Numéro d'ordre : 3792

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée pour obtenir
le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

discipline : Mathématiques

par

Edwige CROIX

Idéaux fermés dans des intersections de classes non-quasi-analytiques.

soutenue le 7 avril 2006 devant la commission d'examen

Directeur :	M. Vincent THILLIEZ	Université Lille I
Rapporteurs :	M. Wieslaw PLESNIAK	Université Cracovie, Pologne
	M. Ahmed ZERIAHI	Université Toulouse III
Membres :	Mme Anne-Marie CHOLLET	Université Lille I
	M. Jean SCHMETS	Université Liège

Remerciements

Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde reconnaissance envers Vincent Thilliez, mon directeur de thèse. Par la qualité de ses cours et de son encadrement doctoral, il m'a transmis la passion des Mathématiques. Il m'a initiée avec compétence et disponibilité à la recherche mathématique. J'apprécie beaucoup la confiance qu'il m'a accordée pour mener à bien ce travail de thèse.

Je remercie Anne-Marie Chollet pour son regard bienveillant sur mes premières recherches dans "les grands espaces verts" de l'Analyse. Son dynamisme communicatif m'a enchantée. Je suis très honorée de sa participation à mon jury.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Wieslaw Plesniak et Ahmed Zeriahi qui ont accepté d'être mes rapporteurs. Je remercie également Jean Schmets qui me fait l'honneur d'être dans mon jury de thèse.

Ma reconnaissance va aussi à Jacques Chaumat pour son enthousiasme vis-à-vis de mes résultats, sa lecture très attentive de mon manuscrit et ses nombreuses remarques constructives.

Je remercie Edward Bierstone qui a aimablement répondu à mes questions concernant les articles [BM1,BM2]. Les résultats 2.2.8 et 6.1.1 sont le fruit de ces communications.

Ces années de doctorat n'auraient pas été les mêmes sans l'excellente ambiance qui les a baignées. J'adresse donc toute ma sympathie à Anne Duval, Martine et Hervé Queffélec, Sophie Grivaux et Stéphane Malek pour leurs encouragements, nos nombreuses discussions, mathématiques et autres, et nos éclats de rire.

Je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur patience face à mes doutes et mon manque de disponibilité. J'adresse une pensée particulière à mon fiancé dont l'affection fut capitale pour l'aboutissement de ce travail.

Je dédie cette thèse à ma mère : je te suis profondément reconnaissante du soutien inconditionnel que tu m'as témoigné durant mes études et de nos longs échanges sur l'Essence de la Recherche Scientifique.

Table des matières

Introduction

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'étude des idéaux fermés de l'espace de Fréchet $C^\infty(U)$ trouve son origine dans le célèbre problème de la division d'une distribution par une fonction réel-analytique. Par dualité, le résultat de division se ramène en effet à l'énoncé suivant, dû à Hörmander [H1] dans le cas polynomial, et à Łojasiewicz [Ł] en toute généralité : pour toute fonction φ réel-analytique dans U, l'idéal $\varphi C^\infty(U)$ est fermé dans $C^\infty(U)$. Cet énoncé apparaît comme un cas particulier du résultat suivant, établi ultérieurement par Malgrange [M] :

Théorème 1. *Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des fonctions réel-analytiques dans U. Alors l'idéal $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)C^\infty(U)$ est fermé dans $C^\infty(U)$.*

Outre la preuve initiale de Malgrange, il existe au moins deux démonstrations différentes du théorème 1 : l'une, due à Bierstone et Milman [BM1, BM2], repose sur les techniques de stratification par le diagramme des exposants initiaux développées par ces auteurs ; l'autre, due à Tougeron et Merrien, est basée sur un théorème d'analyse différentielle appelé "théorème fondamental" dans [To]. Un autre corollaire de ce théorème fondamental s'énonce comme suit :

Théorème 2. *Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, $p \leq n$, des fonctions de $C^\infty(U)$. On suppose que l'idéal engendré par les φ_j et leurs jacobiens d'ordre p est de Łojasiewicz et a un ensemble de zéros discret dans U. Alors l'idéal $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)C^\infty(U)$ est fermé dans $C^\infty(U)$.*

Il est naturel de se demander ce que deviennent les théorèmes 1 et 2 dans le cadre de sous-algèbres de $C^\infty(U)$, comme les classes ultradifférentiables familières en analyse classique et en théorie des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Rappelons qu'étant donnée une suite de réels positifs $M = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ croissante et logarithmiquement convexe, on note $C_M(U)$ la sous-algèbre de $C^\infty(U)$ donnée par les fonctions dont les dérivées à tout ordre j sont uniformément bornées sur U par $C^{j+1}j!M_j$, où C est une constante (dépendant de la fonction). La suite M apparaît ainsi comme une mesure du défaut d'analyticité des fonctions de $C_M(U)$ et est assujettie à certaines hypothèses de régularité. En particulier, on travaillera ici dans le cadre de classes non-quasi-analytiques.

Dans cette introduction, on pourra toujours penser, par commodité, au cas typique des suites Gevrey $M_j = j!^s$ avec $s > 0$. Le cadre général pour notre étude est présenté dans la section 1.2.

La sous-algèbre $C_M(U)$ est munie naturellement d'une topologie de limite inductive d'espace de Banach, que nous ne décrirons pas ici. Dans ce cadre, il existe une série de travaux [CC4, Th2, Th3, Th4] où l'analogue du théorème 1 est établi dans le cas $p = 1$ et sous diverses hypothèses portant sur le générateur et sur la suite M (quasi-analyticité ou non, etc...). Il est également connu que le résultat est faux en toute généralité : si φ est une fonction réel-analytique dans U et si l'on considère une fonction f appartenant à l'adhérence de l'idéal $\varphi C_M(U)$ dans $C_M(U)$, alors on a $f = \varphi g$ avec g une fonction de $C^\infty(U)$, mais, en général, g appartient à une classe strictement plus grande que $C_M(U)$. Sous des hypothèses standards sur la suite M, on montre, en fait, que g appartient à $C_{M^\sigma}(U)$ pour un réel $\sigma > 1$ lié plus ou moins explicitement à la géométrie du problème. Il y a donc une perte de régularité. De tels phénomènes apparaissent dans divers contextes et ont amené Chaumat et Chollet à introduire, dans [CC2], les intersections $\widehat{C_M}(U) = \bigcap_{\alpha>0} C_{M^\alpha}(U)$. Ici, comme on a $\widehat{C_M}(U) = \widehat{C_{M^\sigma}}(U)$, on absorbe la perte de régularité entre f et g. Le cas $p = 1$ du théorème 1 pour $\widehat{C_M}(U)$ se trouve ainsi démontré dans [CC3]. Il est à noter que ces intersections de classes, dont l'étude a été reprise et approfondie par d'autres auteurs (voir par exemple [Be, SV]) jouissent de nombreuses propriétés existant dans le cadre de $C^\infty(U)$ mais pas dans celui d'une classe $C_M(U)$ donnée. La plus élémentaire de ces propriétés, mais non la moindre, est que $\widehat{C_M}(U)$ est naturellement muni d'une topologie d'espace de Fréchet.

Le but de la présente thèse est double : il s'agit, d'une part, d'étendre au cas d'un entier p quelconque le résultat de [CC3], c'est-à-dire de démontrer en toute généralité une version du théorème 1 dans le cadre de $\widehat{C_M}(U)$, et d'autre part, d'établir une version du théorème 2 dans ce même cadre.

Le mémoire est organisé de la manière suivante.

Le chapitre 1 est consacré à des définitions et à la mise en place du cadre général de l'étude. Il importe de remarquer ici que, dans notre travail, certains résultats intermédiaires ne nécessitent pas la totalité des hypothèses mises sur les suites M (par exemple, les théorèmes de composition formelle du chapitre 3 ne requièrent pas d'hypothèse de non-quasianalyticité). Dans un souci d'unification et de simplicité, nous avons cependant préféré garder le même jeu d'hypothèses tout au long de l'étude. Pour la même raison, nous n'avons pas considéré les cadres plus généraux des classes introduites par Beaugendre [Be] ou par Schmets et Valdivia [SV].

Dans le chapitre 2, on démontre des résultats de recollement de fonctions ou d'extension de jets dans $\widehat{C_M}(U)$ en présence de certaines conditions de platitude sur des compacts de U. Il s'agit essentiellement d'outils techniques qui seront utilisés dans la suite, en remplacement de théorèmes d'extension de type Whitney utilisés dans le cas C^∞.

Le chapitre 3 est principalement axé sur des résultats de composition formelle venant préciser ceux de Mouze [Mo3] dont ils sont, en un certain sens, des versions à paramètres : par exemple, lorsque les séries formelles considérées sont des séries de Taylor, on s'intéresse à la variation des estimations obtenues en fonction du point de développement. Le théorème à la Tougeron-Merrien pour $\widehat{C_M}(U)$ s'obtient en combinant la démarche utilisée dans [To] avec les résultats de composition précités. Il s'énonce comme suit :

Théorème 3. *Soit M une suite admissible vérifiant la condition (H_6). Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, $p \leq n$, des fonctions appartenant à $\widehat{C_M}(U)$, I l'idéal qu'elles engendrent dans $\widehat{C_M}(U)$ et I' l'idéal engendré par ces fonctions et tous les jacobiens partiels de la forme $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. On suppose que I' est un idéal de Łojasiewicz dont l'ensemble des zéros est discret. Alors, pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute fonction f de $\overline{I}$, on a $f_{|V} \in (\varphi_1, \dots, \varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.*

En ce qui concerne le théorème à la Malgrange, qui est complétement indépendant du résultat précédent, le schéma de preuve que nous adoptons est celui donné par Bierstone et Milman [BM1, BM2] dans le cas C^∞. Très succinctement, ce schéma repose sur deux ingrédients essentiels. Le premier est la construction d'une filtration $\emptyset = X_l \subset \cdots \subset X_1 = V$ de l'ensemble V des zéros de l'idéal $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)C^\infty(U)$ par des ensembles analytiques fermés tels que le diagramme des exposants initiaux de l'idéal soit constant le long des strates $X_k \setminus X_{k+1}$, avec une "bonne" base standard en chaque point a de $X_k \setminus X_{k+1}$. Le second ingrédient est un algorithme de division formelle à la Hironaka par ces bases standards, avec une estimation en $O(d(a, X_{k+1})^{-\delta_k})$ pour les coefficients des diviseurs. Un point clef est que, lorsque la série à diviser est le jet de Taylor d'une fonction plate sur X_{k+1}, l'explosion des diviseurs est compensée par l'annulation des coefficients de cette série en puissances arbitrairement grandes de $d(a, X_{k+1})$. Dans le cadre de $\widehat{C_M}(U)$, ces estimations sont beaucoup trop grossières pour fournir une information exploitable. On est donc amené à raffiner les deux ingrédients précités. Pour la division à la Hironaka, qui fait l'objet du chapitre 4, on part des résultats établis par Mouze [Mo2] dans le cadre des anneaux de séries formelles à croissance contrôlée et, comme pour les théorèmes de composition du chapitre 3, on établit une version "à paramètre" de ces résultats permettant de contrôler très précisément les quotients et les restes en fonction de la variation des coefficients initiaux des diviseurs, en particulier. Dans le même esprit, au chapitre 5, on reprend la technique de stratification par le diagramme des exposants initiaux en modifiant la construction des bases standards de manière à l'adapter à notre problème : en particulier, la base standard en chaque point a d'une strate $X_k \setminus X_{k+1}$ est donnée par les jets de Taylor d'une famille de fonctions analytiques définies globalement. Cette modification est basée sur des arguments algorithmiques. Le théorème désiré est finalement obtenu au chapitre 6 en combinant ces diverses techniques. Il s'énonce comme suit :

Théorème 4. *Soit M une suite admissible vérifiant la condition (H_6). Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions réel-analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et I l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(U)$. Pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute fonction f de $\overline{I}$, on a $f \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.*

Il est à noter que l'on peut, à partir des classes $\widehat{C_M}(U)$, définir des classes locales $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$ (voir remarque 6.2.4) dans lesquelles la conclusion des théorèmes 3 et 4 s'interprète simplement par la fermeture de l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$.

Chapitre 1

Définitions et notations

Ce chapitre contient le détail des notions et notations utilisées dans ce travail. En première lecture, le lecteur peut directement passer au chapitre suivant et revenir lorsqu'il rencontrera les notations.

1.1 Notations générales

Etant donnés deux points a et b de $\mathbb{R}^n$, on note $d(a,b)$ la distance euclidienne entre ces points. Si K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathring{K}$ son intérieur. Pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, $d(x,K)$ désigne la distance euclidienne de x à K. On définit alors, pour tout réel positif r, l'ensemble $\mathcal{T}(K,r)$ par

$$\mathcal{T}(K,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(x,K) < r\}.$$

Etant donné un réel δ, $\lceil \delta \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur à δ.
Soit $J = (j_1, \ldots, j_n)$ un multi-indice dans $\mathbb{N}^n$. On note $|J| = j_1 + \cdots + j_n$, ($|J|$ sera aussi noté j) et $J! = j_1! \cdots j_n!$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose $x^J = x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$.
Pour tout $i \in \{1, .., n\}$, e_i désigne le i-ème vecteur coordonnée, à savoir $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 est à la i-ème position.
Soit f une fonction de classe C^∞ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Pour tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^n$ et tout $x \in U$, on note la L-ième dérivée de f,

$$D^L f(x) = \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}(x).$$

Pour tout point $a \in U$, on définit les séries formelles $T_a f$ et $\overline{T}_a f$ par

$$T_a f(X) = \sum_{L \in \mathbb{N}^n} \frac{D^L f(a)}{L!}(X-a)^L \text{ et } \overline{T}_a f(X) = T_a f(X+a).$$

On note $\mathcal{S}upp\ f$ le **support de** f, c'est à dire l'ensemble

$$\mathcal{S}upp\ f = \overline{\{x \in U; f(x) \neq 0\}},$$

et $V(f)$, l'ensemble des zéros de f.
D'autre part, la relation $f \equiv 0$ signifie que la fonction f est identiquement nulle sur U.
Etant donnée une application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on désigne sa différentielle au point x par $d\phi(x)$ et son jacobien au point x par $\Delta\phi(x)$.

Soient G une série formelle à n indéterminées $Y_1, \dots, Y_n$ et F, un n-uplet de séries formelles d'indéterminées $X_1, \dots, X_m$ satisfaisant $F(0) = 0$. On note alors $G \circ_Y F$ la composée $G(F(X))$ où $X = (X_1, \dots, X_m)$. On a alors une relation entre la composition de fonctions et la composition des séries formelles qui leurs sont associées.

Lemme 1.1.1. *Soient $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞. Pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\overline{T}_a(g \circ f)(X) = \overline{T}_{f(a)} g \circ_Y \left(\overline{T}_a f(X) - f(a)\right).$$

Démonstration. Pour tout point $a \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{T}_a(g \circ f)(X) &= T_a(g \circ f)(X + a) \\
&= T_{f(a)} g \circ_Y T_a f(X + a) \\
&= T_{f(a)} g \circ_Y \overline{T}_a f(X) \\
&= \overline{T}_{f(a)} g \circ_Y \left(\overline{T}_a f(X) - f(a)\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.2 Suites

Soit $M = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs. On considère les propriétés suivantes :

(H_1) $\qquad M_0 = 1,$

(H_2) $\qquad (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est logarithmiquement convexe,

(H_3) $\qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{pM_p} < \infty.$

Si la suite M vérifie les propriétés (H_1) et (H_2) alors, pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$M_k M_l \leq M_{k+l}. \tag{1.1}$$

Une suite M vérifiant les propriétés (H_1), (H_2) et (H_3) est dite **non quasi-analytique**. On donne deux autres propriétés pour la suite M :
(H_4) il existe une constante A_M, $A_M > 1$, telle qu'on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M_{k+1} \leq A_M^{k+1} M_k M_1,$$

(H_5) il existe une constante $A_M > 1$, telle qu'on ait, pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$,

$$M_{k+l} \leq A_M^{k+l} M_k M_l.$$

Une suite satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_5) est dite à **croissance modérée**. On remarque que la propriété (H_5) implique (H_4). Une suite M à croissance modérée et non quasi-analytique est dite **admissible**.
Si M est une suite à croissance modérée, pour tout couple d'entiers naturels (k,l), on a facilement

$$M_{kl} \leq A_M^{\frac{k(k+1)}{2}l} M_l^k \leq A_M^{k^2 l} M_l^k. \tag{1.2}$$

Etant données deux suites $M = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $N = (N_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on dit que M et N sont **comparables** s'il existe une constante D telle qu'on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad M_p \leq D^p N_p \tag{1.3a}$$
$$\text{ou} \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad N_p \leq D^p M_p. \tag{1.3b}$$

On définit alors $\max(M,N)$ par

$$\begin{cases} \max(M,N)_p = D^p N_p & \text{dans le cas } (1.3a), \\ \max(M,N)_p = D^p M_p & \text{dans le cas } (1.3b). \end{cases}$$

Si la suite N est à croissance modérée et la suite M admissible, alors la suite $\max(M,N)$ est admissible.

Soit M une suite de réels strictement positifs. Pour tout entier naturel k, on considère deux suites associées à M : la suite $M_{+k} := (M_{l+k})_{l\in\mathbb{N}}$ et la suite M_{-k} définie par

$$\begin{cases} (M_{-k})_l = 1, & \text{si } l \in \{0,\dots,k-1\}, \\ (M_{-k})_l = M_{l-k}, & \text{si } l \geq k. \end{cases}$$

Si la suite M vérifie la propriété (H_4), on a de plus, pour tout couple $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $k \leq l$, l'inégalité

$$M_l \leq A_M^{-\frac{1}{2}k(k-1)} A_M^{kl} M_{l-k} M_1^k.$$

Si l'entier k est fixé, il existe alors des constantes $d_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 1$ telles que, pour tout entier $l \in \mathbb{N}$, on ait

$$M_l \leq d_1 d_2^l (M_{-k})_l \quad \text{et} \quad (M_{+k})_l \leq d_1 d_2^l M_l. \tag{1.4}$$

Si la suite M est à croissance modérée, alors, pour tout $a > 0$, la suite M^a est à croissance modérée. On s'interessera aussi à des suites M telles que, pour tout $a > 0$, la suite M^a soit admissible, ce qui équivaut pour M à être admissible et satisfaire la condition :
(H_6) pour tout $a > 0$, on a

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{M_{p-1}}{M_p} \right)^a < \infty.$$

Lemme 1.2.1. *Soit M une suite à croissance modérée satisfaisant (H_6). Pour tout réel $a > 0$ et tout C, $C \geq 1$, il existe une constante $C' \geq 1$ telle qu'on ait, pour tout $l \in \mathbb{N}$,*

$$C^l M_l^a \leq C' M_l^{2a}.$$

Démonstration. La log-convexité de M^a implique que la suite $\left(\left(\frac{M_p}{M_{p-1}} \right)^a \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante. On déduit alors de (H_6) que cette suite tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier naturel p_C tel que, pour tout $p \geq p_C$, on ait $\left(\frac{M_p}{M_{p-1}} \right)^a \geq C$ et, par conséquent, $M_p^a \geq M_{p_C}^a C_1^{p-p_C} \geq C^{p-p_C}$. On obtient le résultat en posant $C' = C^{p_C}$. □

1.3 Classes de Carleman et intersection de classes

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Etant donnée une suite M vérifiant (H_1) et (H_2), on note $C_M(U)$, la classe de Carleman des fonctions f indéfiniment dérivables sur U et vérifiant la propriété suivante : il existe des constantes $C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 1$ telles que l'on ait, pour tout $x \in U$ et tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^n$,

$$|D^L f(x)| \leq C_1 C_2^l l! M_l.$$

Remarque 1.3.1. L'ensemble des fonctions réel-analytiques sur U est l'intersection sur les ouverts V relativement compacts dans U des classes $C_1(V)$.

La propriété (H_3) équivaut à la non quasi-analyticité de la classe $C_M(U)$; c'est le théorème de Denjoy-Carleman. La propriété (H_4) équivaut à la stabilité de la classe $C_M(U)$ par dérivation.
Etant donnée une constante $C_0 \geq 1$, on note $C_{M,C_0}(U)$ l'ensemble

$$C_{M,C_0}(U) = \left\{ f \in C^\infty(U) \ ; \ \sup_{x\in U, L \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^L f(x)|}{C_0^l l! M_l} < \infty \right\}.$$

Ce dernier est un espace de Banach pour la norme $\| \ \|_{M,C_0}$ définie par

$$\|f\|_{M,C_0} = \sup_{x\in U, L\in\mathbb{N}^n} \frac{|D^L f(x)|}{C_0^l l! M_l}.$$

On remarque qu'on a l'égalité $C_M(U) = \bigcup_{C_0 \geq 1} C_{M,C_0}(U)$.
Etant donnée une suite M à croissance modérée vérifiant (H_6), on appelle **intersection des classes** $C_M(U)$ l'ensemble

$$\widehat{C_M}(U) = \bigcap_{a>0} C_{M^a,1}(U).$$

On munit $\widehat{C_M}(U)$ de la topologie d'espace de Fréchet associée à la famille de normes $\| \ \|_{M^a,1}$, $a > 0$. D'après le lemme 1.2.1, on a aussi l'égalité

$$\widehat{C_M}(U) = \bigcap_{a>0} \left(\bigcup_{C_0 \geq 1} C_{M^a,C_0}(U) \right) = \bigcap_{a>0} C_{M^a}(U). \tag{1.5}$$

Le lemme suivant permet alors de comparer les classes non quasi-analytiques et les intersections de classes non quasi-analytiques.

Lemme 1.3.2. *[CC2] Soit M une suite à croissance modérée satisfaisant (H_6). Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout $a > 0$, il existe une constante $C_1(a)$ vérifiant*

$$|u_p| \leq C_1(a) M_p^a, \ \textit{pour tout } p \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Alors, il existe une suite M' admissible vérifiant

– *pour tout $a > 0$, il existe $C_2(a) > 0$ tel qu'on ait*
$$M'_p \leq C_2(a) M_p^a, \ \textit{pour tout } p \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$
– $|u_p| \leq A_M^p M'_p$, *pour tout $p \geq 1$.* (1.8)

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 1.3.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\phi_1, \ldots, \phi_p$ des fonctions appartenant à $\widehat{C_M}(U)$. Soit f une fonction de $\widehat{C_M}(U)$. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par*

$$u_k = \sup_{\substack{H\in\mathbb{N}^n, h=k \\ x\in U}} \left(\max\left(|D^H f(x)|, |D^H \phi_1(x)|, \ldots, |D^H \phi_p(x)|\right)\right).$$

Soit M' la suite admissible associée par le lemme 1.3.2 à la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. S'il existe un réel $\delta > 0$ tel que la fonction f appartienne à $(\phi_1, \ldots, \phi_p)\, C_{M'^\delta}(U)$, alors la fonction f appartient à l'idéal $(\phi_1, \ldots, \phi_p)\, \widehat{C_M}(U)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe donc une constante C et des fonctions $g_1, \ldots, g_p$ de $C_{M'^\delta, C}(U)$ telles qu'on ait $f = \sum_{i=1}^p g_i\phi_i$. Pour tout indice $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_{x\in U} |D^H g_i(x)| \leq \|g_i\|_{M'^\delta, 1} C^h {M'}^\delta_h h!.$$

En reprenant les propriétés des suites M et M', on conclut que, pour tout réel $a > 0$, on a

$$\sup_{x\in U} |D^H g_i(x)| \leq C_2\left(a\delta^{-1}\right) \|g_i\|_{M'^\delta, 1} C^h M^a_h h!.$$

Compte tenu de (1.5), on conclut que les fonctions $g_1, \ldots, g_p$ appartiennent à $\widehat{C_M}(U)$. Finalement, la fonction f est dans l'idéal $(\phi_1, \ldots, \phi_p)\, \widehat{C_M}(U)$. □

1.4 Jets de Whitney et extension de jets

Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Un **jet** F sur K est la donnée d'une famille $\{F_H\ ;\ H \in \mathbb{N}^n\}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$, on définit la L-ième dérivée du jet F par

$$D^L F = \{F_{H+L}\ ;\ H \in \mathbb{N}^n\}.$$

En particulier, à toute fonction g de classe C^∞ au voisinage de K, on peut associer le jet $\mathcal{J}(g) = \{D^H g\ ;\ H \in \mathbb{N}^n\}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout jet F sur K, tout point $b \in K$ et tout entier naturel j, le polynôme de Taylor de F est la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe

$$T_b^j F(x) = \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^n \\ i\leq j}} \frac{1}{I!}(x-b)^I F_I(b).$$

On a alors, pour tout multi-indice $H \in \mathbb{N}^n$ avec $h \leq j$,

$$D^H T_b^j F(x) = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i \leq j-h}} \frac{1}{I!}(x-b)^I F_{I+H}(b). \tag{1.9}$$

D'autre part, si g est une fonction définie au voisinage de K, on peut aussi définir le polynôme de Taylor de g d'ordre j par

$$T_b^j g(x) = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i \leq j}} \frac{1}{I!}(x-b)^I D^I g(b). \tag{1.10}$$

Alors, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ avec $h \leq j$, on a l'égalité

$$D^H T_b^j g(x) = T_b^{j-h}(D^H g)(x). \tag{1.11}$$

D'après le théorème classique d'extension de Whitney [M], [To], on a une relation étroite entre le caractère infiniment dérivable d'une fonction et les propriétés des polynômes de Taylor qui lui sont associés. D'une part, en ce qui concerne les fonctions non quasi-analytiques, on a le lemme suivant.

Lemme 1.4.1. *Soient V un fermé convexe de $\mathbb{R}^n$ et M une suite à croissance modérée. Soient C_0 un réel supérieur à 1 et g une fonction de $C_{M,C_0}(U)$ où U est un ouvert contenant V. Pour tout couple de points $(a,b) \in V^2$, tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $h \leq j$, on a*

$$|D^H g(a) - D^H T_b^j g(a)| \leq C_0 n^3 \|g\|_{M,C_0} d(a,b)^{j-h+1} \left(C_0 n^3\right)^j M_{j+1} h!.$$

Démonstration. Cette preuve utilise des arguments classiques. Compte tenu de (1.11), il suffit d'obtenir cette majoration pour $|D^H g(a) - T_b^{j-h}(D^H g)(a)|$. Pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $h < j$, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $j-h$ à la fonction $D^H g$, on obtient

$$D^H g(a) - T_b^{j-h}(D^H g)(a) = D^H g(a) - \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i \leq j-h}} \frac{(a-b)^I}{I!} D^{H+I} g(b).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |D^H g(a) - T_b^{j-h}(D^H g)(a)| &\leq \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i = j-h+1}} \sup_{c \in [a,b]} \left| \frac{D^{H+I} g(c)}{I!} \right| d(a,b)^{j-h+1} \\ &\leq d(a,b)^{j-h+1} \|g\|_{M,C_0} C_0^{j+1} M_{j+1} \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i = j-h+1}} \frac{(h+i+1)!}{I!}. \end{aligned}$$

On a de plus,

$$\frac{(h+i+1)!}{I!} \leq \frac{(h+i+1)!n^i}{i!} \leq h!n^{2h+2i+2}.$$

Finalement, on obtient

$$|D^H g(a) - T_b^j(D^H g)(a)| \leq d(a,b)^{j-h+1} \|g\|_{M,C_0} C_0^{j+1} M_{j+1} n^{3(j+1)} h!.$$

D'autre part, si $h = j$, on a

$$\begin{aligned}|D^H g(a) - T_b^j(D^H g)(a)| &= |D^H g(a) - D^H g(b)| \\ &\leq \|g\|_{M,C_0} C_0^{h+1} M_{h+1} (h+1)! d(a,b) \\ &\leq d(a,b)^{j-h+1} \|g\|_{M,C_0} C_0^{j+1} M_{j+1} n^{3(j+1)} h!,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 1.4.2. Soient K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, F un jet sur K et C_0 une constante vérifiant $C_0 > 0$. Le jet F est **un jet de Whitney de classe** J_{M,C_0} sur K, s'il existe une constante $C \geq 1$, telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées.
$(JW1)$ pour tout multi-indice $J \in \mathbb{N}^n$ et tout point $x \in K$, on a

$$|F_J(x)| \leq C C_0^j j! M_j,$$

$(JW2)$ pour tout entier naturel j et tout $H \in \mathbb{N}^n$ avec $h \leq j$, on a, pour tout $(a,b) \in K^2$,

$$|F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| \leq C C_0^{j+1} h! M_{j+1} d(a,b)^{j-h+1}.$$

On pose $\|F\|_{M,C_0} = \min\{C \geq 1 \ ; \ C \text{ vérifie } (JW1) \text{ et } (JW2)\}$. Il existe un théorème d'extension de Whitney dans le cadre des classes de fonctions non quasi-analytiques.

Théorème 1.4.3. *[CC1](11)*
Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et F un jet sur K. Si F est un jet de Whitney de classe J_M sur K, alors il existe une fonction f de classe C_{M^2} sur $\mathbb{R}^n$ et dont le jet sur K coïncide avec F.

Remarque 1.4.4. La remarque 12 de [CC1] donne également l'existence de constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de K et de M telles que, si F appartient à $J_{M,C_0}(K)$, on ait

$$\|f\|_{M^2,C_0C_1} \leq C_2 \|F\|_{M,C_0}.$$

1.5 Espaces de Banach de séries formelles

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach commutative unitaire munie de la norme $\| \ \|_{\mathcal{B}}$. On note $\mathcal{B}[[X]]$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathcal{B}$. Soit M une suite vérifiant les propriétés (H_1) et (H_2). Pour toute constante $C_0 \geq 1$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{B}[[X]]_{M,C_0} = \left\{ F = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} F_H X^H \ ; \ \sup_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\|F_H\|_{\mathcal{B}}}{C_0^h M_h} < \infty \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{B}[[X]]_{M,C_0}$ est un espace de Banach pour la norme $\| \ \|_{M,C_0}$ définie par

$$\|F\|_{M,C_0} = \sup_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\|F_H\|_{\mathcal{B}}}{C_0^h M_h}$$

(le fait que la même notation soit utilisée pour définir deux normes différentes n'est pas gênant dans la mesure où les objets auxquels elle s'applique sont de nature bien distincte).

Il est possible de former des algèbres de Banach de séries formelles en considérant la norme $\| \ \|_{\underline{\lambda}}^{(M)}$ définie, pour tout multi-rayon $\underline{\lambda}$, par

$$\|F\|_{\underline{\lambda}}^{(M)} = \sum_{L \in \mathbb{N}^n} \frac{\|F_H\|_{\mathcal{B}}}{M_h} \underline{\lambda}^H.$$

D'après [GR](1.1 Satz 1 p. 16), l'ensemble

$$\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda}) = \{F \in \mathbb{R}[[X]] \ ; \ \|F\|_{\underline{\lambda}}^{(M)} < \infty\}$$

est une algèbre de Banach pour la norme $\| \ \|_{\underline{\lambda}}^{(M)}$.

Les normes $\| \ \|_{M,C_0}$ et $\| \ \|_{\underline{\lambda}}^{(M)}$ sont comparables. En effet, si on définit le n-uplet $\underline{1} = (1, \ldots, 1)$, elles sont liées par le lemme suivant.

Lemme 1.5.1. *[Mo1](I.3.2 p. 28)*
Soit F une série formelle telle que $\|F\|_{M,C_0} < \infty$. Alors, pour tout $r < \frac{1}{nC_0}$ où n est la dimension de l'espace, on a

$$\|F\|_{M,\frac{1}{r}} \leq \|F\|_{r\underline{1}}^{(M)} \leq \frac{1}{1 - nrC_0} \|F\|_{M,C_0}. \tag{1.12}$$

D'autre part, des relations (1.4), on déduit trivialement le lemme suivant.

Lemme 1.5.2. *Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant les propriétés (H_1),(H_2) et (H_4). Soit k un entier naturel. Il existe des constantes*

$d_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 1$ telles que, pour tout multi-rayon $\underline{\lambda}$ et toute série formelle $F \in \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda})$, on ait les inégalités

$$\|F\|_{\underline{\lambda}}^{(M)} \leq d_1 \|F\|_{d_2\underline{\lambda}}^{(M_{+k})}$$

et

$$\|F\|_{\underline{\lambda}}^{(M_{-k})} \leq d_1 \|F\|_{d_2\underline{\lambda}}^{(M)}.$$

Ultérieurement, on devra considérer la norme d'une même série pour différentes algèbres de Banach $\mathcal{B}(M, \underline{\lambda})$. On adopte donc une notation pour la norme précisant l'algèbre utilisée. Ainsi, on dit que la série formelle F appartient à $\mathcal{B}[[X]]_{\lambda}^{(M)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, si la valeur

$$\|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} := \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\|F_H\|_{\mathcal{B}}}{M_h} \lambda^h$$

est finie.

Exemple 1.5.3. Si $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, on a

$$\|F\|_{(\lambda,\mathbb{R})}^{(M,.)} := \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{|F_H|}{M_h} \lambda^h = \|F\|_{\lambda\underline{1}}^{(M)}.$$

Exemple 1.5.4. Si $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\{f \in C^0(U) \ ; \ \|f\|_\infty := \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty\}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$, on note $\| \ \|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} = \| \ \|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)}$. On a donc

$$\|F\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\sup_{x \in U} |F_H(x)|}{M_h} \lambda^h.$$

De la même manière qu'on a défini une norme $\| \ \|_{M,C_0}$ pour les fonctions et pour les séries formelles, on peut adapter la norme $\| \ \|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)}$ aux fonctions f de $C^\infty(U)$ en posant

$$\|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\sup_{x \in U} |D^H f(x)|}{H! M_h} \lambda^h.$$

Etant donné un champ de séries formelles à coefficients de classe C^∞, $x \mapsto G(x, Y)$, on distinguera la série formelle $G(a, Y)$ à a fixé, du champ de séries formelles en désignant par $G(\cdot_x, Y)$, le champ, $\|G(\cdot_x, \cdot_Y)\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)}$ sa norme et par $\|G(a, \cdot_Y)\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)}$ la norme de la série $G(a, Y)$. En remarquant que les coefficients du champ de séries formelles $\overline{T}_{\cdot_x} f \ : \ x \mapsto \overline{T}_x f$ sont des fonctions de $C^\infty(U)$ (les fonctions $x \mapsto \frac{D^H f(x)}{H!}$), on obtient l'égalité

$$\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} = \|\overline{T}_{\cdot_x} f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}.$$

On définit l'ensemble $C^{(M)}_\lambda(U)$ par

$$C^{(M)}_\lambda(U) = \{f \in C^\infty(U) \ ; \ \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} < \infty\}.$$

C'est une algèbre de Banach pour la norme $\| \ \|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}$. En appliquant le lemme 1.5.1 à la série

$$F(X) = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \sup_{x \in U} \frac{|D^H f(x)|}{H!} X^H$$

avec $r = (2nC_0)^{-1}$, on montre que, pour toute fonction $f \in C_{M,C_0}$, on a

$$\|f\|^{(M,.)}_{((2nC_0)^{-1},\infty)} \leq 2\|f\|_{M,C_0}. \tag{1.13}$$

D'autre part, l'inégalité triviale $\|F\|_{M,\lambda^{-1}} \leq \|F\|^{(M)}_{\lambda\underline{1}}$ implique, pour toute fonction $f \in C^{(M)}_\lambda(U)$, $\lambda \in]0,1]$,

$$\|f\|_{M,\lambda^{-1}} \leq \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}. \tag{1.14}$$

Remarque 1.5.5. Ceci induit l'égalité des ensembles $C^{(M)}(U) = \bigcup_{\lambda \in]0,1]} C^{(M)}_\lambda(U)$ et $C_M(U)$.

Soit N une autre suite à croissance modérée. On peut considérer une série formelle F à coefficients dans $C^{(N)}_\tau(U)$ et appliquer la norme $\| \ \|^{(M)}_{\lambda\underline{1}}$ à la série $\sum_{H \in \mathbb{N}^n} \|F_H\|^{(N,.)}_{(\tau,\infty)} X^H$. On définit ainsi une norme sur $C^{(N)}_\tau(U)[[X]]$, notée $\| \ \|^{(M,N)}_{\lambda,\tau}$. On a

$$\|F\|^{(M,N)}_{\lambda,\tau} = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \|F_H\|^{(N,.)}_{(\tau,\infty)} \frac{\lambda^h}{M_h}.$$

On définit alors l'algèbre de Banach

$$C^{(N)}_\tau(U)[[X]]^{(M)}_\lambda = \{F \in C^{(N)}_\tau(U)[[X]] \ ; \ \|F\|^{(M,N)}_{\lambda,\tau} < \infty\}.$$

Cette algèbre intervient naturellement dans l'étude des classes de Carleman comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.5.6. *Si une fonction f appartient à $C_\lambda^{(M)}(U)$, alors le champ de séries formelles $\overline{T}_{\cdot_x} f$ appartient à $C^{(M)}_{\frac{\lambda}{nA_M}}(U)[[X]]^{(M)}_{\frac{\lambda}{2n^2A_M}}$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $2\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}$.*

Démonstration. Dans cette preuve, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, on pose $f_H = \frac{D^H f}{H!}$. Par définition de $C_\lambda^{(M)}(U)$, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ et tout $x \in U$, on a

$$|f_H(x)| \leq \frac{M_h}{\lambda^h}\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|f_H\|^{(M,.)}_{(\lambda',\infty)} &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n}\sup_{x\in U}\frac{|D^{J+H}f(x)|}{J!H!M_j}\lambda'^j\\ &= \sum_{J\in\mathbb{N}^n}\sup_{x\in U}\frac{|D^{J+H}f(x)|\lambda^{j+h}}{(J+H)!M_{j+h}}\frac{\lambda'^j M_{j+h}(J+H)!}{\lambda^{j+h}M_jJ!H!}.\end{aligned}$$

Si $\lambda' = \frac{\lambda}{nA_M}$, on obtient $\|f_H\|^{(M,.)}_{(\lambda',\infty)} \leq \frac{M_h(nA_M)^h}{\lambda^h}\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{H\in\mathbb{N}^n}\|f_H\|^{(M,.)}_{\left(\frac{\lambda}{nA_M},\infty\right)}\frac{\lambda''^h}{M_h} &\leq \sum_{H\in\mathbb{N}^n}\frac{M_h(nA_M)^h}{\lambda^h}\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}\frac{\lambda''^h}{M_h}\\ &\leq \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}\sum_{H\in\mathbb{N}^n}\frac{(\lambda'' nA_M)^h}{\lambda^h}.\end{aligned}$$

En prenant $\lambda'' = \frac{\lambda}{2n^2A_M}$, on obtient le résultat. □

Remarque 1.5.7. En utilisant les mêmes arguments, on montre le lemme suivant.

Lemme 1.5.8. *Soit F une série formelle de $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_\lambda$. Alors, pour tout $L \in \mathbb{N}^n$, la série $D^L F$ appartient à $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_{\frac{\lambda}{nA_M}}$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $\frac{l!M_l(nA_M)^l}{\lambda^l}\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}$.*

Etant donné un n-uplet de séries formelles, $F = (F^1, \ldots, F^n)$, on pose

$$\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})} = \max_{i=1,\ldots,n}\|F^i\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}.$$

1.6 Inégalité de Łojasiewicz et séparation régulière

Définition 1.6.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient K et L deux fermés de U et f une fonction définie sur U. On dit que la fonction f vérifie $Ł(K, L)$, ou que f **vérifie sur L une inégalité de Łojasiewicz par rapport à** K, s'il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles qu'on ait, pour tout $x \in L$,

$$|f(x)| \geq Cd(x, K)^\alpha.$$

Définition 1.6.2. Soient M une suite à croissance modérée et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient un idéal de type fini de $C_M(U)$ et $V(I)$ l'ensemble de ses zéros. On dit que I est un idéal de Łojasiewicz s'il existe une fonction f dans I vérifiant $Ł(V(I), U)$.

Remarque 1.6.3. Dans ce cas, si $f_1, \ldots, f_p$ est un système de générateurs de I, la fonction $\sum_{i=1}^p f_i^2$ vérifie $Ł(V(I), U)$.

Dans ce travail, on utilise les inégalités générales de Łojasiewicz (voir, par exemple, [BR]) sous la forme suivante.

Lemme 1.6.4. *Soient L un compact sous-analytique et g une fonction analytique au voisinage de L. Si on pose $K = g^{-1}(\{0\})$, alors la restriction $g_{|L}$ vérifie sur L une inégalité de Łojasiewicz par rapport à K.*

Un lemme très proche existe concernant la séparation régulière d'ensembles sous-analytiques [BR].

Lemme 1.6.5. *Soient A et B deux ensembles sous-analytiques fermés dans $\mathbb{R}^n$ et soit K un compact sous-analytique. Il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que, pour tout $x \in K$, on ait*

$$d(x, A) + d(x, B) \geq Cd(x, A \cap B)^\alpha.$$

1.7 Ordre total sur $\mathbb{N}^n$

Sauf mention explicite, l'ensemble $\mathbb{N}^n$ sera muni de l'ordre total défini de la mani'ere suivante.
Etant donnés H et K deux n-uplets, on a $H < K$ si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

$$\begin{aligned} & |H| < |K| \\ \text{ou} \quad & |H| = |K| \text{ et il existe un entier } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que, pour tout} \\ & \qquad j \in \{i+1, \ldots, n\}, \text{ on ait } h_j = k_j \text{ et } h_i < k_i. \end{aligned}$$

La notation $H \leq K$ signifie que H et K vérifient $H = K$ ou $H < K$.

Exemple 1.7.1. Pour $n = 3$, on a les inégalités

$$(0,0,1) < (2,0,0) < (1,1,0) < (0,2,0) < (1,0,1) < (0,1,1) < (0,0,2) < (3,0,0).$$

On dira alors que les n-uplets sont rangés par **ordre lexicographique inverse** (ordre L-I).

Il existe une autre méthode pour construire un ordre total sur $\mathbb{N}^n$. Soit $\mathcal{L}$ une forme linéaire dont les coefficients sont strictement positifs et indépendants sur $\mathbb{Z}$. Etant donnés H et K deux n-uplets, on dit que H est $\mathcal{L}$-inférieur à K et on note $H \leq_{\mathcal{L}} K$, si on a $\mathcal{L}(H) \leq \mathcal{L}(K)$. La forme linéaire $\mathcal{L}$ définit alors un ordre total sur $\mathbb{N}^n$. On définit $\mathcal{L}_{\max}$ comme étant le plus grand des coefficients de la forme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{\min}$, le plus petit.

Lemme 1.7.2. *Pour tout $m_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe une forme linéaire $\mathcal{L}$ dont les coefficients sont strictement positifs et indépendants sur $\mathbb{Z}$, telle que, pour tout couple (H, K) de n-uplets, avec $|K| \leq m_0$, on ait*

$$\mathcal{L}(H) \leq \mathcal{L}(K) \quad \Leftrightarrow \quad H \leq K.$$

On dira alors que l'ordre induit par $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{N}^n$ coïncide avec l'ordre L-I jusqu'à la longueur m_0.

Démonstration. On note $(\mathcal{L}_i)_{i=1,\ldots,n}$, les coefficients de la forme $\mathcal{L}$. Il n'est pas difficile de voir que l'ordre induit par $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{N}^n$ coïncide avec l'ordre L-I jusqu'à la longueur m_0 si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2 < \ldots < \mathcal{L}_n, \\ & \frac{\mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_1} < \frac{m_0+1}{m_0}, \\ \text{et, } \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad & m_0 \mathcal{L}_j < (m_0 - 1)\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{j+1}. \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{L}_1 = 1$. La suite $S = (2^{\frac{1}{2^i}})_{i \in \mathbb{N}}$ est constituée d'éléments indépendants sur $\mathbb{Z}$ et converge par valeurs supérieures vers 1. On choisit alors les coefficients de $\mathcal{L}$ de la manière suivante : on fixe $\mathcal{L}_n$ appartenant à $S \cap \left]1, \frac{m_0+1}{m_0}\right[$. On détermine ensuite les coefficients par indice décroissant entre $n-1$ et 2, en choisissant $\mathcal{L}_j$ appartenant à $S \cap \left]1, \frac{(m_0-1)+\mathcal{L}_{j+1}}{m_0}\right[$. □

Exemple 1.7.3. Si $n = 3$ et $m_0 = 3$, l'ordre L-I ordonne les 3-uplets de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(0,0,0) <&(1,0,0) < (0,1,0) < (0,0,1) < (2,0,0)\\ &< (1,1,0) < (0,2,0) < (1,0,1) \quad (1.15)\\ &< (0,1,1) < (0,0,2) < (3,0,0) \quad (1.16)\\ &< (2,1,0) < (1,2,0) < (0,3,0) < (2,0,1) \quad (1.17)\\ &< (1,1,1) < (0,2,1) < (1,0,2) \quad (1.18)\\ &< (0,1,2) < (0,0,3) < (4,0,0). \quad (1.19)\end{aligned}$$

L'ordre induit par une forme linéaire $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ordre L-I jusqu'à la longueur 3 seulement si cette suite d'inégalités strictes est préservée. La première ligne implique les relations

$$0 < \mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2 < \mathcal{L}_3 \quad (1.20)$$

$$\text{et } \mathcal{L}_3 < 2\mathcal{L}_1. \quad (1.21)$$

Si les inégalités (1.20) et (1.21) sont vérifiées, seule la dernière inégalité de chacune des lignes (1.15) à (1.19) apporte une contrainte supplémentaire.
Ainsi de la ligne (1.15), on déduit $2\mathcal{L}_2 < \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3$,
de la ligne (1.16), $2\mathcal{L}_3 < 3\mathcal{L}_1$,
de la ligne (1.17), $3\mathcal{L}_2 < 2\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3$,
de la ligne (1.18), $2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \leq \mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_3$
et de la ligne (1.19), $3\mathcal{L}_3 < 4\mathcal{L}_1$.
On pose alors $\mathcal{L}_1 = 1$, $\mathcal{L}_3 = 2^{\frac{1}{4}} < \frac{4}{3}$, puis

$$\mathcal{L}_2 = 2^{\frac{1}{16}} < \frac{2}{3} + \frac{\mathcal{L}_3}{3}.$$

Finalement, si on a deux 3-uplets H et K tels que $|H| \leq 3$ et $|K| \leq 3$, on a l'équivalence

$$\mathcal{L}(H) \leq \mathcal{L}(K) \quad \Leftrightarrow \quad H \leq K. \quad (1.22)$$

D'autre part, si on a un troisième 3-uplet H' tel que $\mathcal{L}(H') \leq \mathcal{L}(K)$, alors la longueur de H' est majorée par $\mathcal{L}(H')$. On en déduit

$$|H'| \leq \mathcal{L}(H') \leq \mathcal{L}(K) < \mathcal{L}(4,0,0) = 4.$$

Ainsi, la longueur de H' est inférieure à 3 et, de (1.22), on déduit la relation $H' \leq K$. On a donc montré qu'aucun 3-uplet de longueur strictement supérieure à 3 ne s'intercale entre deux 3-uplets de longueur inférieure à 3. En conclusion, l'ordre induit par la forme $\mathcal{L}$ ainsi définie coïncide avec l'ordre L-I jusqu'à la longueur 3.
Par contre, au delà de la longueur 3, l'ordre L-I n'est plus respecté, comme le montrent les inégalités

$$\mathcal{L}\left((1,0,5)\right) < \mathcal{L}\left((0,6,0)\right) \text{et } \mathcal{L}\left((7,0,0)\right) < \mathcal{L}\left((0,0,6)\right).$$

1.8 Diagramme des exposants initiaux

Un ordre total sur $\mathbb{N}^n$ permet d'ordonner les monômes d'une série formelle à n indéterminées. Sauf mention explicite, l'ordre utilisé pour les n-uplets sera toujours l'ordre lexicographique inverse.
Soit F une série formelle s'écrivant sous la forme

$$F(X) = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} F_H X^H.$$

On appelle **support de** F, l'ensemble

$$\mathrm{supp}(F) = \{H \in \mathbb{N}^n, F_H \neq 0\}.$$

On définit l'**exposant initial** de F, noté Exp F, comme étant le plus petit élément de $\mathrm{supp}(F)$ pour l'ordre L-I. Alors le **coefficient initial** de F, noté Init F, est $F_{\mathrm{Exp}\ F}$ et le **monôme initial** de F est $(\mathrm{Init}\ F)X^{\mathrm{Exp}\ F}$. On appellera **ordre** de F la valeur $|\mathrm{Exp}\ F|$. On remarque que si $n = 1$, l'ordre de F coïncide avec l'exposant initial.

Exemple 1.8.1. Si $n = 3$, le polynôme $P(X, Y, Z) = X(Y + X + 1)(2Z - X^2)$ se développe, en classant les monômes par ordre croissant, sous la forme

$$P(X, Y, Z) = 2XZ - X^3 + 2X^2Z + 2XYZ - X^4 - X^3Y.$$

Ainsi, son support est

$$\mathrm{supp}(P) = \{(1, 0, 1), (3, 0, 0), (2, 0, 1), (1, 1, 1), (4, 0, 0), (3, 1, 0)\}.$$

On a Exp $P = (1, 0, 1)$, Init $P = 2$, le monôme initial de P est $2XZ$ et l'ordre vaut 2.

On s'intéresse désormais aux idéaux de l'anneau des séries formelles à n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$. On pose $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Soit I un idéal dans cet anneau. Le **diagramme des exposants initiaux** de I est l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{Exp}\ F, F \in I\}.$$

$\mathcal{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$. De plus, si une série formelle F appartient à I alors, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, la série $X^H F$ appartient aussi à I et on a Exp $(X^H F) = H + \mathrm{Exp}\ F$. On en déduit l'égalité

$$\mathcal{N} + \mathbb{N}^n = \mathcal{N}.$$

Nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}^n$ satisfaisant la propriété

$$\mathcal{N} + \mathbb{N}^n = \mathcal{N}$$

est un **diagramme** dans $\mathbb{N}^n$. Etant donné un diagramme $\mathcal{N}$, il existe une unique famille de n-uplets $(\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots,t\}}$ telle qu'on ait

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{t} (\alpha_i + \mathbb{N}^n) \tag{1.23}$$

et que t soit minimal pour l'égalité (1.23). Les α_i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, sont appelés **sommets du diagramme** $\mathcal{N}$. Par la suite, on supposera que les sommets d'un diagramme sont toujours rangés de manière croissante pour l'ordre L-I. On définit l'**ordre du diagramme** $\mathcal{N}$, noté $|\mathcal{N}|$, comme étant la valeur $\max_{j\in\{1,\ldots,t\}} |\alpha_j|$.
Les sommets permettent de définir un **ordre total sur l'ensemble des diagrammes** dans $\mathbb{N}^n$. Ainsi, étant donnés deux diagrammes $\mathcal{N}^1$ et $\mathcal{N}^2$ dont les sommets sont respectivement $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{t_1}^1$ et $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_{t_2}^2$, on a $\mathcal{N}^2 \prec \mathcal{N}^1$ s'il existe un entier $t \leq \min(t_1, t_2)$ tel que, pour tout $i \leq t$, on ait $\alpha_i^1 = \alpha_i^2$ et l'une des conditions $t = t_1 < t_2$ ou $\alpha_{t+1}^1 > \alpha_{t+1}^2$. On écrit $\mathcal{N}^1 \preccurlyeq \mathcal{N}^2$ si les diagrammes vérifient $\mathcal{N}^2 \prec \mathcal{N}^1$ ou $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}^1$.

Exemple 1.8.2. Avec $n = 3$, si on considère les diagrammes

$$\mathcal{N}^1 = \left((0,1,0) + \mathbb{N}^3\right) \cup \left((0,0,2) + \mathbb{N}^3\right), \qquad \mathcal{N}^2 = \left((1,0,0) + \mathbb{N}^3\right), \tag{1.24}$$

$$\mathcal{N}^3 = \left((0,1,0) + \mathbb{N}^3\right) \cup \left((1,0,1) + \mathbb{N}^3\right) \text{ et } \quad \mathcal{N}^4 = \left((0,1,0) + \mathbb{N}^3\right), \tag{1.25}$$

on a les inégalités

$$\mathcal{N}^2 \prec \mathcal{N}^3 \prec \mathcal{N}^1 \prec \mathcal{N}^4.$$

En effet, lorsqu'on compare
- $\mathcal{N}^2$ et $\mathcal{N}^3$, on a $t = 0$ et $\alpha_1^2 < \alpha_1^3$,
- $\mathcal{N}^3$ et $\mathcal{N}^1$, on a $t = 1$ et $\alpha_2^3 < \alpha_2^1$,
- $\mathcal{N}^1$ et $\mathcal{N}^4$, on a $t = 1 = t_4 < t_1$.

Remarque 1.8.3. L'inclusion $\mathcal{N}^1 \subsetneq \mathcal{N}^2$ induit l'inégalité $\mathcal{N}^2 \prec \mathcal{N}^1$.

Etant donnée $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ une suite croissante de n-uplets, on appelle **décomposition de** $\mathbb{N}^n$ **associée à** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, la famille $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_t, \Lambda_C)$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}^n$, construite de la manière suivante.
On pose $\Lambda_1 = \alpha_1 + \mathbb{N}^n$ et pour tout $i \in \{2, \ldots, t\}$,

$$\Lambda_i = (\alpha_i + \mathbb{N}^n) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \Lambda_j \right).$$

On pose $\Lambda_C = \mathbb{N}^n \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{t} \Lambda_j \right)$. Il est possible que, pour certains $j \in \{1, \ldots, t\}$, l'ensemble Λ_j soit vide. Cependant si la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ est l'ensemble des sommets d'un diagramme $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{N}^n$, avec $\mathcal{N} \neq \mathbb{N}^n$, cette décomposition est une partition de $\mathbb{N}^n$.

Exemple 1.8.4. Pour $n = 2$, la figure 1.1 représente les décompositions associées aux familles $((2,0), (1,1), (0,3))$ et $((5,1), (4,2), (2,4))$ sont :

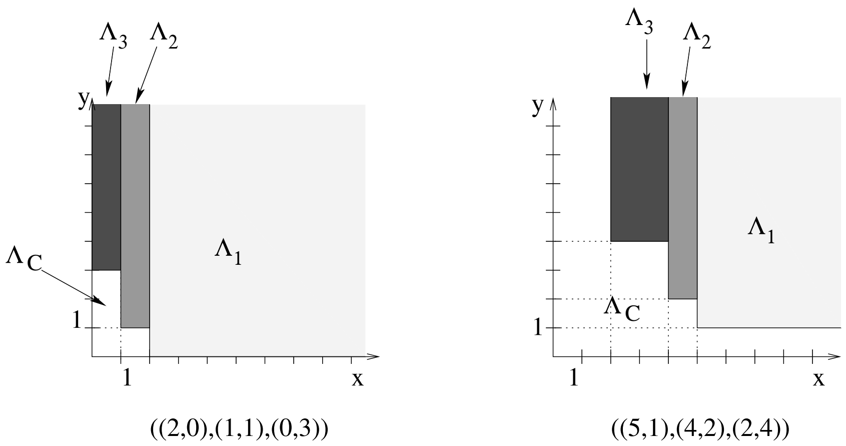

FIG. 1.1 – Exemples de décompositions

Lemme 1.8.5. *Toute suite de diagrammes croissante pour l'inclusion est stationnaire.*

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite de diagrammes

$$\mathcal{N}_1 \subsetneq \mathcal{N}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{N}_p \subsetneq \cdots$$

est strictement croissante. On note P l'ensemble de ses indices. On veut montrer que P est fini.
Soit $\mathcal{N}_1'$ le plus petit diagramme pour l'inclusion contenant $\mathcal{N}_1$ et n'ayant qu'un seul sommet.

Si on note β_1' le sommet de $\mathcal{N}_1'$, alors, pour tout indice $i \in \{1, \ldots, n\}$, la i-ème coordonnée de β_1' est la plus petite des i-èmes coordonnées des sommets de $\mathcal{N}_1$. Soit $B_1 = \{p \in \mathbb{N} \ ; \ \mathcal{N}_p \subset \mathcal{N}'_1\}$, cet ensemble est de la forme $B_1 = \{1, \ldots, i_1\}$. On note $\mathcal{N}_2'$ le plus petit diagramme pour l'inclusion contenant $\mathcal{N}_{i_1+1}$ et on pose $B_2 = \{p \in \mathbb{N} \ ; \ \mathcal{N}_p \subset \mathcal{N}'_2\} = \{i_1 + 1, \ldots, i_2\}$.

En réitérant, on construit des ensembles B_q de cardinal fini réalisant une partition de P. De plus, à chaque B_q est associé un diagramme $\mathcal{N}'_q$ n'ayant qu'un sommet et la suite de ces diagrammes vérifie les inclusions strictes

$$\mathcal{N}'_1 \subsetneq \mathcal{N}'_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{N}'_q \subsetneq \cdots .$$

Or, il est immédiat que toute suite de diagrammes, n'ayant qu'un sommet et strictement croissante pour l'inclusion, est finie. On en déduit que les ensembles B_q sont en nombre fini. Il en est donc de même pour leur réunion, c'est-à-dire pour P. □

1.9 Division à la Hironaka

Un outil essentiel dans la démarche de [BM1, BM2, Mo3] est la possibilité d'effectuer une division par un idéal dans l'anneau des séries formelles. Ainsi dans [BM1, BM2] est utilisée une division appelée **division à la Hironaka**, définie par le théorème suivant.

Théorème 1.9.1. *[G](§2), [AHV](Ch.1, §1), [Br]*
Soient $G_1, \ldots, G_p$ des séries formelles indexées de telle sorte que la suite $\operatorname{Exp} G_1, \ldots, \operatorname{Exp} G_p$ soit croissante pour l'ordre L-I. Soit $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \Lambda_C)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée à $(\operatorname{Exp} G_1, \ldots, \operatorname{Exp} G_p)$. Pour toute série formelle F, il existe des uniques séries $Q_1, \ldots, Q_p$ et R telles qu'on ait

$$\operatorname{Exp} G_i + \operatorname{supp} Q_i \subset \Lambda_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \tag{1.26}$$

$$\operatorname{supp} R \subset \Lambda_C, \tag{1.27}$$

et
$$F = \sum_{i=1}^{p} Q_i G_i + R. \tag{1.28}$$

Ce théorème peut être démontré de manière algorithmique. Cependant, c'est aussi un cas particulier d'une division basée sur l'ordre induit par une forme linéaire $\mathcal{L}$. Plus précisément, cette division, appelée **$\mathcal{L}$-division**, est définie par le théorème suivant.

Théorème 1.9.2. *[G](§2), [AHV](Ch.1, §1), [Br]*
Soient

- *$\mathcal{L}$ une forme linéaire à coefficients strictement positifs et indépendants sur $\mathbb{Z}$,*
- *$\beta_1, \ldots, \beta_q$ les sommets d'un diagramme $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{N}^n$,*

– *$G_1, \ldots, G_p$ des séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$, vérifiant, pour tout indice $j \in \{1, \ldots, p\}$,*

$$\begin{array}{ll} & (G_j)_{\beta_j} \neq 0, \\ & (G_j)_H = 0, \qquad \forall H \in \mathbb{N}^n,\ H \neq \beta_j,\ \mathcal{L}(H) < \mathcal{L}(\beta_j), \\ \textit{et} & (G_j)_H = 0, \qquad \forall H \in \mathbb{N}^n,\ |H| < |\beta_j|. \end{array}$$

Pour toute série formelle F, il existe des uniques séries $Q_1, \ldots, Q_p$ et R telles qu'on ait

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{Exp}\ G_i + \mathrm{supp}\ Q_i \subset \Lambda_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \\ & \mathrm{supp}\ R \subset \Lambda_C \\ \textit{et} & F = \sum_{i=1}^{p} Q_i G_i + R. \end{array}$$

Si la forme linéaire $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ordre lexicographique inverse jusqu'à la longueur $\max_{i=1,\ldots,p} (\mathrm{Exp}\ G_i)$, on obtient la division à la Hironaka.
Dans le cas de la division à la Hironaka comme dans celui d'une $\mathcal{L}$-division, le mot **quotients** désignera les séries Q_j, $j \in \{1, \ldots, p\}$ obtenues et le mot **reste** désignera la série R.
Dans ce travail, on utilisera également une version plus faible de la division à la Hironaka qu'on appellera **division faible à la Hironaka** : il s'agit d'associer à une série formelle F, des séries $Q_1, \ldots, Q_p$ et R satisfaisant (1.27), (1.28) et une condition (1.29), plus faible que (1.26), donnée par

$$\mathrm{Exp}\ G_i + \mathrm{Exp}\ Q_i \in \Lambda_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\}. \tag{1.29}$$

Remarque 1.9.3. La division à la Hironaka est aussi une division faible à la Hironaka. On déduit donc du théorème 1.9.1 qu'il est possible d'effectuer une division faible de n'importe quelle série formelle.

Remarque 1.9.4. Il n'y a pas unicité de la division faible à la Hironaka. En effet, si on considére la division de la série $F(X,Y) = XY^3 + Y^2 + Y$ par les séries X et Y^2, on a les égalités

$$\begin{array}{ll} & F(X,Y) = X(Y^3) + Y^2 \times 1 + Y \qquad \text{(division à la Hironaka)} \\ \text{et} & F(X,Y) = X \times 0 + Y^2(1 + XY) + Y. \end{array}$$

Pour alléger les énoncés ultérieurs, on dira qu'un p-uplet de séries formelles $(G_1, \ldots, G_p)$ est une **famille de diviseurs à la Hironaka** si les séries G_i sont ordonnées de telle sorte que la suite $\mathrm{Exp}\ G_1, \ldots, \mathrm{Exp}\ G_p$ soit croissante pour l'ordre L-I. Dans ce cas, β_j, $j \in \{1, \ldots, p\}$, désignera le n-uplet Exp G_j et $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \Lambda_C)$, la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée à la famille $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$.

Les propriétés des quotients et reste de la division faible à la Hironaka permettent de comparer leur exposant initial avec celui de la série F.

Lemme 1.9.5. *Soient F une série formelle et $(G_1, \ldots, G_p)$ une famille de diviseurs à la Hironaka. Les quotients $Q_1, \ldots, Q_p$ et le reste R d'une division faible à la Hironaka de F par $(G_1, \ldots, G_p)$ vérifient*

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad & \text{Exp } Q_i G_i \geq \text{Exp } F \\ \textit{et} \quad & \text{Exp } R \geq \text{Exp } F. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour cette preuve, on pose $H_0 = R$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $H_i = Q_i G_i$. Ainsi la série F s'écrit sous la forme

$$F = \sum_{i=0}^{p} H_i \tag{1.30}$$

avec Exp $H_0 \in \Lambda_C$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, Exp $H_i \in \Lambda_i$.
Soit $\mu = \min_{i \in \{0, \ldots, p\}}$ Exp H_i. On veut montrer que μ est supérieur à Exp F. Il existe un indice i_0 tel que $\mu =$ Exp H_{i_0}. D'après la définition de Exp, on a aussi

$$\mu = \min_{i \in \{0, \ldots, p\}} (\text{supp } H_i).$$

Si on a $\mu <$ Exp F, l'équation (1.30) implique qu'il existe un indice i_1, distinct de i_0, tel que le support de la série H_{i_1} contienne μ. Cela entraîne l'égalité $\mu = \min(\text{supp } H_{i_1}) = \text{Exp } H_{i_1}$.
On en déduit alors la relation Exp $H_{i_0} =$ Exp H_{i_1}. Cette relation est impossible car les ensembles Λ_i et Λ_C sont deux à deux disjoints. On conclut que μ est supérieur à Exp F. De plus, la relation $\mu \leq$ Exp F est évidente. On a donc $\mu =$ Exp F. □

Les théorèmes de division énoncés ci-dessus sont purement formels. On peut cependant s'intéresser au cas particulier où les séries considérées sont les développements de fonctions infiniment dérivables : soit Z un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dira qu'un p-uplet $(g_1, \ldots, g_p)$ de fonctions de classe C^∞ au voisinage de Z, est une **famille de diviseurs C^∞ sur Z à la Hironaka**, s'il existe des n-uplets $\beta_1, \ldots, \beta_p$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned} & \forall a \in Z, \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \text{Exp } \overline{T}_a g_j = \beta_j \\ \text{et} \quad & \beta_1 < \cdots < \beta_p. \end{aligned}$$

Ceci signifie que, pour tout point $a \in Z$, le p-uplet de séries $(\overline{T}_a g_1, \dots, \overline{T}_a g_p)$ est une famille ordonnée de diviseurs à la Hironaka et que les n-uplets associés ne dépendent pas du point a. Sous ces hypothèses, étant donnée une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage V de Z, on dit qu'on peut effectuer, **dans V, une division à la Hironaka sur Z de f par la famille** $(g_1, \dots, g_p)$, s'il existe $p+1$ fonctions $q_1, \dots, q_p$ et r, de classe C^∞ sur V, telles qu'on ait, pour tout point $a \in Z$,

– $\overline{T}_a f = \sum_{j=1}^{p} \overline{T}_a q_j \overline{T}_a g_j + \overline{T}_a r$,

– *pour tout* $j \in \{1, \dots, p\}$, $\beta_j + \operatorname{supp} \overline{T}_a q_j \subset \Lambda_j$ *et* $\operatorname{supp} \overline{T}_a r \subset \Lambda_C$.

On désigne par **quotients sur** Z, les fonctions $q_1, \dots, q_p$ et **reste sur** Z la fonction r.

1.10 Bases standards formelles, bases standards d'un idéal de fonctions sur un ensemble U'

Soient I un idéal de séries formelles et $\mathcal{N}(I)$ le diagramme des exposants initiaux de I. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ les sommets de $\mathcal{N}(I)$. D'après la définition des exposants initiaux et des sommets, il existe des séries formelles $G_1, \dots, G_t$ appartenant à I telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on ait $\operatorname{Exp} G_i = \alpha_i$. En particulier, on a $\mathcal{N}(I) = \bigcup_{i=1}^{t} (\operatorname{Exp} G_i + \mathbb{N}^n)$.
On appelle **base standard formelle** d'un idéal I, toute famille $\mathcal{G}$ de séries de I telle qu'on ait

$$\mathcal{N}(I) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} (\operatorname{Exp} G + \mathbb{N}^n) .$$

Cette famille n'est pas unique : par exemple, I est une base standard pour lui même.

Dans ce travail, on se place tantôt dans l'espace des fonctions C^∞, tantôt dans celui des fonctions de classe C_M, tantôt dans celui des fonctions réel-analytiques sur un ouvert U. Lorsqu'une propriété est valable pour chacune de ces classes de fonctions, on utilise la notation $\mathcal{C}l(U)$ pour désigner l'une d'entre elles. Soient f une fonction appartenant à $\mathcal{C}l(U)$ et V un sous-ensemble de U. Pour tout point $a \in U$, $\overline{T}_a f$ est une série formelle. On peut donc lui associer son exposant initial $\operatorname{Exp} \overline{T}_a f$. On définit alors l'**exposant initial de f sur V** comme étant le n-uplet

$$\operatorname{Exp} f_{|_V} = \min \left(\operatorname{Exp} \overline{T}_a f \ ; \ a \in V \right) .$$

Soient I un idéal de type fini dans $\mathcal{C}l(U)$ et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ une famille génératrice de I. Pour tout point $a \in U$, I_a désignera l'idéal engendré par les séries formelles $\overline{T}_a\varphi_1, \dots, \overline{T}_a\varphi_p$ dans $\mathbb{R}[[X]]$ et par $\mathcal{N}_a$, le diagramme $\mathcal{N}(I_a)$. Pour tout sous-ensemble V de U, on pose $\mathcal{N}_V = \{\text{Exp } f_{|V} \ ; \ f \in I\}$.

Lemme 1.10.1. *Pour tout point $a \in V$ et tout n-uplet $\alpha \in \mathcal{N}_a$, il existe une fonction $f \in I$ vérifiant* Exp $\overline{T}_a f = \alpha$*.*

Démonstration. Comme α appartient à $\mathcal{N}_a$, il existe une série formelle $F \in I_a$ telle que Exp $F = \alpha$ et des séries formelles de $\mathbb{R}[[X]]$, notées Γ_l, satisfaisant

$$F(X) = \sum_{l=1}^{p} \Gamma_l(X)\overline{T}_a\varphi_l(X).$$

Si on tronque les séries Γ_l à partir de l'ordre $|\alpha| + 1$, on obtient une série $\overline{F}$ définie par

$$\overline{F}(X) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{0 \leq |J| \leq |\alpha|+1} (\Gamma_l)_J \, X^J \overline{T}_a\varphi_l(X)$$

ayant le même exposant initial que F. En définissant la fonction f par

$$f(x) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{0 \leq |J| \leq |\alpha|+1} (\Gamma_l)_J \, \varphi_l(x)(x-a)^J,$$

on a l'égalité $\overline{F}(X) = \overline{T}_a f(X)$. Visiblement la fonction f appartient l'idéal I et vérifie Exp $\overline{T}_a f = \alpha$. $\square$

Soient V un sous-ensemble de U et $\beta_1, \dots, \beta_t$ les sommets de $\mathcal{N}_V$. On suppose que, pour tout point $a \in V$, on a $\mathcal{N}_a = \mathcal{N}_V$ (si V est réduit à un point, cette propriété est toujours vraie). On appelle alors **base standard de I sur V**, toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_t)$ de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$ et tout point $a \in V$, on ait Exp $\overline{T}_a f_i = \beta_i$.

Remarque 1.10.2. Si le t-uplet $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_t)$ est une base standard de I sur V, c'est aussi une famille de diviseurs C^∞ sur V à la Hironaka.

Exemple 1.10.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I l'idéal engendré par la fonction $(x, y) \mapsto x + y$. On a alors quatre sous-ensembles de U,

$$V_1 = U \setminus ((\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})), \qquad V_2 = (\{0\} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\},$$
$$V_3 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad V_4 = (0,0)$$

vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\forall a \in V_1,\ \mathcal{N}_a = (0,0) = \mathcal{N}_{V_1},\\
&\forall a \in V_2,\ \mathcal{N}_a = (1,0) = \mathcal{N}_{V_2},\\
&\forall a \in V_3,\ \mathcal{N}_a = (0,1) = \mathcal{N}_{V_3},\\
&\forall a \in V_4,\ \mathcal{N}_a = (1,1) = \mathcal{N}_{V_4}
\end{aligned}$$

et pour chaque ensemble V_i, la famille ne comportant que la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est une base standard de I sur V_i. Cette dernière propriété résulte du fait que l'idéal I est principal. On verra, dans les exemples de la section 5.5, que si l'idéal est de type fini non principal, les caractéristiques d'une base standard peuvent varier suivant le lieu considéré.

Chapitre 2

Extension de jets non quasi-analytiques

Dans ce chapitre, on étudie les possibilités d'extension d'un jet F dans le cas particulier où celui-ci coïncide localement avec le jet d'une fonction non quasi-analytique. Plus précisément, étant donnés K et L, des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K \subsetneq L$, et deux constantes $\delta \geq 1$ et $\epsilon \in]0,1]$, on suppose que, pour tout point $a \in L \setminus K$, la restriction du jet F à l'ensemble $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta) \cap L$ coïncide avec le jet d'une fonction g_a non quasi-analytique sur $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$.

Dans un premier temps, on s'intéresse au cas où les fonctions g_a peuvent être vues comme la restriction de fonctions de classe $C^{(M)}(\mathbb{R}^n)$ plates sur K. On montre qu'il est possible d'étendre F en une fonction de classe $C^{(M)}(\mathbb{R}^n)$ sous certaines hypothèses de majoration uniforme de la famille de fonctions $\{g_a \ ; \ a \in L \setminus K\}$. Dans une deuxième temps, nous n'imposerons sur les fonctions g_a aucune autre condition que le fait d'être non quasi-analytiques. Il est alors possible d'étendre F en une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ dont la restriction aux boules $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$ est de classe $C^{(M)}$.

2.1 Extension de jets à $\mathbb{R}^n$

Les dérivées successives d'une fonction de classe $C^{(M)}$ au voisinage d'un compact, plate sur ce dernier, satisfont des inégalités particulières comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *Soient M une suite admissible, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et K un sous-ensemble fermé dans U. Soit f une fonction de classe $C_\lambda^{(M)}(U)$ plate sur K. Il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour tout sous-*

ensemble U' inclus dans U et tout entier naturel p, on ait

$$\|f_{|U'}\|^{(M,.)}_{\left(\frac{\lambda}{C_1},\infty\right)} \leq 2 \sup_{x\in U'} d(x,K)^p C_2^p \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \lambda^{-p} M_p.$$

Démonstration. Soient b un point de K et a un point de $U\setminus K$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à f entre a et b, on obtient, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ et tout entier naturel p,

$$|D^H f(a)| \leq \sup_{c\in[a,b]} \sum_{\substack{P\in\mathbb{N}^n \\ |P|=p}} \frac{(a-b)^P}{P!} \left|D^{H+P} f(c)\right|.$$

L'inégalité $\frac{1}{P!} \leq \frac{n^p}{p!}$ et l'appartenance de f à $C^{(M)}_\lambda(U)$ induisent la majoration

$$\left|D^H f(a)\right| \leq d(a,b)^p n^{2p} \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \frac{M_{p+h}}{\lambda^{p+h}} \frac{(p+h)!}{p!}.$$

Compte tenu des inégalités $\frac{(p+h)!}{p!} \leq 2^{p+h} h!$ et de l'hypothèse (H_5), on a

$$\begin{aligned}\left|D^H f(a)\right| &\leq d(a,b)^p n^{2p} \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} M_p M_h \left(\frac{A_M}{\lambda}\right)^{p+h} 2^{p+h} h! \\ &\leq d(a,b)^p \left(\frac{2n^2 A_M}{\lambda}\right)^p M_p \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \left(\frac{2A_M}{\lambda}\right)^h M_h h!.\end{aligned}$$

Si b est choisi de telle sorte qu'on ait $d(a,b) = d(a,K)$, la majoration précédente devient, pour tout entier naturel p,

$$|D^H f(a)| \leq d(a,K)^p \left(\frac{2n^2 A_M}{\lambda}\right)^p M_p \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \left(\frac{2A_M}{\lambda}\right)^h M_h h!.$$

On en déduit, pour tout entier naturel p et tout réel $\lambda \in\,]0,1]$,

$$\begin{aligned}\|f_{|U'}\|^{(M,.)}_{\lambda'} &\leq \sum_{H\in\mathbb{N}^n} \sup_{x\in U'} \left|\frac{D^H f(x)}{h!}\right| \lambda'^h \frac{1}{M_h} \\ &\leq \sup_{x\in U'} \left(d(x,K)^p\right) \left(\frac{2n^2 A_M}{\lambda}\right)^p M_p \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \sum_{H\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{2A_M}{\lambda}\right)^h \lambda'^h.\end{aligned}$$

Si la valeur λ' est égale à $\frac{\lambda}{4nA_M}$, la dernière somme converge et on a, en posant $C_2 = 2n^2 A_M$,

$$\|f_{|U'}\|^{(M,.)}_{(\lambda',\infty)} \leq 2 \sup_{x\in U'} \left(d(x,K)^p\right) \left(\frac{C_2}{\lambda}\right)^p M_p \|f\|^{(M,.)}_{\lambda,\infty}.$$

Le lemme s'ensuit. □

Lorsqu'on prend $U' = B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$, comme suggéré au début du chapitre, on a $\sup_{x\in U'} d(x,K) \le d(a,K)\left(1+\epsilon d(a,K)^{\delta-1}\right)$. On considère donc le cas où les fonctions g_a vérifient ce genre de majoration. On démontre d'abord un lemme technique concernant de telles fonctions.

Lemme 2.1.2. *Soient K un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et des constantes $r>0$, $\delta\ge 1$, $\delta'\ge 1$, $\epsilon\in\,]0,1]$, $C\ge 1$ et $D\ge 1$. Soient V un ouvert convexe inclus dans $\mathcal{T}(K,r)$, satisfaisant $V\cap K=\varnothing$, et g une fonction de $C^\infty(V)$. Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de $r,\delta,\delta',\epsilon,C$ et D telles qu'on ait la propriété suivante.*
Etant donné un point a dans V, si, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\|g_{|V_a}\|^{(M,.)}_{\left(\epsilon d(a,K)^\delta,\infty\right)} \le C d(a,K)^{p-\delta'} D^p M_p, \tag{2.1}$$

avec $V_a = B(a,\epsilon d(a,K)^\delta)\cap V$, alors on a aussi, pour tout $j\in\mathbb{N}$, tout $H\in\mathbb{N}^n$ vérifiant $h\le j$,

– $$|D^H g(a)| \le C_1 C_2^j d(a,K)^{j+1-h} M_j^{\lceil\delta\rceil+1} h!, \tag{2.2}$$

– $$\left|D^H T_a^j g(x)\right| \le C_1 C_2^j d(a,x)^{j+1-h} M_j^{\lceil\delta\rceil+1} h!, \qquad \forall x\in K, \tag{2.3}$$

– $$\left|D^H T_b^j g(a)\right| \le C_1 C_2^j d(a,b)^{j+1-h} M_j^{\lceil\delta\rceil+1} h!, \qquad \forall b\in V_a. \tag{2.4}$$

Démonstration. En appliquant la propriété (H_5), avec $k=(\lceil\delta\rceil+1)j$ et $l=\lceil\delta\rceil+\lceil\delta'\rceil+2$, puis la propriété (1.2), avec $k=\lceil\delta\rceil+1$ et $l=j$, on montre qu'il existe des constantes C_1' et C_2' telles que, pour tout $j\in\mathbb{N}$, on ait

$$M_{(j+1)(\lceil\delta\rceil+1)+\lceil\delta'\rceil+1} \le C_1' {C_2'}^j M_j^{\lceil\delta\rceil+1}. \tag{2.5}$$

Soit a un point vérifiant (2.1). Pour tout entier naturel p et tout n-uplet $H\in\mathbb{N}^n$ et tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}|D^H g(a)| &\le C d(a,K)^{p-\delta'} D^p M_p \left(\epsilon d(a,K)^\delta\right)^{-h} M_h h!\\ &\le C\epsilon^{-h} d(a,K)^{p-\delta'-\delta h} D^p M_{p+h} h!.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Si on considère cette majoration avec $p=j+1-h+\lceil\delta'\rceil+\lceil\delta\rceil h$, on obtient

$$|D^H g(a)| \le C\epsilon^{-h} d(a,K)^{j+1-h} r^{\lceil\delta'\rceil-\delta'+h(\lceil\delta\rceil-\delta)} M_{p+h} h!.$$

Or, par hypothèse, on a $h\le j$. On en déduit $p+h\le j+1+\lceil\delta'\rceil+\lceil\delta\rceil j$ puis $M_{p+h}\le M_{j(1+\lceil\delta\rceil)+\lceil\delta'\rceil+1}$. En utilisant l'inégalité (2.5), on obtient (2.2).

Concernant la relation (2.3), (1.10) et (1.11) induisent la majoration

$$|D^H T_a^j g(x)| \le \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^n\\ i\le j-h}} \frac{1}{I!} d(a,x)^i \left|D^{I+H} g(a)\right|. \tag{2.7}$$

Pour tout $I \in \mathbb{N}^n$, avec $i \leq j-h$, si on prend $p = j+1-h-i+\lceil\delta'\rceil+\lceil\delta\rceil(i+h)$ dans la relation (2.6), on obtient la majoration

$$|D^{I+H}g(a)| \leq C\epsilon^{-i-h}d(a,K)^{j+1-i-h}r^{\lceil\delta'\rceil-\delta'+(i+h)(\lceil\delta\rceil-\delta)}M_{p+i+h}(i+h)!D^p.$$

De l'inégalité $d(a,K) \leq d(a,x)$, on déduit alors

$$\frac{d(a,x)^i}{I!}|D^{I+H}g(a)| \leq \frac{d(a,x)^{j+1-h}}{I!}C\epsilon^{-i-h}r^{\lceil\delta'\rceil-\delta'+(i+h)(\lceil\delta\rceil-\delta)} M_{p+i+h}(i+h)!D^p. \tag{2.8}$$

On a, d'autre part, $M_{p+i+h} \leq M_{j(\lceil\delta\rceil+1)+\lceil\delta'\rceil+1}$. En reprenant (2.5), on obtient

$$M_{p+i+h} \leq C_1'{C_2'}^j M_j^{\lceil\delta\rceil+1}. \tag{2.9}$$

De plus, on a

$$\frac{(i+h)!}{I!} \leq \frac{(i+h)!n^i}{i!} \leq h!n^{h+2i}.$$

En reportant cette dernière majoration et (2.9) dans (2.8), on obtient des constantes C_3' et C_4' vérifiant, pour tout $I \in \mathbb{N}^n$, avec $i \leq j-h$,

$$\frac{d(a,x)^i}{I!}|D^{I+H}g(a)| \leq d(a,x)^{j+1-h}h!C_3'{C_4'}^j M_j^{\lceil\delta\rceil+1}.$$

En reportant cette dernière inégalité dans (2.7), quitte à augmenter les valeurs de C_1 et C_2, on obtient (2.3).

Pour l'estimation (2.4), on pose, pour tout point $a \in V$, $\omega_a = \epsilon d(a,K)^\delta$. La fonction g appartenant à $C_{\omega_a}^{(M)}(B(a,\omega_a))$, elle appartient aussi à la classe $C_{M,\omega_a^{-1}}(B(a,\omega_a))$ et sa norme, dans cet espace, est inférieure à $\|g_{|V_a}\|_{(\omega_a,\infty)}^{(M,.)}$. En appliquant le lemme 1.4.1, on obtient la majoration

$$|D^Hg(a) - D^HT_b^jg(a)| \leq \|g_{|V_a}\|_{M,\omega_a^{-1}}d(a,b)^{j-h+1}\left(\frac{n^3}{\omega_a}\right)^{j+1}M_{j+1}h!. \tag{2.10}$$

L'hypothèse sur la fonction g et la définition de ω_a impliquent, pour tout entier naturel p, l'inégalité

$$\|g_{|V_a}\|_{M,\omega_a^{-1}}\omega_a^{-(j+1)} \leq \epsilon^{-(j+1)}d(a,K)^{-(j+1)\delta+p-\delta'}D^pM_p.$$

En particulier, pour $p = \lceil\delta'\rceil + \lceil\delta\rceil(j+1)+1$, la puissance de $d(a,K)$ est strictement positive. Il existe donc des constantes C_5' et C_6' telles qu'on ait

$$\|g_{|V_a}\|_{M,\omega_a^{-1}}\omega_a^{-(j+1)} \leq C_5'{C_6'}^jM_p.$$

En reportant ce résultat dans (2.10) et en utilisant (2.5), quitte à augmenter la valeur de C_1 et de C_2, on montre (2.4).

□

On est alors en mesure de démontrer le lemme d'extension suivant.

Lemme 2.1.3. *Soient K et L deux compacts de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K \subsetneq L$ et M une suite admissible. Soient F un jet défini sur L, nul sur K, et deux constantes $\epsilon \in]0,1]$ et $\delta \geq 1$, tels que, tout point $a \in L \setminus K$, la restriction du jet F à l'ensemble $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta) \cap L$ coïncide avec le jet d'une fonction g_a définie sur $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$. S'il existe des constantes C, D et δ' telles que, pour tout point $a \in L \setminus K$, la fonction g_a satisfasse, pour tout entier naturel p,*

$$\|g_a\|_{(\epsilon d(a,K)^\delta, \infty)}^{(M,.)} \leq C d(a,K)^{p-\delta'} D^p M_p,$$

alors il existe une fonction g de classe $C_{M^{2(\lceil \delta \rceil +1)}}$ sur $\mathbb{R}^n$ et dont le jet coïncide avec F sur L.

Démonstration. L'ensemble L étant compact, il existe une constante r' telle que, pour tout point $a \in L$, on ait $d(a,K) \leq r'$. Etant donné un point $a \in L \setminus K$, la fonction g_a satisfait les hypothèses du lemme 2.1.2 avec $r = \epsilon r'^\delta$ et $V = B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$. Les constantes δ, δ', ϵ, C et D ne dépendant pas du point a, il existe des constantes C'_1 et C'_2 telles qu'on ait, pour tout point $a \in L \setminus K$,

- $$|D^H g_a(a)| \leq C'_1 C_2'^j d(a,K)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil +1} h!, \tag{2.11}$$
- $$\left|D^H T_a^j g_a(x)\right| \leq C'_1 C_2'^j d(a,x)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil +1} h!, \quad \forall x \in K, \tag{2.12}$$
- $$\left|D^H T_b^j g_a(a)\right| \leq C'_1 C_2'^j d(a,b)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil +1} h!, \quad \forall b \in V_a. \tag{2.13}$$

Par hypothèse, pour tout n-uplet $H \in \mathbb{N}^n$ et tout point $a \in L \setminus K$, on a

$$|F_H(a)| = |D^H g_a(a)|. \tag{2.14}$$

Compte tenu de (2.11) avec $h = j$, on obtient donc

$$|F_H(a)| \leq C'_1 C_2'^h d(a,K) M_h^{\lceil \delta \rceil +1} h!.$$

On en déduit que le jet F satisfait la condition $(JW1)$ pour les jets de Whitney de classe $J_{M(\lceil \delta \rceil +1)}$.
En ce qui concerne la condition $(JW2)$, étant donnés un entier naturel j et un n-uplet $H \in \mathbb{N}^n$, vérifiant $h \leq j$, la majoration de l'expression

$$|F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| \tag{2.15}$$

dépend des positions respectives des points a et b.
En effet,

- si les points a et b appartiennent tous deux à K, alors l'expression (2.15) est nulle.
- si le point a appartient à $L \setminus K$ et b à K, l'expression (2.15) est égale à $|F_H(a)| = |D^H g_a(a)|$. De la relation (2.11), on déduit

$$|F_H(a)| \leq C_1' C_2'^j d(a,b)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil + 1} h!.$$

  Ainsi, on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $h \leq j$,

$$|F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| \leq C_1' C_2'^j d(a,b)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil + 1} h!.$$

- si le point a appartient à K et b à $L \setminus K$, alors l'expression (2.15) est égale à $|D^H T_b^j F(a)|$. De plus, on a

$$D^H T_b^j F(a) = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i \leq j-h}} \frac{1}{I!} (a-b)^I F_{I+H}(b)$$

  et, au point b, le jet F coïncide avec le jet associé à la fonction g_b. On en déduit

$$\begin{aligned} D^H T_b^j F(a) &= \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^n \\ i \leq j-h}} \frac{1}{I!} (a-b)^I D^{I+H} g_b(b) \\ &= D^H T_b^j g_b(a). \end{aligned} \tag{2.16}$$

  En utilisant (2.12) avec $a = b$ et $x = a$, on obtient encore, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $h \leq j$,

$$|F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| \leq C_1' C_2'^j d(a,b)^{j+1-h} M_j^{\lceil \delta \rceil + 1} h!.$$

- si les points a et b appartiennent à $L \setminus K$ et si on a $d(a,b) \leq \epsilon d(a,K)^\delta$, alors le point b appartient à $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta) \cap L$. On a, dans ce cas, $F(b) = \mathcal{J}(g_a)(b)$ et

$$|F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| = |D^H g_a(a) - D^H T_b^j g_a(a)|.$$

  On déduit du lemme 1.4.1 l'existence de constantes C_3' et C_4' telles qu'on ait

$$\begin{aligned} |F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| &\leq C_3' C_4'^j d(a,b)^{j-h+1} M_{j+1} h! \\ &\leq C_3' C_4'^j d(a,b)^{j-h+1} M_{j+1}^{\lceil \delta \rceil + 1} h!. \end{aligned}$$

– si les points a et b appartiennent à $L \setminus K$ et si on a $d(a,b) \geq \epsilon d(a,K)^\delta$, on considère alors un point c appartenant à l'ensemble $L \setminus K$ et vérifiant $d(a,c) \leq \frac{\epsilon}{2^\delta} d(a,X)^\delta$. On a, dans ce cas, la majoration

$$\begin{aligned} |F_H(a) - D^H T_b^j F(a)| &= |F_H(a) - D^H T_c^j F(a) + D^H T_c^j F(a) + D^H T_b^j F(a)| \\ &\leq |F_H(a) - D^H T_c^j F(a)| \\ &\quad + |D^H T_c^j F(a)| + |D^H T_b^j F(a)|. \end{aligned}$$

Par construction, le point c appartient à $B(a, \epsilon d(a,K)^\delta) \cap L$. On peut donc majorer l'expression $|F_H(a) - D^H T_c^j F(a)|$ comme dans le cas précédent. On obtient

$$\begin{aligned} |F_H(a) - D^H T_c^j F(a)| &\leq C_3' {C_4'}^j d(a,c)^{j-h+1} M_j^{1+\lceil\delta\rceil} h! \\ &\leq C_3' {C_4'}^j d(a,b)^{j-h+1} M_j^{1+\lceil\delta\rceil} h! \end{aligned}$$

puisque le choix de c implique aussi l'inégalité $d(a,c) \leq \frac{1}{2} d(a,b)$.
De plus, la relation $d(a,c) \leq \frac{\epsilon}{2^\delta} d(a,K)^\delta$ entraîne $d(c,K) \geq \frac{1}{2} d(a,K)$. On a donc

$$d(a,c) \leq \frac{\epsilon}{2^\delta} \left(2d(c,K)\right)^\delta \leq \epsilon d(c,K)^\delta.$$

Autrement dit, le point a appartient à V_c et on peut appliquer (2.13) pour majorer $|D^H T_c^j F(a)|$.
En ce qui concerne $|D^H T_b^j F(a)|$, on pose $K' = K \cup \{a\}$. On a alors $d(b,K') \leq d(b,K)$. Par conséquent, la fonction g_b vérifie

$$\|g_b\|^{(M,.)}_{(\epsilon d(b,K')^\delta, \infty)} \leq C d(b,K')^{p-\delta'} D^p M_p$$

et l'ouvert $V_b' = B(b, \epsilon d(b,K')^\delta)$ est inclus dans $V_b \cap \mathcal{T}(K', \epsilon {r'}^\delta)$. On peut donc appliquer le lemme 2.1.2 avec $K = K'$, $V = V_b$ et $a = b$. On obtient, pour tout $x \in K'$,

$$|D^H T_b^j g_b(x)| \leq C_5' {C_6'}^j d(b,x)^{j+1-h} M_j^{\lceil\delta\rceil+1} h!.$$

Donc, en prenant $x = a$, on obtient le résultat recherché.

On a finalement montré que F est un jet de Whitney de classe $J_{M^{(\lceil\delta\rceil+1)}}$ sur L. Par le théorème 1.4.3, on conclut qu'il existe une fonction g de classe $C_{M^{2(\lceil\delta\rceil+1)}}$ sur tout ouvert relativement compact dans $\mathbb{R}^n$ telle que F soit le jet de la fonction g sur L. □

2.2 Extension de jets à $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Le principe de cette extension consiste à construire un recouvrement de $\mathbb{R}^n \setminus K$ par des boules dont le rayon est de l'ordre de $d(a, K)^\delta$, où a désigne le centre, puis une partition de l'unité dont les éléments ont un support adapté à ce recouvrement. Classiquement, on sait construire un recouvrement de $\mathbb{R}^n \setminus K$ par des boules dont le rayon est de l'ordre de $d(a, K)$ (lemme 2.2.1). En utilisant ce résultat, on construit, dans la proposition 2.2.2, le recouvrement cherché. On en déduit une partition de l'unité et, enfin, un lemme d'extension de jets (proposition 2.2.5). On remarquera que tous les énoncés de cette section sont encore vrais si le compact K est vide, pour peu qu'on adopte la convention $d(x, \varnothing) = 1$.

Habituellement, pour contruire un recouvrement de $\mathbb{R}^n \setminus K$, il suffit d'appliquer le lemme qui suit.

Lemme 2.2.1. *[CW], [CC1](proposition 5 p. 15)*
Il existe des constantes strictement positives, $a < 1$, $b > 1$, $k > 1$ et $s > 1$, telles que, si K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, il existe une famille de boules $\{B(x_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- $\mathbb{R}^n \setminus K = \cup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, kr_i)$,
- *pour tout x appartenant à une boule $B(x_i, kr_i)$, on a, à la fois,*

$$\begin{aligned} ar_i \le d(x, K) \le br_i \\ \textit{et } ad(x, K) \le d(x_i, K) \le bd(x, K), \end{aligned} \tag{2.17}$$

- *pour chaque $i \in \mathbb{N}$, la boule $B(x_i, kr_i)$ rencontre, au plus, s autres boules de la famille.*

Cependant, dans notre travail, il est nécessaire d'avoir un recouvrement plus fin de $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Proposition 2.2.2. *Soit d' un réel positif. Il existe une constante $s_0 > 1$ et des fonctions s_1 et s_2 croissantes non majorées sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous réels δ, υ, k' vérifiant $\delta \ge 1$, $0 < \upsilon < 1$ et $k' > 1$, tout compact K et tout ouvert U vérifiant $K \subset U \subset \mathcal{T}(K, d')$, il existe une famille de boules $\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*
- $U \setminus K \subset \cup_{\alpha\in\mathbb{N}} B(x_\alpha, r_\alpha) \subset \cup_{\alpha\in\mathbb{N}} B(x_\alpha, k'r_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$,
- *pour tout x appartenant à une boule $B(x_\alpha, k'r_\alpha)$, on a, à la fois,*

$$s_1(k')r_\alpha \le \upsilon d(x, K)^\delta \le s_0^\delta s_1(k')r_\alpha \tag{2.18}$$

$$\textit{et} \qquad s_0^{-1} d(x, K) \le d(x_\alpha, K) \le s_0 d(x, K), \tag{2.19}$$

– *pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}$, la boule $B(x_\alpha, k'r_\alpha)$ rencontre, au plus, $s_2(k')$ autres boules de la famille.*

Démonstration.
Construction du recouvrement.
On pose
$$m = \frac{2k'\sqrt{n}}{k-1}(bd')^{\delta-1}. \tag{2.20}$$
Etant donnés un point $x \in \mathbb{R}^n$ et un réel positif r, $\mathcal{C}(x, r)$ désigne le cube de centre x et de côté r.
On utilise la figure 2.1 ; les parties grisées représentent les boules et les cubes qui sont éliminés au cours de la construction.

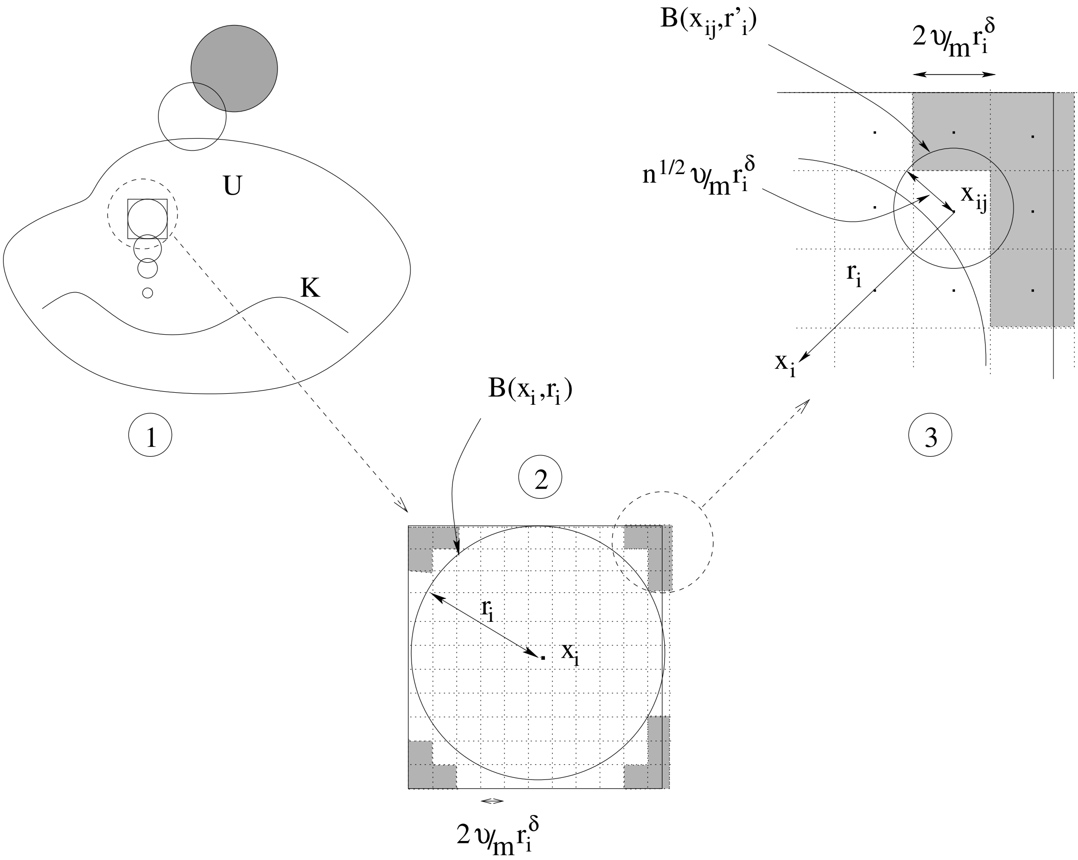

FIG. 2.1 –

On considère $\{B(x_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ le recouvrement de $\mathbb{R}^n \setminus K$ donné par le lemme 2.2.1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'inclusion $B(x_i, kr_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ implique

$$kr_i \le d(x_i, K). \tag{2.21}$$

On ne considère, pour la suite, que le sous-recouvrement $\{B(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ formé des boules dont l'intersection avec U est non vide. Ceci implique que, pour tout $i \in I$, il existe un point x appartenant à $B(x_i, r_i) \cap U$. On a alors $d(x_i, K) \le bd(x, K) \le bd'$ et, compte tenu de (2.21),

$$r_i \le bd'. \tag{2.22}$$

Soit $i \in I$. La boule $B(x_i, r_i)$ est incluse dans le cube $\mathcal{C}(x_i, 2r_i)$. On peut recouvrir ce cube par $\lceil \frac{mr_i^{1-\delta}}{\upsilon} \rceil^n$ cubes de côté $2\frac{\upsilon}{m} r_i^\delta$. On considère, parmi ces cubes, ceux dont l'intersection avec la boule $B(x_i, r_i)$ est non vide et on désigne leur centre par x_{ij} avec $j \in E_i \subset \left\{1, \ldots, \lceil \frac{mr_i^{1-\delta}}{\upsilon} \rceil^n \right\}$. Alors, pour tout $j \in E_i$, on a

$$d(x_i, x_{ij}) \le r_i + \frac{\sqrt{n}\upsilon}{m} r_i^\delta. \tag{2.23}$$

On pose $r'_i = \frac{\sqrt{n}\upsilon}{m} r_i^\delta$. Pour tout $j \in E_i$, on a l'inclusion

$$\mathcal{C}\left(x_{ij}, 2\frac{\upsilon}{m} r_i^\delta\right) \subset B\left(x_{ij}, r'_i\right).$$

On a établi que la famille $\{B(x_{ij}, r'_i)\}_{j\in K_i}$ forme un recouvrement de la boule $B(x_i, r_i)$. Comme la famille $\{B(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $U \setminus K$, on conclut qu'il en est de même pour la famille $\{B(x_{ij}, r'_i)\}_{i\in I, j\in K_i}$. On prend $\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha\in A} = \{B(x_{ij}, r'_i)\}_{i\in I, j\in K_i}$.

Vérification de (2.18) et (2.19).
On a les inclusions $B\left(x_{ij}, k'r'_i\right) \subset B\left(x_i, d(x_i, x_{ij}) + k'r'_i\right)$. Vu (2.20), (2.22), (2.23) et la définition de r'_i, on a

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{ij}) + k'r'_i &\le r_i + (1 + k')\frac{\sqrt{n}\upsilon}{m} r_i^\delta \\ &\le r_i \left(\frac{1 + k'}{2k'} \frac{(k-1)\upsilon r_i^{\delta-1}}{(bd')^{\delta-1}} + 1 \right) \\ &\le kr_i. \end{aligned}$$

On en déduit l'inclusion $B\left(x_{ij}, k'r'_i\right) \subset B\left(x_i, kr_i\right)$.
Pour tout $x \in B\left(x_{ij}, k'r'_i\right) \subset B\left(x_i, kr_i\right)$, on a

$$\frac{a}{b} d(x, K) \le d(x_{ij}, K) \le \frac{b}{a} d(x, K).$$

En posant $s_0 = \frac{b}{a}$, on établit (2.19). On a aussi $ar_i \leq d(x,K) \leq br_i$, d'où $a^\delta r_i^\delta \leq d(x,K)^\delta \leq b^\delta r_i^\delta$ et $a^\delta \frac{m}{\sqrt{n}} r'_i \leq v d(x,K)^\delta \leq b^\delta \frac{m}{\sqrt{n}} r'_i$. En posant $s_1 : x \mapsto \frac{2a^\delta}{k-1}(bd')^{\delta-1}x$, on établit (2.18).

Vérification de la propriété de finitude locale.
On commence par une observation générale. Soit $l \in \mathbb{R}^{+*}$. Si on a

$$B(x_{ij}, lr'_i) \cap B(x_{ih}, lr'_i) \neq \varnothing, \tag{2.24}$$

alors x_{ih} appartient à la boule $B\left(x_{ij}, 2lr'_i\right)$. Or, $B\left(x_{ij}, 2lr'_i\right)$ est incluse dans $\mathcal{C}\left(x_{ij}, 4lr'_i\right)$. De plus, les points x_{ih} appartiennent à un réseau de pas $\frac{2}{\sqrt{n}} r'_i$. On en déduit que le cube $\mathcal{C}\left(x_{ij}, 4lr'_i\right)$ contient, au plus, $\ulcorner 2\sqrt{n}l + 1 \urcorner^n$ points de ce réseau. On conclut qu'étant donnés i et j, il existe, au plus, $\ulcorner 2\sqrt{n}l + 1\urcorner^n$ indices distincts h tels que (2.24) ait lieu.

Si on a $B(x_{ij}, k'r'_i) \cap B(x_{gh}, k'r'_g) \neq \varnothing$, alors x_{ij} appartient à la boule $B\left(x_{gh}, k'(r'_i + r'_g)\right)$. Soit x un élément de $B(x_{ij}, k'r'_i) \cap B(x_{gh}, k'r'_g)$. En appliquant (2.18) avec $r_\alpha = r'_i$, on obtient

$$r'_i \leq \frac{v}{s_1(k')} d(x,K)^\delta.$$

D'autre part, si on applique à nouveau (2.18) mais avec $r_\alpha = r'_g$, on a aussi l'inégalité $vd(x,K)^\delta \leq s_0^\delta s_1(k') r_{gh}$. Finalement, on déduit $r'_i \leq s_0^\delta r'_g$. Donc x_{ij} appartient à la boule $B\left(x_{gh}, k'r'_g\left(1 + s_0^\delta\right)\right)$. On a montré précédemment que, pour g fixé, x_{ij} ne peut appartenir qu'à, au plus, $\lceil 2\sqrt{n}k'\left(1 + s_0^\delta\right) + 1\rceil^n$ boules de cette forme.

De plus, on a vu que $B(x_{ij}, k'r'_i)$ est incluse dans $B(x_i, kr_i)$ et $B(x_{gh}, k'r'_g)$ dans $B(x_g, kr_g)$. Donc, pour un i fixé, le nombre d'indices g distincts deux à deux, distincts de i et vérifiant

$$B(x_{ij}, k'r'_i) \cap B(x_{gh}, k'r'_g) \neq \varnothing$$

est majoré par la valeur s. Ainsi, toute boule du recouvrement rencontre, au plus,

$$s_2(k') = s\ulcorner 2\sqrt{n}k'\left(1 + s_0^\delta\right) + 1\urcorner^n$$

autres boules. □

Proposition 2.2.3. *Soient d' un réel positif et K un compact de $\mathbb{R}^n$. Soient $m' \geq 2$ un entier et des réels δ et v vérifiant $\delta \geq 1$ et $0 < v < 1$. On considère le recouvrement construit dans la proposition 2.2.2 pour d', δ, v, m' au lieu de k' et $U = \mathcal{T}(K, d')$. Il existe une famille de fonctions $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}$,
- $\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset B(x_\alpha, 2r_\alpha)$,
- $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \chi_\alpha(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$,
- *pour tout* $H \in \mathbb{N}^n$, *tout* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$,

$$|D^H \chi_\alpha(x)| \leq \frac{C^h}{d(x,K)^{\delta h}} M_h h!$$

où $C \geq 1$ *ne dépend que de* δ, υ *et* m'.

Démonstration. On procède de manière classique [H2](théorèmes 1.3.5 et 1.4.4). Soit Ψ une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, valant 1 sur la boule $B(0,1)$, ayant son support dans $B(0,2)$ et satisfaisant, pour tout multi-indice $H \in \mathbb{N}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|D^H\Psi(x)| \leq C_1^h M_h h!.$$

On applique la proposition 2.2.2 avec $k' = m'$. A tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on associe la fonction $\Psi_\alpha : x \mapsto \Psi\left(\frac{x-x_\alpha}{r_\alpha}\right)$. La fonction Ψ_α vaut 1 sur $B(x_\alpha, r_\alpha)$ et a son support dans $B(x_\alpha, 2r_\alpha)$, donc dans $B(x_\alpha, m'r_\alpha)$ puisque m' est supérieur à 2. En utilisant (2.18), on en tire, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned}|D^H\Psi_\alpha(x)| &\leq \left(\frac{C_1}{r_\alpha}\right)^h M_h h! \\ &\leq \left(\frac{s_0^\delta s_1(m')C_1}{\upsilon d(x,K)^\delta}\right)^h M_h h!.\end{aligned}$$

Le recouvrement de $U \setminus K$ par la famille de boules $\{B(x_\alpha, m'r_\alpha), \alpha \in \mathbb{N}\}$ étant localement fini, on conclut que le recouvrement de $U \setminus K$ par les supports des Ψ_α est, lui-aussi, localement fini.
On pose alors $\chi_1 = \Psi_1$, puis, par récurrence,

$$\chi_\alpha = \Psi_\alpha(1-\Psi_1)\dots(1-\Psi_{\alpha-1}).$$

Les fonctions χ_α ainsi définies vérifient les conditions de l'énoncé. □

Lemme 2.2.4. *Il existe une fonction* s *définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$, *à valeurs dans* $]0, \frac{1}{2}[$, *telle qu'on ait la propriété suivante : soient* K *et* L *deux compacts, satisfaisant* $K \subset L \subset \mathcal{T}(K,1)$, *et* (δ, υ) *un couple appartenant à* $[1,\infty[\times]0,1]$. *Si on pose* $Z = L \setminus K$ *et, pour tout* $a \in Z$, $V_a = B(a, s(\delta)\upsilon d(a,K)^\delta)$, *il existe un sous-ensemble* $\mathcal{S}_Z$ *de* $\mathbb{N}$, *une famille de fonctions* $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}_Z}$ *vérifiant les* *assertions suivantes, pour des constantes D_1 et D_2 convenables :*

– la famille $\{\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathcal{S}_Z\}$ *est localement finie.*

– $\forall a \in Z,\ \mathrm{card}(\mathcal{S}_a) \leq D_2$ *où* $\mathcal{S}_a = \{\alpha \in \mathcal{S}_Z\ ;\ V_a \cap \mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \neq \varnothing\}$, (2.25)

$$- \overline{T}_a \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \chi_\alpha \right)(X) = 1, \tag{2.26}$$

$$- \forall \alpha \in \mathcal{S}_a, \quad \|\chi_{\alpha_{|V_a}}\|^{(M,.)}_{\left(\frac{d(a,K)^\delta}{D_1},\infty\right)} \leq 2. \tag{2.27}$$

Il existe, de plus, une famille $\{a_\alpha\}_{\alpha \in S_Z}$ de points de Z telle qu'on ait :

$$- \forall \alpha \in \mathcal{S}_Z, \quad \mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset V_{a_\alpha}, \tag{2.28}$$

$$- \forall \alpha \in \mathcal{S}_a, \quad \frac{1}{2} d(a,K) \leq d(a_\alpha, K) \leq 2d(a,K) \tag{2.29}$$

$$\text{et} \quad d(a, a_\alpha) \leq \frac{d(a,K)^\delta}{4}. \tag{2.30}$$

(2.31)

Démonstration. On utilisera la figure 2.2.

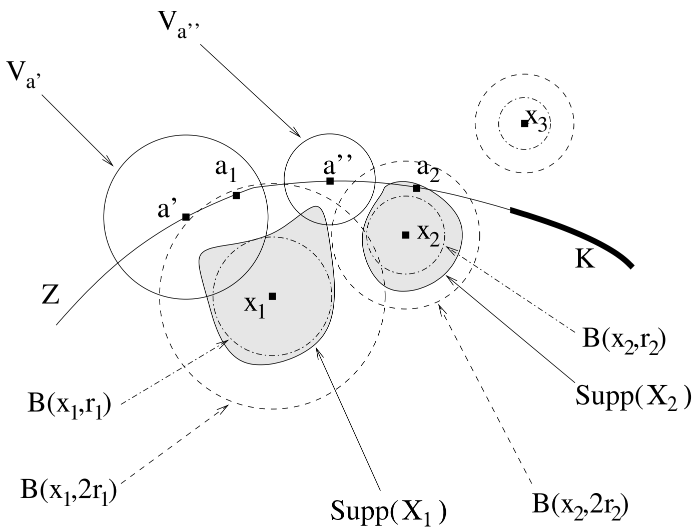

FIG. 2.2 –

En reprenant les notations de la proposition 2.2.3 pour $d' = 1$, on fixe un entier $m' \geq 2$ satisfaisant

$$m' > 1 + 4s_0^\delta \tag{2.32}$$
$$\text{et } s_1(m') > 16(1 + 2^\delta).$$

On pose alors $s(\delta) = \frac{4}{s_1(m')}$. En particulier, on a

$$s(\delta) \leq \frac{1}{4(1+2^\delta)}. \tag{2.33}$$

Soit $\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ le recouvrement de $\mathcal{T}(K,1)\setminus K$ donné par la proposition 2.2.2 avec les constantes υ, δ et m'. Soit $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, la partition de l'unité associée à ce recouvrement par la proposition 2.2.3.
On pose $\mathcal{S}_Z = \{\alpha \in \mathbb{N}, B(x_\alpha, 2r_\alpha) \cap Z \neq \varnothing\}$. Sur la figure (2.2), les indices 1 et 2 appartiennent à $\mathcal{S}_Z$, mais pas 3. La définition de $\mathcal{S}_a$ implique que l'indice 1 appartient à $\mathcal{S}_{a'}$ et à $\mathcal{S}_{a''}$ alors que l'indice 2 n'appartient ni à $\mathcal{S}_{a'}$, ni à $\mathcal{S}_{a''}$. Comme, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset B(x_\alpha, 2r_\alpha)$, on a l'inclusion $\{\alpha \in \mathbb{N}\ ;\ \mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \cap Z \neq \varnothing\} \subset \mathcal{S}_Z$. Donc, en reprenant la définition de $\mathcal{S}_a$, pour tout $a \in Z$, on a

$$\begin{aligned} \overline{T}_a\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_a}\chi_\alpha\right)(X) &= \overline{T}_a\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_Z}\chi_\alpha\right)(X) \\ &= \overline{T}_a\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}}\chi_\alpha\right)(X) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a ainsi établi (2.26).
D'autre part, par construction, on a l'inclusion $Z \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{S}_Z} B(x_\alpha, r_\alpha)$. En particulier, pour tout point $a \in Z$, il existe un indice $\alpha_a \in \mathcal{S}_Z$ tel que le point a appartienne à la boule $B(x_{\alpha_a}, r_{\alpha_a})$. De (2.18), on déduit alors

$$\frac{s(\delta)}{4}\upsilon d(a,K)^\delta \leq s_0^\delta r_{\alpha_a}. \tag{2.34}$$

On obtient les inclusions

$$V_a \subset B(x_{\alpha_a}, r_{\alpha_a} + s(\delta)\upsilon d(a,K)^\delta) \subset B\left(x_{\alpha_a}, r_{\alpha_a}\left(1+4s_0^\delta\right)\right) \subset B\left(x_{\alpha_a}, m' r_{\alpha_a}\right).$$

Comme $m' \geq 2$, la boule $B\left(x_{\alpha_a}, m' r_{\alpha_a}\right)$ rencontre, au plus, $s_2(m')$ autres boules $B(x_\alpha, 2r_\alpha)$. Donc, le cardinal de $\mathcal{S}_a$ est majoré par $s_2(m')$, ce qui établit (2.25).

Soit $x \in V_a$, on a l'encadrement

$$d(a,K) - d(a,x) \leq d(x,K) \leq d(a,K) + d(a,x).$$

Or, on a $d(a,K) \leq 1$ et, par (2.32) et par la définition de V_a,

$$d(a,x) \leq s(\delta)\upsilon d(a,K)^\delta \leq \frac{d(a,K)^\delta}{2} \leq \frac{d(a,K)}{2}.$$

On en déduit l'encadrement, pour tout $x \in V_a$,

$$\frac{d(a,K)}{2} \leq d(x,K) \leq 2d(a,K). \tag{2.35}$$

Soit $\alpha \in \mathcal{S}_a$, on a, pour tout point $x \in V_a$,

$$\begin{aligned} |D^H \chi_\alpha(x)| &\leq \frac{C^h}{d(x,K)^{\delta h}} M_h h! \\ &\leq \frac{C^h 2^{\delta h}}{d(a,K)^{\delta h}} M_h h!. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$\|\chi_{\alpha_{|V_a}}\|^{(M,.)}_{\left(\frac{d(a,K)^\delta}{Cn2^{\delta+1}},\infty\right)} \leq 2$$

et, par conséquent, la relation (2.27).
A tout $\alpha \in \mathcal{S}_Z$, on associe un point $a_\alpha \in B(x_\alpha, 2r_\alpha) \cap Z$. On a alors

$$\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset B(x_\alpha, 2r_\alpha) \subset B(a_\alpha, 4r_\alpha). \tag{2.36}$$

Compte tenu de (2.18), on a aussi $r_\alpha \leq \frac{s(\delta)}{4} \upsilon d(a_\alpha, K)^\delta$ donc $\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset V_{a_\alpha}$. On a montré (2.28).
D'autre part, si l'indice α appartient à $\mathcal{S}_a$, alors il existe un point c dans $V_a \cap B(x_\alpha, 2r_\alpha)$. En utilisant (2.18) suivi de (2.35), on obtient

$$r_\alpha \leq \frac{s(\delta)}{4} \upsilon d(c,K)^\delta \leq \frac{s(\delta)}{4} \upsilon 2^\delta d(a,K)^\delta.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} d(a,a_\alpha) &\leq d(a,c) + d(c,a_\alpha) \\ &\leq s(\delta)\upsilon(1+2^\delta) d(a,K)^\delta. \end{aligned}$$

De (2.33), on déduit alors $d(a,a_\alpha) \leq \frac{1}{4} d(a,K)^\delta$, d'où (2.30). On a l'encadrement $d(a,K) - d(a,a_\alpha) \leq d(a_\alpha,K) \leq d(a,K) + d(a,a_\alpha)$, d'où

$$d(a,K)\left(1 - \frac{1}{4} d(a,K)^{\delta-1}\right) \leq d(a_\alpha,K) \leq d(a,K)\left(1 + \frac{1}{4} d(a,K)^{\delta-1}\right).$$

Des inégalités $d(a,K) \leq 1$ et $\delta \geq 1$, on déduit alors (2.29). $\square$

On peut alors démontrer le lemme d'extension général.

Proposition 2.2.5. *Soient K et L deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K \subset L \subset \mathcal{T}(K,1)$, ϵ et δ deux réels satisfaisant $0 < \epsilon \leq s(\delta)$ et $\delta \geq 1$. Soient, pour tout $a \in L \setminus K$, g_a une fonction de $C^{(M)}_{\omega_a}(V_a)$ avec $\omega_a \in]0,1]$ et $V_a = B(a, \epsilon d(a,K)^\delta)$. Si, pour tout $a \in L \setminus K$ et pour tout $b \in V_a \cap L$, on a $T_b g_a = T_b g_b$, alors il existe une fonction g de $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$, telle que, pour tout $a \in L \setminus K$, on ait $g_{|V_a} \in C^{(M)}(V_a)$ et $T_a g = T_a g_a$.*
De plus, si les inégalités

$$C'_a = \sup_{b \in B\left(a, \frac{d(a,K)^\delta}{4}\right) \cap (L \setminus K)} \|g_b\|^{(M,.)}_{(\omega_b, \infty)} < \infty \quad et \quad \omega'_a = \inf_{b \in B\left(a, \frac{d(a,K)^\delta}{4}\right) \cap (L \setminus K)} \omega_b > 0$$

sont vérifiées, alors il existe des constantes C_1 et C_2, ne dépendant pas de a, telles qu'on ait

$$\|g_{|V_a}\|^{(M,.)}_{(C_1 d(a,K)^\delta \omega'_a, \infty)} \leq C_2 C'_a.$$

Démonstration. On reprend la partition de l'unité sur $Z = L \setminus K$ définie dans le lemme 2.2.4 pour $\upsilon = \frac{\epsilon}{s(\delta)}$. On pose

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_Z} g_{a_\alpha} \chi_\alpha.$$

Comme, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_Z$, on a $\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha \subset V_{a_\alpha}$ et comme la famille $\{\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}_Z}$ est localement finie, la fonction g est bien définie et de classe C^∞ sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus K$.
Pour tout $a \in Z$, on a $\{\alpha \in \mathcal{S}_Z \ ; \ a \in \mathcal{S}upp\ \chi_\alpha\} \subset \mathcal{S}_a$. Donc, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\begin{aligned} D^H g(a) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} D^H (g_{a_\alpha} \chi_\alpha)(a) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \sum_{I+J=H} \frac{H!}{I!J!} D^I g_{a_\alpha}(a) D^J \chi_\alpha(a). \end{aligned}$$

Si a appartient à $\mathcal{S}upp\ \chi_\alpha$, alors a appartient à V_{a_α}. L'hypothèse sur les fonctions g_a entraîne l'égalité $\overline{T}_a g_a = \overline{T}_a g_{a_\alpha}$. En particulier, pour tout n-uplet $I \in \mathbb{N}^n$, on a $D^I g_a(a) = D^I g_{a_\alpha}(a)$. On en déduit

$$\begin{aligned} D^H g(a) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \sum_{I+J=H} \frac{H!}{I!} D^I g_a(a) D^J \chi_\alpha(a) \\ &= \sum_{I+J=H} \frac{H!}{J!I!} D^I g_a(a) \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} D^J \chi_\alpha(a). \end{aligned}$$

Comme, pour tout point $a \in Z$, on a $\overline{T}_a \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \chi_\alpha\right) = 1$, si J appartient à $\mathbb{N}^n \setminus \{0\}$, la somme $\sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} D^J \chi_\alpha(a)$ est nulle. Finalement, on a

$$D^H g(a) = D^H g_a(a).$$

Pour les mêmes raisons, on a, pour tout point $a \in Z$,

$$g_{|V_a} = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_a} (g_{a_\alpha} \chi_\alpha)_{|V_a} .$$

On sait aussi que $\|\chi_{\alpha|V_a}\|^{(M,.)}_{\left(\frac{d(a,K)^\delta}{D_1},\infty\right)} \leq 2$ et que le cardinal de $\mathcal{S}_a$ est inférieur à D_2. On en déduit la majoration

$$\|g_{|V_a}\|^{(M,.)}_{(\omega''_a,\infty)} \leq 2D_2 \max_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \|g_{a_\alpha}\|^{(M,.)}_{(\omega_{a_\alpha},\infty)}$$

avec $\omega''_a = \min\left(\frac{d(a,K)^\delta}{D_1}, \min_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \omega_{a_\alpha}\right)$.
Si on pose $C_1 = \frac{1}{D_1}$, $C_2 = 2D_2$ et, pour tout $a \in Z$, $\omega'_a = \min_{\alpha \in \mathcal{S}_a} \omega_{a_\alpha}$, on a $C_1 d(a,K)^\delta \omega'_a \leq \omega''_a$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_a$, le point a_α appartient à $B(a, \frac{d(a,K)^\delta}{4})$. On peut donc remplacer $\max_{\alpha \in \mathcal{S}_a}$ par $\sup_{b \in B(a, \frac{d(a,K)^\delta}{4}) \cap Z}$ et $\min_{\alpha \in \mathcal{S}_a}$ par $\inf_{b \in B(a, \frac{d(a,K)^\delta}{4}) \cap Z}$. $\square$

Etant donnés deux ensembles K et L, bornés de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $K \subset L \subset \mathcal{T}(K,1)$, si l'ensemble $L \setminus K$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on introduit une notion pour signifier que la famille $(V_{a_\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ construite dans le lemme 2.2.4 permet de définir un atlas sur $L \setminus K$.

Définition 2.2.6. Soient un réel $r \in \mathbb{R}^{+*}$, K et L deux fermés dans $B(0,r)$ vérifiant $K \subset L \subset \mathcal{T}(K,1)$ et deux réels $\epsilon \in]0,1[$ et $\delta > 1$. On dit que le quadruplet (L,K,ϵ,δ) vérifie la propriété de **Carte Locale Uniforme de classe** $C^{(M)}$ sur la boule $B(0,r)$, notée CLU(M,r) si $Z = L \setminus K$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, si le réel ϵ vérifie $0 < \epsilon < s(\delta)$ et si, pour tout point $a \in L \setminus K$, il existe des fonctions $\phi_{a1}, \ldots, \phi_{ad}$ définies sur $B(a, 2\epsilon d(a,K)^\delta)$ et satisfaisant :

- $\|\phi_{ai}\|^{(M,.)}_{(\epsilon d(a,K)^\delta,\infty)} \leq \dfrac{1}{\epsilon d(a,K)^\delta}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,d\}$,
- $|\Delta\phi_a(a)| > \epsilon d(a,K)^\delta$ avec $\phi_a(x) := (\phi_{a1}(x), \ldots, \phi_{ad}(x), x_{d+1}, \ldots, x_n)$,
- si on pose $V_a = B(a, \epsilon d(a,K)^\delta) \cap B(0,r)$, on a

$$Z \cap \overline{V_a} = \{x \in \overline{V_a} \ ; \ \phi_{a1}(x) = \ldots = \phi_{ad}(x) = 0\}.$$

Nous verrons dans le lemme 2.2.8 que, pour tout ensemble analytique irréductible L, il est possible de trouver r, K, ϵ et δ tels que $(L \cap B(0,r), K, \epsilon, \delta)$ vérifie la propriété CLU$(1,r)$. La preuve nécessite une version affinée du théorème d'inversion locale.

Lemme 2.2.7. *[To](V.5.1),[TM]*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ et $\Delta\phi$ son jacobien. Il existe des constantes C_1, C_2 et C_3 strictement positives telles que, pour tout point $a \in K$ satisfaisant $\Delta\phi(a) \neq 0$ et pour tout réel $\rho_a \in]0, |\Delta\phi(a)|]$, les propriétés suivantes soient vérifiées.

– *l'application ϕ réalise un difféomorphisme de $B(a, C_1\rho_a)$ sur son image et on a*

$$\phi\left(B\left(a, C_3\rho_a\left|\Delta\phi(a)\right|\right)\right) \subset B\left(\phi(a), C_2\rho_a\left|\Delta\phi(a)\right|\right) \subset \phi\left(B\left(a, C_1\rho_a\right)\right),$$

– *pour tout point $x \in B(a, C_1\rho_a)$, on a $|\Delta\phi(x)| \geq \frac{|\Delta\phi(a)|}{2}$.*

Lemme 2.2.8. *Soit X un sous-ensemble analytique de $\mathbb{R}^n$ dont le germe est irréductible à l'origine. Il existe un réel strictement positif r, un sous-ensemble analytique Y propre dans $X \cap B(0,r)$, des constantes ϵ et δ tels que le quadruplet $(X \cap B(0,r), Y, \epsilon, \delta)$ vérifie la propriété CLU$(1,r)$. De plus, il existe des fonctions réel-analytiques $\phi_1, \ldots, \phi_d$ telles que, pour tout point a de $(X \cap B(0,r)) \setminus Y$ et tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on puisse prendre $\phi_{ai} = \phi_i|_{B(a, 2\epsilon d(a,Y)^\delta)}$.*

Démonstration. D'après [M](III.5.8), après un changement linéaire de coordonnées, il existe un réel $r > 0$, un entier $d \in \{1, \ldots, n\}$ et $P, Q_2, \ldots, Q_d$, d polynômes en x_1 dont les coefficients sont analytiques sur $]-2r, 2r[\,^{n-d}$, vérifiant la propriété suivante :
si, pour tout $x = (x', x'') \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}\right) \cap B(0, 2r)$, on désigne par $S(x'')$ le discriminant de $P(., x'')$ et par Z l'ensemble

$$\{x = (x', x'') \in \overline{B(0,r)} \ ; \ S(x'') = 0\},$$

alors $(X \cap B(0,r)) \setminus Z$ est donné par les conditions

$$\left\{\begin{array}{c} S(x'') \neq 0, \\ P(x_1, x'') = 0, \\ S(x'')x_j - Q_j(x_1, x'') = 0, \quad j = 2, \ldots, d. \end{array}\right.$$

Si on pose $Y = X \cap Z$, $\phi_1(x) = P(x_1, x'')$ et, pour tout $j \in \{2, \ldots, d\}$, $\phi_j(x) = S(x'')x_j - Q_j(x_1, x'')$, on obtient

$$\left(X \cap \overline{B(0,r)}\right) \setminus Y = \{x \in \overline{B(0,r)} \setminus Y \ ; \ \phi_1(x) = \ldots = \phi_d(x) = 0\}.$$

En diminuant r, on peut, de plus, imposer la suite d'inclusions

$$Y \subset X \cap B(0,r) \subset \mathcal{T}(Y,1).$$

Les fonctions $\phi_1,\ldots,\phi_d$ sont réel-analytiques sur $B(0,2r)$ donc, d'après la remarque 1.3.1, il existe une constante $\lambda \in]0,1]$ telle qu'elles appartiennent à $C_\lambda^{(1)}(B(0,r))$. Soit a un point de $\left(X \cap \overline{B(0,r)}\right) \setminus Y$. Le jacobien

$$\Delta\phi(a) = \frac{D(\phi_1,\ldots,\phi_d)}{D(x_1,\ldots,x_d)}(a)$$

vaut $S(a'')^{d-1}\frac{\partial P}{\partial x_1}(a_1,a'')$. Or, par construction de Y, on a $S(a'') \neq 0$. On en déduit que les racines de $P(\cdot,a'')$ sont simples et, par conséquent, la relation $\Delta\phi(a) \neq 0$.
D'autre part, l'inégalité de Łojasiewicz pour les fonctions analytiques [BR] donne $|\Delta\phi(a)| \geq C'd(a,Z)^{\alpha'}$ pour des constantes $C' > 0$ et $\alpha' \geq 1$ convenables. De plus, d'après la propriété de séparation régulière des ensembles analytiques, il existe des constantes $C'' > 0$ et $\alpha'' \geq 1$ telles qu'on ait $d(a,Z) \geq C''d(a,Y)^{\alpha''}$. On a donc $|\Delta\phi(a)| \geq C'C''^{\alpha'}d(a,Y)^{\alpha'\alpha''}$. On pose $\delta = \alpha'\alpha''$.
Du lemme 2.2.7 appliqué avec $K = X \cap \overline{B(0,r)}$, on déduit qu'on peut choisir une constante $\epsilon \in]0,1]$ de telle sorte que l'application

$$\phi : x \mapsto (\phi_1(x),\ldots,\phi_d(x),x_{d+1},\ldots,x_n)$$

induise un difféomorphisme ϕ_a de $B(a,2\epsilon d(a,Y)^\delta)$ sur son image et qu'on ait $\epsilon d(a,Y)^\delta \leq \min\left(|\Delta\phi(a)|,\lambda,\frac{1}{\|\phi\|_{(\lambda,\infty)}^{(1,.)}}\right)$. Cette dernière inégalité implique que, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, on a

$$\|\phi\|_{(\epsilon d(a,Y)^\delta,\infty)}^{(1,.)} \leq \frac{1}{\epsilon d(a,Y)^\delta}.$$

En posant $V_a = B(a,\epsilon d(a,Y)^\delta) \cap B(0,r)$, la définition de Z entraîne l'égalité

$$Z \cap \overline{V_a} = \{x \in \overline{V_a}\ ;\ \phi_1(x) = \ldots = \phi_d(x) = 0\}.$$

On a ainsi démontré toutes les conditions requises pour que le quadruplet $(X \cap B(0,r),Y,\epsilon,\delta)$ satisfasse la propriété $\mathrm{CLU}(1,r)$. $\square$

Chapitre 3

Théorèmes de composition

Ce chapitre est consacré à l'étude de la composition de fonctions non quasi-analytiques. Ce problème y est abordé sous deux angles différents : dans un premier temps, on cherche à connaître la nature de la fonction $g \circ f$ connaissant celle de la fonction g et celle de l'application f. On désigne ce cas par **composition directe**. Dans un deuxième temps, on étudie le cas de la **composition réciproque** : quelles sont les propriétés de la fonction g quand on connaît celles de la fonction $g \circ \phi$ et celles de l'application ϕ ? Dans ce chapitre, nous répondrons à cette question lorsque ϕ est un difféomorphisme. Ces problèmes ont déjà été étudiés et résolus pour des séries formelles à croissance modérée dans [Mo1] et [Mo3]. Nous reprendrons une partie de ces travaux afin d'apporter des précisions indispensables dans le cadre des fonctions non quasi-analytiques. Dans une troisième partie, on démontrera, comme application des théorèmes de composition, un théorème à la Tougeron et Merrien pour les idéaux de fonctions non quasi-analytiques à singularités isolées.

On utilise les notations introduites dans les sections 1.1 et 1.5.

3.1 Théorème de composition directe

Dans [Mo1] figure un théorème de composition de deux séries formelles à croissance contrôlée. Nous allons le préciser en donnant une estimation de la norme de la série composée et en déduire un théorème de composition directe de fonctions : c'est le théorème 3.1.4.

Soient une série formelle G appartenant à $\mathbb{R}[[Y]]_{\lambda_G}^{(M)}$ avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_{n'})$ et un n'-uple de séries formelles $F \in \left(\mathbb{R}[[X]]_{\lambda_F}^{(N)}\right)^{n'}$ avec $X = (X_1, \ldots, X_n)$. On suppose, de plus, que $F(0) = 0$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *[Mo1](I.1.3 p. 10)*
Pour tout $P \in (\mathbb{N}^n)^*$, on a

$$D^P\left(G \circ_Y F\right)(X) = \sum_{Q \in \mathbb{N}^{n'}, q \leq p} S_Q^P(X)\left(D^Q G\right) \circ_Y F(X)$$

où les coefficients S_Q^P sont déterminés par récurrence sur p à l'aide des relations :
pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n'\}$,

$$S_{e_j}^{e_i} = \frac{\partial F_{e_j}}{\partial X_i},$$

puis, pour $p \geq 1$,

$$S_{e_j}^{P+e_i} = \frac{\partial S_{e_j}^P}{\partial X_i},$$

pour tout $Q = (Q_1,\ldots,Q_n)$, si $1 < q \leq p$,

$$S_Q^{P+e_i} = \frac{\partial S_Q^P}{\partial X_i} + \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ Q_j \neq 0}} S_{e_j}^{e_i} S_{Q-e_j}^P,$$

si $q = p+1$,

$$S_Q^{P+e_i} = \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ Q_j \neq 0}} S_{e_j}^{e_i} S_{Q-e_j}^P.$$

Le lemme qui suit est une variante de [Mo1], I.1.6 p. 11.

Lemme 3.1.2. *Il existe une constante C ne dépendant que de n et N telle que, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{N}^n)^* \times (\mathbb{N}^{n'})^*$ avec $q \leq p$ et tout multi-indice $H \in \mathbb{N}^n$, on ait*

$$|(S_Q^P)_H| \leq \left(C \max\left(\|F\|_{(\lambda_F,\mathbb{R})}^{(N,.)} \lambda_F^{-1}, 1\right)\right)^p \left(\frac{2n^2}{\lambda_F}\right)^{p+h-q} \frac{(p+h-q)!}{h!} N_{p+h-q+1}.$$

Démonstration. Du lemme 1.5.8 et de la définition de $S_{e_j}^{e_i}$, on déduit que, pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n'\}$ et tout multi-indice $H \in \mathbb{N}^n$, on a

$$|(S_{e_j}^{e_i})_H| \leq \frac{n\|F\|_{(\lambda_F,\mathbb{R})}^{(N,.)}}{\lambda_F}\left(\frac{n}{\lambda_F}\right)^h N_{h+1}.$$

On pose $C_1 = n \max\left(\|F\|_{(\lambda_F,\mathbb{R})}^{(N,.)} \lambda_F^{-1}, 1\right)$ et $C_2 = \frac{n}{\lambda_F}$. On applique alors le même raisonnement que pour la preuve du lemme I.1.6 [Mo1]. Etant donnée

la majoration card$(j \in \{1,\ldots,n\}\ ;\ Q_j \neq 0) \leq n$, le second membre des équations I.1.6.7' et I.1.6.10' [Mo1] est multiplié par n. La constante C_4 est choisie de telle sorte que la série $\sum_{h\in\mathbb{N}} \left(\frac{n}{C_4}\right)^h$ converge et on note C_5 la somme de cette série. Il suffit de prendre $C_4 = 2n$ et $C_5 = 2$. Suite à l'équation I.1.6.11' [Mo1], une constante C_3 est choisie de telle sorte que $C_1C_3 \geq 1 + nN_1C_1C_5$. Compte tenu de l'inégalité $N_1C_1C_5 \geq 1$, il suffit de poser $C_3 = 2nN_1C_5 = 4N_1$.
On obtient finalement

$$|(S_Q^P)_H| \leq (4C_1N_1)^p\,(C_2 2n)^{p+h-q}\,\frac{(p+h-q)!}{h!}N_{p+h-q+1}.$$

En remplaçant C_1 et C_2 par leur valeur et en posant $C = 4n^2N_1$, on obtient le résultat. □

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.1.3. *Soient M et N deux suites admissibles. Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de n, n', M et N telles que, pour toute série formelle $G \in \mathbb{R}[[X]]_{\lambda_G}^{(M)}$ et tout élément F de $\left(\mathbb{R}[[X]]_{\lambda_F}^{(N)}\right)^{n'}$ vérifiant $F(0) = 0$, on ait, pour tout $P \in \mathbb{N}^n$,*

$$|(G\circ_Y F)_P| \leq C_2\|G\|_{(\lambda_G,\mathbb{R})}^{(M,.)}\left(\frac{C_1\max\left(\|F\|_{(\lambda_F,\mathbb{R})}^{(N,.)}\lambda_F^{-1},1\right)}{\min(\lambda_F,\lambda_G)}\right)^p M'_p$$

où $M' = \max(M,N)$.

Démonstration. On reprend la preuve de la proposition I.1.8 p. 14 [Mo1]. Comme $F(0) = 0$, pour tout $P \in (\mathbb{N}^n)^*$, on a

$$|P!(G\circ_Y F)_P| \leq \sum_{Q\in\mathbb{N}^{n'},q\leq p} |\left(S_Q^P\right)_0||G_QQ!|.$$

Or, pour tout $Q \in \mathbb{N}^{n'}$, on a $|G_Q| \leq M_q\left(\frac{1}{\lambda_G}\right)^q\|G\|_{(\lambda_G,\mathbb{R})}^{(M,.)}$.
On pose $M' = \max(M,N)$ et $A_{M'}$ la constante associée à M'. Du lemme 3.1.2, on déduit

$$|(G\circ_Y F)_P| \leq \frac{1}{P!}\sum_{Q\in\mathbb{N}^{n'},q\leq p}\left(C\max\left(\|F\|_{(\lambda_F,\mathbb{R})}^{(N,.)}\lambda_F^{-1},1\right)\right)^p\left(\frac{2n^2}{\lambda_F}\right)^{p-q}$$
$$(p-q)!N_{p-q+1}M_q\left(\frac{1}{\lambda_G}\right)^q\|G\|_{(\lambda_G,\mathbb{R})}^{(M,.)}q!.$$

En utilisant la définition et les propriétés de la suite M', on obtient

$$\begin{aligned}
|(G \circ_Y F)_P| &\leq \frac{p!}{P!}\left(C \max\left(\|F\|^{(N,.)}_{(\lambda_F,\mathbb{R})}\lambda_F^{-1},1\right)\right)^p \left(2n^2\right)^p \|G\|^{(M,.)}_{(\lambda_G,\mathbb{R})}M'_{p+1} \\
&\qquad \frac{1}{\min\left(\lambda_F,\lambda_G\right)^p}\sum_{Q\in\mathbb{N}^{n'},q\leq p}\left(2n^2\right)^{-q} \\
&\leq n^p\left(C2n^2\right)^p A_{M'}{}^{p+1}M'_pM'_1\left(\frac{\max\left(\|F\|^{(N,.)}_{(\lambda_F,\mathbb{R})}\lambda_F^{-1},1\right)}{\min\left(\lambda_F,\lambda_G\right)}\right)^p \\
&\qquad \|G\|^{(M,.)}_{(\lambda_G,\mathbb{R})}n'^p\sum_{q\leq p}\left(2n^2\right)^{-q}.
\end{aligned}$$

La dernière somme est majorée par 2. Si on pose $C_1 = nC2n^2A_{M'}n'$ et $C_2 = 2A_{M'}M'_1$, on obtient le résultat. □

On utilise ce résultat pour démontrer le théorème de composition directe pour des fonctions non quasi-analytiques. L'idée consiste à évaluer, en chaque point du domaine de définition, la norme de la série de Taylor de la fonction composée et d'obtenir ainsi une majoration uniforme sur l'ouvert.

Théorème 3.1.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$. Soient f une application appartenant à $\left(C^{(N)}_{\lambda_f}(U)\right)^{n'}$, vérifiant $f(U) \subset V$, et g une fonction appartenant à $C^{(M)}_{\lambda_g}(V)$. Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de n, n', M et N telles qu'on ait*

$$\|g \circ f\|^{(M',.)}_{(\omega,\infty)} \leq C_2\|g\|^{(M,.)}_{(\lambda_g,\infty)}, \tag{3.1}$$

avec $\omega = \frac{\min(\lambda_f,\lambda_g)}{C_1 \max\left(\|f\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}\lambda_f^{-1},1\right)}$ et $M' = \max(M,N)$. De plus, si la valeur $\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}$ est finie, l'inégalité (3.1) est encore vérifiée avec

$$\omega = \frac{\min(\lambda_f,\lambda_g)}{C_1 \max\left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)},1\right)}.$$

Démonstration.
On définit, pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, la série F_x par $F_x(Y) = \overline{T}_x f - f(x)$. D'après le lemme 1.1.1, on a la relation

$$\overline{T}_x(g \circ f) = \overline{T}_{f(x)}g \circ_Y F_x.$$

La série formelle $\overline{T}_{f(x)}g$ appartient à $\mathbb{R}[[Y]]^{(M)}_{\lambda_g}$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $\|g\|^{(M,.)}_{(\lambda_g,\infty)}$. La série F_x, quant à elle, appartient à $\left(\mathbb{R}[[X]]^{(N)}_{\lambda_f}\right)^{n'}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F_x(0) = 0$. On peut utiliser le théorème 3.1.3 pour étudier $\overline{T}_{f(x)}g \circ_Y F_x$. On en déduit qu'il existe des constantes C_1' et C_2' telles que, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\begin{aligned}|D^H(g\circ f)(x)|\frac{1}{H!} &= |\left(\overline{T}_x(g\circ f)\right)_H| \\ &\leq \left(\frac{C_1' \max\left(\|F_x\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}\lambda_f^{-1}, 1\right)}{\min\left(\lambda_f, \lambda_g\right)}\right)^p M_p' C_2' \|g\|^{(M,.)}_{(\lambda_g,\infty)}.\end{aligned}$$

On a alors deux majorations possibles pour $\|F_x\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}\lambda_f^{-1}$:

$$\|F_x\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\mathbb{R})}\lambda_f^{-1} \leq \|f\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}\lambda_f^{-1}$$

ou, en supposant que la valeur $\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}$ soit finie,

$$\begin{aligned}\|F_x\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\mathbb{R})}\lambda_f^{-1} &\leq \lambda_f^{-1} \sum_{H\in(\mathbb{N}^n)^*} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^H f(x)\right| \frac{\lambda_f^h}{M_h H!} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{J\in\mathbb{N}^n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{J+e_i} f(x)\right| \frac{\lambda_f^j}{M_j J!}\frac{M_j}{(j_i+1)M_{j+1}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}.\end{aligned}$$

Si on pose $C_1 = 2nC_1'$, $C_2 = 2C_2'$, on obtient

$$\begin{aligned}|D^H(g\circ f)(x)|\frac{1}{H!} &= |\left(\overline{T}_x(g\circ f)\right)_H| \\ &\leq \omega^{-p} C_2 \|g\|^{(M,.)}_{(\lambda_g,\infty)}\end{aligned}$$

avec, dans le premier cas,

$$\omega = \frac{\min(\lambda_f, \lambda_g)}{C_1 \max\left(\|f\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}\lambda_f^{-1}, 1\right)}$$

et, dans le deuxième,

$$\omega = \frac{\min(\lambda_f, \lambda_g)}{C_1 \max\left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda_f,\infty)}, 1\right)}.$$

Le théorème s'ensuit. $\square$

On peut aussi déduire du théorème 3.1.4 une majoration de la norme de l'inverse d'une fonction.

Lemme 3.1.5. *Soit f une fonction de $C_\lambda^{(N)}(\mathbb{R}^n)$. Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de n et de N telles que, pour tout compact K inclus dans le complémentaire des zéros de f, on ait l'estimation*

$$\left\| \frac{1}{f}_{|\overset{\circ}{K}} \right\|^{(N,.)}_{(\omega,\infty)} \leq \frac{C_2}{\min_{x\in K} |f(x)|}, \tag{3.2}$$

avec $\omega = \frac{\min(\lambda, \min_{x\in K}|f(x)|)}{C_1 \max\left(\|f\|^{(N,.)}_{(\lambda,\infty)}\lambda^{-1}, 1\right)}$ *ou, si* $\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda,\infty)}$ *est finie,*

$$\omega = \frac{\min(\lambda, \min_{x\in K}|f(x)|)}{C_1 \max\left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^{(N,.)}_{(\lambda,\infty)}, 1\right)}.$$

Démonstration. On considère la fonction $g : y \mapsto \frac{1}{y}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$ et tout $h \in \mathbb{N}$, on a $D^h g(y) = \frac{(-1)^h h!}{y^{h+1}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la série formelle $G_{f(x)}$ par $G_{f(x)}(Y) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^h}{f(x)^{h+1}} Y^h = (f(x))^{-1} \sum_{h\in\mathbb{N}} \left(\frac{-Y}{f(x)}\right)^h$. Donc, la série $G_{f(x)}$ appartient à $\mathbb{R}[[Y]]^{(1)}_{\frac{|f(x)|}{2}}$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $\frac{2}{|f(x)|}$. En appliquant la proposition 3.1.3 pour étudier $G_{f(x)} \circ_Y \left(\overline{T}_x f - f(x)\right)$, on montre qu'il existe deux constantes C_1' et C_2' telles que, pour tout $x \notin V(f)$, on ait l'estimation

$$\left| D^L \left(\frac{1}{f}\right)(x) \right| \leq l! N_l \left(\frac{C_1' \max\left(\|\overline{T}_x f - f(x)\|^{(N,.)}_{(\lambda,\mathbb{R})}\lambda^{-1}, 1\right)}{\min\left(\lambda, \frac{|f(x)|}{2}\right)} \right)^l \frac{2C_2'}{|f(x)|}.$$

En posant $C_1 = 2C_1'$ et $C_2 = 2C_2'$ et en reportant cette inégalité dans la définition de la norme, on conclut comme dans le lemme précédent. $\square$

3.2 Théorèmes de composition réciproque

3.2.1 Théorème de composition réciproque formel

Dans la suite, on considère $\Phi(X) = (\Phi_1(X), \ldots, \Phi_n(X))$ un élément de $\left(\mathcal{B}[[X]]^{(N)}_{\lambda_\Phi}\right)^n$ vérifiant $\Phi(0) = 0$. On suppose que $\Delta\Phi$ est non nul en tant que

série formelle et on désigne par μ son ordre.
Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $T_{e_j}^{e_i}$ désigne le cofacteur du terme d'indice (i,j) de la matrice jacobienne de Φ. On pose $\nu = \inf_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}\{\text{ordre de } T_{e_j}^{e_i}\}$. On a alors $\nu \leq \mu$.

Lemme 3.2.1. *Il existe une constante C_N ne dépendant que de N et n, telle que, pour toute application Φ vérifiant les hypothèses précédentes, on ait*

$$\|\Delta\Phi\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \leq C_N \left(\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\lambda^{-1}\right)^n$$

et, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$,

$$\|T_{e_j}^{e_i}\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \leq C_N \left(\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\lambda^{-1}\right)^{n-1}.$$

Démonstration. Par définition, on a $\Delta\Phi(X) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon^\sigma \prod_{k=1}^n \frac{\partial\Phi_{\sigma(k)}}{\partial X_k}(X)$ où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de n éléments et ε^σ la signature de σ. De plus, vu le lemme 1.5.8, pour tout couple $(k,l) \in \{1,\dots,n\}^2$, on a

$$\left\|\frac{\partial\Phi_l}{\partial X_k}\right\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \leq \frac{N_1 n A_N}{\lambda_\Phi}\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\|\Delta\Phi\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \leq n! \left(\frac{N_1 n A_N}{\lambda_\Phi}\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\right)^n.$$

On conclut en posant $C_N = n!\,(N_1 n A_N)^n$.
En ce qui concerne $T_{e_j}^{e_i}$, on a

$$T_{e_j}^{e_i}(X) = (-1)^{1+j} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{(i,j)}} \varepsilon^\sigma \prod_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\neq i}} \frac{\partial\Phi_{\sigma(k)}}{\partial X_k}(X)$$

où $\mathcal{S}_{(i,j)}$ désigne l'ensemble des applications bijectives de $\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}$ dans $\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}$. En utilisant les mêmes arguments que pour $\Delta\Phi$, on obtient la majoration

$$\|T_{e_j}^{e_i}\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \leq (n-1)! \left(\frac{N_1 n A_N}{\lambda_\Phi}\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\right)^{n-1}.$$

On conclut en remarquant l'inégalité $(n-1)!\,(N_1 n A_N)^{n-1} \leq C_N$. $\square$

En reprenant la définition de la norme et la propriété (H_5), on montre le lemme suivant.

Lemme 3.2.2. *Soit M une suite à croissance modérée. Soit F une série formelle de $\mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$ d'ordre μ. On a*

$$\|F\|_{(\frac{\lambda}{A_M},\mathcal{B})}^{(M_{-\mu},.)} \leq M_\mu \|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}.$$

On a une formule de composition analogue à celle du lemme 3.1.1.

Lemme 3.2.3. *[Th1][Mo3](2 p. 77)[Mo1](I.2.3 p. 17)*
Soit F une série série formelle de $\mathcal{B}[[X]]$. Pour tout $L \in (\mathbb{N}^n)^*$, on a

$$\Delta\Phi(X)^{2|L|-1}(D^L F) \circ_Y \Phi(X) = \sum_{H\in\mathbb{N}^n, h\leq l} T_H^L(X) D^H(F \circ_Y \Phi)(X)$$

où T_H^L est défini de la manière suivante.
Pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,j\}^2$, $T_{e_j}^{e_i}$ est le cofacteur du terme d'indice (i,j) de la matrice jacobienne de Φ.
Pour tout $L \in (\mathbb{N}^n)^*$,

$$\begin{aligned} T_{e_j}^{L+e_i}(X) = &\sum_{t=1}^n \Delta\Phi(X) T_{e_t}^{e_i}(X) \frac{\partial T_{e_j}^L(X)}{\partial X_t} \\ &- (2l-3) \sum_{t=1}^n \frac{\partial \Delta\Phi(X)}{\partial X_t} T_{e_t}^{e_i}(X) T_{e_j}^L(X). \end{aligned}$$

Pour tout $H = (H_1,\ldots,H_n) \in (\mathbb{N}^n)^*$, si $1 < h < l+1$,

$$\begin{aligned} T_H^{L+e_i}(X) = &\sum_{t=1}^n \Delta\Phi(X) T_{e_t}^{e_i}(X) \frac{\partial T_H^L(X)}{\partial X_t} \\ &- (2l-3) \sum_{t=1}^n \frac{\partial \Delta\Phi(X)}{\partial X_t} T_{e_t}^{e_i}(X) T_H^L(X) \\ &+ \Delta\Phi(X) \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\} \\ H_j\neq 0}} T_{e_j}^{e_i}(X) T_{H-e_j}^L(X), \end{aligned}$$

si $h = l+1$,

$$T_H^{L+e_i}(X) = \Delta\Phi(X) \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\} \\ H_j\neq 0}} T_{e_j}^{e_i}(X) T_{H-e_j}^L(X).$$

On pose $T_H^L(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^n} \left(T_H^L\right)_J X^J$.

Lemme 3.2.4. *Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 3.2.1, il existe des constantes C_1' et C_2' ne dépendant que de n, N et μ, avec $C_2' \geq 4n$, telles que, pour tout $L \in (\mathbb{N}^n)^*$ et tout $H \in (\mathbb{N}^n)^*$ vérifiant $h \leq l$, pour tout $J \in \mathbb{N}^n$, on ait*

$$\|\left(T_H^L\right)_J\|_{\mathcal{B}} \leq (C_\Phi C_1')^l \left(\frac{C_2'}{\lambda_\Phi}\right)^{l+j-h} \frac{(l+j-h)!}{j!} N_{l+j-h-l(\mu+\nu)+\mu}$$

avec $C_\Phi = \max\left(\frac{\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}}{\lambda_\Phi}, 1\right)^{2n}$.

Démonstration. On reprend la preuve du lemme 4 p. 78 de [Mo3] ou du lemme I.2.5 p. 20 de [Mo1]. Comme $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach, pour tout couple $(f,g) \in \mathcal{B}$, on a $\|fg\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}}\|g\|_{\mathcal{B}}$. D'autre part, en appliquant le lemme 3.2.2 suivi du lemme 3.2.1, on établit les estimations

$$\begin{aligned}\|\Delta\Phi\|^{(N_{-\mu},.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N^2},\mathcal{B}\right)} &\leq N_\mu \|\Delta\Phi\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \\ &\leq N_\mu C_N \left(\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\lambda_\Phi^{-1}\right)^n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|T_{e_j}^{e_i}\|^{(N_{-\nu},.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N^2},\mathcal{B}\right)} &\leq N_\nu \|T_{e_j}^{e_i}\|^{(N,.)}_{\left(\frac{\lambda_\Phi}{nA_N},\mathcal{B}\right)} \\ &\leq N_\nu C_N \left(\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}\lambda_\Phi^{-1}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Si on pose $E_\Phi = \max\left(\frac{\|\Phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}}{\lambda_\Phi}, 1\right)^n$, $E_1 = N_\mu C_N$ et $E_2 = nA_N^2$, on obtient, pour tout multi-indice $J \in \mathbb{N}^n$,

$$\|(\Delta\Phi)_J\|_{\mathcal{B}} \leq E_1 E_\Phi \left(\frac{E_2}{\lambda_\Phi}\right)^j N_{j-\mu}, \tag{3.3}$$

et, pour tout couple $(l,h) \in \{1,\ldots,n\}^2$,

$$\|(T_{e_h}^{e_l})_J\|_{\mathcal{B}} \leq E_1 E_\Phi \left(\frac{E_2}{\lambda_\Phi}\right)^j N_{j-\nu}. \tag{3.4}$$

Par conséquent, en prenant $C_1 = E_1 E_\Phi$, $C_2 = \frac{E_2}{\lambda_\Phi}$, les estimations (3.3) et (3.4) correspondent aux inégalités (4.1) et (4.2) de [Mo3] ou encore (2.5.1) et (2.5.2) de [Mo1]. On choisit C_4 telle que $\sum_{H\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{2}{C_4}\right)^{h+1}$ converge. Il suffit

de prendre $C_4 = 4n$. Alors, cette somme a pour valeur $C_6 = \frac{1}{2n}$. On a aussi $\sum_{H\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{1}{C_4}\right)^h \leq 2$, donc on peut prendre $C_5 = 2$.
On pose $E_3 = C_5\,(2nC_5 + 2nC_6) = 8n + 2$. On obtient alors les estimations du lemme 4 de [Mo3] avec $C_3 = C_1E_3$:

$$\|\left(T_H^L\right)_J\|_{\mathcal{B}} \leq (C_1^2(8n+2))^l(4nC_2)^{l+j-h}\frac{(l+j-h)!}{j!}N_{l+j-h-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

Si on remplace C_1 et C_2 par leur valeur et si on pose $C_1' = E_1^2(8n+2)$ et $C_2' = 4nE_2$, on obtient le résultat. □

On en déduit un théorème de composition réciproque formel.

Théorème 3.2.5. *Soient M et N deux suites à croissance modérée comparables. Soit $\Phi(X) = (\Phi_1(X), \ldots, \Phi_n(X))$ un élément de $\left(\mathcal{B}[[X]]_{\lambda_\Phi}^{(N)}\right)^n$ vérifiant $\Phi(0) = 0$ et dont le jacobien est d'ordre fini μ. On suppose que* $\mathrm{Init}(\Delta\Phi)$ *est inversible dans $\mathcal{B}$. Soit $\nu = \inf_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}\{$ordre de $T_{e_j}^{e_i}\}$.*
Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de n, M et N telles que, pour tout réel λ, $0<\lambda<1$, et toute série formelle F de $\mathcal{B}[[X]]$ vérifiant $F\circ\Phi \in \mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$, on ait

$$\|F\|_{(\omega,\mathcal{B})}^{\left({M'}^{\mu-\nu+1},.\right)} \leq 2\|F\circ\Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}\left\|(\mathrm{Init}(\Delta\Phi))^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}^{-1},$$

avec

$$\omega = \frac{{A_{M'}}^{-(\mu-\nu+1)^2}}{C_\Phi C_1\left\|(\mathrm{Init}(\Delta\Phi))^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}^2}\left(\frac{\min(\lambda_\Phi,\lambda)}{C_2}\right)^{2\mu+1},$$

$$M' = \max(M,N) \text{ et } C_\Phi = \max\left(\frac{\|\Phi\|_{(\lambda_\Phi,\mathcal{B})}^{(N,.)}}{\lambda_\Phi}, 1\right)^{2n}.$$

Démonstration. Cette preuve reprend celle du théorème 5 p. 82 de [Mo3] ou théorème I.2.6 p. 23 de [Mo1]. D'après le lemme 1.5.8, pour tout $H\in\mathbb{N}^n$, on a

$$\left\|D^H(F\circ\Phi)\right\|_{\left(\frac{\lambda}{nA_M},\mathcal{B}\right)}^{(M,.)} \leq \frac{h!M_h(nA_M)^h}{\lambda^h}\|F\circ\Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}.$$

Ceci implique, pour tout $J\in\mathbb{N}^n$,

$$\left\|\left(D^H(F\circ\Phi)\right)_J\right\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{h!M_h(nA_M)^h}{\lambda^h}\|F\circ\Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}\left(\frac{nA_M}{\lambda}\right)^j M_j. \tag{3.5}$$

On pose, pour tout $L\in(\mathbb{N}^n)^*$ et tout $H\in(\mathbb{N}^n)^*$ avec $h\leq l$,

$$T_H^L(X)D^H(F\circ\Phi)(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^n}\left(R_H^L\right)_J X^J.$$

Alors, pour tout $J \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\left\| \left(R_H^L\right)_J \right\|_{\mathcal{B}} \le \sum_{I \le J} \left\| \left(T_H^L\right)_I \right\|_{\mathcal{B}} \left\| \left(D^H(F \circ \Phi)\right)_{J-I} \right\|_{\mathcal{B}}.$$

Du lemme 3.2.4 et de (3.5), on déduit qu'il existe des constantes C_1' et C_2' telles que, pour tout $J \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\begin{aligned}\left\| \left(R_H^L\right)_J \right\|_{\mathcal{B}} &\le \sum_{I \le J} (C_\Phi C_1')^l \left(\frac{C_2'}{\lambda_\Phi}\right)^{l+i-h} \frac{(l+i-h)!}{i!} N_{l+i-h-l(\mu+\nu)+\mu} \\ &\qquad \frac{h! M_h (nA_M)^h}{\lambda^h} \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} \left(\frac{nA_M}{\lambda}\right)^{j-i} M_{j-i} \\ &\le (C_\Phi C_1')^l \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} (nA_M)^{j+h} \\ &\qquad \sum_{I \le J} \frac{(l+i-h)!h!}{i!} N_{l+i-h-l(\mu+\nu)+\mu} M_{h+j-i} \frac{{C_2'}^{l+i-h}}{\lambda_\Phi^{l+i-h} \lambda^{h+j-i}}.\end{aligned}$$

En notant $M' = \max(M, N)$ et en utilisant la log-convexité de la suite M', on obtient

$$\begin{aligned}\left\| \left(R_H^L\right)_J \right\|_{\mathcal{B}} &\le (C_\Phi C_1')^l \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} (nA_M)^{j+h} \\ &\qquad \sum_{I \le J} 2^{l+i} l! M'_{l+j-l(\mu+\nu)+\mu} \frac{1}{\min(\lambda_\Phi, \lambda)^{l+j}} {C_2'}^{l+i-h}.\end{aligned}$$

On majore 2^{l+i} par 2^{l+j}, ${C_2'}^{l+i-h}$ par ${C_2'}^{l+j-h}$ et $\sum_{I \le J} 1$ par n^j. De plus, $h \le l$, donc on a $(nA_M)^{j+h} \le (nA_M)^{j+l}$. Ceci donne

$$\begin{aligned}\left\| \left(R_H^L\right)_J \right\|_{\mathcal{B}} &\le (C_\Phi C_1')^l \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} (nA_M)^{j+l} {C_2'}^{l+j-h} 2^{l+j} l! \\ &\qquad M'_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)^{-(l+j)} n^j \\ &\le (C_\Phi C_1')^l \left(2n^2 A_M C_2'\right)^{l+j} \min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)^{-(l+j)} \\ &\qquad l! \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} M'_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} {C_2'}^{-h}.\end{aligned}$$

L'inégalité $C_2' > 4n$ induit la majoration $\sum_{H \in \mathbb{N}^n} {C_2'}^{-h} \le 2$. De plus, si on pose $C_2 = 2n^2 A_M C_2'$, on a $C_2 \ge 1$ et

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{H \in \mathbb{N}^n, h \le l} R_H^L \right)_J \right\|_{\mathcal{B}} &\le (C_\Phi C_1')^l {C_2}^{l+j} \min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)^{-(l+j)} \\ &\qquad l! \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} M'_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \sum_{H \in \mathbb{N}^n, h \le l} {C_2'}^{-h} \qquad (3.6) \\ &\le 2 (C_\Phi C_1')^l {C_2}^{l+j} \min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)^{-(l+j)} \\ &\qquad l! \|F \circ \Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} M'_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}.\end{aligned}$$

En appliquant les mêmes arguments que dans [Mo3] (équation 5.14) ou [Mo1] (équation I.2.6.14), on obtient

$$\left(\sum_{H\in\mathbb{N}^n, h\leq l} R_H^L\right)_{(2l-1)\mathrm{Exp}(\Delta\Phi)} = L!F_L\left(\mathrm{Init}(\Delta\Phi)\right)^{2l-1}.$$

Ceci implique

$$\|L!F_L\|_{\mathcal{B}} \leq \left\|\left(\sum_{H\in\mathbb{N}^n, h\leq l} R_H^L\right)_{(2l-1)\mathrm{Exp}(\Delta\Phi)}\right\|_{\mathcal{B}} \left(\left\|\left(\mathrm{Init}(\Delta\Phi)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}\right)^{2l-1}.$$

Par définition, on a $|\mathrm{Exp}(\Delta\Phi)| = \mu$. Par conséquent, en reportant (3.6) avec $j = (2l-1)\mu$, on obtient

$$\begin{aligned}\|F_L\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{2}{L!}\left(C_\Phi C_1'\right)^l \left(\frac{C_2}{\min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)}\right)^{(2l-1)\mu+l} & l!\|F\circ\Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} \\ M'_{l(\mu-\nu+1)}\left(\left\|\left(\mathrm{Init}(\Delta\Phi)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}\right)^{2l-1}. &\end{aligned} \tag{3.7}$$

Pour tout $L \in (\mathbb{N}^n)^*$, on a $(2l-1)\mu + l \leq l(2\mu+1)$. Etant données les inégalités $C_2 \geq 1$, $\lambda < 1$ et $\lambda_\Phi \leq 1$, on a la majoration

$$\left(\frac{C_2}{\min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)}\right)^{(2l-1)\mu+l} \leq \left(\frac{C_2}{\min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)}\right)^{(2\mu+1)l}. \tag{3.8}$$

D'autre part, la suite M' étant à croissance modérée, on déduit de (1.2) avec $k = \mu - \nu + 1$ que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a

$$M'_{l(\mu-\nu+1)} \leq {A_{M'}}^{l(\mu-\nu+1)^2} {M'}_l^{\mu-\nu+1}. \tag{3.9}$$

On a aussi $\frac{l!}{L!} \leq n^l$. En reportant (3.8), (3.9) et cette dernière inégalité dans (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}\|F_L\|_{\mathcal{B}} \leq 2{A_{M'}}^{l(\mu-\nu+1)^2}\left(nC_\Phi C_1'\right)^l \left(\frac{C_2}{\min\left(\lambda_\Phi, \lambda\right)}\right)^{(2\mu+1)l} & \left\|\left(\mathrm{Init}(\Delta\Phi)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}^{2l} \\ \left\|\left(\mathrm{Init}(\Delta\Phi)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}}^{-1} {M'}_l^{\mu-\nu+1}\|F\circ\Phi\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}. &\end{aligned}$$

On en déduit le résultat en posant $C_1 = nC_1'$. □

3.2.2 Théorème de composition réciproque dans $C^{(M)}$

Dans cette section, nous allons généraliser le théorème de composition réciproque aux fonctions. Plus précisément, on considère un ouvert V' de $\mathbb{R}^n$, un ouvert V relativement compact dans V' et un difféomorphisme ϕ de V' sur son image, dont les composantes appartiennent à $C^{(M)}(V')$. Etant donnée une fonction g de $C^\infty(V')$, si la fonction $g \circ \phi$, notée f, est dans $C^{(M)}(V')$, alors le théorème d'inversion locale [K] et la stabilité de la classe $C^{(M)}$ par composition impliquent que la fonction g appartient à $C^{(M)}(V)$. Ici, on va donner une estimation précise d'un réel ω tel que g appartienne à l'espace de Banach $C_\omega^{(M)}(V)$ et contrôler la norme de g dans cet espace, en fonction des propriétés de f et ϕ, sans manipuler d'estimations sur ϕ^{-1}.

On montre, dans un premier temps, quelques propriétés concernant le difféomorphisme ϕ.

Lemme 3.2.6. *Soient V' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C_{\lambda_\phi}^{(N)}(V')\right)^n$ avec $\lambda_\phi \in]0,1]$. On considère Φ la série à coefficients de classe C^∞ sur V', définie par*

$$\Phi(y, X) = \overline{T}_y\phi(X) - \phi(y).$$

Pour tout $x \in V'$, on a

$$\text{Init }\left(\Delta\Phi(y, \cdot_X)\right) = \left(\Delta\Phi(y, \cdot_X)\right)_0 = \Delta\phi(y). \tag{3.10}$$

De plus, pour tout ouvert V relativement compact dans V', il existe une constante ω_ϕ, $\omega_\phi \in]0,1]$ telle qu'on ait

$$- \|\phi_{|V}\|_{(\omega_\phi,\infty)}^{(N,.)} \leq \omega_\phi^{-1}, \tag{3.11}$$

$$- \text{ pour tout } y \in V, \quad \omega_\phi < |\text{Init } \Delta\Phi(y, \cdot_X)| < C_N\omega_\phi^{-2n}, \tag{3.12}$$

où C_N ne dépend que de n et N.

Démonstration. La définition de Φ implique, pour tout $y \in V'$, l'égalité

$$\Delta\Phi(y, X) = \Delta\left(\overline{T}_y\phi\right)(X).$$

De plus, pour tout $y \in V'$, on a $\Delta(\overline{T}_y\phi) = \overline{T}_y(\Delta\phi)$. Comme la fonction ϕ est un difféomorphisme de V' sur $\phi(V')$, pour tout $y \in V'$, on a $\Delta\phi(y) \neq 0$. On en déduit, pour tout $y \in V'$,

$$\text{Init }\left(\Delta\Phi(y, \cdot_X)\right) = \text{Init }\left(\overline{T}_y(\Delta\phi)\right) = \Delta\phi(y).$$

On a donc montré la propriété (3.10).
D'autre part, soit V un ouvert relativement compact dans V'. Il existe alors une constante C_1 telle qu'on ait, pour tout $y \in \overline{V}$, $C_1 < |\Delta\phi(y)|$. Si on pose

$$\omega_\phi = \min\left(C_1, \lambda_\phi, \frac{1}{\|\phi\|^{(N,.)}_{(\lambda_\phi,\infty)}}, 1\right),$$

on a les propriétés :

$$\begin{aligned} &- \text{pour tout } y \in V, \omega_\phi < |\Delta\phi(y)|, \\ &- \|\phi_{|V}\|^{(N,.)}_{(\omega_\phi,\infty)} \leq \|\phi_{|V}\|^{(N,.)}_{(\lambda_\phi,\infty)} \leq \omega_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De plus, en reportant ce résultat dans (3.10), on obtient la minoration de (3.12). Il reste à montrer la majoration de $|\text{Init } \Delta\Phi(y, \cdot_X)|$. Pour tout $y \in V$, on a $\Delta\phi(y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon^\sigma \prod_{i=1}^n \frac{\partial\phi_i}{\partial x_{\sigma(i)}}(y)$ où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de n éléments et ε^σ la signature de σ. De l'inégalité (3.11), on déduit alors

$$\begin{aligned} |\Delta\phi(y)| &\leq n! \left(\|\phi\|^{(N,.)}_{(\omega_\phi,\infty)} \omega_\phi^{-1} N_1\right)^n \\ &\leq n N_1^n \omega_\phi^{-2n}. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité Init $(\Delta\Phi(y, \cdot_X)) = \Delta\phi(y)$, pour tout $y \in V$, on obtient

$$|\text{Init } (\Delta\Phi(y, \cdot_X))| \leq C_N \omega_\phi^{-2n}.$$

On a donc démontré le lemme. □

Ainsi, quitte à diminuer l'ouvert, tout difféomorphisme vérifie les propriétés (3.11) et (3.12). C'est pourquoi, on abordera, désormais, les difféomorphismes sous cet angle, en utilisant la définition suivante.

Définition 3.2.7. Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C^{(N)}(V)\right)^n$. Soit ω_ϕ un réel appartenant à $]0,1]$. On dit que le difféomorphisme ϕ est **encadré par la constante** ω_ϕ si les propriétés (3.11) et (3.12) sont vérifiées.

Théorème 3.2.8. *Soient M et N deux suites admissibles comparables et V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C^{(N)}(V)\right)^n$ et encadré par une constante ω_ϕ, $\omega_\phi \in]0,1]$. Il existe alors des constantes C_1, C_2 et k, supérieures à 1 et ne dépendant que de n, M et N, telles que, pour* *tout* $\lambda \in]0,1]$ *et toute fonction* $g \in C^\infty(\phi(V))$*, l'inclusion* $g \circ \phi \in C_\lambda^{(M)}(V)$ *implique que la fonction* g *appartienne à l'algèbre* $C_\omega^{(M')}(\phi(V))$ *avec*

$$\omega = \frac{\lambda \omega_\phi^k}{C_1} \text{ et } M' = \max(M, N).$$

On a, de plus, l'estimation

$$\|g\|_{(\omega,\infty)}^{(M',.)} \leq C_2 \|g \circ \phi\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-2n}.$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1.1, pour tout point $y \in V$, on a

$$\overline{T}_y(g \circ \phi)(X) = \overline{T}_{\phi(y)} g \circ_Y \left(\overline{T}_y \phi(X) - \phi(y)\right).$$

Ainsi, si on définit la série Φ par $\Phi(y, X) = \overline{T}_y \phi(X) - \phi(y)$, on obtient la relation

$$\overline{T}_y(g \circ \phi)(X) = \overline{T}_{\phi(y)} g \circ_Y \Phi(y, X),$$

et

$$\omega_\phi < |\text{Init } (\Delta\Phi(y, \cdot_X))| \leq C_N \omega_\phi^{-2n}.$$

Soit $y \in V$. En appliquant le théorème 3.2.5, avec $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $F = \overline{T}_{\phi(y)} g$, $\Phi = \Phi(y, \cdot_X) \in \left(\mathbb{R}[[X]]_{\omega_\phi}^{(N)}\right)^n$ et $\mu = \nu = 0$, on obtient l'existence de deux constantes C_1' et C_2', ne dépendant que de n, M et N, telles qu'on ait

$$\left\|\overline{T}_{\phi(y)} g\right\|_{(\omega',\mathbb{R})}^{(M',.)} \leq 2 \left\|\overline{T}_y(g \circ \phi)\right\|_{(\lambda,\mathbb{R})}^{(M,.)} \left\|(\text{Init } (\Delta\Phi(y, \cdot_X))^{-1})\right\|_{\mathcal{B}}^{-1},$$

avec

$$\omega' = \frac{A_{M'}^{-2}}{C_\Phi C_1' \|(\text{Init}(\Delta\Phi))^{-1}\|_{\mathcal{B}}^2} \frac{\min(\omega_\phi, \lambda)}{C_2'},$$

$M' = \max(M, N)$ et $C_\Phi = \max\left(\frac{\|\Phi\|_{(\omega_\phi,\mathcal{B})}^{(N,.)}}{\omega_\phi}, 1\right)^{2n}$.

Or on a $C_\phi \leq \omega_\phi^{-4n}$ et, vu le choix de $\mathcal{B}$, les relations

$$\omega_\phi \leq \|\text{Init } (\Delta\Phi(y, \cdot_X))^{-1}\|_{\mathcal{B}}^{-1} = |\text{Init } (\Delta\Phi(y, \cdot_X))| \leq C_N \omega_\phi^{-2n}.$$

Si on pose

$$\omega'' = \frac{\lambda \omega_\phi^{4n+3}}{C_1' C_2' A_{M'}^2},$$

on a $\omega'' < \omega'$. On en déduit

$$\left\|\overline{T}_{\phi(y)}g\right\|^{(M',.)}_{(\omega'',\mathbb{R})} \leq \left\|\overline{T}_{\phi(y)}g\right\|^{(M',.)}_{(\omega',\mathbb{R})} \leq 2C_N \left\|\overline{T}_y(g\circ\phi)\right\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathbb{R})} \omega_\phi^{-2n}.$$

D'autre part, on a, sur $\phi(V)$,

$$\|\overline{T}_{\cdot_z} g\|^{(M',.)}_{\left(\frac{\omega''}{2n},\infty\right)} \leq 2 \sup_{z\in\phi(V)} \|\overline{T}_z g\|^{(M',.)}_{(\omega'',\mathbb{R})} = 2\sup_{y\in V}\|\overline{T}_{\phi(y)}g\|^{(M',.)}_{(\omega'',\mathbb{R})}.$$

On a montré que la fonction g appartient à $C^{(M')}_{\frac{\omega''}{2n}}(\phi(V))$ et que sa norme, dans cette algèbre, est majorée par $4C_N \|g\circ\phi\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} \omega_\phi^{-2n}$. On conclut en posant $C_1 = C_1'C_2'A^2_{M'}2n$, $C_2 = 4C_N$ et $k = 4n+3$. □

3.2.3 Conséquences utiles pour le chapitre 4.

Nous allons démontrer des résultats nécessaires pour le chapitre 4. La preuve du théorème des idéaux fermés à la Tougeron et Merrien ne nécessitant pas ces résultats, le lecteur peut directement lire la section 3.3.

Du théorème (3.2.8), il est possible de déduire des lemmes utiles pour travailler sur des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$: on considère une sous-variété Z de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{(M)}$ et on suppose qu'au voisinage V_a d'un point a de Z, le difféomorphisme ϕ induit une carte locale pour $Z\cap V_a$. Pour déterminer les propriétés sur Z d'une fonction f définie au voisinage de a, il est parfois plus facile de travailler sur l'image de la carte locale ; ainsi on étudiera $\overline{T}_{\phi^{-1}(z)}f$, $z\in\phi(Z\cap V_a)$ plutôt que $\overline{T}_x f$, $x\in Z\cap V_a$. Nous verrons des exemples de cette application dans la section 4.2.2.

Corollaire 3.2.9. *Soient M et N deux suites admissibles comparables et V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C^{(N)}(V)\right)^n$ et encadré par ω_ϕ, $\omega_\phi\in\,]0,1]$. Il existe alors des constantes dans $[1,+\infty[$, C_1, C_2 et k, ne dépendant que de n, M et N, telles que, pour tout réel λ, $\lambda\in\,]0,1]$ et toute fonction f de classe $C^{(M)}_\lambda(V)$, on ait*

$$\left\|\overline{T}_{\phi^{-1}(\cdot_z)}f(\cdot_X)\right\|^{(M,M')}_{\omega_1,\omega_2} \leq C_2\|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}\omega_\phi^{-2n},$$

avec

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{C_1},\quad \omega_2 = \frac{\lambda\omega_\phi^k}{C_1} \text{ et } M' = \max(M,N).$$

Démonstration. Par définition, on a, pour tout $z\in\phi(V)$,

$$\overline{T}_{\phi^{-1}(z)}f(X) = \sum_{H\in\mathbb{N}^n}\frac{D^H f(\phi^{-1}(z))}{H!}X^H = \sum_{H\in\mathbb{N}^n}\frac{D^H f}{H!}\circ\phi^{-1}(z)X^H.$$

Il faut trouver deux réels ω_1 et ω_2, vérifiant $\omega_i \in \,]0,1]$, tels que la somme

$$\|\overline{T}_{\phi^{-1}(\cdot_z)} f(\cdot_Y)\|_{\omega_1,\omega_2}^{(M,M')} = \sum_{H\in\mathbb{N}^n} \left\| \frac{D^H f}{H!} \circ \phi^{-1} \right\|_{(\omega_2,\infty)}^{(M',.)} \frac{\omega_1^h}{M_h} \tag{3.14}$$

soit finie. D'après le lemme 1.5.8 appliqué à la série $\overline{T}_y f$ dans $C^\infty(V)[[X]]_\lambda^{M)}$, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, la fonction $\frac{D^H f}{H!}$ est de classe $C^{(M)}_{\frac{\lambda}{nA_M}}(V)$ et sa norme est majorée par $M_h (nA_M)^h \lambda^{-h} \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)}$. En appliquant le théorème 3.2.8 avec $g = \frac{D^H f}{H!} \circ \phi^{-1}$, on montre qu'il existe des constantes C_1', C_2' et k telles que la fonction $\frac{D^H f}{H!} \circ \phi^{-1}$ appartienne à $C^{(M)}_{\omega_2'}(\phi(V))$ avec $\omega_2' = \frac{\lambda \omega_\phi^k}{nA_M C_1'}$ et qu'on ait

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D^H f}{H!} \circ \phi^{-1} \right\|_{(\omega_2',\infty)}^{(M',.)} &\leq C_2' \left\| \frac{D^H f}{H!} \right\|_{\left(\frac{\lambda}{nA_M},\infty\right)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-2n} \\ &\leq C_2' M_h (nA_M)^h \lambda^{-h} \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-2n}. \end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} \|\overline{T}_{\Phi^{-1}(\cdot_z)} f(\cdot_Y)\|_{\omega_1,\omega_2'}^{(M,M')} &\leq \sum_{H\in\mathbb{N}^n} C_2' M_h (nA_M)^h \lambda^{-h} \, \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \, \omega_\phi^{-2n} \frac{\omega_1^h}{M_h} \\ &\leq C_2' \, \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \, \omega_\phi^{-2n} \sum_{H\in\mathbb{N}^n} \omega_1^h (nA_M)^h \lambda^{-h}. \end{aligned}$$

En prenant $C_1 = \max(nA_M C_1', 2n^2 A_M)$, $\omega_1 = \frac{\lambda}{C_1}$, $\omega_2 = \frac{\lambda \omega_\phi^k}{C_1}$ et $C_2 = 2C_2'$, on obtient

$$\|\overline{T}_{\Phi^{-1}(\cdot_z)} f(\cdot_X)\|_{\omega_1,\omega_2}^{(M,M')} \leq C_2 \, \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \, \omega_\phi^{-2n},$$

d'où le résultat. □

Ce corollaire est notamment valable lorsque $f = \phi$. On en déduit des propriétés du difféomorphisme ϕ ainsi que de son jacobien.

Corollaire 3.2.10. *Soient N une suite admissible, V' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert relativement compact dans V'. Soit ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C^{(N)}(V')\right)^n$ et encadré par une constante ω_ϕ, $\omega_\phi \in \,]0,1]$. On considère $\widehat{\Phi}$, l'application formelle à coefficients dans $C^\infty(\phi(V))$ définie par*

$$\widehat{\Phi}(z,X) = \overline{T}_{\phi^{-1}(z)} \phi(X) - z.$$

Pour tout $z \in \phi(V)$, l'application formelle $\widehat{\Phi}_z = \widehat{\Phi}(z,\cdot_X)$ admet une réciproque et on a

$$(\widehat{\Phi}_z)^{-1}(X) = \overline{T}_z \phi^{-1}(X) - \phi^{-1}(z). \tag{3.15}$$

De plus, il existe des constantes dans $[1,+\infty[$, C_1, C_2, C_3, k_2 *et* k_3, *ne dépendant que de* n *et* N, *telles qu'on ait les propriétés suivantes :*

– $\|\widehat{\Phi}\|^{(N,N)}_{\omega_1,\omega_2} \leq C_2 \omega_\phi^{-2n-1}$, *avec* $\omega_1 = \frac{\omega_\phi}{C_1}$ *et* $\omega_2 = \frac{\omega_\phi^{k_2}}{C_1}$,

– *si on pose* $\omega_3 = \frac{\omega_\phi^{k_3}}{C_3}$, *la fonction* $\mathrm{Init}\ (\Delta\widehat{\Phi})$ *est inversible dans* $C^{(N)}_{\omega_3}(\phi(V))$ *et on a*

$$\left\| \left(\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}_{|\phi(V)}\right)^{-1} \right\|^{(N,.)}_{(\omega_3,\infty)} \leq \frac{C_2}{\omega_\phi}.$$

Démonstration. Pour trouver $(\widehat{\Phi}_z)^{-1}$, il suffit de remarquer qu'on a, pour tout $z \in \phi(V)$,

$$\overline{T}_{\phi^{-1}(z)} \left(\phi^{-1} \circ \phi\right)(X) = \overline{T}_{\phi^{-1}(z)} \mathrm{Id}(X) = X + \phi^{-1}(z)$$

et qu'en appliquant le lemme 1.1.1 avec $g = \phi^{-1}$, $f = \phi$ et $a = \phi^{-1}(z)$, on obtient aussi l'égalité

$$\overline{T}_{\phi^{-1}(z)} \left(\phi^{-1} \circ \phi\right)(X) = \overline{T}_z \phi^{-1} \circ_Y \left(\overline{T}_{\phi^{-1}(z)} \phi(X) - z\right) = \overline{T}_z \phi^{-1} \circ_Y \widehat{\Phi}_z(X).$$

On a donc $X = \overline{T}_z \phi^{-1} \circ_Y \widehat{\Phi}_z(X) - \phi^{-1}(z)$. On conclut que l'application formelle $\overline{T}_z \phi^{-1} - \phi^{-1}(z)$ est la réciproque de $\widehat{\Phi}_z$.

L'estimation de la norme de $\widehat{\Phi}$ résulte du corollaire 3.2.9 avec $f = \phi$ et du fait que, pour tout couple $(\omega_1, \omega_2) \in]0,1]^2$, on ait

$$\|\widehat{\Phi}\|^{(N,N)}_{\omega_1,\omega_2} \leq \left\|\overline{T}_{\phi^{-1}(\cdot_z)} \phi\right\|^{(N,N)}_{\omega_1,\omega_2}.$$

Du lemme 3.2.1 appliqué avec $\mathcal{B} = C^{(N)}_{\omega_2}(\phi(V))$ et $\lambda = \frac{\omega_\phi}{C_1}$, on déduit

$$\begin{aligned} \|\Delta\widehat{\Phi}\|^{(N,N)}_{\frac{\omega_1}{nA_N},\omega_2} &\leq C_N \left(\|\widehat{\Phi}\|^{(N,N)}_{\omega_1,\omega_2} \omega_1^{-1}\right)^n \\ &\leq C_N \left(C_2 \omega_\phi^{-2n-1} \frac{C_1}{\omega_\phi}\right)^n. \end{aligned}$$

On obtient, finalement,

$$\|\Delta\widehat{\Phi}\|^{(N,N)}_{\frac{\omega_1}{nA_N},\omega_2} \leq C_N \left(C_2 C_1\right)^n \omega_\phi^{-2n^2-2n}.$$

On pose $C = C_N (C_2 C_1)^n$. D'autre part, la relation (3.10) avec $y = \phi^{-1}(z)$ induit l'égalité

$$\mathrm{Init}\left(\Delta\widehat{\Phi}(z, \cdot_X)\right) = \Delta\phi(\phi^{-1}(z)).$$

On peut donc considérer la fonction $z \mapsto \mathrm{Init}\ \left(\Delta\widehat{\Phi}(z, \cdot_X)\right)$ définie sur $\phi(V)$. On note désormais cette fonction $\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}\|_{(\omega_2,\infty)}^{(N,.)} &\leq \left|\left(\Delta\widehat{\Phi}(z, \cdot_X)\right)_0\right| \\ &\leq C\omega_\phi^{-2n^2-2n} \end{aligned} \tag{3.16}$$

et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial \mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}}{\partial z_i}\right\|_{(\omega_2,\infty)}^{(N,.)} &= \left\|\left(\Delta\widehat{\Phi}\right)_{e_i}\right\|_{(\omega_2,\infty)}^{(N,.)} \\ &\leq N_1\frac{nA_N}{\omega_1}\|\Delta\widehat{\Phi}\|_{\frac{\omega_1}{nA_N},\omega_2}^{(N,N)} \\ &\leq N_1 nA_N C_1 C\omega_\phi^{-2n^2-2n-1}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par hypothèse, l'ensemble $\phi(\overline{V})$ est un compact inclus dans le complémentaire des zéros de $(\Delta\phi)\circ\phi^{-1}$, autrement dit, des zéros de la fonction $\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}$. Comme cette dernière est une fonction de $C_{\omega_2}^{(N)}(\phi(V))$, on peut lui appliquer le lemme 3.1.5. Il existe donc des constantes C_1' et C_2' telles qu'on ait

$$\begin{aligned} \left\|\left(\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}_{|\phi(V)}\right)^{-1}\right\|_{(\omega_3',\infty)}^{(N,.)} &\leq \frac{C_2'}{\min_{z\in\phi(\overline{V})}\left|\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}(z)\right|} \\ &\leq \frac{C_2'}{\min_{z\in\phi(\overline{V})}(|(\Delta\phi)\left(\phi^{-1}(z)\right)|)} \\ &\leq \frac{C_2'}{\omega_\Phi}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

avec

$$\omega_3' = \frac{\min\left(\omega_2, \min_{z\in\phi(\overline{V})}\left(\left|\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}(z)\right|\right)\right)}{C_1'\max\left(\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}}{\partial z_i}\right\|_{(\omega_2,\infty)}^{(M',.)}, 1\right)}.$$

Or, on a $\min_{z\in\phi(\overline{V})}\left(\left|\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}(z)\right|\right) \geq \omega_\phi$ et $\omega_2 = \frac{\omega_\phi^{k_2}}{C_1}$.
En posant $C_3 = C_1'N_1nA_NC_1C$ et

$$\omega_3 = \frac{\omega_\phi^{2n^2+2n+1+k_2}}{C_3},$$

on obtient donc $\omega_3 \leq \omega_3'$. On en déduit l'inégalité

$$\left\|\left(\mathrm{Init}\Delta\widehat{\Phi}_{|\phi(V)}\right)^{-1}\right\|_{(\omega_3,\infty)}^{(N,.)} \leq \frac{C_2'}{\omega_\Phi}$$

et le résultat. $\square$

On démontre, ici, un dernier résultat technique qui sera utilisé dans la section 4.2.1.

Lemme 3.2.11. *Soient M et N deux suites admissibles comparables et $M' = \max(M,N)$. Soient V' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert relativement compact dans V'. Soit ϕ un difféomorphisme appartenant à $\left(C^{(N)}(V')\right)^n$ et encadré par ω_ϕ, $\omega_\phi \in]0,1]$.*
Il existe alors des constantes dans $[1,+\infty[$, C_1, C_2 et k ne dépendant que de n, M et N telles que, pour tout $\lambda \in]0,1]$, tout $\tau \in]0,1]$ et toute série formelle G appartenant à $C_\tau^{(M)}(\phi(V))[[X]]_\lambda^{(M)}$, la série formelle $G\left(z, \overline{T}_z\phi^{-1}(Y) - \phi^{-1}(z)\right)$ vérifie

$$\left\|G\left(\cdot_z, \left(\overline{T}_{\cdot_z}\phi^{-1}(\cdot_Y) - \phi^{-1}(\cdot_z)\right)\right)\right\|_{\omega,\omega}^{(M',M')} \leq C_2 \|G\|_{\lambda,\tau}^{(M,M)} \omega_\phi^{-2n}, \tag{3.19}$$

avec $\omega = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^k}{C_1}$.

Démonstration. Si on pose $F(z,Y) = G\left(z, \overline{T}_z\phi^{-1}(Y) - \phi^{-1}(z)\right)$, la relation (3.15) implique

$$F \circ_Y \widehat{\Phi} = G.$$

D'autre part, du corollaire 3.2.10, on déduit qu'il existe des constantes C_1', C_2', C_3', k_2' et k_3' telles qu'on ait

$$\|\widehat{\Phi}\|_{\omega_1,\omega_2}^{(N,N)} \leq C_2' \omega_\phi^{-2n-1} \tag{3.20}$$

avec $\omega_1 = \frac{\omega_\phi}{C_1'}$ et $\omega_2 = \frac{\omega_\phi^{k_2'}}{C_1'}$, et

$$\left\|\left(\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}_{|_{\phi(V)}}\right)^{-1}\right\|_{(\omega_3,\infty)}^{(N,.)} \leq \frac{C_2'}{\omega_\phi}, \tag{3.21}$$

avec $\omega_3 = \frac{\omega_\phi^{k_3'}}{C_3'}$. Donc, si on choisit une valeur ω_4 inférieure à $\min(\tau, \omega_2, \omega_3)$, en posant $W = \phi(V)$ et $M' = \max(M,N)$, on remplit les conditions du théorème 3.2.5 pour l'algèbre $\mathcal{B} = C_{\omega_4}^{(M')}(W)$; à savoir,

- $F \circ_Y \widehat{\Phi} \in C_{\omega_4}^{(M')}(W)[[X]]_\lambda^{(M')}$,
- $\widehat{\Phi} \in \left(C_{\omega_4}^{(M')}(W)[[X]]_{\omega_1}^{(N)}\right)^n$,
- $\left(\mathrm{Init}\ \Delta\widehat{\Phi}\right)^{-1} \in C_{\omega_4}^{(M')}(W)$.

D'après le théorème 3.2.5 appliqué avec $\mu = \nu = 0$, il existe alors des constantes C'_5 et C'_6 telles qu'on ait

$$\|F\|^{(M',M')}_{\omega_5,\omega_4} \leq 2\,\|G\|^{(M,M')}_{\lambda,\omega_4}\left(\left\|\left(\operatorname{Init}\Delta\widehat{\Phi}\right)^{-1}\right\|^{(M',.)}_{(\omega_4,\infty)}\right)^{-1} \tag{3.22}$$

avec

$$\omega_5 = \frac{A^{-1}_{M'}\min(\lambda,\omega_1)}{C_\phi C'_5\left(\|(\operatorname{Init}\Delta\widehat{\Phi})^{-1}\|^{(M',.)}_{(\omega_4,\infty)}\right)^2 C'_6},$$

et $C_\phi = \max\left(\|\widehat{\Phi}\|^{(N,M')}_{\omega_1,\omega_4}\omega_1^{-1}, 1\right)^{2n}$.
Vu (3.20) et la valeur de ω_1, on a

$$\begin{aligned} C_\phi &\leq \max\left(C'_2\omega_\Phi^{-2n-2}C'_1, 1\right)^{2n} \\ &\leq \left(C'_1C'_2\right)^n \omega_\Phi^{-4n^2-4n}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (3.21), si on pose

$$\omega_6 = \frac{\lambda\omega_\phi^{4n^2+4n+3}}{(C'_1C'_2)^n A^2_{M'} C'_5 C'_6},$$

on a $\omega_6 \leq \omega_5$. D'autre part, si on prend $\omega_7 = \frac{\tau\omega_\phi^{k'_2+k'_3}}{C'_1C'_3}$, on a $\omega_7 \leq \omega_4$. Finalement, il existe des constantes C_1 et k telles qu'en posant $\omega = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^k}{C_1}$, on ait $\omega \leq \min(\omega_4,\omega_5)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \left\|\left(\operatorname{Init}\Delta\widehat{\Phi}_{|W}\right)^{-1}\right\|^{(M',.)}_{(\omega,\infty)} &= \sum_{H\in\mathbb{N}^n}\sup_{z\in W}\left|D^H\left(\frac{1}{\operatorname{Init}\Delta\widehat{\Phi}(z,\cdot_X)}\right)\right|\frac{\omega^h}{H!} \\ &\geq \sup_{z\in W}\left|D^0\left(\frac{1}{\operatorname{Init}\Delta\widehat{\Phi}(z,\cdot_X)}\right)\right| \\ &\geq C_N^{-1}\omega_\Phi^{2n}. \end{aligned}$$

Finalement, par (3.22), on a

$$\|F\|^{(M',M')}_{\omega,\omega} \leq 2C_N\omega_\phi^{-2n}\,\|G\|^{(M,M')}_{\lambda,\omega_4}.$$

$\square$

3.3 Un théorème à la Tougeron et Merrien

On va démontrer un théorème d'idéaux fermés dont l'idée générale est semblable à celle développée dans le cadre C^∞ par Tougeron et Merrien [To](V.5). Ainsi, les propositions 3.3.1 et 3.3.3 sont directement adaptées de [To]. Cependant, pour démontrer le lemme 3.3.2, point crucial de la démarche, dans le contexte non quasi-analytique, on ne peut se contenter de transposer la preuve donnée dans [To]. En effet, les estimations effectuées sont trop faibles pour être utilisables. Les théorèmes de composition réciproque développés dans ce chapitre permettent de remédier à ce problème.

Proposition 3.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et M une suite admissible vérifiant (H_6). Soit I un idéal de type fini dans $\widehat{C_M}(U)$. Si I est un idéal de Lojasiewicz, toute fonction $f \in \widehat{C_M}(U)$ plate sur $V(I)$ appartient à I.*

Démonstration. La preuve suit des idées classiques ([To] proposition IV.4.2 et V.4.3) qu'il faut ici préciser afin d'obtenir les estimations requises dans le cadre de $\widehat{C_M}(U)$.
Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille de générateurs de I. D'après la remarque 1.6.3, la fonction $g = \sum_{i=1}^p g_i^2$ vérifie $Ł(V(I), U)$. On note α et C_1 les constantes associées à cette propriété. On peut supposer $C_1 \leq 1$. Soit f une fonction de $\widehat{C_M}(U)$ plate sur $V(I)$. Pour toute constante δ, $\delta > 0$, les fonctions f et g appartiennent à $C_1^{(M^\delta)}(U)$.
Le lemme 3.1.5, appliqué à la fonction g, fournit des constantes $C_{\delta 1}$ et $C_{\delta 2}$ telles que, pour tout compact $K \subset U \setminus V(I)$, on ait

$$\left\| \left(\frac{1}{g}\right)_{|_{\overset{\circ}{K}}} \right\|_{(\omega,\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq \frac{C_{\delta 2}}{\min_{x\in K} |g(x)|}$$

avec $\omega = \frac{\min(1, \min_{x\in K}|g(x)|)}{C_{\delta 1} \max\left(\|g\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)}, 1\right)}$.
On a aussi, pour tout $x \in K$, $|g(x)| \geq C_1 d(x, V(I))^\alpha$. Par conséquent, si le compact K est inclus dans $U \setminus \mathcal{T}(V(I), 1)$, on a $\left\| g^{-1}_{|_{\overset{\circ}{K}}} \right\|_{(\omega,\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq \frac{C_{\delta 2}}{C_1}$. On en déduit la majoration

$$\|g^{-1}_{|_{U\setminus\overline{\mathcal{T}(V(I),1)}}}\|_{(\omega,\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq \frac{C_{\delta 2}}{C_1}.$$

Comme f appartient à $C_1^{M^\delta}(U)$, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $U \setminus \overline{\mathcal{T}(V(I),1)}$ et appartient à $C_\omega^{(M^\delta)}(U \setminus \overline{\mathcal{T}(V(I),1)})$.

D'autre part, pour tout compact $K \subset \mathcal{T}(V(I),1) \setminus V(I)$, en posant

$$\omega'_K = D_\delta \min_{x\in K} d(x,V(I))^\alpha \quad \text{avec} \quad D_\delta = \frac{C_1}{C_{\delta 1}\max(\|g\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)},1)},$$

on obtient $\omega'_K \leq \omega$, $D_\delta \leq 1$ et

$$\|g^{-1}_{|\overset{\circ}{K}}\|_{(\omega'_K,\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq \frac{C_{\delta 2}}{C_1 \min_{x\in K} d(x,V(I))^\alpha}.$$

Du lemme 2.1.1, on déduit aussi qu'il existe des constantes C_3 et C_4 telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout compact $K \subset U$, on ait

$$\|f_{|\overset{\circ}{K}}\|_{(C_3^{-1},\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq 4C_4^p \max_{x\in K} d(x,V(I))^p M_p^\delta \|f\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)}.$$

On obtient, pour tout compact $K \subset \mathcal{T}(V(I),1) \setminus V(I)$, la majoration

$$\left\| \left(\frac{f}{g}\right)_{|\overset{\circ}{K}} \right\|_{(\omega''_K,\infty)}^{(M^\delta,.)} \leq \frac{C_{\delta 2}}{C_1} 4C_4^p M_p^\delta \|f\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)} \frac{\max_{x\in K} d(x,V(I))^p}{\min_{x\in K} d(x,V(I))^\alpha},$$

avec $\omega''_K = \frac{\omega'_K}{C_3}$.
On pose, pour tout point a de $\mathcal{T}(V(I),1) \setminus V(I)$, $\omega_a = \frac{D_\delta}{C_3}\left(\frac{d(a,V(I))}{2}\right)^\alpha$ et $K_a = \overline{B(a,\omega_a)}$. De l'inégalité $\omega_a \leq \frac{1}{2} d(a,V(I))$, on déduit, pour tout $x \in K_a$, l'encadrement

$$\frac{1}{2} d(a,V(I)) \leq d(x,V(I)) \leq 2d(a,V(I)).$$

Par conséquent, on a $\omega''_{K_a} \geq \omega_a$. On en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{f}{g}\right)_{|B(a,\omega_a)} \right\|_{(\omega_a,\infty)}^{(M^\delta,.)} &\leq \frac{C_{\delta 2}}{C_1} 4C_4^p M_p^\delta \|f\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)} (4d(a,V(I)))^{p-\alpha} \\ &\leq CD^p d(a,V(I))^{p-\alpha} M_p^\delta, \end{aligned}$$

avec $C = \frac{C_{\delta 2}}{C_1} 4^{1-\alpha} \|f\|_{(1,\infty)}^{(M^\delta,.)}$ et $D = 4C_4$. D'après la définition de ω_a, il existe une constante ϵ telle qu'on ait $\omega_a = \epsilon d(a,V(I))^\alpha$. Il est donc possible d'appliquer le lemme 2.1.2 avec $K = V(I)$, $\delta' = \alpha$, $\frac{f}{g}$ à la place de g et α à la place de δ. L'estimation (2.2) implique, dans le cas $h = j$, l'inégalité

$$\left| D^J \left(\frac{f}{g}\right)(a) \right| \leq C_5 C_6{}^j d(a,V(I)) M_j^{\delta(\lceil\alpha\rceil+1)} j!, \tag{3.23}$$

pour tout point $a \in \mathcal{T}(V(I), 1) \setminus V(I)$ et tout $J \in \mathbb{N}^n$. Donc, pour tout J, la fonction $D^J\left(\frac{f}{g}\right)$ peut être prolongée continûment par 0 sur $V(I)$. Le lemme d'Hestenes permet de prolonger la fonction $\frac{f}{g}$ en une fonction de classe C^∞ sur U. De plus, l'inégalité (3.23) montre que ce prolongement appartient à $C_{M^{\delta(\lceil\alpha\rceil+1)}}(U)$. Ceci étant valable pour tout $\delta > 0$, on déduit de (1.5) que la fonction $\frac{f}{g}$ appartient à $\widehat{C_M}(U)$. Ainsi la fonction f appartient à I. □

Le point crucial du théorème de Tougeron et Merrien est le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $p \leq n$, des fonctions de $\widehat{C_M}(U)$ et V un ouvert relativement compact dans U. Soient I l'idéal engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ dans $\widehat{C_M}(U)$ et $V(I)$ l'ensemble de ses zéros. Soient X et Y deux fermés tels qu'on ait $X \subset Y \subset V(I) \cap \overline{V}$ et tels qu'il existe un p-uplet $i_1 < \ldots < i_p$ pour lequel $\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)}{D\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_p}\right)}$ satisfait $\L(X,Y)$. Soit g une fonction de $\widehat{C_M}(U)$ plate sur X et nulle sur $V(I)$. Alors il existe une fonction f appartenant à I, plate sur X et telle que la fonction $g - f$ soit plate sur Y.*

Démonstration. Le début de cette preuve utilise les mêmes arguments que ceux développés pour démontrer le lemme V.5.5 dans [To]. On construit ainsi p jets $F_1, \ldots, F_p$ sur l'ensemble Y tels que le jet $\sum_{i=1}^p F_i \mathcal{J}(\varphi_i)$ coïncide avec $\mathcal{J}(g)$ sur $Y \setminus X$. Cependant, pour étendre ces jets à U, la technique utilisée pour le cas C^∞ dans [To] doit être considérablement affinée afin d'être applicable dans le contexte $\widehat{C_{(M)}}$. Il est, en particulier, indispensable d'estimer plus précisément l'espace auquel appartiennent ces jets et leur norme dans cet espace.
Pour la preuve, nous supposerons que $(i_1, \ldots, i_p) = (1, \ldots, p)$.

Construction des jets F_i. Cette partie reprend exactement la preuve de [To].
On considère Θ l'application définie sur U par

$$\Theta(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x), x_{p+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Pour tout $x \in U$, le jacobien Δ de Θ est donné, au point x, par

$$\Delta(x) = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{D(x_1 \ldots, x_p)}(x).$$

L'ensemble Y étant compact, il existe des constantes $C \leq 1$ et $\alpha \geq 1$ telles que, pour tout $x \in Y$, on ait

$$Cd(x, X)^\alpha \leq |\Delta(x)|. \tag{3.24}$$

En particulier, la fonction Δ ne s'annule pas sur $Y \setminus X$. On peut, d'autre part, appliquer le lemme 2.2.7 à l'application Θ : étant donné un point $a \in Y \setminus X$, on pose $\rho_a = \min(|\Delta(a)|, d(a, X))$, $W_a = B(\Theta(a), C_2\rho_a|\Delta(a)|)$ et $V_a = \Theta^{-1}(W_a) \cap B(a, C_1\rho_a)$. On a alors l'inclusion $B(a, C_3\rho_a|\Delta(a)|) \subset V_a$. L'application Θ induit un difféomorphisme de V_a sur W_a. On note Θ_a la restriction de Θ à V_a. On a, en particulier,

$$\Theta_a(V_a \cap V(I)) \subset W_a \cap \left(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}\right).$$

Soit γ_a la fonction définie par

$$\begin{aligned} \gamma_a \ : \ W_a &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto g(\Theta_a^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Pour tout point y de $W_a \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p})$, le point $\Theta_a^{-1}(y)$ appartient à l'ensemble $V(I) \cap V_a$. La fonction g étant nulle sur $V(I)$, on a

$$\gamma_a(y) \in g(V(I) \cap V_a) = \{0\}.$$

De la relation $\Theta(a) = (0, \ldots, 0, a_{p+1}, \ldots, a_n)$, on déduit que, pour tout point $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de W_a, le segment reliant y au point $(0, \ldots, 0, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ est inclus dans W_a. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à γ_a, on obtient alors

$$\gamma_a(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{p} \int_0^1 y_i \frac{\partial \gamma_a}{\partial x_i}(ty_1, \ldots, ty_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)dt. \tag{3.25}$$

Si on pose, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in U$,

$$\theta_t(x) = (t\varphi_1(x), \ldots, t\varphi_p(x), x_{p+1}, \ldots, x_n),$$

on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \gamma_a(\Theta_a(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) \int_0^1 \frac{\partial \gamma_a}{\partial x_i}(t\varphi_1(x), \ldots, t\varphi_p(x), x_{p+1}, \ldots, x_n)dt \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) f_{ai}(x) \end{aligned}$$

avec $f_{ai}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g \circ \Theta_a^{-1}}{\partial x_i}(\theta_t(x))dt$. Les fonctions f_{ai} appartiennent à $C^\infty(V_a)$. De plus, en désignant par $(\Delta_{ij}(x))$ la matrice des cofacteurs de la matrice jacobienne de Θ au point x et par l_{at} la composée $\Theta_a^{-1} \circ \theta_t$, définie sur V_a, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{\partial \left(g \circ \Theta_a^{-1}\right)}{\partial x_i}(\theta_t(x)) = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \right) \circ l_{at}(x).$$

Pour tout $h \in \{1, \ldots, n\}$ et toute fonction $f \in C^\infty(V_a)$, on a aussi

$$\frac{\partial (f \circ l_{at})}{\partial x_h}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \right) (l_{at}(x)) \frac{\partial (\theta_t)_k}{\partial x_h}(x).$$

D'autre part, pour tout $x \in V(I) \cap V_a$, on a

$$l_{at}(x) = \Theta_a^{-1}(0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n) = x.$$

On en déduit que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, tout $x \in V(I) \cap V_a$ et tout $H \in \mathbb{N}^n$, la valeur $D^H f_{ai}(x)$ est indépendante du point a. On peut ainsi définir, sur $Y \setminus X \subset V(I)$ le jet F_i par $F_i(a) = \mathcal{J}(f_{ai})(a)$. On a, pour tout $a \in Y \setminus X$, $\mathcal{J}(g)(a) = \sum_{i=1}^{p} F_i(a) \mathcal{J}(\varphi_i)(a)$.

Extension des jets.
On veut pouvoir appliquer le lemme 2.1.3. La définition de ρ_a et la propriété (3.24) entraînent $\rho_a \geq Cd(a,X)^\alpha$. Donc, la boule $B\left(a, C_3 C^2 d(a,X)^{2\alpha}\right)$ est incluse dans V_a. Si on trouve une suite à croissance modérée M', des constantes $\epsilon < C_3 C^2$ et $\delta > 2\alpha$ telles qu'on ait une majoration de

$$\| f_{ai}|_{B(a, \epsilon d(a,X)^\delta)} \|_{(\epsilon d(a,X)^\delta, \infty)}^{(M', .)},$$

on pourra appliquer le lemme 2.1.3 avec $g_a = f_{ai}$, $K = X$ et $L = Y$. Grâce aux théorèmes de compositions directe et réciproque du chapitre 3, on peut déterminer à quel espace de Banach appartiennent les fonctions f_{ai} et majorer leur norme dans cet espace. Plus précisément, on considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_k = \sup_{\substack{H \in \mathbb{N}^n, h = k \\ x \in U}} \left(\max \left(|D^H g(x)|, |D^H \varphi_1(x)|, \ldots, |D^H \varphi_p(x)| \right) \right),$$

et M' la suite admissible associée par le lemme 1.3.2 à la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Il existe alors une constante $\lambda \in]0,1]$, telle que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et g appartiennent à $C_\lambda^{(M')}(U)$.
La fonction g étant plate sur X, le lemme 2.1.1 et l'inégalité

$$\sup_{x \in V_a} d(x,X) \leq (C_1 + 1) d(a,X)$$

impliquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour des constantes C_1' et C_2' convenables, l'estimation

$$\|g_{|V_a}\|^{(M',.)}_{(\frac{\lambda}{C_1'},\infty)} \leq \|g_{|V_a}\|^{(M,.)}_{(\frac{\lambda}{C_1'},\infty)} \leq 4C_2'^p d(a,X)^p \|g\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)} M_p, \tag{3.26}$$

Soient U' l'ensemble $U \cap \mathcal{T}(Y, C_1 \sup_{a\in Y} |\Delta_a|)$ et d' un réel tel qu'on ait $U' \subset B(0,d')$. D'après les définitions de ρ_a et de V_a, pour tout point a de $Y \setminus X$, on a $V_a \subset U'$. D'autre part, la définition de Θ induit l'inégalité

$$\|\Theta_{|U'}\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)} \leq \max\left(d', \|\varphi_1\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}, \dots, \|\varphi_p\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}\right). \tag{3.27}$$

Pour tout $a \in Y \setminus X$, on pose $\omega_a' = \min\left(\frac{|\Delta(a)|}{2}, \frac{1}{\|\Theta_{|U'}\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}}, 1\right)$. Comme la valeur $\|\Theta_{|U'}\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}$ ne dépend pas du point a, on déduit de (3.24) qu'il existe des constantes C' et α' telles que, pour tout a, on ait

$$C'd(a,X)^{\alpha'} \leq \omega_a'.$$

On pose alors $\omega_a = C'd(a,X)^{\alpha'}$. La valeur ω_a encadre le difféomorphisme Θ_a sur l'ensemble V_a. En appliquant le théorème 3.2.8 avec $g = g \circ \Theta_a^{-1}$, $\phi = \Theta_a$ et $\omega_\phi = \omega_a$, on obtient l'existence de constantes C_3', C_4' et k, appartenant à $[1,+\infty[$, telles qu'on ait

$$\|g \circ \Theta_a^{-1}\|^{(M',.)}_{(\omega,\infty)} \leq C_4' \|g_{|V_a}\|^{(M',.)}_{(\frac{\lambda}{C_1'},\infty)} \omega_a^{-2n} \tag{3.28}$$

avec $\omega = \frac{\lambda \omega_a^k}{C_1' C_3'}$.

Compte tenu du lemme 1.5.8, la fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(g \circ \Theta_a^{-1})$ appartient à l'espace $C^{(M')}_{\frac{\omega}{nA_{M'}}}(V_a)$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $\frac{nA_{M'}}{\omega}\|g \circ \Theta_a^{-1}\|^{(M',.)}_{(\omega,\infty)}$. D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, la définition de la fonction θ_t induit l'inégalité

$$\|\theta_{t|U'}\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)} \leq t \max\left(d', \|\varphi_1\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}, \dots, \|\varphi_p\|^{(M',.)}_{(\lambda,\infty)}\right).$$

En appliquant le théorème 3.1.4 avec $g = g \circ \Theta_a^{-1}$ et $f = \theta_t$, on montre qu'il existe des constantes C_5' et C_6' telles qu'on ait

$$\left\|\frac{\partial (g \circ \Theta_a^{-1})}{\partial x_i} \circ \theta_t\right\|^{(M',.)}_{(\omega',\infty)} \leq C_6' \left\|\frac{\partial (g \circ \Theta_a^{-1})}{\partial x_i}\right\|^{(M',.)}_{(\omega,\infty)} \tag{3.29}$$

avec $\omega' = \frac{\min(\lambda,\omega)}{C'_5 \max\left(\|\theta_{t|_{U'}}\|_{(\lambda,\infty)}^{(M',.)}\lambda^{-1},1\right)}$.

Des relations (3.27), (3.28) et (3.29), on déduit alors l'existence de constantes C'_7, ϵ et α telles que, si on pose $\omega_1 = \epsilon d(a,X)^\alpha$, on ait $\omega_1 \le \omega'$ et

$$\left\|\frac{\partial\left(g\circ\Theta_a^{-1}\right)}{\partial x_i}\circ\theta_t\right\|_{(\omega_1,\infty)}^{(M',.)} \le C'_7 d(a,X)^{-2n\alpha'}\|g_{|_{V_a}}\|_{(\frac{\lambda}{C'_1},\infty)}^{(M',.)}.$$

Compte tenu de la définition de f_{ai} et de (3.26), on en tire que chaque fonction f_{ai} vérifie les hypothèses du théorème 2.1.3. On en déduit aussi que, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, il existe une fonction f_i de $C^{M'^{2(\lceil\alpha\rceil+1)}}(U)$, plate sur X et dont le jet F_i sur $Y\setminus X$ coïncide avec $\mathcal{J}(f_{ai})$ au voisinage de a. Compte tenu du lemme 1.3.3, les fonctions f_i appartiennent à $\widehat{C_M}(U)$ et, par construction, la fonction $g - \sum_{i=1}^p \varphi_i f_i$ est plate sur Y. On conclut en posant $f = \sum_{i=1}^p \varphi_i f_i$. □

Comme dans [To](proposition V.5.4), on déduit du lemme 3.3.2 et de la proposition 3.3.1, le résultat suivant.

Proposition 3.3.3. *Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_p$, $p\le n$, des fonctions appartenant à $\widehat{C_M}(U)$, I l'idéal qu'elles engendrent dans $\widehat{C_M}(U)$ et I' l'idéal engendré par ces fonctions et les jacobiens partiels de la forme $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}$, $1\le i_1<\ldots< i_p\le n$. Soit V un ouvert relativement compact dans U. Si I' est un idéal de Łojasiewicz, pour toute fonction de $\widehat{C_M}(U)$, plate sur $V(I')\cap\overline{V}$ et nulle sur $V(I)$, sa restriction à V appartient à $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.*

On en déduit un théorème du type Tougeron et Merrien pour les idéaux de $\widehat{C_M}(U)$ à singularités isolées.

Théorème 3.3.4. *Soit M une suite admissible vérifiant la condition (H_6). Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_p$, $p\le n$, des fonctions appartenant à $\widehat{C_M}(U)$, I l'idéal qu'elles engendrent dans $\widehat{C_M}(U)$ et I' l'idéal engendré par ces fonctions et tous les jacobiens partiels de la forme $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}$ avec $1\le i_1<\ldots<i_p\le n$. On suppose que I' est un idéal de Łojasiewicz dont l'ensemble des zéros est discret. Alors, pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute fonction f de $\overline{I}$, on a $f_{|V}\in(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.*

Démonstration. Soit f une fonction adhérente à I. Le théorème spectral de Whitney pour les intersections de classes non quasi-analytiques [CC2](28) implique que, pour tout $a\in V(I')$, la série $\overline{T}_a f$ appartient à $\overline{T}_a I$. L'ensemble $V(I')\cap\overline{V}$ étant fini, il existe une fonction g de I telle que la fonction $f-g$ soit plate sur $V(I')\cap\overline{V}$. De plus, $f-g$ est nulle sur $V(I)$. On conclut en appliquant la proposition 3.3.3. □

Remarque 3.3.5. Si les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont réel-analytiques au voisinage de $\overline{U}$, d'après [BR], l'idéal I' est toujours un idéal de Łojasiewicz. On en déduit qu'étant donné I un idéal de $\widehat{C_M}(U)$ à singularités isolées et engendré par une famille finie de fonctions réel-analytiques, pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute fonction f de $\overline{I}$, la fonction $f_{|V}$ appartient à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(V)$. On verra, au chapitre 6, que cette propriété est encore vraie quand les singularités ne sont pas isolées.

Chapitre 4

Théorèmes de division à la Hironaka

4.1 Théorème de division formelle

Dans cette section, on démontre un théorème de division au sens d'Hironaka dans les algèbres de Banach de séries formelles définies dans la partie 1.5. L'existence d'une telle division a déjà été prouvée dans [Mo2], mais ce résultat ne précise pas la norme des quotients et du reste. On reprendra donc la preuve par perturbation d'un épimorphisme développée dans [Mo2] pour obtenir cette dernière information. Nous aurons ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 4.1.1. *Soient $G_1, \ldots, G_p$ des diviseurs au sens d'Hironaka appartenant à l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]_\tau^{(M)}$ et tels que, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, le coefficient initial $(G_j)_{\beta_j}$ soit inversible dans $\mathcal{B}$. Il existe des constantes C_1, C_2, C_3, $l > 1$, $l' > 1$ et $d < 1$ telles que, pour tout réel positif λ satisfaisant*

$$\lambda < \tau \min\left(C_1 \min_{j=1,\ldots,p}\left(\frac{\|(G_j)_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}}}{\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}}\right)^{C_2}, 1\right) \tag{4.1}$$

et toute série F de $\mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$, les quotients et reste de la division à la Hironaka de F par $G_1, \ldots, G_p$, appartiennent à l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]_{d\lambda^l}^{(M)}$. On a, de plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, les estimations

$$\|Q_j\|_{(d\lambda^l,\mathcal{B})}^{(M,.)} \leq \frac{C_3\|(G_j)_{\beta_j}^{-1}\|_{\mathcal{B}}}{\lambda^{l'}}\|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}$$

$$et \qquad \|R\|_{(d\lambda^l,\mathcal{B})}^{(M,.)} \leq 2\|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}.$$

4.1.1 Théorème de $\mathcal{L}$-division

Dans le cadre des séries formelles à croissance contrôlée, la preuve par perturbation d'un épimorphisme est particulièrement adaptée. Cependant, elle ne fournit pas directement la division à la Hironaka, mais un résultat plus général concernant une $\mathcal{L}$-division. On utilise les notations introduites dans les parties 1.7 à 1.9.

Théorème 4.1.2. *Soient*

- $\mathcal{L}$ *une forme linéaire à coefficients strictement positifs et indépendants sur* $\mathbb{Z}$,
- $\beta_1, \ldots, \beta_q$ *les sommets d'un diagramme* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathbb{N}^n$,
- $G_1, \ldots, G_p$ *des séries formelles de* $\mathcal{B}[[X]]_\tau^{(M)}$, $0 < \tau < 1$, *vérifiant, pour tout* $j = 1, \ldots, p$,

$$\begin{array}{lll} & (G_j)_{\beta_j} = 1, & \\ & (G_j)_H = 0, & \forall H \in \mathbb{N}^n,\ \mathcal{L}(H) < \mathcal{L}(\beta_j), \\ \textit{et} & (G_j)_H = 0, & \forall H \in \mathbb{N}^n,\ |H| < |\beta_j|. \end{array}$$

Il existe des constantes C_1, C_2, C_3, $l > 1$, $l' > 1$ *et* $d < 1$ *ne dépendant que de* $\mathcal{L}$ *et* $\{\beta_j\}_{\in\{1,\ldots,p\}}$ *telles que, pour tout réel positif* λ *satisfaisant*

$$\lambda < \tau \min\left(C_1 \min_{j=1,\ldots,p}\left(\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}\right)^{-C_2}, 1\right), \tag{4.2}$$

on puisse effectuer une $\mathcal{L}$*-division par* $(G_1, \ldots, G_p)$ *de tout élément de l'algèbre* $\mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$ *de telle sorte que les quotients et reste appartiennent à* $\mathcal{B}[[X]]_{d\lambda^l}^{(M)}$. *Autrement dit, pour toute série* $F \in \mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$, *il existe des uniques séries formelles* $Q_1, \ldots, Q_p$ *et* R *appartenant à* $\mathcal{B}[[X]]_{d\lambda^l}^{(M)}$ *et vérifiant :*

$$- F = \sum_{j=1}^{p} Q_j G_j + R, \tag{4.3}$$

$$- \textit{pour tout } j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \beta_j + \operatorname{supp} Q_j \subset \Lambda_j \textit{ et } \operatorname{supp} R \subset \Lambda_C. \tag{4.4}$$

On a, de plus, les estimations, pour tout $j = 1, \ldots, p$,

$$\begin{array}{ll} & \|Q_j\|_{(d\lambda^l,\mathcal{B})}^{(M,.)} \le C_3 \|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} \lambda^{-l'} \\ \textit{et} & \|R\|_{(d\lambda^l,\mathcal{B})}^{(M,.)} \le 2 \|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)}. \end{array}$$

Pour démontrer le théorème 4.1.2, on introduit, dans un premier temps, quelques définitions motivées par des détails techniques.

Soient $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach commutative unitaire munie de la norme $\| \, \|_{\mathcal{B}}$ et $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ un multi-rayon. On reprend les notations de la section 1.5 ; à savoir, $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu})$ est l'ensemble défini par

$$\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu}) = \{f \in \mathcal{B}[[X]] \ ; \ \|f\|_{\underline{\nu}}^{(M)} < \infty\}$$

avec $\|f\|_{\underline{\nu}}^{(M)} = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \frac{\|f_J\|_{\mathcal{B}}}{M_j} \underline{\nu}^J$.

En appliquant le lemme 1.5.2 aux entiers $(|\beta_j|)_{j \in \{1,\ldots,p\}}$, on voit qu'il existe des constantes d_1 et d_2 supérieures à 1 telles que, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, et toute série $F \in \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu})$, on ait

$$\|F\|_{\underline{\nu}}^{(M)} \leq d_1 \|F\|_{d_2 \underline{\nu}}^{(M_{+|\beta_j|})} \tag{4.5}$$

$$\text{et} \quad \|F\|_{\underline{\nu}}^{(M_{-|\beta_j|})} \leq d_1 \|F\|_{d_2 \underline{\nu}}^{(M)}. \tag{4.6}$$

On pose

$$\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu}, \beta_j) = \{F \in \mathcal{B}[[X]] \, ; \, \operatorname{supp}\left(F(X) X^{\beta_j}\right) \subset \Lambda_j \text{ et } \|F\|_{\underline{\nu}}^{(M_{+|\beta_j|})} < \infty\}$$

et $R_{\mathcal{N}}(M, \underline{\nu}) = \{F \in \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu}) \ ; \ \operatorname{supp} F \subset \Lambda_C\}$.
On définit alors

$$H_{\mathcal{N}}(M, \underline{\nu}) = \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu}, \beta_1) \times \ldots \times \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu}, \beta_p) \times R_{\mathcal{N}}(M, \underline{\nu}),$$

qu'on munit de la norme

$$\|(Q_1, \ldots, Q_p, R)\|_{\underline{\nu}}^{(M,\mathcal{N})} = \sum_{j=1}^{q} \underline{\nu}^{\beta_j} \|Q_j\|_{\underline{\nu}}^{(M_{+|\beta_j|})} + \|R\|_{\underline{\nu}}^{(M)}. \tag{4.7}$$

Cet espace est un espace de Banach.

Remarque 4.1.3. Etant donnée une forme linéaire $\mathcal{L}$ à coefficients strictement positifs et un n-uplet $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $c < 1$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'inégalité $\mathcal{L}(\alpha) > \mathcal{L}(\beta)$ implique $\mathcal{L}(\alpha - \beta) > c$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on fixe c_j une constante ainsi associée à β_j.

La preuve du théorème 4.1.2 est divisée en plusieures parties : dans un premier temps, on construit une application bijective entre les espaces de Banach $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu})$ et $H_{\mathcal{N}}(M, \underline{\nu})$ qui, à une série F, associe des séries $Q_1, \ldots, Q_p$, R satisfaisant (4.3) et (4.4). Il s'agit d'une adaptation de résultats de Mouze [Mo1],[Mo2]. Dans un deuxième temps, on montre que l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$ de l'énoncé est incluse dans $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\nu})$, pour $\underline{\nu}$ convenablement choisi. On peut alors effectuer une $\mathcal{L}$-division des éléments de $\mathcal{B}[[X]]_\lambda^{(M)}$. On conclut en démontrant la majoration des normes des quotients et reste de cette division.

Etape 1 : construction de l'application bijective
Soit

$$\begin{aligned}\Phi_1 : \qquad H_{\mathcal{N}}(M,\underline{\nu}) &\longrightarrow \mathcal{B}[[X]](M,\underline{\nu})\\ (Q_1,\ldots,Q_p,R) &\mapsto \sum_{j=1}^{p} Q_j(X)X^{\beta_j} + R(X).\end{aligned}$$

D'après [Mo2](1.2 p. 42), nous avons le lemme :

Lemme 4.1.4. *Pour tout multi-rayon $\underline{\nu}$, l'application linéaire Φ_1 est bijective et isométrique de $H_{\mathcal{N}}(M,\underline{\nu})$ sur $\mathcal{B}[[X]](M,\underline{\nu})$.*

On construit ensuite une perturbation de cet isomorphisme d'espaces de Banach grâce au lemme suivant.

Lemme 4.1.5. *[Mo2](lemme 1.4)*
Soient deux réels $\tau > 0$ et $\eta \in]0,1[$, on note $\underline{\lambda}(\tau,\eta)$ le p-uplet $\left(\tau\eta^{\mathcal{L}_1},\ldots,\tau\eta^{\mathcal{L}_p}\right)$. Soient $u_1,\ldots,u_p$ des séries appartenant à $\mathcal{B}[[X]](M_{-|\beta_j|},\tau\underline{1})$ et vérifiant, pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$,

$$u_j(X) = \sum_{\substack{|I|\geq|\beta_j|\\ \mathcal{L}(I)>\mathcal{L}(\beta_j)}} (u_j)_I X^I.$$

L'application linéaire

$$\begin{aligned}\Phi_2 : H_{\mathcal{N}}(M,\underline{\lambda}(\tau,\eta)) &\longrightarrow \mathcal{B}[[X]](M,\underline{\lambda}(\tau,\eta))\\ (Q_1,\ldots,Q_p,R) &\mapsto \sum_{j=1}^{p} u_j Q_j\end{aligned}$$

est bien définie et on a la majoration

$$\|\Phi_2\| \leq \sup_{j=1,\ldots,q}\left(\tau^{-|\beta_j|}\eta^{c_j}\|u_j\|_{\tau\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})}\right), \tag{4.8}$$

où les c_j sont les réels fixés dans la remarque 4.1.3.

Pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, on peut prendre

$$u_j(X) = \sum_{\substack{|H|\geq|\beta_j|\\ \mathcal{L}(H)>\mathcal{L}(\beta_j)}} (G_j)_H X^H.$$

En effet, cette série étant une troncature de la série G_j, on a, pour tout $\tau > 0$, les inégalités

$$\|u_j\|_{\tau\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})} \leq \|G_j\|_{\tau\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})}. \tag{4.9}$$

De l'égalité $\|F\|_{(\lambda,\mathcal{B})}^{(M,.)} = \|F\|_{\underline{\lambda}}^{(M)}$, (4.6) et (4.9), on déduit

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{d_2^{-1}\tau\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})} &\leq \|G_j\|_{d_2^{-1}\tau\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})} \\ &\leq d_1\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En particulier, pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, la série u_j appartient à l'espace $\mathcal{B}[[X]](M_{-|\beta_j|}, d_2^{-1}\tau\underline{1})$. Pour la suite, on pose $\tau_1 = d_2^{-1}\tau$. Si on choisit $\eta_\tau > 0$ satisfaisant

$$\eta_\tau < \min_{j=1,\ldots,p}\left(\frac{\tau_1^{|\beta_j|}}{2d_1\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}}\right)^{\frac{1}{c_j}}, \tag{4.11}$$

les équations (4.10) et (4.11) impliquent que, pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, on a

$$\tau_1^{-|\beta_j|}\eta_\tau^{c_j}\|u_j\|_{\tau_1\underline{1}}^{(M_{-|\beta_j|})} < \frac{1}{2}.$$

On déduit alors du lemme 4.1.5 que l'application

$$\Phi_2 \ : \ H_{\mathcal{N}}\left(M, \underline{\lambda}_\tau\right) \longrightarrow \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda}_\tau),$$

avec $\underline{\lambda}_\tau = d_2^{-1}\tau\left(\eta_\tau^{\mathcal{L}_1},\ldots,\eta_\tau^{\mathcal{L}_p}\right)$ vérifie la majoration $\|\Phi_2\| \leq \dfrac{1}{2}$.
Des propriétés de Φ_1 et Φ_2, il résulte que l'application linéaire $\Phi_1+\Phi_2$ est bijective de $H_{\mathcal{N}}\left(M, \underline{\lambda}_\tau\right)$ sur $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda}_\tau)$ et que la norme de sa réciproque est majorée par 2. Ainsi, à toute série formelle F de $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda}_\tau)$, l'application $(\Phi_1+\Phi_2)^{-1}$ associe un $(p+1)$-uplet $(Q_1,\ldots,Q_p,R)$ de séries formelles appartenant à $H_{\mathcal{N}}\left(M, \underline{\lambda}_\tau\right)$, tel qu'on ait

$$F = \sum_{j=1}^{p} Q_jG_j + R.$$

On déduit de la définition de $H_{\mathcal{N}}\left(M, \underline{\lambda}_\tau\right)$ que les séries $Q_1,\ldots,Q_p$ et R vérifient les conditions de support (4.4).
D'autre part, (4.7) et l'inégalité

$$\|(Q_1,\ldots,Q_p,R)\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M,\mathcal{N})} \leq 2\|F\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M)}$$

impliquent les relations

$$\|R\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M)} \leq 2\|F\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M)} \tag{4.12}$$

et, pour tout $j \in \{1\ldots,p\}$, $\underline{\lambda}_\tau{}^{\beta_j}\|Q_j\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M_{+|\beta_j|})} \leq 2\|F\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M)}$. Vu (4.5), pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, on a $\|Q_j\|_{d_2^{-1}\underline{\lambda}_\tau}^{(M)} \leq d_1\|Q_j\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M_{+|\beta_j|})}$, dont on déduit

$$\|Q_j\|_{d_2^{-1}\underline{\lambda}_\tau}^{(M)} \leq \frac{2d_1}{\underline{\lambda}_\tau{}^{\beta_j}}\|F\|_{\underline{\lambda}_\tau}^{(M)}. \tag{4.13}$$

Etape 2 : $\mathcal{B}[[X]]_{\lambda}^{(M)} \subset \mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda_\tau})$.
On fixe les constantes

$$C_1 = \min_{j=1,\dots,p} \frac{(d_2^{-1}\tau)^{|\beta_j|}}{2d_1} = \min_{j=1,\dots,p} \frac{\tau_1^{|\beta_j|}}{2d_1}$$
$$\text{et} \quad C_2 = \mathcal{L}_{\min} \max_{j=1,\dots,p} (c_j^{-1}).$$

Si on pose

$$\eta_\tau = \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{\mathcal{L}_{\min}}}, \tag{4.14}$$

l'hypothèse (4.2) implique, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} \eta_\tau^{\mathcal{L}_{\min}} = \frac{\lambda}{\tau} &< \min\left(C_1 \left(\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}\right)^{-C_2}, 1\right) \\ &< \min\left(\left(\frac{(d_2^{-1}\tau)^{|\beta_j|}}{2d_1\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}}\right)^{C_2}, 1\right) \\ &< \min\left(\frac{(d_2^{-1}\tau)^{|\beta_j|}}{2d_1\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}}, 1\right)^{\frac{\mathcal{L}_{\min}}{c_j}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\eta_\tau < \left(\frac{(d_2^{-1}\tau)^{|\beta_j|}}{2d_1\|G_j\|_{(\tau,\mathcal{B})}^{(M,.)}}\right)^{\frac{1}{c_j}}.$$

Finalement, la valeur η_τ satisfait (4.11). Par l'étape 1, on peut alors construire une application bijective de $\mathcal{B}[[X]](M, \underline{\lambda_\tau})$ dans $H_{\mathcal{N}}\left(M, \underline{\lambda_\tau}\right)$ avec

$$\underline{\lambda_\tau} = d_2^{-1}\tau\left(\eta_\tau^{\mathcal{L}_1}, \dots, \eta_\tau^{\mathcal{L}_p}\right).$$

De la relation $\eta_\tau < 1$, on déduit, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, les inégalités

$$\eta_\tau^{\mathcal{L}_{\max}} \leq \eta_\tau^{\mathcal{L}_j} \leq \eta_\tau^{\mathcal{L}_{\min}} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Comme on a $\tau < 1$, la relation (4.14) induit

$$\tau\eta_\tau^{\mathcal{L}_{\max}} = \tau^{1-\frac{\mathcal{L}_{\max}}{\mathcal{L}_{\min}}} \lambda^{\frac{\mathcal{L}_{\max}}{\mathcal{L}_{\min}}} \geq \lambda^{\frac{\mathcal{L}_{\max}}{\mathcal{L}_{\min}}}.$$

Si on pose $l := \frac{\mathcal{L}_{\max}}{\mathcal{L}_{\min}}$, on obtient, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, l'encadrement $\lambda^l \leq \tau\eta_\tau^{\mathcal{L}_j} \leq \lambda$ et, par conséquent,

$$d_2^{-1}\lambda^l \underline{1} \leq \underline{\lambda_\tau} \leq d_2^{-1}\lambda\underline{1} \leq \lambda\underline{1}. \tag{4.15}$$

Compte tenu de l'égalité $\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})} = \|F\|^{(M)}_{\lambda\underline{1}}$, on a donc, pour toute série formelle $F \in \mathcal{B}[[X]]$,

$$\|F\|^{(M,.)}_{(d_2^{-1}\lambda^l,\mathcal{B})} \leq \|F\|^{(M)}_{\underline{\lambda_\tau}} \leq \|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}. \tag{4.16}$$

On en déduit que toute série F appartenant à l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_\lambda$ appartient aussi à $\mathcal{B}[[X]](M,\underline{\lambda_\tau})$. L'application $(\Phi_1+\Phi_2)^{-1}$ lui associe alors un $(p+1)$-uplet $(Q_1,\ldots,Q_p,R)$ de séries formelles vérifiant (4.3) et (4.4). Vu (4.12), (4.13) et (4.16), on a aussi les inégalités

$$\|R\|^{(M)}_{\underline{\lambda_\tau}} \leq 2\|F\|^{(M)}_{\underline{\lambda_\tau}} \leq 2\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}$$
$$\text{et,}\quad \forall j \in \{1,\ldots,p\},\quad \|Q_j\|^{(M)}_{d_2^{-1}\underline{\lambda_\tau}} \leq \frac{2d_1}{\underline{\lambda_\tau}^{\beta_j}}\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}.$$

De (4.16) appliqué avec $F=R$, on déduit

$$\|R\|^{(M,.)}_{(d_2^{-1}\lambda^l,\mathcal{B})} \leq 2\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})},$$

puis, appliqué avec $F=Q_j$ et en posant $d=d_2^{-2}$,

$$\|Q_j\|^{(M,.)}_{(d\lambda^l,\mathcal{B})} \leq \frac{2d_1}{\underline{\lambda_\tau}^{\beta_j}}\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}.$$

Vu (4.15), on conclut en posant $C_3 = 2d_1$ et $l' = \max_{j\in\{1,\ldots,p\}}|\beta_j|l$. □

4.1.2 Preuve du théorème 4.1.1

Pour déduire le théorème 4.1.1 du théorème 4.1.2, il faut :

– pouvoir effectuer une division par des séries dont le coefficient initial n'est pas égal à 1,

– passer d'une $\mathcal{L}$-division à une division au sens d'Hironaka.

En ce qui concerne le premier point, pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$, on introduit une série G'_j définie par $G'_j = \frac{G_j}{(G_j)_{\beta_j}}$. Comme, par hypothèse, le coefficient $(G_j)_{\beta_j}$ est inversible dans $\mathcal{B}$, la série G'_j appartient encore à $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_\tau$ et on a

$$\|G'_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\mathcal{B})} \leq \|G_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\mathcal{B})}\|(G_j)^{-1}_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.17}$$

Le p-uplet $(G'_1,\ldots,G'_p)$ est encore une famille de diviseurs au sens d'Hironaka et les sommets associés sont à nouveau $\beta_1,\ldots,\beta_p$. De plus, pour tout

$j \in \{1, \dots, p\}$, on a $(G'_j)_{\beta_j} = 1$.

Pour le deuxième point, si on pose $m_0 = \max_{j\in\{1,\dots,p\}} |\mathrm{Exp}\ G_j|$, d'après le lemme 1.7.2, il existe une forme linéaire $\mathcal{L}$ à coefficients strictement positifs et indépendants sur $\mathbb{Z}$ telle que l'ordre induit par $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ordre L-I jusqu'à la longueur m_0. Ainsi, l'égalité $\beta_j = \mathrm{Exp}\ G'_j$ implique :

- pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ tel que $|H| \leq |\beta_j|$, on a $(G'_j)_H = 0$,
- pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathcal{L}(H) < \mathcal{L}(\beta_j)$, on a $H < \beta_j$ et, par conséquent, $(G'_j)_H = 0$.

Les séries G'_j, $j \in \{1, \dots, p\}$, vérifient donc les hypothèses du théorème 4.1.2. L'hypothèse (4.1) et la relation (4.17) entraînent qu'il est possible d'effectuer une $\mathcal{L}$-division par $(G'_1, \dots, G'_p)$ de tout élément de l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_\lambda$. Donc si une série F appartient à $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_\lambda$, il existe des uniques séries formelles $Q'_1, \dots, Q'_p$ et R' appartenant à $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_{d\lambda^l}$ telles qu'on ait

$$\begin{array}{lr} & F = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} Q'_j G'_j + R', \\ \forall j \in \{1, \dots, p\}, & \beta_j + \mathrm{supp}\ Q'_j \subset \Lambda_j \\ \text{et} & \mathrm{supp}\ R' \subset \Lambda_C. \end{array}$$

En reprenant la définition des séries G'_j, on a aussi $F = \sum_{j=1}^{p} \frac{Q'_j}{(G_j)_{\beta_j}} G_j + R'$. Si on pose, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $Q_j = \frac{Q'_j}{(G_j)_{\beta_j}}$ et $R' = R$, on a encore, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $\beta_j + \mathrm{supp}\ Q_j \subset \Lambda_j$ et $\mathrm{supp}\ R \subset \Lambda_C$. En ce qui concerne la norme des quotients et reste, on déduit de (4.17) et du théorème 4.1.2 les estimations

$$\begin{array}{lrl} & \|Q_j\|^{(M,.)}_{(d\lambda^l,\mathcal{B})} & \leq \|(G_j)^{-1}_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}} \|Q'_j\|^{(M,.)}_{(d\lambda^l,\mathcal{B})} \\ & & \leq \|(G_j)^{-1}_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}} C_3 \|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})} \lambda^{-l'} \\ \text{et} & \|R\|^{(M,.)}_{(\lambda^l,\mathcal{B})} & \leq 2\|F\|^{(M,.)}_{(\lambda,\mathcal{B})}. \end{array}$$

Le théorème s'ensuit. $\square$

4.2 Théorème de division dans $C^{(M)}$

Le but de cette section est de construire un théorème de division à la Hironaka, non plus pour des séries formelles, mais pour des fonctions non-quasi-analytiques. Pour espérer avoir une telle division, il est nécessaire de disposer d'un ensemble de diviseurs C^∞ à la Hironaka comme défini dans la section 1.9. Or, de manière générale, une famille de fonctions $(g_1, \ldots, g_p)$ n'est un ensemble de diviseurs que sur un sous-ensemble Z de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur vide. Dans ce travail, nous nous intéressons au cas où Z est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la propriété $\mathrm{CLU}(N, r)$.

Dans un premier temps, on montre une version locale du théorème de division. Pour ce faire, on introduit, en s'inspirant d'une idée de Bierstone et Milman [BM1], une notion de dérivation de séries à coefficients de classe C^∞, puis on étudie les propriétés de cette dérivation lors du passage de la sous-variété à une carte locale. Finalement, en appliquant le lemme d'extension de la section 2.2, on déduit un théorème de division sur la sous-variété Z.

4.2.1 Dérivation formelle

Définition 4.2.1. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, on définit la dérivation formelle

$$D_{v,X} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial X_j}.$$

Remarque 4.2.2. Pour toute série formelle G à coefficients dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$G(z, X) = \sum_{H \in \mathbb{N}^n} G_H(z) X^H,$$

on a

$$\begin{aligned} D_{v,X} G(a, X) &= \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial X_j} G(a, X) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{H \in \mathbb{N}^n} G_{H+e_j}(a)(h_j + 1) X^H. \end{aligned} \tag{4.18}$$

On note

$$D_{v,z} G(a, X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{H \in \mathbb{N}^n} v_j \frac{\partial G_H}{\partial z_j}(a) X^H. \tag{4.19}$$

Lemme 4.2.3. *Soient g une fonction de classe C^∞ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et f une application de classe C^∞ d'un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans V. On considère la série formelle G à coefficients C^∞ sur W définie par $G(b, X) = \overline{T}_{f(b)} g(X)$. Alors, pour tout point b de W et tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$D_{w,z} G(b, X) = D_{df(b).w,X} G(b, X). \tag{4.20}$$

Démonstration. Pour tout vecteur $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$df(b).w = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(b) \right)_{j=1,\dots,n}.$$

On en déduit, pour tout point $b \in W$ et tout $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D_{w,z}G(b,X) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial \left((D^H g) \circ f \right)}{\partial z_i}(b) \frac{X^H}{H!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{H \in \mathbb{N}^n} \sum_{j=1}^{n} D^{H+e_j} g(f(b)) \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(b) \frac{X^H}{H!} \\ &= D_{df(b).w,X} G(b,X), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme 4.2.4. *Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient G une série formelle dont les coefficients sont dans $C^\infty(W)$ et f une application de classe C^∞ sur W. On considère G', la série formelle à coefficients dans $C^\infty(W)$ définie par, pour tout $z \in W$,*

$$G'(z,Y) = G(z, \overline{T}_z f(Y) - f(z)).$$

Pour tout couple $(b,w) \in W \times \mathbb{R}^n$, la relation

$$D_{w,z}G(b,Y) = D_{df(b).w,Y} G(b,Y) \tag{4.21}$$

implique l'égalité

$$D_{w,z}G'(b,Y) = D_{w,Y}G'(b,Y). \tag{4.22}$$

Démonstration. Pour démontrer (4.22), on développe chaque membre afin de l'exprimer en fonction de la série G.

Cas de $D_{w,z}G'(b,Y)$.

Pour tout point b et tout vecteur w, on a $df(b).w = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(b) w_i \right)_{j \in \{1,\dots,n\}}$. Les relations (4.18) et (4.21) impliquent, pour tout $Q \in \mathbb{N}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial G_Q}{\partial z_i}(b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} w_i \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(b) \right) G_{Q+e_j}(b)(q_j + 1). \tag{4.23}$$

De plus, si on reprend les notations du lemme de composition 3.1.1 avec $F(Y) = \overline{T}_z f(Y) - f(z)$, on a $S_{e_j}^{e_i}(z,X) = \frac{\partial \left(\overline{T}_z f_j \right)}{\partial X_i}(X)$, pour tout couple

$(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. Ainsi, les coefficients de $S_{e_j}^{e_i}$ sont de classe C^∞ par rapport à z et on a la relation $\left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(z) = \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(z)$. En reportant ce dernier résultat dans (4.23), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial G_Q}{\partial z_i}(b) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i (S_{e_j}^{e_i})_0(b) G_{Q+e_j}(b)(q_j+1). \tag{4.24}$$

En appliquant $D_{w,z}$ à la série G', on obtient

$$D_{w,z}G'(b,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{H\in\mathbb{N}^n} w_i \frac{\partial G'_H}{\partial z_i}(b) Y^H. \tag{4.25}$$

Mais le lemme de composition 3.1.1 implique, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$, la relation suivante entre coefficients de X^0 :

$$G'_H(z) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, 1\le q\le h} (S_Q^H)_0(z) G_Q(z) \frac{Q!}{H!}. \tag{4.26}$$

On en déduit

$$\frac{\partial G'_H}{\partial z_i}(b) = \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n, 1\le q\le h} (S_Q^H)_0 G_Q \frac{Q!}{H!}\right)(b). \tag{4.27}$$

Or, pour tout $Q \in \mathbb{N}^n, 1 \le q \le h$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_i}\left((S_Q^H)_0 G_Q\right)(b) &= \frac{\partial \left(S_Q^H\right)_0}{\partial z_i}(b) G_Q(b) + \left(S_Q^H\right)_0(b)\frac{\partial G_Q}{\partial z_i}(b)\\ &= (S_Q^H)_{e_i}(b) G_Q(b) + \left(S_Q^H\right)_0(b)\frac{\partial G_Q}{\partial z_i}(b).\end{aligned}$$

En reportant cette dernière équation dans (4.27) puis dans (4.25), on montre que la série $D_{w,z}G'(b,Y)$ est la somme sur les $H \in \mathbb{N}^n$ et les $Q \in \mathbb{N}^n$, vérifiant $1 \le q \le h$, des termes

$$\frac{Y^H}{H!}\sum_{i=1}^{n} w_i (S_Q^H)_{e_i}(b) G_Q(b) Q! + \frac{Y^H}{H!}\left(S_Q^H\right)_0(b)\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial G_Q}{\partial z_i}(b) Q!. \tag{4.28}$$

D'autre part, l'égalité (4.24) fournit une autre expression de la deuxième somme apparaissant dans (4.28). On en conclut que la série $D_{w,z}G'(b,Y)$ est la somme sur les $H \in \mathbb{N}^n$ et les $Q \in \mathbb{N}^n$, $1 \le q \le h$, des termes

$$\frac{Y^H}{H!}\sum_{i=1}^{n} w_i (S_Q^H)_{e_i}(b) G_Q(b) Q! \tag{4.29a}$$

$$+ \frac{Y^H}{H!}\left(S_Q^H\right)_0(b)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i (S_{e_j}^{e_i})_0(b) G_{Q+e_j}(b)(q_j+1)Q!. \tag{4.29b}$$

Cas de $D_{w,Y}G'(b,Y)$.
Vu (4.18), quand on dérive la série G' par rapport à (w,Y), on obtient

$$D_{w,Y}G'(b,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{H\in\mathbb{N}^n} w_i G'_{H+e_i}(b)(h_i+1)Y^H. \tag{4.30}$$

Or l'égalité (4.26) induit, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ et tout $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned} G'_{H+e_i}(b)(h_i+1) &= \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, 1\le q\le h+1} (S_Q^{H+e_i})_0(b)G_Q(b)\frac{Q!(h_i+1)}{(H+e_i)!} \\ &= \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, 1\le q\le h+1} (S_Q^{H+e_i})_0(b)G_Q(b)\frac{Q!}{H!}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

D'autre part, la formule de récurrence définissant S_Q^P permet, pour tout Q dans $\mathbb{N}^n$, d'écrire $S_Q^{H+e_i}$ en fonction des termes $S_{Q'}^H$, avec $Q' \in \mathbb{N}^n$. On obtient donc

$$\begin{aligned} G'_{H+e_i}(b)(h_i+1) = &\sum_{j=1}^{n} \left(S_{e_j}^H\right)_{e_i}(b)G_{e_j}(b)\frac{1}{H!} \\ &+ \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n \\ 1<q\le h}} G_Q(b)\frac{Q!}{H!} \\ &\qquad \left(\left(S_Q^H\right)_{e_i}(b) + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,n\} \\ Q_j\neq 0}} \left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_{Q-e_j}^H\right)_0(b) \right) \\ &+ \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n \\ q=h+1}} \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,n\} \\ Q_j\neq 0}} \left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_{Q-e_j}^H\right)_0(b)G_Q(b)\frac{Q!}{H!}. \end{aligned}$$

On peut regrouper les termes de la forme $\left(S_Q^H\right)_{e_i}(b)G_Q(b)$ d'une part et ceux de la forme $\left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_{Q-e_j}^H\right)_0(b)G_Q(b)$ d'autre part. On obtient alors l'égalité

$$\begin{aligned} G'_{H+e_i}(b)(h_i+1) = &\sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n \\ 1\le q\le h}} \left(S_Q^H\right)_{e_i}(b)G_Q(b)\frac{Y^HQ!}{H!} \\ &+ \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n \\ 2\le q\le h+1}} \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,n\} \\ Q_j\neq 0}} \left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_{Q-e_j}^H\right)_0(b)G_Q(b)\frac{Y^HQ!}{H!}. \end{aligned}$$

En réindexant la deuxième somme avec $Q' = Q - e_j$, on obtient

$$G'_{H+e_i}(b)(h_i+1) = \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n\\ 1\le q\le h}} \left(S_Q^H\right)_{e_i}(b)G_Q(b)\frac{Y^HQ!}{H!}$$
$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{Q'\in\mathbb{N}^n\\ 1\le q'\le h}} \left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_{Q'}^H\right)_0(b)G_{Q'+e_j}(b)\frac{Y^H(Q'+e_j)!}{H!}.$$

Si on reporte cette équation dans (4.30), on obtient que $D_{w,Y}G'(b,Y)$ est la somme sur les $H \in \mathbb{N}^n$ et $Q \in \mathbb{N}^n$, $1 \le q \le h$, des termes

$$\frac{Y^H}{H!}\sum_{i=1}^n w_i \left(S_Q^H\right)_{e_i}(b)G_Q(b)Q! \tag{4.32a}$$
$$+\frac{Y^H}{H!}\sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n \left(S_{e_j}^{e_i}\right)_0(b)\left(S_Q^H\right)_0(b)G_{Q+e_j}(b)(Q+e_j)!. \tag{4.32b}$$

Les lignes (4.29a) et (4.32a) sont égales et, de l'égalité $(q_j+1)!Q! = (Q+e_j)!$, on déduit que les lignes (4.29b) et (4.32b) sont, elles aussi, égales. Finalement, on a montré la relation

$$D_{w,z}G'(b,Y) = D_{v,Y}G'(b,Y).$$

□

La dérivation formelle permet de donner une condition suffisante simple pour qu'une série formelle à coefficients de classe $C^{(M)}$ au voisinage d'un compact soit le jet, sur ce compact, d'une fonction de classe $C^{(M)}$.

Lemme 4.2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-d}$. Soit V un voisinage ouvert de K. Il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que, pour toute série G appartenant à $C_\omega^{(M)}(V)[[X]]_\omega^{(M)}$ et vérifiant, pour tout point $a \in K$ et tout vecteur $v \in \{0\}\times\mathbb{R}^{n-d}$,*

$$D_{v,z}G(a,X) = D_{v,X}G(a,X), \tag{4.33}$$

il existe une fonction g de classe $C_{C_1^{-1}\omega}^{(M^2)}(\mathcal{T}(K,1))$ telle que, pour tout point $a \in K$, on ait

$$\overline{T}_a g(X) = G(a,X).$$

On a, de plus,

$$\|g\|_{(C_1^{-1}\omega,\infty)}^{(M^2,.)} \le C_2\|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)}.$$

Démonstration. Compte tenu de (4.18), pour tout indice $l \in \{d+1, \dots, n\}$, l'hypothèse (4.33) pour $v = e_l$ implique que, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$ et tout $a \in K$, on a

$$\frac{\partial G_H}{\partial z_l}(a) = G_{H+e_l}(a)(h_l+1). \tag{4.34}$$

Nous allons montrer que le jet $G' = (H!G_H)_{H\in\mathbb{N}^n}$ est un jet de Whitney sur K. Remarquons que, pour tout point $a \in K$, on a $a = (0, a')$ avec $a' \in \mathbb{R}^{n-d}$. De manière générale, pour la suite de cette preuve, on écrit un élément x de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (x'', x')$ avec $x'' \in \mathbb{R}^d$. Les multi-indices $H \in \mathbb{N}^n$ sont décomposés sous la forme $H = (P, Q)$ avec $P \in \mathbb{N}^d$ et $Q \in \mathbb{N}^{n-d}$. Pour tout point $a \in V$, on a alors

$$G'_H(a) = P!Q!G_{(P,Q)}(a).$$

De (4.34), on déduit alors, pour tout $H \in \mathbb{N}^n$,

$$G'_H(a) = P!\frac{\partial^q G_{(P,0)}}{\partial {x_{d+1}}^{Q_1}\dots \partial {x_n}^{Q_{n-d}}}(a) = P!D^{(0,Q)}G_{(P,0)}(a). \tag{4.35}$$

D'autre part, d'après (1.9) et la définition de G', pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout couple de points $(a,b) \in K^2$ et tout multi-indice $H = (P,Q) \in \mathbb{N}^n$, vérifiant $h \leq j$, on a

$$\begin{aligned} D^H T^j_b G'(a) &= D^{(0,Q)}D^{(P,0)}T^j_b G'(a) \\ &= D^{(0,Q)} \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^n \\ i\leq j-p}} \frac{(I+(P,0))!}{I!}(a-b)^I G_{(I+(P,0))}(b). \end{aligned}$$

Comme on a $a = (0, a')$ et $b = (0, b')$, les termes correspondant à $I = (I'', I')$ avec $I'' \neq 0$ sont nuls. On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} D^H T^j_b G'(a) &= D^{(0,Q)} \sum_{\substack{I'\in\mathbb{N}^{n-d} \\ i'\leq j-p}} \frac{((0,I')+(P,0))!}{I'!}(a'-b')^{I'} G_{((0,I')+(P,0))}(b) \\ &= D^{(0,Q)} \sum_{\substack{I'\in\mathbb{N}^{n-d} \\ i'\leq j-p}} P!(a'-b')^{I'} G_{(P,I')}(b). \end{aligned}$$

En utilisant (4.34) puis le fait que $(a-b)^I = 0$ dès que $I'' \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} D^H T^j_b G'(a) &= D^{(0,Q)} \sum_{\substack{I'\in\mathbb{N}^{n-d} \\ i'\leq j-p}} \frac{P!}{I'!}(a'-b')^{I'} D^{I'} G_{(P,0)}(b) \\ &= D^{(0,Q)} \sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^{n} \\ i\leq j-p}} \frac{P!}{I!}(a-b)^{I} D^{I} G_{(P,0)}(b) \\ &= P!D^{(0,Q)}T^{j-p}_b G_{(P,0)}(a). \end{aligned}$$

On déduit de (4.35) et de la relation ci-dessus,

$$|G'_H(a) - D^H T_b^j G'(a)| \leq \left| P! D^{(0,Q)} \left(G_{(P,0)}(a) - T_b^{j-p} G_{(P,0)}(a) \right) \right| .$$

Compte tenu des hypothèses concernant la série G, pour tout $P \in \mathbb{N}^d$, la fonction $G_{(P,0)}$ est dans $C_\omega^{(M)}(V)$ et sa norme, dans cet espace, est majorée par $M_p \omega^{-p} p! \|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)}$. D'après (1.14), elle appartient aussi à $C_{M,\omega^{-1}}(V)$. Le lemme 1.4.1 implique alors

$$\begin{aligned} \left| D^{(0,Q)} \left(G_{(P,0)}(a) - T_b^{j-p} G_{(P,0)}(a) \right) \right| &\leq \\ &\leq \omega^{-1} \|G_{(P,0)}\|_{M,\omega^{-1}} d(a,b)^{j-p-q+1} \omega^{-j+p} n^{3j} M_{j-p+1} q! p! \\ &\leq \omega^{-j-1} \|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)} d(a,b)^{j-p-q+1} n^{3j} M_p M_{j-p+1} q! p!. \end{aligned}$$

Vu l'égalité $h = p + q$, on a

$$|G'_H(a) - D^H T_b^j G'(a)| \leq \|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)} n^{3(j+1)} \omega^{-(j+1)} M_{j+1} d(a,b)^{j-h+1} h!.$$

Donc, la famille de fonctions $(G'_H)_{H \in \mathbb{N}^n}$ définit un jet de Whitney de classe $C_{M,n^3\omega^{-1}}$ sur K dont la norme est majorée par $\|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)}$. D'après le théorème d'extension 1.4.3 et la remarque 1.4.4, il existe des constantes C'_1 et C'_2 ne dépendant que de n et de M et une fonction g de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

- pour tout $a \in K$, on a $\overline{T}_a g(X) = G(a, X)$,
- $\|g_{|\mathcal{T}(K,1)}\|_{M^2, C'_1 \omega^{-1}} \leq C'_2 \|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)}$.

De (1.13), on déduit l'existence de constantes C_1 et C_2 telles que la fonction g ainsi définie appartienne à $C_{\omega C_1^{-1}}^{(M^2)}(\mathcal{T}(K,1))$ et que sa norme, dans cet espace, soit majorée par $C_2 \|G\|_{\omega,\omega}^{(M,M)}$. □

On peut désormais s'intéresser aux propriétés de la dérivation formelle lorsqu'on travaille sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, du lemme 4.2.5, on déduit une condition suffisante sur l'image d'une carte locale pour qu'une série à coefficients définis sur la sous-variété coïncide avec le développement d'une fonction définie au voisinage de la sous-variété.

Lemme 4.2.6. *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\phi_1, \ldots, \phi_d$ des fonctions de $C^{(N)}(V)$ telles que l'application ϕ définie par*

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_d(x), x_{d+1}, \ldots, x_n)$$

soit un difféomorphisme de V sur $\phi(V)$ encadré par un réel ω_ϕ appartenant à $]0,1]$. Soit Z la sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Z = \{x \in V \; ; \; \phi_1(x) = \cdots = \phi_d(x) = 0\}.$$

Soit G une série formelle appartenant à $C_\tau^{(M)}(\phi(V))[[Y]]_\lambda^{(M)}$, $(\lambda,\tau) \in]0,1]^2$, telle que, pour tout $b \in \phi(Z)$ et tout $w \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$, on ait

$$D_{w,z}G(b,Y) = D_{d\phi^{-1}(b).w,Y}G(b,Y).$$

Il existe des constantes dans $[1,+\infty[$, C_1, C_2, C_3 et k, ne dépendant que de n, M et N vérifiant :
pour tout compact K inclus dans Z, il existe une fonction g de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout point $a \in K$, on ait $\overline{T}_a g(Y) = G(\phi(a),Y)$ et

$$\|g_{|V'}\|_{(\omega,\infty)}^{(\max(M,N)^2,.)} \leq C_2 \|G\|_{\lambda,\tau}^{(M,M)} \omega_\phi^{-2n},$$

avec $\omega = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^k}{C_1}$ et $V' = \phi^{-1}\left(\mathcal{T}(\phi(K),1)\right) \cap V$.

Démonstration. La série formelle G et l'application ϕ^{-1} satisfont les hypothèses du lemme 4.2.4 avec $W = \phi(V)$ ainsi que la relation (4.21) pour tout couple $(b,w) \in \phi(Z) \times \left(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}\right)$. On déduit que la série formelle G' définie par

$$G'(z,Y) = G\left(z, \overline{T}_z\phi^{-1}(Y) - \phi^{-1}(z)\right), \tag{4.36}$$

vérifie, pour tout couple $(b,w) \in \phi(Z) \times (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d})$, la relation

$$D_{w,z}G'(b,Y) = D_{w,Y}G'(b,Y). \tag{4.37}$$

De plus, le difféomorphisme ϕ et la série formelle G vérifient aussi les hypothèses du lemme 3.2.11. Il existe donc des constantes C_1', C_2' et k' ne dépendant que de n, M et N telles qu'on ait

$$\|G'\|_{(\omega',\omega')}^{(M',M')} \leq C_2' \|G\|_{(\lambda,\tau)}^{(M,M)} \omega_\phi^{-2n},$$

avec

$$M' = \max(M,N) \qquad \text{et} \qquad \omega' = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^{k'}}{C_1'}. \tag{4.38}$$

En appliquant le lemme 4.2.5 à la série G' avec $\phi(K)$ au lieu de K, on obtient l'existence de deux constantes C_3' et C_4' ne dépendant que de n et M' et d'une fonction g', définie sur $\mathbb{R}^n$, satisfaisant

- pour tout $z \in \phi(K)$, $\overline{T}_z g'(Y) = G'(z,Y)$,

– $\|g'_{|\mathcal{T}(\phi(K),1)}\|^{(M'^2,.)}_{(C_3'^{-1}\omega',\infty)} \leq C_4' C_2' \|G\|^{(M,M)}_{\lambda,\tau}\omega_\phi^{-2n}$.

Soit g la fonction définie sur $V' = \phi^{-1}(\mathcal{T}(\phi(K),1)) \cap V$ par $g = g' \circ \phi$. D'après le théorème 3.1.4, il existe des constantes C_5' et C_6' ne dépendant que de n, M et N telles que la fonction g appartienne à $C^{(M'^2)}_{\omega'}(V')$ avec

$$\omega'' = \frac{\min(C_3'^{-1}\omega', \omega_\phi)}{C_5' \max\left(\|\phi\|^{(N,.)}_{(\omega_\phi,\infty)}\omega_\phi^{-1}, 1\right)}.$$

Sa norme, dans cet espace, est majorée par $C_6'\|g'_{|\mathcal{T}(\phi(K),1)}\|^{(M'^2,.)}_{(C_3'^{-1}\omega',\infty)}$.
Comme on a $\omega' = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^{k'}}{C_1'}$ et $\|\phi\|^{(N,.)}_{(\omega_\phi,\infty)}\omega_\phi^{-1} \leq \omega_\phi^{-2}$, en posant

$$\omega = \frac{\lambda\tau\omega_\phi^{k'+2}}{C_3' C_1' C_5'},$$

on obtient $\omega \leq \omega''$. On en déduit,

$$\|g_{|V'}\|^{(M'^2,.)}_{(\omega,\infty)} \leq C_6' C_4' C_2' \|G\|^{(M,M)}_{\lambda,\tau}\omega_\phi^{-2n}.$$

D'autre part, en reprenant les notations du corollaire 3.2.10 avec $z = \phi(a)$, on obtient $G' = G \circ_Y \widehat{\Phi}^{-1}_{\phi(a)}$. Ceci entraîne, pour tout point $a \in Z$,

$$\begin{aligned}
\overline{T}_a g &= \overline{T}_{\phi(a)} g' \circ_Y \left(\overline{T}_a\phi(\cdot_Y) - \phi(a)\right) \\
&= G'(\phi(a), \cdot_Y) \circ_Y \widehat{\Phi}_{\phi(a)} \\
&= G(\phi(a), \cdot_Y) \circ_Y \widehat{\Phi}^{-1}_{\phi(a)} \circ_Y \widehat{\Phi}_{\phi(a)} \\
&= G(\phi(a), \cdot_Y)
\end{aligned}$$

et le résultat. □

Le lemme suivant montre que certaines propriétés de la dérivation formelle sont conservées lorsqu'on effectue la division à la Hironaka formelle.

Lemme 4.2.7. *Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $F, G_1, \ldots, G_p, Q_1, \ldots, Q_p$ et R des éléments de $C^\infty(W)[[Y]]$ avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées,*

- *les séries $G_1, \ldots, G_p$ forment une famille de diviseurs à la Hironaka,*
- *les séries $Q_1, \ldots, Q_p$ et R sont les quotients et reste de la division de F par cette famille,*

alors, pour tout point $b \in W$, tout $v \in \mathbb{R}^n$ et tout $w \in \mathbb{R}^m$, les égalités

$D_{v,Y}F(b,Y) = D_{w,z}F(b,Y)$ et, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $D_{v,Y}G_j(b,Y) = D_{w,z}G_j(b,Y)$

impliquent les relations

$D_{v,Y}R(b,Y) = D_{w,z}R(b,Y)$ et, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $D_{v,Y}Q_j(b,Y) = D_{w,z}Q_j(b,Y)$.

Démonstration. Elle reprend des idées développées par Bierstone et Milman [BM2]. D'après les hypothèses, pour tout $b \in W$, on a

$$F(b,Y) = \sum_{i=1}^{p} G_j(b,Y)Q_j(b,Y) + R(b,Y).$$

En appliquant $D_{w,z}$ et $D_{v,Y}$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{w,z}F(b,Y) &= \sum_{j=1}^{p} D_{w,z}Q_j(b,Y)G_j(b,Y) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{p} Q_j(b,Y)D_{w,z}G_j(Y) + D_{w,z}R(b,Y) \\ \text{et} \quad D_{v,Y}F(b,Y) &= \sum_{j=1}^{p} D_{v,Y}Q_j(b,Y)G_j(b,Y) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{p} Q_j(b,Y)D_{v,Y}G_j(b,Y) + D_{v,Y}R(b,Y). \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{q} \left(D_{v,Y}Q_j\,(b,Y) - D_{w,z}Q_j\,(b,Y)\right) G_j(b,Y) \\ &\qquad + D_{v,Y}R(b,Y) - D_{w,z}R(b,Y) = 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Les propriétés de support des séries formelles G_j, Q_j et R montrent que (4.39) est une division à la Hironaka de 0. De l'unicité de cette dernière, on déduit le résultat. □

4.2.2 Division à la Hironaka locale

Nous sommes, désormais, en mesure de démontrer un théorème de division à la Hironaka sur un voisinage donné par une carte locale.

Théorème 4.2.8. *Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\phi_1, \dots, \phi_d$ des fonctions de classe $C^{(N)}(V)$ telles que l'application ϕ définie par*

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_d(x), x_{d+1}, \dots, x_n)$$

soit un difféomorphisme de V sur $\phi(V)$ encadré par un réel ω_ϕ appartenant à $]0,1]$. Soit Z la sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Z = \{x \in V \ ; \ \phi_1(x) = \dots = \phi_d(x) = 0\}.$$

Soient τ un réel dans $]0,1]$ et $(g_1, \dots, g_p)$ un élément de $\left(C_\tau^{(M)}(V)\right)^p$ formant une famille de diviseurs C^∞ sur Z à la Hironaka. Soient K un compact inclus dans Z et V' un voisinage ouvert de K, relativement compact dans V et inclus dans $\phi^{-1}(\mathcal{T}(\phi(K),1)) \cap V$. Il existe des constantes C_1, C_2, C_3, C_4, k, k', l et l', ne dépendant que de n, M et N, telles que, pour tout réel positif λ satisfaisant

$$\lambda < \tau \min \left(C_1 \omega_\phi^{2nC_2} \min_{j=1,\dots,p} \left(\frac{\min_{z \in \overline{V'} \cap Z} |D^{\beta_j} g_j(z)|}{\beta_j! \|g_j\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}} \right)^{C_2}, 1 \right) \tag{4.40}$$

et toute fonction f de classe $C_\lambda^{(M)}(V')$, on puisse effectuer, dans V', une division à la Hironaka sur K de f par la famille $(g_1, \dots, g_p)$ dont les quotients et reste vérifient les estimations suivantes :

– $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \|q_{j|_{V'}}\|_{(\omega,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C_4 \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-4n} \dfrac{1}{\lambda^{l'} \min_{z \in \overline{V'} \cap Z} |D^{\beta_j} g_j(z)|}$,

– $\|r_{|_{V'}}\|_{(\omega,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C_4 \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-4n}$

avec

$$\omega = \frac{\lambda^l \tau^k \omega_\phi^{k'}}{C_3 \max\limits_{j=1\dots,p} \|g_j\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}} \min \left(1, \min_{\substack{z \in \overline{V'} \cap Z \\ j=1,\dots,p}} |D^{\beta_j} g_j(z)| \right) \quad \textit{et} \quad M' = \max(M,N).$$

Démonstration. L'idée est d'effectuer, en chaque point de K, une division formelle de la série associée à f par les séries associées aux fonctions g_j, puis de construire des fonctions sur V' qui coïncident, sur K, avec les quotients et reste formels obtenus. Cette preuve se divise en trois parties : dans un premier temps, il faut exhiber des séries formelles permettant de faire une division à la Hironaka ; ensuite, on effectue cette division en précisant les espaces contenant les quotients et reste afin de pouvoir, dans la dernière étape, étendre ces séries en des fonctions appartenant à $C^{(M'^2)}(V')$.

Etape 1 : construction de diviseurs à la Hironaka.

Soient W la projection de $\phi(Z) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$ sur $\mathbb{R}^{n-d}$ et W' celle de $\phi(V' \cap Z)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on considère la série définie, pour tout $x' \in W$, par $G_j(x', Y) = \overline{T}_{\phi^{-1}(0,x')} g_j(Y)$. D'autre part, le corollaire 3.2.9 fournit des constantes C'_1, C'_2 et k_1, ne dépendant que de n, M et N, telles qu'on ait

$$\left\|\overline{T}_{\phi^{-1}(\cdot_z)} g_j(\cdot_Y)\right\|^{(M,M')}_{\omega_1,\omega_2} \leq C'_2 \left\|g_j\right\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)} \omega_\phi^{-2n},$$

avec $\omega_1 = \frac{\tau}{C'_1}$ et $\omega_2 = \frac{\tau \omega_\phi^{k_1}}{C'_1}$. On en déduit

$$\|G_j\|^{(M,M')}_{(\omega_1,\omega_2)} \leq C'_2 \|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)} \omega_\phi^{-2n}. \tag{4.41}$$

On considère la série G'_j à coefficients dans $C^{(M')}_{\omega_2}(W')$ définie, pour tout $x' \in W'$, par $G'_j(x', Y) = G_j(x', Y)$. La famille $(G'_1, \ldots, G'_p)$ va jouer le rôle de la famille de diviseurs dans le théorème 4.1.1. Il faut donc vérifier qu'elle en satisfait les hypothèses. Vu 4.41, on a trivialement la majoration

$$\|G'_j\|^{(M,M')}_{(\omega_1,\omega_2)} \leq C'_2 \|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)} \omega_\phi^{-2n}. \tag{4.42}$$

On note $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ l'ensemble des n-uplets associés à la famille de diviseurs $(g_1, \ldots, g_p)$. Compte tenu de l'inclusion $\phi^{-1}(\{0\} \times W') \subset Z$, pour tout point $b' \in W'$, on a $\operatorname{Exp} G'_j(b', \cdot_Y) = \beta_j$ et, par conséquent, $\operatorname{Exp} G'_j = \beta_j$. Ainsi, la famille $(G'_1, \ldots, G'_p)$ est un ensemble de diviseurs à la Hironaka. Il reste à prouver que, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, le coefficient $(G'_j)_{\beta_j}$ est inversible dans une algèbre de Banach $\mathcal{B}$ convenablement choisie. On a $(G'_j)_{\beta_j} = (G_j)_{\beta_j|_{W'}}$. De plus, de (4.41) on déduit

$$\|(G_j)_{\beta_j}\|^{(M',.)}_{(\omega_2,\infty)} \leq C'_2 \|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)} \omega_\phi^{-2n} {\omega_1}^{-|\beta_j|} M_{|\beta_j|}. \tag{4.43}$$

L'ensemble $\overline{W'}$ étant un compact inclus dans le complémentaire des zéros de $(G_j)_{\beta_j}$, on peut appliquer le lemme 3.1.5 à la fonction $(G_j)_{\beta_j}$: il existe des constantes C'_3 et C'_4 telles qu'on ait

$$\left\| \frac{1}{(G_j)_{\beta_j}}\Big|_{W'} \right\|^{(M,.)}_{(\omega'_j,\infty)} \leq \frac{C'_4}{\min_{z' \in \overline{W'}} \left|(G_j)_{\beta_j}(z')\right|}, \tag{4.44}$$

avec

$$\omega'_j = \frac{\min\left(\omega_2, \min_{z' \in \overline{W'}} \left|(G_j)_{\beta_j}(z')\right|\right)}{C'_3 \max\left(\left\|(G_j)_{\beta_j}\right\|^{(M,.)}_{(\omega_2,\infty)} {\omega_2}^{-1}, 1\right)}.$$

Pour tout $z' \in \overline{W'}$, on a

$$(G_j)_{\beta_j}(z') = \frac{D^{\beta_j} g_j(\phi^{-1}(0,z'))}{\beta_j!}, \tag{4.45}$$

avec $(0,z') \in \phi^{-1}(\overline{W'}) \subset \overline{V'} \cap Z$.
En utilisant la propriété (4.43) et en posant

$$\omega_j'' = \frac{\min\left(1, \min_{z\in\overline{V'}\cap Z} \left|D^{\beta_j} g_j(z)\right|\right) \tau^{|\beta_j|+2} \omega_\phi^{2k_1+2n}}{\beta_j! C_3' C_2' C_1'^{|\beta_j|+2} M_{|\beta_j|} \|g_j\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}},$$

on déduit

$$\left\| \frac{1}{(G_j)_{\beta_j}}\Big|_{W'} \right\|_{(\omega_j'',\infty)}^{(M,.)} \leq \frac{C_4' \beta_j!}{\min_{z\in\overline{V'}\cap Z} \left|D^{\beta_j} g_j(z)\right|}.$$

Donc, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, le coefficient $(G_j')_{\beta_j}$ est inversible dans toute algèbre de Banach $C_\omega^{(M)}(W')$ avec $\omega \leq \min(\omega_1'',\dots,\omega_p'')$.
On considère la série F' définie, pour tout $x' \in W'$, par

$$F'(x',Y) = \overline{T}_{\phi^{-1}(0,x')} f(Y).$$

De la même manière qu'on a prouvé (4.41), on montre la majoration

$$\|F'\|_{\omega_3,\omega_4}^{(M,M')} \leq C_2' \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-2n}, \tag{4.46}$$

avec $\omega_3 = \frac{\lambda}{C_1'}$ et $\omega_4 = \frac{\lambda \omega_\phi^{k_1}}{C_1'}$. Si on pose $\omega_5 = \min(\omega_2, \omega_4, \omega_1'', \dots, \omega_p'')$, il existe des constantes C_5', k_2 et k_3 telles que la valeur de ω_6 définie par

$$\omega_6 = \frac{\lambda \tau^{k_2} \omega_\phi^{k_3}}{C_5' \max_{j\in\{1,\dots,p\}} \|g_j\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}} \min\left(1, \min_{\substack{z\in K \\ j\in\{1,\dots,p\}}} \left|D^{\beta_j} g_j(z)\right|\right)$$

soit inférieure à ω_5. On considère alors l'algèbre de Banach $\mathcal{B} = C_{\omega_6}^{(M')}(W')$. La série F' appartient à $\mathcal{B}[[Y]]_{\omega_3}^{(M)}$. Le p-uplet $\left(G_1',\dots,G_p'\right)$ est inclus dans $\left(\mathcal{B}[[Y]]_{\omega_1}^{(M)}\right)^p$ et forme une famille de diviseurs à la Hironaka dans l'algèbre $\mathcal{B}[[X]]_{\omega_1}^{(M)}$ dont les exposants initiaux sont $\beta_1,\dots,\beta_p$. On a aussi montré que, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, la fonction $\left(G_j'\right)_{\beta_j}$ est inversible dans $\mathcal{B}$. Les séries $G_1',\dots,G_p'$ vérifient donc les hypothèses du théorème 4.1.1.

D'autre part, d'après la définition de F', pour tout point $a \in V' \cap Z$, si on pose $(0,b') = \phi(a)$, on a $\overline{T}_a f(Y) = F'(b',Y)$. On a des relations similaires entre les fonctions g_j et les séries G'_j. En appliquant le lemme 4.2.3 avec f au lieu de g , ϕ^{-1} au lieu de f, $b = (0, b')$ et $w = (0, w')$, $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$, on obtient, pour tout $b' \in W'$ et tout $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$,

$$D_{(0,w'),z}\overline{T}_{\phi^{-1}(0,b')}f(Y) = D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y}\overline{T}_{\phi^{-1}(0,b')}f(Y).$$

De même, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, tout $b' \in W'$ et tout $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$, on a

$$D_{(0,w'),z}\overline{T}_{\phi^{-1}(0,b')}g_j(Y) = D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y}\overline{T}_{\phi^{-1}(0,b')}g_j(Y).$$

On en déduit, pour tout $b' \in W'$ et tout $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$,

$$\begin{aligned} D_{w',z}G'_j(b', Y) &= D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y}G'_j(b', Y), \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}, \\ \text{et } D_{w',z}F'(b', Y) &= D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y}F'(b', Y). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Etape 2 : division formelle à la Hironaka.

Etant donnée la famille $(G'_1, \dots, G'_p)$, le théorème 4.1.1 fournit des constantes C'_7, C'_8, C'_9, l_1, l_2 et $d < 1$ permettant de diviser toute série formelle de $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_{\lambda'}$ dès que

$$\lambda' < \omega_1 \min \left(C'_7 \min_{j=1,\dots,p} \left(\frac{\|(G'_j)_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}}}{\|G'_j\|^{(M,.)}_{(\omega_1,\mathcal{B})}} \right)^{C'_8}, 1 \right). \tag{4.48}$$

Or, pour tout j, on a

$$\begin{aligned} \|(G'_j)_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}} &\geq \min_{z' \in W'} \left|(G'_j)_{\beta_j}(z')\right| \\ &\geq \min_{z \in \overline{V'} \cap Z} \frac{\left|D^{\beta_j} g_j(z)\right|}{\beta_j!}. \end{aligned}$$

De (4.42), on déduit alors que, pour tout j, on a

$$\frac{\|(G'_j)_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}}}{\|G'_j\|^{(M,.)}_{(\omega_1,\mathcal{B})}} \geq \frac{\min_{z \in \overline{V'} \cap Z} \left|D^{\beta_j} g_j(z)\right| \omega_\phi^{2n}}{\beta_j! C'_2 \|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)}}.$$

Donc, si le réel λ' satisfait

$$\lambda' \leq \frac{\tau}{C'_1} \min \left(C'_7 C'^{-C'_8}_2 \omega_\phi^{2nC'_8} \min_{j=1,\dots,p} \left(\frac{\min_{z \in K} |D^{\beta_j} g_j(z)|}{\beta_j! \|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)}} \right)^{C'_8}, 1 \right), \tag{4.49}$$

alors il satisfait également (4.48). En posant $C_1 = C_7' C_2'^{-C_8'}$ et $C_2 = C_8'$, les conditions mises sur λ et la définition de ω_3 impliquent que ω_3 vérifie (4.49). On peut, par conséquent, effectuer la division de F' par la famille $(G_1', \ldots, G_p')$. On obtient des séries $Q_1', \ldots, Q_p'$ et R' appartenant à $\mathcal{B}[[X]]^{(M)}_{d\omega_3^{l_1}}$ telles que l'équation

$$F' = \sum_{j=1}^{P} G_j' Q_j' + R \tag{4.50}$$

soit une division à la Hironaka. Ces quotients et reste vérifient, de plus, les estimations

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \|Q_j'\|^{(M,.)}_{(d\omega_3^{l_1}, \mathcal{B})} &\leq \frac{C_9' \|\left(G_j'\right)^{-1}_{\beta_j}\|_{\mathcal{B}}}{\omega_3^{l_2}} \|F'\|^{(M,.)}_{(\omega_3, \mathcal{B})} \\ &\leq \frac{C_9' {C_1'}^{l_2}}{\lambda^{l_2}} \frac{C_4' \beta_j!}{\min_{z \in \overline{V'} \cap Z} |D^{\beta_j} g_j(z)|} C_2' \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda, \infty)} \omega_\phi^{-2n} \\ \text{et} \quad \|R'\|^{(M,.)}_{(d\omega_3^{l_1}, \mathcal{B})} &\leq 2\|F'\|^{(M,.)}_{(\omega_3, \mathcal{B})} \leq 2C_2' \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda, \infty)} \omega_\phi^{-2n}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Etape 3 : extension des quotients et reste.

Compte tenu de (4.47) et du lemme 4.2.7 appliqué avec W' au lieu de W, $w = w' \in \mathbb{R}^{n-d}$ et $v = d\phi^{-1}(0, b').(0, w') \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout point $b' \in W'$ et tout vecteur $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$,

$$\begin{aligned} D_{w',z} Q_j'(b', Y) = D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y} Q_j'(b', Y), \ \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \\ \text{et } D_{w',z} R'(b', Y) = D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y} R'(b', Y). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dans ce qui suit, on détaille les arguments permettant d'étendre R'. La procédure sera la même pour les quotients Q_j'.
Si, pour tout point $(x'', x') \in \mathbb{R}^d \times W'$, on pose $R\left((x'', x'), Y\right) = R'(x', Y)$, on déduit de (4.52) l'égalité, pour tout $w' \in \mathbb{R}^{n-d}$ et $b' \in W'$,

$$D_{(0,w'),z} R((0, b'), Y) = D_{d\phi^{-1}(0,b').(0,w'),Y} R((0, b'), Y).$$

Comme $\{0\} \times W' = \phi(V' \cap Z)$, pour tout $b \in \phi(V' \cap Z)$ et tout $w \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$, on a l'égalité

$$D_{w,z} R(b, Y) = D_{d\phi^{-1}(b).w,Y} R(b, Y).$$

Les définitions de $\mathcal{B}$ et de R impliquent

$$\|R_{|_{\phi(V')}}\|^{(M,M')}_{d\omega_3^{l_1}, \omega_6} = \|R_{|_{\phi(V')}}\|^{(M,.)}_{(d\omega_3^{l_1}, \mathcal{B})} \leq \|R'\|^{(M,.)}_{(d\omega_3^{l_1}, \mathcal{B})}.$$

En appliquant le lemme 4.2.6 avec $G = R$ et V' au lieu de V, on obtient une fonction $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle qu'on ait, pour tout point $a \in K$,

$$\overline{T}_a r(Y) = R(\phi(a), Y) = R'(b', Y),$$

avec $(0, b') = \phi(a)$, et

$$\|r_{|_{V''}}\|_{(\omega_7,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C'_{12} \|R_{|_{\phi(V')}}\|_{d\omega_3^{l_1},\omega_6}^{(M,M')} \omega_\phi^{-2n},$$

avec $\omega_7 = \frac{d\omega_3^{l_1}\omega_6\omega_\phi^{k_4}}{C'_{11}}$, $V'' = \phi^{-1}(\mathcal{T}(\phi(K),1)) \cap V'$ et des constantes C'_{11}, C'_{12} et k_4 ne dépendant que de n, N et M. Or, compte tenu des hypothèses mises sur V', on a $V'' = V'$.
En reprenant les expressions de ω_3, ω_6 et (4.51), on obtient l'existence des constantes C_3, C_4, k, k', l et l' telles que la valeur

$$\omega = \frac{\lambda^l \tau^k \omega_\phi^{k'}}{C_3 \max_{j\in\{1,\dots,p\}} \|g_j\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}} \min\left(1, \min_{\substack{z\in\overline{V'}\cap Z\\ j\in\{1,\dots,p\}}} |D^{\beta_j} g_j(z)|\right)$$

soit inférieure à ω_7 et qu'on ait

$$\|r_{|_{V'}}\|_{(\omega,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C_4 \|f\|_{(\lambda,\infty)}^{(M,.)} \omega_\phi^{-4n}.$$

En raisonnant de même, on obtient des fonctions $q_j \in C_\omega^{(M'^2)}(V')$ vérifiant, pour tout $a \in K$, $\overline{T}_a q_j(Y) = Q'_j(b', Y)$, avec $(0, b') = \phi(a)$. On en déduit, pour tout $a \in K$,

$$\begin{aligned}\overline{T}_a f(Y) = F(b', Y) &= \sum_{j=1}^{p} (Q'_j G'_j)(b', Y) + R'(b', Y)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{p} \overline{T}_a q_j \overline{T}_a g_j + \overline{T}_a r\right)(Y)\end{aligned}$$

et le résultat. □

4.2.3 Théorème de division global

L'énoncé suivant utilise la fonction s définie dans le lemme 2.2.4. On rapelle que M' désigne la suite $\max(M, N)$.

Théorème 4.2.9. *Soient un réel $r > 0$ et un quadruplet (L, K, ϵ, δ) vérifiant la propriété $CLU(N, r)$. Soit un p-uplet $(g_1, \dots, g_p) \in \left(C^{(M)}(B(0,r))\right)^p$ formant une famille de diviseurs à la Hironaka sur la sous-variété $Z = L \setminus K$ et $\beta_1, \dots, \beta_p$ les exposants initiaux associés. Soient un réel $\mu \in \,]0, r[$ et Z' l'ensemble $Z \cap \overline{B(0, r-\mu)}$. Pour tout $a \in Z'$, on pose $\omega_a = \mu s(2\delta) N_1^{-1} \epsilon^2 d(a,K)^{2\delta}$ et $V_a = B(a, 2\omega_a)$. On suppose que, pour tout point $a \in Z'$ et tout $x \in V_a \cap Z$, on a*

$$|D^{\beta_j} g_j(x)| \geq \epsilon d(a,K)^{\delta}. \tag{4.53}$$

Alors il existe des constantes ϵ_1 et δ_1, ne dépendant que des fonctions $g_1, \dots, g_p$, de n et de M, telles qu'on ait la propriété $(\mathcal{P})$ suivante.
$(\mathcal{P})$ Soient f une fonction de $C^\infty(B(0,r))$ et, pour tout point a de Z', un réel λ_a avec $0 < \lambda_a \leq \epsilon_1 d(a,K)^{\delta_1}$. Si, pour tout $a \in Z'$, la restriction de f à V_a appartient à $C^{(M)}_{\lambda_a}(V_a)$, les assertions suivantes sont vérifiées :

- *on peut effectuer, dans $B(0,r) \setminus \left(K \cap \overline{B(0, r-\mu)}\right)$, une division de f sur Z' par la famille $(g_1, \dots, g_p)$,*
- *il existe des quotients et reste dont la restriction à $B(a, \omega_a)$ appartienne à $C^{(M'^2)}(B(a,\omega_a))$, pour tout point a de Z'.*
- *si on a les estimations*

$$\omega'_a = \inf_{b \in B\left(a, \frac{d(a,K)^{2\delta}}{4}\right) \cap Z'} \lambda_b > 0 \quad \text{et} \quad C'_a = \sup_{b \in B\left(a, \frac{d(a,K)^{2\delta}}{4}\right) \cap Z'} \|f_{|V_b}\|^{(M,.)}_{(\lambda_b, \infty)} < \infty,$$

alors il existe des quotients et reste, ainsi que des constantes C_1, C_2 et l', ne dépendant pas de a, tels qu'on ait

$$\|q_{j|_{B(a,\frac{\omega_a}{2})}}\|^{(M'^2,.)}_{(C_1 d(a,K)^{2\delta}\omega'_a, \infty)} \leq C_2 C'_a {\omega'_a}^{-l'}$$
$$\text{et} \quad \|r_{|_{B(a,\frac{\omega_a}{2})}}\|^{(M'^2,.)}_{(C_1 d(a,K)^{2\delta}\omega'_a, \infty)} \leq C_2 C'_a.$$

Démonstration. Dans cette preuve, on commence par effectuer une division locale au voisinage de chaque point de Z'. Plus précisément, pour un point $a \in Z'$, on considère l'ouvert $V_a = B(a, 2\omega_a)$, le compact $L_a = \overline{B\left(a, \frac{\omega_a}{2}\right)} \cap Z$ et $V'_a = B(a, \omega_a)$ qui est un voisinage ouvert de L_a relativement compact dans V_a. En appliquant le théorème 4.2.8 pour diviser la fonction $f_{|_{V'_a}}$ par la famille $(g_{1|_{V'_a}}, \dots, g_{p|_{V'_a}})$, on obtient des quotients et reste locaux, notés $q_{a1}, \dots, q_{ap}$ et r_a. Pour conclure, il suffit de recoller ces quotients et restes locaux grâce à la proposition 2.2.5, de telle sorte qu'on ait, pour tout $a \in Z'$, l'égalité $\overline{T}_a f = \sum_{i=1}^p \overline{T}_a g_i \overline{T}_a q_i + \overline{T}_a r$. Cependant, comme pour tout $a \in Z'$, la relation $\overline{T}_b f = \sum_{i=1}^p \overline{T}_b g_i \overline{T}_b q_{ai} + \overline{T}_b r_a$ n'est valable que pour $b \in \overline{B(a, \frac{\omega_a}{2})} \cap Z$, on ne peux appliquex la proposition 2.2.5 qu'avec les compacts $L' = L \cap \overline{B(0, r-\mu)}$

pour L, $K' = K \cap \overline{B(0, r-\mu)}$ pour K et les valeurs $\mu s(2\delta)\frac{\epsilon^2}{2N_1}$ pour ϵ et 2δ pour δ ; en effet, dans ce cas, les voisinages V_a de la proposition 2.2.5 correspondent aux ouverts $V_a'' = B\left(a, \frac{\omega_a}{2}\right)$.

Division locale.
Soit a un point sur Z'. De la définition de $\mathrm{CLU}(1,r)$, on déduit la majoration $d(a,K) \leq \min(2r, 1)$ et, par conséquent, les relations $\omega_a \leq \frac{\mu}{2}$ et $V_a \subset B(0,r)$. Les fonctions $g_1, \ldots, g_p$ et f sont donc définies sur V_a.
Si on pose $\omega_{a1} = \epsilon d(a,K)^\delta$, le difféomorphisme ϕ_a vérifie $\|\phi_a\|^{(N,.)}_{(\omega_{a1},\infty)} \leq \omega_{a1}^{-1}$. D'autre part, d'après les propriétés de la fonctions s, on a $s(2\delta) \leq \frac{1}{2}$. Le théorème des accroissements finis et la définition de ω_a impliquent alors l'inégalité $d(\phi(a), \phi(b)) \leq 1$ pour tout point $b \in B(a, 2\omega_a)$. Ainsi, on a $\phi_a^{-1}\left(\mathcal{T}(\phi_a(L_a), 1)\right) \cap V_a = V_a$.
D'autre part, le p-uplet $(g_{1|_{V_a}}, \ldots, g_{p|_{V_a}})$ est une famille de diviseurs C^∞ sur L_a. On peut donc appliquer le théorème 4.2.8 avec V_a pour V, V_a' pour V', $Z \cap V_a$ pour Z et L_a pour K. On en déduit l'existence de constantes C_1', C_2', C_3', C_4', k, k', l et l', ne dépendant pas du point a, telles que, pour tout réel λ vérifiant

$$0 < \lambda < \tau \min\left(C_1'\left(\epsilon d(a,K)^\delta\right)^{2nC_2'} \min_{j=1\ldots,p}\left(\frac{\inf_{z\in\overline{V_a'}\cap Z}|D^{\beta_j} g_j(z)|}{\beta_j!\|g_{j|_{V_a}}\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)}}\right), 1\right), \tag{4.54}$$

on puisse effectuer une division sur L_a de toute fonction de $C^{(M)}_\lambda(V_a')$ par la famille $g_{1|_{V_a'}}, \ldots, g_{p|_{V_a'}}$. Or, vu les hypothèses mises sur les fonctions $D^{\beta_j} g_j$, si le réel λ satisfait

$$\lambda = C_3'\tau \frac{\left(\epsilon d(a,K)^\delta\right)^{2nC_2'+1}}{\max_{j\in\{1,\ldots,p\}}\left(\beta_j!\|g_j\|^{(M,.)}_{(\tau,\infty)}\right)},$$

avec C_3' une constante adaptée, indépendante de a, il satisfait aussi (4.54). Il existe donc des constantes ϵ_1 et δ_1, ne dépendant pas de a, telles que, si λ_a est dans l'intervalle $]0, \epsilon_1 d(a,K)^{\delta_1}]$, il vérifie (4.54).

Par conséquent, étant donnée une fonction f de $C^\infty(B(0,r))$ dont la restriction à V_a appartient à $C^{(M)}_{\lambda_a}(V_a)$, on peut lui associer des fonctions

$q_{a1}, \ldots, q_{ap}$ et r_a vérifiant :

– $$\forall z \in L_a,\ \overline{T}_z f = \sum_{j=1}^{p} \overline{T}_z g_j \overline{T}_z q_{aj} + \overline{T}_z r_a, \tag{4.55}$$

– $$\left\| q_{aj_{|V'_a}} \right\|_{(\omega_{a2},\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C'_6 \left\| f_{|V_a} \right\|_{(\lambda_a,\infty)}^{(M,.)} \omega_{a1}^{-4n} \frac{1}{\lambda_a^{l'} \min_{z\in\overline{V'_a}\cap Z} |D^{\beta_j} g_j(z)|}, \tag{4.56}$$

– $$\left\| r_{a_{|V'_a}} \right\|_{(\omega_{a2},\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C'_6 \left\| f_{|V_a} \right\|_{(\lambda_a,\infty)}^{(M,.)} \omega_{a1}^{-4n}, \tag{4.57}$$

avec

$$\omega_{a2} = \frac{\lambda_a^l \tau^k \omega_{a1}^{k'}}{C'_5 \max_{j\in\{1,\ldots,p\}} \left\| g_{j|V_a} \right\|_{(\tau,\infty)}^{(M,.)}} \min\left(1, \min_{\substack{z\in\overline{V'_a}\cap Z \\ j\in\{1,\ldots,p\}}} \left| D^{\beta_j} g_j(z) \right| \right)$$

et des constantes k, l, C'_5 et C'_6 ne dépendant ni de a ni de f. Compte tenu de (4.53) et de la définition de ω_{a1}, il existe des constantes ϵ'_2, ϵ'_3, δ'_2, δ'_3, C'_7 et C'_8, ne dépendant ni de a, ni de f, telles que la constante $\omega''_a = \frac{\lambda_a^l \tau^k \epsilon'_3 d(a,K)^{\delta'_3}}{C'_7}$ vérifie $\omega''_a \leq \omega'_a$ et qu'on ait

$$\begin{aligned} &\left\| q_{ja_{|V'_a}} \right\|_{(\omega''_a,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C'_8 d(a,K)^{-\delta'_2} \left\| f_{|V_a} \right\|_{(\lambda_a,\infty)}^{(M,.)} \lambda_a^{-l'},\ \forall j \in \{1,\ldots,p\} \\ \text{et}\quad &\left\| r_{a_{|V'_a}} \right\|_{(\omega''_a,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C'_8 d(a,K)^{-\delta'_2} \left\| f_{|V_a} \right\|_{(\lambda_a,\infty)}^{(M,.)}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Recollement des quotients et reste.
On détaille le cas du reste, la démarche étant exactement la même pour les quotients.
De l'unicité de la division formelle, on déduit, pour tout $a \in Z'$ et tout $b \in L_a$, l'égalité $\overline{T}_b r_b = \overline{T}_b r_a$. Si on pose $V''_a = B\left(a, \frac{\omega_a}{2}\right)$, on a $V''_a \cap Z \subset L_a$. Donc, pour tout $a \in Z'$ et tout $b \in V''_a \cap L'$, on a $\overline{T}_b r_b = \overline{T}_b r_a$. De plus, la fonction $r_{a_{|V'_a}}$ appartient à $C_{\omega_{a2}}^{(M'^2)}(V'_a)$. Par conséquent, on peut appliquer la proposition 2.2.5 en remplaçant L par L', K par K', ϵ par $\mu s(2\delta)\frac{\epsilon^2}{N_1}$ et δ par 2δ. On obtient l'existence d'une fonction r de $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K')$ telle que, pour tout point $a \in Z'$, $r_{|V''_a}$ appartienne à $C^{(M'^2)}(V''_a)$ et vérifie $\overline{T}_a r = \overline{T}_a r_a$.
De plus, si la valeur $\omega'_a = \inf_{b\in B\left(a,\frac{d(a,K)^{2\delta}}{4}\right)\cap Z'} \lambda_b$ est non nulle et si la valeur $C'_a = \sup_{b\in B\left(a,\frac{d(a,K)^{2\delta}}{4}\right)\cap Z'} \left\| f_{|V_b} \right\|_{(\omega'_a,\infty)}^{(M,.)}$ est finie, alors il existe des constantes C_1 et C_2, ne dépendant pas de a, telles qu'on ait

$$\left\| r_{|V''_a} \right\|_{(C_1 d(a,K)^{2\delta} \omega'_a,\infty)}^{(M'^2,.)} \leq C_2 C'_a.$$

Le théorème s'ensuit. □

Chapitre 5

Bases standards d'idéaux

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et à la construction d'une base standard pour un idéal I de type fini dans une des classes $\mathcal{C}l(U)$ considérées en 1.10. En tout point $a \in U$, la preuve de la proposition [Mo2, Mo3](4.6) permet de construire une base standard de l'idéal de séries formelles I_a. Mais, lorsque a parcourt U, le diagramme $\mathcal{N}_a$ des exposants initiaux de I_a varie fortement ; il est même possible que le nombre de ses sommets change, comme le montrent les exemples développés dans la section 5.5. De plus, étant donnée une fonction f, l'exposant initial de la série $\overline{T}_a f$ n'est, en général, pas constant lorsque le point a parcourt U. Il suffit de considérer la fonction $f : (x, y) \mapsto x + y$ au voisinage de l'origine pour s'en convaincre. Par conséquent, il n'existe généralement pas de fonction f telle que, pour tout point $a \in U$, le n-uplet $\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a f$ soit un sommet de $\mathcal{N}_a$. Nous allons cependant montrer que, si les générateurs de I sont réel-analytiques, il est possible de décomposer U en un nombre fini de composantes telles que $\mathcal{N}_a$ soit constant sur chacune de ces composantes. Nous fournirons, de plus, un algorithme permettant de construire ces composantes $\mathcal{C}^i$ et de trouver, pour chaque i et chaque sommet β^i_j du diagramme des exposants initiaux associé à $\mathcal{C}^i$, une fonction f^i_j réel-analytique sur U, appartenant à I et vérifiant, pour tout $a \in \mathcal{C}^i$, $\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a f^i_j = \beta^i_j$.

En s'inspirant des méthodes développées dans [Mo2, Mo1], on donne, dans la section 5.2, une condition suffisante, plus faible que dans [Mo2](4.5), pour qu'une famille de séries formelles soit une base standard d'un idéal I_a. Dans la section 5.3, on adapte les résultats précédents afin d'obtenir une condition suffisante pour qu'une famille de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ soit une base standard d'un idéal I sur un ensemble U'. Puis, dans la section 5.4, on étudie plus particulièrement le cas où les générateurs de I sont réel-analytiques. En reprenant les idées de [BM1], on développe une construction explicite d'une base standard de l'idéal I sur un ensemble convenable.

Dans ce chapitre, on utilise les notations introduites dans les sections 1.8 et 1.10, ainsi que quelques notions techniques introduites ci-après.

5.1 Notations et définitions

Etant donnés deux multi-indices $(r_1, \ldots, r_n)$ et $(s_1, \ldots, s_n)$, on définit le n-uplet

$$\mathrm{m}\left((r_1, \ldots, r_n), (s_1, \ldots, s_n)\right) = (\max(r_1, s_1), \ldots, \max(r_n, s_n)) .$$

Soient F et G deux séries formelles. On définit la S-**série** de F et G par

$$S(F, G)(X) = \frac{X^{\mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ F}}{\mathrm{Init}\ F} F(X) - \frac{X^{\mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ G}}{\mathrm{Init}\ G} G(X).$$

Ainsi, la série $S(F, G)$ est un élément de l'idéal engendré par F et G dans $\mathbb{R}[[X]]$. Son exposant initial est strictement supérieur à $\mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G)$ pour l'ordre L-I.
On dira, d'autre part, qu'une série formelle H est une S'-**série** de F et G si H est de la forme

$$\begin{aligned} H(X) &= S(F, G)(X) + S_F(X)F(X) + S_G(X)G(X) \\ &= \left(\frac{X^{\mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ F}}{\mathrm{Init}\ F} + S_F(X) \right) F(X) \\ &\quad - \left(\frac{X^{\mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ G}}{\mathrm{Init}\ G} - S_G(X) \right) G(X), \end{aligned}$$

avec les inégalités

$$\begin{aligned} &\mathrm{Exp}\ S_F > \mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ F \\ \text{et} \quad &\mathrm{Exp}\ S_G > \mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G) - \mathrm{Exp}\ G. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.1. La série $S(F, G)$ est une S'-série de F et G.

Remarque 5.1.2. Pour toute S'-série H de F et G, on a

$$\mathrm{Exp}\ H > \mathrm{m}(\mathrm{Exp}\ F, \mathrm{Exp}\ G).$$

5.2 Bases standards formelles

Dans cette section, on établit une condition suffisante, plus faible que dans [Mo2, Mo1](4.5), pour qu'une famille de séries formelles soit une base standard d'un idéal I .

Lemme 5.2.1. *Soit I un idéal de $\mathbb{R}[[X]]$. Soit $\mathfrak{G} = (G_1, \ldots, G_p)$ une famille de séries formelles engendrant I. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note α_i l'exposant initial de la série G_i. On suppose qu'à tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ est associée une S'-série de G_i et G_j, notée $S'(G_i, G_j)$.*
Si, pour tout couple d'indices $(i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ avec $i \neq j$, le reste d'une division faible à la Hironaka de $S'(G_i, G_j)$ par $\mathfrak{G}$ est nul, alors la famille $\mathfrak{G}$ est une base standard formelle de l'idéal I.

Démonstration. C'est une modification mineure de la preuve du lemme 4.5 de [Mo2] ou [Mo1].
On considère une série formelle F non nulle de l'idéal I. Il existe donc des séries formelles $H_1, \ldots, H_p$ telles qu'on ait

$$F = \sum_{i=1}^{p} H_i G_i. \tag{5.1}$$

On pose $\mu_H = \min_{i=1,\ldots,p} \mathrm{Exp}\ (H_i G_i)$. On a clairement

$$\mathrm{Exp}\ F \geq \mu_H. \tag{5.2}$$

On considère, alors, l'ensemble des écritures possibles de F sous la forme (5.1). Il existe un p-uplet de séries formelles $(H'_1, \ldots, H'_p)$ tel qu'on ait l'égalité $F = \sum_{i=1}^{p} H'_i G_i$ et tel que $\mu_{H'}$ soit maximal par rapport à l'ensemble des μ_H où les séries $H_1, \ldots, H_p$ satisfont l'équation (5.1). On va montrer qu'on a $\mu_{H'} = \mathrm{Exp}\ F$.
Pour alléger les notations, nous écrirons μ à la place de $\mu_{H'}$ et, pour tout couple $(j,k) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $j \neq k$, $\gamma_{j,k}$ pour $\mathrm{m}(\alpha_j, \alpha_k)$. On sait, par (5.2), que $\mu \leq \mathrm{Exp}\ F$. Supposons qu'on ait l'inégalité stricte

$$\mu < \mathrm{Exp}\ F.$$

Comme dans la preuve de [Mo2](4.5, équations 4.5.4 et 4.5.5), il existe des constantes $(c_{j,k})_{(j,k)\in\{1,\ldots,p\}^2}$ telles que la série F s'écrive sous la forme

$$F(X) = \sum_{\substack{(j,k)\in\{1,\ldots,p\}^2 \\ j\neq k}} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(G_j, G_k)(X) + \sum_{i=1}^{p} H''_i(X) G_i(X), \tag{5.3}$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, le n-uplet $\mathrm{Exp}\ (H''_i G_i)$ est strictement supérieur à μ.
Comme, pour tout couple $(j,k) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $j \neq k$, la série $S'(G_j, G_k)$ est

une S'-série de G_j et G_k, il existe des séries $S_j^{j,k}$ et $S_k^{j,k}$ vérifiant

$$\text{Exp } S_j^{j,k} > \gamma_{j,k} - \alpha_j, \tag{5.4}$$

$$\text{Exp } S_k^{j,k} > \gamma_{j,k} - \alpha_k \tag{5.5}$$

$$\text{et} \qquad S'(G_j, G_k) = S(G_j, G_k) + S_j^{j,k} G_j + S_k^{j,k} G_k.$$

On peut donc réécrire l'égalité (5.3) sous la forme

$$\begin{aligned} F(X) = &\sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} S'(G_j, G_k)(X) \\ &- \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} (S_j^{j,k}(X) G_j(X) + S_k^{j,k}(X) G_k(X)) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} H_i''(X) G_i(X). \end{aligned}$$

En regroupant les termes G_i, on obtient

$$\begin{aligned} F(X) = &\sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} S'(G_j, G_k)(X) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \Big(H_i''(X) - \sum_{k=1, k \neq i}^{p} c_{i,k} X^{\mu - \gamma_{i,k}} S_i^{i,k}(X) \\ &\qquad - \sum_{j=1, j \neq i}^{p} c_{j,i} X^{\mu - \gamma_{j,i}} S_i^{j,i}(X) \Big) G_i(X). \end{aligned}$$

Compte tenu de (5.4) et (5.5), pour tout couple (j, k), $j \neq k$, l'exposant initial de $X^{\mu-\gamma_{j,k}} S_j^{j,k}(X) G_j(X)$ et celui de $X^{\mu-\gamma_{j,k}} S_k^{j,k}(X) G_k(X)$ sont strictement supérieurs à μ. On a donc

$$F(X) = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} S'(G_j, G_k)(X) + \sum_{i=1}^{p} H_i'''(X) G_i(X), \tag{5.6}$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, le n-uplet Exp $(H_i''' G_i)$ est strictement supérieur à μ. Par hypothèse, le reste d'une division faible à la Hironaka de $S'(G_j, G_k)$ par la famille $\mathfrak{G}$ est nul. Il existe donc des séries formelles A_{ijk} telles qu'on ait

$$S'(G_j, G_k) = \sum_{i=1}^{p} A_{ijk} G_i.$$

On obtient

$$\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S'(G_j, G_k)(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} A_{ijk}(X) G_i(X). \tag{5.7}$$

D'après le lemme 1.9.5, les séries A_{ijk} vérifient

$$\text{Exp } A_{ijk} G_i \geq \text{Exp } S'(G_j, G_k) > \gamma_{j,k}.$$

On en déduit que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'exposant initial de la série $\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} A_{ijk} G_i$ est strictement supérieur à μ. En reportant l'égalité (5.7) dans (5.6), on montre que la série F peut s'écrire sous la forme

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \left(H_i'''(X) + \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} A_{ijk}(X) \right) G_i(X),$$

avec, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$\text{Exp } \left(H_i''' + \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} A_{ijk} \right) G_i > \mu.$$

Ceci contredit la maximalité de $\mu = \mu_{H'}$. On a donc bien $\mu_{H'} = \text{Exp } F$. D'autre part, la définition de $\mu_{H'}$ implique qu'il appartient à l'union

$$\bigcup_{i=1}^{p} \{\text{Exp } G_i + \mathbb{N}^n\}.$$

Finalement, on a montré que, pour toute série formelle F de l'idéal I, l'exposant initial de F appartient à $\bigcup_{i=1}^{p} \{\text{Exp } G_i + \mathbb{N}^n\}$. Ceci signifie exactement que la famille $(G_1, \ldots, G_p)$ est une base standard de l'idéal I. □

L'algorithme de construction de bases standards fourni par la preuve de la proposition [Mo2](4.6) est encore valable lorsqu'on remplace les S-séries par des S'-séries et la division à la Hironaka par une division faible à la Hironaka.

Algorithme 1

Soient I un idéal de séries formelles et $\mathfrak{G}^0 = (G_1, \ldots, G_{p_0})$ une famille génératrice de I. On peut construire une base standard de I de la manière suivante : pour tout $j \in \{1, \ldots, p_0\}$, on note α_j^0 l'exposant initial de G_j. A tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p_0\}$, on associe une S'-série de G_i et G_j, notée $S'(G_i, G_j)$.

On définit la famille $\mathfrak{G}^1$ comme étant l'union de $\mathfrak{G}^0$ et des restes d'une division faible à la Hironaka des séries $S'(G_i, G_j)$ par la famille $\mathfrak{G}^0$. Si la famille $\mathfrak{G}^1$ est égale à la famille $\mathfrak{G}^0$, alors l'algorithme s'arrête. Dans le cas contraire, on note α_j^1, $j = 1, \ldots, t_1$, les exposants initiaux de la famille $\mathfrak{G}^1$ rangés par ordre croissant. A tout couple d'éléments de la famille $\mathfrak{G}^1$, on associe une S'-série de ces deux éléments. On construit une famille $\mathfrak{G}^2$ comme étant l'union de la famille $\mathfrak{G}^1$ et des restes d'une division à la Hironaka faible par $\mathfrak{G}^1$ des S'-séries associées à la famille $\mathfrak{G}^1$. Si la famille $\mathfrak{G}^2$ est égale à la famille $\mathfrak{G}^1$, l'algorithme s'arrête. Dans le cas contraire, on recommence.

Il reste à montrer que cet algorithme a un nombre fini d'étapes. Les arguments sont les mêmes que ceux développés dans [Mo2](4.6) : étant donné un entier $k \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^k = \left(\Lambda_1^k, \ldots, \Lambda_{p_k}^k, \Lambda_C^k\right)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée aux n-uplets $(\alpha_j^k)_{j\in\{1,\ldots,p_k\}}$. On considère $\langle\mathfrak{G}^k\rangle$ l'idéal engendré sur $\mathbb{R}[X]$ par l'ensemble des monômes initiaux des éléments de $\mathfrak{G}^k$. Si on a $\mathfrak{G}^k \neq \mathfrak{G}^{k+1}$, cela signifie que $\mathfrak{G}^{k+1}$ contient une série dont l'exposant initial appartient à Λ_C^k. Donc, le monôme initial de cette série n'appartient pas à $\langle\mathfrak{G}^k\rangle$. On en déduit que l'idéal $\langle\mathfrak{G}^k\rangle$ est strictement plus petit que $\langle\mathfrak{G}^{k+1}\rangle$. On a ainsi construit une suite croissante d'idéaux monômiaux dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$ qui est noethérien. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang. On conclut que cet algorithme s'arrête.

Concernant la dernière famille $\mathfrak{G}^{n_0}$ obtenue, à tout couple d'éléments de cette famille est associée une S'-série et le reste d'une division de cette dernière par la famille $\mathfrak{G}^{n_0}$ est nul. D'après le lemme 5.2.1, la famille $\mathfrak{G}^{n_0}$ forme alors une base standard de l'idéal I pour l'ordre lexicographique inverse.

De cet algorithme, on peut déduire une version plus faible du lemme 5.2.1.

Corollaire 5.2.2. *Soient I un idéal de $\mathbb{R}[[X]]$ et $\mathcal{N}$ le diagramme des exposants initiaux qui lui est associé. Soit $\mathfrak{G} = (G_1, \ldots, G_p)$ une famille de séries formelles engendrant l'idéal I. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note α_i l'exposant initial de la série G_i. Soit $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \Lambda_C)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée aux n-uplets α_i. Si pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, il existe une S'-série de G_i et G_j, notée $S'(G_i, G_j)$ vérifiant*

$$S'(G_i, G_j) = \sum_{k=1}^{p} Q_{ijk} G_k + R_{ij}$$

où

– *R_{ij} est nul ou d'ordre strictement supérieur à $|\mathcal{N}|$,*
– *pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, l'ordre de $Q_{ijk}G_k$ est inférieur à $|\mathcal{N}|$ et* $\operatorname{Exp}(Q_{ijk}G_k)$ *appartient à Λ_k,*

alors la famille $\mathfrak{G}$ est une base standard de l'idéal I.

Démonstration. On applique l'algorithme précédent à la famille $\mathfrak{G}$. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, on peut effectuer la division à la Hironaka de R_{ij} par la famille $\mathfrak{G}$. Ainsi R_{ij} s'écrit sous la forme

$$R_{ij} = \sum_{i=k}^{p} Q'_{ijk}G_k + R'_{ij}.$$

Comme l'ordre de R_{ij} est strictement supérieur à $|\mathcal{N}|$, il en est de même concernant l'ordre des séries $Q'_{ijk}G_k$ et R'_{ij}. L'ordre de la série $Q_{ijk}G_k$ étant inférieur à $|\mathcal{N}|$, l'exposant initial de la série $(Q_{ijk} + Q'_{ijk})G_k$ est celui de $Q_{ijk}G_k$. De plus, le support de la série R'_{ij} est inclus dans Λ_C. Ceci entraîne que l'égalité

$$S'(G_i, G_j) = \sum_{k=1}^{p}(Q_{ijk} + Q'_{ijk})G_k + R'_{ij}$$

est une division faible à la Hironaka de la série $S'(G_i, G_j)$ par la famille $\mathfrak{G}$. Dans l'algorithme 1, on définit alors la famille $\mathfrak{G}^1$ comme étant l'union de $\mathfrak{G}$ et des restes R'_{ij}. Or, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, l'exposant initial de R'_{ij} est strictement supérieur à $|\mathcal{N}|$. On en déduit que toute S'-série associée à R'_{ij} et à un autre élément de $\mathfrak{G}^1$ sera d'ordre strictement supérieur à $|\mathcal{N}|$. En appliquant le lemme 1.9.5, on obtient qu'il en sera de même du reste de la division de cette S'-série par la famille $\mathfrak{G}^1$. Ainsi, dans toute la suite de l'algorithme 1, les restes seront nuls ou d'ordre strictement supérieur à $|\mathcal{N}|$. Cet algorithme ne fournira donc aucune série dont l'ordre est l'un des sommets du diagramme des exposants initiaux. La propriété de l'algorithme 1 étant d'aboutir, après un nombre fini d'étapes, à une base standard de I, on en déduit que $\mathfrak{G}$ est déjà une base standard de I. □

Jusqu'à présent, nous avons travaillé uniquement avec des séries formelles. Il faut désormais adapter ces techniques au cas des fonctions indéfiniment dérivables.

5.3 Bases standards de fonctions

Dans un premier temps, soulignons un fait trivial qui sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 5.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $C^\infty(U)$. Pour un point $a \in U$, si on note β l'exposant initial de la série $\overline{T}_a f$, alors le monôme inital de la série $\frac{\beta! \overline{T}_a f}{\overline{T}_a(D^\beta f)}$ est X^β.*

Démonstration. Au point a, on a $D^\beta f(a) \neq 0$, donc la série $\overline{T}_a(D^\beta f)$ est inversible et le monôme initial de son inverse est $\frac{1}{D^\beta f(a)}$. On en déduit le résultat. □

Dans un deuxième temps, on définit une division par une famille de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$, de sorte que les développements en série du reste et des quotients satisfassent des propriétés proches des conditions requises dans le corollaire 5.2.2.

Définition 5.3.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_p)$ une famille de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ et $f \in \mathcal{C}l(U)$. Soit U' un sous-ensemble de U tel que, pour tout point $a \in U'$, on ait $\mathrm{Exp}\ f_{|_{U'}} = \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a f$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\mathrm{Exp}\ g_{i|_{U'}} = \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a g_i$.
Pour un entier naturel k fixé, on appelle **$\mathcal{C}l$-division d'ordre k de f par la famille $\mathcal{G}$ sur U'**, la donnée de $p+2$ fonctions , $q_1, \ldots, q_p$, r, h, de $\mathcal{C}l(U)$ vérifiant

- $hf = \sum_{i=1}^p q_i g_i + r$ dans U,
- $\forall a \in U'$, $\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r = \mathrm{Exp}\ r_{|U'}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q_i = \mathrm{Exp}\ q_{i|U'}$,
- pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a
  $q_i \equiv 0$
  ou
  $\mathrm{Exp}\ q_{i|_{U'}} + \mathrm{Exp}\ g_{i|_{U'}} \in \Lambda_i$ et $|\mathrm{Exp}\ q_{i|_{U'}} + \mathrm{Exp}\ g_{i|_{U'}}| \leq k$,
- $\mathrm{Exp}\ r_{|_{U'}} \in \Lambda_C$ ou $|\mathrm{Exp}\ r_{|_{U'}}| > k$,
- $\forall a \in U'$, $h(a) \neq 0$.

En particulier, pour tout $a \in U'$, l'exposant initial de la série

$$\overline{T}_a(hf - \sum_{i=1}^p q_i g_i)$$

appartient à Λ_C ou est de longueur strictement supérieure à k.

Remarque 5.3.3. Si l'ensemble U' est réduit à un point a, il est toujours possible d'effectuer une telle division. En effet, il suffit de faire la division à la Hironaka de la série $\overline{T}_a f$ par la famille $\overline{T}_a g_1, \ldots, \overline{T}_a g_p$, puis de construire des fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ dont les séries de Taylor au point a coïncident jusqu'à l'ordre k avec les quotients et reste de la division à la Hironaka effectuée.

Lemme 5.3.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U' un sous-ensemble de U. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathcal{C}l(U)$. On suppose que, pour tout point $a \in U'$ et pour $i = 1, 2$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_a f_i = \operatorname{Exp} f_{i|_{U'}}$. On pose $\beta_i = \operatorname{Exp} f_{i|_{U'}}$ et*

$$s_{U'}(f_1, f_2) = (\mathrm{m}(\beta_1, \beta_2) - \beta_1)!\beta_1!(D^{\beta_1+\beta_2-\mathrm{m}(\beta_1,\beta_2)} f_2) f_1 \\ - (\mathrm{m}(\beta_1, \beta_2) - \beta_2)!\beta_2!(D^{\beta_1+\beta_2-\mathrm{m}(\beta_1,\beta_2)} f_1) f_2.$$

Alors, pour tout point $a \in U'$, la série formelle $\overline{T}_a(s_{U'}(f_1, f_2))$ est le produit d'une S'-série associée à $\overline{T}_a f_1$ et $\overline{T}_a f_2$ et d'une série inversible.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous noterons γ_{12} pour $\mathrm{m}(\beta_1, \beta_2)$. Pour tout point $a \in U'$, on a

$$\overline{T}_a s_{U'}(f_1, f_2) = (\gamma_{12} - \beta_1)!\beta_1!\overline{T}_a \left(D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} f_2\right) \overline{T}_a f_1 \\ - (\gamma_{12} - \beta_2)!\beta_2!\overline{T}_a \left(D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} \overline{T}_a f_1\right) f_2. \tag{5.8}$$

La définition des n-uplets β_i, $i = 1, 2$, entraîne que les séries $\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right)$ et $\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)$ sont inversibles. On peut donc diviser (5.8) par le produit $\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right) \overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)$:

$$\frac{\overline{T}_a s_{U'}(f_1, f_2)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right) \overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)} = \frac{(\gamma_{12} - \beta_1)!\overline{T}_a \left(D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} f_2\right)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)} \frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right)} \\ - \frac{(\gamma_{12} - \beta_2)!\overline{T}_a \left(D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} \varphi_i\right)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right)} \frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)}.$$

Comme l'exposant initial sur U' de la fonction f_2 est β_2, celui de la fonction $D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} f_2$ est $\gamma_{12} - \beta_1$. En appliquant le lemme 5.3.1, on déduit alors la relation

$$\frac{(\gamma_{12} - \beta_1)!\overline{T}_a \left(D^{\beta_1+\beta_2-\gamma_{12}} f_2\right)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)} = X^{\gamma_{12}-\beta_1} - \tilde{S}_1,$$

où $\tilde{S}_1$ est une série dont l'exposant initial est strictement supérieur à $\gamma_{12} - \beta_1$. En raisonnant de même avec f_1, on obtient l'égalité

$$\frac{\overline{T}_a s_{U'}(f_1, f_2)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right) \overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)} = X^{\gamma_{12}-\beta_1} \frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right)} - \tilde{S}_1 \frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_1} f_1\right)} \\ - X^{\gamma_{12}-\beta_2} \frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)} + \tilde{S}_2 \frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_2} f_2\right)}.$$

En utilisant la relation

$$S\left(\frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)}, \frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)}\right) = X^{\gamma_{12}-\beta_1}\frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)} - X^{\gamma_{12}-\beta_2}\frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_2}f_2\right)},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}\overline{T}_a s_{U'}(f_1,f_2) = \overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)\overline{T}_a\left(D^{\beta_2}f_2\right) \\ \times\left(S\left(\frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)}, \frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)}\right)\right. \\ \left. - \tilde{S}_1\frac{\beta_1!\overline{T}_a f_1}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_1}f_1\right)} - \tilde{S}_2\frac{\beta_2!\overline{T}_a f_2}{\overline{T}_a\left(D^{\beta_2}f_2\right)}\right).\end{aligned}$$

Le lemme s'ensuit. □

Définition 5.3.5. Sous les hypothèses du lemme 5.3.4, on dira que $s_{U'}(f_1, f_2)$ est la **s-fonction associée à f_1 et f_2 sur U'**.

On est désormais en mesure d'énoncer une condition suffisante pour qu'une famille $\mathcal{G}$ de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ soit une base standard de l'idéal engendré par $\mathcal{G}$ sur un sous-ensemble U' de U.

Théorème 5.3.6. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient I un idéal de fonctions de $\mathcal{C}l(U)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_p)$, une famille génératrice de I. Soit U' un sous-ensemble de U tel que, pour tout point $a \in U'$ et tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on ait* $\mathrm{Exp}\ (\overline{T}_a g_i) = \mathrm{Exp}\ g_{i|_{U'}}$. *Soit k un entier naturel.*
Si, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $i \neq j$, le reste d'une $\mathcal{C}l$-division d'ordre k de la fonction $s_{U'}(g_i, g_j)$ par la famille $\mathcal{G}$ est nul ou d'ordre strictement supérieur à k, alors, pour tout point $a \in U'$ satisfaisant $|\mathcal{N}_a| \leq k$, la famille de séries formelles $\left(\overline{T}_a g_i\right)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ forme une base standard de l'idéal I_a.

Démonstration. Soit a un point de U' tel qu'on ait $|\mathcal{N}_a| \leq k$.
En appliquant le lemme 5.3.4, on obtient que, pour tout couple d'indices $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $i \neq j$, et tout $a \in U'$, il existe une série formelle H_{aij} inversible et une S'-série de $\overline{T}_a g_i$ et $\overline{T}_a g_j$, notée $S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j)$, telles qu'on ait

$$\overline{T}_a(s_{U'}(g_i, g_j)) = H_{aij} S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j).$$

De plus, l'hypothèse sur le reste de la division d'ordre k implique qu'il existe une fonction h ne s'annulant pas sur U' telle qu'on ait

$$h s_{U'}(g_i, g_j) = \sum_{l=1}^{p} q_l g_l + r,$$

avec, pour tout $a \in U'$, $r = 0$ ou $|\text{Exp}\, \overline{T}_a r| > k$. On en déduit que, pour tout point $a \in U'$, on a

$$(\overline{T}_a h) H_{aij} S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j) = \sum_{l=1}^{p} \overline{T}_a q_l \overline{T}_a g_l + \overline{T}_a r.$$

Comme la fonction h ne s'annule pas sur U', pour tout $a \in U'$, la série $\overline{T}_a h$ est inversible. Ceci nous donne

$$S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j) = \sum_{l=1}^{p} \frac{\overline{T}_a q_l}{(\overline{T}_a h) H_{aij}} \overline{T}_a g_l + \frac{\overline{T}_a r}{(\overline{T}_a h) H_{aij}}. \tag{5.9}$$

La série $\frac{\overline{T}_a r}{(\overline{T}_a h) H_{aij}}$ est encore nulle ou d'ordre strictement supérieur à k. Par conséquent, elle est d'ordre strictement supérieur à $|\mathcal{N}_a|$. D'autre part, pour tout $l \in \{1, \ldots, p\}$, le n-uplet Exp $\overline{T}_a(g_l q_l)$ appartient à Λ_l. L'exposant initial de la série $\frac{\overline{T}_a q_l}{\overline{T}_a h H_{aij}} \overline{T}_a g_l$ appartient donc à Λ_l. On peut décomposer l'équation (5.9), en tenant compte de l'exposant initial des séries $\frac{\overline{T}_a q_l \overline{T}_a g_l}{\overline{T}_a h H_{aij}}$:

$$\begin{aligned} S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j) = & \sum_{\substack{l \in \{1,\ldots,p\} \\ \left|\text{Exp } \frac{\overline{T}_a q_l \overline{T}_a g_l}{\overline{T}_a h H_{aij}}\right| \leq |\mathcal{N}_a|}} \frac{\overline{T}_a q_l}{\overline{T}_a h H_{aij}} \overline{T}_a g_l \\ & + \sum_{\substack{l \in \{1,\ldots,p\} \\ \left|\text{Exp } \frac{\overline{T}_a q_l \overline{T}_a g_l}{\overline{T}_a h H_{aij}}\right| > |\mathcal{N}_a|}} \frac{\overline{T}_a q_l}{\overline{T}_a h H_{aij}} \overline{T}_a g_l + \frac{\overline{T}_r}{\overline{T}_a h H_{aij}}. \end{aligned}$$

La deuxième série du membre de droite est nulle ou d'ordre strictement supérieur à $|\mathcal{N}_a|$. Les séries $S'(\overline{T}_a g_i, \overline{T}_a g_j)$, $(i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2$, $i \neq j$, satisfont donc les hypothèses du corollaire 5.2.2. On en déduit que la famille $\left(\overline{T}_a g_i\right)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ est une base standard de I_a. □

D'autre part, pour tout $a \in V$, les diagrammes $\mathcal{N}_a$ et $\mathcal{N}_V$ sont liés l'un à l'autre. Plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 5.3.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient I un idéal de type fini dans $\mathcal{C}l(U)$ et V un sous-ensemble de U. Pour tout point $a \in V$, on a $\mathcal{N}_V \preccurlyeq \mathcal{N}_a$.*

Démonstration. Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille génératrice de I.
Etant donné un point $a \in V$, on note α_i, $i \in \{1, \ldots, q\}$, les sommets de $\mathcal{N}_a$ et β_i, $i \in \{1, \ldots, q'\}$, les sommets de $\mathcal{N}_V$ classés par ordre croissant. D'après

le lemme 1.10.1, il existe une fonction f_1 de I vérifiant $\overline{T}_a f_1(Y) = \alpha_1$. On en déduit la relation $\beta_1 \leq \text{Exp } f_{1|_V} \leq \alpha_1$.
Si $\beta_1 < \alpha_1$, alors on a $\mathcal{N}_V \prec \mathcal{N}_a$ et on conclut.
Si $\beta_1 = \alpha_1$, on a obtenu une fonction f_1 de I satisfaisant $\text{Exp } f_{1|_V} = \beta_1$.
Soit r le plus grand entier naturel tel que, pour tout $i \leq r$, on ait $\beta_i = \alpha_i$ et l'existence d'une fonction f_i dans I vérifiant $\text{Exp } f_{i|_V} = \text{Exp } \overline{T}_a f_i = \alpha_i$.
Si $r = q = q'$, on a $\mathcal{N}_V = \mathcal{N}_a$.
Si $r = q < q'$, on a $\mathcal{N}_V \prec \mathcal{N}_a$.
Si $r < q$, d'après le lemme 1.10.1, il existe une fonction f de I vérifiant $\text{Exp } \overline{T}_a f = \alpha_{r+1}$. Visiblement, on a $\text{Exp } f_{|_V} \leq \alpha_{r+1}$. Plusieurs cas sont alors possibles :

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \text{Exp } f_{|_V} = \alpha_{r+1},\\
&(2) \qquad \text{Exp } f_{|_V} < \alpha_{r+1} \text{ et } \text{Exp } f_{|_V} \notin \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha_i + \mathbb{N}^n\},\\
&(3) \qquad \text{Exp } f_{|_V} < \alpha_{r+1} \text{ et } \text{Exp} f_{|_V} \in \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha_i + \mathbb{N}^n\}.
\end{aligned}$$

Dans le cas (1), $\text{Exp } f_{|_V} = \alpha_{r+1} \notin \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha_i + \mathbb{N}^n\} = \bigcup_{i=1}^{r} \{\beta_i + \mathbb{N}^n\}$. On a donc $\text{Exp } f_{|_V} \in \bigcup_{i=r+1}^{q} \{\beta_i + \mathbb{N}^n\}$, d'où $\beta_{r+1} \leq \text{Exp } f_{|_V} = \alpha_{r+1}$. Or, le choix de r implique que cette inégalité est stricte et donc la relation $\mathcal{N}_V \prec \mathcal{N}_a$.

Le cas (2) se traite de la même manière.

Dans le cas (3), on va voir, ci-après, qu'il est possible de construire une fonction h_0 de I vérifiant $\text{Exp } \overline{T}_a h_0 = \alpha_{r+1}$ et $\text{Exp } h_{0|_V} > \text{Exp } f_{|_V}$.
Si h_0 vérifie la condition (1) ou (2), on conclut comme précédemment. Si h_0 vérifie la condition (3), on itère la construction de manière à obtenir une fonction h_1 de I qui vérifie $\text{Exp } \overline{T}_a h_1 = \alpha_{r+1}$ et $\text{Exp } h_{1|_V} > \text{Exp } h_{0|_V}$. Le processus s'arrête nécessairement après un nombre fini d'étapes $h_0, h_1, \ldots$ puisque la suite $(\text{Exp } h_{k|_V})_{k \geq 0}$ est strictement croissante et majorée par α_{r+1}. On est donc toujours ramené au cas (1) ou (2). En conclusion, on aura $\beta_{r+1} < \alpha_{r+1}$. Vu la définition de r, on en déduit $\mathcal{N}_V \prec \mathcal{N}_a$.

Revenons à la construction de h_0.
La condition (3) implique l'existence d'un indice $i \in \{1, \ldots, r\}$ et de $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tels que $\text{Exp } f_{|_V} = \alpha_i + \gamma$. On pose

$$h_0(x) = D^{\alpha_i} f_i(x) f(x) - \frac{\alpha_i! \gamma!}{(\alpha_i + \gamma)!} D^{\alpha_i} f(x) f_i(x).$$

Pour $J \leq \alpha_i + \gamma$, la fonction $D^J f$ est identiquement nulle sur V. De même, $D^J f_i$ est nulle sur V pour $J < \alpha_i$ puisque $\text{Exp } f_{i|_V} = \alpha_i$. On peut donc écrire, pour tout x dans V,

$$\begin{aligned}\overline{T}_x h_0(Y) = &\left(\sum_{\delta\in\mathbb{N}^n} \frac{D^{\alpha_i+\delta} f_i(x)}{\delta!} Y^\delta\right)\left(\sum_{J\geq\alpha_i+\gamma} \frac{D^J f(x)}{J!} Y^J\right)\\ &- \frac{\alpha_i!\gamma!}{(\alpha_i+\gamma)!}\left(\sum_{\delta\geq\gamma} \frac{D^{\alpha_i+\delta} f(x)}{\delta!} Y^\delta\right)\left(\sum_{J\geq\alpha_i} \frac{D^J f_i(x)}{J!} Y^J\right).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Il est facile de voir que Exp $\overline{T}_x h_0 \geq \alpha_i + \gamma$. De plus, le coefficient de $Y^{\alpha_i+\gamma}$ est nul. On a donc Exp $\overline{T}_x h_0 > \alpha_i + \gamma$, d'où l'on tire l'inégalité stricte Exp $h_{0|V} > \alpha_i + \gamma =$ Exp $f_{|V}$. Remarquons, maintenant, que la condition Exp $\overline{T}_a f = \alpha_{r+1}$ implique $D^J f(a) = 0$ pour $J < \alpha_{r+1}$. On en déduit Exp $\overline{T}_a h_0 \geq \alpha_{r+1}$. En notant que α_{r+1} ne peut être de la forme $\alpha_i + \delta$ (ce qui contredirait la minimalité du système de sommets $\alpha_1, \dots, \alpha_q$), on voit que le coefficient de $Y^{\alpha_{r+1}}$ dans $\overline{T}_a h_0$ est $\frac{D^{\alpha_i} f_i(a)}{\alpha_i!} \frac{D^{\alpha_{r+1}} f(a)}{\alpha_{r+1}!}$, avec $D^{\alpha_i} f_i(a) \neq 0$, puisque Exp $\overline{T}_a f_i = \alpha_i$, et $D^{\alpha_{r+1}} f(a) \neq 0$, puisque Exp $\overline{T}_a f = \alpha_{r+1}$. Ce coefficient est donc non nul et on a finalement Exp $\overline{T}_a h_0 = \alpha_{r+1}$, comme annoncé. □

5.4 Base standard pour un idéal de fonctions réel-analytiques

On s'intéresse désormais au cas où la famille de générateurs de l'idéal I est constituée de fonctions réel-analytiques. On a vu dans la remarque 5.3.3 qu'il est toujours possible d'effectuer une $\mathcal{C}l$-division à l'ordre k sur un point. Le lemme suivant montre que, dans le cas analytique, cette propriété est vraie pour tout ensemble analytique irréductible, en dehors d'un sous-ensemble analytique propre.

Lemme 5.4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un sous-ensemble analytique irréductible de U. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une famille de fonctions réel-analytiques sur U. Soient f une fonction réel-analytique sur U et k un entier naturel non nul. Il existe un sous-ensemble analytique propre W de V et des fonctions $q_1, \dots, q_p$, r et h réel-analytiques sur U telles que l'équation*

$$hf = \sum_{i=1}^{t} q_i g_i + r$$

soit vérifiée et représente une division d'ordre k de la fonction f par la famille $\mathcal{G}$ sur l'ensemble $V \setminus W$.

Démonstration. Elle est algorithmique.

Algorithme 2.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $\beta_i = \text{Exp } g_{i|_V}$. Soit $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \Lambda_C)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée à ces n-uplets. Quitte à supprimer des fonctions g_i, on peut supposer qu'on a

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p$$

et que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'ensemble Λ_i est non vide.
Soit $V' = \{a \in V \; ; \; \exists i \in \{1, \ldots, p\} \; ; \; \text{Exp } \overline{T}_a g_i \neq \beta_i\}$. L'ensemble V' est l'union des sous-ensembles $V'_i = \{a \in V \; ; \; D^{\beta_i} g_i(a) = 0\}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Or, d'après la définition de β_i, il existe un point $a_i \in V$ tel qu'on ait la relation $\text{Exp } \overline{T}_{a_i} g_i = \beta_i$. Donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'ensemble V'_i est strictement inclus dans V et V' est l'union de sous-ensembles analytiques propres de V. Comme V est irréductible, on en déduit que V' est strictement inclus dans V.

Si $\text{Exp } f_{|_V}$ appartient à Λ_C, on obtient le résultat avec $r = f$ et

$$W = \{a \in V \; ; \; \text{Exp } \overline{T}_a f \neq \text{Exp } f_{|_V}\} \cup V'$$

(les mêmes arguments que pour V' montrent que W est bien un sous-ensemble analytique propre de V).

Dans le cas contraire, par construction, l'exposant initial de $\overline{T}_a g_i$ est constamment égal à β_i lorsque a parcourt $V \setminus V'$. Du lemme 5.3.1, on déduit que la série $\frac{\beta_i! \overline{T}_a g_i}{\overline{T}_a (D^{\beta_i} g_i)}$ admet 1 pour coefficient initial et β_i pour exposant initial. Si on pose

$$\Gamma_{ai} = X^{\beta_i} - \frac{\beta_i! \overline{T}_a g_i}{\overline{T}_a (D^{\beta_i} g_i)}, \tag{5.11}$$

l'exposant initial de cette série est strictement supérieur à β_i.

Principe de la décomposition de f.
On pose $W^0 = V' \cup \{a \in V \; ; \; \text{Exp } \overline{T}_a f \neq \text{Exp } f_{|_V}\}$. De l'irréductibilité de V, on déduit que W^0 est un sous-ensemble analytique propre de V. On a supposé que $\text{Exp } f_{|_V}$ n'appartient pas à Λ_C. On en déduit qu'il existe un indice i_0 dans $\{1, \ldots, p\}$ tel que $\text{Exp } f_{|_V}$ appartienne à Λ_{i_0}. Dans ce cas, on peut décomposer l'exposant initial de $f_{|_V}$ sous la forme

$$\text{Exp } f_{|_V} = \beta_{i_0} + \delta_{i_0}.$$

Ainsi, pour tout $a \in V \setminus W^0$, le développement en série de f s'écrit

$$\overline{T}_a f(X) = D^{\delta_{i_0}+\beta_{i_0}} f(a) X^{\delta_{i_0}} \frac{X^{\beta_{i_0}}}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!} + \sum_{K>\delta_{i_0}+\beta_{i_0}} D^K f(a) \frac{X^K}{K!}. \tag{5.12}$$

Le fait que, pour tout $K < \beta_{i_0} + \delta_{i_0}$, on ait $D^K f(a) = 0$, fournit l'égalité

$$D^{\delta_{i_0}+\beta_{i_0}} f(a) X^{\delta_{i_0}} = \delta_{i_0}! \left(\overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} f \right) (X) - \sum_{K>\delta_{i_0}} D^{K+\beta_{i_0}} f(a) \frac{X^K}{K!} \right). \tag{5.13}$$

En reportant l'équation (5.13) dans l'expression (5.12), on obtient

$$\begin{aligned} \overline{T}_a f(X) = {} & \overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} f \right) (X) \delta_{i_0}! \frac{X^{\beta_{i_0}}}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!} \\ & - \sum_{K>\delta_{i_0}} D^{K+\beta_{i_0}} f(a) \frac{\delta_{i_0}! X^{K+\beta_{i_0}}}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})! K!} + \sum_{K>\delta_{i_0}+\beta_{i_0}} D^K f(a) \frac{X^K}{K!}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

D'autre part, vu (5.11), on a

$$X^{\beta_{i_0}} = \frac{\beta_{i_0}! \overline{T}_a g_{i_0}}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} g_{i_0} \right)} - \Gamma_{a i_0}. \tag{5.15}$$

Le report de l'égalité (5.15) dans (5.14) donne

$$\overline{T}_a f(X) = \overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} f \right) (X) \frac{\delta_{i_0}! \beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!} \frac{\overline{T}_a g_{i_0}(X)}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} g_{i_0} \right) (X)} + G_a^1(X),$$

avec

$$\begin{aligned} G_a^1(X) = {} & \frac{\delta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!} \left(\overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} f \right) (X) \Gamma_{a i_0}(X) - \sum_{K>\delta_{i_0}} D^{K+\beta_{i_0}} f(a) \frac{X^{K+\beta_{i_0}}}{K!} \right) \\ & + \sum_{K>\delta_{i_0}+\beta_{i_0}} D^K f(a) \frac{X^K}{K!}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

On a encore

$$G_a^1 = \overline{T}_a f - \overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} f \right) \frac{\delta_{i_0}! \beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!} \frac{\overline{T}_a g_{i_0}}{\overline{T}_a \left(D^{\beta_{i_0}} g_{i_0} \right)}.$$

D'après les propriétés de Γ_{ai_0}, de $D^{\beta_{i_0}}f$ et (5.16), l'exposant initial de la série G^1_a est strictement supérieur à $\delta_{i_0}+\beta_{i_0}=\mathrm{Exp} f_{|V}$.
Considérons maintenant la fonction r^1 définie par

$$r^1=\left(D^{\beta_{i_0}}g_{i_0}\right)f-D^{\beta_{i_0}}f\frac{\delta_{i_0}!\beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!}g_{i_0}.$$

Visiblement, cette fonction est réel-analytique sur U. De plus, pour tout point $a\in V\setminus W^0$, on a

$$\begin{aligned}\overline{T}_a r^1&=\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}g_{i_0})\overline{T}_a f-\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}f)\frac{\delta_{i_0}!\beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!}\overline{T}_a g_{i_0}\\&=\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}g_{i_0})\left(\overline{T}_a f-\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}f)\frac{\delta_{i_0}!\beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!}\frac{\overline{T}_a g_{i_0}}{\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}g_{i_0})}\right)\\&=\overline{T}_a(D^{\beta_{i_0}}g_{i_0})G^1_a.\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r^1=\mathrm{Exp}\ G^1_a$. On en déduit que l'exposant initial de $\overline{T}_a r^1$ est strictement supérieur à $\mathrm{Exp}\ f_{|V}$.
On pose $W^1=W^0\cup\{a\in V\ ;\ \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r^1\neq \mathrm{Exp}\ r^1_{|V}\}$. Des arguments déjà utilisés au début de la preuve montrent que c'est un sous-ensemble analytique propre de V.
Si on pose $q^1_{i_0}=D^{\beta_{i_0}}f\frac{\delta_{i_0}!\beta_{i_0}!}{(\delta_{i_0}+\beta_{i_0})!}$, cette fonction est réel-analytique sur U et, pour tout $a\in V\setminus W^1$, le n-uplet $\left(\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q^1_{i_0}\right)+\beta_{i_0}=\delta_{i_0}+\beta_{i_0}$ appartient à Λ_{i_0}. On pose $h^1=D^{\beta_{i_0}}g_{i_0}$ et, pour tout tout $i\in\{1,\dots,p\}$, $i\neq i_0$, $q^1_i=0$.

On a ainsi produit le résultat suivant.
Il existe un sous-ensemble analytique propre W^1 de V et des fonctions r^1, h^1 et q^1_i, $i\in\{1,\dots,p\}$, réel-analytiques sur U, telles qu'on ait

$$h^1 f=\sum_{i=1}^p q^1_i g_i+r^1$$

et

– $q^1_i\equiv 0$

ou

$i=i_0$ et, pour tout $a\in V\setminus W^1$,

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a f=\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q^1_i+\beta_i\in\Lambda_i,\tag{5.17}$$

– pour tout $a\in V\setminus W^1$,

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r^1=\mathrm{Exp}\ r^1_{|V}>\mathrm{Exp}\ f_{|V},\tag{5.18}$$

– pour tout $a \in V \setminus W^1$, $h^1(a) \neq 0$.

Principe d'itération.
Si le n-uplet $\mathrm{Exp}\ r^1_{|V}$ appartient à Λ_C ou si sa longueur est strictement supérieure à k, on a obtenu le résultat recherché.
Sinon, on réitère le processus de décomposition en prenant r^1 à la place de f. On obtient, ainsi, un sous-ensemble analytique propre W^2 de V contenant W^1 et des fonctions r^2, h^2 et q_i^2, $i \in \{1, \dots, p\}$, réel-analytiques sur U, telles qu'on ait

$$h^2 r^1 = \sum_{i=1}^{p} q_i^2 g_i + r^2$$

et

– $q_i^2 \equiv 0$

ou,

pour tout $a \in V \setminus W^2$,

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r^1 = \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q_i^2 + \beta_i \in \Lambda_i, \tag{5.19}$$

– pour tout $a \in V \setminus W^2$,

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r^2 = \mathrm{Exp}\ r^2_{|V} > \mathrm{Exp}\ r^1_{|V}, \tag{5.20}$$

– pour tout $a \in V \setminus W^2$, $h^2(a) \neq 0$.

On obtient alors

$$h^1 h^2 f = \sum_{i=1}^{p} (h^2 q_i^1 + q_i^2) g_i + r^2.$$

On a immédiatement la propriété $(h^1 h^2)(a) \neq 0$ pour tout $a \in V \setminus W^2$.
D'autre part, on a aussi $\mathrm{Exp}\ r^2_{|V} > \mathrm{Exp}\ r^1_{|V} > \mathrm{Exp}\ f_{|V}$.
En ce qui concerne les propriétés de $h^2 q_i^1 + q_i^2$, pour tout $a \in V \setminus W^2$, on est dans l'un des quatre cas suivants :

– si $q_i^1 \equiv 0$ et $q_i^2 \equiv 0$ alors $h^2 q_i^1 + q_i^2 \equiv 0$,
– si $q_i^1 \equiv 0$ et $q_i^2 \not\equiv 0$, alors, vu (5.19), on a

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a (h^2 q_i^1 + q_i^2) + \beta_i = \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q_i^2 + \beta_i \in \Lambda_i,$$

– si $q_i^1 \not\equiv 0$ et $q_i^2 \equiv 0$, alors, vu (5.17), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a (h^2 q_i^1 + q_i^2) + \beta_i &= \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a (h^2 q_i^1) + \beta_i \\ &= \mathrm{Exp}\ \overline{T}_a q_i^1 + \beta_i \in \Lambda_i,\end{aligned}$$

– si $q_i^1 \not\equiv 0$ et $q_i^2 \not\equiv 0$, en utilisant (5.17) pour la deuxième égalité et (5.19) pour la dernière, on obtient

$$\text{Exp } \overline{T}_a(h^2 q_i^1) = \text{Exp } \overline{T}_a q_i^1 = \text{Exp } \overline{T}_a f - \beta_i < \text{Exp } r^1_{|V} - \beta_i = \text{Exp } \overline{T}_a q_i^2.$$

On en déduit $\text{Exp } \overline{T}_a(h^2 q_i^1 + q_i^2) + \beta_i = \text{Exp } \overline{T}_a q_i^1 + \beta_i \in \Lambda_i$.

De plus, dans tous les cas vus ci-dessus, compte tenu de (5.18) et de (5.19), on a l'inégalité

$$|\text{Exp } \overline{T}_a(h^2 q_i^1 + q_i^2) + \beta_i| \leq |\text{Exp } r^1_{|V}| \leq k.$$

Si le n-uplet $\text{Exp } r^2_{|V}$ appartient à Λ_C ou si sa longueur est strictement supérieure à k, on a obtenu le résultat recherché. Sinon, on recommence avec r^2. L'entier k étant fixé et la suite $(\text{Exp } r^m_{|V})_{m\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, ce processus contient un nombre fini n_0 d'itérations. A la dernière étape, on obtient

$$\left(\prod_{j=1}^{n_0} h^j\right) f = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_0} q_i^j \left(\prod_{l=j+1}^{n_0} h^l\right)\right) g_i + r^{n_0},$$

le n-uplet $\text{Exp } \overline{T}_a\left(\sum_{j=1}^{n_0} q_i^j \left(\prod_{l=j+1}^{n_0} h^l\right)\right) + \beta_i$ étant de longueur inférieure à k et appartenant à Λ_i. □

Théorème 5.4.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un sous-ensemble analytique irréductible de U. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions réel-analytiques sur U et I l'idéal qu'elles engendrent dans $\mathcal{C}l(U)$. Il existe un sous-ensemble analytique propre W de V et des fonctions $g_1, \ldots, g_t$ appartenant à I et réel-analytiques sur U telles que, pour tout point $a \in V\backslash W$, on ait $\mathcal{N}_a = \mathcal{N}_{V\backslash W}$ et, si on note $\beta_1, \ldots, \beta_t$ les sommets de $\mathcal{N}_{V\backslash W}$, on ait, pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$,*

$$\beta_i = \text{Exp } \overline{T}_a g_i = \text{Exp } g_{i|_{V\backslash W}}.$$

Démonstration. Elle consiste en un algorithme.

Algorithme 3.

On désigne par $\mathcal{G}^0$ la famille constituée des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Pour tout indice $i \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $\beta_i^0 = \text{Exp } \varphi_{i|_V}$. Soient $(\Lambda_1^0, \ldots, \Lambda_p^0, \Lambda_C^0)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée aux β_i^0, $\mathcal{N}^0$ le diagramme de $\mathbb{N}^n$ donné par $\mathcal{N}^0 = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,p\}} \Lambda_i^0$ et $m^{(0)} = \max_{i\in\{1,\ldots,p\}} |\beta_i^0| + 1$.

On pose

$$W^0 = \{a \in V \ ; \ \exists i \in \{1, \ldots, p\}, \ \text{Exp } \overline{T}_a \varphi_i \neq \text{Exp } \varphi_{i|_V}\}.$$

Les fonctions φ_i étant réel-analytiques sur U, l'ensemble W^0 est l'union de sous-ensembles analytiques propres de V, à savoir

$$W_i^0 = \{a \in V \ ; \ D^{\beta_i^0}\varphi_i(a) = 0\}, \quad i \in \{1, \ldots, p\}.$$

De l'irréductibilité de V, on déduit alors que l'ensemble $V \setminus W^0$ est non vide. Pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2, i \neq j$, on peut définir la s-fonction associée à φ_i et φ_j, notée $s_{V\setminus W^0}(\varphi_i, \varphi_j)$ et le n-uplet $\gamma_{ij}^0 = \mathrm{m}(\beta_i^0, \beta_j^0)$. En appliquant le lemme 5.4.1 avec $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$, $f = s_{V\setminus W^0}(\varphi_i, \varphi_j)$ et $k = m^{(0)}$, on obtient un sous-ensemble analytique propre de V, noté W_{ij}^1, et un reste, noté r_{ij}^0, d'une division sur $V \setminus W_{ij}^1$ d'ordre $m^{(0)}$ de la fonction $s_{V\setminus W^0}(\varphi_i, \varphi_j)$ par la famille $\mathcal{G}^0$. La fonction r_{ij}^0 appartient à I, est réel-analytique sur U et, pour tout $a \in V \setminus W_{ij}^1$, vérifie

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a r_{ij}^0 = \mathrm{Exp}\ r^0_{ij|_V}. \tag{5.21}$$

De l'irréductibilité de V, on déduit que $W^1 = W^0 \cup \{\cup_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2} W_{ij}^1\}$ est un sous-ensemble analytique propre de V. Soit $\mathcal{G}^1$ la réunion de la famille $\mathcal{G}^0$ et de l'ensemble des restes r_{ij}^0 dont l'exposant initial appartient à Λ_C^0. On remarque que la famille $\mathcal{G}^1$ est constituée de fonctions réel-analytiques appartenant à I et qu'elle engendre I.

On utilise alors le procédé récursif suivant.
Pour tout $k \geq 1$, on considère le support de la famille $\mathcal{G}^k$,

$$\{\beta_i^k \ ; \ i \in \{1, \ldots, t_k\}\} := \{\mathrm{Exp}\ g_{|_V}, g \in \mathcal{G}^k\}.$$

Soient $\left(\Lambda_1^k, \ldots, \Lambda_{t_k}^k, \Lambda_C^k\right)$ la décomposition de $\mathbb{N}^n$ associée à cet ensemble, $\mathcal{N}^k$ le diagramme $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,t_k\}} \Lambda_i^k$ et $m^{(k)}$ la valeur

$$\max\left(m^{(k-1)}, |\beta_1^k|, \ldots, |\beta_{t_k}^k|\right) + 1.$$

Par construction, pour tout point $a \in V \setminus W^k$ et toute fonction $g \in \mathcal{G}^k$, on a

$$\mathrm{Exp}\ \overline{T}_a g = \mathrm{Exp}\ g_{|_V} \ ;$$

pour la famille $\mathcal{G}^1$, cela découle de la relation (5.21). Pour tout couple (f,g), $f \neq g$, de fonctions de $\mathcal{G}^k$, on peut donc définir la s-fonction $s_{V\setminus W^k}(f,g)$. Le lemme 5.4.1 appliqué avec $\mathcal{G} = \mathcal{G}^k$, $f = s_{V\setminus W^k}(f,g)$ et $k = m^{(k)}$, donne un sous-ensemble analytique propre, W_{fg}^{k+1}, de V et un reste, r_{fg}^k, de la division d'ordre $m^{(k)}$. On pose

$$W^{k+1} = W^k \cup \left(\bigcup_{\substack{f\in\mathcal{G}^k, g\in\mathcal{G}^k \\ f\neq g}} W_{fg}^{k+1} \right)$$

et on définit $\mathcal{G}^{k+1}$ comme étant l'union de $\mathcal{G}^k$ et des fonctions r^k_{fg} dont l'exposant initial appartient à Λ^k_C. On a alors $\mathcal{N}^k \subset \mathcal{N}^{k+1}$ et l'équivalence

$$\mathcal{G}^k \subsetneq \mathcal{G}^{k+1} \iff \mathcal{N}^k \subsetneq \mathcal{N}^{k+1}. \tag{5.22}$$

Pour tout couple (f, g) et tout point $a \in V \setminus W^{k+1}$, la fonction r^k_{fg} vérifie

$$\text{Exp } \overline{T}_a r^k_{fg} = \text{Exp } r^k_{fg|_V}.$$

On obtient ainsi une suite de diagrammes de $\mathbb{N}^n$ vérifiant

$$\mathcal{N}^0 \subset \mathcal{N}^1 \subset \ldots \subset \mathcal{N}^k \subset \ldots.$$

Du lemme 1.8.5, on déduit que cette suite est stationnaire. Soit k_0 un entier naturel tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $\mathcal{N}^k = \mathcal{N}^{k_0}$. On déduit de l'équivalence (5.22) que, pour tout $k \geq k_0$, on a $\mathcal{G}^k = \mathcal{G}^{k_0}$ et, par conséquent, $W^k = W^{k_0}$. On pose $W = W^{k_0}$.

Nous devons maintenant montrer que la famille $\mathcal{G}^{k_0}$ contient les fonctions g_j recherchées.
La stabilité de la famille $\mathcal{G}^k$, $k \geq k_0$, par le procédé récursif entraîne que, pour tout m supérieur à $m^{(k_0)}$ et tout couple (f, g) de fonctions de $\mathcal{G}^{k_0}$, le reste d'une $\mathcal{C}l$-division d'ordre m de $s_{V\setminus W}(f, g)$ par la famille $\mathcal{G}^{k_0}$ est nul ou d'ordre strictement supérieur à m. Pour tout point $a \in V\setminus W$, on déduit du théorème 5.3.6, appliqué avec $m = \max(m^{(k_0)}, |\mathcal{N}_a|)$, que la famille $\left(\overline{T}_a g\right)_{g\in\mathcal{G}^{k_0}}$ forme une base standard de l'idéal I_a. On a donc

$$\mathcal{N}_a = \bigcup_{g\in\mathcal{G}^{k_0}} \{\text{Exp } \overline{T}_a g + \mathbb{N}^n\}.$$

Or, par construction, on a $\text{Exp } \overline{T}_a g = \text{Exp } g_{|V\setminus W}$. Il en résulte que $\mathcal{N}_a$ est indépendant de a. Soit, à présent, β_i un sommet de $\mathcal{N}_{V\setminus W}$. Il existe alors une fonction $f_i \in I$ telle que $\beta_i = \text{Exp } f_{i|_{V\setminus W}}$ et, par conséquent, il existe $a_i \in V \setminus W$ tel que $\beta_i = \text{Exp } \overline{T}_{a_i} f_i$. On a donc $\beta_i \in \mathcal{N}_{a_i} = \mathcal{N}_a$. On en tire l'inclusion $\mathcal{N}_{V\setminus W} \subset \mathcal{N}_a$, d'où $\mathcal{N}_a \preccurlyeq \mathcal{N}_{V\setminus W}$ compte tenu de la remarque 1.8.3. Le lemme 5.3.6 implique alors $\mathcal{N}_{V\setminus W} = \mathcal{N}_a$. On en tire que les sommets de $\mathcal{N}_{V\setminus W}$ sont les sommets $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ d'un $\mathcal{N}_a$ donné ; il suffit alors de choisir, dans $\mathcal{G}^{k_0}$, un élément g_j tel que $\text{Exp } \overline{T}_a g_j = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, t$. □

5.5 Exemples de constructions de bases standards

Dans cette section, on développe la construction de bases standards pour un idéal de fonctions dont les générateurs sont analytiques (en réalité des polynômes, car les calculs deviennent vite très complexes). Ces exemples font clairement apparaître la variation du diagramme des exposants initiaux. D'autre part, l'étude sur V_2, dans l'exemple 2, illustre la méthode de calcul d'une base standard formelle et l'utilisation qui en est faite pour la calcul d'une base de classe $\mathcal{C}l$. En reprenant les notations des algorithmes 2 et 3, on commence par décomposer l'ensemble des zéros en composantes irréductibles puis, sur chacun de ces ensembles, on effectue, de manière récursive, la boucle suivante, avec la valeur initiale $k = 0$.

- *a.k.* Déterminer W^k, Λ^k et $m^{(k)}$.
- *b.k.* Déterminer, pour tout couple de fonction de la famille $\mathcal{G}^k$, γ_{ij} et $s_{V\setminus W^k}(f_i, f_j)$.
- *c.k.* Effectuer la division d'ordre $m^{(k)}$ de $s_{V\setminus W^k}(f_i, f_j)$ par la famille $\mathcal{G}^k$, en utilisant l'algorithme 2.
- *d.k.* Si les restes de la division sont tous nuls, conclure. Sinon, déterminer $\mathcal{G}^{k+1}$ et recommencer la boucle.

5.5.1 Exemple 1 : l'idéal I est engendré par les fonctions $\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^3$ et $\varphi_2 : (x, y, z) \mapsto xz$.

L'ensemble des zéros de I est donné par

$$V(I) = \{P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ a^2 - b^3 = 0, ac = 0\}.$$

Cet ensemble peut être décomposé en deux composantes irréductibles :

$$\begin{aligned} & V_1 = \{(0, 0, c) \ ; \ c \in \mathbb{R}\} \\ \text{et} \qquad & V_2 = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ a^2 - b^3 = 0\}. \end{aligned}$$

En tout point $P = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} & \overline{T}_P\varphi_1(X, Y, Z) = (X + a)^2 - (Y + b)^3 \\ \text{et} \qquad & \overline{T}_P\varphi_2(X, Y, Z) = (X + a)(Z + c). \end{aligned}$$

Etude sur V_1.

<u>$-a.0.$</u> Tous les points de V_1 sont réguliers. Pour tout $P \in V_1$, l'idéal I_P est engendré par les séries

$$\begin{aligned} & \overline{T}_P\varphi_1(X, Y, Z) = X^2 - Y^3 \\ \text{et} \qquad & \overline{T}_P\varphi_2(X, Y, Z) = XZ + Xc. \end{aligned}$$

On a $\beta_1^0 = (2,0,0)$ et $\beta_2^0 = (1,0,0)$. On remarque que, pour tout point P de $V_1 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_P \varphi_2 = \beta_2^0$, alors que $\operatorname{Exp} \overline{T}_{(0,0,0)} \varphi_2 = (1,0,1) \neq \beta_2^0$. De plus, pour tout $P \in V_1 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a aussi $\operatorname{Exp} \overline{T}_P \varphi_1 = \beta_1^0$. On pose donc $W^0 = (0,0,0)$ et $m^{(0)} = 3$.

<u>$-b.0.$</u> Sur $V_1 \setminus W^0$, on a $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((2,0,0),(1,0,0)\right) = (2,0,0)$ et

$$\begin{aligned} s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2) &= (0,0,0)!(2,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_2\right)\varphi_1 \\ &\quad - (1,0,0)!(1,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2 \\ &= 2z \times (x^2 - y^3) - 2x \times xz \\ &= -2zy^3. \end{aligned}$$

<u>$-c.0.$</u> Pour tout point $P \in V_1 \setminus W^0$, on a

$$\overline{T}_P s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2)(X,Y,Z) = -2ZY^3 - 2cY^3$$

et $\operatorname{Exp} \overline{T}_P s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2) = (0,3,0)$. Lorsqu'on effectue la division d'ordre 3 de $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2)$ par φ_1 et φ_2 sur $V_1 \setminus W^0$, on remarque que l'exposant de $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2)$, à savoir $(0,3,0)$, appartient à Λ_C^0. On en déduit que le reste de cette division est la fonction $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2)$ elle-même. Cela implique que $W^1 = W^0$.

<u>$-d.0.$</u> On pose alors $\mathcal{G}^1 = \{\varphi_1, \varphi_2, s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2)\}$ et on réitère le procédé avec la famille $\mathcal{G}^1$.

<u>$-a.1$ à $c.1.$</u> Pour simplifier les notations, on pose $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, \varphi_2) = f_3^1$. On voit immédiatement que le reste de la division d'ordre 4 de la s-fonction de φ_1 et φ_2, à savoir f_3^1, par la famille $\mathcal{G}^1$ est nul. D'autre part, on a l'égalité $\gamma_{13}^0 = \mathrm{m}((2,0,0),(0,3,0)) = (2,3,0)$. La s-fonction $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_1, f_3^1)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} s_{V_1 \setminus W^0}\left(\varphi_1, f_3^1\right) &= (0,3,0)!(2,0,0)!\left(D^{(0,0,0)} f_3^1\right)\varphi_1 \\ &\quad - (2,0,0)!(0,3,0)!\left(D^{(0,0,0)}\varphi_1\right) f_3^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, on trouve $\gamma_{23}^0 = \mathrm{m}((1,0,0),(0,3,0)) = (1,3,0)$. La s-fonction $s_{V_1 \setminus W^0}(\varphi_2, f_3^1)$ est nulle.

<u>$-d.1.$</u> On déduit alors que, quel que soit l'ordre de division, tous les restes seront nuls. Ainsi la boucle s'achève. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que, pour tout point $P \in V_1 \setminus W^0$, la famille $(\overline{T}_P \varphi_1, \overline{T}_P \varphi_2, \overline{T}_P f_3^1)$ est

une base standard formelle de I_P et, par suite, $\mathcal{G}^1$ est une base standard de I sur l'ensemble $V_1 \setminus W^0$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{V_1\setminus W^0}$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{V_1\setminus W^0} &= \left((2,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((0,3,0)+\mathbb{N}^3\right)\\ &= \left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((0,3,0)+\mathbb{N}^3\right).\end{aligned}$$

Il apparaît clairement que les fonctions φ_2 et f_3^1 suffisent pour former une base standard de I sur $V_1 \setminus W^0$.

Remarque 5.5.1. On peut aussi conclure en remarquant, qu'à chaque itération de l'algorithme 3, on a $W^k = W^{k-1} = W^0$ et $\mathcal{G}^k = \mathcal{G}^{k-1} = \mathcal{G}^1$. Donc, au final, l'algorithme fournit W^0 et la famille $\mathcal{G}^1$.

On passe maintenant à l'étude de W^0.

Etude au point $(0,0,0)$**.**

<u>$-a.0.$</u> Puisque l'ensemble d'étude est réduit au point $(0,0,0)$, les ensembles W^k et V^k sont toujours vides. Au point $P=(0,0,0)$, l'idéal I_P est engendré par les séries

$$\begin{aligned}&\overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) = X^2 - Y^3\\ \text{et}\qquad &\overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) = XZ.\end{aligned}$$

Les exposants initiaux des séries $\overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z)$ et $\overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z)$ sont respectivement $\beta_1^0 = (2,0,0)$ et $\beta_2^0 = (1,0,1)$.

<u>$-b.0.$</u> On a donc $\gamma_{12}^0 = (2,0,1)$. La s-fonction associée aux fonctions φ_1 et φ_2 sur $\{(0,0,0)\}$ est

$$\begin{aligned}s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2) &= (0,0,1)!(2,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_2\right)\varphi_1\\ &\qquad - (1,0,0)!(1,0,1)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2\\ &= 2z\times(x^2-y^3) - 2x\times xz\\ &= -2zy^3.\end{aligned}$$

<u>$-c.0.$</u> On a Exp $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2) = (0,3,1)$. Ce triplet appartient à Λ_C^0. On en déduit que le reste de la division d'ordre 3 de $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2)$ par φ_1 et φ_2 est la fonction $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2)$. On notera cette dernière fonction f_3^1.

<u>$-d.0.$</u> On pose $\mathcal{G}^1 = \{\varphi_1,\varphi_2,f_3^1\}$ et on réitère le procédé avec la famille $\mathcal{G}^1$.

$\underline{-a.1 \text{ à } c.1.}$ Il est immédiat que le reste de la division d'ordre 4 de la s-fonction de φ_1 et φ_2, à savoir f_3^1, par la famille $\mathcal{G}^1$ est nul. D'autre part, on a $\gamma_{13}^0 = \mathrm{m}((2,0,0),(0,3,1)) = (2,3,1)$. La s-fonction $s_{(0,0,0)}(\varphi_1, f_3^1)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} s_{(0,0,0)}\left(\varphi_1, f_3^1\right) &= (0,3,1)!(2,0,0)!\left(D^{(0,0,0)} f_3^1\right)\varphi_1 \\ &\qquad - (2,0,0)!(0,3,1)!\left(D^{(0,0,0)}\varphi_1\right) f_3^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière, on a $\gamma_{23}^0 = \mathrm{m}((1,0,0),(0,3,1)) = (1,3,1)$. La s-fonction $s_{(0,0,0)}(\varphi_2, f_3^1)$ est identiquement nulle.

$\underline{-d.1.}$ De là, on déduit que, quel que soit l'ordre de division, tous les restes seront nuls. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que la famille $\mathcal{G}^1$ est une base standard de I sur l'ensemble $\{(0,0,0)\}$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{(0,0,0)}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{(0,0,0)} = \left((2,0,0)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((1,0,1)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((0,3,1)+\mathbb{N}^3\right).$$

Remarque 5.5.2. Ici, le nombre de sommets du diagramme est strictement supérieur au nombre de générateurs de l'idéal.

Etude sur V_2.

$\underline{-a.0.}$ En tout point $P = (a,b,c)$ de V_2, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} & \overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) = 2aX - 3b^2Y + X^2 - 3bY^2 - Y^3 \\ \text{et} \quad & \overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) = (X+a)Z. \end{aligned}$$

On a $\beta_1^0 = (1,0,0)$ et $\beta_2^0 = (0,0,1)$. On remarque que, pour tout point $P \in V_2 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_1 = \beta_1^0$ et $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_2 = (0,0,1) = \beta_2^0$. On pose donc $W^0 = (0,0,0)$ (les calculs d'une base standard sur W^0 ont déjà été effectués).

$\underline{-b.0.}$ Sur $V_2 \setminus W^0$, on a $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((1,0,0),(0,0,1)\right) = (1,0,1)$ et

$$\begin{aligned} s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_1,\varphi_2\right) &= (0,0,1)!(1,0,0)!\left(D^{(0,0,0)}\varphi_2\right)\varphi_1 \\ &\qquad - (1,0,0)!(0,0,1)!\left(D^{(0,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2 \\ &= xz \times (x^2-y^3) - (x^2-y^3) \times xz \\ &= 0. \end{aligned}$$

$-c.0$ et $d.0.$ De là, on déduit que, quel que soit l'ordre de division, tous les restes seront nuls. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que la famille $\mathcal{G}^0$ est une base standard de I sur l'ensemble $V_2 \setminus W^0$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{V_2\setminus W^0}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{V_2\setminus W^0} = \left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((0,0,1)+\mathbb{N}^3\right).$$

5.5.2 Exemple 2 : l'idéal I est engendré par les fonctions $\varphi_1 : (x,y,z) \mapsto x^2-zy^2$, $\varphi_2 : (x,y,z) \mapsto xz(z-y)$.

L'ensemble des zéros de I est l'ensemble des points $P = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant le système d'équations

$$V(I) = \begin{cases} a^2 - b^2c = 0 \\ ac(b-c) = 0 \end{cases}.$$

On peut le décomposer en trois composantes irréductibles

$$V_1 = \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \qquad V_2 = \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad V_3 = \begin{cases} b = c \\ a^2 = b^3 \end{cases}.$$

Etude de V_1.

$-a.0.$ En tout point $P = (a,b,c)$ de V_1, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} & \overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) = X^2 - (Z+c)Y^2 \\ \text{et} \qquad & \overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) = X(Z+c)(Z+c-Y). \end{aligned}$$

On a donc $\beta_1^0 = (2,0,0)$ et $\beta_2^0 = (1,0,0)$. On remarque que, pour tout point $P \in V_1 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_1 = \beta_1^0$ et $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_2 = \beta_2^0$. Compte tenu de l'égalité $\operatorname{Exp} \overline{T}_{(0,0,0)}\varphi_2 = (1,1,1) \neq \beta_2^0$, on pose donc $W^0 = (0,0,0)$.

$-b.0.$ Sur $V_1 \setminus W_0$, on a $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((2,0,0),(1,0,0)\right) = (2,0,0)$ et

$$\begin{aligned} s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2) &= (0,0,0)!(2,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_2\right)\varphi_1 \\ &\qquad - (1,0,0)!(1,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2 \\ &= 2z(z-y)(-zy^2). \end{aligned}$$

$-c.0$ et $d.0.$ Pour tout $P \in V_1 \setminus W^0$, $\operatorname{Exp} \overline{T}_P s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2) = (0,2,0)$. Donc V^0 est inclus dans W^0. D'autre part, le 3-uplet $(0,2,0)$ appartient à Λ_C^0. On en déduit que le reste de la division d'ordre 3 de $s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2)$ par

φ_1 et φ_2 est la fonction $s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2)$. On note cette dernière fonction, f_3^1 et on pose $\mathcal{G}^1 = \{\varphi_1,\varphi_2,f_3^1\}$. On réitère le procédé avec la famille $\mathcal{G}^1$.

$-a.1$ à $c.1$. Il est immédiat que le reste de la division d'ordre 4 de la s-fonction de φ_1 et φ_2, à savoir f_3^1, par la famille $\mathcal{G}^1$ est nul. D'autre part, on a $\gamma_{13}^0 = \mathrm{m}((2,0,0),(0,2,0)) = (2,2,0)$. La s-fonction $s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,f_3^1)$ est la fonction nulle. De même, de l'égalité $\gamma_{23}^0 = \mathrm{m}((1,0,0),(0,2,0)) = (1,2,0)$, on déduit que la s-fonction $s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_2,f_3^1)$ est nulle.

$-d.1$. Par conséquent, quel que soit l'ordre de division, tous les restes de la division des s-fonctions seront nuls. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que la famille $\mathcal{G}^1$ est une base standard de I sur l'ensemble $V_1\setminus W^0$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{V_1\setminus W^0}$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{V_1\setminus W^0} &= \left((2,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((0,2,0)+\mathbb{N}^3\right)\\ &= \left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right)\cup\left((0,2,0)+\mathbb{N}^3\right)\end{aligned}$$

et que les fonctions φ_2 et f_3^1 forment une base standard de I sur $V_1\setminus W^0$.

Etude au point $(0,0,0)$.

$-a.0$ et $b.0$. L'idéal $I_{(0,0,0)}$ est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} &\overline{T}_{(0,0,0)}\varphi_1(X,Y,Z) = X^2 - ZY^2\\ \text{et}\quad &\overline{T}_{(0,0,0)}\varphi_2(X,Y,Z) = XZ(Z-Y)\\ &\qquad\qquad = -XYZ + XZ^2.\end{aligned}$$

On a $\beta_1^0 = (2,0,0)$, $\beta_2^0 = (1,1,1)$, $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((2,0,0),(1,1,1)\right) = (2,1,1)$ et

$$\begin{aligned} s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2) &= (0,1,1)!(2,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_2\right)\varphi_1\\ &\quad - (1,0,0)!(1,1,1)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2\\ &= -2z^3y^2 + 2z^2y^3.\end{aligned}$$

$-c.0$ et $d.0$. On en déduit $\operatorname{Exp}\overline{T}_{(0,0,0)}s_{V_1\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2) = (0,3,2)$. Comme le 3-uplet $(0,3,2)$ appartient à Λ_C^0, le reste de la division d'ordre 3 de la fonction $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2)$ par φ_1 et φ_2 est $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,\varphi_2)$. On note f_3^1 cette dernière et on pose $\mathcal{G}^1 = \{\varphi_1,\varphi_2,f_3^1\}$. On réitère le procédé avec la famille $\mathcal{G}^1$.

$-a.1$ et $c.1$. Il est immédiat que le reste de la division d'ordre 6 de la s-fonction de φ_1 et φ_2, à savoir f_3^1, par la famille $\mathcal{G}^1$ est nul. D'autre part, on a $\gamma_{13}^0 = \mathrm{m}((2,0,0),(0,3,2)) = (2,2,0)$ et la s-fonction $s_{(0,0,0)}(\varphi_1,f_3^1)$ est nulle.

On a aussi $\gamma_{23}^0 = \mathrm{m}((1,1,1),(0,3,2)) = (1,3,2)$ et la s-fonction $s_{(0,0,0)}\left(\varphi_2, f_3^1\right)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} s_{(0,0,0)}\left(\varphi_2, f_3^1\right) &= (0,2,1)!(1,1,1)!\left(D^{(0,2,1)} f_3^1\right)\varphi_2 \\ &\qquad - (1,0,0)!(0,3,2)!\left(D^{(0,2,1)}\varphi_2\right) f_3^1 \\ &= -24zy \times xz(z-y) \\ &= -24zy\varphi_2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Comme l'exposant initial de $s_{(0,0,0)}\left(\varphi_2, f_3^1\right)$ est $(1,2,2)$, il appartient à Λ_2^1 et l'équation 5.23 est une division d'ordre aussi grand qu'on veut de la fonction $s_{(0,0,0)}\left(\varphi_2, f_3^1\right)$ par la famille $\mathcal{G}^1$.

d.1. De là, on déduit que, quel que soit l'ordre de division, tous les restes seront nuls. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que la famille $\mathcal{G}^1$ est une base standard de I sur l'ensemble $\{(0,0,0)\}$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{(0,0,0)}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{(0,0,0)} = \left((2,0,0)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((1,1,1)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((0,3,2)+\mathbb{N}^3\right).$$

Etude sur V_2.

$-a.0$. En tout point $P = (a,b,c)$ de V_2, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} & \overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) = X^2 - Z(Y+b)^2 \\ \text{et} \quad & \overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) = XZ(Z-Y-b). \end{aligned}$$

On a donc $\beta_1^0 = (0,0,1)$ et $\beta_2^0 = (1,0,1)$. On remarque que, pour tout point $P \in V_2 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_1 = \beta_1^0$ et $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_2 = \beta_2^0$ et par contre, $\operatorname{Exp} \overline{T}_{(0,0,0)}\varphi_2 = (1,1,1) \neq \beta_2^0$. On pose donc $W^0 = (0,0,0)$.

$-b.0$. Sur $V_2 \setminus W_0$, on a $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((0,0,1),(1,0,1)\right) = (1,0,1)$ et

$$\begin{aligned} s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_1,\varphi_2\right) &= (1,0,0)!(0,0,1)!\left(D^{(0,0,1)}\varphi_2\right)\varphi_1 \\ &\qquad - (1,0,0)!(1,0,1)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_1\right)\varphi_2 \\ &= -x^3y + 2x^3z - xy^2z^2. \end{aligned}$$

$-c.0$ et $d.0$. On voit que, pour tout point $P \in V_2 \setminus W^0$, on a

$$\operatorname{Exp} \overline{T}_P s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_1,\varphi_2\right) = (3,0,0).$$

Donc V^0 est inclus dans W^0. D'autre part, le triplet $(3,0,0)$ appartient à Λ_C^0. On en déduit que le reste de la division d'ordre 3 de $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2)$ par φ_1 et φ_2 est la fonction $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2)$. On notera cette dernière fonction, f_3^1. On pose $\mathcal{G}^1=\{\varphi_1,\varphi_2,f_3^1\}$. On réitère le procédé avec la famille $\mathcal{G}^1$.

<u>$-a.1$ et $b.1$.</u> On voit immédiatement que le reste de la division d'ordre 4 de la s-fonction de φ_1 et φ_2, à savoir f_3^1, par la famille $\mathcal{G}^1$ est nul. De plus, on a $\gamma_{13}^0=\mathrm{m}((0,0,1),(3,0,0))=(3,0,1)$ et $\gamma_{23}^0=\mathrm{m}((1,0,1),(3,0,0))=(3,0,1)$. Donc, la s-fonction $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_1,f_3^1)$ est donc donnée par $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_1,f_3^1)=0$ et la s-fonction $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_2,f_3^1)$ par

$$\begin{aligned}
s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_2,f_3^1\right) &= (2,0,1)!(1,0,1)!\left(D^{(1,0,0)}f_3^1\right)\varphi_2 \\
&\qquad -(0,0,1)!(3,0,0)!\left(D^{(1,0,0)}\varphi_2\right)f_3^1 \\
&= x(z-y)2z^3y^2 \\
&= xz(z-y)4z^2y^2.
\end{aligned}$$

<u>$-c.1.$</u> On effectue alors la division d'ordre 4 de la fonction $s_{V_2\setminus W^0}(\varphi_2,f_3^1)$ par la famille $\mathcal{G}^1$. L'exposant initial étant $(1,0,3)$, il appartient à Λ_1^1. En reprenant les notations de l'algorithme 2, on a $\beta_{i_0}=(0,0,1)$ et $\delta_{i_0}=(1,0,2)$. La première étape fournit les fonctions :

$$\begin{aligned}
&h^1=D^{(0,0,1)}\varphi_1 \text{ d'où } h^1(x,y,z)=-y^2,\\
&q_{i_0}^1=D^{(0,0,1)}s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_2,f_3^1\right)\frac{(1,0,2)!((0,0,1)!}{(1,0,3)!}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'où } q_{i_0}^1(x,y,z)=-\frac{4}{3}xy^2z^2(-4z+3y)\\
&\text{et } r^1=h^1s_{V_2\setminus W^0}\left(\varphi_2,f_3^1\right)-q_{i_0}^1\varphi_1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'où } r^1(x,y,z)=\frac{4}{3}xz^2y^2(z^2y^2-4zx^2+3yx^2).
\end{aligned}$$

On remarque que l'exposant initial de la fonction r^1 sur $V_2\setminus W^0$ est $(3,3,2)$. Donc, l'ordre de r^1 est strictement supérieur à 4 et la division d'ordre 4 est finie.

<u>$-d.1.$</u> Pour mettre en pratique l'algorithme 3, il faut comparer l'ordre de la division à l'ordre du diagramme $\mathcal{N}_{(a,b,c)}$, pour tout point $(a,b,c)\in V_2\setminus W^0$, afin de déterminer si on peut arrêter les itérations ou non. On va donc calculer $\mathcal{N}_{(a,b,c)}$ quand le point (a,b,c) est dans $V_2\setminus W^0$. Nous allons utiliser le lemme 5.2.1 dans le cas particulier où la S'-série considérée est, en fait, la S-série associée aux deux séries formelles (ce qui revient à utiliser l'algorithme de [Mo2](4.6)). Cependant, si on applique tel quel cet algorithme, la

vitesse de convergence peut être très faible. Il est possible de l'augmenter en tenant compte des propriétés des séries génératrices, notamment l'inversibilité. Ainsi, on a déjà vu qu'en tout point $P = (a, b, c)$ de $V_2 \setminus W^0$, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} &\overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) = X^2 - Z(Y+b)^2 \\ \text{et} \qquad &\overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) = XZ(Z-Y-b). \end{aligned}$$

Or, sur $V_2 \setminus W^0$, on a $b \neq 0$ et les séries $Y + b$ et $(Z - Y - b)$ sont inversibles. On en déduit que l'idéal I_P est engendré par les séries $\frac{X^2}{(Y+b)^2} - Z$ et XZ notées respectivement H_1 et H_2. On considère la S-série associée au couple (H_1, H_2),

$$\begin{aligned} S(H_1,H_2)(X,Y,Z) &= XH_1(X,Y,Z) + H_2(X,Y,Z) \\ &= \frac{X^3}{(Y+b)^2}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

L'exposant initial de $\frac{X^3}{(Y+b)^2}$ est $(3, 0, 0)$. Il n'appartient donc pas à l'ensemble $(0, 0, 1) + \mathbb{N}^3 = \Lambda_1^0 \cup \Lambda_2^0$. Ceci implique que le reste de la division à la Hironaka faible de $S(H_1, H_2)$ par la famille (H_1, H_2) est la série $S(H_1, H_2)$ elle-même. Si on pose $H_3(X, Y, Z) = X^3$, cette série appartient visiblement à l'idéal I_P. De plus, la relation (5.24) induit l'égalité

$$H_2(X,Y,Z) = \frac{H_3(X,Y,Z)}{(Y+b)^2} - XH_1(X,Y,Z).$$

Autrement dit, l'idéal I_P est engendré par les séries H_1 et H_3. On considère maintenant la S-série $S(H_1, H_3)$,

$$S(H_1,H_3)(X,Y,Z) = X^2H_1 - ZH_3 = 0.$$

En appliquant le lemme 5.2.1, on en déduit que la famille $\{H_1, H_3\}$ forme une base standard de I_P. Par conséquent, le diagramme des exposants initiaux de I_P est

$$\mathcal{N}_P = \big((0,0,1) + \mathbb{N}^3\big) \cup \big((3,0,0) + \mathbb{N}^3\big)$$

et ses sommets sont $(0, 0, 1)$ et $(3, 0, 0)$. Ainsi, pour tout $P \in V_2 \setminus W^0$, l'ordre du diagramme des exposants initiaux de I_P est 3.

On a montré précédemment que, pour toute s-fonction associée à la famille $\mathcal{G}^1$ sur $V_2 \setminus W^0$, le reste de la division d'ordre 4 de cette fonction par $\mathcal{G}^1$ sur $V_2 \setminus W^0$ est nul ou d'ordre strictement supérieur à 4. On en déduit que $\mathcal{G}^1$ est une base standard de I sur $V_2 \setminus W^0$.

Remarque 5.5.3. Connaissant le diagramme $\mathcal{N}_P$, $P \in V_2 \setminus W^0$, on peut aussi conclure en observant que l'exposant initial de $\overline{T}_P\varphi_1$ est constamment égal à $(0,0,1)$ et celui de $\overline{T}_P f_3^1$, égal à $(3,0,0)$.

Etude de V_3.

$-a.0.$ En tout point $P = (a,b,c)$ de V_3, l'idéal I_P est engendré par les séries formelles

$$\begin{aligned} \overline{T}_P\varphi_1(X,Y,Z) &= (X+a)^2 - (Z+b)(Y+b)^2 \\ &= 2aX - 2b^2Y - b^2Z - bY^2 - 2bYZ - Y^2Z \\ \text{et} \qquad \overline{T}_P\varphi_2(X,Y,Z) &= (X+a)(Z+b)(Z-Y). \end{aligned}$$

On a donc $\beta_1^0 = (1,0,0)$ et $\beta_2^0 = (0,1,0)$. On remarque que, pour tout point $P \in V_3 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_1 = \beta_1^0$ et $\operatorname{Exp} \overline{T}_P\varphi_2 = \beta_2^0$. Par contre, on a

$$\operatorname{Exp} \overline{T}_{(0,0,0)}\varphi_1 = (2,0,0) \neq \beta_2^0.$$

On pose donc $W^0 = (0,0,0)$.

$-b.0$ à $d.0.$ Sur $V_3 \setminus W^0$, on a $\gamma_{12}^0 = \mathrm{m}\left((1,0,0),(0,1,0)\right) = (1,1,0)$ et $s_{V_3\setminus W^0}(\varphi_1,\varphi_2) = 0$. De là, on déduit que, quel que soit l'ordre de division, tous les restes seront nuls. En appliquant le théorème 5.3.6, on conclut que la famille $\mathcal{G}^0$ est une base standard de I sur l'ensemble $V_3 \setminus W^0$. Ceci implique que le diagramme $\mathcal{N}_{V_3\setminus W^0}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{V_3\setminus W^0} = \left((1,0,0)+\mathbb{N}^3\right) \cup \left((0,1,0)+\mathbb{N}^3\right).$$

Finalement, les fonctions φ_1 et φ_2 forment une base standard de I sur $V_3 \setminus W^0$.

Chapitre 6

Théorème des idéaux fermés

Dans la première section de ce chapitre, on montre qu'étant donnés un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et I un idéal engendré dans $C^{(M)}(U)$ par une famille finie de fonctions réel-analytiques dans U, il est possible de construire une filtration

$$\varnothing = X_l \subset \ldots \subset X_1 \subset X_0 = B(0,r) \subset U$$

par des ensembles analytiques fermés tels que le diagramme $\mathcal{N}_a$ soit constant pour $a \in X_k \setminus X_{k+1}$ et égal à $\mathcal{N}_{X_k \setminus X_{k+1}}$ et de trouver des constantes ε et δ telles que, pour tout $k \in \{0, \ldots, l-1\}$, le quadruplet $(X_k, X_{k+1}, \varepsilon, \delta)$ vérifie la propriété CLU$(1, r)$. On construit, de plus, pour tout $k \in \{0, \ldots, l-1\}$, une famille de fonctions réel-analytiques appartenant à I, formant une famille de diviseurs C^∞ sur $X_k \setminus X_{k+1}$ à la Hironaka, et dont les exposants initiaux sont les sommets du diagramme $\mathcal{N}_{X_k \setminus X_{k+1}}$. Ces résultats peuvent être vus comme une variante, dans le cadre analytique, des techniques de stratification développées par Bierstone et Milman pour l'étude de la semicohérence formelle [BM2].
Dans la deuxième section, nous en déduisons un théorème de fermeture à la Malgrange pour l'idéal I dans $\widehat{C_M}(U)$. Le schéma de preuve est celui de Bierstone et Milman [BM2].

6.1 Filtration

Théorème 6.1.1. *Soit U un voisinage ouvert de l'origine. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions réel-analytiques sur U et I l'idéal qu'elles engendrent dans $\mathcal{C}l(U)$. Il existe un réel $r > 0$, une filtration de $B(0,r)$ par des ensembles analytiques fermés*

$$\varnothing \subset X_l \subset \ldots \subset X_1 \subset X_0 = B(0,r) \subset U$$

et des constantes ϵ et δ telles que, pour tout $k \in \{0, \ldots, l-1\}$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

- *$\mathcal{N}_a$ est constant sur $X_k \setminus X_{k+1}$ et égal à $\mathcal{N}_{X_k \setminus X_{k+1}}$, ses sommets sont alors notés $\beta_1^k, \ldots, \beta_{t_k}^k$,*
- *il existe des fonctions g_i^k de I réel-analytiques sur U vérifiant, pour tout $i \in \{1, \ldots, t_k\}$ et tout $a \in X_k \setminus X_{k+1}$, $\mathrm{Exp}\ \left(\overline{T}_a g_i^k\right) = \beta_i^k$,*
- *le quadruplet $(X_k, X_{k+1}, \epsilon, \delta)$ vérifie la propriété $CLU(1, r)$ et la variété $X_k \setminus X_{k+1}$ est analytique.*

La filtration et les fonctions $g_k^{(i)}$ sont indépendantes de la classe $\mathcal{C}l$ considérée.

Démonstration. Soit un réel $r > 0$ tel qu'on ait $B(0, r) \subset U$. Si on pose $X_0 = B(0, r)$ et $X_1 = V(I) \cap B(0, r)$, l'ensemble $X_0 \setminus X_1$ satisfait les conclusions de l'énoncé avec $t_0 = 1$ et $g_1^0 = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2$.
D'après [A](30.9 p. 237), l'ensemble X_1 peut être décomposé, de manière unique, en une union minimale d'ensembles analytiques irréductibles, noté $V_2, \ldots, V_{l_1}$. En appliquant le lemme 2.2.8 à chaque V_i, $i \in \{2, \ldots, l_1\}$, quitte à diminuer r, on obtient des sous-ensembles analytiques propres $Y_2, \ldots, Y_{l_1}$ et des constantes ϵ_1 et δ_1 tels que les quadruplets $(V_i, Y_i, \epsilon_1, \delta_1)$ satisfassent la propriété CLU$(1, r)$. On remarque que, pour tout sous-ensemble analytique V_i' vérifiant $Y_i \subset V_i' \subset V_i$, le quadruplet $(V_i, V_i', \epsilon_1, \delta_1)$ vérifie encore CLU$(1, r)$.
D'autre part, en appliquant le théorème 5.4.2 à chaque V_i, on obtient des sous-ensembles analytiques propres $W_2, \ldots, W_{l_1}$ tels que $\mathcal{N}_a$ soit constant sur $V_i \setminus W_i$ et que ses sommets y soient donnés par une famille de fonctions réel-analytiques appartenant à I. Pour tout $i \in \{2, \ldots, l_1\}$, l'ensemble

$$V_i' = Y_i \cup W_i \cup \left(V_i \cap \bigcup_{j=i+1}^{l_1} V_j \right)$$

est un sous-ensemble analytique propre de V_i et les propriétés de $V_i \setminus Y_i$ et $V_i \setminus W_i$ sont satisfaites simultanément sur $V_i \setminus V_i'$.
On pose, pour tout $k \in \{2, \ldots, l_1 - 1\}$,

$$X_k = V_{k+1} \cup \ldots \cup V_{l_1} \cup V_2' \cup \ldots \cup V_k'$$

et $X_{l_1} = V_2' \cup \ldots \cup V_{l_1}'$. On a alors, pour $k \in \{2, \ldots, l_1 - 1\}$,

$$X_k \setminus X_{k+1} = V_{k+1} \setminus (X_{k+1} \cap V_{k+1}) = V_{k+1} \setminus V_{k+1}'.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \{2, \ldots, l_1 - 1\}$ et tout point $a \in X_k \setminus X_{k+1}$, on a :

- $\mathcal{N}_a$ est constant sur $X_k \setminus X_{k+1}$ et égal à $\mathcal{N}_{X_k \setminus X_{k+1}}$,

- il existe des fonctions g_i^k de I réel-analytiques sur U telles que, pour tout $i = 1, \dots, t_k$ et tout $a \in X_k \setminus X_{k+1}$, $\operatorname{Exp}\left(\overline{T}_a g_i^k\right) = \beta_i^k$,
- $X_k \setminus X_{k+1}$ est une variété analytique lisse de $\mathbb{R}^n$ et le quadruplet $(X_k, X_{k+1}, \epsilon_1, \delta_1)$ vérifie la propriété CLU$(1, r)$.

En réitérant ce procédé avec X_{l_1} au lieu de X_1, on obtient ainsi une suite strictement décroissante d'ensembles analytiques $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et des suites de constantes $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Compte tenu de la noethérianité de l'anneau des germes de fonctions réel-analytiques, en diminuant r, on peut rendre cette suite stationnaire. On a ainsi obtenu une filtration finie de $B(0, r)$,

$$\varnothing \subset X_l \subset \ldots \subset X_1 \subset X_0 = B(0, r),$$

satisfaisant les conditions de l'énoncé avec $\epsilon = \min_{i\in\{1,\dots,l\}} \epsilon_i$ et $\delta = \max_{i\in\{1,\dots,l\}} \delta_i$. □

6.2 Théorème de type Malgrange

Le point crucial du théorème des idéaux fermés est le résultat suivant, dont l'idée s'inspire du théorème 10.1 de [BM2].

Théorème 6.2.1. *Soient un réel $r > 0$, une suite admissible M et un idéal I de type fini dans $C^{(M)}(B(0, r))$. Soient (L, K, ϵ, δ) un quadruplet satisfaisant la propriété CLU$(1, r)$ et les conditions suivantes :*

- *L et K sont des ensembles sous-analytiques inclus dans $B(0, r)$,*
- *pour tout point $a \in L \setminus K$, on a $\mathcal{N}_a = \mathcal{N}_{L\setminus K}$,*
- *il existe un t-uplet $(g_1, \dots, g_t)$ de fonctions réel-analytiques sur $B(0, r)$, formant une base standard de I sur $L \setminus K$.*

Soit f une fonction de $C^{(M)}(B(0, r))$ plate sur K et vérifiant, pour tout $a \in L \setminus K$, $\operatorname{Exp} \overline{T}_a f \in \mathcal{N}_a$. Pour tout réel $\mu \in \,]0, r[$, il existe une constante σ et une fonction h de $(g_1, \dots, g_t)C^{(M^\sigma)}(B(0, r))$ telle que $f - h$ soit plate sur $L \cap \overline{B(0, r - \mu)}$.

Démonstration. On pose $K' = K \cap \overline{B(0, r - \mu)}$, $L' = L \cap \overline{B(0, r - \mu)}$ et $Z' = L' \setminus K'$.

Dans cette preuve, on commence par effectuer, dans $B(0, r) \setminus K'$, une division C^∞ sur Z' de la fonction f par la famille $g_1, \dots, g_p$, en estimant les normes des quotients. On montre, ensuite, que le reste de cette division peut être supposé identiquement nul ; en d'autres termes, on montre qu'il existe une fonction h', définie sur $B(0, r) \setminus K'$, telle que la fonction $f - h'$ soit plate sur Z'. Pour conclure, il reste à construire une fonction h, définie sur $B(0, r)$ et ayant la régularité souhaitée, plate sur K', dont le jet sur Z' coïncide avec celui de h'.

D'après la remarque 1.10.2, le t-uplet $(g_1, \dots, g_t)$ est une famille de diviseurs C^∞ sur $L \setminus K$. On note $(\beta_1, \dots, \beta_t)$ les exposants initiaux associés. Pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, la fonction $D^{\beta_j} g_j$ ne s'annule pas sur $L \setminus K$. On déduit de la réel-analyticité des fonctions g_j, qu'il existe des constantes ϵ_1 et δ_1 telles que, pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$ et tout $x \in B(0,r) \cap L$, on ait

$$\left| D^{\beta_j} g_j(x) \right| \geq \epsilon_1 d(x,K)^{\delta_1}.$$

Il existe des constantes ϵ_2 et δ_2 telles qu'en reprenant les notations du théorème 4.2.9 avec $\epsilon = \epsilon_2$ et $\delta = \delta_2$, pour tout $a \in Z'$ et tout $x \in V_a \cap (L \setminus K)$, on ait

$$\left| D^{\beta_j} g_j(x) \right| \geq \epsilon_2 d(a,K)^{\delta_2}.$$

Les fonctions $g_1, \dots, g_t$ remplissent donc les conditions du théorème 4.2.9. En notant ϵ_3 et δ_3 les constantes fournies par ce théorème, on pose, pour tout $a \in Z'$, $\lambda_a = \epsilon_3 d(a,K)^{\delta_3}$. D'autre part, soit $\lambda \in]0,1]$ tel que la fonction f appartienne à $C_\lambda^{(M)}(B(0,r))$. En appliquant le lemme 2.1.1 à f, on obtient des constantes C_1 et C_2 telles que, pour tout ouvert U' inclus dans $B(0,r)$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\|f_{|U'}\|^{(M,.)}_{\left(\frac{\lambda}{C_1}, \infty\right)} \leq 4 \sup_{x \in U'} d(x,K)^p C_2^p \lambda^{-p} M_p \|f\|^{(M,.)}_{(\lambda,\infty)}.$$

Quitte à diminuer ϵ_3, on peut supposer que, pour tout $a \in Z'$, on a $\lambda_a \leq \frac{\lambda}{C_1}$. De plus, pour tout $a \in Z'$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in V_a} d(x,K) &\leq d(a,K) + 2\mu s(2\delta_2) \frac{d(a,K)^{2\delta_2}}{N_1 \epsilon_2^2} \\ &\leq D_1 d(a,K). \end{aligned}$$

pour une constante D_1 convenablement choisie. Il existe, alors, des constantes D_2 et D_3 telles que, pour tout point b de $B\left(a, \frac{d(a,K)^{2\delta_2}}{4}\right) \cap Z'$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\|f_{|V_b}\|^{(M,.)}_{(\lambda_b,\infty)} \leq D_3 D_2^p d(a,K)^p M_p.$$

Il existe également des constantes ϵ_4 et δ_4 telles qu'on ait

$$\omega'_a = \inf_{b \in B\left(a, \frac{d(a,K)^{2\delta_2}}{4}\right) \cap Z'} \lambda_b \geq \epsilon_4 d(a,K)^{\delta_4}.$$

Par conséquent, on peut effectuer la division de f sur Z' par la famille $(g_1, \dots, g_t)$ et obtenir une estimation sur les normes des quotients et reste.

Plus précisément, les quotients, définis $B(0,r)\backslash K'$, vérifient, pour tout $a \in Z'$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|q'_j|_{B(a,\frac{\omega_a}{2})}\|^{(M^2,.)}_{(C_3 d(a,K)^{2\delta_2}\omega'_a,\infty)} &\leq C_4 {\omega'_a}^{-l'} d(a,K)^p M_p D_2^p \\ &\leq C_5 d(a,K)^{p-\delta_4 l'} M_p D_2^p.\end{aligned}$$

On définit alors un jet Q'_j sur L' de la manière suivante :

$$Q'_j(x) = \left(D^H q'_j(x)\right)_{H\in\mathbb{N}^n} \text{ sur } Z' \text{ et } Q'_j(x) = 0 \text{ sur } K'.$$

Montrons, à présent, que le reste peut être supposé identiquement nul. Pour tout point $a \in Z'$, la série $\overline{T}_a f$ vérifie

$$\overline{T}_a f = \sum_{j=1}^{t} \overline{T}_a g_j \overline{T}_a q'_j + \overline{T}_a r'.$$

Compte tenu de la relation Exp $\overline{T}_a f \in \mathcal{N}_a$, le n-uplet

$$\text{Exp } \overline{T}_a r' = \text{Exp } (\overline{T}_a f - \sum_{j=1}^{t} \overline{T}_a g_j \overline{T}_a q'_j)$$

appartient donc à $\mathcal{N}_a$. Les conditions de support dans la division à la Hironaka impliquent, dans ce cas, que la fonction r' est plate sur Z'. On peut donc associer à r' le jet R' identiquement nul sur L' et supposer $r' \equiv 0$.

Pour conclure, il suffit d'étendre Q'_j à V.
Il existe des constantes ϵ_5 et δ_5 telles qu'on ait, pour tout $a \in Z'$,

$$\epsilon_5 d(a,K)^{\delta_5} \leq \min\left(\frac{\omega_a}{2}, C_3 d(a,K)^{\delta}\omega'_a\right).$$

Le jet Q'_j vérifie, par conséquent, les hypothèses du lemme 2.1.3 avec $\epsilon = \epsilon_5$, $\delta = \delta_5$, $C = C_5$, $\delta' = 2\delta l'$ et $D = D_2$. Il existe donc une fonction q_j de $C^{(M^2(\lceil\delta_5\rceil+1))}(\mathbb{R}^n)$, plate sur K', dont le jet sur Z' coïncide avec Q'_j.
La fonction $h = \sum_{j=1}^t g_j q_j$ satisfait alors les conditions requises. □

Remarque 6.2.2. Ce lemme est vérifié même lorsque K est l'ensemble vide.

On en déduit alors un théorème de type Malgrange pour les intersections de classes non quasi-analytiques.

Théorème 6.2.3. *Soit M une suite admissible vérifiant la condition (H_6). Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions réel-analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et I l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(U)$. Pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute fonction f de $\overline{I}$, on a $f \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.*

Démonstration. Soit f une fonction de $\overline{I}$. D'après le lemme 1.3.3, il existe une suite admissible M' ayant les propriétés suivantes :
(i) la fonction f appartient à $C^{(M')}(U)$,
(ii) l'inclusion $f \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C_{M'^\delta}(V)$, pour un réel $\delta \geq 1$, implique que f appartient à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}(V)$.
Il reste donc à établir l'inclusion mentionnée au point (ii). Par partition de l'unité, on se ramène à un problème local. Soit

$$\varnothing = X_l \subset \ldots \subset X_1 \subset X_0 = B(0,r) \subset U,$$

la filtration, au voisinage de l'origine, associée à I par le théorème 6.1.1. Pour tout $k \in \{0, \ldots, l-1\}$, on note $(g_1^k, \ldots, g_{t_k}^k)$ la base standard de I sur $X_k \setminus X_{k+1}$ et $\beta_1^k, \ldots, \beta_{t_k}^k$, les sommets associés.
La fonction f appartient à $\overline{I}$ donc, par le théorème spectral de Whitney [CC2](théorème 28), pour tout $a \in U$, on a $\overline{T}_a f \in \overline{T}_a I$. On en déduit, pour tout $a \in U$, Exp $\overline{T}_a f \in \mathcal{N}_a$.
D'autre part, la filtration et les fonctions g_i^k, $k \in \{0, \ldots, l\}$ et $i \in \{1, \ldots, t_k\}$ sont indépendantes de la classe considérée. Par conséquent, les hypothèses du théorème 6.2.1 sont vérifiées pour l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C^{(M')}(U)$ et le quadruplet $(X_{l-1}, X_l, \epsilon, \delta)$. En appliquant ce théorème avec $\mu = \frac{r}{2l}$, on obtient l'existence d'une constante σ_l et d'une fonction $h_l \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C^{(M'^{\sigma_l})}(U)$ telles que la fonction $f - h_l$ soit plate sur $X_{l-1} \cap \overline{B(0, r - \frac{r}{2l})}$. On réitère, ensuite, le procédé avec l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C^{(M'^{\sigma_l})}(U)$, le quadruplet

$$(X_{l-2} \cap \overline{B(0, r - \frac{r}{2l})}, X_{l-1} \cap \overline{B\left(0, r - \frac{r}{2l}\right)}, \epsilon, \delta)$$

et la fonction $f - h_l$. Après l étapes, on obtient une fonction $h = \sum_{i=1}^{l} h_i$ appartenant à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C^{(M'^\sigma)}(U)$, avec $\sigma = \prod_{i=1}^{l} \sigma_i$, telle que $f - h$ soit plate sur $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. On a finalement montré que la fonction f appartient à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)C^{(M'^\sigma)}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)$, donc à l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\widehat{C_M}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)$. □

Remarque 6.2.4. Les théorèmes 3.3.4 et 6.2.3 peuvent être reformulés dans le cadre de classes locales. Comme dans [CC3], on définit la classe $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$ de la manière suivante : une fonction appartient à $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$ si sa restriction à tout ouvert V relativement compact dans U appartient à $\widehat{C_M}(V)$. La classe $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$ est munie naturellement d'une topologie d'espace de Fréchet : celle-ci peut être décrite par la famille de semi-normes $(p_j)_{j\geq 0}$ définies par

$$p_j(f) = \sup_{x \in V_j,\ L \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^L f(x)|}{l! M_l^{a_j}},$$

où $(a_j)_{j\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 et $(V_j)_{j\geq 0}$ est une suite d'ouverts bornés vérifiant $\overline{V_j} \subset V_{j+1}$ et $\bigcup_{j\geq 0} V_j = U$. Le théorème 6.2.3 montre que tout idéal engendré dans $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$ par une famille finie de fonctions réel-analytiques est fermé dans $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$. De la même manière, la conclusion du théorème 3.3.4 peut s'énoncer en termes de fermeture d'un idéal dans $\widehat{C_{M,\mathrm{loc}}}(U)$.

Bibliographie

[A] S.S. Abhyankar, *Local analytic geometry* World Scientific Publishing Co. Inc. (2001).

[AHV] J.M. Aroca, H. Hironaka, J.L. Vicente, *The theory of the maximal contact*, Memorias de Matematica del Instituto "Jorge Juan", Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid **29** (1975).

[Be] P. Beaugendre, *Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques*, Ann. Polon. Math. **76** (2001), 213–243.

[BM1] E. Bierstone, P.D. Milman, *Relations among analytic functions I*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), no. 1, 187–239.

[BM2] E. Bierstone, P.D. Milman, *Relations among analytic functions II*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), no. 2, 49–77.

[Br] J. Briançon, *Weierstrass préparé à la Hironaka*, Astérisque **7,8** (1973), 67–73.

[BR] J. Bochnak, J.J. Risler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 493–507.

[CC1] J. Chaumat, A.M. Chollet, *Surjectivité de l'application restriction à un compact dans les classes de fonctions ultradifférentiables*, Math. Ann **298** (1994), 7–40.

[CC2] J. Chaumat, A.M. Chollet, *Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes*, Bull. Sci. math., **122** (1998), 455–485.

[CC3] J. Chaumat, A.-M. Chollet, *Sur la division et la composition dans des classes ultradifférentiables.*, Studia Math. **136** (1999), 49–70.

[CC4] J. Chaumat, A.-M. Chollet, *Division par un polynôme hyperbolique*, Canad. J. Math. **56** (2004), 1121–1144.

[CW] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes,* (Lect. Notes Math. vol 242) Berlin Heidelberg New York, Springer (1972).

[G] H. Grauert, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen*, Invent. Math. **15** (1972), 171–198.

[GR] H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Springer Verlag Berlin (1971).

[H1] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials*, Ark. Mat. **3** (1958), 225–264.

[H2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* (2ème édition), Springer Verlag (1989).

[K] H. Komatsu, *The Implicit Function Theorem for Ultradifferentiable Mappings,* Proc. Japan Acad. ser. **A 55** (1979), 69–72.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Math. **18** (1959), 87–136.

[M] B. Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press (1966).

[Mo1] A. Mouze, *Anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, Thèse, Université de Lille Juin 2000.

[Mo2] A. Mouze, *Division dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Applications*, Studia Math. **144 (1)** (2001), 63–93.

[Mo3] A. Mouze, *Sur la composition de séries formelles à croissance contrôlée*, Ann. Scuola Norm. Sup Pisa Cl. Sci. **5** Vol. I (2002), 73–92.

[SV] J. Schmets, M. Valdivia, *Explicit extension maps in intersections of non-quasi-analytic classes*, Ann. Polon. Math. **86** (2005), 227–243.

[Th1] V. Thilliez, *Sur les fonctions composées différentiables,* J. Math. Pures Appl. (1997), 499–524.

[Th2] V. Thilliez, *On closed ideals in smooth classes*, Math. Nachr. **227** (2001), 143–157.

[Th3] V. Thilliez, *A sharp division estimate for ultradifferentiable germs*, Pacific J. Math. **205** (2002), 237–256.

[Th4] V. Thilliez, *Bounds for quotients in rings of formal power series with growth constraints*, Studia Math. **151** (2002), 49–65.

[To] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[TM] J.C. Tougeron, J. Merrien, *Idéaux de fonctions différentiables, II*, Ann. Inst. Fourier **20** (1970), 179–233.

Index des notations

Index alphabétique

Idéaux fermés dans des intersections de classes non-quasi-analytiques.

Résumé. On étudie les propriétés de fermeture d'un idéal de type fini dans certaines sous-algèbres A de $C^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $A = C^\infty(U)$, Tougeron et Merrien donnent une condition suffisante de fermeture et un théorème de Malgrange assure que tout idéal engendré par des fonctions réel-analytiques est fermé. On montre que ces résultats restent vrais si A est une intersection convenable de classes non-quasi-analytiques sur U ; par exemple, l'intersection des classes de Gevrey associées aux suites $(p!^a)_{p\in\mathbb{N}}$, $a > 0$. Dans ce but, on établit, pour ces algèbres, des estimations fines sur la composition de fonctions et la division à la Hironaka de séries formelles. On construit aussi, pour tout idéal à générateurs réel-analytiques, une stratification telle qu'à chaque strate on puisse associer une famille finie de fonctions réel-analytiques sur U dont les jets de Taylor donnent une base standard en tout point de la strate.

Closed ideals in some intersections of non-quasi-analytic classes.

Abstract. We study the closedness properties of finitely generated ideals in some subalgebras A of $C^\infty(U)$, where U is an open subset of $\mathbb{R}^n$. If $A = C^\infty(U)$, Tougeron and Merrien give a sufficient condition of closedness and a theorem of Malgrange ensures that any ideal generated by a finite family of real-analytic functions is closed. We prove that these results are still true when A is a suitable intersection of non-quasi-analytic classes ; for example, the intersection of all the Gevrey classes associated with the sequences $(p!^a)_{p\in\mathbb{N}}$, $a > 0$. To this purpose, we establish sharp estimates for the composition of functions in such algebras, and for Hironaka's division of formal power series. For any ideal with real-analytic generators, we also construct a stratification such that, for each stratum, there exists a finite family of real-analytic functions on U whose Taylor jets yield a standard basis at every point of the stratum.

