

Année : 2005

N° d'ordre : 15

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE  
ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

## THESE

Présentée en vue  
d'obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

en

Productique, Automatique et Informatique Industrielle

par

**Christophe NIESNER**

## **SENSIBILITE ET ROBUSTESSE A L'INCERTITUDE PARAMETRIQUE, UNE APPROCHE BOND GRAPH**

Soutenue le 15 décembre 2005 devant le jury d'examen :

M. Christophe SUEUR	Président	Professeur, E.C. Lille
M. Michel LEBRUN	Rapporteur	MdC HDR, ISTIL Lyon
M. Xavier MOREAU	Rapporteur	Professeur, Université de Bordeaux
Mme Geneviève DAUPHIN-TANGUY	Directeur de thèse	Professeur, E.C. Lille
M. Jean-Philippe CASSAR	Examineur	Professeur, USTL Lille
M. Dominique MEIZEL	Examineur	Professeur, ENSIL Limoges
M. Franck GUILLEMARD	Examineur	Chef de service, PSA/DRIA
M. Marco PENGOV	Examineur	Chercheur, PSA/DRIA

Thèse préparée dans le laboratoire LAGIS (UMR 8146) de l'école Centrale de Lille sous la direction de Mme Geneviève Dauphin-Tanguy, co-financée par la Région Nord Pas-de-Calais et l'entreprise PSA Peugeot Citroën.

# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal de Lille (LAGIS UMR 8086) de l'Ecole Centrale de Lille, au sein de l'équipe bond graph, sous la direction de Madame Geneviève DAUPHIN-TANGUY, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille.

Ces travaux ont été financés grâce à une allocation co-financée par la région Nord Pas de Calais, et l'entreprise PSA Peugeot-Citroën. Cette allocation a été gérée par l'Ecole Centrale de Lille. Je remercie le conseil régional, et particulièrement Monsieur Daniel PERCHERON, Président du conseil régional du Nord Pas de Calais. Je remercie l'entreprise PSA, et plus précisément Monsieur Jean-Martin FOLZ, Président de l'entreprise PSA Peugeot-Citroën. Je remercie l'Ecole Centrale de Lille, et en particulier Monsieur Jean-Claude GENTINA, Directeur de l'Ecole Centrale. Sans eux, je n'aurais pas pu poursuivre mes études en troisième cycle.

Nous remercions Monsieur Philippe VANHEEGHE, directeur actuel du LAGIS, et Monsieur Marcel STAROSWIECKI, ancien directeur du LAGIS, pour nous avoir reçu au sein de leur laboratoire.

Nous tenons à remercier Madame Geneviève DAUPHIN-TANGUY, Responsable de l'équipe bond graph, pour nous avoir accepté dans son équipe, et avoir encadré ce travail de recherche. Nous tenons aussi à la remercier pour la gentillesse, la patience, et surtout la rigueur dont elle a fait preuve au cours de ces trois années pour orienter nos recherches, et aussi pour les moyens qu'elle a mis à notre disposition, nous permettant d'accomplir ces travaux dans les meilleures conditions possibles.

Nous remercions Monsieur Franck GUILLEMARD, Chef du département mécatronique, à la Direction de la Recherche et de l'Innovation Automobile chez PSA Peugeot-Citroën, de nous avoir permis d'effectuer ces recherches en collaboration avec son service, et de nous avoir encadré tout au long de ces travaux.

Nous remercions Monsieur Marco PENGOV, Chercheur au département mécatronique de la DRIA, d'avoir accepté de participer à l'encadrement de notre thèse. Nous le remercions aussi pour nous avoir soutenu dans nos recherches, et pour nous avoir apporté ses connaissances afin d'éclaircir bon nombre de nos interrogations.

Nous sommes redevable à Monsieur Michel LEBRUN, Maître de conférences à l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur de Lyon, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Sa renommée et ses compétences dans la communauté bond graph, ainsi que son intérêt pour la dynamique véhicule, lui permettent d'avoir un avis critique sur notre travail.

Nous remercions Monsieur Xavier MOREAU, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie de Bordeaux, pour avoir accepté d'être rapporteur de nos travaux. Ses compétences sur la dynamique véhicule, ainsi que ses travaux sur la commande robuste, lui permettent d'avoir un jugement d'expert sur notre approche, nous lui en sommes redevable.

Nous remercions Monsieur Christophe SUEUR, Professeur à Ecole Centrale de Lille, d'avoir accepté de présider notre jury de thèse.

Nous remercions Monsieur Dominique MEIZEL, Professeur à Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges, et Monsieur Jean-Philippe CASSAR, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie de Lille, d'avoir accepté de participer à notre jury de thèse.

Mes pensées vont à tous les chercheurs du LAGIS, ainsi qu'au personnel de l'Ecole Centrale, qui, grâce à leur bonne humeur et leur générosité, ont créé une ambiance chaleureuse, permettant de travailler dans de bonnes conditions avec quelques moments de détente essentiels, je les en remercie.

Je n'oublierai pas les enseignants de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord, et de l'Institut Catholique des Arts et Métiers de Lille, et en particulier Monsieur Claude LEMAIRE, qui m'ont conforté dans l'idée de consacrer une partie de mon activité professionnelle à l'enseignement.

Enfin je dédie cette thèse aux personnes qui me sont très chères. A Caroline, qui m'a soutenu et surtout supporté pendant ces trois années, je lui dois beaucoup ; à Valentine, qui depuis quelques mois illumine mes journées, et raccourcit mes nuits.

# Table des matières

<b>Introduction générale.....</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 : Modélisation du véhicule.....</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction .....	7
1.2 État de l'art .....	7
1.2.1 Présentation du véhicule.....	7
1.2.2 Interface roue-sol (pneumatique) .....	8
1.2.3 Le châssis (ou caisse) .....	11
1.2.4 La suspension .....	11
1.2.5 Modèles de véhicules .....	12
1.2.6 Conclusion.....	12
1.3 Modèle bicyclette .....	12
1.3.1 Hypothèses .....	13
1.3.2 Modélisation.....	14
1.4 Un modèle bond graph du modèle 4 roues.....	17
1.4.1 Hypothèses .....	18
1.4.2 Bond graph à mots du système.....	19
1.4.3 Modèles bond graph des différents sous-systèmes .....	20
1.4.4 Valeurs numériques.....	28
1.5 Validation des modèles .....	28
1.5.1 Phénomènes modélisés.....	28
1.5.2 Simulations.....	29
1.6 Conclusion.....	44
<b>Chapitre 2 : Influence des incertitudes sur la dynamique véhicule.....</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction .....	47
2.2 Introduction des incertitudes dans un modèle bond graph.....	48
2.2.1 Modélisation des composants 1-port.....	48
2.2.2 Causalité à affecter aux éléments 1-port .....	49
2.2.3 Modélisation des composants 2-port.....	50
2.2.4 Modélisation des sources .....	51
2.2.5 Modélisation des éléments multi-ports .....	52
2.3 Construction du modèle Bond graph incertain du bicyclette .....	52
2.4 Construction du bond graph incertain du modèle BGCAR14 .....	57
2.4.1 Position du centre de gravité .....	58
2.4.2 Matrice d'incertitude .....	59

2.4.3	Autres paramètres.....	60
2.5	Détermination symbolique des conditions stationnaires.....	62
2.5.1	Position du problème.....	62
2.5.2	Cas linéaire.....	63
2.5.3	Cas non linéaire.....	66
2.5.4	Mise en œuvre.....	67
2.6	Réponse des systèmes à une entrée de commande fixée.....	72
2.6.1	Simulation du modèle bicyclette.....	72
2.6.2	Modèle complet (BGCar14).....	84
2.7	Suivi de trajectoire.....	87
2.7.1	Mise en place de la régulation pour le suivi de trajectoire.....	88
2.7.2	Influence des incertitudes sur le comportement dynamique du véhicule.....	92
2.7.3	Interprétation des résultats.....	106
2.8	Conclusion.....	106
<b>Chapitre 3 : Sensibilité à l'incertitude paramétrique.....</b>		<b>109</b>
3.1	Variations des caractéristiques dynamiques des modèles - Approximation au premier ordre.....	110
3.1.1	Modèle bond graph à paramètres indépendants.....	110
3.1.2	Modèle bond graph à paramètres dépendants.....	123
3.1.3	Application : modèle 2ddl dit "bicyclette".....	123
3.1.4	Conclusion.....	130
3.2	Variation des caractéristiques dynamiques des modèles - Approximation au deuxième ordre.....	130
3.2.1	Modèle bond graph à paramètres indépendants.....	131
3.2.2	Modèle bond graph à paramètres dépendants.....	139
3.3	Application : modèle 2ddl dit "bicyclette".....	140
3.3.1	Influence de $\Delta V_x$ .....	140
3.3.2	Influence de $\Delta M$ et $\Delta a$ .....	140
3.3.3	Conclusion.....	142
3.4	Fonction de sensibilité paramétrique.....	142
3.5	Conclusion.....	143
<b>Chapitre 4 : Robustesse aux incertitudes paramétriques.....</b>		<b>145</b>
4.1	Position du problème.....	146
4.2	Construction de la forme LFT d'un modèle.....	148
4.2.1	Construction par une approche classique.....	148
4.2.2	Le bond graph pour la construction de la forme LFT.....	151
4.2.3	Conclusion.....	153
4.3	Influence du choix de la matrice d'incertitude sur la marge de stabilité.....	154
4.3.1	Paramètres incertains considérés comme indépendants.....	156
4.3.2	Paramètres incertains dépendants.....	163
4.4	La $\mu$ -synthèse.....	166
4.5	Suivi de trajectoire.....	167
4.6	Conclusion.....	169
<b>Conclusion générale et perspectives.....</b>		<b>171</b>

<b>ANNEXES.....</b>	<b>173</b>
<b>Annexe A : Repères de travail, angles SAE .....</b>	<b>175</b>
<b>Annexe B : Passage entre les différents repères .....</b>	<b>181</b>
<b>Annexe C : Les bond graphs, principes, concepts et langage.....</b>	<b>185</b>
<b>Annexe D : Scénarios de simulation .....</b>	<b>193</b>
<b>Annexe E : Réponse du bicyclette à une entrée de commande fixée .....</b>	<b>225</b>
<b>Annexe F : Modélisation bond graph des incertitudes paramétriques .....</b>	<b>229</b>
<b>Annexe G : Influence des incertitudes sur le comportement dynamique du véhicule... </b>	<b>233</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>239</b>



# Introduction générale

La synthèse de loi de commande permettant de réaliser l'asservissement d'un processus passe par l'utilisation d'un modèle mathématique [Duc et Font, 1999]. Quelle que soit la méthode utilisée afin de construire le modèle d'un processus, il est indéniable que ce sera un modèle idéalisé, ne représentant qu'imparfaitement la réalité. Un modèle présente toujours des incertitudes, qui peuvent être de deux types, soit des incertitudes sur la valeur des paramètres, soit des dynamiques mal connues ou négligées [Alazard et al., 1999]. Les phénomènes physiques ne peuvent en effet être qu'imparfaitement traduits par des modèles mathématiques, dont les paramètres ne sont connus qu'avec une certaine précision.

Avant de réaliser une loi de commande sur un modèle, il est important de connaître les limites de celui-ci, notamment en ce qui concerne son domaine de validité, afin de commander au mieux le système réel. Le premier chapitre est consacré à la modélisation du système véhicule. Dans un premier temps, un modèle simplifié du véhicule, le modèle bicycle, est construit. Puis une modélisation plus fine du système conduit à un modèle du véhicule complet, prenant en compte 14 degrés de libertés, appelé BGCar14. Ce premier chapitre se termine par une validation des modèles proposés, en se basant sur le modèle SIMULINK/Car développé par l'entreprise PSA Peugeot Citroën [Hanin, 2002]. Le résultat de cette dernière étape donne des informations sur la validité des modèles bicycle et BGCar14.

Pour un système bien défini, un certain nombre de paramètres peut être susceptible d'être modifié, pour une période de fonctionnement. Dans ce cas, une étude de l'influence des déviations des paramètres peut être envisagée, afin de prédire le comportement du système dans des conditions d'utilisation diverses. Cette étude fait l'objet du deuxième chapitre, dans lequel des campagnes de simulations sont mises en œuvre afin de connaître de manière qualitative l'influence de la masse et de la position du centre de gravité sur le comportement dynamique des modèles bicycle et BGCar14. Afin d'effectuer dans les meilleures conditions ces campagnes de simulation, des modèles bond graph incertains [Kam, 2001] du véhicule sont construits.

Un système est sensible aux variations d'un paramètre  $\vartheta$  si ses propriétés ou son comportement sont affectés par ses variations. Le troisième chapitre est consacré à la sensibilité à l'incertitude paramétrique. Dans un premier temps, une méthode de détermination de la sensibilité des valeurs caractéristiques (constante de temps, coefficient d'amortissement, pulsation naturelle) de modèles du premier et du second ordre est développée, afin de connaître la variation des caractéristiques dynamiques des modèles. Grâce



à ce développement, un cas particulier de la fonction de sensibilité est envisagé, celui où le modèle comporte des composants dépendants de paramètres incertains.

Pour mettre en œuvre une loi de commande sur un système réel, tel que l'ESP (correcteur électronique de trajectoire) sur le véhicule, il faut disposer d'un modèle de référence, permettant dans le cas de l'ESP d'effectuer un suivi de trajectoire. Ce modèle de référence doit être suffisamment simple pour permettre d'effectuer dans de bonnes conditions cette régulation, c'est pourquoi le modèle bicycle est privilégié. Puisque le modèle considéré a un domaine de validité limité, il faut se préoccuper de la robustesse de la loi de commande obtenue, c'est-à-dire être capable de garantir la stabilité et certaines performances vis-à-vis des incertitudes du modèle. Le dernier chapitre porte sur la robustesse à l'incertitude paramétrique, où est discutée l'analyse de la robustesse à partir de l'outil  $\mu$ -analyse.

Des annexes présentent un certain nombre d'outils utiles à la compréhension de ce mémoire, tels que les principaux repères utilisés traditionnellement dans le milieu de l'automobile, ainsi que les changements de repère appropriés. Une annexe rappelle quelques bases du langage bond graph. Enfin des résultats issus de campagnes de simulation sont rassemblés.

# Chapitre 1 :

## Modélisation du véhicule

### *1.1 Introduction*

Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation du véhicule à l'aide de l'outil bond graph. Avant de commencer la modélisation, nous allons faire un état de l'art sur les modèles de véhicule, qui sera précédé d'une présentation du système. Le véhicule est un système complexe, qu'il n'est pas aisé de modéliser, nous allons donc dans un premier temps nous concentrer sur la construction d'un modèle à 2 degrés de liberté dit bicyclette, afin de nous familiariser avec cette technologie, et enfin nous orienter vers une modélisation plus fine du véhicule et construire un modèle à 14 degrés de libertés que nous appellerons BGCar14. Ce chapitre se termine par une validation des modèles présentés par rapport au modèle Simulink/Car utilisé et développé par l'entreprise PSA Peugeot Citroën.

### *1.2 État de l'art*

Pour pouvoir modéliser, ou tout simplement analyser les modèles d'un système il faut avoir une connaissance suffisante de celui-ci ; c'est pourquoi, avant d'aborder l'état de l'art des travaux existants, nous allons présenter le système étudié, c'est-à-dire le véhicule.

#### **1.2.1 Présentation du véhicule**

L'automobile circulant sur une route constitue un système complexe et rapide pouvant devenir instable dans certain cas.

Le véhicule est composé d'un certain nombre de sous-systèmes :

- le véhicule lui-même,
- l'interface roue-sol,
- le comportement du conducteur,
- la route.

Différentes approches peuvent être mises en œuvre pour modéliser un système, nous construirons un modèle de connaissance, très prisé par les constructeurs automobile, car sur ces modèles, nous pouvons suivre les phénomènes physiques.

Le véhicule automobile est une structure mécanique composée de plusieurs éléments. Le moteur et les transmissions assurent la production des efforts de traction (ou de propulsion) ainsi que leur transmission aux roues. Les trains roulants, la suspension et la direction concourent à guider le véhicule, à transmettre les forces motrices et de freinage tout en assurant le confort des passagers. Le châssis est destiné à accueillir les trains roulants et permet de supporter et de transmettre les forces nécessaires au fonctionnement du véhicule. Le mécanisme de freinage permet la production des efforts de freinage.

Dans cette partie nous décrirons les éléments constitutifs du véhicule: le châssis, les pneumatiques, le mécanisme de suspension et les barres anti-roulis.

Une représentation schématique du véhicule est dessinée figure 1-1. Sur cette représentation, nous pouvons voir les différents éléments les plus couramment modélisés :

- le châssis
- les pneumatiques
- les suspensions
- les barres anti-roulis

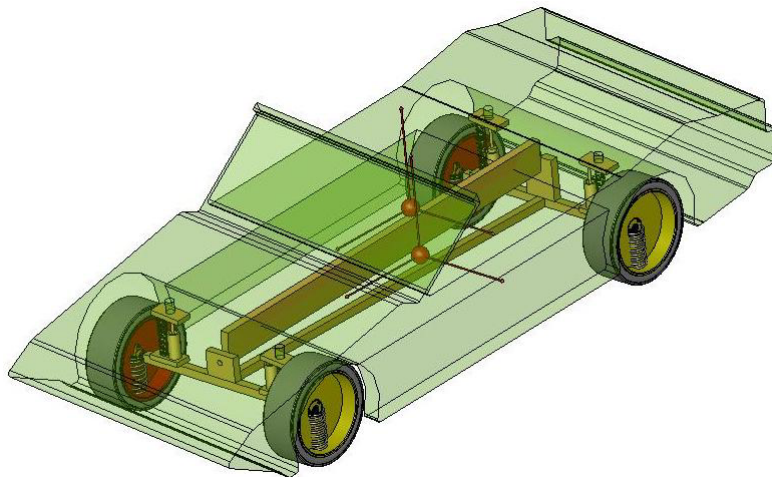


figure 1-1 : Représentation schématique du véhicule

### 1.2.2 Interface roue-sol (pneumatique)

Sur un véhicule, tous les efforts externes sauf les efforts aérodynamiques, sont générés à l'interface roue-sol. Aussi la connaissance et la compréhension des modes de fonctionnement des pneumatiques, donc la modélisation des efforts et moments développés à l'interface pneu-sol, sont essentielles pour toute étude du comportement dynamique d'un véhicule.

Les pneumatiques servent essentiellement à trois fonctions de base [Gillespie, 1992] :

- supporter la charge verticale et amortir les déformations du sol,
- développer les efforts longitudinaux qui accélèrent et freinent le véhicule,
- développer les efforts transversaux qui permettent au véhicule de tourner.

### **a) Comportement longitudinal**

Lorsqu'un couple moteur ou de freinage est appliqué à la roue, la relation qui existe entre la force longitudinale et la vitesse relative du pneu par rapport au sol caractérise le comportement longitudinal du pneu, c'est la caractéristique d'adhérence.

### **b) Comportement transversal**

L'une des principales fonctions du pneumatique est de générer des efforts transversaux permettant d'effectuer un contrôle directionnel.

### **c) Comportement couplé**

Lorsqu'un pneu est sollicité simultanément selon son axe longitudinal et son axe transversal, il apparaît que les efforts respectifs à chaque axe dévient de la valeur définie pour une sollicitation isolée.

### **d) Ballant et longueur de relaxation**

Tout effort latéral supporté par le pneu provoque un déplacement de la surface de contact roue-sol par rapport au plan de la jante. Ce déplacement est le ballant du pneumatique.

La valeur de ballant est rarement utilisée par les constructeurs, le concept de longueur de relaxation est alors préféré. Lors d'une prise de virage, le pneu se déforme et doit rouler une certaine distance pour pouvoir se mettre en appui afin de générer un effort latéral. La distance que le pneu doit parcourir est la longueur de relaxation.

### **e) Les modèles**

La synthèse des forces et des moments développés par le pneumatique montre la complexité de son comportement.

Dans une première approche, on peut citer les modèles qui font l'interpolation de relevés expérimentaux. Ce sont des méthodes simples mais qui ne sont pas souvent utilisées car toutes les grandeurs caractéristiques du pneumatique sont rarement mesurées.

Un modèle basé sur une représentation mathématique sera privilégié, les divers coefficients pourront avoir une signification physique (modèle basé sur la connaissance). Ce modèle devra décrire le plus fidèlement possible le comportement du pneumatique.

On peut dire que la modélisation du pneumatique est un point crucial de la simulation du comportement d'un véhicule automobile.

De nombreux auteurs [Bernard et al., 1977], [Bakker et al, 1987], [Bakker et al, 1989], [Canudas de Wit et Tsiotras,1999], [Captain et al.,1990], [Dugoff et al., 1970], [Gim et Nikravesch, 1990], [Gim et Nikravesch, 1991], [Livingston et Brown, 1969], [Livingston et Brown, 1970], [Pacejka et Sharp, 1991], [Pauwelussen, 1995], [Ratti, 1986] ont entrepris de modéliser le comportement du pneumatique. Chacun d'eux considère une approche différente de la modélisation, mais la base repose toujours sur des mesures effectuées sur le pneumatique.

On observe une complexité des développements qui réside dans le caractère de couplage entre les différentes composantes du torseur de forces. Pour des raisons de simplicité, des modèles analytiques de moindre complexité ont été développés en découplant les dynamiques longitudinales et latérales. Les modèles combinés du comportement du pneumatique ont été

élaborés en se basant sur une extension des modèles découplés. Les modèles analytiques présentés dans [Dugoff et al., 1970], [Bernard et al., 1977] [Captain et al., 1990], [Gim et Nikravesch, 1990] sont basés sur une description physique du phénomène de déformations élémentaires du pneumatique dans l'aire de contact. Par ailleurs, des travaux basés essentiellement sur l'expérimentation ont donné lieu à des modèles empiriques [Bakker et al., 1989], [Pacejka, 1996]. Les modèles de forces présentés dans ces travaux sont statiques. En effet, la dynamique de déformation du pneumatique n'est pas prise en compte dans ces modèles. Toutefois, plusieurs études se sont intéressées au caractère dynamique et transitoire des forces pneumatiques [Pacejka, 1981], [Bernard et al., 1995], [Pacejka et Besselink, 1997], [Maurice et Pacejka, 1997] [Canudas de Wit et Tsiotras, 1999]. Dans la plupart des travaux, le principe de la longueur de relaxation est utilisé pour décrire le transitoire de ces forces [Bernard et Clover, 1995], [Pacejka et Besselink, 1997], [Maurice et Pacejka, 1997]. Dans [Canudas de Wit et Horowitz, 99], [Deur, 2001], les auteurs présentent un modèle dynamique de la force de traction utilisant le modèle de frottement proposé par Canudas dans [Canudas de Wit et al., 1995].

Nous avons retenu trois types de modèle bien distincts, que nous allons présenter ci-dessous.

#### **\* *Modèle mécanique du pneumatique***

Ce modèle est fondé sur une représentation simplifiée du comportement mécanique du pneumatique qui permet de calculer le torseur d'effort appliqué par ce dernier à la jante [Ratti 1986].

L'idée est d'examiner la déformation de la surface de contact au sol en virage ou en freinage. Les expressions mathématiques de ce modèle sont très simples, néanmoins sa mise en œuvre nécessite la connaissance de nombreuses grandeurs qui interviennent directement dans la calibration des équations.

#### **\* *Modèle dynamique du pneumatique***

Souvent le comportement du pneumatique est décrit par un modèle algébrique qui exprime la force de freinage en fonction du glissement et ceci en régime permanent.

Aucun comportement transitoire ne peut être exprimé par une formulation algébrique. Le modèle proposé par [Van Zanten et al., 1990] décrit le comportement transitoire du pneumatique.

L'idée est de représenter la surface de contact pneu-sol par le modèle dit « de la brosse » (point par point). Ce modèle présente des inconvénients quant à sa résolution et demande la mise en œuvre d'une grande puissance de calcul.

#### **\* *Le modèle algébrique de Pacejka***

Pacejka, [Pacejka et Sharp, 1991], [Bakker et al., 1987], donne une représentation mathématique permettant de prendre en compte la variation de la charge verticale ainsi que le couplage entre chaque axe de sollicitations.

Le modèle de Pacejka possède l'avantage de pouvoir décrire le comportement d'un pneu dans les trois directions (longitudinale, transversale et verticale). Sa formulation est simple, elle ne demande pas de moyens de calculs particuliers.

A ce jour, le modèle de Pacejka est le plus utilisé car il fut longtemps le meilleur compromis, donc la meilleure représentation pour les constructeurs.

### 1.2.3 Le châssis (ou caisse)

La caisse peut être définie comme l'ensemble composé du châssis et de la carrosserie. C'est un ensemble "rigide" qui sert de support aux trains roulants via une articulation de type élastique.

La caisse est considérée donc comme une masse suspendue. Le mouvement du véhicule est défini en partie par le mouvement de translation et de rotation de la caisse. On peut donc, par hypothèse, confondre le repère lié au véhicule et le repère de la caisse. Le système d'axes par rapport auquel sont définis les différents mouvements du véhicule est le repère orthonormé direct  $\mathcal{R}_G(\vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$  de la figure 1-2, nous pouvons voir en annexe A une description de tous les repères utilisés lors de cette étude. L'origine de ce repère est prise au centre de gravité du véhicule  $G$ , dans le cas nominal ( $G_0$  si le centre de gravité du véhicule bouge au cours du fonctionnement). L'axe  $x$  est dans le plan longitudinal de l'avance du véhicule, l'axe  $y$  est situé dans le plan transversal et l'axe  $z$  est dans le plan vertical par rapport auquel est décrit le mouvement de pompage. Les mouvements de rotation de la caisse par rapport à ces axes sont :

- le roulis qui est dû à des oscillations autour de l'axe  $x$ ,
- le tangage qui est produit par des mouvements périodiques autour de l'axe  $y$ . Lorsque les fréquences sont plus rapides, le phénomène prend le nom de galop,
- le lacet qui est le mouvement de rotation autour de l'axe  $z$ .

Sur la figure 1-2, deux centres de gravité sont représentés,  $G$  est le centre de gravité du véhicule dans les conditions initiales,  $G_0$  est le centre de gravité courant, le centre de gravité pouvant se déplacer suivant les conditions de fonctionnement.

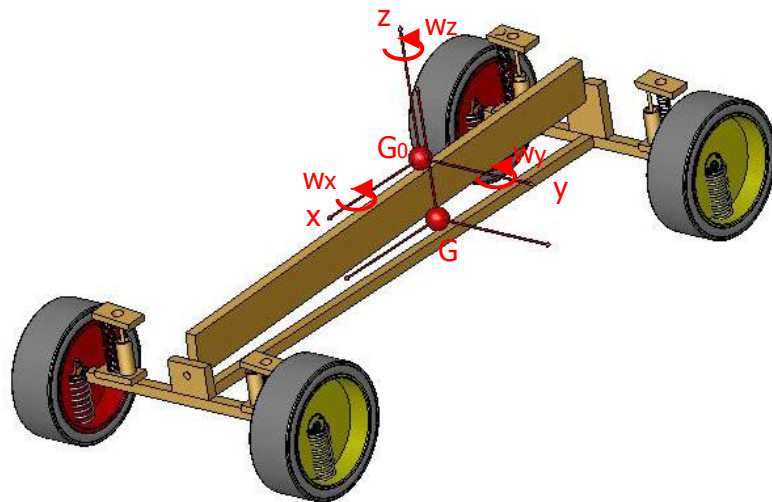


figure 1-2 : Représentation du véhicule – axes et vitesses angulaires du véhicule

### 1.2.4 La suspension

Le mécanisme de suspension mécanique est composé des éléments suivants: ressort, amortisseur, barres anti-roulis, ainsi que les différents organes géométriques et structurels

assurant la liaison roue/châssis. Les véhicules automobiles sont équipés de ce dispositif avec pour objectif d'isoler la structure principale du véhicule par rapport aux chocs et aux sollicitations provoqués par les irrégularités de la chaussée. Ainsi, l'articulation élastique absorbe et transmet en douceur les dénivellements pour assurer le confort et la tenue de route. Quant aux amortisseurs, ils servent à amortir les oscillations. Les mécanismes de suspensions les plus répandus sont conçus pour permettre une configuration à roues indépendantes. Toutefois, l'utilisation des barres anti-roulis crée un lien et une interdépendance des roues du même essieu. Cette interdépendance est uniquement dans le sens vertical des roues.

## 1.2.5 Modèles de véhicules

### a) Approche classique

La modélisation d'un système tel que le véhicule, est une tâche complexe.

Le modèle développé par [El Hadri, 2001] a été construit en calculant le système d'équations global du modèle du véhicule, et vu la complexité du point de vue du nombre de variables dynamiques, l'auteur a dû avoir recours au logiciel de calcul formel *Maple*, afin d'éviter les erreurs dans l'écriture des équations du modèle.

Un modèle a été développé au sein de l'entreprise PSA Peugeot Citroën [Hanin, 2002], la modélisation mécanique s'est faite par complexification graduelle d'un modèle simple, jusqu'à l'obtention d'un niveau de validité estimé suffisant. Le formalisme utilisé pour l'écriture des équations est celui des théorèmes généraux, les équations du mouvement étant écrites dans le repère lié au châssis.

### b) Modèle bond graph

Des modèles bond graphs ont été proposés, nous allons nous intéresser au modèle développé par Margolis [Margolis et Asgari, 1991], dans lequel le châssis est considéré comme un élément rigide, les suspensions sont modélisées comme des éléments passifs, actifs, ou semi-actifs, le modèle de Pacejka est utilisé pour modéliser les pneumatiques.

## 1.2.6 Conclusion

De nombreux modèles de véhicule existent dans la littérature, que ce soit par une approche classique ou par une approche bond graph. L'avantage indéniable du bond graph, est qu'il est facilement modulable, on peut aisément ajouter ou enlever des éléments ou phénomènes au modèle. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons la méthodologie bond graph pour construire nos différents modèles.

## 1.3 *Modèle bicyclette*

Dans ce paragraphe, nous proposons une modélisation bond graph du système à 2 degrés de liberté dit « bicyclette » [Niesner et al., 2004]. Les degrés de libertés sont la vitesse transversale  $V_y$  et la vitesse angulaire de lacet  $\omega_z$ .

### 1.3.1 Hypothèses

Considérons le système décrit sur la figure 1-3, où on suppose que les quatre roues ont un potentiel identique et que, par conséquent, toute la largeur de la voiture peut être ramenée à un segment qui relie le « pneumatique avant » et le « pneumatique arrière ». Par ailleurs, on remarque aussi que c'est un modèle plan du véhicule, c'est-à-dire que la dynamique verticale n'est pas prise en compte. Les deux degrés de liberté du modèle sont la vitesse transversale du véhicule ainsi que la vitesse angulaire de lacet.

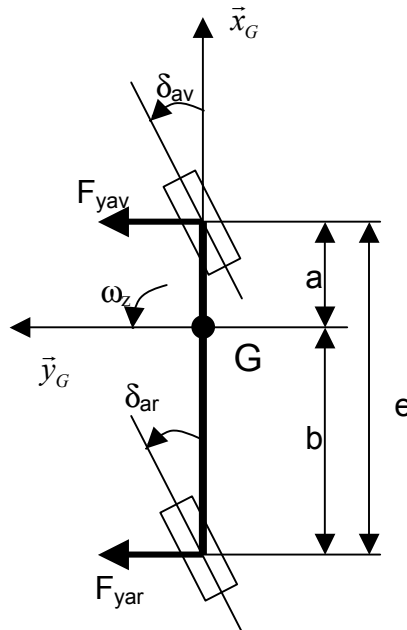


figure 1-3 : Modèle 2ddl dit "bicyclette"

Dans la suite de l'étude, **la vitesse longitudinale  $V_x$  est considérée constante et très grande devant la vitesse latérale  $V_y$  et la vitesse angulaire de lacet  $\omega_z$  (rotation du véhicule autour d'un axe vertical).**

Nous ne considérerons que **des petits angles de braquage**, afin de respecter l'inégalité suivante :  $\delta V_x < g$  avec  $g$  la force de gravité.

- Petit braquage avant  $\delta_{av}$  ( $\cos \delta_{av} = 1; \sin \delta_{av} = 0$ )

Nous considérerons que les roues arrière sont fixes dans le repère du châssis, elles ne peuvent pas tourner autour de l'axe  $z$ .

Sous l'effet d'une force transversale, l'aire de contact du pneumatique subit une déformation. La trajectoire décrite par le véhicule n'est plus identique à celle choisie par le conducteur. L'angle formé par le plan de la roue et la tangente à la trajectoire est appelé angle de dérive. **Nous allons considérer que l'effort transverse est linéaire par rapport à la dérive** (valable sur les petites dérives  $< 5^\circ$ ).

**Les dérives sont supposées faibles.** Cette hypothèse revient à faire coïncider l'axe normal à la trajectoire du véhicule avec son axe transversal.



## 1.3.2 Modélisation

### a) Mise en équation

La connaissance du système véhicule, ainsi que les différentes hypothèses simplificatrices, nous permettent d'écrire les équations du modèle bicyclette.

#### Equations du mouvement

$$\begin{cases} F_{yav} + F_{yar} = M \cdot a_y = M \cdot (\dot{V}y + Vx \cdot \omega_z) \\ a \cdot F_{yav} - b \cdot F_{yar} = J \cdot \omega_z \end{cases} \quad (1-1)$$

#### Expression des dérivées

$$\begin{cases} \alpha_{av} = \delta_{av} - \frac{Vy + a \cdot \omega_z}{Vx} \\ \alpha_{ar} = \frac{Vy - b \cdot \omega_z}{Vx} \end{cases} \quad (1-2)$$

#### Equations du pneumatique

$$\begin{cases} F_{yav} = C_{av} \cdot \alpha_{av} \\ F_{yar} = C_{ar} \cdot \alpha_{ar} \end{cases} \quad (1-3)$$

#### Expression du rayon de courbure de la trajectoire

$$\begin{cases} R = \frac{Vx^2}{a_y} \end{cases} \quad (1-4)$$

### Représentation d'état

La mise en équation du système a permis d'écrire la représentation d'état du modèle bicyclette [doc PSA]; celle-ci permettra de vérifier la construction du modèle obtenu grâce à la méthodologie bond graph.

En utilisant les expressions (1-1), (1-2), (1-3) :

$$\begin{pmatrix} \dot{V}y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_{av} + C_{ar}}{M \cdot Vx} & -Vx - \frac{a \cdot C_{av} - b \cdot C_{ar}}{M \cdot Vx} \\ -\frac{a \cdot C_{av} - b \cdot C_{ar}}{J \cdot Vx} & -\frac{a^2 \cdot C_{av} + b^2 \cdot C_{ar}}{J \cdot Vx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Vy \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{av}}{M} & \frac{C_{ar}}{M} \\ \frac{a \cdot C_{av}}{J} & -\frac{b \cdot C_{ar}}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{av} \\ \delta_{ar} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

### Fonction de transfert

La fonction de transfert, représentation mathématique du fonctionnement du modèle, est obtenue à partir des équations précédentes :

$$\begin{pmatrix} Vy \\ \omega_z \end{pmatrix}(s) = \frac{C_{av} \cdot C_{ar} \cdot e}{M \cdot J} \cdot \frac{1}{D(s)} \begin{pmatrix} \frac{J}{C_{ar} \cdot e} \cdot s - Vx \cdot \frac{M_{ar}}{C_{ar}} + \frac{b}{Vx} & \frac{J}{C_{av} \cdot e} \cdot s - Vx \cdot \frac{M_{av}}{C_{av}} + \frac{a}{Vx} \\ \frac{M_{ar}}{C_{ar}} \cdot s + \frac{1}{Vx} & -\frac{M_{av}}{C_{av}} \cdot s - \frac{1}{Vx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{av} \\ \delta_{ar} \end{pmatrix}(s) \quad (1-6)$$

Le dénominateur de la matrice de transfert (polynôme caractéristique de la matrice d'état qui peut être déduit du modèle bond graph), écrit sous sa forme canonique,

$$D(s) = s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \tag{1-7}$$

fait apparaître la pulsation naturelle

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_{av} \cdot C_{ar} \cdot e}{M \cdot J} \cdot \left( \frac{e}{Vx^2} + \frac{K}{g} \right)}, \tag{1-8}$$

ainsi que le coefficient d'amortissement du modèle

$$\zeta = \frac{C_{av} \cdot \left( \frac{1}{M} + \frac{a^2}{J} \right) + C_{ar} \cdot \left( \frac{1}{M} + \frac{b^2}{J} \right)}{2 \cdot Vx \cdot \sqrt{\frac{C_{av} \cdot C_{ar} \cdot e}{M \cdot J} \cdot \left( \frac{e}{Vx^2} + \frac{K}{g} \right)}}, \tag{1-9}$$

Ce sont plus particulièrement ces grandeurs qui nous intéresseront au cours de cette étude.

Nous voyons apparaître clairement le facteur de sous-virage du véhicule :

$$K = \frac{M_{av} \cdot g}{C_{av}} - \frac{M_{ar} \cdot g}{C_{ar}} \tag{1-10}$$

### b) Construction du modèle bond graph

Le modèle bond graph du modèle « bicyclette » est obtenu en suivant la procédure de construction de modèles donnée dans [Dauphin-Tanguy 2000]. Une jonction 1 est associée à chaque variable de vitesse (longitudinale, transversale et de lacet) du véhicule. La vitesse longitudinale étant considérée constante, on ne lui associe pas d'inertie. Des transformateurs sont utilisés pour représenter le passage vitesse de translation – vitesse de rotation et des jonctions 0 pour les relations entre vitesses données équation (1-1). Les sources sont ajoutées pour compléter le modèle bond graph représenté figure 1-4.

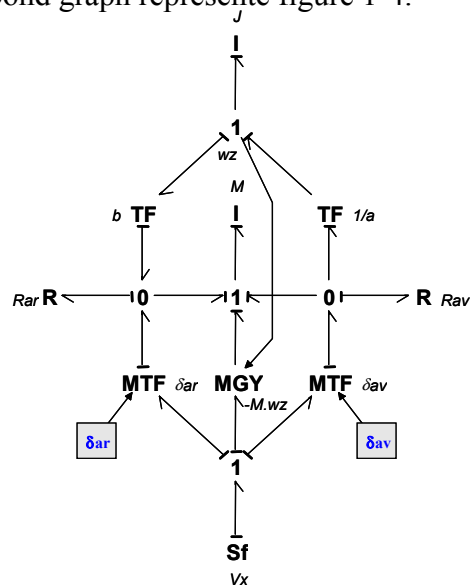


figure 1-4 : Premier modèle bond graph "bicyclette"

Les efforts transversaux sont générés par les résistances  $R_{av}$  et  $R_{ar}$ , dont les expressions sont données équations (1-11) et (1-12), le modèle de Pacejka pour le modèle bicyclette est donné équations : (1-16), (1-17), (1-18).

$$R_{av} = \frac{C_{av}}{V_x} \tag{1-11}$$

$$R_{ar} = \frac{C_{ar}}{V_x} \tag{1-12}$$

La vitesse longitudinale  $V_x$  est supposée constante, ce n'est pas une entrée mais plutôt un paramètre. Pour faire apparaître explicitement les entrées du modèle qui sont les angles de braquage  $\delta_{av}$  et  $\delta_{ar}$ , nous modifions le bond graph de la figure 1-4. La source de flux (Sf :  $V_x$ ) et son couplage avec le transformateur modulé (MTF :  $\delta_{av}$ , MTF :  $\delta_{ar}$ ), sont remplacés par une source de flux modulée par l'entrée  $\delta_{av}$  ou  $\delta_{ar}$  (MSf :  $\delta_{av} \cdot V_x$ , MSf :  $\delta_{ar} \cdot V_x$ ) ; la source de flux (Sf :  $V_x$ ) et son couplage avec le gyrateur modulé (MGY :  $-M \cdot \omega_z$ ) sont remplacés par un gain ( $K = -M \cdot V_x$ ) et une source d'effort interne modulée (Se :  $F$  avec  $F = -M \cdot V_x \cdot \omega_z$ ) qui n'est pas une entrée de commande du modèle. On obtient le modèle bond graph de la figure 1-5.

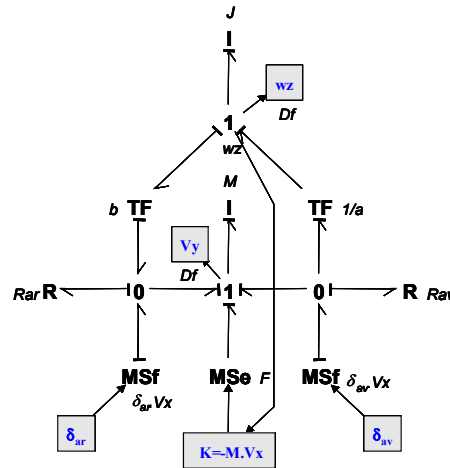


figure 1-5 : Modèle bond graph « bicyclette » - mise en évidence explicite des commandes et des sorties

Ce modèle bond graph possède deux entrées de commandes (MSf)  $\delta_{av} \cdot V_x$  et  $\delta_{ar} \cdot V_x$  (angle de braquage des roues), ainsi que deux sorties :  $V_y$  et  $\omega_z$  (vitesse transversale et vitesse de lacet).

On peut modifier le modèle bond graph de la figure 1-5, de manière à représenter les entrées de braquage avant et arrière comme des entrées en effort transversal :  $C_{av} \cdot \delta_{av}$  et  $C_{ar} \cdot \delta_{ar}$ .

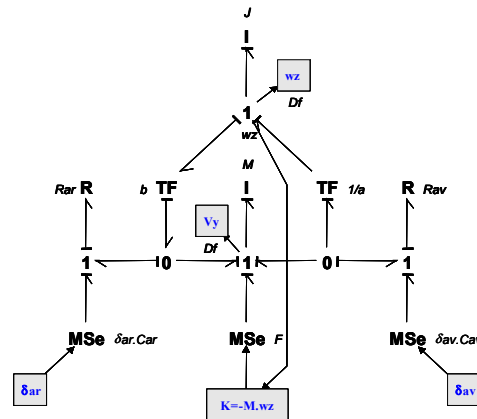


figure 1-6 : Modèle bond graph « bicyclette » - mise en évidence explicite de la commande et des sorties (entrée : effort transverse)

Ce modèle bond graph possède deux entrées de commande (MSe)  $C_{av} \cdot \delta_{av}$  et  $C_{ar} \cdot \delta_{ar}$  (angle de braquage des roues avant et arrière), ainsi que deux sorties :  $V_y$  et  $\omega_z$  (vitesse transversale et vitesse de dérive).

Suivant l'utilisation du modèle, et la complexité désirée, on peut utiliser différentes modélisations pour le pneumatique :

- le modèle de Pacejka (Magic Formula) :

$$C_i(Fz_i) = a_3 \cdot \sin\left(2 \cdot \arctg\left(\frac{Fz_i}{a_4}\right)\right) \quad (1-16)$$

- une approximation du modèle de Pacejka :

$$C_i(Fz_i) = a_3 \cdot \left[2 \left(\frac{Fz_i}{a_4}\right) - \left(\frac{Fz_i}{a_4}\right)^2\right] \quad (1-17)$$

- une autre approximation du modèle de Pacejka :

$$C_i(Fz_i) = c_0 \cdot Fz_i - c_1 \cdot Fz_i^2 \quad (1-18)$$

avec  $i = \{av, ar\}$

où  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ , sont des paramètres identifiés expérimentalement sur goudron sec

$$a_3 = 1250$$

$$a_4 = 6.44$$

$$c_0 = 25.41$$

$$c_1 = 0.002015$$

les forces normales aux pneumatiques se calculent de la manière suivante :

$$F_{z_{av}} = \frac{M_{av}}{2} \cdot g = \frac{b}{e} \cdot \frac{M}{2} \cdot g \quad (1-19)$$

$$F_{z_{ar}} = \frac{M_{ar}}{2} \cdot g = \frac{a}{e} \cdot \frac{M}{2} \cdot g \quad (1-20)$$

Afin d'effectuer les simulations, nous avons pris les valeurs numériques suivantes :

$$\text{Masse du véhicule : } M_n = 1467 \text{ kg}$$

$$\text{Inertie de lacet du véhicule : } J_n = 2329 \text{ kg.m}^2$$

$$\text{Distance entre l'essieu avant et le centre de gravité : } a_n = 0.99 \text{ m}$$

$$\text{Distance entre l'essieu arrière et le centre de gravité : } b_n = 1.76 \text{ m}$$

$$\text{Distance entre les essieux : } e = a_n + b_n = 2.75 \text{ m}$$

$$\text{Vitesse longitudinale du véhicule : } Vx_n = 13.9 \text{ m/s}$$

L'indice 'n' est ajouté à un paramètre, pour signifier qu'il est nominal

## 1.4 Un modèle bond graph du modèle 4 roues

Dans ce paragraphe, nous proposons une modélisation bond graph du système véhicule complet. Le système considéré est un véhicule 4 roues incluant les efforts, les mouvements de tangage, de roulis, et de lacet, avec des suspensions mécaniques passives, des pneus et des barres anti-roulis. C'est un modèle à 14 degrés de liberté comportant des non linéarités au niveau des pneumatiques. Ce modèle inspiré de divers modèles existants [Margolis et Asgari, 1991] [Margolis et Shim, 2001], comporte quelques éléments spécifiques comme les barres anti-roulis.

Le modèle construit dans ce paragraphe, comporte 14 degrés de liberté, et est modélisé par la méthodologie bond graph, nous l'appellerons donc BGCAR14 [Niesner et al., 2005].

### 1.4.1 Hypothèses

Considérons un véhicule 4 roues représenté par la figure 1-1, où nous pouvons voir que l'habitacle du véhicule, lié au châssis par les différentes suspensions possède une liaison pivot suivant l'axe longitudinal du châssis, ainsi qu'une liaison glissière « verticale », liée à la liaison pivot. Cette liaison pivot - glissière est représentée schématiquement par une plaque fictive attachée à l'avant et à l'arrière du véhicule.

Sur la figure 1-2, sont visualisés les principaux axes du système. Ceux-ci sont liés au châssis du véhicule qui est modélisé comme un élément rigide. Les vitesses angulaires considérées sont la vitesse angulaire de tangage ( $\omega_x$ ), et son angle de tangage associé ( $\phi$ ), la vitesse angulaire de roulis ( $\omega_y$ ) et l'angle de roulis ( $\theta$ ), la vitesse angulaire de lacet ( $\omega_z$ ) et l'angle de lacet ( $\psi$ ). Sur cette figure, nous pouvons voir les différentes parties du véhicule : le châssis, les suspensions, et les pneus. Nous avons représenté le repère châssis dans deux conditions du véhicule,  $G_0$  représente le centre de gravité quand le véhicule est considéré dans son état nominal,  $G$  représente le centre de gravité utilisé au cours du fonctionnement, il tient compte d'éventuelles masses réparties dans le véhicule.

Sur la figure 1-7, sont représentées les différentes distances utilisées dans la modélisation du véhicule. Ce sont celles-ci qui permettent de définir la position du centre de gravité du véhicule à chaque instant. Ainsi le centre de gravité est situé à une distance  $a$  de l'essieu avant,  $b$  de l'essieu arrière,  $c_r$  de la droite,  $c_l$  de la gauche, et à une distance  $h_g$  du sol.

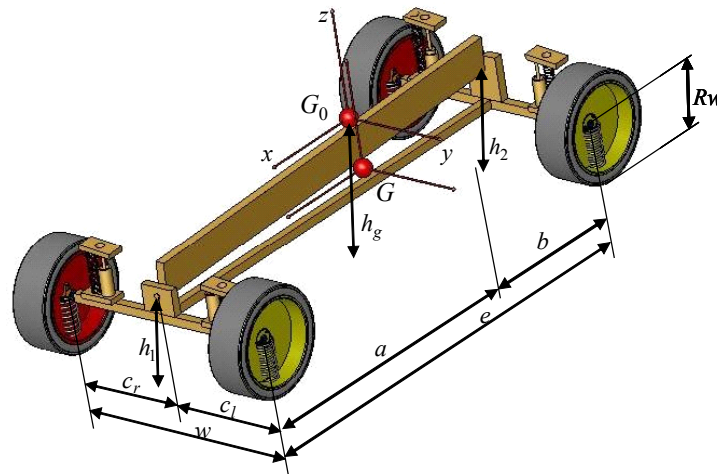


figure 1-7 : Représentation du véhicule – distances

Pour obtenir un modèle suffisamment détaillé du véhicule, nous avons considéré un modèle à 14 degrés de liberté :

- le déplacement longitudinal
- le déplacement transversal
- le déplacement vertical
- le mouvement de lacet

- le mouvement de roulis
- le mouvement de tangage
- les 4 débattements de suspension
- la rotation des 4 roues (permettant l'introduction d'un couple moteur ou de freinage).

Nous avons pris également en compte les phénomènes suivants, qu'il nous semblait important de considérer :

- l'action des barres anti-roulis
- le report de charge
- l'action des suspensions
- les efforts radiaux des pneumatiques
- l'inertie propre des roues.

Le modèle de pneumatique considéré est le modèle de Pacejka [Pacejka, 1979]. Pour la cinématique des trains, nous nous limitons à l'angle de braquage des roues avant.

La matrice d'inertie s'exprime par :

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

avec

- le moment d'inertie  $I_{xx}$  (roulis) par rapport à l'axe  $x$
- le moment d'inertie  $I_{yy}$  (tangage) par rapport à l'axe  $y$
- le moment d'inertie  $I_{zz}$  (lacet) par rapport à l'axe  $z$ ,
- ainsi que les inerties croisées

## 1.4.2 Bond graph à mots du système

Le bond graph à mots ('word bond graph') représente le niveau technologique de la modélisation. Dans cette étape, on décompose le système global en sous-systèmes simples représentés figure 1-8.

A l'entrée de chaque sous-système, on représente les variables de liaison, et non les signaux comme dans les schémas bloc classiques.

Cette étape est physique, puisqu'elle permet de représenter graphiquement tous les phénomènes pris en considération [Dauphin-Tanguy, 2000], [Karnopp et Rosenberg, 1975].

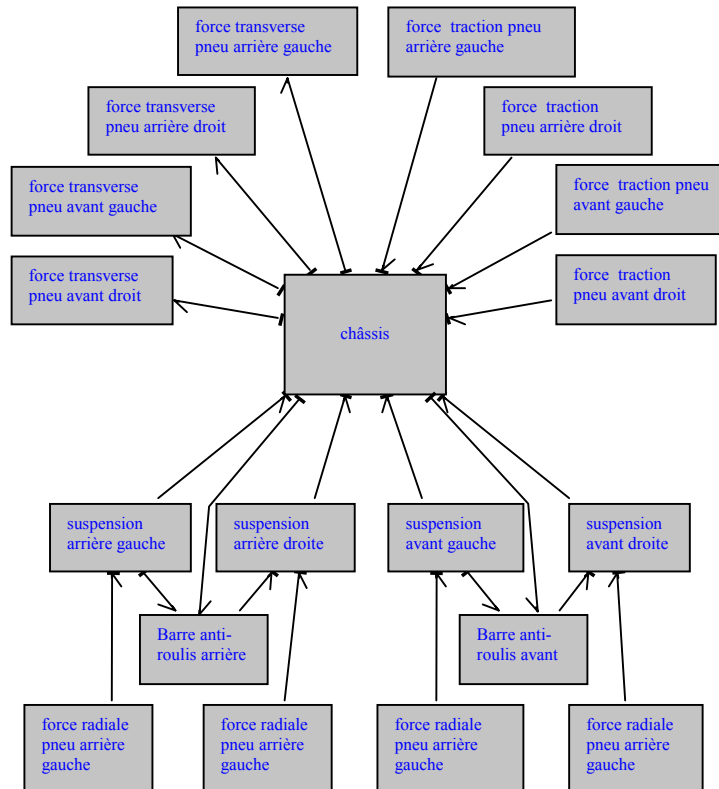


figure 1-8 : Bond graph à mots du véhicule 4 roues

### 1.4.3 Modèles bond graph des différents sous-systèmes

#### a) Chassis

Le châssis est modélisé comme un élément rigide. C'est pour ainsi dire l'armature du véhicule, tous les organes du véhicule modélisé sont rattachés au châssis. Nous travaillerons donc dans le repère lié au châssis, nous transporterons donc tous les efforts venant des pneumatiques. Les suspensions et les barres anti-roulis agissent sur le châssis, et c'est à partir des vitesses de translation (longitudinale, transversale, verticale), et de rotation (lacet, roulis, tangage), ainsi qu'à partir des distances définies plus haut, que nous calculerons les vitesses des différents éléments constituant le véhicule. Le modèle du châssis représenté sur la figure 1-9 est une version modifiée du modèle donné dans [Margolis et Shim, 2001] pour tenir compte des phénomènes que nous avons choisi de considérer.

Nous avons exprimé les composantes des vitesses des différents éléments du véhicule de la manière suivante, afin de construire le modèle du châssis.

Vitesses longitudinales:

$$V_{x_{lr}} = Vx + (h_{g_0} - h_2 + l_2)\omega_y - c_l.\omega_z \quad (1-20)$$

$$V_{x_{rr}} = Vx + (h_{g_0} - h_2 + l_2)\omega_y + c_r.\omega_z \quad (1-21)$$

$$V_{x_{lf}} = Vx - (h_{g_0} - h_1 + l_1)\omega_y - c_l.\omega_z \quad (1-22)$$

$$V_{x_{rf}} = Vx - (h_{g_0} - h_1 + l_1)\omega_y + c_r.\omega_z \quad (1-23)$$

Vitesses transversales

$$Vy_{lr} = Vy - b.\omega_z + (h_{g_0} - h_2 + l_2)\omega_x + (h_2 - R_w).\omega_{xr} \tag{1-24}$$

$$Vy_{rr} = Vy - b.\omega_z + (h_{g_0} - h_2 + l_2)\omega_x + (h_2 - R_w).\omega_{xr} \tag{1-25}$$

$$Vy_{lf} = Vy + a.\omega_z + (h_{g_0} - h_1 + l_1)\omega_x + (h_1 - R_w).\omega_{xr} - \beta.Vx \tag{1-26}$$

$$Vy_{rf} = Vy + a.\omega_z + (h_{g_0} - h_1 + l_1)\omega_x + (h_1 - R_w).\omega_{xr} - \beta.Vx \tag{1-27}$$

Vitesses verticales

$$Vz_{lr} = Vz + b.\omega_y + c_l.\omega_x \tag{1-28}$$

$$Vz_{rr} = Vz + b.\omega_y - c_r.\omega_x \tag{1-29}$$

$$Vz_{lf} = Vz - a.\omega_y + c_l.\omega_z \tag{1-30}$$

$$Vz_{rf} = Vz - a.\omega_y - c_r.\omega_z \tag{1-31}$$

lr et lf pour "left-rear" (gauche-arrière) et "left-front" (gauche-avant) et rr et rf pour "right-rear" (droite-arrière) et "right-front" (droite-avant).

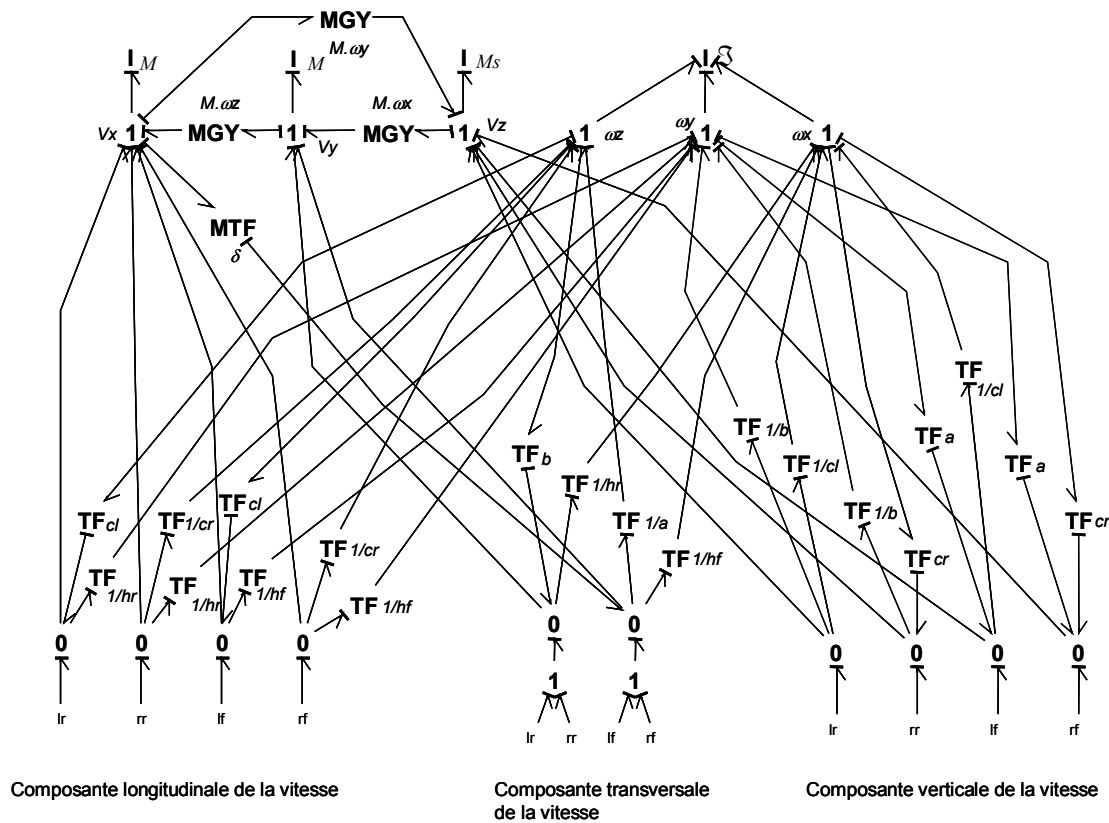


figure 1-9 : Bond graph du châssis montrant l'interaction avec les éléments du véhicule

Les modules des transformateurs hf et hr sont donnés par les équations (1-32) et (1-33).

**b) Suspension**

Une suspension est attachée à chaque coin du châssis du véhicule. La suspension d'un véhicule se modélise principalement à l'aide de ressorts et d'amortisseurs. Son modèle bond graph est donné figure 1-10.



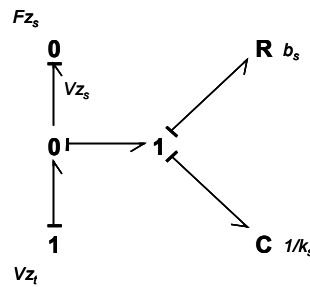


figure 1-10 : Bond graph d'une unité de suspension

Les suspensions utilisées ont des modèles non linéaires: pour les éléments  $R$  et  $C$ , nous n'utiliserons pas les valeurs  $b_s$  et  $k_s$ , mais des tables donnant l'effort produit en fonction de la vitesse de débattement pour l'élément  $R$  et du débattement pour l'élément  $C$ .

### c) Pneumatique

Le comportement du pneumatique est un phénomène très complexe pour trois raisons :

- d'une part par la non-linéarité des lois qui le caractérisent
- d'autre part par l'interdépendance de ces lois
- ensuite, par le nombre de facteurs intervenant dans ces lois

#### \* Hypothèses de modélisation

Le pneu peut se déplacer dans les directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , et peut tourner autour des directions  $y$  et  $z$  (braquage) (figure 1-11). On suppose que le pneu reste toujours vertical, et que l'angle de carrossage n'est pas inclus [Margolis et Asgari, 1991].

Concrètement chaque roue est modélisée comme une masse non suspendue  $m_t$ , une inertie  $J_w$ , et une raideur de pneu  $C_t$ , comme montré sur la figure 1-11.

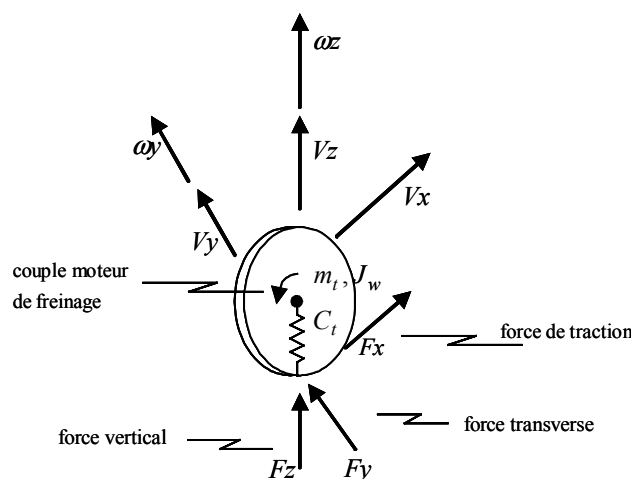


figure 1-11 : Représentation du pneumatique

Les formulations de Pacejka ont été constamment améliorées depuis l'origine (1987). La formulation utilisée ici, est une évolution proposée par la société Michelin en 1993 [Hanin, 2002]. Les efforts renvoyés par le « module pneumatique » sont les suivants :

- **l'effort longitudinal**, qui représente l'effort de traction ou de freinage du véhicule
- **l'effort transversal**, qui représente fondamentalement l'effort qui va permettre de guider le véhicule
- **le couple d'auto-alignement** qui provient du décalage du point d'application de la force transversale par rapport au point de contact roue-sol. Ce point d'application est situé en arrière du point de contact. Son action tend à réduire l'angle de dérive; en ce sens, il s'agit d'une action de rappel du véhicule. Ce phénomène ne sera pas pris en compte dans notre modélisation.

Les grandeurs influençant ces efforts sont pour des conditions de fonctionnement données [Hanin, 2002].

- la charge normale au sol
- l'angle de dérive du pneumatique
- le taux de glissement
- le carrossage (considéré nul dans notre étude)

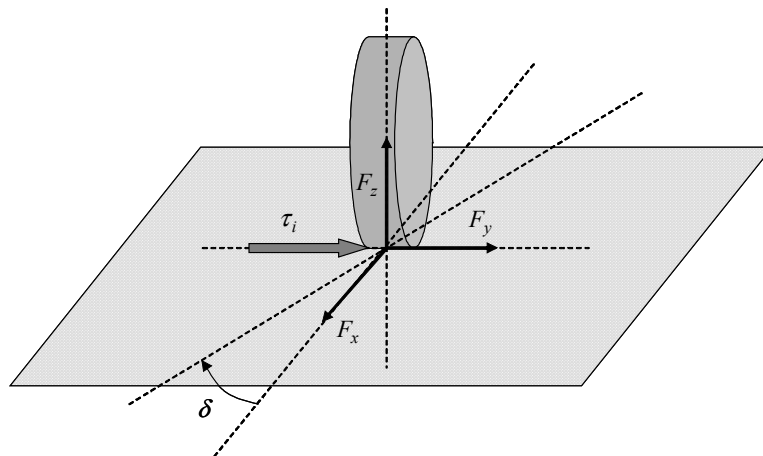


figure 1-12 : Les forces du pneumatique

Le taux de glissement a pour expression :

$$\tau_i = \left( \frac{\omega_i \cdot R_r - V_{x_{pi}}}{V_{x_{pi}}} \right) \cdot 100 \quad (1-32)$$

avec  $\omega_i$  la vitesse de rotation angulaire de la roue,  $R_r$  le rayon de roulement,  $V_{x_{pi}}$  la vitesse longitudinale du centre de gravité ramené au point de contact roue sol.

Dans le calcul des efforts, on distingue deux étapes :

- calcul des efforts longitudinaux et latéraux purs
- calcul des efforts longitudinaux et latéraux couplés

Les efforts **longitudinaux purs** sont calculés pour un **carrossage et une dérive nulle**, donc ils ne dépendent que du taux de glissement et des sollicitations suivant l'axe z. Les efforts **latéraux purs** sont déterminés avec un **taux de glissement et un carrossage nuls**, donc ils ne dépendent que de l'angle de dérive et des sollicitations suivant l'axe z.

**\* Effort longitudinal**

La sollicitation longitudinale pure  $F_{x_0}$  peut se calculer de la manière suivante :

$$F_{x_0} = D \cdot \sin(C \cdot \arctan(B \cdot \Phi)) + S_v \quad (1-33)$$

avec

$$S_v = b_{11} \cdot F_z + b_{12} \quad (1-34)$$

$$S_h = b_9 \cdot F_z + b_{10} \quad (1-35)$$

$$B = \frac{BCD}{C \cdot D} \quad (1-36)$$

$$BCD = \frac{b_3 \cdot F_z^2 + b_4 \cdot F_z}{e^{b_5} \cdot F_z} \quad (1-37)$$

$$D = b_1 \cdot F_z^2 + b_2 \cdot F_z \quad (1-38)$$

$$C = b_0 \quad (1-39)$$

$$\Phi = (1 - E)(\tau + S_h) + \frac{E}{B} \cdot \arctan(B \cdot (\tau + S_h)) \quad (1-40)$$

$$E = b_6 \cdot F_z^2 + b_7 \cdot F_z + b_8 \quad (1-41)$$

Si une sollicitation transversale entre en jeu, la sollicitation longitudinale pure devient l'effort longitudinal couplé, qui se détermine de la façon suivante :

$$F_{x_p} = F_{x_0} \cdot G_x \quad (1-42)$$

avec

$$G_x = \frac{\cos(CD \cdot \arctan(BD \cdot (\delta - AD)))}{\cos(CD \cdot \arctan(-BD \cdot AD))} \quad (1-43)$$

$$AD = b_{m_1} \quad (1-44)$$

$$BD = b_{m_3} \cdot \cos(\arctan(\tau \cdot b_{m_3})) \quad (1-45)$$

$$CD = b_{m_0} \quad (1-46)$$

Les coefficients  $b_0 \dots b_{12}$  et  $b_{m_0} \dots b_{m_3}$  sont déterminés expérimentalement.

coefficient	valeur	coefficient	valeur
b <sub>0</sub>	1.2174	bm <sub>0</sub>	1.531
b <sub>1</sub>	-8.69502	bm <sub>1</sub>	0.3134
b <sub>2</sub>	967.675	bm <sub>2</sub>	0.1445
b <sub>3</sub>	19.5508	bm <sub>3</sub>	0.1892
b <sub>4</sub>	144.931	bm <sub>4</sub>	0
b <sub>5</sub>	0		
b <sub>6</sub>	-1.77679		
b <sub>7</sub>	18.2904		
b <sub>8</sub>	-46.5623		
b <sub>9</sub>	0		
b <sub>10</sub>	0		
b <sub>11</sub>	0		
b <sub>12</sub>	0		

tableau 1-1 : Coefficient b<sub>i</sub> et bm<sub>i</sub>\* *Effort latéral*

Sollicitation latérale pure  $F_{y_0}$  peut se calculer de la manière suivante :

$$F_{y_0} = D \cdot \sin(C \cdot \arctan(B \cdot \Phi)) + S_v \quad (1-47)$$

avec

$$S_v = S_{v_0} + (a_{11_2} \cdot F_z^2 + a_{11_1} \cdot F_z) \gamma \quad (1-48)$$

$$S_{v_0} = a_{12} \cdot F_z + a_{13} \quad (1-49)$$

$$S_h = S_{h_0} + a_8 \cdot \gamma \quad (1-50)$$

$$S_{h_0} = a_9 \cdot F_z + a_{10} \quad (1-51)$$

$$D = a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z \quad (1-52)$$

$$B = \frac{BCD}{C \cdot D} \quad (1-53)$$

$$BCD = BCD_0 \cdot (1 - a_5 \cdot \gamma) \quad (1-54)$$

$$BCD_0 = a_3 \cdot \sin\left(2 \cdot \arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right) \quad (1-55)$$

$$C = a_0 \quad (1-56)$$

$$\Phi = (1 - E) \cdot (\delta + S_h) + \frac{E}{B} \cdot \arctan(B \cdot (\delta + S_h)) \quad (1-57)$$

$$E = a_6 \cdot F_z + a_7 \quad (1-58)$$

Si une sollicitation longitudinale entre en jeu la sollicitation latérale pure, devient l'effort latéral couplé, qui se détermine de la façon suivante :

$$F_{y_p} = F_{y_0} \cdot G_y + F_{yx} \quad (1-59)$$

avec

$$G_y = \frac{\cos(CG \cdot \arctan(BG \cdot (\tau - AG)))}{\cos(CG \cdot \arctan(-BG \cdot AG))} \quad (1-60)$$

$$AG = a_{m_1} \quad (1-61)$$

$$BG = a_{m_2} \cdot \cos(\arctan(a_{m_3} \cdot (\delta - a_{m_4}))) \quad (1-62)$$

$$CG = a_{m_0} \quad (1-63)$$

$$F_{yx} = a_{m_5} \cdot F_z \cdot (\gamma - G_{a_0}) \cdot F_{yxdel} \cdot F_{yxgli} \quad (1-64)$$

$$F_{yxgli} = \sin(1,9 \cdot \arctan(a_{m_8} \cdot \tau)) \quad (1-65)$$

$$F_{yxdel} = \cos(\arctan(a_{m_9} \cdot \delta)) \quad (1-66)$$

$$G_{a_0} = a_{m_6} \cdot F_z + a_{m_7} \quad (1-67)$$

Les coefficients  $a_0 \dots a_{13}$  et  $a_{m_0} \dots a_{m_9}$  sont déterminés expérimentalement.

coefficient	valeur	coefficient	valeur
a <sub>0</sub>	1.551	am <sub>0</sub>	1.029
a <sub>1</sub>	-46.07	am <sub>1</sub>	-0.4524
a <sub>2</sub>	1290	am <sub>2</sub>	0.1386
a <sub>3</sub>	1649	am <sub>3</sub>	0.2091
a <sub>4</sub>	7.063	am <sub>4</sub>	0.8026
a <sub>5</sub>	0.0082	am <sub>5</sub>	9.9
a <sub>6</sub>	-0.3177	am <sub>6</sub>	0
a <sub>7</sub>	0.768	am <sub>7</sub>	0
a <sub>8</sub>	-0.0384	am <sub>8</sub>	0.2726
a <sub>9</sub>	0	am <sub>9</sub>	0.5523
a <sub>10</sub>	0		
a <sub>111</sub>	-14.62		
a <sub>112</sub>	-0.0114		
a <sub>12</sub>	0		
a <sub>13</sub>	0		

tableau 1-2 : Coefficients a<sub>i</sub> et am<sub>i</sub>

L'adhérence du sol intervient dans le calcul des efforts longitudinaux et latéraux, ces deux fonctions deviennent donc des fonctions de l'adhérence :

$$F_{xi} = f(F_{zi}, \delta_i, \tau_i, \gamma_i, \mu_i) \quad (1-68)$$

$$F_{yi} = f(F_{zi}, \delta_i, \tau_i, \gamma_i, \mu_i) \quad (1-69)$$

Les modifications introduites sont les suivantes :

$$D_x = \mu \cdot (b_1 \cdot F_z^2 + b_2 \cdot F_z) \quad (1-70)$$

$$D_y = \mu \cdot (a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z) \quad (1-71)$$

Pour simplifier l'étude, nous décomposons le modèle de pneu en trois sous-modèles, pour chacune des forces induites sur le véhicule.

La première force est la force verticale,  $F_z$ , qui est due à la force d'élasticité de pneu (figure 1-13(a)). Elle est directement liée à la suspension et à la barre anti-roulis du véhicule. Sur le modèle bond graph, on voit apparaître la masse du pneu qui permet de modéliser la vitesse de débattement du pneumatique, la raideur du pneu qui modélise les efforts radiaux en fonction de la vitesse de débattement, ainsi qu'une source de flux qui modélise le relief de la route.

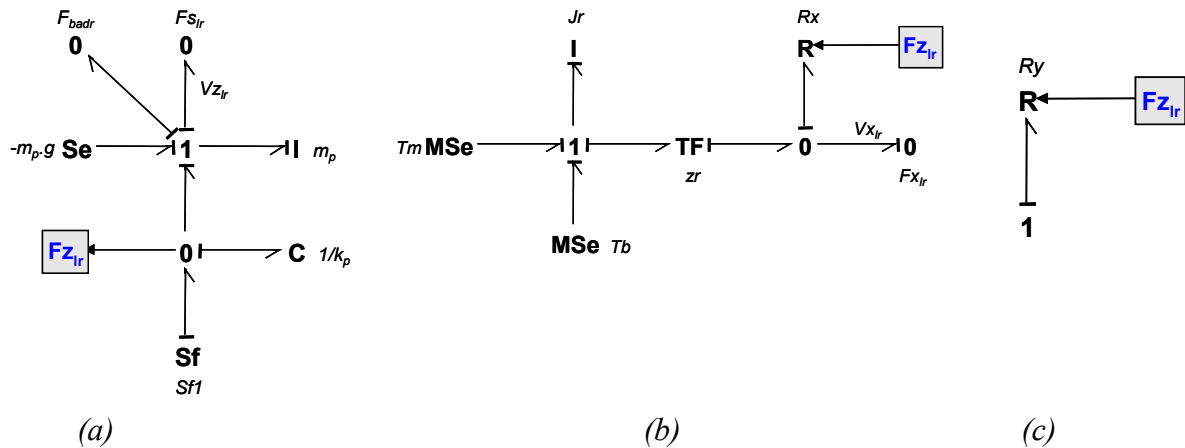


figure 1-13 : Modèles bond graph des forces induites par le pneu (arrière gauche)  
 (a) force verticale du pneu, (b) force de traction du pneu, (c) force transversale

La deuxième force est la force de traction,  $F_x$ , qui est développée quand un couple moteur  $T_m$  ou un couple de freinage  $T_b$  est appliqué (figure 1-13(b)). Elle inclut l'inertie de la roue, qui permet de calculer sa vitesse angulaire; celle-ci est influencée par les efforts venant du châssis, ainsi que par les deux couples de commande. La troisième force est la force transversale,  $F_y$ , qui est développée quand le véhicule présente un angle de dérive (figure 1-13(c)).

**d) Barres anti-roulis**

La barre anti-roulis (ou barre anti-devers) sert à garder une assise horizontale au véhicule lors d'un virage ou en cas de déplacement du centre de gravité. Les barres anti-roulis sont modélisées comme des éléments qui se déforment en torsion sans perte d'énergie. Cette torsion est due à la différence entre la rotation du châssis et de l'essieu. La figure 1-14 représente le modèle bond graph d'une barre anti-roulis.

Le modèle bond graph de la barre anti-roulis a été construit à partir de la connaissance du fonctionnement d'une barre anti-roulis. L'effort transmis par la barre anti-roulis est calculé en fonction de la différence entre la vitesse angulaire du châssis, et de l'essieu en roulis.

La vitesse angulaire de roulis de l'essieu est calculée de la manière suivante :

$$\omega_{xf} = (V_{y_{rf}} - V_{y_{lf}})w \tag{1-72}$$

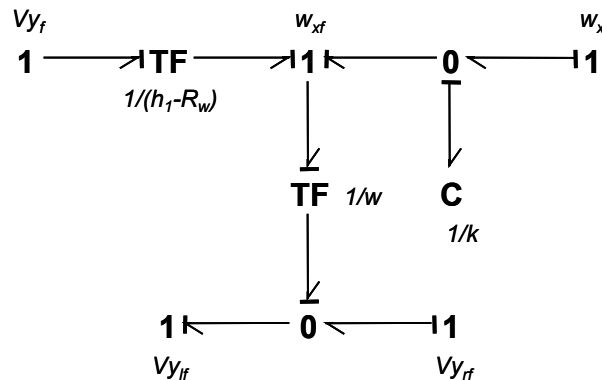


figure 1-14 : Modèle de barre anti-roulis

### 1.4.4 Valeurs numériques

Les valeurs numériques prise pour la simulation sont :

Masse du véhicule :  $M = 1342kg$

Masse suspendue :  $M_s = 1192kg$

Masse des pneumatiques avant :  $m_{p_{av}} = 41kg$

Masse des pneumatiques arrière :  $m_{p_{ar}} = 34kg$

Inertie de roulis :  $I_{xx} = 351kg.m^2$

Inertie de tangage :  $I_{yy} = 1000kg.m^2$

Inertie de lacet :  $I_{zz} = 1549kg.m^2$

Produit d'inertie roulis-tangage :  $I_{xy} = 0kg.m^2$

Produit d'inertie roulis-lacet :  $I_{xz} = -26kg.m^2$

Produit d'inertie tangage-lacet :  $I_{yz} = 0kg.m^2$

Demi empattement avant (distance entre l'essieu avant et le cg) :  $a = 1.04m$

Demi empattement arrière (distance entre l'essieu arrière et le cg) :  $b = 1.59m$

Empattement (distance entre les essieux) :  $e = 2.63m$

Demi-voie droite :  $c_r = 0.75m$

Demi-voie gauche :  $c_l = 0.75m$

Voie (largeur du véhicule pris aux points de contact des roues) :  $w = 1.5m$

Hauteur du centre de gravité :  $h_g = 0.58m$

Hauteur du centre de roulis avant :  $h_1 = 0m$

Hauteur du centre de roulis arrière :  $h_1 = 0m$

Rayon des roues :  $R_w = 0.3m$

## 1.5 Validation des modèles

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les modèles BGCar14 au modèle SIMULINK/Car disponible chez PSA [Hanin, 2002], afin de définir son domaine de validité. Dans un premier temps nous allons rappeler les phénomènes pris en compte pour les modèles BGCar14 et SIMULINK/Car. Certains phénomènes modélisés dans SIMULINK/Car ne sont pas ou sont seulement en partie modélisés dans BGCar14. Ces simplifications pourront expliquer certaines différences de comportement entre les deux modèles.

### 1.5.1 Phénomènes modélisés

Les deux modèles utilisés possèdent 14 degrés de liberté, qui sont :

- le déplacement longitudinal
- le déplacement transversal
- le déplacement vertical
- le lacet
- le roulis
- le tangage

- les 4 débattements de suspension
- la rotation des 4 roues

Les phénomènes pris en compte pour les deux modèles sont :

- l'action des barres anti-roulis
- le report de charge
- l'action des suspensions
- les efforts radiaux de suspension
- les inerties propres des roues

Les différences entre les modèles apparaissent:

- dans le modèle de Pacejka pour les pneumatiques
  - pour le modèle SIMULINK/Car : modèle complet
  - pour le modèle BGCAR14 : uniquement efforts longitudinaux et transversaux
- pour la cinématique des trains
  - pour le modèle SIMULINK/Car : braquage, carrossage, pince, variation de la voie, variation de l'empattement du véhicule en fonction des débattement
  - pour le modèle BGCAR14 : uniquement braquage des roues avant
- uniquement pour le modèle SIMULINK/Car
  - gestion de l'arrêt et de la marche arrière
  - action d'une traverse arrière déformable
  - effets d'une perturbation extérieure appliquée en un point quelconque du véhicule
  - torseur aérodynamique complet

Pour comparer les résultats de BGCAR14 et de SIMULINK/Car, il est nécessaire d'exciter les deux modèles par des entrées identiques.

La suite de l'étude est composée des résultats obtenus avec les modélisations BGCAR14 et SIMULINK/Car, pour six configurations de commandes volant et deux valeurs de vitesse longitudinale (celle-ci restera constante au cours des essais).

Ces essais se déroulent sur un sol plan, la vitesse verticale des roues sera donc considérée nulle.

## 1.5.2 Simulations

Le modèle BGCAR14 est simulé à l'aide du logiciel 20-sim, tandis que le modèle Simulink/Car est simulé à l'aide de Matlab/Simulink, nous avons rapatrié les données de simulation du modèle BGCAR14 dans Matlab afin de superposer les courbes de simulation.

Pour effectuer une comparaison des modèles, nous allons tracer les courbes suivantes, qui permettent de visualiser les différences de comportement des modèles.

- l'angle de braquage des roues avant
  - les roues arrière restent fixes par rapport au châssis
- la trajectoire du centre de gravité du véhicule dans le repère sol



les déplacements dans le repère sol sont obtenus en intégrant les vitesses respectives dans le repère sol

- le déplacement vertical du centre de gravité du véhicule dans le repère sol
- la dérive au centre de gravité

l'angle de dérive est obtenu grâce à la formule suivante :

$$\delta = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

- la vitesse longitudinale du centre de gravité dans le repère sol  
pour obtenir les vitesses longitudinale, transversale, et verticale du véhicule dans le repère sol, on utilise la matrice de passage Châssis-Sol (voir Annexe B)
- la vitesse transversale du centre de gravité dans le repère sol
- la vitesse verticale du centre de gravité dans le repère sol
- l'accélération longitudinale dans le repère lié au châssis obtenue par l'équation :

$$a_x = \frac{F_{x_{lr}} + F_{x_{rr}} + F_{x_{lf}} + F_{x_{rf}}}{M}$$

- l'accélération transversale dans le repère lié au châssis obtenue par l'équation :

$$a_y = \frac{F_{y_{lr}} + F_{y_{rr}} + F_{y_{lf}} + F_{y_{rf}}}{M}$$

- l'accélération verticale dans le repère lié au châssis obtenue par l'équation :

$$a_z = \frac{F_{z_{lr}} + F_{z_{rr}} + F_{z_{lf}} + F_{z_{rf}}}{M_s}$$

- l'angle de roulis du véhicule obtenu en intégrant la vitesse angulaire de roulis
- la vitesse angulaire de roulis du véhicule liée à la matrice d'inertie du modèle
- l'accélération angulaire de roulis du véhicule obtenue en divisant la somme des efforts arrivant sur la jonction 1 nommée  $\omega_x$  par l'inertie de roulis
- l'angle de lacet du véhicule obtenu en intégrant la vitesse angulaire de lacet
- la vitesse angulaire de lacet du véhicule liée à la matrice d'inertie du modèle
- l'accélération angulaire de lacet du véhicule obtenue en divisant la somme des efforts arrivant sur la jonction 1 nommée  $\omega_z$  par l'inertie de lacet
- l'angle de tangage du véhicule obtenu en intégrant la vitesse angulaire de tangage
- la vitesse angulaire de tangage du véhicule liée à la matrice d'inertie du modèle
- l'accélération angulaire de tangage du véhicule en divisant la somme des efforts arrivant sur la jonction 1 nommée  $\omega_y$  par l'inertie de tangage
- le débattement des 4 suspensions en intégrant les vitesses verticales de débattement des suspensions prises aux entrées des éléments *C* modélisant les suspensions
- le débattement des 4 pneumatiques obtenu en intégrant les vitesses verticales de débattement des pneumatiques prises à l'entrée des éléments *C* modélisant les pneumatiques
- la torsion des 2 barres anti-roulis en intégrant la vitesse de torsion prise en entrée des éléments *C* modélisant les barres anti-roulis.

## a) Changement de voie

\* *vitesse longitudinale*  $V_x = 13.9$  m/s

Le véhicule est lancé en ligne droite à une vitesse longitudinale constante ( $V_x = 13.9$  m/s). Après deux secondes, on applique un angle de braquage aux roues avant (figure 1-15) d'amplitude 1 degré (0.0174 rad) sous forme d'un sinus durant une demi période du signal

sinusoïdale, puis deux secondes plus tard, nous appliquons un autre angle de braquage aux roues avant correspondant à l'autre demi période.

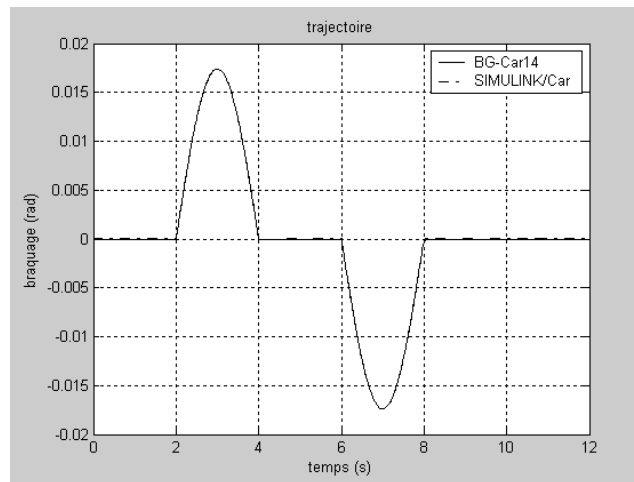


figure 1-15 : Angle de braquage des roues avant

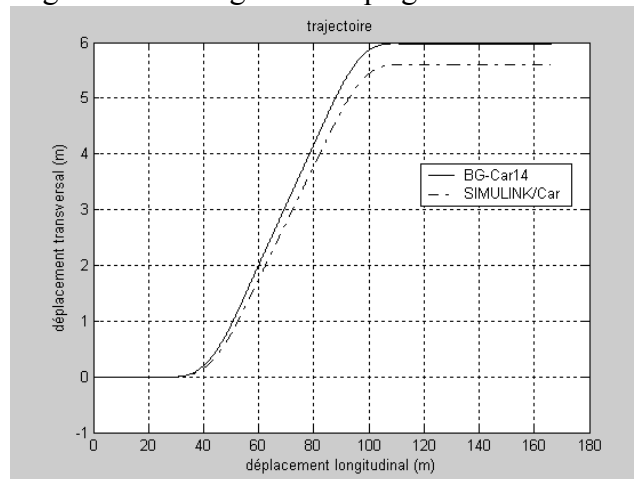


figure 1-16 : Trajectoire

Nous pouvons constater sur la figure 1-16 que les deux trajectoires ont la même allure, mais que le modèle BGCar14 a tendance à tourner plus que le modèle SIMULINK/Car. Nous essaierons grâce aux courbes suivantes d'expliquer cette différence.

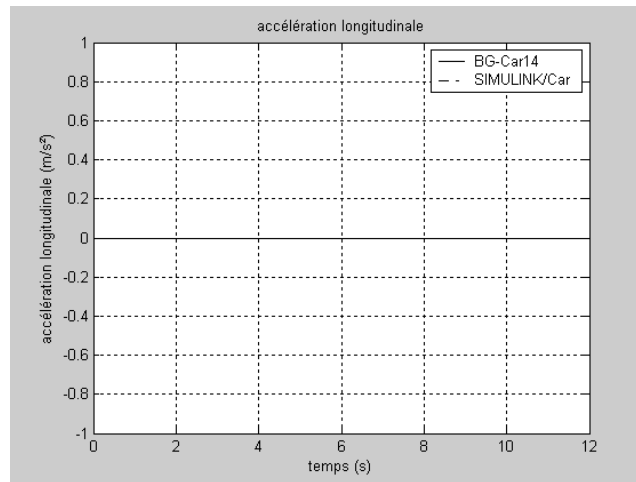


figure 1-17 : Accélération longitudinale dans le repère lié au châssis

Les accélérations longitudinales sont nulles dans le repère lié au châssis, ce qui est tout à fait normal, car les modèles de véhicule ne subissent ni accélération ni décélération au cours de la simulation.

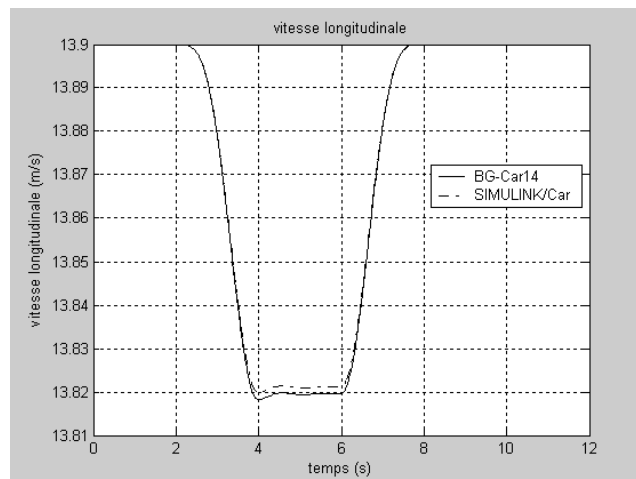


figure 1-18 : Vitesse longitudinale du centre de gravité dans le repère sol

Les vitesses longitudinales ont une allure similaire : pendant les braquages des roues ( $2s < t < 4s$ , et  $6s < t < 8s$ ), les vitesses longitudinales diminuent dans un premier temps, puis retrouvent leurs valeurs initiales quand les roues du véhicule sont redressées.

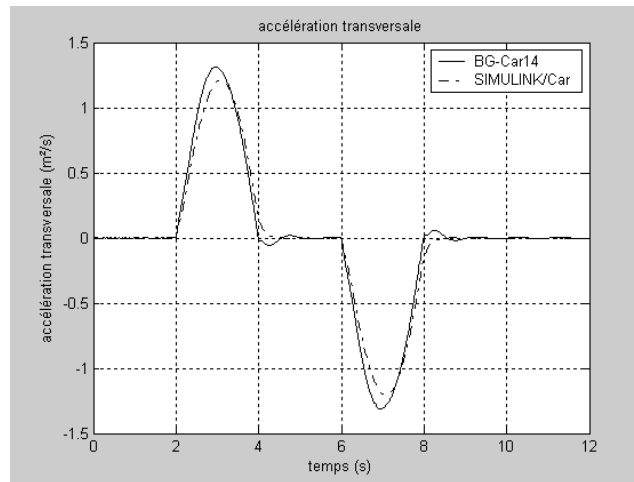


figure 1-19 : Accélération transversale dans le repère lié au châssis

Les accélérations transversales des modèles suivent une même allure, les différences d'amplitude peuvent venir soit des couplages entre les vitesses longitudinales et de lacet, ou verticale et de roulis, soit du modèle de Pacejka, et plus particulièrement des forces transversales du pneumatique. Cette dernière suggestion paraît plus plausible car nous avons considéré pour le modèle BGCar14 un angle de carrossage nul, tandis que dans le modèle SIMULINK/Car, le carrossage du véhicule est pris en compte. De plus on peut se rendre compte que la courbe d'accélération transversale du modèle BGCar14 est moins amortie que pour le modèle SIMULINK/Car.

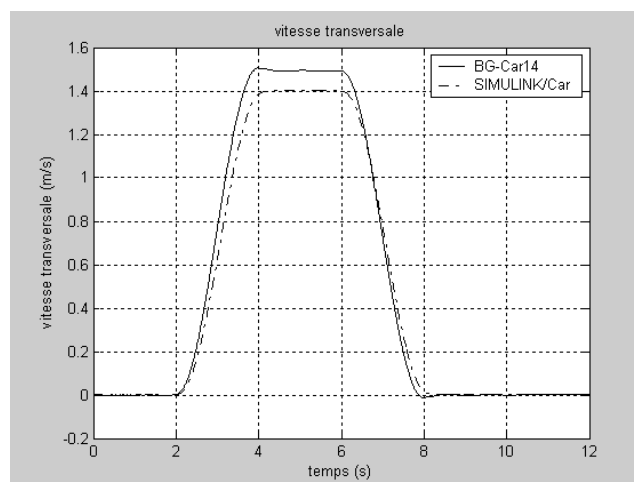


figure 1-20 : Vitesse transversale du centre de gravité dans le repère sol

Les courbes des vitesses transversales ont une même allure: les vitesses sont nulles quand le véhicule suit une trajectoire parallèle à l'axe des  $x$ , augmentent quand le véhicule tourne à gauche, se stabilisent quand le véhicule suit une trajectoire rectiligne, puis diminuent quand le véhicule tourne à droite, pour se stabiliser de nouveau à zéro quand le véhicule se déplace suivant une trajectoire parallèle à l'axe des  $x$ . Nous pouvons noter une différence d'amplitude de 7%, pouvant expliquer en partie la différence de trajectoire.

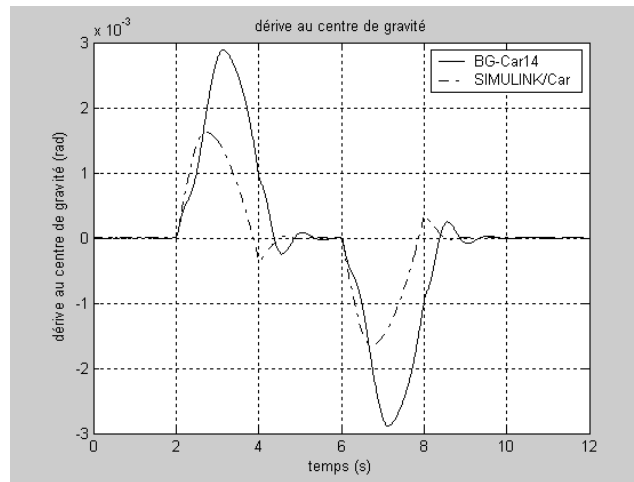


figure 1-21 : Dérive au centre de gravité

La dérive au centre de gravité est plus importante pour le modèle BGCar14 que le modèle SIMULINK/Car, ce qui peut être expliqué par le fait que nous ne modélisons pas le couple d'auto-alignement du modèle de Pacejka pour les pneumatiques. En effet comme indiqué dans les hypothèses de modélisation du BGCar14 (voir paragraphe : 1.4.3c), le couple d'auto-alignement tend à faire diminuer l'angle de dérive du véhicule. Cependant les ordres de grandeurs restent très faibles

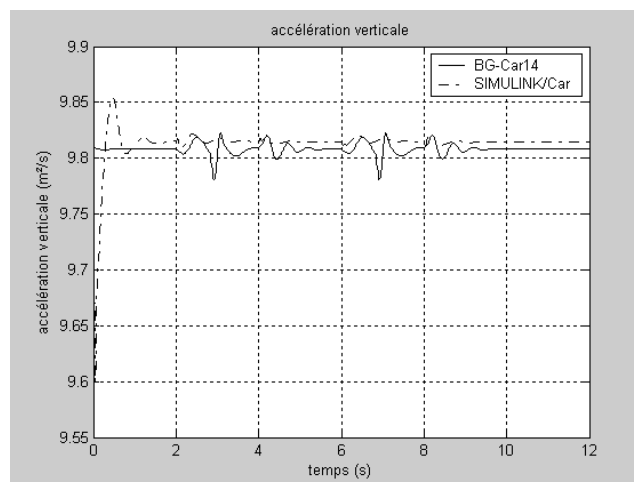


figure 1-22 : Accélération verticale dans le repère lié au châssis

L'accélération verticale du modèle BGCar14 reste quasiment stable à une valeur de  $9.81 m/s^2$ , sauf au cours des virages. L'accélération verticale du modèle SIMULINK/Car part d'une valeur de  $9.6 m/s^2$ , pour se stabiliser autour d'une valeur de  $9.82 m/s^2$ . Cette valeur initiale différente de la valeur finale, peut expliquer la vitesse verticale non nulle du modèle SIMULINK/Car (figure 1-23), ainsi que le déplacement du centre de gravité. Ce phénomène est sûrement dû à un mauvais calcul des débattements initiaux des suspensions et des pneumatiques.

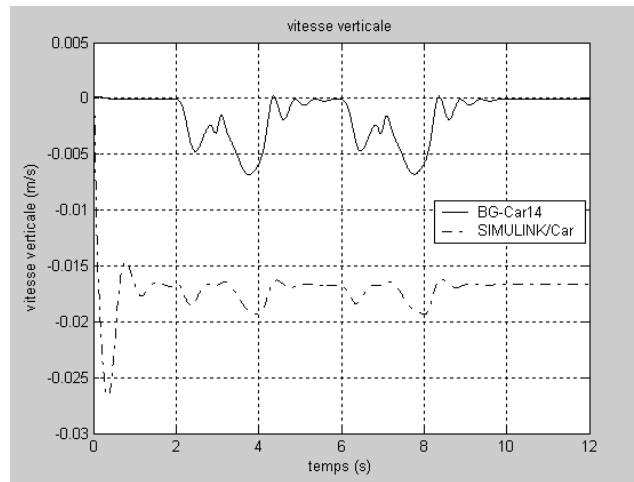


figure 1-23 : Vitesse verticale du centre de gravité dans le repère sol

Nous remarquons pour le modèle SIMULINK/Car, que la vitesse verticale se stabilise autour d'une valeur négative, différente de zéro, ce qui explique le déplacement du centre de gravité, mais cette vitesse devrait être nulle car la masse du véhicule n'est pas modifiée pendant la simulation.

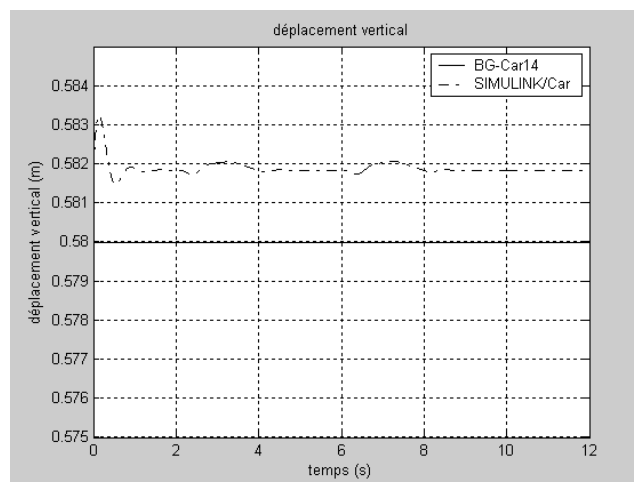


figure 1-24 : Déplacement vertical

Les déplacements verticaux des modèles véhicule, ont un ordre de grandeur similaire, le centre de gravité du modèle Simulink/Car bouge légèrement, à cause des variations de la vitesse verticale du véhicule.

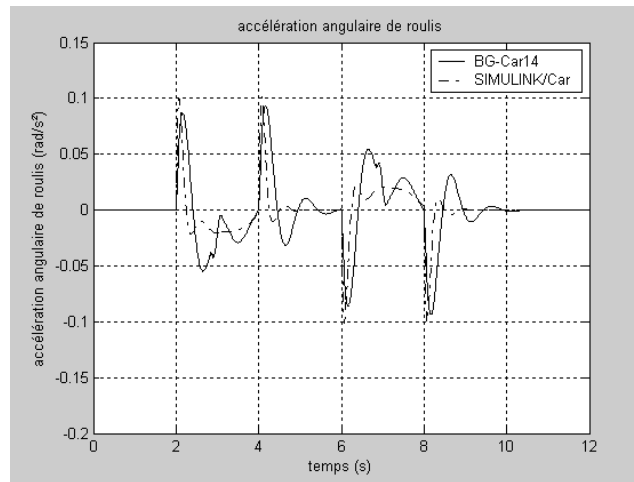


figure 1-25 : Accélération angulaire de roulis

Les accélérations angulaires de roulis ont une allure similaire. Celle du modèle BGCAR14 est moins amortie que celle du modèle SIMULINK/Car, ce qui entraînera des différences pour la vitesse angulaire de roulis et l'angle de roulis. Cette différence vient soit des suspensions, soit des barres anti-roulis. On peut supposer qu'elle vient des barres anti-roulis, en effet celles-ci sont influencées par les efforts transversaux, où nous avons expliqué auparavant une différence due au carrossage.

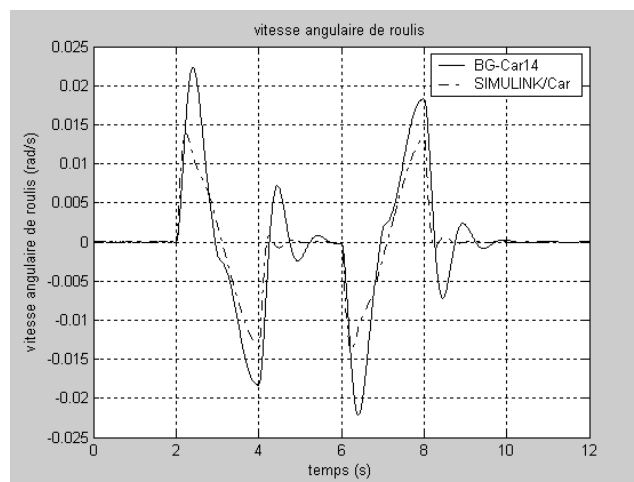


figure 1-26 : Vitesse angulaire de roulis

On peut faire la même constatation que précédemment. La différence vient sûrement de l'angle de carrossage, qui influence les efforts transversaux.

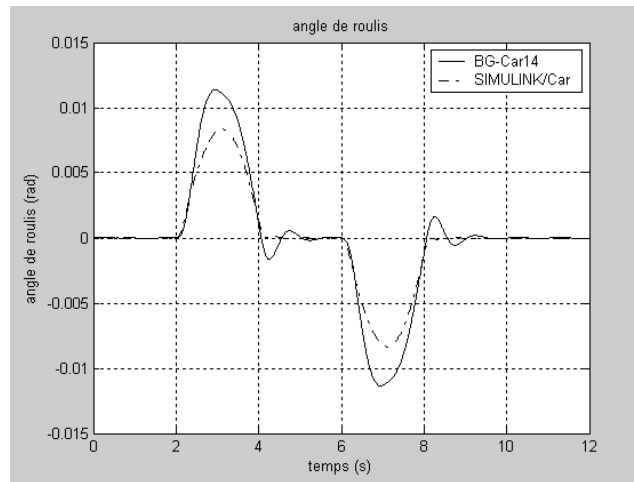


figure 1-27 : Angle de roulis

Les courbes d'angle de roulis des deux modèles ont une même allure, la courbe du modèle BGCar14 a une amplitude plus importante (de l'ordre de  $0.2^\circ$ ), on remarque aussi qu'elle est moins amortie que celle du modèle SIMULINK/Car.

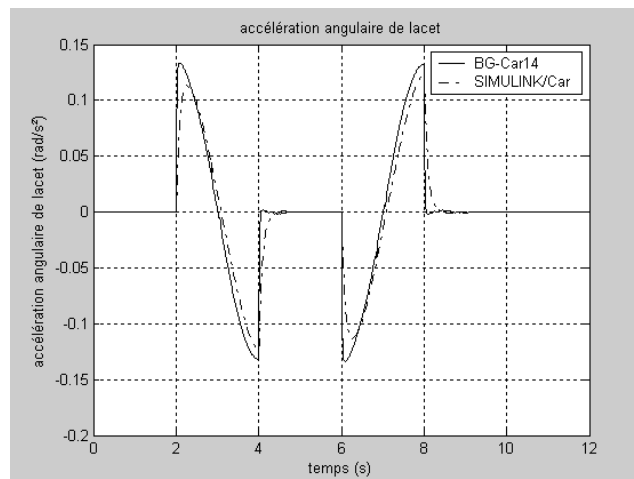


figure 1-28 : Accélération angulaire de lacet

Les différences au niveau des accélérations angulaires de lacet se répercutent sur les vitesses de lacet. La différence peut être due au fait que nous avons négligé dans BGCar14 le couple d'auto-alignement dans le modèle de Pacejka. En effet, nous savons que lorsque le véhicule est en enroulement et soumis à des efforts latéraux lors de circonstances de roulement comme les virages ou des caractéristiques des véhicules comme l'angle de carrossage, la flexibilité du pneu induit un couple d'auto-alignement qui modifie la direction originelle de la roue et donc du véhicule.



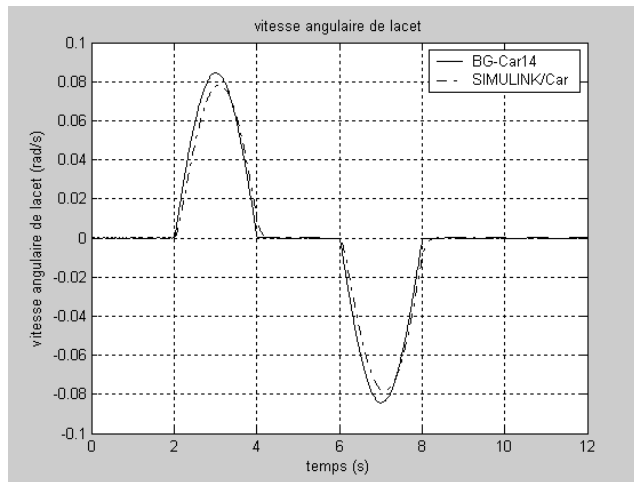


figure 1-29 : Vitesse angulaire de lacet

Les courbes de vitesse angulaire de lacet concordent bien avec celles des accélérations angulaires de lacet.

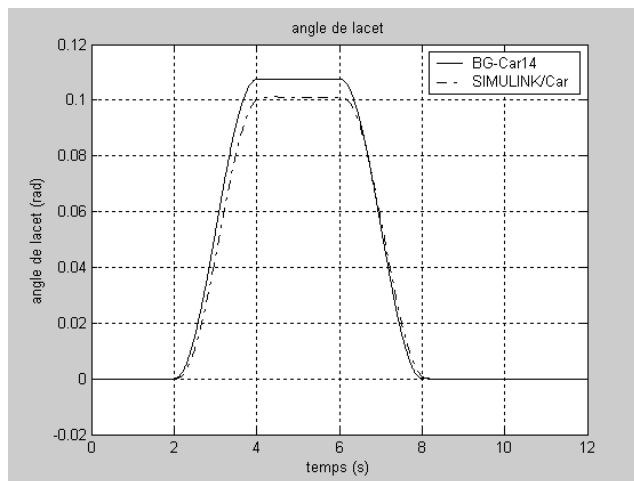


figure 1-30 : Angle de lacet

Nous avons deux courbes ayant une même allure, la différence entre celles-ci vient de la différence entre les accélérations angulaires qui se répercutent jusqu'aux angles.

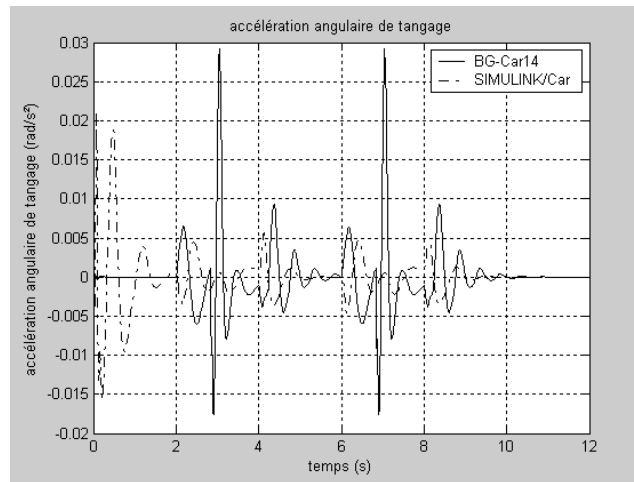


figure 1-31 : Accélération angulaire de tangage

Nous remarquons que les courbes d'accélération angulaire de tangage n'ont pas la même allure. De plus l'accélération angulaire de tangage du modèle SIMULINK/Car n'est pas stable quand le véhicule roule en ligne droite, ce qui peut être expliqué par un mauvais calcul des débattements initiaux, et qui peut perturber le fonctionnement du modèle au cours de la simulation.

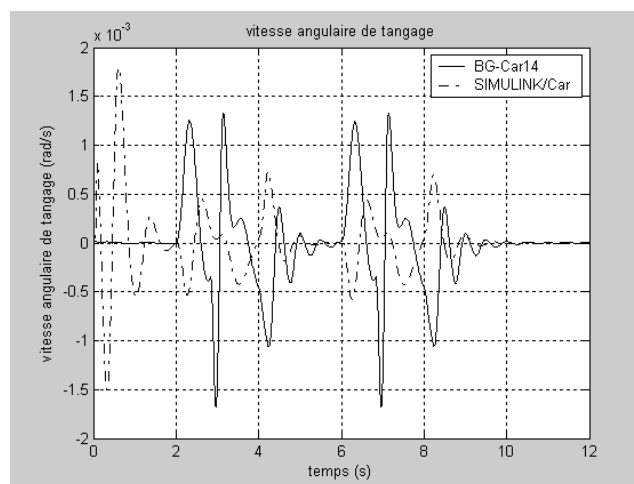


figure 1-32 : Vitesse angulaire de tangage

Comme précédemment les allures de courbes sont différentes. Le problème peut venir des forces verticales de suspension ou des forces longitudinales, sûrement au niveau du carrossage. Mais nous pouvons remarquer que le problème de la valeur initiale persiste.

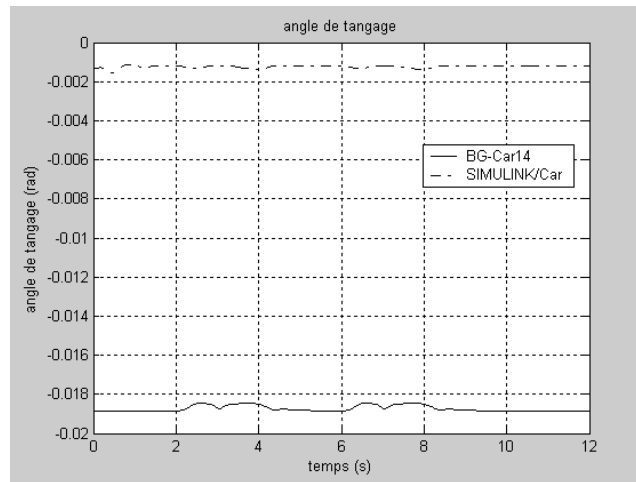


figure 1-33 : Angle de tangage

Nous pouvons noter une différence d'angle de tangage initial de l'ordre de  $1^\circ$ , cette différence est sûrement due au calcul de l'angle de tangage. Pour le calcul de celui-ci, pour le modèle BGCar14, nous avons considéré que le véhicule a un angle de tangage nul quand il n'est pas soumis à la gravité, c'est-à-dire quand tous les ressorts (suspension et pneumatique) sont en équilibre, puis en appliquant la gravité, nous calculons les débattements initiaux et ainsi nous pouvons calculer l'angle de tangage initial.

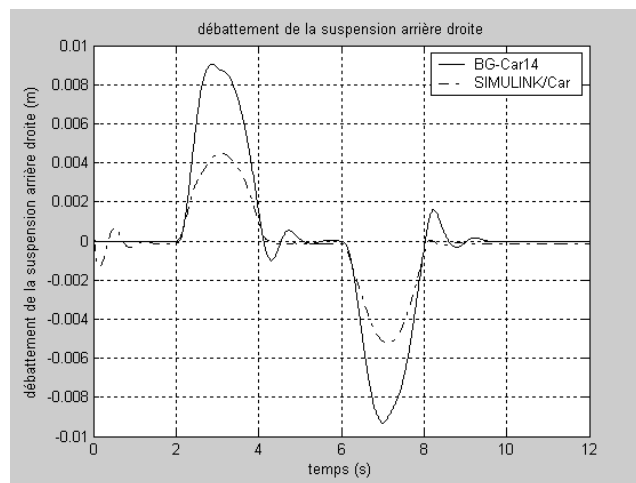


figure 1-34 : Débattement de la suspension arrière droite

Les débattements de suspensions ont un comportement similaire pour les deux modèles, même si les débattements sont plus importants pour le modèle BGCar14 (de l'ordre de 4 mm). Sur cette courbe, nous pouvons constater que les débattements de suspensions du modèle SIMULINK/Car ne sont pas stables en début de simulation.

Les autres débattements de suspension sont regroupés en annexe D, le comportement global des suspensions est le même.

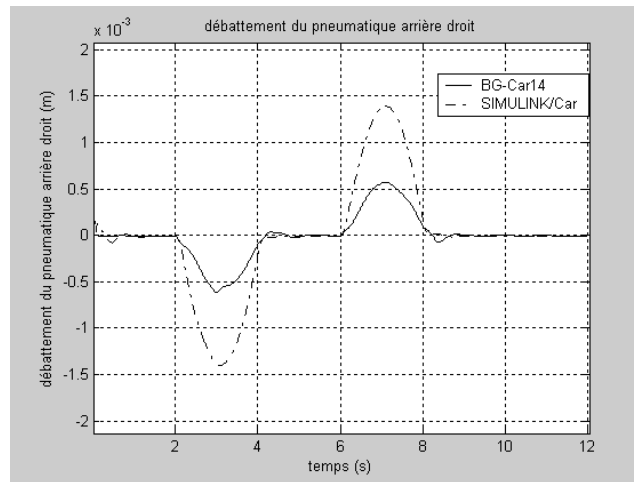


figure 1-35 : Débattement du pneumatique arrière droit

Les débattements des pneumatiques ont un comportement similaire pour les deux modèles. Contrairement aux suspensions où les débattements sont plus importants (tout en restant très faible) pour le modèle BGCar14, là les débattements des pneus sont moins importants pour le modèle BGCar14.

Les autres débattements de pneumatique sont regroupés en annexe D, le comportement global des pneumatiques est le même.

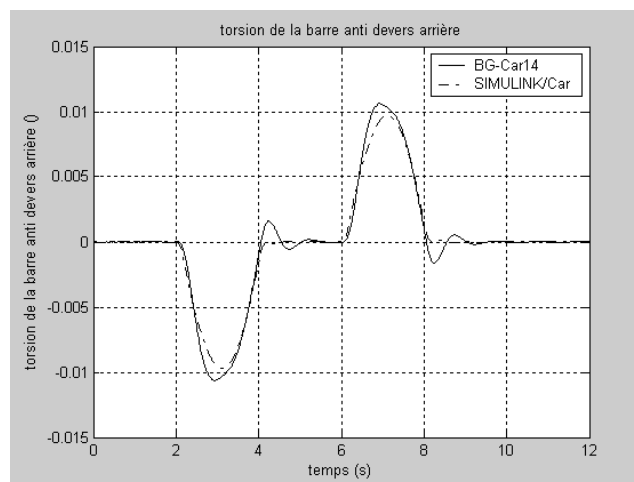


figure 1-36 : Torsion de la barre anti-roulis arrière

Les barres anti-roulis des deux modèles ont un comportement similaire, mais nous pouvons voir que pour le modèle BGCar14, la torsion des barres anti-roulis est moins amortie.

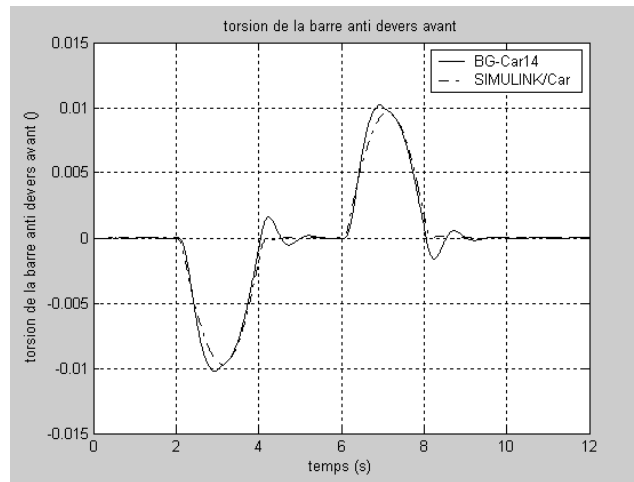


figure 1-37 : Torsion de la barre anti-roulis avant

La barre anti-roulis avant a le même comportement que la barre anti-roulis arrière, car l'angle de tangage est nul.

\* *vitesse longitudinale*  $V_x = 23.9 \text{ m/s}$

On applique le même scénario que précédemment au niveau de l'angle de braquage des roues, mais en augmentant la vitesse longitudinale du véhicule ( $V_x = 29 \text{ m/s}$ ). Il apparaît sur les courbes de l'annexe D-2 que les comportements des deux modèles véhicule restent les mêmes, mis à part que leurs différences sont plus marquées. On peut donc dire que la vitesse longitudinale joue un rôle important dans le comportement dynamique du véhicule. Notre modèle est sensible à la vitesse longitudinale, car plus elle est élevée, plus le modèle BGCar14 s'éloigne du comportement du modèle SIMULINK/Car.

Pour une vitesse importante, nous pouvons remarquer que le comportement des suspensions avant est fortement dégradé pour le deuxième virage.

## b) Autres scénarios de trajectoire

D'autres scénarios, tels que le dépassement, la mise en virage, ... ont été simulés pour effectuer la validation du modèle BGCar14, nous pouvons retrouver certaines de ces simulations en annexe D.

**\* Comparaison SIMULINK/Car, BGCar14 et bicyclette pour un dépassement.**

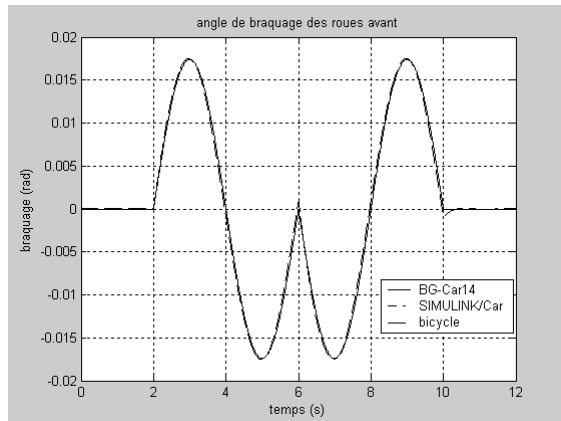


figure 1-38 : angle de braquage :  
dépassement

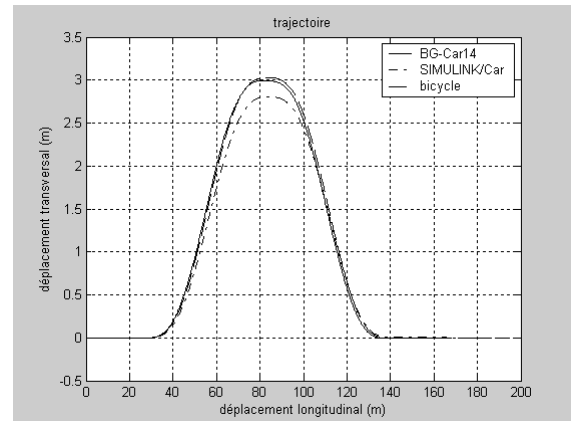


figure 1-39 : Trajectoire

Grâce à cette comparaison (Annexe D-1), nous pouvons voir qu'à basse vitesse les modèles ont quasiment le même comportement dynamique.

**\* Mise en virage**

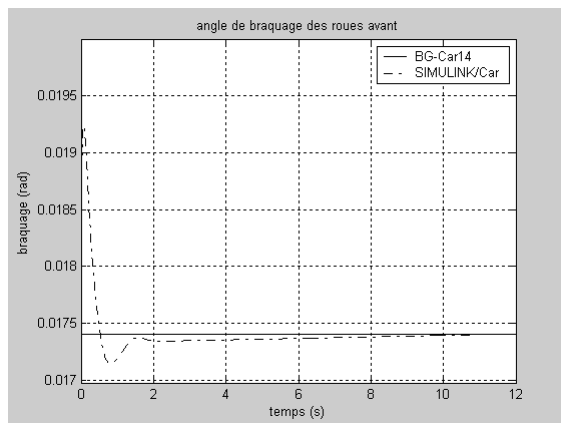


figure 1-40 : angle de braquage : mise en  
virage

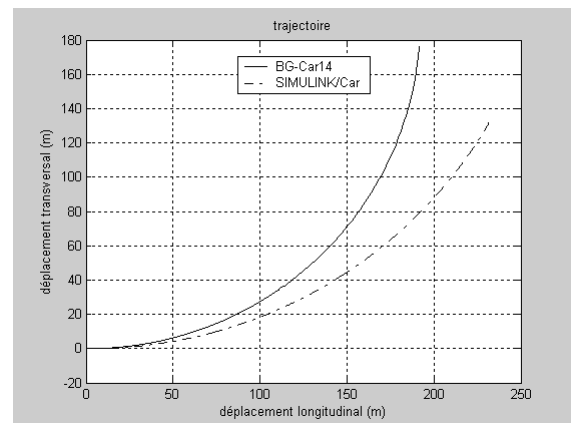


figure 1-41 : Trajectoire

Au cours de cette comparaison, dont nous pouvons voir les courbes en annexe D-4, nous avons pu constater une similitude entre le comportement dynamique des modèles BGCar14 et SIMULINK/Car.

**\* Commande de type sinusoïdale.**

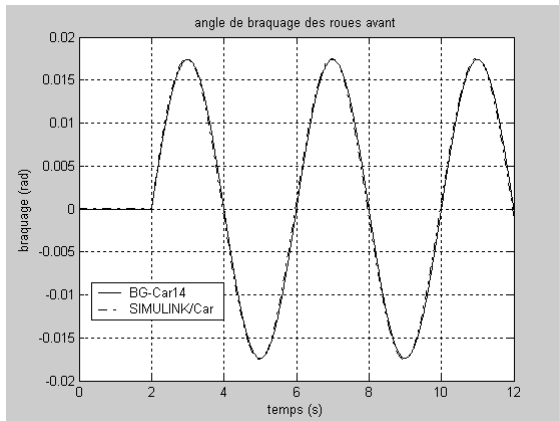


figure 1-42 : angle de braquage : sinus

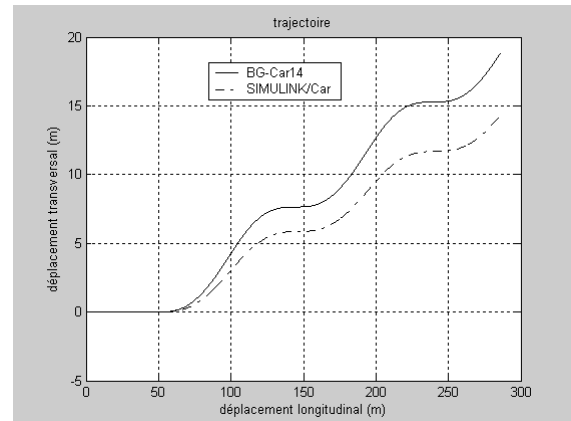


figure 1-43 : Trajectoire

Au cours de ce scénario de simulation (annexe D-5), nous avons pu constater que le 2 modèles présentent la même stabilité, leurs comportements ne sont pas dégradés par la multitude de changement de trajectoire.

**\* Test de l'élan.**

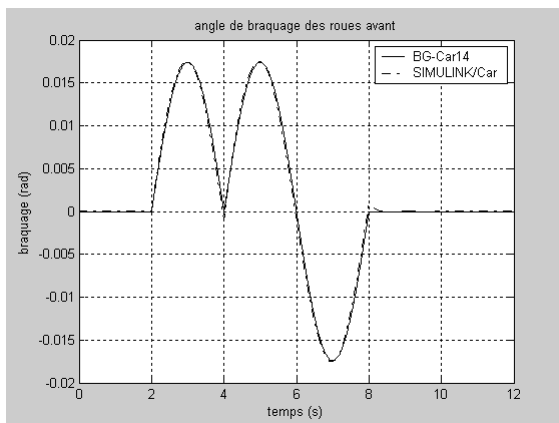


figure 1-44 : angle de braquage : test de l'élan

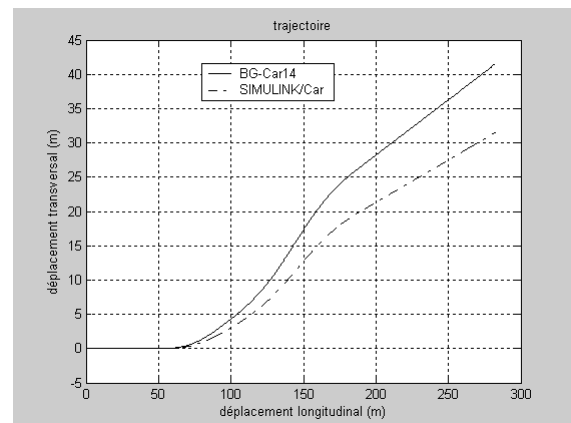


figure 1-45 : Trajectoire

Les courbes de l'annexe D-6 confirment toutes les constatations faites grâce aux simulations précédentes.

## 1.6 Conclusion

Nous avons construit deux modèles bond graph du véhicule. Nous pouvons dire que le modèle BGCar14 est validé qualitativement. Certains phénomènes comme la dérive, le tangage et les débattements présentent des écarts avec le modèle SIMULINK/Car, mais le comportement général des modèles de véhicule est le même. Nous remarquons aussi que plus la vitesse longitudinale du véhicule augmente, plus l'écart entre les modèles augmente.

On pourra donc prévoir grâce au modèle BGCAR14 le comportement du modèle SIMULINK/Car face à des incertitudes, mais pas les valeurs exactes des écarts de trajectoire si la masse du véhicule augmente par exemple.

On a remarqué au cours de cette comparaison que le couple d'auto-alignement et le carrossage pourraient jouer un rôle important dans la modélisation. Il serait peut être intéressant d'ajouter ces 2 phénomènes, pour obtenir un modèle BGCAR14 avec un comportement quantitativement plus proche de celui de SIMULINK/Car.



# Chapitre 2 :

## Influence des incertitudes sur la dynamique véhicule

### *2.1 Introduction*

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence des incertitudes paramétriques sur la dynamique du véhicule. Une des raisons pour laquelle cette étude a été entreprise est que l'élaboration de la loi de commande d'un système est toujours basée sur le comportement dynamique de son modèle, qui peut être plus ou moins proche du comportement du système réel. Les erreurs de modélisation peuvent être de deux types [Alazard et al, 1999], à savoir des incertitudes paramétriques (incertitude sur la valeur des paramètres physiques du processus) et des dynamiques mal connues ou négligées (méconnaissance de la dynamique haute fréquence du processus). Avant d'élaborer une loi de commande pour le véhicule, nous avons trouvé judicieux de connaître l'influence des paramètres incertains sur le comportement du modèle véhicule. L'autre raison qui nous a poussé à étudier l'influence des paramètres incertains sur le comportement dynamique du véhicule, est que le modèle SIMULINK/Car [Hanin, 2002] développé au sein de l'entreprise PSA Peugeot Citroën, n'est pas paramétrable facilement en ce qui concerne la masse ainsi que la position du centre de gravité. Donc aucune étude n'a été effectuée dans ce sens à ce jour.

Nous allons mettre en évidence cette influence au cours d'une campagne de simulation, pendant laquelle différents scénarios de commande vont être mis en œuvre, et pour chacun d'eux, nous allons faire varier les paramètres incertains du modèle, en modélisant les incertitudes paramétriques dans le modèle, afin de pouvoir effectuer aisément les simulations. Cette modélisation des incertitudes revient à construire le modèle bond graph incertain développé dans [Kam, 2001]. Nous rappelons la méthode dans un premier paragraphe. Nous appliquerons cette méthode à un modèle simplifié du véhicule : le modèle 'bicyclette' construit au paragraphe 1.3 ; nous pourrons ainsi montrer l'influence des incertitudes paramétriques sur le comportement de ce modèle. Le but final de ce chapitre est de montrer l'influence des paramètres incertains sur le modèle BGCar14, qui est un modèle véhicule plus complet. Nous montrerons à la construction du modèle bond graph incertain du BGCar14, dans lequel les conditions stationnaires (d'équilibre) sont fonction des incertitudes,

notamment au niveau des suspensions, des pneumatiques, ainsi que pour les barres anti-roulis. Nous étudierons la détermination symbolique des conditions stationnaires d'un modèle. Finalement un dernier paragraphe montrera l'influence des incertitudes sur le comportement dynamique du modèle véhicule.

## 2.2 Introduction des incertitudes dans un modèle bond graph

Dans ce paragraphe, nous rappelons la méthode développée dans [Kam, 2001] et [Dauphin-Tanguy et Kam, 1999], donnant une modélisation des incertitudes paramétriques dans les modèles bond graph.

Nous allons considérer dans un premier temps les éléments 1-port caractérisés par une loi constitutive linéaire. Il s'agit essentiellement des éléments passifs R, I et C. Dans un second temps, nous modéliserons les éléments de jonction 2-ports TF et GY. Nous verrons ensuite que la méthode peut s'étendre aux sources d'effort et de flux. Nous rappellerons la méthode développée dans [Dauphin-Tanguy et al, 2003] qui permet de modéliser les éléments multi-ports.

Le travail préliminaire consiste à déterminer les équivalences existant entre les représentations des éléments avec leurs incertitudes, et celles de ces mêmes éléments en les dissociant des incertitudes [Kam, 2001]. Nous allons donc transformer un élément avec une incertitude sur son paramètre, en deux composants distincts. Nous faisons une hypothèse nous permettant de respecter la cohérence du modèle avec les principes de l'outil bond graph et le système physique.

hypothèse 2-1 :

*La prise en compte des incertitudes paramétriques ne doit pas changer l'ordre du modèle.*

### 2.2.1 Modélisation des composants 1-port

#### a) Modélisation d'un élément passif de type I

Un élément de type I (masse, inertie, inductance) est caractérisé par une impédance  $Z_I$ , composée de la valeur nominale  $I_n$  et de l'incertitude  $\Delta I$ .

$$\frac{f_I}{e_I} = \frac{1}{I \cdot s} = \frac{1}{(I_n + \Delta I) \cdot s} \quad (2-1)$$

Le modèle acausal qui découle de l'expression (2-1) est donné figure 2-1.

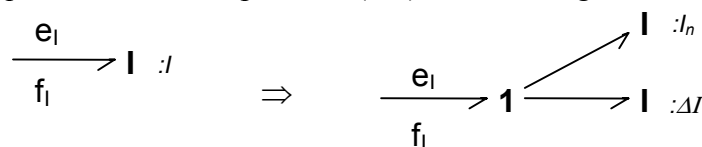


figure 2-1 : Modèle de l'élément I acausal

Dans le cas d'un élément R dont la loi constitutive est non linéaire, une décomposition du composant bond graph en un composant nominal et un composant contenant l'incertitude est

faisable dans certains cas bien qu'elle ne soit pas évidente. Un exemple sera traité pour le modèle bicyclette.

## b) Modélisation des autres éléments passifs

La modélisation de ces éléments est reprise en annexe F.

### 2.2.2 Causalité à affecter aux éléments 1-port

Les modèles présentés étant acausaux, il est nécessaire de déterminer la causalité à affecter aux différents composants modélisés ; L'affectation de la causalité doit respecter les règles des jonctions bond graph, et tenir compte de l'hypothèse 2-1.

#### a) Élément I et C

L'hypothèse 1 stipule que l'ajout d'éléments dynamiques associés aux incertitudes ne doit en aucun cas changer l'ordre du modèle. Rosenberg et Karnopp ont montré que l'ordre d'un modèle est égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale lorsque le modèle est en causalité intégrale préférentielle [Rosenberg et Karnopp, 1987]

Remarque 2-1 :

*Les éléments  $\Delta I$  et  $\Delta C$  auront une causalité dérivée imposée quelle que soit la causalité des éléments  $I_n$  et  $C_n$ .*

#### \* I et C en causalité intégrale

Sur la figure 2-2, les éléments dynamiques I :  $I_n + \Delta I$  et C :  $C_n + \Delta C$  dans le bond graph nominal ont une causalité intégrale. Suivant la remarque 2-1, nous affectons la causalité intégrale aux éléments I et C et systématiquement, la causalité dérivée aux deux éléments  $\Delta I$  et  $\Delta C$  constituant les incertitudes comme sur la figure 2-2. Les éléments incertains sont causalement liés aux éléments nominaux qui leurs sont associés, mais n'ont aucun autre couplage possible avec le reste des éléments du modèle bond graph.

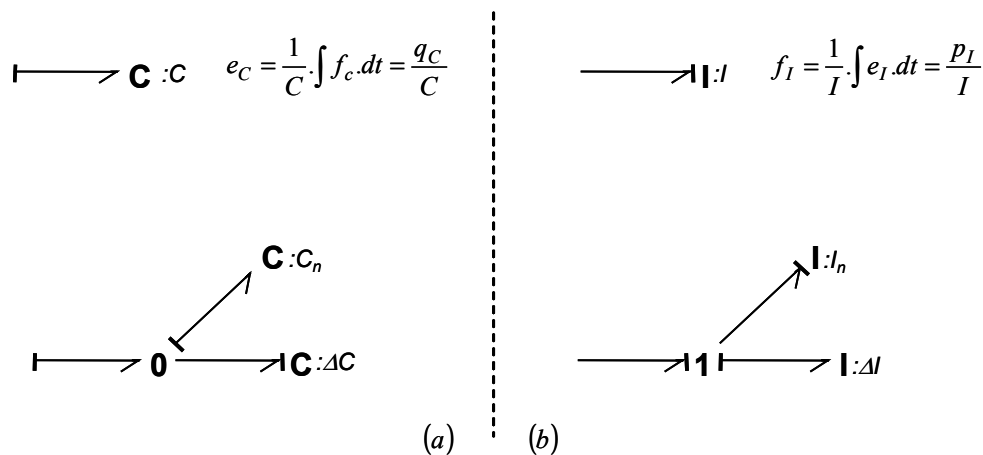


figure 2-2 : Modèle des éléments C et I en causalité intégrale

**\* I et C en causalité dérivée**

Sur la figure 2-3, les éléments dynamiques I :  $I_n + \Delta I$  et C :  $C_n + \Delta C$  dans le bond graph nominal sont en causalité dérivée. Les éléments I, C,  $\Delta I$  et  $\Delta C$  de la figure 2-3 se comportent de la même manière du point de vue couplage causal avec les autres éléments du modèle.

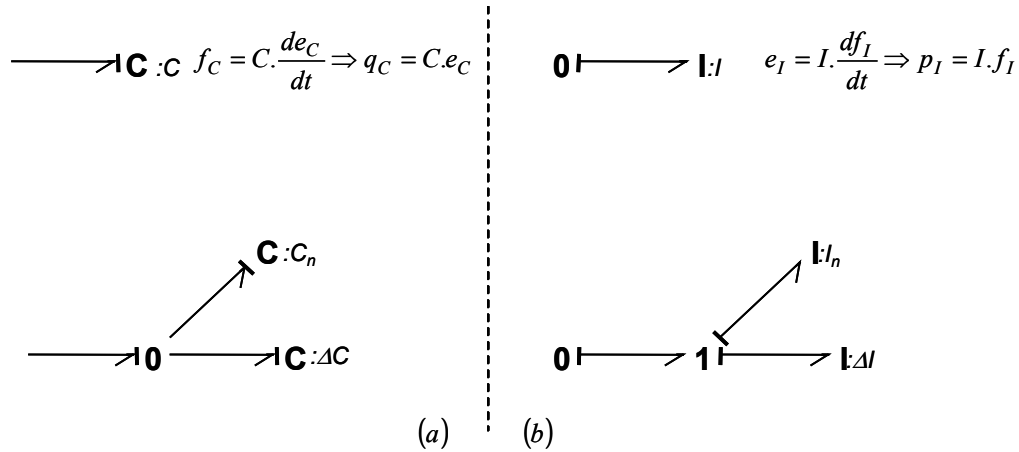


figure 2-3 : Modèle des éléments C et I en causalité intégrale

**b) Élément R**

La modélisation de cet élément est reprise en annexe F.

**2.2.3 Modélisation des composants 2-port**

**a) Modélisation d'un élément TF en causalité m**

Les lois caractéristiques de l'élément TF (figure 2-4a) en causalité m sont :

$$\begin{aligned} e_1 &= m.e_2 \\ f_2 &= m.f_1 \end{aligned} \tag{2-2}$$

En remplaçant le module du transformateur par  $m_n + \Delta m$ , on obtient :

$$\begin{aligned} e_1 &= (m_n + \Delta m).e_2 \\ f_2 &= (m_n + \Delta m).f_1 \end{aligned} \tag{2-3}$$

L'équation (2-3) conduit au modèle de la figure 2-4b

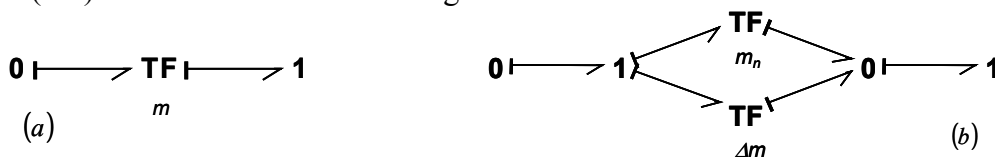


figure 2-4 : Modèle de l'élément TF

Dans le cas où l'élément de jonction est modulé (exemple MGY), on peut effectuer une décomposition de cet élément, afin de faire apparaître clairement le composant nominal et le composant incertain. (un exemple sera traité pour le modèle bicyclette).

## b) Modélisation des autres éléments de jonction

Leur modélisation est reprise en annexe F.

### 2.2.4 Modélisation des sources

#### a) Modélisation d'une source d'effort

Dans le modèle bond graph du bicyclette, une source d'effort est modulée par la masse du véhicule, la masse étant un paramètre incertain, nous allons essayer de décomposer ce composant en un composant nominal et un composant incertain.

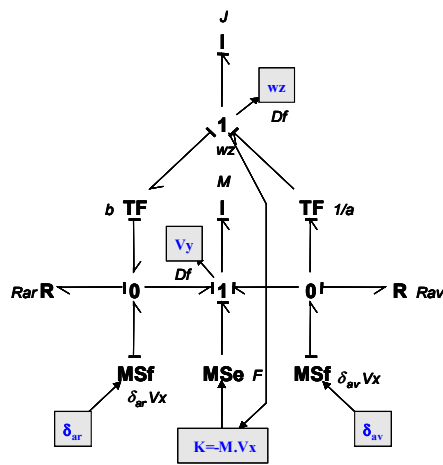


figure 2-5 : Modèle bond graph « bicyclette »

La loi constitutive de la source  $MSe$  est donnée par l'équation (2-4), déduite directement de la figure 2-6a.

$$e_{Se} = -M.Vx.\omega_z \tag{2-4}$$

En remplaçant la masse par sa valeur :  $M = M_n + \Delta M$ , on obtient :

$$e_{Se} = -(M_n + \Delta M).Vx.\omega_z \tag{2-5}$$

L'équation (2-5) conduit au modèle de la figure 2-6b.

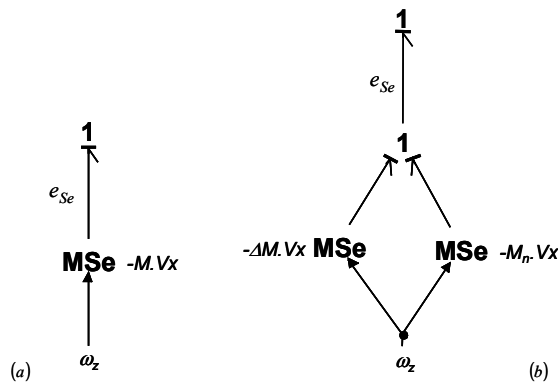


figure 2-6 : Modèle de la source d'effort

### 2.2.5 Modélisation des éléments multi-ports

Une extension de la méthode de construction du modèle bond graph incertain aux éléments multi-ports est proposée dans [Dauphin-Tanguy et al, 2003] ; elle permet de modéliser par exemple un élément incertain I 2-ports, comme dessiné figure 2-7.

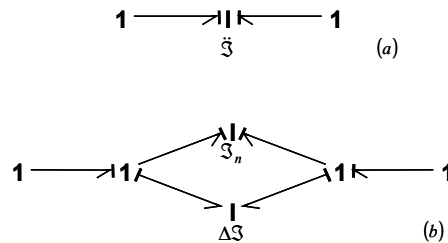


figure 2-7 : Modélisation d'un élément I 2-ports

## 2.3 Construction du modèle Bond graph incertain du bicyclette

Le modèle initial dit “nominal” est construit avec une masse nominale correspondant à la masse de l’habitacle plus une personne. La vitesse longitudinale considérée constante en fonctionnement peut prendre différentes valeurs ; le modèle est construit en considérant une vitesse longitudinale nominale.

Nous allons modéliser les incertitudes engendrées par une modification de la masse du véhicule, de la position de son centre de gravité, ainsi que de sa vitesse longitudinale. Nous pourrions ainsi représenter leur influence sur le fonctionnement du système.

Pour effectuer la construction du modèle bond graph incertain (‘Uncertain Bond Graph’ : UBG), nous allons nous appuyer sur la méthode développée dans [Dauphin-Tanguy et Kam, 1999], [Kam 2001] et [Kam et Dauphin-Tanguy, 2005], en respectant les hypothèses suivantes :

Dans le cas où la masse du véhicule, sa vitesse ou (et) la position de son centre de gravité changent, il y a écart par rapport au modèle nominal.

Une modification (ajout ou retrait) de masse dans le véhicule engendre le déplacement du centre de gravité et également une modification de l’inertie de l’ensemble. Le déplacement du centre de gravité conduit à une modification des rapports des éléments  $TF$  du modèle bond graph (figure 2-5).

Considérons la configuration nominale de la figure 2-8a. Une masse ( $\Delta M$ ) appliquée en  $P$  engendre la modification de la position du centre d’inertie qui passe de  $G_n$  à  $G_\Delta$  (figure 2-8b).

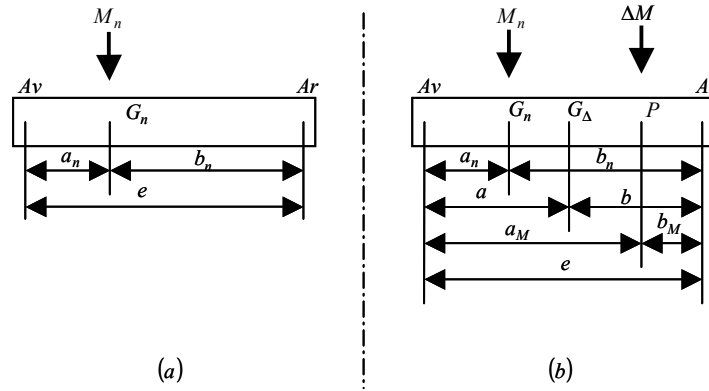


figure 2-8 : Modèles mécaniques masse nominale (a) modifiée (b)

Soient :

$a_n, b_n$  les distances nominales essieu  $Av-G_n$  et essieu  $Ar-G_n$ , avec la relation  $a_n + b_n = e$

$\Delta M$  la masse ajoutée,  $P$  son point d'application,  $a_M, b_M$  les distances essieu  $Av-P$  et essieu  $Ar-P$ , avec les relations  $a_M + b_M = e$ , et  $\Delta a_M = a_M - a_n$

$$M = M_n + \Delta M \quad (2-6)$$

$a, b$  les distances essieu  $Av-G_\Delta$  et essieu  $Ar-G_\Delta$ , avec la relation  $a + b = e$

$$a = a_n + \Delta a \quad b = e - (a_n + \Delta a) \quad \text{avec } \Delta a = \frac{\Delta a_M \cdot \Delta M}{M_n + \Delta M} \quad (2-7)$$

### Calcul des nouvelles valeurs des éléments R : $R_{av}$ et $R_{ar}$

$$\text{On a : } R_{av} = \frac{C_{av}}{V_x} \quad \text{et} \quad R_{ar} = \frac{C_{ar}}{V_x} \quad (2-8)$$

où

$$C_{av} = C_{avd} + C_{avg} \quad \text{et} \quad C_{ar} = C_{ard} + C_{arg} \quad (2-9)$$

$$C_i(F_{zi}) = a_3 \cdot \sin \left[ 2 \cdot \arctg \left[ \frac{F_{zi}}{a_4} \right] \right] \quad \text{avec } i = \{av_d, av_g, ar_d, ar_g\} \quad (2-10)$$

Un développement limité au second ordre de cette expression donne l'approximation suivante :

$$C_i(F_{zi}) = a_3 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{F_{zi}}{a_4} - \left[ \frac{F_{zi}}{a_4} \right]^2 \right] \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} F_{zavd} = F_{zavg} &= \frac{M_{av} \cdot g}{2} & \text{où} & \quad M_{av} = \frac{b}{e} \cdot \frac{M}{2} \cdot g \\ F_{zard} = F_{zarg} &= \frac{M_{ar} \cdot g}{2} & & \quad M_{ar} = \frac{a}{e} \cdot \frac{M}{2} \cdot g \\ & & & \quad \text{et } i = \{av_d, av_g, ar_d, ar_g\} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Prenons le cas de  $F_{zavg} = \frac{M_{av} \cdot g}{2}$  avec  $M_{av} = \frac{b}{e} \cdot M = \frac{(e-a)}{e} \cdot M$

L'introduction d'incertitudes sur la masse  $M$  et la position du centre de gravité  $a$  implique :

$$\begin{aligned} M &= M_n + \Delta M \\ a &= a_n + \Delta a \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$F_{zavg} = F_{zavg_n} + \Delta F_{zavg} \quad (2-12)$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta F_{zavg} &= F_{zavg} - F_{zavg_n} \\ &= \frac{(e - (a_n + \Delta a))}{e} \cdot \frac{(M_n + \Delta M) \cdot g}{2} - \frac{(e - a_n)}{e} \cdot \frac{M_n \cdot g}{2} \\ \Delta F_{zavg} &= \frac{g}{2 \cdot e} \cdot (-\Delta a \cdot (M_n + \Delta M) + \Delta M \cdot (e - a)) = \Delta F_{zavd} \end{aligned} \quad (2-13)$$

De même, avec  $F_{zar}$

$$\Delta F_{zar} = \Delta F_{zard} = \frac{g}{2 \cdot e} \cdot (\Delta a \cdot (M_n + \Delta M) + \Delta M \cdot a_n) \quad (2-14)$$

On a :

$$C_i(F_{zi}) = a_3 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{F_{zi}}{a_4} - \left[ \frac{F_{zi}}{a_4} \right]^2 \right] \quad \text{où } F_{zi} = F_{zi} + \Delta F_{zi} \quad \text{avec } i = \{av_d, av_g, ar_d, ar_g\}$$

on peut en déduire que

$$C_i(F_{zi}) = C_{i_n}(F_{zi}) + \Delta C_i(F_{zi}) \quad (2-15)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta C_i &= C_i - C_{i_n} \\ &= a_3 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{(F_{zi_n} + \Delta F_{zi})}{a_4} - \left[ \frac{(F_{zi_n} + \Delta F_{zi})}{a_4} \right]^2 - 2 \cdot \frac{F_{zi_n}}{a_4} + \left[ \frac{F_{zi_n}}{a_4} \right]^2 \right] \\ \text{D'où } \Delta C_i &= a_3 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{\Delta F_{zi}}{a_4} - \frac{2 \cdot F_{zi_n} \cdot \Delta F_{zi} + \Delta F_{zi}^2}{a_4^2} \right] \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$\text{On a : } R_i = \frac{C_i}{Vx} \quad \text{où } C_i = C_{i_n} + \Delta C_i \quad \text{avec } i = \{av_d, av_g, ar_d, ar_g\} \quad (2-17)$$

L'introduction d'une incertitude sur la vitesse longitudinale implique :

$$Vx = Vx_n + \Delta Vx \quad (2-18)$$

On peut donc écrire

$$R_i = \frac{C_{i_n} + \Delta C_i}{Vx_n + \Delta Vx} = R_{i_n} + \Delta R_i \quad (2-19)$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta R_i &= \frac{C_{i_n} + \Delta C_i}{Vx_n + \Delta Vx} - \frac{C_{i_n}}{Vx_n} \\ &= \frac{1}{Vx_n} \cdot \left[ \frac{(C_{i_n} + \Delta C_i) Vx_n - C_{i_n} \cdot (Vx_n + \Delta Vx)}{Vx_n + \Delta Vx} \right] \end{aligned}$$



$$\text{Soit } \Delta R_i = \frac{1}{Vx_n} \left[ \frac{\Delta C_i \cdot Vx_n - C_{i_n} \cdot \Delta Vx}{Vx_n + \Delta Vx} \right] \quad \text{avec } i = \{av_d, av_g, ar_d, ar_g\} \quad (2-20)$$

### Calcul de la nouvelle valeur de l'inertie

L'inertie avec changement de masse et de position du centre de gravité est donnée par la relation (2-25), donnée dans [Kam 2001] dont nous allons reprendre une partie de la démonstration :

Nous considérons le véhicule comme une masse continue, donc l'inertie de lacet peut se calculer de la manière suivante

$$J = \int^{M+\Delta M} x^2 \cdot dM \quad (2-21)$$

avec  $dM$  une masse élémentaire

et  $x$  la distance le centre de gravité  $G_\Delta$  (centre de gravité du système pour une masse  $M_n + \Delta M$ ) et le point d'application de la masse élémentaire.

$$\begin{aligned} J &= \int^M x^2 \cdot dM + (G_\Delta P)^2 \Delta M \\ &= \int^M (G_\Delta G + x')^2 \cdot dM + (G_\Delta P)^2 \Delta M \end{aligned}$$

avec  $G_\Delta G$  la distance entre le centre de gravité  $G_\Delta$  et le centre de gravité  $G$  (centre de gravité du système pour une masse  $M_n$ )

et  $x'$  la distance entre le centre de gravité  $G$  et le point d'application de  $dM$

$$\begin{aligned} J &= \int^M (G_\Delta G)^2 \cdot dM + \int^M 2 \cdot (G_\Delta G) \cdot x' \cdot dM + \int^M (x')^2 \cdot dM + (G_\Delta P)^2 \Delta M \\ &= (G_\Delta G)^2 \cdot M_n + 2 \cdot (G_\Delta G) \cdot \int^M x' \cdot dM + J_n + (G_\Delta P)^2 \Delta M \end{aligned}$$

où  $\int^M x' \cdot dM = 0$

d'où

$$J = (G_\Delta G)^2 \cdot M_n + J_n + (G_\Delta P)^2 \Delta M \quad (2-22)$$

La distance  $G_\Delta P$  s'exprime par

$$\Delta a_P = a - a_M = \frac{M_n}{M_n + \Delta M} \cdot (a - a_M) \quad (2-23)$$

La distance  $G_\Delta P$  s'exprime par

$$\Delta a = a_{\Delta M} - a_M = \frac{\Delta M}{M_n + \Delta M} \cdot (a - a_M) \quad (2-24)$$

d'où

$$J = J_n + \Delta a_M^2 \cdot \frac{\Delta M \cdot M_n}{\Delta M + M_n} \quad (2-25)$$

avec  $\Delta a_M = (a - a_M)$

### Autres paramètres touchés par les variations

$$a = a_n + \Delta a \quad b = (e - a_n) - \Delta a \quad \Delta a = \frac{\Delta a_M \cdot \Delta M}{M_n + \Delta M} \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned}
 K &= K_n + \Delta K \quad \text{avec } K = -M \cdot Vx \\
 \Delta K &= -(M_n \cdot \Delta Vx + \Delta M \cdot (Vx_n + \Delta Vx))
 \end{aligned}
 \tag{2-27}$$

on peut écrire :

$$F_n = K_n \cdot \psi \quad \text{et} \quad \Delta F = \Delta K \cdot \psi \tag{2-28}$$

La modélisation des incertitudes conduit au modèle bond graph de la figure 2-9

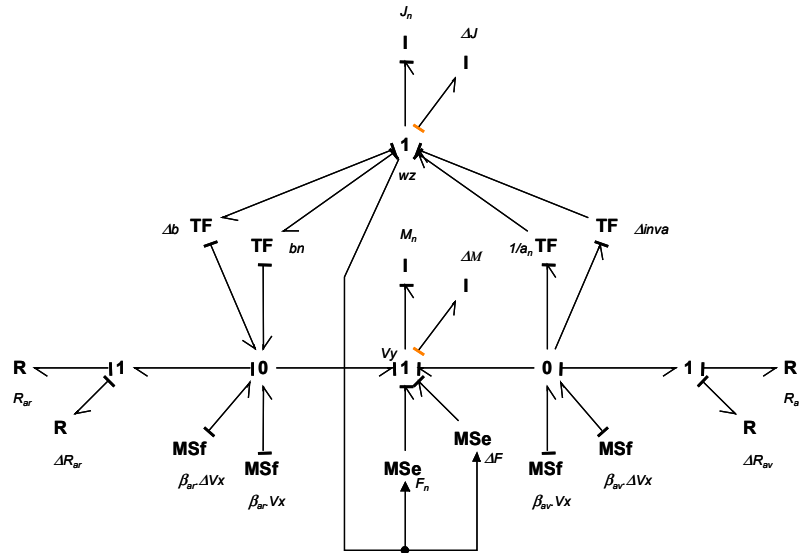


figure 2-9 : Modèle bond graph bicyclette incertain

Pour les simulations, nous considérerons les conditions suivantes:

- la masse nominale du modèle est considérée prise avec une personne dans le véhicule ( $M_n = 1467 \text{ kg}$ ), la modification de la masse du véhicule n'interviendra que par un ajout de masse.
- la position nominale du centre de gravité est située devant la position des passagers avant (voir figure 2-10), la modification de la position du centre de gravité se fera dans le sens des  $x$  négatifs.
- la vitesse nominale du véhicule est prise à la limite inférieure de validité du modèle (Magic Formula)  $Vx_n = 13.9 \text{ m/s}$ , la modification de la vitesse longitudinale du véhicule se fera par une augmentation de cette vitesse.

La variation de la masse et de la position du centre de gravité sont liées :

- d'une part pour calculer  $\Delta a = \frac{\Delta M \cdot \Delta a_M}{M_n + \Delta M}$ , on prendra en compte l'ajout de masse  $\Delta M$  résultante de plusieurs ajouts de masse  $\Delta M_i$  à une distance  $\Delta a_{M_i}$  du centre de gravité nominal. On peut calculer la distance entre le centre de gravité nominal et le point d'application de la variation de masse ( $\Delta M$ ) par l'équation suivante :

$$\Delta a_M = \frac{\sum_i \Delta M_i \cdot \Delta a_{M_i}}{\sum_i \Delta M_i} \tag{2-29}$$

- d'autre part la position de  $\Delta a_M$  va limiter la variation de masse (voir les différents cas envisagés, en référence à la figure 2-10 pour les distances estimées)

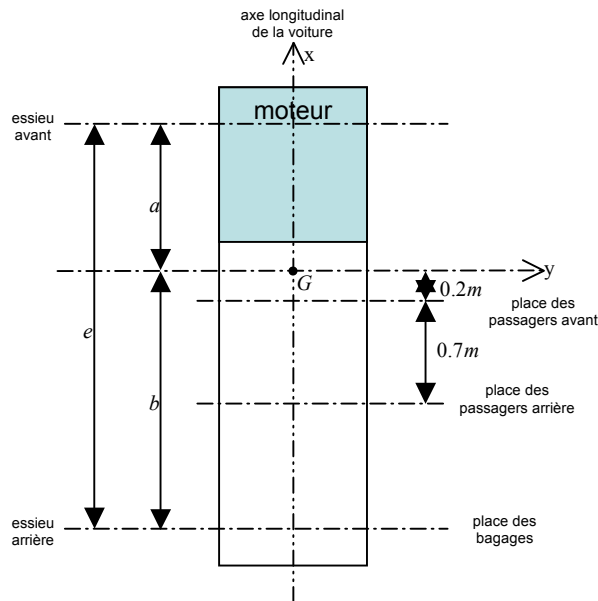


figure 2-10 : Schématisation du véhicule – hypothèses

## 2.4 Construction du bond graph incertain du modèle BGCAR14

Les objectifs de cette section sont d'exprimer par des équations symboliques tous les composants du modèle bond graph influencés par une déviation de la masse du véhicule et par la position du centre de gravité. Ceci est effectué en séparant explicitement les valeurs nominales des déviations pour chaque composant. Pour le système considéré les déviations sont associées aux éléments- $I$  et aux éléments- $TF$ , liés à la position du centre de gravité [Niesner et al, 2005]. Nous pourrions à partir de ces équations symboliques construire le bond graph incertain du modèle BGCAR14, à l'aide des méthodes développées dans [Dauphin-Tanguy et Kam, 1999] et [Dauphin-Tanguy et al, 2003].

Dans un premier paragraphe, nous calculerons les coordonnées du centre de gravité en cas d'ajout ou de retrait d'une masse, connaissant son point d'application. Dans un second paragraphe, nous calculerons la nouvelle matrice d'inertie dans les mêmes conditions, nous nous attarderons ensuite sur les autres paramètres affectés par ces incertitudes. Une fois tous les composants explicités (valeur nominale – déviation) nous pourrions construire le bond graph incertain.

### 2.4.1 Position du centre de gravité

La masse nominale est basée sur une collection imaginaire de particules de masse  $m_i$ , située aux positions  $x_i, y_i, z_i$  mesurées par rapport à l'arrière du véhicule comme indiqué sur la figure 2-11.

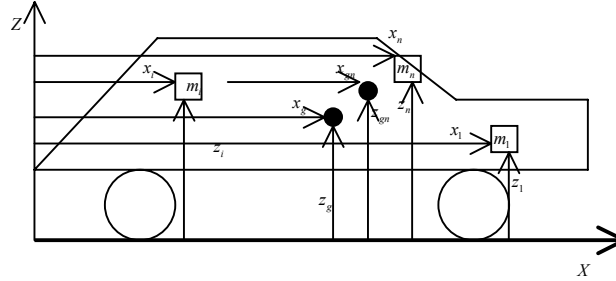


figure 2-11 : Vue 2D du véhicule

Cette collection de particules de masse a comme conséquence une position nominale pour le centre de gravité situé à  $x_{gn}, y_{gn}, z_{gn}$  tels que :

$$\begin{aligned} x_{gn} &= \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i} \\ y_{gn} &= \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \\ z_{gn} &= \frac{\sum m_i \cdot z_i}{\sum m_i} \end{aligned} \quad (2-30)$$

avec la masse nominale du véhicule  $m_n = \sum m_i$ .

Si une masse  $\Delta m$  est ajoutée en un point de coordonnées  $x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta$ , alors les coordonnées du nouveau centre de gravité sont données par l'équation (2-31)

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{\sum m_i \cdot x_i + \Delta m \cdot x_\Delta}{\sum m_i + \Delta m} \\ y_g &= \frac{\sum m_i \cdot y_i + \Delta m \cdot y_\Delta}{\sum m_i + \Delta m} \\ z_g &= \frac{\sum m_i \cdot z_i + \Delta m \cdot z_\Delta}{\sum m_i + \Delta m} \end{aligned} \quad (2-31)$$

La modification de la position du centre de gravité dans la direction longitudinale, est alors

$$\Delta x_g = x_{gn} - x_g = \frac{\Delta m (x_{gn} - x_\Delta)}{\sum m_i + \Delta m} \quad (2-32)$$

De même le changement de position du centre de gravité dans la direction transversale est

$$\Delta y_g = y_{gn} - y_g = \frac{\Delta m (y_{gn} - y_\Delta)}{\sum m_i + \Delta m} \quad (2-33)$$

et dans la direction verticale,

$$\Delta z_g = z_{gn} - z_g = \frac{\Delta m(z_{gn} - z_\Delta)}{\sum m_i + \Delta m} \quad (2-34)$$

Les nouvelles coordonnées du centre de gravité sont alors :

$$\begin{aligned} x_g &= x_{gn} + \Delta x_g, \\ y_g &= y_{gn} + \Delta y_g, \\ z_g &= z_{gn} + \Delta z_g. \end{aligned} \quad (2-35)$$

Remarque 2-2 : Ce développement pour une nouvelle masse supplémentaire peut facilement être généralisé pour plusieurs masses supplémentaires à n'importe quels endroits possibles du véhicule.

## 2.4.2 Matrice d'incertitude

La matrice d'inertie nominale se compose des moments d'inertie de roulis  $I_{xxn}$ , de tangage  $I_{yy n}$ , de lacet  $I_{zzn}$ , et des produits d'inertie roulis-tangage  $I_{xyn}$ , tangage-lacet  $I_{yzn}$ , roulis-lacet  $I_{xzn}$ . Ces moments et produits d'inertie sont exprimés par rapport aux axes attachés au centre de gravité nominal, de la manière suivante

$$\begin{aligned} I_{zzn} &= \sum m_i \cdot ((x_i - x_{gn})^2 + (y_i - y_{gn})^2) & I_{xyn} &= -\sum m_i \cdot (x_i - x_{gn})(y_i - y_{gn}) \\ I_{yy n} &= \sum m_i \cdot ((x_i - x_{gn})^2 + (z_i - z_{gn})^2) & I_{xzn} &= -\sum m_i \cdot (x_i - x_{gn})(z_i - z_{gn}) \\ I_{xxn} &= \sum m_i \cdot ((y_i - y_{gn})^2 + (z_i - z_{gn})^2) & I_{yzn} &= -\sum m_i \cdot (y_i - y_{gn})(z_i - z_{gn}) \end{aligned} \quad (2-36)$$

La matrice d'inertie nominale s'écrit de la manière suivante :

$$\mathfrak{S}_n = \begin{bmatrix} I_{xxn} & I_{xyn} & I_{xzn} \\ I_{xyn} & I_{yy n} & I_{yzn} \\ I_{xzn} & I_{yzn} & I_{zzn} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Si une nouvelle masse  $\Delta m$  est ajoutée en un point de coordonnées  $x_\Delta$ ,  $y_\Delta$ ,  $z_\Delta$ , entraînant un déplacement du centre de gravité aux coordonnées  $x_g$ ,  $y_g$ ,  $z_g$ , alors les moments d'inertie  $I_{zz}$ ,  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ , et produits d'inertie  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  doivent être déterminés par rapport aux axes attachés au nouveau centre de gravité.

La nouvelle inertie de lacet devient :

$$I_{zz} = \sum m_i \cdot [(x_i - x_g)^2 + (y_i - y_g)^2] + \Delta m \cdot [(x_\Delta - x_g)^2 + (y_\Delta - y_g)^2] \quad (2-38)$$

En soustrayant et en ajoutant la même quantité dans (2-38) nous pouvons obtenir,

$$I_{zz} = \sum m_i \cdot [(x_i - x_{gn}) + (x_{gn} - x_g)]^2 + [(y_i - y_{gn}) + (y_{gn} - y_g)]^2 + \Delta m \cdot [(x_\Delta - x_g)^2 + (y_\Delta - y_g)^2] \quad (2-39)$$

ce qui donne

$$I_{zz} = \sum m_i \cdot \left[ (x_i - x_{gn})^2 + (y_i - y_{gn})^2 + (x_{gn} - x_g)^2 + (y_{gn} - y_g)^2 + 2 \cdot (x_i - x_{gn}) \cdot (x_{gn} - x_g) + 2 \cdot (y_i - y_{gn}) \cdot (y_{gn} - y_g) \right] + \Delta m \cdot [(x_\Delta - x_g)^2 + (y_\Delta - y_g)^2] \quad (2-40)$$

Les deux premiers termes de l'addition correspondent à l'inertie nominale de lacet, le troisième terme  $(\Delta x_g)^2$  est multiplié par la masse nominale  $m_n = \sum m_i$ , le quatrième terme

$(\Delta y_g)^2$  est multiplié par la masse nominale, et les deux derniers termes du crochet sont égaux à zéro d'après la définition du centre de gravité, que nous rappelons ci-dessous :

$$2.(x_{gn} - x_g) \cdot \sum m_i \cdot (x_i - x_{gn}) = 2.(x_{gn} - x_g) \cdot [\sum m_i \cdot x_i - m_n \cdot x_{gn}] = 2.(x_{gn} - x_g) \cdot [m_n \cdot x_{gn} - m_n \cdot x_{gn}] = 0 \quad (2-41)$$

Il en est de même pour :

$$2.(y_{gn} - y_g) \cdot \sum m_i \cdot (y_i - y_{gn}) = 0. \quad (2-42)$$

Nous pouvons calculer la nouvelle inertie de lacet de la manière suivante, où la partie nominale et la déviation apparaissent clairement :

$$I_{zz} = I_{zzn} + m_n \cdot (\Delta x_g)^2 + m_n \cdot (\Delta y_g)^2 + \Delta m \cdot [(x_\Delta - x_g)^2 + (y_\Delta - y_g)^2] \quad (2-43)$$

De la même manière, nous pouvons écrire l'inertie de tangage,

$$I_{yy} = I_{yy_n} + m_n \cdot (\Delta x_g)^2 + m_n \cdot (\Delta z_g)^2 + \Delta m \cdot [(x_\Delta - x_g)^2 + (z_\Delta - z_g)^2] \quad (2-44)$$

et l'inertie de roulis

$$I_{xx} = I_{xx_n} + m_n \cdot (\Delta y_g)^2 + m_n \cdot (\Delta z_g)^2 + \Delta m \cdot [(y_\Delta - y_g)^2 + (z_\Delta - z_g)^2] \quad (2-45)$$

Le produit d'inertie roulis-tangage résultant de l'addition d'une masse devient,

$$I_{xy} = -\sum m_i \cdot (x_i - x_g) \cdot (y_i - y_g) - \Delta m \cdot (x_\Delta - x_g) \cdot (y_\Delta - y_g) \quad (2-46)$$

En ajoutant et en soustrayant  $x_{gn}$  dans la première parenthèse de la sommation et  $y_{gn}$  dans la seconde, nous pouvons déduire, après quelques manipulations,

$$I_{xy} = I_{xy_n} - m_n \cdot (x_{gn} - x_g) \cdot (y_{gn} - y_g) - \Delta m \cdot (x_\Delta - x_g) \cdot (y_\Delta - y_g) \quad (2-47)$$

Ce qui nous permet d'écrire, le produit d'inertie roulis-lacet

$$I_{xz} = I_{xz_n} - m_n \cdot (x_{gn} - x_g) \cdot (z_{gn} - z_g) - \Delta m \cdot (x_\Delta - x_g) \cdot (z_\Delta - z_g) \quad (2-48)$$

et le produit d'inertie tangage-lacet

$$I_{yz} = I_{yz_n} - m_n \cdot (y_{gn} - y_g) \cdot (z_{gn} - z_g) - \Delta m \cdot (y_\Delta - y_g) \cdot (z_\Delta - z_g) \quad (2-49)$$

En utilisant ce développement pour le modèle véhicule lacet-roulis-tangage, nous pourrions calculer les changements de position du centre de gravité et les variations des moments et produits d'inerties, connaissant la masse supplémentaire et les coordonnées du point d'application.

### 2.4.3 Autres paramètres

Le centre de gravité nominal est situé à une distance  $a_n$  de l'essieu avant,  $b_n$  de l'essieu arrière,  $c_{rn}$  de la droite,  $c_{ln}$  de la gauche, et  $h_{gn}$  du sol. En cas d'ajout ou de retrait d'une masse, ces distances deviennent :

$$* \quad a = a_n - \Delta x_g \quad \text{et} \quad b = b_n + \Delta x_g \quad (2-50)$$

avec  $\Delta x_g$  donné par l'équation (2-32)

$$\text{d'où l'empattement} \quad e = a_n + b_n = a + b \quad (2-51)$$

\*  $c_l = c_{ln} - \Delta y_g$  et  $c_r = c_{rn} + \Delta y_g$  (2-52)

avec  $\Delta y_g$  donné par l'équation (2-33)

d'où la voie  $w = c_{ln} + c_{rn} = c_l + c_r$  (2-53)

\*  $h_g$ , la hauteur du centre de gravité, en cas modification de la masse, est également modifié par les débattement des ressorts de suspension  $\Delta q_s$  et des ressorts de pneu  $\Delta q_t$  dus à l'effet de pesanteur.

$h_g = h_{gn} + \Delta h_g$  avec

$\Delta h_g = \Delta z_g + \frac{a}{e} \left( \frac{c_l}{w} (\Delta q_{slf} + \Delta q_{dlf}) + \frac{c_r}{w} (\Delta q_{srf} + \Delta q_{drf}) \right) + \frac{b}{e} \left( \frac{c_l}{w} (\Delta q_{slr} + \Delta q_{dlr}) + \frac{c_r}{w} (\Delta q_{srr} + \Delta q_{drr}) \right)$  (2-54)

avec  $\Delta z_g$  donné par l'équation (2-34)

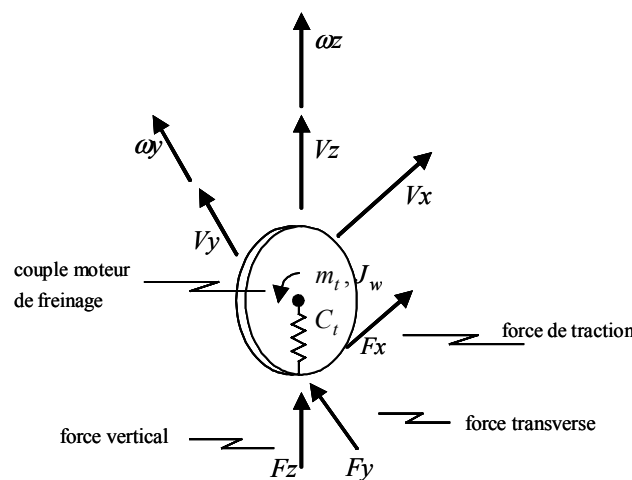


figure 2-12 : Représentation du pneumatique

\* les forces normales ( $F_z$ ) appliquées aux ressorts de suspension et au pneumatique (figure 2-12) dépendent de la masse du véhicule. Ces efforts apparaissent au moment où une masse est ajoutée dans le véhicule, et ceci quelque soit son emplacement, les paramètres du véhicule étant considérés constants dans le temps (le système est invariant dans le temps). Ces efforts sont donc les conditions initiales du modèle, et doivent être recalculés avant chaque simulation. Ces conditions initiales peuvent être modélisées par des sources d'effort aux junctions-1, attachées à chaque élément C lié à un ressort (figure 2-13). Pour cela nous devons connaître l'expression symbolique permettant de calculer cette condition initiale, ce qui sera le but du prochain paragraphe.

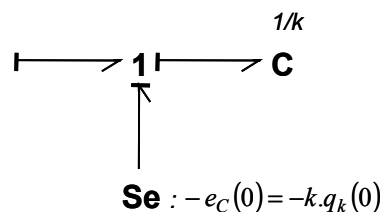


figure 2-13 : Modélisation de la condition initiale d'un ressort de raideur  $k$

## 2.5 Détermination symbolique des conditions stationnaires

Habituellement les valeurs numériques de l'état d'équilibre d'un système mécanique sujet aux seuls effets de la pesanteur sont déterminées en cours de simulations au moment de la stabilisation du mouvement. Une telle information est essentielle par exemple pour fixer les déplacements initiaux des ressorts (suspension et pneus) dans un modèle de voiture pour équilibrer les forces de pesanteur, permettant l'étude autour de l'état d'équilibre correspondant. Si certain paramètre change, ou est soumis à des incertitudes ou des déviations [Niesner et al., 2005], il est nécessaire de refaire la manipulation, et cela pour chaque cas étudié. Ce paragraphe propose de traiter la détermination symbolique de l'état d'équilibre, au moyen de manipulations causales (transfert de causalité, détermination de gain de chemins causaux), même pour des cas où il serait impossible sans le modèle de bond graph de trouver la solution existante, par une méthode purement algébrique.

P.Breedveld dans [Breedveld, 1984a] et [Breedveld, 1984b] propose un algorithme pour déterminer l'existence d'un état d'équilibre unique, par l'observation directe de sa représentation bond graph. L'algorithme est basé sur le remplacement des éléments I et C respectivement par des sources d'effort et de flux nulles. Quelques limitations peuvent être observées en employant cette approche en cas de conflits causaux ; de plus aucun calcul n'est effectué. Gawthrop [Gawthrop, 1995] montre comment l'affectation de la bicausalité peut permettre la détermination des conditions initiales des éléments dynamiques en les représentant par des SS-éléments (Steady State elements), mais sans autre développement.

Le prochain paragraphe pose le problème. Dans un deuxième paragraphe, une procédure basée sur des manipulations causales est développée dans le cas linéaire, une extension à quelques classes particulières de systèmes non linéaires est ensuite proposée. Enfin des exemples de demi-véhicule permettent de montrer les différentes situations pouvant apparaître dans l'exécution de cette procédure, premièrement le modèle en tangage, puis en roulis.

### 2.5.1 Position du problème

Énonçons le problème dans le cas linéaire. Considérons l'équation donnée par la représentation d'état (2-55)

$$\dot{x} = Ax + Bg, x(0) = 0, x \in \mathfrak{R}^n \quad (2-55)$$

L'état d'équilibre est obtenu en posant  $\dot{x} = 0$ , qui mène à l'équation algébrique

$$0 = Ax(\infty) + Bg \quad (2-56)$$

Deux cas peuvent être rencontrés :

- si la matrice A est inversible,  $x(\infty) = -A^{-1}Bg$  donne  $n$  valeurs indépendantes de l'état d'équilibre
- si la matrice A n'est pas inversible, les valeurs d'état d'équilibre  $x_i(\infty), i=1..n$  sont dépendantes et il est possible à partir de l'équation (2-56) d'exprimer seulement  $r$  valeurs d'état d'équilibre ( $r = \text{rang de } A$ ) en fonction des  $(n-r)$  autres et de  $g$ .

Le but de ce paragraphe est de montrer comment le modèle bond graph en causalité dérivée préférentielle (BGD) peut aider à résoudre ce problème en précisant graphiquement quelques



propriétés structurelles de l'équation (2-55) telles que l'existence d'un état d'équilibre, l'inversibilité de la matrice A liée à son rang, les valeurs d'état d'équilibre nul, le nombre de variables d'état d'équilibres dépendants.

Dans le cas où A n'est pas inversible, on proposera une procédure graphique, basée sur les propriétés causales du BGD, pour déduire des relations supplémentaires permettant la détermination complète de l'état d'équilibre. Cependant on montrera que plusieurs configurations de causalité dérivée peuvent être possibles. Certains d'entre elles mènent à des calculs très complexes. On proposera quelques règles pour trouver la meilleure configuration de causalité en termes de simplicité d'exécution.

## 2.5.2 Cas linéaire

### a) Test d'inversibilité

L'équation (2-57) peut être déduite du bond graph en causalité intégrale préférentielle (BGI) du système mécanique considéré soumis aux seuls effets de la pesanteur (accélération de pesanteur : g) appliqués aux masses (dans un intérêt de clarté de la présentation mais sans perdre de vue le cas général, nous supposons que tous les éléments I et C sont au départ en causalité intégrale) :

$$\dot{x} = Ax + Bg, x(0) = 0, x \in \mathfrak{X}^n \text{ avec } x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad p \in \mathfrak{X}^{n_p}, q \in \mathfrak{X}^{n_q}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{bmatrix}. \quad (2-57)$$

Le rang  $r$  de la matrice A est déterminé directement à partir du bond graph en causalité dérivée préférentielle (BGD) comme expliqué dans la propriété suivante [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991].

Propriété 2-1 :

*Le rang  $r$  de la matrice d'état A déduite d'un bond graph est égal au nombre d'éléments I et C en causalité dérivée quand une causalité dérivée préférentielle est affectée au modèle bond graph.*

### b) Cas où la matrice A est inversible

Du BGD, on peut déduire l'équation (2-58)

$$x = -A^{-1}\dot{x} - A^{-1}Bg \quad (2-58)$$

ce qui devient, en utilisant le vecteur de co-énergie  $Z = Fx$ ,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_I \\ f_C \end{pmatrix}}_{F\dot{x}} = -FA^{-1} \dot{x} - FA^{-1}Bg \quad (2-59)$$

A l'état d'équilibre, avec  $\dot{x} = 0$ , on obtient à l'équation (2-60)

$$\begin{pmatrix} f_I \\ f_C \end{pmatrix}_{(\infty)} = FA^{-1}Bg \quad (2-60)$$

Propriété 2-2 :

- s'il n'y a aucun chemin causal partant des sources d'effort liées aux effets de la pesanteur jusqu'à un élément I ou C en causalité dérivée dans le BDG, alors la variable d'état correspondant a une valeur nulle à l'équilibre,

- s'il y a un (ou plusieurs) chemin causal, alors le gain du chemin causal correspondant (ou la somme de gains) compose les termes de la matrice de l'équation (2-60).

### c) Cas où la matrice A n'est pas inversible

Dans ce cas, (n-r) éléments I ou C demeurent en causalité intégrale dans le BGD. Décomposons le vecteur d'état comme suit  $x = (x_{\{1\}}^t \ x_{\{2\}}^t)^t$  avec  $x_{\{1\}} = (p_{\{1\}} \ q_{\{1\}})^t$  regroupant les variables d'état liées aux éléments I et C acceptant une causalité dérivée dans le BGD, et  $x_{\{2\}} = (p_{\{2\}} \ q_{\{2\}})^t$  regroupant les variables d'état liées aux éléments I et C qui restent en causalité intégrale dans le BGD, afin d'éviter des conflits de causalité ou des boucles causales non solubles (boucle avec un gain égal à 1).

Le modèle d'état dérivé du BGI, s'exprime par l'équation (2-61)

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{\{1\}} \\ \dot{q}_{\{1\}} \\ \dot{p}_{\{2\}} \\ \dot{q}_{\{2\}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{pp11} & A_{pq11} & A_{pp12} & A_{pq12} \\ A_{qp11} & A_{qq11} & A_{qp12} & A_{qq12} \\ A_{pp21} & A_{pq21} & A_{pp22} & A_{pq22} \\ A_{qp21} & A_{qq21} & A_{qp22} & A_{qq22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{\{1\}} \\ q_{\{1\}} \\ p_{\{2\}} \\ q_{\{2\}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \\ B_{p2} \\ 0 \end{bmatrix} g \quad (2-61)$$

Il peut être décrit à partir du BGD par l'équation (2-62)

$$\begin{pmatrix} p_{\{1\}} \\ q_{\{1\}} \\ \dot{p}_{\{2\}} \\ \dot{q}_{\{2\}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{pp11} & A_{pq11} \\ A_{qp11} & A_{qq11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{pp12} & G_{pq12} \\ G_{qp12} & G_{qq12} \\ G_{pp22} & G_{pq22} \\ G_{qp22} & G_{qq22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_{\{1\}} \\ \dot{q}_{\{1\}} \\ p_{\{2\}} \\ q_{\{2\}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} H_{p1} \\ H_{q1} \\ H_{p2} \\ H_{q2} \end{bmatrix} g \quad (2-62)$$

Propriété 2-3 :

Dans le BGD, il n'y a aucun couplage entre des éléments I et C restant en causalité intégrale et des éléments R ou des éléments I et C en causalité intégrale, autrement leur causalité pourrait être changée en causalité dérivée.

Ainsi  $G_{pp22} = 0$   $G_{qq22} = 0$ ,  $G_{qp22} = 0$ ,  $G_{pq22} = 0$ .

Dans l'état d'équilibre, en plaçant toutes les termes dérivés égaux à zéro dans l'équation (2-62), on obtient :

$$\begin{pmatrix} p_{\{1\}}(\infty) \\ q_{\{1\}}(\infty) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{pp12} & G_{pq12} \\ G_{qp12} & G_{qq12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{\{2\}}(\infty) \\ q_{\{2\}}(\infty) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} H_{p1} \\ H_{q1} \end{bmatrix} g, \quad (2-63)$$

cette équation ne permet pas la détermination complète du vecteur d'état d'équilibre  $x(\infty)$ , et

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{p2} \\ H_{q2} \end{bmatrix} g \quad (2-64)$$

\*  $H_{q2} = 0$  est toujours vérifié en raison de  $B_{q2} = 0$ ,

\*  $H_{p2} = 0$  est satisfait s'il n'y a aucun chemin causal entre une source de pesanteur et les éléments I restés en causalité intégrale.

Propriété 2-4 :

*S'il est impossible d'affecter une causalité dérivée préférentielle tout en évitant un chemin causal entre une source de pesanteur et un élément I restant en causalité intégrale dans le BGD, il en résulte que l'on peut conclure que la variable d'état associée à cet élément I n'a pas d'état d'équilibre.*

Déterminons l'ensemble des équations manquantes pour la détermination complète du vecteur d'état d'équilibre  $x(\infty)$ . Considérons l'équation (2-65), déduite de l'équation (2-62), (dans laquelle nous supposons  $H_{p2} = 0$ )

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{\{2\}} \\ \dot{q}_{\{2\}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{pp21} & G_{pq21} \\ G_{qp21} & G_{qq21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_{\{1\}} \\ \dot{q}_{\{1\}} \end{pmatrix} \quad (2-65)$$

Cette équation, intégrée entre  $t = 0$  et  $t = \infty$  donne, en considérant  $x(0) = 0$

$$\begin{pmatrix} p_{\{2\}}(\infty) \\ q_{\{2\}}(\infty) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{pp21} & G_{pq21} \\ G_{qp21} & G_{qq21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{\{1\}}(\infty) \\ q_{\{1\}}(\infty) \end{pmatrix} \quad (2-66)$$

Les équations (2-63), (2-64) et (2-66) peuvent être réécrites, comme le montrent les équations (2-67), (2-68) et (2-69), en termes de variables de co-énergie.

$$\text{Avec } F_{\{i\}} = \begin{bmatrix} 1/I_{\{i\}} & 0 \\ 0 & 1/C_{\{i\}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (2-67)$$

et en notant  $Z_{\{i\}}(\infty) = F_{\{i\}} \cdot x_{\{i\}}(\infty)$

On obtient

$$\begin{pmatrix} e_{I\{1\}}(\infty) \\ f_{C\{1\}}(\infty) \end{pmatrix} = \underbrace{F_{\{1\}} \begin{bmatrix} G_{pp12} & G_{pq12} \\ G_{qp12} & G_{qq12} \end{bmatrix} F_{\{2\}}^{-1}}_{\Lambda_1} \begin{pmatrix} e_{I\{2\}}(\infty) \\ f_{C\{2\}}(\infty) \end{pmatrix} + \underbrace{F_{\{1\}} \begin{bmatrix} H_{p1} \\ H_{q1} \end{bmatrix}}_{\Lambda_2} g \quad (2-68)$$

et

$$\begin{pmatrix} e_{I\{2\}}(\infty) \\ f_{C\{2\}}(\infty) \end{pmatrix} = \underbrace{F_{\{2\}} \begin{bmatrix} G_{pp21} & G_{pq21} \\ G_{qp21} & G_{qq21} \end{bmatrix} F_{\{1\}}^{-1}}_{-\Lambda_1^t} \begin{pmatrix} e_{I\{1\}}(\infty) \\ f_{C\{1\}}(\infty) \end{pmatrix} \quad (2-69)$$

Les équations (2-68) et (2-69) peuvent être directement déduites du BGD en calculant les gains des chemins causaux (directs ou indirects) reliant les différents éléments I et C aux sources d'effort (de pesanteur). Elles permettent la détermination complète du vecteur de co-énergie de l'état d'équilibre  $Z(\infty)$ , comme suit:

$$Z(\infty) = \begin{pmatrix} e_{I\{1\}}(\infty) \\ f_{C\{1\}}(\infty) \\ e_{I\{2\}}(\infty) \\ f_{C\{2\}}(\infty) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (I + \Lambda_1 \Lambda_1^t)^{-1} \\ -\Lambda_1^t \cdot (I + \Lambda_1 \Lambda_1^t)^{-1} \end{bmatrix} \Lambda_2 \cdot g \quad (2-70)$$

Même pour des modèles très simples comme on le montrera dans la suite, on peut être amené à utiliser un logiciel de calcul symbolique comme Maple ou Mathematica.

### d) Procédure sur le BG

Sur le bond graph en causalité intégrale préférentielle (BGI) :

- identifier les éléments I et C en causalité intégrale

Sur le bond graph en causalité dérivée préférentielle (BGD) :

- si tous les éléments I et C peuvent être affectés d'une à une causalité dérivée sans que le bond graph présente de conflits causaux ou de boucles causales non solvables, alors A est inversible,
- dans le cas contraire, plusieurs affectations de causalité sont possibles en raison du couplage causal entre les éléments dynamiques en causalité intégrale et dérivée.
  - Choisir une configuration qui implique un minimum de boucles causales.
  - Identifier les éléments I et C associés respectivement à  $x_{\{1\}}$  et  $x_{\{2\}}$ .
    - Simplifier le BGD en éliminant tous les éléments (R, I, C) non directement ou indirectement (par des éléments R) reliés causalement aux sources d'efforts représentant la gravité. Nous obtenons le BG "simplifié" noté SBG.
    - Sur le SBG :
      - si tous les éléments I et C sont en causalité dérivée, la construction de l'équation (2-60) s'effectue en calculant les gains des chemins causaux des sources aux éléments.
      - si certains éléments I et C restent en causalité intégrale,
        - la construction de l'équation (2-68) s'effectue en calculant les gains des chemins causaux partant des sources et des éléments I et C restés en causalité intégrale (suivant la variable d'effort) jusqu'aux éléments I et C en causalité dérivée
        - la construction de l'équation (2-69) s'effectue en calculant les gains des chemins causaux partant des éléments I et C en causalité dérivée jusqu'aux éléments I et C restés en causalité intégrale (en suivant la variable de flux)

### 2.5.3 Cas non linéaire

La figure 2-14 montre la décomposition dans le domaine des vecteurs d'un BGI [Karnopp et Rosenberg, 1975]

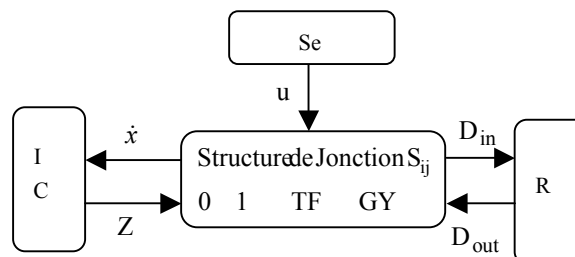


figure 2-14 : Décomposition de champ de vecteur d'un BGI

ce qui mène à  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$  avec  $Z = F(x)$  et  $D_{out} = L(D_{in})$  dans le cas général, et la

matrice de structure de jonction  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix}$  dont les termes sont non linéaires dans la cas d'éléments MTF et MGY.

Si seuls les éléments I et C ont des lois caractéristiques non linéaires, alors l'équation d'état est exprimée comme suit

$$\dot{x} = \Gamma F(x) + B(m_1 \ \dots \ m_{n_f})^t g \tag{2-71}$$

où  $\Gamma = [S_{11} + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}S_{21}]$  et  $B = [S_{13} + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}S_{23}]$  sont des matrices constantes, et  $n_f$  le nombre de masses affectées par la gravitation.

Essayer de passer de la causalité intégrale à la causalité dérivée correspond à essayer d'écrire  $[\Gamma F(x)]^{-1}$ . Déduire les équations symboliques du BGD impose que  $F(x)$  soit inversible, mais il est impossible de poser une règle générale. Néanmoins il est possible de vérifier la condition nécessaire " $\Gamma$  doit être inversible" par des manipulations causales comme on le fait dans le cas linéaire.

Proposition 2-1

*Une condition nécessaire pour qu'un état d'équilibre existe pour un BG où seuls les éléments I et C ont des lois caractéristiques non linéaires est qu'il est possible de construire le BGD sans qu'il présente de conflits causaux ou de boucles de causalité non solvables.*

### 2.5.4 Mise en œuvre

L'implémentation de la méthode va se faire dans un premier temps sur le demi-véhicule vertical en mouvement de pompage-tangage, représenté sur la figure 2-15, puis sur le demi-véhicule vertical en mouvement de pompage-roulis, représenté par la figure 2-19a.

#### a) Modèle en pompage- tangage

A partir du BGI de la figure 2-16, nous pouvons dire que le vecteur d'état  $x \in \mathfrak{R}^8$ .

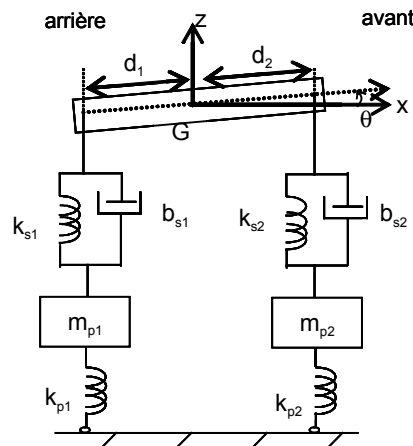


figure 2-15 : Demi-véhicule, en pompage- tangage

En affectant une causalité dérivée préférentielle au modèle bond graph de la figure 2-16, deux configurations causales sont possibles, chacune d'elles impliquant une boucle de causalité. Une des configurations contient une boucle de causalité avec un gain égal à  $(-d_2/d_1)$ , l'autre contient une boucle de causalité avec un gain égal à  $(-d_1/d_2)$ . Ces gains sont  $\neq 1$ , ainsi ces boucles de causalité sont solvables. Une causalité dérivée préférentielle peut être appliquée sur tous les éléments I et C ce qui signifie que la matrice A est inversible. La configuration doit être choisie selon les valeurs numériques de  $d_1$  et  $d_2$  afin d'impliquer un gain de boucle de causalité tels que  $|d_i/d_j| < 1 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2$ .

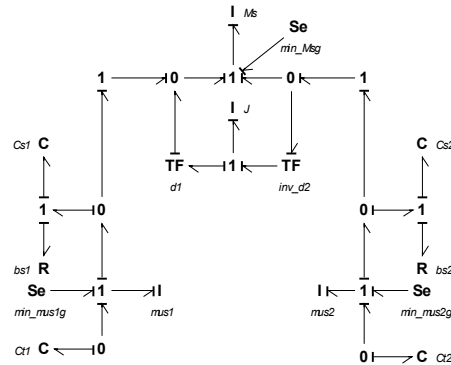


figure 2-16 : Bond graph du demi-véhicule, en pompage-tangage – BGI

On peut supprimer les éléments I et R qui n'ont aucun lien causal avec les sources d'effort, ce qui mène au BGD simplifié noté SBGD dessiné figure 2-17.

Déterminons par exemple  $e_{C_{s1}}(\infty)$  en calculant le gain des chemins causaux partant de la source d'effort (Se : min\_Msg) à l'élément C correspondant C :  $C_{s1}$ . Les différents chemins causaux possibles peuvent être directs en traversant les liens 1-2-3-4-5-6-8-9... ou indirects en passant une fois, deux fois... k fois... par la boucle de causalité et en sortant par les liens 8, 9..

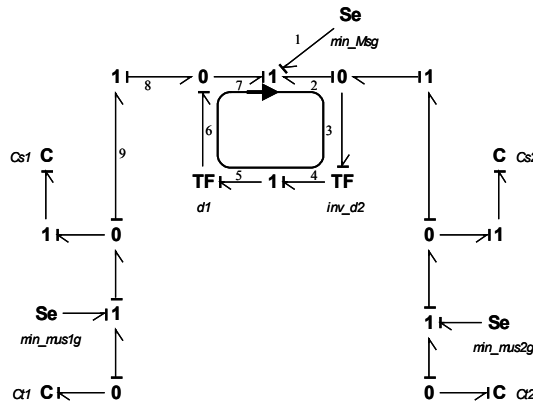


figure 2-17 : Modèle-SBGD en pompage-tangage

La somme de tous ces gains de chemins causaux peut être calculée par :

$$G = (-d_2/d_1)[1 + (-d_2/d_1) + (-d_2/d_1)^2 + \dots + (-d_2/d_1)^k + \dots], \tag{2-72}$$

cette série géométrique a une somme égale à  $(-d_2/d_1) \frac{1 - (-d_2/d_1)^{k+1}}{1 - (-d_2/d_1)}$ . Ce calcul correspond à la configuration  $|d_2/d_1| < 1$ , ainsi cette somme est égale à  $-d_2/(d_1 + d_2)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

On trouve le résultat suivant :

$$e_{C_{s1}} = \frac{d_2}{d_1 + d_2} M_s g \tag{2-73}$$

De la même manière nous pouvons calculer toutes les relations conduisant à l'équation (2-74), sur le modèle de l'équation (2-60)

$$\begin{pmatrix} e_{C_{s1}} \\ e_{C_{s2}} \\ e_{C_{r1}} \\ e_{C_{r2}} \end{pmatrix} (\infty) = \begin{bmatrix} M_s d_2 / (d_1 + d_2) \\ M_s d_1 / (d_1 + d_2) \\ m_{us1} + M_s d_2 / (d_1 + d_2) \\ m_{us2} + M_s d_1 / (d_1 + d_2) \end{bmatrix} g \tag{2-74}$$

Remarque 2-3 :

Pour le cas particulier où  $d_1 = d_2$  on ne peut pas calculer de façon purement mathématique la somme de la suite géométrique, et trouver de cette manière le résultat donné par l'équation (2-74), mais par une méthode expérimentale, nous pouvons montrer que les résultats obtenus sont indépendants des valeurs numériques de  $d_1$  et  $d_2$ , et sont les mêmes que ceux trouvés par la simulation.

Ces valeurs d'état d'équilibre peuvent être ajoutées sur le BG en utilisant des sources d'effort pour modéliser les forces équilibrant l'effet de pesanteur agissant sur la suspension et le pneu.

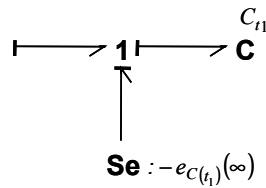


figure 2-18 : Efforts dans les ressorts pour équilibrer l'effet de pesanteur

### b) Modèle en pompage-roulis

\* à partir du BGI de la figure 2-19b, nous pouvons dire que le vecteur d'état  $x \in \mathfrak{R}^9$ .

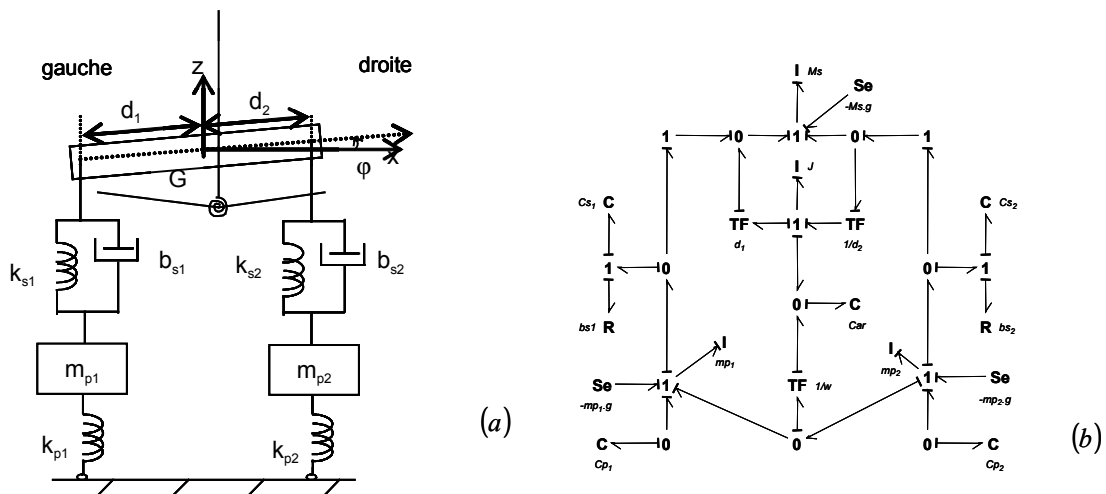


figure 2-19 : Demi-véhicule dit bicyclette en pompage-roulis : (a) schéma - (b) BGI

\* Du BGD :

- la matrice A n'est pas inversible parce qu'un élément C reste en causalité intégrale,  $r = 8$
- plusieurs configurations de causalité sont possibles, selon l'élément C choisi pour rester en causalité intégrale. Dans chaque cas, les éléments I et R n'ont aucun lien causal ni avec les sources d'effort ni avec l'élément C en causalité intégrale, ils peuvent être supprimés, ce qui mène au SBGD.

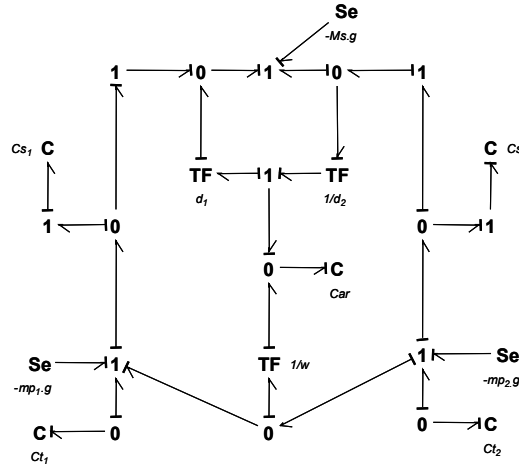


figure 2-20 : modèle SBGD, en pompage-roulis sans boucle de causalité

\* Pour le SBGD, 2 configurations causales différentes sont possibles, la première n'impliquant aucune boucle de causalité comme représenté sur la figure 2-20, et la seconde impliquant deux boucles de causalité. De la première configuration, l'équation (2-63) peut être directement déduite sans aucune manipulation d'équation. Pour le choix de l'élément  $C_{s1}$  en causalité dérivée, le vecteur  $q$  est décomposé comme suit

$$q_{\{1\}} = (q_{C_{s2}} \quad q_{C_{t1}} \quad q_{C_{t2}} \quad q_{C_{ar}}) \quad q_{\{2\}} = (q_{C_{s1}}) \quad (2-73)$$

A partir de l'équation (2-68) et en calculant les gains des chemins causaux, il vient

$$\begin{pmatrix} e_{C_{s2}} \\ e_{C_{t1}} \\ e_{C_{t2}} \\ e_{C_{ar}} \end{pmatrix} (\infty) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1+(d_1+d_2)/w \\ -1-(d_1+d_2)/w \\ -(d_1+d_2) \end{bmatrix}}_{\Lambda_1} e_{C_{s1}}(\infty) + \underbrace{\begin{bmatrix} M_s \\ -M_s d_2/w + m_{us1} \\ M_s(1+d_2/w) + m_{us2} \\ M_s d_2 \end{bmatrix}}_{\Lambda_2} g \quad \text{avec } w = d_1 + d_2 \quad (2-74)$$

Le calcul de l'équation (2-69) est effectué en écrivant l'équation caractéristique du flux à la jonction 0 relié à l'élément C :  $C_{s1}$  et en intégrant cette dernière :

$$q_{C_{s1}}(\infty) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1-(d_1+d_2)/w & 1+(d_1+d_2)/w & w \end{bmatrix}}_{-\Lambda'} q_{\{1\}}(\infty) \quad (2-75)$$

En combinant les équations (2-74) et (2-75), conformément à l'équation (2-60), on aboutit à

$$\begin{pmatrix} e_{C_{s2}} \\ e_{C_{t1}} \\ e_{C_{t2}} \\ e_{C_{ar}} \\ e_{C_{s1}} \end{pmatrix} (\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & w \end{bmatrix} \left\{ Id + k_{s1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/k_{s2} & & & 0 \\ & 1/k_{t1} & & \\ & & 1/k_{t2} & \\ 0 & & & 1/k_{ar} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \Lambda_2 g \quad (2-76)$$



$e_{C_{s1}}$  et  $e_{C_{s2}}$  donnés par les équations (2-77) et (2-78) sont écrits tels qu'il sont calculés à l'aide du logiciel *Maple* ; quelques simplifications peuvent être effectuées, en particulier si on suppose que les deux parties du modèle sont symétriques, on a donc des paramètres identiques ( $k_{t1} = k_{t2}$   $k_{s1} = k_{s2}$ ).

$$e_{C_{s2}} = k_{s2} \frac{\left( \begin{aligned} &M_s \cdot w \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot k_{ar} + M_s \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 \cdot k_{ar} + M_s \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot d_1 \cdot d_2 + M_s \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 + M_s \cdot w^2 \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \\ &+ M_s \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot k_{ar} + M_s \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + M_s \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot k_{ar} + M_s \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 \cdot k_{ar} + M_s \cdot w \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_2 \cdot k_{ar} \\ &+ 2 \cdot M_s \cdot w \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot k_{ar} + k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot m_{us1} \cdot w^2 + k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot m_{us1} \cdot w + k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot m_{us1} \cdot w \\ &- k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot m_{us2} \cdot w^2 - k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot m_{us2} \cdot w - k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot m_{us2} \cdot w \end{aligned} \right)}{Den} g \quad (2-77)$$

$$e_{C_{s1}} = k_{s1} \frac{\left( \begin{aligned} &k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot m_{us2} \cdot w^2 + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot M_s \cdot w^2 + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot m_{us2} + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot M_s + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot M_s \cdot w \\ &+ k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot m_{us2} \cdot w + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_2^2 \cdot M_s - k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot m_{us1} \cdot w + k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot M_s - k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot d_1 \cdot m_{us1} \cdot w + \\ &k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot d_2^2 \cdot M_s + k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot M_s \cdot w - k_{s2} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \cdot m_{us1} \cdot w^2 + k_{t2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot M_s \cdot w^2 + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot M_s \cdot w^2 \\ &+ k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot d_2^2 \cdot M_s \cdot w^2 + 2 \cdot k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{ar} \cdot d_2 \cdot M_s \cdot w \end{aligned} \right)}{Den} g \quad (2-78)$$

$$\begin{aligned} Den = &k_{s2} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot w^2 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + 2 \cdot k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot k_{ar} + k_{s1} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + 2 \cdot k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot w \cdot d_1 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \\ &+ 2 \cdot k_{s2} \cdot w \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot k_{ar} + 2 \cdot k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot d_2^2 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} + 2 \cdot k_{s2} \cdot k_{s1} \cdot w \cdot d_2 \cdot k_{t2} \cdot k_{ar} \\ &+ 2 \cdot k_{s2} \cdot w \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_2 \cdot k_{ar} + k_{s2} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot k_{ar} + k_{s2} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_2^2 + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 \cdot k_{ar} + 2 \cdot k_{s2} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1 \cdot d_2 \\ &+ k_{s2} \cdot w^2 \cdot k_{t1} \cdot k_{t2} \cdot k_{s1} \cdot d_1^2 + k_{s2} \cdot k_{t1} \cdot k_{s1} \cdot d_2^2 \cdot k_{ar} \end{aligned} \quad (2-79)$$

La solution serait identique, mais les calculs seraient beaucoup plus difficiles avec l'autre configuration de causalité, et ceux-ci en raison du grand nombre d'équations implicites dues aux boucles causales.

### c) Conclusions

Dans ce paragraphe nous avons montré comment déterminer symboliquement le vecteur d'état d'équilibre en utilisant uniquement les manipulations causales et l'étude des propriétés causales du BG, en particulier dans le cas où A est non inversible, c'est-à-dire le cas où la solution ne peut pas être trouvée avec une approche purement algébrique. Quelques résultats importants peuvent directement être déduits en examinant les chemins causaux entre les sources d'effort de pesanteur et les éléments I, R et C dans le modèle bond graph en causalité dérivée, comme par exemple l'existence d'un état d'équilibre, et le nombre d'état d'équilibre à valeur nulle.

Des calculs énormes peuvent intervenir, c'est pourquoi il est pratiquement indispensable d'utiliser un logiciel comme *ARCHER* pour les manipulations et les calculs causaux et un logiciel comme *Maple* pour des calculs finaux.

## 2.6 Réponse des systèmes à une entrée de commande fixée

Nous allons dans un premier temps effectuer l'étude de l'influence des paramètres incertains sur le comportement du modèle bicyclette, nous effectuerons dans un second temps cette même étude sur le modèle BGCAR14.

Pour cette étude, nous avons choisi d'imposer une entrée de commande définie au système, nous pourrions ainsi étudier le comportement des modèles quand ceux-ci sont soumis à des incertitudes sur la masse et sur la position du centre de gravité.

### 2.6.1 Simulation du modèle bicyclette

Nous avons choisi d'effectuer dans un premier temps l'étude sur le modèle bicyclette, car celui-ci donne une bonne représentation du comportement du véhicule à basse vitesse, et il est surtout très facile à mettre en place. Comme nous allons le voir, nous avons aussi étudié l'influence de la vitesse longitudinale sur le comportement du modèle bicyclette, car pour mettre en place une commande dans un véhicule, nous serons amenés à l'utiliser afin de déterminer un comportement de référence pour la correction de la trajectoire.

#### a) Scénario de commande envisagé

Les entrées de commande sont les angles de braquage des roues avant et arrière. Nous considérons que l'angle de braquage des roues arrière est nul. La commande du modèle se limite à l'angle de braquage des roues avant, sous la forme d'une demie période d'un sinus d'amplitude 0.0174 rad ( $1^\circ$ ), de durée 2s : (figure 2-21).

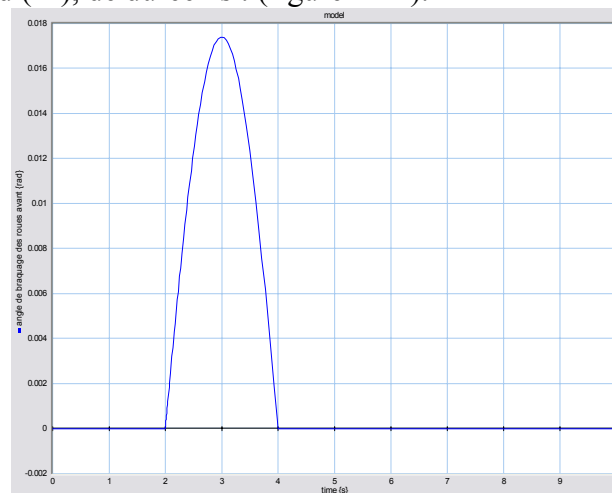


figure 2-21 : Action du conducteur – angle de braquage  $\delta_{av}$

Nous allons étudier l'influence des différents paramètres incertains du système :

- la masse,
- la position du centre de gravité,
- la vitesse longitudinale.

Comme nous l'avons vu précédemment, la masse et la position du centre de gravité d'un véhicule sont liées ; nous allons donc diviser notre étude en deux parties. Dans un premier temps, nous allons étudier l'influence de la vitesse longitudinale sur le comportement

dynamique du modèle, puis nous étudierons l'influence de la masse et de la position du centre de gravité du modèle.

## b) Influence de la vitesse longitudinale

L'étude porte sur l'influence de la variation de la vitesse longitudinale, afin de déterminer le changement de comportement dynamique du modèle bicyclette face à une connaissance incertaine de la vitesse longitudinale, cette dernière pouvant s'écrire de la manière suivante (équation 2-80):

$$V_x = V_{x_n} + \Delta V_x \quad (2-80)$$

$$\text{avec } V_{x_n} = 13.9 \text{ m/s}$$

On se place dans le cas nominal pour la masse et la position du centre de gravité.

Soient

$$M = M_n = 1467 \text{ kg} \quad (2-81)$$

et

$$a = a_n = 0.99 \text{ m} \quad (2-82)$$

L'accélération transversale du centre de gravité  $G$  représentée sur la figure 2-22 est prise dans le repère lié au châssis :

$$a_y = \frac{F_{y_{av}} + F_{y_{ar}}}{M} \quad (2-83)$$

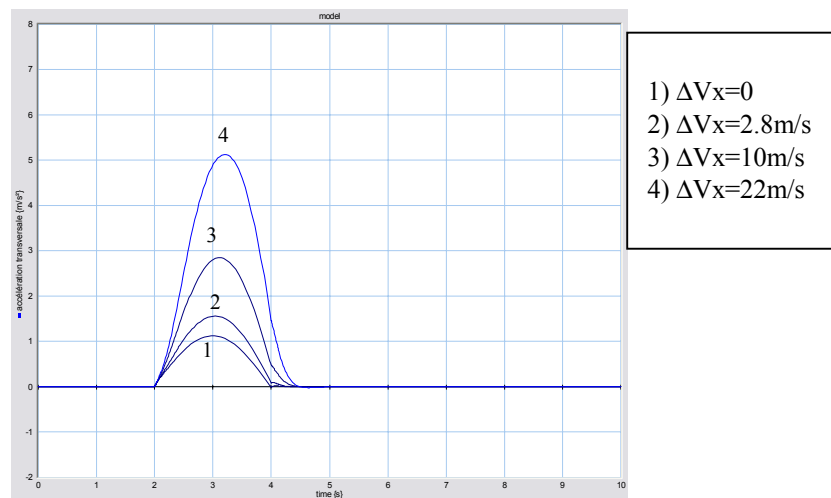


figure 2-22 : Influence de la vitesse longitudinale sur l'accélération transversale du véhicule

Plus la vitesse longitudinale augmente, plus l'accélération transversale devient importante au cours du virage (valeur maximale), le système met plus de temps à atteindre la valeur maximale de l'accélération transversale quand la vitesse longitudinale augmente, le système est moins rapide. Les discontinuités de la commande entraînent des phénomènes qui ne devraient pas apparaître avec une commande plus lisse.

La vitesse transversale représentée sur la figure 2-23 est prise dans le repère lié au châssis, elle est directement déduite du modèle bond graph (figure 2-5) :

$$V_y = \frac{1}{M} \cdot \int (F_{y_{av}} + F_{y_{ar}} - M \cdot V_x \cdot \omega_z) dt \quad (2-84)$$

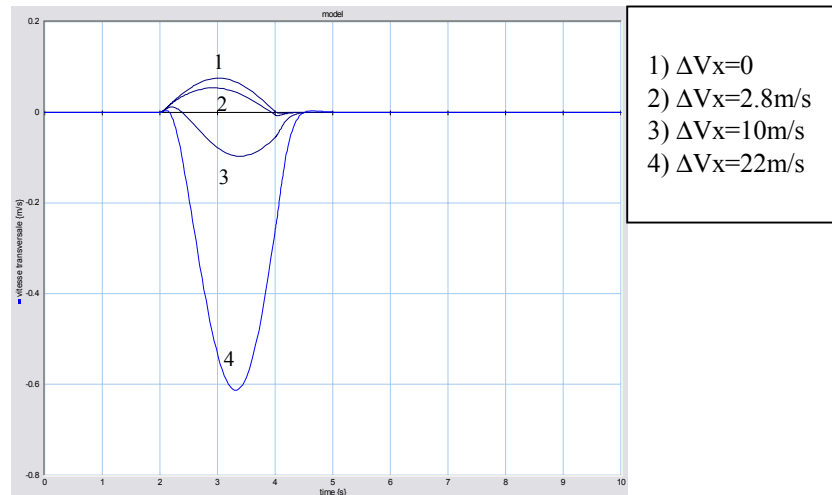


figure 2-23 : Influence de la vitesse longitudinale sur la vitesse transversale du véhicule

La vitesse transversale, diminue avec la vitesse longitudinale, puis devient négative.

Le déplacement transversal du véhicule est représenté dans le repère sol (voir Annexe A pour plus de détails sur les repères utilisés), nous avons besoin de connaître  $V_x(0)$  et  $V_y(0)$ , vitesses longitudinale et latérale dans le repère sol. Les seules vitesses connues étant  $V_x(G)$  et  $V_y(G)$ , vitesses longitudinale et latérale dans le repère du châssis, nous allons donc effectuer un changement de repère (les détails des changements de repères sont donnés dans l'Annexe B), sous la forme écrite équation 2-76.

$$\begin{aligned} V_x(0) &= \cos(\psi).V_x(G) - \sin(\psi).V_y(G) \\ V_y(0) &= \sin(\psi).V_x(G) + \cos(\psi).V_y(G) \end{aligned} \quad (2-85)$$

Il nous suffit d'intégrer ces vitesses pour représenter le déplacement du véhicule dans le repère sol.

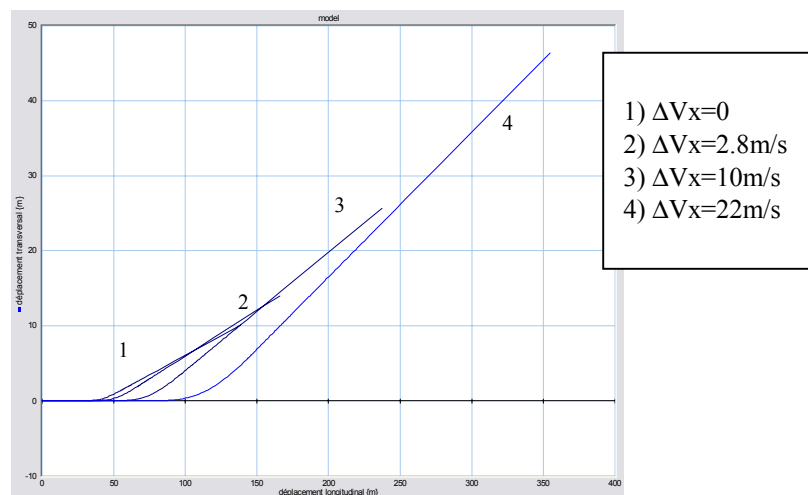


figure 2-24 : Influence de la vitesse longitudinale sur le déplacement transversal du véhicule

On remarque que la vitesse longitudinale a une grande influence sur la trajectoire du véhicule. Sur la courbe (figure 2-24) représentant la trajectoire du véhicule dans le repère sol (Plan  $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ), nous pouvons constater qu'une augmentation de la vitesse longitudinale entraîne un déplacement plus long (plus on roule vite, plus le véhicule parcourt une longue

distance) ; de plus quand la vitesse longitudinale augmente, le véhicule tourne d'un angle plus important, le virage est plus serré.

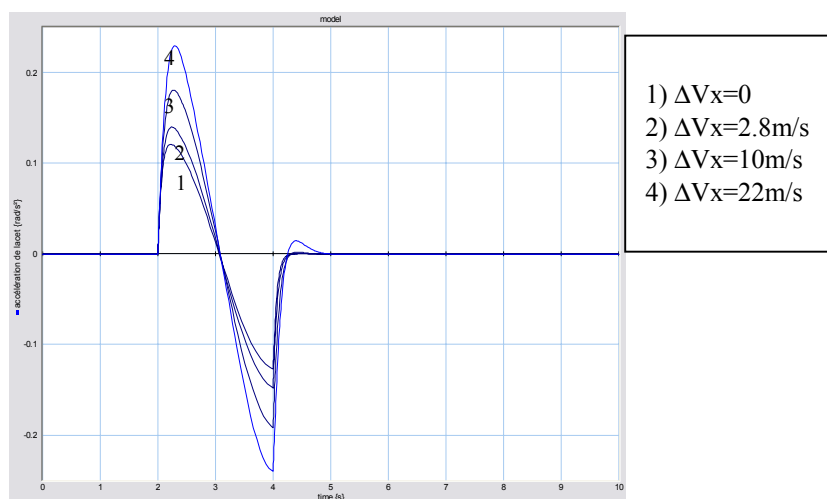


figure 2-25 : Influence de la vitesse longitudinale sur l'accélération de lacet du véhicule

L'accélération angulaire de lacet augmente avec la vitesse longitudinale.

L'accélération angulaire de lacet s'annule au même instant quelle que soit la variation de la vitesse longitudinale ; pour de grandes vitesses longitudinales (à partir de  $\Delta V_x = 22\text{m/s}$ ), on remarque que l'accélération angulaire de lacet prend des valeurs positives, puis se stabilise à une valeur nulle dans la deuxième partie du virage (quand on redresse les roues).

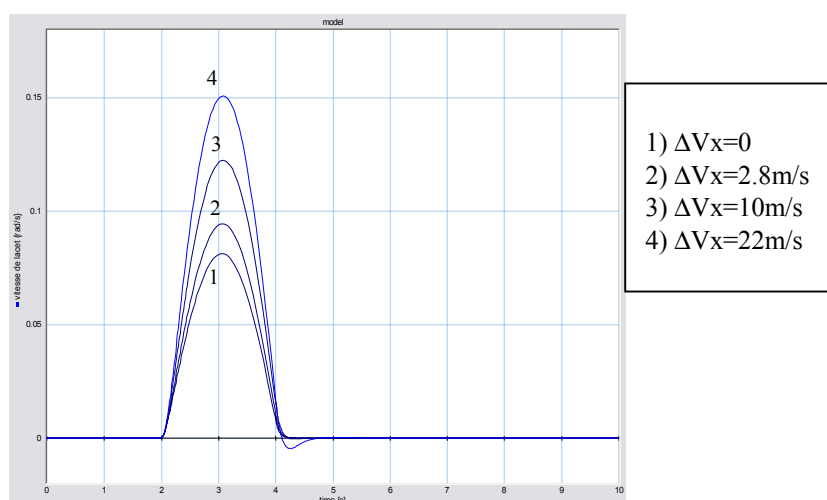


figure 2-26 : Influence de la vitesse longitudinale sur la vitesse de lacet du véhicule

Dans un premier temps, nous constatons qu'une augmentation de la vitesse longitudinale entraîne une augmentation de la vitesse de lacet du véhicule.

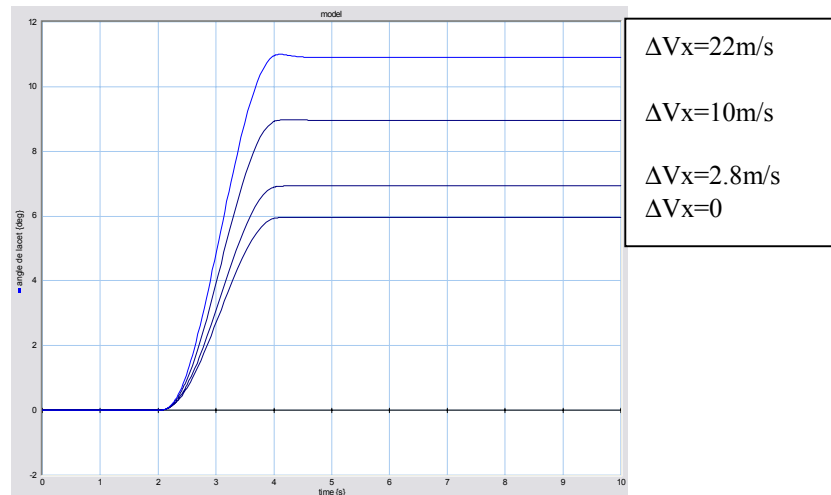


figure 2-27 : Influence de la vitesse longitudinale sur l'angle de lacet du véhicule

La vitesse longitudinale a une influence importante sur l'angle de lacet du véhicule ; en effet, plus celle-ci augmente, plus l'angle de lacet devient important. Ce phénomène peut expliquer le comportement du véhicule qui tourne davantage quand sa vitesse longitudinale augmente, l'angle de lacet donnant quasiment la trajectoire du véhicule. Nous pouvons noter une légère instabilité quand la vitesse devient importante, dues aux oscillations de la vitesse angulaire de lacet (figure 2-26)

Du fait que les pneus sont souples, ils se déforment sous l'action des forces exercées latéralement, de sorte qu'en virage, les roues étant braquées dans une direction donnée, le véhicule tend à se déplacer selon une trajectoire légèrement différente. Cette faible différence entre la direction théoriquement imposée par le braquage des roues et la direction réelle que prend le véhicule est appelée angle de dérive. La dérive au centre de gravité peut se calculer de la manière suivante dans le repère lié au châssis :

$$\delta = \frac{V_y}{V_x} \quad (2-86)$$

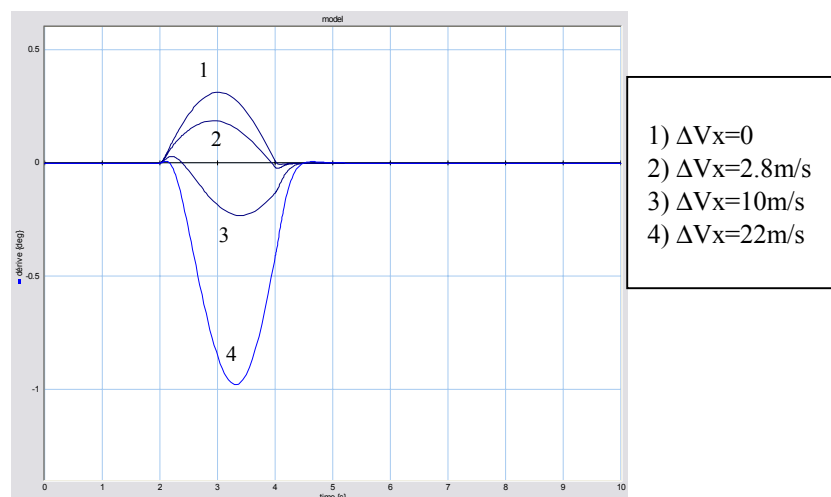


figure 2-28 : Influence de la vitesse longitudinale sur la dérive du véhicule

Dans un premier temps, nous pouvons constater que les variations de la vitesse longitudinale vont entraîner des changements de comportement du véhicule, en particulier au niveau de la dérive. En effet, pour de faibles variations de vitesse ( $\Delta V_x < 5.5\text{m/s}$ ), le véhicule

aura tendance à rentrer à l'intérieur du virage, tandis que pour des variations de vitesse plus importantes, le véhicule aura de plus en plus tendance à sortir du virage. Notons par ailleurs que ce phénomène n'est pas très marqué car l'angle de dérive ne dépasse pas 6% de l'angle de lacet du véhicule, ce qui correspond aux hypothèses données au paragraphe 1.5.1.

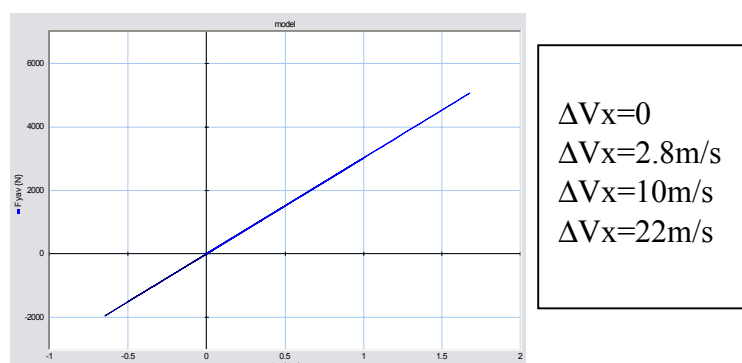


figure 2-29 : Influence de la vitesse longitudinale sur la force transversale avant par rapport à la dérive du pneumatique avant

Les forces latérales sont linéaires par rapport aux dérives (figure 2-29, figure 2-30). La vitesse longitudinale a une grande influence sur la force latérale et la dérive avant.

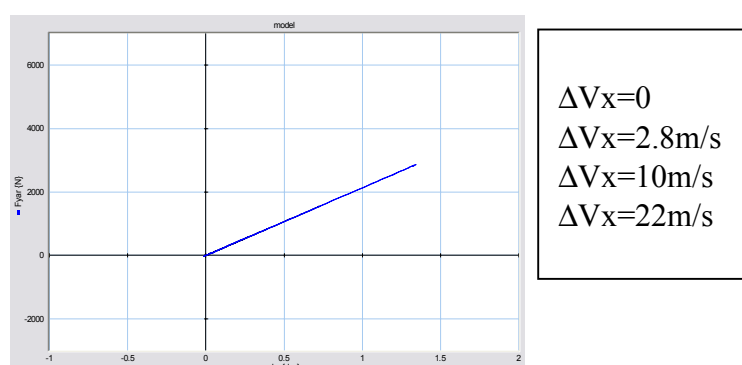


figure 2-30 : Influence de la vitesse longitudinale sur la force transversale arrière par rapport à la dérive du pneumatique arrière

### c) Influence de la masse et de la position du centre de gravité

L'étude porte sur l'influence de la variation de la masse et le déplacement du centre de gravité.

On place dans le cas nominal pour la vitesse longitudinale. Nous considérons donc :

$$V_x = V_{x_n} = 13.9 \text{ m/s} \quad (2-87)$$

Pour effectuer notre étude, nous allons considérer différentes configurations :

1. **1p** cas nominal, (on considère le véhicule et un conducteur, ce qui donne les condition nominale : masse :  $M_n = 1467 \text{ kg}$  et position du centre de gravité par rapport à l'essieu avant :  $a_n = 0.99 \text{ m}$  .
2. **1p-100** on ajoute 100kg de bagages dans le coffre, à partir de la configuration nominale.
3. **2pav-14** on place une deuxième personne (70kg) à l'avant, ainsi que 14kg de bagages dans le coffre (configuration standard).
4. **2pav-100** on place une deuxième personne à l'avant, ainsi que 100kg de bagages dans le coffre.

5. **1pav-1par-100** à partir de la configuration nominale, on ajoute une personne à l'arrière du véhicule, ainsi que 100kg de bagages dans le coffre.
6. **2pav-2par-28** à partir de la configuration nominale, on ajoute une personne à l'avant, et deux à l'arrière du véhicule, ainsi que 28kg de bagages dans le coffre (configuration standard).
7. **2pav-3par-100** on se place dans le cas limite pour la variation de masse : 5 personnes dans le véhicule (2 à l'avant, 3 à l'arrière) et 100kg de bagage dans le coffre.

Dans le tableau 2-1 sont regroupées les variations de la masse et de la position du centre de gravité pour chaque configuration considérée.

La masse s'exprime de la manière suivante :

$$M = M_n + \Delta M \quad (2-88)$$

avec  $M_n = 1467\text{kg}$

La position du centre de gravité par rapport à l'essieu avant, s'exprime de la façon suivante :

$$a = a_n + \Delta a \quad (2-89)$$

avec  $a_n = 0.99\text{m}$

<i>configurations</i>	$\Delta M$ (kg)	$\Delta a$ (m)
<i>1p</i>	<b>0</b>	<b>0</b>
<i>2pav-14</i>	<b>84</b>	<b>0,025</b>
<i>1p-100</i>	<b>100</b>	<b>0,112</b>
<i>2pav-100</i>	<b>170</b>	<b>0,116</b>
<i>1pav-1par-100</i>	<b>170</b>	<b>0,146</b>
<i>2pav-2par-28</i>	<b>238</b>	<b>0,111</b>
<i>2pav-3par-100</i>	<b>380</b>	<b>0,205</b>

tableau 2-1 : Variations de la masse et de la position du centre de gravité en fonction des configurations envisagées

Toutes ces configurations modifient le comportement dynamique du modèle. Pour connaître l'influence de la variation de chaque paramètre incertain, nous allons nous intéresser à des configurations où la masse du véhicule est la même afin d'évaluer l'influence de la position du centre de gravité, ainsi qu'à des configurations où la position du centre de gravité est sensiblement la même afin d'étudier l'influence de la variation de la masse. Nous retenons donc les configurations suivantes :

- **2pav-100** et **1pav-1par-100**, qui présentent une masse identique, mais dont le centre de gravité recule quand on passe de la première configuration à la deuxième.
- **1pav-100** et **2pav-2par-28**, qui entraîne un déplacement du centre de gravité sensiblement identique, mais avec une augmentation de la masse quand on passe de la première configuration à la deuxième.



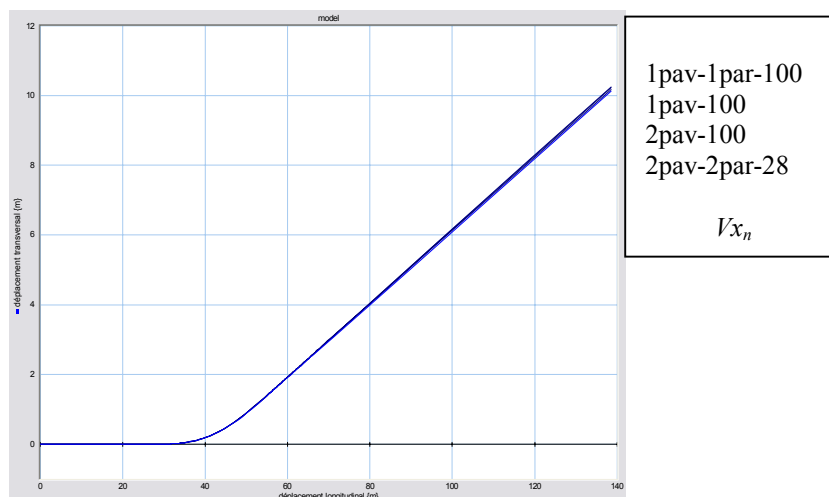


figure 2-31 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur le déplacement transversal du véhicule

Nous pouvons voir grâce aux configurations **1pav-1par-100** et **2pav-100** (variation de masse identique) que le déplacement du centre de gravité vers l'arrière du véhicule (configuration **1pav-1par-100**) entraîne un virage plus serré.

Les configurations **1pav-100** et **2pav-2par-28** entraînent un déplacement du centre de gravité sensiblement égal, grâce à celles-ci, nous pouvons voir qu'une augmentation de la masse (configuration **2pav-2par-28**) entraîne un virage plus ouvert.

Notons que les variations de la masse et de la position du centre de gravité ne modifient pas la distance parcourue. De plus les changements de trajectoire sont minimes dans les conditions de simulation envisagées, mais peuvent s'accroître dans des conditions extrêmes.

Nous pouvons conclure qu'une augmentation de la masse du véhicule tend à ce que le véhicule prenne un virage moins serré, il en est de même quand le centre de gravité se déplace vers l'arrière du véhicule.

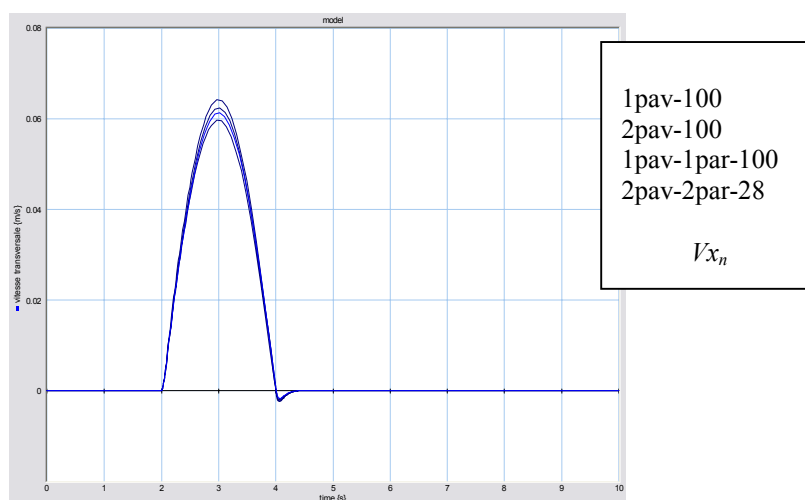


figure 2-32 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la vitesse transversale du véhicule

En reprenant les différentes configurations utilisées pour la figure 2-31, nous pouvons conclure que la vitesse transversale augmente quand le centre de gravité recule dans le véhicule, et que celle-ci diminue quand la masse du véhicule augmente.

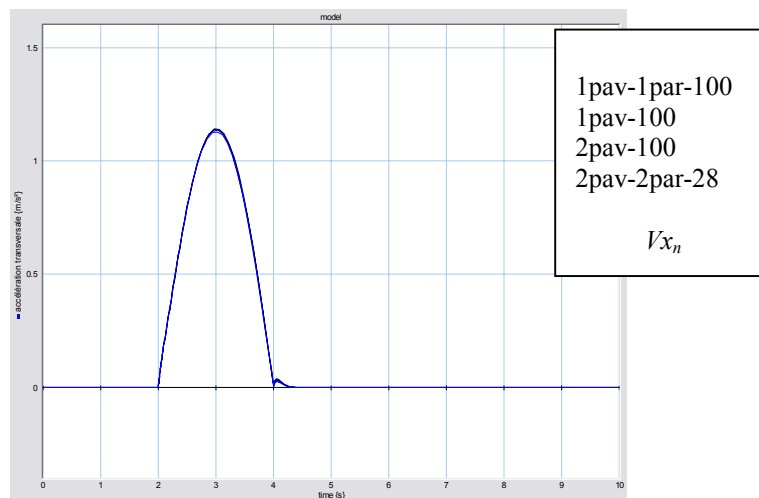


figure 2-33 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'accélération transversale du véhicule

Nous pouvons voir qu'une augmentation de la masse du véhicule entraîne une diminution de la valeur de l'accélération transversale. De plus, quand le centre de gravité recule dans le véhicule, son accélération transversale augmente.

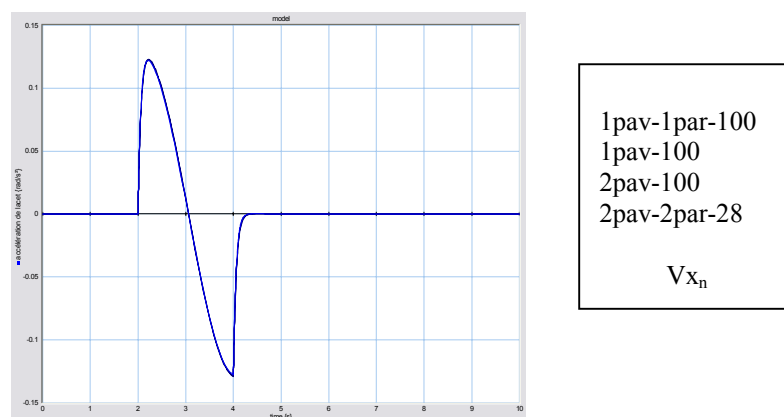


figure 2-34 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'accélération de lacet du véhicule

Nous pouvons remarquer que les variations de la masse et de la position du centre de gravité n'influencent que très légèrement l'accélération angulaire de lacet, juste ce qu'il faut pour modifier la vitesse de lacet.

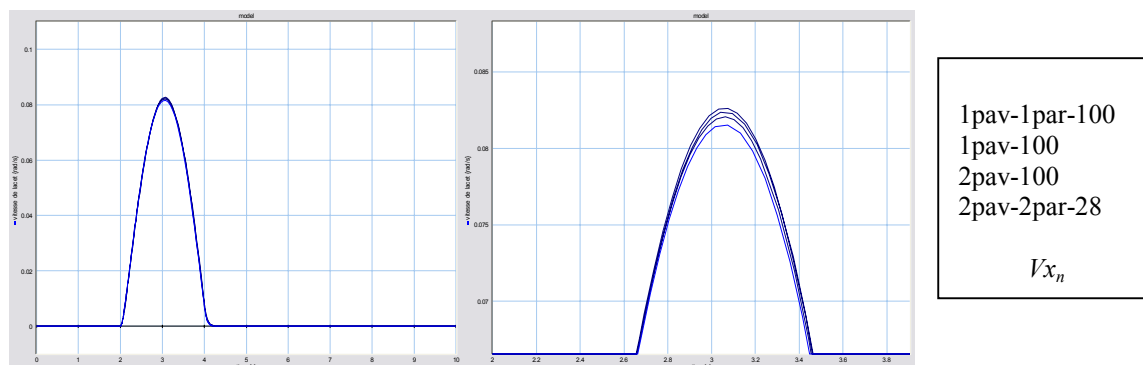


figure 2-35: Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la vitesse de lacet du véhicule

Quand la masse augmente, la valeur finale de la vitesse angulaire de lacet diminue. Quand le centre de gravité recule dans le véhicule, la vitesse angulaire de lacet augmente. Une fois le virage terminé, cette vitesse devient nulle, l'angle de lacet du véhicule restera constant, sa trajectoire sera donc rectiligne.

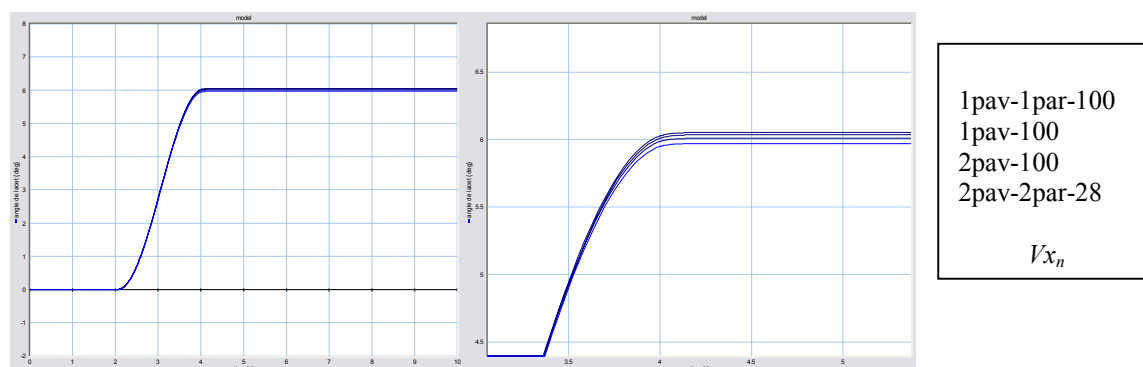


figure 2-36 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'angle de lacet du véhicule

Une vue générale de ces courbes nous permet de dire que les variations de masse et de position du centre de gravité n'influencent l'angle de lacet que sur sa valeur finale (gain statique), la pente de la courbe (régime transitoire) n'est quasiment pas influencée.

- Quand la masse du véhicule augmente (comparaison : configuration **1pav-100** et **2pav-2par-28**), la valeur finale de l'angle de lacet diminue, le virage du véhicule sera donc plus fermé.
- Quand le centre de gravité du véhicule recule, (comparaison : configuration **2pav-100** et **1pav-1par-100**), la valeur finale de l'angle de lacet augmente.

Ces remarques confirment les conclusions déduites de la figure 2-31.

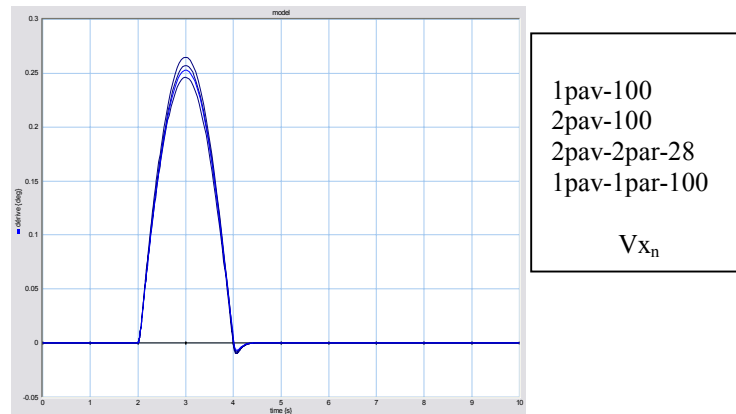


figure 2-37 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la dérive du véhicule

Reprenons les différents cas :

- même variation de masse : configuration **2pav-100** et **1pav-1par-100**, où le centre de gravité recule si l'on passe de cette première configuration à la deuxième. On peut remarquer que la valeur maximale de la dérive diminue.

- même variation de la position du centre de gravité : configuration **1pav-100** et **2pav-2par-28**, où la variation de masse est plus importante pour la deuxième configuration. On peut remarquer que la valeur maximale diminue avec l'augmentation de la masse.

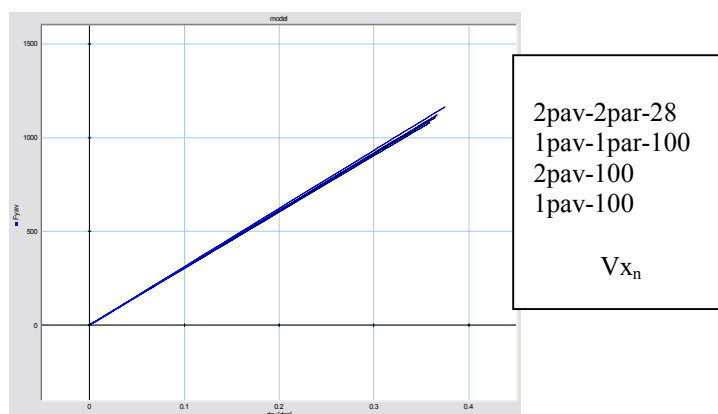


figure 2-38 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la force transversale avant par rapport à la dérive du pneumatique avant

Les variations de masse et de la position du centre de gravité, ont une influence très faible sur la force latérale avant.

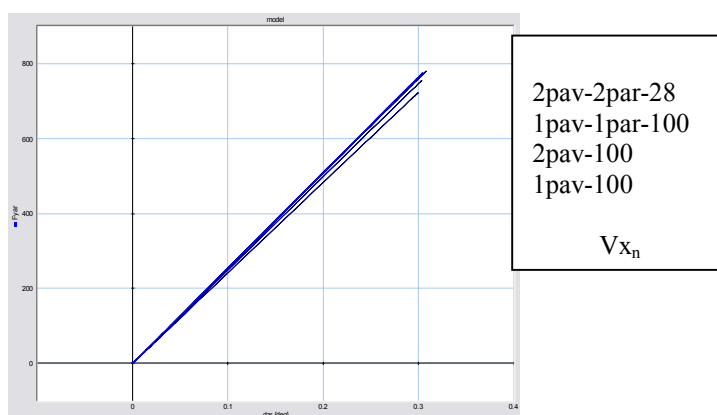


figure 2-39 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la force transversale arrière par rapport à la dérive du pneumatique arrière

Les variations de masse et de la position du centre de gravité, ont une grande influence sur la force latérale avant. Ce qui peut être expliqué par le fait que la masse supplémentaire est ajoutée à l'arrière du véhicule.

#### d) Influence de la masse et de la position du centre de gravité pour différentes vitesses longitudinales

En étudiant l'influence de la masse et de la position du centre de gravité sur :

- le déplacement transversal
- la vitesse transversale
- l'accélération transversale
- l'angle de lacet
- la vitesse de lacet
- l'accélération de lacet
- la dérive au centre de gravité

pour différentes variations de la vitesse longitudinale ( $\Delta V_x = 2.8$ ,  $\Delta V_x = 10$ ,  $\Delta V_x = 22$ m/s), nous pouvons dire que la vitesse modifie le comportement dynamique du véhicule (comme nous l'avons vu au *b* du paragraphe 2.6.1) pour une configuration de masse donnée (exemple : **2pav-2par-28**), de plus le modèle devient plus sensible aux variations de la masse et de la position du centre de gravité quand la vitesse longitudinale augmente. Nous pouvons retrouver les courbes de simulations Annexe E.

#### e) Conclusion

Le modèle bond graph incertain du système bicyclette nous a permis d'effectuer des simulations en présence de variations de certains paramètres, considérés comme les plus susceptibles d'incertitudes tels que la masse  $M$ , la vitesse longitudinale  $V_x$  et la position du centre de gravité  $a$ . Nous avons mis en évidence l'influence de ces variations sur le déplacement et le comportement dynamique du véhicule, pour un scénario d'action du conducteur.

Cette étude nous a permis de visualiser l'influence de ces variations sur les caractéristiques dynamiques du modèle, comme la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement, ainsi que sur le gain statique, mais ne nous permet pas de les chiffrer. De

plus l'interprétation des courbes est rendue difficile par les petites variations de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement engendrées par les incertitudes.

Même si le modèle bicyclette est une approximation du comportement du véhicule 4 roues limitée aux basses vitesses, il est intéressant de construire son modèle, et surtout d'étudier son comportement dynamique en présence d'incertitudes. En effet c'est le modèle bicyclette que nous utiliserons au chapitre 4 pour le suivi de trajectoire dans le cadre de l'ESP (correcteur électronique de trajectoire).

## 2.6.2 Modèle complet (BGCar14)

Nous avons effectué une campagne de simulations afin d'étudier l'influence des paramètres incertains sur le modèle BGCar14. Nous commencerons par l'influence de la masse puis nous verrons l'influence du déplacement du centre de gravité suivant l'axe longitudinal et transversal.

Pour cette étude, nous avons choisi de tracer les courbes suivantes :

- la trajectoire
- l'accélération transversale
- l'angle de roulis
- l'angle de lacet

Le choix de la trajectoire nous est apparu clairement car comme nous l'avons dit au paragraphe 2.6 pour une commande fixée, nous voulons étudier l'influence des paramètres incertains sur la trajectoire. Le choix des autres courbes a été effectué ainsi car ce sont les grandeurs qui permettront de mieux comprendre les changements de trajectoire, de plus grâce à ces courbes et une connaissance du système, nous pourrons déduire l'influence des paramètres incertains sur le comportement du véhicule (vitesse angulaire de roulis, ...).

Afin d'effectuer ces simulations, nous choisissons une commande de l'angle de braquage (figure 2-40), de telle sorte que le véhicule effectue un dépassement.

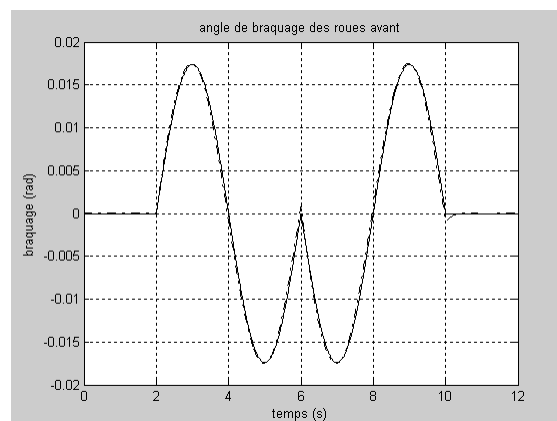


figure 2-40 : Angle de braquage des roues avant

### a) Influence de la masse

Pour effectuer cette étude, nous utilisons des configurations où seule la masse évolue. La première configuration est le cas nominal, les suivantes : Ms10, Ms30, Ms50 correspondent à

des ajouts de masse au centre de gravité de respectivement 10%, 30% et 50% de la masse nominale

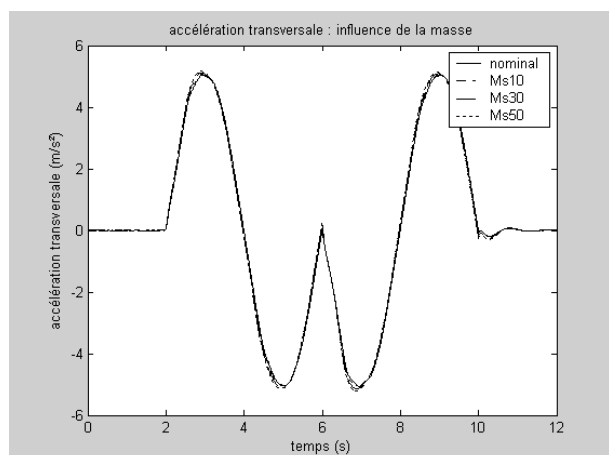


figure 2-41 : Accélération transversale

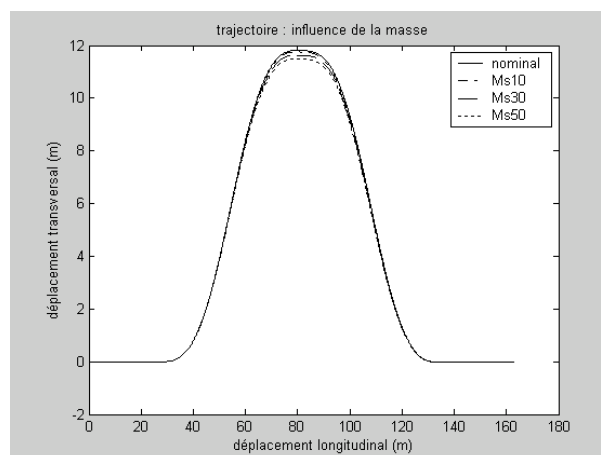


figure 2-42 : Trajectoire

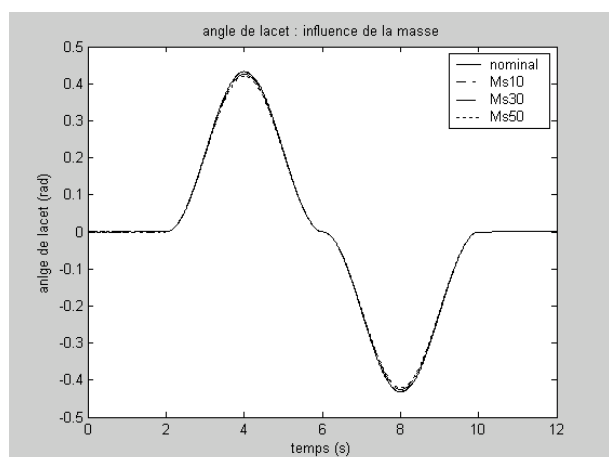


figure 2-43 : Angle de lacet

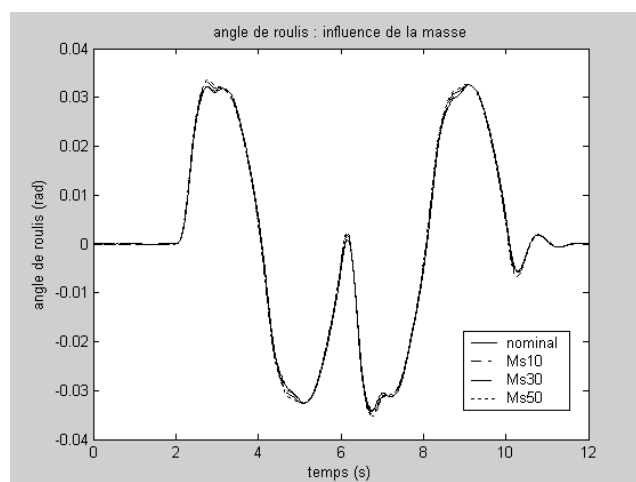


figure 2-44 : angle de roulis

Quand la masse du véhicule augmente, l'amplitude de l'accélération transversale (figure 2-41) augmente légèrement.

Nous pouvons constater que le comportement du modèle est le même, seul le déplacement diminue quand la masse augmente.

Quand la masse du véhicule augmente, l'amplitude de l'angle de lacet diminue (figure 2-43), ce qui entraîne un virage plus serré pour le véhicule.

Quand la masse du véhicule augmente, l'amplitude de l'angle de roulis augmente, ce qui pousse le véhicule vers l'extérieur du virage, entraînant une augmentation de l'amplitude de l'accélération transversale (figure 2-41).

Toutes ces variations sont d'amplitude faible.

## b) Influence de la position du centre de gravité suivant x

Pour effectuer cette étude, nous choisissons des configurations de masse nous permettant de conclure aisément sur l'influence de la position du centre de gravité. Les 3 configurations

sont choisies de telle sorte que la masse ne varie pas, Ms10 correspond à un ajout de masse de 10% de la masse nominale placée au centre de gravité, Ms10a10 signifie qu'une masse correspondant à 10% de la masse nominale est placée dans le véhicule de façon à déplacer vers l'avant le centre de gravité d'une distance correspondant à 10% de sa position nominale par rapport à l'essieu avant. Pour la configuration Ms10b10, la masse supplémentaire est placée de manière à faire reculer le centre de gravité.

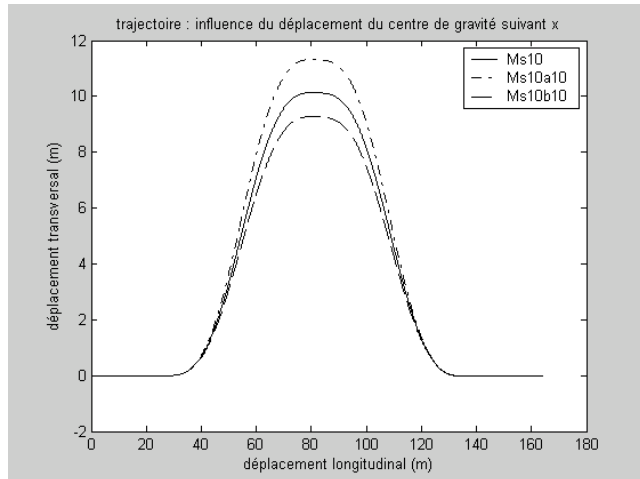


figure 2-45 : Trajectoire

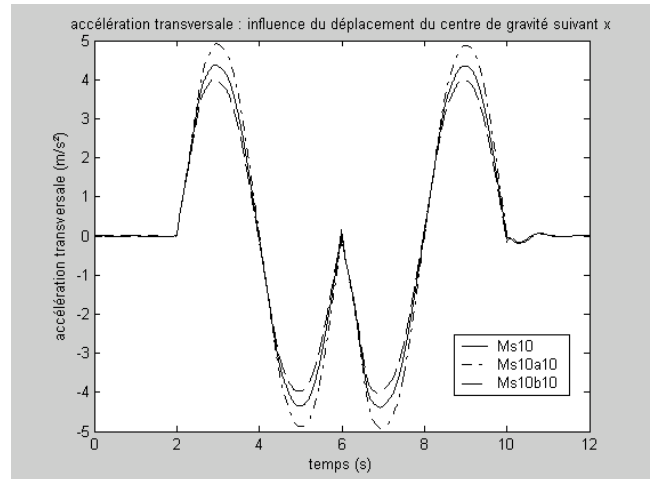


figure 2-46 : Accélération transversale

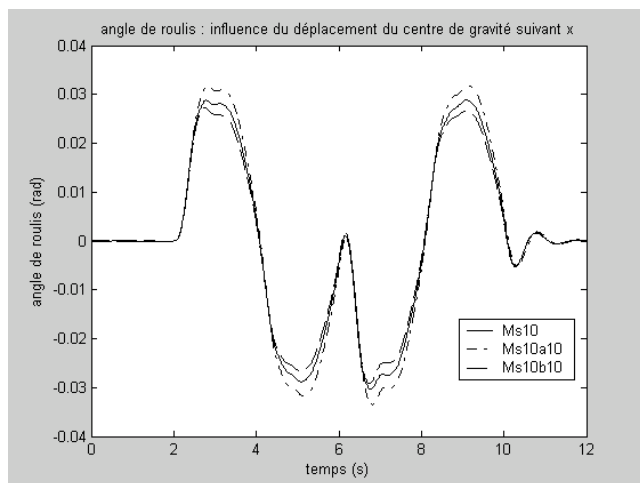


figure 2-47 : Angle de roulis

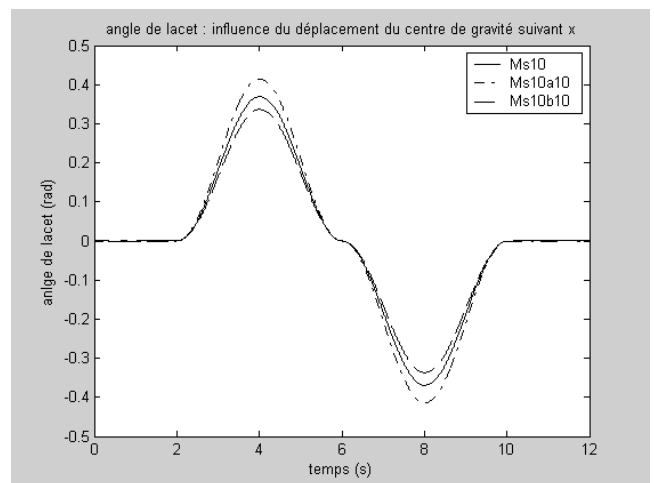


figure 2-48 : Angle de lacet

Quand le centre de gravité avance (configuration Ms10a10) dans le véhicule, les virages effectués par celui-ci sont plus serrés (le véhicule tourne plus) (figure figure 2-45) ; en effet l'accélération transversale (figure 2-46), l'angle de roulis (figure 2-47) ainsi que l'angle de lacet (figure 2-48) augmentent quand le centre de gravité avance, et diminuent quand il recule (configuration Ms10b10).

### c) Influence de la position du centre de gravité suivant y

De la même manière que précédemment, nous choisissons les configurations suivantes : Ms30 où le centre de gravité se trouve sur l'axe longitudinal du véhicule, Ms30c110 la masse de



30% de la masse nominale est placée de telle sorte à déplacer le centre de gravité vers la gauche d'une distance de 10% de sa position nominale et pour Ms30cr10 le centre de gravité se déplace vers la droite.

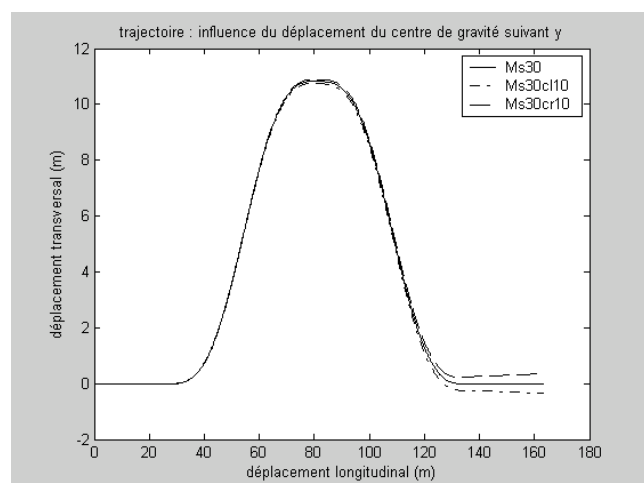


figure 2-49 : Trajectoire

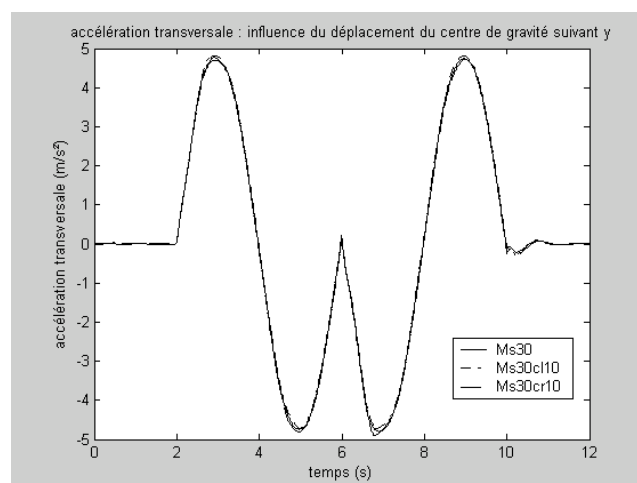


figure 2-50 : Accélération transversale

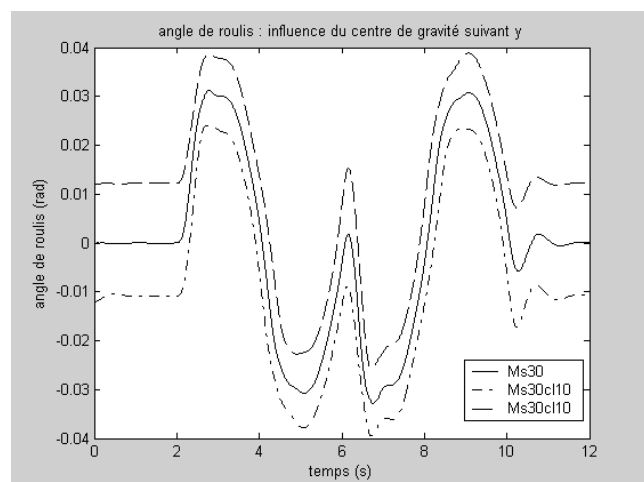


figure 2-51 : Angle de roulis

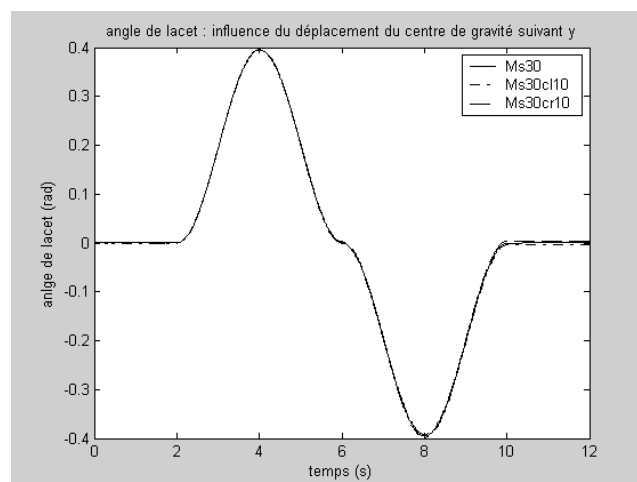


figure 2-52 : Angle de lacet

La trajectoire pour les trois configurations est quasiment la même. Cependant quand le véhicule est plus chargé sur la droite, il tourne plus à gauche (figure 2-49) et inversement, ce qui est le résultat des efforts engendrés par les barres anti-roulis. L'accélération transversale (figure 2-50) et l'angle de lacet (figure 2-52) ne sont quasiment pas affectés par le déplacement du centre de gravité le long de l'axe transversal du véhicule, seul l'angle de roulis (figure 2-51) est affecté. En effet le déplacement du centre de gravité le long de l'axe transversal engendre un angle de roulis mais son comportement dynamique reste le même.

## 2.7 Suivi de trajectoire

Pour la sensibilité du modèle véhicule aux incertitudes paramétriques, qui sont la masse, la position du centre de gravité, ainsi que la vitesse longitudinale du véhicule, nous faisons suivre une trajectoire fixée au véhicule.

## 2.7.1 Mise en place de la régulation pour le suivi de trajectoire

Le système est inséré dans une boucle de régulation, et l'angle de braquage des roues avant du véhicule est commandé afin de satisfaire la consigne. Une boucle fermée avec un régulateur proportionnel, est mise en place (voir figure 2-53).

Nous pouvons assimiler le correcteur au conducteur pour le système réel, le conducteur doit être compétent afin de pouvoir suivre la trajectoire aussi bien à basse qu'à haute vitesse, la difficulté sera donc de trouver un correcteur performant.

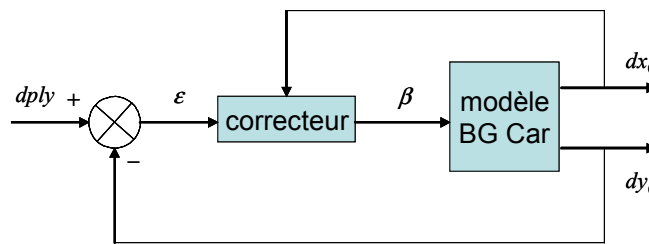


figure 2-53 : Schéma de la boucle de régulation

La trajectoire à suivre est un évitement de la forme suivante (voir figure 2-54).

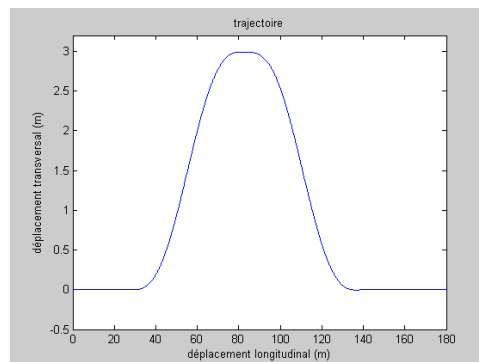


figure 2-54 : Consigne de trajectoire

Pour l'obtenir, nous avons effectué une simulation en boucle ouverte dans le cas nominal en fixant une commande au niveau de l'angle de braquage des roues avant de la forme suivante (voir figure 2-55).

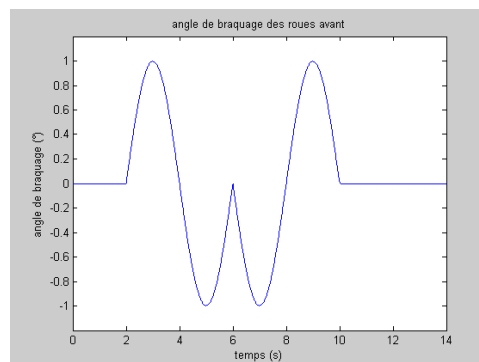


figure 2-55 : Angle de braquage des roues avant

La consigne est obtenue à l'aide d'une table contenant le déplacement transversal, en fonction du déplacement longitudinal.

Pour évaluer l'influence des incertitudes sur la commande à appliquer au véhicule pour suivre une trajectoire définie, nous nous intéressons aussi à l'accélération transversale, ainsi qu'à la variation des forces transversales en fonction de la dérive, et aux angles de roulis et de lacet.

### a) Influence de la vitesse

Dans un premier temps, nous allons étudier l'influence de la vitesse longitudinale sur le comportement du modèle.

La figure 2-56 montre la trajectoire du véhicule pour la vitesse nominale ( $V_{xn} = 13.9$  m/s), ainsi que pour une vitesse légèrement supérieure ( $\Delta V_x = 5$  m/s). Nous pouvons remarquer que dans les deux cas, la première partie de la trajectoire est respectée, mais quand le véhicule doit reprendre sa trajectoire d'origine, la trajectoire du véhicule oscille provoquant l'instabilité du système pour le cas où la vitesse a été augmentée.

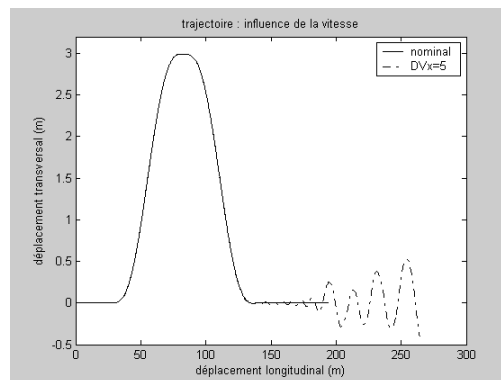


figure 2-56 : Trajectoire – influence de la vitesse – gain proportionnel

On peut voir sur la figure 2-57 les angles de braquage correspondant à chacun des cas, on remarque assez facilement que dans le deuxième cas ( $\Delta V_x = 5$  m/s), la commande oscille de plus en plus pour suivre la trajectoire, jusqu'à devenir instable, et perdre le contrôle du véhicule à la sortie du dernier virage.

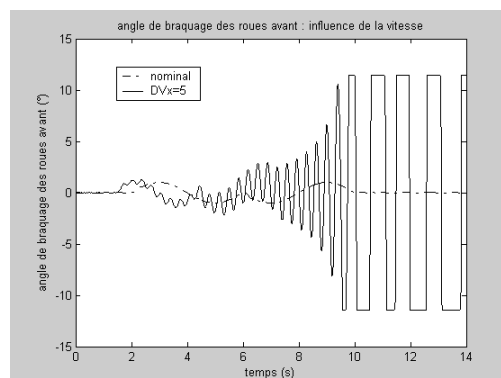


figure 2-57 : Angle de braquage – influence de la vitesse – gain proportionnel

Quand le système diverge, l'erreur entre la trajectoire souhaitée et la trajectoire réelle est très importante, il faut donc un angle de braquage des roues très important pour revenir à la bonne trajectoire, cet angle est limité  $12^\circ$ , pour rester réaliste.

Comme nous pouvons le voir grâce à la figure 2-56 et à la figure 2-57, le correcteur proportionnel ne donne satisfaction que pour les petites vitesses (inférieures à 60km/h, soit 17m/s).

La commande étant calculée en fonction des déplacements, obtenus par l'intégration des vitesses longitudinale et transversale, la correction intégrale n'améliore pas les performances du correcteur. Nous utiliserons donc un correcteur **proportionnel dérivé**.

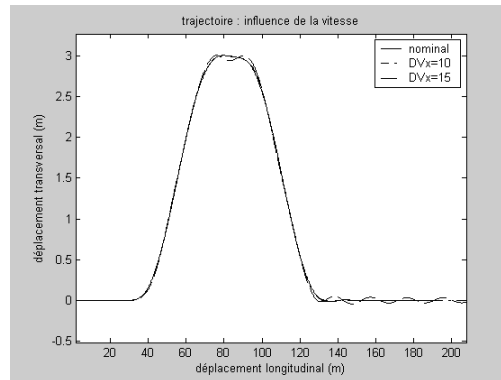


figure 2-58 : Trajectoire – influence de la vitesse – correcteur proportionnel dérivé

La figure 2-58 montre une nette amélioration en ce qui concerne le suivi de la trajectoire, car pour une variation de vitesse de 10m/s, on constate que l'on copie la trajectoire, par contre on s'aperçoit dans le cas d'une variation de 15m/s que la trajectoire oscille.

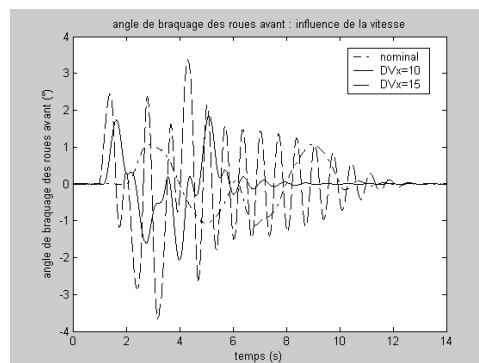


figure 2-59 : Angle de braquage – influence de la vitesse – correcteur proportionnel dérivé

On constate de fortes oscillations de l'angle de braquage (figure 2-59) dans le troisième cas ( $\Delta V_x = 15\text{m/s}$ ), qui ont tendance à déstabiliser le système, en effet si on lance une simulation pour une vitesse légèrement supérieure, on constate que le système diverge.

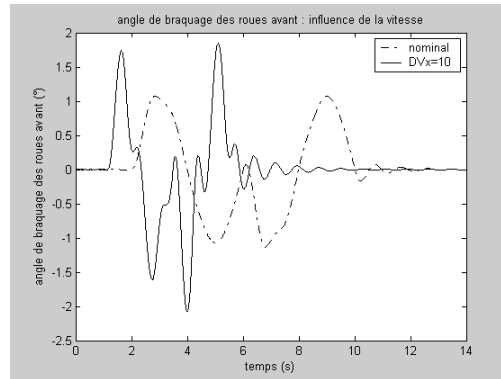


figure 2-60 : Angle de braquage – influence de la vitesse – correcteur proportionnel dérivé

Sur la figure 2-60, où sont isolés les cas où le système n’oscille pas de manière abusive, on constate que dans le deuxième cas, l’angle de braquage change brutalement de valeur, ce qui aurait tendance à déstabiliser le véhicule.

La situation précédente se répète, quand la vitesse augmente, le système en boucle fermé diverge. L’étude de la sensibilité devant être effectuée dans des conditions normales d’utilisation, nous allons mettre en série avec le correcteur proportionnel dérivé, un deuxième correcteur du même type. Ce correcteur nous permet d’effectuer le suivi de trajectoire pour une vitesse longitudinale allant jusqu’à 36m/s, ce qui correspond à 130km/h. Au-delà de cette vitesse, il faudra utiliser un correcteur plus complexe, dépendant de la vitesse souhaitée. La figure 2-61 et la figure 2-62 présentent l’influence de la vitesse sur la trajectoire, ainsi que l’angle de braquage.

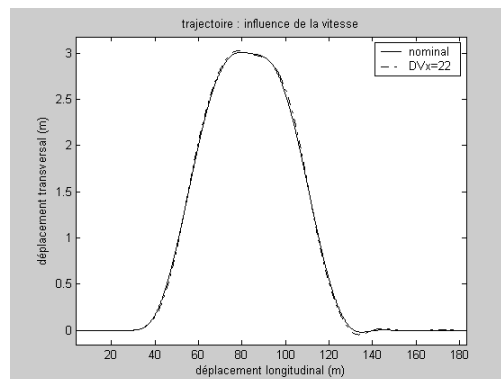


figure 2-61 : Trajectoire – influence de la vitesse – 2 correcteurs proportionnel dérivé

La figure 2-61 montre que le système donne des résultats satisfaisants au niveau du suivi de trajectoire.

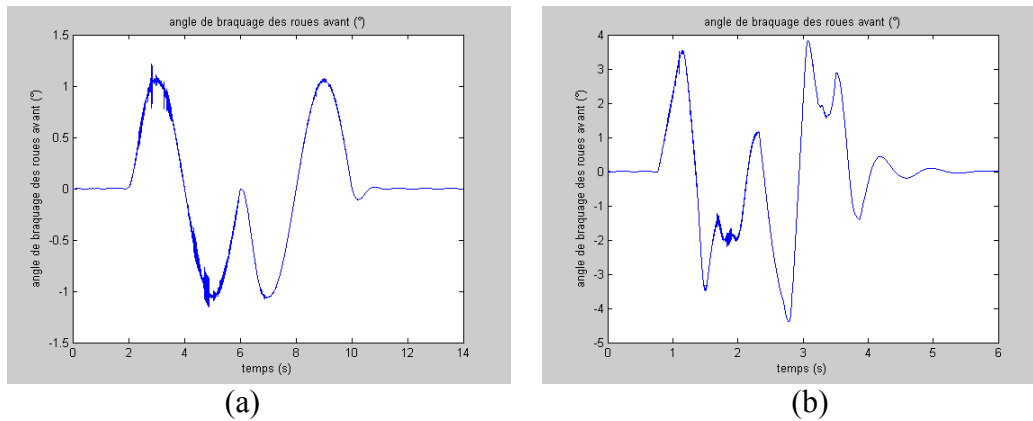


figure 2-62 : Angle de braquage – influence de la vitesse – 2 correcteurs proportionnel dérivé  
(a)  $V_x$  nominal, (b)  $\Delta V_x = 22$  m/s

Sur la figure 2-62, nous remarquons que l'angle de braquage est fortement influencé par la vitesse. En effet, à haute vitesse, il faut moins de temps pour parcourir une distance, qu'à basse vitesse, donc les braquages se font sur une période beaucoup plus courte, de plus l'amplitude est beaucoup plus importante quand la vitesse du véhicule augmente. Pour ces deux raisons, nous allons découper notre étude en plusieurs parties. Dans un premier temps, nous allons effectuer des simulations à vitesse nominale sur goudron sec, nous permettant d'étudier l'influence de la masse et de la position du centre de gravité sur le comportement du véhicule. Nous effectuerons ces mêmes simulations à haute vitesse (130km/h). Enfin, nous étudierons l'influence du revêtement routier en plaçant le véhicule sur du goudron humide.

## 2.7.2 Influence des incertitudes sur le comportement dynamique du véhicule

Pour étudier l'influence de la masse et de la position du centre de gravité, nous avons considéré un certain nombre de cas de charge :

- nominal
- Ms10 : le poids du véhicule est augmenté de 10%, la position du centre de gravité ne change pas
- Ms30 : le poids du véhicule est augmenté de 30%
- Ms50 : le poids du véhicule est augmenté de 50%
- Ms10b10 : le poids du véhicule est augmenté de 10%, le centre de gravité du véhicule recule de 10% par rapport à sa position de l'essieu avant.
- Ms30cl10 : le poids du véhicule est augmenté de 30%, le centre de gravité est déplacé de 10% vers la gauche
- Ms30cr10 : le poids du véhicule est augmenté de 30%, le centre de gravité est déplacé de 10% vers la droite

Nous ne prenons pas en compte un déplacement du centre de gravité vers l'avant du véhicule, car comme le montre la figure 2-63, le centre de gravité se situe approximativement au niveau du levier de vitesse, il est donc peu probable que l'on rencontre ce cas de figure, de plus si tel était le cas, le véhicule deviendrait moins stable.

Dans la suite, seules les courbes subissant les influences des paramètres incertains sont regroupées dans ce paragraphe, les autres courbes sont disponibles en annexe F.

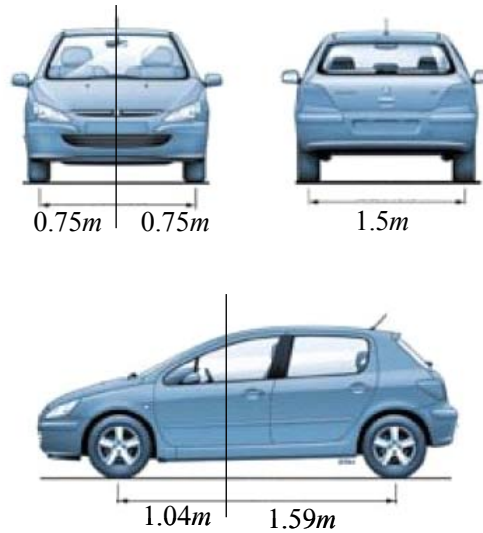


figure 2-63 : Dimension du véhicule 307

**a) Trajectoire**

*Influence de la masse*

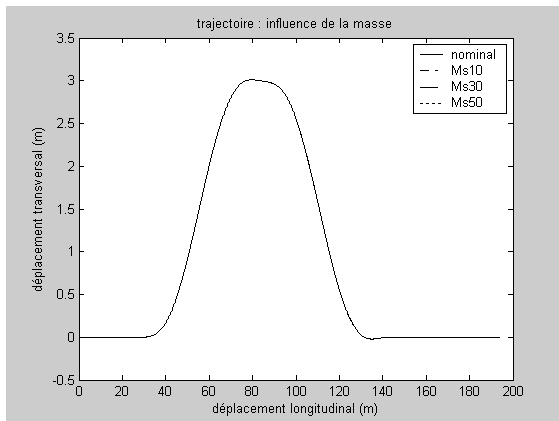


figure 2-64 : trajectoire –  $V_x$  nominale – goudron sec

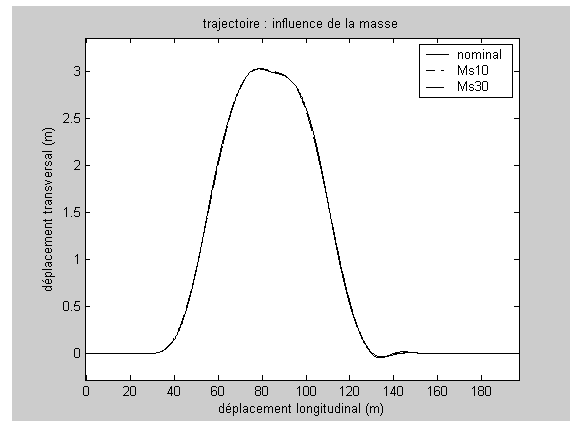


figure 2-65 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron sec

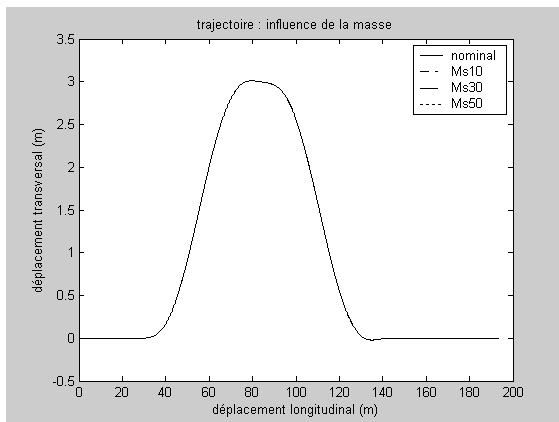


figure 2-66 : trajectoire –  $V_x$  nominale - goudron humide

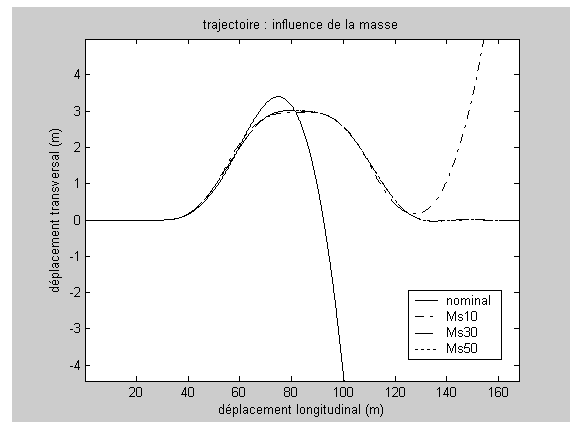


figure 2-67 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron humide

Nous remarquons qu'à petite vitesse, ou à forte adhérence (goudron sec), le véhicule suit la trajectoire désirée.

A haute vitesse et à faible adhérence, le comportement routier du véhicule est fortement dégradé. Le véhicule dans le cas nominal ne suit plus la trajectoire de référence, on peut dire que le véhicule devient plus stable quand sa masse augmente.

### *Influence du déplacement suivant x du centre de gravité*

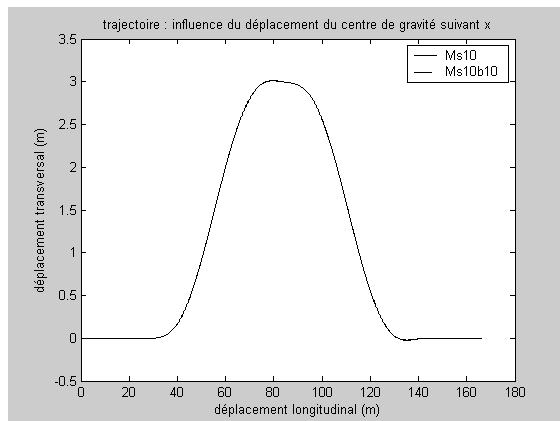


figure 2-68 : trajectoire –  $V_x$  nominale – goudron sec

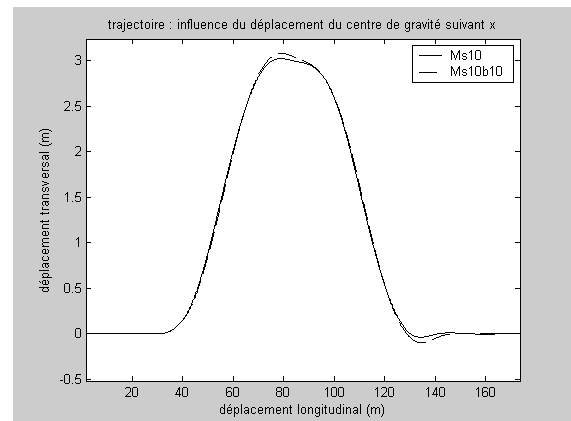


figure 2-69 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron sec

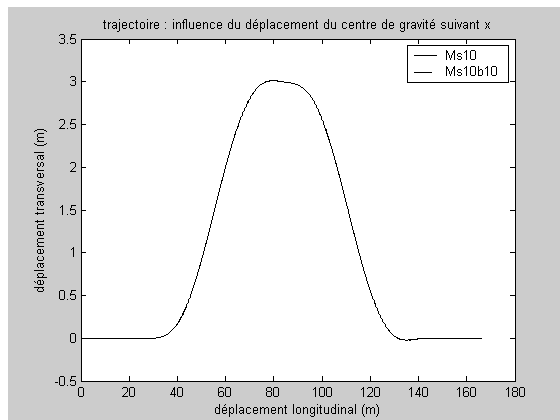


figure 2-70 : trajectoire –  $V_x$  nominale – goudron humide

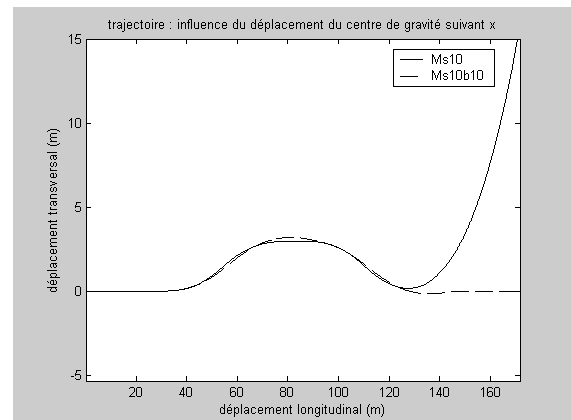


figure 2-71 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Quand le centre de gravité recule, à haute vitesse et forte adhérence, le véhicule suit moins bien la trajectoire (figure 2-69), mais nous pouvons voir sur la figure 2-71, que le véhicule est plus stable quand son centre de gravité recule sur un sol à faible adhérence.



## b) Accélération transversale

### *Influence de la masse*

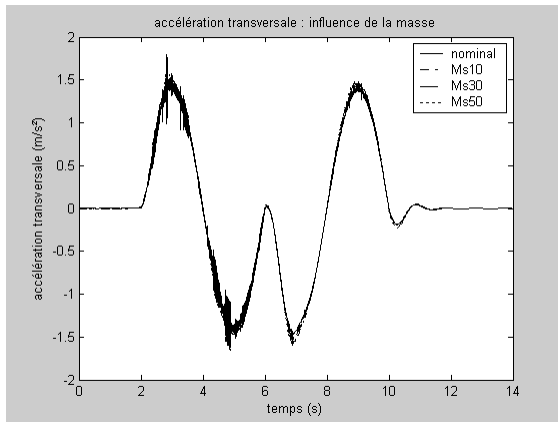


figure 2-72 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron sec

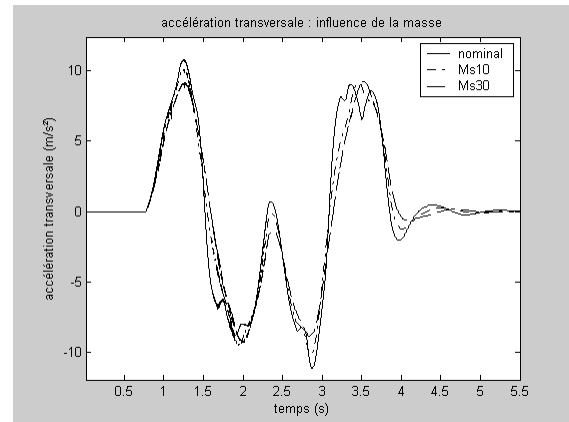


figure 2-73 : accélération transversale -  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron sec

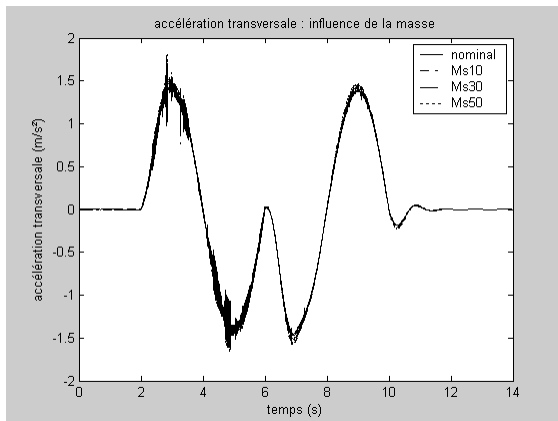


figure 2-74 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron humide

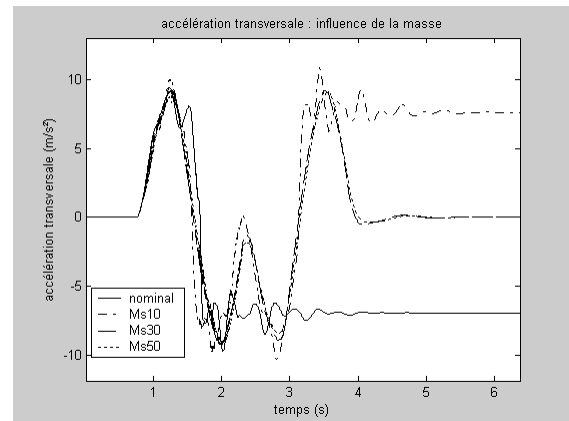


figure 2-75 : accélération transversale-  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron humide

Le véhicule subit à peu de choses près la même accélération transversale, l'augmentation de la masse n'entraîne qu'une légère augmentation de l'amplitude.

A haute vitesse et faible adhérence (figure 2-75), pour les cas nominal et Ms10, le système diverge. L'accélération transversale reste constante et non nulle, le véhicule décrit un grand cercle, sans jamais rejoindre la trajectoire désirée.

### Influence du déplacement suivant $x$ du centre de gravité

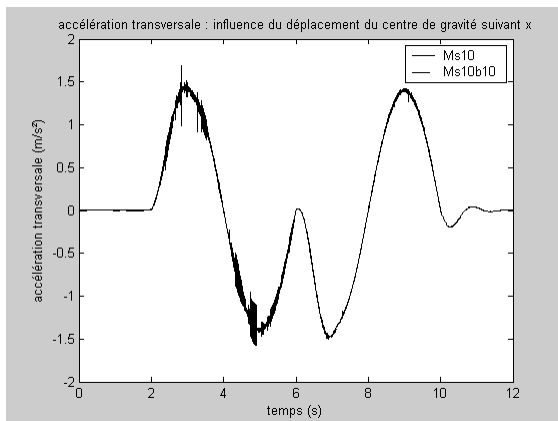


figure 2-76 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron sec

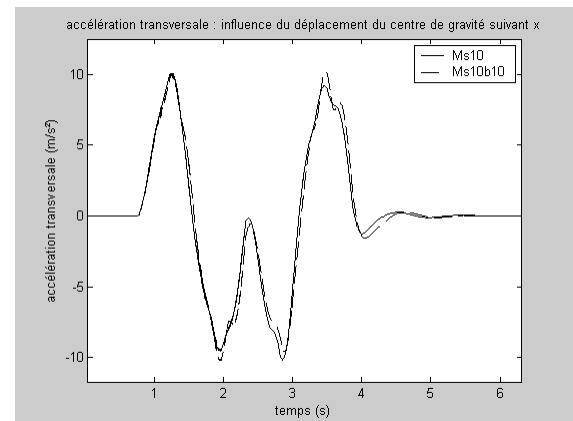


figure 2-77 : accélération transversale -  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron sec

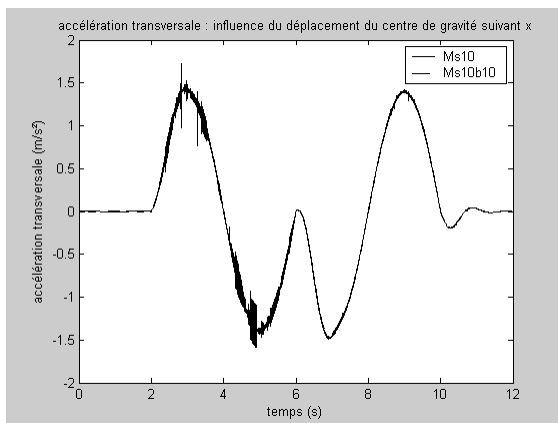


figure 2-78 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron humide

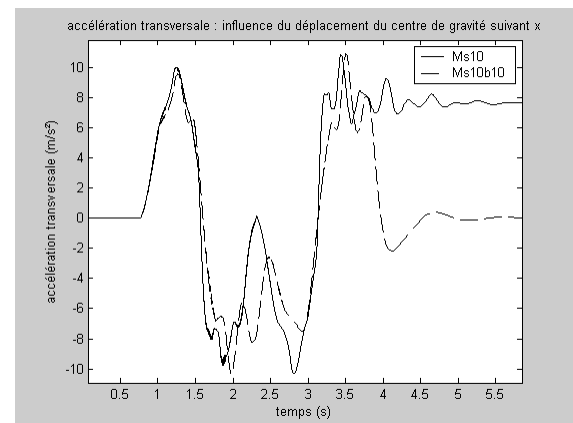


figure 2-79 : accélération transversale -  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron humide

A vitesse nominale (figure 2-76 et figure 2-78), quelle que soit l'adhérence, le déplacement du centre de gravité le long de l'axe longitudinal ne modifie pas le comportement de l'accélération transversale. A haute vitesse et haute adhérence (figure 2-77) l'accélération transversale est sensiblement modifiée, mais pas suffisamment pour déstabiliser le véhicule, contrairement à la figure 2-79 (haute vitesse, basse adhérence) où l'accélération transversale se stabilise à une valeur de 8 m/s<sup>2</sup> dans le cas nominal, ce qui a pour incidence de faire diverger la trajectoire du véhicule (figure 2-71).

## c) Angle de braquage

### *Influence de la masse*

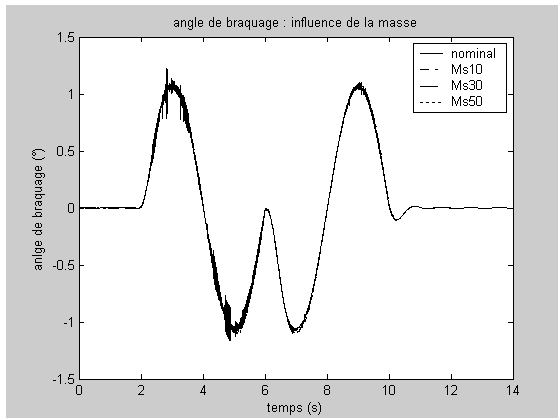


figure 2-80 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron sec

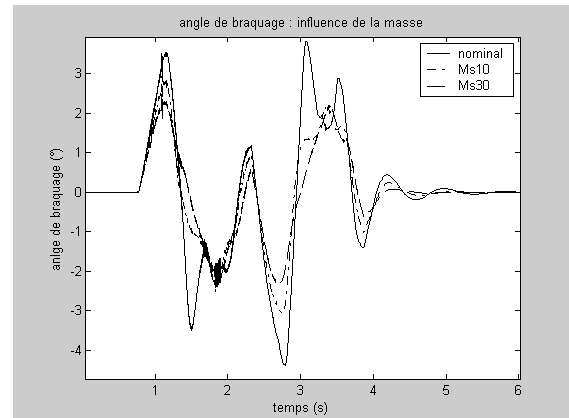


figure 2-81 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

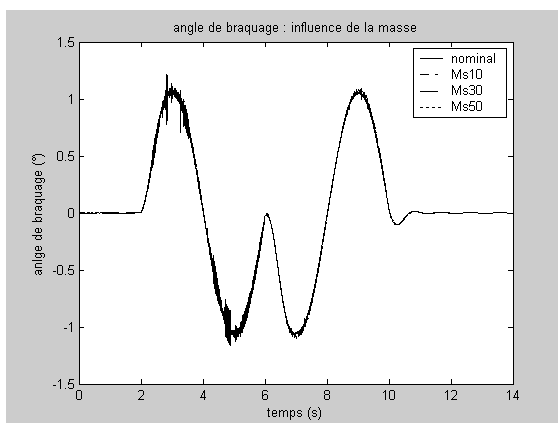


figure 2-82 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron humide

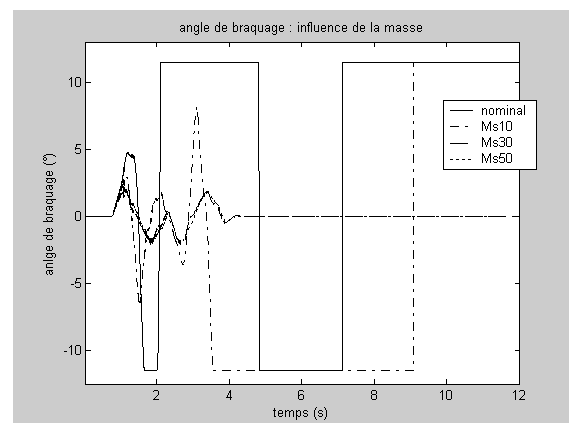


figure 2-83 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Quand la masse du véhicule augmente, l'angle de braquage pour suivre la même trajectoire est moins important, le véhicule tourne plus quand sa masse augmente. Comme nous l'avons déjà vu, l'angle de braquage a été limité à  $12^\circ$  (figure 2-83).

### Influence du déplacement suivant $x$ du centre de gravité

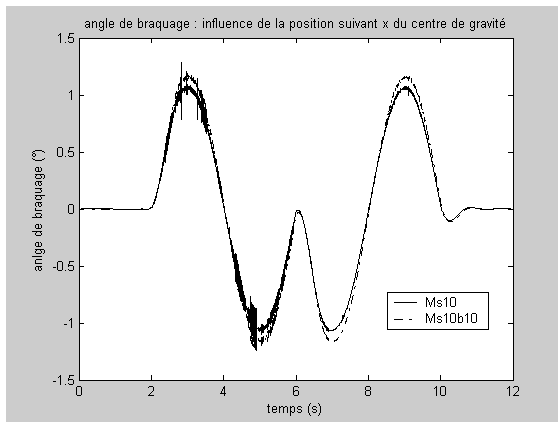


figure 2-84 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron sec

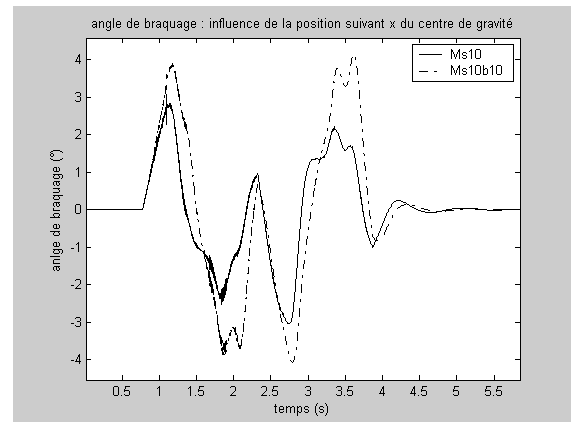


figure 2-85 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

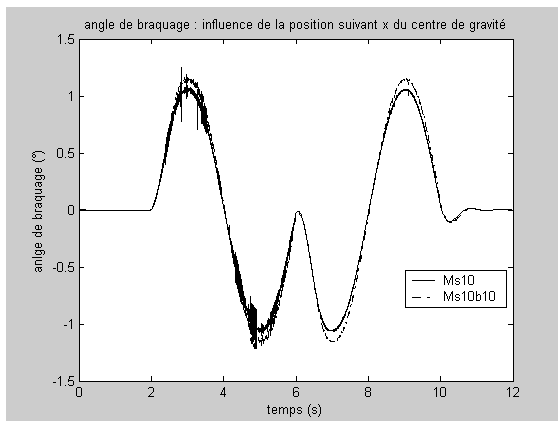


figure 2-86 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron humide

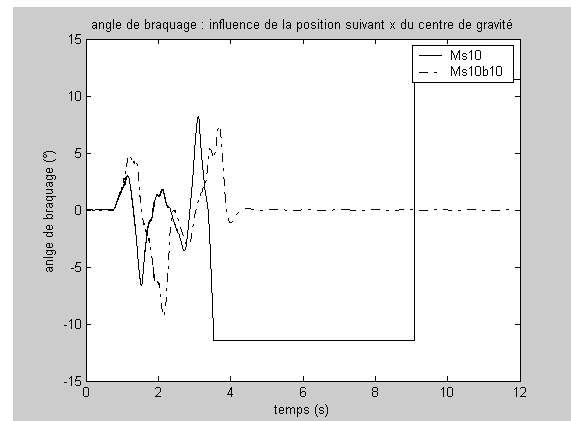


figure 2-87 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Nous remarquons que pour suivre la même trajectoire quand le centre de gravité recule, il faut tourner plus les roues, donc le véhicule tourne moins quand son centre de gravité recule.

### Influence du déplacement suivant y du centre de gravité

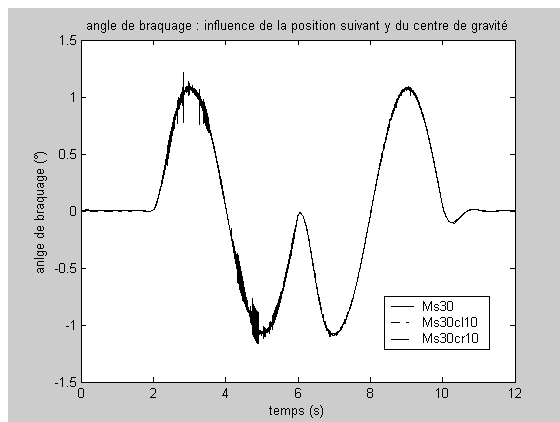


figure 2-88 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron sec

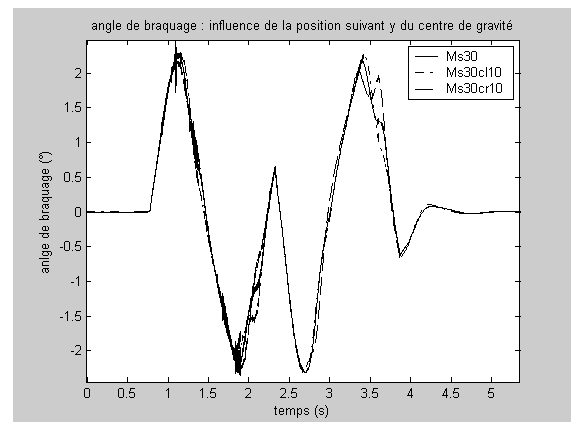


figure 2-89 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

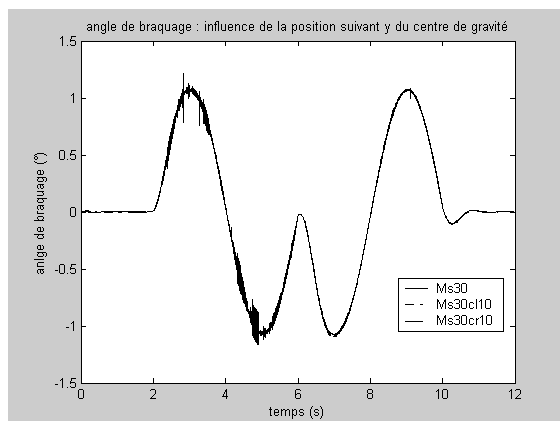


figure 2-90 : angle de braquage –  $V_x$  nominale - goudron humide

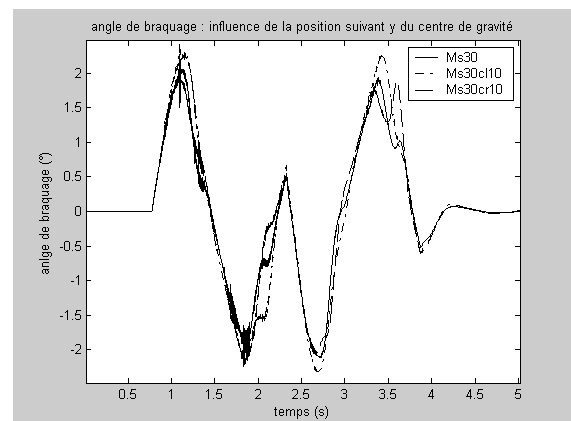


figure 2-91 : angle de braquage –  $\Delta V_x = 22$  - goudron humide

A vitesse nominale (figure 2-88 et figure 2-89) l'angle de braquage peut être le même pour suivre la trajectoire de référence, par contre à haute vitesse (figure 2-90) et surtout à basse adhérence (figure 2-91) l'angle de braquage devient moins régulier, et des petites impulsions sont nécessaire afin de suivre la trajectoire désirée.

## d) Angle de lacet

### *Influence de la masse*

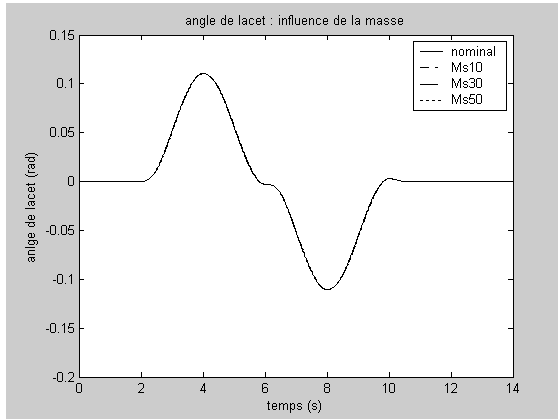


figure 2-92 : angle de lacet –  $V_x$  nominale  
- goudron sec

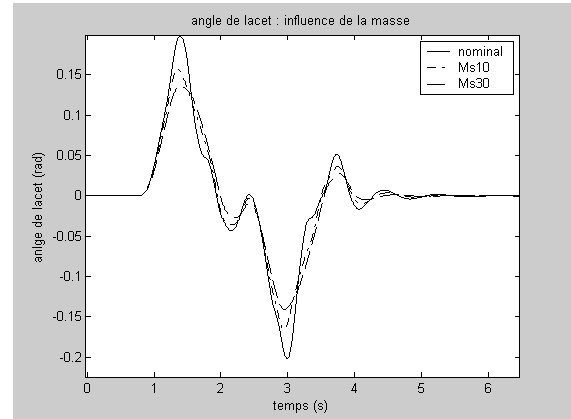


figure 2-93 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron sec

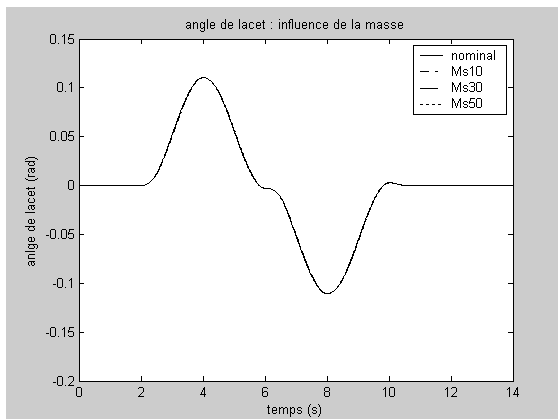


figure 2-94 : angle de lacet –  $V_x$  nominale  
- goudron humide

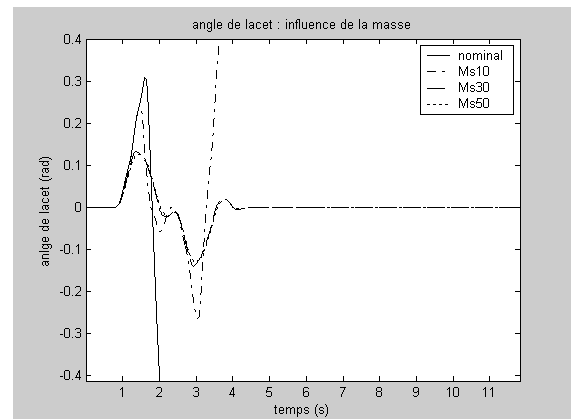


figure 2-95 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron humide

L'angle de lacet diminue quand la masse du véhicule augmente, donc le véhicule dérive moins, ce phénomène se fait ressentir à haute vitesse et haute adhérence (figure 2-93). A faible adhérence (figure 2-95) l'angle de lacet est insensible à la variation de masse.

*Influence du déplacement suivant x du centre de gravité*

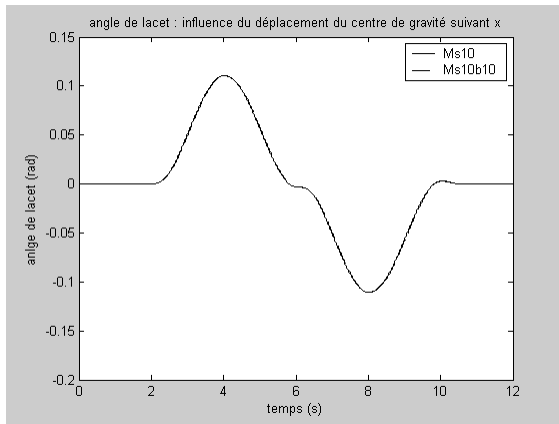


figure 2-96 : angle de lacet –  $V_x$  nominale  
- goudron sec

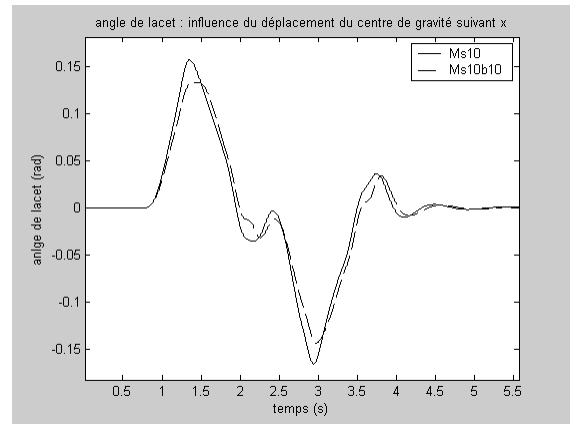


figure 2-97 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron sec

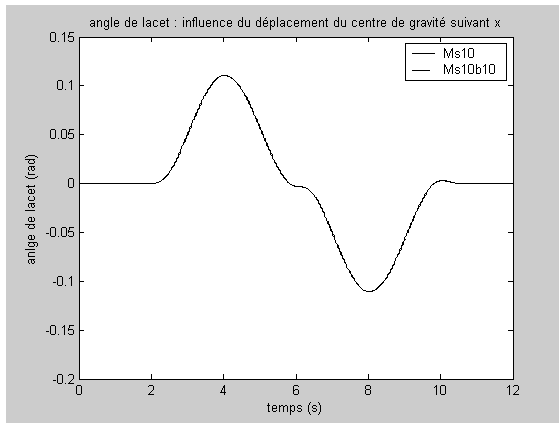


figure 2-98 : angle de lacet –  $V_x$  nominale  
- goudron humide

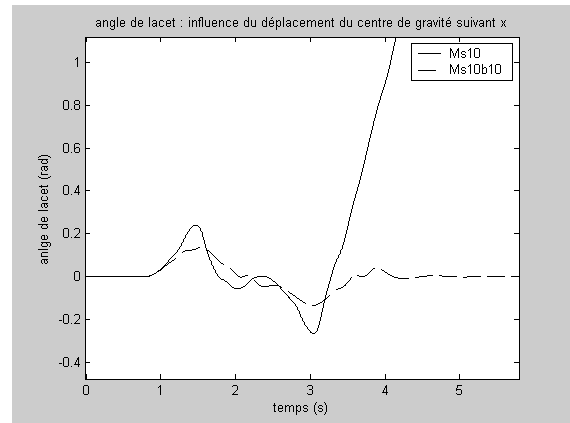


figure 2-99 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron humide

L'angle de lacet diminue très légèrement quand le centre de gravité recule.

## e) Angle de roulis

### *Influence de la masse*

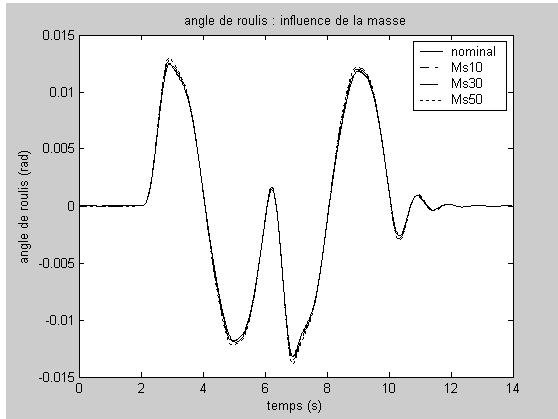


figure 2-100 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron sec

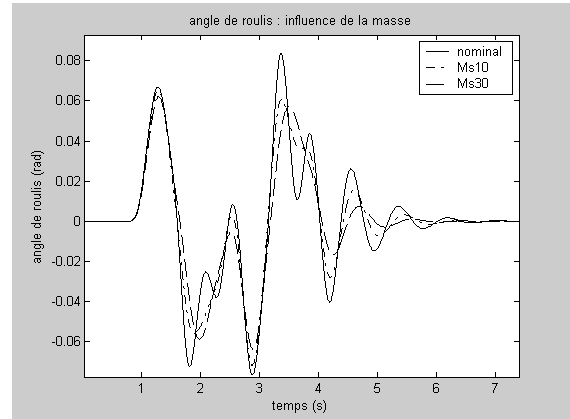


figure 2-101 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

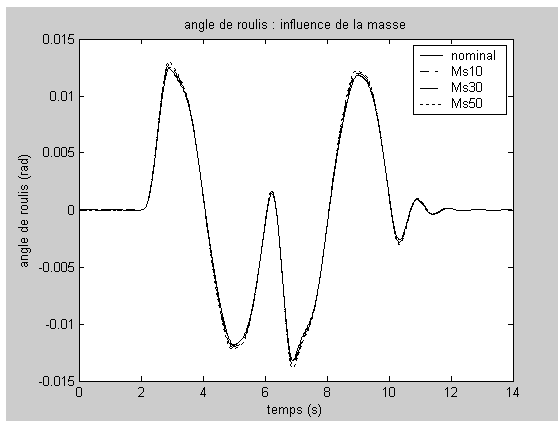


figure 2-102 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron humide

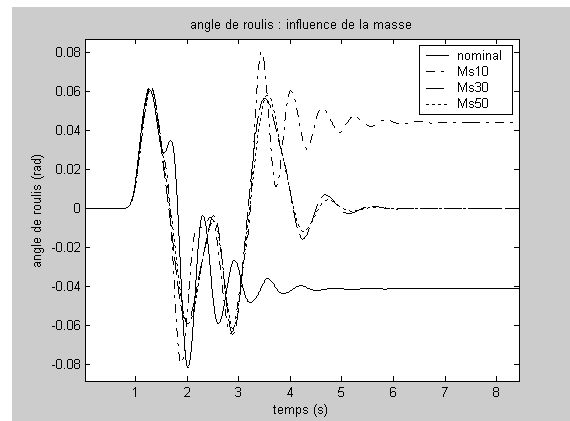


figure 2-103 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Quand la masse du véhicule augmente, l'inertie de roulis augmente donc l'angle de roulis diminue et sa courbe est plus lisse. A haute vitesse et faible adhérence (figure 2-103) on remarque qu'une augmentation de la masse fait stabiliser l'angle de roulis à la valeur nulle.



### *Influence du déplacement suivant x du centre de gravité*

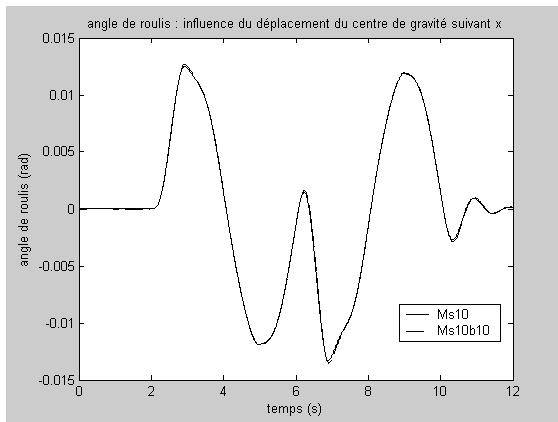


figure 2-104 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron sec

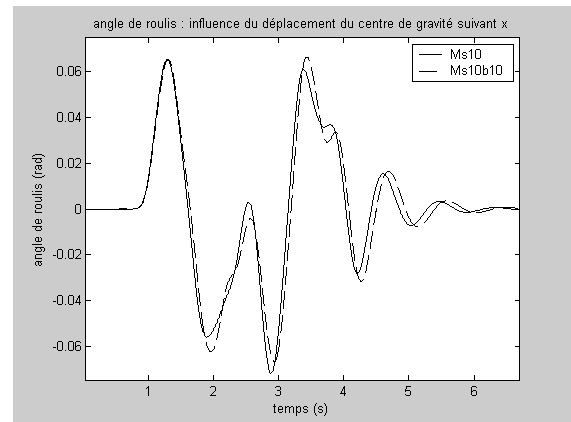


figure 2-105 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

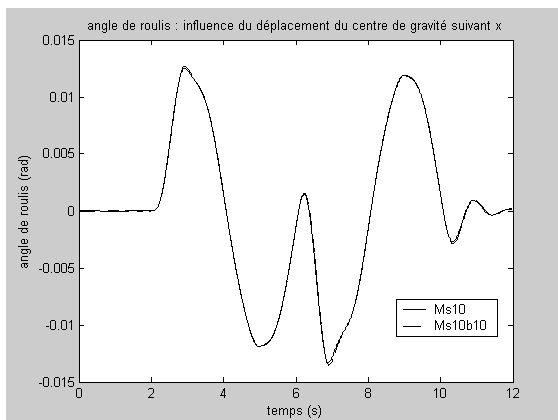


figure 2-106 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron humide

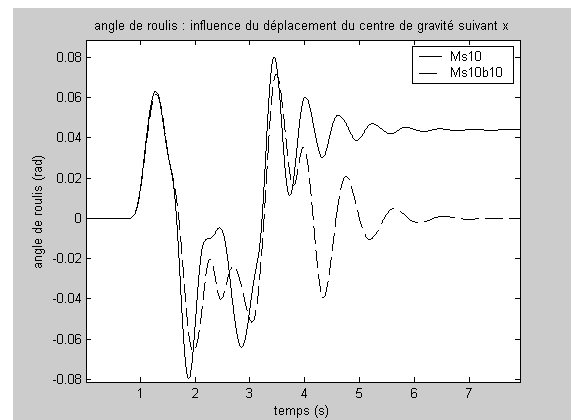


figure 2-107 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

A faible vitesse, l'adhérence du sol n'affecte pas l'angle de roulis (figure 2-104 et figure 2-106), on voit apparaître une différence à haute vitesse et haute adhérence (figure 2-105), et à basse adhérence (figure 2-107). On peut remarquer que le fait de reculer le centre de gravité du véhicule le rend plus stable ; en effet pour la configuration Ms10b10, l'angle de roulis du véhicule se stabilise à une valeur nulle en fin de simulation.

### Influence du déplacement suivant $y$ du centre de gravité

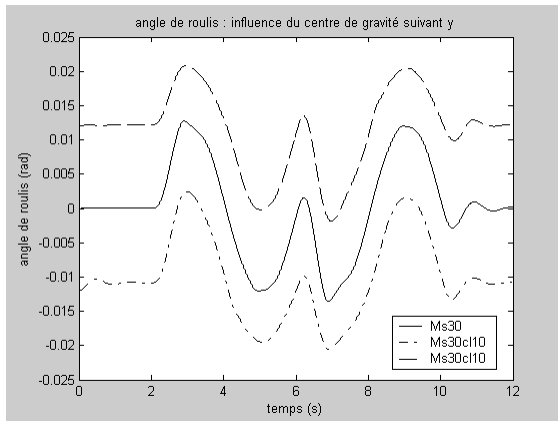


figure 2-108 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron sec

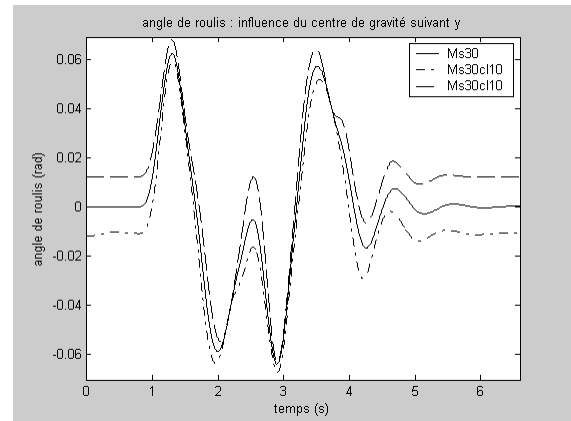


figure 2-109 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

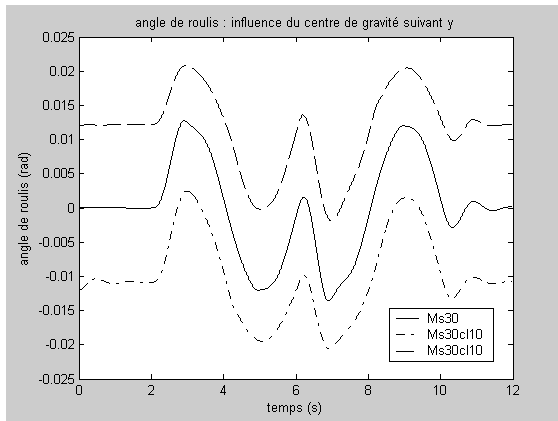


figure 2-110 : angle de roulis –  $V_x$  nominale - goudron humide

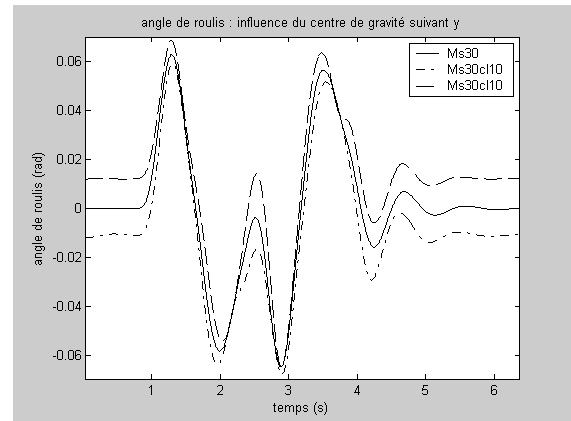


figure 2-111 : angle de roulis –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

L'angle de roulis est influencé par le déplacement suivant l'axe transversal du centre de gravité. D'une part par la condition initiale change, d'autre part quand le centre de gravité se déplace sur la gauche le véhicule penche moins à droite par rapport à sa position initiale, et inversement. Ce dernier phénomène est dû aux barres anti-roulis.

## f) Dérive avant

### Influence de la masse

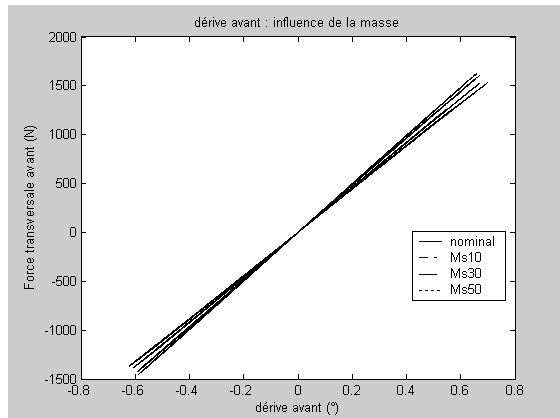


figure 2-112 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron sec

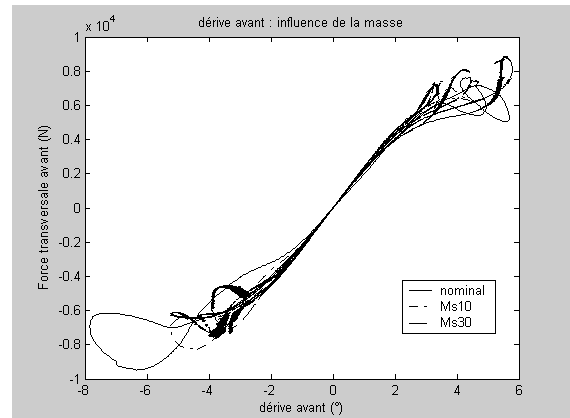


figure 2-113 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron sec

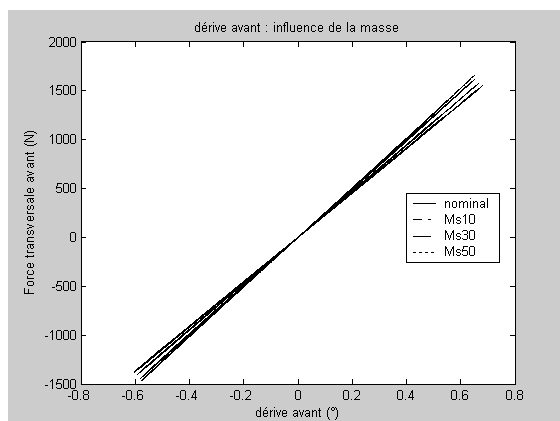


figure 2-114 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron humide

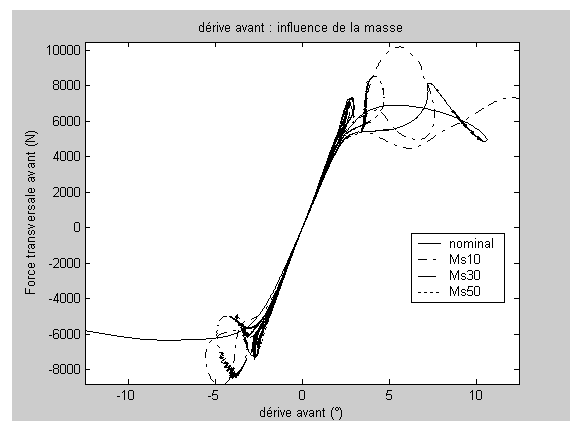


figure 2-115 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
- goudron humide

Quand la masse du véhicule augmente, il dérive beaucoup moins et est donc plus stable.

Quand la masse du véhicule augmente, la pente de la courbe force transversale par rapport à la dérive augmente, mais se trouve toujours dans la partie linéaire, pour les faibles vitesses (figure 2-112 et figure 2-114).

A haute vitesse (figure 2-113 et figure 2-115), nous pouvons constater d'une part que nous sommes dans la partie non linéaire de la courbe, et d'autre part que le véhicule a un comportement bizarre, en effet la courbe décrit des boucles en ses extrémités. Ceci est dû à l'augmentation de la vitesse, car le comportement pour chaque cas de charge à l'air similaire. Ce qui explique que la trajectoire souhaitée n'est plus suivie avec exactitude.

## g) Dérive arrière

Nous ne présenterons pas les courbes des dérives arrière, car elles ont le même comportement que les dérives avant.

### 2.7.3 Interprétation des résultats

Le véhicule tourne moins quand son centre de gravité recule, ce qui est dû en partie à la dérive arrière qui augmente moins vite par rapport aux forces transversales.

Quand le centre de gravité du véhicule recule, celui ci dérive moins et est donc plus stable.

Comme nous l'avons vu précédemment, la position transversale du centre de gravité n'influence pas beaucoup le comportement du véhicule même dans des conditions difficiles : haute vitesse et adhérence du revêtement de sol diminuée.

Nous pouvons remarquer qu'à faible vitesse l'adhérence du revêtement de sol n'influence pas le comportement routier du véhicule.

Même à grande vitesse, la position latérale du centre de gravité n'a pas une grande influence, mis à part pour le roulis.

Dans le tableau 2-2 nous avons regroupé l'influence de chaque paramètre considéré, suivant la vitesse et l'adhérence.

incertitude	masse				déplacement en x				déplacement en y			
	goudron sec		goudron humide		goudron sec		goudron humide		goudron sec		goudron humide	
vitesse	BV	HV	BV	HV	BV	HV	BV	HV	BV	HV	BV	HV
trajectoire	*	*	*	++	*	-	*	++	*	*	*	*
accélération transversale	*	↘	*	++	*	↗	*	++	*	*	*	*
angle de braquage	*	↘	*	++	↗	↗	↗	++	*	↗	*	↗
angle de lacet	*	↘	*	++	*	↘	*	++	*	↗	*	↗
angle de roulis	*	↘	*	++	*	↗	*	+	↘	↘	↘	↘
dérive avant	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗
dérive arrière	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗

tableau 2-2 : regroupant l'influence des paramètres incertains sur le modèle BGCar14

le symbole '\*' signifie que le paramètre considéré n'a pas d'influence sur le modèle

la '↗' signifie que si la masse, par exemple, augmente, l'amplitude de la grandeur mesurée augmente, (dans ce cas et le suivant, nous ne savons pas si l'influence des paramètres incertains est bénéfique pour le comportement du modèle).

la '↘' signifie que si la masse, par exemple, augmente, l'amplitude de la grandeur mesurée diminue

le '+' signifie par exemple qu'une augmentation de la masse entraîne un effet bénéfique sur le comportement du modèle (par exemple une augmentation de la masse peut rendre le véhicule plus stable)

le '-' signifie par exemple qu'une augmentation de la masse entraîne un effet négatif sur le comportement du modèle

## ***2.8 Conclusion***

Cette étude nous a permis de mettre en évidence l'influence des paramètres incertains considérés. La vitesse a une très grande influence sur le comportement routier du véhicule, ainsi que la masse. La position du centre de gravité sur l'axe longitudinal a une influence faible, tandis que sa position par rapport à l'axe transversal n'a que très peu d'influence. Mais cette étude ne nous a pas permis de quantifier l'influence de ces paramètres sur le comportement du véhicule, ce que nous allons essayer de faire dans le prochain chapitre.

# Chapitre 3 :

## Sensibilité à l'incertitude paramétrique

Il est de nos jours impensable de concevoir un système complexe sans passer par l'étape de sa modélisation dynamique. Un problème majeur qui se pose à tous ceux qui travaillent dans la modélisation est la recherche du compromis entre un modèle parfait et inutilisable (car trop complexe), et un modèle simplifié dont les hypothèses simplificatrices l'éloigneraient de la réalité [Young, 1997]. Les incertitudes apparaissent donc comme inévitables dans tout travail de modélisation, et en plus elles peuvent être engendrées par divers facteurs au cours du temps et du fonctionnement d'un système [Kam, 2001]. On distingue deux types d'incertitudes : les incertitudes paramétriques (incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus) et les dynamiques mal connues ou négligées (méconnaissance de la dynamique haute fréquence du processus) [Alazard et al, 1999].

La sensibilité paramétrique a intéressé de nombreux auteurs. Certains d'entre eux utilisent une approche classique passant par l'utilisation de la représentation d'état : [DiStephano et al., 1967], [Tomovic et Vukobratovic, 1968], [Director et Rohrer, 1968], [Dorato, 1968], [Tomovic et Vukobratovic, 1972], [Frank, 1978], [Middleton et Goowin, 1990]. D'autres utilisent l'approche bond graph : [Roe et Thomas, 2000] utilisent le bond graph afin d'analyser la sensibilité, [Cabanellas et al., 1995] définissent un pseudo bond graph de sensibilité, [Gawthrop, 2000a], [Gawthrop, 2000b], [Gawthrop et Ronco, 2000] utilisent le bond graph de sensibilité afin d'estimer et commander des systèmes mécatroniques. La détermination de la sensibilité a été abordé dans [Borutzky et Granda, 2001] ; une méthode de détermination de la fonction de sensibilité a été développée dans [Kam, 2001]. Dans [Niesner et al., 2004], les auteurs montrent comment déterminer la sensibilité des valeurs caractéristiques d'un modèle (constante de temps, ...).

La sensibilité paramétrique peut se définir de la manière suivante :

“Un système est sensible aux variations d'un paramètre  $\vartheta$  si ses propriétés ou son comportement sont affectés par ses variations”

La sensibilité d'une fonction de transfert face aux incertitudes paramétriques a été étudiée à partir de la méthodologie bond graph dans [Kam, 2001]. En nous appuyant sur ces travaux, nous allons montrer comment déterminer la sensibilité des valeurs caractéristiques (constante

de temps pour les modèles du premier ordre, pulsation naturelle et coefficient d'amortissement pour les modèles du second ordre) sur un modèle bond graph, en utilisant les gains de chemins causaux, les gains de boucles causales et les transmittances de composants bond graph.

Deux classes de modèles peuvent être rencontrées :

- tous les composants du modèle (éléments R, C, I, TF, GY) ont des paramètres indépendants,
- certains composants du modèle ont des paramètres dépendants.

Nous allons dans un premier temps, étudier la première classe de modèles, et nous montrerons comment appliquer les résultats à la seconde classe de modèles. Nous appliquerons enfin cette méthode au modèle « bicyclette » à deux degrés de liberté, pour l'étude de la sensibilité aux variations de la masse, de la position du centre de gravité et de la vitesse longitudinale.

## 3.1 Variations des caractéristiques dynamiques des modèles - Approximation au premier ordre

### 3.1.1 Modèle bond graph à paramètres indépendants

#### a) Cas général

Par l'application de la règle de MASON, le polynôme caractéristique (dénominateur de toute fonction de transfert) d'un modèle bond graph peut s'écrire sous la forme:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k - \sum_{j,k,l} B_j \cdot B_k \cdot B_l + \dots \quad (3-1)$$

$\sum_j B_j$  : somme des gains des boucles causales entre deux éléments R, C ou I, et des gains des mailles,

$\sum_j B_j \cdot B_k, \sum_j B_j \cdot B_k \cdot B_l, \dots$  : somme des produits 2 à 2, 3 à 3, etc., des gains de boucles causales disjointes.

**Définition :** Deux boucles causales sont disjointes si elles n'ont aucun lien ni jonction en commun parcourus en suivant la même variable. [Dauphin-Tanguy, 2000]

Soit  $\vartheta_i$  un paramètre composant attaché à un élément I, R, C, TF ou GY (exemple  $M$  pour I: $M$ ,  $m$  pour TF: $m$ ,  $r$  pour GY: $r, \dots$ ).

La sensibilité paramétrique du dénominateur de la fonction de transfert par rapport au paramètre composant  $\vartheta_i$  s'exprime en dérivant ce dénominateur (équation 3-1) par rapport au paramètre composant  $\vartheta_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(s)}{\partial \vartheta_i} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left[ 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k - \sum_{j,k,l} B_j \cdot B_k \cdot B_l + \dots \right] \\ &= - \sum_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j) + \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j \cdot B_k) - \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j \cdot B_k \cdot B_l) + \dots \end{aligned} \quad (3-2)$$

**Remarque 3-1 :** La construction des modèles bond graphs peut faire apparaître plusieurs occurrences d'un même paramètre  $\vartheta_i$  pour des éléments bond graph différents (exemple : en mécanique 2D, la masse peut apparaître 2 fois sur le modèle bond graph, pour le calcul de  $V_x$  et  $V_y$ ).

**Remarque 3-2 :** Une boucle causale peut donc éventuellement comporter plusieurs occurrences du paramètre  $\vartheta_i$ . De plus les produits des gains de boucles disjointes peuvent aussi comporter plusieurs occurrences du paramètre  $\vartheta_i$ .

Le paramètre composant  $\vartheta_i$  apparaît dans le dénominateur de la fonction de transfert avec un exposant  $\alpha$ , tel que  $\alpha = \pm 1$  pour  $R_l$ ,  $I_l$ ,  $C_l$ ,  $r$  ou  $m$  dans  $\frac{-R_l}{I_l \cdot s}$  ou  $\frac{-m}{I_l \cdot s}$  ou  $\alpha = \pm 2$  pour  $r^{-2}$  et  $m^2$  dans  $\frac{-1}{r^2 \cdot R_l \cdot I_l \cdot s}$  ou  $\frac{-m^2}{I_2 \cdot C_l \cdot s^2}$ . Dans le cas de la jonction d'Euler en mécanique 3D, nous pouvons avoir  $\alpha = \pm 3$

**Expression de**  $\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i}$

L'expression générale des gains de boucles contenant le terme  $\vartheta_i$  peut se mettre sous la forme:

$$B_j(\vartheta_i) = a_j \cdot \vartheta_i^{\alpha_j} \quad (3-3)$$

**Remarque 3-3 :** Le coefficient  $\alpha_j$  prend une valeur nulle si la boucle  $B_j$  ne comporte pas le paramètre composant  $\vartheta_i$ .

$a_j$  est l'expression algébrique regroupant tous les termes du gain de la boucle  $j$  excepté  $\vartheta_i^{\alpha_j}$ .

On peut donc écrire:

$$\frac{\partial B_j(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (a_j \cdot \vartheta_i^{\alpha_j}) \quad (3-4)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_j(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i} &= \alpha_j \cdot a_j \cdot \vartheta_i^{\alpha_j - 1} \\ &= \frac{1}{\vartheta_i} \cdot \alpha_j \cdot B_j(\vartheta_i) \end{aligned} \quad (3-5)$$

et en généralisant:

$$\begin{aligned} -\sum_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j)(\vartheta_i) &= -\frac{1}{\vartheta_i} \cdot \sum_j \alpha_j \cdot B_j(\vartheta_i) \\ \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) &= -\frac{1}{\vartheta_i} \cdot \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k) (B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) \\ \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (B_j \cdot B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) &= -\frac{1}{\vartheta_i} \cdot \sum_{j,k,l} (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) (B_j \cdot B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3-6)$$



A partir des équations (3-2) et (3-6), on obtient la forme générale de la sensibilité paramétrique du dénominateur par rapport au paramètre  $\vartheta_i$  :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j \alpha_j (B_j)(\vartheta_i) + \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k)(B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) - \sum_{j,k,l} (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l)(B_j \cdot B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) + \dots \right] \quad (3-7)$$

## b) Modèle du premier ordre

Pour les modèles du premier ordre, le dénominateur de la fonction de transfert peut s'écrire sous deux formes :

- $D(s) = s + s_0$  (le modèle bond graph ne présente pas de boucles causales de longueur 0)
- $D(s) = a_0 \cdot s + a_1$  (le modèle bond graph présente des boucles causales de longueur 0)

Nous allons donner deux méthodes pour calculer la sensibilité de la constante de temps du modèle.

### \* *Modèle sans boucle causale de longueur 0*

**Théorème 3-1 :** *La sensibilité de la constante de temps  $\tau$  d'une fonction de transfert du premier ordre aux variations des paramètres associés aux éléments bond graphs peut être déduite directement du modèle bond graph ne comportant pas de boucles causales de longueur 0 à partir du calcul des gains de boucles causales.*

Pour un modèle du premier ordre dont le bond graph ne comporte pas de boucles de causalité de longueur 0, le polynôme caractéristique s'écrit:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j \quad (3-8)$$

avec  $B_j \in \left\{ -\frac{R}{I \cdot s}, -\frac{1}{R \cdot C \cdot s}, -m^2 \cdot \frac{R}{I \cdot s}, -\frac{1}{m^2 \cdot R \cdot C \cdot s}, -\frac{r^2}{R \cdot I \cdot s}, -\frac{R}{r^2 \cdot C \cdot s} \right\}$ , gains des boucles causales de longueur 1.

En faisant apparaître le pôle du système au dénominateur de la fonction de transfert sous forme canonique, on obtient

$$D(s) = s \cdot \Delta(s) = s + s_0 \quad (3-9)$$

avec  $s_0 = \sum$  (termes constants des gains de boucles de longueur 1). (3-10)  
(sans l'opérateur  $s$ )

La sensibilité paramétrique du dénominateur s'exprime sous deux formes :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = -\frac{1}{\vartheta_i} \cdot \sum_j \alpha_j \cdot B_j(\vartheta_i) \quad (3-11)$$

et

$$\frac{\partial D}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_i} \quad (3-12)$$

Ce qui donne:

$$\frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_i} = -\frac{1}{\vartheta_i} \sum_j \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_j) \quad (3-13)$$

La sensibilité de la constante de temps  $\tau = 1/s_0$  peut s'exprimer par :

$$\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta_i} = -\frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_i} \cdot \tau^2 \quad (3-14)$$

*exemple 1 :*

Soit le système du premier ordre de la figure 3-1 constitué d'un ressort et d'un amortisseur, modélisé par le bond graph de la figure 3-2.

Le calcul porte sur la sensibilité de la constante de temps aux variations de  $b$ .

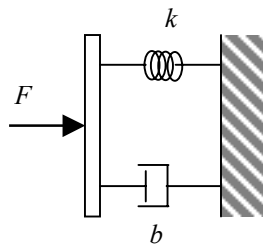


figure 3-1 : Modèle d'une suspension mécanique

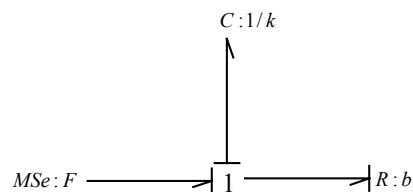


figure 3-2 : Modèle bond graph du système de suspension

Il existe une seule boucle causale :  $B1 = -\frac{k}{b \cdot s}$ , d'où  $\alpha_1 = -1$ , conformément à la formule (3-3).

Donc le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{bs} \quad (3-15)$$

En faisant apparaître la constante de temps du système au dénominateur de la fonction de transfert, on obtient :

$$D(s) = s \cdot \Delta(s) = s + s_0 \quad \text{avec } s_0 = k/b \quad (3-16)$$

$$\text{Et la constante de temps : } \tau = b/k \quad (3-17)$$

L'application du théorème 3-1 et de l'équation (3-14) conduit à

$$\frac{\partial \tau}{\partial b} = -\left[-\frac{1}{b}\right] \left[-\frac{k}{b}\right] (-1) \left[\frac{b}{k}\right]^2 = 1/k \quad (3-18)$$

**\* Modèle présentant des boucles causales de longueur 0**

**Théorème 3-2 :** *La sensibilité de la constante de temps  $\tau$  d'une fonction de transfert du premier ordre aux variations des paramètres associés aux éléments bond graphs peut être déduite directement du modèle bond graph à partir du calcul des gains de boucles causales.*

Pour un modèle du premier ordre dont le bond graph présente des boucles causales de longueur 0, le polynôme caractéristique s'écrit:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k - \sum_{j,k,l} B_j \cdot B_k \cdot B_l + \dots \quad (3-19)$$

ou, en considérant les longueurs des boucles causales :

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j^1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \sum_{j,k,l} B_j^1 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 - \sum_{j,k,l} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 + \dots \quad (3-20)$$

$B_j^1$  est une boucle causale de longueur 1, et  $B_j^0$  est une boucle causale de longueur 0 (de type  $\frac{R_1}{R_2}$ , entre deux éléments R ou de type  $\frac{I_1}{I_2}$  ou  $\frac{C_1}{C_2}$ , entre deux éléments I ou C : l'un étant en causalité intégrale, et l'autre en causalité dérivée).

$\Delta(s)$  peut être réécrit de la manière suivante :

$$\Delta(s) = \left( 1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \sum_{j,k,l} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 + \dots \right) + \left( - \sum_j B_j^1 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^0 - \sum_{j,k,l} B_j^1 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 + \dots \right) \quad (3-21)$$

On peut déduire :

$$s\Delta(s) = s \cdot \underbrace{\left( 1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \sum_{j,k,l} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 + \dots \right)}_{a_0} + \underbrace{\left( - \sum_i B_j^{1*} + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^0 - \sum_{j,k,l} B_j^{1*} \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 + \dots \right)}_{a_1} \quad (3-22)$$

où le terme  $B_j^{1*}$  correspond au terme constant des gains de boucles de longueur 1 (sans l'opérateur  $s$ ).

En posant :

$$D(s) = s\Delta(s) = a_0 \cdot s + a_1, \quad (3-23)$$

la sensibilité paramétrique du dénominateur s'exprime sous deux formes :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j \alpha_j \cdot (B_j) (\vartheta_i) + \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k) (B_j \cdot B_k) (\vartheta_i) - \sum_{j,k,l} (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) (B_j \cdot B_k \cdot B_l) (\vartheta_i) + \dots \right] \quad (3-24)$$

et

$$\frac{\partial D}{\partial \vartheta_i} = s \cdot \frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i} \quad (3-25)$$

on aura donc:

$$\frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j B_j^0 \cdot \alpha_j + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) - \sum_{j,k,l} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) + \dots \right] \quad (3-26)$$

et

$$\frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j B_j^{1*} \cdot \alpha_j + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) - \sum_{j,k,l} B_j^{1*} \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) + \dots \right] \quad (3-27)$$

La sensibilité de la constante de temps  $\tau = a_0/a_1$  peut s'exprimer par :

$$\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{1}{a_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{a_0}{a_1^2} \quad (3-28)$$

*exemple 2 :*

Soit le système électrique du premier ordre de la figure 3-3, modélisé par le bond graph de la figure 3-4.

Le calcul porte sur la sensibilité de la constante de temps aux variations de  $R_1$ .

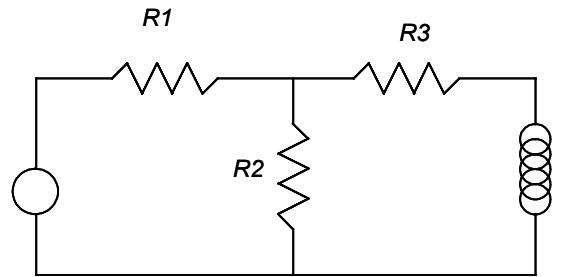


figure 3-3 : Système électrique du premier ordre

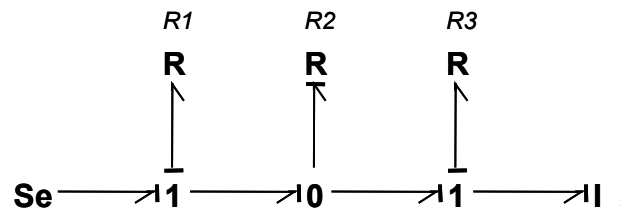


figure 3-4 : Modèle bond graph du système électrique du premier ordre

Il existe trois boucles causales :

$$B_1 = -\frac{R_1}{R_2}, \text{ de longueur } 0, \text{ avec } \alpha_1 = 1$$

$$B_2 = -\frac{R_1}{I \cdot s}, \text{ de longueur } 1, \text{ avec } \alpha_2 = 1$$

$$B_3 = -\frac{R_3}{I \cdot s}, \text{ de longueur } 1, \text{ avec } \alpha_3 = 0$$

Donc le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\Delta(s) = 1 - \left( -\frac{R_1}{R_2} \right) - \left( -\frac{R_1}{I \cdot s} \right) - \left( -\frac{R_3}{I \cdot s} \right) + \left( -\frac{R_1}{R_2} \right) \cdot \left( -\frac{R_3}{I \cdot s} \right) \quad (3-29)$$

$$s \Delta(s) = \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \cdot s + \left( \frac{R_1}{I} + \frac{R_3}{I} + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3}{I} \right) \quad (3-30)$$

On peut écrire le dénominateur de la fonction de transfert :

$$D(s) = s \Delta(s) = a_0 \cdot s + a_1 \quad \text{avec} \quad a_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{R_1}{I} + \frac{R_3}{I} + \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3}{I} \quad (3-31)$$

L'application du théorème 3-2 et de l'équation (3-28) conduit à

$$\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{1}{R_2 \cdot \left( \frac{R_1}{I} + \frac{R_3}{I} + \frac{R_1 \cdot R_3}{I \cdot R_2} \right)} - \frac{\left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{I} + \frac{R_3}{I \cdot R_2} \right)}{\left( \frac{R_1}{I} + \frac{R_3}{I} + \frac{R_1 \cdot R_3}{I \cdot R_2} \right)^2} \quad (3-32)$$

Pour les calculs intermédiaires, on utilise les équations (3-26) et (3-27)

$$\frac{\partial a_0}{\partial R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \left[ \frac{R_1}{R_2} \right] = \frac{1}{R_2} \quad (3-33)$$

et

$$\frac{\partial a_1}{\partial R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \left[ \frac{R_1}{I} + \left( \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3}{I} \right) \right] = \left( \frac{1}{I} + \frac{R_3}{R_2 \cdot I} \right) \quad (3-34)$$

### c) Modèle du deuxième ordre

Pour les modèles du deuxième ordre, le dénominateur de la fonction de transfert peut s'écrire de différentes manières ; nous considérons les deux formes suivantes :

- $D(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$  (le modèle bond graph ne présente pas de boucles causales de longueur 0)
- $D(s) = a_0 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_2$  (le modèle bond graph présente des boucles causales de longueur 0)

Nous allons donner deux méthodes pour calculer la sensibilité de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement.

#### \* *Modèle sans boucle causale de longueur 0*

**Théorème 3-3 :** *La sensibilité de la pulsation naturelle  $\omega_n$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$  d'une fonction de transfert du second ordre aux variations des paramètres associés aux éléments bond graph peut être déduite directement du modèle bond graph ne comportant pas de boucle causale de longueur 0 à partir du calcul des gains de boucles causales.*

Pour un modèle d'ordre 2 dont le bond graph ne présente pas de boucle causale de longueur 0, le polynôme caractéristique s'écrit:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k \quad (3-35)$$

mais aussi en faisant apparaître la pulsation naturelle  $\omega_n$  et le coefficient d'amortissement  $\zeta$  du système:

$$D(s) = s^2 \cdot \Delta(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \quad (3-36)$$

avec :

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \sum \text{termes constants des gains de boucles de longueur 1,} \quad (3-37)$$

$$\omega_n^2 = -\sum (\text{termes constants des gains de boucles de longueur 2}) + \sum (\text{des produits 2 à 2 des termes constants des gains de boucles disjointes de longueur 1}). \quad (3-38)$$

On peut donc écrire la sensibilité du dénominateur par rapport au paramètre  $\vartheta_i$  sous deux formes.

L'équation (3-35) donne

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = -\frac{1}{\vartheta_i} \left[ -\sum_j \alpha_j \cdot B_j(\vartheta_i) + \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k) (B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) \right] \quad (3-39)$$

et l'équation (3-36) donne

$$\frac{\partial D(s)}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s] + \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [\omega_n^2] \quad (3-40)$$

On aura donc:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n] = -\frac{1}{\vartheta_i} \cdot \sum_j \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_j) \quad (3-41)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [\omega_n^2] = \frac{1}{\vartheta_i} \cdot \left[ \begin{array}{l} -\sum_j \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 2} \end{array} \right] (\alpha_j) \\ + \sum_{j,k} \left[ \begin{array}{l} \text{produits 2 à 2 des termes constants des} \\ \text{gains de boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_j + \alpha_k) \end{array} \right] \quad (3-42)$$

$$\text{Avec } \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} = 2 \cdot \omega_n \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i} \quad (3-43)$$

la sensibilité de la pulsation naturelle par rapport  $\vartheta_i$  peut s'exprimer par :

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{2 \cdot (\omega_n^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \quad (3-44)$$

$$\text{En écrivant : } \zeta = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n}{2 \cdot \omega_n} \quad (3-45)$$

il vient

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta_i} = \frac{\frac{\partial (2 \cdot \zeta \cdot \omega_n)}{\partial \vartheta_i} \cdot (2 \cdot \omega_n) - (2 \cdot \zeta \cdot \omega_n) \cdot \frac{\partial (2 \cdot \omega_n)}{\partial \vartheta_i}}{(2 \cdot \omega_n)^2} \quad (3-46)$$

La sensibilité du coefficient d'amortissement par rapport au paramètre  $\vartheta_i$  peut s'exprimer par :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\partial (2 \cdot \zeta \cdot \omega_n)}{\partial \vartheta_i}}{(\omega_n^2)^{1/2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 \cdot \zeta \cdot \omega_n) \cdot \frac{\partial (\omega_n^2)}{\partial \vartheta_i}}{(\omega_n^2)^{3/2}} \quad (3-47)$$

Chacun des termes des expressions de  $\frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i}$  et  $\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta_i}$  peut être calculé en fonction des gains de boucles.

exemple 3 :

Soit le système électrique du second ordre représenté figure 3-5, et son modèle bond graph dessiné figure 3-6.

Le calcul porte sur la sensibilité de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement aux variations de  $L$ .

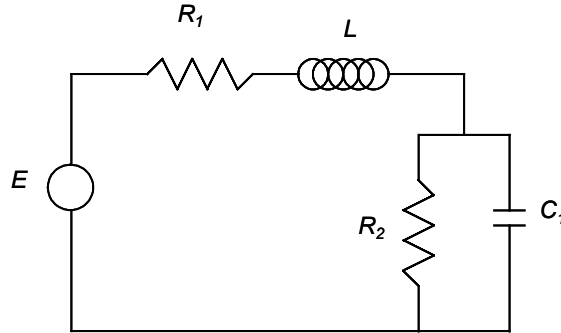


figure 3-5 : système électrique du deuxième ordre

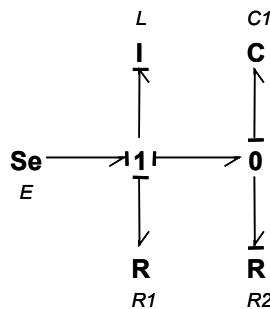


figure 3-6 : Modèle bond graph du système électrique du deuxième ordre

Le polynôme caractéristique s'exprime par:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k \quad (3-48)$$

avec les boucles causales :

$$B1 = -\frac{R_1}{L \cdot s} \quad \text{avec } \alpha_1 = -1 \quad (3-49)$$

$$B2 = -\frac{1}{R_2 \cdot C_1 \cdot s} \quad \text{avec } \alpha_2 = 0 \quad (3-50)$$

$$B3 = -\frac{1}{L \cdot C_1 \cdot s^2} \quad \text{avec } \alpha_3 = -1 \quad (3-51)$$

ce qui s'écrit

$$\Delta(s) = 1 + \frac{R_1}{L \cdot s} + \frac{1}{R_2 \cdot C_1 \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C_1 \cdot s^2} + \frac{R_1}{R_2 \cdot L \cdot C_1 \cdot s^2} \quad (3-52)$$

d'où

$$D(s) = s^2 \cdot \Delta(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \quad (3-53)$$

avec :

$$2.\zeta.\omega_n = \frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L} \quad (3-54)$$

$$\omega_n^2 = \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1} \quad (3-55)$$

ou encore

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}} \quad (3-56)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}} \quad (3-57)$$

L'application du théorème 3-3 conduit, à l'aide des équations (3-41) et (3-42), à

$$\frac{\partial}{\partial L} [2.\zeta.\omega_n] = -\frac{1}{L} \left( \frac{R_1}{L} \right) (-1) = -\frac{R_1}{L^2} \quad (3-58)$$

$$\frac{\partial}{\partial L} [\omega_n^2] = \frac{1}{L} \left[ -\left( -\frac{1}{L.C_1} \right) (-1) + \left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) (-1) \right] = -\frac{1}{L} \left( \frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) \quad (3-59)$$

La sensibilité de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement aux variations du paramètre  $L$  s'écrit, respectivement à partir des équations (3-44) et (3-47):

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial L} = \frac{1}{2 \left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1} \right)^{1/2}} \left[ -\frac{1}{L} \left( \frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) \right] = -\frac{1}{2.L} \frac{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}} \quad (3-60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial L} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[ -\frac{R_1}{L^2} \right]}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( \frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) \left[ -\frac{1}{L} \left( \frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) \right]}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1} \right)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2.L} \cdot \frac{\frac{R_1}{L}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}} + \frac{1}{4.L} \cdot \frac{\frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}} \end{aligned} \quad (3-61)$$

### \* *Modèle présentant des boucles causales de longueur 0*

**Théorème 3-4 :** *La sensibilité de la pulsation naturelle  $\omega_n$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$  d'une fonction de transfert du second ordre aux variations des paramètres associés aux éléments bond graph peut être déduite directement du modèle bond graph à partir du calcul des gains de boucles causales.*

Pour un modèle d'ordre 2 dont le bond graph présente des boucles causales de longueur 0, le polynôme caractéristique s'écrit:



$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k - \sum_{j,k,l} B_j \cdot B_k \cdot B_l + \dots \quad (3-62)$$

ou, en considérant les longueurs des boucles causales :

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j^2 - \sum_j B_j^1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^2 \cdot B_k^0 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^1 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \dots \quad (3-63)$$

$B_j^2$  est une boucle causale de longueur 2,  $B_j^1$  est une boucle causale de longueur 1, et  $B_j^0$  est une boucle causale de longueur 0.

$\Delta(s)$  peut être réécrit de la manière suivante :

$$\Delta(s) = \left( 1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \dots \right) + \left( - \sum_i B_j^1 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^0 - \dots \right) + \left( - \sum_i B_j^2 + \sum_{j,k} B_j^2 \cdot B_k^0 + \sum_{j,k} B_j^1 \cdot B_k^1 - \dots \right) \quad (3-64)$$

ce qui donne :

$$s^2 \Delta(s) = s^2 \underbrace{\left( 1 - \sum_j B_j^0 + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 - \dots \right)}_{a_0} + s \underbrace{\left( - \sum_i B_j^{1*} + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^0 - \dots \right)}_{a_1} + \underbrace{\left( - \sum_i B_j^{2*} + \sum_{j,k} B_j^{2*} \cdot B_k^0 + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^1 - \dots \right)}_{a_2} \quad (3-65)$$

Les termes  $B_j^{1*}$  et  $B_j^{2*}$  correspondent respectivement au terme constant des gains de boucles de longueur 1 et 2 (sans l'opérateur  $s$ ).

En notant :

$$D(s) = s^2 \Delta(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2, \quad (3-66)$$

on peut donc écrire la sensibilité du dénominateur par rapport au paramètre  $\vartheta_i$  sous deux formes :

L'équation (3-62) donne

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = -\frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j \alpha_j \cdot B_j(\vartheta_i) + \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k) (B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) - \sum_{j,k,l} (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) (B_j \cdot B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) \right] \quad (3-67)$$

et l'équation (3-66) donne

$$\frac{\partial D}{\partial \vartheta_i} = s^2 \cdot \frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i} + s \cdot \frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial a_2}{\partial \vartheta_i} \quad (3-68)$$

On aura donc:

$$\frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j B_j^0 \cdot \alpha_j + \sum_{j,k} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) - \sum_{j,k,l} B_j^0 \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) + \dots \right], \quad (3-69)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j B_j^{1*} \cdot \alpha_j + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) - \sum_{j,k,l} B_j^{1*} \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) + \dots \right] \quad (3-70)$$

et

$$\frac{\partial a_2}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ - \sum_j B_j^{2*} \cdot \alpha_j + \sum_{j,k} B_j^{2*} \cdot B_k^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) + \sum_{j,k} B_j^{1*} \cdot B_k^1 \cdot (\alpha_j + \alpha_k) - \sum_{j,k,l} B_j^{2*} \cdot B_k^0 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) - \sum_{j,k,l} B_j^{1*} \cdot B_k^1 \cdot B_l^0 \cdot (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) + \dots \right] \quad (3-71)$$

Nous nous intéressons à la sensibilité de la pulsation naturelle  $\omega_n$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ .

Le dénominateur de la fonction de transfert étudiée, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3-72)$$

ou

$$D'(s) = s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{a_2}{a_0} \quad (3-73)$$

ce qui donne

$$\omega_n = \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{1/2} \quad (3-74)$$

et

$$\zeta = \frac{a_1}{2(a_0 a_2)^{1/2}} \quad (3-75)$$

La sensibilité de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement se calcule comme suit :

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i} = \frac{\frac{\partial a_2}{\partial \vartheta_i}}{2(a_2 a_0)^{1/2}} - \frac{a_2^{1/2} \cdot \frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i}}{2 a_0^{3/2}} \quad (3-76)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta_i} = \frac{\frac{\partial a_1}{\partial \vartheta_i}}{2(a_0 a_2)^{1/2}} - \frac{a_1 \cdot \frac{\partial a_0}{\partial \vartheta_i}}{4 a_0^{3/2} a_2^{1/2}} - \frac{a_1 \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \vartheta_i}}{4 a_0^{1/2} a_2^{3/2}} \quad (3-77)$$

Chacun des termes des expressions de  $\frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i}$  et  $\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta_i}$  peut être calculé en fonction des gains de boucles.

*exemple 4 :*

Soit le système électrique du second ordre de la figure 3-7, modélisé par le bond graph de la figure 3-8.

Le calcul porte sur la sensibilité de la constante de temps aux variations de  $I$ .

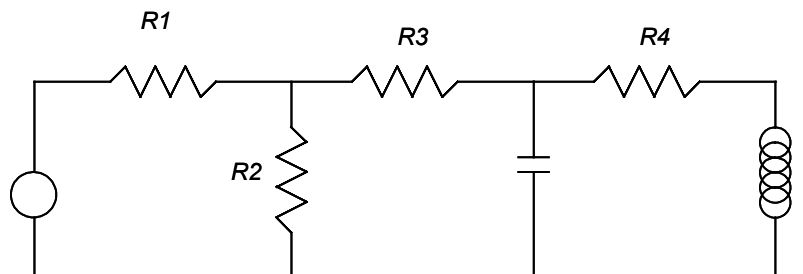


figure 3-7 : Système électrique

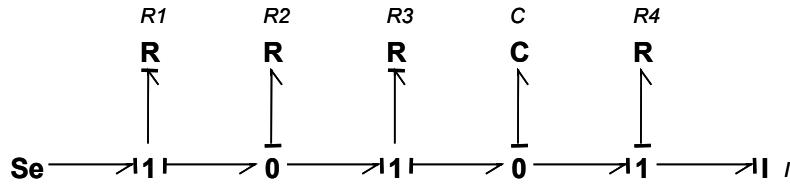


figure 3-8 : Modèle bond graph du système électrique

Il existe cinq boucles causales :

$$B_1 = -\frac{R_2}{R_1}, \text{ de longueur } 0, \text{ avec } \alpha_1 = 0$$

$$B_2 = -\frac{R_2}{R_3}, \text{ de longueur } 0, \text{ avec } \alpha_2 = 0$$

$$B_3 = -\frac{1}{R_3.C.s}, \text{ de longueur } 1, \text{ avec } \alpha_3 = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{I.C.s^2}, \text{ de longueur } 2, \text{ avec } \alpha_4 = -1$$

$$B_5 = -\frac{R_4}{I.s}, \text{ de longueur } 1, \text{ avec } \alpha_5 = -1$$

On peut écrire le dénominateur de la fonction de transfert :

$$D(s) = s^2 \cdot \Delta(s) = a_0 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_2 \quad (3-78)$$

avec

$$a_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3}, \quad (3-79)$$

$$a_1 = \frac{1}{R_3.C} + \frac{R_4}{I} + \frac{R_2}{R_1.R_3.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.I} + \frac{R_2.R_4}{R_3.I} \quad (3-80)$$

et

$$a_2 = \frac{1}{I.C} + \frac{R_2}{R_1.I.C} + \frac{R_2}{R_3.I.C} + \frac{R_4}{R_3.I.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3.I.C} \quad (3-81)$$

Par application du théorème 3-4, il vient :

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial I} = \frac{\frac{1}{I^2.C} \left[ -1 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3} \right]}{2 \left( \frac{1}{I.C} + \frac{R_2}{R_1.I.C} + \frac{R_2}{R_3.I.C} + \frac{R_4}{R_3.I.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3.I.C} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-82)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial I} = \frac{\frac{R_4}{I^2} \left[ -1 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} \right]}{2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{I.C} + \frac{R_2}{R_1.I.C} + \frac{R_2}{R_3.I.C} + \frac{R_4}{R_3.I.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3.I.C} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-83)$$

$$- \frac{\left( \frac{1}{R_3.C} + \frac{R_4}{I} + \frac{R_2}{R_1.R_3.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.I} + \frac{R_2.R_4}{R_3.I} \right) \cdot \frac{1}{I^2.C} \left[ -1 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3} \right]}{4 \left( \frac{1}{I.C} + \frac{R_2}{R_1.I.C} + \frac{R_2}{R_3.I.C} + \frac{R_4}{R_3.I.C} + \frac{R_2.R_4}{R_1.R_3.I.C} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Pour les calculs intermédiaires, on utilise les équations (3-69), (3-70) et (3-71)

$$\frac{\partial a_0}{\partial I} = 0, \quad (3-84)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial I} = \frac{R_4}{I^2} \left[ -1 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} \right] \quad (3-85)$$

et

$$\frac{\partial a_2}{\partial I} = \frac{1}{I^2 \cdot C} \left[ -1 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3} \right] \quad (3-86)$$

### 3.1.2 Modèle bond graph à paramètres dépendants

Les paramètres associés aux éléments d'un bond graph sont en général déduits des grandeurs géométriques du système (exemple :  $I = \frac{\rho l}{S}$  inertie d'un fluide de masse volumique  $\rho$  dans une conduite de longueur  $l$  et de section  $S$ ).

Nous envisageons ici le cas où l'analyse de sensibilité se fait par rapport à un coefficient  $\lambda$  qui intervient dans un paramètre  $\vartheta_i$  (exemple : coefficient de forme).

Dans ce cas, la sensibilité de la variable  $X$  par rapport à  $\lambda$ , soit  $S_\lambda^X$ , s'écrit :

$$S_\lambda^X = \sum_i \frac{\partial X}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \lambda} \quad (3-87)$$

où les  $\vartheta_i, i=1, \dots, n_\lambda$  sont tous les paramètres associés à des éléments bond graph dépendant de  $\lambda$ .

Les termes  $\frac{\partial X}{\partial \vartheta_i}$  se calculent comme indiqué précédemment

### 3.1.3 Application : modèle 2ddl dit "bicyclette"

#### a) Calculs préliminaires

Soit le modèle 2ddl dit « bicyclette » de la figure 1-1 dont le modèle bond graph donné figure 1-3 est repris figure 3-9.

Ce modèle bond graph possède deux entrées (MSf)  $\delta_{av} \cdot V_x$  et  $\delta_{ar} \cdot V_x$ , ainsi que deux sorties :  $V_y$  et  $\dot{\psi}$  (vitesse transversale et vitesse de dérive).

Le polynôme caractéristique du modèle bond graph s'écrit

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k \quad (3-88)$$

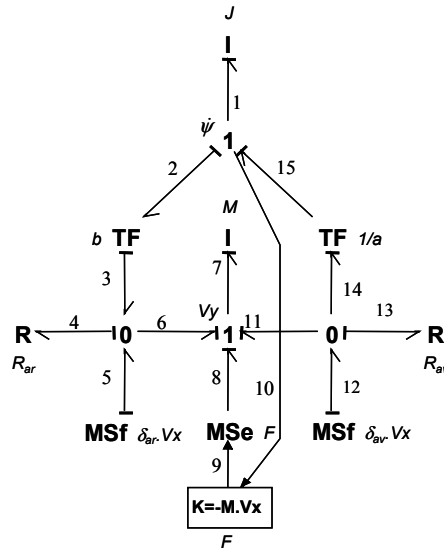


figure 3-9 : Modèle bond graph « bicyclette »

avec les boucles causales suivantes :

- (entre I:M et I:J)

$$B_1 = -\frac{a.b.R_{av}.R_{ar}}{M.J.s^2} \quad (f7-f6-f4-e4-e3-e2-e1-f1-f15-f14-f13-e13-e11-e7)$$

$$B_2 = -\frac{a.b.R_{av}.R_{ar}}{M.J.s^2} \quad (f7-f11-f13-e13-e14-e15-e1-f1-f2-f3-f4-e4-e6-e7)$$

- il existe deux boucles causales reliant I:M et I:J passant par le lien d'information 10 propageant le flux  $\psi$  qui est la vitesse de lacet.

$$B_3 = -\frac{a.R_{av}.Vx}{J.s^2} \quad (f7-f6-f4-e4-e3-e2-e1-f1-f10-e9-e8-e7)$$

$$B_4 = \frac{b.R_{ar}.Vx}{J.s^2} \quad (f7-f11-f13-e13-e14-e15-e1-f1-f10-e9-e8-e7)$$

- (entre I:M et R:Rar)

$$B_5 = -\frac{R_{ar}}{M.s} \quad (f7-f6-f4-e4-e6-e7)$$

- (entre I:J et R:Rav)

$$B_6 = -\frac{a^2.R_{av}}{J.s} \quad (f1-f15-f14-f13-e13-e14-e15-e1)$$

- (entre I:M et R:Rav)

$$B_7 = -\frac{R_{av}}{M.s} \quad (f7-f11-f13-e13-e11-e7)$$

- (entre I:J et R:Rar)

$$B_8 = \frac{b^2.R_{ar}}{J.s} \quad (f1-f2-f3-f4-e4-e3-e2-e1)$$

En faisant apparaître la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement du modèle, le dénominateur de la fonction de transfert devient :

$$D(s) = s^2 \Delta(s) = s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n^2 \quad (3-89)$$

Les équations (3-37) et (3-38) donnent

$$2.\zeta.\omega_n = -B_5^* - B_6^* - B_7^* - B_8^* \quad (3-90)$$

$$\omega_n^2 = -B_1^* - B_2^* - B_3^* - B_4^* + B_5^*.B_6^* + B_7^*.B_8^* \quad (3-91)$$

où les  $B_i^*$  ( $i$  : numéro de la boucle) sont les termes constants des gains de boucles  $B_i$  (sans l'opérateur  $s$ ).

On obtient

$$\omega_n = \left[ \frac{(a+b)^2.R_{av}.R_{ar} + Vx.(a.R_{av} - b.R_{ar})}{M.J} \right]^{1/2} \quad (3-92)$$

$$\zeta = \frac{R_{av} \left( \frac{a^2}{J} + \frac{1}{M} \right) + R_{ar} \left( \frac{b^2}{J} + \frac{1}{M} \right)}{2 \cdot \left( \frac{(a+b)^2.R_{av}.R_{ar} + Vx.(a.R_{av} - b.R_{ar})}{M.J} \right)^{1/2}} \quad (3-93)$$

**Objectif :** Nous cherchons la variation de la pulsation naturelle  $\omega_n$ , et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ , par rapport à la variation de la masse, de la vitesse et de la position du centre de gravité de la voiture.

$\omega_n$  est fonction des trois paramètres : la masse  $M$ , la vitesse  $Vx$  et la position du centre de gravité  $a$ . Son développement en série de Taylor à l'ordre 1 au voisinage du point nominal s'écrit :

$$\omega_n(M, Vx, a) = \omega_{n_n} + \Delta\omega_n \quad (3-94)$$

avec  $\omega_{n_n}$  la pulsation naturelle calculée dans le cas nominal

et

$$\Delta\omega_n = \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial M} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta M + \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial Vx} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta Vx + \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial a} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta a \quad (3-95)$$

De même pour le coefficient d'amortissement,

$$\zeta(M, Vx, a) = \zeta_n + \Delta\zeta \quad (3-96)$$

avec

$$\Delta\zeta = \left( \frac{\partial\zeta}{\partial M} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta M + \left( \frac{\partial\zeta}{\partial Vx} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta Vx + \left( \frac{\partial\zeta}{\partial a} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \Delta a \quad (3-97)$$

$\Delta M$  est la variation de la masse du véhicule,  $\Delta Vx$  la variation de la vitesse longitudinale du véhicule, et  $\Delta a$  la variation de la position du centre de gravité du véhicule

$\Delta a$  s'exprime par

$$\Delta a = \frac{\Delta M \Delta a_M}{M_n + \Delta M} \quad (3-98)$$

où  $\Delta a_M$  est l'écart entre le centre de gravité nominal et le point d'application de  $\Delta M$

Les paramètres des éléments du modèle bond graph du véhicule (figure 3-9) sont dépendants de  $M$ ,  $Vx$ ,  $a$  (voir paragraphe 2.3):

$$R_{av}(M, Vx, a), R_{ar}(M, Vx, a), TF_{av}(M, a), TF_{ar}(M, a), J(M, a), M, K(M, Vx).$$

Dans le cas nominal, les paramètres du modèle bond graph ont pour expression :

$$* R_{av} = \frac{C_{av}}{Vx} \quad (3-99)$$

avec

$$C_{av} = C_{avd} + C_{avg} \quad \text{et} \quad C_{avd} = C_{avg} = a_3 \cdot \sin \left[ 2 \cdot \arctg \left[ \frac{F_{zav}}{a_4} \right] \right] \quad (\text{Magic Formula}) \quad (3-100)$$

$$* R_{ar} = \frac{C_{ar}}{Vx} \quad (3-101)$$

avec

$$C_{ar} = C_{ard} + C_{arg} \quad \text{et} \quad C_{ard} = C_{arg} = a_3 \cdot \sin \left[ 2 \cdot \arctg \left[ \frac{F_{zar}}{a_4} \right] \right] \quad (3-102)$$

$$a_3 = 1399 N / ^\circ$$

$$a_4 = 6307 N$$

$$F_{zavn} = \frac{b_n}{e} \cdot \frac{M_n \cdot g}{2}$$

$$F_{zar_n} = \frac{a_n}{e} \cdot \frac{M_n \cdot g}{2}$$

$$e = a + b = 2.75m$$

$$* TF_{avn} = a_n = 0.99m$$

$$TF_{ar_n} = b_n = e - a_n$$

$$K_n = -M_n \cdot Vx_n$$

$$* \text{Inertie} : J_n = 2329 kgm^2$$

$$\text{Masse} : M_n = 1467 kg$$

$$\text{vitesse} : Vx_n = 25m/s$$

Si le modèle est soumis aux incertitudes,

La distance entre l'essieu avant et le centre de gravité devient :

$$a = a_n + \Delta a \quad (3-103)$$

avec  $\Delta a$  donné par l'équation (3-98)

l'inertie de lacet devient :

$$J = J_n + \Delta a M_n^2 \cdot \frac{\Delta M \cdot M_n}{\Delta M + M_n} \quad (3-104)$$

Le modèle étant à paramètres dépendants, l'équation (3-87) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_n}{\partial M} &= \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{av}} \cdot \frac{\partial R_{av}}{\partial M} + \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{ar}} \cdot \frac{\partial R_{ar}}{\partial M} + \frac{\partial \omega_n}{\partial TF_{av}} \cdot \frac{\partial TF_{av}}{\partial M} + \frac{\partial \omega_n}{\partial TF_{ar}} \cdot \frac{\partial TF_{ar}}{\partial M} \\ &+ \frac{\partial \omega_n}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial M} + \frac{\partial \omega_n}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial M} + \frac{\partial \omega_n}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial M} \end{aligned} \quad (3-105)$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial Vx} = \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{av}} \cdot \frac{\partial R_{av}}{\partial Vx} + \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{ar}} \cdot \frac{\partial R_{ar}}{\partial Vx} + \frac{\partial \omega_n}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial Vx}, \quad (3-106)$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial a} = \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{av}} \cdot \frac{\partial R_{av}}{\partial a} + \frac{\partial \omega_n}{\partial R_{ar}} \cdot \frac{\partial R_{ar}}{\partial a} + \frac{\partial \omega_n}{\partial TF_{av}} \cdot \frac{\partial TF_{av}}{\partial a} + \frac{\partial \omega_n}{\partial TF_{ar}} \cdot \frac{\partial TF_{ar}}{\partial a} + \frac{\partial \omega_n}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial a}. \quad (3-107)$$

Les dérivées partielles de la forme  $\frac{\partial \omega_n}{\partial v_i}$  sont calculées à partir des gains de boucles causales, comme nous l'avons montré au paragraphe 3.1.1. Les autres dérivées partielles, de type  $\frac{\partial v_i}{\partial \lambda}$  sont directement calculées en dérivant l'expression du composant bond graph  $v_i$  par le paramètre  $\lambda$ . Sachant que ces dérivées partielles sont calculées aux valeurs nominales, nous pouvons utiliser les expressions données ci-dessus.

Des équations semblables peuvent être écrites pour le coefficient d'amortissement.

## **b) Variation de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement.**

Nous allons étudier l'influence de variations de la vitesse  $Vx$ , de la masse  $M$  et de la position du centre de gravité  $a$  sur la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement.

On considère les conditions nominales suivantes, obtenues à l'aide des valeurs nominales des paramètres :

- la pulsation naturelle nominale :  $\omega_{nn} = 14.74 \text{ rad/s}$
- le coefficient d'amortissement nominal :  $\zeta_n = 0.964$
- la masse nominale de la voiture supposée réglée pour une configuration **1p** (une personne de 70kg sans bagage) avec  $M_n = 1467 \text{ kg}$
- le centre de gravité situé à une distance nominale  $a_n = 0.99 \text{ m}$  de l'essieu avant.
- la vitesse longitudinale nominale de la voiture supposée être  $Vx_n = 13.9 \text{ m/s}$  (50 km/h)

Compte tenu de l'approximation au premier ordre que nous avons faite pour calculer la variation du coefficient d'amortissement et de la pulsation naturelle du modèle, nous devons restreindre notre étude à de petites variations des paramètres ( $M$ ,  $Vx$ ,  $a$ ), pour rester dans le domaine de validité de l'approximation au premier ordre, qu'on peut considérer vérifiée si l'écart sur  $\omega_n$  et  $\zeta$  ne dépasse pas 5% de la valeur nominale.

Les variations des paramètres seront donc les suivantes:

- une variation de la vitesse longitudinale inférieure à 3.23m/s.
- une variation de la masse du véhicule inférieure à 680kg.
- une variation de la position du centre de gravité inférieure à 0.36m.

### **\* influence de $\Delta Vx$ ( $M$ et $a$ sont supposées nominales)**

La variation des caractéristiques  $\omega_n$  et  $\zeta$  est décroissante quand la vitesse longitudinale augmente.

Quand  $\Delta Vx$  varie de 0 à 3.23m/s,  $\Delta \omega_n$  décroît de 0 à -3.1 rad/s et  $\Delta \zeta$  décroît de 0 à -0.021.

Les courbes de la figure 3-10 sont les résultats des équations (3-94) et (3-96), grâce auxquelles nous pouvons calculer la variation de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement quand les valeurs des paramètres du modèle sont modifiées. Pour montrer cette variation, nous avons regroupé sur la figure 3-10, la valeur nominale, ainsi que la valeur calculée par l'approximation au premier ordre.



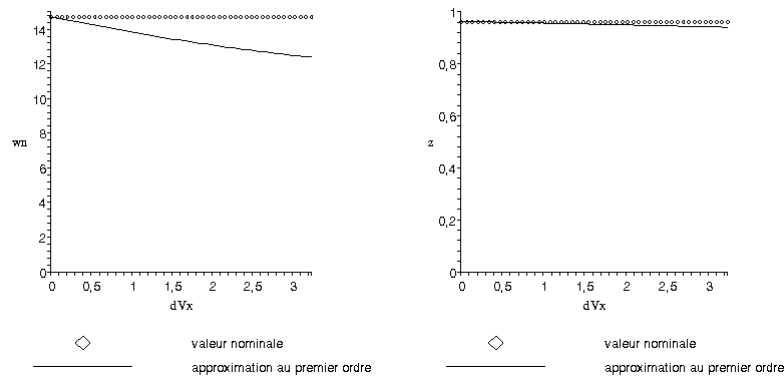


figure 3-10 : Variation de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement en fonction de  $\Delta V_x$

On constate que la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement du modèle diminuent quand la vitesse longitudinale augmente, ce qui pourrait provoquer comme nous avons pu le remarquer sur les simulations du modèle incertain (paragraphe 2.6.1) une instabilité pour de fortes variations de la vitesse.

**\* influence de  $\Delta M$  et  $\Delta a$  ( $V_x$  est supposée nominale)**

Nous allons maintenant voir l'influence de la variation de la masse ainsi que de la variation de la position du centre de gravité sur les variations des caractéristiques dynamiques du modèle.

Nous allons étudier les configurations suivantes, qui reflètent l'utilisation d'un véhicule.

**1pavx** cas nominal, le  $x$  signifie que l'on fait varier la masse de bagage dans le coffre.

**1pav1parx** cas nominal, avec une personne à l'arrière.

**2pavx** cas nominal, avec une personne de plus à l'avant.

**1pav2parx** cas nominal, avec deux personnes à l'arrière

**2pav1parx** cas nominal, avec une personne de plus à l'avant et une personne à l'arrière

**2pav2parx** cas nominal, avec une personne de plus à l'avant et une personne à l'arrière

**1pav3parx** cas nominal, avec trois personnes à l'arrière

**2pav3parx** cas nominal, avec une personne de plus à l'avant et trois personnes à l'arrière

La configuration nominale est prise pour le véhicule et le conducteur, elle est notée : **1pav**, il n'y a pas de bagages dans le coffre ( $x = 0$ )

La courbe représentant la configuration **1pavx**, pour un  $\Delta M$  nul, redonne le cas nominal. Puis on place progressivement des bagages dans le coffre. Pour la courbe représentant la configuration **1pav1parx**, on ajoute une personne à l'avant du véhicule, puis on place des bagages dans le coffre du véhicule.

Les courbes de la figure 3-11 sont obtenues en utilisant l'équation (3-94), nous obtenons donc une approximation au premier ordre de la pulsation naturelle pour différentes configurations (explicitées ci-dessus)

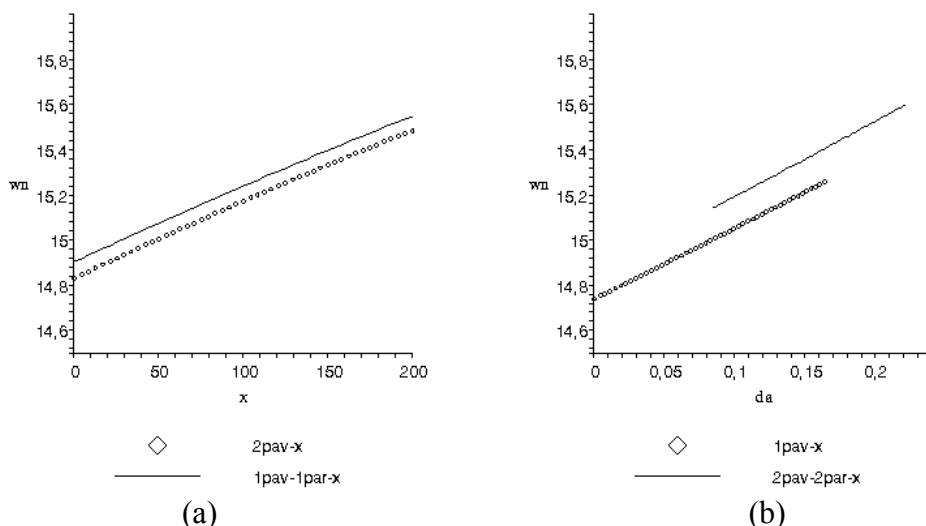


figure 3-11 : Variation de la pulsation naturelle en fonction de  $\Delta M$  et  $\Delta a$

La figure 3-11(a) montre l'évolution de la pulsation naturelle pour les configurations **2pav-x** et **1pav-1par-x**. Pour ces 2 configurations, à une valeur  $x$  (quantité de bagage dans le coffre) donnée, la masse est la même, seule la position du centre de gravité diffère entre ces 2 configurations. En comparant les courbes des configurations nous constatons que la pulsation naturelle est plus élevée quand la position du centre de gravité est plus en arrière dans le véhicule (1pav-1par-x).

La figure 3-11(b) montre l'évolution de la pulsation naturelle pour les configurations **1pav-x** et **2pav-2par-x**. Pour ces 2 configurations, il y a un écart de masse important, pour la configuration **2pav-2par-x**, la masse est plus élevée. Si on s'intéresse à la zone où les deux courbes sont présentes ( $0.085 < da < 0.17$ ), pour une même variation de la position du centre de gravité, la pulsation naturelle est plus élevée quand la masse est plus importante (2pav-2par-x).

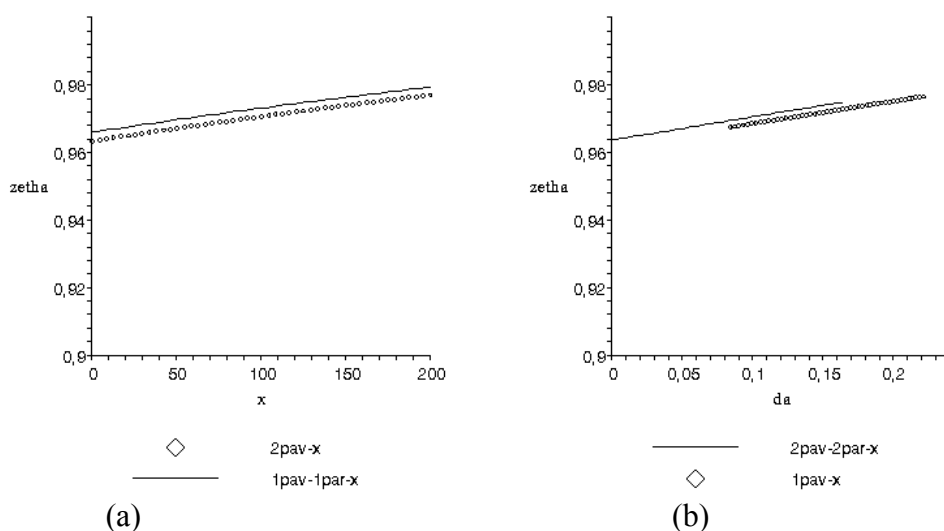


figure 3-12 : Variation du coefficient d'amortissement en fonction de  $\Delta M$  et  $\Delta a$

Les courbes de la figure 3-12 sont obtenues en utilisant l'équation (3-96), nous obtenons donc une approximation au premier ordre du coefficient d'amortissement pour différentes configurations (explicitées ci-dessus)

La figure 3-12(a) montre l'évolution du coefficient d'amortissement pour les configurations **2pav-x** et **1pav-1par-x**. En comparant les courbes des configurations nous constatons que le coefficient d'amortissement est plus élevé quand la position du centre de gravité est plus en arrière dans le véhicule (1pav-1par-x).

La figure 3-12(b) montre l'évolution du coefficient d'amortissement pour les configurations **1pav-x** et **2pav-2par-x**. Si on s'intéresse à la zone où les deux courbes sont présentes ( $0.085 < da < 0.17$ ), pour une même variation de la position du centre de gravité le coefficient d'amortissement est plus élevé quand la masse est plus importante (2pav-2par-x).

### 3.1.4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de détermination des variations des valeurs caractéristiques de la dynamique des fonctions de transfert du premier et du deuxième ordre par rapport aux paramètres physiques associés au modèle bond graph. Cette méthode repose sur le calcul des gains de boucles causales, et permet, de façon facilement implémentable, d'effectuer un calcul formel des variations, très difficile à faire par toute autre méthode à cause de la forme très non linéaire des expressions. Nous avons appliqué cette méthode sur trois exemples : deux systèmes linéaires du premier et du second ordre, et sur le système bicyclette, qui est un modèle du second ordre à paramètres dépendants.

L'utilisation d'une approximation au premier ordre (développement en série de Taylor) restreint le domaine d'application à des variations de vitesse très faibles, nous allons envisager une approximation au second ordre. Ceci peut être fait en utilisant les mêmes boucles causales.

## 3.2 *Variation des caractéristiques dynamiques des modèles - Approximation au deuxième ordre*

Nous supposons ici que les modèles bond graph ne présentent pas de boucles causales de longueur 0, mais une généralisation de la méthode est envisageable.

Le développement en série de Taylor à l'ordre 2 autour du point nominal de  $\omega_n$  fonction de trois variables, la masse  $M$ , la vitesse  $Vx$  et la position du centre de gravité  $a$ , donne :

$$\omega_n(M, Vx, a) = \omega_{n_n} + \Delta\omega_n \quad (3-108)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\omega_n = & \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial M} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta M + \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial Vx} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta Vx + \left( \frac{\partial\omega_n}{\partial a} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta a \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial M^2} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta M^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial Vx^2} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta Vx^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial a^2} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta a^2 \\ & + \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial M \cdot \partial Vx} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta M \cdot \Delta Vx + \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial M \cdot \partial a} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta M \cdot \Delta a + \left( \frac{\partial^2\omega_n}{\partial Vx \cdot \partial a} \right)_{\substack{M_n \\ Vx_n \\ a_n}} \cdot \Delta Vx \cdot \Delta a \end{aligned} \quad (3-109)$$

De même pour le coefficient d'amortissement :

$$\zeta(M, Vx, a) = \zeta_n + \Delta\zeta \quad (3-110)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\zeta = & \left( \frac{\partial\zeta}{\partial M} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta M + \left( \frac{\partial\zeta}{\partial Vx} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta Vx + \left( \frac{\partial\zeta}{\partial a} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta a \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial M^2} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta M^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial Vx^2} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta Vx^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta a^2 \\ & + \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial M \partial Vx} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta M \cdot \Delta Vx + \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial M \partial a} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta M \cdot \Delta a + \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial Vx \partial a} \right)_{Vx_n, a_n}^{M_n} \cdot \Delta Vx \cdot \Delta a \end{aligned} \quad (3-111)$$

Les équations (3-37), (3-38), (3-41), (3-42), (3-44), (3-47) et (3-87), nous permettent de calculer les trois premiers termes de la variation de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement ; nous allons montrer dans la suite comment calculer les dérivées partielles secondes des caractéristiques dynamiques d'un modèle à l'aide de sa modélisation bond graph.

Nous allons utiliser la même méthode que précédemment.

### 3.2.1 Modèle bond graph à paramètres indépendants

#### a) Cas général

Les équations (3-109) et (3-111) font apparaître deux types de dérivée partielle d'ordre deux :

type 1 : dérivée partielle d'ordre deux par rapport à un paramètre,

type 2 : dérivée partielle d'ordre deux par rapport à deux paramètres distincts.

Soit  $\vartheta_i$  un paramètre composant attaché à un élément I, R, C, TF ou GY.

La double dérivation du dénominateur de la fonction de transfert par rapport au paramètre  $\vartheta_i$ , donne, à partir de l'équation (3-1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta(s)}{\partial \vartheta_i^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} \left[ 1 - \sum_k B_k + \sum_{k,l} B_k \cdot B_l - \sum_{k,l,m} B_k \cdot B_l \cdot B_m + \dots \right] \\ &= - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (B_k) + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (B_k \cdot B_l) - \sum_{k,l,m} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (B_k \cdot B_l \cdot B_m) + \dots \end{aligned} \quad (3-112)$$

Soient  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$  deux paramètres composants attachés à deux éléments de type I, R, C, TF ou GY.

En dérivant le dénominateur de la fonction de transfert par rapport aux paramètres  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta(s)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} &= \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \left[ 1 - \sum_k B_k + \sum_{k,l} B_k \cdot B_l - \sum_{k,l,m} B_k \cdot B_l \cdot B_m + \dots \right] \\ &= - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} (B_k) + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} (B_k \cdot B_l) - \sum_{k,l,m} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} (B_k \cdot B_l \cdot B_m) + \dots \end{aligned} \quad (3-113)$$

**Expression de**  $\frac{\partial^2 \Delta(s)}{\partial \vartheta_i^2}$

L'expression générale des gains de boucles contenant l'élément  $\vartheta_i$  est:

$$B_k(\vartheta_i) = a_{k_i} \cdot \vartheta_i^{\alpha_{k_i}} \quad (3-114)$$

$a_{k_i}$  est l'expression algébrique regroupant tous les termes du gain de la boucle  $k$  excepté  $\vartheta_i^{\alpha_{k_i}}$ .

On peut donc écrire:

$$\frac{\partial^2 B_k(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (a_{k_i} \cdot \vartheta_i^{\alpha_{k_i}}) \quad (3-115)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_k(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i^2} &= a_{k_i} \cdot (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) \cdot \vartheta_i^{\alpha_{k_i} - 2} \\ &= \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) B_k(\vartheta_i) \end{aligned} \quad (3-116)$$

et en généralisant:

$$\begin{aligned} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} B_k(\vartheta_i) &= - \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_k (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) B_k(\vartheta_i) \\ - \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) &= - \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_{k,l} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} - 1) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) \\ - \sum_{k,l,m} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} (B_k \cdot B_l \cdot B_m)(\vartheta_i) &= - \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_{k,l,m} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} + \alpha_{m_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} + \alpha_{m_i} - 1) (B_k \cdot B_l \cdot B_m)(\vartheta_i) \end{aligned} \quad (3-117)$$

A partir des équations (3-112) et (3-117), on obtient la forme générale :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \left[ \begin{aligned} & - \sum_k (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) B_k(\vartheta_i) \\ & + \sum_{k,l} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} - 1) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) \\ & - \sum_{k,l,m} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} + \alpha_{m_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} + \alpha_{m_i} - 1) (B_k \cdot B_l \cdot B_m)(\vartheta_i) \\ & + \dots \end{aligned} \right] \quad (3-118)$$

**Expression de**  $\frac{\partial^2 \Delta(s)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$

Les termes non nuls de  $\frac{\partial^2 \Delta(s)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$  sont composés des gains des boucles qui dépendent de  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$ ,

soient  $B_k(\vartheta_i, \vartheta_j)$  qui s'écrivent :

$$B_k(\vartheta_i, \vartheta_j) = a_{k_{ij}} \cdot \vartheta_i^{\alpha_{k_i}} \cdot \vartheta_j^{\alpha_{k_j}} \quad (3-119)$$

le coefficient  $a_{kij}$  regroupant les paramètres différents de  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$ .

Dans ce cas,

avec  $(B_k \cdot B_l)(\vartheta_i, \vartheta_j) = a_{kij} \cdot \alpha_{lij} \cdot \vartheta_i^{(\alpha_{ki} + \alpha_{li})} \cdot \vartheta_j^{(\alpha_{kj} + \alpha_{lj})}$ , on a

$$\frac{\partial^2 (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i, \vartheta_j)}{\partial \vartheta_i \cdot \partial \vartheta_j} = \frac{1}{\vartheta_i \cdot \vartheta_j} \cdot (\alpha_{ki} + \alpha_{li})(\alpha_{kj} + \alpha_{lj}) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i, \vartheta_j) \quad (3-120)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i \cdot \partial \vartheta_j} = \frac{1}{\vartheta_i \cdot \vartheta_j} \left[ \begin{array}{l} - \sum_k (\alpha_{ki})(\alpha_{kj}) B_k(\vartheta_i, \vartheta_j) \\ + \sum_{k,l} (\alpha_{ki} + \alpha_{li})(\alpha_{kj} + \alpha_{lj}) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i, \vartheta_j) \\ - \sum_{k,l,m} [(\alpha_{ki} + \alpha_{li} + \alpha_{mi})(\alpha_{kj} + \alpha_{lj} + \alpha_{mj})] (B_k \cdot B_l \cdot B_m)(\vartheta_i, \vartheta_j) \\ + \dots \end{array} \right] \quad (3-121)$$

## b) Modèle du premier ordre

Pour un modèle du premier ordre, le polynôme caractéristique s'écrit:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_k B_k \quad (3-122)$$

mais aussi en faisant apparaître le pôle du système au dénominateur de la fonction de transfert sous forme canonique :

$$D(s) = s + s_0 \quad (3-123)$$

avec  $s_0 = \sum$  (termes constants des gains de boucles de longueur 1). (sans l'opérateur  $s$ )

Les termes à calculer pour une approximation au second ordre sont donc  $\frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i^2}$  et  $\frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i \cdot \partial \vartheta_j}$ .

**\* cas 1 : dérivée partielle du second ordre par rapport à l'élément  $\vartheta_i$  :**

On peut écrire la dérivée partielle du dénominateur sous deux formes :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i^2} = - \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_k \alpha_k \cdot (\alpha_k - 1) \cdot B_k(\vartheta_i) \quad (3-124)$$

et

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i^2} \quad (3-125)$$

on aura donc:

$$\frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i^2} = - \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] \cdot (\alpha_k) \cdot (\alpha_k - 1) \quad (3-126)$$

d'où, en notant  $\tau = 1/s_0$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{2}{\tau} \left( -\frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_i} \cdot \tau^2 \right)^2 - \frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i^2} \cdot \tau^2 \quad (3-127)$$

**\* cas 2 : dérivée partielle du second ordre par rapport aux éléments  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$  :**

On peut écrire la dérivée partielle du dénominateur sous deux formes :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = -\frac{1}{\vartheta_i \vartheta_j} \sum_k \alpha_{k_i} \alpha_{k_j} B_k(\vartheta_i, \vartheta_j) \quad (3-128)$$

et

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} (s_0) \quad (3-129)$$

on aura donc :

$$\frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = -\frac{1}{\vartheta_i \vartheta_j} \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_{k_i}) (\alpha_{k_j}) \quad (3-130)$$

doù

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{2}{\tau} \left( -\frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_i} \cdot \tau^2 \right) \left( -\frac{\partial s_0}{\partial \vartheta_j} \cdot \tau^2 \right) - \frac{\partial^2 s_0}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \cdot \tau^2 \quad (3-131)$$

Les équations (3-127) et (3-131) sont calculables directement à l'aide des gains de boucles causales.

*exemple 5:*

Considérons le modèle d'une suspension mécanique figure 3-1 ainsi que son modèle bond graph, dessiné figure 3-13.

Le calcul porte sur la dérivée seconde de la constante de temps par rapport à  $b$ .

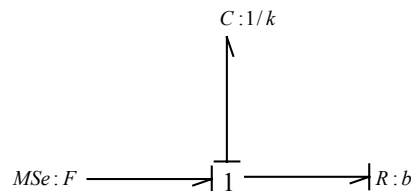


figure 3-13 : Modèle bond graph du système de suspension

Il existe une seule boucle causale :  $B1 = -\frac{k}{b \cdot s}$ , avec  $\alpha_1 = -1$ , conformément à l'équation (3-3) donc le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{bs} \quad (3-132)$$

En faisant apparaître la constante de temps du système au dénominateur de la fonction de transfert, on obtient :

$$s_0 = k/b \text{ et } \tau = b/k \quad (3-133)$$

l'équation (3-127) donne :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial b^2} = \frac{2}{b} \left[ - \left( -\frac{1}{b} \right) \left[ \left( -\frac{k}{b} \right) (-1) \right] \left( \frac{b}{k} \right)^2 \right]^2 - \left[ - \left( \frac{1}{b^2} \right) \left[ \left( -\frac{k}{b} \right) (-1)(-2) \right] \right] \left( \frac{b}{k} \right)^2 = 0 \quad (3-134)$$

### c) Modèle d'ordre 2

Pour un modèle d'ordre 2, le polynôme caractéristique s'écrit:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_j B_j + \sum_{j,k} B_j \cdot B_k \quad (3-135)$$

mais aussi en faisant apparaître la pulsation naturelle  $\omega_n$  et le coefficient d'amortissement  $\zeta$  du système:

$$D(s) = s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \quad (3-136)$$

avec :

$$2\zeta \cdot \omega_n = \sum (\text{termes constants des gains de boucles de longueur 1}), \quad (3-137)$$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = & -\sum (\text{termes constants des gains de boucles de longueur 2}) \\ & + \sum (\text{des produits 2 à 2 des termes constants des gains de} \\ & \text{boucles disjointes de longueur 1}). \end{aligned} \quad (3-138)$$

**\* cas 1 : dérivée partielle du second ordre par rapport l'élément  $\vartheta_i$  :**

l'équation (3-135) donne

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{1}{\vartheta_i^2} \left[ - \sum_k (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) B_k(\vartheta_i) \right. \\ \left. + \sum_{k,l} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} - 1) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) \right] \quad (3-139)$$

et l'équation (3-136) donne

$$\frac{\partial^2 D(s)}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} [2\zeta \cdot \omega_n \cdot s] + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} [\omega_n^2] \quad (3-140)$$

On a donc:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} [2\zeta \cdot \omega_n] = -\frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) \quad (3-141)$$



$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} [\omega_n^2] = \frac{1}{\vartheta_i^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} - \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 2} \end{array} \right] (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_i} - 1) \\ + \sum_{k,l} \left[ \begin{array}{l} \text{produits 2 à 2 des termes constants des} \\ \text{gains de boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i})(\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i} - 1) \end{array} \right] \quad (3-142)$$

Puisque :  $\frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i^2} = 2 \left( \left( \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i} \right)^2 + \omega_n \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i^2} \right)$ , alors

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left( \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \right)^2 \quad (3-143)$$

De même, on peut écrire :

$$\zeta = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n}{2 \cdot \omega_n} \quad (3-144)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta_i^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} + \frac{3}{8} \cdot \frac{[2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left( \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{\partial \vartheta_i^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i^2} \end{aligned} \quad (3-145)$$

Chacun des termes des expressions de  $\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i^2}$  et  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta_i^2}$  peut être calculé en fonction des gains de boucles, conformément aux équations (3-41), (3-42), (3-137), (3-138), (3-141), (3-142), (3-143) et (3-144).

**\* cas 2 : dérivée partielle du second ordre par rapport aux éléments  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$  :**

L'équation (3-135) conduit à

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{1}{\vartheta_i \vartheta_j} \left[ \begin{array}{l} \sum_k (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_j}) B_k(\vartheta_i, \vartheta_j) \\ \sum_{k,l} (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i})(\alpha_{k_j} + \alpha_{l_j}) (B_k \cdot B_l)(\vartheta_i, \vartheta_j) \end{array} \right] \quad (3-146)$$

et l'équation (3-136) donne

$$\frac{\partial^2 D(s)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s] + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} [\omega_n^2] \quad (3-147)$$

d'où:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n] = -\frac{1}{\vartheta_i \vartheta_j} \cdot \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_{k_i})(\alpha_{k_j}) \quad (3-148)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} [\omega_n^2] = \frac{1}{\vartheta_i \cdot \vartheta_j} \left[ - \sum_k \left[ \begin{array}{l} \text{termes constants des gains de} \\ \text{boucles causales de longueur 2} \end{array} \right] (\alpha_{k_i}) (\alpha_{k_j}) \right. \\ \left. + \sum_{k,l} \left[ \begin{array}{l} \text{produits 2 à 2 des termes constants des} \\ \text{gains de boucles causales de longueur 1} \end{array} \right] (\alpha_{k_i} + \alpha_{l_i}) (\alpha_{k_j} + \alpha_{l_j}) \right] \quad (3-149)$$

$$\text{On sait que : } \frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = 2 \left( \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta_j} + \omega_n \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \right) \quad (3-150)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_j} \quad (3-151)$$

$$\text{On peut écrire : } \zeta = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n}{2 \cdot \omega_n} \quad (3-152)$$

La sensibilité du coefficient d'amortissement par rapport aux paramètres  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_j$  peut s'exprimer par :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_j} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{\partial \vartheta_j} \\ - \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} + \frac{3}{8} \cdot \frac{[2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial [\omega_n^2]}{\partial \vartheta_j} \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[\omega_n^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 [2 \cdot \zeta \cdot \omega_n]}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \quad (3-153)$$

Chacun des termes des expressions de  $\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$  et  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$  peut être calculé en fonction des gains de boucles.

### d) Application à un premier exemple simple

Reprenons l'exemple de la figure 3-5.

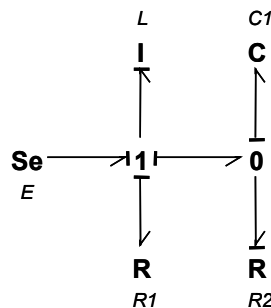


figure 3-14 : Modèle bond graph d'un système du second ordre

L'équation (3-56) donne

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2 \cdot L \cdot C_1} + \frac{1}{L \cdot C_1}}$$

L'équation (3-57) donne

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{I}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}}}$$

**Le but est de rechercher les variations de  $\omega_n$  et  $\zeta$  au second ordre par rapport à  $L$ , soit**

$$\Delta\omega_n = \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial L}\right)_{L_n} \cdot \Delta L + \left(\frac{\partial^2\omega_n}{\partial L^2}\right)_{L_n} \cdot \Delta L^2 \quad \text{et} \quad \Delta\zeta = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial L}\right)_{L_n} \cdot \Delta L + \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial L^2}\right)_{L_n} \cdot \Delta L^2$$

Les équations (3-58) et (3-59) fournissent les déviations au premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial L}[2.\zeta.\omega_n] = -\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{R_1}{L}\right) \quad \frac{\partial}{\partial L}[\omega_n^2] = -\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right)$$

Les équations (3-139) et (3-140) permettent de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial L^2}[2.\zeta.\omega_n] &= -\frac{1}{L^2} \cdot \left[ \left(-\frac{R_1}{L}\right) \cdot (-1) \cdot (-2) \right] = 2 \cdot \frac{R_1}{L^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial L^2}[\omega_n^2] &= \frac{1}{L^2} \cdot \left\{ - \left[ \left(-\frac{1}{L.C_1}\right) \cdot (-1) \cdot (-2) \right] + \left[ \left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right) \cdot (-1) \cdot (-2) \right] \right\} = \frac{2}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right) \end{aligned}$$

La sensibilité à l'ordre 2 de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement par rapport au paramètre  $L$  se calcule comme suit, grâce aux équations (3-143) et (3-145):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega_n}{\partial L^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right)\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right)\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial L^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_1 \cdot \left(\frac{1}{L^2.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1}\right)}{L^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\left(\frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L}\right) \cdot \left(\frac{1}{L^2.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1}\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L}\right) \cdot \left(\frac{1}{L^3.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L^3.C_1}\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{L^3 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

**Le calcul suivant porte sur les variations au second ordre par rapport à  $L$  et  $C_1$ .**

Précédemment, nous avons calculé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L}[2.\zeta.\omega_n] &= -\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{R_1}{L}\right) \\ \frac{\partial}{\partial L}[\omega_n^2] &= -\frac{1}{L} \cdot \left(\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1}\right) \end{aligned}$$

Les équations (3-41) et (3-42) permettent de calculer :

$$\frac{\partial}{\partial C_1}[2.\zeta.\omega_n] = -\frac{1}{C_1} \left[ \left( -\frac{1}{R_2.C_1} \right) (-1) \right] = -\frac{1}{R_2.C_1^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial C_1}[\omega_n^2] = \frac{1}{C_1} \left[ -\left( -\frac{1}{L.C_1} \right) (-1) + \left( \frac{R_1}{R_2.C_1.L} \right) (-1) \right] = \frac{1}{C_1} \left( -\frac{1}{L.C_1} - \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right)$$

Les équations (3-148) et (3-149) permettent de calculer :

$$\frac{\partial^2}{\partial L \partial C_1}[2.\zeta.\omega_n] = -\frac{1}{L.C_1}[0] = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial L \partial C_1}[\omega_n^2] = \frac{1}{L.C_1} \left[ -\left( -\frac{1}{L.C_1} \right) (-1)(-1) + \left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right) (-1)(-1) \right] = \frac{1}{L.C_1} \left( +\frac{1}{L.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1} \right)$$

Les équations (3-93) et (3-94) conduisent à

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial L \partial C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{R_1}{R_2.L^2.C_1^2} + \frac{1}{L^2.C_1^2}}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1} + \frac{1}{L^2.C_1} \right) \left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1^2} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial L \partial C_1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\left( \frac{R_1}{L^2} \right) \left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1^2} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1} + \frac{1}{L^2.C_1} \right) \left( \frac{1}{R_2.C_1^2} \right)}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{\left( \frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L} \right) \left( \frac{1}{L^2.C_1^2} + \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1^2} \right)}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot \frac{\left( \frac{1}{R_2.C_1} + \frac{R_1}{L} \right) \left( \frac{1}{L^2.C_1} + \frac{R_1}{R_2.L^2.C_1} \right) \left( \frac{1}{L.C_1^2} + \frac{R_1}{R_2.L.C_1^2} \right)}{\left( \frac{R_1}{R_2.L.C_1} + \frac{1}{L.C_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

### 3.2.2 Modèle bond graph à paramètres dépendants

Nous envisageons ici le cas où l'analyse de sensibilité se fait par rapport à un coefficient  $\lambda$  qui intervient dans un paramètre  $\vartheta_i$  (exemple : coefficient de forme).

Dans ce cas, la variation à l'ordre 2 de la variable X par rapport à  $\lambda$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \vartheta_i^2} \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial X}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial \lambda^2} \quad (2-154)$$

### 3.3 Application : modèle 2ddl dit "bicyclette"

Les conditions nominales sont les mêmes que celles données au paragraphe 3.1.3b

Compte tenu de l'approximation au second ordre que nous avons faite pour calculer la variation du coefficient d'amortissement et de la pulsation naturelle du modèle, nous devons restreindre notre étude à des variations paramétriques engendrant une erreur maximale de 5% entre la valeur réelle et la valeur approchée.

Nous considérerons donc :

- une variation de la vitesse longitudinale inférieure à 5.3m/s.
- une variation de la masse du véhicule inférieure à 980kg.
- une variation de la position du centre de gravité inférieure à 0.9m.

#### 3.3.1 Influence de $\Delta V_x$

La variation des caractéristiques  $\omega_n$  et  $\zeta$  est décroissante en fonction de  $\Delta V_x$ .

Quand  $\Delta V_x$  varie de 0 à 5.3m/s,  $\Delta\omega_n$  varie de 0 à -3.06rad/s et  $\Delta\zeta$  varie de 0 à -0.039.

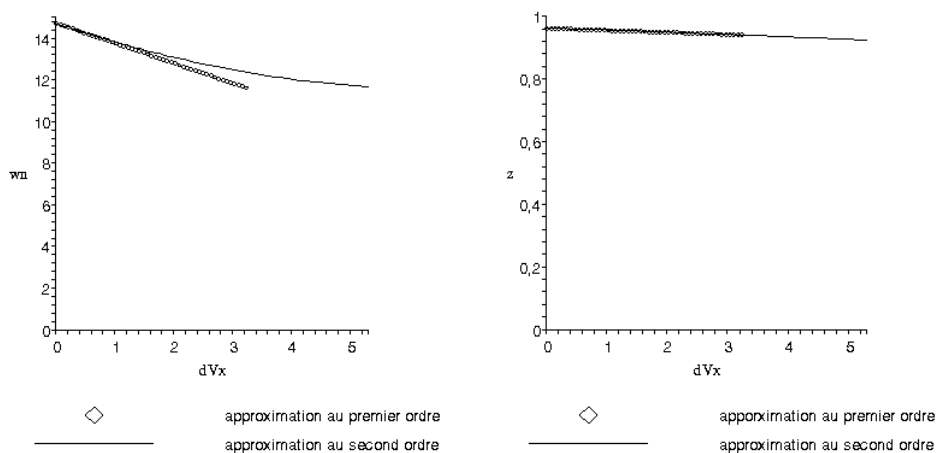


figure 3-15 : Variation de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement en fonction de  $\Delta V_x$

#### 3.3.2 Influence de $\Delta M$ et $\Delta a$

Les configurations étudiées sont les mêmes que pour l'ordre 1, (paragraphe 3.1.3b).

Les courbes de la figure 3-16 sont obtenues en utilisant les équation (3-108) et (3-109), nous obtenons donc une approximation au second ordre de la pulsation naturelle pour différentes configurations (explicitées ci-dessus).

La figure 3-16(a) montre l'évolution de la pulsation naturelle pour les configurations **2pav-x** et **1pav-1par-x**. Pour ces 2 configurations, à une valeur  $x$  (quantité de bagage dans le coffre) donnée, la masse est la même, seule la position du centre de gravité diffère. En comparant les

courbes des configurations nous constatons que la pulsation naturelle est plus élevée quand la position du centre de gravité est plus en arrière dans le véhicule, et cela jusqu'à une certaine variation de masse ( $x = 120\text{kg}$ ), ensuite le comportement de la pulsation naturelle est inversée.

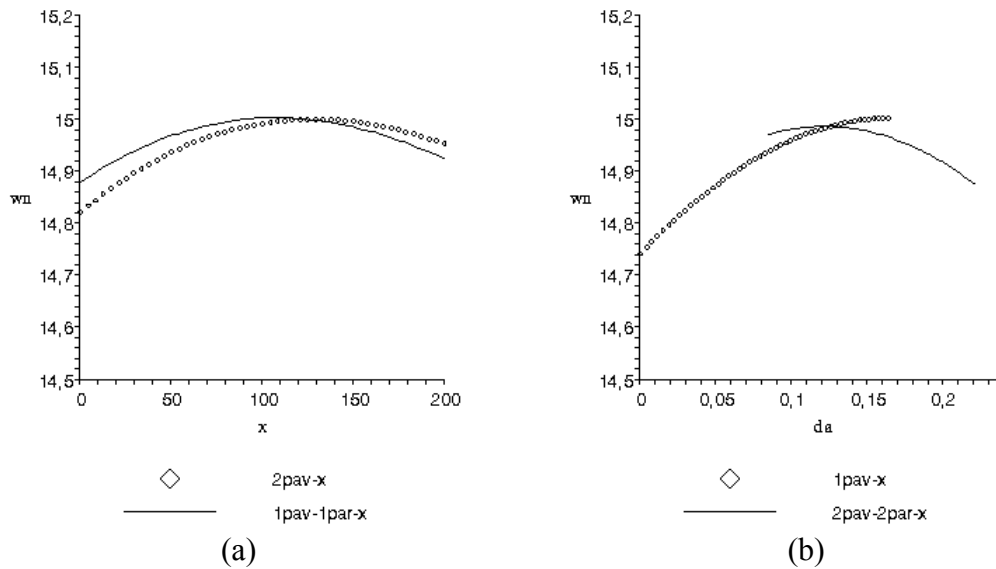


figure 3-16 : Variation de la pulsation naturelle en fonction de  $\Delta M$  et  $\Delta a$

La figure 3-16(b) montre l'évolution de la pulsation naturelle pour les configurations **1pav-x** et **2pav-2par-x**, pour lesquelles il y a un écart de masse important (pour la configuration **2pav-2par-x**, la masse est plus élevée). Si on s'intéresse à la zone où les deux courbes sont présentes ( $0.085 < \Delta a < 0.165$ ), pour une même variation de la position du centre de gravité, dans un premier temps, la pulsation naturelle est plus élevée quand la masse est moins importante (1pav-x), puis le phénomène s'inverse.

Sur les deux figures, il y a un point d'intersection ( $x = 123.6 \text{ kg}$ ) et ( $\Delta a = 0.124 \text{ m}$ ) où les comportements s'inversent.

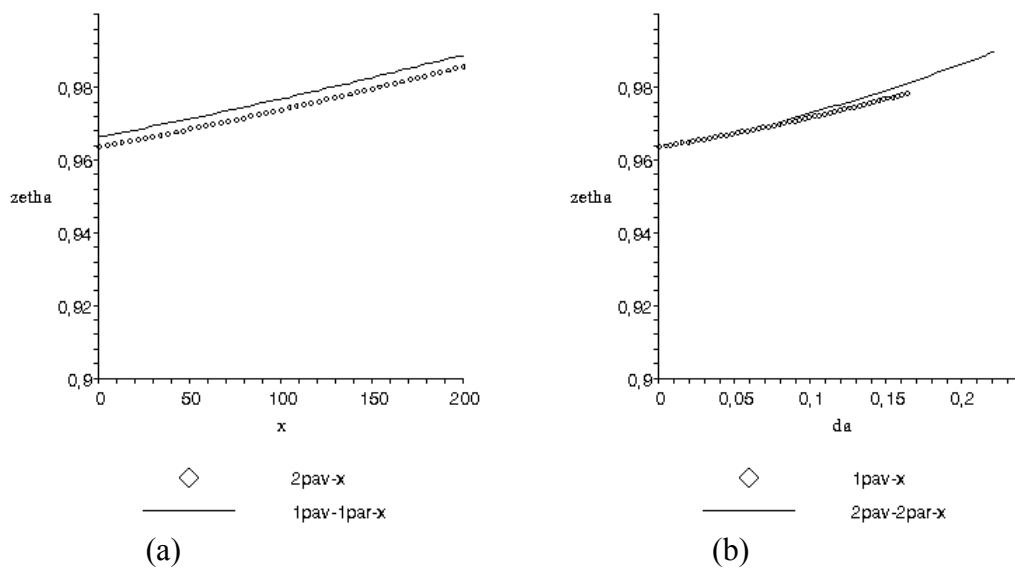


figure 3-17 : Variation du coefficient d'amortissement en fonction de  $\Delta M$  et  $\Delta a$

Les courbes de la figure 3-17 sont obtenues en utilisant les équations (3-110) et (3-111). Nous obtenons donc une approximation au deuxième ordre du coefficient d'amortissement pour différentes configurations (explicitées ci-dessus).

La figure 3-17(a) montre l'évolution du coefficient d'amortissement pour les configurations **2pav-x** et **1pav-1par-x**. En comparant les courbes des configurations nous constatons que le coefficient d'amortissement est plus élevé quand la position du centre de gravité est plus en arrière dans le véhicule.

La figure 3-17(b) montre l'évolution du coefficient d'amortissement pour les configurations **1pav-x** et **2pav-2par-x**. Si on s'intéresse à la zone où les deux courbes sont présentes ( $0.09 < da < 0.17$ ), pour une même variation de la position du centre de gravité le coefficient d'amortissement est plus élevé quand la masse est plus importante (2pav-2par-x).

### 3.3.3 Conclusion

Nous venons d'étendre la méthode de détermination des variations des valeurs caractéristiques de la dynamique des fonctions de transfert développée dans le paragraphe 3.1, au deuxième ordre. Contrairement au premier ordre où les intervalles de variation paramétrique n'étaient pas satisfaisants car trop restreints, le deuxième ordre permet de faire une étude sur des intervalles plus grands.

## 3.4 Fonction de sensibilité paramétrique

**Théorème 3-5 :** *La fonction de sensibilité d'un modèle aux variations des paramètres associés aux éléments bond graphs peut être déduite directement du modèle bond graph à partir du calcul des gains de boucles causales et des chemins causaux.*

La sensibilité de la fonction de transfert  $\left(F = \frac{N}{\Delta}\right)$  que l'on appellera fonction de sensibilité du modèle peut se calculer de la manière suivante [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001b]:

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left[ \frac{N}{\Delta} \right] = \frac{\frac{\partial N}{\partial \vartheta_i} \Delta - N \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i}}{\Delta^2} \quad (3-155)$$

Nous avons vu au paragraphe 3.1.1a que la dérivée du dénominateur de la fonction de transfert d'un modèle peut se calculer de la manière suivante :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ \begin{array}{l} - \sum_j \alpha_j (B_j)(\vartheta_i) + \sum_{j,k} (\alpha_j + \alpha_k) (B_j \cdot B_k)(\vartheta_i) \\ - \sum_{j,k,l} (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l) (B_j \cdot B_k \cdot B_l)(\vartheta_i) + \dots \end{array} \right] \quad (3-156)$$

Nous allons maintenant développer une méthode pour calculer la dérivée du numérateur de la fonction de transfert directement sur le modèle bond graph.

Le numérateur de la fonction de transfert peut s'écrire de la manière suivante :

$$N = \sum_j T_j \cdot \Delta r_j \quad (3-157)$$

où  $T_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  chaîne d'action (chemin causal reliant l'entrée à la sortie),

et  $\Delta r_j$  est le polynôme caractéristiques du modèle bond graph privé de  $T_j$ , composé des gains de boucles causales n'incluant pas d'éléments apparaissant dans  $T_j$ .

L'expression générale des chemins causaux contenant le terme  $\vartheta_i$  peut se mettre sous la forme:

$$T_j(\vartheta_i) = b_j \cdot \vartheta_i^{\beta_j} \quad (3-158)$$

**Remarque 3-4 :** Le coefficient  $\beta_j$  prend une valeur nulle si le chemin  $T_j$  ne comporte pas le paramètre composant  $\vartheta_i$ .

$b_j$  est l'expression algébrique regroupant tous les termes du gain du chemin causal  $j$  excepté  $\vartheta_i^{\beta_j}$ .

On peut donc écrire:

$$\frac{\partial T_j(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (b_j \cdot \vartheta_i^{\beta_j}) \quad (3-159)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j(\vartheta_i)}{\partial \vartheta_i} &= \beta_j \cdot b_j \cdot \vartheta_i^{\beta_j-1} \\ &= \frac{1}{\vartheta_i} \cdot \beta_j \cdot T_j(\vartheta_i) \end{aligned} \quad (3-160)$$

A partir de l'équations (3-156), on obtient la forme :

$$\frac{\partial N}{\partial \vartheta_i} = \sum_j \left[ \frac{\partial T_j}{\partial \vartheta_i} \cdot \Delta r_j + T_j \cdot \frac{\partial \Delta r_j}{\partial \vartheta_i} \right] \quad (3-161)$$

### 3.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthode de détermination des variations des caractéristiques dynamiques des fonctions de transfert des modèles du premier et du deuxième ordre, par une méthode graphique utilisant les gains de boucles causales. Développée dans un premier temps grâce à une approximation au 1<sup>er</sup> ordre, nous l'avons étendue au second ordre, ce qui lui confère un domaine de validité plus grand.

Nous avons amélioré la méthode graphique de détermination de la fonction de sensibilité de la fonction de transfert d'un modèle par rapport à l'un de ses paramètres, développée dans [Kam, 2001], en considérant le cas où plusieurs composants ou paramètres  $\vartheta_i$  apparaissent dans le modèle bond graph. Ceci est intéressant car les auteurs qui se sont intéressés au sujet [Cabanellas et al., 1995] et [Gawthrop, 2000b], ont explicitement formulé qu'ils ne traitaient pas le cas de l'interdépendance des paramètres. De plus on peut supposer que la méthode développée peut être appliquée au modèle dont la structure est linéaire, mais dont les lois des composants peuvent être non linéaires, comme pour le modèle bicyclette, puisque la détermination de la fonction de sensibilité a été développée en gardant la même optique que pour la détermination de la sensibilité des grandeurs caractéristiques d'un modèle.





# Chapitre 4 :

## Robustesse aux incertitudes paramétriques

Ces dix dernières années, la robustesse en stabilité présentée par [Doyle, 1979] et la robustesse en performance ont été très étudiées [Alazard et al, 1999], [Doyle et al, 1989], [Morton, 1985]. Le problème consiste à trouver des conditions pour garantir la performance souhaitée en présence d'incertitudes structurées ou non structurées dans un modèle. Les incertitudes de modèle peuvent être la cause d'une mauvaise évaluation de la dynamique du système, d'une identification peu précise des valeurs numériques des paramètres ou d'une variation de leurs valeurs en raison des conditions d'utilisation et du temps de travail. Plusieurs méthodes existent pour étudier la robustesse en présence d'incertitudes. Selon les propriétés étudiées et la méthodologie utilisée, des outils mathématiques spécifiques sont établis. Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée, soumis aux incertitudes paramétriques, nous avons choisi d'utiliser la méthode de  $\mu$ -analyse [Young, 1997], [Dardenne, 1998], [Alazard et al., 1999]. Cette technique utilise les valeurs singulières structurées [Ferrerres, 1999] et permet d'obtenir un encadrement des paramètres incertains du modèle garantissant la stabilité de celui-ci. La  $\mu$ -analyse demande que le système soit au préalable mis sous une forme d'interconnection standard : la forme  $M(s)-\Delta$ . Cette structure se compose de 2 parties, la première contient les valeurs nominales des paramètres et la seconde les incertitudes des paramètres. Pour construire la forme standard, une première étape consiste à écrire la forme LFT (Linear Fractionnal Transformation).

Ce chapitre est organisé en cinq paragraphes. Le prochain paragraphe pose le problème. Ensuite la construction de la forme d'interconnection standard est présentée sur un exemple simple. Dans le paragraphe 3, on montre sur le modèle bicyclette que le choix de la matrice d'incertitude influence la marge de stabilité paramétrique ainsi que le domaine des variations des paramètres incertains assurant la stabilité du système en boucle fermée. Une méthode de construction de la forme d'interconnection standard pour la  $\mu$ -synthèse par le bond graph est donnée dans le paragraphe 4. Dans le cinquième paragraphe, nous effectuons un suivi de trajectoire, afin de mettre en évidence la robustesse de la loi de commande, face aux incertitudes paramétriques d'une part, et face aux erreurs de modélisation d'autre part. Enfin quelques conclusions sont présentées.

## 4.1 Position du problème

La présence d'incertitudes dans les paramètres d'un modèle amène le concepteur de commande à considérer les problèmes de robustesse des lois de commande et l'étude de stabilité du système en boucle fermée. La loi de commande est conçue sur le modèle nominal, et les propriétés de stabilité du modèle doivent être respectées en boucle fermée en présence de déviations des paramètres.

La  $\mu$ -analyse [Alazard et al, 1999] fournit au concepteur une méthode pour déterminer les intervalles de variation des paramètres incertains garantissant la stabilité du modèle en boucle fermée. Cette méthode nécessite la construction d'une forme spécifique appelée la forme d'interconnection standard  $M(s) - \Delta$ , comme dessinée sur la figure 4-1. La matrice de transfert  $M(s)$  regroupe la boucle fermée nominale et les effets des incertitudes sur la boucle fermée, la matrice  $\Delta$  se compose des incertitudes relatives des paramètres. La  $\mu$ -analyse doit prendre en compte la structure de la matrice  $\Delta$ , qui caractérise le problème. La matrice  $\Delta$  est diagonale et s'exprime comme suit :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_i \cdot I_{q_i}) \quad (4-1)$$

où  $|\delta_i| < 1$  est la variation normalisée du  $i^{\text{ème}}$  paramètre de  $\Delta$  (ou incertitude relative).

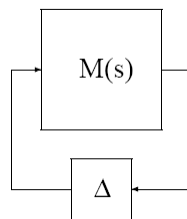


figure 4-1 : Forme d'interconnection standard pour la  $\mu$ -analyse

Pour construire la forme  $M(s) - \Delta$ , considérons le modèle en boucle fermée de la figure 4-2.

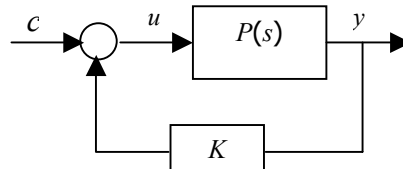


figure 4-2 : système en boucle fermée

où  $P(s)$  est le processus étudié, et  $K$  le correcteur synthétisé à partir du modèle nominal du processus  $P(s)$ .

Le processus  $P(s)$  contenant les incertitudes sur les paramètres est mis sous la forme LFT (Linear Fractional Transformation), comme présenté sur la figure 4-3. Pour construire la forme LFT, on ajoute des entrées et des sorties fictives de manière à faire apparaître les incertitudes sous forme d'un retour interne au processus.

Dans cette représentation générale [Duc et Font, 1999], toutes les incertitudes sont regroupées dans la matrice  $\Delta(s)$ .  $H(s)$  modélise les interconnexions entre les entrées  $u$ , les sorties  $y$  et les signaux  $w$  et  $z$  qui permettent de faire intervenir les incertitudes.

A partir de la figure 4-3, nous pouvons introduire la représentation d'état augmentée de  $H(s)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

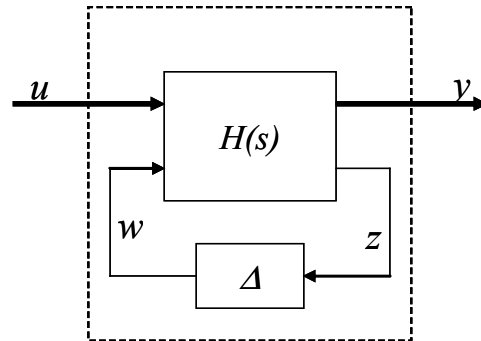


figure 4-3 : Processus  $P(s)$  sous sa forme LFT

La forme d'interconnection standard de la figure 4-1 peut alors être déduite aisément. A partir de la figure 4-3, il suffit de connecter les entrées/sorties  $u$  et  $y$  du processus incertain avec les entrées/sorties du correcteur choisi, afin d'obtenir le schéma d'interconnection standard (figure 4-1).  $M(s)$  correspond sur la figure 4-4 à la matrice de transfert vue par la perturbation  $\Delta$ , c'est à dire au transfert entre les entrées  $w$  et les sorties  $z$ .

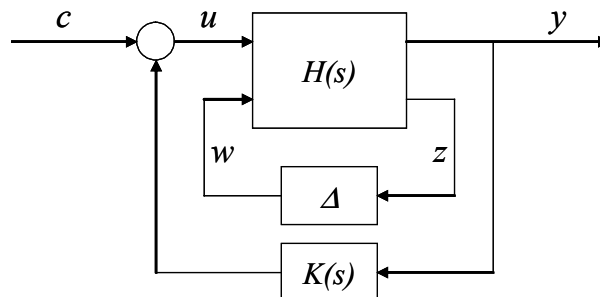


figure 4-4 : forme standard d'intercommunication

La  $\mu$ -analyse fournit un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise aux incertitudes de modèles.

Considérons l'hypercube unité  $H$  dans l'espace des paramètres  $\delta_i$  :

$$H = \{\delta = [\delta_1 \dots \delta_n] \mid \delta_i \in \mathbb{R} \text{ et } |\delta_i| \leq 1\} \quad (4-3)$$

On peut alors formuler le problème comme un calcul de la marge de robustesse (« quelle est la plus grande valeur  $k_{max}$  de  $k$  telle que la boucle fermée soit stable à l'intérieur de l'hypercube  $kH$  ? »).

On peut résoudre ce problème en cherchant la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle la boucle fermée devient marginalement stable (un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire) pour une incertitude paramétrique à l'intérieur de  $kH$ .

On rappelle tout d'abord ([Alazard et al., 1999]) le lien entre les polynômes caractéristiques de la boucle ouverte ( $P_{BO}(s)$ ) et de la boucle fermée ( $P_{BF}(s, \delta)$ ) dans le cas de la figure 4-1 :

$$\frac{P_{BF}(s, \delta)}{P_{BO}(s)} = \frac{\det(I - k \cdot \Delta \cdot M(s))}{\det(I - k \cdot \Delta \cdot M(\infty))} \quad (4-4)$$

Au vu de l'équation (4-4), on peut d'autre part constater le lien entre la singularité de la matrice  $(I - k.\Delta.M(j.\omega_0))$  et la présence d'un pôle de la boucle fermée sur l'axe imaginaire en  $\pm j.\omega_0$

Ceci conduit à définir la valeur singulière structurée  $\mu(M(j\omega))$  à la pulsation  $\omega$  comme :

$$\mu(M(j\omega)) = \left\{ \min \left( k \mid \exists \delta \in kH \text{ avec } \Delta = \text{diag}(\delta_{i,j_{qi}}) \text{ et } \det(I - \Delta M(j\omega)) = 0 \right) \right\}^{-1} \quad (4-5)$$

Ainsi  $1/\mu(M(j\omega))$  peut être interprété comme la taille de la plus petite incertitude paramétrique  $\delta$  qui amène un pôle de la boucle fermée sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega$ . La marge de robustesse  $k_{max}$  peut ensuite être obtenue comme :

$$k_{max} = \min_{\omega \in [0, \infty]} 1/\mu(M(j\omega)) \quad (4-6)$$

En pratique, on calcule généralement la valeur singulière structurée  $\mu(M(j\omega))$  sur un nombre fini de fréquences  $(\omega_i)_{i \in [1, N]}$  et on en déduit la marge de robustesse ou marge de stabilité paramétrique  $k_{max}$  :

$$\frac{1}{k_{max}} = \max_{i \in [1, N]} \mu(M(j\omega_i)) \quad (4-7)$$

La boîte à outils de Matlab "robust control" permet de calculer directement la marge de stabilité paramétrique. Elle nécessite la construction de la forme d'interconnection standard du modèle, construction qui n'est pas facile à réaliser. Dans [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001a, 2005] une méthode systématique basée sur la méthodologie bond graph permet la construction de la forme LFT du modèle qui conduit à la forme standard ; on la rappellera dans un prochain paragraphe.

## 4.2 Construction de la forme LFT d'un modèle

Pour construire la forme LFT (Linear Fractional Transformation) d'un modèle, deux approches peuvent être envisagées : l'approche classique que nous allons aborder dans le prochain paragraphe, ou l'approche bond graph que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

### 4.2.1 Construction par une approche classique

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment construire la forme LFT d'un système, en utilisant l'approche proposée dans [Alazard et al., 1999]. Afin de bien comprendre la démarche, et simplifier celle-ci, nous considérons le système masse-ressort, représenté figure 4-5 ; cet exemple est traité dans [Alazard et al., 1999], mais aucun détail de calcul n'y est donné.

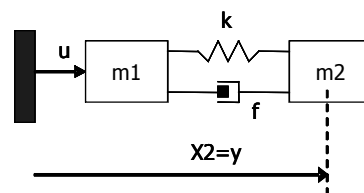


figure 4-5 : représentation du système masse-ressort.

Ce système comporte une entrée de commande  $u$ , grâce à laquelle nous voulons effectuer une régulation en position ( $x_2$ ) de la masse  $m_2$ . La masse  $m_2$  et la raideur  $k$  du ressort sont connues de manière incertaine. Afin d'effectuer une analyse de la robustesse de ce processus en boucle fermée, via la  $\mu$ -analyse, nous devons fournir sa forme LFT. Pour effectuer cette décomposition, il faut écrire la représentation d'état du système donnée par l'équation (4-8), obtenue en choisissant  $x = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$  comme vecteur d'état.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k/m_1 & k/m_1 & -f/m_1 & f/m_1 & 1/m_1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & f/m_2 & -f/m_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

Cette représentation d'état conduit au schéma bloc du modèle, figure 4-6.

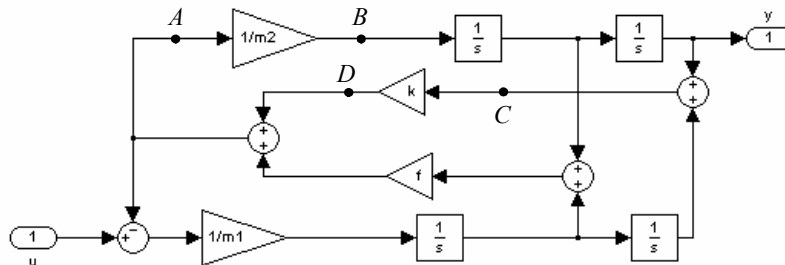


figure 4-6 : Représentation schéma bloc du système masse ressort

Les valeurs réelles de  $m_2$  et  $k$  s'expriment en fonction de leurs valeurs nominales et de leurs incertitudes normalisées, de la manière suivante :

$$m_2 = m_{2n} \cdot (1 + dm_2) \quad (4-9)$$

$$k = k_n \cdot (1 + dk) \quad (4-10)$$

Le découplage des incertitudes ne devant modifier ni la structure du modèle, ni les valeurs des paramètres, nous devons respecter les deux conditions données par les équations (4-11) et (4-12) :

$$B = A \cdot \frac{1}{m_2} \quad (4-11)$$

$$D = C \cdot k \quad (4-12)$$

Les équations (4-11) et (4-12), conduisent à :

$$B = A \cdot \frac{1}{m_{2n} \cdot (1 + dm_2)} \quad (4-13)$$

soit

$$(1 + dm_2) \cdot B = A \cdot \frac{1}{m_{2n}} \quad (4-14)$$

En multipliant le terme de gauche de l'équation (4-14) par  $\begin{pmatrix} m_{2n} \\ m_{2n} \end{pmatrix}$ , on peut écrire l'équation suivante :

$$B = (A - B \cdot m_{2n} \cdot dm_2) \cdot \frac{1}{m_{2n}} \tag{4-15}$$

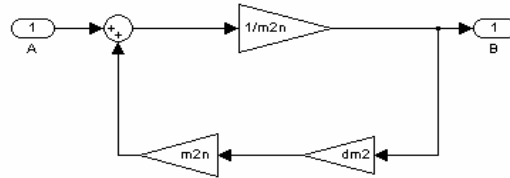


figure 4-7 : Découplage du paramètre incertain  $m_2$

L'équation (4-15) permet de découpler l'incertitude sur  $m_2$ , en ne faisant apparaître que les termes  $m_{2n}$  et  $dm_2$ , la figure 4-7 montre ce découplage.

En procédant d'une manière équivalente, la figure 4-8 montre le découplage du paramètre incertain  $k$

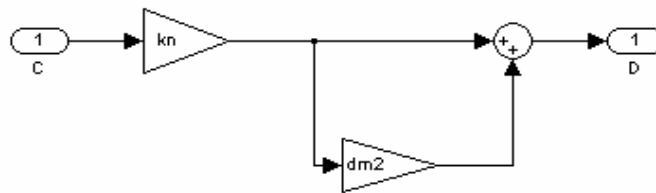


figure 4-8 : Découplage du paramètre incertain  $k$

En utilisant les figures 4-6, 4-7 et 4-8, nous pouvons construire la représentation schéma bloc sous forme LFT du système masse-ressort, dessiné figure 4-9.

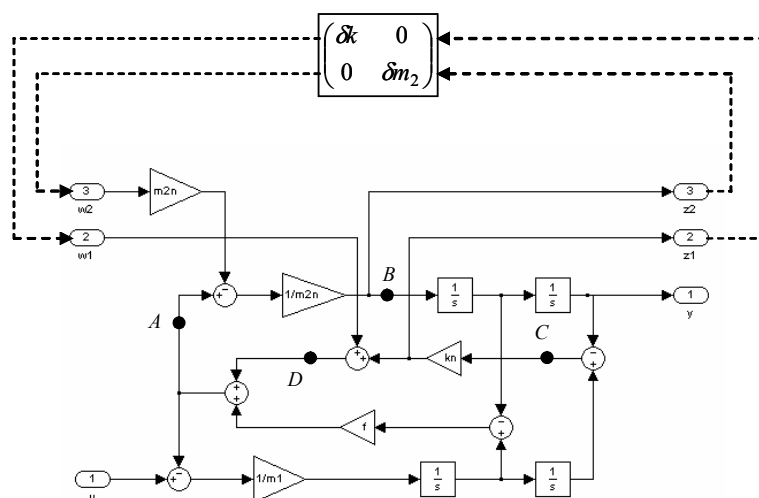


figure 4-9 : Représentation schéma bloc sous forme LFT du système masse-ressort

Grâce à cette représentation schéma bloc, la représentation d'état augmentée (équation (4-2)) du système peut être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ z1 \\ z2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_n/m_1 & k_n/m_1 & -f/m_1 & f/m_1 & -1/m_1 & 0 & 1/m_1 \\ k_n/m_{2n} & -k_n/m_{2n} & f/m_{2n} & -f/m_{2n} & 1/m_{2n} & -1 & 0 \\ k_n & -k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_n/m_{2n} & -k_n/m_{2n} & f/m_{2n} & -f/m_{2n} & 1/m_{2n} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ w1 \\ w2 \\ u \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Ainsi que la matrice d'incertitude associée :

$$\Delta = \text{diag}(dk, dm_2) \quad (4-17)$$

Cette méthode est difficilement extensible à des modèles plus complexes, avec de nombreuses incertitudes paramétriques.

## 4.2.2 Le bond graph pour la construction de la forme LFT.

Reprenons le système masse-ressort de la figure 4-5, modélisé par bond graph sur la figure 4-10.

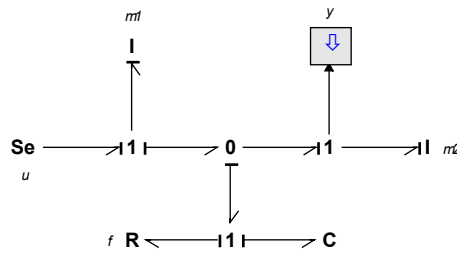


figure 4-10 : Modèle bond graph du système masse-ressort

Comme nous l'avons vu précédemment, ce système a une entrée de commande  $u$ , la variable à commander étant la position de la masse  $m_2$ .

La rigidité du ressort  $k$  et la valeur de la masse  $m_2$  sont connues de manière incertaine, ce qui s'écrit comme indiqué équations (4-9) et (4-10)

$$m_2 = m_{2n} \cdot (1 + dm_2)$$

$$k = k_n \cdot (1 + dk)$$

où  $m_{2n}$  et  $k_n$  sont les valeurs nominales et  $dm_2$  et  $dk$  les déviations relatives associées.

La décomposition sous la forme LFT du système est effectuée en employant la méthodologie proposée dans [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001a], dont nous allons rappeler la démarche pour les éléments I et C en causalité intégrale.

Considérons l'élément  $I$  en causalité intégrale figure 4-11(a) et sa loi caractéristique :

$$f_I = \frac{1}{M} \cdot \int e_I \cdot dt \quad (4-18)$$



En exprimant le paramètre incertain  $M$  en termes de sa valeur nominale et de sa déviation  $M = M_n(1 + dM)$ , on peut mettre l'élément sous sa forme LFT, comme dessiné figure 4-11(b), grâce à l'équation.

$$f_I = \frac{1}{M_n(1 + dM)} \int e_I \cdot dt \tag{4-19}$$

soit

$$(1 + dM) \cdot f_I = f_n \text{ avec } e_I = e_n \tag{4-20}$$

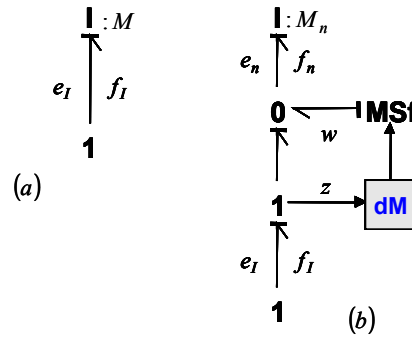


figure 4-11 : Elément  $I$  et sa forme LFT

Considérons l'élément  $C$  en causalité intégrale figure 4-12(a) et sa loi caractéristique :

$$e_C = k \cdot \int f_C \cdot dt \tag{4-21}$$

En exprimant le paramètre incertain  $k$  en termes de sa valeur nominale et de sa déviation, on peut mettre l'élément sous sa forme LFT, comme dessiné figure 4-12 (b), grâce à l'équation (4-22).

$$e_C = k_n(1 + dk) \int f_C \cdot dt \tag{4-22}$$

soit

$$e_C = (1 + dk) \cdot e_n \text{ avec } e_C = e_n \tag{4-23}$$

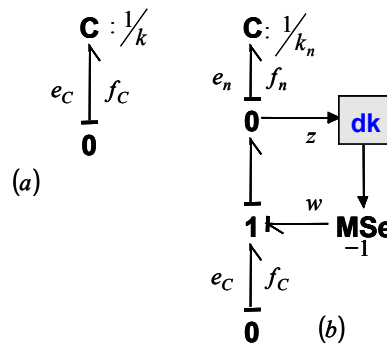


figure 4-12 : élément  $C$  et sa forme de LFT

Le modèle bond graph sous forme LFT du système masse ressort peut être dessiné tel que le montre la figure 4-13.

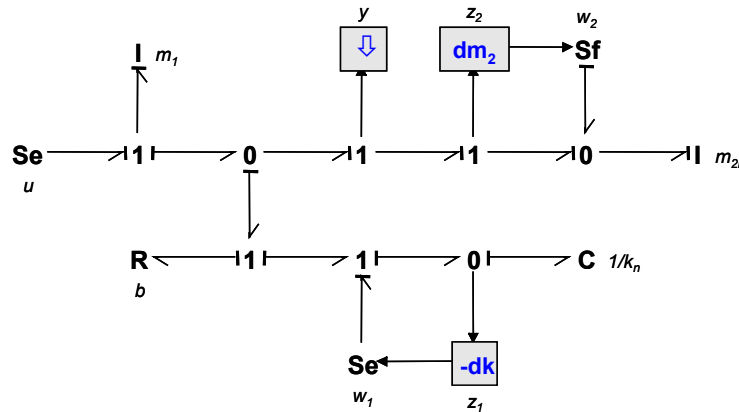


figure 4-13 : Bond graph sous forme LFT du système de masse-ressort

A partir du modèle bond graph de la figure 4-13, la matrice d'état augmentée peut être écrite comme indiqué équation (4-24), avec un choix différent du vecteur d'état, qui est ici le vecteur d'état composé des variables d'énergie du bond graph associés aux éléments  $I$  et  $C$  et de la variable  $x_2$  pour l'intégrateur, soit  $x = [p_{m_1} \quad p_{m_2} \quad q_C \quad x_2]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{m_1} \\ \dot{p}_{m_2} \\ \dot{q}_C \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/m_1 & b/m_{2n} & -k_n & 0 & 1 & -b & 1 \\ b/m_1 & -b/m_{2n} & k_n & 0 & -1 & b & 0 \\ 1/m_1 & 1/m_{2n} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/m_{2n} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_{2n} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{m_1} \\ p_{m_2} \\ q_C \\ x_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Ainsi que sa matrice d'incertitude associée :

$$\Delta = \text{diag}(dk, dm_2) \quad (4-25)$$

### 4.2.3 Conclusion

Dans un premier temps, nous pouvons voir que les formes LFT, déterminées par les deux approches, sont équivalentes, car un changement de base permet de passer de l'une à l'autre.

La démarche utilisée afin de construire la forme LFT du processus masse-ressort, par l'approche classique, ne se fait pas de façon systématique. La construction d'une forme LFT requiert une certaine imagination pour obtenir un résultat satisfaisant, et peut s'avérer fastidieuse pour un système de grande dimension. Il n'existe pas de travaux dans la littérature traitant le cas où les paramètres incertains sont liés dans un composant du modèle.

L'approche bond graph dispose d'une méthode systématique de construction de la forme LFT d'un modèle [Kam, 2001]. Cette méthode traite le cas où les composants bond graph du modèle sont incertains mais supposés indépendants. En réalité, les composants bond graph d'un modèle peuvent être dépendants d'un certain nombre de paramètres [Niesner et al., 2005b].

Ainsi considérons un élément R en causalité résistance dont le modèle bond graph est dessiné figure 4-14.

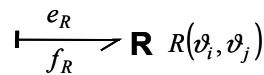


figure 4-14 : modèle bond graph d'un élément R en causalité résistance

La loi constitutive de cet élément dépendant des paramètres incertains  $v_i$  et  $v_j$  est :

$$e_R = R(v_i, v_j).f_R \tag{4-26}$$

Suivant la complexité de la fonction  $R(v_i, v_j)$ , nous serons amenés à introduire plus ou moins d'entrées/sorties fictives, mais le modèle de l'élément  $R(v_i, v_j)$  sous forme LFT aura toujours la forme dessinée figure 4-15.

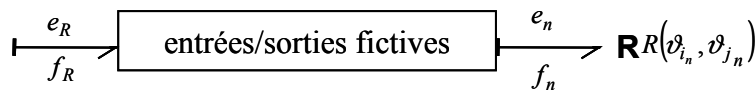


figure 4-15 : Modèle bond graph sous forme LFT d'un élément R en causalité résistance

La modélisation d'un composant bond graph sous forme LFT dépend de l'expression du composant bond graph ; le seul objectif à satisfaire est de faire apparaître clairement les incertitudes relatives dans l'expression du composant.

Cette démarche peut être observée pour chacun des composants bond graph (R, I, C, TF, GY). Nous allons mettre en œuvre cette démarche sur le modèle bicyclette, nous obtiendrons donc une matrice d'incertitude, associée à la forme LFT, regroupant les incertitudes relatives des paramètres incertains.

### 4.3 Influence du choix de la matrice d'incertitude sur la marge de stabilité

Considérons le bicyclette dont la représentation schématique est dessinée figure 4-16(a) et le modèle bond graph figure 4-16(b).

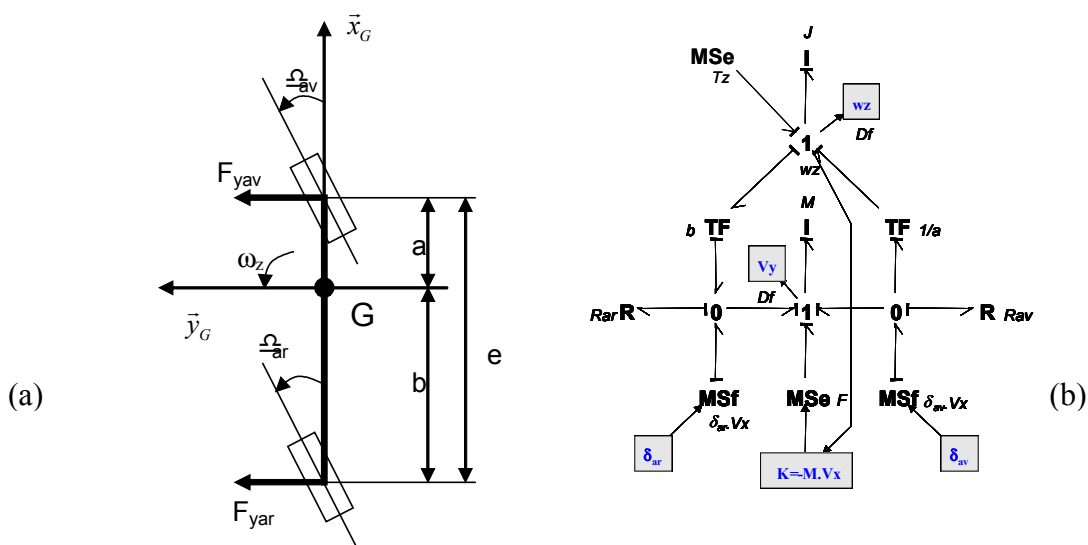


figure 4-16 : Représentation schématique du bicyclette et son modèle bond graph

Les incertitudes sont associées au nombre de passagers dans la voiture, à l'emplacement de ces passagers dans la voiture, ainsi qu'au poids des bagages, qui influencent la valeur de la masse du véhicule, ainsi que la position du centre de gravité, donc connues de manière incertaine.

Les hypothèses de modélisation utilisées pour construire le modèle du bicyclette ont été précisées au paragraphe 1.3.1.

$a$  et  $b$  représentent les distances de l'essieu avant et de l'essieu arrière au centre de gravité,  $e = a + b$  est la distance entre les essieux (empattement),  $M$  est la masse du véhicule,  $J$  le moment d'inertie de lacet,  $T_z$  le couple servant à réguler la vitesse angulaire de lacet.  $R_{av}$  et  $R_{ar}$  sont les éléments bond graph associés aux pneus et modélisant les efforts transverses, caractérisés par les équations (4-27) et (4-28), utilisant une approximation du modèle de Pacejka [Pacejka, 1979],

$$R_{av} = \frac{c_0 \cdot F_{zav} - c_1 \cdot F_{zav}^2}{V_x} \quad (4-27)$$

$$R_{ar} = \frac{c_0 \cdot F_{zar} - c_1 \cdot F_{zar}^2}{V_x} \quad (4-28)$$

avec

$$F_{zav} = \frac{b}{e} \frac{M}{2} g \quad (4-29)$$

et

$$F_{zar} = \frac{a}{e} \frac{M}{2} g, \quad (4-30)$$

$c_0 = 25.41$  et  $c_1 = 0.002015$  sont des paramètres du modèle pneumatique obtenus expérimentalement.

L'objectif est d'étudier la marge de stabilité du système en boucle fermée (figure 4-17), en employant la méthodologie bond graph pour obtenir la forme LFT.

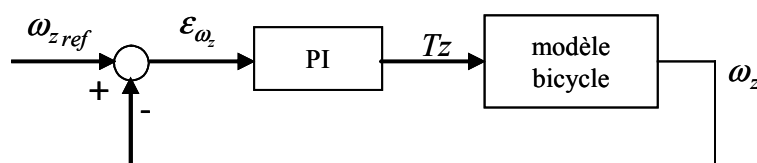


figure 4-17 : système en boucle fermée

Le correcteur est un contrôleur de type PI, choisi pour obtenir la réponse de la boucle fermée nominale à un échelon  $\omega_{z,ref}$  dessinée figure 4-18, en considérant les valeurs nominales  $a_n = 1\text{ m}$   $b_n = 1.4\text{ m}$ ,  $M_n = 1200\text{ kg}$   $J_n = 1450\text{ kg.m}^2$ .

Le choix du type de correcteur a été influencé par le fait que sur un véhicule, un correcteur de type PI est implanté afin d'effectuer la régulation de trajectoire grâce à des fonctionnalités comme l'ESP (Electronic Stability Program).

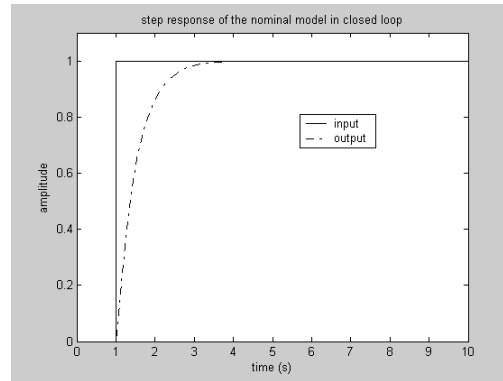


figure 4-18 : réponse de la boucle fermée nominale à un échelon

Les paramètres des composants bond graph soumis aux incertitudes sont la masse  $M$ , le moment d'inertie de lacet  $J$ , les paramètres des éléments TF :  $a$  et  $b$  correspondant à la position du centre de gravité, les éléments résistifs  $R_{av}$  et  $R_{ar}$  modélisant les pneumatiques, ainsi que la source MSe :  $-M.Vx$  (qui n'est pas une source de commande).

Deux démarches différentes sont possibles pour calculer la marge de stabilité paramétrique :

- considérer les éléments bond graph soumis aux incertitudes comme s'ils étaient indépendants, construire la forme LFT, déduire la décomposition  $M(s)-\Delta$ , calculer la marge de stabilité paramétrique au moyen de la  $\mu$ -analyse, puis déterminer les intervalles pour la masse et la position du centre de gravité garantissant la stabilité du modèle en boucle fermée,
- prendre en compte le fait que les éléments bond graph soumis aux incertitudes sont fonctions de la masse  $M$  et/ou de la position du centre de gravité  $a$ , les décomposer afin de les écrire de manière explicite en fonction des incertitudes  $\delta a$  et  $\delta M$ , puis procéder comme précédemment.

### 4.3.1 Paramètres incertains considérés comme indépendants

En appliquant la méthode développée dans [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001a], nous pouvons construire la forme LFT de chacun des éléments du modèle bond graph du bicyclette de la figure 4-16(b).

La forme LFT des éléments I :  $M$  et I :  $J$  est donnée par la figure 4-11(b).

Considérons le modèle bond graph de l'élément R :  $R_i$  de la figure 4-19(a), pouvant représenter R :  $R_{av}$  ou R :  $R_{ar}$ , et sa loi caractéristique :

$$e_{R_i} = R_i \cdot f_{R_i} \quad (4-31)$$

En exprimant le paramètre incertain  $R_i$  en termes de sa valeur nominale et de sa déviation  $R_i = R_{i_n} \cdot (1 + dR_i)$ , on peut écrire :

$$e_{R_i} = R_{i_n} \cdot (1 + dR_i) \cdot f_{R_i} \quad (4-32)$$

soit

$$e_{R_i} = e_n \cdot (1 + dR_i) \text{ avec } f_n = f_{R_i} \quad (4-33)$$

L'équation (4-33) permet de calculer l'effort  $e_{R_i}$  en fonction de la déviation  $dR_i$  de l'élément  $R_i$  et de l'effort  $e_n$ , lui-même obtenu grâce à la valeur nominale  $R_{i_n}$  de l'élément résistif. Le forme LFT de cet élément résistif peut être dessiné figure 4-19(b).

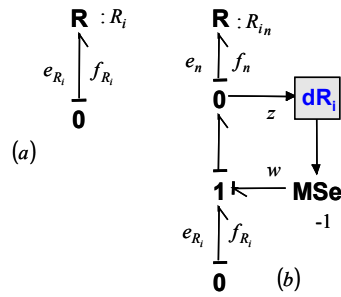


figure 4-19 : Elément R et sa forme LFT

De même, soit l'élément TF :*b* de la figure 4-20(a), et ses lois constitutives :

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 \cdot b \\ f_2 &= f_1 \cdot b \end{aligned} \tag{4-34}$$

En exprimant le paramètre incertain *b* en termes de sa valeur nominale et de sa déviation  $b = b_n \cdot (1 + db)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 \cdot b_n \cdot (1 + db) \\ f_2 &= f_1 \cdot b_n \cdot (1 + db) \end{aligned} \tag{4-35}$$

soit

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{1_n} \cdot (1 + db) \text{ avec } e_2 = e_{2_n} \\ f_2 &= f_{2_n} \cdot (1 + db) \text{ avec } f_1 = f_{1_n} \end{aligned} \tag{4-36}$$

L'équation (4-36) permet de dessiner le transformateur sous sa forme LFT (figure 4-20(b)).

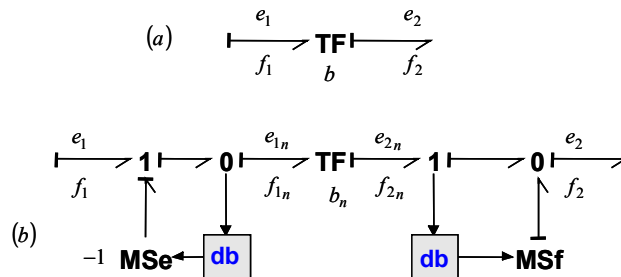


figure 4-20 : Elément TF en causalité *m* et sa forme LFT

Soit l'élément TF :*1/a* de la figure 4-21(a), et ses lois constitutives :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \cdot a \\ e_2 &= e_1 \cdot a \end{aligned} \tag{4-37}$$

En exprimant le paramètre incertain *a* en termes de sa valeur nominale et de sa déviation  $a = a_n \cdot (1 + da)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \cdot a_n \cdot (1 + da) \\ e_2 &= e_1 \cdot a_n \cdot (1 + da) \end{aligned} \tag{4-38}$$

soit

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{1_n} \cdot (1 + da) \text{ avec } f_2 = f_{2_n} \\ e_2 &= e_{2_n} \cdot (1 + da) \text{ avec } e_1 = e_{1_n} \end{aligned} \tag{4-39}$$

L'équation (4-39) permet de dessiner le transformateur sous sa forme LFT (figure 4-21(b)).

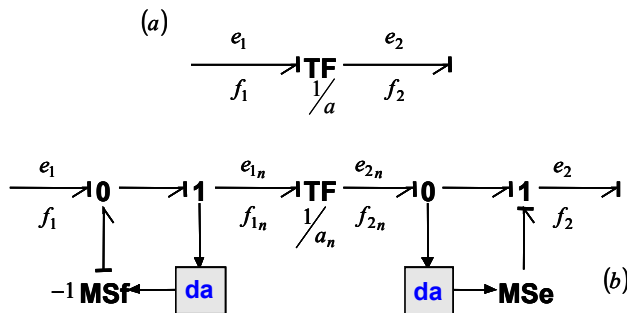


figure 4-21 : Element TF en causalité  $I/m$  et sa forme LFT

La source modulée de la figure 4-22(a) est fonction du paramètre incertain  $M$ , donc le module  $K$  de la source modulée est incertain, les lois régissant cet élément sont données par l'équation ci-dessous :

$$f = 0 \tag{4-40}$$

$$e = K.\omega_z$$

En exprimant le paramètre incertain  $K$  en termes de sa valeur nominale et de sa déviation  $K = K_n.(1 + dK)$ , on peut écrire :

$$e = K_n.(1 + dK).\omega_z \tag{4-41}$$

soit

$$e = e_n.(1 + dK) \text{ avec } \omega_z = \omega_{z_n} \tag{4-42}$$

L'équation (4-42) permet de dessiner la source d'effort modulée sous sa forme LFT (figure 4-22(b)).

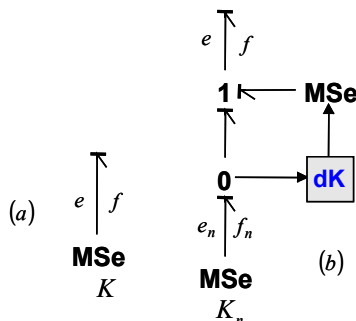


figure 4-22 : Source d'effort modulée et sa forme LFT

En remplaçant chacun des éléments bond graph par sa forme LFT, le modèle bicyclette peut être dessiné sous sa forme LFT (figure 4-23), sur laquelle apparaissent clairement les entrées/sorties fictives  $w_i$  et  $z_i$  ( $i=1..9$ ).

A partir du modèle bond graph de la figure 4-23, et en considérant le vecteur d'état composé des variables associées aux éléments I, soit  $x = [p_M \quad p_J]^T$ , on peut écrire la représentation d'état augmentée (conformément à l'équation (4-2)) du système bicyclette.

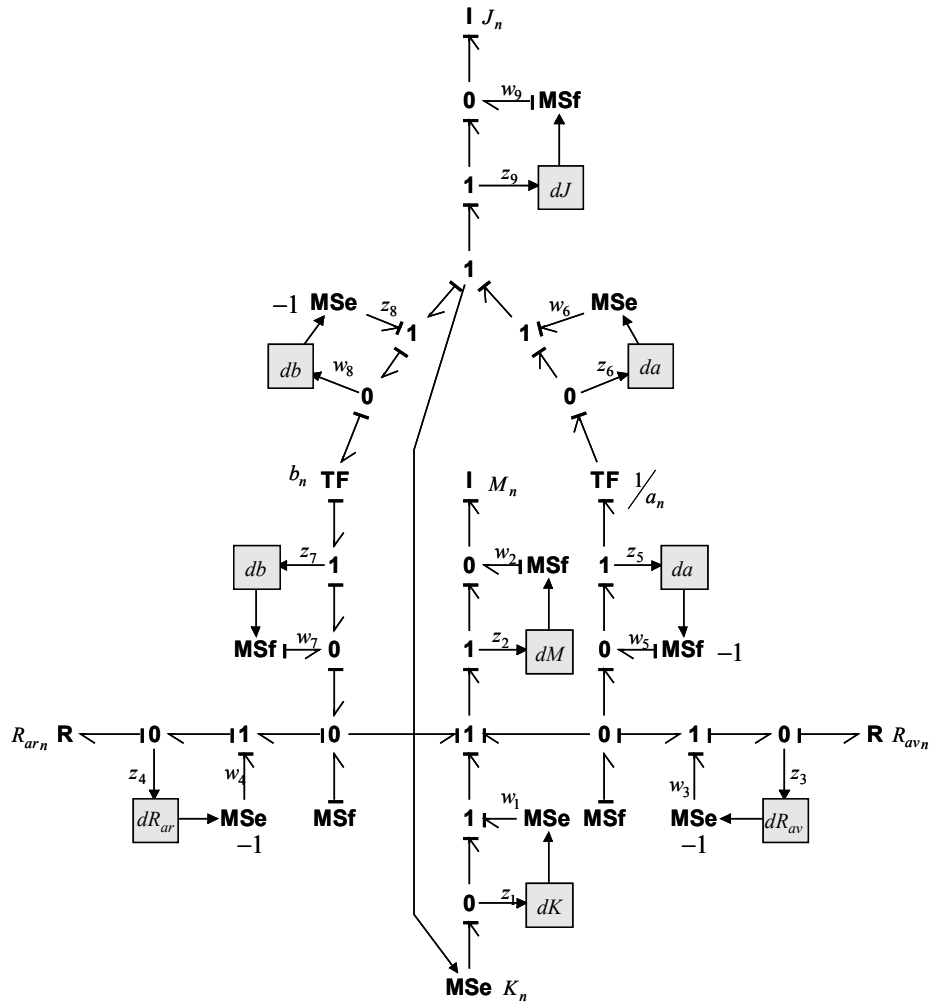


figure 4-23 : Bond graph sous forme LFT du bicyclette

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_M \\ \dot{p}_J \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{av} + R_{ar}}{M} & -\frac{M V x}{J} & -\frac{a R_{av} - b R_{ar}}{J} & 1 & R_{av} + R_{ar} & -1 & -1 & 0 & a R_{av} & 0 & b R_{ar} & a R_{av} - b R_{ar} + M V x & 0 \\ \frac{a R_{av} - b R_{ar}}{M} & -\frac{a^2 R_{av} + b^2 R_{ar}}{J} & 0 & a R_{av} - b R_{ar} & -a & b & a & a^2 R_{av} & b & -b^2 R_{ar} & a^2 R_{av} + b^2 R_{ar} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M V x}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M V x & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{av}}{M} & -\frac{R_{av}}{J} & 0 & R_{av} & 0 & 0 & 0 & a R_{ar} & 0 & 0 & a R_{av} & 0 & 0 \\ -\frac{R_{ar}}{M} & \frac{b R_{ar}}{J} & 0 & R_{ar} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b R_{ar} & -b R_{ar} & 0 & 0 \\ -\frac{R_{av}}{M} & -\frac{a R_{av}}{J} & 0 & R_{av} & -1 & 0 & 0 & a R_{av} & 0 & 0 & a R_{av} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{ar}}{M} & \frac{b R_{ar}}{J} & 0 & R_{av} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b R_{ar} & -b R_{ar} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_M \\ p_J \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ \delta_{av} \end{bmatrix} \tag{4-43}$$



et la matrice d'incertitudes associée

$$\Delta = \begin{bmatrix} dJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dM & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dR_{av} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dR_{ar} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & db & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & db & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & da & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & da & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dK \end{bmatrix}, \quad (4-44)$$

que nous noterons

$$\Delta = \text{diag}(dJ, dM, dR_{av}, dR_{ar}, db, da, dK) \quad (4-45)$$

où les termes diagonaux sont supposés être indépendants.

La  $\mu$ -analyse appliquée sur cette forme d'interconnection standard donne la courbe présentée figure 4-24 ; elle correspond à une marge de stabilité paramétrique  $k_{\max}$  égale à 0.28 qui signifie que chaque déviation  $d\theta$  de la matrice  $\Delta$  de l'équation (4-45) peut prendre des valeurs à l'intérieur de l'intervalle  $[\theta_n(1-0.28), \theta_n(1+0.28)]$ ,  $\theta_n$  représentant la valeur nominale du paramètre.

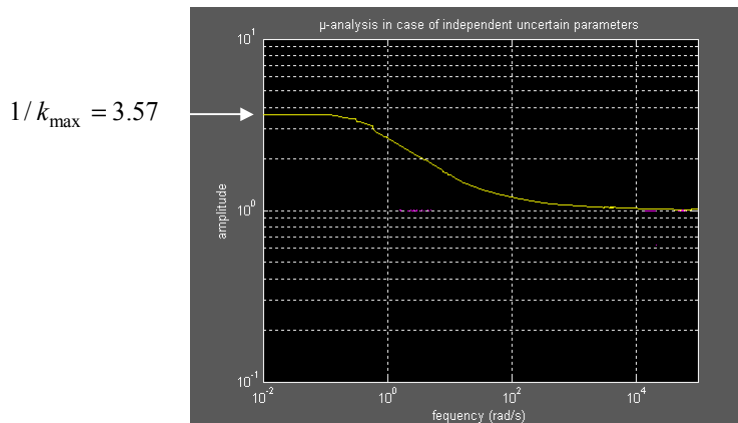


figure 4-24 :  $\mu$ -analyse dans le cas de paramètres incertains indépendants

Cette courbe est obtenue grâce à la fonction  $mu$  de la boîte à outil '*Mu Analysis and Synthesis Toolbox*', du logiciel *Matlab*, elle représente toutes les valeurs singulières calculées dans la plage de fréquences considérées. Afin d'obtenir ce résultat, nous devons d'une part construire la forme d'interconnection standard de la figure 4-1, intégrer dans la fonction  $mu$ , la matrice de transfert  $M(s)$ , dont les entrées/sorties sont les entrées/sorties fictives données par la forme LFT, ainsi que la matrice d'incertitude  $\Delta$ . D'autre part, nous devons définir la plage fréquentielle sur laquelle seront calculées les valeurs singulières structurées, en la déterminant à partir de l'étude du lieu de Bode du système en boucle fermée (figure 4-25).

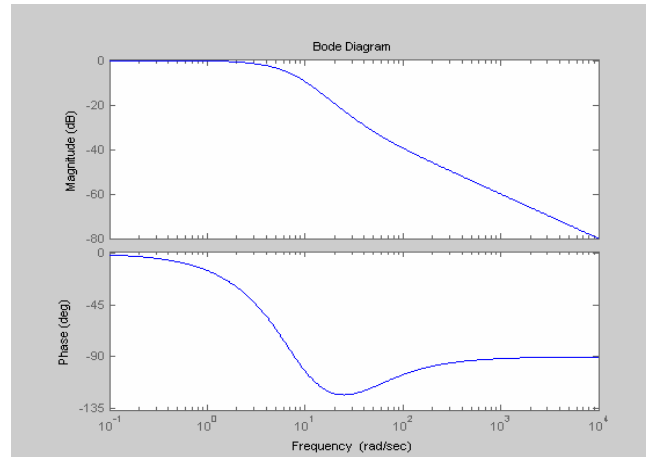


figure 4-25 : diagramme de Bode du système en boucle fermée

Nous avons défini l'intervalle dans lequel les composants incertains du modèle peuvent prendre leurs valeurs, et ceci en considérant ces composants indépendants entre eux. L'intérêt de cette analyse étant de connaître la variation possible des paramètres incertains (masse et position du centre de gravité), la dernière étape consistera à trouver les intervalles dans lesquels la masse et la position du centre de gravité peuvent varier afin de respecter les conditions fixées sur les composants.

Nous pouvons trouver aisément un premier intervalle de variation pour la masse et la position du centre de gravité par rapport à l'essieu avant, car ils interviennent directement en tant que composant dans le modèle bond graph.

$$864\text{kg} < M < 1536\text{kg} \quad (4-46)$$

$$0.72\text{m} < a < 1.28\text{m} \quad (4-47)$$

Pour la position du centre de gravité ( $a$ ), le transformateur de module  $b$ , donne rapidement un nouvel encadrement de sa valeur :

$$0.608\text{m} < a < 1.392\text{m} \quad (4-48)$$

Considérons les éléments résistifs  $R_{av}$  et  $R_{ar}$ , ils peuvent être encadrés de la manière suivante :

$$R_{avn} \cdot (1 - 0.28) < R_{av} < R_{avn} \cdot (1 + 0.28) \quad (4-49)$$

$$R_{arn} \cdot (1 - 0.28) < R_{ar} < R_{arn} \cdot (1 + 0.28) \quad (4-50)$$

Les expressions de ces éléments sont données par les équations (4-27) et (4-28), nous les rappelons ci-dessous :

$$R_{av} = \frac{c_0 \cdot F_{zav} - c_1 \cdot F_{zav}^2}{V_x}$$

et

$$R_{ar} = \frac{c_0 \cdot F_{zar} - c_1 \cdot F_{zar}^2}{V_x}$$

Dans le cas nominal, on peut calculer leur valeur, ce qui donne :

$$R_{avn} = 4564.7 \quad (4-51)$$

$$R_{arn} = 3608.6 \quad (4-52)$$

Dans le cas incertain, on peut les exprimer en fonction de  $M$ ,  $a$  et  $b$ , grâce aux équations (4-29) et (4-30), donnant les formules permettant de calculer les efforts normaux avant et arrière.

$$F_{zav} = \frac{b}{e} \frac{M}{2} g \quad \text{et} \quad F_{zar} = \frac{a}{e} \frac{M}{2} g .$$

Les équations (4-49) et (4-50) deviennent :

$$5742 < 3.73.b.M - 0.000604.b^2.M^2 < 10208 \quad (4-53)$$

$$3851 < 3.73.a.M - 0.000604.a^2.M^2 < 6846 \quad (4-54)$$

En posant  $x_1 = b.M$  dans (4-53), et  $x_2 = a.M$  dans (4-54), nous pouvons, en résolvant des équations du second degré, obtenir les intervalles de variation de  $a.M$  et  $b.M$  :

$$900 < a.M < 1479 \quad (4-55)$$

$$1275 < b.M < 2053 \quad (4-56)$$

Nous savons que l'empattement  $e$  se calcule de la manière suivante

$$e = a_n + b_n = a + b$$

En additionnant les inégalités (4-55) et (4-56), on peut obtenir un encadrement de  $e.M$  :

$$2175 < e.M < 3532 \quad (4-57)$$

Et en déduire l'encadrement de la masse imposé par les intervalles de variation des éléments résistifs

$$906kg < M < 1472kg \quad (4-58)$$

A partir des équations (4-55) et (4-58), l'obtention du domaine de variation de  $a$  (position du centre de gravité), imposé par les intervalles de variation des éléments résistifs, est directe

$$0.99m < a < 1.004m \quad (4-59)$$

L'expression de  $K$  de la source d'effort modulée donnée par le modèle bond graph (figure 4-16(b)) est la suivante :

$$K = -M.Vx \quad (4-60)$$

La variation de ce composant à l'intérieur de l'intervalle :

$$K_n.(1-0.28) < K < K_n.(1+0.28) \quad (4-61)$$

donne pour la masse, le même domaine de variation que celui donné par l'équation (4-46).

Nous pouvons donner l'intervalle de variation de l'inertie de lacet.

$$1044kg.m^2 < J < 1856kg.m^2 \quad (4-62)$$

Au paragraphe 2-3, nous avons trouvé l'expression de l'inertie de lacet (équation (2-25)) :

$$J = J_n + \Delta a_M^2 \cdot \frac{\Delta M \cdot M_n}{\Delta M + M_n} \quad (4-63)$$

avec  $\Delta a_M = (a - a_M)$

L'expression de l'inertie de lacet ne permet pas de donner les conditions que doivent respecter  $M$  et  $a$  pour satisfaire l'équation (4-62).

En regroupant toutes les conditions que doivent respecter les paramètres incertains : équations (4-46), (4-47), (4-48), (4-58) et (4-59), nous pouvons donner les domaines de variation des paramètres incertains,

pour la masse

$$906kg < M < 1472kg \quad (4-64)$$

Et pour la position du centre de gravité

$$0.99m < a < 1.004m \quad (4-65)$$

Nous avons vérifié a posteriori que l'inégalité (4-62) est vérifiée, pour les domaines de variation des paramètres incertains.

Nous pouvons conclure que ces conditions sont trop conservatives, particulièrement pour la position du centre de gravité qui ne peut que se déplacer de 0.004m par rapport à sa position nominale. En effet comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3., figure 2-10, ainsi que sur la figure 2-63 du paragraphe 2.7.2., le centre de gravité se situe au niveau du levier de vitesse, donc il ne pourra pas être avancé ( $a \geq a_n$ ).

### 4.3.2 Paramètres incertains dépendants

Dans le paragraphe précédent, tous les composants bond graph étaient supposés indépendants. En réalité, ce n'est pas le cas car tous les composants dépendent de la masse  $M$  et/ou de la position du centre de gravité  $a$ . L'objectif est de trouver une matrice  $\Delta$  composée uniquement de ces deux paramètres incertains.

\* la masse  $M$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$M = M_n.(1 + dM) \quad (4-66)$$

\* la position du centre de gravité  $a$ , s'exprime comme suit :

$$a = a_n.(1 + da) \quad (4-67)$$

\* les éléments résistifs  $R_{av}$  et  $R_{ar}$  liés aux efforts transversaux définis par des équations (4-27) et (4-28).

Considérons le composant  $R_{ar}$ . A partir de son expression donnée équation (4-28), on peut écrire :

$$R_{ar} = \frac{c_0.F_{zar} - c_1.F_{zar}^2}{V_x} = \frac{c_0 \cdot \frac{a}{e} \cdot \frac{M}{2} \cdot g - c_1 \cdot \frac{a^2}{e^2} \cdot \frac{M^2}{4} \cdot g^2}{V_x} \quad (4-68)$$

En remplaçant  $M$  et  $a$  par leurs expressions en termes de valeur nominale et de déviation, données par les équations (4-66) et (4-67), on peut exprimer  $R_{ar}$  de la manière suivante :

$$R_{ar} = \frac{c_0 \cdot \frac{a_n}{e} \cdot \frac{M_n}{2} \cdot g - c_1 \cdot \frac{a_n^2}{e^2} \cdot \frac{M_n^2}{4} \cdot g^2 \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM)}{V_x} \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM) \quad (4-69)$$

ou

$$R_{ar} = \frac{c_0.F_{zarn} - c_1.F_{zarn}^2 \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM)}{V_x} \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM) \quad (4-70)$$

ce qui peut s'écrire comme suit :

$$R_{ar} = \left( R_{ar_n} - \frac{c_1.F_{zarn}^2}{V_x} \cdot (da + dM + da \cdot dM) \right) \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM) \quad (4-71)$$

L'élément  $R_r$  de la figure 4-26 est caractérisé par la loi constitutive  $e = R_r \cdot f$

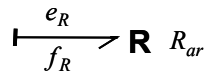


figure 4-26 : Elément R lié à l'effort transversal arrière

ce qui donne, à partir de l'équation (4-71)

$$e = f \cdot \left( R_{ar_n} - \frac{c_1 \cdot F_{zarn}^2}{V_x} \cdot (da + dM + da \cdot dM) \right) \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM) \tag{4-72}$$

ou, en posant  $f = f_n$ ,

$$e = \left( e_n - f_n \cdot \frac{c_1 \cdot F_{zarn}^2}{V_x} \cdot (da + dM + da \cdot dM) \right) \cdot (1 + da) \cdot (1 + dM) \tag{4-73}$$

De l'équation (4-73) peut être déduit le bond graph LFT de l'élément R, où apparaissent les incertitudes  $da$  et  $dM$ , mais également le produit  $dM \cdot da$  comme le montre la figure 4-27. Ceci n'est pas un problème car nous travaillons avec les incertitudes relatives  $da$  et  $dM$  dont la valeur absolue est inférieure à 1.

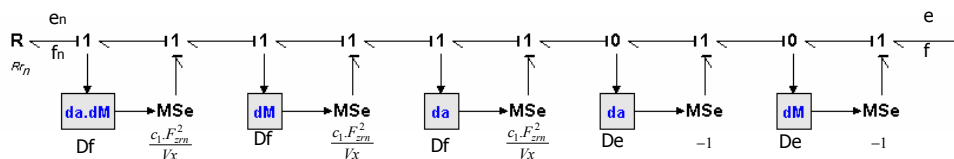


figure 4-27 : bond graph LFT de l'élément R associé à l'effort transversal arrière

Un développement similaire a été effectué pour construire la forme LFT de l'élément résistif  $R_{av}$ .

\* distance entre l'essieu arrière et le centre de gravité  $b = e - a$

Ce coefficient est le module de l'élément TF de la figure 4-16, dont la modélisation est rappelée figure 4-28.

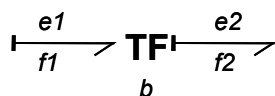


figure 4-28 : Elément TF dont le module est  $b$

Les lois constitutives de l'élément TF, en accord avec la causalité, sont rappelées ci-dessous :

$$f_2 = b \cdot f_1 \tag{4-74}$$

$$e_1 = b \cdot e_2 \tag{4-75}$$

En posant  $b = b_n \cdot (1 + db)$ , il vient :

$$f_2 = b_n \cdot (1 + db) \cdot f_1 \tag{4-76}$$

$$e_1 = b_n \cdot (1 + db) \cdot e_2 \tag{4-77}$$

Puisque  $e = a + b = a_n \cdot (1 + da) + b_n \cdot (1 + db) = a_n + b_n$ , on obtient  $db = -\frac{a_n}{b_n} \cdot da$ .

D'où

$$f_2 = \left(1 - \frac{a_n}{b_n} da\right) \cdot f_{2n} \text{ en posant } f_1 = f_{1n} \quad (4-78)$$

et

$$e_1 = \left(1 - \frac{a_n}{b_n} da\right) e_{1n} \text{ en posant } f_2 = f_{2n} \quad (4-79)$$

La figure 4-28 peut être transformée pour obtenir le bond graph LFT de l'élément TF, comme dessiné figure 4-29 où le terme incertain est  $da$  (et non  $db$ ).

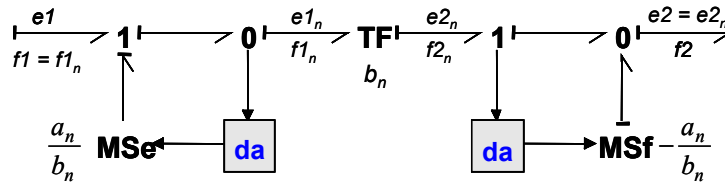


figure 4-29 : bond graph LFT de l'élément TF :  $b$

\* distance entre l'essieu avant et le centre de gravité :  $a$

La forme LFT du transformateur de module  $1/a$  est donnée figure 4-21

\* le moment d'inertie de lacet  $J$

L'expression de l'inertie de lacet est donnée par l'équation (4-63) :

$$J = J_n + \Delta a_M^2 \cdot \frac{\Delta M \cdot M_n}{\Delta M + M_n}$$

avec  $\Delta a = \frac{\Delta a_M \cdot \Delta M}{\Delta M \cdot M_n}$

d'où

$$\Delta a_M = \frac{\Delta a}{\Delta M} \cdot (M_n + \Delta M) \quad (4-80)$$

On peut exprimer l'inertie en fonction des valeurs nominales des paramètres incertains, ainsi que leurs variations :

$$J = J_n + \frac{\Delta a^2}{\Delta M} \cdot (M_n + \Delta M) \cdot M_n$$

Les paramètres incertains peuvent être écrits de deux manières : en faisant apparaître leur variation, ou leur incertitude relative

$$a = a_n + \Delta a = a_n \cdot (1 + da) \quad (4-81)$$

$$M = M_n + \Delta M = M_n \cdot (1 + dM) \quad (4-82)$$

Les équations (4-81) et (4-82), permettent d'écrire :

$$\Delta a = a_n \cdot da \quad (4-83)$$

$$\Delta M = M_n \cdot dM \quad (4-84)$$

En remplaçant dans l'équation de l'inertie de lacet les termes  $da$  et  $dM$ , donnés par les équations (4-83) et (4-84), on obtient :

$$J = J_n + \frac{a_n^2 \cdot da^2 \cdot M_n \cdot (1 + dM)}{dM} \quad (4-85)$$

Il n'est pas possible de découpler dans le terme  $J$  les effets des déviations  $da$  et  $dM$ . C'est pourquoi le terme incertain  $dJ$  doit être conservé dans la matrice d'incertitude.

Le bond graph LFT peut alors être dessiné comme nous l'avons montré précédemment. Ce modèle comporte 17 entrées/sorties auxiliaires, la représentation d'état augmentée peut être déduite, en considérant le même vecteur d'état que précédemment :  $x = [p_M \quad p_J]^T$ , ainsi que la matrice  $\Delta$ , sous la forme suivante

$$\Delta = \text{diag}(dJ, dM, da, da \cdot dM) \quad (4-86)$$

La  $\mu$ -analyse conduit à la courbe dessinée figure 4-30 qui donne une marge de stabilité paramétrique  $k_{\max}$  égale à 0.58.

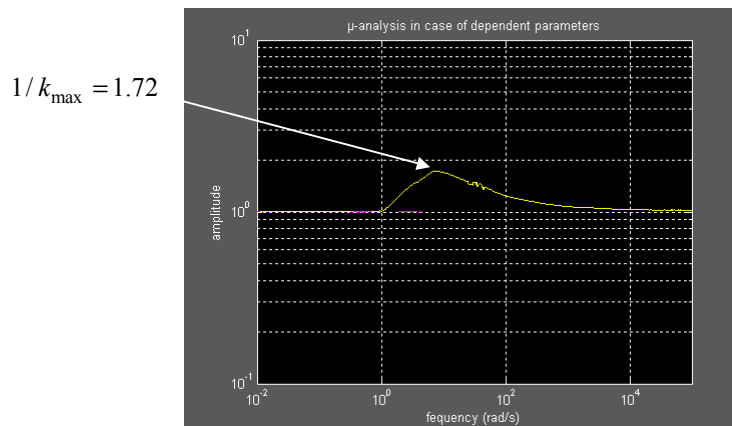


figure 4-30 :  $\mu$ -analyse dans le cas de composants dépendants

Les intervalles pour les paramètres incertains peuvent être déduits directement :

$$504\text{kg} < M < 1896\text{kg} \quad (4-87)$$

$$0.52\text{m} < a < 1.58\text{m} \quad (4-88)$$

Cette approche conduit à des domaines beaucoup plus larges de variations admissibles des paramètres incertains.

Toute cette analyse a été effectuée dans le cas d'un correcteur de type PI, dans l'optique de suivre les objectifs de l'entreprise PSA Peugeot Citroën, mais la technique de  $\mu$ -analyse ne se limite pas à ce type de correcteur. La seule contrainte est qu'il faut l'intégrer dans la matrice  $M(s)$ , donc il faut pouvoir mettre ce correcteur sous forme d'une représentation d'état.

## 4.4 La $\mu$ -synthèse

Il est possible dans certains cas que les domaines de variation des paramètres incertains ne remplissent pas les exigences imposées par le cahier des charges. Dans notre cas, cela peut se traduire par une volonté de charger beaucoup plus le véhicule, ou de faire reculer davantage le centre de gravité du véhicule. La  $\mu$ -synthèse présentée dans [Alazard et al., 1999] utilise les principes de commande  $H_\infty$ , et les valeurs singulières structurées, permet, en définissant la marge de stabilité paramétrique désirée, de synthétiser un correcteur basée sur la commande

$H_\infty$ . Pour effectuer cette synthèse, le système doit être mis sous la forme d'interconnection standard pour la  $\mu$ -synthèse, représentée par la figure 4-31

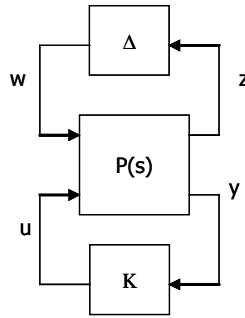


figure 4-31 : forme d'interconnection standard pour la  $\mu$ -synthèse

Afin de construire cette forme d'interconnection standard, il est nécessaire dans un premier temps de découpler les incertitudes du modèle. Pour cela, il faut dessiner la forme LFT du modèle. Nous pouvons employer la méthode développée dans [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001a] pour les modèles dont les composants sont indépendants, ou la démarche de [Niesner et al., 2005], rappelée au paragraphe 4.3.2, pour les modèles dont les composants sont dépendants de paramètres incertains.

La matrice  $P(s)$  liée à la forme d'interconnection standard de la figure 4-31, peut être donnée par l'équation (4-89), en supposant que l'intervalle de variation des paramètres incertains a été pris en compte par le biais de pondérations statiques placées sur les signaux auxiliaires (entrées/sorties fictives), et en choisissant de répartir ces pondérations de façon identique sur les entrées et les sorties.

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|ccc} A & B_2 & \sqrt{d\vartheta}.B_1 & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} & \sqrt{d\vartheta}.D_{21} & D_{22} \\ \sqrt{d\vartheta}.C_1 & \sqrt{d\vartheta}.D_{12} & d\vartheta.D_{11} & \sqrt{d\vartheta}.D_{12} \\ C_2 & D_{22} & \sqrt{d\vartheta}.D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4-89)$$

Les matrices  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  et  $D_{22}$  sont données par la matrice d'état augmentée, obtenue grâce à la forme LFT du modèle. Le terme  $d\vartheta$  correspond à la marge de stabilité paramétrique désirée (avec  $0 < d\vartheta < 1$ ).

## 4.5 Suivi de trajectoire

Au paragraphe 4.3, une analyse de la loi de commande a été effectuée sur le modèle bicyclette en boucle fermée. De cette analyse, un encadrement des paramètres incertains a été dégagé :

$$504\text{kg} < M < 1896\text{kg}$$

$$0.52\text{m} < a < 1.58\text{m}$$

La figure 4-17 présente le système en boucle fermée, nous pouvons enrichir ce schéma (figure 4-32), afin de permettre au système bicyclette de suivre une trajectoire de référence donnée par le modèle bicyclette. Dans un premier temps, afin de valider l'analyse effectuée au paragraphe 4.3, le système bicyclette est représenté par le modèle décrit par la figure 4-16, incluant des incertitudes (voir paragraphe 2.3), tandis que le modèle fournissant la trajectoire de référence est considéré dans le cas nominal.



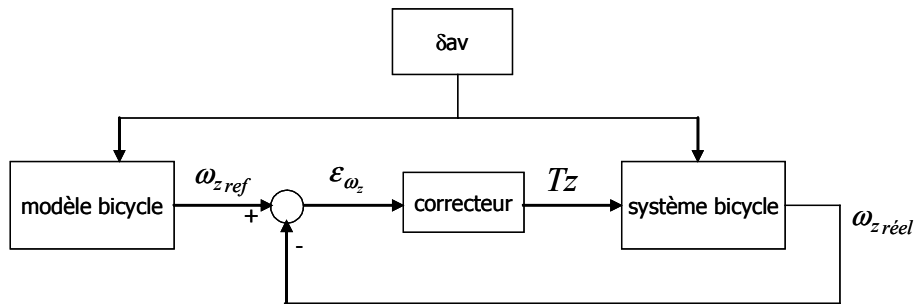


figure 4-32 : suivi de trajectoire

Sur cette boucle de régulation, nous pouvons constater que la grandeur régulée est la vitesse angulaire de lacet ( $\omega_z$ ). En effet nous avons supposé pour la modélisation du système bicyclette que les dérives sont faibles (hypothèse de modélisation : paragraphe 1.3.1). Donc la trajectoire du véhicule dans ces conditions est étroitement liée à la vitesse angulaire de lacet. L'angle de braquage des roues avant du véhicule ( $\delta_{av}$ ) est le même pour le modèle et le système.

Considérons le cas où  $M = M_n \cdot (1 + 0.58)$  et  $a = a_n \cdot (1 + 0.58)$ . Nous constatons sur les courbes de la figure 4-33 (où le modèle est représenté par la courbe interrompue, et le système par la courbe continue), que la vitesse angulaire est régulée afin que le système (modèle incertain) suive la trajectoire imposée par le modèle (nominale).

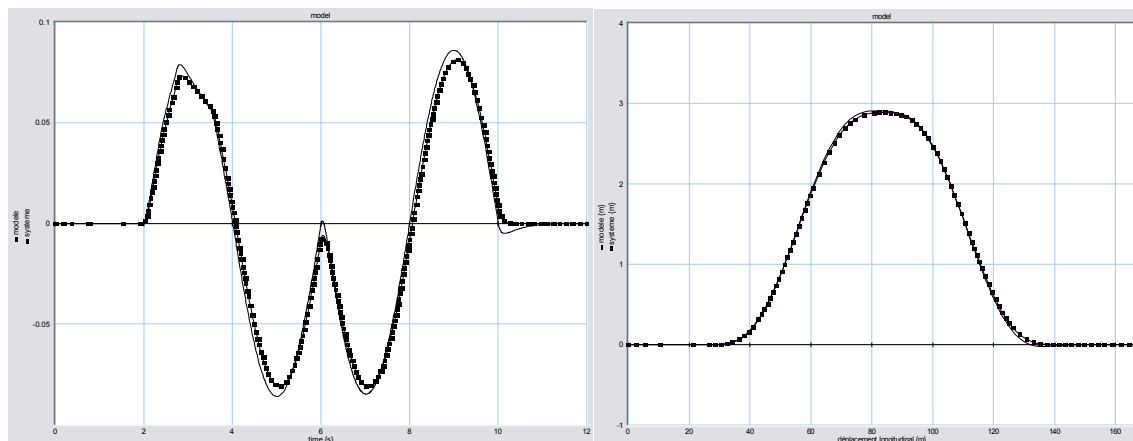


figure 4-33 : vitesse angulaire et trajectoire

Les simulations effectuées ci-dessus ont permis de valider l'analyse effectuée sur la robustesse de la boucle de régulation, dans le cas de paramètres incertains. Une prochaine étape va consister à changer la loi régissant les efforts transversaux, et évaluer la robustesse de la boucle de régulation dans ces conditions. Pour représenter le système véhicule, nous utilisons le modèle bicyclette, en utilisant les formules de Pacejka non linéaire (équation (1-16) du paragraphe 1.4), et non la version linéarisée (équations (4-27) et (4-28)) utilisée jusqu'ici dans ce chapitre. Afin d'effectuer ces simulations dans les meilleures conditions possibles, nous enrichissons la boucle de régulation (figure 4-34), en faisant intervenir la dérive ( $d$ ), permettant ainsi au correcteur de ne pas devoir compenser une dérive trop importante.

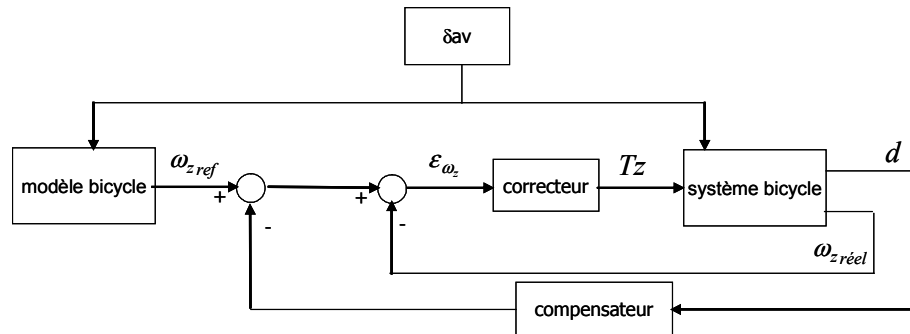


figure 4-34 : boucle de régulation (type ESP)

Dans les mêmes conditions sur les paramètres incertains que pour la figure 4-33, nous pouvons constater que la boucle de régulation donne un résultat correct (figure 4-35), alors que le modèle et le système présentent des différences au niveau du calcul des efforts transversaux.

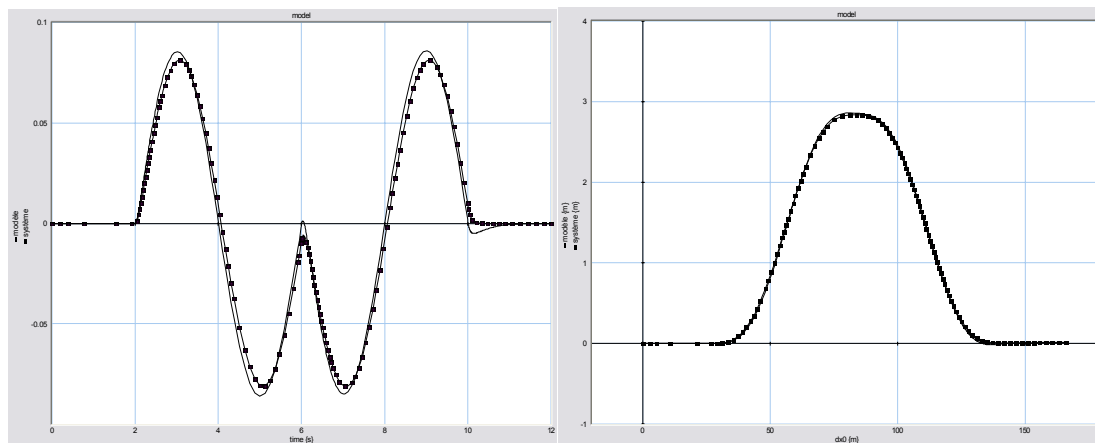


figure 4-35 : vitesse angulaire de lacet et trajectoire

Nous pouvons dire que la boucle de régulation est robuste aux incertitudes paramétriques, comme nous l'avons vu grâce à la  $\mu$ -analyse au paragraphe 4.3.2, mais aussi aux erreurs de modélisation.

Une dernière étape pourrait être de représenter le système 'réel' par le modèle du véhicule complet BGCAR14 (paragraphe 1.4.3), afin d'estimer la robustesse de la loi de commande sur un modèle donnant une représentation du comportement dynamique d'un véhicule réel.

## 4.6 Conclusion

Dans la littérature traitant la méthode de  $\mu$ -analyse, que ce soit par une approche classique [Young, 1997], [Dardenne, 1998], [Alazard et al., 1999] ou bond graph [Kam et Dauphin-Tanguy, 2001a], les composants du modèle sont toujours supposés indépendants, et non une fonction des paramètres incertains comme l'a montré l'exemple bicyclette. Dans ce chapitre, on voit clairement que le choix de la matrice d'incertitude  $\Delta$  intervient sur les conditions de stabilité paramétrique. Nous avons montré que considérer des composants dépendants de paramètres incertains donne une meilleure connaissance du domaine de stabilité paramétrique

du système en boucle fermée. Nous expliquons comment construire la forme d'interconnection standard pour la  $\mu$ -synthèse, à partir du modèle bond graph. Une application a été effectuée sur le véhicule, consistant à effectuer un suivi de trajectoire de type ESP, où nous avons vérifié la robustesse de la loi de commande, au moyen de simulations du système véhicule en boucle fermée dont la référence est fixée par le modèle bicyclette.

# Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans l'optique de construire une loi de commande du véhicule robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

Pour y parvenir, nous nous sommes fixé plusieurs objectifs :

- Premier objectif : modélisation

Le but est d'utiliser les outils bond graph pour représenter les incertitudes, et ainsi déduire systématiquement les modèles mathématiques nécessaires pour l'étude des systèmes incertains.

- Deuxième objectif : analyse et commande

Le but est d'exploiter les différents modèles (le modèle bond graph incertain et les modèles mathématiques dérivés) pour l'analyse de leurs propriétés et la conception de lois de commande.

- Troisième objectif : applications à des modèles PSA de dynamique véhicule

Le but est d'appliquer la méthode à différents modèles de dynamique véhicule en s'attachant à réaliser une commande robuste notamment aux variations de masse, et à la variation de la position du centre de gravité.

Nous avons construit deux modèles de dynamique véhicule. Le modèle bicycle nous a servi dans un premier temps à comprendre la technologie d'un véhicule. Une validation de ce modèle permet d'affirmer qu'il représente correctement le comportement routier à basse vitesse (50km/h). Une étude de la sensibilité par rapport à la variation de la masse et de la position du centre de gravité, conduit à chiffrer les déviations des grandeurs caractéristiques de ce modèle dans le cas d'ajout de masse. Nous avons vu que ce modèle est extrêmement important dans la construction d'une boucle de régulation, car on peut l'utiliser pour fixer une trajectoire de référence.

Nous avons aussi construit un modèle plus complexe, prenant en compte 14 degrés de liberté, représentant de façon plus fiable le comportement d'un véhicule, mais aussi beaucoup plus gourmand en terme de coût de calcul. L'étude de l'influence des incertitudes sur la dynamique véhicule a permis de déterminer l'influence de la variation de la masse, de la position du

centre de gravité, de la vitesse longitudinale, et de l'adhérence du revêtement routier sur le comportement dynamique d'un véhicule.

Afin d'étudier l'influence des incertitudes paramétriques sur la dynamique véhicule, nous avons construit le modèle bond graph incertain du modèle BGCar14, afin de réaliser des simulations dans différents cas de charge. Les paramètres incertains et surtout la masse, interviennent dans les conditions initiales du modèle, notamment dans les ressorts de suspension. Nous avons mis au point une méthode de détermination des conditions stationnaires d'un modèle mécanique soumis aux seuls effets de la pesanteur, par une approche bond graph, car comme nous le montrons, le calcul des conditions stationnaires n'est pas toujours possible par une approche algébrique seule, sans l'utilisation de l'outil bond graph.

Une méthode de détermination symbolique de la sensibilité des grandeurs caractéristiques de la fonction de transfert d'un modèle a été développée. Elle a permis de calculer les déviations de ces grandeurs caractéristiques, dans le cas d'ajout de masse, et de variation de la vitesse longitudinale du modèle bicycle. Une généralisation de la fonction de sensibilité a été entreprise, elle permet désormais de traiter le cas de modèles à composants dépendants de paramètres incertains.

L'analyse de la robustesse d'une loi de commande a été traitée par de nombreux auteurs, ces méthodes d'analyse demandent toutes une écriture mathématique particulière. De précédents travaux de recherche ont permis de développer une méthode systématique basée sur l'outil bond graph, permettant de construire la forme LFT, nécessaire à l'utilisation de la  $\mu$ -analyse. Nous avons généralisé cette méthode, permettant de traiter les modèles à composants dépendants de paramètres incertains.

L'objectif de ces travaux de recherches s'est porté sur l'étude des incertitudes paramétriques, que ce soit pour la modélisation, la sensibilité, ou l'analyse. Une poursuite de ces travaux envisagée concerne l'étude des incertitudes liées aux dynamiques négligées. Ceci peut se faire au niveau de la fonction de transfert, en proposant une méthode permettant de séparer les dynamiques négligées de la partie nominale de la fonction de transfert du modèle. A partir de la représentation d'état la méthode des perturbations singulières peut être employée pour découpler les différentes dynamiques du modèle global. Afin d'effectuer une étude de la robustesse face aux incertitudes liées aux dynamiques négligées, en utilisant l'outil  $\mu$ -analyse, il serait intéressant de disposer d'une méthode de construction du schéma d'interconnection standard  $M(s)-\Delta$ .

Pour effectuer une commande robuste d'un système non linéaire, il faut effectuer une première étape qui est la linéarisation de celui-ci. Cette étape entraîne des incertitudes liées à la linéarisation, il serait intéressant de chiffrer ces erreurs en effectuant une comparaison du modèle bond graph non linéaire, et du modèle bond graph linéarisé.

# ANNEXES



## Annexe A :

# Repères de travail, angles SAE

Comme dans tout travail de mécanique, *le choix du repère de travail est un élément déterminant en étude dynamique de véhicule*. Les principaux repères utilisés traditionnellement dans le milieu de l'automobile sont : le repère sol, le repère route, le repère lié au pneumatique, le repère aérodynamique, le repère quadrillage et le repère lié au châssis. Ces différents repères sont présentés dans ce chapitre.

### A-1 Le repère sol

Le repère sol,  $\mathfrak{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ , est défini de façon traditionnelle : il est supposé galiléen et c'est un repère orthonormé direct.

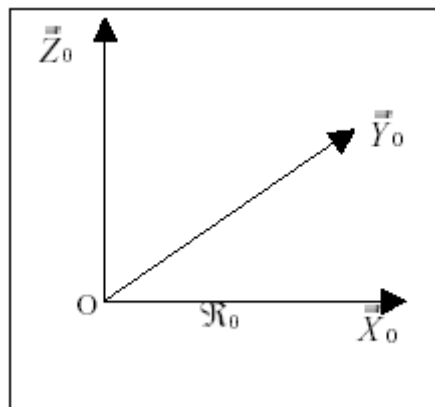


figure A- 1 : Définition du repère sol



## A-2 Le repère route

Le repère route,  $\mathfrak{R}_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r, \bar{z}_r)$ , a pour origine la **projection R du centre de gravité du véhicule** sur  $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ . C'est un repère orthonormé direct. Il s'agit d'un repère intermédiaire de calcul. Son positionnement par rapport au repère sol est le suivant :

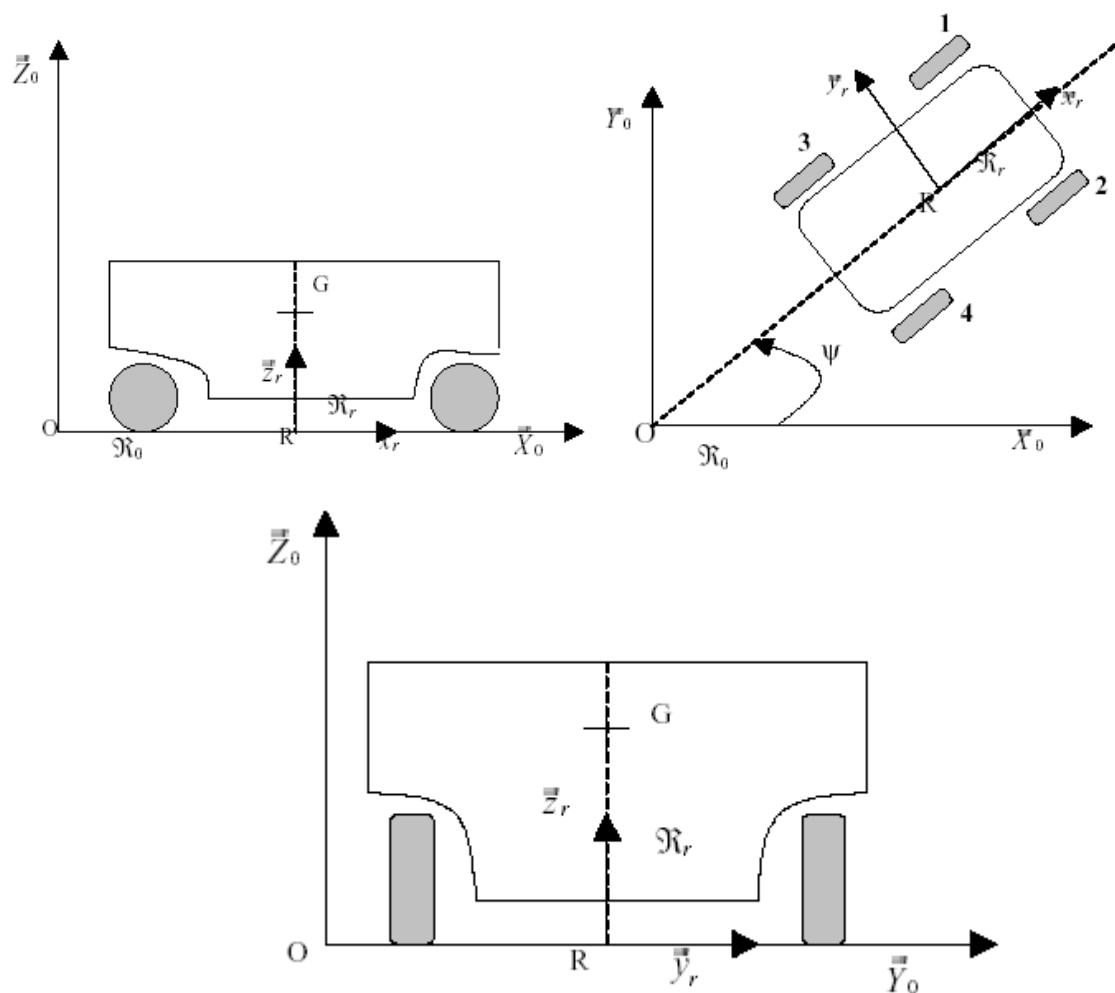


figure A- 2 : Positionnement du repère route

## A-3 Le repère lié au pneumatique

Le repère lié au pneumatique,  $\mathfrak{R}_p(\bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{z}_p)$  a pour origine **le point de contact sol-roue**  $p$  ; c'est un repère orthonormé direct, le vecteur  $\bar{x}_p$  est dans le plan de route, le vecteur  $\bar{y}_p$  est normal au plan de roue. Il est utilisé pour déterminer les efforts dans les pneumatiques en utilisant la formule de Pacejka. Son positionnement par rapport au repère sol est le suivant :

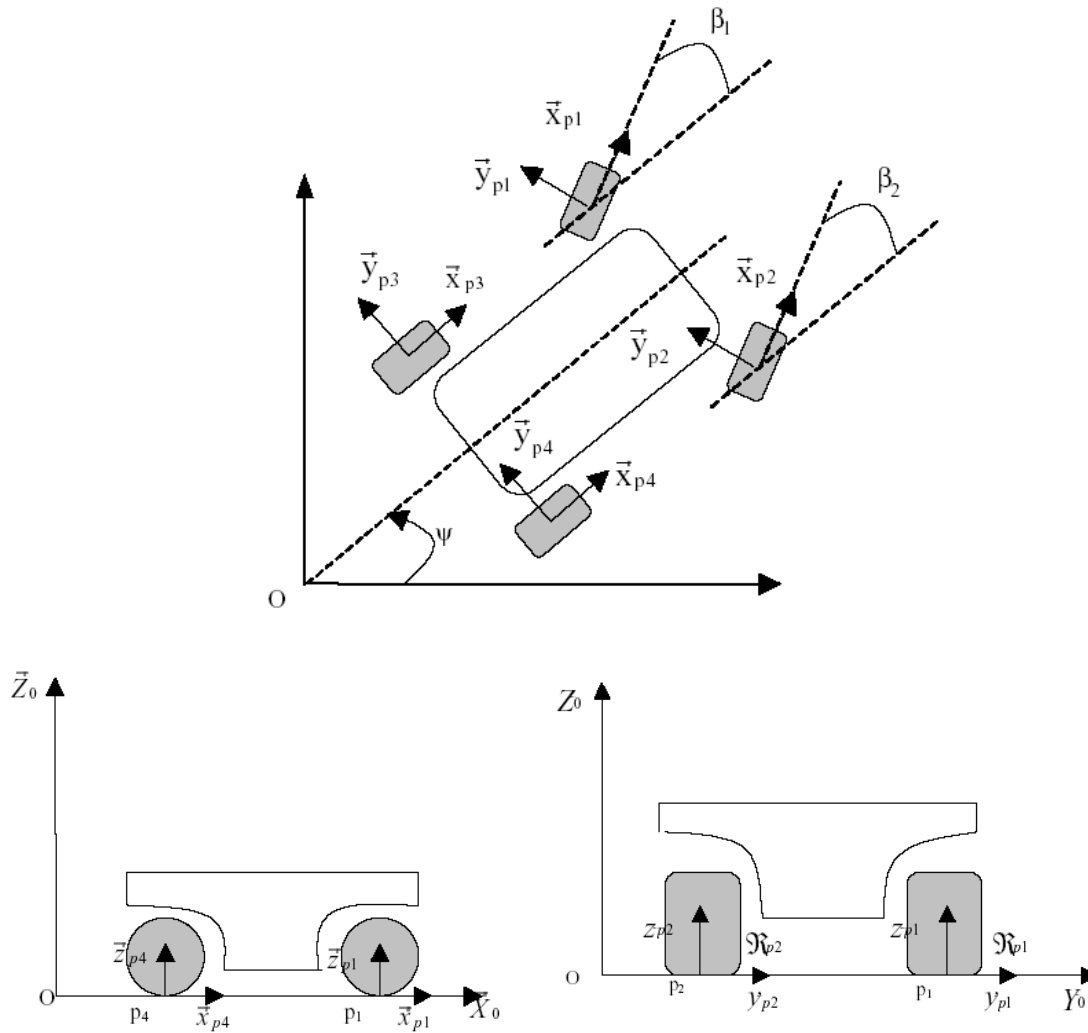


figure A- 3 : Positionnement du repère lié au pneumatique

## A-4 Le repère quadrillage

Le repère quadrillage,  $\mathfrak{R}_Q(\bar{x}_Q, \bar{y}_Q, \bar{z}_Q)$ , est un repère architectural. Il a pour origine le point C, qui se situe au milieu de la voie, généralement au centre de l'essieu avant. C'est par rapport à lui que sont définies toutes les côtes du véhicule, notamment la position du centre de gravité, les positions des roues... C'est un repère orthonormé direct et sa représentation est la suivante :

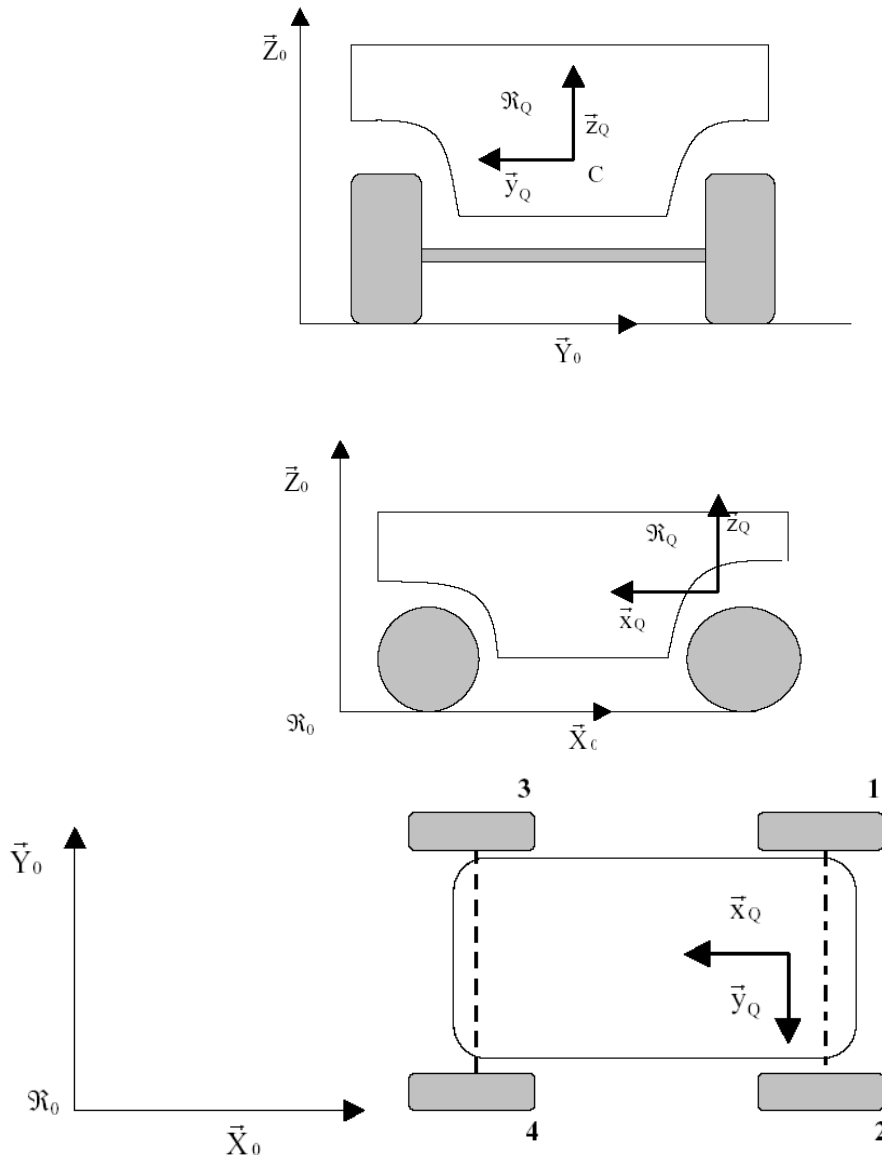


figure A- 4 : Positionnement du repère quadrillage

## A-5 Le repère aérodynamique

Le repère aérodynamique,  $\mathfrak{R}_a(\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a)$ , est le repère utilisé en soufflerie pour la détermination des différents coefficients de pénétration dans l'air. Il se trouve sur le **sol**, et il a pour origine **le milieu de la voie et de l'empattement du véhicule**. Traditionnellement, le torseur des actions aérodynamiques est exprimé dans cette base. Son positionnement par rapport au repère lié au châssis est le suivant :

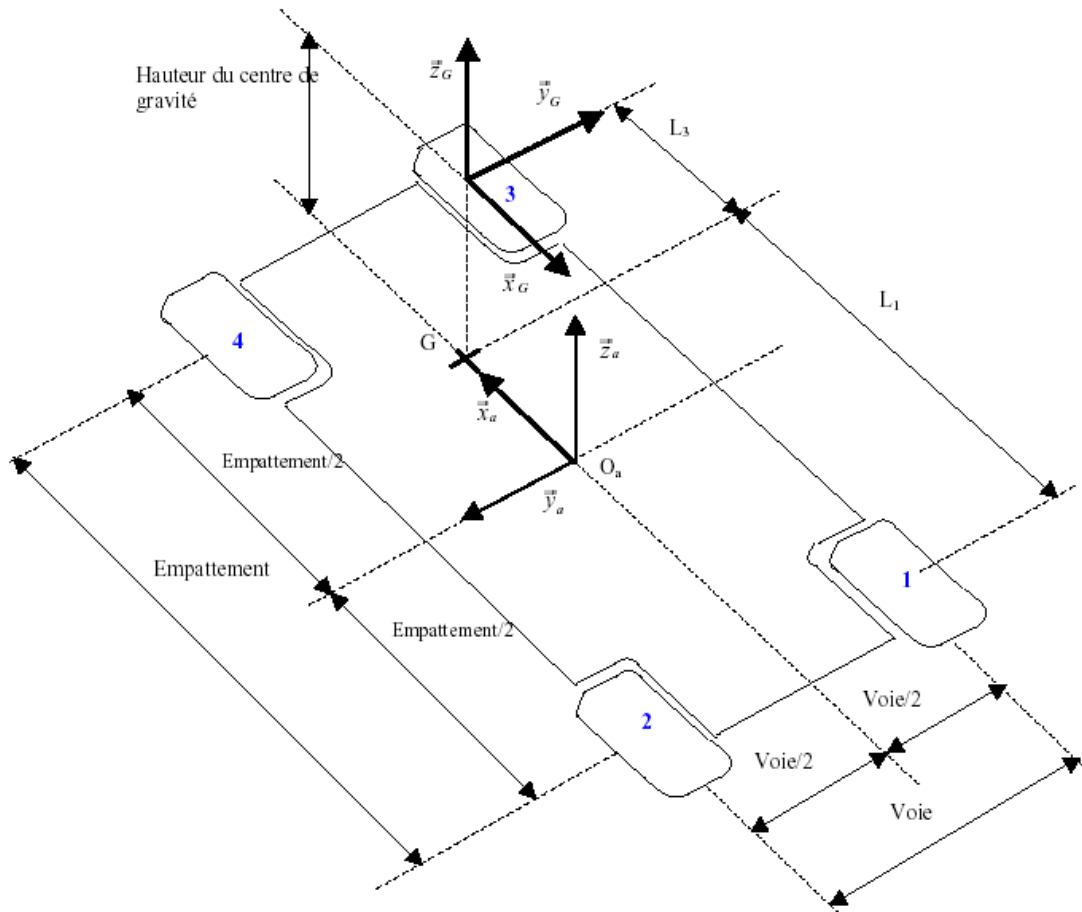


figure A- 5 : Positionnement du repère aérodynamique

## A-6 Le repère lié au châssis

Dans notre cas, pour déterminer les équations générales du mouvement, nous allons utiliser le **repère lié au châssis** du véhicule,  $\mathfrak{R}_G(\bar{x}_G, \bar{y}_G, \bar{z}_G)$ , qui a pour origine le centre de **gravité G**. Il s'agit du repère le plus approprié, pour notre étude, car il va permettre d'obtenir des expressions **plus simples** qu'en utilisant le repère sol comme repère de travail. Les schémas ci-dessous donnent son positionnement dans l'espace.

Les angles  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sont respectivement l'angle de **roulis**, **tangage** et **lacet** du véhicule. Ces angles sont couramment appelés : « Les angles SAE de l'automobile ». Ainsi, on passe du repère sol au repère châssis en effectuant les rotations successives suivantes :  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ .

Dans tout notre travail, les équations du mouvement sont exprimées dans le repère lié au châssis et les angles utilisés pour caractériser les mouvements angulaires du châssis du véhicule sont les angles SAE de l'automobile.

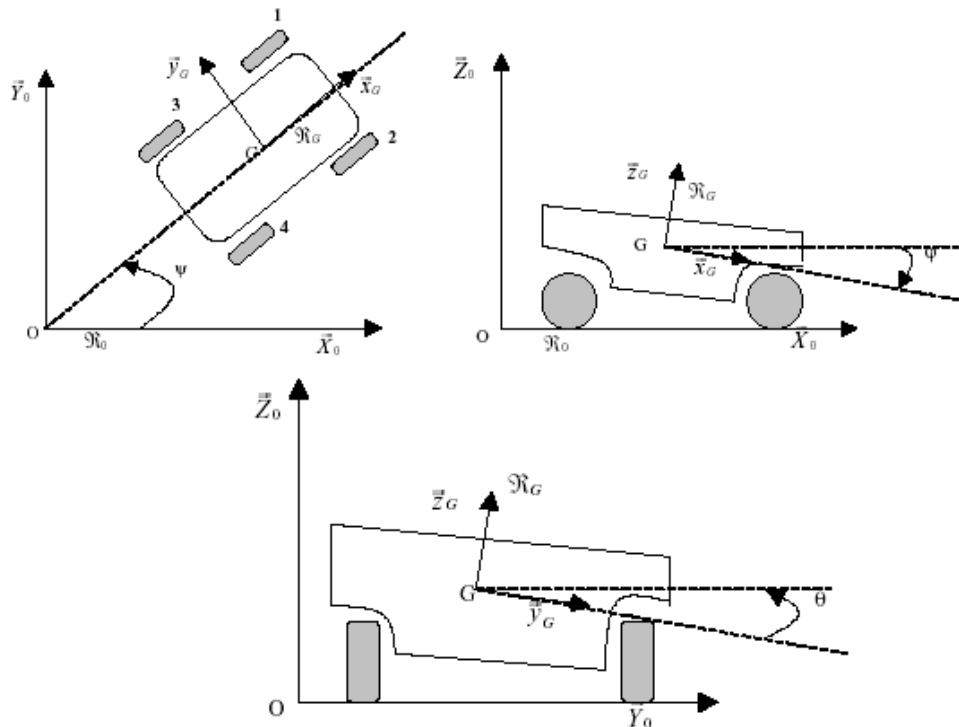


figure A- 6 : Définition du repère lié au châssis

## Annexe B :

# Passage entre les différents repères

Dans cette annexe nous détaillons le calcul des matrices de passage entre les repères les plus utilisés dans notre étude.

### B-1 Matrice de passage Sol-Châssis

Pour obtenir cette matrice, appliquons les trois rotations successives  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Cette matrice permet de transporter les efforts exprimés dans le repère sol dans le repère lié au châssis.

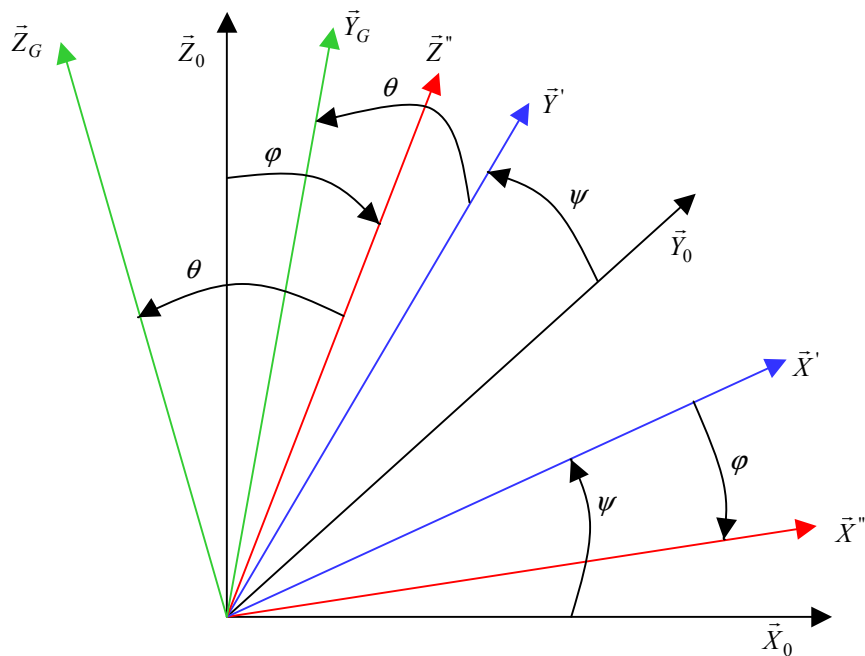


figure A- 7 : Rotations  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$

La rotation de  $\psi$  autour de  $\bar{Z}_0$  donne  $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{Y}_0 \\ \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

La rotation de  $\varphi$  autour de  $\bar{Y}'$  donne  $(\bar{X}'', \bar{Y}'', \bar{Z}'')$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{X}'' \\ \bar{Y}'' \\ \bar{Z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{Y}_0 \\ \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{pmatrix} \bar{X}'' \\ \bar{Y}'' \\ \bar{Z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).\cos(\psi) & \cos(\varphi).\sin(\psi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\varphi).\cos(\psi) & \sin(\varphi).\sin(\psi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{Y}_0 \\ \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

La rotation de  $\theta$  autour de  $\bar{X}''$  donne  $(\bar{X}_G, \bar{Y}_G, \bar{Z}_G)$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_G \\ \bar{Y}_G \\ \bar{Z}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}'' \\ \bar{Y}'' \\ \bar{Z}'' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{Y}_0 \\ \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_G \\ \bar{Y}_G \\ \bar{Z}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).\cos(\psi) & \cos(\varphi).\sin(\psi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta).\sin(\varphi).\cos(\psi) - \cos(\theta).\sin(\psi) & \sin(\theta).\sin(\varphi).\sin(\psi) + \cos(\theta).\cos(\psi) & \sin(\theta).\cos(\varphi) \\ \cos(\theta).\sin(\varphi).\cos(\psi) + \sin(\theta).\sin(\psi) & \cos(\theta).\sin(\varphi).\sin(\psi) - \sin(\theta).\cos(\psi) & \cos(\theta).\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{Y}_0 \\ \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

*Par définition, on appelle matrice de passage, la matrice  $P$  telle que  $X=P.X'$ , dans notre cas il nous faut prendre la matrice transposée de celle ci-dessus.*

$$R_{\text{Sol/Châssis}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).\cos(\psi) & \sin(\theta).\sin(\varphi).\cos(\psi) - \cos(\theta).\sin(\psi) & \cos(\theta).\sin(\varphi).\cos(\psi) + \sin(\theta).\sin(\psi) \\ \cos(\varphi).\sin(\psi) & \sin(\theta).\sin(\varphi).\sin(\psi) + \cos(\theta).\cos(\psi) & \cos(\theta).\sin(\varphi).\sin(\psi) - \sin(\theta).\cos(\psi) \\ -\sin(\varphi) & \sin(\theta).\cos(\varphi) & \cos(\theta).\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

## B-2 Matrice de passage Châssis-Sol

Rappels mathématiques :

Comme nous sommes dans le groupe  $O_3(\mathfrak{R})$ , l'inverse de la matrice de passage est égal à sa transposée.

$$(R_{\text{Sol/Châssis}})^{-1} = (R_{\text{Sol/Châssis}})^T = R_{\text{Châssis/Sol}} \quad (\text{A-7})$$

Finalement, en transposant la matrice ci-dessus, nous obtenons la matrice de passage  $R_{\text{Châssis/Sol}}$  qui a l'expression suivante

$$R_{\text{Châssis/Sol}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) & \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\theta) \cdot \sin(\psi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\theta) \cdot \sin(\psi) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) & \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \cos(\theta) \cdot \cos(\psi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \sin(\theta) \cdot \cos(\psi) \\ -\sin(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

## B-3 Matrice de passage Pneumatique-Châssis

Pour obtenir la matrice de Passage Pneumatique-Châssis, il faut calculer la matrice de passage entre le repère sol et le repère lié au pneumatique, ensuite, connaissant la matrice de passage Sol-Châssis, il est facile de déterminer la matrice Pneumatique-Châssis.

## B-4 Matrice de passage Pneumatique-Sol

Pour obtenir cette matrice de passage appliquons deux rotations successives  $\psi$  et  $\beta$ .

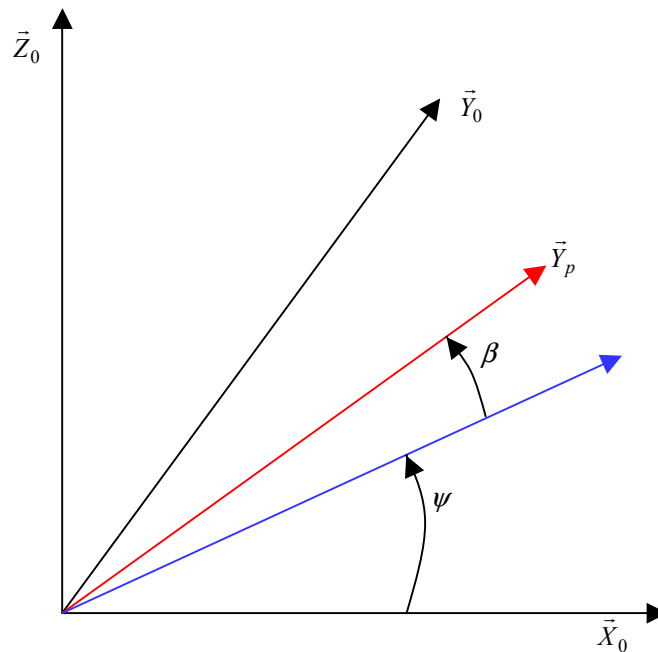


figure A- 8 : Rotation  $\psi, \beta$

On obtient le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} \vec{X}_p \\ \vec{Y}_p \\ \vec{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-9})$$

Pour obtenir la matrice de passage, il faut inverser le produit de matrice ci-dessus.



### Rappels mathématiques :

La transposée du produit matriciel de A par B est égal au produit de la matrice transposée de B par la matrice transposée de A.

$$(A.B)^T = B^T . A^T \quad (\text{A-10})$$

Le résultat est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_p \\ \vec{Y}_p \\ \vec{Z}_p \end{pmatrix} \quad (\text{A-11})$$

## B-5 Matrice de passage Pneumatique-Châssis

Pour obtenir cette matrice de passage il faut composer le passage du repère pneumatique au repère sol avec le passage du repère lié au châssis.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{X}_G \\ \vec{Y}_G \\ \vec{Z}_G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_p \\ \vec{Y}_p \\ \vec{Z}_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_p \\ \vec{Y}_p \\ \vec{Z}_p \end{pmatrix} \quad (\text{A-12}) \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient le résultat suivant :

$$R_{\text{Pneumatique/Châssis}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).\cos(\beta) & -\cos(\varphi).\sin(\beta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta).\sin(\varphi).\cos(\beta) + \cos(\theta).\sin(\beta) & -\sin(\theta).\sin(\varphi).\sin(\beta) + \cos(\theta).\cos(\beta) & \sin(\theta).\cos(\varphi) \\ \cos(\theta).\sin(\varphi).\cos(\beta) - \sin(\theta).\sin(\beta) & -\cos(\theta).\sin(\varphi).\sin(\beta) - \sin(\theta).\cos(\beta) & \cos(\theta).\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A-13})$$

## B-6 Matrice de passage Châssis-Pneumatique

Le résultat obtenu est le suivant :

$$R_{\text{Châssis/Pneumatique}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).\cos(\beta) & \sin(\theta).\sin(\varphi).\cos(\beta) + \cos(\theta).\sin(\beta) & \cos(\theta).\sin(\varphi).\cos(\beta) - \sin(\theta).\sin(\beta) \\ -\cos(\varphi).\sin(\beta) & -\sin(\theta).\sin(\varphi).\sin(\beta) + \cos(\theta).\cos(\beta) & -\cos(\theta).\sin(\varphi).\sin(\beta) - \sin(\theta).\cos(\beta) \\ -\sin(\varphi) & \sin(\theta).\cos(\varphi) & \cos(\theta).\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A-14})$$

## Annexe C :

# Les bond graphs, principes, concepts et langage

Ce chapitre est tiré de [Dauphin-Tanguy, 2000], il a pour but de rappeler les principes et concepts de base de la représentation des systèmes physiques dynamiques par bond graph.

Le modèle bond graph se situe comme intermédiaire entre le système physique et les modèles mathématiques qui lui sont associés. La construction de ces modèles s'appuie sur la notion de causalité. La terminologie, les symboles, les règles de causalité et la construction des modèles mathématiques sont les mêmes pour tous les domaines physiques.

Les principales caractéristiques du langage bond graph sont :

- c'est un langage de représentation des transferts de puissance au sein d'un système,
- il est graphique,
- il est fondé sur la notion d'analogie,
- il suppose les paramètres localisés dans le système,
- il fait apparaître explicitement les relations de cause à effet (causalité),
- il permet de construire de manière systématique les modèles mathématiques « classiques ».

### C-1 Les transferts de puissance

Dans un système global composé de deux sous-systèmes A et B, il y a conservation de l'énergie et continuité de puissance. Le transfert de puissance (ou flux d'énergie) entre deux sous-systèmes est représenté par une demi-flèche qui correspond au « bond » du bond graph. La puissance instantanée échangée se calcule par le produit d'une variable de flux  $f$  et d'une variable d'effort  $e$ . Le sens de la demi-flèche est celui correspondant au sens positif de la puissance et de la variable de flux.

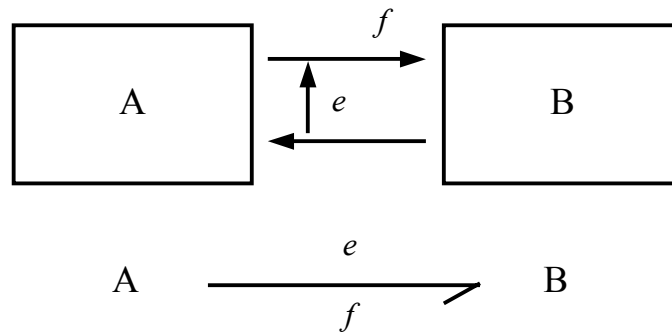


figure A- 9 : Représentation des transferts de puissance

## C-2 Variables mises en jeu

Outre les variables généralisées de flux et d'efforts, respectivement  $f$  et  $e$ , dont le produit caractérise la puissance échangée, indépendamment du domaine considéré, deux variables d'énergie sont définies :

$$p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + p(0) \quad (A-15)$$

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0)$$

$p(t)$  et  $q(t)$  sont appelées respectivement moment généralisé et déplacement généralisé. Le tableau suivant indique la signification de ces variables généralisées pour les principaux domaines de la physique.

	variable de puissance		variable d'énergie	
	effort $e$	flux $f$	moment $p$	déplacement $q$
mécanique (translation)	force, $F$	vitesse, $v$	impulsion, $p$	élongation, $x$
mécanique (rotation)	couple, $\tau$	vitesse angulaire, $\omega$	impulsion angulaire, $\eta$	angle, $\theta$
électrique	tension, $u$	courant, $i$	flux magnétique, $\phi$	charge, $q$
hydraulique	pression, $P$	débit volumique, $Q$	impulsion pression	volume, $V$
thermique	température, $T$	flux d'entropie		entropie

tableau A- 1 : Variables généralisées pour différents domaines physiques

### C-3 Éléments du langage bond graph

Les éléments bond graphs se classifient en éléments passifs (au nombre de trois), éléments actifs (au nombre de deux) et éléments de jonction (au nombre de quatre). Ces neuf éléments constituent le langage bond graph.

Les éléments R, C, I sont dits éléments passifs car ils transforment la puissance qui leur est fournie en énergie dissipée sous forme de chaleur (élément R) ou stockée (éléments I et C). La puissance est fournie aux éléments, ce qui impose d'orienter le sens de la demi-flèche du lien vers l'élément.

L'élément R est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable d'effort à la variable de flux dans le domaine physique considéré. A titre d'exemples, citons les résistances électriques, les éléments de commutation en électronique, les amortisseurs, et tout phénomène de frottement mécanique.

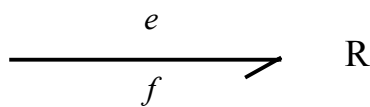


figure A- 10 : Élément R

L'élément C est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable d'effort à la variable de déplacement dans le domaine physique considéré. A titre d'exemples, citons les condensateurs, les ressorts, les réservoirs hydrauliques.

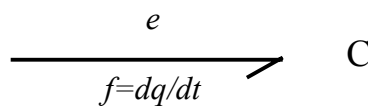


figure A- 11 : Élément C

L'élément I est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable de flux à la variable de moment dans le domaine physique considéré. A titre d'exemples, citons les bobines, les masses, et tout phénomène inertiel en mécanique.

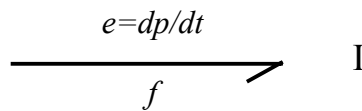


figure A- 12 : Élément I

Les sources Se et Sf sont dites éléments actifs car elles contribuent à fournir de la puissance au système. Ainsi un générateur de tension (supposé idéal), modélisé par Se :  $E$ , applique une tension  $E$  aux bornes du circuit électrique auquel il est connecté, ce qui entraîne la circulation d'un courant  $i$  ; le produit  $E i$  est la puissance instantanée fournie par la source de tension au circuit. L'orientation de la demi-flèche est fixée, et représentée sortant de la source.



figure A- 13 : Sources

La variable d'effort (pour Se) ou flux (pour Sf) fournie par la source est supposée indépendante de la variable complémentaire flux (pour Se) ou effort (pour Sf) qui dépend des caractéristiques du système et de la variable appliquée.

Les détecteurs  $De$  et  $Df$  sont des éléments placés dans le modèle bond graph pour indiquer la présence d'un capteur ou d'un instrument de mesure supposé idéal (qui ne consomme pas de puissance). Aucune puissance n'intervient, on utilisera donc un lien d'information, ou signal, représenté par une flèche entière classique.



figure A- 14 : Détecteurs

Les éléments de jonction, notés 0, 1, TF, GY, servent à coupler les éléments R, C, I et les sources, et composent la structure de jonction correspondant à l'architecture du modèle étudié. Ils sont conservatifs de puissance.

La jonction 0 sert à coupler des éléments soumis au même effort. Les relations qui la caractérisent sont :

égalité des efforts pour tous les liens ayant une extrémité sur la jonction,  
somme algébrique des puissances = 0

La jonction 1 sert à coupler des éléments parcourus par le même flux. Les relations qui la caractérisent sont :

égalité des flux pour tous les liens ayant une extrémité sur la jonction,  
somme algébrique des puissances = 0

Les relations constitutives des jonctions 0 et 1 correspondent à la généralisation à tout domaine physique des lois de Kirchoff en électricité (loi des nœuds, loi des mailles).

L'élément TF est un élément 2-port, conservatif de puissance ; les relations qui le caractérisent et permettent de définir  $m$  sont :

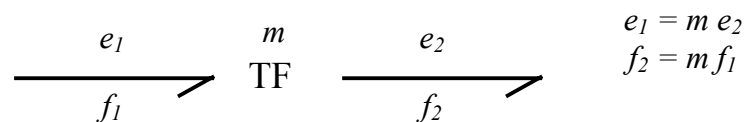


figure A- 15 : Élément TF

Cet élément TF intervient dans la modélisation des transformateurs électriques, des leviers, des systèmes d'engrenages, des systèmes de poulies...Il est aussi utilisé pour modéliser les changements de domaines physiques qui se font sans perte de puissance.

L'élément GY est aussi un élément 2-port, conservatif de puissance ; les relations qui le caractérisent et permettent de définir  $m$  sont :

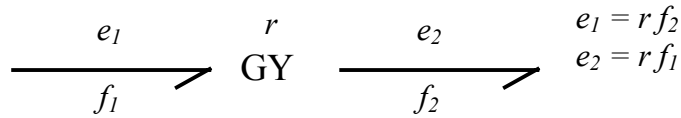


figure A- 16 : Elément GY

L'élément GY intervient dans la modélisation des gyroscope, des capteurs à effet Hall... Il est aussi utilisé pour modéliser les changements de domaines physiques qui se font sans perte de puissance.

### C-4 Causalité

Un modèle bond graph représente l'architecture du système et la façon dont la puissance s'échange entre les éléments. Il permet aussi de faire apparaître explicitement les relations de cause à effet et la structure de calcul des équations caractéristiques associées au modèle.

Par convention, lorsque deux sous-systèmes A et B sont couplés et échangent de la puissance, deux situations sont possibles :

A applique un effort  $e$  à B, qui réagit en envoyant à A un flux  $f = \Psi_B(e)$

A envoie un flux  $f$  à B, qui réagit par un effort  $e = \lambda_B(f)$ .

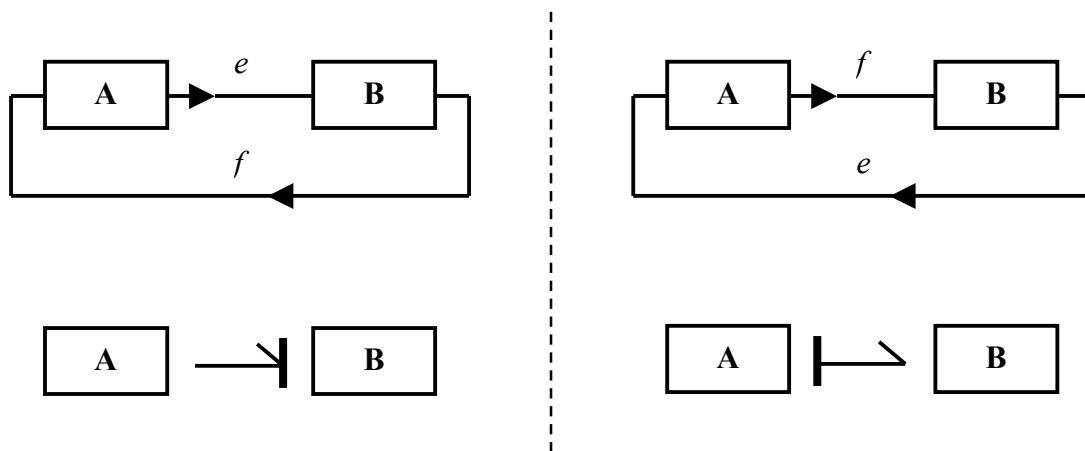


figure A- 17 : Equivalence entre causalité sur un bond graph et un schéma-bloc

Pour représenter ces relations de cause à effet sur un modèle bond graph, un « trait causal » est placé perpendiculairement à chaque lien, en suivant la convention suivante :

le trait causal est placé près (respectivement loin) de l'élément pour lequel l'effort (respectivement le flux) est une donnée ;

la position du trait causal est indépendante du sens de la demi-flèche.

L'affectation de la causalité n'est pas arbitraire, mais soumise à des règles décrites dans le tableau ci dessous, la procédure suivante en détaille les différentes étapes :

affecter la causalité obligatoire aux sources et aux élément R non-linéaires et répercuter sur l'environnement en respectant les restrictions de causalité aux jonctions ;

affecter une causalité intégrale préférentielle aux éléments I et C et répercuter sur l'environnement en respectant les restrictions de causalité aux jonctions ;

compléter la causalité sur les éléments R linéaires en respectant les restrictions de causalité aux jonctions ;

en cas de conflit à une jonction, rechercher l'élément I ou C cause de conflit et lui affecter une causalité dérivée. Boucler sur l'étape 3 ;

affecter une causalité aux détecteurs.

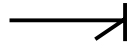
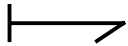
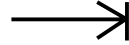
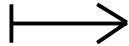
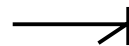
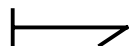
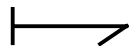
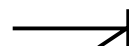

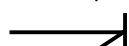


Causalité	Elément
obligatoire	Se  Sf 
à titre indicatif	 De  Df
intégrale	 I  C
dérivée	 I  C
arbitraire, si loi linéaire	 R  R
non arbitraire, si loi non linéaire	 R  R

tableau A- 2 : Règles d'affectation de la causalité sur les éléments actifs et passifs

Règle	Élément
1 seul lien AVEC trait causal près du 0	
1 seul lien SANS trait causal près du 1	
Affectation symétrique de la causalité	
Affectation anti-symétrique de la causalité	

tableau A- 3 : Règles d'affectation de la causalité sur les éléments de jonction

## C-5 Chemin causal, boucle causale

Le bond graphe est un graph dans lequel sont définis des boucles causales et des chemins causaux, parcourus en suivant la propagation de l'information effort ou flux, et quel que soit le sens des demi-flèches.

Un chemin causal dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens et d'éléments de base, appelés ici nœuds, telle que tous les nœuds ont une causalité complète et correcte, et deux liens du chemin causal ont en un même nœud des orientations causales opposées.

Un chemin causal est simple s'il est parcouru en suivant toujours la même variable.

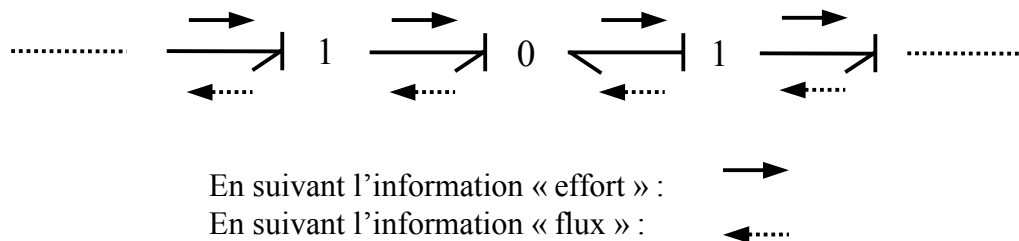


figure A- 18 : Chemin causaux simples

Un chemin causal est mixte s'il faut changer de variable lors du parcours. C'est le cas en présence d'un GY, où le chemin est appelé mixte direct, ou lorsqu'il faut traverser un élément R, C, I, ce qui correspond à un chemin mixte indirect.

Une chaîne d'action est un chemin causal entre une source et une sortie (qui peut être représentée par un détecteur).



Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de type R, C, ou I, sans lien parcouru en suivant la même variable plus d'une fois.

Une maille est un chemin causal fermé parcouru en partant d'un élément et en revenant à cet élément, en ayant suivi dans certains liens une seule variable.

Une boucle de causalité est une succession de jonctions et de liens formant un chemin causal fermé. Cette structure causale pose des problèmes lors de la construction des modèles mathématiques, particulièrement quand le gain de la boucle vaut 1.

Définition : dans un bond graph ne comportant que des éléments en causalité intégrale, la longueur d'un chemin causal allant d'un élément de l'ensemble {Se, Sf, R, C, I} vers un élément de l'ensemble {De, Df, R, C, I} est égale au nombre d'éléments I et C traversés (+1 si le point d'arrivée est un I ou un C).

Le gain (dans le cas linéaire) d'un chemin causal se définit comme la fonction liant la variable d'entrée de l'élément formant l'extrémité du chemin à la variable de sortie de l'élément correspondant à la sortie du chemin. Le gain d'un chemin causal se calcule par :

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e \quad (\text{A-16})$$

où :

$m_i$  et  $r_j$  sont les modules des éléments  $TF_i$  et  $GY_j$  du chemin causal ;  $k_i$  et  $l_j$  valent (+1) ou (-1) suivant la causalité de l'élément ;

$n_0$  et  $n_1$  représentent le nombre total de changements d'orientation des liens respectivement aux jonctions 0 quand on suit la variable flux et aux jonction 1 quand on suit la variable effort ;

$g_e$  sont les gains des éléments R, C ou I traversés

Élément	Causalité	Gain
C	<i>intégrale</i>	$I / Cs$
	<i>dérivée</i>	$Cs$
I	<i>intégrale</i>	$I / Is$
	<i>dérivée</i>	$Is$
R	« résistance »	$R$
	« conductance »	$I / R$

tableau A- 4 : Gains des éléments passifs 1-port

Le gain d'une boucle liant deux éléments de l'ensemble (R, C, I), s'exprime par la relation suivante, les modules des éléments TF et GY traversés apparaissent au carré car ils sont traversés deux fois (suivant l'effort et le flux).

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i^2)^{k_i} \prod_j (r_j^2)^{l_j} \prod_e g_e \quad (\text{A-17})$$

Deux boucles causales sont disjointes si elles n'ont aucun lien ni jonction en commun parcourus en suivant la même variable.

## Annexe D : Scénarios de simulation

### D-1 Comparaison SIMULINK/Car, BGCar14 et modèle bicyclette.

Afin d'effectuer une validation des modèles construits, un scénario de simulation est envisagé, il représente un dépassement, la consigne de la figure A- 19, est utilisée comme commande des trois modèles : SIMULINK/Car, BGCar14, bicyclette. Les modèles sont nominaux, à une vitesse longitudinale de 13.9m/s.

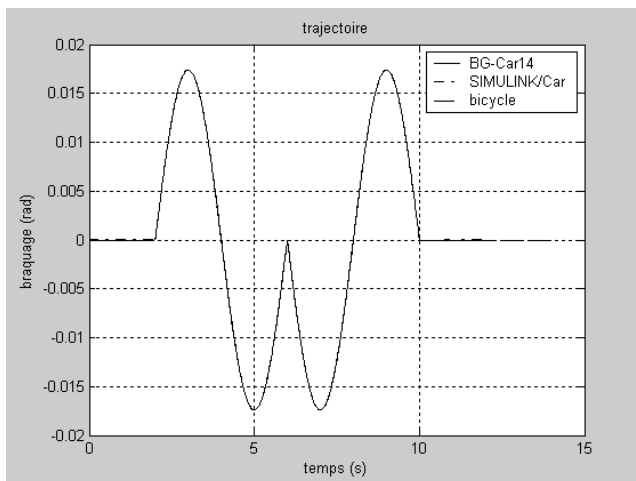


figure A- 19 : Angle de braquage des roues avant

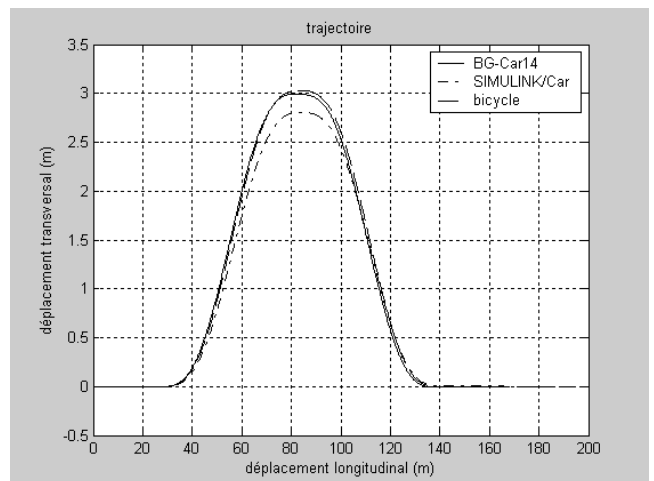


figure A- 20 : Trajectoire

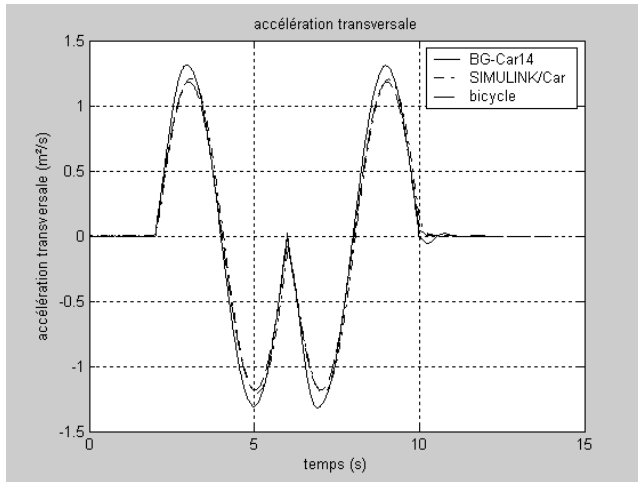


figure A- 21 : Accélération transversale

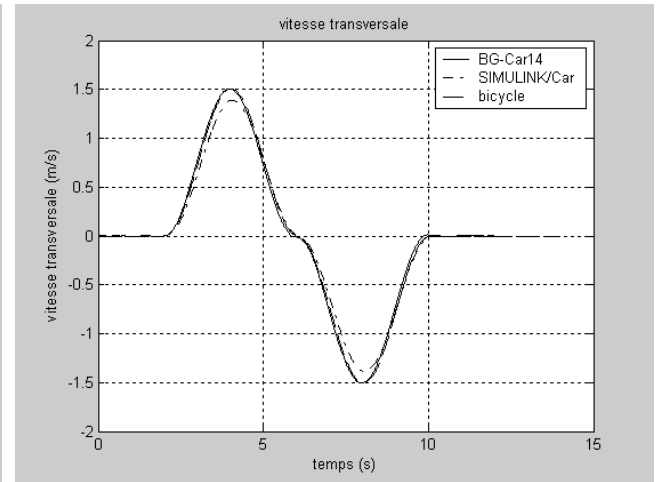


figure A- 22 : Vitesse transversale

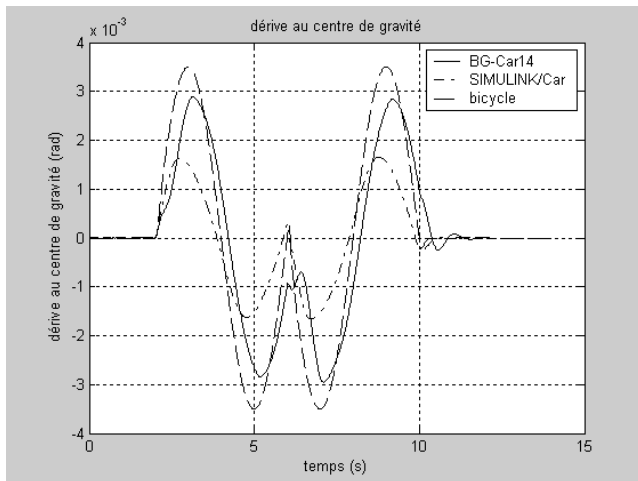


figure A- 23 : Dérive au centre de gravité

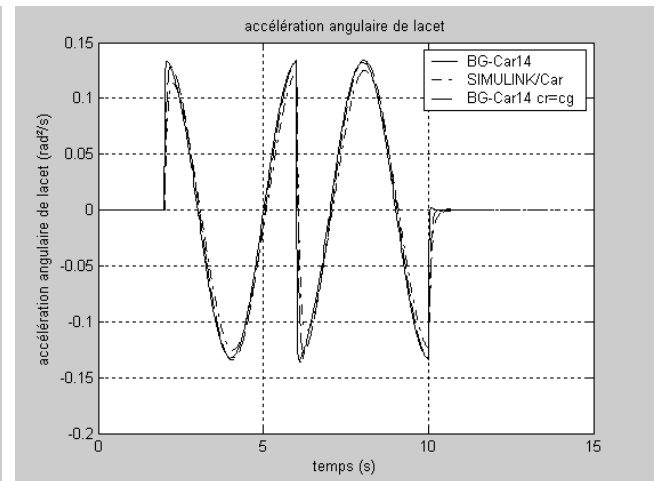


figure A- 24 : Accélération angulaire de lacet

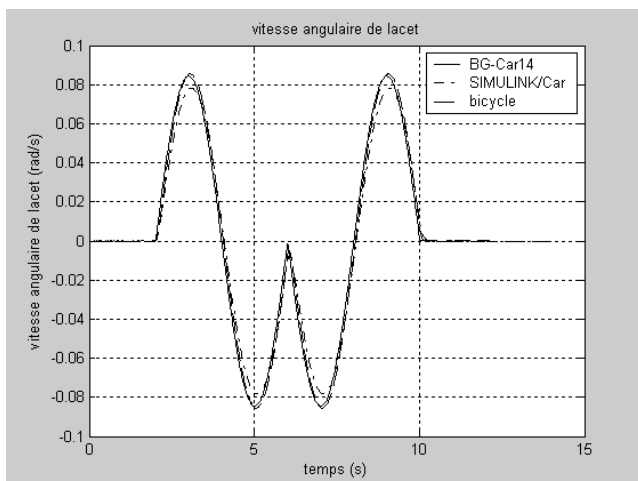


figure A- 25 : Vitesse angulaire de lacet

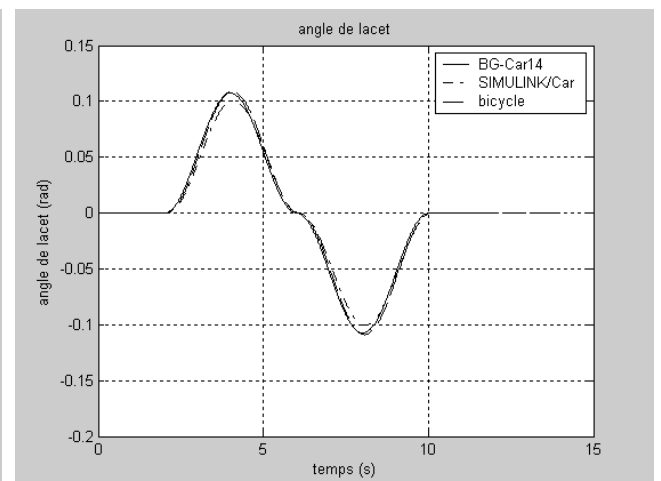


figure A- 26 : Angle de lacet

## D-2 Changement de voie

### D-2.1 Vitesse longitudinale nominale ( $V_x = 13.9$ m/s)

Les courbes suivantes représentent certaines grandeurs, obtenues pour une consigne permettant un changement de voie, qui n'apparaissent pas dans le corps de la thèse.

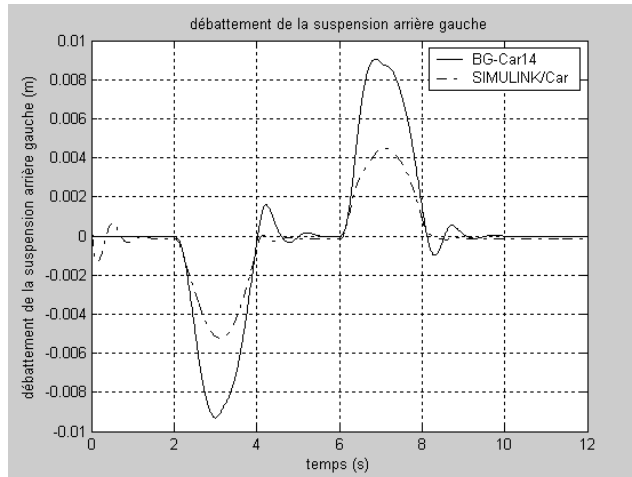


figure A- 27 : Débattement de la suspension arrière gauche

Nous voyons bien sur ces courbes, une similarité au niveau de fonctionnement des suspensions.

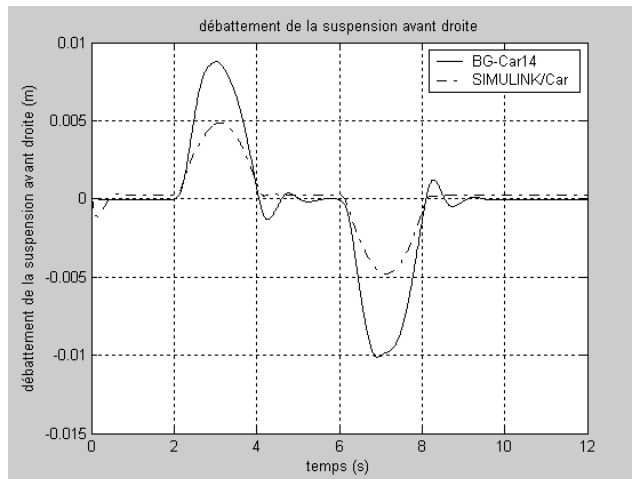


figure A- 28 : Débattement de la suspension avant droite

Le comportement des suspensions avant est le même qu'à l'arrière, sauf au niveau des amplitudes, car les raideurs ne sont pas les mêmes à l'avant et à l'arrière.

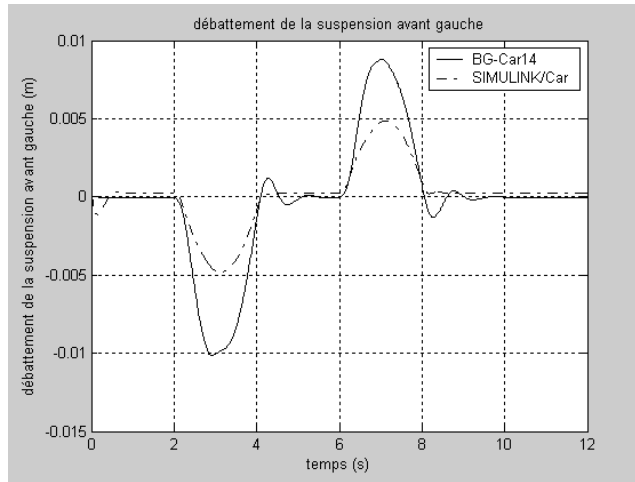


figure A- 29 : Débattement de la suspension avant gauche

On retrouve un comportement similaire à la suspension avant droite.

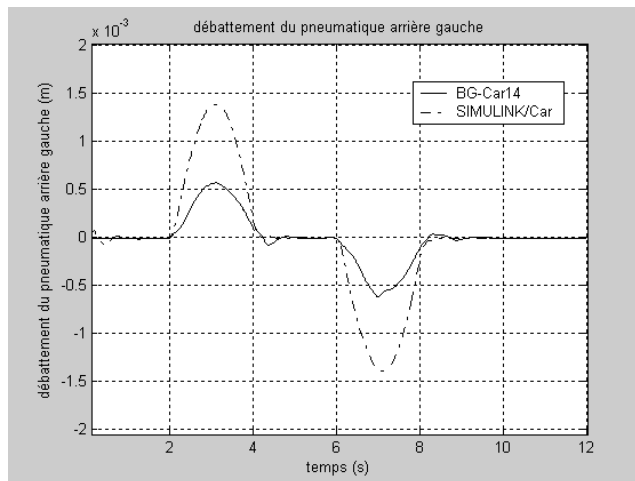


figure A- 30 : Débattement du pneumatique arrière gauche

Nous ne traçons pas les débattements des pneumatiques avant, car ils ont un comportement similaire aux pneus arrière.

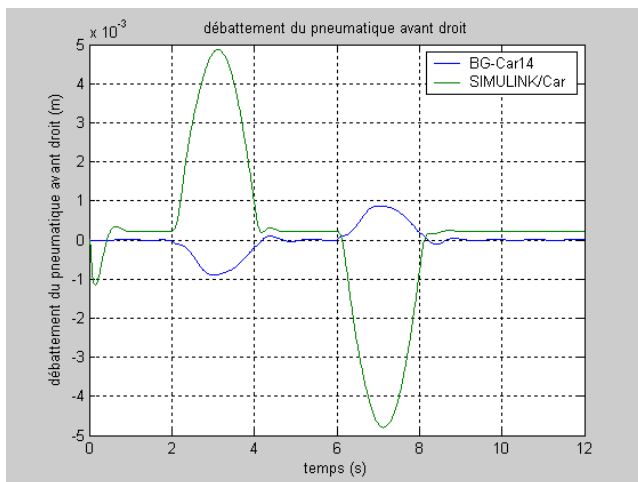


figure A- 31 : Débattement du pneumatique avant droit

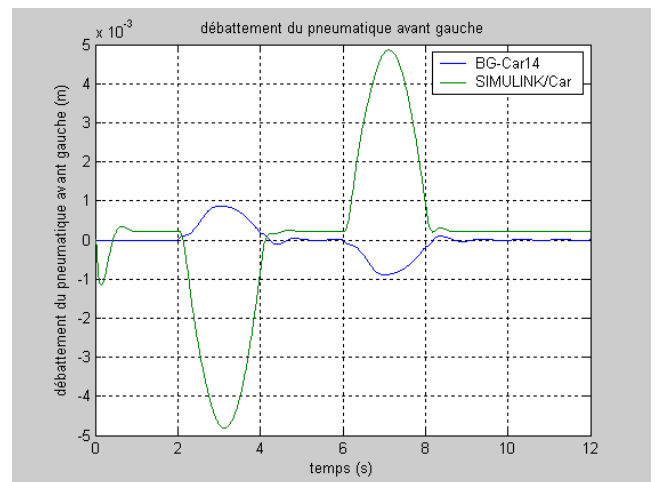


figure A- 32 : Débattement du pneumatique avant gauche

## D-2.2 Vitesse longitudinale $V_x = 23.9$ m/s

Afin d'effectuer la validation du modèle BGCAR14, un scénario de simulation est envisagé, il représente un changement de voie, la consigne de la figure A- 19, est utilisée comme commande pour les modèles SIMULINK/Car et BGCAR14. Les modèles sont nominaux, à une vitesse longitudinale de 23.9m/s.

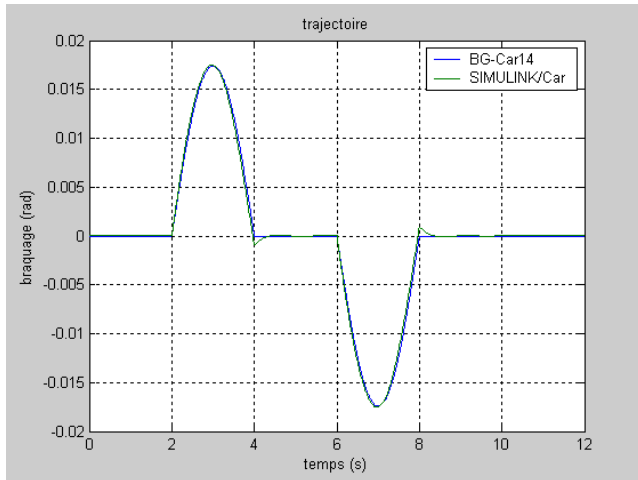


figure A- 33 : Angle de braquage des roues avant

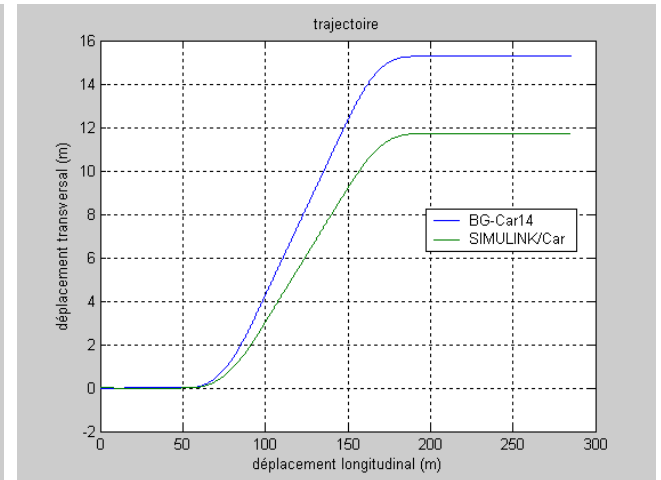


figure A- 34 : Trajectoire

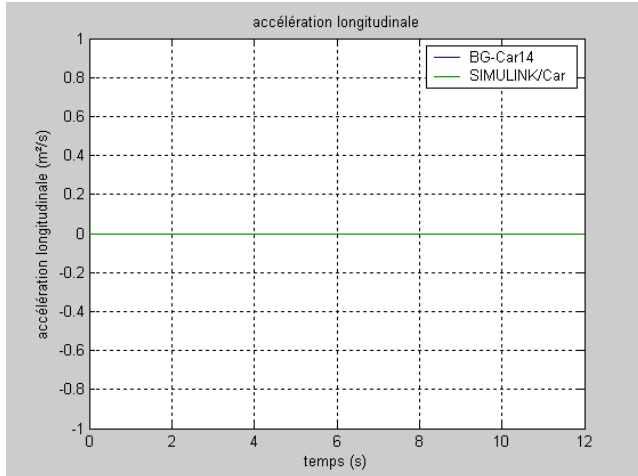


figure A- 35 : Accélération longitudinale

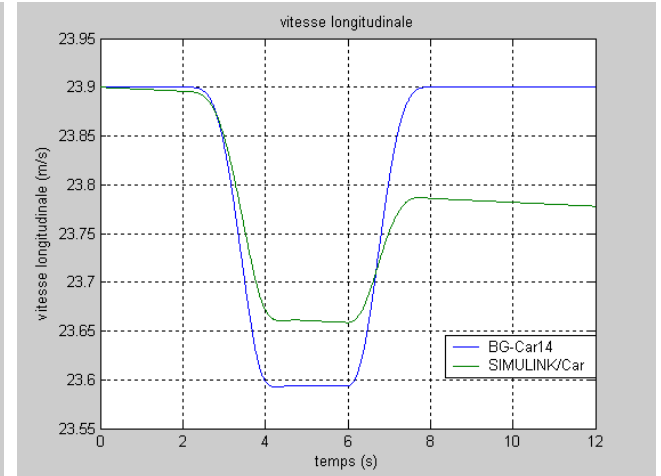


figure A- 36 : Vitesse longitudinale

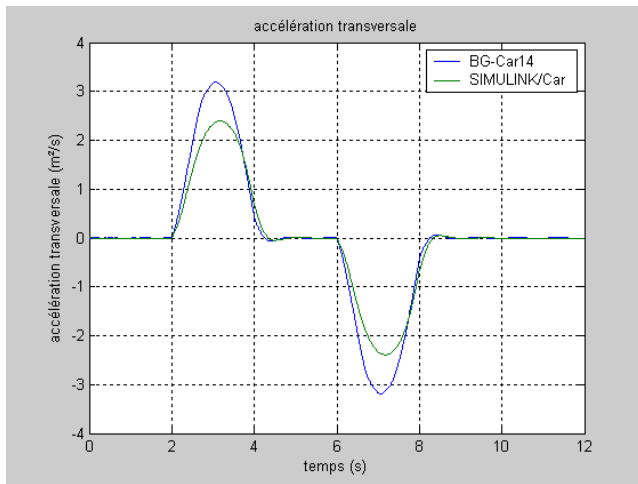


figure A- 37 : Accélération transversale

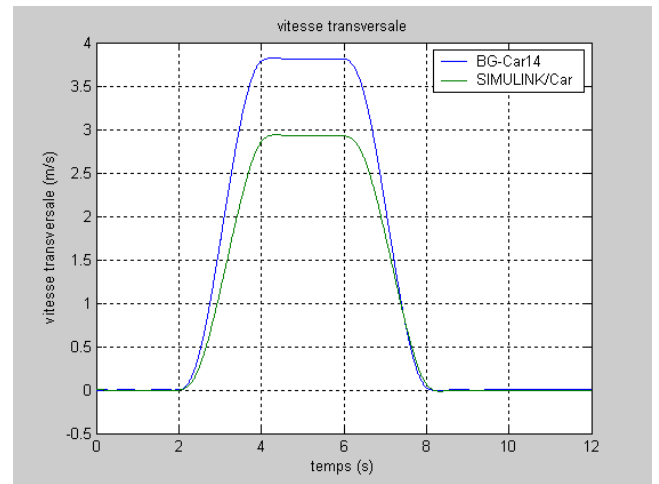


figure A- 38 : Vitesse transversale

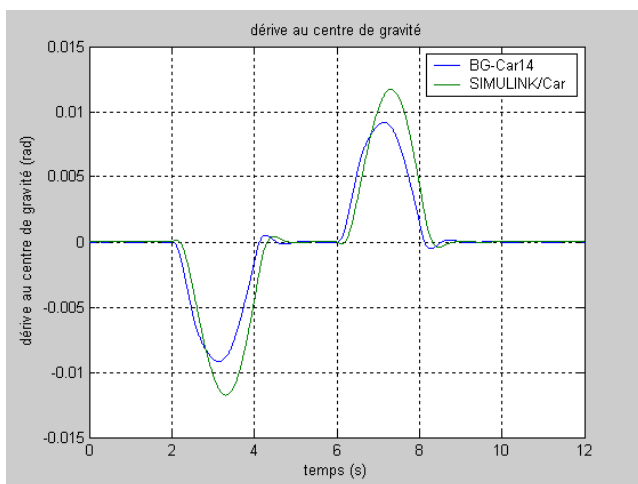


figure A- 39 : Dérive au centre de gravité

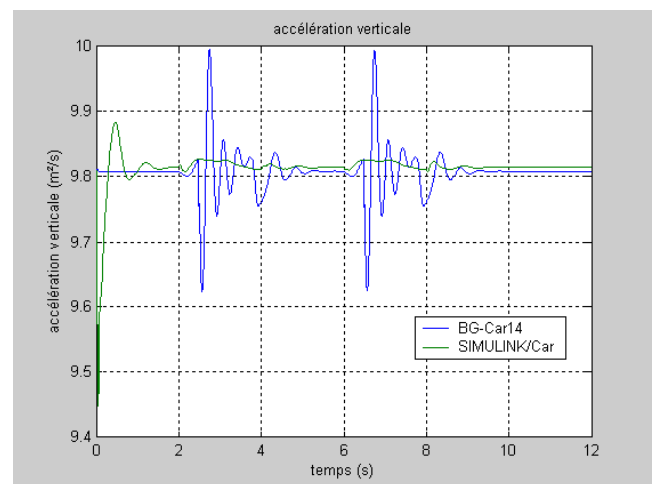


figure A- 40 : Accélération verticale

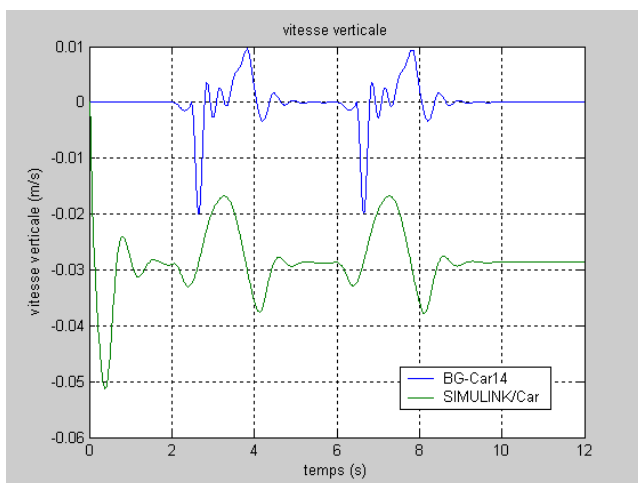


figure A- 41 : Vitesse verticale

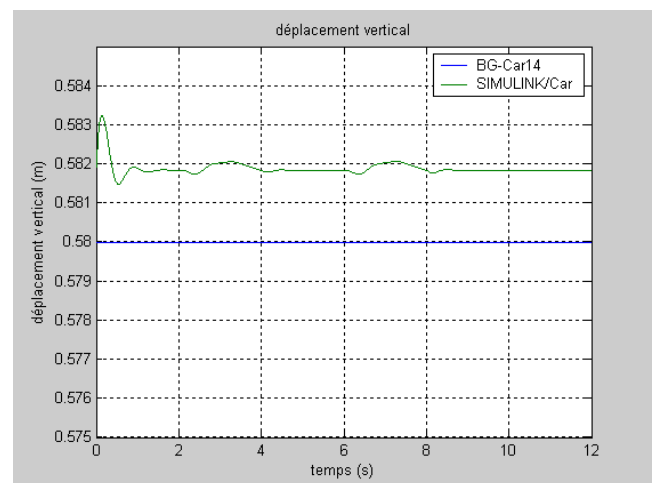


figure A- 42 : Déplacement vertical

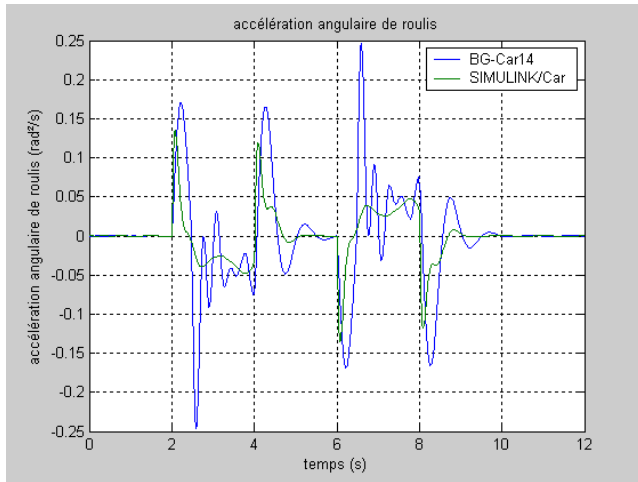


figure A- 43 : Accélération angulaire de roulis

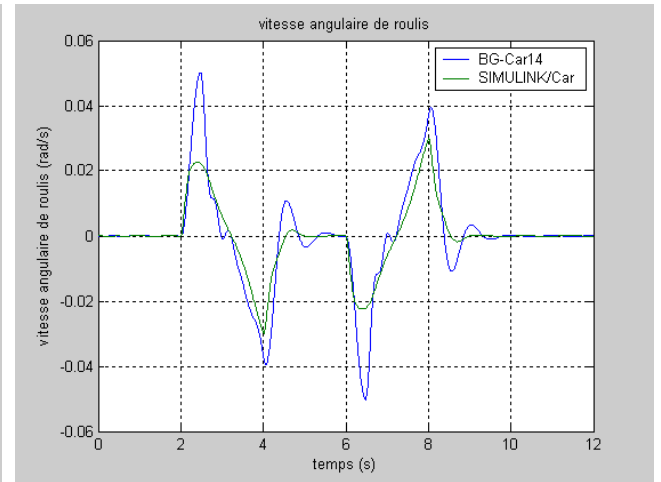


figure A- 44 : Vitesse angulaire de roulis

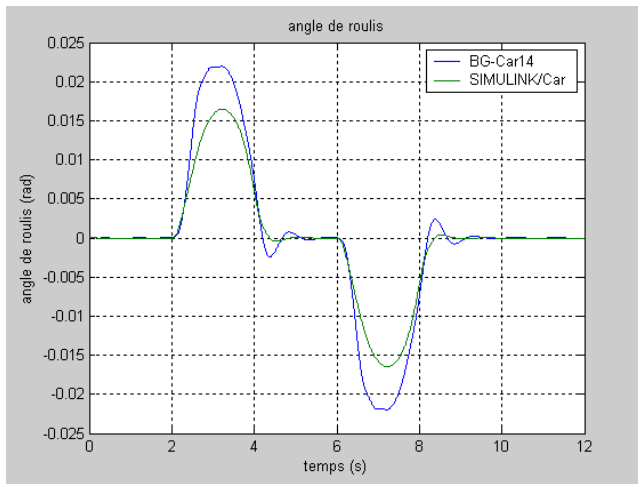


figure A- 45 : Angle de roulis

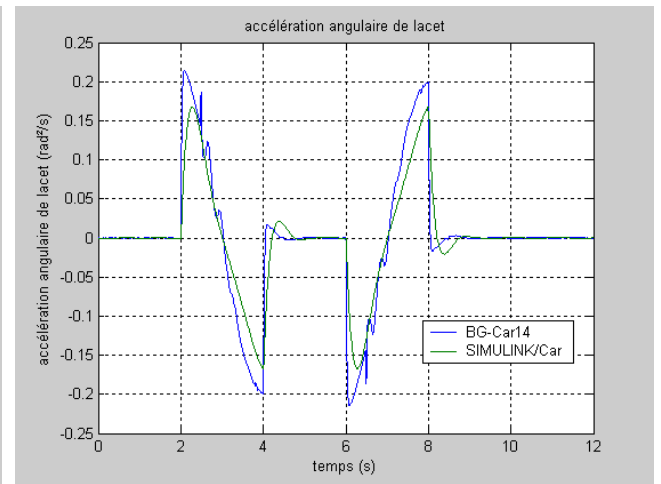


figure A- 46 : Accélération angulaire de lacet

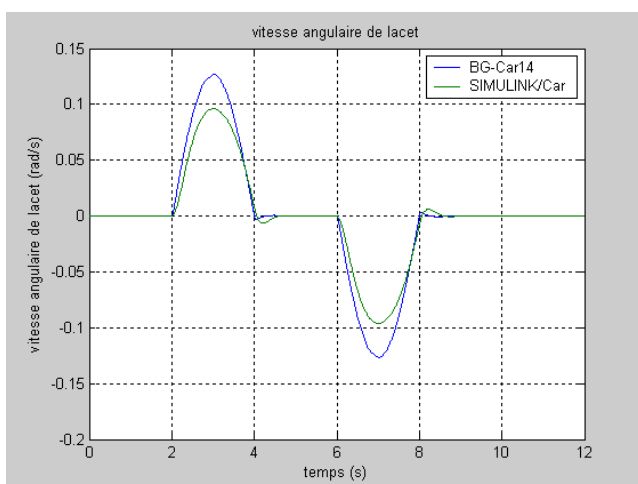


figure A- 47 : Vitesse angulaire de lacet

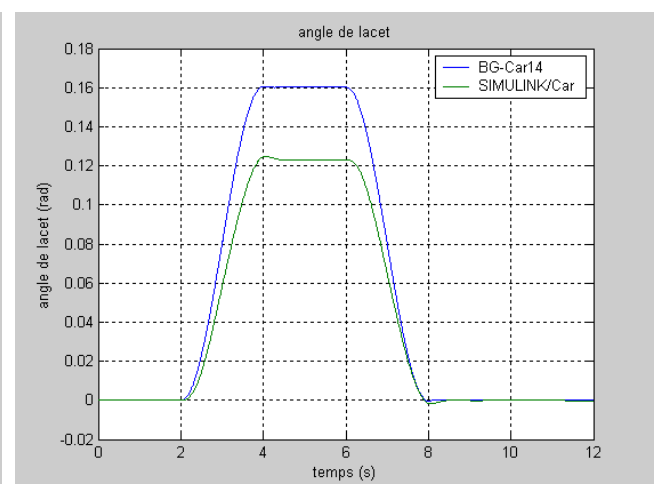


figure A- 48 : Angle de lacet



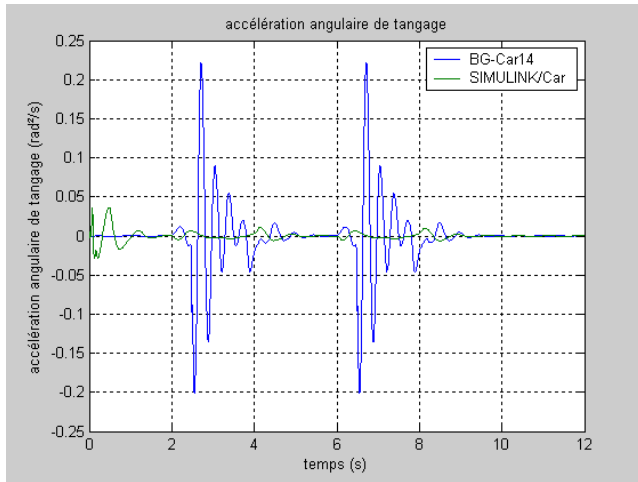


figure A- 49 : Accélération angulaire de tangage

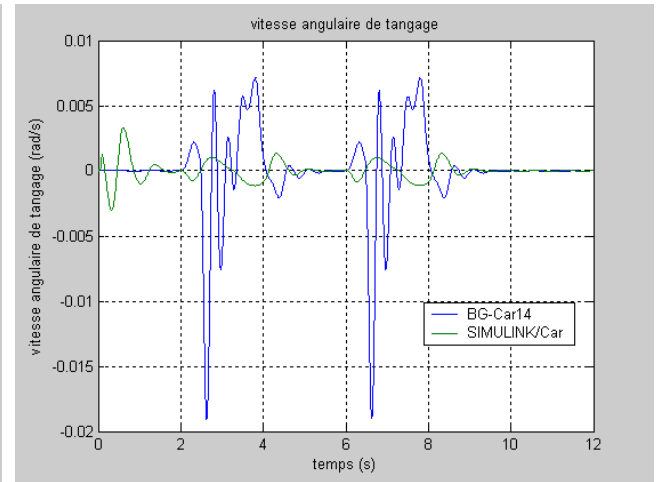


figure A- 50 : Vitesse angulaire de tangage

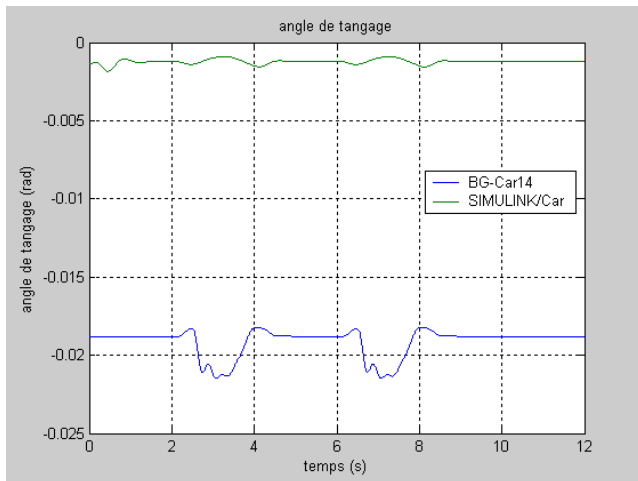


figure A- 51 : Angle de tangage

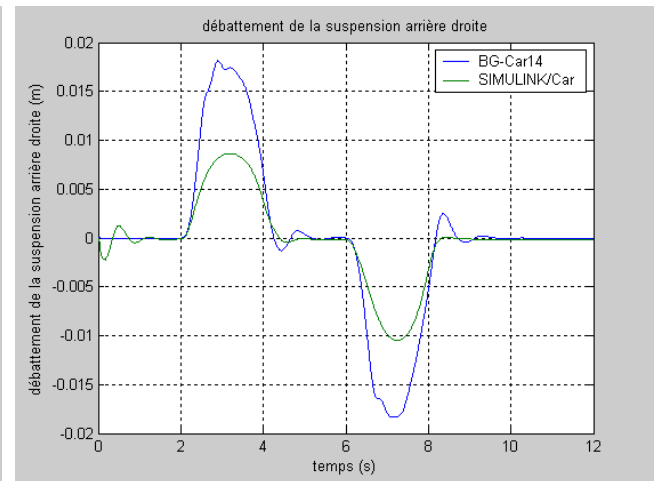


figure A- 52 : Débattement de la suspension arrière droite

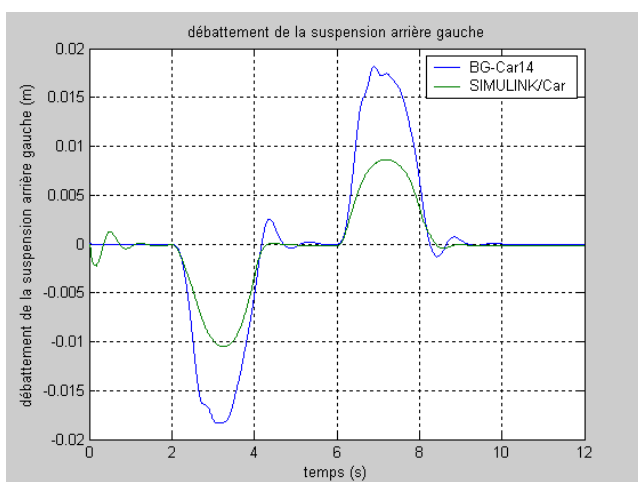


figure A- 53 : Débattement de la suspension arrière gauche

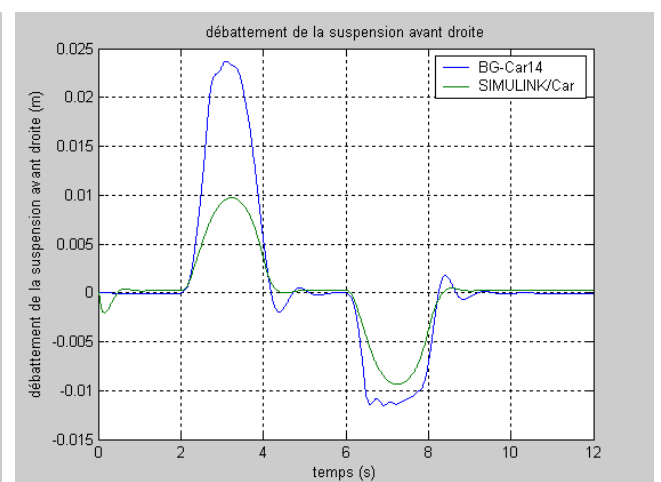


figure A- 54 : Débattement de la suspension avant droite

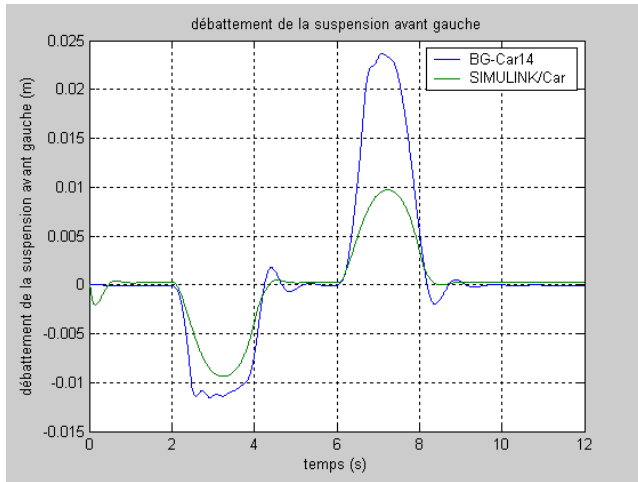


figure A- 55 : Débattement de la suspension avant gauche

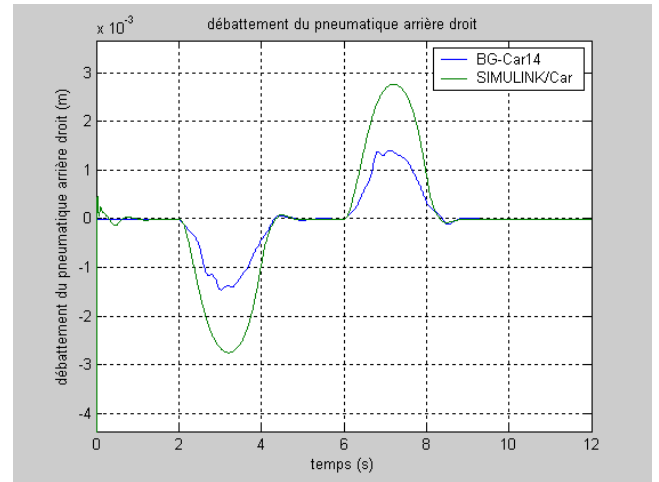


figure A- 56 : Débattement du pneumatique arrière droit

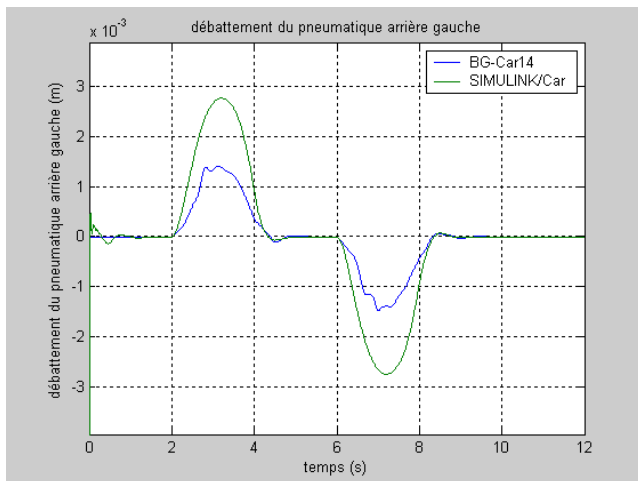


figure A- 57 : Débattement du pneumatique arrière gauche

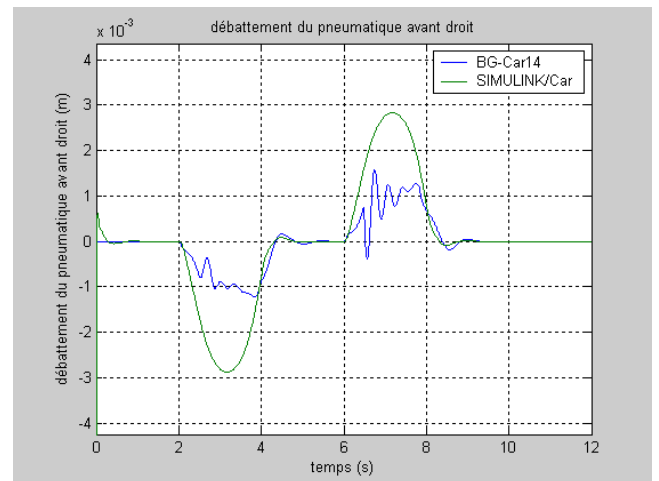


figure A- 58 : Débattement du pneumatique avant droit

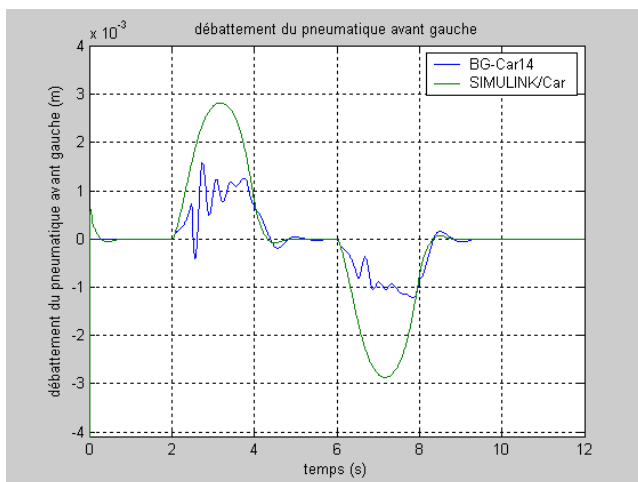


figure A- 59 : Débattement du pneumatique avant gauche

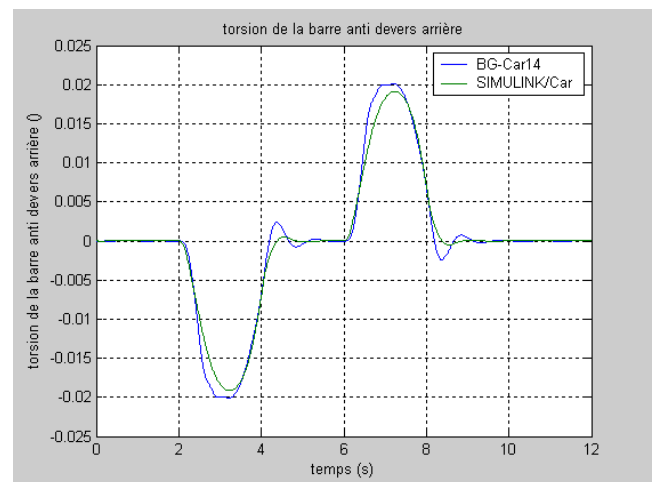


figure A- 60 : Torsion de la barre anti-roulis arrière

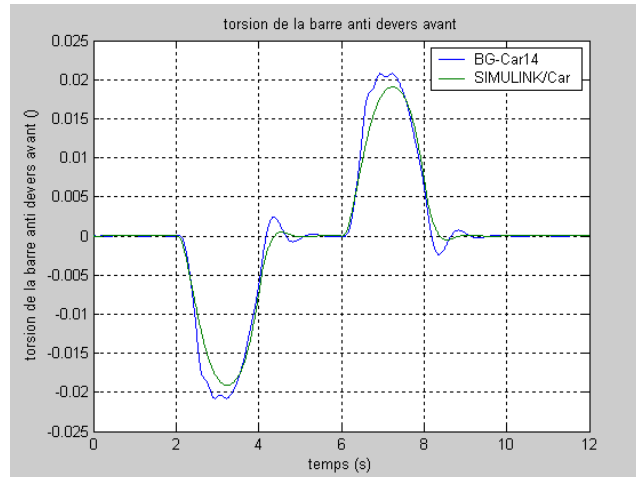


figure A- 61 : Torsion de la barre anti-roulis avant

### D-3 Dépassement

Afin d'effectuer la validation du modèle BGCar14, un scénario de simulation représentant un dépassement, la consigne de la figure A- 62, est utilisée comme commande pour les modèles SIMULINK/Car et BGCar14. Les modèles sont nominaux, à une vitesse longitudinale de 13.9m/s.

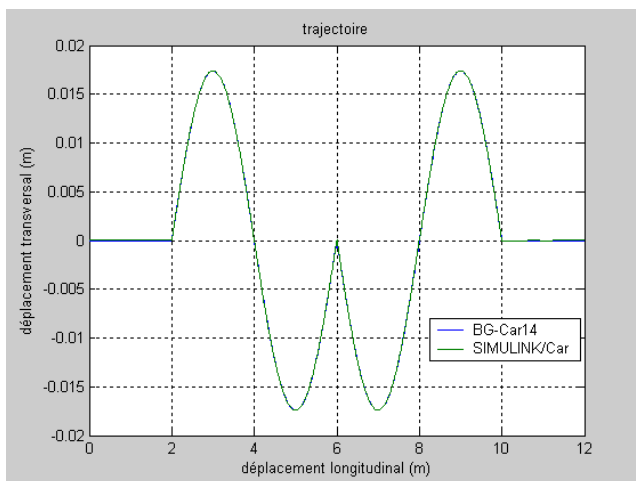


figure A- 62 : Angle de braquage des roues avant

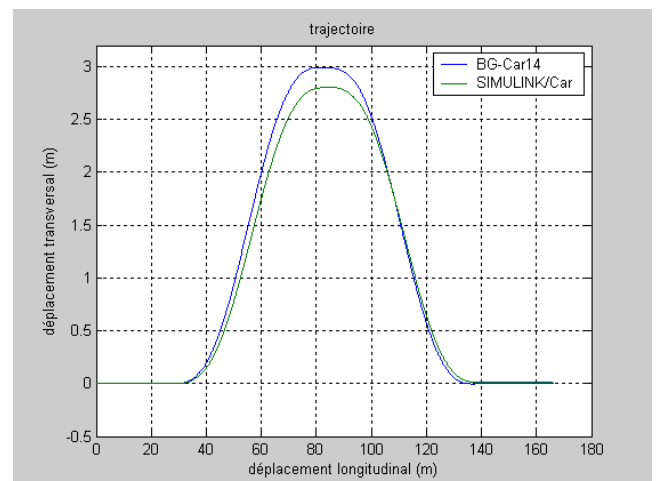


figure A- 63 : Trajectoire

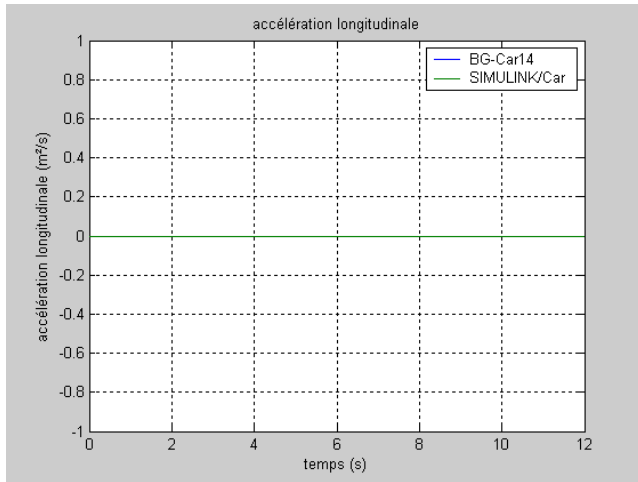


figure A- 64 : Accélération longitudinale

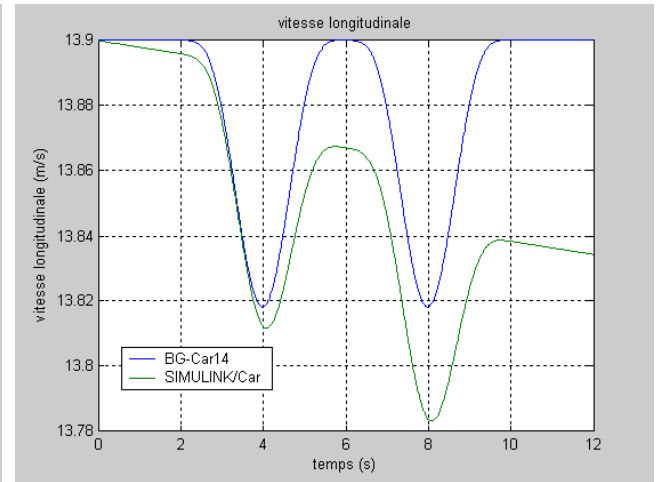


figure A- 65 : Vitesse longitudinale

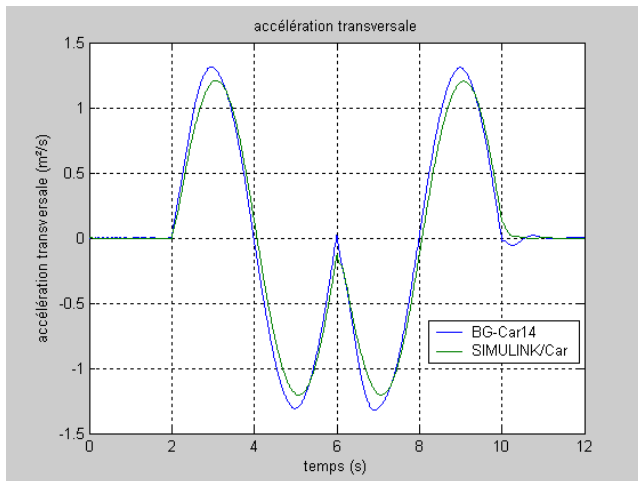


figure A- 66 : Accélération transversale

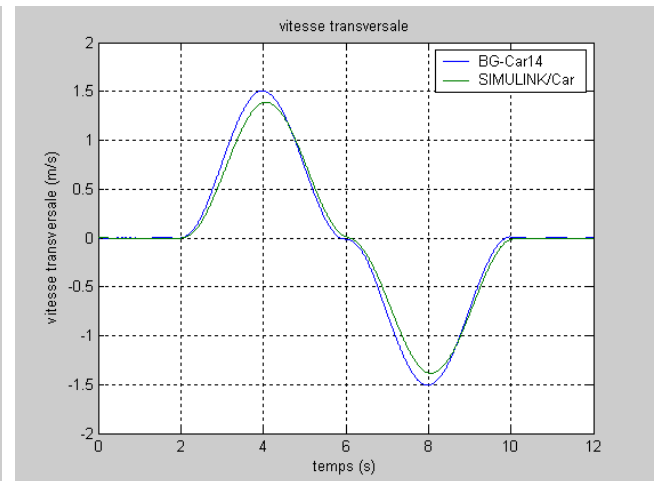


figure A- 67 : Vitesse transversale

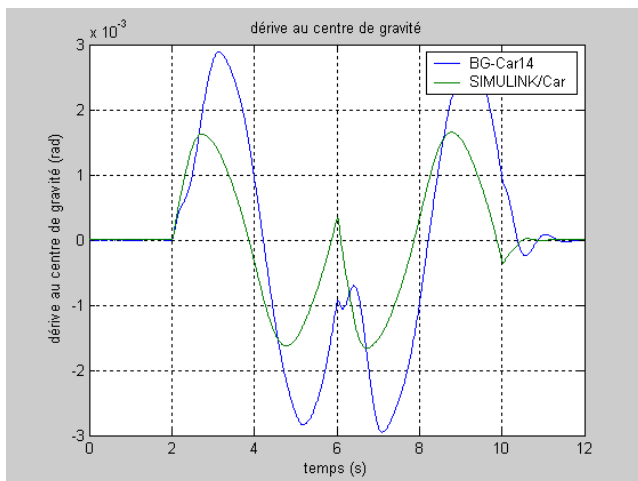


figure A- 68 : Dérive au centre de gravité

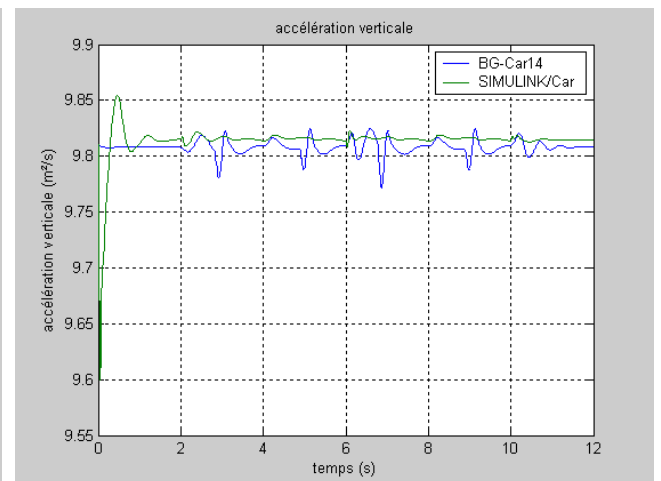


figure A- 69 : Accélération verticale

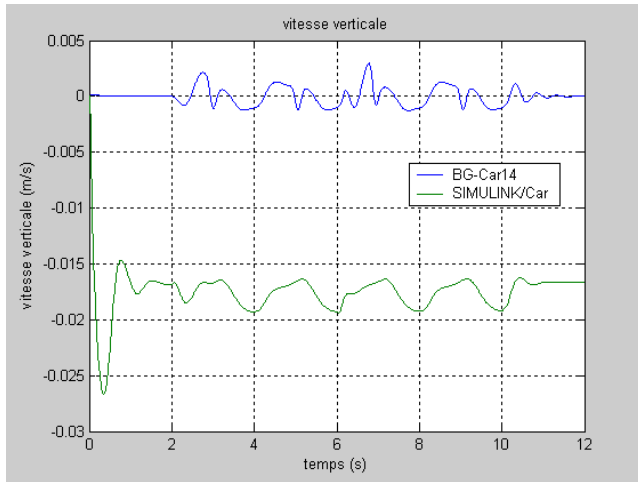


figure A- 70 : Vitesse verticale

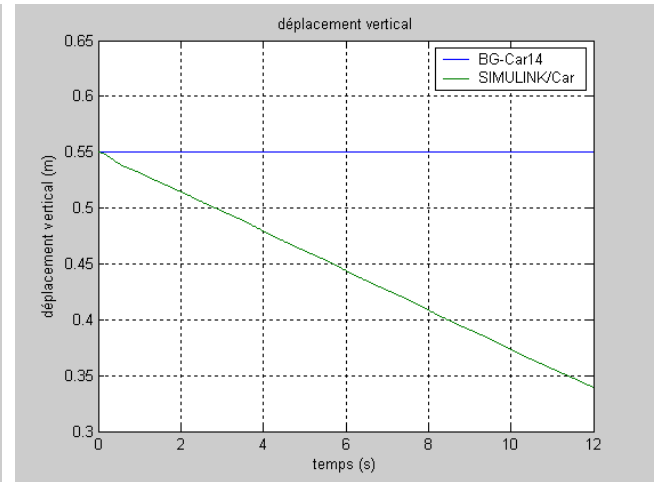


figure A- 71 : Déplacement vertical

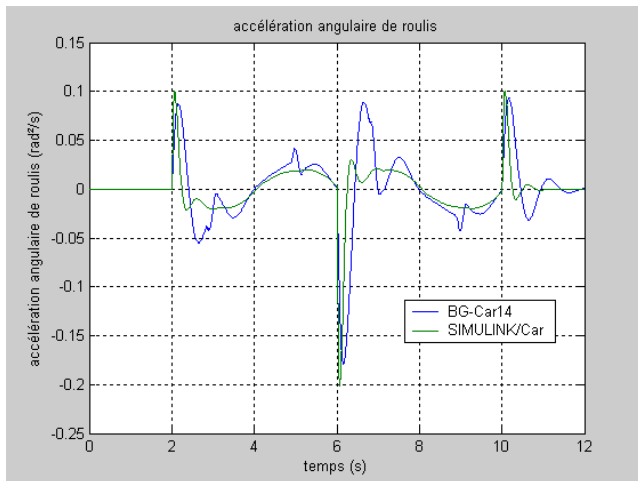


figure A- 72 : Accélération angulaire de roulis

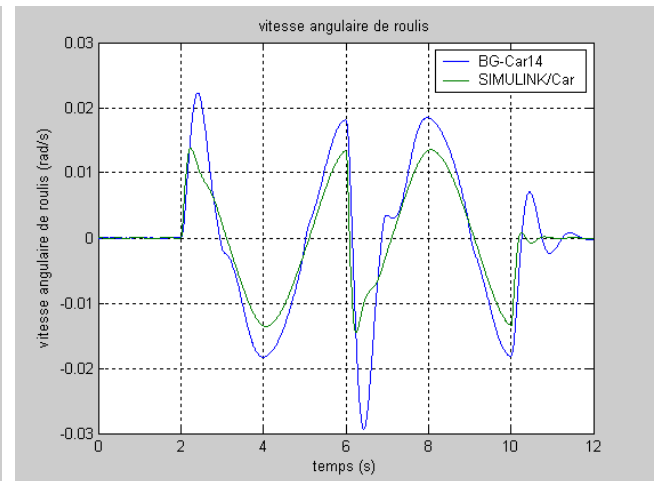


figure A- 73 : Vitesse angulaire de roulis

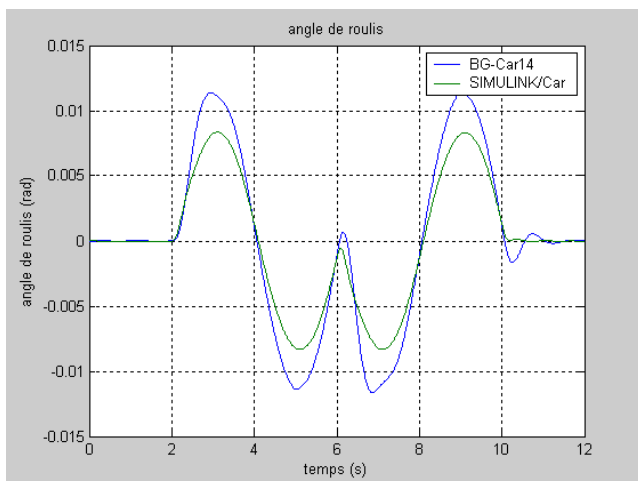


figure A- 74 : Angle de roulis

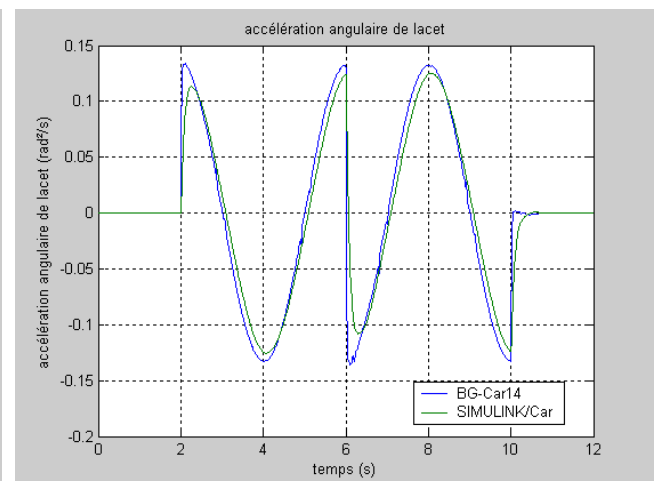


figure A- 75 : Accélération angulaire de lacet

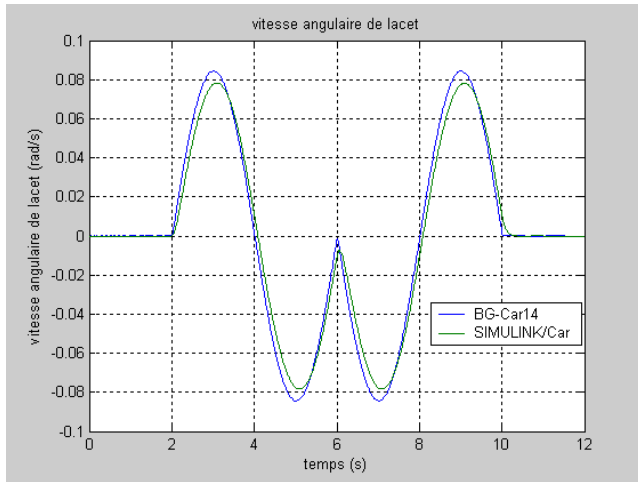


figure A- 76 : Vitesse angulaire de lacet

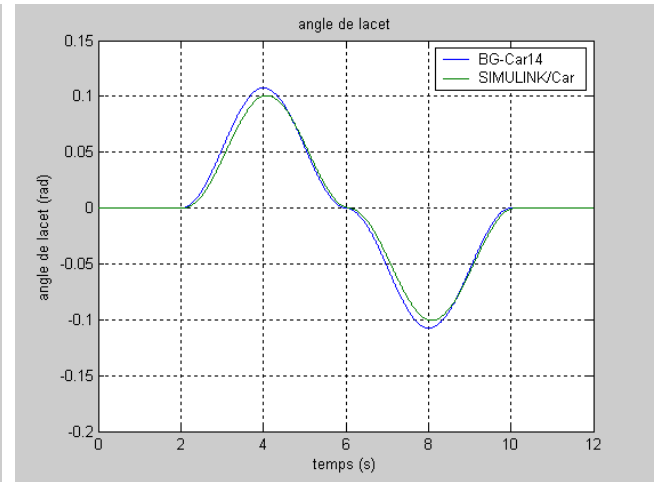


figure A- 77 : Angle de lacet

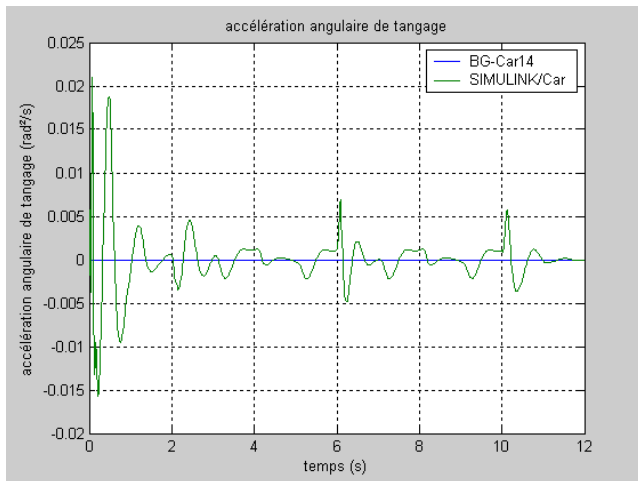


figure A- 78 : Accélération angulaire de tangage

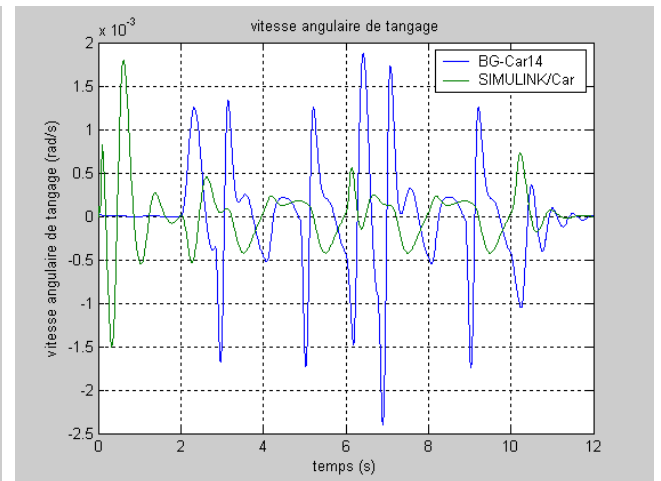


figure A- 79 : Vitesse angulaire de tangage

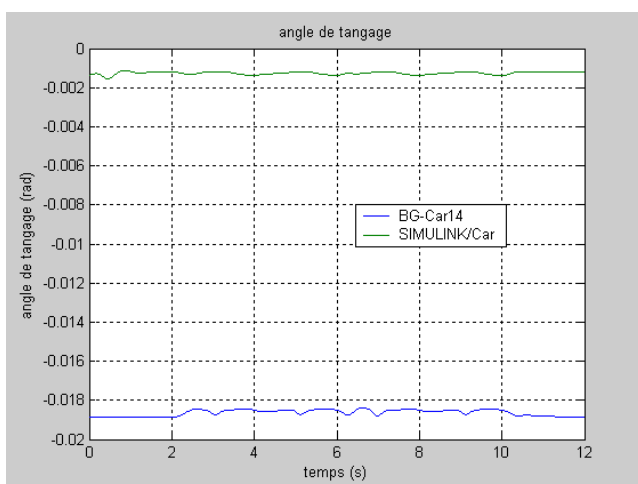


figure A- 80 : Angle de tangage

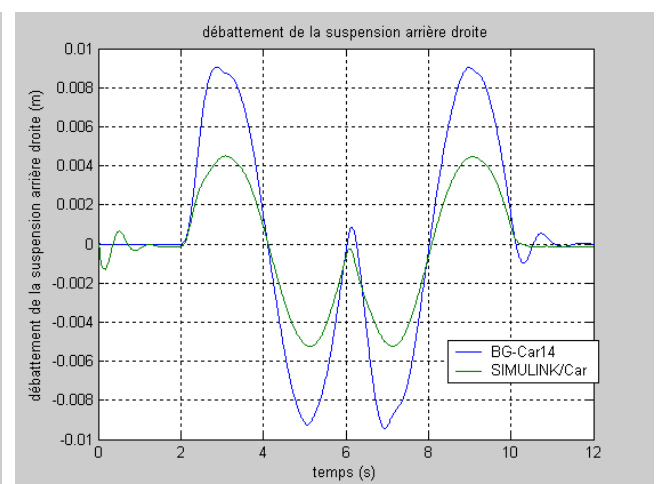


figure A- 81 : Débattement de la suspension arrière droite

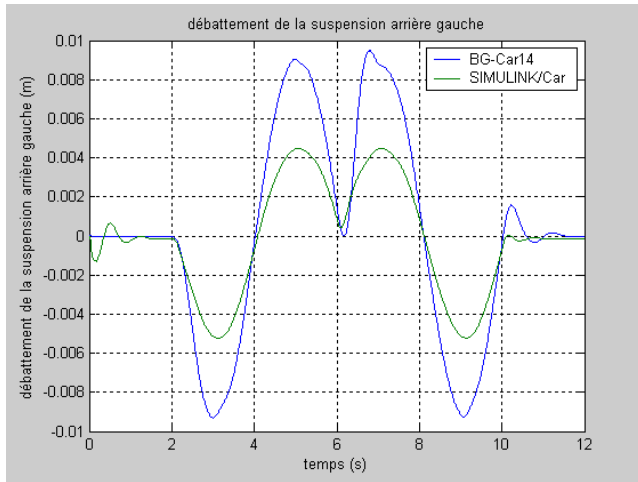


figure A- 82 : Débattement de la suspension arrière gauche

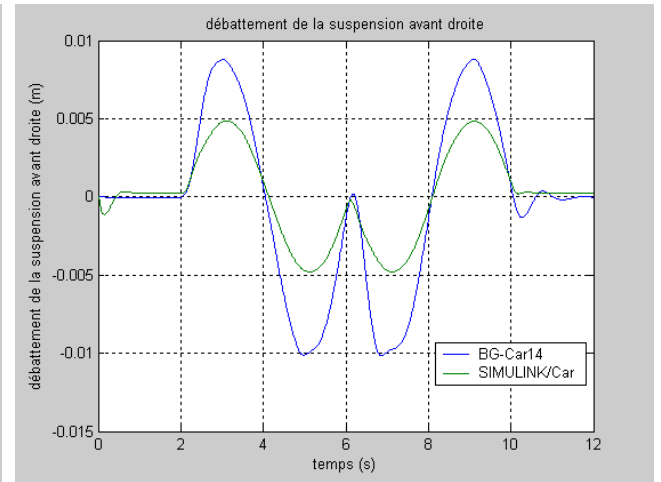


figure A- 83 : Débattement de la suspension avant droite

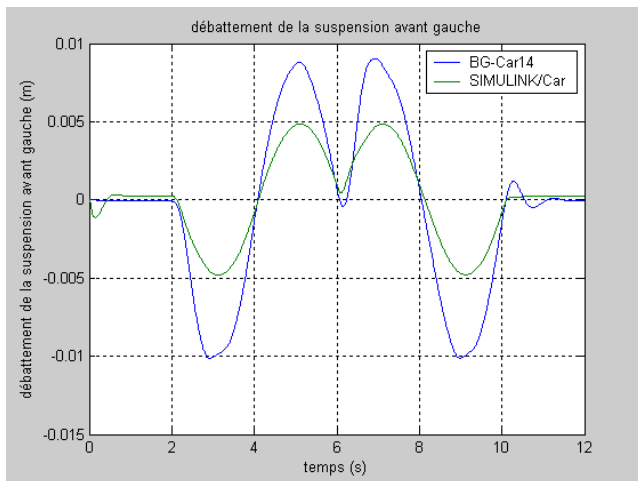


figure A- 84 : Débattement de la suspension avant gauche

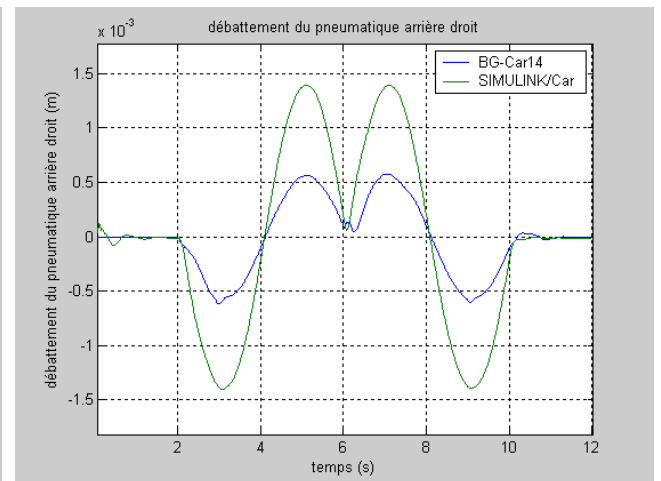


figure A- 85 : Débattement du pneumatique arrière droit

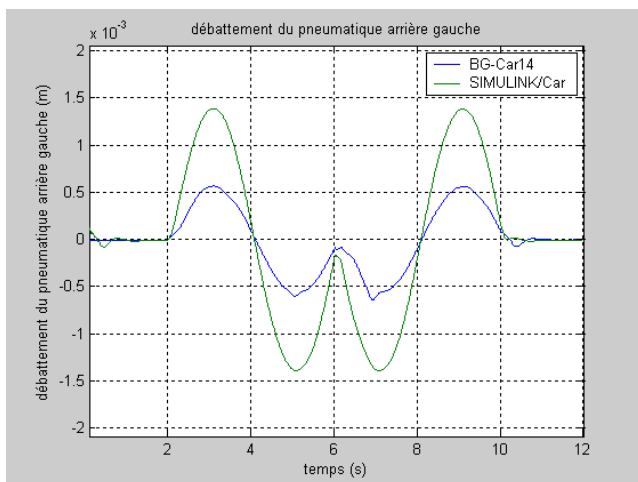


figure A- 86 : Débattement du pneumatique arrière gauche

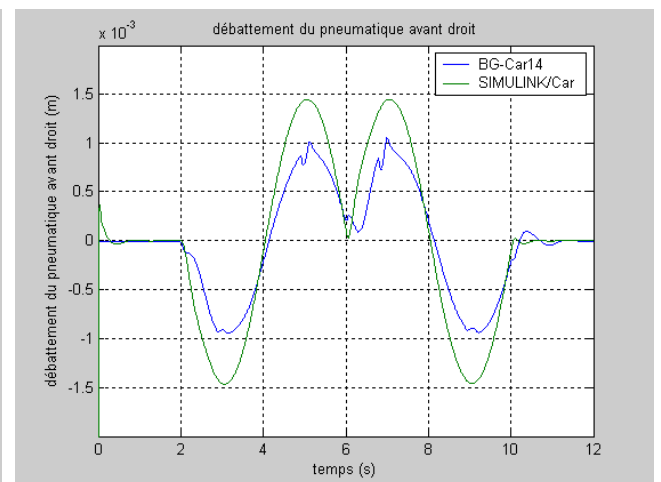


figure A- 87 : Débattement du pneumatique avant droit

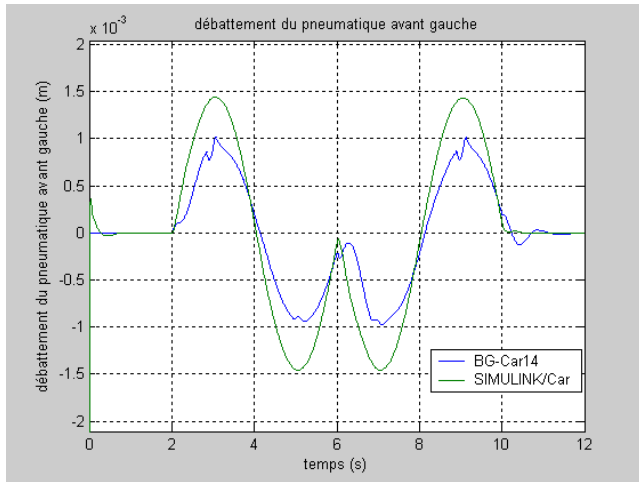


figure A- 88 : Débattement du pneumatique avant gauche

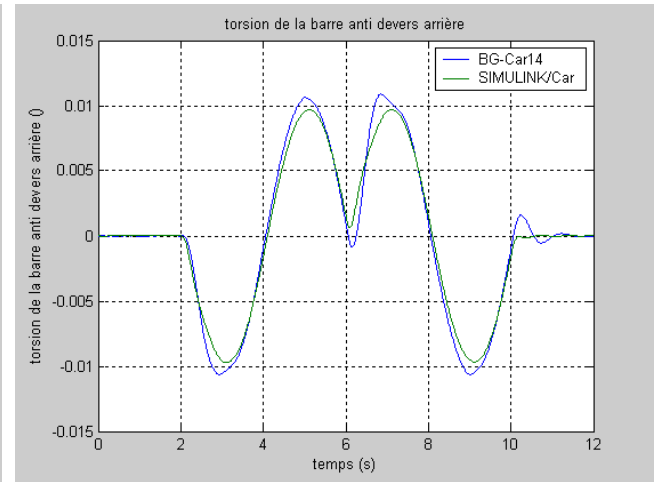


figure A- 89 : Torsion de la barre anti-roulis arrière

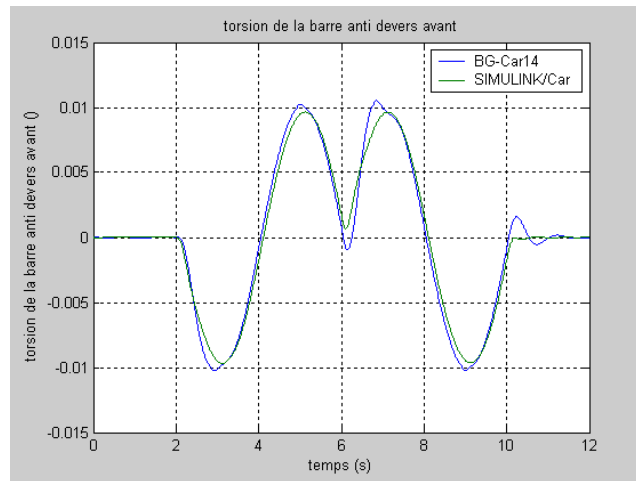


figure A- 90 : Torsion de la barre anti-roulis avant



## D-4 Mise en virage

Afin de mieux cerner le domaine de validité du modèle BGCar14, une mise en virage est effectuée, la consigne de la figure A- 91 représente un angle de braquage des roues avant constant. Les modèles sont nominaux, à une vitesse longitudinale de 13.9m/s.

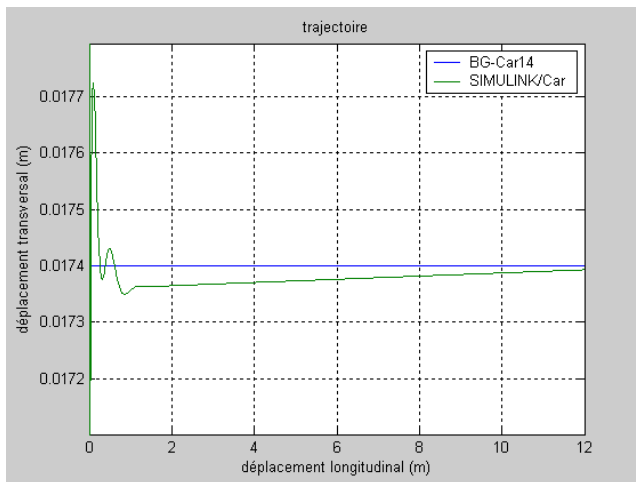


figure A- 91 : Angle de braquage des roues avant

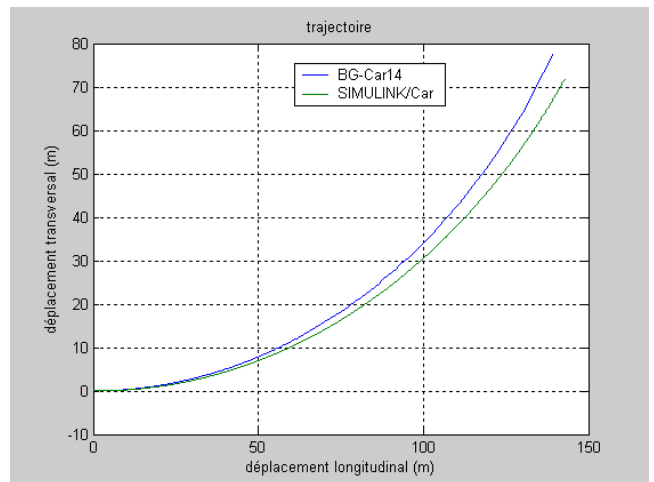


figure A- 92 : Trajectoire

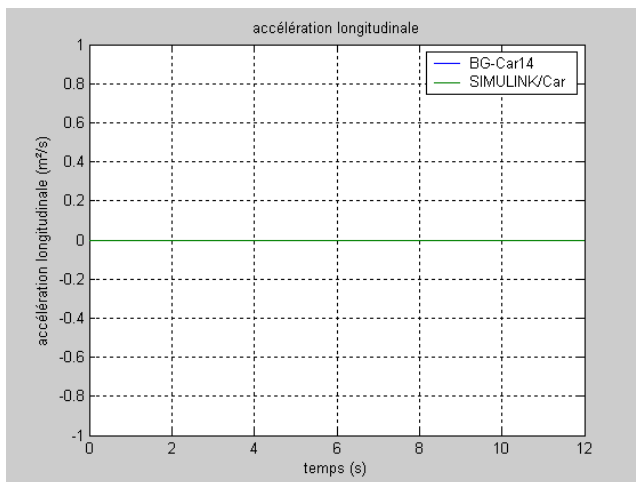


figure A- 93 : Accélération longitudinale

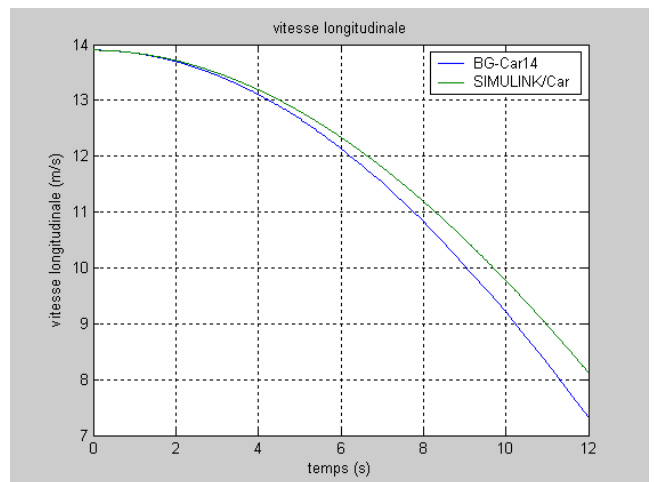


figure A- 94 : Vitesse longitudinale

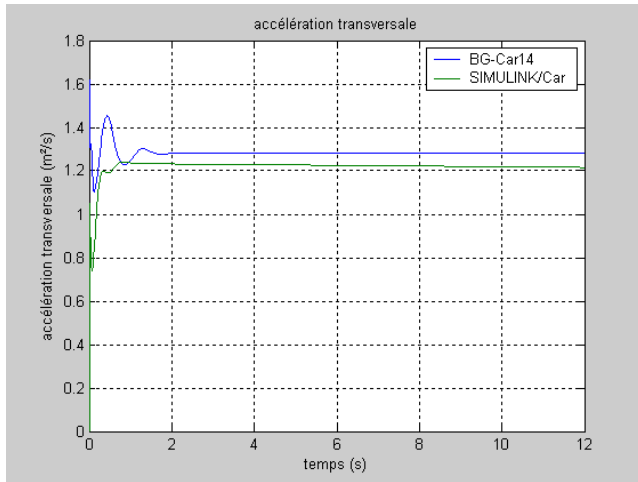


figure A- 95 : Accélération transversale

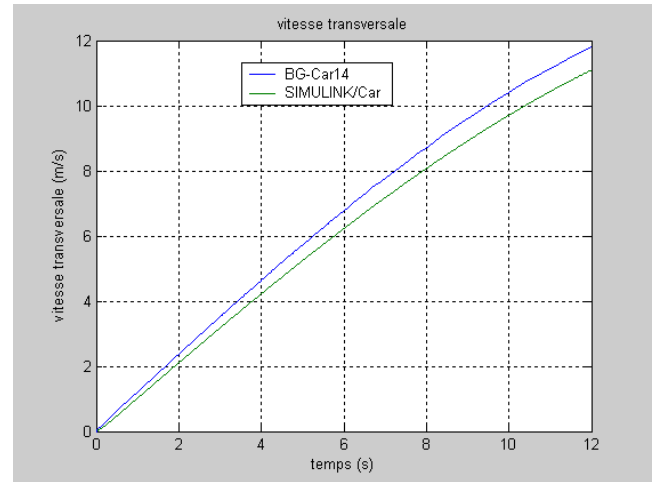


figure A- 96 : Vitesse transversale

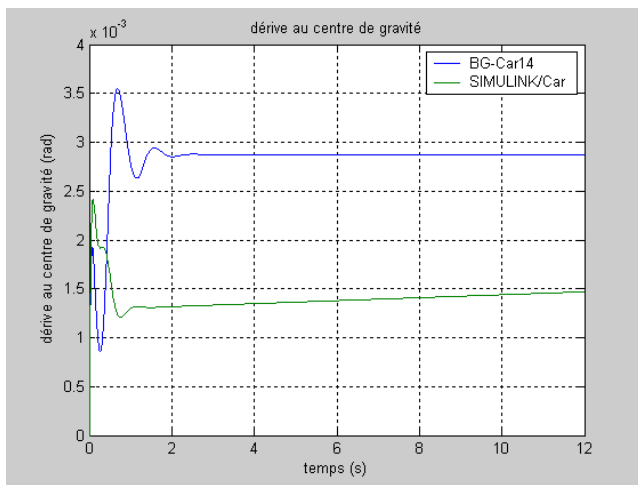


figure A- 97 : Dérive au centre de gravité

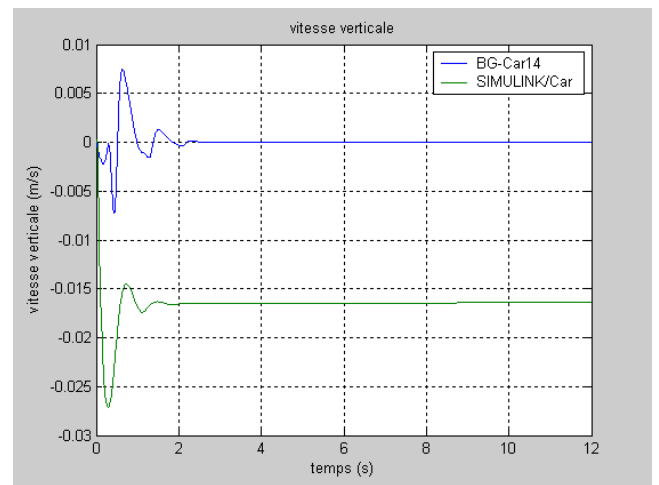


figure A- 98 : Vitesse verticale

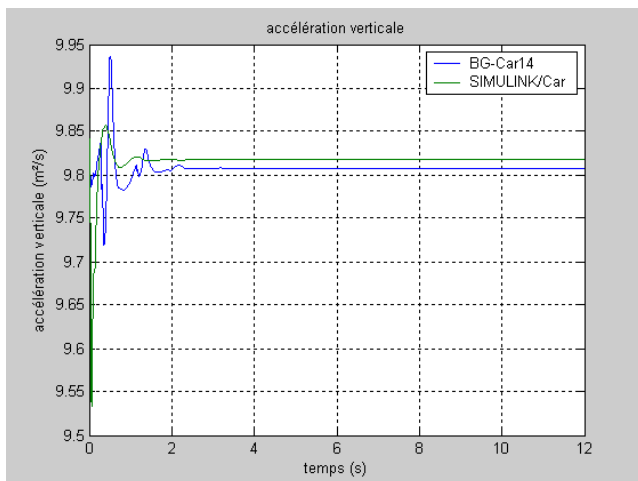


figure A- 99 : Accélération verticale

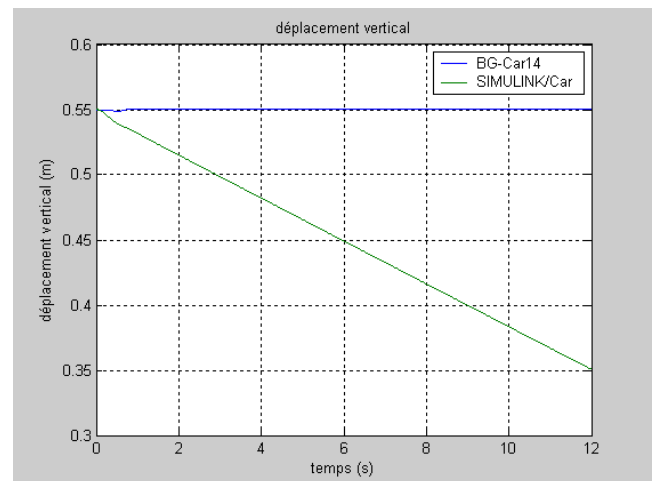


figure A- 100 : Déplacement vertical

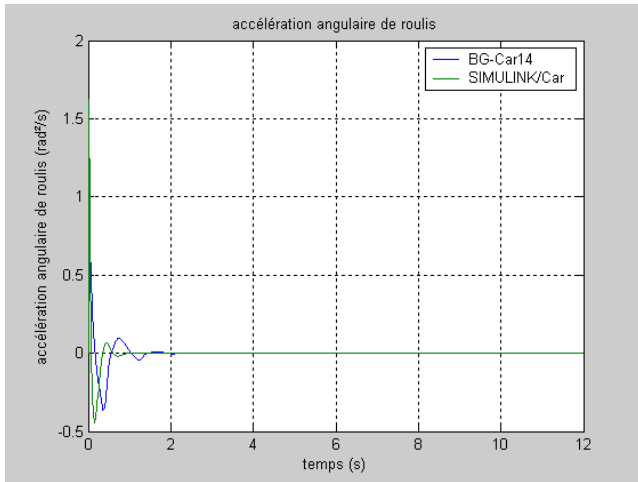


figure A- 101 : Accélération angulaire de roulis

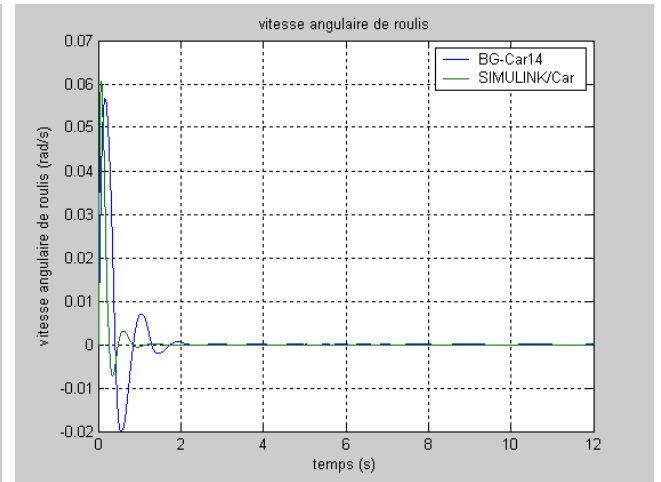


figure A- 102 : Vitesse angulaire de roulis

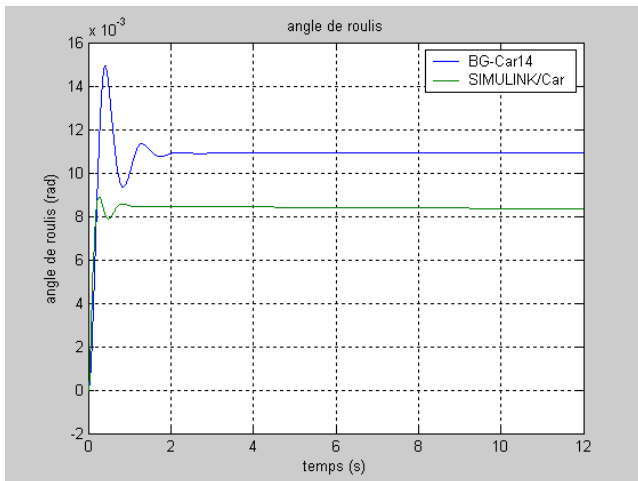


figure A- 103 : Angle de roulis

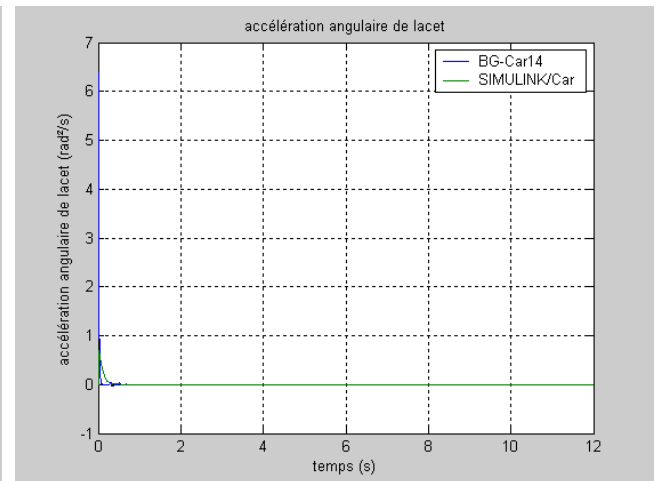


figure A- 104 : Accélération angulaire de lacet

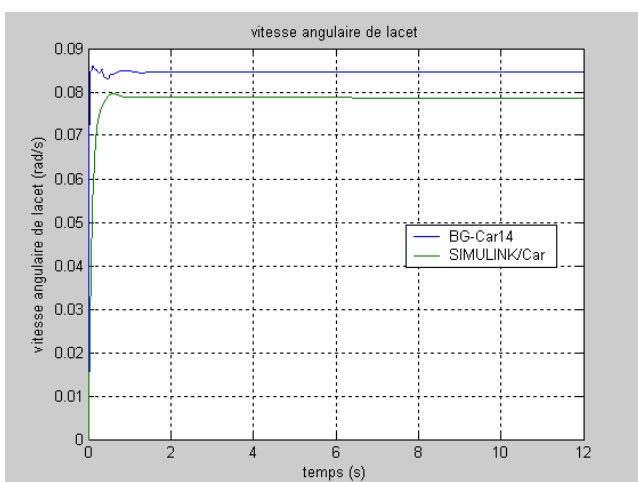


figure A- 105 : Vitesse angulaire de lacet

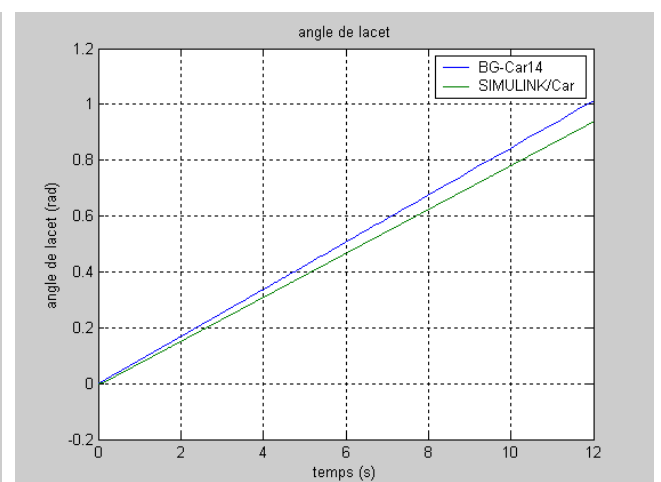


figure A- 106 : Angle de lacet

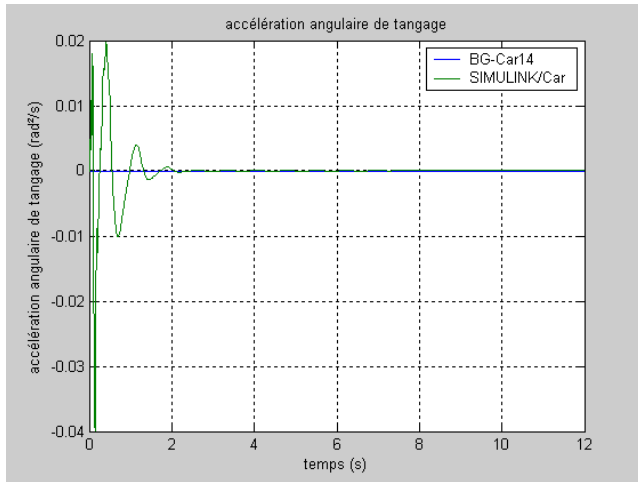


figure A- 107 : Accélération angulaire de tangage

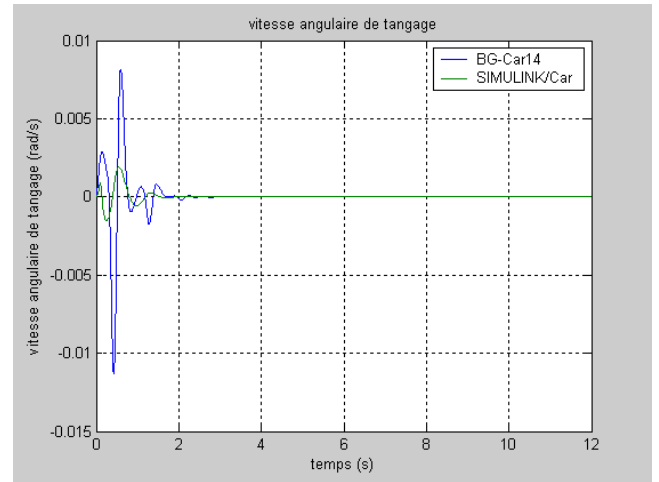


figure A- 108 : Vitesse angulaire de tangage

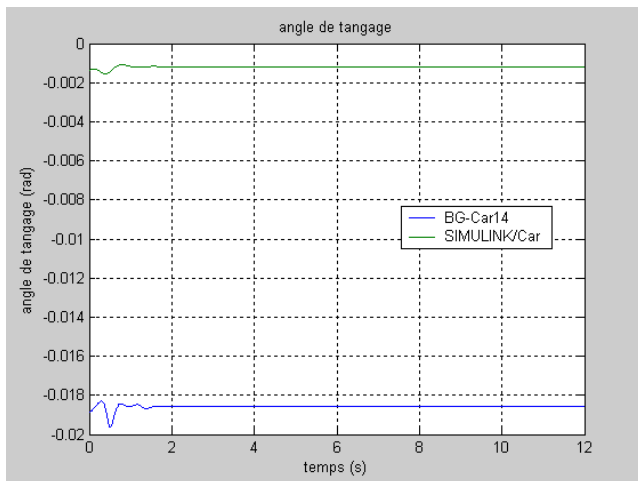


figure A- 109 : Angle de tangage

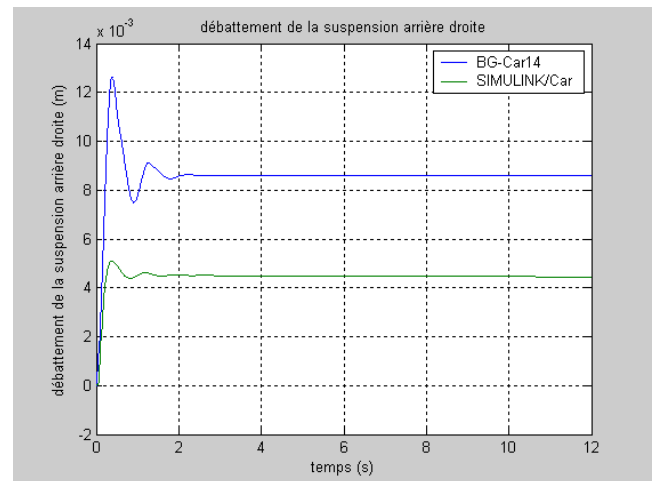


figure A- 110 : Débattement de la suspension arrière droite

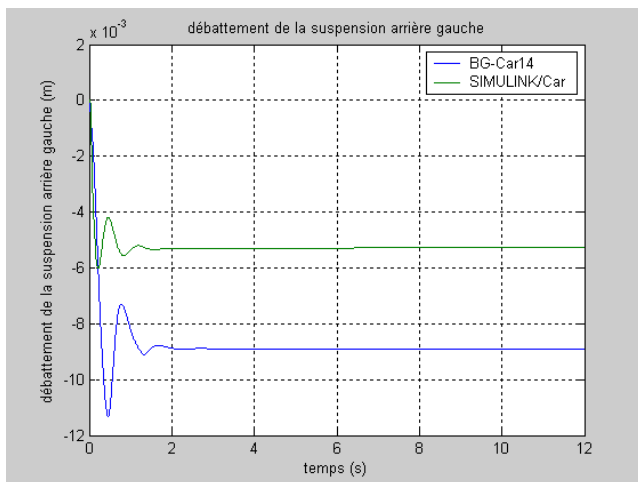


figure A- 111 : Débattement de la suspension arrière gauche

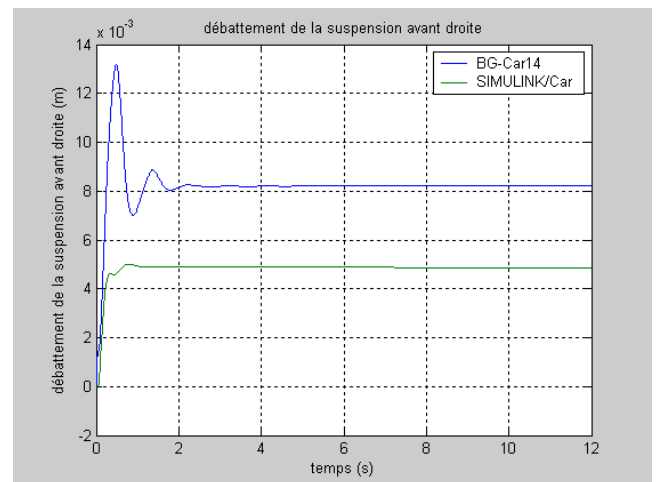


figure A- 112 : Débattement de la suspension avant droite

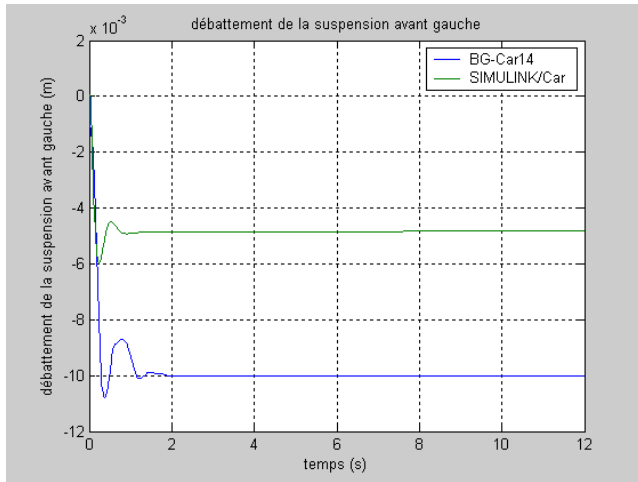


figure A- 113 : Débattement de la suspension avant gauche

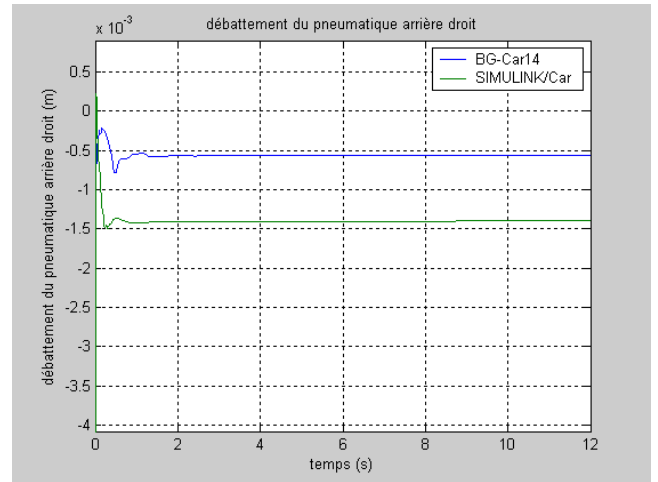


figure A- 114 : Débattement du pneumatique arrière droit

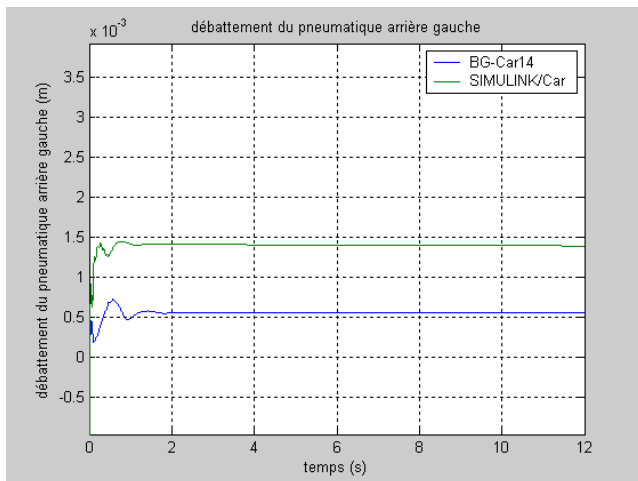


figure A- 115 : Débattement du pneumatique arrière gauche

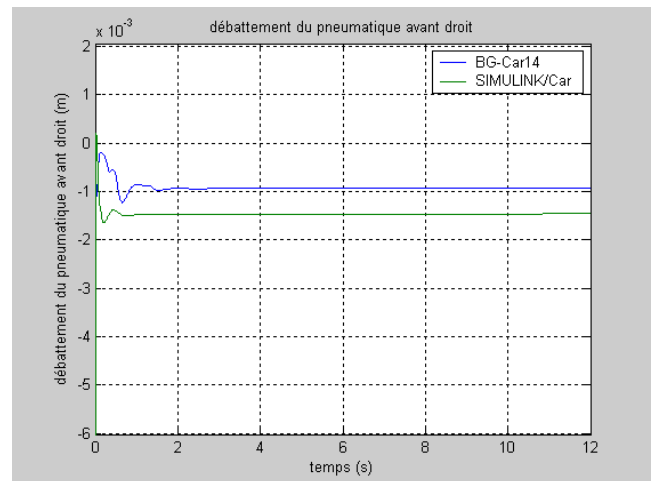


figure A- 116 : Débattement du pneumatique avant droit

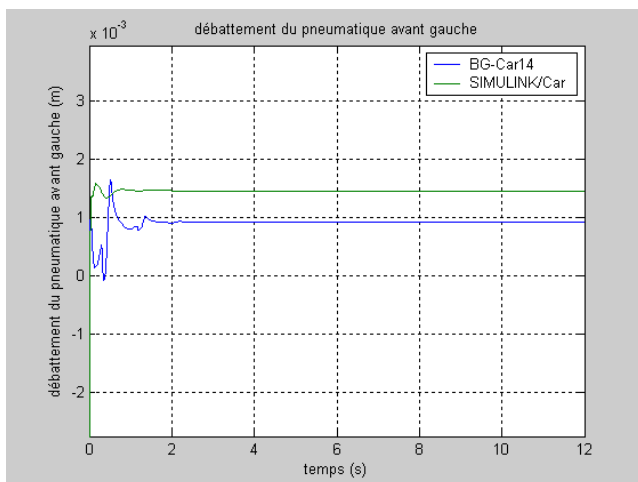


figure A- 117 : Débattement du pneumatique avant gauche

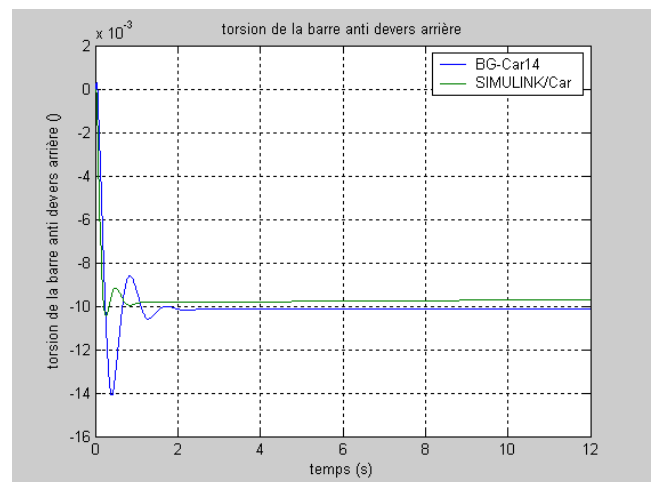


figure A- 118 : Torsion de la barre anti-roulis arrière

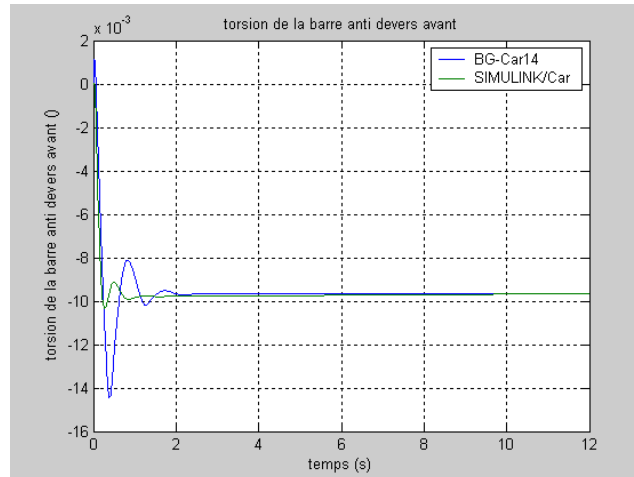


figure A- 119 : Torsion de la barre anti-roulis avant

## D-5 Sinusoïde

Un angle de braquage suivant le profil d'une sinusoïde est appliqué au modèle (figure A-120), les changements de direction imposés par ce type de commande, va permettre de tester les limites des modèles, et permettre d'affiner le domaine de validité du modèle BGCar14. Les modèles sont nominaux, à une vitesse longitudinale de 13.9m/s.

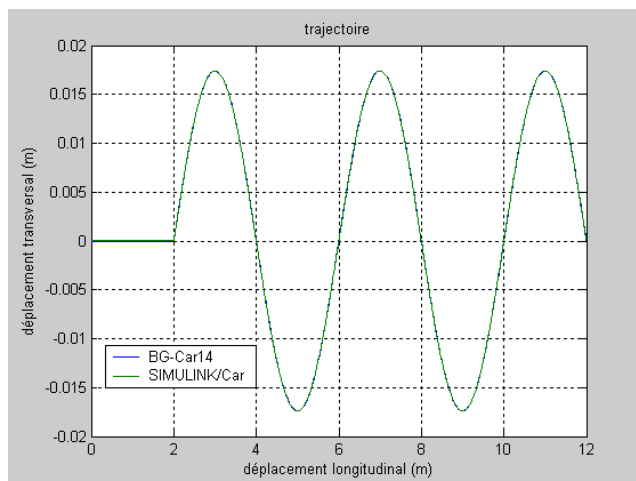
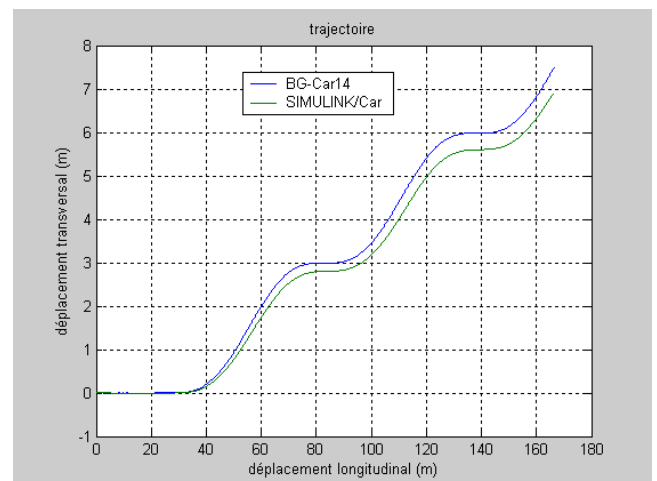
figure A- 120 : Angle de braquage des  
roues avant

figure A- 121 : Trajectoire

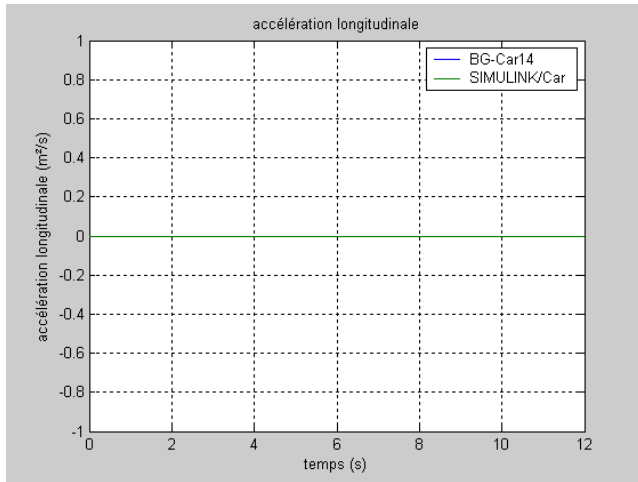


figure A- 122 : Accélération longitudinale

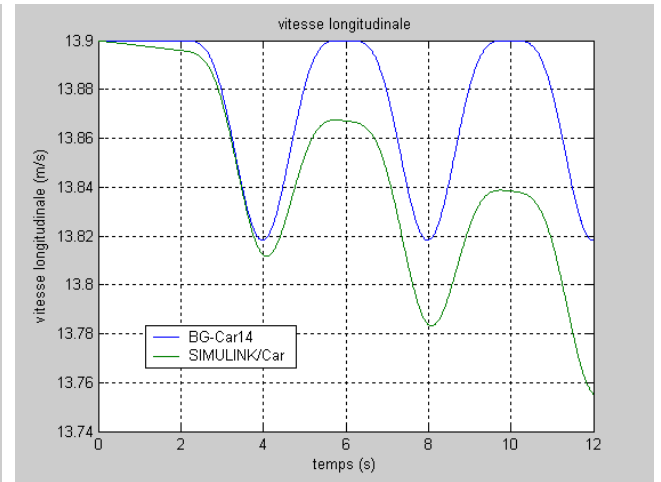


figure A- 123 : Vitesse longitudinale

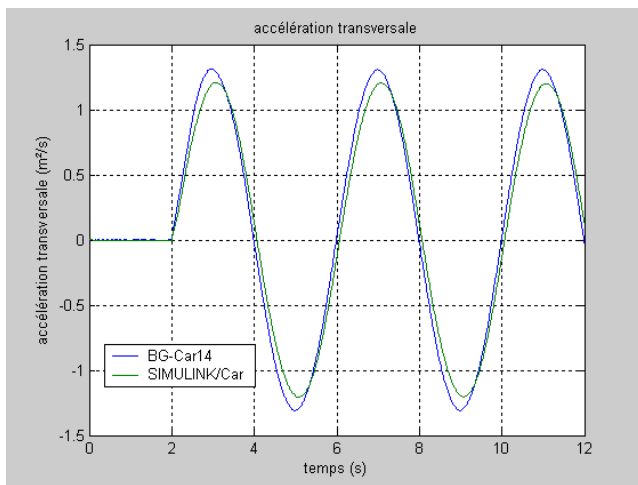


figure A- 124 : Accélération transversale

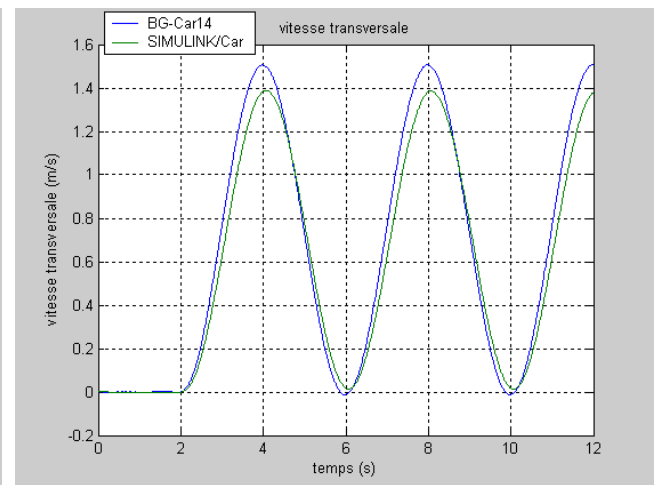


figure A- 125 : Vitesse transversale

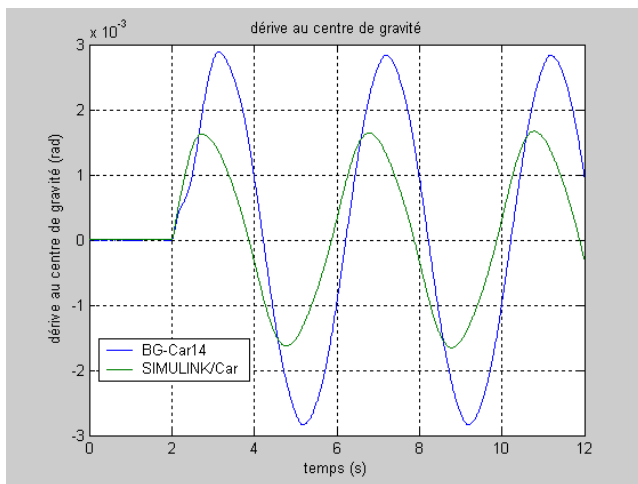


figure A- 126 : Dérive au centre de gravité

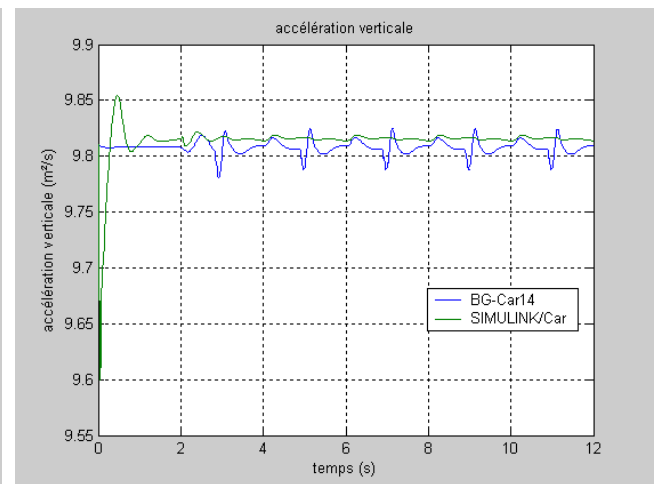


figure A- 127 : Accélération verticale

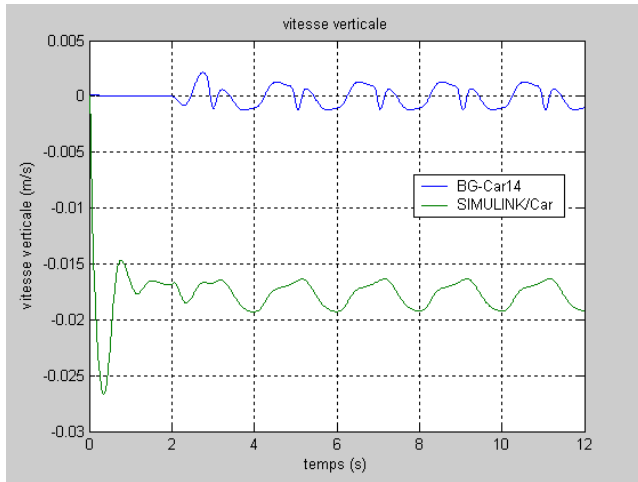


figure A- 128 : Vitesse verticale

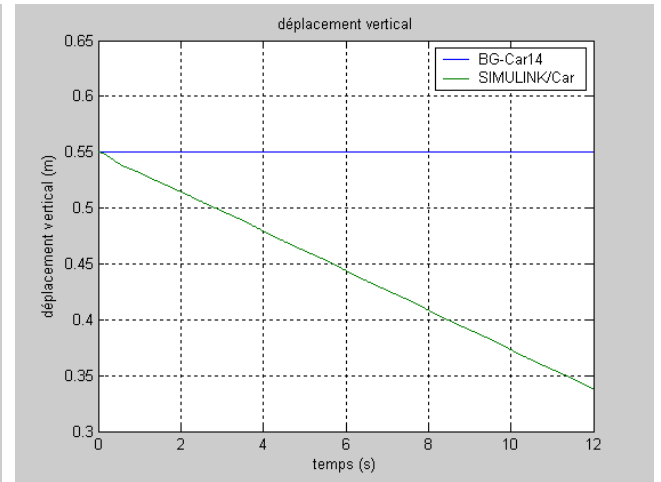


figure A- 129 : Déplacement vertical

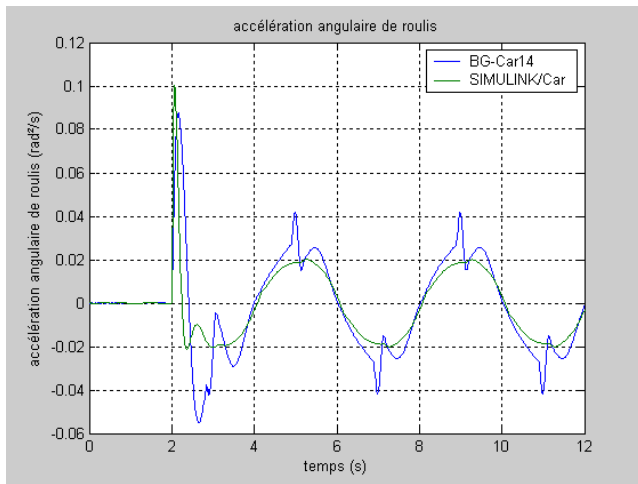


figure A- 130 : Accélération angulaire de roulis

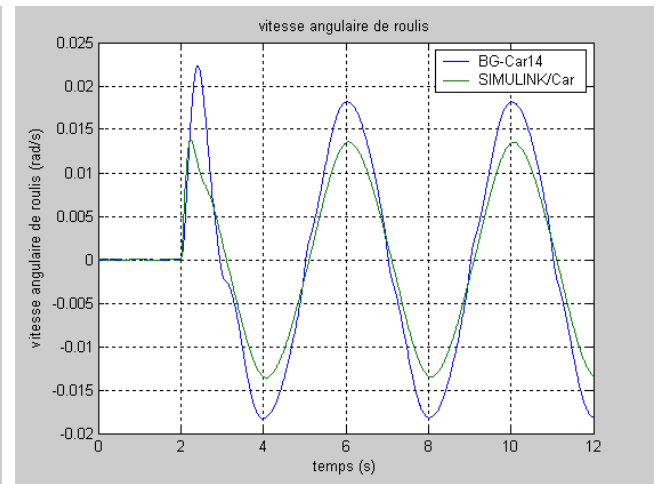


figure A- 131 : Vitesse angulaire de roulis

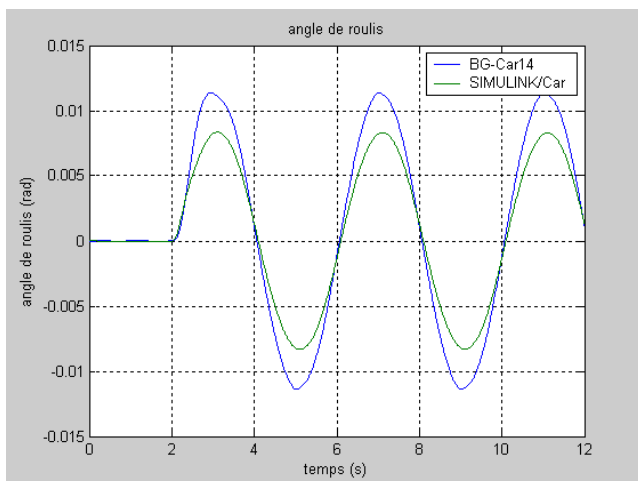


figure A- 132 : Angle de roulis

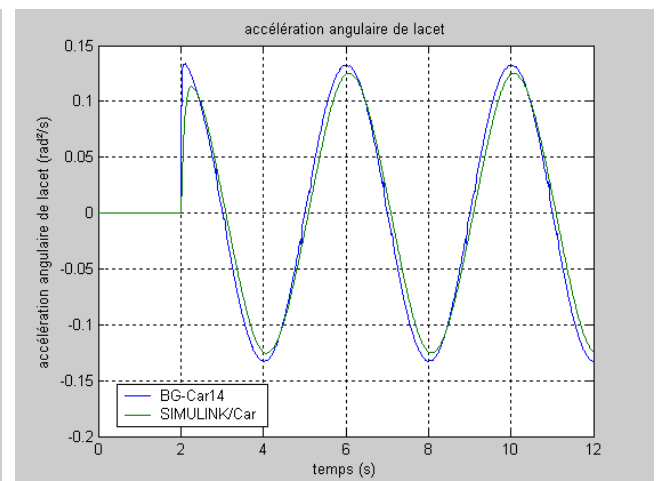


figure A- 133 : Accélération angulaire de lacet



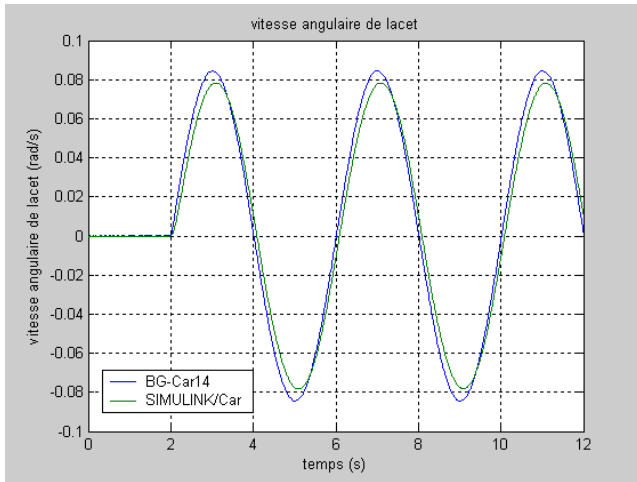


figure A- 134 : Vitesse angulaire de lacet

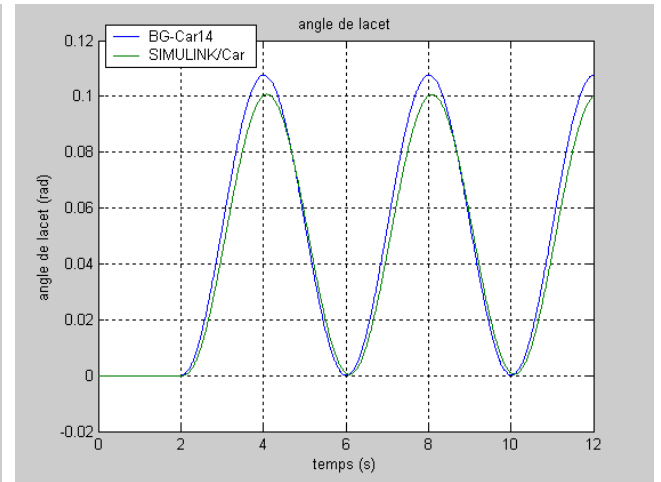


figure A- 135 : Angle de lacet

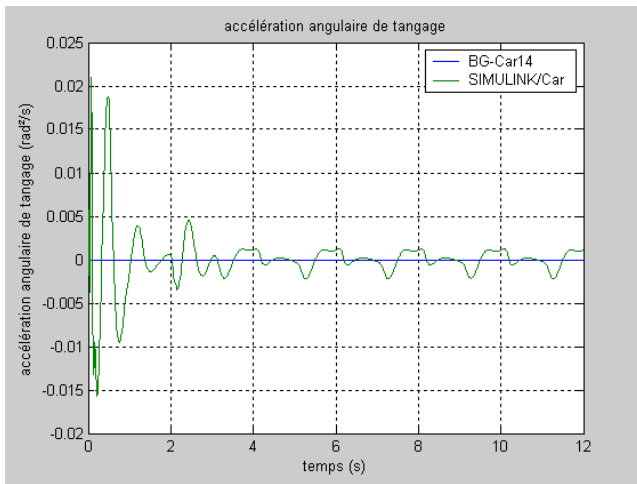


figure A- 136 : Accélération angulaire de tangage

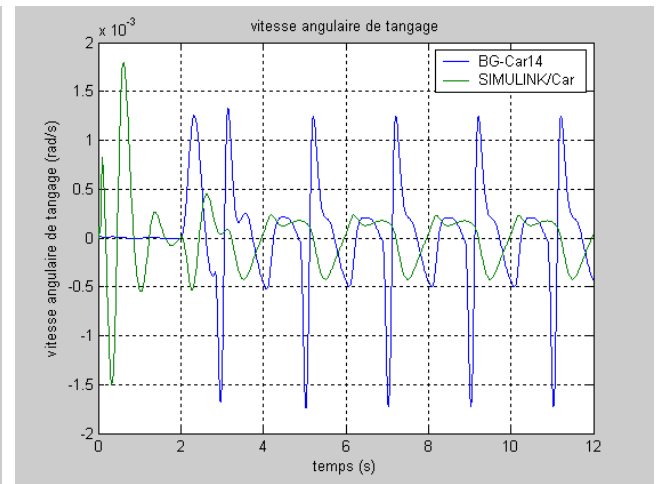


figure A- 137 : Vitesse angulaire de tangage

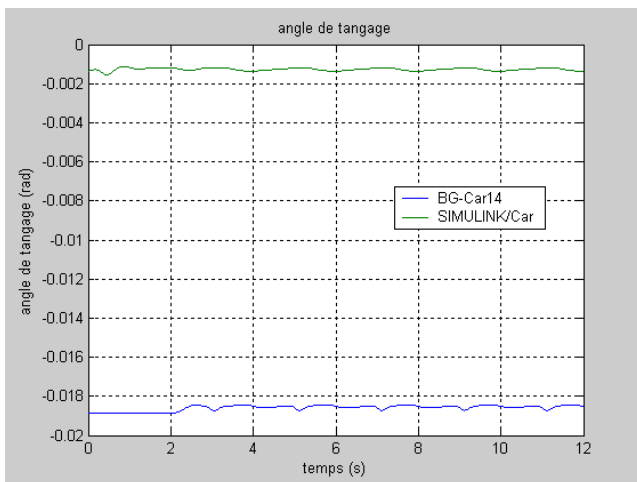


figure A- 138 : Angle de tangage

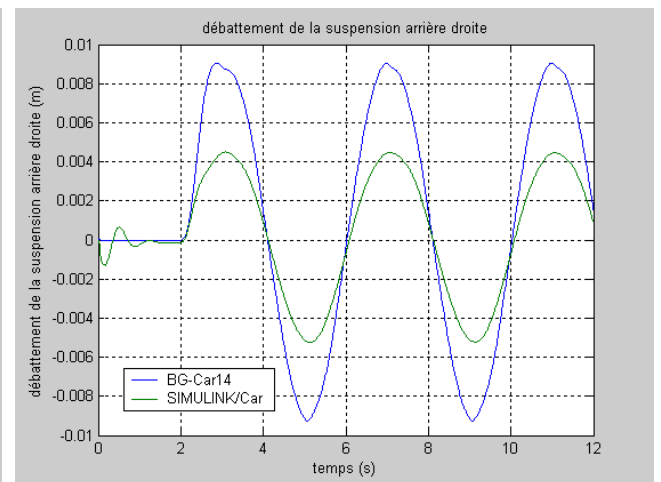


figure A- 139 : Débattement de la suspension arrière droite

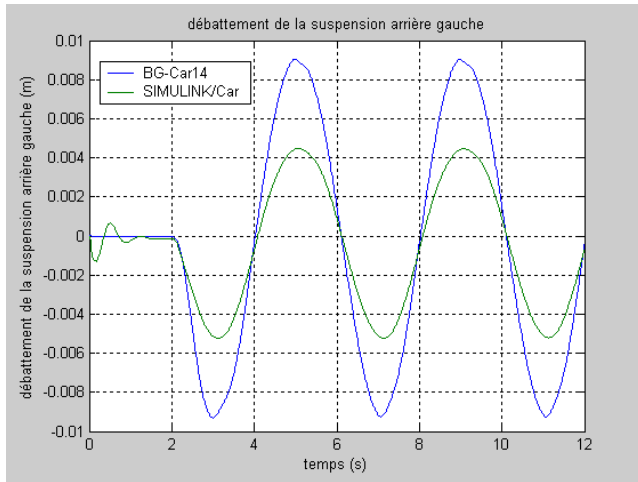


figure A- 140 : Débattement de la suspension arrière gauche

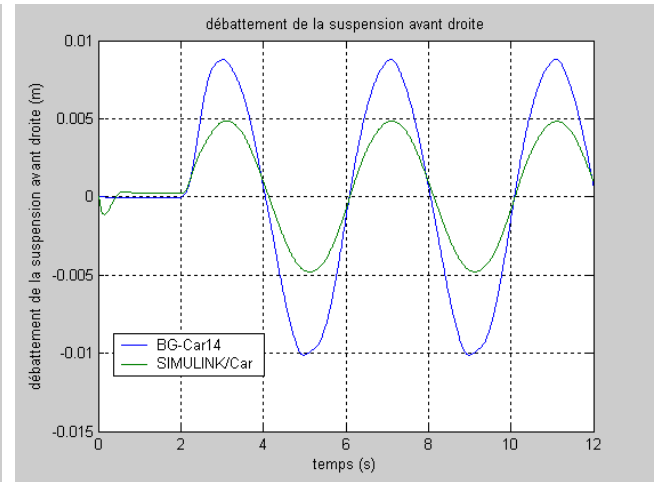


figure A- 141 : Débattement de la suspension avant droite

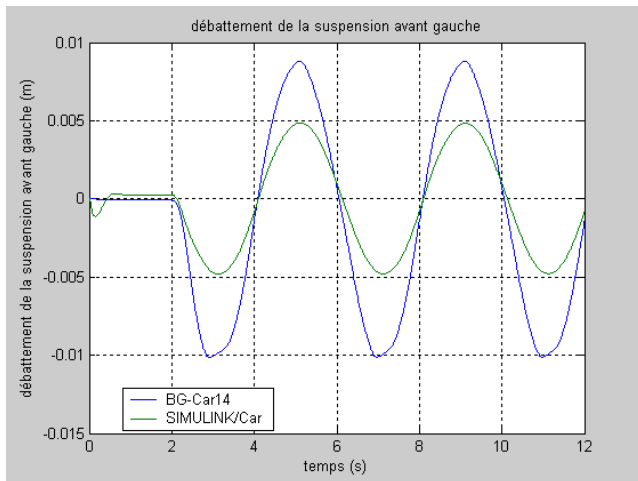


figure A- 142 : Débattement de la suspension avant gauche

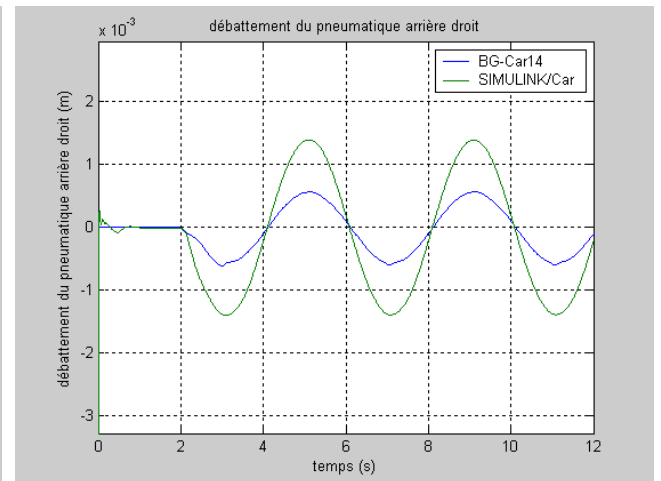


figure A- 143 : Débattement du pneumatique arrière droit

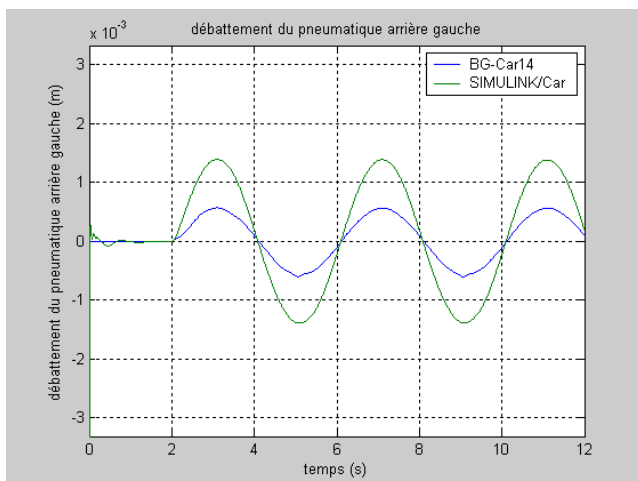


figure A- 144 : Débattement du pneumatique arrière gauche

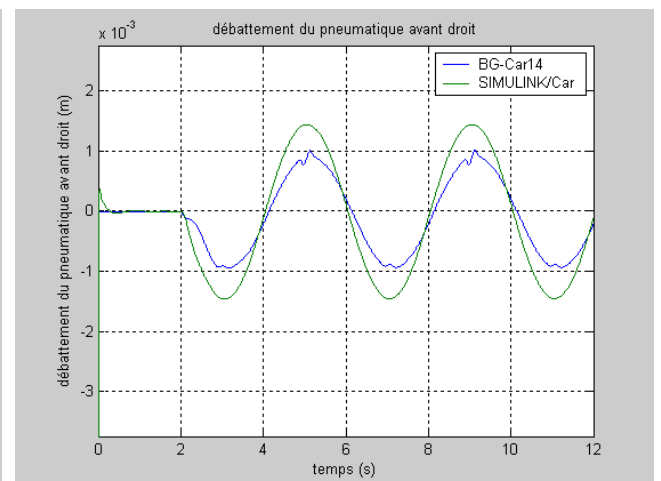


figure A- 145 : Débattement du pneumatique avant droit

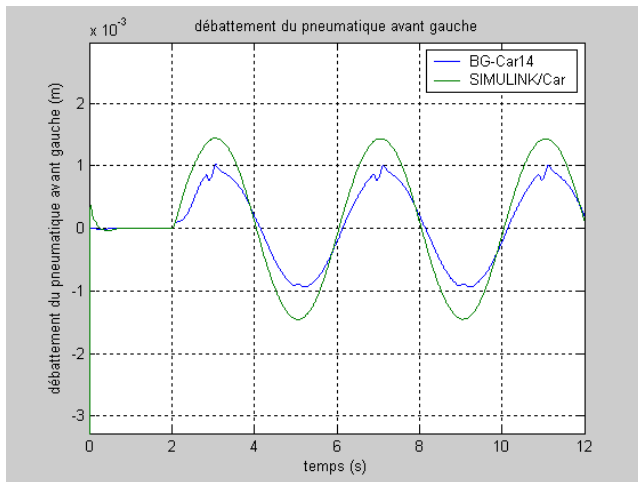


figure A- 146 : Débattement du pneumatique avant gauche

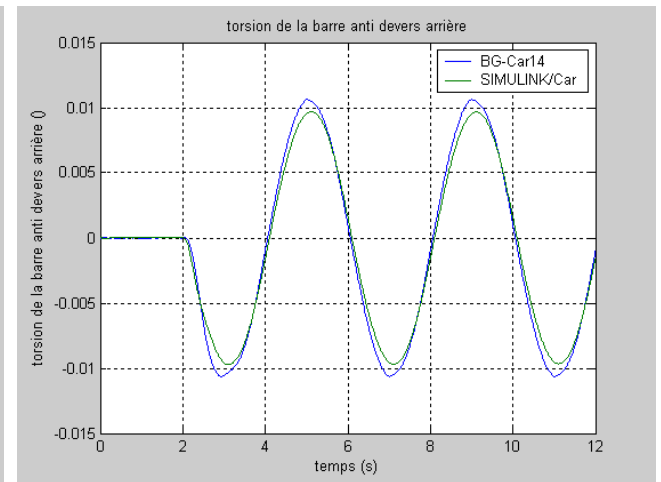


figure A- 147 : Torsion de la barre anti-roulis arrière

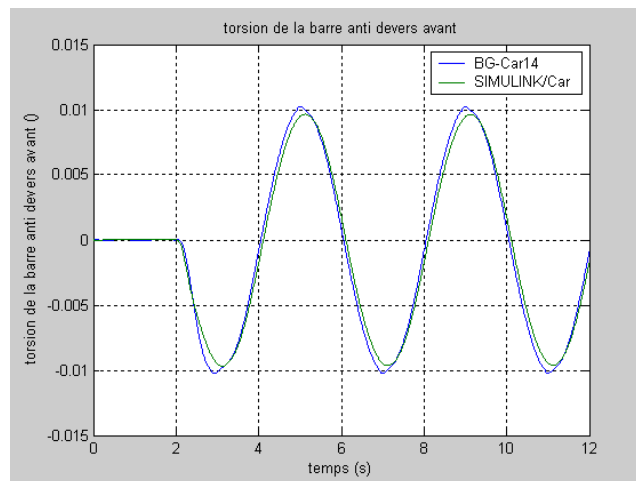


figure A- 148 : Torsion de la barre anti-roulis avant

## D-6 Test de l'élan

Le test de l'élan est un essai fréquemment utilisé dans le domaine automobile, afin de tester la stabilité des véhicule, l'allure de l'angle de braquage est donné figure A- 149.

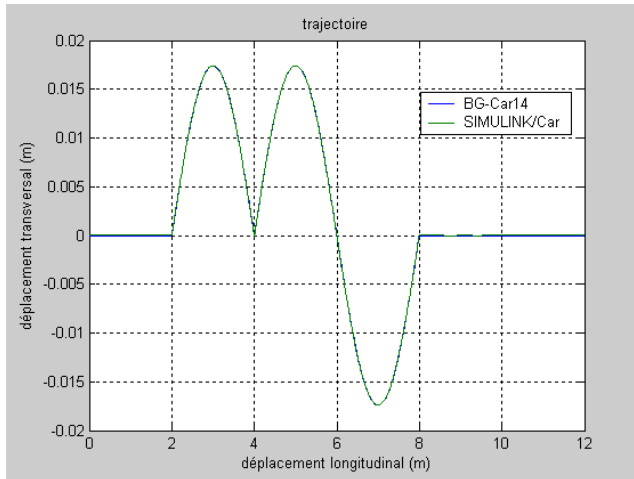


figure A- 149 : Angle de braquage des  
roues avant

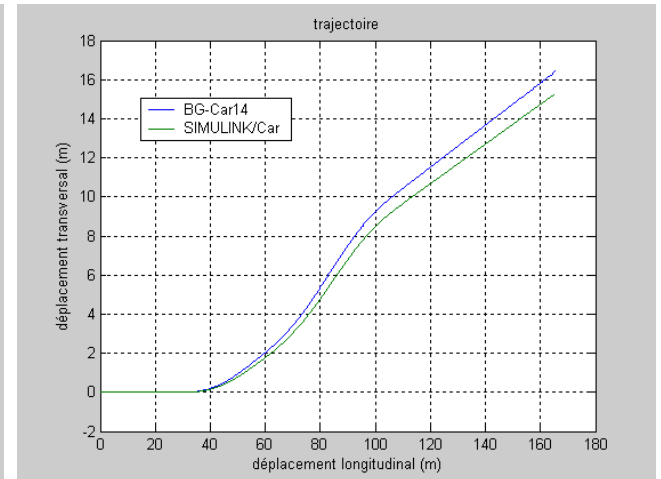


figure A- 150 : Trajectoire

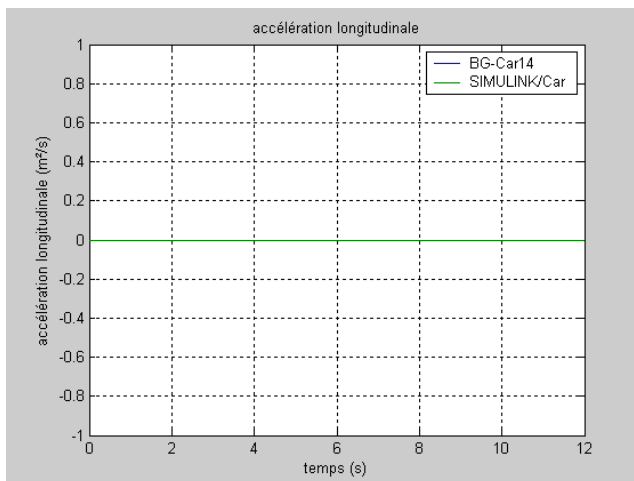


figure A- 151 : Accélération longitudinale

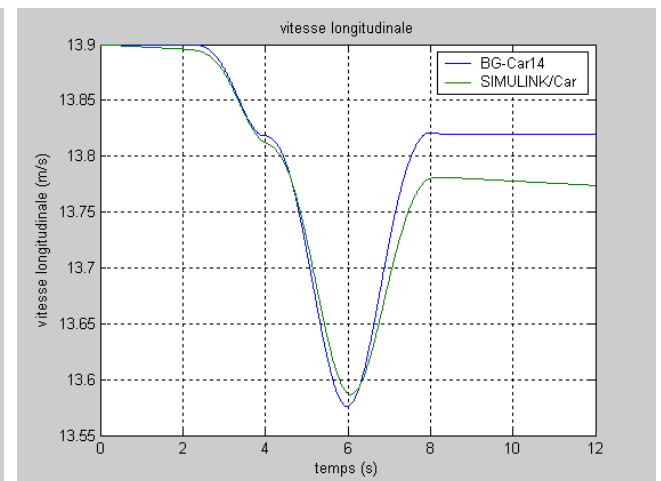


figure A- 152 : Vitesse longitudinale

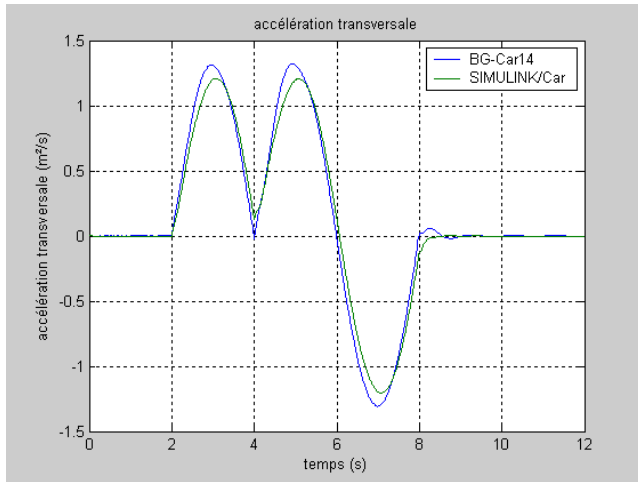


figure A- 153 : accélération transversale

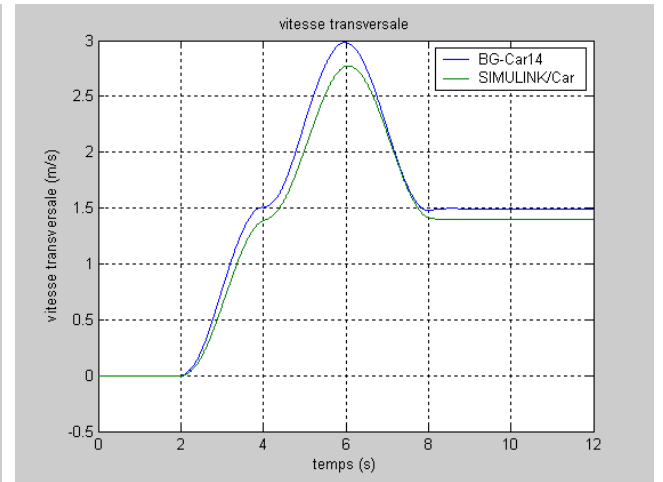


figure A- 154 : Vitesse transversale

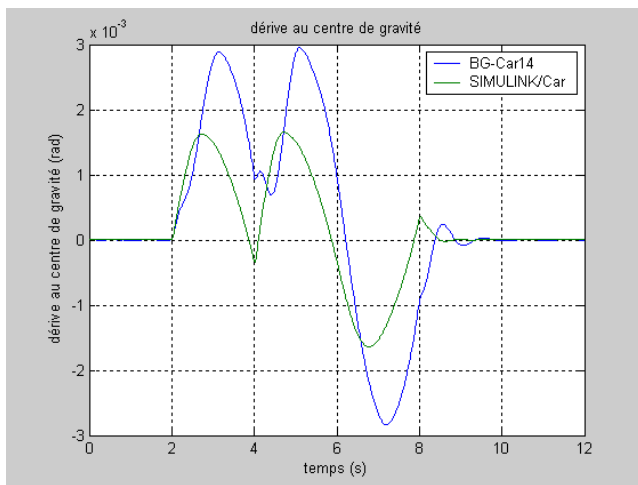


figure A- 155 : Dérive au centre de gravité

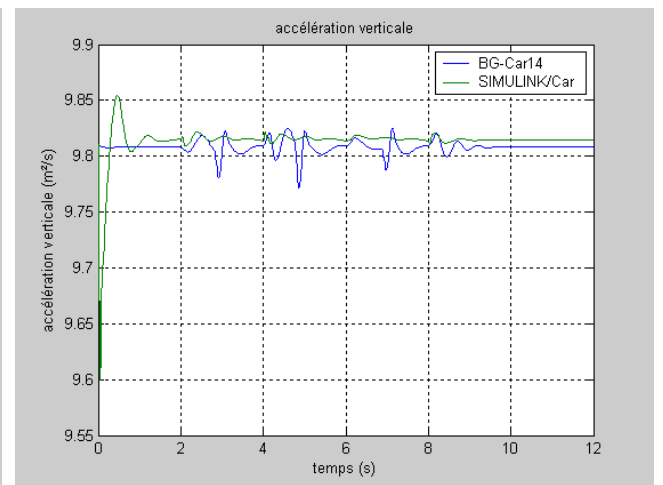


figure A- 156 : Accélération verticale

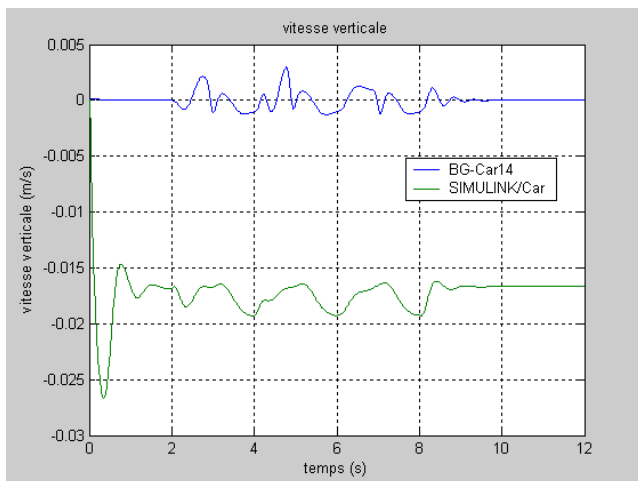


figure A- 157 : Vitesse verticale

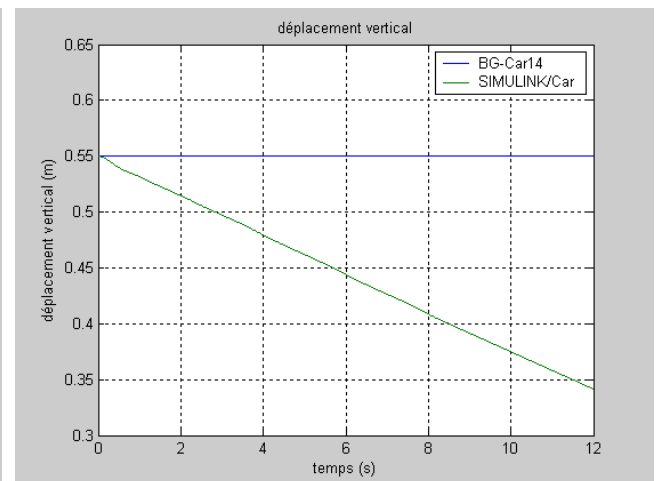


figure A- 158 : Déplacement vertical

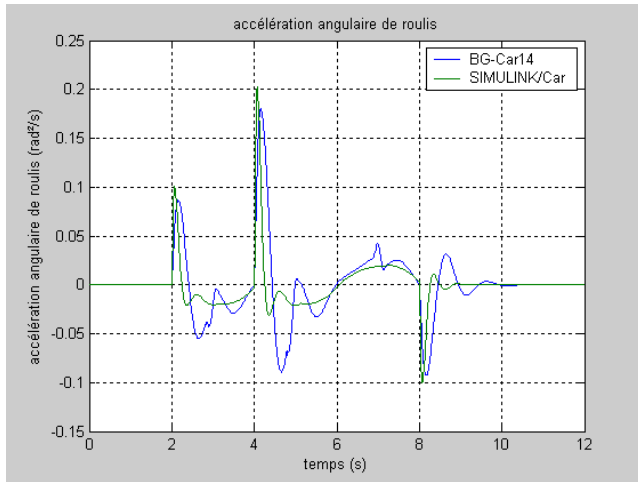


figure A- 159 : Accélération angulaire de roulis

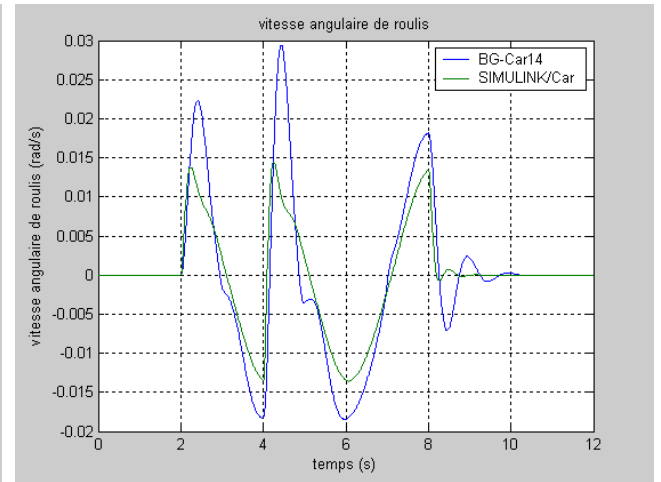


figure A- 160 : Vitesse angulaire de roulis

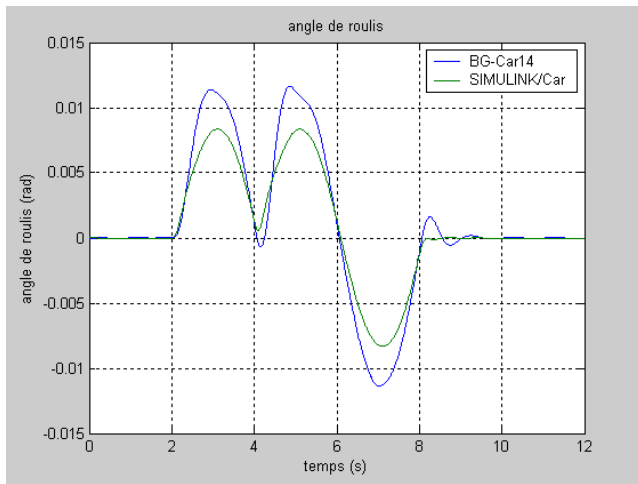


figure A- 161 : Angle de roulis

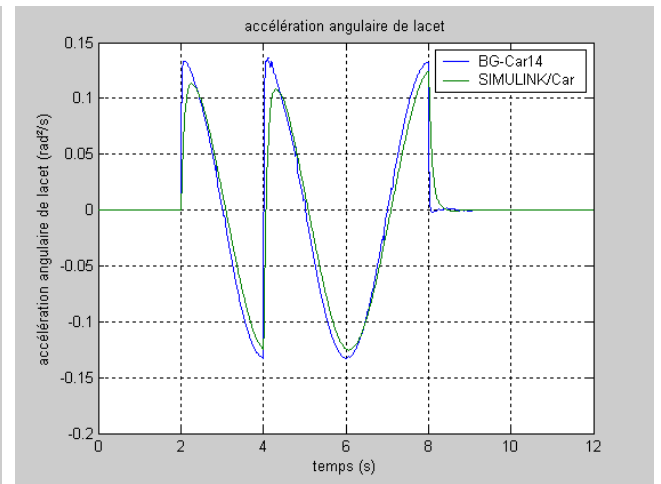


figure A- 162 : Accélération angulaire de lacet

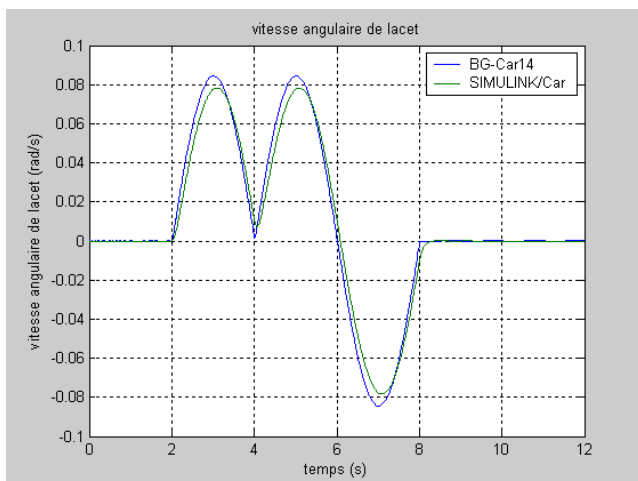


figure A- 163 : vitesse angulaire de lacet

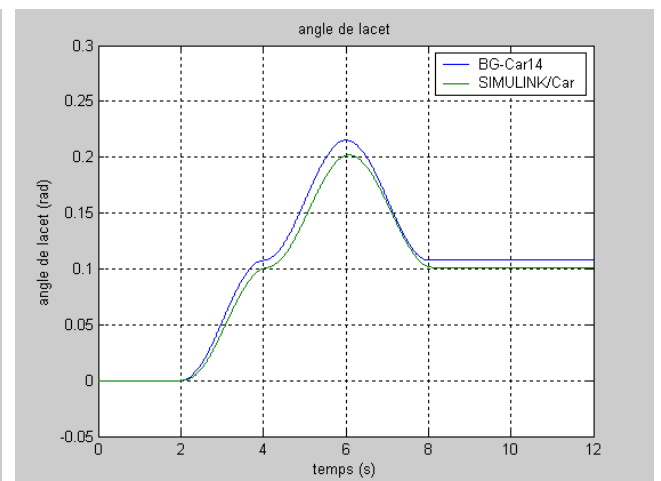


figure A- 164 : Angle de lacet

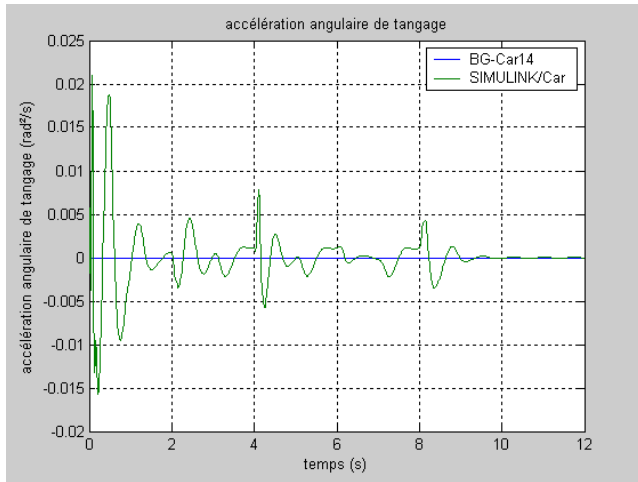


figure A- 165 : Accélération angulaire de tangage

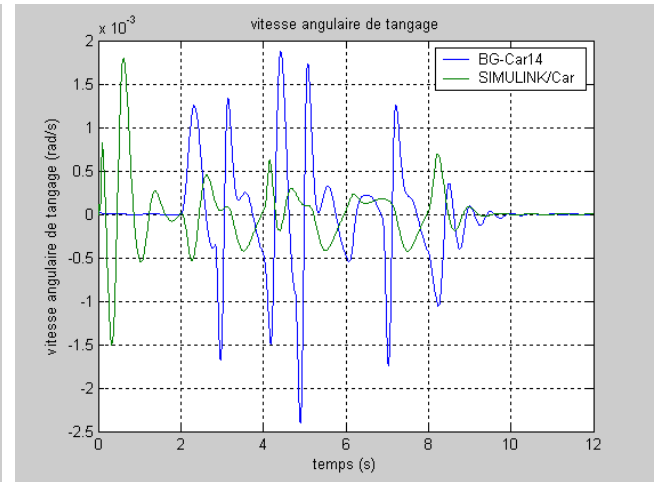


figure A- 166 : Vitesse angulaire de tangage

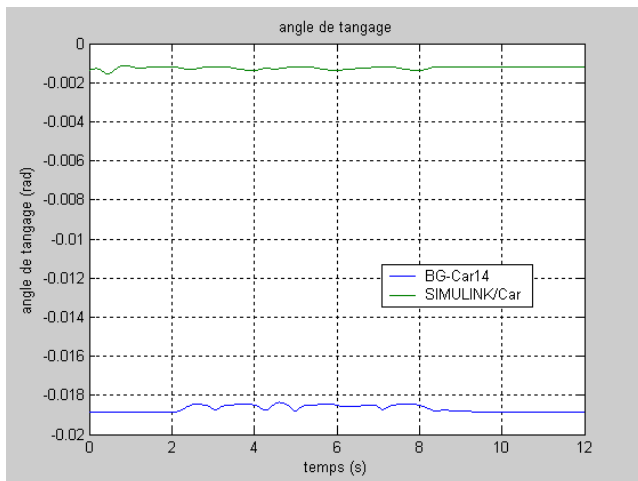


figure A- 167 : Angle de tangage

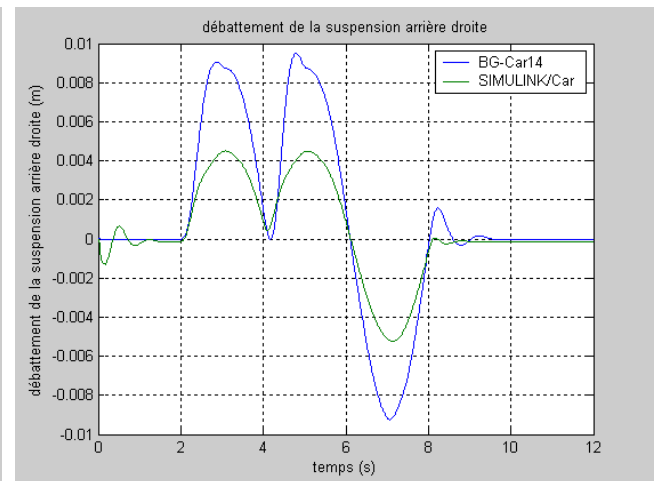


figure A- 168 : Débattement de la suspension arrière droite

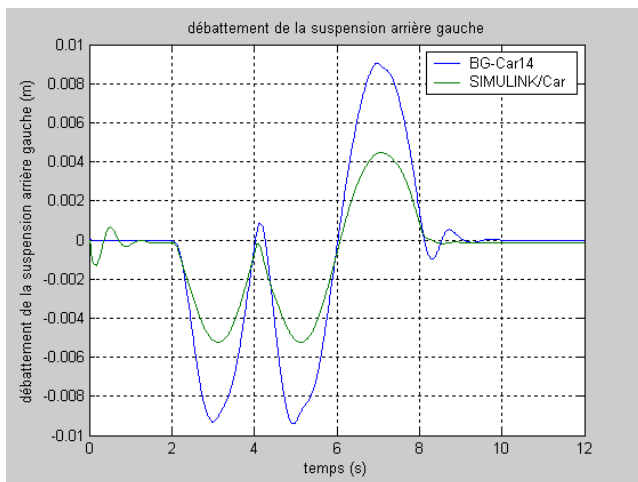


figure A- 169 : Débattement de la suspension arrière gauche

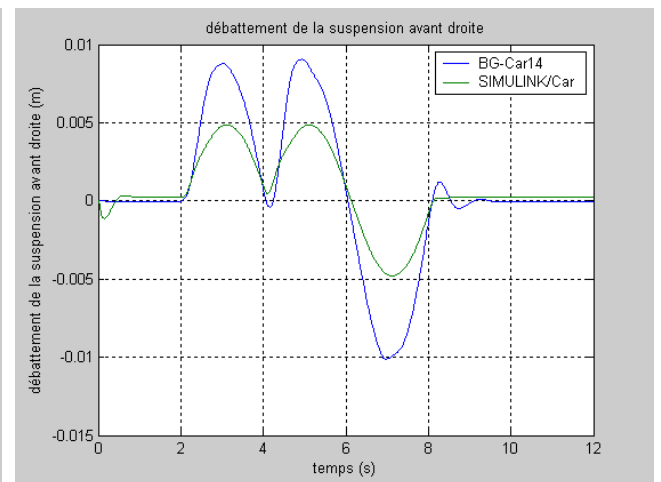


figure A- 170 : Débattement de la suspension avant droite

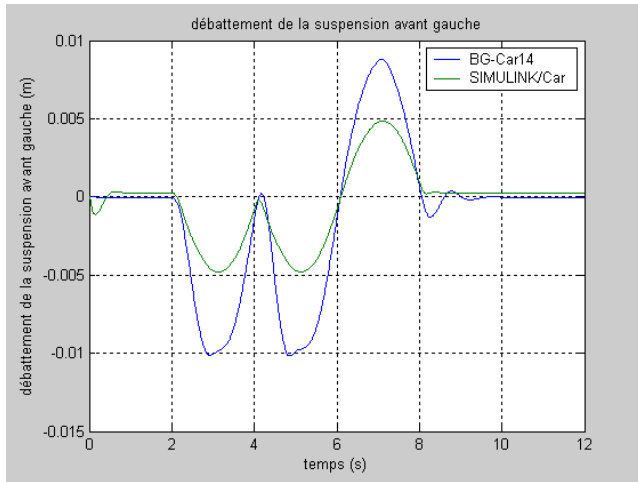


figure A- 171 : Débattement de la suspension avant gauche

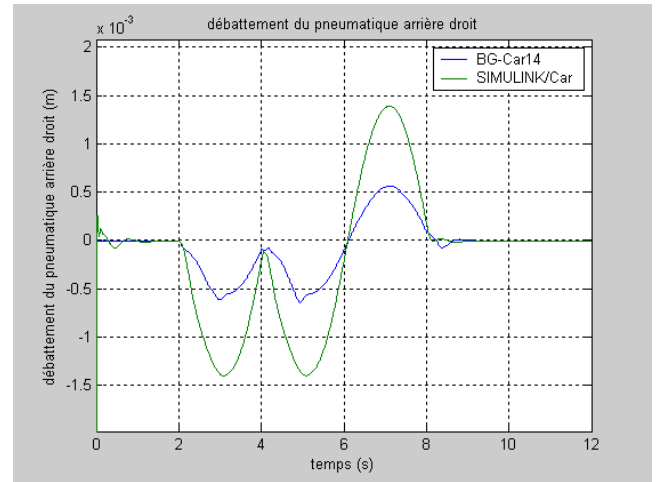


figure A- 172 : Débattement du pneumatique arrière droit

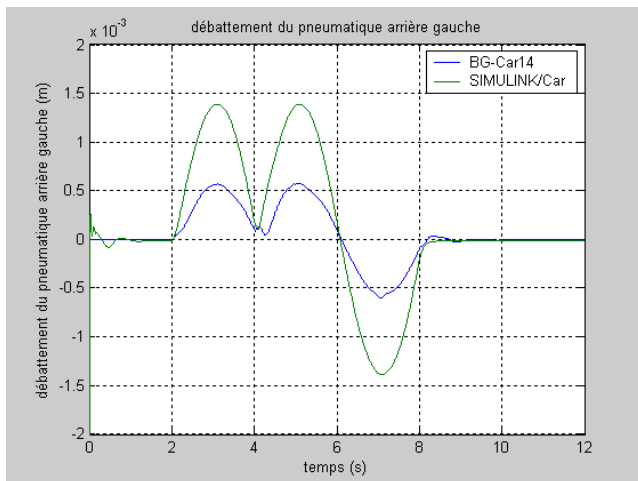


figure A- 173 : Débattement du pneumatique arrière gauche

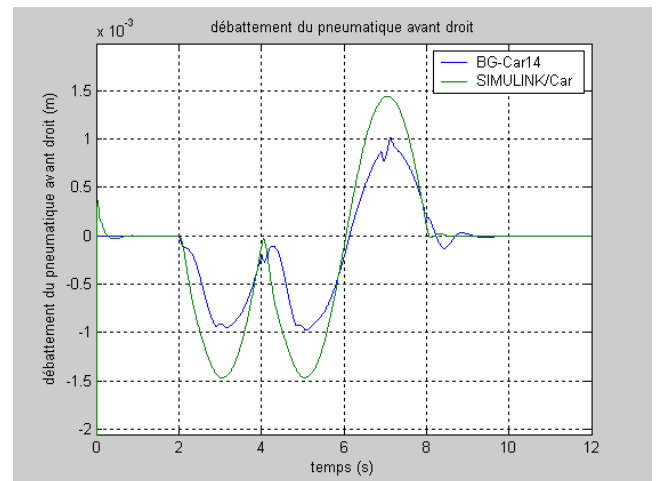


figure A- 174 : Débattement du pneumatique avant droit

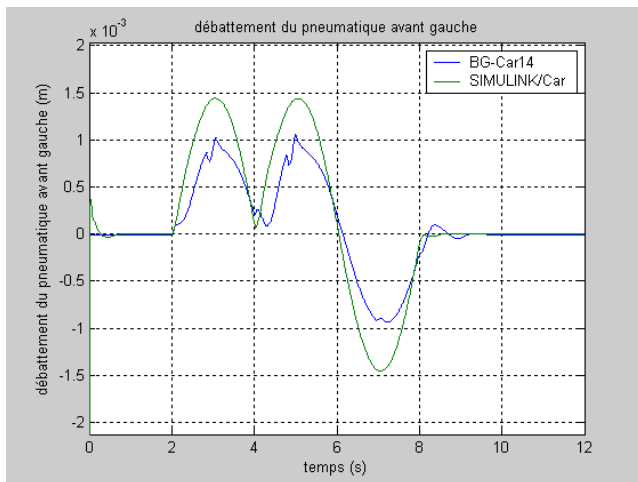


figure A- 175 : Débattement du pneumatique avant gauche

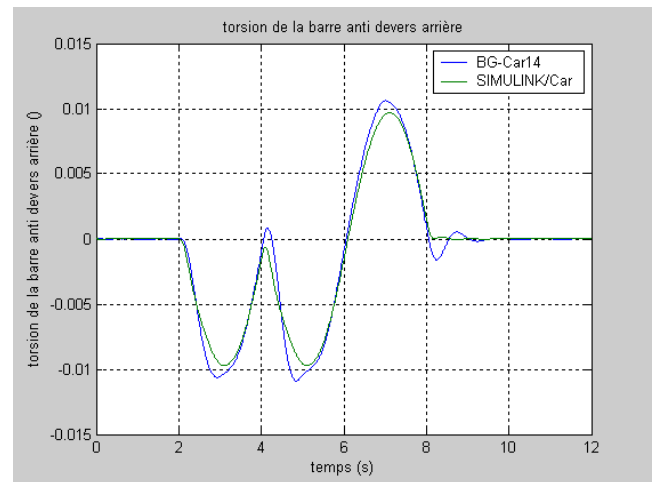


figure A- 176 : Torsion de la barre anti-roulis arrière



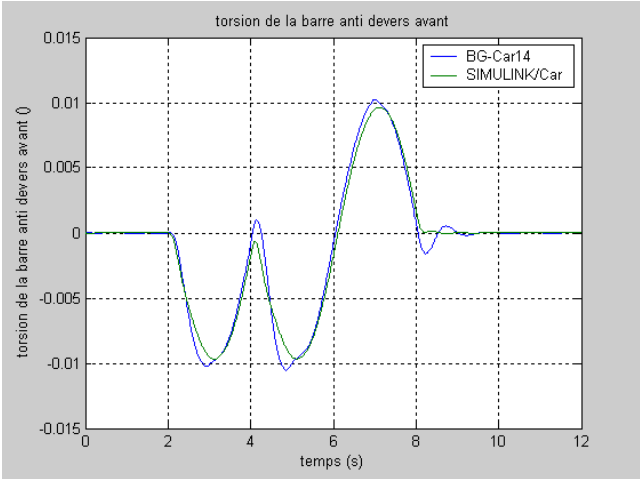


figure A- 177 : Torsion de la barre anti-roulis avant

## Annexe E :

# Réponse du modèle bicyclette à une entrée de commande fixée

Dans cette annexe, nous allons étudier l'influence de la masse et de la position du centre de gravité sur le modèle bicyclette pour différentes variations de la vitesse ( $\Delta V_x = 2.8, 10$  et  $22$  m/s)

Toutes les courbes sont dans l'ordre suivant :

- 2pav-3par-100
- 1pav-1par-100
- 1pav-100
- 2pav-100
- 2pav-2par-28
- 1pav
- 2pav-14

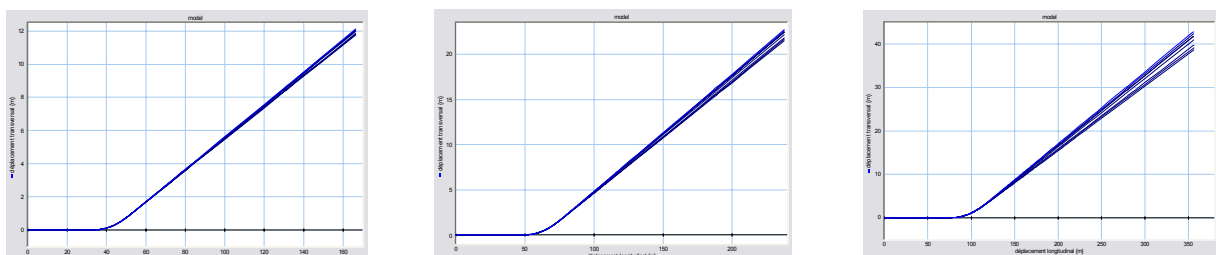


figure A- 178 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur le déplacement transversal du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

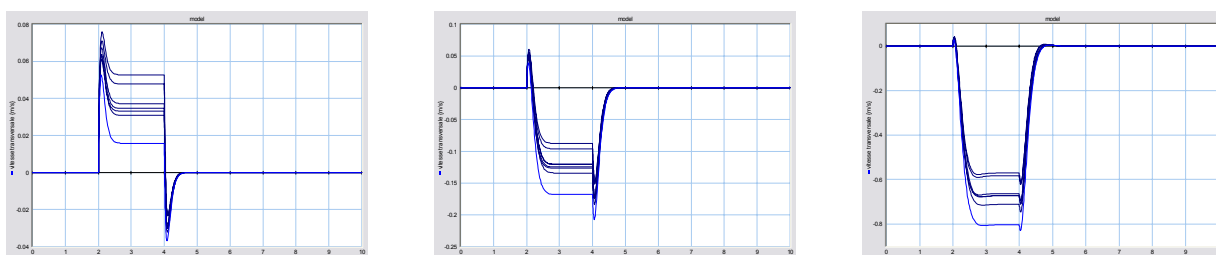


figure A- 179 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la vitesse transversale du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

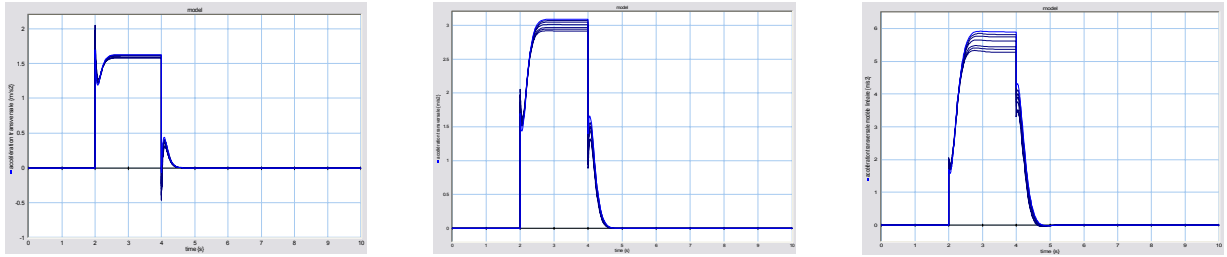


figure A- 180 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'accélération transversale du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

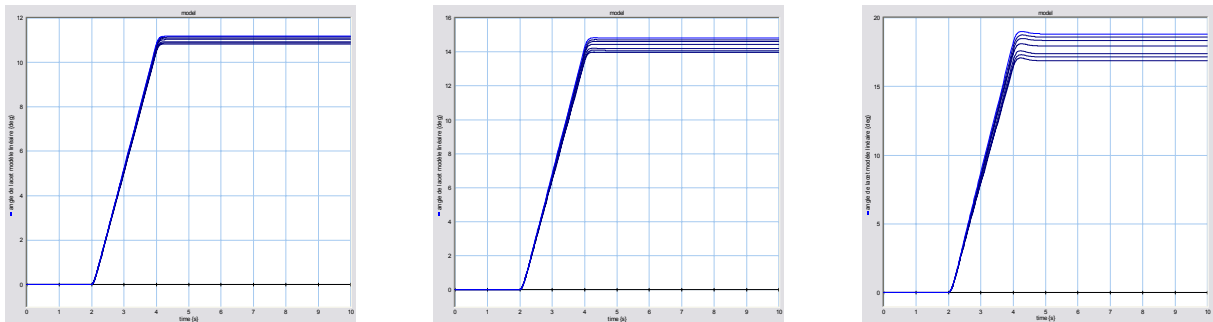


figure A- 181 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'angle de lacet du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

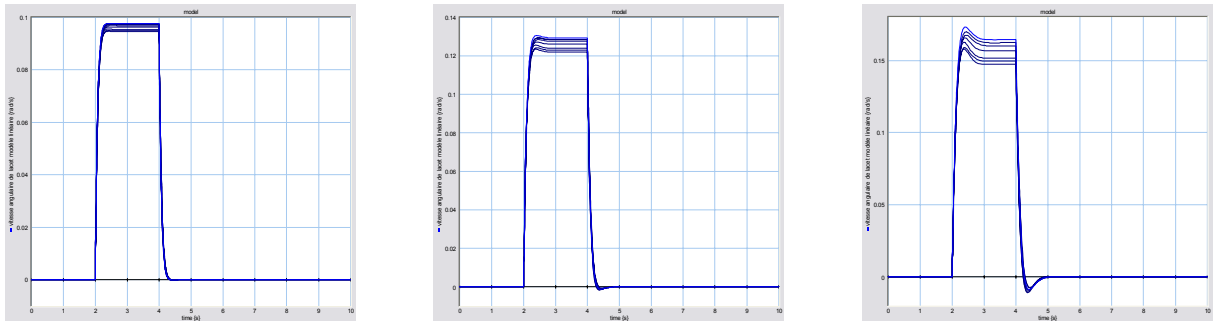


figure A- 182 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la vitesse de lacet du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

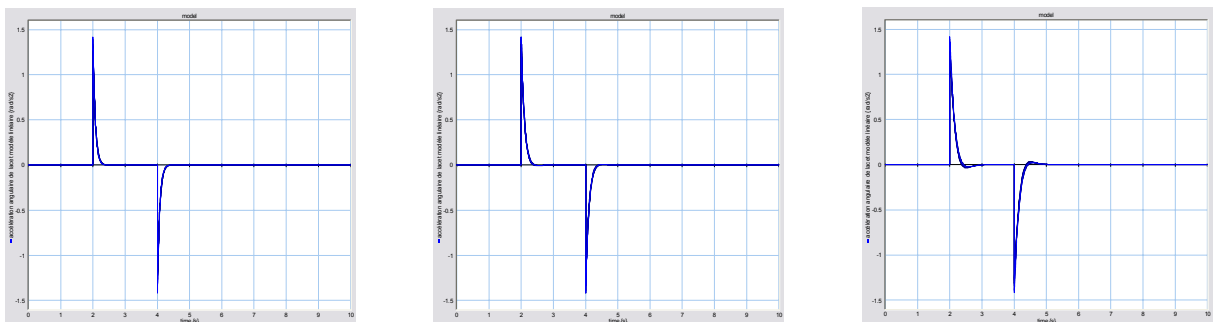


figure A- 183 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur l'accélération de lacet du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

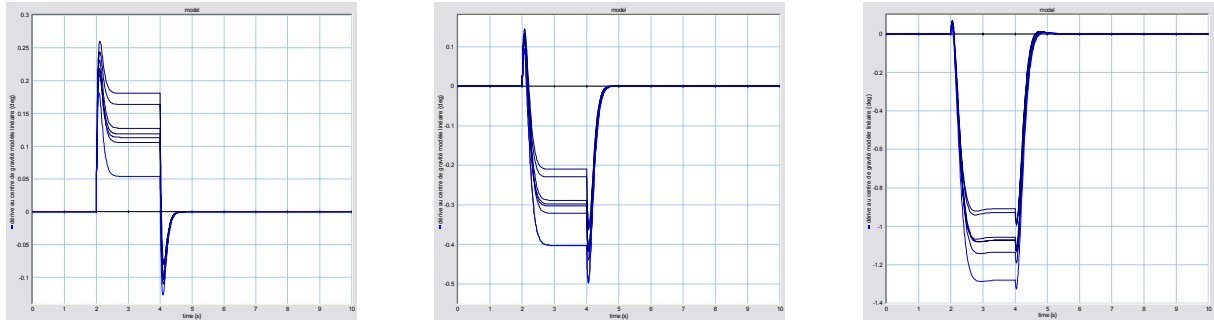


figure A- 184 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la dérive du véhicule – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

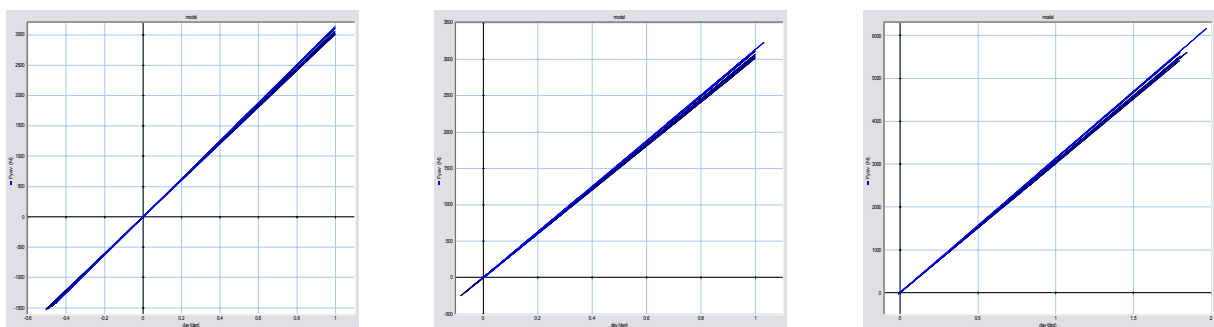


figure A- 185 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la force transversale avant par rapport à la dérive du pneu avant – Différentes vitesses  $\Delta V_x$

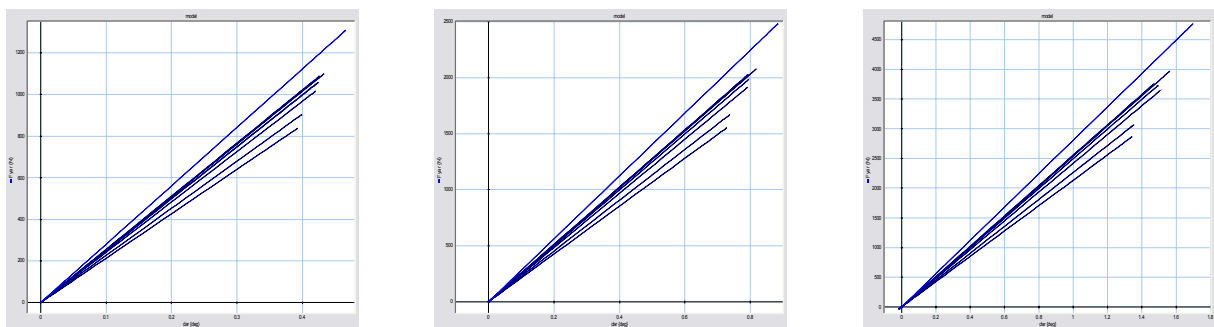


figure A- 186 : Influence de la masse et de la position du centre de gravité sur la force transversale arrière par rapport à la dérive du pneu arrière – Différentes vitesses  $\Delta V_x$



## Annexe F :

# Modélisation bond graph des incertitudes paramétriques

### F-1 Modélisation des composants 1-port

#### F-1.1 Modélisation d'un élément dissipatif de type R

Un élément dissipatif R (résistance, friction, frottement, perte de charge) est caractérisé dans le cas linéaire par son paramètre  $R$ , de valeur nominale  $R_n$  et d'incertitude  $\Delta R$ . L'impédance d'un tel élément noté  $Z_R$  est :

$$Z_R = \frac{e_R}{f_R} = R_n + \Delta R \quad (\text{F-1})$$

Le modèle acausal qui découle de l'expression (F-1) est donné **figure A- 187** :

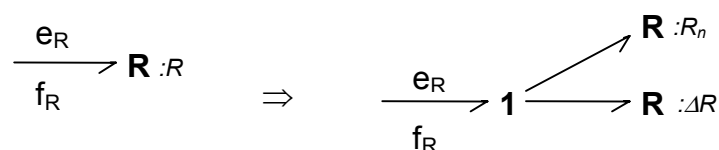


figure A- 187 : Modèle de l'élément R acausal

Dans le cas d'un élément R dont la loi constitutive est non linéaire, une décomposition du composant bond graph en un composant nominal et un composant contenant l'incertitude est faisable dans certains cas bien qu'elle ne soit pas évidente (un exemple est traité pour le modèle bicyclette).

#### F-1.2 Modélisation d'un élément dissipatif de type C

Un élément de type C (capacité, ressort, réservoir) est caractérisé par une impédance  $Z_C$ , composée de la valeur nominale  $C_n$  et de l'incertitude  $\Delta C$ .

$$Z_C = \frac{e_C}{f_C} = \frac{1}{C.s} = \frac{1}{(C_n + \Delta C).s} \quad (\text{F-2})$$

Le modèle acausal qui découle de l'expression (F-2) est donné figure A- 188.

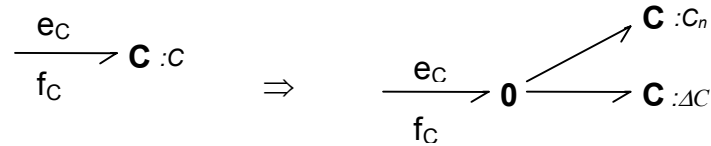


figure A- 188 : Modèle de l'élément C acausal

## F-2 Causalité à affecter aux éléments 1-port : élément R

Les modèles présentés étant acausaux, il est nécessaire de déterminer la causalité à affecter aux différents composants modélisés. L'affectation de la causalité doit respecter les règles des jonctions bond graph, et tenir compte de l'hypothèse 2-1 (paragraphe 2.2).

Deux causalités peuvent être appliquées à l'élément R en fonction de la variable (effort ou flux) connue.

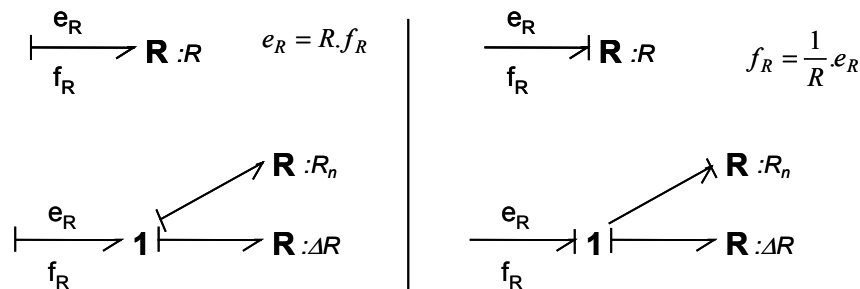


figure A-189 : Modèle de l'élément R causal

Sur la figure A-189(a) (causalité résistance), les deux éléments  $R : R_n$  et  $R : \Delta R$  jouent le même rôle causal, et donc sont causalement connectés de la même manière avec le reste du modèle.

Sur la figure A-189 (b) (causalité conductance), les deux éléments  $R : R_n$  et  $R : \Delta R$  sont causalement connectés, et l'élément  $\Delta R$  ne peut être en relation causale qu'avec l'élément  $R_n$ , ce qui permet à cette étape de dire que les éléments  $R : R_n$  et  $R : \Delta R$  forme une boucle algébrique.

## F-3 Modélisation des composants 2-port

### F-3.1 Modélisation d'un élément TF en causalité 1/m

Les lois caractéristiques de l'élément TF (figure A- 190 :(a)) en causalité 1/m sont :

$$e_2 = \frac{1}{m} \cdot e_1$$

$$f_1 = \frac{1}{m} \cdot f_2$$
(F-3)

En remplaçant le module du transformateur par  $m_n + \Delta m$ , on obtient :

$$e_2 = \left( \frac{1}{m_n} + \frac{1}{\Delta TF} \right) \cdot e_1$$

$$f_1 = \left( \frac{1}{m_n} + \frac{1}{\Delta TF} \right) \cdot f_2$$
(F-4)

avec

$$\Delta TF = \frac{-\Delta m}{m_n \cdot (m_n + \Delta m)}$$

L'équation (F-4) conduit au modèle de la figure A- 190 :b

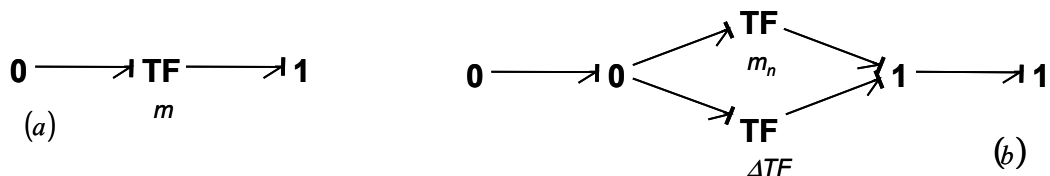


figure A- 190 : Modèle de l'élément TF

### F-3.2 Modélisation d'un élément GY en causalité r

Les lois caractéristiques de l'élément gyrateur (figure A- 191(a)) en causalité  $m$  sont :

$$e_1 = r \cdot f_2$$

$$e_2 = r \cdot f_1$$
(F-5)

En remplaçant le module du transformateur par  $r_n + \Delta r$ , on obtient :

$$e_1 = (r_n + \Delta r) \cdot f_2$$

$$e_2 = (r_n + \Delta r) \cdot f_1$$
(F-6)

L'équation (F-6) conduit au modèle de la figure A- 191(b)

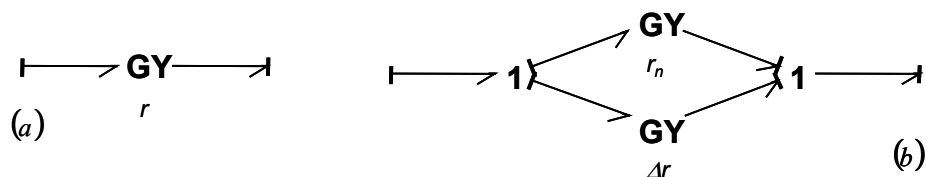


figure A- 191 : Modèle de l'élément GY



### F-3.3 Modélisation d'un élément GY en causalité 1/r

Les lois caractéristiques de l'élément GY (figure A- 192(a)) en causalité 1/r sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{r} \cdot e_2 \\ f_2 &= \frac{1}{r} \cdot e_1 \end{aligned} \quad (\text{F-7})$$

En remplaçant le module du transformateur par  $r_n + \Delta r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \frac{1}{r_n} + \frac{1}{\Delta GY} \right) e_2 \\ f_2 &= \left( \frac{1}{r_n} + \frac{1}{\Delta GY} \right) e_1 \end{aligned} \quad (\text{F-8})$$

avec

$$\frac{1}{\Delta GY} = \frac{-\Delta r}{r_n \cdot (r_n + \Delta r)}$$

L'équation (F-8) conduit au modèle de la figure A- 192(b)

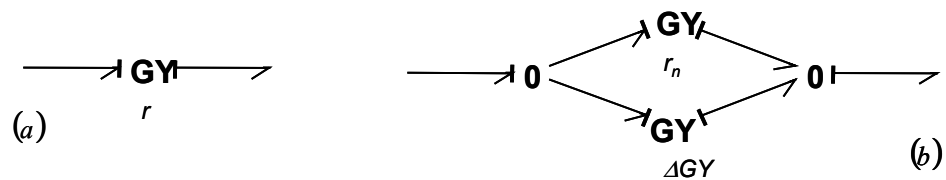


figure A- 192 : Modèle de l'élément GY

## Annexe G :

# Influence des incertitudes sur le comportement dynamique du véhicule

Dans cette annexe, nous allons regrouper les courbes pour lesquelles les paramètres incertains n'ont pas une influence aussi significative que celle donnée dans le corps du document.

### G-1 Trajectoire

#### G-1.1 Influence du déplacement suivant y du centre de gravité

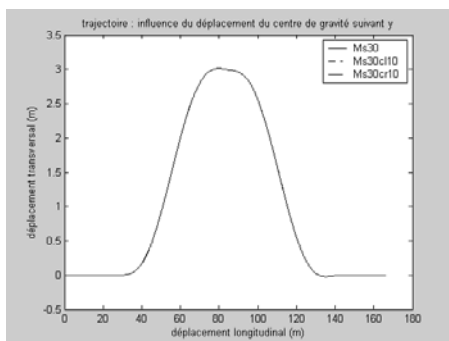


figure A- 193 : trajectoire –  $V_x$  nominale -  
goudron sec

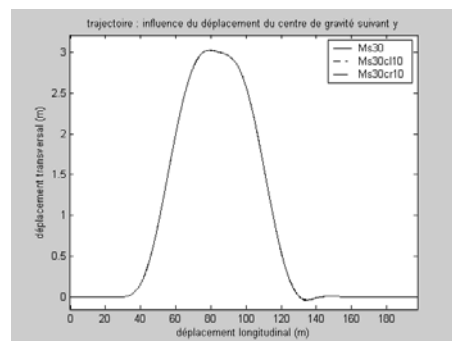


figure A- 194 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s  
– goudron sec

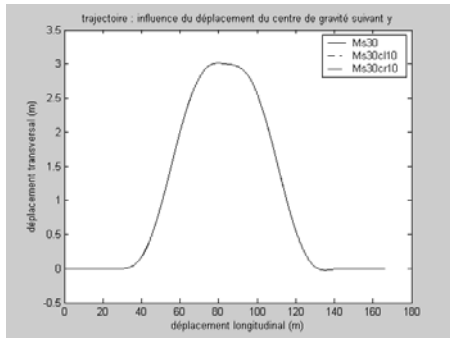


figure A- 195 : trajectoire –  $V_x$  nominale - goudron humide

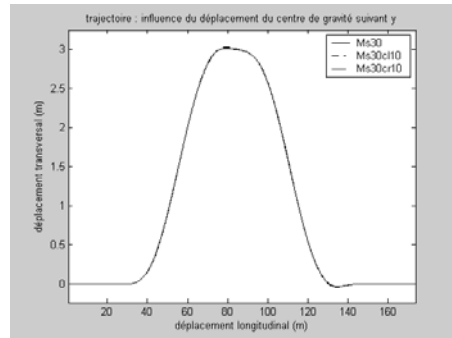


figure A- 196 : trajectoire –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Le déplacement du centre de gravité le long de l'axe transversal ne perturbe pas le suivi de trajectoire.

## G-2 Accélération transversale

### G-2.1 Influence du déplacement suivant y du centre de gravité

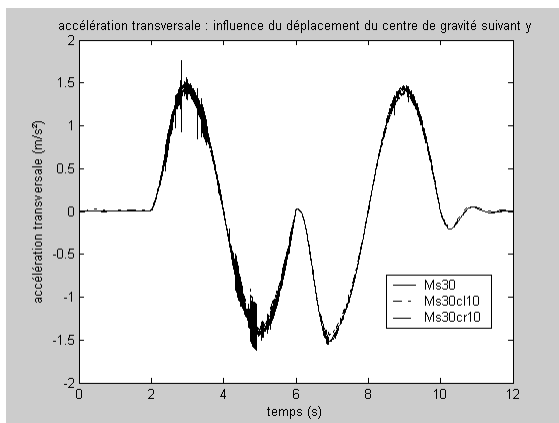


figure A- 197 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron sec

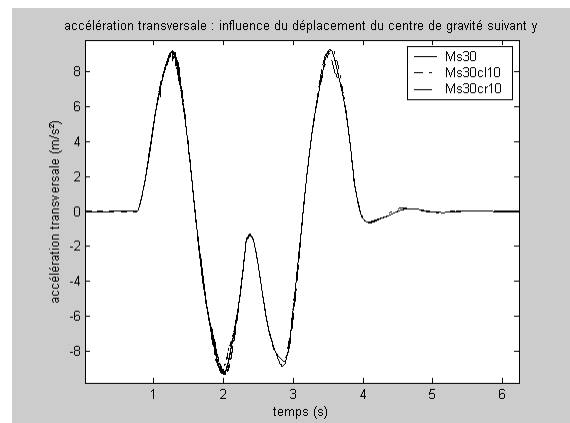


figure A- 198 : accélération transversale -  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron sec

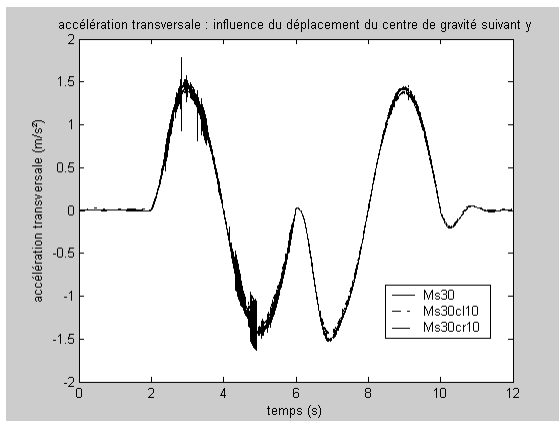


figure A- 199 : accélération transversale -  $V_x$  nominale – goudron humide

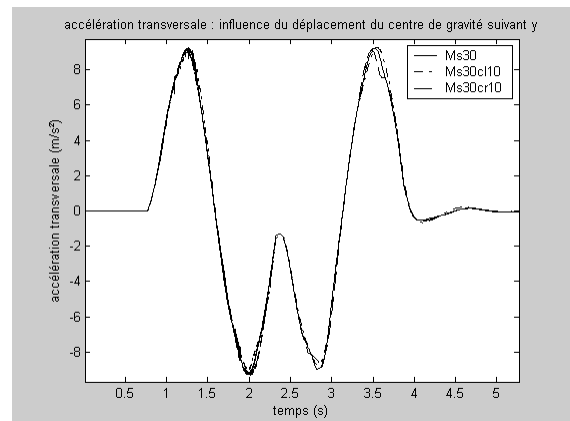


figure A- 200 : accélération transversale -  $\Delta V_x = 22$  m/s – goudron humide

A faible vitesse, le véhicule a la même accélération transversale quelle que soit la configuration de charge. A haute vitesse, des différences se font ressentir, surtout sur goudron humide, où le véhicule peut devenir instable

## G-3 Angle de lacet

### G-3.1 Influence du déplacement suivant y du centre de gravité

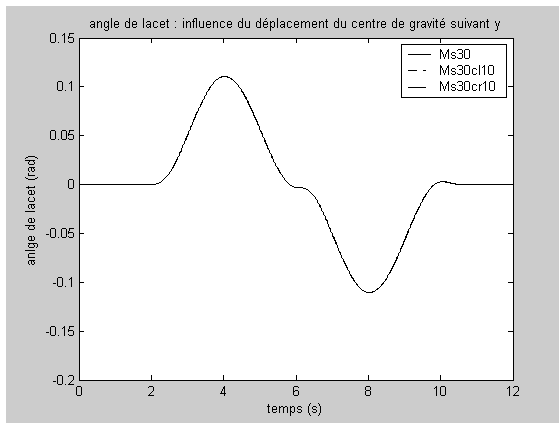


figure A- 201 : angle de lacet –  $V_x$  nominale - goudron sec

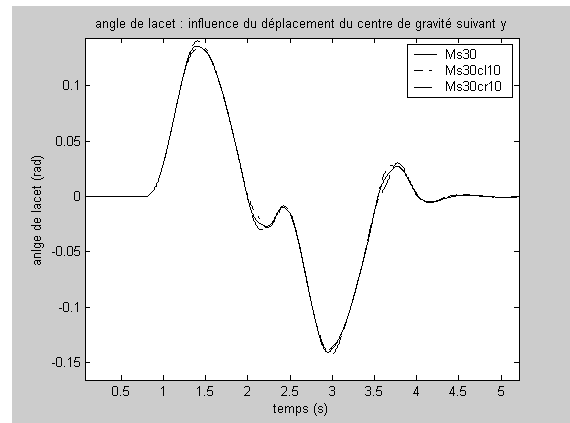


figure A- 202 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron sec

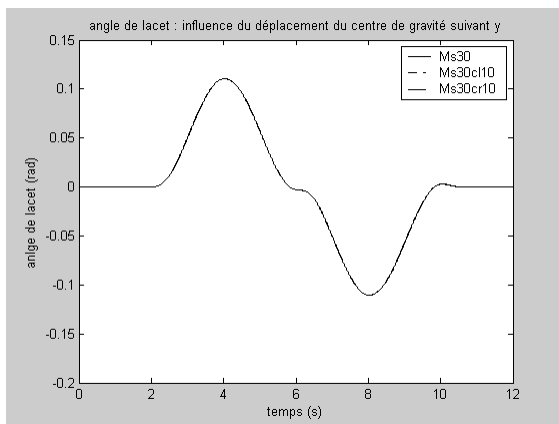


figure A- 203 : angle de lacet –  $V_x$  nominale - goudron humide

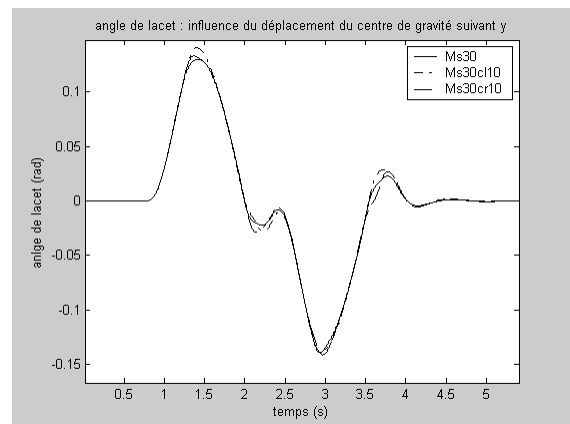


figure A- 204 : angle de lacet –  $\Delta V_x = 22$  m/s - goudron humide

Le déplacement du centre de gravité suivant l'axe transversal n'influence pas beaucoup l'angle de lacet. Seule la configuration haute vitesse (figure A- 202 et figure A- 204) implique des écarts suivant le déplacement du centre de gravité.

## G-4 Dérive avant

### G-4.1 Influence du déplacement suivant x du centre de gravité

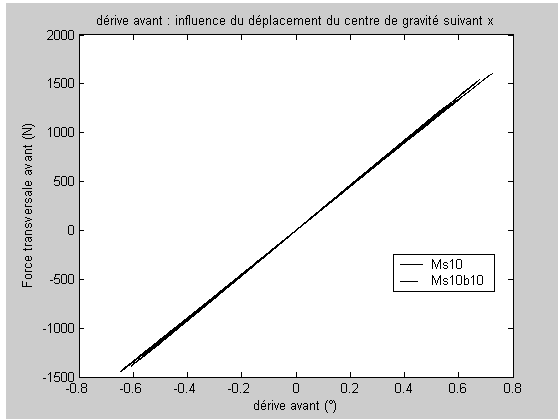


figure A- 205 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron sec

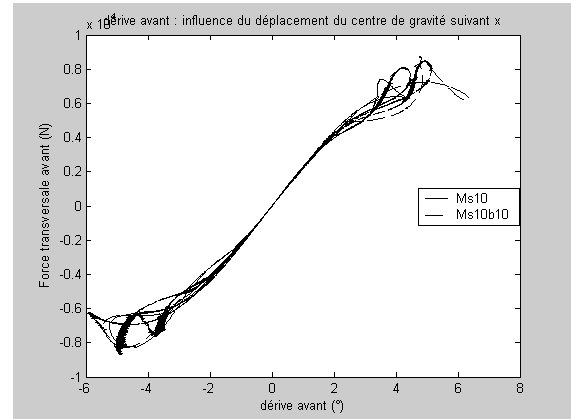


figure A- 206 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$   
m/s - goudron sec

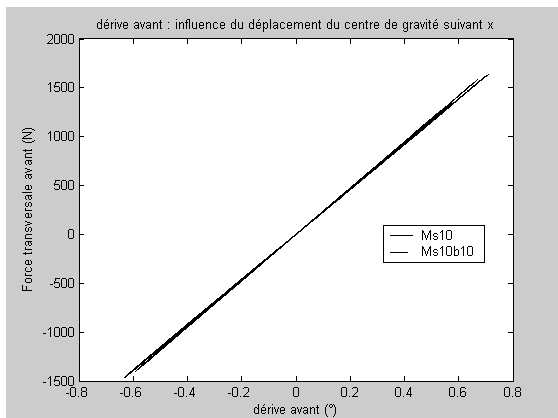


figure A- 207 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron humide

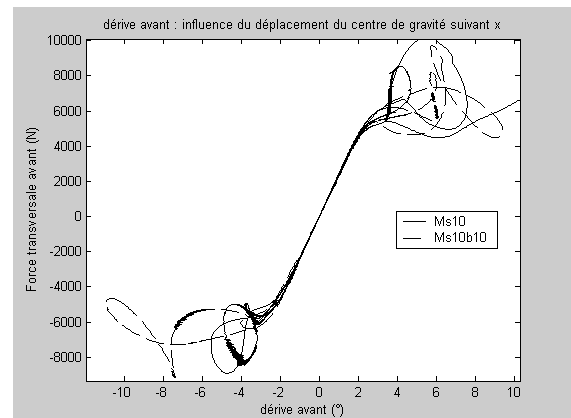


figure A- 208 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$   
m/s - goudron humide

La pente de la courbe force transversale par rapport à la dérive diminue quand le centre de gravité du véhicule recule. Pour les hautes vitesses (figure A- 206 et figure A- 208), nous pouvons faire les mêmes constatations que précédemment.

## G-4.2 Influence du déplacement suivant y du centre de gravité

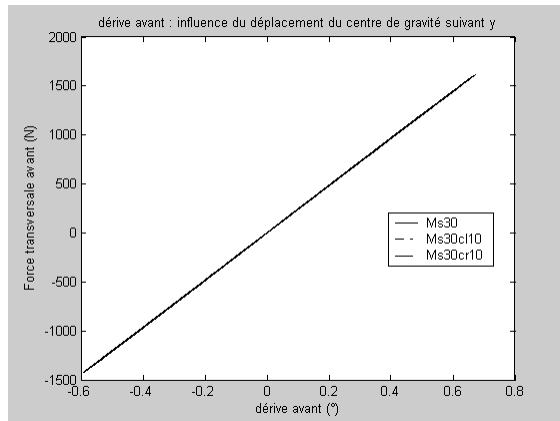


figure A- 209 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron sec

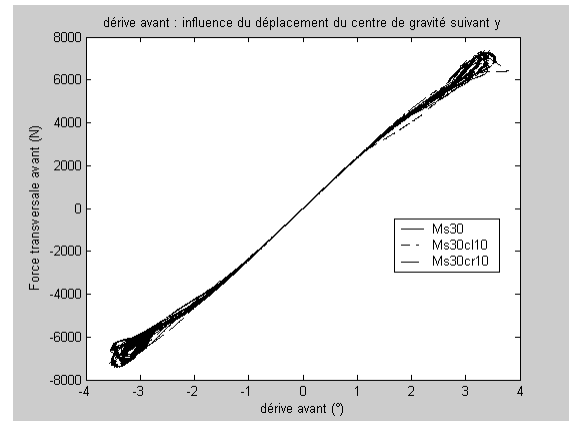


figure A- 210 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$   
m/s - goudron sec

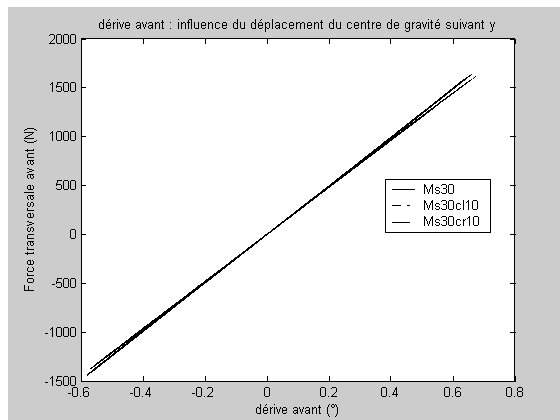


figure A- 211 : dérive avant –  $V_x$  nominale  
- goudron humide

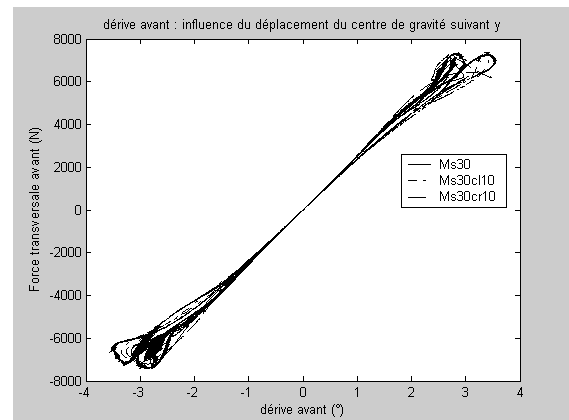


figure A- 212 : dérive avant –  $\Delta V_x = 22$   
m/s - goudron humide

Nous pouvons remarquer le même comportement que précédemment. Quand le centre de gravité se déplace vers la gauche, la pente de la courbe diminue, et inversement quand le centre de gravité se déplace vers la droite.



# Bibliographie

- [Alazard et al., 1999] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres. *Robustesse et Commande Optimale*. Cépadués- Editions, France, 1999
- [Bakker and al., 1987] E. Bakker, L. Nyborg, H.B. Pacejka. *Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies*. In SAE Paper n°1987-870421, 1987.
- [Bakker and al., 1989] E. Bakker, H.B. Pacejka, L. Linder. *A new tire model with an application in vehicle dynamics studies*. SAE Transaction, vol. 98, no. 6, pages 101–113, 1989.
- [Bernard 77] J.E. Bernard, L. Segel, R.E.Wild. *Tire Shear Force Generation During Combined Steering and Braking Maneuvers*. SAE Transaction, vol. 8, pages 2935–2969, 1977.
- [Bernard, 1995] Bernard, *Tyre Modelling for Low-speed and High-speed Calculations*, SAE paper n° 950311, 1995.
- [Borutzky et Granda, 2001] W. Borutzky, J. Granda. *Determining sensitivity from incremental true bond graph*. ICBGM 2001. Phoenix-USA, pages 3-8.
- [Breedveld, 1984a] P. Breedveld. *A bond graph algorithm to determine the equilibrium state of a system*. Journal of the Franklin Institute, vol 318, Issue 2, pp 71-75, August 1984.
- [Breedveld, 1984b] P. Breedveld. *Physical systems theory in terms of bond graphs*. PhD thesis, University of Enschede, The Netherlands, 1984.
- [Burckhardt, 1993] M. Burckhardt, *Fahrwerktechnik Rad schlupf Regelsysteme*, Vogel Buchverlag, Regensburg, Germany, 1993.
- [Cabanellas et al., 1995] J.M. Cabanellas, J. Félez, C. Véra. *A formulation of the sensitivity analysis for dynamic systems optimisation based on pseudo bond graph*. ICBGM 1995, pages 135-144.
- [Canudas de Wit and al., 1995] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Åström, P. Lischinsky, *A New Model for Control of System with Friction*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 40, No. 3, pp. 419-425, 1995.
- [Canudas de Wit and Horowitz, 1999] C. Canudas de Wit & R. Horowitz. *Observer for Tire/road Contact Friction using only wheel angular velocity information*. In 38th CDC'99, 1999.
- [Canudas de Wit and Triotras, 1999] C. Canudas de Wit, P. Triotras, *Dynamic Tire Friction Models for vehicle traction*, 38th IEE-CDC, 1999.



- [Captain 90] K.M. Captain, A.B. Boghani & D.N. Wormley. *Analytical Tire Models for Dynamic Vehicle Simulation*. Vehicle System Dynamic, vol. 8, pages 1–32, 1990.
- [Chou, 2002] H. Chou, *Contribution au contrôle globale de châssis*. Thèse de l'Ecole des Mines de Paris, 2002.
- [Dahl, 1976] P.R. Dahl, *Solild Friction Damping of Mechanical Vibration*, AIAA Journal, Vol. 14, No. 12, pp. 1675-1682, 1976.
- [Dauphin-Tanguy and Kam, 1999] G. Dauphin-Tanguy, C.S. Kam, *How to model parameter uncertainties in a bond graph framework*. WMC SCS, ESS'99, October 1999, Erlangen, Germany, 121-125.
- [Dauphin-Tanguy, 2000] G. Dauphin-Tanguy, *Les Bond Graphs*, Paris, France, 2000.
- [Dauphin-Tanguy and al, 2003] G. Dauphin-Tanguy, C.S. Kam; P. Kubiak. *Uncertainties in Multiport Elements*, ICBGM 2003, Orlando (Florida), January 2003, pp. 32-38.
- [Dauphin-Tanguy and al, 2005] G. Dauphin-Tanguy, C. Niesner, F. Guillemard, M. Pengov, *Symbolic Determination of the Steady State due to Gravity Effects on Mechanical Systems Modelled by Bond Graph*, ICBGM 2005, New Orleans (Louisiana), January 2005, vol 37 n°1 pp. 101-106.
- [Deur, 2001] J. Deur. *Modeling and Analysis of Longitudinal Tire Dynamics Based on the LuGre Friction Model*. In IFAC Workshop in Advances Automotive Control, Karlsruhe, Germany, 2001.
- [DiStephano et al., 1967] J. DiStepano, R. Allen, I. Stubberud, W. J. (1967). *Theory and problems of feedback and control systems*. Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Compagny.
- [Dihua, 1999] G. Dihua, *Modeling of tyre Cornering Properties with Experimental Model Parameters*, SAE paper n°1999-01-07, 1999.
- [Director and Rohrer, 1968] S. W. Director, R. A. Rohrer. *On the efficient computation of first-order network sensitivities (for frequency domain studies of lumped, linear, time-invariant networks)*. Second IFAC 1968, System sensitivity and adaptivity, Dubrovnik, Yugoslavia, pages B.54-B.69.
- [Dorato, 1968] P. Dorato, *Noise-intensity sensitivity in optimal stochastic systems*. Second IFAC 1968, System sensitivity and adaptivity, Dubrovnik, Yugoslavia, pages C.52-C.58.
- [Doyle, 1979] J.C. Doyle. *Robustness of multiloop linear feedback systems*. 17<sup>th</sup> IEEE CDC, 1979, pages 12-19.
- [Doyle et al., 1989] J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar. *State space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems*. IEEE transaction on aut. Control. 1989, AC-34:831-847.
- [Duc et Font, 1999] G. Duc, S. Font. *Commande H et m-analyse, des outils pour la robustesse*. Hermès, France, 1999.
- [Dugoff and al., 1970] H. Dugoff, P.S. Fancher, L Segel. *An Analysis of Tire Traction Properties and Their Influence on Vehicle Dynamic Performance*. SAE Transaction, vol. 3, pages 1219–1243, 1970.
- [El Hadri, 2001] A. El Hadri, *Modélisation de Véhicules, observation d'état et estimation des forces pneumatiques: Application au contrôle longitudinal*. Thèse de l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, 2001

- [Frank, 1978] P.M. Frank, *Introduction to system sensitivity theory*. Academic press, 1978. New York
- [Gawthrop, 1995] P.J. Gawthrop. *Bicausal Bond Graphs*. ICBGM'95, Las Vegas (USA), January 1995, vol. 27, n° 1, pp 83-88.
- [Gawthrop, 2000a] P.J. Gawthrop. *Sensitivity bond graph*. Journal of the Franklin Institute, 2000, 337(7):907-922.
- [Gawthrop, 2000b] P.J. Gawthrop. *Estimation of mechatronic systems using sensitivity bond graph*. IFAC, 2000, Daimstadt, Germany, pages 893-897.
- [Gawthrop et Ronco, 2000a] P.J. Gawthrop, E. Ronco. *A sensitivity bond graph approach to estimation and control of mechatronic systems*. Control Engineering Practice, 2000, 8(11):1237-1248.
- [Gim and Nikraves, 1990] G. Gim, P.E. Nikraves. *An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulations Part1: Pure Slips*. Int J. Vehicle Design, vol. 11, no. 6, pages 589–618, 1990.
- [Gim and Nikraves, 1991] G. Gim, P.E. Nikraves. *An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulations Part2: Comprehensive slips*. Int J. Vehicle Design, vol. 12, no. 1, pages 19–38, 1991.
- [Guo, 2000] K. Guo, *A Non-Steady and Non-Linear Model Under Large Lateral Slipe Condition*, SAE paper n°2000-01-0358, 2000.
- [Hanin, 2002] J.C. Hanin, *SIMULINK/Car, Modèles Dynamiques simplifiés de Véhicule, Version 2.4*, Rapport Interne PSA/Peugeot/Citroën, sep. 2002.
- [Kam, 2001] C.S. Kam. *Les bond graphs pour la modélisation des systèmes linéaires incertains*. Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, 2001.
- [Kam and Dauphin-Tanguy, 2001a] C.S. Kam and G. Dauphin-Tanguy. *Bond graph for standard interconnection structure determination*. ICBGM, 2001, January, Phoenix-Arizona, USA, pages 33-38.
- [Kam and Dauphin-Tanguy, 2001b] C.S. Kam and G. Dauphin-Tanguy. *Sensitivity function determination on a bond graph model*. WMC SCS, ESS 2001, October, Marseille, France, pages 735-739.
- [Kam and Dauphin-Tanguy, 2005] C.S. Kam and G. Dauphin-Tanguy, *Bond graph models of structured parameter uncertainties*. Journal of the Franklin Institute, Volume 342, Issue 4, July 2005, Pages 379-399, 2005
- [Karnopp 1977] D.C. Karnopp. *Power and energy in linearized physical systems*. Journal of the Franklin Institute, Vol. 303, No.1, pp. 85-97, Janvier 1977.
- [Karnopp and Rosenberg, 1975] D.C. Karnopp, R. Rosenberg, *System Dynamics: a unified approach*. John Wiley and Sons, 1975.
- [Kiencke and Nielson, 2000] U. Kiencke, L. Nielson, *Automotive Control System*, Springer, 2000.
- [Livingston and Brown, 1969] D.I. Livingston, J.E. Brown. *Physics of the Slipping Wheel,I: Force and Torque Calculation for Various Pressure Distributions*. Rubber chemistry and technology, vol. 42, no. 1, 1969.
- [Livingston and Brown, 1970] D.I. Livingston, J.E. Brown. *Physics of the Slipping Wheel,II: Slip under Both Tractive and Lateral Forces*. Rubber chemistry and technology, vol. 43, no. 2, 1970.

- [Mancosu 1999] F. Mancosu, *A New Mathematical-Physical Model for Handling Optimization on a Vehicle*, SAE paper n° 1999-01-0789, 1999.
- [Maurice and Pacejka, 1997] J.P. Maurice, H.B. Pacejka. *Relaxation Length Behavior of Tyres*. Vehicle System Dynamics Supplement, vol. 27, pages 239–242, 1997.
- [Margolis and Asgari, 1991] D. Margolis, J. Asgari, *Multipurpose Models of Dynamics for Controller Design*, SAE Technical Paper No. 911927, 1991.
- [Margolis and Shim, 2001] D. Margolis, T. Shim, *A bond graph model incorporating sensors, actuators, and vehicle dynamics for developing controllers for vehicle safety*, Journal of Franklin Institute 338 (2001) 21-34.
- [Middleton et Goowin, 1990] H. Middleton, R. Goowin, *Digital control and estimation: a unified approach*. Prentice Hall, 1990, a division of Simon & Schuster, Englrwood cliffs, New Jersey.
- [Miliken, 1995] W.F. Miliken, *Race Car Vehicle Dynamics*, SAE International, USA, 1995.
- [Morton, 1985] B.G. Morton. *New application of mu to real-parameter variation problems*. Proceeding of 24<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, 1985, pages 233-238.
- [Niesner et al., 2004] C. Niesner, G. Dauphin-Tanguy, F. Guillemard, M. Pengov. Sensibilité à l'incertitude paramétrique, une approche bond graph. CIFA 2004, Douz (Tunisie), novembre 2004.
- [Niesner et al., 2005a] C. Niesner, G. Dauphin-Tanguy, D. Margolis, F. Guillemard, M. Pengov, (2005) *A 4 Wheel Vehicle Bond Graph Model Including Uncertainties on the Car Mass and the Centre of Mass Position*, ICBGM 2005, New Orleans (Louisiana), January 2005, vol 37 n°1 pp. 179-184.
- [Niesner et al., 2005b] C. Niesner, G. Dauphin-Tanguy, F. Guillemard, M. Pengov, (2005). *LFT forms for the  $\mu$ -analysis in case of dependent uncertain parameters in bond graph models*. IMAACA 2005, Marseille (France), October 2005.
- [Pacejka, 1979] H. Pacejka, *Tyre Factor and Vehicle Handling*, Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 1, No. 1, 1979, pp. 1-23.
- [Pacejka, 1981] H.B. Pacejka. *In-Plane and Out-of-Plane Dynamics of Pneumatic Tyres*. Vehicle System Dynamics, vol. 10, pages 221–251, 1981.
- [Pacejka, 1996] H.B. Pacejka. *The tyre as a vehicle component*. In proceedings of the 26<sup>th</sup> FISITA congress '96: Engineering challenge human friendly vehicles, Prague, 1996.
- [Pacejka and Bakker, 1991] H. Pacejka, E. Bakker, *The Magic Formula tyre model*, proc. 1<sup>st</sup> Int Colloq on tyre models for vehicle dynamics analysis, pp. 1-18, 1991.
- [Pacejka and Sharp, 1991] H.B. Pacejka, R.S. Sharp. *Shear Force Development by Pneumatic Tyres in Steady State Conditions: A Review of Modelling Aspects*. Vehicle System Dynamics, vol. 20, pages 121–176, 1991.
- [Pacejka and Besselink, 1997] H.B. Pacejka, I.J.M. Besselink. *Magic formula tyre with transient properties*. Vehicle System Dynamics Supplement, vol. 27, pages 234– 249, 1997.
- [Porcel et al., 2001] A. Porcel, P. Laurence, M. Basset, G.L. Gissinger, *Tyre Model for Vehicle Simulation: Overview and Real Time Solution for Critical Situations*, Proceedings of the 2001 IEEE Conference on Control Applications, Mexico City, Mexico, September 5-7, 2001.

- [Ratti, 1986] P. Ratti, *Modélisation du Pneumatique pour l'Etude du comportement Routier des véhicules Automobiles*, Thèse de l'école nationale d'art et métiers de Paris, 1986.
- [Rimaux, 1995] S. Rimaux. *Etude des Propriétés structurelles de certaines classes de systèmes physiques non linéaires modélisés par bond-graph*. Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, 1995.
- [Roe et Thomas, 2000] P.H. Roe, J.U. Thomas. *A new bond graph to sensitivity analysis*. MathMod 2000. pages 743-746
- [Rosenberg et Karnopp, 1987] R. Rosenberg, D. Karnopp. *Introduction to physical system dynamics*. MC Graw-Hill Book Company, 1987, ISBN 0-07-053905-7
- [Shim, 2000] T. Shim, *An Analytical Tyre Model for Vehicle Simulation in Normal Driving Conditions*, SAE paper n° 2000-01-0356, 2000.
- [Sueur and Dauphin-Tanguy, 1991] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy. *Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems*, Journal of the Franklin Institute, 1991, Vol.328 (1), pp. 55-70
- [Takahashi, 1996] T. Takahashi, *The Tyre Cornering Model on Uneven Roads for Vehicle Dynamics Studies*, Advanced Vehicle Control, AVEC'96, Vol. 2, pp. 941-953, 1996.
- [Tomovic and Vukobratovic, 1968] R. Tomovic, M. Vucobratovic. *Contibution to the sensivity of large systems*. Second IFAC 1968, system sensitivity and adaptivity, Dubrovnik, Yugoslavia, pages B.20-B.35.
- [Tomovic and Vukobratovic, 1972] R. Tomovic, M. Vukobratovic. *General sensitivity theory*. Number 35. In Modern Analytic and computational methods in science and mathematics. 1972. Elsevier. New York.
- [Van Zanten and al., 1990] A. Van Zanten, W.D. Ruf, A. Lutz, *Measurement and Simulation of Transient in Longitudinal and Lateral Tyre Forces*, SAE paper n° 900210, 1990.
- [Young, 1997] Young, P. M. *Robustness analysis with full-structured uncertainties*. Automatica, 1997, 33(12):2131-2145
- [Zhou, 1999] J. Zhou, *A Multi-Spoke, Three Plane Tyre Model for Simulation of Transient Behavior*, Vehicle System Dynamics, Vol. 31, pp. 35-45, 1999.



## Résumé

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de construction d'une loi de commande du véhicule robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

Deux modèles de dynamique véhicule sont proposés : le bicycle (modèle à 2 degrés de liberté), dans une optique de compréhension de la dynamique véhicule, et afin de fixer une trajectoire de référence pour une boucle de régulation et le modèle BGCAR14 (modèle à 14 degrés de liberté) pour disposer un modèle du véhicule complet représentant le comportement dynamique du véhicule.

Une étude est effectuée pour déterminer l'influence de la variation de la masse, de la position du centre de gravité, de la vitesse longitudinale, et de l'adhérence du revêtement routier sur le comportement dynamique d'un véhicule. Elle s'appuie sur la construction du modèle bond graph incertain du modèle BGCAR14. Une méthode de détermination des conditions stationnaires d'un modèle mécanique soumis aux seules forces de la pesanteur est développée ; elle permet d'obtenir le résultat sous forme d'expressions formelles, même dans le cas où une approche algébrique ne donne pas de solutions.

La détermination symbolique de la sensibilité des grandeurs caractéristiques de la fonction de transfert d'un modèle permet de calculer les variations de ces grandeurs caractéristiques faces aux incertitudes paramétriques.

Une généralisation de la méthode de construction de la forme LFT d'un modèle conduit à la forme d'interconnection standard utilisée dans le cadre de la  $\mu$ -analyse et  $\mu$ -synthèse, pour les modèles à composants dépendants de paramètres incertains.

## Mots clés :

bond graph, incertitude paramétrique, modèle véhicule, conditions stationnaires, causalité, caractéristiques dynamiques, sensibilité sur les composants d'un modèle, fonction de sensibilité, forme d'interconnection standard, transformation linéaire fractionnaire

## Abstract

This thesis concerns the determination of a robust control of a vehicle with parametrical uncertainties.

Two dynamical models for a vehicle have been proposed: the bicycle (a 2 freedom degrees model), for understanding the dynamical behaviour and establishing a trajectory for a feedback control law, and the model BGCAR14 (a model with 14 freedom degrees) for studying the dynamical behaviour of a complete vehicle.

The study has been done to determine the influence of the mass, the position of the centre of gravity, the lengthwise speed and the wheels adhesion on the street pavement on the dynamical behaviour of the vehicle. It is based on the construction of the uncertain bond graph model BGCAR14. A method for determining the stationary conditions of a mechanical model only under the forces of gravity was developed; it also permits to obtain the result as a formal expression, even in the case when the algebraic approach does not offer a solution.

The formal determination of the sensibility of the characteristic variables of the transfer function of a model allows calculating the variations of these characteristic variables under parametric uncertainties.

A generalized method for building the LFT form of a model leads to the standard form of interconnection used in the  $\mu$ -analysis and the  $\mu$ -synthesis, for the models with components depending on uncertain parameters.

## Keywords :

Bond graph, parametric uncertainty, model of a vehicle, stationary conditions, causality, dynamical characteristics, sensibility on the model components, sensibility function, standard interconnection form, linear fractionary transformation.