

Université des Sciences et Technologies de LILLE
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Vincent MONCHIET

Soutenue le 4 décembre 2006

Contributions à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles

JURY

MM.	A. CONSTANTINESCU	Directeur de recherche CNRS, LMS, Ecole Polytechnique	Rapporteur
	L. DORMIEUX	Professeur, ENPC, Champs-sur-Marne	Rapporteur
	S. ANDRIEUX	Ingénieur Divisionnaire, LAMSID, EDF, Clamart	Examineur
	J.B. LEBLOND	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI	Examineur
	F. MOREL	Maître de conférences, ENSAM d'Angers	Examineur
	P. SUQUET	Directeur de recherche, LMA, Marseille	Examineur
	E. CHARKALUK	Chargé de recherche CNRS, LML, Villeneuve d'Ascq	Co-directeur
	D. KONDO	Professeur, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq	Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) sous la direction de Djimédo Kondo et Eric Charkaluk. Je souhaiterais tout d'abord remercier Djimédo et Eric pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces trois années et leur passion communicative pour la recherche. Qu'ils trouvent tous les deux en ces quelques lignes le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je souhaiterais remercier monsieur Pierre Suquet qui a accepté de présider le jury de thèse ainsi que messieurs Andreï Constantinescu et Luc Dormieux qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail de thèse. Je remercie également messieurs Stéphane Andrieux, Jean-Baptiste Leblond et monsieur Franck Morel qui ont bien voulu examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à Guy Caignaert et Isam Shahrour, directeurs successifs du Laboratoire de Mécanique de Lille, qui m'ont accueilli au sein du LML. J'exprime ma reconnaissance au Ministère de l'éducation nationale et de la recherche qui a financé ce travail par l'intermédiaire d'une bourse MENRT.

Je pense ensuite à l'ensemble des membres du LML pour leur accueil et leur amitié. Je pense en tout premier lieu à Cosmin et Céline pour leur aide et leur amitié mais également (dans le désordre) à : Laurent, Farzam, Eric, Marie-Christine, Nathalie, Anne-Marie, Olivier, Alexandre, Hassef, Qizhi, Vanessa, Ludovic...

Enfin, je remercie ma femme pour ses encouragements, et la patience dont elle a fait preuve ses dernières années.

Table des matières

Notations	9
-----------	---

Introduction générale	11
-----------------------	----

Partie I Approche multiéchelle de la fatigue polycyclique des métaux	15
--	----

Chapitre 1 Synthèse bibliographique
--

1.1 Introduction	17
1.2 Chargement cyclique, définition et notations	18
1.3 Approches phénoménologiques des critères de fatigue	21
1.4 L'approche multiéchelle de la fatigue polycyclique	24
1.4.1 Micromécanismes de plasticité cyclique et hypothèses de l'ap- proche multiéchelle	24
1.4.2 Critère de Dang Van (1973)	28
1.4.3 Formulation proposée par Papadopoulos (1994)	34
1.4.4 Critique des approches multiéchelles précédemment décrites . .	39
1.5 Prise en compte de l'endommagement	40
1.5.1 Micromécanismes d'endommagement en fatigue polycyclique . .	40
1.5.2 Approches prenant en compte l'endommagement	42
1.6 Conclusion	44

Chapitre 2 Une approche multiéchelle de la fatigue incorporant l'endommagement

2.1 Introduction	45
----------------------------	----

2.2	Principes de base de la modélisation proposée	46
2.2.1	Comportement plastique cyclique à l'échelle des grains	46
2.2.2	Nucléation de fissures le long des bandes de glissement	48
2.2.3	Croissance des cavités et formulation d'un critère local de fatigue	50
2.3	Une approche de type Rice & Tracey modifiée en plasticité cristalline	51
2.3.1	Loi de croissance d'une cavité dans un milieu infini	53
2.3.2	Prise en compte de l'anisotropie plastique cubique des grains	57
2.3.3	Adaptation à la problématique de la fatigue	60
2.4	Formulation du nouveau critère macroscopique de fatigue	63
2.4.1	Expression locale du critère de fatigue proposé	63
2.4.2	Passage micro-macro	65
2.4.3	Formulation du critère à l'échelle macroscopique	68
2.5	Mise en oeuvre dans le cas des chargements macroscopiques affines	69
2.5.1	Détermination de l'état adapté	70
2.5.2	Détermination du critère de fatigue en chargement affine	73
2.5.3	Evaluation des capacités prédictive du modèle non couplé	76
2.6	Cas des chargements déphasés	78
2.7	Conclusion	80

Chapitre 3

Couplage plasticité et endommagement en fatigue polycyclique

3.1	Un critère couplant plasticité et endommagement	83
3.1.1	Cas de la plasticité parfaite	83
3.1.2	Prise en compte de l'anisotropie cubique du grain	86
3.1.3	Lois d'évolution	87
3.2	Prise en compte de l'érouissage	88
3.2.1	Méthodologie	88
3.2.2	Prise en compte de l'érouissage isotrope	90
3.2.3	Prise en compte de l'érouissage cinématique	93
3.2.4	Expression analytique des paramètres d'érouissage	95
3.2.5	Prise en compte de l'anisotropie dans la loi d'érouissage	98
3.2.6	Lois d'évolution	99
3.3	Détermination de l'état adapté dans le cas des chargements affines	100
3.3.1	Passage micro-macro	100

3.3.2	Application de la loi de comportement aux trajets de chargement affines	101
3.3.3	Détermination de l'état adapté	102
3.3.4	Application aux trajets de chargements purement alternés . . .	104
3.3.5	Effets de la contrainte moyenne	110
3.4	Formulation du critère pour les chargements affines macroscopiques . .	110
3.5	Conclusion	115

Partie II Nouveaux développements dans le domaine de la rupture ductile 117

Chapitre 4
Effet de forme des cavités, prise en compte de l'anisotropie plastique

4.1	Introduction	119
4.2	Critère existants	120
4.2.1	Critère macroscopique pour les milieux à cavités sphériques et cylindriques	120
4.2.2	Prise en compte de la forme des cavités : critères pour des cavités sphéroïdales	122
4.3	Principe de la détermination du critère de plasticité macroscopique . .	127
4.3.1	Introduction	127
4.3.2	Expression de la dissipation microscopique	128
4.3.3	Principe de détermination de la surface de charge macroscopique	131
4.4	Un critère approché pour les matériaux plastiques poreux anisotropes [76], [78]	132
4.4.1	Expression approchée de $\Pi(\mathbf{D})$	132
4.4.2	Détermination du critère de plasticité macroscopique	137
4.4.3	Déterminations des coefficients η , ζ , κ et χ	140
4.5	Validations du critère	141
4.5.1	Vérification à partir d'une solution exacte du problème à deux champs	141
4.5.2	Cavités sphérique et cylindrique dans une matrice plastique orthotrope	142

4.5.3	Cavité sphéroïdale dans une matrice isotrope (von Mises) sous chargements axisymétriques	143
4.5.4	Cavité sphéroïdale dans une matrice de Hill : cas des charge- ments axisymétriques	147
4.6	Conclusions	152

Chapitre 5
Un modèle de croissance de cavités sphéroïdales basé sur des champs
de type Eshelby

5.1	Introduction	153
5.2	Un champ non axisymétrique pour décrire l'expansion des cavités . . .	153
5.2.1	Problème d'inclusion élastique inhomogène	154
5.2.2	Forme du champ de vitesse d'Eshelby	155
5.2.3	Cas de l'ellipsoïde de révolution dans une matrice incompressible	157
5.2.4	Commentaires sur les champs de vitesse	161
5.2.5	Lois de croissance et de changement de forme des cavités	162
5.3	Croissance d'une cavité sphérique dans un milieu infini parfaitement plastique	164
5.3.1	Expression approchée de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$	164
5.3.2	Détermination du taux de déformation libre, \mathbf{d}^* , dans le cas de la cavité sphérique	167
5.3.3	Lois de croissance et de changement de forme pour une cavité sphérique	168
5.4	Croissance d'une cavité sphéroïdale dans un milieu infini parfaitement plastique	169
5.4.1	Expression approchée de $Q(\mathbf{d})$	169
5.4.2	Détermination du taux de déformation libre \mathbf{d}^*	174
5.4.3	Minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$	174
5.4.4	Analyse des cas limites du cylindre et de la fissure	177
5.5	Conclusion	178

Chapitre 6
Critères macroscopiques de type Gurson généralisé pour les milieux
poreux

6.1	Principe général de détermination du critère macroscopique	180
-----	--	-----

6.1.1	Discussion préliminaire sur les conditions aux limites	180
6.1.2	Principe de minimisation, détermination du critère de plasticité macroscopique	182
6.2	Détermination du critère de plasticité dans le cas de la sphère creuse .	183
6.2.1	Détermination de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$	183
6.2.2	Détermination du critère de plasticité macroscopique	186
6.2.3	Comparaison avec les résultats existants	189
6.2.4	Lois d'évolution	192
6.3	Détermination du critère de plasticité dans le cas général d'un sphéroïde	194
6.3.1	Procédure d'approximation de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$	194
6.3.2	Expression des w_{rs} et des p_{rs}	196
6.3.3	Détermination du critère macroscopique	197
6.3.4	Expression générale pour une cavité allongée ou aplatie	200
6.4	Comparaison aux critères existants	201
6.4.1	Bornes d'Hashin-Shtrikman [97], [99]	201
6.4.2	Cas de la cavité cylindrique	202
6.4.3	Critère macroscopique dans le cas d'une cavité allongée	203
6.4.4	Cas de la cavité aplatie	203
6.4.5	Cas des fissures circulaires ("penny-shaped")	205
6.5	Conclusion	208

Conclusion générale **213**

Bibliographie **217**

Annexe A

Annexe au chapitre 3

A.1	Détermination de \mathbf{T}	227
-----	---	-----

Annexe B

Annexe au chapitre 4

B.1	Famille de champs axisymétriques de Lee et Mear	229
B.2	Coefficients des critères de plasticité	230
B.2.1	Critère de Gologanu et al. (1993-1994)	230
B.2.2	Critère de Gologanu et al. (1997)	231

B.2.3 Critère de Gârăjeu 232

Annexe C

Annexe au chapitre 5

C.1 Base de Walpole 233

C.2 Relations de moyennes requises pour le calcul de $\langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$ et $\langle \mathbb{D}^T \rangle$:

$\mathbb{D} \rangle_{S(r)}$ 235

Annexe D

Annexe au chapitre 6

D.1 Conditions d'incompressibilité et de taux de déformation homogène au contour 237

D.2 Expression analytique de $\langle \mathbf{d}^E \rangle_\Omega$ 240

D.3 Expressions de quantités Σ_A et de Σ_B 242

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire	.	contraction simple
\underline{a}	vecteur	:	double contraction
\mathbf{a}	tenseur d'ordre deux	\otimes	produit tensoriel
\mathbb{A}	tenseur d'ordre quatre	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé
$(\mathbf{a} \overset{\otimes}{\otimes} \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})$			
$\mathbf{1}$	tenseur unité d'ordre deux	\mathbb{I}	$= \mathbf{1} \overset{\otimes}{\otimes} \mathbf{1}$ tenseur unité d'ordre 4
\mathbb{J}	$= \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$	\mathbb{K}	$= \mathbb{I} - \mathbb{J}$
$\bar{\mathbf{A}}$	déviateur du tenseur \mathbf{A}		
A_h	partie hydrostatique du tenseur \mathbf{A}		

• Notations communes à tous les chapitres

Σ	tenseur des contraintes macroscopiques
σ	tenseur des contraintes microscopiques
\mathbf{E}	tenseur des déformations macroscopiques
ε	tenseur des déformations microscopique
ε^e	tenseur des déformations élastiques microscopiques
ε^p	tenseur des déformations plastiques microscopiques
\mathbf{D}	taux des déformations macroscopiques
\mathbf{d}	taux des déformations microscopiques
\underline{v}	champ de vitesse
f	porosité
π	dissipation microscopique
Π	dissipation macroscopique

• **Notations relatives aux chargements cycliques**

- Σ_m partie moyenne du tenseur des contraintes
- Σ_a partie alternée du tenseur des contraintes
- $\bar{\Sigma}_m$ partie moyenne du déviateur des contraintes
- $\bar{\Sigma}_a$ partie alternée du déviateur des contraintes
- $\Sigma_{h,m}$ partie moyenne de la pression hydrostatique
- $\Sigma_{h,a}$ partie alternée de la pression hydrostatique

Introduction générale

Dans le domaine de la fatigue des matériaux métalliques, les premières études historiques sont celles de Wöhler [127] qui a établi des courbes reliant l'amplitude de contrainte appliquée en fonction du nombre de cycles à rupture et a mis en évidence la notion de limite macroscopique de fatigue. De nombreux travaux ont alors suivi, qui ont mis en évidence l'influence d'un certain nombre de paramètres sur ces courbes, sans pour autant en établir la cause : l'effet bénéfique ou néfaste de la contrainte moyenne [35, 40] pour une même amplitude de sollicitations, par exemple, ou encore l'influence du trajet de chargement multiaxial [42] par rapport à un chargement uniaxial. Il est largement admis aujourd'hui que la rupture par fatigue est le résultat de phénomènes microscopiques complexes qui apparaissent à l'échelle des grains sous sollicitations cycliques. En particulier, un rôle majeur est attribué à la microplasticité (due aux mouvements des dislocations) ainsi qu'aux processus d'endommagement qui se manifestent par la croissance de microfissures [25], [21]. Dans le cas spécifique de la fatigue à grand nombre de cycles (on parle également de fatigue polycyclique) qui nous concerne dans cette étude, il sera essentiellement question de déterminer un seuil d'amorçage d'une fissure de fatigue.

Il existe de nombreux critères de fatigue polycyclique à caractère phénoménologique ; on peut notamment citer les plus connus comme ceux de Sines [111, 112] et Crossland [18]. Les premiers travaux véritablement basés sur des observations microscopiques disponibles sont ceux d'Orowan [85]. Il a fallu attendre le début des années 70 pour voir, grâce aux travaux de Dang Van [20], l'émergence d'une approche multiéchelle de la fatigue polycyclique dont le grand intérêt est d'être fondé sur une analyse des phénomènes de microplasticité mis en évidence ou confirmés par d'autres auteurs. Cette approche multiéchelle a été reprise et formalisée par Papadopoulos [87]. La théorie ainsi construite combine une modélisation de la microplasticité avec des théorèmes d'adaptation élastique afin d'établir un critère de non amorçage de fissures. On notera cependant que, tant dans l'approche de Dang Van que dans les développements effectués par Papadopoulos, la prise en compte des phénomènes de micro endommagement n'est pas explicite.

L'objectif de ce travail de thèse est d'incorporer les micromécanismes d'endommagement dans la démarche multiéchelle qui vient d'être évoquée. Pour des raisons qui seront précisées ci dessous, le mémoire est structuré en deux parties ; la première porte sur une modélisation multiéchelle de la fatigue polycyclique dans laquelle est intégré un endommagement isotrope par croissance de microcavités tandis que la seconde est dédiée à quelques nouveaux développements apparus nécessaires au cours de l'étude. Ces derniers développements concernent l'élaboration, dans un cadre micromécanique, de critères macroscopiques de plasticité de milieux poreux avec prise en compte des anisotropies, plas-

tique, ou induite par la forme des cavités.

Approche multiéchelle de la fatigue polycyclique

Le premier chapitre est à caractère bibliographique. Y sont synthétisées diverses études de la littérature portant aussi bien sur les critères de fatigue que sur les mécanismes de déformation et d'endommagement en fatigue. L'approche multiéchelle proposée par Dang Van [20], puis développée par [87] est ensuite décrite et discutée. Par souci de brièveté, on ne présente à la fin du chapitre que les grandes lignes de quelques tentatives de prise en compte de l'endommagement dans les critères de fatigue à grand nombre de cycles¹. Sur la base de cette synthèse bibliographique, on propose, au second chapitre, une première base de modélisation incluant à la fois les mécanismes de plasticité (à l'échelle des grains) et d'endommagement par croissance de cavités sphériques². La construction de ce modèle non couplé nécessite notamment l'adaptation du modèle de croissance de Rice et Tracey [104] au contexte de la plasticité cristalline régie par une loi de type Schmid. Elle débouche sur la proposition d'un critère de non nucléation de fissures de fatigue, basé sur la combinaison, à l'échelle des grains, d'une condition d'adaptation élastique et de la définition d'un endommagement critique. Diverses applications de ce premier modèle permettent d'en évaluer les performances ainsi que les limitations. Ces dernières sont, en particulier, liées au découplage entre la plasticité et l'endommagement et également à la non prise en compte de l'écrouissage.

Ces deux points qui viennent d'être évoqués font l'objet du chapitre 3 où est proposé un modèle couplant plasticité avec écrouissage et endommagement. Cette nouvelle modélisation est décrite en détail et sa supériorité sur le modèle non couplé est démontrée à travers des comparaisons et des confrontations à des données expérimentales. Malgré ces bonnes performances, les prédictions du nouveau modèle ne sont pas totalement satisfaisantes, en particulier à cause de l'isotropie de l'endommagement qui n'est pas totalement conforme aux observations de Essmann et Mughrabi [25] (voir aussi [81]) rapportées au premier chapitre. Plus précisément, les travaux qui sont présentés à ce stade n'ayant pas permis d'incorporer le caractère orienté de la microfissuration, de nouveaux développements concernant l'endommagement ductile sont présentés dans la seconde partie de la thèse.

Nouveaux développements en rupture ductile

Comme précédemment indiqué, la seconde partie de la thèse est consacrée au développement de critères macroscopiques de plasticité des métaux poreux ductiles, dans le cadre de l'analyse limite tel qu'il a été introduit dans les travaux de Gurson [47]. Différents aspects concernant l'influence de l'anisotropie plastique ainsi que celle de la forme des cavités y sont traités avec le souci d'une extension ou amélioration de résultats existants.

¹On peut déjà retenir que ces tentatives se limitent à une approche phénoménologique de l'endommagement à l'échelle des grains.

²Cette forme sphérique prise pour les microfissures n'est qu'une première approche permettant de rendre compte du rôle joué par l'endommagement. Les développements effectués dans la seconde partie permettront d'aborder la microfissuration orientée.

C'est ainsi que le chapitre 4 de la thèse traite du couplage entre l'anisotropie plastique de la matrice est celle induite par la présence de cavités sphéroïdales. Les résultats obtenus permettent de généraliser ceux déjà établis par Gologanu et al. [36], [37] (dans le contexte d'une matrice isotrope avec des cavités sphéroïdales) ainsi que ceux issus des travaux de Liao et al. [62] et de Benzerga et al. [7] pour des pores cylindriques ou sphériques dans une matrice obéissant au critère quadratique de Hill. Une méthodologie précise est alors proposée pour le calcul approché de la dissipation plastique macroscopique dont dérive le critère du milieu poreux. Outre la démonstration des effets d'anisotropie plastique, une validation détaillée des résultats est effectuée en les évaluant de façon systématique, soit par comparaison avec des critères existants, soit par confrontation avec des données numériques. L'analyse des résultats établis et de ceux de la littérature montre cependant des insuffisances (par exemple dans le cas de fissures circulaires).

Dans le but d'améliorer qualitativement et quantitativement les prédictions des critères existants ou établis, nous introduisons une approche basée sur l'utilisation de nouveaux champs tests, inspirés de la solution du problème d'inclusion élastique inhomogène d'Eshelby. La mise en oeuvre de ces champs est d'abord faite au chapitre 5 pour formuler de nouvelles lois de croissance de cavités en milieu plastique infini. Ces résultats, préliminaires à l'élaboration de nouveaux critères macroscopiques, enrichissent le modèle de Rice et Tracey [104] et le généralisent au cas de cavités sphéroïdales.

C'est au chapitre 6 qu'est véritablement abordée la construction des critères macroscopiques. L'approche par analyse limite est reprise, avec cependant une difficulté supplémentaire, liée au choix des champs de vitesse de type Eshelby comme champs test. Non seulement, nous devons préciser les conditions aux limites à retenir, mais aussi nous sommes amené à résoudre un problème de minimisation nécessaire à la détermination de la dissipation plastique macroscopique. On présente alors une forme générale du critère macroscopique qui est déclinée dans différents cas spécifiques, de sorte à procéder à une évaluation détaillée du nouveau critère. On souligne notamment les avantages de ce critère par rapport à d'autres proposés dans la littérature. Des confrontations avec des résultats de calcul numérique viennent confirmer les bonnes performances de ce critère. En guise de conclusion, une synthèse générale des résultats ainsi que quelques pistes de développements futurs sont présentées à la fin du mémoire.

Première partie

Approche multiéchelle de la fatigue polycyclique des métaux

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

1.1 Introduction

Historiquement, *l'étude de la fatigue a d'abord été macroscopique* et les raisons en sont multiples. Il est admis que c'est l'accident du train "Paris-Versailles" le 11 mai 1842, qui fit plus d'une cinquantaine de morts et fut lié à la rupture en deux endroits de l'essieu avant de la locomotive, qui a constitué l'origine des études du phénomène de fatigue. Pour étudier ce phénomène, Wöhler [127] entreprit pour le compte de l'industrie ferroviaire allemande des essais systématiques en flexion alternée sur des essieux. Les courbes établies par Wöhler relient l'amplitude de contrainte appliquée en fonction du nombre de cycles à rupture et mettent ainsi en évidence la notion de limite macroscopique de fatigue, limite en dessous de laquelle il n'y a pas de risque de rupture par fatigue. L'observation d'une telle courbe de Wöhler a conduit alors à diviser conventionnellement l'étude de la fatigue en deux domaines (cf. figure 1.1) : la fatigue à faible nombre de cycles (oligocyclique) et la fatigue à grand nombre de cycles (polycyclique). Ce second domaine peut encore être séparé schématiquement en deux : le domaine d'endurance illimitée d'une part et celui de l'endurance limitée d'autre part, cette dernière correspondant à la zone de transition entre fatigue oligocyclique et polycyclique. Il s'agit alors d'une séparation des domaines de fatigue par les durées de vie observées. Par ailleurs, après l'établissement des premières analyses de Wöhler de nombreux effets ont été mis en évidence : l'effet bénéfique ou néfaste de la contrainte moyenne [35, 40] pour une même amplitude de sollicitations ou encore l'influence du trajet de chargement [41] par rapport à un chargement uniaxial, sans pour autant en établir la cause. Une explication à cela est probablement le fait que la rupture par fatigue est *le résultat de phénomènes microscopiques complexes* qui apparaissent sous sollicitations cycliques. Il est généralement admis que le principal mécanisme responsable de l'amorçage d'une fissure, commun à l'ensemble des domaines de fatigue, est *l'apparition et le développement de déformations inélastiques dans les grains*. Ceux-ci sont essentiellement dus aux mouvements des dislocations. Plutôt que les durées de vie, il semblerait que la différence principale entre les régimes oligocyclique et polycyclique est l'échelle concernée par le développement de ces déformations inélastiques. En *fatigue polycyclique*, ces déformations inélastiques sont présentes uniquement à l'échelle *microscopique* des grains alors qu'en *fatigue oligocyclique*, elles peuvent être observées à la fois à l'échelle des grains

mais également à l'échelle *macroscopique* de l'éprouvette. Précisons enfin que l'ensemble de ces études s'intéresse à *l'amorçage d'une fissure* qu'il convient de définir précisément. Dans le cas de la fatigue polycyclique, il s'agit de l'amorçage d'une fissure macroscopique à l'échelle d'un grain, se propageant alors dans quelques grains voisins. Cela correspond au stade I de la fatigue décrit par Forsyth [30]. En reprenant le vocabulaire qui sera utilisé par la suite, l'amorçage correspond ainsi, dans ce contexte, à l'apparition d'une fissure de la taille du Volume Élémentaire Représentatif (VER).

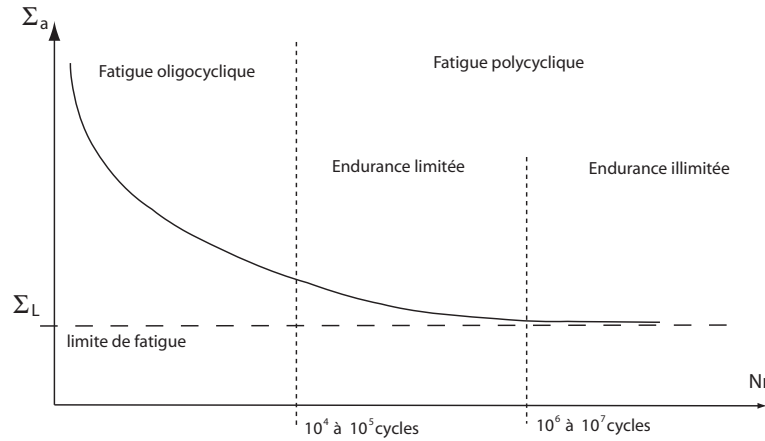


FIG. 1.1 – Représentation schématique de la courbe de Wöhler introduisant les notions de fatigue oligocyclique et polycyclique.

1.2 Chargement cyclique, définition et notations

A l'échelle de l'ingénieur on considère une structure soumise de manière générale à des chargements complexes et aléatoires ; dans le cas d'un chargement aussi général, la détermination d'un critère de fatigue s'avère difficile. Afin de clarifier la problématique de la fatigue, on considère usuellement des trajets de chargement dits "simples" qui sont bien souvent ceux que l'on applique lors d'essais de fatigue en laboratoire pour la détermination de la limite d'endurance.

Dans ce qui suit, on considère des trajets de chargements périodiques dans l'espace des contraintes, c'est à dire qu'il existe une période T , telle que :

$$\Sigma(t + T) = \Sigma(t) \quad \forall t > 0 \quad (1.1)$$

où t désigne le temps physique. Parmi les chargements périodiques, on en distingue deux types "simples" ; il s'agit des trajets affines et des trajets déphasés. Dans le cas des trajets affines le tenseur des contraintes macroscopique peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Sigma(t) = \Sigma_a \sin(\omega t) + \Sigma_m \quad (1.2)$$

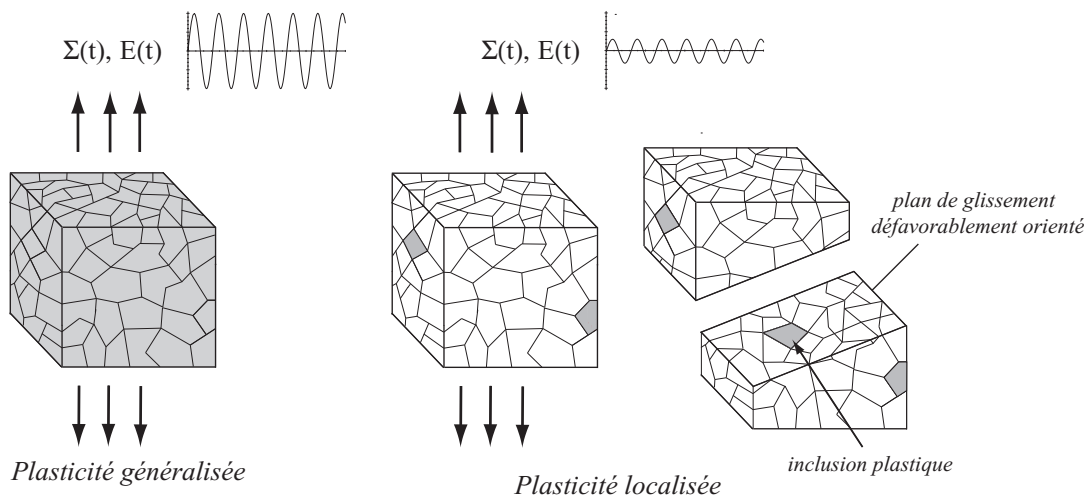


FIG. 1.2 – Représentation schématique de l'état de déformation plastique à l'échelle du VER en fatigue oligocyclique et polycyclique.

Σ_a est la partie alternée du tenseur des contraintes et Σ_m sa partie moyenne. Par partie "alternée", on entend bien sur la partie oscillante du tenseur des contraintes définie par :

$$\Sigma_a = \frac{1}{2} \left[\max_t \Sigma(t) - \min_t \Sigma(t) \right] \quad (1.3)$$

Σ_a oscille donc autour de valeurs moyennes données par les composantes de Σ_m , définies par :

$$\Sigma_m = \frac{1}{2} \left[\max_t \Sigma(t) + \min_t \Sigma(t) \right] \quad (1.4)$$

Afin d'éviter toute confusion terminologique, on adopte les définitions suivantes : la partie moyenne du tenseur des contraintes, Σ , est définie par (1.4). La partie hydrostatique du tenseur des contraintes est notée $\Sigma_h(t) = \text{tr}(\Sigma(t))/3$. Il s'en suit que la composante hydrostatique du tenseur des contraintes, $\Sigma_h(t)$, possède des parties alternée et moyenne respectivement notée $\Sigma_{h,a}$ et $\Sigma_{h,m}$. De même, la partie moyenne du tenseur des contraintes, Σ_m , possède une partie déviatorique, $\bar{\Sigma}_m$ et une partie hydrostatique $\Sigma_{h,m}$. En résumé, la partie déviatorique et la partie hydrostatique du chargement cyclique, peuvent se décomposer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{\Sigma}(t) = \bar{\Sigma}_a \sin(\omega t) + \bar{\Sigma}_m \\ \Sigma_h(t) = \Sigma_{h,a} \sin(\omega t) + \Sigma_{h,m} \end{cases} \quad (1.5)$$

où $\bar{\Sigma}$ désigne le déviateur de Σ . On notera que dans l'espace des contraintes, le trajet de chargement décrit un segment de droite, $[AB]$, où les composantes de Σ_m définissent le centre de ce segment et où les positions des points A et B sont respectivement données

par $-\Sigma_a + \Sigma_m$ et $\Sigma_a + \Sigma_m$.

Le trajet de chargement est dit proportionnel lorsque le segment $[AB]$ est porté par une droite passant par l'origine (cf. figure 1.3).

Le second type de trajets de chargements classiquement considéré, correspond aux trajets

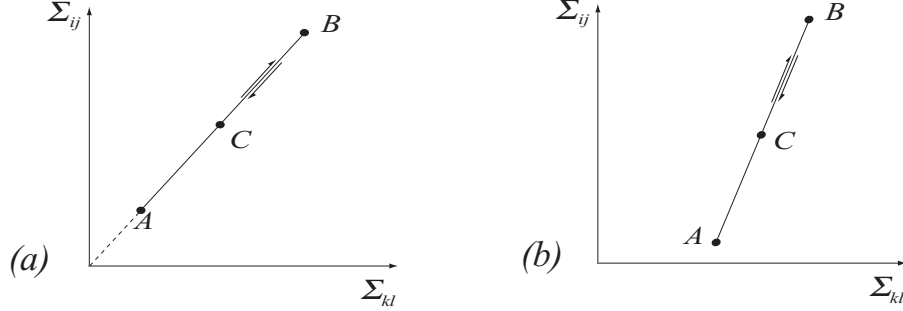


FIG. 1.3 – Représentation du trajet de chargement dans l'espace des contraintes : a) proportionnel b) affine.

déphasés pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes, $\Sigma(t)$, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\Sigma_{ij}(t) = \Sigma_{a,ij} \sin(\omega t + \psi_{ij}) + \Sigma_{m,ij} \quad (1.6)$$

dans laquelle la convention de sommation sur les indices répétés ne doit pas être appliquée. Les ψ_{ij} sont les termes de déphasage entre les différentes composantes du tenseur des contraintes. Les $\Sigma_{a,ij}$ et les $\Sigma_{m,ij}$ sont respectivement les parties alternées et moyennes des composantes du tenseur des contraintes, et sont définies par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,ij} &= \frac{1}{2} \left[\max_t \Sigma_{ij}(t) - \min_t \Sigma_{ij}(t) \right] \\ \Sigma_{m,ij} &= \frac{1}{2} \left[\max_t \Sigma_{ij}(t) + \min_t \Sigma_{ij}(t) \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

On notera que le cas particulier des chargements affines, correspond à $\psi_{ij} = 0$. En observant que $\sin(\omega t + \psi_{ij}) = \sin(\omega t) \cos(\psi_{ij}) + \cos(\omega t) \sin(\psi_{ij})$, une notation tensorielle pour décrire les trajets de chargements déphasés peut être obtenue par l'introduction de deux tenseurs notés Σ_{a_1} et Σ_{a_2} , dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{a_1,ij} &= \Sigma_{a,ij} \cos(\psi_{ij}) \\ \Sigma_{a_2,ij} &= \Sigma_{a,ij} \sin(\psi_{ij}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

de sorte que le tenseur des contraintes peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma(t) = \Sigma_{a_1} \sin(\omega t) + \Sigma_{a_2} \cos(\omega t) + \Sigma_m \quad (1.9)$$

Les tenseurs Σ_{a_1} , Σ_{a_2} et Σ_m possèdent bien sûr, comme dans le cas des trajets affines, une composante déviatorique et hydrostatique dont la notation sera similaire à ce qui précède.

1.3 Approches phénoménologiques des critères de fatigue

Un critère de fatigue peut être considéré comme un outil permettant de distinguer parmi tous les trajets de chargement ceux qui sont endommageant au sens de l'amorçage d'une fissure tel que défini auparavant. Comme nous l'avons, déjà rappelé, en fatigue polycyclique, à l'échelle microscopique, les déformations plastiques se localisent dans les grains défavorablement orientés, ce qui est supposé entraîner un premier stade de fissuration démarrant selon leurs plans de cisaillement maximal. Par ailleurs, il est couramment observé que la pression hydrostatique a une forte influence, favorisant ou non, selon sa valeur et son signe, l'amorçage d'une fissure, même si son rôle à l'échelle microscopique n'est pas encore bien compris. Ainsi, dans le domaine de l'endurance illimitée, les critères macroscopiques ont été bâtis à partir du cisaillement maximal et de la pression hydrostatique. On peut par exemple citer les critères de Sines [111, 112] et Crossland [18] qui considèrent le plan octaédral comme plan de cisaillement maximal. Les conditions d'endurance illimitée, proposées par ces auteurs, peuvent se résumer sous la forme :

$$\max_{t_1, t_2} \frac{1}{2} \|\bar{\Sigma}(t_1) - \bar{\Sigma}(t_2)\| + K_s \Sigma_{h,m} \leq \sigma_c \quad (1.10)$$

pour Sines et

$$\max_{t_1, t_2} \frac{1}{2} \|\bar{\Sigma}(t_1) - \bar{\Sigma}(t_2)\| + K_c \Sigma_{h,max} \leq \sigma_c \quad (1.11)$$

pour Crossland.

$\|\mathbf{A}\|$ représente la norme au sens de von Mises, de \mathbf{A} , $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{A} : \mathbf{A}}$. Les paramètres K_s , K_c et σ_c sont des constantes caractéristiques du matériau, généralement identifiées à partir d'essais de flexion répétée ou alternée et de torsion alternée. Soulignons ici que la relation linéaire entre le cisaillement et la pression hydrostatique est postulée. Néanmoins, ces critères permettent de retrouver qualitativement les résultats expérimentaux pour le critère d'endurance illimitée. Considérons le cas des trajets de chargement affines pour lesquels la contrainte macroscopique est définie par (1.2) ; on a dans ce cas :

$$\max_{t_1, t_2} \|\bar{\Sigma}(t_1) - \bar{\Sigma}(t_2)\| = \|\bar{\Sigma}_a\| \max_{t_1, t_2} |\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)| = 2\|\bar{\Sigma}_a\| \quad (1.12)$$

Notons tout d'abord que ces critères ne font pas intervenir la partie moyenne du déviateur des contraintes, $\bar{\Sigma}_m$. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux, notamment dans le cas d'une torsion alternée pour laquelle la superposition d'une torsion moyenne n'affecte pas la valeur de la limite d'endurance (cf. résultats expérimentaux sur la figure 1.4). Dans le cas d'une traction avec une partie moyenne, $\Sigma_{m,11}$, et une partie alternée, $\Sigma_{a,11}$ ces critères supposent une dépendance linéaire du critère :

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,11} + K_s \Sigma_{m,11} &\leq \sigma_c & (Sines) \\ (1 + K_c) \Sigma_{a,11} + K_c \Sigma_{m,11} &\leq \sigma_c & (Crossland) \end{aligned} \quad (1.13)$$

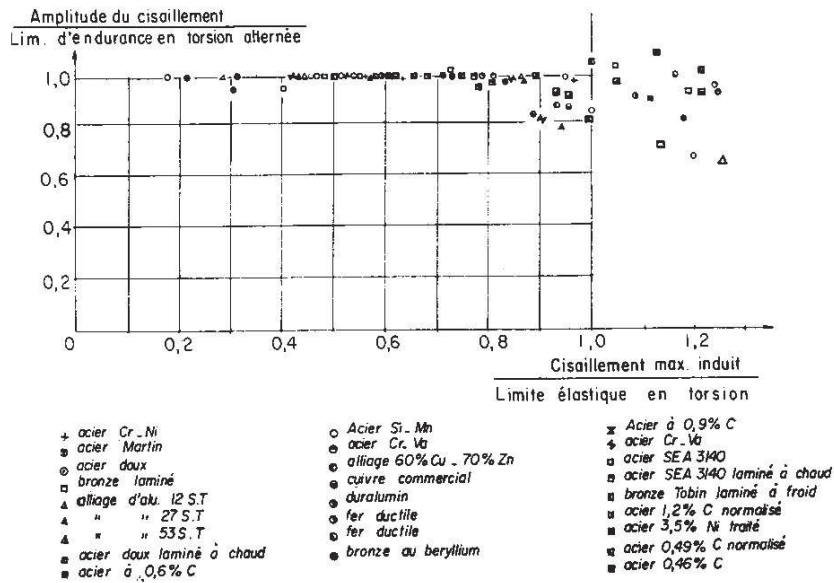


FIG. 1.4 – Critère de fatigue en torsion répétée, données issues de Dang Van [20]

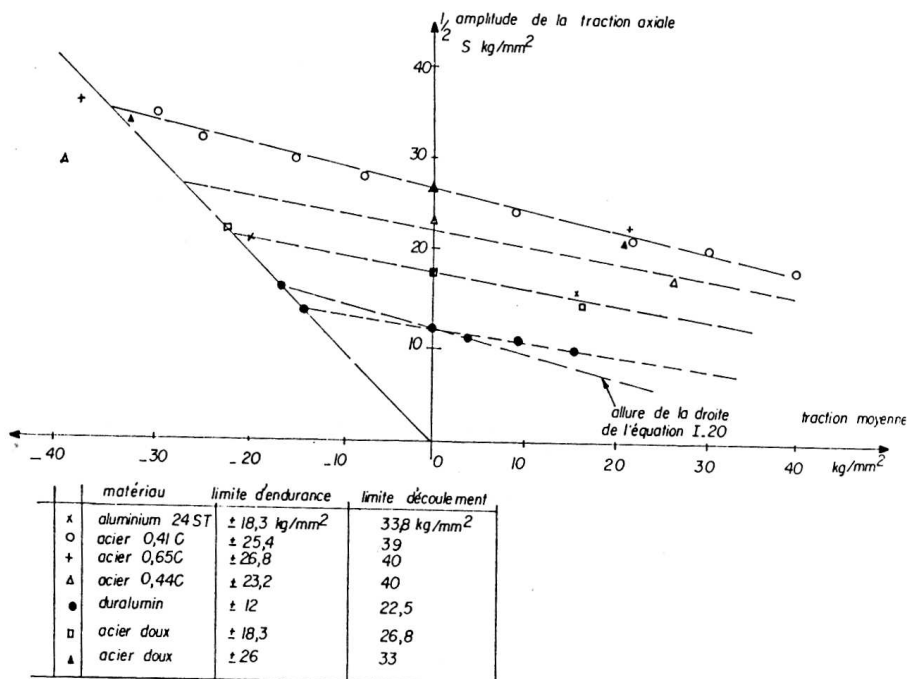


FIG. 1.5 – Critère de fatigue en traction répétée, données issues de Dang Van [20].

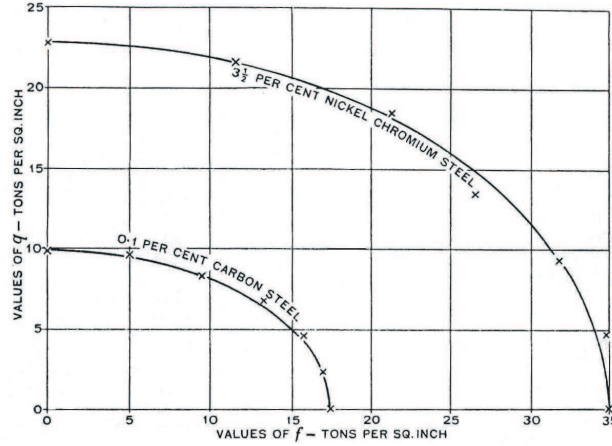


FIG. 1.6 – Critère de fatigue en flexion torsion alternée, donnée issues de Gough et Pollard [42].

dépendance linéaire que l'on retrouve notamment sur la figure 1.5.

Considérons maintenant le cas d'une flexion-torsion alternée, pour lequel le tenseur des contraintes moyennes est nul et les composantes non nulles du tenseur des contraintes alternées sont $\Sigma_{a,11}$ et $\Sigma_{a,12}$. Dans ce cas, les critères de fatigue de Sines et Crossland s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Sigma_{a,11}^2 + 3\Sigma_{a,12}^2} &\leq \sigma_c & (Sines) \\ \sqrt{\Sigma_{a,11}^2 + 3\Sigma_{a,12}^2} + \frac{1}{3}K_c\Sigma_{a,11} &\leq \sigma_c & (Crossland) \end{aligned} \quad (1.14)$$

On retrouve pour chacun des critères une forme elliptique, forme prédite également par Gough et Pollard [42] (cf. figure 1.3). On notera que pour le critère de Sines, la limite d'endurance en flexion alternée est donnée par σ_c tandis qu'en torsion alternée elle vaut $\sigma_c/\sqrt{3}$. Ceci suppose que le critère de Sines est valable uniquement pour les matériaux dont le rapport des limites d'endurance en flexion et en torsion alternée est de l'ordre de $\sqrt{3}$. A partir des essais de Gough et Pollard, on note que, dans le cas de l'acier à 1% de carbone, ce rapport est de 1.77, donc très proche de $\sqrt{3}$, tandis que pour l'acier à 3.5% de carbone ce rapport vaut 1.53, relativement éloigné de $\sqrt{3}$. Enfin on remarquera qu'une telle condition n'est pas imposée sur le critère de Crossland et que ce critère permet de mieux décrire les essais de flexion-torsion.

Malgré des performances relativement bonnes et le fait que ces critères sont encore très utilisés dans l'industrie pour le dimensionnement des structures, il importe de rappeler qu'ils sont issus de raisonnements purement macroscopiques.

Suite à ces premiers critères multiaxiaux basés sur le cisaillement, l'approche dite en *plan critique* s'est particulièrement développée. Les critères issus de cette approche sont construits comme une combinaison linéaire d'un terme de cisaillement et d'un terme de pression hydrostatique ou de la contrainte normale au plan de cisaillement pour certains. Citons, par exemple, la proposition de Findley [28] qui recherche le plan qui rend maximal

la combinaison linéaire du cisaillement et de la contrainte normale au plan considéré, ou encore celle de McDiarmid [73] qui recherche le plan qui rend maximal l'amplitude de cisaillement et associe alors à cette grandeur la contrainte normale à ce plan. Nous ne détaillerons pas ici toutes ces propositions, une synthèse exhaustive pouvant être trouvée dans la thèse de Papadopoulos [86], celle de Weber [124] ou dans l'ouvrage de Socie et Marquis [113]. Une comparaison de la plupart de ces critères a été effectuée par Papadopoulos [90]. On peut en retenir que, lors de chargements non proportionnels, dans le cas de chargements en phase, l'erreur indiquée par Papadopoulos est de l'ordre de 3 à 7 % par rapport aux résultats expérimentaux. En revanche, dans le cas de chargements déphasés, cette erreur peut atteindre plus de 15 % pour certains critères, comme ceux de Sines ou Crossland. La cause en est sans doute le manque de fondement physique de ces approches purement macroscopiques.

1.4 L'approche multiéchelle de la fatigue polycyclique

1.4.1 Micromécanismes de plasticité cyclique et hypothèses de l'approche multiéchelle

Comme nous l'avons précédemment précisé, les matériaux métalliques soumis à des sollicitations à grand nombre de cycles peuvent rompre bien qu'à aucun moment de l'histoire du chargement les amplitudes de contraintes n'aient dépassé la limite macroscopique d'élasticité. En fait, la rupture en chargement cyclique est la dernière étape d'un processus physique complexe qui débute par la localisation des déformations plastiques dans certains grains défavorablement orientés par rapport aux directions de sollicitation.

Une grande partie des résultats expérimentaux illustrant ces mécanismes de plasticité à l'échelle des grains sont obtenus sur des monocristaux à structures Cubiques Faces Centrées (CFC), issus d'essais cycliques à déformation plastique imposée et à température constante et en particulier sur du cuivre pur. Lors de sollicitations cycliques à déformation plastique imposée, Winter [126] a mis en évidence un comportement à deux phases (cf. figure 1.7) : un durcissement initial dû à l'accumulation des dislocations primaires, puis une phase de saturation marquée par la présence d'un plateau. Cette seconde phase correspond à l'apparition de Bandes de Glissement Persistantes (BGP), conséquence de la localisation de la déformation plastique. Ces mécanismes ont été largement décrits par Mughrabi et al. [81]. Le glissement est ainsi localisé dans ces bandes dont il est montré que la fraction volumique augmente linéairement avec le glissement plastique [126] (cf. figures 1.8 et 1.9).

De fait, il apparaît que, pour la détermination du critère de fatigue à grand nombre de cycles, une démarche multiéchelle s'appuyant sur les mécanismes physique qui conduisent à la nucléation d'une fissure de fatigue s'avère pertinente.

En se basant sur les observations microscopiques disponibles et sur la théorie de la fatigue des métaux d'Orowan [85], Dang Van [20] a proposé un cadre mécanique théorique d'étude de la fatigue à grand nombre de cycles. Cette théorie a été plus tard enrichie dans le travail de thèse de Papadopoulos [86] qu'il a dirigé (cf. également [21]). Commençons par présenter les hypothèses de travail retenues.

1. La plasticité à l'échelle des grains contrôle les mécanismes d'endommagement par

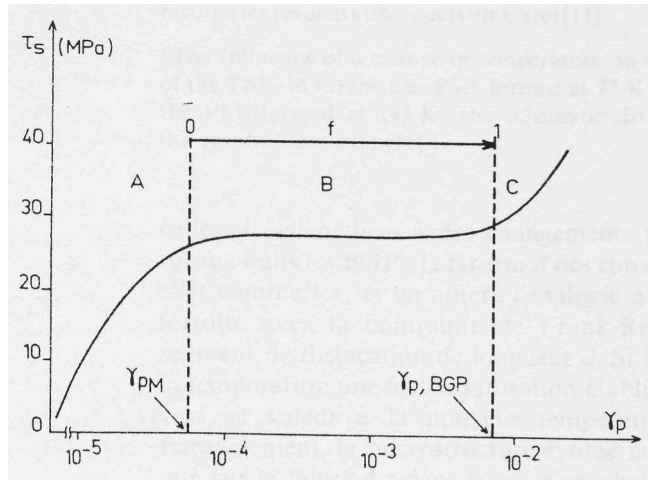


FIG. 1.7 – Comportement à deux phases durcissement-saturation d'un monocristal sollicité cycliquement à déformation plastique imposée [69], d'après Winter [126].

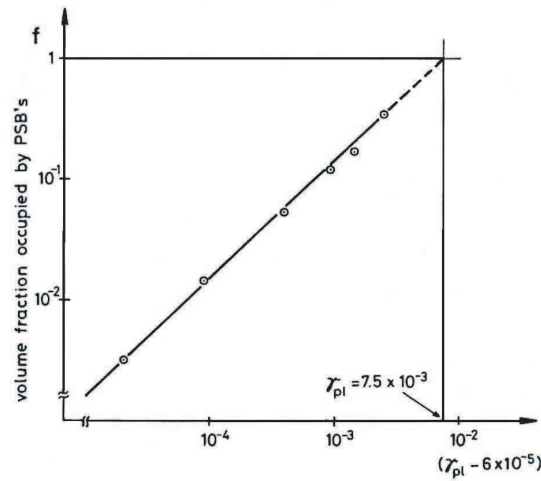


FIG. 1.8 – Fraction volumique de BGP augmentant linéairement avec le glissement plastique [126].

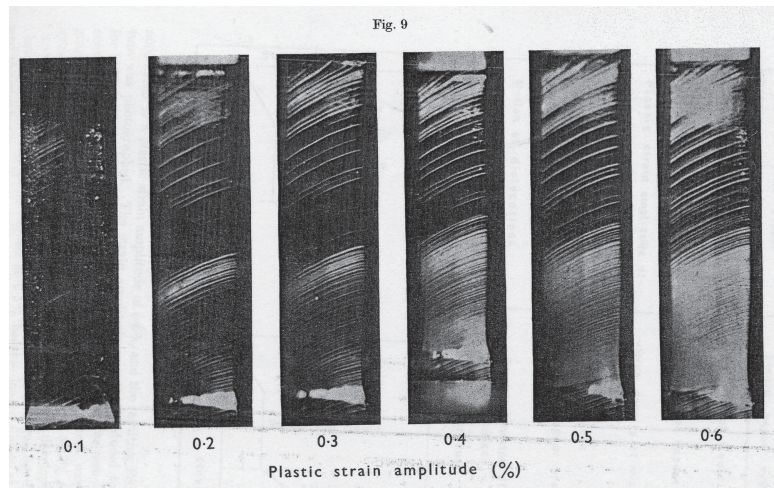


FIG. 1.9 – Augmentation de la densité de bandes de glissement en surface de l'éprouvette sollicitée en fonction de la déformation plastique appliquée [126].

- fatigue et une description mécanique réalisée à cette *échelle microscopique* doit permettre une analyse complète du phénomène de fatigue.
2. Les matériaux métalliques considérés (alliages d'aluminium ou de cuivre) sont supposés isotropes. En effet, ils sont vu comme des agrégats de cristaux cubiques ayant des orientations distribuées de manière aléatoire. A l'échelle macroscopique, ils peuvent donc être considérés homogènes et *isotropes*, même si ce n'est pas le cas à l'échelle microscopique.
 3. Parmi tous ces grains, certains sont défavorablement orientés par rapport au chargement et facilitent une microplasticité cyclique conduisant à l'apparition de bandes de glissement localisées puis à l'amorçage de fissures de fatigue.
 4. Lorsque le chargement imposé entraîne une amplitude de contrainte proche de la limite de fatigue, les contraintes macroscopiques sont, elles, généralement faibles comparées à la limite d'élasticité. Les déformations plastiques macroscopiques sont alors négligeables.
 5. En s'inspirant de la figure 1.10 schématisant les résultats de Winter, on peut émettre l'hypothèse que l'amplitude des contraintes locales dans un grain défavorablement orienté par rapport au chargement croit dans un premier temps avant d'atteindre une saturation à une valeur notée τ_s , correspondant à l'apparition de BGP. On peut alors assimiler τ_s à une limite de fatigue.
 6. Les amplitudes de chargement étant faibles en fatigue polycyclique, il est supposé que le comportement plastique cyclique à grand nombre de cycles, dans les grains sollicités, se caractérise par du glissement simple sur les plans de cisson maximal.
 7. Enfin, l'observation des boucles d'hysteresis non symétriques par rapport à l'origine et non stabilisées (cf. figure 1.11) obtenues sur des monocristaux de cuivre permet de conclure à l'existence d'un écrouissage cinématique et isotrope dans les grains sollicités.

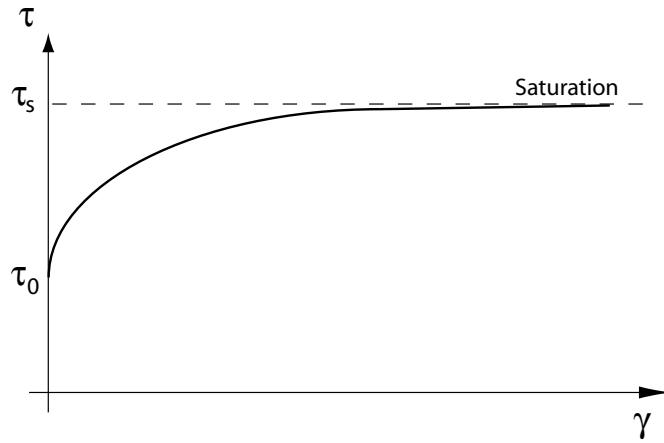


FIG. 1.10 – Courbe de consolidation cyclique à amplitude de déformation plastique imposé.

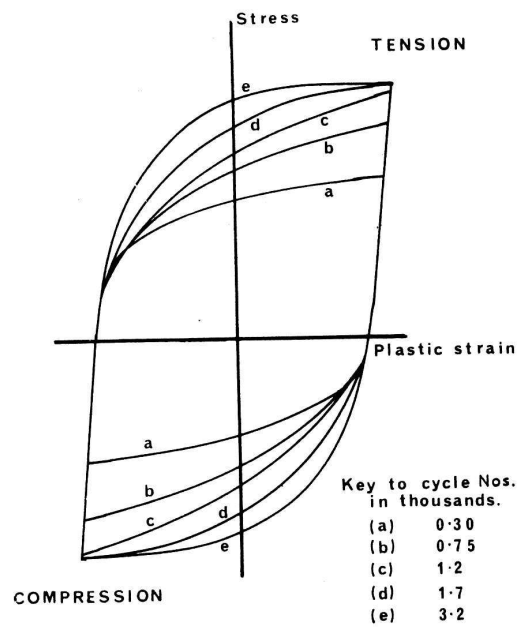


FIG. 1.11 – Boucles d'hysteresis.

1.4.2 Critère de Dang Van (1973)

Dans l'approche initialement proposée dans [20], un cadre général pour la formulation d'un critère de fatigue a été proposé; ce cadre, repris par la suite dans les travaux de Papadopoulos [86], [87] et [89] s'articule autour de trois points majeurs :

- description de la plasticité à l'échelle des grains.
- formulation d'un critère de fatigue à l'échelle locale.
- passage micro-macro pour la détermination du critère à l'échelle macroscopique.

Comportement plastique cyclique à l'échelle des grains sollicités

Commençons donc naturellement par décrire les micromécanismes de plasticité. Le système de glissement activé est défini par la normale \underline{n} au plan de glissement et par une direction du glissement notée \underline{m} (cf. figure 1.12). De manière classique, on désigne par σ

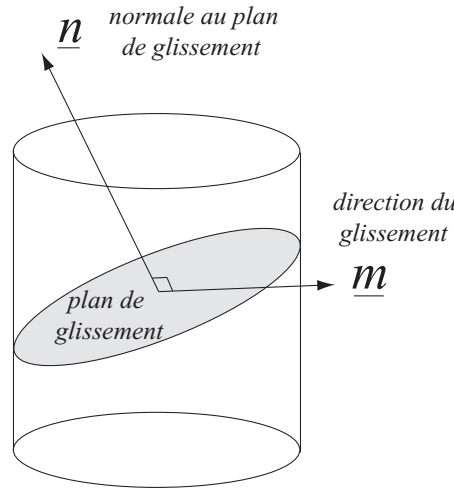


FIG. 1.12 – Orientations \underline{n} et \underline{m} du système de glissement.

et ε respectivement les tenseurs de contrainte et de déformation à l'échelle locale (c'est à dire celle du grain). On adopte également une décomposition additive de la déformation totale, ε , en une déformation élastique, ε^e , et une déformation plastique, ε^p : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. Le comportement plastique met en jeu la contrainte de cisaillement, $\tau = \sigma : \Delta$ et le glissement plastique, $\gamma = 2\varepsilon^p : \Delta$ où Δ est le tenseur d'ordre deux définissant l'orientation du système de glissement considéré, et donné par :

$$\Delta = \underline{n} \otimes \underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{n} \otimes \underline{m} + \underline{m} \otimes \underline{n}) \quad (1.15)$$

L'écoulement sur le système de glissement considéré, est alors décrit en généralisant le modèle unidimensionnel d'Orowan [85].

Dans le modèle d'Orowan, l'écoulement est supposé purement isotrope et la réponse asymptotique du grain est l'adaptation élastique. Les extrémités du cycle de chargement oscillent entre A (la contrainte de cisaillement correspondante est donc τ_a) et B (la contrainte de cisaillement est $-\tau_a$). On notera que dans l'approche d'Orowan une

condition de non nucléation d'une fissure de fatigue a consisté à considérer une valeur critique de l'amplitude de la cission, $\tau_a = \tau_c$.

L'approche micro-macro développée par Dang Van [20] est basée sur le modèle d'Orowan que nous venons de décrire. Le critère de plasticité correspond à la loi de Schmid avec un écrouissage supposé isotrope linéaire :

$$|\tau| - \tau_0 - R(\gamma_{cum}) \leq 0 \quad (1.16)$$

τ_0 est le seuil initial de plasticité, R la variable d'écrouissage isotrope, fonction de la déformation plastique cumulée $\gamma_{cum} = \int_0^t |\dot{\gamma}| dt'$. Notons que le cadre théorique proposé se prête aussi bien à d'autres lois d'écrouissage (écrouissage cinématique par exemple) tel qu'il l'a été précisé plus tard dans [21].

Expression locale du critère de fatigue

Il s'avère toutefois que le glissement simple indépendant de la pression hydrostatique ne peut à lui seul expliquer les mécanismes de nucléation d'une fissure de fatigue. En reprenant les idées essentielles de [20] que nous citons :

Il est alors nécessaire de rechercher les mécanismes qui altèrent de manière définitive la structure du matériau et, étant donné la grande influence de la pression hydrostatique, il faut que ce mécanisme implique un travail contre cette pression. La montée des dislocations engendre des lacunes ou des atomes interstitiels ; elle entraîne donc la variation de volume du matériau. Imaginons en effet que les contraintes imposées créent un excès de lacunes et qu'ainsi un état de déséquilibre s'établit. Les lacunes en sursaturation vont se rassembler au hasard et former des embryons qui vont évoluer ensuite pour former des fissures.

Dans l'approche initiale de Dang Van il est adopté que le mécanisme qui conduit à la nucléation d'une fissure de fatigue, correspond à la montée de dislocations. Les conditions qui conduisent à la formation d'une lacune par montée des dislocations, détaillées dans [20], s'écrivent :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma} : \underline{p} \otimes \underline{m}| &\geq F_M(\phi) \\ \text{sign}(\underline{p} \cdot \underline{m}) \text{ sign}(\boldsymbol{\sigma} : (\underline{p} \otimes \underline{m})) &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

où \underline{p} est la normale au plan de montée (faisant en angle ψ avec le plan de glissement). La première relation dans (1.17) exprime la condition de montée d'une dislocation. $F_M(\phi)$ est un seuil à partir duquel la montée sur le plan de normale \underline{p} est possible, ϕ étant l'angle formé par l'orientation de la ligne de glissement \underline{L} et le vecteur de glissement \underline{m} (cf. figure (1.13)). La seconde relation dans (1.17) exprime le fait que la montée d'une dislocation engendre une variation de volume positive, c'est à dire la formation d'une lacune.

Pour une dislocation orientée d'un angle ϕ , on a : $\underline{p} = \cos(\psi) \underline{n} + \sin(\psi) \cos(\phi) \underline{r} + \sin(\psi) \sin(\phi) \underline{m}$, avec : $\underline{r} = \underline{m} \wedge \underline{n}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : (\underline{p} \otimes \underline{m}) &= \cos(\psi) \tau + \sin(\psi) \cos(\phi) \sigma_{rm} + \sin(\psi) \sin(\phi) \sigma_{mm} \\ \underline{p} \cdot \underline{m} &= \sin(\psi) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les plans de montée possibles sont définis par le vecteur \underline{L} et une position atomique, X , qui n'est pas contenue dans le plan de glissement de normale \underline{n} . Considérons le cas des

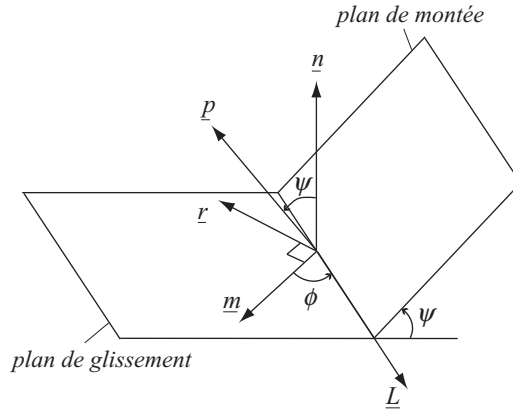


FIG. 1.13 – Plan de montée des dislocations

structures de type cubiques faces centrées (CFC), qui est celui abordé dans [20] ; d'une part montrons que le terme σ_{rm} est nul lorsque le plan de glissement considéré est celui pour lequel la cission est maximale. En effet, exprimant $\boldsymbol{\sigma}$ à partir de ces valeurs principales : $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, les expressions de \underline{n} , \underline{m} et $\underline{r} = \underline{m} \wedge \underline{n}$, sont alors définies dans ce repère principal par :

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]; \quad \underline{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 1]; \quad \underline{r} = [0, 1, 0] \quad (1.19)$$

Il est alors facile de vérifier que dans un plan de cission maximale $\sigma_{rm} = 0$. De plus, les observations expérimentales suggèrent que le vecteur ϕ prend les valeurs $\pi/3$ ou $2\pi/3$ [20]. Le critère de nucléation d'une lacune par montée de dislocation (1.17) s'écrit alors pour une structure CFC, sur un plan de cission maximal :

$$\begin{aligned} \left| \tau \pm \tan(\psi) \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{mm} \right| &\geq \sigma_c \\ \left(\tau \pm \tan(\psi) \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{mm} \right) \sin(\psi) &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

où l'on a posé $\sigma_c = F_M(\pi/3)/\cos(\psi)$ (où $\phi \neq \pi/2$, la configuration où $\phi = \pi/2$ n'existe d'ailleurs pas dans le cas des structures CFC).

La détermination du critère de fatigue est effectuée en choisissant des positions atomiques proches du plan de glissement considéré. Les positions éloignées étant a priori moins probables pour la montée d'une dislocation. Pour ces positions atomiques retenues, il s'agit de déterminer les valeurs de ψ ; on pourra se référer à [20] pour plus de précisions. A chacune des valeurs de ψ , la condition (1.4.2), est associée à une droite dans le plan τ, σ_{mm} décrivant un seuil de montée sur la position atomique considérée. La représentation graphique du seuil de montée est donnée dans le plan $\tau, \sigma_{mm} = \boldsymbol{\sigma} : \underline{m} \otimes \underline{m}$ sur la figure 1.14. On notera que, pour des valeurs modérées de σ_{mm} , que le seuil possède une forme linéaire.

Notons que le critère est construit à partir de l'intersection d'une suite de droite. Sur la

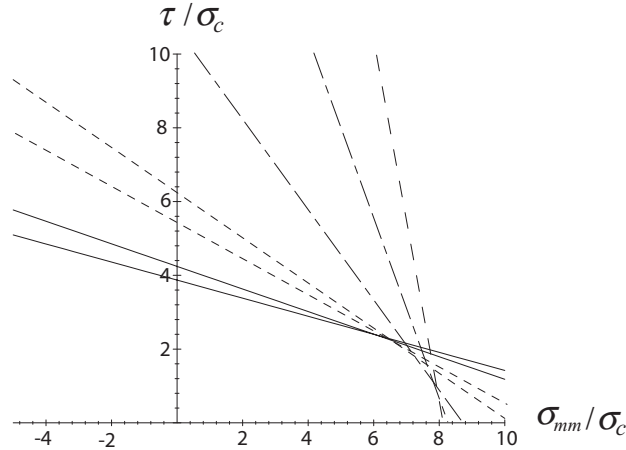


FIG. 1.14 – Construction du seuil de montée des dislocations dans le cas des structures CFC.

base des résultats que nous venons de détailler, il a alors été proposé par [20] un critère plus "pratique", sous la forme d'une relation linéaire entre τ et σ_h :

$$\max_t \left[\tau(t) + K\sigma_h(t) \right] = \sigma_c \quad (1.21)$$

La pertinence d'un tel choix à été discutée dans [20]; elle permet notamment de retrouver les tendances observées sur différents trajets de chargement étudiés. On notera toutefois que le terme σ_{mm} est défini à partir des contraintes principales par $\sigma_{mm} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ tandis que la pression hydrostatique s'écrit $\sigma_h = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Le critère proposé (1.21) fait donc intervenir la contrainte principale intermédiaire σ_2 qui n'était pas contenu dans l'analyse du cas particulier des CFC.

La transposition du critère de fatigue (1.21) à l'échelle macroscopique requiert un passage micro-macro reliant le tenseur des contraintes microscopiques, $\boldsymbol{\sigma}$, au tenseur des contraintes macroscopiques, $\boldsymbol{\Sigma}$. Le modèle de Lin-Taylor [56, 120], dont quelques éléments sont précisés maintenant, a été considéré.

Passage micro-macro

En toute généralité la relation d'interaction peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{A} : \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\rho} \quad (1.22)$$

\mathbb{A} est le tenseur d'ordre quatre de localisation des contraintes et $\boldsymbol{\rho}$ le tenseur des contraintes résiduelles. Nous noterons dans la suite par $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e$ le tenseur de déformation macroscopique. Le lien entre les échelles macroscopique et microscopique peut être obtenu sous différentes hypothèses et un cadre possible d'étude est celui du schéma auto-cohérent [51], décrit au chapitre suivant. Ce schéma décrit assez bien le comportement des matériaux polycristallins sous réserve que les déformations plastiques ne soient pas trop spatialement

étendues à l'échelle microscopique, ce qui est le cas en fatigue polycyclique. Toutefois, sans doute pour des raisons de simplicité, le choix adopté par Dang Van a été de considérer le modèle de Lin-Taylor [56, 120] basé sur l'égalité des tenseurs de déformation \mathbf{E} et $\boldsymbol{\varepsilon}$, i.e. la matrice impose sa déformation à l'inclusion³. L'inclusion et la matrice sont également supposés isotropes avec les mêmes caractéristiques élastiques. On a donc aux deux échelles⁴ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C} : \mathbf{E}; \quad (1.23)$$

Le tenseur d'élasticité s'écrit : $\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}$, \mathbb{J} et \mathbb{K} étant les projecteurs de l'espace des tenseurs symétriques d'ordre quatre isotropes : $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$, \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre quatre symétrique et $\mathbf{1}$ le tenseur identité d'ordre deux. k et μ sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de l'agrégat polycristallin. Pour le schéma de Lin-Taylor, \mathbb{A} vaut donc l'identité et $\boldsymbol{\rho} = -\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p$. La loi (1.22) s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.24)$$

En particulier, pour la cission sur le système de glissement défavorablement orienté et pour la pression hydrostatique, on a :

$$\tau = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta} - \mu\gamma; \quad \sigma_h = \Sigma_h \quad (1.25)$$

Formulation du critère de fatigue dans le cas des chargements macroscopique affines

Considérons à titre d'exemple le cas d'un trajet affine macroscopique ; la cission sur le plan de glissement défavorablement orienté est alors donnée par :

$$\tau(t) = \boldsymbol{\Sigma}_a : \boldsymbol{\Delta} \sin(\omega t) + \boldsymbol{\Sigma}_m : \boldsymbol{\Delta} - \mu\gamma(t) \quad (1.26)$$

où γ est une fonction du temps puisqu'oscillant sur chacun des cycles du trajet de chargement. Lorsque le grain est en régime adapté, alors :

- le glissement plastique tend vers une valeur limite finie que l'on note γ_m . Considérant le cas de l'écrouissage isotrope seul, il s'en suit alors que le cycle de chargement est symétrisé à l'échelle du grain sollicité (cf. figure 1.15). En conséquence la partie moyenne de la cission microscopique est nulle (i.e. $\tau_m = 0$), les contraintes résiduelles se réduisent au terme $-\mu\gamma_m$, où γ_m est définies par :

$$\gamma_m = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\Sigma}_m : \boldsymbol{\Delta} \quad (1.27)$$

³Notons que la possibilité d'une application du modèle de Kröner dans le cadre multiéchelle décrit a déjà été mentionnée par Dang Van dans [21].

⁴Une extension du critère de Dang Van et Papadopoulos a été récemment proposée au cas de l'élasticité anisotrope [14]. En particulier les grains présentent généralement une anisotropie élastique de type cubique, cet aspect sera traité dans le chapitre suivant.

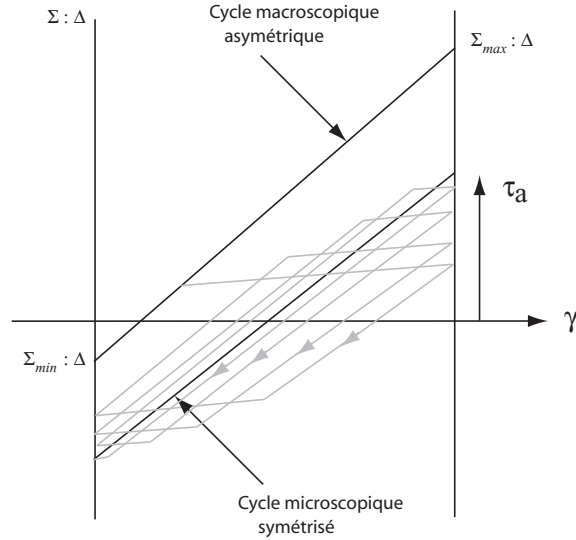


FIG. 1.15 – Symétrisation du cycle de chargement à l'échelle locale des grains sollicités pour des chargements macroscopiques affines.

- Puisque γ tend vers une valeur limite finie, alors :

$$\tau_a = \Sigma_a : \Delta = \tau_0 + R(\gamma_{cum}) \quad (1.28)$$

Il s'en suit alors que l'amplitude du cisaillement, τ_a , en régime établi coïncide avec l'amplitude du cisaillement alterné macroscopique, $\Sigma_a : \Delta$.

Une condition suffisante de non nucléation d'une fissure de fatigue est obtenue si en régime établi l'état de contrainte dans le grain est en dessous du seuil critique (1.21); pour un chargement macroscopique affine, il s'en suit alors que :

$$\Sigma_a : \Delta + K\Sigma_{h,max} < \sigma_c \quad (1.29)$$

Pour évaluer l'orientation Δ des grains les plus défavorablement orientés du point de vue du glissement, on peut prendre, sans restreindre la généralité du problème, un plan d'amplitude de cisaillement maximal particulier. Les grains correspondant sont alors représentatifs de l'ensemble des grains défavorablement orientés :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \Sigma_a : \Delta + K\Sigma_{h,max} < \sigma_c \quad (1.30)$$

Dans le cas présent, c'est à dire pour un chargement macroscopique affine, il s'agit alors de rechercher les valeurs principales de Σ_a .

Généralisation à un chargement cyclique arbitraire

Dans le but d'applications dans le contexte industriel, il s'est avéré nécessaire de formuler un critère valable pour tout type de chargement cyclique. Celui-ci a été obtenu

en généralisant de manière heuristique les résultats fournis par l'approche multiéchelle précédemment décrite.

Le critère proposé généralise l'idée de symétrisation du cycle de contrainte à l'échelle microscopique. Dans un plan de normale \underline{n} , la cission macroscopique $C(\underline{n}, t)$, définie par :

$$C(\underline{n}, t) = [\text{tr}(\underline{\Sigma}(t) \cdot \underline{\Sigma}(t) \cdot (\underline{n} \otimes \underline{n})) - (\underline{\Sigma}(t) : (\underline{n} \otimes \underline{n}))^2]^{1/2} \quad (1.31)$$

décrit une courbe fermée (figure 1.16). Il est alors supposée que, dans ce plan, le critère de plasticité à l'état adapté est un cercle centré sur les contraintes résiduelles (alors données par $\rho = OM$, voir figure (1.16)) et dont le rayon est celui du plus petit cercle circonscrit au cycle de chargement. Le trajet décrit par la contrainte de cission microscopique, $c(\underline{n}, t)$ est alors définie par :

$$c(\underline{n}, t) = C(\underline{n}, t) + \rho \quad (1.32)$$

d'où le critère de fatigue portant alors sur une valeur critique de la cission microscopique :

$$\max_{\underline{n}} \max_t \{c(\underline{n}, t) + K\Sigma_h(t)\} < \tau_c \quad (1.33)$$

Dans (1.33), une dépendance linéaire du critère vis à vis de la contrainte hydrostatique est supposée.

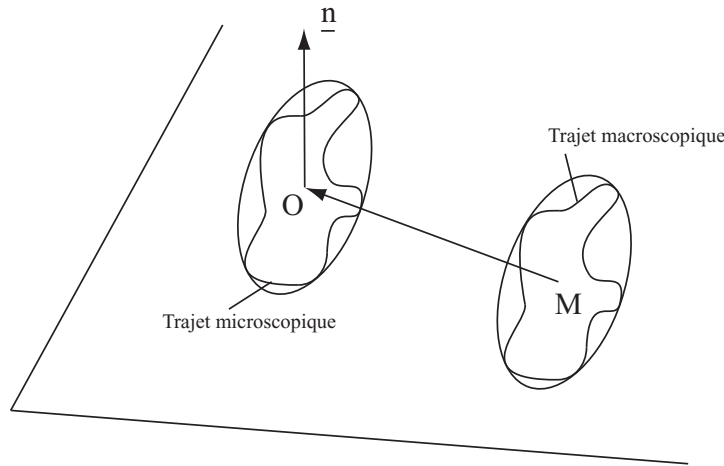
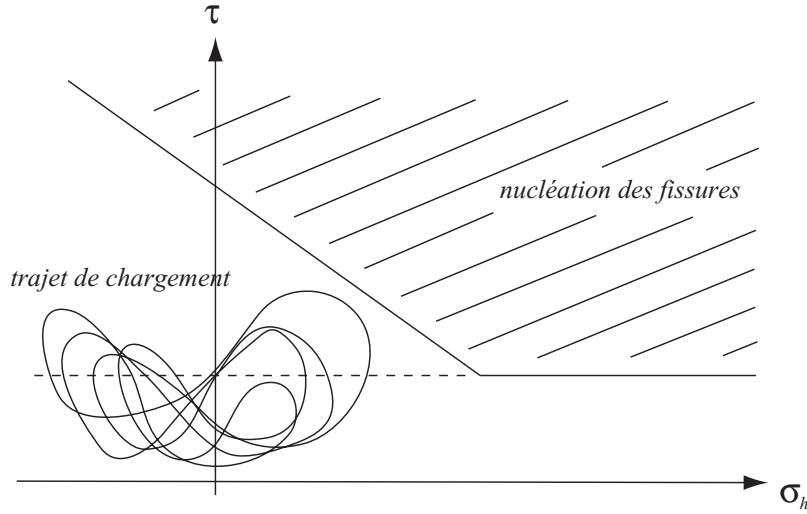


FIG. 1.16 – Symétrisation du cycle de chargement dans le cas d'un trajet macroscopique quelconque.

1.4.3 Formulation proposée par Papadopoulos (1994)

Principe de l'approche

La première approche proposée par Papadopoulos en 1987 [86] pour la formulation du critère de fatigue reprend les ingrédients majeurs du cadre formalisé par Dang Van (plasticité localisée, formulation du critère de fatigue à l'échelle locale, passage micro-macro).


 FIG. 1.17 – critère de Dang Van dans le plan (τ, σ_h) .

L'originalité de ce critère réside dans la méthode utilisée pour évaluer les contraintes résiduelles à l'état adapté du cristal. La différence majeure avec l'approche de Dang Van est dans la description des mécanismes de microplasticité à l'échelle locale. L'idée proposée par [86] est la suivante : *un VER composé de cristaux obéissant à la loi de Schmid et dont l'orientation suit une distribution aléatoire uniforme, se comporte en apparence comme un matériau de von Mises*. Il est alors suggéré de remplacer les cristaux constitutifs par des grains possédant un comportement "moyen" équivalent et régi par le critère de von Mises.

Notons toutefois qu'une telle hypothèse nous semble en contradiction avec celle supposant que la plasticité se caractérise par du glissement simple dans les grains sollicités. Par ailleurs, il a été montré plus tard que, pour des trajets de flexion torsion alternée déphasés, cette première approche proposée par Papadopoulos conduit à des termes de déphasage dont il est expérimentalement reconnu qu'ils ont un effet négligeable sur le phénomène de fatigue.

C'est à la suite de cette dernière remarque que Papadopoulos a suggéré une nouvelle méthode pour la détermination du critère de fatigue [87], [88], [89], [90]. Le nouveau critère proposé ne porte plus sur une condition d'adaptation à l'échelle des grains sollicités mais porte sur le niveau de déformation plastique accumulé dans les grains au cours du cyclage. Dans cette nouvelle approche il ne s'agit donc plus de remplacer le cristal par un grain de von Mises équivalent, mais de décrire les micromécanismes de plasticité à l'échelle locale, par un critère de Schmid, comme dans l'approche initiale de Dang Van. Le critère de plasticité des grains s'écrit donc sous la forme :

$$\mathcal{F} = |\tau - X| - \tau_0 - R(\gamma_{cum}) \leq 0 \quad (1.34)$$

où $\tau = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta}$. X et R sont respectivement les variables d'écroûissage cinématique et isotrope. Le glissement plastique est déduit par application de la règle de normalité associé

à \mathcal{F} :

$$\dot{\gamma} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} = \dot{\Lambda} \text{sign}(\tau - X) \quad (1.35)$$

En notant que $\text{sign}(\tau - X) = \text{sign}(\dot{\gamma})$ et $\dot{\gamma}_{cum} = |\dot{\gamma}|$, le multiplicateur plastique est défini par $\dot{\Lambda} = \dot{\gamma}_{cum}$. Les lois d'écouissage isotrope et cinématique sont toujours supposées linéaires :

$$X = c\gamma; \quad R(\gamma_{cum}) = R_0\gamma_{cum} \quad (1.36)$$

En utilisant la loi d'interaction de Lin-Taylor, le critère de plasticité s'écrit :

$$\mathcal{F} = |\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta} - (c + \mu)\gamma| - \tau_0 - R(\gamma_{cum}) \leq 0 \quad (1.37)$$

Similairement au cas du matériau de von Mises, dans le cas d'un chargement affine macroscopique, Papadopoulos [89] a montré qu'en régime adapté, le niveau de déformation dans les grains sollicités est défini par :

$$\gamma_{cum} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_a : \boldsymbol{\Delta} - \tau_0}{R_0}; \quad \gamma_m = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_m : \boldsymbol{\Delta}}{c + \mu} \quad (1.38)$$

Le critère de fatigue adopté est le suivant :

Une condition de non nucléation d'une fissure de fatigue consiste à supposer que le glissement plastique cumulée, et ce pour toutes les orientations \underline{n} et \underline{m} , est inférieure à une valeur critique γ_c .

Ce critère peut s'écrire sous la forme :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \gamma_{cum} < \gamma_c \quad (1.39)$$

Notons toutefois, que cette condition est équivalente à une condition d'adaptation. En effet, si dans le grain le plus défavorablement orienté, la déformation plastique est bornée, il en est de même pour l'ensemble des grains constituant le polycristal.

Dans le cas d'un chargement affine macroscopique, le critère proposé s'écrit de manière évidente :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_a : \boldsymbol{\Delta} - \tau_0}{R_0} < \gamma_c \quad (1.40)$$

Le critère (1.40), de non nucléation d'une fissure de fatigue est défini à l'échelle du grain plastifié. Or, le critère recherché ne correspond pas forcément au critère de fatigue recherché. En effet, la limite de fatigue ne correspond pas à l'absence de microfissures, mais à l'existence de fissures courtes non évolutives. Le point de vue de l'ingénieur est donc de prévenir l'apparition d'une fissure traversant plusieurs grains, ou de la taille du VER. Papadopoulos propose alors d'adopter un critère basé sur une valeur moyenne du glissement plastique cumulé, calculée sur ce VER :

$$\sqrt{\langle \gamma_{cum}^2 \rangle_{\underline{n}, \underline{m}}} < \gamma_c \quad (1.41)$$

où $\langle . \rangle_{\underline{n}, \underline{m}}$ désigne la moyenne sur toutes les orientations possibles. Explicitons plus en détail cette moyenne, pour cela, il est judicieux d'introduire le repère sphérique $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$. \underline{n} étant un vecteur unitaire balayant toutes les directions de l'espace, il est alors possible de poser $\underline{n} = \underline{e}_r$, où \underline{e}_r est attaché à un point M appartenant à la sphère unité ($\|\underline{x}\| = 1$) qui s'écrit de manière classique :

$$\underline{e}_r = \left[\cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\varphi) \right] \quad (1.42)$$

\underline{m} est un vecteur normal à \underline{n} et peut donc se décomposer, en toute généralité, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{m} &= \cos(\psi) \underline{e}_\theta + \sin(\psi) \underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_\theta &= \left[-\sin(\theta), \cos(\theta), 0 \right]; \quad \underline{e}_\varphi = \left[\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), -\sin(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (1.43)$$

La relation de moyenne (1.41) s'écrit :

$$\left[\frac{1}{8\pi^2} \int_{S(r)} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (\underline{\Sigma}_a : \underline{\Delta} - \tau_0)^2 Y(\underline{\Sigma}_a : \underline{\Delta} - \tau_0) dS d\psi \right]^{1/2} < R_0 \gamma_c \quad (1.44)$$

où $\int_{S(r)} dS$ représente l'intégration sur la sphère unité. $Y(x)$ est la fonction d'heaviside définie par $Y(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $H(x) = 1$ si $x > 0$. L'introduction de la fonction d'Heaviside traduit le fait qu'au dessous de la limite d'élasticité locale, τ_0 , le glissement plastique est nul. Une difficulté, quant à l'intégration de (1.44), réside dans la présence de la fonction d'heaviside ; il est alors supposé que τ_0 est suffisamment petit pour pouvoir être négligé dans l'intégrale (1.44).

Or, la cission macroscopique peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\Sigma}_a : \underline{\Delta} = \cos(\psi) \underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) + \sin(\psi) \underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi) \quad (1.45)$$

Il s'en suit d'une part que l'intégration par rapport à ψ donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (\underline{\Sigma}_a : \underline{\Delta})^2 d\psi = \frac{1}{2} \left[(\underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta))^2 + (\underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi))^2 \right] \quad (1.46)$$

et d'autre part que l'intégration sur la sphère unité conduit au résultat suivant :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} \left[(\underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta))^2 + (\underline{\Sigma}_a : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi))^2 \right] dS = \frac{2}{15} \|\bar{\underline{\Sigma}}_a\|^2 \quad (1.47)$$

Le critère de fatigue se traduit par la considération, dans le cas d'un trajet de chargement affine, d'une valeur critique de $\|\bar{\underline{\Sigma}}_a\|$. Encore une fois, mais ceci était prévisible, le critère de fatigue ne fait pas apparaître la pression hydrostatique. En notant que la propagation des fissures le long du plan de glissement, est favorisée ou non lorsque qu'une contrainte normale à ce plan $\underline{\sigma} : (\underline{n} \otimes \underline{n})$ est appliquée, une dépendance à l'échelle locale du critère vis à vis de la valeur maximale de ce paramètre est à nouveau postulée. Puisque le critère

a été établi à l'aide d'une relation de moyenne sur le VER, il est cohérent de considérer également une valeur moyenne :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} \boldsymbol{\sigma}_{max} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) dS = \sigma_{h,max} \quad (1.48)$$

Puisque que l'on a l'équivalence $\sigma_{h,max} = \Sigma_{h,max}$, compte tenu de la loi d'interaction adoptée (1.25), le critère obtenu dans le cas d'un chargement affine s'écrit :

$$\|\bar{\Sigma}_a\| + K\Sigma_{h,max} - \sigma_c \leq 0 \quad (1.49)$$

L'extension au cas des chargements arbitraires se présente sous la forme :

$$\Sigma_a^* + K\Sigma_{h,max} - \sigma_c \leq 0 \quad (1.50)$$

où Σ_a^* est déterminé de la manière suivante :

$$\Sigma_a^* = \left[\frac{15}{8\pi^2} \int_{S(r)} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} [C(\theta, \varphi, \psi)]^2 dS d\psi \right]^{1/2} \quad (1.51)$$

avec $C(\theta, \varphi, \psi)$ défini :

$$C(\theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} \left[\Sigma(t_1) : \Delta - \Sigma(t_2) : \Delta \right] \quad (1.52)$$

Examinons à présent le cas particulier des chargements déphasés, qui, rappelons le, a motivé cette nouvelle formulation. La cission macroscopique s'écrit :

$$\Sigma(t) : \Delta = \Sigma_{a_1} : \Delta \sin(\omega t) + \Sigma_{a_2} : \Delta \cos(\omega t) + \Sigma_m \quad (1.53)$$

Il s'en suit que $C(\theta, \varphi, \psi)$ défini par (1.52), s'écrit :

$$C(\theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} \left[\Sigma_{a_1} : \Delta (\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)) + \Sigma_{a_2} : \Delta (\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)) \right] \quad (1.54)$$

On effectue la décomposition suivante : $\omega t_1 = u + v$ et $\omega t_2 = u - v$, il s'en suit alors que :

$$C(\theta, \varphi, \psi) = \max_u \left[\Sigma_{a_1} : \Delta \cos(u) - \Sigma_{a_2} : \Delta \sin(u) \right] \quad (1.55)$$

La minimisation par rapport à u conduit donc à :

$$C(\theta, \varphi, \psi) = \sqrt{(\Sigma_{a_1} : \Delta)^2 + (\Sigma_{a_2} : \Delta)^2} \quad (1.56)$$

Exprimons maintenant la valeur de Σ_a^* ; le détail des calculs reste équivalent à ceux effectués précédemment dans le cas d'un chargement affine. En injectant (1.56) dans (1.51), on a :

$$\Sigma_a^* = \left[\|\bar{\Sigma}_{a_1}\|^2 + \|\bar{\Sigma}_{a_2}\|^2 \right]^{1/2} \quad (1.57)$$

Pour lequel les identités

$$\begin{aligned} \frac{15}{8\pi^2} \int_{S(r)} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (\Sigma_{a_1} : \Delta)^2 dSd\psi &= \frac{2}{15} \|\bar{\Sigma}_{a_1}\|^2 \\ \frac{15}{8\pi^2} \int_{S(r)} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (\Sigma_{a_2} : \Delta)^2 dSd\psi &= \frac{2}{15} \|\bar{\Sigma}_{a_2}\|^2 \end{aligned} \quad (1.58)$$

ont été utilisées. Détaillons, (1.57) en utilisant (1.8) :

$$\begin{aligned} \Sigma_a^* &= \left[\Sigma_{a,11}^2 + \Sigma_{a,122}^2 + \Sigma_{a,33}^2 + 3\Sigma_{a,12}^2 + 3\Sigma_{a,13}^2 + 3\Sigma_{a,23}^2 \right. \\ &\quad - \Sigma_{a,11}\Sigma_{a,22} \cos(\psi_{11} - \psi_{22}) - \Sigma_{a,11}\Sigma_{a,33} \cos(\psi_{11} - \psi_{33}) \\ &\quad \left. - \Sigma_{a,22}\Sigma_{a,33} \cos(\psi_{22} - \psi_{33}) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.59)$$

De façon évidente, on observe que seuls apparaissent les termes de déphasage entre les composantes diagonales (c'est à dire les ψ_{ii}). Les termes de déphasage ψ_{ij} pour $i \neq j$, qui, nous l'avons déjà précisé, ont un effet négligeable sur la limite d'endurance, n'interviennent pas dans le critère (1.50).

1.4.4 Critique des approches multiéchelles précédemment décrites

Dans l'approche de Dang Van [20], le critère de fatigue correspond à un seuil de montée des dislocations avec formation de lacunes. Toutefois tel que l'a précisé par la suite Papadopoulos [21] la limite d'endurance ne correspond pas à l'absence de microfissures le long des bandes de glissements localisées mais à l'absence de fissures non évolutives. Il semble alors que l'on ne peut associer la limite d'endurance à un seuil d'endommagement mais à une phase terminale d'un processus de microendommagement. De plus, la montée des dislocations est généralement un mécanisme qui est activé thermiquement, et ne peut a priori pas expliquer la nucléation d'une fissure de fatigue à température ambiante. Le critère de Papadopoulos, [86], est basé sur une condition d'adaptation à l'échelle des grains sollicités. Ce critère a permis notamment de retrouver l'influence de l'amplitude du cisaillement sur la limite d'endurance. Néanmoins puisque seuls les mécanismes de plasticité ont été considérés à l'échelle locale des grain, le critère proposé ne permet pas a priori de rendre compte de l'influence de la pression hydrostatique en fatigue polycyclique. Une dépendance linéaire a alors été postulée. Cette incapacité de la modélisation à rendre compte de ces effets de pression, contrairement à l'approche initialement développée par Dang Van, est due au fait qu'aucun mécanisme d'endommagement n'ait été explicitement intégré.

Une nouvelle formulation pour le critère de fatigue a par la suite été proposée par Papadopoulos. Celle-ci repose sur la considération d'une valeur critique du glissement plastique cumulé. On notera que dans cette nouvelle approche la déformation plastique est considérée comme un indicateur du niveau de dommage. Néanmoins, l'activité plastique, peut être associée à un mécanisme d'endommagement, mais le glissement plastique cumulé,

γ_{cum} ne peut être considérée comme une variable d'endommagement en soi. De plus ce nouveau critère ne permet toujours pas de rendre des effets de pression sur le critère de fatigue, la raison étant encore une fois due au fait que seul des mécanismes de plasticité ait été explicitement considérés. Ainsi, bien que fréquemment mentionnés dans les différentes approches proposées par Dang Van et Papadopoulos, les mécanismes d'endommagement, qui ont lieu sur les plans de glissement défavorablement orientés et qui conduisent à la nucléation, ne sont pas explicitement intégrés dans leur formalisme.

1.5 Prise en compte de l'endommagement

1.5.1 Micromécanismes d'endommagement en fatigue polycyclique

Afin d'incorporer l'endommagement dans l'approche à deux échelles, comme il l'a été souligné par Dang Van, il est nécessaire de rechercher les mécanismes qui altèrent de manière définitive la microstructure du matériau. Il convient donc d'étudier convenablement les mécanismes mis en évidence expérimentalement. Dans le cas de ces cristaux purs, Laird [55] a observé que l'on pouvait relier la limite de fatigue à l'apparition des BGP. Cela suppose alors de décrire le mécanisme d'amorçage de fissure à l'échelle d'un grain ce qui n'est pas aisé. En effet, les mécanismes de glissement dans les grains de surface font apparaître des lignes de glissement, il est alors montré que les fissures s'amorcent en surface, au sein de ces bandes de glissement [16, 66, 67, 2, 3] (cf. figures 1.18 et 1.19). La propagation dans le stade I de la fatigue se fait donc d'abord dans les BGP [65]. Les

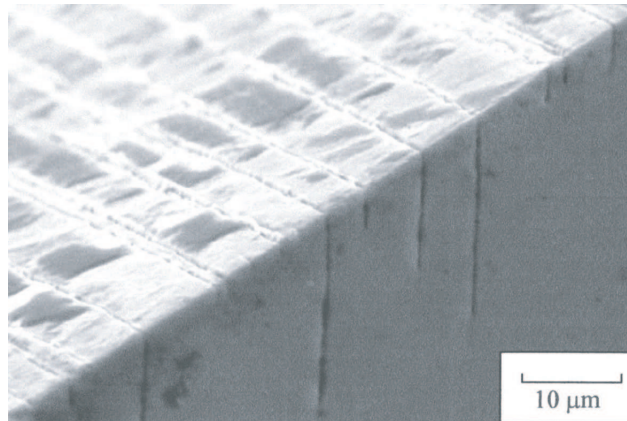


FIG. 1.18 – Coupe d'une éprouvette de cuivre montrant des intrusions et extrusions et les fissures se propageant en suivant ces dernières [3].

observations menées en microscopie optique par [27] montrent que l'état de surface d'un grain sollicité en fatigue évolue au cours de l'essai. Plus précisément, il est observé un relief en surface qui se caractérise par la formation d'intrusion/extrusion décrit initialement par Forsyth [30] et exhaustivement par Lin et Lin [64] et Mughrabi et al. [81, 26].

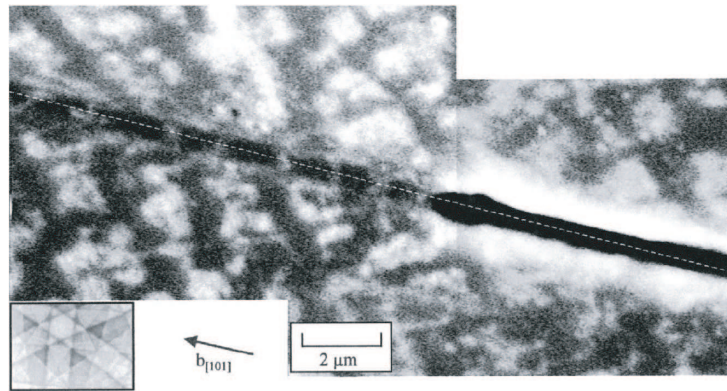


FIG. 1.19 – Fissure se propageant en suivant une bande de glissement dont on distingue la structure en échelle [3].

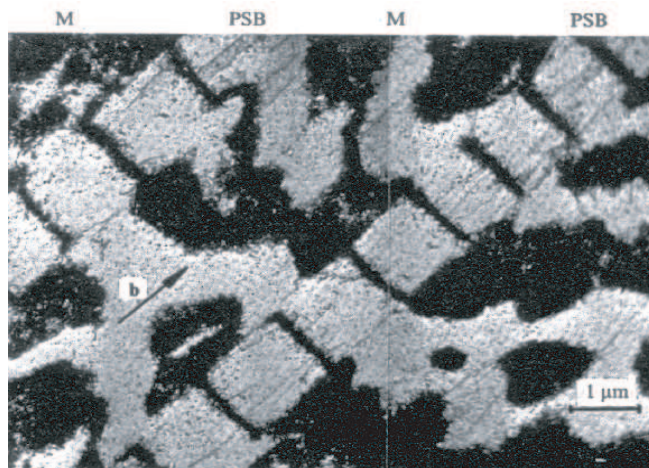


FIG. 1.20 – Structure dite en échelle des BGP, dans un monocristal de cuivre [81].

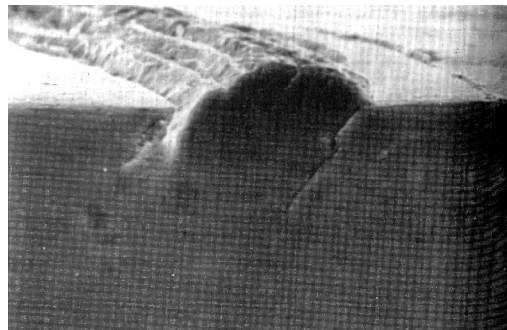


FIG. 1.21 – Nucléation d'une fissure de fatigue à l'interface BGP-matrice dans un cristal de cuivre [67].

Selon certains auteurs, [26], la formation de ces intrusions et extrusions résultent de l'irréversibilité du glissement dans les BGP, cette irréversibilité du glissement est elle-même la conséquence de l'accumulation de défauts ponctuels par annihilation de dislocations au sein des bandes.

Lorsque la densité de dislocations atteint un seuil critique, des mécanismes d'annihilation de dislocation sont mis en jeu. L'annihilation mutuelle de dislocations survient lorsque la distance les séparant atteint un seuil critique (environ 50nm pour les dislocations vis, 1.6nm pour les dislocations coins). Ces phénomènes d'annihilation de dislocations produisent des défauts ponctuels pouvant être des atomes interstitiels ou des lacunes. Grosskreutz and Mughrabi (1975) ont suggéré que le mouvement de va et vient des dislocations permet d'accommoder la déformation plastique jusqu'à des amplitudes de déformation plastique de l'ordre de 10^{-4} (c'est à dire dans la région A, figure 1.7). Toutefois un équilibre dynamique entre production et annihilation de dislocations est responsable du plateau observé dans la région B (cf. figure 1.7).

L'apparition des fissures de fatigue est généralement observée en surface, et il semble que la formation du relief de surface joue un rôle important comme le montre le cliché de [66] sur la figure 1.21. Cependant ces auteurs précisent que certaines fissures sont également observées à l'intérieure des bandes.

Si aucun consensus ne semble se dégager sur les mécanismes qui sont à l'origine de l'apparition des fissures, on estime généralement que l'accumulation de défauts ponctuels le long des BGP, est à l'origine d'une fragilisation du matériau et contribue à la propagation de la fissure.

1.5.2 Approches prenant en compte l'endommagement

On retiendra que la notion de niveau d'endommagement pour définir la limite d'endurance semble l'idée la plus physiquement acceptable. Depuis le milieu des années quatre vingt, l'incorporation de l'endommagement dans les approches pour la prédiction de la durée de vie en endurance limitée, a fait l'objet de nombreux travaux, notamment en France. Il s'agit pour l'essentiel de modèles issus du formalisme thermodynamique de la mécanique de l'endommagement : modèles de Lemaitre [60], [61], de Chaboche [15], d'Abdul-Latif [1] et, plus récemment, de Flacelière [29]. Les trois premières approches citées sont décrites de manière précise dans la thèse de Flacelière [29]. On se propose cependant de rappeler ici les principes de l'approche à deux échelles de Lemaitre [60] permettant d'introduire la proposition, plus riche, de Flacelière.

Cette approche à deux échelles considère un agrégat de grains au sein du VER ; chaque grain est modélisé par une inclusion sphérique, plastique et endommageable au sein d'une matrice élastique ou élastoplastique, non endommageable. L'endommagement reste ainsi confiné à l'échelle mesoscopique sans effet notable à l'échelle macroscopique. Afin de relier les deux échelles, une loi d'interaction est choisie. Cette loi est déduite de l'analyse d'Eshelby et correspond aux schémas auto-cohérents (de type Berveiller-Zaoui [9]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - 2\mu(1 - \beta)(\boldsymbol{\varepsilon}^P - \boldsymbol{E}^P)$$

Pour une inclusion sphérique, le coefficient β vaut :

$$\beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)}$$

L'hypothèse de partition de la déformation totale en une part élastique et une part plastique est retenue. Par ailleurs, la notion de contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est introduite, telle que :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)}$$

On a alors :

$$\varepsilon^e = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\tilde{\sigma}) \mathbf{1}$$

La fonction de charge f de l'inclusion est définie au sens de von Mises et fait intervenir la contrainte effective $\tilde{\sigma}$, une limite d'élasticité mesoscopique σ_f et une variable d'écrouissage cinématique linéaire effective $\tilde{\mathbf{X}}$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}^p (1 - D)$$

La loi d'évolution de la déformation plastique est alors directement déduite de f par une loi de normalité et l'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{\varepsilon}_{eq}$$

où Y est le taux de restitution de l'énergie élastique, S et s sont des paramètres du modèle et ε_{eq} est la déformation plastique cumulée. L'amorçage d'une fissure correspond alors à un endommagement critique D_c .

Deux critiques peuvent être formulées à propos de ce modèle. D'une part, il ne fait pas intervenir la contrainte moyenne dont l'effet est important en fatigue. D'autre part, la limite d'élasticité mesoscopique σ_f correspond à la limite de fatigue du matériau. Or, il est connu que la localisation de la déformation plastique s'effectue avant d'atteindre la limite de fatigue comme ont pu l'observer, par exemple, Cugy et Galtier [19] en étudiant l'évolution de l'étendue des bandes de glissement observables en surface d'une éprouvette en fonction du chargement appliqué.

Afin de palier, entres autres, ces difficultés, Flacelière a introduit une approche similaire à celle de Lemaitre mais s'appuyant sur le modèle multiéchelle de Dang Van et Papadopoulos. La loi d'interaction est à nouveau celle de Lin-Taylor. Un écrouissage cinématique linéaire et un écrouissage isotrope non linéaire ont été introduits. La plasticité est couplée à l'endommagement qui fait, quant à lui, intervenir deux variables. La première, d , correspond à une variable *d'effet du dommage*. Elle dépend de la pression hydrostatique σ_h et son évolution est déduite d'une fonction H , postulée, par une loi de normalité :

$$\dot{d} = \dot{\lambda}^d (1 + b\sigma_h)$$

où $\dot{\lambda}^d$ est le multiplicateur "plastique". On notera, au passage, que dans l'approche proposée (comme dans celle de Chaboche, par ailleurs), l'effet de la pression hydrostatique,

est obtenue en postulant une dépendance linéaire en pression de la loi d'évolution de la variable de dommage d . La seconde variable, notée β , joue le rôle de *mesure scalaire de dommage cumulé* :

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda}^d$$

Enfin, il faut noter que la fonction seuil d'endommagement, h , dépend également de la pression hydrostatique mais est prise différente de H . Flacelière justifie l'introduction des deux variables d et β et de ces deux fonctions h et H par la nécessaire séparation entre l'effet du dommage sur les propriétés du matériau représenté par d et la mesure du dommage cumulé représenté par β . Il souligne également la différence à faire entre amorçage d'une micro-fissure au sein du VER, associée à h , et la micro-propagation de celle-ci, associée à H . Il a ensuite proposé deux extensions de son modèle afin de prendre en compte les branchements éventuels de fissure.

1.6 Conclusion

Nous avons tenté dans ce premier chapitre de rassembler quelques éléments de bibliographie concernant la fatigue polycyclique. L'objectif visé est double : i) préciser les micromécanismes de déformations en jeu lors de sollicitations de fatigue de faible amplitude ; ii) présenter quelques approches de détermination de critères d'endurance illimitée. L'analyse bibliographique a notamment permis d'identifier l'origine des phénomènes de fatigue à grand nombre de cycles, à savoir le développement d'une microplasticité localisée (dans quelques grains) qui s'accompagne de processus d'endommagement. Ces derniers se manifestent généralement sous la forme d'une croissance de microfissures à l'interface BGP-matrice. En accord avec ces remarques, nous avons privilégié, au détriment de démarches plus phénoménologiques, l'étude de l'approche à deux échelles proposée par Dang Van [20] et reprise par Papadopoulos [87]. Dans le cadre de cette approche, la modélisation de la microplasticité combinée à une condition d'adaptation élastique permet d'établir un critère local de non nucléation de fissures de fatigue. Un passage micro-macro permet alors d'établir le critère macroscopique de fatigue. Un des points faibles de l'approche qui vient d'être décrite est la non prise en compte explicite des mécanismes d'endommagement dans la procédure de transition d'échelle. Ceci nous a amené à nous intéresser aux modèles récents du type Lemaitre et al. [60] (voir également [61], [29]) dans lequel l'endommagement des grains est traité de manière phénoménologique.

On peut donc retenir que le modèle multiéchelle proposé initialement par Dang Van, repris et étendu par Lemaitre en introduisant un couplage plasticité-endommagement demeure le cadre d'étude idéal en fatigue à grand nombre de cycles. Cependant, le traitement phénoménologique de l'endommagement par fatigue tel qu'il a été effectué jusqu'à aujourd'hui ne paraît pas satisfaisant. D'une part, le rôle joué par la pression hydrostatique demeure postulé et d'autre part, il représente peu les mécanismes physiques d'endommagement observés au sein des BGP. L'objectif des travaux présentés dans la suite de ce mémoire est alors d'intégrer dans le formalisme de Dang Van les micromécanismes d'endommagement qui ont lieu dans les bandes de glissement persistantes, et qui ont été décrits dans ce chapitre bibliographique.

Chapitre 2

Une approche multiéchelle de la fatigue incorporant l'endommagement

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'intégrer dans le formalisme proposé par Dang Van les mécanismes d'endommagement qui ont lieu le long des bandes de glissement intense. Il s'agit d'une part de décrire les mécanismes de nucléation des fissures de fatigue, d'autre part de rendre compte des effets de la pression hydrostatique en fatigue polycyclique.

La difficulté majeure pour la prédiction du critère de fatigue réside dans l'identification des mécanismes qui altèrent de façon irréversible la microstructure du matériau. Il est aujourd'hui reconnu que les bandes de glissement intense constituent le site privilégié de la nucléation des fissures de fatigue, est que celle-ci résulte de la localisation de la déformation plastique. Néanmoins l'activité plastique seule ne permet pas d'expliquer la formation d'une fissure. L'annihilation des dislocations est un mécanisme qui est à l'origine de la formation de défauts ponctuels et plus particulièrement de lacunes le long des BGP. Ce mécanisme d'annihilation affecte de manière irréversible la microstructure du matériau et permet d'expliquer la création de microcavités au sein des BGP. Ces cavités peuvent croître sous l'action combinée de l'activité plastique et des efforts de pression. Dans le cas d'une matrice de von Mises cette croissance est généralement décrite à l'aide de modèles d'endommagement de rupture ductile [104], [47] (cf. également [58]). Ce chapitre est consacré à un premier niveau d'implémentation de l'endommagement dans la construction du critère de fatigue, en adaptant le modèle de Rice et Tracey à la plasticité cristalline pour la description de la croissance des cavités.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation des micromécanismes de plasticité et d'endommagement dans les grains défavorablement orientés par rapport aux axes de chargement. Les mécanismes d'endommagement introduits sont de deux types il s'agit d'une part de la nucléation de microcavités par accumulation de défauts ponctuels de type lacunaire créée par annihilation des dislocations, d'autre part de la croissance de ces microcavités sous l'action combinée de la déformation plastique et des efforts de pres-

sion.

Dans cette première phase de modélisation, par souci de simplification, on fait l'hypothèse de microcavités sphériques. Concernant la croissance des microcavités, le modèle original de Rice et Tracey étant établi a priori pour des taux de triaxialité élevés, un travail préalable a consisté à déterminer une loi applicable à toute valeur du taux de triaxialité, ceci dans la perspective d'une application aux chargements cycliques. Une extension de cette loi pour la prise en compte de l'anisotropie plastique du grain sera proposée dans un second temps. Le critère de fatigue adopté correspond à une valeur critique de l'endommagement.

En vue de la transposition du critère de fatigue à l'échelle macroscopique, un passage micro-macro est effectué afin de relier les grandeurs définies à l'échelle locale à celles appliquées sur la structure. Trois schémas d'homogénéisation sont appliqués pour évaluer l'état de contrainte dans les grains plastifiés. Il s'agit du schéma de Lin-Taylor [120, 56], de Sachs [109] et du schéma autocohérent (Kröner [51], Bui [13]). L'importance de l'anisotropie élastique des structures cristallines de type cubique (CFC et CC) sur la loi d'interaction et donc sur le critère de fatigue sera notamment examinée.

Enfin une expression analytique du critère de fatigue sera explicitée dans le cas des trajets de chargement macroscopiques affines et déphasés. Afin d'évaluer la pertinence de l'approche développée ici, des comparaisons du critère avec des résultats expérimentaux issus de la littérature seront proposées en dernière partie de ce chapitre.

2.2 Principes de base de la modélisation proposée

2.2.1 Comportement plastique cyclique à l'échelle des grains

On propose dans ce paragraphe de décrire les micromécanismes de plasticité à l'échelle des grains. Ceux-ci se caractérisent par l'activation de systèmes de glissement, appartenant à la famille $\{111\} \langle 110 \rangle$ pour les structures Cubiques Faces Centrées (CFC) et appartenant aux familles $\{110\} \langle 111 \rangle$ et $\{112\} \langle 111 \rangle$ pour les structures Cubiques Centrées (CC). Chaque système de glissement, que l'on notera à l'aide de l'exposant r , est défini par une normale \underline{n}^r au plan de glissement et par une direction du glissement notée \underline{m}^r . On rappelle que $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignent respectivement les tenseurs de contrainte et de déformation à l'échelle locale. Comme auparavant, on adopte une décomposition additive de la déformation totale, $\boldsymbol{\varepsilon}$, en une déformation élastique, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, et une déformation plastique, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ tel que : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Le glissement plastique, sur chaque système de glissement est défini par $\gamma^r = 2\boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\Delta}^r$, où $\boldsymbol{\Delta}^r$ est le tenseur d'ordre deux définissant l'orientation du système de glissement considéré et défini par :

$$\boldsymbol{\Delta}^r = \underline{n}^r \otimes \underline{m}^r = \frac{1}{2}(\underline{n}^r \otimes \underline{m}^r + \underline{m}^r \otimes \underline{n}^r) \quad (2.1)$$

La déformation plastique totale est alors définie comme la somme des glissements plastiques sur chacun des systèmes de glissement activés. Le comportement plastique du monocristal met en jeu la contrainte de cisaillement sur le système considéré, $\tau^r = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta}^r$, et le glissement plastique γ^r . Ce comportement est régi par la loi de Schmid décrite clas-

siquement par le critère :

$$\mathcal{F}^r = |\tau^r - X^r| - \tau_0 - R^r \quad (2.2)$$

X^r et R^r sont respectivement les variables d'écroissage cinématique et isotrope. Une loi linéaire pour l'écroissage cinématique a été adoptée :

$$X^r = c\gamma^r \quad (2.3)$$

où c est le module d'écroissage cinématique. Nous adoptons une loi d'écroissage cinématique afin de traduire l'observation de limites d'écoulement différentes en traction et en compression (effet Bauschinger).

Une loi linéaire et une loi non linéaire (avec saturation) pour l'écroissage isotrope seront considérées dans ce travail :

$$R^r = \begin{cases} R_0\gamma_{cum}^r & \text{loi linéaire} \\ R_\infty \{1 - \exp(-r_0\gamma_{cum}^r)\} & \text{loi non linéaire} \end{cases} \quad (2.4)$$

γ_{cum}^r est le glissement plastique cumulé sur le système r , défini par : $\gamma_{cum}^r = \int_0^t |\dot{\gamma}^r(t')| dt'$; R_0 , R_∞ et r_0 sont trois paramètres de ces lois d'écroissage isotrope. Dans le cas d'un écroissage isotrope non linéaire, R_∞ est la valeur à saturation de $R(\gamma_{cum})$ ($\tau_0 + R_\infty$ est donc la valeur à saturation de la contrainte de cission, τ) ; r_0 règle la vitesse de convergence vers R_∞ . L'écroissage isotrope tend à rendre compte des interactions entre les dislocations mobiles et les obstacles au glissement (forêt de dislocations) sur chaque système.

Comme nous l'avons précisé dans le premier chapitre, l'observation de boucles d'hysteresis non symétriques par rapport à l'origine et non stabilisées, obtenues sur les monocristaux de cuivre (cf. figure 1.11), permet de conclure à un écroissage de type isotrope et cinématique dans les grains sollicités. De plus le comportement de ces grains, à amplitude de déformation plastique imposée, se caractérise par une phase de saturation (cf. figure 1.10) qui justifie clairement l'utilisation d'une loi d'écroissage isotrope non linéaire. Toutefois, afin d'une part, de comparer notre approche avec celles proposées par Dang Van [20] et Papadopoulos [87] et, d'autre part afin de mesurer l'impact de la loi d'écroissage sur le critère de fatigue, une loi linéaire a également été adoptée dans le cadre de notre étude.

La prise en compte d'un écroissage latent, correspondant à la création d'obstacles par un système de glissement s , sur un système r , est classiquement effectuée en introduisant une matrice d'interaction, notée h_{rs} , définie par :

$$R^r = h_{rs}R^s \quad (2.5)$$

dans laquelle la règle de sommation d'Einstein sur l'indice s est appliquée. Les composantes h_{rr} , rendent compte de l'auto-écroissage et sont normalisées, par simplicité, à 1, les composantes "hors diagonale" sont choisies toutes égales à h , ceci supposant un effet "égal" d'un système s ($\neq r$) sur l'écroissage du système r . Il s'agit là d'une hypothèse simplificatrice usuelle [31] :

$$h_{rs} = 1 + (h - 1)\delta_{rs} \quad (2.6)$$

h_{rs} est une matrice carrée, $N \times N$, où N est le nombre de systèmes de glissement potentiels dans le grain.

La loi de normalité associée à \mathcal{F}^r s'écrit :

$$\dot{\gamma}^r = \dot{\Lambda}^r \frac{\partial \mathcal{F}^r}{\partial \tau^r} = \dot{\Lambda}^r \text{sign}(\tau^r - X^r) \quad (2.7)$$

$\dot{\Lambda}^r$ est le multiplicateur plastique. Puisque $\dot{\Lambda}^r > 0$, il est facile de montrer, à partir de (2.7), que l'on a, d'une part, $\text{sign}(\dot{\gamma}^r) = \text{sign}(\tau^r - X^r)$ et, d'autre part, $\dot{\Lambda}^r$ est donné par :

$$\dot{\Lambda}^r = |\dot{\gamma}^r| = \dot{\gamma}_{cum}^r \quad (2.8)$$

Le taux de déformation plastique microscopique, \mathbf{d} , est défini par :

$$\mathbf{d} = \sum_r \dot{\gamma}^r \Delta^r \quad (2.9)$$

Il s'en suit pour la dissipation microscopique :

$$\pi(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \sum_r \tau^r \dot{\gamma}^r \quad (2.10)$$

Soit encore en utilisant la condition $\mathcal{F} = 0$ à partir (2.2) :

$$\pi(\mathbf{d}) = \sum_r (\tau_0 + R^r \gamma_{cum}^r) \dot{\gamma}_{cum}^r + c \gamma^r \dot{\gamma}^r \quad (2.11)$$

Dans le cadre de la fatigue polycyclique, pour les structures de type CFC, l'hypothèse de glissement simple est couramment adoptée [20], [86]. Ceci se justifie partiellement par le fait que les amplitudes de contraintes sont faibles en fatigue à grand nombre de cycles, puisque très en dessous du seuil de plasticité macroscopique.

Cette hypothèse est également admise pour des chargements macroscopiques "simples", tels que les chargements proportionnels. Toutefois, l'activation d'autres systèmes de glissement est susceptible de survenir lorsque la nature des chargements est plus complexe ; ceci est le cas notamment pour les chargements déphasés. Néanmoins, la localisation des déformations, et l'amorçage des fissures de fatigue s'effectue généralement sur le système de glissement prédominant. Peut se poser alors la question de l'influence d'un second système de glissement sur l'amorçage d'une fissure sur le système de glissement primaire.

On suppose ici que la plasticité se caractérise par l'activation d'un système de glissement prédominant dans les grains défavorablement orientés par rapport aux axes de chargement. Par souci de simplicité de la notation, l'orientation de ce système de glissement prédominant sera défini tout simplement par Δ et le glissement plastique par γ .

2.2.2 Nucléation de fissures le long des bandes de glissement

Conformément à ce qui a été déjà précisé en introduction de ce second chapitre, il est nécessaire de rechercher les mécanismes irréversibles qui altèrent de manière définitive la microstructure. Un exemple d'un tel mécanisme a été proposé par Dang Van [20] pour la

détermination d'un critère sous la forme d'une montée des dislocations qui engendre la formation de lacunes (voir chapitre 1). Néanmoins, il est aujourd'hui reconnu que ce mécanisme ne peut être que thermiquement activé. Dans le cadre des structures de type CFC, la localisation de la déformation plastique s'accompagne également d'un mécanisme d'annihilation de dislocations, déjà décrit au premier chapitre. On rappelle que ce mécanisme est à l'origine de l'accumulation de défauts ponctuels de type lacunaire ou interstitiel, le long des BGP. L'énergie associée à une lacune étant plus faible, ce dernier état est beaucoup plus probable que l'interstitiel. Nous supposons donc que l'annihilation d'une dislocation conduisant à la création d'une lacune est le mécanisme prépondérant vis à vis de celui conduisant à la création d'atomes interstitiels. Un modèle phénoménologique pour la production de défauts par annihilation a été proposé par Essmann et al. [25]. On définit dans un premier temps les densités de dislocations (notée ρ_p) et de dislocations annihilées (notée ρ_a), sur le système de glissement prédominant, par :

$$\rho_p = \rho_s k_a \gamma_{cum}; \quad \rho_a = \rho_s \{k_a \gamma_{cum} - 1 + \exp(-k_a \gamma_{cum})\} \quad (2.12)$$

k_a (> 0) et ρ_s sont deux paramètres de cette loi. Pour donner une interprétation physique de ces deux coefficients, introduisons ρ , la densité de dislocation non annihilée, définie par :

$$\rho = \rho_p - \rho_a = \rho_s \{1 - \exp(-k_a \gamma_{cum})\} \quad (2.13)$$

On remarque que ce mécanisme d'annihilation des dislocations se caractérise par un état saturé pour de fortes valeurs de $k_a \gamma_{cum}$ et pour lequel $\rho = \rho_s$. A cet état saturé, il s'établit un équilibre entre production et annihilation de dislocations ($\dot{\rho}_p = \dot{\rho}_a$). On notera que le coefficient k_a règle la vitesse de convergence vers cet état saturé. En particulier, cet état sera atteint d'autant plus vite que k_a est grand.

En notant V_0 le volume occupé par une lacune, la porosité associée à ce mécanisme, que l'on note f_a , est donnée par :

$$f_a(\gamma_{cum}) = V_0 \rho_a = A_0 \{k_a \gamma_{cum} - 1 + \exp(-k_a \gamma_{cum})\} \quad (2.14)$$

où l'on a posé $A_0 = V_0 \rho_s$. Sur la figure 2.1 est tracée f_a en fonction de γ_{cum} pour les paramètres suivants : $A_0 = 0.0008$ et $k_a = 2$. Ce mécanisme d'annihilation, ainsi décrit, est uniquement piloté par le glissement plastique. De plus, il est a priori propre aux BGP, et l'application de ce modèle de nucléation de l'endommagement à d'autres matériaux (que les CFC) est fortement discutable. Le cadre général proposé ici permet toutefois la formulation d'autres lois de nucléation, puissent elles être identifiées.

Le mécanisme d'endommagement par annihilation de dislocation que nous venons de décrire (2.14) est piloté uniquement par la déformation plastique. Comme déjà souligné, il ne peut donc rendre compte du rôle important de la pression hydrostatique sur le critère de fatigue. Il s'agit donc de rechercher un second mécanisme d'endommagement, conjointement à celui que nous venons de décrire, et qui fait intervenir explicitement la pression hydrostatique.

La croissance de cavités sous l'action combinée de la déformation plastique de la matrice environnante et des efforts de pression a été mis en évidence par Rice et Tracey [104]. On se propose donc d'introduire dans la section qui suit un second mécanisme de croissance de cavités dont la loi sera précisée en section 2.3 .

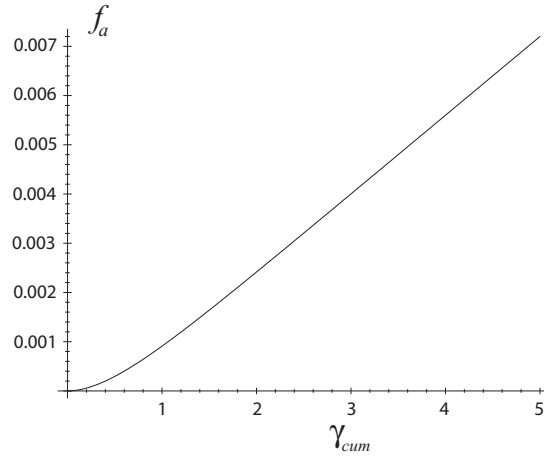


FIG. 2.1 – Diagramme de f_a en fonction de γ_{cum} .

2.2.3 Croissance des cavités et formulation d'un critère local de fatigue

Un second mécanisme, conjoint au premier qui vient d'être décrit concerne la croissance de microcavités (créées par annihilation de dislocations) sous l'action combinée de la déformation plastique de la matrice environnante et des efforts de pression. Pour cela introduisons la variable f_g correspondant à la porosité induite par ce second mécanisme. On définit alors la porosité totale f , comme la somme des porosité f_a (2.14) et f_g :

$$f = f_a + f_g \quad (2.15)$$

La croissance des cavités induisant des variations de volume, on introduit donc une déformation plastique résultant de l'expansion de la cavité. En considérant une géométrie sphérique pour les microcavités, cette déformation est de nature purement hydrostatique. Il s'en suit que la déformation plastique totale à l'échelle du grain s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \gamma \boldsymbol{\Delta} + \varepsilon_h^p \mathbf{1} \quad (2.16)$$

où la partie hydrostatique de la déformation plastique ε_h^p due à la croissance des cavités peut être reliée à f_g en utilisant la conservation de la masse. En effet, introduisons ω le volume occupé par les cavités, que l'on peut partitionner, compte tenu de (2.15), en deux contributions $\omega = \omega_a + \omega_g$. La première est due aux annihilations de dislocations et la seconde est due à la croissance des microcavités créées par annihilation. En notant Ω le volume du grain, la porosité totale est définie par $f = \omega/\Omega$ tandis que l'on note $f_a = \omega_a/\Omega$ et $f_g = \omega_g/\Omega$. ω_a est le volume de vides créés par annihilation de dislocations qui n'engendre pas de variation de volume à l'échelle du grain, puisqu'elle ne résulte que d'une réorganisation de la microstructure à l'échelle des bandes de glissement et n'implique pas de travail contre les efforts de pression. ω_g est le volume de vide créé par croissance. On suppose la matrice solide incompressible, on a $\dot{\omega}_g = \dot{\Omega}$, si bien que :

$$\dot{f}_g = \frac{\dot{\omega}_g}{\Omega} - \frac{\omega_g}{\Omega} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = (1 - f_g) \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = (1 - f_g) 3d_h \quad (2.17)$$

où d_h est la partie hydrostatique du taux de déformation plastique. L'intégration de (2.17) implique :

$$f_g = 1 - \exp(3\varepsilon_h^p) \quad (2.18)$$

Notons que pour l'établissement de la relation précédente, la déformation élastique de la matrice solide a été supposée négligeable.

On suppose alors qu'une condition suffisante de non rupture est obtenue lorsqu'aucune fissure de la taille d'un grain ne peut être observée. Une approche locale de la fatigue à grand nombre de cycles consiste alors à considérer une valeur critique de la porosité, que nous noterons f_c . Le critère de fatigue qui s'en déduit s'écrit donc :

$$f = f_a + f_g = f_c \quad (2.19)$$

On remarquera que le critère de fatigue adopté est fonction de γ_{cum} et de ε_h^p . Il généralise donc, en quelque sorte, les approches consistant à considérer une valeur critique de la déformation plastique cumulée γ_{cum} (critère de Papadopoulos [89]). Néanmoins, il s'agit maintenant de déterminer la loi d'évolution de la variable ε_h^p , ou encore la loi de croissance des cavités. Ceci fait l'objet de la partie suivante, dans laquelle est proposée une adaptation du modèle de Rice et Tracey (établi dans le cas d'une matrice de von Mises) au cas de la plasticité cristalline.

2.3 Une approche de type Rice & Tracey modifiée en plasticité cristalline

La croissance de cavités cylindriques dans les milieux monocristallins de type CFC a fait l'objet de travaux récents, Potirniche et al. [100], [101] et Kysar et al. [52], [53], [54]. Néanmoins, ces études ne permettent pas d'explicitier une loi de croissance pour les cavités. Dans Kysar et al. [52], le comportement du cristal est supposé parfaitement plastique et régi par le critère de Schmid sur chaque système de glissement, tel que nous l'avons décrit en première partie de ce chapitre. Les résultats de ces auteurs indiquent que la plasticité, qui se localise autour de la cavité, se caractérise par du glissement multiple et plus précisément dans des secteurs angulaires dans lesquels un seul système est activé (cf. figure (2.2)). Ce résultat a été expérimentalement confirmé sur un monocristal d'aluminium (cf. figure (2.3)).

Pour l'étude de la croissance de cavités dans les milieux plastiques, on adopte dans ce chapitre le cadre établi par Rice et Tracey [104]. Ces auteurs ont proposé un principe variationnel pour un milieu infini contenant une cavité. Plus précisément, ils ont obtenu, dans le cas d'un matériau parfaitement plastique, régi par le critère de von Mises et contenant une cavité sphérique, une expression analytique de la loi de croissance, valable pour des forts taux de triaxialité. Une difficulté quant à l'extension du critère de Rice et Tracey au cas de la plasticité cristalline réside dans le choix du champ test. Ce problème reste, de notre point de vue, encore ouvert.

Une première étape consiste à remplacer le matériau monocristallin, régi par la loi de

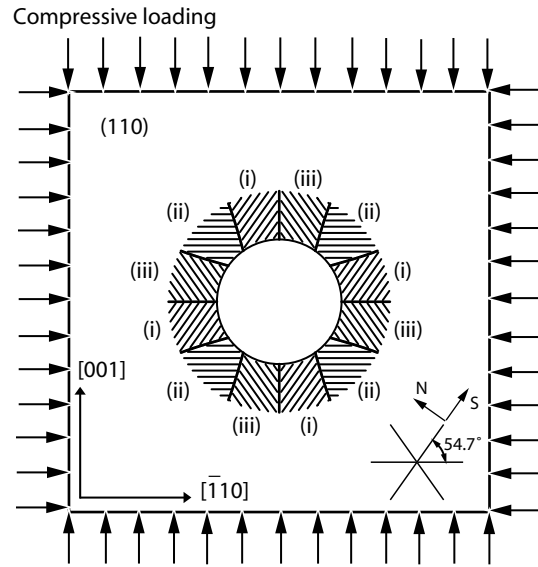


FIG. 2.2 – Secteurs de glissement autour d’une cavité cylindrique dans un monocristal de type CFC. D’après Kysar et al. [52]

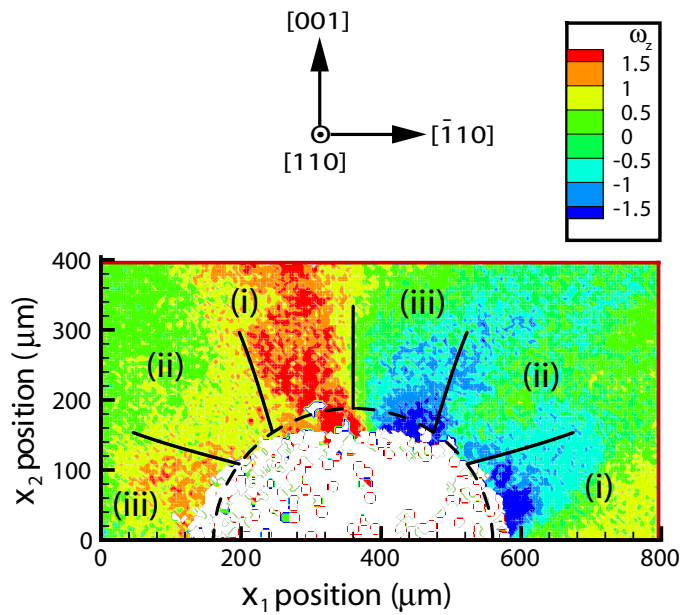


FIG. 2.3 – Secteurs de glissement autour d’une cavité cylindrique dans un monocristal d’aluminium. D’après Kysar et al. [53]

Schmid, par un matériau équivalent de von Mises. Ceci suppose implicitement que l'activité plastique autour de la cavité est isotrope. Toutefois le comportement plastique monocristallin se caractérise par du glissement sur un nombre fini de plans, induisant ainsi une anisotropie (mentionnée d'ailleurs par Kysar et al. [52] et Potirniche et al. [101]). Pour ce qui concerne les structures de type CC et CFC, qui nous intéressent, il s'agira plutôt d'une anisotropie de type cubique. Une seconde étape concernera donc le remplacement du monocristal par un matériau équivalent régi par le critère de Hill, pour la prise en compte de cette anisotropie. C'est cette méthodologie que l'on se propose de développer maintenant.

2.3.1 Loi de croissance d'une cavité dans un milieu infini

Position du problème

On considère une cavité, de rayon a , isolée dans une matrice infinie parfaitement plastique dont le comportement est régi par le critère de von Mises :

$$\mathcal{F}^{vm} = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad (2.20)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de von Mises, et définie par $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ désignant la partie déviatorique du tenseur des contraintes microscopiques $\boldsymbol{\sigma}$. On note également par \mathbf{d} le taux de déformation microscopique dans la matrice, et par $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathbf{D} respectivement le tenseur des contraintes et de taux de déformation à l'infini définis par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}(r \rightarrow +\infty) \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}(r \rightarrow +\infty) \quad (2.21)$$

Le principe variationnel de Rice et Tracey [104], pour la détermination de la loi de croissance de la cavité, implique la minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ suivante :

$$Q(\mathbf{d}) = \int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d}) dV - \boldsymbol{\Sigma} : \int_{\partial\omega} \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{\zeta}} dS \quad (2.22)$$

$\partial\omega$ désigne la surface de la cavité de rayon $r = a$, $\underline{\boldsymbol{\zeta}}$ est le champ de normales à la surface de la cavité. $\Omega - \omega$ représente le domaine infini extérieur à la cavité, ω celui occupé par la cavité dont le volume est donné par $4\pi a^3/3$.

On adopte le repère et le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) associé à la base déterminée par les vecteurs unitaires $\underline{\mathbf{e}}_r$, $\underline{\mathbf{e}}_\theta$ et $\underline{\mathbf{e}}_\varphi$. En particulier, la normale à la surface de la cavité sphérique est $\underline{\boldsymbol{\zeta}} = \underline{\mathbf{e}}_r$. Les éléments de surface et de volume sont : $dS = a^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$, $dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$.

Le champ de vitesse est décomposé en la somme de deux champs. Le premier correspondant à un taux de déformation uniforme sur la matrice solide, $\mathbf{A}.\underline{\mathbf{x}}$. \mathbf{A} est de nature déviatorique en raison de l'incompressibilité de la matrice. Le second champ, de nature hétérogène, noté $\underline{\mathbf{v}}^E$, décrit l'expansion de la cavité. Il est choisi de manière à respecter la symétrie sphérique ($\underline{\mathbf{v}}^E = v_r^E(r)\underline{\mathbf{e}}_r$) et correspond à un taux de déformation déviatorique ($\text{tr}(\mathbf{d}^E) = 0$, afin de respecter l'incompressibilité de la matrice). On vérifie facilement

qu'un champ satisfaisant ces conditions est proportionnel à $1/r^2$. D'où la forme suivante pour le champ de vitesse \underline{v} dans la matrice solide, :

$$\underline{v} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + C \frac{a^3}{r^2} \underline{e}_r \quad (2.23)$$

où C est un paramètre, dit de croissance de la cavité, qu'il s'agit de déterminer. Le taux de déformation, déduit de (2.23), s'écrit donc :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{d}^E; \quad \text{avec} : \quad \mathbf{d}^E = C \frac{a^3}{r^3} (\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (2.24)$$

On remarque que \mathbf{A} correspond au taux de déformation à l'infini (2.21), $\mathbf{A} = \mathbf{D}$, le champ hétérogène étant nul au loin de la cavité.

Le champ uniforme correspond à du glissement simple sur le plan de cisaillement maximal, on a donc $\mathbf{D} = \dot{\gamma} \mathbf{\Delta}$. Le champ hétérogène, \mathbf{d}^E , tend à rendre compte de l'activité plastique par glissement multiple localisé autour des cavités et décrivant leur expansion.

Le tenseur des contraintes microscopiques est relié au taux des déformations plastiques via la loi de normalité correspondant à (2.20) :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_0 \frac{2}{3} \frac{\mathbf{d}}{d_{eq}} \quad \text{avec} : \quad d_{eq} = \left[\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbf{d} \right]^{1/2} \quad (2.25)$$

La contrainte macroscopique, $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$, définie par (2.21), est telle que :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \sigma_0 \frac{2}{3} \frac{\mathbf{D}}{D_{eq}} \quad \text{avec} : \quad D_{eq} = \left[\frac{2}{3} \mathbf{D} : \mathbf{D} \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

Remplaçant les expressions de $\boldsymbol{\sigma}$ et de $\boldsymbol{\Sigma}$ dans (2.22), l'intégrale de volume dans $Q(\mathbf{d})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d}) dV = \\ & \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 \int_{u=0}^{u=1} \int_{S(r)} \left\{ \sqrt{D_{eq}^2 - 4uW(\theta, \varphi)D_{eq}C + 4u^2C^2} \right. \\ & \left. - D_{eq} + 2uW(\theta, \varphi)C \right\} dS \frac{du}{u^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

où l'on a posé $u = a^3/r^3$ et :

$$W(\theta, \varphi) = D_{rr}/D_{eq}; \quad D_{rr} = \mathbf{D} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (2.28)$$

$S(r)$ désigne la surface de la sphère unité. L'intégrale de surface dans (2.22) s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \int_{\partial\omega} \underline{v} \otimes \underline{e}_r dS = 4\pi a^3 \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \left[(\mathbf{D} + C\mathbf{1}) \cdot \int_{S(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r dS \right] = \frac{4\pi}{3} a^3 \left[3\Sigma_h C + \Sigma_{eq} D_{eq} \right] \quad (2.29)$$

pour laquelle, on a utilisé la relation classique de moyenne :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r dS = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad (2.30)$$

Le paramètre à déterminer dans \underline{v} est le paramètre C , minimisant la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$. Toutefois, la détermination de cette dernière n'est malheureusement pas réalisable de manière analytique. Une solution approchée, valable pour de fortes valeurs de C , a été proposée par Rice et Tracey [104] :

$$C = \frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{3\epsilon \Sigma_h}{2 \sigma_0} + B \right\} D_{eq} \quad (2.31)$$

avec : $B = \frac{1}{4\pi} \int_S \epsilon(1 - \epsilon w) \ln(1 - \epsilon w) dS$

où $\epsilon = \text{sign}(\Sigma_h)$. Dans le cas d'un chargement axisymétrique, une approximation de cette loi est, lorsque $\Sigma_h > 0$:

$$\frac{\dot{a}}{a} = 0.283 \exp \left\{ \frac{3 \Sigma_h}{2 \sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (2.32)$$

Remarque : notons que, si la forme proposée fournit une bonne approximation pour les forts taux de triaxialité, elle ne permet pas de retrouver la solution exacte à taux de triaxialité nul puisque celle-ci prédit une croissance de cavité nulle. En effet, prenons le cas particulier où $C \rightarrow 0$ dans (2.27) ; le développement au second ordre donne :

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 \int_{u=0}^{u=1} \int_{S(r)} \left[1 - (W(\theta, \varphi))^2 \right] \frac{C^2}{D_{eq}} du - \frac{4\pi}{3} a^3 \left[3\Sigma_h C + \Sigma_{eq} D_{eq} \right] \quad (2.33)$$

En utilisant la relation suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r dS = \frac{1}{3} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \mathbb{K} \quad (2.34)$$

pour l'intégration de $(W(\theta, \varphi))^2$ sur la sphère unité, (2.33) s'écrit :

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 D_{eq} \left[\frac{4}{5} \frac{C^2}{D_{eq}^2} - 3 \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \frac{C}{D_{eq}} - \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right] \quad (2.35)$$

Rappelons que la valeur de C recherchée doit minimiser $Q(\mathbf{d})$. Il est clair que dans (2.35), lorsque $\Sigma_h = 0$ (taux de triaxialité nul), la valeur de C minimisant $Q(\mathbf{d})$ est $C = 0$.

Notons, qu'en plus de cette imperfection, la loi proposée (2.31) met en jeu une intégrale, donnant B , et dont le calcul peut s'avérer pénalisant pour la mise en oeuvre.

Modification de l'approche de Rice & Tracey

Pour ces deux raisons, on propose ici une autre approximation, correspondant à celle utilisée par Gurson [47], et qui consiste à utiliser l'inégalité classique suivante :

$$\langle d_{eq} \rangle_{S(r)} \leq \sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}} \quad (2.36)$$

Il s'agit donc de remplacer d_{eq} par $\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}}$ dans l'intégrale de volume. La moyenne sur la sphère unité des différents termes dans d_{eq} donne :

$$\langle W(\theta, \phi) \rangle_{S(r)} = 0 \quad \text{et} \quad \langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)} = D_{eq}^2 + 4u^2 C^2 \quad (2.37)$$

Finalement en effectuant l'intégration de (2.27) avec l'approximation (2.36), et en injectant l'expression de l'intégrale de surface donnée par (2.29), $Q(\mathbf{d})$ s'écrit :

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 \left\{ 2C \operatorname{arcsinh} \left[\frac{2C}{D_{eq}} \right] + D_{eq} - \sqrt{D_{eq}^2 + 4C^2} - 3 \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} C - \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} D_{eq} \right\} \quad (2.38)$$

La minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ par rapport à C implique :

$$\frac{\partial Q(\mathbf{d})}{\partial C} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \sinh \left\{ \frac{3 \Sigma_h}{2 \sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (2.39)$$

D'où la loi de croissance de la cavité :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2} \sinh \left\{ \frac{3 \Sigma_h}{2 \sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (2.40)$$

La forme de la loi (2.40) trouve son intérêt d'une part par sa simplicité et d'autre part par le fait qu'elle est valable pour tout taux de triaxialité (elle permet de retrouver notamment la valeur exacte à taux de triaxialité nul).

On observe néanmoins sur la figure 2.4 un écart, pour de forts taux de triaxialité, entre l'approximation proposée (2.40) et la solution exacte (obtenue numériquement), ceci est très probablement dû à l'approximation (2.36) utilisée, et qui conduit à négliger l'impact des termes croisés, $W(\theta, \varphi)$ dans (2.27), sur la loi de croissance. En fait le terme croisé, $W(\theta, \varphi)$, a un impact faible sur la loi de croissance mais non totalement négligeable. Une méthode adaptée pour sa prise en compte, et que nous avons proposée dans [75], consiste à effectuer un développement, du terme dans l'intégrale de volume définissant $Q(\mathbf{d})$, définie par (2.27), par rapport à $W(\theta, \varphi)$ autour de zero :

$$\int_{u=0}^{u=1} \int_{S(r)} \left\{ \sqrt{1 + 4u^2 C^2} - D_{eq} + 2uC \left\{ 1 - \frac{D_{eq}}{(D_{eq}^2 + 4u^2 C^2)^{1/2}} \right\} W(\theta, \varphi) - \frac{2u^2 D_{eq}^2 C^2}{(D_{eq}^2 + 4u^2 C^2)^{3/2}} W(\theta, \varphi)^2 + o(W(\theta, \varphi)^3) \right\} dS \frac{du}{u^2} \quad (2.41)$$

On notera que le premier terme dans le développement conduit à (2.38). Le second est nul sur la surface unité, $\int_{S(r)} W(\theta, \varphi) dS = 0$. Enfin l'intégration du dernier terme est effectuée en utilisant l'identité (2.34). La prise en compte de ce dernier terme implique pour $Q(\mathbf{d})$:

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 \left\{ C \operatorname{arcsinh} \left[\frac{2C}{D_{eq}} \right] + D_{eq} - \sqrt{D_{eq}^2 + 4C^2} - \frac{C^2}{5\sqrt{D_{eq}^2 + 4C^2}} - 3 \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} C - \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} D_{eq} \right\} \quad (2.42)$$

La minimisation de $Q(\mathbf{d})$ par rapport à C donne :

$$\frac{\partial Q(\mathbf{d})}{\partial \tilde{C}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{2C}{D_{eq}} \right\} - \frac{2C(D_{eq}^2 + 2C^2)}{5(D_{eq}^2 + 4C^2)^{3/2}} - 3 \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} = 0 \quad (2.43)$$

En observant que $\sinh(a+b) = \sinh(a) \cosh(b) + \sinh(b) \cosh(a)$ et en notant que le second terme dans (2.43) est faible (puisque qu'il est compris entre 0 et 1/10 tandis que le premier terme n'est pas borné) on obtient finalement :

$$\frac{2C}{D_{eq}} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{D_{eq}^2 + 2C^2}{D_{eq}^2 + 4C^2} \right] = \sinh \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} \quad (2.44)$$

Une amélioration significative de (2.40), peut être obtenue en considérant de forts taux de triaxialité, c'est à dire en supposant C très grand :

$$\frac{2C}{D_{eq}} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{D_{eq}^2 + 2C^2}{D_{eq}^2 + 4C^2} \right] \simeq \frac{9}{5} \frac{C}{D_{eq}} \quad (2.45)$$

D'où en reportant dans (2.44) :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{5}{9} \sinh \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (2.46)$$

Il est encore possible d'améliorer la loi d'évolution en prenant en compte les termes d'ordre supérieur. On notera néanmoins que la correction (2.46) permettant d'obtenir une bonne concordance avec la solution exacte, on se limitera ici au terme d'ordre deux, qui permet de conserver une forme simple pour la loi de croissance.

2.3.2 Prise en compte de l'anisotropie plastique cubique des grains

Avant d'aborder la formulation proprement dite du critère de fatigue (cf. section 2.3.3), examinons comment les résultats qui viennent d'être établis peuvent être étendus à l'étude des grains à anisotropie plastique cubique. Comme nous l'avons déjà précisé, le grain, dont le comportement est de type Schmid, a été remplacé par un matériau de von Mises équivalent. Cependant cette approximation conduit à négliger le caractère anisotrope du comportement plastique monocristallin. On souhaite mesurer l'importance de l'anisotropie plastique en considérant, en toute généralité, une matrice régie par le critère quadratique de Hill [48].

Le critère quadratique de Hill [48]

Le critère quadratique de Hill peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{Hill}(\boldsymbol{\sigma}) = & \frac{3}{2} [F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 \\ & + 2N\sigma_{12}^2] - \sigma_0^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

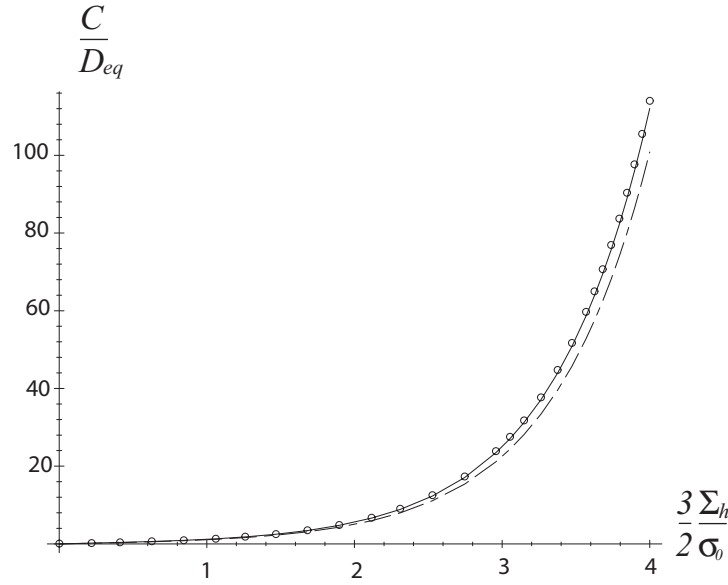


FIG. 2.4 – C/D_{eq} en fonction de $3\Sigma_h/(2\sigma_0)$, comparaison entre la solution exacte (cercles), l'approximation (2.40) (ligne interrompue), et l'approximation (2.46) (ligne continue)

où F, G, \dots, N sont des paramètres du matériau (les coefficients de Hill). Dans l'expression du critère (2.47), le tenseur des contraintes est exprimé dans le repère lié aux directions d'orthotropie du matériau. De manière plus générale, ce critère s'exprime dans un repère quelconque, sous la forme :

$$\mathcal{F}^{Hill}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} \leq \sigma_0^2 \quad (2.48)$$

où \mathbb{M} est un tenseur d'ordre quatre, qui, outre les conditions usuelles de symétries, $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij}$, vérifie également la condition d'incompressibilité de la matrice :

$$M_{iikl} = 0; \quad \forall k, l = 1, \dots, 3 \quad (2.49)$$

Il est commode de représenter \mathbb{M} dans le repère d'orthotropie dont les directions sont repérées par les vecteurs unitaires $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$. En utilisant la notation de Voigt, \mathbb{M} s'écrit, compte tenu de (2.47) :

$$M^{ortho} = \begin{pmatrix} F+G & -G & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & G+H & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & -H & F+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Le taux de déformation microscopique est obtenu via la loi de normalité :

$$\mathbf{d} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\dot{\Lambda} \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.51)$$

où $\dot{\Lambda}$ est le multiplicateur plastique dont nous allons préciser la valeur. Introduisons d'abord \mathbb{H} le tenseur d'ordre quatre défini par $\mathbb{H} : \mathbb{M} = \mathbb{K}$. Le tenseur \mathbb{H} possède les mêmes propriétés de symétrie que \mathbb{M} , les conditions d'incompressibilité portant sur ses composantes s'écrivent $H_{iikl} = 0$. Le multiplicateur plastique est déduit de (2.51) de la manière suivante; on vérifie que :

$$\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d} = \frac{3}{2} \dot{\Lambda}^2 \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M} : \mathbb{H} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_0^2 \dot{\Lambda}^2 \quad (2.52)$$

si bien que $\dot{\Lambda}$ s'écrit :

$$\dot{\Lambda} = \frac{d_{eq}}{\sigma_0} \quad (2.53)$$

où le scalaire d_{eq} est la déformation plastique équivalente au sens de Hill, définie par $d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d}}$. Il s'ensuit que le champ de contrainte microscopiques, est déterminé à partir de (2.51), où le multiplicateur plastique est donné par (2.53); $\boldsymbol{\sigma}$ est tel que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_0 \frac{2 \mathbb{H} : \mathbf{d}}{3 d_{eq}} \quad (2.54)$$

Loi de croissance d'une cavité sphérique dans une matrice plastique anisotrope

On considère à présent une cavité sphérique de rayon a , plongée dans une matrice infinie, parfaitement plastique et anisotrope régie par le critère de Hill (2.47) ou de manière équivalente (2.48). Il s'agit en premier lieu de calculer l'expression de $Q(\mathbf{d})$ définie par (2.22). Pour simplifier, on se propose d'utiliser le même champ que celui déjà considéré dans le cas de la matrice de von Mises (2.23). Même si ce choix est tout à fait discutable, on notera qu'il s'agit du champ adopté par [6] et [7] pour la détermination du critère de plasticité macroscopique d'un milieu poreux constitué d'une matrice anisotrope et contenant des cavités sphériques. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

Tout d'abord l'intégrale sur la surface de la cavité dans l'expression de $Q(\mathbf{d})$ (2.38) reste inchangée et donnée par (2.29). Concernant l'intégrale de volume dans $Q(\mathbf{d})$ (2.38), la contrainte microscopique est donnée par (2.54) et la contrainte macroscopique déduite de (2.54) et (2.21), s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_0 \frac{2 \mathbb{H} : \mathbf{D}}{3 D_{eq}} \quad \text{avec} : \quad D_{eq} = \left[\frac{2}{3} \mathbf{D} : \mathbb{H} : \mathbf{D} \right]^{1/2} \quad (2.55)$$

Remplaçant les expressions de $\boldsymbol{\sigma}$ (2.54) et de $\boldsymbol{\Sigma}$ (2.55) dans l'intégrale de volume dans $Q(\mathbf{d})$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d}) dV \\ &= \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma_0 \int_{u=0}^{u=1} \int_{S(r)} \left[\sqrt{D_{eq}^2 - 4uW(\theta, \varphi)D_{eq}C + 4u^2P(\theta, \varphi)C^2} \right. \\ & \quad \left. - D_{eq} + 2uW(\theta, \varphi)C \right] dS \frac{du}{u^2} \end{aligned} \quad (2.56)$$

dans lequel $W(\theta, \varphi)$ et $P(\theta, \varphi)$ sont donnés par :

$$W(\theta, \varphi) = \frac{1}{D_{eq}} \mathbf{D} : \mathbb{H} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r); \quad P(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \mathbb{H} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (2.57)$$

Par rapport au contexte isotrope, l'intégrale sur la surface de la cavité reste, elle, inchangée. Pour le calcul de l'intégrale de volume (2.56), on adopte la même démarche que dans le cas isotrope. Ceci revient à effectuer un développement au second ordre par rapport au terme croisé $W(\theta, \varphi)$, puis à remplacer W , W^2 et P par leur valeur moyenne sur la surface unité. Pour cela il s'agit d'utiliser les relations (2.30) et (2.34), permettant d'établir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} P(\theta, \varphi) dS &= p^2 \\ \frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} W(\theta, \varphi) dS &= 0 \\ \frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} W(\theta, \varphi)^2 dS &= 2q \end{aligned} \quad (2.58)$$

avec p et q définis par :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{5} (H_{11} + H_{22} + H_{33} + H_{44} + H_{55} + H_{66}) \\ q &= \frac{1}{15 D_{eq}^2} \mathbf{D} : \mathbb{H} : \mathbb{H} : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le cas anisotrope diffère du cas isotrope par la présence de \mathbb{H} dans D_{eq} ainsi que par les termes p^2 et q . On retrouve d'ailleurs l'isotropie en posant $\mathbb{H} = \mathbb{K}$. En réitérant la même procédure que celle effectuée dans le cas isotrope, il est alors facile de montrer que la loi de croissance de la cavité est donnée par :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2p \left[1 - \frac{q}{p^2} \right]} \sinh \left\{ \frac{3}{2p} \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (2.60)$$

On vérifiera que, dans le cas isotrope, $p = 1$ et $q = 1/10$, ce qui permet alors de retrouver (2.46).

2.3.3 Adaptation à la problématique de la fatigue

Revenons maintenant au problème qui nous intéresse dans ce chapitre, à savoir celui de la détermination d'un critère de fatigue. Les lois de croissance (2.46) et (2.60) présentent une certaine limitation car la porosité est par définition nulle, l'analyse étant menée dans un milieu infini. Ceci pose un problème pour relier f_g , qui intervient dans la formulation du critère de fatigue (2.19), au taux de croissance des microcavités. L'approche que l'on propose ici pour contourner cette difficulté est d'utiliser la loi de conservation de la masse.

En effet, considérons un volume fini (noté Ω) contenant des microcavités avec un volume moyen égal à ω , définissant ainsi une porosité $f = \omega/\Omega$. La matrice étant incompressible, la conservation de la masse ($\dot{\omega} = \dot{\Omega}$) implique :

$$d_h = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{f}{3} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = f \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.61)$$

Les relations (2.46) et (2.60) font intervenir des paramètres introduits par les critères de von Mises et de Hill, il s'agit de σ_0 d'une part et des coefficients d'anisotropie d'autre part. Rappelons que ces coefficients ont été introduit pour les matériaux de von Mises et de Hill équivalents, néanmoins, il s'agit de relier ces paramètres à ceux définis pour le monocristal.

Considérons le cas de l'isotropie seule pour laquelle il s'agit de déterminer σ_0 , l'identification de ce paramètre est effectuée en égalant les dissipations pour le monocristal et le matériau de von Mises équivalent. On rappelle que dans le cas de la fatigue polycyclique, le comportement du monocristal se caractérise par l'activation d'un système de glissement prédominant, noté γ . Au loin de la cavité l'expression de la dissipation microscopique est :

$$\pi(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \tau_0 |\dot{\gamma}| \quad (2.62)$$

Pour le matériau de von Mises équivalent, on rappelle que le taux de déformation, au loin de la cavité s'écrit $\mathbf{D} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\Delta}$ et la dissipation vaut :

$$\pi(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \sigma_0 D_{eq} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 |\dot{\gamma}| \quad (2.63)$$

L'identification de (2.62) avec (2.63) permet de retrouver l'égalité classique $\sigma_0 = \sqrt{3} \tau_0$. Reprenons le même raisonnement dans le cas anisotrope, la dissipation pour le matériau de Hill équivalent vaut :

$$\pi(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\Delta} : \mathbb{H} : \boldsymbol{\Delta}} |\dot{\gamma}| \quad (2.64)$$

Dans le cas d'une anisotropie cubique, \mathbb{H} peut se mettre sous la forme $\mathbb{H} = h_a \mathbb{K}_a + h_b \mathbb{K}_b$, où \mathbb{K}_a et \mathbb{K}_b sont des tenseur d'ordre quatre définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_a &= \mathbb{L} - \mathbb{J}; & \mathbb{K}_b &= \mathbb{I} - \mathbb{L}; & \text{avec :} \\ \mathbb{L} &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} H_{11} &= H_{22} = H_{33} = \frac{2}{3} h_a \\ H_{12} &= H_{13} = H_{23} = -\frac{1}{3} h_a \\ H_{44} &= H_{55} = H_{66} = h_b \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le calcul de $\Delta : \mathbb{H} : \Delta$ donne alors :

$$\Delta : \mathbb{H} : \Delta = (h_a - h_b)(\Delta_{11}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_{33}^2) + \frac{1}{2}h_b \quad (2.67)$$

On rappelle que $\Delta = \underline{n} \otimes \underline{m}$, où \underline{n} et \underline{m} sont des vecteurs unitaires, définissant respectivement la normale au plan de glissement et la direction du glissement. Dans le cas des structures CFC, les douze systèmes de glissement sont tels que : $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$. Dans les structures de type CC, les composantes de \underline{m} sont $m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = 1/3$. En utilisant de plus le fait que \underline{n} et \underline{m} sont des vecteurs orthogonaux, $\underline{n} \cdot \underline{m} = 0$, on vérifie facilement que :

$$\Delta_{11}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_{33}^2 = \frac{1}{3} \quad (2.68)$$

si bien que la relation (2.64) s'écrit, pour une structure de type CC ou CFC :

$$\pi(\mathbf{d}) = \frac{1}{3}\sigma_0\sqrt{2h_a + h_b} |\dot{\gamma}| \quad (2.69)$$

L'identification de (2.62) avec (2.69), conduit à :

$$\sigma_0 = \frac{3}{\sqrt{2h_a + h_b}}\tau_0 \quad (2.70)$$

D_{eq} , p^2 et q sont définis dans le cas d'une anisotropie plastique de type cubique par :

$$D_{eq} = \frac{1}{3}\sqrt{2h_a + h_b}\dot{\gamma}_{cum}; \quad p^2 = \frac{1}{5}(2h_a + 3h_b); \quad q = \frac{1}{10}\frac{h_a^2 + 2h_b^2}{h_a + 2h_b} \quad (2.71)$$

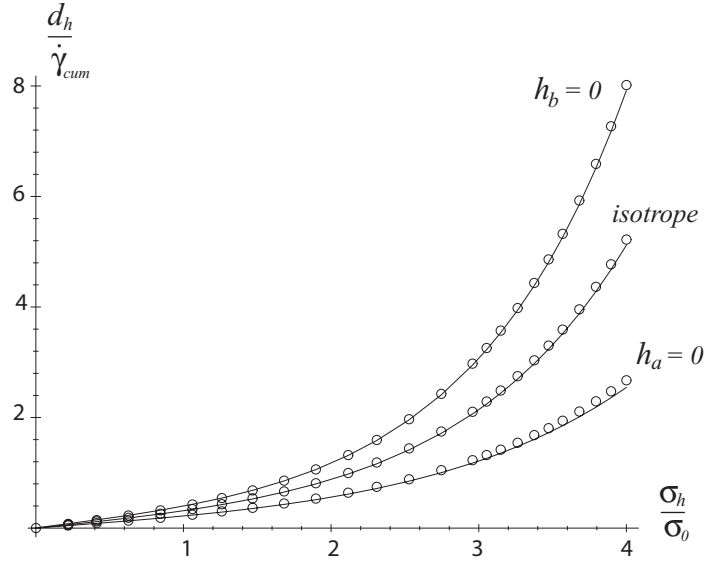
La loi de croissance (2.60) peut alors être réécrite sous une forme, mieux adaptée à la perspective d'une application à la fatigue :

$$d_h = \frac{1}{2p_1(1 - p_2)\sqrt{3}}f \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}\sigma_h}{2p_1\tau_0} \right\} \dot{\gamma}_{cum} \quad (2.72)$$

où p_1 et p_2 sont fonctions de h_b et h_a :

$$p_1 = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{2h_a + 3h_b}{2h_a + h_b}}; \quad p_2 = \frac{2h_a^2 + h_b^2}{2(2h_a + h_b)(2h_a + 3h_b)} \quad (2.73)$$

On observe que les coefficient p_1 et p_2 peuvent s'exprimer uniquement à partir du rapport d'anisotropie h_b/h_a . Sur la figure 2.5, le rapport $d_h/\dot{\gamma}_{cum}$ en fonction de σ_h/σ_0 est tracé. Y sont représentés la solution approchée (2.72) (ligne continue) et la solution exacte (cercles), dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope pour deux valeurs limites du rapport d'anisotropie, $h_b/h_a = 0$ et $h_b/h_a = +\infty$. Ces courbes illustrent très clairement l'importance de l'anisotropie plastique des grains sur la loi de croissance des cavités.


 FIG. 2.5 – Diagramme de $d_h/\dot{\gamma}_{cum}$ en fonction de σ_h/σ_0 .

2.4 Formulation du nouveau critère macroscopique de fatigue

2.4.1 Expression locale du critère de fatigue proposé

Pour la détermination du critère local de fatigue, on suppose, conformément à [20], qu'une condition nécessaire de non nucléation d'une fissure de fatigue dans les grains favorablement orientés est d'assurer l'adaptation à toutes les échelles et en particulier à celle du grain. Dans l'approche proposée par Papadopoulos [86], la condition d'adaptation est également une condition suffisante : la limite de fatigue coïncide alors avec la limite d'adaptation. Toutefois, comme souligné au premier chapitre, la plasticité ne permettant pas de rendre compte des effets de la pression hydrostatique sur le critère de fatigue, une dépendance linéaire entre l'amplitude du cisaillement et de la pression hydrostatique maximale a alors été postulée par ces auteurs.

Rappelons que le critère de fatigue (2.19), correspondant à une valeur critique de la porosité, est fonction de γ_{cum} et de ε_h^p :

$$A_0(k_a \gamma_{cum} - 1 + \exp(-k_a \gamma_{cum})) + 1 - \exp(-3\varepsilon_h^p) = f_c \quad (2.74)$$

Avant de préciser plus en détail le critère de non nucléation de fissures de fatigue que nous proposons, rappelons que le comportement plastique sous sollicitation cyclique, se caractérise par l'adaptation, l'accommodation ou le rochet (cf. figure 2.6). Dans les deux derniers cas la ruine du matériau est atteinte, puisqu'au delà de la limite d'adaptation, γ_{cum} n'est pas bornée, la condition de nucléation d'une fissure de fatigue (2.19) sera atteinte au bout d'un nombre fini de cycles.

Proposition :

Une condition suffisante de nucléation d'une fissure de fatigue est obtenue si la porosité atteint une valeur critique (2.19).

Il est utile de souligner que les critères basés sur le concept de porosité critique sont généralement considérés comme une première approche de la rupture ductile qui, en tout état de cause, pourra être améliorée.

Puisque le grain s'adapte élastiquement, le glissement plastique cumulé, γ_{cum} , est borné.

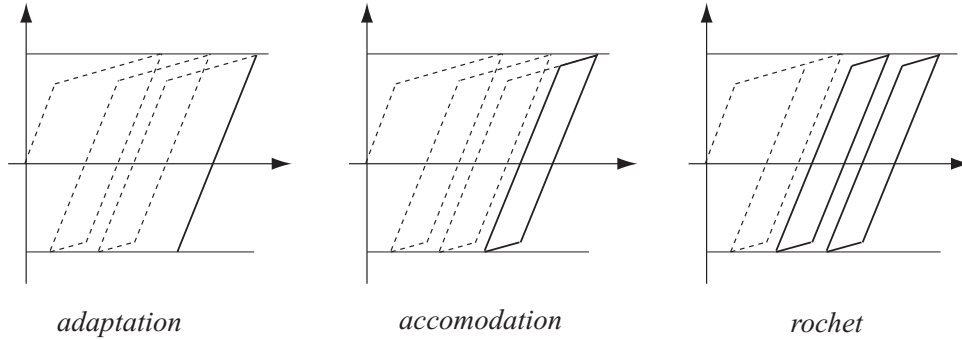


FIG. 2.6 – Réponse asymptotique des matériaux et structures sous chargement cyclique : adaptation, accommodation et rochet.

Il en est de même pour la porosité puisqu'elle est elle-même pilotée par le glissement plastique. Le critère de fatigue revient donc à rechercher, dans le régime adapté, les conditions pour lesquelles (2.74) est satisfaite.

On effectue à présent l'approximation suivante : ε_h^p est supposé faible, c'est à dire $\exp(3\varepsilon_h^p) \simeq 1 + 3\varepsilon_h^p$. Notons ensuite γ_c la valeur critique du glissement plastique cumulé pour laquelle le critère de fatigue est atteint lorsque $\varepsilon_h^p = 0$, c'est à dire :

$$A_0 k_a \gamma_c - 1 + \exp(-k_a \gamma_c) = f_c \quad (2.75)$$

si bien que la reformulation du critère (2.74) en utilisant (2.75) donne :

$$\frac{k_a \gamma_{cum} - 1 + \exp(-k_a \gamma_{cum})}{k_a \gamma_c - 1 + \exp(-k_a \gamma_c)} + \frac{\varepsilon_h^p}{\varepsilon_c} = 1 \quad (2.76)$$

où ε_c est la valeur critique de ε_h^p pour laquelle le critère est atteint lorsque $\gamma_{cum} = 0$, soit $\varepsilon_h^p = f_c/3$.

On considère les deux cas limites suivants $k_a \gg 1$ et $k_a \ll 1$. Rappelons que le coefficient k_a qui intervient dans la loi (2.14) règle la vitesse de convergence vers l'état saturé pour lequel on a équilibre entre production et annihilation de dislocations (voir paragraphe 2.2.2). Par ailleurs nous avons mentionné que cet équilibre était d'autant plus vite atteint que k_a était grand (par valeur positive). Par conséquent si $k_a \gg 1$, de faibles valeurs de γ_{cum} sont suffisantes pour atteindre cet équilibre et le critère de fatigue (2.76) s'écrit :

$$\frac{\gamma_{cum}}{\gamma_c} + \frac{\varepsilon_h^p}{\varepsilon_c} = 1 \quad (2.77)$$

On observe ainsi que, pour $k_a \gg 1$, le critère s'exprime alors comme une relation linéaire liant γ_{cum} et ε_h^p .

Le second cas considéré est celui où $k_a \ll 1$, ceci supposant que l'équilibre entre production et annihilation de dislocations est atteint pour de fortes valeurs de γ_{cum} . Dans ce cas, (2.76) s'écrit :

$$\frac{\gamma_{cum}^2}{\gamma_c^2} + \frac{\varepsilon_h^p}{\varepsilon_c} = 1 \quad (2.78)$$

C'est à dire sous la forme d'un critère de type parabolique liant γ_{cum} et ε_h^p .

Il est intéressant de noter que pour ces deux cas limites, les paramètres k_a , f_c et A_0 n'interviennent dans le critère que par les groupements γ_c et ε_c . Sur la figure 2.7 est tracé, dans le plan $(\gamma_{cum}, \varepsilon_h^p)$, le critère de fatigue local, pour les paramètres suivants : $\varepsilon_c = 3.10^{-3}$, $\gamma_c = 10$.

Puisque γ_{cum} et ε_h^p sont définis à l'échelle du grain, l'expression macroscopique du cri-

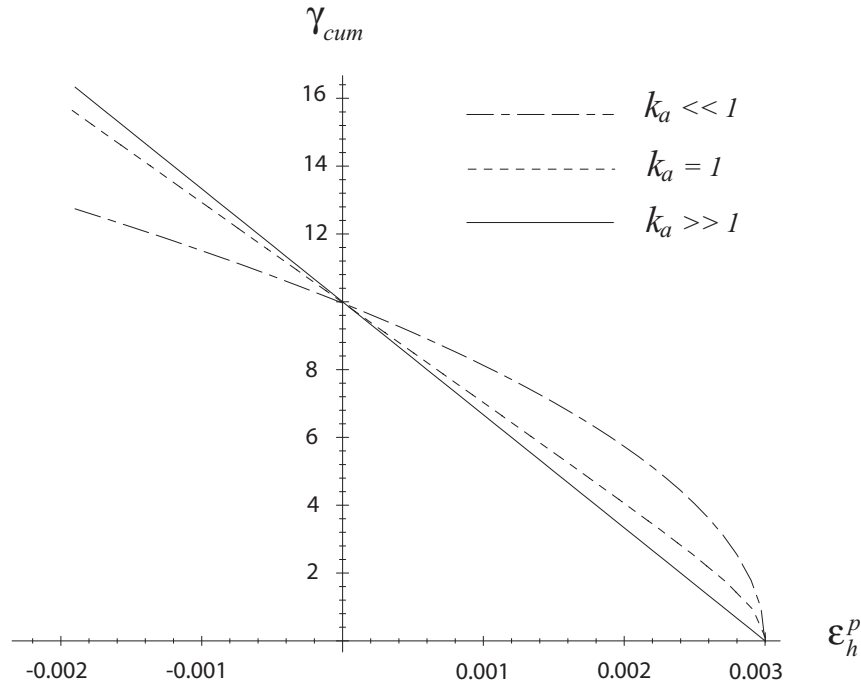


FIG. 2.7 – Représentation du critère de fatigue dans le plan $(\varepsilon_h^p, \gamma_{cum})$

tère nécessite de relier maintenant les grandeurs microscopiques aux grandeurs macroscopiques. C'est l'objet de la transition micro-macro présentée dans le paragraphe qui suit.

2.4.2 Passage micro-macro

Dans le cadre de la fatigue polycyclique, on rappelle que la plasticité reste confinée dans quelques grains défavorablement orientés par rapport aux axes de chargement et que le

comportement macroscopique, qui n'est pas affecté par cette plasticité, demeure élastique (cf. figure 2.8). Rappelons que Σ désigne le tenseur des contraintes macroscopiques et \mathbf{E} le tenseur des déformations macroscopiques. Ces grandeurs sont reliées par la loi de Hooke :

$$\Sigma = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.79)$$

\mathbb{C} étant le tenseur de rigidité de l'agrégat, que nous supposons isotrope par simplicité. Le comportement élastique de l'inclusion (le grain sollicité) est défini par $\sigma = \mathbb{C}^I : \varepsilon^e$. On suppose qu'en toute généralité $\mathbb{C} \neq \mathbb{C}^I$. Deux schémas simples peuvent être considérés :

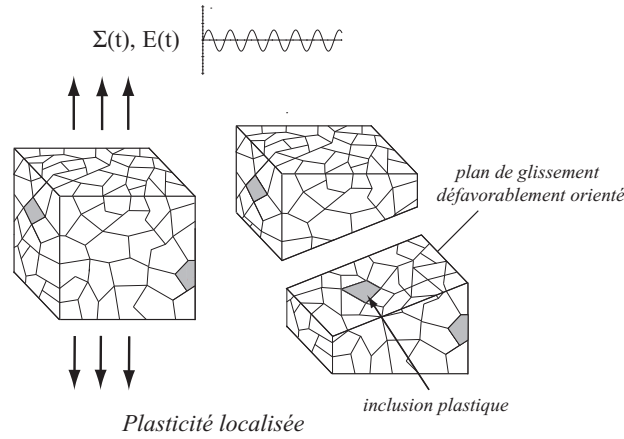


FIG. 2.8 – rve

en première approche. Il s'agit des schémas de Lin-Taylor et de Sachs. Le modèle de Lin-Taylor, que nous avons déjà détaillé au premier chapitre dans la section dédiée à l'approche de Dang Van, suppose l'égalité des déformations aux deux échelles : $\mathbf{E} = \varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e$. Sa loi d'interaction, pour ce modèle, s'écrit :

$$\sigma = \mathbb{C} : (\mathbb{C}^I)^{-1} : \Sigma - \mathbb{C} : \varepsilon^p \quad (2.80)$$

Le modèle de Sachs suppose l'égalité des contraintes aux deux échelles, d'où sa loi d'interaction :

$$\sigma = \Sigma \quad (2.81)$$

Le cas de figure de la fatigue polycyclique peut se rapprocher de celui de l'entrée en plasticité (plasticité confinée) des métaux où l'utilisation d'une approche de type Eshelby-Kröner est pleinement justifiée (cf. [11]). On s'intéresse donc au schéma autocohérent de de Kröner [51]. Mentionnons au passage le schéma autocohérent de Bui [13] dédié à la prise en compte de l'anisotropie cubique élastique du grain. Le grain plastifié est assimilé à une inclusion soumise à un champ de déformation libre et noyée dans une matrice élastique. Bien qu'il s'agisse d'un agrégat polycristallin, le caractère confiné de la plasticité justifie ces considérations.

Dans le modèle de Kröner, le comportement élastique du matériaux et de ces constituants

est supposé être le même, $\mathbb{C} = \mathbb{C}^I$. La loi d'interaction, de type accommodation élastique, s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - \mathbb{C} : (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.82)$$

où \mathbb{P} est le tenseur d'ordre quatre de Hill, qui dépend des propriétés élastiques du milieu environnant, et de la géométrie de l'inclusion. Pour des inclusions sphériques, plongées dans un milieu infini, celui-ci s'écrit classiquement :

$$\mathbb{P} = \frac{\kappa_1}{3k} \mathbb{J} + \frac{\kappa_2}{2\mu} \mathbb{K} \quad (2.83)$$

avec : $\kappa_1 = \frac{3k}{3k + 4\mu} = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$ et $\kappa_2 = \frac{6}{5} \frac{k + 2\mu}{3k + 4\mu} = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}$

où ν est le coefficient de Poisson de l'agrégat. l'extension du modèle autocohérent de Kröner, pour la prise en compte d'une anisotropie élastique des grains conduit à la loi d'interaction suivante [13] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \{ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^I) \}^{-1} : (\mathbb{C}^I)^{-1} : \{ \boldsymbol{\Sigma} - \mathbb{C}^I : (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C}^I) : \boldsymbol{\varepsilon}^p \} \quad (2.84)$$

Il est commode de noter que l'ensemble des lois d'interaction présentées peuvent se mettre sous la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.85)$$

où les tenseurs \mathbb{A} et \mathbb{C}^* sont définis par :

$$\mathbb{A} = \begin{cases} \mathbb{I} & (Sachs) \\ \mathbb{C} : (\mathbb{C}^I)^{-1} & (Lin - Taylor) \\ \mathbb{C} : \{ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^I) \}^{-1} : (\mathbb{C}^I)^{-1} & (auto - cohérent) \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\mathbb{C}^* = \begin{cases} 0 & (Sachs) \\ \mathbb{C} & (Lin - Taylor) \\ \mathbb{C} : \{ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^I) \}^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C}^I) & (auto - cohérent) \end{cases}$$

Il s'ensuit que la pression hydrostatique, σ_h , et la cission sur le plan de glissement prédominant, τ , qui interviennent de manière implicite dans l'expression du critère de fatigue, sont définies par :

$$\tau = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta} : \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.87)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{A} : \mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{1} : \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

Considérons un premier cas particulier, celui où le polycristal et ces constituants possèdent le même comportement élastique ($\mathbb{C} = \mathbb{C}^I$). Dans ce cas $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ pour les différents modèles proposés (Sachs, Lin-Taylor, auto-cohérent de Kröner). τ et σ_h s'écrivent alors :

$$\tau = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta} - \mu^* \gamma \quad (2.88)$$

$$\sigma_h = \Sigma_h - 3k^* \varepsilon_h^p$$

	Sachs	Lin-Taylor	auto-cohérent (Bui)
α_a	1	$\frac{\mu}{\mu_a}$	$\frac{\mu}{\mu_a} \frac{\mu}{\mu + (\mu - \mu_a)\kappa_2}$
α_b	0	$\frac{\mu}{\mu_b}$	$\frac{\mu}{\mu_b} \frac{\mu}{\mu + (\mu - \mu_b)\kappa_2}$
k^*	0	k	$k(1 - \kappa_1)$
μ^*	0	μ	$\frac{1}{3} \frac{\mu^2(1 - \kappa_2)}{\mu + (\mu - \mu_a)\kappa_2} + \frac{2}{3} \frac{\mu^2(1 - \kappa_2)}{\mu + (\mu - \mu_b)\kappa_2}$

TAB. 2.1 – Expression des coefficients k^* , μ^* , α_a et α_b pour les différents schémas d'homogénéisation

avec $k^* = \mu^* = 0$ pour le modèle de Sachs, $k^* = k$ et $\mu = \mu^*$ pour le modèle de Lin-Taylor. Pour le modèle auto-cohérent, k^* et μ^* sont donnés par $\mu^* = \mu(1 - \kappa_2)$, $k^* = k(1 - \kappa_1)$ où κ_1 et κ_2 dépendent des modules d'élasticité de l'agrégat et sont donnés par (2.83). Pour les structures CC et CFC, le tenseur d'élasticité des grains est de type cubique et est caractérisé à l'aide d'un module de compressibilité k , et de deux modules de cisaillement μ_a et μ_b (le cas $\mu_a = \mu_b$ correspondant à celui de l'isotropie). \mathbb{C}^I s'écrit alors :

$$\mathbb{C}^I = 3k\mathbb{J} + 2\mu_a\mathbb{K}_a + 2\mu_b\mathbb{K}_b \quad (2.89)$$

où \mathbb{K}_a et \mathbb{K}_b sont donnés par (2.65). Le tenseur d'ordre 4, \mathbb{A} défini par (2.86) s'écrit, dans le cas d'une anisotropie de type cubique :

$$\mathbb{A} = \mathbb{J} + 2\alpha_a\mathbb{K}_a + 2\alpha_b\mathbb{K}_b \quad (2.90)$$

où les coefficients α_a et α_b sont définis dans le tableau 2.1, pour les différents schémas utilisés. τ et σ_h s'écrivent alors à partir de (2.87) :

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha_a \Sigma : \Delta + (\alpha_a - \alpha_b) \Sigma : \mathbb{L} : \Delta - \mu^* \gamma \\ \sigma_h &= \Sigma_h - 3k^* \varepsilon_h^p \end{aligned} \quad (2.91)$$

Les expressions de k^* , μ^* , α_a et α_b pour les différents schémas sont donnés dans le tableau 2.1. Notant que $\mathbf{1} : \Delta = 0$ et $\mathbf{1} : \mathbb{L} : \Delta = 0$, on vérifie que τ est relié uniquement à la partie déviatorique de Σ :

$$\tau = \alpha_a \bar{\Sigma} : \Delta + (\alpha_a - \alpha_b) \bar{\Sigma} : \mathbb{L} : \Delta - \mu^* \gamma \quad (2.92)$$

On remarque ainsi que dans le cas anisotrope, τ n'est plus relié uniquement à $\bar{\Sigma} : \Delta$ mais fait intervenir également le terme $\bar{\Sigma} : \mathbb{L} : \Delta$ qui dépend de la structure cristalline du grain considéré. On peut choisir de caractériser l'anisotropie élastique cubique par le rapport $r_a^e = \mu_b/\mu_a$. Cette anisotropie élastique est plus ou moins marquée selon les métaux ; sachant que dans le cas isotrope $\mu_a = \mu_b$ et donc $r_a^e = 1$, on a par exemple pour l'aluminium $r_a^e = 1.2$, pour le cuivre $r_a^e = 3.2$ et pour la ferrite $r_a^e = 2.5$.

2.4.3 Formulation du critère à l'échelle macroscopique

Les principes généraux de la transition micro-macro étant posés, il s'agit maintenant de formuler le critère de fatigue à l'échelle macroscopique. On rappelle d'abord que ce

critère, (2.76), s'exprime comme une combinaison de ε_h^p et de γ_{cum} . Il s'agit donc de relier ces grandeurs locales au tenseur des contraintes macroscopiques. Concernant γ_{cum} , sa valeur est déterminé à partir de la loi de Schmid, sur le système de glissement prédominant :

$$|\Sigma : \mathbb{A} : \Delta - (c + \mu^*)\gamma| = \tau_0 + R(\gamma_{cum}) \quad (2.93)$$

Si l'intégration de la loi de Schmid sur le trajet de chargement ne constitue pas une difficulté particulière, les quantités $\Sigma : \Delta$ et $\Sigma : \mathbb{L} : \Delta$ sont des grandeurs qui dépendent de l'orientation du grain sollicité. La valeur de γ_{cum} à l'adaptation dépend donc de l'orientation du grain sollicité. La détermination de la limite d'endurance repose sur la recherche de l'état le plus favorable pour la nucléation d'une fissure. Elle consiste donc à rechercher l'orientation cristalline pour laquelle le glissement plastique cumulé sera maximal.

Il s'agit ensuite de déterminer la valeur de ε_h^p , à partir de (2.72), dans laquelle σ_h est donné par (2.91) :

$$d_h = \frac{1}{2\sqrt{3}p_1(1-p_2)} f \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_h - 3k^* \varepsilon_h^p}{2p_1 \tau_0} \right\} \dot{\gamma}_{cum} \quad (2.94)$$

où l'on rappelle que p_1 et p_2 sont donnés par (2.73). L'équation (2.94) met en jeu la pression hydrostatique qui, elle, est invariante d'un grain à un autre, mais néanmoins est pilotée par le glissement plastique cumulé qui dépend de l'orientation du grain. Il s'agit donc d'intégrer la loi (2.94) sur le trajet de chargement.

Il est clair que la détermination du critère de fatigue, ainsi précisé, requiert un traitement numérique important puisqu'il nécessite l'intégration simultanée de (2.93) et (2.94) sur toutes les orientations cristallines de l'agrégat. Soulignons que cette difficulté se trouve déjà dans les critères de fatigue du type de celui proposé par Papadopoulos [89]. Le critère formulé par ce dernier porte sur une valeur critique du glissement plastique cumulé, γ_{cum} . Or, la valeur de γ_{cum} , dans le cas d'un chargement quelconque requiert également une intégration de la loi de comportement sur le trajet. Rappelons néanmoins que dans le cas des trajets affines, la solution exacte de γ_{cum} en régime adapté a pu être identifiée. La formulation du critère, pour un trajet de chargement quelconque, a alors consisté en une extension heuristique du critère formulé dans le cas des trajets affines mais ne constitue pas a fortiori la solution exacte.

A titre d'illustration on considère dans la suite de ce chapitre des trajets de chargements simples tels que les trajets affines et déphasés.

2.5 Mise en oeuvre dans le cas des chargements macroscopiques affines

L'objet de cette section et de la suivante, est d'établir une expression analytique du critère de fatigue pour les chargements macroscopiques affines et déphasés. Pour cela, il s'agit de déterminer, à l'état adapté, d'une part le niveau de plasticité, et, d'autre part, le niveau d'endommagement. On se propose dans un premier temps d'examiner le cas particulier des trajets de chargement macroscopiques affines.

2.5.1 Détermination de l'état adapté

On rappelle que le critère de fatigue formulé suppose que l'on est dans le domaine d'adaptation. Il est donc nécessaire dans un premier temps, pour sa formulation, de déterminer l'état adapté du grain sollicité.

Avant toute chose rappelons le théorème d'adaptation de Mélan généralisé par Mandel [71, 84] au cas de l'écroutissage cinématique et isotrope (ici pour le critère de Schmid) : *S'il existe un instant t_0 ainsi que deux champs fixes X^* et R^* tel que :*

$$\forall t > t_0, \quad \mathcal{F} = |\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\Delta} - X^*| - \tau_0 - R^* \leq 0 \quad (2.95)$$

alors la structure s'adapte pourvu que X^* et R^* soit suffisamment petits. S'il y a effectivement adaptation le couple X^* et R^* peut être déduit, de manière générale, d'un calcul incrémental sur le trajet de chargement.

Dans le cas des chargements affine, le couple X^* et R^* doit être suffisamment grand de manière à ce que le cycle de contrainte soit contenu dans le domaine élastique, mais suffisamment petit pour satisfaire le théorème d'adaptation (2.95). Il s'en suit que le couple optimum, vérifiant à la fois ces deux conditions, définit le centre et le rayon du plus petit cercle circonscrite au trajet de chargement (le segment $[AB]$) et par conséquent on a :

$$\tau_a = \tau_0 + R(\gamma_{cum}); \quad \tau_m = c\gamma_m \quad (2.96)$$

Il s'agit du résultat déjà établi par Papadopoulos (une démonstration de ce résultat pourra être trouvée dans [21]). Le domaine élastique est centré sur le cycle de chargement, c'est à dire sur la cission moyenne, τ_m , et son rayon est défini par τ_a . Or, τ_a et τ_m sont reliés au tenseur des contrainte macroscopiques, par la loi d'interaction (2.92) :

$$\begin{aligned} \tau_a &= \alpha_a \boldsymbol{\Sigma}_a : \boldsymbol{\Delta} + (\alpha_a - \alpha_b) \boldsymbol{\Sigma}_a : \mathbb{L} : \boldsymbol{\Delta} \\ \tau_m &= \alpha_a \boldsymbol{\Sigma}_m : \boldsymbol{\Delta} + (\alpha_a - \alpha_b) \boldsymbol{\Sigma}_m : \mathbb{L} : \boldsymbol{\Delta} - \mu^* \gamma_m \end{aligned} \quad (2.97)$$

de sorte que γ_m est déduit de (2.96) et (2.97), par :

$$\gamma_m = \frac{1}{c + \mu^*} \left[\alpha_a \boldsymbol{\Sigma}_m : \boldsymbol{\Delta} + (\alpha_a - \alpha_b) \boldsymbol{\Sigma}_m : \mathbb{L} : \boldsymbol{\Delta} \right]; \quad (2.98)$$

Dans le grain défavorablement orienté, le glissement plastique cumulé est déduit de (2.96), et vaut, respectivement pour un écroutissage isotrope linéaire et pour un écroutissage isotrope non linéaire :

$$\begin{aligned} \gamma_{cum} &= \frac{1}{R_0} \left[\max_{\underline{n}, \underline{m}} \tau_a - \tau_0 \right] \quad (\text{écroutissage linéaire}) \\ \gamma_{cum} &= -\frac{1}{r_0} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{R_\infty} \left[\max_{\underline{n}, \underline{m}} \tau_a - \tau_0 \right] \right\} \quad (\text{écroutissage non linéaire}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Dans le cas de l'écroutissage isotrope linéaire le modèle prédit toujours un état asymptotique adapté puisque la taille du domaine élastique n'est par bornée. A toute valeur de τ_a , il existe une valeur de γ_{cum} vérifiant $\tau_a = \tau_0 + R_0 \gamma_{cum}$ (cf. (2.96)). Toutefois, dans le

cas d'un écrouissage non linéaire, la condition $R(\gamma_{cum}) \leq R_\infty$ impose une limite sur le domaine d'élasticité. Au delà de cette limite, on se situe dans le régime d'accommodation. Ceci se traduit sur τ_a par la condition suivante :

$$\tau_a \leq \tau_0 + R_\infty \quad (2.100)$$

La condition d'adaptation sur le grain le plus défavorablement orienté s'écrit alors :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \tau_a \leq \tau_0 + R_\infty \quad (2.101)$$

Notons que, dans l'approche de Dang Van et Papadopoulos, une loi d'écrouissage isotrope linéaire a été utilisée, et que, par conséquent le domaine élastique n'est pas borné. Compte tenu du fait que le critère de fatigue correspond à la limite d'adaptation, une valeur critique de $R(\gamma_{cum})$ a alors été considérée par ces auteurs pour borner le domaine élastique.

Dans le cas isotrope, où $\alpha_a = \alpha_b = 1$, (2.97) et (2.98) s'écrivent :

$$\tau_a = \Sigma_a : \Delta; \quad \tau_m = \Sigma_m : \Delta - \mu^* \gamma_m \quad (2.102)$$

On a donc l'égalité des amplitudes de cisaillement aux deux échelles en régime adapté. En revanche dans le cas où le grain possède une élasticité de type cubique, τ_a n'est plus relié de manière simple à Σ_a mais fait intervenir le tenseur d'ordre 4, \mathbb{L} , lié à l'orientation cristalline du grain. Explicitons la valeur de τ_a dans ce cas. Le terme $\Sigma_a : \mathbb{L} : \Delta$ qui apparaît dans l'expression de τ_a (2.97) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_a : \mathbb{L} : \Delta &= L_1 \Sigma_a : \underline{n} \otimes \underline{n} + L_2 \Sigma_a : \underline{m} \otimes \underline{m} + L_3 \Sigma_a : \underline{r} \otimes \underline{r} \\ &+ 2L_4 \Sigma_a : \underline{n} \otimes \underline{m} + 2L_5 \Sigma_a : \underline{n} \otimes \underline{r} + 2L_6 \Sigma_a : \underline{m} \otimes \underline{r} \end{aligned} \quad (2.103)$$

où les L_i sont définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} L_1 &= \underline{n} \otimes \underline{n} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \\ L_2 &= \underline{m} \otimes \underline{m} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \\ L_3 &= \underline{r} \otimes \underline{r} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \\ L_4 &= \underline{n} \otimes \underline{m} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \\ L_5 &= \underline{n} \otimes \underline{r} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \\ L_6 &= \underline{m} \otimes \underline{r} : \mathbb{L} : \underline{n} \otimes \underline{m} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Les coefficients L_i sont liés au type de structure monocristalline (c'est à dire CC ou CFC) mais sont indépendants de l'orientation du grain considéré. Dans le cas d'une structure CFC, \underline{n} et \underline{m} appartiennent à la famille $\{111\} < 110 >$ tandis que pour les structures CC, ils appartiennent aux familles $\{110\} < 111 >$ et $\{112\} < 111 >$. Pour chacune de ces familles, les valeurs des coefficients L_i sont donnés dans le tableau (2.2). Le problème de maximisation (2.101) peut sembler à première vue plus difficile dans le cas anisotrope. En fait, on peut montrer qu'il n'ajoute aucune difficulté supplémentaire au cas de l'isotropie élastique. Pour cela, considérons le cas des structures de type CFC, en reprenant (2.97) ; τ_a est alors défini par :

$$\tau_a = \alpha_1 \Sigma_a : \underline{n} \otimes \underline{m} + \alpha_2 \Sigma_a : \underline{m} \otimes \underline{r} \quad (2.105)$$

	$\{111\} \langle 110 \rangle$	$\{110\} \langle 111 \rangle$	$\{112\} \langle 111 \rangle$
L_1	0	0	$\mp\sqrt{2}/6$
L_2	0	0	0
L_3	0	0	$\pm\sqrt{2}/6$
L_4	1/3	1/3	1/3
L_5	0	$\pm\sqrt{2}/6$	0
L_6	$\pm\sqrt{2}/6$	0	0

TAB. 2.2 – Expression des coefficients L_i pour les différentes familles de systèmes de glissement.

avec :

$$\alpha_1 = \frac{5\alpha_a - 2\alpha_b}{3}; \quad \alpha_2 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}(\alpha_a - \alpha_b) \quad (2.106)$$

expression que l'on peut formuler de la manière suivante :

$$\tau_a = \alpha \Sigma_a : (\tilde{\underline{n}} \otimes \tilde{\underline{m}}) \quad (2.107)$$

où α , $\tilde{\underline{m}}$ et $\tilde{\underline{n}}$ sont définis par :

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(9\alpha_a^2 - 8\alpha_a\alpha_b + 2\alpha_b^2)}; \quad \tilde{\underline{m}} = \underline{m}; \quad \tilde{\underline{n}} = \alpha_1\underline{n} + \alpha_2\underline{r} \quad (2.108)$$

$\tilde{\underline{n}}$ est un vecteur unitaire et normal à \underline{m} , balayant toutes les directions de l'espace, si bien qu'on a l'équivalence suivante :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \left[\Sigma : (\underline{n} \otimes \underline{m}) \right] = \max_{\tilde{\underline{n}}, \tilde{\underline{m}}} \left[\Sigma : (\tilde{\underline{n}} \otimes \tilde{\underline{m}}) \right] \quad (2.109)$$

Dans le cas d'un grain cubique, la valeur maximale de l'amplitude du cisaillement est déduite de la valeur de celle obtenue dans le cas isotrope en multipliant tout simplement ce dernier par le facteur α . Néanmoins, l'orientation du grain pour lequel l'amplitude du cisaillement est maximal, dans le cas cubique, n'est plus la même que celle obtenue dans le cas isotrope. Notons toutefois que l'orientation du grain défavorablement orienté nous importe peu ici, la détermination du critère de fatigue ne requérant que l'amplitude de la cission alternée. Par conséquent, on s'intéresse en particulier à la valeur de α . Dans le cas d'un grain à structure de type CC, une démarche similaire à celle détaillée ci-dessus, pour le cas des CFC, peut être reconduite. On montre alors, pour les structures CC, que la prise en compte de l'anisotropie élastique de type cubique dans la loi d'interaction conduit à un introduire également un unique coefficient, α , qui, de plus, possède la même expression que dans le cas d'un CFC (2.108). Dans le tableau 2.3 sont reportées les valeurs de α pour les différents matériaux précédemment cités. On notera, pour les schémas de Lin-Taylor et de Kröner, une nette influence de l'anisotropie élastique du grain sur le paramètre α et donc sur l'amplitude de cisaillement.

	k	μ	μ_a	μ_b	$\alpha(\text{Sachs})$	$\alpha(\text{Kr\"oner})$	$\alpha(\text{Lin-Taylor})$
Aluminium	70	25	23	28	1	1.12	1.22
Cuivre	105	37.5	23	75	1	1.69	2.44
Nickel	177	76	23	125	1	3.64	5.26

TAB. 2.3 – Valeurs des coefficients élastiques et de α pour différents matériaux.

2.5.2 Détermination du critère de fatigue en chargement affine

Comme précédemment souligné, la détermination du critère macroscopique de fatigue requiert celle des variables locales γ_{cum} et ε_h^p en fonction de la contrainte macroscopique Σ .

Lorsque le grain s'adapte élastiquement, le glissement plastique cumulé, γ_{cum} , est lié à la composante alternée de la cission locale par la relation (2.96). Ceci suggère, en utilisant (2.97), que γ_{cum} est reliée uniquement à la partie alternée du déviateur de la contrainte macroscopique $\bar{\Sigma}_a$. La recherche du critère de fatigue conduit à considérer l'orientation du grain pour laquelle la valeur de γ_{cum} , donnée par (2.99), est maximale.

Notons que le critère proposé (2.76) ne dépend pas du glissement moyen γ_m ; en vertu de (2.97), il est donc indépendant de $\bar{\Sigma}_m$. Cette conclusion est en accord avec les résultats expérimentaux décrits dans le premier chapitre 1.3 et qui montrent une indépendance de la limite d'endurance en torsion répétée, vis à vis d'une torsion moyenne.

La détermination du critère de fatigue requiert également la valeur de ε_h^p à l'adaptation. Plus précisément, il s'agit d'intégrer la loi d'évolution (2.94) sur le trajet de chargement. On considère dans un premier temps le cas particulier où la partie alternée de la pression hydrostatique est nulle $\Sigma_{h,a} = 0$. L'équation (2.94) s'écrit alors :

$$d_h = \frac{1}{2\sqrt{3}p_1(1-p_2)} f \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,m} - 3k^* \varepsilon_h^p}{2p_1 \tau_0} \right\} \dot{\gamma}_{cum} \quad (2.110)$$

Dans le cas du schéma de Sachs, $k^* = 0$, et on rappelle que $f \simeq 3\varepsilon_h^p + f_a(\gamma_{cum}^p)$ pour de faibles valeurs de f_g , f_a étant donné par (2.14). L'intégration de (2.110) donne alors :

$$\varepsilon_h^p = \frac{A_0 k_a^2}{3S(S+k_a)} \left[\exp(H\gamma_{cum}) - 1 - H\gamma_{cum} \right] - \frac{A_0 S}{3(S+k_a)} \left[k_a \gamma_{cum} - 1 + \exp(-k_a \gamma_{cum}) \right] \quad (2.111)$$

où S est défini par :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2p_1(1-p_2)} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,m}}{2p_1 \tau_0} \right\} \quad (2.112)$$

En injectant (2.111) dans le critère de fatigue (2.74), on obtient alors :

$$f = \frac{A_0 k_a}{S(S+k_a)} \left[k_a (\exp(S\gamma_{cum}) - 1) + S (\exp(-k_a \gamma_{cum}) - 1) \right] \leq f_c \quad (2.113)$$

En faisant intervenir γ_c , défini par (2.75), le critère de fatigue s'écrit, pour le schéma de Sachs et dans les deux cas particuliers $k_a \gg 1$ et $k_a \ll 1$:

$$\begin{aligned} k_a \ll 1 &\Rightarrow \frac{2}{S^2 \gamma_c^2} \left[\exp(S \gamma_{cum}) - 1 - S \gamma_{cum} \right] \leq 1 \\ k_a \gg 1 &\Rightarrow \frac{1}{S \gamma_c} \left[\exp(S \gamma_{cum}) - 1 \right] \leq 1 \end{aligned} \quad (2.114)$$

On pourra vérifier pour chacun de ces cas, que, lorsque $\Sigma_{h,m} = 0$, alors $S \rightarrow 0$ et $\varepsilon_h^p \rightarrow 0$, et on retrouve alors par un développement limité $\gamma_{cum} \leq \gamma_c$.

Considérons maintenant le cas du schéma de Lin-Taylor et du modèle auto-cohérent. Les simulations numériques montrent que ces modèles se différencient du schéma de Sachs, par un comportement saturant pour des valeurs modérées de la pression hydrostatique. Sur la figure 2.9, la valeur de ε_h^p est représentée en fonction du glissement plastique cumulé γ_{cum} . La plasticité a été supposée isotrope ($h_a = h_b = 0$) et les paramètres d'écrouissage utilisés sont :

$$\tau_0 = 60MPa; \quad R_0 = 20MPa; \quad R_\infty = 250MPa; \quad r_0 = 0.1; \quad c = 2000MPa \quad (2.115)$$

Ces valeurs que nous adopterons dans ce chapitre et dans le chapitre suivant sont de l'ordre de grandeur de ce qui est généralement considéré pour les aciers. Les paramètres de la loi de nucléation ainsi que les modules élastiques sont pris comme suit :

$$A_0 = 0.0008; \quad k_a = 2; \quad \tau_0 = 60MPa; \quad k = 200GPa; \quad \mu = 75GPa \quad (2.116)$$

On observe sur la figure 2.9, que ε_h^p tend vers une valeur finie, obtenue à partir de (2.110) dans laquelle on pose $d_h = 0$:

$$\varepsilon_h^p = \frac{\Sigma_{h,m}}{3k^*} \quad (2.117)$$

Pour les modèles de Sachs et de Lin-Taylor, la valeur de ε_h^p à l'état adapté est donc proportionnelle à la valeur moyenne de la pression hydrostatique, $\Sigma_{h,m}$ (cf. (2.117)). Il est également intéressant que la valeur de ε_h^p à l'état adapté (2.117) est indépendant des coefficients p_1 et p_2 et donc de l'anisotropie plastique du grain.

Intéressons nous maintenant à l'effet d'une pression hydrostatique purement alternée, $\Sigma_{h,a}$ sur la valeur de ε_h^p à l'état adapté. Sur les figures 2.10, 2.12, 2.11 est tracée, pour les trois schémas, la valeur de ε_h^p en fonction du nombre de cycles pour une amplitude de cisssion $\Sigma : \Delta = 200MPa$ et pour une amplitude de la pression hydrostatique $\Sigma_{h,a} = 200MPa$. Les résultats montrent clairement que ε_h^p tend vers zero lorsque N est très grand. Si bien que, dans le cas présent, c'est à dire pour un chargement purement alterné, $\varepsilon_h^p = 0$ à l'état adapté. Le critère de fatigue se réduit alors, dans le cas isotrope, à considérer une valeur critique du glissement plastique et ne fait alors intervenir que l'amplitude de la cisssion macroscopique $\Sigma_a : \Delta$. Dans le cas de l'élasticité cubique il suffira de multiplier cette amplitude par le facteur α .

Le critère de fatigue s'écrit pour les schémas de Lin-Taylor et Kröner en reportant (2.117)

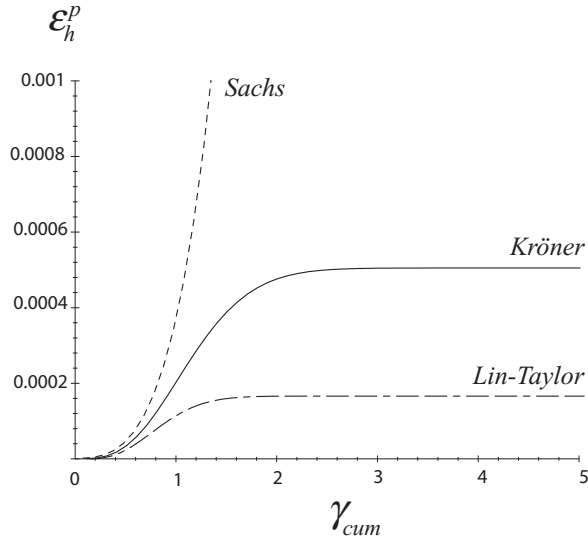


FIG. 2.9 – ε_h^p en fonction de γ_{cum} , pour les modèles de Sachs, Lin-Taylor et de Kröner dans le cas d'une pression hydrostatique moyenne.

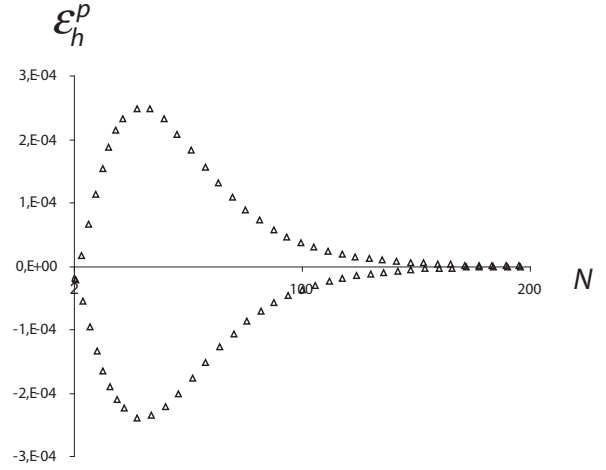


FIG. 2.10 – ε_h^p en fonction du nombre de cycles N en chargement purement alterné pour le modèle de Sachs dans le cas d'une pression hydrostatique alternée.

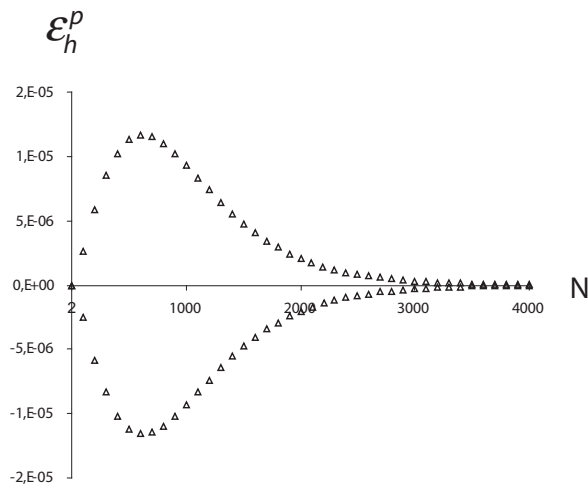


FIG. 2.11 – idem pour le schéma de Kröner.

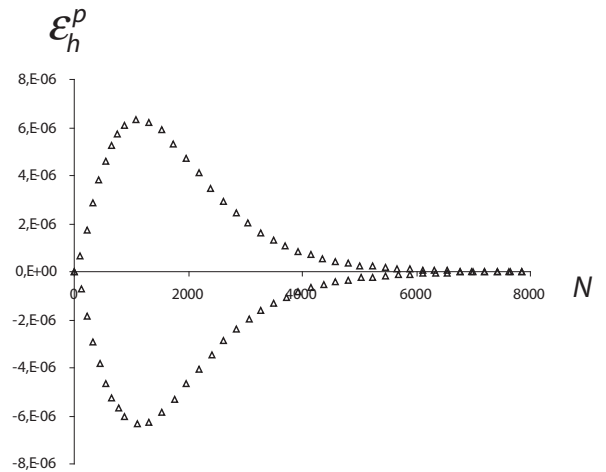


FIG. 2.12 – idem pour le schéma de Lin-Taylor.

dans (2.77) et (2.78) :

$$\begin{aligned} k_a \gg 1 &\Rightarrow \frac{\gamma_{cum}}{\gamma_c} + \frac{\Sigma_{h,m}}{3k^*\varepsilon_c} = 1 \\ k_a \ll 1 &\Rightarrow \frac{\gamma_{cum}^2}{\gamma_c^2} + \frac{\Sigma_{h,m}}{3k^*\varepsilon_c} = 1 \end{aligned} \quad (2.118)$$

où γ_{cum} est donné par (2.99). Il est intéressant de noter que dans le cas le cas d'un écouissage isotrope linéaire, et pour $k_a \gg 1$, une loi linéaire liant la cission alternée et la pression hydrostatique est obtenue :

$$\begin{aligned} \max_{n,m} \left[\Sigma_a : \Delta \right] + K_1 \Sigma_{h,m} &< K_2 \\ \text{avec : } K_1 &= \frac{R_0 \gamma_c}{3k^* \varepsilon_c}; \quad K_2 = \tau_0 + R_0 \gamma_c \end{aligned} \quad (2.119)$$

Sur les figures (2.13) et (2.14) les critères de fatigue fournis par les différents schémas d'homogénéisation pour un écouissage isotrope linéaires ont été tracés. Sur les figures (2.15) et (2.16), les mêmes représentations ont été faites pour l'écrouissage isotrope non linéaire. Les paramètres du modèle utilisés sont ceux définis dans la section précédente. La porosité critique est $f_c = 0.015$. Notons que le critère est également délimité par le seuil critique de plasticité, τ_0 au dessous duquel il ne peut y avoir d'endommagement. Cet ensemble de résultats représenté sur les figures (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16) montre que :

- la démarche proposée met clairement en évidence le rôle de la pression hydrostatique sur le critère de fatigue. On notera également que l'on retrouve l'effet "bénéfique" d'une pression hydrostatique négative.
- le rôle du schéma d'homogénéisation est crucial. Le schéma de Sachs apparaît physiquement incohérent et notamment dans le cas des pressions négatives. Ceci est du au fait que pour ce schéma, le taux de croissance devient rapidement très grand alors qu'il est atténué par les contraintes résiduelles dans le cas des schémas de Lin-Taylor et de Sachs. On pourra déjà noter à ce stade que l'écrouissage a été négligé dans la loi de croissance, puisque l'analyse a été menée dans le cas d'un matériau parfaitement plastique. Or, la plasticité étant généralement localisée autour des cavités, il est reconnu que l'écrouissage ralentit la croissance de celles-ci. C'est un point qui sera ultérieurement étudié au chapitre 3.
- la loi d'écrouissage joue un rôle non négligeable sur le critère de fatigue. On remarquera que dans le cas d'un écouissage non linéaire, un effet saturant est observé pour des pressions négatives. En fait, dans le cas d'un écouissage non linéaire, comme nous l'avons précisé, le domaine élastique est borné (par $\tau_0 + R_\infty$). Le critère de fatigue se situant dans le domaine d'adaptation, il est également borné par cette valeur. Pour de fortes pressions négatives, il coïncide ainsi avec la limite d'adaptation.

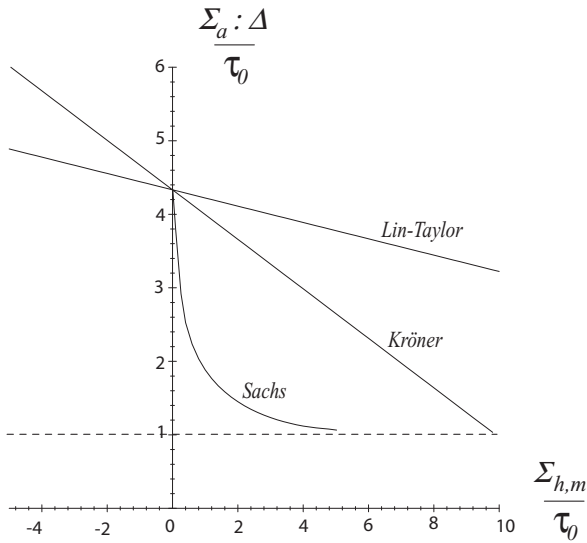


FIG. 2.13 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_a : \Delta$, $\Sigma_{h,m}$. Cas de l'écrouissage linéaire et $k_a \gg 1$.

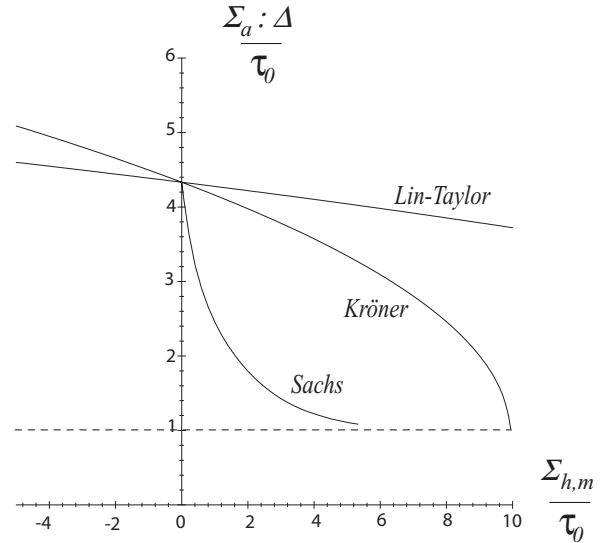


FIG. 2.14 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_a : \Delta$, $\Sigma_{h,m}$. Cas de l'écrouissage linéaire et $k_a \ll 1$.

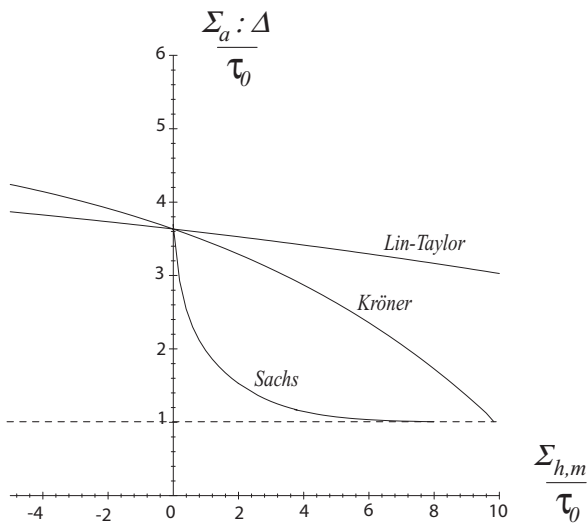


FIG. 2.15 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_a : \Delta$, $\Sigma_{h,m}$. Cas de l'écrouissage non linéaire et $k_a \gg 1$.

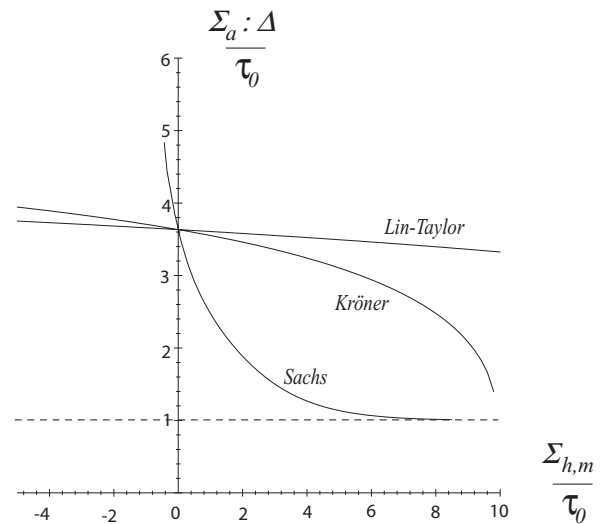


FIG. 2.16 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_a : \Delta$, $\Sigma_{h,m}$. Cas de l'écrouissage non linéaire et $k_a \ll 1$.

2.5.3 Evaluation des capacités prédictive du modèle non couplé

On se propose maintenant d'effectuer des identifications du critère de fatigue proposé à l'aide de données expérimentales issues de littérature, l'objectif étant d'évaluer la pertinence du modèle non couplé proposé en tant qu'outil de prédiction.

Pour les comparaisons avec les données expérimentales, compte tenu de ce qui a été conclu plus haut, seul le critère issu des schémas de Lin-Taylor et Kröner a été considéré. En fait, du point de vue de l'identification avec les données expérimentales, les critères obtenus à partir de ces deux schémas ont une forme similaire; seule la définition de k^* diffère. L'érouissage isotrope est supposé linéaire, et $k_a \gg 1$; il s'agit donc du critère linéaire (2.77).

Les figures 2.17 et 2.18 montrent des comparaisons du critère avec des données expérimentales de Rös [105] et de White et Crossland [125] sur des tubes en acier et en fonte soumis à une traction alternée et une pression interne ou externe. Le critère permet de reproduire de manière qualitative les tendances observées, en particulier pour l'effet d'une pression moyenne.

Les figures 2.19 et 2.20 montrent des comparaisons du critère avec des données expérimentales de Gough et Pollard [42] sur deux aciers soumis à une flexion-torsion alternée ($\Sigma_{12,a}, \Sigma_{11,a}$). On rappelle que dans le cas d'un chargement purement alterné le critère se réduit à la considération d'une valeur critique de la contrainte de cisaillement, qui, pour ce trajet particulier, s'écrit :

$$\max_{\underline{n}, \underline{m}} \left[\underline{\Sigma}_a : \underline{n} \otimes \underline{m} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{4\Sigma_{a,12}^2 + \Sigma_{a,11}^2} \quad (2.120)$$

Les comparaisons avec les points expérimentaux montrent clairement que le modèle proposé ne permet pas de rendre compte correctement du rôle de $\Sigma_{11,a}$ sur le critère de fatigue. Cette incapacité du modèle est liée au fait, que contrairement aux approches classiques de Dang Van et Papadopoulos, le critère est indépendant de la partie alternée de la pression hydrostatique. Ce point sera réexaminé plus tard.

2.6 Cas des chargements déphasés

On se propose maintenant d'examiner le cas particulier des trajets de chargement déphasés. A nouveau on doit tout préciser le niveau de plasticité et d'endommagement en régime adapté dans les grains sollicités. Sur un système de glissement d'orientation \underline{n} et \underline{m} , le trajet de chargement décrit par la cission microscopique est défini, à partir de (1.9) et (2.88) (lorsque le grain est élastique isotrope) par :

$$\tau(t) = \underline{\Sigma}(t) : \underline{\Delta} - \mu^* \gamma = \Sigma_{a_1} : \underline{\Delta} \sin(\omega t) + \Sigma_{a_2} : \underline{\Delta} \cos(\omega t) + \Sigma_m : \underline{\Delta} - \mu^* \gamma \quad (2.121)$$

que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$\tau(t) = \tilde{\tau}_a \sin(\omega t + \tilde{\psi}) + \Sigma_m : \underline{\Delta} - \mu^* \gamma \quad (2.122)$$

avec $\tilde{\tau}_a$ et $\tilde{\psi}$ définis par :

$$\tilde{\tau}_a = \sqrt{(\Sigma_{a_1} : \underline{\Delta})^2 + (\Sigma_{a_2} : \underline{\Delta})^2}; \quad \cos(\tilde{\psi}) = \frac{\Sigma_{a_1} : \underline{\Delta}}{\tilde{\tau}_a} \quad (2.123)$$

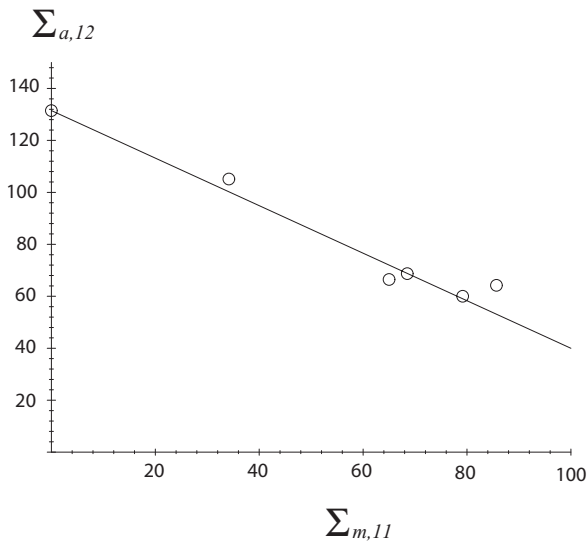


FIG. 2.17 – Comparaison du critère de fatigue proposé avec les résultats expérimentaux de Rös [105]. Traction alternée + pression interne. Acier En25T

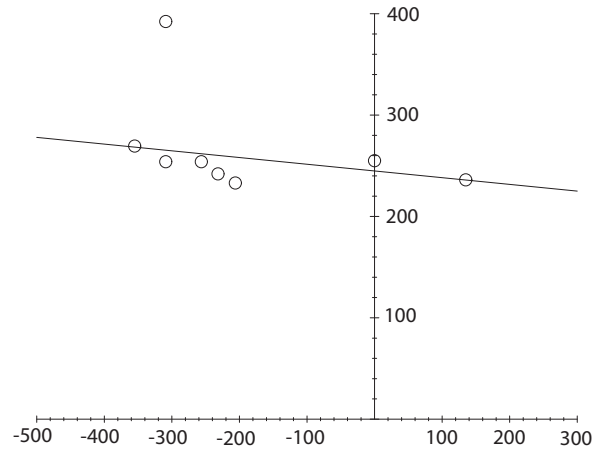


FIG. 2.18 – Comparaison du critère de fatigue proposé avec les résultats expérimentaux de White et Crossland [125] traction alternée + pression externe. Fonte

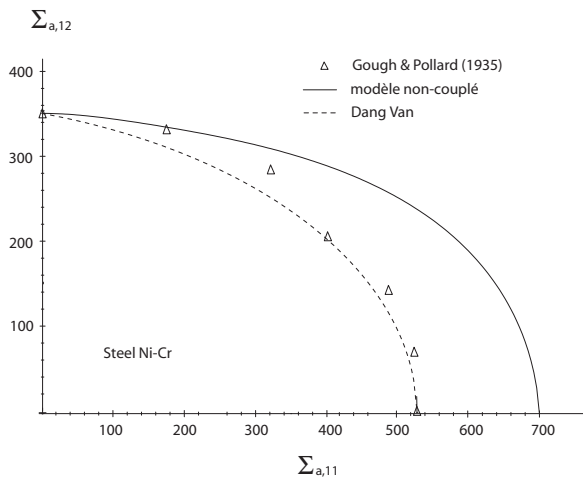


FIG. 2.19 – Comparaison du critère de fatigue proposé avec les résultats expérimentaux de Gough et Pollard [42]. Flexion-torsion alternée. Acier Ni-Cr

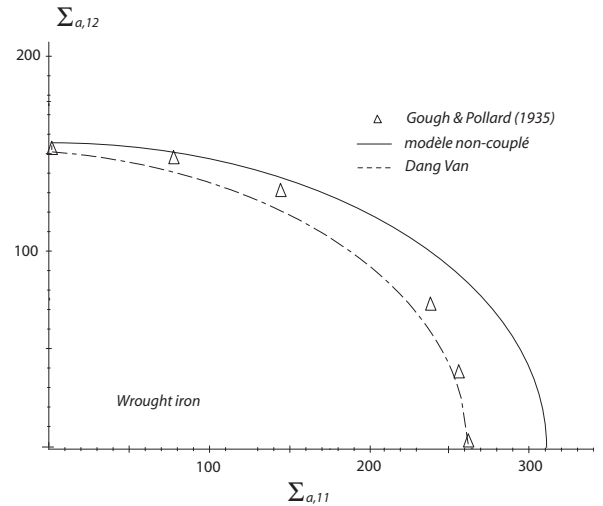


FIG. 2.20 – Comparaison du critère de fatigue proposé avec les résultats expérimentaux de Gough et Pollard [42]. Flexion-torsion alternée. Fer forgé.

L'expression de la cission microscopique (2.121) est tout à fait similaire avec celle obtenue dans le cas d'un trajet affine macroscopique. Si bien que l'on peut formuler, dans le cas des chargements macroscopiques déphasés, des résultats équivalents à ceux établis dans le cas des chargements macroscopiques affines (2.96) et (2.117) , :

$$\tilde{\tau}_a = \tau_0 + R(\gamma_{cum}); \quad \Sigma_m : \Delta = (c + \mu^*)\gamma_m; \quad \Sigma_{h,m} = 3k^* \varepsilon_{h,m}^p \quad (2.124)$$

γ_{cum} et ε_h^p qui interviennent dans l'expression locale du critère de fatigue (2.76) sont donc déduits de la première et de la dernière relation dans (2.124).

A titre d'illustration, considérons le cas particulier d'une flexion-torsion alternée décrit au premier chapitre. Pour ce type de chargement, la pression hydrostatique moyenne étant nulle, le critère de fatigue conduit à considérer une valeur critique du glissement plastique cumulé et donc de l'amplitude de la cission sur le plan de glissement le plus défavorablement orienté. Dans le cas d'une flexion-torsion alternée l'amplitude de la cission maximale s'écrit donc :

$$\max_{n,m} \tilde{\tau}_a = \left[\frac{1}{2} \left(\Sigma_{a,12}^2 + \frac{1}{4} \Sigma_{a,11}^2 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\Sigma_{a,12}^2 + \frac{1}{4} \Sigma_{a,11}^2 \right)^2 - \Sigma_{a,12}^2 \Sigma_{a,11}^2 \sin^2(\psi)} \right]^{1/2} \quad (2.125)$$

Sur la figure (2.21) est tracé le critère de fatigue dans le plan $(\Sigma_{a,11}, \Sigma_{a,12})$ pour diverses valeurs du déphasage ψ . On notera que l'effet du déphasage est très important. Ceci est en mauvais accord avec le résultats expérimentaux qui montrent, au contraire, un effet négligeable du terme de déphasage en flexion-torsion. Ce résultat ne remet pas en cause pour autant la démarche proposée dans ce chapitre, puisque dans le cas particulier de la flexion-torsion alternée notre critère coïncide avec celui de Dang Van

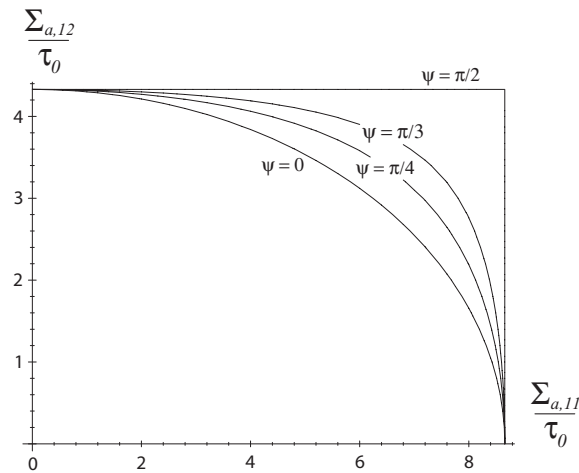


FIG. 2.21 – Critère de fatigue dans le cas d'une flexion-torsion déphasée.

2.7 Conclusion

Une approche micromécanique, incluant des mécanismes d'endommagement à l'échelle des BGP a été proposée dans le cadre initial formalisé par Dang Van [20] et Papadopoulos [87], [89]. Elle a été concrétisée par le développement d'un modèle non couplé d'endommagement et de plasticité. L'endommagement est supposé se manifester par la nucléation et la croissance de microcavités sur les plans de cisaillement maximal. Le critère de fatigue proposé correspond à une valeur critique d'endommagement ; il permet de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes dont :

- le rôle de la pression hydrostatique moyenne, $\Sigma_{h,m}$. On montre en particulier que la dépendance linéaire du critère vis à vis de cette pression, postulée par [20] (cf. également [21]), correspond à un cas particulier du critère proposé.
- l'indépendance de la limite de fatigue par rapport à une pression moyenne, ce qui est d'ailleurs en accord avec les résultats expérimentaux issus de la littérature.

Néanmoins, le critère proposé est indépendant d'une pression hydrostatique alternée. Ceci constitue une limitation, mise en évidence notamment dans les comparaisons avec les résultats expérimentaux en flexion-torsion.

Cette indépendance du critère vis à vis de la partie alternée de la pression hydrostatique, peut trouver son origine :

- d'une part, dans le caractère non couplé de la démarche proposée : dans le critère de plasticité, la loi de Schmid, n'est pas affectée par l'endommagement.
- d'autre part, l'écroûissage a été négligé dans la loi de croissance des cavités. Il a été notamment montré que le schéma de Sachs prédit des taux de croissance de porosité trop important, ceci conduisant à un critère de fatigue physiquement incohérent pour ce schéma.

On se propose donc dans le chapitre qui suit d'intégrer ces deux aspects dans la modélisation de la plasticité et de l'endommagement.

Chapitre 3

Couplage plasticité et endommagement en fatigue polycyclique

L'objectif de ce chapitre est de proposer une approche de la fatigue polycyclique basé sur un couplage entre les mécanismes de plasticité et d'endommagement à l'échelle locale des grains sollicités. Dans ce but, on propose d'abord d'adapter, à la place de l'approche de type Rice et Tracey, l'analyse limite de Gurson [47] pour la sphère creuse parfaitement plastique. A l'instar de ce qui a été fait au second chapitre, la sphère creuse considérée représente en fait une cellule élémentaire du milieu monocristallin contenant des micro-cavités.

Une seconde partie du chapitre concernera la prise en compte de l'écrouissage, négligée dans la loi de croissance des cavités pour le modèle non couplé, mais essentielle dans la formulation du modèle couplé. Notre démarche s'appuie sur l'approche proposée par Leblond et al. [57], adaptée et développée ici pour la plasticité cristalline. Quelques applications aux cas des chargements affines macroscopiques seront ensuite présentées. Enfin une expression analytique du nouveau critère, incluant les effets de la pression hydrostatique alternée, $\Sigma_{h,a}$, dans le cas des trajets de chargement affines macroscopiques, permet de confirmer l'intérêt du modèle couplé. Les résultats seront comparés à des données expérimentales issues de la littérature.

3.1 Un critère couplant plasticité et endommagement

3.1.1 Cas de la plasticité parfaite

On considère une cellule élémentaire d'un matériau monocristallin défini par une sphère creuse. Le rayon de la cavité est noté a tandis que le bord extérieur est de rayon b . La porosité f , est alors définie par $f = (a/b)^3$. Cette sphère est soumise à un taux de déformation uniforme sur son bord extérieur :

$$\underline{v}(r = b) = \underline{D}.x \tag{3.1}$$

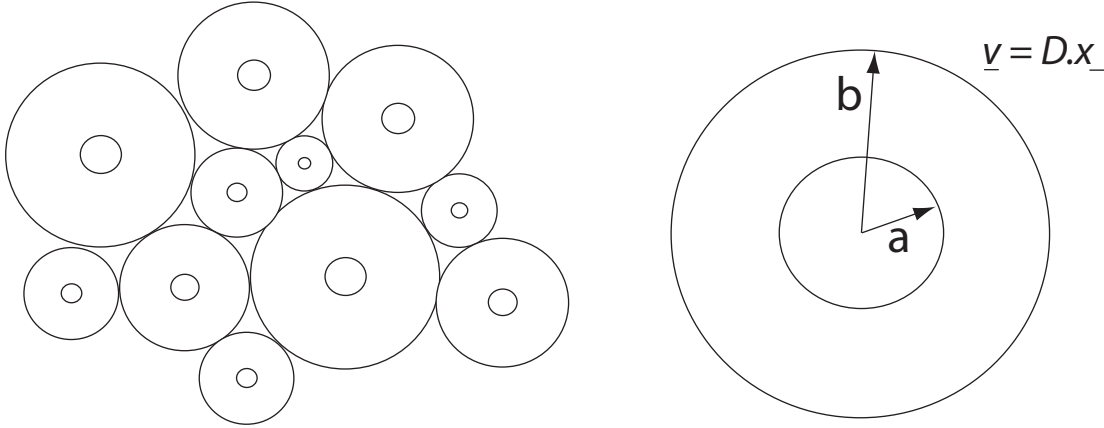


FIG. 3.1 – Cellule étudiée : assemblage de sphère et modèle de sphère creuse.

\underline{v} étant le champ de vitesse dans la matrice solide.

De manière similaire à l'approche proposée au chapitre précédent, pour traiter la croissance d'une cavité sphérique dans un milieu infini, le monocristal est remplacé par un matériau de von Mises équivalent dont on rappelle le critère :

$$\mathcal{F}^{vm} = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad (3.2)$$

Le champ de vitesse dans la matrice solide est supposé du même type que celui proposé par Rice et Tracey. Il est constitué d'un champ de vitesse correspondant à un taux de glissement plastique uniforme dans la matrice solide, $\mathbf{A}.x$, avec $\mathbf{A} = \dot{\gamma}\mathbf{\Delta}$ et un champ décrivant l'hétérogénéité de la déformation plastique due à la croissance de la cavité. Ce champ hétérogène appliqué est un champ proportionnel à $1/r^2$. Notons que la différence majeure avec l'analyse de Rice et Tracey réside dans le fait que, le champ de vitesse s'équilibre sur le bord extérieur avec le taux de déformation macroscopique, \mathbf{D} (cf. (3.1)) :

$$\underline{v}(r = b) = b \left[\mathbf{A} + C \frac{a^3}{b^3} \mathbf{1} \right] . \underline{e}_r = b \mathbf{D} . \underline{e}_r \quad (3.3)$$

Le champ de vitesse, dans la matrice solide est par conséquent entièrement déterminé. Le taux de déformation uniforme sur la matrice s'équilibre avec la partie déviatorique de \mathbf{D} , on a donc l'équivalence $\bar{\mathbf{D}} = \dot{\gamma}\mathbf{\Delta}$, tandis que pour le paramètre de croissance C , on a $C = D_h/f$. Le champ dans la matrice solide s'écrit donc :

$$\underline{v} = \left[\dot{\gamma}\mathbf{\Delta} + D_h \frac{b^3}{r^2} \mathbf{1} \right] . \underline{x} \quad (3.4)$$

Il s'ensuit que le taux de déformation dans la matrice solide est défini par :

$$\mathbf{d} = \dot{\gamma}\mathbf{\Delta} + D_h \left(\frac{b}{r} \right)^3 (\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (3.5)$$

On note par $\pi(\mathbf{d})$ la dissipation microscopique définie par $\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq}$. Rappelons maintenant l'expression de la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$ par la formule (voir [115]) :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \equiv \Pi(\mathbf{D}) = \text{Inf} \langle \pi(\mathbf{d}(\underline{x})) \rangle_{\Omega} \quad (3.6)$$

Où $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ défini la valeur moyenne prise sur la cellule élémentaire Ω . $\text{Inf} \langle \pi(\mathbf{d}(\underline{x})) \rangle_{\Omega}$ définie le minimum de $\langle \pi(\mathbf{d}(\underline{x})) \rangle_{\Omega}$ pour tout les champs incompressibles, cinématiquement admissibles considérés.

Le champ dans la matrice étant déterminé, il s'en suit que $\Pi(\mathbf{D})$ est déduit de l'intégration de $\pi(\mathbf{d})$ sur la cellule élémentaire Ω du milieu poreux :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} d_{eq} dV \quad (3.7)$$

$|\Omega|$ est le volume de la cellule élémentaire $|\Omega| = 4\pi b^3/3$.

La surface de charge est déduite de la dissipation macroscopique, $\Pi(\mathbf{D})$, par la relation classique :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \quad (3.8)$$

C'est cette démarche classique qui conduit, dans le cas d'un chargement arbitraire, à la formulation du critère de Gurson [47]. Une présentation détaillée de la construction du critère de plasticité macroscopique peut également être trouvé dans [58]. On propose d'abord de rappeler brièvement les grandes étapes de la détermination du critère macroscopique ainsi que les résultats issus de son adaptation à la plasticité monocristalline, résultats sur lesquels nous nous appuyerons par la suite pour la prise en compte de l'écroutissage.

Tout d'abord, d_{eq} , qui intervient dans l'expression de la dissipation microscopique, $\pi(\mathbf{d})$, est obtenu à partir de (3.5) :

$$d_{eq}^2 = \frac{1}{3} \dot{\gamma}^2 - 4W(\theta, \varphi) \dot{\gamma} D_h u + 4D_h^2 u^2 \quad (3.9)$$

où $u = b^3/r^3$ et $W(\theta, \varphi) = \boldsymbol{\Delta} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$. La dissipation macroscopique (3.7) s'écrit alors :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \sigma_0 \int_1^{1/f} \int_{S(r)} d_{eq} dS \frac{du}{u^2} \quad (3.10)$$

La difficulté pour l'intégration de la dissipation, réside dans la présence du terme croisé $W(\theta, \varphi)$ dans d_{eq} . En adoptant l'idée proposée par Gurson [47] on remplace $\int_{S(r)} d_{eq} dS$ par $(\int_{S(r)} d_{eq}^2 dS)^{1/2}$. Il a été démontré par Leblond et al. [57] que l'approximation proposée permet de conserver le statut de borne de l'approche, puisqu'elle consiste à utiliser l'inégalité classique suivante :

$$d_{eq} \leq \sqrt{\int_{S(r)} d_{eq}^2 dS} \quad (3.11)$$

Finalement, en notant que, $\int_{S(r)} W(\theta, \varphi) dS = 0$, on obtient la dissipation macroscopique :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[2\sqrt{3}D_h \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{2\sqrt{3}uD_h}{\dot{\gamma}} \right\} - \frac{\sqrt{\dot{\gamma}^2 + 12u^2D_h^2}}{u} \right]_1^{1/f} \quad (3.12)$$

Enfin, la surface de charge associée à $\Pi(\mathbf{D})$ est déduite de (3.8) :

$$\begin{aligned} \Sigma_h &= \frac{1}{3} \frac{\partial \Pi}{\partial D_h} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{2\sqrt{3}uD_h}{\dot{\gamma}} \right\} \right]_1^{1/f} \\ \Sigma : \mathbf{\Delta} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\gamma}} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{1 + 12u^2 \frac{D_h^2}{\dot{\gamma}^2}}}{u} \right]_1^{1/f} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les deux relations (3.13) font apparaître le rapport $D_h/\dot{\gamma}$. Elles définissent la surface de charge macroscopique par un système d'équations paramétrées par le rapport $D_h/\dot{\gamma}$. Une expression explicite du critère de plasticité macroscopique est obtenue en éliminant $D_h/\dot{\gamma}$ des relations (3.13). Par ce procédé, on montre que la surface de charge macroscopique s'écrit :

$$3 \frac{(\Sigma : \mathbf{\Delta})^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{3 \Sigma_h}{2 \sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (3.14)$$

En notant que $\sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$, la fonction de charge s'écrit encore :

$$\mathcal{F} = \frac{(\Sigma : \mathbf{\Delta})^2}{\tau_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_h}{2 \tau_0} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.15)$$

Une observation classique est que le critère (3.15), fait clairement apparaître que la porosité f affecte la plasticité macroscopique du milieu. De plus le critère (3.15) montre une dépendance avec la pression hydrostatique. Lorsque la porosité est nulle ($f = 0$), on retrouve naturellement le critère de Schmid, en plasticité parfaite, pour le système de glissement prédominant considéré. Soulignons à nouveau que le critère (3.15) constitue une borne supérieure pour la sphère creuse (soumise à du glissement simple dans le cas présent). De plus, comme pour le modèle standard de Gurson, par reproduction de motifs, c'est également une borne supérieure pour tout assemblage de sphère composite d'Hashin.

3.1.2 Prise en compte de l'anisotropie cubique du grain

Comme au second chapitre, on se propose de rendre compte de l'anisotropie cubique du grain en remplaçant le matériau de von Mises équivalent par un matériau plastiquement anisotrope régi par le critère quadratique de Hill (2.48). On rappelle que dans le cas anisotrope, la dissipation microscopique possède une forme équivalente au cas isotrope et s'écrit $\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq}$, où d_{eq} , fait intervenir le tenseur du quatrième ordre, \mathbb{H} , tel que :

$$d_{eq}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d} = \frac{2}{3} \mathbf{\Delta} : \mathbb{H} : \mathbf{\Delta} \dot{\gamma}^2 - 4W(\theta, \varphi) \dot{\gamma} D_h u + 4P(\theta, \varphi) D_h^2 u^2 \quad (3.16)$$

où les expressions de $W(\theta, \varphi)$ et $P(\theta, \varphi)$ sont données par (2.57). On se restreint au cas de l'anisotropie plastique cubique pour lequel on rappelle que σ_0 est donné par (2.70) :

$$\sigma_0 = \frac{3}{\sqrt{2h_a + h_b}} \tau_0.$$

L'intégration de la dissipation microscopique est effectuée en utilisant de nouveau l'inégalité classique (3.11). Les moyennes de $W(\theta, \varphi)$ et de $P(\theta, \varphi)$ sur la sphère unité sont données par (2.58). Finalement la moyenne de d_{eq} sur la surface unité est telle que :

$$\int_{S(r)} \sigma_0 d_{eq} dS \leq \sigma_0 \sqrt{\int_{S(r)} d_{eq}^2 dS} = \tau_0 \sqrt{\dot{\gamma}^2 + 12p_1^2 u^2 D_h^2} \quad (3.17)$$

où p_1 est donné par (2.73). A ce stade, la détermination du critère de plasticité macroscopique ne pose plus de difficulté majeure puisqu'on peut aisément se ramener au cas traité dans la section précédente en effectuant le changement de variable suivant : $D'_h = p_1 D_h$. Nous ne détaillerons pas ces calculs d'autant plus que le résultat a déjà été établi dans le contexte des matériaux plastiquement orthotrope par Benzerga et al. [7] (voir aussi [6]). Le critère de plasticité macroscopique s'écrit alors :

$$\mathcal{F} = \frac{(\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta})^2}{\tau_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_h}{p_1 \tau_0} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.18)$$

où p_1 est donné par (2.73) La modification apportée par la prise en compte de l'anisotropie plastique réside dans l'introduction du paramètre p_1 dans le cosinus hyperbolique. Sur la figure 3.2 est tracé le critère de plasticité (3.18) dans le cas isotrope, et dans le cas anisotrope pour deux rapports d'anisotropie plastique particuliers (correspondant à $h_b = 0$ et à $h_a = 0$) et pour une porosité $f = 0.05$. Les effets de l'anisotropie se distinguent clairement, en particulier pour les fortes valeurs de la pression hydrostatique.

3.1.3 Lois d'évolution

L'expression du taux de déformation plastique est déduite de la loi de normalité correspondant à \mathcal{F} définie par (3.18) :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta})} = 2\dot{\Lambda} \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}}{\tau_0^2} \\ D_h &= \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_h} = \dot{\Lambda} \frac{f}{\sqrt{3} p_1 \tau_0} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2 p_1} \frac{\Sigma_h}{\tau_0} \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\dot{\Lambda}$ est le multiplicateur plastique dont nous allons préciser l'expression. A partir de la première relation dans (3.19), on a $\text{sign}(\dot{\gamma}) = \text{sign}(\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta})$ (puisque $\dot{\Lambda} > 0$). $\dot{\Lambda}$ est déterminé en fonction du taux de glissement plastique cumulé $\dot{\gamma}_{cum} = |\dot{\gamma}|$ à partir de la première relation dans (3.19) :

$$\dot{\Lambda} = \dot{\gamma} \frac{\tau_0^2}{2\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}} = \dot{\gamma}_{cum} \frac{\tau_0^2}{2|\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}|} \quad (3.20)$$

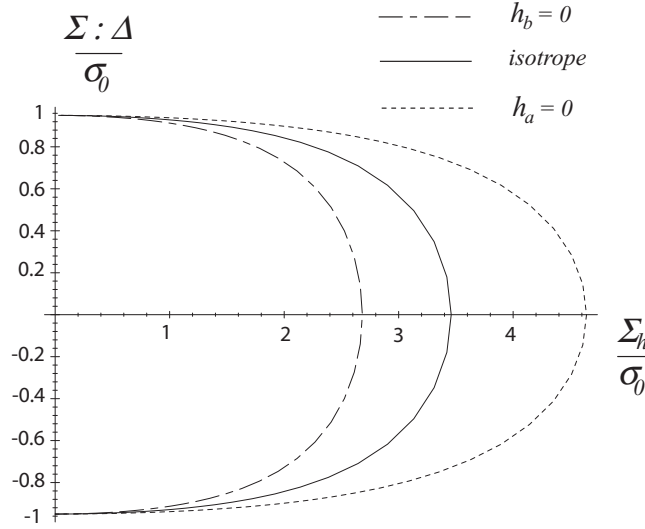


FIG. 3.2 – Critère de plasticité pour différents rapports d'anisotropie

La loi d'évolution de la déformation plastique de volume, D_h , est alors obtenue en reportant l'expression du multiplicateur plastique (3.20) dans la seconde relation de (3.19) :

$$D_h = f \frac{1}{2\sqrt{3}p_1} \frac{\tau_0}{|\Sigma : \Delta|} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_h}{2p_1 \tau_h} \right\} \dot{\gamma}_{cum} \quad (3.21)$$

Concernant la loi d'évolution de l'endommagement, \dot{f} , celle-ci reste inchangée ; \dot{f} résultant de la nucléation et de la croissance de microcavités (2.15) :

$$\dot{f} = \dot{f}_a + \dot{f}_g \quad (3.22)$$

f_a est fonction du glissement plastique cumulé tandis que f_g est déduit de la condition d'incompressibilité de la matrice :

$$\dot{f}_a = A_0 k_a \left[1 - \exp(-k_a \gamma_{cum}) \right] \dot{\gamma}_{cum}; \quad \dot{f}_g = 3(1 - f_g) D_h \simeq 3 D_h \quad (3.23)$$

Dans la perspective de son application aux problèmes de fatigue à grand nombre de cycles, ce critère de plasticité doit être étendu à la prise en compte de l'écroutissage, ce qui fait l'objet de la section qui suit.

3.2 Prise en compte de l'écroutissage

3.2.1 Méthodologie

On se propose maintenant d'étendre les critères précédents (3.15) et (3.18), établis dans le cadre de la plasticité parfaite, à la prise en compte de l'écroutissage isotrope et

cinématique.

L'origine de cet écouissage est double. La première est due à l'activité plastique sur le plan de glissement prédominant et associé au champ uniforme sur la cellule élémentaire, $\dot{\gamma}\mathbf{\Delta}$. La seconde est due à l'activité plastique du champ hétérogène décrivant l'expansion de la cavité. Gurson a proposé une extension de son critère au cas de l'écouissage isotrope [46], en introduisant une variable ε^M qui représente la déformation plastique effective de la cellule élémentaire. Une extension à l'écouissage cinématique a ensuite été proposée par Mear et Hutchinson [74] en suivant une démarche similaire à celle proposée par Gurson. Toutefois, ces extensions du critère de Gurson, ne s'intègrent plus dans le cadre micromécanique qui a permis d'établir le critère initial. Plusieurs critiques ont été d'ailleurs émises sur l'extension proposée par Gurson [57]. D'une part, l'hétérogénéité de la déformation dans la matrice est négligée. D'autre part, dans le cas d'un chargement purement hydrostatique la solution proposée ne correspond pas à la solution exacte qui sera précisée ultérieurement. De plus Mear et Hutchinson [74] puis Perrin [95] ont noté, dans l'extension proposée par Gurson une surestimation de la vitesse de croissance des cavités, visiblement liée au fait que l'hétérogénéité de la déformation ait été négligée. En effet, la déformation plastique, qui est localisée autour de la cavité, crée un durcissement plastique ralentissant l'expansion de cette dernière, dont on ne peut rendre compte en remplaçant la déformation réelle par une déformation effective homogène.

Une extension du critère original de Gurson a, par la suite, été donc proposée par Leblond et al. [57] en respectant le cadre micromécanique initial.

Considérons le problème général qui consiste à déterminer la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$, définie par :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{eq} d_{eq} \, dV \quad (3.24)$$

où σ_{eq} dépend du niveau de déformation dans la matrice solide et qui, de plus, est fonction des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . L'idée proposée dans [57] consiste à d'identifier les paramètres d'écouissage à partir de solutions exactes particulières de (3.24). Ces solutions exactes correspondent à des trajets de contraintes macroscopiques particuliers tels que le trajet purement déviatorique ($\Sigma_h = 0$) et le trajet purement hydrostatique ($\bar{\Sigma} = 0$). La surface de charge proposée, construite de manière quelque peu heuristique, doit permettre de retrouver les solutions particulières pour chacun des trajets précités.

En suivant ici cette démarche, on suppose que l'expression du critère de plasticité macroscopique avec prise en compte de l'écouissage isotrope et cinématique s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} B_h}{2 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.25)$$

où $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}$, \mathbf{X} est la variable d'écouissage cinématique définissant le centre du domaine élastique. \mathbf{X} se décompose en une partie hydrostatique X_h ($X_h = \text{tr}(\mathbf{X})/3$) et une composante de glissement sur le système prédominant, notée X_d et définie par : $X_d = 2\mathbf{X} : \mathbf{\Delta}$. La prise en compte de l'écouissage isotrope a été effectuée en remplaçant le seuil de plasticité τ_0 par deux paramètres τ_d et τ_h , définis par : $\tau_d = \tau_0 + R_d$ et $\tau_h = \tau_0 + R_h$.

Les quantités R_d et R_h sont les deux variables d'écroissage isotrope. Le problème se réduit donc à la détermination des paramètres X_d , X_h , R_d et R_h .

Comme nous l'avons précisé précédemment, l'expression des paramètres d'écroissage va être déterminée en considérant les deux trajets de chargement macroscopiques précités. Dans un premier temps examinons le cas de l'écroissage isotrope.

3.2.2 Prise en compte de l'écroissage isotrope

On considère dans cette sous section le cas de l'écroissage isotrope seul ; on posera donc $\mathbf{X} = 0$. La surface de charge macroscopique s'écrit alors :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}}{\tau_0 + R_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_h}{\tau_0 + R_h} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.26)$$

Dans lequel il s'agit de déterminer R_d et R_h . Sous certaines hypothèses qui seront détaillées ci-dessous, on montre que :

$$R_d = R_0 \gamma_{cum} + \frac{h R_0}{1 - f} \xi_{cum}^d \quad (a) \quad (3.27)$$

$$R_h = h R_0 \gamma_{cum} + R_0 \xi_{cum}^h \quad (b)$$

où ξ_{cum}^d et ξ_{cum}^h sont défini par :

$$\xi_{cum}^d = \int_1^{1/f} \gamma_{cum}^E \frac{du}{u^2} \quad (a) \quad (3.28)$$

$$\xi_{cum}^h = \int_1^{1/f} \gamma_{cum}^E \frac{du}{u} \quad (b)$$

Preuve :

Considérons le cas où le trajet de contrainte est purement déviatorique, c'est à dire $\Sigma_h = 0$, alors la surface (3.26) se réduit à :

$$|\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}| = (1 - f)(\tau_0 + R_d) \quad (3.29)$$

Dans ce cas particulier, le taux de déformation dans la matrice plastique est uniforme et correspond à du glissement simple, $\mathbf{d} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\Delta}$. Le taux de déformation macroscopique s'identifie avec le taux de déformation microscopique $\mathbf{D} = \mathbf{d} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\Delta}$. D'une part, la dissipation macroscopique est définie par $\Pi(\mathbf{D}) = |\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta}| \dot{\gamma}_{cum}$, d'autre part la dissipation microscopique s'écrit $\pi(\mathbf{d}) = |\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta}| \dot{\gamma}_{cum}$. Il s'en suit que $\Pi(\mathbf{D})$ est déduit de (3.24), et $\dot{\gamma}$ étant uniforme sur la matrice solide, on a :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta} dV \quad (3.30)$$

Cette dernière relation fait apparaître la cission sur le plan de glissement prédominant, $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta}$. Dans le cas de plasticité parfaite, on rappelle que $|\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta}| = \tau_0$ si bien que (3.30)

s'écrit alors $|\Sigma : \Delta| = (1 - f)\tau_0$. Dans le cas d'un écroissance isotrope linéaire, $\sigma : \Delta$ dépend du niveau de déformation via la loi de Schmid, $|\sigma : \Delta| = \tau_0 + R_0\gamma_{cum}$. γ_{cum} étant uniforme sur la matrice solide on en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\Sigma : \Delta &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} (\tau_0 + R_0\gamma_{cum}) \text{sign}(\sigma : \Delta) dV \\ &= (1 - f)(\tau_0 + R_0\gamma_{cum}) \text{sign}(\sigma : \Delta)\end{aligned}\quad (3.31)$$

Des deux relations (3.29) et (3.31), on déduit l'expression de R_d :

$$R_d = R_0\gamma_{cum} \quad (3.32)$$

Le résultat obtenu est trivial, puisque l'on retrouve à l'échelle macroscopique et à pression hydrostatique nulle, la loi de Schmid pour une sphère creuse. Ceci est bien entendu dû au fait que, pour le trajet de chargement purement déviatorique, la déformation sur la matrice est uniforme.

Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, la situation est différente puisque le champ de déformation associé est hétérogène. La surface de charge macroscopique (3.26), pour ce type de trajet, se réduit à :

$$|\Sigma_h| = -\frac{2}{\sqrt{3}}(\tau_0 + R_h) \ln(f) \quad (3.33)$$

La dissipation microscopique, pour le matériau de von Mises équivalent, s'écrit : $\pi(\mathbf{d}) = \sigma_{eq}d_{eq}^E$, où d_{eq}^E est défini par :

$$d_{eq}^E = 2 \left(\frac{b}{r}\right)^3 |D_h| \quad (3.34)$$

La dissipation macroscopique, quant à elle, est définie par $\Pi(\mathbf{D}) = 3\Sigma_h D_h = 3|\Sigma_h||D_h|$, de sorte qu'en reprenant (3.24), on a :

$$3|\Sigma_h| = 2 \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \sigma_{eq} \left(\frac{b}{r}\right)^3 dV = 2 \int_1^{1/f} \langle \sigma_{eq} \rangle_{S(r)} \frac{du}{u} \quad (3.35)$$

où $u = \left(\frac{b}{r}\right)^3$. σ_{eq} dépend du niveau de déformation dans la matrice solide plastique, ε_{eq}^E où ε_{eq}^E est défini par :

$$\varepsilon_{eq}^E = \int_0^t d_{eq}^E(t') dt' = 2 \int_0^t \frac{b^3}{r^3} |D_h| dt \quad (3.36)$$

Or, la relation qui lie les quantités σ_{eq} et ε_{eq}^E n'est pas connue pour le matériau de von Mises équivalent, puisque seule est définie la loi d'écroissance du monocristal.

Néanmoins, par souci de simplicité supposons qu'il existe une relation affine entre σ_{eq} et ε_{eq}^E :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 + R_0^* \varepsilon_{eq}^E \quad (3.37)$$

où R_0^* reste indéterminé, sa valeur sera précisé par la suite. Notons qu'un tel choix est toutefois guidé par le fait que l'écroissance du monocristal est lui-même de type isotrope linéaire. Il s'en suit alors qu'en injectant (3.37) dans (3.35), et en notant que $\langle \varepsilon_{eq}^E \rangle_{S(r)} = \varepsilon_{eq}^E$ (puisque ε_{eq}^E est indépendant des variables θ et φ), on a :

$$3|\Sigma_h| = -2\sigma_0 \ln(f) + 2R_0^* \int_1^{1/f} \varepsilon_{eq}^E \frac{du}{u} \quad (3.38)$$

L'identification de R_h à partir des relations (3.33) et (3.38) donne :

$$R_h = -\frac{R_0^*}{\sqrt{3} \ln(f)} \int_1^{1/f} \varepsilon_{eq}^E \frac{du}{u} \quad (3.39)$$

ε_{eq}^E est connue dans la relation (3.39) puisque déduite de (3.36). La seule inconnue à déterminer est donc R_0^* .

Rappelons que le comportement du monocristal, mis en évidence par Kysar et al. [52], se caractérise par du glissement simple dans des secteurs angulaires, tel que nous l'avons décrit dans le chapitre précédent. En notant γ^E le glissement plastique associé, il vient que le taux de déformation s'écrit $\mathbf{d} = \dot{\gamma}^E \mathbf{\Delta}$. La dissipation microscopique s'écrit alors dans chacun de ces secteurs de glissement simple, lorsque l'écroissance est de type isotrope :

$$\pi(\mathbf{d}) = (\tau_0 + R_0 \gamma_{cum}^E) \dot{\gamma}_{cum}^E \quad (3.40)$$

Tandis que pour le matériau de von Mises équivalent on a :

$$\pi(\mathbf{d}) = (\sigma_0 + R_0^* \varepsilon_{eq}^E) d_{eq}^E \quad (3.41)$$

Considérons le cas de la plasticité parfaite $R_0 = R_0^* = 0$, l'identification de $\dot{\gamma}_{cum}^E$ à partir des relations (3.40) et (3.41) donne (en utilisant $\sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$) :

$$\dot{\gamma}_{cum}^E = \sqrt{3} d_{eq}^E = 2\sqrt{3} \left(\frac{b}{r}\right)^3 |D_h| \quad (3.42)$$

De même, puisque $\text{sign}(\dot{\gamma}^E) = \text{sign}(D_h)$, $\dot{\gamma}^E$, est défini par :

$$\dot{\gamma}^E = 2\sqrt{3} \left(\frac{b}{r}\right)^3 D_h \quad (3.43)$$

soit encore par intégration de (3.42) et (3.43) :

$$\begin{aligned} \gamma^E &= 2\sqrt{3} \int_0^t \frac{b^3}{r^3} D_h dt' \\ \gamma_{cum}^E &= \sqrt{3} \varepsilon_{eq}^E = 2\sqrt{3} \int_0^t \frac{b^3}{r^3} |D_h| dt' \end{aligned} \quad (3.44)$$

En injectant ces expressions dans (3.40) et en identifiant avec (3.41) on obtient :

$$R_0^* = 3R_0 \quad (3.45)$$

Il s'en suit que R_h est défini par (3.39), dans laquelle on pose $R_0^* = 3R_0$ conduit à :

$$R_h = -\frac{R_0}{\ln(f)} \xi_{cum}^h; \quad \text{avec} \quad \xi_{cum}^h = \int_1^{1/f} \gamma_{cum}^E \frac{du}{u} \quad (3.46)$$

Notons que, les formules (3.32) et (3.46) établies respectivement pour R_d et R_h , sont des approximations qui ont été obtenues dans deux cas particuliers ; le premier correspond à une déformation, sur la matrice solide, purement uniforme, le second correspond à une déformation hétérogène. Hormis ces deux cas qui sont associés à deux trajets de contrainte particuliers, il est clair que, dans le cas d'un chargement quelconque, le champ hétérogène a un impact sur R_d tandis que le champ uniforme en aura également un sur R_h . On propose donc d'effectuer une correction pour prendre en compte ces effets. Pour cela on remplace dans (3.30) $\sigma : \Delta$, non pas par $\tau_0 + R_0 \gamma_{cum}$ mais, par $\tau_0 + R_0 \gamma_{cum} + h R_0 \gamma_{cum}^E$ (où h est le coefficient d'écroissance latent) qui prend en compte l'effet de la déformation hétérogène due à la croissance de la cavité sur le niveau d'écroissance sur le plan de glissement prédominant. R_d est alors défini par :

$$R_d = R_0 \gamma_{cum} + \frac{h R_0}{1-f} \xi_{cum}^d \quad (3.47)$$

avec :

$$\xi_{cum}^d = \int_1^{1/f} \gamma_{cum}^E \frac{du}{u^2} \quad (3.48)$$

De la même manière on souhaite rendre compte de l'effet du champ uniforme sur R_h . Il s'agit donc de remplacer dans (3.35) σ_{eq} , non pas par $\sqrt{3}(\tau_0 + R_0 \gamma_{cum}^E)$ mais, par $\sqrt{3}(\tau_0 + R_0 \gamma_{cum}^E + h R_0 \gamma_{cum})$. Ceci implique pour R_h :

$$R_h = h R_0 \gamma_{cum} - \frac{R_0}{\ln(f)} \xi_{cum}^h \quad (3.49)$$

où l'expression de ξ_{cum}^h reste inchangée. On notera que lorsque $h = 0$, c'est à dire en négligeant l'écroissance latent, les expressions de R_d et R_h précédemment calculées, (3.32) et (3.46), sont retrouvées.

3.2.3 Prise en compte de l'écroissance cinématique

La prise en compte de l'écroissance cinématique est effectuée de manière similaire au cas de l'écroissance isotrope. On se restreint à une loi d'écroissance cinématique linéaire tel qu'il a été décrit dans le second chapitre. L'écroissance isotrope est supposé nul, le critère de plasticité macroscopique (3.25) s'écrit :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\Sigma : \Delta - X_d}{\tau_0} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_h - X_h}{2 \tau_0} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.50)$$

Dans lequel il s'agit de déterminer R_d et R_h . Sous certaines hypothèses qui seront détaillées ci-dessous, on montre que :

$$\begin{aligned} X_d &= (1 - f)c\gamma \quad (a) \\ X_h &= \frac{2c}{\sqrt{3}}\xi^h \quad (b) \end{aligned} \quad (3.51)$$

où ξ^h sont défini par :

$$\xi^h = \int_1^{1/f} \gamma^E \frac{du}{u} \quad (3.52)$$

Preuve :

On considère dans un premier temps le cas du chargement purement déviatorique pour lequel la surface de charge se réduit à :

$$\Sigma : \Delta = \tau_0 \text{sign}(\Sigma : \Delta - X_d) + X_d \quad (3.53)$$

Le niveau de plasticité sur le plan de glissement prédominant est donné à partir de la loi de Schmid :

$$\sigma : \Delta = \tau_0 \text{sign}(\sigma : \Delta - c\gamma) + c\gamma \quad (3.54)$$

$\Sigma : \Delta$ est déterminé à partir de (3.30) dans lequel on remplace $\sigma : \Delta$ par son expression donnée par (3.54) ; on obtient :

$$\Sigma : \Delta = (1 - f)\tau_0 \text{sign}(\sigma : \Delta - c\gamma) + (1 - f)c\gamma \quad (3.55)$$

qui, par identification avec (3.53), donne pour X_d :

$$X_d = (1 - f)c\gamma \quad (3.56)$$

Considérons maintenant le cas du chargement purement hydrostatique, la surface de charge macroscopique (3.50) se réduit alors à :

$$\Sigma_h = X_h - \frac{2}{\sqrt{3}}\tau_0 \ln(f) \text{sign}(\Sigma_h - X_h) \quad (3.57)$$

Montrons que $\text{sign}(\Sigma_h - X_h) = \text{sign}(D_h)$; pour cela utilisons la loi de normalité associée à (3.50) :

$$3D_h = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_h} = \dot{\Lambda} f \frac{\sqrt{3}}{\tau_0} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_h - X_h}{\tau_0} \right\} \quad (3.58)$$

Puisque $\dot{\Lambda} \geq 0$, l'égalité $\text{sign}(\Sigma_h - X_h) = \text{sign}(D_h)$ est bien vérifiée.

Dans le cas d'un écrouissage cinématique, la cission microscopique τ est définie dans

chaque secteur angulaire par $\tau = \tau_0 \text{sign}(\dot{\gamma}^E) + c\gamma^E$. L'égalité des dissipations pour le monocristal et le matériau de von Mises équivalent s'écrit alors :

$$\sigma_{eq} d_{eq}^E = (\tau_0 \text{sign}(\dot{\gamma}^E) + c\gamma^E) \dot{\gamma}^E = 2\sqrt{3}(\tau_0 + c\gamma^E \text{sign}(D_h)) \left(\frac{b}{r}\right)^3 |D_h| \quad (3.59)$$

qui, injecté dans (3.24), donne :

$$|\Sigma_h| = -\frac{2}{\sqrt{3}}\tau_0 \ln(f) + \frac{2c}{\sqrt{3}} \text{sign}(D_h) \int_1^{1/f} \gamma^E \frac{du}{u} \quad (3.60)$$

L'identification de (3.60) avec (3.57) donne :

$$X_h = \frac{2c}{\sqrt{3}} \xi^h \quad (3.61)$$

où ξ^h est défini par :

$$\xi^h = \int_1^{1/f} \gamma^E \frac{du}{u} \quad (3.62)$$

La détermination des paramètres d'écouissage R_d , R_h et X_h fait intervenir différentes intégrales (3.28), (3.52) qui peuvent s'avérer pénalisantes pour l'application du modèle et surtout pour la détermination du critère de fatigue. On propose donc dans la section qui suit d'établir une expression analytique pour chacune de ces intégrales et donc de R_d , R_h et X_h .

3.2.4 Expression analytique des paramètres d'écouissage

On considère une cavité de porosité initiale f_0 susceptible de croître sous l'activité plastique de la matrice à un état actuel noté f . On introduit alors les rayons intérieurs et extérieurs initiaux, a_0 et b_0 , et les rayons intérieurs et extérieurs actuels, a et b . On définit également les coordonnées initiales et actuelles par r_0 et r . Les porosités initiale et actuelle sont donc définies par :

$$f_0 = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^3 ; \quad f = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (3.63)$$

La détermination des paramètres d'écouissage requiert dans un premier temps celle de γ^E . Celle ci est donnée par :

$$\gamma^E = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln [1 - 3uE_h] \quad (3.64)$$

où $E_h = \int_0^t D_h(t') dt'$ et $u = (b/r)^3$.

Démonstration : Pour montrer ce résultat, utilisons la condition d'incompressibilité de la matrice qui implique :

$$r^2 \dot{r} = b^2 \dot{b} \quad \Rightarrow \quad r^3 - r_0^3 = b^3 - b_0^3 \quad (3.65)$$

En remarquant ensuite que le taux de déformation macroscopique est défini par $D_h = \dot{b}/b$, soit encore par intégration :

$$\frac{b_0}{b} = \exp(-E_h) \quad \Rightarrow \quad \frac{b_0^3}{b^3} = \exp(-3E_h) \simeq 1 - 3E_h \quad (3.66)$$

$\dot{\gamma}^E$ s'écrit en utilisant $D_h = \dot{b}/b$:

$$\dot{\gamma}^E = 2\sqrt{3}D_h \frac{b^3}{r^3} = 2\sqrt{3} \frac{\dot{r}}{r} \quad (3.67)$$

γ^E est obtenu par intégration de $\dot{\gamma}^E$ entre l'état initial et l'état actuel :

$$\gamma^E = 2\sqrt{3} \int_0^t \frac{\dot{r}}{r} dt' = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left\{ \frac{r^3}{r_0^3} \right\} \quad (3.68)$$

Enfin en combinant (3.65) avec (3.66) on obtient $r_0^3 = r^3 + 3b^3E_h$. Injectant cette expressions dans (3.68), on obtient l'expression donnée par (3.64), ce qui achève la démonstration.

γ^E étant explicité, il s'agit maintenant de déterminer ξ^h , ξ_{cum}^h et ξ_{cum}^d qui apparaissent dans les définitions de R_d , R_h et X_h . La quantité ξ^h est définie par :

$$\xi^h = -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{1/f} \ln(1 - 3uE_h) \frac{du}{u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{dilog}(1 - 3uE_h) \right]_1^{1/f} \quad (3.69)$$

où dilog est la fonction dilogarithme définie par :

$$\text{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln(x')}{1-x'} dx' \quad (3.70)$$

La fonction $\text{dilog}(x)$, représentée sur la figure (3.3), est une fonction décroissante, nulle en $x = 1$ et qui prend la valeur $\pi^2/6$ lorsque $x = 0$. En notant que $f_g \simeq 3E_h$, la quantité ξ^h s'écrit alors :

$$\xi^h = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{dilog} \left(\frac{f_a}{f} \right) - \text{dilog}(1 - f_g) \right] \quad (3.71)$$

Lorsque la croissance de porosité est due au mécanisme de nucléation uniquement, c'est à dire que $f_g = 0$ (correspondant à un chargement macroscopique purement déviatorique) alors $\xi^h = 0$. On note que seul le mécanisme de croissance est à l'origine d'une activité plastique autour de la cavité et participe donc à l'écroissage. Notons également que la condition $f_a = 0$ dans (3.71) n'a aucun sens, puisque sans terme de nucléation, il ne peut y avoir de croissance d'endommagement et par conséquent on a aussi $f = 0$.

Explicitons maintenant l'expression de ξ_{cum}^h , en reprenant (3.48) :

$$\xi_{cum}^h = \int_1^{1/f} \int_0^t |\dot{\gamma}^E| dt' \frac{du}{u} \quad (3.72)$$

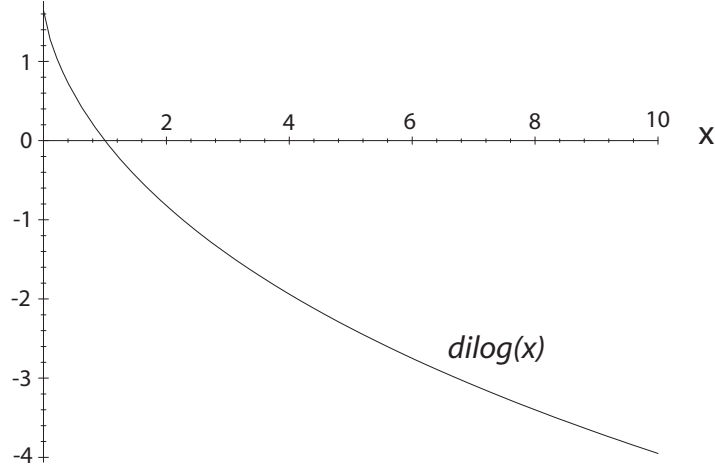


FIG. 3.3 – Représentation graphique de la fonction dilogarithme

où l'on rappelle que $|\dot{\gamma}^E| = \dot{\gamma}^E \text{sign}(D_h)$. En supposant $\dot{\gamma}^E > 0$ (soit encore $D_h > 0$), par exemple, on a $\xi_{cum}^h = \xi_h$, si $D_h < 0$ on aura $\xi_{cum}^h = -\xi_h$. De manière plus générale, considérons deux instants t et $t + \Delta t$, entre lesquels D_h ne change pas de signe, on a alors :

$$\xi_{cum}^h(t + \Delta t) - \xi_{cum}^h(t) = (\xi^h(t + \Delta t) - \xi^h(t)) \text{sign}(D_h) \quad (3.73)$$

Soit encore, en passant à la limite :

$$\dot{\xi}_{cum}^h = \dot{\xi}^h \text{sign}(D_h) \quad (3.74)$$

Clairement ξ_{cum}^h apparaît donc comme une valeur cumulée de ξ^h sur le trajet de chargement.

Il reste maintenant à expliciter la valeur de ξ_{cum}^d , qui, comme pour la valeur de ξ_{cum}^h , apparaît comme être la valeur cumulée d'une variable que l'on notera ξ^d et définie par :

$$\begin{aligned} \xi^d &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{1/f} \ln(1 - u\bar{w}) \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1 - 3uE_h}{u} \ln(1 - 3uE_h) + 3E_h \ln(u) \right]_1^{1/f} \end{aligned} \quad (3.75)$$

En notant que $f_g = 3E_h$, ξ^d s'écrit :

$$\xi^d = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ f_a \ln(f_a) - f \ln(f) - (1 - f_g) \ln(1 - f_g) \right\} \quad (3.76)$$

On notera que pour $f = f_a$, c'est à dire pour $f_g = 0$, on retrouve un résultat équivalent à celui obtenu pour ξ^h , c'est à dire que l'on a $\xi^d = 0$.

En considérant de faibles valeurs de la porosité ($f \ll 1$), les relations (3.71) et (3.76) peuvent être approchées par :

$$\begin{aligned} \xi^h &\simeq \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{dilog} \left(\frac{f_a}{f} \right) - f_g \right] \\ \xi^d &\simeq \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ f_a \ln(f_a) - f \ln(f) + f_g \right\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Sur les figures 3.4 et 3.5 sont représentées les valeurs de ξ^d et ξ^h pour une porosité $f = 0.1$ en fonction du rapport f_g/f pour les solutions exactes (3.4) et (3.5) ainsi que les valeurs approchées, données par (3.77). L'approximation proposée semble tout à fait satisfaisante.

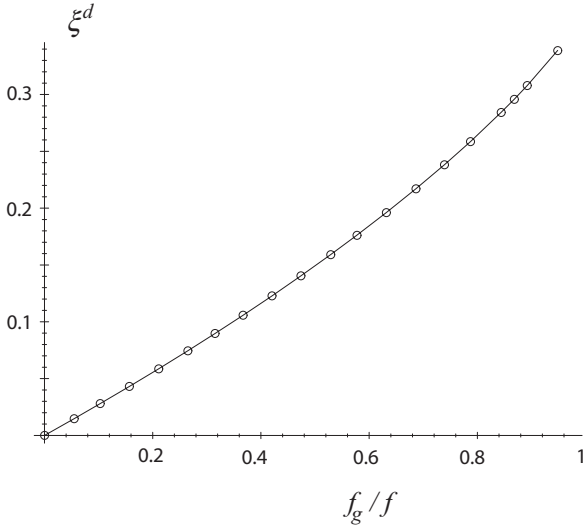


FIG. 3.4 – Valeur de ξ^d pour une porosité $f = 0.1$ en fonction du rapport f_g/f pour la solution exacte (3.4) (cercles) et la solution approchée (3.77) (ligne continue).

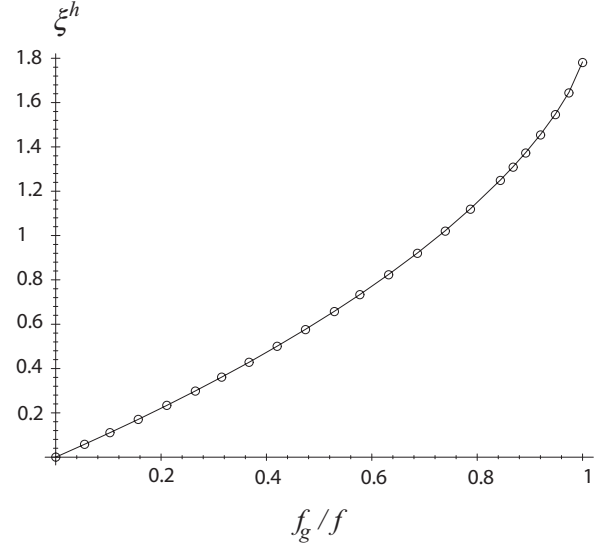


FIG. 3.5 – Valeur de ξ^h pour une porosité $f = 0.1$ en fonction du rapport f_g/f pour la solution exacte (3.5) (cercles) et la solution approchée (3.77) (ligne continue).

3.2.5 Prise en compte de l'anisotropie dans la loi d'érouissage

On se propose maintenant de mesurer l'impact de l'anisotropie plastique sur la loi d'érouissage. Il ne s'agit pas ici de reconduire l'analyse effectuée dans les deux derniers paragraphes dans le cas d'une matrice régie par le critère de Hill, car la prise en compte de l'anisotropie plastique peut être effectuée de manière simple. En effet, dans le cas anisotrope, il s'agit de déterminer l'expression de γ_E , or dans le cas d'une pression hydrostatique la dissipation microscopique pour le matériau de Hill est équivalent à celle de von Mises au facteur p_1 près. Il s'en suit en reprenant la démarche décrite dans la section 3.2.2 que $\dot{\gamma}_{cum}^E$ (3.42) est défini par :

$$\dot{\gamma}_{cum}^E = 2p_1\sqrt{3}\frac{b^3}{r^3}|D_h| \quad (3.78)$$

Les lois d'érouissage, qui sont établies en suivant la même démarche décrite dans les sections précédentes conduit dans le cas anisotrope à :

$$\begin{aligned} R_d &= R_0\gamma_{cum} + hR_0\xi_{cum}^d; & R_h &= hR_0\gamma_{cum} + R_0\xi_{cum}^h \\ X_d &= (1-f)c\gamma; & X_h &= \frac{2p_1c}{\sqrt{3}}\xi^h \end{aligned} \quad (3.79)$$

où ξ^d et ξ^h sont maintenant définis par :

$$\begin{aligned}\xi^h &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{dilog} \left(\frac{f_a}{f} \right) - f_g \right] \\ \xi^d &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} \left\{ f_a \ln(f_a) - f \ln(f) + f_g \right\}\end{aligned}\quad (3.80)$$

et ξ_{cum}^d , ξ_{cum}^h sont les valeurs cumulées de ξ^d et ξ^h .

3.2.6 Lois d'évolution

On s'intéresse dans cette section aux lois d'évolution associées à la surface de charge macroscopique définie par \mathcal{F} . On se replace dans cette section à l'échelle du monocristal. Rappelons que dans le cas général anisotrope :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} B_h}{2p_1 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.81)$$

où $\mathbf{B} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$. La loi de normalité s'écrit :

$$\mathbf{d} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\gamma} = 2\dot{\Lambda} \frac{\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}}{\tau_d^2} \\ d_h = \dot{\Lambda} \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{3}p_1\tau_h} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} B_h}{2p_1 \tau_h} \right\} \end{cases} \quad (3.82)$$

$\dot{\Lambda}$ est le multiplicateur plastique déduit de la première relation de (3.82) :

$$\dot{\Lambda} = \dot{\gamma} \frac{\tau_d^2}{2\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}} = \dot{\gamma}_{cum} \frac{\tau_d^2}{2|\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}|} \quad (3.83)$$

La loi d'évolution de la déformation plastique de volume, ε_h^p , est alors obtenue en remplaçant, dans (3.82), le multiplicateur plastique par son expression (3.20) :

$$d_h = f \frac{1}{2\sqrt{3}p_1 \tau_h |\mathbf{B} : \mathbf{\Delta}|} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} B_h}{2p_1 \tau_h} \right\} \dot{\gamma}_{cum} \quad (3.84)$$

Les lois d'évolution des paramètres d'écouissage isotrope et cinématique sont données par :

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_d &= R_0 \left\{ \dot{\gamma}_{cum} + \frac{h}{1-f} \dot{\xi}_{cum}^d + \frac{h\dot{f}}{(1-f)^2} \xi_{cum}^d \right\} \\ \dot{\tau}_h &= R_0 \left\{ h\dot{\gamma}_{cum} - \frac{1}{\ln(f)} \dot{\xi}_{cum}^h + \frac{\dot{f}}{f \ln(f)^2} \xi_{cum}^h \right\} \\ \dot{X}_d &= c\dot{\gamma}; \quad \dot{X}_h = \frac{2p_1 c}{\sqrt{3}} \dot{\xi}^h\end{aligned}\quad (3.85)$$

où $\dot{\xi}_{cum}^d = |\dot{\xi}^d|$ et $\dot{\xi}_{cum}^h = |\dot{\xi}^h|$. Les quantités $\dot{\xi}^d$ et $\dot{\xi}^h$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^d &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} \left[\dot{f}_a \ln(f_a) - \dot{f} \ln(f) \right] \\ \dot{\xi}^h &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\dot{f}_a}{f_g} \ln \left(\frac{f_a}{f} \right) \left\{ \frac{\dot{f}_a}{f_a} - \frac{\dot{f}}{f} \right\} - \dot{f}_g \right]\end{aligned}\quad (3.86)$$

Enfin \dot{f} , \dot{f}_g et \dot{f}_a s'expriment sous la forme :

$$\dot{f} = \dot{f}_a + \dot{f}_g; \quad \dot{f}_g = 3\dot{d}_h; \quad \dot{f}_a = A_0 k_a (1 - \exp(-k_a)) \dot{\gamma}_{cum} \quad (3.87)$$

où \dot{d}_h est donné par (3.84).

3.3 Détermination de l'état adapté dans le cas des chargements affines

3.3.1 Passage micro-macro

Rappelons que la détermination du critère de fatigue requiert l'évaluation des variables locales γ_{cum} et ε_h^p , celles-ci étant déterminées par intégration des lois d'évolution dans lesquelles il s'agit d'exprimer la contrainte locale en fonction du chargement macroscopique imposé. Plus précisément, on s'intéresse à la cission et à la pression hydrostatique locale, τ et σ_h , données par les relations (2.91). La transposition du critère de plasticité (3.81) et des lois d'évolution à l'échelle macroscopique est effectuée en redéfinissant le tenseur \mathbf{B} tenant compte de l'écouissage :

$$\mathbf{B} = \mathbb{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{X} \quad (3.88)$$

Le terme $\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p$ est comparable à un terme d'écouissage cinématique si bien que l'on peut introduire \mathbf{X}^* tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbb{A} : \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}^* \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}^* = \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{X} \quad (3.89)$$

La transposition de la loi de plasticité et d'endommagement à l'échelle macroscopique consiste donc tout simplement à remplacer l'écouissage cinématique réel \mathbf{X} par un écouissage apparent \mathbf{X}^* . Cet écouissage cinématique dépend du choix du modèle d'homogénéisation (Sachs, Lin-Taylor et Kröner). La surface de charge macroscopique s'écrit alors :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\Delta} - X_d^*}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_h - X_h^*}{2p_1 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 \quad (3.90)$$

avec :

$$X_d^* = ((1-f)c + \mu^*)\gamma; \quad X_h^* = 3k^* \varepsilon_h^p + \frac{2p_1 c}{\sqrt{3}} \xi^h \quad (3.91)$$

3.3.2 Application de la loi de comportement aux trajets de chargement affines

On s'intéresse, dans cette section, tout particulièrement à l'intégration numérique des lois d'évolution dans le cas d'un chargement affine macroscopique. Notons toutefois que la démarche proposée permet a priori d'intégrer tout type de chargement cyclique périodique. Dans le cas d'un chargement affine macroscopique, le tenseur des contraintes peut être donné en tout point i du trajet de chargement par :

$$\Sigma^i = \Sigma_a \sin\left(\frac{2i\pi}{M}\right) + \Sigma_m \quad (3.92)$$

M est un entier ; il s'agit en fait d'un paramètre pour l'intégration numérique qui correspond au nombre de points d'intégration par cycles. La composante de cisaillement et la composante hydrostatique sont alors données par :

$$\begin{cases} \Sigma^i : \Delta = \Sigma_a : \Delta \sin\left(\frac{2i\pi}{M}\right) + \Sigma_m : \Delta \\ \Sigma_h^i = \Sigma_{h,a} \sin\left(\frac{2i\pi}{M}\right) + \Sigma_{h,m} \end{cases} \quad (3.93)$$

$\Sigma_a : \Delta$, $\Sigma_m : \Delta$, $\Sigma_{h,a}$ et $\Sigma_{h,m}$ sont les quatre paramètres qui définissent le trajet de chargement. $\Sigma_a : \Delta$ et $\Sigma_m : \Delta$ dépendent de l'orientation du grain, et, pour la détermination du critère de fatigue, un travail préalable consisterait, pour un chargement macroscopique donné, à déterminer l'orientation du grain le plus défavorablement orienté. L'objectif ici est de déterminer l'état adapté à partir de la seule connaissance de ces quatre paramètres, dans les applications que nous allons proposer par la suite. Il s'agira donc tout simplement d'imposer des valeurs à ces paramètres.

L'intégration numérique est effectuée de manière tout à fait classique. En tout point du chargement il s'agit donc de vérifier la condition :

$$\mathcal{F}(\Sigma : \Delta^i, \Sigma_h^i) \leq 0 \quad (3.94)$$

Si elle n'est pas vérifiée, il s'agira d'effectuer une correction. L'intégration numérique se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \mathbf{T}^i : \Delta\Sigma \\ \gamma^i &= \gamma^{i-1} + \Delta\gamma \end{aligned} \quad (3.95)$$

γ_{cum}^i et $(\varepsilon_h^p)^i$ sont ensuite déduit sous la forme :

$$\begin{aligned} \gamma_{cum}^i &= \gamma_{cum}^{i-1} + |\Delta\gamma| \\ \Delta\varepsilon_h^p &= S^i \Delta\gamma \\ (\varepsilon_h^p)^i &= (\varepsilon_h^p)^{i-1} + \Delta\varepsilon_h^p \end{aligned} \quad (3.96)$$

\mathbf{T} est un opérateur tangent associé à \mathcal{F} qui est déterminé à partir de la condition $\dot{\mathcal{F}} = 0$, S est déduit de la loi d'évolution de ε_h^p (3.21) (voir annexe A). \mathbf{T} et S sont bien sûr fonction de l'état de contrainte Σ^i et de la déformation plastique, c'est à dire de γ et ε_h^p . Il s'agit d'équations que l'on peut résoudre aisément par l'utilisation de méthode de type Newton-Raphson. On ne détaillera pas plus ici ces méthodes d'intégration, qui sont très classiques, et dont on peut trouver une synthèse dans de nombreux ouvrages tels que [110]. Il est nécessaire, d'un point de vue numérique, de définir la valeur des variables du modèle, à l'adaptation. D'un point de vue théorique il s'agit de déterminer leur valeur lorsque $N \rightarrow +\infty$. On se propose donc, tout simplement, de se fixer un offset et celui proposé est effectué sur le glissement plastique cumulé :

$$\gamma_{cum}(N+1) - \gamma_{cum}(N) \leq \epsilon \quad (3.97)$$

où N est le nombre de cycles appliqués. En pratique nous avons considéré ϵ de l'ordre de 1.10^{-8} . Il est possible de choisir l'offset sur d'autres variables telles que la porosité par exemple. Toutefois, lorsque la condition (3.97) est atteinte, on obtient en général pour l'ensemble des autres variables, qui sont pilotées d'ailleurs par le glissement plastique, une précision du même ordre de grandeur.

3.3.3 Détermination de l'état adapté

Pour la simplicité de la mise en oeuvre du critère de fatigue, il serait souhaitable de connaître l'état de déformation du grain à l'état adapté.

Considérons dans un premier temps, et par souci de simplicité, le cas particulier où le grain possède un comportement élastique isotrope, où l'on a $\mathbb{A} = \mathbb{I}$. On néglige également l'anisotropie plastique du grain en posant $p_1 = 1$. Les résultats obtenus dans le cas de l'isotropie seront facilement transposables par la suite au cas de l'anisotropie élastique et plastique.

La détermination de l'état adapté implique la connaissance des variables γ , γ_{cum} , ε_h^p ainsi que ξ^h , ξ^d , ξ_{cum}^h , ξ_{cum}^d lorsque $N \rightarrow +\infty$. Il s'agit a priori d'un problème assez difficile compte tenu de la complexité des lois d'évolution qui ne sont pas intégrables, bien sûr, de manière analytique.

On note γ_a , $\varepsilon_{h,a}^p$, ξ_a^h et ξ_a^d respectivement les parties alternées des variables γ , ε_h^p , ξ^h , ξ^d et par γ_m , $\varepsilon_{h,m}^p$, ξ_m^h et ξ_m^d , on note leurs valeurs moyennes sur chaque cycle. En régime adapté on rappelle que la réponse locale du grain est élastique, ceci imposant, pour les valeur alternées :

$$\gamma_a = \varepsilon_{h,a}^p = \xi_a^h = \xi_a^d = 0 \quad (3.98)$$

tandis que γ_m , $\varepsilon_{h,m}^p$, ξ_m^h et ξ_m^d tendent vers une limite finie (qu'il s'agira de déterminer).

Une seconde condition est imposée par la surface de charge, car une condition nécessaire d'adaptation est obtenue lorsque tout état de contrainte $\Sigma(t)$ vérifie la condition $\mathcal{F}(\Sigma(t)) \leq 0$ (cf. figure 3.6(a)). Une condition suffisante pour les trajets de chargement affines macroscopiques est obtenue lorsque les extrémités du cycle appartiennent à la surface de charge (cf. figure 3.6(b)), c'est à dire que Σ^A et Σ^B vérifient $\mathcal{F}(\Sigma^A) = \mathcal{F}(\Sigma^B) = 0$.

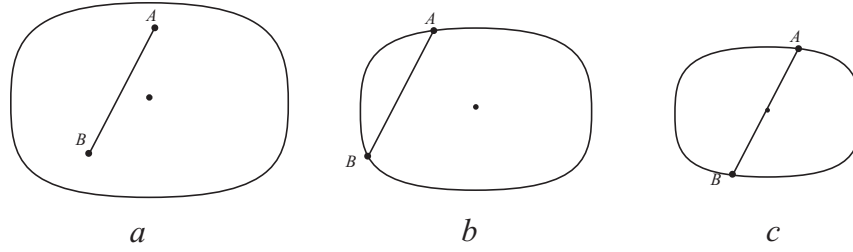


FIG. 3.6 –

Cette condition se traduit pour la cission $\Sigma : \Delta$ et la pression hydrostatique Σ_h , par :

$$\left(\frac{\pm \Sigma_a : \Delta + \Sigma_m : \Delta - X_d^*}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \pm \Sigma_{h,a} + \Sigma_{h,m} - X_h^*}{2 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (3.99)$$

où $X_d^* = (c + \mu^*)\gamma_m$ et $X_h^* = c\xi_m^h + 3k^*\varepsilon_{h,m}^p$. En combinant les deux relations définies par (3.99), on montre que :

$$\frac{\Sigma_a : \Delta (\Sigma_m : \Delta - X_d^*)}{\tau_d^2} + f \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,a}}{2 \tau_h} \right\} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,m} - X_h^*}{2 \tau_h} \right\} = 0 \quad (3.100)$$

Dans le cas du modèle couplé aucune solution aussi simple que celle obtenue pour le modèle non couplé (2.102) ne peut être déduite des relations (3.99) et (3.100). Seule la résolution numérique des lois d'évolution permet de conclure quant à l'état adapté. Effectuons néanmoins l'hypothèse suivante, que nous vérifierons par la suite :

A l'état adapté le cycle de chargement est symétrisé autour des contraintes moyennes. (cf. figure 3.6(c))

Ceci implique que pour X_d^* et X_h^* :

$$\begin{aligned} \Sigma_m : \Delta = X_d^* &= \left[(1-f)c + \mu^* \right] \gamma_m & (a) \\ \Sigma_{h,m} = X_h^* &= 3k^* \varepsilon_{h,m}^p + \frac{2c}{\sqrt{3}} \xi_m^h & (b) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Notons que la première relation de (3.101) est déjà contenue dans la condition d'adaptation pour le modèle non couplé. En utilisant la condition (3.101) dans (3.99) on obtient également :

$$\left(\frac{\Sigma_a : \Delta}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,a}}{2 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (3.102)$$

Lorsque le grain est en régime adapté, il est donc supposé que les relations (3.101) et (3.102) sont vérifiées. Notons que cette idée prolonge celle initialement introduite par

Papadopoulos [86] et reprise au second chapitre selon laquelle la surface de charge, en régime adapté, est décrite par le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. Néanmoins l'état adapté n'est encore que partiellement connu à partir des relations (3.101) et (3.102). En effet, γ_m est connu puisque déterminé par (3.101)(a). Toutefois $\varepsilon_{h,m}^p$ et γ_{cum} ne peuvent être déduits des relations (3.103)(b) et (3.102). Car si ξ^h est fonction de f_a et f_g et donc de $\varepsilon_{h,m}^p$ et γ_{cum} par la relation (3.80), les quantités ξ_{cum}^h et ξ_{cum}^d , qui interviennent dans τ_d et τ_h , ne sont pas reliées de manière simple à $\varepsilon_{h,m}^p$ et γ_{cum} .

La connaissance de l'état adapté requiert donc de déterminer les valeurs de ξ_{cum}^d et ξ_{cum}^h et pour cela des approximations vont être nécessaires. On propose donc, dans les sections suivantes, des applications numériques afin de préciser l'importance de ces paramètres et de proposer des valeurs approchées de ξ_{cum}^d et ξ_{cum}^h . On s'intéresse donc dans un premier temps, aux trajets purement alternés, l'effet de la contrainte moyenne sera étudié dans un second temps.

Remarque : on notera que dans le cas de l'anisotropie élastique et plastique la réécriture des équations (3.101) et (3.102) donne :

$$\begin{aligned} \Sigma_m : \mathbb{A} : \Delta &= X_d^* = \left[(1-f)c + \mu^* \right] \gamma_m & (a) \\ \Sigma_{h,m} &= X_h^* = 3k^* \varepsilon_{h,m}^p + \frac{2p_1 c}{\sqrt{3}} \xi_m^h & (b) \\ \left(\frac{\Sigma_a : \mathbb{A} : \Delta}{\tau_d} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{h,a}}{2p_1 \tau_h} \right\} - 1 - f^2 &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (3.103)$$

3.3.4 Application aux trajets de chargements purement alternés

On se propose, dans cette section, d'effectuer des applications numériques sur des trajets de chargements purement alternés, pour lesquels on pose $\Sigma_m = 0$. L'objectif est d'évaluer l'influence de la pression hydrostatique sur le niveau de plasticité, c'est à dire sur $\varepsilon_{h,m}^p$ et γ_{cum} . En fait, il s'agit de vérifier que $\varepsilon_{h,m}^p$ tend vers zero à l'état adapté, pour des chargements purement alternés, afin d'assurer la condition (3.103)(b). En effet, pour un chargement purement alterné, on a par (3.103)(b) :

$$\frac{4p_1^2 c}{3} \left[\operatorname{dilog} \left(\frac{f_a}{f} \right) \right] + 3k^* \varepsilon_{h,m}^p = 0 \quad (3.104)$$

En notant que $f_a = f - 3\varepsilon_{h,m}^p$ et que $\operatorname{dilog}(1) = 0$, la relation (3.104) implique $\varepsilon_{h,m}^p = 0$. Les paramètres du modèle adoptés sont définis dans le tableau (3.1).

Le cycle de chargement est décrit par la donnée seule de la cission alternée $\Sigma_a : \Delta$ choisie égale à $200MPa$ et par la composante hydrostatique, $\Sigma_{h,a}$, pour laquelle les valeurs choisies sont $\Sigma_{h,a} = 0MPa, 300MPa, 600MPa$.

Sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9, sont tracées les valeurs de la déformation plastique cumulée, γ_{cum} , en fonction du nombre de cycles N . On observe clairement, pour le modèle couplé, une dépendance de la valeur de γ_{cum} vis à vis de la pression hydrostatique alternée, $\Sigma_{h,a}$. On notera que les valeurs de γ_{cum} , à l'adaptation, sont très proches pour les différents schémas d'homogénéisation (cf. tableau 3.2), les plus grands écarts mesurés sont à forte

τ_0	R_0	c	A_0	k_a	k	μ	h	p
60MPa	20MPa	2000	0.0008	2	200GPa	75GPa	0	1

TAB. 3.1 – Paramètres du modèle

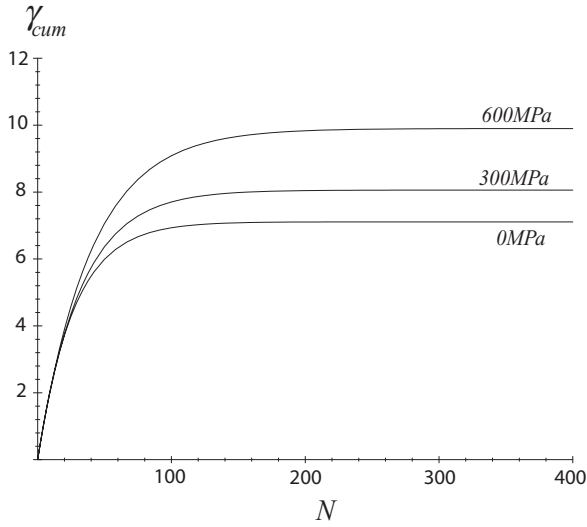


FIG. 3.7 – Valeur du glissement plastique cumulé, γ_{cum} , en fonction du nombre de cycle N , pour le modèle de Sachs. Comparaison du modèle non couplé pour Σ_a : $\Delta = 200MPa$ et $\Sigma_{h,a} = 0MPa, 300MPa, 600MPa$.

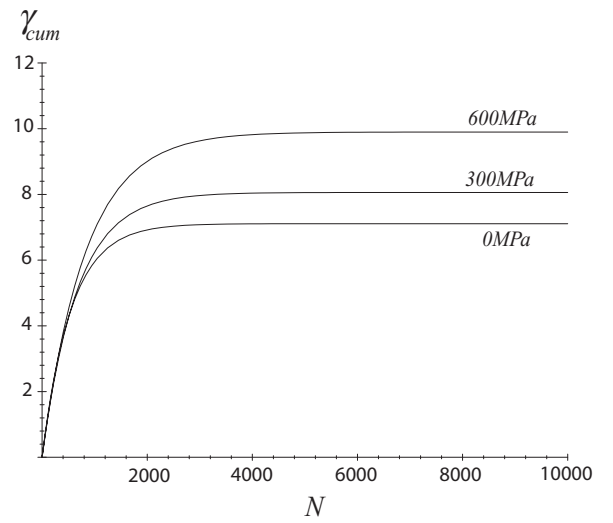


FIG. 3.8 – Valeur du glissement plastique cumulé, γ_{cum} , en fonction du nombre de cycle N , pour le modèle de Kröner. Comparaison du modèle non couplé pour Σ_a : $\Delta = 200MPa$ et $\Sigma_{h,a} = 0MPa, 300MPa, 600MPa$.

$\Sigma_{h,a}$	Sachs	Kroener	Lin-Taylor
0MPa	7.107	7.105	7.098
200MPa	7.553	7.546	7.541
400MPa	8.676	8.649	7.629
600MPa	9.932	9.921	9.956
800MPa	11.280	11.250	11.258
1000MPa	12.810	12.919	13.131

TAB. 3.2 – Valeurs de γ_{cum} en fonction de $\Sigma_{h,a}$ à l'état adapté.

pression hydrostatique, mais restent néanmoins faibles (de l'ordre de 2%). En fait cette remarque peut également être faite pour les autres variables ($\xi_{h,m}$, ξ_{cum}^h , f), si bien qu'en première approximation, on peut supposer que l'état adapté, pour des chargements purement alternés, est indépendant du choix du schéma d'homogénéisation. L'ensemble des résultats que nous allons présenter dans la suite, seront restreints à ceux obtenus à l'aide du schéma de Kröner.

On s'intéresse maintenant à la valeur de $\varepsilon_{h,m}^p$ à l'adaptation. Sur les figures 3.10, 3.11 et

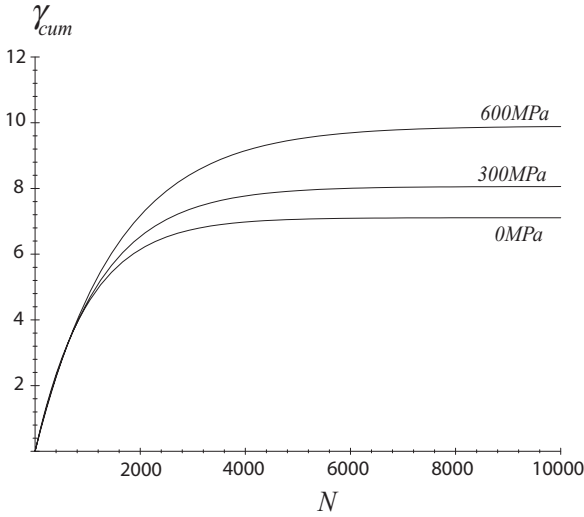


FIG. 3.9 – Valeur du glissement plastique cumulé, γ_{cum} , en fonction du nombre de cycles N , pour le modèle de Lin-Taylor. Comparaison du modèle non couplé pour Σ_a : $\Delta = 200MPa$ et $\Sigma_{h,a} = 0MPa, 300MPa, 600MPa$.

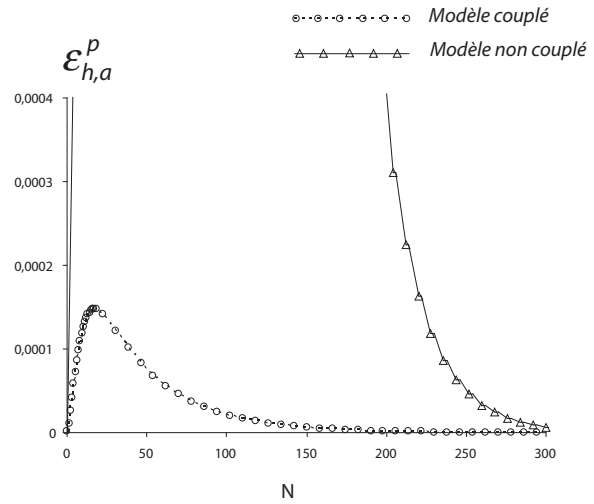


FIG. 3.10 – Valeur de ε_h^p en fonction du nombre de cycles, pour le schéma de Sachs.

3.12, sont tracées les valeurs de $\varepsilon_{h,m}^p$, en fonction du nombre de cycles, N . Les résultats montrent clairement qu'à l'état adapté, $\varepsilon_{h,m}^p$ tend vers 0. On notera également que le modèle couplé prédit des amplitudes de la déformation plastique de volume, $\varepsilon_{h,a}^p$ plus faibles que pour le modèle non couplé. Ceci étant dû à la prise en compte de l'écroutissage dans la loi de croissance de la cavité. Sur la figure 3.13, est tracée la variation de la porosité, f , en fonction du nombre de cycles. On observe encore une fois une dépendance nette vis à vis de la pression hydrostatique alternée. Cette dépendance est d'ailleurs liée à celle observée précédemment pour γ_{cum} . En effet, puisqu'à l'état adapté $\varepsilon_{h,m}^p = 0$, il en est de même pour $f_g = 3\varepsilon_{h,m}^p = 0$. Par conséquent, la porosité $f = f_a(\gamma_{cum})$ dépend uniquement du niveau de γ_{cum} à l'état adapté, qui nous l'avons montré, montre une nette dépendance avec la pression hydrostatique alternée $\Sigma_{h,a}$.

On s'intéresse maintenant à la valeur de ξ_{cum}^h à l'état adapté. Similairement à la valeur de γ_{cum} , cette variable montre une quasi indépendance par rapport aux schémas d'homogénéisation. Il s'agira donc d'en déterminer une valeur approchée pour le schéma d'homogénéisation de Kröner. Sur les figures 3.14 et 3.15 sont représentées les valeurs de ce paramètre à l'adaptation, pour une cission alternée de $200MPa$, en fonction de la

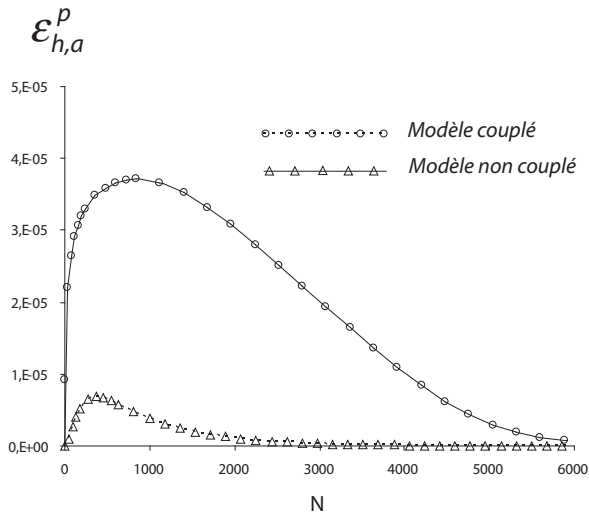


FIG. 3.11 – Valeur de ε_h^p en fonction du nombre de cycles, pour le schéma de Kröner.

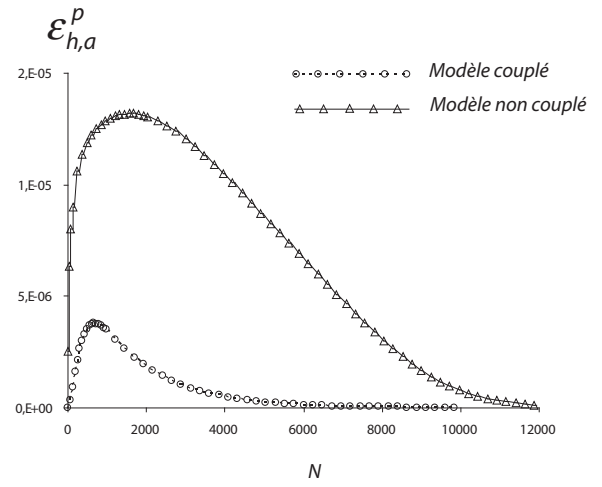


FIG. 3.12 – Valeur de ε_h^p en fonction du nombre de cycles, pour le schéma de Lin-Taylor

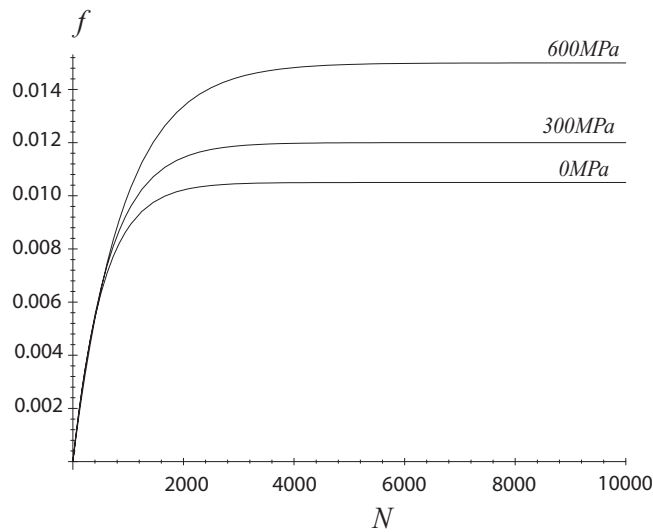


FIG. 3.13 – Valeur de f en fonction du nombre de cycles N , pour le schéma de Kröner et pour diverses valeurs de $\Sigma_{h,a}$.

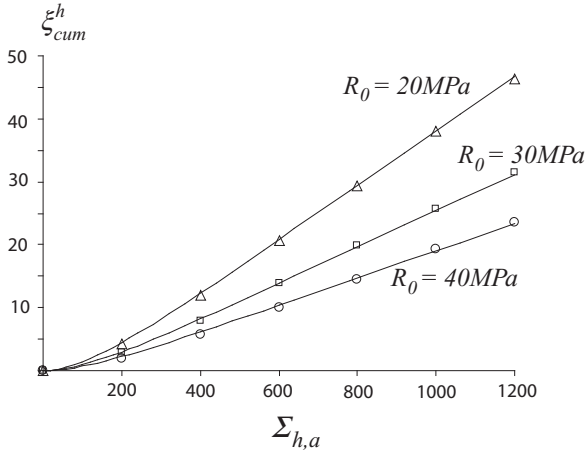


FIG. 3.14 – ξ_{cum}^h en fonction de la partie alternée de la pression hydrostatique $\Sigma_{h,a}$, pour le modèle de Kröner et pour diverses valeurs de R_0 .

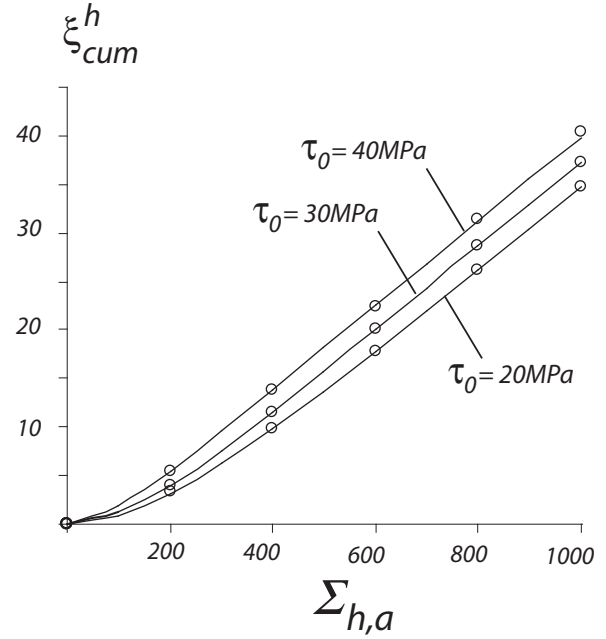


FIG. 3.15 – ξ_{cum}^h en fonction de la partie alternée de la pression hydrostatique $\Sigma_{h,a}$, pour le modèle de Kröner et pour diverses valeurs de τ_0 .

pression hydrostatique alternée $\Sigma_{h,a}$, pour diverses valeurs des paramètres R_0 et τ_0 . Sur la base des résultats numériques obtenus, nous proposons une expression approchée de la valeur de ξ_{cum}^h sous la forme :

$$\xi_{cum}^h = k_1 \Sigma_{h,a} - k_2 \left[1 - \exp(-k_3 \Sigma_{h,a}) \right] \quad (3.105)$$

avec $k_3 > 0$; cette expression permet en particulier de retrouver la tendance linéaire observée pour des fortes valeurs de la pression hydrostatique. L'identification des coefficients k_1 , k_2 , et k_3 a été effectuée sur de nombreux trajets de chargements en faisant varier notamment les paramètres du modèle, la forme finale proposée est :

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2R_0}; \quad k_2 = \frac{\sqrt{3}\tau_0}{R_0}; \quad k_3 = \frac{1}{2\tau_0} \quad (3.106)$$

En injectant les expressions des coefficients k_i pour $i = 1, 2, 3$ (3.106) dans (3.105), ξ_{cum}^h s'écrit :

$$\xi_{cum}^h = \frac{\sqrt{3}\tau_0}{R_0} \left\{ \frac{\Sigma_{h,a}}{2\tau_0} - 1 + \exp\left(\frac{\Sigma_{h,a}}{2\tau_0}\right) \right\} \quad (3.107)$$

expression qui permet de reproduire les tendances observées sur les figures 3.14 et 3.15.

Deux extensions de cette loi concernent la prise en compte de l'érouissage latent d'une part et la prise en compte de l'anisotropie plastique d'autre part. L'expression proposée

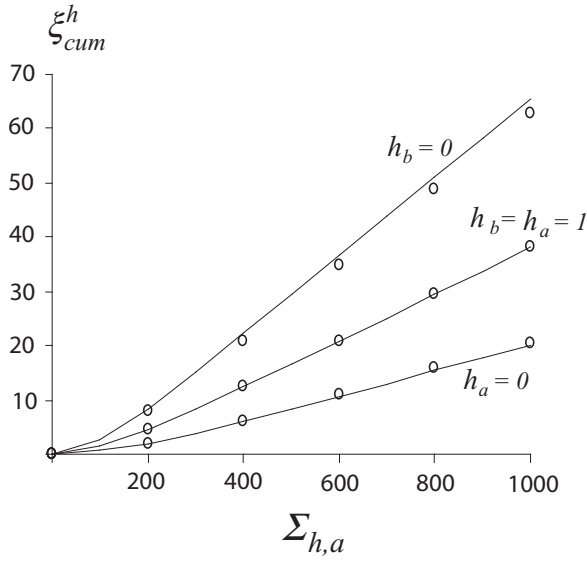


FIG. 3.16 – ξ_{cum}^h en fonction de $\Sigma_{h,a}$, pour le modèle de Kröner et pour diverses valeurs du rapport d'anisotropie. Les paramètres utilisés sont ceux donnés par 3.1

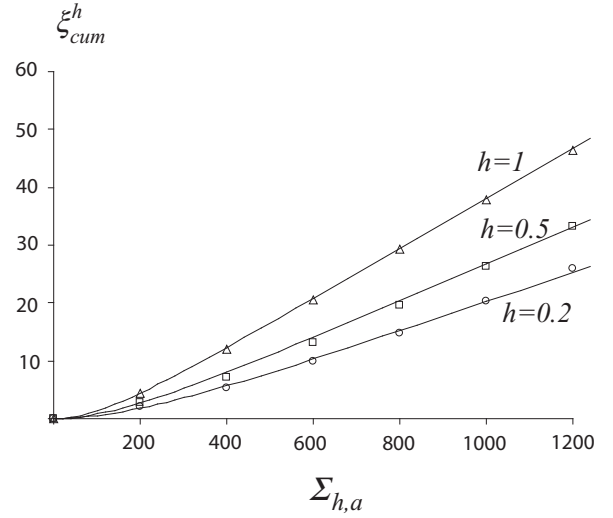


FIG. 3.17 – ξ_{cum}^h , en fonction de $\Sigma_{h,a}$, pour le modèle de Kröner. $\Sigma_a : \Delta = 200MPa$, $h = 0.2, 0.5, 1$. Comparaison entre les valeurs numériques (points discrets) et la valeur proposée (3.108) (ligne continue). Hormis h les paramètres utilisés sont ceux donnés dans le tableau 3.1

s'écrit :

$$\xi_{cum}^h = \frac{\sqrt{3}\tau_0}{R_0} \left\{ \frac{\Sigma_{h,a}}{2h'p_1\tau_0} - 1 + \exp\left(\frac{\Sigma_{h,a}}{2h'p_1\tau_0}\right) \right\} \quad (3.108)$$

avec $h' = 1 + h/\sqrt{2}$. Cette modification permet de bien reproduire les tendances observées à partir des simulations numériques d'une part pour l'écroutissage latent (figure 3.17), lorsque h varie entre 0 et 1, et d'autre part pour l'anisotropie plastique (figure 3.16). Concernant ξ_{cum}^d , ou plus précisément le produit $h\xi_{cum}^d$, qui apparaît dans R_d , les simulations numériques montrent que ce terme est relativement faible. On se contentera donc de le négliger devant γ_{cum} .

Il est encore possible d'améliorer l'expression de ξ_{cum}^h . Notamment en prenant par exemple en compte l'effet de la cission alternée. Cet effet est notable mais reste relativement faible par rapport aux variations précédemment indiquées (figure 3.19). Du fait de leur simplicité, on se contentera des approximations effectuées.

Sur la figure 3.20 sont tracées les valeurs de γ_{cum} en fonction de la pression hydrostatique $\Sigma_{h,a}$. La solution exacte obtenue numériquement, ainsi que la solution approchée déduite de (3.101), (3.102) et (3.107) y sont représentées. Les paramètres du modèle sont ceux définis dans le tableau 3.1. On notera un excellent accord entre la solution exacte et la solution approchée proposée. La solution obtenue à l'aide du modèle non couplé est également tracée et indique une indépendance de γ_{cum} vis à vis de la pression hydrostatique alternée (car rappelons que pour ce modèle, la surface de charge est indépendante de la pression hydrostatique). La variation de γ_{cum} avec la pression hydrostatique alternée, pré-

dite par le modèle couplé constitue un des résultats les plus importants de ce chapitre. Ceci illustre parfaitement l'importance du couplage entre la plasticité et l'endommagement. Sur la figure 3.21 est représentée la surface de charge en régime adapté pour la solution exacte (obtenue numériquement) et la solution approchée. On notera encore une fois la bonne concordance entre les deux résultats. La surface de charge issue du modèle couplé est également tracée sur cette figure, l'importance du couplage se trouve confirmée.

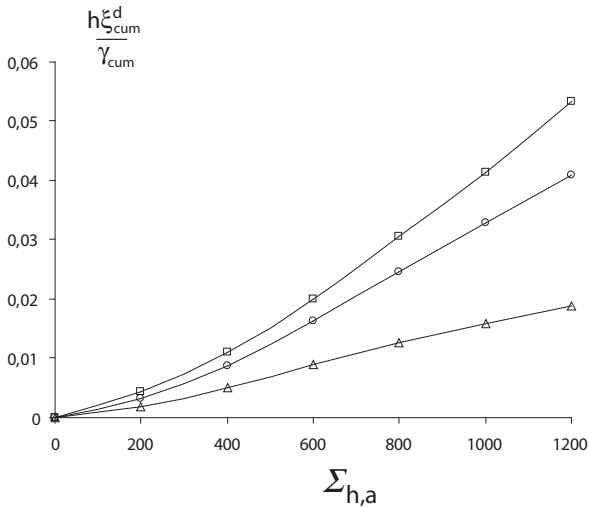


FIG. 3.18 – Rapport $h\xi_{cum}^d/\gamma_{cum}$ en fonction de la pression hydrostatique alternée, $\Sigma_{h,a}$, pour le modèle de Kröner. Σ_a : $\Delta = 200MPa$, $h = 0.2, 0.5, 1$. Hormis h les paramètres utilisés sont ceux donnés dans le tableau 3.1

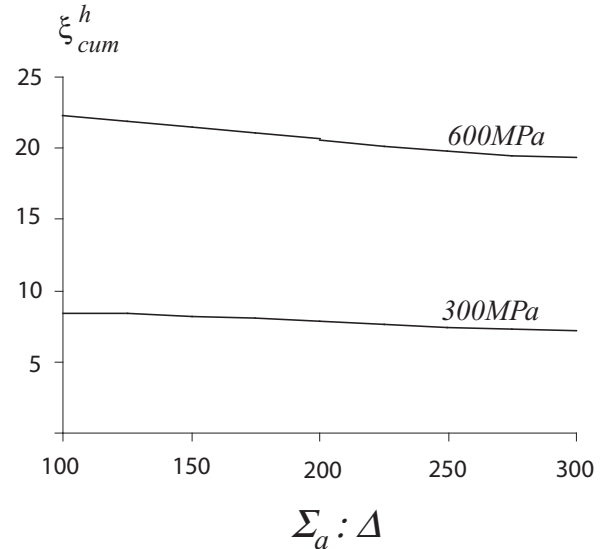


FIG. 3.19 – ξ_{cum}^h en fonction de la cission alternées pour deux valeurs de la pression hydrostatique alternée $\Sigma_{h,a} = 300MPa, 600MPa$. Les paramètres du modèle utilisés sont ceux donnés par 3.1

3.3.5 Effets de la contrainte moyenne

Tentons maintenant d'évaluer les effets de la contrainte moyenne. Il s'agit d'une part de vérifier les hypothèses faites dans la section 3.3.3, et d'autre part de mesurer l'effet de $\Sigma_{h,m}$ sur ξ_{cum}^h .

Sur la figure 3.22 est représentée la valeur de $X_h^* = X_h + 3k^*\varepsilon_{h,m}^p$ à l'adaptation, en fonction de $\Sigma_{h,m}$, pour le modèle de Kröner (points discrets). Une excellente concordance est observée avec la valeur théorique (ligne continue) déduite de (3.101)(b). Sur la figure 3.23 est représentée ξ_{cum}^h en fonction de la pression hydrostatique moyenne pour une cission alternée de $200MPa$ et une pression alternée de $200MPa$ et de $600MPa$. Les résultats montrent clairement une quasi-indépendance de la valeur de ξ_{cum}^h vis à vis de la pression hydrostatique moyenne. En résumé, on supposera par la suite, que ξ_{cum}^h est indépendant de $\Sigma_{h,m}$.

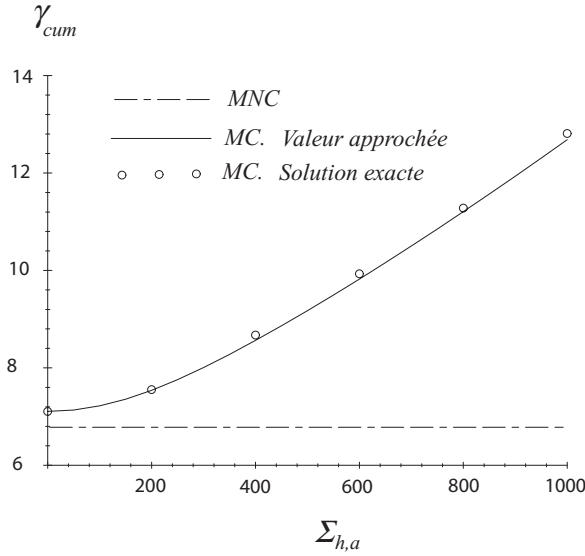


FIG. 3.20 – γ_{cum} à l'état adapté en fonction de $\Sigma_{h,a}$, pour $\Sigma_a : \Delta/\tau_0 = 200MPa$. MC solution exacte (Cercles), MC solution approchée (ligne continue) pour le modèle couplé, MNC (lignes interrompue). Les paramètres du modèle sont ceux donnés dans le tableau 3.1.

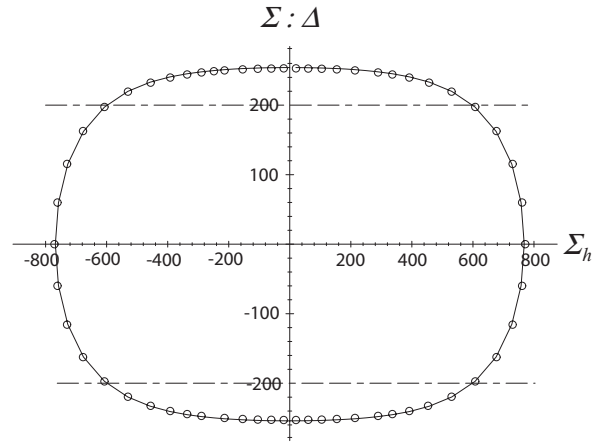


FIG. 3.21 – Surface de charge à l'état adapté pour un chargement purement alterné, $\Sigma_{h,m}/\tau_0 = 600MPa$, $\Sigma_a : \Delta/\tau_0 = 200MPa$. surface exacte (Cercles), surface approchée (ligne continue) pour le modèle couplé, modèle non couplé (lignes interrompue). Les paramètres du modèle utilisés sont ceux définis dans le tableau 3.1.

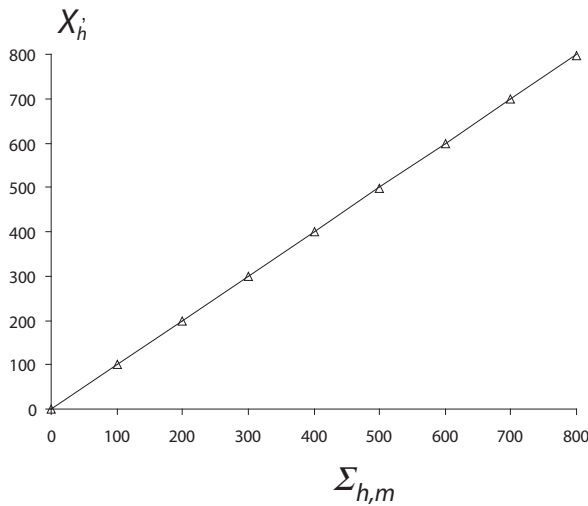


FIG. 3.22 – Valeur de $\varepsilon_{h,m}^p$ en fonction de $\Sigma_{h,m}$ pour la solution approchée (ligne continue) et la solution exacte (obtenue numériquement).

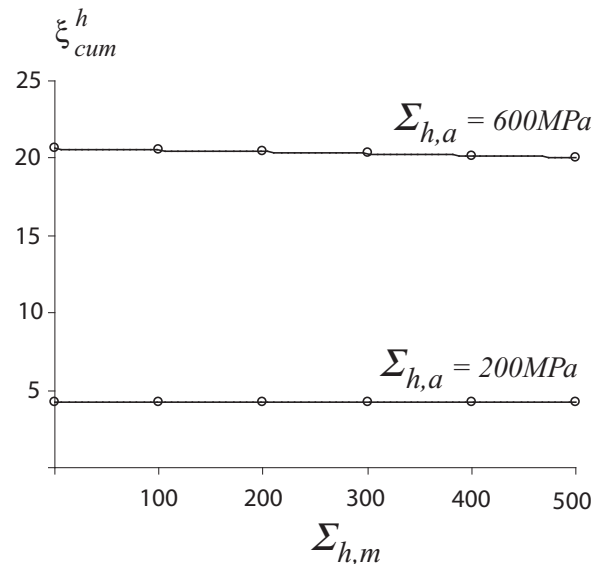


FIG. 3.23 – Valeur de ξ_{cum}^h en fonction de $\Sigma_{h,m}$ pour deux valeur de $\Sigma_{h,a}$.

3.4 Formulation du critère pour les chargements affines macroscopiques

On en vient maintenant à la formulation du critère de fatigue pour le modèle couplé. On montrera notamment que le nouveau critère constitue une généralisation du critère précédent associé au modèle non couplé. On rappelle tout d'abord que le critère de fatigue s'exprime à l'échelle locale comme une combinaison du glissement plastique cumulé, γ_{cum} et de la déformation plastique de volume $\varepsilon_{h,m}^p$. En particulier, deux formes spécifiques du critère général (2.76) ont été dégagées et correspondant à un critère de type linéaire ou parabolique :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{cum}}{\gamma_c} + \frac{\varepsilon_{h,m}^p}{\varepsilon_c} &= 1; \quad \text{pour } k_a \gg 1 \\ \frac{\gamma_{cum}^2}{\gamma_c^2} + \frac{\varepsilon_{h,m}^p}{\varepsilon_c} &= 1; \quad \text{pour } k_a \ll 1 \end{aligned} \quad (3.109)$$

S'agissant tout d'abord de $\varepsilon_{h,m}^p$, sa valeur est déduite de la condition d'adaptation (3.101), dans laquelle on pose $f = f_c$ et $f_a = f_c - f_g = f_c - 3\varepsilon_{h,m}^p$. Cette valeur est reliée à la partie moyenne de la pression hydrostatique par (3.103)(b) :

$$\Sigma_{h,m} = -\frac{4cp_1^2}{3 \ln(f_c)} \left[\text{dilog} \left(1 - \frac{3\varepsilon_{h,m}^p}{f_c} \right) - 3\varepsilon_{h,m}^p \right] + 3k^* \varepsilon_{h,m}^p \quad (3.110)$$

Il s'agit d'un résultat similaire à celui obtenu dans le cas du modèle non couplé, qui d'ailleurs est retrouvé en posant $c = 0$ dans (3.110). La modification obtenue est ici due à la prise en compte de l'écroutissage cinématique. Considérant de faibles valeurs de $\varepsilon_{h,m}^p$, et sachant que : $\text{dilog}(x) \simeq 1 - x$ pour x petit, on retrouve alors une dépendance linéaire entre $\varepsilon_{h,m}^p$ et $\Sigma_{h,m}$:

$$\Sigma_{h,m} = \left[-\frac{4cp_1^2}{f_c \ln(f_c)} (1 - f_c) + 3k^* \right] \varepsilon_{h,m}^p \quad (3.111)$$

S'agissant maintenant du glissement plastique cumulé, γ_{cum} , il est également déduit de la condition d'adaptation (3.102). Considérant le grain le plus défavorablement orienté, γ_{cum} est déduit de :

$$\frac{1}{\tau_d^2} \left(\max_{n,m} \Sigma_a : \mathbb{A} : \Delta \right)^2 + 2f_c \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_{h,a}}{\tau_h} \right\} - 1 - f_c^2 = 0 \quad (3.112)$$

dans lequel γ_{cum} est contenu dans τ_d et τ_h . Dans le cas où $h = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas d'auto écroutissage), γ_{cum} n'est contenu que dans τ_d . De manière plus générale τ_d et τ_h sont donnés par :

$$\tau_d \simeq \tau_0 + R_0 \gamma_{cum}; \quad \tau_h = \tau_0 + h R_0 \gamma_{cum} - \frac{R_0}{\ln(f)} \xi_{cum}^h \quad (3.113)$$

où ξ_{cum}^h est donné par (3.108). On notera que γ_{cum} est indépendant, d'ailleurs comme pour le modèle non couplé, du choix du schéma d'homogénéisation.

Considérons un premier cas particulier, celui du trajet de chargement à pression hydrostatique alternée nulle, $\Sigma_{h,a} = 0$. Dans ce cas γ_{cum} est alors fonction de l'amplitude de la cisssion maximale et est déduit de (3.112) :

$$\gamma_{cum} = \frac{\max_{\underline{n}, \underline{m}} [\Sigma_a : \Delta] - \tau_0}{R_0} \quad (3.114)$$

Considérant une pression hydrostatique moyenne non nulle, le critère de fatigue est représenté sur les figures (3.24) et (3.25), dans le plan $\Sigma_{h,m}/\tau_0, \max_{\underline{n}, \underline{m}}(\Sigma_a : \Delta)/\tau_0$ pour deux valeurs du module d'érouissage cinématique c . Les paramètres du modèle utilisés, hormis la valeur de c bien sûr, sont ceux définis dans le tableau 3.1 ; la porosité critique est elle choisie égale à 0.01. On note que les différences observées pour les différents schémas (Sachs, Lin-Taylor et Kröner) sont particulièrement atténuées par rapport à celles obtenues à partir du modèle non couplé. Notamment, pour le schéma de sachs, les résultats obtenus à partir du nouveau critère sont physiquement plus cohérents que ceux obtenus à partir du critère associé au modèle non couplé. Ceci illustre à nouveau l'importance du rôle de l'érouissage sur la croissance des cavités. Contrairement au critère issu du modèle non couplé, le nouveau critère montre également une dépendance vis à vis de l'anisotropie plastique via le coefficient p_1 ; cette dépendance est illustrée sur la figure (3.26).

Considérons maintenant le cas d'un chargement purement alterné, $\Sigma_{h,m} = 0$; la partie alternée de la pression hydrostatique est maintenant choisie non nulle. Puisque $\varepsilon_{h,m}^p$ est nul à l'état adapté, le critère de fatigue porte donc sur une valeur critique du glissement plastique cumulé. Plus précisément le critère de fatigue peut être représenté dans le plan $\Sigma_{h,a}/\tau_0, \max_{\underline{n}, \underline{m}} \Sigma_a : \Delta/\tau_0$, et correspond aux isosurface (3.112) définies par $\gamma_{cum} = \gamma_c$. Sur la figure 3.27 est tracé le critère pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie. On observe clairement une dépendance du critère de fatigue vis à vis de $\Sigma_{h,a}$ ainsi que de l'anisotropie plastique du grain. Cette dépendance du nouveau critère, issu du modèle couplé, avec la partie alternée de la pression hydrostatique, permet de corriger les incapacités du critère issu du modèle non couplé (qui rappelons le ne faisait pas intervenir la pression hydrostatique alternée). Notamment cette amélioration est parfaitement illustrée sur les figures (3.28) et (3.29) qui proposent des comparaisons avec avec les essais de flexion-torsion alternée de Gough et Pollard [42].

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un cadre de formulation couplée des lois d'endommagement et de plasticité à l'échelle des grains a été d'abord présentée. Nous nous sommes notamment appuyés sur les récents travaux de Kysar et al [52] pour proposer une adaptation de l'approche de Gurson à la plasticité cristalline. Ce travail de modélisation a été ensuite complétée à l'aide de différents développements dont en particulier ceux qui concernent la prise en compte de l'anisotropie plastique ainsi que des érouissages isotrope et cinématique. Une étude détaillée de ce dernier point a permis d'explicitier (analytiquement)

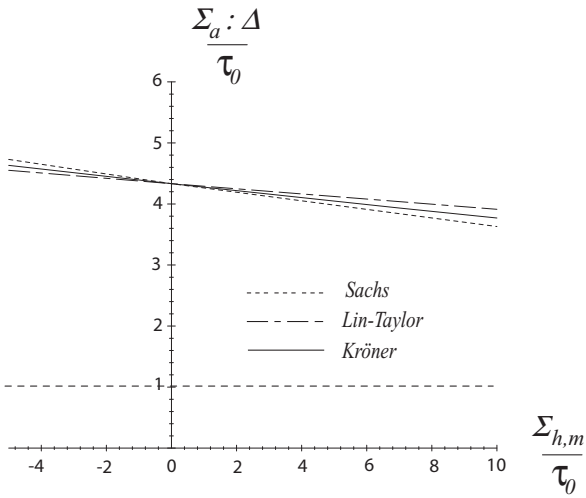


FIG. 3.24 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_{h,m}/\tau_0$, $\Sigma_a : \Delta/\tau_0$ pour $c = 2000MPa$.

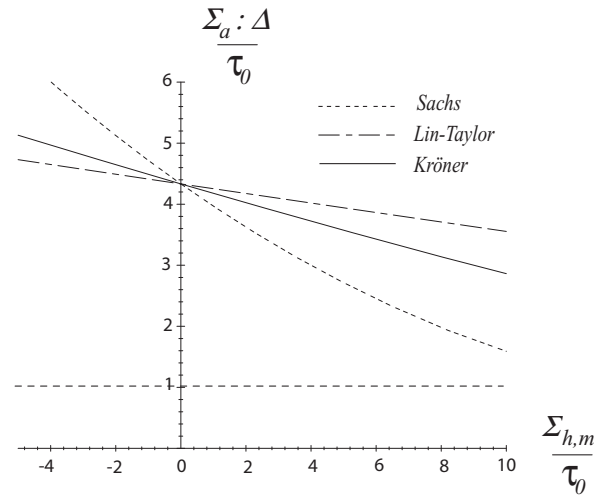


FIG. 3.25 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_{h,m}/\tau_0$, $\Sigma_a : \Delta/\tau_0$ pour $c = 400MPa$.

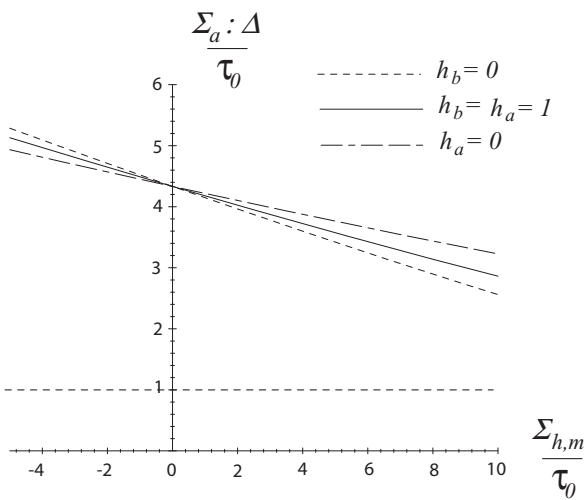


FIG. 3.26 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_{h,m}/\tau_0$, $\Sigma_a : \Delta/\tau_0$ pour le schéma de Kröner et pour différentes valeurs d'anisotropie.

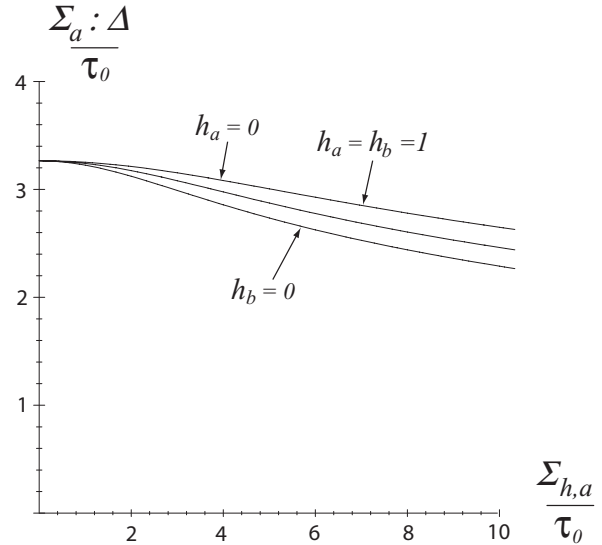


FIG. 3.27 – Critère de fatigue dans le plan $\Sigma_{h,a}/\tau_0$, $\Sigma_a : \Delta/\tau_0$ pour différentes valeurs d'anisotropie.

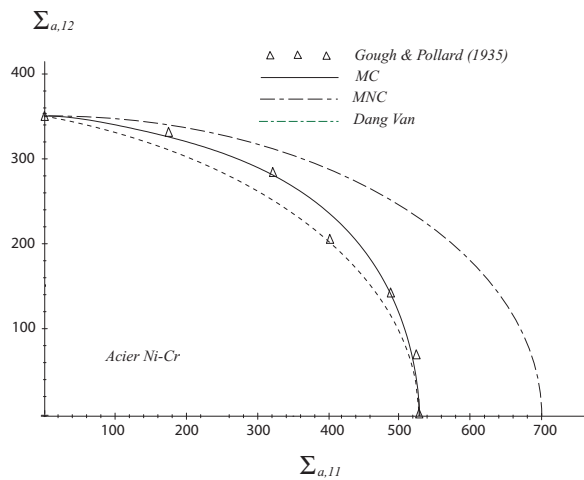


FIG. 3.28 – Comparaison du critère de fatigue des modèles couplés (MC) et non couplés (MNC) avec les résultats expérimentaux de Gough et Pollard. Flexion-torsion alternée. Acier Ni-Cr

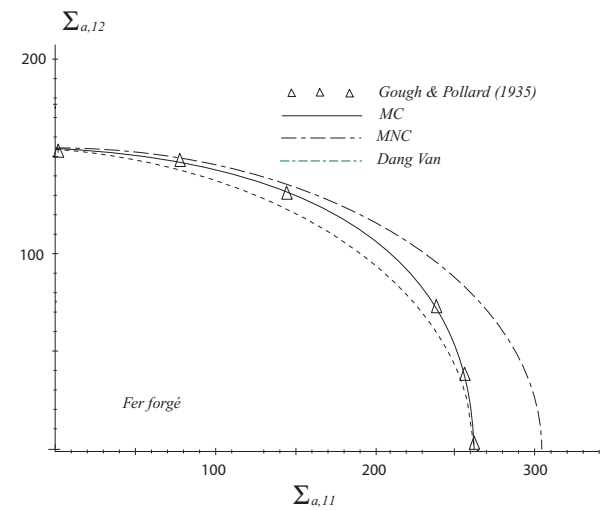


FIG. 3.29 – Comparaison du critère de fatigue des modèles couplés (MC) et non couplés (MNC) avec les résultats expérimentaux de Gough et Pollard. Flexion-torsion alternée. Fer forgé.

l'ensemble des paramètres d'écroissage, ce qui s'avère fort utile pour la mise en oeuvre dans le contexte de la fatigue à grand nombre de cycles.

S'agissant plus précisément du critère macroscopique de fatigue proposé sur la base de ces développements, son application aux trajets macroscopiques affines montre l'importance du couplage entre plasticité et endommagement. Le critère proposé permet notamment de prendre compte de l'effet de la pression hydrostatique alternée. La prise en compte de l'écroissage dans la loi de croissance des cavités, permet d'obtenir des résultats physiquement plus cohérents pour le schéma de Sachs. Enfin la comparaison entre les prédictions théoriques et des données expérimentales de la littérature confirme les bonnes capacités prédictives du critère proposé.

Malgré ces bonnes performances, le critère, dans sa forme actuelle, souffre encore de certaines limitations dont en particulier son incapacité à rendre compte des données correspondant à des sollicitations déphasées. Ceci n'est pas lié à la modélisation de l'endommagement, mais plutôt à l'approche de type plan critique inspirée des travaux de Dang Van [20]. Une première piste d'amélioration pourrait consister à étendre notre approche en s'inspirant des travaux de Papadopoulos [86]. Il s'agirait alors de raisonner, non plus sur le grain le plus défavorablement orienté par rapport aux axes de chargement, mais sur un VER contenant une répartition aléatoire de grains plastiques.

Une autre limitation des développements que nous avons effectués provient de la géométrie de microcavités considérées. En effet, les observations rapportées au premier chapitre indiquent que les mécanismes d'endommagement sont, pour une grande part, liés à la croissance de microcavités orientées à l'interface BGP-matrice. C'est essentiellement la prise en compte des effets de forme de cavités qui a motivé les nouveaux développements théoriques qui seront présentés dans la seconde partie de ce mémoire.

Deuxième partie

Nouveaux développements dans le domaine de la rupture ductile

Chapitre 4

Effet de forme des cavités, prise en compte de l'anisotropie plastique

4.1 Introduction

Depuis les travaux de Rice et Tracey [104], puis de Gurson traitant de l'analyse limite d'une sphère creuse, la détermination du critère de plasticité macroscopique des milieux poreux a fait l'objet de nombreuses études qui se poursuivent encore de manière très active. Sur le plan de la formulation théorique, les travaux les plus avancés concernent pour la plupart la prise en compte des effets de forme de cavités ou de la viscoplasticité. L'objectif de ce chapitre est de proposer une extension du modèle de Gologanu et al. [36, 37], pour la prise en compte de l'anisotropie plastique. Pour cela, on considère une cellule élémentaire décrite par des sphéroïdes confocaux, dont la matrice solide est supposée parfaitement plastique et régie par le critère quadratique de Hill [48].

Une première étape consiste à choisir les champs tests qui permettront d'établir l'expression de la surface de charge macroscopique. Une famille de champs très large a été proposée par Lee et Mear [59]. Elle a été à la base des extensions, par de nombreux auteurs, du critère de Gurson pour la prise en compte de la forme des cavités [36, 37, 38, 39, 32, 34] (les champs adoptés par ces auteurs, voir (4.11), sont contenus dans les quatre premiers termes de la famille plus large proposée par Lee et Mear [59]). Une approche consistant à généraliser ces différentes approches au cas de l'anisotropie plastique consiste à utiliser les champs appliqués par les différents auteurs.

Une critique peut néanmoins être formulée quant à l'utilisation des mêmes champs dans un contexte anisotrope. On notera toutefois que, dans les différentes approches proposées pour les extensions du critère de Gurson à l'anisotropie plastique [7] et [62] le champ adopté a été le même que celui appliqué dans le cas isotrope.

Une difficulté réside, quant à l'utilisation du champ (4.11), puisque les conditions au bord ne sont pas suffisantes pour identifier l'ensemble des paramètres introduits. Par conséquent, le critère doit être déduit d'une procédure de minimisation. Compte tenu de la difficulté supplémentaire introduite ici, c'est à dire la prise en compte de l'anisotropie plastique, on se restreint au champ adopté par Gologanu et al. [36, 37] (et correspondant aux coefficients B_{00} et B_{20} dans (4.11)). On notera que ce champ permet de retrouver

celui introduit par Gurson dans les cas limites de la sphère et du cylindre.

Une autre difficulté pour la détermination du critère macroscopique réside dans l'intégration de la dissipation macroscopique et pour cela, des approximations vont être nécessaires. Une procédure a été proposée par Gologanu et al. dans le cas d'une matrice plastique de von Mises. Toutefois sa reconduction dans le cas anisotrope se heurte à de nombreuses difficultés que nous précisons par la suite. Une nouvelle procédure, généralisant celle proposée par ces auteurs est donc introduite dans ce chapitre. L'avantage de cette nouvelle approche est qu'elle permet de générer une forme explicite, unique, valable aussi bien pour des cavités allongées que des cavités aplaties. La généralité de cette procédure, se révélera également dans les chapitres suivants dans lesquels sont considérés des champs plus larges pour la détermination du critère de plasticité dans le contexte isotrope. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Le critère de plasticité macroscopique obtenu permet de retrouver le critère de Benzerga et al. [7] dans le cas de la sphère [7] et celui de Liao et Pan [63] pour une cavité cylindrique dans une matrice plastiquement isotrope transverse. On montrera également, que, dans un contexte isotrope, le critère proposé est en bon accord avec ceux de Gologanu et al. [36, 37]. Enfin, une validation de la procédure d'approximation ayant servi à construire le critère, dans le cas anisotrope, avec la solution exacte obtenue numériquement sera proposée en dernière partie de ce chapitre.

4.2 Critère existants

Avant d'aborder les nouveaux développements proposés, on se propose, dans cette section, de faire une brève synthèse bibliographique des critères macroscopiques de plasticité des milieux poreux et d'introduire les notations qui seront adoptées dans toute la suite du mémoire. On débutera par les cas relativement simples des critères de Gurson [47] pour le cas des cavités sphériques et de cavités cylindriques, ainsi que les extensions au cas de l'anisotropie⁵ [6], [7], [62] puis l'on abordera les extensions aux cavités de forme sphéroïdale.

4.2.1 Critère macroscopique pour les milieux à cavités sphériques et cylindriques

On rappelle tout d'abord que le modèle de Gurson [47], que nous avons déjà appliqué au chapitre 3, repose sur l'analyse limite d'une sphère creuse dont la matrice obéit au critère de Von Mises. Le critère issu de cette analyse prend la forme :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.1)$$

dans laquelle Σ_{eq} et Σ_h représentent respectivement la contrainte équivalente de Von Mises et la contrainte hydrostatique.

⁵D'autres extensions ont été proposées pour le modèle de Gurson, notamment pour la prise en compte des interactions entre cavités [121]

De manière similaire, s'agissant du milieu poreux dont les cavités sont cylindriques, la surface de charge macroscopique est déterminée par :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3} \Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2 \sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.2)$$

Il a été démontré par Perrin [95] que les critères (4.1) et (4.2) constituent des bornes supérieures du critère de plasticité macroscopique pour chacun des cas considérés. De plus, on vérifie que (4.1) conduit à la solution exacte du problème de la sphère creuse lorsque celle-ci est soumise à un chargement purement hydrostatique. De même, (4.2), est la solution exacte du problème du cylindre creux soumis à un chargement axisymétrique. Des extensions des critères de Gurson au cas d'une matrice plastique anisotrope régie par le critère quadratique de Hill ont été proposées par un certain nombre d'auteurs dont Liao et Pan [62] et Benzerga et al. [7], (voir également [6]). Dans le cas d'une cavité sphérique, l'approche par analyse limite conduit à un critère de la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.3)$$

où Σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de Hill : $\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma : \mathbb{M} : \Sigma}$. Le tenseur d'ordre 4, \mathbb{M} , est défini au second chapitre (voir section 2.3.2). κ est un paramètre qui dépend des composantes du tenseur \mathbb{H} tel que $\mathbb{M} : \mathbb{H} = \mathbb{H} : \mathbb{M} = \mathbb{K}$:

$$\kappa = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{H_{11} + H_{22} + H_{33} + H_{44} + H_{55} + H_{66}}} \quad (4.4)$$

Dans cette expression, la notation de Voigt a été utilisée pour \mathbb{H} .

Un autre cas intéressant d'anisotropie concerne les tôles minces ; il est usuellement décrit à l'aide d'une adaptation du critère isotrope transverse de Hill. Ce type d'anisotropie requiert la considération d'un unique coefficient, noté R . Dans ce cas, les coefficients d'anisotropie sont tels que :

$$H = \frac{2}{3} \frac{R}{1 + R}; \quad F = G = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + R}; \quad N = \frac{2}{3} \frac{1 + 2R}{1 + R} \quad (4.5)$$

Il s'en suit que le critère de plasticité pour un matériau poreux présentant ce type d'anisotropie et contenant des cavité cylindriques s'écrit [62] :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \sqrt{\frac{1 + 2R}{2(1 + R)}} \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.6)$$

Quelques études de validation numérique de (4.6) ont été faites par la suite ; le lecteur intéressé par ces aspects peut se référer à [63] et [17], [123].

4.2.2 Prise en compte de la forme des cavités : critères pour des cavités sphéroïdales

Un autre type d'extension, probablement plus importante que celui qui vient d'être décrit, a concerné la prise en compte des effets de forme de cavité [36], [37], [32], [33]. Les cavités considérées sont de forme ellipsoïdale de révolution (sphéroïde), allongée ou aplatie. L'analyse limite conduite par les auteurs s'appuie sur les champs de vitesse axisymétriques proposés par Lee et Mear [59] qui seront précisés ci-dessous. Avant de présenter les différents critères proposés (cf. section 4.2.2), nous introduisons d'abord les notations associées à la cellule sphéroïdale qui sera étudiée (section 4.2.2) puis brièvement la famille de champs axisymétriques issue de [59]. Comme précédemment évoqué, ces deux sections préliminaires servent également de prétexte pour préciser un certain nombre de notations et de définitions sur lesquelles nous nous appuierons dans ce chapitre.

Description de la cellule élémentaire sphéroïdale

Considérons donc une cellule élémentaire (Ω) de forme sphéroïdale, d'axe de révolution \underline{e}_3 , contenant une cavité également sphéroïdale d'axe \underline{e}_3 et confocale au bord extérieur (cf. figure 4.1). Les sphéroïdes extérieur et intérieur sont respectivement définis par les demi-axes a_2 et a_1 (suivant \underline{e}_3), et les demi-axes b_2 et b_1 (suivant \underline{e}_1 et \underline{e}_2). $a_2 > b_2$ (ou $a_1 > b_1$) correspond à une cavité allongée tandis que $a_2 < b_2$ (ou $a_1 < b_1$) est associé à une cavité aplatie. On note par c la distance focale et par e_1 , e_2 , respectivement l'excentricité du bord extérieure et de la cavité intérieure, définis par :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|} \\ e_1 &= \frac{c}{a_1}; \quad e_2 = \frac{c}{a_2} \quad (\text{sphéroïdes allongés}) \\ e_1 &= \frac{c}{b_1}; \quad e_2 = \frac{c}{b_2} \quad (\text{sphéroïdes aplatis}); \end{aligned} \quad (4.7)$$

De manière similaire, on note par e_2 l'excentricité de la cavité extérieure, définie par $e_2 = c/a_2$ dans le cas d'un sphéroïde allongé et c/b_2 dans le cas d'un sphéroïde aplati. La porosité f et le facteur de forme S sont définis par :

$$f = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2} = \begin{cases} \frac{e_2^3 (1 - e_1^2)}{e_1^3 (1 - e_2^2)}; & (\text{cavité allongée}) \\ \frac{e_2^3 \sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^3 \sqrt{1 - e_2^2}}; & (\text{cavité aplatie}) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$S = \ln \left(\frac{a_1}{b_1} \right)$$

Il est intéressant de noter qu'à porosité fixée, la forme de la cavité intérieure d'excentricité e_1 impose celle de la cavité extérieure d'excentricité e_2 . Ceci suggère que pour un assemblage de sphéroïdes composites, la forme de la cavité impose celle de la microstructure. En

particulier, dans le cas de cavités sphériques, c'est à dire pour $e_1 = 0$, la porosité est finie si e_2 tend vers zero également ce qui correspond à un bord extérieur qui possède lui même une forme sphérique. On retrouve naturellement le modèle de la sphère creuse de l'analyse de Gurson, à laquelle est automatiquement associée une répartition spatiale isotrope des cavités et donc un assemblage de spheres composites d'Hashin. De même dans le cas du cylindre, $e_1 \rightarrow 1$, la porosité est non nulle si $e_2 \rightarrow 1$ également, c'est à dire si le bord extérieur possède lui même une forme cylindrique.

Pour cette classe de géométrie il est judicieux d'introduire, par commodité, le système de

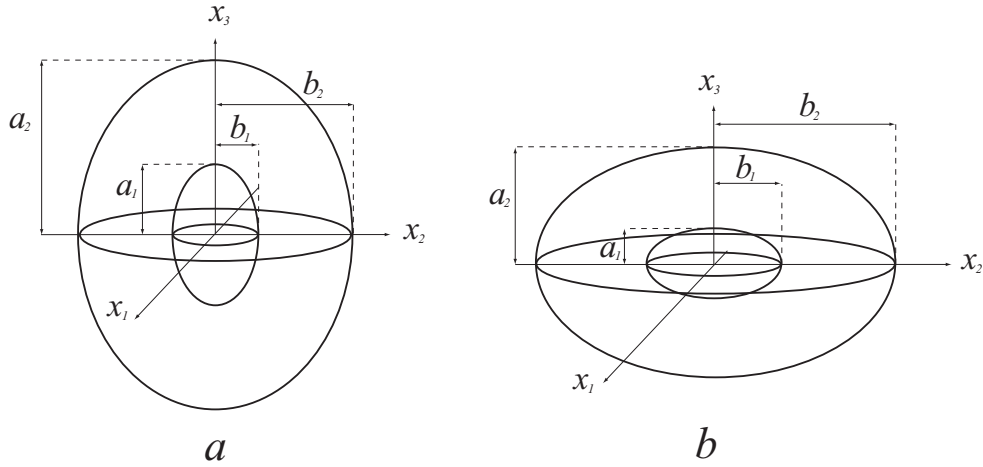


FIG. 4.1 – Cellule élémentaire dans le cas d'une cavité allongée et aplatie.

coordonnées sphéroïdales caractérisé par λ, φ, θ et défini, dans le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et cartésien (x_1, x_2, x_3) par :

$$\begin{cases} x_1 = b \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ x_2 = b \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ x_3 = a \cos(\varphi) \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = b \sin(\varphi) \\ \theta = \theta \\ x_3 = a \cos(\varphi) \end{cases} \quad (4.9)$$

Les iso- λ surfaces définissent des sphéroïdes confocaux, de demi-axes $a = c \cosh(\lambda)$, $b = c \sinh(\lambda)$ et d'excentricité $e = c/a$, pour une cavité allongée. Pour une cavité aplatie, les iso- λ surfaces définissent des sphéroïdes confocaux, de demi-axes $a = c \sinh(\lambda)$, $b = c \cosh(\lambda)$ et d'excentricité $e = c/b$. L'iso-surface $\lambda = \lambda_1$ définit le bord de la cavité tandis que l'iso-surface $\lambda = \lambda_2$ correspond au bord extérieur de la cellule. Les vecteurs unitaires de la base sphéroïdale sont :

$$\begin{cases} \underline{e}_\lambda = \frac{1}{L_\lambda} \{ a \sin(\varphi) \underline{e}_\rho + b \cos(\varphi) \underline{e}_3 \} \\ \underline{e}_\varphi = \frac{1}{L_\lambda} \{ b \cos(\varphi) \underline{e}_\rho - a \sin(\varphi) \underline{e}_3 \} \\ \underline{e}_\theta = \underline{e}_\theta \end{cases} \quad (4.10)$$

avec $L_\lambda = \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + b^2 \cos^2(\varphi)}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $\underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_1 + \sin(\varphi)\underline{e}_2$.

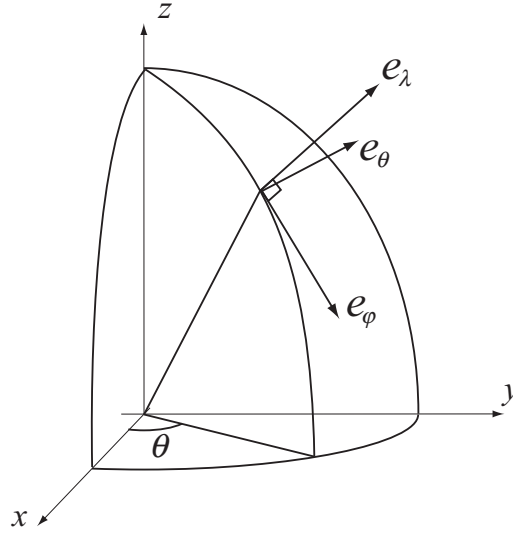


FIG. 4.2 – Repère sphéroïdal dans le cas d'une cavité allongée.

Champs d'expansion pour une cavité sphéroïdale

Un des ingrédients majeurs de l'analyse de l'expansion d'une cavité et de la détermination du critère de plasticité macroscopique est le choix des champs test. Classiquement, un tel champ doit satisfaire la condition d'incompressibilité de la matrice (c'est à dire un champ à divergence nulle) et des conditions de taux de déformation homogène au contour. Une famille de champs satisfaisant ces conditions précitées et bien adaptée à l'étude de la croissance d'une cavité sphéroïdale a été proposée par Lee et Mear [59] (voire annexe B). Il s'agit de champs axisymétriques, c'est à dire indépendants de la coordonnée θ , et à composante nulle suivant \underline{e}_θ . Cette famille de champs a été appliquée par la suite par Gologanu et Leblond [36], [37], [38], [39], pour déterminer la surface de charge d'un milieu poreux parfaitement plastique contenant une cavité sphéroïdale. Cette analyse a été menée dans le cas d'un milieu décrit par des sphéroïdes confocaux. Le champ admissible pour des conditions de taux de déformation homogène au contour, (B.8), contient encore une infinité de paramètres indéterminés. En pratique, la détermination du critère de plasticité macroscopique est faite en choisissant un nombre fini de champs. Les différentes approches proposées par Gologanu et al. [36, 37, 38, 39], Gărăjeu et Suquet [32, 33] sont basées sur la considération des quatre premiers champs de la famille proposée par Lee et Mear (termes en B_{00} , B_{20} , B_{21} et B_{22} , voire annexe B) :

$$\begin{aligned}
 v_\lambda^E &= B_{00} \frac{c^3}{bL_\lambda} + \frac{3c^3}{abL_\lambda} \left\{ aB_{20} + c(1 - \alpha)B_{21} + a(1 - 3\alpha)B_{22} \right\} (1 - 3\cos^2(\varphi)) \\
 v_\varphi^E &= -\frac{3c^4}{2ab^2L_\lambda} \left\{ 2a\alpha B_{21} + 3c(1 - \alpha - \beta)B_{22} \right\} \sin(2\varphi) \\
 v_\theta^E &= 0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

	cylindre	sphère	sandwich
α	0	1/3	1
β	1	2/5	0

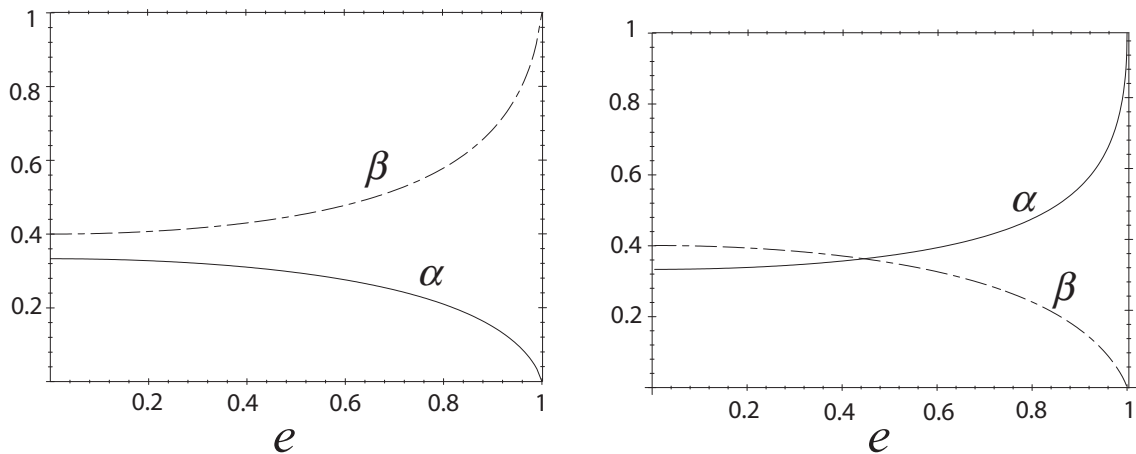
TAB. 4.1 – Valeurs particulières prises par α et β pour certaines formes de cavités.

où α et β sont des fonction de λ , ou de manière équivalente de $e = 1/\cosh(\lambda)$, et définis respectivement pour un sphéroïde allongé ou aplati :

$$\alpha(e) = \begin{cases} \frac{ab^2}{c^3} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{c}{a} \right\} - \frac{b^2}{c^2} & (\text{sphéroïde allongé}) \\ -\frac{ab^2}{c^3} \operatorname{arctan} \left\{ \frac{c}{a} \right\} + \frac{b^2}{c^2} & (\text{sphéroïde aplati}) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\beta(e) = \begin{cases} (1 - 3\alpha) \frac{a^2}{c^2} & (\text{sphéroïde allongé}) \\ -(1 - 3\alpha) \frac{a^2}{c^2} & (\text{sphéroïde aplati}) \end{cases}$$

L'introduction de ces deux fonctions, comme nous le verrons par la suite, s'avère particulièrement commode et utile. Elle permet notamment de générer des expressions valables aussi bien pour une cavité allongée qu'une cavité aplatie. Sur la figure 4.3 sont représentées les variations de α et β en fonction de e . Dans le tableau 1 sont indiquées les valeurs prises par α et β pour certains cas particuliers (cylindre creux : $e \rightarrow 1$ dans le cas d'un sphéroïde allongé ; sphère creuse : $e \rightarrow 0$; cas du "sandwich", volume constitué de deux couches de matériau, planes et parallèles, séparées par une couche de vide et obtenu en posant $e \rightarrow 1$ dans le cas d'un sphéroïde aplati).

FIG. 4.3 – α et β en fonction de e pour a) un sphéroïde allongé et b) un sphéroïde aplati.

Critères issus du champ de Lee et Mear

• **Critère de Gologanu et Leblond (1993-1994)** Le choix fait par [36] et [37] a été de considérer les champs correspondant aux coefficients B_{00} et B_{22} . Le champ de vitesse proposé pour la détermination du critère de plasticité macroscopique est donc défini à partir de deux paramètres qui sont déterminés en considérant les conditions de taux de déformation homogène au contour (cf. annexe B, équation (B.7)). Le critère proposé s'écrit alors sous la forme générale suivante :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0}\right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 \quad (4.13)$$

où Σ_A et Σ_B sont définis par :

$$\Sigma_A = \frac{1}{1-\zeta_G}(\Sigma_q + \eta_G \Sigma_p)^2 + 3\Sigma_s^2 + 3\Sigma_t^2; \quad \Sigma_B = \kappa_G \Sigma_p \quad (4.14)$$

Σ_q , Σ_p , Σ_s et Σ_t s'écrivant :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2}(1 - \alpha_2) + \Sigma_{33}\alpha_2; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} - \Sigma_{33} \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4}(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})^2 + \Sigma_{12}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{23}^2 + \Sigma_{23}^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le critère de plasticité (4.13) fait intervenir les paramètres g , κ_G , η_G et ζ_G dont les expressions diffèrent selon que l'on considère une cavité aplatie ou une cavité allongée. Ces paramètres sont données en annexe B.

On notera que :

- dans le cas de la sphère, obtenu en posant $e_1 \rightarrow 0$ et $e_2 \rightarrow 0$, alors $\eta_G = \zeta_G = g = 0$, $\Sigma_p = \Sigma_h$, et $\kappa_G = 3/2$. Le critère proposé permet alors de retrouver celui initialement obtenu par Gurson pour cette géométrie de pore (voir équation (4.1)).
- dans le cas du cylindre creux, obtenu en posant $e_1 \rightarrow 1$ et $e_2 \rightarrow 1$, la quantité Σ_p vaut $\Sigma_p = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2$ et $\eta_G = \zeta_G = g = 0$, $\kappa_G = \sqrt{3}$. Le critère de Gurson (4.2) pour une cavité cylindrique est également retrouvé.
- le cas particulier où $e_1 \rightarrow 1$ constitue celui de la fissure en forme de pièce de monnaie (penny-shaped). La porosité est nulle, $f = 0$, tandis que g est un terme proportionnel à la densité de fissure, d et définie par $d = \frac{b_1^3}{a_2 b_2^2}$.

• **Le critère GLD (Gologanu-Leblond-Devaud, 1997)** Selon les auteurs eux-même [39], le critère précédent, mérite d'être amélioré par rapport à certaines simulations numériques (dont la nature sera précisée ultérieurement), notamment dans le cas des fissures. Dans [39] (voir également [38]) a été proposée par la suite une extension du critère initial, décrit dans la section précédente, en examinant l'effet d'un champ supplémentaire, il s'agit de celui associé au coefficient B_{21} (cf. relation (4.11)).

Notons toutefois que dans le choix initial de [36] et [37], la condition de taux de déformation homogène au contour permet d'identifier l'ensemble des paramètres introduits,

notamment B_{00} et B_{22} . Toutefois, dans la nouvelle approche la prise en compte d'un champ supplémentaire ne permet plus d'identifier l'ensemble des paramètres introduits. En toute rigueur, il s'agit alors d'effectuer une procédure de minimisation de la dissipation. Or, compte tenu d'un certain nombre de difficultés liées à l'intégration de la dissipation, [38] et [39] n'ont pas appliqué cette procédure de minimisation et remplacée alors par un certain nombre d'approximations heuristiques.

Le critère proposé, possède la même forme que (4.13). Les corrections apportées à ce critère ont conduit à redéfinir les coefficients g , η_G , ζ_G et κ_G ainsi que la quantité Σ_p (cf. annexe B section B.2.2). La nouvelle forme proposée conduit toujours aux critères de Gurson dans le cas d'une cavité sphérique et cylindrique. Les modifications apportées permettent au nouveau critère de mieux reproduire les tendances observées avec les résultats numériques en conditions axisymétriques, et ce, particulièrement dans le cas des penny-shaped.

Une autre extension purement heuristique a été également proposée dans [38] de manière à ce que le critère coïncide avec la borne supérieure d'Hashin dans le cas d'un chargement axisymétrique. Nous ne détaillerons pas ce critère ici, le lecteur pouvant se référer à [38].

Le Critère de Gârâjeu et Suquet Le critère proposé par Gârâjeu [32] pour une cavité allongée, est également un critère de type analyse limite, similaire à ceux proposés par Gologanu. La différence majeure réside dans le choix du champ test. Celui-ci est supposé porté par \underline{e}_λ uniquement et correspond ainsi aux champs associés aux coefficients B_{00} et B_{20} dans la famille de champ de Lee et Mear (cf. équation (4.11)). Le critère proposé une forme similaire à celui proposé par Gologanu et al. (cf. équation (4.13)) dans lequel $\Sigma_A = \Sigma_{eq}$, $g = 0$, et Σ_B s'écrit :

$$\Sigma_B = \kappa_{Gar}^1 \Sigma_q + \kappa_{Gar}^2 \Sigma_h \quad (4.16)$$

où κ_{Gar}^1 et κ_{Gar}^2 sont des fonctions de e_2 et données en annexe B (section B.2.3). Ce critère permet de retrouver également le critère de Gurson pour une cavité sphérique (4.1), en posant $e_2 = 0$.

De la même manière lorsque $e_2 = 1$ on retrouve le critère de Gurson pour une cavité cylindrique (4.2).

4.3 Principe de la détermination du critère de plasticité macroscopique

4.3.1 Introduction

On considère une cellule élémentaire décrite par des sphéroïdes confocaux tels que présentés en section 4.2.2 et obéissant au critère quadratique de Hill :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} \leq \sigma_0^2 \quad (4.17)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contraintes microscopique \mathbb{M} est un tenseur d'ordre quatre correspondant à l'anisotropie plastique. Ce tenseur présente toutes les symétries (majeure et

mineures) et satisfait la condition d'incompressibilité ($M_{iikl} = 0$). Il fait intervenir six coefficients indépendants, dans le repère lié aux directions d'orthotropie (z_1, z_2, z_3). En utilisant la notation de Voigt, il s'écrit sous la forme :

$$M^{ortho} = \begin{pmatrix} F + G & -G & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & G + H & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & -H & F + H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

En toute généralité, l'orientation de la cavité sphéroïdale peut être choisie de manière arbitraire par rapport aux axes d'orthotropie du matériau. Dans la suite de ce chapitre on se place dans le repère lié aux directions e_1, e_2 et e_3 de la cavité. Les composantes de \mathbb{M} , exprimées dans ce repère associé à la cavité, sont obtenues à partir de la relation classique de changement de base, et s'écrivent, en adoptant la notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} & M_{56} \\ M_{16} & M_{26} & M_{36} & M_{46} & M_{56} & M_{66} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

En d'autres termes, les composantes de \mathbb{M} sont données par :

$$M_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}M_{mnpq}^{ortho} \quad (4.20)$$

\mathbf{R} est la matrice de changement de base de (z_1, z_2, z_3) vers (e_1, e_2, e_3) . Ses composantes sont définies, dans le repère (z_1, z_2, z_3) par (voir figure 4.4 pour la définition de ϕ et ψ) :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \sin(\psi) \\ \sin(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) & \sin(\phi) \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Dans le cas d'une matrice plastique isotrope (c'est à dire régie par le critère de von Mises), le critère de plasticité de la matrice est obtenu à partir de (4.17) en posant $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{ortho} = \mathbb{K}$. Dans ce cas particulier, les composantes de \mathbb{M}^{ortho} sont définies par $F = G = H = 1/3$ et $L = M = N = 1$.

L'approche par analyse limite, qui sera mise en oeuvre par la suite, requiert la détermination de la dissipation macroscopique. Celle-ci sera déduite de la dissipation microscopique que l'on se propose maintenant d'introduire.

4.3.2 Expression de la dissipation microscopique

Le champ dans la matrice solide est décomposé en un champ correspondant à un taux de déformation homogène, noté \mathbf{A} , et un champ hétérogène, \underline{v}^E , défini par (4.11) dans

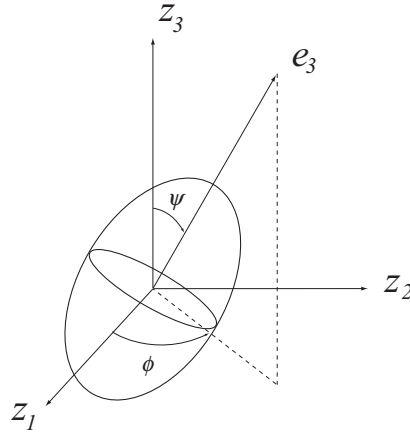


FIG. 4.4 – Définition de ϕ et ψ caractérisant l'orientation du sphéroïde dans le repère (z_1, z_2, z_3)

lequel on pose $B_{20} = B_{21} = 0$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} v_\lambda^E &= \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \frac{c^3}{bL_\lambda} \left\{ B_{00} + 3(1 - 3\alpha)(1 - 3\cos^2(\varphi))B_{22} \right\} \underline{e}_\lambda \\ &\quad - \frac{9c^5}{2ab^2L_\lambda} (1 - \alpha - \beta)B_{22} \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Considérant des taux de déformation homogène au contour de la cellule élémentaire (cf. équation (B.7)), les paramètres \mathbf{A} , B_{00} et B_{22} sont identifiés. On vérifie aisément que $B_{00} = 6B_{22} = B$; le scalaire B et le tenseur d'ordre deux \mathbf{A} sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{D} - D_h \mathbf{T}; \quad B = \frac{a_2 b_2^2}{c^3} D_h \\ \text{avec : } \mathbf{T} &= \frac{3}{2} (1 - \alpha_2) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + 3\alpha_2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le tenseur d'ordre deux \mathbf{T} dépend, via $\alpha_2 = \alpha(e_2)$, de l'excentricité du sphéroïde extérieur. Le taux de déformation dans la matrice solide obtenu à partir de (4.22), s'écrit donc :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + B \mathbf{d}^E \quad (4.24)$$

où \mathbf{d}^E est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^E &= \frac{3c^3}{2ab^2} (1 - \alpha) (\mathbf{1} - 3\underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda) \\ &\quad + \frac{3c^5}{2ab^2L_\lambda^2} \beta \sin^2(\varphi) (\underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda - \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) + \frac{3c^5}{2a^2bL_\lambda^2} \beta \sin(2\varphi) \underline{e}_\lambda \otimes^s \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour une matrice parfaitement plastique régie par le critère de Hill ainsi que par la loi d'écoulement associée, la dissipation microscopique est classiquement définie par :

$$\pi(\mathbf{d}) = \begin{cases} \sigma_0 d_{eq} & (\text{dans la matrice}) \\ 0 & (\text{dans la cavité}) \end{cases} \quad (4.26)$$

où d_{eq} est le taux de déformation plastique équivalent au sens de Hill, et donné par :

$$d_{eq}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d} \quad (4.27)$$

\mathbb{H} est le tenseur d'ordre quatre, anisotrope, défini par $\mathbb{H} : \mathbb{M} = \mathbb{K}$; outre les conditions de symétrie (majeure et mineures), \mathbb{H} satisfait également la condition d'incompressibilité de la matrice, $H_{iikl} = 0$ pour $k, l = 1, 2, 3$. De manière équivalente à \mathbb{M} , les composantes de \mathbb{H} , dans le repère local lié aux axes du sphéroïde, sont obtenues via la relation de changement de base $H_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}H_{mnpq}^{ortho}$. Les quantités H_{mnpq}^{ortho} correspondent aux composantes de \mathbb{H} dans le repère lié aux axes d'orthotropie du matériau. En utilisant la notation de Voigt, les composantes de \mathbb{H}^{ortho} , reliées aux coefficient de Hill, s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_{11}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{G + 4H + F}{FG + FH + GH}; & H_{22}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{G + H + 4F}{FG + FH + GH} \\ H_{33}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{4G + H + F}{FG + FH + GH}; & H_{12}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{G - 2H - 2F}{FG + FH + GH} \\ H_{13}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{-2G - 2H + F}{FG + FH + GH}; & H_{23}^{ortho} &= \frac{1}{9} \frac{-2G + H - 2F}{FG + FH + GH} \\ H_{44}^{ortho} &= \frac{1}{L}; & H_{55}^{ortho} &= \frac{1}{M}; & H_{66}^{ortho} &= \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (4.28)$$

En reportant (4.24) donnant \mathbf{d} dans (4.27), l'équation d_{eq} s'écrit :

$$d_{eq}^2 = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} B \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E + d_{eq}^{E^2} B^2 \quad (4.29)$$

avec :

$$A_{eq}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{A}; \quad \text{et} \quad d_{eq}^{E^2} = \frac{2}{3} \mathbf{d}^E : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E \quad (4.30)$$

Avant de calculer les différents termes dans d_{eq}^2 , il est judicieux d'exprimer \mathbf{d}^E (voir (4.25)) dans le repère cylindrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^E &= \frac{3c^3}{2ab^2} (1 - \alpha) (\mathbf{1} - 3\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \\ &+ \frac{3c^3}{2ab^2} \left[1 - 3\alpha + \frac{2b^2 \cos^2(\varphi)}{L_\lambda^2} \right] (\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) - \frac{3c^3 \sin(2\varphi)}{bL_\lambda^2} \mathbf{e}_\rho \otimes^s \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Puisque $\mathbb{H} : \mathbf{1} = 0$, le terme croisé $\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E$ se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E &= -\frac{9c^3}{2ab^2} (1 - \alpha) \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho \\ &+ \frac{3c^3}{2ab^2} \left[1 - 3\alpha + \frac{2b^2 \cos^2(\varphi)}{L_\lambda^2} \right] \mathbf{A} : \mathbb{H} : (\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &- \frac{3c^3 \sin(2\varphi)}{bL_\lambda^2} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le calcul de d_{eq}^E (voir (4.30)) conduit à :

$$\begin{aligned}
 d_{eq}^{E^2} = \frac{3c^6}{2a^2b^4L_\lambda^4} & \left\{ 4a^4 \sin^4(\varphi) H_{\rho\rho\rho\rho} + \left[(1-3\alpha)L_\lambda^2 + 2b^2 \cos^2(\varphi) \right]^2 H_{3333} \right. \\
 & + 4 \left[(1-3\alpha)L_\lambda^2 + 2b^2 \cos^2(\varphi) \right] a^2 \sin^2(\varphi) H_{\rho\rho 33} \\
 & + 4a^2b^2 \sin^2(2\varphi) H_{\rho 3\rho 3} + 8a^3b \sin(2\varphi) \sin^2(\varphi) H_{\rho\rho\rho 3} \\
 & \left. + 4ab \sin(2\varphi) \left[(1-3\alpha)L_\lambda^2 + 2b^2 \cos^2(\varphi) \right] H_{\rho 333} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

La combinaison de (4.26) à (4.33) permet de déterminer $\Pi(\mathbf{D})$.

4.3.3 Principe de détermination de la surface de charge macroscopique

Rappelons maintenant l'expression de la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$, qui est déduite de la dissipation microscopique (voir par exemple [115] ou Leblond [58]) :

$$\Sigma : \mathbf{D} \equiv \Pi(\mathbf{D}) = \text{Inf} \langle \pi(\mathbf{d}(\underline{x})) \rangle_\Omega \tag{4.34}$$

Puisque le champ introduit ne fait pas intervenir de paramètres indéterminés, aucune procédure de minimisation n'est requise. $\Pi(\mathbf{D})$ est ainsi déduit de l'intégration de $\pi(\mathbf{d})$ sur la cellule élémentaire Ω du milieu poreux :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} d_{eq} dV \tag{4.35}$$

$|\Omega|$ est le volume de la cellule élémentaire, $|\Omega| = 4\pi a_2 b_2^2 / 3$.

Le critère de plasticité macroscopique se déduit classiquement de la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$ en considérant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 3\Sigma_h &= \frac{\partial \Pi}{\partial D_h} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} : (\mathbf{1} - \mathbf{T}) + \frac{\partial \Pi}{\partial B} \frac{a_2 b_2^2}{c^3} \\
 \bar{\Sigma} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{D}}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} : \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} + \frac{\partial \Pi}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \bar{\mathbf{D}}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

dans laquelle, $\bar{\Sigma}$ représente la partie déviatorique du tenseur des contraintes macroscopiques Σ . Une combinaison de ces deux relations conduit à :

$$3\Sigma_p = \Sigma : \mathbf{T} = \frac{\partial \Pi}{\partial B} \frac{a_2 b_2^2}{c^3}; \quad \text{et} \quad \bar{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} \tag{4.37}$$

pour lequel on rappelle que $\mathbf{T} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + 3\alpha_2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.

L'expression (4.37) correspond à un système d'équations paramétriques qui définit la surface de charge macroscopique dont la détermination analytique requiert celle de la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$.

4.4 Un critère approché pour les matériaux plastiques poreux anisotropes [76], [78]

Une procédure conduisant à une expression analytique de $\Pi(\mathbf{D})$ a été proposée dans le contexte d'une matrice plastiquement isotrope par [36] et [37]. Elle est basée sur un certain nombre d'approximations qui ne sont malheureusement pas reductibles dans le contexte de l'anisotropie plastique de la matrice. De nouvelles approximations sont donc proposées. Nous verrons dans cette section qu'elles permettent notamment de générer des expressions valables, aussi bien pour une cavité allongée qu'une cavité aplatie.

4.4.1 Expression approchée de $\Pi(\mathbf{D})$

Introduction

On se propose maintenant d'établir une expression analytique approchée de la dissipation macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$ qui nous permettra par la suite d'établir celle du critère en utilisant (4.37). On rappelle tout d'abord que l'expression d'un élément de volume en coordonnées sphéroïdales s'écrit $dV = bL_\lambda \sin(\varphi) d\lambda d\varphi d\theta$. La dissipation plastique macroscopique, $\Pi(\mathbf{D})$, est alors donnée par :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{3c^3\sigma_0}{4\pi a_2 b_2^2} \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d_{eq} bL_\lambda^2 \sin \varphi d\lambda d\varphi d\theta \quad (4.38)$$

où d_{eq} est défini de (4.29) à (4.33). En raison des approximations qui seront introduites, la procédure de détermination de $\Pi(\mathbf{D})$ ne permet malheureusement pas de conserver le statut de borne supérieure du critère obtenu (excepté dans le cas de la cavité cylindrique ou sphérique).

Une première étape de la procédure d'intégration réside dans l'approximation suivante, qui généralise au cas des cavité sphéroïdales, celle introduite par Gurson [47] :

A1 : d_{eq} est remplacé par une valeur moyenne sur chaque sphéroïde confocal. D'où

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{c^3\sigma_0}{a_2 b_2^2} \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} \{ \langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon \}^{1/2} b(2a^2 + b^2) d\lambda \quad (4.39)$$

avec :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon = \frac{3}{4\pi(2a^2 + b^2)} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d_{eq}^2 L_\lambda^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \quad (4.40)$$

La quantité $\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon$ peut se mettre sous la forme :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \langle \mathbf{d}^E \rangle_\varepsilon B + \langle d_{eq}^{E2} \rangle_\varepsilon B^2 \quad (4.41)$$

Determination de $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}}$

Il s'agit maintenant de déterminer l'expression des différents termes présents dans la moyenne $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}}$.

Remarque sur le cas isotrope : afin de mettre en évidence les nouvelles difficultés liées à la prise en compte de l'anisotropie plastique, on se replace dans le cas traité par Gologanu et al. [36, 37]. Pour cela, considérons le cas d'une cellule élémentaire régie par le critère de von Mises ($\mathbb{H} = \mathbb{K}$); cette cellule est soumise à un chargement macroscopique axisymétrique : $\mathbf{D} = D_{33}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + D_{11}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho &= -\frac{1}{2}A_{33}; & \mathbf{A} : \mathbb{H} : (\underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) &= -\frac{3}{2}A_{33} \\ \mathbf{A} : \mathbb{H} : \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Compte tenu de ces résultats, le terme croisé $\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E$ ne dépend donc pas de la coordonnée θ . De plus, les composantes de \mathbb{H} , exprimées dans le repère cylindrique, sont données par :

$$H_{\rho\rho\rho\rho} = H_{3333} = \frac{2}{3}; \quad H_{\rho\rho 33} = -\frac{1}{3}; \quad H_{\rho 3\rho 3} = \frac{1}{2}; \quad H_{\rho\rho\rho 3} = H_{\rho 333} = 0 \quad (4.43)$$

d_{eq}^{E2} s'écrit donc, lorsque la matrice est régie par le critère de von Mises :

$$d_{eq}^{E2} = \frac{3c^6}{a^2b^4} \left\{ 3(1-\alpha)^2 - 2(1-3\alpha) \frac{a^2 \sin^2(\varphi)}{L_\lambda^2} \right\} \quad (4.44)$$

d_{eq}^{E2} ne dépend donc pas non plus de θ . Il s'en suit que dans le cas d'un chargement axisymétrique, pour une matrice isotrope, d_{eq} dépend seulement de φ et λ . De plus, la dépendance de d_{eq} avec φ se traduit uniquement à l'aide du terme $\cos^2(\varphi)$. Ceci a motivé l'approximation proposée par [36], [37], [38] et [39] qui a consisté à remplacer $\cos^2(\varphi)$ par sa valeur moyenne sur l'intervalle $[0, \pi]$, c'est à dire $1/3$.

Au contraire, dans le cas de la matrice plastique anisotrope, considérée ici, d_{eq} dépend aussi de la variable θ , par la présence des composantes de \mathbb{H} exprimées dans le repère cylindrique. De plus, θ apparaît également dans le terme croisé $\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E$. Ces observations ont motivé pour une grande part l'approximation $\mathcal{A}1$ précédente, consistant à remplacer d_{eq}^2 par sa valeur moyenne sur chaque sphéroïde confocal (voir (4.39) et (4.40)).

Il est intéressant de noter que, pour une matrice isotrope soumise à un chargement axisymétrique, l'approximation (4.40) se réduit tout simplement à celle proposée par Gologanu et al. [36] et [37]. Notons également que dans le cas de la sphère ($a = b = L_\lambda = r$), on vérifiera aisément que l'approximation $\mathcal{A}1$ consiste à remplacer d_{eq} par $\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}}$, où l'on rappelle que $\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}$ représente la valeur moyenne de d_{eq}^2 sur la sphère unité (approximation de Gurson).

Afin de d'établir l'expression analytique de $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}}$, considérons dans un premier temps la valeur moyenne du terme croisé; celle-ci est donnée par :

$$\langle \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{3}{4\pi(2a^2 + b^2)} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E L_\lambda^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \quad (4.45)$$

En observant que $\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E$ est donné par (4.32), les identités suivantes se révèlent utiles pour l'intégration de (4.45) par rapport à θ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho d\theta = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3); \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_\rho d\theta = 0 \quad (4.46)$$

En effet, on peut montrer, à partir de (4.46) que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^E \rangle_\varepsilon &= -\frac{9c^3 \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q}}{2ab^2(2a^2 + b^2)} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \left[\alpha L_\lambda^2 - b^2 \cos^2(\varphi) \right] \sin(\varphi) d\varphi \\ &= -\frac{3}{2} W(\lambda) \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.47)$$

où $W(\lambda)$ est donné par :

$$W(\lambda) = \frac{2c^3(a^2 - b^2)}{ab^2(2a^2 + b^2)} (1 - \alpha - \beta) \quad (4.48)$$

et \mathbf{Q} est le tenseur d'ordre deux, déviatorique, défini par :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (4.49)$$

On s'intéresse maintenant au terme quadratique $d_{eq}^{E^2}$; pour cela, considérons les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{\rho\rho\rho\rho} d\theta &= \frac{1}{4} \left\{ H_{11} + H_{22} + \frac{1}{2} H_{33} + H_{66} \right\} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{\rho\rho\rho 3} d\theta &= 0; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{\rho\rho 33} d\theta = -\frac{1}{2} H_{33} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{\rho 3\rho 3} d\theta &= \frac{1}{4} (H_{44} + H_{55}); \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{\rho 333} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

La valeur moyenne de $d_{eq}^{E^2}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ est obtenue en écrivant la moyenne de (4.33) et en tenant compte de (4.50). Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \langle d_{eq}^{E^2} \rangle_\theta &= \frac{3c^6}{a^2 b^4 L_\lambda^4} \left\{ a^4 \sin^4(\varphi) h_1 + 3(b^2 \cos^2(\varphi) - \alpha L_\lambda^2)^2 h_2 \right. \\ &\quad \left. + a^2 b^2 \sin^2(2\varphi) h_3 \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

dans lequel les paramètres h_i sont reliés aux coefficients d'anisotropie du matériau (en utilisant les notations de Voigt) par :

$$h_1 = \frac{1}{4}(2H_{11} + 2H_{22} + 2H_{66} - H_{33}); \quad h_2 = \frac{3}{2}H_{33}; \quad h_3 = \frac{1}{2}(H_{44} + H_{55}) \quad (4.52)$$

Notons que, dans le cas isotrope, ces coefficients prennent les valeurs : $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Afin d'évaluer maintenant la valeur moyenne de (4.51) sur $\varphi \in [0, \pi]$, il est nécessaire d'introduire les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^5(\varphi)}{L_\lambda^2} d\varphi = \frac{2}{3a^2}(3 - 3\alpha - \beta); \quad \int_0^\pi \frac{\cos^2(\varphi) \sin^3(\varphi)}{L_\lambda^2} d\varphi = \frac{2}{3a^2}\beta$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^4(\varphi) \sin(\varphi)}{L_\lambda^2} d\varphi = \frac{2}{3b^2}(1 - \beta)$$
(4.53)

Il s'en suit que la moyenne de $d_{eq}^{E^2}$ sur chaque sphéroïde confocal s'écrit :

$$\langle d_{eq}^{E^2} \rangle_\varepsilon = P(\lambda) = \frac{3c^6}{a^2b^4(2a^2 + b^2)} \left\{ a^2(3 - 3\alpha - \beta)h_1 \right.$$

$$\left. + 3(1 - \alpha - \beta) \left[a^2\alpha + b^2(1 - \alpha) \right] h_2 + 4b^2\beta h_3 \right\}$$
(4.54)

Notons que $P(\lambda)$ est une fonction de λ et dépend explicitement des coefficients d'anisotropie h_i du matériau.

En résumé, la valeur moyenne de $\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon$ (4.41) s'écrit :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon = A_{eq}^2 - 2W(\lambda)B \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} + P(\lambda)B^2$$
(4.55)

Avec $W(\lambda)$ et $P(\lambda)$ respectivement définis par (4.48) et (4.54)

Expression approchée de $\Pi(\mathbf{D})$

La détermination de l'expression explicite de la dissipation macroscopique requiert maintenant l'intégration, par rapport à la variable $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, de (4.39) avec (4.55). Or, les fonctions $W(\lambda)$ et $P(\lambda)$ sont des fonctions compliquées de λ et pour cette raison, une fois de plus, une approximation est nécessaire.

Considérons d'abord le cas de la cavité sphérique, cas particulier de la cavité allongée pour laquelle $e \rightarrow 0$ (soit $\lambda \rightarrow \infty$); il est facile de vérifier que (voir (4.54) pour l'expression générale de $P(\lambda)$) :

$$P(\lambda) \simeq \frac{4c^6}{a^2b^4} \frac{2h_1 + h_2 + 2h_3}{5}$$
(4.56)

tandis que $W(\lambda) = 0$.

Pour le cas de la cavité cylindrique, second cas limite d'une cavité de type allongée, obtenu en posant $e \rightarrow 1$ (soit $\lambda = 0$), on a :

$$P(\lambda) \simeq \frac{3c^6}{a^2b^4} h_1$$
(4.57)

tandis que $W(\lambda) = 0$.

En fait, pour toute valeur de l'excentricité, $P(\lambda)$ (équation (4.54)) apparaît comme "proportionnelle" à x^2 où $x = c^3/(ab^2)$. $W(\lambda)$ est nul pour chacun des deux cas limites que

nous venons de considérer. De plus sa valeur étant relativement faible dans le cas général d'une cavité allongée, il a été choisi de négliger ce terme par Gologanu et al. [36].

Dans le cas de la cavité aplatie, la situation est quelque peu différente. Lorsque $e \rightarrow 0$ (soit $\lambda = +\infty$, cas de la sphère), on retrouve le résultat donné par (4.56), c'est à dire que $P(\lambda)$ est proportionnel à x^2 et $W(\lambda) = 0$.

Lorsque $e \rightarrow 1$ (soit $\lambda = 0$), c'est à dire dans le cas du "sandwich" (volume constitué de deux couches de matériau, planes et parallèles, séparées par une couche de vide), il apparaît que $P(\lambda)$ prend une valeur limite finie qui s'écrit :

$$P(\lambda) = 6h_3 + \frac{9\pi^2}{16}h_2 \quad (4.58)$$

Par conséquent, il n'est pas possible, pour ce type de géométrie, de supposer que $P(\lambda)$ est proportionnel à x^2 . L'idée suggérée par [37] est d'introduire une autre variable, notée y , définie par :

$$y = \frac{\chi x}{x + \chi} \quad (4.59)$$

y est proportionnel à x pour de faibles valeurs de e (ou encore de faibles valeurs de x), mais tend vers une valeur limite finie dans le cas où $e \rightarrow 1$, c'est à dire lorsque $x \rightarrow +\infty$, $P(\lambda) \rightarrow \chi$. La variable y apparaît donc plus approprié dans le cas d'une cavité aplatie pour laquelle on suppose que $P(\lambda)$ est proportionnel à y^2 . χ est un paramètre dont la valeur sera ultérieurement précisée. Concernant le terme croisé, $W(\lambda)$, celui ci converge également vers une valeur limite finie lorsque $e \rightarrow 1$, $W(\lambda) \rightarrow -\pi$. Par conséquent, ce terme ne peut pas être négligé dans le cas des cavités aplaties.

Compte tenu de cet ensemble d'observations, l'approximation suivante est considérée :

$\mathcal{A}2$: $P(\lambda)$ est remplacé par p^2u^2 , où p est une constante, $u = x$ dans le cas d'une cavité allongée et $u = y$ dans le cas d'une cavité aplatie.

Similairement à [39] on considère également l'approximation suivante :

$\mathcal{A}3$: Le terme croisé $W(\lambda)$ est remplacé par wu^2 où w est une constante.

Finalement, en appliquant les approximations $\mathcal{A}2$ et $\mathcal{A}3$, $\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon$ (voir (4.29)) peut se réécrire sous la forme :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon = A_{eq}^2 - \frac{w^2u^2}{p^2}(\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2 + \left\{ pB - \frac{w}{p}\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right\}^2 u^2 \quad (4.60)$$

Avec ce changement de variable, l'intégrale à calculer (4.39), s'écrit :

$$\Pi(\mathbf{D}) = -\sigma_0 x_2 \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \langle d_{eq}^2 \rangle_\varepsilon \right\}^{1/2} \frac{du}{u^2} \quad (4.61)$$

La dernière approximation est la suivante :

$\mathcal{A4}$: Le terme u^2 qui apparaît dans $\frac{w^2}{p^2}(\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2$ est remplacé par $u_1 u_2$.

d'où :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon} = A_{eq}^2 - \frac{w^2 u_1 u_2}{p^2} (\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2 + \left\{ pB - \frac{w}{p} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right\}^2 u^2 \quad (4.62)$$

Notons qu'avec l'approximation $\mathcal{A4}$, cette expression approchée de $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon}$ permet de retrouver la solution exacte de $\Pi(\mathbf{D})$ (au premier ordre), pour le champ de vitesse considéré lorsque $D_h \rightarrow 0$. En effet, dans le cas où $D_h \rightarrow 0$, on a $d_{eq} = D_{eq}$ et, par conséquent, la solution exacte de $\Pi(\mathbf{D})$ est :

$$\Pi(\mathbf{D}) = (1 - f)\sigma_0 D_{eq} \quad (4.63)$$

tandis que pour la valeur approchée de $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon}$, (voir (4.62)), elle s'écrit, lorsque $D_h = 0$ (et donc $B = 0$ (4.23)) :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon} = D_{eq}^2 + \frac{w^2}{p^2} (\mathbf{D} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2 (u^2 - u_2 u_1) \quad (4.64)$$

En reportant cette expression dans (4.61) et en tenant compte du fait que $w^2/p^2 \ll 1$, on montre, par un développement au premier ordre, que :

$$\Pi(\mathbf{D}) = (1 - f)\sigma_0 D_{eq} - \sigma_0 x_2 \frac{w^2}{2p^2} \frac{(\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2}{A_{eq}} \int_{u_1}^{u_2} (u^2 - u_2 u_1) \frac{du}{u^2} \quad (4.65)$$

En notant que $\int_{u_1}^{u_2} (u^2 - u_2 u_1) \frac{du}{u^2} = 0$, il s'en suit que l'expression de la dissipation macroscopique (4.65) se réduit à (4.63).

Revenons maintenant à la situation générale. En tenant compte de (4.62), on obtient pour la dissipation macroscopique :

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{D}) &= -\sigma_0 x_2 \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 u^2 \right\}^{1/2} \frac{du}{u^2} \\ &= -\sigma_0 x_2 \left[\tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u \tilde{B}}{\tilde{A}} \right\} - \frac{\sqrt{\tilde{A}^2 + u^2 \tilde{B}^2}}{u} \right]_{u_1}^{u_2} \end{aligned} \quad (4.66)$$

où nous avons introduit \tilde{A} et \tilde{B} , définis par :

$$\tilde{A}^2 = A_{eq}^2 - \frac{w^2 u_1 u_2}{p^2} (\mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q})^2; \quad \tilde{B} = pB - \frac{w}{p} \mathbf{A} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} \quad (4.67)$$

4.4.2 Détermination du critère de plasticité macroscopique

Il s'agit maintenant de déterminer l'expression analytique du critère de plasticité macroscopique à partir de celle qui vient d'être établie pour $\Pi(\mathbf{D})$. En tenant compte du

fait que $\Pi(\mathbf{D})$ s'exprime à partir de \tilde{A} et \tilde{B} , il est judicieux d'introduire dans (4.37) le changement de variable suivant $(\mathbf{A}, B \Rightarrow \tilde{A}, \tilde{B})$:

$$\begin{aligned} 3\Sigma_p &= \frac{1}{x_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial B} = \frac{p}{x_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} \\ \bar{\Sigma} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \mathbf{A}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \mathbf{A}} - \frac{w}{p} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} \mathbb{H} : \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.68)$$

qui, par combinaison, conduit à :

$$3\Sigma_p = \frac{p}{x_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}}; \quad \bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \mathbf{A}} \quad (4.69)$$

On introduit à présent le tenseur du quatrième ordre \mathbb{H}^* , défini par :

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \frac{3w^2 u_1 u_2}{2p^2} (\mathbb{H} : \mathbf{Q}) \otimes (\mathbb{H} : \mathbf{Q}) \quad (4.70)$$

\mathbb{H}^* possède la symétrie majeure et les symétries mineures et vérifie la condition d'incompressibilité $\mathbb{H}^* : \mathbf{1} = 0$. Il s'en suit que \tilde{A} (4.67) peut être réécrit sous la forme $\tilde{A} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{A} : \mathbb{H}^* : \mathbf{A}$. La seconde relation dans (4.69) conduit alors à :

$$\frac{3}{2} \left(\bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right) : \mathbb{M}^* = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \frac{\mathbf{A}}{\tilde{A}} \quad (4.71)$$

où \mathbb{M}^* est tel que $\mathbb{H}^* : \mathbb{M}^* = \mathbb{K}$. La détermination de \mathbb{M}^* s'avère a priori délicate. En fait, comme nous allons le montrer, une solution particulière de l'équation $\mathbb{H}^* : \mathbb{M}^* = \mathbb{K}$, notée \mathbb{M}_1^* , est suffisante pour déterminer les critère de plasticité macroscopique. En effet, la solution générale s'écrit $\mathbb{M}^* = \mathbb{M}_1^* + \mathbb{M}_2^*$ où \mathbb{M}_2^* vérifie $\mathbb{H}^* : \mathbb{M}_2^* = 0$. Une solution particulière de $\mathbb{H}^* : \mathbb{M}^* = \mathbb{K}$ est :

$$\mathbb{M}_1^* = \mathbb{M} + \frac{3w^2 u_1 u_2}{2p^2 - 3w^2 u_1 u_2} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \quad (4.72)$$

pour laquelle on rappelle que \mathbb{M} est défini par (4.17). Une observation intéressante est que, à partir de (4.71), et en notant $\mathbb{M}' = \mathbb{M}^* : \mathbb{H}^* : \mathbb{M}^*$ on a :

$$\frac{3}{2} \left(\bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right) : \mathbb{M}' : \left(\bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \right)^2 \quad (4.73)$$

De plus en remarquant que $\mathbb{M}' = \mathbb{M}^* : \mathbb{H}^* : \mathbb{M}^* = \mathbb{M}_1^* : \mathbb{H}^* : \mathbb{M}_1^* = \mathbb{M}_1^*$, il vient que $\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}}$ peut être exprimé à partir de \mathbb{M}_1^* au lieu de \mathbb{M}^* .

On exprime maintenant les dérivées de $\Pi(\mathbf{D})$ par rapport à \tilde{A} et \tilde{B} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} &= -\sigma_0 x_2 \left[\operatorname{arcsinh}(u\xi) \right]_{u_1}^{u_2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} &= \sigma_0 x_2 \left[\frac{\sqrt{1 + u^2 \xi^2}}{u} \right]_{u_1}^{u_2} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ces deux relations définissent une surface à partir du paramètre $\xi = \tilde{B}/\tilde{A}$ et qui s'écrit :

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}} \right)^2 + 2 \frac{x_2^2}{u_1 u_2} \cosh \left(\frac{1}{x_2 \sigma_0} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{B}} \right) - \frac{x_2^2}{u_2^2} - \frac{x_2^2}{u_1^2} = 0 \quad (4.75)$$

$\partial \tilde{\Pi}/\partial \tilde{B}$ et $\partial \tilde{\Pi}/\partial \tilde{A}$ étant respectivement donnés par (4.69) et (4.73). L'équation (4.75) achève la détermination du critère macroscopique. Afin de formuler le critère sous une forme plus explicite, rappelons que dans le cas d'une cavité allongée on a $u_2 = x_2$ et $u_1 = x_1 = x_2/f$ tandis que dans le cas d'une cavité aplatie $u_2 = y_2 = \chi g/(g+1)$ et $u_1 = y_1 = \chi g/(g+f)$ dans laquelle $g = x_2/\chi$ a été introduit.

Le critère de plasticité macroscopique s'écrit alors sous la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (4.76)$$

Où :

$$\Sigma_B = \kappa \Sigma_p = \frac{\kappa}{3} \Sigma : \mathbf{T} \quad (4.77)$$

avec $\kappa = 3/p$. le scalaire p étant déterminé par la suite.

g est conventionnellement pris égal à 0 dans le cas d'une cavité allongée. Dans le cas d'une cavité aplatie, notons que l'on a :

$$g = \frac{x_2}{\chi} = \frac{c^3}{\chi a_2 b_2^2} = \frac{e_2^2}{\chi \sqrt{1 - e_2^2}} \quad (4.78)$$

Quant à $\Sigma_A = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{A}}$, il est donné par (voir (4.73)) :

$$\Sigma_A^2 = \frac{3}{2} \left(\bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right) : \mathbb{M}_1^* : \left(\bar{\Sigma} + \frac{3wx_2}{p^2} \Sigma_p \mathbb{H} : \mathbf{Q} \right) \quad (4.79)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma_A^2 = \Sigma_{eq}^2 + \frac{1}{1 - h_2 \zeta} \{ h_2 \eta^2 \Sigma_p^2 + \zeta \Sigma_q^2 + 2\eta \Sigma_p \Sigma_q \} \quad (4.80)$$

avec $\Sigma_q = \Sigma : \mathbf{Q}$. La quantité Σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de Hill : $\Sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \Sigma : \mathbb{H} : \Sigma$. Les coefficients η et ζ sont donnés par :

$$\eta = \frac{\kappa^2 w x_2}{2}; \quad \zeta = \frac{\kappa^2 w^2 u_1 u_2}{4} \quad (4.81)$$

L'équation (4.76) constitue sans doute le résultat le plus important de ce chapitre. Elle définit la surface de charge macroscopique d'un matériau poreux, constitué d'une matrice plastique anisotrope régie par le critère de Hill et de pores sphéroïdaux, soumis à un chargement macroscopique arbitraire. Il est intéressant de noter que dans la définition de Σ_A , intervient \mathbb{M}_1^* qui respecte la condition d'incompressibilité de la matrice et qui prend en compte, dans un certain sens, le couplage entre l'anisotropie plastique et l'anisotropie

induite par l'orientation de la cavité. Lorsque cette orientation (donnée par \underline{e}_3) ne coïncide avec aucune des directions d'orthotropie de la matrice, le comportement macroscopique exhibe une anisotropie plus forte que celle donnée par le critère de Hill⁶.

En résumé, on soulignera que le critère macroscopique est entièrement déterminé à partir de (4.76) avec (4.77), (4.78), (4.80) et (4.81) dans lesquels η , ζ et κ restent à déterminer. Ceci fait l'objet de la section qui suit.

4.4.3 Déterminations des coefficients η , ζ , κ et χ

On en vient maintenant à la détermination des coefficients η , ζ , p et χ qui interviennent dans le critère (4.76). Concernant κ qui entre dans le cosinus hyperbolique, la méthode suggérée par [36] et [37] dans le cas d'une matrice plastique isotrope consiste à les identifier de manière à retrouver la solution exacte dans le cas particulier où $\mathbf{A} = 0$. Il s'agit d'un trajet de chargement pour lequel la déformation plastique sur la matrice solide est constitué uniquement du champ hétérogène \underline{v}^E . Gologanu et al. [36, 37] proposent donc d'identifier $\kappa = 3/p$ de la manière suivante :

$$p = \frac{1}{\ln(u_2/u_1)} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P(\lambda)} \frac{d\lambda}{u^2} \quad (4.82)$$

L'intégrale définie par (4.82) n'est pas calculable de manière analytique ; néanmoins puisque $P(\lambda)/u^2$ montre de faibles variations par rapport à e , on peut approcher $\sqrt{P(\lambda)}/u$ par une fonction polynôme.

Dans le cas anisotrope, $P(\lambda)$ est non seulement une fonction de l'excentricité e mais aussi des paramètres d'anisotropie via les coefficients h_i . Par conséquent, la procédure qui vient d'être évoquée s'avère difficile à reconduire. Puisque le terme $P(\lambda)/u^2$ est une fonction faiblement oscillante par rapport à e , on propose de la remplacer par sa valeur moyenne sur l'intervalle $[u_1, u_2]$. p est donc calculé de la manière suivante :

$$p^2 = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} P(\lambda) \frac{d\lambda}{u^2} = -\frac{1}{u_2 - u_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P(\lambda) \frac{(2a^2 + b^2)b}{c^3} d\lambda \quad (4.83)$$

Le calcul analytique de p (où de manière équivalente $\kappa = 3/p$) à partir de (4.83) a été effectué à l'aide du logiciel de calcul formel Maple. L'expression obtenue, valide dans le cas d'une sphéroïde générale (allongée ou aplatie), s'écrit :

$$p^2 = \frac{3(1+g)(f+g)}{2f(1-f)} \left[(\beta_1 - f\beta_2)(h_1 + 3h_2 - 4h_3) \right. \\ \left. + 6\left\{ \alpha_1(1 - \alpha_1) - f\alpha_2(1 - \alpha_2) \right\} h_2 + \left\{ 1 - \alpha_1 - f(1 - \alpha_2) \right\} (h_1 - 3h_2 + 4h_3) \right] \quad (4.84)$$

où les coefficients h_i , pour $i = 1, 2, 3$, sont donnés par (4.52).

Concernant les coefficients η et ζ , leur détermination requiert l'évaluation de w ; pour cela

⁶ Un exemple de ce type d'anisotropie a été étudiée par [22] dans un contexte purement macroscopique.

on adopte la même procédure appliquée pour le coefficient p . Il s'en suit alors que la valeur moyenne de w sur l'intervalle $[u_1, u_2]$ est :

$$w = \frac{2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)}{\chi g(1-f)} \quad (4.85)$$

η et ζ sont déduits de (4.81) et conduisent aux résultats suivants :

$$\eta = \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(1-f)}; \quad \zeta = \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(1-f)^2} \quad (4.86)$$

Dans les expressions précédentes, g est conventionnellement pris égal à 0 dans le cas d'une cavité allongée et donné par (4.78) dans le cas d'une cavité aplatie. Enfin, précisons la valeur de χ . Le choix fait par [37] a été de prendre χ de manière à retrouver la même valeur pour p dans le cas de la cavité sphérique et dans le cas de la fissure de type penny-shaped (c'est à dire la valeur 2). La valeur obtenue s'écrit alors :

$$\chi = \frac{3}{4} \sqrt{\pi^2 + \frac{32}{3}} \quad (4.87)$$

Dans le cas anisotrope on adopte la même démarche, ce qui donne :

$$\chi = \frac{3}{4} \sqrt{\pi^2 h_2 + \frac{32}{3} h_3} \quad (4.88)$$

qui redonne bien la même valeur proposée dans le cas isotrope, en posant $h_2 = h_3 = 1$.

4.5 Validations du critère

On se propose maintenant d'effectuer quelques validations du critère macroscopique approché (4.76). Ces validations sont de deux types. D'une part, il s'agit de comparer ce critère à un certain nombre de résultats connus dans des cas particuliers (cas de la cavité sphérique et cylindrique dans la matrice plastique anisotrope, cavité sphéroïdale dans une matrice de von Mises). D'autre part, il s'agit de valider la procédure d'intégration, qui a requis, rappelons le, un certain nombre d'approximations, avec la solution exacte du problème associée au champ de vitesse considéré dans ce chapitre, cette solution est obtenue numériquement.

4.5.1 Vérification à partir d'une solution exacte du problème à deux champs

Revenons à la détermination des coefficients η et ζ ; le choix fait par [37] dans le contexte d'une matrice isotrope a été de les identifier, non pas en considérant leur valeur moyenne, mais de manière à retrouver une solution exacte du problème pour le champ de vitesse considéré dans ce chapitre. Précisons maintenant cette valeur exacte pour le milieu

poreux avec une matrice orthotrope. Pour cela, rappelons que la contrainte macroscopique est définie par :

$$\begin{aligned} 3\Sigma_p &= \frac{1}{x_2} \frac{\partial \Pi}{\partial B} = \frac{1}{x_2} \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \frac{2}{3d_{eq}} \mathbf{d}^E : \mathbb{H} : (\mathbf{A} + B\mathbf{d}^E) dV \\ \bar{\Sigma} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \frac{2}{3d_{eq}} \mathbb{H} : (\mathbf{A} + B\mathbf{d}^E) dV \end{aligned} \quad (4.89)$$

Considérons le cas où $D_h \rightarrow 0$, alors $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{D}}$ et $B \rightarrow 0$; il vient :

$$\begin{aligned} 3\Sigma_p &= \frac{\sigma_0}{x_2} \frac{2}{3D_{eq}} \bar{\mathbf{D}} : \mathbb{H} : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d}^E dV = -\sigma_0 \frac{2}{3D_{eq}} (\alpha_2 - \alpha_1) \bar{\mathbf{D}} : \mathbb{H} : \mathbf{Q} \\ \bar{\Sigma} &= \sigma_0 (1-f) \frac{2}{3D_{eq}} \mathbb{H} : \bar{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

A partir de la seconde relation dans (4.90), on a :

$$\Sigma_q = \sigma_0 (1-f) \frac{2}{3D_{eq}} \mathbf{Q} : \mathbb{H} : \bar{\mathbf{D}} \quad (4.91)$$

où l'on rappelle que $\Sigma_q = \bar{\Sigma} : \mathbf{Q}$. En éliminant $\bar{\mathbf{D}}$ des relations (4.90), en utilisant (4.91), on obtient :

$$\Sigma_p = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1-f} \Sigma_q; \quad \Sigma_{eq} = \sigma_0 (1-f) \quad (4.92)$$

Il s'agit maintenant de vérifier comment se situe le critère (4.76) par rapport à cette solution. En remarquant que, à partir de (4.86) :

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1-f} = \frac{\zeta}{\eta} \quad (4.93)$$

et en remplaçant les valeurs de Σ_p et Σ_{eq} données par (4.92) dans (4.76), il vient :

$$\cosh \left\{ \frac{\kappa \Sigma_p}{\sigma_0} \right\} - 1 - \frac{\kappa^2 \Sigma_p^2}{2 \sigma_0^2} = 0 \quad (4.94)$$

En fait, la solution particulière (4.92) est un point du critère correspondant à une faible valeur de Σ_p , si bien que le terme présent dans le cosinus hyperbolique peut être développé au second ordre. Il est alors facile de vérifier l'égalité (4.94). Le critère proposé est donc cohérent avec la solution exacte (4.92). En réalité, nous aurions pu déterminer les valeurs de η et ζ en effectuant le raisonnement que nous venons de faire; on notera toutefois que ces deux méthodes sont équivalentes puisqu'elles conduisent au même résultat.

4.5.2 Cavités sphérique et cylindrique dans une matrice plastique orthotrope

Le cas de la sphère creuse constitue un cas particulier de la cavité allongée et de la cavité aplatie et correspond à $e_1 \rightarrow 0$ et $e_2 \rightarrow 0$, ce qui conduit à $g = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$ et

donc $\eta = \zeta = 0$, $\Sigma_A = \Sigma_{eq}$. De même, on a $\Sigma_p = \Sigma_h$. Pour ce cas particulier, le critère de plasticité macroscopique s'écrit donc :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh \left\{ \kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.95)$$

avec : $\kappa = \frac{3}{p} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2h_1 + h_2 + 2h_3}}$

On retrouve ainsi un résultat déjà établi par [7] pour une cavité sphérique dans une matrice plastique de type Hill.

Le cas de la cavité cylindrique est obtenu avec $e_1 \rightarrow 1$ et $e_2 \rightarrow 1$, et par conséquent $\eta = \zeta = 0$. Σ_p est donné par $\Sigma_p = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2$. On vérifie alors que le critère de plasticité macroscopique se réduit à :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{h_1}} \frac{(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (4.96)$$

La comparaison avec l'étude de [7] semble indiquer une erreur typographique dans leur publication.

Un autre cas intéressant concerne l'anisotropie plastique des tôles minces, décrite classiquement par le critère isotrope transverse de Hill. Dans ce cas particulier, où l'anisotropie est décrite par (4.5), on vérifie que en reportant ces expressions dans (4.28), le coefficient h_1 défini par (4.52) s'écrit :

$$h_1 = \frac{3(1 + R)}{2(1 + 2R)} \quad (4.97)$$

Le critère macroscopique conduit précisément au résultat fournit par Liao et al. [62] (cf. (4.6)).

4.5.3 Cavité sphéroïdale dans une matrice isotrope (von Mises) sous chargements axisymétriques

Introduction

L'objectif visé ici est de comparer le critère obtenu à ceux de Gologanu et al. [36, 37] établis pour une cavité sphéroïdale dans une matrice de von Mises et décrits en première partie de ce chapitre (voir section 4.2.2) et dans l'annexe B. Puisque la matrice est isotrope, on a $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, le critère (4.76) se réduit donc à une forme similaire :

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \left[\frac{1}{1 - \zeta} (\Sigma_q + \eta \Sigma_p)^2 + 3\Sigma_s^2 + 3\Sigma_t^2 \right] + 2(1 + g)(f + g) \cosh \left\{ \kappa \frac{\Sigma_p}{\sigma_0} \right\} - (1 + g)^2 - (f + g)^2 = 0 \quad (4.98)$$

où ζ et η sont donnés, dans le cas d'une cavité allongée et aplatie, par (4.86) et κ par :

$$\kappa = \left[\frac{1(1 + g)(f + g)}{3f(1 - f)} \left\{ (1 + 3\alpha_1)(1 - \alpha_1) - f(1 + 3\alpha_2)(1 - \alpha_2) \right\} \right]^{-1/2} \quad (4.99)$$

Il s'en suit que la comparaison du critère proposé et celui de Gologanu et al. [36, 37] peut se faire à l'aide d'une comparaison des coefficients κ , η et ζ avec κ_G , η_G et ζ_G (donnés en annexe B, section B.2.1). Ces comparaisons sont effectuées dans chacun des cas particuliers de la cavité allongée et de la cavité aplatie.

Cavité allongées et aplaties dans une matrice isotrope

Pour une valeur fixée de la porosité, $f = 0.3$, les deux valeurs approchées de κ_G (B.10), la forme proposée (4.99) ainsi que la solution exacte de (4.82) en fonction de l'excentricité e_1 sont présentées sur la figure 4.5. Il est observé que $\kappa_{2nd\ app.}$ est proche de la solution que nous avons proposée. Néanmoins notre valeur (4.99) montre un meilleur accord avec les résultats numériques obtenus pour la solution exacte (4.82). La meilleure approximation

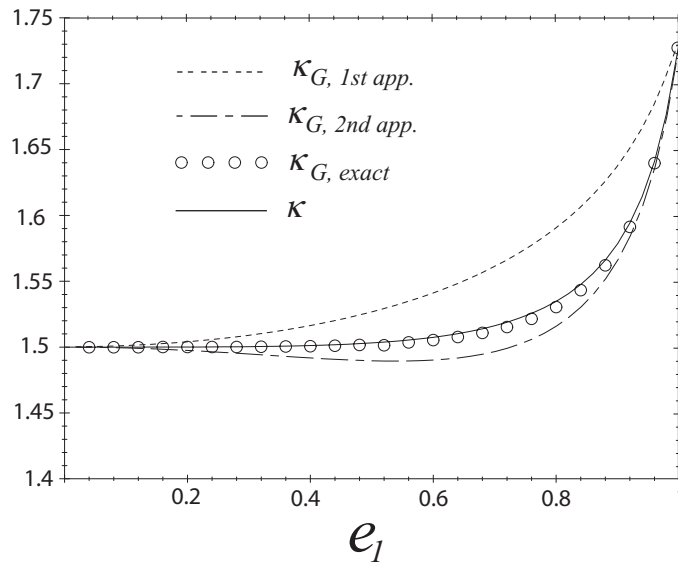


FIG. 4.5 – Comparaison des différentes approximations de κ en fonction de e_1 dans le cas d'une cavité allongée pour une porosité $f = 0.3$.

de η_G et ζ_G , est obtenue à partir de (B.9) dans lesquelles κ_G est remplacé par sa valeur exacte donnée par (4.82). Cette approximation est comparée aux valeurs de η et ζ donnée par (B.9) sur les figures 4.6 et 4.7 respectivement. Un bon accord avec les deux approches est clairement observé sur ces figures. Sur les figures 4.8, 4.9 et 4.10 sont proposées les mêmes comparaisons dans le cas d'une cavité aplatie pour une porosité $f = 0.3$. Encore une fois, une bonne concordance entre les solutions proposées et les solutions exactes est observée.

En tenant compte des bonnes concordances des coefficients du modèle, c'est à dire η , ζ et κ , avec ceux obtenus par Gologanu et al. [36], [37] (voire section 4.2.2) permet de valider le nouveau critère dans le cas isotrope. Elle permet également de valider la procédure d'approximation proposée dans ce chapitre.

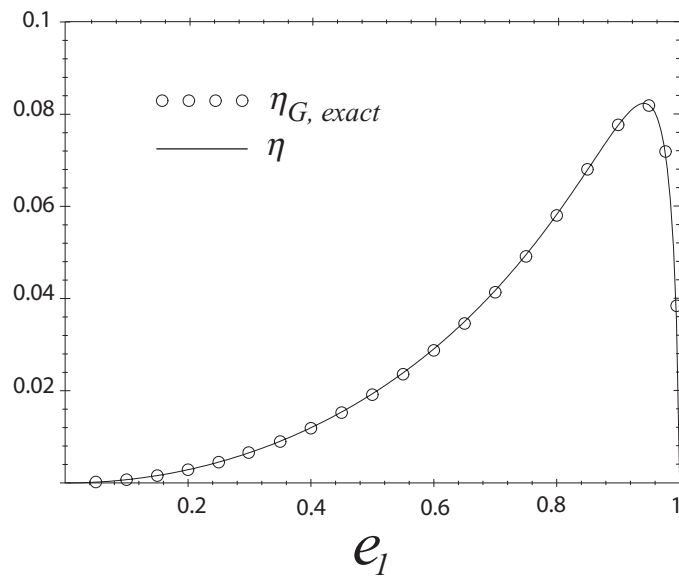


FIG. 4.6 – Comparaison des différentes valeurs de η en fonction de e_1 dans le cas d'une cavité allongée pour une porosité $f = 0.3$.

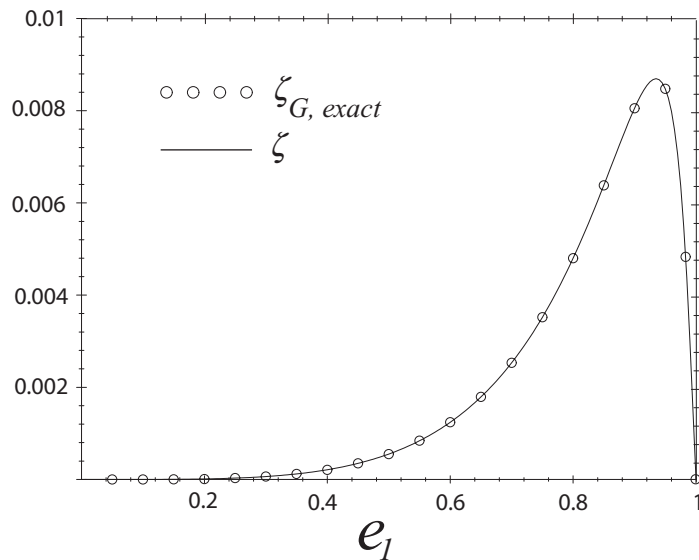


FIG. 4.7 – Comparaison des différentes valeurs de ζ en fonction de e_1 dans le cas d'une cavité allongée pour une porosité $f = 0.3$.

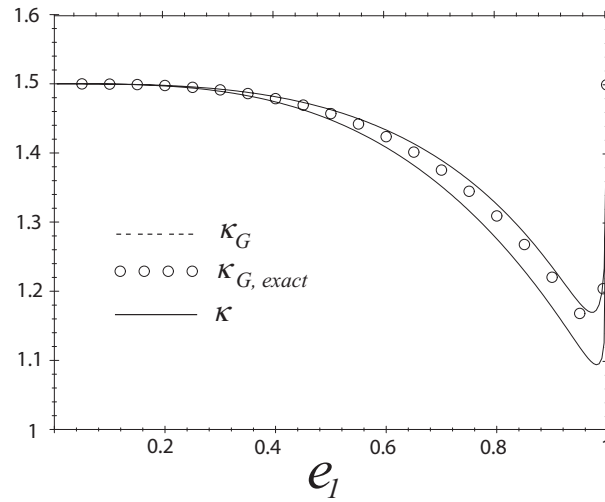


FIG. 4.8 – Comparison, pour les différentes approximations du coefficient κ en fonction de e_1 dans le cas d'une cavité aplatie, pour une porosité $f = 0.3$.

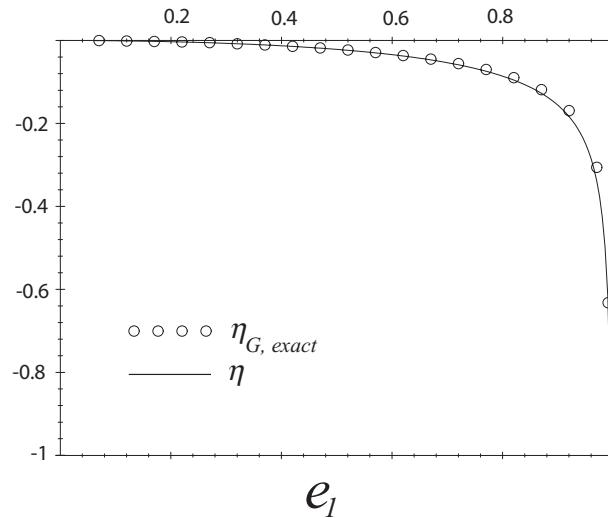


FIG. 4.9 – Comparison, pour les différentes approximations du coefficient η en fonction de e_1 dans le cas d'une cavité aplatie, pour une porosité $f = 0.3$.

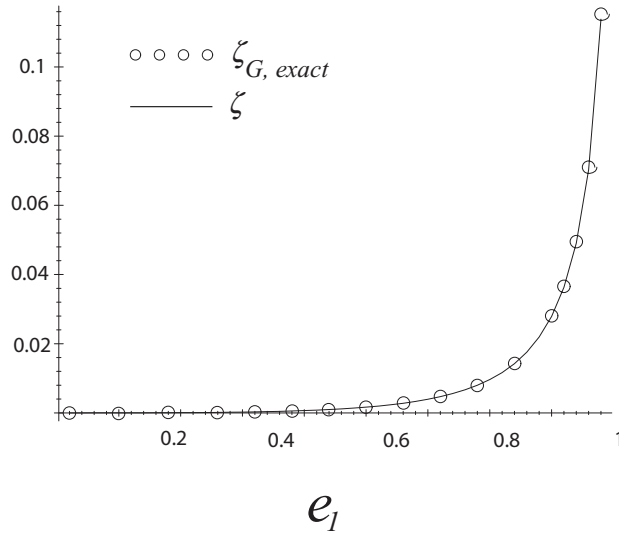


FIG. 4.10 – Comparison, pour les différentes approximations du coefficient ζ en fonction de e_1 dans le cas d’une cavité aplatie, pour une porosité $f = 0.3$.

4.5.4 Cavité sphéroïdale dans une matrice de Hill : cas des chargements axisymétriques

On propose maintenant un certain nombre de comparaisons entre le critère de plasticité macroscopique (4.76) (ligne continue) et le critère exact obtenu numériquement (points discrets). Sur les figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14, la surface de charge macroscopique a été tracée dans le cas d’une cavité allongée pour deux rapports d’aspect de la cavité ($a_1/b_1 = 2$ et $a_1/b_1 = 5$). Sur chacune des figures, le critère a été tracé pour deux valeurs de la porosité ($f = 0.01$ et $f = 0.1$). De la même manière, les résultats obtenus dans le cas d’une cavité aplatie sont tracés pour deux rapport aspects ($b_1/a_1 = 5$ et $b_1/a_1 = 2$) sur les figures 4.15, 4.16, 4.17 et 4.18.

Les coefficients d’anisotropie adoptés pour les applications numériques sont issus de [6] : $M_{11} = 0.733$, $M_{22} = 0.57$, $M_{33} = 0.499$, $M_{44} = 3.669$, $M_{55} = 1.141$, $M_{66} = 2.2$. Dans chacun des cas, on observe une bonne concordance du critère proposé avec la solution exacte (points numériques) correspondant au champ test considéré. Ceci apporte un supplément de validation à la procédure d’intégration adoptée pour la détermination du critère de plasticité.

Pour être complet, la surface de charge macroscopique dans le cas anisotrope est également comparée avec celle obtenue dans le cas d’une matrice de von Mises. Les résultats montrent clairement l’effet de l’anisotropie plastique.

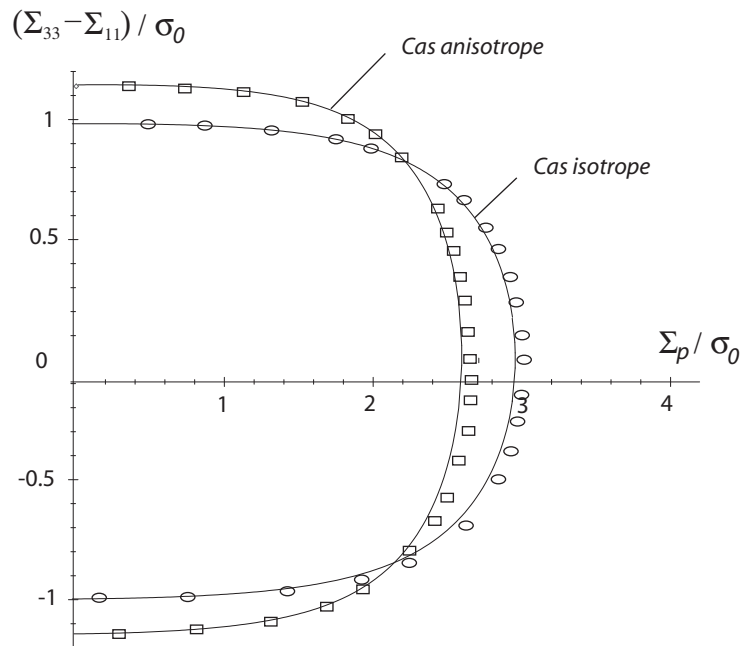


FIG. 4.11 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité allongée avec $a_1/b_1 = 2$ et une porosité $f = 0.01$.

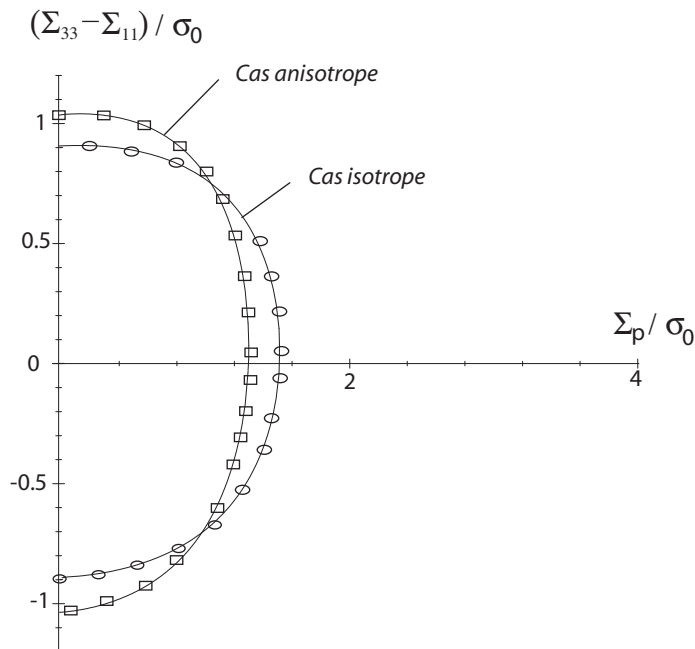


FIG. 4.12 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité allongée avec $a_1/b_1 = 2$ et une porosité $f = 0.1$.

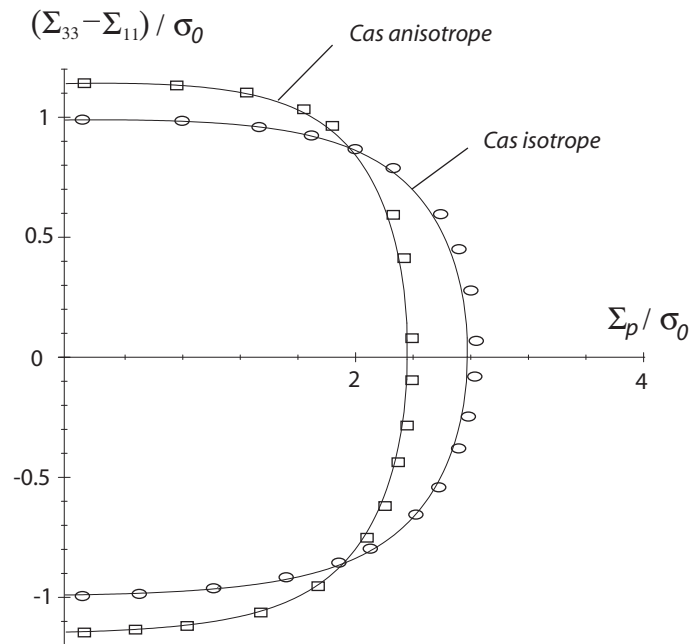


FIG. 4.13 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité allongée avec $a_1/b_1 = 5$ et une porosité $f = 0.01$.

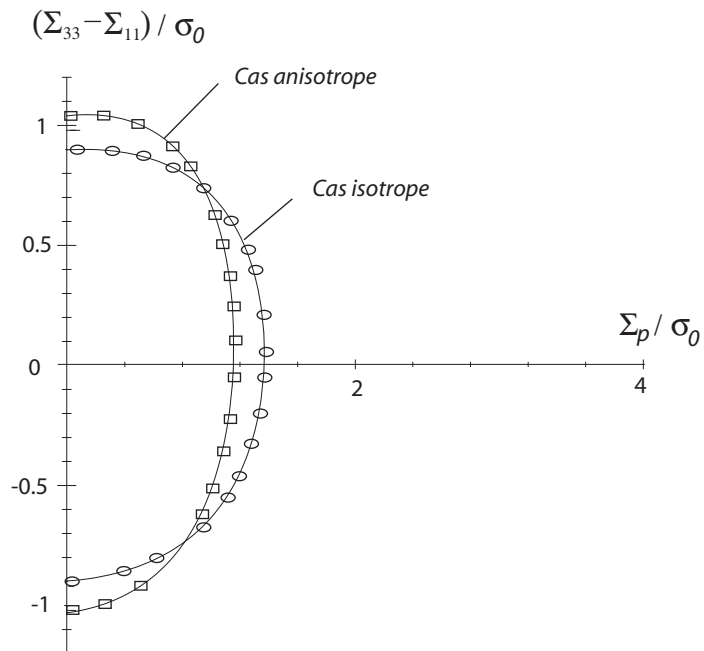


FIG. 4.14 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité allongée avec $a_1/b_1 = 5$, et une porosité $pf = 0.01$

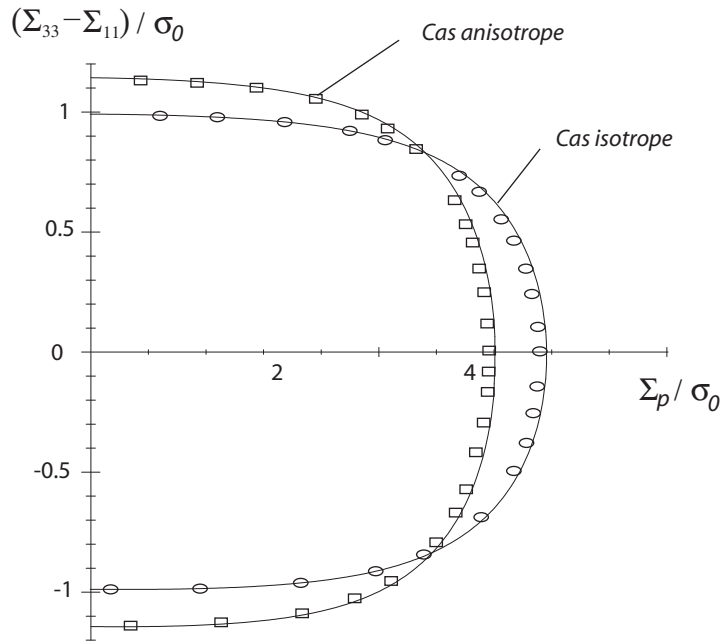


FIG. 4.15 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité aplatie avec $a_1/b_1 = 2$ et une porosité $f = 0.01$.

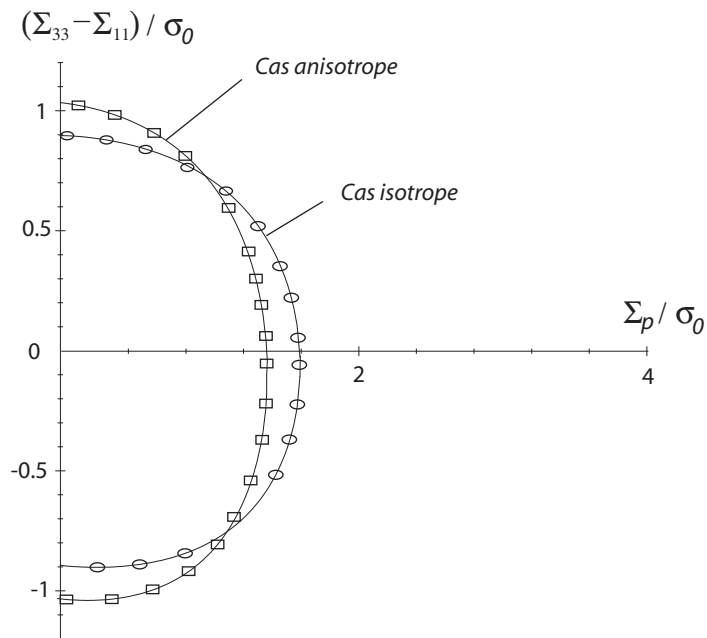


FIG. 4.16 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité aplatie avec $a_1/b_1 = 2$ et une porosité $f = 0.1$.

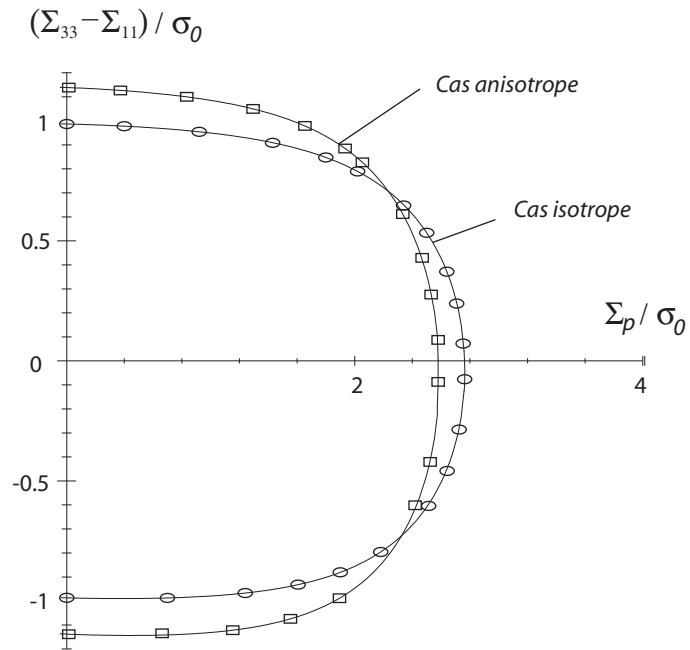


FIG. 4.17 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité aplatie avec $a_1/b_1 = 5$ et une porosité $f = 0.01$.

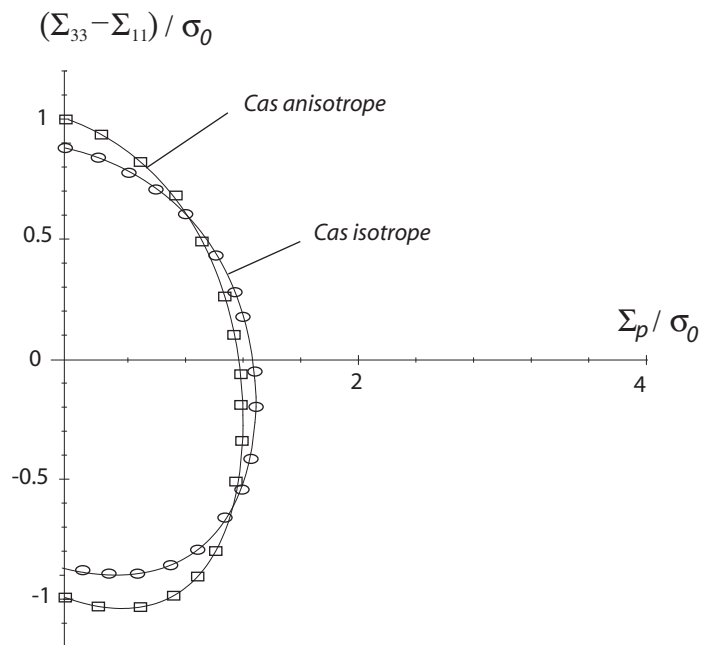


FIG. 4.18 – Comparaison entre le critère dans le cas isotrope et anisotrope, pour une cavité aplatie avec $a_1/b_1 = 5$ et une porosité $f = 0.1$.

4.6 Conclusions

Un extension des critères de Gologanu [36], [37] pour les matériaux ductiles poreux à matrice plastiquement anisotrope a été développée dans ce chapitre. Le critère proposé incorpore donc simultanément les effets d'anisotropie de la matrice solide, supposée régie par le critère quadratique de Hill [48], et les effets de forme de cavité. Le nouveau critère obtenu, valide pour un chargement arbitraire, a été obtenu en considérant comme champ test, le champ utilisé par Gologanu [36] et [37]. Pour son établissement, nous avons proposé une nouvelle procédure d'intégration, généralisant dans un certain sens celle qui existe pour les milieux poreux à matrice isotrope. Cette procédure est générale, c'est à dire valable aussi bien dans le cas des cavités allongées que des cavités aplaties. Enfin, le critère permet de retrouver un certain nombre de résultats analytiques connus, outre ceux fournis par Gurson dans le cas de la sphère creuse et du cylindre. Il s'agit en particulier :

- du cas de la cavité cylindrique dans un milieu isotrope transverse, résultat établi par Liao et Pan [62].
- le cas de la sphère creuse dans une matrice orthotrope étudié par Benzerga [7].
- Le cas des cavités aplaties et allongées dans une matrice de von Mises [36] et [37]; bien que la procédure d'intégration diffère de celle proposée par ces auteurs, on note une concordance de nos résultats et des leurs.

Au delà de ces observations, le critère proposé a permis de confirmer l'importance des effets de forme des cavités (allongées ou aplaties) dans le contexte de la plasticité orthotrope de Hill (utile pour l'étude de nombreux métaux). Les résultats obtenus montrent également une influence non négligeable des effets d'anisotropie. De plus, le critère établi permet a priori de considérer des cavités arbitrairement orientées par rapport aux axes d'orthotropie du matériau.

Il reste néanmoins un certain nombre de points à améliorer. Le plus important est sans doute l'étude de la pertinence du champ test considéré, au vu de l'anisotropie plastique. Une première façon d'aborder cette question⁷ pourra consister en une évaluation numérique du critère en réalisant des calculs par éléments finis sur une cellule avec une matrice de Hill, étude qui est en cours de réalisation.

De manière plus générale, ces observations font echo à une préoccupation plus générale sur les possibilités d'amélioration du critère macroscopique du milieu poreux en considérant des champs tests plus riches. C'est une voie que nous explorerons dans les chapitres qui suivent en s'appuyant sur la procédure de détermination approchée telle que mise en place dans ce chapitre.

⁷Ceci fournira un niveau supplémentaire de validation des résultats analytiques obtenus.

Chapitre 5

Un modèle de croissance de cavités sphéroïdales basé sur des champs de type Eshelby

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre et du suivant est de proposer de nouveaux développements concernant la croissance de cavités sphéroïdales en milieu plastique, en considérant des champs test plus riches que ceux mis en oeuvre au chapitre 4. Ces champs d'essai sont inspirés de la solution d'Eshelby du problème de l'inclusion inhomogène [24] en milieu infini. Il ne s'agit toutefois pas de champs élastiques puisque les composantes du taux de déformation libre $\dot{\gamma}$ sont traitées comme des inconnues.

Dans ce chapitre, on présente d'abord les champs d'essai, exprimés en coordonnées sphéroïdales. Puis, on propose un nouveau modèle de croissance de cavités (sphéroïdales) en milieu infini, étendant ainsi dans plusieurs directions le modèle de Rice et Tracey, étudié au chapitre 2, dans le contexte de la fatigue polycyclique. Par souci de clarification, précisons dès maintenant que le chapitre 6 sera dédié à l'élaboration d'un critère macroscopique de plasticité basé sur les champs test de type Eshelby.

5.2 Un champ non axisymétrique pour décrire l'expansion des cavités

On se propose, dans cette première section, de rappeler brièvement les résultats classiques obtenus par Eshelby [24] pour le problème d'une inclusion plongée dans une matrice élastique isotrope. On insistera sur le fait que la solution de ce problème, donne accès au champ de vitesse aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'inclusion. Lorsqu'un taux de déformation libre homogène est imposé à l'intérieur de l'inclusion, le résultat classique est qu'à l'équilibre le taux de déformation dans l'inclusion est également homogène, il est cependant fortement hétérogène en dehors de l'inclusion.

Nous vérifierons en particulier que cette nouvelle classe de champs de vitesse possède les

propriétés suivantes :

- il contient le champ axisymétrique utilisé au chapitre 4 (en fait le champ de Gologanu et al. [36, 37],
- il comporte d'autres champs non axisymétriques, qui ne peuvent donc pas être construits à partir de la famille de champs de Lee et Mear [59].

5.2.1 Problème d'inclusion élastique inhomogène

Considérons une inclusion élastique, de tenseur d'élasticité \mathbb{C}^I , occupant un domaine ω , et noyée dans une matrice élastique infinie, de tenseur d'élasticité \mathbb{C}^0 , occupant le domaine $\Omega - \omega$. Les équations du problème d'inclusion équivalente d'Eshelby se présentent classiquement sous la forme :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) &= 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\zeta} &\text{ est continu sur } \partial\omega \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \begin{cases} \mathbb{C}^0 : \mathbf{d} & \forall \underline{x} \in \Omega - \omega \\ \mathbb{C} : \mathbf{d} & \forall \underline{x} \in \omega \end{cases} \\ \mathbf{d} &= \nabla_s v \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

dans lequel $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ représente le taux de contrainte et $\underline{\zeta}$ est la normale à la surface de l'inclusion. On ramène classiquement ce problème à celui d'une inclusion en posant :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^0 : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^*) \quad (5.2)$$

où \mathbf{d}^* est un taux de déformation libre, imposée sur l'inclusion, nul en dehors et défini par :

$$\mathbf{d}^* = \begin{cases} [\mathbb{I} - (\mathbb{C}^0)^{-1} : \mathbb{C}] : \mathbf{d}; & \underline{x} \in \omega \\ 0; & \underline{x} \in \Omega - \omega \end{cases} \quad (5.3)$$

La solution générale du problème d'inclusion s'écrit classiquement [24] (voir également [83]) :

$$v_i(\underline{x}) = - \int_{\omega} C_{jlmn} d_{mn}^* G_{ij,l}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \quad (5.4)$$

où $\mathbf{G}(\underline{x} - \underline{x}')$ est la fonction de Green, définie, pour un matériau homogène isotrope élastique linéaire, par :

$$G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\|\underline{x} - \underline{x}'\|} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^2} \right] \quad (5.5)$$

$\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Dans le cas où l'inclusion est de forme ellipsoïdale et est soumise à un taux de déformation libre homogène, la solution générale pour le champ de vitesse en un point intérieur et extérieur à l'inhomogénéité, établie par Eshelby [24], prend la forme décrite dans la section (5.2.2).

5.2.2 Forme du champ de vitesse d'Eshelby

On se propose maintenant de rappeler la solution générale du problème d'inhomogénéité pour une inclusion de forme ellipsoïdale, de demi-axes \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 respectivement dans les directions \underline{e}_1 , \underline{e}_2 , et \underline{e}_3 occupant le domaine ω défini par :

$$\frac{x_1^2}{\mathbf{a}_1^2} + \frac{x_2^2}{\mathbf{a}_2^2} + \frac{x_3^2}{\mathbf{a}_3^2} \leq 1 \quad (5.6)$$

Lorsque l'inclusion ellipsoïdale inhomogène ω est soumise à un taux de déformation libre uniforme, le champ de vitesse en un point intérieur ou extérieur à l'inclusion, prend la forme suivante (voir Kachanov [50], page 234, et Mura [83] chapitre 2) :

$$\underline{v}_i^E(\underline{x}) = \begin{cases} T_{ijkl}(0)d_{kl}^*x_j & \forall \underline{x} \in \omega \\ T_{ijkl}(t)d_{kl}^*x_j + R_{KL,i}d_{kl}^*x_kx_l & \forall \underline{x} \in \Omega - \omega \end{cases} \quad (5.7)$$

La convention de sommation sur les indices "minuscules" est appliquée tandis que pour les termes en indices "majuscules", la règle suivante est appliquée, $\forall \mathbf{A}$ et \mathbf{B} symétriques :

$$\begin{aligned} a_i a_i b_I &= a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + a_3^2 b_3 \\ A_{ij} A_{ij} B_{IJ} &= A_{11}^2 B_{11} + A_{22}^2 B_{22} + A_{33}^2 B_{33} + 2A_{12}^2 B_{12} + 2A_{13}^2 B_{13} + 2A_{23}^2 B_{23} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dans (5.7), Les $R_{KL,i}$ définissent les dérivées par rapport aux x_i de :

$$R_{KL} = \frac{\mathbf{a}_K I_{KL} - I_L}{8\pi(1 - \nu^0)} \quad (5.9)$$

\mathbb{T} est un tenseur qui dépend des propriétés élastiques du domaine environnant (plus précisément du coefficient de Poisson ν^0) et des caractéristiques géométriques de l'inclusion (de demi-axes \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3) :

$$\begin{aligned} T_{ijkl}(t) &= \frac{1}{8\pi(1 - \nu^0)} \left\{ 3J_{ijkl} \left[\mathbf{a}_K^2 I_{KI} - (1 - 2\nu^0) I_I \right] \right. \\ &\quad \left. + I_{ijkl} \left[(\mathbf{a}_K^2 + \mathbf{a}_L^2) I_{KL} + (1 - 2\nu^0)(I_L + I_K) + \frac{1}{2}(I_J - I_I) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

\mathbb{T} possède ni la symétrie majeure ni les symétries mineures (voir (5.21), pour le cas de la sphéroïde). Comme auparavant : $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ et $\mathbb{I} = \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1}$.

La variable t est la plus grande valeur parmi les solutions de l'équation cubique :

$$\frac{x_1^2}{\mathbf{a}_1^2 + t} + \frac{x_2^2}{\mathbf{a}_2^2 + t} + \frac{x_3^2}{\mathbf{a}_3^2 + t} = 1 \quad (5.11)$$

Par exemple, $t = +\infty$, correspond à un point situé à l'infini (au loin de l'inclusion) tandis que $t = 0$ correspond à un point situé sur la surface de l'inclusion. Les I_{ij} et I_i sont donnés

par :

$$\begin{aligned}
 I_i(t) &= 2\pi \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \int_t^{+\infty} \frac{ds}{(\mathbf{a}_i^2 + s)\Delta(s)} \\
 I_{ij}(t) &= 2\pi \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \int_t^{+\infty} \frac{ds}{(\mathbf{a}_i^2 + s)(\mathbf{a}_j^2 + s)\Delta(s)} \\
 \Delta(s) &= \left[(\mathbf{a}_1^2 + s)(\mathbf{a}_2^2 + s)(\mathbf{a}_3^2 + s) \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dans le cas général d'un ellipsoïde, il s'agit d'intégrales elliptiques dont les expressions, semi-explicites, peuvent être trouvées dans [83]. Par ailleurs, on vérifie que la continuité du champ de vitesse à la surface de l'inclusion ($t = 0$) est satisfaite puisque $R_{KL,i}(t = 0) = 0$. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [83], où il pourra par exemple trouver le calcul de la dérivée de R_{KL} par rapport aux x_i :

$$R_{KL,i} = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}{2(1 - \nu^0)} \frac{t}{\Delta(t)} \frac{\phi_K \phi_L \phi_I x_i}{x_p x_p \phi_P^2} \tag{5.13}$$

où les ϕ_K sont donnés par :

$$\phi_K = \frac{1}{\mathbf{a}_K^2 + t} \tag{5.14}$$

Rappelons maintenant, de manière brève, le résultat essentiel de la solution d'Eshelby : *lorsque l'inclusion est soumise à un taux de déformation libre uniforme alors le taux de déformation dans cette inclusion est également uniforme et est donné par :*

$$\mathbf{d}^I = \mathbb{S} : \mathbf{d}^* \tag{5.15}$$

\mathbb{S} est le tenseur d'Eshelby, dont les composantes sont définies à partir de celles de \mathbb{T} par :

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[T_{ijkl}(0) + T_{jikl}(0) \right] \tag{5.16}$$

Le tenseur \mathbb{S} possède les symétries mineures mais pas la symétrie majeure. Ses composantes non nulles sont définies par (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\begin{aligned}
 S_{iiii} &= \frac{3\mathbf{a}_i^2}{8\pi(1 - \nu^0)} I_{ii}(0) + \frac{(1 - 2\nu^0)}{8\pi(1 - \nu^0)} I_i(0) \\
 S_{iijj} &= \frac{\mathbf{a}_j^2}{8\pi(1 - \nu^0)} I_{ij}(0) - \frac{(1 - 2\nu^0)}{8\pi(1 - \nu^0)} I_i(0); \quad \text{si } i \neq j \\
 S_{ijjj} &= \frac{\mathbf{a}_i^2 + \mathbf{a}_j^2}{16\pi(1 - \nu^0)} I_{ij}(0) + \frac{(1 - 2\nu^0)}{16\pi(1 - \nu^0)} (I_i(0) + I_j(0)); \quad \text{si } i \neq j
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

On remarquera, sur la base des résultats qui viennent d'être rappelés, que le champ de vitesse est entièrement déterminé à partir du taux de déformation libre imposé sur l'inclusion. Précisons d'emblée que l'approche que nous envisageons de développer consistera à

considérer les champs de vitesse à l'extérieur de la cavité de la même forme que le champ issu de la solution d'Eshelby dans lequel les composantes du taux de déformations libres seront néanmoins des inconnues. La solution à l'intérieur de la cavité pourra éventuellement servir pour décrire l'expansion et le changement de forme des cavités. Il va sans dire que cette démarche suppose implicitement une homogénéité du taux de déformation de la cavité.

5.2.3 Cas de l'ellipsoïde de révolution dans une matrice incompressible

On considère maintenant une cavité ellipsoïdale de révolution (sphéroïde, sous forme de cavités allongée ou aplatie) dont l'axe est orienté par \underline{e}_3 . On pose donc $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = b_1$, $\mathbf{a}_3 = a_1$. On adopte également le système de coordonnées sphéroïdales introduit dans le chapitre 4. L'incompressibilité de la matrice solide se traduit par $\nu_0 = 1/2$.

On se propose maintenant d'explicitier le champ de vitesse en tout point de la matrice solide. Pour cela, on doit déterminer l'expression de la coordonnée t qui est définie comme la plus grande solution de (5.11). Dans le cas particulier d'un sphéroïde, on est ramené à une solution du trinôme du second degré suivant :

$$(a_1^2 + t)b^2 \sin^2(\varphi) + (b_1^2 + t)a^2 \cos^2(\varphi) - (a_1^2 + t)(b_1^2 + t) = 0 \quad (5.18)$$

Cette équation se réduit aisément en notant que l'on peut remplacer b^2 et b_1^2 respectivement par $a^2 - c^2$ et $a_1^2 - c^2$ dans le cas de sphéroïdes allongés, et par $c^2 - a^2$ et $c_1^2 - a^2$ dans le cas de sphéroïdes aplatis ; il vient alors que :

$$(t + a_1^2 - a^2)(t + a_1^2 - a^2 + L_\lambda^2) = 0 \quad (5.19)$$

D'où t la plus grande des deux solutions, $t = a^2 - a_1^2$. t étant connu, on peut maintenant déterminer les expressions des intégrales définissant les I_i et les I_{ij} qui interviennent dans les expressions des composantes de \mathbb{T} (équation (5.10)) et donc dans l'expression du champ de vitesse \underline{v} en tout point extérieur à la cavité (équation (5.7)). En fait, l'expression analytique des I_i et les I_{ij} peut également être trouvée dans [83] ; nous ne nous attarderons donc pas ici sur les détails de leur détermination. Les expressions finales qui peuvent s'exprimer à l'aide des α et β , définis au chapitre 4, sont :

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= 4\pi \frac{a_1 b_1^2}{ab^2} \frac{1 - \alpha}{2}; & I_3 &= 4\pi \frac{a_1 b_1^2}{ab^2} \alpha \\ I_{11} = I_{12} = I_{22} &= 4\pi \frac{a_1 b_1^2}{8ab^4} (3 - 3\alpha - \beta) \\ I_{13} = I_{23} &= 4\pi \frac{a_1 b_1^2}{2a^3 b^2} \beta; & I_{33} &= 4\pi \frac{a_1 b_1^2}{3a^3 b^2} (1 - \beta) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Il s'en suit que les composantes de \mathbb{T} , pour une matrice incompressible contenant des cavités sphéroïdales, obtenues en reportant (5.20) dans (5.10), s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 T_{1111} &= T_{2222} = 3T_{1122} = 3T_{2211} = 3b_1^2 I_{11} = \frac{3a_1 b_1^4}{8ab^4} (3 - 3\alpha - \beta) \\
 T_{1212} &= T_{1221} = T_{2112} = T_{2121} = T_{1122} = \frac{a_1 b_1^4}{8ab^4} (3 - 3\alpha - \beta) \\
 T_{1133} &= T_{2233} = a_1^2 I_{13} = \frac{a_1^3 b_1^2}{2a^3 b^2} \beta \\
 T_{3311} &= T_{3322} = b_1^2 I_{13} = \frac{a_1 b_1^4}{2a^3 b^2} \beta \\
 T_{3333} &= 3a_1^2 I_{33} = \frac{a_1^3 b_1^2}{a^3 b^2} (1 - \beta) \\
 T_{1313} &= T_{1331} = T_{2323} = T_{2332} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} I_{13} + \frac{1}{2} (I_3 - I_1) = \frac{a_1 b_1^4}{2a^3 b^2} \beta \\
 T_{3113} &= T_{3131} = T_{3223} = T_{3232} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} I_{13} + \frac{1}{2} (I_1 - I_3) = \frac{a_1^3 b_1^2}{2a^3 b^2} \beta
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

En remarquant que dans le cas d'une cavité sphéroïdale, $\phi_1 = \phi_2 = 1/b^2$ et $\phi_3 = 1/a^2$ (5.14), on a :

$$x_i \phi_I = \left[\frac{L_\lambda}{ab} \underline{e}_\lambda \right]_i \tag{5.22}$$

On introduit le tenseur d'ordre deux Φ dont les composantes sont $\Phi_{ij} = \delta_{ij} \phi_j$, possédant trivialement, en tenant compte de (5.22), la propriété suivante :

$$\Phi \cdot \underline{x} = \frac{L_\lambda}{ab} \underline{e}_\lambda \tag{5.23}$$

Le champ de déplacement dans la matrice solide s'écrit alors :

$$\underline{v}^E = \left[\mathbb{T} : \mathbf{d}^* + \frac{a_1 b_1^2}{ab^2} (a^2 - a_1^2) d_{\lambda\lambda}^* \Phi \right] \cdot \underline{x} \tag{5.24}$$

où l'on a noté $d_{\lambda\lambda}^* = \mathbf{d} : (\underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda)$.

On se propose également de préciser les expressions des composantes non nulles du tenseur d'Eshelby, qui interviendront explicitement dans les calculs à venir. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= S_{2222} = 3S_{1122} = 3S_{2211} = 3S_{1212} = \frac{3}{8} (3 - 3\alpha_1 - \beta_1) \\
 S_{1133} &= S_{2233} = \frac{\beta_1}{2}; \quad S_{3311} = S_{3322} = \frac{1}{2} (3\alpha_1 + \beta_1 - 1) \\
 S_{3333} &= 1 - \beta_1; \quad S_{2323} = S_{1313} = \frac{1}{4} (3\alpha_1 + 2\beta_1 - 1)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Le tenseur d'Eshelby \mathbb{S} dont les composantes sont définies ci-dessus, dépend de l'excentri-

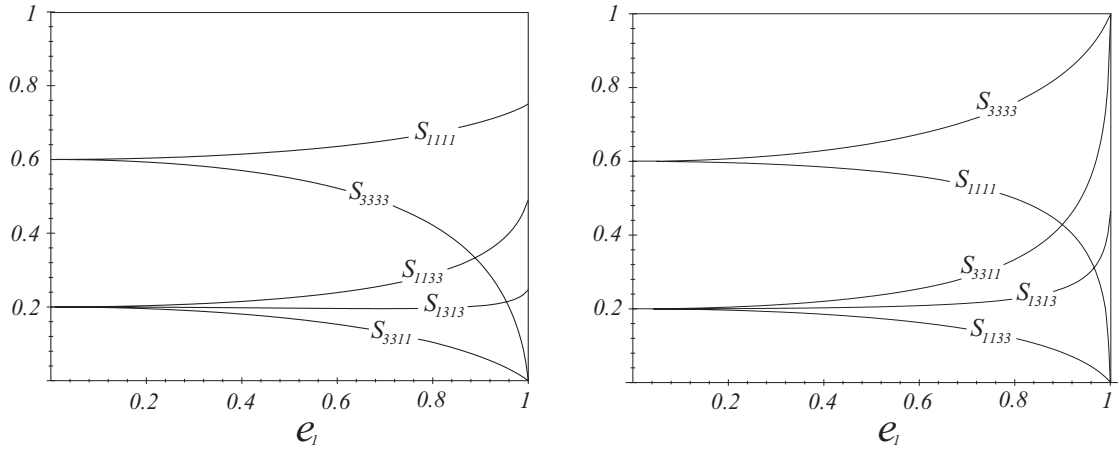


FIG. 5.1 – Composantes de \mathbb{S} en fonction de e_1 pour : a) une cavité allongée, b) une cavité aplatie.

ité de la cavité, e_1 , nous le noterons donc $\mathbb{S}(e_1)$. Il s'agit maintenant d'exprimer le champ de vitesse (5.24) dans le repère sphéroïdal; pour cela, il est commode de décomposer le taux de déformation libre, \mathbf{d}^* de la manière suivante :

$$\mathbf{d}^* = \sum_{r=1}^{r=6} d_r^* \mathbf{Q}_r \quad (5.26)$$

où les \mathbf{Q}_r sont les tenseurs d'ordre deux définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{1}; & \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{1} - 3\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3; & \mathbf{Q}_3 &= \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ \mathbf{Q}_4 &= \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1; & \mathbf{Q}_5 &= \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 \\ \mathbf{Q}_6 &= \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ces tenseurs possèdent la propriété suivante $\mathbf{Q}_r : \mathbf{Q}_s = 0$ si $r \neq s$. Les d_r^* sont par conséquent définis par :

$$\begin{aligned} d_1^* &= \frac{1}{3}(d_{11}^* + d_{22}^* + d_{33}^*); & d_2^* &= \frac{1}{3} \left[\frac{d_{11}^* + d_{22}^*}{2} - d_{33}^* \right] \\ d_3^* &= \frac{d_{22}^* - d_{11}^*}{2}; & d_4^* &= d_{12}^*; & d_5^* &= d_{13}^*; & d_6^* &= d_{23}^* \end{aligned} \quad (5.28)$$

La décomposition (5.26) avec les \mathbf{Q}_r donnés par (5.27) met en évidence six modes de déformation particuliers. Le premier, d_1^* , est associé à un taux de déformation purement hydrostatique; les suivants, d_r^* pour $r = 2, 6$, sont associés à des taux de déformation purement déviatoriques. Notons également que d_1^* et d_2^* sont associés à des modes de déformation axisymétriques. Comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre (et également dans le chapitre suivant), cette décomposition est particulièrement intéressante.

Tous calculs faits, on montre, à partir de (5.24), que les champs de vitesse \underline{v}_r^E , associés à chacun des six modes de déformation, sont définis dans le repère sphéroïdal par :

$$\begin{aligned} \underline{v}_1^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} \left[1 + U_1(\lambda)(1 - 3 \cos^2(\varphi)) \right] \underline{e}_\lambda - \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} V_1(\lambda) \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \\ \underline{v}_2^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} \left[1 - k_2 U_1(\lambda) \right] (1 - 3 \cos^2(\varphi)) \underline{e}_\lambda + \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} k_2 V_1(\lambda) \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec :

$$U_1(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - 3\alpha); \quad V_1(\lambda) = \frac{3\epsilon c^2 \beta}{4ab}(1 - \alpha - \beta); \quad k_2 = \epsilon \frac{2a_1^2 + b_1^2}{c^2} \quad (5.30)$$

où ϵ vaut 1 dans le cas de la cavité allongée et vaut -1 dans le cas de la cavité aplatie. Les champs \underline{v}_2^E et \underline{v}_3^E sont donnés par :

$$\begin{aligned} \underline{v}_3^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} \left[U_3(\lambda) \sin^2(\varphi) \underline{e}_\lambda + \frac{1}{2} V_3(\lambda) \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \right] \cos(2\theta) \\ &\quad - \frac{a_1 b_1^2}{b^2} V_3(\lambda) \sin(\varphi) \sin(2\theta) \underline{e}_\theta \\ \underline{v}_4^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} \left[U_3(\lambda) \sin^2(\varphi) \underline{e}_\lambda + \frac{1}{2} V_3(\lambda) \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \right] \sin(2\theta) + \\ &\quad \frac{a_1 b_1^2}{b^2} V_3(\lambda) \sin(\varphi) \cos(2\theta) \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec :

$$U_3(\lambda) = 1 - \frac{b_1}{4b^2}(1 + 3\alpha + \beta); \quad V_3(\lambda) = \frac{b_1^2}{4ab}(3 - 3\alpha - \beta) \quad (5.32)$$

Les champs \underline{v}_5^E et \underline{v}_6^E s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{v}_5^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} U_5(\lambda) \sin(2\varphi) \cos(\theta) \underline{e}_\lambda - \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} V_5(\lambda) \left[1 + k_5 \cos(2\varphi) \right] \cos(\theta) \underline{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{a_1 b_1^2}{b^2} V_5(\lambda) (1 + k_5) \cos(\varphi) \sin(\theta) \underline{e}_\theta \\ \underline{v}_6^E &= \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} U_5(\lambda) \sin(2\varphi) \sin(\theta) \underline{e}_\lambda - \frac{a_1 b_1^2}{b L_\lambda} V_5(\lambda) \left[1 + k_5 \cos(2\varphi) \right] \sin(\theta) \underline{e}_\varphi \\ &\quad - \frac{a_1 b_1^2}{b^2} V_5(\lambda) (1 + k_5) \cos(\varphi) \cos(\theta) \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} U_5(\lambda) &= \frac{1}{4ab} \left[(3\alpha + 1)(1 + k_5)a^2 + 3(1 - \alpha)(1 - k_5)b^2 \right] \\ V_5(\lambda) &= \frac{1}{2}(1 - 3\alpha); \quad k_5 = -\epsilon \frac{a_1^2 + b_1^2}{c^2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.2.4 Commentaires sur les champs de vitesse

Les champs \underline{v}_1^E et \underline{v}_2^E sont des champs axisymétriques car ils ne possèdent pas de composantes suivant \underline{e}_θ et sont indépendants de la variable θ . Le champ \underline{v}_1^E est le champ initialement proposé par Gologanu et al. [36, 37] pour la détermination du critère de plasticité macroscopique. Il s'agit donc du champ de vitesse que nous avons appliqué au chapitre 4, dans le contexte la plasticité anisotrope. Notons que dans le cas de la géométrie sphérique, ce champ se réduit au champ d'expansion introduits par Rice et Tracey [104] et utilisé par Gurson [47]. Notons également que les champs \underline{v}_1^E et \underline{v}_2^E , dans le cas d'une cavité sphérique sont également contenus dans la famille plus large de champs axisymétriques proposée par Huang [49]⁸.

On notera que les champs \underline{v}_1^E et \underline{v}_2^E sont contenus dans la famille de champs de Lee et Mear [59] (et correspondent aux coefficients B_{00} , B_{20} et B_{22}). Toutefois le champ associé au coefficient B_{21} dans la famille de Lee et Mear, appliqué par Gologanu et al. [38, 39], n'est pas présent dans le champ de type Eshelby. C'est un point sur lequel nous reviendrons au chapitre 6. Enfin, comme déjà souligné, les champs \underline{v}_r^E , pour $r = 3, 6$ ne sont pas axisymétriques et ne sont donc pas contenus dans la famille de champs de Lee et Mear. A notre connaissance, ils n'ont jamais été appliqués en tant que champ d'essai ni dans le contexte de la modélisation de la croissance des cavités en rupture ductile, ni pour la formulation d'un critère de plasticité de milieux poreux.

On se propose d'illustrer, dans le cas particulier de la cavité sphérique, le fait que ce champ est plus large que celui introduit par Gurson. Dans ce cas on a $a = b = L_\lambda = r$, $a_1 = b_1 = r_1$, $\underline{e}_\lambda = \underline{e}_r$; le tenseur \mathbb{T} possède toutes les symétries (mineures et majeure) et a pour composantes (cf. relation (5.21)) :

$$\begin{aligned} T_{1111} = T_{2222} = T_{3333} &= \frac{3r_1^5}{5r^5} \\ T_{1122} = T_{1133} = T_{2233} &= \frac{r_1^5}{5r^5} \\ T_{1212} = T_{1313} = T_{2323} &= \frac{r_1^5}{5r^5} \end{aligned} \quad (5.35)$$

\mathbb{T} est isotrope et peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{T} = \frac{r_1^5}{5r^5} (5\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) \quad (5.36)$$

Le champ de vitesse (5.24) prend alors la forme :

$$\underline{v}^E = \frac{r_1^5}{5r^4} \left[3d_h^* \mathbf{1} + 2\bar{\mathbf{d}}^* \right] \cdot \underline{e}_r + \frac{r_1^3}{r^2} \left[1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right] d_{rr}^* \underline{e}_r \quad (5.37)$$

Les composantes du champ de vitesse, déduites de (5.37), s'expriment, dans la base sphérique :

$$v_r^E = \frac{r_1^3}{r^2} \left[\left(1 - \frac{3r_1^2}{5r^2} \right) d_{rr}^* + \frac{3r_1^2}{5r^2} d_h^* \right]; \quad v_\theta^E = \frac{2r_1^5}{5r^4} d_{r\theta}^*; \quad v_\varphi^E = \frac{2r_1^5}{5r^4} d_{r\varphi}^* \quad (5.38)$$

⁸Cet auteur a proposé une étude numérique, dans le cas d'un chargement axisymétrique, afin d'apporter des améliorations à la loi de croissance de Rice et Tracey par la considération de ces nouveaux champs.

où l'on a noté :

$$\begin{aligned}
 d_{rr}^* &= \mathbf{d}^* : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = d_h^* + (1 - 3 \cos^2(\varphi))d_2^* - \sin^2(\varphi) \cos(2\theta)d_3^* + \sin^2(\varphi) \sin(2\theta)d_4^* \\
 &\quad + \sin(2\varphi) \cos(\theta)d_5^* + \sin(2\varphi) \sin(\theta)d_6^* \\
 d_{r\varphi}^* &= \bar{\mathbf{d}}^* : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi) = -\frac{3}{2} \sin(2\varphi)d_2^* - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \cos(2\theta)d_3^* + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \sin(2\theta)d_4^* \\
 &\quad + \cos(2\varphi) \cos(\theta)d_5^* + \cos(2\varphi) \sin(\theta)d_6^* \\
 d_{r\theta}^* &= \bar{\mathbf{d}}^* : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) = \sin(\varphi) \sin(2\theta)d_3^* - \sin(\varphi) \cos(2\theta)d_4^* - \cos(\varphi) \sin(\theta)d_5^* \\
 &\quad + \cos(\varphi) \cos(\theta)d_6^*
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

On retrouve donc le champ de Rice et Tracey [104] (également utilisé par Gurson) en posant $\bar{\mathbf{d}}^* = 0$, c'est à dire en considérant que la cavité est soumise à un taux de déformation libre purement hydrostatique. Le champ de Rice et Tracey coïncide donc avec le champ d'Eshelby si l'on suppose que la cavité, initialement sphérique, reste sphérique. Il est intéressant de noter que l'inconnue dans le problème traité par Rice et Tracey (paramètre que nous avons noté C dans le second chapitre), correspond ici au taux de déformation libre d_1^* ($= d_h^*$). De même, les champs associés aux paramètres d_r^* , pour $r = 2, 6$, qui ne sont pas contenus dans le champ de Rice et Tracey, induisent des changements de forme de la cavité. En résumé, le champ d'Eshelby introduit donc six paramètres inconnus, il s'agit des composantes du taux de déformation libre, c'est à dire les d_r^* , pour $r = 1, 6$.

Le champ de vitesse de type Eshelby contient donc les champs déjà appliqués dans le cadre de la rupture ductile, mais également des champs supplémentaires ; il est alors tentant de supposer qu'il conduira à une estimation plus resserrée de la loi de croissance, celle-ci étant déduite d'une procédure variationnelle.

Dans cette procédure, les inconnues du problème sont les composantes de \mathbf{d}^* qu'il s'agira donc de déterminer. Pour cela, nous allons reprendre l'approche de Rice et Tracey, dans laquelle \mathbf{d}^* doit minimiser la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ (cf. équation (2.22)). Compte tenu de certaines difficultés à intégrer analytiquement $Q(\mathbf{d})$, certaines approximations vont être nécessaires. Il s'agit de celles déjà utilisées dans le second chapitre.

5.2.5 Lois de croissance et de changement de forme des cavités

La connaissance du champ de vitesse dans la matrice solide, et en particulier sur le bord des cavités, permet notamment de relier le taux de croissance et le taux de changement de forme au taux de déformation libre, \mathbf{d}^* . En effet, on peut d'abord rappeler que le taux de croissance de la cavité, $\dot{\omega}/\omega$ et son taux de changement de forme \dot{S} (cf. équation (4.8)) sont reliés au taux de variation des demi-axes de la cavité, \dot{a}_1/a_1 et \dot{b}_1/b_1 , par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= 2 \frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} \\
 \dot{S} &= \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ensuite \dot{a}_1/a_1 et \dot{b}_1/b_1 étant déduits du champ de vitesse en posant $\lambda = \lambda_1$, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{b}_1}{b_1} &= \frac{1}{b_1} v_\rho^E(\lambda = \lambda_1, \varphi = \pi/2) = \frac{3}{2}(1 - \alpha_1)d_1^* + \frac{3}{2}(1 - \alpha_1 - \beta_1)d_2^* \quad (a) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[1 - 3\alpha_1 - \beta_1 \right] (d_3^* \cos(2\theta) + d_4^* \sin(2\theta)) \quad (5.41) \\ \frac{\dot{a}_1}{a_1} &= \frac{1}{a_1} v_3^E(\lambda = \lambda_1, \varphi = 0) = 3\alpha_1 d_1^* - 3(1 - \alpha_1 - \beta_1)d_2^* \quad (b) \end{aligned}$$

On remarque que \dot{b}_1/b_1 est une fonction de θ et que le champ de vitesse introduit implique des variations du demi-axe b_1 dans le plan $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, qui ne sont pas uniformes. Ces variations sont par ailleurs dues aux champs associés aux taux de déformation libre d_3^* et d_4^* , et qui correspondent à des champs non axisymétriques. Une approche simplifiée consiste à négliger ces variations en remplaçant \dot{b}_1/b_1 par sa valeur moyenne sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, il vient alors :

$$\frac{\dot{b}_1}{b_1} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_1)d_1^* + \frac{3}{2}(1 - \alpha_1 - \beta_1)d_2^* \quad (5.42)$$

Finalement, $\dot{\omega}/\omega$ et \dot{S} sont alors déterminés en reportant (5.42) et (5.41)(a) dans (5.40) :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= 2\frac{\dot{b}_1}{b_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} = 3d_1^* \\ \dot{S} &= \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{b}_1}{b_1} = \frac{3}{2}(3\alpha_1 - 1)d_1^* - \frac{9}{2}(1 - \alpha_1 - \beta_1)d_2^* \end{aligned} \quad (5.43)$$

On remarquera que les d_r^* pour $r = 3, \dots, 6$, qui sont associés à des champs de vitesse non axisymétriques, n'interviennent pas de manière explicite dans la loi de croissance de la cavité. Néanmoins, leur présence dans la fonctionnelle $Q(\underline{v})$ fait qu'ils peuvent avoir un impact sur l'expression de d_1^* et d_2^* . On notera que le taux de déformation libre, d_1^* , qui correspond également à la partie hydrostatique de \mathbf{d}^* induit, non seulement des variations de volume, mais également un changement de forme, hormis dans le cas de la sphère où $\alpha_1 = 1/3$. Le taux de déformation d_2^* induit uniquement un changement de forme de la cavité, y compris dans le cas de la sphère. Ceci suppose qu'une cavité initialement sphérique peut s'allonger ou s'aplatir, et qu'une approche qui consisterait à supposer que la cavité reste sphérique à tout instant impliquerait de prendre $d_2^* = 0$. Ce détail a probablement échappé à [38] qui a supposé ce coefficient nul afin de retrouver le modèle de Gurson dans le cas d'une cavité sphérique.

On notera enfin que les lois d'évolution (5.43) peuvent être réécrites en faisant intervenir le taux de déformation dans l'inclusion, $\mathbf{d}^I = \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \mathbf{Q}_1 : \mathbf{d}^I = \mathbf{Q}_1 : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^* \\ \dot{S} &= -\frac{1}{2}\mathbf{Q}_2 : \mathbf{d}^I = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}_2 : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^* \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dans lesquelles, on rappelle que $\mathbb{S}(e_1)$ est le tenseur d'Eshelby associé à la cavité d'excentricité e_1 . Enfin on notera que la cavité est également sujette à un taux de rotation sur la cavité défini par (à partir de (5.7)) :

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v}^E - \nabla^T \underline{v}^E) = \frac{1}{2}\mathbb{T}(e_1) : \mathbf{d}^* - \frac{1}{2}(\mathbb{T}(e_1) : \mathbf{d}^*)^T \quad (5.45)$$

Les composantes non nulles de $\dot{\mathbf{\Omega}}$ sont :

$$\dot{\Omega}_{13} = -\dot{\Omega}_{31} = -(1 - 3\alpha_1)d_5^*; \quad \dot{\Omega}_{23} = -\dot{\Omega}_{32} = -(1 - 3\alpha_1)d_6^* \quad (5.46)$$

On notera que dans le cas de la sphère on a $\alpha_1 = 1/3$ et ce taux de rotation est nul. A ce stade, les coefficients d_r^* sont toujours non connus et il s'agit maintenant de les déterminer afin d'obtenir l'expression complète de la loi de croissance. C'est ce que l'on se propose de faire dans la section suivante dédiée au cas de la cavité sphérique.

5.3 Croissance d'une cavité sphérique dans un milieu infini parfaitement plastique

On se propose d'abord, ici, d'appliquer le champ de type Eshelby comme nouveau champ test, pour déterminer la loi de croissance d'une cavité. On se restreint dans cette section au cas de la sphère et nous traiterons dans un second temps le cas plus général du sphéroïde. Même dans ce cas, a priori relativement simple, la présence des nouveaux champs induit quelques difficultés qu'il faudra surmonter. Toutefois, une solution analytique de \mathbf{d}^* minimisant la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ (approchée) sera établie, ce qui nous permettra de déterminer les lois d'évolution de la cavité.

5.3.1 Expression approchée de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$

On considère donc un milieu infini parfaitement plastique contenant une cavité sphérique centrée à l'origine. La matrice plastique est régie par le critère de von Mises. Le champ de vitesse est supposé défini comme la superposition d'un champ correspondant à un taux de déformation uniforme et déviatorique, noté \mathbf{A} , et d'un champ hétérogène pour décrire l'expansion et le changement de forme de la cavité. Ce champ hétérogène est celui issu du problème d'Eshelby, noté \underline{v}^E , et que nous avons détaillé précédemment (section 5.2.3). Le champ de vitesse dans la matrice solide, noté \underline{v} , est donc défini par :

$$\underline{v} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{v}^E \quad (5.47)$$

Le taux de déformation qui s'en déduit est défini par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{d}^E \quad (5.48)$$

où $\mathbf{d}^E = \nabla_s \underline{v}^E$. Le taux de déformation macroscopique, \mathbf{D} , s'équilibrant avec le taux de déformation dans la matrice solide au loin de la cavité, on a donc le résultat classique suivant :

$$\mathbf{D} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{d} = \mathbf{A} \quad (5.49)$$

Quant aux composantes de \mathbf{d}^E sont, obtenue à partir de (5.37) :

$$\begin{aligned}
 d_{rr}^E &= -\frac{2r_1^3}{r^3}d_{rr}^* + \frac{4}{5}\frac{r_1^5}{r^5}\left[2d_{rr}^* - d_{\theta\theta}^* - d_{\varphi\varphi}^*\right] \\
 d_{\varphi\varphi}^E &= \frac{r_1^3}{r^3}d_{rr}^* + \frac{1}{5}\frac{r_1^5}{r^5}\left[-4d_{rr}^* + 3d_{\theta\theta}^* + d_{\varphi\varphi}^*\right] \\
 d_{\theta\theta}^E &= \frac{r_1^3}{r^3}d_{rr}^* + \frac{1}{5}\frac{r_1^5}{r^5}\left[-4d_{rr}^* + d_{\theta\theta}^* + 3d_{\varphi\varphi}^*\right] \\
 d_{r\varphi}^E &= \frac{r_1^3}{r^3}\left[1 - \frac{8}{5}\frac{r_1^2}{r^2}\right]d_{r\varphi}^* \\
 d_{r\theta}^E &= \frac{r_1^3}{r^3}\left[1 - \frac{8}{5}\frac{r_1^2}{r^2}\right]d_{r\theta}^* \\
 d_{\varphi\theta}^E &= \frac{2}{5}\frac{r_1^5}{r^5}d_{\theta\varphi}^*
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{d}^E = \mathbb{D} : \mathbf{d}^* \tag{5.51}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D} &= \frac{r_1^3}{r^3}(\mathbf{1} - 3\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \otimes (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{2r_1^5}{5r^5}(\mathbf{1} - 3\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \otimes (\mathbf{1} - 3\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \\
 &\quad + \frac{r_1^5}{5r^5}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \otimes (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \frac{4r_1^5}{5r^5}(\mathbf{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_\varphi) \otimes (\mathbf{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_\varphi) \\
 &\quad + \frac{2r_1^3}{r^3}\left(1 - \frac{8}{5}\frac{r_1^2}{r^2}\right)\left[(\mathbf{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_r) \otimes (\mathbf{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_r) + (\mathbf{e}_r \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_\varphi) \otimes (\mathbf{e}_r \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_\varphi)\right]
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Rappelons que le principe variationnel établi par Rice et Tracey implique la minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ définie par :

$$Q(\mathbf{d}) = \int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d}) dV - \boldsymbol{\Sigma} : \int_{\partial\omega} \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_r dS \tag{5.53}$$

où $\Omega - \omega$ représente le domaine infini extérieur à la cavité et ω le domaine occupé par la cavité de volume $4\pi r_1^3/3$. La fonctionnelle de Rice et Tracey se compose donc de deux intégrales, une intégrale sur la matrice infinie et une seconde sur la surface de la cavité. Intéressons nous, dans un premier temps, à l'intégrale sur $\partial\omega$. Tout d'abord l'expression du champ de vitesse sur $\partial\omega$, obtenue en posant $r = r_1$, s'écrit :

$$\underline{\mathbf{v}}(r = r_1) = r_1 \left[\mathbf{D} + d_h^* \mathbf{1} + \frac{2}{5} \bar{\mathbf{d}}^* \right] \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \tag{5.54}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\omega} \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_r dS &= \langle \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \rangle_{S(r)} \\
 &= r_1^3 \left[\mathbf{D} + d_h^* \mathbf{1} + \frac{2}{5} \bar{\mathbf{d}}^* \right] \cdot \langle \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \rangle_{S(r)} = \frac{1}{3} r_1^3 \left[\mathbf{D} + d_h^* \mathbf{1} + \frac{2}{5} \bar{\mathbf{d}}^* \right]
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} : \int_{\partial\omega} \underline{v} \otimes \underline{e}_r dS &= \frac{4\pi}{3} r_1^3 \left[\Sigma_{eq} D_{eq} + \frac{2}{5} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \bar{\mathbf{d}}^* + 3 \Sigma_h d_h^* \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} r_1^3 \left[\Sigma_{eq} D_{eq} + \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}^{sph} : \mathbf{d}^* \right]\end{aligned}\quad (5.56)$$

où $\mathbb{S}^{sph} = \mathbb{S}(e_1 = 0)$ est le tenseur d'Eshelby pour une cavité sphérique en milieu incompressible :

$$\mathbb{S}^{sph} = \mathbb{J} + \frac{2}{5} \mathbb{K} \quad (5.57)$$

Quant à l'intégrale de volume, elle peut se mettre sous la forme suivante, en utilisant la règle de normalité correspondant à \mathcal{F}^{vm} :

$$\int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{d}) dV = \sigma_0 \int_{\Omega-\omega} \left[d_{eq} - D_{eq} - \frac{2}{3D_{eq}} \bar{\mathbf{D}} : \mathbf{d}^E \right] dV \quad (5.58)$$

avec :

$$d_{eq}^2 = D_{eq}^2 + \frac{4}{3} \bar{\mathbf{D}} : \mathbf{d}^E + d_{eq}^{E^2} \quad (5.59)$$

Cette intégrale de volume ne peut pas être calculée de manière analytique et par conséquent, pour établir une solution analytique de $Q(\mathbf{d})$, des approximations sont nécessaires. On se propose, comme au chapitre 2, d'utiliser l'inégalité classique (2.36). L'intégrale dans le second membre de (5.58) s'écrit alors :

$$4\pi\sigma_0 \int_{r=r_1}^{r=+\infty} \left[\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}} - D_{eq} - \frac{2}{3D_{eq}} \bar{\mathbf{D}} : \langle \mathbf{d}^E \rangle_{S(r)} \right] dV \quad (5.60)$$

La moyenne de \mathbf{d}^E sur la sphère unité est nulle. En effet, on a :

$$\langle \mathbf{d}^E \rangle_{S(r)} = \langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)} : \mathbf{d}^* \quad (5.61)$$

Or la moyenne de \mathbb{D} sur la sphère unité est nulle (ceci peut être montré en utilisant les résultats établis dans l'annexe C). S'agissant maintenant du terme quadratique $\mathbf{d}^E : \mathbf{d}^E$:

$$\langle \mathbf{d}^E : \mathbf{d}^E \rangle_{S(r)} = \mathbf{d}^* : \langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)} : \mathbf{d}^* \quad (5.62)$$

où l'on a posé $D_{ijkl}^T = D_{klij}$. L'expression de $\mathbb{D}^T : \mathbb{D}$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^T : \mathbb{D} &= \frac{6r_1^6}{r^6} \left[\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{2r_1^2}{5r^2} (\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \right] \otimes \left[\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{2r_1^2}{5r^2} (\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \right] \\ &+ \frac{8r_1^{10}}{25r^{10}} \left[(\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) \otimes (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) - 3(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \otimes (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \right] \\ &\frac{2r_1^6}{r^6} \left(1 - \frac{8}{5} \frac{r_1^2}{r^2} \right)^2 \left[(\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) \otimes (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) + (\underline{e}_r \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) \otimes (\underline{e}_r \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) \right]\end{aligned}\quad (5.63)$$

d'où sa moyenne sur la sphère unité (il s'agit encore une fois d'utiliser les relations données dans l'annexe C) qui vaut :

$$\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)} = \left\{ 2\mathbb{J} + \frac{6}{25}G(u)\mathbb{K} \right\} u^2 \quad (5.64)$$

dans laquelle on a posé $u = r_1^3/r^3$. $G(u)$ est une fonction de u définie par :

$$G(u) = 5 - \frac{40}{3}u^{2/3} + \frac{28}{3}u^{4/3} \quad (5.65)$$

L'intégrale de volume (5.60) s'écrit donc :

$$\frac{4\pi}{3}r_1^3\sigma_0 \int_{u=0}^{u=1} \left\{ \sqrt{D_{eq}^2 + \left[4d_h^{*2} + \frac{6}{25}G(u)d_{eq}^{*2} \right] u^2} - D_{eq} \right\} \frac{du}{u^2} \quad (5.66)$$

Similairement au chapitre précédent, il s'agit, afin de pouvoir intégrer analytiquement (5.66), de remplacer $G(u)$ par sa valeur moyenne sur l'intervalle $u \in [0, 1]$:

$$\int_{u=0}^{u=1} G(u)du = 1 \quad (5.67)$$

A ce stade, le statut de "borne" de la solution proposée est perdu, compte tenu du caractère non contrôlé de la dernière approximation. Néanmoins, l'intégrale sur le volume est maintenant calculable, et conduit à :

$$Q(\mathbf{d}) = \frac{4\pi}{3}r_1^3\sigma_0 \left\{ \tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{B}}{D_{eq}} \right) + \left[D_{eq} - \sqrt{D_{eq}^2 + \tilde{B}^2} \right] - \Sigma_{eq}D_{eq} - \Sigma : \mathbb{S}^{sph} : \mathbf{d}^* \right\} \quad (5.68)$$

avec :

$$\tilde{B}^2 = 4d_h^{*2} + \frac{6}{25}d_{eq}^{*2} \quad (5.69)$$

Comparativement au résultat de l'approche standard de Rice et Tracey, la modification essentielle apportée à l'expression approchée de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$, réside dans la présence du terme d_{eq}^* .

5.3.2 Détermination du taux de déformation libre, \mathbf{d}^* , dans le cas de la cavité sphérique

On se propose dans cette section de résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ pour en déduire \mathbf{d}^* . Avant d'aborder ce problème, et afin de faciliter la résolution, on introduit le tenseur d'ordre quatre \mathbb{P} , défini par :

$$\mathbb{P} = \frac{4}{3}\mathbb{J} + \frac{4}{25}\mathbb{K} \quad (5.70)$$

de telle sorte que \tilde{B} , défini par (5.69), peut se réécrire sous la forme :

$$\tilde{B}^2 = \mathbf{d}^* : \mathbb{P} : \mathbf{d}^* \quad (5.71)$$

La condition de minimisation de $Q(\mathbf{d})$ par rapport à \mathbf{d}^* implique :

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{d}^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{\tilde{B}}{D_{eq}} \right\} \frac{\mathbf{d}^* : \mathbb{P}}{\tilde{B}} = \frac{1}{\sigma_0} \Sigma : \mathbb{S}^{sph} \quad (5.72)$$

Il s'en suit que :

$$\left[\operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{\tilde{B}}{D_{eq}} \right\} \right]^2 \frac{1}{B^2} \mathbf{d}^* : \mathbb{P} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{P} : \mathbf{d}^* = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma : \mathbb{S}^{sph} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{S}^{sph} : \Sigma \quad (5.73)$$

qui se réécrit sous la forme :

$$\left[\operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{\tilde{B}}{D_{eq}} \right\} \right]^2 = \frac{9 \Sigma_h^2}{4 \sigma_0^2} + \frac{2 \Sigma_{eq}^2}{3 \sigma_0^2} \quad (5.74)$$

Finalement \tilde{B} est donné par :

$$\tilde{B} = \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq}; \quad \text{avec : } \Sigma_B = \left[\frac{9 \Sigma_h^2}{4 \sigma_0^2} + \frac{2 \Sigma_{eq}^2}{3 \sigma_0^2} \right]^{1/2} \quad (5.75)$$

Injectant maintenant la valeur de \tilde{B} dans (5.72), il vient :

$$\begin{aligned} d_h^* &= \frac{3 \Sigma_h}{4 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\ \bar{\mathbf{d}}^* &= \frac{5 \bar{\Sigma}}{2 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \end{aligned} \quad (5.76)$$

5.3.3 Lois de croissance et de changement de forme pour une cavité sphérique

On rappelle que les lois de croissance et de changement de forme de la cavité sont données par (5.44), dans lesquelles le taux de déformation est défini $\mathbf{d}^I = \mathbf{D} + \mathbb{S}^{sph} : \mathbf{d}^*$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \frac{9 \Sigma_h}{4 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\ \dot{S} &= D_{33} - \frac{1}{2}(D_{11} + D_{22}) + \left[\Sigma_{33} - \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} \right] \frac{1}{\Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \end{aligned} \quad (5.77)$$

On notera que la loi de croissance du volume de la cavité (première relation dans (5.77)) fait intervenir la contrainte équivalente, Σ_{eq} à travers Σ_B (cf. relation (5.75)). Ce terme

n'apparaît pas dans la loi de croissance de Rice et Tracey. Ceci est dû aux composantes supplémentaires introduits dans \underline{v} , par le champ de type Eshelby. Le comportement de la matrice étant parfaitement plastique, on à l'infini $\Sigma_{eq} = \sigma_0$. Par conséquent à fort taux de triaxialité on a $\Sigma_B \simeq 3\Sigma_h/2$, on retrouve alors le résultat déjà obtenu au chapitre (cf. (2.40)). Les modifications apportées à $\dot{\omega}/\omega$ concerne donc plus particulièrement le domaine des faibles valeurs du taux de triaxialité. On notera que, hormis dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, la cavité est susceptible de se déformer en une cavité aplatie ou allongée (car $\dot{S} \neq 0$). Il s'avère donc qu'une cavité initialement sphérique reste sphérique si seulement si le chargement macroscopique est purement hydrostatique.

5.4 Croissance d'une cavité sphéroïdale dans un milieu infini parfaitement plastique

5.4.1 Expression approchée de $Q(\mathbf{d})$

On se propose maintenant d'étendre l'analyse précédemment effectuée au cas plus général d'une cavité sphéroïdale. La matrice plastique est toujours supposée régie par le critère de von Mises. Le champ de vitesse est défini par (5.47) où \underline{v}^E est donné par (5.24). On souhaite déterminer une expression de $Q(\mathbf{d})$ dans le cas général d'une cavité allongée ou aplatie. On rappelle que cette fonctionnelle se compose de deux intégrales : la première est une intégrale sur la surface de la cavité, pour laquelle aucune approximation n'est nécessaire, tandis que la seconde porte sur le domaine $\Omega - \omega$. Précisons dans un premier temps l'expression de l'intégrale de surface.

Le champ de vitesse sur la surface de la cavité s'écrit (en posant $\lambda = \lambda_1$ dans (5.24)) :

$$\underline{v}(\lambda = \lambda_1) = \left[\mathbf{D} + \mathbb{T}(e_1) : \mathbf{d}^* \right] . \underline{x} \quad (5.78)$$

L'intégrale à calculer est définie, en utilisant (5.78), par :

$$\int_{\partial\omega} \underline{v} \otimes \underline{e}_\lambda dS = \mathbf{D} . \int_{\partial\omega} \underline{x} \otimes \underline{e}_\lambda dS + \left[\mathbb{T}(e_1) : \mathbf{d}^* \right] . \int_{\partial\omega} \underline{x} \otimes \underline{e}_\lambda dS \quad (5.79)$$

or :

$$\int_{\partial\omega} \underline{x} \otimes \underline{e}_\lambda dS = \int_{\omega} \mathbf{1} dV = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1^2 \mathbf{1} \quad (5.80)$$

En notant que $\Sigma : \mathbb{T}(e_1) = \Sigma : \mathbb{S}(e_1)$, où $\mathbb{S}(e_1)$ est défini par (5.16), le calcul de (5.79) donne :

$$\Sigma : \int_{\partial\omega} \underline{v} \otimes \underline{e}_\lambda dS = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1^2 \left[\Sigma_{eq} D_{eq} + \Sigma : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^* \right] \quad (5.81)$$

le terme $\Sigma : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^*$ s'écrit encore, en faisant intervenir les d_r^* :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^* &= \sum_{r=1}^{r=6} \left[\Sigma : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{Q}_r \right] d_r^* = 3 \left[(1 - \alpha_1) \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} + \alpha_1 \Sigma_{33} \right] d_1^* \\ &+ 3(1 - \alpha_1 - \beta_1) \left[\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} - \Sigma_{33} \right] d_2^* \\ &+ \frac{1}{2}(3 - 3\alpha_1 - \beta_1) \left[d_3^* \frac{\Sigma_{22} - \Sigma_{11}}{2} + d_4^* \Sigma_{12} \right] \\ &+ (2\alpha_1 + 3\beta_1 - 1) \left[d_5^* \Sigma_{13} + d_6^* \Sigma_{23} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Evaluons maintenant l'intégrale de volume dans $Q(\mathbf{d})$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega-\omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \Sigma : \mathbf{d}) dV = \\ \sigma_0 \int_{\Omega-\omega} \left[\sqrt{D_{eq}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{D} : \mathbf{d}^E + d_{eq}^{E2}} - D_{eq} - \frac{2}{3D_{eq}} \mathbf{D} : \mathbf{d}^E \right] dV \end{aligned} \quad (5.83)$$

avec :

$$\mathbf{D} : \mathbf{d}^E = \sum_{r=1}^{r=6} d_r^* \mathbf{D} : \mathbf{d}_r^E; \quad d_{eq}^{E2} = \frac{2}{3} \sum_{r=1}^{r=6} \sum_{s=1}^{s=6} d_r^* d_s^* \mathbf{d}_r^E : \mathbf{d}_s^E \quad (5.84)$$

avec $\mathbf{d}_r^E = \nabla_s(\underline{v}^E)$.

A nouveau, l'intégrale de volume (5.83) ne peut évidemment pas être déterminée de manière analytique et par conséquent, afin d'établir une solution analytique, il s'agit d'effectuer des approximations en suivant la démarche proposée dans le chapitre précédent.

Une première difficulté réside dans la prise en compte des termes croisés, qui sont faibles mais non négligeables, comme nous l'avons d'ailleurs déjà montré au second chapitre. Une méthode pour la prise en compte des ces termes avait consisté à effectuer un développement au second ordre du terme sous l'intégrale de volume par rapport au terme croisé. La reconduction d'une telle méthode s'avère difficile ici compte tenu de la complexité du champ hétérogène. On est ainsi amené à effectuer l'approximation suivante :

A1 : Les termes croisés seront négligés dans l'intégrale de volume.

Finalement, l'intégrale à calculer, dans le repère sphéroïdal, se réduit à :

$$\int_{\Omega-\omega} (d_{eq} - D_{eq}) dV = \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=+\infty} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (d_{eq} - D_{eq}) bL_\lambda^2 \sin(\varphi) d\lambda d\varphi d\theta \quad (5.85)$$

dans laquelle d_{eq} est donnée par :

$$d_{eq}^2 = \sqrt{D_{eq} + d_{eq}^{E2}} \quad (5.86)$$

$\mathcal{A}2$: d_{eq} est remplacé par une valeur moyenne sur chaque sphéroïde confocal à la cavité. C'est à dire que l'intégrale du terme d_{eq} dans (5.85) est remplacée par :

$$\int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} \{ \langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon} \}^{1/2} b(2a^2 + b^2) d\lambda \quad (5.87)$$

où $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon}$ représente, comme auparavant, la moyenne sur chaque sphéroïde confocal, définie par (4.40).

On note ensuite :

$$P_{rs}(\lambda) = \frac{2}{3} \langle \mathbf{d}_r^E : \mathbf{d}_s^E \rangle_{\varepsilon} \quad (5.88)$$

où les $P_{rs}(\lambda)$ sont des fonctions de l'excentricité e , et dépendent également de l'excentricité de la cavité intérieure e_1 . Finalement, $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{\varepsilon} = D_{eq}^2 + \sum_{r=1}^{r=6} \sum_{s=1}^{s=6} d_r^* d_s^* P_{rs}(\lambda) \quad (5.89)$$

On introduit les variables x et y définies par :

$$x = \frac{a_1 b_1^2}{ab^2}; \quad y = \frac{\chi a_1 b_1^2}{c^3 + \chi ab^2} \quad (5.90)$$

χ est un paramètre du modèle, qui, comme dans le chapitre 4, reste à déterminer ; nous reviendrons sur cette question plus tard.

Effectuons maintenant la dernière approximation :

$\mathcal{A}3$: on remplace les $P_{rs}(\lambda)$ par $p_{rs}u^2$ où les p_{rs} sont des constantes.

Ces constantes sont calculées comme la valeur moyenne de $P_{rs}(\lambda)/u^2$ sur l'intervalle $[0, u_1]$. C'est à dire :

$$p_{rs} = \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} P_{rs}(\lambda) \frac{du}{u^2} \quad (5.91)$$

u_1 est égal à 1 dans le cas d'une cavité allongée, et vaut $\chi a_1 b_1^2 / (c^3 + \chi a_1 b_1^2)$ dans le cas d'une cavité aplatie. Cette dernière approximation reprend l'idée proposée dans le chapitre précédent ; celle-ci apparaît notamment justifiée si les solutions obtenues sont peu oscillantes avec e_1 . En fait, l'idée sous jacente de cette approximation est de réécrire d_{eq} sous la forme suivante : $\sqrt{D_{eq}^2 + \tilde{B}^2 u^2}$. Il est clair qu'il est possible de fournir d'autres approximations qui permettent de mieux décrire les variations des $P_{rs}(\lambda)$; néanmoins, toute autre forme analytique différente de celle proposée par $\mathcal{A}3$ ne permet pas d'aboutir à une expression analytique de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$.

Pour le calcul des p_{rs} , il s'agit d'abord de préciser les valeurs du taux de déformation, \mathbf{d}^E .

Celui-ci peut se calculer dans le repère sphéroïdal en utilisant les relations suivantes, qui donnent les composantes de \mathbf{d} :

$$\begin{aligned}
 d_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{L_\lambda} \left\{ v_{\lambda,\lambda} + v_\varphi \frac{\epsilon c^2 \sin(2\varphi)}{2L_\lambda^2} \right\} \\
 d_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{L_\lambda} \left\{ v_{\varphi,\varphi} + v_\lambda \frac{ab}{L_\lambda^2} \right\} \\
 d_{\theta\theta} &= \frac{1}{b \sin(\varphi)} v_{\theta,\theta} + \frac{1}{L_\lambda} \left\{ v_\lambda \frac{a}{b} + v_\varphi \cot(\varphi) \right\} \\
 d_{\lambda\varphi} &= \frac{1}{2L_\lambda} \left\{ v_{\lambda,\varphi} + v_{\varphi,\lambda} - v_\lambda \frac{\epsilon c^2 \sin(2\varphi)}{L_\lambda^2} - v_\varphi \frac{ab}{L_\lambda^2} \right\} \\
 d_{\lambda\theta} &= \frac{1}{2b \sin(\varphi)} v_{\lambda,\theta} + \frac{1}{2L_\lambda} \left\{ v_{\theta,\lambda} - v_\theta \frac{a}{b} \right\} \\
 d_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2b \sin(\varphi)} v_{\varphi,\theta} + \frac{1}{2L_\lambda} \left\{ v_{\theta,\varphi} - v_\theta \cot(\varphi) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

dans lesquelles $\epsilon = 1$ dans le cas d'une cavité allongée et $\epsilon = -1$ dans le cas d'une cavité aplatie. Le calcul des expressions des p_{rs} a été effectué à l'aide du logiciel Maple. Bien que très complexes, ces calculs ont abouti à des expressions simples pour ces coefficients. Les p_{rs} non nuls sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \frac{3}{u_1} (1 + 3\alpha_1)(1 - \alpha_1) \\
 p_{12} = p_{21} &= -\frac{3}{u_1} (1 - 3\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \\
 p_{22} &= \frac{3}{u_1} (3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \\
 p_{33} = p_{44} &= \frac{1}{12u_1} (1 + 3\alpha_1 + \beta_1)(3 - 3\alpha_1 - \beta_1) \\
 p_{55} = p_{66} &= \frac{1}{3u_1} (1 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)(3\alpha_1 + 2\beta_1 - 3)
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Précisons maintenant la valeur de χ , qui apparaît dans l'expression de u_1 dans le cas de la cavité aplatie. Le choix adopté est celui appliqué dans le chapitre précédent, et qui a été initialement proposé par [37]. χ est déterminé de manière à ce que p_{11} prennent les mêmes valeurs dans le cas de la sphère et du cylindre, c'est à dire $p_{11} = 4$ et qui conduit à choisir : $\chi = \frac{3\pi}{2}$ (ce choix permet d'obtenir une expression de p_{11} la moins oscillante avec e_1).

On notera que les valeurs de p_{11} , p_{33} et p_{55} obtenues sont, en pratique, peu oscillantes (voir figures 5.2 et 5.3), ceci justifiant l'approximation $\mathcal{A3}$. Notons toutefois que dans le cas d'une cavité allongée, $p_{22} \rightarrow 0$ lorsque $e_1 \rightarrow 1$, c'est à dire dans le cas d'une cavité cylindrique ; de plus $p_{12} \rightarrow 0$ lorsque $e_1 \rightarrow 0$ et $e_1 \rightarrow 1$. La condition de proportionnalité des termes $P_{22}(\lambda)$ et $P_{12}(\lambda)$ par rapport à u^2 est donc discutable pour ces différents cas précités. Néanmoins, comme nous allons le voir par la suite, l'approximation $\mathcal{A3}$ permet

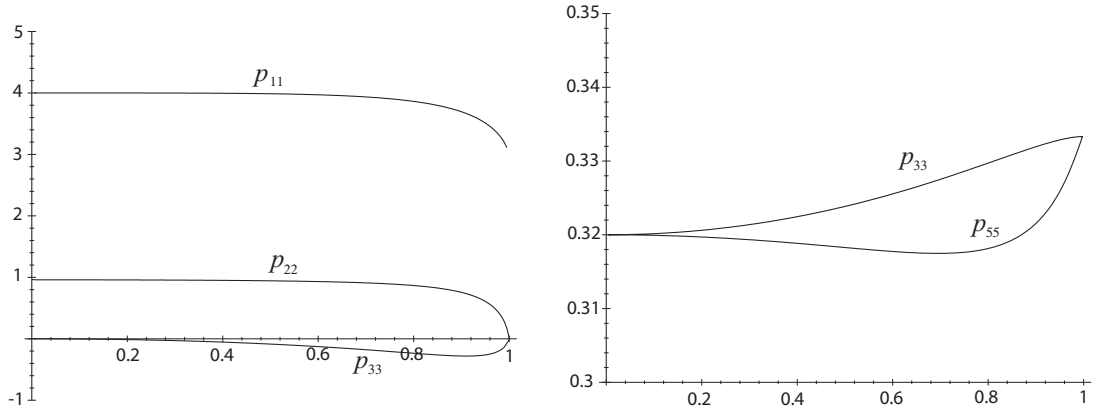


FIG. 5.2 – p_{rs} en fonction de e_1 pour une cavité allongée.

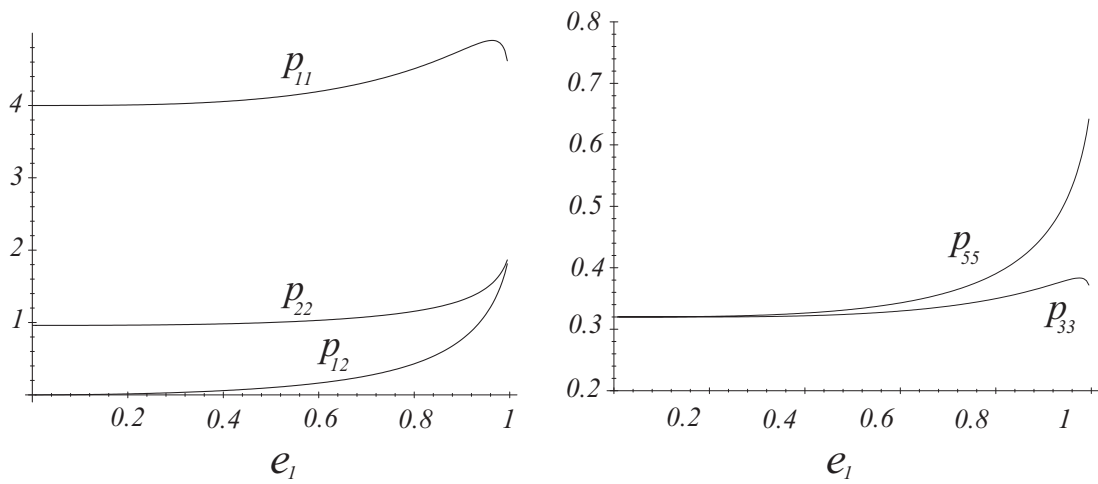


FIG. 5.3 – p_{rs} en fonction de e_1 pour une cavité aplatie.

de retrouver les résultats que nous avons obtenus dans le cas de la sphère, présentés dans la section précédente. Elle permet également de retrouver le cas du cylindre, que nous n'avons pas détaillé dans ce chapitre, mais qui peuvent être obtenus en suivant une démarche similaire à celle proposée dans le cas de la sphère.

En définitive, avec cette dernière approximation et effectuant le changement de variable (5.90), l'intégrale de volume (5.85) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi r_1^3}{3} \sigma_0 \int_0^{u_1} \left[\sqrt{D_{eq}^2 + u^2 \tilde{B}^2} - 1 \right] \frac{du}{u^2} = \\ & \frac{4\pi r_1^3}{3} \sigma_0 \left[\tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u_1 \tilde{B}}{D_{eq}} \right\} + \frac{1}{u_1} \left[D_{eq} - \sqrt{D_{eq}^2 + u_1^2 \tilde{B}^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

avec :

$$B^2 = \sum_{r=1}^{r=6} p_{rs} d_r^* d_s^* \quad (5.95)$$

l'expression de $Q(\mathbf{d})$ obtenue à partir (5.81) et (5.94) est :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{d}) = & \frac{4\pi r_1^3}{3} \left[\sigma_0 \tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u_1 \tilde{B}}{D_{eq}} \right\} + \sigma_0 \frac{1}{u_1} \left[D_{eq} - \sqrt{D_{eq}^2 + u_1^2 \tilde{B}^2} \right] \right] \\ & - \Sigma : \mathbb{S}(e_1) : \mathbf{d}^* - \Sigma_{eq} D_{eq} \end{aligned} \quad (5.96)$$

5.4.2 Détermination du taux de déformation libre \mathbf{d}^*

On doit maintenant résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$. Cette résolution requiert quelques manipulations sur des tenseurs d'ordre 4, qui, compte tenu de la géométrie du problème posé, possèdent une anisotropie de type isotrope transverse dans la direction \underline{e}_3 , c'est à dire suivant l'axe de révolution du sphéroïde. Les calculs se trouvent facilités en se plaçant dans la base de Walpole [122], adaptée notamment pour les tenseurs ne possédant pas la symétrie majeure (c'est le cas notamment du tenseur d'Eshelby). La description d'une telle base, devenue classique, peut être trouvée en annexe C.

5.4.3 Minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$

Venons en maintenant à la minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ par rapport aux d_r^* . En s'appuyant sur (5.71) où les composantes de \mathbb{P} sont définies à partir des p_{rs} de la manière suivante :

$$\mathbf{Q}_r : \mathbb{P} : \mathbf{Q}_s = p_{rs} \quad (5.97)$$

\mathbb{P} est un tenseur isotrope transverse, possédant toutes les symétries (majeure et mineures). Avec l'introduction de ce tenseur, la minimisation de la fonctionnelle $Q(\mathbf{d})$ est effectuée

de manière tout à fait similaire au cas de la sphère. \mathbf{d}^* assure le minimum de $Q(\mathbf{d})$ si :

$$\operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u_1 \tilde{B}}{D_{eq}} \right\} \frac{\mathbf{d}^* : \mathbb{P}}{\tilde{B}} = \frac{1}{\sigma_0} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_1) \quad (5.98)$$

Il s'en suit que \tilde{B} est donné par :

$$\tilde{B} = \frac{1}{u_1} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (5.99)$$

où Σ_B est défini par :

$$\Sigma_B = \left[\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_1) : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{S}^T(e_1) : \boldsymbol{\Sigma} \right]^{1/2} \quad (5.100)$$

et $\mathbb{S}^T(e_1)$ est la transposée de $\mathbb{S}(e_1)$, définie par $\mathbb{S}_{ijkl}^T(e_1) = \mathbb{S}_{klij}(e_1)$. En remplaçant ensuite l'expression de \tilde{B} (5.99) dans (5.98), on déduit la valeur de \mathbf{d}^* :

$$\mathbf{d}^* = \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{S}^T(e_1) : \boldsymbol{\Sigma} \frac{1}{u_1 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \quad (5.101)$$

Explicitons de manière plus détaillée la loi de croissance (5.101). Pour cela introduisons les groupements suivants :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} (1 - \alpha_1) + \Sigma_{33} \alpha_1; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} - \Sigma_{33} \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4} (\Sigma_{22} - \Sigma_{11})^2 + \Sigma_{12}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2} \end{aligned} \quad (5.102)$$

Pour la détermination de Σ_B est effectuée en utilisant les expressions de $\mathbb{S}(e_1)$ et de \mathbb{P} exprimés dans la base de Walpole en annexe C. Il s'en suit que, Σ_B s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma_B^2 = \kappa_1 \Sigma_p^2 + \kappa_2 \Sigma_q^2 + \kappa_3 \Sigma_p \Sigma_q + \kappa_4 \Sigma_s^2 + \kappa_5 \Sigma_t^2 \quad (5.103)$$

avec :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{3u_1}{2\Upsilon} (3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1); & \kappa_2 &= \frac{3u_1}{2\Upsilon} (1 + 3\alpha_1)(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \\ \kappa_3 &= \frac{3u_1}{\Upsilon} (1 - 3\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1); & \kappa_4 &= \frac{3u_1(3 - 3\alpha_1 - \beta_1)}{(1 + 3\alpha_1 + \beta_1)} \\ \kappa_5 &= \frac{3u_1(2\beta_1 + 3\alpha_1 - 1)}{(3 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)} \end{aligned} \quad (5.104)$$

et $\Upsilon = 2\beta_1 + 4\alpha_1 - 3\alpha_1^2 - 1$. Les d_r^* , obtenus à partir de (5.101), s'écrivent :

	cavité cylindrique	cavité sphérique	fissure (penny-shaped)
κ_1	3	9/4	9/2
κ_2	0	0	0
κ_3	0	2/3	0
κ_4	3	2	0
κ_5	3	2	6

TAB. 5.1 – Valeurs des coefficients κ_i intervenant dans la définition de Σ_B , pour des géométries de cavités particulières.

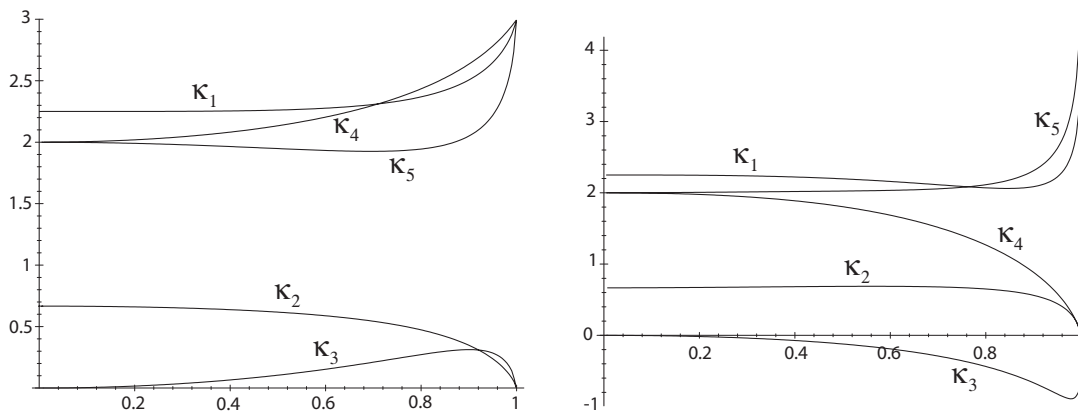


FIG. 5.4 – κ_i en fonction de e_1 pour : a) une cavité allongée, b) une cavité aplatie.

$$\begin{aligned}
 d_1^* &= \frac{1}{2u_1\Upsilon} \left[(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1) \frac{\Sigma_p}{\Sigma_B} + (1 - 3\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \frac{\Sigma_q}{\Sigma_B} \right] \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 d_2^* &= \frac{1}{2u_1\Upsilon} \left[(1 - 3\alpha_1) \frac{\Sigma_p}{\Sigma_B} + (1 + 3\alpha_1)(1 - \alpha_1) \frac{\Sigma_q}{\Sigma_B} \right] \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 d_3^* &= \frac{3}{(1 + 3\alpha_1 + \beta_1)} \frac{\Sigma_{22} - \Sigma_{11}}{u_1 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 d_4^* &= \frac{6}{(1 + 3\alpha_1 + \beta_1)} \frac{\Sigma_{12}}{u_1 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 d_5^* &= \frac{3}{(3 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)} \frac{\Sigma_{13}}{u_1 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 d_6^* &= \frac{3}{(3 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)} \frac{\Sigma_{23}}{u_1 \Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq}
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

Remplaçant les expressions des d_1^* et d_2^* dans (5.43), on obtient la loi de croissance et de changement de forme de la cavité sphéroïdale :

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \frac{3}{2\Upsilon} \left[(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1) \frac{\Sigma_p}{\Sigma_B} + (1 - 3\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \frac{\Sigma_q}{\Sigma_B} \right] \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 \dot{S} &= D_{33} - \frac{1}{2}(D_{11} + D_{22}) - \frac{3}{2\Upsilon} \left[(1 - 3\alpha_1) \frac{\Sigma_p}{\Sigma_B} + 2(1 - \alpha_1 - \beta_1) \frac{\Sigma_q}{\Sigma_B} \right] \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq}
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

Les lois d'évolution obtenues font intervenir toutes les composantes du tenseur des contraintes et ce résultat étend et distingue fortement le présent modèle de celui de Rice et Tracey .

5.4.4 Analyse des cas limites du cylindre et de la fissure

Dans cette section, on examine les cas particuliers de la cavité cylindrique et de la fissure circulaire (penny-shaped). Le cas de la cavité cylindrique correspond au cas particulier de la cavité allongée où $e_1 \rightarrow 1$. Σ_B s'écrit :

$$\Sigma_B^2 = \frac{3}{2}(\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2) + 3\Sigma_{12}^2 + 3\Sigma_{13}^2 + 3\Sigma_{23}^2 \tag{5.107}$$

Finalement les lois d'évolution s'écrivent, pour une cavité cylindrique :

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \frac{3}{2} \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{\Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\
 \dot{S} &= D_{33} - \frac{1}{2}(D_{11} + D_{22}) - \frac{3}{4} \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{\Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq}
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Le cas de la fissure de type penny-shaped correspond au cas particulier de la cavité aplatie où $e_1 \rightarrow 1$. La quantité Σ_B est alors donné par :

$$\Sigma_B^2 = \frac{9}{2}\Sigma_{33}^2 + 6(\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2) \tag{5.109}$$

et les lois d'évolution de a_1 et b_1 s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}_1}{b_1} &= \frac{3\Sigma_{33}}{\pi\Sigma_B} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} D_{eq} \\ \frac{\dot{b}_1}{b_1} &= 0\end{aligned}\tag{5.110}$$

5.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la croissance d'une cavité sphéroïdale en milieu infini rigide plastique. Bien que l'approche proposée s'appuie sur les travaux de Rice et Tracey, elle présente les deux originalités suivantes :

- la considération de champs tests de type Eshelby ; ces nouveaux champs de vitesse comportent notamment des composantes non axisymétriques dont l'effet est d'abord analysé dans le contexte de cavités sphériques.
- l'établissement de nouveaux résultats concernant les effets de forme de cavité sur la loi de croissance. Les résultats établis sont explicités pour diverses situations incluant le cas des fissures circulaires, en forme de pièce de monnaie.

Une perspective importante de ces nouveaux développements concerne leur application à la problématique de la fatigue polycyclique, en s'appuyant notamment sur l'étude menée au chapitre 2.

Compte tenu de l'importance des couplages plasticité-endommagement dans la modélisation de la fatigue polycyclique (cf. chapitre 3), il nous a semblé plus opportun de prolonger l'étude réalisée dans le présent chapitre par la mise en oeuvre des champs de type Eshelby pour la formulation de critères macroscopiques de milieux poreux. Ceci fait l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 6

Critères macroscopiques de type Gurson généralisé pour les milieux poreux

L'objet de ce chapitre est de proposer une amélioration des critères macroscopiques non elliptiques de milieux poreux dont la matrice obéit au critère de von Mises, approche brièvement présentée dans [77]. La démarche suivie se place dans le cadre de l'approche classique par analyse limite. Elle a toutefois la particularité de reposer sur des champs d'essai inspirés des champs de vitesse associés au problème de l'inclusion inhomogène d'Eshelby. Il s'agit des champs non axisymétriques que nous avons présentés et étudiés au chapitre 5, dans le cas général de cavités sphéroïdales.

Après avoir précisé que ces champs ne permettent pas de satisfaire les conditions usuelles de taux de déformation homogène au bord de la cellule, et qu'ils introduisent un certain nombre de paramètres de nature cinématique qui ne peuvent être entièrement déterminés à partir de ces conditions, nous proposons de considérer la relation de moyenne entre le taux de déformation microscopique \mathbf{d} et le taux de déformation macroscopique \mathbf{D} . Dans ce nouveau cadre d'analyse, le calcul de la dissipation macroscopique, dont est issu le critère macroscopique du milieu poreux, résulte d'une procédure de minimisation par rapport aux paramètres cinématiques. Pour des raisons évidentes de clarté méthodologique, nous illustrerons d'abord la démarche dans le cas d'une cavité sphérique. Puis, nous traiterons en détail le cas des cavités sphéroïdales (allongées ou aplaties). Dans chacun de ces cas, les nouveaux critères obtenus sont évalués de façon systématique en les comparant soit à des critères existants, soit à des résultats numériques dont la plupart sont issus de la littérature. Les avantages de ces nouveaux critères qui généralisent des critères existants seront soulignés.

6.1 Principe général de détermination du critère macroscopique

6.1.1 Discussion préliminaire sur les conditions aux limites

On considère, dans le cas général, un sphéroïde (de demi-axes a_2 et b_2) contenant une cavité sphéroïdale (de demi-axes a_1 et b_1). La matrice solide est toujours supposée parfaitement plastique et régie par le critère de von Mises. Le champ de vitesse qui sera considéré dans la matrice solide est celui constitué des champs de type Eshelby, décrit au chapitre 5. Ce champ se décompose en un champ correspondant à un taux de déformation uniforme dans la matrice solide, $\mathbf{A}.\underline{x}$, et en un champ de vitesse hétérogène, \underline{v}^E , inspiré de la solution du problème d'inclusion élastique inhomogène d'Eshelby. Ce champ est donc défini à l'aide de onze paramètres. Il s'agit d'abord des composantes de \mathbf{A} (soit cinq paramètres indépendants compte tenu de la condition d'incompressibilité du matériau $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$) et des composantes du taux de déformation libre, d_r^* pour $r = 1, 6$.

Dans l'approche classique d'analyse limite de Gurson [47], reprise ensuite par Gologanu et al. [36, 37, 38, 39], par Gârâjeu et Suquet [34] (voir également [32]) puis suivie au chapitre 4, des conditions de taux de déformation homogène au contour, auxquelles doit satisfaire le champ de vitesse, ont été considérées :

$$\underline{v}(\lambda = \lambda_2) = \mathbf{D}.\underline{x} \quad (6.1)$$

Cette condition implique six relations à satisfaire pour la famille de champs retenus (voir l'annexe D pour plus de détail). Toutefois, le champ type Eshelby, qui par essence est un champ correspondant à une cavité en milieu infini, ne satisfait les conditions de taux de déformation homogène au contour de la cellule élémentaire (6.1) que si $\bar{\mathbf{d}}^* = 0$. Examinons le problème de condition aux limites pour le champ de vitesse considéré ; pour cela, on rappelle que le champ d'Eshelby est défini, dans le cas d'une cavité sphéroïdale, par (5.24) :

$$\underline{v}^E = \left[\mathbb{T}(\lambda) : \mathbf{d}^* + \frac{a_1 b_1^2}{ab^2} (a^2 - a_1^2) d_{\lambda\lambda}^* \Phi(\lambda) \right] .\underline{x} \quad (6.2)$$

L'équilibre de ce champ avec un taux de déformation homogène au contour (6.1) implique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbb{T}(\lambda_2) : \mathbf{d}^* + f(a_2^2 - a_1^2) d_{\lambda\lambda}^* \Phi(\lambda_2) \quad (6.3)$$

D'une part le tenseur \mathbb{T} ne possède pas les symétries mineures (hormis dans le cas de la sphère). D'autre part, $d_{\lambda\lambda}^*$ est fonction de φ et θ , hormis dans le cas où le taux de déformation libre est de nature purement sphérique, $\mathbf{d}^* = d_h^* \mathbf{1}$; dans le cas contraire $d_{\lambda\lambda}^*$ est un terme qui n'est pas homogène sur le contour extérieur. La considération de conditions de taux de déformation homogène au contour conduit donc à poser $\bar{\mathbf{d}}^* = 0$. Le champ de vitesse obtenu se réduit alors tout simplement à celui utilisé au quatrième chapitre et introduit par Gologanu et al. [36, 37].

En raison de l'impossibilité à satisfaire les conditions de taux de déformation homogène au bord de la cellule finie, nous avons été amené à reconsidérer la question des conditions

au bord. On se propose de considérer les relations usuelles de moyenne entre les taux de déformation macroscopique, \mathbf{D} , et microscopique, \mathbf{d} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d} dV \quad (6.4)$$

Considérons cette relation de moyenne (6.4) et précisons les conditions qu'elle impose sur les champs de vitesse. On peut montrer qu'elle conduit à (voir annexe D, section D.2 pour plus de détail) :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d} dV = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{v} \otimes \underline{e}_{\lambda} dS = \mathbf{A} + f \mathbb{S}(e_2) : \mathbf{d}^* \quad (6.5)$$

qui est une relation entre le taux de déformation macroscopique, \mathbf{D} , le champ uniforme \mathbf{A} et \mathbf{d}^* . De plus, elle fait apparaître le tenseur d'Eshelby (fonction de l'excentricité e_2) associé au bord extérieur. On peut immédiatement vérifier que (6.5) conduit aux six relations suivantes, liant les composantes de \mathbf{D} , de \mathbf{A} et de \mathbf{d}^* :

$$\begin{aligned} d_1^* &= \frac{D_h}{f} \\ A_{33} &= D_{33}(1 - \alpha_2) - (D_{11} + D_{22})\alpha_2 + 3f(1 - \alpha_2 - \beta_2)d_2^* \\ A_{22} - A_{11} &= D_{22} - D_{11} - f\frac{1}{2}(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)d_3^* \\ A_{12} &= D_{12} - f\frac{1}{4}(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)d_4^* \\ A_{13} &= D_{13} - f\frac{1}{2}(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 1)d_5^* \\ A_{23} &= D_{23} - f\frac{1}{2}(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 1)d_6^* \end{aligned} \quad (6.6)$$

Remarque : *Le problème mécanique ainsi défini consiste alors à considérer, toujours dans le cadre d'une approche cinématique, des conditions de contrainte homogène au bord de la cellule élémentaire. En effet, dans le contexte de l'approche cinématique, qui sera développée, la considération de (6.4) seule implique que l'on s'intéresse à des conditions de contrainte homogène au bord. Dans ce cas il est tout à fait licite qu'aucune condition aux limites de type cinématique ne doit être considérée (sur le champ de vitesse (6.2)).*

On notera qu'en posant $d_r^* = 0$ pour $r = 2, 6$ dans (6.6), c'est à dire en se restreignant au champ d'expansion introduit par [36] et [37] et que nous avons également appliqué au chapitre 4 (il s'agit du champ \underline{v}_1), les équations d'équilibre au bord obtenues par des conditions de taux de déformation homogène au contour (6.3) (voir (4.23)) sont retrouvées. Ceci suggère que, lorsque la cavité est soumise à un taux de déformation purement hydrostatique, alors les conditions (6.3) et (6.5) sont équivalentes. Il s'agit toutefois d'une particularité du champ \underline{v}_1 . Les champs \underline{v}_r pour $r = 2, 6$ ne permettent pas de satisfaire ces conditions d'équilibre au bord.

Dans le cas particulier d'une cavité sphérique, le tenseur d'Eshelby intervenant dans (6.5), se réduit à $\mathbb{S}(e_2) = \mathbb{J} + \frac{2}{5}\mathbb{K}$; l'équation (6.4) s'écrit alors :

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{A} + \frac{2f}{5}\bar{\mathbf{d}}^*; \quad \text{et} \quad D_h = f d_h^* \quad (6.7)$$

6.1.2 Principe de minimisation, détermination du critère de plasticité macroscopique

La relation de moyenne (6.5) conduit donc à six relations, ce qui implique donc que cinq paramètres restent non identifiés dans l'expression du champ de vitesse \underline{v} (cf. équation (6.2)). Ces cinq paramètres constituent les inconnues du problème considéré. Parmi les onze paramètres qui définissent le champ de vitesse, un seul est complètement identifié, il s'agit de d_1^* (qui n'est autre que la partie hydrostatique du taux de déformation libre). Rappelons que la première relation dans (6.6) qui lie d_1^* à D_h traduit l'incompressibilité de la matrice. Par conséquent, le choix des inconnues du problème se porte sur les dix paramètres restants. On fait le choix des d_r^* , pour $r = 2, 6$ comme paramètres inconnus, même si nous aurions aussi pu opter pour les A_{ij} ; toutefois, ceci ne modifie pas le résultat final.

Le taux de déformation microscopique dans la matrice solide est défini par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{d}^E = \mathbf{A} + \sum_r \mathbf{d}_r d_r^* \quad (6.8)$$

où $\mathbf{d}_r^E = \nabla_s \underline{v}_r^E$.

Comme auparavant, la dissipation microscopique s'écrit : $\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq}$ où d_{eq} est défini par :

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{d}) &= \sigma_0 d_{eq} \\ \text{avec : } d_{eq}^2 &= A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{A} : \mathbf{d}^E + d_{eq}^{E2} = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \sum_r d_r^* \mathbf{A} : \mathbf{d}_r^E + \frac{2}{3} \sum_{r,s} d_r^* d_s^* \mathbf{d}_r^E : \mathbf{d}_s^E \end{aligned} \quad (6.9)$$

En raison de la présence dans \mathbf{d} des d_r^* , pour $r = 2, 6$ qui sont les inconnues du problème, on introduit la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ définie par :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} d_{eq} dV \quad (6.10)$$

La dissipation macroscopique, $\Pi(\mathbf{D})$, est alors déduite d'une procédure de minimisation de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ par rapport aux variables inconnues, d_r^* , pour $r = 2, 6$:

$$\Pi(\mathbf{D}) = \min_{d_r^*; r=2,6} \left[\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) \right] \quad (6.11)$$

Le critère de plasticité macroscopique s'en déduit classiquement par :

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \quad (6.12)$$

On soulignera dès à présent que la difficulté quant à la détermination du critère de plasticité macroscopique est triple puisqu'elle nécessite dans un premier temps l'intégration de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ (6.10), et la résolution du problème de minimisation (6.11), puis l'obtention d'une expression analytique du critère à partir de (6.12). Concernant l'intégration de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$, un certain nombre d'approximations vont être nécessaires pour aboutir à une forme explicite du critère macroscopique. Pour cela, une démarche généralisant celle introduite dans le chapitre 4 est proposée. Néanmoins compte tenu de la complexité du problème abordé, on se propose dans un premier temps d'examiner le cas de la sphère.

6.2 Détermination du critère de plasticité dans le cas de la sphère creuse

Une nouvelle expression analytique du critère de plasticité, dans le cas de la sphère creuse, est proposée dans cette section. Celle-ci est obtenue en suivant la démarche esquissée dans la section précédente. Une première difficulté réside dans l'intégration (6.10). En particulier, on verra que l'approximation utilisée par Gurson (qui consiste à remplacer d_{eq} par $\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}}$) n'est plus à elle seule suffisante ici pour obtenir une expression explicite de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$. Il s'agira donc d'appliquer une seconde approximation (A2) qui, malheureusement, ne permet plus d'assurer le statut de borne de l'approche.

Comme précédemment indiqué, la seconde étape de la méthodologie, conduisant à l'expression analytique du critère de plasticité, consiste à effectuer la résolution du problème de minimisation (6.11). Le critère obtenu sera comparé au critère de Gurson (4.1), à celui issu de l'homogénéisation non linéaire [96], que nous préciserons plus tard, et aux résultats de simulations numériques par éléments finis provenant de [38]. Une comparaison du nouveau critère approché avec la solution numérique (exacte), associée aux champs tests de type Eshelby, permettra également d'évaluer la qualité des approximations effectuées.

6.2.1 Détermination de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$

Dans cette section, on se propose donc de déterminer une expression approchée de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$, en appliquant la procédure déjà détaillée dans le chapitre 4. Rappelons tout d'abord que le taux de déformation hétérogène s'écrit $\mathbf{d}^E = \mathbb{D} : \mathbf{d}^*$, où l'expression du tenseur \mathbb{D} est défini, dans le cas d'une sphère, par (5.52). Le taux de déformation équivalente, d_{eq} , défini par (6.9), s'écrit ainsi :

$$d_{eq}^2 = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{A} : \mathbb{D} : \mathbf{d}^* + \frac{2}{3} \mathbf{d}^* : \mathbb{D}^T : \mathbb{D} : \mathbf{d}^* \quad (6.13)$$

Précisons maintenant les différentes étapes qui conduisent à l'expression approchée de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$. La première approximation est la suivante :

A1 : d_{eq} , dans l'expression de la dissipation microscopique, est remplacé par sa valeur moyenne sur la surface de la sphère unité.

Il s'agit de l'inégalité classique appliqué par [47] et qui permet de conserver le statut de borne supérieure de l'approche :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)} = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{A} : \langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)} : \mathbf{d}^* + \frac{2}{3} \mathbf{d}^* : \langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)} : \mathbf{d}^* \quad (6.14)$$

On rappelle que la moyenne de \mathbb{D} sur la sphère unité est nulle, $\langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)} = 0$; cette propriété a déjà été énoncée et utilisée au chapitre précédent. Intéressons nous ensuite au terme $\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$, donnée par (5.64) et s'écrivant :

$$\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)} = \left\{ 2\mathbb{J} + \frac{6}{25} G(u) \mathbb{K} \right\} u^2 \quad (6.15)$$

dans laquelle on a posé $u = r_1^3/r^3$ et $G(u)$ est une fonction de u définie par :

$$G(u) = \frac{1}{3} (15 - 40u^{2/3} + 28u^{4/3}) \quad (6.16)$$

En résumé, $\langle d_{eq} \rangle_{S(r)}$ est donné par :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)} = A_{eq}^2 + \left[4d_h^{*2} + \frac{6G(u)}{25} d_{eq}^{*2} \right] u^2 \quad (6.17)$$

L'intégrale de la dissipation microscopique définissant $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ (équation (6.10)), s'écrit alors :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) = \sigma_0 f \int_{u=f}^{u=1} \sqrt{A_{eq} + \left(4d_h^{*2} + \frac{6G(u)}{25} d_{eq}^{*2} \right) u^2} \frac{du}{u^2} \quad (6.18)$$

L'objectif de l'approximation suivante est de transformer l'expression précédente en une intégrale du type $\int_1^f \sqrt{\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 u^2} \frac{du}{u^2}$ où \tilde{A} et \tilde{B} sont des constantes. Pour cela, on propose :

\mathcal{A}_2 : la fonction $G(u)$ est remplacée par sa valeur moyenne, que nous noterons $\bar{G}(f)$, calculée sur l'intervalle $[u_1, u_2] = [1, f]$

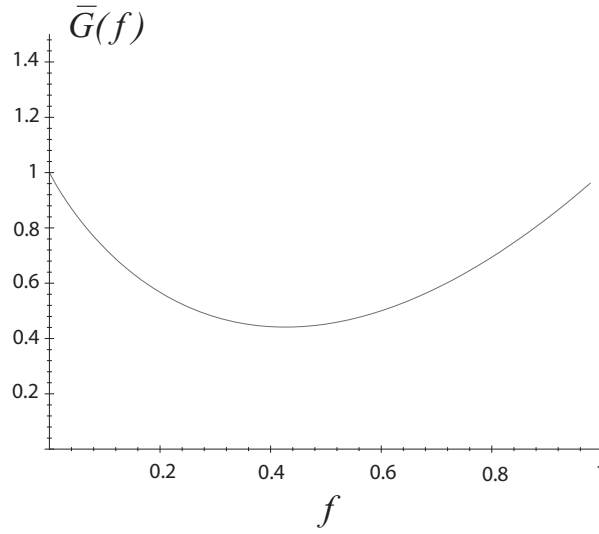
L'expression de $\bar{G}(f)$ est défini par :

$$\bar{G}(f) = \frac{1}{1-f} \int_f^1 G(u) du = 1 - 4f \frac{(1-f^{2/3})^2}{1-f} \quad (6.19)$$

Malheureusement, avec l'approximation \mathcal{A}_2 , le statut de borne du critère qui sera établi n'est plus garanti. Par conséquent, nous serons amené à préciser comment se situe la solution approchée par rapport à la solution exacte calculée numériquement.

Pour l'intégration (6.18), on introduit \tilde{B} tel que :

$$\tilde{B}^2 = 4d_h^{*2} + \frac{6\bar{G}(f)}{25} d_{eq}^{*2} \quad (6.20)$$


 FIG. 6.1 – Diagramme de $\bar{G}(f)$ en fonction de f .

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) &= \sigma_0 f \int_f^1 \left\{ \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 u^2 \right\}^{1/2} \frac{du}{u^2} \\ &= \sigma_0 f \left[\tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u\tilde{B}}{A_{eq}} \right\} - \frac{\sqrt{A_{eq}^2 + u^2 \tilde{B}^2}}{u} \right]_f^1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dans sa forme, cette expression est similaire à celle obtenue par Gurson (qui correspond à $d_{eq}^* = 0$ dans \tilde{B} et $A_{eq} = D_{eq}$).

Remarque : Considérons le cas particulier où le taux de déformation plastique dans la matrice solide est faiblement hétérogène. d_{eq} (6.13) peut être alors approchée par :

$$d_{eq} \simeq A_{eq} \left[1 + \frac{1}{3A_{eq}^2} (2\mathbf{A} : \mathbb{D} : \mathbf{d}^* + \mathbf{d}^* : \mathbb{D}^T : \mathbb{D} : \mathbf{d}^*) \right] \quad (6.22)$$

On se propose de déterminer l'expression de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ à partir de (6.10), dans laquelle l'expression de d_{eq} aura été remplacée par (6.22). On a donc :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) = \sigma_0 A_{eq} \left[1 + \frac{2}{3A_{eq}^2} \mathbf{A} : \langle \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega} : \mathbf{d}^* + \frac{1}{3A_{eq}^2} \mathbf{d}^* : \langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega} : \mathbf{d}^* \right] \quad (6.23)$$

où $\langle \cdot \rangle_{\Omega-\omega}$ représente la valeur moyenne sur la matrice solide. L'expression (6.23) de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ fait apparaître les termes $\langle \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega}$ et $\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega}$, dont les expressions

sont :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega} &= f \int_f^1 \langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)} \frac{du}{u^2} = 0 \\ \langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{\Omega-\omega} &= f \int_f^1 \langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)} \frac{du}{u^2} = \left\{ 2\mathbb{J} + \frac{6}{25} \bar{G}(f) \mathbb{K} \right\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Il s'en suit que $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ est donnée par :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) = \sigma_0(1-f) \left\{ A_{eq} + \frac{f}{A_{eq}} \left[2d_h^{*2} + \frac{3}{25} d_{eq}^{*2} \right] \right\} \quad (6.25)$$

On peut maintenant montrer qu'en supposant une faible hétérogénéité, l'expression approchée de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ (6.21) permet de retrouver l'expression (6.25). En effet, \tilde{B}/A_{eq} étant supposé faible, (6.21) peut être approché par :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) \simeq -\sigma_0 f \left[\frac{A_{eq}}{u} - \frac{u \tilde{B}^2}{2A_{eq}} \right]_f^1 = \sigma_0(1-f) \left[A_{eq} + f \frac{\tilde{B}^2}{2A_{eq}} \right] \quad (6.26)$$

Ce résultat coïncide avec (6.25) puisque \tilde{B} est donné par (6.20). L'approximation proposée permet ainsi de retrouver la solution exacte lorsque le taux de déformation hétérogène, d^E , est faible devant le taux de déformation uniforme, \mathbf{A} .

6.2.2 Détermination du critère de plasticité macroscopique

Principe

Ayant une expression approchée de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$ dans le cas d'une cavité sphérique, il s'agit maintenant de déterminer le critère de plasticité macroscopique. L'obtention de ce critère s'avère ici non triviale. En effet, rappelons qu'il est nécessaire de déterminer dans un premier temps l'expression de la dissipation macroscopique, $\Pi(\mathbf{D})$, déduite d'une procédure de minimisation de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$ par rapport aux variables "inconnues", c'est à dire les composantes de $\bar{\mathbf{d}}^*$. C'est en principe après cette minimisation qu'est construit le critère de plasticité macroscopique déduit de (6.12).

En pratique, plutôt que de traiter ces deux étapes de manière successive, la détermination du critère peut être effectuée en les abordant simultanément :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} = 0 \quad (6.27)$$

Un des points clé de l'approche développée dans ce chapitre réside dans la résolution complète du problème (6.27). Comme nous le verrons dans la suite, la solution assurant le minimum de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) = \tilde{\Pi}(\mathbf{A}, \tilde{B})$ a pu être déterminée analytiquement. Notons, de plus, que les expressions des inconnues ($\bar{\mathbf{d}}^*$) du problème sont nécessaires pour déterminer ensuite les lois d'évolution (5.44).

Pour résoudre les équations (6.27), il est judicieux d'effectuer le changement de variable suivant : $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) = \tilde{\Pi}(\mathbf{A}, \tilde{B})$. Le tenseur de contrainte macroscopique Σ est alors défini par :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} : \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \mathbf{D}} \quad (6.28)$$

tandis que la condition de minimisation par rapport à $\bar{\mathbf{d}}^*$, la seconde relation dans (6.27), s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} : \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} = 0 \quad (6.29)$$

Pour des raisons qui apparaîtront dans les lignes qui suivent, on doit déterminer les deux grandeurs Σ_A et Σ_B définies par :

$$\Sigma_A = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial A_{eq}}; \quad \Sigma_B = \frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \quad (6.30)$$

En supposant connues Σ_A et Σ_B , on peut alors déduire le critère en suivant une procédure similaire à celle de Gurson [47]. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial A_{eq}} = \sigma_0 \left[\sqrt{1 + f^2 \xi^2} - f \sqrt{1 + \xi^2} \right] \\ \Sigma_B &= \frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} = \sigma_0 \left[\operatorname{arcsinh}(\xi) - \operatorname{arcsinh}(f\xi) \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

avec $\xi = \tilde{B}/A_{eq}$. Le critère de plasticité est alors obtenu en éliminant le paramètre ξ des deux relations (6.31) :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (6.32)$$

Les différences avec d'autres critères vont donc résider dans la définition de Σ_A et Σ_B , qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Remarque : considérons le cas particulier où le champ hétérogène, \mathbf{d}^E , est faible devant le champ uniforme, \mathbf{A} . On a similairement à (6.31), à partir de (6.25) :

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \sigma_0 \left(1 - \frac{f}{2} \xi^2 \right) \\ \Sigma_B &= \frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} = \sigma_0 (1 - f) \xi \end{aligned} \quad (6.33)$$

Soit encore :

$$\frac{\Sigma_A^2}{\sigma_0^2} \simeq (1 - f)^2 \left(1 - \frac{1}{4} f^2 \xi^2 \right); \quad \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} = (1 - f)^2 \xi^2 \quad (6.34)$$

ce qui, par combinaison, conduit à un critère de type elliptique :

$$\Sigma_A^2 + f\Sigma_B^2 = (1 - f)^2\sigma_0^2 \quad (6.35)$$

Nous insisterons sur le fait que ce critère (6.35) n'est valable que pour de faibles hétérogénéités du taux de déformation plastique dans la matrice solide. Il sera intéressant de le comparer avec (6.32). On verra par la suite, que (6.35) permet également de retrouver certains résultats connus de la littérature et qu'il pouvait être déduit de (6.32), en développant le terme \cosh au second ordre :

$$\cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \quad (6.36)$$

De ce qui précède, il apparaît que le domaine de validité du critère quadratique est déterminé par une condition portant sur Σ_B . Plus précisément, l'hypothèse de faible hétérogénéité du taux de déformation plastique n'est vraie que si l'on a de faibles valeurs de Σ_B . Venons en maintenant aux expressions de Σ_A et Σ_B , vérifiant (6.30). Celles-ci sont données par :

$$\Sigma_A = \Sigma_{eq}; \quad \Sigma_B = \sqrt{\frac{9}{4}\Sigma_h^2 + \frac{2}{3G(f)}\Sigma_{eq}^2} \quad (6.37)$$

Démonstration :

Explicitons, dans un premier temps, les relations (6.28) et (6.29) à partir de (6.7) et (6.20). En observant d'abord que \tilde{B} est fonction uniquement de D_h et des d_r^* pour $r = 2, 6$ tandis que \mathbf{A} est fonction seule de $\bar{\mathbf{D}}$ et des d_r^* pour $r = 2, 6$, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_h &= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial D_h} = \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \frac{D_h}{f^2 \tilde{B}} \\ \bar{\Sigma} &= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

De la dernière relation de (6.38), on déduit :

$$\Sigma_A = \Sigma_{eq} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial A_{eq}} \quad (6.39)$$

La condition (6.29) assurant le minimum de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$, s'écrit, en utilisant (6.7) et (6.20) :

$$-\frac{2f}{5} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} + \frac{4\bar{G}(f)}{25} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \frac{\bar{\mathbf{d}}^*}{\tilde{B}} = 0 \quad (6.40)$$

En éliminant la dérivée de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$ par rapport à \mathbf{A} au profit de $\bar{\Sigma}$ à partir de (6.38), on vérifie que (6.40) peut encore s'écrire :

$$\bar{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \frac{2\bar{G}(f)}{5f} \frac{\bar{\mathbf{d}}^*}{\tilde{B}} \quad (6.41)$$

Combinant la première relation dans (6.38) avec (6.41), il vient :

$$\frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial B} = \sqrt{\frac{9}{4} \Sigma_h^2 + \frac{2}{3\bar{G}(f)} \Sigma_{eq}^2} \quad (6.42)$$

ce qui achève la démonstration, puisque Σ_B , défini par (6.30), s'écrit :

$$\Sigma_B = \sqrt{\frac{9}{4} \Sigma_h^2 + \frac{2}{3\bar{G}(f)} \Sigma_{eq}^2} \quad (6.43)$$

Le critère de plasticité macroscopique du milieu contenant des cavité sphériques s'obtient en remplaçant dans (6.32), Σ_A par Σ_{eq} et Σ_B par son expression donnée par (6.43) :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\Sigma_h^2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{3\bar{G}(f)} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right\} - 1 - f^2 \quad (6.44)$$

où $\bar{G}(f)$ est défini par (6.19).

6.2.3 Comparaison avec les résultats existants

La distinction remarquable de ce critère, par rapport à celui de Gurson (4.1), réside dans la présence du terme en Σ_{eq}^2 dans le *cosh*. L'importance de ce terme est précisé dans la section suivante. On soulignera de plus, qu'à l'instar du critère de Gurson, (6.44) permet également de retrouver la solution exacte de la sphère creuse soumise à une pression hydrostatique :

$$\Sigma_h = -\frac{2\sigma_0}{3} \ln(f) \quad (6.45)$$

Le développement des méthodes d'homogénéisation non linéaire a permis (cf. Ponte Castañeda [96], [97], puis Suquet [116]) la proposition de modèles de comportement des matériaux poreux fondés sur les bornes d'Hashin-Shtrikman⁹. Dans le cas des cavités sphériques, on aboutit à un critère elliptique qui s'écrit [96] :

$$\left(1 + \frac{2f}{3}\right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9f}{4} \frac{\Sigma_h^2}{\sigma_0^2} - (1 - f)^2 = 0 \quad (6.46)$$

dont il est reconnu que les prédictions ne sont pas très satisfaisant pour de forts taux de triaxialité. En particulier, il ne permet pas de retrouver la solution exacte (6.45) de la sphère creuse soumise à un chargement purement hydrostatique. Toutefois, (6.46) fournit une borne plus resserrée à faible taux de triaxialité, le critère de Gurson (4.1) violant légèrement cette borne.

⁹Le domaine d'application de ces travaux ont été récemment étendus par Barthelemy et al. [4] (voir également [5] et [23]) au contexte des milieux poreux saturés avec une matrice obéissant au critère de Drucker-Prager.

Il est intéressant de noter que (6.46) correspond au critère elliptique obtenu en considérant une faible hétérogénéité de la déformation plastique (6.35) et qu'il peut être dérivé de (6.44) en supposant que Σ_B est petit et que la porosité est faible. En effet sous cette dernière hypothèse :

$$\cosh \left\{ \sqrt{\frac{9 \Sigma_h^2}{4 \sigma_0^2} + \frac{2 \Sigma_{eq}^2}{3 \bar{G}(f) \sigma_0^2}} \right\} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{9 \Sigma_h^2}{4 \sigma_0^2} + \frac{2 \Sigma_{eq}^2}{3 \bar{G}(f) \sigma_0^2} \right\} \quad (6.47)$$

En reportant ensuite cette approximation dans (6.44), et en remarquant que $\bar{G}(f) \simeq 1$ à faible porosité, on retrouve bien la borne non linéaire d'Hashin-Shtrikman (6.46).

Finalement, on observe que le nouveau critère a la remarquable propriété de coïncider avec la borne d'Hashin (6.46) à faible valeur de la pression hydrostatique (et pour des faibles porosités) et avec le critère de Gurson pour de forts taux de triaxialité.

Sur les figures 6.2 et 6.3 sont représentés le critère de Gurson (4.1), la borne d'Hashin (6.46), et le nouveau critère (6.44) pour les valeurs suivantes de la porosité : $f = 0.01$ et $f = 0.3$.

Clairement, pour de faibles porosités (cf. figure 6.2), on observe que le nouveau critère se distingue peu de celui de Gurson et que les trois critères coïncident à faible taux de triaxialité. A fort taux de triaxialité la borne d'Hashin surestime largement le critère de plasticité macroscopique.

Comme cela a été déjà dit, pour de plus fortes valeurs de la porosité (cf. figure 6.3), le critère de Gurson viole la borne d'Hashin lorsque le taux de triaxialité des contraintes est faible. Les résultats obtenus dans cette étude conduisent à un critère respectant cette borne qu'il améliore d'ailleurs nettement pour des triaxialités moyennes ou grandes (pour lesquelles il coïncide avec le critère de Gurson).

On soulignera qu'afin d'améliorer le critère de Gurson, Gârãjeu [32], [33] avait proposé une amélioration en choisissant comme champ d'essai la solution élastique du problème de la sphère creuse soumise à cisaillement pure. Néanmoins le critère obtenu viole toujours la borne d'Hashin. Sur la figure (6.4) sont présentées des comparaisons du critère (6.44) (ligne continue) avec des simulations numériques par éléments finis réalisées en conditions de chargement axisymétrique (voir [38]). Dans ces simulations, des conditions de taux de déformation homogène au contour (triangle) et des conditions de contrainte homogène au contour (rond) ont été considérées. On observe une bonne concordance des prédictions du critère avec les résultats numériques correspondant aux conditions de taux de déformation homogène au contour ; l'amélioration par rapport au critère de Gurson (également reporté sur la figure (6.4)) est à nouveau mise en évidence.

Un dernier aspect concerne plus particulièrement les approximations proposées pour la détermination du nouveau critère. En effet, il s'agit de préciser comment le critère obtenu se situe par rapport à la solution exacte du problème décrit dans la section 6.1.2. Car, bien que le critère semble améliorer celui de Gurson, on peut se poser la question de la qualité des approximations effectuées pour son obtention. On rappelle que ces approximations sont au nombre de deux ; la première a consisté à utiliser l'inégalité classique, qui permet de conserver le statut de borne de l'approche. Comme nous l'avons déjà mentionné, la seconde approximation, $\mathcal{A}2$, ne permet plus de statuer sur le critère (6.44), compte tenu de son caractère "non contrôlé". Tenant compte de l'observation que c'est pour de faibles

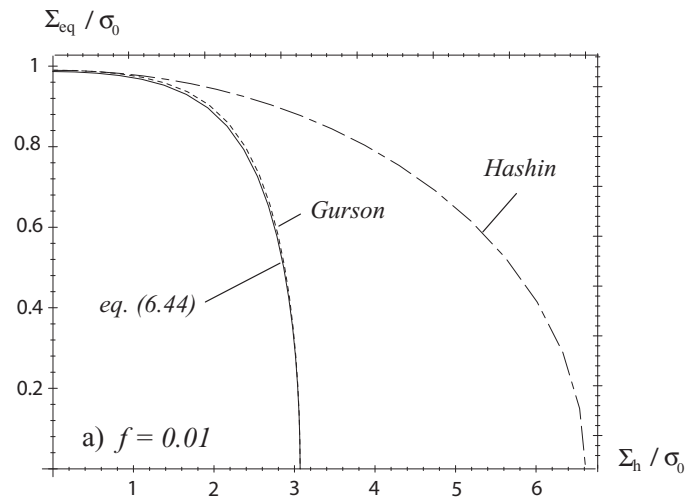


FIG. 6.2 – Comparaison du critère (6.44) avec le critère de Gurson (4.1) et la borne d’Hashin (6.46) pour une porosité $f = 0.01$.

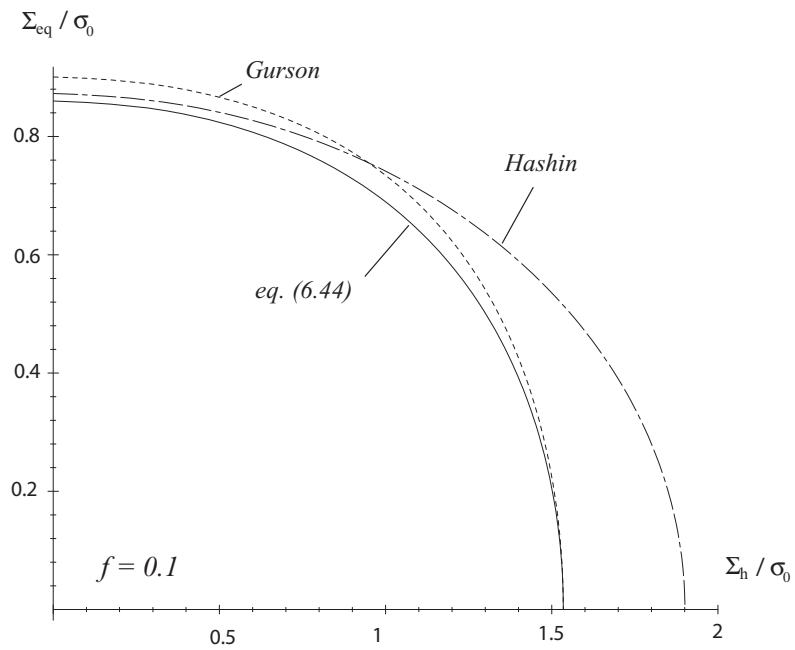


FIG. 6.3 – Comparaison du critère (6.44) avec le critère de Gurson (4.1) et la borne d’Hashin (6.46) pour une porosité $f = 0.3$

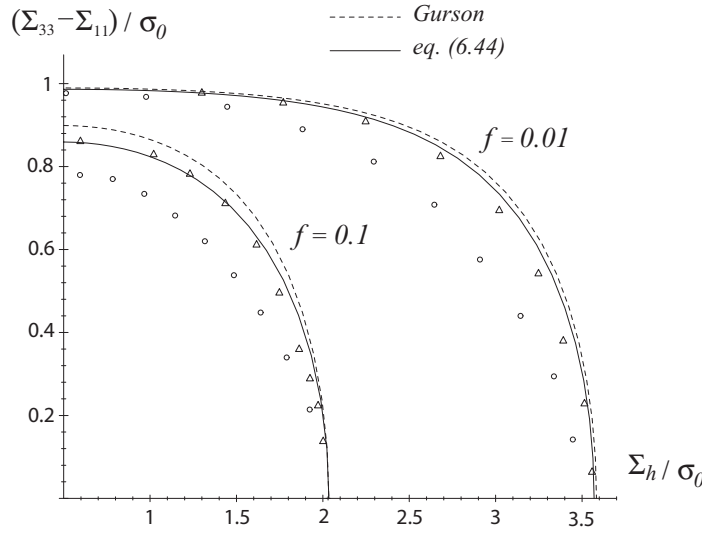


FIG. 6.4 – Comparaison du critère (6.44) et du critère de Gurson avec les simulations numériques par éléments finis issues de [38], conditions de taux de déformation homogène au contour (triangles) et condition de contrainte homogène au contour (Cercles)

valeurs du taux de triaxialité que les modifications apportées améliorent significativement le critère de Gurson, on se propose d'examiner le cas particulier où $\Sigma_h = 0$. Sur la figure 6.5, nous avons représenté les valeurs de la contrainte équivalente provoquant l'écoulement pour un chargement purement déviatorique en fonction de la porosité. Les trois critères (critère de Gurson (4.1), borne d'Hashin (6.46), nouveau critère (6.44)) ainsi que la solution numérique (exacte) du critère avec le champ de type Eshelby sont considérés. On observe une bonne concordance du critère proposé avec la solution numérique associée au champ considéré dans ce chapitre, ce qui confirme la bonne qualité des approximations.

6.2.4 Lois d'évolution

On se propose maintenant d'explicitier les lois d'évolution de la cavité initialement sphérique. On rappelle que celles-ci sont obtenues à partir du taux de déformation libre \mathbf{d}^* qu'il s'agit de reporter dans (5.44). Commençons donc par préciser \mathbf{d}^* . Pour cela, il s'agit de déterminer la valeur $\xi = \tilde{B}/A_{eq}$ à partir de (6.31), qui par combinaison donne :

$$\sinh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) = \xi\sqrt{1+f^2\xi^2} - f\xi\sqrt{1+\xi^2} = \xi\frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \quad (6.48)$$

Il s'en suit que \tilde{B} s'écrit :

$$\tilde{B} = \frac{\sigma_0}{\Sigma_A} \sinh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) A_{eq} \quad (6.49)$$

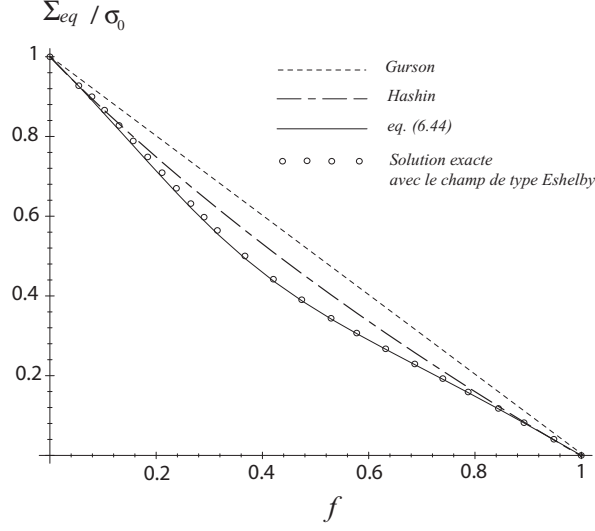


FIG. 6.5 – Contrainte équivalente d'écoulement pour un chargement purement déviatorique pour le critère de Gurson (4.1), la borne d'Hashin (6.46), le nouveau critère (6.44) et la solution numérique (exacte du critère avec le champ de type Eshelby).

En reportant cette expression dans (6.38) et (6.41), on a :

$$\bar{d}^* = \frac{5}{2G(f)} \frac{\bar{\Sigma}}{\Sigma_B} \frac{\sigma_0}{\Sigma_{eq}} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} A_{eq}; \quad (a) \quad (6.50)$$

$$d_h^* = \frac{3}{4} \frac{\Sigma_h}{\Sigma_B} \frac{\sigma_0}{\Sigma_{eq}} \sinh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} A_{eq}; \quad (b)$$

Reste à préciser l'expression de A_{eq} . Pour cela, exprimons le déformation macroscopique \mathbf{D} , via la loi de normalité associée à \mathcal{F} :

$$\bar{\mathbf{D}} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\Sigma}} = \frac{\dot{\Lambda}}{\sigma_0^2} \left[3 + \frac{2f}{\bar{G}(f)} \frac{\sigma_0}{\Sigma_B} \sinh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) \right] \bar{\Sigma}; \quad (a) \quad (6.51)$$

$$D_h = \dot{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Sigma_h} = \frac{3f}{2} \frac{\dot{\Lambda}}{\sigma_0} \frac{\Sigma_h}{\Sigma_B} \sinh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right); \quad (b)$$

Le multiplicateur plastique, $\dot{\Lambda}$, est déduit de (6.51)(a) :

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\Sigma_{eq}} \frac{\sigma_0 D_{eq}}{1 + \frac{2f}{3\bar{G}(f)} \frac{\sigma_0}{\Sigma_B} \sinh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right)} \quad (6.52)$$

On rappelle que $d_h^* = D_h/f$, si bien qu'en identifiant les relations (6.50)(b) et (6.51)(b), on obtient :

$$A_{eq} = \dot{\Lambda} \frac{2\Sigma_{eq}}{\sigma_0^2} \quad (6.53)$$

Il reste à préciser les lois d'évolution de la porosité et du changement de forme. D'une part celle de f est trivialement donnée par :

$$\dot{f} = 3(1 - f)D_h \quad (6.54)$$

Pour celle de \dot{S} , on a (cf. (5.44)) :

$$\dot{S} = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}_2 : \mathbf{d}^I = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}_2 : \left[\mathbf{A} + \frac{2}{5}\bar{\mathbf{d}}^* \right] = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}_2 : \left[\bar{\mathbf{D}} + \frac{2}{5}(1 - f)\bar{\mathbf{d}}^* \right] \quad (6.55)$$

Soit, en tenant compte de (6.50) et (6.53) :

$$\dot{S} = \left[\Sigma_{33} - \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} \right] \left[3 + \frac{2}{\bar{G}(f)} \frac{\sigma_0}{\Sigma_B} \sinh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) \right] \frac{\dot{\Lambda}}{\sigma_0^2} \quad (6.56)$$

6.3 Détermination du critère de plasticité dans le cas général d'un sphéroïde

On se propose maintenant d'étendre les résultats établis dans la section 6.2 au cas d'un sphéroïde de révolution contenant une cavité (également sphéroïdale, allongée ou aplatie, confocale au bord extérieur). Le critère macroscopique, qui sera obtenu, devrait a priori permettre de généraliser le critère de Gologanu et al. [36, 37] (et par conséquent celui proposé au chapitre 4, lorsqu'on considère une matrice isotrope). Il pourra également être comparé aux résultats de [38, 39].

6.3.1 Procédure d'approximation de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$

L'objet de cette section est donc de proposer une expression approchée de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$, introduite en section 6.1.2. Pour cela, nous allons reconduire la procédure appliquée au chapitre 4. La différence notable, ici, est que, comme souligné dans la première section de ce chapitre, le champ adopté introduit cinq paramètres inconnus qu'il s'agira ensuite de déterminer. En utilisant la décomposition du taux de déformation \mathbf{d} en un taux de déformation uniforme \mathbf{A} et un taux de déformation hétérogène (fonction des \mathbf{d}^*), on a la déformation équivalente d_{eq} , défini par (6.9), que l'on rappelle ici :

$$d_{eq}^2 = A_{eq}^2 + \frac{4}{3} \sum_{r,s} \mathbf{Q}_r : \mathbf{d}_s^E A_r d_s^* + \frac{2}{3} \sum_{r,s} d_r^* d_s^* \mathbf{d}_r^E : \mathbf{d}_s^E \quad (6.57)$$

dans laquelle la décomposition suivante pour \mathbf{A} a été effectuée : $\mathbf{A} = \sum_r A_r \mathbf{Q}_r$.

La mise en oeuvre concrète nécessite les approximations suivantes :

A1 : La première étape consiste à remplacer d_{eq} par sa valeur moyenne calculée sur chaque ellipsoïde confocal (cf. équation (4.40)).

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}} = A_{eq} + 2 \sum_{r,s} W_{rs}(\lambda) A_r d_s^* + \sum_{r,s} P_{rs}(\lambda) d_r^* d_s^* \quad (6.58)$$

$$\text{avec : } W_{rs}(\lambda) = \frac{2}{3} \mathbf{Q}_r : \langle \mathbf{d}_s^E \rangle_{\mathcal{E}} \quad \text{et : } P_{rs}(\lambda) = \frac{2}{3} \langle \mathbf{d}_r^E : \mathbf{d}_s^E \rangle_{\mathcal{E}}$$

$\mathcal{A}2$: Les termes $W_{rs}(e)$ et $P_{rs}(e)$ sont remplacés par des fonctions proportionnelles à u^2 .

Comme auparavant u est défini par $u = x$ dans le cas d'une cavité allongée et par $u = y$ dans le cas d'une cavité aplatie, x et y étant donnés par (5.90). On pose donc :

$$W_{rs}(\lambda) = w_{rs}u^2; \quad P_{rs}(\lambda) = p_{rs}u^2 \quad (6.59)$$

où les w_{rs} et les p_{rs} sont des constantes définies comme les moyennes des $W_{rs}(\lambda)$ et des $P_{rs}(\lambda)$ sur l'intervalle $[u_1, u_2]$

$$\begin{aligned} w_{rs} &= \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} W_{rs}(\lambda) \frac{du}{u^2} \\ p_{rs} &= \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} P_{rs}(\lambda) \frac{du}{u^2} \end{aligned} \quad (6.60)$$

En combinant ces équations avec (6.58), on obtient les expressions suivantes pour les w_{rs} et les p_{rs} :

$$\begin{aligned} w_{rs} &= \frac{2}{3f(u_1 - u_2)} \mathbf{Q}_r : \langle \mathbf{d}_s^E \rangle_{\Omega-\omega} \\ p_{rs} &= \frac{2}{3f(u_1 - u_2)} \langle \mathbf{d}_r : \mathbf{d}_s^E \rangle_{\Omega-\omega} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Comme au chapitre précédent, on introduit le tenseur \mathbb{P} tel que :

$$\mathbf{Q}_r : \mathbb{P} : \mathbf{Q}_s = p_{rs} \quad (6.62)$$

où \mathbb{P} est un tenseur ayant toutes les symétries (mineures et majeure). De même, on introduit le tenseur d'ordre 4, \mathbb{W} , tel que :

$$\mathbf{Q}_r : \mathbb{W} : \mathbf{Q}_s = w_{rs} \quad (6.63)$$

\mathbb{W} , possède les symétries mineures mais non la symétrie majeure (puisque à priori $w_{rs} \neq w_{sr}$).

A l'aide de ces tenseurs, on a :

$$\begin{aligned} \langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}} &= A_{eq}^2 + 2u^2 \mathbf{A} : \mathbb{W} : \mathbf{d}^* + u^2 \mathbf{d}^* : \mathbb{P} : \mathbf{d}^* \\ &= \frac{2}{3} \mathbf{A} : \left[\mathbb{K} - \frac{3u^2}{2} \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T \right] : \mathbf{A} \\ &\quad + \left[\mathbf{d}^* + \mathbf{A} : \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} \right] : \mathbb{P} : \left[\mathbf{d}^* + \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : \mathbf{A} \right] u^2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

La dernière approximation effectuée est la suivante :

A3 : On remplace dans le premier terme de la valeur approchée de d_{eq} (6.64), u^2 par $u_1 u_2$

Comme au chapitre 4, ceci permet de retrouver la solution exacte lorsque $d_r^* \rightarrow 0$. En suivant la procédure déjà mise en oeuvre, $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, d_r^*) &= -\sigma_0 f \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 u^2 \right\}^{1/2} \frac{du}{u^2} \\ &= -\sigma_0 f \left[\tilde{B} \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{u \tilde{B}}{\tilde{A}} \right\} - \frac{\sqrt{\tilde{A}^2 + u^2 \tilde{B}^2}}{u} \right]_{u_1}^{u_2}\end{aligned}\quad (6.65)$$

où \tilde{A} et \tilde{B} sont définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{A}^2 &= \frac{2}{3} \mathbf{A} : \left[\mathbb{K} - \frac{3u_1 u_2}{2} \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T \right] : \mathbf{A} \\ \tilde{B}^2 &= \left[\mathbf{d}^* + \mathbf{A} : \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} \right] : \mathbb{P} : \left[\mathbf{d}^* + \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : \mathbf{A} \right]\end{aligned}\quad (6.66)$$

sous réserve bien sûr que le tenseur d'ordre quatre \mathbb{P} soit inversible. Il s'agit maintenant de préciser les expressions de \mathbb{P} et \mathbb{W} ou de manière équivalente celle des coefficients p_{rs} et w_{rs} .

6.3.2 Expression des w_{rs} et des p_{rs}

Le calcul des expressions explicites des w_{rs} ne pose aucune difficulté réelle, car la moyenne sur la cellule élémentaire, du taux de déformation \mathbf{d}^E est donnée par :

$$\langle \mathbf{d}^E \rangle_{\Omega-\omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{v}^E dS - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\omega} \underline{v}^E dS = f \left[\mathbb{S}(e_2) - \mathbb{S}(e_1) \right] : \mathbf{d}^* \quad (6.67)$$

Par conséquent, le tenseur \mathbb{W} s'écrit :

$$\mathbb{W} = \frac{2(1+g)(f+g)}{3f(1-f)} \left[\mathbb{S}(e_2) - \mathbb{S}(e_1) \right] \quad (6.68)$$

A titre indicatif, les w_{rs} non nuls sont :

$$\begin{aligned}w_{21} &= 6 \frac{(1+g)(f+g)}{f(1-f)} (\alpha_1 - \alpha_2) \\ w_{22} &= 6 \frac{(1+g)(f+g)}{f(1-f)} (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) \\ w_{33} = w_{44} &= \frac{1}{3} \frac{(1+g)(f+g)}{f(1-f)} (3\alpha_1 + \beta_1 - 3\alpha_2 - \beta_2) \\ w_{55} = w_{66} &= \frac{2}{3} \frac{(1+g)(f+g)}{f(1-f)} (3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)\end{aligned}\quad (6.69)$$

Notons que tous les w_{rs} sont nuls lorsque $e_1 = e_2$, il s'agit notamment du cas la sphère ou du cylindre creux.

Les expressions des p_{rs} non nuls, obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel Maple, s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} \left[(1+3\alpha_1)(1-\alpha_1) - f(1+3\alpha_2)(1-\alpha_2) \right] \\
 p_{12} = p_{21} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} \left[(1-3\alpha_1)(1-\alpha_1-\beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - f(1-3\alpha_2)(1-\alpha_2-\beta_2) \right] \\
 p_{22} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} \left[(3\alpha_1+3\beta_1-1)(1-\alpha_1-\beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - f(3\alpha_2+3\beta_2-1)(1-\alpha_2-\beta_2) \right] \\
 p_{33} = p_{44} &= \frac{1}{12} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} \left[(1+3\alpha_1+\beta_1)(3-3\alpha_1-\beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - f(1+3\alpha_2+\beta_2)(3-3\alpha_2-\beta_2) \right] \\
 p_{55} = p_{66} &= \frac{1}{3} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} \left[(1-3\alpha_1-2\beta_1)(3\alpha_1+2\beta_1-3) \right. \\
 &\quad \left. - f(1-3\alpha_2-2\beta_2)(3\alpha_2+2\beta_2-3) \right]
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

Notons toutefois que dans ces expressions certains termes dans p_{22} , p_{33} et p_{55} ont été volontairement omis. En fait ces termes sont de manière général faibles. Ils sont nuls dans le cas du cylindre tandis que dans le cas de la sphère la suppression de ces termes est équivalent à poser $\bar{G}(f) = 1$ dans (6.44) (qui rappelons le était justifié en considérant de faibles valeurs de la porosité) et qui continuerait d'être une amélioration du critère de Gurson.

6.3.3 Détermination du critère macroscopique

On se propose maintenant de déterminer l'expression analytique approchée du critère de plasticité macroscopique pour le milieu poreux dont les cavités sont sphéroïdales. Rappelons que le problème général consiste à résoudre (6.27). Similairement au cas de la sphère, il s'agit de transformer ce problème de manière à identifier Σ_A et Σ_B tel que :

$$\Sigma_A = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{A}}; \quad \Sigma_B = \frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \tag{6.71}$$

S'il est possible de réécrire (6.28) et (6.29) sous la forme (6.71), alors le critère de plasticité macroscopique peut être aisément déduit de (6.71) sous la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \tag{6.72}$$

où g est toujours pris conventionnellement égal à 0 dans le cas d'une cavité allongée et défini par (4.78) (dans laquelle χ est donné par (4.87)). Le critère (6.72) a une forme identique au critère présenté au chapitre 4, les différences se trouvant essentiellement dans la définition de Σ_A et Σ_B , qu'il s'agit maintenant de préciser.

Dans le cas d'un sphéroïde quelconque la détermination du critère s'effectue en appliquant la même démarche que dans le cas de la sphère (cf. section (6.2)).

On démontre (voir ci dessous) que l'expression de Σ_B est donnée par :

$$\Sigma_B^2 = \Sigma : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{S}^T(e_2) : \Sigma \quad (6.73)$$

tandis que celle de Σ_A est telle que :

$$\Sigma_A^2 = \frac{3}{2} \Sigma : \left[\mathbb{K} - \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T \right] : \mathbb{R}^* : \left[\mathbb{K} - \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{S}(e_2) \right] : \Sigma \quad (6.74)$$

\mathbb{R}^* est le tenseur d'ordre 4 tel que $\mathbb{R} : \mathbb{R}^* = \mathbb{K}$, où l'on a posé \mathbb{R} le tenseur suivant :

$$\mathbb{R} = \mathbb{K} - \frac{3u_1u_2}{2} \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T \quad (6.75)$$

Démonstration :

Notons tout d'abord que \mathbf{A} s'écrit (cf. équation (6.5)) :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - D_h \mathbb{S}(e_2) : \mathbf{1} - f \mathbb{S}(e_2) : \bar{\mathbf{d}}^* \quad (6.76)$$

si bien que ses dérivées respectivement par rapport à \mathbf{D} et $\bar{\mathbf{d}}^*$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbb{I} - \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{J} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} &= -f \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Par souci de simplicité des écritures, on introduit le tenseur d'ordre deux, \mathbf{B} , défini par :

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{d}}^* + \mathbf{A} : \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} = \bar{\mathbf{d}}^* + \frac{1}{f} D_h \mathbf{1} + \mathbf{A} : \mathbb{W} : \mathbb{P}^{-1} \quad (6.78)$$

de manière à mettre \tilde{B} (cf. équation (6.66)) sous la forme :

$$\tilde{B} = \mathbf{B} : \mathbb{P} : \mathbf{B} \quad (6.79)$$

En tenant compte de (6.76) les dérivées de \mathbf{B} respectivement par rapport à \mathbf{D} et $\bar{\mathbf{d}}^*$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{D}} &= \frac{1}{f} \mathbb{J} + \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{J} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} &= \mathbb{K} - f \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} \end{aligned} \quad (6.80)$$

D'où, en utilisant ces résultats, (6.28) s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} : [\mathbb{I} - \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{J}] + \frac{1}{f \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{P} : \left\{ \mathbb{J} + f \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : [\mathbb{I} - \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{J}] \right\} \quad (6.81)$$

Pour la détermination de Σ_A et Σ_B , il est judicieux de calculer $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2)$ à partir de (6.81), où, plus exactement, la partie déviatorique et hydrostatique du tenseur $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2)$. En tenant compte de $\mathbf{1} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbf{1} = 3$, on a d'une part :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbf{1} = \frac{1}{f \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{P} : \mathbf{1} \quad (6.82)$$

et d'autre part, la partie déviatorique de $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2)$ qui s'écrit, en notant que le tenseur $\mathbb{J} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} = 0$:

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{W}^T : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} \quad (6.83)$$

Il s'agit, pour obtenir la valeur de Σ_B , d'éliminer la dérivée de $\tilde{\Pi}$ par rapport à \mathbf{A} dans la relation précédente. Utilisons pour cela l'équation correspondant à la minimisation de $\tilde{\Pi}$ (6.29) :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} = \frac{1}{f \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{P} : [\mathbb{K} - f \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K}] \quad (6.84)$$

Une combinaison de (6.84) et (6.83) permet d'éliminer la dérivée de $\tilde{\Pi}$ par rapport à \mathbf{A} , si bien que $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K}$ est défini par :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{K} = \frac{1}{f \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{P} : \mathbb{K} \quad (6.85)$$

Connaissant maintenant l'expression de la partie hydrostatique de $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2)$ (cf. relation (6.82)) ainsi que sa partie déviatorique (cf. relation (6.85)), on déduit :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}(e_2) = \frac{1}{f \tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{P} \quad (6.86)$$

Il s'en suit alors que l'expression de Σ_B (6.30) conduit à (6.73) qui est le premier résultat à démontrer.

Pour la détermination de Σ_A , reprenons l'expression (6.81). En notant que $\mathbb{W}^T : \mathbb{K} = \mathbb{W}^T$, on a :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{B}} \mathbf{B} : \mathbb{W}^T \quad (6.87)$$

En remplaçant \mathbf{B} par son expression, déduite de (6.86), on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma} : [\mathbb{K} - f \mathbb{S}(e_2) : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T] = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{A}} \quad (6.88)$$

Faisons maintenant apparaître la dérivée de $\tilde{\Pi}$ par rapport à \tilde{A} (cf. relation (6.66)) :

$$\Sigma : \left[\mathbb{K} - f\mathbb{S}(e_2) : \mathbb{P}^{-1} : \mathbb{W}^T \right] = \frac{2}{3} \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{A}} \mathbf{A} : \mathbb{R} \quad (6.89)$$

où \mathbb{R} est défini par (6.75). On peut vérifier que (6.89) conduit au résultat annoncé (6.74), et achève la démonstration.

Le critère de plasticité macroscopique est donc défini par (6.72), où Σ_A et Σ_B sont définis par les relations (6.73) et (6.74). Nous insisterons sur le fait que le critère obtenu est issu de la solution exacte du problème de minimisation de la fonctionnelle $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$. Mais, l'expression de $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)$ reste néanmoins une valeur approchée de la solution exacte de l'intégration sur la cellule élémentaire.

6.3.4 Expression générale pour une cavité allongée ou aplatie

On souhaite maintenant détailler la forme générale du critère obtenu. Les calculs qui conduisent aux expressions que nous allons présenter sont fastidieux et nous ne les détaillerons pas ici. Néanmoins le lecteur pourra se référer à l'annexe D pour plus de précision. Rappelons que la forme générale est :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (6.90)$$

En considérant, pour Σ , les groupements introduits au chapitre précédent (hormis pour Σ_p qui ici dépend de α_2) :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} (1 - \alpha_2) + \Sigma_{33} \alpha_2; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} - \Sigma_{33} \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4} (\Sigma_{22} - \Sigma_{11})^2 + \Sigma_{12}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{23}^2 + \Sigma_{23}^2} \end{aligned} \quad (6.91)$$

Σ_B , défini par (6.73), peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Sigma_B^2 = \kappa_1 \Sigma_p^2 + \kappa_2 \Sigma_q^2 + \kappa_3 \Sigma_p \Sigma_q + \kappa_4 \Sigma_s^2 + \kappa_5 \Sigma_t^2 \quad (6.92)$$

où les coefficients κ_1 , κ_2 , κ_3 , κ_4 et κ_5 sont définis par :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{9p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_2 &= \frac{9p_{11}(1 - \alpha_2 - \beta_2)^2}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_3 &= \frac{18p_{12}(1 - \alpha_2 - \beta_2)}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; \\ \kappa_4 &= \frac{(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)^2}{4p_{33}}; & \kappa_5 &= \frac{(2\beta_2 + 3\alpha_2 - 1)^2}{p_{55}} \end{aligned} \quad (6.93)$$

avec les p_{rs} donnés par (6.70). Concernant Σ_A (cf. relation (6.74)), celui-ci peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\Sigma_A^2 = \tilde{\Sigma}_{eq}^2 - (1+g)(f+g)\Sigma_B^2 \quad (6.94)$$

où $\tilde{\Sigma}_{eq}$ (qui apparaîtra dans le critère issu des approches d'homogénéisation non linéaire, cf. section (6.4.1)) est défini par :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = (1 + \mu_1)\Sigma_q^2 + \mu_2\Sigma_h^2 + \mu_3\Sigma_h\Sigma_q + 3(1 + \mu_4)\Sigma_s^2 + 3(1 + \mu_5)\Sigma_t^2 \quad (6.95)$$

avec les coefficients μ_i , donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{4f}{3\Upsilon} - f; & \mu_2 &= \frac{3f}{2\Upsilon}(3\tilde{\alpha} + 3\tilde{\beta} - 1); & \mu_3 &= \frac{2f}{\Upsilon}(1 - 3\tilde{\alpha}) \\ \mu_4 &= f\frac{3 - 3\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{1 + 3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}; & \mu_5 &= f\frac{3\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta} - 1}{3 - 3\tilde{\alpha} - 2\tilde{\beta}} \end{aligned} \quad (6.96)$$

Υ est défini par $\Upsilon = 2\tilde{\beta} + 4\tilde{\alpha} - 3\tilde{\alpha}^2 - 1$. Les paramètres $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ s'écrivent :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - f\alpha_2}{1 - f}; \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta_1 - f\beta_2}{1 - f} \quad (6.97)$$

La surface de charge macroscopique (6.90) peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2(1 + g)(g + f) \left[\cosh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - (1 + g)^2 - (g + f)^2 = 0 \quad (6.98)$$

La nouvelle forme du critère macroscopique pour des cavités sphéroïdales fait clairement apparaître un couplage de l'endommagement avec les termes Σ_s et Σ_t qui n'existait pas dans les critères de la littérature [36, 37, 38, 39] et [32, 34]. Considérons le cas particulier de la cavité sphérique, obtenu en posant $e_1 = e_2 \rightarrow 0$; $\tilde{\Sigma}_{eq}$ s'écrit :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \left(1 + \frac{2f}{3}\right) \Sigma_{eq}^2 + \frac{9f}{4} \Sigma_h^2 \quad (6.99)$$

tandis que Σ_B est défini par :

$$\Sigma_B^2 = \frac{9}{4} \Sigma_h^2 + \frac{2}{3} \Sigma_{eq}^2 \quad (6.100)$$

ce qui redonne le critère (6.44) en posant $\bar{G}(f) = 1$ (hypothèse faite dans la section 6.3.2 pour la détermination des coefficients p_{rs}).

6.4 Comparaison aux critères existants

On se propose, dans cette section, d'effectuer une comparaison du nouveau critère macroscopique avec certains des critères de plasticité présentés en première partie du chapitre 4 et avec des résultats numériques issus de la littérature. Seront également proposés des comparaisons avec les bornes d'Hashin-Shtrikman [97] et [99] que l'on se propose de détailler dans la section suivante.

6.4.1 Bornes d'Hashin-Shtrikman [97], [99]

Un borne supérieure du critère de plasticité pour les milieux poreux parfaitement plastiques contenant des cavités sphéroïdales, a été établie par [97]. Basée sur des approches variationnelles [96], cette borne conduit notamment aux critères déjà présentés en première partie de ce chapitre dans le cas sphérique et cylindrique. Une extension de ce critère à la prise compte de la répartition spatiale des cavités, a été proposée par Ponte Castañeda et Suquet [99] en s'inspirant de [98]. Considérant une répartition spatiale de pores sphéroïdales dont l'orientation coïncide avec les axes de la cavité, le critère de plasticité macroscopique, s'écrit :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 - (1 - f)^2 \sigma_0^2 = 0 \quad (6.101)$$

où $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$ est défini par (6.95) avec (6.96) et (6.97). Pour ce critère, e_1 est associé à la forme de la cavité, tandis que l'excentricité e_2 est associé à la répartition spatiale de pores. Les sphéroïdes définissant la forme de cavité pour la première, et donnant la répartition spatiale des cavités pour la seconde, ne sont pas liés par une relation de confocalité. C'est à dire que les excentricités e_1 et e_2 et la porosité f peuvent donc être choisis de manière indépendante.

Pour les applications présentées dans la suite, on considère deux répartitions spatiales de cavités :

- la première répartition spatiale correspond à $e_2 = e_1$, microstructure de type Hashin-Shtrikman,
- la seconde correspondant au cas particulier des sphéroïdes confocaux, c'est à dire qu'à porosité fixée e_2 et e_1 sont liés par (4.8). il s'agit là d'une microstructure particulière de type Ponte-Castañeda et Willis (PCW) [98].

Il est toutefois particulièrement remarquable de noter que, pour des faibles valeurs de Σ_B (ceci correspondant à une faible hétérogénéité du taux de déformation dans la matrice solide), le critère proposé (6.98) coïncide parfaitement avec (6.101) pour une microstructure de type Ponte-Castañeda et Willis et précisée ci-dessus.

6.4.2 Cas de la cavité cylindrique

On s'intéresse maintenant au cas particulier de la cavité cylindrique qui correspond à une cavité allongée avec $e_1 \rightarrow 1$ et $e_2 \rightarrow 1$. D'une part Σ_B est donné par :

$$\Sigma_B^2 = \frac{3}{2}(\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2) + 3\Sigma_{12}^2 + 3\Sigma_{13}^2 + 3\Sigma_{23}^2 \quad (6.102)$$

tandis que $\tilde{\Sigma}_{eq}$ est donné par :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \Sigma_{eq}^2 + f \left[\frac{3}{2}(\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2) + 3\Sigma_{12}^2 + 3\Sigma_{13}^2 + 3\Sigma_{23}^2 \right] \quad (6.103)$$

Le critère de plasticité macroscopique s'écrit donc, dans le cas de la cavité cylindrique :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2}(\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2) + 3\Sigma_{12}^2 + 3\Sigma_{13}^2 + 3\Sigma_{23}^2} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (6.104)$$

On a donc équivalence avec le critère de Gurson (4.2) lorsque le chargement est purement axisymétrique ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ et $\Sigma_{12} = \Sigma_{13} = \Sigma_{23} = 0$). Il s'agit d'ailleurs, dans ce cas, de la solution exacte.

Dans le cas d'un milieu parfaitement plastique contenant des cavités cylindriques la borne d'Hashin-Shtrikman fournit l'estimation suivante pour le critère macroscopique [116] :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{3f}{2} \frac{1}{\sigma_0^2} \{ \Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 + 2\Sigma_{12}^2 + 2\Sigma_{13}^2 + 2\Sigma_{23}^2 \} - (1-f)^2 = 0 \quad (6.105)$$

On notera que le critère elliptique (6.35), déduit pour une faible hétérogénéité, coïncide avec (6.105).

6.4.3 Critère macroscopique dans le cas d'une cavité allongée

On s'intéresse dans cette section au cas d'une cavité allongée avec un chargement macroscopique axisymétrique :

$$\Sigma_p = \Sigma_{11}(1 - \alpha_2) + \Sigma_{33}\alpha_2; \quad \Sigma_q = \Sigma_{11} - \Sigma_{33}; \quad \Sigma_s = \Sigma_t = 0 \quad (6.106)$$

Sur la figure 6.6 est présentée une comparaison du critère proposé (6.98) avec ceux de Gologanu et al. [36] (à deux champs de Lee et Mear) et [38] (à trois champs de Lee et Mear) pour diverses valeurs de la porosité et pour un rapport d'aspect fixé, égal à $a_1/b_1 = 5$. On notera que le critère fournit, pour de faibles valeurs de la porosité, une surface de charge à l'intérieure de celle prédite par les deux autres. Sur la figure 6.7 est comparé le critère (6.98) avec le critère (6.101) pour les deux répartitions spatiales précédemment décrites (Hashin-Shtrikman, Ponte-Castañeda et Willis). De façon tout à fait remarquable, la borne supérieure de type Ponte-Castañeda et Willis (répartition spatiale avec sphéroïdes confocaux) est en accord avec le critère proposé (6.98), et ce pour de faibles valeurs du taux de triaxialité, ce qui est attendu. En revanche, pour des triaxialités moyennes ou élevées, le nouveau critère fournit une surface se trouvant à l'intérieur de cette borne.

On propose également sur la figure 6.8 des comparaisons avec des simulations numériques issues de [38]. En effet, cet auteur a proposé une évaluation du critère de plasticité macroscopique en considérant un grand nombre de champs appartenant à la famille proposée par Lee et Mear (décrite en annexe B). On note un excellent accord du critère proposé avec les résultats numériques, pour de fortes valeurs de la porosité. On observe toutefois que le critère proposé fournit, pour les faibles porosités, une surface à l'intérieure de celle donnée par le critère obtenu numériquement par [38] à partir des 50 champs de Lee et Mear. Ce résultat est à première vue surprenant dans le cas d'un chargement axisymétrique puisque, rappelons-le, les champs de type Eshelby, v_1 et v_2 sont contenus dans la famille de champ plus large de Lee et Mear. Ceci peut s'expliquer par les différences entre les conditions de taux de déformation homogène au bord considérées par [38] et les relations de moyenne (6.4) que nous avons adoptées.

6.4.4 Cas de la cavité aplatie

Sur les figures 6.9 et 6.10 sont respectivement proposées des comparaisons avec le critère de Gologanu [37] et [38] et les bornes d'Hashin-Shtrikman toujours dans le cas

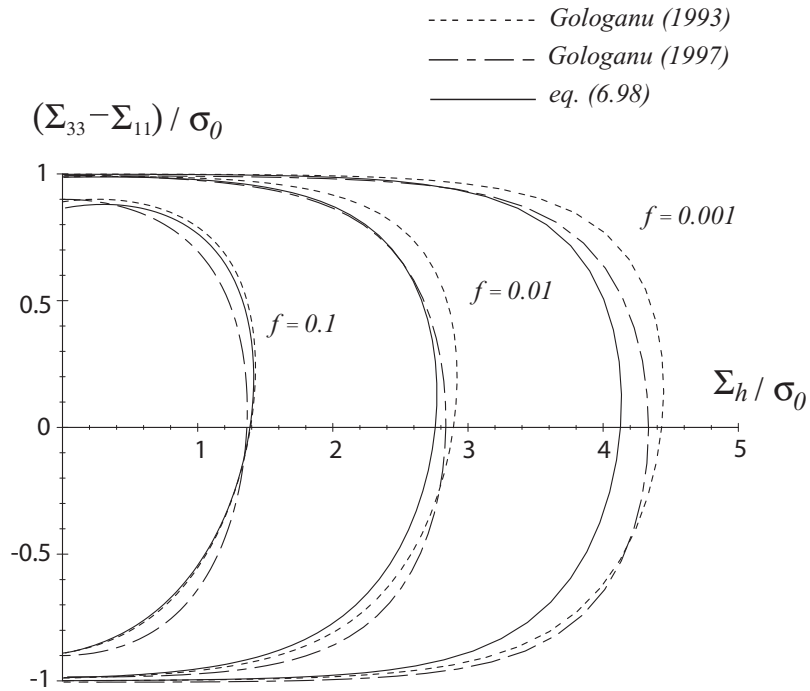


FIG. 6.6 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité allongée. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les critères de Gologanu et al. [36] et [38].

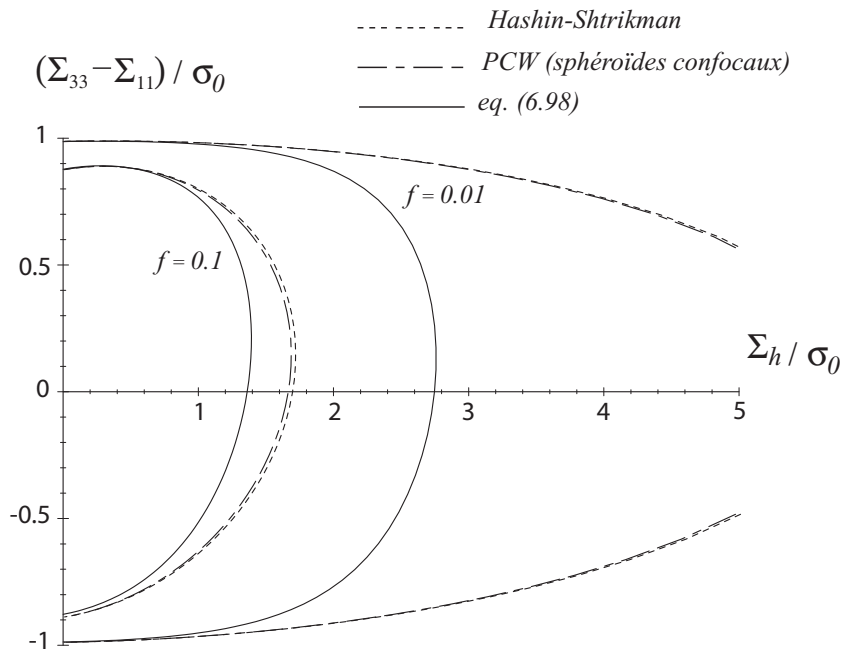


FIG. 6.7 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité allongée. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les bornes supérieures d'Hashin [97] et [99].

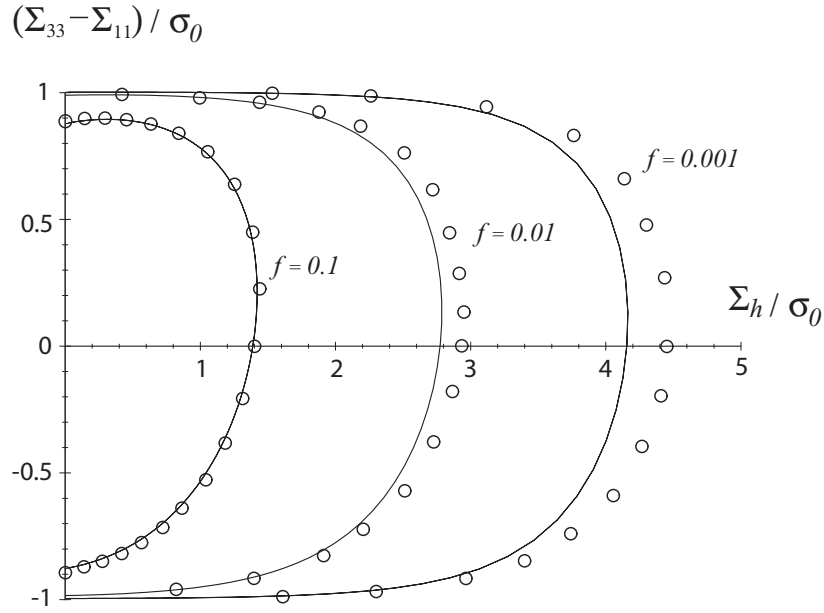


FIG. 6.8 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité allongée. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les résultats numériques de Gologanu et al. [38].

d'un chargement axisymétrique. Des remarques similaires à celles effectuées dans le cas des cavités allongées peuvent être formulées pour les comparaisons avec les bornes d'Hashin-Shtrikman et de Ponte-Castañeda et Willis. Toutefois, on note que lorsque $\Sigma_{33} - \Sigma_{11} < 0$, le critère de Gologanu [38] (à trois champs) donne une estimation légèrement plus à l'intérieur de la surface de charge macroscopique prédite par le nouveau critère. Une étude minutieuse laisse penser que ceci est très probablement dû au champ associé au coefficient B_{21} qui n'est pas présent dans le champ de type Eshelby que nous avons considéré. Notons toutefois que le champ \underline{v}_2 n'a pas été pris en compte par Gologanu [38]. Bien que présent dans la famille de champs de Lee and Mear, celui-ci a été écarté, rappelons le, de manière à retrouver le critère de Gurson dans le cas d'une cavité sphérique.

Sur la figure 6.11, sont proposées des comparaisons du critère (6.98) avec les résultats numériques obtenus par Gologanu [38] (à l'aide de 50 champs de Lee et Mear). On observe, encore une fois, une bonne correspondance entre le critère (6.98) et les résultats numériques pour de fortes valeurs de la porosité. Néanmoins à plus faible porosité, le critère (6.98) semble surestimer légèrement la surface de charge macroscopique prédite numériquement. Notons à nouveau que ces différences infimes sont probablement liées au champ associé au coefficient B_{21} .

6.4.5 Cas des fissures circulaires ("penny-shaped")

Un cas intéressant, qui met bien en évidence les améliorations apportées aux critères de plasticité existants, est celui où la cavité est une fissure circulaire, c'est à dire un sphéroïde aplati, dont le rapport d'aspect tend vers 0. Ceci se traduit par une fraction volumique

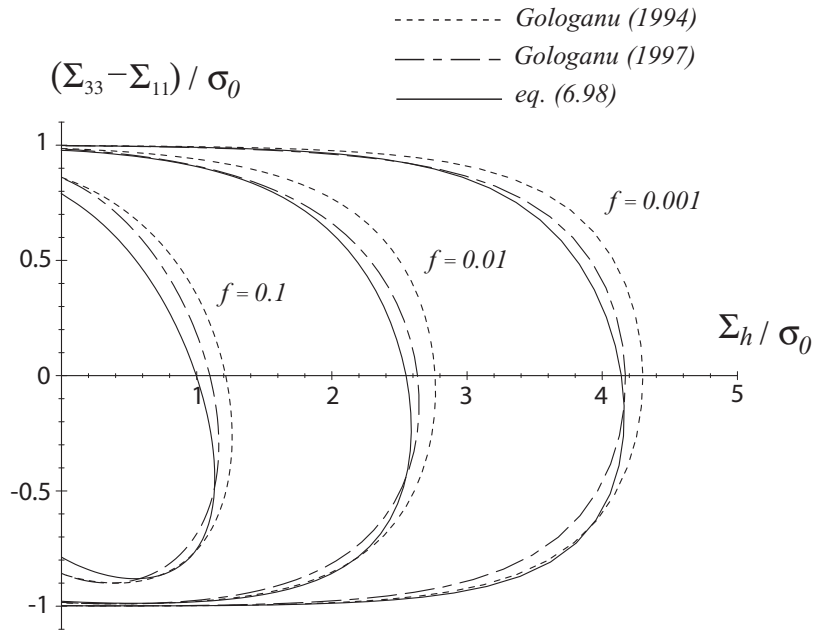


FIG. 6.9 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité aplatie. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les critères de Gologanu et al. [37] et [38].

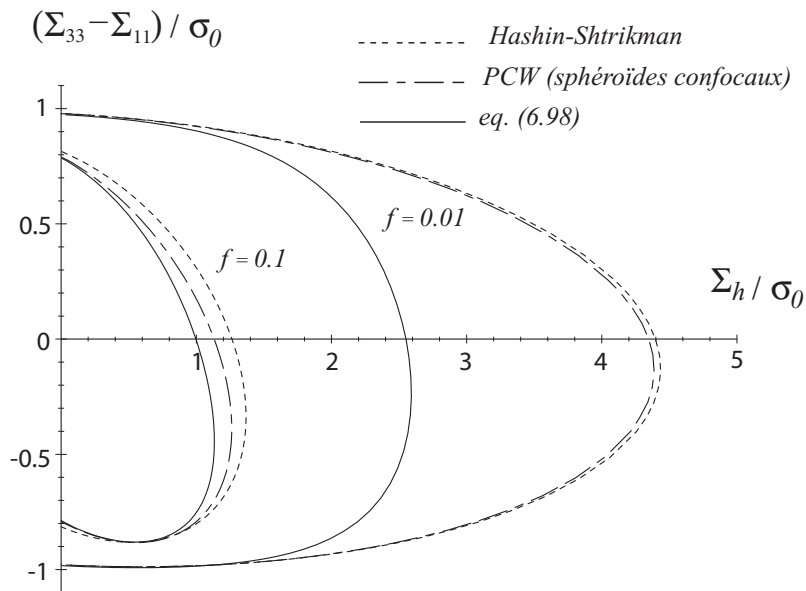


FIG. 6.10 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité aplatie. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les bornes supérieures d'Hashin [97] et [99].

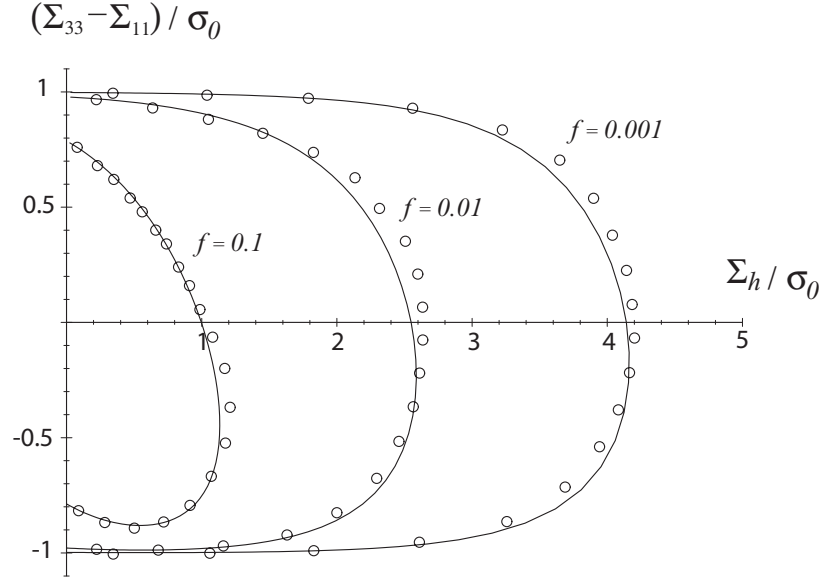


FIG. 6.11 – Critère de plasticité macroscopique pour une cavité aplatie. $b_1/a_1 = 5$. Comparaison avec les résultats numériques de Gologanu et al. [38].

$f \rightarrow 0$ et une excentricité $e_1 \rightarrow 0$. On vérifie alors que le terme $\tilde{\Sigma}_{eq}$, qui intervient dans l'expression du critère (6.98), s'écrit :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \Sigma_{eq}^2 + 3d \frac{\Sigma_{33}^2}{\pi + 2(\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} + 12d \frac{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2}{3\pi + 2(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)d} \quad (6.107)$$

dans laquelle $d = \frac{4\pi b^3}{3|\Omega|}$ représente le paramètre densité de fissures initialement introduit par Budiansky et O'Connell [12] pour caractériser les milieux élastiques fissurés. La présence de Σ_{33} , Σ_{13} et Σ_{23} (dans les termes impliquant d) met en évidence le fait que la fissure est bien sollicitée dans les trois modes classiques de la mécanique de la rupture. C'est un résultat qu'il n'est pas possible d'exhiber avec les critères présentés au chapitre 4, et qui se trouve être une des retombées du champ test de type Eshelby adopté dans la présente étude.

Pour le milieu plastique fissuré, le critère (6.101), avec répartition spatiale associée à des sphéroïdes confocaux, prend la forme suivante [99] :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 + 3d \frac{\Sigma_{33}^2}{\pi + (\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} + 12d \frac{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2}{3\pi + 2(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)d} - \sigma_0^2 = 0 \quad (6.108)$$

Soulignons que pour une microstructure de type Hashin-Shtrikman (correspondant à $e_2 = 1$), le critère (6.101) s'écrit :

$$\Sigma_{eq}^2 + \frac{3d}{\pi} \Sigma_{33}^2 + \frac{4d}{\pi} (\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2) - \sigma_0^2 = 0 \quad (6.109)$$

Quant au critère proposé (6.98), il est défini par :

$$\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\chi^2}(\chi + d)d \left[\cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) - 1 - \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - 1 = 0 \quad (6.110)$$

où $\tilde{\Sigma}_{eq}$ est donné par (6.107). Σ_B est défini par (6.92) dans lequel les p_{rs} , définis par (6.70) s'écrivent pour une fissure :

$$\begin{aligned} p_{11} &= -3\frac{\chi + d}{\chi^2} \left[\pi + d(1 + 3\alpha_2)(1 - \alpha_2) \right] \\ p_{12} = p_{21} &= -3\frac{\chi + d}{\chi^2} \left[\pi + d(1 - 3\alpha_2)(1 - \alpha_2 - \beta_2) \right] \\ p_{22} &= 3\frac{\chi + d}{\chi^2} \left[\pi - d(3\alpha_2 + 3\beta_2 - 1)(1 - \alpha_2 - \beta_2) \right] \\ p_{33} = p_{44} &= \frac{1}{12}\frac{\chi + d}{\chi^2} \left[6\pi - d(1 + 3\alpha_2 + \beta_2)(3 - 3\alpha_2 - \beta_2) \right] \\ p_{55} = p_{66} &= \frac{1}{3}\frac{\chi + d}{\chi^2} \left[3\pi - d(1 - 3\alpha_2 - 2\beta_2)(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3) \right] \end{aligned} \quad (6.111)$$

Sur les figures 6.12 et 6.13, sont proposées des comparaisons des différents critères du milieu fissuré, dans le cas d'un chargement axisymétrique, avec les critères de Gologanu [37] et [38] et les bornes d'Hashin-Shtrikman [97] et Ponte-Castañeda et Willis [99]. On observe qu'à forte valeur de la densité de fissure le critère coïncide avec celui de Gologanu et al. [38] (et d'ailleurs également avec la borne de type Ponte Castañeda et Willis, correspondant à une répartition spatiale de cavité associée à des sphéroïdes confocaux). On observe que le critère proposé fournit une estimation beaucoup plus resserrée à faible valeur de d . Il semble donc que, dans le cas de la fissure, le champ \underline{v}_2 , qui n'a pas été pris en compte par Gologanu et al. [39], joue un rôle important sur la surface de charge macroscopique. Sur la figure 6.14 est comparé le nouveau critère (6.98) avec les résultats numériques obtenus par Gologanu [38]. On observe que le critère fournit des estimations plus à l'intérieur que celles obtenues avec les 50 champs de Lee et Mear, à faible valeur de d . Pour des densités de fissures plus élevées, on note un bon accord du critère avec les résultats numériques. Ces observations méritent, pour être complètes et afin de valider le nouveau critère, d'autres comparaisons avec des simulations numériques par éléments finis.

6.5 Conclusion

De nouveaux développements ont été proposés dans ce chapitre pour la formulation d'un critère macroscopique de plasticité pour les milieux poreux, à cavité sphéroïdale. Ces développements ont été menés dans le cadre de l'approche classique d'analyse limite d'un sphéroïde creux, tels que déjà effectués par Gologanu et al. [36, 37, 38, 39] et Gârãjeu et al. [32, 34]. L'originalité de l'étude présentée dans ce chapitre, réside dans l'utilisation des champs test de type Eshelby que nous avons introduit puis appliqué dans le chapitre 5 pour la détermination de la loi de croissance d'une cavité sphéroïdale en milieu infini

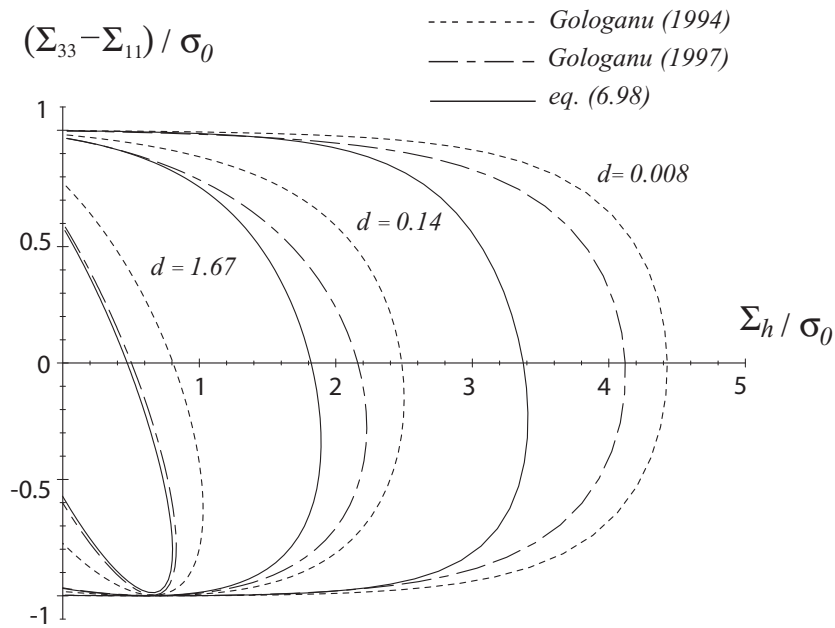


FIG. 6.12 – Critère de plasticité macroscopique pour les fissures. Comparaison avec les critères de Gologanu et al. [37] et [38].

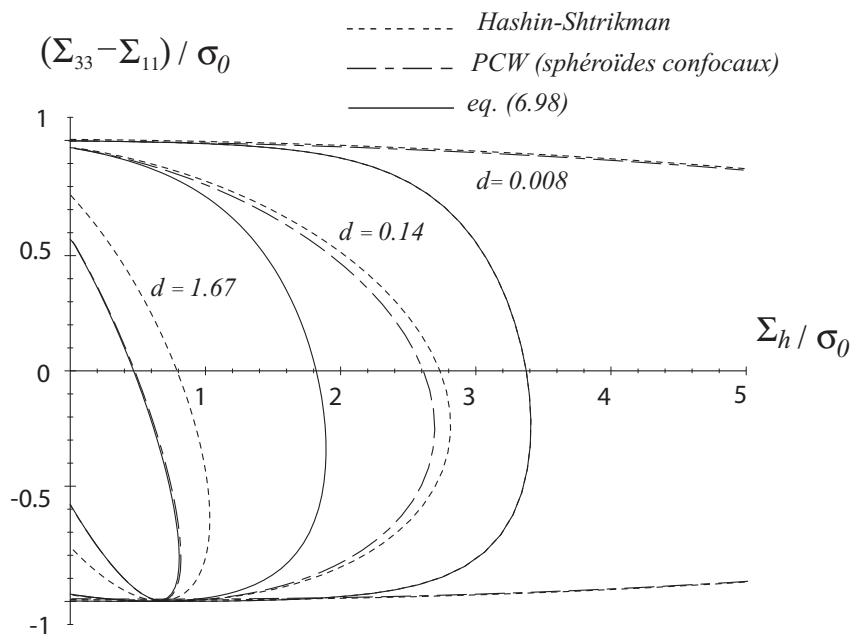


FIG. 6.13 – Critère de plasticité macroscopique pour les fissures. Comparaison avec les bornes supérieures d'Hashin [97] et [99].

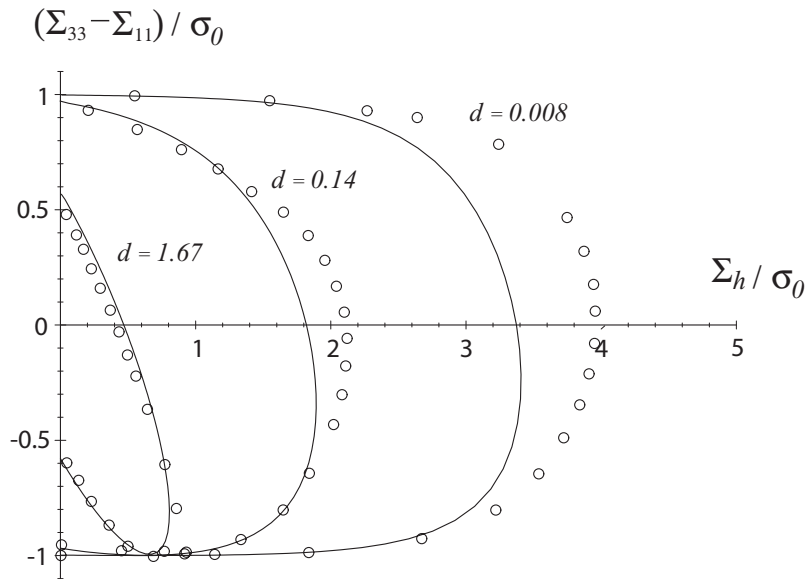


FIG. 6.14 – Critère de plasticité macroscopique pour les fissures. Comparaison avec les résultats numériques de Gologanu et al. [38].

parfaitement plastique.

La considération de ces nouveaux types de champs nous a amené à abandonner les conditions usuelles de taux de déformation homogène au bord au profit des relations de moyenne $\mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle_{\Omega}$ entre le taux de déformation microscopique, \mathbf{d} , et le taux de déformation macroscopique, \mathbf{D} . L'intégration de la dissipation macroscopique a été effectuée en suivant la procédure proposée au quatrième chapitre. Toutefois la présence de cinq paramètres "inconnus" a constitué une difficulté supplémentaire. Une résolution complète du problème de minimisation conduisant à une expression analytique, explicite, du critère de plasticité macroscopique, a alors été effectuée.

L'expression de la surface de charge obtenue met en évidence un certain nombre d'amélioration des critères existants :

- Dans le cas de la sphère le critère proposé (6.90) coïncide avec la borne d'Hashin à faible taux de triaxialité, et avec celui de Gurson (qui est également une borne) à fort taux de triaxialité. L'analyse faite spécifiquement dans le cas de la sphère en première partie de ce chapitre, a montrée que le champ de type Eshelby adopté pour la détermination du critère conduit à un critère qui fournit une estimation de très bonne qualité pour de fortes valeur de la porosité.
- Le critère (6.90) permet, dans le cas d'une cavité cylindrique sous chargement axi-symétrique de retrouver le critère de Gurson (qui est la solution exacte pour ce chargement).
- De manière plus générale, c'est à dire dans le cas d'un sphéroïde, le nouveau critère coïncide avec la borne d'Hashin-Shtrikman correspondant à une répartition spatiale de cavités associée à des sphéroïdes confocaux, pour de faibles valeurs du taux de triaxialité. Les bonnes prédictions du critère pour les autres situations résultent pro-

blement d'une meilleure gestion de l'hétérogénéité du taux de déformation dans l'approche développée dans ce chapitre. Le nouveau critère met également en évidence un couplage entre l'endommagement et les termes Σ_s et Σ_t qui n'apparaissait pas dans les critères non elliptiques existants. Ce couplage apparaissait néanmoins dans le critère issu de les bornes non linéaires d'Hashin-Shtrikman [97] et de type Ponte Castañeda et Willis [99].

- Enfin une expression explicite du critère macroscopique pour un milieu parfaitement plastique contenant des fissures circulaires (penny-shaped) a été présentée en dernière partie de chapitre. Les améliorations apportées, par l'utilisation du champ de type Eshelby sont particulièrement importantes dans ce cas.

A nouveau, malgré ces bonnes performances, le nouveau critère devra être confronté, dans la mesure du possible, à d'autres résultats numériques issus par exemple de calculs par éléments finis.

Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire a été consacrée à la modélisation micromécanique des phénomènes d'endommagement et de fatigue à grand nombre de cycles des métaux ductiles. Elle a comporté deux parties, la première traitant de la fatigue proprement dite, l'autre des critères de plasticité des milieux poreux ductiles.

L'objectif visé au départ était de formuler un critère macroscopique de fatigue polycyclique prenant en compte les mécanismes d'endommagement à l'échelle des grains. Cet objectif a été en grande partie atteint, grâce aux modélisations présentées dans la première partie du mémoire. Nous disposons maintenant d'un cadre d'analyse et de prédiction du domaine d'endurance illimitée, physiquement fondé et mathématiquement cohérent. Ce cadre théorique prolonge les travaux de Dang Van [20] et de Papadopoulos [87] en incorporant simultanément l'endommagement et la microplasticité cristalline des métaux dans la formulation du critère de fatigue. Le travail réalisé et présenté dans cette première partie de la thèse a permis de mettre en place deux niveaux de modélisations qui se différencient par le fait que l'endommagement et la plasticité sont couplés ou non.

S'agissant du modèle non couplé, dans lequel la croissance des cavités n'affecte pas la plasticité, il a d'abord permis d'apporter une justification micromécanique à la dépendance linéaire du critère vis à vis de la pression hydrostatique, postulée par Dang Van [20]. Il rend également compte d'un certain nombre d'observations expérimentales dont l'indépendance de la limite de fatigue par rapport à une cission moyenne. Compte tenu de son indépendance de la pression alternée, le critère non couplé s'est révélé incapable de prédire les résultats en flexion-torsion alternée.

C'est ainsi que nous avons été amené à développer au chapitre 3 une formulation du critère de fatigue dans laquelle la plasticité et l'endommagement sont couplés. Ce travail d'élaboration du modèle couplé a été complété par différents développements dont, en particulier, ceux portant sur la prise en compte des lois d'écrouissage isotrope et cinématique dont l'ensemble des paramètres a été explicité; ceci a grandement simplifié la mise en oeuvre numérique du modèle de fatigue pour les trajets macroscopiques affines, ces derniers ayant permis de démontrer l'effet de la pression hydrostatique alternée. Un certain nombre de comparaisons entre les prédictions du critère basé sur le modèle couplé et des données expérimentales de la littérature ont permis de confirmer les bonnes capacités prédictives du critère proposé. Cependant, en raison de certaines de ses limitations, dont en particulier l'incapacité du modèle couplé à prévoir correctement le domaine d'endurance illimitée sous sollicitations déphasées¹⁰, des possibilités d'améliorations ont été

¹⁰Un autre aspect intéressant concerne les chargements à amplitude variable, un cadre pour l'étude de ce type de trajet a été fourni par [79], (voir également [80])

envisagées. Elles pourront, par exemple, concerner la prise en compte de plusieurs grains d'orientation diverse, ou porter sur la considération de géométrie de cavités plus réalistes que la forme sphérique adoptée dans le modèle de fatigue présenté.

Les observations qui viennent d'être rappelées ont motivé les travaux de modélisation réalisés dans la seconde partie de la thèse sur les effets de forme de cavités en plasticité de métaux poreux ductiles. Les développements effectués sont de deux natures :

- La première a consisté à étendre au contexte de la plasticité anisotrope (critère de Hill) et pour des chargements mécaniques arbitraires, le critère proposé par Gologanu et al. [36] et [37]. Pour établir ces nouveaux résultats, nous avons considéré le même champ que dans [36] et [37]. Mais, en raison de l'anisotropie plastique, nous avons été amené à proposer une nouvelle procédure d'intégration de la dissipation microscopique, suffisamment générale pour permettre de traiter de façon unifiée le cas d'une cavité allongée et celui d'une cavité aplatie. Cette procédure a été accompagnée d'un certain nombre d'approximations nécessaires pour l'obtention d'une expression analytique approchée de la dissipation macroscopique et donc du critère. Dans le cas particulier d'une matrice isotrope, les résultats obtenus sont en très bon accord avec les critères proposés par [36] et [37] et, par voie de conséquence, avec ceux de Gurson [47] correspondant à une cavité sphérique et à une cavité cylindrique. S'agissant des milieux anisotropes plastiques (critère quadratique de Hill), l'importance de l'anisotropie de la matrice a été démontrée. Le critère général établi permet de retrouver les résultats existants pour les cas spécifiques d'une cavité sphérique (cf. [7]) et d'une cavité cylindrique [62] dans une matrice obéissant au critère de Hill. Une première étape de validation de l'expression générale du critère approché a été réalisée en confrontant celui-ci aux résultats numériques (sans approximation) correspondant au champ test considéré. Il est néanmoins apparu que le critère doit être amélioré sur plusieurs points dont le plus crucial sera probablement la considération d'autres champs tests plus pertinents au regard de l'anisotropie plastique de la matrice. Une piste pourrait consister à utiliser des champs de type Eshelby dans le contexte anisotrope [119], [44], [45]. Des validations sur la base de calculs numériques par éléments finis sur une cellule seraient également les bienvenues.
- Le second type de développements réalisé fait écho aux conclusions qui viennent d'être précisées. Il a consisté à proposer un certain nombre d'améliorations tant qualitative que quantitative à divers critères de plasticité macroscopiques existants, en considérant, dans l'approche par analyse limite, de nouveaux champs tests inspirés de la solution au problème d'inclusion inhomogène d'Eshelby. Dans ces développements, la matrice solide est supposée isotrope (von Mises). La richesse de ce type de champ a été d'abord analysée au chapitre 5 dans le contexte d'une cavité sphéroïdale en milieu plastique infini. Les lois de croissance obtenues généralisent, dans le cas d'une cavité sphérique, celle de Rice et Tracey [104] ; ils conduisent également à des résultats nouveaux dans le cas des cavités sphéroïdales. La démonstration de l'intérêt de considérer les champs de type Eshelby est apparue plus nette lors de l'élaboration de critères macroscopiques de plasticité des milieux poreux. Un certain nombre de difficultés concernant, soit les conditions aux limites à considérer, soit

la minimisation nécessaire pour la détermination de la dissipation macroscopique, ont pu être surmontées, ce qui a permis de déboucher sur une expression analytique générale du critère approché. De manière assez générale, le nouveau critère semble améliorer les prédictions des critères de plasticité de milieux poreux existants tels que ceux de Gurson [47] (cas de la cavité sphérique ou cylindrique pour de faible taux de triaxialité), ceux de Gologanu et al. (cavités sphéroïdales) ou ceux issus des méthodes d'homogénéisation non linéaires [99]. A ce propos, on pourra se reporter aux nombreuses comparaisons présentées dans le chapitre 6. En particulier, de bonnes performances ont été notamment observées dans le cas des fissures circulaires ; c'est un résultat assez important pour les applications ultérieures dans le domaine de la fatigue polycyclique.

Naturellement, les modélisations présentées ainsi que les résultats obtenus ouvrent de nombreuses perspectives parmi lesquelles, nous pourrions mentionner les deux suivantes :

- Le développement d'un modèle d'endommagement ductile, avec prise en compte des effets d'écrouissage. Pour cela, on s'appuiera, non seulement sur les critères établis dans la présente étude mais également, sur les travaux qui nous ont servi de base pour la construction du modèle présenté au chapitre 3. La numérisation qui devra accompagner ce type de développement constitue à elle seule une voie de développement qui devrait permettre de confirmer ou non les grandes capacités prédictives des critères proposés .
- L'extension du critère de fatigue proposé au chapitre 3 par l'incorporation des nouveaux modèles couplant plasticité et endommagement anisotrope dans le cadre multi-échelle de fatigue polycyclique développé. Il faudra ensuite poursuivre la validation des critères de fatigue polycyclique qui seront déduits par confrontation avec un grand nombre de données expérimentales.

Bibliographie

- [1] **A. Abdul-Latif, K. Saanouni.**
Damaged anelastic behavior of FCC polycrystalline metals with micromechanical approach. Int. J. of Damage mech., 3 : 237-259, 1994.
- [2] **J. Ahmed and A. J. Wilkinson and S. G. Roberts.**
Study of dislocation structures near fatigue cracks using electron channelling contrast imaging technique (ECCI). *J. of Micros.*, 195(3) : 197-203, 1999.
- [3] **J. Ahmed and A. J. Wilkinson and S. G. Roberts.**
Electron channelling contrast imaging characterization of dislocation structures associated with extrusion and intrusion systems and fatigue cracks in copper single crystals. *Phil. Mag. A*, 81(6) : 1473-1488, 2001.
- [4] **J.F. Barthélémy, L. Dormieux.**
Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *C. R. Mécanique*, 331 : 271-276, 2003.
- [5] **J.F. Barthelemy.**
Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux. Thèse de doctorat, ENPC, 2005.
- [6] **A.A. Benzerga.**
Rupture ductile des tôles anisotropes. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [7] **A.A. Benzerga, J. Besson.**
Plastic potentials for anisotropic porous solids. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20 : 397-434, 2001.
- [8] **A.A. Benzerga, J. Besson, A.Pineau.**
Anisotropic ductile fracture, Part I : experiments. *Acta Materialia*, 152 : 4623-4638, 2004.
- [9] **M. Berveiller, A.Zaoui.**
An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 26 : 325-344, 1979.
- [10] **M. Bornert and T. Bretheau and P. Gilormini.**
Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1, matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques, Hermès Sciences, 2001.
- [11] **M. Bornert and T. Bretheau and P. Gilormini.**
Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1, Comportements non linéaires et problèmes ouverts, Hermès Sciences, 2001.

- [12] **B. Budiansky, R.J. O'connell.**
Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solid. Struct.*, 12(2) : 81-97, 1976.
- [13] **H. D. Bui.**
Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec écrouissage et relations de comportement élastoplastique des métaux cubiques, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1969.
- [14] **F. Cano, A. Constantinescu, H. Maitournam.**
Critère de fatigue polycyclique pour des matériaux anisotropes : application aux monocristaux. *C. R. Mécanique*, 332 : 115-121, 2004.
- [15] **J.L. Chaboche, P.M. Lesne.**
A non-linear continuous fatigue damage model. *Fatigue Fract. Engrg. Mater. struct.* 11(1) : 1-17, 1988.
- [16] **A. S. Cheng and C. Laird.**
Fatigue life behavior of copper single crystals. Part I : Observations of crack nucleation. *Fat. Engrg. Mat. Struct.*, 4 : 331-341, 1981.
- [17] **W.Y. Chien, J.Pan, S.C. Tang.**
Modified anisotropic Gurson yield criterion for porous ductile sheet metals. *J. Engrg. Mat. Tech.* 123 : 409-413, 2001.
- [18] **B. Crossland.**
Effects of large hydrostatic pressures on torsionnal fatigue strenght of an alloy steel. *Proc. Int. Conf. Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London*, 138-149, 1956.
- [19] **P. Cugy, A. Galtier.**
Microplasticity and temperature increase in low carbon steels. *Proceedings of the 8th International Fatigue Congress, Stockholm, Ed. A. F. Blom*, 2002.
- [20] **K. Dang Van.**
Sur la résistance à la fatigue des métaux. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1973.
- [21] **Dang Van, K..**
Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach. High-Cycle fatigue in the context of mechanical design, CISM courses and lectures n. 392. ed. K. Dang-Van and I.V. Papadopoulos. Springer-Verlag, 1691-1710, 1999.
- [22] **M. Darrieulat, F., Montheillet.**
Extension of the Hill (1948) yield criterion to the case of prismatic monoclinic symmetry. *Int. J. Mech. Science*, 38 : 1273-1284, 1996.
- [23] **L. Dormieux, D. Kondo, F.-J. Ulm.**
Microporomechanics, Wiley, 2006.
- [24] **J.D. Eshelby.**
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 241. 376.
- [25] **U. Essmann, H. Mughrabi.**
Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities. *Phil. Mag. A*, 731-756, 1979.

-
- [26] **U. Essmann, U. Gosele, H. Mughrabi.**
A model of extrusions and intrusions in fatigued metals. I. Point-defects production and the growth of extrusions. *Phil. Mag. A*, 44(2) : 405-426, 1981.
- [27] **J.A. Ewing, J.C. Humfrey.**
The fracture of metals under rapid alterations of stress. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lon.*, A200 : 241-50, 1903.
- [28] **W. N. Findley**
A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial loading or bending. *Journal of Engineering for Industry*, 59 : 301-306, 1959.
- [29] **L. Flacelière.**
Contribution à la modélisation du dommage en fatigue multiaxiale d'un acier C36 - Confrontation à l'expérience. *Thèse de doctorat de l'université de Poitiers*, 2004.
- [30] **P.J.E. Forsyth.**
The physical basis of metal fatigue, Blackie & Son, Ltd., 1969.
- [31] **P. Franciosi, M. Berveiller, A. Zaoui**
Latent Hardening in copper and aluminium single crystals. *Acta met.* 28 : 273-283, 1980.
- [32] **M. Gārājeu.**
Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort. Thèse de doctorat de l'Université de Marseille, 1995.
- [33] **M. Garajeu, P. Suquet.**
Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 : 873-902, 1997.
- [34] **M. Garajeu, J.C. Michel, P. Suquet.**
A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183 : 223-246, 2000.
- [35] **H. Gerber.**
Bestimmung des zulässigen spannungen in eisen-konstruktionen. *Zeit. Bayer. Architekten Ing.-Vereins*, 6 : 101-110, 1874.
- [36] **M. Gologanu, J.B. Leblond.**
Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11) : 1723-1754, 1993.
- [37] **M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, J. Devaux.**
Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 116 : 290-297, 1994.
- [38] **M. Gologanu.**
Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, 1997.

- [39] **M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin and J. Devaux.**
Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. *Continuum Micro-mechanics*, ed. P. Suquet, Springer Verlag, 1997.
- [40] **J. Goodman.**
Mechanics applied to engineering. Longmans Green, London, 1899.
- [41] **H. J. Gough.**
The fatigue of metals. Scott, Greenwood and Son, London , 1924.
- [42] **H.J. Gough, H.V. Pollard.**
The strength of metals under combined alternating stress. *Proc. Inst. Mech. Engrg.*, 131 : 3-18, 1935.
- [43] **J.C. Grosskreutz, H. Mughrabi.**
Description of the work-hardened structure at low temperature in cyclic deformation. Constitutive equation in Plasticity, ed. A.S. Argon. Cambridge, Mass. MIT, 251-236, 1975.
- [44] **C. Gruescu, V. Monchiet, D. Kondo.**
Macroscopic properties of an orthotropic elastic medium containing arbitrarily oriented cracks : application to damage. *Studia Geotechnica and Mechanica*, Sous presse, 2005.
- [45] **C. Gruescu, V. Monchiet, D. Kondo.**
Eshelby tensor for a crack in an orthotropic medium. *C.R. Mécanique*. 333(6) : 467-473, 2005.
- [46] **A. L. Gurson.**
Plastic flow and fracture behavior of ductile metals incorporating void nucleation, growth and interaction. Thèse de doctorat, Brown University, 1975.
- [47] **A. L. Gurson.**
Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I- yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mater. Technol.*, 99 : 2-15, 1977.
- [48] **R. Hill.**
A theory of yielding and plastic flow of anisotropic solids. *Proc. Roy. Soc. London*, A 193 : 281-297, 1948.
- [49] **Y. Huang.**
Accurate dilatation rate for spherical voids in triaxial stress fields. *J. Appl. Mech.* 58 : 1084-1086, 1991.
- [50] **M. Kachanov, B. Shafiro, I. Tsukrov.**
Hanbook of elasticity solutions. Kluwer academic publisher, 2003.
- [51] **E. Kröner.**
Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metall.*, 99 : 155-161, 1961.
- [52] **J.W. Kysar, Y.X. Gan, G. Mendez-Arzuza.**
Cylindrical void in a rigid-ideally plastic single crystal. Part I : Anisotropic slip line theory solution for face-centered cubic crystals. *Int. J. of Plasticity*, 21 : 1481-1520, 2005.

-
- [53] **J.W. Kysar, Y.X. Gan, T.L. Morse.**
Cylindrical void in a rigid-ideally plastic single crystal II : Experiments and simulations. *Int. J. of Plasticity*, 22 : 39-72, 2006.
- [54] **Y.X. Gan, J.W. Kysar.**
Cylindrical void in a rigid-ideally plastic single crystal III : Hexagonal close-packed crystal. *Int. J. of Plasticity*, 2006.
- [55] **C. Laird.**
The fatigue limits of metals. *Mat. Sci. Engrg.*, 22 : 231-236, 1976.
- [56] **T. H. Lin.**
Analysis of elastic and plastic strains of a FCC crystal. *J. Mech. Phys. Solids*, 5 : 143, 1957.
- [57] **J. B. Leblond and G. Perrin and J. Devaux.**
An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 14(4) : 499-527, 1995.
- [58] **J.B. Leblond.**
Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermes Science, 2003.
- [59] **B.I. Lee, M.E. Mear,** Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 : 1805-1837, 1992.
- [60] **J. Lemaitre.**
A continuum damage mechanics model for ductile fracture. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 107 : 83-89, 1985.
- [61] **J. Lemaitre, J.P. Sermage, R. Desmorat.**
A two scale damage concept applied to fatigue. *Int. J. Fracture*, 97 : 67-81, 1999.
- [62] **K. Liao, J. Pan, S. Tang,** Approximate yield criteria for anisotropic porous ductile sheet metals. *Mech. Materials*, 26 : 213-226, 1997.
- [63] **K. Liao.**
Yield criteria for porous ductile sheet metals with planar anisotropy under plane stress conditions. *Computers and Structures*, 82 : 2573-2583, 2004.
- [64] **T. H. Lin and S. R. Lin.**
Micromechanics theory of fatigue crack initiation applied to time-dependent fatigue. Fatigue mechanisms - ASTM STP 675. 707-728, 1979.
- [65] **P. Lukas and L. Kunz.**
Role of persistent slip bands in fatigue. *Phil. Mag.*, 84(3-5) : 317-330, 2004.
- [66] **B.T. Ma and C. Laird.**
Overview of fatigue behavior in copper single crystals - I. Surface morphology and stage I crack initiation sites for tests at constant strain amplitude. *Acta Metall.*, 37(2) : 325-336, 1989.
- [67] **B.T. Ma and C. Laird.**
Overview of fatigue behavior in copper single crystals - II. Population, size distribution and growth kinetics of stage I cracks for tests at constant strain amplitude. *Acta Metall.*, 37(2) : 337-348, 1989.

- [68] **T. Magnin and J. Driver and J. Lepinoux and L. P. Kubin**, Aspects microstructuraux de la déformation cyclique dans les métaux et alliages C.C. et C.F.C. - I. : consolidation cyclique. *Rev. Phys. Appl.*, 19 : 467-482, 1984.
- [69] **T. Magnin and J. Driver and J. Lepinoux and L. P. Kubin**, Aspects microstructuraux de la déformation cyclique dans les métaux et alliages C.C. et C.F.C. - II. : saturation cyclique et localisation de la déformation. *Rev. Phys. Appl.*, 19 : 467-482, 1984.
- [70] **J. Mandel**.
Plasticité classique et viscoplasticité. Cours du CISM no 97 - Udine. Springer-Verlag, 1971.
- [71] **J. Mandel, J. Zarka, B. Halphen**.
Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique. *Mech. Res. Communications*, 4(5), 1977.
- [72] **F.A. McClintock**.
A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *ASME J. Appl. Mech.* 35 : 363-371, 1968.
- [73] **D.L. McDiarmid**
A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fat. Frac. Engng. Mat. Struct.*, 14(4) : 429-453, 1991.
- [74] **M. E. Mear and J. W. Hutchinson**.
Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mech. Materials*, 4(3-4) : 395-407, 1985.
- [75] **V. Monchiet and E. Charkaluk and D. Kondo**.
A plasticity-damage based micromechanical modelling in high cycle fatigue. *C.R. Mécanique*, 334 : 129-136, 2006.
- [76] **V. Monchiet and C. Gruescu and E. Charkaluk and D. Kondo**, Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. *C.R. Mécanique*, 334 : 431-439, 2006.
- [77] **V. Monchiet and E. Charkaluk and D. Kondo**.
An improvement of Gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields. *Accepté pour publication. C.R. Mécanique*, 2006.
- [78] **V. Monchiet and E. Charkaluk and D. Kondo**.
Macroscopic yield criteria for anisotropic materials containing prolate or oblate cavities. *soumis*, 2006.
- [79] **F. Morel**.
Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1996.
- [80] **F. Morel and M. Bastard**.
A multiaxial life prediction method applied to a sequence of non similar loading in high cycle fatigue. *Int. J. Fatigue*, 25(9-11) : 1007-1012, 2003.
- [81] **H. Mughrabi and F Ackermann and K. Herz**, Persistent slip bands in fatigued face-centered and body-centered cubic metals. *Fatigue mechanisms - ASTM STP 675*. 69-105, 1979.

-
- [82] **H. Mughrabi.**
Fatigue crack initiation by cyclic slip irreversibilities in high cycle fatigue. Fatigue mechanisms : advances in quantitative measurement of physical damage - ASTM STP 811. 5-45, 1983.
- [83] **T. Mura.**
Micromechanics of Defects in Solids. Martinus Nijhoff, Dordrecht. 1987.
- [84] **Q.S. Nguyen.**
On shakedown analysis in hardening plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 51 : 101-125, 2003.
- [85] **E. Orowan.**
Theory of the fatigue of metals. *Proc. Roy. Academy, A, London*, 78-106, 1939.
- [86] **I. V. Papadopoulos.**
Fatigue polycyclique des métaux : une nouvelle approche. Thèse de doctorat, ENPC, 1987.
- [87] **I. V. Papadopoulos.**
A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals. *Int. J. of fatigue*, 16(6) : 377-384, 1994.
- [88] **I. V. Papadopoulos.**
A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions. *Fatigue Fract. Engrg. Mater. Struct.*, 18 : 79-91, 1995.
- [89] **I. V. Papadopoulos.**
Exploring the high-cycle fatigue behaviour of metals from the mesoscopic scale. *J. Mech. Behav. Mat.*, 6(2) : 93-118, 1996.
- [90] **I. V. Papadopoulos and P. Davoli and C. Gorla and M. Filippini and A. Bernasconi.**
A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. Fat.*, 19(3) : 219-235, 1997.
- [91] **I. V. Papadopoulos.**
Critical plane approaches in high-cycle fatigue : on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue Fract. Engrg. Mater. Struct.*, 21 : 269-285, 1998.
- [92] **I. V. Papadopoulos.**
Long life fatigue under multiaxial loading. *Int. J. Fat.*, 23 : 839-849, 2001.
- [93] **T. Pardoën, J.W. Hutchinson.**
An extended model for void growth and coalescence. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 : 2467-2512, 2000.
- [94] **T. Pardoën, J.W. Hutchinson.**
Micromechanics-based model for trends in toughness of ductile metals. *Acta Mater.*, 51 : 133-148, 2003.
- [95] **G. Perrin.**
Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1992.

- [96] **P. Ponte-Castañeda.**
The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39, 45-71, 1991.
- [97] **P. Ponte-Castañeda, M. Zaidman.**
Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *J. Mech. Phys. Solids*, 42, 1459-1492, 1994.
- [98] **P. Ponte-Castañeda, J.R. Willis.**
The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12), 14919-1951, 1995.
- [99] **P. Ponte-Castañeda, P. Suquet.**
Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech*, 34 : 171-302, 1998.
- [100] **G.P. Potirniche, J.L. Hearndon, G.J. Wagner, P.M. Gullet.**
A molecular dynamics study of void growth and coalescence in single crystal nickel. *Int. J. Plasticity*, 22 : 257-278, 2006.
- [101] **G.P. Potirniche, J.L. Hearndon, M.F. Horstemeyer, X.W. Ling.**
Lattice orientation on void growth in fcc single crystals. *Int. J. Plasticity*, 22 : 921-942, 2006.
- [102] **A. R. Ragab, Ch. Saleh.**
Evaluation of constitutive models for voided solids. *International Journal of Plasticity*, 15 : 1041-1065, 1999.
- [103] **A. R. Ragab.**
Application of an extended void growth model with strain hardening and void shape evolution to ductile fracture under axisymmetric tension *Engineering Fracture Mechanics*, 71 : 1515-1534, 2004.
- [104] **J. R. Rice and D. M. Tracey.**
On a ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 : 201-217, 1969.
- [105] **M. Rös.**
Die bruchgefahr fester Koeper. EMPA Bericht 173, Zurich, 1950.
- [106] **G. Rousselier.**
Contribution à l'étude de la rupture des métaux dans le domaine de l'élastoplasticité. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1979.
- [107] **G. Rousselier.**
Dissipation in porous metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 49 : 1727-1746, 2001.
- [108] **M. Sauzay.**
Effet de l'anisotropie élastique cristalline sur la distribution des facteurs de Schmid à la surface des polycristaux. *C.R. Méca*, 334(6) : 353-361, 2006.
- [109] **G. Sachs**
Zur Ableitung einer Fließbedingung. *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 72 : 734, 1928.
- [110] **J.C. Simo, T.J.R Hughes**
Computational inelasticity. Springer Verlag, Berlin, 1999.

-
- [111] **G. Sines, J.L. Waisman.**
Metal fatigue. McGraw Hill, 1959.
- [112] **G. Sines, G. Ohgi.**
Fatigue criteria under combined stresses or strains. *J. Engrg. Mat. tech.*, 103 : 82-90, 1981.
- [113] **D.F. Socie, G.B. Marquis**
Multiaxial fatigue, publisher : SAE Inc, Warrendale, 2000.
- [114] **H.S. Son, Y.S. Ki.**
Prediction of forming limits for anisotropic sheets containing prolate ellipsoidal voids. *Int. J. Mech. Sci.*, 45 : 1625-1643, 2003.
- [115] **P. Suquet.**
Plasticité et homogénéisation. *Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI*, 1982.
- [116] **P. Suquet.**
On bounds for the overall potential of power law materials containing voids with an arbitrary shape. *Mech. Research communication* 19 : 51-58, 1992.
- [117] **P. Suquet.**
Rupture et plasticité. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2003.
- [118] **S. Suresh.**
Fatigue of materials. *Cambridge University Press*, 2001.
- [119] **A.P. Sudorov, G.J. Dvorak.**
Rate form of the Eshelby and Hill tensors. *Int. J. Sol. Struct.*, 39 : 5659-5678, 2002.
- [120] **G. I. Taylor.**
Plastic strains in metals. *J. Inst. Metals*, 62 : 307, 1938.
- [121] **V. Tvergaard.**
Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 17 : 89-407, 1981.
- [122] **L.J. Walpole.**
Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in App. Mech.*, 21 : 169-243, 1981.
- [123] **D. Wang, J. Pan.**
An anisotropic Gurson yield criterion for porous ductile sheet metals with planar anisotropy. *Int. J. Damage Mech.*, 13 : 97-103, 2004.
- [124] **B. Weber.**
Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1999.
- [125] **J.D. White, B. Crossland, J.L.M. Morrison**
Effect of hydrostatics pressure on the direct-stress fatigue strength of an alloy steel. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1(1) : 39-49, 1959.
- [126] **A. T. Winter.**
A model for the fatigue of copper at low plastic strain amplitude. *Phil. Mag.*, 30(4) : 719-738, 1974.

- [127] **A. Wöhler.**
Report on tests of the Königl. Niederschleesisch-Märkkischen Eisenbahn made with apparatus for the measurement of the bending and torsion of railway axles in service (in german). *Zeitsch. Bauwesen*, 8 : 642-651, 1858.
- [128] **A. Zaoui.**
Matériaux hétérogènes et composites. Cours de l'école polytechnique.

Annexe A

Annexe au chapitre 3

A.1 Détermination de T

On note E_a , E_g et E les quantités définies par :

$$\begin{aligned}
 E_a &= A_0 k_a (1 - \exp(-\gamma_{cum})) \\
 E_g &= f \frac{\sqrt{3}}{2p_1} \frac{\tau_d^2}{\tau_h |\mathbf{B} : \Delta|} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2p_1} \frac{B_h}{\tau_h} \right\} \\
 E &= E_a + E_b
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

tel que :

$$\dot{f}_a = E_a \dot{\gamma}_{cum}; \quad \dot{f}_g = E_g \dot{\gamma}_{cum}; \quad \dot{f} = E \dot{\gamma}_{cum} \tag{A.2}$$

On note ensuite Z_d et Z_h définis par :

$$\begin{aligned}
 Z_d &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} [E_a \ln(f_a) - E \ln(f)] \\
 Z_h &= \frac{2p_1}{\sqrt{3}} \left[\frac{f_a}{f_g} \ln \left(\frac{f_a}{f} \right) \left\{ \frac{E_a}{f_a} - \frac{E}{f} \right\} - E_g \right]
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

tel que

$$\dot{\xi}^d = Z_d \dot{\gamma}_{cum}; \quad \dot{\xi}^h = Z_h \dot{\gamma}_{cum} \tag{A.4}$$

Les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_d &= T_d \dot{\gamma}_{cum}; \quad \text{avec} : T_d = R_0 \left\{ 1 + \frac{h|Z_d|}{1-f} + \frac{E \xi_{cum}^d}{(1-f)^2} \right\} \\
 \dot{\tau}_h &= T_h \dot{\gamma}_{cum}; \quad \text{avec} : T_h = R_0 \left\{ h - \frac{|Z_h|}{\ln(f)} + \frac{E \xi_{cum}^h}{f \ln(f)^2} \right\} \\
 \dot{X}_d^* &= (c + \mu^*) \dot{\gamma}; \quad \dot{X}_h^* = \left[\frac{2p_1 c}{\sqrt{3}} Z_h + k^* E_g \right] \dot{\gamma}_{cum}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

La condition $\dot{\mathcal{F}} = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \mathbf{T} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \text{avec : } \mathbf{T} &= \frac{1}{\mathcal{H}} \left[2 \frac{\mathbf{B} : \boldsymbol{\Delta}}{\tau_d^2} \boldsymbol{\Delta} + \frac{p_1}{\sqrt{3}\tau_h} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2p_1} \frac{B_h}{\tau_h} \right\} \mathbf{1} \right] \\ \text{et : } \mathcal{H} &= 2\epsilon \frac{\mathbf{B} : \boldsymbol{\Delta}^2}{\tau_d^3} T_d + 2c \frac{\mathbf{B} : \boldsymbol{\Delta}}{\tau_d^2} - 2\epsilon E \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2p_1} \frac{B_h}{\tau_h} \right\} \\ &2\epsilon f \frac{\sqrt{3}p_1}{\tau_h} \sinh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2p_1} \frac{B_h}{\tau_h} \right\} \left\{ \frac{B_h}{\tau_h} T_h + \frac{2p_1 c}{\sqrt{3}} Z_h \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où $\epsilon = \text{sign}(\dot{\gamma})$.

Annexe B

Annexe au chapitre 4

B.1 Famille de champs axisymétriques de Lee et Mear

La famille de champs de Lee et Mear s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 v_\lambda^E &= \frac{c^3}{bL_\lambda} B_{00} + \frac{c^2}{L_\lambda} \sum_{k=2,4..}^{+\infty} k(k+1) F_k(\lambda) P_k(\cos \varphi) \\
 v_\beta^E &= \frac{c^2}{L_\lambda} \sum_{k=2,4..}^{+\infty} G_k(\lambda) P_k^1(\cos \varphi) \\
 v_\theta^E &= 0
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Les notations introduites, $P_m(z)$ et $P_m^n(z)$, indiquent respectivement les fonctions de Legendre et les fonctions de Legendre associées de première espèce et solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - z^2)f''(z) - 2zf'(z) + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1 - z^2} \right] f(z) = 0 \tag{B.2}$$

Les fonctions $F_k(\lambda)$ et $G_k(\lambda)$ sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k(\lambda) = \sum_{m=0}^{+\infty} B_{km} Q_m^1(a/c) \\ G_k(\lambda) = \sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1) B_{km} Q_m(a/c) \end{array} \right. \quad \text{(cavité allongée)} \tag{B.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k(\lambda) = \sum_{m=0}^{+\infty} B_{km} i^m Q_m^1(ib/c) \\ G_k(\lambda) = \sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1) i^m B_{km} Q_m(ib/c) \end{array} \right. \quad \text{(cavité aplatée)} \tag{B.4}$$

Les fonctions Q_m et Q_m^n sont respectivement les fonctions de Legendre et les fonctions de Legendre associées de seconde espèce. $Q_m(z)$ est défini par $Q_m(z) = Q_m^0(z)$, $Q_m^n(z)$ étant les solutions de l'équation différentielle :

$$(z^2 - 1)f''(z) - 2zf'(z) + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{z^2 - 1} \right] f(z) = 0 \quad (\text{B.5})$$

D'une part, l'équilibre au bord du champ de vitesse s'écrit, dans le repère de coordonnées sphéroïdales :

$$\begin{aligned} v_\lambda^E(\lambda = \lambda_2) &= \frac{a_2 b_2}{L_\lambda} \left[\sin^2(\varphi) D_{11} + \cos^2(\varphi) D_{33} \right] \\ v_\varphi^E(\lambda = \lambda_2) &= \frac{1}{L_\lambda} \left[b_2^2 D_{11} - a_2^2 D_{33} \right] \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Le rapprochement de (B.6) avec le champ de Lee et Mear (B.1) implique, d'une part, que $B_{km} = 0$ pour $k > 2$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} B_{00} &= \frac{a_2 b_2^2}{c^3} D_h \\ F_2(\lambda_2) &= \frac{1}{9} \frac{a_2 b_2}{c^2} (D_{33} - D_{11}) \\ G_2(\lambda_2) &= \frac{1}{3c^2} (a_2^2 D_{33} - b_2^2 D_{11}) \\ F_k(\lambda_2) &= G_k(\lambda_2) = 0; \quad \text{pour } k \geq 4 \\ D_{22} &= D_{11}; \quad D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Le champ de vitesse s'écrit alors sous la forme générale, suivante :

$$\begin{aligned} v_\lambda^E &= \frac{B_{00}}{bL_\lambda} + \frac{3}{L_\lambda} F_2(\lambda) (1 - 3 \cos^2(\varphi)) \\ v_\varphi^E &= \frac{3}{L_\lambda} G_2(\lambda) \cos \varphi \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où B_{00} , et B_{2m} pour $m = 0, 1, 2, \dots$ vérifient les conditions au bord (B.7). Le champ admissible (B.8) pour des conditions de taux de déformation homogène au contour, contient encore une infinité de paramètres indéterminés ; il s'agit des B_{2m} pour $m = 1, 2, 3, \dots + \infty$. La détermination d'un critère de plasticité macroscopique pour un milieu contenant des cavités sphéroïdales suggère de choisir un nombre de champ fini parmi l'ensemble des champs associés aux coefficients B_{00} , et B_{2m} pour $m = 0, 1, 2, \dots$

B.2 Coefficients des critères de plasticité

B.2.1 Critère de Gologanu et al. (1993-1994)

Dans la formulation initiale du critère, dans le cas particulier d'une cavité allongée, Gologanu a proposé les expressions suivantes $\zeta_G = \eta_G = g = 0$. Néanmoins, il a été suggéré

par la suite [38], qu'un meilleur accord avec la solution exacte est obtenue en posant :

$$\eta_G = \frac{\kappa_G(1-f)f \sinh(K)}{1+f^2+f \left[K \sinh(K) - 2 \cosh(K) \right]}$$

$$\zeta_G = 1 - \eta_G \frac{(1-f)\kappa_G - \eta_G K}{f \kappa_G^2 \sinh(K)} \quad (\text{B.9})$$

avec : $K = \kappa_G(\alpha_2 - \alpha_1)$

Deux valeurs approchées ont été proposées pour le coefficient κ_G ; elles s'écrivent :

$$\kappa_{G,1st \text{ app}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln(f)} \right]^{-1}$$

$$\kappa_{G,2nd \text{ app}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln(f)} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \frac{e_1^2 - e_2^2}{\ln(f)} \right]^{-1} \quad (\text{B.10})$$

Considérons maintenant le cas de la cavité aplatie, le paramètre g est défini par :

$$g = \frac{1}{\chi} \frac{e_2^3}{\sqrt{1 - e_2^2}} \quad (\text{B.11})$$

où χ est défini par : $\chi = \frac{3}{4} \sqrt{\pi^2 + \frac{32}{3}}$. L'expression proposée pour κ_G [37] est :

$$\kappa_G = \left[\frac{2}{3} + \frac{g(1-f)(g+2f+gf)}{3(g+1)^2(g+f)^2 \ln\left(\frac{g+1}{g+f}\right)} \right]^{-1} ; \quad (\text{B.12})$$

Les coefficients η_G et ζ_G proposés par [37] peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\eta_G = \frac{\kappa_G(1-f)(g+1)(g+f)sh}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + (g+1)(g+f) \left[Ksh - 2ch \right]}$$

$$\zeta_G = 1 - \eta \frac{(1-f)\kappa_G - \eta_G K}{(1+g)(g+f)\kappa_G^2 \sinh(K)} \quad (\text{B.13})$$

avec : $sh = \sinh(K)$ and $ch = \cosh(K)$

B.2.2 Critère de Gologanu et al. (1997)

κ_G est défini, dans le cas d'une cavité allongée, par :

$$\kappa_G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\ln f} \left[(\sqrt{3} - 2) \ln\left(\frac{e_1}{e_2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{3 + e_2^2 + 2\sqrt{3 + e_2^4}}{3 + e_1^2 + 2\sqrt{3 + e_1^4}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + e_1^4}}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + e_2^4}}\right) \right] \right\}^{-1} \quad (\text{B.14})$$

et dans le cas d'une cavité aplatie, par :

$$\kappa_G = \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+g}{g+f}\right)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{g(1-f)}{(1+g)(g+f)} + \frac{2}{5} \left[\left(\frac{g}{g+f}\right)^{5/2} - \left(\frac{g}{g+1}\right)^{5/2} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{g}{g+f}\right)^{5/2} - \left(\frac{g}{g+1}\right)^{5/2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{B.15})$$

η_G et ζ_G sont donnés par les relations (B.9) dans laquelle κ_G est donné par (B.14) et (B.15) et α_2 qui entre dans l'expression de K et de Σ_p est remplacé par α_2^* défini par par :

$$\alpha_2^* = \frac{1 - e_2^2}{3 + e_2^4} \quad (\text{cavité allongée}) \\ \alpha_2^* = \frac{1}{3 - 6e_2^2 + 4e_2^4} \quad (\text{cavité aplatie}) \quad (\text{B.16})$$

Enfin le paramètre g est toujours conventionnellement pris égal à 0 dans le cas d'une cavité allongée et défini par $g = e_2^3 / \sqrt{1 - e_2^2}$ dans le cas d'une cavité aplatie.

B.2.3 Critère de Gãrãjeu

κ est une fonction de l'excentricité e_2 , définie par :

$$\kappa_{Gar}^1 = \frac{e_2^2}{3} \left[\frac{1}{3} + (\alpha_2 - 1)e_2^2 + 2\frac{1 - \alpha_2}{3 - e_2^2} \right]^{-1} \\ \kappa_{Gar}^2 = \frac{3 - e_2^2}{2} \left[\frac{1}{3} + (\alpha_2 - 1)e_2^2 + 2\frac{1 - \alpha_2}{3 - e_2^2} \right]^{-1} \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Annexe au chapitre 5

C.1 Base de Walpole

On introduit les notations standards de la base de Walpole pour les tenseurs d'ordre quatre présentant une symétrie de type isotrope transverse. Cette base permet notamment d'effectuer les opérations de produit doublement contracté et d'inversion de ces tenseurs sans grande difficulté. Pour cela, l'axe de révolution de l'ellipsoïde étant \underline{e}_3 , on note $\mathbf{i}_N = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ et $\mathbf{i}_T = \mathbf{1} - \mathbf{i}_N$, et on introduit les tenseurs d'ordre quatre \mathbb{E}_i , qui définissent la base de Walpole :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_T \otimes \mathbf{i}_T; & \mathbb{E}_2 &= \mathbf{i}_N \otimes \mathbf{i}_N; & \mathbb{E}_3 &= \mathbf{i}_T \underline{\otimes} \mathbf{i}_T - \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_4 &= \mathbf{i}_T \underline{\otimes} \mathbf{i}_N + \mathbf{i}_N \underline{\otimes} \mathbf{i}_T; & \mathbb{E}_5 &= \mathbf{i}_N \otimes \mathbf{i}_T; & \mathbb{E}_6 &= \mathbf{i}_T \otimes \mathbf{i}_N \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Les tenseur \mathbb{E}_i , pour $i = 1, 4$ sont orthogonaux, c'est à dire que l'on a :

$$\forall i = 1, 4 \quad \mathbb{E}_i : \mathbb{E}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{E}_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Le tenseur d'Eshelby, isotrope transverse, ne possédant pas la symétrie majeure, sa décomposition sur une base de tenseurs d'ordre quatre requiert les deux tenseurs non symétriques, \mathbb{E}_5 et \mathbb{E}_6 . Finalement tout tenseur d'ordre quatre isotrope transverse et ne possédant pas la symétrie majeure s'exprime comme une combinaison linéaire des \mathbb{E}_i :

$$\mathbb{L} = L_1 \mathbb{E}_1 + L_2 \mathbb{E}_2 + L_3 \mathbb{E}_3 + L_4 \mathbb{E}_4 + L_5 \mathbb{E}_5 + L_6 \mathbb{E}_6 \quad (\text{C.3})$$

\mathbb{L} est symétrique si $L_5 = L_6$. En notant $\mathbb{M} = [M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6]$, le produit doublement contracté de \mathbb{L} par \mathbb{M} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{L} : \mathbb{M} &= \\ & \left[L_1 M_1 + 2L_6 M_5, L_2 M_2 + 2L_5 M_6, L_3 M_3, L_4 M_4, L_5 M_1 + L_2 M_5, L_6 M_2 + L_1 M_6 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Or,

$$\mathbb{I} = [1, 1, 1, 1, 0, 0] \quad (\text{C.5})$$

L'inverse de \mathbb{L} est alors :

$$\mathbb{L}^{-1} = \left[\frac{L_2}{\Delta}, \frac{L_1}{\Delta}, \frac{1}{L_3}, \frac{1}{L_4}, -\frac{L_5}{\Delta}, -\frac{L_6}{\Delta} \right] \quad (\text{C.6})$$

avec $\Delta = L_1L_2 - 2L_5L_6$. Considérons quelques tenseurs d'ordre quatre particuliers ; par exemple \mathbb{K} et \mathbb{J} , qui s'écrivent dans la base de Walpole :

$$\mathbb{I} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]; \quad \mathbb{K} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right]; \quad \mathbb{J} = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] \quad (\text{C.7})$$

Le tenseur d'Eshelby \mathbb{S} défini au chapitre 5, s'écrit dans la base de Walpole :

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6] \\ \text{avec : } S_1 &= \frac{1}{2}(3 - 3\alpha - \beta); \quad S_2 = 1 - \beta; \quad S_3 = \frac{1}{4}(3 - 3\alpha - \beta) \\ S_4 &= \frac{1}{4}(3\alpha + 2\beta - 1); \quad S_5 = \frac{1}{2}(3\alpha + \beta - 1); \quad S_6 = \frac{1}{2}\beta \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Considérons maintenant le tenseur d'ordre quatre \mathbb{P} , qui est défini (voir chapitre 5 ou 6) par :

$$\mathbf{Q}_r : \mathbb{P} : \mathbf{Q}_s = p_{rs}; \quad \forall r, s = 1, \dots, 6 \quad (\text{C.9})$$

\mathbb{P} est un tenseur présentant une symétrie isotrope transverse et qui est de plus symétrique. *A titre de remarque, on notera d'ailleurs que tout tenseur d'ordre quatre symétrique, \mathbb{P} , défini par une relation du type (C.9) est isotrope transverse si les coefficients $p_{rs} = 0$ non nuls sont : $p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_{33} = p_{44}$ et $p_{55} = p_{66}$. Il s'agit bien du cas traité dans les chapitres 5 et 6..*

\mathbb{P} s'écrit dans la base de Walpole :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6] \\ \text{avec : } P_1 &= \frac{1}{18}(4p_{11} + 4p_{12} + p_{22}); \quad P_2 = \frac{1}{18}(2p_{11} - 4p_{12} + p_{22}) \\ P_3 &= \frac{1}{2}p_{33}; \quad P_4 = \frac{1}{2}p_{44}; \quad P_5 = P_6 = \frac{1}{18}(2p_{11} - p_{12} - p_{22}) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Considérons les relations suivantes qui s'avèrent utiles pour certains calculs :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma &= \frac{1}{2}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})^2; \quad \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma = \Sigma_{33}^2 \\ \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma &= \frac{1}{2}(\Sigma_{22} - \Sigma_{22})^2 + 2\Sigma_{12}^2; \quad \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma = 2\Sigma_{13}^2 + 2\Sigma_{23}^2 \\ \Sigma : \mathbb{E}_5 : \Sigma &= \Sigma : \mathbb{E}_6 : \Sigma = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})\Sigma_{33} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

C.2 Relations de moyennes requises pour le calcul de $\langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$ et $\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$

Dans cet annexe sont données les valeurs moyennes de quelques tenseurs d'ordre quatre, ces valeurs moyennes sont données dans la base de Walpole [122], utiles pour le calcul de $\langle \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$ et $\langle \mathbb{D}^T : \mathbb{D} \rangle_{S(r)}$. Les résultats sont donnés sous la forme symbolique attachée à la base de Walpole :

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{15} [4, 3, 2, 2, 1, 1] \\
 \langle \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{60} [6, 32, 3, 8, 4, 4] \\
 \langle \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{4} [2, 0, 1, 0, 0, 0] \\
 \langle \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{30} [2, 4, 1, -4, 3, 8] \\
 \langle \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{6} [2, 0, -1, 0, 1, 0] \\
 \langle \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{12} [2, 0, -1, 0, 4, 0] \\
 \langle (\underline{e}_\varphi \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) \otimes (\underline{e}_\varphi \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{60} [4, 8, 2, 7, -4, -4] \\
 \langle (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) \otimes (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_r) \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{12} [0, 0, 2, 1, 0, 0] \\
 \langle (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) \otimes (\underline{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\varphi) \rangle_{S(r)} &= \frac{1}{24} [0, 0, 1, 2, 0, 0]
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

Annexe D

Annexe au chapitre 6

D.1 Conditions d'incompressibilité et de taux de déformation homogène au contour

Dans cette section de l'annexe, on discute de la forme générale du champ de vitesse satisfaisant à la condition d'incompressibilité de la matrice ainsi que de conditions de taux de déformation homogène au contour.

On considère un ellipsoïde creux, tel que défini dans le chapitre 4, soumis à un taux de déformation homogène au contour, $\underline{v}(\lambda = \lambda_2) = \mathbf{D}.\underline{x}$, où \mathbf{D} est quelconque. Cette condition s'écrit dans le repère sphéroïdal :

$$\begin{aligned}v_\lambda(\lambda = \lambda_2) &= \frac{1}{L_\lambda} \left\{ a_2 b_2 \sin^2(\varphi) \left[\sin^2(\theta) D_{11} + \cos^2(\theta) D_{22} + \sin(2\theta) D_{12} \right] + a_2 b_2 \cos^2(\varphi) D_{33} \right. \\ &\quad \left. + (a_2^2 + b_2^2) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\cos(\theta) D_{13} + \sin(\theta) D_{23} \right] \right\} \\ v_\varphi(\lambda = \lambda_2) &= \frac{1}{L_\lambda} \left\{ b_2^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\sin^2(\theta) D_{11} + \cos^2(\theta) D_{22} + \sin(2\theta) D_{12} \right] \right. \\ &\quad \left. - a_2^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) D_{33} + a_2 b_2 \cos(2\varphi) \left[\cos(\theta) D_{13} + \sin(\theta) D_{23} \right] \right\} \\ v_\theta(\lambda = \lambda_2) &= b_2 \sin(\varphi) \left[\frac{D_{22} - D_{11}}{2} \sin(2\theta) + D_{12} \cos(2\theta) \right] \\ &\quad + a_2 \cos(\varphi) \left[-\sin(\theta) D_{13} + \cos(\theta) D_{23} \right]\end{aligned} \tag{D.1}$$

On suppose que la solution générale du champ satisfaisant (D.1) peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 v_\lambda &= \frac{c^2}{L_\lambda} \left\{ F_1(\lambda) + F_2(\lambda)(1 - 3\cos^2(\varphi)) + \sin^2(\varphi) \left[\cos(2\theta)F_3(\lambda) + \sin(2\theta)F_4(\lambda) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\cos(\theta)F_5(\lambda) + \sin(\theta)F_6(\lambda) \right] \right\} \\
 v_\varphi &= \frac{c^2}{L_\lambda} \left\{ \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[G_2(\lambda) + \cos(2\theta)G_3(\lambda) + \sin(2\theta)G_4(\lambda) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2\varphi) \left[\cos(\theta)G_5(\lambda) + \sin(\theta)G_6(\lambda) \right] \right\} \\
 v_\theta &= c \sin(\varphi) \left[-H_3(\lambda) \sin(2\theta) + H_4(\lambda) \cos(2\theta) \right] \\
 &\quad + c \cos(\varphi) \left[-H_5(\lambda) \sin(\theta) + H_6(\lambda) \cos(\theta) \right]
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

En toute généralité, un tel champ requiert l'introduction de quinze fonctions de λ . On supposera donc pour le moment que les 15 fonctions introduites sont totalement indépendantes les unes des autres.

Considérons maintenant la condition d'incompressibilité de la matrice, c'est à dire que l'on recherche un champ à divergence nulle. Elle se traduit dans le repère sphéroïdal par :

$$v_{\lambda,\lambda} + v_{\varphi,\varphi} + \frac{a}{b} \frac{L_\lambda^2 + b^2}{L_\lambda^2} v_\lambda + \frac{L_\lambda^2 + \epsilon c^2 \sin^2(\varphi)}{L_\lambda^2} \cotan(\varphi) v_\varphi = 0 \tag{D.3}$$

où $\epsilon = +1$ dans le cas d'une cavité allongée et vaut -1 dans le cas d'une cavité aplatie. Cette condition, imposée sur le champ retenu, conduit à la résolution d'un système d'équations différentielles que l'on peut décomposer en six sous problèmes indépendants :

Problème I :

$$F'_1(\lambda) + \frac{a}{b} F_1(\lambda) = 0 \tag{D.4}$$

Problème II :

$$F'_2(\lambda) + \frac{a}{b} F_2(\lambda) - G_2(\lambda) = 0 \tag{D.5}$$

Problèmes III et IV :

$$\begin{cases} F'_r(\lambda) + \frac{a}{b} F_r(\lambda) - \left(1 + \frac{2a^2}{b^2} \right) G_r(\lambda) = 0 \\ G_r(\lambda) = \frac{b}{c} H_r(\lambda) \end{cases} \quad r=3,4 \tag{D.6}$$

Problème IV et V :

$$\begin{cases} F'_r(\lambda) + \frac{a}{b} F_r(\lambda) - \left(5 + \frac{a^2}{b^2} \right) G_r(\lambda) = 0 \\ G_r(\lambda) = \frac{b}{c} H_r(\lambda) \end{cases} \quad r = 5,6 \tag{D.7}$$

Notons que, les problèmes III et IV étant identiques, il est même raisonnable de supposer que les solutions associées à chacun de ces problèmes possèdent la forme. La même remarque peut être faite pour les problèmes V et VI. Ayant considéré des champs sous la forme générale (D.2), Les conditions au bord impliquent pour les fonctions F_i :

$$\begin{aligned}
 F_1(\lambda_2) &= \frac{a_2 b_2}{c^2} D_h \\
 F_2(\lambda_2) &= \frac{a_2 b_2}{3c^2} \left[\frac{D_{11} + D_{22}}{2} - D_{33} \right] \\
 F_3(\lambda_2) &= \frac{a_2 b_2}{c^2} \frac{D_{22} - D_{11}}{2} \\
 F_4(\lambda_2) &= \frac{a_2 b_2}{c^2} D_{12} \\
 F_5(\lambda_2) &= \frac{a_2^2 + b_2^2}{c^2} D_{13} \\
 F_6(\lambda_2) &= \frac{a_2^2 + b_2^2}{c^2} D_{23}
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Elles impliquent également les relations suivantes entre les $F_i(\lambda)$ et les $G_i(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
 c^2 F_1(\lambda_2) - (2a_2^2 + b_2^2) F_2(\lambda_2) + a_2 b_2 G_2(\lambda_2) &= 0 \\
 b_2 F_3(\lambda_2) &= a_2 G_3(\lambda_2) \\
 b_2 F_4(\lambda_2) &= a_2 G_4(\lambda_2) \\
 a_2 b_2 F_5(\lambda_2) &= (b_2^2 + a_2^2) G_5(\lambda_2) \\
 a_2 b_2 F_6(\lambda_2) &= (b_2^2 + a_2^2) G_6(\lambda_2)
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

De même on a des relations entre les $G_i(\lambda)$ et les $H_i(\lambda)$ qui sont toutefois déjà satisfaites par la condition d'incompressibilité.

Solution du problème I : Le problème I fait intervenir uniquement la fonction $F_1(\lambda)$; la solution est :

$$F_1(\lambda) = B_{00} \frac{c}{b} \tag{D.10}$$

Il s'agit du champ hétérogène qui se réduit dans le cas sphérique à celui introduit par Rice et Tracey [104] et [47] et qui correspond au premier terme dans la famille de champs de Lee et Mear. L'équilibre au bord implique :

$$B_{00} = \frac{a_2 b_2^2}{c^3} D_h \tag{D.11}$$

Solution du problème II : Cette équation différentielle comporte deux inconnues $F_2(\lambda)$ et $G_2(\lambda)$ et possède donc a priori une infinité de solutions. Une idée consiste à décomposer $F_2(\lambda)$ et $G_2(\lambda)$ sur une base de fonctions de Legendre. Une solution de problème correspond donc aux champs de Lee et Mear pour $k = 2$. Dans le cas d'une cavité allongée, le champ de vitesse est donc pris sous la forme :

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &= B_{20} \frac{c}{b} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{2m} Q_m(a/c) \\ G_2(\lambda) &= \sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1) B_{2m} Q_m^1(a/c) \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

et dans le cas d'une cavité aplatie :

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &= B_{20} \frac{c}{b} - i \sum_{m=1}^{+\infty} B_{2m} Q_m(ia/c) \\ G_2(\lambda) &= -i \sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1) B_{2m} Q_m^1(ia/c) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Ces expressions pour $F_2(\lambda)$ et $G_2(\lambda)$, vérifient bien la condition d'incompressibilité de la matrice solide (D.5). Ceci peut être vérifié en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_1'(\lambda) &= \sum_{m=0}^{+\infty} B_{2m} \frac{c^2}{b^2} \left[m Q_{m+1}^1(a/c) - (m+1) \frac{a}{c} Q_m^1(a/c) \right] \\ \text{et : } \quad c Q_{m+1}^1(a/c) - a Q_m^1(a/c) &= b(m+1) Q_m(a/c) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Il serait intéressant d'étendre les résultats précédent au cas des problèmes *III*, *IV*, *V* et *VI*, qui conduisent à la formulation de champs non axisymétriques.

D.2 Expression analytique de $\langle \mathbf{d}^E \rangle_{\Omega}$

On se propose de Calculer la quantité suivante :

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \underline{v}^E \otimes^s \underline{e}_{\lambda} dS = \frac{3}{4\pi ab} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{v}^E \otimes^s \underline{e}_{\lambda} L_{\lambda} \sin(\varphi) d\varphi d\theta \quad (\text{D.15})$$

où \underline{v}^E est défini par :

$$\underline{v}^E = \left[\mathbb{T} : \mathbf{d}^* + \frac{a_1 b_1^2}{ab^2} (a^2 - a_1^2) d_{\lambda\lambda}^* \Phi \right] . \underline{x} \quad (\text{D.16})$$

L'intégrale à calculer s'écrit (en utilisant (5.23)) :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4\pi ab} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{v}^E \otimes \underline{e}_{\lambda} L_{\lambda} \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &= \left[\mathbf{F} . \mathbb{T}^s + \frac{a_1 b_1^2}{a^2 b^3} (a^2 - a_1^2) \mathbb{F} \right] : \mathbf{d}^* \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

où l'on a noté : $\mathbb{T}_{ijkl}^s = (\mathbb{T}_{ijkl} + \mathbb{T}_{jikl})/2$ et :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{3}{4\pi ab} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{x} \otimes \underline{e}_\lambda L_\lambda \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ \mathbb{F} &= \frac{3}{4\pi a^2 b^2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda L_\lambda^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

On rappelle que \underline{e}_λ et \underline{e}_φ sont définis dans la base cylindrique par (4.10) tandis que $\underline{x} = \rho \underline{e}_\rho + x_3 \underline{e}_3$, avec $\rho = b \sin(\varphi)$ et $x_3 = a \cos(\varphi)$. L'intégration du premier terme dans \underline{v}^E (D.16) donne en utilisant (4.46) :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4\pi ab} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{x} \otimes \underline{e}_\lambda L_\lambda \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &= \frac{3}{4\pi ab} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[ab \sin^2(\varphi) \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho + (a^2 + b^2) \sin(2\varphi) \underline{e}_\rho \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 \right. \\ &\quad \left. + ab \cos^2(\varphi) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] L_\lambda \sin(\varphi) d\varphi = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Concernant l'intégration du second terme dans \underline{v}^E (D.16), il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda \otimes \underline{e}_\lambda L_\lambda^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &= \frac{a^4}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin^4(\varphi)}{L_\lambda^2} \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{b^4}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\cos^4(\varphi)}{L_\lambda^2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{a^2 b^2}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)}{L_\lambda^2} (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) \otimes (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{a^2 b^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)}{L_\lambda^2} (\underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho) \overset{s}{\otimes} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{ab^3}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin(\varphi) \cos^3(\varphi)}{L_\lambda^2} (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) \overset{s}{\otimes} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{a^3 b}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin^3(\varphi) \cos(\varphi)}{L_\lambda^2} (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) \overset{s}{\otimes} (\underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho) \sin(\varphi) d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Tout d'abord, les deux dernières intégrales, qui sont impaires par rapport à θ sont nulles. En notant que :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho d\theta &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_1 + \frac{1}{4}\mathbb{E}_3 \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 d\theta &= \mathbb{E}_2 \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) \otimes (\underline{e}_3 \overset{s}{\otimes} \underline{e}_\rho) d\theta &= \frac{1}{4}\mathbb{E}_4 \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (\underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho) \overset{s}{\otimes} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) d\theta &= \frac{1}{4}(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6)
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

et en utilisant les relations (4.53), on obtient finalement :

$$\mathbb{F} = \frac{1}{4b^2}(3 - 3\alpha - \beta)(2\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_3) + \frac{1}{a^2}(1 - \beta)\mathbb{E}_2 + \frac{1}{2a^2}\beta(2\mathbb{E}_4 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \tag{D.22}$$

En remplaçant les expressions de $\mathbf{F} = \mathbf{1}$ et \mathbb{F} donné par (D.22) dans On peut alors montrer que :

$$\mathbb{T}^s + \frac{a_1 b_1^2}{ab^2}(a^2 - a_1^2)\mathbb{F} = \frac{a_1 b_1^2}{ab^2}\mathbb{S}(e_2) \tag{D.23}$$

D.3 Expressions de quantités Σ_A et de Σ_B

On se propose dans cet annexe de préciser les valeurs de Σ_A et de Σ_B . Avant tout donnons l'expression, dans la base de Walpole, des différents tenseurs nécessaires au calcul. \mathbb{W} s'écrit dans cette base :

$$\mathbb{W} = [W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6] \tag{D.24}$$

où les W_r sont définis à partir des w_{rs} (donnés en section (6.3.2)), par :

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{18}(w_{22} + 2w_{21}); & W_2 &= \frac{1}{9}(w_{22} - w_{21}); & W_3 &= \frac{1}{2}w_{33} \\
 W_4 &= \frac{1}{2}w_{55}; & W_5 &= -\frac{1}{18}(w_{22} + 2w_{21}); & W_6 &= -\frac{1}{18}(w_{22} - w_{21})
 \end{aligned} \tag{D.25}$$

Tandis que pour le tenseur \mathbb{P} :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6] \\
 \text{avec : } P_1 &= \frac{1}{18}(4p_{11} + 4p_{12} + p_{22}); & P_2 &= \frac{1}{18}(2p_{11} - 4p_{12} + p_{22}) \\
 P_3 &= \frac{1}{2}p_{33}; & P_4 &= \frac{1}{2}p_{44}; & P_5 &= P_6 = \frac{1}{18}(2p_{11} - p_{12} - p_{22})
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

où les p_{rs} sont donnés en section (6.3.2). Concernant la détermination de Σ_A , une difficulté réside dans celle du tenseur \mathbb{R}^* défini par $\mathbb{R}^* : \mathbb{R} = \mathbb{K}$ où \mathbb{R} est donné par (6.75). Notons toutefois qu'il s'agit d'un problème que nous avons déjà rencontré dans le chapitre quatre pour la détermination de \mathbb{M}^*

D'une part le calcul des composantes de \mathbb{R} dans la base de Walpole conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= [R_1, 2R_1, R_3, R_4, -R_1, -R_1] \\ \text{avec : } R_1 &= \frac{1}{3}(1 + \zeta_1); \quad R_3 = 1 + \zeta_3; \quad R_4 = 1 + \zeta_4 \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

où les ζ_r sont définis par :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{9(1+g)(f+g)}{(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)(1-f)^2} \left[p_{22}(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + p_{11}(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - p_{12}(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\ \zeta_3 = \zeta_4 &= \frac{1}{12p_{33}} \frac{(1+g)(f+g)}{(1-f)^2} (3\alpha_2 + \beta_2 - 3\alpha_1 - \beta_1)^2 \\ \zeta_5 = \zeta_6 &= \frac{1}{3p_{55}} \frac{(1+g)(f+g)}{(1-f)^2} (3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

et où l'on a posé :

$$f^* = \frac{(1+g)(f+g)}{(1-f)} \quad (\text{D.29})$$

D'autre part il s'agit de trouver la solution de l'équation $\mathbb{R}^* : \mathbb{R} = \mathbb{K}$. Similairement au chapitre 4 (pour la détermination de \mathbb{M}^*), il suffit de rechercher une solution particulière de ce problème, celle-ci se présente sous la forme suivante :

$$\mathbb{R}^* = \left[\frac{1}{3R_1}, \frac{2}{3R_1}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{3R_4}, -\frac{1}{3R_1}, -\frac{1}{3R_1} \right] \quad (\text{D.30})$$

Il s'en suit que Σ_A peut être aussi décomposé de la même manière :

$$\begin{aligned} \Sigma_A^2 &= \frac{1}{1 - \zeta_2} \left[(1 + \eta_2)\Sigma_q + \eta_1\Sigma_p \right]^2 + \frac{3}{1 - \zeta_3} (1 + \eta_3)^2 \Sigma_s^2 \\ &\quad + \frac{3}{1 - \zeta_5} (1 + \eta_5)^2 \Sigma_t^2 \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

où les η_r sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \frac{9(1+g)(f+g)}{(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)(1-f)} \left[p_{22}(\alpha_2 - \alpha_1) - p_{12}(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\
 \eta_2 &= \frac{9(1+g)(f+g)}{(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)(1-f)} \left[p_{11}(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1) - p_{12}(\alpha_2 - \alpha_1) \right] (1 - \alpha_2 - \beta_2) \\
 \eta_3 &= \frac{(1+g)(f+g)}{12p_{33}(1-f)} (3\alpha_2 + \beta_2 - 3\alpha_1 - \beta_1)(3 - 3\alpha_2 - \beta_2) \\
 \eta_5 &= \frac{(1+g)(f+g)}{3p_{55}(1-f)} (3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)(1 - 2\beta_2 - 3\alpha_2)
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

On se propose maintenant de montrer la relation suivante :

$$\Sigma_A^2 + (1+g)(f+g)\Sigma_B^2 = \Sigma_{PC}^2 \tag{D.33}$$

En reprenant l'expression de Σ_A donnée par (D.31) ainsi que celle de Σ_B , on a :

$$\Sigma_A^2 + (1+g)(f+g)\Sigma_B^2 - \Sigma_{eq} = r_1\Sigma_p^2 + r_2\Sigma_q^2 + r_3\Sigma_p\Sigma_q + r_4\Sigma_s^2 + r_5\Sigma_t^2 \tag{D.34}$$

où les r_i s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{\eta_1^2}{1 - \zeta_2} + (1+g)(g+f)\kappa_1 = \frac{3f}{2} \frac{3\tilde{\alpha} + 3\tilde{\beta} - 1}{\Upsilon} \\
 r_2 &= \frac{(1 + \eta_2)^2}{1 - \zeta_2} + (1+g)(g+f)\kappa_2 - 1 \\
 &= \frac{f}{6\Upsilon} (3\tilde{\alpha} + 3\tilde{\beta} - 1)(1 - 3\alpha_2) - \frac{2f}{3\Upsilon} (1 - 3\tilde{\alpha})(1 - 3\alpha_2) + f \left[\frac{4}{3\Upsilon} - 1 \right] \\
 r_3 &= \frac{2(1 + \eta_2)\eta_1}{1 - \zeta_2} + (1+g)(g+f)\kappa_3 \\
 &= \frac{f}{\Upsilon} (1 - 3\tilde{\alpha} - 3\tilde{\beta})(1 - 3\alpha_2) + \frac{f}{\Upsilon} (1 - 3\tilde{\alpha}) \\
 r_4 &= \frac{(1 + \eta_3)^2}{1 - \zeta_3} + (1+g)(g+f)\kappa_4 = f \frac{3 - 3\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{1 + 3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} \\
 r_5 &= \frac{(1 + \eta_5)^2}{1 - \zeta_5} + (1+g)(g+f)\kappa_5 = f \frac{3\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta} - 1}{3 - 3\tilde{\alpha} - 2\tilde{\beta}}
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

où $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont définis (6.97). En notant enfin que Σ_p peut être décomposé de la manière suivante $\Sigma_p = \Sigma_h + \frac{1}{3}(1 - 3\alpha_2)\Sigma_q$, il est alors facile de montrer que :

$$\Sigma_A^2 + (1+g)(f+g)\Sigma_B^2 - \Sigma_{eq} = \mu_1\Sigma_p^2 + \mu_2\Sigma_q^2 + \mu_3\Sigma_p\Sigma_q + \mu_4\Sigma_s^2 + \mu_5\Sigma_t^2 \tag{D.36}$$

et par conséquent le résultat (6.94).