



THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : Mécanique

présentée par

Lionel HELIN

Développement de modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques

Soutenue le 07 Septembre 2006

devant le jury composé de

J. F. AGASSANT	Professeur, École des Mines de Paris	Rapporteur
B. DEBBAUT	Ingénieur Polyflow S.A./Fluent Benelux, Wavre	Rapporteur
G. MOMPEAN	Professeur, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq	Directeur de thèse
L. THAIS	MDC, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq	Co-Directeur
M. SOULI	Professeur, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq	Examineur
J. MALLET	Ingénieur, Michelin, Clermont-Ferrand	Examineur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'École Polytechnique Universitaire de Lille (EPUL) et du laboratoire de mécanique de Lille (LML). Je tiens donc tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à l'ensemble du personnel enseignant et administratif pour leur accueil et leur convivialité.

Je remercie particulièrement Monsieur G. MOMPEAN, professeur au laboratoire de Mécanique de Lille, pour sa direction scientifique, ses conseils et ses précieuses remarques qui ont permis l'aboutissement de ce travail. Je tiens également à présenter mes plus sincères remerciements à Monsieur L. THAIS, maître de conférences à l'université de Lille I, pour sa disponibilité, son aide, sa pertinence, et pour toutes les connaissances scientifiques qu'il a su me transmettre durant ce travail.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet ScaFTen (Scalar For Tensor) dont les deux partenaires industriels étaient les sociétés Michelin et Polyflow s.a/Fluent Benelux. Je tiens donc à remercier Monsieur B. DEBBAUT (Polyflow s.a) et Monsieur J. MALLET (Michelin) qui ont grandement contribué, par leur disponibilité et leur sympathie, à la réalisation de ce travail.

J'adresse un remerciement tout particulier à Monsieur AGASSANT, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de cette thèse, ainsi qu'à Monsieur SOULI pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude au ministère Français de la recherche et de l'industrie pour l'aide financière apportée au projet Eureka $\sum!2799$ ScaFTen (Scalar For Tensor) et qui a permis le financement de mes études.

Enfin, un grand merci à mes parents et à ma famille, qui m'ont toujours soutenu et supporté pendant l'élaboration de cette thèse. Je remercie également tous mes amis et proches pour avoir été présents dans les bons comme dans les mauvais moments, et sans qui cette thèse n'aurait pas été la même. Un grand merci à Juliette, pour sa patience et son impatience, à Benj, Chris, Bouch, Ced, pour leurs amitiés sincères, à mes amis du Forum, du TCT, du BSBBM, des MIB, et également à tous les doctorants qui m'ont apporté leur soutien et surtout leur bonne humeur.

Table des matières

Introduction	1
1 Les fluides viscoélastiques	5
1.1 Description phénoménologique	5
1.2 Description théorique	6
1.2.1 Équations de conservation	7
1.2.2 Équations constitutives pour un fluide non-Newtonien	7
1.2.2.1 Modèles Newtoniens généralisés	8
1.2.2.2 Modèles viscoélastiques différentiels	8
1.2.2.3 Modèles algébriques explicites	9
1.3 Modèles algébriques et indifférence matérielle	13
1.3.1 Objectivité Euclidienne	14
1.3.2 Principe d'indifférence matérielle	14
1.3.3 Conséquences de l'indifférence matérielle sur les modèles algébriques . .	15
1.4 Modèles algébriques simplifiés	19
2 Méthode Numérique	21
2.1 Équations en coordonnées orthogonales généralisées	21
2.1.1 Système de coordonnées et métrique orthogonale	22
2.1.2 Équations de transport en coordonnées orthogonales généralisées	24
2.1.3 Composantes de tenseurs et de vecteurs en coordonnées cartésiennes .	26
2.2 Discrétisations spatiale et temporelle	26
2.2.1 Localisation des variables	27
2.2.2 Discrétisation spatiale	28
2.2.3 Discrétisation temporelle	36
2.3 Calcul du tenseur taux de rotation absolu	40
2.3.1 Vitesse de rotation des vecteurs propres	40
2.3.2 Paramètre de classification	42
3 Étude cinématique de l'indifférence matérielle ; calcul du tenseur taux de rotation absolu	43
3.1 Écoulements simples	43
3.1.1 Écoulement d'extension uniforme	43
3.1.2 Cisaillement uniforme sans rotation	45
3.1.3 Cisaillement avec rotation : écoulement de Couette axisymétrique . . .	46
3.2 Contraction planaire 4:1	49
3.3 Écoulement autour d'un cylindre	55
3.4 Étude sur une conduite courbée à 180°	62

3.5 Synthèse	66
4 Étude dynamique des modèles algébriques de tension	69
4.1 Écoulement dans une contraction 4:1	69
4.1.1 Géométrie et maillage	70
4.1.2 Résultats	72
4.2 Écoulement dans une conduite courbée	80
4.2.1 Géométrie et maillage	80
4.2.2 Résultats	81
4.3 Convergence et temps de calcul	93
Synthèse et perspectives	95
Publications	99
Bibliographie	103
Annexes	105
A Objectivité Euclidienne	107
B Compléments sur les modèles algébriques simplifiés MAS	111
B.1 Détermination des coefficients du modèle MAS-1	111
B.2 Détermination des coefficients du modèle MAS-2	112
B.3 Comportement élongationnel des modèles MAS	113
C Publications	115

Table des figures

2.1	Coordonnées orthogonales généralisées	22
2.2	Maillage entrelacé	27
2.3	Volume de contrôle \mathcal{V}^P	28
2.4	Volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1}	29
2.5	Volume de contrôle \mathcal{V}^{V_2}	30
2.6	Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} par rapport à une base cartésienne	41
3.1	Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} pour un écoulement d'extension uniforme	44
3.2	Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} pour un écoulement de cisaillement uniforme sans rotation	45
3.3	Écoulement de Couette	46
3.4	Conditions limites pour l'écoulement dans une contraction planaire 4:1	49
3.5	Maillage et définition des coupes P_1, P_2, P_3, P_4 pour la contraction 4:1	50
3.6	Lignes de courant d'un écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$	50
3.7	Contours du paramètre de classification P_C . Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$	51
3.8	Second vecteur propre e_2 du tenseur taux de déformation. Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$	52
3.9	Contours de la vitesse angulaire des directions principales du tenseur taux de déformation. Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$	53
3.10	Profils de \overline{W}_{21} (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des coupes verticales P_1, P_2, P_3 et P_4 . Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$	54
3.11	Écoulement autour d'un cylindre : géométrie et conditions limites	55
3.12	Vue globale du maillage orthogonal 200×100 (haut). Zoom autour du cylindre (bas) et définition des coupes C_1, C_2, C_3, C_4	57
3.13	Lignes de courant d'un écoulement laminaire Newtonien autour d'un cylindre, $Re = 20$	58
3.14	Vitesse angulaire des vecteurs propres du tenseur taux de déformation. Écoulement laminaire autour d'un cylindre, $Re = 20$	58
3.15	Contours du paramètre de classification P_C . Écoulement laminaire autour d'un cylindre, $Re = 20$	59
3.16	Profils de \overline{W}_{21} (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des sections C_1, C_2, C_3 et C_4 ; écoulement laminaire autour d'un cylindre, $Re = 20$	61
3.17	Conditions limites pour l'écoulement dans une conduite courbée à 180°	62
3.18	Vue globale du maillage orthogonal 115×25 et définition des coupes M_1, M_2, M_3, M_4, M_5	63

3.19	Lignes de courant d'un écoulement laminaire Newtonien dans une conduite courbée à 180° , $Re = 2.5 \times 10^{-2}$	64
3.20	Profils de \bar{W}_{21} (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des sections M_1 , M_2 et M_5 . Écoulement laminaire dans une conduite courbée à 180° , $Re = 2.5 \times 10^{-2}$	65
4.1	Géométrie, maillage 101×81 et définition des coupes P_1, P_2, P_3, P_4 . Écoulement dans une contraction 4:1	70
4.2	Lignes de courant dans une contraction 4:1, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	72
4.3	Profils des vitesses U_1 et U_2 adimensionnées par la vitesse débitante U_a le long des coupes P_1 et P_2 , $De = 0.3$	74
4.4	Contours de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	75
4.5	Contours de la composante normale T_{22} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	76
4.6	Contours de la composante de cisaillement T_{12} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	77
4.7	Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_1 et P_2 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$	78
4.8	Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_3 et P_4 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$	78
4.9	Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_2 et P_3 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$	79
4.10	Lignes de courant obtenues avec les modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas). Écoulement dans une conduite courbée à 180° , $De = 0.3$	82
4.11	Comparaison des profils de vitesse U_1 et U_2 adimensionnés par la vitesse débitante en sortie U_C le long de la coupe M_2 ($x_2 = 0$), $De = 0.3$	83
4.12	Contours de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	84
4.13	Contours de la seconde composante normale T_{22} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	85
4.14	Contours de la composante de cisaillement T_{12} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)	86
4.15	Comparaison des profils des composantes T_{11} et T_{12} du tenseur viscoélastique le long de la section M_1 ($x_1 = -1.0$), $De = 0.3$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$	87
4.16	Comparaison des profils des composantes T_{12} et T_{22} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 ($x_2 = 0$), $De = 0.3$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$	88

4.17	Profils de la composante T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$ le long des trois coupes transverses M_3, M_4, M_5 respectivement situées en $x_1 = -0.3, x_1 = -0.5$ et $x_1 = -1$ le long du canal de sortie. Modèle d'Oldroyd-B, $De = 0.3$	89
4.18	Comparaison des profils de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 ($x_2 = 0$). Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B, MAS-1-IM et MAS-2-IM	90
4.19	Comparaison des profils de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 en $x_2 = 0$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B, MAS-1 et MAS-2	91
4.20	Profils de la première différence de contrainte $N_1 = T_{11} - T_{22} $ le long de la section M_2 en $x_2 = 0$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$	92
4.21	Influence du nombre de Deborah sur l'indifférence matérielle le long de la coupe M_2 en $x_2 = 0.$, $De = 0.3$ (symboles vides), $De = 0.5$ (symboles pleins)	92

Liste des tableaux

1.1	Choix de la dérivée objective en fonction des coefficients c_1 et c_2	17
3.1	Valeurs limites des paramètres \bar{R} et P_C pour les mouvements à cinématique pure	48
4.1	Propriétés de la recirculation obtenue avec les modèles d'Oldroyd-B, MAS-1-IM, MAS-2-IM, $De = 0.3$	73
4.2	Tableau récapitulatif de convergence (Cv) des modèles MAS-1-IM, MAS-2-IM et Oldroyd-B en fonction du nombre de Deborah, écoulement dans une contraction planaire 4:1	93
4.3	Temps de calcul (sec.) nécessaire pour faire 1000 itérations. Écoulement dans une conduite courbée. Maillage bidimensionnel 65×15 , $De = 0.3$	94

Glossaire

$\mathcal{D}/\mathcal{D}t$	Dérivée objective
d/dt	Dérivée matérielle
∇	Opérateur Gradient
$\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$	Dérivée convective supérieure du tenseur \mathbf{T}
$\{.\}$	Opérateur de trace
β_n	Fonctions scalaires des invariants de $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{D} et \mathbf{W}
$\bar{\beta}_n$	Fonctions scalaires des invariants de $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{D} et $\bar{\mathbf{W}}$
δ_{ij}	Composantes du tenseur de Kronecker
$\dot{\epsilon}$	Taux d'élongation
ϕ	Angle entre la base constituée des vecteurs propres de \mathbf{D} et la base cartésienne
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement généralisé
$\mathbf{\Gamma}$	Déviateur du tenseur viscoélastique \mathbf{T}
$\bar{\mathbf{\Gamma}}$	Expression objective du déviateur du tenseur viscoélastique \mathbf{T}
η_p	Viscosité polymérique (non-Newtonienne)
η_s	Viscosité du solvant (Newtonienne)
λ	Temps de relaxation
Λ	Trace du tenseur viscoélastique \mathbf{T}
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
Σ	Contribution élastique des tensions viscoélastiques \mathbf{T}
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des extra-contraintes en coordonnées orthogonales généralisées
$\boldsymbol{\Omega}$	Vitesse de rotation des directions principales du tenseur taux de déformation \mathbf{D}
$d\xi_j$	Longueurs physiques infinitésimales
$(\psi_i)_{i=1,2}$	Système de coordonnées orthogonales généralisées
A	Rayon du cylindre
$\mathbf{B}^{(n)}$	Base tensorielle non-objective

$\overline{\mathbf{B}}^{(n)}$	Base tensorielle pour la formulation objective de $\mathbf{\Gamma}$
\mathbf{D}	Tenseur taux de déformation
$d\alpha_P^i$	Longueurs physiques des frontières du volume de contrôle \mathcal{V}^P
$d\alpha_{V_1}^i$	Longueurs physiques des frontières du volume de contrôle \mathcal{V}^1
$d\alpha_{V_2}^i$	Longueurs physiques des frontières du volume de contrôle \mathcal{V}^2
D_e	Nombre de Deborah
\mathbf{e}_i	Vecteurs propres normés de \mathbf{D}
g_{ij}	Composantes du tenseur métrique
H	Hauteur de sortie de la conduite
$H_1^2 cv_1$	Facteur d'étirement H_1^2 calculé au centre du volume \mathcal{V}^1
$H_1^2 fsv_1$	Facteur d'étirement H_1^2 calculé au centre de la face sud du volume \mathcal{V}^1
$H_1^2 p$	Facteur d'étirement H_1^2 calculé au noeud de pression p
$H_2^1 cv_1$	Facteur d'étirement H_2^1 calculé au centre du volume \mathcal{V}^1
H_i^j	Facteur d'étirement du maillage orthogonal
h_j	Facteurs d'échelle
\mathbf{I}	Tenseur identité
\mathbf{J}	Matrice Jacobienne de la transformation $x_i \rightarrow \psi_i$
\mathbf{L}	Tenseur gradient de vitesse généralisé
L_A	Longueur de la recirculation (écoulement autour d'un cylindre)
L_e	Longueur du canal rectangulaire d'entrée et de sortie (écoulement dans une conduite courbée à 180°)
\mathbf{M}^T	Transposée du tenseur \mathbf{M}
p	Pression statique
P_C	Paramètre de classification des écoulements
Re	Nombre de Reynolds
S^P	Surface délimitant le volume de contrôle \mathcal{V}^P
\mathbf{T}	Contribution polymérique du tenseur des contraintes
\mathcal{T}	Tenseur polymérique en coordonnées orthogonales généralisées
\mathbf{U}	Champ de vitesse cartésien
U_0	..	Vitesse uniforme imposée à l'entrée du domaine (écoulement autour d'un cylindre)
U_a	...	Vitesse débitante en sortie de conduite (écoulement dans une contraction planeaire 4:1)
U_c	Vitesse débitante en sortie de conduite (écoulement dans une conduite courbée à 180°)

\mathbf{V}	Champ de vitesse contravariante physique
\mathbf{v}	Vitesse contravariante curviligne
\mathcal{V}^P	Volume de contrôle centré sur le noeud de pression
\mathcal{V}^{V_1}	Volume de contrôle centré sur la composante de vitesse V_1
\mathcal{V}^{V_2}	Volume de contrôle centré sur la composante de vitesse V_2
\mathbf{W}	Tenseur taux de rotation relatif
$\overline{\mathbf{W}}$	Tenseur taux de rotation absolu
$(x_i)_{i=1,2}$	Système de coordonnées cartésiennes

Introduction

L'étude des fluides viscoélastiques suscite un intérêt scientifique grandissant. En effet, ces fluides complexes sont présents dans de nombreux processus industriels, dans des domaines aussi variés que l'agroalimentaire, la métallurgie, le médical, la plasturgie, l'industrie pétrolière, pour n'en citer que quelques uns. Cependant la plupart des procédés industriels utilisant les fluides viscoélastiques ont été mis au point et développés en adoptant des méthodes « empiriques », généralement basées sur un savoir faire industriel connu mais pas toujours précis et très coûteux en temps et en ressource humaine. C'est le cas par exemple pour les procédés d'extrusion du caoutchouc présents dans l'industrie pneumatique. En effet, ce procédé d'extrusion du polymère résulte d'un processus complexe et le choix de la filière d'extrusion se fait principalement de manière empirique, nécessitant plusieurs itérations avant d'obtenir la forme d'extrudat souhaitée. Impliquant le blocage des lignes de production, ces itérations sont très pénalisantes et très coûteuses pour l'industriel.

Le développement récent de la rhéologie théorique et expérimentale, couplé aux performances toujours croissantes des ordinateurs, permet aujourd'hui d'avoir une approche différente et d'envisager des prédictions numériques sur des géométries complexes. Malheureusement, avec les modèles actuels de type différentiel, les simulations de fluides viscoélastiques sur des géométries complexes se heurtent encore aux limites en ressources mémoires et à des temps de calculs prohibitifs. La plupart des simulations numériques se limitent donc à des configurations simples, souvent bidimensionnelles, éloignées des besoins industriels. Le développement de lois constitutives algébriques pour les fluides viscoélastiques, moins coûteuses en temps de calcul et en ressource mémoire que les modèles différentiels existants, est donc une voie de recherche pertinente pour répondre à ces problématiques industrielles.

Le développement de modèles algébriques constitutifs pour les fluides viscoélastiques est inspiré des travaux réalisés dans le domaine des écoulements Newtoniens turbulents.

En effet, les modèles algébriques dans le domaine de la turbulence dérivent des modèles différentiels existant par une méthode de réduction tensorielle. Cette procédure de réduction a été appliquée aux équations constitutives différentielles de fluides viscoélastiques par Mompean et al. [22], [23]. Ces études montrent que, pour un seul mode et pour un écoulement tridimensionnel, les six équations du modèle différentiel peuvent être remplacées par une seule équation de transport et des expressions tensorielles explicites pour les tensions. Le gain en terme de coût de calcul est donc particulièrement significatif. Le spectre d'applications étant relativement large, le développement des modèles algébriques de fluides viscoélastiques ouvre de nombreuses perspectives.

Dans le premier chapitre, nous présenterons tout d'abord quelques généralités sur les fluides viscoélastiques et leurs modélisations. Nous détaillerons les équations régissant les écoulements viscoélastiques, ainsi que les différentes lois constitutives considérées dans cette étude, en distinguant les modèles différentiels existants et les modèles algébriques nouvellement proposés. Toute loi constitutive doit respecter les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus. Un de ces principes est celui de l'indifférence matérielle. Il stipule que toute loi constitutive doit être invariante quel que soit le référentiel de référence choisi pour décrire le mouvement. Ce principe sera analysé plus en détails dans cette thèse et plus particulièrement dans le cadre du développement de nouveaux modèles algébriques. Une revue bibliographique concernant ce principe est présentée, ainsi que ses conséquences directes sur les lois algébriques de fluides viscoélastiques. Deux nouveaux modèles algébriques simplifiés, inspirés directement des formulations générales proposées par Mompean et al. [22], [23] sont également développés dans cette section. Afin de voir l'influence de l'indifférence matérielle sur les prédictions générales des modèles algébriques, on considérera pour chacun de ces modèles les formulations objective (respectant le principe d'indifférence matérielle) et non-objective.

Le second chapitre est consacré au traitement numérique des équations du mouvement et des équations constitutives. L'écriture de ces équations en coordonnées orthogonales généralisées est tout d'abord présentée. Cette écriture est particulièrement intéressante pour les simulations d'écoulements dans des géométries présentant des frontières courbes. Les schémas numériques utilisés, ainsi que les discrétisations temporelle et spatiale choisies seront également traités. La prise en compte de l'indifférence matérielle pour les modèles algébriques se manifeste par le calcul de la vitesse de rotation des vecteurs propres du

tenseur taux de déformation. La méthode de calcul adoptée ici sera également explicitée dans la dernière section de ce chapitre.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude cinématique de l'indifférence matérielle par le calcul de la vitesse de rotation des vecteurs propres du tenseur taux de déformation. On procède tout d'abord à une analyse sur des écoulements viscométriques simples (élongation uniforme, écoulement de Couette, et cisaillement simple sans rotation), puis sur trois géométries complexes : écoulement dans une contraction 4:1, autour d'un cylindre et dans une conduite courbée à 180°. On cherche ici à comprendre et à quantifier le rôle de l'indifférence matérielle en précisant les zones de l'écoulement où le taux de rotation des vecteurs propres du tenseur taux de déformation est significatif.

Le dernier chapitre traite de l'étude dynamique des nouveaux modèles algébriques simplifiés développés dans cette étude. En particulier, on étudie l'aptitude de ces modèles à reproduire les tensions viscoélastiques obtenues avec le modèle différentiel d'Oldroyd-B. Les résultats du modèle d'Oldroyd-B sont ici comparés à ceux issus des modèles algébriques pour deux géométries à cinématiques bien distinctes : l'écoulement dans une contraction 4:1 et l'écoulement dans une conduite courbée à 180°. Les conséquences de la prise en compte de l'indifférence matérielle pour les modèles algébriques, par comparaison entre les tensions calculées à l'aide des modèles objectifs et non-objectifs, sont également présentées.

Enfin nous concluons et présentons quelques perspectives pour clôturer ce mémoire.

Chapitre 1

Les fluides viscoélastiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions importantes sur la dynamique des fluides viscoélastiques. Après une description phénoménologique du comportement de ces fluides, nous nous intéresserons à leur modélisation mathématique en adoptant l'approche macroscopique de la mécanique des milieux continus. Deux types de modèles seront ici distingués : les modèles différentiels et les modèles algébriques.

1.1 Description phénoménologique

Le comportement viscoélastique est fréquemment observé dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. Un fluide viscoélastique soumis à une déformation donnée présente une réponse intermédiaire entre celle d'un solide élastique, pour lequel la contrainte est proportionnelle à la déformation, et celle d'un fluide visqueux caractérisée par une contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation. Cette réponse va dépendre en partie du rapport entre le temps de la sollicitation et le temps caractéristique (appelé aussi temps de relaxation) du matériau viscoélastique. Si le temps de sollicitation est petit devant le temps caractéristique du matériau, les composants du matériau n'ont pas le temps de se déformer et on observe une réponse élastique. Si le temps de sollicitation est grand devant le temps caractéristique, la réponse sera de type visqueux. Certaines propriétés non-Newtoniennes des fluides viscoélastiques sont fondamentales pour la modélisation, et ont donc des conséquences directes sur la description théorique de ces derniers [1], [7]. Parmi les phénomènes les plus importants, on peut citer :

(i) La dépendance de la viscosité au taux de cisaillement

Contrairement aux fluides Newtoniens, la viscosité d'un matériau viscoélastique n'est pas

une constante matérielle mais dépend directement du gradient de vitesse local, ou taux de cisaillement généralisé $\dot{\gamma}$. Dans la plupart des cas, la viscosité décroît lorsque le taux de cisaillement augmente (phénomène de rhéofluidification), mais certains fluides peuvent avoir le comportement inverse, leur viscosité augmentant avec le taux de cisaillement (phénomène de rhéoépaississement).

(ii) Anisotropie des contraintes normales

Pour un fluide Newtonien, la force perpendiculaire agissant sur la surface d'un élément fluide (contrainte normale) ne dépend pas de l'orientation de cette surface. Pour les fluides viscoélastiques, ceci n'est pas vérifié. Un matériau sollicité peut en effet engendrer une contrainte supplémentaire dans la direction de la sollicitation. Ceci provoque donc des différences entre les contraintes normales. Cette propriété des fluides viscoélastiques est souvent illustrée par l'effet Weissenberg (ascension du fluide le long d'un barreau en rotation).

(iii) Relaxation de contraintes et effet de mémoire

Dans un écoulement d'extrusion d'un fluide viscoélastique en sortie d'une contraction, on observe un gonflement de la surface libre dû à la relaxation des contraintes normales accumulées par le fluide pendant son trajet à l'intérieur du tube. Le fluide garde « une mémoire » de son état initial. Cet effet d'expansion est très fréquent dans les procédés industriels d'extrusion des polymères fondus.

On voit ici la difficulté à décrire théoriquement ces nombreuses particularités relatives aux fluides viscoélastiques. L'étude de ces fluides relève de la rhéologie.

1.2 Description théorique

La description du comportement d'un fluide viscoélastique nécessite la résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, couplée à une équation constitutive permettant de décrire les effets viscoélastiques. Deux approches peuvent être considérées pour la modélisation des écoulements viscoélastiques : une approche microscopique traitant des relations entre la structure à l'échelle des chaînes polymériques et les grandeurs énergétiques, et une approche macroscopique, basée sur la mécanique des milieux continus. C'est cette dernière approche qui est considérée ici.

1.2.1 Équations de conservation

On considère dans ce qui suit l'écoulement d'un fluide viscoélastique incompressible. Les équations de conservation s'écrivent :

(i) Conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

(ii) Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla (-p\mathbf{I} + 2\eta_s\mathbf{D} + \mathbf{T}), \quad (1.2)$$

où d/dt est la dérivée matérielle par rapport au temps, \mathbf{v} est le champ de vitesse, \mathbf{I} le tenseur identité, ρ la masse volumique du fluide, p la pression, η_s la viscosité du solvant (Newtonienne). Le tenseur symétrique \mathbf{D} des taux de déformation est donné par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T), \quad (1.3)$$

où $(\nabla\mathbf{v})_{ij} = \partial v_j / \partial x_i$ est le gradient de vitesse, et $\nabla\mathbf{v}^T$ est sa transposée. Afin de clarifier les propos, on définit ici le tenseur des extra-contraintes comme la somme de toutes les contraintes autres que celles liées à la pression. La contribution polymérique des contraintes \mathbf{T} caractérise donc la partie non-Newtonienne du tenseur des extra-contraintes. Il est modélisé par une équation constitutive.

1.2.2 Équations constitutives pour un fluide non-Newtonien

Dans le cas isotherme, la simulation numérique d'un écoulement fluide nécessite la résolution des équations de conservation de la masse (1.1) et de la quantité de mouvement (1.2). Le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations disponibles, il est nécessaire de coupler les équations du mouvement avec une autre relation afin de fermer le problème. Cette relation, loi de comportement ou loi constitutive, est généralement formulée comme une relation entre les contraintes et le tenseur taux de déformation. Elle a pour but de modéliser les effets non-Newtoniens du fluide.

1.2.2.1 Modèles Newtoniens généralisés

Une première approche simple pour modéliser les fluides non-Newtoniens est de généraliser le modèle Newtonien en introduisant une viscosité dite « apparente » ou « équivalente »,

$$\eta_{ap} = f(\dot{\gamma}), \quad (1.4)$$

fonction du taux de cisaillement généralisé $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbf{D}}$.

Plusieurs modèles existent, dépendant essentiellement du nombre de paramètres qu'ils comportent. On distingue par exemple les modèles à deux paramètres (loi de Ostwald-De Waele [10]), ou à trois paramètres (loi de Carreau ou d'Ellis [8]). Ces schémas simples, très utilisés dans l'industrie, permettent de modéliser certains phénomènes importants des fluides non-Newtoniens tels que la rhéofluidification ou le rhéoépaississement. Toutefois, ils s'avèrent insuffisants pour décrire le comportement complet d'un fluide viscoélastique : première et seconde différence normale de contraintes non nulles, élasticité et phénomène de mémoire ne sont pas pris en compte.

1.2.2.2 Modèles viscoélastiques différentiels

Afin d'améliorer cette modélisation, une autre représentation a été proposée, assimilant le comportement viscoélastique à une association de ressort (contribution élastique) et d'amortisseur (contribution visqueuse), montée en parallèle ou en série afin d'obtenir la représentation la plus proche possible du comportement dynamique du fluide. Ces modèles analogiques sont des moyens efficaces pour construire une loi de comportement, et constituent la base des modèles différentiels actuels.

Les modèles de Kelvin-Voigt ainsi que les modèles de Maxwell ont été développés suivant ces considérations [8]. Les modèles ainsi obtenus sont dits « différentiels », car ils nécessitent la résolution d'une équation aux dérivées partielles pour chaque composante de tension polymérique. De nombreux modèles dérivant de celui de Maxwell ont été développés. Un des plus présents dans la littérature est celui d'Oldroyd-B.

(i) Le modèle d'Oldroyd-B

Le tenseur des tensions viscoélastiques pour le modèle d'Oldroyd-B obéit à l'équation

suivante [27] :

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (1.5)$$

où λ est le temps de relaxation, η_p la viscosité polymérique et $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ la dérivée convective supérieure de \mathbf{T} , définie par :

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{T} - \mathbf{T} \nabla \mathbf{v}. \quad (1.6)$$

Cette loi diffère du modèle de Maxwell par l'ajout d'une contribution Newtonienne dans l'expression du tenseur des extra-contraintes. Il se comporte comme le modèle de Maxwell en écoulement viscométrique, et est caractérisé par une viscosité de cisaillement constante. La première différence de contraintes normales varie quadratiquement suivant le taux de cisaillement, la seconde différence de contraintes normales est nulle. Cependant, certains problèmes numériques sont constatés, notamment concernant la viscosité élongationnelle qui peut tendre vers l'infini à certains taux d'élongation. Ceci limite les simulations aux fluides de faible élasticité.

(ii) Autres modèles différentiels

De nombreux autres modèles ont été élaborés afin de reproduire certaines propriétés remarquables des fluides viscoélastiques. Il est évident qu'établir une relation constitutive reproduisant tous les effets viscoélastiques observés est une tâche complexe. On peut citer en exemple les modèles différentiels rhéologiques de Giesekus [15], Phan-Thien-Tanner [28], FENE-P, principalement adaptés aux fluides rhéofluidifiants.

1.2.2.3 Modèles algébriques explicites

Le développement des modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques se base sur une méthodologie développée initialement pour la modélisation des écoulements Newtoniens turbulents. L'objectif est, dans le cas de la turbulence, de simplifier les équations de transport du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds [14] : l'équation différentielle de transport pour le tenseur des contraintes de Reynolds est alors approchée par une relation tensorielle explicite. Les modèles algébriques turbulents dérivent des modèles différentiels par une méthode de réduction tensorielle. Cette méthodologie peut être directe-

ment appliquée aux équations de fluides viscoélastiques et notamment au modèle différentiel d'Oldroyd-B [22], [23].

Méthode de réduction du modèle d'Oldroyd-B

L'équation constitutive d'Oldroyd-B peut être réécrite en fonction du tenseur taux de déformation (1.3) et du tenseur taux de rotation relatif, défini comme :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T). \quad (1.7)$$

L'équation (1.5) s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{1}{\lambda}\mathbf{T} + \frac{2\eta_p}{\lambda}\mathbf{D} + (\mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{D}) - (\mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}). \quad (1.8)$$

Afin d'utiliser cette méthodologie, il est nécessaire de travailler avec un tenseur à trace nulle. On introduit donc la partie déviatrice du tenseur des tensions polymériques \mathbf{T} , définie comme :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}\Lambda\mathbf{I}, \quad (1.9)$$

où $\Lambda = \{\mathbf{T}\}$ est la trace du tenseur viscoélastique \mathbf{T} , avec $\{\cdot\}$ qui désigne l'opérateur de trace.

(i) Équation de transport pour Λ

En prenant la trace de l'équation (1.8), on montre que Λ satisfait l'équation de transport :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 2\{\mathbf{T}\mathbf{D}\} - \frac{\Lambda}{\lambda}. \quad (1.10)$$

En multipliant l'expression (1.9) par \mathbf{D} , et en prenant la trace, on montre que :

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}\} = \{\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\} \quad (1.11)$$

L'équation (1.10) devient :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 2\{\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\} - \frac{\Lambda}{\lambda}. \quad (1.12)$$

(ii) Expression algébrique pour Γ

En combinant les équations (1.8) et (1.9), nous obtenons l'équation pour la partie déviatrice du tenseur \mathbf{T} :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{d\Lambda}{dt}\mathbf{I} - \frac{1}{3}\frac{\Lambda}{\lambda}\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda}\Gamma + (\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D}) - (\Gamma\mathbf{W} - \mathbf{W}\Gamma) + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\mathbf{D}. \quad (1.13)$$

Si l'on considère l'équation de la trace (1.12), on peut écrire :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{\lambda}\Gamma + (\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D} - \frac{2}{3}\{\Gamma\mathbf{D}\}\mathbf{I}) - (\Gamma\mathbf{W} - \mathbf{W}\Gamma) + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\mathbf{D}. \quad (1.14)$$

En remarquant que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) = \frac{1}{\Lambda}\frac{d\Gamma}{dt} - \frac{\Gamma}{\Lambda^2}\frac{d\Lambda}{dt}, \quad (1.15)$$

on peut normaliser la partie déviatrice du tenseur des tensions polymériques \mathbf{T} par Λ . L'équation (1.14) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\Lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) + \frac{1}{\Lambda}\frac{d\Lambda}{dt}\Gamma = -\frac{1}{\lambda}\Gamma + (\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D} - \frac{2}{3}\{\Gamma\mathbf{D}\}\mathbf{I}) - (\Gamma\mathbf{W} - \mathbf{W}\Gamma) + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\mathbf{D}. \quad (1.16)$$

Si l'on remplace l'expression de $d\Lambda/dt$ (1.12) dans l'équation (1.16), on obtient finalement :

$$\Lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) = -\frac{2\{\Gamma\mathbf{D}\}}{\Lambda}\Gamma + (\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D} - \frac{2}{3}\{\Gamma\mathbf{D}\}\mathbf{I}) - (\Gamma\mathbf{W} - \mathbf{W}\Gamma) + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\mathbf{D}. \quad (1.17)$$

Hypothèse d'équilibre

Afin d'obtenir les modèles algébriques, Mompean et al. [22] posent l'hypothèse d'équilibre :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) \simeq \mathbf{0}. \quad (1.18)$$

Si l'on applique cette hypothèse d'équilibre à l'équation (1.17), on obtient alors une forme réduite de l'équation d'Oldroyd-B :

$$0 = -\frac{2\{\Gamma\mathbf{D}\}}{\Lambda}\Gamma + (\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D} - \frac{2}{3}\{\Gamma\mathbf{D}\}\mathbf{I}) - (\Gamma\mathbf{W} - \mathbf{W}\Gamma) + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\mathbf{D}. \quad (1.19)$$

À partir de l'équation (1.19), on montre que le tenseur $\mathbf{\Gamma}$ peut s'écrire à l'aide d'une relation algébrique explicite, fonction des tenseurs taux de rotation relatif \mathbf{W} et taux de déformation \mathbf{D} .

Formulation des modèles algébriques

Rivlin et Ericksen [32] montrent qu'il est possible d'établir une relation linéaire entre le tenseur des contraintes viscoélastiques et certaines fonctions matricielles dépendant des tenseurs taux de déformation et taux de rotation relatif. D'une manière générale et pour un écoulement bidimensionnel, $\mathbf{\Gamma}$ peut être mis sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{D}, \mathbf{W}) = \sum_{n=1}^3 \beta_n \mathbf{B}^{(n)}, \quad (1.20)$$

où les $\mathbf{B}^{(n)}$ constituent une base tensorielle fonction des tenseurs taux de rotation relatif et taux de déformation, et les β_n sont des fonctions scalaires, calculées en fonction des invariants de $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{D} et \mathbf{W} . Pour les besoins de notre étude, nous appliquons cette méthodologie au cas d'un écoulement bi-dimensionnel. On obtient alors la relation algébrique explicite (voir [17]) :

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\{\mathbf{\Gamma D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}} \mathbf{B}^{(1)} + \frac{\{\mathbf{\Gamma W D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}\{\mathbf{W}^2\}} \mathbf{B}^{(2)} + \frac{6\{\mathbf{\Gamma D}^2\}}{\{\mathbf{D}^2\}^2} \mathbf{B}^{(3)}, \quad (1.21)$$

où la base tensorielle considérée est :

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{D W} - \mathbf{W D}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{D}^2\}\mathbf{I}. \quad (1.22)$$

L'expression (1.21) peut être simplifiée en déterminant les trois invariants scalaires $\{\mathbf{\Gamma D}\}$, $\{\mathbf{\Gamma D}^2\}$, $\{\mathbf{\Gamma W D}\}$. En multipliant l'équation (1.19) par \mathbf{D} , et en prenant la trace de l'expression obtenue, on obtient :

$$\frac{2\{\mathbf{\Gamma D}\}^2}{\Lambda} = \{\mathbf{\Gamma D}^2\} - \{\mathbf{\Gamma W D}\} + 2\left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \frac{\Lambda}{3}\right)\{\mathbf{D}^2\}. \quad (1.23)$$

De même, en multipliant l'équation (1.19) respectivement par \mathbf{D}^2 et par $\mathbf{W D}$, et en prenant la trace de l'expression obtenue, on obtient les expressions de $\{\mathbf{\Gamma D}^2\}$ et $\{\mathbf{\Gamma W D}\}$:

$$\{\mathbf{\Gamma D}^2\} = \frac{\Lambda}{6}\{\mathbf{D}^2\}. \quad (1.24)$$

$$\{\mathbf{\Gamma WD}\} = -\frac{\Lambda}{2}\{\mathbf{W}^2\}. \quad (1.25)$$

En remplaçant (1.24) et (1.25) dans (1.21), on obtient une expression algébrique du tenseur des contraintes viscoélastiques $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\{\mathbf{\Gamma D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}}\mathbf{D} - \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{\mathbf{DW} - \mathbf{WD}}{\{\mathbf{D}^2\}}\right) + \Lambda\left(\frac{\mathbf{D}^2}{\{\mathbf{D}^2\}} - \frac{\mathbf{I}}{3}\right). \quad (1.26)$$

Si l'on considère un écoulement bidimensionnel, la résolution des 3 équations du modèle différentiel est donc remplacée par une seule équation de transport pour la trace du tenseur viscoélastique (1.10) et trois expressions algébriques explicites pour les tensions (1.26). Le gain en terme de coût de calcul est donc évident par rapport au modèle différentiel. Ce facteur de gain s'accroît d'autant plus si l'on considère un fluide multi-modes.

On peut montrer que les modèles ainsi constitués basés sur l'équation d'équilibre (1.18) ne respectent pas le principe d'indifférence matérielle [37], [27]. Bien que fondamentaux, l'importance et le rôle de l'indifférence matérielle dans la constitution des lois de comportement restent des sujets très discutés [19], [25]. Afin d'éviter certaines confusions que l'on retrouve par ailleurs dans la littérature, il convient ici de le définir plus en détail.

1.3 Modèles algébriques et indifférence matérielle

Le principe d'indifférence matérielle requiert que toute loi constitutive d'un matériau doit être indépendante de l'observateur, c'est-à-dire qu'elle doit être invariante par changement de référentiel. Ceci est une conséquence directe d'un principe fondamental de la physique classique qui stipule que toute propriété matérielle doit être invariante quel que soit le repère de référence de l'observateur.

Le principe d'indifférence matérielle résulte de deux concepts : l'objectivité Euclidienne et le principe d'invariance. L'objectivité Euclidienne stipule que les quantités physiques et

tenseurs, comme le flux de chaleur ou les tensions, doivent être invariants par changement de référentiel. Le principe d'invariance implique que la forme elle-même de l'équation constitutive ne doit pas dépendre de l'observateur choisi.

1.3.1 Objectivité Euclidienne

L'objectivité Euclidienne, ou de manière abrégée « objectivité », a été prise en compte dans les travaux d'Oldroyd [27], qui introduit une dérivée objective dans l'écriture de ses modèles différentiels viscoélastiques (1.6). Elle peut se traduire de manière tensorielle : si l'on se place dans l'espace Euclidien, tout changement de repère peut être décomposé en une translation et une rotation fonctions du temps. Le vecteur position $\mathbf{X}^*(t)$ du point M, à l'instant t , dans un repère fixe \mathcal{R}^* peut donc s'écrire :

$$\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{c}(t), \quad (1.27)$$

où $\mathbf{X}(t)$ est le vecteur position du même point au même instant dans un repère mobile \mathcal{R} , $\mathbf{Q}(t)$ et $\mathbf{c}(t)$ sont respectivement la matrice de rotation et le vecteur de translation entre les deux repères \mathcal{R} et \mathcal{R}^* . Un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 respecte le principe d'objectivité Euclidienne si

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \quad (1.28)$$

où \mathbf{T} est défini dans le repère \mathcal{R} , et \mathbf{T}^* est ce même tenseur exprimé dans le repère \mathcal{R}^* . À partir de l'équation (1.28), on peut montrer que le tenseur taux de déformation \mathbf{D} (1.3) est objectif, contrairement au tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} (1.7), qui mesure le taux de rotation par rapport à un repère arbitraire (Voir Annexe A).

1.3.2 Principe d'indifférence matérielle

Le principe d'indifférence matérielle énonce que toute loi constitutive doit être indépendante du référentiel choisi pour décrire le mouvement. Selon ce principe, tout mouvement rigide ne doit pas modifier la réponse d'un matériau sollicité. Celui-ci peut être traduit mathématiquement. Soit une relation constitutive $\mathbf{T} = F(\mathbf{C}_i)$ écrite dans un repère \mathcal{R} , et $\mathbf{T}^* = F^*(\mathbf{C}_i^*)$ dans un repère \mathcal{R}^* . Les $(\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i^*)_{i=1,n}$ sont des quantités relatives à chaque référentiel, F et F^* les fonctions constitutives respectives. Si l'on combine le principe

d'invariance ($F^* = F$) à celui de l'objectivité Euclidienne, on obtient la relation suivante :

$$F(\mathbf{X}_i^*) = \mathbf{Q} F(\mathbf{X}_i) \mathbf{Q}^T. \quad (1.29)$$

Cette relation est aussi appelée « condition d'objectivité matérielle » [19], ou plus simplement « relation d'objectivité », ce qui apporte parfois une certaine confusion dans la littérature. La distinction, ainsi que les dépendances entre (i) objectivité Euclidienne, (ii) principe d'invariance, et (iii) indifférence matérielle sont clairement illustrées par Bertram et Svendsen [5]. Ils montrent que si deux de ces principes sont vérifiés, alors le troisième l'est également. Des exemples de fonctions constitutives objectives pour des solides élastiques ne satisfaisant pas le principe d'indifférence matérielle ont été présentés par Liu [19]. Il est également connu que la théorie cinétique des gaz ne respecte pas le principe d'indifférence matérielle [24]. De même, ce principe n'est pas vérifié pour la turbulence tridimensionnelle. Speziale [34] montre que, bien que les contraintes de Reynolds soient objectives, les équations de transport de ces contraintes ne satisfont pas le principe d'indifférence matérielle. Pour que ce principe soit vérifié, la dynamique de l'écoulement doit présenter une séparation des échelles de temps entre l'écoulement moyen et l'écoulement turbulent. Celle-ci n'est pas vérifiée en turbulence 3D, mais l'est en turbulence 2D.

1.3.3 Conséquences de l'indifférence matérielle sur les modèles algébriques

Du fait de l'utilisation d'une dérivée objective (1.6), le modèle d'Oldroyd-B respecte le principe d'indifférence matérielle. Bien que dérivant de ce modèle, les modèles algébriques de fluides viscoélastiques reposant sur l'hypothèse d'équilibre (1.18) ne satisfont pas ce principe. La dépendance du référentiel provient de l'utilisation de la dérivée matérielle non-objective dans l'hypothèse d'équilibre (1.18). De plus, le tenseur taux de rotation relatif (1.7) n'étant pas objectif, on montre que toute équation constitutive fonction du tenseur taux de rotation relatif ne peut satisfaire le principe d'indifférence matérielle [34].

Tenseur taux de rotation absolu

La non-objectivité du tenseur \mathbf{W} a été discutée par Drouot [12], qui introduit alors un tenseur taux de rotation objectif $\overline{\mathbf{W}}$, défini comme la différence :

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.30)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse de rotation des directions principales du tenseur taux de déformation \mathbf{D} . Mathématiquement, $\boldsymbol{\Omega}$ est donné par la relation :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (1.31)$$

où les \mathbf{e}_i sont les vecteurs propres normés de \mathbf{D} . Ce nouveau tenseur $\overline{\mathbf{W}}$ mesure le taux de rotation d'une particule par rapport à la direction de déformation maximale de la particule. Nous le définirons dans ce qui suit comme le tenseur **taux de rotation absolu** ou encore **vorticité absolue**. Bien que les tenseurs \mathbf{W} et $\boldsymbol{\Omega}$ ne soient pas objectifs, leur différence $\overline{\mathbf{W}}$ est objective (Voir Annexe A). Dans de récentes études, cette vorticité absolue $\overline{\mathbf{W}}$ est utilisée afin d'obtenir une formulation des modèles algébriques respectant le principe d'indifférence matérielle. C'est le cas de Rumsey et al. [33] pour des modèles de turbulence, et de Mompean et al. [23] pour les modèles de fluides viscoélastiques.

Hypothèse d'équilibre objective

Mompean et al. [23] montrent qu'il est possible d'obtenir une expression objective des modèles algébriques de tensions en utilisant une dérivée objective à la place de la dérivée matérielle dans l'équation (1.18). On se base cette fois-ci sur une hypothèse d'équilibre objective, de la forme :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\Lambda} \right) = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

où $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ est cette fois une dérivée objective. L'équation (1.32) peut également s'écrire :

$$\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\Gamma}}{\mathcal{D}t} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dt}. \quad (1.33)$$

Thompson [36] propose une formulation générale de la dérivée objective pour un tenseur du second ordre. Appliquée au tenseur polymérique \mathbf{T} , on obtient :

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{T}}{\mathcal{D}t} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - c_1(\mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{D}) - c_2(\mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}) - (1 - c_2)(\mathbf{T}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{T}), \quad (1.34)$$

c_1	c_2	Dérivée objective
1	1	Upper Convected Maxwell (UCM)
-1	1	Lower Convected Maxwell (LCM)
0	1	Jaumann
0	1	Harnoy

TAB. 1.1: Choix de la dérivée objective en fonction des coefficients c_1 et c_2

où les coefficients c_1 et c_2 sont des constantes choisies selon la dérivée objective considérée (voir tableau 1.1). Si l'on combine les équations (1.9),(1.10),(1.14),(1.33),(1.34), on obtient la relation :

$$0 = -\frac{2\Gamma}{\Lambda}\{\Gamma\mathbf{D}\} + (1 - c_1) \left(\mathbf{D}\Gamma + \Gamma\mathbf{D} + \frac{2\Lambda}{3}\mathbf{D} \right) - \frac{2}{3}\{\Gamma\mathbf{D}\}\mathbf{I} - (1 - c_2)(\overline{\mathbf{W}}\Gamma - \Gamma\overline{\mathbf{W}}) + 2\frac{\eta_p}{\lambda}\mathbf{D}. \quad (1.35)$$

Le but est ici d'obtenir à partir de l'équation (1.35) une expression explicite objective de Γ . Afin de clarifier les notations, on notera $\overline{\Gamma}$ la formulation objective de Γ . En adoptant une procédure analogue à celle utilisée dans le paragraphe précédent pour un écoulement bidimensionnel, on peut écrire le tenseur $\overline{\Gamma}$ sous la forme :

$$\overline{\Gamma} = \Gamma(\mathbf{D}, \overline{\mathbf{W}}) = \sum_{n=1}^3 \overline{\beta}_n \overline{\mathbf{B}}^{(n)}, \quad (1.36)$$

où les $\overline{\mathbf{B}}^{(n)}$ constituent une base tensorielle fonction des tenseurs taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$ et taux de déformation \mathbf{D} , et les $\overline{\beta}_n$ sont des fonctions scalaires, calculées en fonction des invariants de $\overline{\Gamma}$, \mathbf{D} et $\overline{\mathbf{W}}$. En considérant la base suivante :

$$\overline{\mathbf{B}}^{(1)} = \mathbf{D}, \quad \overline{\mathbf{B}}^{(2)} = \mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\mathbf{D}, \quad \overline{\mathbf{B}}^{(3)} = \mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{D}^2\}\mathbf{I}, \quad (1.37)$$

une formulation algébrique explicite de $\overline{\Gamma}$ peut être écrite sous la forme :

$$\overline{\Gamma} = \frac{\{\overline{\Gamma}\mathbf{D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}}\mathbf{D} + \frac{\{\overline{\Gamma}\overline{\mathbf{W}}\mathbf{D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}\{\overline{\mathbf{W}}^2\}}(\mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\mathbf{D}) + \frac{6\{\overline{\Gamma}\mathbf{D}^2\}}{\{\mathbf{D}^2\}^2}(\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{D}^2\}\mathbf{I}). \quad (1.38)$$

Les invariants $\{\bar{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}\}$, $\{\bar{\Gamma}\mathbf{D}^2\}$ peuvent s'obtenir en multipliant respectivement par $\bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}$ et \mathbf{D}^2 l'équation (1.35) et en prenant la trace de l'expression obtenue. On obtient alors :

$$\{\bar{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}\} = \frac{\alpha_2}{2} \Lambda \{\bar{\mathbf{W}}^2\}, \quad (1.39)$$

$$\{\bar{\Gamma}\mathbf{D}^2\} = \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{3} \right) \Lambda \{\mathbf{D}^2\}, \quad (1.40)$$

où $\alpha_1 = 1 - c_1$ et $\alpha_2 = 1 - c_2$. Le scalaire $\{\bar{\Gamma}\mathbf{D}\}$ peut être obtenu de la même manière en multipliant l'expression (1.35) par \mathbf{D} et en prenant la trace de l'expression obtenue :

$$\{\bar{\Gamma}\mathbf{D}\}^2 = \left(\frac{\eta_p}{\lambda} + \left(\frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{1}{3} \right) \Lambda \right) \Lambda \{\mathbf{D}^2\} + \frac{\alpha_2^2}{2} \Lambda^2 \{\bar{\mathbf{W}}^2\}. \quad (1.41)$$

En remplaçant les expressions (1.39) et (1.40) dans l'équation (1.38), on obtient une formulation algébrique explicite objective du tenseur $\bar{\Gamma}$. On a alors :

$$\bar{\Gamma} = \frac{\{\bar{\Gamma}\mathbf{D}\}}{\{\mathbf{D}^2\}} \mathbf{D} + \frac{\alpha_2 \Lambda}{2 \{\mathbf{D}^2\}} (\mathbf{D}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}}\mathbf{D}) + \Lambda (3\alpha_1 - 2) \left(\frac{\mathbf{D}^2}{\{\mathbf{D}^2\}} - \frac{\mathbf{I}}{3} \right). \quad (1.42)$$

On remarque que pour $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 1$, le modèle objectif considéré est identique au modèle non-objectif de l'équation (1.26), à l'exception du tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} remplacé par le tenseur taux de rotation absolu $\bar{\mathbf{W}}$. De plus, Mompean et al. [23] montrent que le choix de la dérivée objective $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ permet de prédire une seconde différence de contraintes normales non nulle, résultat que l'on n'obtient pas avec le modèle différentiel d'Oldroyd-B.

La prise en compte de l'indifférence matérielle dans les modèles algébriques, à travers le calcul du taux de rotation des vecteurs propres de \mathbf{D} , apporte une difficulté supplémentaire (coût numérique supplémentaire, algorithme de calcul de $\mathbf{\Omega}$, etc). Nous souhaitons ici quantifier l'importance de l'indifférence matérielle, en identifiant les régions où elle peut être négligée, et celles où elle ne peut l'être. Nous utiliserons dans le cadre de ce travail des modèles algébriques simplifiés, que nous développons dans le paragraphe suivant.

1.4 Modèles algébriques simplifiés

Nous utiliserons dans ce qui suit des modèles simplifiés dérivant directement des formulations générales non-objective (1.20) et objective (1.36) du tenseur $\mathbf{\Gamma}$. Les coefficients scalaires des modèles sont ici déterminés afin de reproduire exactement les propriétés du modèle différentiel d'Oldroyd-B en écoulement de cisaillement uniforme [11] (Voir Annexe B).

Modèle MAS-1

Pour ce modèle, si l'on reprend l'écriture (1.20), les coefficients scalaires sont donnés par :

$$\beta_1 = 2\eta_p, \quad \beta_2 = 2\eta_p\lambda, \quad \beta_3 = 4\eta_p\lambda, \quad (1.43)$$

où l'on rappelle que η_p désigne la viscosité polymérique et λ le temps de relaxation du fluide.

Dans sa version non-objective, la partie symétrique à trace nulle $\mathbf{\Gamma}$ du modèle algébrique de tensions s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = 2\eta_p \mathbf{D} + 2\eta_p\lambda (\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}) + 4\eta_p\lambda \left(\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{D}^2\}\mathbf{I} \right). \quad (1.44)$$

La version objective de ce modèle est obtenue en utilisant le tenseur taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$ à la place de \mathbf{W} :

$$\overline{\mathbf{\Gamma}} = 2\eta_p \mathbf{D} + 2\eta_p\lambda (\mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\mathbf{D}) + 4\eta_p\lambda \left(\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{D}^2\}\mathbf{I} \right). \quad (1.45)$$

On notera que, pour ce modèle simplifié, les scalaires β_i étant des constantes pures, elles sont identiques dans les formulations objective et non-objective.

Modèle MAS-2

Dans ce modèle, les coefficients scalaires sont donnés par :

$$\beta_1 = 2\eta_p, \quad \beta_2 = \frac{\Lambda}{2\{\mathbf{D}^2\}}, \quad \beta_3 = \frac{\Lambda}{\{\mathbf{D}^2\}}. \quad (1.46)$$

Si l'on considère le modèle algébrique de tensions ne respectant pas l'indifférence matérielle, $\mathbf{\Gamma}$ s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = 2\eta_p \mathbf{D} + \frac{\Lambda}{2} \frac{(\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D})}{\{\mathbf{D}^2\}} + \Lambda \left(\frac{\mathbf{D}^2}{\{\mathbf{D}^2\}} - \frac{\mathbf{I}}{3} \right). \quad (1.47)$$

La version de ce modèle respectant l'indifférence matérielle est obtenue en remplaçant le tenseur \mathbf{W} par le tenseur $\overline{\mathbf{W}}$ dans l'équation (1.47) :

$$\overline{\mathbf{\Gamma}} = 2\eta_p \mathbf{D} + \frac{\Lambda}{2} \frac{(\mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\mathbf{D})}{\{\mathbf{D}^2\}} + \Lambda \left(\frac{\mathbf{D}^2}{\{\mathbf{D}^2\}} - \frac{\mathbf{I}}{3} \right). \quad (1.48)$$

Dans ce qui suit, le suffixe -IM sera ajouté aux modèles algébriques simplifiés MAS respectant le principe d'indifférence matérielle (1.45 et 1.48). Les modèles MAS-1-IM et MAS-2-IM désigneront donc respectivement les versions des modèles MAS-1 et MAS-2 respectant l'indifférence matérielle.

Nous rappelons en outre que les modèles algébriques ainsi définis sont fermés par l'adjonction de l'équation de transport (1.12) régissant l'évolution de la trace du tenseur viscoélastique Λ .

Chapitre 2

Méthode Numérique

On évalue dans ce travail les différents modèles algébriques sur des géométries complexes ou présentant des courbures significatives. L'utilisation des coordonnées orthogonales généralisées est la solution adoptée pour appréhender ce type de géométries, et fait l'objet de la section suivante.

2.1 Équations en coordonnées orthogonales généralisées

L'étude comparative des modèles sur des écoulements présentant des courbures significatives est une étape importante pour leur validation. Pour de telles géométries complexes, l'utilisation des coordonnées orthogonales généralisées est une solution pertinente. Bien qu'induisant des complications dans les équations de conservation, les coordonnées orthogonales permettent de travailler sur des géométries complexes avec des maillages structurés. Cette technique est particulièrement adaptée pour des écoulements présentant des frontières ou un obstacle courbés. Pope [30] a écrit les équations de Navier-Stokes en coordonnées orthogonales généralisées, et a appliqué cette méthode pour simuler un écoulement turbulent bidimensionnel dans un diffuseur. Magnaudet *et al.* [20] utilisent également cette formulation pour résoudre l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien autour d'une sphère. Thais *et al.* [35] utilisent une technique similaire pour la simulation du sillage derrière un cylindre.

Nous utiliserons ici cette même approche pour résoudre l'écoulement d'un fluide viscoélastique autour d'un cylindre et dans un coude courbé à 180°. On se limitera dans ce qui suit à des écoulements bidimensionnels.

2.1.1 Système de coordonnées et métrique orthogonale

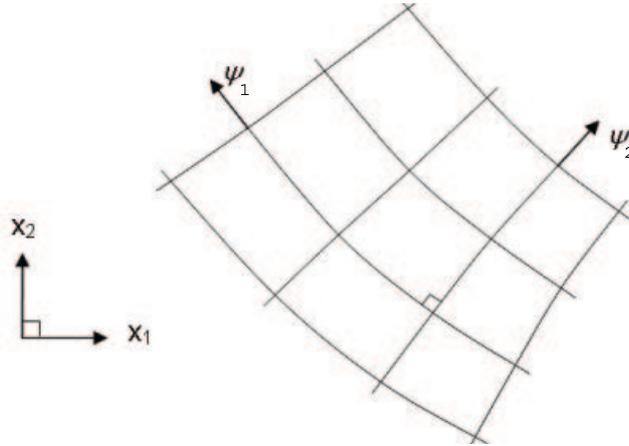


FIG. 2.1: Coordonnées orthogonales généralisées

Soit $(\psi_i)_{i=1,2}$ un système de coordonnées orthogonales généralisées, définies en fonction des coordonnées cartésiennes usuelles $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,2}$ (figure 2.1) par les relations :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_1(x_1, x_2), \\ \psi_2 &= \psi_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Le changement de coordonnée $x_i \rightarrow \psi_i$ est déterminé par la matrice jacobienne de la transformation

$$\mathbf{J} = \frac{\partial x_i}{\partial \psi_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \psi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \psi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \psi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \psi_2} \end{bmatrix}.\tag{2.2}$$

Les colonnes de la matrice Jacobienne $\mathbf{b}_j = \partial \mathbf{x} / \partial \psi_j$ représentent une base vectorielle du système de coordonnées curvilignes. L'orthogonalité des vecteurs de cette base implique que le tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j\tag{2.3}$$

est diagonal. Les facteurs d'échelle, définis comme la racine carrée des éléments diagonaux

de ce tenseur métrique, s'écrivent alors usuellement

$$h_j = \sqrt{g_{jj}}. \quad (2.4)$$

Les équations décrites par Pope [30] utilisent les longueurs physiques et les vitesses contravariantes physiques. Les dérivées spatiales sont exprimées en fonction des variations des longueurs physiques :

$$d\xi_j = h_j d\psi_j = \sqrt{g_{jj}} d\psi_j. \quad (2.5)$$

La normalisation de l'équation (2.5) est nécessaire dans l'éventualité où l'une des coordonnées orthogonales n'a pas la dimension d'une longueur (angle des coordonnées polaires par exemple). De la même manière, on définit le champ de vitesse contravariante physique

$$V_j = h_j v_j, \quad (2.6)$$

obtenu par normalisation des composantes de vitesse curvilignes $v_j = d\psi_j/dt$. On note ici que dans les équations (2.5),(2.6) aucune sommation sur l'indice j n'est à considérer.

Les symboles de Christoffel s'expriment en fonction des facteurs d'étirements H_i^j , définis par [3] :

$$H_i^j = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \psi_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j}. \quad (2.7)$$

L'opérateur de divergence généralisé vaut alors :

$$\nabla_{\cdot(i)}() = \frac{\partial()}{\partial \xi_i} + \sum_{k \neq i} H_i^k(). \quad (2.8)$$

Les composantes du gradient de vitesse généralisé \mathbf{L} s'écrivent donc

$$L_{ij} = \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - H_i^j V_i + \sum_k H_j^k V_k \delta_{ij}, \quad (2.9)$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker. À partir de l'équation (2.9) on peut en déduire les

composantes du tenseur taux de déformation \mathbf{D} ,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - H_j^i V_j - H_i^j V_i + 2 \sum_k H_i^k V_k \delta_{ij} \right), \quad (2.10)$$

ainsi que celles du tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} ,

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} - H_i^j V_i + H_j^i V_j \right). \quad (2.11)$$

2.1.2 Équations de transport en coordonnées orthogonales généralisées

Les équations aux dérivées partielles peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées orthogonales généralisées. Les règles de dérivation sont explicitées dans [30] pour la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

(i) Conservation de la masse

$$\sum_i \nabla_{\cdot(i)} (V_i) = 0, \quad (2.12)$$

(ii) Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial (\rho V_j)}{\partial t} + \sum_i \nabla_{\cdot(i)} (\rho V_i V_j - \tau_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \sum_i H_j^i (\rho V_i V_j - \tau_{ij}) + \sum_i H_i^j (\rho V_i V_i - \tau_{ii}), \quad (2.13)$$

où $\tau_{ij} = \mathcal{T}_{ij} + 2\eta_s D_{ij}$ est la somme des composantes physiques du tenseur polymérique \mathcal{T}_{ij} et des composantes des tensions Newtoniennes exprimées en coordonnées orthogonales généralisées.

(iii)-1 Équation constitutive d'Oldroyd-B

Les équations du modèle différentiel d'Oldroyd-B exprimées en coordonnées orthogonales résultent de la transformation d'un tenseur du 2ème ordre provenant de l'advection du tenseur \mathbf{T} dans (1.5). Les règles de transformation peuvent être trouvées dans [30]. On

obtient finalement :

$$\mathcal{T}_{ij} + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial t} + \sum_k \nabla \cdot (V_k \mathcal{T}_{ij}) - \sum_k H_k^i V_k \mathcal{T}_{kj} + \sum_k H_i^k V_i \mathcal{T}_{kj} \\ - \sum_k H_k^j V_k \mathcal{T}_{ik} + \sum_k H_j^k V_j \mathcal{T}_{ik} - \sum_k L_{ik} \mathcal{T}_{kj} - \sum_k L_{jk} \mathcal{T}_{ki} \end{array} \right\} = 2\eta_p D_{ij}. \quad (2.14)$$

La simulation d'un écoulement viscoélastique à l'aide du modèle d'Oldroyd-B nécessite la résolution des équations de conservation (2.12) et (2.13) et de l'équation constitutive (2.14) (une équation aux dérivées partielles par composante de tension viscoélastique). Afin d'améliorer la stabilité numérique du modèle, nous utiliserons l'algorithme EVSS (Elastic Viscous Split Stress) développé par Rajagopalan et al. [31]. Le tenseur des tensions polymériques est alors décomposé en sa composante purement élastique Σ et sa composante visqueuse :

$$\mathbf{T} = \Sigma + 2\eta_p \mathbf{D} \quad (2.15)$$

Les équations de tensions sont alors réécrites en fonction de la contribution purement élastique Σ . En appliquant le changement de variable ci-dessus, l'équation (1.5) peut s'écrire :

$$\Sigma + \lambda \overset{\nabla}{\Sigma} = -2\eta_p \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \quad (2.16)$$

Écrite en coordonnées orthogonales généralisées, l'équation (2.16) donne :

$$\Sigma_{ij} + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial t} + \sum_k \nabla \cdot (V_k \Sigma_{ij}) - \sum_k H_k^i V_k \Sigma_{kj} + \sum_k H_i^k V_i \Sigma_{kj} \\ - \sum_k H_k^j V_k \Sigma_{ik} + \sum_k H_j^k V_j \Sigma_{ik} - \sum_k L_{ik} \Sigma_{kj} - \sum_k L_{jk} \Sigma_{ki} \end{array} \right\} =$$

$$- 2\eta_p \lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{D}_{ij}}{\partial t} + \sum_k \nabla \cdot (V_k \mathbf{D}_{ij}) - \sum_k H_k^i V_k \mathbf{D}_{kj} + \sum_k H_i^k V_i \mathbf{D}_{kj} \\ - \sum_k H_k^j V_k \mathbf{D}_{ik} + \sum_k H_j^k V_j \mathbf{D}_{ik} - \sum_k L_{ik} \mathbf{D}_{kj} - \sum_k L_{jk} \mathbf{D}_{ki} \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

(iii)-2 Modèles algébriques simplifiés (MAS)

Pour les modèles algébriques MAS, les équations différentielles du modèle d'Oldroyd-B sont remplacées par une seule équation de transport pour la trace Λ (1.10), et une relation

tensorielle explicite pour les extra-tensions (1.44),(1.45),(1.47),(1.48). Si l'on prend la trace de l'équation (2.15), on constate que $\{\mathbf{T}\} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}$. Pour ces modèles, il n'est pas nécessaire de considérer le schéma EVSS.

La trace du tenseur des tensions polymériques Λ étant une quantité scalaire, le terme d'advection dans l'équation de transport (1.10) n'a pas lieu de subir de transformation. L'écriture en coordonnées orthogonales généralisées des équations d'un modèle algébrique de tensions est donc particulièrement simple. Elle requiert uniquement de transformer les expressions des tenseurs taux de rotation \mathbf{W} (ou $\overline{\mathbf{W}}$) et taux de déformation \mathbf{D} selon les relations (2.10) et (2.11).

2.1.3 Composantes de tenseurs et de vecteurs en coordonnées cartésiennes

Pour faciliter l'analyse des résultats, les composantes des vecteurs et des tenseurs sont réévaluées dans le repère cartésien (x_1, x_2) à l'issue de la résolution des équations. Les composantes de vitesses cartésiennes (U_1, U_2) s'obtiennent par la relation :

$$U_i = \sum_k J_{ik} \frac{V_k}{h_k}, \quad (2.18)$$

où $J_{ik} = \partial x_i / \partial \psi_k$ sont les composantes de la matrice Jacobienne (2.2). Les composantes cartésiennes du tenseur viscoélastique T_{ij} sont obtenues à partir de la règle de changement de base d'un tenseur du second ordre. On obtient donc

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \frac{J_{ik}}{h_k} \frac{J_{jl}}{h_l} T_{kl}. \quad (2.19)$$

2.2 Discrétisations spatiale et temporelle

La méthode utilisée pour résoudre les équations en coordonnées orthogonales généralisées est celle des volumes finis. Les équations de conservation sont intégrées sur un volume de contrôle \mathcal{V}^P , et le théorème de Gauss est utilisé pour transformer les intégrales de volume en intégrales de surface :

$$\int_{\mathcal{V}^P} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{S^P} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (2.20)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface S^P qui délimite le volume \mathcal{V}^P . Le terme de droite représente le flux de masse à travers la surface S^P . Le maillage choisi étant orthogonal, le théorème de Gauss peut être appliqué sans difficulté puisque les flux sont orthogonaux aux surfaces des volumes de contrôle. La seule difficulté, par rapport à une discrétisation des équations en repère cartésien, provient du calcul des surfaces des volumes de contrôle en raison de la courbure des « lignes » de coordonnées.

2.2.1 Localisation des variables

On utilise ici un maillage entrelacé : la pression ainsi que les tensions normales sont traitées au centre des volumes de contrôle, les vitesses sont évaluées aux centres des faces et les composantes de cisaillement du tenseur des extra-tensions sont calculées au coin des mailles

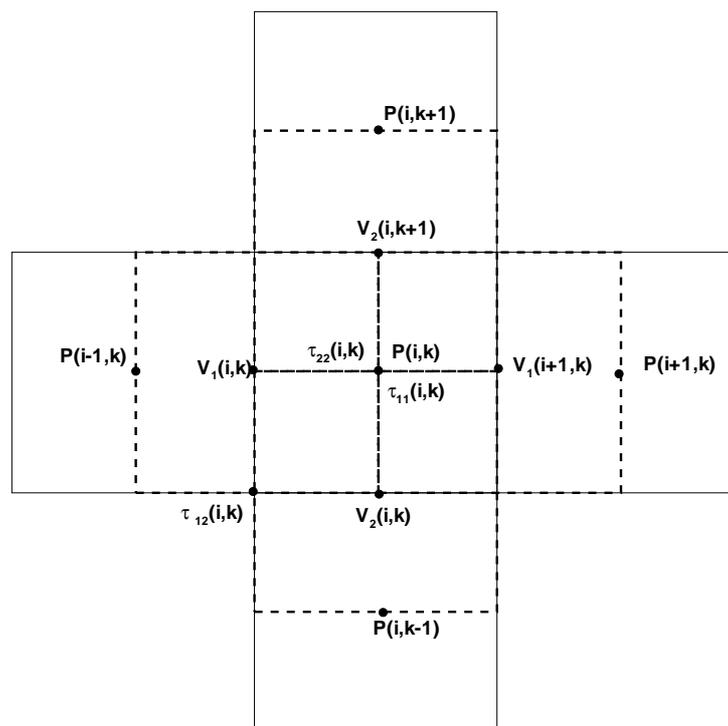
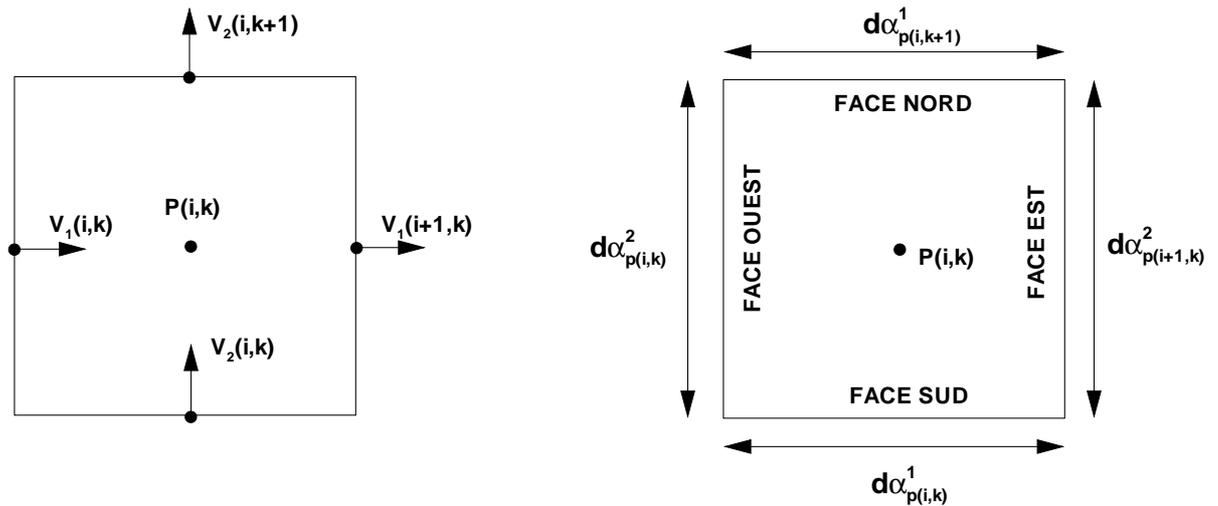


FIG. 2.2: Maillage entrelacé


 FIG. 2.3: Volume de contrôle \mathcal{V}^P

de pression. La figure (2.2) montre la position de ces variables. On utilisera ces volumes de contrôle pour exprimer les équations de bilan.

2.2.2 Discrétisation spatiale

(i) Conservation de la masse

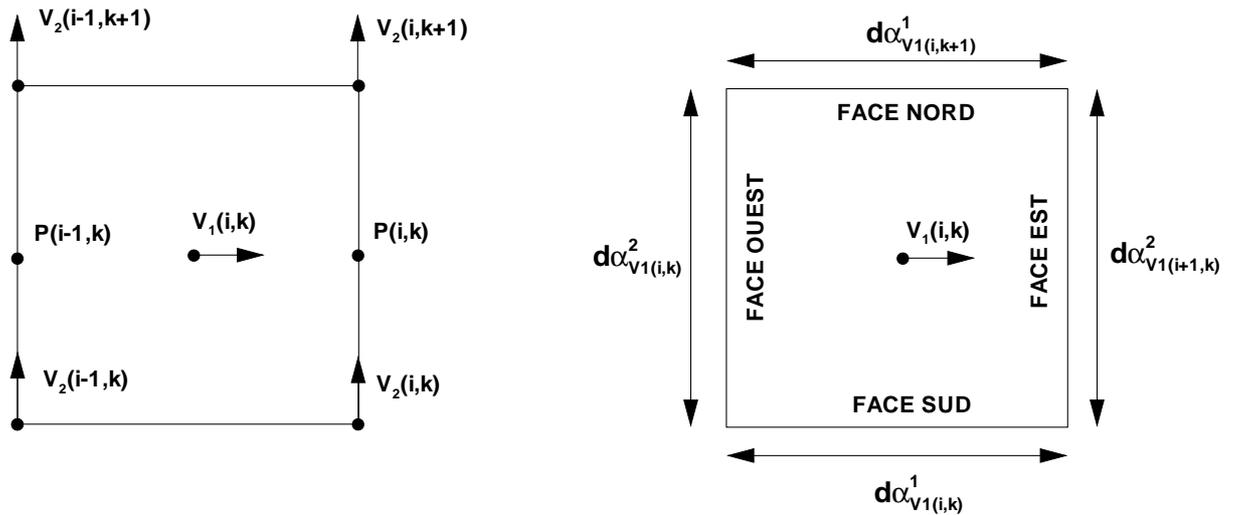
L'équation de conservation de la masse (2.12) est intégrée sur un volume de contrôle centré sur le noeud de pression \mathcal{V}^P (figure 2.3). En utilisant le théorème de Gauss, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire :

$$V_{2(i,k+1)}d\alpha_{P(i,k+1)}^1 - V_{2(i,k)}d\alpha_{P(i,k)}^1 + V_{1(i+1,k)}d\alpha_{P(i+1,k)}^2 - V_{1(i,k)}d\alpha_{P(i,k)}^2 = 0, \quad (2.21)$$

où les $d\alpha_{P(j,k)}^i$ représentent les longueurs physiques des frontières du volume de contrôle centré sur le noeud de pression (figure 2.3).

(ii) Conservation de la quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement (2.13) sont intégrées sur un volume de contrôle centré sur la composante de vitesse considérée. À titre d'illustration, nous explicitons ceci sur la composante de vitesse V_1 dans la direction ψ_1 . Les expressions pour V_2 sont similaires.

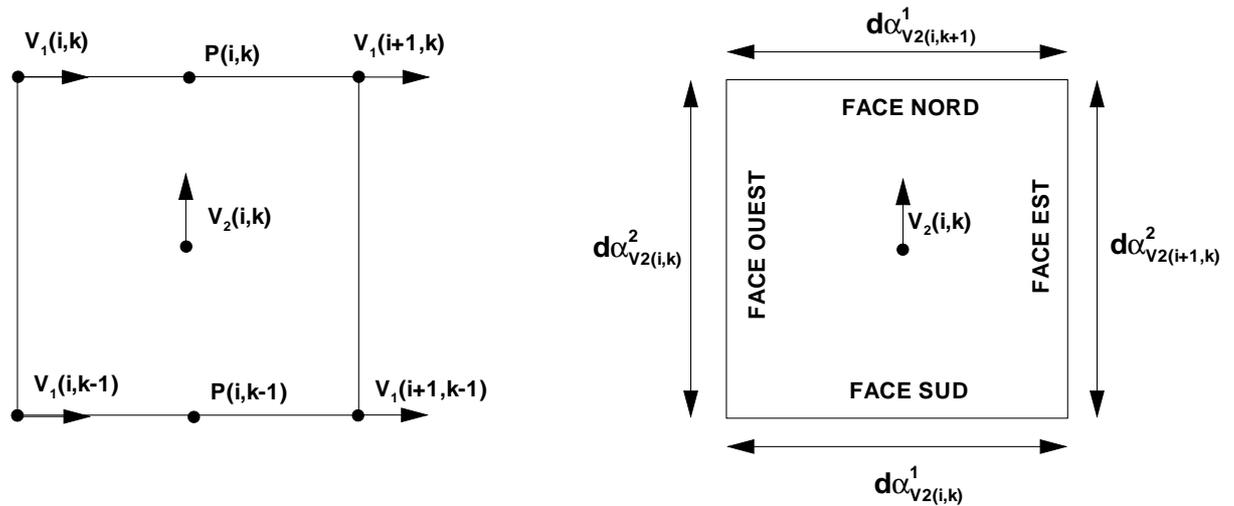

 FIG. 2.4: Volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1}

On utilise donc un volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} centré sur la composante de vitesse V_1 (figure 2.4).

L'intégration sur le volume \mathcal{V}^{V_1} et l'application du théorème de Gauss donne :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \rho V_1}{\partial t} \right) \mathcal{V}^{V_1} + \underbrace{(V_1 V_1 - \tau_{11})}_{1} d\alpha_{V_1(i+1,k)}^2 - \underbrace{(V_1 V_1 - \tau_{11})}_{2} d\alpha_{V_1(i,k)}^2 + \underbrace{(V_1 V_2 - \tau_{12})}_{3} d\alpha_{V_1(i,k+1)}^1 \\
 - \underbrace{(V_1 V_2 - \tau_{12})}_{4} d\alpha_{V_1(i,k)}^1 = \left(\frac{2(P(i,k) - P(i-1,k))}{d\alpha_{V_1(i,k)}^1 + d\alpha_{V_1(i,k+1)}^1} \right) \mathcal{V}^{V_1} \\
 + \underbrace{[H_2^1(V_2 V_2 - \tau_{22}) - H_1^2(V_2 V_1 - \tau_{21})]}_5 \mathcal{V}^{V_1},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

où les $d\alpha_{V_1(j,k)}^i$ représentent les longueurs physiques des frontières du volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} centré sur le noeud de vitesse V_1 (figure 2.4). Les termes (1), (2), (3), (4) de l'équation (2.22) sont évalués aux centres des faces du volume de contrôle considéré. Les termes d'advection $V_i V_j$ sont évalués à l'aide du schéma du second ordre QUICK (Quadratic Interpolation Scheme for Convective Kinematics) proposé par Leonard [18]. Sur les bords du domaine, un schéma upwind d'ordre 1 est utilisé.


 FIG. 2.5: Volume de contrôle \mathcal{V}^{V_2}

- **Sur la face Est (terme (1))**

- Le terme d'advection donne :

$$V_1 V_1 = \frac{1}{2} (V_1(i, k) + V_1(i + 1, k)) \left[\frac{1}{2} (V_1(i, k) + V_1(i + 1, k)) + \frac{1}{8} (2V_1(i_p, k) - V_1(i_p - 1, k) - V_1(i_p + 1, k)) \right] \quad (2.23)$$

où $i_p = i + 1$ si $\frac{1}{2} [V_1(i, k) + V_1(i + 1, k)] < 0$; et $i_p = i$ dans le cas contraire.

- Le terme de tension $\tau_{11} = \mathcal{T}_{11} + 2\eta_s D_{11}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{11} + 2\eta_s D_{11} &= \mathcal{T}_{11} + 2\eta_s \left(\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} + H_1^2 V_2 \right) \\ &= \mathcal{T}_{11}(i, k) + 2\eta_s \left(\frac{V_1(i + 1, k) - V_1(i, k)}{d\alpha_{V_2(i, k+1)}^1} + H_1^2 p(i, k) \frac{V_2(i, k + 1) + V_2(i, k)}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

où $H_1^2 p(i, k)$ est le facteur d'étirement H_1^2 calculé au noeud de pression $p(i, k)$ situé sur la frontière est du volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} , et $d\alpha_{V_2(j, k)}^i$ représentent les longueurs physiques des frontières du volume de contrôle \mathcal{V}^{V_2} centré sur la composante de vitesse V_2 (figure 2.5).

• **Sur la face Ouest (terme (2))**

- Le terme d'advection donne :

$$V_1 V_1 = \frac{1}{2} (V_1(i, k) + V_1(i-1, k)) \left[\frac{1}{2} (V_1(i, k) + V_1(i-1, k)) + \frac{1}{8} (2V_1(i_p - 1, k) - V_1(i_p - 2, k) - V_1(i_p, k)) \right] \quad (2.25)$$

où $i_p = i$ si $\frac{1}{2} [V_1(i, k) + V_1(i-1, k)] < 0$; et $i_p = i-1$ dans le cas contraire.

- Le terme de tension $\tau_{11} = \mathcal{T}_{11} + 2\eta_s D_{11}$ s'écrit :

$$\mathcal{T}_{11} + 2\eta_s D_{11} = \mathcal{T}_{11}(i, k) + 2\eta_s \left(\frac{V_1(i, k) - V_1(i-1, k)}{d\alpha_{V_2(i-1, k+1)}^1} + H_1^2 p(i-1, k) \frac{V_2(i-1, k+1) + V_2(i-1, k)}{2} \right) \quad (2.26)$$

où $H_1^2 p(i-1, k)$ est le facteur d'étirement H_1^2 calculé au noeud de pression $p(i-1, k)$ situé sur la frontière est du volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} .

• **Sur la face Nord (terme (3))**

- Le terme d'advection donne :

$$V_1 V_2 = \frac{1}{2} (V_2(i, k+1) + V_2(i-1, k+1)) \left[\frac{1}{2} (V_1(i, k) + V_1(i, k-1)) + \frac{1}{8} (2V_1(i, k_p - 1) - V_1(i, k_p - 2) - V_1(i, k_p)) \right] \quad (2.27)$$

où $k_p = k+1$ si $\frac{1}{2} [V_2(i, k+1) + V_2(i, k)] < 0$; et $k_p = k$ dans le cas contraire.

- Le terme de tension $\tau_{12} = \mathcal{T}_{12} + 2\eta_s D_{12}$ donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{12} + 2\eta_s D_{12} &= \mathcal{T}_{12} + \eta_s \left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \xi_2} - H_1^2 V_1 - H_2^1 V_2 + \right) \\
 &= \mathcal{T}_{12}(i, k) + \eta_s \left(\frac{V_2(i, k+1) - V_2(i-1, k+1)}{d\alpha_{V_1(i, k+1)}^1} + \frac{V_1(i, k+1) - V_1(i, k)}{d\alpha_{V_2(i, k+1)}^2} \right. \\
 &\quad \left. - H_2^1 f s v_1(i, k+1) \frac{V_2(i, k+1) + V_2(i-1, k+1)}{2} \right. \\
 &\quad \left. - H_1^2 f s v_1(i, k+1) \frac{V_1(i, k+1) + V_1(i, k)}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $H_1^2 f s v_1(i, k)$ est le facteur d'étirement H_1^2 calculé au centre de la face sud du volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} .

• **Sur la face Sud (terme (4))**

- Le terme d'advection donne :

$$\begin{aligned}
 V_1 V_2 &= \frac{1}{2} (V_2(i, k) + V_2(i-1, k)) \left[\frac{1}{2} (V_1(i, k-1) + V_1(i, k-2)) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{8} (2V_1(i, k_p-2) - V_1(i, k_p-3) - V_1(i, k_p-1)) \right]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

où $k_p = k$ si $\frac{1}{2} [V_2(i, k) + V_2(i, k-1)] 2 < 0$; et $k_p = k-1$ dans le cas contraire.

- Le terme de tension $\tau_{12} = \mathcal{T}_{12} + 2\eta_s D_{12}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{12} + 2\eta_s D_{12} &= \mathcal{T}_{12}(i, k) + \eta_s \left(\frac{V_2(i, k) - V_2(i-1, k)}{d\alpha_{V_1(i, k)}^1} + \frac{V_1(i, k) - V_1(i, k-1)}{d\alpha_{V_2(i, k)}^2} \right. \\
 &\quad \left. - H_2^1 f s v_1(i, k) \frac{V_2(i, k) + V_2(i-1, k)}{2} \right. \\
 &\quad \left. - H_1^2 f s v_1(i, k) \frac{V_1(i, k) + V_1(i, k-1)}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

• **Terme source dû à la courbure (terme (5))**

- Le terme (5) est évalué au noeud de vitesse V_1 centré sur le volume de contrôle \mathcal{V}^{V_1} . Les termes d'advection sont discrétisés de la façon suivante :

$$V_2 V_2 = \left[\frac{1}{4} (V_2(i, k) + V_2(i, k+1) + V_2(i-1, k+1) + V_2(i-1, k)) \right]^2 \quad (2.31)$$

$$V_2 V_1 = \frac{1}{4} [V_2(i, k) + V_2(i, k+1) + V_2(i-1, k+1) + V_2(i-1, k)] V_1(i, k) \quad (2.32)$$

- Les termes τ_{22} et τ_{21} sont explicités de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{22} + 2\eta_s D_{22} &= \mathcal{T}_{22} + 2\eta_s \left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi_2} - H_2^1 V_1 \right) \\ &= \mathcal{T}_{22}(i, k) + 2\eta_s \left[\frac{V_2(i, k+1) - V_2(i-1, k+1) + V_2(i, k) - V_2(i-1, k)}{d\alpha_{V_1(i, k+1)}^1 + d\alpha_{V_1(i, k)}^1} \right. \\ &\quad \left. + H_2^1 cv_1(i, k) V_1(i, k) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $H_1^2 cv_1(i, k)$ et $H_2^1 cv_1(i, k)$ sont les facteurs d'étirement H_1^2 et H_2^1 calculés au centre du volume de contrôle centré sur la vitesse $V_1(i, k)$.

Pour ce qui est de la composante τ_{21} :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{21} + 2\eta_s D_{21} &= \mathcal{T}_{21} + \eta_s \left(\frac{\partial V_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - H_2^1 V_2 - H_1^2 V_1 \right) \\ &= \mathcal{T}_{21}(i, k) + \eta_s \left[\frac{V_1(i, k+1) - V_1(i, k)}{d\alpha_{V_2(i, k)}^2 + d\alpha_{V_2(i, k+1)}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_2(i, k+1) - V_2(i-1, k+1) + V_2(i, k) - V_2(i-1, k)}{d\alpha_{V_1(i, k+1)}^1 + d\alpha_{V_1(i, k)}^1} \right. \\ &\quad \left. - H_2^1 cv_1(i, k) \frac{1}{4} (V_2(i, k) + V_2(i, k+1) + V_2(i-1, k+1) + V_2(i-1, k)) \right. \\ &\quad \left. - H_1^2 cv_1(i, k) V_1(i, k) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

(iii) Équation constitutive d'Oldroyd-B

On considère ici, à titre d'illustration, la discrétisation de la première composante normale de tension Σ_{11} pour le modèle d'Oldroyd-B. Le raisonnement est similaire pour les autres composantes de Σ_{ij} , dont les équations de transport sont toutes résolues de manière centrée

aux noeuds de pression. On a, d'après (2.17) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{11}}{\partial t} &= \frac{-\boldsymbol{\Sigma}_{11}}{\lambda} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}(H_2^1 V_2 - H_1^2 V_1) + 2 \sum_k L_{1k} \boldsymbol{\Sigma}_{k1} \\
 &\quad - \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \boldsymbol{\Sigma}_{11}) \\
 &\quad + 4\eta_p \left[\mathbf{D}_{12} (H_2^1 V_2 - H_1^2 V_1) + \sum_k L_{1k} \mathbf{D}_{k1} \right] \\
 &\quad - 2\eta_p \left[\frac{\partial \mathbf{D}_{11}}{\partial t} + \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \mathbf{D}_{11}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Les termes convectifs sont obtenus après intégration sur le volume de contrôle \mathcal{V}^P (voir figure 2.3) et application du théorème de Gauss. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \boldsymbol{\Sigma}_{11}) + 2\eta_p \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \mathbf{D}_{11}) &= \\
 \left(\underbrace{V_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11} + 2\eta_p V_1 \mathbf{D}_{11}}_1 \right) d\alpha_{p(i+1,k)}^2 - \left(\underbrace{V_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11} + 2\eta_p V_1 \mathbf{D}_{11}}_2 \right) d\alpha_{p(i,k)}^2 &+ \\
 \left(\underbrace{V_2 \boldsymbol{\Sigma}_{11} + 2\eta_p V_2 \mathbf{D}_{11}}_3 \right) d\alpha_{p(i,k+1)}^1 - \left(\underbrace{V_2 \boldsymbol{\Sigma}_{11} + 2\eta_p V_2 \mathbf{D}_{11}}_4 \right) d\alpha_{p(i,k)}^1 &
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Les termes de flux convectifs relatifs à $V_k \boldsymbol{\Sigma}_{11}$ et $V_k \mathbf{D}_{11}$ sont évalués à l'aide du schéma QUICK. Seuls les termes convectifs pour les tensions $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ seront traités ici. La démarche est identique pour l'évaluation des termes convectifs liés aux composantes du tenseur taux de déformation \mathbf{D} .

- **Sur la face Est (terme (1))**

On a :

$$\begin{aligned}
 V_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11} &= V_1(i, k) \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_{11}(i, k) + \boldsymbol{\Sigma}_{11}(i-1, k)) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{8} (2\boldsymbol{\Sigma}_{11}(i_p-1, k) - \boldsymbol{\Sigma}_{11}(i_p, k) - \boldsymbol{\Sigma}_{11}(i_p-2, k)) \right]
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $i_p = i + 1$ si $V_1(i, k) < 0$; et $i_p = i$ dans le cas contraire.

• **Sur la face Ouest (terme (2))**

Le flux sur la face Ouest du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k)$ correspond au flux calculé sur la face Est du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i-1, k)$. Le traitement des termes convectifs sur la face Ouest est donc identique à celui adopté sur la face Est, en décalant les indices i dans (2.37).

• **Sur la face Nord (terme (3))**

On a :

$$V_2 \Sigma_{11} = V_2(i, k) \left[\frac{1}{2} (\Sigma_{11}(i, k) + \Sigma_{11}(i, k-1)) + \frac{1}{8} (2\Sigma_{11}(i, k_p - 1) - \Sigma_{11}(i, k_p - 2) - \Sigma_{11}(i, k_p)) \right] \quad (2.38)$$

où $k_p = k + 1$ si $V_2(i, k) < 0$; et $k_p = k$ dans le cas contraire.

• **Sur la face Sud (terme (4))**

Le flux sur la face Sud du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k)$ est identique au flux calculé sur la face Nord du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k-1)$. Le traitement des termes convectifs sur la face Ouest est donc identique à celui adopté sur la face Est, en décalant les indices k dans (2.38).

(iv) **Modèles algébriques - Équation de la trace Λ**

La discrétisation de l'équation 1.12 donne :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\Lambda}{\lambda} + 2(\mathcal{T}_{11}\mathbf{D}_{11} + \mathcal{T}_{22}\mathbf{D}_{22} + 2\mathcal{T}_{12}\mathbf{D}_{12}) - \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \Lambda) \quad (2.39)$$

où les termes convectifs sont obtenus après intégration sur le volume \mathcal{V}^P . On obtient :

$$\sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \Lambda) = \underbrace{V_1 \Lambda}_1 d\alpha_{p(i+1,k)}^2 - \underbrace{V_1 \Lambda}_2 d\alpha_{p(i,k)}^2 + \underbrace{V_2 \Lambda}_3 d\alpha_{p(i,k+1)}^1 - \underbrace{V_2 \Lambda}_4 d\alpha_{p(i,k)}^1. \quad (2.40)$$

Les termes $V_k \Lambda$ sont également évalués à l'aide du schéma QUICK.

- **Sur la face Est (terme (1))**

On a :

$$V_1\Lambda = V_1(i, k) \left[\frac{1}{2} (\Lambda(i, k) + \Lambda(i - 1, k)) + \frac{1}{8} (2\Lambda(i_p - 1, k) - \Lambda(i_p, k) - \Lambda(i_p - 2, k)) \right] \quad (2.41)$$

où $i_p = i + 1$ si $V_1(i, k) < 0$; et $i_p = i$ dans le cas contraire.

- **Sur la face Ouest (terme (2))**

Le flux sur la face Ouest du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k)$ est identique au flux calculé sur la face Est du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i - 1, k)$. Le traitement des termes convectifs sur la face Ouest est donc identique à celui adopté sur la face Est, en décalant les indices i dans (2.41).

- **Sur la face Nord (terme (3))**

On a :

$$V_2\Lambda = V_2(i, k) \left[\frac{1}{2} (\Lambda(i, k) + \Lambda(i, k - 1)) + \frac{1}{8} (2\Lambda(i, k_p - 1) - \Lambda(i, k_p - 2) - \Lambda(i, k_p)) \right] \quad (2.42)$$

où $k_p = k + 1$ si $V_2(i, k) < 0$; et $k_p = k$ dans le cas contraire.

- **Sur la face Sud (terme (4))**

Le flux sur la face Sud du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k)$ correspond au flux calculé sur la face Nord du volume de contrôle \mathcal{V}^P centré sur le noeud de pression $p(i, k - 1)$. Le traitement des termes convectifs sur la face Ouest est donc identique à celui adopté sur la face Est, en décalant les indices k dans (2.42).

2.2.3 Discrétisation temporelle

L'algorithme utilisé est itératif dans le temps. Il consiste à calculer un écoulement stationnaire par réduction itérative des termes instationnaires présents dans les équations de

conservation. Nous utilisons la méthode de projection semi-implicite en pression de Harlow et Welch [16], à savoir :

(i) Conservation de la masse

$$\sum_i \nabla \cdot (i) \left(V_i^{(n+1)} \right) = 0. \quad (2.43)$$

(ii) Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{V_i^{(n+1)} - V_i^{(n)}}{\Delta t} + \left[\begin{array}{l} \sum_i \nabla \cdot (i) (V_i V_j - \tau_{ij}) + \sum_i H_j^i (V_i V_j - \tau_{ij}) \\ - \sum_i H_i^j (V_i V_i - \tau_{ii}) \end{array} \right]^{(n)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi_j}, \quad (2.44)$$

que l'on écrira sous la forme :

$$V_i^{(n+1)} = \Delta t \left(\mathbf{B}_{V_i}^{(n)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi_j} \right), \quad (2.45)$$

où (n) désigne l'indice au pas de temps courant t et $(n+1)$ l'indice au pas de temps suivant $t + \Delta t$.

Méthode de résolution

La méthode consiste à exprimer la vitesse $V_i^{(n+1)}$ en fonction de $p^{(n+1)}$ à partir de l'équation (2.45) et de reporter cette expression dans l'équation de conservation de la masse [16]. On obtient ainsi une équation de Poisson à résoudre pour la pression, où la variable p apparaît seule à l'état $(n+1)$. En remplaçant ce nouveau champ de pression à l'instant $(n+1)$ dans l'équation (2.45), on obtient un champ de vitesse à l'instant $(n+1)$ satisfaisant l'équation de continuité. Ce procédé de résolution est détaillé ci-dessous.

L'équation (2.45) peut également s'écrire explicitement :

$$V_1^{(n+1)}(i, k) = \Delta t \left[\mathbf{B}_{V_1}^{(n)}(i, k) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{2(P_{(i,k)}^{(n+1)} - P_{(i-1,k)}^{(n+1)})}{d\alpha_{V_1(i,k)}^1 + d\alpha_{V_1(i,k+1)}^1} \right) \right] \quad (2.46)$$

$$V_2^{(n+1)}(i, k) = \Delta t \left[\mathbf{B}_{V_2}^{(n)}(i, k) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{2(P_{(i,k)}^{(n+1)} - P_{(i,k-1)}^{(n+1)})}{d\alpha_{V_2(i,k)}^2 + d\alpha_{V_2(i+1,k)}^2} \right) \right] \quad (2.47)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{V_1}(i, k) = & \frac{V_1(i, k)}{\Delta t} - \frac{1}{V^1 V^1} [(V_1 V_1 - \tau_{11}) d\alpha_{V_1(i+1,k)}^2 - (V_1 V_1 - \tau_{11}) d\alpha_{V_1(i,k)}^2 \\ & + (V_1 V_2 - \tau_{12}) d\alpha_{V_1(i,k+1)}^1 - (V_1 V_2 - \tau_{12}) d\alpha_{V_1(i,k)}^1] \\ & + H_2^1 (V^2 V^2 - \tau_{22} - H_1^2 (V^2 V^1 - \tau_{21})) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{V_2}(i, k) = & \frac{V_2(i, k)}{\Delta t} - \frac{1}{V^1 V^2} [(V_2 V_1 - \tau_{21}) d\alpha_{V_2(i+1,k)}^1 - (V_2 V_1 - \tau_{21}) d\alpha_{V_2(i,k)}^1 \\ & + (V_2 V_2 - \tau_{22}) d\alpha_{V_2(i,k+1)}^2 - (V_2 V_2 - \tau_{22}) d\alpha_{V_2(i,k)}^2] \\ & + H_1^2 (V^1 V^1 - \tau_{11} - H_2^1 (V^1 V^2 - \tau_{12})) \end{aligned} \quad (2.49)$$

En reportant les expressions de $V_1^{(n+1)}$ (2.46) et $V_2^{(n+1)}$ (2.47) dans l'équation de conservation de la masse (2.21), on obtient :

$$A_w p_{(i-1,k)}^{(n+1)} + A_e p_{(i+1,k)}^{(n+1)} + A_h p_{(i,k+1)}^{(n+1)} + A_b p_{(i,k)}^{(n+1)} - A_P p_{(i,k)}^{(n+1)} = Q_p^{(n)} \quad (2.50)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_w = \frac{2d\alpha_{P(i,k)}^2}{d\alpha_{V_1(i,k)}^2 + d\alpha_{V_1(i,k+1)}^2} & \quad A_E = \frac{2d\alpha_{P(i+1,k)}^2}{d\alpha_{V_1(i+1,k)}^2 + d\alpha_{V_1(i+1,k)}^2} \\ A_H = \frac{2d\alpha_{P(i,k+1)}^2}{d\alpha_{V_2(i+1,k+1)}^2 + d\alpha_{V_2(i+1,k)}^2} & \quad A_B = \frac{2d\alpha_{P(i,k)}^2}{d\alpha_{V_2(i+1,k)}^2 + d\alpha_{V_2(i+1,k-1)}^2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$A_P = A_W + A_E + A_H + A_B$$

et

$$\begin{aligned} Q_p^{(n)} = & d\alpha_{P(i+1,k)}^2 \mathbf{B}_{V_1}(i+1, k) - d\alpha_{P(i,k)}^2 \mathbf{B}_{V_1}(i, k) \\ & + d\alpha_{P(i,k+1)}^1 \mathbf{B}_{V_2}(i, k+1) - d\alpha_{P(i,k)}^1 \mathbf{B}_{V_2}(i, k) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous sommes donc amenés à résoudre un système linéaire du type $\mathbf{A}p^{(n+1)} = Q^{(n)}$ à chaque pas de temps. La résolution de ce système nous donne la pression à l'instant $(n+1)$ puis le champ de vitesse incompressible à l'instant $(n+1)$ via les relations (2.46) et (2.47). On remarque que la matrice \mathbf{A} dépend uniquement des données géométriques inhérentes au maillage. Elle est donc écrite une seule fois au début du calcul. Afin de résoudre le système linéaire (2.50), la méthode de Cholesky est utilisée. La matrice \mathbf{A} étant définie positive et symétrique, elle est donc décomposée en un produit

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T, \quad (2.53)$$

où \mathbf{M} est une matrice triangulaire inférieure (c.à.d tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls), et \mathbf{M}^T désigne sa transposée. On résout ensuite à chaque pas de temps les systèmes $\mathbf{M}y = Q^n$ puis $\mathbf{M}^T p^{(n+1)} = y$. La matrice \mathbf{M} étant symétrique, on utilise un algorithme de montée/descente.

(iii-1) Équation d'Oldroyd-B

Les termes instationnaires des équations constitutives sont discrétisés selon le schéma d'Euler explicite. La dérivée temporelle d'une variable quelconque φ au temps (n) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \varphi^{(n+1)}}{\partial t} = \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}{\Delta t} + o(\Delta t). \quad (2.54)$$

L'équation (2.17) est donc écrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^{(n)} + \lambda \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Sigma_{ij}^{(n+1)} - \Sigma_{ij}^{(n)}}{\Delta t} + \sum_k \nabla \cdot (k) \left(V_k \Sigma_{ij}^{(n)} \right) - \sum_k H_k^i V_k \Sigma_{kj}^{(n)} + \sum_k H_i^k V_i \Sigma_{kj}^{(n)} \\ & - \sum_k H_k^j V_k \Sigma_{ik}^{(n)} + \sum_k H_j^k V_j \Sigma_{ik}^{(n)} - \sum_k L_{ik} \Sigma_{kj}^{(n)} - \sum_k L_{jk} \Sigma_{ki}^{(n)} \end{aligned} \right\} = \\ - 2\eta_p \lambda \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathbf{D}_{ij}^{(n)} - \mathbf{D}_{ij}^{(n-1)}}{\Delta t} + \sum_k \nabla \cdot (k) \left(V_k \mathbf{D}_{ij}^{(n)} \right) - \sum_k H_k^i V_k \mathbf{D}_{kj}^{(n)} + \sum_k H_i^k V_i \mathbf{D}_{kj}^{(n)} \\ & - \sum_k H_k^j V_k \mathbf{D}_{ik}^{(n)} + \sum_k H_j^k V_j \mathbf{D}_{ik}^{(n)} - \sum_k L_{ik} \mathbf{D}_{kj}^{(n)} - \sum_k L_{jk} \mathbf{D}_{ki}^{(n)} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Il est à noter que le terme instationnaire $\partial \mathbf{D} / \partial t$ doit être retardé d'un pas de temps dans ce

schéma, mais ce déphasage n'a pas d'influence pour la résolution d'écoulements stationnaires.

À titre d'exemple, on considère dans ce qui suit la discrétisation de l'équation d'Oldroyd-B pour la première composante normale de tension Σ_{11} . On a, d'après (2.55) :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^{(n+1)} = \Sigma_{11}^{(n)} + \Delta t & \left[\frac{-\Sigma_{11}^{(n)}}{\lambda} + 2 \left(\Sigma_{12}^{(n)} (H_2^1 V_2 - H_1^2 V_1) + \sum_k L_{1k} \Sigma_{k1}^{(n)} \right) \right. \\ & - \sum_k \nabla \cdot (k) \left(V_k \Sigma_{11}^{(n)} \right) \\ & + 4\eta_p \left[\mathbf{D}_{12}^{(n)} (H_2^1 V_2 - H_1^2 V_1) + \sum_k L_{1k} \mathbf{D}^{(n)} \right] \\ & \left. - 2\eta_p \left(\sum_k \nabla \cdot (k) \left(V_k \mathbf{D}_{11}^{(n)} \right) + \frac{\mathbf{D}_{11}^{(n)} - \mathbf{D}_{11}^{(n-1)}}{\Delta t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

(iii-2) Équations algébriques

L'équation de la trace du tenseur polymérique donne selon le même schéma temporel :

$$\Lambda^{(n+1)} = \Lambda^{(n)} + \Delta t \left[2\{\Gamma\mathbf{D}\}^{(n)} - \frac{\Lambda^{(n)}}{\lambda} \right]. \quad (2.57)$$

2.3 Calcul du tenseur taux de rotation absolu

Afin de respecter le principe d'indifférence matérielle, on a vu au chapitre 1 qu'il est nécessaire d'introduire un tenseur taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$, défini comme la différence entre le tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} et le tenseur taux de rotation des vecteurs propres de \mathbf{D} (1.30). Ceci nécessite l'évaluation de la vitesse de rotation Ω des vecteurs propres du tenseur taux de déformation \mathbf{D} .

2.3.1 Vitesse de rotation des vecteurs propres

Deux méthodes existent pour le calcul du tenseur Ω .

(i) Méthode 1

Il s'agit d'adopter une méthode directe de calcul des vecteurs propres de \mathbf{D} , basée sur la relation (1.31). Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être utilisée pour un écoule-

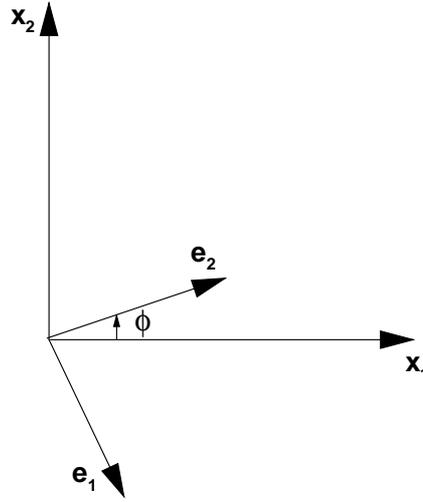


FIG. 2.6: Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} par rapport à une base cartésienne

ment tridimensionnel [26]. Néanmoins, elle nécessite d'orienter judicieusement les vecteurs propres calculés, ce qui peut s'avérer difficile sur des géométries courbes ou complexes. C'est principalement pour cette raison que nous avons adopté la méthode suivante.

(ii) Méthode 2

Il s'agit d'une méthode de calcul proposée par Gatski et Jongen [14]. Dans ce cas, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est interprétée comme la dérivée matérielle de l'angle ϕ entre la base constituée des vecteurs propres et une base cartésienne fixe (figure 2.6) :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\phi}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

où la dérivée matérielle de ϕ est donnée par :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\{\mathbf{D}^2\}} \left[\mathbf{D}_{11} \frac{d\mathbf{D}_{12}}{dt} - \mathbf{D}_{12} \frac{d\mathbf{D}_{11}}{dt} \right]. \quad (2.59)$$

Dans le cadre de cette étude, nous avons dans un premier temps comparé les deux méthodes de calcul et prouvé qu'elles fournissaient les mêmes résultats pour l'écoulement

dans une contraction 4:1. Par la suite, nous avons exclusivement utilisé la méthode 2.

En effet, cette méthode est de loin la plus efficace numériquement car elle ne nécessite pas le calcul explicite des vecteurs propres de \mathbf{D} . On remarquera toutefois que la relation (2.58) n'est valable que pour un écoulement bidimensionnel.

2.3.2 Paramètre de classification

Afin d'identifier localement la nature de la cinématique pour un écoulement donné, il est utile de considérer un paramètre de classification. Nous avons utilisé dans cette étude le paramètre proposé par Astarita [4]. Le critère d'Astarita est basé sur le paramètre sans dimension \bar{R} défini comme :

$$\bar{R} = -\frac{\{\bar{\mathbf{W}}^2\}}{\{\mathbf{D}^2\}}, \quad (2.60)$$

où on rappelle que $\{.\}$ représente l'opérateur de trace. Ce paramètre mesure le rapport entre les effets de rotation et de déformation du fluide, par rapport aux directions principales de \mathbf{D} . Ce paramètre est renormalisé par Mompean et al. [23], en considérant la quantité

$$P_C = \frac{1 - \bar{R}}{1 + \bar{R}}. \quad (2.61)$$

Le paramètre P_C varie ainsi entre -1 et +1, ce qui évite certains problèmes numériques lorsque \bar{R} prend des valeurs très grandes. Ces valeurs limites seront discutées dans le chapitre suivant.

À l'aide du calcul de $\mathbf{\Omega}$, différence entre les taux de rotation objectif et non-objectif, on cherche à identifier les régions de l'écoulement où l'indifférence matérielle doit être prise en considération et celle où elle peut être négligée. Ce point est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Étude cinématique de l'indifférence matérielle ; calcul du tenseur taux de rotation absolu

On a vu au chapitre 1 que la prise en compte de l'indifférence matérielle dans les modèles algébriques nécessite le calcul du tenseur taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega}$, où $\mathbf{\Omega}$ est le taux de rotation des vecteurs propres du tenseur taux de déformation \mathbf{D} . Afin de rendre l'équation constitutive algébrique objective, on remplace donc dans les modèles le tenseur \mathbf{W} par le tenseur objectif $\overline{\mathbf{W}}$. On se propose dans ce chapitre de présenter une méthodologie permettant d'évaluer et d'analyser les champs de $\mathbf{\Omega}$ obtenus. On commencera par l'étude de cas à cinématique pure : extension, cisaillement uniforme, et écoulement de Couette. Ceci nous servira de base afin d'analyser des écoulements à cinématique complexe.

3.1 Écoulements simples

On détermine ici les directions principales du tenseur taux de déformation \mathbf{D} , ainsi que la vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}$, pour trois écoulements simples : extension uniforme, cisaillement uniforme sans rotation, et cisaillement avec rotation (écoulement de Couette axisymétrique).

3.1.1 Écoulement d'extension uniforme

Pour un écoulement bidimensionnel d'extension pure, les tenseurs taux de déformation et taux de rotation absolu s'écrivent :

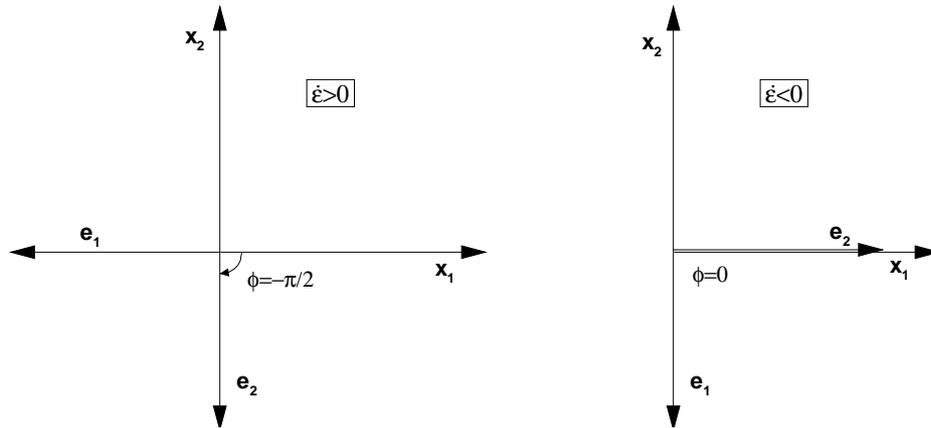


FIG. 3.1: Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} pour un écoulement d'extension uniforme

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où $\dot{\epsilon}$ est le taux d'élongation indépendant des coordonnées spatiales.

- Pour $\dot{\epsilon} > 0$ (cas d'extension pure), les vecteurs propres de \mathbf{D} sont $\mathbf{e}_1 = (-1, 0)^T$ et $\mathbf{e}_2 = (0, -1)^T$, où \mathbf{e}_1 est le vecteur propre relatif à la première valeur propre $+\dot{\epsilon}$, et \mathbf{e}_2 le vecteur propre relatif à la seconde valeur propre $-\dot{\epsilon}$. L'angle ϕ entre le second vecteur propre et la base cartésienne est $-\pi/2$ (voir figure 3.1).

- Pour $\dot{\epsilon} < 0$, les vecteurs propres sont $\mathbf{e}_1 = (0, -1)^T$ et $\mathbf{e}_2 = (1, 0)^T$. L'angle ϕ entre le second vecteur propre et la base cartésienne est $\phi = 0$ (voir figure 3.1).

Pour un écoulement caractérisé par une élongation uniforme, les directions principales sont fixes par rapport à la base de référence. Ceci implique que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est nulle. Pour une élongation uniforme, on a donc $\{\overline{\mathbf{W}^2}\} = \{\mathbf{W}^2\} = 0$, où $\{\cdot\}$ représente l'opérateur de trace. En terme de paramètres de classification P_C (cf éq. 2.60 et 2.61), on a donc :

$$\overline{R} = -\frac{\{\overline{\mathbf{W}^2}\}}{\{\mathbf{D}^2\}} = 0, \quad (3.2)$$

et

$$P_C = \frac{1 - \overline{R}}{1 + \overline{R}} = 1. \quad (3.3)$$

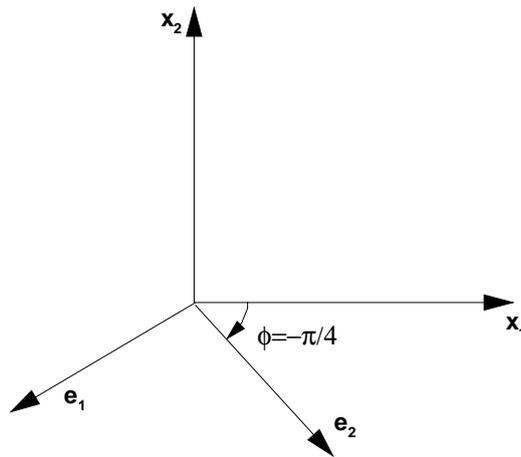


FIG. 3.2: Orientation des vecteurs propres de \mathbf{D} pour un écoulement de cisaillement uniforme sans rotation

3.1.2 Cisaillement uniforme sans rotation

Si l'on considère un écoulement de cisaillement pur, les tenseurs taux de déformation et taux de rotation relatif s'écrivent :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement. Dans ce cas, les vecteurs propres de \mathbf{D} sont $\mathbf{e}_1 = (-1, -1)^T$ et $\mathbf{e}_2 = (1, -1)^T$, où \mathbf{e}_1 est le vecteur propre relatif à la première valeur propre $+\dot{\gamma}$, et \mathbf{e}_2 celui relatif à la seconde valeur propre $-\dot{\gamma}$. L'angle ϕ entre le second vecteur propre et la base cartésienne est donc égal à $-\pi/4$ (voir figure 3.2).

Pour un cisaillement pur sans rotation, l'angle ϕ entre les directions principales de \mathbf{D} et la base cartésienne fixe, est donc constant. Ceci implique que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est nulle. Pour un écoulement de cisaillement pur, on a donc $\{\mathbf{W}^2\} = \{\overline{\mathbf{W}^2}\} = -2\dot{\gamma}^2$, et $\{\mathbf{D}^2\} = 2\dot{\gamma}^2$, d'où

$$\overline{R} = 1 \quad ; \quad P_C = 0 . \quad (3.5)$$

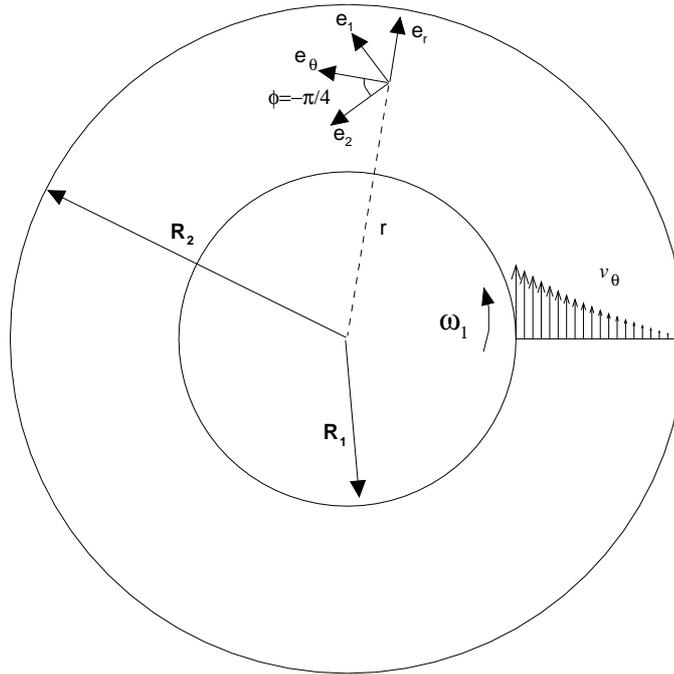


FIG. 3.3: Écoulement de Couette

3.1.3 Cisaillement avec rotation : écoulement de Couette axisymétrique

On considère ici le cas de l'écoulement de Couette d'un fluide Newtonien entre deux cylindres concentriques de rayon R_1 et $R_2 > R_1$. Contrairement au cas précédent, le taux de cisaillement est ici induit par le mouvement de rotation d'une des parois. En effet, pour un écoulement de Couette, le fluide est soumis à un mouvement d'entraînement par la rotation de vitesse ω_1 du cylindre intérieur (voir figure 3.3). Le champ de vitesse obtenu en considérant une base polaire $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ et les coordonnées correspondantes (r, θ) , est donné par :

$$v_r = 0, \quad v_\theta = A \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R_2^2} \right), \quad (3.6)$$

où $A = \omega_1 R_1^2 R_2^2 / (R_1^2 - R_2^2)$. Comme nous n'avons qu'une composante azimutale de vitesse, et aucune vitesse radiale, les trajectoires sont circulaires.

À partir du champ de vitesse obtenu, nous pouvons en déduire les expressions, dans

la base polaire, des tenseurs taux de déformation et taux de rotation relatif :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -A/r^2 \\ -A/r^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -A/R_2^2 \\ A/R_2^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

L'angle ϕ entre le second vecteur propre du tenseur taux de déformation \mathbf{D} et la base polaire est égal à $-\pi/4$ (voir figure 3.3), ce qui est en accord avec les résultats obtenus pour le cisaillement sans rotation. Que l'on soit en écoulement de cisaillement avec ou sans rotation, on obtient donc les mêmes propriétés.

On vient de voir que, pour un écoulement de Couette, les vecteurs propres de \mathbf{D} sont fixes dans le repère polaire $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ (voir figure 3.3). Si l'on se place dans un repère cartésien fixe, on observe que les vecteurs propres de \mathbf{D} tournent avec la vitesse angulaire v_θ/r . Par conséquent, le tenseur taux de rotation des directions principales de \mathbf{D} , exprimé dans la base polaire, donne :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & A\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) \\ -A\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Cet exemple montre que la vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}$ peut être non nulle pour un écoulement à cinématique pure.

Le cas de l'écoulement de Couette est particulièrement intéressant pour l'étude de l'indifférence matérielle. À partir des équations (3.7) et (3.8), on déduit que le tenseur taux de rotation absolu pour un écoulement de Couette s'écrit :

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & -A/r^2 \\ A/r^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

On a donc $\{\overline{\mathbf{W}}^2\} = \{\mathbf{D}^2\}$, ce qui implique que $P_C = 0$. Le paramètre de classification P_C rend donc bien compte du fait que l'écoulement de Couette axisymétrique est un cisaillement pur. On peut cependant remarquer que si l'on utilise $\{\mathbf{W}^2\}$ à la place de $\{\overline{\mathbf{W}}^2\}$ dans l'équation (2.60), le paramètre P_C sera différent de zéro et la cinématique de l'écoulement de Couette axisymétrique serait interprétée de manière erronée, comme n'étant pas un cisaillement pur.

Type d'écoulement	\bar{R}	P_C
Cisaillement pur	+1	0
Extension pure	0	+1
Mouvement rigide	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow -1$

TAB. 3.1: Valeurs limites des paramètres \bar{R} et P_C pour les mouvements à cinématique pure

Résumé

D'après les éléments que nous venons de présenter, on peut distinguer différents écoulements, où la vitesse de rotation Ω peut être non nulle :

- la première configuration possible est celle d'une transition entre des régions présentant des cinématiques pures différentes. À titre d'exemple, si l'on considère une région de transition d'une extension uniforme vers un cisaillement pur, l'angle ϕ varie de $-\pi/2$ à $-\pi/4$, ce qui engendre une vitesse de rotation Ω dans le sens anti-horaire.

- La seconde configuration est celle d'un écoulement de rotation, comme illustré par l'écoulement de Couette. Pour cet écoulement, on a montré que Ω était non nul.

Finalement, le cas spécial du mouvement rigide (rotation ou translation) peut être analysé. Pour un mouvement de corps rigide, les directions principales du tenseur \mathbf{D} ne sont pas définies et l'on pose de manière arbitraire $\Omega = 0$. Pour une rotation rigide, on a $\{\mathbf{D}^2\} \rightarrow 0$, d'où $R \rightarrow \infty$ et $P_C \rightarrow -1$. Pour une translation rigide, \mathbf{D} et $\bar{\mathbf{W}}$ sont nulles, et le paramètre \bar{R} est indéterminé.

Le tableau (3.1) résume les différentes valeurs pouvant être prises par le paramètre de classification P_C . On utilisera les résultats obtenus sur ces écoulements simples pour analyser les contours de vitesse Ω pour des écoulements à cinématique complexe. On distinguera dans ce qui suit trois géométries présentant des cinématiques distinctes : une contraction 4:1, l'écoulement autour d'un cylindre, et l'écoulement dans un coude à 180°.

3.2 Contraction planeaire 4:1

On considère ici l'écoulement d'un fluide Newtonien de viscosité cinématique ν dans une contraction plane (figure 3.4). Le rapport entre les hauteurs des canaux d'entrée et de sortie est 4:1 et on note H la hauteur du canal de sortie. La longueur totale du domaine est de $20H$, et la contraction est localisée à la position axiale $x_1 = 16H$.

On considère ici uniquement la partie supérieure du domaine, et une condition de symétrie est appliquée sur la frontière en $x_2 = 0$ (figure 3.5). En entrée et en sortie du domaine, un débit constant est imposé, alors qu'une condition de non-glissement est appliquée sur la partie supérieure du domaine (figure 3.4).

La figure (3.5) montre le maillage considéré pour cette géométrie. Il est uniforme sur tout le domaine avec 75 noeuds dans la direction de l'écoulement, et 40 noeuds dans la direction normale.

Le nombre de Reynolds $Re = U_a H / \nu = 8 \times 10^{-3}$, est calculé à partir de la vitesse débitante en sortie U_a et de la hauteur de sortie du canal H . Les lignes de courant de l'écoulement sont présentées sur la figure (3.6). La taille de la recirculation localisée dans le coin supérieur est $0.73H$, ce qui est en bon accord avec des résultats déjà obtenus par ailleurs [29], [21].

Afin d'évaluer l'importance de l'indifférence matérielle, différentes sections P_1 , P_2 , P_3

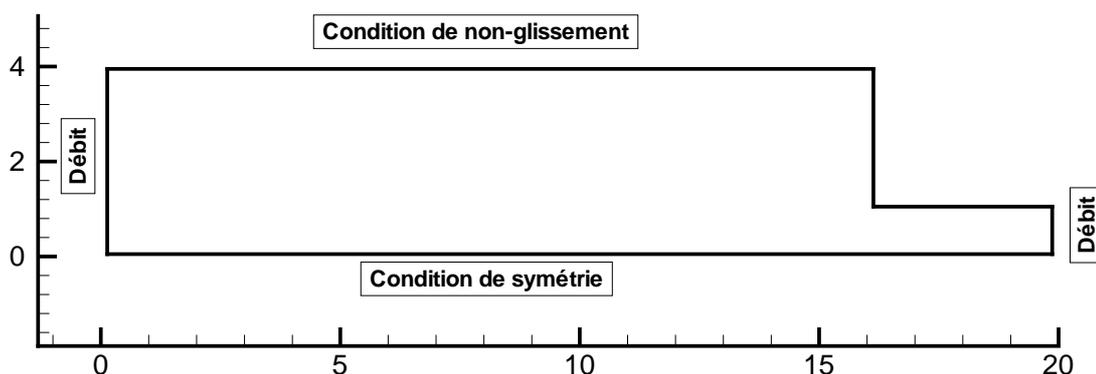


FIG. 3.4: Conditions limites pour l'écoulement dans une contraction planeaire 4:1

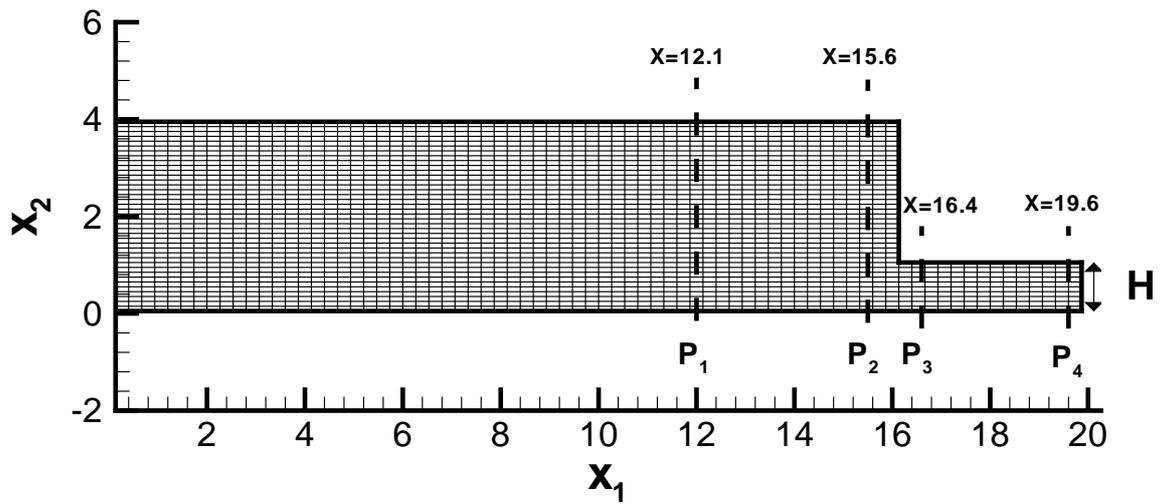


FIG. 3.5: Maillage et définition des coupes P_1, P_2, P_3, P_4 pour la contraction 4:1

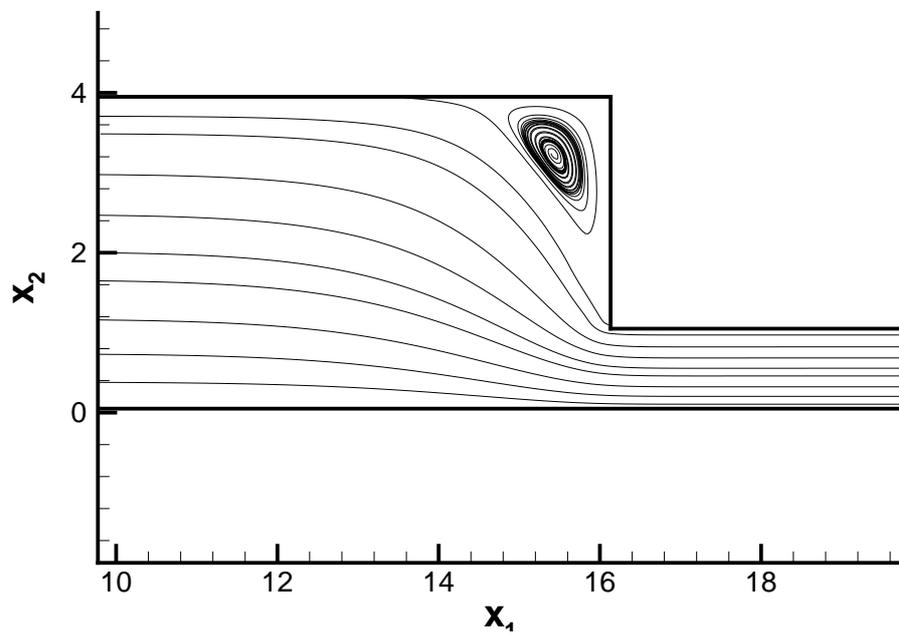


FIG. 3.6: Lignes de courant d'un écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$

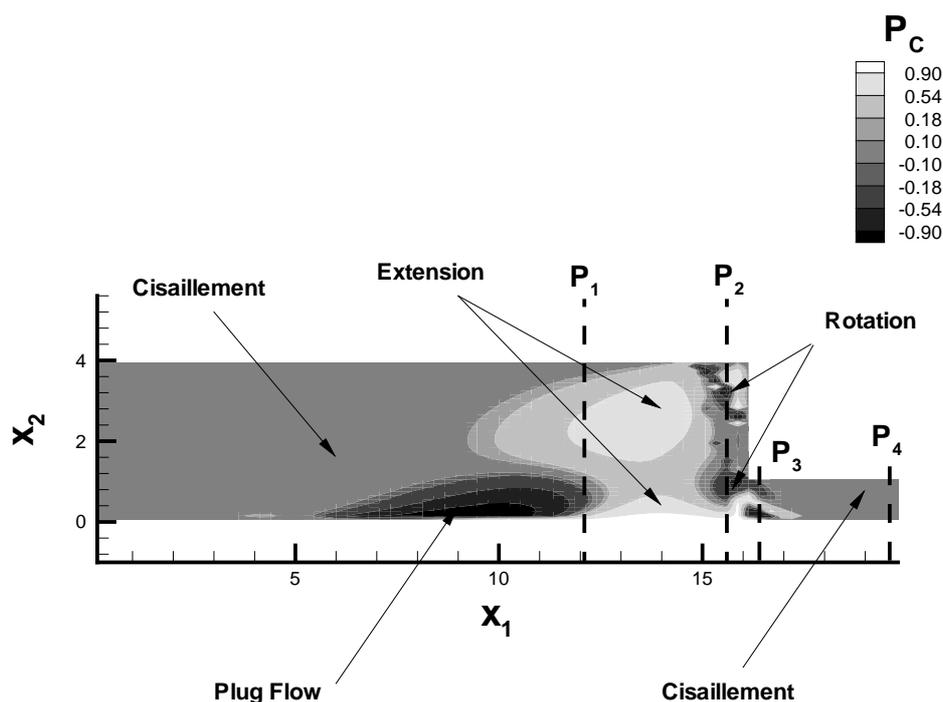


FIG. 3.7: Contours du paramètre de classification P_C . Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$

et P_4 ont été considérées, traversant chacune des zones de cinématiques différentes. Ces sections ont été placées respectivement aux positions $x_1 = 12.1H$, $x_1 = 15.6H$, $x_1 = 16.4H$ et $x_1 = 19.6H$ (voir figure 3.5).

La figure (3.7) reproduit la carte des contours du paramètre de classification P_C . Trois valeurs limites de P_C peuvent être identifiées, correspondant aux cas limites d'élongation, de cisaillement, et de mouvement rigide (voir tableau 3.1). Si l'on considère la partie en aval de la contraction, l'écoulement est développé et le fluide est en cisaillement pur, ce qui correspond à $P_C = 0$. Juste en amont de la contraction, entre les sections P_1 et P_2 , on trouve une région où l'écoulement est élongationnel et où $P_C \simeq 1$. On peut distinguer enfin trois régions où P_C prend des valeurs négatives :

- (a) en amont de la section P_1 , le long de l'axe de symétrie ;
- (b) dans le coin supérieur, proche de la recirculation ;
- (c) à l'entrée du canal de sortie.

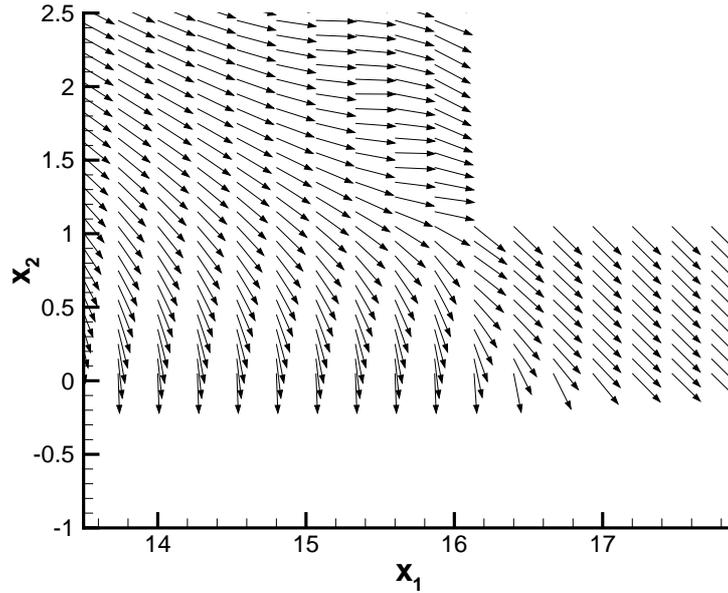


FIG. 3.8: *Second vecteur propre e_2 du tenseur taux de déformation. Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$*

Dans la zone du vortex de coin, ainsi que près du changement de section, la rotation du fluide prédomine par rapport à la déformation. La région caractérisée par un plug flow, avant la section P_1 , est un mouvement de corps rigide.

Dans les régions de cinématiques pures (cisaillement ou élongation) les directions principales du tenseur \mathbf{D} sont fixes. Une transition entre deux de ces régions provoque une rotation de ces vecteurs propres. Considérons par exemple une particule voyageant le long de l'axe de symétrie ($x_2 \simeq 0$) entre $14 \leq x_1 \leq 18$. Cette particule est originaire d'une région de faible taux de déformation et entre dans une région à fort taux de cisaillement. À l'approche de la contraction, les vecteurs propres du tenseur \mathbf{D} changent d'orientation, de $\phi = -\pi/2$ à $\phi = -\pi/4$. La figure (3.8) montre l'orientation des vecteurs propres \mathbf{e}_2 sur cette zone de l'écoulement. La région de transition est donc caractérisée par une vitesse angulaire négative des vecteurs propres dans le sens horaire.

Si l'on considère désormais une particule fluide sur la section P_1 à $x_2 \simeq 2$. Cette particule rencontre une région d'extension (décélération) et entre dans une région à fort taux de cisaillement en amont de la section P_2 . Le long de ce parcours, l'angle ϕ passe d'une valeur

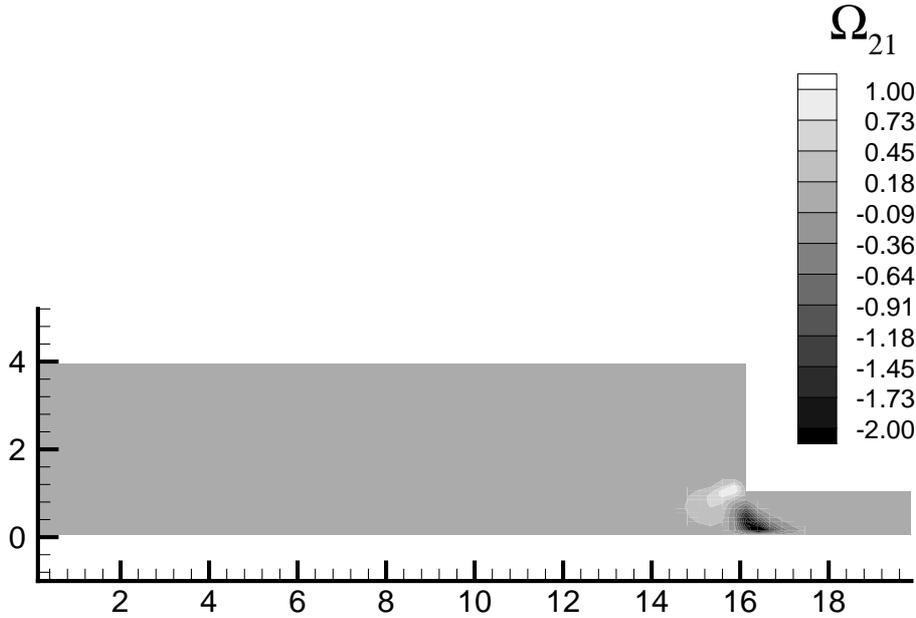


FIG. 3.9: Contours de la vitesse angulaire des directions principales du tenseur taux de déformation.

Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$

proche de zéro à $-\pi/4$. Dans ce cas, la transition est caractérisée par une vitesse angulaire positive dans le sens anti-horaire.

On retrouve ces observations sur la figure (3.9), qui montre les contours de la vitesse angulaire Ω , adimensionnées par $2H/U_a$. On montre ici clairement que les valeurs les plus significatives prises par Ω sont localisées près de l'entrée de la contraction. Deux régions différentes peuvent être identifiées : la première en aval du changement de section, où Ω prend des valeurs positives, et la seconde en amont du changement de section, où Ω est cette fois-ci négatif, ce qui corrobore nos précédentes observations concernant l'orientation du vecteur propre \mathbf{e}_2 .

La figure (3.10) présente les profils de W_{12} et \overline{W}_{12} le long des coupes verticales P_1 , P_2 , P_3 et P_4 , définies sur la figure (3.5). La vorticité est ici adimensionnée par $2H/U_a$. La figure (3.10a) (section P_1) montre une différence significative entre les deux profils considérés. On peut distinguer sur cette coupe deux régions. Dans la partie supérieure de la contraction, où $x_2 > 1.5$, la composante du tenseur taux de rotation absolu \overline{W}_{12} est plus petite que celle du tenseur taux de rotation relatif W_{12} . Dans la partie inférieure $x_2 < 1.5$, on observe un comportement inverse, avec des différences encore plus marquées entre les deux composantes.

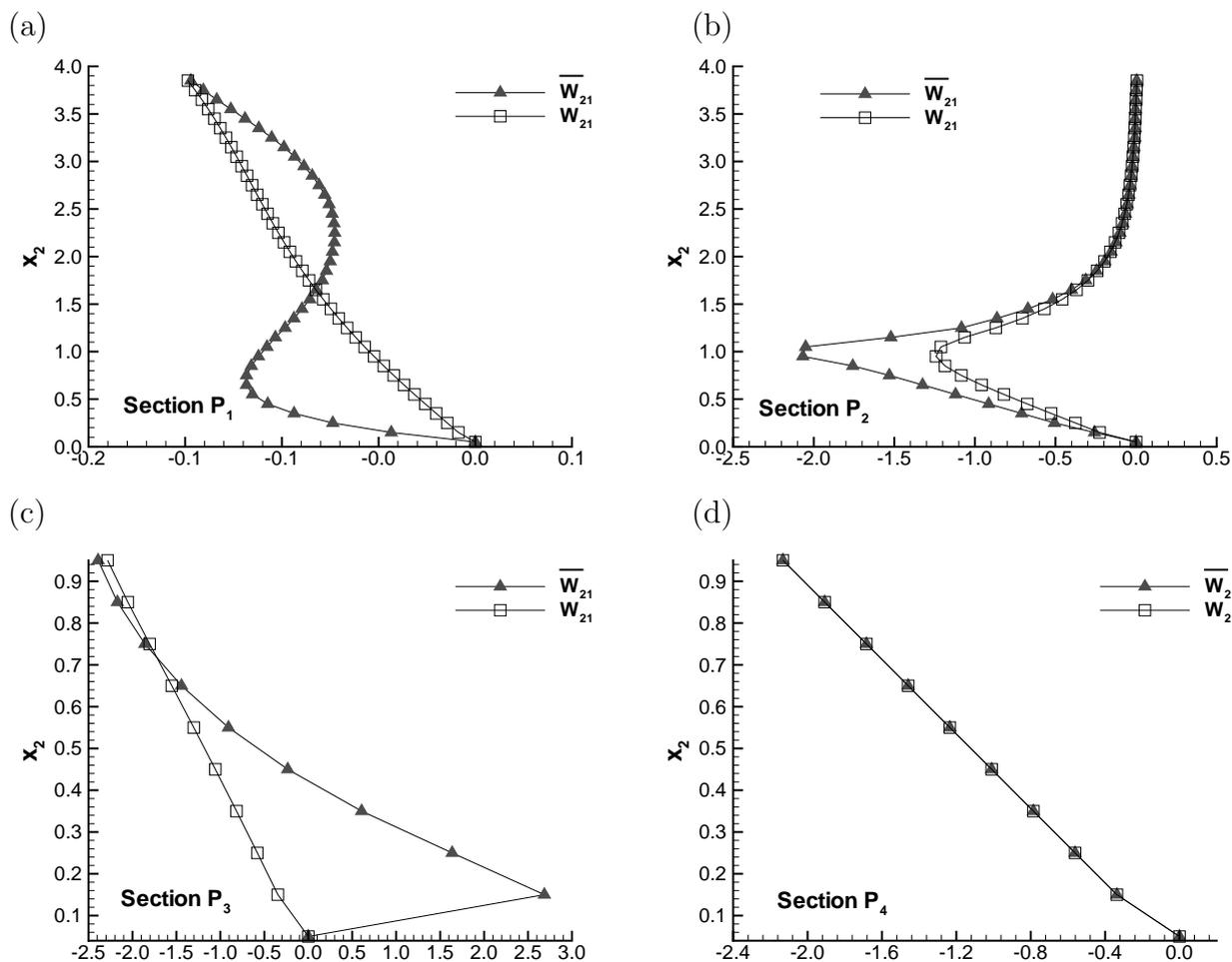


FIG. 3.10: Profils de \overline{W}_{21} (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des coupes verticales P_1 , P_2 , P_3 et P_4 . Écoulement Newtonien dans une contraction 4:1, $Re = 8 \times 10^{-3}$

Ce comportement s'explique par un changement d'orientation des directions principales des vecteurs propres de \mathbf{D} . En $x_2 = 1.5$, la vitesse angulaire Ω est négative à cause de la transition entre une zone de cisaillement et une zone d'élongation. En dessous de $x_2 = 1.5$, on observe une transition entre deux différentes zones en extension, l'une en décélération, et l'autre en accélération, ce qui implique une vitesse de rotation Ω positive. Près de la paroi et de l'axe de symétrie, on ne constate aucune différence entre les composantes W_{12} et \overline{W}_{12} .

D'autres zones importantes peuvent être également identifiées pour la coupe P_2 (figure 3.10b). Près de la contraction et du changement de section ($x_2 = 1.$), on constate une différence significative entre les deux composantes. Ces résultats sont en accord avec les contours de Ω obtenus (figure 3.9). Dans cette région, le module de la vitesse est

important à cause du rétrécissement de section et du principe de conservation de la masse. On peut également remarquer ici que dans la partie supérieure de la contraction ($x_2 > 1.5$), comprenant également la zone de recirculation, on ne constate aucune différence entre les composantes W_{12} et \overline{W}_{12} . Ceci peut s'expliquer par la présence de vitesses beaucoup plus faibles que dans le cas précédent.

La coupe P_3 (figure 3.10c) coupe la région où l'amplitude de la vitesse angulaire Ω est maximale en valeur absolue. La différence maximale entre W_{12} et \overline{W}_{12} est observée au voisinage de $x_2 = 0.16$. Le long de la dernière coupe P_4 (figure 3.10d), on ne constate aucune différence entre les profils des composantes W_{12} et \overline{W}_{12} . Ceci s'explique facilement d'après les résultats précédents puisque nous sommes ici dans une région de cisaillement pur, pour laquelle la vitesse de rotation des vecteurs propres de \mathbf{D} est nulle.

3.3 Écoulement autour d'un cylindre

On considère ici l'écoulement bidimensionnel d'un fluide Newtonien autour d'un cylindre de rayon unitaire $A = 1$. Le domaine de calcul (figure 3.11) est d'une longueur de 15

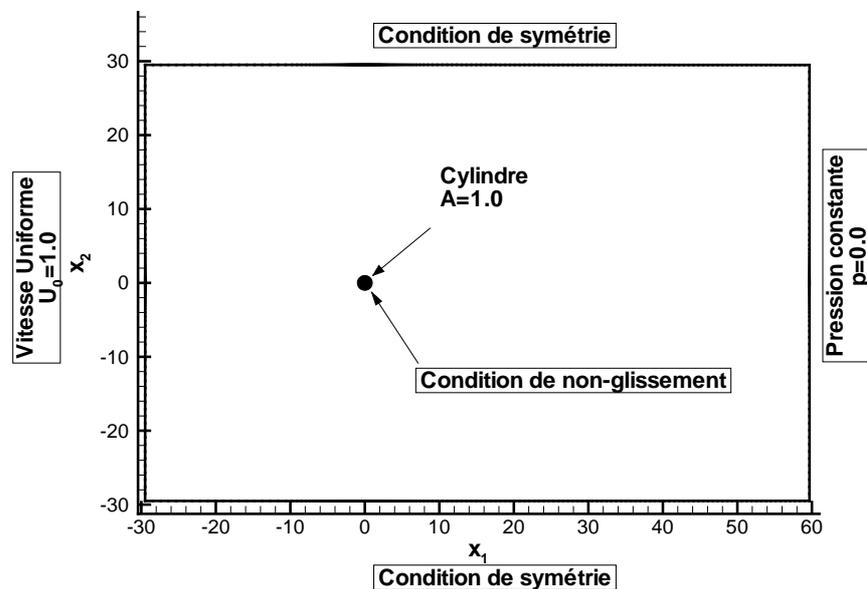


FIG. 3.11: Écoulement autour d'un cylindre : géométrie et conditions limites

diamètres en amont et de 30 diamètres en aval du cylindre, et s'étend de 10 diamètres de part et d'autre du cylindre.

Les conditions limites imposées sont présentées sur la figure (3.11). Une condition de non-glissement imperméable est appliquée sur la surface du cylindre. Une vitesse uniforme $U_0 = 1$ (dans la direction horizontale x_1) est imposée à l'entrée du domaine de calcul. À la sortie du domaine, une pression nulle est imposée alors qu'une condition de symétrie est appliquée sur les faces supérieure et inférieure.

La figure (3.12) présente le maillage 200×100 choisi pour cette géométrie. Le maillage orthogonal utilisé est généré en considérant les lignes de courant et les lignes d'équi-potentielles de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait autour du cylindre de rayon A . L'écoulement potentiel ayant une vitesse uniforme à l'infini U_e admet comme unique solution le potentiel complexe

$$\Phi = U_e(z + A^2/z) \quad (3.10)$$

où $z = x_1 + jx_2 = re^{j\theta}$ est l'affixe du point en prenant comme origine polaire le centre du cylindre, j désignant le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$. À partir de l'équation (3.10), on peut déterminer le potentiel réel de vitesse $\psi_1 = \text{Re}(\Phi)$ et la fonction de courant $\psi_2 = \text{Im}(\Phi)$:

$$\psi_1 = U_e \cos \theta \left(r + \frac{A^2}{r} \right) \quad (3.11)$$

$$\psi_2 = U_e \sin \theta \left(r - \frac{A^2}{r} \right) \quad (3.12)$$

Les valeurs de (ψ_1, ψ_2) étant fixées, la génération du maillage consiste à résoudre les équations (3.11) et (3.12) pour les variables (r, θ) . Par élimination de la variable θ , on obtient une équation de degré 4 en r (voir [35] pour plus de détails). Les composantes de la matrice Jacobienne de la transformation $(x_1, x_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2)$ peuvent être déterminées analytiquement.

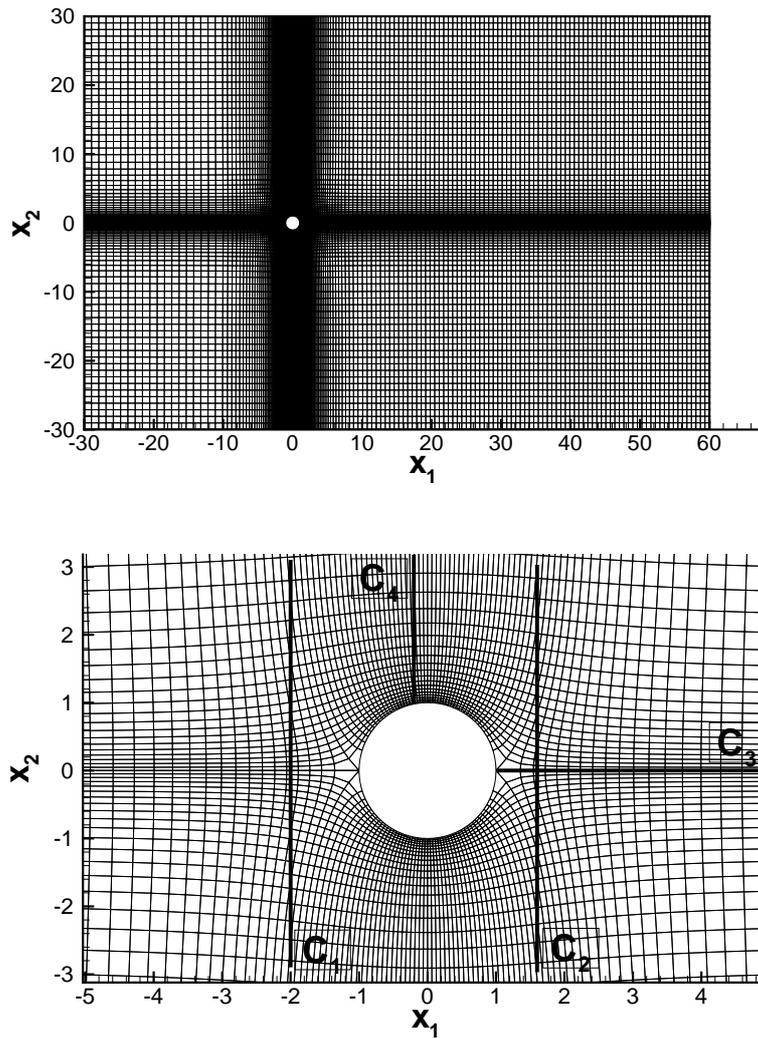


FIG. 3.12: Vue globale du maillage orthogonal 200×100 (haut). Zoom autour du cylindre (bas) et définition des coupes C_1, C_2, C_3, C_4

On a :

$$\frac{\partial x_i}{\partial \psi_j} = \frac{1}{U_e D_e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{A^2}{r^2} \cos 2\theta & \frac{A^2}{r^2} \sin 2\theta \\ -\frac{A^2}{r^2} \sin 2\theta & 1 - \frac{A^2}{r^2} \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où D_e est le déterminant de la matrice notée entre crochets ci-dessus. Il est à noter que le Jacobien est singulier aux points de stagnation amont et aval sur le cylindre, mais son évaluation numérique n'est cependant pas nécessaire en ces points.

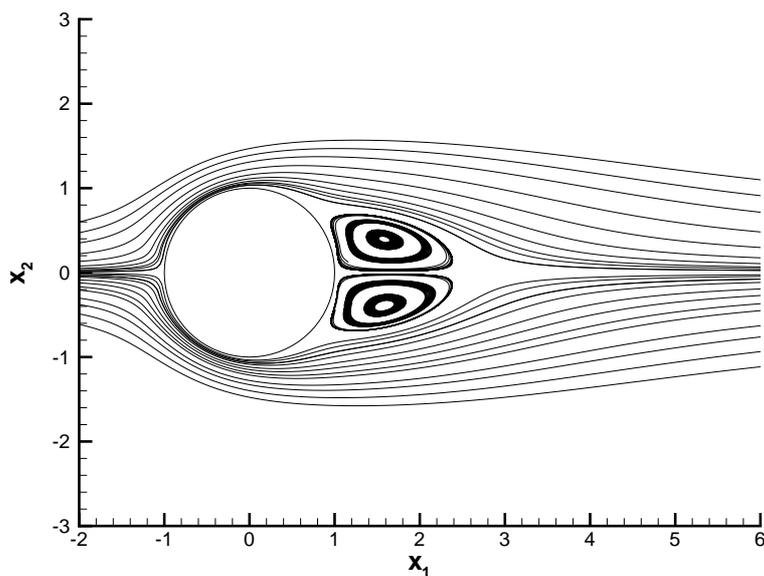


FIG. 3.13: Lignes de courant d'un écoulement laminaire Newtonien autour d'un cylindre, $R_e = 20$

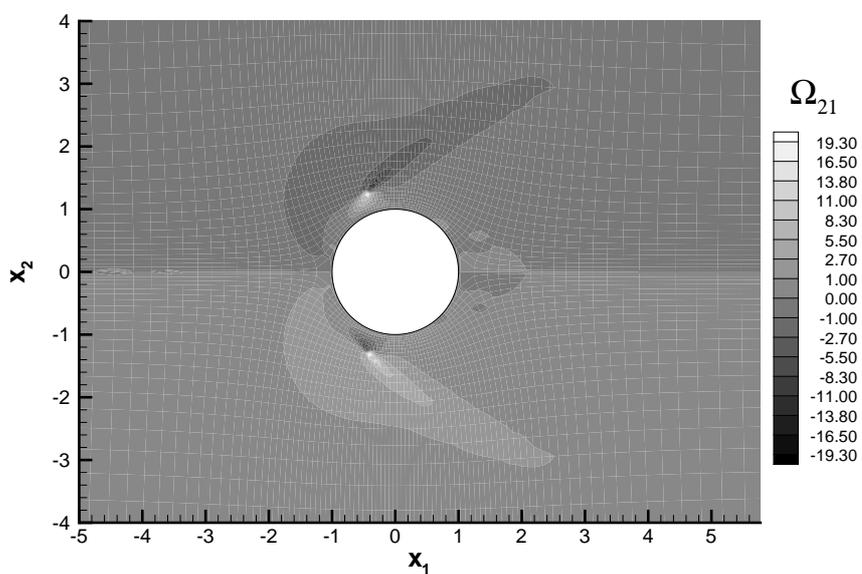


FIG. 3.14: Vitesse angulaire des vecteurs propres du tenseur taux de déformation. Écoulement laminaire autour d'un cylindre, $R_e = 20$

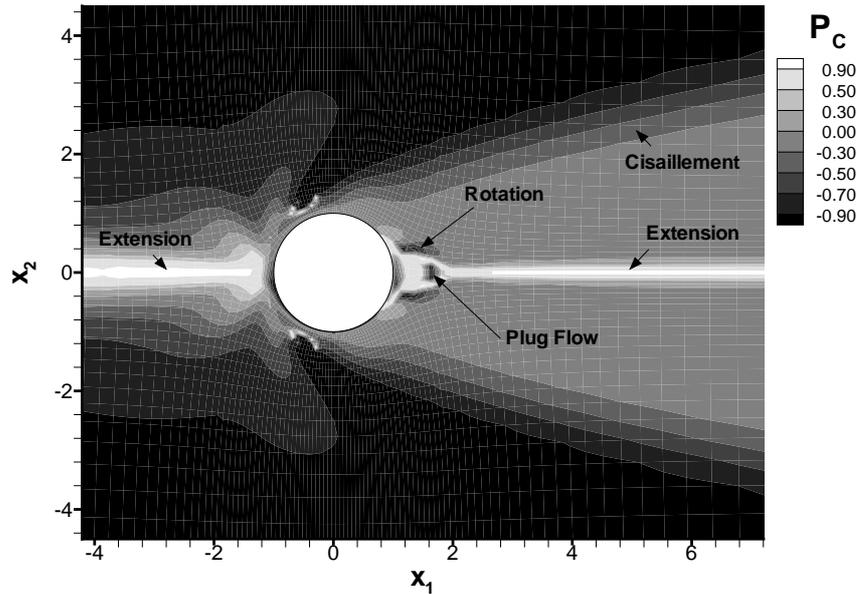


FIG. 3.15: Contours du paramètre de classification P_C . Écoulement laminaire autour d'un cylindre, $Re = 20$

On présentera ici les résultats obtenus pour un nombre de Reynolds $Re = 2AU_0/\nu = 20$, choisi nettement en deçà de la valeur critique pour laquelle on observe les instabilités de Von Karman [38]. La figure (3.13) montre les contours de la fonction de courant dans la région proche du cylindre. On remarque que pour $Re = 20$, l'écoulement est bien symétrique par rapport à l'axe $x_2 = 0$, avec deux recirculations tournant en sens opposé. La longueur de recirculation, L_A , peut être définie comme la distance mesurée le long de l'abscisse x_1 entre le point de stagnation aval du cylindre et le point où la composante de vitesse suivant l'axe x_1 change de signe (de négative à positive). On trouve ici $L_A = 1.9$, ce qui est en accord avec la littérature [6].

Les contours de la vitesse angulaire Ω , adimensionnée par $2A/U_0$, sont présentés sur la figure (3.14). On remarque que le champ obtenu est anti-symétrique par rapport à l'axe $x_2 = 0$, c'est pourquoi nous considérerons uniquement la partie supérieure du domaine de calcul $x_2 \geq 0$ pour l'analyse des résultats. Les valeurs maximales prises par Ω sont localisées dans la couche de cisaillement, près du cylindre à la position $(x_1 \simeq -0.5, x_2 \simeq 1)$. On

remarque également que le minimum de Ω (valeur négative) est situé au voisinage immédiat du maximum.

La figure (3.15) montre les différentes régions de l'écoulement autour du cylindre, classifiées à l'aide du paramètre P_C . Les contours du champ de P_C obtenus étant symétriques par rapport à l'axe $x_2 = 0$, on ne considérera pour l'analyse suivante que la partie supérieure du domaine $x_2 \geq 0$. Trois types d'écoulements peuvent ainsi être identifiés :

- Deux régions d'extension peuvent tout d'abord être observées près de l'axe de symétrie $x_2 = 0$, pour lequel $P_C \simeq 1$. La première est située juste en amont du cylindre alors que la deuxième région est en aval du cylindre et commence après les zones de recirculation ($x_2 \geq 2$).

- Une zone de cisaillement, pour laquelle $P_C \rightarrow 0$, peut également être remarquée de part et d'autre du cylindre. Cette bande de cisaillement débute du point où Ω est maximum (voir figure 3.14) et s'étend en amont du cylindre. On remarque ici que l'on ne peut identifier une zone de cisaillement pur pour lequel $P_C = 0$, comme observé pour l'écoulement dans la contraction 4:1.

- On distingue également deux régions où la grandeur P_C prend des valeurs négatives et tend vers -1 : (a) une zone proche de $(x_1 = 1.2, x_2 = 0.5)$ correspondant à une rotation de corps rigide à l'intérieur des zones de recirculation. (b) une zone proche de $(x_1 = 1.8, x_2 = 0)$, correspondant à un plug flow entre ces deux vortex. Si l'on s'éloigne du cylindre, l'écoulement devient uniforme, et les directions principales de \mathbf{D} ne sont pas définies. Le paramètre \bar{R} ne peut alors être évalué et le paramètre P_C doit être forcé numériquement à la valeur -1 dans ces régions.

Quatre coupes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 ont été choisies afin d'examiner les différences entre la composante du tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} et celle du taux de rotation absolu $\bar{\mathbf{W}}$, toutes deux adimensionnées par $2A/U_0$ (voir figure 3.12). La section verticale C_1 est localisée à $x_1 = -2$, et les sections C_2 et C_3 sont placées en aval du cylindre. La coupe C_2 est localisée à $x_1 = 1.6$, afin de visualiser les effets des deux recirculations, et la coupe C_3 est placée le long de l'axe de symétrie $x_2 = 0$. La quatrième coupe, C_4 , traverse la zone où Ω_{21} est maximum. La figure (3.16) présente les profils de W_{21} et de \bar{W}_{21} le long de ces quatre sections.

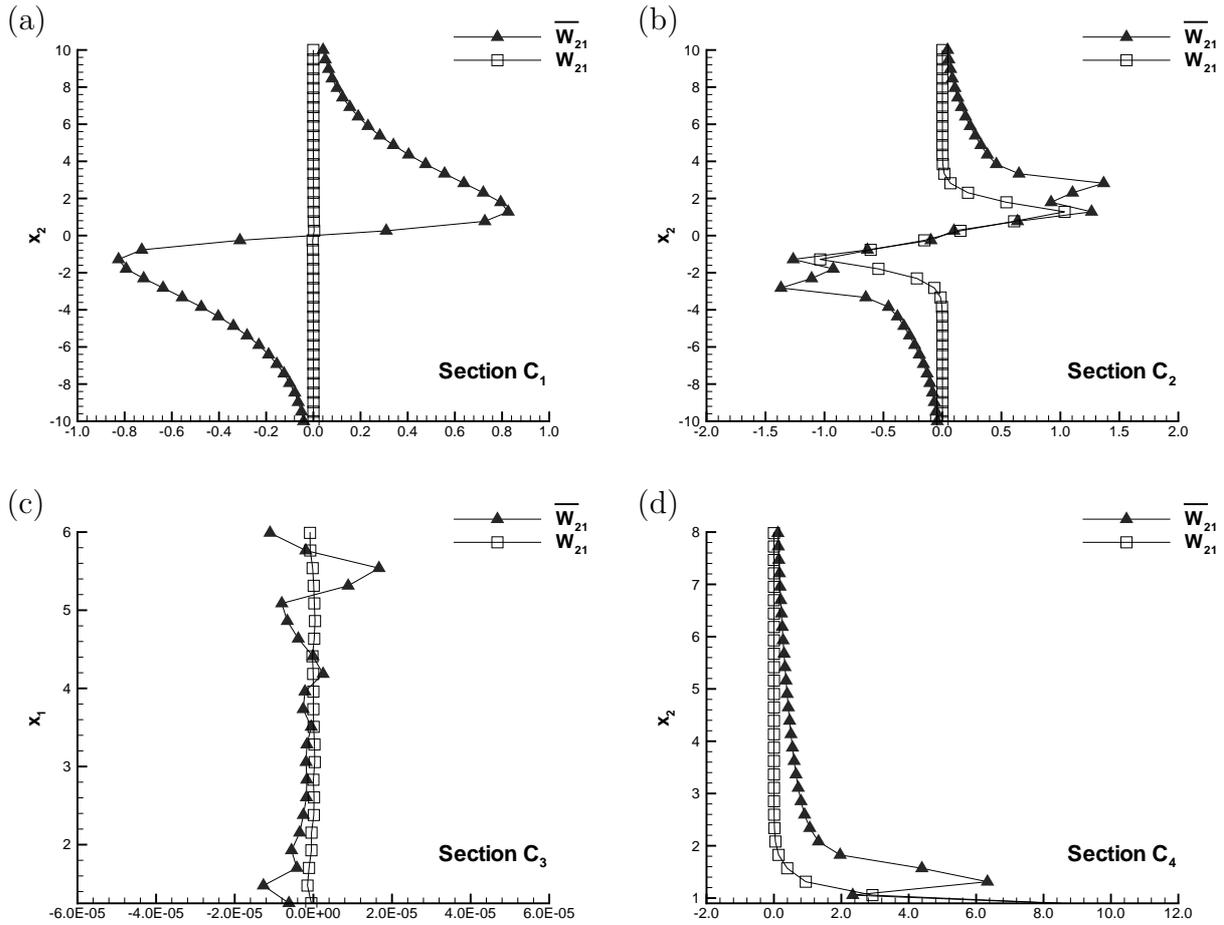


FIG. 3.16: Profils de $\overline{W_{21}}$ (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des sections C_1 , C_2 , C_3 et C_4 ; écoulement laminaire autour d'un cylindre, $Re = 20$

Pour la coupe C_1 (figure 3.16a), on constate que la vitesse angulaire des directions principales de \mathbf{D} est significative près de l'ordonnée $x_2 = 2$. À mesure que l'on s'éloigne du cylindre, W_{21} et $\overline{W_{21}}$ tendent vers la même valeur. Sur la section C_2 (figure 3.16b), on n'observe aucune différence entre W_{21} et $\overline{W_{21}}$ dans les zones de recirculation ($|x_2| \leq 1$). L'écart le plus important entre ces deux grandeurs est obtenu au passage à travers la zone de cisaillement $x_2 \simeq 3$. Si l'on considère désormais la coupe C_3 (figure 3.16c), on constate que les valeurs obtenues pour les deux composantes sont très faibles (10^{-5}) comparées aux valeurs obtenues sur les coupes précédentes. Ce résultat était attendu, sachant que la coupe C_3 est placée le long de l'axe de symétrie $x_2 = 0$. La coupe C_4 (figure 3.16d) présente les plus grandes différences observables entre W_{21} et $\overline{W_{21}}$. En effet, cette section coupe la zone

de l'écoulement où Ω_{21} prend ses valeurs maximales (prés de $x_2 = 1.5$).

3.4 Étude sur une conduite courbée à 180°

On a vu pour l'écoulement de Couette axisymétrique qu'une rotation d'ensemble du fluide induisait des différences notables entre les composantes des tenseurs taux de rotation absolu et relatif. On étudie dans cette partie l'influence de la courbure des lignes de courant sur le calcul du taux de rotation des vecteurs propres de \mathbf{D} .

On s'intéresse pour cela à l'écoulement d'un fluide Newtonien dans une conduite courbée à 180°. Le domaine de calcul et les conditions limites sont présentés sur la figure (3.17). L'origine du repère cartésien (x_1, x_2) est prise au centre de courbure O de la conduite. La géométrie est composée de 3 parties (voir figure 3.18) :

- (i) Un canal droit rectangulaire de section $H = 0.5$ m et de longueur $L_e = 2$ m à l'entrée de la conduite ;
- (ii) Une conduite courbée à 180° de rayon intérieur $R_1 = 0.5$ m et de rayon extérieur

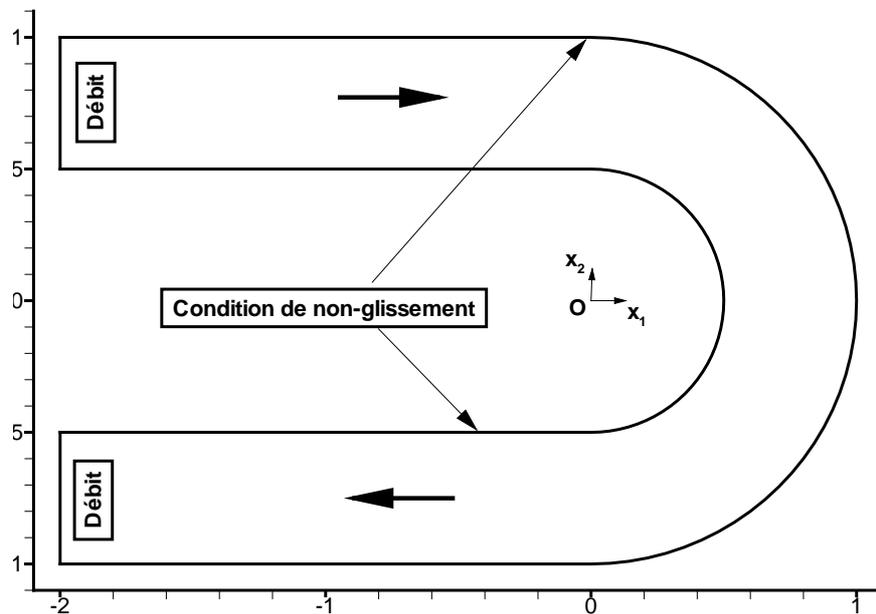


FIG. 3.17: Conditions limites pour l'écoulement dans une conduite courbée à 180°

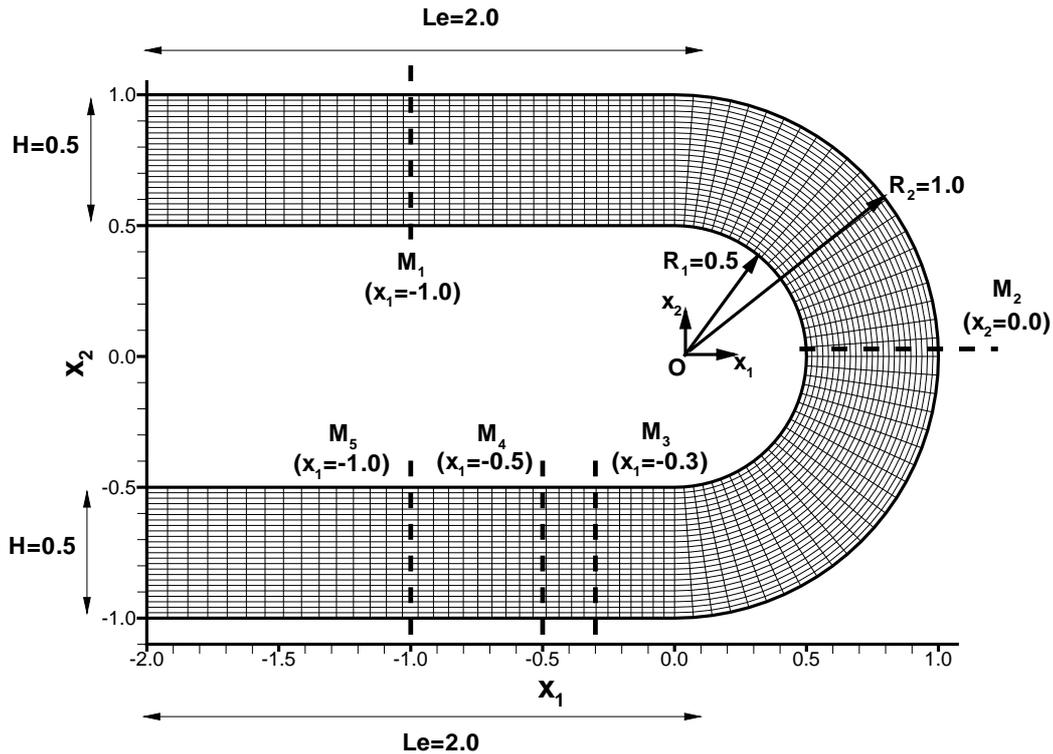


FIG. 3.18: Vue globale du maillage orthogonal 115×25 et définition des coupes M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

$R_2 = 1.0 \text{ m}$;

(iii) Un second canal droit rectangulaire de mêmes dimensions que le précédent en sortie de la conduite.

Pour cette géométrie, un maillage cartésien est utilisé pour chacune des conduites rectangulaires en amont et en aval de la partie courbée. Ces deux maillages cartésiens sont connectés à un maillage polaire dans la partie incurvée de la conduite (voir figure 3.18). On utilise ici le système de coordonnées orthogonales (ψ_1, ψ_2) présenté au chapitre 2. Nous avons donc ainsi :

- $(x_1, x_2) = (\psi_1, \psi_2)$ pour le conduit d'entrée,
- $(x_1, x_2) = (\psi_2 \sin \psi_1, \psi_2 \cos \psi_1)$ dans la partie courbée,
- $(x_1, x_2) = (-\psi_1, -\psi_2)$ pour le conduit de sortie.

Pour la partie courbée, la coordonnée ψ_1 représente l'angle polaire compté positive-

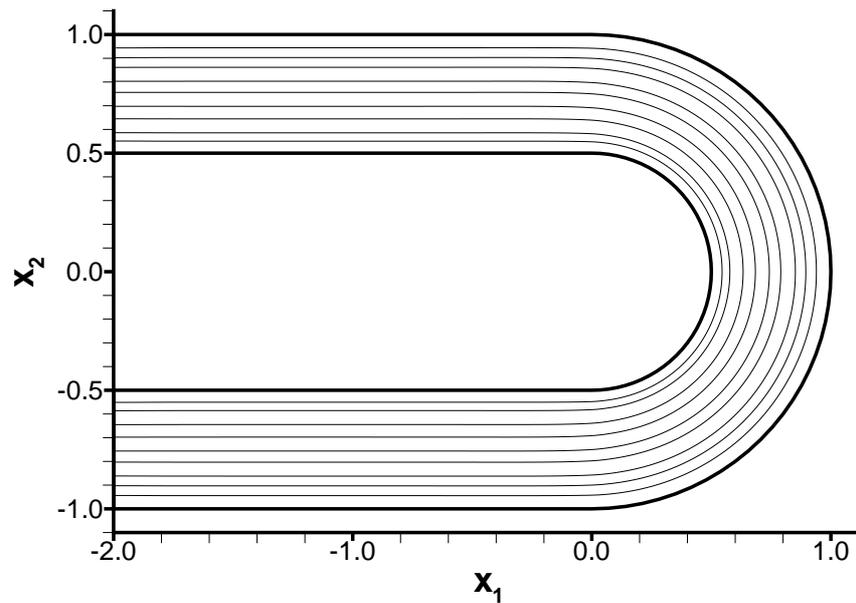


FIG. 3.19: Lignes de courant d'un écoulement laminaire Newtonien dans une conduite courbée à 180°, $Re = 2.5 \times 10^{-2}$

ment à partir de l'axe $x_1 = 0$, et la coordonnée ψ_2 est le rayon calculé à partir de l'origine O. Pour permettre la continuité entre les zones cartésiennes et la zone courbée, l'ordre des coordonnées est ici inversé par rapport à la définition habituelle des coordonnées cylindro-polaire. Pour le conduit courbé, on peut obtenir facilement la matrice Jacobienne de la transformation, et donc les valeurs des facteurs d'échelle qui valent $h_1 = \psi_2$ et $h_2 = 1$. De même, les variations de longueurs physiques s'écrivent $d\xi_1 = \psi_2 d\psi_1$ et $d\xi_2 = d\psi_2$. On en déduit les facteurs d'étirement $H_1^2 = 1/\psi_2$ et $H_2^1 = 0$.

La figure (3.17) montre les conditions limites appliquées pour cette géométrie. Un profil de vitesse de Poiseuille est imposé à l'entrée et à la sortie du domaine, tandis qu'une condition de non-glissement $V_1 = V_2 = 0$ est imposée sur les faces intérieure et extérieure de la conduite. Le maillage utilisé comporte 115 noeuds dans la direction principale de l'écoulement (41 dans la partie courbée de la conduite et 37 dans chaque canal rectangulaire) et 25 noeuds dans la direction normale à l'écoulement principal (voir figure 3.18).

Dans cette étude, le nombre de Reynolds $Re = U_C H / \nu$, calculé à partir de la vitesse débitante moyenne dans la conduite U_C et de la hauteur H de la conduite, est fixé à

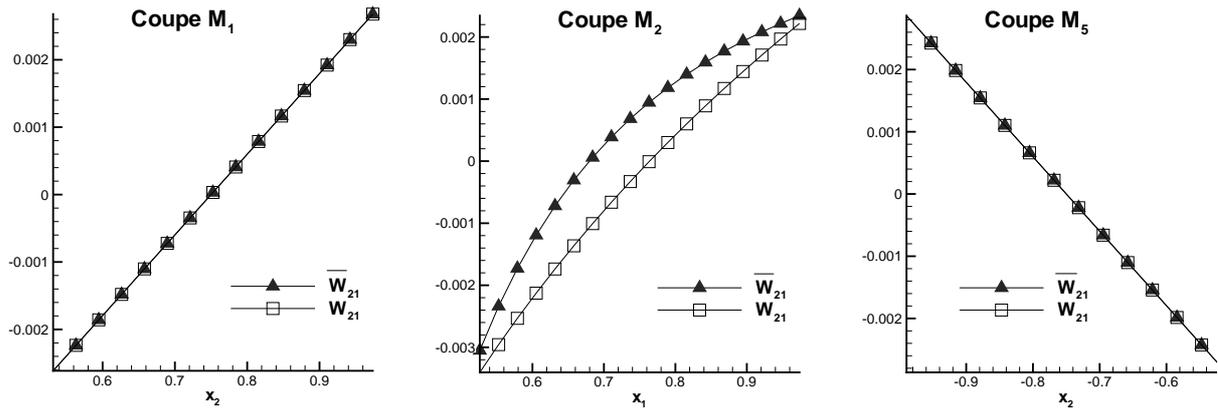


FIG. 3.20: Profils de \overline{W}_{21} (\blacktriangle) et W_{21} (\square) le long des sections M_1 , M_2 et M_5 . Écoulement laminaire dans une conduite courbée à 180°, $Re = 2.5 \times 10^{-2}$

2.5×10^{-2} .

La figure (3.19) montre les lignes de courants obtenues. On remarque que toutes les lignes de courant restent bien parallèles aux parois, aucun décollement n'est constaté. Ceci était attendu au vu du nombre de Reynolds faible. D'un point de vue cinématique, l'écoulement est un cisaillement pur partout dans la conduite. Afin de visualiser l'importance de l'indifférence matérielle sur ce type d'écoulement, plusieurs coupes transversales ont été définies (voir figure 3.18). On s'intéresse dans cette partie aux coupes M_1 , M_2 et M_5 . Les coupes M_3 et M_4 , respectivement situées en $x_1 = -0.3$ et $x_1 = -0.5$ dans le tuyau de sortie seront utilisées pour l'étude dynamique du chapitre suivant. Les coupes M_1 et M_5 sont respectivement localisées dans les canaux amont et aval en $x_1 = -1$, alors que la coupe M_2 , localisée en $x_2 = 0$, traverse la partie courbée de la conduite en son milieu. On peut s'attendre à ce que l'influence de la courbure des lignes de courant soit maximale le long de cette coupe M_2 .

La figure (3.20) montre les profils de la composante du tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} et celle du taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$ le long des coupes M_1, M_2 et M_5 . Les profils tracés sur la figure (3.20) sont adimensionnés par $2H/U_C$. On ne constate tout d'abord aucune différence entre les deux profils le long des coupes M_1 et M_5 . Ceci est conforme aux différentes observations précédentes puisque l'on se trouve dans une région de l'écoulement

en cisaillement pur sans rotation. Les vecteurs propres sont donc fixes et $\mathbf{\Omega}$ est nul. *A contrario*, la section M_2 montre des différences significatives entre les composantes W_{21} et \overline{W}_{21} , différences d'autant plus importantes que l'on se rapproche du centre de la conduite. On constatera même que les composantes \overline{W}_{21} et W_{21} sont de signe contraire près du centre de la conduite ($x_1 \simeq 0.75$). On voit ici clairement l'importance de l'indifférence matérielle dans des écoulements présentant une courbure significative des lignes de courant.

3.5 Synthèse

L'étude des directions principales du tenseur taux de rotation \mathbf{D} sur des écoulements simples nous a permis d'analyser les résultats obtenus sur trois géométries plus complexes : l'écoulement autour d'un cylindre, dans une contraction 4:1 et dans une conduite courbée à 180°.

En visualisant les différences entre la composante du tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} et celle du taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$, on a pu mettre en évidence l'importance de l'indifférence matérielle sur ces trois écoulements. On a vu qu'obtenir des valeurs significatives de $\mathbf{\Omega}$ requiert à la fois une transition entre deux cinématiques pures différentes, et des vitesses d'écoulement importantes. Ceci est compréhensible si l'on considère l'équation (2.59). Dans celle-ci, la grandeur $d\phi/dt$ est proportionnelle aux composantes du taux de déformation et aux composantes de vitesse apparaissant dans les dérivées matérielles.

L'un des autres points importants à noter ici est que les zones de recirculation sont systématiquement des zones où $\mathbf{\Omega}$ est faible, et où on constatera donc peu de différence entre une loi constitutive respectant l'indifférence matérielle et une loi ne la respectant pas. Ceci est un résultat non-trivial et qui n'était pas attendu eu égard à la cinématique de l'écoulement.

On a constaté également que l'indifférence matérielle peut être importante pour des écoulements présentant une courbure significative des lignes de courant (coude à 180°) ou des écoulements pour lesquels le fluide est entraîné en rotation (écoulement de Couette axisymétrique).

Les résultats présentés ici ont été obtenus sur base d'une cinématique Newtonienne donnée, sans couplage entre la dynamique de l'écoulement et les lois constitutives. Bien que

permettant de faire une analyse précise de l'indifférence matérielle et de suggérer un impact sur les lois constitutives algébriques, cette étude cinématique ne nous permet pas de discuter de la validité des modèles algébriques, en particulier par rapport au modèle différentiel d'Oldroyd-B. Ceci nécessite le couplage dynamique entre les équations du mouvement et les lois de tensions viscoélastiques. Ce point fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Étude dynamique des modèles algébriques de tension

Dans ce chapitre, on compare dans un premier temps les différents modèles algébriques objectifs simplifiés MAS-1-IM (1.45) et MAS-2-IM (1.48) au modèle différentiel d'Oldroyd-B (1.5), que l'on considérera comme modèle de référence. On souhaite donc reproduire ses propriétés aussi fidèlement que possible avec les nouveaux modèles algébriques et on vérifiera dans un premier temps que les prédictions des modèles algébriques simplifiés sont en bon accord avec celles du modèle d'Oldroyd-B. Les tensions obtenues sont donc ici couplées aux équations du mouvement. Dans un second temps, on évalue l'influence de l'objectivité sur les prédictions des tensions. On a vu au chapitre 3 que la prise en compte de l'indifférence matérielle par le calcul du taux de rotation des vecteurs propres du tenseur taux de déformation pouvait engendrer des différences significatives entre les tenseurs taux de rotation absolu et relatif. Ces différences observées sont susceptibles d'avoir des conséquences directes sur les prédictions obtenues à partir des lois algébriques constitutives. On considérera donc également les modèles MAS-1 (1.44) et MAS-2 (1.47). Deux géométries comportant des cinématiques distinctes ont été choisies pour les besoins de cette étude : la contraction 4:1 et l'écoulement dans un coude à 180° , géométries déjà utilisées pour l'étude cinématique du chapitre précédent.

4.1 Écoulement dans une contraction 4:1

On s'intéresse ici à l'écoulement plan d'un fluide viscoélastique dans une contraction 4:1. Cette géométrie possède des cinématiques particulières (voir figure 3.7) et présente l'avantage d'être largement traitée dans la littérature [2], [29], [21].

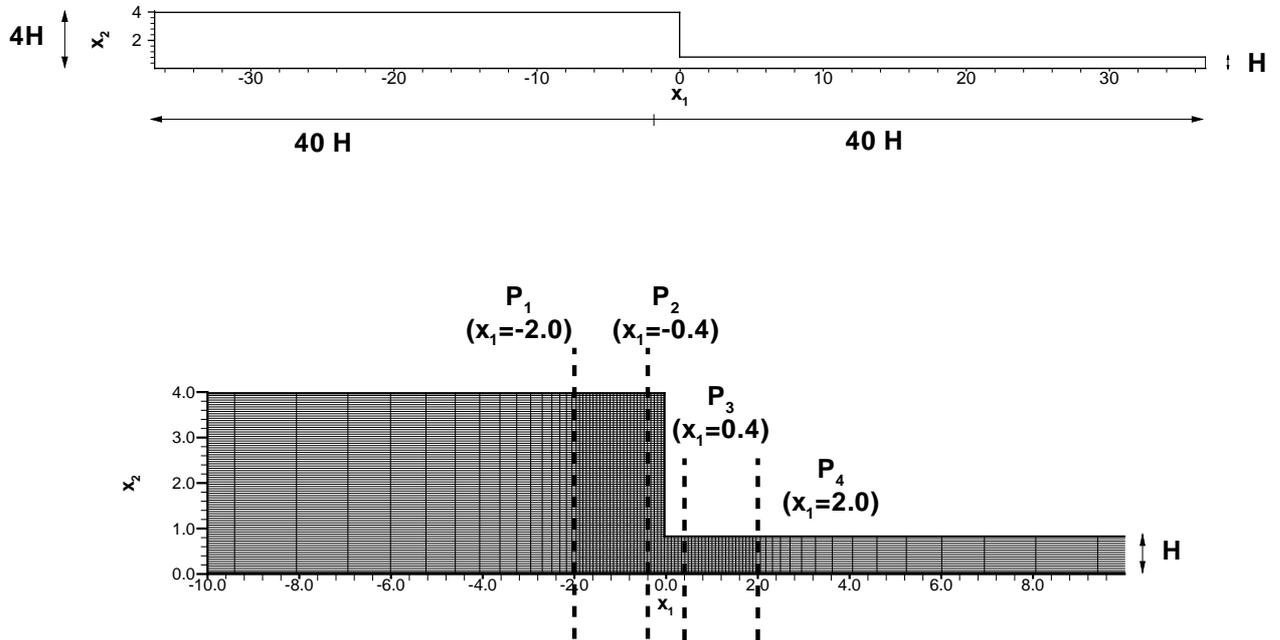


FIG. 4.1: Géométrie, maillage 101×81 et définition des coupes P_1, P_2, P_3, P_4 . Écoulement dans une contraction 4:1

4.1.1 Géométrie et maillage

La figure (4.1) montre la géométrie utilisée pour cette étude. La longueur totale du domaine est de $80H$ où $H = 1$ est la hauteur de référence du canal de sortie. Le rapport entre la hauteur de référence du canal d'entrée et de sortie est de 4:1 et le changement de section est localisé en $x_1 = 0$. Le domaine de calcul s'étend donc d'une longueur de $40H$ de part et d'autre du changement de section. La longueur des canaux amont et aval est volontairement plus importante que celle utilisée au chapitre 3 portant sur l'étude cinématique de l'indifférence matérielle. En effet, en raison du mécanisme de relaxation des contraintes viscoélastiques, il est nécessaire d'étendre le domaine de calcul et donc le temps de résidence de la particule fluide en amont et en aval de la contraction.

De la même manière que pour l'étude précédente (figure 3.4), on ne considère ici que

la partie supérieure du domaine et une condition de symétrie est appliquée sur la frontière en $x_2 = 0$. Une condition de non-glissement ($V_1 = V_2 = 0$) est appliquée sur la partie supérieure du domaine de calcul alors qu'un débit constant est imposé à l'entrée et à la sortie. Pour le modèle d'Oldroyd-B, les conditions d'entrée pour les tensions viscoélastiques sont déduites de la solution d'un écoulement de Poiseuille plan. Les conditions suivantes sont donc imposées à l'entrée :

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2\eta_p\lambda(\partial U_1/\partial x_2)^2, \\ T_{22} &= 0, \\ T_{12} &= \eta_p(\partial U_1/\partial x_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour les modèles algébriques MAS, une seule condition sur la trace du tenseur viscoélastique Λ est nécessaire en entrée de domaine. Pour un écoulement de Poiseuille plan, on impose donc la condition suivante pour la trace :

$$\Lambda = 2\eta_p\lambda(\partial U_1/\partial x_2)^2. \tag{4.2}$$

La géométrie ne présentant pas de courbures, on utilise pour cette géométrie un maillage cartésien, décrit sur la figure (4.1). La direction x_1 est donc celle de l'écoulement, et x_2 la direction transverse à celle-ci. Pour un maillage cartésien, les facteurs d'étirements H_i^j (équation 2.7) sont nuls dans les équations définies au chapitre 2. Le maillage considéré comporte 101 noeuds dans la direction principale de l'écoulement x_1 , et 81 noeuds dans la direction normale x_2 . Le maillage est également raffiné à l'approche du changement de section en $x_1 = 0$ et sa progression géométrique est montrée sur la figure (4.1).

Plusieurs coupes transverses P_1, P_2, P_3, P_4 ont été choisies pour une meilleure analyse des résultats (voir figure 4.1). Les deux coupes P_1 et P_2 sont placées en amont de la contraction respectivement en $x_1 = -2.0$ et $x_1 = -0.4$. La seconde section P_2 coupe la zone de recirculation, ainsi que la zone où l'influence de l'indifférence matérielle est maximale (voir chapitre 3, figure 3.10). Les deux coupes P_3 et P_4 sont situées en aval de la contraction respectivement en $x_1 = +0.4$ et $x_1 = +2.0$. (voir figure 4.1).

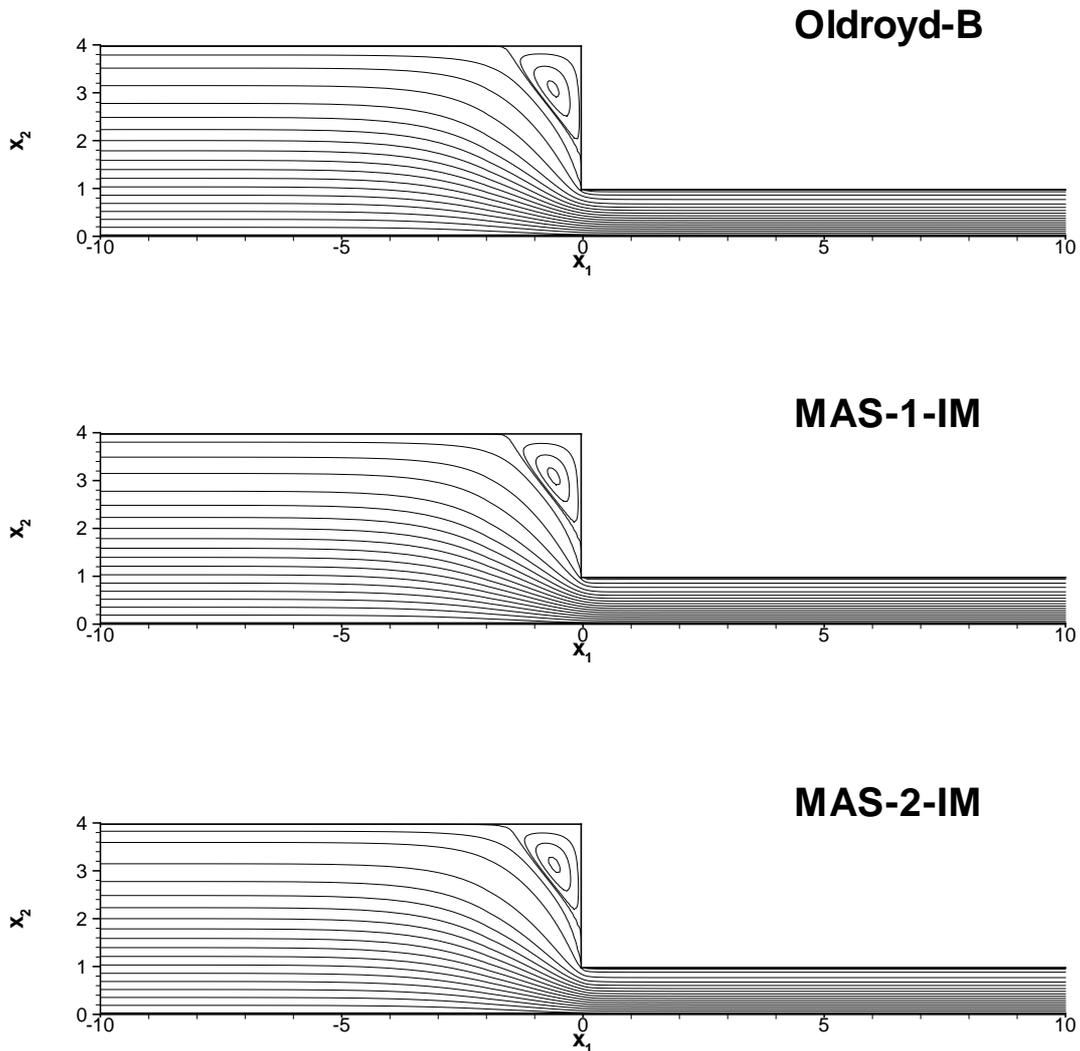


FIG. 4.2: Lignes de courant dans une contraction 4:1, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

4.1.2 Résultats

On considère ici l'écoulement d'un fluide viscoélastique de nombre de Reynolds $Re = \rho U_a H / (\eta_s + \eta_p) = 10^{-2}$ calculé à partir de la vitesse débitante en sortie U_a et de la hauteur H du canal de sortie. Les viscosités polymérique η_p et Newtonienne η_s sont choisies telles que $\eta_s / (\eta_s + \eta_p) = 1/9$. Le nombre de Deborah $De = \lambda U_a / H$ est ici fixé à 0.3, où λ est le temps de relaxation du fluide. Pour une meilleure stabilité, le calcul de l'écoulement New-

Modèle	Position de la recirculation	Taille	Intensité
Oldroyd-B	(-0.63, 3.07)	0.199	1.7×10^{-3}
MAS-1-IM	(-0.63, 3.12)	0.199	1.8×10^{-3}
MAS-2-IM	(-0.63, 3.17)	0.199	1.6×10^{-3}

TAB. 4.1: Propriétés de la recirculation obtenue avec les modèles d'Oldroyd-B, MAS-1-IM, MAS-2-IM, $De = 0.3$

tonien d'un fluide de viscosité $\eta_s + \eta_p$ est tout d'abord effectué. Les champs de vitesse et de pression ainsi obtenus sont ensuite utilisés comme conditions initiales du calcul viscoélastique.

La figure (4.2) montre les lignes de courant obtenues à partir du modèle différentiel d'Oldroyd-B et des modèles algébriques objectifs MAS-1-IM et MAS-2-IM. Les profils obtenus sont identiques et la cinématique de l'écoulement est donc prédite de manière similaire par les trois modèles. Ceci est confirmé si l'on considère les profils des vitesses U_1 et U_2 le long des coupes P_1 et P_2 (figure 4.3). Les vitesses, adimensionnées par la vitesse débitante U_a , sont reproduites de manière semblables par les trois modèles. On peut formuler les mêmes conclusions si l'on s'intéresse aux propriétés de la recirculation obtenue avec les modèles d'Oldroyd-B et les modèles algébriques objectifs (voir tableau 4.1). La taille ainsi que la position de la recirculation sont identiques pour les trois modèles. On remarque que le modèle MAS-2-IM tend à sous évaluer l'intensité de la recirculation alors que le modèle MAS-1-IM prédit une intensité supérieure à celle obtenue avec le modèle d'Oldroyd-B. Les écarts restent cependant très faibles.

On s'intéresse ici aux prédictions des différentes composantes du tenseur viscoélastique \mathbf{T} obtenues avec les différents modèles. Les figures (4.4), (4.5) et (4.6) montrent respectivement les contours obtenus de T_{11} , T_{22} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$. Pour la composante T_{11} (figure 4.4), on constate que les contours obtenus sont très semblables pour les trois modèles. Les valeurs maximales et minimales des tensions sont localisées pour les trois modèles près du changement de section en $x_1 = 0$ et la singularité au coin de la contraction est prédite par tous les modèles.

Les contours de la composante T_{22} obtenus avec les différents modèles considérés ci-

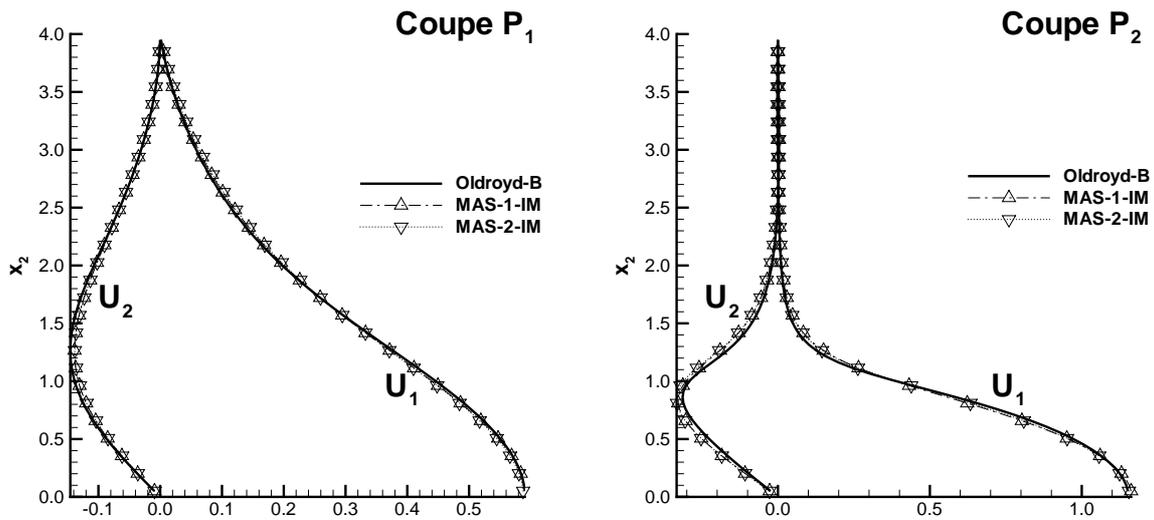


FIG. 4.3: Profils des vitesses U_1 et U_2 adimensionnées par la vitesse débitante U_a le long des coupes P_1 et P_2 , $De = 0.3$

dessus sont également présentés sur la figure (4.5). Les observations sont identiques à celles formulées pour la composante normale T_{11} . Les contours tracés à partir des résultats des modèles algébriques MAS sont similaires à ceux du modèle de référence d'Oldroyd-B. On constate néanmoins que des oscillations numériques apparaissent avec le modèle MAS-2-IM au niveau du changement de section de la contraction.

La figure (4.6) montre les contours obtenus avec ces trois modèles pour la composante de cisaillement T_{12} . Les valeurs minimales et maximales sont également localisées près du changement de section et les résultats provenant des modèles algébriques sont en bon accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B.

Pour permettre une comparaison plus fine des résultats, les composantes du tenseur viscoélastique \mathbf{T} sont ici évaluées le long des coupes P_1 et P_2 (figure 4.7), et le long des coupes P_3 et P_4 (figure 4.8). Les tensions sont également adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$. On remarque que les profils obtenus de ces deux composantes à l'aide des modèles algébriques sont en parfait accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B.

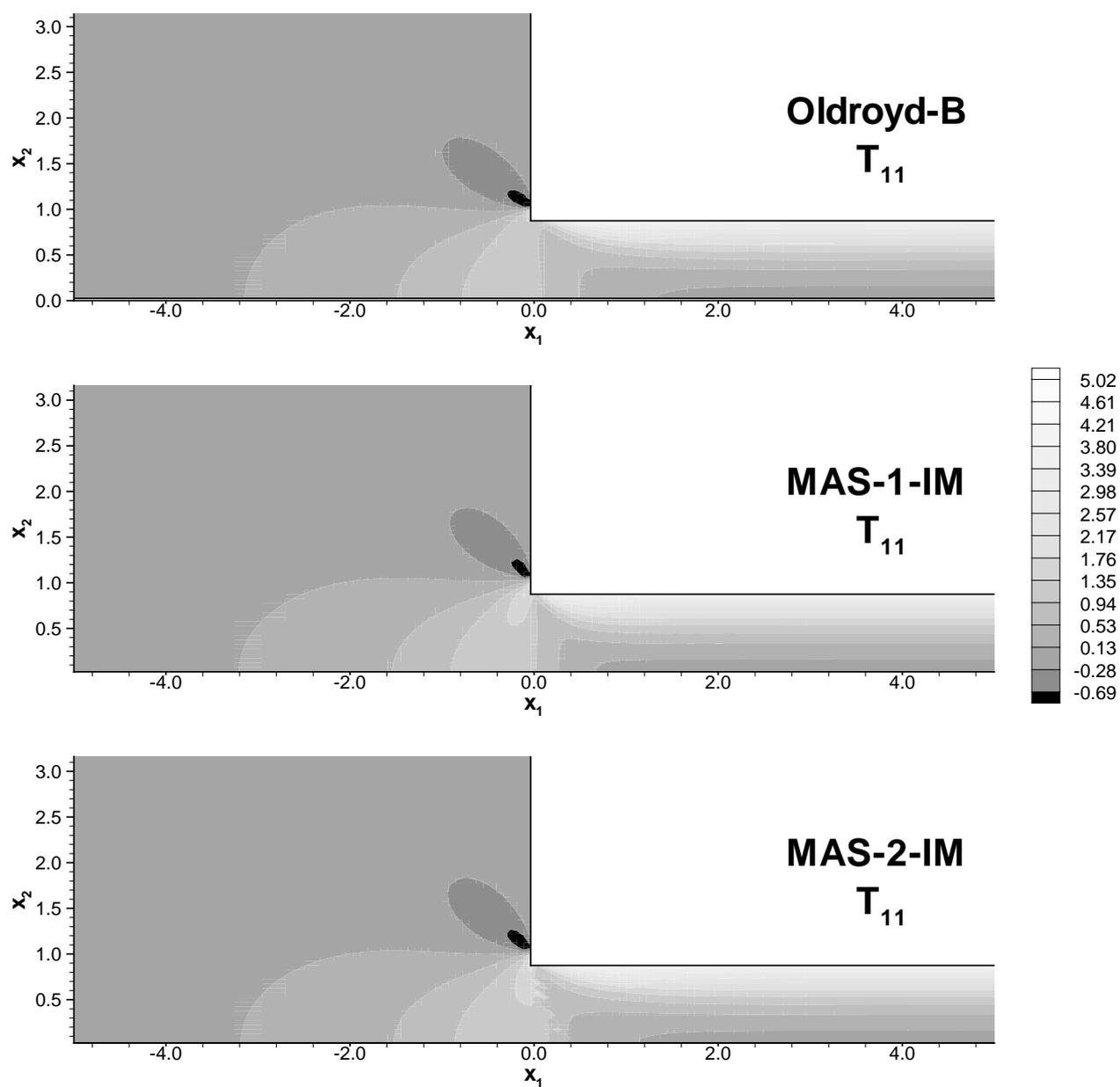


FIG. 4.4: Contours de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

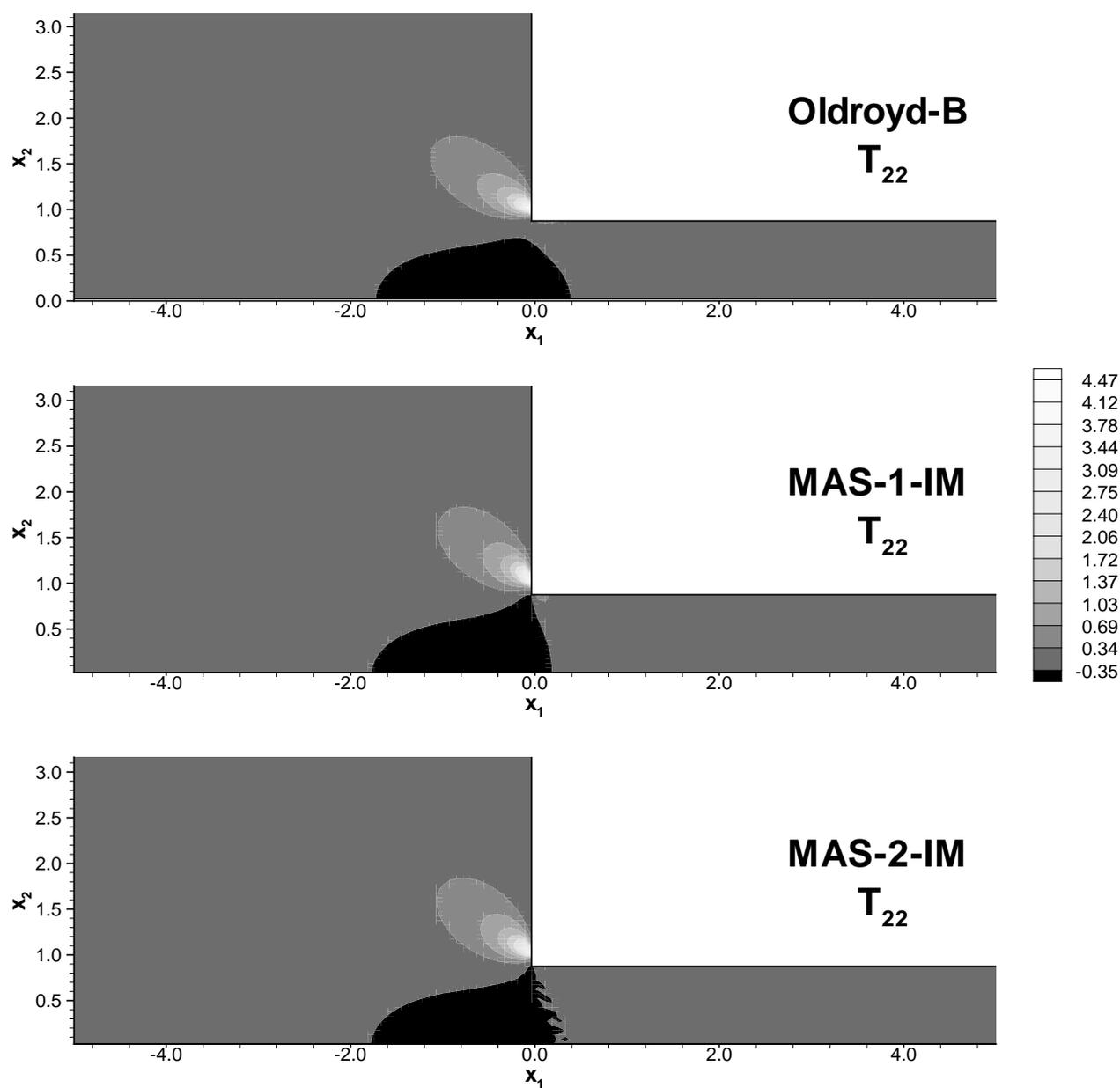


FIG. 4.5: Contours de la composante normale T_{22} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

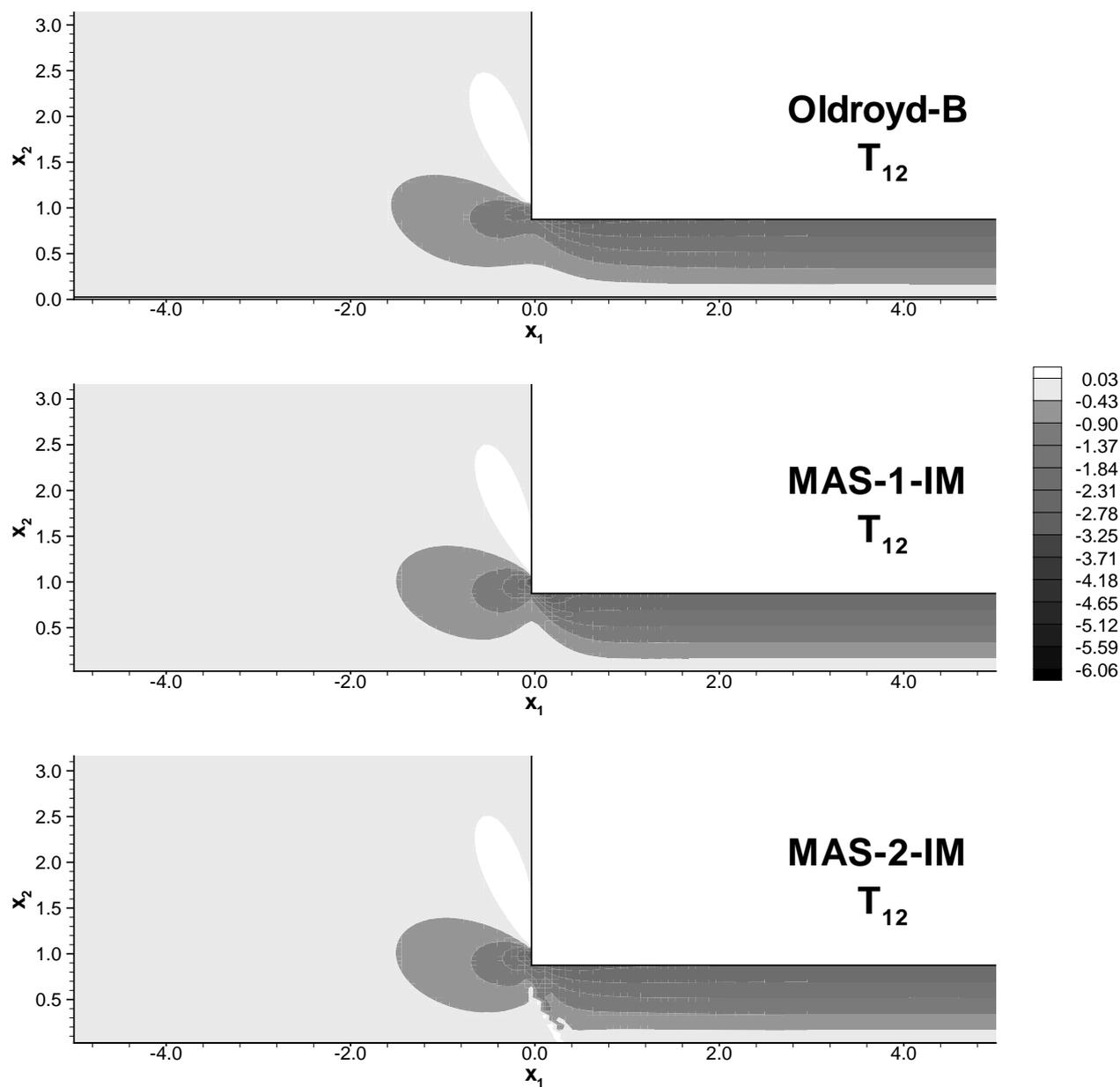


FIG. 4.6: Contours de la composante de cisaillement T_{12} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

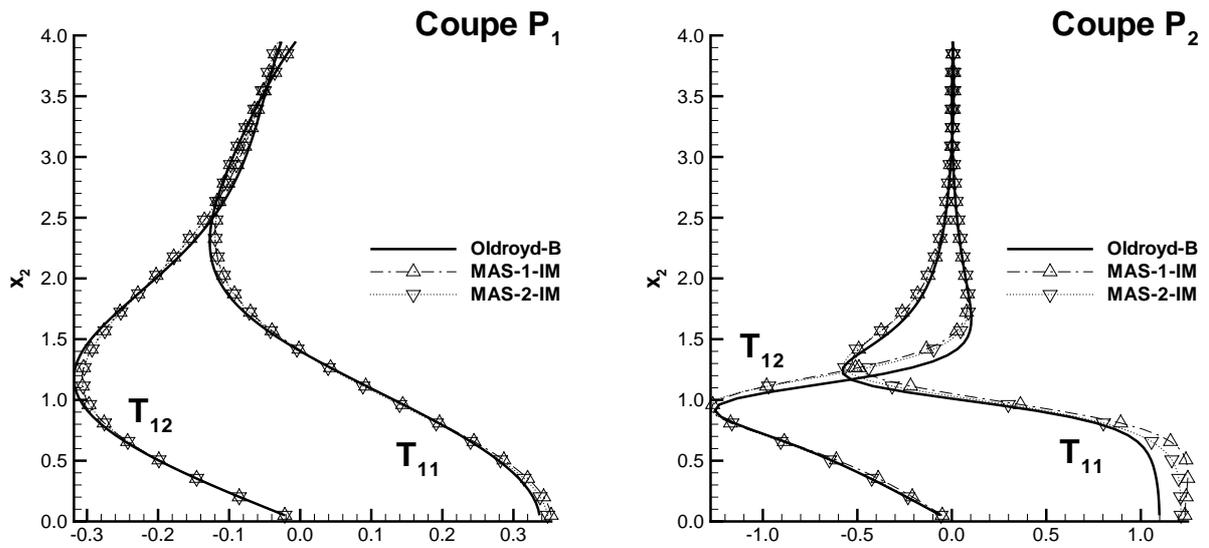


FIG. 4.7: Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_1 et P_2 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$

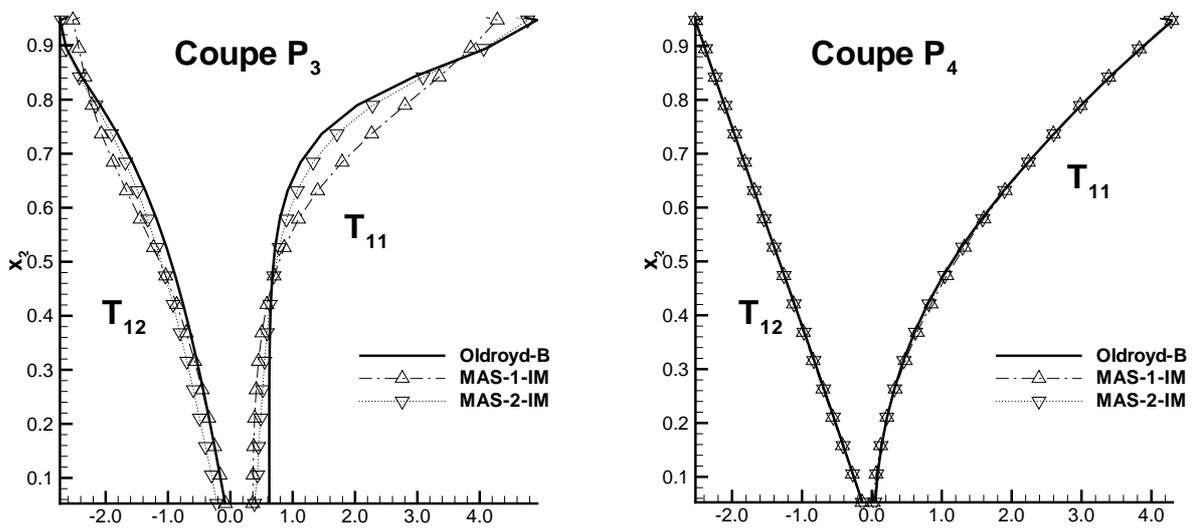


FIG. 4.8: Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_3 et P_4 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$

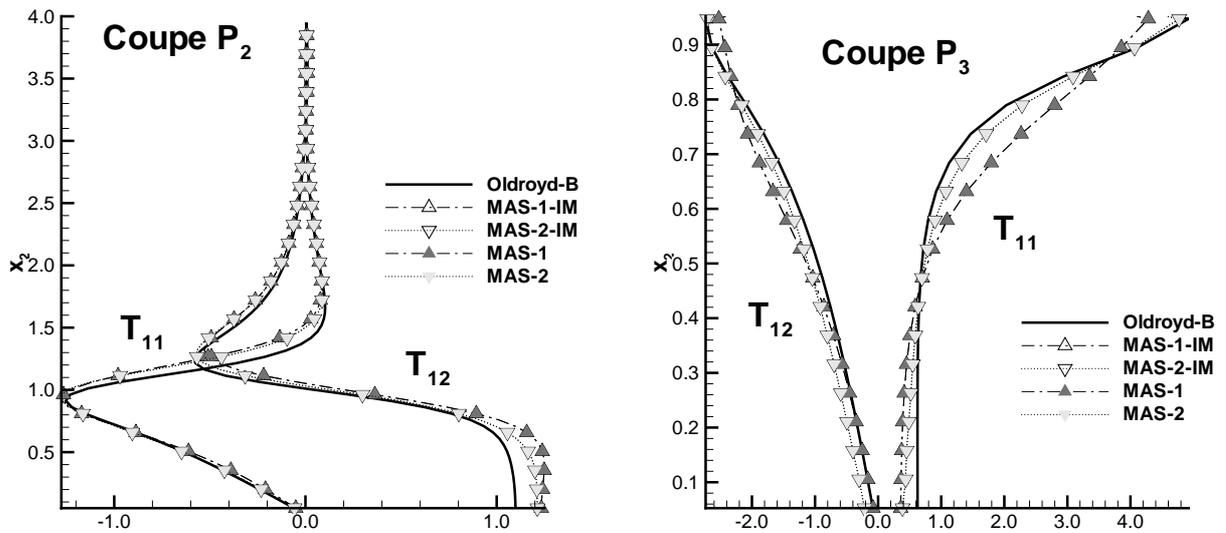


FIG. 4.9: Profils des composantes T_{11} et T_{12} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ le long des coupes P_2 et P_3 . Écoulement dans une contraction 4:1, $De = 0.3$

Influence de l'indifférence matérielle

On vient de voir que les prédictions des modèles algébriques simplifiés respectant le principe d'indifférence matérielle sont en excellent accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B. L'étude cinématique de l'indifférence matérielle pour la contraction 4:1 a montré des différences significatives entre les tenseurs taux de rotation relatif \mathbf{W} et taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$. Comme les modèles objectifs utilisent le tenseur $\overline{\mathbf{W}}$ pour l'expression des tensions, et que les modèles non-objectifs utilisent \mathbf{W} , ces différences observées au chapitre 3 entre ces deux tenseurs sont susceptibles d'influer sur la prédiction des tensions. On quantifie donc ici l'importance de l'indifférence matérielle sur les résultats des tensions viscoélastiques obtenues.

On considère pour cela dans cette partie les modèles non-objectifs MAS-1 et MAS-2. On a vu au chapitre précédent que l'influence de l'indifférence matérielle était supposée significative principalement au niveau des sections P_2 et P_3 situées près du changement de section de la contraction. Sur les coupes P_1 et P_4 situées dans des zones de cinématique pure de l'écoulement, le rôle de l'indifférence matérielle est moins important, voire négligeable.

La figure (4.9) montre les profils de tensions T_{11} et T_{12} obtenues avec les différents

modèles algébriques non-objectifs MAS-1, MAS-2, et le modèle différentiel d'Oldroyd-B. Les courbes adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_a/H$ sont tracées le long des différentes coupes P_2 et P_3 définies précédemment. On constate qu'aucune différence significative n'apparaît entre les modèles objectifs et non-objectifs que l'on considère la composante de cisaillement T_{12} ou la composante normale T_{11} . Les allures des courbes obtenues avec les modèles MAS sont identiques à celles des modèles MAS-IM et sont donc très proches de celles obtenues à partir du modèle différentiel d'Oldroyd-B. On peut donc remarquer de manière générale que les prédictions du modèle d'Oldroyd-B sont reproduites de manière fidèle par les modèles algébriques simplifiés. En dépit des différences significatives constatées au chapitre 3 entre le tenseur taux de rotation absolue $\overline{\mathbf{W}}$ et relatif \mathbf{W} , les résultats des modèles non-objectifs diffèrent très peu de ceux d'Oldroyd-B. Pour cet écoulement, la contribution des termes de rotation dans les équations algébriques explicites décrivant le tenseur $\mathbf{\Gamma}$ doit être faible devant celles du terme visqueux $\beta_1 \mathbf{D}$ et du terme quadratique $\beta_3 (\mathbf{D}^2/\{\mathbf{D}^2\} - \mathbf{I}/3)$.

4.2 Écoulement dans une conduite courbée

On considère dans cette partie l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite courbée à 180° . Cet écoulement est caractérisé par une courbure importante des lignes de courant. On étudie l'influence de cette courbure sur les prédictions des modèles algébriques de tensions.

4.2.1 Géométrie et maillage

On considère donc ici l'écoulement fluide dans une conduite cylindrique courbée de section $H = 0.5m$, de rayon intérieur $R_1 = 0.5m$ et de rayon extérieur $R_2 = 1m$. Le maillage utilisé est identique à celui présenté dans le chapitre 3 (voir figure 3.18). Il comprend 115 noeuds dans la direction principale de l'écoulement et 25 noeuds dans la direction normale.

Les conditions limites appliquées sont identiques quel que soit le modèle étudié (modèle différentiel d'Oldroyd-B ou modèles algébriques MAS-1 et MAS-2) : à l'entrée et à la sortie du domaine, un débit constant est imposé, alors qu'une condition de non glissement est appliquée sur les parois intérieure et extérieure ($V_1 = V_2 = 0$). De la même manière que pour l'écoulement dans une contraction 4:1, les conditions en entrée pour les composantes du tenseur viscoélastique pour le modèle d'Oldroyd-B, ou pour la trace du tenseur des tensions

polymériques Λ pour les modèles algébriques, sont déterminées à partir d'un écoulement de Poiseuille plan, à savoir

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{11} &= 2\eta_p\lambda(\partial V_1/\partial\xi_2)^2, \\ \mathcal{T}_{22} &= 0, \\ \mathcal{T}_{12} &= \eta_p(\partial V_1/\partial\xi_2),\end{aligned}\tag{4.3}$$

et

$$\Lambda = 2\eta_p\lambda(\partial V_1/\partial\xi_2)^2.\tag{4.4}$$

4.2.2 Résultats

Le nombre de Reynolds $R_e = \rho U_C H / (\eta_s + \eta_p)$ ainsi que le nombre de Deborah $D_e = \lambda U_C / H$ sont fixés respectivement à 2.5×10^{-2} et 0.3. Ces nombres adimensionnels sont déterminés à partir de la vitesse débitante U_C , de la largeur du canal H et des viscosités polymérique η_p et Newtonienne η_s choisies telles que $\eta_s / (\eta_s + \eta_p) = 1/9$. On rappelle pour l'analyse des résultats ci-dessous, que les composantes des vecteurs et tenseurs sont exprimées dans le repère cartésien (voir paragraphe 2.1.3), x_1 désignant la direction horizontale le long des canaux rectilignes et x_2 la direction perpendiculaire.

La figure (4.10) présente les lignes de courant obtenues avec le modèle différentiel d'Oldroyd-B et avec les modèles algébriques objectifs MAS-1-IM et MAS-2-IM. On remarque que les lignes de courant sont parallèles aux parois sur toute la longueur de la conduite, aucun décollement n'est observé, ce que la très faible valeur du nombre de Reynolds nous laissait présager. L'observation principale est que les lignes de courant obtenues sont parfaitement identiques pour les trois modèles considérés.

La figure (4.11) montre les profils de vitesses U_1 et U_2 le long de la coupe M_2 localisée au milieu du domaine en $x_2 = 0$. (voir figure 3.18). Sur cette section, l'importance des effets de courbure des lignes de courant est la plus significative. Les vitesses U_1 et U_2 sont ici adimensionnées par la vitesse débitante U_C . On constate tout d'abord que la composante de vitesse U_2 n'est plus parabolique mais devient asymétrique. Une vitesse transverse U_1 est générée, mais celle-ci reste faible comparée à la vitesse U_2 . D'une manière générale, les résultats cinématiques obtenus à partir des modèles algébriques objectifs sont parfaitement identiques à ceux obtenus avec le modèle différentiel d'Oldroyd-B.

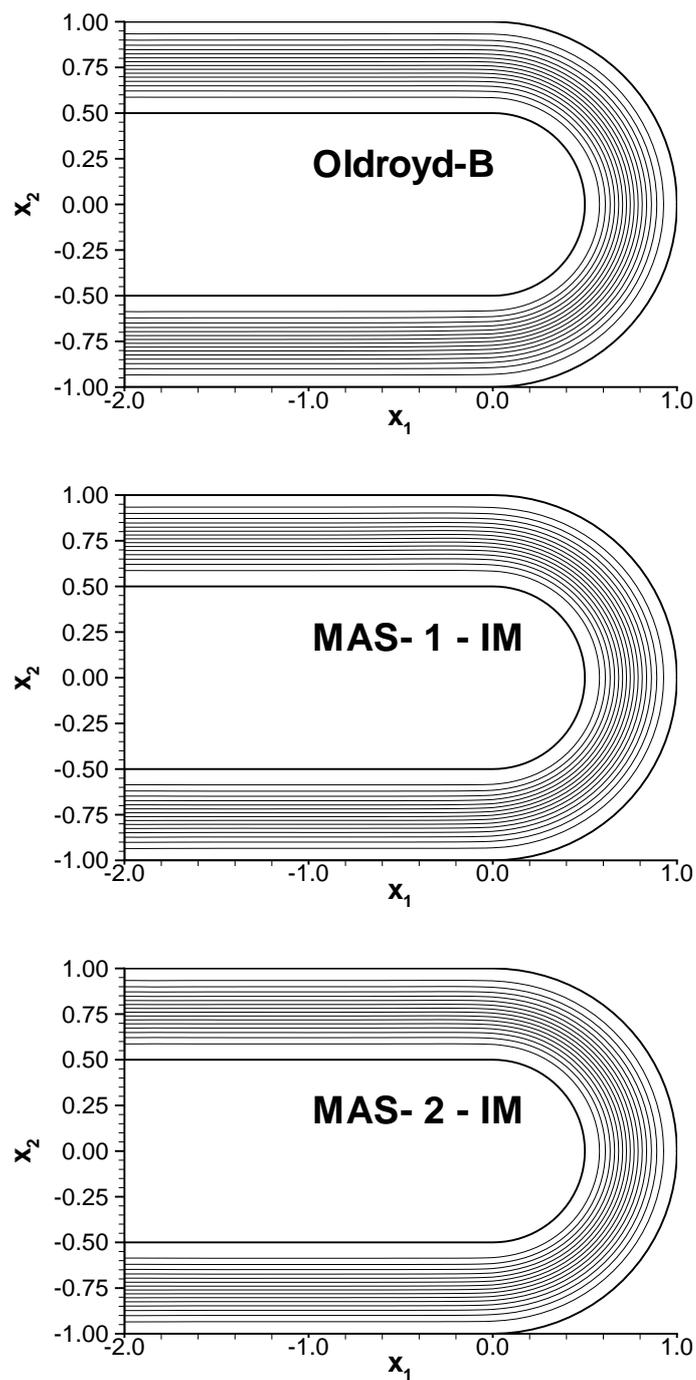


FIG. 4.10: Lignes de courant obtenues avec les modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas). Écoulement dans une conduite courbée à 180° , $De = 0.3$

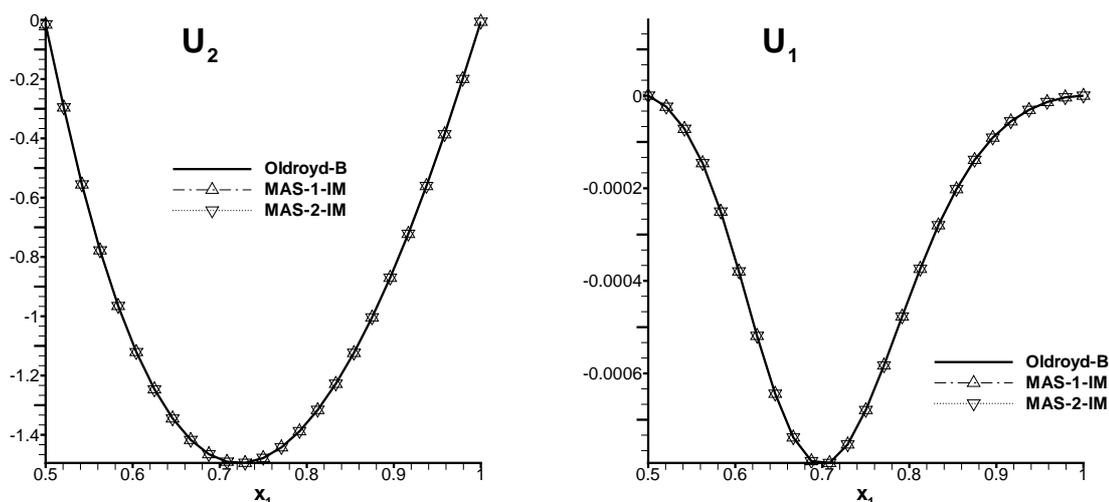


FIG. 4.11: Comparaison des profils de vitesse U_1 et U_2 adimensionnés par la vitesse débitante en sortie U_C le long de la coupe M_2 ($x_2 = 0$), $De = 0.3$

Les figures (4.12), (4.13), (4.14) montrent respectivement les contours des composantes du tenseur viscoélastique T_{11} , T_{22} et T_{12} obtenus avec les modèles d'Oldroyd-B, MAS-1-IM et MAS-2-IM sur l'ensemble de la géométrie. Les composantes sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$. D'une manière globale, on remarque que les prédictions obtenues par les modèles algébriques simplifiés respectant l'indifférence matérielle sont en très bon accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B pour chaque composante de tensions.

Afin d'analyser de manière plus précise les prédictions des différents modèles, on considère les coupes M_1 et M_2 situées respectivement en $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$ (voir figure 3.18). Considérons tout d'abord la coupe M_1 . À cet endroit, l'écoulement est un cisaillement pur dans un canal rectiligne. La figure (4.15) montre les profils des composantes T_{11} et T_{12} , adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, le long de cette coupe. On constate que le profil parabolique de la composante T_{11} et le profil linéaire de la composante de cisaillement T_{12} sont reproduits de manière similaire par le modèle différentiel et les deux modèles algébriques. Ce résultat est attendu puisque l'écoulement est un cisaillement pur : les coefficients des modèles algébriques ont été déterminés afin de reproduire les propriétés en cisaillement pur du modèle d'Oldroyd-B (Annexe B). De plus ici, on sait que l'indif-

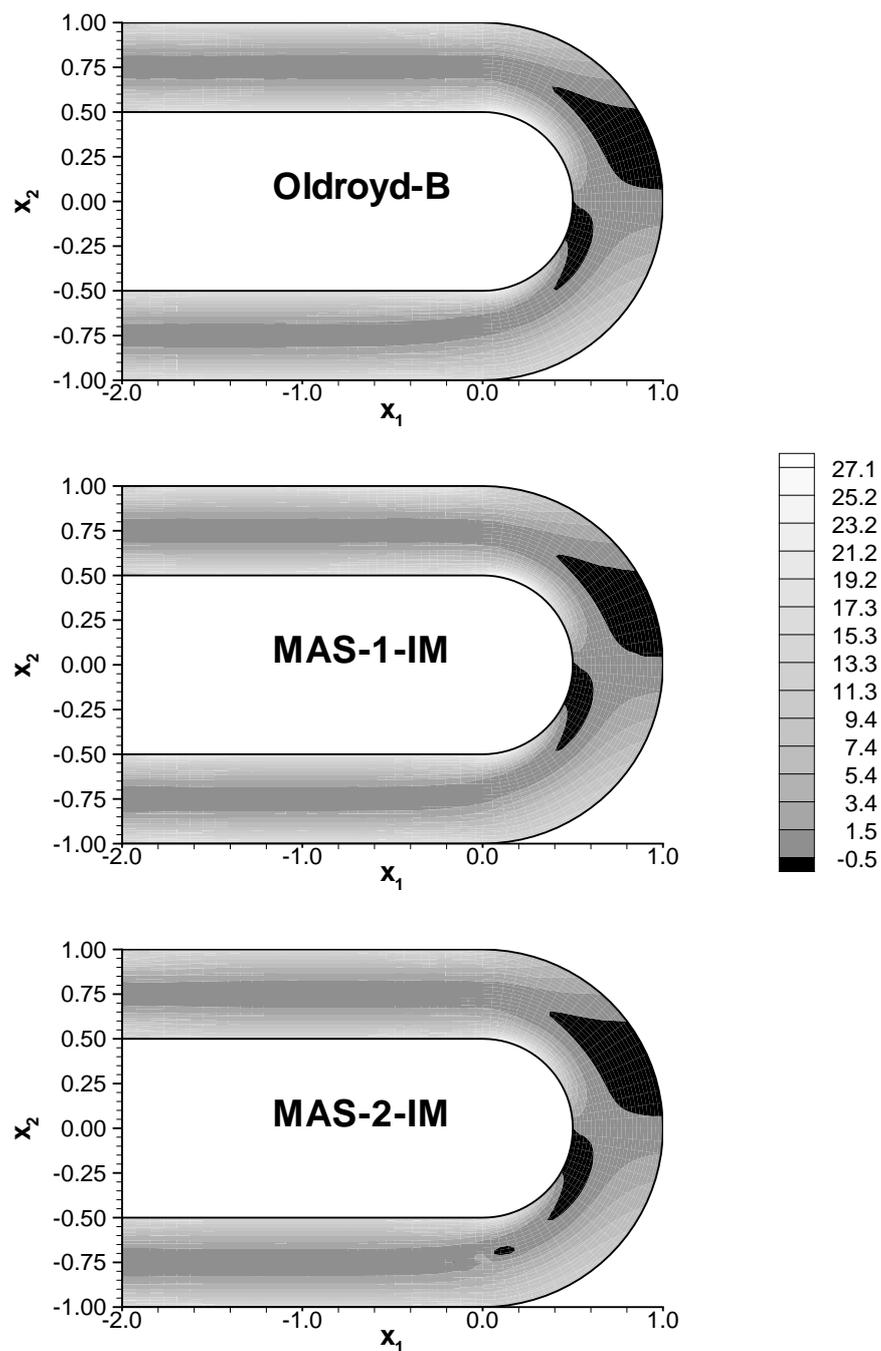


FIG. 4.12: Contours de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

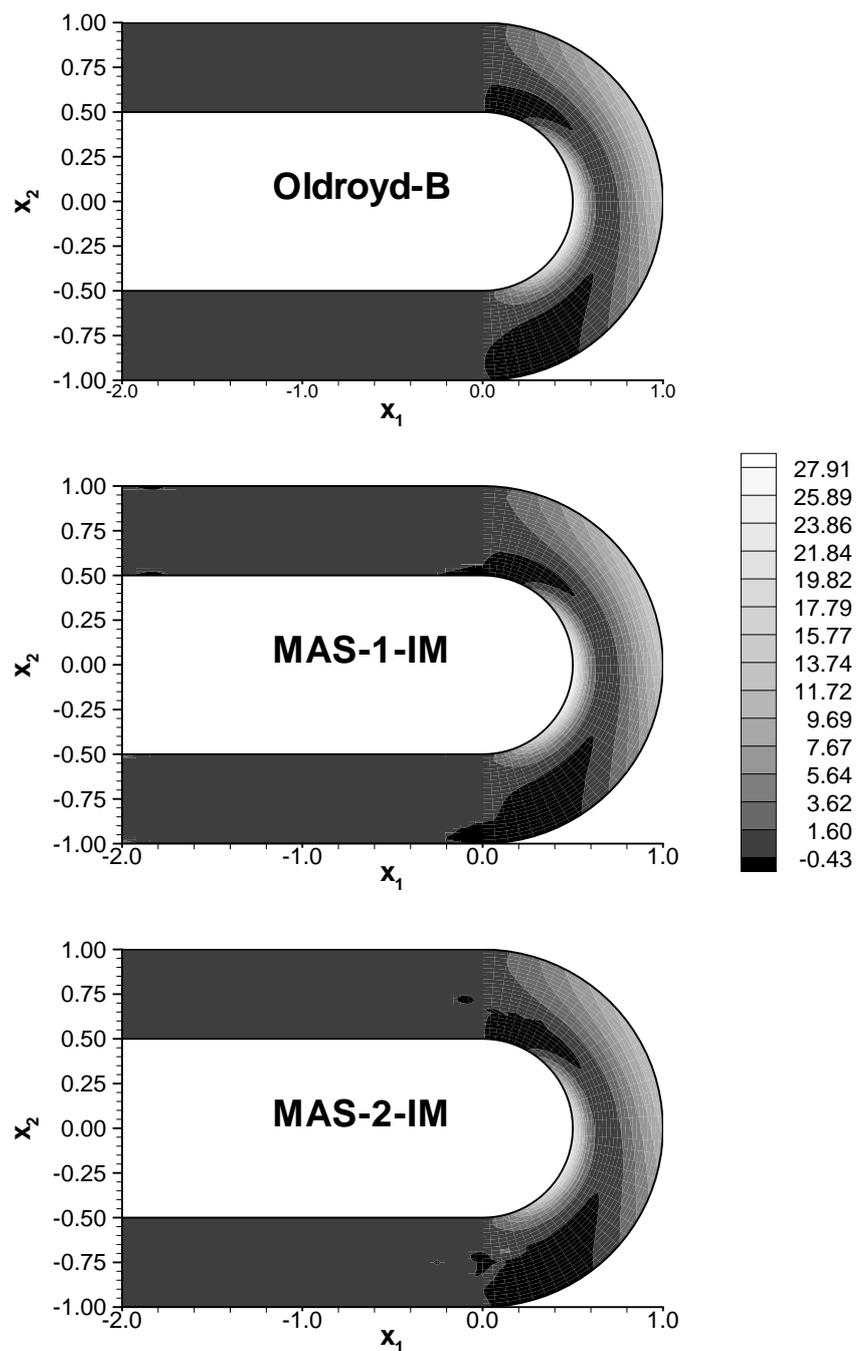


FIG. 4.13: Contours de la seconde composante normale T_{22} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

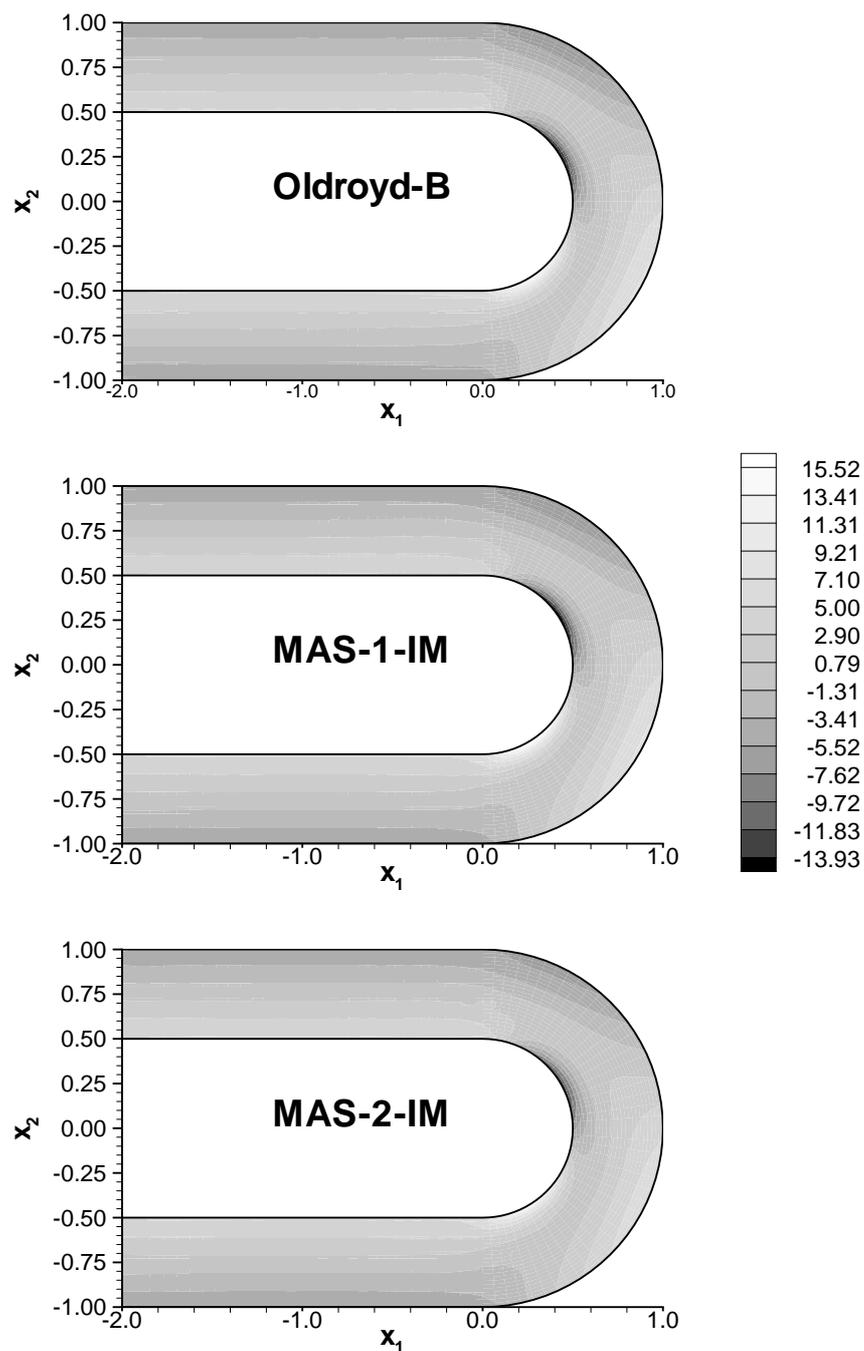


FIG. 4.14: Contours de la composante de cisaillement T_{12} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B (en haut), MAS-1-IM (au milieu) et MAS-2-IM (en bas)

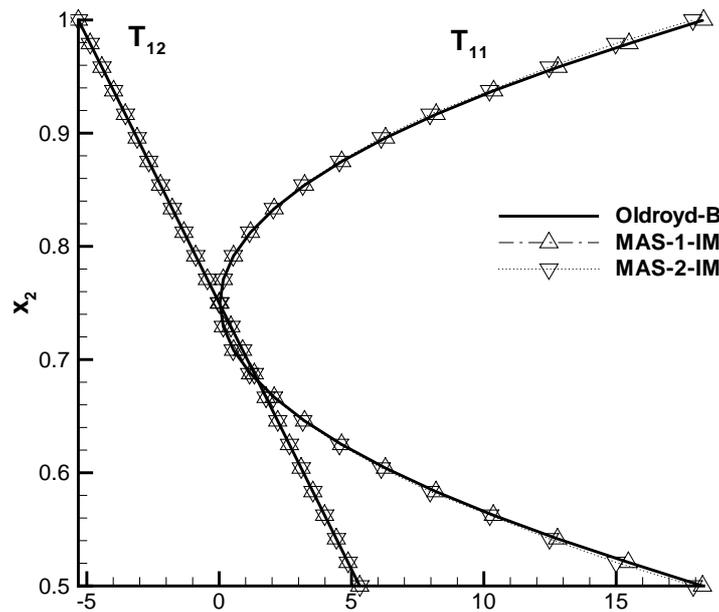


FIG. 4.15: Comparaison des profils des composantes T_{11} et T_{12} du tenseur viscoélastique le long de la section M_1 ($x_1 = -1.0$), $De = 0.3$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$

férence matérielle ne joue aucun rôle pour un écoulement de cisaillement pur (voir chapitre 3).

On se place maintenant la long de la coupe M_2 située en $x_2 = 0$. Sur cette coupe, la composante T_{11} est faible devant les composantes T_{22} et T_{12} . La figure (4.16) montre les profils des composantes du tenseur des tensions polymériques les plus significatives, T_{12} et T_{22} , le long de cette coupe. Les résultats obtenus sont à nouveau adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$. On constate que les profils de la composante T_{22} ne sont plus symétriques par rapport à la ligne médiane de l'écoulement, comme cela était le cas sur la section précédente en $x_1 = -1$. De même, on constate que les profils de la composante T_{12} ne sont plus linéaires. On voit ici pleinement l'influence de la courbure des lignes de courant sur les résultats obtenus. Pour ces deux composantes, les modèles algébriques objectifs simplifiés MAS-1-IM et MAS-2-IM reproduisent fidèlement les prédictions du modèle de référence d'Oldroyd-B.

Enfin, la figure (4.17) montre les profils de la composante T_{11} le long de trois coupes

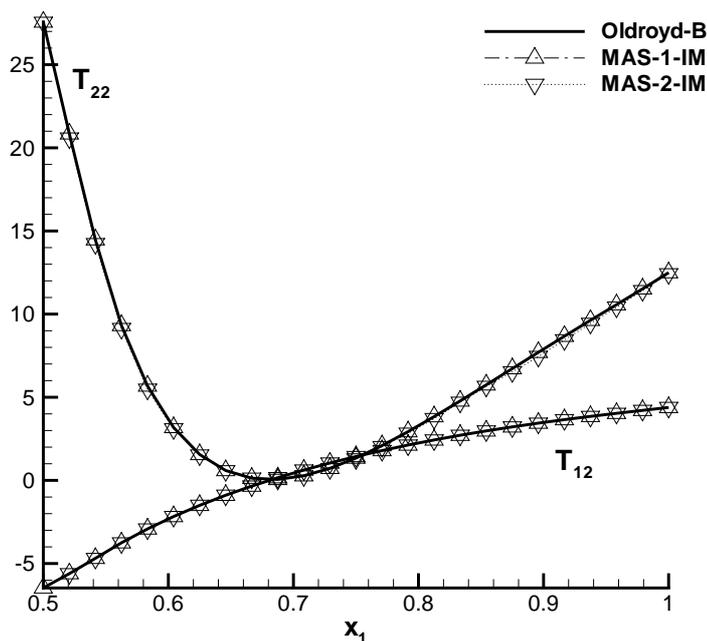


FIG. 4.16: Comparaison des profils des composantes T_{12} et T_{22} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 ($x_2 = 0$), $De = 0.3$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$

verticales M_3 , M_4 et M_5 respectivement situées en $x_1 = -0.3$, $x_1 = -0.5$ et $x_1 = -1$ le long du canal de sortie (voir figure 3.18). Le modèle considéré ici est celui d'Oldroyd-B mais les résultats restent identiques si l'on considère les modèles algébriques MAS-1-IM et MAS-2-IM. On constate que peu après la sortie du coude, en $x_1 = -0.3$, le profil de T_{11} est asymétrique par rapport à l'axe de la conduite. Cette asymétrie tend à disparaître lorsque l'on s'éloigne de la partie coudée de la conduite et on retrouve un profil symétrique de T_{11} en $x_1 = -1$. Les effets de mémoire du fluide viscoélastique couplés aux effets d'inertie induits par la courbure des lignes de courant peuvent expliquer ce résultat.

Influence de l'indifférence matérielle

On vient de voir que les prédictions des modèles algébriques simplifiés respectant le principe d'indifférence matérielle sont en excellent accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B. On a vu au chapitre précédent que les effets de courbure pouvaient engendrer des différences significatives entre les tenseurs taux de rotation relatif \mathbf{W} et taux de rotation absolu $\overline{\mathbf{W}}$.

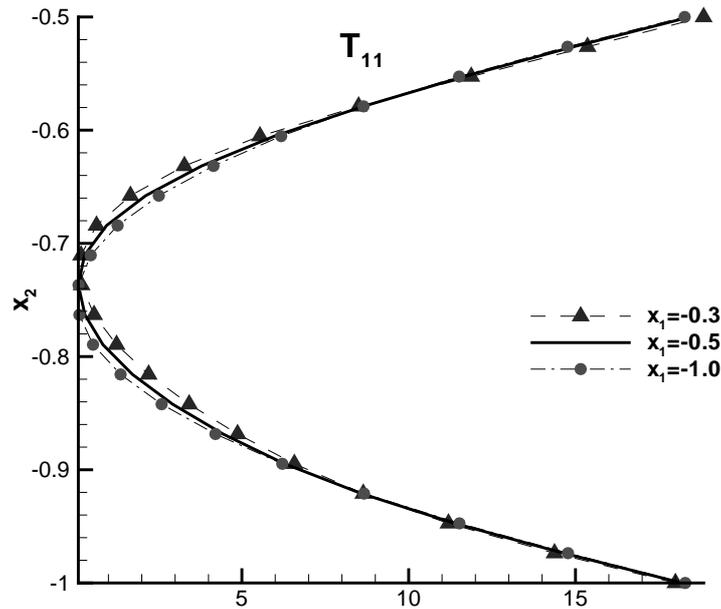


FIG. 4.17: Profils de la composante T_{11} du tenseur viscoélastique adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$ le long des trois coupes transverses M_3 , M_4 , M_5 respectivement situées en $x_1 = -0.3$, $x_1 = -0.5$ et $x_1 = -1$ le long du canal de sortie. Modèle d'Oldroyd-B, $D_e = 0.3$

Ces différences observées au chapitre 3 entre ces deux tenseurs sont susceptibles d'influer sur la prédiction des tensions.

Les effets de l'indifférence matérielle sont particulièrement visibles si l'on s'intéresse à la composante T_{11} le long de la coupe M_2 . La figure (4.18) montre les profils de T_{11} adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$ obtenus avec les deux modèles algébriques objectifs (MAS-1-IM et MAS-2-IM) et le modèle différentiel d'Oldroyd-B. On remarque tout d'abord que la tension T_{11} est beaucoup plus faible en valeur absolue que les composantes T_{22} et T_{12} . Le maximum de T_{11} est observé près de la paroi interne de la conduite en $x_1 = 0.5$ mais d'une manière générale, les valeurs de T_{11} restent faibles au travers de la conduite. On constate également que le profil obtenu à partir du modèle d'Oldroyd-B est parfaitement reproduit par les deux modèles algébriques objectifs.

Considérons maintenant les modèles non-objectifs MAS-1 et MAS-2. On rappelle que

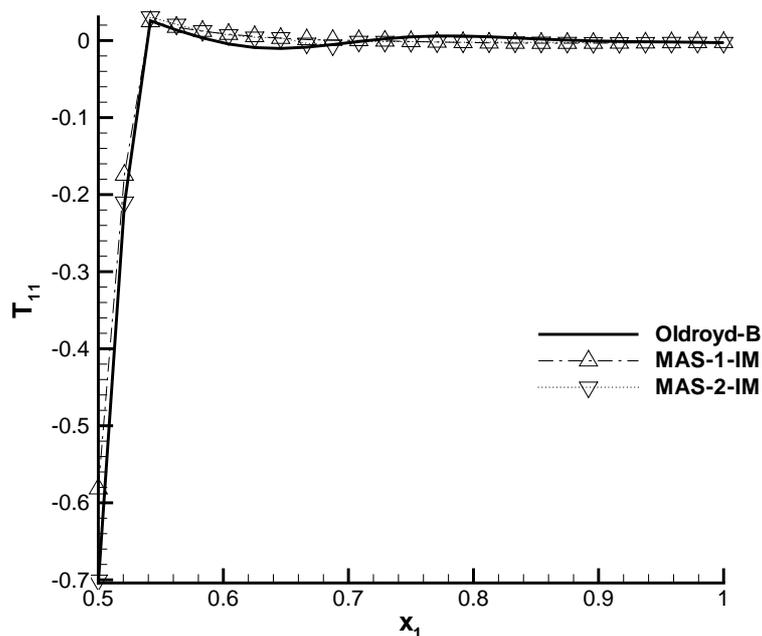


FIG. 4.18: Comparaison des profils de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 ($x_2 = 0$). Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B, MAS-1-IM et MAS-2-IM

ces modèles utilisent le tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} dans l'expression des tensions, ce qui viole le principe d'indifférence matérielle. La figure (4.19) montre les profils de T_{11} adimensionnels le long de la coupe M_2 . On remarque des écarts significatifs entre les profils obtenus avec les modèles algébriques non-objectifs et le modèle de référence d'Oldroyd-B. Si l'on compare ces résultats avec ceux présentés sur la figure (4.18), on constate que les prédictions provenant des modèles ne respectant pas l'indifférence matérielle s'éloignent considérablement de la solution de référence. On montre ici clairement que les modèles ne respectant pas l'indifférence matérielle sont incapables de prédire correctement la composante T_{11} .

La figure (4.20) montre enfin les profils de la première différence de contraintes normales $N_1 = |T_{11} - T_{22}|$ le long de la coupe M_2 . On remarque que N_1 est très bien reproduit par les modèles algébriques objectifs MAS-1-IM et MAS-2-IM, contrairement aux modèles non-objectifs MAS-1 et MAS-2, qui ont tendance à sur-estimer N_1 dans la partie inférieure

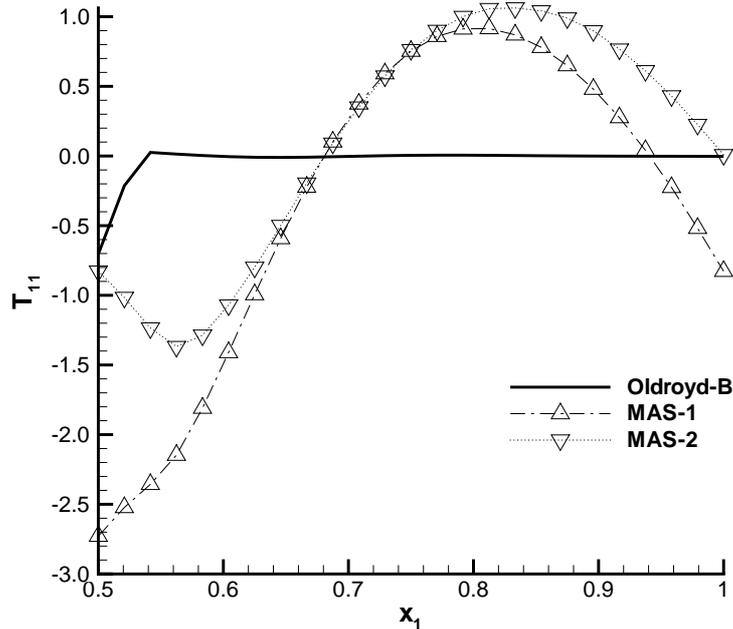


FIG. 4.19: Comparaison des profils de la composante normale T_{11} du tenseur viscoélastique le long de la section M_2 en $x_2 = 0$. Les tensions sont adimensionnés par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$, $De = 0.3$. Modèles d'Oldroyd-B, MAS-1 et MAS-2

de la conduite et à la sous-estimer dans la partie supérieure.

Influence du nombre de Deborah

On examine ici l'influence de l'élasticité du fluide (augmentation du nombre de Deborah) sur les prédictions des modèles algébriques non-objectifs. La figure (4.21) montre les profils de la composante normale T_{11} obtenus à l'aide des modèles algébriques non-objectifs et du modèle différentiel d'Oldroyd-B. Deux nombres de Deborah sont considérés ici : $De = 0.3$ (symboles vides) et $De = 0.5$ (symboles pleins). On remarque que les prédictions obtenues par les modèles ne respectant pas l'indifférence matérielle s'éloignent d'autant plus de la solution de référence à mesure que l'on augmente le nombre de Deborah. *A contrario*, on constate que les prédictions obtenues avec les modèles respectant l'indifférence matérielle sont en accord avec ceux du modèle d'Oldroyd-B (voir figure 4.18), et ce, quel que soit le nombre de Deborah.

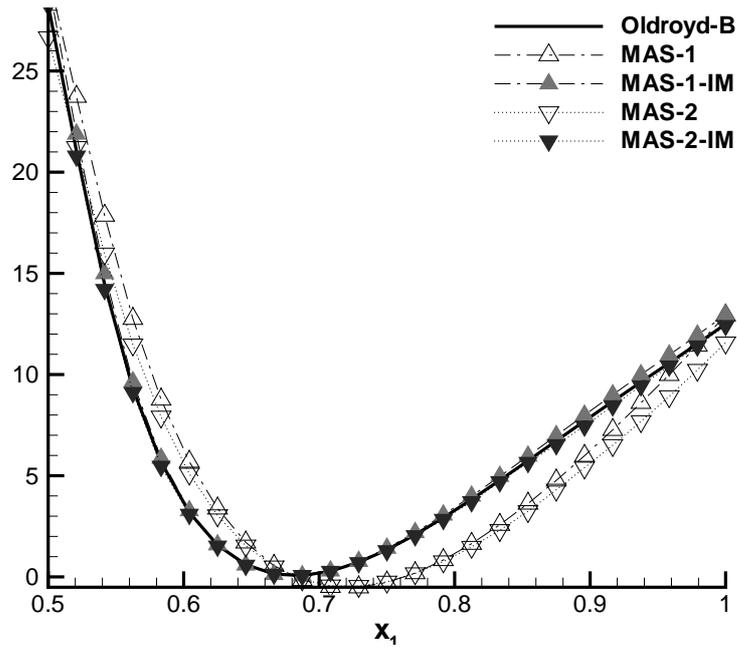


FIG. 4.20: Profils de la première différence de contrainte $N_1 = |T_{11} - T_{22}|$ le long de la section M_2 en $x_2 = 0$. Les tensions sont adimensionnées par $(\eta_s + \eta_p)U_C/H$; $De = 0.3$

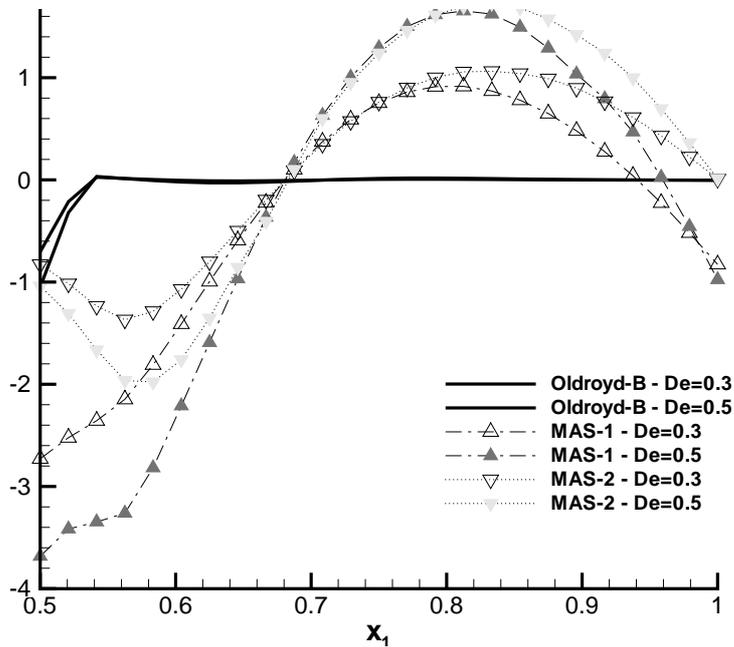


FIG. 4.21: Influence du nombre de Deborah sur l'indifférence matérielle le long de la coupe M_2 en $x_2 = 0$, $De = 0.3$ (symboles vides), $De = 0.5$ (symboles pleins)

Deborah	0.1	0.25	0.5	0.6	0.75	0.94	3
Oldroyd-B (EVSS)	Cv	Cv	Cv	Cv	Cv	Cv	Cv
MAS-1-IM	Cv	Cv	Cv	Cv	Cv		
MAS-2-IM	Cv	Cv	Cv	Cv			

TAB. 4.2: Tableau récapitulatif de convergence (Cv) des modèles MAS-1-IM, MAS-2-IM et Oldroyd-B en fonction du nombre de Deborah, écoulement dans une contraction planaire 4:1

4.3 Convergence et temps de calcul

Dans cette partie, plusieurs tests ont été réalisés afin de comparer les temps de calculs ainsi que les convergences des nouveaux modèles algébriques comparés à ceux du modèle d'Oldroyd-B.

Convergence des modèles algébriques

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été réalisées pour des nombres de Deborah relativement faibles. Le tableau (4.2) montre la convergence (Cv) des différents modèles lors de la simulation sur un écoulement dans une contraction 4:1. On remarque que pour des nombres de Deborah plus élevés, le modèle d'Oldroyd-B s'avère plus robuste numériquement que les modèles algébriques. Ceci est principalement dû au terme quadratique $\mathbf{DW} - \mathbf{WD}$ présent dans les équations algébriques. La prise en compte de l'indifférence matérielle, à travers le calcul de taux de rotation des vecteurs propres crée également des singularités et influe aussi sur ce nombre de Deborah limite. On remarque enfin que le modèle MAS-1-IM est numériquement plus stable que le modèle MAS-2-IM, mais leur nombre de Deborah critique reste beaucoup plus faible que celui du modèle d'Oldroyd-B.

Comparaison des temps de calcul

L'utilisation des modèles algébriques est principalement motivée par un gain en terme de temps et de coût de calcul, en regard des modèles constitutifs différentiels. À titre indicatif, les temps de calcul des principaux modèles considérés dans cette étude ont été mesurés pour la simulation sur l'écoulement dans une conduite courbée. Le tableau (4.3) résume les temps CPU nécessaires pour réaliser 1000 itérations. Les résultats sont donnés pour un maillage

Modèle	Oldroyd-B	MAS-1-IM	MAS-1	MAS-2-IM	MAS-2
CPU (sec.)	2.95	2.03	1.85	2.12	1.88
$T/T_{Oldroyd-B}$	100%	68%	62%	70%	63%

TAB. 4.3: Temps de calcul (sec.) nécessaire pour faire 1000 itérations. Écoulement dans une conduite courbée. Maillage bidimensionnel 65×15 , $De = 0.3$

65×15 et les calculs sont réalisés pour un nombre de Deborah $De = 0.3$, basé sur la vitesse débitante de la conduite. Dans ce cas bidimensionnel, et en prenant comme référence le temps de calcul du modèle différentiel d'Oldroyd-B, on constate que le temps de calcul est environ réduit d'un tiers pour les modèles algébriques. Le temps CPU nécessaire pour le calcul à l'aide des modèles algébriques est équivalent à celui du calcul d'un écoulement Newtonien non-isotherme. Cependant, la réduction du temps CPU, bien que significative, peut être considérée comme modeste compte tenu du caractère bidimensionnel de l'écoulement et de la formulation semi-implicite utilisée ici. Ce facteur de gain doit être encore plus significatif si l'on considère des géométries 3-D complexes ou des fluides multi-modes.

Enfin, ces résultats permettent également de quantifier le coût numérique supplémentaire engendré par le calcul des vitesses de rotations des vecteurs propres de \mathbf{D} , et donc par la prise en compte de l'indifférence matérielle pour les modèles algébriques. Des écarts de l'ordre de 7% sont à constater entre les temps de calculs des modèles algébriques objectifs et non-objectifs.

Synthèse et perspectives

Ce travail est une contribution à l'élaboration et au développement de modèles algébriques pour les fluides viscoélastiques.

La première partie de ce travail a été consacrée à l'étude cinématique de l'indifférence matérielle. Ce principe fondamental doit être vérifié par toute loi constitutive. La prise en compte de ce principe pour les lois algébriques nécessite le calcul du taux de rotation $\mathbf{\Omega}$ des vecteurs propres du tenseur taux de déformation \mathbf{D} . Une méthodologie a été présentée afin d'identifier les régions de l'écoulement où le principe d'indifférence matérielle joue un rôle important et celles où il peut être raisonnablement négligé. Cette méthodologie nécessite le calcul du tenseur $\mathbf{\Omega}$ et la comparaison entre les tenseurs taux de rotation relatif \mathbf{W} et absolu $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega}$. Plusieurs géométries ont été utilisées afin de couvrir une large gamme de cinématiques différentes : la contraction 4:1, l'écoulement autour d'un cylindre, et l'écoulement dans une conduite courbée à 180°. Pour permettre ces simulations numériques, un code de calcul en volumes finis a été élaboré en coordonnées orthogonales généralisées.

Plusieurs observations peuvent être formulées. Tout d'abord, le tenseur $\mathbf{\Omega}$ est négligeable dans les régions de l'écoulement caractérisées par un cisaillement ou une élongation uniforme, ainsi que dans les zones de recirculation. À l'inverse, on retrouve des valeurs significatives de $\mathbf{\Omega}$ dans les zones de transition entre ces différents écoulements viscométriques et où le module de la vitesse est significatif vis-à-vis d'une échelle de vitesse typique de l'écoulement. C'est le cas par exemple en amont et en aval de la contraction 4:1 et dans la couche de cisaillement pour l'écoulement autour du cylindre. On constate également que l'indifférence matérielle joue un rôle important pour des écoulements entraînés en rotation (écoulement de Couette axisymétrique) ou présentant une courbure importante des lignes de courant (écoulement dans un coude à 180°).

Dans la seconde partie de ce travail, de nouvelles formulations simplifiées de modèles

algébriques viscoélastiques ont été testées. Les tensions viscoélastiques obtenues à partir des modèles algébriques respectant le principe d'indifférence matérielle MAS-1-IM et MAS-2-IM ont tout d'abord été comparées à celles du modèle différentiel d'Oldroyd-B considéré comme modèle de référence. Pour les besoins de cette étude, deux géométries ont été considérées : l'écoulement dans une contraction 4:1 et dans une conduite courbée à 180°. D'une manière générale, on constate pour ces deux géométries que les prédictions des tensions viscoélastiques des modèles algébriques objectifs sont en parfait accord avec celles du modèle d'Oldroyd-B. La cinématique de l'écoulement est également parfaitement reproduite.

Les conséquences de la prise en compte de l'indifférence matérielle sur les modèles algébriques ont également été analysées. Les modèles non-objectifs MAS-1 et MAS-2 (utilisant le tenseur \mathbf{W} dans l'expression du tenseur viscoélastique) et les modèles objectifs MAS-1-IM et MAS-2-IM (utilisant $\overline{\mathbf{W}}$) ont été comparés pour ces deux mêmes géométries.

Pour la contraction 4:1 on constate très peu de différence entre les modèles algébriques non-objectifs, objectifs et celui d'Oldroyd-B.

Cependant, l'étude sur une conduite courbée montre clairement que la prise en compte de l'indifférence matérielle est nécessaire pour les écoulements présentant une courbure significative des lignes de courant. En effet, si les modèles MAS-1-IM et MAS-2-IM reproduisent de manière fidèle les propriétés du modèle d'Oldroyd-B (tensions normales, de cisaillement et première différence de contraintes normales N_1), on montre que les modèles ne respectant pas l'indifférence matérielle sont incapables de prédire une première tension normale nulle au centre de la conduite, ainsi que la première différence normale de contrainte N_1 . On remarque également que l'écart entre les solutions d'Oldroyd-B et celles des modèles non-objectifs tend à augmenter avec l'élasticité du fluide. D'une manière générale, on constate donc que les modèles objectifs reproduisent plus fidèlement que les modèles non-objectifs les résultats prédits avec le modèle d'Oldroyd-B. Ce résultat était intuitivement attendu puisque le modèle différentiel d'Oldroyd-B est objectif. On a pu également constater que la composante de cisaillement des tensions viscoélastiques est beaucoup moins sensible à l'indifférence matérielle que les composantes normales, ce qui est attendu au vu de la formulation mathématique des équations algébriques simplifiées.

La mesure du temps de calcul sur un code en volume finis et pour une géométrie bi-

dimensionnelle a été réalisée. Cette mesure nous a permis de quantifier le gain numérique imputé à l'utilisation des modèles algébriques simplifiés comparé au modèle différentiel d'Oldroyd-B. Une réduction moyenne du temps de calcul d'environ 35% a été constatée. Des tests complémentaires menés par Polyflow dans le cadre du projet ScaFTen sur une géométrie 3D ont montré des gains pouvant atteindre 90 % entre les modèles algébriques et différentiels.

Les modèles algébriques ici proposés s'avèrent moins robustes que le modèle différentiel d'Oldroyd-B. Ceci se manifeste par l'apparition d'oscillations numériques à mesure que l'on augmente le nombre de Deborah. Ce phénomène est principalement dû au terme de rotation $\mathbf{DW} - \mathbf{WD}$ présent dans les équations constitutives algébriques. Le traitement numérique de ces termes peut être vu comme une perspective afin de rendre ces modèles plus robustes numériquement.

Enfin, l'étude de l'indifférence matérielle sur les modèles algébriques est illustrée ici sur des géométries bidimensionnelles et la formulation même des équations constitutives algébriques présentées dans cette thèse n'est valable que pour des cas 2D. Une perspective de recherche intéressante serait d'établir une formulation 3D des équations et de procéder à une analyse comparative de ces modèles. Une étude 3D de l'indifférence matérielle peut également être envisagée en calculant le tenseur \mathbf{D} et les vitesses de rotation de ses vecteurs propres dans les trois directions.

Publications

Les résultats de ce travail ont fait l'objet des publications suivantes :

(i) Articles dans des revues à comité de lecture (Annexe C)

Thais L., Helin L., and Mompean G., Numerical simulation of viscoelastic flows with Oldroyd-B constitutive equations and novel algebraic stress models, *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, à paraître, 2006.

Thais L., Mompean G. and Helin L., On the consequences of material frame indifference in algebraic stress models, *Theoretical and computational Fluid Dynamics* 19 :1-22, 2005.

(ii) Communications dans des congrès nationaux et internationaux

Helin L., Thais L. and Mompean G., Numerical simulation of viscoelastic flow in a 180° bent channel, *14th International Workshop on Numerical Methods for Non-Newtonian Flows, IWNMNF Conference, Santa Fe*, June 12-15, 2005.

Helin L., Thais L., and Mompean G., Conséquences de l'indifférence matérielle pour la simulation numérique d'un écoulement viscoélastique dans une conduite courbe, *17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes, France*, 29 Août - 2 Septembre, 2005.

Mompean G., Thais L., and Helin L., Some consequences of Material Frame Indifference on the calculation of flow past a circular cylinder, *10th Brazilian Congress of thermal Sciences and Engineering, ENCIT Conference, Rio de Janeiro, Brazil*, November 29 - December 03, 2004.

Mompean G., Thais L., and Helin L., Some consequences of Material Frame Indifference on engineering flow calculations, *8th International Symposium on Emerging Technologies for Fluids, Structures, and Fluid-Structure Interactions, ASME PVP Conference, San Diego, California, USA, July 25-29, 2004.*

Thais L., Mompean G. and Helin L., Computation of Newtonian and non-Newtonian flows past a circular cylinder using general orthogonal coordinates, *5th Euromech FLuid Mechanics Conference, Toulouse, France, 24-28 août 2003.*

Bibliographie

- [1] J. F. Agassant, P. Avenas, J. P. Sergent, B. Vergnes, and M. Vincent. *La mise en forme des matières plastiques*. 3ème edition. Edition TEC et DOC, Paris, 1996.
- [2] M. A. Alves, P. J. Oliveira, and Pinho F. T. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 110 :45–75, 2003.
- [3] R. Aris. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Dover Publications Inc., New York, 1962.
- [4] G. Astarita. Objective and generally applicable criteria for flow classification. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 6 :69–76, 1979.
- [5] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Arch. Mech.*, 53(6) :653–675, 2001.
- [6] M. Braza, P. Chassaing, and H. H. Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 165 :79–130, 1986.
- [7] R. Byron Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids, Volume 1 : Fluid mechanics*. 2ème édition. Wiley-Interscience, 1987.
- [8] G. Couarraze and J.L. Grossiord. *Initiation à la rhéologie*. TEC et DOC, Paris, 2000.
- [9] M. J. Crochet, A. R. Davies, and K. Walters. *Numerical simulation of non-Newtonian flow*. Elsevier, Amsterdam, 1984.
- [10] A. De Waele. Viscometry and plastometry. *J. Oil Color Chem. Assoc.*, 6 :33–69, 1923.
- [11] B. Debbaut. Communication personnelle. 2003.
- [12] R. Drouot. Définition d’un transport associé à un modèle de fluide du deuxième ordre. Comparaison de diverses lois de comportement. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, 282 :923–926, 1976.

- [13] R. Drouot and M. Lucius. Approximation du second ordre de la loi de comportement des fluides simples. Lois classiques déduites de l'introduction d'un nouveau tenseur objectif. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 28 (2) :189–198, 1976.
- [14] T. B. Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36 :655–682, 2000.
- [15] H. Giesekus. Die rheologische Zustandsgleichung elasto-viskoser Flüssigkeiten - insbesondere von weissenberg-flüssigkeiten - für allgemeine und stationäre fließvorgänge. *Z. Angew. Math. Mech.*, 42 :32–61, 1962.
- [16] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [17] T. Jongen and T. Gatski. General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows. *International Journal of Engineering Science*, 36 :739–763, 1998.
- [18] B. P. Leonard. A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19 :59–98, 1979.
- [19] I. S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 16 :177–183, 2004.
- [20] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part 1. steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 284 :97–135, 1995.
- [21] G. Mompean and M. Deville. Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72 :253–279, 1997.
- [22] G. Mompean, T. Jongen, T. Gatski, and M. Deville. On algebraic extra-stress models for the simulation of viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 79 :261–281, 1998.
- [23] G. Mompean, R. L. Thompson, and P. R. Souza Mendes. A general transformation procedure for differential viscoelastic models. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 111 :151–174, 2003.
- [24] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45 :241–250, 1972.
- [25] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics : a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 15 :309–320, 2003.

- [26] H. Naji, G. Mompean, and O. El Yahyaoui. Evaluation of explicit algebraic stress models using direct numerical simulations. *Journal Of Turbulence*, 5 :38, 2004.
- [27] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London A*, 200 :523–541, 1950.
- [28] N. Phan-Thien and R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2 :353–365, 1977.
- [29] T. N. Phillips and A. J. Williams. Viscoelastic flow through a planar contraction using a semi-lagrangian finite volume method. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 87 :215–246, 1999.
- [30] S. B. Pope. The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates. *J. Comp Phys.*, 26 :197–217, 1978.
- [31] D. Rajagopalan, R. A. Brown, and R. C. Armstrong. Finite element methods for calculation of steady viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity, of state. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 36 :159–199, 1990.
- [32] R. S. Rivlin and J. L. Ericksen. Stress-deformation relations for isotropic materials. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 4 :323–425, 1955.
- [33] C. L. Rumsey, T. B. Gatski, and J. H. Morrison. Turbulence model predictions of strongly curved flow in a U-duct. *AIAA Journal*, 38(8) :1394–1402, 2000.
- [34] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *App Mech Rev*, 51(8) :489–504, 1998.
- [35] L. Thais, G. Mompean, and H. Naji. Computation of flow past a circular cylinder using general orthogonal coordinates. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *Proc. of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna, Austria, July 7-12 2002.
- [36] R. L. Thompson. *Performance of a new constitutive equation for non-Newtonian liquids (in portuguese)*. PhD thesis, Pontificia Universidade Católica, PUC-Rio, Brazil, 2001.
- [37] C. Truesdell and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. In : Flugge, S. (ed) *Handbuch der Physik*, Vol. III/3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1965.
- [38] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28 :477–539, 1996.

Annexes

Annexe A

Objectivité Euclidienne

La relation entre deux positions ξ et ξ^* pour une même particule dans deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* peut être décrite par une translation $\varsigma(t)$ et une rotation $\mathbf{Q}(t)$,

$$\xi^* = \varsigma(t) + \mathbf{Q}(t)\xi, \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{Q} = d\xi^*/d\xi$ est la matrice orthogonale de transformation vérifiant $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}^T = d\xi/d\xi^*$ étant la matrice transposée de \mathbf{Q} , et $\det(\mathbf{Q}) = 1$. La relation (A.1), qui définit un changement d'observateur dans l'espace Euclidien est appelée transformation Euclidienne. Tout tenseur du second ordre vérifiant la propriété $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ est objectif, c'est à dire respecte le principe d'objectivité Euclidienne.

Le but de cette annexe est de montrer que le tenseur taux de déformation \mathbf{D} est objectif, contrairement au tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} . La première étape est d'obtenir la vitesse \mathbf{U}^* en appliquant la dérivée temporelle à l'équation (A.1). La dérivée spatiale de \mathbf{U}^* dans le repère \mathcal{R}^* s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{U}^*}{d\xi^*} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\frac{d\mathbf{U}}{d\xi}\mathbf{Q}^T, \quad (\text{A.2})$$

où $\dot{\mathbf{Q}} = d\mathbf{Q}/dt$. Le tenseur \mathbf{D} s'écrit donc :

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{U}^*}{d\xi^*} + \left(\frac{d\mathbf{U}^*}{d\xi^*}\right)^T\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) + \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.3})$$

Le premier terme de cette équation est nul car $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, donc

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.4})$$

Le tenseur taux de déformation \mathbf{D} est donc objectif. Pour le tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} , un calcul similaire nous donne :

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{U}^*}{d\xi^*} - \left(\frac{d\mathbf{U}^*}{d\xi^*} \right)^T \right) = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.5})$$

De cette relation (A.5), on en déduit que le tenseur taux de rotation relatif \mathbf{W} est non-objectif.

Un cas particulier peut être remarqué lorsque la matrice de rotation \mathbf{Q} est une constante. Dans ce cas $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, et le tenseur taux de rotation devient objectif. Cela signifie que la vorticité respecte le principe d'objectivité Euclidienne si la transformation définie (A.1) est restreinte aux transformations Galiléennes, où les rotations dépendantes du temps sont exclues.

Drouot [12], [13] introduit deux nouveaux tenseurs cinématiques. L'idée générale est de considérer cette fois le taux de rotation relativement aux directions principales de \mathbf{D} , et non le taux de rotation relatif à un repère arbitraire.

Le premier tenseur, $\mathbf{\Omega}$, est le taux de rotation des directions propres du tenseur \mathbf{D} . Si \mathbf{e}_i désignent les vecteurs propres de \mathbf{D} (vecteurs unitaires le long des axes principaux de \mathbf{D}) alors on a :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.6})$$

Le second tenseur, $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega}$, mesure le taux de rotation d'une particule par rapport aux axes principaux du taux de déformation de cette particule. Bien que les tenseurs \mathbf{W} et $\mathbf{\Omega}$ ne soient pas objectifs, on peut montrer que $\overline{\mathbf{W}}$ l'est. En effet, la matrice de transformation $\mathbf{Q}(t)$ peut être définie par :

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.7})$$

où \mathbf{e}_i^* désignent les vecteurs propres de $\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T$. La dérivée de l'équation (A.7) permet

d'écrire :

$$\frac{d\mathbf{e}_i^*}{dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i + \mathbf{Q}\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i^* + \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i^*. \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, on trouve que le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^*$ est donné par :

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.9})$$

En soustrayant l'équation (A.9) à l'équation (A.5), nous obtenons :

$$\overline{\mathbf{W}}^* = \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{W}}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.10})$$

Le tenseur $\overline{\mathbf{W}}$ respecte donc le principe d'objectivité Euclidienne.

Annexe B

Compléments sur les modèles algébriques simplifiés MAS

B.1 Détermination des coefficients du modèle MAS-1

La partie à trace nulle du tenseur des tensions polymériques $\mathbf{\Gamma}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = \beta_1 \mathbf{D} + \beta_2 (\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}) + \beta_3 \left(\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3} \{\mathbf{D}^2\} \mathbf{I} \right), \quad (\text{B.1})$$

où les $(\beta_i)_{i=1,2,3}$ sont des coefficients scalaires à identifier. Considérons un écoulement de cisaillement pur. Le profil de vitesse $U_1(x_2)$ est fonction de la seule variable x_2 et le taux de cisaillement peut s'écrire $\dot{\gamma} = \partial U_1 / \partial x_2$. On en déduit alors l'expression des tenseurs taux de déformation et taux de rotation relatif :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

En remplaçant \mathbf{W} et \mathbf{D} dans (B.1), on obtient :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} (\frac{\beta_3}{12} + \frac{\beta_2}{2})\dot{\gamma}^2 & \frac{\beta_1}{2}\dot{\gamma} & 0 \\ \frac{\beta_1}{2}\dot{\gamma} & (\frac{\beta_3}{12} - \frac{\beta_2}{2})\dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{6}\dot{\gamma}^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Pour ce type d'écoulement, l'équation de transport pour la trace du tenseur viscoélastique Λ (1.10) se réduit à $\Lambda = 2\lambda \{\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\}$, ce qui donne

$$\Lambda = \beta_1 \lambda \dot{\gamma}^2. \quad (\text{B.4})$$

En considérant l'équation (1.9), on obtient l'expression générale du tenseur viscoélastique :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta_3}{12} + \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_1 \lambda}{3}\right) \dot{\gamma}^2 & \frac{\beta_1}{2} \dot{\gamma} & 0 \\ \frac{\beta_1}{2} \dot{\gamma} & \left(\frac{\beta_3}{12} - \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_1 \lambda}{3}\right) \dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\beta_1 \lambda}{3} - \frac{\beta_3}{6}\right) \dot{\gamma}^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

On en déduit alors l'expression des première et deuxième différences de tensions normales N_1 et N_2 , ainsi que de la composante de cisaillement τ :

$$\begin{aligned} N_1 &= T_{11} - T_{22} = \beta_2 \dot{\gamma}^2, \\ N_2 &= T_{22} - T_{33} = \left(\frac{\beta_3}{4} - \frac{\beta_2}{2}\right) \dot{\gamma}^2, \\ \tau &= \frac{\beta_1}{2} \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Afin de reproduire exactement les propriétés du modèle d'Oldroyd-B en écoulement de cisaillement pur, les coefficients β_1 , β_2 , β_3 doivent être définis comme :

$$\beta_1 = 2\eta_p, \quad \beta_2 = 2\eta_p \lambda, \quad \beta_3 = 4\eta_p \lambda, \quad (\text{B.7})$$

On retrouve ainsi l'expression (1.44).

B.2 Détermination des coefficients du modèle MAS-2

Le modèle MAS-2 possède le même coefficient β_1 que le modèle MAS-1, et emprunte les coefficients β_2 et β_3 au modèle algébrique initial proposé dans [22].

De la même manière, on peut montrer que le modèle MAS-2 reproduit également de manière exacte les propriétés en cisaillement pur du modèle d'Oldroyd-B.

B.3 Comportement élongationnel des modèles MAS

On considère ici un écoulement développé d'élongation pure. Le but est ici de déduire la viscosité élongationnelle des modèles MAS, définie par :

$$\eta_e = \frac{N_1}{\dot{\epsilon}}, \quad (\text{B.8})$$

où $\dot{\epsilon} = \partial U_1 / \partial x_1$ est le taux d'élongation. Pour ce type d'écoulement, le tenseur taux de déformation s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

On peut montrer facilement que les composantes du taux de rotation relatif sont nulles. Pour ce type d'écoulement, on a donc $W_{ij} = 0$ et le tenseur $\mathbf{\Gamma}$ pour le modèle MAS-1 s'écrit alors :

$$\mathbf{\Gamma} = 2\eta_p \mathbf{D} + 4\eta_p \lambda \left(\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}\{\mathbf{D}^2\} \mathbf{I} \right). \quad (\text{B.10})$$

En remplaçant \mathbf{D} par son expression dans (B.10), on a :

$$\mathbf{\Gamma} = \eta_p \dot{\epsilon} (1 + \lambda \dot{\epsilon}) \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

L'équation de transport pour la trace Λ se réduit à $\Lambda = 2\lambda \{\mathbf{\Gamma D}\}$, et s'écrit :

$$\Lambda = 6\eta_p \lambda \dot{\epsilon}^2 (1 + \lambda \dot{\epsilon}). \quad (\text{B.12})$$

En remplaçant Λ par son expression dans l'équation (1.44), on peut déterminer les composantes du tenseur viscoélastique \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \eta_p \dot{\epsilon} (1 + \lambda \dot{\epsilon}) \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda \dot{\epsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2\lambda \dot{\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + 2\lambda \dot{\epsilon}^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

D'où l'expression de la viscosité élongationnelle

$$\eta_{e1} = \frac{N_1}{\dot{\epsilon}} = 3\eta_p (1 + \lambda\dot{\epsilon}). \quad (\text{B.14})$$

La même procédure appliquée au modèle MAS-2 donne

$$\Lambda = \frac{6\eta_p \lambda \dot{\epsilon}^2}{1 - \lambda\dot{\epsilon}}, \quad (\text{B.15})$$

D'où une viscosité élongationnelle

$$\eta_{e2} = \frac{3\eta_p}{1 - \lambda\dot{\epsilon}} \quad (\text{B.16})$$

L'expression de la viscosité élongationnelle du modèle différentiel d'Oldroyd-B est un résultat connu [9] :

$$\eta_e = \frac{3\eta_p}{(1 - 2\lambda\dot{\epsilon})(1 + \lambda\dot{\epsilon})} \quad (\text{B.17})$$

On peut remarquer ici que l'expression de la viscosité élongationnelle pour le modèle d'Oldroyd-B conduit à une singularité lorsque $\lambda = 1/(2\dot{\epsilon})$, où même $\lambda = -1/\dot{\epsilon}$ si $\dot{\epsilon}$ est négatif. Une remarque similaire peut être faite pour le modèle MAS-2 pour $\lambda = 1/\dot{\epsilon}$ (équation B.16). Contrairement à ces deux modèles, le modèle MAS-1 ne produit aucune singularité pour un écoulement d'élongation pure (voir équation B.14).

Annexe C

Publications

Thais L, Helin L., and Mompean G., Numerical simulation of viscoelastic flows with Oldroyd-B constitutive equations and novel algebraic stress models, *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2006, sous presse.

Thais L., Mompean G. and Helin L., On the consequences of material frame indifference in algebraic stress models, *Theoretical and computational Fluid Dynamics* 19 (2005) 1-22.



ELSEVIER

J. Non-Newtonian Fluid Mech. xxx (2006) xxx–xxx

**Journal of
Non-Newtonian
Fluid
Mechanics**

www.elsevier.com/locate/jnnfm

Numerical simulation of viscoelastic flows with Oldroyd-B constitutive equations and novel algebraic stress models

L. Thais, L. Helin, G. Mompean*

*Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107, Université des Sciences et Technologies de Lille,
Polytech'Lille Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received 15 July 2005; received in revised form 21 November 2005; accepted 19 January 2006

Abstract

The purpose of the present study is to compare numerical simulations of viscoelastic flows using the differential Oldroyd-B constitutive equations and two newly devised simplified algebraic explicit stress models (AES-models). The flows of a viscoelastic fluid in a 180° bent planar channel and in a 4:1 planar contraction are considered to illustrate and support the underlying theory. The flow in the bent channel is used to illustrate the frame-invariant property of the new models in a pure shear flow exhibiting strong streamline curvature. The flow in the 4:1 contraction serves as a benchmark test in a situation where strong elongation occurs. For both geometries, it is found that the predictions of the new AES-models are in good agreement with Oldroyd-B up to Deborah numbers of order 0.5, with a significant reduction in computational effort.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Oldroyd-B; Algebraic stress models; Viscoelastic fluid

Original article

On the consequences of material frame-indifference in algebraic stress models

L. Thais, G. Mompean, L. Helin

Université des Sciences et Technologies de Lille, Polytech'Lille, Laboratoire de Mécanique de Lille, URM-CNRS 8107,
Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received May 10, 2004 / Accepted October 27, 2004

Published online Februar 8, 2005 – © Springer-Verlag 2005

Communicated by T.B. Gatski

Abstract. The principle of material frame-indifference (MFI) is a fundamental and controversial principle of continuum mechanics that has been invoked recently to derive nonlinear algebraic models for stresses of viscoelastic liquids. The purpose of the present study is to identify regions of a flow field where MFI should be considered. Such regions are identified by computing the angular velocity of the principal directions of the rate-of-deformation tensor in order to obtain an Euclidean objective vorticity tensor. An analysis is carried out for uniform shear and extensional flows, and for a Couette flow. The method is then applied to the planar flow through an abrupt 4 : 1 contraction and to the two-dimensional stream past a circular cylinder. The main results are: (1) MFI should be taken into account in regions characterized by the transition between two different kinematics *and* a significant velocity magnitude, and (2) MFI can be safely ignored in regions of pure viscometric behaviour as well as in recirculation regions. The consequences of MFI being taken into account are then examined upon using the Euclidean objective vorticity tensor in a simple algebraic constitutive law for viscoelastic fluids.

Key words: material frame-indifference, euclidean objectivity, algebraic stress models

Auteur(Author) : Lionel HELIN

Titre : Développement de modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques

Résumé : Le développement de modèles algébriques pour les fluides viscoélastiques vise à simplifier les formulations des modèles différentiels usuels dans un souci de réduction des coûts de calculs. Alors que les modèles différentiels requièrent la résolution d'une équation aux dérivées partielles par composante de tension, les modèles algébriques reposent sur la résolution d'une unique équation de transport pour la trace du tenseur viscoélastique et sur des expressions explicites simples pour les tensions. Dans ce travail, deux nouvelles formulations de modèles algébriques reproduisant les propriétés de cisaillement pur du modèle différentiel d'Oldroyd-B sont proposées.

Ces modèles sont mis en oeuvre sur des géométries 2D variées : écoulement dans une contraction 4:1, autour d'un cylindre et dans une conduite courbée à 180°. Ces simulations ont été menées au moyen d'un code volumes finis écrit en coordonnées orthogonales généralisées. On prouve que les modèles algébriques simplifiés reproduisent avec un coût de calcul nettement réduit les propriétés du modèle différentiel d'Oldroyd-B, à condition de respecter l'indifférence matérielle (ou « objectivité ») des nouvelles formulations proposées.

Mots-clés : Fluides viscoélastiques, Indifférence matérielle, Modèle algébrique de tension.

Title : Algebraic explicit stress models for viscoelastic fluids

Abstract : The purpose of algebraic stress models for viscoelastic fluids is to reduce the computational cost of differential models. Whereas differential models require the resolution of one differential equation for each stress component, algebraic models imply the resolution of a single differential equation for the trace of the polymeric stress tensor, combined with explicit polynomial tensorial expansions for the stresses. In this work, two novel explicit algebraic stress models deriving with the aim of reproducing the steady shear properties of the Oldroyd-B model are proposed.

These models are tested on various two-dimensional geometries : the flow in a 4:1 contraction, the unbounded stream past a circular cylinder and the flow in the 180° bent channel. These numerical simulations are carried out using a finite volume code written in general orthogonal curvilinear coordinates. It is found that the simplified algebraic stress models reproduce the properties of the differential Oldroyd-B model with a significant reduction in computational effort, if and only if material frame-invariance (or « objectivity ») for these novel formulations is fulfilled.

Keywords : Viscoelastic fluid, Material frame-indifference, Algebraic stress models.