

Année 2006

N° d'ordre 3849

Université des Sciences et Technologies de Lille

THÈSE DE DOCTORAT

en

GÉNIE CIVIL

présentée par

Ahlem ALIA

Simulation Numérique en Vibroacoustique
et en Interaction Fluide Structure

Soutenue le 18 octobre 2006 devant le jury suivant :

Isam SHAHROUR	Professeur des Universités (USTL)	Président
Fouad ERCHIQUI	Professeur des Universités (UQAT Canada)	Rapporteur
Antoine LAVIE	Professeur des Universités (Université d'Artois)	Rapporteur
Abdellatif OUAHSINE	Professeur des Universités (UTC)	Rapporteur
Jacques CHARLEY	Maître de conférences (ENSAM)	Examinateur
Bertrand DUBUS	Directeur de Recherche CNRS (ISEN)	Examinateur
Jean François SIGRIST	Ingénieur de Recherche(DCN)	Examinateur
Mhamed SOULI	Professeur des Universités (USTL)	Directeur de Thèse

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au sein de l'Equipe de Recherche Interaction Fluide Structure, au Laboratoire de Mécanique de Lille, sous la direction de Monsieur Mhamed Souli. Je tiens à le remercier de m'avoir accueillie au sein de son équipe, de m'avoir proposée ce sujet de thèse et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je puisse travailler dans de bonnes conditions. Je lui dois ma formation aux techniques numériques et à la programmation scientifique. Ses conseils, son exigence et sa grande compétence m'ont toujours accompagnée lors de ce travail. Qu'il veuille trouver, ici même, ma profonde reconnaissance pour son aide, son encouragement et sa disponibilité qui sont à mon regard d'une grande importance.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Isam Sharour pour avoir honoré le jury de cette thèse en acceptant de le présider.

Que Monsieur Fouad Erchiqui veuille trouver l'expression de mes respectueux remerciements pour toutes les fructueuses collaborations que nous avons menées ensemble et celles avec Pr. Augustin Gakwaya de l'université Laval. Je tiens à le remercier, aussi, pour les riches discussions sur les équations intégrales et pour avoir honoré le jury par sa participation.

Je remercie vivement Monsieur Antoine Lavie et Monsieur Abdellatif Ouahsine d'avoir accepté de juger ce travail en me faisant l'honneur de le rapporter.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Jacques Charley pour l'intérêt qu'il a voulu apporter à ce travail en acceptant de le juger. Qu'il soit remercié, également, pour toutes les discussions riches et pour m'avoir initiée à Ideas afin de valider notre code.

J'ai l'honneur d'exprimer ma gratitude à Monsieur Bertrand Dubus et à Monsieur Jean Francois Sigrist pour avoir accepté de participer à la commission d'examen de cette thèse.

Que Dr. Stefan Schneider, Chercheur CNRS au LMA, et Pr. Stefan Marburg soient remerciés pour nous avoir fournis GMRES. Je tiens à remercier Dr. Moji Moatamedi de l'université de Salford pour nous avoir offerts la possibilité de valider notre code. Je remercie, également, Pr. Hakim Djelouah de l'Université d'Alger, pour les échanges scientifiques permanents que nous avons eu ensemble et pour ses encouragements.

Je ne s'aurais oublier les membres de l'équipe pour leur aide sur le plan scientifique et humain. Finalement, je voudrais remercier mes proches et tous ceux qui m'ont côtoyé de près ou de loin durant cette thèse.

Résumé

La prédiction et l'analyse, dès la conception, du comportement vibratoire engendré par un système vibrant permettent de réduire et de contrôler les nuisances sonores et les vibrations de la structure avant de procéder à la fabrication du produit fini. Afin de réduire les coûts de conception, les recherches se focalisent, à l'heure actuelle, vers des méthodes numériques de prédiction de ces phénomènes vibroacoustiques.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la simulation numérique des problèmes d'acoustique pur et de couplage vibroacoustique faible ou fort en utilisant la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des éléments finis de surface (Boundary Element Method BEM) couplées ou non. La structure est simulée par la MEF.

Le couplage avec la cavité est modélisé, dans un premier temps, par une approche modale. La méthode proposée repose, d'une part, sur une correction pseudo-statique pour la structure et la cavité et d'autre part, sur le calcul des modes couplés issus d'un système symétrique. Cette méthode améliore la convergence de la méthode modale tout en réduisant d'une manière sensible le temps de calcul. Par ailleurs, l'interpolation quadratique des matrices d'influence en BEM a permis un gain considérable en temps de calcul. Afin de contourner le problème de singularité en BEM, nous avons étendu le traitement des singularités des quadrilatères aux triangles. Finalement, nous avons validé un couplage faible entre un code explicite en éléments finis et la BEM. Ceci nous permettra, par la suite, de traiter des cas réels et complexes.

Table des matières

Chapitre

1	Modélisation Numérique des Problèmes Acoustiques et de Couplage Vibroacoustique	
	-Etude Bibliographique-	1
1.1	Introduction	1
1.2	Etat des connaissances	2
1.2.1	Propagation et rayonnement des ondes acoustiques	2
1.2.1.1	Méthode des différences finies	3
1.2.1.2	Méthode des éléments finis	4
1.2.1.3	Méthode des éléments finis de surface	5
1.2.2	Couplage vibroacoustique	9
1.2.2.1	Méthode des éléments finis	9
1.2.2.2	Simulation par éléments finis et éléments finis de surface	12
1.2.3	Optimisation des calculs en temps	13
1.2.3.1	Accélération en analyse uni-fréquentielle	14
1.2.3.2	Accélération en analyse multi-fréquentielle	22
1.2.3.3	Calcul parallèle	24
1.3	Objectifs et organisation de la thèse	25
2	Simulation Numérique des Problèmes Acoustiques	27
2.1	Propagation des ondes acoustiques	27
2.1.1	Equation d'Helmholtz et conditions aux limites	28
2.1.2	Cas particulier de $\omega = 0$	29
2.2	La méthode des éléments finis (MEF)	31
2.2.1	Formulation variationnelle	31
2.2.2	Discrétisation de la formulation variationnelle	31
2.2.3	Analyse modale	33
2.2.4	Application numérique	34
2.3	La BEM directe par collocation	36
2.3.1	Représentation intégrale de l'équation d'Helmholtz	37
2.3.1.1	Problème interne	37
2.3.1.2	Problème externe	38

2.3.2	Discrétisation et collocation	40
2.3.3	Intégration numérique	42
2.3.4	Les fréquences irrégulières	44
2.3.5	Application numérique	46
2.4	La BEM indirecte variationnelle	48
2.4.1	Formulation intégrale et variationnelle de l'équation d'Helmholtz	48
2.4.2	Discrétisation de la formulation variationnelle	50
2.4.3	Intégration numérique	52
2.4.4	Validation de la méthode	54
2.4.4.1	Rayonnement d'une sphère pulsante	56
2.4.4.2	Effet du facteur de forme	58
2.4.4.3	Rayonnement acoustique d'une roue	60
2.5	Les méthodes d'approximation	63
2.5.1	Intégrale de Rayleigh	63
2.5.2	Méthode d'onde plane	64
2.5.3	Relation entre méthode de Rayleigh et approche asymptotique .	64
2.5.4	Application numérique	65
2.6	Etude comparative des méthodes numériques	66
2.6.1	Problèmes externes	66
2.6.2	Problème interne	71
2.7	Conclusions	73
3	Simulation Numérique des Problèmes de Couplage Vibroacoustique	75
3.1	Introduction	75
3.2	Etude de la structure	77
3.2.1	Formulation faible pour la structure	78
3.2.2	Discrétisation de l'équation variationnelle	79
3.2.3	Plaques minces (Théorie de Kirchhoff) [14, 56]	81
3.3	Problème de couplage élasto-acoustique	83
3.4	Couplage par éléments finis	85
3.4.1	Discrétisation de la forme variationnelle (Méthode directe) . . .	85
3.4.2	Analyse modale	86
3.4.2.1	Projection sur les bases modales non couplées	86
3.4.2.2	Projection sur les bases modales couplées	87
3.4.2.3	Validation de l'analyse modale	90
3.4.3	Correction statique en analyse modale à bases couplées	94
3.4.3.1	Correction statique en bases modales découplées	95
3.4.3.2	Correction statique en bases modales couplées	97
3.4.3.3	Validation de la méthode	99
3.5	Couplage par éléments finis et éléments finis de surface	104
3.5.1	Formulation du problème	104
3.5.2	Applications numériques	106
3.5.2.1	Couplage plaque-cavité	106
3.5.2.2	Plaque encastrée dans un baffle rigide	108

3.5.3	Interpolation des matrices	109
3.5.3.1	Interpolation quadratique	109
3.5.3.2	Résultats numériques	110
3.6	Conclusions	112
4	Simulation Numérique de Couplages Vibroacoustiques faibles	113
4.1	Introduction	113
4.2	Analyse temporelle de la structure	115
4.3	La vitesse dans le domaine fréquentiel	117
4.4	Optimisation de la VIBEM	119
4.4.1	Assemblage de la matrice	119
4.4.2	Résolution du système linéaire	120
4.5	Résultats numériques	121
4.5.1	Propagation d'une onde dans une cavité	121
4.5.2	Application à l'industrie automobile	125
4.5.3	Rayonnement d'une plaque élastique	128
4.5.4	Application du couplage au compartiment du véhicule	133
4.6	Rayonnement acoustique dans le domaine temporel	136
4.6.1	Potentiel retardé et solution fondamentale	136
4.6.2	Intégrale de Rayleigh	137
4.6.3	Méthode d'onde plane	139
4.6.4	Application numérique	140
4.7	Conclusions	143
	Conclusion Générale	145
	Références	151

Table des figures

Fig.

2.1	Domaine acoustique et ses limites	29
2.2	Pression acoustique sur l'axe de la cavité. Comparaison entre la MEF directe et modale (50 modes)	35
2.3	Pression acoustique sur l'axe de la cavité. Comparaison entre la MEF modale à 50 et 10 modes	36
2.4	Exclusion du point source d'un domaine intérieur	37
2.5	Exclusion du point source d'un domaine extérieur	39
2.6	Éléments triangulaire et quadrilatéral	40
2.7	Transformation en coordonnées polaires généralisées	43
2.8	Division du quadrilatère en deux triangles	44
2.9	Maillage de la sphère (304 éléments)	47
2.10	Variation de la pression en fonction de la distance pour $f = 70\text{Hz}$	47
2.11	Définition du domaine acoustique pour la méthode indirecte	48
2.12	Points d'intégration pour les quadrilatères	53
2.13	Points d'intégration pour les triangles	55
2.14	Disposition des triangles en intégration double	55
2.15	Modèle en BE d'une sphère pulsante (maillage 1)	56
2.16	Modèle en BE d'une sphère pulsante (maillage 2)	57
2.17	Pression rayonnée par la sphère pulsante (maillage 1)	57
2.18	Pression rayonnée par la sphère pulsante (maillage 2)	58
2.19	Maillages de différents facteurs de forme	59
2.20	Effet du facteur de forme sur la pression rayonnée dans la cavité pour $f=200\text{Hz}$	59
2.21	Problème de rayonnement d'une roue	60
2.22	Maillage triangulaire de la roue	61
2.23	Maillage mixte de la roue	61
2.24	Pression (dB) calculée dans le plan en utilisant le maillage N° 1	62
2.25	Pression (dB) calculée dans le plan en utilisant le maillage N° 2	62
2.26	Illustration d'un problème de propagation dans un milieu semi-infini dans le cas où la surface S coïncide ou non avec S_R	63
2.27	Maillage de la plaque circulaire encastrée dans un baffle rigide	65

2.28	Validation de la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique. . . .	66
2.29	Maillage de sphère de 488 éléments.	67
2.30	Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$. Comparaison entre la VIBEM et DBEM avec 4 points CHIEF	68
2.31	Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$ calculée avec la DBEM avec ou sans points CHIEF (486 éléments)	69
2.32	Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$ calculée par la DBEM avec ou sans points CHIEF (304 éléments)	70
2.33	Influence du nombre des points de Gauss sur la pression rayonnée . . .	70
2.34	Influence du nombre des points d'intégration des intégrales singulières .	72
2.35	Comparaison de la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique pour le calcul du rayonnement acoustique d'une sphère pulsante	72
2.36	Comparaison des méthodes pour un problème interne	73
3.1	Structure élastique	77
3.2	Éléments plaques DKQ et DKT	81
3.3	Problème de couplage structure-cavité	84
3.4	Représentation du problème plaque cavité rectangulaire	91
3.5	Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'air	92
3.6	Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'air	93
3.7	Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'eau	93
3.8	Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'eau	94
3.9	Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'eau (avec correction statique)	100
3.10	Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'eau (avec correction statique)	100
3.11	Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'air (avec correction statique)	101
3.12	Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'air (avec correction statique)	101
3.13	Plaque couplée à une cavité cylindrique	102
3.14	Vitesse quadratique moyenne de la plaque circulaire	103
3.15	Pression quadratique moyenne du cylindre remplie d'eau	104
3.16	Plaque couplée à une cavité rectangulaire	106
3.17	Pression au centre de la cavité	107
3.18	Pression au centre de la cavité au alentour de 650 Hz	107
3.19	Plaque encastrée dans un baffle rigide	108
3.20	Efficacité du rayonnement de la plaque	109
3.21	Pression au centre de la boîte : Comparaison entre la BEM standard et la BEM avec l'interpolation linéaire et quadratique ($\Delta f = 100\text{Hz}$) . . .	110
3.22	Pression au centre de la boîte pour différents pas fréquentiels de l'interpolation quadratique	111

4.1	Procédure de résolution d'un couplage vibroacoustique faible	115
4.2	Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel	117
4.3	Stockage de la matrice BEM dans un vecteur	120
4.4	Variation de la pression au point (0.1375,0.,0.)m situé à l'intérieur de la cavité (Maillage grossier)	122
4.5	Variation de la pression au point (0.1375,0.,0.)m situé à l'intérieur de la cavité (Maillage fin)	123
4.6	Vitesses d'excitation périodique et non périodique	124
4.7	Fenêtre de Hanning	124
4.8	Variation de la pression sur l'axe de la cavité	125
4.9	Modèles en éléments finis et éléments finis de surface pour le compartiment d'automobile	126
4.10	Variation de la pression en fonction de la fréquence au point d'observation P_1 : validation avec le code Rayon-Ideas	127
4.11	Variation de la pression en fonction de la fréquence au point d'observation P_2 : validation avec le code Rayon-Ideas	127
4.12	Pression au point d'observation P_2 calculée par la BEM : comparaison entre GMRES et la méthode directe pour 4 et 16 points de Gauss	128
4.13	Modèle éléments finis de surface pour la plaque élastique	129
4.14	Validation de la BEM avec Sysnoise	130
4.15	Validation du couplage vibroacoustique avec Sysnoise	130
4.16	La fenêtre pour la FFT	131
4.17	Modes de la structure et pics de pression	131
4.18	Pression au point d'observation : comparaison entre la BEM et la méthode de Rayleigh	132
4.19	Excitation du compartiment en 4 points	133
4.20	Positions des points P_{107} , P_{72} et P_{96} sur la plaque élastique	134
4.21	Les vitesses aux points P_{107} , P_{72} et P_{96} sur la plaque élastique	134
4.22	Pression au point P_1 et P_2 (cas de la plaque élastique)	135
4.23	Pression au point P_1 et P_2 (cas de la plaque élastique)	135
4.24	Maillage de la source rayonnante (380 quadrilatères)	140
4.25	Champ de pression acoustique en deux instants	141
4.26	Variation au cours du temps de la vitesse d'excitation (a) et de la pression sur l'axe (b), hors axe (c) et dans la zone d'ombre (d)	142
4.27	Comparaison entre la RI et l'approche asymptotique	143

Liste des tableaux

Tab.

2.1	Intégration numérique sur des triangles de référence	55
2.2	Variation du temps CPU en fonction du nombre de points de Gauss . .	71
3.1	Efficacité des méthodes modales	92
3.2	Efficacité des méthodes modales avec correction statique	99
3.3	Efficacité des méthodes modales	103
3.4	Efficacité de l'interpolation quadratique des matrice d'influence BEM .	111
4.1	Fréquences de résonance du compartiment calculées par la MEF Rayon- Ideas	126

Chapitre 1

Modélisation Numérique des Problèmes Acoustiques et de Couplage Vibroacoustique -Etude Bibliographique-

1.1 Introduction

Au cours des dernières années, le progrès technologique a permis un développement considérable de la production et de la consommation de produits et de machines, témoignant du savoir-faire des entreprises. Toutefois, des efforts importants restent encore à déployer pour lutter contre le bruit généré par ces machines. Cette lutte s'avère dans la plupart des cas très coûteuse et insuffisante. C'est pourquoi les tendances actuelles s'accroissent vers la réduction du bruit à la source. En effet, les constructeurs sont amenés à respecter les normes limitant les émissions sonores des machines. De plus, la réduction du bruit est devenue l'un des éléments de confort les plus recherchés : c'est un indicateur de qualité et un argument de vente assez important pour de nombreux industriels travaillant dans le domaine de l'électroménager et l'automobile.

Plusieurs travaux de recherche ont montré l'importante contribution des phénomènes vibratoires à la génération du bruit. La vibration d'une machine, entourée par l'air, engendre des compressions de ce dernier provoquant, ainsi, la propagation d'une onde acoustique. En contre partie, bien que son effet est souvent négligeable, une onde acoustique se propageant dans l'air, entrant en interaction avec une struc-

ture, peut induire cette dernière en un mouvement vibratoire. C'est ce qu'on appelle un phénomène vibroacoustique.

La prédiction et l'analyse, dès la conception, du comportement vibratoire engendré par l'assemblage d'un système vibrant (moteur par exp.) à une structure (compartiment de voiture) sont devenues d'une importance capitale pour n'importe quelle industrie exprimant une forte demande quant à la limitation des bruits des machines. En fait, elles permettent de réduire ou, en quelque sorte, de contrôler les nuisances sonores et les vibrations de la structure avant d'entamer le processus de fabrication du produit final, ce qui réduit énormément les coûts. En contre partie, les tests expérimentaux sont le plus souvent chers. Par conséquent, les recherches se focalisent, à l'heure actuelle, vers les méthodes de prévision de ces phénomènes vibroacoustiques. Généralement, à chaque classe d'application correspond une méthode bien adaptée.

1.2 Etat des connaissances

1.2.1 Propagation et rayonnement des ondes acoustiques

La propagation des ondes et le rayonnement de champs acoustiques des structures vibrantes obéissent à des lois physiques complexes. La résolution analytique de ces problèmes n'est valable que pour des cas particuliers ayant des géométries simples et sous des hypothèses très restrictives. Seules les méthodes numériques restent générales et applicables en moyenne et basse fréquence pour des problèmes réels tels que ceux rencontrés en industrie automobile et audio. Ceci est dû au progrès continu des moyens de calcul et le développement des outils de visualisation, facilitant la création et la résolution des modèles.

Un des premiers travaux mathématiques sur les équations aux dérivées partielles (EDP) - le mémoire de Daniel Bernoulli publié en 1753- contient deux procédés d'approximation de la solution. L'un des procédés est celui des séries trigonométriques, l'autre consiste à remplacer une corde vibrante par un nombre fini de masses ponctuelles reliées par un fil élastique sans masse, ce qui donne une approximation du type différences finies.

1.2.1.1 Méthode des différences finies

Depuis son fondement en 1928 par Courant, Friedrich et Lewy, la méthode des différences finies (MDF) a été la première méthode numérique à atteindre un stade de développement avancé. Les progrès importants réalisés avec cette méthode ont spécialement porté sur les problèmes de géophysique, de sismologie, de physique des ultrasons, de mécanique des fluides etc... En géophysique, l'application de la MDF dans l'étude des problèmes de propagation des ondes élastiques a été initiée, vers la fin des années 60, par le Professeur Alterman et son équipe. Leurs premiers travaux portaient sur la propagation des ondes élastiques dans des milieux homogènes en présence d'interface [7], de trous [16], en utilisant des coordonnées cartésiennes [10], cylindriques [8] ou sphériques [9]. Ces recherches limitées aux cas simples donnaient des résultats restreints vu les moyens de calcul peu développés à l'époque.

Si les premières applications étaient limitées à des cas simples, l'amélioration de la précision des schémas et l'optimisation du temps de calcul [88, 125], constituent les principaux objectifs des études actuelles dans le but de simuler des problèmes de plus en plus complexes. Pour ce faire, plusieurs auteurs ont introduit des maillages irréguliers [20, 92] ou un raffinement local pour la description du champ acoustique et les frontières du domaine acoustique, alors que d'autres ont préféré utiliser des schémas d'ordre plus élevé [1, 71] ou des schémas en quinconce [50, 96]. Ainsi, la MDF a été souvent utilisée pour résoudre des problèmes 1D, 2D et 3D en incluant des surfaces libres, des interfaces et des conditions aux limites absorbantes.

Le succès que la MDF a connu dans la résolution des problèmes de propagation en géophysique, a permis l'extension de son utilisation au traitement des phénomènes acoustiques. En effet, à partir des simulations numériques, Harumi et al [54] ont été les premiers à présenter des visualisations numériques du champ ultrasonore émis par un transducteur et réfléchi par une fissure. La MDF a été employée pour modéliser le champ ultrasonore réfléchi par un coin d'angle 90° [17], de 270° [16] et par un défaut dont l'orientation est de 45° [47]. Ilan et Weight [58] se sont intéressés, à leur tour, à la diffraction d'une impulsion ultrasonore par un transducteur couplé à un barreau de forme cylindrique. Ikarta et al [57] ont, quant à eux, étudié le champ de pression dans une cible immergée dans un milieu fluide non visqueux. Alia et al [2] ont simulé

le champ ultrasonore, diffracté par un transducteur circulaire, dans un milieu fluide idéal [4], visqueux [21] et biologique [3] ainsi que dans un solide homogène isotrope en présence de défauts [4]. Ainsi, la MDF continue à faire l'objet de recherches intensives malgré la généralisation de certaines méthodes telles que la méthode des éléments finis (MEF).

1.2.1.2 Méthode des éléments finis

Depuis ses toutes premières applications aux années soixante, la méthode des éléments finis est devenue l'une des méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des problèmes acoustiques [44]. Elle donne des solutions, qu'on peut qualifier de référence, pour des problèmes réels ayant des formes géométriques complexes. Elle consiste à transformer le système différentiel en un système d'équations linéaires présentant l'avantage d'être creux et symétrique.

D'autre part, comme le maillage en éléments finis est dimensionné à la longueur d'onde, au moins six noeuds par longueur d'onde, dès que l'on tente d'augmenter la fréquence, le nombre des variables croît rendant la méthode extrêmement coûteuse du point de vue temps de calcul. Ceci limite donc son application au domaine des basses fréquences caractérisé par une faible densité modale (résonances isolées).

Les premières applications de la MEF au domaine de l'acoustique remonte aux travaux de Graggs sur le rayonnement d'une plaque couplée à un milieu fluide. Cette méthode se prête mieux pour les problèmes acoustiques et de couplage élastoacoustique internes. Les premières applications se focalisaient sur des problèmes internes en recourant à des analyses directes ou modales [32] pour déterminer la réponse en fréquence des cavités [84] et de guides d'ondes.

Afin d'utiliser la MEF dans un problème externe, le domaine supposé infini est naturellement tronqué par une surface artificielle afin de délimiter la zone de calcul. L'introduction de cette surface est à l'origine de réflexions artificielles. Afin de reproduire, sur cette zone, le caractère progressif des ondes acoustiques, plusieurs méthodes ont été récemment développées. La méthode la plus connue est celle des conditions absorbantes ou encore dite non réfléchissantes [29]. Elle consiste à imposer une rela-

tion entre l'inconnue et sa dérivée tout le long de la frontière délimitant le calcul. Une variante intéressante consiste à définir, au delà de la surface rayonnante, des éléments dits infinis [115] ayant un modèle de décroissance donné respectant la condition de Sommerfeld. Bien que les matrices soient creuses et symétriques, le maillage rend la méthode très coûteuse en temps de calcul lorsque la surface vibrante est grande devant la longueur d'onde acoustique.

Une bibliographie très riche sur la méthode des éléments finis en acoustique peut être trouvée dans l'article de Thompson [115]. Par ailleurs, un état de l'art encore plus général a fait l'objet de la référence [135]. Le lecteur peut s'y référer pour plus de détails sur le développement que cette méthode numérique a connu.

1.2.1.3 Méthode des éléments finis de surface

Les années 70 ont connu l'apparition d'une méthode aussi puissante que la méthode des éléments finis en calcul numérique. Il s'agit de la méthode des éléments finis de frontière (Boundary Element Method (BEM)) fondée sur une théorie beaucoup plus ancienne, celle des équations intégrales qui remonte aux travaux de Kirchhoff (1882), Fredholm (1896)... Depuis, cette technique est très utilisée pour la modélisation de nombreux problèmes de rayonnement et de diffusion acoustique. Elle est employée en acoustique architectural, en industrie automobile pour calculer le bruit des moteurs, en industrie audio afin d'optimiser les écouteurs, microphones...etc.

Elle consiste à remplacer l'EDP, régissant la solution dans un domaine, par une équation intégrale décrivant la solution le long de la frontière. Cette reformulation de l'EDP permet d'obtenir une relation entre la solution aux frontières et la solution en des points appartenant au domaine. De ce fait, contrairement à la Méthode des Eléments Finis (MEF) et à la Méthode des Différences Finies (MDF) pour lesquelles tout le domaine doit être discrétisé, la BEM nécessite uniquement une discrétisation des frontières [41]. En outre, la condition de rayonnement en champ libre est automatiquement satisfaite en BEM via le noyau de Green de la formulation intégrale. Ainsi, la BEM reste la plus appropriée quant au traitement des problèmes de propagation dans des milieux infinis [131] alors que la MEF reste conventionnellement limitée aux problèmes intérieurs.

Outre la satisfaction de la condition de Sommerfeld, la fonction de Green, d'une manière générale, est une solution élémentaire vérifiant aussi un certain nombre de conditions aux limites. Plus elle prend en considération ces conditions à la frontière, plus le domaine d'intégration sera limité. C'est la raison pour laquelle les efforts actuels se focalisent sur la recherche des fonctions de Green judicieuses prenant en compte un nombre maximal de conditions aux limites tout en restant susceptible d'être utilisées numériquement [15, 97, 102, 113].

La formulation directe est la première et sans doute la plus employée des deux grandes familles des méthodes intégrales. Dans cette représentation, les inconnues sont directement la pression et la vitesse acoustique, d'où le nom méthode directe [18, 36, 24]. Elle consiste à chercher, séparément, les solutions du problème interne et externe. Par contre, la formulation indirecte [133] permet de résoudre simultanément le problème interne et externe. Dans ce cas, les inconnues du problème sont le saut de pression (potentiel double couche) et le saut de vitesse (potentiel simple couche). Par conséquent, l'accès aux variables acoustiques est indirect, ce qui justifie l'appellation. A la différence de la méthode directe, la méthode indirecte est la plus appropriée pour des problèmes de surfaces minces ouvertes. En effet, en raison des variables primaires dans la méthode indirecte, la solution comprend à la fois le comportement du fluide de part et d'autre de la surface de la structure. Par contre, elle pose un sérieux problème quant à la définition des variables primaires dans le cas des bords libres et des multiconnections entre différentes structures. Dans ce cas, des contraintes supplémentaires doivent être appliquées aux systèmes d'équations linéaires telles que les multiplicateurs de Lagrange afin d'imposer ces conditions aux limites [126, 131].

Les formulations intégrales peuvent être résolues soit par la méthode de collocation [11, 36, 110, 131] soit par la méthode variationnelle [18, 24, 49, 133]. La méthode de collocation, la plus courante, consiste à satisfaire l'équation intégrale pour un ensemble de points sur la surface. La formulation variationnelle, quant à elle, se construit en multipliant l'équation intégrale par une fonction test admissible et en l'intégrant sur toute la surface. La solution est obtenue en résolvant un système d'équations linéaires. Par conséquent, la méthode de collocation s'avère plus simple, puisque la méthode variationnelle nécessite une intégration supplémentaire sur la surface, ce qui la rend extrêmement coûteuse en terme de temps de calcul. En revanche, la méthode variation-

nelle, contrairement à la méthode de collocation, conduit à un système symétrique.

Dans la méthode des éléments finis de surface apparaissent des intégrales régulières calculées généralement par des schémas classiques de quadrature de Gauss. Toutefois, en raison de la singularité de la fonction de Green, la BEM présente des intégrales singulières lorsque les points (dans la méthode de collocation [131]) ou les surfaces (dans la méthode variationnelle [19]) se confondent. Le calcul de ces intégrales s'avère critique vis à vis du conditionnement du système linéaire. En effet, une mauvaise évaluation de ces intégrales singulières constitue une source d'erreurs importantes en raison de leur tendance à rendre dominants les termes diagonaux. Plusieurs efforts ont été déployés pour évaluer, d'une manière précise et efficace, les différentes singularités survenant en BEM [39, 119]. De nombreux travaux ont montré que le calcul direct de ces singularités peut être évité si les intégrales sont proprement écrites même si la solution fondamentale est singulière [77]. Hamdi [53] a proposé une évaluation semi analytique des intégrales doubles de surface. Son approche est limitée à des éléments triangulaires linéaires [129]. Wang et al [129] ont présenté un nouveau algorithme pour les intégrales doubles pour des éléments de surface quadrilatéraux linéaires et quadratiques. Pour cela, ils ont proposé des points d'intégration ainsi que leurs poids pour des schémas d'ordre 2, 3 et 4. Pour la méthode directe par collocation, Lavie [74] et Wu [131] ont proposé, pour des éléments triangulaires et quadrilatéraux, d'appliquer des transformations en coordonnées polaires qui permettent d'aboutir à un jacobien de l'ordre de r accélérant la convergence de l'intégrale singulière. Alia et al [6] ont étendu la méthode de Wang et al [129], initialement valable pour des quadrilatères, pour des triangles en se recourant aux transformations en coordonnées polaires.

Les deux formulations directe et indirecte posent de grands problèmes d'unicité de la solution du problème extérieur aux fréquences propres du problème interne associé. Ce problème dont l'origine est liée au fait que l'équation d'Helmholtz appartient aux équations de Fredholm de seconde espèce, engendre des instabilités numériques au voisinage de chaque fréquence irrégulière, se manifestant par un mauvais conditionnement de la matrice [131]. Ceci est dû à la sous détermination du système d'équations linéaires.

Depuis les années 70, plusieurs auteurs ont proposé des équations supplémentaires afin de combler le déficit du rang du système. C'est le cas de la formulation CHIEF

(Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) suggérée par Schenck en 1968 [107] et qui demeure la plus populaire en raison de sa simplicité et son faible coût. Dans cette méthode, l'équation d'Helmholtz est appliquée pour certains points, dits points CHIEF, à l'intérieur de la structure vibrante afin d'imposer des contraintes linéairement indépendantes. Le choix du nombre de points CHIEF et de leurs positions est très important. En effet, pour que le problème de la non unicité de la solution soit surmonté, il est nécessaire que ces points CHIEF ne coïncident pas avec les surfaces nodales du problème intérieur associé. Dans le cas contraire, ils conduisent à des équations supplémentaires linéairement dépendantes. Un autre inconvénient réside dans le fait que plus les fréquences propres augmentent, plus les surfaces nodales se rapprochent, rendant le problème plus épineux. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'il n'y a pas un critère bien défini pour le choix du nombre ni de la position des points CHIEF [68]. Néanmoins, il a été démontré qu'il suffit qu'un seul point CHIEF ne coïncide pas avec les surfaces nodales pour que les résultats soient satisfaisants [68].

Une autre méthode très suivie pour surmonter ce problème des fréquences irrégulières est celle développée par Burton et Miller en 1971 [28, 97, 131]. Elle consiste à combiner, linéairement, l'équation d'Helmholtz et sa dérivée par rapport à la normale. Pour cela, l'équation dérivée est multipliée par un coefficient de partie imaginaire non nulle dit coefficient de couplage. Afin d'assurer l'unicité de la solution, certains auteurs le fixe égal à i/k (où i est la racine complexe de -1 et k le nombre d'onde). Il se trouve qu'avec cette méthode le système n'est plus singulier mais reste mal conditionné. D'où le besoin de préconditionneurs pour les systèmes obtenus [109]. De plus, cette méthode présente la difficulté d'évaluer la dérivée seconde de la fonction de Green.

Ceci étant développé pour la méthode directe, pour la BEM indirecte la tâche n'est pas aussi simple. En effet, dans ce cas certains auteurs ont proposé de considérer des éléments absorbants à l'intérieur de la cavité afin d'isoler son intérieur de l'extérieur [131]. D'où, même pour un simple problème de Neumann, des équations du type conditions aux limites d'impédance acoustique doivent être prises en compte dans le système d'équations linéaires.

Enfin, on se reportera aux références [33, 112, 130] pour plus détails sur les principaux développements qu'a connus la BEM depuis sa toute première apparition et

jusqu'à l'heure actuel.

1.2.2 Couplage vibroacoustique

Si la pression acoustique d'un fluide entourant une structure élastique a une influence significative sur cette dernière et inversement, alors l'interaction entre le comportement vibratoire des structures et la propagation des ondes acoustiques doit être considérée dans toute simulation de ces phénomènes. En effet, les premiers travaux de recherche sur le couplage élasto-acoustique d'un système cavité-structure ont été présentés par Guy et Battachanya [52]. Il ont utilisé des développements en fonctions trigonométriques pour l'espace et des transformations de Laplace pour le temps. Leurs résultats analytiques servent, souvent, de références pour les solutions obtenues numériquement.

Par la suite, certains auteurs se sont intéressés à l'étude de l'effet des propriétés de la structure et de la cavité sur le couplage vibroacoustique. Narayanan et al [85, 86] ont étudié la réponse structurale et la transmission acoustique à travers une plaque viscoélastique contrainte couplée à une cavité acoustique. La pression acoustique est exprimée en terme de modes propres de la cavité acoustique alors que le déplacement structural est donné en fonction des modes propres de la structure. Pan et Bies [93, 94, 95] ont mené des recherches théoriques et expérimentales pour étudier le comportement d'une plaque simplement supportée sur une cavité rigide et ce en mode transitoire et stationnaire. En s'intéressant à l'effet de la plaque sur la réponse acoustique de la cavité, ils ont montré que le rayonnement externe d'une structure mince, peu amortie, peut diminuer l'énergie acoustique dans la cavité.

Contrairement à ces méthodes analytiques ou semi analytiques qui se limitent à des cas simples, des méthodes plus générales, telles que la méthode des éléments finis et éléments finis de surface, peuvent être utilisées pour des systèmes plus complexes.

1.2.2.1 Méthode des éléments finis

Le début des années 70 a vu l'utilisation de la MEF pour l'industrie automobile. Il a fallu attendre jusqu'aux années 80 pour utiliser l'analyse modale qui constitue une alternative efficace de la méthode directe quand la taille du problème devient de plus en

plus importante. En effet, au lieu de résoudre, pour chaque fréquence, le système provenant de la discrétisation par éléments finis, un modèle matriciel réduit est construit à partir de quelques modes propres de la structure in vacuum et quelques modes propres acoustiques de la cavité à parois parfaitement rigides. Toutefois, la troncature de la base modale peut parfois conduire, pour certains couplages, à des erreurs très importantes. Tournour et al [120] ont montré la dangerosité de la troncature en analyse modale et ont proposé une correction dite pseudo statique pour laquelle l'énergie cinétique des modes abandonnés est négligée. Dans ce cas, les modes abandonnés sont écrits en fonction des modes pris en compte dans l'analyse.

L'analyse modale, basée sur les modes de la structure in vacuum et ceux de la cavité rigide, ne fournit aucune indication sur les fréquences propres et les déformées du système couplé. C'est la raison pour laquelle certains auteurs ont proposé de calculer la base modale du système couplé élastoacoustique en résolvant un problème aux valeurs propres. Pour le domaine acoustique, plusieurs formulations sont possibles. Chacune d'entre elles a ses propres avantages et inconvénients [84]. Les formulations en déplacement et ceux en pression aboutissent à des problèmes aux valeurs propres non symétriques, ce qui nécessite l'application de certaines transformations pour les rendre symétriques. Par contre, les formulations mixtes en pression et potentiel de déplacement représentent des problèmes aux valeurs propres symétriques, mais en contre partie augmentent le nombre de degrés de liberté par nœud. Une autre alternative consiste à faire appel à la formulation en potentiel de vitesse. Bien que symétrique, la matrice générée présente une forme non classique d'un problème aux valeurs propres.

Sandberg [104, 105] a proposé, pour la formulation en pression et celle en potentiel de déplacement, de calculer les modes couplés réels, à l'aide des modes de la structure in vacuum et ceux de la cavité rigide, en faisant appel à quelques transformations assez particulières, rendant le système à résoudre symétrique. De plus, en le projetant sur ses vecteurs propres à gauche et à droite, le système est rendu diagonal. Pour la formulation en pression, Tournour [119] a abouti aux modes couplés, solutions d'un problème aux valeurs propres traditionnel. Pour assurer l'inversion de la matrice liée à la cavité acoustique, Tournour [119] a isolé le degrés de liberté (ddl) rigide de la cavité des autres ddl. Cependant, cette méthode couplée sous-estimait la pression acoustique à basse fréquence et ceci à cause de l'absence du mode rigide de la cavité.

En analyse dynamique des structures, il est souvent intéressant de diviser un problème de très grande taille en des problèmes plus petits. Les solutions de ces derniers serviront pour construire celles du problème d'origine. Ces méthodes de partition sont souvent appelées méthodes de sous structuration. Dans ces méthodes, la structure est divisée en des sous structures. Chacune d'elles est analysée indépendamment en utilisant l'approche modale. Les modes de ces sous structures sont, par la suite, assemblés pour obtenir les modes globaux de la structure [119]. Tournour [119] a combiné avec succès la méthode de sous structuration avec la méthode modale couplée pour un caisson élastique. Une autre alternative est celle de Guyan [48]. Dans cette approche, certains ddl sont maintenus alors que d'autres sont éliminés par condensation [39].

Contrairement à la dynamique des structures, peu de travaux ont été menés sur la décomposition en sous domaines acoustiques. Ceci peut être expliqué par le fait qu'en acoustique, moins de ddl sont nécessaires et que les critères de maillage sont moins contraignants [122]. Sandberg et al [105] ont proposé des méthodes de synthèse modale vibroacoustique couplant des sous domaines fluides à des sous domaines de structure en utilisant des formulations en pression. Ils ont adopté la stratégie de symétrisation du système proposée par Sandberg [104]. Treyssede et al [122] ont couplé, à leur tour, une méthode de sous structuration dynamique du type Gray et Bompton et une méthode de sous domaines acoustiques basée sur une formulation acoustique en potentiel de vitesse.

En couplage élastoacoustique, les maillages de la structure et du fluide peuvent être différents car ils sont caractérisés par des longueurs d'onde différentes ou bien parce que les deux modèles sont définis séparément. L'analyse numérique des problèmes vibroacoustiques peut être compliquée dans le cas des maillages incompatibles en particulier en 3D. Guerich et al [51] ont proposé une méthode pour le couplage vibroacoustique avec des maillages en éléments finis incompatibles en utilisant une approche modale. Il a été nécessaire d'interpoler les modes du fluide et de la structure sur toute la surface commune entre les deux en utilisant des fonctions d'interpolation Bspline.

1.2.2.2 Simulation par éléments finis et éléments finis de surface

Comme pour les problèmes d'acoustique pur, la MEF reste la plus utilisée pour des problèmes de couplage vibroacoustique internes. En effet, pour les problèmes externes, voire même internes, la BEM a été largement utilisée pour la partie acoustique du problème vibroacoustique. Dans la plupart des cas, la structure est traitée par la MEF.

La BEM directe par collocation continue à être utilisée même en couplage élastoacoustique [83, 75, 100, 132] bien qu'elle présente certains inconvénients. Ces derniers sont les mêmes que ceux d'un problème acoustique non couplé c'est à dire : le système qu'elle engendre est plein, complexe, non symétrique, nécessitant le calcul des intégrales singulières et enfin présente le problème des fréquences irrégulières.

Dans son article, Mathews [83] a considéré deux méthodes afin de simuler un couplage vibroacoustique en utilisant la BEM en collocation pour le fluide et la MEF pour la structure élastique. Dans la première méthode, l'application des conditions de continuité et l'expression de la pression en fonction du déplacement à l'interface, lui ont permis de réduire le système couplé, formé initialement des deux équations du fluide et de la structure, en un seul système dont l'inconnue est le déplacement. Le système ainsi obtenu est plein, complexe et symétrique. Dans la seconde méthode, exprimer le déplacement en fonction de la pression à l'interface lui a permis d'obtenir un seul système dense, complexe et non symétrique. L'inconnue, dans ce cas, est la pression acoustique. Ce qu'il faut noter c'est que la seconde méthode, d'un point de vue numérique, est moins efficace car le système n'est pas symétrique.

Lee et al [75], à leur tour, ont résolu le système couplé dans lequel ils ont considéré une matrice de couplage. Les auteurs ont préféré discrétiser la cavité acoustique en des éléments triangulaires constants afin d'éviter les difficultés liées à l'implémentation numérique. Pour assurer le couplage entre le fluide et la structure, il ont fait correspondre à chaque élément triangulaire constant fluide, trois éléments triangulaires linéaires pour la structure.

Ces dernières années, la méthode variationnelle modélisant la partie acoustique

a été couplée avec succès avec la MEF appliquée à la structure [23, 25]. En effet, l'application de la BEM variationnelle pour le fluide et la MEF pour la structure permet de préserver le caractère symétrique du système couplé [23, 25]. Ceci permet l'utilisation des algorithmes efficaces de résolution des systèmes symétriques. De plus, cette propriété permet, aussi, un stockage optimal de la matrice de couplage [27]. Vlahopoulos et al [127] ont étendu leur traitement des multiconnections en VIBEM [127] à des problèmes de couplage vibroacoustique.

Comme pour la MEF, les maillages incompatibles en MEF/BEM ont fait l'objet de quelques travaux de recherche [127]. De plus, signalons que certains auteurs ont développé des méthodes d'accélération du calcul ou de résolution des équations intégrales de surface en vibroacoustique. En effet, en couplant la MEF à la VIBEM, Jeans et al [59] ont considéré une interpolation linéaire de la matrice BEM dans le système couplé, ce qui leur a permis de construire ce dernier d'une manière plus efficace. Fischer [46] a couplé la méthode multipolaire rapide appliquée à la BEM directe pour le fluide avec la MEF simulant la structure dans le but d'accélérer le calcul en couplage vibroacoustique.

Finalement, notons que la BEM seule peut être aussi appliquée pour simuler les problèmes de vibration des structures [67] et même des problèmes d'interaction élastoacoustique [65, 66].

1.2.3 Optimisation des calculs en temps

La MEF et la BEM ont été largement utilisées pour la modélisation de nombreux problèmes acoustiques et vibroacoustiques. Néanmoins, pour les problèmes les plus compliqués, elles restent coûteuses en terme de temps de calcul en raison de la limitation des ressources informatiques. De nombreuses recherches ont été menées pour rendre la MEF et la BEM plus efficaces sans perdre trop de précision. Ces travaux peuvent être groupés dans deux grandes catégories. La première concerne l'accélération du calcul du champ acoustique pour une fréquence d'excitation donnée alors que la seconde classe est principalement consacrée à des schémas d'interpolation permettant d'approcher le champ à d'autres fréquences du spectre considéré.

1.2.3.1 Accélération en analyse uni-fréquentielle

Les méthodes numériques sont souvent utilisées pour simuler des problèmes de rayonnement acoustique des structures pour un spectre de fréquence. Par conséquent, l'accélération des calculs pour une seule fréquence entraîne non seulement la réduction du temps de calcul pour cette fréquence mais aussi implique une efficacité pour toute la gamme de fréquences étudiées. Cette première catégorie regroupe la simplification des modèles, des équations, l'amélioration de la précision des éléments, le recours à des maillages grossiers...etc

Simplification des modèles géométriques

Intuitivement, le moyen le plus simple de réduction du nombre des ddl est de faire recours à des méthodes tirant profit de la symétrie de la géométrie du problème. Néanmoins, pour des géométries quelconques, la méthode la plus simple pour accélérer les calculs en EF et BE est de réduire la taille du maillage. Ceci peut se faire par deux techniques.

La première consiste à considérer, uniquement, les parties géométriques les plus significatives en négligeant quelques détails dans la structure, ensuite à remailler la géométrie obtenue. Cette méthode, entraînant un gain considérable en temps, peut donner, pour quelques cas, des résultats satisfaisants. Cependant, la qualité des résultats découlant d'une importante simplification du maillage dépend de la géométrie d'origine ainsi que la gamme de fréquence considérée. En effet, la suppression des "accessoires" a une grande influence sur le comportement vibratoire des structures puisqu'ils influent significativement leurs rigidités et, par conséquent, leurs rayonnements acoustiques [41, 42].

La deuxième approche consiste à extraire un maillage pour la partie acoustique à partir du maillage de structure. Ceci peut être atteint en supprimant tous les éléments ne faisant pas partie de la surface rayonnante et de réduire les volumes à ceux dont les faces sont en contact avec le fluide [42]. Bien évidemment, une interpolation entre le maillage de structure et du fluide est bien nécessaire pour pouvoir faire passer les informations de part et d'autre des deux domaines.

Amélioration de la formulation des éléments

Dans la simulation numérique en acoustique, la taille de l'élément est reliée à la longueur d'onde. En effet, elle est, souvent, estimée par le nombre d'éléments par longueur d'onde variant entre 6 et 10 pour des éléments constants, linéaires ou quadratiques. Bien évidemment, il est directement lié à la précision fixée par l'utilisateur. L'idée d'utiliser un nombre fixe d'éléments par longueur d'onde est une conséquence directe du théorème de Shannon [60]. Ce dernier est d'une importance capitale pour les problèmes de vibration des structures, de propagation d'ondes ainsi que les mesures expérimentales en traitement de signal. Il stipule que deux points par longueur d'onde sont nécessaires pour détecter la fréquence correspondante [60]. Cependant, cette détection n'est pas suffisante pour approximer la fonction [80]. En pratique, un nombre de 6 à 10 éléments par longueur d'onde est suffisant. Une approche très intéressante, permettant de réduire le temps de calcul, consiste à augmenter l'ordre d'interpolation des éléments [74]. Dans ce cas, des résultats satisfaisants peuvent être obtenus avec un maillage relativement grossier. En effet, pour un problème de propagation acoustique spécifique 1D simulé par la MEF, 33 éléments linéaires, 5.1 éléments quadratiques ou 2.3 éléments cubiques par longueur d'onde sont nécessaires pour obtenir une erreur inférieure à 10 % [80].

Les interpolations continues de la pression acoustique en BEM sont souvent utilisées. Elles regroupent les éléments construits à partir des fonctions d'interpolation linéaire et quadratique de Lagrange. Dans son article intitulé " Six boundary elements per wavelength : is that enough", Marburg [80] a vérifié la validité de la règle de 6 éléments par longueur d'onde pour les deux derniers éléments continus ainsi que pour les éléments constants. Ceux-ci appartiennent à la catégorie des éléments discontinus pour laquelle la continuité de la pression à l'interface des éléments n'est pas imposée. Dans son étude [80], il a démontré, pour les deux exemples traités, qu'il n'y a pas de grande différence entre les triangles et les quadrilatères, qu'une erreur de 10% à 20 %, acceptable dans l'ingénierie, peut être atteinte dans le cas des éléments constants et finalement qu'un nombre de 6 éléments par longueur d'onde est suffisant même pour un nombre d'onde élevé.

Tandis que les éléments continus linéaires et quadratiques sont très utilisés, peu de travaux sur les éléments discontinus peuvent être trouvés. Généralement, ces derniers sont appliqués en collocation car, dans ce cas, la continuité C^1 de la surface au point de collocation est nécessaire. En effet, dans l'élément discontinu, les noeuds sont situés à l'intérieur de l'élément [81]. Marburg et al [81], à travers les mêmes exemples traités dans la référence [80], ont constaté que les éléments discontinus constants et linéaires peuvent être utilisés d'une manière efficace. Par ailleurs, il recommandent, fortement, l'utilisation des éléments discontinus quadratiques afin d'atteindre les erreurs les plus faibles. Finalement, parmi tous les éléments testés dans les références [80] et [81], les auteurs confirment que les éléments continus linéaires, dont l'utilisation est la plus courante, sont les moins efficaces.

Simplification des équations

Dans la BEM, nous utilisons la fonction de Green en champ libre qui ne satisfait pas les conditions aux limites du problème. Ceci nous amène à résoudre un système linéaire pour déterminer la moitié des variables acoustiques inconnues sur la frontière. Si une fonction de Green plus sophistiquée, prenant en compte les conditions aux limites du problème est utilisée, alors moins d'inconnues à la frontière sont à déterminer et, également, moins d'éléments sont à considérer. De plus, la précision augmente et le temps de calcul se réduit. Ainsi, les erreurs commises se réduiront uniquement à celles dues aux intégrations numériques.

Dans le cas de problèmes simples, comme on le verra pour les structures bafflées, il est possible de remonter à la fonction de Green analytiquement. En revanche, plusieurs tentatives de construction de fonction de Green adaptées continuent à faire l'objet de développements analytiques et semi-analytiques pour quelques formes spécifiques [15, 113]. Rizzo et al [102] proposent de construire numériquement des bibliothèques de fonctions de Green sous forme de base de données. Si cette procédure pourrait être intéressante dans le cas où on s'intéresse à un seul problème relativement simple et pour une seule fréquence, elle devient lourde et irréalisable pour un problème quelconque.

a. Méthode de Rayleigh

Certainement, la méthode la plus populaire et la plus robuste est celle de Rayleigh. En effet, elle simplifie énormément les équations et par conséquent le calcul. Dans cette approche, chaque élément de la surface vibrante est considéré comme encastré dans un baffle rigide infini et vibrant indépendamment des autres éléments. Contrairement à la BEM standard, nécessitant la construction et la résolution d'un système, le champ acoustique total dans la méthode de Rayleigh résulte de la somme de la pression générée par chaque élément. Ces hypothèses permettent de calculer la pression acoustique en un point quelconque, tout simplement, à partir de la distribution de la vitesse sur la surface vibrante. Cette méthode conduit à des représentations exactes du champ de pression rayonné par des structures bafflées [70].

Ces dernières années ont connu l'utilisation de cette méthode même pour des problèmes 3D en raison de sa robustesse et de sa rapidité [42, 55, 69]. Ce gain en temps de calcul s'obtient, parfois, au détriment de la précision de la pression calculée car les géométries complexes ne sont pas forcément assimilables à des plans. En effet, Estorff [40] a montré que la méthode de Rayleigh donne des résultats similaires à ceux de la BEM si la surface vibrante est presque plane et les points, où la pression est à calculer, sont éloignés de cette surface [42].

Notons que le gain en temps croît avec l'augmentation des points d'observation. En fait, pour chacun de ces points, un test de visibilité doit être fait pour ne prendre en compte que les éléments influençant, réellement, le point d'observation considéré.

b. Approche asymptotique

Une simplification significative peut être obtenue en utilisant l'approche asymptotique, ou parfois appelée approximation d'onde plane [42] ou encore dite BEM à haute fréquence [55]. A une fréquence suffisamment élevée, c'est à dire quand la longueur d'onde est beaucoup plus petite que la courbure locale de la surface, la pression sur cette dernière vérifie l'hypothèse d'onde plane. Dans ce cas, la pression n'est autre que la multiplication de l'impédance acoustique et la vitesse normale à la surface. Ainsi, connaissant la pression et la vitesse sur la surface, on peut déterminer la pression en n'importe quel point du fluide.

Comme pour la méthode de Rayleigh, cette approximation ne permet pas de prédire la pression acoustique d'une manière exacte pour tous les problèmes 3D. Néanmoins, Herrin et al [55] ont montré que la méthode de Rayleigh et celle de l'approche asymptotique, permettaient d'estimer la puissance acoustique en particulier à haute fréquence. En effet, pour les deux méthodes, ils ont remarqué une sous estimation de la puissance acoustique en basse fréquence. Finalement, ils ont noté que l'approche asymptotique restait plus fiable que la méthode de Rayleigh pour les problèmes complexes.

Il est à mentionner que l'approche asymptotique donne, en général, de meilleurs résultats dans le cas des structures convexes que pour les surfaces concaves. De plus les erreurs augmentent considérablement dans le cas des réflexions multiples.

Accélération de la construction de la matrice par la méthode multipolaire

En raison du caractère symétrique et creux des matrices en éléments finis, cette dernière méthode reste plus rapide que la BEM qui, de plus du caractère complexe et plein de son système, nécessite le calcul des intégrales de surface simples (en collocation) ou doubles (en variationnelle) impliquant l'influence de tous les noeuds du domaine dans leur évaluation. De ce fait, c'est la BEM qui a fait et qui continue à faire, le plus souvent, l'objet de plusieurs tentatives d'accélération du calcul.

Le processus de calcul en BEM peut-être divisé en trois principales phases. La phase d'intégration dans laquelle le temps de calcul dépend du nombre total des éléments. La phase de résolution du système pour laquelle le temps de calcul est relié au nombre de noeuds. Et enfin, l'évaluation de la réponse acoustique en des points de l'espace. Dans ce cas, le temps de calcul est fonction des points d'observation ainsi que le nombre des éléments du modèle analysé.

Une méthode, basée sur le développement des influences croisées en multipôles, résulte en des gains de temps remarquables pour la construction du système et l'évaluation du rayonnement acoustique en des points de l'espace [46, 117, 118, 119]. Elle consiste à réécrire la fonction de Green sous forme de fonctions de Bessel et de polynômes de

Legendre au delà d'une certaine distance entre la source et le point d'observation.

Cette méthode a permis à Tournour [117] d'écrire, pour un maillage périodique, la matrice d'influence d'une paire d'éléments sous la forme d'un monopole, d'un dipôle et d'un quadripôle et ce, indépendamment, de leurs positions relatives. Par contre, ces multipôles dépendent de la forme et de l'orientation des éléments les uns par rapport aux autres. Ainsi, après une translation de la paire d'éléments, la matrice élémentaire est très rapidement calculée puisque les matrices des multipôles restent inchangées. De ce fait, pour des maillages périodiques, cette méthode permet de réduire le temps de calcul pouvant atteindre des gains allant jusqu'à un facteur de 15 [117]. Toutefois, pour des maillages quelconques, cette méthode ne peut pas être utilisée pour le calcul de la réponse acoustique en raison de la dépendance des multipôles de la forme et de l'orientation des éléments.

La résolution du système linéaire issu de la BEM se fait soit par une méthode d'inversion directe, souvent, très coûteuse, soit par l'utilisation d'une méthode itérative nécessitant à chaque itération un produit matrice vecteur [82]. Ces produits nécessitent, à priori, d'avoir la matrice pleine BEM en mémoire.

Une autre méthode, beaucoup plus générale, basée sur le développement multipolaire dite rapide intervient dans certaines résolutions itératives des systèmes linéaires de grande taille. L'opération la plus coûteuse dans une méthode itérative est le produit matrice-vecteur dont la matrice est celle du système à résoudre. La méthode multipolaire rapide permet de stocker et d'effectuer des produits matrice-vecteur avec un stockage en mémoire et un coût CPU strictement inférieur au coût d'une méthode classique.

Cette méthode a été utilisée pour la première fois pour calculer les interactions entre particules. De ce point de vue, l'équation intégrale réécrite sous forme de sommation peut être vue comme la communication de chaque point de la surface avec les autres points [110]. Par analogie avec la communication par courriers, au lieu d'envoyer les lettres de l'expéditeur au destinataire directement, elles sont mises dans les boîtes à lettres. Ensuite, elles passent par des niveaux hiérarchiques - le facteur, la poste, le centre de distribution, la poste, le facteur - pour arriver, finalement, à leurs destinations

d'une manière beaucoup plus efficace [45].

La méthode multipolaire rapide consiste à combiner, dans un terme de champ lointain, les effets des sources se situant loin d'un point d'observation [45]. Pour les autres sources les plus proches, la BEM standard est à utiliser [45]. Pour cela, les éléments de frontières sont regroupés dans des groupes. Chacun est caractérisé par un centre identique à celui de la plus petite sphère renfermant cet ensemble d'éléments. Ainsi, un opérateur de translation dépendant uniquement de la distance séparant les centres des groupes peut être défini. Le champ des sources d'un groupe donné représenté en son centre est translaté au centre d'un autre groupe via l'opérateur de translation puis translaté à chacun des points d'observation formant ce second groupe [30].

Ainsi, l'objectif de la méthode multipolaire rapide est de remplacer, dans la BEM, le noyau dépendant de la distance entre le point source et le point d'observation par la multiplication de trois noyaux [110]. Le premier dépend uniquement de la distance source - centre de son groupe. Le second est fonction de la distance entre les deux groupes. Alors que le dernier est relié à la distance centre du groupe - point d'observation. Ceci peut être atteint en utilisant des série d'expansion de la solution fondamentale de l'équation d'Helmholtz. Par conséquent, la matrice d'influence de la BEM peut être écrite sous la forme d'une matrice creuse due au champ proche plus de la multiplication des trois matrices creuses décrites auparavant [110].

Ce découpage en des groupes d'éléments et, par conséquent, en des matrices creuses permet d'obtenir un gain considérable quant à l'évaluation du produit matrice-vecteur, qui constitue une étape incontournable pour les méthodes de résolution itératives. D'un point de vue géométrique, le calcul des interactions lointaines est considérablement accéléré en regroupant convenablement les éléments. Le choix du regroupement permet de définir deux méthodes. Si le regroupement est uniforme, on parle d'une méthode à un niveau [35]. Si le regroupement est choisi en fonction de l'éloignement, on parle d'un regroupement multi-niveaux [35, 110]. Ce dernier reste plus efficace que le regroupement uniforme.

Finalement, mentionnons le fait que cette méthode d'accélération n'est pas limitée uniquement au domaine de l'acoustique. En effet, elle est également utilisée

dans d'autres domaines tels que l'électromagnétisme, le magnétisme...etc. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter l'article de Nichimura [89] concernant l'utilisation de la méthode multipolaire pour les équations de Laplace, d'Helmholtz et de la chaleur et éventuellement la référence [31] pour des applications en électromagnétisme et la référence [103] pour des problèmes de magnétisme.

Accélération de la résolution du système par les méthodes itératives

A la différence des méthodes directes de résolution des systèmes d'équations linéaires, les approches itératives permettent de traiter les structures rayonnantes d'une manière beaucoup plus performante [78]. Plusieurs méthodes itératives peuvent être utilisées afin de résoudre les systèmes non Hermitiens engendrés par la BEM. Ces méthodes sont basées sur le produit matrice-vecteur. Il est à noter que dans l'étude du comportement des méthodes itératives, souvent le nombre des produits matrice-vecteur est considéré et non pas le nombre des itération car parfois deux produits matrice-vecteur sont effectués lors de la même itération [110].

Les dernières études se sont focalisées sur la recherche du meilleur solveur itératif pour la BEM [110] et même pour un problème de couplage vibroacoustique [26]. En effet, dans leurs travaux sur la BEM en collocation, Schneider et Marburg [110, 82] ont comparé plusieurs techniques itératives à la méthode GMRES (Generalised Minimal Residual). C'est une méthode itérative robuste et applicable pour les systèmes non hermitiens et repose sur la minimisation d'un certain résidu. Son algorithme se base sur un seul produit matrice-vecteur par itération. Le principal inconvénient de cette méthode est le nombre des vecteurs qui doivent être stockés en mémoire. Ceci peut être évité en appliquant la version dite "restarted" de GMRES. Néanmoins, cette diminution dans l'espace de stockage peut ralentir davantage la convergence de la méthode. Les auteurs ont constaté que GMRES est la méthode la plus stable tant que le redémarrage n'est pas effectué pendant la phase de stagnation se produisant au début du processus itératif. Ainsi, d'après les auteurs un compromis est à rechercher entre le paramètre de redémarrage et l'espace de stockage disponible. GMRES sans redémarrage reste plus sûre car, pour le moment, le paramètre de redémarrage ne peut être prédit d'avance [110].

D'un autre côté, l'application de l'approche de Burton et Muller [108, 110, 82] pour remédier au problème des fréquences irrégulières [110] ou encore la considération des surfaces non lisses peuvent conduire à de très lentes convergences ou, tout simplement, à une divergence de la méthode itérative. Pour accélérer la convergence, un préconditionneur du système linéaire peut diminuer le nombre des itérations lors de la résolution itérative [110].

Vecteurs de transfert acoustique

Si pour une géométrie et une fréquence données, plusieurs cas de chargements sont à analyser, les Vecteurs de Transfert Acoustique (VTA) peuvent être très efficaces. Ce sont des relations d'entrée/sortie entre la vitesse normale de la structure et la pression en un point d'observation [121]. Chaque élément du vecteur de transfert peut être interprété comme une fonction de transfert acoustique reliant un noeud de la surface à un point d'observation donné [42].

Il est à noter que le VTA dépend de la fréquence et de la configuration du domaine acoustique, notamment la géométrie, le fluide (densité et célérité du son) et, bien évidemment, la position du point d'observation [43]. Cependant, il est indépendant du chargement ce qui signifie que pour un nouveau chargement, la pression peut être calculée facilement par une simple multiplication du VTA par la vitesse normale de tous les nœuds. Ce qui conduit à des gains en temps assez considérables.

1.2.3.2 Accélération en analyse multi-fréquentielle

Tout ce qui a été dit s'applique bien pour une seule fréquence. Toutefois, en pratique les grandeurs acoustiques sont recherchées pour plusieurs fréquences. Deux possibilités peuvent survenir : une interpolation en fréquence est appliquée, dans une phase intermédiaire, aux matrices d'influence résultant de la BEM ou encore dans une phase finale dans laquelle les résultats définitifs sont interpolés.

La dernière alternative s'avère plus prometteuse puisque la solution du système linéaire se fait uniquement pour quelques fréquences [42]. L'approche la plus naturelle pour interpoler la solution finale consiste à construire les séries de Taylor [116]. Cepen-

dant, pour certaines fréquences de résonance (points singuliers) liées à la géométrie et aux caractéristiques de la structure, les séries de Taylor ne convergent que pour une bande de fréquence étroite. En effet, cette interpolation doit être utilisée dans le cas où la réponse acoustique est raisonnablement régulière. C'est le cas du rayonnement acoustique externe pour lequel la réponse acoustique ne présente pas de pics. Dans une interpolation du type spline cubique uniforme, on doit distinguer les points de contrôle des fréquences pour lesquelles la réponse acoustique est recherchée. Bien évidemment, les fréquences de la réponse sont plus nombreuses que les fréquences de contrôle qui doivent être au minimum cinq par bande de fréquence afin d'assurer une certaine précision [111].

L'interpolation des matrices a été adoptée par certains auteurs pour accélérer le calcul [42]. En interpolation linéaire, la fluctuation rapide de la partie exponentielle de la fonction de Green peut être éliminée [124]. Ceci s'obtient en mettant en facteur le terme de grande amplitude en exponentiel. Les termes restant varient faiblement avec la fréquence. Ainsi, une interpolation linéaire en fréquence est possible entre deux bornes limitant une gamme de fréquence. D'après Raveendra [101], une fonction exponentielle pouvant être approchée par un polynôme d'ordre deux dans une certaine bande de fréquence, permet de conclure que les coefficients de la matrice du système peuvent être, eux aussi, approchés par le même polynôme dans la même gamme de fréquence. Il a même montré que l'interpolation quadratique est beaucoup plus précise que l'interpolation linéaire.

Il est à noter que pour des modèles de taille importante, le temps de calcul des matrices constitue uniquement 10 % du temps total. Les 90 % restant sont consacrés à la résolution du système. Par conséquent, l'interpolation telle que décrite ci dessus n'a de sens que si le problème à résoudre n'est pas complexe. De ce fait, l'interpolation toute seule ne peut résoudre réellement le problème du temps de calcul. Dans la même référence, Raveendra [101] propose d'utiliser une méthode de résolution itérative basée sur la factorisation d'une matrice à la première fréquence de la gamme considérée. Ainsi, l'utilisation de la même matrice factorisée en plusieurs fréquences intermédiaires permet de réduire considérablement le temps de calcul. De ce fait, il a dû utiliser les deux méthodes (interpolation fréquentielle et méthode itérative) dans le but de réduire le temps de calcul. Le lecteur peut avoir une idée sur les différentes méthodes itératives souvent utilisées pour accélérer le calcul en consultant les travaux de Marburg [82] et

Schneider [110] dans lesquels une comparaison entre ces méthodes a été menée.

1.2.3.3 Calcul parallèle

La modélisation par la MEF et/ou la BEM est surtout limitée par l'aptitude des calculateurs actuels à donner des résultats en un temps raisonnable. D'où le besoin à des technologies plus efficaces et plus rapides telles que le calcul parallèle. Celui-ci est utilisé pour résoudre des problèmes de très grande taille en partageant les tâches sur plusieurs processeurs formant un cluster pouvant être homogène ou hétérogène. Les calculateurs sont à mémoire partagée ou distribuée. Dans ce dernier cas, des communications entre processeurs est nécessaire pour faire passer les informations. Le domaine publique MPI (Message Passing Interface), faisant partie de cette catégorie, permet d'échanger les informations entre des calculateurs homogènes et hétérogènes. OpenMP est destiné pour les calculs parallèles à mémoire partagé.

Dans le but d'accélérer le calcul, une distribution en fréquence est appliquée [121]. Dans ce mécanisme de distribution, on attribue à chaque processeur une sous gamme de fréquence de la bande de fréquence totale pour laquelle le calcul doit se faire. Ainsi, chaque processeur fait tourner son propre exécutable et mène sa propre analyse indépendamment des autres. Le MPI peut être utilisé pour récupérer les différents résultats sur le processeur maître [121].

Plusieurs recherches ont été menées afin de rendre les opérations sur les matrices plus efficaces sur une seule machine. Ces travaux ont donné lieu à des algorithmes utilisant des bibliothèques qui manipulent les composantes de la matrice globale comme étant des sous matrices. Des bibliothèques publiques telles que LAPACK et BLAS supportent, sur un seul processeur, des opérations telles que l'addition, la multiplication, l'inversion, les méthodes itératives [34]...etc sur des blocs de matrices. Actuellement, ces bibliothèques sont disponibles sous une forme parallèle et sont appelées SCALAPACK et PBLAS [87]...

La BEM nécessite la génération des matrices élémentaires. Chacune de ces matrices dépend des fonctions de forme des éléments, de la position des éléments, de la densité du fluide, de la vitesse du son et de la fréquence d'excitation. Ceci rend ces matrices indépendantes les unes des autres et par conséquent simples à coder en utilisant

le concept du maître et de l'esclave. En distribuant la matrice BEM globale en des sous blocs, chaque bloc est attribué à un processeur. Ainsi, chaque matrice élémentaire est générée sur le processeur qui contient le bloc formé par cette matrice. Par conséquent, la librairie SCALAPACK peut être appliquée pour chaque bloc de la matrice globale. Comparée à la distribution en fréquence, cette méthode représente un avantage très intéressant puisque la mémoire est divisée sur le nombre des processeurs. Néanmoins, contrairement à la distribution en fréquence, cette méthode demande plus de communications [121].

1.3 Objectifs et organisation de la thèse

A la lumière de cette étude bibliographique, nous pouvons dire que la BEM reste la méthode la plus utilisée pour le rayonnement externe mais souffre des problèmes de singularité, de la lenteur des calculs (construction et résolution du système) et des contraintes liées au stockage de la matrice. C'est pourquoi plusieurs tentatives d'optimisation de cette méthode ont été poursuivies. D'autre part, la méthode modale en couplage vibroacoustique est très utilisée. Cependant, l'extension de la méthode modale avec corrections statiques au calcul des modes couplés du système cavité structure constitue une ouverture possible. Enfin, le couplage de la BEM avec la MEF pour des problèmes vibroacoustiques reste toujours conditionné par la lenteur de la BEM. Le besoin permanent de méthodes robustes et faciles à implémenter découlant de la BEM peut offrir de nouvelles possibilités, encore plus larges, d'utilisation de la BEM pour des problèmes de couplage vibroacoustique.

Ce travail est consacré à la simulation numérique des problèmes d'acoustique pur et de couplage vibroacoustique fort et faible. Cette modélisation numérique est effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis et la méthode des éléments finis de surface couplées ou non. L'objectif de cette thèse est de développer des codes numériques capables de prédire, d'une manière optimale, la réponse acoustique ou vibroacoustique des systèmes. Ces codes sont basés sur des techniques déjà existantes et qui sont, parfois, améliorées dans le cadre de ce travail de thèse. Ainsi, ce travail nous a permis de fournir un moyen de calcul en acoustique et en vibroacoustique tout en mettant en évidence les avantages et les inconvénients des différentes techniques utilisées.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Dans ce premier chapitre, nous avons passé en revue les différentes méthodes numériques utilisées pour la modélisation des problèmes acoustiques et vibroacoustiques ainsi que les différentes procédures proposées dans la littérature pour améliorer la précision des résultats et pour réduire le temps de calcul.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude comparative entre les différentes méthodes numériques appliquées à l'acoustique. Chacune d'entre elles est brièvement rappelée. Les caractéristiques de chaque méthode déjà évoquée dans ce premier chapitre bibliographique sont illustrées par des exemples. Les résultats numériques sont présentés pour mettre en évidence les avantages des méthodes, les unes par rapport aux autres, en terme de temps de calcul et de précision.

Les méthodes de simulation des problèmes acoustiques traitées dans le deuxième chapitre sont couplées dans le troisième chapitre à la MEF appliquée à la structure. Une nouvelle technique modale est proposée. Celle-ci consiste à rendre symétrique le problème couplé aux valeurs propres tout en considérant la correction statique afin de prendre en compte, dans l'analyse modale, les modes propres à hautes fréquence. L'interpolation quadratique de la matrice d'influence BEM en collocation dans le système de couplage est utilisée pour accélérer la construction de la matrice à chaque fréquence du spectre considéré.

Ces deux derniers chapitres serviront de matière première pour le suivant. En effet, dans le quatrième chapitre, nous considérons un couplage faible entre la structure et le fluide. La structure est simulée par un code explicite d'éléments finis. La transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform FFT) permet de transformer les vitesses temporelles en des vitesses fréquentielles. Ces dernières sont considérées comme conditions aux limites de la BEM qui est utilisée pour calculer la pression en un point quelconque du fluide.

Suite au dernier chapitre, la conclusion générale de cette étude et les perspectives futures envisagées sont présentées.

Chapitre 2

Simulation Numérique des Problèmes Acoustiques

Dans ce chapitre, il ne s'agit pas de faire un exposé exhaustif et détaillé sur les différentes méthodes numériques utilisées en acoustique, pour la prédiction du rayonnement acoustique dans le fluide, mais plutôt d'en donner une synthèse. Les méthodes numériques communément employées telle que la MEF et la BEM sont brièvement rappelées et sont, selon leurs domaines de validité, appliquées soit aux problèmes internes et/ou externes. Les résultats numériques sont représentés afin d'illustrer les avantages de l'une par rapport à l'autre en terme de précision et de temps de calcul.

2.1 Propagation des ondes acoustiques

Une onde acoustique se propageant dans un milieu fluide progresse, de proche en proche, par une succession de compressions et de détentes des particules fluides. Dans le cas de petites perturbations d'un milieu fluide non visqueux, isotrope, homogène et parfaitement compressible, les équations de l'acoustique linéaire sont :

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = -\nabla \underline{P} \quad (2.2)$$

$$\underline{P} \approx \rho c^2 \underline{s} \quad (2.3)$$

La première équation est celle de la conservation de la masse, la seconde est l'équation d'Euler et enfin la dernière découle de l'hypothèse d'un processus adiabatique. Ces équations peuvent être combinées pour donner l'équation de propagation :

$$\Delta \underline{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

où \underline{P} est la pression, \underline{V} est la vitesse particulière, c est la vitesse de l'onde dans le fluide, $\underline{s} = \frac{\rho_{inst} - \rho}{\rho}$ est la condensation, ρ_{inst} et ρ sont, respectivement, les densités instantanée et à l'équilibre.

2.1.1 Equation d'Helmholtz et conditions aux limites

Pour une dépendance harmonique de la pression acoustique ($\underline{P} = p e^{i\omega t}$), l'équation de propagation (2.4) devient :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (2.5)$$

où $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$ est le nombre d'onde avec ω est la pulsation et f est la fréquence d'excitation. L'équation (2.5) est appelée équation d'Helmholtz. De même, les équations (2.1) et (2.2) deviennent :

$$i\omega p = -\rho c^2 \nabla \cdot v \quad (2.6)$$

$$\nabla p = -i\rho\omega v \quad (2.7)$$

ou encore en terme de déplacement :

$$p = -\rho c^2 \nabla \cdot u \quad (2.8)$$

$$\nabla p = \rho\omega^2 u \quad (2.9)$$

A ces équations peuvent s'associer les conditions aux limites suivantes [Fig.(2.1)] :

- condition aux limites de Dirichlet pour laquelle la pression p est imposée sur quelques segments de la surface notée S_p ;
- condition aux limites de Neumann pour laquelle la vitesse normale " V_n " (ou le déplacement normale U_n), régie par l'équation d'Euler : $-i\rho\omega V_n = \frac{\partial p}{\partial n}$ (ou $\rho\omega^2 U_n = \frac{\partial p}{\partial n}$), est donnée sur quelques segments notés S_v (ou S_u) ;
- condition aux limites mixtes pour laquelle une combinaison linéaire de la pression et de la vitesse normale $p = ZV_n$ est imposée sur la frontière notée S_z où Z désigne l'impédance acoustique.

Il est à mentionner que dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à des problèmes définis par des conditions de Neumann.

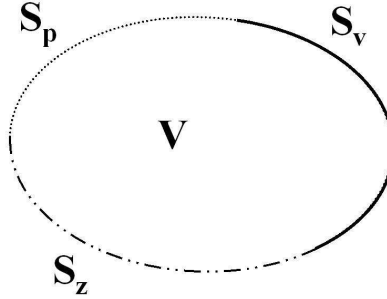


FIG. 2.1 – Domaine acoustique et ses limites.

Pour quelques cas particuliers, des solutions analytiques dites solutions fondamentales d'Helmholtz, existent. Elles sont appelées fonctions de Green et sont notées $G(Q, P)$. Physiquement, dans le cas d'un rayonnement en champs libre, $G(Q, P)$ représente l'effet en un point Q , d'une source ponctuelle située au point P . Considérons l'émission d'une onde harmonique de fréquence angulaire ω , par une source ponctuelle au point P . Le champ acoustique rayonné dans un espace 3D obéit à l'équation d'onde inhomogène suivante :

$$\Delta G + k^2 G = \delta(r - r_y) \quad (2.10)$$

où $G = \frac{e^{-ik\|r-r_y\|}}{4\pi\|r-r_y\|}$ avec r et r_y désignent respectivement les vecteurs de position des points P et Q et δ est la distribution de Dirac.

2.1.2 Cas particulier de $\omega = 0$

Reprenons le problème de Neumann qu'on suppose statique ($\omega = 0$), c'est-à-dire la paroi est déformée avec une vitesse infiniment lente :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans le volume } V \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \omega^2 U_n & \text{sur la surface } S_u \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce système s'avère mal posé [84]. En effet, pour $\omega = 0$ l'équation d'Euler donne $\nabla p = 0$, conduisant ainsi à une pression constante sans préciser sa valeur. De plus, la donnée sur

U_n est complètement perdue. Ceci est dû au fait que le système (2.11) n'est équivalent au suivant système :

$$\begin{cases} p = -\rho c^2 \nabla \cdot u & \text{dans le volume } V \\ \nabla p - \rho \omega^2 u = 0 & \text{dans le volume } V \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \omega^2 U_n & \text{sur la surface } S_u \end{cases} \quad (2.12)$$

que pour $\omega \neq 0$. Lorsque $\omega = 0$, on peut calculer analytiquement la pression statique à l'intérieur de la cavité rigide en considérant l'équation (2.12.b) et en intégrant, sur tout le volume, l'équation (2.12.a) qui est indépendante de ω [84]. Cette pression statique est donnée par [84] :

$$p^s = -\frac{\rho c^2}{V} \int_{S_u} U_n dS_u \quad (2.13)$$

Par contre, il suffit qu'une petite portion de la surface obéisse à une condition de Dirichlet pour que le problème :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans le volume } V \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \omega^2 u & \text{sur la surface } S_u \\ p = 0 & \text{sur la surface } S_p \end{cases} \quad (2.14)$$

soit bien posé pour tout ω , y compris $\omega = 0$. En effet, les équations (2.14.a) et (2.14.b) donnent lieu à pression constante et l'équation (2.14.c) l'impose égale à zéro.

Dans le cadre de ce travail, les problèmes étudiés sont définis en associant l'équation d'Helmholtz aux conditions aux limites de Neumann, tout en étant conscient que ces problèmes ainsi formulés ne sont bien posés que pour $\omega \neq 0$. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour contourner le problème $\omega = 0$ dans l'analyse, le lecteur est invité à consulter les travaux de Ohayon [84].

En acoustique, les méthodes analytiques ne sont applicables que pour des cas particuliers présentant des symétries de révolution et sous des hypothèses très restrictives. Pour les problèmes réels de plus en plus complexes, le recours à des méthodes numériques est indispensable. Plusieurs méthodes numériques telles que la Méthode des Eléments Finis (MEF), la Méthode des Eléments Finis de Surface ou Boundary Element Method (BEM) et la Méthode des Différences Finies (MDF) ont été largement utilisées pour la modélisation des problèmes acoustiques. Chacune d'entre elles a ses

propres avantages et ses propres inconvénients. Dans ce qui suit, nous allons appliquer la MEF et la BEM, selon leurs domaines de validité, à des problèmes d'acoustique pur.

2.2 La méthode des éléments finis (MEF)

2.2.1 Formulation variationnelle

En éléments finis, il est nécessaire de ramener l'équation aux dérivées partielles en un problème mathématiquement équivalent donné par ce qu'on appelle une formulation faible de l'équation. Pour ce faire, l'équation d'Helmholtz est multipliée par une fonction scalaire arbitraire δp appartenant à l'espace \mathcal{C} des fonctions continues et dérivables une fois à l'intérieur du volume V , puis intégrée sur le domaine V . En procédant ainsi, on obtient l'équation suivante :

$$\int_V \Delta p \delta p dV + k^2 \int_V p \delta p dV = 0 \quad (2.15)$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla p \delta p) dV - \int_V \nabla p \cdot \nabla \delta p dV + k^2 \int_V p \delta p dV = 0 \quad (2.16)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on aboutit à la formulation variationnelle suivante :

$$\frac{1}{\rho} \int_V \nabla p \cdot \nabla \delta p dV - \frac{\omega^2}{\rho c^2} \int_V p \delta p dV = \frac{1}{\rho} \int_S \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS \quad (2.17)$$

où S constitue la frontière du domaine acoustique.

2.2.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

Une solution approchée de cette équation est obtenue en divisant le domaine V en des sous domaines élémentaires volumiques dits éléments finis selon :

$$V \simeq V^h = \bigcup_{i=1}^{Element} V_i, \int_V () dV = \sum_{i=1}^{Element} \int_{V_i} () dV_i \quad (2.18)$$

sur lesquels on définit des noeuds. On introduit des fonctions de forme N_i permettant d'interpoler la pression comme suit :

$$p = \sum_{i=1}^{Nnode} N_i p_i \quad (2.19)$$

où p_i est la pression au nœud i , N_i est la fonction de forme correspondante et $Nnode$ est le nombre de nœuds par élément. On utilise la méthode de Galerkin, pour laquelle la fonction test $\delta p = N_j$.

En remplaçant ces équations dans l'équation (2.17), écrite pour un seul élément, on aboutit à la forme discrétisée de la formulation variationnelle :

$$\sum_{i=1}^{Nnode} p_i \frac{1}{\rho} \int_{V_e} \nabla N_i \nabla N_j dV - \frac{\omega^2}{\rho c^2} \sum_{i=1}^{Nnode} p_i \int_{V_e} N_i N_j dV = -i\omega \int_{S_e} V_n N_j dS \quad (2.20)$$

On peut alors définir les coefficients suivants :

$$k_{ij} = \frac{1}{\rho} \int_{V_e} \partial_x N_i \partial_x N_j dV$$

$$m_{ij} = \frac{1}{\rho c^2} \int_{V_e} N_i N_j dV$$

$$f_j = -i\omega \int_{S_e} V_n N_j dS$$

Pour pouvoir effectuer une intégration numérique par la méthode de Gauss, transformons les intégrales k_{ij} , m_{ij} et f_i écrites sur des éléments réels en des intégrations sur des éléments de référence :

$$k_{ij} = \frac{1}{\rho} \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} (J^{-1} \partial_{\xi} N_i) \cdot (J^{-1} \partial_{\xi} N_j) \|j_v\| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.21)$$

$$m_{ij} = \frac{1}{\rho c^2} \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} N_i N_j \|j_v\| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.22)$$

$$f_i = -i\omega \int_{\xi} \int_{\eta} V_n N_j \|j_s\| d\xi d\eta \quad (2.23)$$

où le vecteur $\partial_{\xi} N_i$ est donné par $\partial_{\xi} N_i = [\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}]$, J est la matrice jacobienne de la transformation géométrique telle que $J^T = [\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta}]$, $\|j_v\|$ est le déterminant de J et $\|j_s\| = \|x_{,\xi} \times x_{,\eta}\|$.

Ainsi, l'écriture de l'équation (2.20) pour chacun des éléments conduit après assemblage des matrices élémentaires, au système d'équations suivant :

$$(K_f - \omega^2 M_f) p = F \quad (2.24)$$

où K_f est la matrice d'énergie cinétique, M_f est la matrice de compressibilité de la cavité et F représente le vecteur de source acoustique dans la cavité. La résolution de ce système d'équations pour différentes fréquences permet d'extraire, pour tous les nœuds du maillage, le spectre de la pression acoustique due à l'excitation F .

2.2.3 Analyse modale

En pratique, ces coordonnées physiques ne sont pas souvent utilisées en raison des dimensions importantes des matrices qui nécessitent des temps de calcul assez longs. L'analyse modale est une technique couramment utilisée pour alléger les dimensions du problème à résoudre. Cette dernière permet de décrire le système en fonction de ses caractéristiques naturelles, les modes acoustiques. Pour cela, le vecteur d'inconnues nodales est projeté sur une base tronquée du système libre :

$$(K_f - \omega_i^2 M_f) \phi_i = \{0\} \quad (2.25)$$

Cette base est déterminée en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé :

$$K_f \{\phi_i\} = \lambda_i M_f \{\phi_i\} \quad (2.26)$$

ou standard :

$$(A - \lambda_i I) \{\phi_i\} = \{0\} \quad (2.27)$$

de n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et de n vecteurs propres $\phi_1 \dots \phi_n$ avec $\lambda_i = \omega_i^2$ et $A = M_f^{-1} K_f$.

En général, pour une estimation précise de la réponse acoustique, il est nécessaire de considérer un grand nombre de modes. L'inconvénient de cette approche réside dans le caractère coûteux de l'évaluation numérique. Toutefois, l'analyse fréquentielle montre que, parfois, la contribution des modes n'est plus significative au delà d'une certaine fréquence (pratiquement égale au double à la fréquence maximale considérée). C'est la raison pour laquelle la réduction des dimensions des matrices devient possible en considérant uniquement $m < n$ vecteurs propres.

En construisant la matrice modale ϕ telle que :

$$[\phi]_{n \times m} = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_m] \quad (2.28)$$

avec

$$\{p\}_{n \times 1} = [\phi]_{n \times m} \{a\}_{m \times 1} \quad (2.29)$$

où a représente le facteur de participation d'un mode donné au champ de pression ou encore la pression modale.

En remplaçant l'équation (2.29) dans l'équation (2.24) et en multipliant l'équation résultante à gauche par ϕ^T , on trouve :

$$\left(\overline{K}_f - \omega^2 \overline{M}_f\right) \{a\} = \overline{F} \quad (2.30)$$

avec $\phi^T K_f \phi = \overline{K}_f$ est la matrice modale de l'énergie cinétique, $\phi^T M_f \phi = \overline{M}_f$ la matrice modale de compressibilité et $\phi^T F = \overline{F}$ est le vecteur modal de force.

Dans la dernière équation, le vecteur $\{a\}$ peut être écrit sous la forme :

$$\{a\} = \left(\overline{K}_f - \omega^2 \overline{M}_f\right)^{-1} \{\overline{F}\} \quad (2.31)$$

Enfin, la pression acoustique dans le système de coordonnées physiques est donnée par :

$$\{p\} = \phi \{a\} \quad (2.32)$$

Finalement, notons que dans la plupart des cas, les vecteurs propres sont choisis de telle sorte qu'ils satisfassent les relations d'orthogonalisation de la matrice modale de l'énergie cinétique $\phi^T K_f \phi = \Omega$ et de la matrice modale de compressibilité $\phi^T M_f \phi = I_f$, ce qui permet de manipuler des matrices diagonales.

2.2.4 Application numérique

Dans cette section, nous nous intéressons à la simulation du champ de pression acoustique à l'intérieur d'une cavité rectangulaire rigide $0.3 \times 0.3 \times 1.7 \text{ m}^3$, remplie d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 1500 \text{ m/s}$) et excitée par le côté ($z = 0 \text{ m}$) avec un déplacement constant de 1 m pour toute la gamme de fréquence $[10, 1000] \text{ Hz}$.

Dans un premier temps, la méthode des éléments finis directe est utilisée. La cavité est discrétisée en $6 \times 6 \times 34$ éléments volumiques. De ce fait, le maillage est composé de 1224 éléments et 1715 noeuds. Ainsi, dans la méthode MEF directe, nous avons à construire et à résoudre un système de 1715×1715 composantes. Une méthode modale peut être également utilisée pour résoudre le problème. Dans un premier cas, nous n'avons considéré dans l'analyse que les 50 premiers modes acoustiques dont la fréquence la plus élevée est de 5396.3 Hz. Ceci représente 5 fois la fréquence maximale de notre analyse qui est de ($f_{max} = 1000 \text{ Hz}$).

Sur la figure (2.2), nous avons représenté la pression acoustique en quatre points situés sur l'axe de la cavité et distants de 0.1 m, 0.5 m, 1 m et 1.5 m de la facette vibrante. Nous observons un bon accord entre les résultats théoriques, ceux de la méthode des éléments finis directe et ceux de la méthode modale. En terme de temps de calcul, nous constatons que la méthode modale (41 s) est plus rapide que la méthode directe (2 h 2 m 8 s). D'où l'efficacité de la méthode modale par rapport à la méthode directe.

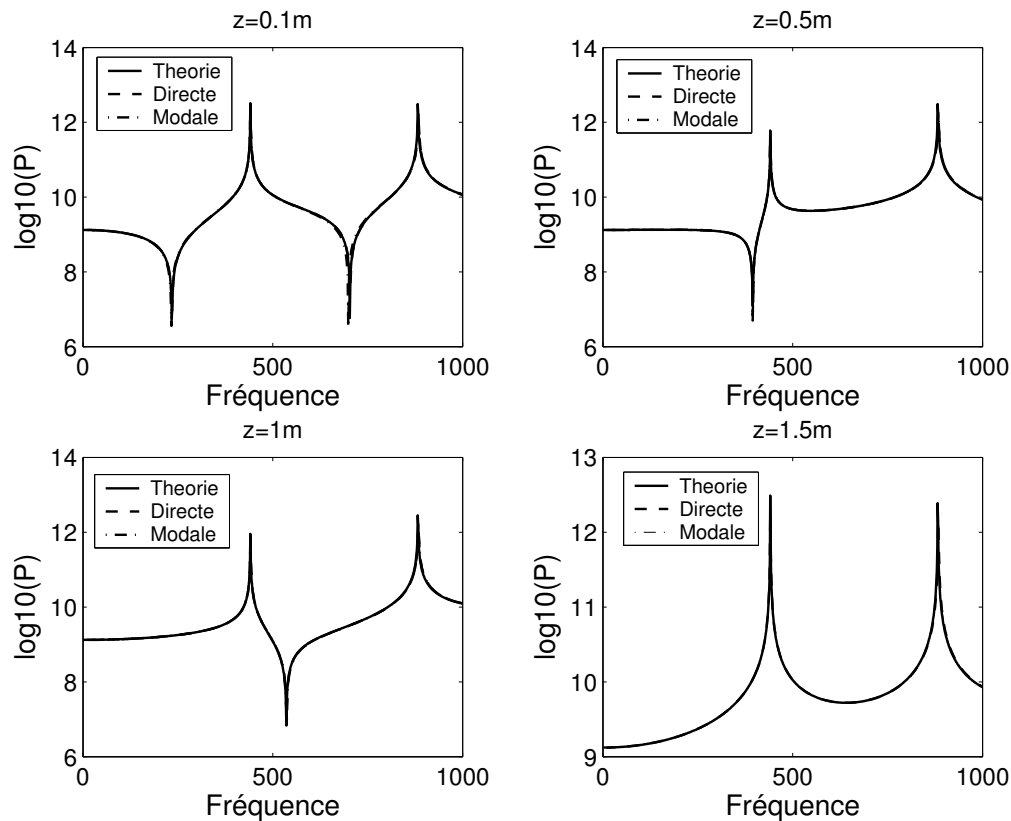


FIG. 2.2 – Pression acoustique sur l'axe de la cavité. Comparaison entre la MEF directe et modale (50 modes)

En se limitant, cette fois-ci, à 10 modes propres acoustiques dont la fréquence maximale est 2566.9 Hz, nous apercevons une bonne concordance avec les solutions obtenue avec 50 modes [Fig.(2.3)]. Ceci donne lieu à un temps CPU de 22 s présentant, ainsi, un facteur de 2 entre la méthode modale à 50 et 10 modes. Ceci démontre que la prise en compte des modes ayant une fréquence de l'ordre de $2.5f_{max}$ donne de bons résultats.

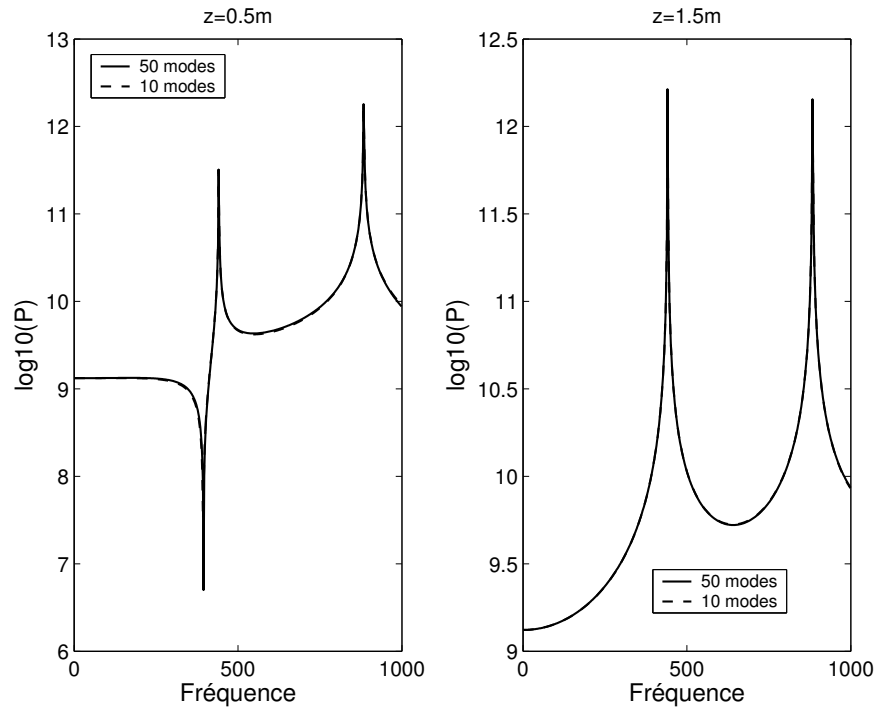


FIG. 2.3 – Pression acoustique sur l'axe de la cavité. Comparaison entre la MEF modale à 50 et 10 modes

2.3 La BEM directe par collocation

La méthode directe peut être appliquée soit à un problème interne soit à un problème externe. Elle est basée sur la représentation intégrale de l'équation d'Helmholtz et les inconnues sont la pression et la vitesse acoustique. Cette formulation intégrale est obtenue à l'aide du théorème de Green. Pour deux fonctions U et G complexes quelconques de l'espace, ce théorème s'écrit comme suit :

$$\iiint_V (G\Delta U - U\Delta G) dV = \iint_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.33)$$

si U et G et leurs dérivées partielles premières et secondes sont définies et sont continues dans le volume V et sur la surface S fermée limitant V . $\frac{\partial}{\partial n}$ représente une dérivation partielle dans la direction de la normale extérieure en chaque point de S .

2.3.1 Représentation intégrale de l'équation d'Helmholtz

2.3.1.1 Problème interne

Pour un problème intérieur, on détermine le champ de pression dans un domaine V , limité par une surface S [Fig. (2.4)]. L'identité de Green est appliquée à la pression qui est une inconnue et à la solution fondamentale G . Dans ce cas, le point de discontinuité peut se situer soit dans le domaine V soit sur la surface S .

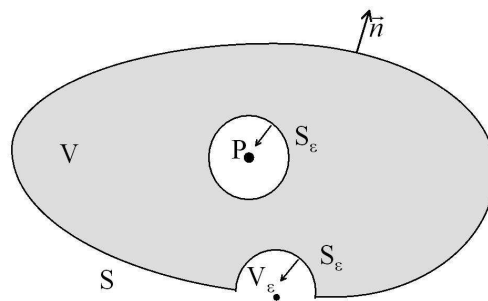


FIG. 2.4 – Exclusion du point source d'un domaine intérieur.

Lorsque P est un point du domaine considéré, l'identité de Green n'est pas directement appliquée à V car la fonction G n'est pas différentiable en P . Par conséquent, afin d'exclure la discontinuité en P , on construit autour de ce point une sphère infinitésimale de surface S_ϵ et de rayon ϵ [Fig. (2.4)]. On applique, ainsi, le théorème de Green au volume $V - V_\epsilon$, compris entre S et S_ϵ , et à la surface d'intégration $S + S_\epsilon$. L'application du théorème de Green donne :

$$\int_{V-V_\epsilon} (G\Delta p - p\Delta G) dV = \int_{S+S_\epsilon} \left(G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.34)$$

Puisque P est exclu du domaine, alors :

$$\Delta p = -k^2 p, \Delta G = -k^2 G \quad (2.35)$$

et par conséquent on peut écrire :

$$\int_S \left(G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = - \int_{S_\epsilon} \left(G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.36)$$

Remarquons que la normale extérieure à la surface $S + S_\epsilon$ est orientée vers l'extérieur au sens habituel pour les points de S , mais orientée vers P pour les points de S_ϵ . Par conséquent :

$$\int_S \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \int_{S_\epsilon} \left(G \frac{\partial p}{\partial \epsilon} - p \frac{\partial G}{\partial \epsilon} \right) dS \quad (2.37)$$

En introduisant la fonction de Green, en remplaçant dS par son expression en coordonnées sphériques et en faisant tendre ϵ vers zéro tout en considérant l'équation d'Euler $-i\rho\omega V_n = \frac{\partial p}{\partial n}$, on obtient :

$$p(P) = - \int_S \left(i\rho\omega V_n G + p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.38)$$

Ce résultat constitue la principale idée de la méthode intégrale car il permet d'exprimer le champ, en un point quelconque P , en fonction des valeurs aux limites sur une surface quelconque, entourant ce point. Toutefois, cette équation ne peut pas être utilisée car sur le même segment, les conditions aux limites donnent soit la pression, soit la vitesse normale ou une combinaison des deux. Pour obtenir les autres valeurs des variables aux limites, on est amené à placer, successivement, le point P sur chaque point de la surface. Ce procédé est appelé collocation.

Lorsque P est un point de la surface, le volume infinitésimal n'est pas une sphère mais une portion de sphère [Fig. (2.4)]. Dans un cas général, on peut montrer que l'équation intégrale de Helmholtz s'écrit :

$$C^0(P)p(P) = - \int_S \left(i\rho\omega V_n G + p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.39)$$

avec

$$C^0(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in V \\ - \int_S \frac{\partial G_L}{\partial n} dS & \text{si } P \in S \\ 0 & \text{si } P \notin (V \cup S) \end{cases} \quad (2.40)$$

où $\frac{\partial G_L}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi r^2}$ [131].

2.3.1.2 Problème externe

Considérons le cas d'un domaine V infini dans lequel se trouve une structure vibrante de surface S . Une surface S_R est construite temporairement pour limiter le

volume V à l'infini [Fig. (2.5)]. Afin d'appliquer le théorème de Green, on doit exclure un petit volume sphérique V_ϵ de surface S_ϵ et de rayon ϵ entourant le point de discontinuité P . Notons que la normale à la surface S_R est orientée vers l'extérieur alors que celles de S_ϵ et S sont orientées dans le sens opposé.

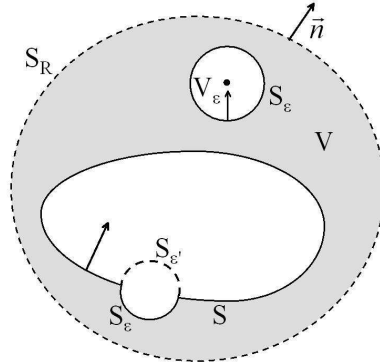


FIG. 2.5 – Exclusion du point source d'un domaine extérieur.

L'application du théorème de Green donne :

$$\int_{V-V_\epsilon} (G\Delta p - p\Delta G) dV = \int_{S+S_\epsilon+S_R} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.41)$$

Comme pour le problème intérieur, on peut montrer que :

$$\int_{S_\epsilon} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = -p(P) \quad (2.42)$$

En raison de la condition de rayonnement en champ libre de Sommerfeld, l'intégrale sur S_R est nulle :

$$\int_{S_R} \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (2.43)$$

d'où

$$\int_S \left(G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = p(P) \quad (2.44)$$

ou encore :

$$p(P) = - \int_S \left(i\rho\omega V_n G + p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.45)$$

Les équations (2.38) et (2.45) sont identiques sauf que les normales ont des directions opposées.

Lorsque P est un point de la surface, il doit être exclu du domaine comme c'est représenté sur la figure (2.5). On peut montrer donc que dans le cas général, l'équation intégrale d'un problème extérieur s'écrit comme suit [131] :

$$C(P)p(P) = - \int_S \left(i\rho\omega V_n G + p \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (2.46)$$

où

$$C(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in V \\ 1 - \int_S \frac{\partial G_L}{\partial n} dS & \text{si } P \in S \\ 0 & \text{si } P \notin (V \cup S) \end{cases} \quad (2.47)$$

Il est à noter que la fonction de Green G dépend de la distance séparant le point P de vecteur position r_x et le point d'intégration Q de vecteur position r_y . Par conséquent, une écriture plus détaillée de l'équation intégrale d'Helmholtz (2.46) peut se mettre sous la forme :

$$C(r_x)p(r_x) = - \int_{S_y} \left(i\rho\omega V_n(r_y)G(r_x, r_y) + p(r_y) \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y} \right) dS_y \quad (2.48)$$

2.3.2 Discrétisation et collocation

Pour résoudre l'équation intégrale de Helmholtz numériquement, on discrétise la surface en des éléments linéaires quadrilatéraux (4 nœuds) et triangulaires (3 nœuds) [Fig. (2.6)] :

$$S \simeq S^h = \bigcup_{i=1}^{Element} S_i, \int_S () dS = \sum_{Element} \int_{S^e} () dS$$

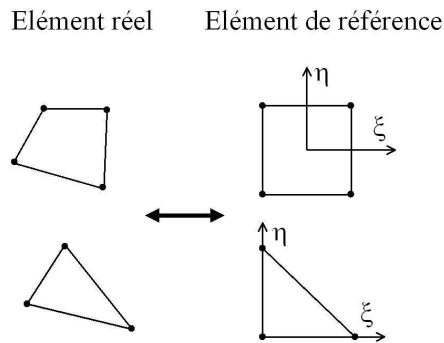


FIG. 2.6 – Éléments triangulaire et quadrilatéral

L'interpolation des nœuds donne la géométrie des différents éléments. Autrement dit :

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{ND} x_i^{(k)} N_i(\xi, \eta) \quad (2.49)$$

où $x_i^{(k)}$, qu'on notera tout simplement par la suite x_i , sont les coordonnées ($k = 1, 2, 3$) du nœud i , $N_i(\xi_1, \xi_2)$ sont les fonctions de forme définies sur l'élément de référence [Fig. (2.6)]. La fonction de forme est nulle partout sauf au nœud lui correspondant où elle vaut un. ND est le nombre de nœuds par élément (3 ou 4). De la même manière, on peut interpoler les dérivées comme suit :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{ND} x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{ND} x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (2.51)$$

Une surface infinitésimale dS sur la frontière est donnée par :

$$dS = \|j_s\| d\xi d\eta \quad (2.52)$$

où $\|j_s\|$ est le Jacobien :

$$\|j_s\| = \|x_{,\xi} \times x_{,\eta}\| \quad (2.53)$$

Ainsi, la normale peut être calculée comme suit :

$$\vec{n} = \frac{x_{,\xi} \times x_{,\eta}}{\|j_s\|} \quad (2.54)$$

Les variables " p " et " V_n " aux frontières sont données par :

$$p = \sum_{i=1}^{ND} p_i N_i(\xi, \eta) \quad (2.55)$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{ND} V_{ni} N_i(\xi, \eta) \quad (2.56)$$

où p_i et V_{ni} sont, respectivement, la pression et la vitesse normale aux nœuds. On remplace, pour chaque élément S_j^e , ces deux équations dans l'équation intégrale de Helmholtz et on intègre sur la frontière :

$$C(P) \sum_i p_i N_i = -i\omega\rho \sum_i V_{ni} \int_{S_j^e} G N_i dS - \sum_i p_i \int_{S_j^e} \frac{\partial G}{\partial n} N_i dS \quad (2.57)$$

avec $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}$ et $\frac{\partial r}{\partial n} = \vec{\nabla}_r \cdot \vec{n}$.
 Pour chaque élément "j", on trouve :

$$C(P) \sum_i p_i N_i = \sum_i V_{ni} l_i - \sum_i p_i h_i \quad (2.58)$$

où

$$h_i = \int_{S_j^e} \frac{\partial G}{\partial n} N_i dS \quad (2.59)$$

$$l_i = -i\omega\rho \int_{S_j^e} G N_i dS \quad (2.60)$$

En regroupant les h_i dans la matrice H^* et l_i dans la matrice L , on trouve :

$$Cp + H^*p = LV_n \quad (2.61)$$

En combinant C et H^* , on forme une seule matrice H telle que :

$$Hp = LV_n \quad (2.62)$$

Comme les conditions aux limites ne spécifient que la moitié des variables aux frontières, on arrange le dernier système de telle sorte que les inconnues (p ou V_n) se trouvent à gauche de l'égalité comme suit :

$$Ax = b \quad (2.63)$$

La résolution de ce système permet d'obtenir la pression et la vitesse normale aux frontières. Ainsi, l'intégration de l'équation de Helmholtz donne le champ de pression en n'importe quel point du milieu.

2.3.3 Intégration numérique

Lorsque le point de collocation ne coïncide pas avec un nœud de l'élément, l'intégrant est régulier. L'intégration numérique sur un élément quadrilatéral régulier se fait par la méthode de Gauss.

$$h_i = \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n} N_i dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G}{\partial n} N_i \|j_s\| d\xi d\eta = \sum_{m=1}^{Ngs} \sum_{k=1}^{Ngs} w_m w_k f(\xi^{(m)}, \eta^{(k)}) \quad (2.64)$$

où $f = \frac{\partial G}{\partial n} N_i \|j_s\|$ avec Ngs est le nombre de points de Gauss suivant une direction donnée et w est le poids.

De la même manière, on peut utiliser les formules d'intégration de Hammer sur un triangle :

$$h_i = \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n} N_i dS = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{\partial G}{\partial n} N_i \|j_s\| d\xi d\eta = \sum_{m=1}^{Nhr} w_m f(\xi^{(m)}, \eta^{(m)}) \quad (2.65)$$

où Nhr est le nombre de points de Hammer. Wu [131] a transformé l'élément de référence triangulaire en un carré unitaire en utilisant la transformation en coordonnées polaires suivantes [Fig. (2.7)] :

$$\begin{cases} \xi = \xi^{(3)} + \rho[\xi^{(1)} - \xi^{(3)} + \theta(\xi^{(2)} - \xi^{(1)})] \\ \eta = \eta^{(3)} + \rho[\eta^{(1)} - \eta^{(3)} + \theta(\eta^{(2)} - \eta^{(1)})] \end{cases} \quad (2.66)$$

où l'exposant désigne le numéro local du noeud, le noeud 3 est pris comme origine du système de coordonnées polaires et $0 \leq \theta \leq 1$ et $0 \leq \rho \leq 1$.

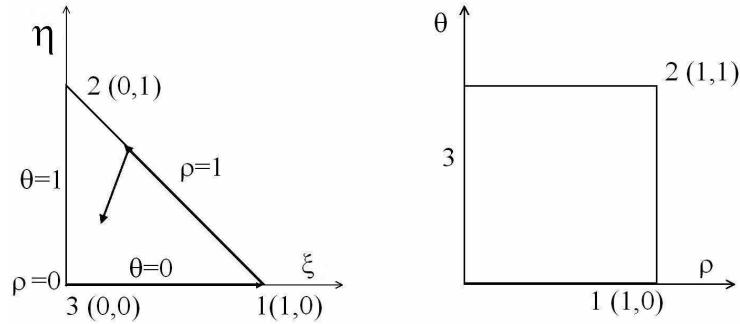


FIG. 2.7 – Transformation en coordonnées polaires généralisées

En tenant compte des coordonnées de chaque noeud, la transformation se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \xi = \rho(1 - \theta) \\ \eta = \rho\theta \end{cases} \quad (2.67)$$

dont le jacobien est $J_1 = \rho$. La transformation

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau \\ \theta = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\chi \end{cases} \quad (2.68)$$

dont le jacobien est de $1/4$ permet de réécrire l'intégrale sur un élément de référence carré où la quadrature de Gauss est directement appliquée.

$$h_i = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G}{\partial n} N_i \|j_s\| \rho d\tau d\chi \quad (2.69)$$

Lorsqu'un point de collocation coïncide avec un nœud de l'élément, l'intégrale est singulière. Dans le cas d'un triangle, la transformation est identique à celle donnée par l'équation (2.66) sauf que l'origine du système est à prendre au point de collocation. Par exemple, si le point de collocation est le nœud 1, la transformation devient :

$$\begin{cases} \xi = \xi^{(1)} + \rho[\xi^{(2)} - \xi^{(1)} + \theta(\xi^{(3)} - \xi^{(2)})] \\ \eta = \eta^{(1)} + \rho[\eta^{(2)} - \eta^{(1)} + \theta(\eta^{(3)} - \eta^{(2)})] \end{cases} \quad (2.70)$$

Dans ce cas, l'intégration numérique de h_i sur un élément triangulaire singulier est similaire à (2.69).

Pour un élément quadrilatère singulier, on place le point de collocation à l'origine (par exemple le nœud 1 dans la figure (2.8)) et on divise l'élément en deux triangles. Pour le premier triangle, on procède de la même manière que l'équation (2.70). Pour le second, la transformation est donnée par :

$$\begin{cases} \xi = \xi^{(1)} + \rho[\xi^{(3)} - \xi^{(1)} + \theta(\xi^{(4)} - \xi^{(3)})] \\ \eta = \eta^{(1)} + \rho[\eta^{(3)} - \eta^{(1)} + \theta(\eta^{(4)} - \eta^{(3)})] \end{cases} \quad (2.71)$$

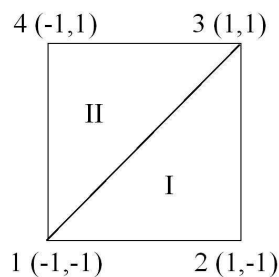


FIG. 2.8 – Division du quadrilatère en deux triangles

Notons que le jacobien, calculé sur chaque triangle, est de 4ρ d'où :

$$h_i^{I,II} = \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n} N_i dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G}{\partial n} N_i \|j_s\| \rho d\tau d\chi \quad (2.72)$$

2.3.4 Les fréquences irrégulières

La BEM s'avère la méthode la plus adaptée aux problèmes extérieurs car la condition de rayonnement en champ libre est incluse dans la fonction de Green. Néanmoins,

cette formulation présente l'inconvénient d'admettre une infinité de solutions pour des fréquences dites irrégulières. Ce phénomène se traduit, numériquement, par un mauvais conditionnement de la matrice au voisinage de chacune de ces fréquences [68]. L'équation intégrale d'Helmholtz appartient à la famille des équations de seconde espèce qui sont régies par l'alternative de Fredholm.

L'équation intégrale d'Helmholtz d'un problème extérieur qu'on peut réécrire sous la forme :

$$p(r_x) - \lambda \int_{S_y} K(r_x, r_y) p(r_y) dS_y = f(r_x) \quad (2.73)$$

a une solution unique si et seulement si l'équation homogène associée :

$$p_0(r_x) - \lambda \int_{S_y} K(r_x, r_y) p_0(r_y) dS_y = 0 \quad (2.74)$$

n'admet que la solution triviale [107]. Dans ce cas, λ est appelée valeur régulière du noyau K . Alternativement, l'équation intégrale admet au moins une solution si, d'une part, l'équation homogène adjointe :

$$\phi_0(r_x) - \lambda^* \int_{S_y} K^*(r_x, r_y) \phi_0(r_y) dS_y = 0 \quad (2.75)$$

a une solution non triviale et si, d'autre part :

$$\int_{S_y} \phi_0^*(r_y) f(r_y) dS_y = 0 \quad (2.76)$$

Dans ce cas, λ est une valeur caractéristique du noyau K avec $()^*$ désigne le complexe conjugué [107].

Pour un problème de Neumann extérieur, la vitesse normale est connue et l'équation intégrale s'écrit comme suit :

$$C(r_x) p(r_x) + \int_{S_y} \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y} p(r_y) dS_y = - \int_{S_y} i\rho\omega V_n(r_y) G(r_x, r_y) dS_y \quad (2.77)$$

où le noyau $K = \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y}$ est une fonction du nombre d'onde k et $\lambda = 1$.

Chaque nombre d'onde k , pour lequel $\lambda = 1$ est une valeur caractéristique du noyau K , est un nombre d'onde caractéristique qu'on note k' . De ce fait, l'équation (2.77) admet une solution unique si $k \neq k'$. Pour ces nombres d'onde caractéristiques $k = k'$, l'équation intégrale n'a de solution que si la condition :

$$\int_{S_y} p_0^*(r_y) \left(\int_{S_z} i\rho\omega V_n(r_z) G(r_y, r_z) dS_z \right) dS_y = 0 \quad (2.78)$$

est satisfaite pour tout $p_0(r_y)$ vérifiant l'équation homogène adjointe :

$$C(r_x)p_0(r_x) + \int_{S_y} \frac{\partial G^*(r_x, r_y)}{\partial n_y} p_0(r_y) dS_y = 0 \quad (2.79)$$

et par conséquent, l'équation intégrale admet une infinité de solution.

Afin d'identifier ces nombres d'onde, établissons l'équation intégrale pour un problème de Dirichlet intérieur dans lequel la pression est connue sur la surface :

$$C(r_x) \frac{\partial p(r_x)}{\partial n_x} + \int_{S_y} \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_x} \frac{\partial p(r_y)}{\partial n_y} dS_y = - \int_{S_y} \frac{\partial^2 G(r_x, r_y)}{\partial n_x \partial n_y} p(r_y) dS_y \quad (2.80)$$

Les deux équations (2.77) et (2.80) ont la même forme sauf que l'équation (2.77) utilise la pression comme inconnue alors que dans l'équation (2.80) l'inconnue est la dérivée normale de la pression. Pour certaines fréquences, la cavité interne résonne. Par conséquent, le problème de Neumann extérieur n'admet pas une solution unique aux fréquences de résonance du problème de Dirichlet intérieur associé.

Pour contourner le problème des fréquences irrégulières, Schenck [107] a proposé une méthode dite CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) qui utilise le fait que parmi l'infinité des solutions qu'admet l'équation intégrale, il n'en existe qu'une seule qui vérifie le problème externe et pour laquelle l'intérieur du domaine est donné par $C(r) = 0$

$$0 = - \int_{S_y} \left(\frac{\partial G(r, r_y)}{\partial n_y} p(r_y) + i\rho\omega V_n(r_y) G(r, r_y) \right) dS_y \quad (2.81)$$

De ce fait, cette nouvelle équation appliquée en des points intérieurs à la structure vibrante permet d'imposer une pression nulle en ces points. Cette contrainte supplémentaire donne lieu à un système rectangulaire surdéterminé, bien conditionné, dont la solution est obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés. Plusieurs travaux de recherche ont montré l'importance du choix des points CHIEF ainsi que leurs positions. En effet, pour une fréquence irrégulière donnée, le système ne peut être surdéterminé que si ces points n'appartiennent pas à la surface nodale du problème intérieur associé [68].

2.3.5 Application numérique

Considérons une sphère pulsante de rayon $a = 1\text{m}$ avec une vitesse unitaire et une fréquence de 70 Hz. Nous nous sommes intéressés à la variation de la pression acoustique

rayonnée, par cette sphère pulsant dans l'air, en fonction de la distance. Pour cela, nous avons considéré le maillage donné par la figure (2.9). Ainsi, la variation de la pression est représentée par la figure (2.10). Nous constatons un bon accord entre la solution analytique et le résultat fourni par la BEM. Dans cet exemple, nous n'avons pas utilisé la méthode de CHIEF car la fréquence de 70Hz n'est pas une fréquence propre de la sphère. En effet la première fréquence propre survient pour $ka = \pi$ ($f = 171,5Hz$).

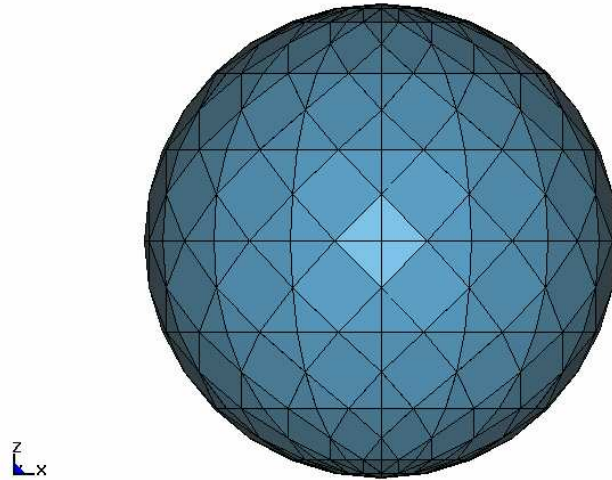


FIG. 2.9 – Maillage de la sphère (304 éléments).

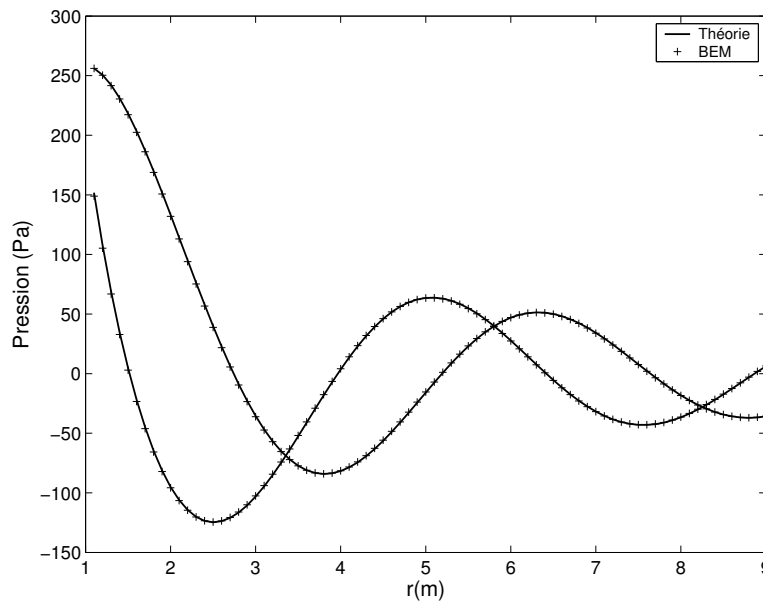


FIG. 2.10 – Variation de la pression en fonction de la distance pour $f = 70Hz$.

2.4 La BEM indirecte variationnelle

Le moyen le plus simple pour établir la formulation intégrale indirecte consiste à considérer la formulation directe de l'équation d'Helmholtz pour un problème externe de domaine (1) et un problème interne de volume (2) [Fig. (2.11)].

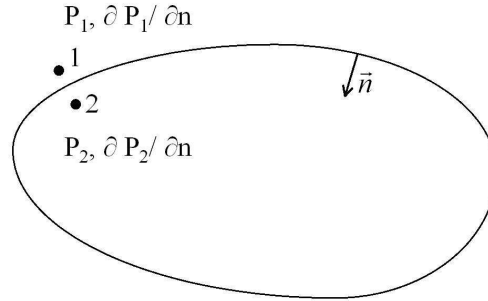


FIG. 2.11 – Définition du domaine acoustique pour la méthode indirecte.

2.4.1 Formulation intégrale et variationnelle de l'équation d'Helmholtz

Ecrivons les équations intégrales pour le problème extérieur et intérieur sous leurs formes détaillées :

$$C_1(r)p(r) = \int_{S_{y1}} \left(G(r, r_{y1}) \frac{\partial p_1(r_{y1})}{\partial n_{y1}} - p_1(r_{y1}) \frac{\partial G(r, r_{y1})}{\partial n_{y1}} \right) dS_{y1} \quad (2.82)$$

$$C_2(r)p(r) = \int_{S_{y2}} \left(G(r, r_{y2}) \frac{\partial p_2(r_{y2})}{\partial n_{y2}} - p_2(r_{y2}) \frac{\partial G(r, r_{y2})}{\partial n_{y2}} \right) dS_{y2} \quad (2.83)$$

En considérant que $C_1(r) + C_2(r) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial n_{y1}} = -\frac{\partial}{\partial n_{y2}} = \frac{\partial}{\partial n_y}$ et en sommant les équations (2.82) et (2.83), on aboutit à la pression acoustique en un point quelconque du milieu interne ou externe :

$$p(r) = \int_{S_y} \left(G(r, r_y) \sigma(r_y) - \frac{\partial G(r, r_y)}{\partial n_y} \mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.84)$$

où $\mu = p_{r_{y1}} - p_{r_{y2}}$ est le potentiel double couche et $\sigma(r_y) = \frac{\partial p_{r_{y1}}}{\partial n_{y1}} - \frac{\partial p_{r_{y2}}}{\partial n_{y2}}$ est le potentiel simple couche.

On peut montrer que la pression sur la surface relative au milieu 1 et 2 s'écrivent comme suit :

$$p(r_{x1}) = C_2(r_x)\mu(r_x) + \int_{S_y} \left(G(r_x, r_y)\sigma(r_y) - \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.85)$$

$$p(r_{x2}) = -C_1(r_x)\mu(r_x) + \int_{S_y} \left(G(r_x, r_y)\sigma(r_y) - \frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.86)$$

En dérivant ces deux expressions par rapport à la normale, on obtient la vitesse à la surface :

$$\frac{\partial p(r_{x1})}{\partial n_x} = C_2(r_x)\sigma(r_x) + \int_{S_y} \left(\frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_x}\sigma(r_y) - \frac{\partial^2 G(r_x, r_y)}{\partial n_x \partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial p(r_{x2})}{\partial n_x} = -C_1(r_x)\sigma(r_x) + \int_{S_y} \left(\frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_x}\sigma(r_y) - \frac{\partial^2 G(r_x, r_y)}{\partial n_x \partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.88)$$

Dans le cas d'un problème défini pour des conditions aux limites de Neumann, la vitesse est imposée sur la surface et par conséquent le potentiel simple couche s'annule : $\sigma(r_y) = 0$. De ce fait, l'équation (2.84) se simplifie comme suit :

$$p(r) = - \int_{S_y} \left(\frac{\partial G(r_x, r_y)}{\partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.89)$$

En dérivant l'équation (2.89) par rapport à la normale tout en considérant l'équation d'Euler, on obtient :

$$-i\rho\omega V_n = - \int_{S_y} \left(\frac{\partial^2 G(r_x, r_y)}{\partial n_x \partial n_y}\mu(r_y) \right) dS_y \quad (2.90)$$

Considérons un espace de fonctions suffisamment dérivables et multiplions l'équation (2.90) par $\delta\mu(r_x)$ et intégrons sur toute la surface S_x , nous obtenons :

$$-i\rho\omega \int_{S_x} V_n \delta\mu(r_x) dS_x = - \int_{S_x} \int_{S_y} \left(\frac{\partial^2 G(r_x, r_y)}{\partial n_x \partial n_y}\mu(r_y)\delta\mu(r_x) \right) dS_y dS_x \quad (2.91)$$

Pour réduire le degré de singularité de cette dernière expression, elle est réécrite sous la forme suivante [53, 131] :

$$-i\rho\omega \int_{S_x} V_n \delta\mu(r_x) dS_x = - \int_{S_x} \int_{S_y} \left(G(r_x, r_y) \left(k^2(n_x \cdot n_y) - (n_x \times \nabla_x \delta\mu(x)) \cdot (n_y \times \nabla_y \mu(y)) \right) \mu(r_y) \delta\mu(r_x) \right) dS_y dS_x \quad (2.92)$$

La résolution de cette équation nous permet de déterminer le potentiel double couche sur la surface. Ce dernier conduit au calcul de la pression en un point quelconque du milieu via l'équation (2.89) et de la pression en un point appartenant à la surface à l'aide des équations (2.85) et (2.86).

2.4.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

La solution de l'équation (2.92) est obtenue en divisant la surface S en des éléments de frontière

$$S \simeq S^h = \bigcup_{i=1}^{Element} S_i$$

$$\int_{S_x} () dS_x = \sum_{i=1}^{Element} \int_{S_i} () dS_i, \int_{S_x} \int_{S_y} () dS_x dS_y = \sum_{i=1}^{Element} \sum_{j=1}^{Element} \int_{S_i} \int_{S_j} () dS_j dS_i$$

sur lesquels le potentiel double couche sera interpolé comme suit :

$$\mu(r_y) = \sum_{j=1}^{ND} \mu_j(r_y) N_j \quad (2.93)$$

où N_i est la fonction de forme définie sur l'élément de référence (ξ_1, η_1, ζ_1) [Fig. (2.6)]. μ_i est le potentiel double couche au nœud i et ND (égal 3 pour un triangle et 4 pour un quadrilatère) est le nombre de nœuds par élément.

Le passage par l'élément de référence nous permet d'écrire la normale comme suit :

$$n_x = \frac{x_{,\zeta_1}}{\|j_x\|} \quad (2.94)$$

où $\|j_x\| = \|x_{,\zeta_1}\|$ et $x_{,\zeta_1} = x_{,\xi_1} \times x_{,\eta_1}$

Exprimons le terme $(n_x \times \nabla_x \delta \mu(x))$ dans le repère de l'élément de référence. En remplaçant la normale par son équation (2.94) et en utilisant l'équation (2.93) tout en considérant la méthode de Galerkin, on trouve :

$$n_x \times \nabla_x \delta \mu(x) = \frac{x_{,\zeta_1}}{\|j_x\|} \times \nabla_x N_i \quad (2.95)$$

En écrivant le gradient dans l'élément parent, on obtient :

$$\nabla_x N_i = J^{-1} \nabla_\xi N_i \quad (2.96)$$

avec :

$$J^{-1} = \frac{1}{\|j_x\|^2} [x_{,\eta_1} \times x_{,\zeta_1} \quad x_{,\zeta_1} \times x_{,\xi_1} \quad x_{,\xi_1} \times x_{,\eta_1}] \quad (2.97)$$

En remplaçant l'équation (2.97) dans l'équation (2.96), on aboutit à :

$$\nabla_x N_i = \frac{1}{\|j_x\|^2} (x_{,\eta_1} \times x_{,\zeta_1} N_{i,\xi_1} + x_{,\zeta_1} \times x_{,\xi_1} N_{i,\eta_1} + x_{,\xi_1} \times x_{,\eta_1} N_{i,\zeta_1}) \quad (2.98)$$

Par conséquent, on peut déduire que :

$$n_x \times \nabla_x N_i = \frac{1}{\|j_x\|^3} (x_{,\zeta_1} \times (x_{,\eta_1} \times x_{,\zeta_1}) N_{i,\xi_1} + x_{,\zeta_1} \times (x_{,\zeta_1} \times x_{,\xi_1}) N_{i,\eta_1}) \quad (2.99)$$

En utilisant la propriété du produit vectoriel $a \times (b \times c) = (a.c)b - (a.b).c$ et sachant que :

$$x_{,\xi_1} \cdot x_{,\zeta_1} = 0, \quad x_{,\eta_1} \cdot x_{,\zeta_1} = 0, \quad x_{,\zeta_1} \cdot x_{,\zeta_1} = \|j_x\|^2$$

nous aboutissons à l'expression simplifiée suivante :

$$n_x \times \nabla_x N_i = \frac{1}{\|j_x\|} (x_{,\eta_1} N_{i,\xi_1} - x_{,\xi_1} N_{i,\eta_1}) \quad (2.100)$$

De la même manière, on peut écrire :

$$n_y \times \nabla_y N_j \mu_j(y) = \frac{1}{\|j_y\|} (y_{,\eta_2} N_{j,\xi_2} \mu_j - y_{,\xi_2} N_{j,\eta_2} \mu_j) \quad (2.101)$$

où (ξ_2, η_2, ζ_2) représente le repère de l'élément de référence de l'élément j . Finalement, en utilisant l'équation (2.100) et (2.101), on obtient :

$$\begin{aligned} (n_x \times \nabla_x N_i) \cdot (n_y \times \nabla_y N_j \mu_j(y)) &= \frac{1}{\|j_x\|} [(x_{,\eta_1} \cdot y_{,\eta_2}) N_{i,\xi_1} N_{j,\xi_2} - (x_{,\eta_1} \cdot y_{,\xi_2}) N_{i,\xi_1} N_{j,\eta_2} \\ &\quad - (x_{,\xi_1} \cdot y_{,\eta_2}) N_{i,\eta_1} N_{j,\xi_2} + (x_{,\xi_1} \cdot y_{,\xi_2}) N_{i,\eta_1} N_{j,\eta_2}] \frac{1}{\|j_y\|} \mu_j \end{aligned} \quad (2.102)$$

Le second terme de l'équation intégrale s'écrit de la manière suivante :

$$\delta \mu_x (n_x \cdot n_y) \mu_x = \frac{1}{\|j_x\|} (x_{,\zeta_1} \cdot y_{,\zeta_2}) N_i N_j \frac{1}{\|j_y\|} \mu_j \quad (2.103)$$

En remplaçant les équations (2.102) et (2.103) dans l'équation (2.92), tout en utilisant le fait que $dS_x = \|j_x\| d\xi_1 d\eta_1$ et $dS_y = \|j_y\| d\xi_2 d\eta_2$, nous aboutissons à la forme discrète de l'équation intégrale :

$$a_{ij} \mu_j = b_i \quad (2.104)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} \int_{\xi_2} \int_{\eta_2} G(r) [k^2 (x_{,\zeta_1} \cdot y_{,\zeta_2}) N_i N_j - ((x_{,\eta_1} \cdot y_{,\eta_2}) N_{i,\xi_1} N_{j,\xi_2} - (x_{,\eta_1} \cdot y_{,\xi_2}) N_{i,\xi_1} N_{j,\eta_2} \\ &\quad - (x_{,\xi_1} \cdot y_{,\eta_2}) N_{i,\eta_1} N_{j,\xi_2} + (x_{,\xi_1} \cdot y_{,\xi_2}) N_{i,\eta_1} N_{j,\eta_2})] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \\ &= \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} \int_{\xi_2} \int_{\eta_2} \frac{g(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{r} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (2.105)$$

et :

$$b_i = i\rho\omega \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} V_{ni} N_i \|j_x\| d\xi_1 d\eta_1$$

$$= \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} \vartheta(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \quad (2.106)$$

Ce qui conduit au système linéaire suivant

$$Ax = b \quad (2.107)$$

dans lequel les matrices globales A et b résultent de l'assemblage des matrices élémentaires a_{ij} et b_i .

2.4.3 Intégration numérique

Lorsque les deux éléments d'intégration sont différents, l'intégrale (2.104) est régulière et peut-être calculée numériquement en utilisant les points d'intégration de Gauss pour les éléments quadrilatéraux et ceux de Hammer pour les éléments triangulaires. Cependant, lorsque l'intégrale double est effectuée sur le même élément, l'intégrale (2.104) présentant une singularité de $\frac{1}{r}$, ne peut plus être évaluée avec précision à l'aide des schémas d'intégration de Gauss ou de Hammer.

Wang et al. [129] ont développé, pour des éléments quadrilatéraux, un schéma d'intégration de fonctions présentant une singularité de $\frac{1}{r}$ sur l'élément de référence. En notant $R = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$ la distance séparant deux points sur l'élément de référence et comme $\frac{R}{r}$ est borné sur l'élément de référence [129], l'équation (2.105) est équivalente à :

$$a_{ij} = \iiint \int_{-1}^1 \frac{f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{R} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = \sum_{m=1}^{M_{\xi_1}} \sum_{n=1}^{M_{\eta_1}} \sum_{r=1}^{M_{\xi_2}} \sum_{l=1}^{M_{\eta_2}} f(\xi_1^{(m)}, \eta_1^{(n)}, \xi_2^{(r)}, \eta_2^{(l)}) W_{mnr l} \quad (2.108)$$

où $f(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = g(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)R/r$, les points $\xi_1^{(m)}, \eta_1^{(n)}, \xi_2^{(r)}, \eta_2^{(l)}$ représentent les points d'intégration, $W_{mnr l}$ sont les poids correspondants et $M_{\xi_1}, M_{\eta_1}, M_{\xi_2}, M_{\eta_2}$ désignent l'ordre de l'intégration de Wang et sont égaux à 2,3 ou 4. Notons que les poids d'intégration contiennent le facteur $frac{1}{R}$. Cette technique permet une implémentation directe de la BEM indirecte variationnelle sans aucun traitement analytique préliminaire de la singularité. De plus, elle reste valable pour des éléments isoparamétriques de 4 à 9 noeuds [129].

Sur la figure (2.12), nous avons représenté, séparément, les points d'intégration de Wang de la première et la deuxième intégrale et ce pour un ordre de 4. Nous remarquons

que tous les points sont internes à l'élément. En les superposant, nous constatons que les points d'intégration de la première intégrale sont légèrement décalés de ceux donnés pour la seconde. Ce décalage a permis à Wang et al. [129] de remédier au problème de singularité.

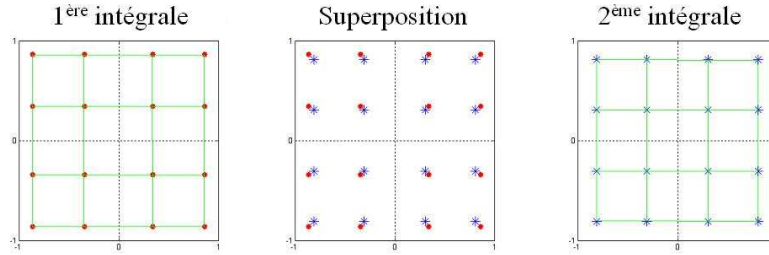


FIG. 2.12 – Points d'intégration pour les quadrilatères.

Pour les triangles, Hamdi [53] et Tournour [119] ont proposé de contourner le problème de singularité semi-analytiquement pour des triangles linéaires. Malheureusement, ces deux méthodes restent limitées uniquement à des triangles à 3 nœuds. Pour notre part, nous avons généralisé la méthode de Wang et al. [129] aux triangles en transformant ceux-ci en des éléments quadrilatéraux en adoptant la méthode proposée par Wu [131]. Ceci permet de garder une seule implémentation numérique directe pour des maillages mixtes contenant à la fois des éléments triangulaires et quadrilatéraux d'ordre élevé.

En faisant recours aux transformations de la section (2.2.3), la forme discrétisée [Eq. (2.104)] peut être réécrite d'une manière générale pour des éléments triangulaires et quadrilatéraux comme suit :

$$a_{ij} = \int_{\xi_2} \int_{\eta_2} \int_{\xi_1} \int_{\eta_1} \frac{g(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{r} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = \iiint_{-1}^1 \frac{g(\underline{\xi}_1, \underline{\eta}_1, \underline{\xi}_2, \underline{\eta}_2)}{r} \|j_1\| \|j_2\| d\underline{S}_1 d\underline{S}_2 \quad (2.109)$$

$$b_i = \int_{\xi} \int_{\eta_1} \vartheta(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 = \iint_{-1}^1 \vartheta(\underline{\xi}_1, \underline{\eta}_1) j_1 d\underline{S}_1 \quad (2.110)$$

où :

$$d\underline{S}_i = \begin{cases} d\xi_i d\eta_i & \text{si l'élément (i) est quadrilatéral} \\ d\tau_i d\chi_i & \text{si l'élément (i) est triangulaire} \end{cases}$$

$$\underline{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i & \text{si l'élément (i) est quadrilatéral} \\ \xi_i(\tau_i, \chi_i) & \text{si l'élément (i) est triangulaire} \end{cases}$$

et :

$$\|j_i\| = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément (i) est quadrilatéral} \\ \frac{\rho_i}{4} & \text{si l'élément (i) est triangulaire} \end{cases}$$

avec $i = 1, 2$.

Ainsi, si les éléments i et j sont différents, la quadrature de Gauss peut être appliquée directement. Lorsque $i = j$, la technique de Wang peut être facilement étendue à des triangles puisqu'ils se transforment via les équations (2.67) et (2.68) en des éléments quadrilatéraux. Dans ce cas, l'intégrale (2.105) est équivalente à l'expression suivante :

$$a_{ij} = \iiint_{-1}^1 \frac{f(\underline{\xi}_1, \underline{\eta}_1, \underline{\xi}_2, \underline{\eta}_2)}{R} d\underline{S}_1 d\underline{S}_2 \quad (2.111)$$

où :

$$f(\underline{\xi}_1, \underline{\eta}_1, \underline{\xi}_2, \underline{\eta}_2) = \frac{R}{r} g(\underline{\xi}_1, \underline{\eta}_1, \underline{\xi}_2, \underline{\eta}_2) \|j_1\| \|j_2\|$$

En utilisant les intégrations de Wang et al. [129] dans laquelle la singularité est prise en compte dans l'intégrand comme fonction du poids W_{mnl} , la dernière intégrale devient :

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{M_{\xi_1}} \sum_{n=1}^{M_{\eta_1}} \sum_{r=1}^{M_{\xi_2}} \sum_{l=1}^{M_{\eta_2}} f(\underline{\xi}_1^{(m)}, \underline{\eta}_1^{(n)}, \underline{\xi}_2^{(r)}, \underline{\eta}_2^{(l)}) W_{mnl} \quad (2.112)$$

avec $M_{\xi_1}, M_{\eta_1}, M_{\xi_2}, M_{\eta_2}$ désignent l'ordre de l'intégration de Wang et sont égaux à 2, 3 ou 4. Les poids W_{mnl} et les points d'intégration ($\xi_1^{(m)}, \eta_1^{(n)}, \xi_2^{(r)}, \eta_2^{(l)}$ pour les éléments quadrilatéraux ou $\tau_1^{(m)}, \chi_1^{(n)}, \tau_2^{(r)}, \chi_2^{(l)}$ pour les éléments triangulaires) sont donnés dans la référence [129]. Comme pour les quadrilatères, nous remarquons que les points d'intégration sont tous internes aux éléments et sont légèrement décalés les uns par rapport aux autres [Fig. (2.13)].

2.4.4 Validation de la méthode

Afin de démontrer la précision et l'efficacité de la présente approche développée pour des maillages mixtes ou encore pour des triangles, plusieurs applications numériques sont présentées dans cette section. Dans un premier temps, la précision de la méthode étendue aux triangles est testée sur cette intégrale :

$$I = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{1}{r} dS_s dS_2, \quad (2.113)$$

calculée directement sur un élément de référence triangulaire. Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau (2.1) correspondant à la figure (2.14).

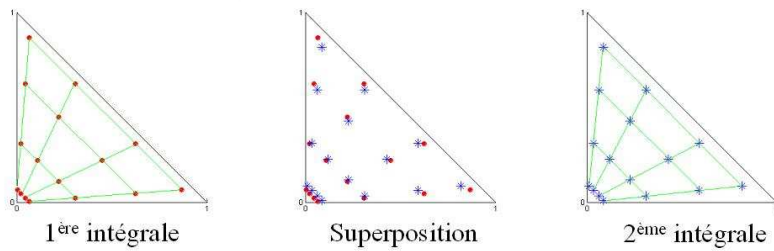


FIG. 2.13 – Points d'intégration pour les triangles.

TAB. 2.1 – Intégration numérique sur des triangles de référence.

	Intégration exacte	Intégration numérique
Cas 1	1.0030	0.9853
Cas 2	0.4835	0.5041
Cas 3	0.26833	0.26838

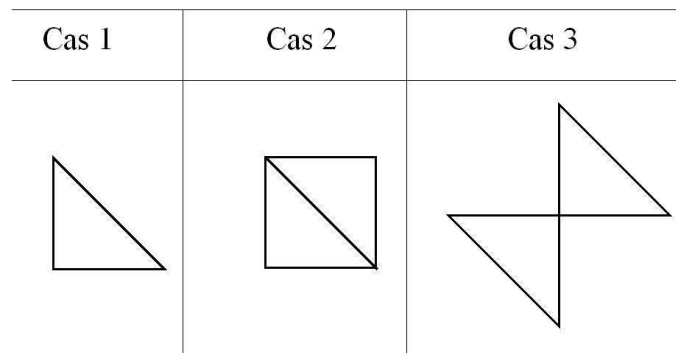


FIG. 2.14 – Disposition des triangles en intégration double.

Lorsque l'intégrale est évaluée sur le même élément, l'erreur est d'environ 1.7%. Cependant, elle est de 4.3% quand la singularité est concentrée sur un côté commun à

deux éléments adjacents et elle devient très faible (moins de 0.2%) lorsque les éléments partagent le même nœud. En examinant le tableau (2.1), on peut conclure que la présente méthode donne de bons résultats, en particulier, pour le premier et le dernier cas. Pour le second cas, l'erreur est relativement importante comparée aux deux autres cas. Ce même comportement a été observé par Hamdi [53] quand il a évalué semi-analytiquement les intégrales doubles singulières [53]. Pour réduire cette erreur, il propose d'évaluer semi-analytiquement ces intégrales de la même manière qu'il a traité le premier cas. Dans ce qui suit, nous verrons que ces erreurs n'affectent pas trop la pression acoustique calculée.

2.4.4.1 Rayonnement d'une sphère pulsante

Le rayonnement d'une sphère pulsante unitaire est analysée en utilisant deux maillages en éléments finis de surface. L'exemple de la sphère est choisi car la solution exacte est connue et les fréquences irrégulières peuvent être prédites [131]. Dans cette deuxième application, les fréquences irrégulières sont évitées et par conséquent aucun traitement spécial n'est exigé. La sphère a un rayon de $a = 1\text{m}$. Elle est excitée à la fréquence $f = 100\text{ Hz}$, par une vitesse unitaire. Elle est entourée par l'air ($\rho = 1.21\text{kg/m}^3$, $c = 343\text{ m/s}$). Deux maillages sont considérés [Fig.(2.15),(2.16)]. Le premier contient uniquement des éléments triangulaires alors que le second est constitué de triangles et de quadrilatères.

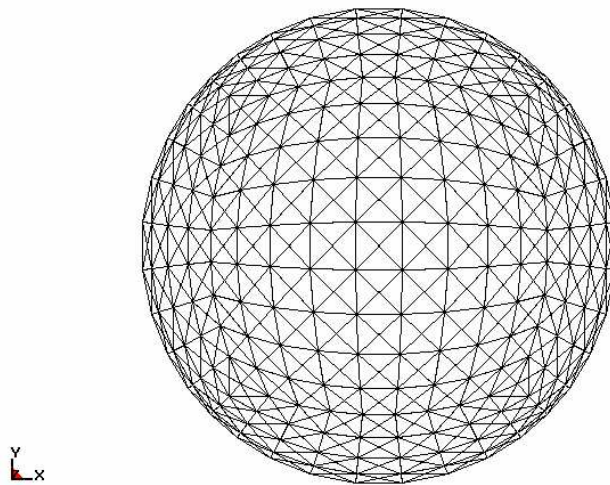


FIG. 2.15 – Modèle en BE d'une sphère pulsante (maillage 1 : 972 triangles).

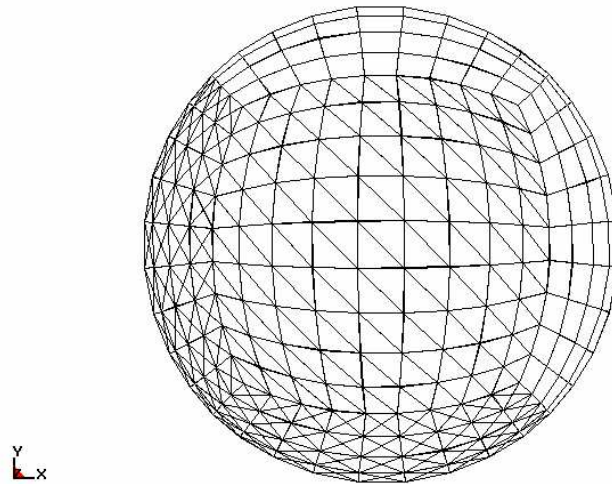


FIG. 2.16 – Modèle en BE d'une sphère pulsante (maillage 2 : 486 triangles et 243 quadrilatères).

La figure (2.17) représente, pour le premier maillage, la variation de la pression rayonnée avec la distance radiale calculée analytiquement et en utilisant la méthode variationnelle telle que présentée dans cette section. Une bonne concordance est observée entre la méthode numérique et analytique. Même si le maillage contient, à la fois, des triangles et quadrilatères, la présente VIBEM (Variational Indirect BEM) reste en bon accord avec les solutions analytiques [Fig.(2.18)].

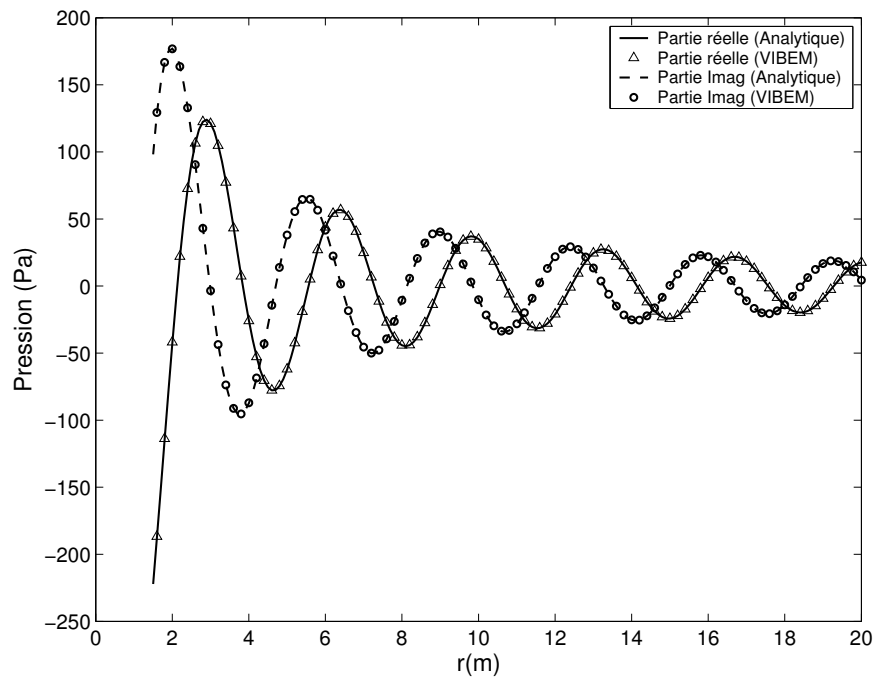


FIG. 2.17 – Pression rayonnée par la sphère pulsante (maillage 1).

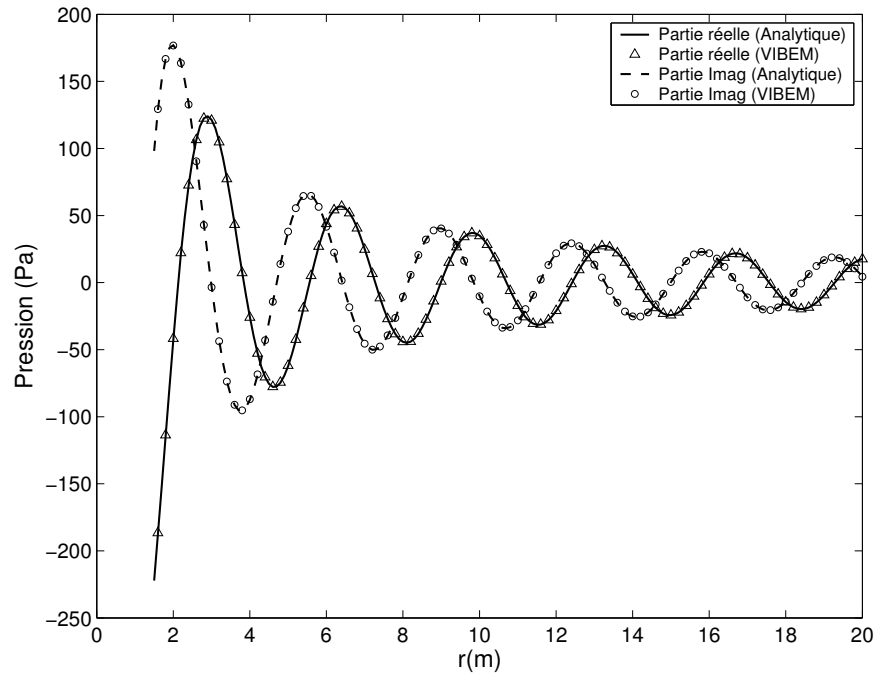


FIG. 2.18 – Pression rayonnée par la sphère pulsante (maillage 2).

2.4.4.2 Effet du facteur de forme

Une cavité $1 \times 0.2 \times 0.2 \text{m}^3$ contenant de l'air est considérée comme un cas test d'un problème intérieur. Nous supposons, que la surface en $x = 0$ vibre comme un piston rigide avec une vitesse harmonique d'amplitude 1 m/s à la fréquence $f = 200 \text{ Hz}$ alors que toutes les autres faces sont rigides et de vitesse nulle. Dans le but d'étudier l'effet du facteur de forme des éléments triangulaires sur les résultats numériques, le champ de pression sur l'axe longitudinal de la cavité est calculé pour quatre maillages différents de facteurs de forme de 2.5, 5, 10 et 20 [Fig. (2.19)]. Nous pouvons observer sur la figure (2.20) que même les maillages ayant un facteur de forme important (10 pour le maillage 3 et 20 pour le maillage 4), la pression calculée coïncide avec la solution exacte. Ceci montre que la méthode présentée reste applicable pour les maillages présentant de grandes valeurs du facteur de forme.

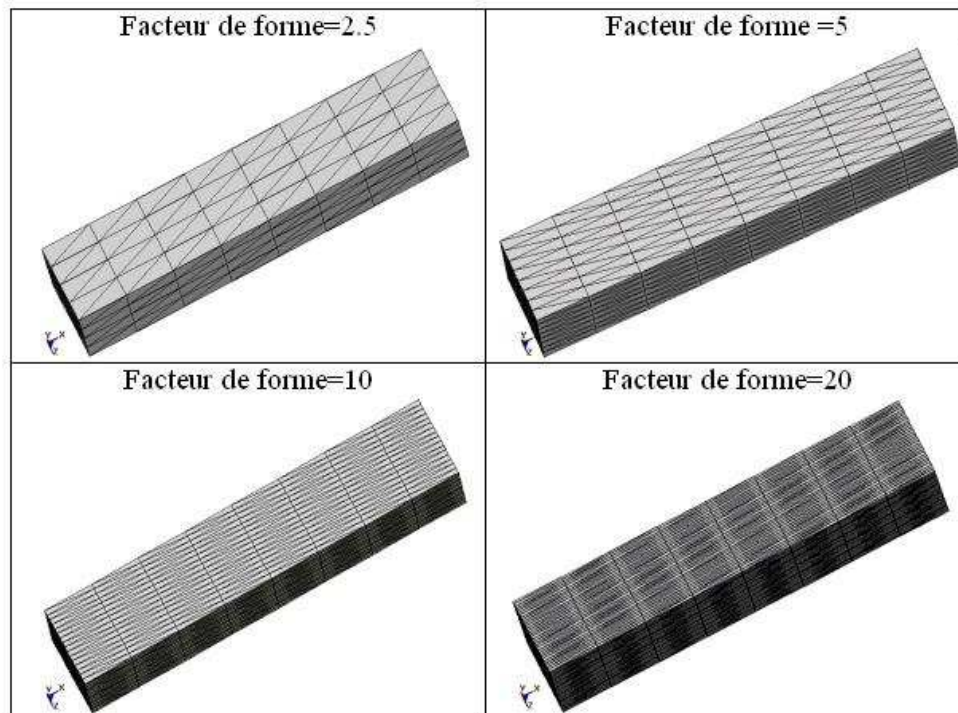


FIG. 2.19 – Maillages de différents facteurs de forme.

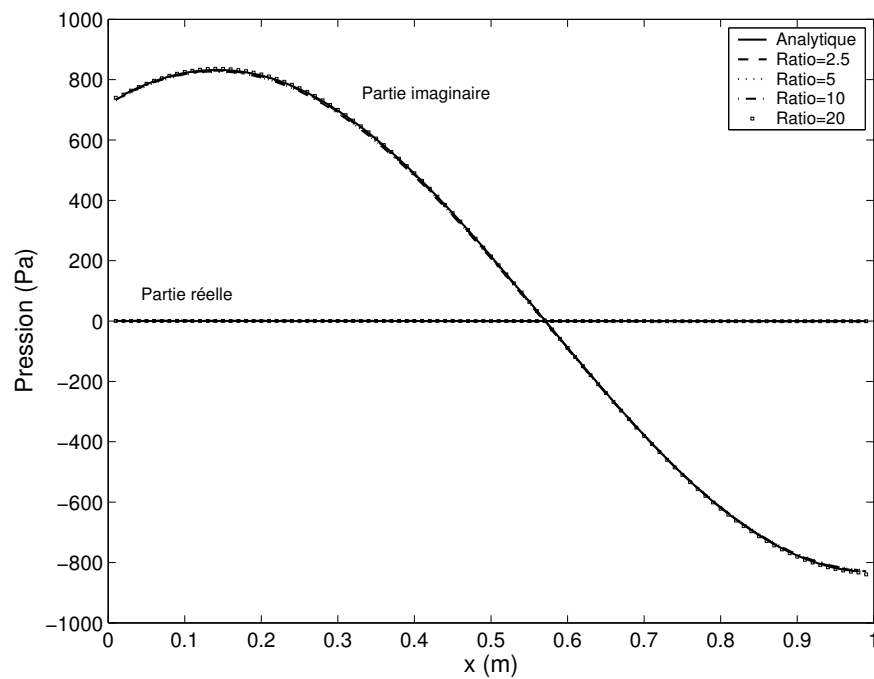


FIG. 2.20 – Effet du facteur de forme sur la pression rayonnée pour dans la cavité pour $f = 200\text{Hz}$.

2.4.4.3 Rayonnement acoustique d'une roue

Afin de montrer l'efficacité de cette méthode pour les géométries complexes, le rayonnement d'une roue est analysé, dans cette dernière application, en utilisant deux modèles en éléments finis de frontière.

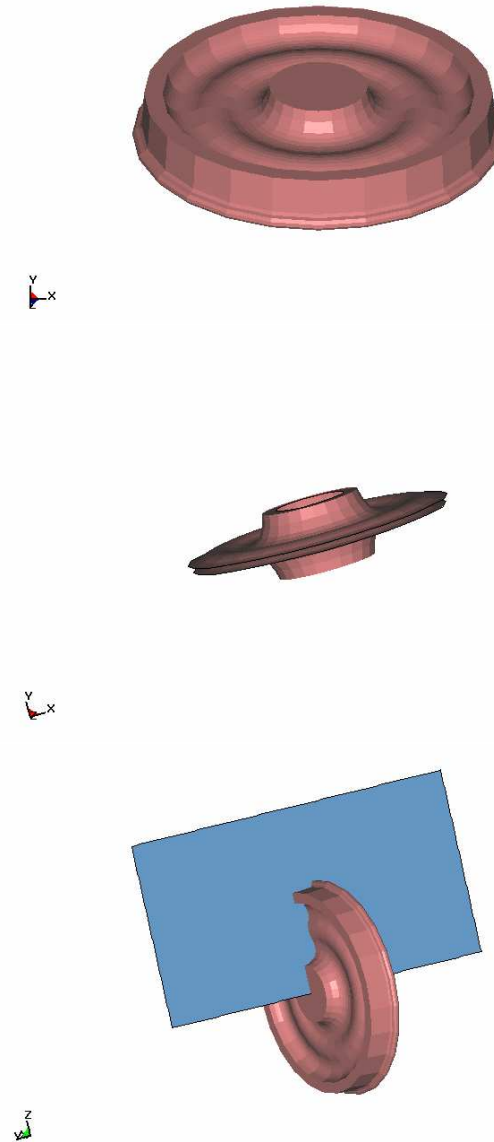


FIG. 2.21 – Problème de rayonnement d'une roue : (haut : roue, milieu : surface sur laquelle la vitesse est appliquée, bas : plan dans lequel la pression est calculée)

La roue [Fig.(2.21.a)] est excitée à la fréquence $f = 200$ Hz avec une vitesse normale $V_n = 2 \cdot 10^{-3}$ m/s appliquée uniquement sur la surface représentée dans la figure

(2.21.b). Nous nous sommes intéressés au calcul de la pression rayonnée dans le plan coupant la roue tel que représenté sur la figure (2.21.c). Les deux maillages, contenant 1946 nœuds, sont donnés par les figures (2.22) et (2.23). Le premier maillage contient 3888 éléments triangulaires alors que le second est constitué de 1920 éléments dont 48 sont triangulaires.

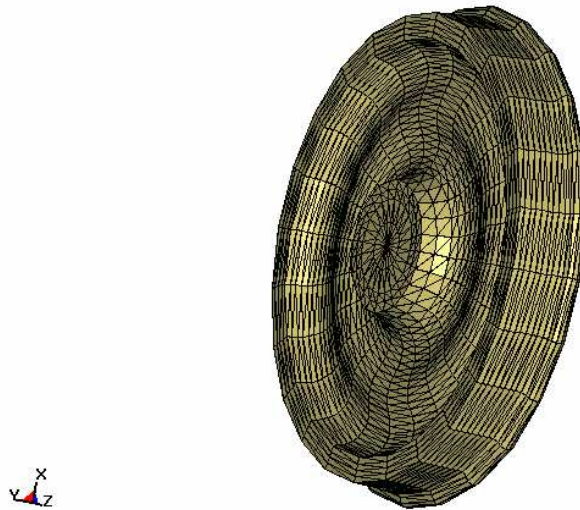


FIG. 2.22 – Maillage triangulaire de la roue à 1946 noeuds et 3888 triangles (maillage N° 1).

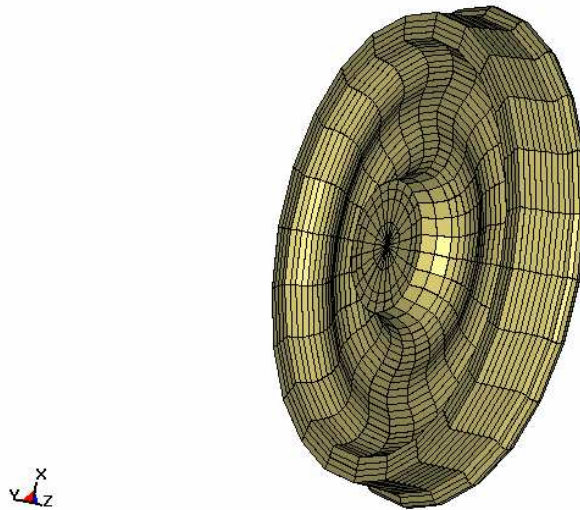


FIG. 2.23 – Maillage mixte de la roue à 1946 nœuds, 1920 quadrilatères et 48 triangles (maillage N° 2).

Sur les figures (2.24) et (2.25), nous représentons la pression rayonnée à l'intérieur et à l'extérieur de la roue pour les deux maillages. Les deux résultats sont en bon accord mis à part une légère différence en amplitude. Ceci peut être expliqué par le fait que le maillage N° 1 est très fin comparé au maillage N° 2.

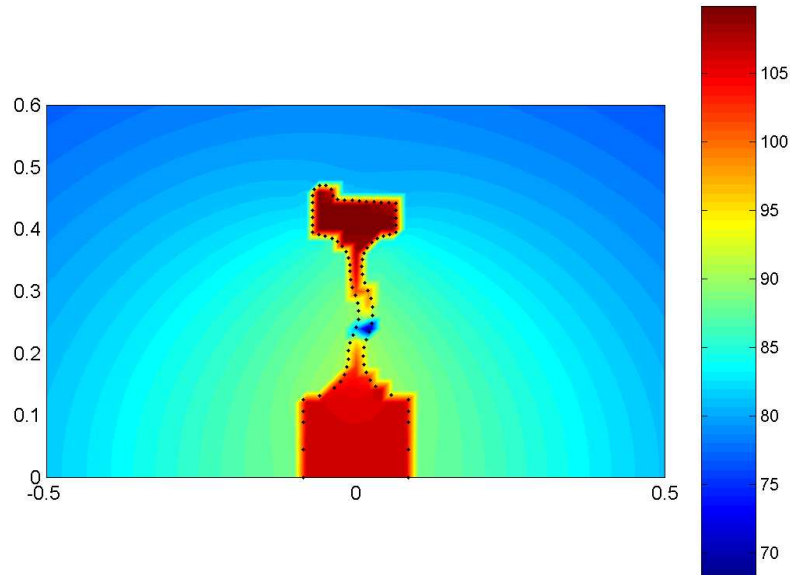


FIG. 2.24 – Pression (dB) calculée dans le plan en utilisant le maillage N° 1.

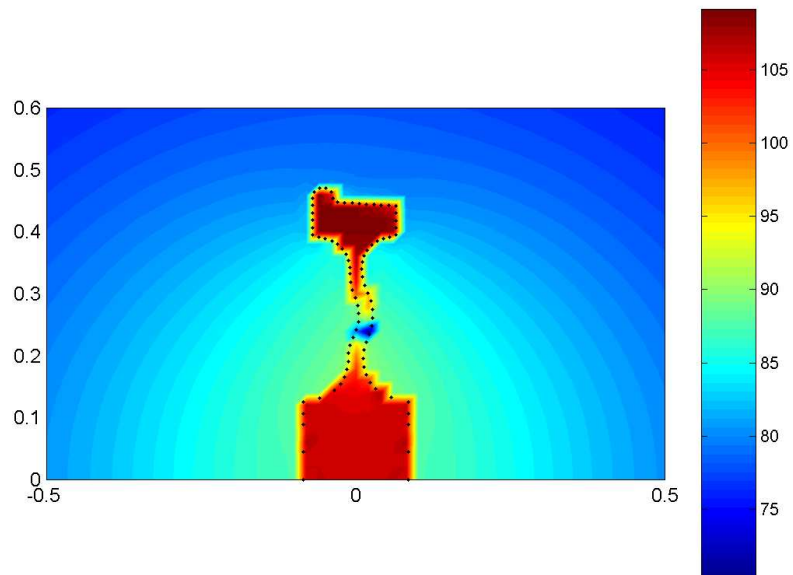


FIG. 2.25 – Pression (dB) calculée dans le plan en utilisant le maillage N° 2.

2.5 Les méthodes d'approximation

2.5.1 Intégrale de Rayleigh

La méthode de Rayleigh développée en premier pour des problèmes de propagation dans des milieux semi-infinis, a été utilisée dans de nombreuses applications industrielles. Cette méthode se base sur le fait, que chaque élément de la structure vibrante est encastré dans un baffle rigide infini et vibre indépendamment des autres éléments. Par conséquent, le champ de pression total est obtenu en sommant la pression générée par chaque élément. La fonction de Green correspondante est construite en utilisant la méthode des images.

Pour établir l'intégrale de Rayleigh, rappelons l'équation classique d'Helmholtz :

$$C(P)p(P) = - \int (i\rho\omega V_n G(r) + p \frac{\partial G(r)}{\partial n}) dS \quad (2.114)$$

où $G(r)$ est la fonction de Green en champ libre et r désigne la distance séparant un point P et un point de la surface. En se référant à la figure (2.26), l'image du point P par rapport à la surface de réflexion S_R est notée P' et r' est la distance entre P' et un point quelconque Q tel que $Q \in S \cup S^R$. La fonction de Green d'un domaine semi-infini est donnée par l'ajout de la solution de l'image à la solution fondamentale $G(r)$. Ainsi :

$$G_R(r, r') = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{-ikr'}}{4\pi r'} \quad (2.115)$$

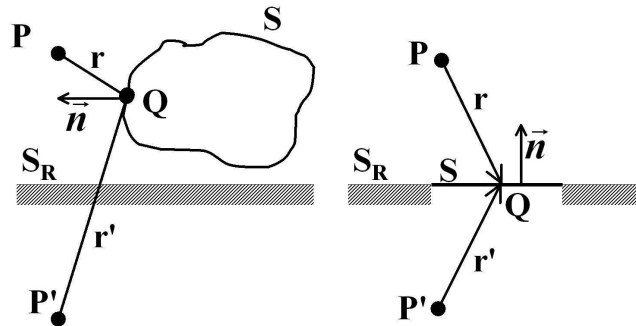


FIG. 2.26 – Illustration d'un problème de propagation en un milieu semi-infini dans le cas où la surface S_R coïncide ou non avec S .

Lorsque la surface vibrante devient une partie de S_R alors $r = r'$ et $\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial r'}{\partial n}$ et par conséquent la fonction de Green et sa dérivée normale se réduisent à :

$$G_R(r) = 2G(r), \frac{\partial G_R(r)}{\partial n} = 0 \quad (2.116)$$

Sous ces conditions, l'équation (2.114) se transforme en une équation intégrale de Rayleigh :

$$p(P) = - \int 2i\rho\omega V_n G(r) dS, \quad (2.117)$$

où $G(r)$ représente, dans cette équation, la fonction de Green en champ libre.

Connaissant la vitesse normale sur la surface, il est évident que la pression au point P se calcule par une simple sommation. Ainsi, contrairement à la BEM, la méthode de Rayleigh ne demande pas la résolution du système linéaire. Ceci la rend très attractive. Néanmoins, les problèmes réels ne sont pas forcément assimilés aux rayonnement des structures planes encastrées dans des baffles rigides infinis. Il s'est avéré que cette méthode s'applique bien pour des surfaces relativement planes tant que leurs plus grandes amplitudes générées proviennent de leurs centres.

2.5.2 Méthode d'onde plane

A haute fréquence, la pression sur la surface peut être approchée connaissant la vitesse normale sans résoudre l'équation intégrale d'Helmholtz. A des fréquences suffisamment élevées, l'impédance du rayonnement à la surface est approximativement la même que l'impédance caractéristique du milieu. Dans ce cas $p = \rho c V_n$ à la surface. En remplaçant cette dernière équation dans l'équation intégrale d'Helmholtz, on trouve :

$$p(P) = - \int i\rho\omega V_n G(r) \left(1 - \frac{\partial r}{\partial n} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right)\right) dS, \quad (2.118)$$

Connaissant la vitesse normale à la surface, cette intégrale peut être évaluée numériquement sans construire ni résoudre un système d'équations linéaires.

2.5.3 Relation entre méthode de Rayleigh et approche asymptotique

L'intégrale de Rayleigh représente un cas particulier de l'équation (2.118). En effet, dans le cas où le point d'observation est loin de la surface de sorte que $kr \gg 1$, l'équation (2.118) devient :

$$p(P) = - \int i\rho\omega V_n G(r) \left(1 - \frac{\partial r}{\partial n}\right) dS, \quad (2.119)$$

Lorsque $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$, l'équation (2.119) se réduit à l'intégrale de Rayleigh (2.120).

Ceci correspond à un élément visible. Par contre, si $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$ alors la pression sera nulle correspondant ainsi à un élément invisible. Par conséquent, dans le cas d'un problème 3D, l'utilisation de l'intégrale de Rayleigh nécessite pour chaque élément un test de visibilité alors que ce dernier est automatiquement inclus dans l'approche asymptotique via la formulation elle-même.

2.5.4 Application numérique

Dans cette application, nous considérons le cas de test de Kirkup [70] présenté dans son manuel RIM3. Il s'agit d'un disque de rayon $a = 0.1\text{m}$ encastré dans un baffle rigide infini et vibrant avec une vitesse unitaire uniforme dans l'air. Ce piston est constitué de 24 éléments triangulaires [Fig. (2.27)]. Le code de Kirkup fournit le potentiel vitesse ϕ qui est relié à la pression par l'expression suivante :

$$p = i\rho\omega\phi \quad (2.120)$$

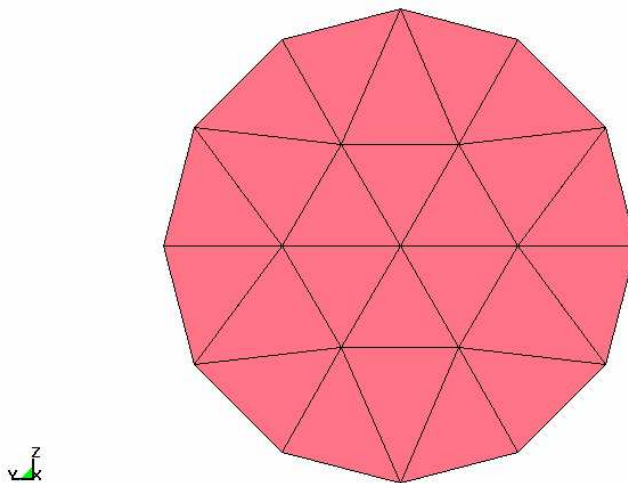


FIG. 2.27 – Maillage de la plaque circulaire encastrée dans un baffle rigide.

Sur la figure (2.28), nous comparons, pour $k = 25\text{m}^{-1}$, le potentiel vitesse sur l'axe du piston calculé à partir de RIM3 avec celui que nous avons calculé à partir de

l'équation (2.117) et (2.118) tout en considérant l'équation (2.120). Le résultat obtenu par la méthode de Rayleigh est en bon accord avec celui de RIM3. Par contre, nous remarquons une divergence de l'approche asymptotique en champ proche du piston alors qu'elle prédit bien la pression pour une distance supérieure à 1.15 m. En effet, pour $kr \gg 1$ les deux méthodes sont identiques d'où leurs convergences à des distances assez grande de la source, bien évidemment, pour un nombre d'onde élevé aussi. Il est à noter que, dans notre implémentation, les éléments triangulaires et quadrilatères sont intégrés avec les mêmes points d'intégration de Gauss en adoptant la méthode de Wu [131].

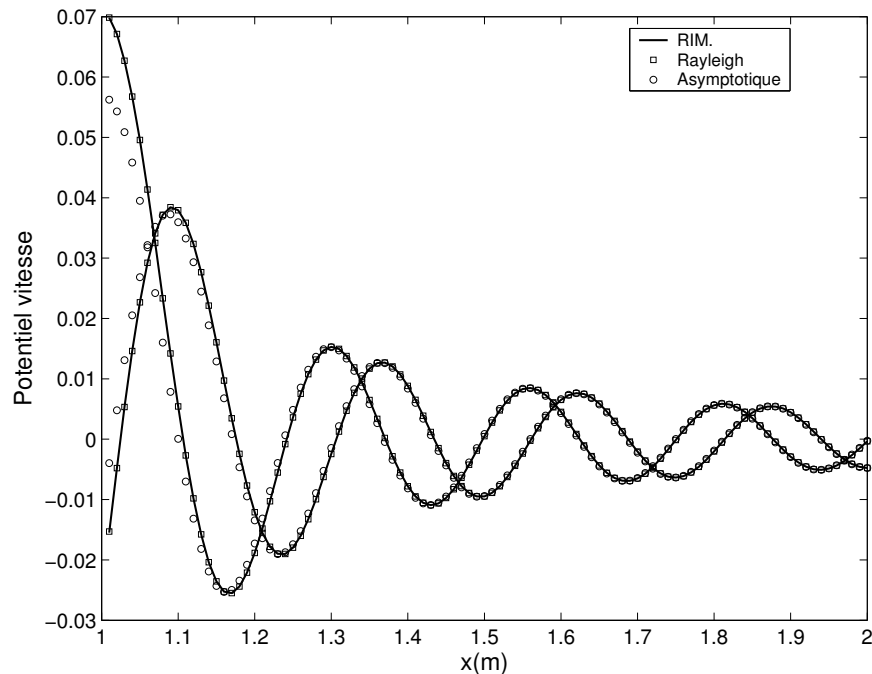


FIG. 2.28 – Validation de la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique.

2.6 Etude comparative des méthodes numériques

2.6.1 Problèmes externes

Dans cette partie, nous comparons les différentes méthodes évoquées pour l'instant à un problème de rayonnement d'une sphère pulsante avec une vitesse unitaire. Cette sphère de rayon de 1m est entourée par l'air. Nous nous intéressons au calcul

de la pression rayonnée pour différentes fréquences en un point situé à une distance $r = 4\text{m}$ du centre de la sphère. Les résultats obtenus sont représentés dans la gamme de fréquence 10-1000 Hz avec un pas de 10 Hz. Le maillage utilisé est constitué de 486 éléments et 488 noeuds [Fig(2.29)].

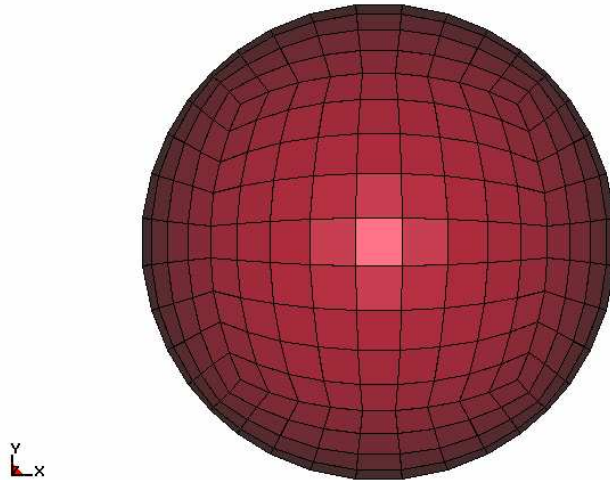


FIG. 2.29 – Maillage de sphère de 488 éléments

Sur la figure (2.30), nous avons représenté la pression acoustique obtenue par la méthode VIBEM et celle calculée par la BEM directe en collocation (DBEM). Nous remarquons l'apparition de plusieurs pics. Ils sont liés à la résonance du volume interne de la sphère [41]. Comme le volume intérieur de la sphère résonne et comme les problèmes internes et externes partagent le même opérateur, l'équation intégrale gouvernant le problème extérieur résonne aussi aux fréquences naturelles du problème interne associé.

Pour contourner ce problème dans le cas de la VIBEM, il est nécessaire de discrétiser quelques éléments supplémentaires, à l'intérieur de la sphère, sur lesquels la condition du type impédance est imposée [41]. Au delà des fréquences irrégulières, les résultats numériques montrent une bonne corrélation avec les solutions analytiques comme le montre la figure (2.30.a). L'algorithme numérique pour la résolution de ce problème n'est pas encore implémenté dans le code que nous avons développé pour valider cette méthode.

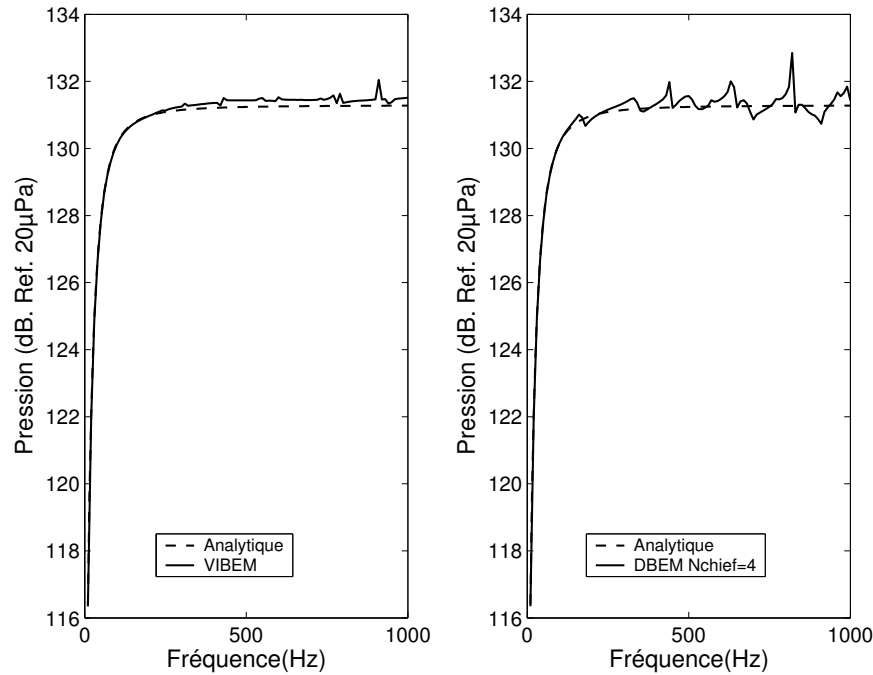


FIG. 2.30 – Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$. Comparaison entre la VIBEM et DBEM avec 4 points CHIEF

Cependant, dans le cas de la DBEM, nous avons appliqué la méthode de CHIEF pour minimiser l'effet de ces fréquences irrégulières [Fig.(2.30.b)]. En effet, nous avons forcé 4 points $(0, 0, 0)$, $(0, 0.25, 0)$, $(0, 0.5, 0)$, $(0, 0.75, 0)$ internes à la sphères à prendre une valeur de pression nulle. Bien que la VIBEM n'a subi aucun traitement, elle reste plus précise que la DBEM qui a été traitée par la méthode de CHIEF. Notons que pour ces deux cas, nous avons considéré 4 points de Gauss suivant chaque direction.

Afin de quantifier l'influence de la méthode de CHIEF sur la réduction de l'effet des fréquences irrégulières, nous avons considéré deux autres cas. Dans le premier cas, nous n'avons effectué aucun traitement par CHIEF alors que dans le second, nous avons considéré un seul point CHIEF en $(0, 0, 0)$. Ces deux cas sont comparés au premier dans lequel 4 points CHIEF ont été utilisés. Les résultats sont récapitulés sur la figure (2.31).

En comparant les résultats avec et sans traitement par la méthode de CHIEF, nous observons que les points CHIEF réduisent énormément les fluctuations dues aux fréquences irrégulières. Toutefois, l'utilisation de 4 points CHIEF ou un seul point CHIEF donne pratiquement le même résultat. Ce qui signifie que le choix du nombre des points CHIEF ainsi que leurs positions reste critique quand à la réduction de l'ef-

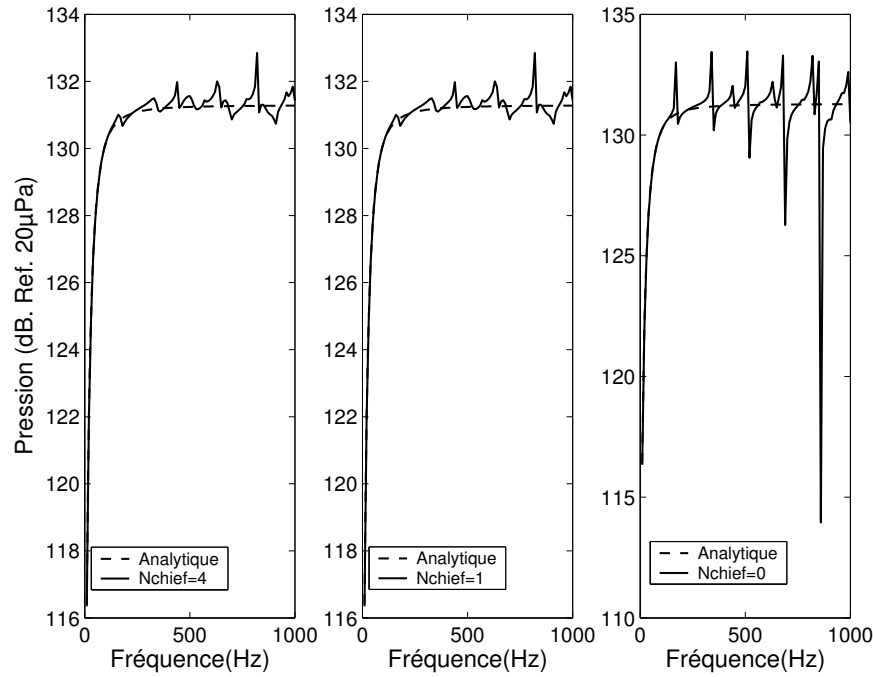


FIG. 2.31 – Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$ calculée par la DBEM avec ou sans points CHIEF (486 éléments)

fet des fréquences irrégulières. La croissance du nombre de ces points n'améliore pas forcément la précision.

Afin d'examiner la sensibilité de ces fréquences irrégulières au maillage, nous avons traité le même problème précédent avec le maillage déjà donné par la figure (2.9). En comparant la figure (2.32) à la figure (2.31) nous apercevons que les fréquences irrégulières sont très sensibles au maillage et que la méthode de CHIEF n'est pas efficace pour toutes les fréquences.

Jusqu'à présent nous avons vu que la méthode VIBEM était plus précise que la DBEM même après traitement de celle-ci avec CHIEF. Ceci est dû aux nombres importants de points de Gauss (4 points de Gauss) utilisés en VIBEM. En effet, en considérant 2 ou 1 point de Gauss, nous remarquons l'augmentation des fluctuations dues aux fréquences irrégulières [Fig. (2.33)]. Plus le nombre de points de Gauss est grand, moins le problème des fréquences irrégulières est sévère. En terme de temps de calcul, il est clair qu'une double intégration surfacique avec 4 points de Gauss pour chaque direction nécessite plus de temps de calcul qu'avec deux ou un point de Gauss. Pour l'exemple de la sphère, nous avons récapitulé les temps CPU pour chacun de ces

cas dans le tableau (2.2).

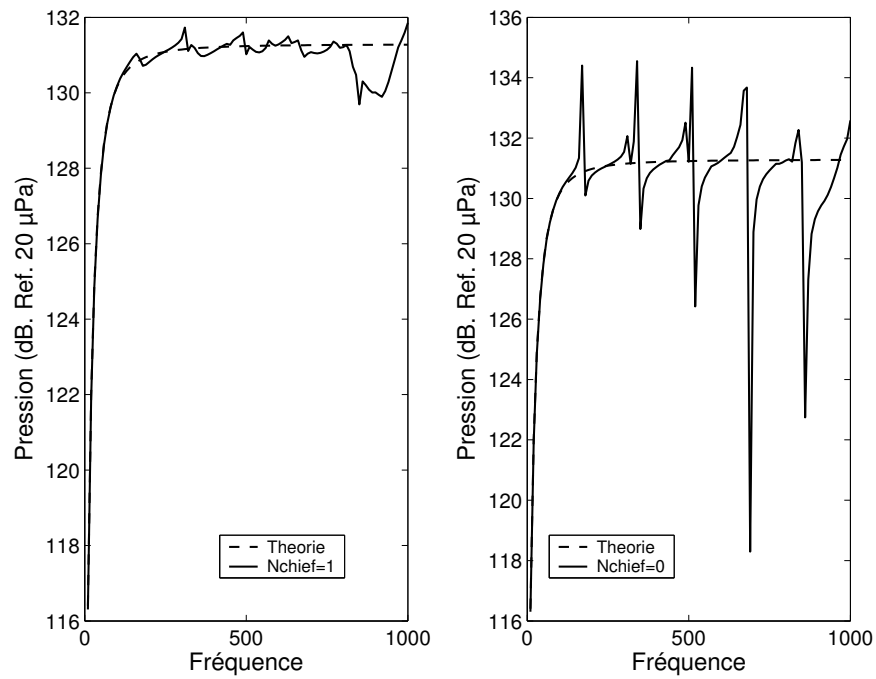


FIG. 2.32 – Pression rayonnée par une sphère pulsante en $r = 4\text{m}$ calculée avec la DBEM avec ou sans points CHIEF (304 éléments)

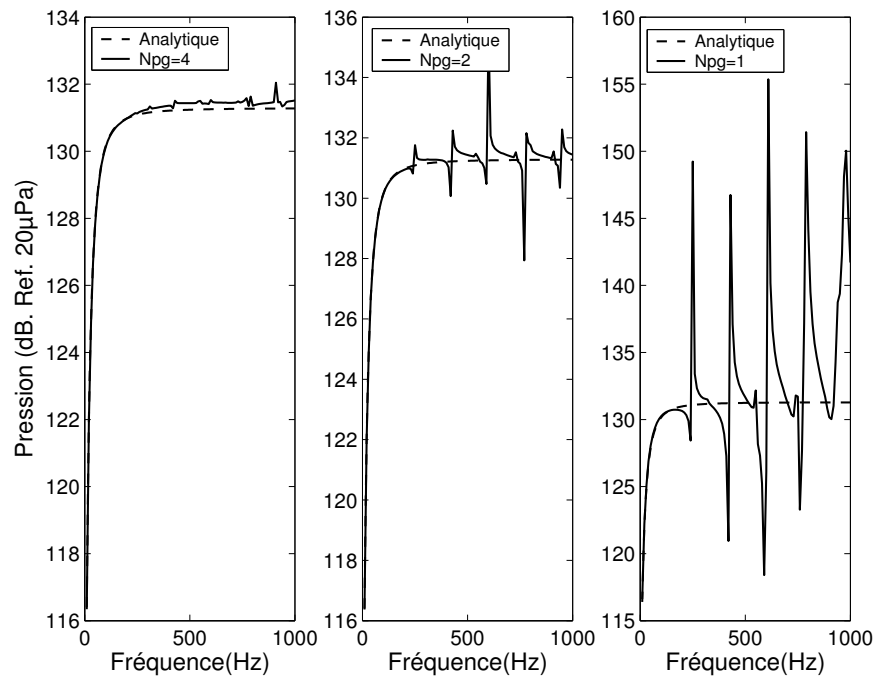


FIG. 2.33 – Influence du nombre des points de Gauss sur la pression rayonnée

TAB. 2.2 – Variation du temps CPU en fonction du nombre de points de Gauss.

	Npg=4	Npg=2	Npg=1
Temps (s)	1h 51mn 20s	11mn 51s	5mn 28s

Toujours en VIBEM et contrairement aux cas précédents dans lesquels nous avons considéré 4 points d'intégration suivant chaque direction pour les intégrales singulières, nous n'avons considéré pour la figure (2.34) que 2 points d'intégration. Remarquons que la précision de la méthode s'améliore en augmentant le nombre des points d'intégration pour les intégrales singulières. Ce qui montre l'importance du calcul de ces intégrales avec précision pour une meilleure évaluation de la pression en particulier pour les hautes fréquences. Signalons que la diminution du nombre de ces points de 4 à 2 n'entraîne pas une accélération remarquable du temps de calcul. En effet, pour le cas de 4 points, le temps CPU est de 1 h 51 mn 20 s. L'utilisation de 2 points pour les intégrales singulières tout en gardant 4 points de Gauss pour les intégrales régulières nécessite 1 h 47 mn 38 s. Ceci peut être expliqué par le fait que le calcul des intégrales singulières n'intervient que dans la diagonale de la matrice. Ainsi, la diminution de ces points d'intégration n'apporte aucun avantage de point de vue temps de calcul au contraire leur diminution pourrait avoir des conséquences sévères sur le résultat.

Finalement, appliquons la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique au problème de la sphère pulsante [Fig. (2.35)]. Il est clair que la méthode de Rayleigh ne permet pas de prédire la pression acoustique rayonnée dans le cas d'une structure incurvée telle que la sphère. Bien qu'elle n'est pas trop précise quant à l'estimation de la pression de la sphère, l'approche asymptotique reste meilleure par rapport à la méthode de Rayleigh.

2.6.2 Problème interne

Dans cette section nous présentons les résultats de la simulation numérique d'un problème interne. Il consiste en la propagation d'une onde acoustique dans une cavité rigide $0.2 \times 0.2 \times 1 \text{ m}^3$ remplie d'air ($\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$, $c = 340 \text{ m/s}$). Celle ci est excitée par la facette $z = 0$ d'une vitesse unitaire. On s'intéresse à la pression acoustique sur

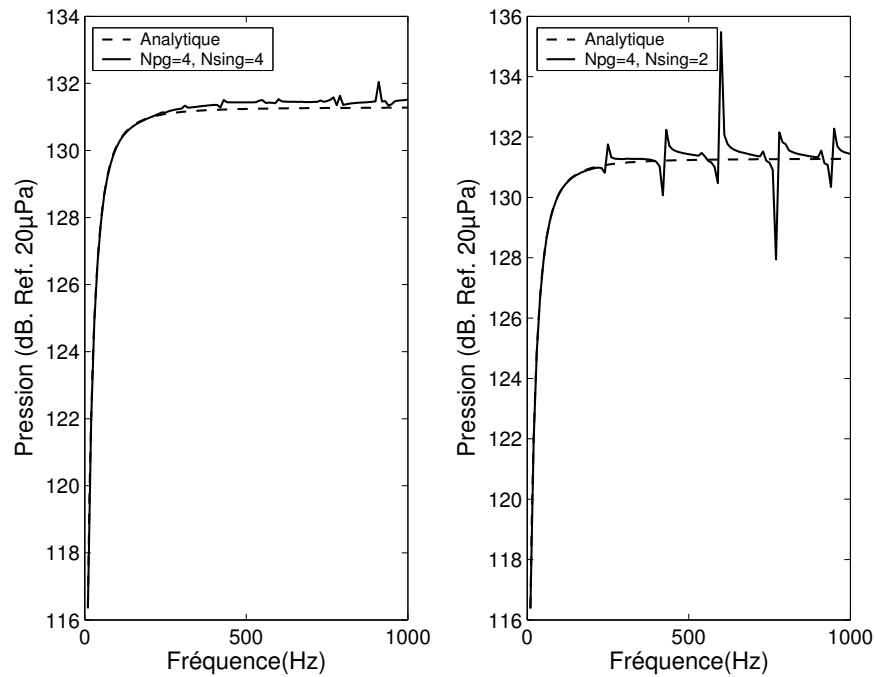


FIG. 2.34 – Influence du nombre des points d'intégration des intégrales singulières

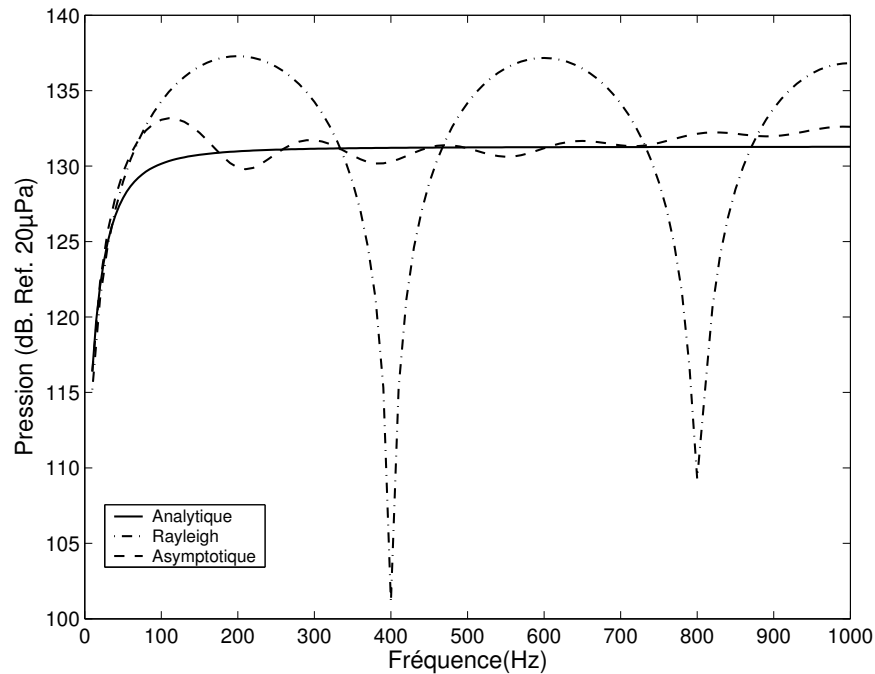


FIG. 2.35 – Comparaison de la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique pour le calcul du rayonnement acoustique d'une sphère pulsante

l'axe de la cavité pour la fréquence $f = 100$ Hz. Nous avons comparé sur la figure (2.36) les différentes solutions obtenues par les différentes méthodes à savoir la méthode des éléments finis, la méthode des éléments finis de frontière directe en collocation et varia-

tionnelle telle que présentée dans ce chapitre ainsi que la BEM variationnelle telle que proposée par Hamdi [53].

Signalons que la cavité est discrétisée en $4 \times 4 \times 8$ éléments quadrilatéraux pour le cas de la VIBEM et DBEM. Chaque élément quadrilatéral est divisé en 2 triangles pour pouvoir utiliser la méthode de Hamdi [53]. Finalement, pour la méthode des éléments finis, nous avons considéré un maillage de $4 \times 4 \times 16$ éléments.

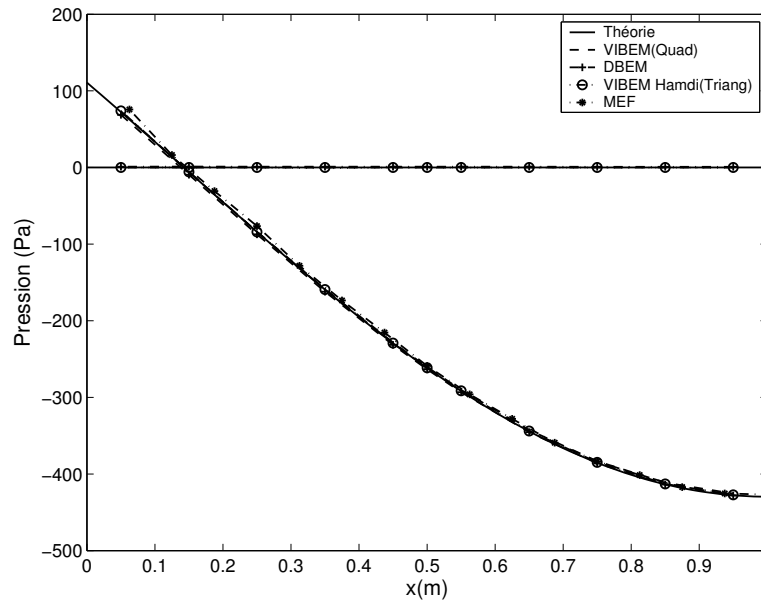


FIG. 2.36 – Comparaison des méthodes pour un problème interne

Notons que d'après la figure (2.36), les différentes méthodes donnent des résultats en bonne concordance les unes avec les autres. Ce qu'il faut mentionner c'est que la méthode des éléments finis reste la plus rapide car le système à résoudre est creux. De plus la projection modale la rend encore plus rapide puisque le système à résoudre est symétrique. La méthode variationnelle est moins rapide que la BEM directe par collocation en raison des doubles intégrales surfaciques à effectuer.

2.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons simulé la propagation des ondes acoustiques dans des problèmes internes et externes par différentes méthodes.

La méthode des éléments finis reste la plus appropriée pour les problèmes internes en raison du caractère creux et symétrique du système d'équations. De plus, elle peut être rendue plus rapide en faisant des projections sur les bases modales acoustiques. Néanmoins, une troncature aléatoire peut aboutir à des résultats complètement erronés. Nous verrons dans le chapitre suivant que la troncature des modes peut constituer un problème sévère quand il s'agit d'un couplage vibroacoustique.

La BEM représente une alternative plus attractive quant à la résolution des problèmes externes. En effet, la condition de rayonnement en champ libre est automatiquement satisfaite via la fonction de Green. Deux formulations ont été utilisées dans ce chapitre. La BEM variationnelle qui présente un système symétrique obtenu par des doubles intégrations surfaciques. Notons que pour cette formulation, nous avons étendu la méthode d'intégration singulière proposée pour des éléments quadrilatéraux par Wang et Atalla [129] à des triangles. Cette méthode nous a permis de traiter les maillages mixtes avec la même procédure d'intégration d'une façon directe. La seconde formulation est la BEM directe par collocation dans laquelle le système est non symétrique, ses composantes étant par contre calculées avec des intégrales simples. Pour cette raison, il se trouve que la DBEM est plus rapide que la VIBEM. Néanmoins, ces deux méthodes sont plus lentes que la MEF en particulier pour des problèmes de couplage vibroacoustique.

La méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique sont très efficaces pour des problèmes ayant une géométrie plane. Comparées à la MEF et la BEM, elles restent les plus rapides. Cependant, elles peuvent donner des résultats complètement erronés pour les géométries complexes. A priori, nous ne savons pas pour quelles géométries elles sont fiables.

Quelque soit la méthode appliquée, un nombre minimum d'éléments par longueur d'onde doit être utilisé pour assurer la convergence des résultats. En particulier, la précision de la BEM est, étroitement, liée à celle des intégrales singulières. En effet, plus l'évaluation de ces dernières est précise plus les résultats convergent.

Dans le chapitre suivant, nous verrons comment accélérer la MEF et la BEM dans le cas d'un couplage vibroacoustique tout en assurant la précision des résultats.

Chapitre 3

Simulation Numérique des Problèmes de Couplage Vibroacoustique

Ce présent chapitre est consacré à la modélisation numérique des problèmes vibroacoustiques. Considérée comme mince, la structure est traitée par la MEF. La partie acoustique du problème est modélisée soit par la BEM ou par la MEF. Dans la méthode MEF-MEF, nous procédons par une symétrisation et par la suite une diagonalisation du système couplé traité par la correction statique. Ceci nous permet de rendre la résolution plus rapide tout en assurant la convergence des solutions. L'interpolation quadratique des matrices d'influence de la BEM en collocation nous a permis d'accélérer la simulation des problèmes vibroacoustiques.

3.1 Introduction

La méthode des éléments finis et la méthode des éléments finis de surface appliquées, dans le chapitre précédent, pour la simulation des problèmes acoustiques purs, sont couplées, dans le présent chapitre, à la méthode des éléments finis simulant une structure du type plaque mince afin d'étudier des problèmes de couplage vibroacoustique fort.

La résolution directe du système structure-cavité est lourde en terme de temps de calcul. En élément finis, les modes propres de la structure in vaccum et ceux de la cavité rigide sont souvent utilisés pour accélérer les calculs. Bien que la taille du système aux valeurs propres résultant est considérablement réduite, il reste, toute de même,

non symétrique pour une formulation en déplacement-pressure. Ainsi, pour déduire les modes propres couplés, les algorithmes performants de résolution des problèmes aux valeurs propres symétriques ne pourront jamais être appliqués pour ce type de systèmes. Sandberg [104] a proposé une méthode rendant le système symétrique, ce qui permet l'utilisation des algorithmes efficaces de recherche des valeurs propres. De plus, il a procédé par une seconde projection sur la base modale du système couplé qu'il calcule en fonction des vecteurs propres du système symétrique. Cette méthode lui a permis de calculer la réponse multi-fréquentielle du système couplé par une simple multiplication de matrices pour chacune des fréquences du spectre considéré. Toutefois, si cette méthode donne de bons résultats pour des fluides légers en un temps court, son utilisation s'avère plus problématique pour certains cas de couplage. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode permettant la prise en considération des modes omis dans la méthode de Sandberg [104] en utilisant la correction pseudo statique [120].

La méthode des éléments finis de surface (BEM) appliquée à l'acoustique a été combinée avec succès à la MEF utilisée pour la structure afin de modéliser le couplage élastoacoustique [23, 25, 75]. Cependant, le temps de calcul reste un facteur contraignant dans cette méthode en raison du caractère plein et complexe des matrices. Afin d'accélérer les calculs, nous avons utilisé l'interpolation quadratique des matrices en BEM [101]. Cette méthode donne des résultats, relativement, bons tout en minimisant le temps de calcul.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons la théorie des éléments finis pour les plaques minces. La méthode des éléments finis de Sandberg [104] est ensuite détaillée suivie de la correction statique telle que présentée par Tournour [120]. Pour tirer profit des avantages des deux méthodes précédentes, nous proposons une nouvelle méthode pour le couplage combinant la diagonalisation de Sandberg et la correction statique de Tournour. Des résultats numériques sont présentés pour valider cette nouvelle méthode qui s'avère aussi précise que la méthode de Tournour [120] et aussi rapide que la méthode de Sandberg [104]. Enfin, après avoir rappelé le couplage de la MEF avec la BEM, nous utilisons l'interpolation quadratique des matrices d'influence de la BEM afin d'accélérer le temps de calcul.

3.2 Etude de la structure

La notion d'un solide indéformable n'est qu'un concept théorique. Aucun corps n'est parfaitement rigide. Chaque structure mécanique présente une certaine flexibilité, se traduisant par un champ de déformations et de contraintes. Dans le cas d'une structure élastique, linéaire et isotrope, sans contrainte ni déformation initiale, en absence de toute source volumique, l'équation qui gouverne son comportement vibratoire harmonique est donnée par :

$$\sigma_{ij,j}(u) + \omega^2 \rho u_i = 0 \quad \text{dans } V_s \quad (3.1)$$

où V_s est le volume occupé par la structure.

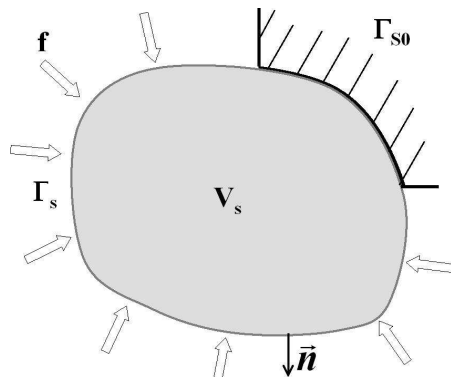


FIG. 3.1 – Structure élastique.

Si l'on note Γ_{s0} la frontière dont le déplacement est imposé et Γ_s celle du type effort appliqué à la surface [Fig. (3.1)], les conditions aux limites associées à la structure s'écrivent comme suit :

$$u = u_s \quad \text{sur } \Gamma_{s0} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_i \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (3.3)$$

où ρ , u et σ sont, respectivement, la masse volumique, le champ de déplacement et le tenseur de contrainte de la structure et \mathbf{n} est la normale externe à la structure. Le tenseur de contrainte est relié au tenseur de déformation par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (3.4)$$

dans laquelle C_{ijkl} représente le tenseur des coefficients élastiques du matériau :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont donnés en fonction du module de Young E et le coefficient de Poisson ν par les expressions suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Le tenseur de déformation ϵ_{kl} est relié au champ de déplacement \mathbf{u} par le biais de cette équation :

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.5)$$

Notons que : $(\cdot)_{,k} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$ et utilisons $u_{(k,l)} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$ comme abréviation.

3.2.1 Formulation faible pour la structure

Pour écrire la formulation faible du problème de vibration de la structure, considérons un espace \mathcal{C} de fonctions suffisamment dérivables et multiplions l'équation (3.1) par la fonction arbitraire $\delta u \in \mathcal{C}$ et intégrons sur tout le volume V_s

$$\int_{V_s} (\sigma_{ij,j}(u) + \omega^2 \rho u_i) \delta u_i \, dV = 0 \quad (3.6)$$

Or

$$\sigma_{ij,j} \delta u_i = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \quad (3.7)$$

On obtient donc :

$$\int_{V_s} (\sigma_{ij}(u) \delta u_i)_{,j} \, dV - \int_{V_s} \sigma_{ij}(u) \delta u_{i,j} \, dV + \int_{V_s} \omega^2 \rho u_i \delta u_i \, dV = 0 \quad (3.8)$$

En utilisant la formule de la divergence, on trouve :

$$\int_{V_s} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} \, dV = \int_{\Gamma_s + \Gamma_{s0}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS \quad (3.9)$$

où dS est un élément de surface.

En remplaçant l'équation (3.9) dans l'équation (3.8) et en tenant compte de la symétrie du tenseur de contrainte [56] et de la définition du tenseur de déformation [Eq. (3.5)], on aboutit à l'expression suivante :

$$\int_{V_s} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\delta u) dV - \omega^2 \int_{V_s} \rho u_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_s + \Gamma_{s0}} \sigma_{ij}(u) n_j \delta u_i dS = 0 \quad (3.10)$$

Finalement, la prise en compte des conditions aux limites du problème nous permet d'écrire la formulation faible sous cette forme :

$$\int_{V_s} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\delta u) dV - \omega^2 \int_{V_s} \rho u_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_s} f_i \delta u_i dS = 0, \forall \delta u \in C_0, u \in C_0, \quad (3.11)$$

où $C_0 = \{\square \in C, \square = \square_f \text{ sur } \Gamma_{s0}\}$

Dans le cas d'une structure libre ($\Gamma_{s0} = \emptyset$), la formulation variationnelle est donnée par l'expression suivante :

$$\int_{V_s} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\delta u) dV - \omega^2 \int_{V_s} \rho u_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_s} f_i \delta u_i dS = 0, \forall \delta u \in C, u \in C, \quad (3.12)$$

3.2.2 Discrétisation de l'équation variationnelle

Pour résoudre l'équation (3.11), une solution approchée de cette équation est obtenue en divisant le domaine en des sous domaines élémentaires dits "éléments finis"

$$\int_{V_s} () dV = \sum_{Element} \int_{V_s^e} dV; \int_{\Gamma_s} () dS = \sum_{Element} \int_{\Gamma_s^e} dS$$

sur lesquels on définit des points nodaux à partir desquels on interpole les variables comme un polynôme à l'intérieur de l'élément :

$$u_i = \sum_{j=1}^{ND} N_j u_i^{(j)}$$

où N_j est la fonction de forme au noeud j . Elle est nulle partout sauf au noeud qui lui correspond où elle vaut un. $u_i^{(j)}$ est la valeur de la composante ($i = 1, 2, 3$) du déplacement au noeud j et ND est le nombre de noeud par élément.

En substituant la dernière équation dans l'équation (3.11) écrite pour un seul élément du domaine tout en considérant la méthode de Galerkin pour laquelle la fonction test $\delta u = N_i$, on trouve :

$$\sum_{j=1}^{ND} \left(\int_{V_s^e} \nabla N_i D \nabla N_j dV - \omega^2 \int_{V_s^e} \rho N_i N_j dV \right) u_i^{(j)} = \int_{\Gamma_s^e} f N_i dS \quad (3.13)$$

où

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

En introduisant des matrices élémentaires dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{V_s^e} \rho N_i N_j dV, \\ K_{ij}^e &= \int_{V_s^e} \nabla N_i D \nabla N_j dV, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$F_i^e = \int_{V_s^e} f N_i dS,$$

l'équation (3.11) peut être écrite sous une forme matricielle compacte :

$$(K - \omega^2 M) u = F, \quad (3.15)$$

où M et K désignent, respectivement, les matrices globales de masse et de rigidité et F le vecteur global de chargement surfacique appliqué à la structure. Ces matrices globales sont obtenues en assemblant les matrices élémentaires K^e , M^e et F^e selon la topologie discrète du problème étudié. Pour plus de détails sur la mise en œuvre théorique et informatique de la méthode des éléments finis, le lecteur est invité à consulter les références de base suivantes [37, 134].

La résolution de ce système d'équations pour différentes fréquences permet d'extraire, pour tous les nœuds du maillage, le déplacement dû à l'excitation F . Autrement dit, pour chaque fréquence, on doit résoudre :

$$u = (K - \omega^2 M)^{-1} F \quad (3.16)$$

Les matrices K et M sont toutes les deux symétriques. En outre, la matrice M est définie positive alors que K est définie semi-positive. Il apparaît clairement que la matrice K n'est pas inversible. En effet, lorsque la structure est libre, elle présente des modes de corps rigide dont la fréquence est nulle. Dans ce cas, il convient de faire appel à des méthode bien établies pour ne prendre que les modes flexibles [48]. Dans le cas contraire, les lignes et les colonnes correspondantes aux nœuds contraints en déplacement sont éliminés de la matrice K , la rendant ainsi inversible.

3.2.3 Plaques minces (Théorie de Kirchhoff) [14, 56]

Tout le long de ce travail, la structure est modélisée par la Méthode des Eléments Finis (MEF). Considérée comme mince, la structure est divisée en des éléments plaques quadrilatéraux DKQ à 4 nœuds (Discret Kirchhoff Quadtrilateral) et/ou triangulaires DKT (Discret Kirchhoff Triangular) à 3 nœuds [Fig. (3.2)].

Une plaque est un solide 3D, défini sur une surface plane A (plan (x, y)) et par une épaisseur t petite par rapport aux autres dimensions,

$$V_s = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid z \in [-t/2, t/2], (x, y) \in A \subset R^2 \right\}$$

Dans ce cas :

$$\int_{V_s} () dV = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} () dt dA$$

Dans la théorie de Kirchhoff, la déformation de cisaillement est négligée tout en considérant la conservation des normales : *les point matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite normale à la surface moyenne déformée*. Généralement, on admet les hypothèses de Kirchhoff tant que $L > 20t$, où L est une dimension caractéristique dans le plan xy .

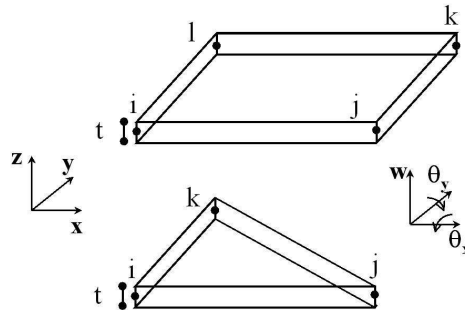


FIG. 3.2 – Eléments plaques DKQ et DKT.

En raison de la conservation de la normale, les déplacements u_1 et u_2 (suivant x et y) d'un point quelconque $P(x, y, z)$ varient linéairement en z et le déplacement normal w (suivant z) n'est fonction que de x et de y .

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = z\beta_1(x, y) = z\theta_2(x, y) \\ u_2(x, y, z) = z\beta_2(x, y) = -z\theta_1(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (3.17)$$

où $\theta_1 = -\beta_2$ est la rotation du plan xz autour de x alors que $\theta_2 = \beta_1$ est la rotation du plan yz autour de y .

L'annulation du cisaillement permet alors d'écrire :

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

et d'en déduire que :

$$\begin{cases} \beta_1 + w_{,x} = 0 \\ \beta_2 + w_{,y} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

En restant dans l'hypothèse des contraintes planes, σ_{33} est négligée par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes. Dans ce cas, $\sigma_{33} = 0$ et la loi de Hooke devient :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\eta} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \delta_{\alpha\eta} \epsilon_{\gamma\gamma} + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{\alpha\eta} \\ \sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{\alpha 3} \end{cases} \quad (3.20)$$

où $\alpha, \gamma, \eta = 1, 2$.

En utilisant l'équation (3.5), (3.17) et (3.20), on peut montrer que : $\sigma_{\alpha 3} = 0$. D'où la loi de Hooke peut être réécrite sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La formulation variationnelle (3.11) s'écrira dans le cas de la plaque comme suit :

$$\int_A \int_{-t/2}^{t/2} \delta u_{(\alpha,\eta)} \sigma_{\alpha\eta} dz dA - \omega^2 \rho \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \delta u_i u_i dz dA - \int_{\Gamma} \delta u_i f_i dA = 0 \quad (3.22)$$

En tenant compte des équations (3.17) et (3.21), nous déduisons la formulation variationnelle des plaques :

$$\frac{t^3}{12} \int_A \delta \beta_{(\alpha,\eta)} D \beta_{(\alpha,\eta)} dA - \omega^2 \rho \left(t \int_A \delta w w + \frac{t^3}{12} \int_A \delta \beta_{\alpha} \beta_{\alpha} \right) dA - \int_{\Gamma} \delta w \langle f_3 \rangle dA = 0 \quad (3.23)$$

où $\langle f \rangle = f(x, y, -t/2) + f(x, y, t/2)$

En notant :

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \end{bmatrix}, U_p = \begin{bmatrix} w \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

les matrices élémentaires de rigidité et de masse s'écrivent, respectivement, sous ces formes :

$$\begin{cases} K_p^e = \frac{t^3}{12} \int_A \delta B_p^T D B_p dA \\ M_p^e = \rho \int_A \delta U_p^T T U_p dA \end{cases} \quad (3.25)$$

où

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \end{bmatrix}$$

Plusieurs techniques ont été proposées pour écrire les expressions de β_1 et β_2 en fonction des variables nodales U_p . Batoz [14] a introduit l'hypothèse de Kirchhoff d'anhélation du cisaillement, sur les contours des éléments DKT et DKQ.

3.3 Problème de couplage élasto-acoustique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation du problème d'interaction d'une structure élastique avec un fluide homogène, isotrope et parfaitement compressible. Pour ce faire, nous nous repons sur l'analyse déjà faite, pour la partie acoustique, au chapitre précédent. Dans ce qui suit, la structure est considérée comme mince et est étudiée en utilisant la MEF. Les méthodes MEF et BEM évoquées au chapitre précédent seront couplées, dans le présent, à la MEF dans le but de modéliser un problème de couplage vibroacoustique.

La figure (3.3) illustre un problème de couplage élastoacoustique d'une structure élastique V_s et d'un fluide occupant un volume V_f . Une force est imposée sur la surface S_s . La frontière S_f est considérée comme rigide alors que la surface S_{sf} représente l'interface entre le fluide et la structure. \mathbf{n}^s est la normale à la structure et \mathbf{n} est la normale externe au fluide.

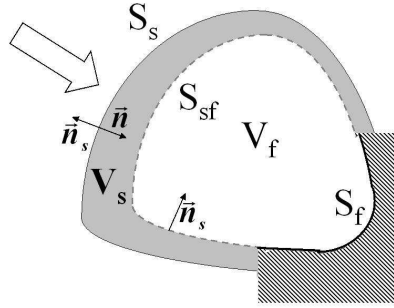


FIG. 3.3 – Problème de couplage structure-cavité.

Dans le cas de petites perturbations d'un milieu fluide non visqueux, isotrope, homogène et parfaitement compressible, la propagation d'onde acoustique est régie par l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } (V_f) \quad (3.26)$$

où p est la pression $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$ est le nombre d'onde avec ω est la pulsation, c est la vitesse du son dans le milieu et f est la fréquence d'excitation. A cette équation peuvent s'associer des conditions aux limites. Dans notre cas, nous nous limitons à la condition de Neumann donnée par l'équation d'Euler $\frac{\partial p}{\partial n} = -i\rho_f \omega V_n$, pour laquelle la vitesse normale V_n est imposée sur la surface. Pour une frontière rigide S_f , elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S_f) \quad (3.27)$$

Dans le cas d'une structure élastique, linéaire et isotrope, en absence de toute force volumique, l'équation qui gouverne son comportement vibratoire harmonique est donnée par [90] :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho_s \omega^2 u_i \quad \text{dans } (V_s) \quad (3.28)$$

où σ représente la contrainte, ρ_s est la densité de la structure, u_i est le déplacement dans la i ème direction. En notant (S_s) la frontière de la structure sur laquelle une force est appliquée, la condition aux limites associée à cette frontière s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} n_j^s = f_i \quad \text{sur } (S_s) \quad (3.29)$$

A l'interface fluide-structure S_f , la continuité du déplacement normal $u_n = u \cdot n$ et de la contrainte donne :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \omega^2 u_n \quad \text{sur } (S_{sf}) \quad (3.30)$$

$$\sigma_{ij} n_j^s = -p n_i^s = p n_i \quad \text{sur } (S_{sf}) \quad (3.31)$$

La dernière condition résulte de l'action des forces de pression exercée par le fluide sur la structure.

3.4 Couplage par éléments finis

3.4.1 Discrétisation de la forme variationnelle (Méthode directe)

Nous avons vu au chapitre précédent que la propagation d'une onde acoustique est régie par l'équation variationnelle suivante :

$$\frac{1}{\rho_f} \int_{V_f} \nabla p \cdot \nabla \delta p dV - \frac{\omega^2}{\rho_f c^2} \int_V p \delta p dV = \frac{1}{\rho_f} \int_{S_f + S_{sf}} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS \quad (3.32)$$

La partie structure est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \omega^2 \int_{V_s} \rho_s u_i \delta u_i dV - \int_{S_s + S_{sf}} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i dS = 0 \quad (3.33)$$

En considérant les conditions de continuité à l'interface fluide-structure [Eq. (3.30) et (3.31)] dans les équations (3.32) et (3.33), on trouve :

$$\frac{1}{\rho_f} \int_{V_f} \nabla p \cdot \nabla \delta p dV - \frac{\omega^2}{\rho_f c^2} \int_{V_f} p \delta p dV = \frac{1}{\rho_f} \int_{S_f} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS + \omega^2 \int_{S_{sf}} u_i n_i \delta p dS \quad (3.34)$$

$$\int_{V_s} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \omega^2 \int_{V_s} \rho_s u \delta u dV - \int_{S_s} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i dS - \int_{S_{sf}} p n_i \delta u_i dS = 0 \quad (3.35)$$

En discrétisant les équations variationnelles ci-dessus en éléments finis telles que présentées dans la section (2.2) et (3.2.2) tout en posant :

$$F_j^f = -i\omega \int V_n N_j^f dS_f, F_j^s = \int f N_j^s dS_s, B_{ij} = \int N_i^f n N_j^s dS_{sf} \quad (3.36)$$

où B représente la matrice du couplage, nous aboutissons au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} K_s - \omega^2 M_s & -B \\ -\omega^2 B^T & K_f - \omega^2 M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_f \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

qui peut s'écrire sous une forme plus condensée comme suit :

$$(K - \omega^2 M) \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = F \quad (3.38)$$

où :

$$K = \begin{bmatrix} K_s & -B \\ 0 & K_f \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ B^T & M_f \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La résolution de ce système, dans la plupart des cas réels, nécessite des temps de calcul assez longs en raison du nombre élevé des degrés de liberté. Une alternative souvent très appliquée, appelée analyse modale, permet une réduction significative de la taille du problème et par conséquent une diminution du temps de calcul.

3.4.2 Analyse modale

3.4.2.1 Projection sur les bases modales non couplées

L'analyse modale permet de diagonaliser chaque bloc du système indépendamment. Pour cela, on résout indépendamment les problèmes aux valeurs propres généralisés suivants correspondant, respectivement, à la structure dans le vide et à la cavité rigide remplie du fluide :

$$K_s X_s = \lambda_s M_s X_s, K_f X_f = \lambda_f M_f X_f, \quad (3.40)$$

où λ_s et λ_f représentent, respectivement, les valeurs propres de la structure et celles de la cavité acoustique. De même, X_s et X_f représentent, respectivement, les vecteurs ou les modes propres de la structure et ceux de la cavité acoustique.

Supposons que les matrices ϕ_s et ϕ_f contiennent, respectivement, les vecteurs propres de la structure et ceux de la cavité acoustique :

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_s & 0 \\ 0 & \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Les vecteurs propres sont normalisés de telle sorte à vérifier les relations d'orthogonalisation suivantes :

$$\phi_s^T M_s \phi_s = I_s, \phi_s^T K_s \phi_s = D_s, \phi_f^T M_f \phi_f = I_f, \phi_f^T K_f \phi_f = D_f, \quad (3.42)$$

où D_s et D_f sont des matrices diagonales contenant, respectivement, les valeurs propres de la structure et celles de la cavité acoustique. ξ_s et ξ_f représentent, respectivement, les déplacements modaux de la structure et les pressions modales de la cavité acoustique. Ainsi, le système (3.37) se réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} D_s - \omega^2 I_s & -\phi_s^T B \phi_f \\ -\omega^2 \phi_f^T B^T \phi_s & D_f - \omega^2 I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_s^T F_s \\ \phi_f^T F_f \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La résolution de ce système pour chaque fréquence permet d'obtenir ξ_s et ξ_f et par conséquent les inconnues u et p peuvent être déduites de l'équation (3.41).

Parfois seuls les premiers modes dont la fréquence propre est inférieure à $1.5 f_{max}$ (fréquence maximale de l'intervalle d'étude) reproduisent la réponse acoustique et structurale. Ainsi, la projection sur une base modale impliquant seulement les premiers modes structuraux et acoustiques permet une réduction significative des degrés de liberté du système couplé.

Bien que sa taille a été réduite, le système correspond à un problème aux valeurs propres non symétrique empêchant, ainsi, l'emploi des algorithmes efficaces de résolution des systèmes symétriques dans le but d'obtenir les modes du système couplé. En effet, le système (3.43) s'écrit sous la forme suivante :

$$(K_m - \omega^2 M_m)\xi = \phi^T F \quad (3.44)$$

ou encore sous une forme plus détaillée donnée par l'équation ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} D_s & -\phi_s^T B \phi_f \\ 0 & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ \phi_f^T B^T \phi_s & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_s^T F_s \\ \phi_f^T F_f \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Des alternatives [104, 119] ont été proposées diagonalisant la matrice du système en résolvant un problème aux valeurs propres à droite et à gauche. Ces bases modales couplées sont calculées après avoir rendu symétrique le système (3.45).

3.4.2.2 Projection sur les bases modales couplées

Le calcul de la base modale couplée présente l'intérêt du calcul des fréquences de résonance du système couplé ainsi que ses modes. Dans cette section, la méthode modale symétrique telle que présentée par Sandberg [104] est détaillée.

a. Vecteurs propres à droite

Dans cette méthode, le système formé des équations (3.34) et (3.35) est discrétisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_s - \omega^2 M_s & -B \\ -\omega^2 \rho c^2 B^T & K_f - \omega^2 M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_f \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

où K_s, M_s sont les mêmes que précédemment alors que $(K_f)_{ij} = c^2 \int_{V_f} \nabla N_i \nabla N_j dV$ et $(M_f)_{ij} = \int_{V_f} N_i N_j dV$. La considération de l'équation (3.41) permet de réécrire ce système sous la forme d'un problème aux valeurs propres presque symétrique comme suit :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_s & -\phi_s^T B \phi_f \\ -\rho c^2 \phi_f^T B^T \phi_s D_s & D_f + \rho c^2 \phi_f^T B^T \phi_s \phi_s^T B \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \phi_s^T F_s \\ \phi_f^T F_f - \rho c^2 \phi_f^T B^T \phi_s \phi_s^T F_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

En utilisant la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_s})^{-1} & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} = [S^D] \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

et en multipliant l'équation (3.47) à gauche par $(S^D)^{-1}$, on aboutit au système symétrique suivant :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_s & -\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_s} \phi_s^T B \phi_f \\ -\sqrt{\rho c^2} \phi_f^T B^T \phi_s \sqrt{D_s} & D_f + \rho c^2 \phi_f^T B^T \phi_s \phi_s^T B \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_s} \phi_s^T F_s \\ \phi_f^T F_f - \rho c^2 \phi_f^T B^T \phi_s \phi_s^T F_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Notons K_η les matrices dans le système η et K_ξ celles données dans le système ξ . Alors suite aux manipulations déjà effectuées, on peut écrire $S^{-1} K_\xi S = K_\eta$. Soient V_η^D, V_ξ^D , respectivement, les vecteurs propres dans le système η et ξ . Comme $K_\eta V_\eta^D = \lambda V_\eta^D$ où λ est la valeur propre alors $K_\xi S V_\eta^D = \lambda S V_\eta^D$. Donc, les vecteurs propres V_ξ de K_ξ sont $S V_\eta$. Ceci permet de déduire une relation entre les vecteurs propres de droite du système original et ceux du système symétrique.

$$V^D = \begin{bmatrix} \phi_s & 0 \\ 0 & \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_s})^{-1} & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} V_\eta^D \quad (3.50)$$

b. Vecteurs propres à gauche

Pour diagonaliser le système, les vecteurs propres de gauche doivent être également déterminés. Sachant que $x^T K = \lambda x^T M \Leftrightarrow K^T x = \lambda M^T x$ alors le problème aux valeurs propres du système (3.47) est donné par :

$$\begin{bmatrix} K_s & 0 \\ -B^T & c^2 K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_s & \rho c^2 B \\ 0 & M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

En procédant de la même manière suivie pour les vecteurs propres à droite sauf que cette fois-ci :

$$[S^G] = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & (\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_f})^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

on aboutit au nouveau système symétrique suivant :

$$\lambda \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_s + \rho c^2 \phi_s^T B \phi_f \phi_f^T B^T \phi_s & -\sqrt{\rho c^2} \phi_s^T B \phi_f \sqrt{D_f} \\ -\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_f} \phi_f^T B^T \phi_s & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

avec

$$V^G = \begin{bmatrix} \phi_s & 0 \\ 0 & \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & (\sqrt{\rho c^2} \sqrt{D_f})^{-1} \end{bmatrix} V_\eta^G \quad (3.54)$$

c. Diagonalisation du système

Après la multiplication du système (3.44) à gauche par S^G , tout en considérant que $\xi = S^D \eta$, il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(\Gamma_K - \omega^2 \Gamma_M) \eta = S^G \phi^T F \quad (3.55)$$

où $\Gamma_K = S^G K_m S^D$, $\Gamma_M = S^G M_m S^D$. Multiplions l'équation (3.55) à gauche par $(V_\eta^G)^T$ et écrivons que $\eta = V_\eta^D \zeta$ tout en considérant l'équation (3.54), nous aboutissons à l'équation suivante :

$$(\Omega - \omega^2 I) \zeta = (V_\eta^G)^T S^G \phi^T F \Rightarrow (\Omega - \omega^2 I) \zeta = (V^G)^T F \quad (3.56)$$

où $\Omega = (V_\eta^G)^T \Gamma_K V_\eta^D$ est une matrice diagonale constituée des valeurs propres du système couplé et les vecteurs propres sont normalisés de telle sorte qu'ils vérifient : $(V_\eta^G)^T \Gamma_M V_\eta^D = I$.

L'introduction des différentes transformations précédentes ($u = \phi\xi = \phi S^D \eta = \phi S^D V_n^D \zeta = V^D \zeta$) nous permet d'en déduire la solution finale du problème :

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = V^D \frac{((V^G)^T F)}{(\Omega - \omega^2 I)} \quad (3.57)$$

Remarquons que la solution d'un problème multi-fréquentiel revient, finalement, à inverser une matrice diagonale pour chaque fréquence. Ainsi, une fois les vecteurs propres à gauche et à droite sont calculés, la solution du problème s'obtient par une simple multiplication matricielle.

3.4.2.3 Validation de l'analyse modale

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques pour montrer la validité des méthodes présentées ci-dessus et leurs limites. Pour cela, nous évaluons la vitesse quadratique moyenne de la structure ainsi que la pression quadratique moyenne dans la cavité [Eq. (3.58)] pour un exemple simple de couplage élasto-acoustique. Ce dernier consiste en une cavité parallélépipédique $0.312 \times 0.351 \times 0.14\text{m}^3$ entièrement rigide sauf une seule facette élastique ($E = 72\text{GPa}, \nu = 0.3, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) d'épaisseur $t = 0.0015 \text{ m}$, simplement supportée sur la cavité [Fig.(3.4)]. Cette plaque est excitée par une force ponctuelle unitaire au point $(0.045, 0.075, 0)\text{m}$.

$$\begin{cases} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2S_s} \int_{S_s} |V_n|^2 dS \\ \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2V_f} \int_{V_f} |p|^2 dV \end{cases} \quad (3.58)$$

La réponse du système couplé, dans cette première application, est calculée en utilisant les trois méthodes précédentes que nous récapitulons ci-dessous :

1. méthode directe (notée MD) en résolvant le système (3.37) ;
2. méthode à bases modales découplées (notée MMD) donnée par le système (3.43) ;
3. méthode à bases modales couplées (notée MMC) telle que présentée par Sandberg [104].

La plaque est discrétisée en 8×9 éléments DKQ alors que la cavité est divisée en $8 \times 9 \times 4$ éléments volumiques. Ainsi, ce maillage donne lieu à 450 degrés de liberté

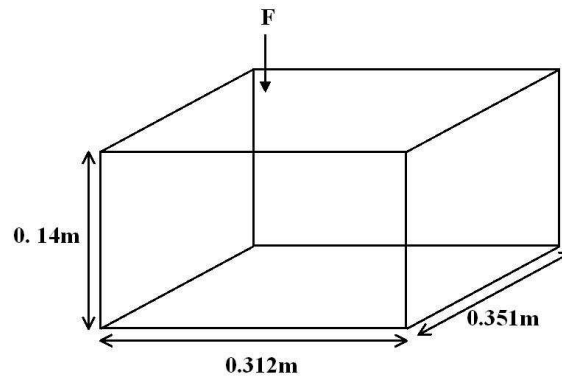


FIG. 3.4 – Représentation du problème plaque cavité rectangulaire.

en pression pour la cavité et 270 degrés de liberté en déplacement et rotation pour la structure. Ceci implique la résolution d'un système de taille (720×720) dans le cas de la méthode directe (MD). Notons que dans la deuxième et la troisième méthode, nous nous limitons uniquement aux 50 premiers modes propres de la structure in vacuum et aux 50 premiers modes propres de la cavité correspondant, respectivement, à une fréquence maximale de 1698 Hz et 2804 Hz dans le cas de l'air. Cette limitation aux 50 premiers modes propres pour la structure et la cavité, engendre un système beaucoup plus réduit de taille 100×100 seulement. Ce qui rend la méthode MMD plus attractive. Pour tester la validité de ces méthodes, nous présentons par la suite deux cas différents. Dans le premier cas, la cavité est remplie d'air ($\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3, c = 343 \text{ m/s}$) alors qu'elle est remplie, dans le second cas, par l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, c = 1500 \text{ m/s}$).

a. Cavité remplie d'air

La figure (3.5) représente la vitesse quadratique moyenne de la structure obtenue par les trois méthodes précédentes. Nous observons le bon accord entre les différentes méthodes. Dans la figure (3.6) nous avons représenté la pression quadratique moyenne dans la cavité. Aussi, nous remarquons une bonne concordance entre les méthodes utilisées.

Dans le tableau (3.1), nous récapitulons le temps CPU des différentes méthodes. Nous remarquons que la MD est très lente comparée à la MMD et la MMC. En effet, la MMD est 17 fois plus rapide que la MD. D'un autre côté, la méthode MMC est accélérée d'un facteur de 5 par rapport à la MMD.

b. Cavité remplie d'eau

Cette fois-ci, la cavité est remplie d'eau et la réponse élastoacoustique est considérée dans la gamme de fréquence $[1,700 \text{ Hz}]$. Bien que les fréquences maximales respectives

TAB. 3.1 – Efficacité des méthodes MD, la MMD et la MMC en temps de calcul(s) :

MD	MMD	MMC
842.67	49.73	9.67

de 12261 Hz pour la cavité et 1698 Hz pour la structure sont plus grandes que la fréquence maximale du spectre considéré (700 Hz), les réponses du système en utilisant la MMD ou la MMC ne sont plus en bon accord avec les résultats donnés par la MD [Fig. (3.7), (3.8)]. En effet, l'interaction d'une structure avec un fluide lourd, comme l'eau, engendre un couplage très fort entre les modes propres de la structure et ceux de la cavité y compris les modes à fréquences élevée. Ainsi, la troncature modale dans ce type de couplage entraîne des erreurs sévères [120]. Dans la section suivante, nous verrons comment prendre compte des modes tronqués afin de rectifier la réponse d'un système fortement couplé.

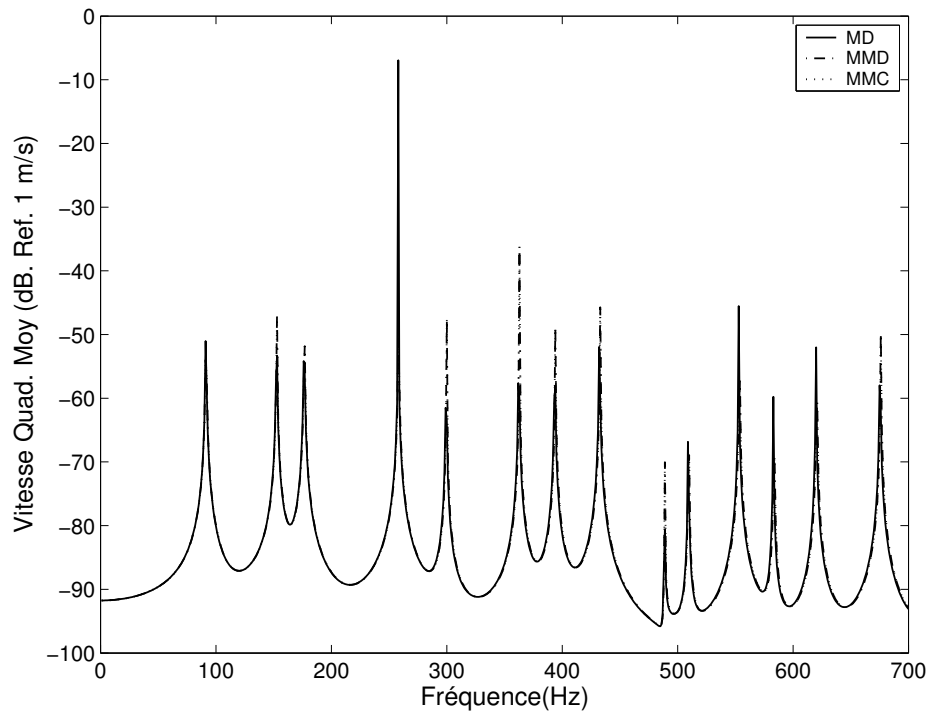


FIG. 3.5 – Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'air

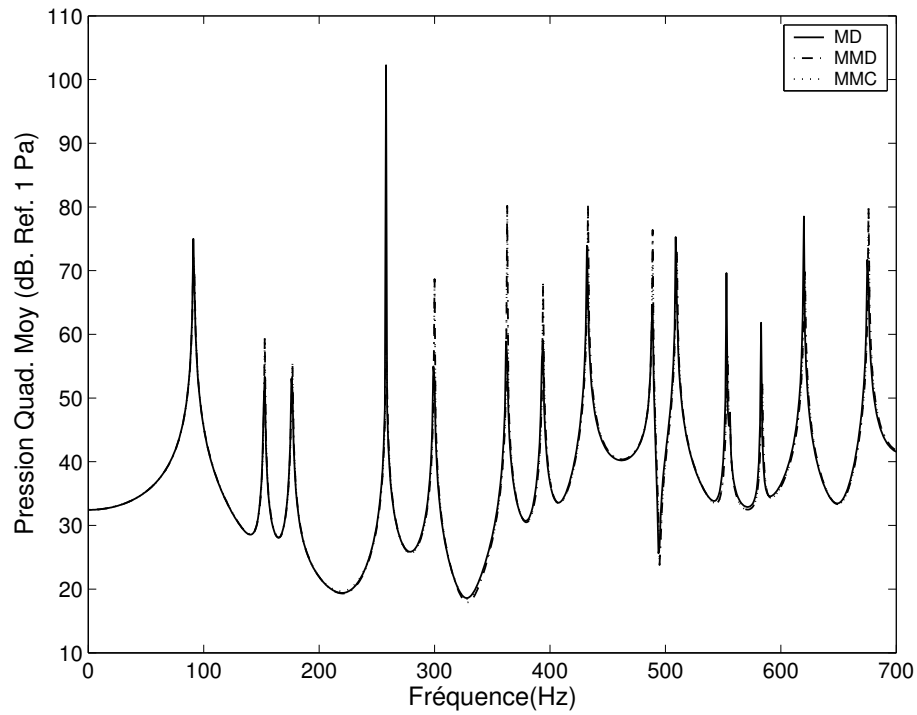


FIG. 3.6 – Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'air.

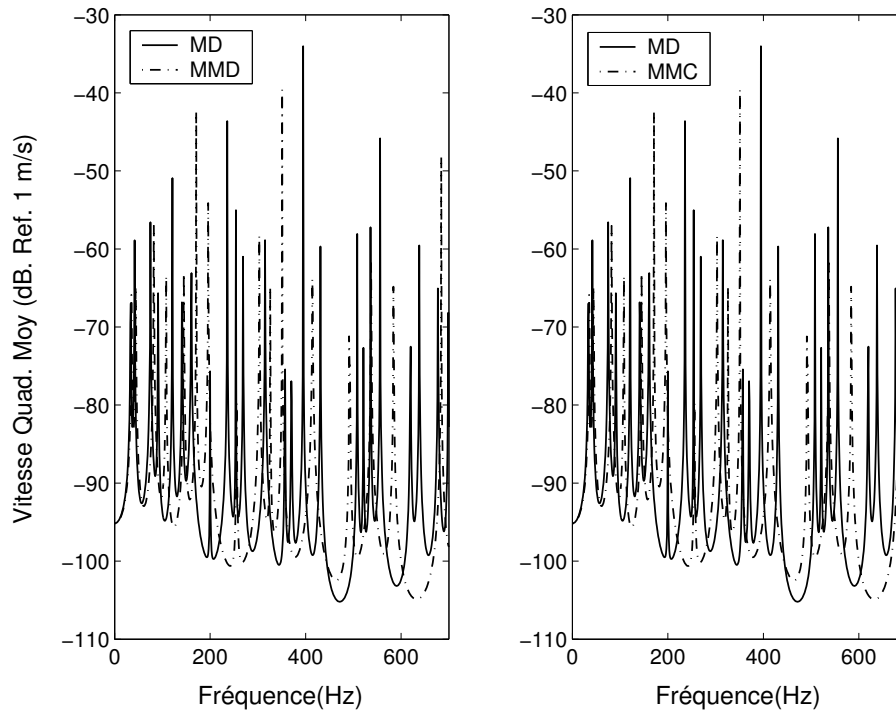


FIG. 3.7 – Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'eau.

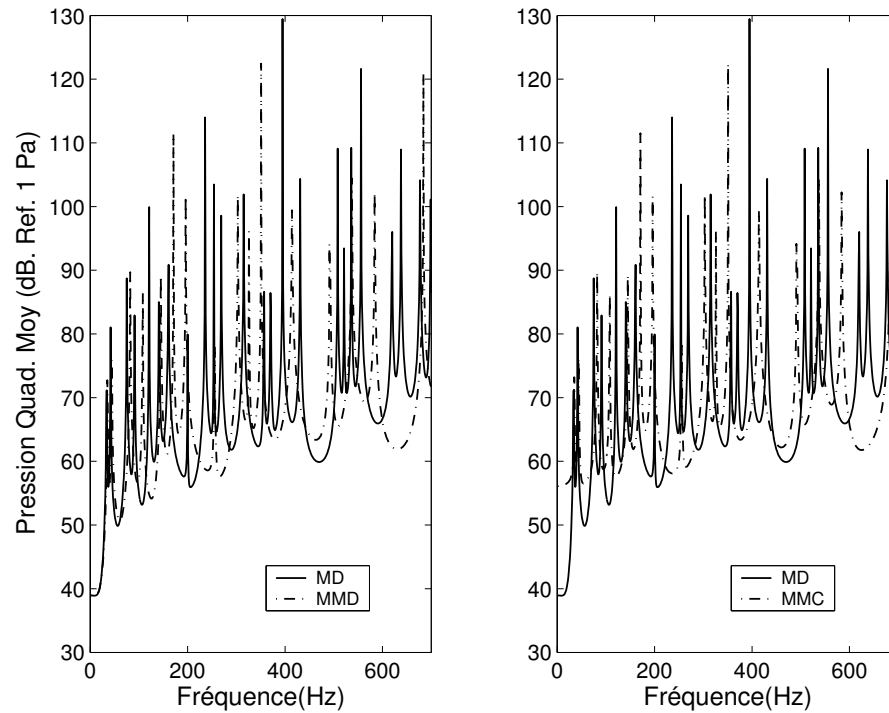


FIG. 3.8 – Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'eau.

3.4.3 Correction statique en analyse modale à bases couplées

Afin de corriger la réponse vibroacoustique d'un système cavité-structure obtenue par la projection sur la base modale couplée [104], nous proposons dans cette section d'introduire, dans la méthode de Sandberg [104], la correction statique proposée par Tournour [120] permettant la prise en compte des modes omis en analyse modale. Ainsi, cette nouvelle méthode permet d'avoir, à la fois, les avantages des deux dernières méthodes, à savoir :

- la prise en compte uniquement de quelques modes propres de la structure in vacuum et quelques modes de la cavité rigide tout en considérant une contribution statique des modes omis ;
- la résolution d'un problème aux valeurs propres symétrique permettant d'utiliser des algorithmes performants et d'en déduire les modes propres du système couplé ainsi que ses fréquences de résonance réelles ;
- le calcul de la réponse du système couplé par une simple multiplication de matrices dont celle qui dépend de la fréquence est diagonale. Ceci rend les calculs très rapides.

3.4.3.1 Correction statique en bases modales découplées

Nous avons vu dans les exemples précédents que les modes propres omis dans l'analyse modale peuvent donner lieu à des résultats non physiques, d'où la nécessité de la prise en compte de ces modes qu'on note ϕ_{so} pour la structure et ϕ_{fo} pour la cavité. L'indice 'o' est utilisé pour indiquer les modes omis. Par conséquent, on écrit :

$$\begin{cases} p = \phi_f \xi_f + \phi_{fo} \xi_{fo} = \phi_f \xi_f + p_o \\ u = \phi_s \xi_s + \phi_{so} \xi_{so} = \phi_s \xi_s + u_o \end{cases} \quad (3.59)$$

L'application des propriétés d'orthogonalité des modes omis donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} D_{so} \xi_{so} - \omega^2 I_{so} \xi_{so} = \phi_{so}^T (F_s + Bp) \\ D_{fo} \xi_{fo} - \omega^2 I_{fo} \xi_{fo} = \phi_{fo}^T (F_f + \omega^2 B^T u) \end{cases} \quad (3.60)$$

En supposant que l'énergie cinétique des modes omis du déplacement et l'énergie de compressibilité des modes omis de la pression sont négligeables, on peut dire que la contribution des modes omis est pseudo statique et on écrit :

$$\begin{cases} D_{so} \xi_{so} \approx \phi_{so}^T (F_s + Bp) \\ D_{fo} \xi_{fo} \approx \phi_{fo}^T (F_f + \omega^2 B^T u) \end{cases} \quad (3.61)$$

Ces deux équations s'écrivent en terme de déplacement statique nodal \underline{u} et de pression statique nodale \underline{p} comme suit :

$$\begin{cases} K_s \underline{u} = F_s + Bp \\ K_f \underline{p} = F_f + \omega^2 B^T u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{u} = K_s^{-1} (F_s + Bp) \\ \underline{p} = K_f^{-1} (F_f + \omega^2 B^T u) \end{cases} \quad (3.62)$$

Notons que dans l'équation précédente K_s et K_f sont supposées être inversibles (définies positives). D'une autre part, le déplacement et la pression statiques peuvent être écrits en fonction des modes statiques gardés $\underline{u}_g, \underline{p}_g$ et des modes statiques omis $\underline{u}_o, \underline{p}_o$ dans l'analyse modale comme suit :

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_g + u_o \\ \underline{p} = \underline{p}_g + p_o \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \underline{u}_g = \phi_s \xi_s \approx \phi_s D_s^{-1} \phi_s^T (F_s + Bp) \\ \underline{p}_g = \phi_f \xi_f \approx \phi_f D_f^{-1} \phi_f^T (F_f + \omega^2 B^T u) \end{cases} \quad (3.63)$$

Les équations (3.62) et (3.63) nous permettent d'écrire la pression et le déplacement résultant des modes omis comme suit :

$$\begin{cases} u_o = \underline{u} - \underline{u}_g = (K_s^{-1} - \phi_s D_s^{-1} \phi_s^T) (F_s + Bp) \\ p_o = \underline{p} - \underline{p}_g = (K_f^{-1} - \phi_f D_f^{-1} \phi_f^T) (F_f + \omega^2 B^T u) \end{cases} \quad (3.64)$$

Finalement, en supposant que $u = \phi_s \xi_s$ et $p = \phi_f \xi_f$ (correction statique du premier ordre), l'équation (3.64) s'écrit :

$$\begin{cases} u_o = (K_s^{-1} - \phi_s D_s^{-1} \phi_s^T)(F_s + B \phi_f \xi_f) = K_{so}^{-1}(F_s + B \phi_f \xi_f) \\ p_o = (K_f^{-1} - \phi_f D_f^{-1} \phi_f^T)(F_f + \omega^2 B^T \phi_s \xi_s) = K_{fo}^{-1}(F_f + \omega^2 B^T \phi_s \xi_s) \end{cases} \quad (3.65)$$

La combinaison de l'équation (3.59) et (3.65) dans l'équation (3.37), tout en considérant les relations d'orthogonalité, donne le système :

$$\begin{bmatrix} D_s - \omega^2 I_s - \omega^2 M_{sadd} & -\phi_s^T B \phi_f \\ -\omega^2 \phi_f^T B^T \phi_s & D_f - \omega^2 I_f - \omega^2 M_{fadd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_s^T F_s + F_{fadd} F_f \\ \phi_f^T F_f + \omega^2 F_{sadd} F_s \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

où M_{sadd} et $F_{fadd} F_f$ représentent, respectivement, la masse et le chargement rajoutés dus aux modes omis de la cavité et M_{fadd} et $F_{sadd} F_s$ représentent, respectivement, la compressibilité et le chargement rajoutés dus aux modes omis de la structure où :

$$M_{sadd} = \phi_s^T B K_{fo}^{-1} B^T \phi_s$$

$$F_{fadd} = \phi_s^T B K_{fo}^{-1}$$

$$M_{fadd} = \phi_f^T B^T K_{so}^{-1} B \phi_f$$

$$F_{sadd} = \phi_f^T B^T K_{so}^{-1}$$

La résolution du système (3.66) nous permet d'obtenir la pression et le déplacement modaux tout en tenant compte de la contribution statique des modes souvent omis en analyse modale. Ainsi, la solution du problème en terme de déplacement et de pression est donnée par :

$$\begin{cases} u = \phi_s \xi_s + K_{so}^{-1} F_s + F_{sadd}^T \xi_f \\ p = \phi_f \xi_f + K_{fo}^{-1} F_f + \omega^2 F_{fadd}^T \xi_s \end{cases} \quad (3.67)$$

En général, les matrices K_f et K_s ne sont pas inversibles en raison de la présence des modes rigides à valeurs propres nulles. Pour inverser une telle matrice K (K peut être soit K_f ou K_s), on définit une matrice K_{con} à partir de K en imposant une contrainte sur cette dernière [48]. L'inversion de K_{con} est maintenant possible sauf qu'il faut définir un filtre A (A_f pour la cavité et A_s pour la structure) éliminant les modes rigides, soit en écrivant :

$$A = I - M \phi_r \phi_r^T \quad (3.68)$$

où M peut être soit M_f ou M_s .

Ainsi pour le cas du fluide, K_{fo}^{-1} s'écrit comme suit :

$$K_{fo}^{-1} = A_f^T K_{fcon}^{-1} A_f - \phi_{fe} D_{fe}^{-1} \phi_{fe}^T \quad (3.69)$$

où l'indice e est écrit pour indiquer un mode élastique. Par conséquent, la matrice de masse ajoutée est la suivante :

$$M_{sadd} = G_f^T K_{fcon}^{-1} G_f - B_m D_f^{-1} B_m^T \quad (3.70)$$

avec $G_f = A_f B^T \phi_s$ et $B_m = \phi_s^T B \phi_f$

De même pour la structure, on a :

$$K_{so}^{-1} = A_s^T K_{scon}^{-1} A_s - \phi_{se} D_{se}^{-1} \phi_{se}^T \quad (3.71)$$

et par conséquent

$$M_{fadd} = G_s^T K_{scon}^{-1} G_s - B_m^T D_s^{-1} B_m \quad (3.72)$$

où $G_s = A_s B \phi_f$. Notons que seuls les modes élastiques de la cavité et ceux de la structure sont considérés dans les termes $B_m D_f^{-1} B_m^T$ et $B_m^T D_s^{-1} B_m$

3.4.3.2 Correction statique en bases modales couplées

Dans cette section, nous proposons une nouvelle méthode combinant la méthode de Sandberg et celle de Tournour pour résoudre un problème de couplage vibroacoustique. Pour cela, nous procédons, exactement, de la même manière que la section (3.4.2.2) et nous définissons notre système à diagonaliser comme suit :

$$\begin{bmatrix} D_s - \omega^2 E_s & -C \\ -\omega^2 C^T & D_f - \omega^2 E_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_t \\ F_t \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

où $E_s = I_s + M_{sadd}$, $E_f = I_f + M_{fadd}$, $C = \phi_s^T B \phi_f$, $S_t = \phi_s^T F_s + F_{fadd} F_f$ et $F_t = \phi_f^T F_f + \omega^2 F_{sadd} F_s$. Cette dernière équation constitue le système permettant le calcul des vecteurs propres à droite. La matrice de transformation S^D

$$\begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = S^D \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & E_f^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

nous permet de rendre le problème aux valeurs propres (3.73) symétrique [Eq.(3.75)].

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{D_s} E_f^{-1} \sqrt{D_s} & -\sqrt{D_s} E_s^{-1} C (\sqrt{E_f})^{-1} \\ -(\sqrt{E_f})^{-1} C^T E_s^{-1} \sqrt{D_s} & (\sqrt{E_f})^{-1} (C^T E_s^{-1} C + D_f) (\sqrt{E_f})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{D_s} E_s^{-1} S_t \\ -(\sqrt{E_f})^{-1} C^T E_s^{-1} S_t + (\sqrt{E_f})^{-1} F_t \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

De la même manière, la matrice de transformation S^G suivante

$$\begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = S^G \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & D_f^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

permet de rendre le système au valeurs propres à gauche [Eq.(3.77)] symétrique.

$$\begin{bmatrix} D_s & 0 \\ -C^T & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} E_s & C \\ 0 & E_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Après avoir effectué le changement de variables (3.76) dans le système (3.77), nous aboutissons au système symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} E_s^{-1}(D_s + CB^{-1}C^T)E_s^{-1} & -E_s^{-1/2}CE_f^{-1}\sqrt{D_f} \\ -\sqrt{D_f}E_f^{-1}C^TE_s^{-1/2} & \sqrt{D_f}E_f^{-1}\sqrt{D_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \eta_s \\ \eta_f \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Suite aux manipulations déjà effectuées (Voir section 3.4.2.2), les vecteurs propres à gauche et à droite du système (3.76) seront donnés, respectivement, par ces deux relations :

$$\begin{cases} V^D = S^D V_\eta^D \\ V^G = S^G V_\eta^G \end{cases} \quad (3.79)$$

Par conséquent, la solution du système (3.73) est obtenue par :

$$\begin{bmatrix} \xi_s \\ \xi_f \end{bmatrix} = V^D \frac{((V^G)^T F_{sf})}{(\Omega - \omega^2 I)} \quad (3.80)$$

où $F_{sf}^T = [S_t F_t]$ est le chargement total et Ω est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de droite ou gauche du système couplé (3.73). Cette dernière équation nous permet d'avoir les déplacements et les pressions modaux du système couplé avec prise en compte de la correction statique. En remplaçant les valeurs obtenues de ξ_s et ξ_f dans l'équation (3.67), nous aboutissons aux déplacements et aux pressions physiques recherchés.

3.4.3.3 Validation de la méthode

a. Couplage plaque cavité rectangulaire

Dans cette partie, le même exemple étudié dans la section 3.4.2.3 est traité ici en considérant la correction statique. La réponse du système couplé, dans cette seconde validation, est calculée en utilisant les trois méthodes précédentes que nous récapitulons ci-dessous :

1. méthode directe (notée MD) en résolvant le système (3.37) ;
2. méthode à bases modales découplées corrigée (notée MMDC) telle que proposée par Tournour ;
3. méthode à bases modales couplées corrigée (notée MMCC) telle que nous proposons.

La figure (3.9) représente la vitesse quadratique moyenne en utilisant la MD, MMDC et MMCC. Un très bon accord est observé entre les trois méthodes. En comparant la figure (3.9) et la figure (3.7) nous remarquons que la correction statique permet la correction de la troncature modale. De même, la pression quadratique moyenne issue de la MMDC et MMCC est en bonne concordance avec la MD [Fig. (3.10)]. Ce qui montre, encore une fois, l'efficacité de ces deux méthodes.

Afin de montrer l'apport de notre méthode MMCC par rapport à la méthode MMDC, examinons le tableau (3.2) dans lequel nous avons récapitulé les temps de calculs pour ces méthodes.

TAB. 3.2 – Efficacité des méthodes en temps de calcul :

Comparaison entre le temps de calcul (s) de la méthode directe (MD), la méthode modale (MDD), la méthode modale découplée avec correction statique (MMDC), la méthode modale couplée (MMC) et la méthode modale couplée avec correction statique (MMCC)

MD	MMD	MMDC	MMC	MMCC
844.67	49.73	50.22	9.53	10.00

Nous pouvons noter que le temps de calcul supplémentaire dû à la correction statique n'est pas significatif. Par conséquent, la MMCC est alors plus performante que la MMDC puisque le gain en temps est toujours d'un facteur de 5.

Finalement, traitons le premier cas de la cavité remplie d'air par la méthode MMDC et MMCC. Nous remarquons que la pression et la vitesse quadratique moyenne restent toujours en bon accord avec la MD. Ce qui montre leur efficacité même pour le traitement d'un couplage faible [Fig. (3.11), (3.12)]

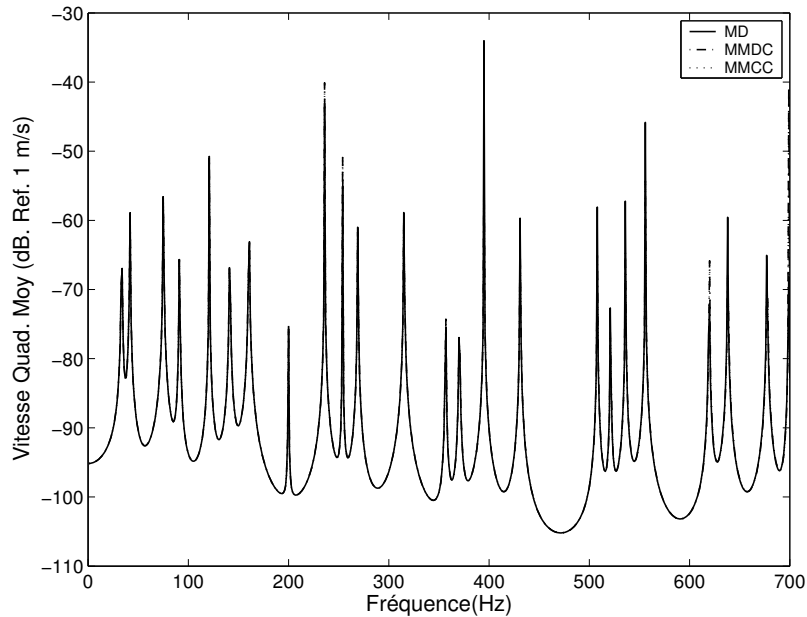


FIG. 3.9 – Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'eau (avec correction statique).

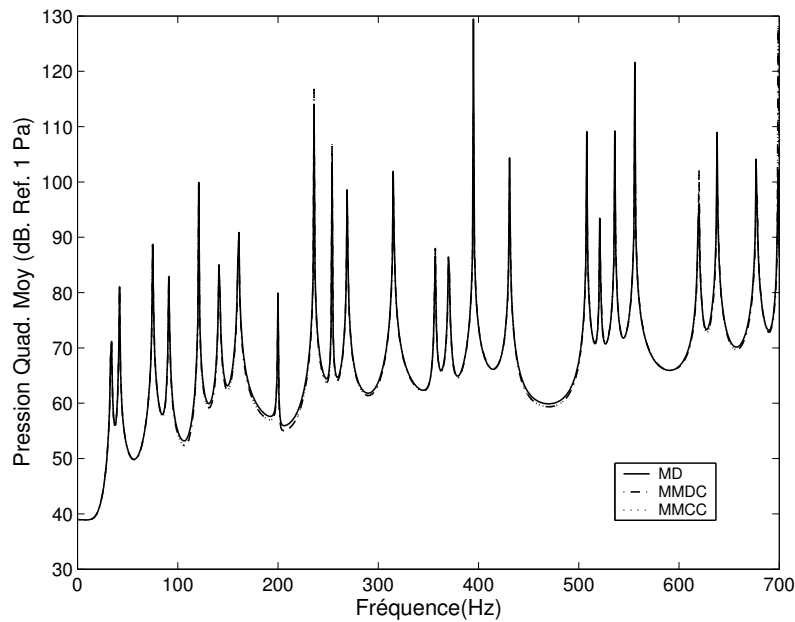


FIG. 3.10 – Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'eau (avec correction statique).

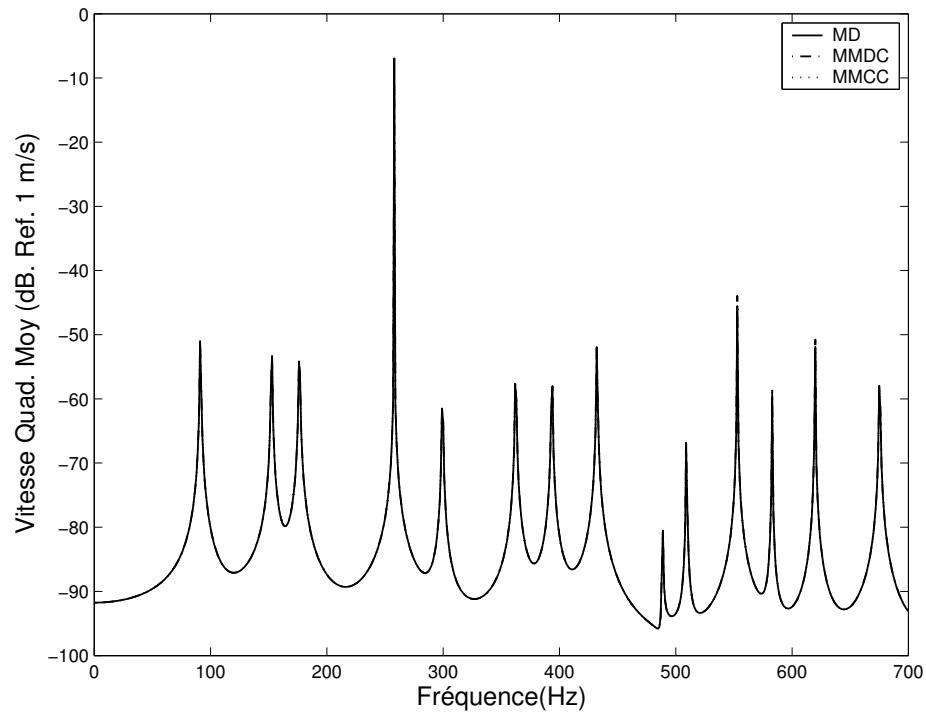


FIG. 3.11 – Vitesse quadratique moyenne de la structure en couplage avec une cavité remplie d'air (avec correction statique).

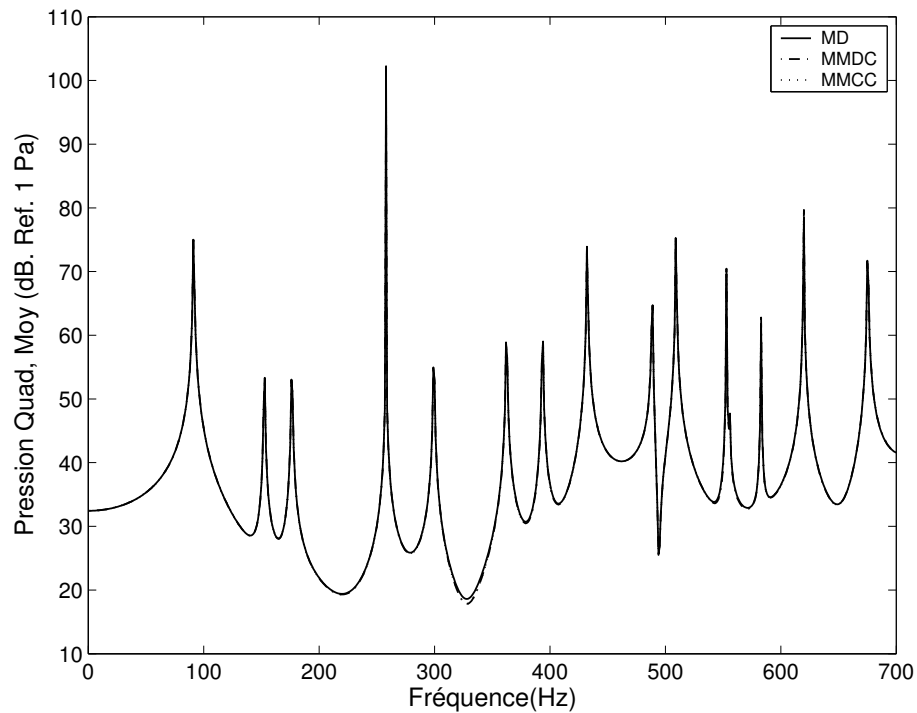


FIG. 3.12 – Pression quadratique moyenne dans la cavité remplie d'air (avec correction statique).

b. Couplage plaque cavité cylindrique

Dans cette seconde application, nous considérons un cylindre rigide dont une extrémité est une plaque en acier alors que la seconde est rigide et de forme sphérique. La plaque, d'épaisseur $t = 0.00122$ m, a les propriétés mécaniques suivantes : $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$. Les dimensions du cylindre sont représentées sur la figure (3.13). La cavité est remplie d'eau ($c = 1500\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$). Son extrémité élastique est excitée uniformément par une force unitaire. La plaque est discrétisée en utilisant 64 DKQ éléments alors que le fluide interne est discrétisé en 1072 éléments. Le nombre total des noeuds est de 1268.

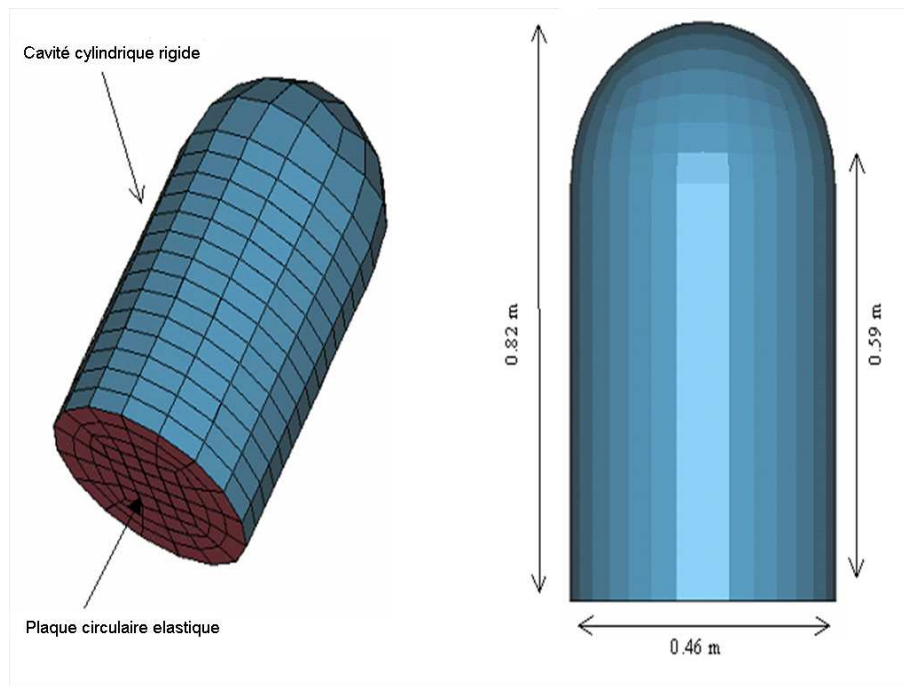


FIG. 3.13 – Plaque couplée à une cavité cylindrique.

Les figures (3.14) et (3.15) montrent, respectivement, la vitesse quadratique moyenne de la plaque et la pression quadratique moyenne de la cavité pour une gamme de fréquence de 0.1-100 Hz. L'analyse modale est considérée pour 50 modes propres de la plaque et 50 modes propres de la cavité acoustique.

Notons que la méthode modale classique MMD ne peut pas prédire correctement la réponse acoustique. Par contre, un bon accord est observé entre la méthode directe MD et la méthode modale couplée corrigée MMCC, ce qui prouve la capacité de cette

dernière méthode dans la prédiction de la réponse du système couplé.

Pour donner une estimation du temps CPU, nous le récapitulons dans le tableau suivant [Tab. (3.3)]. Encore une fois, remarquons l'important gain en temps réalisé par la MMCC en comparaison avec les méthodes MD et MMD.

TAB. 3.3 – Efficacité des méthodes MD, la MMD et la MMC en temps de calcul(s) :

MD	MMD	MMCC
5113.6	59.50	10.96

Finalement, nous signalons que le couplage structure cavité rectangulaire a été modélisé avec 27 points de Gauss pour les éléments fluide 3D alors que nous nous sommes limités à 8 points de Gauss par élément pour le cas du couplage plaque cavité cylindrique uniquement.

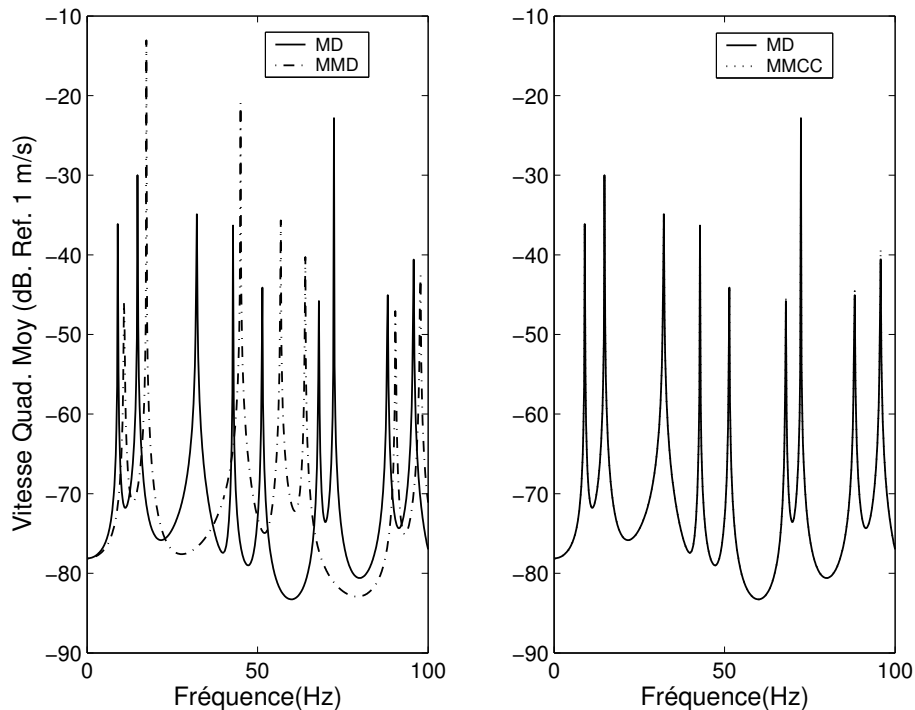


FIG. 3.14 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque circulaire.

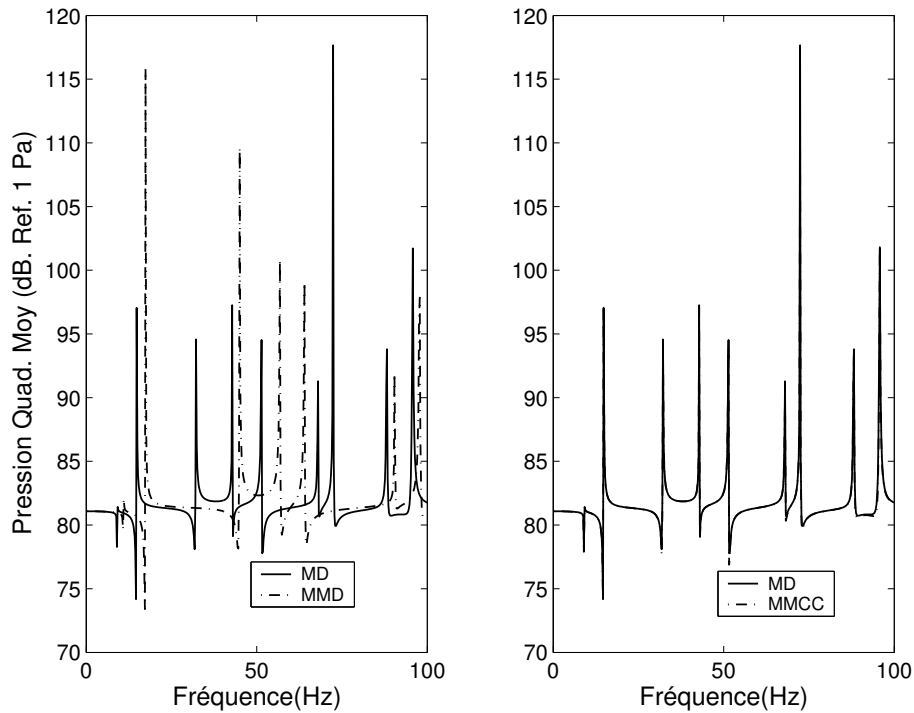


FIG. 3.15 – Pression quadratique moyenne de la cavité cylindrique.

3.5 Couplage par éléments finis et éléments finis de surface

3.5.1 Formulation du problème

L'application du théorème de Green à l'équation (3.26) aboutit à l'équation intégrale d'Helmholtz suivante [131] :

$$c(P)p(P) = - \int_S \left(i\rho_f \omega V_n g + p \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS \quad (3.81)$$

avec

$$c(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in V \\ 1/2 & \text{si } P \in S_{plane} \\ 0 & \text{si } P \notin (V \cup S) \end{cases} \quad (3.82)$$

où $g = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$ est la fonction de Green, r est la distance entre un point de source et un point d'observation. La condition de Neumann donne uniquement la vitesse normale sur la surface. Pour obtenir la pression à la surface, on est amené à placer, successivement, le point P sur chaque point de la surface. Ce procédé est appelé collocation (Voir section 2.3).

Pour résoudre l'équation (3.81), on discrétise la surface en des éléments quadrilatéraux linéaires. En écrivant l'équation (3.81) pour chaque élément S_j , on trouve :

$$c(P) \sum_i p_i N_i = i\omega\rho_f \sum_i V_{ni} g_i - \sum_i p_i h_i^* \quad (3.83)$$

où $h_i^* = \int_{S_j^e} \frac{\partial g}{\partial n} N_i dS$ et $g_i = - \int_{S_j^e} g N_i dS$.

En assemblant les matrices élémentaires dans les matrices C , H^* et G , on trouve :

$$Cp + H^*p = i\omega\rho_f G V_n \Rightarrow Hp = i\omega\rho_f G V_n \quad (3.84)$$

Considérée comme plaque mince, la structure est divisée en des éléments quadrilatéraux DKQ à 4 noeuds régis par la théorie de Kirchhoff pour laquelle la déformation de cisaillement est négligeable tout en considérant la conservation des normales. Dans ce cas, le mouvement de la structure est régi par l'équation suivante [14] :

$$(K - \omega^2 M) \begin{bmatrix} u_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = F \quad (3.85)$$

où K est la matrice de rigidité, M est la matrice de masse et F est le chargement mécanique avec β_1 et $-\beta_2$ désignent, respectivement, les rotations autour de l'axe y et x .

Dans un problème couplé, le modèle en éléments finis de surface est divisé en deux parties, la partie S_{sf} pour laquelle les éléments BE sont connectés aux éléments FE et la partie S_f représentant le reste de la surface du domaine fluide. La considération de la continuité de la vitesse normale le long de l'interface fluide structure permet de réécrire le modèle en éléments finis de surface sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{sf} \\ p_f \end{bmatrix} = i\rho_f\omega \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\omega T w \\ V_{nf} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

où T est la matrice globale de couplage de la vitesse résultant de l'assemblage de la matrice élémentaire $T_e = n^T$.

La pression acoustique p_{sf} agit sur la structure le long de l'interface fluide structure comme étant une force supplémentaire. Ceci s'obtient en considérant la continuité de la contrainte [Eq. (3.31)] à travers l'interface dans l'équation (3.35) :

$$(K - \omega^2 M)w - Bp_{sf} = F \quad (3.87)$$

où $B_{ij} = \int N_i^f n N_j^s dS_{sf}$ avec N^s, N^f sont, respectivement, les fonctions de forme de la structure et du fluide et \mathbf{n} est la normale.

La combinaison du modèle de la structure en éléments finis avec celui du fluide en éléments finis de surface donne le système couplé BE-FE suivant :

$$\begin{bmatrix} (K - \omega^2 M) & -B & 0 \\ \rho_f \omega^2 G_{11} T & H_{11} & H_{12} \\ \rho_f \omega^2 G_{21} T & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ p_{sf} \\ p_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ i \rho_f \omega G_{12} V_{nf} \\ i \rho_f \omega G_{22} V_{nf} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

3.5.2 Applications numériques

Nous modélisons le couplage en utilisant la MEF pour la structure et la BEM directe pour la partie acoustique du problème. La présente méthode est vérifiée pour deux problèmes de couplage : cavité-structure et une plaque encastree dans un baffle rigide en interaction avec un milieu fluide semi-infini.

3.5.2.1 Couplage plaque-cavité

Dans cet exemple, une plaque $0.2 \times 0.2 \times 0.00094 \text{ m}^3$ en laiton ($\rho_s = 8500 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 103 \text{ GPa}$, $\nu = 0.34$) simplement supportée est couplée à une cavité rigide $0.2 \times 0.2 \times 0.2 \text{ m}^3$ remplie d'air ($\rho_f = 1,21 \text{ kg m}^{-3}$, $c = 340 \text{ m/s}$) [Fig.(3.16)]. La plaque est soumise à une pression de 1 psi uniformément répartie sur la surface $z = 0$.

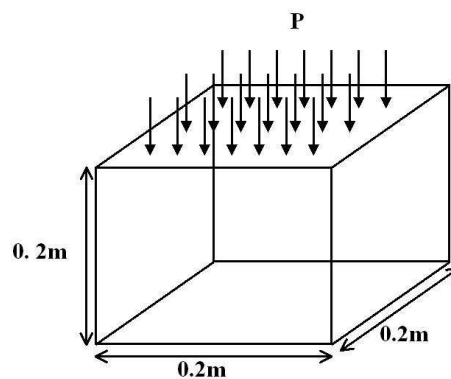


FIG. 3.16 – Plaque couplée à une cavité rectangulaire

La figure (3.17) représente la pression acoustique au centre de la cavité. Remarquons que la solution obtenue par la BEM-MEF coïncide avec la solution analytique [52] et celle obtenue par la méthode de couplage MEF-MEF [5]. Le décalage de la troisième résonance peut être expliqué par le fait que le maillage adopté (384 éléments) n'est pas assez fin [Fig.(3.17)]. En effet, l'utilisation d'un maillage plus fin donne lieu à des résultats meilleurs [Fig. (3.18)].

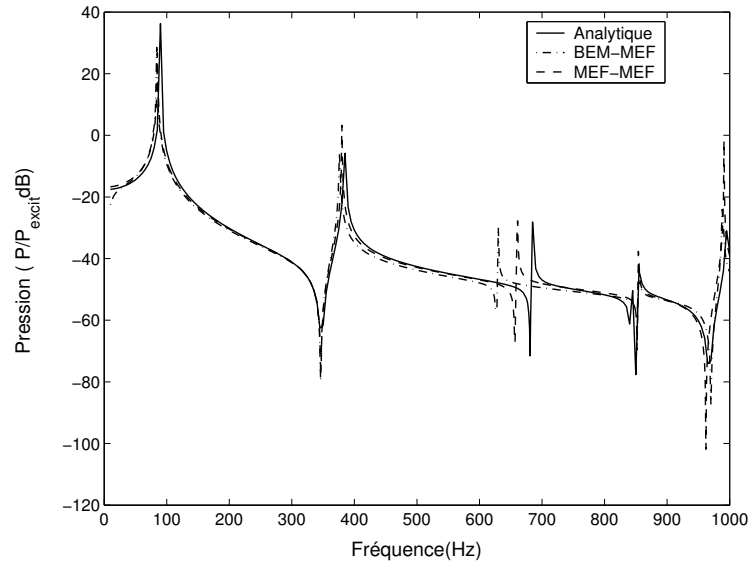


FIG. 3.17 – Pression au centre de la cavité.

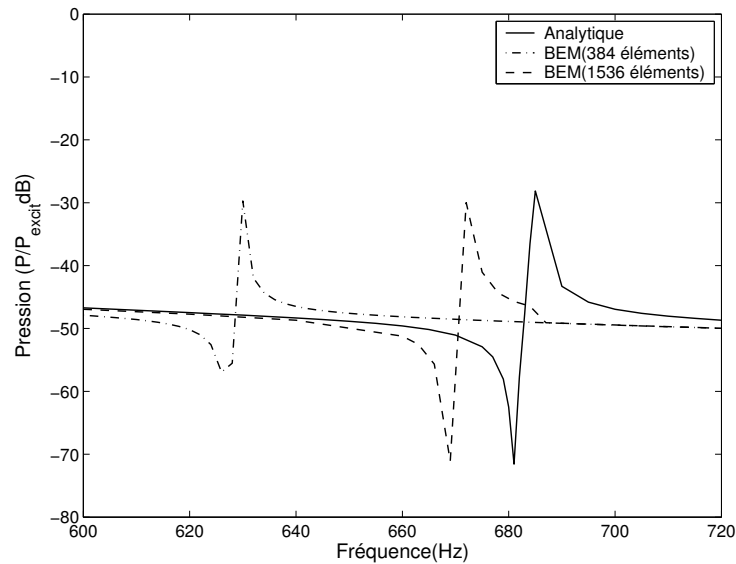


FIG. 3.18 – Pression au centre de la cavité au alentour de 650 Hz

3.5.2.2 Plaque encastrée dans un baffle rigide

Considérons une plaque $0.3048 \times 0.1524 \times 0.00163 \text{ m}^3$ en aluminium ($\rho_s = 2690 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) encastrée dans un baffle rigide, entourée par l'air et soumise à une pression uniforme de 1 Pa [Fig. (3.19)]. Comme le baffle rigide ne contribue pas au rayonnement acoustique, nous discrétisons uniquement la plaque flexible. Sur la figure (3.20), nous avons représenté l'efficacité du rayonnement :

$$\sigma = \frac{\int \text{Re}(pV^*)dS}{\rho c \int V^2 dS} \quad (3.89)$$

que nous avons comparée avec le résultat donné par le code ADNR développé par Mecanum. Inc (www.mecanum.com). Remarquons le bon accord entre le résultat numérique et semi-analytique [Fig.(3.20)].

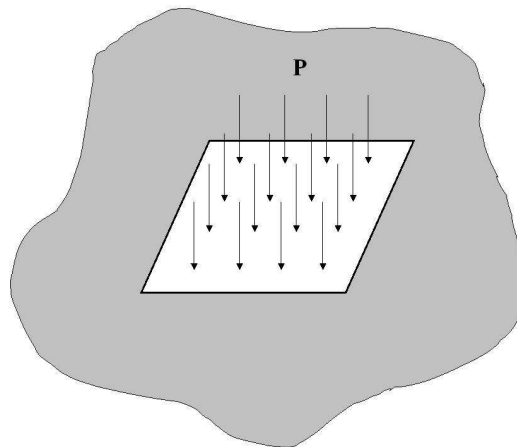


FIG. 3.19 – Plaque encastrée dans un baffle rigide

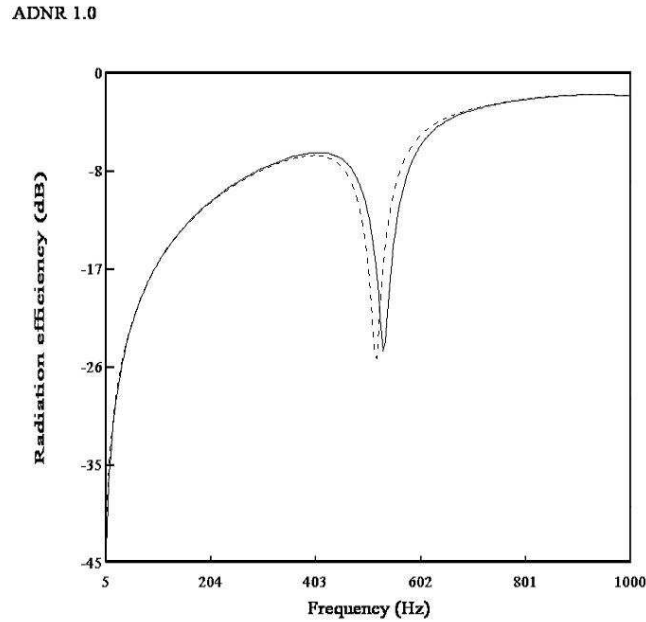


FIG. 3.20 – Efficacité du rayonnement de la plaque ((continu) ADNR, (pointillé) BEM-FEM)

3.5.3 Interpolation des matrices

Les matrices de la BEM sont pleines et non symétriques. De plus, elles dépendent implicitement de la fréquence via la fonction de Green. De ce fait, le recours à la BEM nécessite la construction de ces matrices à chaque fréquence. Ce qui la rend extrêmement coûteuse de point de vue temps de calcul, en particulier, pour une analyse multi-fréquentielle. Pour réduire le temps de calcul, l'interpolation quadratique fréquentielle peut être appliquée pour les matrices d'influence [101].

3.5.3.1 Interpolation quadratique

La partie exponentielle de la fonction de Green engendre, dans les intégrales, un terme très fluctuant dépendant de la fréquence. Pour un nombre d'onde k_0 , le terme exponentiel est donné par :

$$s(k_0) = e^{-ik_0 r} \quad (3.90)$$

Pour un nombre d'onde perturbé $k = k_0 + \Delta k$, le terme exponentiel correspondant est donné par :

$$s(k_0 + \Delta k) = e^{-i(k_0 + \Delta k)r} = s(k_0)s(\Delta k) \quad (3.91)$$

Comme la fonction exponentielle $s(\Delta k)$ peut être approchée par un polynôme quadratique dans une certaine gamme de fréquence, on peut supposer que les coefficients des matrices H et G peuvent être aussi approchés par la même interpolation dans la même bande de fréquence [101]. Ainsi, H et G peuvent être interpolés comme suit :

$$S_{ij}(f_k + \theta\Delta f) \approx S_{ij}^k + \theta\Delta S_{ij}^k + (1/2)\theta(\theta - 1)\Delta^2 S_{ij}^k \quad (3.92)$$

où $\Delta S_{ij}^k = S_{ij}^{k+1} - S_{ij}^k$, $\Delta^2 S_{ij}^k = S_{ij}^{k+2} - 2S_{ij}^{k+1} + S_{ij}^k$ avec S_{ij}^k , S_{ij}^{k+1} et S_{ij}^{k+2} sont, respectivement, les coefficients des matrices H et G à la première, à la deuxième et à la troisième fréquence de l'interpolation quadratique, $0 \leq \theta \leq 2$ et $\Delta f = f_{k+1} - f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$.

3.5.3.2 Résultats numériques

Dans cette seconde étape, le problème de couplage cavité-plaque (modélisé avec 384 éléments) est résolu en utilisant une interpolation quadratique des coefficients des matrices avec un pas de $\Delta f = 100$ Hz. Dans ce qui suit, la solution est calculée avec un intervalle de fréquence de 2 Hz. La pression calculée au centre de la cavité est montrée sur la figure (3.21). L'interpolation quadratique est en bon accord avec la BEM directe standard. Par contre, l'interpolation linéaire s'avère moins précise.

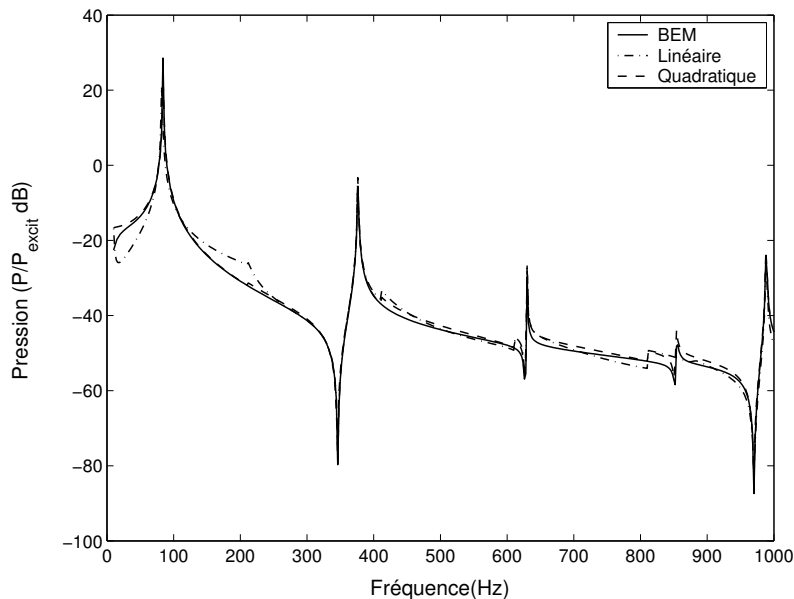


FIG. 3.21 – Pression au centre de la boîte : Comparaison entre la BEM standard et la BEM avec l'interpolation linéaire et quadratique ($\Delta f = 100Hz$)

Dans le tableau (3.4), nous récapitulons le temps de calcul pour différents cas alors que la figure (3.22) représente la pression correspondante au centre de la cavité.

Nous observons sur le tableau (3.4) que 98% du temps de calcul total est consommé sur les procédures d'intégration dans le cas d'un problème uni ou multi-fréquentiel. D'une autre part, la technique d'interpolation permet de le réduire à 68% pour $\Delta f = 50Hz$, à 53% pour $\Delta f = 100Hz$ et à 38.5% pour $\Delta f = 200Hz$ [Fig. (3.22)].

TAB. 3.4 – Efficacité de l'interpolation quadratique des matrices d'influence BEM
Influence du pas d'interpolation sur le temps d'intégration et le temps total

	Standard		Interpolation $\Delta f(Hz)$		
	Une freq	multi freq	50	100	200
Intégration	119.2	47.610^3	2.10^3	10^3	590.6
Sol. Sys	2.1	844.	922.6	923.1	940.7
Temps total	121.3	48.510^3	2.910^3	1.910^3	1.510^3

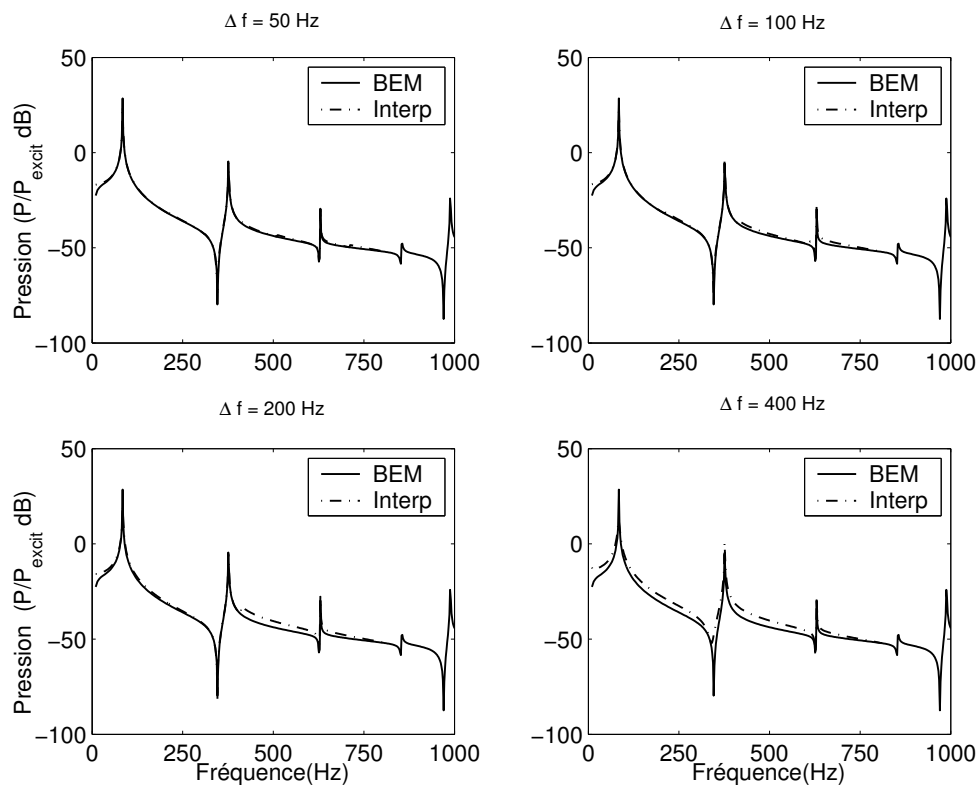


FIG. 3.22 – Pression au centre de la boîte pour différents pas fréquentiels de l'interpolation quadratique

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré que la méthode modale à base découplée n'est pas nécessairement adéquate pour la simulation de tout problème de couplage viroacoustique. Au contraire, son utilisation s'avère parfois dangereuse et doit se faire avec beaucoup de précaution en raison de la troncature de quelques modes susceptibles d'être nécessaires au couplage. D'une autre part, le système aux valeurs propres découlant de cette méthode est non symétrique ce qui interdit le recours aux algorithmes efficaces et performants du calcul des valeurs et des vecteurs propres des systèmes symétriques. De plus, cette méthode ne fournit aucune information sur les modes et les fréquences propres du système couplé.

Une nouvelle méthode basée, à la fois, sur la correction pseudo-statique et sur une symétrisation du système aux valeurs propres a été présentée. Nous avons montré que cette méthode améliore non seulement la convergence des résultats mais aussi elle conduit à des gains en temps très importants par rapport à la méthode modale classique.

La BEM, par contre, reste toujours la plus lente en raison du caractère plein et complexe des matrices, de leurs dépendance implicite de la fréquence et l'implication de l'influence de toute la frontière au point de calcul. Pour remédier à ce problème nous avons fait appel à une interpolation quadratique des matrices ce qui nous a permis une réduction considérable du temps de calcul. Cependant, il faut bien s'attendre à ce que cette réduction ne soit pas aussi importante dans le cas des problèmes plus larges. Ceci est dû au fait que le temps de calcul, dans ce type de problèmes, est consommé durant la phase de résolution du système et non pas lors de l'intégration [101]. Des algorithmes de résolution itératives devront remédier à ce problème.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à des couplages faibles. Pour cela, la BEM est couplée à un code de structure en éléments finis explicite afin de traiter des problèmes complexes.

Chapitre 4

Simulation Numérique de Couplages Vibroacoustiques faibles

Ce présent chapitre est consacré à la modélisation du couplage élastoacoustique faible. Pour cela, la réponse temporelle d'un système mécanique est calculée, dans un premier temps, en utilisant la méthode des éléments finis explicite. En appliquant la transformée de Fourier, cette réponse est transformée dans le domaine fréquentiel permettant ainsi le recours à la méthode des éléments finis de surface (BEM) pour le calcul du champ de pression rayonné dans l'espace. Afin de la rendre efficace, la BEM a été optimisée au niveau de l'assemblage et de la résolution numérique. De ce fait, la BEM optimisée est validée, dans une première étape, pour un problème acoustique avant de l'utiliser pour une application en vibroacoustique.

4.1 Introduction

La simulation de l'interaction fluide-structure peut être effectuée soit en utilisant une approche couplée ou découplée. Dans les systèmes fortement couplés, la structure et le fluide doivent être modélisés simultanément. Les formulations les plus utilisées sont celles faisant recours à la méthode des éléments finis pour le fluide et la structure [90]. Toutefois, la résolution directe du système couplé est coûteuse en terme de temps de calcul. Pour remédier à ce problème, l'analyse modale constitue une alternative très intéressante. En effet, les premiers modes propres de la structure in vacuum et ceux de la cavité rigide sont les seuls à être considérés dans l'analyse ce qui réduit significativement la taille du problème discrétisé. Malheureusement, ceci conduit à un problème aux

valeurs propres non symétrique. Pour cette raison, Sandberg [104] a proposé quelques transformations rendant le problème aux valeurs propres symétrique. Cependant, cette méthode peut entraîner des erreurs sévères si la troncature des modes structuraux et acoustiques n'est pas convenable. Tournour [120], à son tour, a établi une correction pseudo-statique dans le but d'améliorer la convergence en tenant en considération les modes omis sans augmenter la dimension du système d'équations linéaires à corriger.

Pour plusieurs problèmes, il n'est pas souvent nécessaire de considérer un couplage fort. Par exemple, dans le cas d'un compartiment de véhicule, plusieurs auteurs ont traité le couplage vibroacoustique en le supposant faible [79]. Dans cette approche, la réponse mécanique de la structure dans le vide est calculée dans un premier temps. Les résultats obtenus sont considérés comme conditions aux limites pour la partie acoustique du problème. Ainsi, les vibrations de la structure excitent le fluide alors que la structure n'est jamais influencée par les ondes acoustiques se propageant à travers le fluide.

En effet, dans leur analyse d'interaction élastoacoustique dite séquentielle, Kim et al. [63] [64] ont proposé une procédure d'optimisation de compartiments de véhicules réels en supposant que la pression acoustique n'affecte pas les vibrations de la structure. Ils ont simulé le fluide par la BEM et la structure par la MEF. Cette optimisation leur a permis de minimiser l'épaisseur et donc le poids du véhicule ainsi que sa pression interne. Cette approche a été, également, utilisée pour évaluer la pression acoustique dans des problèmes d'impact de corps rigides avec des plaques [123]. En supposant un couplage faible, Lambourg et al. [73] et Schedin [106] ont simulé la plaque par la MDF et le fluide par la méthode de Rayleigh.

Il est évident que l'approche découplée est plus simple à implémenter que la méthode couplée, puisque deux petits modèles sont à simuler l'un après l'autre [79]. Toutefois, cette méthode reste limitée uniquement pour des structures lourdes en interaction avec des fluides légers. Par exemple, en acoustique sous marine, le comportement vibratoire des structures submergées est influencé par le fluide qui entoure ces structures en raison de l'importante valeur de l'impédance acoustique [41]. Dans ce cas, le couplage fort doit être pris en compte.

Dans ce chapitre, la BEM et la MEF sont utilisées pour simuler, en basses fréquences, le bruit généré dans des problèmes acoustiques et vibroacoustiques [Fig. (4.1)]. Dans un premier temps, la réponse temporelle du système mécanique est calculée en utilisant un code d'éléments finis explicite. Les vitesses ainsi calculées sont stockées à chaque pas de temps dans un fichier binaire. La FFT permet de transformer la vitesse de la structure du domaine temporel au domaine fréquentiel. Ces vitesses seront utilisées, par la suite, pour le calcul de la pression acoustique en tout point de l'espace en utilisant la BEM. Ce couplage vibroacoustique faible est présenté en supposant que la pression acoustique n'affecte pas la vibration de la structure.

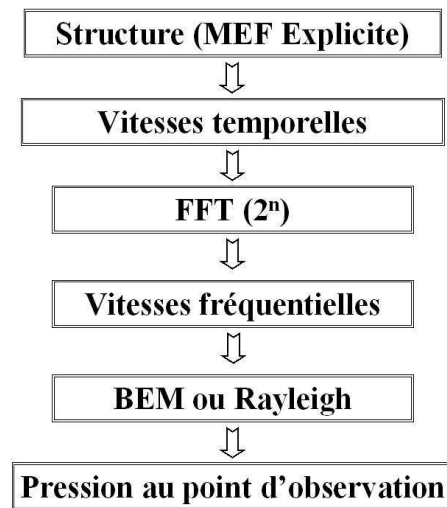


FIG. 4.1 – Procédure de résolution d'un couplage vibroacoustique faible

4.2 Analyse temporelle de la structure

Soit Ω_s un domaine occupé par une structure et \mathbf{n} sa normale externe sur la surface $S_s \cup S_{s0}$ de Ω_s . Dans le cas d'une structure linéaire, élastique et isotrope sans déformation ni contrainte initiale en absence de toute force volumique, le déplacement u satisfait l'équation élastodynamique suivante :

$$\sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (4.1)$$

où u_i est le déplacement dans la i^{ieme} direction et ρ est la densité du matériau. Dans ce qui suit, $\sigma_{ij}(u)$ représente la contrainte qui dépend du déplacement. Pour un déplacement

donné sur S_{s0} , nous avons la condition aux limites suivante :

$$u = u_s \quad \text{sur } S_{s0} \quad (4.2)$$

Pour une force imposée sur S_s , on peut écrire la condition aux limites suivante :

$$\sigma_{ij}(u) = f_i \quad \text{sur } S_s \quad (4.3)$$

Finalement, les conditions initiales peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = 0 \\ \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (4.4)$$

Dans la plupart des applications, les modèles en éléments finis sont principalement utilisés dans la simulation des structures. La description détaillée de l'algorithme des éléments finis utilisé n'est pas le but de ce chapitre. Généralement, deux méthodes peuvent être utilisées pour l'analyse de la dynamique des structures.

La première méthode concerne un schéma d'intégration implicite en temps. Dans cette méthode, la discrétisation de la forme variationnelle de la réponse mécanique d'un système en utilisant la MEF se réduit au système d'équations linéaires suivant :

$$[K]u + [M]\frac{d^2u}{dt^2} = \{F\} \quad (4.5)$$

où t désigne le temps, $[M]$ et $[K]$ représentent, respectivement, les matrices de masse et de rigidité de la structure et F est le vecteur de chargement mécanique. Pour calculer le vecteur déplacement nodale de la structure vibrante, nous sommes amenés à résoudre un système linéaire. Notons dans ce cas que le schéma est inconditionnellement stable.

La seconde approche est basée sur un schéma explicite donné par l'équation suivante :

$$[M]\ddot{u}_n = \{F_n^{ext}\} - \{F_n^{int}\} \quad (4.6)$$

Contrairement à la méthode implicite, dans la méthode explicite, la condition CFL limite le pas de temps à des valeurs petites comparées à celles qu'on pourrait utiliser dans la méthode implicite. De plus, cette méthode ne mène pas à un système d'équations linéaires. Comme M est une matrice de masse diagonale (lumped mass matrix), on

utilise dans cette partie un schéma explicite pour résoudre la partie structurale du problème vibroacoustique.

En dérivant le vecteur déplacement par rapport au temps, on calcule ce vecteur vitesse :

$$\vec{v}(x, t) = \frac{\partial \vec{u}(x, t)}{\partial t} \quad (4.7)$$

La composante nodale du vecteur vitesse est extraite pour tous les nœuds situés sur l'interface fluide structure :

$$v_n(x, t) = \vec{v}(x, t) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \vec{u}(x, t)}{\partial t} \cdot \vec{n} \quad (4.8)$$

4.3 La vitesse dans le domaine fréquentiel

Les vitesses nodales calculées à partir de l'analyse structurale sont exprimées dans le domaine temporel. Pour chaque élément de la structure, nous calculons la vitesse normale en moyennant les vitesses normales nodales [Fig. (4.2)].

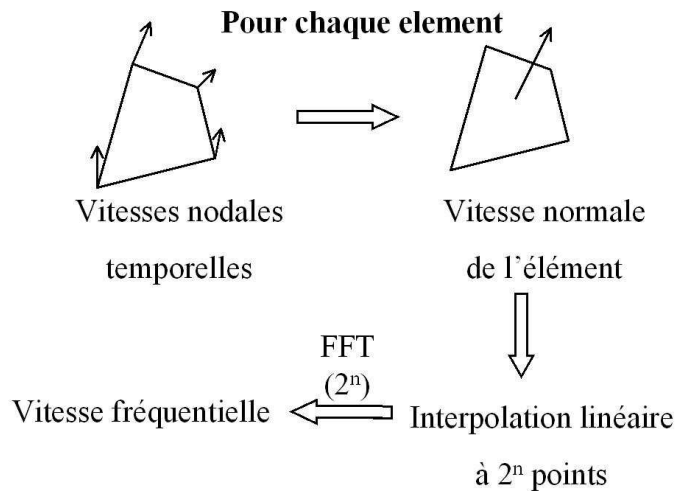


FIG. 4.2 – Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel

Toutefois, afin d'utiliser les vitesses normales des éléments comme conditions aux limites pour la BEM, nous sommes amenés à les transformer dans le domaine fréquentiel en utilisant la transformée de Fourier.

$$V(x, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) e^{2\pi i f t} dt \quad (4.9)$$

Cependant, la vitesse $v(x, t)$ est finie et échantillonnée avec un pas de temps variable. Dans ce qui suit, il est nécessaire d'avoir un échantillonnage uniforme. Pour cela, nous procédons par une interpolation linéaire de $v(x, t)$ avec un pas de temps uniforme Δt . Par conséquent, on peut approximer l'intégrale dans l'équation (4.9) par une transformée de Fourier Discrète (DFT) [99], soit :

$$V(f_n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{2\pi i k n / N} = \Delta t H_n \quad (4.10)$$

où N est le nombre d'échantillons.

D'une autre part, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$v_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (4.11)$$

La puissance totale dans une fonction est conservée qu'on la calcule dans le domaine fréquentiel ou temporel. Ceci est connu par théorème de Parseval [98] :

$$\sum_{k=0}^{N-1} |v_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 \quad (4.12)$$

La FFT (Fast Fourier Transform) est un algorithme permettant la réduction du nombre des opérations pour le calcul de la DFT. L'algorithme le plus connu est celui qui se base sur 2^n valeurs. Dans ce chapitre, nous utilisons cette algorithme pour le calcul de la FFT des vitesses [98]. Par conséquent, l'interpolation de la vitesse est effectuée pour 2^n échantillons uniformément espacés en temps [Fig. (4.2)].

Dans la plupart des cas, il est très difficile d'obtenir un signal formé exactement d'un nombre entier de cycles. L'utilisation d'une fenêtre rectangulaire peut donner lieu à d'importantes discontinuités puisque le signal ne commence pas et ne finit pas avec la même valeur (signal non périodique) [12]. Dans ce cas, la FFT et la DFT produisent des spectres avec leakage (des composantes parasites qui se rajoutent au spectre) [99]. Le fenêtrage force le signal à commencer et à se terminer à la même valeur. Ceci peut être obtenu en multipliant le signal échantillonné par une fonction fenêtre appropriée. Ce qui élimine les discontinuités aux bords de la fenêtre et par conséquent aide à réduire le leakage. Cependant, quand la fenêtre est utilisée, elle réduit non seulement le leakage mais elle provoque, aussi, une diminution du contenu énergétique du signal suite au passage au domaine fréquentiel [12]. Néanmoins, il est possible de corriger la DFT et

la FFT pour compenser cette perte énergétique. Cette correction peut être achevée en utilisant le théorème de Parseval qui permet d'évaluer un ratio correctif dû au fenêtrage [99].

4.4 Optimisation de la VIBEM

4.4.1 Assemblage de la matrice

Afin d'optimiser le temps de calcul, on peut considérer pour la première fréquence, une simple première boucle sur tous les éléments au cours de laquelle on calcule les matrices élémentaires singulières. En même temps on accumule, dans des tableaux, les positions des points d'intégration, les valeurs des fonctions de formes, leurs dérivées en ces points ainsi que les déterminants des jacobiens. On fait, par la suite, une double boucle sur les éléments afin de calculer les matrices élémentaires non singulières. Dans cette boucle, on utilise, pour chaque couple d'éléments, les données accumulées dans la première boucle. Ainsi, pour chaque nouvelle fréquence, on utilise les valeurs stockées sans à avoir à les recalculer ; ce qui accélère considérablement la phase d'intégration. Toutefois, ceci se fait au détriment de la mémoire. En effet, plus on augmente le nombre de noeuds du maillage et/ou le nombre de points de Gauss, plus on augmente la mémoire nécessaire au stockage des données accumulées. Cette manière de procéder n'est efficace que pour les problèmes dont la taille est petite. Dans le cas contraire, elle s'avère très limitée.

Pour cette raison nous n'avons accumulé, dans des tableaux, que les fonctions de forme et leurs dérivées pour 1, 4 et 16 points de Gauss. Par contre, nous avons essayé de tirer profit de la symétrie de la matrice BEM. En effet, au lieu de calculer toutes les composantes de la matrice A , nous nous sommes contentés uniquement du calcul et de l'assemblage de la moitié de ces éléments. Ceci permet de réduire presque la moitié du temps de calcul, ce qui constitue un gain considérable.

Même avec cette accélération du calcul en raison de la prise en compte de la symétrie de la matrice, nous sommes toujours confrontés au problème de la mémoire. Ce qu'il faut savoir c'est que la matrice A de taille $N \times N$ est complexe nécessitant ainsi le stockage de $2N^2$ valeurs. Cette valeur devient de plus en plus considérable

quand on traite des problèmes de taille encore plus importante. Pour remédier à cette difficulté, nous avons assemblé et stocké uniquement la matrice triangulaire supérieure de $\frac{N(N+1)}{2}$ composantes dans un vecteur. Ce stockage se fait diagonalement tel que c'est schématisé sur la figure (4.3).

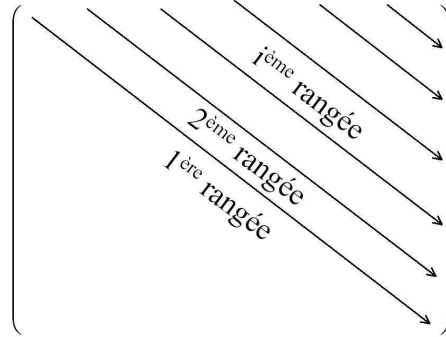


FIG. 4.3 – Stockage de la matrice BEM dans un vecteur

De plus, nous avons constaté que GMRES, qui se base sur le calcul du produit matrice vecteur, est très rapide comparée à la méthode directe (Voir section suivante). En effet, ce stockage ne pose aucun problème quand on effectue le produit matrice vecteur même si cette matrice est stockée dans un vecteur.

4.4.2 Résolution du système linéaire

La BEM variationnelle indirecte (VIBEM) donne lieu à un système d'équations linéaires dans lequel la matrice A est pleine, complexe et symétrique. Il peut être résolu avec des méthodes directes ou itératives. Les méthodes directes sont les plus utilisées mais elles deviennent inefficaces quand elles sont appliquées à des problèmes de grande taille. Dans les dernières années, les méthodes itératives en BEM ont été testées par plusieurs chercheurs [82] [109]. Ces méthodes se réfèrent à plusieurs techniques utilisant des approximations successives pour obtenir des solutions aux systèmes encore plus précises à chaque étape.

GMRES (Generalised Minimal Residual Method) est une méthode itérative robuste pour la résolution des systèmes non symétriques. Pour résoudre un système linéaire $Ax = b$, cette méthode démarre d'un vecteur initial x_0 et à la k^{ieme} étape, elle détermine une solution x_k à l'itération k avec une correction. Cette méthode reste

fortement attractive car elle ne nécessite que des multiplications de matrices par vecteurs. En GMRES, chaque x_k est choisi de telle sorte à ce qu'il minimise la norme du résidu $(b - Ax_k)$ pour toutes les corrections.

Le plus grand inconvénient de cette méthode est la quantité du travail et du stockage par itération. Sa convergence et le nombre des itérations est lié au nombre de composantes de la matrice ce qui n'est pas pratique quand ce dernier devient de plus en plus important. Un moyen, souvent utilisé pour contourner le problème de mémoire, est le redémarrage des itérations. Après un nombre choisi m d'itérations, les résultats accumulés sont effacés et les solutions intermédiaires sont utilisées comme valeur initiales pour les m itérations ultérieures [13]. Toutefois, la réduction du stockage (m très petit) peut rendre la convergence de la méthode très lente. Ainsi, un compromis est à rechercher pour atteindre une meilleure convergence en exploitant uniquement la capacité disponible de stockage.

Dans une analyse multifréquentielle, les méthodes itératives telles que GMRES, présentent un avantage supplémentaire par rapport aux méthodes directes. En effet, pour chaque nouvelle fréquence, la solution à la fréquence antérieure est imposée comme vecteur initial. Comme la variation de la solution en fonction de la fréquence est continue, la solution à une fréquence antérieure présente une très bonne approximation du vecteur initial. Ainsi, le nombre des itérations nécessaires pour la convergence devient faible.

4.5 Résultats numériques

4.5.1 Propagation d'une onde dans une cavité

Avant de considérer des problèmes de couplage vibroacoustique, nous validons la VIBEM proposée dans le chapitre précédent et intégrée dans le code d'éléments finis explicite afin de s'assurer de sa bonne implémentation dans le code. Dans cette première application, on s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique dans une cavité $1.1 \times 0.2 \times 0.2 \text{ m}^3$ excitée en $x = 0$ par une vitesse normale unitaire à une fréquence de 100 Hz. Les autres facettes de la cavité ont une vitesse particulière nulle. La cavité est remplie d'air ($\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$, $c = 343 \text{ m/s}$). Deux maillages sont considérés pour

la BEM et la MEF. Le premier est de $4 \times 4 \times 8$ éléments finis ou éléments finis de frontière alors que le maillage fin est formé de $8 \times 8 \times 16$ éléments finis ou éléments finis de frontière. Notons que $l \times m \times n$ représente l , m et n éléments finis ou éléments finis de frontière dans la direction x , y et z , respectivement.

Les figures (4.4) et (4.5) représentent, respectivement, la pression acoustique en un point situé sur l'axe de la cavité (0.1375,0.,0.)m en utilisant la présente VIBEM et la MEF de Nastran pour les deux maillages grossier et fin. Les résultats sont comparés à la solution analytique. La figure (4.4) montre un bon accord entre la solution analytique et les résultats de la BEM et la MEF pour des fréquences inférieures à 250 Hz. Quand la fréquence devient plus élevée, la MEF devient moins précise que la BEM quant à la prédiction de l'amplitude de la réponse ou les fréquences de résonance. Cependant, lorsque un maillage plus fin est utilisé, les deux méthodes donnent des résultats meilleurs, convergeant vers la solution analytique [Fig.(4.5)]. Toujours est-t-il, la BEM reste la plus précise.

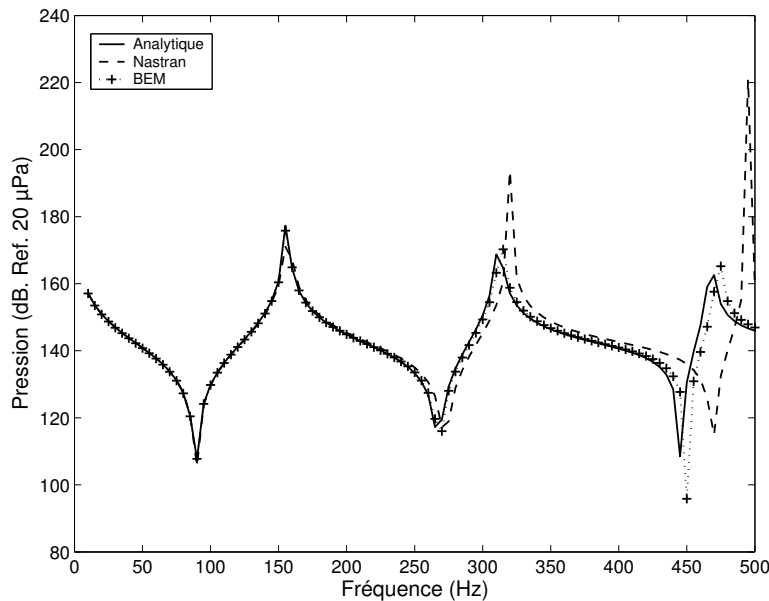


FIG. 4.4 – Variation de la pression au point (0.1375,0.,0.)m situé à l'intérieur de la cavité (Maillage grossier)

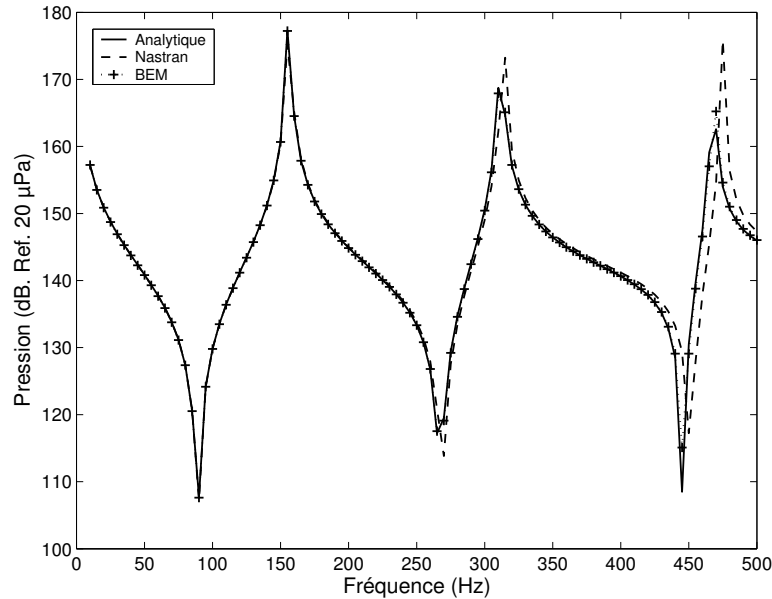


FIG. 4.5 – Variation de la pression au point $(0.1375, 0., 0.)m$ situé à l'intérieur de la cavité (Maillage fin)

Dans l'exemple précédent, la vitesse $V = 1m/s$ a été considérée dans le domaine fréquentiel. Toutefois, dans le but de vérifier que la FFT a été bien implémentée dans le code, nous imposons une vitesse sinusoïdale $V = \sin(\omega t)$ et nous la convertissons du domaine temporel au domaine fréquentiel. Deux cas sont considérés. Dans le premier, la vitesse est périodique contenant un multiple entier de périodes (11 périodes) alors que dans le second, elle est non périodique et constituée de 10.75 périodes [Fig.(4.6)]. Nous proposons d'utiliser la fenêtre de Hanning pour corriger l'effet du fenêtrage [Fig.(4.7)]. Cette dernière a été corrigée en la multipliant par un facteur de 2 afin de récupérer la perte énergétique. Sur la figure (4.6), nous avons représenté les deux signaux périodique et non périodique avant et après l'application de la fenêtre de Hanning.

Sur la figure (4.8.a), nous avons représenté la pression acoustique le long de l'axe de la cavité calculée par la BEM en imposant une vitesse de $V = 1 m/s$ dans le domaine fréquentiel. Notons le bon accord avec la solution analytique. En utilisant la FFT [(4.8. b)], nous remarquons que le signal périodique donne de bons résultats pour les deux signaux quelque soit la fenêtre utilisée. Par contre, dans le cas d'un signal de vitesse aperiodique, nous observons que la fenêtre de Hanning est nettement plus meilleure que la fenêtre rectangulaire qui est à l'origine du leakage. D'où la nécessité du fenêtrage lors

de l'utilisation de la FFT.

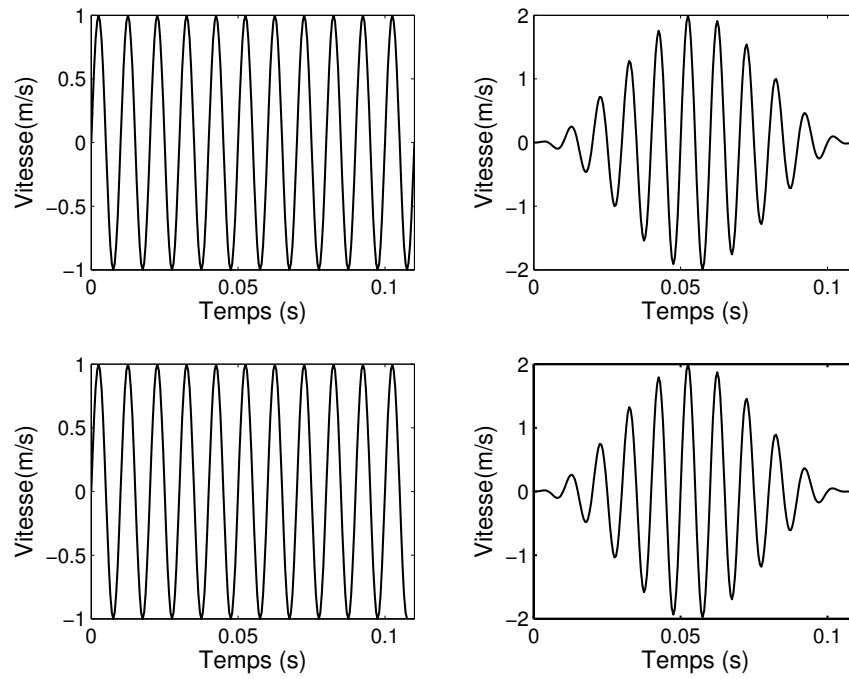


FIG. 4.6 – Vitesses d'excitation périodique et non périodique.

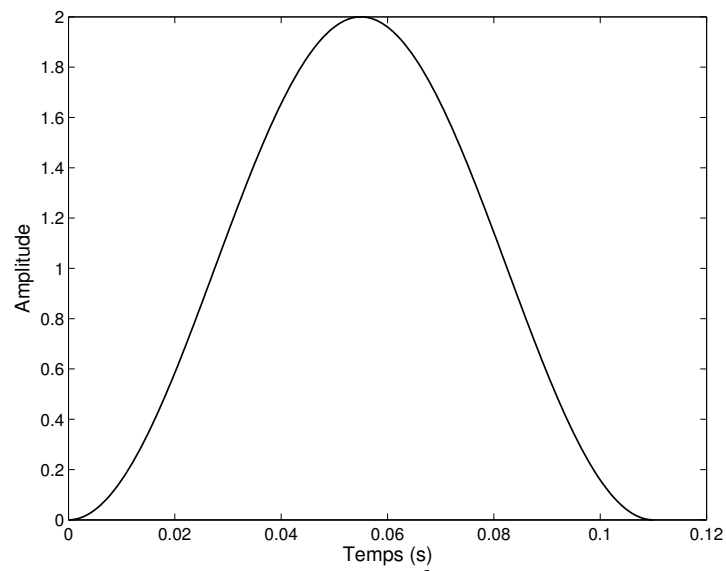


FIG. 4.7 – Fenêtre de Hanning

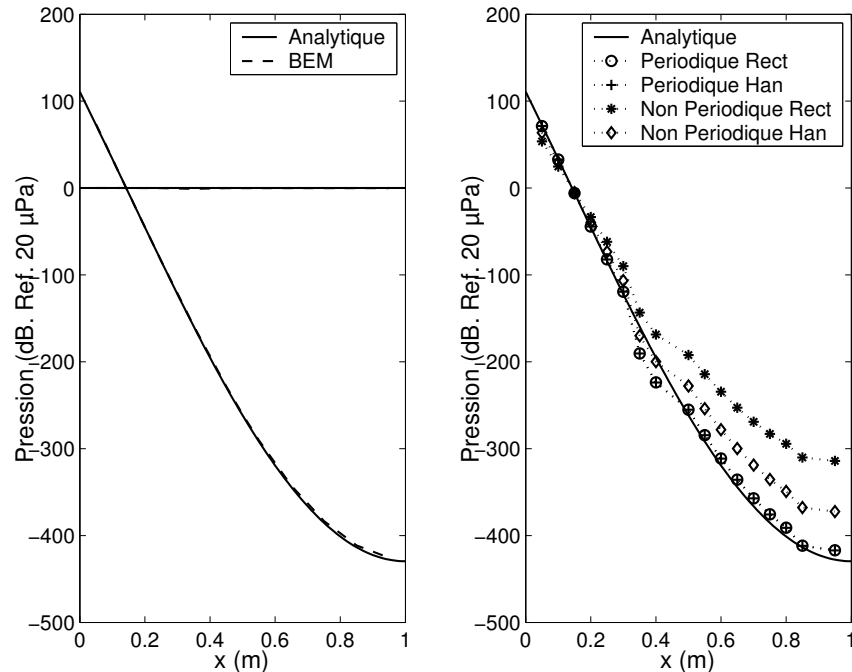


FIG. 4.8 – Variation de la pression sur l’axe de la cavité (a) Vitesse fréquentielle, (b) Vitesse temporelle

4.5.2 Application à l’industrie automobile

La géométrie des systèmes réels en vibration sont souvent très complexes. Une manière efficace pour réduire le temps et la mémoire est de les approximer par des géométries plus simples sans perdre les caractéristiques marquantes de l’aspect vibratoire et acoustique du problème. La figure (4.9) représente un modèle simplifié d’un compartiment de véhicule de $1.4 \times 0.5 \times 0.6 \text{ m}^3$ rempli d’air ($\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$, $c = 340 \text{ m/s}$). Seule la partie inférieure du véhicule vibre comme un piston rigide avec une vitesse harmonique de 7 mm/s dans la direction z alors que toutes les autres parties de la cavité sont supposées être rigides de vitesse particulière nulle. Nous nous sommes intéressés au calcul de la pression en deux points situés en $P_1(947.941, 300., 437.5)\text{mm}$, $P_2(482.923, 300., 312.5)\text{mm}$ à l’intérieur de la cavité en utilisant la MEF et la BEM. Le modèle BEM est constitué de 1264 éléments de frontière alors que celui de la MEF contient 2688 éléments.

Les simulations numériques sont considérées dans la gamme de fréquence de 10-500 Hz avec un pas de 1Hz. La variation de l’amplitude de la pression acoustique (en dB) en fonction de la fréquence aux points d’observation P_1 et P_2 est représentée sur

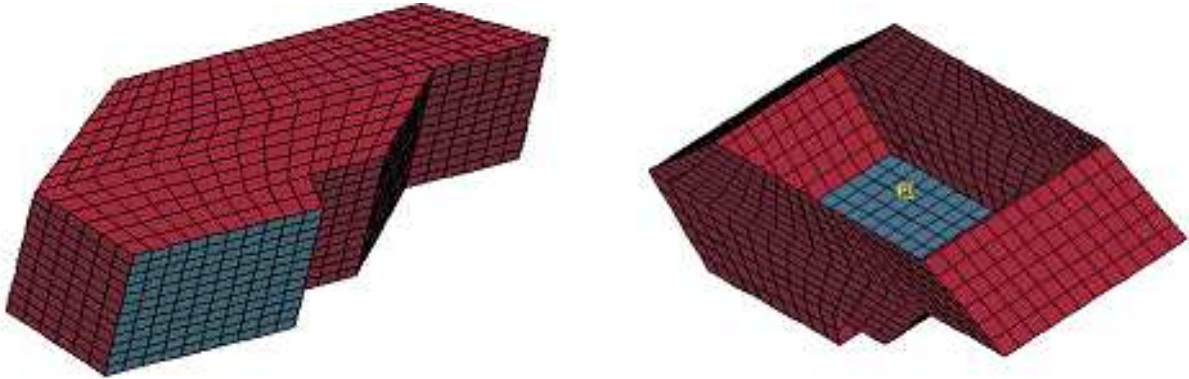


FIG. 4.9 – Modèles en éléments finis et éléments finis de surface pour le compartiment d'automobile

les figures (4.10) et (4.11). Nous pouvons constater que la pression à l'intérieur de la voiture présente un comportement résonnant aux résonances du compartiment qui sont calculées en utilisant la MEF de Rayon-Ideas et qui sont récapitulées dans le tableau (4.1). La figure (4.10) montre un bon accord entre notre BEM, celle de Rayon-Ideas et la MEF de Rayon-Ideas pour des fréquences inférieures à 400 Hz. Au delà de cette valeur, la BEM et la MEF présentent une différence de 3 dB environ [Fig.(4.11)]. Ceci, peut être expliqué par le fait que pour les hautes fréquences, nous devons considérer un maillage plus fin pour acquérir une certaine précision.

TAB. 4.1 – Fréquences de résonance du compartiment calculées par la MEF Rayon-Ideas.

Mode	Frequence(Hz)
1	162.21
2	284.14
3	286.72
4	327.18
5	379.21
6	401.56
7	403.66
8	473.85
9	491.92
10	506.77

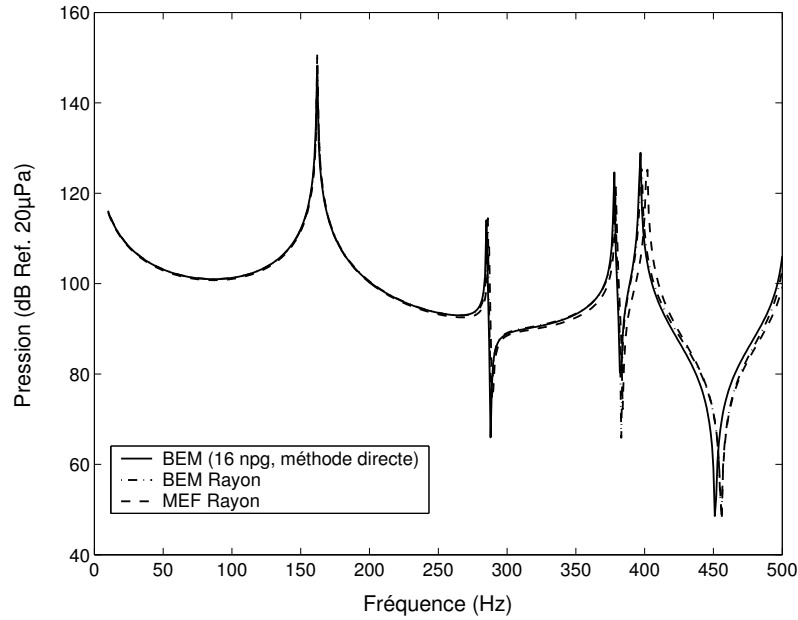


FIG. 4.10 – Variation de la pression en fonction de la fréquence au point d'observation P_1 : validation avec le code Rayon-Ideas

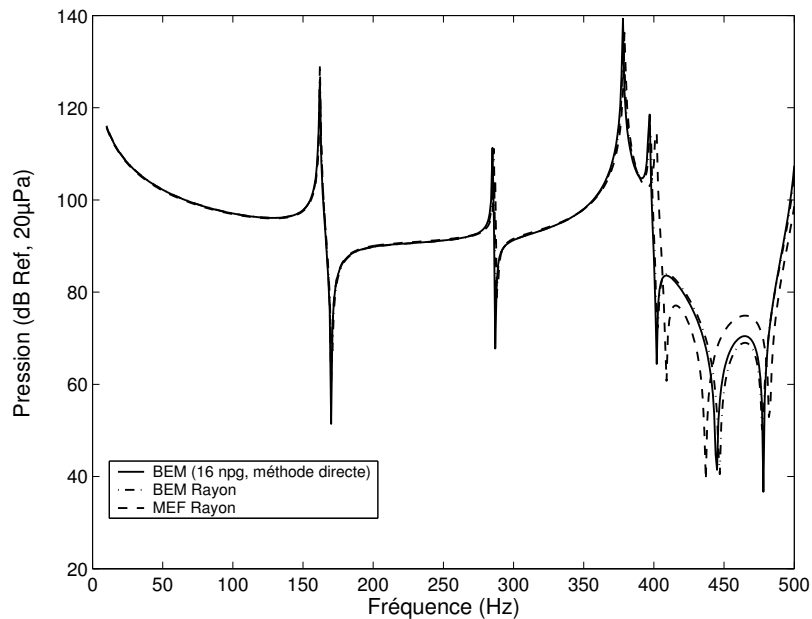


FIG. 4.11 – Variation de la pression en fonction de la fréquence au point d'observation P_2 : validation avec le code Rayon-Ideas

Pour ce problème, la MEF qui présente des matrices creuses, nécessite uniquement 9 mn de temps de CPU sur une machine de 2 GHz. Toutefois, la BEM prends 7 h 21 mn 20 s sur la même machine lorsqu'un solveur direct est appliqué tout en utilisant 4 points

de Gauss. Ce temps de CPU est réduit à 3 h 30 mn 31 s lorsque GMRES est appliquée avec une tolérance de 10^{-5} et un maximum de nombre d'itération de 100. Notons que l'utilisation de 16 points de Gauss ne donne pas lieu à de très grandes différences en terme de précision des résultats, par contre, elle augmente considérablement le temps CPU (environ 58 h quand le solveur direct est utilisé contre 7 h 21 mn pour 4 points de Gauss). La figure (4.12) montre qu'on peut aboutir à de bons résultats en utilisant GMRES et 4 points de Gauss. Dans ce qui suit, nous utilisons GMRES pour résoudre le système linéaire évalué avec 4 points de Gauss.

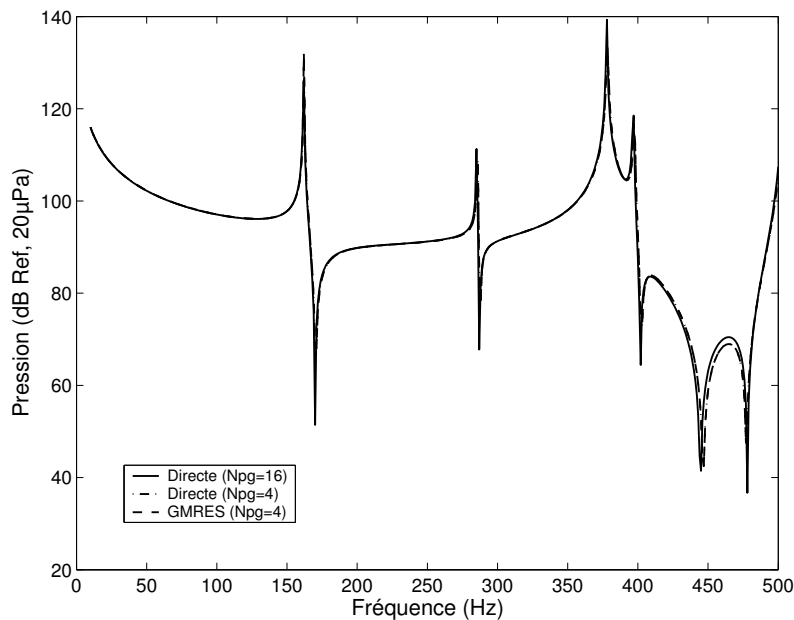


FIG. 4.12 – Pression au point d'observation P_2 calculée par la BEM : comparaison entre GMRES et la méthode directe pour 4 et 16 points de Gauss

4.5.3 Rayonnement d'une plaque élastique

Dans cette seconde application, nous nous sommes intéressés au calcul du rayonnement acoustique d'une plaque élastique $0.6 \times 0.9 \times 0.001 \text{ m}^3$ dont les propriétés mécaniques sont les suivantes : $E = 210\text{GPa}$, $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.3$. La structure est bloquée aux bords et elle est excitée par une force ponctuelle unitaire et impulsionnelle en un point situé en $(0.33, 0.45, 0.0) \text{ m}$. Elle est entourée par l'air ($\rho = 1.21 \text{ Kg/m}^3$, $c = 340 \text{ m/s}$) et la pression est calculée en un point situé à 1m de la plaque [Fig. (4.13)]. La vitesse de la structure vibrante est calculée pour une durée de 1.023 s

avec un pas de temps de 1 ms. Ainsi, le nombre des points du signal est de 1024.

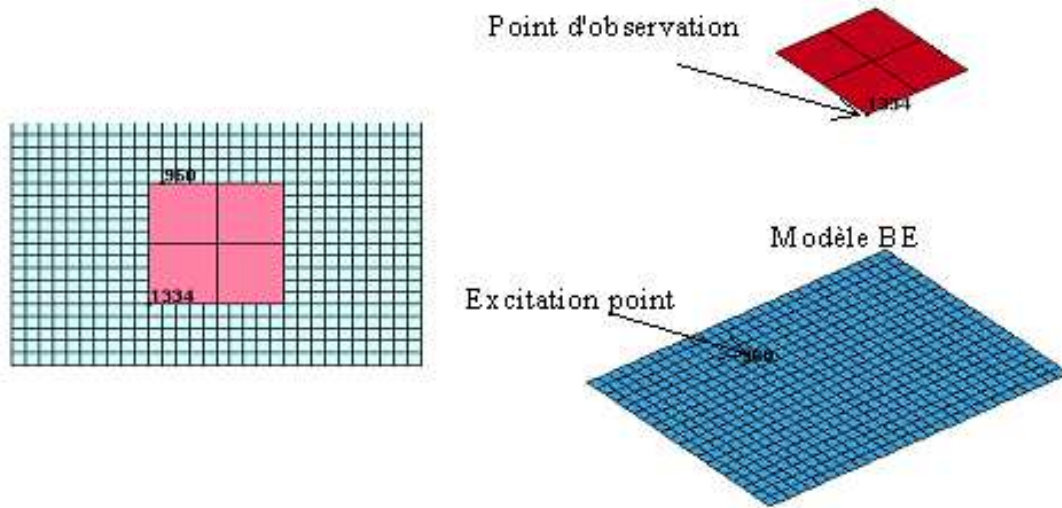


FIG. 4.13 – Modèle éléments finis de surface pour la plaque élastique

Dans les figures (4.14) et (4.15), nous avons comparé la pression acoustique, au point d'observation représenté sur la figure (4.13), calculée par notre code à celle fournie par la BEM de Sysnoise. Dans les deux cas, la structure est simulée par le même code explicite en éléments finis. Dans le cas de Sysnoise, une fois les vitesses temporelles sont calculées, un post processeur FFT permet le calcul des vitesses fréquentielles pour tous les noeuds de la structure. A cette étape on choisit une fenêtre (4.16). L'inconvénient de ce post processeur est que le traitement par la FFT ainsi que la correction due au fenêtrage ne sont pas accessibles par l'utilisateur.

Sur la figure (4.14), nous avons représenté la pression de Sysnoise et celle obtenue par notre méthode BEM en imposant les vitesses fréquentielles calculées à partir du post-processeur. Notons, encore une fois, l'excellente concordance entre les deux codes ce qui justifie une fois de plus la fiabilité du code BEM. Sur la figure (4.15), nous avons fait toute l'analyse avec notre code, en commençant par la réponse temporelle structurale suivie par la réponse acoustique de la BEM tout en passant par la FFT. Afin de minimiser le leakage, nous utilisons la même fenêtre que Sysnoise [Fig.(4.16)]. Pour notre part nous avons opté pour le théorème de Parseval afin de corriger l'effet du fenêtrage. Notons le bon accord entre les deux résultats tout en remarquant quelques différences en amplitude. Ces dernières sont dues probablement à la manière,

dont le post-processeur corrige l'effet du fenêtrage, qui reste pour nous complètement méconnue. Effectivement, le choix de la fenêtre ainsi que la procédure de correction affectent considérablement le résultat. Néanmoins, on retrouve les différents pics que Sysnoise a prédit en utilisant ce couplage faible de la BEM et la MEF. Cet exemple nous sert donc de validation pour d'autres cas de couplage vibroacoustique.

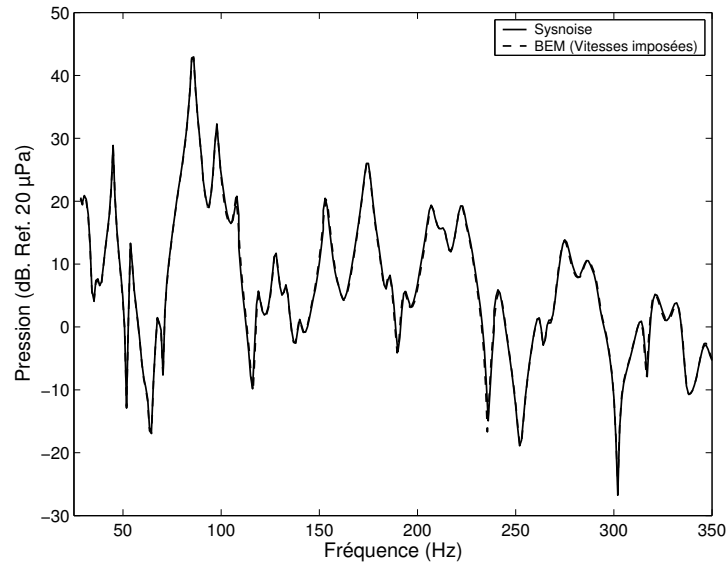


FIG. 4.14 – Validation de la BEM avec Sysnoise

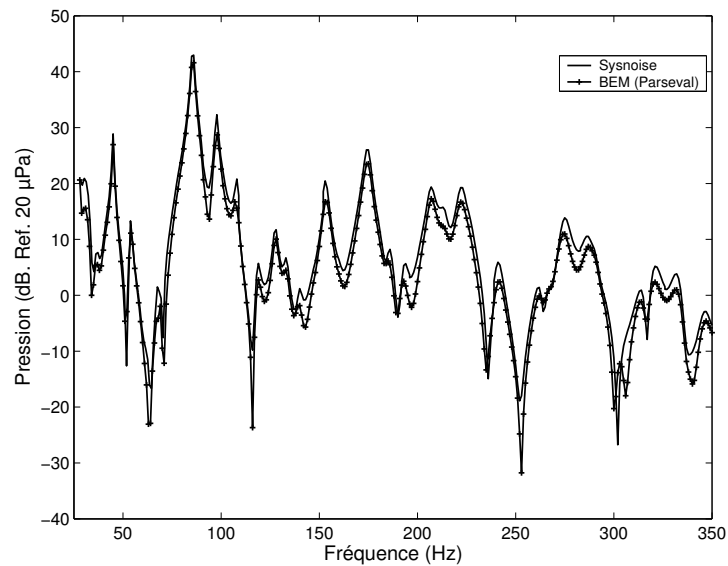


FIG. 4.15 – Validation du couplage vibroacoustique avec Sysnoise

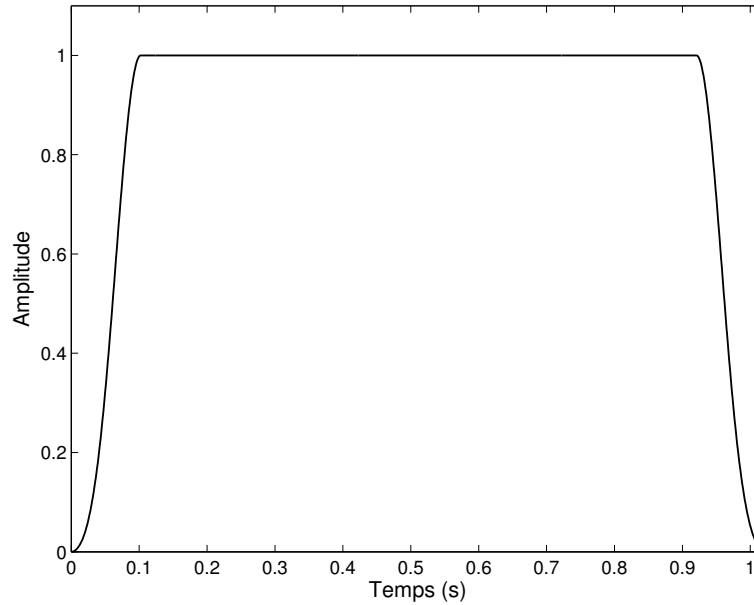


FIG. 4.16 – La fenêtre pour la FFT

Notons que lorsque le problème acoustique fait intervenir des surfaces élastiques, des pics provenant des modes structuraux apparaissent dans la réponse acoustique. En effet, la pression acoustique [Fig. (4.14),(4.15)] présente plusieurs pics correspondant aux fréquences de la plaque élastique tels sont montrés sur la figure (4.17).

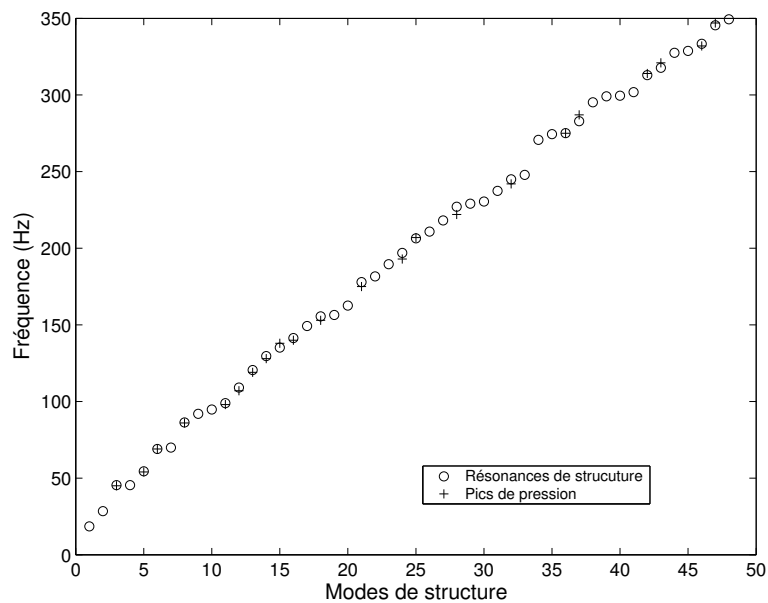


FIG. 4.17 – Modes de la structure et pics de pression

Finale­ment, les résultats de la BEM telle que présentée dans le chapitre précédent sont comparés dans ce cas à la méthode de Rayleigh. Cette méthode est basée sur l'hypothèse que chaque élément de la surface vibrante est monté sur un baffle rigide et vibrant indépendamment des autres éléments constituant la surface vibrante [55]. Par conséquent, la pression totale au point d'observation est obtenue en sommant la pression générée par chaque élément. Comparée à la BEM, cette méthode est très rapide car elle ne nécessite ni la construction ni la résolution d'un système linéaire. En effet, en utilisant la BEM, le système est construit et est résolu en 30 mn alors que la méthode de Rayleigh donne le résultat final dans quelques secondes. La figure (4.18) montre que cette méthode donne une bonne approximation de la solution obtenue par la BEM. Elle permet l'obtention de bons résultats pour des surfaces planes vibrantes. Cependant, lorsqu'elle est utilisée pour des géométries complexes, la méthode de Rayleigh peut donner lieu à des résultats erronés tels que nous l'avons vu dans le chapitre précédent dans le cas d'un problème acoustique pur.

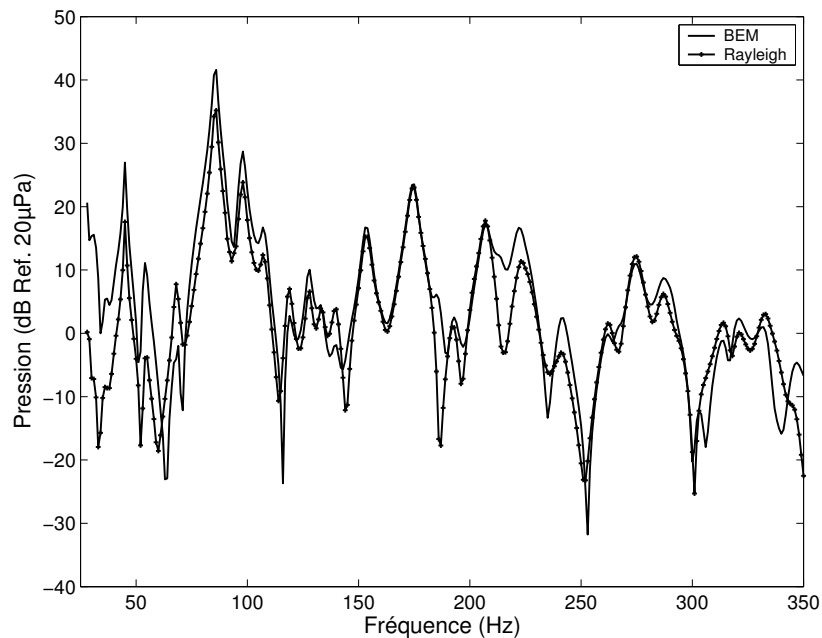


FIG. 4.18 – Pression au point d'observation : comparaison entre la BEM et la méthode de Rayleigh

4.5.4 Application du couplage au compartiment du véhicule

Dans cette partie, nous reprenons l'exemple précédent du compartiment, dans lequel nous considérons que la plaque excitée n'est plus rigide. Nous supposons que cette plaque, dont les propriétés mécaniques sont les suivantes $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$, $E = 207 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$, $t = 3 \text{ mm}$, est excitée, en 4 points [Fig. (4.19)], par une force impulsive unitaire de 1N et de même forme que celle de l'excitation utilisée dans l'exemple précédent. Celle-ci est choisie dans le but d'exciter toutes les fréquences. Les autres parties du compartiment sont maintenues rigides de vitesses nulles. La durée de l'analyse est 0.2047 s alors que les vitesses sont sauvegardées dans le fichier sortie à chaque 0.1 ms. Ceci donne lieu à 2048 pas de temps pour les vitesses.

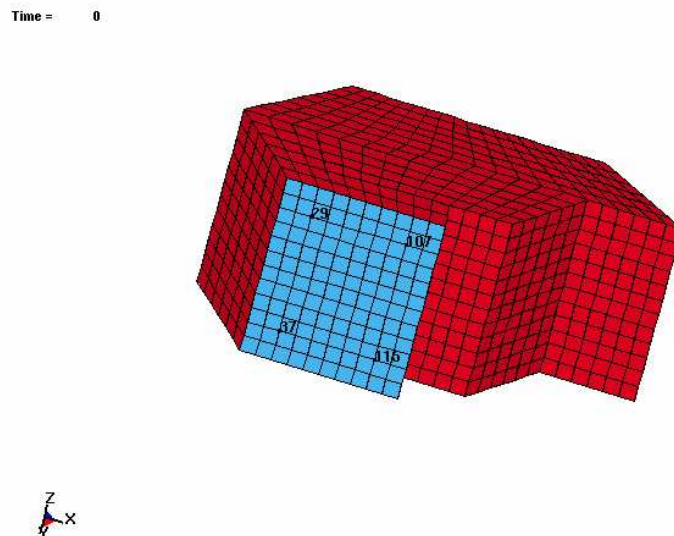


FIG. 4.19 – Excitation du compartiment en 4 points

Sur la figure (4.21) nous avons représenté la variation des FFT des vitesses normales en fonction de la fréquence en trois points différents (un point d'excitation P_{107} , le centre de la plaque P_{72} et un point P_{96} à mi-chemin entre les deux derniers points) tels sont schématisés sur la figure (4.20).

Notons que la vitesse présente des pics aux fréquences 87.93, 273.57, 371.27 et 483.63 Hz correspondant aux fréquences de résonance de la plaque élastique. En examinant la pression aux points P_1 et P_2 sur la figure (4.22), nous retrouvons les mêmes pics de résonance de la cavité acoustique déjà obtenus pour un problème acoustique pur. A ces pics viennent se chevaucher les pics de résonance dus à la plaque. Ainsi, la réponse acoustique en un point interne à la cavité acoustique dépend non seulement

Time = 0

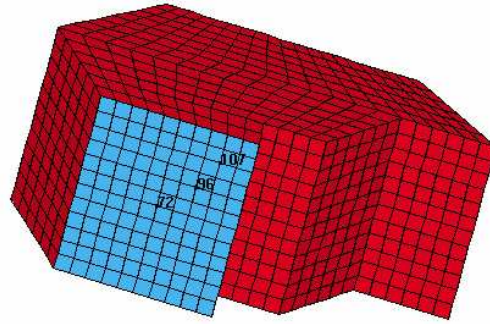


FIG. 4.20 – Positions des points P_{107} , P_{72} et P_{96} sur la plaque élastique

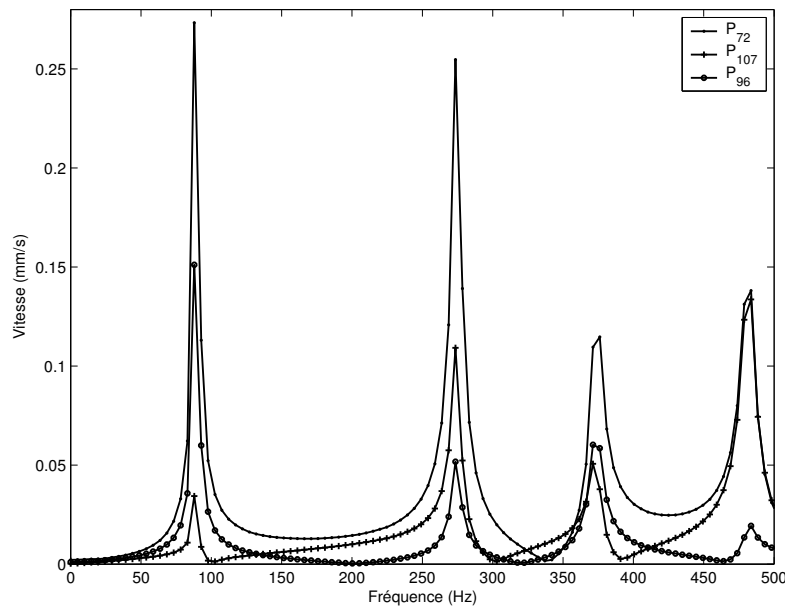


FIG. 4.21 – Les vitesses aux points P_{107} , P_{72} et P_{96} sur la plaque élastique

des fréquences de résonance de la cavité mais aussi du profil de vibration des parties élastiques de cette cavité. En effet, la réponse acoustique est influencée par le comportement vibratoire de la structure. Ce dernier, est plus visible dans le cas où on suppose que le compartiment est complètement élastique. Sur la figure (4.23) nous observons une réponse acoustique en P_1 et P_2 plus complexe caractérisée par l'apparition de plusieurs nouveaux pics. Ces pics supplémentaires sont dus aux résonances de la structure

élastique formant le compartiment. Ainsi, afin de réduire le bruit à l'intérieur de la voiture, il faut non seulement optimiser la géométrie de la cavité mais aussi les matériaux formant cette cavité.

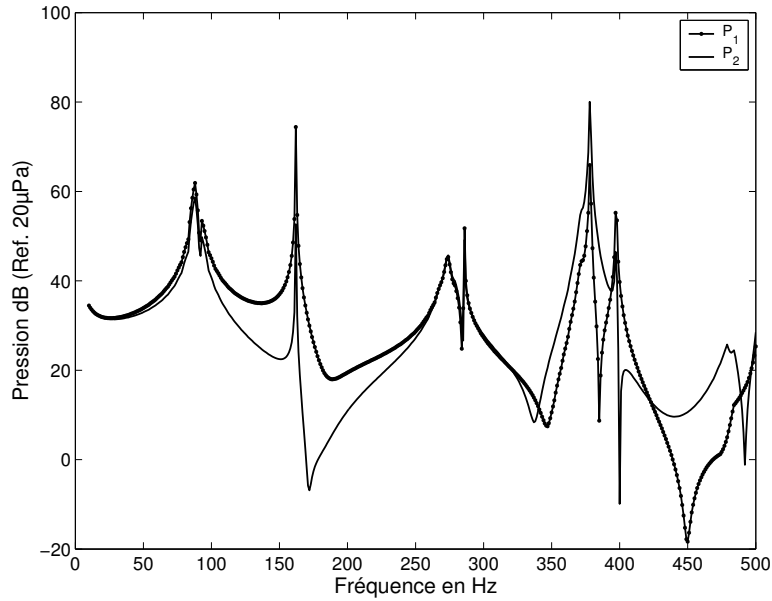


FIG. 4.22 – Pression au point P_1 et P_2 (cas de la plaque élastique)

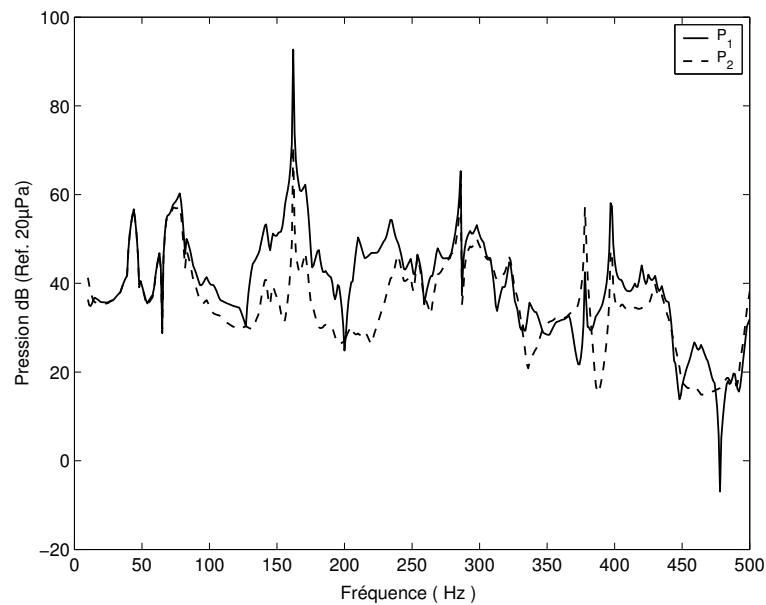


FIG. 4.23 – Pression au point P_1 et P_2 (cas du compartiment élastique)

4.6 Rayonnement acoustique dans le domaine temporel

La méthode des équations intégrales est, sans doute, une des méthodes les plus utilisées dans l'industrie pour la résolution des équations d'ondes dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, la méthode des équations intégrales, appelée méthode des *potentiels retardés*, a été utilisée par la communauté des ingénieurs depuis les années 70. L'approximation numérique était basée sur la méthode de collocation dont le principal inconvénient est que les schémas numériques sont instables. Pour remédier à ce problème, on procédait par filtrage numérique qui se faisait dans la plupart des cas au prix d'une détérioration très importante de la précision.

4.6.1 Potentiel retardé et solution fondamentale

L'étude du rayonnement d'une source acoustique est basée sur l'équation différentielle à laquelle doivent satisfaire les grandeurs acoustiques ainsi que les conditions aux limites prises par ces grandeurs et par leurs dérivées sur les frontières. Dans l'hypothèse de l'acoustique linéaire, dans un fluide homogène sans pertes, la pression acoustique doit satisfaire, en tout point de l'espace où il n'y a pas de source, l'équation d'onde scalaire :

$$\Delta p(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

La solution fondamentale $G(y, t; \xi, \tau)$, correspondant à la solution de l'équation (4.14) dans un milieu infini pour une source ponctuelle et impulsive $\gamma(x, t)$ [Eq.(4.15)], est donnée par l'équation (4.16).

$$\Delta G(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} = \gamma(x, t) \quad (4.14)$$

$$\gamma(x, t) = \delta(t - \tau) \delta(x - \xi) \quad (4.15)$$

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) \quad (4.16)$$

où $r = \|x - \xi\|$.

La dérivée de la fonction de Green par rapport à la normale extérieure, au point d'ob-

servation y de la surface Γ , est donnée par :

$$\frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi r^2} \left(\delta\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) + \frac{r}{c} \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right) \right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.17)$$

La solution fondamentale, exprimée par l'équation (4.16), donne la réponse au point d'observation x . Celle-ci est due à une impulsion émise, à l'instant $t = \tau$, par une source ponctuelle située au point $x = \xi$. Cette fonction de Green possède les trois propriétés fondamentales suivantes :

- Translation : $G(x, t; \xi, \tau) = G(x, t + \Delta t; \xi, \tau + \Delta t)$
- Causalité : $G(x, t; \xi, \tau) = 0$ si $c(t - \tau) < \|x - \xi\|$
- Réciprocité : $G(x, t; \xi, \tau) = G(x, -\tau; \xi, -t)$

La solution de l'équation (4.13) est la forme temporelle de l'intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff qui permet d'exprimer la pression $p(\xi, t)$ en fonction des valeurs prises par la pression et par sa dérivée normale en tout point x d'une surface fermée Γ quelconque :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma} \left[G * \frac{\partial p}{\partial n} \right] (x, t) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} \left[p * \frac{\partial G}{\partial n} \right] (x, t) d\Gamma_x \quad (4.18)$$

où $*$ représente la convolution dans le temps, $\partial/\partial n$ est la dérivée normale à la surface considérée. L'équation (4.18) peut être écrite sous une forme plus explicite comme suit :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma} \int_0^t G(x, t; \xi, \tau) \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial n} d\tau d\Gamma_x - \int_{\Gamma} \int_0^t p(x, \tau) \frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial n} d\tau d\Gamma_x \quad (4.19)$$

4.6.2 Intégrale de Rayleigh

Pour établir l'intégrale de Rayleigh, on s'intéresse au rayonnement d'une source plane, encastrée dans un baffle rigide, dont les points restent immobiles. Dans ce cas, la surface Γ est constituée d'une surface hémisphérique Γ_r et d'une surface plane comprenant le baffle Γ_b et la source Γ_s . La surface Γ_r possède un rayon aussi grand que possible, pour négliger sa contribution à l'intégrale durant un intervalle de temps de mesure fini [38].

L'intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff devient alors :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s + \Gamma_b} \left[G * \frac{\partial p}{\partial n} \right] (x, t) d\Gamma_x - \int_{\Gamma_s + \Gamma_b} \left[p * \frac{\partial G}{\partial n} \right] (x, t) d\Gamma_x \quad (4.20)$$

Comme pour l'intégrale de Rayleigh dans le domaine fréquentiel, on peut utiliser la méthode des images pour établir la fonction de Green adaptée au problème. On obtient donc :

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c} - \tau\right); \frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial n} = 0 \quad (4.21)$$

Dans ce cas, l'intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff se met alors sous la forme suivante :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s} \left[G * \frac{\partial p}{\partial n} \right] (x, t) d\Gamma_x \quad (4.22)$$

ou encore comme suit :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s} \int_0^t \frac{\delta(t_r - \tau)}{2\pi r} \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial n} d\tau d\Gamma_x \quad (4.23)$$

où $t_r = t - \frac{r}{c}$ est le temps retardé.

L'intégrale de surface est étendue uniquement à la surface active de la source car le baffle est rigide et par conséquent, $\partial p / \partial n = 0$ sur Γ_b .

En considérant les propriétés de la fonction de Dirac et en remplaçant la dérivée normale de la pression en fonction de la vitesse particulaire, la dernière intégrale peut être réécrite comme suit :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s} \frac{\rho}{2\pi r} \frac{\partial V_n(x, t_r)}{\partial t} d\Gamma_x = \int_{\Gamma_s} \frac{\rho}{2\pi r} A_n(x, t_r) d\Gamma_x \quad (4.24)$$

où $A_n(t_r, x)$ est l'accélération normale à la surface.

Dans ce qui suit, nous considérons une discrétisation uniforme en temps. Le moyen le plus simple pour calculer l'intégrale (4.24), est de stocker toutes les valeurs des accélérations des noeuds de la source et de les interpoler linéairement aux temps retardés $t_r = t - \frac{r}{c}$. Cette méthode est efficace lorsqu'il s'agit d'une accélération dont on connaît la fonction analytique. Dans le cas le plus général, la détermination de la réponse nécessite, en toute rigueur, la connaissance du profil de vibration en chaque point de la source, un profile pas, nécessairement, uniforme. Ce dernier cas de figure peut se présenter lorsqu'on s'intéresse au rayonnement d'une plaque élastique vibrante. En effet, dans le cas d'une résolution explicite, il serait beaucoup plus intéressant de calculer la contribution de chaque point de la source au rayonnement acoustique au fur

et à mesure que le calcul de structure se fait.

En effet, nous proposons d'effectuer un couplage faible en temps entre le code en éléments finis explicite et la méthode de Rayleigh temporelle. Pour cela, nous calculons, pour tous les noeuds de la source, l'accélération entre deux instants t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$. Nous déterminons, par la suite, l'instant t compris entre $t_{a1} = t_1 + \frac{r}{c}$ et $t_{a2} = t_2 + \frac{r}{c}$. En effet, nous cherchons l'instant d'arrivée, au point d'observation, d'une onde émise, entre t_1 et t_2 , par un point source. A cet instant correspond une position bien déterminée dans le vecteur de pression totale. Une fois cette composante du vecteur identifiée, la contribution en pression, à un point d'observation bien défini, due au rayonnement d'un point source donné sera cumulée dans la composante correspondante du vecteur pression totale.

Cette opération s'effectue, ainsi, pour chaque élément et pour deux instants consécutifs. A chaque fois, les contributions élémentaires sont cumulées suivant la valeur de l'instant d'arrivée de l'onde émise au point d'observation. A la fin du calcul, on dispose de la pression au point d'observation due au rayonnement de tous les points sources. Ceci nous permet d'effectuer le calcul sans avoir besoin de stocker toutes les accélérations.

4.6.3 Méthode d'onde plane

Comme pour le domaine fréquentiel, on peut établir une équation intégrale asymptotique en supposant qu'à la paroi de la structure vibrante, l'impédance du milieu est égale à l'impédance acoustique. Ainsi, on peut montrer que la pression en tout point de l'espace peut être calculée par :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s} \frac{\rho}{4\pi r} A_n(x, t_r) + \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{p(x, t_r)}{r} + \frac{1}{c} \frac{\partial p(x, t_r)}{\partial \tau} \right) d\Gamma_x \quad (4.25)$$

La Considération de l'hypothèse de l'onde plane, nous permet d'en déduire que :

$$C(\xi)p(\xi, t) = \int_{\Gamma_s} \frac{\rho}{4\pi r} \left(A_n(x, t_r) + \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{c}{r} V_n(x, t_r) + \frac{\partial V_n(x, t_r)}{\partial \tau} \right) \right) d\Gamma_x \quad (4.26)$$

Dans la dernière équation, on considère une dérivée, du type différences finies

d'ordre un, donnée par :

$$\frac{\partial V_n(x, t_r)}{\partial \tau} = \frac{V_n(x, t_2) - V_n(x, t_1)}{\Delta t} \quad (4.27)$$

avec $t_1 < t_r < t_2$.

4.6.4 Application numérique

Dans cette application, nous nous intéressons à la simulation de la diffraction acoustique par une source plane circulaire, de rayon a , encastrée dans un baffle rigide. La source, dont le maillage est représenté sur la figure (4.24), vibre en mode piston. Ainsi, tous les points de la source vibrent avec la même vitesse impulsive représentée sur la figure (4.26.a).

Dans un premier temps, nous appliquons l'intégrale de Rayleigh pour calculer la pression diffractée. Les résultats obtenus sont comparés à la méthode de la réponse impulsionnelle (RI) [38]. Dans cette méthode, qui n'est valable que pour des cas particuliers, l'intégrale de Rayleigh est évaluée analytiquement.

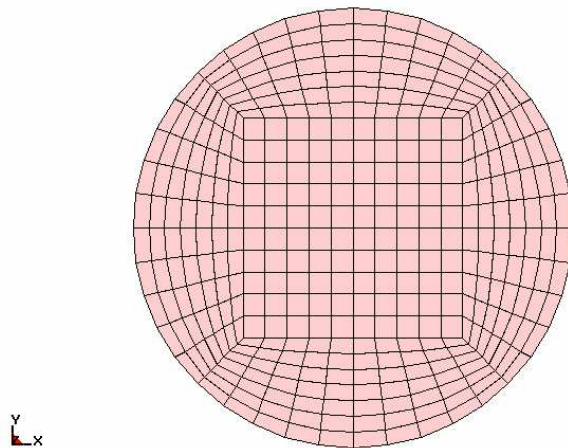


FIG. 4.24 – Maillage de la source rayonnante (380 quadrilatères)

Dans ce problème, souvent rencontré en contrôle non destructif des matériaux, la pression diffère d'une région à une autre [Fig.(4.25)]. En fait, ces particularités peuvent être décrites par le concept d'onde directe et d'onde de bord. L'onde plane, ou encore dite directe, est limitée uniquement à la région du rayonnement direct comprenant la

source. Elle apparaît comme une bande droite dont le front est perpendiculaire à la direction de propagation. Les ondes de bords se propagent dans tout le demi espace et dans toutes les directions sous forme d'arcs de cercle dont les centres coïncident avec les bords de la source.

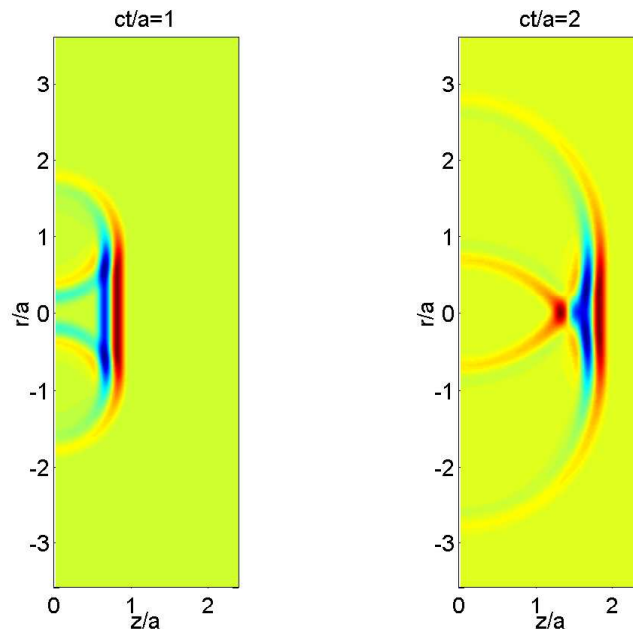


FIG. 4.25 – Champ de pression acoustique en deux instants

En un point sur l'axe, la pression est caractérisée par la présence de deux ondes de polarité inverse et de même forme que la vitesse d'excitation [Fig.(4.26.b)]. La première onde, dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse d'excitation, constitue l'onde directe. Les ondes, provenant des deux bords, arrivent simultanément et interfèrent de manière constructive pour donner naissance à une onde de polarité inverse à celle de l'onde directe. Hors axe, tout en restant dans la zone du rayonnement directe, l'onde plane arrivant en premier est suivie de deux ondes de bord de faible amplitude et de polarité inverse à celle de l'onde plane [Fig.(4.26.c)]. La première onde de bord est issue du bord le plus proche alors que la seconde est issue du bord le plus éloigné. Dans la zone d'ombre constituant le reste du demi espace, seules les ondes de bords subsistent [Fig.(4.26.b)]. Elles sont de polarité inverse. La première a une amplitude plus importante que la seconde.

Pour les trois régions caractérisant le champ acoustique, nous avons comparé les deux méthodes de calcul de l'intégrale de Rayleigh décrites auparavant. La première consiste à calculer la pression après avoir stocké toutes les accélérations nodales aux instants $t_r = t - \frac{r}{c}$. Dans la seconde méthode, les accélérations sont calculées à fur et à mesure que l'analyse se fait. Nous observons sur la figure (4.26) une bonne concordance entre les deux méthodes en comparaison avec la RI, ce qui montre l'efficacité de la seconde méthode et par conséquent son implémentations dans le code d'éléments finis.

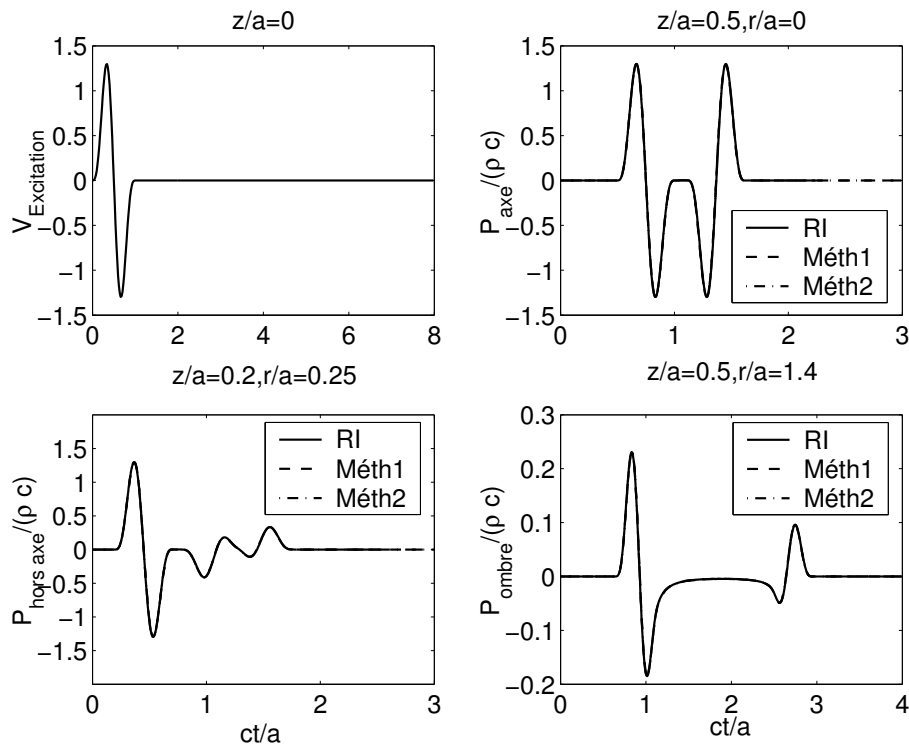


FIG. 4.26 – Variation au cours du temps de la vitesse d'excitation (a) et de la pression sur l'axe (b), hors axe (c) et dans la zone d'ombre (d)

Dans une seconde étape, nous avons comparé la pression acoustique sur l'axe calculée par la réponse impulsionnelle et l'approche asymptotique [Fig.(4.27)]. Remarquons que, nous obtenons exactement le même résultat que pour le domaine fréquentiel. Loin de la source, l'approche asymptotique donne des résultats en bonne concordance avec la solution analytique car l'hypothèse d'onde plane, sur laquelle se base cette approche, est justifiée localement. Lorsque le point d'observation s'approche de la source, l'onde directe calculée par l'approche asymptotique reste en bon accord avec celle obtenue par

la RI. Par contre, l'approche asymptotique sous-estime la pression de l'onde de bord, qui est une onde diffractée ne vérifiant pas l'hypothèse d'onde plane.

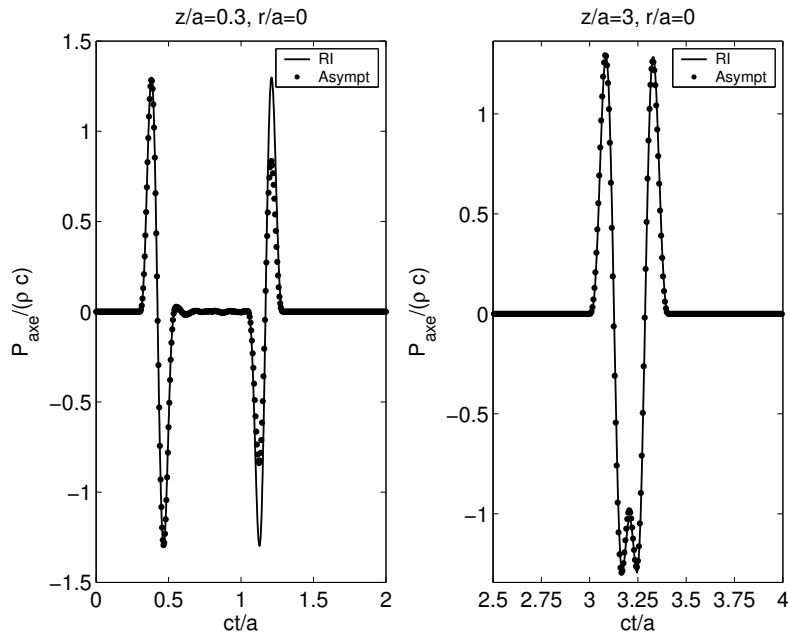


FIG. 4.27 – Comparaison entre la RI et l'approche asymptotique

Ainsi pour un cas très simple, nous avons validé le couplage faible temporel dans le code structural en éléments finis explicite et la méthode de Rayleigh temporelle. Ce test préliminaire permettra, à court terme, d'envisager plusieurs cas plus concrets tels que le rayonnement des plaques élastiques, le rayonnement dû à l'impact des plaques élastiques par des corps rigides,... etc.

4.7 Conclusions

Dans le présent chapitre, nous nous sommes intéressés aux problèmes de couplage faible pour lesquels la réponse acoustique du fluide n'affecte pas le comportement de la structure. Dans ce cas, la structure est simulée par un code temporel explicite en éléments finis alors que le fluide est traité par VIBEM. La FFT assure le passage du domaine temporel au fréquentiel des vitesses issues du code temporel. Celles-ci sont utilisées comme conditions aux limites pour le code acoustique.

Nous avons validé cette méthode pour des problèmes d'acoustique pur et de vi-

broacoustique avec d'autres codes commerciaux basés sur la MEF et la BEM. Pour la résolution numérique nous avons opté pour GMRES qui apparaît plus efficace que les méthodes directes. Afin de réduire l'espace mémoire nécessaire au stockage, nous n'avons sauvegarder que presque la moitié de la matrice BEM dans un vecteur. Malheureusement avec ces optimisations, nous sommes toujours confrontés au problème du temps de calcul pour des modèles de grande taille.

D'une autre part, le couplage, dans le domaine temporel, du code structure avec la méthode de Rayleigh a donné un bon résultat pour un cas simple. Cependant, ceci ne peut être utilisé que pour des cas particuliers présentant des géométries planes. Dans le cas le plus général, la BEM temporelle explicite est la plus appropriée. D'après les travaux de recherche publiés dans ce domaine, cette méthode est instable. Par conséquent, dans le but d'utiliser la BEM temporelle, il serait plus avantageux de trouver un autre moyen, plus efficace en terme de précision et de temps de calcul, afin d'évaluer la pression et la vitesse sur une surface renfermant la structure vibrante.

Pour ce faire, nous envisageons, à court terme, de développer un couplage fort, dans le domaine temporel, du code de structure en éléments finis avec un élément fini acoustique. Ce dernier élément sera couplé, par la suite, à la BEM temporelle. Ainsi, pour satisfaire l'hypothèse d'un milieu fluide infini, la simulation de ce couplage fort entre le fluide et la structure par un code éléments finis explicite nécessite l'application d'une condition absorbante. Pour cela, nous considérerons une surface fictive, dans le maillage volumique du fluide, englobant la structure rayonnante. Sur cette structure, nous calculerons, pour tous les noeuds et à chaque instant, la vitesse normale et la pression via le potentiel vitesse. Ceci nous permettra par la suite d'utiliser la BEM temporelle.

Cette manière de procéder permet de tirer profit des avantages des deux méthodes. Outre le traitement d'un couplage fort dans le temps, la MEF en acoustique permet de calculer la pression et la vitesse sur la surface fictive, en un temps relativement court par rapport à la BEM. D'une autre part, on peut, avec la BEM, calculer la pression en des points éloignés de la source alors que la MEF ne le permet pas. En revanche, pour une bonne application de cette méthode, des conditions absorbantes efficaces doivent être utilisées.

Conclusion Générale

L'objectif principal de ce travail est de simuler, à l'aide de différentes méthodes numériques, la réponse acoustique et le comportement vibroacoustique des structures. Si les méthodes analytiques restent encore très utilisées, il apparaît qu'elles sont difficilement applicables dans le cas des problèmes réels dont les structures sont complexes. Celles-ci peuvent être couplées à une cavité ou, tout simplement, sont de formes quelconques et non bafflées, ce qui représente un degré de difficulté supérieur. En effet, dans le cas des structures bafflées, un choix judicieux de la fonction de Green permet d'exprimer la pression dans l'espace par une simple intégrale faisant intervenir la vitesse à la frontière. Dans le cas général, la prédiction de la réponse acoustique demande la résolution d'un système linéaire.

Les approches utilisées

Pour un problème acoustique pur, deux méthodes ont été utilisées. La première méthode, celle des éléments finis, consiste à discrétiser le volume acoustique en des volumes élémentaires et à réécrire l'équation d'Helmholtz sous forme intégrale pour chacun de ces petits volumes tout en considérant les conditions aux limites du problème. La contribution de chaque élément est assemblée suivant la topologie du maillage. Ceci donne lieu à un système d'équations linéaires réel, symétrique et creux. Cette méthode peut être appliquée sous sa forme directe ou encore modale. Cette dernière repose sur la projection du système sur sa base modale. Notons que cette méthode est la plus adaptée pour les problèmes internes. En effet, le traitement des problèmes externes par la méthode des éléments finis nécessite l'application des conditions absorbantes sur la

frontière du domaine de calcul pour simuler un milieu infini.

La deuxième méthode, connue par la méthode des éléments finis de frontières (BEM), est la plus appropriée pour les problèmes externes. En effet, elle est basée sur l'équation intégrale d'Helmholtz faisant intervenir la fonction de Green qui satisfait la condition de rayonnement de Sommerfeld. Selon le type des variables acoustiques manipulées, cette méthode peut être directe ou indirecte. La première est basée sur la pression et la vitesse acoustiques tandis que la seconde repose sur le saut de pression et le saut de vitesse. Dans le premier cas, le rayonnement interne et externe d'un même problème sont à traiter l'un après l'autre alors que dans le second cas ils sont résolus simultanément. D'une autre part, la BEM peut engendrer soit une simple (collocation) ou une double (variationnelle) intégration surfacique. Dans la première configuration, le système complexe est non symétrique mais il est, rapidement, construit alors que dans la seconde, bien que le système soit symétrique, il demande plus de temps pour son évaluation en raison des intégrales doubles présents dans la formulation.

Enfin, mentionnons le fait que la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique représentent des cas particuliers de la BEM. Pour ces deux méthodes la pression acoustique dans l'espace s'exprime directement en fonction du champ de vitesse de la structure vibrante.

Dans un problème vibroacoustique, la structure est généralement simulée par la méthode des éléments finis. Dans le cadre de ce travail, les différentes méthodes appliquées à l'acoustique sont couplées à la méthode des éléments finis simulant une plaque mince ou une coque élastique dans le but de modéliser un problème de couplage vibroacoustique faible ou fort dans sa totalité.

Dans le cas de la MEF-MEF, le code que nous avons développé permet le choix entre une multitude de techniques. Outre la méthode classique directe (MD), la méthode modale à bases modales découplées (MMD) repose sur le calcul des modes propres de la cavité rigide et ceux de la structure élastique dans le vide. Dans méthode, dite modale à base modales couplées (MMC), le système donné par la MMD est rendu symétrique après avoir procédé par une projection sur les vecteurs propres à gauche et à droite du système couplé. La méthode modale découplée corrigée (MMDC), quant à elle, prend

en compte, via la correction pseudostatique, la contribution au comportement vibroacoustique des modes à hautes fréquences négligés par troncature modale. Finalement, la méthode modale couplée corrigée (MMCC), consiste à rendre le système symétrique tout en considérant la correction statique. Pour la BEM-MEF, la MEF est appliquée à la partie structurale du problème et utilisée sous sa forme directe sans aucune projection modale. D'un autre côté, la matrice d'influence de la BEM est construite par interpolation quadratique.

Enfin, dans l'hypothèse d'une interaction élastoacoustique faible, nous avons couplé un code de structure explicite en éléments finis au code de la VIBEM via la FFT. En effet, la réponse structurale est calculée via le code d'éléments finis. Les vitesses structurales ainsi obtenues sont transformées du domaine fréquentiel au domaine temporel par le biais de la FFT et sont utilisées, par la suite, comme conditions aux limites pour la BEM.

Les principaux résultats

Ce travail de thèse présente quelques contributions au calcul de la réponse acoustique et du couplage vibroacoustique des systèmes. Celles-ci sont résumées comme suit :

- utilisation d'une seule implémentation pour les triangles et les quadrilatères pour le cas de la formulation variationnelle par équation intégrale directe présentant une singularité en $1/r$;

- symétrisation et, par la suite, diagonalisation du système couplé cavité-structure en MEF-MEF tout en utilisant la correction pseudo statique, à la fois, pour le fluide et la structure ;

- prédiction de la réponse d'un problème de couplage vibroacoustique faible en intégrant notre BEM dans un code explicite en éléments finis, initialement, destiné au calcul des structures ;

- développement de quelques codes numériques capables de prédire la réponse acoustique et vibroacoustique des systèmes.

En terme de résultats, l'ensemble des simulations numériques que nous avons effectuées nous ont permis de déduire que :

- en raison de ses nombreux avantages (système engendré réel, symétrique et creux), la MEF reste plus efficace pour les problèmes internes que la BEM en terme de temps de calcul et d'espace mémoire nécessaire au stockage. La BEM reste la plus appropriée pour les problèmes externes. Pour qu'elle soit efficace, les intégrales singulières doivent être correctement évaluées car leurs emplacements dans la matrice globale, après assemblage, se situent sur la diagonale du système ;

- les résultats fournis par la méthode de Rayleigh et l'approche asymptotique peuvent constituer de bonnes approximations pour les solutions dans le cas des structures relativement planes. Elle doivent être, en revanche, manipulées avec beaucoup de précaution dans le cas des structures quelconques car la convergence n'est pas tout le temps assurée ;

- dans le cas du couplage structure cavité, la troncature peut être à l'origine d'une importante divergence de la méthode modale. En effet, le critère stipulant de garder les modes des sous systèmes dont les fréquences sont inférieures à deux fois la borne supérieure de l'intervalle de fréquences de l'analyse n'est pas toujours fiable. La convergence, par contre peut être assurée en considérant une correction statique de la troncature modale. Si en plus de la correction statique, on procède à une diagonalisation du système, on assure non seulement la convergence de la méthode mais aussi on arrive à atteindre des gains en temps extrêmement considérables ;

- l'interpolation quadratique, en fréquence, des matrices d'influence de la BEM en couplage BEM-MEF conduit à une optimisation du temps de calcul pour des systèmes de taille petite. Ces gains peuvent atteindre des facteurs allant jusqu'à 15. Dans le cas des problèmes de grande taille, le temps de calcul est surtout consommé sur la résolution du système linéaire contrairement aux petits problèmes pour lesquels le temps est consommé durant la construction de la matrice. Ainsi, pour les problèmes de grande

taille, il est plus intéressant de résoudre le système par des méthodes itératives qu'avec des méthodes directes.

Les perspectives futures

Le présent travail permet d'envisager plusieurs travaux futures complémentaires. Le premier concerne le développement d'un traitement spécial pour contourner le problème des fréquences irrégulières de la BEM variationnelle indirecte ainsi que la considération des sources acoustiques. Aussi, en raison de la difficulté pouvant apparaître lors de la définition des sauts de pression et de vitesse aux bords libres des structures et aux connections multiples entre différentes structures nous envisageons de remédier à ces problèmes en imposant des contraintes sur la matrice d'influence BEM.

La deuxième ouverture possible est de paralléliser le code BEM en utilisant le MPI et quelques bibliothèques de calcul parallèle telles que SCALAPACK et PBLAS tout en considérant l'interpolation quadratique afin de partager la charge sur différentes machines, ce qui optimise le temps de calcul et réduit la taille de stockage.

La troisième perspective est de développer la BEM temporelle implicite variationnelle indirecte pour un problème de Neumann afin de la coupler avec le code de structure en éléments finis explicite. Ceci nous évitera le passage par la FFT, ce qui nous permettra d'avoir de meilleurs résultats en particulier dans le cas des signaux larges bandes. Notons que dans ce cas, la BEM devrait être inconditionnellement stable, ce qui nous permettrait de prendre des pas de temps relativement grands. Par conséquent, nous pourrions, par exemple, faire la résolution du système à chaque dizaine de pas de temps de la résolution structurale. Bien sûr, il faudrait assurer le minimum de 6 noeuds par longueur d'onde.

Finalement, nous envisageons de rassembler l'ensemble des codes, ainsi développés dans le cadre de cette thèse, dans un seul code numérique permettant le choix entre les différentes alternatives disponibles.

Bibliographie

- [1] R.M. Alford, D.M. Kelly, *Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation*, Geophys, 39(6), 834-842 (1974).
- [2] A. Alia, *Simulation du rayonnement et de la diffraction de champs ultrasonores par la méthode des différences finies*, Thèse de Magister, USTHB, Algérie (2002).
- [3] A. Alia, N. Bouaoua, H. Djelouah, *Finite difference modelling of the ultrasonic diffraction in biological tissues and viscous fluid media*, World Congress of Ultrasound, 1031 - 1034, Paris, 07-10 Septembre (2003).
- [4] A. Alia, H. Djelouah, N. Bouaoua, *Finite difference modeling of the ultrasonic field radiated by circular transducers*, J. Comput. Acoust, 12 (4), 475-499 (2004).
- [5] A. Alia, *Simulation of vibroacoustic problem using coupled FE / FE formulation and modal analysis*, PVP2004-2865, Proceedings of ASME/PVP Conference, 485-1, 147-152 (2004).
- [6] A. Alia, M. Souli, F. Erchiqui, *Variational boundary element acoustic modelling over mixed quadrilateral-triangular element meshes*, Commun. Numer. Methods. Eng, 22, 767-780 (2006).
- [7] Z. Alterman, C.F. Karal, *Propagation of elastic waves in layered media by finite difference method*, B. Seis. Soc. Am, 58(1), 367-398 (1968).
- [8] Z. Alterman, J. Aboudi, *Source finite extent, applied source and couple in an elastic half space*, Geophys. J. R. Astr, 21, 47-64 (1970).
- [9] Z. Alterman, J. Aboudi, C.F. Karal, *Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere*, Geophys. J. R. Astr, 21, 243-260 (1970).
- [10] Z. Alterman, D. Loewental, *Seismic waves in a quarter and three-quarter plane*, Geophys. J. R. Astr, 20, 101-126 (1970).
- [11] S. Amini, M. Kirkup, *Solution of Helmholtz equation in the exterior domain by elementary boundary integral methods*, J. Comput. Phys, 118, 208-221 (1995).
- [12] A. J. Aude, *Audio quality measurement primer*, Intensil, Application Note 9789 (1998).
- [13] R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van Der Vorst, *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods*, SIAM, Philadelphia (1994)

- [14] J. L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Paris (1990).
- [15] J. Berger, *Boundary element analysis of bimetals using anisotropic elastic Green's functions*, Proceedings of the NIST workshop on Green's functions and boundary element analysis, NIST Special Publication SP 910 (1996).
- [16] J.L. Bond, *An introduction to finite difference method for the study of pulsed waves in elastic solids*, Rapport de recherche, Phys 78/08, The City University, Londres (1978).
- [17] J.L. Bond, *Ultrasonic pulse scattering by open slots*, Proceedings, Ultrasonics International '79, I.P.C. (Guildford),188-193, Graz, Austria, Juillet (1979).
- [18] M. Bonnet, G. Maier, C. Polizzotto, *Symmetric Galerkin boundary element method*, Appl. Mech. Rev, 51, 669-704 (1998).
- [19] M. Bonnet, M. Guiggiani, *Galerkin BEM with direct evaluation of hypersingular integrals*, Electronic. J. Bound. Elem, 1 (2), 95-111, (2003).
- [20] D. Botteldooren, *Acoustical finite difference time domain simulation in a quasi cartesian grid*, J. Acoust. Soc. Am, 95, 2313-2319 (1994).
- [21] N. Bouaoua, A. Alia, H. Djelouah, *Simulation of the ultrasonic diffraction in viscous fluids*, ASME, Cleveland, USA, 20-24 Juillet (2003).
- [22] S. Callsen, O.V. Estorff, O. Zaleski, *Direct and indirect approach of desingularized boundary element formulation for acoustical problems*, Computer Modeling in Engineering and Science, 6 (5), 421-429 (2004).
- [23] Z.S. Chen, G. Hofstetter, H.A. Mang, *A Galerkin type BE-FE fomulation for elastoacoustic coupling*, Compt. Methods. Appl. Mech. Eng, 152, 147-155 (1997).
- [24] Z.S. Chen, G. Hofstetter, H.A. Mang, *A Symmetric Galerkin fomulation of the boundary element method for acoustic radiation and scattering*, J. Compt. Acoust, 5 (2), 219-241 (1997).
- [25] Z.S. Chen, A.J. Svobodnik, G. Hofstetter, *A coupled FE/BE method for elastoacoustics : formulation and applications*, 7th International Congres of Sound and Vibration, Allemagne, 4-7 juillet (2000).
- [26] S. Chen, Y. Liu, H.A. Mang, *A unified boundary element method for analysis of sound and shell like structure interactions. II. Efficient solution techniques*, J. Acoust. Soc. Am, 108 (6), 2738-2745 (2000).
- [27] P.T. Chen, S.H. Ju, K.C. Cha, *A Symmetric formulation of coupled BEM/FEM in solving responses of submerged elastic structures for large degrees of freedom*, J. Sound. Vib, 233 (3), 407-422 (2000).
- [28] J.T. Chen, J.H. Len, S.R. Kuo, S.W. Chyuan, *Boundary element analysis for the Helmholtz eigenvalue problems with multiply connected domain*, Proc. R. Soc. Lond. A, 457, 2521-2546 (2001).
- [29] R. Clayton, B. Engquist, *Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations*, B. Seis. Soc. Am, 67 (6), 1529-1540 (1977).

- [30] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura, *The fast multipole method for the wave equation : A pedestrian prescription*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, 35 (3), 7-12 (1993).
- [31] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura, *The fast multipole method for electromagnetic scattering calculations*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1, 48-51, AP-S. Digest, 28 Juin - 2 Juillet (1993).
- [32] A. Craggs, *The use of simple three dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures*, J. Sound. Vib, 23 (3), 331-339 (1972).
- [33] T.A. Cruse, *Boundary integral equations - Personal view*, Elect. J. Bound. Elemt, 1 (1), 19-25 (2003).
- [34] R.D. Da Cunha, T. Hopkins, *The parallel iterative methods (PIM) package for the solution of systems of linear equations on parallel computers*, App. Num. Math, 19, 33-50 (1995).
- [35] R.D. Darrigrand, *Couplage méthode multipôlaire - discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, France (2002).
- [36] E.P. Debain, J. Trevelyan, P. Bettess, *Plane wave interpolation in direct collocation boundary element method for radiation and wave scattering : numerical aspects and applications*, J. Sound. Vib, 261, 839-858 (2003).
- [37] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Malome S.A.E, Paris (1981).
- [38] H. Djelouah, *Contribution à l'étude du rayonnement des champs ultrasonores impulsionnels dans les liquides et les solides*, Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences Physiques, USTHB, Algérie (1990).
- [39] F. Erchiqui, *Modélisation et simulation des interactions fluide structure par une méthode variationnelle couplant les équations intégrales et les éléments finis*, Thèse d'Etat, Université Laval, Québec (1994).
- [40] O.V. Estorff, B. Tylkowski, P. Scarth, *Sound radiation of two engine blocks by the BEM and Rayleigh method*, 2nd Worldwide Sysnoise Users Meeting, Leuven, Belgique, 19-21 Juin (1995)
- [41] O.V. Estorff, *Boundary elements in acoustics : Advances and applications*, Wit-Press, Boston (2000).
- [42] O.V. Estorff, *Effort to reduce computation time in numerical acoustics - An overview*, Acta Acustica united with Acustica, 89(5), 1-13 (2003).
- [43] O.V. Estorff, *Efficient acoustic calculations by BEM and frequency interpolated transfer functions*, Eng. Anal. Boun. Elem, 27, 683-694 (2003).
- [44] O.V. Estorff, J. Wandinger, B. Tylkowski, J. Villmann, *Numerical methods of acoustical investigation of railway vehicles*, World Congress on Railway Research WCRR, Colorado, USA, 17-19 juin (2003).

- [45] M. Fischer, *The fast multipole boundary element method and its application to structure acoustic field interaction*, Thèse de Doctorat, Université de Stuttgart, Allemagne (2004).
- [46] M. Fischer, L. Gaul, *Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic structure interaction*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 62 (12), 1677-1690 (2005).
- [47] G.A Georgiou, L.J. Bond, *Quantitative studies in ultrasonic wave defect interaction*, Ultrasonics, 25, 328-334 (1987).
- [48] M. Géradin, D. Rixen , *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*, Masson, Paris (1993).
- [49] C. Granat, M. Ben Tahar, *Variational formulation using integral equations to solve sound scattering above an absorbing plane*, J. Acoust. Soc. Am. , 105(5), 2557-2564 (1999).
- [50] R.W. Graves, *Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered grid finite differences*, B. Seis. Soc. Am. , 86(4), 1091-1106 (1996).
- [51] M. Guerich, M.A. Hamdi, *A numerical method for vibroacoustic problems with incompatible finite element meshes using B-spline functions*, J. Acoust. Soc. Am, 105(3), 1682-1694 (1999).
- [52] R.W. Guy, *A response of a cavity backed panel to external airborne excitation : a general analysis* , J. Acoust. Soc. Am, 65, 719-731, (1979).
- [53] M. A. Hamdi, *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*, Thèse d'état, UTC, France (1982)
- [54] K. Harumi, T. Saito, T. Fujimori, *Motion picture of the computer simulation of elastic waves in a solid : reflection of the longitudinal wave by a crack* , Ultrasonics International, (1979).
- [55] D. W. Herrin, F. Martinus, T. W. Wu, A. F. Seybert, *A new look at the high frequency boundary element and Rayleigh integral approximations*, Soc. Auto. Eng. Inc, 03NVC-114, (2003).
- [56] T. J. R. Hughes, *The finite element method, linear statistic and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey (1987).
- [57] E. Ikarta, J.P. Weight, *Finite difference time domain acoustic algorithm* , II Nuovo Cimento, 20(12), 1779-1793 (1998).
- [58] A. Ilan, J.P. Weight, *The propagation of short pulses of ultrasound from a circular source coupled to an isotropic solid* , J. Acoust. Soc. Am, 88(2), 1142-1151 (1990).
- [59] R.A Jeans, L.C. Mathews, *Solution of fluid structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique* , J. Acoust. Soc. Am, 88(5), 2459-2466 (1990).
- [60] A.J Jerry, *The shannon sampling theorem - various extensions and applications : A tutorial review* , Proc. IEEE, 65(11), 1565-1596 (1977).

- [61] S.C. Kang, J.H. Ih, *On the accuracy of near field pressure predicted by the acoustic boundary element method*, J. Sound. Vibr, 233 (2), 353-358 (2000).
- [62] R. Kashani, *Control modeling of flexible wall cavity vibroacoustic system*, Proceedings DETC, Chicago, USA (2003).
- [63] N.H. Kim, K.K. Choi, J. Dong, C. Pierre, *Design optimisation of structural acoustic problems using FEM-BEM*, AIAA-2003-1630 (2003).
- [64] N.H. Kim, J. Dong, K.K. Choi, N. Vlahopoulos, Z-D. Ma, M.P. Castanier, C. Pierre, *Design of sensitivity analysis for sequential structural acoustic problems*, J. Sound. Vibr, 263, 569-591 (2003).
- [65] S. M. Kirkup, *The computational modelling of acoustic fields by the boundary and shell element method*, Compt. Struct, 40 (5), 1177-1183 (1991).
- [66] S. M. Kirkup, S. Amini, *Modal analysis of acoustically loaded structures via integral equation methods*, Compt. Struct, 40 (5), 1279-1285 (1991).
- [67] S. M. Kirkup, *The boundary and shell element method*, Appl. Math. Modelling, 18, 418-422 (1994).
- [68] S. M. Kirkup, *The boundary element method in acoustics : A development in Fortran*, ISS, West Yorkshire, UK (1998).
- [69] S. M. Kirkup, A. Thompson, *Simulation of the acoustic field produced by cavities using the Boundary Element- Rayleigh Integral method (BERIM) and its application a horn loudspeaker*, International Congress of Sound and Vibration, St Petersburg, Russia (2004).
- [70] S. M. Kirkup, *Computing the acoustic field surrounding a radiating plate by Rayleigh method*, RIM3 User Manual, On-line www-boundary-element-method.com (2005).
- [71] L. Klimes, *Accuracy of elastic finite differences in smooth media*, Pageoph, 148 (1-2), (1996).
- [72] B.U. Koo, B.C. Lee, J.H. Ih, *A non singular boundary integral equation for acoustic problems*, J. Sound. Vibr, 192 (1), 263-279 (1996).
- [73] C. Lambourg, A. Chaigne, D. Matignon, *Time-domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results*, J. Acoust. Soc. Am, 109 (4), 1433-1447 (2001).
- [74] A. Lavie, *Modélisation du rayonnement et de la diffraction acoustique par une méthode mixte d'équations intégrales-champ nul*, Thèse d'Etat, Université des Sciences et technologies de Lille Flandre-Artois, France (1989).
- [75] C.M. Lee, L.H. Royster, R.D. Ciskowski, *Formulation for an FE and BE coupled problem and its application to the earmuff-earcanal system*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 16, 305-315 (1995).
- [76] C. Lesueur, *Rayonnement acoustique des structures : vibration, interaction fluid-structure*, Eyrolles, Paris (1988).

- [77] Y.J. Liu, *On the simple solution method and non singular nature of the BIE / BEM - A review and some new results*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 24, 789-795 (2000).
- [78] S.N. Makarov, M. Ochmann, *An iterative solver of the Helmholtz integral equation for high frequency acoustic scattering*, J. Acoust. Soc. Am , 103(2), 742-750 (1998).
- [79] S. Marburg, *Developments in structural acoustic optimisation for passive noise control*, Arch. Comput. Meth. Eng, 9 (4), 291-370 (2002).
- [80] S. Marburg, *Six boundary elements per wavelength : is that enough*, J. Comput. Acoust, 10 (1), 25-51 (2002).
- [81] S. Marburg, S. Schneider, *Influence of element types on numeric error for acoustic boundary elements*, J. Comput. Acoust, 11 (3), 363-386 (2003).
- [82] S. Marburg, S. Schneider, *Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part I. Solvers and effect of diagonal preconditioning* , Eng. Anal. Bound. Elem, 27 (1), 727-750 (2003).
- [83] I.C. Mathews, *Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction*, J. Acoust. Soc. Am, 79(5), 1317-1325 (1986).
- [84] H. J. P. Morand, R. Ohayon, *Fluid structure interaction : applied numerical methods*, Wiley (1995).
- [85] S. Naraynan, R.L. Shanbhag, *Sound transmission through elastically supported sandwich panels into a rectangular enclosure*, J. Sound. Vibr, 77 (2), 251-270 (1981).
- [86] S. Naraynan, R.L. Shanbhag, *Acoustoelasticity of damped sandwich panel backed a cavity*, J. Sound. Vibr, 77 (4), 453-473 (1981).
- [87] S. Newhouse, *A parallel implementation of the acoustic fluid-structure interaction problem using MPI on the AP1000*, Technical report, Imperial College / Fujitsu Parallel Computing Research Centre.
- [88] C. Niccanna, J. Bean, *The use of parallel virtual machine (PVM) for finite difference wave simulations*, Comput. Geophys, 23, 771-783 (1997).
- [89] N. Nichimura, *Fast multipole accelerated boundary integral equation methods*, Appl. Mech. Rev, 55 (4), 299-324 (2002).
- [90] R. Ohayon, C. Soize, *Structural acoustics and vibration*, Academic Press, San Diego (1998)
- [91] R. Ohayon, C. Soize, *Méthodes numériques avancées en vibroacoustique basse et moyennes fréquences*, Revue Européenne des Eléments Finis, 8 (5-6), 607-637 (1998).
- [92] I. Oprsal, J. Zahradnik, *Elastic finite difference method for irregular grids*, Geophys, 64, 240-250 (1999).
- [93] J. Pan, D.A. Bies, *The effect of fluid structural coupling on sound waves in an enclosure - Theoretical part*, J. Acoust. Soc. Am , 87(2), 691-707 (1990).

- [94] J. Pan, D.A. Bies, *The effect of fluid structural coupling on sound waves in an enclosure - Expérimental part*, J. Acoust. Soc. Am , 87(2), 708-717 (1990).
- [95] J. Pan, D.A. Bies, *The effect of fluid structural coupling on on acoustical decays in a reverberation room in high frequency range*, J. Acoust. Soc. Am , 87(2), 718-727 (1990).
- [96] A. Pitarka, *Elastic finite difference method for irregular grids*, B. Seis. Soc. Am , 89(1), 54-68 (1999).
- [97] E. Premat, *Prise en compte d'effets météorologiques dans une méthode d'éléments finis de frontière*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, France (2000).
- [98] W. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in Fortran 77. Art of scientific computing*, 2ème ed., Vol 1 (2001).
- [99] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Presses Polytechniques et universitaires Romande (1951).
- [100] C. Rajakumar, A. Ali, *Boundary element-finite element coupled eigenanalysis of fluid-structure systems*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 39, 1625-1634 (1996).
- [101] S. T. Raveendra, *An efficient indirect boundary element technique for multi frequency acoustic analysis*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 44, 59-76 (1999).
- [102] F.J. Rizzo, P.A. Martin, R.A. Roberts, *Boundary elements and a Green's function library* , Proceedings of the NIST workshop on Green's functions and boundary element analysis, NIST Special Publication SP 910 (1996).
- [103] R.V. Sabariego, J. Gyselinck, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, *Fast multipole acceleration of hybrid finite element boundary element analysis of 3D eddy current problems*, IEEE Transactions on Magnetics, 40 (2), 1278-1281 (2004).
- [104] G. Sandberg, *A new strategy for solving fluid structure problems*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 38, 357-370 (1995).
- [105] G. Sandberg, A.A. Hansson, M. Gustavsson, *Domain decomposition in acoustic and structure acoustic analysis*, Compt. Methods. Appl. Mech. Eng, 190, 2979-2988 (2001).
- [106] H.A. Schedin, C. Lamabourg, A. Chaigne, *Transient sound fields from impacted plates : comparison between numerical simulations and experiments*, J. Sound. Vibr, 221 (3), 471-490 (1999).
- [107] H.A. Schenck, *Improved integral formulation for acoustic radiation problems*, J. Acoust. Soc. Am, 44 (1), 41-58 (1968).
- [108] S. Schneider, S. Marburg, H.J. Hardtke, *An ILU-type preconditioner for the boundary element method*, Proceedings of Forum Acusticum, Special Issue of Revista de Acustica Bd. 33. Sevilla, Calvo-Manzano (2002).
- [109] S. Schneider, S. Marburg, *Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part II. Acceleration by ILU type preconditioner*, Eng. Anal. Bound. Elem, 27 (1), 751-757 (2003).

- [110] S. Schneider, *Efficient usage of the boundary element method for solving the time harmonic Helmholtz equation in three dimensions*, Thèse de Doctorat, Technischen Universität Dresden, Allemagne (2003).
- [111] STRACO, *I-DEAS Vibro-sacoustics 7.0* (1999).
- [112] J.C.F. Telles, *A report on some boundary element adventures*, Elect. J. Bound. Elemt, 1 (1), 56-60 (2003).
- [113] V.K. Tewary, *Elastic Green's functions for anisotropic solids (review)*, Proceedings of the NIST workshop on Green's functions and boundary element analysis, NIST Special Publication SP 910 (1996).
- [114] L.L. Thompson, S. Sankar, *Dispersion analysis of stabilized finite element methods for acoustic fluid structure interaction*, Pcoceedings of IMECE, Florida, USA (2000).
- [115] L.L. Thompson, *A review of finite element methods for time harmonique acoustics*, J. Acoust. Soc. Am, 119(3), 1315-1330 (2006).
- [116] B. Thon, D. Bariant, S. Bila, D. Baillargeat, M. Aubourg, S. Verdeyme, P. Guillon, F. Thevenon, M. Rochette, J. Puech, L. Lapierre, J. Sombrin, *Coupled Padé approximation - Finite element method applied to microwave device design*, Technical papers CADOE-ANSYS (2002-2004).
- [117] M. Tournour, N. Atalla, *A novel acceleration method for the variational boundary element approach based on multipole expansion*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 42, 1199-1214 (1998).
- [118] M. Tournour, N. Atalla, *Efficient evaluation of the acoustic radiation using multipole expansion*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 46, 825-837 (1999).
- [119] M. Tournour, *Modélisation numérique par éléments finis et éléments finis de surface du comportement vibroacoustique de structures complexes assemblées et couplées à une cavité*, Thèse de Doctorat, UTC, France (1999).
- [120] M. Tournour, N. Atalla, *Pseudostatic corrections for the forced vibroacoustic response of a structure cavity system*, J. Acoust. Soc. Am, 107(5), 2379-2386 (2000).
- [121] M. Tournour, J. P. Rossion, L. Brivteux, C. McCulloch, *Getting useful FEM and BEM vibro acoustic solutions faster, using new solution methodologies*, ISMA (2002).
- [122] F. Treyssède, A. Elhami, *Une méthode couplée de sous structuration dynamique / sous domaines acoustiques pour des problèmes d'interaction fluide structure de grande taille*, Colloque vibrations et bruit, Lyon (2004).
- [123] H.A. Troccas, R. Woodcock, F. Laville, *Acoustic radiation due to the inelastic impact of a sphere on a rectangular plate*, J. Acoust. Soc. Am, 108 (5), 2197-2002 (2000).
- [124] C. Vanhille, A. Lavie, *An efficient tool for multi-frequency analysis in acoustic scattering or radiation by boundary element method*, Acoustica, 84, 884-893 (1998).

- [125] A. Villarreal, J.A. Scales, *Distributed three dimensional finite difference modeling of wave propagation in acoustic media*, Comput. Phys, 11(4), 388-399 (1997).
- [126] N. Vlahopoulos, S.T. Raveendra, *Formulation, implementation and validation of multipole connection and edge constraints in an indirect boundary element formulation*, J. Sound. Vibr, 210 (1), 137-152 (1998).
- [127] N. Vlahopoulos, S.T. Raveendra, C. Vallance , S. Messer, *Numerical implementation and applications of a coupling algorithm for structural acoustic models with unequal discretization and partially interfacing surfaces*, Finite Elements in Analysis and Designs, 32, 257-277 (1999).
- [128] X. Wang, K.J. Bathe, *Displacement/ pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid structure interaction problems*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 40, 2001-2017 (1997).
- [129] W. Wang, N. Atalla, *A numerical algorithm for double surface integrals over quadrilaterals with a $1/R$ singularity*, Comm. Numer. Methods. Eng, 13, 885-890 (1997).
- [130] J.O. Watson, *Boundary elements from 1960 to present day*, Elect. J. Bound. Elemt, 1 (1), 34-46 (2003).
- [131] T. W. Wu, *Boundary element acoustics : Fundamentals and computer codes*, *Advances in boundary elements*, WITpress, Boston (2001).
- [132] Z.M. Xu, R.Y. Schen, H.X. Hua , *Coupling vibroacoustic behavior from a submarine power cabin equipped with floating-raft isolating systems*, Electronic Journal " Technical Acoustics", 39, 11.1-11.10 (2002).
- [133] Z. Zhang, N. Vlahopoulos, S.T. Raveendra, *A computational acoustic field reconstruction process based on an indirect boundary element formulation*, J. Sound. Vibr, 108 (5), 2167-2178 (2000).
- [134] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*, 3^e éd. McGraw-Hill, London, (1977).
- [135] O. C. Zienkiewicz, *Achievements and some unsolved problems of the finite element method*, Int. J. Numer. Methods. Eng, 47 (1-3), 9-28 (2000).