la rotation α^k s'effectue autour du premier axe de \mathfrak{R}^j (figure 4.5 (a)) s'écrit :

$$[R_\alpha^{kj}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha^k & \sin \alpha^k \\ 0 & -\sin \alpha^k & \cos \alpha^k \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matrice $[R_{\beta}^{kj}]$ de changement de base de \mathfrak{R}'^k à \mathfrak{R}^k (*figure 4.4*) lorsque la rotation β^k s'effectue autour du deuxième axe de \mathfrak{R}'^k (*figure 4.5 (b)*) s'écrit :

$$[R_{\beta}^{kj}] = \begin{bmatrix} \cos \beta^k & 0 & -\sin \beta^k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta^k & 0 & \cos \beta^k \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Et la matrice $[R_{\gamma}^{kj}]$ de changement de base de \mathfrak{R}'^k à \mathfrak{R}^k (*figure 4.4*) lorsque la rotation γ^k s'effectue autour du troisième axe de \mathfrak{R}'^k (*figure 4.5 (c)*) s'écrit :

$$[R_{\gamma}^{kj}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma^k & \sin \gamma^k & 0 \\ -\sin \gamma^k & \cos \gamma^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.2.1.3 Construction des matrices d'arborescence et de connexion

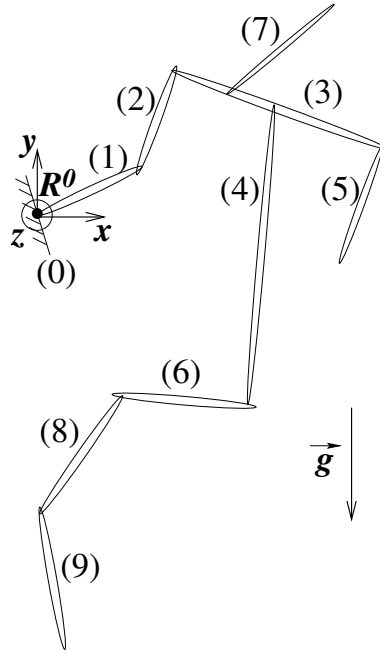


FIG. 4.6 – Exemple de système multicorps

Pour décrire le système multicorps, toutes les liaisons entre les corps doivent être définies. Pour cela, on crée un tableau précisant la nature de ces liaisons. Pour illustrer ceci, nous allons considérer l'exemple de la *figure 4.6* dans lequel nous avons 9 corps ($n_{sol} = 9$).

On définit alors un vecteur $\{\Gamma_1\}$ dont les indices sont rangés dans l'ordre croissant des indices des corps composant le système. $\{\Gamma_1\}$ est le vecteur des indices « des corps adjacents » dans lequel $\Gamma_1(k)$ est l'indice du corps précédent B^k situé à la $k^{ième}$ position dans $\{\Gamma_1\}$. Dans l'exemple de la *figure 4.6*, $\{\Gamma_1\}$ est tel que :

$$\{\Gamma_1\}^T = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 6 \ 8) \quad (4.4)$$

Par exemple, l'indice du corps adjacent à B^8 est $\Gamma_1(8)$, soit le corps B^6 situé à la 8^{ième} position dans $\{\Gamma_1\}$. On notera 0 l'indice du corps adjacent à 0 :

$$\Gamma_1(0) = 0 \quad (4.5)$$

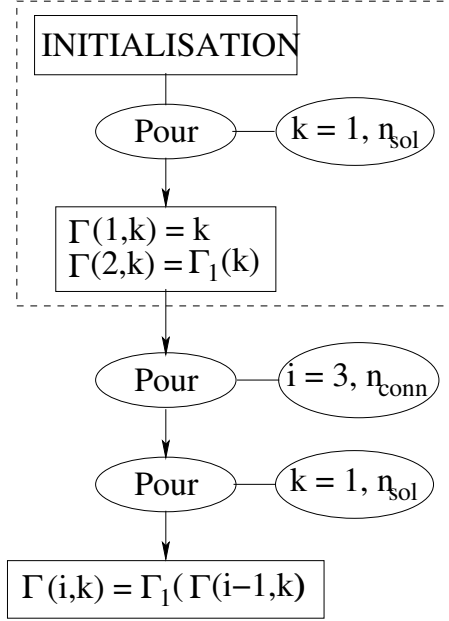


FIG. 4.7 – Organigramme permettant de construire la matrice d'aborescence $[\Gamma]$

A partir du vecteur $\{\Gamma_1\}$, on construit une matrice $[\Gamma]$. Elle sert à exprimer le cheminement de la chaîne des corps reliés entre eux vers le référentiel \mathfrak{R}^0 . Le nombre de colonnes de cette matrice est le nombre de corps du système. Cette construction s'effectue en plusieurs étapes :

- a) la première ligne de $[\Gamma]$ reprend les indices de $\{\Gamma_1\}$,
- b) la deuxième ligne de $[\Gamma]$, soit $\{\Gamma_2\}^T$, regroupe les indices des « corps adjacents » aux indices de $\{\Gamma_1\}$, soit dans l'exemple de la *figure 4.6* :

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_1(\Gamma_1(1)) = \Gamma_1(0) = 0 \\ \Gamma_1(\Gamma_1(2)) = \Gamma_1(1) = 0 \\ \Gamma_1(\Gamma_1(3)) = \Gamma_1(2) = 1 \\ \Gamma_1(\Gamma_1(4)) = \Gamma_1(3) = 2 \\ \Gamma_1(\Gamma_1(5)) = \Gamma_1(3) = 2 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

et ainsi de suite

ce qui donne

$$\{\Gamma_2\}^T = (0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 4 \ 6) \quad (4.7)$$

- c) par récursivité pour les indices $i > 2$ ($i = 3, \dots, n_{conn} - 1$) (*figure 4.7*), n_{conn} étant le nombre de connexions maximales dans le système multicorps, on procède de la même façon qu'en b) :

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_i(1) = \Gamma_1(\Gamma_{i-1}(1)) \\ \Gamma_i(2) = \Gamma_1(\Gamma_{i-1}(2)) \\ \vdots \\ \Gamma_i(n_{sol}) = \Gamma_1(\Gamma_{i-1}(n_{sol})) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Pour la dernière ligne $i = n_{conn}$, nous obtenons :

$$\{\Gamma_{n_{conn}}\}^T = (0 \ \cdots \ 0) \quad (4.9)$$

La matrice $[\Gamma]$ d'arborescence est obtenue par concaténation de l'ensemble des vecteur $\{\Gamma_i\}$ ($i = 1, \dots, n_{conn}$), soit :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \{\Gamma_1\}^T \\ \vdots \\ \{\Gamma_{n_{conn}}\}^T \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Le nombre de connexions est référencé dans le vecteur $\{H\}$. Dans l'exemple traité, entre le corps B^8 et le référentiel \mathfrak{R}^0 d'indice 0, il y a 6 connexions, ce qui donne :

$$H(8) = 6 \quad (4.11)$$

Ici, n_{conn} vaut 7. Le *tableau 4.1* donne la matrice d'arborescence $[\Gamma]$ de l'exemple de la *figure 4.6* et :

$$\{H\}^T = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 6 \ 7) \quad (4.12)$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	←	Ordre des indices
0	1	2	3	3	4	3	6	8	←	$\{\Gamma_1\}^T$
⋮	0	1	2	2	3	2	4	6	←	$\{\Gamma_2\}^T$
⋮	⋮	0	1	1	2	1	3	4	←	$\{\Gamma_3\}^T$
⋮	⋮	⋮	0	0	1	0	2	3	←	$\{\Gamma_4\}^T$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮	1	2	←	$\{\Gamma_5\}^T$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	1	←	$\{\Gamma_6\}^T$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	←	$\{\Gamma_7\}^T$

TAB. 4.1 – Matrice d'arborescence $[\Gamma]$ du système multicorps de la *figure 4.6*

Dans le programme de calcul, seul $\{\Gamma_1\}$ est spécifié comme une donnée d'entrée. Un algorithme construit $[\Gamma]$ et $\{H\}$ automatiquement, par récurrence, d'après la procédure décrite ci-dessus (*figure 4.7*). On trouvera l'arborescence de l'éolienne dans la *section 5.5*. L'exemple de la *figure 4.6*, qui est tout à fait général, permet de montrer l'universalité de la méthode.

La procédure de récursivité décrite ci-dessus permet de constater que les éléments constituant la matrice $[\Gamma]$ présentent certaines propriétés, qui seront utiles par la suite :

$$\Gamma_1(\Gamma_{i-1}(k)) = \Gamma_i(k) \quad (4.13)$$

$$\Gamma_1 \left(\begin{matrix} (i-2) \text{ fois} \\ \dots \\ \Gamma_1(k) \end{matrix} \right) = \Gamma_i(k)$$

4.2.1.4 Vecteur des coordonnées généralisées

Un corps possède au maximum six degrés de liberté, soit trois rotations et trois translations. Considérons maintenant le corps B^k de la *figure 4.3*. Si B^k est autorisé à avoir six degrés de liberté, alors ceux-ci se décomposent en :

- trois rotations autour du centre O^k constitués par l'application successive des angles d'Euler α^k , β^k et γ^k (*figures 4.5*) et
- trois translations selon les axes du repère \mathfrak{R}^k , notées ξ_x^k , ξ_y^k et ξ_z^k , exprimés dans le repère \mathfrak{R}^k

Pour un système multicorps, le nombre total de degrés de liberté n_{ddl} maximal est :

$$n_{ddl} = 6 n_{sol} \quad (4.14)$$

Le mouvement de l'ensemble des corps du système est représenté par leurs coordonnées généralisées relatives x_i ($i = 1, \dots, 6 n_{sol}$). L'ensemble de ces coordonnées généralisées est regroupé dans le vecteur $\{x\}$ tel que :

$$\{x\} = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{3(k-1)+1} \\ x_{3(k-1)+2} \\ x_{3(k-1)+3} \\ \vdots \\ x_{3n_{sol}-2} \\ x_{3n_{sol}-1} \\ x_{3n_{sol}} \\ \hline x_{3n_{sol}+1} \\ x_{3n_{sol}+2} \\ x_{3n_{sol}+3} \\ \vdots \\ x_{3n_{sol}+3(k-1)+1} \\ x_{3n_{sol}+3(k-1)+2} \\ x_{3n_{sol}+3(k-1)+3} \\ \vdots \\ x_{6n_{sol}-2} \\ x_{6n_{sol}-1} \\ x_{6n_{sol}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha^1 \\ \beta^1 \\ \gamma^1 \\ \vdots \\ \alpha^k \\ \beta^k \\ \gamma^k \\ \vdots \\ \alpha^{n_{sol}} \\ \beta^{n_{sol}} \\ \gamma^{n_{sol}} \\ \hline \xi_x^1 \\ \xi_y^1 \\ \xi_z^1 \\ \vdots \\ \xi_x^k \\ \xi_y^k \\ \xi_z^k \\ \vdots \\ \xi_x^{n_{sol}} \\ \xi_y^{n_{sol}} \\ \xi_z^{n_{sol}} \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les rotations} \\ \text{relatives de } B^1 \text{ par} \\ \text{rapport au référentiel } \mathfrak{R}^0 \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les rotations} \\ \text{relatives de } B^k \text{ par} \\ \text{rapport à } B^{k-1} \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les rotations} \\ \text{relatives de } B^{n_{sol}} \\ \text{par rapport à } B^{n_{sol}-1} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les translations} \\ \text{relatives de } B^1 \text{ par} \\ \text{rapport au référentiel } \mathfrak{R}^0 \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les translations} \\ \text{relatives de } B^k \\ \text{par rapport à } B^{k-1} \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{décrit les translations} \\ \text{relatives de } B^{n_{sol}} \\ \text{par rapport à } B^{n_{sol}-1} \end{array} \right. \end{array} \quad (4.15)$$

La position des variables dans le vecteur des coordonnées généralisées (la partie supérieure regroupe les rotations tandis que la partie inférieure regroupe les translations) est une façon d'ordonner ce vecteur qui permettra ultérieurement un traitement informatique plus facile du problème. A partir de maintenant, nous ne nous intéressons qu'aux coordonnées généralisées relatives décrivant les rotations, conformément à ce qui a été écrit au *paragraphe 4.2.1.1* car,

dans le cas de l'éolienne, tous les mouvements de corps rigides sont des rotations. Par conséquent, le vecteur des coordonnées généralisées ne contiendra que la demi-partie supérieure de (4.15) :

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{3n_{sol}-2} \\ x_{3n_{sol}-1} \\ x_{3n_{sol}} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Pour l'exemple de la *figure 4.6* et en ne tenant uniquement compte que des rotations dans le plan (x, y) , le vecteur des coordonnées généralisées s'écrit sous la forme :

$$\{x\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & \gamma_6 & 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0 & \gamma_8 & 0 & 0 & \gamma_9 & & & \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

où γ_k sont les angles des rotations autour de l'axe z (*figure 4.4*).

4.2.1.5 Expressions des matrices de passage et de leurs dérivées temporelles

Il est maintenant nécessaire d'établir les relations de changement de base de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^j grâce aux matrices rotations définies dans le *paragraphe 4.2.1.2*. La matrice de changement de base de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^j , notée $[S^{kj}]$, est le produit des matrices de rotations (4.1), (4.2) et (4.3) tel que :

$$[S^{kj}] = [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] \quad (4.18)$$

ou encore, sous forme explicite :

$$[S^{kj}] = \begin{bmatrix} c\beta^k s\gamma^k & c\alpha^k s\gamma^k + s\alpha^k s\beta^k c\gamma^k & s\alpha^k s\gamma^k - c\alpha^k s\beta^k c\gamma^k \\ -c\beta^k s\gamma^k & c\alpha^k c\gamma^k + s\alpha^k s\beta^k s\gamma^k & s\alpha^k c\gamma^k + c\alpha^k s\beta^k s\gamma^k \\ s\beta^k & -s\alpha^k c\beta^k & c\alpha^k c\beta^k \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

où $cp = \cos p$, $sp = \sin p$ ($p = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k$). Bien que cette opération soit simple, il faut noter que celle-ci devra être effectuée sur l'ensemble du système multicorps à chaque pas d'intégration, ce qui peut aboutir à un temps de calcul considérable, lorsque deux des angles sont nuls par exemple. Afin de réduire le temps de calcul aux seules variables actives du problème, nous avons alors introduit un pointeur p_q ($q = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k$) tel que :

$$p_q = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{si } q \neq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

A priori, les valeurs des angles $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ pourraient à elles seules donner des indications en se basant sur le fait qu'ils puissent ou non être variables dans le temps. Or :

- d'une part, $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ peuvent être nuls au cours du temps, auquel cas les degrés de liberté associés n'existent pas, et on peut simplifier les expressions des matrices de rotation,

- d'autre part, $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ peuvent avoir des valeurs fixes (exemple : l'angle de calage d'une pale), mais non nulles, alors dans ce cas, les degrés de liberté associés à ces angles n'existent pas non plus, mais ils interviennent quand même dans l'expression des matrices de passage sous forme de constantes.

Par conséquent, il est donc impossible de se baser uniquement sur les variations de $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$, pour réduire le temps de calcul. Pour pallier cet inconvénient, l'utilisateur indique par les pointeurs $p_{\alpha^k}, p_{\beta^k}$ et p_{γ^k} que $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ sont constants et non nuls. Dans la réalité, on emploiera une combinaison linéaire des p_q pour construire un pointeur global, relatif à l'ensemble des rotations subies par un corps, avec (figure 4.8) :

$$p = 100 p_{\alpha^k} + 10 p_{\beta^k} + p_{\gamma^k} \quad (4.21)$$

Afin d'illustrer l'intérêt de cette méthode, prenons le cas où :

$$\begin{cases} \alpha^k \neq 0 \\ \beta^k = 0 \\ \gamma^k = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

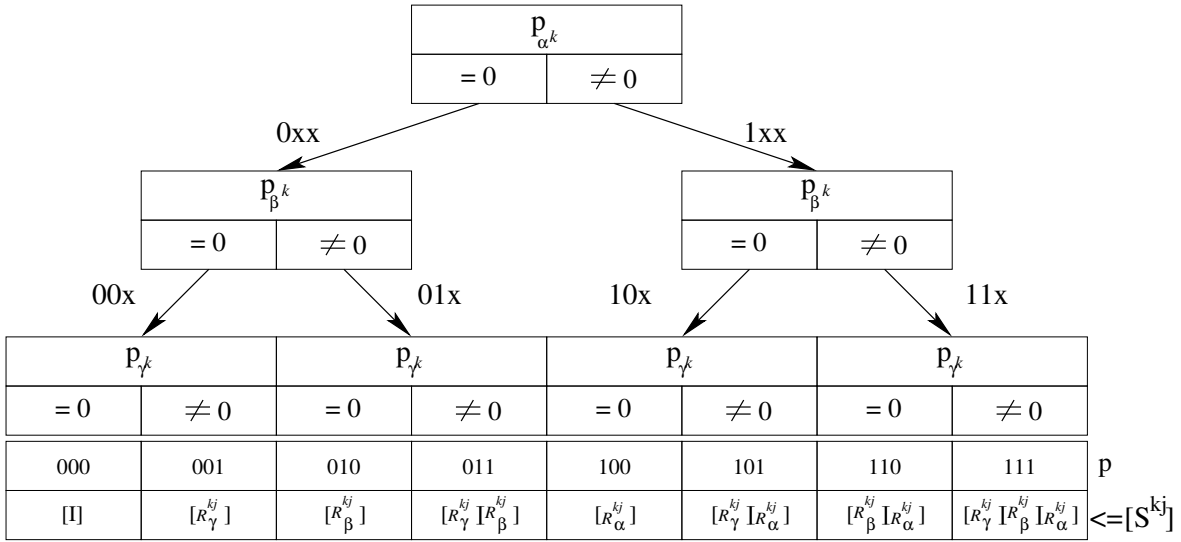


FIG. 4.8 – Schéma de construction de la matrice de passage $[S^{kj}]$ destinée à diminuer le temps de calcul

$[S^{kj}]$ vaut $[R_{\alpha}^{kj}]$, d'après le schéma de la figure 4.8. Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires est résumé dans le tableau 4.2 pour déterminer les composantes des matrices rotations, de leurs dérivées et du produit matriciel. Pour montrer le gain potentiel qu'il sera possible d'obtenir, les additions, les multiplications, ainsi que les calculs trigonométriques (cosinus, sinus) sont considérés comme des opérations élémentaires, c'est-à-dire de même niveau. D'après ce tableau 4.3, deux opérations sont alors nécessaires pour construire $[S^{kj}]$ si cette méthode est employée, au lieu des 96 opérations dans le cas contraire, c'est-à-dire si le pointeur p est égal à 111. Le fait d'utiliser un pointeur permet donc ici de réduire le plus

souvent le nombre d'opérations de 98%. Ceci est loin d'être négligeable car, dans le cas d'une éolienne, on ne trouve qu'un seul degré de liberté par corps rigide.

	Sans pointeur	Avec pointeurs p et dp	Réduction
S^{kj}	96	2	98%
\dot{S}^{kj}	306	4	99%

TAB. 4.2 – Comparaison entre le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $[S^{kj}]$ et $[\dot{S}^{kj}]$ avec et sans prise en compte des pointeurs p et dp , qui peuvent valoir ici 001, 010 ou 100

Etapes		Type	Nombre d'opérations élémentaires
Construction de	R_p^{kj} avec $p = \alpha, \beta$ ou γ	<i>Trigonométrie</i>	2
Construction de	\dot{R}_p^{kj} avec $p = \alpha, \beta$ ou γ	<i>Trigonométrie</i>	4
Multiplication matricielle		(<i>Multiplication et addition</i>)	45
Somme matricielle		<i>Addition</i>	9

TAB. 4.3 – Nombre d'opérations effectuées lors de la construction, de la multiplication et de la sommation de matrices de rotation dans le cas le plus général

Calculons maintenant $[\dot{S}^{kj}]$, la dérivée temporelle de $[S^{kj}]$, soit :

$$[\dot{S}^{kj}] = \frac{d}{dt} [S^{kj}] = [\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}] \quad (4.23)$$

où $[\dot{R}_\alpha^{kj}]$, $[\dot{R}_\beta^{kj}]$ et $[\dot{R}_\gamma^{kj}]$ représentent les dérivées temporelles¹ des matrices de rotation, exprimées par :

$$[\dot{R}_\alpha^{kj}] = \frac{d}{dt} [R_\alpha^{kj}] = \dot{\alpha}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha^k & \cos \alpha^k \\ 0 & -\cos \alpha^k & -\sin \alpha^k \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[\dot{R}_\beta^{kj}] = \frac{d}{dt} [R_\beta^{kj}] = \dot{\beta}^k \begin{bmatrix} -\sin \beta^k & 0 & -\cos \beta^k \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta^k & 0 & -\sin \beta^k \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$[\dot{R}_\gamma^{kj}] = \frac{d}{dt} [R_\gamma^{kj}] = \dot{\gamma}^k \begin{bmatrix} -\sin \gamma^k & \cos \gamma^k & 0 \\ -\cos \gamma^k & -\sin \gamma^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Comme précédemment, un second pointeur dp va être utilisé, en complément du pointeur p . Il est égal à :

¹Pour la suite, toutes les dérivées temporelles sont notées avec un $\dot{}$

$$dp = 100 dp_{\dot{\alpha}^k} + 10 dp_{\dot{\beta}^k} + dp_{\dot{\gamma}^k} \quad (4.27)$$

où :

$$dp_{\dot{q}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{q} = 0 \forall t \\ 1 & \text{si } \dot{q} = q(t) \forall t \end{cases} \quad (q = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k) \quad (4.28)$$

Ce pointeur dp indique que les angles $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ varient au cours du temps. Dans le cas le plus général, où :

$$dp = 111 \quad (4.29)$$

Le *tableau 4.3* montre que 306 opérations doivent être alors effectuées. Supposons maintenant que seuls $\dot{\alpha}^k$ et α^k soient non nuls. $[\dot{S}^{kj}]$ vaut alors $[\dot{R}_\alpha^{kj}]$ (*tableaux 4.4, 4.5 et 4.6*). D'après le *tableau 4.3*, 4 opérations seulement sont alors nécessaires pour construire $[\dot{S}^{kj}]$ à la place des 306 précédentes, soit une réduction du nombre d'opérations de 99% (*tableau 4.2*). Un temps de calcul considérable est donc économisé, ce qui est d'autant plus appréciable que le calcul est, rappelons le, itératif.

$dp : \rightarrow$ $p : \downarrow$	0	1	10	11
0	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}]$	$[\dot{R}_\beta^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] + [\dot{R}_\beta^{kj}]$
1	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}]$	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}]$
10	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}]$	$[\dot{R}_\beta^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] + [\dot{R}_\beta^{kj}]$
11	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}]$	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}]$
100	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$
101	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$
110	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$
111	[0]	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}]$

TAB. 4.4 – Méthode de construction de la matrice $[\dot{S}^{kj}]$ pour $dp_{\dot{\alpha}^k}$ nul

$dp : \rightarrow$ $p : \downarrow$	100	101
0	$[\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] +$ $+ [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
1	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] +$ $+ [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
10	$[R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] +$ $+ [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
11	$[R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] +$ $+ [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
100	$[\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}] +$ $+ [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
101	$[R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\alpha^{kj}] +$ $+ [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
110	$[R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] +$ $+ [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$
111	$[R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$	$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] +$ $+ [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}]$

TAB. 4.5 – Méthode de construction de la matrice $[\dot{S}^{kj}]$ pour dp_{α^k} non nul, où dp vaut 100 et 101

$dp : \rightarrow$ $p : \downarrow$	110	111
0	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
1	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
10	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
11	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
100	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
101	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
110	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \\ + \\ R_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$
111	$\begin{bmatrix} R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$	$\begin{bmatrix} \dot{R}_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \\ + \\ R_\gamma^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_\beta^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\beta^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\alpha^{kj} \\ + \\ \dot{R}_\alpha^{kj} \end{bmatrix} +$

TAB. 4.6 – Méthode de construction de la matrice $[\dot{S}^{kj}]$ pour dp_{α^k} non nul, où dp vaut 110 et 111

4.2.1.6 Construction récursive des matrices de passage

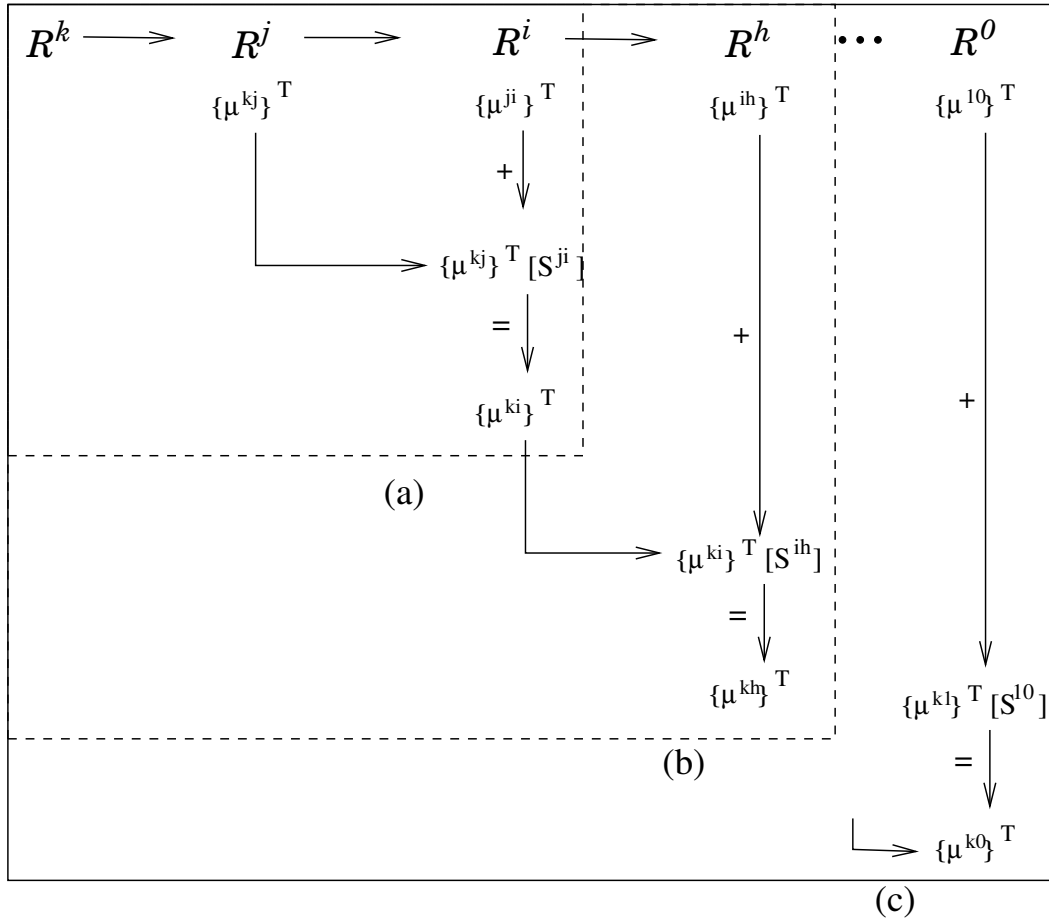


FIG. 4.9 – Méthode de construction destinée à relier 3 vecteurs dans $\mathcal{R}^i(a)$, $\mathcal{R}^h(b)$ puis $\mathcal{R}^0(c)$

Le but de la procédure de construction récursive des matrices de passage, que nous allons mettre en place, est de trouver une méthode numérique permettant de construire automatiquement un vecteur quelconque dans le repère galiléen \mathcal{R}^0 (dans lequel les équations de la dynamique seront résolues), en s'appuyant sur l'arborescence du système (*paragraphe 4.2.1.3*). Rappelons, avant de commencer, que pour sommer deux vecteurs (de vitesse par exemple), il est nécessaire de les exprimer dans une même base. Afin d'amorcer la procédure de récursivité, nous allons donc considérer les vecteurs relatifs à trois corps adjacents :

- $\{\mu^{ki}\}$ un vecteur quelconque relatif à B^k par rapport à B^i , exprimé dans la base de \mathcal{R}^i ,
- $\{\mu^{kj}\}$ un vecteur quelconque relatif à B^k par rapport à B^j , initialement exprimé dans la base de \mathcal{R}^j et
- $\{\mu^{ji}\}$ un vecteur quelconque relatif à B^j par rapport B^i , exprimé dans la base de \mathcal{R}^i .

puis nous généraliserons ensuite la procédure avec un 4^{ème} corps. Avant de sommer les deux derniers vecteurs, $\{\mu^{kj}\}$ doit d'abord être projeté dans \mathcal{R}^i en utilisant la matrice de passage $[S^{ji}]$ de \mathcal{R}^j vers \mathcal{R}^i . Ainsi la relation liant ces trois vecteurs est donnée par (*figure 4.9 (a)*) :

$$\{\mu^{ki}\}^T = \{\mu^{kj}\}^T [S^{ji}] + \{\mu^{ji}\}^T \quad (4.30)$$

La *figure 4.9 (a)* illustre la méthode de construction destinée à relier ces trois vecteurs. En fait, le corps B^i est le corps précédent B^j , qui lui-même est le corps précédent B^k d'où :

$$i = \Gamma_1(j) = \Gamma_1(\Gamma_1(k)) = \Gamma_2(k) \quad (4.31)$$

d'après une propriété de (4.13) de la matrice d'arborescence. La première relation de changement de base (4.30) de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^i a donc été établie. Maintenant, l'opération est répétée pour $\{\mu^{ki}\}$ que l'on projette dans le repère \mathfrak{R}^h (*figure 4.9 (b)*) :

$$\{\mu^{kh}\}^T = \{\mu^{ki}\}^T [S^{ih}] + \{\mu^{ih}\}^T \quad (4.32)$$

où h est l'indice du corps adjacent à B^i tel que :

$$h = \Gamma_1(i) = \Gamma_1(\Gamma_2(k)) = \Gamma_3(k) \quad (4.33)$$

Par récurrence sur r ($r = 4, \dots, H(k)$) pour $\{\mu^{k\Gamma_r(k)}\}$ la relation de changement de base de \mathfrak{R}^k vers $\mathfrak{R}^{\Gamma_r(k)}$ est telle que :

$$\{\mu^{k\Gamma_r(k)}\}^T = \{\mu^{k\Gamma_{r-1}(k)}\}^T [S^{\Gamma_{r-1}(k)\Gamma_r(k)}] + \{\mu^{\Gamma_{r-1}(k)\Gamma_r(k)}\}^T \quad (4.34)$$

A l'ordre $H(k)$, pour $\{\mu^{k0}\}$, la relation de changement de base de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^0 devient (*figure 4.9 (c)*) :

$$\{\mu^{k0}\}^T = \{\mu^{k\Gamma_{H(k)-1}(k)}\}^T [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}] + \{\mu^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}\}^T \quad (4.35)$$

Ainsi le changement de base \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^0 se matérialise par un produit de matrices de changement de base, noté $[S^{k0}]$ tel que :

$$[S^{k0}] = [S^{k\Gamma_1(k)}] [S^{\Gamma_1(k)\Gamma_2(k)}] \dots [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}] \quad (4.36)$$

ou encore :

$$[S^{k0}] = \prod_{i=1}^{H(k)} [S^{\Gamma_{i-1}(k)\Gamma_i(k)}] \quad (4.37)$$

où $\Gamma_0(k)$ vaut k et les $\Gamma_r(k)$ ($r = 1, \dots, H(k)$) sont les indices de la $k^{i\text{ème}}$ colonne de $[\Gamma]$ établie plus haut. Dans l'exemple de la *figure 4.6*, la matrice de changement de base $[S^{80}]$ du référentiel \mathfrak{R}^8 vers \mathfrak{R}^0 est construite, d'après la suite des indices de la $8^{i\text{ème}}$ colonne du *tableau 4.1*, de la façon suivante :

$$[S^{80}] = [S^{86}] [S^{64}] [S^{43}] [S^{32}] [S^{21}] [S^{10}] \quad (4.38)$$

D'après [4], les matrices de rotation $[R_\alpha^{k\Gamma_1(k)}]$, $[R_\beta^{k\Gamma_1(k)}]$ et $[R_\gamma^{k\Gamma_1(k)}]$ vérifient la relation :

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad (4.39)$$

donc :

$$\left[R_p^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[R_p^{k \Gamma_1(k)} \right]^T = [I] \quad (p = \alpha^k, \beta^k \text{ ou } \gamma^k) \quad (4.40)$$

D'où $\left[S^{k \Gamma_1(k)} \right]$ et $\left[S^{k0} \right]$ vérifient aussi la relation (4.39) telle que :

$$\left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right]^T = [I] \quad (4.41)$$

et :

$$\left[S^{k0} \right] \left[S^{k0} \right]^T = [I] \quad (4.42)$$

Dans ce cas, la matrice de changement de base de $\mathfrak{R}^{\Gamma_1(k)}$ vers \mathfrak{R}^k notée $\left[S^{\Gamma_1(k)k} \right]$ s'écrit :

$$\left[S^{\Gamma_1(k)k} \right] = \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right]^T \quad (4.43)$$

et la matrice de changement de base de \mathfrak{R}^0 vers \mathfrak{R}^k notée $\left[S^{0k} \right]$, permettant de faire la transformation inverse, s'écrit :

$$\left[S^{0k} \right] = \left[S^{k0} \right]^T = \prod_{i=1}^{H(k)} \left[S^{\Gamma_i(k) \Gamma_{i-1}(k)} \right] \quad (4.44)$$

D'après (4.37) et (4.41), la matrice de changement de base de \mathfrak{R}^k vers $\mathfrak{R}^{\Gamma_m(k)}$, notée $\left[S^{k \Gamma_m(k)} \right]$ ($m = 0, \dots, H(k)$), en utilisant les matrices $\left[S^{k0} \right]$ et $\left[S^{\Gamma_m(k)0} \right]$, vérifie la relation suivante :

$$\left[S^{k \Gamma_m(k)} \right] = \left[S^{k0} \right] \left[S^{\Gamma_m(k)0} \right]^T \quad (4.45)$$

où :

$$\begin{cases} \left[S^{k0} \right] = \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[S^{\Gamma_1(k) \Gamma_2(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{m-1}(k) \Gamma_m(k)} \right] \left[S^{\Gamma_m(k) \Gamma_{m+1}(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right] \\ \left[S^{\Gamma_m(k)0} \right] = \left[S^{\Gamma_m(k) \Gamma_{m+1}(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right] \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \left[S^{k \Gamma_m(k)} \right] &= \left(\left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right] \right) \left(\left[S^{\Gamma_m(k) \Gamma_{m+1}(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right] \right)^T \\ &= \left(\left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right] \right) \left(\left[S^{\Gamma_{H(k)-1}(k) 0} \right]^T \dots \left[S^{\Gamma_m(k) \Gamma_{m+1}(k)} \right]^T \right) \\ &= \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[S^{\Gamma_1(k) \Gamma_2(k)} \right] \dots \left[S^{\Gamma_{m-1}(k) \Gamma_m(k)} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

L'expression (4.45) donne en fait la relation d'un changement de base de \mathfrak{R}^k vers \mathfrak{R}^0 puis de \mathfrak{R}^0 vers $\mathfrak{R}^{\Gamma_m(k)}$ qui peut être traduite par :

$$\left[S^{k \Gamma_m(k)} \right] = \left[S^{k0} \right] \left[S^{0 \Gamma_m(k)} \right] \quad (4.47)$$

D'après (4.45), (4.36) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \left[S^{k0} \right] &= \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[S^{\Gamma_1(k) \Gamma_{r-1}(k)} \right] \left[S^{\Gamma_{r-1}(k) \Gamma_r(k)} \right] \left[S^{\Gamma_r(k) 0} \right] \\ &= \left[S^{k \Gamma_1(k)} \right] \left[S^{\Gamma_1(k) 0} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

D'après les relations (4.41) et (4.46), la transposée de $[S^{k0}]$ de (4.48) vérifie :

$$[S^{k0}]^T = [S^{\Gamma_r(k)0}]^T [S^{\Gamma_{r-1}(k)\Gamma_r(k)}]^T [S^{\Gamma_1(k)\Gamma_{r-1}(k)}]^T [S^{k\Gamma_1(k)}]^T \quad (4.49)$$

Ainsi le vecteur $\{\mu^{k0}\}$ de (4.35) devient :

$$\{\mu^{k0}\}^T = \{\mu^{k\Gamma_1(k)}\}^T [S^{\Gamma_1(k)0}] + \sum_{i=2}^{H(k)-1} \{\mu^{\Gamma_{i-1}(k)\Gamma_i(k)}\}^T [S^{\Gamma_i(k)0}] + \{\mu^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}\}^T \quad (4.50)$$

où le membre de gauche représente la vitesse angulaire absolue de B^k par rapport à B^0 et celui de droite la somme des vitesses angulaires relatives des corps adjacents à B^k liant B^k à B^0 , exprimées dans \mathfrak{R}^0 . Cette expression peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \{\mu^{k0}\}^T \\ &= \left(\{\mu^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}\}^T \{\mu^{\Gamma_{H(k)-2}(k)\Gamma_{H(k)-1}(k)}\}^T \dots \{\mu^{\Gamma_1(k)\Gamma_2(k)}\}^T \{\mu^{k\Gamma_1(k)}\}^T \right) \begin{bmatrix} [I] \\ [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}] \\ \vdots \\ [S^{\Gamma_2(k)0}] \\ [S^{\Gamma_1(k)0}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.2.1.7 Dérivées temporelles des matrices de passage

On veut construire la matrice $[\dot{S}^{k0}]$, la dérivée par rapport au temps de la matrice $[S^{k0}]$, sans dériver par rapport au temps cette matrice de passage $[S^{k0}]$ mais par la même méthode de récursivité vue dans le *paragraphe 4.2.1.6*. Nous avons donc besoin des matrices décrites dans (4.1), (4.2), (4.3), de leurs dérivées (4.24), (4.25), (4.26) et aussi, bien sûr, de la matrice de l'arborescence $[\Gamma]$.

La détermination de $[\dot{S}^{k0}]$ est donc décrite ici. La dérivation de la relation de récursivité (4.36) permet d'obtenir (sans expliciter, à partir des matrices de passage) :

$$\begin{aligned} [\dot{S}^{k0}] &= [\dot{S}^{k\Gamma_1(k)}] \prod_{i=1}^{H(k)-1} [S^{\Gamma_i(k)\Gamma_{i+1}(k)}] + \\ &+ \sum_{r=2}^{H(k)} \left(\left(\prod_{i=0}^{r-2} [S^{\Gamma_i(k)\Gamma_{i+1}(k)}] \right) [\dot{S}^{\Gamma_{r-1}(k)\Gamma_r(k)}] \left(\prod_{i=r}^{H(k)-1} [S^{\Gamma_i(k)\Gamma_{i+1}(k)}] \right) \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

D'après (4.46), (4.52) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} [\dot{S}^{k0}] &= [\dot{S}^{k\Gamma_1(k)}] [S^{\Gamma_1(k)\Gamma_{H(k)}(k)}] + \\ &+ \sum_{r=2}^{H(k)} \left([S^{k\Gamma_{r-1}(k)}] [\dot{S}^{\Gamma_{r-1}(k)\Gamma_r(k)}] [S^{\Gamma_r(k)\Gamma_{H(k)}(k)}] \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Afin de simplifier le calcul, on introduit un opérateur de dérivation temporelle $[\Omega^{kj}]$, qui permet de transformer $[S^{kj}]$ en $[\dot{S}^{kj}]$. Ainsi $[\dot{S}^{kj}]$ et $[\dot{S}^{k0}]$ s'expriment respectivement sous la forme :

$$[\dot{S}^{kj}] = [\Omega^{kj}] [S^{kj}] \quad (4.54)$$

et :

$$[\dot{S}^{k0}] = [\Omega^{k0}] [S^{k0}] \quad (4.55)$$

En pratique, $[\Omega^{kj}]$ et $[\Omega^{k0}]$ sont obtenues de la façon suivante (en utilisant la relation (4.39)) :

$$[\Omega^{kj}] = [\dot{S}^{kj}] [S^{kj}]^{-1} = [\dot{S}^{kj}] [S^{kj}]^T \quad (4.56)$$

et :

$$[\Omega^{k0}] = [\dot{S}^{k0}] [S^{k0}]^{-1} = [\dot{S}^{k0}] [S^{k0}]^T \quad (4.57)$$

Ainsi $[\Omega^{kj}]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} [\Omega^{kj}] &= [\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T + \\ &+ [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T \end{aligned} \quad (4.58)$$

ou encore :

$$[\Omega^{kj}] = [\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\gamma^{kj}]^T + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T + [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T \quad (4.59)$$

L'*Annexe B* montre que le produit $[\dot{R}_p^{kj}] [R_p^{kj}]^T$ ($p = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k$) représente une matrice antisymétrique et que $[\Omega^{kj}]$ est aussi une matrice antisymétrique dont la forme explicite est :

$$[\Omega^{kj}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\alpha}^k s \beta^k + \dot{\gamma}^k & \dot{\alpha}^k c \beta^k s \gamma^k - \dot{\beta}^k c \gamma^k \\ -\dot{\alpha}^k s \beta^k - \dot{\gamma}^k & 0 & \dot{\alpha}^k c \beta^k c \gamma^k + \dot{\beta}^k s \gamma^k \\ -\dot{\alpha}^k c \beta^k s \gamma^k + \dot{\beta}^k c \gamma^k & -\dot{\alpha}^k c \beta^k c \gamma^k - \dot{\beta}^k s \gamma^k & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

D'après [3], $[\Omega^{kj}]$ est associée à un vecteur noté $\{y^k\}$ ² dont la forme est :

$$\{y^k\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}^k c \beta^k c \gamma^k + \dot{\beta}^k s \gamma^k \\ -\dot{\alpha}^k c \beta^k s \gamma^k + \dot{\beta}^k c \gamma^k \\ \dot{\alpha}^k s \beta^k + \dot{\gamma}^k \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

²Dans une base orthonormée, la matrice antisymétrique $[\Lambda_K]$ s'écrit :

$$[\Lambda_K] = \begin{bmatrix} 0 & -K_3 & K_2 \\ K_3 & 0 & -K_1 \\ -K_2 & K_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

où les K_i sont les composantes de \vec{K} .

D'après les expressions de $[\dot{S}^{k0}]$ et de $[S^{k0}]^T$ (équations (4.53) et (4.49)), $[\Omega^{k0}]$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & [\Omega^{k0}] \\ &= [\dot{S}^{k\Gamma_1(k)}] [S^{\Gamma_1(k)\Gamma_{H(k)}(k)}] \left([S^{\Gamma_1(k)\Gamma_{H(k)}(k)}]^T [S^{k\Gamma_1(k)}]^T \right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{H(k)-1} \left([S^{k\Gamma_m(k)}] [\dot{S}^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] [S^{\Gamma_{m+1}(k)\Gamma_{H(k)}(k)}] \left([S^{\Gamma_{m+1}(k)\Gamma_{H(k)}(k)}]^T [S^{k\Gamma_{m+1}(k)}]^T \right) \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

(4.63) est simplifiée avec la relation (4.41), qui lie les matrices de passage et leur transposée, et devient alors :

$$[\Omega^{k0}] = [\dot{S}^{k\Gamma_1(k)}] [S^{k\Gamma_1(k)}]^T + \sum_{m=1}^{H(k)-1} \left([S^{k\Gamma_m(k)}] [\dot{S}^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] [S^{k\Gamma_{m+1}(k)}]^T \right) \quad (4.64)$$

d'après la relation (4.54), reliant les matrices de vitesses angulaires, les matrices de passage et leurs dérivées, telle que :

$$[\dot{S}^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] = [\Omega^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] [S^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] = [\Omega^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] [S^{\Gamma_{m+1}(k)\Gamma_m(k)}]^T \quad (4.65)$$

et d'après (4.49) sur les transposées des matrices de passage, (4.64) s'écrit alors :

$$[\Omega^{k0}] = [\Omega^{k\Gamma_1(k)}] + \sum_{m=1}^{H(k)-1} [S^{k\Gamma_m(k)}] [\Omega^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}] [S^{k\Gamma_m(k)}]^T \quad (4.66)$$

où $\Gamma_{m+1}(k)$ est l'indice du corps adjacent à $B^{\Gamma_m(k)}$. Pour l'exemple de la *figure 4.6*, $[\Omega^{80}]$ est construite telle que :

$$[\Omega^{80}] = [\Omega^{86}] + \sum_{m=1}^{6-1} [S^{8\Gamma_m(8)}] [\Omega^{\Gamma_m(8)\Gamma_{m+1}(8)}] [S^{\Gamma_m(8)8}] \quad (4.67)$$

soit :

$$\begin{aligned} [\Omega^{80}] = [\Omega^{86}] &+ [S^{86}] [\Omega^{64}] [S^{68}] + \\ &+ [S^{84}] [\Omega^{43}] [S^{48}] + \\ &+ [S^{83}] [\Omega^{32}] [S^{38}] + \\ &+ [S^{82}] [\Omega^{21}] [S^{28}] + \\ &+ [S^{81}] [\Omega^{10}] [S^{18}] \end{aligned} \quad (4.68)$$

où $[\Omega^{64}]$, $[\Omega^{43}]$, $[\Omega^{32}]$, $[\Omega^{21}]$ et $[\Omega^{10}]$ sont construites grâce à (4.56). $[\Omega^{k0}]$ est aussi une matrice antisymétrique, puisqu'elle résulte d'une somme de matrices antisymétriques (*Annexe B*). Après avoir obtenu $[\Omega^{k0}]$ grâce à (4.66), $[\dot{S}^{k0}]$ se déduit par multiplication de matrices telle que :

$$[\dot{S}^{k0}] = [\Omega^{k0}] [S^{k0}] \quad (4.69)$$

La *figure 4.10* montre l'organigramme permettant de construire $[\dot{S}^{k0}]$.

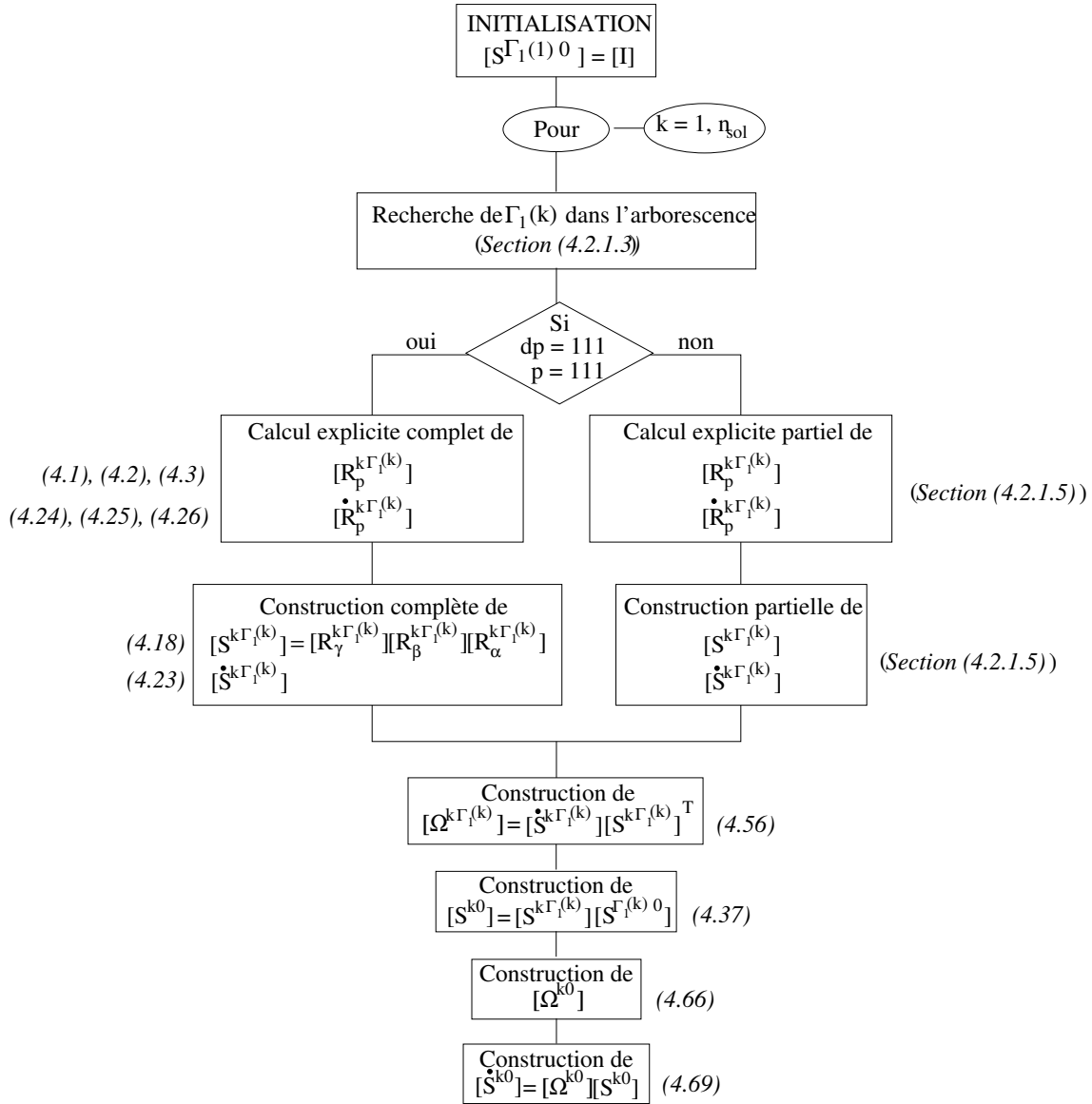


FIG. 4.10 – Méthode de construction des dérivées des matrices de passage par rapport à \mathfrak{R}^0

4.2.1.8 Vitesse angulaire et vitesse angulaire partielle

Reprenons les deux corps B^k et B^j de la *figure 4.3*. Le vecteur vitesse angulaire de B^k par rapport à B^j exprimé dans le repère \mathfrak{R}^j , s'écrit sous la forme :

$$\vec{\omega}^{kj} = \dot{\alpha}^k \vec{n}_1^j + \dot{\beta}^k \vec{n}_2^j + \dot{\gamma}^k \vec{n}_3^j \quad (4.70)$$

ou encore sous la forme vectorielle :

$$\{\omega^{kj}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}^k \\ \dot{\beta}^k \\ \dot{\gamma}^k \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

où $\{\omega^{kj}\}$, qui s'écrit aussi $\{\omega^{k\Gamma_1(k)}\}$, est une partie du vecteur des dérivées des coordonnées généralisées $\{\dot{x}\}$. Le vecteur $\vec{\omega}^{k0}$ est le vecteur vitesse angulaire de B^k exprimé dans \mathfrak{R}^0 . Donc, en appliquant la relation (4.50) à ce vecteur, $\vec{\omega}^{k0}$ regroupe alors l'ensemble des vecteurs vitesses angulaires de la chaîne des corps adjacents liant le corps B^k à B^0 , exprimés dans \mathfrak{R}^0 :

$$\{\omega^{k0}\}^T = \{\omega^{k\Gamma_1(k)}\}^T [S^{\Gamma_1(k)0}] + \sum_{i=2}^{H(k)-1} \{\omega^{\Gamma_{i-1}(k)\Gamma_i(k)}\}^T [S^{\Gamma_i(k)0}] + \{\omega^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}\}^T \quad (4.72)$$

où $\{\omega^{k\Gamma_1(k)}\}$ et $\{\omega^{\Gamma_{i-1}(k)\Gamma_i(k)}\}$ ($i = 1, \dots, H(k) - 1$) sont contenus dans le vecteur des dérivées des coordonnées généralisées relatives $\{\dot{x}\}$. L'ensemble des matrices de passage de (4.72), exprimées dans le repère \mathfrak{R}^0 et relatives au corps B^k , est regroupé dans une matrice $[\omega^k]$ de dimension $3n_{sol} \times 3$, appelée matrice partielle des vitesses angulaires de B^k , où les matrices de passage sont disposées sous la forme suivante :

$$[\omega^k] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{position de chaque} \\ \text{matrice de passage} : \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} [I] \\ [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}] \\ \vdots \\ [S^{\Gamma_1(k)0}] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{array} \right] \begin{array}{c} \leftarrow \Gamma_{H(k)-1}(k) \\ \leftarrow \Gamma_{H(k)-2}(k) \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \end{array} \quad (4.73)$$

avec, lorsque k vaut 1 :

$$[\omega^1] = \begin{bmatrix} [I] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

La construction de l'ensemble de ces matrices partielles tient compte de l'arborescence topologique de la structure. De plus, les coefficients vérifiant le système d'équations régissant le mouvement des corps solides sont exprimées à partir de ces matrices (*paragraphe 4.2.3.2*).

Le *tableau 4.7* montre la structure de ces matrices pour l'exemple de la *figure 4.6*. Il est donc posé dans \mathfrak{R}^0 :

$$\{\omega^{k0}\}^T = \{\dot{x}\}^T [\omega^k] \quad (4.75)$$

<i>vit. angulaire partielle : →</i> <i>position de chaque</i> <i>matrice de passage : ↓</i>	$[\omega^1]$	$[\omega^2]$	$[\omega^3]$	$[\omega^4]$	$[\omega^5]$	$[\omega^6]$	$[\omega^7]$	$[\omega^8]$	$[\omega^9]$
1	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$	$[I]$
2	$[0]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$	$[S^{10}]$
3	\vdots	$[0]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$	$[S^{20}]$
4	\vdots	\vdots	$[0]$	$[S^{30}]$	$[0]$	$[S^{30}]$	$[0]$	$[S^{30}]$	$[S^{30}]$
5	\vdots	\vdots	\vdots	$[0]$	$[S^{30}]$	$[0]$	\vdots	$[0]$	$[0]$
6	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$[0]$	$[S^{40}]$	$[0]$	$[S^{40}]$	$[S^{40}]$
7	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$[0]$	$[S^{30}]$	$[0]$	$[0]$
8	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$[0]$	$[S^{60}]$	$[S^{60}]$
9	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[S^{80}]$

TAB. 4.7 – Structure des matrices de vitesses angulaires partielles pour chaque corps de l'exemple de la *figure 4.6*

Pour l'exemple de la *figure 4.6*, d'après la forme de $[\omega^8]$ du *tableau 4.7* et de (4.72), la vitesse angulaire de B^8 par rapport à B^0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \{\omega^{80}\}^T &= \{\omega^{86}\}^T [S^{60}] + \{\omega^{64}\}^T [S^{40}] + \{\omega^{43}\}^T [S^{30}] + \{\omega^{32}\}^T [S^{20}] + \{\omega^{21}\}^T [S^{10}] + \{\omega^{10}\}^T \\ &= \{\dot{x}\}^T [\omega^8] \end{aligned} \quad (4.76)$$

où le membre de droite représente la somme des vitesses angulaires relatives des corps adjacents à B^8 liant B^8 à B^0 , exprimés dans \mathfrak{R}^0 .

4.2.1.9 Accélération angulaire et accélération angulaire partielle

Après avoir calculé les vitesses angulaires de chaque corps du système, nous avons besoin des accélérations angulaires de ces mêmes corps pour construire le système d'équations différentielles régissant le comportement dynamique du système dans \mathfrak{R}^0 . La construction du vecteur d'accélération angulaire et de la matrice d'accélération angulaire partielle s'effectue de la même manière que ceux de la vitesse angulaire vue au paragraphe précédent.

L'accélération angulaire de B^k exprimé dans \mathfrak{R}^0 , notée $\{\dot{\omega}^{k0}\}$, est donc obtenue en dérivant (4.75) par rapport au temps. Nous obtenons donc :

$$\{\dot{\omega}^{k0}\}^T = \frac{d}{dt} \{\omega^{k0}\}^T = \{\ddot{x}\}^T [\omega^k] + \{\dot{x}\}^T [\dot{\omega}^k] \quad (4.77)$$

La matrice d'accélération angulaire partielle de B^k , $[\dot{\omega}^k]$, est alors posée sous la forme :

$$[\dot{\omega}^k] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{position de chaque} \\ \text{matrice de passage : } \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} [0] \\ [\dot{S}^{\Gamma_{H^{(k)}-1}(k)0}] \\ \vdots \\ [\dot{S}^{\Gamma_1(k)0}] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{array} \right] \begin{array}{c} \leftarrow \Gamma_{H^{(k)}-1}(k) \\ \leftarrow \Gamma_{H^{(k)}-2}(k) \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \end{array} \quad (4.78)$$

avec, lorsque k vaut 1 :

$$[\dot{\omega}^1] = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

<i>acc. angulaire partielle : → position de chaque matrice de passage : ↓</i>	$[\dot{\omega}^1]$	$[\dot{\omega}^2]$	$[\dot{\omega}^3]$	$[\dot{\omega}^4]$	$[\dot{\omega}^5]$	$[\dot{\omega}^6]$	$[\dot{\omega}^7]$	$[\dot{\omega}^8]$	$[\dot{\omega}^9]$
1	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
2	⋮	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$	$[\dot{S}^{10}]$
3	⋮	[0]	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$	$[\dot{S}^{20}]$
4	⋮	⋮	[0]	$[\dot{S}^{30}]$	[0]	$[\dot{S}^{30}]$	[0]	$[\dot{S}^{30}]$	$[\dot{S}^{30}]$
5	⋮	⋮	⋮	[0]	$[\dot{S}^{30}]$	[0]	⋮	[0]	[0]
6	⋮	⋮	⋮	⋮	[0]	$[\dot{S}^{40}]$	[0]	$[\dot{S}^{40}]$	$[\dot{S}^{40}]$
7	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	[0]	$[\dot{S}^{30}]$	[0]	[0]
8	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	[0]	$[\dot{S}^{60}]$	$[\dot{S}^{60}]$
9	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	$[\dot{S}^{80}]$

TAB. 4.8 – Structure des matrices d'accélération angulaires partielles pour chaque corps de l'exemple de la figure 4.6

Pour l'exemple de la figure 4.6, $[\dot{\omega}^8]$ s'écrit sous la forme :

$$[\dot{\omega}^8] = \begin{bmatrix} [0] \\ [\dot{S}^{10}] \\ [\dot{S}^{20}] \\ [\dot{S}^{30}] \\ [0] \\ [\dot{S}^{40}] \\ [0] \\ [\dot{S}^{60}] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Pour cet exemple, chaque $[\dot{\omega}^k]$ a la structure du *tableau 4.8*.

4.2.1.10 Vitesses et accélérations des centres de masse

Cette étape consiste à construire les vecteurs vitesses et accélérations des centres de masse, car ils sont nécessaires dans la construction du système d'équations régissant le mouvement des corps solides. Pour cela, on reprend la méthode précédemment développée en exprimant les équations de mouvement de son centre de gravité G^k au point de rotation du solide O^k (O^k et G^k ne sont pas confondus). Si les paragraphes précédents ne décrivaient que la partie cinématique du problème, on aborde ici au contraire la partie dynamique de la formulation.

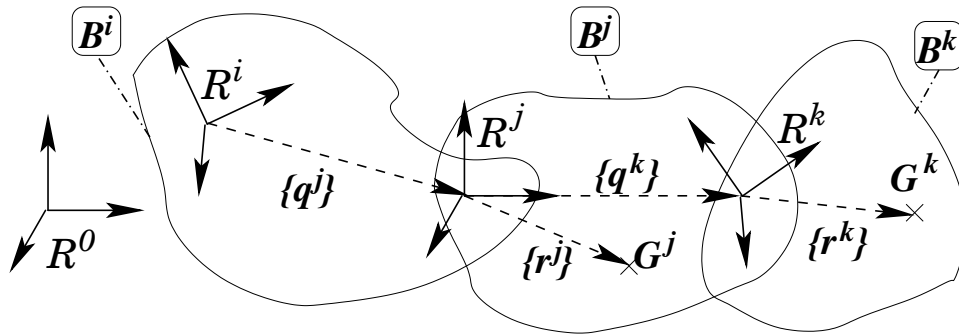


FIG. 4.11 – Position du centre d'inertie de B^k et du centre du repère \mathfrak{R}^k lié à \mathfrak{R}^j

Cependant, il est nécessaire de disposer au préalable de paramètres supplémentaires qui vont permettre de construire les vecteurs vitesses et accélérations des centres de masse. Pour chaque corps B^k , ces paramètres sont :

- sa masse m^k ,
- les coordonnées de son centre d'inertie G^k , exprimées dans \mathfrak{R}^k (*figure 4.11*) telles que :

$$\{r^k\}^T = \begin{pmatrix} r_1^k & r_2^k & r_3^k \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

- les coordonnées de son centre du repère \mathfrak{R}^k exprimées dans les bases de \mathfrak{R}^j (j étant l'indice du corps adjacent à B^k (*figure 4.11*)) telles que :

$$\{q^k\}^T = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k & q_3^k \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Ces paramètres de corps rigides sont invariables au cours du temps, puisque les corps sont supposés indéformables³) alors :

$$\begin{cases} \dot{m}^k = 0 \\ \{\dot{r}^k\} = \{0\} \\ \{\dot{q}^k\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.83)$$

Dans ce qui suit, il sera nécessaire d'utiliser le produit vectoriel, pour pouvoir, par exemple, calculer un vecteur vitesse à partir d'un vecteur vitesse angulaire. Afin de pouvoir traiter cette opération de façon simple, nous allons utiliser des matrices antisymétriques d'un vecteur qui permettent d'effectuer ce calcul. Les matrices antisymétriques des vecteurs de (4.81) et (4.82) sont donc construites grâce à (4.39) avec, pour chaque corps B^k :

$$[\Lambda_{r^k}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_3^k & r_2^k \\ r_3^k & 0 & -r_1^k \\ -r_2^k & r_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

et :

$$[\Lambda_{q^k}] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3^k & q_2^k \\ q_3^k & 0 & -q_1^k \\ -q_2^k & q_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Ayant déterminé les vecteurs \vec{q}^k et \vec{r}^k de tous les corps B^k du système multicorps, les vitesses et les accélérations des centres de masse sont ensuite définies. Les coordonnées du point G^k , centre d'inertie de B^k par rapport à O^0 (noté aussi $O^{\Gamma_{H(k)}(k)}$), est une somme des coordonnées (*figure 4.11*) telles que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O^0 G^k} &= \overrightarrow{O^0 O^k} + \overrightarrow{O^k G^k} \\ &= \overrightarrow{O^{\Gamma_{H(k)}(k)} O^{\Gamma_{H(k)-1}(k)}} + \overrightarrow{O^{\Gamma_{H(k)-1}(k)} O^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} + \dots + \\ &\quad + \overrightarrow{O^{\Gamma_2(k)} O^{\Gamma_1(k)}} + \overrightarrow{O^{\Gamma_1(k)} O^k} + \overrightarrow{O^k G^k} \end{aligned} \quad (4.86)$$

où les coordonnées relatives de $\overrightarrow{O^{\Gamma_i(k)} O^{\Gamma_{i-1}(k)}}$ dans $\mathfrak{R}^{\Gamma_i(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, H(k)$) et de $\overrightarrow{O^k G^k}$ dans \mathfrak{R}^k sont données respectivement par (4.82) pour $\Gamma_{i-1}(k)$ et (4.81). En reprenant la relation de récursivité (4.50) pour le vecteur $\{OG^k\}$, (4.86) s'écrit alors :

$$\{OG^k\}^T = \left(\{r^k\}^T [S^{k0}] + \sum_{i=2}^{H(k)} \{q^{\Gamma_{i-2}(k)}\}^T [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}] + \{q^{\Gamma_{H(k)-1}(k)}\}^T \right) \quad (4.87)$$

En dérivant cette expression une première fois par rapport au temps, nous obtenons la vitesse du centre de masse, que l'on note $\{v^{k0}\}$. Comme les vecteurs $\{q^{\Gamma_i(k)}\}$ ($i = 0, 1, \dots, H(k) - 1$) et $\{r^k\}$ vérifient la relation (4.83), cette vitesse a pour valeur :

³Dans le cas où $\{q^k\}$ varie au cours du temps, on revient au cas où on tient compte de la translation (*paragraphe 4.2.1.4*) des déplacements des corps les uns par rapport aux autres matérialisés par ξ_x^k, ξ_y^k et ξ_z^k . Alors $\{q^k\}$ devient $\{q^k\}^T = \begin{pmatrix} \xi_x^k & \xi_y^k & \xi_z^k \end{pmatrix}$

$$\{v^{k0}\}^T = \frac{d}{dt} \{OG^k\}^T = \left(\sum_{i=2}^{H(k)} \{q^{\Gamma_{i-2}(k)}\}^T [\dot{S}^{\Gamma_{i-1}(k)0}] + \{r^k\}^T [\dot{S}^{k0}] \right) \quad (4.88)$$

Or la relation (4.55) liant les matrices de vitesses angulaires, les matrices de passage ainsi que leurs dérivées donnent :

$$\{v^{k0}\}^T = \left(\sum_{i=2}^{H(k)} \{q^{\Gamma_{i-2}(k)}\}^T [\Omega^{\Gamma_{i-1}(k)0}] [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}] + \{r^k\}^T [\Omega^{k0}] [S^{k0}] \right) \quad (4.89)$$

Il a été prouvé précédemment que les matrices de vitesses angulaires $[\Omega^{\Gamma_{i-1}(k)0}]$ ont la forme de matrices antisymétriques. $[\Omega^{i0}]$ ($i = \Gamma_1(k), \dots, \Gamma_{H(k)}(k)$) est alors associé à un vecteur noté $\{y^i\}$. D'après la propriété (C.5) de l'Annexe C, on obtient :

$$\begin{cases} \{q^{\Gamma_{i-2}(k)}\}^T [\Omega^{\Gamma_{i-1}(k)0}] = - \left(- \{y^{\Gamma_{i-1}(k)}\}^T [\Lambda_{q^{\Gamma_{i-2}(k)}}] \right) & (i = 2, \dots, H(k)) \\ \{r^k\}^T [\Omega^{k0}] = - \left(- \{y^k\}^T [\Lambda_{r^k}] \right) \end{cases} \quad (4.90)$$

Cette transformation est, en fait, une réécriture utile pour la suite dans la construction des coefficients vérifiant le système d'équations régissant le mouvement du multicorps rigide. Ainsi, d'après (4.90), (4.89) devient :

$$\{v^{k0}\}^T = \left(\sum_{i=2}^{H(k)} \{y^{\Gamma_{i-1}(k)}\}^T [\Lambda_{q^{\Gamma_{i-2}(k)}}] [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}] + \{y^k\}^T [\Lambda_{r^k}] [S^{k0}] \right) \quad (4.91)$$

Dans (4.91), la même forme que (4.72) est retrouvée pour le vecteur de vitesses angulaires de B^k par rapport à B^0 . Une matrice $[V^k]$ appelée matrice partielle des vitesses, pour les mêmes raisons que dans le *paragraphe 4.2.1.8*, et le vecteur des vitesses généralisées $\{y\}$ rassemblant les vecteurs $\{y^i\}$ sont introduits ici. La matrice partielle des vitesses du corps B^k a la forme suivante :

$$[V^k] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}} \\ \vdots \\ \Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}} \\ \Lambda_{r^{\Gamma_0(k)}} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0} \\ S^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0} \\ \vdots \\ S^{\Gamma_2(k)0} \\ S^{\Gamma_1(k)0} \\ S^{\Gamma_0(k)0} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{array} \right] \\ \leftarrow \Gamma_{H(k)-1}(k) \\ \leftarrow \Gamma_{H(k)-2}(k) \\ \vdots \\ \leftarrow \Gamma_2(k) \\ \leftarrow \Gamma_1(k) \\ \leftarrow \Gamma_0(k) \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \end{array} \quad (4.92)$$

avec, lorsque pour k vaut 1 :

$$[V^1] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{r1}] [S^{10}] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Vitesse → partielle Position des matrices ↓	[V ¹]	[V ²]	[V ³]	[V ⁴]	[V ⁵]	[V ⁶]	[V ⁷]	[V ⁸]	[V ⁹]
1	$\Lambda_{r1} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$	$\Lambda_{q2} S^{10}$
2	0	$\Lambda_{r2} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$	$\Lambda_{q3} S^{20}$
3	⋮	0	$\Lambda_{r3} S^{30}$	$\Lambda_{q4} S^{30}$	$\Lambda_{q5} S^{30}$	$\Lambda_{q4} S^{30}$	$\Lambda_{q7} S^{30}$	$\Lambda_{q4} S^{30}$	$\Lambda_{q4} S^{30}$
4	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r4} S^{40}$	0	$\Lambda_{q6} S^{40}$	0	$\Lambda_{q6} S^{40}$	$\Lambda_{q6} S^{40}$
5	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r5} S^{50}$	0	⋮	0	0
6	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r6} S^{60}$	0	$\Lambda_{q8} S^{60}$	$\Lambda_{q8} S^{60}$
7	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r7} S^{70}$	0	0
8	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r8} S^{80}$	$\Lambda_{q9} S^{80}$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Lambda_{r8} S^{90}$

TAB. 4.9 – Structure des matrices de vitesses partielles pour chaque corps de l'exemple de la *figure 4.6*. Pour des raisons d'emcombement, les matrices n'y sont pas représentées entre crochets

Dans l'exemple de la *figure 4.6*, chaque $[V^k]$ ($k = 1, \dots, n_{sol}$) a la structure du *tableau 4.9*. Si on construit le vecteur des vitesses généralisées de la façon suivante :

$$\{y\} = \left\{ \begin{array}{c} \{y^1\}_3 \\ \vdots \\ \{y^k\}_3 \\ \vdots \\ \{y^{n_{sol}}\}_3 \end{array} \right\}_{3 n_{sol}} \quad (4.94)$$

alors les matrices de (4.92) peuvent être employées pour transformer (4.91) de façon compacte :

$$\{v^{k0}\}^T = \{y\}^T [V^k] \quad (4.95)$$

ou :

$$\{v^{k0}\}^T = \{\dot{x}\}^T [W] [V^k] \quad (4.96)$$

$[W]$ étant une matrice qui transforme $\{\dot{x}\}$ en $\{y\}$ telle que :

$$\{y\}^T = \{\dot{x}\}^T [W] \quad (4.97)$$

Pour construire la matrice $[W]$, $3n_{sol}$ nouveaux $\{y^i\}$ ($i = 1, \dots, 3n_{sol}$) sont utilisés à chacun desquels il a été attribué, au départ, un vecteur vitesse angulaire $\{\dot{x}\}$ comportant un 1 sur une ligne tel que la $i^{ème}$ colonne de $[W]$, soit le vecteur $\{y^i\}$ avec :

$$\{\dot{x}\}^T = \begin{matrix} & 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n_{sol} \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \{\dot{x}\}^T = & (0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0) \end{matrix} \quad (4.98)$$

et :

$$[W] = \left[\left[\begin{matrix} y_1^1 \\ \vdots \\ y_j^1 \\ \vdots \\ y_{3n_{sol}}^1 \end{matrix} \right] \cdots \left[\begin{matrix} y_1^i \\ \vdots \\ y_j^i \\ \vdots \\ y_{3n_{sol}}^i \end{matrix} \right] \cdots \left[\begin{matrix} y_1^{3n_{sol}} \\ \vdots \\ y_j^{3n_{sol}} \\ \vdots \\ y_{3n_{sol}}^{3n_{sol}} \end{matrix} \right] \right] \quad (4.99)$$

Dans l'exemple de la *figure 4.6*, $\{v^{80}\}$ vaut :

$$\{v^{80}\}^T = \{\dot{x}\}^T [W] [V^8] \quad (4.100)$$

Pour connaître maintenant l'accélération de chaque centre de masse de la structure, (4.95) est dérivée une seconde fois par rapport au temps :

$$\{a^{k0}\}^T = \{\dot{v}^{k0}\}^T = (\{\dot{y}\}^T [V^k] + \{y\}^T [\dot{V}^k]) \quad (4.101)$$

où (4.93), (4.92), (4.104) et (4.103) correspondent respectivement à $[V^1]$ $[V^k]$, $[\dot{V}^1]$ et $[\dot{V}^k]$. A titre d'illustration, dans l'exemple de la *figure 4.6*, $\{a^{80}\}$ est donnée par :

$$\{a^{80}\}^T = (\{\dot{y}\}^T [V^8] + \{y\}^T [\dot{V}^8]) \quad (4.102)$$

Pratiquement, pour l'accélération partielle $[\dot{V}^k]$, $[V^k]$ est différenciée de la façon suivante :

$$[\dot{V}^k] = \begin{matrix} \text{position de chaque} \\ \text{matrice de passage : } \downarrow \end{matrix} \left[\begin{matrix} \left[\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0} \right] & \leftarrow & \Gamma_{H(k)-1}(k) \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0} \right] & \leftarrow & \Gamma_{H(k)-2}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_2(k)0} \right] & \leftarrow & \Gamma_2(k) \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_1(k)0} \right] & \leftarrow & \Gamma_1(k) \\ \left[\Lambda_{r^{\Gamma_0(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_0(k)0} \right] & \leftarrow & \Gamma_0(k) \\ \vdots & & \vdots \\ [0] & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ [0] & \leftarrow & n_{sol} \end{matrix} \quad (4.103)$$

avec, lorsque k vaut 1 :

$$[\dot{V}^1] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{r1}] [\dot{S}^{10}] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Pour l'exemple de la *figure 4.6*, chaque $[\dot{V}^k]$ ($k = 1, \dots, n_{sol}$) a la structure du *tableau 4.10*.

Acc. → partielle Position des matrices ↓	$[\dot{V}^1]$	$[\dot{V}^2]$	$[\dot{V}^3]$	$[\dot{V}^4]$	$[\dot{V}^5]$	$[\dot{V}^6]$	$[\dot{V}^7]$	$[\dot{V}^8]$	$[\dot{V}^9]$
1	$\Lambda_{r1}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$	$\Lambda_{q2}\dot{S}^{10}$
2	0	$\Lambda_{r2}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$	$\Lambda_{q3}\dot{S}^{20}$
3	⋮	0	$\Lambda_{r3}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q4}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q5}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q4}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q7}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q4}\dot{S}^{30}$	$\Lambda_{q4}\dot{S}^{30}$
4	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r4}\dot{S}^{40}$	0	$\Lambda_{q6}\dot{S}^{40}$	0	$\Lambda_{q6}\dot{S}^{40}$	$\Lambda_{q6}\dot{S}^{40}$
5	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r5}\dot{S}^{50}$	0	⋮	0	0
6	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r6}\dot{S}^{60}$	0	$\Lambda_{q8}\dot{S}^{60}$	$\sigma_{q8}\dot{S}^{60}$
7	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r7}\dot{S}^{70}$	0	0
8	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	$\Lambda_{r8}\dot{S}^{80}$	$\Lambda_{q9}\dot{S}^{80}$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Lambda_{r8}\dot{S}^{90}$

TAB. 4.10 – Structure des matrices d'accélération partielles pour chaque corps de l'exemple de la *figure 4.6*. Pour des raisons d'encombrement, les matrices n'y sont pas représentées entre crochets

4.2.2 Prise en compte des efforts

4.2.2.1 Forces et Moments résultants

Si le corps B^k étudié est soumis à des forces \vec{F}^{k_i} et des moments appliquées au point Q^{k_i} , la force résultante est représentée par \vec{F}^k (*figure 4.12*). Le moment résultant $\vec{M}_{O^k}^k$ est donné par :

$$\vec{M}_{O^k}^k = \sum_i \left(\vec{M}_{Q^{k_i}}^{k_i} + \overrightarrow{O^k Q^{k_i}} \wedge \vec{F}^{k_i} \right) \quad (4.105)$$

où $\overrightarrow{O^k Q^{k_i}}$ est le vecteur position du point d'application Q^{k_i} de \vec{F}^{k_i} par rapport à O^k . En conséquence, le torseur des efforts extérieurs est défini par :

$$(\tau^k)_{O^k} = \begin{cases} \vec{F}^k = \sum_i F_i^{k_i} \\ \vec{M}_{O^k}^k = \sum_i (\vec{M}_{Q^{k_i}}^{k_i} + \overrightarrow{O^k Q^{k_i}} \wedge \vec{F}^{k_i}) \end{cases} \quad (4.106)$$

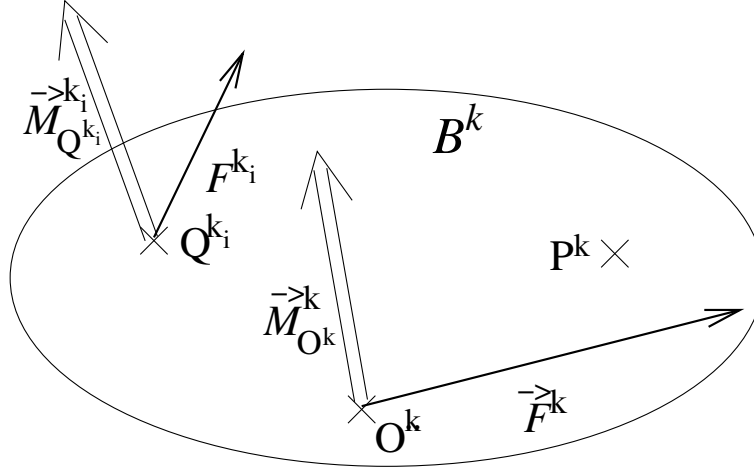


FIG. 4.12 – Force et moment résultants agissant sur un corps rigide

4.2.2.2 Force généralisée

Pour le corps B^k de la *figure 4.12*, la force généralisée agissant sur B^k exprimée dans \mathfrak{R}^0 est calculée à partir des composantes du torseur (τ^k) , soit :

$$f_l^k = \vec{F}^k \cdot \frac{\partial \vec{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} + \vec{M}_{O^k}^k \cdot \frac{\partial \vec{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \quad (4.107)$$

où :

- \dot{x}_l ($l = 1, 2, \dots, n_{ddl}$) sont les dérivées temporelles des coordonnées généralisées,
- \vec{v}^{k0} et $\vec{\omega}^{k0}$ représentent la vitesse du centre de masse et la vitesse angulaire de B^k par rapport au référentiel \mathfrak{R}^0 , construites en utilisant respectivement (4.96) et (4.75) .

La relation (4.107) peut exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\{f^k\} = [V_w^k] \{F^k\} + [\omega^k] \{M_{O^k}^k\} \quad (4.108)$$

où :

$$[V_w^k] = [W] [V^k] \quad (4.109)$$

La sommation sur l'ensemble de tous les corps B^k du système donne alors le vecteur force généralisée $\{f\}$ de l'ensemble du système :

$$\{f\} = \sum_k \{f^k\} = \sum_k [V_w^k] \{F^k\} + \sum_k [\omega^k] \{M_{O^k}^k\} \quad (4.110)$$

Rappelons que $\{F^k\}$ et $\{M_{O^k}^k\}$ sont susceptibles de varier en fonction du temps, comme par exemple, les forces aérodynamiques s'exerçant sur les pales.

4.2.2.3 Force gravitationnelle

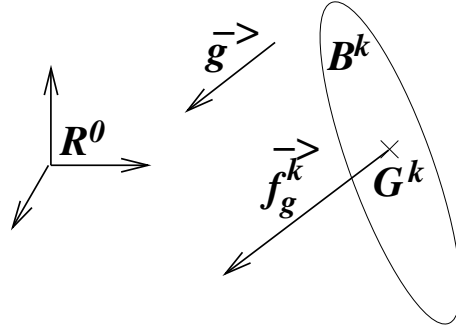


FIG. 4.13 – Force de gravitation sur un système multicorps

La force due à la gravitation sur B^k , notée \vec{f}_g^k , est donnée par :

$$\vec{f}_g^k = m^k g \vec{u} = m^k \vec{g} \quad (4.111)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et \vec{u} le vecteur unité dirigé parallèlement à \vec{g} (figure 4.13), exprimé dans \mathfrak{R}^0 . D'après (4.107), les forces de gravitation apportent une contribution aux forces généralisées telles que :

$$f_l^k = \vec{f}_g^k \cdot \frac{\partial \vec{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \quad (4.112)$$

D'après (4.108), (4.112) devient donc :

$$\{f^k\} = [V_w^k] \{f_g^k\} \quad (4.113)$$

4.2.2.4 Force d'inertie généralisée

D'après la seconde loi de Newton, si un corps B^k de masse m^k est soumis au torseur (τ^k) , exprimé dans \mathfrak{R}^0 , alors le vecteur accélération \vec{a}^{k0} de B^k par rapport à \mathfrak{R}^0 est proportionnel à l'ensemble de ces forces, ce qui donne sous forme vectorielle :

$$m^k \{a^{k0}\} = \{F^k\} \quad (4.114)$$

Cette égalité (4.114) se traduit par :

$$\vec{F}^k = \frac{d}{dt} \vec{p}^{k0} = \frac{d}{dt} (m^k \vec{v}^{k0}) \quad (4.115)$$

où \vec{p}^{k0} est la quantité de mouvement résultante de B^k dans le référentiel \mathfrak{R}^0 . D'après le principe de d'Alembert :

$$\begin{cases} \{F^k\} + \{F^{*k}\} = \{0\} \\ \{M^k\} + \{M^{*k}\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.116)$$

où $\begin{Bmatrix} \{F^{*k}\} \\ \{M^{*k}\} \end{Bmatrix}$ représente le torseur des forces d'inertie, le torseur (4.114) devient alors :

$$\begin{cases} \{F^{*k}\} = -\{F^k\} = -m^k \{a^{k0}\} \\ \{M^{*k}\} = -\{M^k\} \end{cases} \quad (4.117)$$

De plus, pour un système multicorps, le torseur de (4.117) contribue à la force généralisée d'inertie de B^k par rapport au référentiel \mathfrak{R}^0 telle que :

$$f_l^{*k} = \overrightarrow{F}^{*k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} + \overrightarrow{M}^{*k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \quad (4.118)$$

où \overrightarrow{F}^{*k} est la force d'inertie et \overrightarrow{M}^{*k} est le moment d'inertie donné par [1] :

$$\overrightarrow{M}^{*k} = -\frac{d}{dt} \int_{m^k} \left(\overrightarrow{r}^{dm^k 0} \wedge \overrightarrow{v}^{dm^k 0} \right) dm^k \quad (4.119)$$

où $\overrightarrow{r}^{dm^k 0}$ est le vecteur position de l'élément de masse dm^k par rapport au centre de masse G^k et $\overrightarrow{v}^{dm^k 0}$ sa vitesse. Le développement de (4.119), d'après l'Annexe D, montre que \overrightarrow{M}^{*k} est fonction de la vitesse et de l'accélération angulaires du corps rigide dans le référentiel \mathfrak{R}^0 et du dyadique d'inertie $\overline{\overline{I}}^k$ vérifiant (D.10) :

$$\overline{\overline{I}}^k = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 I_{lm}^{k0} \overrightarrow{n}_l^0 \overrightarrow{n}_m^0 = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 I_{lm}^{kj} \overrightarrow{n}_l^k \overrightarrow{n}_m^k \quad (4.120)$$

où I_{lm}^{kj} est un terme de la matrice d'inertie. Le dyadique est l'équivalent de la matrice d'inertie d'un corps par rapport à \mathfrak{R}^0 (Annexe D). Le moment d'inertie de B^k (4.119) devient alors :

$$\overrightarrow{M}^{*k} = -\dot{\overrightarrow{\omega}}^{k0} \cdot \overline{\overline{I}}^k - \overrightarrow{\omega}^{k0} \wedge \left(\overline{\overline{I}}^k \cdot \overrightarrow{\omega}^{k0} \right) \quad (4.121)$$

D'après (4.110), (4.118) peut être mise sous forme matricielle puis sommée sur l'ensemble du système :

$$\{f^*\} = \sum_k \{f^{*k}\} = \sum_k [V_w^k] \{F^{*k}\} + \sum_k [\omega^k] \{M^{*k}\} \quad (4.122)$$

La matrice d'inertie de B^k , notée $[I^k]$, est exprimée dans le repère \mathfrak{R}^k par rapport au point G^k . Elle peut être calculée par formulation analytique (pour des cas simples comme des poutres, des sphères, des cônes, ...) ou par C.A.O. (pour des cas plus complexes). Ensuite, il est nécessaire de déterminer la matrice d'inertie $[I^{k0}]$ dans \mathfrak{R}^0 . Pour cela, les matrices de passage $[S^{k0}]$ sont utilisées pour construire $[I^{k0}]$, matrice d'inertie de B^k exprimée dans \mathfrak{R}^0 , telle que :

$$[I^{k0}] = [S^{k0}]^T [I^k] [S^{k0}] \quad (4.123)$$

4.2.3 Equations de mouvement

Cette section expose la méthode de construction des équations de mouvement d'un système multicorps non contraint. La méthode de Kane permet de construire les équations de la dynamique en se basant sur la description de l'arborescence topologique dont on a expliqué les bases précédemment. Le traitement algorithmique de ces équations peut alors s'effectuer à l'aide d'un programme informatique.

4.2.3.1 Equation de mouvement de Kane

Tout mouvement d'un système de n_{ddl} degrés de liberté est gouverné par [4] :

$$\{f\} + \{f^*\} = \{0\} \quad (4.124)$$

où $\{f\}$ et $\{f^*\}$ sont respectivement les forces généralisées définies par (4.110) et les forces d'inertie généralisées définies par (4.122). Cette équation (4.124) est appelée l'équation dynamique de Kane. Dans le cas où le système n'est pas contraint, aucun degré de liberté n'est supprimé et/ou il n'existe aucune relation de dépendance entre les degrés de liberté. Ainsi le nombre de degrés de liberté n_{ddl} correspond à la valeur donnée par (4.14).

4.2.3.2 Forme algorithmique de l'équation de mouvement

Dans cette étape, une méthode de construction automatique des équations de mouvement est mise en place pour le système multicorps non contraint, sans qu'il soit nécessaire de les expliciter. Cette approche est totalement numérique. L'objectif principal est d'utiliser les expressions cinématiques établies précédemment avec la méthode de Kane pour construire numériquement des équations différentielles du second ordre régissant le mouvement du système. Le système d'équations différentielles sera ensuite résolu par une méthode numérique d'intégration temporelle adaptée.

L'équation de mouvement pour un système en chaîne ouverte non contraint, dont les trajectoires sont décrites par les coordonnées généralisées relatives au mouvement de chaque corps, s'écrit :

$$a_{lp}\ddot{x}_p + b_{lp}\dot{x}_p + c_{lps}\dot{x}_p\dot{x}_s = f_l \quad (l, p, s = 1, \dots, n_{cg}) \quad (4.125)$$

dont les coefficients sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{lp} = I_{mn}^k \omega_{lm}^k \omega_{pn}^k + m^k V_{lm}^k V_{pn}^k \\ b_{lp} = I_{mn}^k \omega_{lm}^k \dot{\omega}_{pn}^k + m^k V_{lm}^k \dot{V}_{pn}^k \\ c_{lps} = e_{nmh} I_{mn}^k \omega_{pr}^k \omega_{sn}^k \omega_{lh}^k \\ f_l = F_m^k V_{lm}^k + M_m^k \omega_{lm}^k \end{cases} \quad (n, m, h, r = 1, 2, 3 \text{ et } k = 1, \dots, n_{sol}) \quad (4.126)$$

Pour cela, il faut reprendre la définition de chaque terme de (4.118) :

$$\begin{aligned} f_l^{*k} &= \vec{F}^{*k} \cdot \frac{\partial \vec{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} + \vec{M}^{*k} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \quad (l = 1, \dots, n_{cg}) \\ &= f_{1l}^{*k} + f_{2l}^{*k} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Le développement du 1^{er} terme, d'après (4.117), (4.96) et (4.101), donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}^{*k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} &= -m^k \overrightarrow{a}^{k0} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} = f_{1l}^{*k} \\
\left\{ f_1^{*k} \right\}^T &= -m^k \left[\left\{ \ddot{x} \right\}^T [V_w^k] + \left\{ \dot{x} \right\}^T [\dot{V}_w^k] \right] [V_w^k]^T \text{ car } \left\{ v^{k0} \right\}^T = \left\{ \dot{x} \right\}^T [V_w^k] \\
&= -m^k \left[\left\{ \ddot{x} \right\}^T [V_w^k] [V_w^k]^T + \left\{ \dot{x} \right\}^T [\dot{V}_w^k] [V_w^k]^T \right]
\end{aligned} \tag{4.128}$$

Celui du 2^{ème} terme, d'après (4.121), devient :

$$\begin{aligned}
f_{2l}^{*k} = \overrightarrow{M}^{*k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} &= - \left(\dot{\overrightarrow{\omega}}^{k0} \cdot \overrightarrow{I}^k + \overrightarrow{\omega}^{k0} \wedge \overrightarrow{I}^k \cdot \overrightarrow{\omega}^{k0} \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \\
&= - \left(\dot{\overrightarrow{\omega}}^{k0} \cdot \overrightarrow{I}^k \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} - \left(\overrightarrow{\omega}^{k0} \wedge \overrightarrow{I}^k \cdot \overrightarrow{\omega}^{k0} \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\omega}^{k0}}{\partial \dot{x}_l} \\
&= f_{3l}^{*k} + f_{4l}^{*k}
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Ces deux expressions sont mises sous forme matricielle, d'après (4.77), (4.75) et (4.120), avec pour le premier :

$$\begin{aligned}
\left\{ f_3^{*k} \right\}^T &= - \left\{ \left(\left\{ \ddot{x} \right\}^T [\omega^k] + \left\{ \dot{x} \right\}^T [\dot{\omega}^k] \right) [I^{ko}] \right\} [\omega^k]^T \\
&= - \left(\left\{ \ddot{x} \right\}^T [\omega^k] [I^{ko}] [\omega^k]^T + \left\{ \dot{x} \right\}^T [\dot{\omega}^k] [I^{ko}] [\omega^k]^T \right)
\end{aligned} \tag{4.130}$$

et pour le second :

$$\begin{aligned}
\left\{ f_4^{*k} \right\}^T &= - \left\{ \left(\left\{ \dot{x} \right\}^T [\omega^k] \right)^T \wedge \left([I^{ko}] \left(\left\{ \dot{x} \right\}^T [\omega^k] \right)^T \right) \right\}^T [\omega^k]^T \\
&= - \left\{ \dot{x} \right\}^T [\omega^k] [I^{ko}] [\Omega_x^{k0}] [\omega^k]^T
\end{aligned} \tag{4.131}$$

avec $[\Omega_x^{k0}]$ étant la matrice antisymétrique du vecteur de $\left\{ \dot{x} \right\}^T [\omega^k]$ d'après la relation (C.11) (*Annexe C*). Les différentes expressions de (4.127) à (4.130), (4.131) et celles sur les forces généralisées (4.110) sont combinées pour arriver à l'expression sous forme matricielle de l'équation de mouvement, qui est un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre, par rapport à \mathfrak{R}^0 :

$$[a] \{ \ddot{x} \} + [b] \{ \dot{x} \} + [c] \{ x \} = \{ f \} \tag{4.132}$$

$[a]$, $[b]$ et $[c]$ et $\{ f \}$ sont définis par :

$$[a] = \sum_{k=1}^{n_{sol}} m^k [V_w^k] [V_w^k]^T + \sum_{k=1}^{n_{sol}} [\omega^k] [I^{ko}] [\omega^k]^T \tag{4.133}$$

$$[b] = \sum_{k=1}^{n_{sol}} m^k [V_w^k] [\dot{V}_w^k]^T + \sum_{k=1}^{n_{sol}} [\omega^k] [I^{ko}] [\dot{\omega}^k]^T \tag{4.134}$$

$$[c] = \sum_{k=1}^{n_{sol}} [\omega^k] [\Omega_x^{k0}] [I^{ko}] [\omega^k]^T \tag{4.135}$$

$$\{ f \} = \sum_{k=1}^{n_{sol}} [V_w^k] \{ F^k \} + \sum_{k=1}^{n_{sol}} [\omega^k] \{ M^k \} \tag{4.136}$$

Pour information, I_{mn}^k est l'élément de la $m^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne de la matrice associée au dyadique d'inertie $\overline{\overline{I}}^k$ de B^k . De même, ω_{lm}^k , $\dot{\omega}_{pn}^k$, V_{lm}^k et \dot{V}_{pn}^k sont respectivement les éléments des matrices de vitesse angulaire, d'accélération angulaire, de vitesse et d'accélération partielles de B^k , données respectivement par (4.73), (4.78), (4.92), (4.103) et F_m^k et M_m^k des vecteurs force et moment résultants agissant sur B^k . e est le symbole de permutation⁴. La représentation numérique de (4.125) de l'équation de mouvement s'écrit :

$$a_{lp}\ddot{x}_p = f_l - b_{lp}\dot{x}_p - c_{lps}\dot{x}_p\dot{x}_s \quad (4.137)$$

Les relations de (4.126) sont les éléments des matrices construites à partir de l'arborescence topologique du système dont la méthode a été décrite dans les *sections* 4.2.1 et 4.2.2. (4.125) est retrouvée à partir de l'équation de Kane (4.124).

Les matrices $[b]$ et $[c]$ tiennent compte des forces de Coriolis et des termes non linéaires de vitesse (car ils sont fonction de $\{\dot{x}\}$). De plus, $\{\dot{x}\}$ et $\{\ddot{x}\}$ sont respectivement les vecteurs des vitesses et des accélérations généralisées. Par ailleurs, certains auteurs ([1] et [4]) ont démontré que la formulation de Kane (4.124) et la formulation énergétique de Lagrange ne sont que deux façons différentes d'exprimer l'équation de mouvement d'un système multicorps.

4.2.4 Prise en compte des contraintes cinématiques

La section précédente montre comment établir les équations de mouvement dynamique d'un système multicorps non contraint. Si dans un système multicorps en mouvement où des degrés de liberté sont supprimés ou suivent une trajectoire donnée, alors il est *contraint*. Si un système multicorps possédant n_{cg} coordonnées généralisées est soumis à n_{contr} équations de contraintes, alors son nombre de degrés de liberté total est de :

$$n_{ddl} = n_{cg} - n_{contr} \quad (4.138)$$

où n_{cg} vérifie (4.14). Cette section explique comment exprimer le comportement dynamique d'un système multicorps en présence de contraintes cinématiques ainsi que les techniques de construction de l'équation de mouvement dynamique régissant le mouvement du système.

4.2.4.1 Contraintes holonomiques et non holonomiques

Tout système multicorps soumis à des conditions aux limites voit son mouvement global restreint. Si une condition cinématique ou géométrique est imposée au système en mouvement, le système est alors contraint. Si le système est ou n'est pas soumis à des contraintes de mouvement, alors il est respectivement qualifié de *non holonomique* ou *holonomique* [4] (*paragraphe* 3.1.1.2). Plusieurs types de contraintes cinématiques sont distinguées [5] :

- si les coordonnées généralisées sont fixes, les contraintes sont dites *holonomiques*,
- lorsque les contraintes ne dépendent pas du temps, les contraintes sont dites *scléronomiques*,
- au contraire, si le système est holonomique et que le temps est pris en compte, alors le système est dit *rhéonomique*.

⁴Le symbole de permutation donne : $\overline{\overline{n}}_i \times \overline{\overline{n}}_j = e_{ijk} \overline{\overline{n}}_k$. De plus, chaque inter-échange dans l'ordre de i, j et k associé avec le symbole de permutation résultera dans un changement de signe. Par exemple : $e_{ijk} = -e_{ikj}$. Ce symbole suit la relation suivante : $e_{ijk} e_{ilm} = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker

Si les n_{contr} équations de contraintes sont indépendantes et s'écrivent :

$$\phi_j(x_1, x_2, \dots, x_{n_{cg}}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_{contr}) \quad (4.139)$$

alors les contraintes sont holonomiques. En différentiant (4.139) par rapport au temps, celles-ci deviennent :

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{n_{cg}}} \dot{x}_{n_{cg}} + \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = 0 \quad (4.140)$$

Comme les composantes $y_1, y_2, \dots, y_{n_{cg}}$ du vecteur des vitesses généralisées $\{y\}$ sont liées au vecteur des vitesses généralisées relatives $\{\dot{x}\}$ par (4.97), elles satisfont alors la condition :

$$\sum_{i=1}^{n_{cg}} B_{ji} y_i + \phi_{jt} = 0 \quad (4.141)$$

où ϕ_{jt} est la différentielle de ϕ_j par rapport au temps et B_{ji} l'élément de la matrice jacobienne des contraintes telle que :

$$B_{ji} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \quad (4.142)$$

Pour un système holonomique, (4.141) est intégrable et la solution est la fonction ϕ_i ayant la forme de (4.139). Cependant si (4.141) n'est pas intégrable, les contraintes sont alors non holonomiques. Si ϕ_{jt} est nulle, (4.141) s'écrit sous forme matricielle telle que :

$$[B] \{y\} = \{0\} \quad (4.143)$$

Or d'après (4.97) liant $\{y\}$ et $\{\dot{x}\}$, on a :

$$\{y\} = [W]^T \{\dot{x}\} \quad (4.144)$$

(4.143) devient donc :

$$[B] \{y\} = [B] [W]^T \{\dot{x}\} = [B_j] \{\dot{x}\} = \{0\} \quad (4.145)$$

où :

$$[B_j] = [B] [W]^T \quad (4.146)$$

Ensuite (4.143) est dérivée par rapport au temps :

$$[\dot{B}] \{y\} + [B] \{\dot{y}\} = [\dot{B}] [W]^T \{\dot{x}\} + [B] [W]^T \{\ddot{x}\} = \{0\} \quad (4.147)$$

où :

$$[\dot{B}_j] = [\dot{B}] [W]^T \quad (4.148)$$

(4.147) s'écrit aussi :

$$[B_j] \{\ddot{x}\} = -[\dot{B}_j] \{\dot{x}\} \quad (4.149)$$

Si le système est contraint, il est donc soumis à des forces supplémentaires, qui constituent d'autres inconnues. Afin de les mettre en évidence, la technique classique des multiplicateurs de Lagrange est employée. Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

$$f_l^c = \sum_{i=1}^{n_{contr}} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{n_{contr}} B_{li}^T \lambda_i \quad (4.150)$$

Ces forces de contraintes généralisées (4.150) sont donc rajoutées à l'équation de Kane (4.124) :

$$\{f\} + \{f^*\} = \{f^c\} \quad (4.151)$$

ou :

$$\{f\} + \{f^*\} = [B]^T \{\lambda\} \quad (4.152)$$

Les forces de contraintes sont incluses dans l'équation de mouvement sous forme matricielle (4.132) pour obtenir :

$$[a] \{\ddot{x}\} + [b] \{\dot{x}\} + [c] \{x\} = \{f\} - [B]^T \{\lambda\} \quad (4.153)$$

Par la suite, il est démontré comment « éliminer » le multiplicateur de Lagrange.

4.2.4.2 Construction de la matrice jacobienne

Afin de construire la matrice jacobienne $[B]$, des extrémités « libres » sont numérotées afin de créer une matrice d'arborescence. Pour l'exemple de la *figure 4.6*, la matrice d'arborescence de ces n_{qmc} extrémités libres, notée $[\Gamma_{libre}]$, est de la forme suivante :

$$\begin{array}{rcc}
 k_e \rightarrow & 1 & 2 & 3 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \left[\begin{array}{ccc}
 5 & 7 & 9 \\
 3 & 3 & 8 \\
 2 & 2 & 6 \\
 1 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] & & \\
 [\Gamma_{libre}] = & & & & (4.154)
 \end{array}$$

et le nombre de connexions des extrémités libres est répertorié dans le vecteur $\{H_{libre}\}$ tel que :

$$\{H_{libre}\}^T = (5 \ 5 \ 8) \quad (4.155)$$

La première ligne de $[\Gamma_{libre}]$ rassemble les indices des corps ayant une extrémité libre. Chaque colonne de $[\Gamma_{libre}]$ reprend uniquement la liste des indices des corps liant chaque corps à l'extrémité libre au corps B^0 de la base. Pour illustrer la méthode de construction, la valeur 2, par exemple, est prise pour l'indice k_e ($k_e = 1, \dots, n_{qmc}$). La $k_e^{i\grave{e}me}$ extrémité est le point d'indice $k' = k_e + n_{sol}$ (ou 11) et est liée au corps d'indice $\Gamma_{libre}(1, k_e)$ (ou 7). Le nombre

de connexions liant l'extrémité de $B^{\Gamma_{libre}(1,k_e)}$ à B^0 est de $H_{libre}(k_e)$ (ou 5), c'est-à-dire une connexion de plus que celle liant $B^{\Gamma_{libre}(1,k_e)}$ à B^0 :

$$H_{libre}(k_e) = H(\Gamma_{libre}(1, k_e)) + 1 \quad (4.156)$$

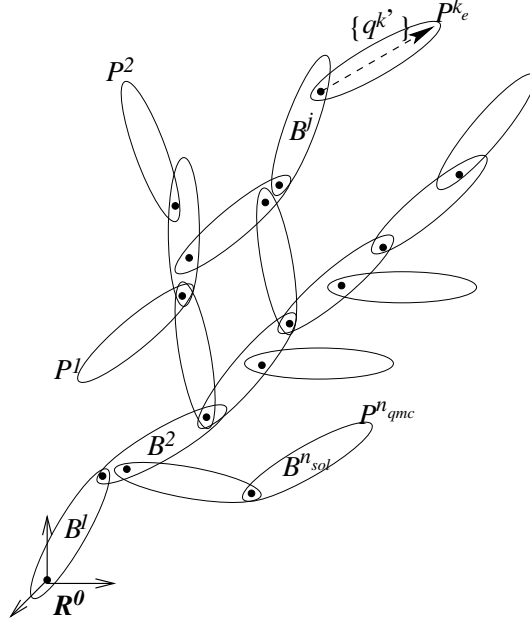


FIG. 4.14 – Système multibody contraint avec plusieurs points suivant un mouvement prescrit

Puis pour chaque extrémité d'indice k' , le vecteur $\vec{q}^{k'}$ est créé. Il indique la position du point d'extrémité dans le repère $\mathcal{R}^{\Gamma_{libre}(1,k_e)}$ (figure 4.14) tel que :

$$\{q^{k'}\}^T = \begin{pmatrix} q_1^{k'} & q_2^{k'} & q_3^{k'} \end{pmatrix} \quad (4.157)$$

et la matrice antisymétrique des vecteurs de (4.157) est construite :

$$[\Lambda_{q^k}] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3^{k'} & q_2^{k'} \\ q_3^{k'} & 0 & -q_1^{k'} \\ -q_2^{k'} & q_1^{k'} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

Pour élaborer la matrice jacobienne $[B]$, les points d'extrémités P^{k_e} , associés au corps $\Gamma_{libre}(1, k_e)$ ou k , et les corps B^j ($j = 1, \dots, n_{sol}$) dans le système multibody sont considérés (figure 4.14). Le nombre d'équations de contraintes vaut $3n_{qmc}$. Pour cela, à chaque pas de temps étudié, que le vecteur $\overline{O^0 P^{k_e}}$ est supposé constant, donc sa dérivée est nulle, ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{O^0 P^{k_e}} &= \overline{O^0 O^k} + \overline{O^k P^{k_e}} \\ &= \overline{O^{\Gamma_{H(k)}(k)} O^{\Gamma_{H(k)-1}(k)}} + \overline{O^{\Gamma_{H(k)-1}(k)} O^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} + \\ &+ \dots + \overline{O^{\Gamma_2(k)} O^{\Gamma_1(k)}} + \overline{O^{\Gamma_1(k)} O^k} + \overline{O^k P^{k_e}} \quad \text{avec } k = \Gamma_{libre}(1, k_e) \end{aligned} \quad (4.159)$$

où $\overrightarrow{O^k P^{k_e}}$ correspond à $\overrightarrow{q^{k_e+n_{sol}}}$. Par analogie entre (4.86) et (4.87) du vecteur $\overrightarrow{O^0 G^k}$ sous sa forme matricielle avec le vecteur $\overrightarrow{O^0 P^{k_e}}$ de (4.159), $\{O^0 P^{k_e}\}$ sous forme matricielle devient alors, exprimé dans \mathfrak{R}^0 :

$$\{O^0 P^{k_e}\}^T = \left(\left\{ q^{k_e+n_{sol}} \right\}^T [S^{\Gamma_{libre}(1,k_e)0}] + \sum_{i=2}^{H(k)} \left\{ q^{\Gamma_{i-2}(k)} \right\}^T [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}] + \left\{ q^{\Gamma_{H(k)-1}(k)} \right\}^T \right) \quad (4.160)$$

D'après la dérivée (4.91) de $\{O^0 G^k\}$, la dérivée de (4.160) donne :

$$\{y^{\Gamma_{libre}(1,k_e)}\}^T [\Lambda_{q^{k_e+n_{sol}}}] [S^{\Gamma_{libre}(1,k_e)0}] + \sum_{i=2}^{H(k)} \{y^{\Gamma_{i-1}(k)}\}^T [\Lambda_{q^{\Gamma_{i-2}(k)}}] [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}] = \{0\}^T \quad (4.161)$$

Le vecteur des vitesses généralisées $\{y\}$ rassemblant les vecteurs $\{y^j\}$ ($j = \Gamma_1(k), \dots, \Gamma_{H(k)-1}(k), \Gamma_{libre}(1, k_e)$) se retrouve dans (4.161). D'après la forme de la relation (4.143) liant la matrice jacobienne et $\{y\}$ avec (4.161), l'ensemble des $[\Lambda_{q^{\Gamma_{i-2}(k)}}] [S^{\Gamma_{i-1}(k)0}]$ ($i = 2, \dots, H(k), \Gamma_{libre}(1, k_e)$) et $[\Lambda_{q^{k_e+n_{sol}}}] [S^{\Gamma_{libre}(1,k_e)0}]$ sont regroupés dans une matrice partielle $[B^{k_e}]$, pour chaque indice k_e ($k_e = 1, \dots, n_{qmc}$) tel que :

$$[B^{k_e}]^T = \begin{bmatrix} [\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}}] [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}] \\ [\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}}] [S^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0}] \\ \vdots \\ [\Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}}] [S^{\Gamma_2(k)0}] \\ [\Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}}] [S^{\Gamma_1(k)0}] \\ [\Lambda_{q^{k_e+n_{sol}}}] [S^{\Gamma_{libre}(1,k_e)0}] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \Gamma_{libre}(H_{libre}(k_e) - 1, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(H_{libre}(k_e) - 2, k_e) \\ \vdots \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(3, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(2, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(1, k_e) \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \quad (4.162)$$

position de chaque matrice de passage
↓

avec $k = \Gamma_{libre}(1, k_e)$

Ces k_e matrices sont rassemblées dans la matrice jacobienne telle que :

$$[B] = \begin{bmatrix} [B^1] \\ \vdots \\ [B^{k_e}] \\ \vdots \\ [B^{n_{qmc}}] \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

De même pour sa matrice dérivée $[\dot{B}]$, les $[\dot{S}^{i0}]$ sont adoptées à la place des $[S^{i0}]$ avec :

$$\begin{aligned}
& \text{position de chaque} \\
& \text{matrice de passage} \\
& \downarrow \\
\left[\dot{B}^{k_e} \right]^T = & \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0} \right] \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0} \right] \\ \vdots \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_2(k)0} \right] \\ \left[\Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_1(k)0} \right] \\ \left[\Lambda_{q^{k_e+n_{sol}}} \right] \left[\dot{S}^{\Gamma_{libre}(1,k_e)0} \right] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \Gamma_{libre}(H_{libre}(k_e) - 1, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(H_{libre}(k_e) - 2, k_e) \\ \vdots \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(3, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(2, k_e) \\ \leftarrow \Gamma_{libre}(1, k_e) \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \quad (4.164) \\
& \text{avec } k = \Gamma_{libre}(1, k_e)
\end{aligned}$$

tel que :

$$\left[\dot{B} \right] = \begin{bmatrix} \left[\dot{B}^1 \right] \\ \vdots \\ \left[\dot{B}^{k_e} \right] \\ \vdots \\ \left[\dot{B}^{n_{qmc}} \right] \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

$[B]^T$	extrêmité : \rightarrow position des matrices : \downarrow	1	2	3
1		$[\Lambda_{q^2}] [S^{10}]$	$[\Lambda_{q^2}] [S^{10}]$	$[\Lambda_{q^2}] [S^{10}]$
2		$[\Lambda_{q^3}] [S^{20}]$	$[\Lambda_{q^3}] [S^{20}]$	$[\Lambda_{q^3}] [S^{20}]$
3		$[\Lambda_{q^5}] [S^{30}]$	$[\Lambda_{q^7}] [S^{30}]$	$[\Lambda_{q^4}] [S^{30}]$
4		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^6}] [S^{40}]$
5		$[\Lambda_{q^{10}}] [S^{50}]$	\vdots	[0]
6		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^8}] [S^{60}]$
7		\vdots	$[\Lambda_{q^{11}}] [S^{70}]$	[0]
8		\vdots	[0]	$[\Lambda_{q^9}] [S^{80}]$
9		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^{12}}] [S^{90}]$

TAB. 4.11 – Structure de la transposée de la matrice jacobienne non réduite pour l'exemple de la figure 4.6

Pour l'exemple de la figure 4.6, les structures des matrices $[B]_{3n_{qmc} \times 3n_{sol}}$ et $[\dot{B}]_{3n_{qmc} \times 3n_{sol}}$

sont données respectivement dans les *tableaux 4.11* et *4.12* où il est encore tenu compte de l'arborescence topologique du système.

$[\dot{B}]^T$	extrémité : \rightarrow position : \downarrow	1	2	3
1		$[\Lambda_{q^2}]$ $[\dot{S}^{10}]$	$[\Lambda_{q^2}]$ $[\dot{S}^{10}]$	$[\Lambda_{q^2}]$ $[\dot{S}^{10}]$
2		$[\Lambda_{q^3}]$ $[\dot{S}^{20}]$	$[\Lambda_{q^3}]$ $[\dot{S}^{20}]$	$[\Lambda_{q^3}]$ $[\dot{S}^{20}]$
3		$[\Lambda_{q^5}]$ $[\dot{S}^{30}]$	Λ_{q^7} $[\dot{S}^{30}]$	$[\Lambda_{q^4}]$ $[\dot{S}^{30}]$
4		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^6}]$ $[\dot{S}^{40}]$
5		$[\Lambda_{q^{10}}]$ $[\dot{S}^{50}]$	\vdots	[0]
6		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^8}]$ $[\dot{S}^{60}]$
7		\vdots	$[\Lambda_{q^{11}}]$ $[\dot{S}^{70}]$	[0]
8		\vdots	[0]	$[\Lambda_{q^9}]$ $[\dot{S}^{80}]$
9		[0]	[0]	$[\Lambda_{q^{12}}]$ $[\dot{S}^{90}]$

TAB. 4.12 – Structure de la transposée de la dérivée de la matrice jacobienne non réduite pour l'exemple de la *figure 4.6*

4.2.4.3 Elimination du multiplicateur de Lagrange

Après avoir construit ces deux matrices, elles ont été multipliées chacune par la matrice $[W]$ d'après (4.146) et (4.148) pour obtenir les matrices $[B_j]$ et $[\dot{B}_j]$. Il apparaît alors n_{lz} lignes et n_{cz} colonnes de zéros, correspondant aux coordonnées généralisées non actives. Pour économiser du temps de calcul et éviter des calculs inutiles, ces matrices sont « réduites », c'est pourquoi les pointeurs sont réutilisés. Cette étape consiste à retirer les lignes et les colonnes de zéros à ces matrices. L'emplacement des colonnes de zéros est celui où le pointeur dp_q , pour un angle q de $\{x\}$, est nul. Ces deux matrices réduites ont un certain nombre de lignes, notées n_{contr} . Le nombre d'extrémités libres n_{qmc} et le nombre de contraintes n_{contr} vérifient alors l'égalité suivante :

$$3n_{qmc} - n_{lz} = n_{contr} \quad (4.166)$$

La matrice jacobienne réduite et sa dérivée sont notées $[B_{jred}]$ et $[\dot{B}_{jred}]$, respectivement toutes les deux de dimension $n_{contr} \times n'_{cg}$, où :

$$n_{cg} - n_z = n'_{cg} \quad (4.167)$$

Les matrices $[a]$, $[b]$ et $[c]$ et les vecteurs $\{f\}$ et $\{\dot{x}\}$ sont aussi réduits, pour parvenir aux matrices $[a_{red}]$, $[b_{red}]$ et $[c_{red}]$, de dimension $n'_{cg} \times n'_{cg}$ et les vecteurs $\{f_{red}\}_{n'_{cg}}$ et $\{\dot{x}_{red}\}_{n'_{cg}}$, par la même méthode.

D'après l'équation de mouvement (4.153), une inconnue supplémentaire $\{\lambda\}$ a été introduite. Le but est donc d'éliminer ce terme, ou plutôt le terme $[B_{jred}]^T \{\lambda_{red}\}$, avec $\{\lambda_{red}\}$ le

multiplicateur $\{\lambda\}$ réduit. Pour cela, une matrice de transformation $[T]$, triangulaire supérieure, est construite telle que :

$$[T] [B_{jréd}]^T = [0] \quad (4.168)$$

où $[T]$, de dimension $(n'_{cg} - n'_{contr}) \times n'_{cg}$, est la matrice orthogonale complémentaire de la matrice jacobienne $[B_{jréd}]$. L'équation de la dynamique (4.153) est multipliée à droite par la matrice $[T]$:

$$[T] ([a_{réd}] \{\ddot{x}_{réd}\} + [b_{réd}] \{\dot{x}_{réd}\} + [c_{réd}] \{x_{réd}\} - \{f_{réd}\}) = [0] \quad (4.169)$$

Pour construire la matrice $[T]$, la méthode de triangularisation en matrice supérieure est appliquée sur la matrice jacobienne réduite $[B_{jréd}]$. Ce procédé est basé sur l'algorithme d'Householder, exposé en *Annexe E*. (4.169) est combinée avec l'équation de contrainte dérivée deux fois (4.149) réduite elle aussi, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} [T] [a_{réd}] \\ [B_{jréd}] \end{bmatrix} \{\ddot{x}_{réd}\} + \begin{bmatrix} [T] ([b_{réd}] + [c_{réd}]) \\ [\dot{B}_{jréd}] \end{bmatrix} \{\dot{x}_{réd}\} = \begin{bmatrix} [T] \{f_{réd}\} \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

Puis, (4.170), équation différentielle du second ordre, est transformée en équation différentielle du premier ordre telle que :

$$[A] \{\ddot{x}_{réd}\} = \{D\} \quad (4.171)$$

où :

$$[A] = \begin{bmatrix} [T] [a_{réd}] \\ [B_{jréd}] \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

et :

$$\{D\} = \begin{bmatrix} [T] (\{f_{réd}\} - ([b_{réd}] + [c_{réd}]) \{\dot{x}_{réd}\}) \\ - [\dot{B}_{jréd}] \{\dot{x}_{réd}\} \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

D'après (4.171), le vecteur $\{\ddot{x}_{réd}\}$ est obtenu en inversant $[A]$, par la méthode de Gauss :

$$\{\ddot{x}_{réd}\} = [A]^{-1} \{D\} = \{d(\{\dot{x}_{réd}\}, t)\} \quad (4.174)$$

La méthode pour calculer (4.174) peut être mise sous la forme d'un organigramme qui est expliqué dans la *section 4.2.6*.

4.2.4.4 Dérivation de l'équation de contrainte pour une boucle fermée

D'après la *figure 4.1*, dans certaines structures, des boucles fermées apparaissent. L'objectif est de savoir comment prendre en compte l'existence de ces boucles dans le traitement des contraintes. Pour cela, la boucle est scindée virtuellement (*figure 4.15*) afin de créer deux boucles ouvertes en respectant certaines conditions sur les forces et les moments appliqués sur le joint de cette ouverture. Cette coupure peut être n'importe où sur la boucle. L'équation de Kane avec les forces de contraintes supplémentaires (4.152) reste inchangée mais les forces et les moments résultants des conditions de contraintes vont modifier la matrice jacobienne

et le multiplicateur de Lagrange. Si sont considérées les extrémités p et q respectivement l'extrémité des corps $B^{\Gamma_{libre}(1,p)}$ et $B^{\Gamma_{libre}(1,q)}$, où se situe le point initial de formation de la boucle fermée, alors les vecteurs positions sont égaux :

$$\overrightarrow{O^0 P^p} = \overrightarrow{O^0 P^q} \quad (4.175)$$

où $\overrightarrow{O^0 P^p}$ et $\overrightarrow{O^0 P^q}$ sont respectivement les vecteurs positions des extrémités, exprimés dans le repère \mathcal{R}^0 (figure 4.15). Puis (4.175) est différenciée :

$$\overrightarrow{v}^{(p+n_{sol})0} = \overrightarrow{v}^{(q+n_{sol})0} \quad (4.176)$$

ou sous la forme matricielle :

$$\{\dot{x}\}^T \left([V_w^{(p+n_{sol})}] - [V_w^{(q+n_{sol})}] \right) = \{0\} \quad (4.177)$$

où (4.109) donne la forme des matrices $[V_w^{(p+n_{sol})}]$ et $[V_w^{(q+n_{sol})}]$. (4.177) a une forme reconnaissable telle que :

$$[B_j] \{\dot{x}\} = \{0\} \quad (4.178)$$

où :

$$[B_j] = [V_w^{(p+n_{sol})}]^T - [V_w^{(q+n_{sol})}]^T \quad (4.179)$$

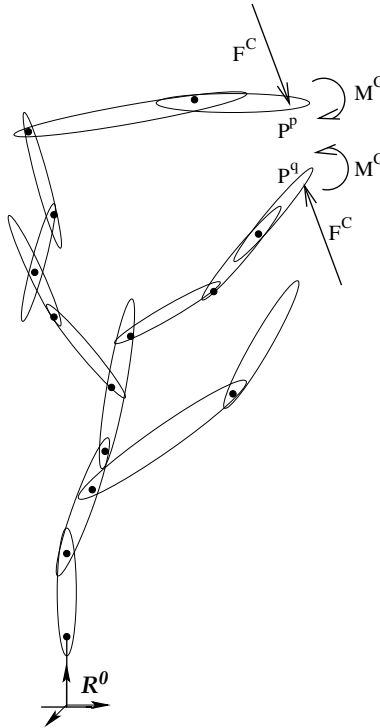


FIG. 4.15 – Modélisation de la boucle fermée de la figure 4.1, en coupant l'une des ces extrémités

En fait, le traitement du cas des boucles fermées s'exécute de la façon suivante :

- Etape 1* Créer la structure ouverte en ouvrant la boucle fermée en un point arbitraire de cette dernière
- Etape 2* Formuler les équations de mouvement basées sur la procédure développée dans le *paragraphe 4.2.3.2*, grâce à l'équation de mouvement (4.132)
- Etape 3* Dériver (4.178) avec (4.179) dans laquelle il n'est pas demandé d'utiliser des efforts additionnels.
- Etape 4* Résoudre la dynamique du système multicorps avec la boucle fermée en combinant les équations de mouvement de l'étape 1 et des contraintes de l'étape 3. Utiliser la méthode de triangularisation « DMTS » (*Annexe E*) afin d'obtenir l'équation différentielle du premier ordre (4.171).

4.2.4.5 Mouvement prescrit

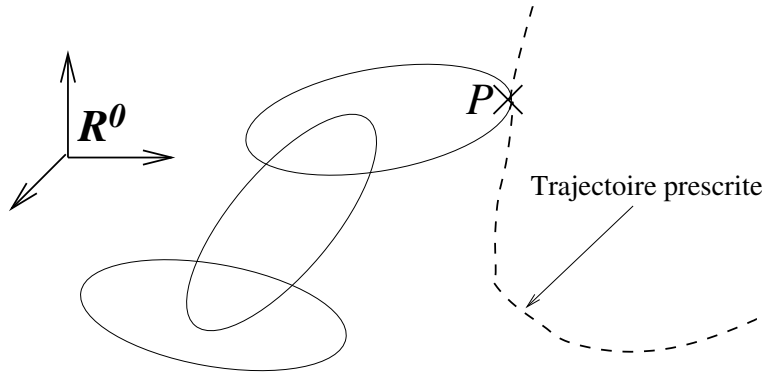


FIG. 4.16 – Système multicorps soumis à un mouvement prescrit

Cette partie est réservée aux contraintes agissant sur certains corps soumis à des mouvements prescrits. L'objectif est alors d'écrire les équations de contraintes qui expriment ce mouvement prescrit (*figure 4.16*). Si cette étape considère le point P de la *figure 4.16* décrivant un mouvement prescrit au cours du temps représenté par une trajectoire dans l'espace par rapport à \mathcal{R}^0 , alors il existe un vecteur vitesse de la trajectoire \overrightarrow{h} , de fonction du temps, tel que :

$$\overrightarrow{v}^{p0} = \overrightarrow{h}(t) \quad (4.180)$$

La représentation matricielle de (4.180) du corps rigide dans le système multicorps rigide est :

$$\{\dot{x}\}^T [V_w^p] = \{h(t)\}^T \quad (4.181)$$

L'accélération prescrite s'écrit :

$$\overrightarrow{a}^{p0} = \overrightarrow{\dot{h}}(t) \quad (4.182)$$

où l'accélération \overrightarrow{a}^{p0} est la dérivée de (4.181). Le vecteur $\{D\}$ de (4.173) devient :

$$\{D\} = \begin{bmatrix} [T] \{ \{f_{réd}\} - ([b_{réd}] + [c_{réd}]) \{ \dot{x}_{réd} \} \} \\ - [\dot{B}_{jréd}] \{ \dot{x}_{réd} \} + \{ \dot{h}_{réd}(t) \} \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

avec la fonction réduite $\{\dot{h}_{red}(t)\}$ de $\{\dot{h}(t)\}$ d'après la méthode de réduction utilisée au *paragraphe 4.2.4.3*.

4.2.4.6 Evaluation des forces de contrainte

La procédure suivante permet d'évaluer les forces et les moments de contraintes. Si les mêmes points d'extrémités P^j ($j = 1, \dots, n_{qmc}$) et les corps B^j ($j = 1, \dots, n_{sol}$) dans le système multicorps de la *figure 4.14* sont considérés, le nombre d'équations de contrainte vaut $3n_{qmc}$ et ces équations sont décrites par :

$$[B] \{\dot{x}\} = \{h(t)\} \quad (4.184)$$

Les forces de contrainte associées aux points P^j ($j = 1, \dots, n_{qmc}$) sont \vec{F}^j et les moments de contrainte associés au corps B^j ($j = 1, \dots, n_{sol}$) sont \vec{M}^j . Les $3n_{qmc}$ premières contraintes de (4.184) correspondant aux points P^j sont désignées par la vitesse de ces points telle que :

$$\{v^{j0}\}^T = \{\dot{x}\}^T [V_w^j] \quad (4.185)$$

où (4.109) donne $[V_w^j]$. De même, les $3n_{sol}$ dernières contraintes de (4.184) correspondant aux corps B^j sont désignées par la vitesse angulaire de ces corps telle que :

$$\{\omega^{j0}\}^T = \{\dot{x}\}^T [\omega^j] \quad (4.186)$$

où $[\omega^j]$ est la vitesse angulaire partielle de B^j . Ainsi les forces généralisées dues aux forces et aux moments de contrainte sont, d'après (4.110) :

$$f^c = \sum_{j=1}^{n_{qmc}} \frac{\partial \vec{v}^{j0}}{\partial \dot{x}} \cdot \vec{F}^j + \sum_{j=1}^{n_{sol}} \frac{\partial \vec{\omega}^{j0}}{\partial \dot{x}} \cdot \vec{M}^j \quad (4.187)$$

ou :

$$\{f^c\} = \sum_{j=1}^{n_{qmc}} [V_w^j] \{F^j\} + \sum_{j=1}^{n_{sol}} [\omega^j] \{M^j\} \quad (4.188)$$

écrites sous la forme d'une multiplication d'une matrice de dimension $m \times 6n_{sol}$ (où m vaut $3(n_{qmc} + n_{sol})$) et du multiplicateur de Lagrange :

$$\{f^c\} = [B]^T \{\lambda\} \quad (4.189)$$

Donc le multiplicateur de Lagrange est conçu à partir de la multiplication de plusieurs matrices telle que :

$$\{\lambda\} = [E]^{-1} [B] \{f^c\} \quad (4.190)$$

où $[E]$ est une matrice symétrique de dimension $m \times m$ telle que :

$$[E] = [B] [B]^T \quad (4.191)$$

En effet, (4.189) est multipliée à gauche par la matrice $[B]$:

$$[B] \{f^c\} = [B] [B]^T \{\lambda\} = [E] \{\lambda\} \quad (4.192)$$

Le problème d'inversion de matrice est évité grâce à la méthode de triangularisation « DMTS » (*Annexe E*) sur la matrice $[B]$. Ainsi (4.189) est multipliée par $[D]^T [H]$ de (E.19) :

$$[\Xi_g] \{\lambda\} = \{\Xi_d\} \quad (4.193)$$

où $[\Xi_g]$ est une matrice triangulaire supérieure de dimension $m \times m$ et $\{\Xi_d\}$ un vecteur de dimension m tels que :

$$[\Xi_g] = [D]^T [H] [B]^T \quad (4.194)$$

et :

$$\{\Xi_d\} = [D]^T [H] \{f^c\} \quad (4.195)$$

$\{\lambda\}$ peut être calculé par substitution, car $[\Xi_g]$ est une matrice triangulaire supérieure.

4.2.5 Intégration temporelle

On sait que le but est de calculer la vitesse et l'accélération afin de calculer les efforts pour un temps donné. Pour cela, on a besoin de réactualiser à chaque pas de temps. Comme nous disposons du système d'équation différentielle du second degré non linéaire avec des termes, différents à chaque pas de temps, on a le choix entre deux façons de résolution. Soit on linéarise mais des données sont perdues, soit on intègre temporellement. Cette dernière solution est choisie car si on linéarise à chaque pas de temps, à un certain moment, le comportement du système ne sera pas aussi précis.

On a vu au *paragraphe 4.2.4.3*, d'après (4.174) ou (4.183), qu'au temps t , on a :

$$\{\ddot{x}_{red}\}_t = [A]_t^{-1} \{D\}_t = \{d(\{\dot{x}_{red}\}_t, t)\} \quad (4.196)$$

où :

$$[A]_t = \begin{bmatrix} [T]_t [a_{red}]_t \\ [B]_{jred}]_t \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

et :

$$\{D\}_t = \begin{bmatrix} [T]_t (\{f_{red}\}_t - ([b_{red}]_t + [c_{red}]_t) \{\dot{x}_{red}\}_t) \\ - [B]_{jred}]_t \{\dot{x}_{red}\}_t + \{\dot{h}(t)\} \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

(4.196) doit être intégrée par rapport au temps, avec un pas de temps Δt , pour obtenir la réponse $\{\dot{x}_{red}\}_{t+\Delta t}$. Le système d'équations différentielles du premier ordre (4.196) est donc résolu dans le domaine temporel. Cette équation peut s'écrire plus simplement sous la forme générale :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \{y\}_t = \{\dot{y}\}_t = \{d(\{y\}_t, t)\} & \text{pour } t > t_0 \\ \{y(t_0)\} = \{y\}_{t_0} \end{cases} \quad (4.199)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{y\}_t = \begin{Bmatrix} \{x_{\text{réd}}\}_t \\ \{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t \end{Bmatrix} \\ \{d(\{y\}_t, t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t \\ \{\ddot{x}_{\text{réd}}\}_t \end{Bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.200)$$

Parmi l'ensemble des algorithmes d'intégration temporelle, deux d'entre eux ont retenu notre attention : Runge-Kutta, Adams.

4.2.5.1 L'algorithme de Runge-Kutta

Les formules de Runge-Kutta sont les plus utilisées et les plus faciles à programmer. Le pas de temps peut être modifié sans difficulté et la méthode a l'avantage de démarrer seule. Il suffit de connaître $\{y\}_{t_0}$ pour intégrer le reste des autres valeurs [6], où t_0 est le temps initial et vaut 0 s en général. Comme elles demandent plus de temps de calcul que les autres méthodes, cette méthode est utilisée en fait pour démarrer des méthodes plus efficaces. La formule d'ordre 4 est donc choisie [6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{y\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \\ \quad + \frac{\Delta t}{6} \left[\{d(\{y\}_t, t)\} + 2 \{d(\{\hat{y}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}}, t + \frac{\Delta t}{2})\} + 2 \{d(\{\hat{\hat{y}}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}}, t + \frac{\Delta t}{2})\} + \{d(\{\hat{y}\}_{t+\Delta t}, t + \Delta t)\} \right] \\ \{\hat{y}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \{y\}_t + \frac{\Delta t}{2} \{d(\{y\}_t, t)\} \\ \{\hat{\hat{y}}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \{y\}_t + \frac{\Delta t}{2} \{d(\{\hat{y}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}}, t + \frac{\Delta t}{2})\} \\ \{\hat{y}\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \Delta t \{d(\{\hat{\hat{y}}\}_{t+\frac{\Delta t}{2}}, t + \frac{\Delta t}{2})\} \end{array} \right. \quad (4.201)$$

Cette formule nécessite quatre évaluations de la fonction dérivée f .

4.2.5.2 L'algorithme d'Adams

Il s'agit d'une méthode de résolution de type « Prédicteur-Correcteur » [6]. Dans un premier temps, le prédicteur (formule d'Adams ouverte, au 4^{ième} ordre) est calculé de la façon suivante :

$$\{y^{(0)}\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \frac{\Delta t}{24} (55 \{d\}_t - 59 \{d\}_{t-\Delta t} + 37 \{d\}_{t-2\Delta t} - 9 \{d\}_{t-3\Delta t}) \quad (4.202)$$

suivi par le calcul du modificateur ($\{y^{(0)}\}_t$ est la valeur du prédicteur au pas précédent) :

$$\{\hat{y}^{(0)}\}_{t+\Delta t} = \{y\}_{t+\Delta t} - \frac{251}{270} (\{y\}_t - \{y^{(0)}\}_t) \quad (4.203)$$

et finalement celui du correcteur (formule d'Adams fermée, au 4^{ième} ordre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{y^{(r+1)}\}_{t+\Delta t} = \{y\}_t + \frac{\Delta t}{24} (9 \{d^{(r)}\}_{t+\Delta t} + 19 \{d\}_t - 5 \{d\}_{t-\Delta t} + \{d\}_{t-2\Delta t}) \\ \{d^{(0)}\}_{t+\Delta t} = d(\{\hat{y}^{(0)}\}_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \end{array} \right. \quad (4.204)$$

Pour démarrer le calcul, on a besoin de $\{y\}_{t_0+\Delta t}$, $\{y\}_{t_0+2\Delta t}$ et $\{y\}_{t_0+3\Delta t}$ qui ne s'acquiert pas à partir de ces trois équations (4.202), (4.203) et (4.204) mais à partir de la méthode de Runge-Kutta. De plus, $\{y^{(0)}\}_{t_0+3\Delta t}$ n'existe pas. $\{y\}_{t_0+4\Delta t}$ s'obtient donc à partir de (4.202) et (4.204) tel que (4.204) est initialisée par $\{y^{(0)}\}_{t_0+4\Delta t}$ c'est-à-dire :

$$\{\widehat{y}^{(0)}\}_{t_0+4\Delta t} = \{y^{(0)}\}_{t_0+4\Delta t} \quad (4.205)$$

Donc $\{y^{(0)}\}_{t_0+5\Delta t}$ est estimé grâce à $\{y\}_{t_0+5\Delta t}$ par (4.202) et $\{\widehat{y}^{(0)}\}_{t_0+5\Delta t}$ par (4.203). Les trois premières valeurs $\{d\}_{t_0}$, $\{d\}_{t_0+\Delta t}$, $\{d\}_{t_0+2\Delta t}$, $\{d\}_{t_0+3\Delta t}$ sont initialisées avec Runge-Kutta [6].

La thèse de [2] préconise aussi l'utilisation de ce schéma d'intégration temporelle équivalent, appelé aussi schéma d'intégration temporelle d'Adams-Bashforth-Moulton. Runge-Kutta est employé pour amorcer la méthode, puis Adams pour continuer. La précision de cet algorithme sera vérifiée sur un exemple, dont le comportement analytique est connu (*section 5.2*).

4.2.6 Synthèse de l'algorithme de calcul

Afin que le lecteur ait une vue globale de l'algorithme de calcul, celui-ci est récapitulé dans les *figures 4.17* et *4.18*. Deux fichiers regroupent les données nécessaires au démarrage du calcul :

- le premier fichier précise les paramètres qui permettent de construire la matrice d'arborescence $[\Gamma]$ et le vecteur du nombre de connexions $\{H\}$ (*paragraphe 4.2.1.3*), ainsi que les paramètres géométriques et massiques de chaque corps (*paragraphe 4.2.1.10*)
- le second fichier permet de préciser la valeur des pointeurs p et dp (*paragraphe 4.2.1.5*) afin d'économiser, par la suite, le temps de calcul à chaque pas de temps, afin de connaître le mouvement de chaque corps au cours du temps (*paragraphe 4.2.1.5*) :

$$dp_{\dot{q}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{d}{dt}q = 0 \forall t \\ 1 & \text{si } q = q(t) \forall t \end{cases} \quad (q = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k) \quad (4.206)$$

Les valeurs initiales des coordonnées généralisées relatives de chaque corps $(\alpha^k \beta^k \gamma^k)^T$ et leurs dérivées $(\dot{\alpha}^k \dot{\beta}^k \dot{\gamma}^k)^T$ rassemblées ensuite respectivement dans le vecteur de coordonnées généralisées $\{x\}$ et sa dérivée $\{\dot{x}\}$ (*paragraphe 4.2.1.4*) sont spécifiées dans ce même fichier, ainsi que les coordonnées des forces $\{F^k\}$ et les moments $\{M_{O^k}^k\}$, autre que les efforts aérodynamiques et gravitationnels, agissant sur les corps exprimés dans le repère \mathcal{R}^0 (*paragraphe 4.2.2.2*), et si oui ou non l'effet gravitationnel est pris en compte (*paragraphe 4.2.2.3*)

En se référant aux *figures 4.17* et *4.18*, les principales étapes de calcul⁵ se résument comme suit, en se basant sur l'arborescence du système et sur la méthode de récursivité :

⁵La *i^{ème}* étape sera notée E_i sur les *figures 4.17* et *4.18*

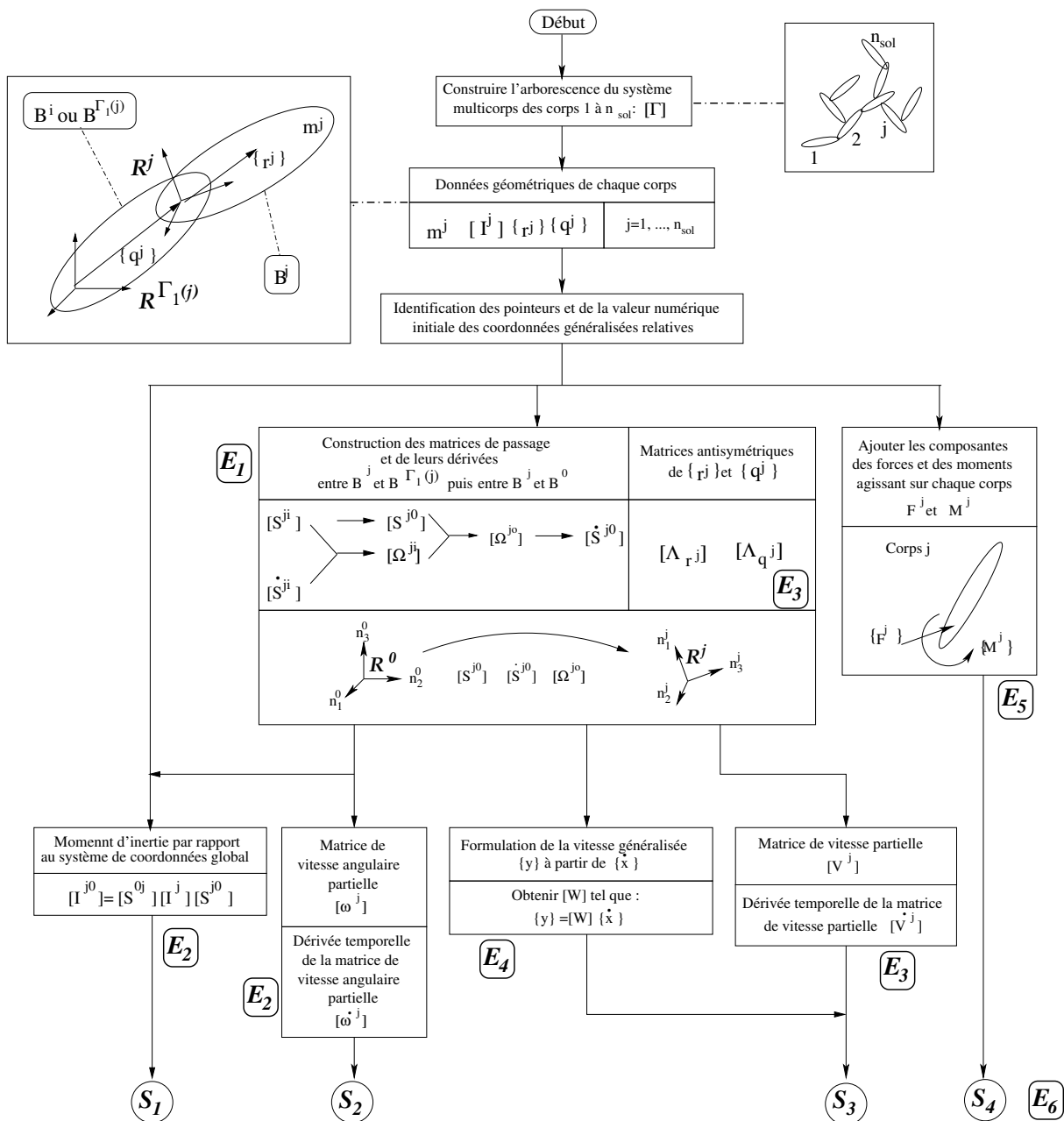


FIG. 4.17 – Organigramme du programme informatique (1^{ière} partie) [1]

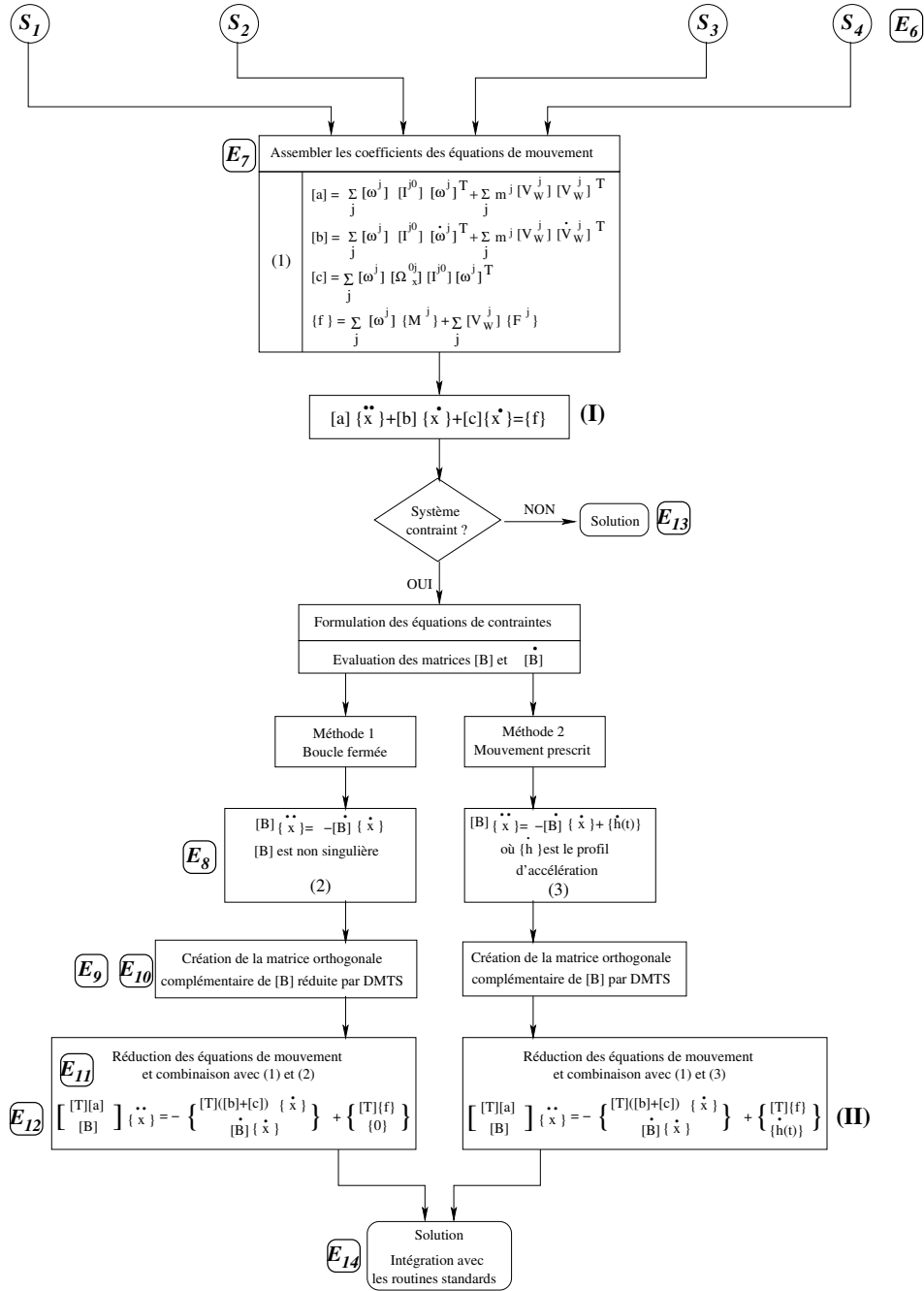


FIG. 4.18 – Organigramme du programme informatique (2^{ème} partie) [1]

1. A partir du vecteur $\{x\}_t$, de sa dérivée $\{\dot{x}\}_t$ et des pointeurs p et dp , on construit les matrices de passage $[S^{kj}]_t$, leurs dérivées $[\dot{S}^{kj}]_t$ à partir des matrices de rotation (*paragraphe 4.2.1.2*), ainsi que les matrices $[S^{k0}]_t$ et leurs dérivées $[\dot{S}^{k0}]_t$ (*paragraphes 4.2.1.6 et 4.2.1.7*) grâce aux matrices antisymétriques de vitesse angulaire $[\Omega^{kj}]_t$ et $[\Omega^{k0}]_t$ tel que :

$$[S^{k0}]_t = [S^{k\Gamma_1(k)}]_t [S^{\Gamma_1(k)0}]_t \quad (4.207)$$

$$[\Omega^{kj}]_t = [\dot{S}^{kj}]_t [S^{kj}]_t^T \quad (4.208)$$

$$[\Omega^{k0}]_t = [\Omega^{k\Gamma_1(k)}]_t + \sum_{m=1}^{H(k)-1} [S^{k\Gamma_m(k)}]_t [\Omega^{\Gamma_m(k)\Gamma_{m+1}(k)}]_t [S^{k\Gamma_m(k)}]_t^T \quad (4.209)$$

puis :

$$[\dot{S}^{k0}]_t = [\Omega^{k0}]_t [S^{k0}]_t \quad (4.210)$$

2. Grâce aux matrices de passage et à la matrice d'inertie $[I^k]$, on calcule la matrice d'inertie $[I^{k0}]_t$ du corps B^k par rapport au référentiel galiléen \mathfrak{R}^0 (*paragraphe 4.2.2.4*) et les matrices des vitesses et des accélérations angulaires partielles, $[\omega^k]_t$ et $[\dot{\omega}^k]_t$, de chaque corps (*paragraphe 4.2.1.8 et 4.2.1.9*) :

$$[I^{k0}]_t = [S^{k0}]_t^T [I^k] [S^{k0}]_t \quad (4.211)$$

$$[\omega^k]_t = \begin{bmatrix} [I] \\ [S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}]_t \\ \vdots \\ [S^{\Gamma_1(k)0}]_t \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\dot{\omega}^k]_t = \begin{bmatrix} [0] \\ [\dot{S}^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0}]_t \\ \vdots \\ [\dot{S}^{\Gamma_1(k)0}]_t \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

3. Les vecteurs position du centre d'inertie $\{r^k\}$ et du repère relatif au corps adjacent $\{q^k\}$ sont transformés, sous la forme de matrice antisymétrique, pour obtenir les matrices partielles des vitesses et des accélérations de chaque corps (*paragraphe 4.2.1.10*) :

$$[\Lambda_{r^k}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_3^k & r_2^k \\ r_3^k & 0 & -r_1^k \\ -r_2^k & r_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Lambda_{q^k}] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3^k & q_2^k \\ q_3^k & 0 & -q_1^k \\ -q_2^k & q_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

ce qui donne :

$$[V^k]_t = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}} \\ \vdots \\ \Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}} \\ \Lambda_{r^{\Gamma_0(k)}} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0} \\ S^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0} \\ \vdots \\ S^{\Gamma_2(k)0} \\ S^{\Gamma_1(k)0} \\ S^{\Gamma_0(k)0} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix}_t \\ et \quad [\dot{V}^k]_t = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-2}(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_{H(k)-3}(k)}} \\ \vdots \\ \Lambda_{q^{\Gamma_1(k)}} \\ \Lambda_{q^{\Gamma_0(k)}} \\ \Lambda_{r^{\Gamma_0(k)}} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{S}^{\Gamma_{H(k)-1}(k)0} \\ \dot{S}^{\Gamma_{H(k)-2}(k)0} \\ \vdots \\ \dot{S}^{\Gamma_2(k)0} \\ \dot{S}^{\Gamma_1(k)0} \\ \dot{S}^{\Gamma_0(k)0} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix}_t \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

Les matrices $[\Lambda_{r^k}]$ et $[\Lambda_{q^k}]$ sont des matrices constantes, bâties définitivement pour la suite.

4. Le vecteur des vitesses généralisées $\{y\}_t$ regroupant l'ensemble des matrices antisymétriques $[\Omega^{k0}]_t$ est lié au vecteur $\{\dot{x}\}_t$ par la matrice $[W]$ (*paragraphe 4.2.1.10*) :

$$\{y\}_t^T = \{\dot{x}\}_t^T [W] \quad (4.215)$$

Cette matrice $[W]$ permet de transformer la matrice des vitesses partielles $[V^k]_t$ en $[V_w^k]_t$:

$$[V_w^k]_t = [W]_t [V^k]_t \quad (4.216)$$

5. Si le corps est soumis à des efforts extérieurs $\{F^k\}_t$, rajoutant l'effet de la gravitation et des efforts aérodynamiques, et à des moments résultants $\{M_{O^k}^k\}_t$, le vecteur des forces et des moments généralisés $\{f\}_t$ est élaboré (*paragraphe 4.2.2.2 et 4.2.2.3*) :

$$\{f\}_t = \sum_k [V_w^k]_t \{F^k\}_t + \sum_k [\omega^k]_t \{M_{O^k}^k\}_t \quad (4.217)$$

6. Les différentes matrices et vecteurs de la *figure 4.17* sont établis. Cette étape précède la construction des matrices des équations de la dynamique et de contrainte de la *figure 4.18*.
7. Les trois matrices $[a]_t$, $[b]_t$, $[c]_t$ et le vecteur $\{f\}_t$, coefficients de (1) du système d'équation de mouvement (**I**) de la *figure 4.18*, sont constitués (*paragraphe 4.2.3.2*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [a]_t = \sum_k m^k [V_w^k]_t [V_w^k]_t^T + \sum_k [\omega^k]_t [I^{ko}]_t [\omega^k]_t \\ [b]_t = \sum_k m^k [V_w^k]_t [\dot{V}_w^k]_t^T + \sum_k [\omega^k]_t [I^{ko}]_t [\dot{\omega}^k]_t^T \\ [c]_t = \sum_k [\omega^k]_t [\Omega_x^{0k}]_t [I^{ko}]_t [\omega^k]_t^T \\ \{f\}_t = \sum_k [V_w^k]_t \{F^k\}_t + \sum_k [\omega^k]_t \{M^k\}_t \end{array} \right. \quad (4.218)$$

avec $[\Omega_x^{k0}]_t$ est la matrice antisymétrique du vecteur de $\{\dot{x}\}_t^T [\omega^k]_t$. Ces coefficients vérifient :

$$[a]_t \{\ddot{x}\}_t + [b]_t \{\dot{x}\}_t + [c]_t \{x\}_t = \{f\}_t \quad (4.219)$$

8. Si le système est non contraint, cette équation est intégrée d'après la méthode décrite à partir de (4.226) de l'étape 13. Sinon les contraintes sont transformées de manière à avoir la matrice jacobienne $[B]_t$ et sa dérivée $[\dot{B}]_t$ regroupant l'ensemble des matrices partielles des vitesses et des accélérations des extrémités libres définies dans le *paragraphe 4.2.4.2*. Puis $[B]_t$ et $[\dot{B}]_t$ sont multipliées avec la matrice $[W]$:

$$[B_j]_t = [B]_t [W]^T \text{ et } [\dot{B}_j]_t = [\dot{B}]_t [W]^T \quad (4.220)$$

qui vérifient respectivement (2) ou (3) de (4.18) :

$$[B_j]_t \{\ddot{x}\}_t = - [\dot{B}_j]_t \{\dot{x}\}_t + \{\dot{h}(t)\} \quad (4.221)$$

avec le vecteur fonction dérivée $\{\dot{h}(t)\}$ du profil des accélérations du mouvement prescrit.

9. Puis en tenant compte des pointeurs p et dp (*paragraphe 4.2.4.3*), la matrice jacobienne $[B_j]_t$, sa dérivée $[\dot{B}_j]_t$ sont réduites : $[B_{j\text{réd}}]_t, [\dot{B}_{j\text{réd}}]_t$.
10. La matrice $[T]_t$ est déterminée par triangularisation en matrice supérieure de $[B_{j\text{réd}}]_t$ car ces deux matrices vérifient (*paragraphe 4.2.4.3*) :

$$[T]_t [B_{j\text{réd}}]_t^T = [0] \quad (4.222)$$

11. Les coefficients de (1) ($[a]_t, [b]_t, [c]_t$ et $\{f\}_t$) et le vecteur des vitesses généralisées relatives $\{\dot{x}\}_t$ sont aussi réduits : $[a_{\text{réd}}]_t, [b_{\text{réd}}]_t, [c_{\text{réd}}]_t, \{f_{\text{réd}}\}_t$ et $\{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t$.
12. Les matrices et les vecteurs des équations de la dynamique (**I**) et des contraintes "réduites" sont combinées dans la matrice $[A]_t$ et le vecteur $\{D\}_t$:

$$[A]_t = \begin{bmatrix} [T]_t [a_{\text{réd}}]_t \\ [B_{j\text{réd}}]_t \end{bmatrix} \quad (4.223)$$

et :

$$\{D\}_t = \begin{bmatrix} [T]_t (\{f_{\text{réd}}\}_t - ([b_{\text{réd}}]_t + [c_{\text{réd}}]_t) \{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t) \\ - [\dot{B}_{j\text{réd}}]_t \{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

afin d'obtenir l'accélération angulaire relative réduite de chaque corps du système :

$$\{\ddot{x}_{\text{réd}}\}_t = [A]_t^{-1} \{D\}_t \quad (4.225)$$

13. Dans le cas d'un système non contraint, les matrices et les vecteurs des équations de la dynamique sont combinées dans la matrice $[A]_t$ et le vecteur $\{D\}_t$ avec :

$$[A]_t = [a_{\text{réd}}]_t \quad (4.226)$$

et :

$$\{D\}_t = \{f_{\text{réd}}\}_t - ([b_{\text{réd}}]_t + [c_{\text{réd}}]_t) \{\dot{x}_{\text{réd}}\}_t \quad (4.227)$$

afin d'obtenir l'accélération angulaire relative réduite de chaque corps du système non contraint :

$$\{\ddot{x}_{\text{réd}}\}_t = [A]_t^{-1} \{D\}_t \quad (4.228)$$

14. Le système suivant (4.225) pour un système contraint ou (4.228) pour un système non contraint est intégré avec Adams (*section 4.2.5*).

Ce système d'équations est intégré par Adams, Runge-Kutta, . . . , pour connaître $\{x_{red}\}_{t+\Delta t}$ et $\{\dot{x}_{red}\}_{t+\Delta t}$ au pas de temps suivant $t + \Delta t$. Ces deux vecteurs sont remis sous la forme non réduite $\{x\}_{t+\Delta t}$ et $\{\dot{x}\}_{t+\Delta t}$, grâce à la forme des pointeurs p et dp , dans le sens inverse de la façon dont on l'a fait pour réduire $\{x\}_t$ et $\{\dot{x}\}_t$. Une fois ces vecteurs obtenus, ils deviennent des nouvelles données d'entrée pour le pas de temps suivant à partir de l'étape 1.

Le programme principal relatif aux corps rigides est expliqué dans l'organigramme de la *figure 4.19*.

4.2.7 Programmation

Le programme numérique relatif aux corps rigides a été écrit en Fortran 90. De plus, les principes de la charte qualité de l'ONERA (commentaires des procédures, . . .) ont été adoptés et dès le début, le programme a été conçu de façon évolutive, afin de pouvoir le modifier sans déstructurer le reste du code. Les modules de ce programme sont rassemblés dans l'une de ces trois catégories suivantes :

- les bibliothèques de procédures (*Annexe F.2*) : ces types de modules sont susceptibles d'être employés à n'importe quel moment dans le programme, et plus précisément dans les modules dédiés, si besoin est. Ils ne comprennent aucun module déclaratif et sont universels.
- les modules dédiés (*Annexe F.3*) : ils assemblent des procédures de calcul (écriture des matrices d'arborescence, de passage, . . .), de lecture ou d'écriture de fichiers. Ces procédures sont appelés uniquement à l'intérieur de ces modules ou dans d'autres modules dédiés s'il sont déclarés au début, en respectant la hiérarchie des modules.
- les modules déclaratifs (*Annexe F.4*) : ils comprennent uniquement que des déclarations de variables, de tableaux, Le but des modules déclaratifs est de simplifier l'écriture des déclarations une fois pour toute. Dans le code numérique, deux modules déclaratifs ont été écrits.

En plus de ces règles générales, d'autres règles d'écriture ont été adoptées afin d'écrire les fichiers de données et de résultats :

- Les noms des fichiers sont suivis d'une étiquette de trois lettres, rappelant la nature des données qu'ils contiennent, par exemple `pend1.geo` (*Annexe F.1*), où **geo** signifie **géométrie**. Ceci permet de reconnaître la nature du fichier étudié.
- Les fichiers sont commentés afin d'être facilement lisibles.
- Chaque ligne de commentaire commence par le caractère **\$**.
- Chaque fichier se termine par la ligne de commentaire **\$ FIN**. Ceci a pour but d'indiquer que toutes les données écrites après ce commentaire ne seront pas pris en compte.

De plus :

- la lecture d'un fichier procède par élimination des lignes de commentaires et par réunion des données dans un fichier tampon. La deuxième procédure lit ce fichier tampon.
- Chaque type de fichier suit une procédure de lecture particulière (lecture du fichier de données géométriques, de conditions initiales, . . .).
- La lecture et l'écriture d'un fichier (*Annexe F.5*) font l'objet de procédures différentes.

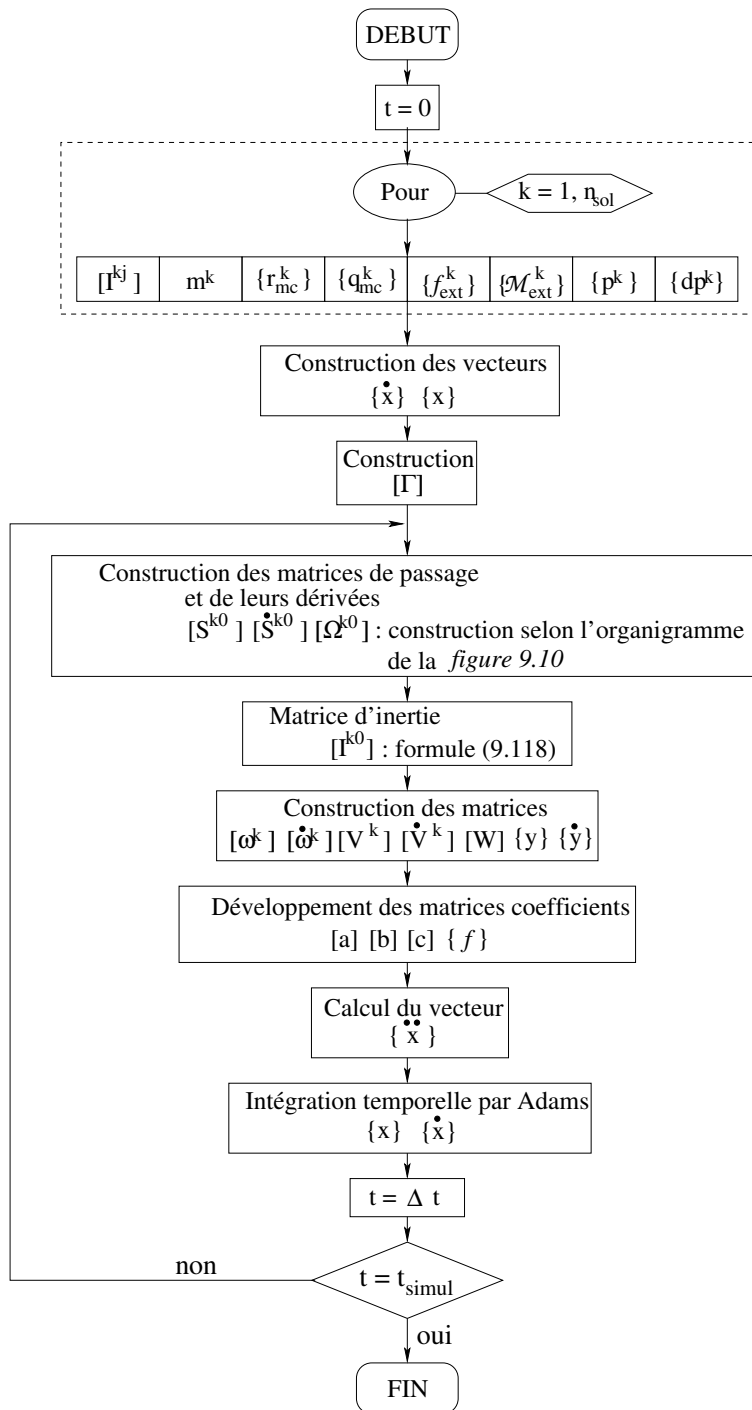


FIG. 4.19 – Récapitulatif des étapes du programme informatique relatif aux corps rigides

Le fichier en *annexe F.1* illustre l'application de ces normes exposées ci-dessus.

Aucun procédé de visualisation n'a été utilisé. Pour visualiser graphiquement les résultats, nous avons employé les outils disponibles (Excel de Windows). De plus, aucun contrôle de convergence et de stabilité n'a été implémenté dans le code mais cela pourra être l'objet d'un prochain projet.

4.2.8 Conclusion

Cette première partie explore une voie résolument tournée vers le traitement informatique du problème où la récursivité des différentes opérations est pleinement exploitée. Dans l'écriture du programme de calcul, le degré de complexité du programme, d'emblée assez élevé, n'augmente que très peu lorsque l'on passe à une structure plus complexe de type éolienne. Quels que soient les cas de figure que l'on aura à traiter par la suite (*section 5.2* sur la validation des corps rigides), la méthode a été programmée pour le cas le plus général.

Avant de passer à la validation du programme sur des exemples simples de corps rigides, nous allons aborder le traitement des corps souples. On a vu que les forces dérivant d'un potentiel (par exemple celui de gravité \vec{g}) sont à prendre en compte. D'autres forces sont implicitement prises en considération dans la formulation (Coriolis, centrifuge) et dérivent d'une composition vectorielle du champ des accélérations. Par contre, nous allons devoir examiner le cas des forces extérieures et plus particulièrement celui des forces dérivant du comportement aérodynamique des pales lors de leur rotation.

4.3 Modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps souples

4.3.1 Cinématique d'un système multicorps souple

4.3.1.1 Introduction

Après avoir vu la modélisation des corps rigides, qui constitue la base du code numérique, on s'intéresse maintenant à la modélisation des corps souples (Le pylône et les pales). Ils sont susceptibles de se déformer et sont élancés (deux de leurs dimensions sont plus petites que la troisième, soit 15 à 20 fois). C'est la raison pour laquelle les corps souples sont modélisés par la suite par des éléments poutres ramenés à la fibre neutre de l'axe de la poutre, caractérisés par certaines données.

Avant de décrire plus en détail les méthodes de détermination des déformations élastiques en reliant leurs déformations aux efforts, la cinématique des systèmes souples doit être introduite.

4.3.1.2 Caractéristiques d'un système multicorps souple

Le modèle poutre est donc choisi, comme cela a été expliqué ci-dessus. Ce qui a été montré dans la *section 4.2* est relatif aux corps rigides. Ainsi dans la modélisation des corps souples, des coordonnées supplémentaires rendant compte de leurs souplesses vont être introduites.

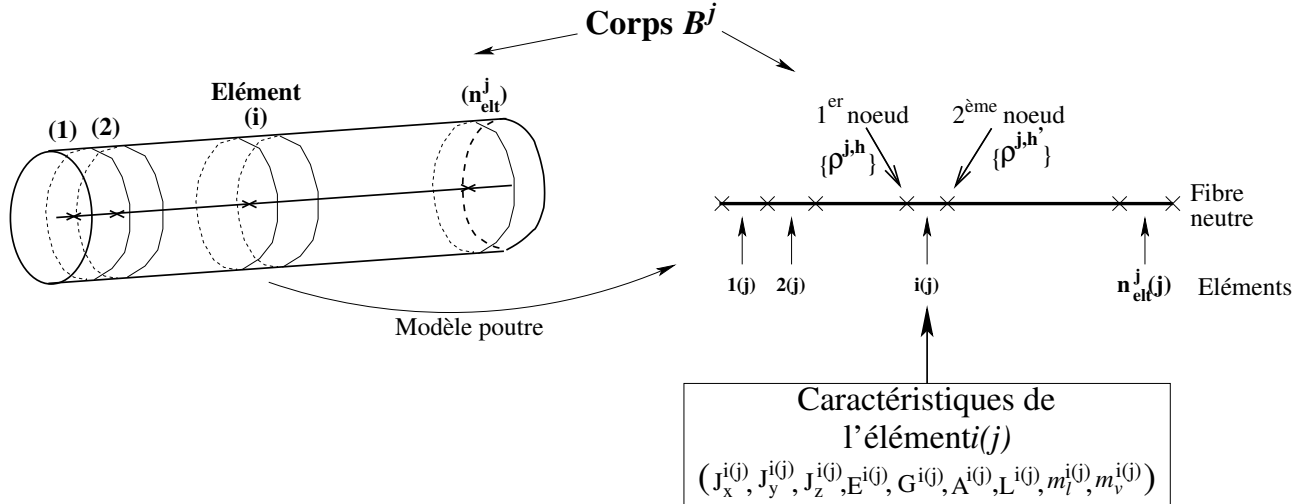


FIG. 4.20 – Le corps B^j divisé en n_{elt}^j éléments

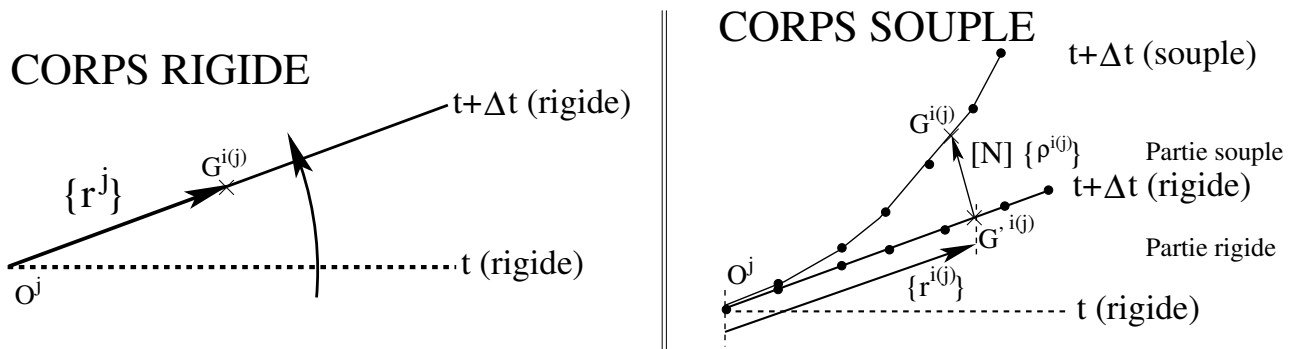


FIG. 4.21 – Déplacement d'un corps rigide et souple

Chaque corps souple B^j ($j = 1, \dots, n_{sol}$) est discrétisé en n_{elt}^j éléments poutres (figure 4.20). Il est considéré, par la suite, que chaque élément i ($i = 1, \dots, n_{elt}^j$) de B^j se comportera comme un corps rigide par rapport à l'élément qui le précède. D'après la figure 4.21, le centre de masse du solide rigide B^j est caractérisé par le vecteur $\{O^j G^j\}$ ou $\{r^j\}$, inchangé au cours du temps, c'est-à-dire :

$$\{\dot{r}^j(t)\} = 0 \quad (4.229)$$

Par contre, le centre de masse de l'élément souple i de B^j est déterminé par le vecteur $\{O^j G^{i(j)}\}$, décomposé en deux vecteurs :

– $\{O^j G^{i(j)}\}$ ou $\{r^{i(j)}\}$ vérifie (4.229) :

$$\{\dot{r}^{i(j)}\} = 0 \quad (4.230)$$

– $\{G^{i(j)} G^{i(j)}\}$ ou $[N] \{\rho^{i(j)}\}$, variable au cours du temps, d'après l'annexe G, où $[N]$ est la fonction d'interpolation relative aux translations telle que $[N] \{\rho^{i(j)}\}$ correspond à la déformation élastique de l'élément.

Ainsi, $\{O^j G^{i(j)}\}$ vérifie :

$$\{O^j G^{i(j)}\} = \{O^j G'^{i(j)}\} + \{G'^{i(j)} G^{i(j)}\} = \{r^{i(j)}\} + [N] \{\rho^{i(j)}\} \quad (4.231)$$

4.3.1.3 Coordonnées nodales

Pour la suite, le nombre total d'éléments du multicorps est noté n_{elt}^{tot} tel que :

$$n_{elt}^{tot} = \sum_{j=1}^{n_{sol}} n_{elt}^j \quad (4.232)$$

ainsi que n_{noeud}^j le nombre de noeuds de l'élément B^j et n_{noeud}^{tot} le nombre total de noeuds du système tel que :

$$n_{noeud}^{tot} = \sum_{j=1}^{n_{sol}} n_{noeud}^j$$

Un élément i du corps B^j est décrit par 12 coordonnées : 6 pour le premier noeud $\{\rho^{j,h}\}^T$ (trois en translation et trois en rotation, exprimées dans le repère \mathfrak{R}^j (*paragraphe 4.2.1.4*)) et 6 pour le deuxième noeud $\{\rho^{j,h'}\}$ (*figure 4.20*), regroupées dans le vecteur des coordonnées nodales de l'élément i de B^j , noté $\{\rho^{i(j)}\}$ tel que :

$$\{\rho^{i(j)}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\rho^{j,h}\}^T & \{\rho^{j,h'}\}^T \end{matrix} \right\}^T \quad (4.233)$$

où :

- h est le $h^{ème}$ noeud de B^j et
- h' est le $h'^{ème}$ noeud de B^j où h' suit h ⁶.

L'ensemble de ces coordonnées sera regroupé dans un vecteur, noté $\{\rho\}$ tel que :

$$\{\rho\} = \left\{ \begin{matrix} \{\rho^{1,1}\}^T & \{\rho^{1,2}\}^T & \dots & \{\rho^{1,n_{noeud}^1}\}^T & \dots & \{\rho^{j,1}\}^T & \{\rho^{j,2}\}^T & \dots & \{\rho^{j,n_{noeud}^j}\}^T & \dots \\ & & & & & \dots & \{\rho^{n_{sol},1}\}^T & \{\rho^{n_{sol},2}\}^T & \dots & \{\rho^{n_{sol},n_{noeud}^{n_{sol}}}\}^T \end{matrix} \right\}^T \quad (4.234)$$

Ainsi $\{\rho\}$ a $6n_{noeud}^{tot}$ coordonnées, d'après (4.232).

4.3.2 Vitesses et accélération des centres de masse d'un élément d'un corps souple

Le *paragraphe 4.2.1.10* a établi le vecteur déplacement (4.87) du centre de masse G^j d'un corps rigide B^j :

⁶En général, le premier noeud de l'élément i de B^j est le deuxième noeud de l'élément précédent i et le deuxième noeud de l'élément i de B^j est le premier noeud de l'élément suivant i . De même, le premier noeud de B^j est le dernier noeud de l'élément précédent B^j et le dernier noeud de B^j est le premier noeud de l'élément suivant B^j .

$$\{OG^j\}^T = \left(\{r^j\}^T [S^{j0}] + \sum_{i=2}^{H(j)} \{q^{\Gamma_{i-2}(j)}\}^T [S^{\Gamma_{i-1}(j)0}] + \{q^{\Gamma_{H(j)-1}(j)}\}^T \right) \quad (4.235)$$

où :

- $\{r^j\}$ est le vecteur des coordonnées du centre d'inertie G^j de B^j , exprimé dans \mathfrak{R}^j ,
- $\{q^j\}$ est le vecteur des coordonnées du centre du repère relatif à B^j , exprimé dans $\mathfrak{R}^{j'}$, adjacent à B^j ,
- $[S^{j0}]$ est la matrice de passage du référentiel \mathfrak{R}^j vers \mathfrak{R}^0 .

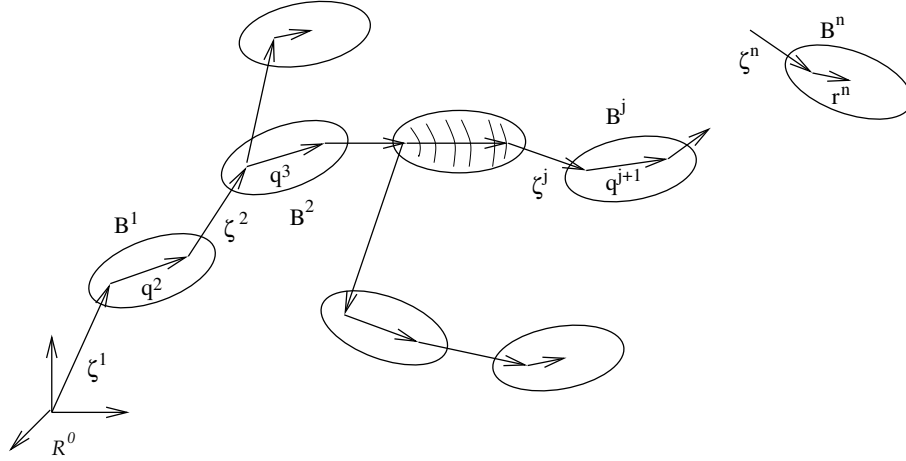


FIG. 4.22 – Arborescence générale d'un système multicorps de corps souples

Donc, par transposition pour l'élément i du corps B^j , le vecteur position du centre de masse de cet élément $\{OG^{i(j)}\}$, exprimé dans \mathfrak{R}^0 (figure 4.22) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \{OG^{i(j)}\}^T &= \sum_{m=0}^{H(j)-1} \left(\{q^{\Gamma_m(j)}\}^T + \{\zeta^{\Gamma_m(j)}\}^T \right) [S^{\Gamma_{m+1}(j)0}] + \\ &+ \left(\{r^{i(j)}\}^T + \{\rho^{i(j)}\}^T [N]^T \right) [S^{j0}] \end{aligned} \quad (4.236)$$

où :

- $[S^{\Gamma_{H(j)}(j)0}]$ est la matrice identité,
- $\{r^{i(j)}\}$ est le vecteur des coordonnées du centre d'inertie $G^{i(j)}$ de l'élément i de B^j , exprimé dans \mathfrak{R}^j et
- $[N] \{\rho^{i(j)}\}$ est le vecteur des déplacements traduisant la souplesse des corps.

Cependant pour les systèmes étudiés (éoliennes), il n'existe que des rotations entre deux corps, donc :

$$\forall m \quad \{\zeta^{\Gamma_m(j)}\} = 0 \quad (4.237)$$

(4.236) devient donc :

$$\{OG^{i(j)}\}^T = \sum_{m=0}^{H(j)-1} \{q^{\Gamma_m(j)}\}^T [S^{\Gamma_{m+1}(j)0}] + \left(\{r^{i(j)}\}^T + \{\rho^{i(j)}\}^T [N]^T \right) [S^{j0}] \quad (4.238)$$

Ainsi, si le vecteur position (4.236) est dérivé par rapport au temps, le vecteur vitesse du centre de masse par rapport au repère \mathfrak{R}^0 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\{OG^{i(j)}\}^T}{dt} = \{v^{i(j)}\}^T &= \sum_{m=0}^{H(j)-1} \left(\{\dot{q}^{\Gamma_m(j)}\}^T [S^{\Gamma_{m+1}(j)0}] + \{q^{\Gamma_m(j)}\}^T [\dot{S}^{\Gamma_{m+1}(j)0}] \right) + \\ &+ \{\dot{\rho}^{i(j)}\}^T [N]^T [S^{j0}] + \left(\{r^{i(j)}\}^T + \{\rho^{i(j)}\}^T [N]^T \right) [\dot{S}^{j0}] \end{aligned} \quad (4.239)$$

Dans la section précédente, nous avons introduit les dérivées des matrices de passage, des matrices partielles et des matrices antisymétriques, que nous allons réutiliser ici. Ainsi des matrices de même nature que dans la *section 4.2* sont à nouveau employées ici pour le vecteur vitesse (4.239) qui devient :

$$\{v^{i(j)}\}^T = \{\dot{x}\}^T [W] [V^{i(j)}] + \{\dot{q}\}^T [\omega^j] + \{\dot{\rho}\}^T [V_e^{i(j)}] \quad (4.240)$$

où :

- $[W]$ est la matrice transformant en $\{y\}$ en $\{\dot{x}\}$,
- $[V^{i(j)}]$ est la matrice de vitesse partielle de l'élément i de B^j par rapport à \mathfrak{R}^0 :

$$[V^{i(j)}] = \begin{array}{c} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \Lambda_{q^{\Gamma_{H(j)-2}(j)}} [S^{\Gamma_{H(j)-1}(j)0}] \\ \Lambda_{q^{\Gamma_{H(j)-3}(k)}} [S^{\Gamma_{H(j)-2}(j)0}] \\ \vdots \\ \Lambda_{q^{\Gamma_1(j)}} [S^{\Gamma_2(j)0}] \\ \Lambda_{q^{\Gamma_0(j)}} [S^{\Gamma_1(j)0}] \\ ([\Lambda_{r^{i(j)}}] + [\Lambda^{i(j)}]) [S^{\Gamma_0(j)0}] \\ [0]_{3 \times 3} \\ \vdots \\ [0]_{3 \times 3} \end{array} \right] \\ \leftarrow \Gamma_{H(j)-1}(j) \\ \leftarrow \Gamma_{H(j)-2}(j) \\ \vdots \\ \leftarrow \Gamma_2(j) \\ \leftarrow \Gamma_1(j) \\ \leftarrow \Gamma_0(j) = j \\ \vdots \\ \leftarrow n_{sol} \end{array} \end{array} \quad (4.241)$$

$[\Lambda^{i(j)}]$ étant la matrice antisymétrique du vecteur $\{\rho^{i(j)}\}^T [N]^T$, $[0]_{3 \times 3}$ la matrice nulle de dimension 3×3 . On pose :

$$[V_w^{i(j)}] = [W] [V^{i(j)}] \quad (4.242)$$

- $[\omega^j]$ est la matrice vitesse angulaire partielle de B^j par rapport à \mathfrak{R}^0 , $[1]_{3 \times 3}$ étant la matrice identité de dimension 3×3 :

$$\begin{array}{c}
\text{position de chaque} \\
\text{matrice de passage : } \downarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
[1]_{3 \times 3} \\
[S^{\Gamma_{H(j)-1}(j)} 0] \\
\vdots \\
[S^{\Gamma_1(j)} 0] \\
[0]_{3 \times 3} \\
\vdots \\
[0]_{3 \times 3}
\end{array} \right]
\begin{array}{c}
\leftarrow \Gamma_{H(j)-1}(j) \\
\leftarrow \Gamma_{H(j)-2}(j) \\
\vdots \\
\leftarrow j \\
\vdots \\
\vdots \\
\leftarrow n_{sol}
\end{array}
\quad (4.243)$$

– $[V_e^{i(j)}]$ est la matrice partielle associée à $\{\rho\}$:

$$\begin{array}{c}
\text{position de chaque} \\
\text{matrice de passage : } \downarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
[0]_{6 \times 3} \\
[0]_{6 \times 3} \\
\vdots \\
[N]^T [S^{j0}] \\
\vdots \\
[0]_{6 \times 3}
\end{array} \right]
\begin{array}{c}
\leftarrow 1, 1 \\
\leftarrow 1, 2 \\
\vdots \\
\leftarrow j, i \\
\vdots \\
\leftarrow n_{sol}, n_{elt}^{n_{sol}}
\end{array}
\quad (4.244)$$

Pour déterminer l'accélération du centre de masse de l'élément i de B^j , on calcule donc la dérivée de la vitesse (4.240) de ce même point telle que :

$$\{a^{i(j)}\}^T = \{\ddot{x}\}^T [V_w^{i(j)}] + \{\dot{x}\}^T [\dot{V}_w^{i(j)}] + \{\ddot{q}\}^T [\omega^j] + \{\dot{q}\}^T [\dot{\omega}^j] + \{\ddot{\rho}\}^T [V_e^{i(j)}] + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{V}_e^{i(j)}] \quad (4.245)$$

La vitesse angulaire de l'élément i de B^j est construite de la même façon que dans le *paragraphe 4.2.1.8* :

$$\{\omega^{i(j)}\}^T = \{\dot{x}\}^T [\omega^j] + \{\dot{\rho}\}^T [\omega^{i(j)}] \quad (4.246)$$

où la matrice partielle $[\omega^{i(j)}]$ s'écrit :

$$\begin{array}{c}
\text{position de chaque} \\
\text{matrice de passage : } \downarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
[0]_{6 \times 3} \\
[0]_{6 \times 3} \\
\vdots \\
[\psi]^T [S^{j0}] \\
\vdots \\
[0]_{6 \times 3}
\end{array} \right]
\begin{array}{c}
\leftarrow 1, 1 \\
\leftarrow 1, 2 \\
\vdots \\
\leftarrow j, i \\
\vdots \\
\leftarrow n_{sol}, n_{elt}^{n_{sol}}
\end{array}
\quad (4.247)$$

$[\psi]$ étant la matrice d'interpolation due aux rotations (*Annexe G*). L'expression (4.246) est ensuite dérivée pour obtenir l'accélération angulaire :

$$\{\dot{\omega}^{i(j)}\}^T = \{\ddot{x}\}^T [\omega^j] + \{\dot{x}\}^T [\dot{\omega}^j] + \{\ddot{\rho}\}^T [\omega^{i(j)}] + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{\omega}^{i(j)}] \quad (4.248)$$

Les différentes matrices partielles (4.241), (4.243), (4.244) et (4.247) vont permettre de construire les coefficients de l'équation différentielle du comportement du système multicorps souple.

4.3.3 Force d'inertie généralisée

Les équations définies dans la *section 4.2.1* sur les corps rigides sont réutilisées et chaque élément nodal d'un corps souple est assimilé à un élément rigide. Ainsi la force d'inertie généralisée de l'élément i de B^j , de masse $m^{i(j)}$, a alors pour expression :

$$\begin{cases} \{F_x^{*i(j)}\} &= -m^{i(j)} \{a^{i(j)}\} \cdot \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{x}_l} \text{ pour } l = 1, \dots, 3n_{sol} \\ \{F_q^{*i(j)}\} &= -m^{i(j)} \{a^{i(j)}\} \cdot \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{q}_m} \text{ pour } m = 1, \dots, 3n_{sol} \\ \{F_\rho^{*i(j)}\} &= -m^{i(j)} \{a^{i(j)}\} \cdot \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{\rho}_s} \text{ pour } s = 1, \dots, 6n_{elt}^{tot} \end{cases} \quad (4.249)$$

où $\{F_x^{*i(j)}\}$, $\{F_q^{*i(j)}\}$ et $\{F_\rho^{*i(j)}\}$ représentent respectivement les forces d'inertie de l'élément $i(j)$ relatives aux rotations du MC $\{x\}$, aux centres de masse du MC $\{q\}$, et aux déformations nodales $\{\rho\}$. Les termes $\frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{x}_l}$, $\frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{q}_m}$ et $\frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{\rho}_s}$, $\frac{\partial \{\omega^{i(j)}\}}{\partial \dot{x}_l}$ sont déterminés à partir de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{x}} &= [V_w^{i(j)}] \\ \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{q}} &= [\omega^j] \\ \frac{\partial \{v^{i(j)}\}}{\partial \dot{\rho}} &= [V_e^{i(j)}] \end{cases} \quad (4.250)$$

Les trois vecteurs rentrant dans la composition de la force d'inertie s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{F_x^{*i(j)}\}^T &= -m^{i(j)} \left\{ [\ddot{x}]^T [V_w^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T + \{\dot{x}\}^T [\dot{V}_w^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T \right. \\ &\quad - + [\ddot{q}]^T [\omega^j] [V_w^{i(j)}]^T + \{\dot{q}\}^T [\dot{\omega}^j] [V_w^{i(j)}]^T + \\ &\quad \left. + [\ddot{\rho}]^T [V_e^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{V}_e^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T \right\} \end{aligned} \quad (4.251)$$

$$\begin{aligned} \{F_q^{*i(j)}\}^T &= -m^{i(j)} \left\{ [\ddot{x}]^T [V_w^{i(j)}] [\omega^j]^T + \{\dot{x}\}^T [\dot{V}_w^{i(j)}] [\omega^j]^T \right. \\ &\quad + [\ddot{q}]^T [\omega^j] [\omega^j]^T + \{\dot{q}\}^T [\dot{\omega}^j] [\omega^j]^T + \\ &\quad \left. + [\ddot{\rho}]^T [V_e^{i(j)}] [\omega^j]^T + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{V}_e^{i(j)}] [\omega^j]^T \right\} \end{aligned} \quad (4.252)$$

et :

$$\begin{aligned} \{F_\rho^{*i(j)}\}^T &= -m^{i(j)} \left\{ [\ddot{x}]^T [V_w^{i(j)}] [V_e^{i(j)}]^T + \{\dot{x}\}^T [\dot{V}_w^{i(j)}] [V_e^{i(j)}]^T \right. \\ &\quad + [\ddot{q}]^T [\omega^j] [V_e^{i(j)}]^T + \{\dot{q}\}^T [\dot{\omega}^j] [V_e^{i(j)}]^T + \\ &\quad \left. + [\ddot{\rho}]^T [V_e^{i(j)}] [V_e^{i(j)}]^T + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{V}_e^{i(j)}] [V_e^{i(j)}]^T \right\} \end{aligned} \quad (4.253)$$

De plus, la force d'inertie généralisée à partir de la contribution du moment d'inertie généralisée de l'élément i de B^j a pour expression :

$$\begin{cases} \{FM_x^{*i(j)}\} = \{M^{*i(j)}\} \cdot \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{x}_l} \text{ pour } l = 1, \dots, 3n_{sol} \\ \{FM_q^{*i(j)}\} = \{M^{*i(j)}\} \cdot \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{q}_m} \text{ pour } m = 1, \dots, 3n_{sol} \\ \{FM_\rho^{*i(j)}\} = \{M^{*i(j)}\} \cdot \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{\rho}_s} \text{ pour } s = 1, \dots, 6n_{elt}^{tot} \end{cases} \quad (4.254)$$

où $\{FM_x^{*i(j)}\}$, $\{FM_q^{*i(j)}\}$ et $\{FM_\rho^{*i(j)}\}$ représentent respectivement les moments d'inertie généralisées de l'élément i (j) relatives aux rotations du MC $\{x\}$, aux centres de masse du MC $\{q\}$, et aux déformations nodales $\{\rho\}$. Les termes $\frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{x}_l}$, $\frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{q}_m}$ et $\frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{\rho}_s}$ sont déterminés à partir de :

$$\begin{cases} \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{x}_l} = [\omega^j] \\ \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{q}_m} = 0 \\ \frac{\partial\{\omega^{i(j)}\}}{\partial\dot{\rho}_s} = [\omega^{i(j)}] \end{cases} \quad (4.255)$$

A partir de l'expression du moment d'inertie vue dans le *paragraphe 4.2.3.2*, les trois vecteurs rentrant dans la composition de la force d'inertie dérivant de ce moment s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{FM_x^{*i(j)}\}^T &= -\left(\{\ddot{x}\}^T [\omega^j] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T + \{\dot{x}\}^T [\dot{\omega}^j] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T\right) \\ &\quad - \{\dot{x}\}^T [\omega^j] [I^{i(j)}] [\Omega_x^{j0}] [\omega^j]^T + \\ &\quad - \left(\{\ddot{\rho}\}^T [\omega^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{\omega}^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T\right) \\ &\quad - \{\dot{\rho}\}^T [\omega^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\Omega_\rho^{j0}] [\omega^j]^T \end{aligned} \quad (4.256)$$

$$\{FM_q^{*i(j)}\}^T = \{0_3\}^T \quad (4.257)$$

et :

$$\begin{aligned} \{FM_\rho^{*i(j)}\}^T &= -\left(\{\ddot{x}\}^T [\omega^j] [I^{i(j)}] [\omega^{ji}]^T + \{\dot{x}\}^T [\dot{\omega}^j] [I^{i(j)}] [\omega^{i(j)}]^T\right) \\ &\quad - \{\dot{x}\}^T [\omega^j] [I^{i(j)}] [\Omega_x^{j0}] [\omega^{i(j)}]^T + \\ &\quad - \left(\{\ddot{\rho}\}^T + \{\dot{\rho}\}^T [\dot{\omega}^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\omega^{i(j)}]^T\right) - \{\dot{\rho}\}^T [\omega^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\Omega_\rho^{j0}] [\omega^{ji}]^T \end{aligned} \quad (4.258)$$

La force d'inertie généralisée est composée des forces d'inertie (4.251) à (4.253) et des moments d'inertie (4.256) à (4.258) :

$$\begin{cases} \{f_x^{*i(j)}\} = \{F_x^{*i(j)}\} + \{FM_x^{*i(j)}\} \\ \{f_q^{*i(j)}\} = \{F_q^{*i(j)}\} + \{FM_q^{*i(j)}\} \\ \{f_\rho^{*i(j)}\} = \{F_\rho^{*i(j)}\} + \{FM_\rho^{*i(j)}\} \end{cases} \quad (4.259)$$

Elles doivent être intégrées sur un élément de volume $V^{i(j)}$, puis ensuite sommées sur l'ensemble des éléments i de tous les corps j :

$$\{f_x^*\} = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \{f_x^{*i(j)}\} dV \quad (4.260)$$

$$\{f_q^*\} = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \{f_q^{*i(j)}\} dV \quad (4.261)$$

$$\{f_\rho^*\} = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \{f_\rho^{*i(j)}\} dV \quad (4.262)$$

Des précisions supplémentaires sur la méthode d'intégration permettent de ramener celle-ci à une intégration sur un élément de longueur (*Annexe H*). Le vecteur force d'inertie généralisée $\{f^*\}$ regroupant tous les termes (4.260), (4.261) et (4.262) s'écrit alors :

$$\{f^*\} = \left\{ \begin{array}{l} \{f_x^*\} \\ \{f_q^*\} \\ \{f_\rho^*\} \end{array} \right\} \quad (4.263)$$

4.3.4 Equation de mouvement

D'après l'équation de mouvement déterminée par le formalisme de Kane (4.124) :

$$\{f\} + \{f^*\} = \{0\} \quad (4.264)$$

cette force d'inertie généralisée vérifie donc une équation différentielle du second ordre sous la forme suivante :

$$[M] \{\ddot{y}_g\} + [C] \{\dot{y}_g\} + [K] \{y_g\} = \{f\} \quad (4.265)$$

en fonction de :

$$\{y_g\} = \left\{ \begin{array}{l} \{x\} \\ \{q\} \\ \{\rho\} \end{array} \right\} \quad (4.266)$$

et où :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & & \text{sym.} \\ [M_{21}] & [M_{22}] & \\ [M_{31}] & [M_{32}] & [M_{33}] \end{bmatrix} \quad (4.267)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & [C_{13}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] & [C_{23}] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] \end{bmatrix} \quad (4.268)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}] \end{bmatrix} \quad (4.269)$$

Lorsqu'on intègre, sur un élément de volume, les expressions (4.259), puis qu'on les somme sur l'ensemble des corps, on obtient alors les composantes matricielles des expressions (4.267) à (4.269) :

$$[M_{11}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_w^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T + [\omega^j] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T \right) dV \quad (4.270)$$

$$[M_{21}] = [M_{12}]^T = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [V_w^{i(j)}] [\omega^j]^T dV \quad (4.271)$$

$$[M_{31}] = [M_{13}]^T = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T + [\omega^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T \right) dV \quad (4.272)$$

$$[M_{22}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [\omega^j] [\omega^j]^T \right) dV \quad (4.273)$$

$$[M_{32}] = [M_{23}]^T = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [\omega^j]^T \right) dV \quad (4.274)$$

$$[M_{33}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [V_e^{i(j)}]^T + [\omega^{i(j)}] [I^{i(j)}] [\omega^{i(j)}]^T \right) dV \quad (4.275)$$

$$[C_{11}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_w^{i(j)}] [\dot{V}_w^{i(j)}]^T + [\omega^j] \left([I^{i(j)}] [\dot{\omega}^j]^T + [\Omega_x^{0j}] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T \right) \right) dV \quad (4.276)$$

$$[C_{12}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [V_w^{i(j)}] [\dot{\omega}^j]^T dV \quad (4.277)$$

$$[C_{13}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [\dot{V}_e^{i(j)}] [V_w^{i(j)}]^T + [\omega^j] \left([I^{i(j)}] [\dot{\omega}^{i(j)}]^T + [\Omega_\rho^{0j}] [I^{i(j)}] [\omega^{i(j)}]^T \right) \right) dV \quad (4.278)$$

$$[C_{21}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [\omega^j] [\dot{V}_w^{i(j)}]^T dV \quad (4.279)$$

$$[C_{22}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [\omega^j] [\dot{\omega}^j]^T dV \quad (4.280)$$

$$[C_{23}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [\omega^j] [\dot{V}_e^{i(j)}]^T dV \quad (4.281)$$

$$[C_{31}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [\dot{V}_w^{i(j)}]^T + [\omega^{i(j)}] \left([I^{i(j)}] [\dot{\omega}^j]^T + [\Omega_x^{0j}] [I^{i(j)}] [\omega^j]^T \right) \right) dV \quad (4.282)$$

$$[C_{32}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [\dot{\omega}^j]^T dV \quad (4.283)$$

$$[C_{33}] = \sum_j \sum_i \int_{V^{i(j)}} \left(m^{i(j)} [V_e^{i(j)}] [\dot{V}_e^{i(j)}]^T + [\omega^{i(j)}] \left([I^{i(j)}] [\dot{\omega}^{i(j)}] + [\Omega_\rho^{0j}] [I^{i(j)}] [\omega^{i(j)}]^T \right) \right) dV \quad (4.284)$$

$$[K_{33}] = [K_S] + [K_G] \quad (4.285)$$

où $[K_S]$ est la matrice de rigidité ordinaire de l'élément et $[K_G]$ la matrice des contributions des rigidités géométriques, composée de termes non-linéaires.

4.3.5 Réduction de l'équation de mouvement sur une base modale

Parmi l'ensemble des méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre cette équation différentielle du second ordre (4.265) relative aux déplacements nodaux, deux peuvent être raisonnablement choisies :

- soit celle des éléments finis pour résoudre le système suivant :

$$[MG] \{\rho\} = \{VS\} \quad (4.286)$$

où $[MG]$ est la matrice globale, $\{VS\}$ le vecteur global des sollicitations et $\{\rho\}$ celui de toutes les variables nodales du problème,

- soit celle de superposition modale transformant le système couplé (4.286) en un système découplé grâce à la transformation :

$$\{\rho\} = [MVP] \{VMP\} \quad (4.287)$$

où $[MVP]$ est constitué par les n_{vp} premiers vecteurs propres et $\{VMP\}$ est le vecteur des coordonnées modales. Ainsi le vecteur des variables nodales $\{\rho\}$ est une combinaison linéaire des n_{vp} premiers vecteurs propres.

Même si la méthode des éléments finis n'est pas forcément longue à développer, elle doit être intégrée à chaque pas de temps de l'étude, ce qui peut être coûteuse en temps au bout du compte. Si la méthode de superposition modale est choisie, la base modale obtenue est calculée une seule fois pour résoudre le problème au cours du temps. De plus, dans le cas de l'éolienne⁷, la méthode de superposition semble la plus adaptée. En effet, même si les matrices masse et rigidité sont très grosses (1000 *ddl* si le nombre de noeuds pour les pales est important), quelques degrés de liberté (environ une vingtaine par exemple) vont permettre d'extraire les n_{vp} premiers modes propres. Ainsi la déformation obtenue par combinaison linéaire des modes propres ne représentera environ que 95% de celle du comportement élastique réel de la pale. De plus, les modes propres peuvent être obtenus expérimentalement, si les résultats doivent être vérifiés.

Donc, finalement, pour des raisons pratiques, la méthode de superposition modale est choisie. Pour cela, l'élément d'amortissement n'est pas pris en compte et la méthode du sous-espace (MSE) est utilisée. Elle permet donc de calculer les n_{vp} premières valeurs (modes) propres d'un système à grandes dimensions [7] qui vérifie l'équation sans matrice d'amortissement :

$$\lambda^i [M] \{X^i\} = [K] \{X^i\} = \{F^i\} \quad (4.288)$$

où λ^i est une des valeurs propres de cette équation et X^i son vecteur propre associé de dimension n (*Annexe I*). Cette technique détermine aussi les n_{vp} premiers vecteurs propres correspondant à ces valeurs [7] qui vont permettre ensuite de retrouver les coordonnées nodales par combinaison linéaire.

⁷Pour la tour qui ne se déplace que de quelques centimètres par grand vent, un ou deux modes propres sont nécessaires

L'annexe G montre comment construire les matrices masse et rigidité de chaque élément $i(j)$, à partir de certains termes tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x^{i(j)} : \text{Moment d'inertie selon l'axe } x \\ J_y^{i(j)} : \text{Moment d'inertie selon l'axe } y \\ J_z^{i(j)} : \text{Moment d'inertie selon l'axe } z \\ E^{i(j)} : \text{Module d'Young} \\ G^{i(j)} : \text{Module d'élasticité} \\ A^{i(j)} : \text{Aire} \\ L^{i(j)} : \text{Longueur} \\ m_l^{i(j)} : \text{Masse linéique} \\ m_v^{i(j)} : \text{Masse volumique} \end{array} \right. \quad \text{de l'élément } i(j) \quad (4.289)$$

A partir de ces matrices et de la méthode du sous-espace, la matrice des premiers vecteurs propres $[VP^j]$ est obtenue et correspond aux valeurs propres ou coordonnées modales $\{\eta^j\}$ de chaque solide B^j . Par la suite, le vecteur qui regroupe les coordonnées nodales du solide B^j peut être retrouvé tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\rho^{j,1}\}^T \\ \{\rho^{j,2}\}^T \\ \dots \\ \{\rho^{j,n_{noeud}^j}\}^T \end{array} \right\}_{1 \times 6n_{noeud}^j}^T = \{\eta^j\}_{1 \times n_{vp}}^T [VP^j]_{n_{vp} \times 6n_{noeud}^j}^T \quad (4.290)$$

Ainsi, le vecteur général des coordonnées nodales $\{\rho\}$ s'écrit à partir de la matrice regroupant tous les vecteurs propres $[VP]$:

$$[VP] = \begin{bmatrix} [VP^1] & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & [VP^j] & [0] & & \\ & & [0] & \ddots & & \\ & & & & & [VP^{n_{sol}}] \end{bmatrix} \quad (4.291)$$

par l'intermédiaire de l'ensemble des coordonnées modales $\{\eta\}$:

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \{\eta^1\} \\ \vdots \\ \{\eta^{n_{sol}}\} \end{Bmatrix} \quad (4.292)$$

Ces coordonnées modales substituées aux coordonnées nodales sont réintégrées à l'équation différentielle (4.265) qui pourra maintenant être intégrée numériquement, à chaque pas de temps, avec les algorithmes de Runge-Kutta et Adams présentés dans la section 4.2.

4.3.6 Conclusion

Moyennant la connaissance du comportement élastique des corps souples (principalement le mât et les pales), ce travail montre que le formalisme en corps souples n'est qu'une extension de celui des corps rigides. La déformation élastique des corps souples est déterminée par passage à une base modale car le modèle équivalent est plus simple à traiter pour le cas de l'éolienne. De plus, le nombre important de *ddl* de l'étude initiale est réduit à quelques uns par détermination des n_{vp} premiers modes propres.

4.4 Calcul des efforts aérodynamiques

Jusqu' alors, on a introduit seulement les forces généralisées, comprenant les forces implicites (Coriolis, Centrifuge) et celles dérivant d'un potentiel (forces de gravité), dans la modélisation dynamique d'un système multicorps. Cependant, des forces suiveuses, d'origine aérodynamiques, agissent sur le rotor et ne peuvent être modélisées qu'à l'aide de procédures spécifiques. Cette étude a déjà fait l'objet d'un travail précédent [2].

Avant tout, il est indispensable d'introduire certaines données et coefficients pour permettre le calcul des forces aérodynamiques.

4.4.1 Description de la géométrie du rotor

Repère	Centre	Axes	Translation	Rotation
\mathfrak{R}^{RF}	O^{moy}	$\left[\begin{array}{ccc} \overrightarrow{O^{moy} X^{RF}} & \overrightarrow{O^{moy} Y^{RF}} & \overrightarrow{O^{moy} Z^{RF}} \end{array} \right]$		
\mathfrak{R}^{RT}	O^{moy}	$\left[\begin{array}{ccc} \overrightarrow{O^{moy} X^{RT}} & \overrightarrow{O^{moy} Y^{RT}} & \overrightarrow{O^{moy} Z^{RT}} \end{array} \right]$		$\Omega t \overrightarrow{X^{RF}}$
\mathfrak{R}^{PP}	O^{PP}	$\left[\begin{array}{ccc} \overrightarrow{O^{PP} X^{PP}} & \overrightarrow{O^{PP} Y^{PP}} & \overrightarrow{O^{PP} Z^{PP}} \end{array} \right]$	$R_{pied} \overrightarrow{Z^{RT}}$	$\beta_c \overrightarrow{Z^{RT}}$
\mathfrak{R}^{Lp}	O^{Sp}	$\left[\begin{array}{ccc} \overrightarrow{O^{Sp} X^{Lp}} & \overrightarrow{O^{Sp} Y^{Lp}} & \overrightarrow{O^{Sp} Z^{Lp}} \end{array} \right]$	$r \overrightarrow{Z^{PP}}$	$\frac{\pi}{2} \overrightarrow{Z^{PP}} - \frac{\pi}{2} \overrightarrow{Y^{PP}}$
\mathfrak{R}^{Sp}	O^{Sp}	$\left[\begin{array}{ccc} \overrightarrow{O^{Sp} X^{Sp}} & \overrightarrow{O^{Sp} Y^{Sp}} & \overrightarrow{O^{Sp} Z^{Sp}} \end{array} \right]$		$\beta_v \overrightarrow{X^{Lp}}$

TAB. 4.13 – Définition des repères liés à la pale

Avant de modéliser le comportement aérodynamique du rotor, il est indispensable de décrire les caractéristiques d'une pale qui vont conditionner les efforts aérodynamiques.

La *figure 4.23* représente les repères liés à la pale et définis dans le *tableau 4.13*. Chaque transformation passe d'un repère plus général vers un repère local :

- (a) \mathfrak{R}^{RF} , soit $(O^{moy}, X^{RF}, Y^{RF}, Z^{RF})$, du rotor lié au moyeu, fixe dans le temps, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} O^{moy} \text{ centre de rotation du moyeu} \\ \overrightarrow{X^{RF}} \text{ pointe vers l'avant, parallèle à l'axe du moyeu} \\ \overrightarrow{Y^{RF}} \text{ parallèle au sol} \\ \overrightarrow{Z^{RF}} \text{ perpendiculaire à } \overrightarrow{X^{RF}} \text{ et } \overrightarrow{Y^{RF}}, \text{ pointe vers le haut} \end{array} \right.$$

- (b) \mathfrak{R}^{RT} , soit $(O^{moy}, X^{RT}, Y^{RT}, Z^{RT})$, obtenu avec une rotation d'angle Ωt autour de $\overrightarrow{X^{RT}}$ par rapport à \mathfrak{R}^{RF} ,
- (c) \mathfrak{R}^{PP} , soit $(O^{PP}, X^{PP}, Y^{PP}, Z^{PP})$, est lié au pied de pale, obtenu par une rotation d'angle β_c autour de l'axe $\overrightarrow{Z^{RT}}$, où β_c est l'angle de calage de la pale ⁸ puis une translation de R_{pied} selon l'axe $\overrightarrow{Z^{RT}}$, par rapport à \mathfrak{R}^{RT} ,

⁸Angle formé par la corde du profil et l'axe longitudinal de la pale. Le contrôle de cet angle permet d'ajuster la vitesse du rotor en cas de changement de vitesse de vent afin que celle-ci soit toujours constante.

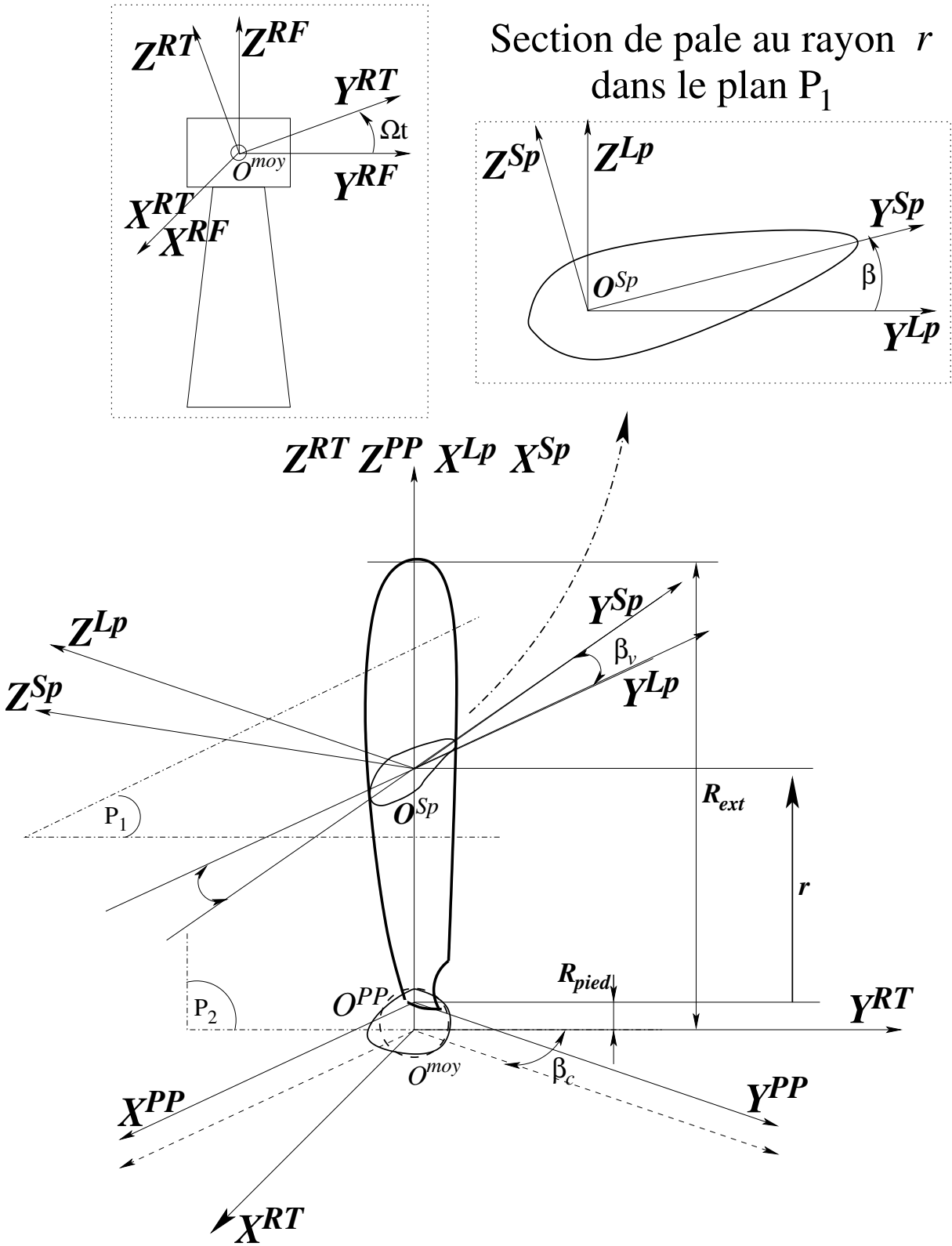


FIG. 4.23 – Position des repères liés à la pale \mathcal{R}^{RF} , \mathcal{R}^{RT} , \mathcal{R}^{PP} , \mathcal{R}^{Lp} et \mathcal{R}^{Sp}

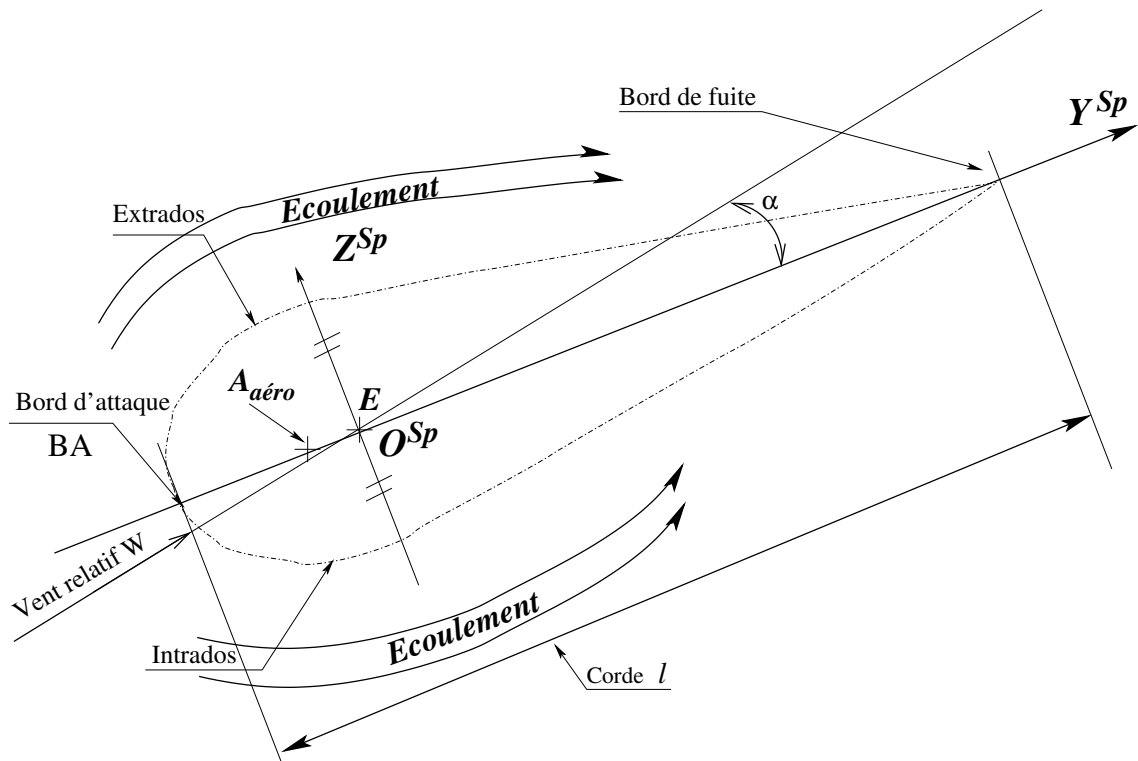


FIG. 4.24 – Profil d'une section de pale d'éolienne

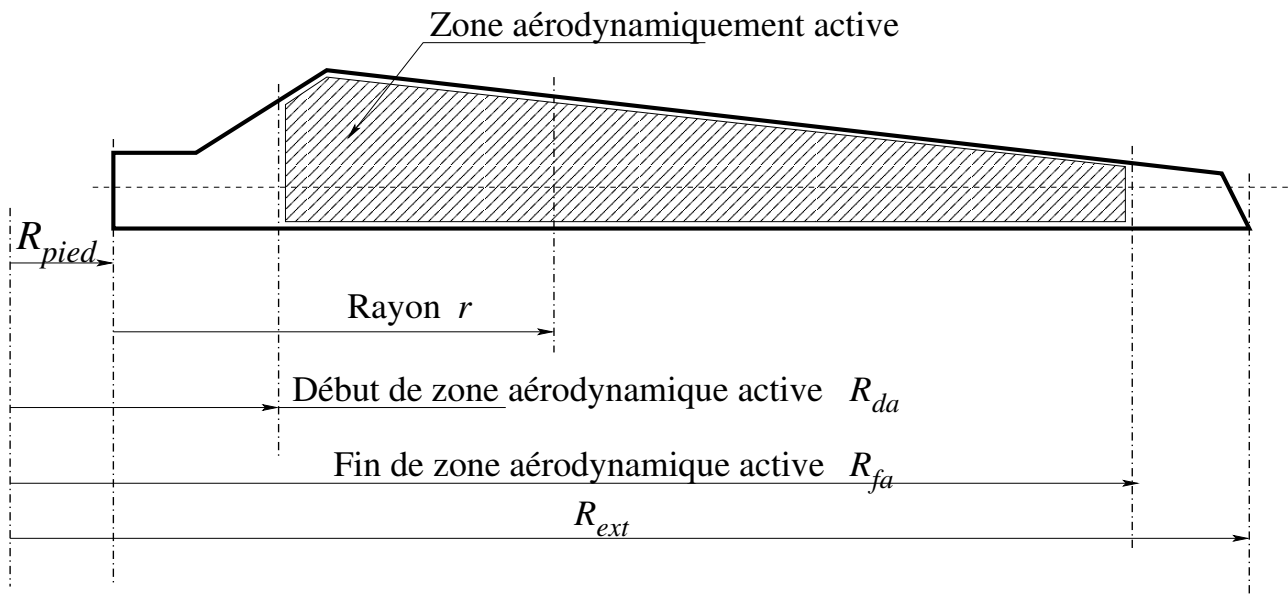


FIG. 4.25 – Description d'une pale

- (d) \mathfrak{R}^{Lp} , soit $(O^{Sp}, X^{Lp}, Y^{Lp}, Z^{Lp})$, appartient à la section de pale, où :

$$\begin{cases} O^{Sp} \text{ obtenu par translation de } r \text{ selon } \overrightarrow{Z^{P\dot{P}}} \\ \overrightarrow{X^{Lp}} \text{ parallèle à } \overrightarrow{Z^{P\dot{P}}} \\ \overrightarrow{Y^{Lp}} \text{ parallèle à } -\overrightarrow{X^{P\dot{P}}} \\ \overrightarrow{Z^{Lp}} \text{ parallèle à } -\overrightarrow{Y^{P\dot{P}}} \end{cases}$$

- (e) \mathfrak{R}^{Sp} , soit $(O^{Sp}, X^{Sp}, Y^{Sp}, Z^{Sp})$, le repère de la section de pale, obtenu par rotation d'angle de vrillage ⁹ β_v autour de l'axe $\overrightarrow{X^{Lp}}$, par rapport à \mathfrak{R}^{Lp} .

Ces repères caractérisent des plans :

- (P_1) : Le plan de section de la pale au rayon r , perpendiculaire à l'axe $\overrightarrow{X^{Lp}}$ et défini par les axes $\overrightarrow{Y^{Lp}}$ et $\overrightarrow{Z^{Lp}}$,
- (P_2) : le plan de rotation du rotor défini par les axes Y^{RT} et Z^{RT} .

La *figure 4.24* donne l'élément d'un profil, au rayon r , avec sa terminologie :

- L'écoulement de l'air autour du profil de la pale de l'éolienne, du bord d'attaque BA vers le bord de fuite, est plus rapide sur l'extrados (le dessus) que sur l'intrados (le dessous). La dépression résultante à l'extrados du profil crée une portance, une force qui soulève la pale vers le haut et perpendiculaire à la direction du vent.
- La corde est la distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite de la section de pale, selon la ligne de corde.
- Le foyer aérodynamique $A_{aéro}$ représente le point où le moment des forces aérodynamiques est constant [2] tel que $\overrightarrow{BA A_{aéro}}$ soit parallèle au vecteur $\overrightarrow{Y^{Sp}}$,
- Le centre élastique E [2], fonction des rigidités élastiques équivalentes de chaque phase définissant la section de pale, tel que $\overrightarrow{BA E}$ soit parallèle au vecteur $\overrightarrow{Y^{Sp}}$.

De plus, la géométrie d'un rotor requiert l'introduction des paramètres (*figures 4.23 et 4.25*) suivants :

- R_{pied} : le rayon du moyeu,
- R_{ext} : le rayon extérieur du rotor,
- β : la somme des angles de calage β_c et de vrillage β_v de chaque profil.

La pale est comprise entre R_{pied} , qui est le rayon du pied du rotor, et R_{ext} , l'extrémité de la pale. Pour une distance r telle que :

$$R_{pied} < r < R_{ext} \quad (4.293)$$

on définit la zone aérodynamiquement active pour un rayon r (*figure 4.25*) tel que :

$$R_{da} \leq r \leq R_{fa} \quad (4.294)$$

où les rayons de début R_{da} et de fin R_{fa} de zone aérodynamique active :

$$\begin{aligned} R_{da} &\geq R_{pied} \\ R_{fa} &\leq R_{ext} \end{aligned} \quad (4.295)$$

⁹Pour éviter d'endommager la pale, une loi de vrillage est alors imposée afin de réduire les écarts de portance. En effet, la portance est proportionnelle au carré de la vitesse relative, elle-même fonction du rayon et donc peut atteindre une valeur maximale en extrémité.

Cette zone aérodynamiquement active a été choisie pour simplifier les calculs où en dehors de cette zone les efforts aérodynamiques sont négligeables donc considérés comme nuls.

Pour les besoins de l'écriture du code numérique, la construction de la corde, de l'angle de vrillage, du centre élastique et du foyer aérodynamique pour une section de pale est maintenant expliquée.

4.4.2 Construction des données de la géométrie du rotor

Des données géométriques (corde, angle de vrillage, centre élastique et foyer aérodynamique) pour une section de pale sont construites dans le code numérique à partir d'une loi d'évolution polynomiale par morceaux que l'on va décrire ici.

Tout d'abord, on choisit de décrire n_{noeud} sections de pale décrits par leur rayon. Pour la section de pale au rayon r , cette section est comprise dans le n_t ^{ème} tronçon, lui-même compris entre les rayons $x_d(n_t)$ et $x_f(n_t)$. Ainsi, la corde, par exemple, qui est notée $Corde(r)$ vaut :

$$Corde(r) = \sum_{i=1}^{N_c^{corde}(n_t)} C_i^{corde}(n_t) (r - x_d^{corde}(n_t))^{i-1} \quad (4.296)$$

où $C_i^{corde}(n_t)$ correspond au i ^{ème} ($i = 1, \dots, N_c^{corde}(n_t)$) coefficient de la formule d'interpolation pour le calcul de la corde pour ce tronçon n_t . De la même façon sont calculés l'angle de vrillage et le centre élastique $E(r)$. La position du foyer aérodynamique se déduit de la longueur de la corde. En effet, la position de ce foyer est en générale représentée en pourcentage de longueur de corde : $A_{aéro}^{\%}(r)$. Pour simplifier la démarche, la courbe décrivant la loi polynomiale de ce pourcentage est une droite, ainsi la position du foyer aérodynamique par rapport au centre élastique $E(r)$ vaut :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E(r) A_{aéro}(r)} &= -\overrightarrow{BA(r) E(r)} + \overrightarrow{BA(r) A_{aéro}(r)} - \\ &= (-E(r) + A_{aéro}^{\%}(r) Corde(r)) \overrightarrow{Y^{Sp}} \end{aligned} \quad (4.297)$$

Les données géométriques du rotor et de la pale vont permettre de calculer les forces aérodynamiques. Pour cela, il est essentiel d'étudier la théorie sur l'élément de pale grâce à l'étude du triangle des vitesses, des caractéristiques aérodynamiques du profil et du calcul des vitesses induites.

4.4.3 Relation entre la vitesse du vent et la vitesse angulaire du rotor

Pour une section de pale située au rayon r (*figure 4.23*), le triangle des vitesses de la *figure 4.26* est composé de :

- V_0 la vitesse du vent infini en amont,
- $\Omega_{rot} r$ la vitesse relative du vecteur de rotation du rotor, dans la section de pale,
- W_0 la vitesse relative de l'écoulement telle que :

$$W_0 = \sqrt{V_0^2 + U_0^2} \text{ avec } U_0 = -\Omega_{rot} r \quad (4.298)$$

où :

- α_0 est l'angle d'incidence¹⁰ du profil,
- ϕ_0 , l'angle apparent du vent W_0 par rapport au plan P_2 , est donc la somme de l'angle β et de l'angle d'incidence α_0 .

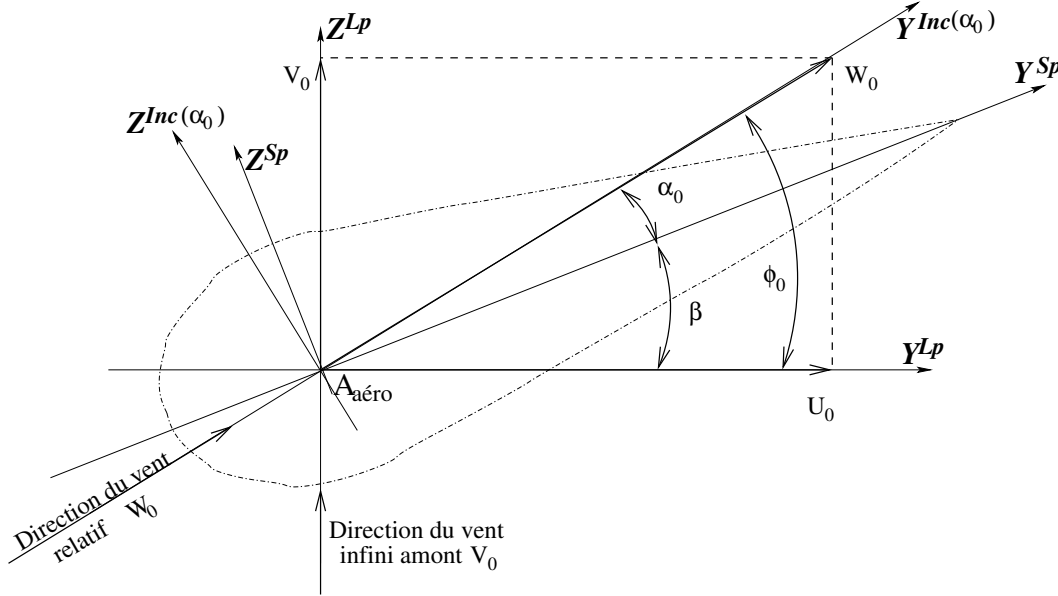


FIG. 4.26 – Diagramme des vitesses

Ainsi le repère $\mathcal{R}^{Inc(\alpha_0)}$, soit $(A^{aéro}, X^{Inc(\alpha_0)}, Y^{Inc(\alpha_0)}, Z^{Inc(\alpha_0)})$, est conçu à partir de \mathcal{R}^{Sp} avec une rotation d'angle α_0 autour de l'axe $\overrightarrow{X^{Sp}}$.

L'étape suivante est donc de déterminer les coefficients aérodynamiques afin de calculer les efforts correspondants.

4.4.4 Caractéristiques aérodynamiques d'un profil

Comme il a été dit dans la *section 3.3*, les coefficients aérodynamiques sont obtenus expérimentalement en fonction de l'angle d'incidence de l'écoulement (supposé parfaitement bidimensionnel dans le plan d'un profil) sur chaque profil de pale où :

- C_d est le coefficient de traînée,
- C_l est le coefficient de portance et
- C_m est le coefficient de tangage.

déterminant la polaire d'un profil d'une pale. Par exemple, la *figure 4.27* regroupe deux polaires. Ainsi si on connaît l'angle d'incidence α_0 du vent sur la section de pale au rayon r , d'après la courbe des polaires, on en déduit les coefficients aérodynamiques.

¹⁰ Angle formé par la direction du vent relatif et la corde du profil

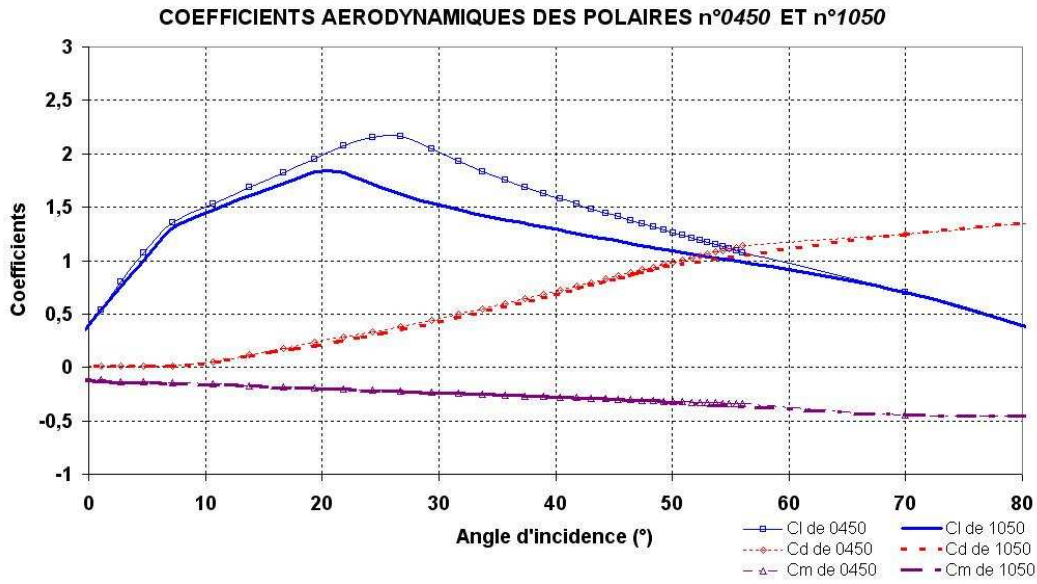


FIG. 4.27 – Diagramme des coefficients aérodynamiques C_d , C_l et C_m pour les polaires n° 0450 et n° 1050

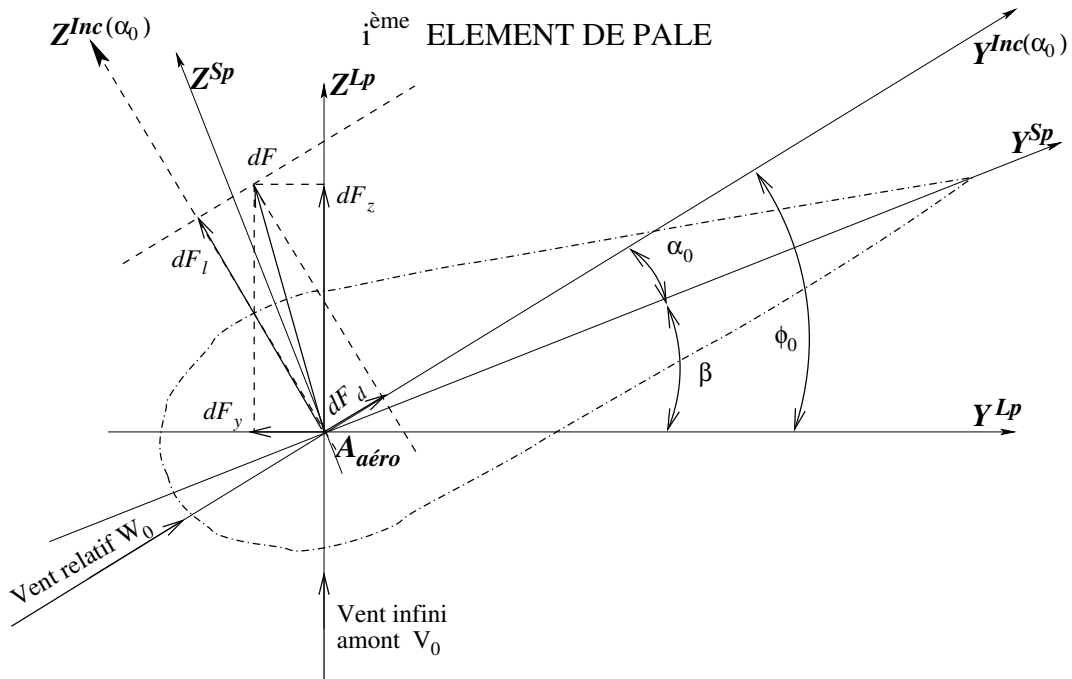


FIG. 4.28 – Diagramme des efforts subis par une pale soumis à un vent constant

Le champ de pression sur un profil de corde ℓ donne naissance à une force aérodynamique élémentaire notée \vec{dF} (figure 4.28). Elle se décompose en deux forces élémentaires d'intensités respectives \vec{dF}_d et \vec{dF}_l où :

- dF_d est la force élémentaire de traînée¹¹, selon l'axe $\overrightarrow{Y^{Inc(\alpha_0)}}$ et
- dF_l celle de portance¹², selon l'axe $\overrightarrow{Z^{Inc(\alpha_0)}}$,

qui s'expriment à l'aide des coefficients de traînée et de portance tels que [8] :

$$\begin{cases} dF_d = \frac{1}{2}\rho C_d \ell W_0^2 dr \\ dF_l = \frac{1}{2}\rho C_l \ell W_0^2 dr \end{cases} \quad (4.299)$$

où ρ est la masse volumique de l'air. Ces forces s'exercent au foyer aérodynamique du profil $A_{aéro}$. Ce foyer est le point pour lequel le moment de tangage est élémentaire dM est nul tel que :

$$dM = \frac{1}{2}C_m \rho \ell W_0^2 dr \quad (4.300)$$

avec C_m le coefficient de tangage. C'est la raison pour laquelle les efforts aérodynamiques vont donc être écrits dans un repère dont le centre sera $A_{aéro}$.

Cependant, cette analyse suppose que l'envergure de la pale est infinie. L'étude suivante est donc une extension de ce qui précède où l'envergure de la pale est finie.

4.4.5 Méthode de calcul des vitesses induites (Glauert)

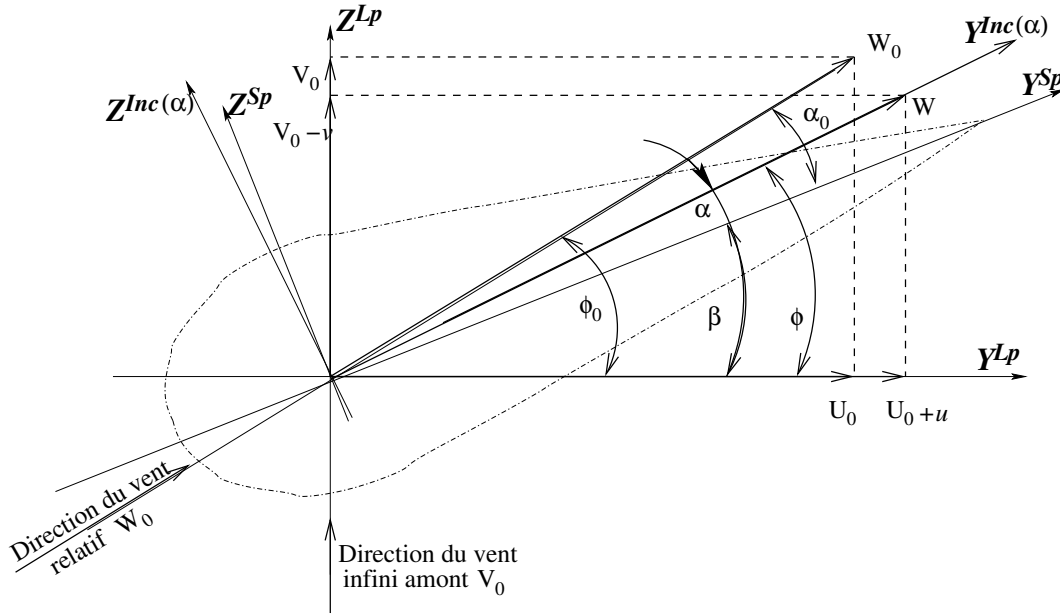


FIG. 4.29 – Diagramme des vitesses avec les vitesses induites

Comme il a été expliqué dans la *section 3.2*, une nappe tourbillonnaire est présente du bord de fuite vers l'infini aval de l'écoulement, en raison de l'envergure finie de la pale et du sillage du rotor. La vitesse W_0 relative de l'écoulement autour d'un profil doit alors être

¹¹Force parallèle et opposée à l'écoulement

¹²Force perpendiculaire à l'écoulement

corrigée par la composante de la vitesse induite. Cette vitesse induite est divisée en deux composantes tangentielle u et axiale v . Selon la théorie de l'élément de pale, les composantes des vitesses induites u et v sont prises en compte dans le calcul de la vitesse relative du vent incident W ¹³ (*figure 4.29*) [8] :

$$W = \sqrt{(V_0 - v)^2 + (U_0 + u)^2} \quad (4.301)$$

Comme plusieurs méthodes de calcul des vitesses induites sont envisageables (*section 3.2*), celle qui est choisie dans l'écriture du code est la méthode de l'élément de pale (Glauert) car les calculs sont effectués sans approximation et de nombreux auteurs l'ont utilisés [8].

D'après la *figure 4.29*, l'angle ϕ vérifie deux équations :

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{U+u}{W} \\ \sin \phi = \frac{V_0-v}{W} \end{cases} \text{ soit } \tan \phi = \frac{U+u}{V_0-v} \quad (4.302)$$

On en déduit l'angle d'incidence α :

$$\alpha = \phi - \beta \quad (4.303)$$

En introduisant le coefficient de solidité local du rotor γ :

$$\gamma = \frac{n_{pale} \ell}{2\pi r} \quad (4.304)$$

et le facteur de pertes en extrémité donné par Prandtl F :

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left[\exp \left(-\frac{n_{pale}(R-r)}{2r \sin \phi} \right) \right] \quad (4.305)$$

les relations liant les données précédentes aux vitesses induites u et v donnent :

$$\begin{cases} u = U_0 \frac{\gamma C_{Fy}}{4F \sin \phi \cos \phi - \gamma C_{Fy}} \\ v = V_0 \frac{\gamma C_{Fz}}{4F \sin^2 \phi + \gamma C_{Fz}} \end{cases} \quad (4.306)$$

où les coefficients axial et tangentiel obtenus pour un angle d'incidence α (*section 4.4.4*) sont écrits dans le repère $(A_{aéro}, X^{Lp}, Y^{Lp}, Z^{Lp})$:

$$\begin{cases} C_{Fz} = C_l \cos \phi + C_d \sin \phi \\ C_{Fy} = C_l \sin \phi - C_d \cos \phi \end{cases} \quad (4.307)$$

Dans le code, le calcul des vitesses induites au rayon r étudié décrit dans l'organigramme de la *figure 4.30*. La première étape est d'initialiser les vitesses induites u et v :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad (4.308)$$

Puis à chaque pas i , l'algorithme calcule et construit différents termes :

¹³ v se retranche à V_0 car le rotor éolien prélève de l'énergie cinétique au fluide qui le traverse. u s'ajoute à U_0 car le fluide est entraîné dans le sens de rotation de celui de l'hélice aéromotrice [8].

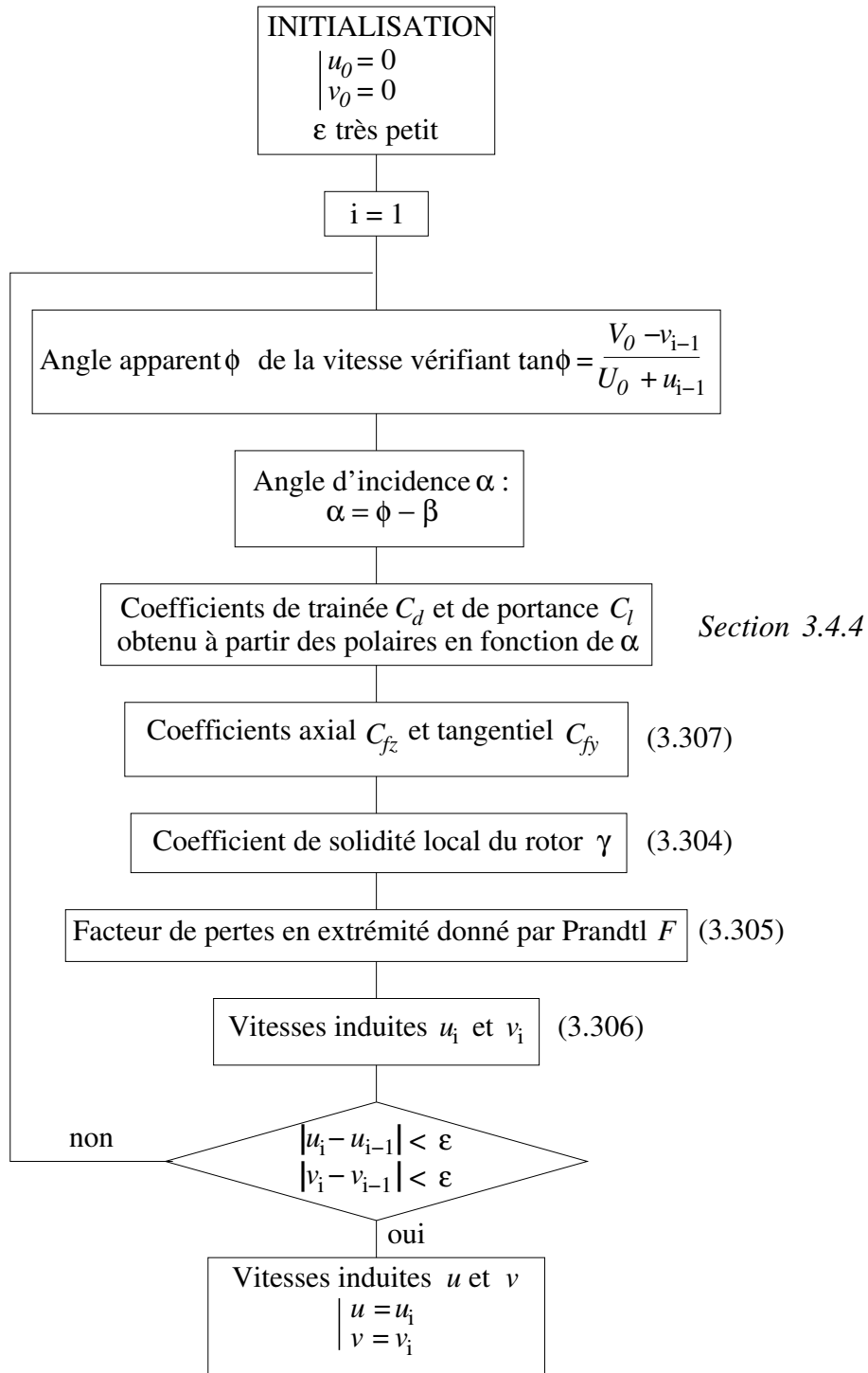


FIG. 4.30 – Organigramme du calcul des vitesses induites u et v

1. l'angle apparent ϕ de la vitesse vérifiant :

$$\tan \phi = \frac{V_0 - v_{i-1}}{U_0 + u_{i-1}} \quad (4.309)$$

2. l'angle d'incidence α :

$$\alpha = \phi - \beta \quad (4.310)$$

3. les coefficients de traînée C_d et de portance C_l à partir des polaires et de l'angle d'incidence α (*section 4.4.4*),

4. les coefficients axial C_{f_z} et tangentiel C_{f_y} donné par (4.307)

5. du coefficient de solidité local du rotor γ donné par (4.304)

6. du facteur de pertes en extrémité donné par Prandtl F donné par (4.305)

7. des vitesses induites u_i et v_i par (4.306)

8. des normes $|u_i - u_{i-1}|$ et $|v_i - v_{i-1}|$, puis il est testé si :

$$\begin{cases} |u_i - u_{i-1}| < \epsilon \\ |v_i - v_{i-1}| < \epsilon \end{cases} \quad \text{où } \epsilon \text{ est très petit} \quad (4.311)$$

si (4.311) est vérifié, l'algorithme s'arrête sinon, le calcul est repris à partir de l'étape $n^\circ 1$ au pas $i + 1$.

Ensuite, la résultante de forces aérodynamiques \overrightarrow{dF} se décompose en un effort axial dF_z et tangentiel dF_y , projection de dF_d et dF_l de $\mathfrak{R}^{Inc(\alpha)}$ dans le repère $(A_{aéro}, X^{Lp}, Y^{Lp}, Z^{Lp})$, lié à la pale et centré au foyer aérodynamique (*figure 4.29*) :

$$\begin{cases} dF_z = dF_l \cos \phi + dF_d \sin \phi \\ dF_y = dF_l \sin \phi - dF_d \cos \phi \end{cases} \quad (4.312)$$

où, d'après (4.299) et la *section 4.4.3*, dF_d et dF_l valent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{dF_d} = \frac{1}{2} \rho W^2 \ell C_d dr \overrightarrow{Y^{Inc(\alpha)}} \\ \overrightarrow{dF_l} = \frac{1}{2} \rho W^2 \ell C_l dr \overrightarrow{Z^{Inc(\alpha)}} \end{cases} \quad (4.313)$$

et dr représente la longueur de portion de pale étudié, c'est-à-dire la distance entre deux noeuds. Cependant le code projète dF_d et dF_l dans le repère \mathfrak{R}^{Sp} :

$$\begin{cases} dF_{z^{Sp}} = dF_l \cos \alpha + dF_d \sin \alpha \\ dF_{y^{Sp}} = dF_l \sin \alpha - dF_d \cos \alpha \end{cases} \quad (4.314)$$

L'algorithme de la *figure 4.31* récapitule la façon de construire la force aérodynamique s'exerçant sur chaque élément de pale. La *figure 4.32* résume le calcul de ces mêmes efforts à partir de données obtenues par le code de calcul du comportement dynamique du système étudié et leurs transformations pour leur implémentation à ce code numérique.

Comme tous les calculs ont été exécutés pour toutes les noeuds étudiés de rayon r , les coefficients sont donc moyennés pour correspondre à chaque élément défini par deux noeuds.

Cette phase de modélisation des efforts aérodynamiques permet de préciser le comportement des pales au cours du temps. Cependant, il reste à imposer certaines limites à la génératrice pour optimiser sa production d'électricité. Cette opération est établie lors de la mise sur le réseau de l'éolienne.

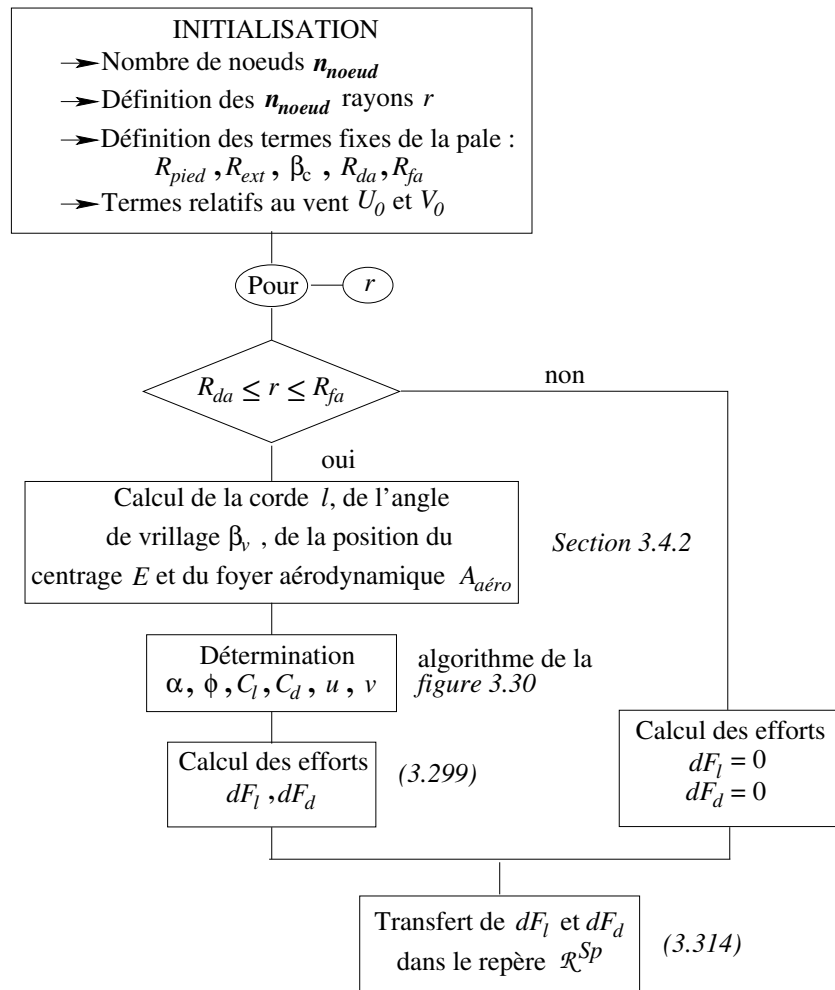


FIG. 4.31 – Organigramme du calcul des efforts de portance et de traînée projeté dans le repère \mathcal{R}^{Sp}

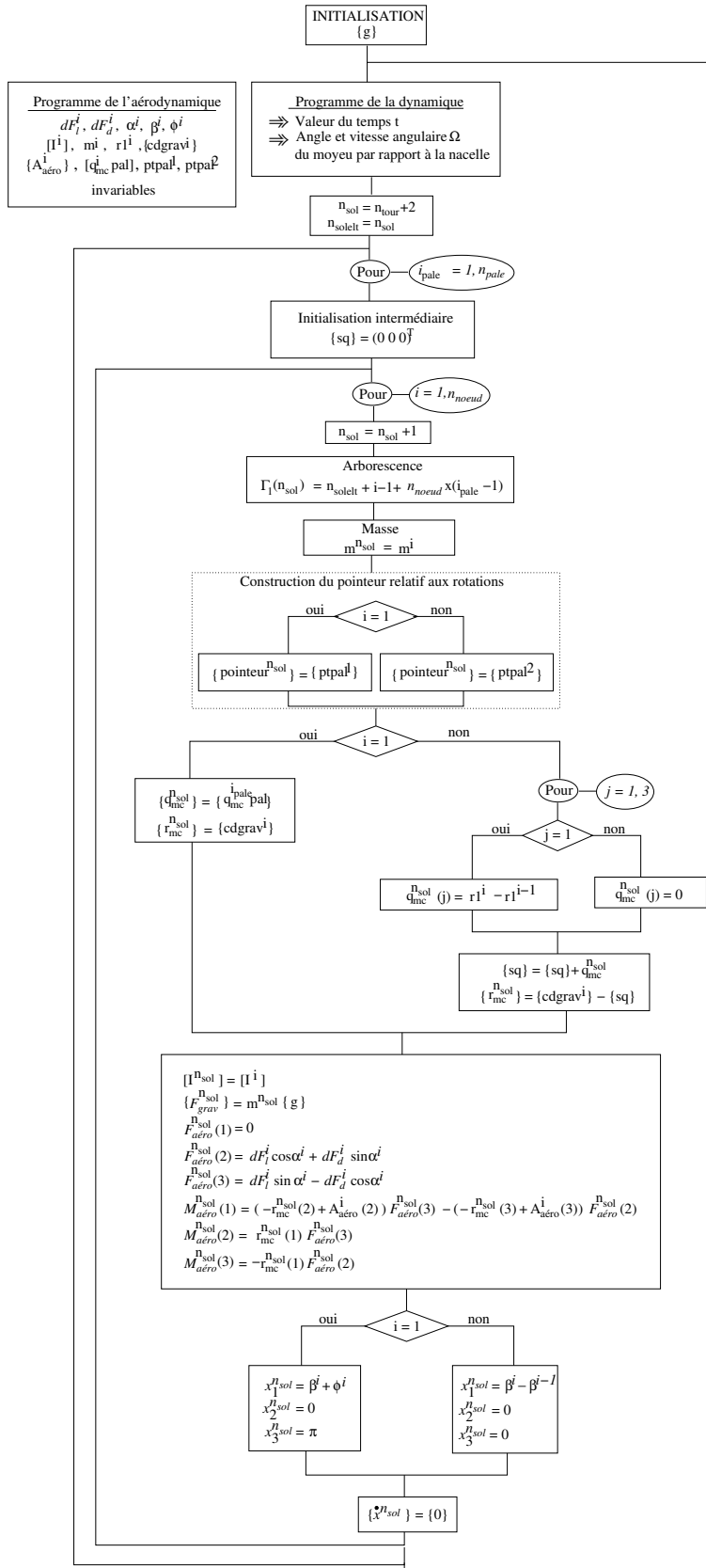


FIG. 4.32 – Organigramme du calcul des efforts aérodynamiques implémentables au code de calcul du comportement dynamique

4.5 Mise sur le réseau de la génératrice

La mise en réseau de la génératrice est soumise à certaines conditions.

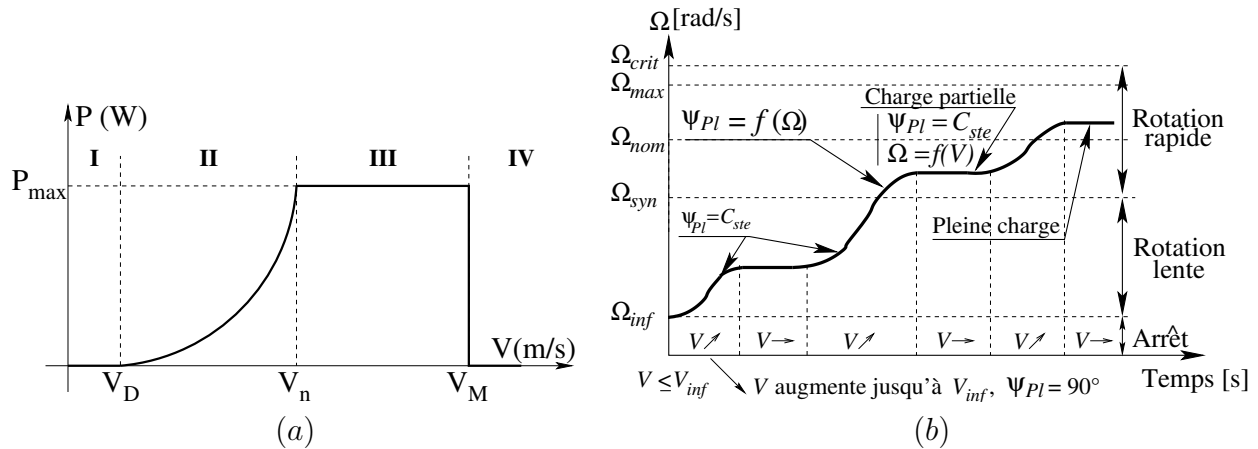


FIG. 4.33 – Diagramme de puissance utile sur l'arbre, en fonction de la vitesse du vent et les plages de fonctionnement

La *figure 4.33 (a)* représente une courbe de puissance utile produite par une génératrice, en fonction du vent, d'après [9]. La puissance nominale est propre à chaque génératrice utilisée. Cette limite correspond à une vitesse de vent particulière [9].

Ces spécificités qui restreignent le nombre de degrés de liberté sont régulées par le système de pilotage qui se scinde en deux parties, si la génératrice est asynchrone :

- l'orientation de la nacelle dans le flux du vent et
- le réglage du calage des pales avec la vitesse de rotation de la génératrice.

De plus, ce système de pilotage vérifie certaines caractéristiques, principalement sur les vitesses de rotations du rotor, du vent en amont. Ainsi, en mode normal, le fonctionnement de la génératrice est représenté sur la *figure 4.33 (b)*. Cependant, deux modes particuliers n'y sont pas inclus : arrêt de la machine en cas de conditions extrêmes (tempête, présence de glace, ...) et de dysfonctionnement.

Cette caractéristique a été traduite dans ce code numérique dans le choix de l'angle de calage. La variation de cet angle entre 0° et 90° a produit une puissance générée par la génératrice, à partir du code. Après avoir calculé les forces aérodynamiques selon les axes relatifs à chaque pale, le moment global du vent sur les pales au rotor est estimé grâce à l'évaluation de la position du centre de gravité par rapport au centre de vrillage, qui est en général à 25% du bord d'attaque. Ainsi le produit de ce moment et de la vitesse angulaire du rotor, au pied de pale, détermine la puissance produite par l'éolienne. Dans la partie qui suit, une explication pratique permet de comprendre cette technique afin de choisir précisément l'angle de calage, selon la vitesse du vent auquel est soumise l'éolienne. Cette étape permet alors de pallier la puissance pour respecter le format type de la génératrice choisie.

La connexion au réseau électrique décrite dans l'ouvrage [9] dépend du type de génératrice attribuée à l'éolienne (*section 3.3.1*).

En résumé, l'*annexe J* présente les différents vecteurs et matrices intermédiaires relatifs à l'éolienne.

Cette première partie a permis d'écrire un code de calcul pour déterminer le mouvement de chacun des solides composant le système étudié, en tenant compte de leurs caractéristiques (rigidité, souplesse, aérodynamique). Ainsi la validation de ce code suit logiquement sa conception.

Bibliographie

- [1] AMIROUCHE F.M.L., Computational methods in multibody dynamics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, The University of Illinois at Chicago, 1992
- [2] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, Thèse de doctorat de l'université de Lille I, janvier 1999
- [3] ISNARD F., Génération des équations du mouvement de systèmes polyarticulés avec prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange, Thèse de doctorat, Décembre 1997
- [4] KANE T.R., LEVINSON D.A., Dynamics : Theory and applications, McGraw-Hill Book Company, New York, 1985
- [5] SHABANA A.A., Dynamics of Multibody Systems, The University of Illinois at Chicago, Cambridge University Press, 1997
- [6] NOUGIER J.P., Méthodes de Calcul Numérique, professeur à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 3^{ième} Edition révisée, Masson Paris, 1987
- [7] DHATT G., TOUZOT G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Les presses de l'Université Québec, Maloine S.A. Paris, Université de Compiègne, 1981
- [8] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, 2^{ème} rapport d'avancement de thèse, ONERA Lille, pp 19-20, 1996
- [9] BURTON T. *et al*, Wind Energy Handbook, John Wiley & Sons Ltd, 2001
- [10] PEREZ J.P., Mécanique, points matériels, solides, fluides avec 250 exercices et problèmes résolus, 4^{ème} édition entièrement refondue et augmentée, Masson, Université Paul Sabatier et Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse, 1995

Chapitre 5

Validation du code

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le formalisme relatif aux équations de la dynamique des corps rigides et souples avec une description par arborescence topologique a été développé. Ceci a permis d'écrire un code de calcul pour déterminer le mouvement de chacun des solides composant le système. L'aérodynamique est introduit pour préciser le comportement des corps souples dans la modélisation complète de la machine étudiée. La construction de tous ces programmes relatifs à chaque modèle conduit à une deuxième étape : la validation du code de calcul.

Afin de le valider, les résultats obtenus par le code ont été comparés avec ceux donnés par une solution analytique connue dans le cas de pendules non contraints ayant un mouvement plan, puis d'un pendule tournant contraint dans l'espace proche de la configuration d'une éolienne (dimension, vitesse de rotation, ...). La validation est d'abord effectuée sur des exemples relativement simples car si ces manipulations aboutissent à des résultats numériques divergents, alors il serait inutile de continuer de traiter des multicorps plus complexes. A l'aide de critères simples, l'erreur due à l'intégration numérique et la validité des résultats numériques sont mis en évidence. De plus, un logiciel existant sur le marché a été choisi pour comparer les résultats du programme informatique numérique.

5.2 Validation sur différents systèmes multicorps rigides

5.2.1 Cas des systèmes MC non contraints

Après avoir écrit le code de calcul pour un système multicorps rigides, différentes approches permettent de le valider. Pour ce début de validation, les résultats obtenus ont donc été comparés à ceux d'un exemple dont la solution est connue. Pour cela, le cas de deux exemples simples ont été traités : un pendule simple (*figure 5.1*) et double (*figure 5.2*) avec un mouvement plan. Puis cette validation s'appuie sur différents critères. Différentes conditions initiales et l'écart quadratique moyen ont été utilisés pour mettre en évidence l'erreur d'intégration numérique.

Les pendules sont des systèmes non contraints cinématiquement qui ne subissent que leur propre poids car il n'y a pas de loi de mouvement imposée et aucune vitesse initiale. Le but ici

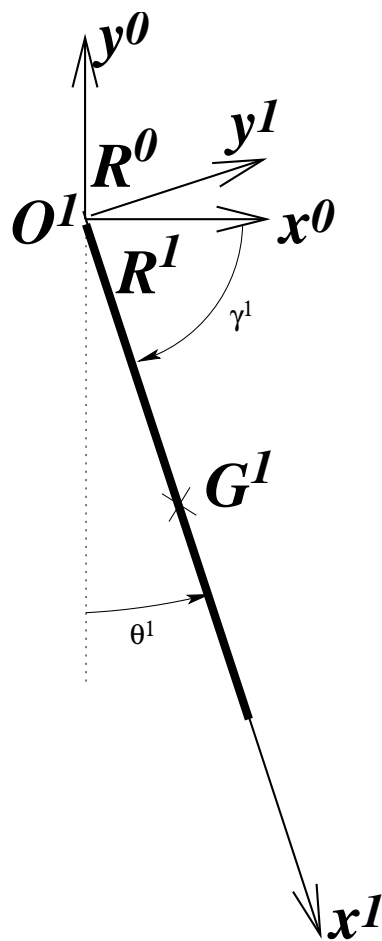


FIG. 5.1 – Description des paramètres cinématiques du pendule simple (mouvement plan)

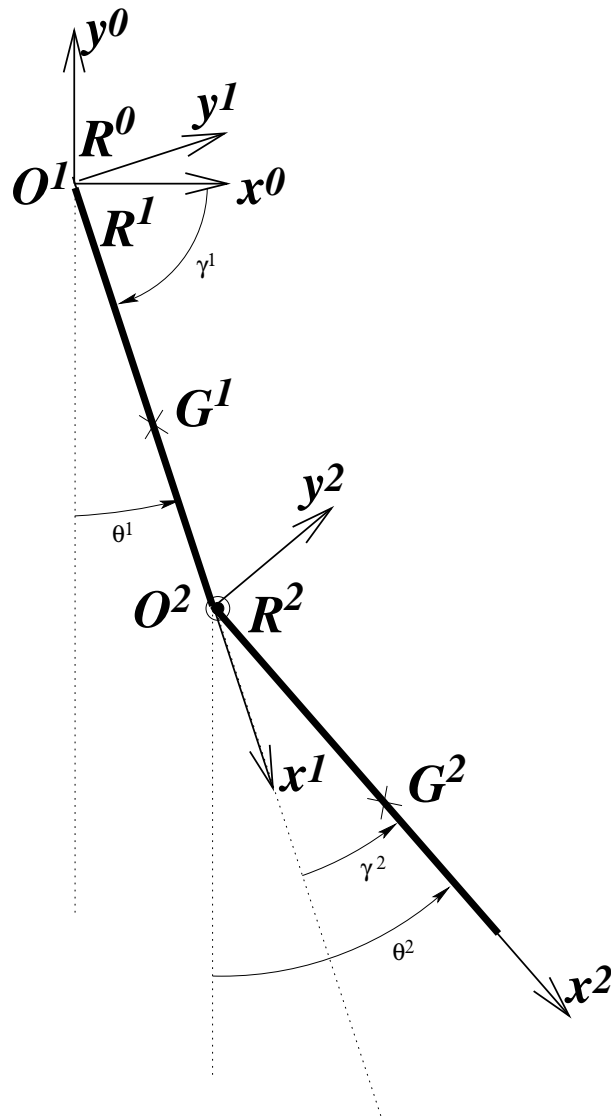


FIG. 5.2 – Description des paramètres cinématiques du pendule double (mouvement plan)

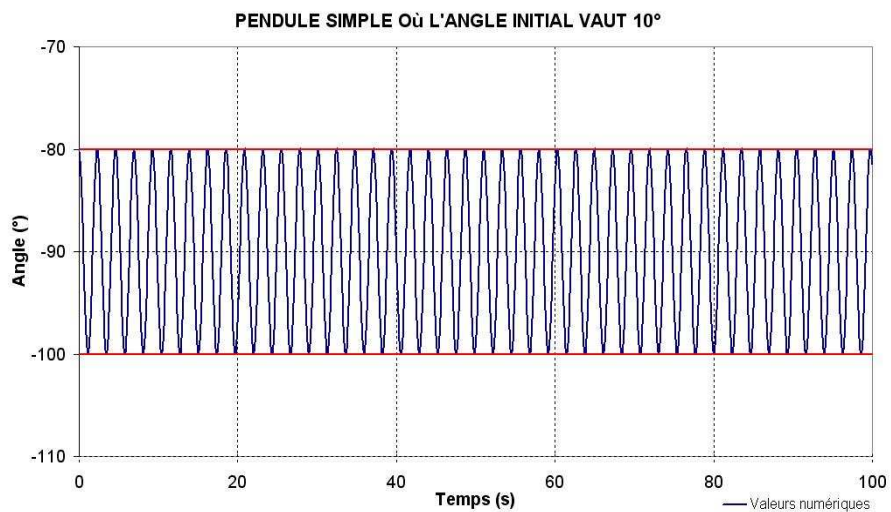
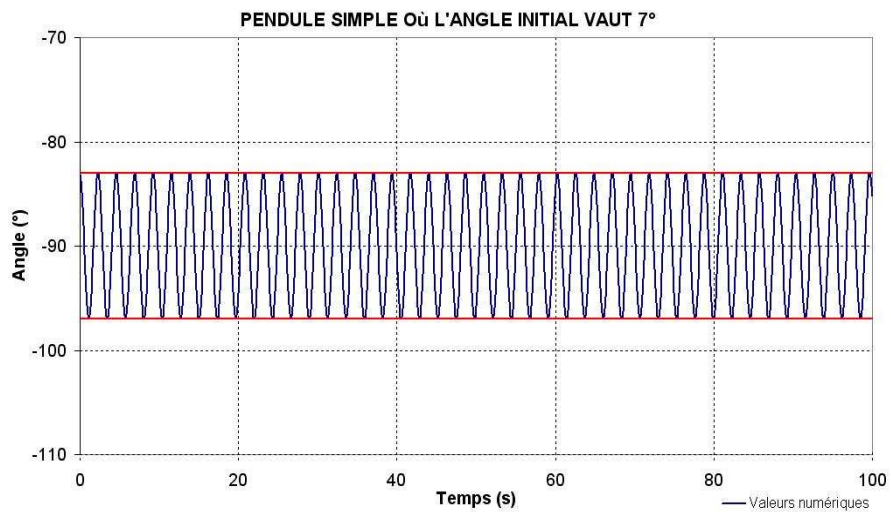
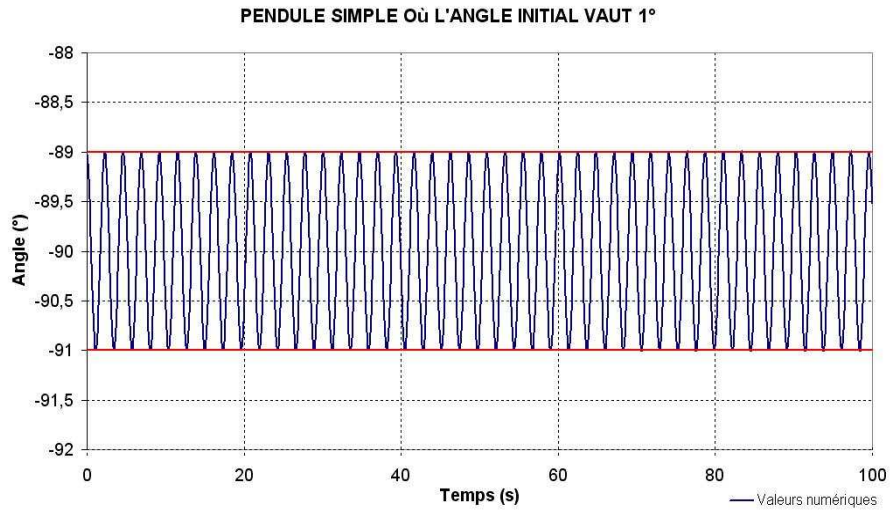


FIG. 5.3 – Pendule simple : variation de γ^1 , en fonction du temps, obtenue par intégration numérique avec $\gamma^1(0\text{ s}) = -89^\circ, -83^\circ$ et -80°

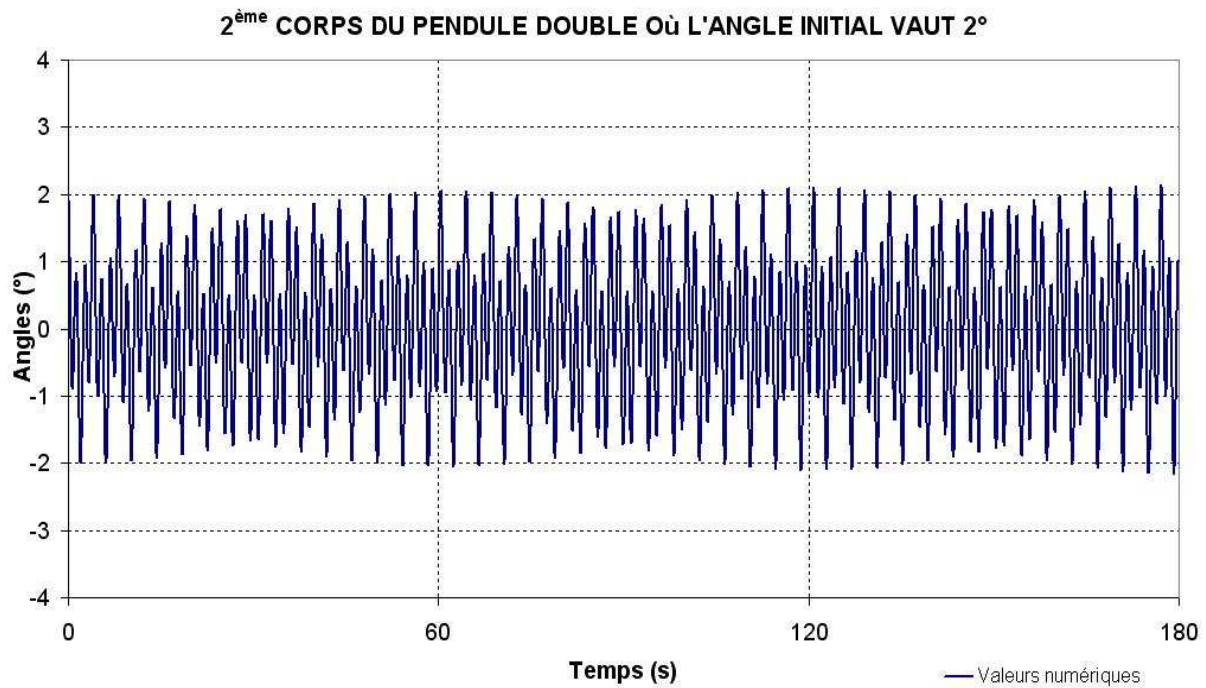
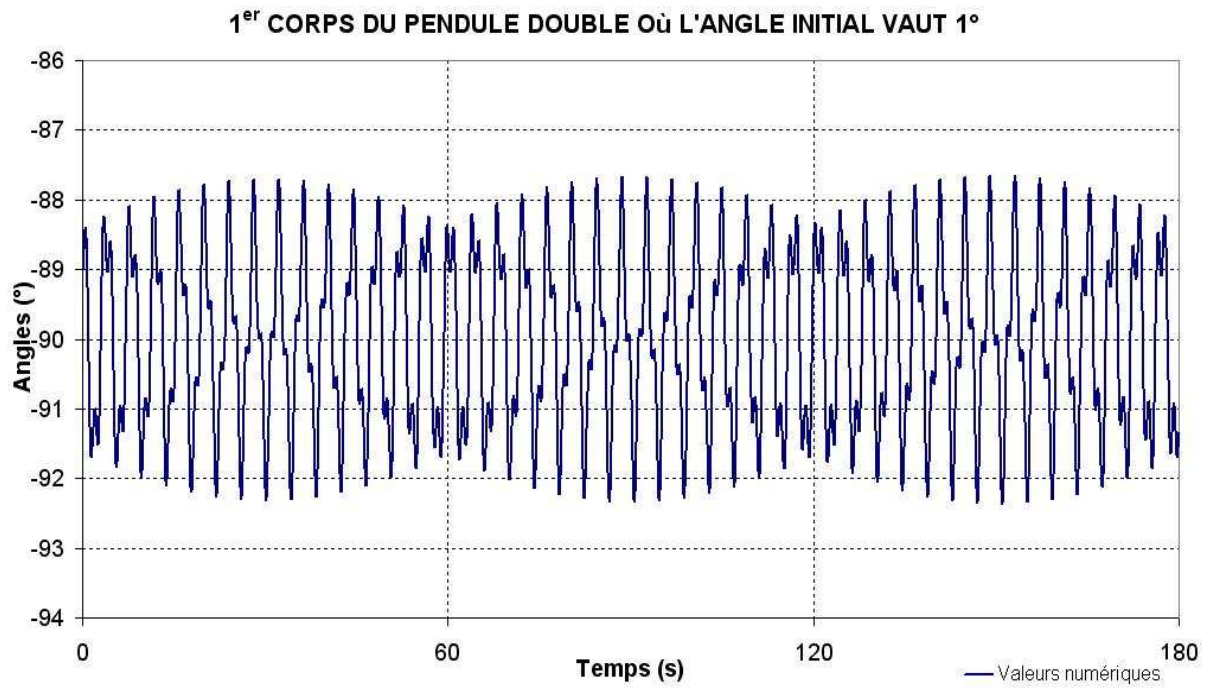


FIG. 5.4 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 , en fonction du temps, obtenue par intégration numérique avec $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -89^\circ \\ \gamma^2(0s) = 2^\circ \end{cases}$

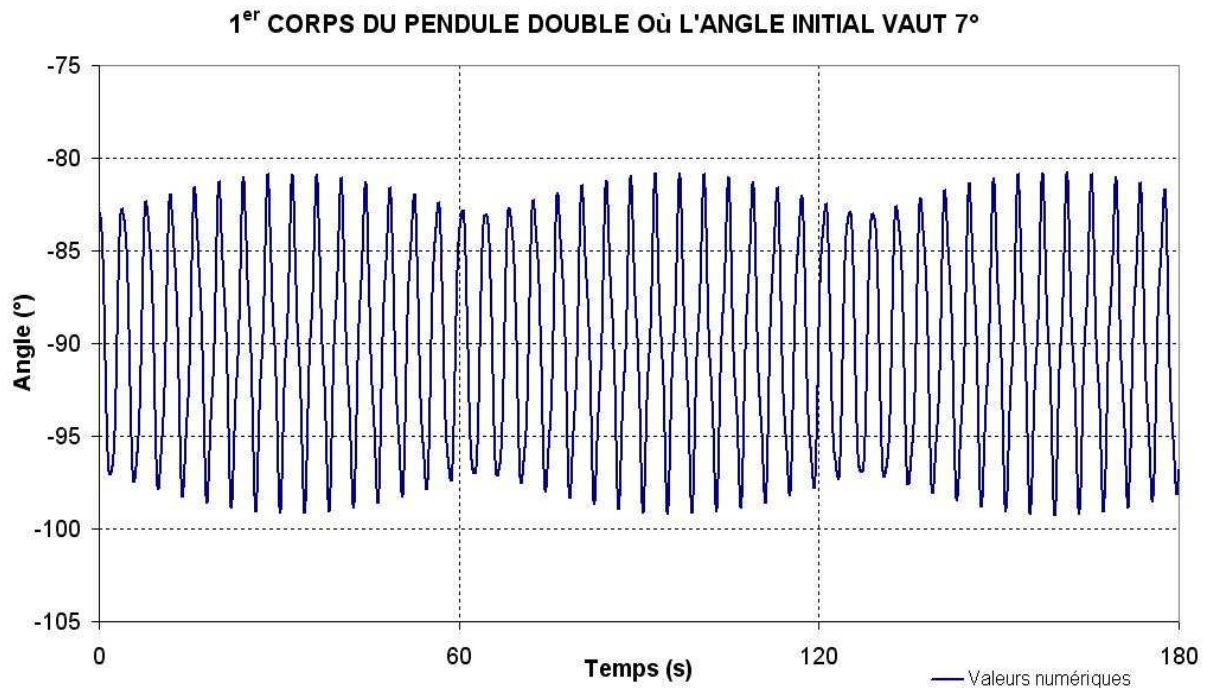


FIG. 5.5 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 , en fonction du temps, obtenue par intégration numérique avec $\begin{cases} \gamma^1(0\text{ s}) = -83^\circ \\ \gamma^2(0\text{ s}) = 5^\circ \end{cases}$

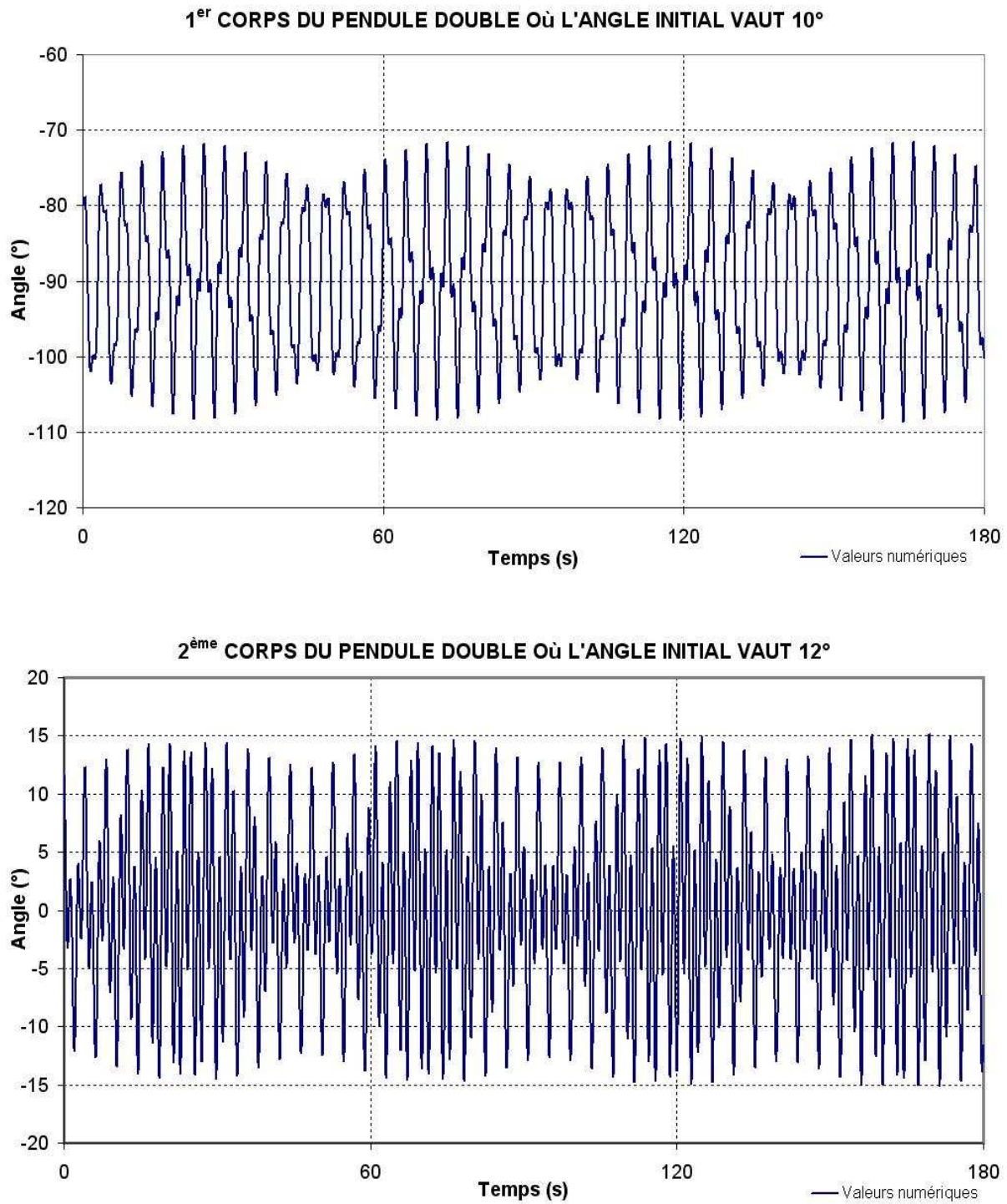


FIG. 5.6 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 , en fonction du temps, obtenue par intégration numérique avec $\begin{cases} \gamma^1(0\text{ s}) = -80^\circ \\ \gamma^2(0\text{ s}) = 12^\circ \end{cases}$

est d'étudier l'évolution des angles d'Euler γ^1 (notation prise dans le *paragraphe 4.2.1.2*) pour le pendule simple et les angles couplés γ^1 et γ^2 pour le pendule double à partir de quelques configurations initiales. Pour les exemples traités, on a pris pour m^i , la masse répartie, et ℓ^i , la longueur du corps B^i , les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} m^1 = 10 \text{ Kg} \\ \ell^1 = 2 \text{ m} \end{cases} \quad (5.1)$$

pour le pendule simple et

$$\begin{cases} m^1 = 10 \text{ Kg} \\ \ell^1 = 2 \text{ m} \\ m^2 = 15 \text{ Kg} \\ \ell^2 = 4 \text{ m} \end{cases} \quad (5.2)$$

pour le pendule double et pour l'intégration temporelle :

$$\begin{cases} t_{initial} = 0 \text{ s} \\ t_{final} = \begin{cases} 70 \text{ s} \text{ (Pendule simple : résultats numériques exacts)} \\ 100 \text{ s} \text{ (Pendule simple : résultats numériques linéarisés)} \\ 180 \text{ s} \text{ (Pendule double)} \end{cases} \\ \Delta t = 0,05 \text{ s} : \text{ pas de temps} \end{cases} \quad (5.3)$$

Les résultats numériques donnés par le programme ont été repertoriés sous forme de courbes en fonction du temps :

- *figure 5.3* pour le pendule simple et
- *figures 5.4, 5.5, 5.6* pour le pendule double.

L'*annexe K* donne les détails de la détermination analytique des équations de mouvement du pendule simple et double. Pour les besoins de la résolution analytique, un changement de base a été effectué :

$$\theta^1(t) = 90^\circ + \gamma^1(t) \quad (5.4)$$

pour le pendule simple et

$$\begin{aligned} \theta^1(t) &= 90^\circ + \gamma^1(t) \\ \theta^2(t) &= 90^\circ + \gamma^1(t) + \gamma^2(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

pour le double. Il est donc vérifié si les résultats donnés par le code (notés $\theta^1(t)$ pour le pendule simple et $(\theta^1(t), \theta^2(t))$ pour le double) sont cohérents en les comparant avec ceux de la solution analytique. Pour les besoins de la démonstration, il a été définie la fonction *sn* précisée dans l'*annexe K.1.1*.

5.2.1.1 Cas simple : Pendule simple

Pour un angle maximum θ_0^1 étudié, la solution analytique exacte $\Theta^1(t)$ est (*Annexe K.1.1*) :

$$\sin \Theta^1(t) = \sin \left(\frac{\theta_0^1}{2} \right) \text{sn}(\vartheta^1, k^1) \text{ avec } \vartheta^1 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell^1}} = 2,712 \text{ rad/s} \quad (5.6)$$

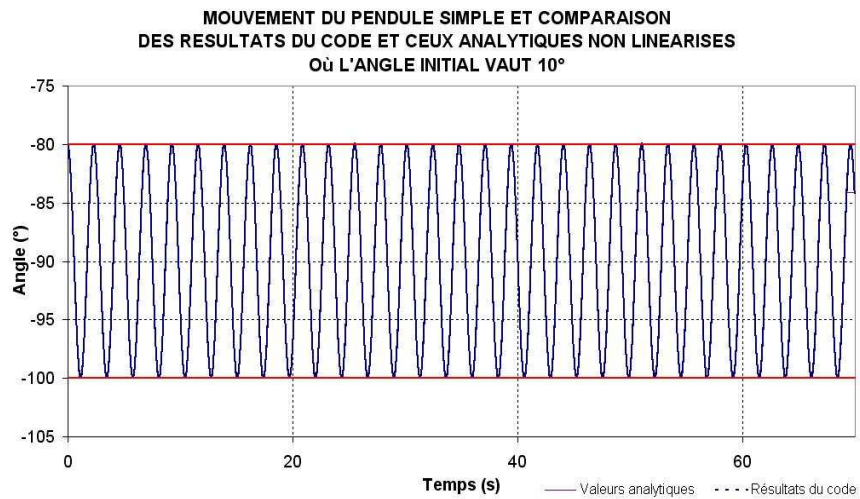
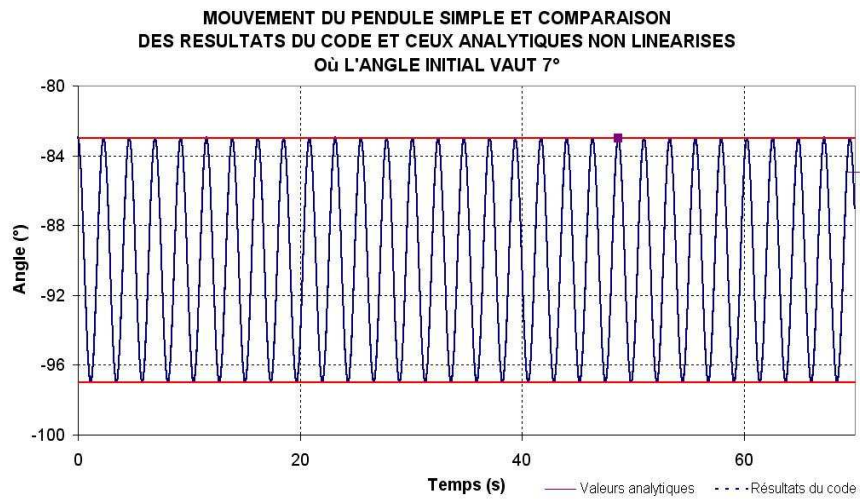
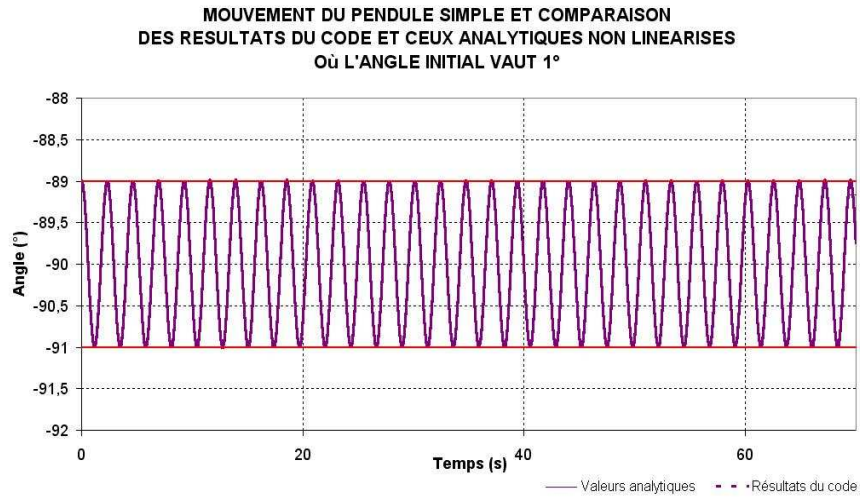


FIG. 5.7 – Pendule simple : variation de γ^1 , en fonction du temps, obtenue par intégration numérique et l'autre par résolution analytique (non linéarisée) avec $\gamma^1(0s) = -89^\circ, -83^\circ$ et -80°

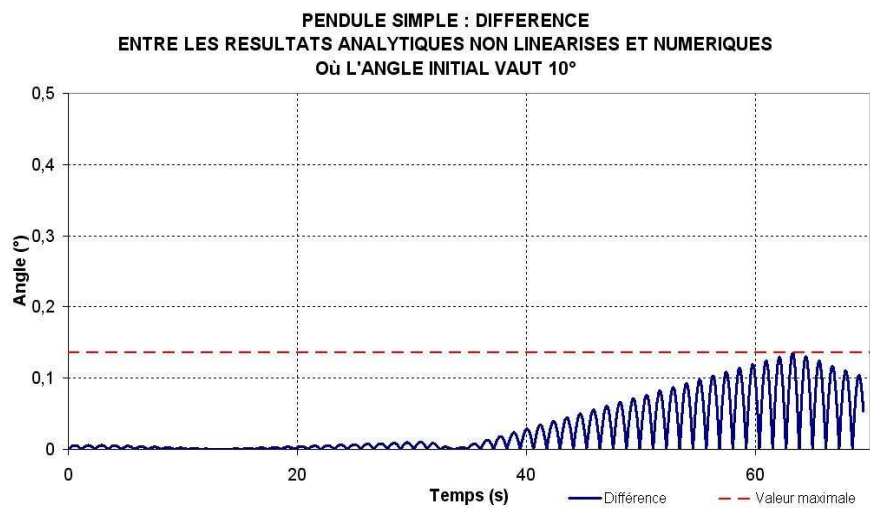
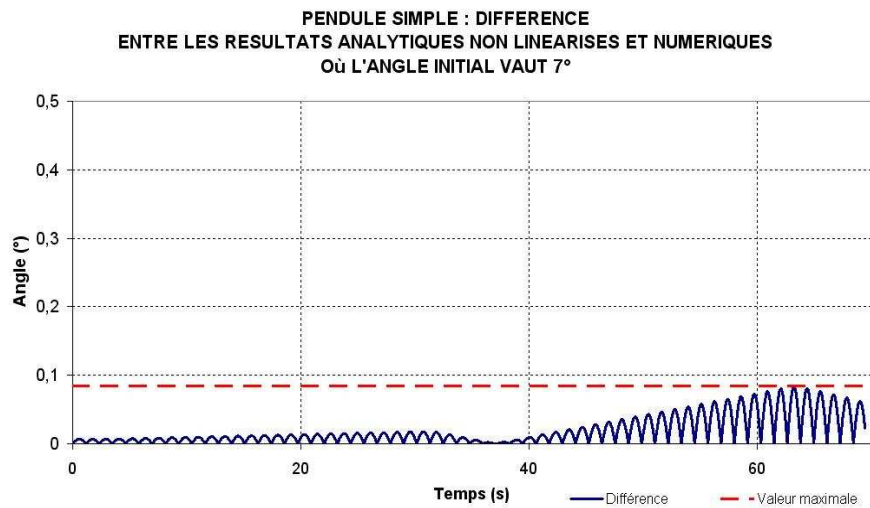
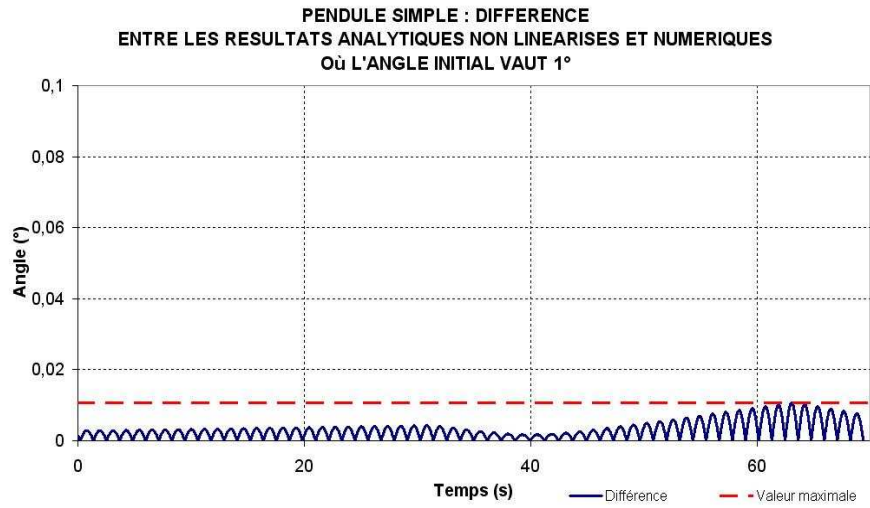


FIG. 5.8 – Pendule simple : variation de la différence entre les résultats, en fonction du temps, obtenue à partir des valeurs de la *figure 5.7* avec $\gamma^1(0\text{ s}) = -89^\circ, -83^\circ$ et -80°

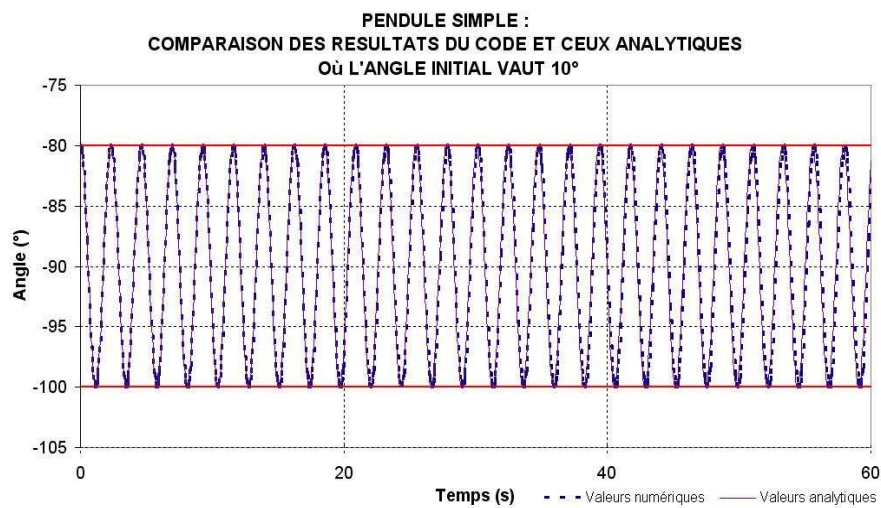
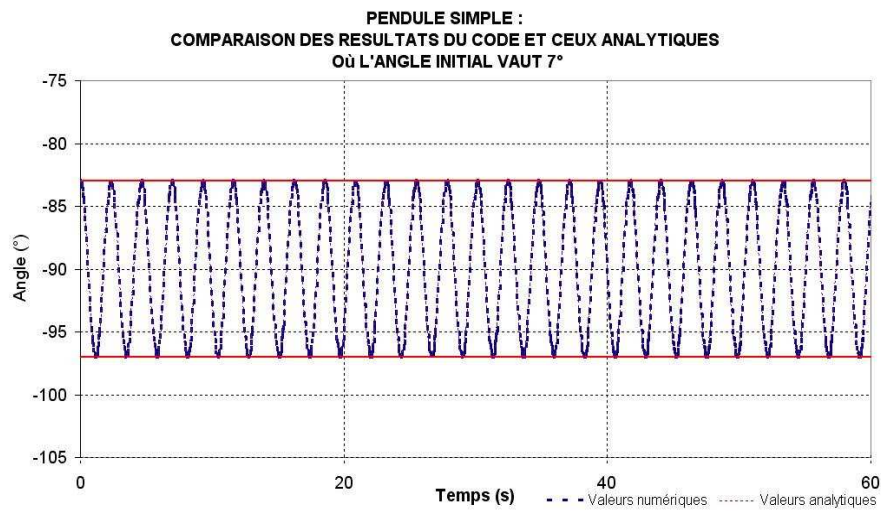
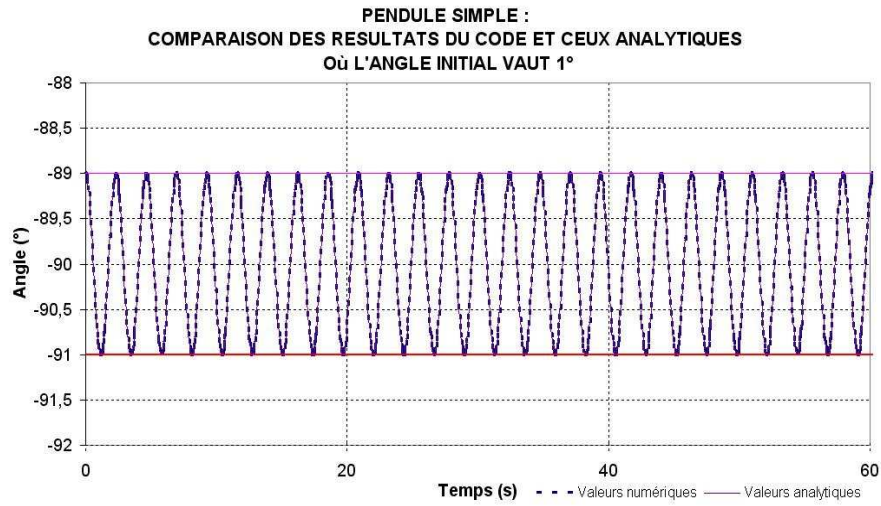


FIG. 5.9 – Pendule simple : variation de γ^1 , en fonction du temps, obtenue par l'une intégration numérique et l'autre par résolution analytique linéarisé avec $\gamma^1(0\text{ s}) = -89^\circ, -83^\circ$ et -80°

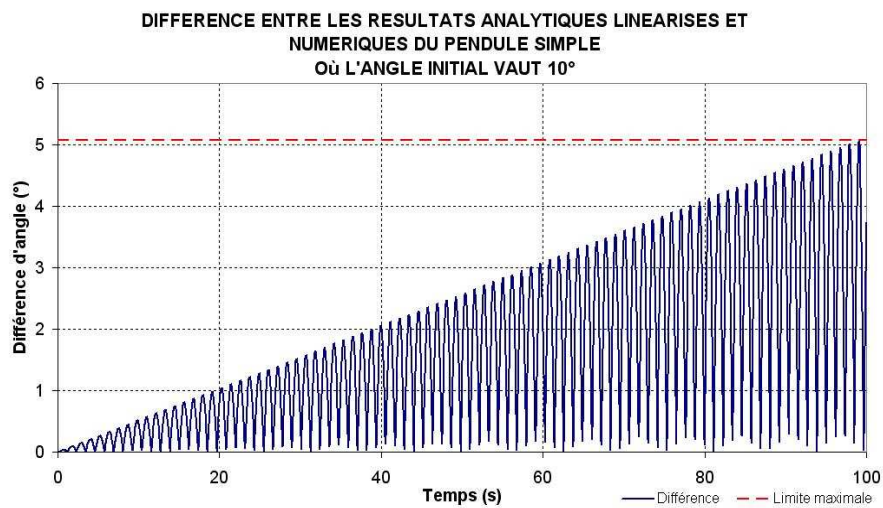
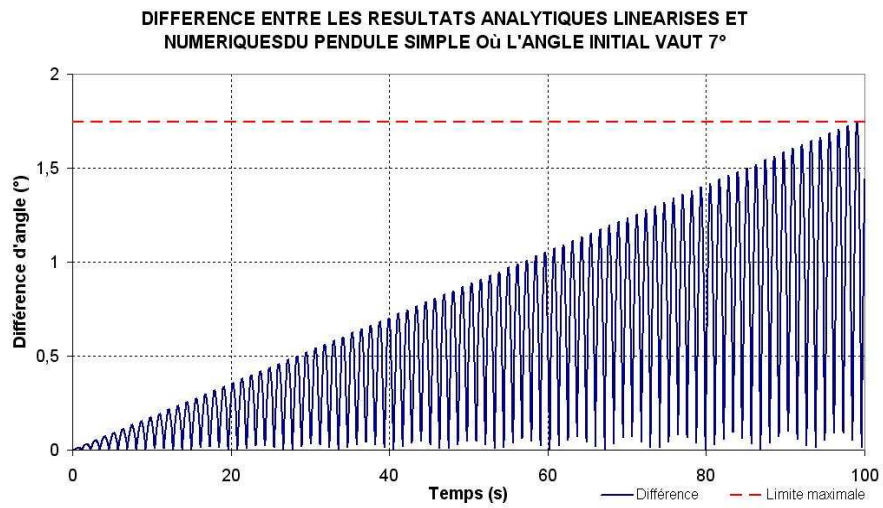
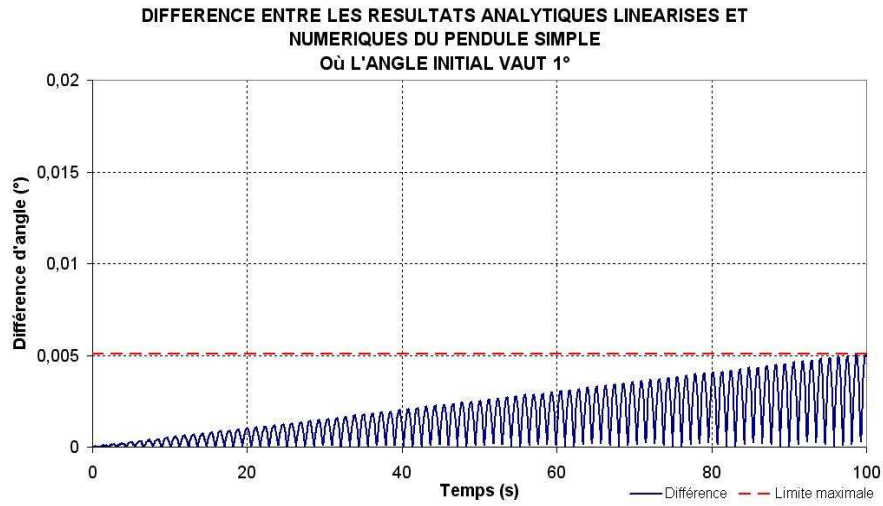


FIG. 5.10 – Pendule simple : variation de la différence à partir des valeurs des *figures 5.3* et *5.9*, en fonction du temps, obtenue avec $\gamma^1(0s) = -89^\circ, -83^\circ$ et -80°

où trois valeurs pour θ_0^1 ont été sélectionnées :

$$\theta_0^1 : 1^\circ, 7^\circ \text{ et } 10^\circ \quad (5.7)$$

Le tracé des courbes de $\Theta^1(t)$ et $\theta^1(t)$ en fonction du temps montre que celles-ci se confondent (*figure 5.7*). Les résultats sont donc cohérents (la démarche prise au départ est donc valable). Cependant, la *figure 5.8* montre une différence $|\Theta^1(t) - \theta^1(t)|$:

- $0,0106^\circ$ maximum pour $\theta_0^1 = 1^\circ$,
- $0,0838^\circ$ maximum pour $\theta_0^1 = 7^\circ$ et
- $0,13515^\circ$ maximum pour $\theta_0^1 = 10^\circ$.

Selon la formule (K.24) de l'*annexe K.1.1*, cette période vaut :

$$T_0 = \frac{4}{g^1} K(k) = 2,3185 \text{ s} \quad (5.8)$$

Les différences relatives entre les valeurs de la période obtenues à partir des graphiques numériques de la *figure 5.7* et (5.8) (*tableau 5.1*) sont relativement faibles, elles sont alors considérées comme minimales.

Pour les besoins de la démonstration, la solution analytique est linéarisée, notée $\Theta^1(t)$, valable pour un angle initial $\theta^1(0 \text{ s})$ faible (inférieur à 10°), spécifiée par l'*annexe K.1.2* :

$$\Theta^1(t) = \theta^1(0 \text{ s}) \cos(\vartheta^1 t) \text{ avec } \vartheta^1 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell^1}} = 2,712 \text{ rad/s} \quad (5.9)$$

où $\theta^1(0 \text{ s})$ est pris avec trois valeurs différentes :

$$\theta^1(0 \text{ s}) : 1^\circ, 7^\circ \text{ et } 10^\circ \quad (5.10)$$

θ_0^1	1°	7°	10°
Période (s) obtenue à partir des graphiques analytiques de la <i>figure 5.7</i>	2,344	2,346	2,348
Période (s) obtenue à partir des graphiques numériques de la <i>figure 5.3</i>	2,316	2,318	2,321
Différence relative entre les deux périodes (%)	1,178	1,177	1,188
Différence relative entre la période de la deuxième ligne de ce tableau et celle de la formule (5.8) (%)	$8,205 \cdot 10^{-2}$	$1,0128 \cdot 10^{-4}$	$9,047 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.1 – Valeurs des périodes du pendule simple, d’après les résultats analytiques et numériques

Le tracé des courbes de $\Theta^1(t)$ et $\theta^1(t)$ en fonction du temps montre que celles-ci se confondent presque (*figure 5.9*). Effectivement, la *figure 5.10* montre une différence $|\Theta^1(t) - \theta^1(t)|$ ¹ :

¹Cette différence absolue a été étudiée plutôt que celle relative ($\frac{|\Theta^1(t) - \theta^1(t)|}{|\theta^1(t)|}$) car certaines valeurs peuvent être divisées par une proche de zéro. Ceci se traduit alors, sur les graphiques, par des pics. On a donc préféré choisir de comparer les résultats numériques et ceux analytiques.

- 0,0051° maximum pour $\theta_0^1 = 1^\circ$,
- 1,746° maximum pour $\theta_0^1 = 7^\circ$ et
- 5,066° maximum pour $\theta_0^1 = 10^\circ$.

L'erreur due à cette simplification se cumule au cours du temps, même si le « multicorps » étudié est simple comme ce pendule. On vérifie bien que les résultats du programme donnent des résultats proches de la solution analytique non linéarisée même pour des valeurs de $\theta_0^1 \gg 0$, ce qui justifie l'utilisation du code.

On s'intéresse maintenant à un exemple plus complexe : le pendule double.

5.2.1.2 Double pendule

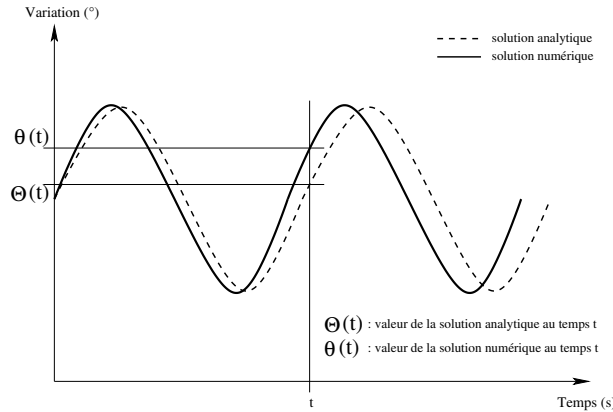


FIG. 5.11 – Variation des résultats analytiques et numériques et détermination d'une valeur à un temps donné

Comme cela a été montré dans l'*annexe K.2*, la solution analytique est linéarisée, notée $\Theta^i(t)$. Pour des angles initiaux $\theta^1(0s)$ et $\theta^2(0s)$ faibles (inférieurs à 5°), elle vaut :

$$\begin{aligned} \Theta^1(t) &= \frac{C^2\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^2 - C^1} \cos(\vartheta^1 t) + \frac{C^1\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^1 - C^2} \cos(\vartheta^2 t) \\ \Theta^2(t) &= C^1 \frac{C^2\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^2 - C^1} \cos(\vartheta^1 t) + C^2 \frac{C^1\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^1 - C^2} \cos(\vartheta^2 t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec $\begin{cases} \vartheta^1 = \vartheta^1(m^1, \ell^1, m^2, \ell^2) = 1,559 \text{ rad/s} \\ \vartheta^2 = \vartheta^2(m^1, \ell^1, m^2, \ell^2) = 4,575 \text{ rad/s} \end{cases}$ et $\begin{cases} C^1 = C^1(m^1, \ell^1, m^2, \ell^2) \\ C^2 = C^2(m^1, \ell^1, m^2, \ell^2) \end{cases}$

où :

$$\begin{aligned} \theta^1(0s) &= 90^\circ - 89^\circ = 1^\circ \\ \theta^2(0s) &= 90^\circ - 89^\circ + 2^\circ = 3^\circ \end{aligned} \quad (5.12)$$

représentée dans la *figure 5.12*.

Pour le pendule double, en comparant $\Theta^i(t)$ et $\theta^i(t)$, les deux courbes les représentant se confondent presque (*figure 5.12*) donc les résultats sont très satisfaisants. Mais il existe quand même une petite erreur entre les deux. Pour la déterminer, le critère de comparaison choisi est la valeur absolue de la différence entre les deux. D'après la *figure 5.11*, $\Theta(t)$ est la valeur de la solution analytique au temps t et $\theta(t)$ est celle de la solution numérique au

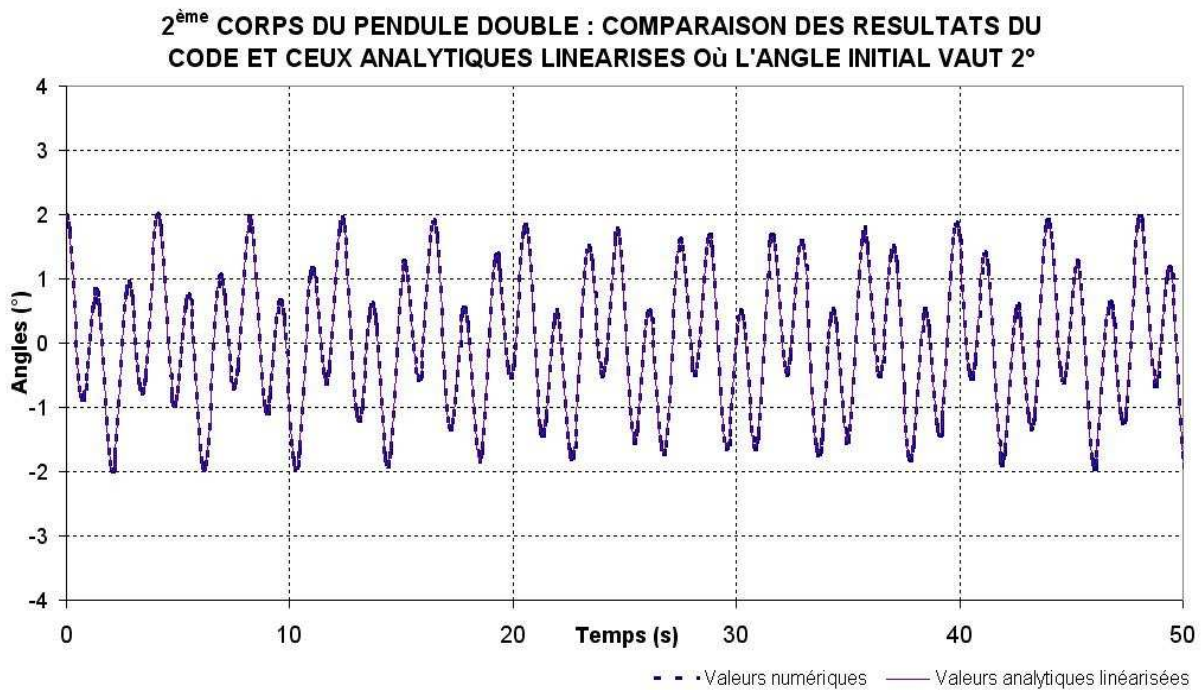
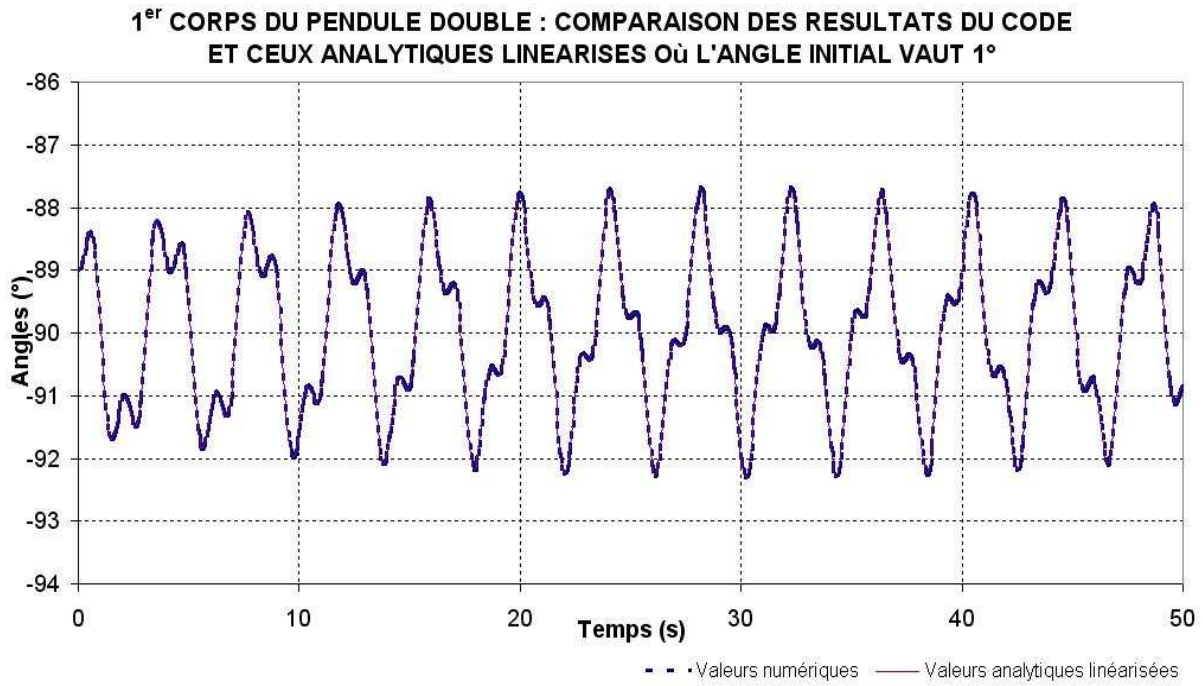


FIG. 5.12 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 , en fonction du temps, obtenue l'une par intégration numérique et l'autre par résolution analytique avec $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -89^\circ \\ \gamma^2(0s) = 2^\circ \end{cases}$

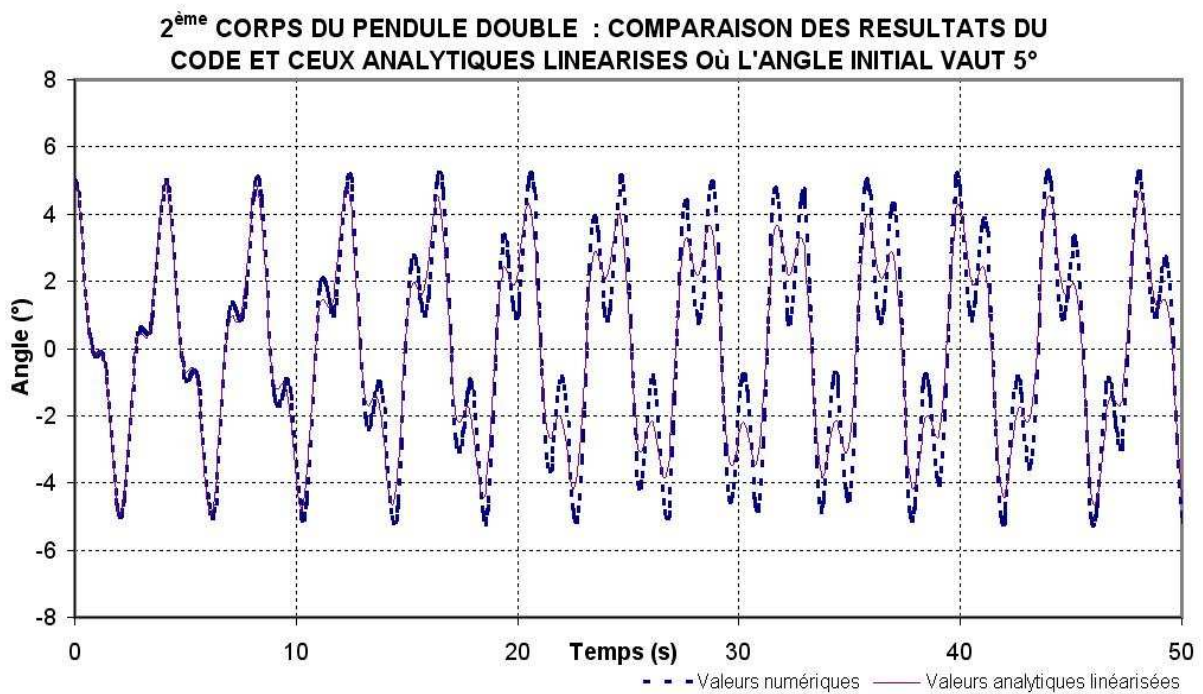
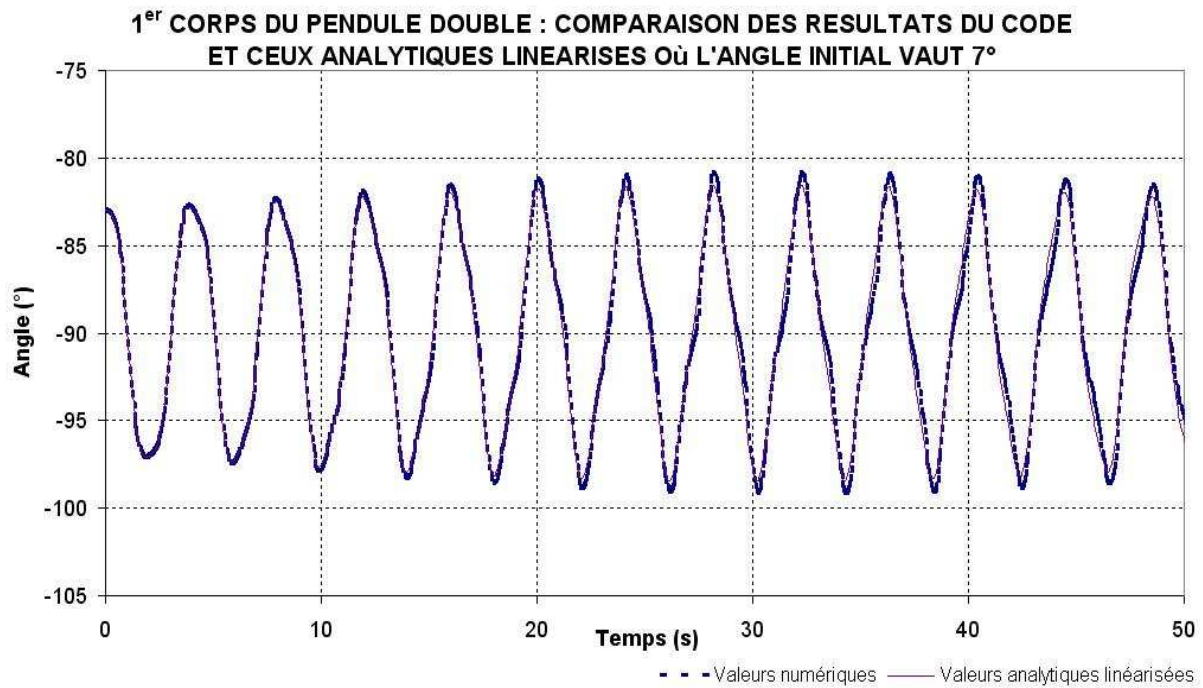


FIG. 5.13 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 , en fonction du temps, obtenue l'une par intégration numérique et l'autre par résolution analytique avec $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -83^\circ \\ \gamma^2(0s) = 5^\circ \end{cases}$

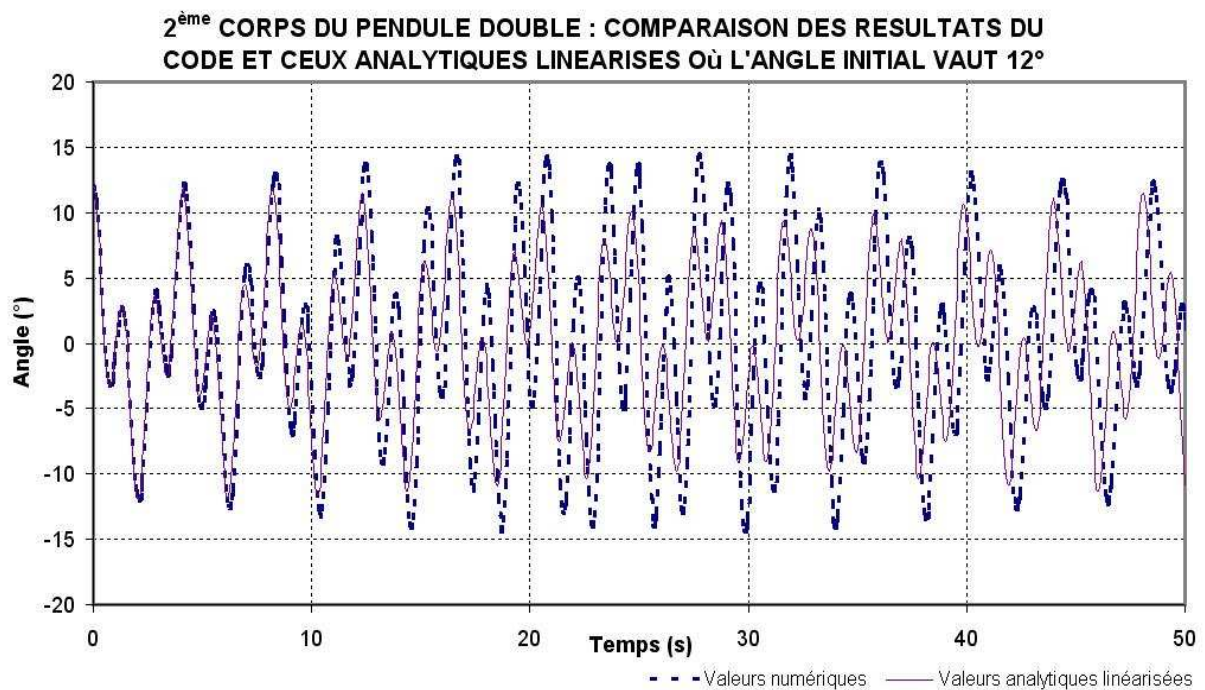
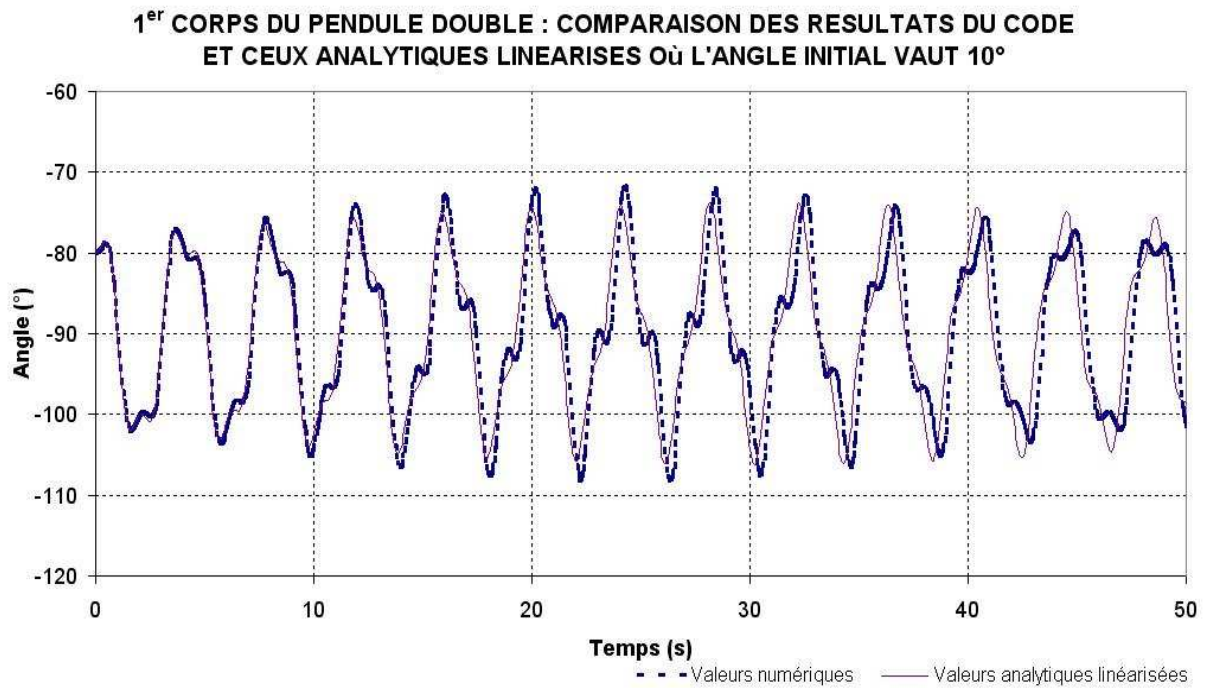


FIG. 5.14 – Pendule double : variation de γ^1 et γ^2 obtenue l'une par intégration numérique et l'autre par résolution analytique en fonction du temps avec $\begin{cases} \gamma^1(0\text{ s}) = -80^\circ \\ \gamma^2(0\text{ s}) = 12^\circ \end{cases}$

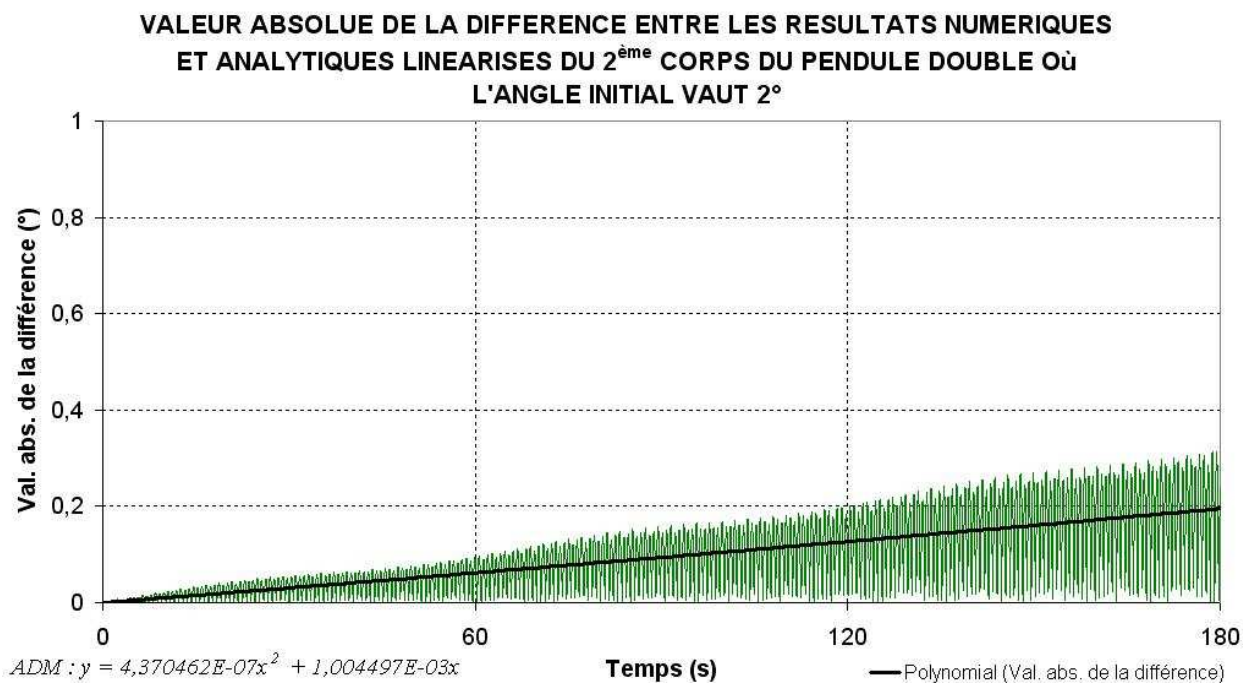
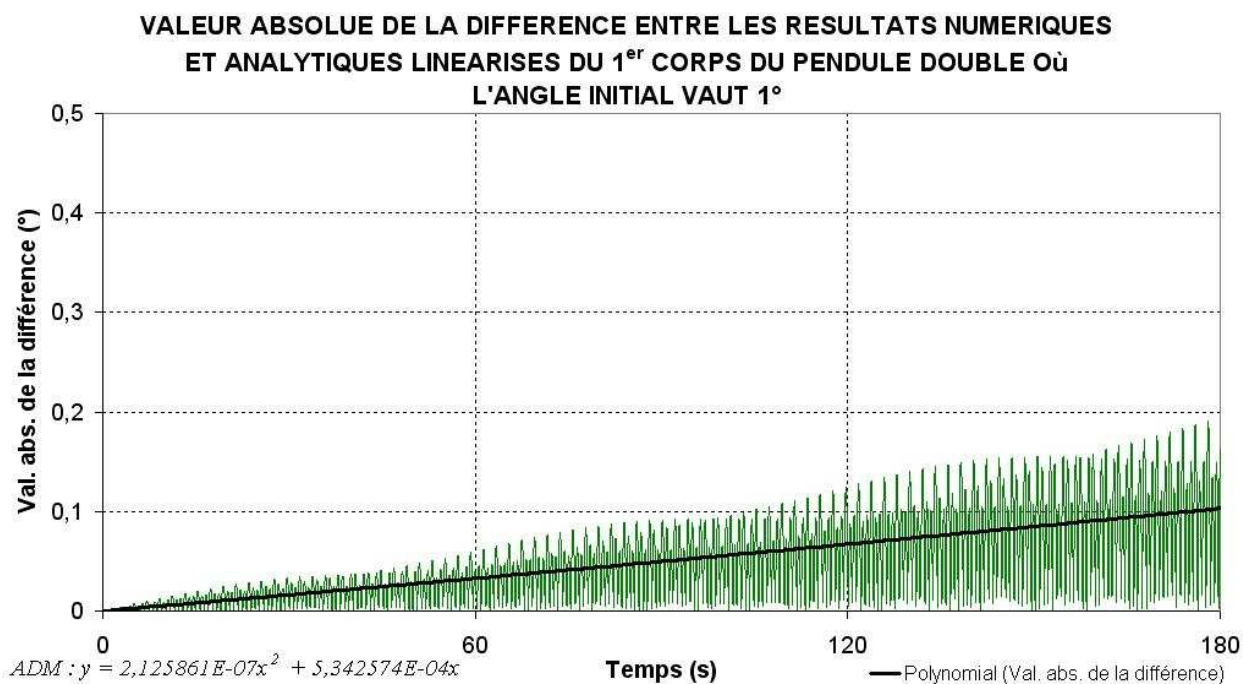
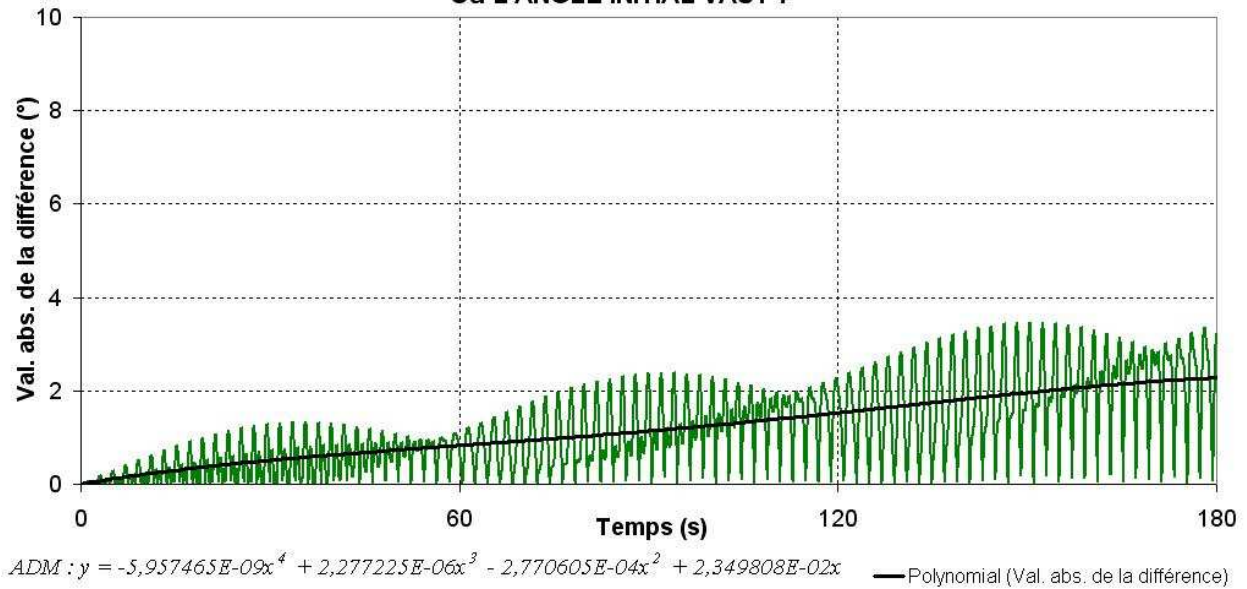


FIG. 5.15 – Pendule double : variation de la valeur absolue de la différence entre les résultats numériques et analytiques, en fonction du temps, obtenue à partir des valeurs des figures 5.4 et 5.12 avec $\begin{cases} \gamma^1 = -89^\circ \\ \gamma^2 = 2^\circ \end{cases}$

**VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES
ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 1^{er} CORPS DU PENDULE DOUBLE
OÙ L'ANGLE INITIAL VAUT 7°**



**VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES
ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 2^{ème} CORPS DU PENDULE DOUBLE OÙ
L'ANGLE INITIAL VAUT 5°**

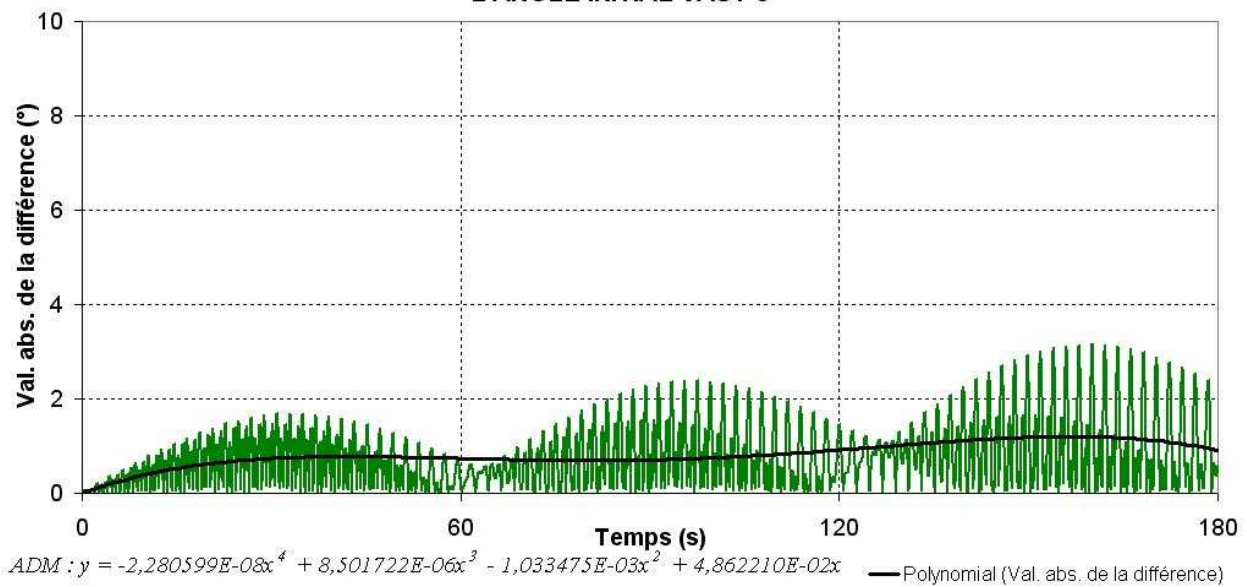
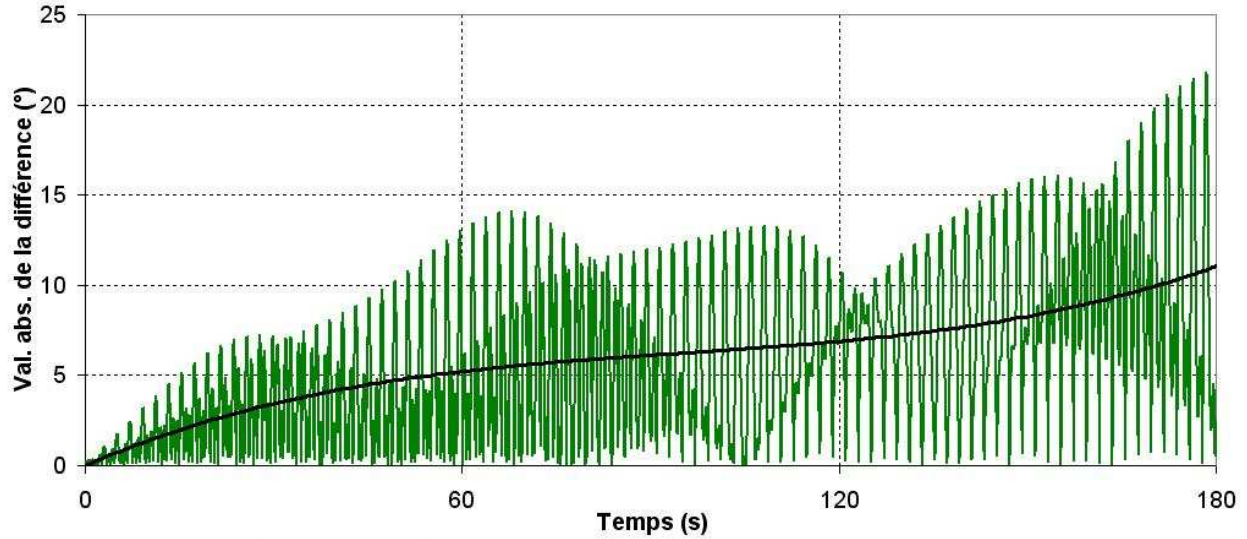


FIG. 5.16 – Pendule double : variation de la valeur absolue de la différence entre les résultats numériques et analytiques, en fonction du temps, obtenue à partir des valeurs des figures 5.5 et 5.13 avec $\begin{cases} \gamma^1 = -83^\circ \\ \gamma^2 = 5^\circ \end{cases}$

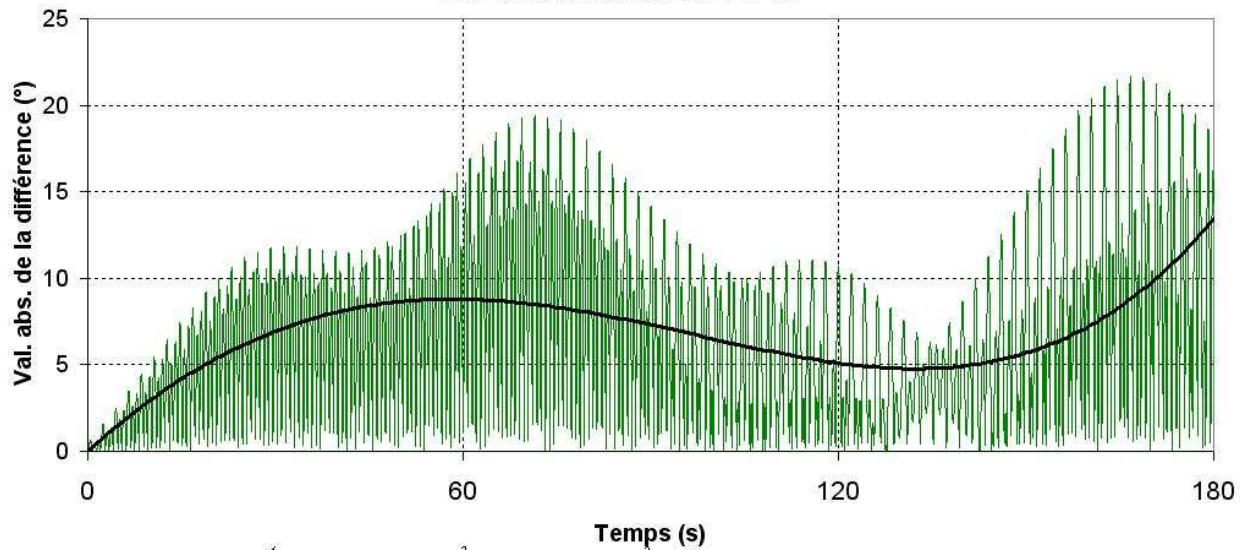
**VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES
ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 1^{er} CORPS DU PENDULE DOUBLE
OÙ L'ANGLE INITIAL VAUT 10°**



$$ADM : y = 4,680572E-06x^3 - 1,337397E-03x^2 + 1,504710E-01x$$

— Polynomial (Val. abs. de la différence)

**VALEUR ABSOLUE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES
ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 2^{ème} CORPS DU PENDULE DOUBLE
OÙ L'ANGLE INITIAL VAUT 12°**



$$ADM : y = 4,566455E-08x^4 + 2,465092E-06x^3 - 3,327573E-03x^2 + 3,274187E-01x$$

— Polynomial (Val. abs. de la différence)

FIG. 5.17 – Pendule double : variation de la valeur absolue de la différence entre les résultats numériques et analytiques, en fonction du temps, obtenue à partir des valeurs des figures 5.6

et 5.14 avec $\begin{cases} \gamma^1 = -80^\circ \\ \gamma^2 = 12^\circ \end{cases}$

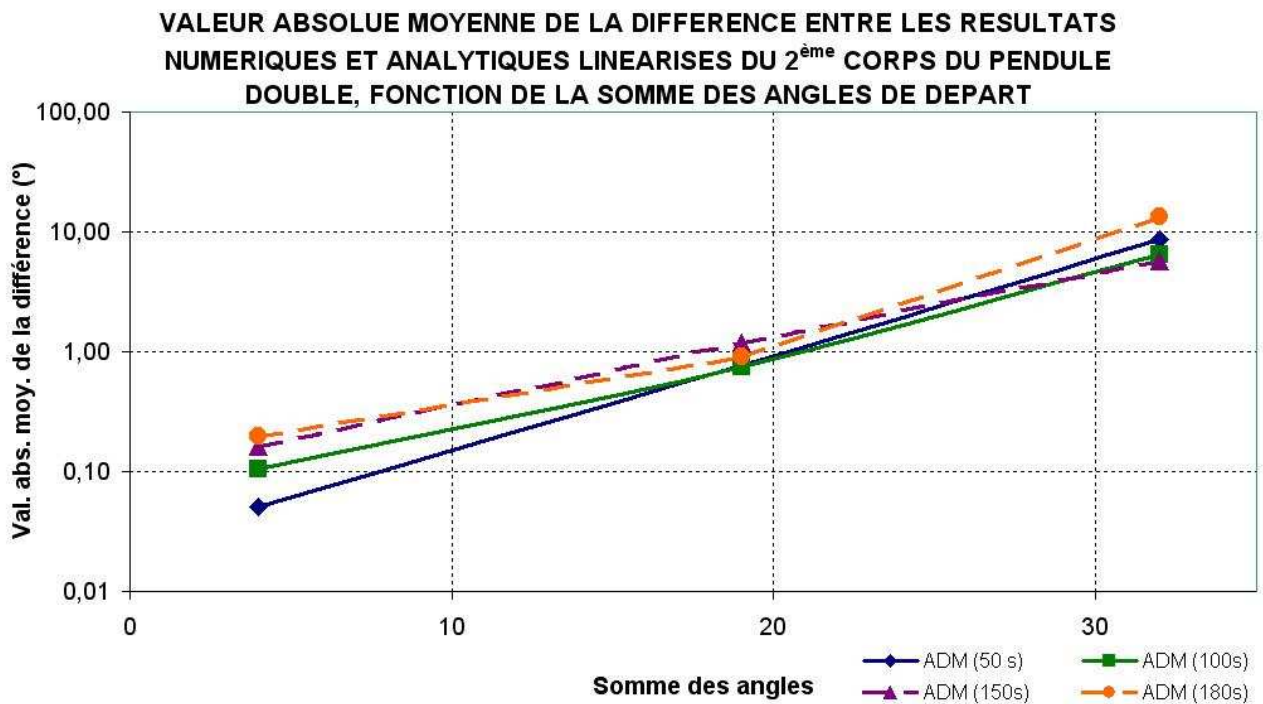
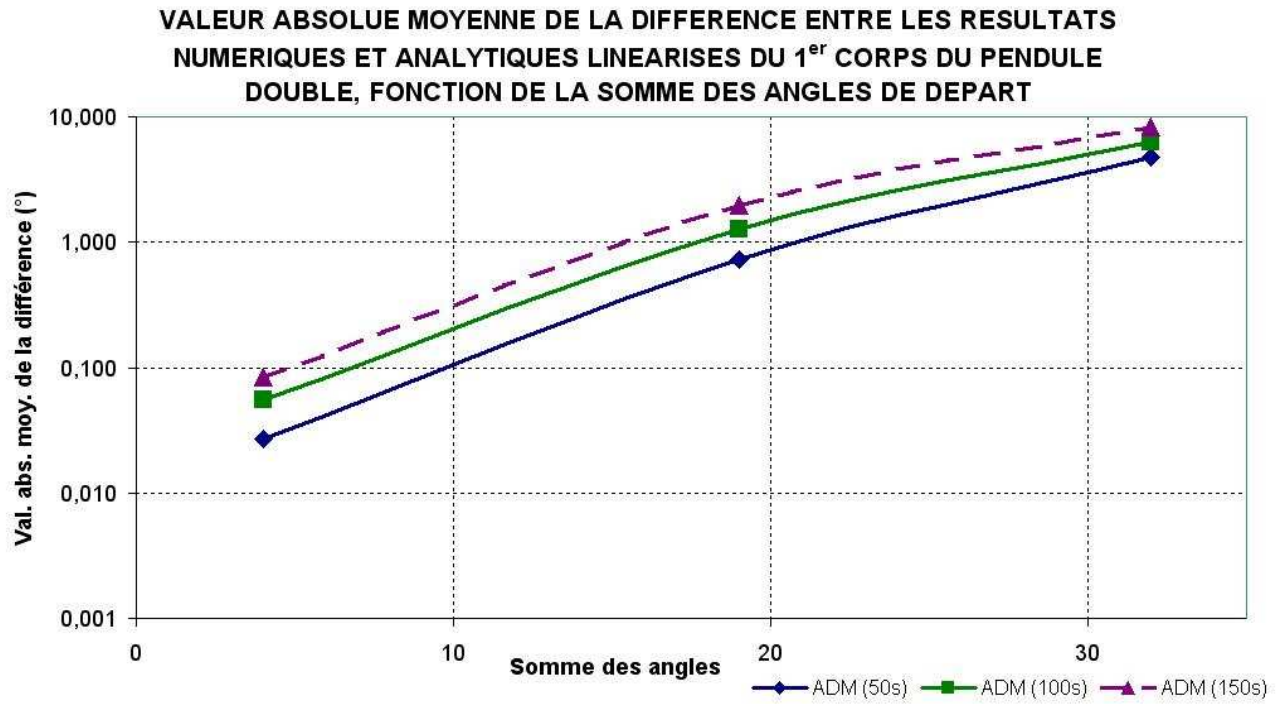
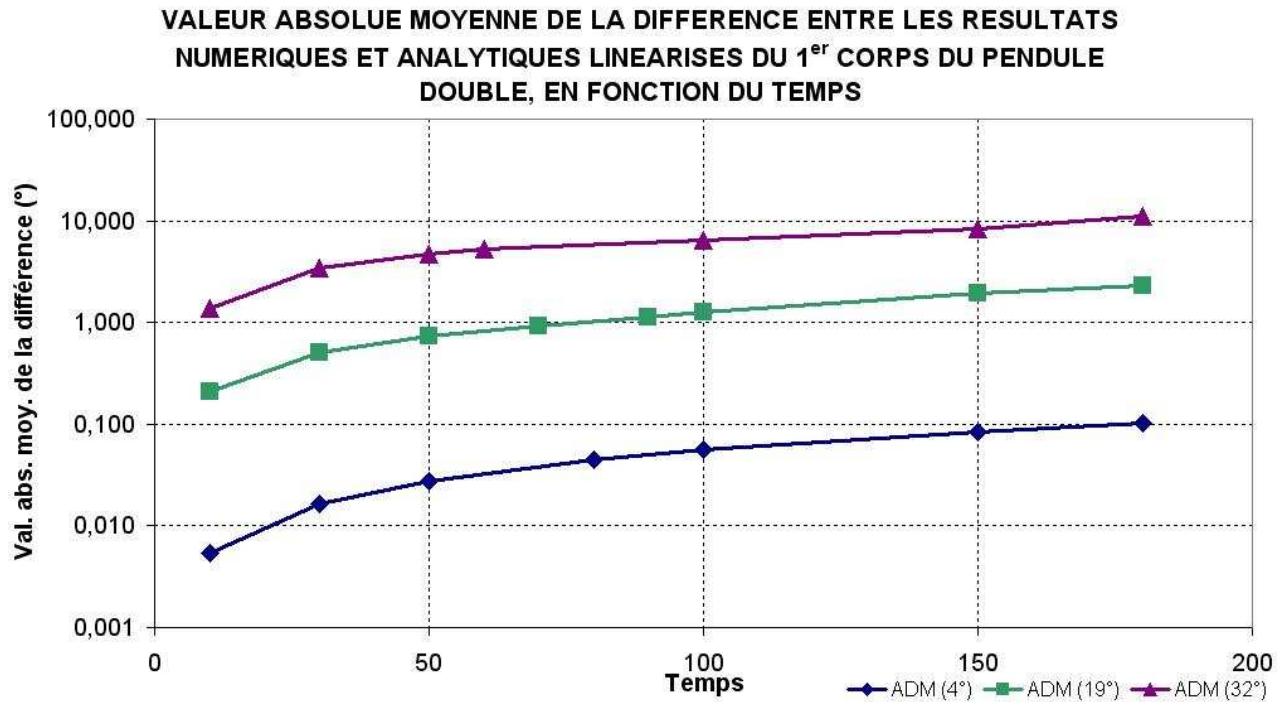
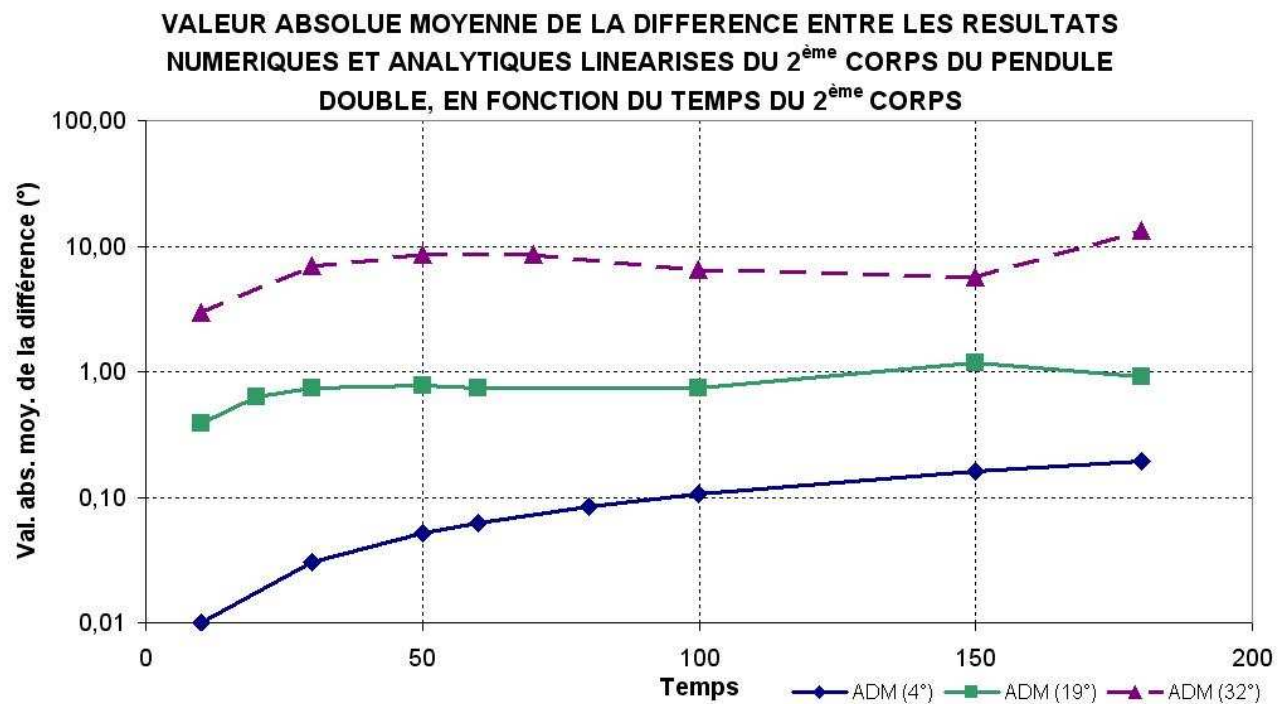


FIG. 5.18 – Pendule double : variation de la valeur absolue moyenne de la différence entre les résultats numériques et analytiques en fonction de la somme des angles $90 + \gamma^1 + \gamma^2$ pour un temps donné



(a)



(b)

FIG. 5.19 – Pendule double : variation de la valeur absolue moyenne de la différence entre les résultats numériques et analytiques en fonction du temps pour les trois configurations étudiées

même temps t . A partir de ces valeurs, la valeur absolue de la différence entre les résultats numériques et analytiques, notée AD , est calculée, par :

$$AD = |\Theta(t) - \theta(t)| \quad (5.13)$$

Cette différence a été choisie pour la même raison que dans l'exemple du pendule simple. Ces valeurs sont faibles (*figure 5.15*). Effectivement elles ne dépassent pas, sur la période de temps étudiée, soit 180 s, de $0,1906^\circ$ pour γ^1 et de $0,3134^\circ$ pour γ^2 . L'erreur de γ^2 est plus importante que celle de γ^1 car elle ajoute, d'abord, à sa propre erreur celle de γ^1 . Au cours du temps, AD peut varier de zéro à un maximum. Ainsi pour comparer l'évolution de cette différence, il est préférable d'étudier la tendance moyenne de la différence AD , notée ADM , représentée par une courbe presque droite sur la *figure 5.15* : ces valeurs sont relativement faibles (*tableau 5.2*). Cependant, ADM croît au cours du temps. Nous allons donc vérifier s'il en est de même pour d'autres valeurs d'angle initial.

$(90^\circ + \gamma^1(0s)$; $\gamma^2(0s)) \rightarrow$	$(1^\circ ; 2^\circ)$	$(7^\circ ; 5^\circ)$	$(10^\circ ; 12^\circ)$
<i>Temps (s) ↓</i>	<i>Différence moyenne ADM de $(\gamma^1(t) ; \gamma^2(t))$</i>		
50	(0,02724 ; 0,05131)	(0,72967 ; 0,7676)	(4,7651 ; 8,6455)
100	(0,05555 ; 0,10482)	(1,26068 ; 0,7485)	(6,3557 ; 6,4976)
150	(0,084922 ; 0,1605)	(1,9605 ; 1,1879)	(8,2761 ; 5,6797)
180			(11,0502 ; 13,4352)

TAB. 5.2 – Evolution de la valeur moyenne de la différence AD du pendule double pour différentes valeurs de temps et pour différentes configurations

Si la valeur des angles initiaux, $\theta^1(0s)$ et $\theta^2(0s)$ est augmentée, les angles $\theta^1(t)$ et $\theta^2(t)$ ne sont plus faibles donc ne vérifient plus la solution analytique linéarisée (5.11). Les deux courbes de l'évolution des angles au cours du temps n'ont plus tendance à se confondre (après observation sur les *figures 5.13, 5.14*) la valeur moyenne de la différence AD augmente pour chaque angle. C'est ce qui est constaté sur les *figures 5.16, 5.17* et dans le *tableau 5.2*.

L'évolution de ces différences AD au cours du temps est croissante. Sur la *figure 5.18*, l' ADM est influencé par la valeur des angles initiaux pour trois instants donnés, alors que sur la *figure 5.19*, l' ADM est fonction du temps pour trois configurations étudiées.

Tout d'abord, l'augmentation de l' ADM de la *figure 5.18* (en échelle logarithmique) est à caractère exponentielle. La différence entre chaque instant reste la même à l'échelle logarithmique. Ceci est dû aux erreurs d'approximation de l'intégration temporelle (et peut-être au choix du pas de temps, ce qui sera l'objet d'une étude complémentaire ci-après).

Par contre, sur la *figure 5.19*, la différence de l' ADM , fonction du temps, entre chaque configuration de la comparaison reste comparable entre elles mais est plus importante que celle de la *figure 5.18* car on s'éloigne de plus en plus de la solution analytique linéarisée et l'erreur de $\gamma^1(t)$ prend en compte sa propre erreur et cumule à elle-même celle de $\gamma^2(t)$. Cette différence représente l'erreur due à la non linéarité.

Ceci prouve donc que les résultats obtenus par le code pour cet exemple plus complexe que le pendule simple sont assez proches de ceux qui auraient pu être obtenus par expérimentation.

Dans ce qui précède, le mouvement du pendule double a été étudié pour un pas de temps de 0,05 secondes. La vérification du schéma d'intégration temporelle est aussi à étudier pour différents pas de temps. L'intérêt s'est porté sur quelques valeurs de pas de temps Δt :

- 0,005 s,
- 0,01 s,
- 0,08 s,
- 0,1 s et
- 0,2 ou 0,25 s,

complétant les résultats déjà obtenus pour Δt valant 0,05 s. De toute manière, le code de calcul s'interrompt automatiquement pour des valeurs de pas de temps supérieures à 0,2 s ou 0,25 s selon la configuration initiale, car les valeurs à chaque pas de temps sont trop différentes.

Les figures 5.20 à 5.22 représentent les courbes des écarts *ADM* pour chaque pas de temps de chaque corps du double pendule pour chaque configuration étudiée, en fonction du temps :

- les figures 5.20 pour la configuration initiale : $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -89^\circ \\ \gamma^2(0s) = 2^\circ \end{cases}$,
- les figures 5.21 pour $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -83^\circ \\ \gamma^2(0s) = 5^\circ \end{cases}$ et
- les figures 5.22 pour $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -80^\circ \\ \gamma^2(0s) = 12^\circ \end{cases}$.

Pour une valeur de temps d'expérience et pour une configuration initiale donnée, l'*ADM* augmente au cours du temps pour chaque pas de temps choisi car le résultat s'éloigne de plus en plus de la solution analytique linéarisée donc l'erreur est cumulée. A partir des figures 5.20 à 5.22, nous avons choisi pour la suite une valeur du pas de temps Δt donnant une solution à peu près correcte :

$$\Delta t = 0,01s \quad (5.14)$$

Pour conclure sur le système non contraint, les résultats obtenus numériquement, donc non linéarisés, par le code de calcul sont proches de ceux qui seraient obtenus par expérimentation. Pour être sûr que le code gère bien aussi les changements de bases sur tous les axes, ce même pendule au mouvement plan a été testé tournant dans d'autres plans. Les valeurs numériques obtenues sont les mêmes que celles du premier cas. Au regard des développements de l'*annexe K*, la détermination de la solution analytique linéarisée du pendule simple est élémentaire mais devient moins triviale dans le cas du pendule double. Ainsi le lecteur se rendra compte qu'elle devient fastidieuse pour un système comprenant plus de deux corps. Même pour un pendule double, l'intérêt de la démarche est justifié, en ayant à l'esprit que l'on compare les résultats du code avec la solution analytique linéarisée.

Etudier un système contraint est la dernière étape pour déterminer si le code de calcul est valable pour tout type de système.

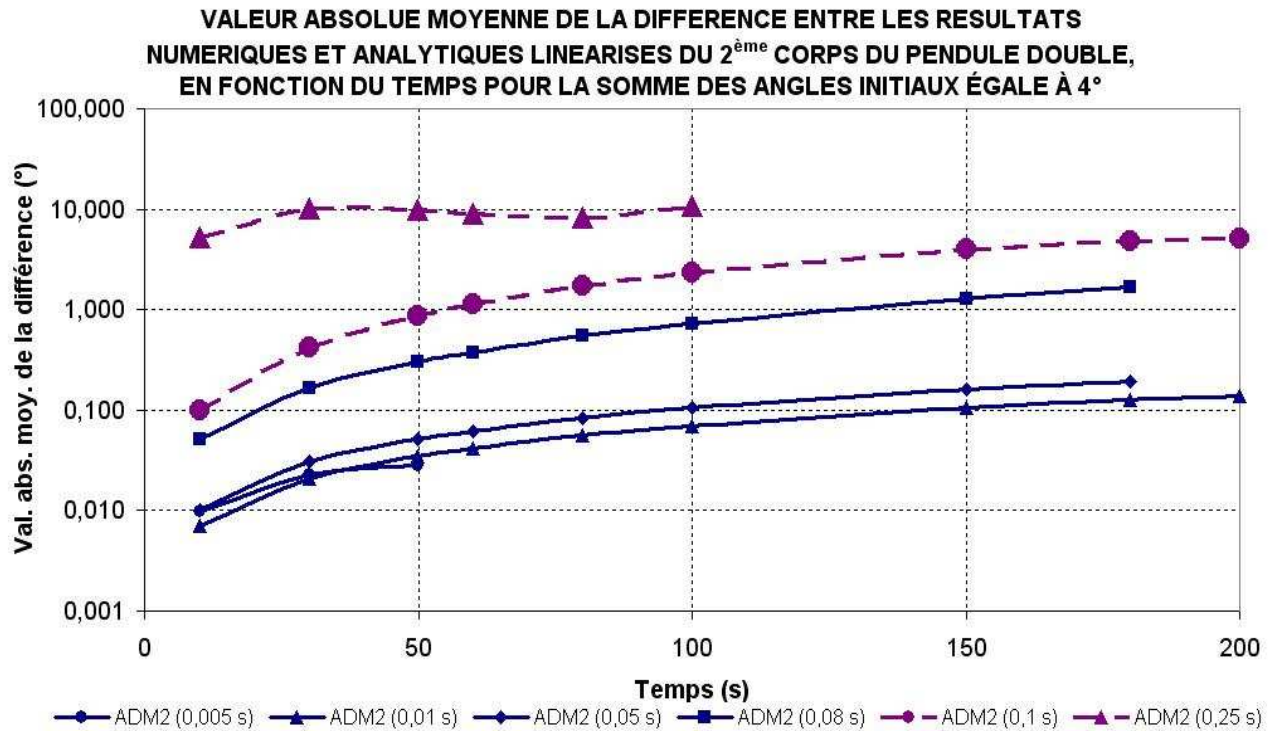
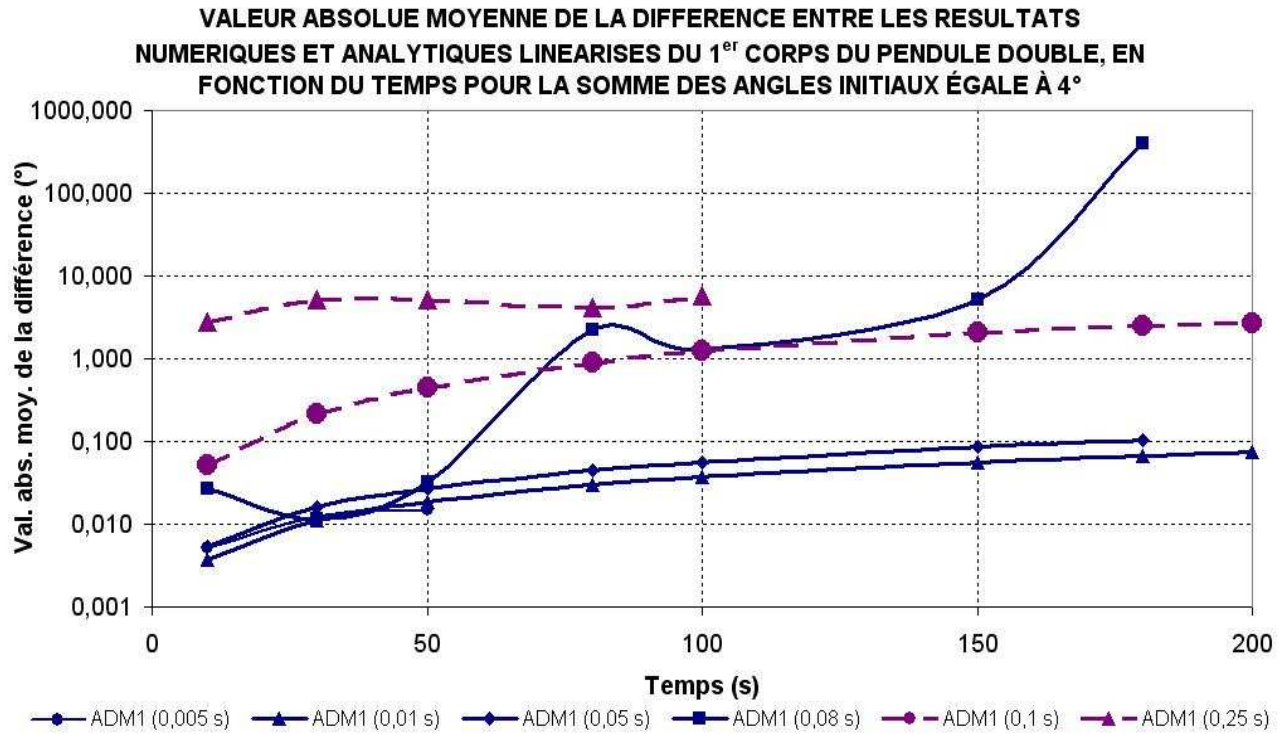


FIG. 5.20 – Pendule double : variation de valeur absolue moyenne de la différence entre les résultats numériques et analytiques de chaque corps en fonction du temps pour différents pas de temps, où $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -89^\circ \\ \gamma^2(0s) = 2^\circ \end{cases}$

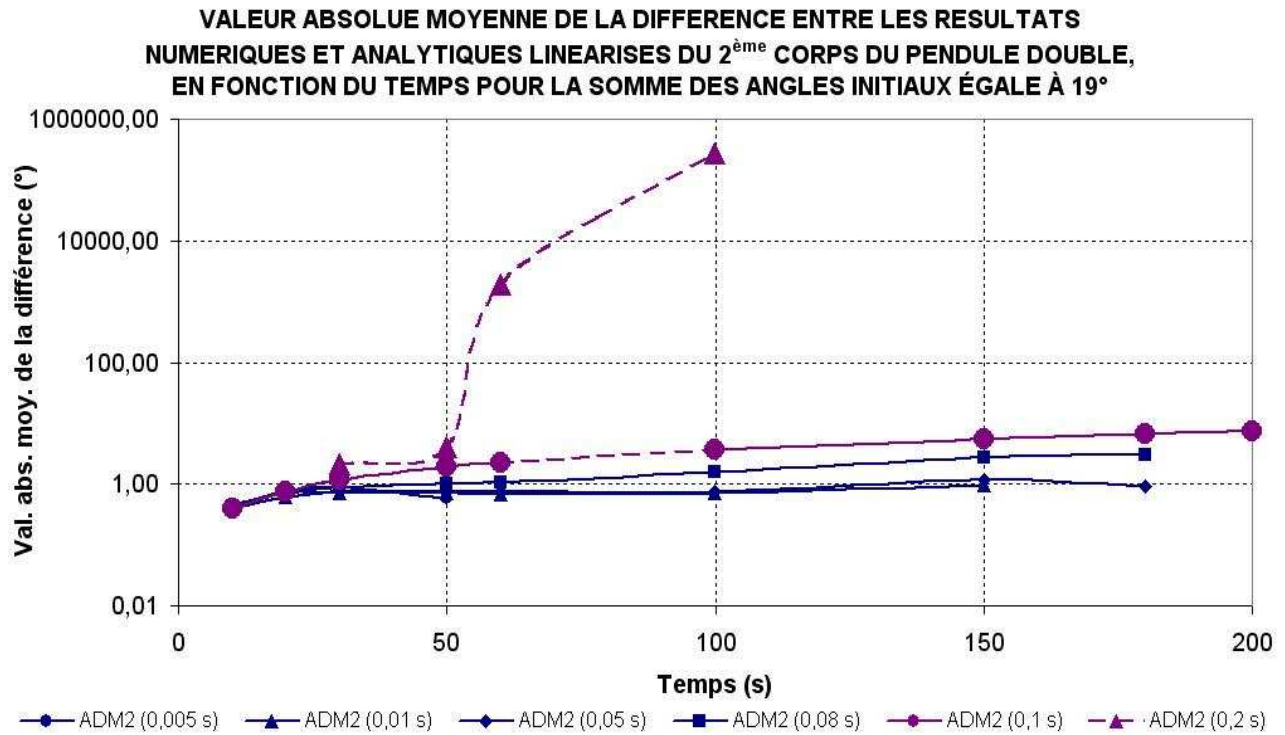
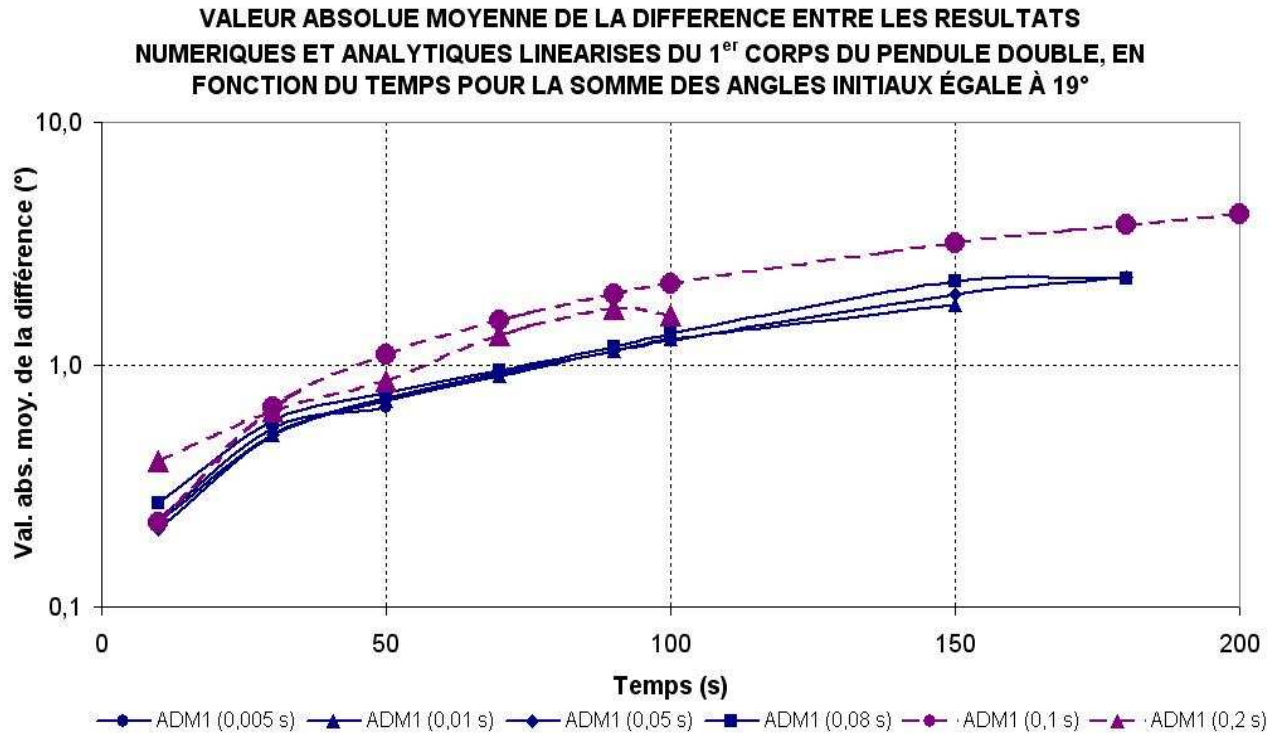
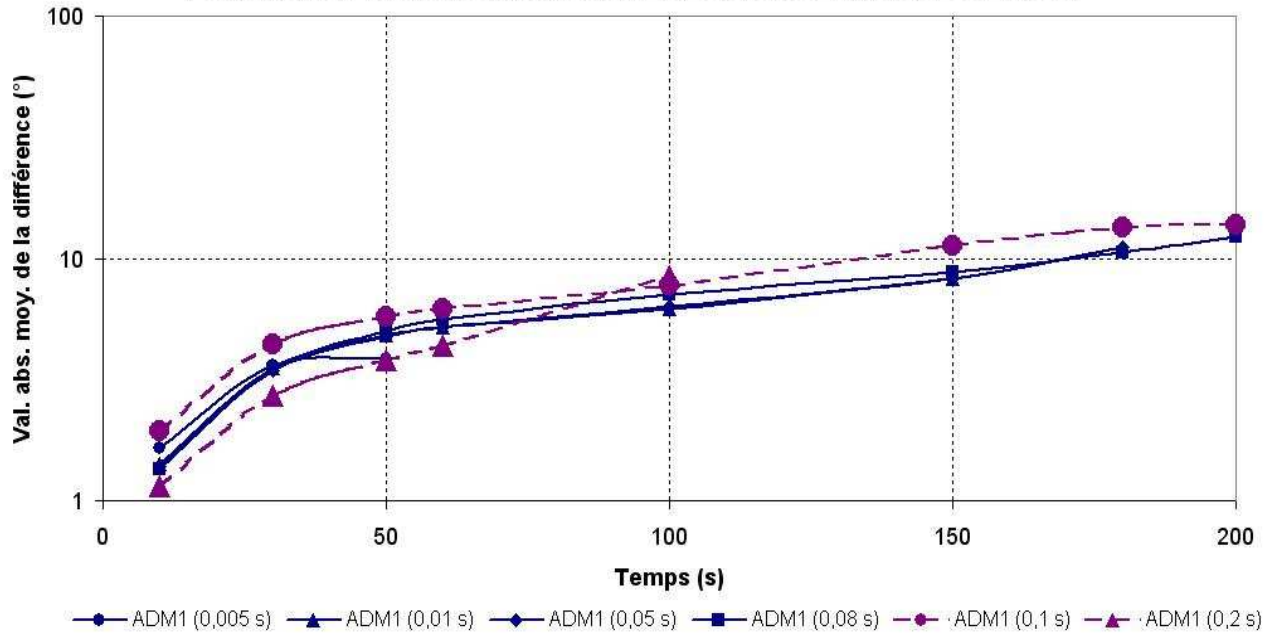


FIG. 5.21 – Pendule double : variation de valeur absolue moyenne de la différence entre les résultats numériques et analytiques de chaque corps en fonction du temps pour différents pas de temps, où $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -83^\circ \\ \gamma^2(0s) = 5^\circ \end{cases}$

VALEUR ABSOLUE MOYENNE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 1^{er} CORPS DU PENDULE DOUBLE, EN FONCTION DU TEMPS POUR LA SOMME DES ANGLES INITIAUX ÉGALE À 32°



VALEUR ABSOLUE MOYENNE DE LA DIFFERENCE ENTRE LES RESULTATS NUMERIQUES ET ANALYTIQUES LINEARISES DU 2^{ème} CORPS DU PENDULE DOUBLE, EN FONCTION DU TEMPS POUR LA SOMME DES ANGLES INITIAUX ÉGALE À 32°

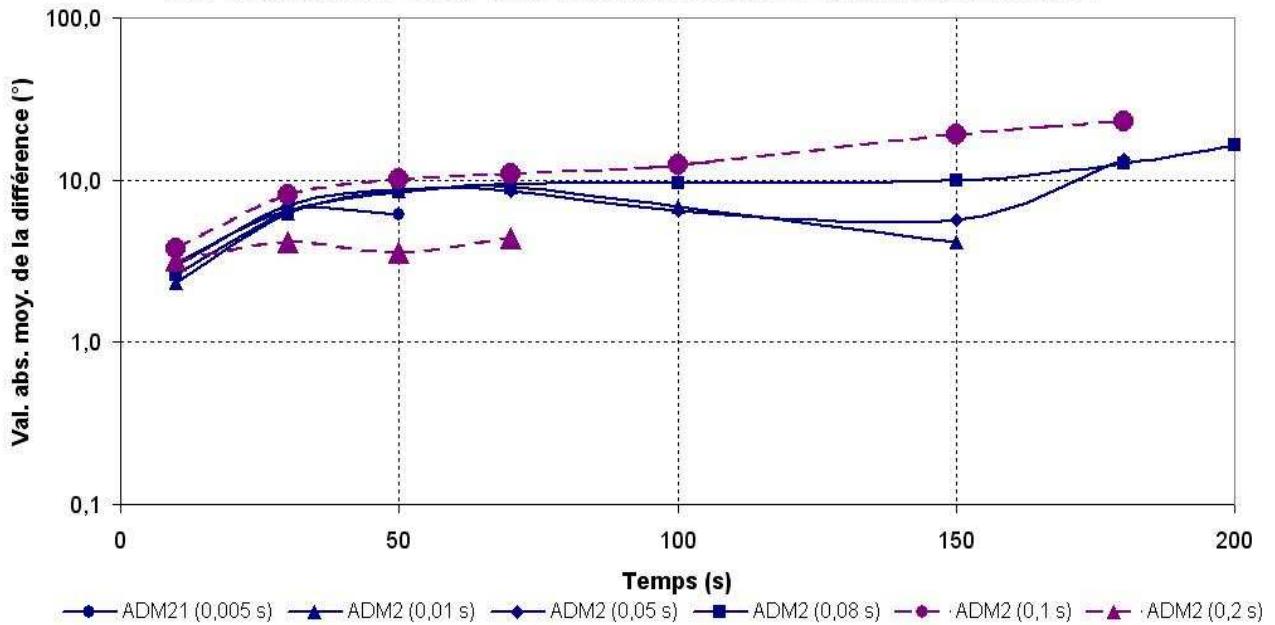


FIG. 5.22 – Pendule double : variation de valeur absolue moyenne de la différence entre les résultats numériques et analytiques de chaque corps en fonction du temps pour différents pas de temps, où $\begin{cases} \gamma^1(0s) = -80^\circ \\ \gamma^2(0s) = 12^\circ \end{cases}$

5.2.2 Cas des systèmes MC contraints en rotation : Pendule tournant

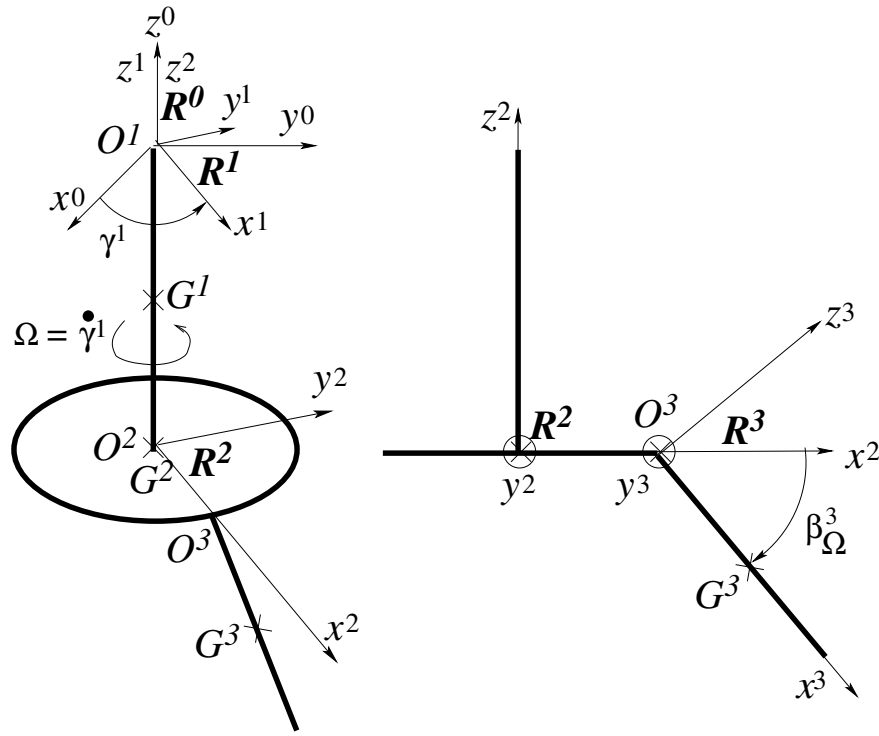


FIG. 5.23 – Description des paramètres cinématiques et dynamiques du pendule tournant

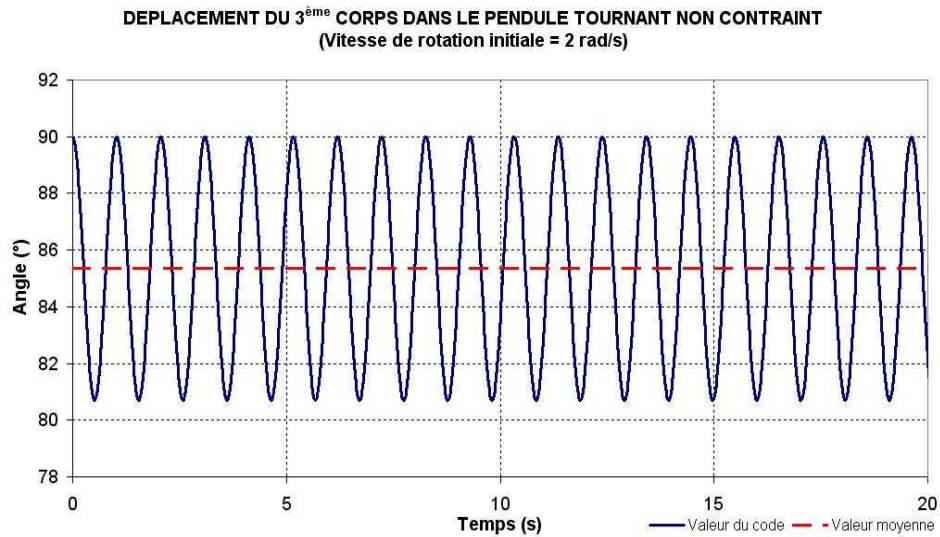


FIG. 5.24 – Pendule tournant avec $\dot{\beta}^3(0s) = \Omega = 2 \text{ rad/s}$: variation de β^3 obtenue par intégration numérique en fonction du temps

L'exemple d'un système plus complexe pour la validation du code est un pendule tournant (*figure 5.23*) : il s'agit d'un pendule, B^3 , relié à une plateforme, B^2 , elle-même attachée à une tige B^1 tournant à vitesse constante $\dot{\gamma}^1$ ou Ω . Le pendule B^3 , dont le mouvement est caractérisé par β^3 , doit monter (β^3 de la *figure 5.23* diminuer) et atteindre sa position de stabilité β_Ω^3 donnée par (*Annexe L*) :

$$\tan \beta_\Omega^3 = \frac{\Omega^2}{g} \left(r + \frac{\ell}{2} \sin \beta_\Omega^3 \right) \quad (5.15)$$

La vitesse initiale de B^1 est non nulle. Le tracé des résultats numériques en fonction du temps est sur la *figure 5.24*, il ne correspond toutefois pas à la valeur prédite par (5.15).

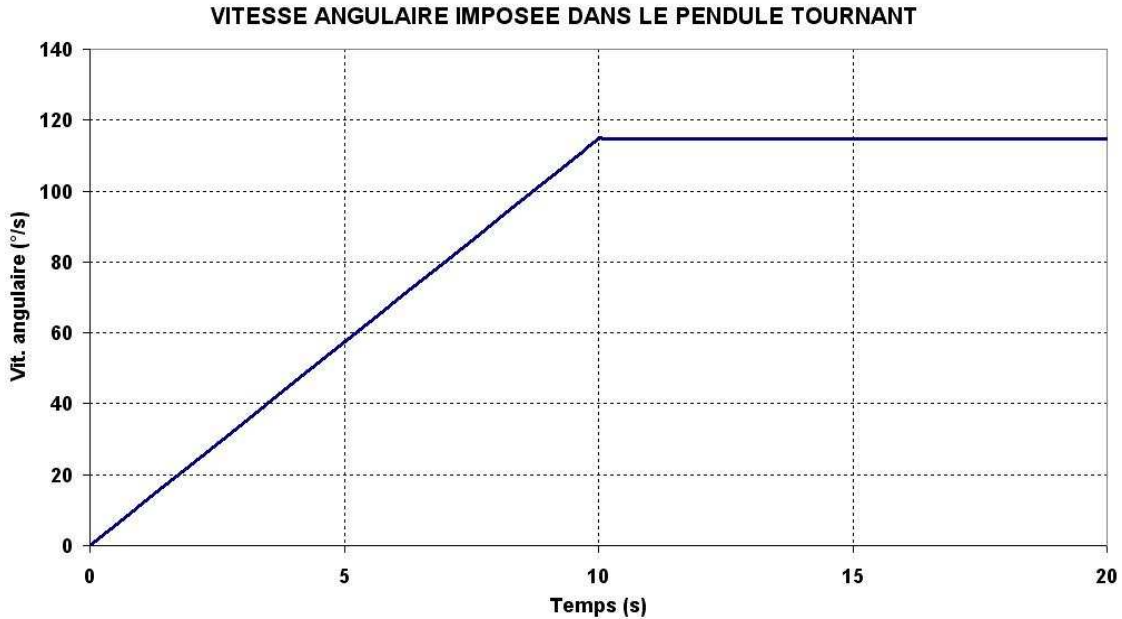


FIG. 5.25 – Description de la variation de la vitesse angulaire de la tige B^1 tournant du pendule tournant en fonction du temps avec $\Omega = 2 \text{ rad/s}$

C'est la raison pour laquelle la vitesse de rotation $\dot{\beta}^3$ a été imposée comme une contrainte. Dans un premier temps, la vitesse angulaire $\dot{\gamma}^1$ de la tige B^1 a été introduite progressivement comme indiquée sur la *figure 5.25* : la valeur initiale $\dot{\gamma}^1(0 \text{ s})$ est nulle et $\dot{\gamma}^1$ atteint sa position de stabilité Ω à partir de 10 s . Le tracé du mouvement du pendule en fonction du temps est sur la *figure 5.26*. Ainsi, dès que le moteur qui entraîne B^1 atteint la vitesse Ω , le pendule oscille constamment autour de sa position de stabilité, ce qui est le cas pour un pendule non amorti. Ce phénomène est aussi provoqué par démarrage trop brusque. Ainsi la formule (5.15) n'est plus valable (*Annexe L*) car des non-linéarités apparaissent alors.

Pour pallier cet inconvénient, c'est-à-dire diminuer l'amplitude des oscillations autour de sa position d'équilibre, la vitesse angulaire de la tige atteint progressivement la vitesse Ω comme indiquée par la *figure 5.27*, à partir d'un temps assez grand (50 s pour l'exemple traité).

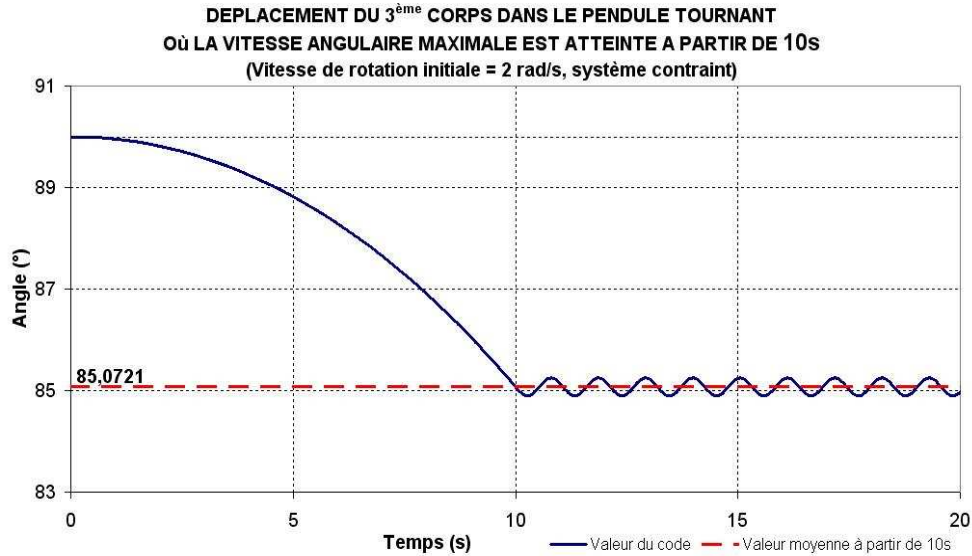


FIG. 5.26 – Pendule tournant avec Ω variant selon la *figure 5.25* : variation de β^3 obtenue par intégration numérique en fonction du temps avec $\Omega = 2 \text{ rad/s}$

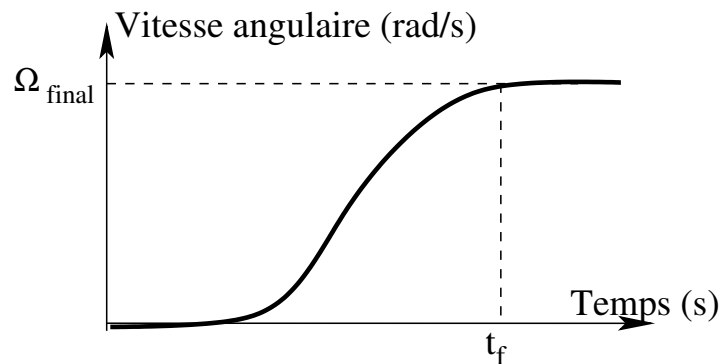


FIG. 5.27 – Description de la variation de la vitesse angulaire de la tige B^1 du pendule tournant en fonction du temps

Le pendule oscille toujours autour de sa position de stabilité mais la différence entre les valeurs minimales et maximales autour de la position d'équilibre restent négligeables :

- $\pm 8,59 \cdot 10^{-5} \text{°}$ pour $\Omega = 0,5 \text{ rad/s}$,
- $\pm 2,86 \cdot 10^{-4} \text{°}$ pour $\Omega = 2 \text{ rad/s}$ et
- $\pm 1,056 \cdot 10^{-1} \text{°}$ pour $\Omega = 8 \text{ rad/s}$

bien que le pendule soit non amorti. De plus, pour une valeur faible de Ω ($0,5 \text{ rad/s}$), les résultats numériques correspondent presque aux résultats analytiques avec une différence de $2,2 \cdot 10^{-3} \%$ alors que pour des vitesses Ω plus grandes (de 2 à 8 rad/s), cette différence est beaucoup plus importante (de 0,136% à 15%) (*figure 5.28*) car le code intègre les non linéarités qui ne sont pas pris en compte dans la solution analytique. Comme le but de ce travail est de traiter le cas d'une éolienne et la vitesse du rotor est nulle avant d'atteindre sa vitesse nominale selon le schéma de la *figure 5.27*, l'étude de ce cas est pleinement justifiée.

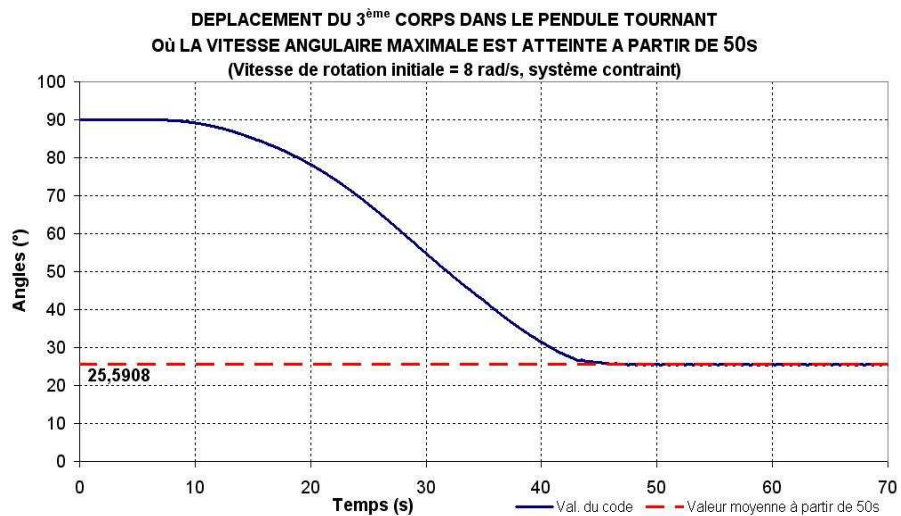
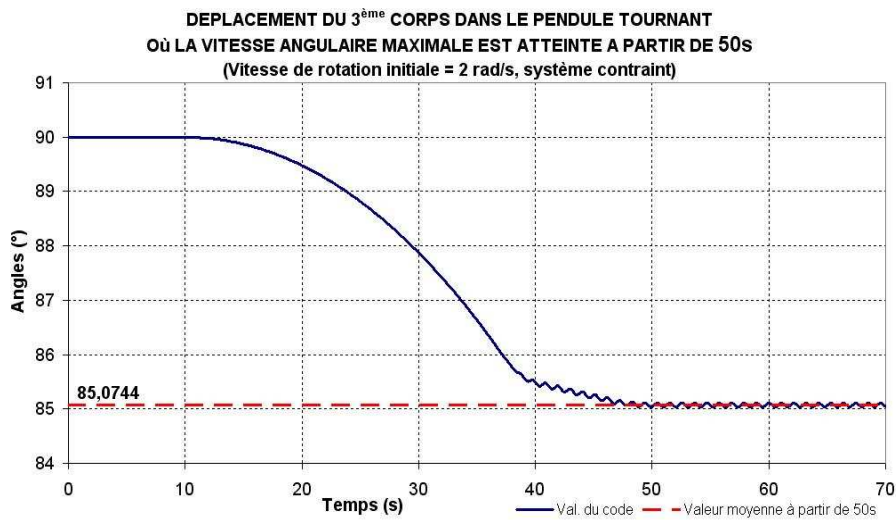
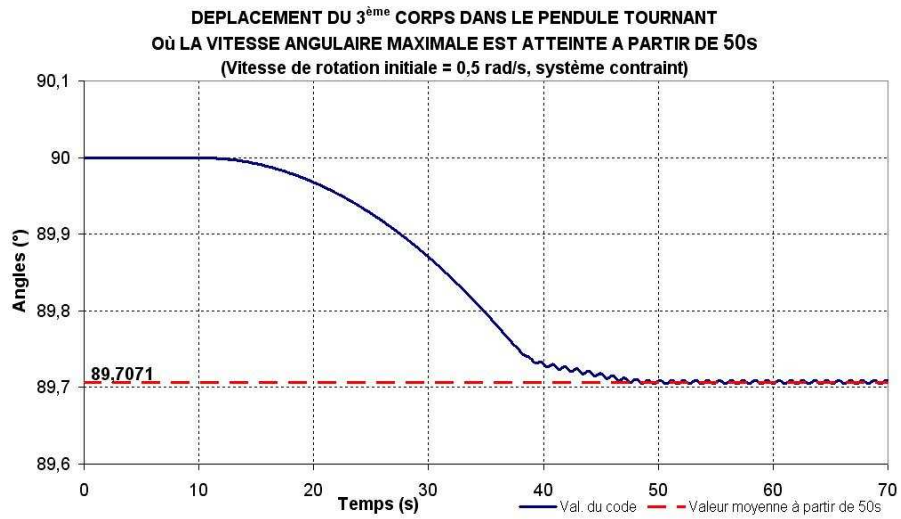


FIG. 5.28 – Pendule tournant : variation de β^3 obtenue par intégration numérique en fonction du temps avec $\Omega = 0,5 \text{ rad/s}$, 2 rad/s et 8 rad/s

5.3 Validation sur des systèmes multicorps souples

La section 4.3 expose la technique de détermination des premiers modes propres avec leurs vecteurs propres respectifs. Après avoir écrit le code de calcul correspondant à cette étape, il reste à vérifier la cohérence des résultats obtenus.

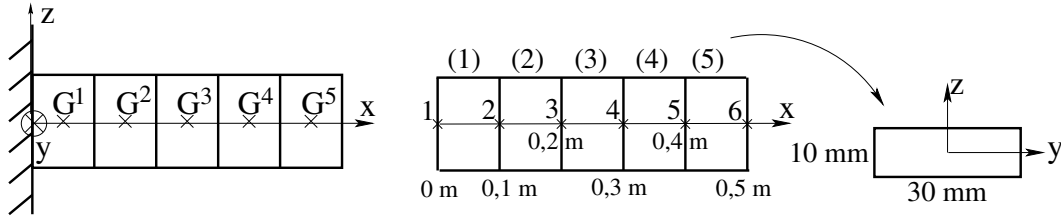


FIG. 5.29 – Exemple d’une poutre souple de section rectangulaire et discrétisée en 5 éléments

Numériques	Analytiques	Différences	Axe
32,72	32,75	0,03	y
98,16	98,27	0,11	z
205,15	208,45	2,05	y
576,22	574,17	3,3	y
615,43	625,35	9,92	z

TAB. 5.3 – Fréquences propres (Hz) selon l’axe y et z (analytiques, numériques et différences entre les deux) d’une poutre, d’après l’annexe M

Ainsi l’annexe M traite le cas simple d’une poutre (figure 5.29). Les caractéristiques de chaque élément composant cette poutre sont :

$$\begin{aligned}
 ES &= 6.10^{+7} N \\
 EI_y &= 5.10^{+2} N.m^2 \\
 EI_z &= 4,5.10^{+3} N.m^2 \\
 GJ &= 1,923.10^{+3} N.m^2 \\
 \rho I_p &= 1,954.10^{-4} Kg.m \\
 m_\ell &= 2,34 Kg/m
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

et la position de chaque noeud est :

$$\begin{aligned}
 \ell^1 &= (0,0 \quad 0,0 \quad 0,0) \\
 \ell^2 &= (0,105 \quad 0,0 \quad 0,0) \\
 \ell^3 &= (0,201 \quad 0,0 \quad 0,0) \\
 \ell^4 &= (0,298 \quad 0,0 \quad 0,0) \\
 \ell^5 &= (0,402 \quad 0,0 \quad 0,0) \\
 \ell^6 &= (0,5 \quad 0,0 \quad 0,0)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Le tableau 5.3 regroupe la différence entre cinq pulsations propres et cinq fréquences propres analytiques et numériques d’une poutre, selon l’axe y et z , car l’axe de la poutre est

l'axe x . Après l'obtention de ces valeurs et vecteurs propres, les vecteurs de déplacement sont calculés grâce à la même démarche (figure 5.30).

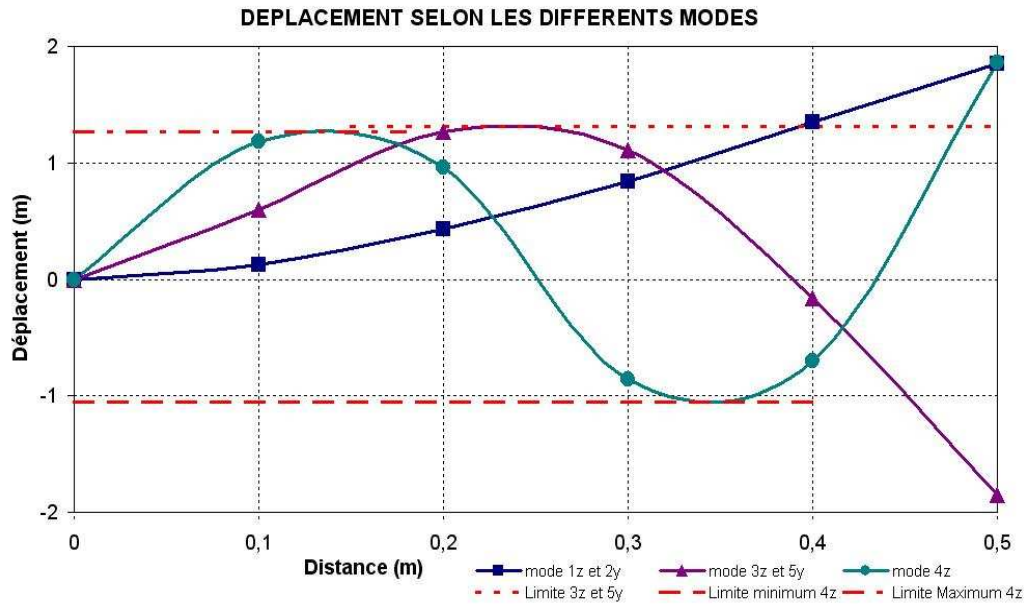


FIG. 5.30 – Diagramme des déplacements selon la position le long de la poutre de l'exemple de la figure M.1, à partir des modes propres obtenus dans le tableau M.2

5.4 Validation de la modélisation aérodynamique

5.4.1 Présentation de l'éolienne de démonstration

Avant de modéliser l'éolienne complètement, il est primordial de décrire les pales à partir de certaines données géométriques, polaires, ... que Berlu [1] a répertorié dans des fichiers. La machine réelle de référence est une éolienne de 750 kW. Ces caractéristiques sont les suivantes :

- un mât de 45 m de haut, de diamètre à la base de 3,7 m et de 2,3 m en haut de la tour,
- une nacelle dont le générateur a une vitesse nominale de 1690 tr/min et le multiplicateur un rapport de 60,4 et
- trois pales de 23,5 m de long.

5.4.2 Les résultats numériques en comparaison avec une machine réelle

Les données manquantes (masse, matrice d'inertie, ...) de chaque élément de pale ont été calculées de façon réaliste afin d'avoir une idée concrète des résultats du code, à partir des données de [1].

Le code correspondant à cette étude a donc été modifié afin d'être intégré par la suite au code relatif aux corps rigides. Différents changements ont été opérés sur le code original de calcul des efforts aérodynamiques de [1] :

- Tout d'abord, l'utilisateur choisit lui-même la discrétisation de la pale en éléments « poutre ». Plus la pale est discrétisée, plus les données sont précises. Par exemple, le « découpage » en 7 noeuds de l'éolienne tripale présentée dans la *section 5.4.1* conduirait à une puissance générée d'environ $612 kW$ et en 22 noeuds d'environ $630 kW$ (pour une vitesse de vent de $10 m/s$).
- De plus, pour des raisons de temps et de simplification, les quantités interpolées le sont linéairement entre 2 noeuds plutôt qu'entre trois noeuds.
- La méthode de détermination des vitesses induites du vent sur chaque tronçon de pale est celle de Glauert [1] et non celle du sillage prescrit car la première est plus simple à exploiter ².
- Le torseur des efforts aérodynamiques est pris en compte, transporté du foyer aérodynamique A ³ au centre de gravité car, pour les besoins de l'étude dynamique, le torseur des efforts extérieurs (gravité et aérodynamique) est calculé au centre de gravité par rapport à la base du repère \mathcal{R}^0 .

Par la suite, certains corps comme le mât et les pales sont décrits en corps souples. C'est la raison pour laquelle ils ont été discrétisés en éléments « poutre », ce qui rend le passage en corps souples par la base nodale moins complexe. La partie concernant l'aérodynamique a été traitée à part, comme celle des corps rigides et souples.

	Rayon		Ordre des coefficients		
	initial	final	1 – 4 – 7	2 – 5 – 8	3 – 6 – 9
1	0	0,125	$0,15000.10^{+1}$		
2	0,125	3,75	$0,129999995.10^{+1}$		
3	3,75	6,0	$0,129999995.10^{+1}$	$0,331111166.10^0$	
4	6,0	22,5	$0,204444971.10 + 1$ $-0,696462827.10^{-2}$ $0,552803268.10^{-4}$	$-0,497139075.10^{-1}$ $0,388989112.10^{-2}$ $-0,222422225.10^{-5}$	$0,179327967.10^{-1}$ $-0,671130693.10^{-3}$ $0,351433328.10^{-7}$
5	22,5	23,25	$0,606999993.10^0$	$-0,795999991.10^0$	

TAB. 5.4 – Liste des coefficients concernant la corde de l'éolienne de $750 kW$

Il a été vu, dans la *section 4.4.4*, que certaines caractéristiques sont soumises à une loi. Par exemple, les coefficients regroupés dans le *tableau 5.4* permettent de calculer chaque corde de la pale de l'éolienne pour chaque noeud correspondant et déterminé à partir du centre du repère au pied de pale.

²Le calcul des vitesses induites calculées avec la technique de sillage prescrit est envisageable dans une prochaine étude

³Le foyer aérodynamique A est le centre où le moment de tangage est constant quel que soit l'angle d'incidence ou nul si le profil de la pale est symétrique

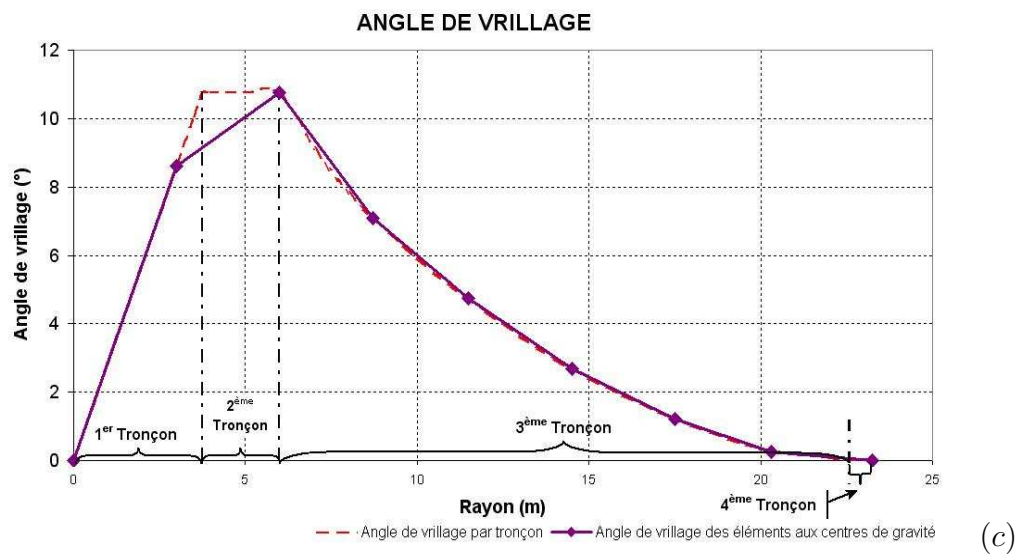
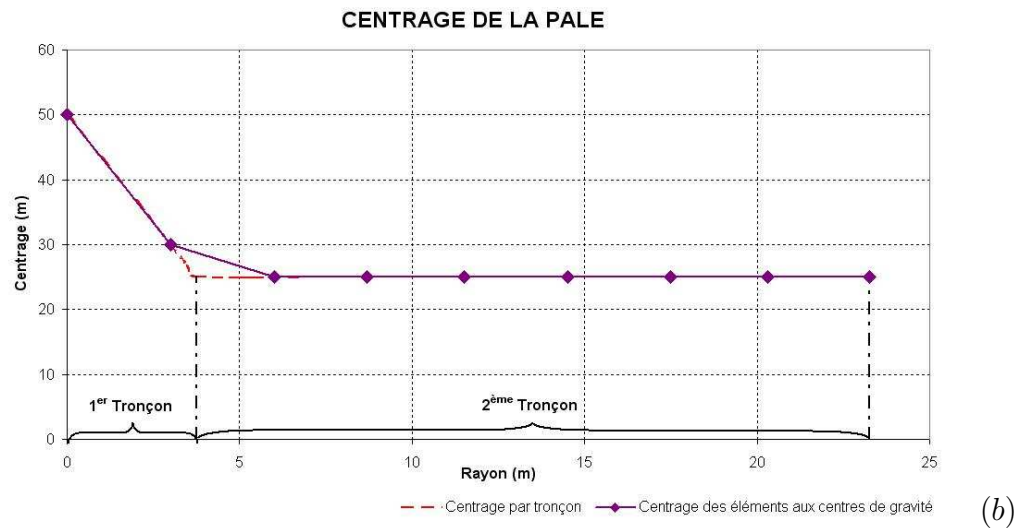
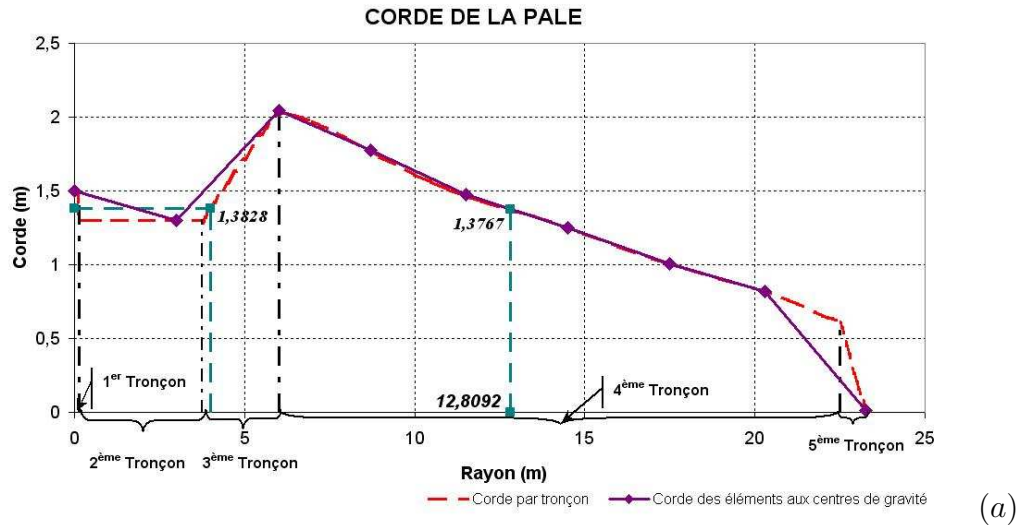


FIG. 5.31 – Calcul de la corde (a), du centrage (b) et de l'angle de vrillage (c) d'une pale, en fonction du rayon, à partir des coefficients relatifs à ces données

Ainsi (4.296) représente un exemple pour un noeud à 4 m du pied de pale et vaut numériquement :

$$\begin{aligned}
\text{Corde}(\text{Rayon } r = 4 \text{ m}) &= \sum_{i=1}^{N_c} \text{Coeff}_i \times (r - x_{di}(r))^{i-1} \\
&= 1,29999995 \times (4 - 3,75)^{1-1} + 0,331111166 \times (4 - 3,75)^{2-1} \\
&= 1,382777 \text{ m}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

L'évolution de la corde de l'éolienne choisie pour la validation est représentée dans la *figure 5.31 (a)* et est assez réaliste. Cette technique a aussi été employée pour rechercher la position du centrage (*figure 5.31 (b)*), l'angle de vrillage (*figure 5.31 (c)*), des polaires pour calculer les coefficients aérodynamiques, les foyers aérodynamiques de chaque noeud. Ces données fixes sont enregistrées dans un fichier utilisable à tout moment. Puis, comme dit dans la *section 5.4.2*, toutes ces données de chaque élément étudié sont obtenues par interpolation entre deux noeuds pour être calculé au centre de gravité ce chacun des éléments. En effet, la corde de l'élément n°5 vaut :

$$\text{Corde}(\text{Rayon } r = 12,809156 \text{ m}) = 1,376714 \text{ m} \tag{5.19}$$

où le centre de gravité de l'élément n°5 est au rayon :

$$\begin{aligned}
\text{Rayon}(\text{Element } n^{\circ}5) &= -\text{Rayon } \text{noeud } 5 + 12,8091 \text{ m} \\
&= -11,5 + 12,8091 = 1,3091566 \text{ m}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Avant de connaître des données évoluant au cours du temps, il est primordial de choisir l'angle de calage adéquat car P. Berlu [1] traitait son programme initial avec un angle de calage fixe (β_c valant $1,3^\circ$). Cependant comme vu précédemment dans la *section 3.3*, la puissance produite doit atteindre sa valeur nominale en faisant varier cet angle. Pour cela, différents cas ont été étudiés. Des courbes de puissance ont été tracées en fonction de l'angle de calage (compris entre 0° et 90°) pour différentes valeurs de vitesse de vent (entre 2 et 25 m/s). Ainsi ces tracés ont été répertoriés sur la *figure 5.32*, en tenant compte des vitesses induites (a) et non (b). Ensuite, des droites et des courbes polynomiales des angles de calage en fonction de la puissance engendrée obtenue par le code numérique pour les différentes valeurs de la vitesse de vent ont été tracés avec leurs équations correspondantes (*figures 5.33 et 5.34*). Cette construction permet de connaître la valeur de l'angle de calage optimal correspondant à la valeur de puissance calculée à partir de la *figure 4.33 (a)*. La droite ou la courbe polynomiale se rapprochant plus du tracé des points a un coefficient de détermination R^2 proche de 1. Ensuite, la même construction est appliquée en traçant la droite et la courbe polynomiale de l'angle de calage en fonction de la vitesse du vent à partir des points des *figures 5.33 et 5.34* (*figures 5.35 et 5.36*). Ainsi l'angle de calage peut être déterminé à partir de la vitesse du vent grâce aux équations répertoriées dans les *tableaux 5.5 et 5.6*. Pour illustrer la démarche, trois exemples ont été choisis afin de connaître leurs angles de calage respectifs. Deux choix sont possibles suivant que la vitesse induite est prise en compte ou non. Cependant, à partir de la théorie, il est nécessaire d'intégrer cette vitesse induite afin d'être précis dans les résultats.

La méthode employée est relativement simple mais concrète et a permis de calculer les efforts et moments aérodynamiques, qui seront combinés à l'effort dû à la gravité pour obtenir les efforts et moments extérieurs subis par la machine.

Ainsi, d'après ce qui précède, les équations données par le *tableau 5.6* correspondent aux angles de calage, en fonction du vent, pour l'éolienne de 750 kW choisie au départ. Ces données sont à rentrer dans un fichier spécifié à cet effet pour connaître l'évolution du comportement de cette machine au cours du temps. Pour les autres éoliennes choisies, la même technique est à appliquer.

L'angle ϕ , somme des angles de calage β_c , de vrillage β_v et d'incidence α qui tient compte des vitesses induites, en fonction de sa position des noeuds, selon différents angles de calage, a été tracé (*figure 5.37*) pour différentes vitesses de rotor. Ces courbes obtenues à partir du code numérique sont la preuve que cet angle ϕ varie selon la vitesse du rotor. Il est donc important de connaître précisément l'angle de calage correspondant à la puissance générée équivalente à partir du graphique de la *figure 4.33 (a)*, ce qui a été démontré ci-avant. Les coefficients aérodynamiques associés à l'angle ϕ , somme de l'angle de calage, de l'angle de vrillage et de l'angle d'incidence, déterminent les forces aérodynamiques. Ils varient donc au cours du temps.

Après avoir calculés les efforts aérodynamiques en tenant compte des conditions extérieures afin d'optimiser sa production d'électricité, une machine réelle est choisie pour enregistrer ses données d'entrée (arborescence, masses des différents composants, ...) dans les fichiers respectifs.

Caractéristiques → Partitions pour la vitesse du vent ↓	Coefficient de détermination R^2	Equation de la droite liant l'angle de calage à la vitesse du vent	Exemples : $\left\{ \begin{array}{l} v_{vent} \\ \downarrow \\ \beta_c \\ \downarrow \\ P_{engendrée} \end{array} \right.$
3 - 5 m/s	0,9999562	$1,89425168 \cdot 10^{-3} x^2 +$ $+1,0182855 x +$ $+1,880144$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ m/s} \\ 5,98^\circ \\ 72,5443 \text{ kW} \end{array} \right.$
5 - 13,5 m/s	0,999994896	$-5,59388942 \cdot 10^{-3} x^2 +$ $+1,11371795 x +$ $+1,5782$	$\left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ m/s} \\ 12,156^\circ \\ 501,6646 \text{ kW} \end{array} \right.$
13,5 - 25 m/s	0,999998775	$-8,7955888951 \cdot 10^{-3} x^2 +$ $+1,4498763 x -$ $-2,38377206$	$\left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ m/s} \\ 23,095^\circ \\ 750 \text{ 190 W} \\ \simeq 750 \text{ kW} \end{array} \right.$

TAB. 5.5 – Données correspondant à la droite de l'angle de calage en fonction de la vitesse du vent, sans tenir compte de la vitesse induite

Caractéristiques → Partitions pour la vitesse du vent ↓	Coefficient de détermination R^2	Equation de la droite liant l'angle de calage à la vitesse du vent	Exemples : $\left\{ \begin{array}{l} v_{vent} \\ \downarrow \\ \beta_c \\ \downarrow \\ P_{engendrée} \end{array} \right.$
3 - 5 m/s	0,998903396	$-0,123118325 x^2 +$ $+1,85665436 x +$ $+0,45785142$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ m/s} \\ 5,91^\circ \\ 65,77035 \text{ kW} \end{array} \right.$
5 - 13,5 m/s	0,999992178	$-4,40034329 \cdot 10^{-4} x^2 +$ $+0,984891127 x +$ $+1,65304752$	$\left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ m/s} \\ 11,458^\circ \\ 501,1166 \text{ kW} \end{array} \right.$
13,5 - 25 m/s	0,99999996	$-1,03262298 \cdot 10^{-2} x^2 +$ $+1,53665952 x -$ $-3,99924907$	$\left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ m/s} \\ 22,604^\circ \\ 749833 \text{ W} \\ \simeq 750 \text{ kW} \end{array} \right.$

TAB. 5.6 – Données correspondant à la droite de l'angle de calage en fonction de la vitesse du vent, en tenant compte de la vitesse induite

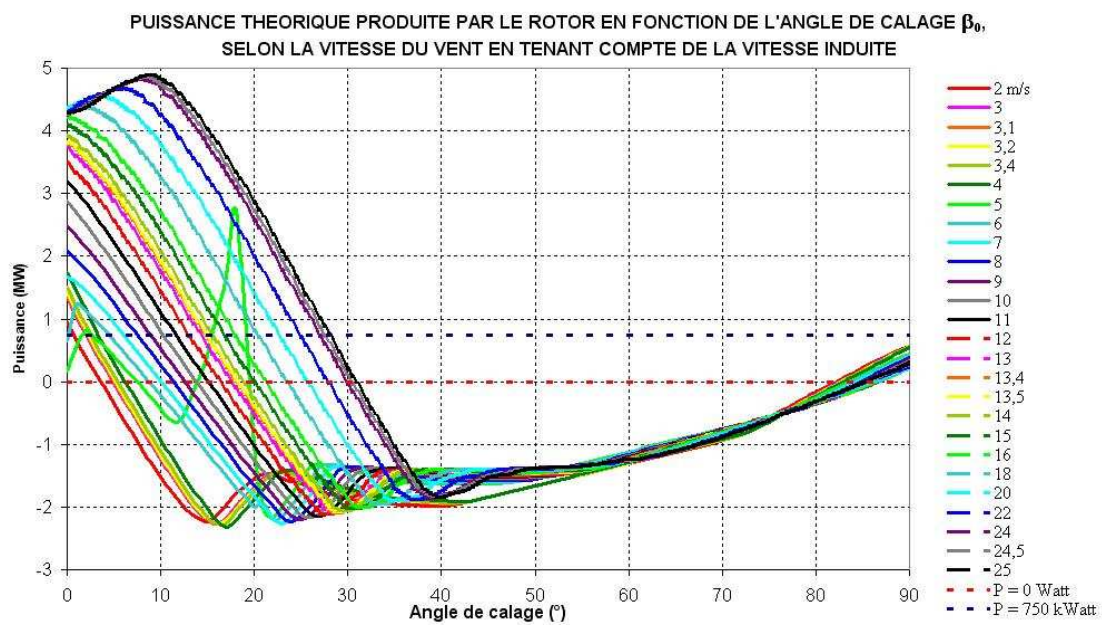
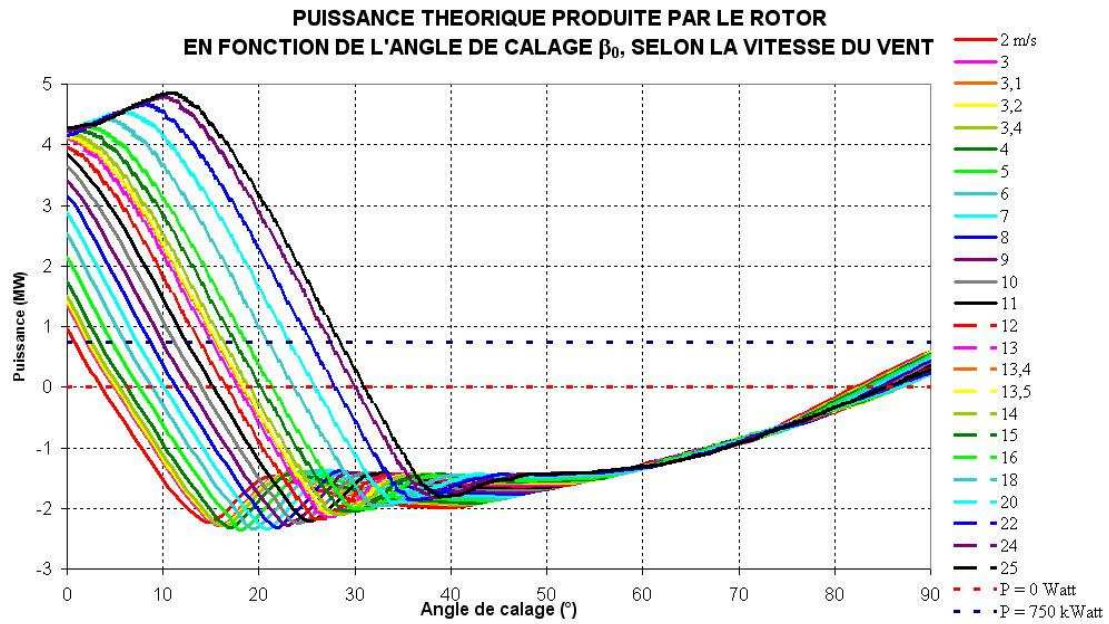


FIG. 5.32 – Différentes courbes de puissance obtenues avec le code numérique en fonction de l'angle de calage β_c pour différentes vitesses de vent

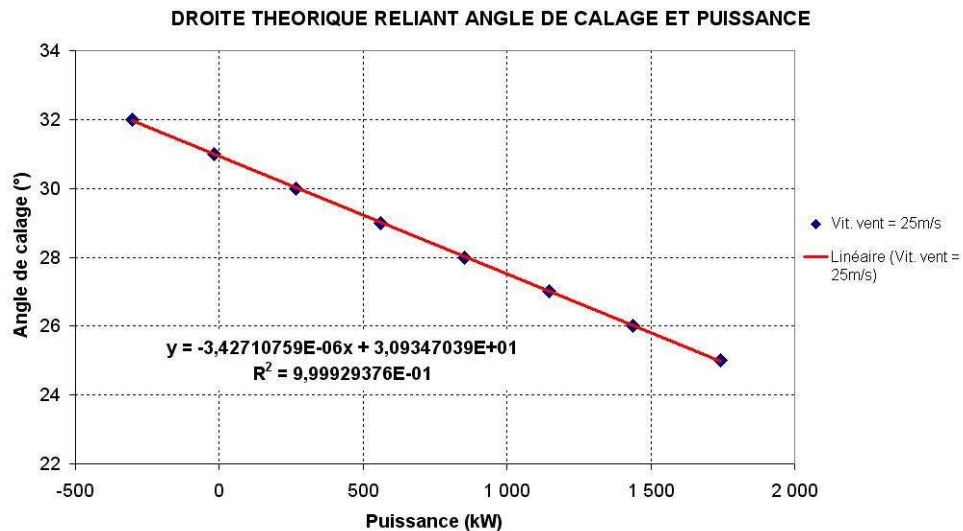
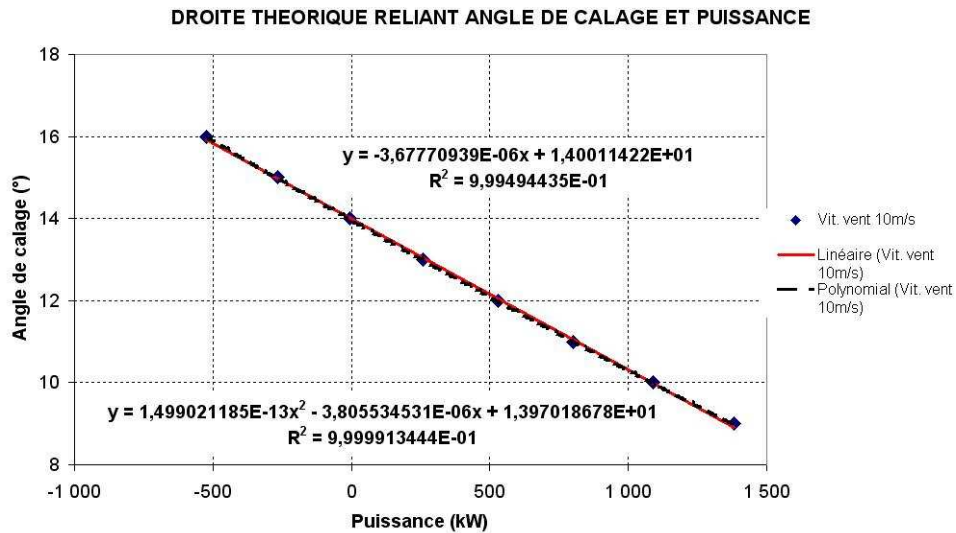
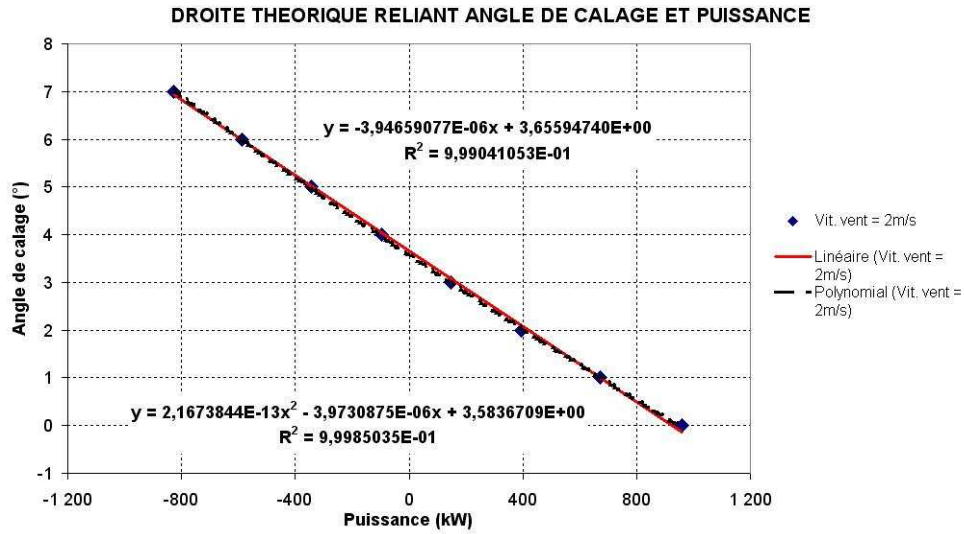


FIG. 5.33 – Droite et courbe polynomiale de l'angle de calage en fonction de la puissance pour une vitesse de vent de 2 m/s, 10 m/s et 25 m/s, à partir de la figure 5.32 (a)

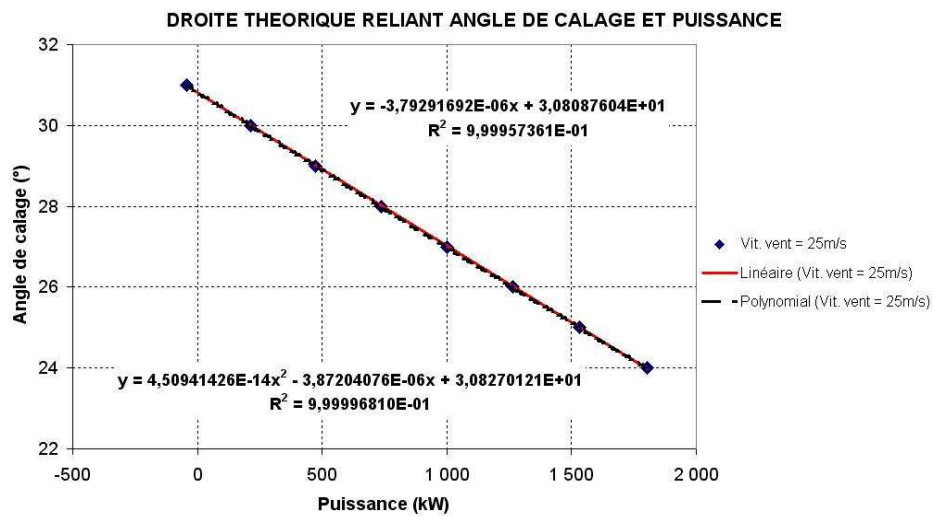
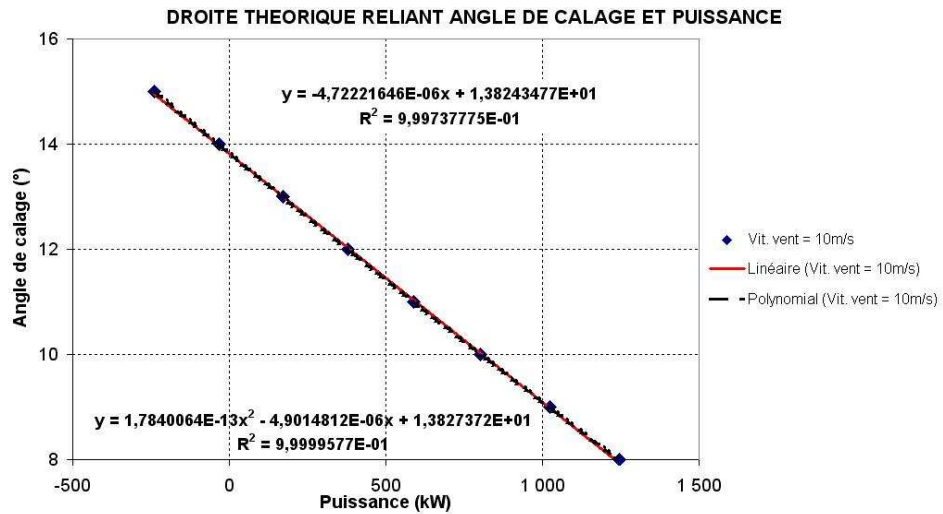
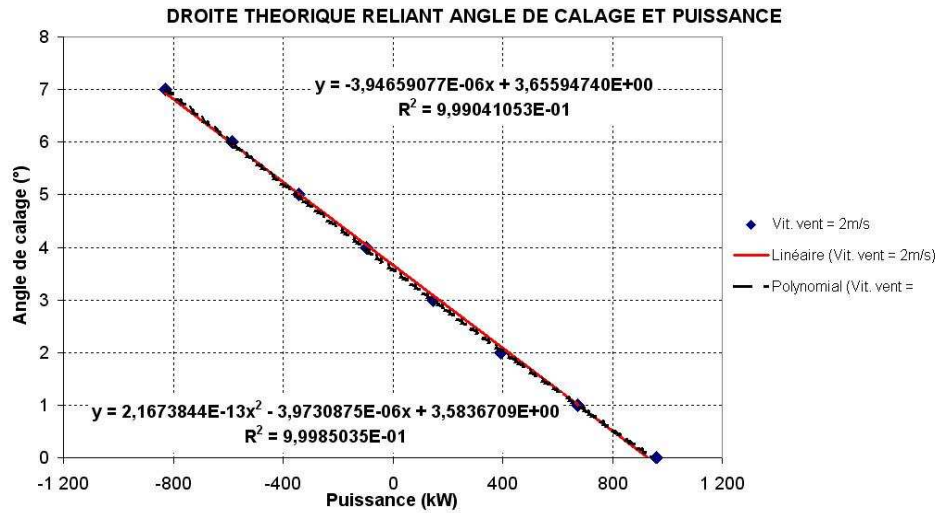


FIG. 5.34 – Droite et courbe polynomiale de l'angle de calage en fonction de la puissance, en tenant compte de la vitesse induite, pour une vitesse de vent de 2 m/s, 10 m/s et 25 m/s, à partir de la figure 5.32 (b)

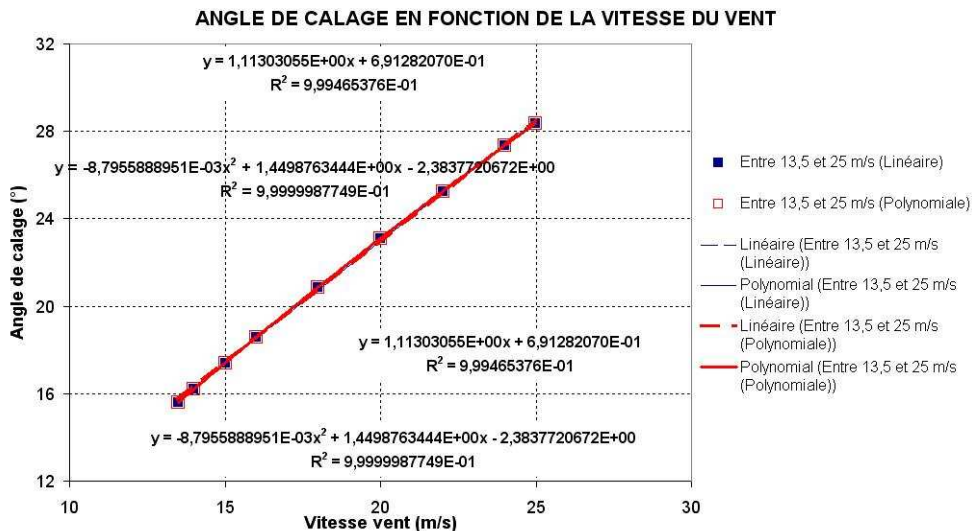
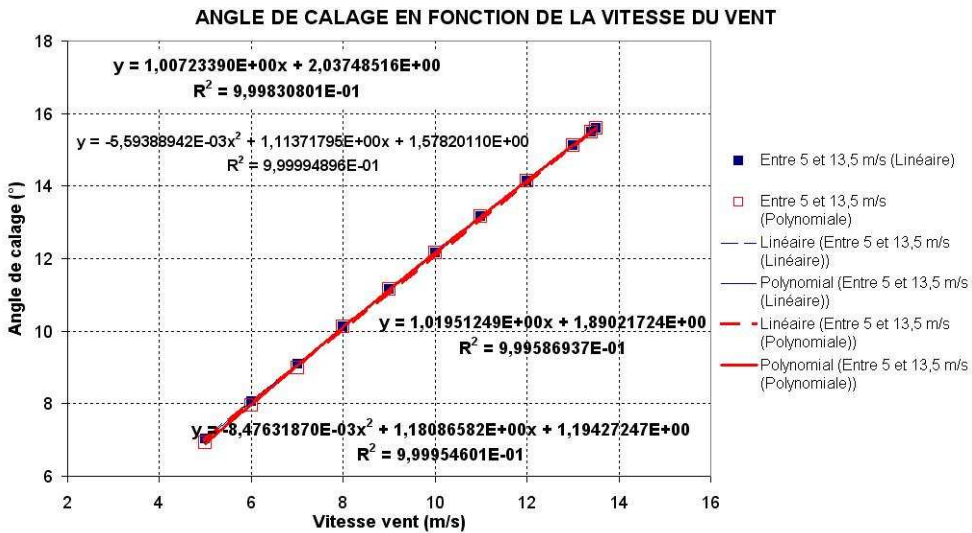
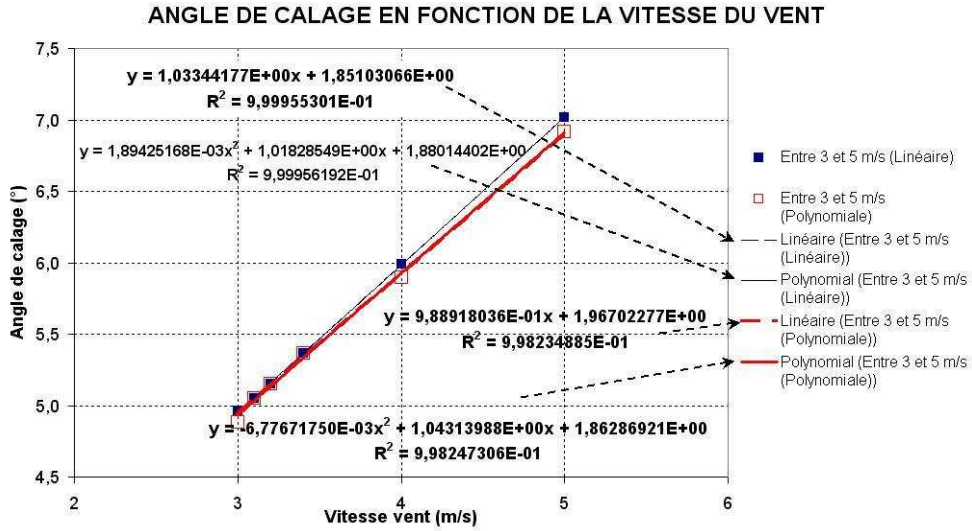


FIG. 5.35 – Droite et courbe polynomiale de la droite de la courbe polynomiale de l'angle de calage en fonction de la vitesse de vent, à partir des équations de la figure 5.33

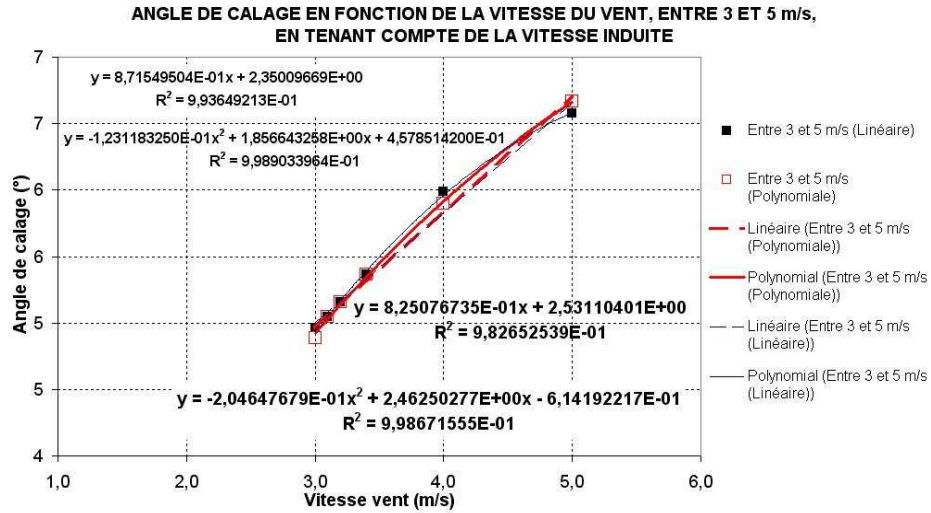


FIG. 5.36 – Droite et courbe polynomiale de la droite de la courbe polynomiale de l'angle de calage en fonction de la vitesse de vent, à partir des équations de la *figure 5.34*, en tenant compte de la vitesse induite

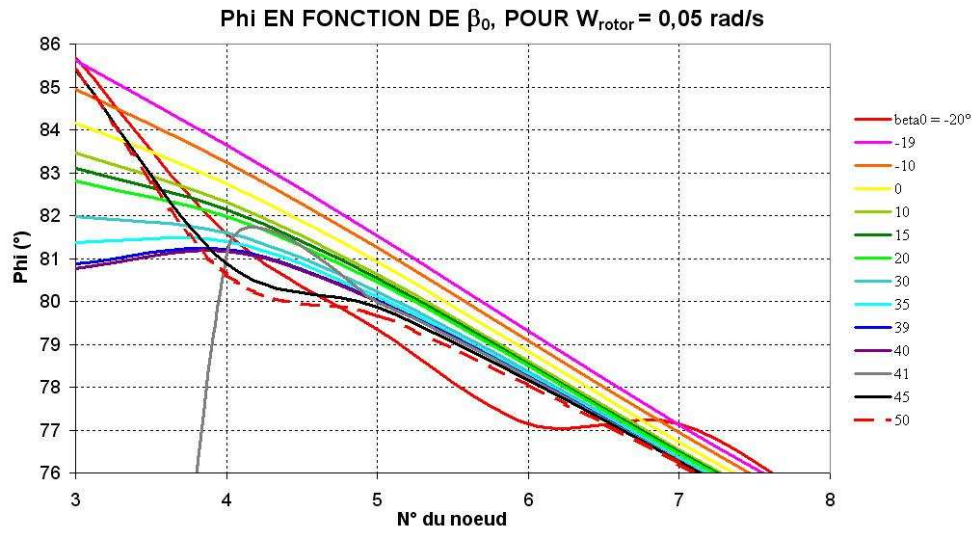


FIG. 5.37 – Courbe de l'angle ϕ en fonction de l'angle de calage, pour la vitesse du rotor valant $0,05 \text{ rad/s}$, 1 rad/s et $2,93 \text{ rad/s}$

5.5 Modélisation d'une machine réelle

5.5.1 Introduction

Avant de connaître le comportement d'une machine complète au cours du temps, chaque sous-ensemble (tour, nacelle et moyeu) est discrétisé en plusieurs corps et chaque élément discrétisé correspond à un corps à part entière (*figure 5.38*). Leurs caractéristiques (masse de la nacelle, du moyeu, ...) ont été calculées de façon réaliste pareillement à la *section 5.4.2*.

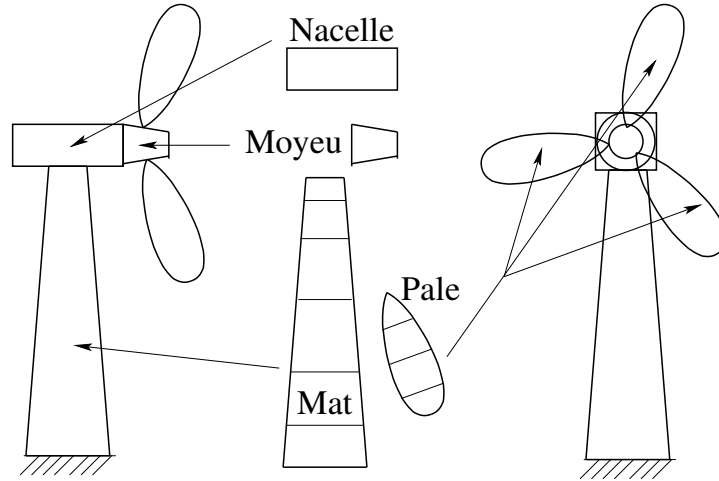


FIG. 5.38 – Décomposition de l'éolienne en sous-ensembles discrétisés ou non

Ainsi le module de calcul est effectué à part puis introduit au corps du programme relatif aux corps rigides. L'acquisition des matrices d'inertie et de la masse des différents composants discrétisés est expliquée précisément dans les différentes sections qui suivent.

5.5.2 Modélisation nécessaire pour le code

5.5.2.1 La tour

La tour considérée comme rigide est divisée en plusieurs éléments de masse volumique ρ et décrit dans la 1^{ère} partie de la *figure 5.39* tel que le $i^{\text{ème}}$ élément cylindrique ($i > 2$) soit construit comme le montre la 2^{ème} partie de la *figure 5.39*. Ainsi sa matrice d'inertie définie en son centre de gravité s'écrit :

$$[I^i] = \rho\pi h^i \begin{bmatrix} \frac{R^i(3R^{i2}+h^{i2})-r^i(3r^{i2}+h^{i2})}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^i(3R^{i2}+h^{i2})-r^i(3r^{i2}+h^{i2})}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^{i4}-r^{i4}}{2} \end{bmatrix}_{(G^i, x^i, y^i, z^i)} \quad (5.21)$$

et sa masse vaut :

$$m^i = \rho\pi h^i (R^{i2} - r^{i2}) \quad (5.22)$$

où :

$$\begin{cases} D_{si} \leq 2r^i \leq D_{ii} \\ D_{se} \leq 2R^i \leq D_{ie} \end{cases} \quad (5.23)$$

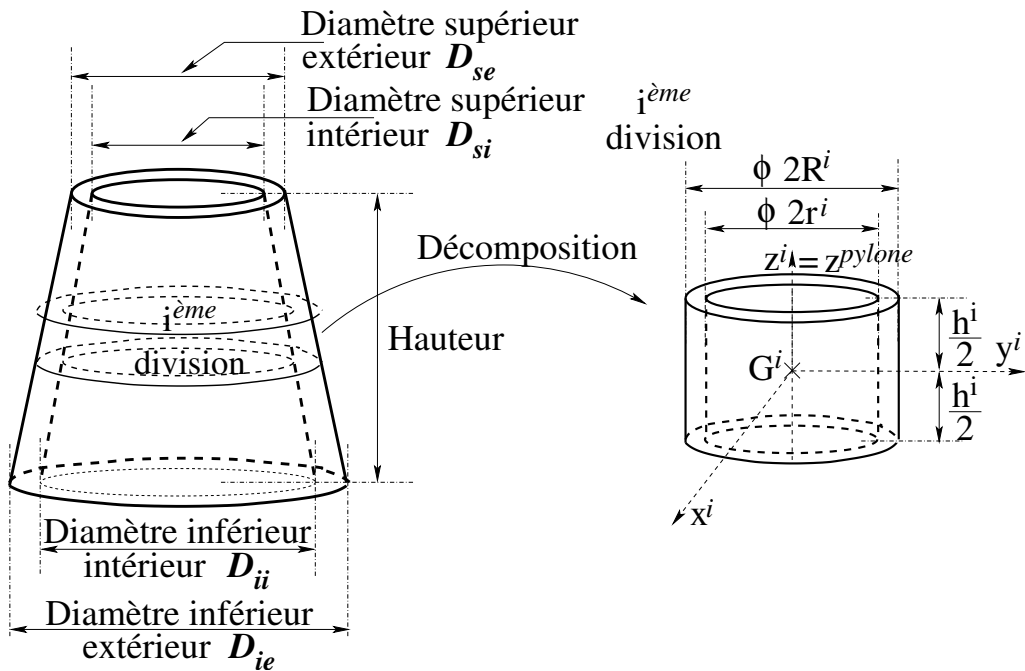


FIG. 5.39 – Modélisation de la tour

5.5.2.2 La nacelle

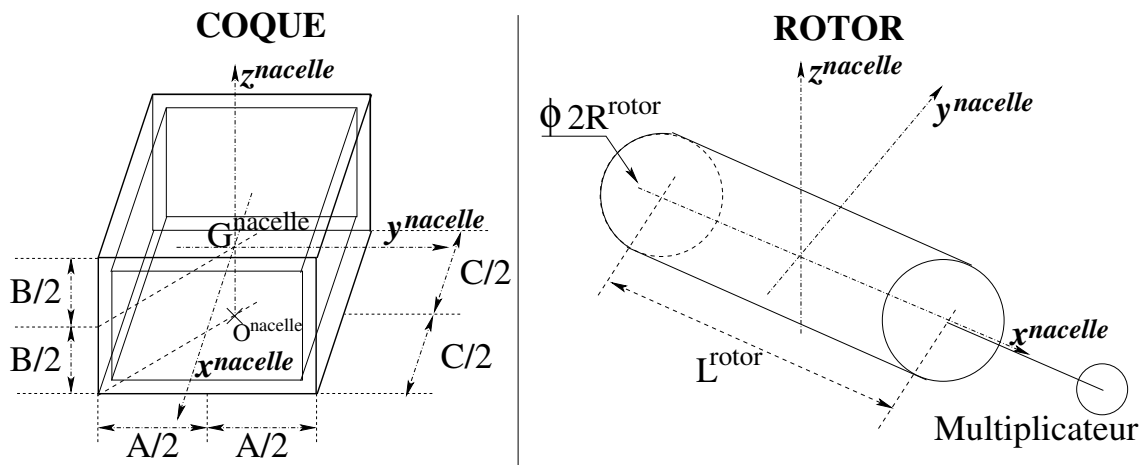


FIG. 5.40 – Modélisation de la nacelle

La nacelle est un corps rigide comportant une coque extérieure parallélépipédique, de même matière que la tour, et le rotor (figure 5.40). La matrice d'inertie de la coque s'écrit

alors :

$$\begin{aligned}
& [I^{coque}]_{(G^{nacelle}, x^{nacelle}, y^{nacelle}, z^{nacelle})} = [I^{coque}]_{(G^{coque}, x^{coque}, y^{coque}, z^{coque})} \\
& = \frac{\rho}{12} \begin{bmatrix} (A^2 + B^2) ABC - (a^2 + b^2) abc & 0 & 0 \\ 0 & (B^2 + C^2) ABC - (b^2 + c^2) abc & 0 \\ 0 & 0 & (A^2 + C^2) ABC - (a^2 + c^2) abc \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

et sa masse :

$$m^{coque} = \rho (ABC - abc) \tag{5.25}$$

Par exemple, on considère les données suivantes :

$$\begin{cases} A = 2,5 \text{ m} \\ a = 2,495 \text{ m} \\ B = 2,5 \text{ m} \\ b = 2,495 \text{ m} \\ C = 4,5 \text{ m} \\ c = 4,495 \text{ m} \\ \rho = 7800 \text{ Kg/m}^3 \end{cases} \tag{5.26}$$

Le rotor, cylindre plein de diamètre $2R^{rotor}$ et de longueur h^{rotor} , a pour matrice d'inertie :

$$\begin{aligned}
& [I^{rotor}]_{(G^{nacelle}, x^{nacelle}, y^{nacelle}, z^{nacelle})} = [I^{rotor}]_{(G^{rotor}, x^{rotor}, y^{rotor}, z^{rotor})} \\
& = m^{rotor} \begin{bmatrix} \frac{R^{rotor^2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3R^{rotor^2} + h^{rotor^2}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3R^{rotor^2} + h^{rotor^2}}{12} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

où la masse du rotor m^{rotor} vaut :

$$m^{rotor} = \rho \pi h^{rotor} R^{rotor^2} \tag{5.28}$$

Ainsi la matrice globale de la nacelle est la somme des matrices de (5.24) et (5.27) et sa masse la somme de (5.25) et (5.28) :

$$\begin{cases} [I^{nacelle}]_{(G^{nacelle}, x^{nacelle}, y^{nacelle}, z^{nacelle})} = [I^{coque}] + [I^{rotor}] \\ m^{nacelle} = m^{coque} + m^{rotor} = \rho (ABC - abc + \pi h^{rotor} R^{rotor^2}) \end{cases} \tag{5.29}$$

5.5.2.3 Le moyeu

Le moyeu est composé de trois parties (*figure 5.41*) notées :

- 1 : la partie cylindrique,
- 2 : les trois supports soutenant chacune des pales,
- 3 : la partie conique.

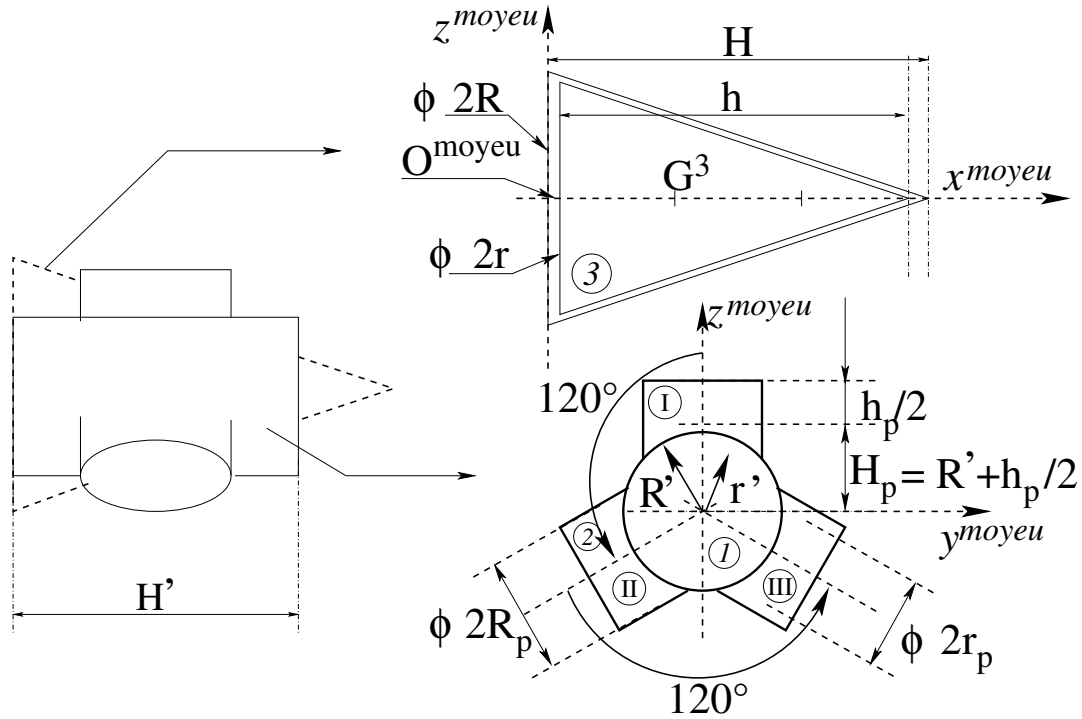


FIG. 5.41 – Modélisation du moyeu

Chacune de ses parties est modélisée dans le repère $(G^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})$ dont l'origine est le centre de gravité du moyeu :

1. La partie 3 est un cône de rayon R d'épaisseur $R - r$, de hauteur H d'épaisseur $H - h$, centré au centre d'inertie en G^3 . Cette partie conique 3 a donc pour matrice d'inertie :

$$\begin{aligned}
 & [I^{c\hat{o}ne}]_{(G^3, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \\
 & = \frac{\rho\pi}{6} \begin{bmatrix} R^4 H - r^4 h & 0 & 0 \\ 0 & R^2 H \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) - r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{9} \right) & 0 \\ 0 & 0 & R^2 H \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) - r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{9} \right) \end{bmatrix} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

et pour masse :

$$m^{c\hat{o}ne} = \frac{\rho\pi}{3} (R^2 H - r^2 h) \quad (5.31)$$

Pour les besoins de l'exercice, la matrice d'inertie (5.30) est transférée au centre du repère O^{moyeu} :

$$[I^{c\hat{o}ne}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = [I^{c\hat{o}ne}]_{(G^3, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} + \frac{\rho\pi}{3} (R^2 H - r^2 h) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H^2}{9} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

2. La partie 1 est un cylindre de rayon R' d'épaisseur $R' - r'$, de hauteur H' , centré en

G^1 . La matrice d'inertie $[I^{cyl}]$ de la partie cylindrique 1 du moyeu s'écrit :

$$[I^{cyl}]_{(G^1, x^{moy}, y^{moyu}, z^{moy})} = \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \begin{bmatrix} \frac{R'^2+r'^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

et sa masse vaut :

$$m^{cyl} = \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \quad (5.34)$$

3. Avant tout, il a été montré dans l'*annexe N*, d'après (N.1), que les centres de l'élément 1 (G^1) et de 2 (G^2) sont identiques :

$$\overrightarrow{O^{moy}G^1} = \overrightarrow{O^{moy}G^2} = \frac{H'}{2}x^I \quad (5.35)$$

L'ensemble 2 comprend trois supports I, II et III. La matrice d'inertie de I est écrite dans le repère (G^1, x^I, y^I, z^I) (c'est-à-dire le repère $(G^1, x^{moy}, y^{moyu}, z^{moy})$ car la base (x^I, y^I, z^I) est parallèle à $(x^{moy}, y^{moyu}, z^{moy})$) et vaut ⁴ :

$$\begin{aligned} [I^I]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} &= [I^I]_{(G^1, x^{moy}, y^{moyu}, z^{moy})} = [I^I]_{(G^I, x^{moy}, y^{moyu}, z^{moy})} + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_p^2+r_p^2}{2} \end{bmatrix} + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

où la masse est égale à :

$$m^I = \rho\pi (R_p^2 - r_p^2) h_p = m^{II} = m^{III} \quad (5.37)$$

Pour les parties II ou III, la matrice d'inertie est écrite dans le repère lié à cette partie au centre de gravité de la partie cylindrique G^1 . En utilisant les matrices de passage du repère $(G^1, x^{II}, y^{II}, z^{II})$ au repère (G^1, x^I, y^I, z^I) et du repère $(G^1, x^{III}, y^{III}, z^{III})$ à (G^1, x^I, y^I, z^I) (*figure 5.42*), la matrice d'inertie de II $[I^{II}]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)}$ et celle de III $[I^{III}]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)}$ valent alors (*Annexe N*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [I^{II}]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} = \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & \varphi \\ 0 & \varphi & \psi \end{bmatrix} \\ [I^{III}]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} = \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & -\varphi \\ 0 & -\varphi & \psi \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.38)$$

⁴ $\rho\pi \frac{h_p}{12} [3(R_p^4 - r_p^4) + h_p^2(R_p^2 - r_p^2)] = \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \left(\frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} \right)$

où :

$$\begin{cases} \phi = \frac{7(R_p^2+r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{48} + \frac{H_p^2}{4} \\ \varphi = \frac{\sqrt{3}(R_p^2+r_p^2)}{16} - \sqrt{3}\left(\frac{h_p^2}{48} + \frac{H_p^2}{4}\right) \\ \psi = \frac{5(R_p^2+r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{16} + \frac{3H_p^2}{4} \end{cases} \quad (5.39)$$

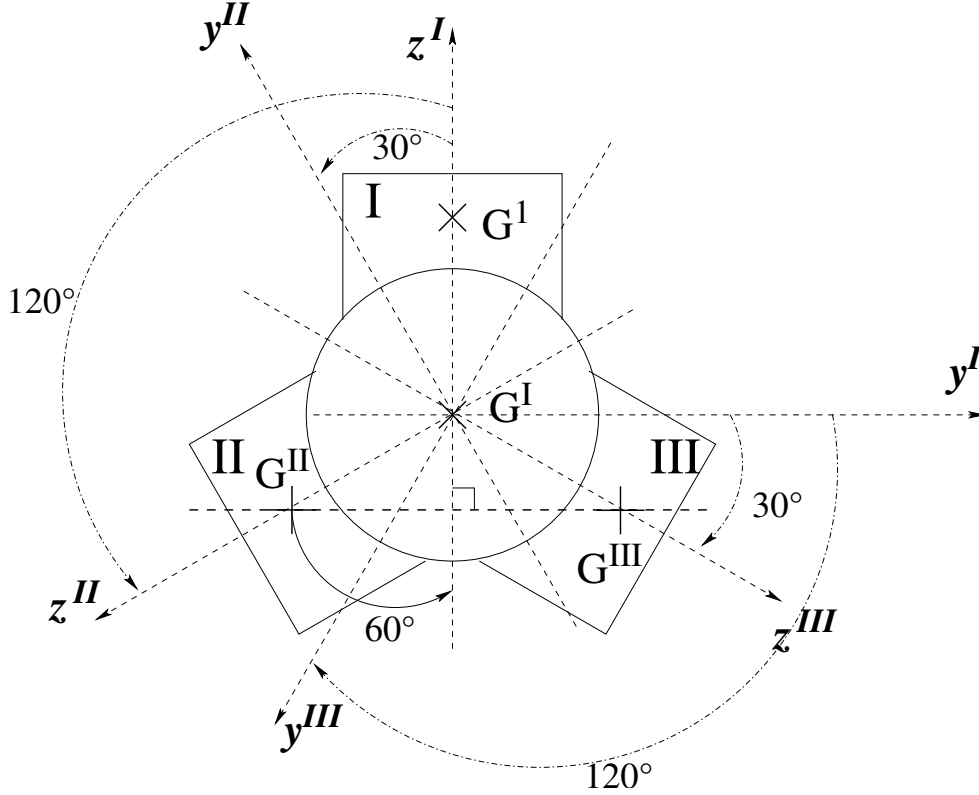


FIG. 5.42 – Repères des axes liés aux supports des pales

G^1 et G^2 étant identiques d'après (5.35), la matrice d'inertie de 2 dans le repère (G^1, x^I, y^I, z^I) est telle que :

$$[I^2]_{(G^2, x^I, y^I, z^I)} = \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

où :

$$\begin{cases} \alpha = 3\left(\frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2\right) \\ \beta = \frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \end{cases} \quad (5.41)$$

D'après (5.37), sa masse a pour valeur :

$$m^2 = m^I + m^{II} + m^{III} = 3\rho\pi (R_p^2 - r_p^2) h_p \quad (5.42)$$

Comme les matrices d'inertie de 1 (5.33) et 2 (5.40) s'écrivent au même centre de gravité G^1 , la matrice d'inertie de ces deux parties s'obtient par simple addition :

$$\begin{aligned}
& [I^{1+2}]_{(G^1, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \\
& = \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \begin{bmatrix} \frac{R'^2+r'^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} 3\left(\frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Elle va être écrite au point O^{moy} , centre du repère lié au moyeu :

$$\begin{aligned}
& [I^{1+2}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \\
& = \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \begin{bmatrix} \frac{R'^2+r'^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} 3\left(\frac{R_p^2+r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi \left(H' (R'^2 - r'^2) + 3h_p (R_p^2 - r_p^2) \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H'^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H'^2}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Comme les deux matrices d'inertie (5.32) et (5.44) sont écrites dans le même repère et par rapport au même point, la matrice d'inertie du moyeu $[I^{moy}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})}$ au centre du repère lié à cet élément s'écrit donc :

$$[I^{moy}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \gamma' \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

où :

$$\frac{\alpha'}{\rho\pi} = H' (R'^2 - r'^2) \left(\frac{R'^2 + r'^2}{2} \right) + h_p (R_p^2 - r_p^2) \left(3 \left(\frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 \right) \right) + \frac{R^4 H - r^4 h}{6} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta'}{\rho\pi} = \frac{\gamma'}{\rho\pi} & = H' (R'^2 - r'^2) \left(\frac{R'^2+r'^2}{4} + \frac{H'^2}{3} \right) + \\
& + h_p (R_p^2 - r_p^2) \left(\frac{9(R_p^2+r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} + \frac{3H'^2}{4} \right) + \\
& + \frac{R^2 H \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) - r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{9} \right)}{6} + \frac{(R^2 H - r^2 h) H^2}{27}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Cependant, la convention implique que la matrice du moyeu s'écrive par rapport à son centre d'inertie G^{moy} :

$$[I^{moy}]_{(G^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = [I^{moy}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} + m^{moy} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

La masse du moyeu vaut :

$$m^{moy} = \rho\pi \left(H' (R'^2 - r'^2) + 3h_p (R_p^2 - r_p^2) \right) + \frac{\rho\pi}{3} (R^2H - r^2h) \quad (5.49)$$

et la position Δ du centre d'inertie G^{moy} par rapport à O^{moy} selon l'axe x^{moy} est donnée par :

$$\Delta = \frac{\frac{H'^2}{2} (R'^2 - r'^2) + \frac{3}{2}h_p H' (R_p^2 - r_p^2) + \frac{(R^2H - r^2h)H}{9}}{H' (R'^2 - r'^2) + 3h_p (R_p^2 - r_p^2) + \frac{R^2H - r^2h}{3}} \quad (5.50)$$

Les différents résultats obtenus numériquement n'ont pas pu être comparés avec ceux obtenus à partir d'essais sur une machine réelle, comme il avait été prévu lors d'un programme de collaboration.

5.5.2.4 Introduction des conditions aux limites

Chaque sous-ensemble est positionné de façon précise par rapport à celui qui le précède.

En effet, le haut de la tour présente un angle $(0 \ 0 \ 0, 1^\circ)$ par rapport à sa base si l'axe de la tour est selon l'axe \vec{z} , donc chaque élément discrétisant la tour par rapport à celui qui lui est adjacent à un angle de (*figure 5.39*) :

$$\frac{(0 \ 0 \ 0, 1^\circ)}{n_{elt}^{tour}}$$

De même, la position entre le repère de la nacelle et la tour est représentée par le vecteur suivant (*figure 5.40*) :

$$(0 \ 0, 1^\circ \ 0, 2^\circ)$$

alors que celui entre le moyeu et la nacelle, au départ, est de (*figure 5.41*) :

$$(0 \ 0^\circ \ 0^\circ)$$

Le repère lié au pied de pale par rapport à celui lié au support attaché au moyeu, en tenant compte de l'angle de calage, présente un angle de :

$$(0 \ 0 \ 90^\circ)$$

5.5.3 Tentative de comparaison avec le code ADAMS

Une modélisation avec le logiciel ADAMS, de l'éolienne présentée dans la *section 5.4.1*, par deux étudiants de Conception Mécanique du Polytechnicum de Lille a été effectuée [4]. Cependant de nombreux problèmes liés à la prise en compte des efforts aérodynamiques ont été rencontrés. De plus, faute de temps, la comparaison des résultats numériques sur les cas tests présentés précédemment avec ceux obtenus avec ce logiciel n'a pas pu être effectuée. Elle a eu au moins le mérite de montrer l'intérêt de développer un code de calcul ouvert.

Bibliographie

- [1] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, Thèse de doctorat de l'université de Lille I, janvier 1999
- [2] KELLEY N.D., WRIGHT A.D., OSGOOD R.M., A progress Report on the Characterization and Modeling of a very flexible Wind Turbine Design, National Wind Technology Center, National Renewable Energy Laboratory, Wind Energy Symposium, Reno, Nevada, 11-14 Janvier 1999 (Consultable sur www.nrel.gov/docs/Fy99osti/25513.pdf)
- [3] KELLEY N.D., WRIGHT A.D., OSGOOD R.M., Validation of a Model for a Two-Bladed Flexible Rotor System : Progress to Date, National Wind Technology Center, National Renewable Energy Laboratory, Wind Energy Symposium, Reno, Nevada, 11-14 Janvier 1999 (Consultable sur www.nrel.gov/docs/Fy99osti/25514.pdf)
- [4] CALLEBAUT E., JOSEPH B., Rapport de stage de 3^{ème} année de Conception Mécanique de l'Ecole Polytech'Lille, 2004

Chapitre 6

Conclusion générale

Ce travail de thèse avait pour objectif principal de développer un formalisme capable de modéliser le comportement dynamique des éoliennes qui devait aboutir à l'écriture d'un code de calcul permettant de prendre en compte l'ensemble des composants du système étudié et d'intégrer le calcul des efforts aérodynamiques sur les pales.

L'étude bibliographique a permis de choisir la méthode la plus adaptée à notre problème. Les formalismes, transcrivant le comportement dynamique des systèmes multicorps ainsi que les méthodes de calcul des efforts aérodynamiques, ont été présentés et analysés. Elle a permis de trouver les méthodes qui correspondaient à nos objectifs :

- le formalisme de Kane pour la partie dynamique (amélioré par Amirouche) et
- la théorie de l'élément de pale (Glauert) pour la partie aérodynamique.

Le formalisme de Kane a été choisi pour la modélisation des corps rigides. Son intérêt est que les non-linéarités, inhérentes au couplage entre chaque composant, ainsi que les efforts internes (Coriolis et centrifuges) sont directement pris en compte sans qu'aucune simplification et linéarisation du système d'équations ne soit nécessaire. La position de chaque corps par rapport aux autres est décrite à l'aide de l'arborescence topologique du système. Des améliorations ont été apportées par rapport au formalisme de base afin de diminuer de façon significative le temps de calcul du code car le système d'équations est construit de façon itérative et numérique. Une méthode classique d'intégration temporelle, basée sur la méthode d'Adams et amorcée par celle de Runge-Kutta, a ensuite été utilisée afin de prévoir le comportement du système au cours du temps. Le comportement des corps souples a été traité par l'intermédiaire d'une projection de la base modale (regroupant les premiers modes propres) sur des coordonnées nodales de la structure.

Le code de calcul a été validé à partir des résultats numériques (déplacements, vitesses et accélérations) obtenus pour différents cas tests, dont le comportement dynamique est connu. Pour cela, les données d'entrée adaptées aux dimensions géométriques et cinématiques sont introduites dans différents fichiers. Les résultats pour des exemples simples (pendules simple et double) et plus complexe (pendule contraint en rotation) ont ainsi été comparés à ceux obtenus analytiquement. En raison de la convergence des résultats numériques et analytiques, la partie du code relative à la modélisation des corps rigides peut être considérée comme validée.

La phase de validation concernant la partie modélisation dynamique et aérodynamique des corps souples a été entamée mais non finalisée. En effet, seul l'exemple d'une poutre encastree (similaire à celle d'une pale d'éolienne) a été étudié. Les résultats sur les pulsations propres obtenus sont encourageants. Néanmoins, nous n'avons pas pu obtenir de résultats supplémentaires sur les pales en raison d'un manque de données réalistes sur les machines existantes, dont l'accès est malheureusement confidentiel. Cependant, cela nous a permis de déterminer l'angle de calage adapté à la vitesse du vent correspondant à la puissance optimale produite par le rotor. En outre, certaines règles d'utilisation du code ont pu être établies, comme, par exemple, celle consistant à choisir une valeur de pas de temps adaptée au problème afin de ne pas obtenir des résultats divergents.

La validation des résultats du code de calcul relatif à la modélisation dynamique et aérodynamique (corps rigides ou souples) devront faire l'objet de travaux ultérieurs. Ainsi le comportement d'une machine tournante type éolienne pourra alors être complètement décrit. Les résultats issus de ce code de calcul devront être comparés avec ceux obtenus sur une machine réelle. Trois approches concernant la validation finale sont alors envisageables, séparément ou en parallèle, en utilisant les résultats :

- soit d'un logiciel existant (type ADAMS ou autre),
- soit d'une base de données provenant d'essais effectués en soufflerie (NASA) ou
- soit obtenus lors d'une campagne d'essais sur des machines (cette solution étant la plus réalisable) et qui pourrait être le fruit d'une nouvelle collaboration avec un constructeur d'éoliennes.

L'intérêt de la démarche employée a été d'aboutir à l'écriture d'un code de calcul modulable, contrôlable et surtout ouvert. Des modules peuvent ainsi être aisément ajoutés ou modifiés car si, par la suite, on désire être plus précis au niveau du calcul des efforts aérodynamiques par exemple, le concepteur a la possibilité d'améliorer le programme initial, en modifiant les modules correspondants. Des éoliennes à axe vertical ou offshore pourraient aussi être étudiées avec l'ajout de modules spécifiques, sans retoucher l'ensemble du programme montrant ainsi son aptitude à modéliser des machines très différentes.

Annexes

Annexe A

Matrice de vitesse angulaire

Soit un vecteur \vec{r} fixé au corps A (figure A.1). A est supposé en mouvement par rapport au référentiel d'origine \mathfrak{R}^0 .

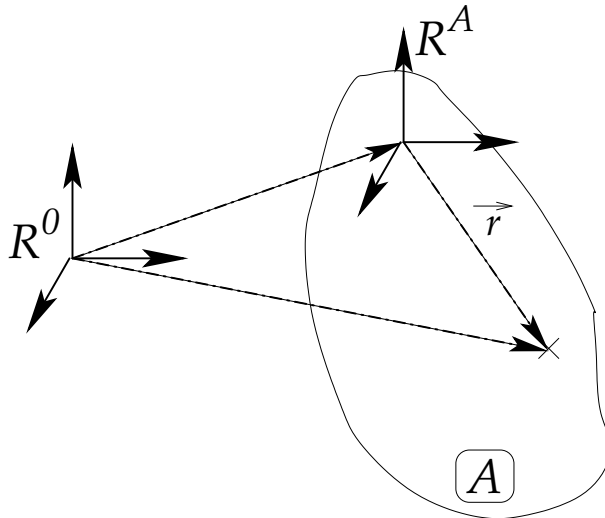


FIG. A.1 – Vecteur \vec{r} dans le solide A

La matrice de passage est donnée par (4.18) dont les éléments dépendent du temps. La vitesse angulaire par rapport au temps du corps A par rapport à \mathfrak{R}^0 , notée $\vec{\omega}^{A0}$, est définie par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{\omega}^{A0} \wedge \vec{r} \quad (\text{A.1})$$

avec $\frac{d\vec{r}}{dt}$ la dérivée de \vec{r} par rapport au temps. En fait, les composantes du vecteur de vitesse angulaire sont retrouvées dans la matrice rotation vérifiant :

$$[\Omega^{kj}] = \frac{d}{dt} [S^{kj}] [S^{kj}]^T \quad (\text{A.2})$$

ou :

$$[\dot{S}^{kj}] = \frac{d}{dt} [S^{kj}] = [\Omega^{kj}] [S^{kj}]$$

En effet, si \vec{r} est exprimé dans \mathfrak{R}^A comme :

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

et qu'il est dérivable par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \{r\} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

ceci revient à avoir :

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (r_i \vec{n}_i^A) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = r_i \frac{d}{dt} (\vec{n}_i^A) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.6})$$

car r_i n'est pas fonction du temps. Or $[S^{A0}]$ est la matrice de passage liant les vecteurs unitaires de la base du repère \mathfrak{R}^A à ceux du repère \mathfrak{R}^0 telle que :

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = r_i \frac{d}{dt} (S_{ij}^{A0}) \vec{n}_j^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.7})$$

D'après (A.6), la variation du vecteur \vec{n}_i^0 est une expression linéaire du vecteur \vec{n}_j^0 tel que :

$$\frac{d}{dt} (\vec{n}_i^0) = \Omega_{ij}^{A0} \vec{n}_j^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.8})$$

De plus :

$$\vec{n}_i^0 \cdot \vec{n}_j^0 = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.9})$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. (A.9) est différentiée pour être utilisée avec (A.8) :

$$\Omega_{ij}^{A0} + \Omega_{ji}^{A0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.10})$$

Il a été prouvé que si la matrice $[\sigma]$ vérifie :

$$[\sigma]^T + [\sigma] = 0 \quad (\text{A.11})$$

alors $[\sigma]$ est antisymétrique [1]. Ceci implique d'après (A.11) que la matrice $[\Omega^{A0}]$ est une matrice antisymétrique et donc d'après (4.61) s'écrit sous la forme :

$$[\Lambda_{\omega^{kj}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^{A0} & \omega_2^{A0} \\ \omega_3^{A0} & 0 & -\omega_1^{A0} \\ -\omega_2^{A0} & \omega_1^{A0} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

en imposant ω_1^{A0} , ω_2^{A0} , ω_3^{A0} les composantes du vecteur de vitesse angulaire $\{\omega^{A0}\}$. Donc $[\Omega^{A0}]$ est appelée alors la matrice de vitesse angulaire.

Annexe B

Relation entre les matrices rotation et leurs dérivées

En reprenant les notations sur les matrices de rotation $[R_\alpha^{kj}]$, $[R_\beta^{kj}]$ et $[R_\gamma^{kj}]$ indiquant respectivement un changement de base du repère \mathfrak{R}^j au repère \mathfrak{R}''^k , du repère \mathfrak{R}''^k au repère \mathfrak{R}'^k et du repère \mathfrak{R}'^k au repère \mathfrak{R}^k ainsi que leur dérivée respectivement $[\dot{R}_\alpha^{kj}]$, $[\dot{R}_\beta^{kj}]$ et $[\dot{R}_\gamma^{kj}]$. Il est démontré que $[\dot{R}_p^{kj}] [R_p^{kj}]^T$ ($p = \alpha^k, \beta^k, \gamma^k$) est une matrice antisymétrique. Les matrices (4.1), (4.2), (4.3), (4.24), (4.25) et (4.26) vérifient :

$$[\dot{R}_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}^k \\ 0 & -\dot{\alpha}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$[\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\beta^{kj}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\beta}^k \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\beta}^k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$[\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\gamma^{kj}]^T = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}^k & 0 \\ -\dot{\gamma}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Les matrices dans (B.1), (B.2) et (B.3) sont antisymétriques d'après (4.61). Donc la matrice de vitesse angulaire vérifiant la relation (4.56) est une matrice antisymétrique, si (4.59) est développée :

$$[\Omega^{kj}] = [\dot{R}_\gamma^{kj}] [R_\gamma^{kj}]^T + [R_\gamma^{kj}] [\dot{R}_\beta^{kj}] [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T + [R_\gamma^{kj}] [R_\beta^{kj}] [\dot{R}_\alpha^{kj}] [R_\alpha^{kj}]^T [R_\beta^{kj}]^T [R_\gamma^{kj}]^T \quad (\text{B.4})$$

Le premier terme du second membre est une matrice antisymétrique donnée par (B.3). Le calcul du second membre avec les angles d'Euler donne :

$$\begin{aligned}
[\Omega^{kj}] = & \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}^k & 0 \\ -\dot{\gamma}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\beta}^k \cos \gamma^k \\ 0 & 0 & \dot{\beta}^k \sin \gamma^k \\ \dot{\beta}^k \cos \gamma^k & -\dot{\beta}^k \sin \gamma^k & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\alpha}^k \sin \beta^k & \dot{\alpha}^k \cos \beta^k \sin \gamma^k \\ -\dot{\alpha}^k \sin \beta^k & 0 & \dot{\alpha}^k \cos \beta^k \cos \gamma^k \\ -\dot{\alpha}^k \cos \beta^k \sin \gamma^k & -\dot{\alpha}^k \cos \beta^k \cos \gamma^k & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$[\Omega^{kj}]$ est une somme de matrices antisymétriques donc elle l'est aussi.

Annexe C

Quelques propriétés des matrices antisymétriques

Soit \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs, dans un espace à trois dimensions, tels que :

$$\vec{a} = a_1 \vec{n}_1 + a_2 \vec{n}_2 + a_3 \vec{n}_3 \quad (\text{C.1})$$

et :

$$\vec{b} = b_1 \vec{n}_1 + b_2 \vec{n}_2 + b_3 \vec{n}_3 \quad (\text{C.2})$$

Les deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont transformés par (4.61) en matrice antisymétrique, notée $[\Lambda_a]$ et $[\Lambda_b]$ telle que :

$$[\Lambda_a] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

et :

$$[\Lambda_b] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Par calcul, il est montré que :

$$[\Lambda_b] \{a\} = -[\Lambda_a] \{b\} \quad (\text{C.5})$$

Pour cela, les deux vecteurs $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ sont posés :

$$\{c_1\} = [\Lambda_b] \{a\} \quad (\text{C.6})$$

et

$$\{c_2\} = [\Lambda_a] \{b\} \quad (\text{C.7})$$

(C.6) et (C.7) sont développées :

$$\{c_1\} = \begin{Bmatrix} -b_3a_2 + b_2a_3 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ -b_2a_1 + b_1a_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

et :

$$\{c_2\} = \begin{Bmatrix} -a_3b_2 + a_2b_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ -a_2b_1 + a_1b_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Ainsi :

$$\{c_1\} = -\{c_2\} \quad (\text{C.10})$$

confirme (C.5). De plus, d'après [2], les deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} vérifient :

$$[\Lambda_a] \{b\} = \{a\} \wedge \{b\} \quad (\text{C.11})$$

Annexe D

Calcul du moment d'inertie généralisée

D'après (4.119), le moment d'inertie du corps B^k est :

$$\vec{M}^{*k} = -\frac{d}{dt} \int_{m^k} \left(\vec{r}^{dm^k} \wedge \vec{v}^{dm^k} \right) dm^k \quad (\text{D.1})$$

pour le solide B^k du système multicorps. Le but de cette annexe est de mettre le moment d'inertie du solide k sous forme matricielle, qui sera alors exploitable informatiquement. (D.1) prend la forme suivante si on prend la différentielle dans l'intégrale :

$$\vec{M}^{*k} = -\int_{m^k} \left(\frac{d(\vec{r}^{dm^k})}{dt} \wedge \vec{v}^{dm^k} + \vec{r}^{dm^k} \wedge \frac{d(\vec{v}^{dm^k})}{dt} \right) dm^k \quad (\text{D.2})$$

soit :

$$\vec{M}^{*k} = -\int_{m^k} \left(\vec{v}^{dm^k} \wedge \vec{v}^{dm^k} + \vec{r}^{dm^k} \wedge \frac{d}{dt} (\vec{\omega}^{k0} \wedge \vec{r}^{dm^k}) \right) dm^k \quad (\text{D.3})$$

où $\vec{\omega}^{k0}$ est la vitesse angulaire du corps B^k par rapport au référentiel \mathfrak{R}^0 et $\vec{v}^{dm^k} \wedge \vec{v}^{dm^k}$ est nul par définition du produit vectoriel. \vec{v}^{dm^k} est remplacé par son expression en termes de produit vectoriel. (D.3) est développée :

$$\vec{M}^{*k} = -\int_{m^k} \left(\vec{r}^{dm^k} \wedge \left(\dot{\vec{\omega}}^{k0} \wedge \vec{r}^{dm^k} \right) + \vec{r}^{dm^k} \wedge \left(\vec{\omega}^{k0} \wedge \left(\vec{\omega}^{k0} \wedge \vec{r}^{dm^k} \right) \right) \right) dm^k \quad (\text{D.4})$$

Avant de développer cette équation, il est nécessaire d'introduire $\vec{\bar{I}}^k$ le dyadique d'inertie de B^k par rapport au centre de masse G^k . Si on pose \vec{I}_a^k le vecteur d'inertie du corps B^k selon un vecteur unitaire \vec{n}_a et I_{ab}^k l'inertie scalaire de B^k par rapport à O^k suivant \vec{n}_a et \vec{n}_b , où \vec{n}_a et \vec{n}_b sont des vecteurs unitaires tels que :

$$\begin{aligned} I_{ab}^k &= \vec{I}_a^k \cdot \vec{n}_b \\ I_{ba}^k &= I_{ab}^k = \vec{I}_b^k \cdot \vec{n}_a \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

alors le dyadique est défini de la façon suivante, indépendant du repère :

$$\overline{\overline{I}}^k = \sum_{i=1}^v m_i^k \left(\overline{\overline{U}} \overrightarrow{p}_i^k - \overrightarrow{p}_i^k \overrightarrow{p}_i^k \right) \quad (\text{D.6})$$

où le corps B^k est composé de v particules de masse m_1^k, \dots et m_v^k respectivement et $\overrightarrow{p}_1^k, \dots$ et \overrightarrow{p}_v^k les vecteurs positions par rapport à O^k respectivement de ces v particules. $\overline{\overline{U}}$ est le dyadique unitaire défini par :

$$\overline{\overline{U}} = \overrightarrow{n}_1^k \overrightarrow{n}_1^k + \overrightarrow{n}_2^k \overrightarrow{n}_2^k + \overrightarrow{n}_3^k \overrightarrow{n}_3^k \quad (\text{D.7})$$

Le dyadique $\overline{\overline{I}}^k$ vérifie ainsi plusieurs équations [2, 3, 4] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I}_a^k &= \overrightarrow{n}_a \cdot \overline{\overline{I}}^k \\ \overrightarrow{I}_a^k \cdot \overrightarrow{n}_b &= \left(\overrightarrow{n}_a \cdot \overline{\overline{I}}^k \right) \cdot \overrightarrow{n}_b = \overrightarrow{n}_a \cdot \left(\overline{\overline{I}}^k \cdot \overrightarrow{n}_b \right) \\ I_{ab}^k &= \overrightarrow{n}_a \cdot \overline{\overline{I}}^k \cdot \overrightarrow{n}_b \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

et :

$$\overline{\overline{I}}^k = \sum_{j=1}^3 \overrightarrow{I}_j^k \overrightarrow{n}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{jk}^k \overrightarrow{n}_j \overrightarrow{n}_l \quad (\text{D.9})$$

De plus, cette relation (D.9) qui lie le dyadique d'inertie avec la matrice d'inertie s'écrit aussi [2, 3, 4] :

$$\overline{\overline{I}}^k = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 I_{lm}^{k0} \overrightarrow{n}_l^0 \overrightarrow{n}_m^0 = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 I_{lm}^{kj} \overrightarrow{n}_l^k \overrightarrow{n}_m^k \quad (\text{D.10})$$

car le dyadique est indépendant du repère. Ainsi (D.4) devient [2, 3, 4] :

$$\overrightarrow{M}^{*k} = -\dot{\overrightarrow{\omega}}^{k0} \cdot \overline{\overline{I}}^k - \overrightarrow{\omega}^{k0} \wedge \left(\overline{\overline{I}}^k \cdot \overrightarrow{\omega}^{k0} \right) \quad (\text{D.11})$$

où $\dot{\overrightarrow{\omega}}^{k0}$ et $\overrightarrow{\omega}^{k0}$ sont respectivement les accélérations et les vitesses angulaires du corps k par rapport au référentiel \mathfrak{R}^0 .

Annexe E

Méthode de transformation de Householder

La méthode de triangularisation appelée « Décomposition en Matrice Triangulaire Supérieure » (DMTS) ou en anglais « Pseudo Upper Triangular Decomposition » (PUTD) transforme une matrice $[B]$ en matrice triangulaire supérieure $[T]$, complément orthogonal de $[B]$. Cette méthode est basée sur la technique de Householder [2].

Soit la matrice $[B]$ ou $[B^{(1)}]$, de dimension $m \times n$, telle que :

$$[B^{(1)}]^T = [\{B_1^{(1)}\}_n \quad \{B_2^{(1)}\}_n \quad \cdots \quad \{B_m^{(1)}\}_n]_{n \times m} \quad (\text{E.1})$$

où $\{B_i^{(1)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) est le $i^{\text{ième}}$ vecteur de $[B^{(1)}]^T$, comportant n coordonnées. Pour commencer, il est posé :

$$\{X^{(1)}\}_n = \{B_1^{(1)}\} \quad (\text{E.2})$$

Un vecteur de n lignes est créé :

$$\{W^{(1)}\}_n^T = \{ \|X^{(1)}\| \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \}^T \quad (\text{E.3})$$

puis :

$$\{U^{(1)}\}_n = \frac{\{W^{(1)}\} - \{X^{(1)}\}}{\|\{W^{(1)}\} - \{X^{(1)}\}\|} \quad (\text{E.4})$$

et finalement une matrice de dimension $n \times n$:

$$[H^{(1)}]_{n \times n} = [I] - 2 \{U^{(1)}\} \{U^{(1)}\}^T \quad (\text{E.5})$$

où $[I]$ est la matrice identité. La matrice $[B^{(2)}]$ est alors considérée :

$$[B^{(2)}]^T = [H^{(1)}] [B^{(1)}]^T \quad (\text{E.6})$$

ce qui donne :

$$[B^{(2)}]^T = [\{W^{(1)}\} \quad \{B_2^{(2)}\} \quad \cdots \quad \{B_m^{(2)}\}]_{n \times m} \quad (\text{E.7})$$

Un vecteur est alloué :

$$\{X^{(2)}\}_n = \{B_2^{(2)}\} \quad (\text{E.8})$$

pour construire :

$$\{W^{(2)}\}_n = \left\{ \begin{array}{c} B_{12}^{(2)} \\ \left(\|X^{(2)}\|^2 - (B_{12}^{(2)})^2 \right)^{1/2} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.9})$$

où $B_{12}^{(2)}$ est l'élément de la 1^{ière} ligne et de la 2^{ième} colonne de $[B^{(2)}]^T$ ou le premier élément de $\{B_2^{(2)}\}$, pour donner :

$$\{U^{(2)}\}_n = \frac{\{W^{(2)}\} - \{X^{(2)}\}}{\|\{W^{(2)}\} - \{X^{(2)}\}\|} \quad (\text{E.10})$$

ainsi :

$$[H^{(2)}]_{n \times n} = [I] - 2 \{U^{(2)}\} \{U^{(2)}\}^T \quad (\text{E.11})$$

Par itération sur i , la matrice $[B^{(i)}]$ devient :

$$[B^{(i)}]^T = [H^{(i-1)}] [B^{(i-1)}]^T = [H^{(i-1)}] \dots [H^{(1)}] [B]^T \quad (\text{E.12})$$

Il est posé ainsi :

$$\{X^{(i)}\}_n = \{B_i^{(i)}\} \quad (\text{E.13})$$

d'où :

$$\{W^{(i)}\}_n^T = \left\{ \begin{array}{c} B_{1i}^{(i)} \quad B_{2i}^{(i)} \quad \dots \quad B_{i-1,i}^{(i)} \quad \left(\|X^{(i)}\|^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (B_{ri}^{(i)})^2 \right)^{1/2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right\}_{n \times 1}^T \quad (\text{E.14})$$

où $B_{ri}^{(i)}$ ($r = 1, 2, \dots, i-1$) est l'élément de la r ^{ième} ligne et de la i ^{ième} colonne de $[B^{(i)}]^T$ ou le r ^{ième} élément de $\{B_i^{(i)}\}$. Cela permet d'avoir :

$$\{U^{(i)}\}_n = \frac{\{W^{(i)}\} - \{X^{(i)}\}}{\|\{W^{(i)}\} - \{X^{(i)}\}\|} \quad (\text{E.15})$$

et :

$$[H^{(i)}]_{n \times n} = [I] - 2 \{U^{(i)}\} \{U^{(i)}\}^T \quad (\text{E.16})$$

Ainsi à la m ^{ième} itération, la matrice $[H]_{n \times n}$ est calculée :

$$[H]_{n \times n} = [H^{(m)}] [H^{(m-1)}] \dots [H^{(1)}] = \prod_{i=m}^1 [H^{(i)}] \quad (\text{E.17})$$

Ensuite la matrice $[D]$, de dimension $n \times (n - m)$, est créée dont $[D]^T$ a la forme suivante :

$$[D]^T = \begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (\text{E.18})$$

pour calculer $[T]$, dimension $(n - m) \times n$, tel que :

$$[T] = [D]^T [H] \quad (\text{E.19})$$

Annexe F

Exemple de fichiers, de modules consistant le code numérique relatif aux corps rigides

F.1 Exemple d'un fichier de données géométriques : pend1.geo

```
$-----  
$ FICHER DE DONNEES GEOMETRIQUES SUR LE MULTICORPS  
$-----  
$  
$ Nombre de solides du multicorps  
$ ---  
  1  
$-----  
$ INFORMATIONS SUR CHAQUE SOLIDE  
$-----  
$ SOLIDE 1  
$-----  
$  
$ Numéro du solide  
$ ---  
  1  
$ Masse du solide (en Kg)  
$ ---.  
 10.000  
$ Matrice d'inertie du solide, liée au solide           ⇐ Quantité précisée  
$      x                y                z              ⇐ Coordonnées de cette quantité  
$  ---E---            ---E---            ---E---  
$  Kg.m2              Kg.m2              Kg.m2          ⇐ Unité de cette quantité  
  +0.0000E+00        +0.0000E+00        +0.0000E+00  
  +0.0000E+00        +0.0000E+00        +0.0000E+00
```

```

+0.0000E+00 +0.0000E+00 +3.3333E+00
$ Position du centre d'inertie, par rapport au repère lié au solide
$   x           y           z
$  ---.---    ---.---    ---.---
$   m           m           m
+1.000 +0.000 +0.000
$ Position du centre du repère du solide, par rapport au repère du solide précédent
$   x           y           z
$  ---.---    ---.---    ---.---
$   m           m           m
+0.000 +0.000 +0.000
$ Pointeur d'orientation des axes du repère par rapport au repère précédent
$  x   y   z
$  -   -   -
  0   0   1
$ ARBORESCENCE
$-----
$
$ Liste des solides précédents par rapport au solide :
$ 1 2 3 4 5...
$ - - - - -
  0
$
$ SOLIDES LIBRES
$-----
$ Numéro du solide
$ -
  1
$ Position du centre du repère à l'extrémité des derniers solides libres
$   x           y           z
$  ---.---    ---.---    ---.---
$   m           m           m
+2.000 +0.000 +0.000
$ FIN

```

F.2 Exemple d'un module de la bibliothèque de procédures écrivant des messages d'erreur : mod_message.f90

```

MODULE mod_message

```

```

!-----
! MODULE D'AFFICHAGE DE MESSAGES D'ERREUR - 2001 -
!-----

```

IMPLICIT NONE

CONTAINS

Toutes les variables sont en argument

↓

SUBROUTINE affich_message_erreur(titresub,message,istop)

```
!-----
! AFFICHAGE D'UN MESSAGE D'ERREUR
!
! Affichage d'un message d'erreur
!
! Entrées :
! titresub : Chaîne de caractère du titre de la subroutine
! message : Chaîne de caractère du message à afficher
! istop : Indice pour arrêter (si istop=1)
!
! Sorties :
!
! Ref : Mathilde LAPIE - DMSE/RCS/ONERA Lille - 2001
!-----
IMPLICIT NONE      ← Pas de Module Déclaratif
!-----
! variables externes
!-----
INTEGER,           INTENT(IN) :: istop
CHARACTER (len=*), INTENT(IN) :: titresub
CHARACTER (len=*), INTENT(IN) :: message
!-----
! variables internes
!-----
CHARACTER (len=100) :: chaine
!
! Affichage du message
!
WRITE (*,*)
WRITE (*,*) '-----'
chaine='ERREUR <SUB '//trim(titresub)//>'
WRITE (*,*) trim(chaine)
WRITE (*,*) trim(message)
IF (istop == 1) THEN
  WRITE (*,*) 'ARRET du programme!'
END IF
WRITE (*,*) '-----'
WRITE (*,*)
IF (istop == 1) THEN
  STOP
END IF
END SUBROUTINE affiche_message_erreur
```

```
END MODULE mod _message
```

F.3 Exemple d'un module dédié : mod _adams.f90

```
MODULE mod _adams
!-----
! MODULE DE RESOLUTION
! D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 2ND ORDRE
! PAR LA METHODE DU PREDICTEUR-CORRECTEUR
! AVEC ADAMS ET RUNGE-KUTTA
!-----
  USE mod _declaration_aero      <== Appel d'un Module Déclaratif
  USE mod _declaration
  USE mod _message
  USE mod _eq_contrainte         <== Appel des Modules Dédiés Précédents
  USE mod _compos_eolienne
  USE mod _effort
  USE mod _resultat
  IMPLICIT NONE
  CONTAINS
  :
  SUBROUTINE adams(nvligne,tinit,tfinal,y0,f0,force_ext,moment_ext,&
    &y,f,temps,omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega)
!-----
! RESOLUTION PAR ADAMS
! METHODE DE PREDICTEUR-CORRECTEUR
!
! Résolution d'une EDL à l'ordre 4 par Adams d'après la
! méthode du prédicteur-correcteur, en amorçant les trois
! 1ères valeurs par Runge-Kutta
!
! Entrées :
! nvligne : Nombre de y
! force_aero : Vect. des forces aéro (dans le repère local)
! moment_aero : Vect. des moments aéro (dans le repère local)
! force_ext : Matrice des forces extérieures
! moment_ext : Matrice des moments extérieurs
! tinit : Temps initial
! tfinal : Temps de simulation
! y : Vecteur des coordonnées et des vit. généralisées
! y0 : Matrice initiale pour t=t0
! f0 : Matrice initiale dérivée temporelle pour t = t0
!
! Sorties :
! y : Ensemble des valeurs résultats (t = t1)
```

```

! f : Matrice dérivée temporelle
! temps : Temps au pas de temps suivant
! omega_barre : Matrice de vitesse angulaire telle que :
! omega_barre = dxgdt * omega
! domegadt_barre : Matrice de vitesse angulaire
! vit_cm : Matrice des vitesses des centres de masse
! acc_cm : Matrice des accélérations des centres de masse
! omega : Matrice unitaire fonction de s(*,*,*)
! Vitesse angulaire partielle
!
! Ref : "Méthode de calcul numérique" de J.P. Nougier (pg 188-190)
! Masson - 1983
!
-----
USE mod_declaration           ← Appel d'un Module Déclaratif
IMPLICIT NONE
!-----
! variables externes
!-----
      INTEGER, INTENT(IN)                :: nvligne
      REAL(8), INTENT(IN)                 :: tinit,tfinal
      REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION (:)  :: y0,f0
      REAL(8), INTENT(OUT), DIMENSION (:) :: y,f,temps
      REAL(8), INTENT(INOUT), DIMENSION (:,:) :: force_ext
      REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION (:,:) :: moment_ext
      REAL(8), INTENT(OUT), DIMENSION (:,:) :: omega_barre,
                                          domegadt_barre
      REAL(8), INTENT(OUT), DIMENSION (:,:) :: vit_cm,acc_cm
      REAL(8), INTENT(OUT), DIMENSION (:,:,) :: omega
!-----
! Variables internes
!-----
      INTEGER                :: i,j,nb,iy,idy,id2y,iit,jit
      REAL(8)                 :: th,tm
      REAL(8), DIMENSION (SIZE(temps)) :: temps_tampon
      REAL(8), DIMENSION (nvligne)     :: y1,y2,y3,finit,f1,f2,f3
      REAL(8), DIMENSION (nvligne)     :: ypred0,ypred,ymod,fcorr
      REAL(8)                     :: tps,t0,t1,t2,t3,ti
      CHARACTER (len=100)          :: messengerreur
!
! AMORCE des trois 1ères valeurs par la méthode de Runge-Kutta
!
! Initialisation
!
      CALL cpu_time(t0)
      tps=tps0
      nb = 1

```

```

                                Appel d'une Procédure de ce même Module
temps(nb) = tps
                                ↙
CALL tabl_donnees(nb,tps,y0,f0,force_ext,moment_ext,&
    &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
! Calcul de y1
!
CALL runge_kutta(tps,deltat,tps+deltat,y0,f0,y,f,temps_tampon,&
    &force_ext,moment_ext,omega_barre,domegadt_barre,&
    &vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
DO i=1, nvligne
    y1(i) = y(i)
    f1(i) = f(i)
END DO
!
nb = nb+1
tps = tps+deltat
temps(nb) = tps
CALL tabl_donnees(nb,tps,y1,f1,force_ext,moment_ext,&
    &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
CALL cpu_time(t1)
t1 = t1-t0
!
! Calcul de y2
!
CALL runge_kutta(tps,deltat,tps+deltat,y1,f1,y,f,temps_tampon,&
    &force_ext,moment_ext,omega_barre,domegadt_barre,&
    &vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
DO i=1, nvligne
    y2(i) = y(i)
    f2(i) = f(i)
END DO
!
nb = nb+1
tps = tps+deltat
temps(nb) = tps
CALL tabl_donnees(nb,tps,y2,f2,force_ext,moment_ext,&
    &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
CALL cpu_time(t2)
t2 = t2-t1
!
! Calcul de y3
!
CALL runge_kutta(tps,deltat,tps+deltat,y2,f2,y,f,temps_tampon,&

```



```

        &force_ext,moment_ext,omega_barre,domegadt_barre,&
        &vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
DO i=1, nvligne
    y3(i) = y(i)
    f3(i) = f(i)
END DO
!
nb = nb+1
tps = tps+deltat
temps(nb) = tps
CALL tabl_donnees(nb,tps,y3,f3,force_ext,moment_ext,&
    &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
! Calcul du temps de l'opération
!
    CALL cpu_time(t3)
    t3 = t3-t2
!
! METHODE D'INTEGRATION PAR ADAMS
!
! Initialisation de l'itération ychapi_0=yi1_0 pour le rang3
!
    DO i=1,nvligne
        y(i) = y3(i)
        ypred0(i) = y3(i)
    END DO
!
! Initialisation de finit(*)
!
    DO i=1, nvligne
        finit(i) = f0(i)
    END DO
!
! Boucle sur le pas de temps
!
    DO WHILE (tps < tfinal)
!
        tps = tps+deltat
!
! Boucle sur les lignes
!
        DO i=1, nvligne
!
! Calcul du Prédicteur :
!
            ypred(i) = y(i)+deltat*(55*f3(i)-59*f2(i)+37*f1(i)-9*finit(i))/24

```

```

!
! Calcul du Modificateur :
!
      ymod(i) = ypred(i)-251*(y(i)-ypred0(i))/270
    END DO
!
! Calcul de la derivee du modificateur au temps : tps
!
      CALL calcul_fct_derivee(tps,ymod,fcorr,force_ext,moment_ext,&
        &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
! Calcul du Correcteur :
!
      DO i=1, nvligne
        y(i) = y(i)+deltat*(9*fcorr(i)+19*f3(i)-5*f2(i)+f1(i))/24
      END DO
!
! Calcul de la dérivée de y : f
!
      CALL calcul_fct_derivee(tps,y,f,force_ext,moment_ext,&
        &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
!
! Réaffectation :
!
      DO i=1, nvligne
        f1(i) = f2(i)
        f2(i) = f3(i)
        f3(i) = f(i)
        ypred0(i) = ypred(i)
      END DO
!
      CALL cpu_time(ti)
!
      nb = nb+1
      temps(nb) = tps
      CALL tabl_donnees(nb,tps,y,f,force_ext,moment_ext,&
        &omega_barre,domegadt_barre,vit_cm,acc_cm,omega,nvligne)
    END DO
  END SUBROUTINE adams
  :
END MODULE mod_adams

```

F.4 Module déclaratif

```
MODULE mod_declaration_aero
!-----
! MODULE DE DECLARATION DES VARIABLES
! DU MODELE AERODYNAMIQUE
!
! Mathilde LAPIE - DMSE/RCS/ONERA Lille - 2003
! - Juillet 2003-
!-----
  IMPLICIT NONE
!-----
! PARAMETRES
!-----
! DECLARATION DES PARAMETRES DES FICHIERS
!-----
!
! Nombre de fichier maximum à lire
  INTEGER, PARAMETER :: nfichmax = 10
!
! Nombre de dossiers maximum où se trouve un fichier
  INTEGER, PARAMETER :: ndosmax = 5
!
! TAILLES MAXIMALES DES TABLEAUX
!-----
!
! Nombre maximal d'éléments divisant un corps
!
  INTEGER, PARAMETER :: neltmax = 20
!
! Nombre maximal de pales
!
  INTEGER, PARAMETER :: npalemax = 5
!
! Nombre maximal de tronçons discrétisant la pale
!
  INTEGER, PARAMETER :: nnoeudmax = 60
!
! Nombre maximal de données concernant les polaires
!
  INTEGER, PARAMETER :: npolmax = 100
!
  :
!-----
! VALEURS DETERMINEES AU DEPART
!-----
```

```

!
! DECLARATION DES DONNEES DES FICHIERS A OUVRIR
! (Cf Subroutine lecture_fichier)
!-----
!
! Nombre de fichiers à lire
  INTEGER :: nb_fich
!
! Vecteur des nombre de fichiers à ouvrir
  INTEGER, DIMENSION (nfichmax) :: nbfichout
!
! Vecteur du chemin d'accès au fichier de données,
! Matrice des noms de fichier et
! des étiquettes de fichier à ouvrir
  CHARACTER (len=50), DIMENSION (nfichmax,nfichmax) :: cheminout,&
                                &fichout,&
                                &etiout
!
! VALEURS PUBLIQUES
!-----
!
! Masse volumique de l'air (en Kg/m3)
! (Cf Subroutine lect_vent)
  REAL(8) :: mvol_air
!
! VALEURS PRIVEES : TAILLE REELLE DES TABLEAUX
!-----
!
! Nombre d'éléments divisant la tour
! (Cf Subroutine lect_pyl)
  INTEGER :: nelt_tour
!
  :
!
! AUTRES VALEURS PRIVEES
!-----
!
! Diamètre inférieur intérieur, inférieur extérieur, (Cf Subroutine lect_pyl)
! supérieur intérieur et supérieur extérieur (mètre)
!
  REAL(8) :: diam_inf_int,diam_inf_ext,diam_sup_int,diam_sup_ext
!
! Masse volumique de la tour (Kg/m3)
! (Cf Subroutine lect_pyl)
  REAL(8) :: mvol_tour
!

```

```

:
! TABLEAUX
!-----
!
! TABLEAUX D'ENTIERS
!-----
!
! Vecteur des déplacements angulaires du repère de la tour, de la nacelle et du
! moyeu par rapport au repère qui le précède
! (Cf Subroutines lect_pyl, lect_nacel et lect_moyeu)
!   INTEGER, DIMENSION (3) :: pt_tour,pt_nacelle,pt_moyeu
!
! Vecteur indiquant l'axe de la pale (1ère :vrillage, 2ème :corde et 3ème :normale)
! (Cf Subroutine lect_pal)
!   INTEGER, DIMENSION (3) :: axepale
!
:
! TABLEAUX DE REELS
!-----
!
! Vecteur hauteur de la tour (mètre)
! (Cf Subroutine lect_pyl)
!
!   REAL(8), DIMENSION (3) :: hauteur_tour
!
! Vecteur des coordonnées position du centre du repère de la tour, la nacelle et
! du moyeu, par rapport au repère du solide précédent
! (Cf Subroutines lect_pyl,lect_nacel,lect_moyeu)
!
!   REAL(8), DIMENSION (3) :: qmc_tour,qmc_nacelle,qmc_moyeu
!
! Vecteur des coordonnées du centre d'inertie de la nacelle et du moyeu
! (Cf Subroutines lect_nacel et lect_moyeu)
!   REAL(8), DIMENSION (3) :: rmc_nacelle,rmc_moyeu
:
!
END MODULE mod_declaration_aero

```

F.5 Exemple de fichier de résultats

```

$-----
$ LES RESULTATS DES CALCULS A CHAQUE PAS D'INTEGRATION POUR
$ CHAQUE SOLIDE
$-----

```

```

$
$ DONNEES DE DEPART
$ -----
$
$ Le fichier des résultats :
$
fichier_dat/pendule/affich_res_p1.out
$ Temps initial
$ ---E--
0.0000E+00
$ Temps final
$ -----
100.0
$ Pas de temps utilisé
$ -----
0.01
$ RESULTATS DU CODE
$ -----
$
$ SOLIDE 1
$ -----
$
$ Numéro du solide :
$ ---
1
$ Valeur du nombre de données affichées :
$ ---
2
$ Nombre d'itération :
$ ---
10001
$          Temps          zl
$ No      (s)             (rad)
$ -----  -.-E+-      -.-E--
1      0.000000E+0  -1.553343E+00
2      1.000000E-02 -1.553349E+00
3      2.000000E-02 -1.553369E+00
4      3.000000E-02 -1.553401E+00
5      4.000000E-02 -1.553446E+00
6      5.000000E-02 -1.553503E+00
7      5.999999E-02 -1.553574E+00
8      6.999999E-02 -1.553657E+00

```

9	7.999999E-02	-1.553752E+00
10	8.999999E-02	-1.553860E+00
11	9.999999E-02	-1.553981E+00
12	1.100000E-01	-1.554114E+00
13	1.200000E-01	-1.554259E+00
14	1.300000E-01	-1.554417E+00
15	1.400000E-01	-1.554586E+00
16	1.500000E-01	-1.554768E+00
:		
9985	9.984292E+01	-1.556706E+00
9986	9.985292E+01	-1.556991E+00
9987	9.986292E+01	-1.557285E+00
9988	9.987292E+01	-1.557590E+00
9989	9.988293E+01	-1.557904E+00
9990	9.989293E+01	-1.558228E+00
9991	9.990293E+01	-1.558561E+00
9992	9.991293E+01	-1.558904E+00
9993	9.992294E+01	-1.559254E+00
9994	9.993294E+01	-1.559614E+00
9995	9.994294E+01	-1.559981E+00
9996	9.995294E+01	-1.560357E+00
9997	9.996294E+01	-1.560740E+00
9998	9.997295E+01	-1.561131E+00
9999	9.998295E+01	-1.561529E+00
10000	9.999295E+01	-1.561933E+00
10001	1.000030E+02	-1.562344E+00

\$ FIN

Annexe G

Complément sur les matrices d'interpolation

Pour un élément souple e dans l'espace à six degrés de liberté par noeud, v_i et θ_i , les termes du vecteur nodal $\{\rho\}$ de l'équation (4.234), s'expriment en utilisant les polynômes d'interpolation [2] :

$$\begin{aligned} v_i &= N_{ij}\rho_j \\ \theta_i &= \psi_{ij}\rho_j \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 12) \quad (\text{G.1})$$

où les deux matrices d'interpolation $[N]$ et $[\psi]$ sont :

$$[N] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_5 & 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & b_7 & 0 & b_8 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.2})$$

et :

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 & c_7 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

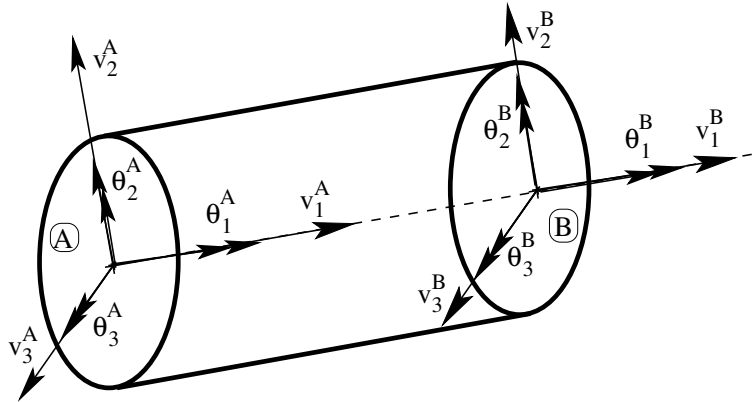


FIG. G.1 – Élément de poutre à deux noeuds avec 6 degrés de liberté par noeud

Les coefficients a_i ($i = 1, 2$), b_i et c_i ($i = 1, \dots, 8$) sont :

$$a_1 = 1 - \zeta \quad (\text{G.4})$$

$$a_2 = \zeta \quad (\text{G.5})$$

$$b_1 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad (\text{G.6})$$

$$b_2 = L \left(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3 \right) \quad (\text{G.7})$$

$$b_3 = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \quad (\text{G.8})$$

$$b_4 = L \left(-\zeta^2 + \zeta^3 \right) \quad (\text{G.9})$$

$$b_5 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad (\text{G.10})$$

$$b_6 = L \left(-\zeta + \zeta^2 - \zeta^3 \right) \quad (\text{G.11})$$

$$b_7 = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \quad (\text{G.12})$$

$$b_8 = L \left(-\zeta^2 + \zeta^3 \right) \quad (\text{G.13})$$

$$c_1 = \frac{6}{L} \left(-\zeta + \zeta^2 \right) \quad (\text{G.14})$$

$$c_2 = 1 - 4\zeta + 3\zeta^2 \quad (\text{G.15})$$

$$c_3 = -c_1 \quad (\text{G.16})$$

$$c_4 = -2\zeta + 3\zeta^2 \quad (\text{G.17})$$

$$c_5 = \frac{6}{L} \left(-\zeta + \zeta^2 \right) \quad (\text{G.18})$$

$$c_6 = 1 - 4\zeta + 3\zeta^2 \quad (\text{G.19})$$

$$c_7 = -c_5 \quad (\text{G.20})$$

$$c_8 = 2\zeta + 3\zeta^2 \quad (\text{G.21})$$

avec :

$$\zeta = \frac{x - x_i}{L} \quad (\text{G.22})$$

où L est la longueur de l'élément de la *figure G.1*. (G.1) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \{v\} \\ \{\theta\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [N] \\ [\psi] \end{bmatrix} \{\rho\} \quad (\text{G.23})$$

A partir de cette matrice d'interpolation, la matrice masse de l'élément e est retrouvée :

$$[M^e] = \int_V [N]^T m^e [N] dV \quad (\text{G.24})$$

soit :

$$[M^e] = m^e L^e A^e \begin{bmatrix} [M^{11}] & [M^{12}] \\ [M^{21}] & [M^{22}] \end{bmatrix} \quad (\text{G.25})$$

où :

$$[M^{11}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} + \frac{6J_y^e}{5A^e L^e} & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6J_y^e}{5A^e L^e} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x^e}{3A^e} & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{11L^e}{210} - \frac{J_y^e}{10A^e L^e} & 0 & \frac{L^e}{105} + \frac{2J_y^e}{15A^e} & & & & \\ 0 & \frac{11L^e}{210} + \frac{J_z^e}{10A^e L^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^e}{105} + \frac{2J_z^e}{15A^e} & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{symétrique} \\ \\ \\ \end{array} \quad (\text{G.26})$$

$$[M^{21}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & & & & & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} - \frac{6J_z^e}{5A^e L^e} & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6J_y^e}{5A^e L^e} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x^e}{6A^e} & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13L^e}{420} - \frac{J_y^e}{10A^e L^e} & 0 & -\frac{L^e}{140} - \frac{J_y^e}{30A^e} & & & & \\ 0 & -\frac{13L^e}{420} + \frac{J_z^e}{10A^e L^e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^e}{140} - \frac{J_z^e}{30A^e} & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{antisymétrique} \\ \\ \\ \end{array} \\ = [M^{12}]^T \quad (\text{G.27})$$

$$[M^{22}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} + \frac{6J_z^e}{5A^e L^e} & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6J_y^e}{5A^e L^e} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x^e}{3A^e} & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{11L^e}{210} + \frac{J_y^e}{10A^e L^e} & 0 & \frac{L^e}{105} + \frac{2J_y^e}{15A^e} & & & & \\ 0 & -\frac{11L^e}{210} - \frac{J_z^e}{10A^e L^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^e}{105} + \frac{2J_z^e}{15A^e} & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{symétrique} \\ \\ \\ \end{array} \quad (\text{G.28})$$

La matrice de rigidité de l'élément e vaut :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \quad (\text{G.29})$$

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} \frac{E^e A^e}{L^e} & & & & & \\ 0 & \frac{12E^e J_z^e}{L^e{}^3} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12E^e J_y^e}{L^e{}^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^e J_x^e}{L^e} & & \\ 0 & 0 & -\frac{6E^e J_y^e}{L^e{}^2} & 0 & \frac{4E^e J_y^e}{L^e} & \\ 0 & \frac{6E^e J_z^e}{L^e{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^e J_z^e}{L^e} \end{bmatrix} \quad \text{symétrique} \quad (\text{G.30})$$

$$[K^{21}] = \begin{bmatrix} -\frac{E^e A^e}{L^e} & & & & & \\ 0 & -\frac{12E^e J_z^e}{L^e{}^3} & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{12E^e J_y^e}{L^e{}^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^e J_x^e}{L^e} & & \\ 0 & 0 & -\frac{6E^e J_y^e}{L^e{}^2} & 0 & \frac{2E^e J_y^e}{L^e} & \\ 0 & \frac{6E^e J_z^e}{L^e{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^e J_z^e}{L^e} \end{bmatrix} = [K^{12}]^T \quad \text{antisymétrique} \quad (\text{G.31})$$

$$[K^{22}] = \begin{bmatrix} \frac{E^e A^e}{L^e} & & & & & \\ 0 & \frac{12E^e J_z^e}{L^e{}^3} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12E^e J_y^e}{L^e{}^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^e J_x^e}{L^e} & & \\ 0 & 0 & \frac{6E^e J_y^e}{L^e{}^2} & 0 & \frac{4E^e J_y^e}{L^e} & \\ 0 & -\frac{6E^e J_z^e}{L^e{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^e J_z^e}{L^e} \end{bmatrix} \quad \text{symétrique} \quad (\text{G.32})$$

où J_x^e , J_y^e , J_z^e sont les moments d'inertie, E^e le module d'élasticité d'Young, G^e le module d'élasticité de cisaillement et A^e l'aire de la section de cet élément. Par exemple, pour l'exemple de la poutre de l'annexe M, ces termes valent :

$$\begin{aligned} E^e A^e &= ES = 6.10^7 N \\ E^e J_y^e &= EI_{yy} = 500 Nm^2 \\ E^e J_z^e &= EI_{zz} = 4500 Nm^2 \\ m_v J_x^e &= m_v I_0 = 19,5.10^{-5} Kg/m \\ m_l &= 2,34 Kg/m \\ G^e J_x^e &= GI_0 = 1923,0769 Nm^2 \\ L^e &= 0,1 m \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

Annexe H

Intégration numérique

Dans la méthode des éléments finis, les matrices masse $[M]$, de rigidité $[K]$, d'amortissement $[C]$ et le vecteur $\{f\}$ des sollicitations sont exprimés sous forme d'intégrales à un, deux ou trois dimensions définies sur un élément de volume réel V^e :

$$\begin{aligned}
 [M] &= \int \int \int_{V^e} [M^e] dV^e \\
 [K] &= \int \int \int_{V^e} [K^e] dV^e \\
 [C] &= \int \int \int_{V^e} [C^e] dV^e \\
 \{f\} &= \int \int_{S^e} \{f\} dS^e
 \end{aligned}
 \tag{H.1}$$

Pour cela, les coordonnées des r points d'intégration ξ_i ($i = 1, \dots, r$) et des coefficients de pondération (ou poids) correspondant ω_i sont utilisées. La méthode de Gauss-Legendre est une méthode d'intégration numérique à une dimension très utilisée dans laquelle les r coefficients ω_i et abscisses ξ_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2r - 1$. Pour cela, l'intégrale d'une fonction polynomiale $f(\xi)$ est remplacée par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ξ_i , telle que :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r \omega_i f(\xi_i)
 \tag{H.2}$$

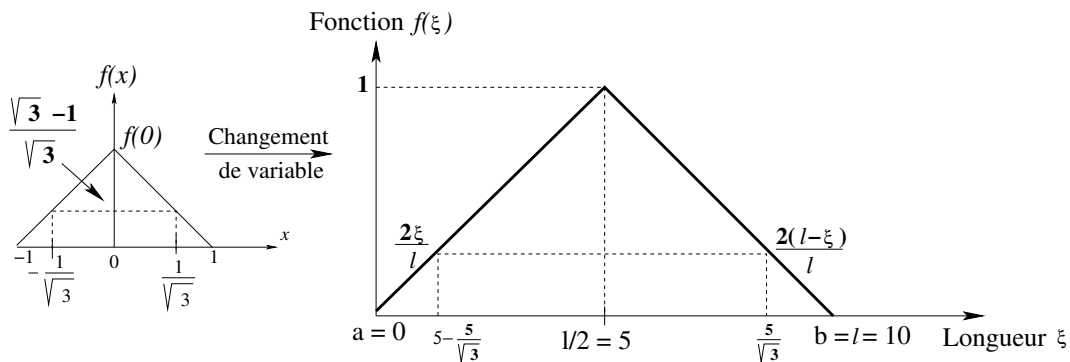


FIG. H.1 – Exemple de fonction utilisée pour l'intégration numérique

Les différentes valeurs des coordonnées points d'intégration ξ_i et des coefficients de pondération correspondant ω_i peuvent se trouver dans [5]. Les méthodes d'intégration numérique ont été présentées pour l'élément de référence. La transposition pour un élément réel s'effectue en utilisant la formule suivante :

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2} \right) f \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u \right) du \quad (\text{H.3})$$

Avec l'exemple de la *figure H.1*, (H.3) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(\xi) d\xi &= \left(\frac{10}{2} \right) \left(f \left(\frac{10}{2} + \frac{10}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) + f \left(\frac{10}{2} + \frac{10}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{10}{2} \right) \left(2 \frac{\left(\frac{10}{2} + \frac{10}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)}{10} + 2 \frac{10 - \left(\frac{10}{2} + \frac{10}{2} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)}{10} \right) \\ &= 10 \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \simeq 4,2265 \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Annexe I

Méthode du sous-espace

Cette méthode permet de calculer les n_{vp} premières valeurs propres d'un système à grandes dimensions [6] vérifiant :

$$\lambda^i [M] \{X^i\} = [K] \{X^i\} = \{F^i\} \quad (\text{I.1})$$

où λ^i est une des valeurs propres de cette équation et X^i son vecteur propre associé de dimension n^1 .

I.1 Méthode de l'itération inverse

Par la suite, ayant besoin d'utiliser la méthode de l'itération inverse, il est préférable de décrire ces différentes étapes :

1. Tout d'abord, $[K]$ est triangularisée sous la forme matricielle suivante :

$$[K] = [L][S] \quad (\text{I.2})$$

où $[L]$ est une matrice triangulaire inférieure et $[S]$ est une matrice triangulaire supérieure.

2. Un vecteur initial $\{V^1\}$ est choisi de telle sorte qu'il soit non orthogonal au vecteur cherché, puis, la sollicitation $\{F^1\}$ est calculée telle que :

$$\{F^1\} = [M] \{V^1\} \quad (\text{I.3})$$

3. Pour chaque itération $j = 1, \dots, n_{vp}$, $\{V^{j+1}\}$ est recherché tel que :

$$[L][S] \{V^{j+1}\} = \{F^j\} \quad (\text{I.4})$$

où $[L]$ et $[S]$ vérifient le système :

$$\begin{cases} [L] \{F'^j\} = \{F^j\} \\ [S] \{V^j\} = \{F'^j\} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

$${}^1[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & & K_{1n} \\ & \ddots & \\ K_{n1} & & K_{nn} \end{bmatrix} \text{ et } [M] = \begin{bmatrix} M_{11} & & M_{1n} \\ & \ddots & \\ M_{n1} & & M_{nn} \end{bmatrix}$$

Ensuite la sollicitation $\{\overline{F}\}$ est calculée :

$$\{\overline{F}\} = [M] \{V^{j+1}\} \quad (\text{I.6})$$

et ainsi que le coefficient d tel que :

$$d = \{V^{j+1}\}^T \{\overline{F}\} \quad (\text{I.7})$$

Ce coefficient (I.7) est utilisé pour calculer l'approximation de λ^{j+1} :

$$\lambda^{j+1} = \frac{\{V^{j+1}\}^T \{F^j\}}{d} \quad (\text{I.8})$$

Le vecteur $\{F^{j+1}\}$ est obtenu à partir de la sollicitation $\{\overline{F}\}$ et du coefficient d , tel que :

$$\{F^{j+1}\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{\overline{F}\} \quad (\text{I.9})$$

A chaque, itération, la convergence de λ^{j+1} est vérifiée telle que :

$$|\lambda^{j+1} - \lambda^j| < \varepsilon \quad (\text{I.10})$$

où ε est un coefficient très faible. Si λ^{j+1} converge, alors, le vecteur propre $[M]$ -normalisé s'écrit :

$$\{q^i\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{V^{j+1}\} \quad (\text{I.11})$$

I.2 Méthode du sous-espace

Cette méthode se décompose donc en 4 étapes principales :

1. Dans un premier temps, n_{vp} vecteurs initiaux sont choisis :

$$[X] = [\{X^1\} \quad \{X^2\} \quad \dots \quad \{X^{n_{vp}}\}] \quad (\text{I.12})$$

En pratique, $\{X^1\}$ est un vecteur aléatoire et les autres vecteurs sont :

$$\{X^2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Ligne } i_1 \quad \text{et} \quad \{X^3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Ligne } i_2 \quad (\text{I.13})$$

où i_1, i_2, \dots sont les indices i correspondant aux plus petites valeurs propres successives de $\frac{K_{ii}}{M_{ii}}$.

2. Une itération inverse permet afin de calculer les n_{vp} vecteurs de Ritz $\{q_R^i\}$ en résolvant :

$$[K] \{q_R^i\} = [M] \{X^i\} = \{F^i\} \quad i = 1, \dots, n_{vp} \quad (\text{I.14})$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$[K] [q_R] = [M] [X] \quad (\text{I.15})$$

La méthode décrite ci-avant en prenant comme vecteur initial $\{V^1\}$ tous les $\{X^i\}$ permet d'obtenir tous les $\{q_R^i\}$, regroupés dans la matrice non-carrée $[q_R]$

3. Avec l'ensemble des p_{vp} vecteurs de Ritz, la méthode de Ritz est appliquée afin de chercher les vecteurs propres $\{A^i\}$ dans le sous-espace de Ritz vérifiant le système :

$$[\overline{K}] \{A^i\} = \overline{\lambda}^i [\overline{M}] \{A^i\} \quad (\text{I.16})$$

où :

$$\begin{aligned} [\overline{K}] &= [q_R]^T [K] [q_R] \\ [\overline{M}] &= [q_R]^T [M] [q_R] \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Dès que les vecteurs $\{A^i\}$ sont trouvés, les vecteurs propres sont enfin connus :

$$\{X^i\} = [q_R] \{A^i\} \quad (\text{I.18})$$

Tous les vecteurs propres $\{X^i\}$ trouvés, la convergence de toutes les valeurs propres $\overline{\lambda}^i$ peut être testée, si nécessaire.

Annexe J

Présentation des résultats intermédiaires pour l'éolienne

Le code relatif aux corps rigides décrit dans la *section 4.2* a été décrit pour des systèmes multicorps « généraux » afin de montrer l'universalité de la méthode employée. Cependant pour revenir au problème initial, nous avons étudié une éolienne de 750 kW.

Pour l'application étudiée, nous avons discrétisé la tour en 4 éléments et chaque pale en 9 noeuds, soit 8 éléments poutre. Ainsi, la liste des corps composant l'éolienne est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^0 : \text{Pied du pylône} \\ B^1 : 1^{er} \\ \vdots \\ B^4 : 4^{ème} \\ B^5 : \text{Nacelle} \\ B^6 : \text{Moyeu} \\ B^7 : 1^{er} \\ B^8 : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{14} : 8^{ème} \\ B^{15} : 1^{er} \\ B^{16} : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{22} : 8^{ème} \\ B^{23} : 1^{er} \\ B^{24} : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{30} : 8^{ème} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} B^1 : 1^{er} \\ \vdots \\ B^4 : 4^{ème} \end{array} \right\} \text{élément poutre de la tour} \\ \left. \begin{array}{l} B^7 : 1^{er} \\ B^8 : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{14} : 8^{ème} \end{array} \right\} \text{élément poutre de la Pale 1} \\ \left. \begin{array}{l} B^{15} : 1^{er} \\ B^{16} : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{22} : 8^{ème} \end{array} \right\} \text{élément poutre de la Pale 2} \\ \left. \begin{array}{l} B^{23} : 1^{er} \\ B^{24} : 2^{ème} \\ \vdots \\ B^{30} : 8^{ème} \end{array} \right\} \text{élément poutre de la Pale 3} \end{array} \quad (J.1)$$

n_{sol} vaut alors 30. Dans un fichier spécifique, la liste des corps adjacents composant l'éolienne est représentée par le vecteur (*paragraphe 4.2.1.3*) :

$$\{\Gamma_1\}_{\acute{e}ol}^T = \left(\begin{array}{cccc} \textit{Tour} & \textit{Nacelle} & \textit{Moyeu} & \textit{Pale 1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overbrace{0 \ 1 \ 2 \ 3} & 4 & 5 & \overbrace{6 \ 7 \ \dots \ 12 \ 13} & \dots \\ \dots & & \dots & \overbrace{6 \ 15 \ \dots \ 20 \ 21} & \overbrace{6 \ 23 \ \dots \ 28 \ 29} \\ & & & \uparrow & \uparrow \\ & & & \textit{Pale 2} & \textit{Pale 3} \end{array} \right) \quad (\text{J.2})$$

Le programme construit alors la matrice d'arborescence de l'éolienne $[\Gamma]_{\acute{e}ol}$, soit :

$$[\Gamma]_{\acute{e}ol} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & 12 & 13 & 6 & 15 & & 20 & 21 & 6 & 23 & & 28 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 11 & 12 & 5 & 6 & & 19 & 20 & 5 & 6 & & 27 & 28 \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 10 & 11 & 4 & 5 & & 18 & 19 & 4 & 5 & & 26 & 27 \\ & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & 9 & 10 & 3 & 4 & & 17 & 18 & 3 & 4 & & 25 & 26 \\ & & & & 0 & 1 & 2 & 3 & & 8 & 9 & 2 & 3 & & 16 & 17 & 2 & 3 & & 24 & 25 \\ & & & & & 0 & 1 & 2 & & 7 & 8 & 1 & 2 & & 15 & 16 & 1 & 2 & & 23 & 24 \\ \vdots & & & & & & 0 & 1 & \dots & 6 & 7 & 0 & 1 & \dots & 6 & 15 & 0 & 1 & \dots & 6 & 23 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & & 5 & 6 & 0 & 0 & & 5 & 6 \\ & & & & & & & & & 4 & 5 & & & & 4 & 5 & & & & 4 & 5 \\ & & & & & & & & & 3 & 4 & & & & 3 & 4 & & & & 3 & 4 \\ & & & & & & & & & 2 & 3 & & & & 2 & 3 & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & & & 1 & 2 & & & & 1 & 2 & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & \dots & & & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 & & & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{J.3})$$

Le mouvement de l'ensemble des corps de l'éolienne représenté par l'ensemble des coordonnées généralisées est regroupé dans le vecteur $\{x\}$ tel que :

$$\{x\}_{\acute{e}ol} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma^4}{\alpha^6} \\ 0 \\ \frac{\beta^5}{\alpha^6} \\ \frac{\gamma^5}{\alpha^6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha^7}{\alpha^7} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma^7}{\alpha^8} \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \frac{\alpha^{14}}{\alpha^{14}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha^{15}}{\alpha^{15}} \\ 0 \\ \frac{\gamma^{15}}{\alpha^{16}} \\ \frac{\alpha^{16}}{\alpha^{16}} \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{22}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha^{23}}{\alpha^{23}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma^{23}}{\alpha^{24}} \\ \frac{\alpha^{24}}{\alpha^{24}} \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \frac{\alpha^{30}}{\alpha^{30}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{J.4})$$

où ce vecteur a pour valeur initiale :

$$\{x(t=0s)\}_{éol} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0,025^\circ \\ \hline \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0,025^\circ \\ \hline 0 \\ 0,1^\circ \\ 0,2^\circ \\ \hline \alpha^6 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \beta_c + \beta_v^1 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \hline \beta_v^2 - \beta_v^1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \beta_v^8 - \beta_v^7 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \beta_c + \beta_v^1 + \frac{2\pi}{3} \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \hline \beta_v^2 - \beta_v^1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \beta_v^8 - \beta_v^7 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \beta_c + \beta_v^1 + \frac{4\pi}{3} \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \hline \beta_v^2 - \beta_v^1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \beta_v^8 - \beta_v^7 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Pour les besoins de la création du programme pour faciliter celui-ci, les pointeurs p^i et dp^i ($i = 1, \dots, n_{sol}$) (paragraphe 4.2.1.5),

$$\left\{ \begin{array}{l} p^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ p^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ p^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ p^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ p^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ p^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} dp^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ dp^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ dp^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ dp^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dp^{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ dp^{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

De plus, certaines données géométriques sont aussi nécessaires. Les données de la tour discrétisée en quatre éléments selon la *setion* 5.5.2 utilisées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{se} = 2,3 m \\ D_{si} = 2,295 m \\ D_{ii} = 3,695 m \\ D_{ie} = 3,7 m \\ Hauteur = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45 m \end{pmatrix} \\ \rho = 7,8 \cdot 10^3 \end{array} \right.$$

Ces paramètres détermineront les matrices d'inertie, les masses, la position du centre de gravité et repère de chaque élément discrétisé de la tour :

$$\{q^1\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^1 = 10\,193,074 \text{ Kg} \\ [I^1] = \begin{bmatrix} 177\,181,88 & 0 & 0 \\ 0 & 177\,181,88 & 0 \\ 0 & 0 & 139\,354,74 \end{bmatrix} \\ \{q^1\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \{r^1\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{45}{2} m \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 = 7\,877,4061 \text{ Kg} \\ [I^2] = \begin{bmatrix} 10\,255,064 & 0 & 0 \\ 0 & 10\,255,064 & 0 \\ 0 & 0 & 64\,321,483 \end{bmatrix} \\ \{q^2\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11,25 m \end{pmatrix} \\ \{r^2\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,625 m \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^3 = 7\,105,5168 \text{ Kg} \\ [I^3] = \begin{bmatrix} 98\,543,842 & 0 & 0 \\ 0 & 98\,543,842 & 0 \\ 0 & 0 & 47\,205,59 \end{bmatrix} \\ \{q^3\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11,25 m \end{pmatrix} \\ \{r^3\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,625 m \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^4 = 6\,333,6275 \text{ Kg} \\ [I^4] = \begin{bmatrix} 83\,516,159 & 0 & 0 \\ 0 & 83\,516,159 & 0 \\ 0 & 0 & 33\,432,132 \end{bmatrix} \\ \{q^4\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11,25 m \end{pmatrix} \\ \{r^4\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,625 m \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

La nacelle et le moyeu sont caractérisés respectivement par les données géométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^5 = 21\,795 \text{ Kg} \\ [I^5] = \begin{bmatrix} 7,88954 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1,05284 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1,05284 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \\ \{q^5\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11,25 m \end{pmatrix} \\ \{r^5\}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1,25 m \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{J.5})$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^6 = 194,717 \text{ Kg} \\ [I^6] = \begin{bmatrix} 4,55037 \cdot 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5,13301 \cdot 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5,13301 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \\ \{q^6\}^T = \begin{pmatrix} 2,73 m & 0 & 1,8 m \end{pmatrix} \\ \{r^6\}^T = \begin{pmatrix} 1,7187 m & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{J.6})$$

Annexe K

Détermination analytique des équations de mouvement des pendules simple et double

K.1 Le pendule simple

Soit un pendule simple (*figure 5.1*), de masse m^1 et de longueur ℓ^1 , avec :

$$\begin{cases} m^1 = 10 \text{ Kg} \\ \ell^1 = 2m \end{cases} \quad (\text{K.1})$$

Sa matrice d'inertie $[I^1]$ a pour expression :

$$[I^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m^1\ell^{1^2} \end{bmatrix} \quad (\text{K.2})$$

Soit γ^1 l'angle d'Euler de B^1 de \mathfrak{R}^1 par rapport à \mathfrak{R}^0 et $\dot{\gamma}^1$ sa dérivée. Pour les besoins de la démonstration, un changement de base (*figure 5.1*) a été réalisé, utilisant l'angle θ^1 et sa dérivée $\dot{\theta}^1$ tel que :

$$\begin{cases} \theta^1 = 90 + \gamma^1 \\ \dot{\theta}^1 = \dot{\gamma}^1 \end{cases} \quad (\text{K.3})$$

Ainsi le vecteur de vitesse angulaire $\{\omega^{10}\}$ du pendule par rapport à \mathfrak{R}^0 a pour composante :

$$\{\omega^{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{K.4})$$

La masse du pendule étant répartie, la position $\{O^0G^1\}$ du centre d'inertie G^1 par rapport à O^0 , centre du repère \mathfrak{R}^0 , est donnée par :

$$\{O^0G^1\} = \frac{\ell^1}{2} \begin{Bmatrix} \sin \theta^1 \\ -\cos \theta^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{K.5})$$

Par dérivation de la position du centre de masse (K.5), la vitesse du centre de masse $\{v^{10}\}$ vaut :

$$\{v^{10}\} = \frac{d}{dt} \{O^0G^1\} = \frac{\ell^1}{2} \dot{\theta}^1 \begin{pmatrix} \cos \theta^1 \\ \sin \theta^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{K.6})$$

Or l'énergie cinétique T du système vaut :

$$2T = m^1 \{v^{10}\} \{v^{10}\} + \{\omega^{10}\} [I^1] \{\omega^{10}\} \quad (\text{K.7})$$

ce qui donne :

$$2T = \frac{m^1}{3} \ell^{1^2} \dot{\theta}^{1^2} \quad (\text{K.8})$$

et son énergie potentielle Ep :

$$-Ep = m^1 g \frac{\ell^1}{2} \cos \theta^1 \quad (\text{K.9})$$

K.1.1 Solution exacte

Deux ouvrages [7, 8] ont permis de donner l'équation de mouvement exacte du pendule simple. S'il est posé [7] :

$$\begin{cases} \vartheta^1 &= \sqrt{\frac{3g}{2\ell^1}} = 2,712 \text{ rad/s} \\ epr &= \frac{Ep}{m^1 g \frac{\ell^1}{2}} : \text{énergie potentiel réduite} \\ etr &= \frac{T+Ep}{m^1 g \frac{\ell^1}{2}} : \text{énergie totale réduite} \end{cases} \quad (\text{K.10})$$

L'énergie totale réduite etr devient alors :

$$etr = \frac{T + Ep}{m^1 g \frac{\ell^1}{2}} = \frac{\frac{m^1}{6} \ell^{1^2} \dot{\theta}^{1^2} - m^1 g \frac{\ell^1}{2} \cos \theta^1}{m^1 g \frac{\ell^1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\ell^{1^2}}{3g} \dot{\theta}^{1^2} - \cos \theta^1 = \frac{1}{2\vartheta^{1^2}} \dot{\theta}^{1^2} - \cos \theta^1 \quad (\text{K.11})$$

d'où :

$$\dot{\theta}^{1^2} = 2\vartheta^{1^2} (etr + \cos \theta^1) \text{ ou } \dot{\theta}^1 = \sqrt{2\vartheta^1 (etr + \cos \theta^1)}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{K.12})$$

Le pendule varie entre deux positions sans atteindre la position verticale supérieure (correspondant à etr valant 1) et le mouvement est périodique donc :

$$-1 < etr < 1 \quad (\text{K.13})$$

Soit θ_0^1 l'élongation maximum telle que $\dot{\theta}^1$ soit nulle, ainsi :

$$etr = -\cos \theta_0^1 \quad (\text{K.14})$$

En posant :

$$\begin{cases} k = \sin \frac{\theta_0^1}{2} \\ \sin \frac{\theta^1}{2} = \sin \psi \sin \frac{\theta_0^1}{2} \end{cases} \quad (\text{K.15})$$

(K.12) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^{1^2} &= 2\vartheta^{1^2} (etr + \cos \theta^1) = 2\vartheta^{1^2} \left(- \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_0^1}{2} \right) \right) + \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta^1}{2} \right) \right) \right) \\ &= 4\vartheta^{1^2} \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0^1}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta^1}{2} \right) \right) = 4\vartheta^{1^2} k^2 \left(1 - \sin^2 \psi \right) = 4\vartheta^{1^2} k^2 (\cos^2 \psi) \end{aligned} \quad (\text{K.16})$$

d'où :

$$\dot{\theta}^1 = \frac{d\theta^1}{dt} = 2\vartheta^1 k \cos \psi \quad (\text{K.17})$$

Or la dérivée partielle de la deuxième équation de (K.15) donne :

$$\frac{1}{2} d\theta^1 \cos \frac{\theta^1}{2} = \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \sin \frac{\theta_0^1}{2} = k \cos \psi d\psi \quad (\text{K.18})$$

où $\cos \psi$ est remplacé dans (K.17) :

$$\frac{d\theta^1}{dt} = 2\vartheta^1 k \cos \psi = 2\vartheta^1 k \frac{\frac{1}{2} d\theta^1 \cos \frac{\theta^1}{2}}{k d\psi} = \vartheta^1 \frac{d\theta^1 \cos \frac{\theta^1}{2}}{d\psi} \quad (\text{K.19})$$

d'où :

$$\frac{d\psi}{dt} = \vartheta^1 \cos \frac{\theta^1}{2} = \vartheta^1 \sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\theta^1}{2} \right)} = \vartheta^1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \quad (\text{K.20})$$

L'équation de mouvement (K.12) devient alors :

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \vartheta^1 dt \quad (\text{K.21})$$

Donc la solution de (K.12) est alors :

$$\psi = \text{am} \left(\vartheta^1; k \right) \quad (\text{K.22})$$

soit :

$$\sin \frac{\theta^1}{2} = \sin \frac{\theta_0^1}{2} \sin \left(\text{am} \left(\vartheta^1; k \right) \right) \quad (\text{K.23})$$

où la fonction $\sin \left(\text{am} \left(\vartheta^1; k \right) \right)$ est aussi notée $\text{sn} \left(\vartheta^1; k \right)$. La période T_0 du pendule vaut alors [8] :

$$T_0 = \frac{4}{\vartheta^1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{4}{\vartheta^1} K(k) \quad (\text{K.24})$$

où $K(k)$ est une intégrale elliptique représentée en série par :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n (n)!} \right) k^2 \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!} \right) \left(\frac{1}{2^n (n)!} \right) k^2 \right) \quad (\text{K.25})$$

Le développement de (K.25) donne :

$$K(k) = 1,57226 \text{ rad} \quad (\text{K.26})$$

De plus, les fonctions elliptiques jacobienues représentées en série trigonométrique utilisent le coefficient q tel que :

$$q = e^{-\frac{\pi K(k)}{K(k')}} \text{ où } k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{K.27})$$

ainsi la fonction $\text{sn}(\vartheta^1; k)$ se décompose en une somme infinie d'éléments telle que [7, 8] :

$$\text{sn}(u) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin\left((2n-1) \frac{\pi u}{2K(k)}\right) \text{ où } u = \vartheta^1 t \quad (\text{K.28})$$

K.1.2 Solution linéarisée

En utilisant la formule de Lagrange (pour $\theta^i = \theta^1$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\theta}^i} \right) - \frac{\partial E_p}{\partial \theta^i} \quad (\text{K.29})$$

une équation différentielle non linéaire est alors obtenue :

$$\frac{m^1}{3} \ell^{12} \ddot{\theta}^1 + g \ell^1 \frac{m^1}{2} \sin \theta^1 = 0 \quad (\text{K.30})$$

Cette équation différentielle est impossible à résoudre analytiquement. Mais dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre ($\theta^1 < \text{quelques degrés}$), on procède à un changement (une linéarisation), soit :

$$\sin \theta^1 \simeq \theta^1 \quad (\text{K.31})$$

Ainsi, (K.30) devient :

$$\frac{\ell^1}{3} \ddot{\theta}^1 + g \frac{1}{2} \theta^1 = 0 \quad (\text{K.32})$$

S'agissant d'une équation différentielle du second ordre linéaire, une solution réelle est recherchée sous la forme :

$$\theta^1 = A \cos(\vartheta t + \varphi) \quad (\text{K.33})$$

où A est l'amplitude, ϑ la pulsation des oscillations libres et φ le déphasage à $t = 0$. L'équation différentielle (K.32) s'écrit alors sous la forme :

$$-\vartheta^2 \frac{\ell^1}{3} + g \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{K.34})$$

La pulsation ϑ^1 vérifiant (K.34) vaut alors :

$$\vartheta^1 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell^1}} = 2,712 \text{ rad/s} \quad (\text{K.35})$$

Les conditions initiales permettent de déterminer l'amplitude A^1 et le déphasage φ^1 :

$$\begin{aligned}\theta^1(0s) = 1^\circ &= A^1 \cos(\varphi^1) & (a) \\ \dot{\theta}^1(0s) = 0 &= \vartheta^1 A^1 \sin(\varphi^1) & (b)\end{aligned}\tag{K.36}$$

Par conséquent, d'après (b) de (K.36), φ^1 est nul et d'après (a) :

$$A^1 = \theta^1(0s)\tag{K.37}$$

d'où :

$$\theta^1 = \theta^1(0s) \cos(\vartheta^1 t)\tag{K.38}$$

K.2 Le pendule double

Soit m^1 , ℓ^1 , m^2 et ℓ^2 les masses et les longueurs respectives de chaque corps et leurs matrices d'inertie $[I^1]$ et $[I^2]$ sont :

$$[I^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m^1\ell^{12} \end{bmatrix} \text{ et } [I^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m^2\ell^{22} \end{bmatrix}\tag{K.39}$$

avec :

$$\begin{cases} m^1 = 10 \text{ Kg} \\ \ell^1 = 2 \text{ m} \\ m^2 = 15 \text{ Kg} \\ \ell^2 = 4 \text{ m} \end{cases}\tag{K.40}$$

Soient γ^1 l'angle d'Euler de B^1 de \mathfrak{R}^1 par rapport à \mathfrak{R}^0 , γ^2 celui de B^2 de \mathfrak{R}^2 par rapport à \mathfrak{R}^1 , $\dot{\gamma}^1$ et $\dot{\gamma}^2$ leur dérivées respectives. Comme précédemment, un changement de variables (*figure 5.2*) est réalisé tel que :

$$\begin{cases} \theta^1 = 90 + \gamma^1 \\ \dot{\theta}^1 = \dot{\gamma}^1 \\ \theta^2 = 90 + \gamma^1 + \gamma^2 \\ \dot{\theta}^2 = \dot{\gamma}^1 + \dot{\gamma}^2 \end{cases}\tag{K.41}$$

Ainsi les vecteurs de vitesses angulaires de chaque corps par rapport à \mathfrak{R}^0 , $\{\omega^{10}\}$ et $\{\omega^{20}\}$, ont pour composantes :

$$\{\omega^{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}^1 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\omega^{20}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}\tag{K.42}$$

Les masses de chaque corps étant réparties, les positions $\{O^0G^1\}$ et $\{O^0G^2\}$ de chaque centre de masse sont données par :

$$\begin{aligned} \{O^0G^1\} &= \frac{\ell^1}{2} \begin{Bmatrix} \sin \theta^1 \\ -\cos \theta^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{O^0G^2\} &= \ell^1 \begin{Bmatrix} \sin \theta^1 \\ -\cos \theta^1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\ell^2}{2} \begin{Bmatrix} \sin \theta^2 \\ -\cos \theta^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{K.43})$$

Donc en dérivant ces positions de (K.43) par rapport au temps, les vitesses $\{v^{10}\}$ et $\{v^{20}\}$ ont pour valeur :

$$\begin{aligned} \{v^{10}\} &= \frac{\ell^1}{2} \dot{\theta}^1 \begin{Bmatrix} \cos \theta^1 \\ \sin \theta^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{v^{20}\} &= \ell^1 \dot{\theta}^1 \begin{Bmatrix} \cos \theta^1 \\ \sin \theta^1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 \begin{Bmatrix} \cos \theta^2 \\ \sin \theta^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{K.44})$$

Ainsi, l'énergie cinétique T de l'ensemble du système vaut :

$$2T = \sum_{i=1}^2 m^i \{v^{i0}\} \{v^{i0}\} + \{\omega^{i0}\} [I^i] \{\omega^{i0}\} \quad (\text{K.45})$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2T &= \frac{m^1}{4} \ell^{12} \dot{\theta}^{12} + \frac{m^1}{12} \ell^{12} \dot{\theta}^{12} + \\ &+ m^2 \ell^{12} \dot{\theta}^{12} + \frac{m^2}{4} \ell^{22} \dot{\theta}^{22} + m^2 \ell^1 \ell^2 \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 \cos(\theta^1 - \theta^2) + \frac{m^2}{12} \ell^{22} \dot{\theta}^{22} \end{aligned} \quad (\text{K.46})$$

et l'énergie potentielle Ep :

$$-Ep = m^1 g \frac{\ell^1}{2} \cos \theta^1 + m^2 g \left(\ell^1 \cos \theta^1 + \frac{\ell^2}{2} \cos \theta^2 \right) \quad (\text{K.47})$$

L'utilisation de la formule de Lagrange (K.29) donne alors un système de deux équations différentielles non linéaires couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}^1 \left(\frac{m^1}{3} + m^2 \right) \ell^{12} + \ddot{\theta}^2 m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \cos(\theta^1 - \theta^2) + \dot{\theta}^{22} m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \sin(\theta^1 - \theta^2) = -g \ell^1 \left(\frac{m^1}{2} + m^2 \right) \sin \theta^1 \\ \ddot{\theta}^1 m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \cos(\theta^1 - \theta^2) + \ddot{\theta}^2 \frac{m^2}{3} \ell^{22} - \dot{\theta}^{12} m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \sin(\theta^1 - \theta^2) = -g m^2 \frac{\ell^2}{2} \sin \theta^2 \end{cases} \quad (\text{K.48})$$

qui est écrit sous forme matricielle suivante :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}^1 \\ \ddot{\theta}^2 \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^{12} \\ \dot{\theta}^{22} \end{Bmatrix} = -[K] \begin{Bmatrix} \sin \theta^1 \\ \sin \theta^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{K.49})$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} \left(\frac{m^1}{3} + m^2 \right) \ell^{12} & m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \cos(\theta^1 - \theta^2) \\ m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \cos(\theta^1 - \theta^2) & \frac{m^2}{3} \ell^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{K.50})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \sin(\theta^1 - \theta^2) \\ -m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \sin(\theta^1 - \theta^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{K.51})$$

et :

$$[K] = \begin{bmatrix} g\ell^1 \left(\frac{m^1}{2} + m^2\right) & 0 \\ 0 & gm^2 \frac{\ell^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{K.52})$$

La recherche d'une solution analytique ne peut aboutir que si une linéarisation est opérée sur (K.49) dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre (θ^1 et $\theta^2 <$ quelques degrés) :

$$\begin{cases} \sin \theta^1 \simeq \theta^1 \\ \sin \theta^2 \simeq \theta^2 \\ \cos(\theta^1 - \theta^2) \simeq 1 \\ \sin(\theta^1 - \theta^2) \simeq 0 \\ \dot{\theta}^{1^2} \simeq 0 \\ \dot{\theta}^{2^2} \simeq 0 \end{cases} \quad (\text{K.53})$$

Ainsi, (K.49) devient un système d'équations linéaires couplées :

$$[M] \{\ddot{\theta}\} + [K] \{\theta\} = 0 \quad (\text{K.54})$$

où :

$$\begin{cases} [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \\ [K] = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{K.55})$$

et :

$$\begin{cases} a = \left(\frac{m^1}{3} + m^2\right) \ell^{1^2} = \frac{220}{3} \\ b = m^2 \frac{\ell^1 \ell^2}{2} \cos(\theta^1 - \theta^2) = 60 \\ c = \frac{m^2}{3} \ell^{2^2} = 80 \\ d = g\ell^1 \left(\frac{m^1}{2} + m^2\right) = 392, \\ e = gm^2 \frac{\ell^2}{2} = 294,3 \end{cases} \quad (\text{K.56})$$

Une solution est recherchée sous la forme :

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{Bmatrix} e^{j(\vartheta t + \varphi)} \quad (\text{K.57})$$

où $\begin{Bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{Bmatrix}$ est l'amplitude, ϑ la vitesse angulaire propre et φ le déphasage. D'après les expressions des angles sous forme complexe (K.55), l'équation différentielle (K.54) devient alors :

$$-\vartheta^2 \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{K.58})$$

soit :

$$\begin{cases} -\vartheta^2 (aA^1 + bA^2) + dA^1 = 0 \\ -\vartheta^2 (bA^1 + cA^2) + eA^2 = 0 \end{cases} \quad (a) \quad (\text{K.59})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^1 (-\vartheta^2 a + d) - \vartheta^2 bA^2 = 0 \\ -\vartheta^2 bA^1 + (e - \vartheta^2 c) A^2 = 0 \end{cases} \quad (b)$$

La solution analytique de ce système d'équations (K.59) (b) du second ordre implique que le déterminant des coefficients soit nul car les amplitudes A^1 et A^2 ne sont pas nulles :

$$\begin{vmatrix} -\vartheta^2 a + d & -\vartheta^2 b \\ -\vartheta^2 b & e - \vartheta^2 c \end{vmatrix} = (-\vartheta^2 a + d)(e - \vartheta^2 c) - (\vartheta^2 b)^2$$

$$= (ac - b^2)(\vartheta^2)^2 - \vartheta^2 (ae + cd) + de$$

$$= 0 \quad (\text{K.60})$$

Les deux racines réelles de pulsations propres de cette équation du second ordre (K.60) sont donc :

$$\begin{cases} \vartheta^1 = \sqrt{\frac{ae+cd - \sqrt{(ae+cd)^2 - 4(ac-b^2)de}}{2(ac-b^2)}} = 1,559 \text{ rad/s} \\ \vartheta^2 = \sqrt{\frac{ae+cd + \sqrt{(ae+cd)^2 - 4(ac-b^2)de}}{2(ac-b^2)}} = 4,575 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (\text{K.61})$$

Comme la solution générale du système différentiel est une combinaison linéaire de solutions complexes de la forme $e^{j(\vartheta^1 t + \varphi^1)}$, $e^{-j(\vartheta^1 t + \varphi^1)}$, $e^{j(\vartheta^2 t + \varphi^2)}$, $e^{-j(\vartheta^2 t + \varphi^2)}$ [5], elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= A^{11} \cos(\vartheta^1 t + \varphi^1) + A^{21} \cos(\vartheta^2 t + \varphi^2) \\ \theta^2 &= A^{12} \cos(\vartheta^1 t + \varphi^1) + A^{22} \cos(\vartheta^2 t + \varphi^2) \end{aligned} \quad (\text{K.62})$$

Or les amplitudes A^{i1} et A^{i2} sont dépendantes l'une de l'autre [5], d'après les équations (K.59) (b) :

$$\begin{aligned} \frac{A^{12}}{A^{11}} = C^1 &= \frac{-\vartheta^1 a + d}{b\vartheta^1} = 1,465419907 \\ \frac{A^{22}}{A^{21}} = C^2 &= \frac{b\vartheta^2}{-\vartheta^2 c + e} = -0,909864351 \end{aligned} \quad (\text{K.63})$$

Donc, la solution (K.62) est réécrit avec la dépendance des coefficients (K.63) :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= A^{11} \cos(\vartheta^1 t + \varphi^1) + A^{21} \cos(\vartheta^2 t + \varphi^2) \\ \dot{\theta}^1 &= \vartheta^1 A^{11} \sin(\vartheta^1 t + \varphi^1) + \vartheta^2 A^{21} \sin(\vartheta^2 t + \varphi^2) \\ \theta^2 &= C^1 A^{11} \cos(\vartheta^1 t + \varphi^1) + C^2 A^{21} \cos(\vartheta^2 t + \varphi^2) \\ \dot{\theta}^2 &= \vartheta^1 C^1 A^{11} \sin(\vartheta^1 t + \varphi^1) + \vartheta^2 C^2 A^{21} \sin(\vartheta^2 t + \varphi^2) \end{aligned} \quad (\text{K.64})$$

Les conditions initiales (les valeurs doivent être en radians et non en degrés) vont permettre d'obtenir la valeur des coefficients A^{11} , A^{21} , φ^1 et φ^2 :

$$\begin{aligned}
\theta^1(0s) = 1^\circ &= A^{11} \cos(\varphi^1) + A^{21} \cos(\varphi^2) & (a) \\
\dot{\theta}^1(0s) = 0 &= \vartheta^1 A^{11} \sin(\varphi^1) + \vartheta^2 A^{21} \sin(\varphi^2) & (b) \\
\theta^2(0s) = 3^\circ &= C^1 A^{11} \cos(\varphi^1) + C^2 A^{21} \cos(\varphi^2) & (c) \\
\dot{\theta}^2(0s) = 0 &= \vartheta^1 C^1 A^{11} \sin(\varphi^1) + \vartheta^2 C^2 A^{21} \sin(\varphi^2) & (d)
\end{aligned} \tag{K.65}$$

Par conséquent, d'après (b) et (d) de (K.65), φ^1 et φ^2 sont nuls, ainsi :

$$\begin{aligned}
A^{11} + A^{21} &= \theta^1(0s) \\
A^{11}C^1 + A^{21}C^2 &= \theta^2(0s)
\end{aligned} \tag{K.66}$$

soit (tableau K.1 pour des valeurs numériques) :

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \frac{C^2\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^2 - C^1} \\
A^{21} &= \frac{C^1\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^1 - C^2}
\end{aligned} \tag{K.67}$$

Angles $\left\{ \begin{array}{l} \theta^{10} \\ \theta^{20} \end{array} \right. \rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \\ 3^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7^\circ \\ 12^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 10^\circ \\ 22^\circ \end{array} \right.$
Coefficients \downarrow			
A^{11}	0,02872919	0,13497349	0,228508
A^{21}	-0,01127759	-0,01280044	-0,053976

TAB. K.1 – Valeurs des coefficients A^{11} et A^{21} d'après les angles θ^1 et θ^2 initiaux par rapport à l'axe vertical

La solution générale de système couplé est donc :

$$\begin{aligned}
\theta^1 &= \frac{C^2\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^2 - C^1} \cos(\vartheta^1 t) + \frac{C^1\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^1 - C^2} \cos(\vartheta^2 t) \\
\theta^2 &= C^1 \frac{C^2\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^2 - C^1} \cos(\vartheta^1 t) + C^2 \frac{C^1\theta^1(0s) - \theta^2(0s)}{C^1 - C^2} \cos(\vartheta^2 t)
\end{aligned} \tag{K.68}$$

Annexe L

Détermination analytique des équations de mouvement d'un pendule tournant

D'après la *figure 5.23*, la position du centre d'inertie G^3 du pendule, solide B^3 , relié au manège est :

$$\{O^0G^3\} = \begin{Bmatrix} r + \frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \cos \beta^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{L.1})$$

Dérivant cette position (L.1), sa vitesse $\{O^0\dot{G}^3\}$ s'écrit alors :

$$\{O^0\dot{G}^3\} = \begin{Bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \beta^3 \dot{\beta}^3 \\ r\dot{\gamma}^1 + \frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \dot{\gamma}^1 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \dot{\beta}^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{L.2})$$

car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{n}_1}{\partial t} &= \dot{\gamma}^1 \vec{n}_2 \\ \frac{\partial \vec{n}_2}{\partial t} &= -\dot{\gamma}^1 \vec{n}_1 \end{aligned} \quad (\text{L.3})$$

Comme la norme du vecteur vitesse (L.2) au carré est :

$$\begin{aligned} \{O^0\dot{G}^3\}^2 &= \left(\frac{\ell}{2} \cos \beta^3 \dot{\beta}^3\right)^2 + \left(r\dot{\gamma}^1 + \frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \dot{\gamma}^1\right)^2 + \left(-\frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \dot{\beta}^3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 (\dot{\beta}^3)^2 + (r)^2 (\dot{\gamma}^1)^2 + \left(\frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \dot{\gamma}^1\right)^2 + 2r\frac{\ell}{2} \sin \beta^3 (\dot{\gamma}^1)^2 \end{aligned} \quad (\text{L.4})$$

son énergie cinétique T devient alors :

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{\ell^2}{4} \dot{\beta}^3{}^2 + \left(r^2 + \frac{\ell^2}{4} \sin^2 \beta^3 + r\ell \sin \beta^3 \right) \dot{\gamma}^1{}^2 \right) \quad (\text{L.5})$$

et son énergie potentielle Ep :

$$Ep = -mg \frac{\ell}{2} \cos \beta^3 \quad (\text{L.6})$$

Ainsi les équations de Lagrange pour ce pendule vérifient alors :

$$\begin{cases} m \left(r^2 + \frac{\ell^2}{4} \sin^2 \beta^3 + r\ell \sin \beta^3 \right) \ddot{\gamma}^1 + m \left(\frac{\ell^2}{2} \sin \beta^3 \cos \beta^3 + r\ell \cos \beta^3 \right) \dot{\beta}^3 = 0 \\ \frac{1}{4} m \ell^2 \ddot{\beta}^3 - \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell^2}{2} \sin \beta^3 \cos \beta^3 + r\ell \cos \beta^3 \right) \dot{\gamma}^1 = -mg \frac{\ell}{2} \sin \beta^3 \end{cases} \quad (\text{L.7})$$

La 2^{ème} équation différentielle de (L.7) est impossible à résoudre analytiquement. Mais dans le cas où le support du pendule atteint sa vitesse finale et constante ($\dot{\gamma}^1$ vaut alors Ω) pour que celui-ci se déplace jusqu'à sa position de stabilité β_Ω^3 ($\ddot{\beta}^3$ est alors nulle), cette deuxième équation de (L.7) vaut donc :

$$\left(\frac{\ell}{2} \sin \beta_\Omega^3 + r \right) \cos \beta_\Omega^3 \Omega^2 = g \sin \beta_\Omega^3 \quad (\text{L.8})$$

ou :

$$\tan \beta_\Omega^3 = \frac{\Omega^2}{g} \left(r + \frac{\ell}{2} \sin \beta_\Omega^3 \right) \quad (\text{L.9})$$

Par pas successifs, la position vérifiant (L.9) est trouvée. Le *tableau L.1* donne la position de stabilité, obtenu théoriquement par (L.9) et par le code, pour différentes vitesses angulaires.

Vitesse angulaire Ω (rad/s)	0,5	2	8
Position de stabilité β_Ω^3 par (L.9) (en degrés)	89,70843	85,04378	25,59082
Position de stabilité β_Ω^3 par le code (en degrés)	89,70647	84,92777	21,66464

TAB. L.1 – Différentes positions de stabilité correspondant à différentes vitesses angulaires

Annexe M

Détermination des pulsations propres d'une poutre

Pour illustrer ce qui précède, un exemple est pris.

M.1 Résolution analytique

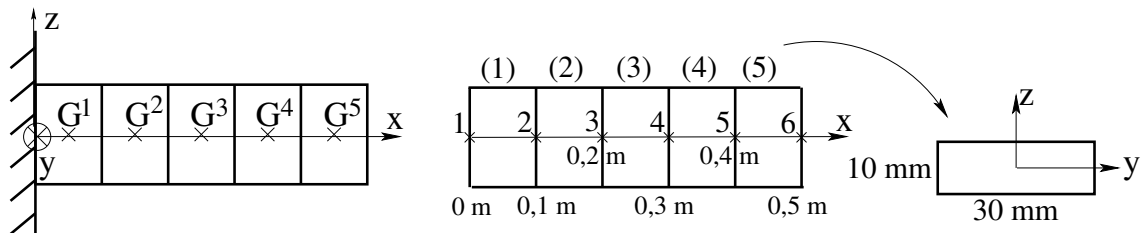


FIG. M.1 – Exemple d'une poutre souple de section rectangulaire et discrétisée en 5 éléments

Soit la poutre de la *figure M.1* divisée en 5 éléments de caractéristiques géométriques :

$$S = 10 \cdot 10^{-3} \times 30 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 : \text{section} \quad (\text{M.1})$$

$$m_v = 7800 \text{ Kg/m}^3 : \text{Masse volumique} \quad (\text{M.2})$$

Chaque élément a les caractéristiques cinématiques suivantes :

$$E = 200000 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} : \text{Module d'Young} \quad (\text{M.3})$$

$$I_{yy} = \frac{0,03 \times 0,01^3}{12} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 : \text{Moment d'inertie d'une section selon l'axe } y \quad (\text{M.4})$$

$$I_{zz} = \frac{0,01 \times 0,03^3}{12} = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 : \text{Moment d'inertie d'une section selon l'axe } z \quad (\text{M.5})$$

$$m_\ell = m_v \times 0,03 \times 0,01 = \underline{2,34 \text{ Kg/m}} : \text{Masse linéique} \quad (\text{M.6})$$

Il est supposé que :

$$I_0 = I_{xx} \quad (\text{M.7})$$

donc :

$$I_0 = I_{xx} = I_{yy} + I_{zz} \quad (\text{M.8})$$

Ainsi, il est obtenu :

$$ES = \underline{6.10^7 \text{ N}} \quad (\text{M.9})$$

$$EI_{yy} = \underline{500 \text{ N.m}^2} \quad (\text{M.10})$$

$$EI_{zz} = \underline{4500 \text{ N.m}^2} \quad (\text{M.11})$$

$$m_v I_0 = \underline{19,5.10^{-5} \text{ Kg/m}} \quad (\text{M.12})$$

et

$$GI_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} I_0 = \frac{2.10^{11}}{2(1+0,3)} 2,5.10^{-8} = \underline{1923,0769 \text{ N.m}^2} \quad (\text{M.13})$$

Les pulsations propres (*tableau M.1*) s'obtiennent par la formule :

$$\omega = A \sqrt{\frac{EI}{m_\ell \ell^4}} \quad (\text{M.14})$$

avec A un coefficient issu d'une table et ℓ la longueur de l'élément (pour le cas de la *figure M.1*, cette longueur fait $0,5 \text{ m}$).

	pulsation propre	fréquence propre	Axe
$A = 3,52$	205,816	32,75	y
$A = 3,52$	617,448	98,27	z
$A = 22,4$	1309,74	208,45	y
$A = 61,7$	3607,63	574,17	y
$A = 22,4$	3929,219	625,35	z
$A = 61,7$	10822,89	1722,51	z

TAB. M.1 – Détermination analytique des pulsations propres (en *radians/s*) et des fréquences propres (*Hz*) selon l'axe y ou z d'une poutre

M.2 Résolution numérique

A partir de la construction des matrices de l'*annexe G*, le code donne différentes valeurs (*tableau M.2*).

pulsation propre	fréquence propre	Axe
205,583	32,72	<i>y</i>
616,75	98,16	<i>z</i>
1288,93	205,15	<i>y</i>
3620,5	576,22	<i>y</i>
3866,86	615,43	<i>z</i>

TAB. M.2 – Détermination numérique des pulsations propres (en *radians/s*) et des fréquences propres (*Hz*) selon l'axe *y* ou *z* d'une poutre

Annexe N

Explicitation des données utiles des différents éléments composant le moyeu

Dans la partie du calcul des matrices d'inerties des supports II et III des pales, l'utilisation des matrices de passage est sollicitée.

Tout d'abord, il est judicieux de remarquer que le centre de gravité de 1 et 2 sont identiques¹ :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{O^{moy}G^{\vec{1}}} &= \frac{m^{\text{I}}\overrightarrow{O^{moy}G^{\vec{1}}} + m^{\text{II}}\overrightarrow{O^{moy}G^{\vec{II}}} + m^{\text{III}}\overrightarrow{O^{moy}G^{\vec{III}}}}{m^{\text{I}} + m^{\text{II}} + m^{\text{III}}} \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}} + H_p \vec{z}^{\vec{1}} \right) + \left(\frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}} + H_p \left(-\sin 60^\circ \vec{y}^{\vec{1}} - \cos 60^\circ \vec{z}^{\vec{1}} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}} + \left(\sin 60^\circ \vec{y}^{\vec{1}} - \cos 60^\circ \vec{z}^{\vec{1}} \right) \right) \right] \quad (\text{N.1}) \\
 &= \frac{1}{3} \left[3 \frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}} + H_p \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \vec{z}^{\vec{1}} \right] = \frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}} \\
 \overrightarrow{O^{moy}G^{\vec{2}}} &= \frac{H'}{2} \vec{x}^{\vec{1}}
 \end{aligned}$$

Les matrices de passage du repère $(G^1, x^{\text{II}}, y^{\text{II}}, z^{\text{II}})$ au repère $(G^1, x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}})$ et du repère $(G^1, x^{\text{III}}, y^{\text{III}}, z^{\text{III}})$ à $(G^1, x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}})$ (*figure 5.42*) sont notées respectivement $[P^{\text{II}}]$ et $[P^{\text{III}}]$ telle que :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\text{moy}} \\ y^{\text{moy}} \\ z^{\text{moy}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = [P^{\text{II}}] \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} \quad (\text{N.2})$$

et :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ 0 & -\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{III}} \\ y^{\text{III}} \\ z^{\text{III}} \end{pmatrix} = [P^{\text{III}}] \begin{pmatrix} x^{\text{III}} \\ y^{\text{III}} \\ z^{\text{III}} \end{pmatrix} \quad (\text{N.3})$$

¹ $m^{\text{I}} = m^{\text{II}} = m^{\text{III}}$, d'après (5.37)

Donc les matrices d'inertie de II et III écrites dans le repère (G^1, x^I, y^I, z^I) :

$$\left[I^{II} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} = \left[P^{II} \right] \left[I^{II} \right]_{(G^1, x^{II}, y^{II}, z^{II})} \left[P^{II} \right]^{-1} \quad (\text{N.4})$$

et :

$$\left[I^{III} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} = \left[P^{III} \right] \left[I^{III} \right]_{(G^1, x^{III}, y^{III}, z^{III})} \left[P^{III} \right]^{-1} \quad (\text{N.5})$$

où :

$$\begin{aligned} \left[I^{II} \right]_{(G^1, x^{II}, y^{II}, z^{II})} &= \left[I^{III} \right]_{(G^1, x^{III}, y^{III}, z^{III})} = \left[I^I \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} \\ &= \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_p^2 + r_p^2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{N.6})$$

Ainsi (N.4) et (N.5) deviennent :

$$\begin{aligned} \left[I^{II} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} &= \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \times \\ &\begin{bmatrix} \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{48} + \frac{H_p^2}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} - \frac{h_p^2}{12} - H_p^2 \right\} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} - \frac{h_p^2}{12} - H_p^2 \right\} & \frac{5(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{16} + \frac{3H_p^2}{4} \end{bmatrix} \\ \left[I^{III} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} &= \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \times \\ &\begin{bmatrix} \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{48} + \frac{H_p^2}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} - \frac{h_p^2}{12} - H_p^2 \right\} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} - \frac{h_p^2}{12} - H_p^2 \right\} & \frac{5(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{16} + \frac{3H_p^2}{4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{N.7})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left[I^{II} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} + \left[I^{III} \right]_{(G^1, x^I, y^I, z^I)} &= \\ &= 2\rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{48} + \frac{H_p^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5(R_p^2 + r_p^2)}{16} + \frac{h_p^2}{16} + \frac{3H_p^2}{4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{N.8})$$

Ainsi, la matrice d'inertie de l'élément 2 est la somme de (N.6) et (N.8) :

$$[I^2]_{(G^1, x\mathbf{I}, y\mathbf{I}, z\mathbf{I})} = \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} 3 \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 \right\} & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{14}{16} \right) (R_p^2 + r_p^2) + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{48} \right) h_p^2 + \left(1 + \frac{2}{4} \right) H_p^2 & & & & 0 \\ & & & & \frac{9(R_p^2 + r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{N.9})$$

Finalement, la matrice globale de ces trois supports de pales et de la partie cylindrique, soit $[I^{1+2}]_{(G^1, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})}$, écrite au départ dans le repère $(G^1, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})$, est transférée dans le repère $(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})$ pour devenir $[I^{1+2}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})}$:

$$\begin{aligned} [I^{1+2}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} &= \\ &= [I^{1+2}]_{(G^1, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} + m^{1+2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H'^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H'^2}{4} \end{bmatrix} \\ &= \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \begin{bmatrix} \frac{R'^2 + r'^2}{2} & & 0 \\ 0 & \frac{R'^2 + r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} & \\ 0 & 0 & \frac{R'^2 + r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} \end{bmatrix} + \\ &\quad + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} 3 \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 \right\} & & 0 \\ & & \frac{9(R_p^2 + r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \\ & & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \rho\pi \left\{ H' (R'^2 - r'^2) + 3 (R_p^2 - r_p^2) h_p \right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H'^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H'^2}{4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{N.10})$$

La recherche du centre de gravité G^{moy} du moyeu va permettre d'écrire la matrice d'inertie de celui-ci en ce point. Ce centre G^{moy} se trouve sur l'axe du moyeu, c'est-à-dire x^{moy} tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O^{moy} G^{moy}} &= \frac{\rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \left\{ \frac{H'}{2} \overrightarrow{x^{moy}} \right\} + 3\rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \left\{ \frac{H'}{2} \overrightarrow{x^{moy}} \right\} + \frac{\rho\pi}{3} (R^2 H - r^2 h) \left\{ \frac{H}{3} \overrightarrow{x^{moy}} \right\}}{\rho\pi H' (R'^2 - r'^2) + 3\rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) + \frac{\rho\pi}{3} (R^2 H - r^2 h)} \\ &= \frac{(R'^2 - r'^2) \frac{H'}{2} + \frac{3}{2} h_p H' (R_p^2 - r_p^2) + (R^2 H - r^2 h) \frac{H}{9}}{H' (R'^2 - r'^2) + 3h_p (R_p^2 - r_p^2) + \frac{1}{3} (R^2 H - r^2 h)} \overrightarrow{x^{moy}} = \Delta \overrightarrow{x^{moy}} \end{aligned} \quad (\text{N.11})$$

D'après (5.32) et (N.10), respectivement les matrices d'inertie du cône et du cylindre comprenant les support des pales, la matrice d'inertie du moyeu vaut donc :

$$\begin{aligned}
& [I^{moy}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \\
& = \frac{\rho\pi}{6} \begin{bmatrix} R^4 H - r^4 h & 0 & 0 \\ 0 & R^2 H \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) - r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{9} \right) & 0 \\ 0 & 0 & R^2 H \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) - r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{9} \right) \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\rho\pi}{3} (R^2 H - r^2 h) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H^2}{9} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi H' (R'^2 - r'^2) \begin{bmatrix} \frac{R'^2 + r'^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'^2 + r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'^2 + r'^2}{4} + \frac{H'^2}{12} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi h_p (R_p^2 - r_p^2) \begin{bmatrix} 3 \left\{ \frac{R_p^2 + r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} + H_p^2 \right\} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9(R_p^2 + r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9(R_p^2 + r_p^2)}{8} + \frac{h_p^2}{8} + \frac{3H_p^2}{2} \end{bmatrix} + \\
& + \rho\pi \left\{ H' (R'^2 - r'^2) + 3 (R_p^2 - r_p^2) h_p \right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H'^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H'^2}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{N.12}$$

que l'on peut écrire aussi :

$$[I^{moy}]_{(O^{moy}, x^{moy}, y^{moy}, z^{moy})} = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \gamma' \end{bmatrix} \tag{N.13}$$

où α' , β' et γ' sont respectivement définis par (5.46) et (5.47).

Bibliographie

- [1] ISNARD F., Génération des équations du mouvement de systèmes polyarticulés avec prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange, Thèse de doctorat, Décembre 1997
- [2] AMIROUCHE F.L., Computational methods in multibody dynamics, University of Illinois, Chicago, 1992
- [3] BERLU P., Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance, Thèse de doctorat de l'université de Lille I, janvier 1999
- [4] KANE T.R., LEVINSON D.A., Dynamics : Theory and applications, McGraw Hill Book Compagny, 1985
- [5] PEREZ J.P., Mécanique, points matériels, solides, fluides avec 250 exercices et problèmes résolus, 4^{ème} édition entièrement refondue et augmentée, Masson, Université Paul Sabatier et Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse, 1995
- [6] DHATT G., TOUZOT G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Les presses de l'Université Québec, Maloine S.A. Paris, Université de Compiègne, 1981
- [7] NIHOUL J.C.J. *et al*, Cours modernes de mécanique rationnelle, Université de Liège, Progrès des Sciences et Techniques, 1968
- [8] GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M., Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, 1965