

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LILLE**

*Doctorat délivré conjointement par l'Université des Sciences et Technologies de Lille  
et par l'École Centrale de Lille*

*Discipline : AUTOMATIQUE et INFORMATIQUE INDUSTRIELLE*

par

**Nima Yeganefar**

Ingénieur diplômé de l'École Centrale de Lille

**DÉFINITIONS ET ANALYSE DE STABILITÉS  
POUR LES  
SYSTÈMES À RETARD NON LINÉAIRES**

soutenue publiquement le 24 novembre 2006

**JURY :**

M. Dominique Meizel	Président	Professeur à l'ENSIL
M. Jean-Pierre Richard	Codirecteur	Professeur à l'École Centrale de Lille
M. Michel Dambrine	Codirecteur	Professeur à l'Université de Valenciennes
M <sup>me</sup> Annemarie Kökösy	Codirecteur	Enseignant chercheur à l'ISEN
M. Thierry-Marie Guerra	Rapporteur	Professeur à l'Université de Valenciennes
M. Olivier Sename	Rapporteur	Professeur à l'INPG

Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique, de Génie Informatique et Signal  
L.A.G.I.S., UMR 8146 – ISEN - École Centrale de Lille

Une affiche du journal *Le Monde*, s'intitulant "Des thèses qui sont faites pour être lues", m'a hanté durant mes années d'études. C'est lors de la rédaction de cette thèse, après quatre années passées sur une branche de l'automatique, que la difficulté de cette entreprise me frappa. Cette thèse fut donc rédigée avec ce souci constant d'accessibilité au plus grand nombre. Pour ce faire, j'ai essayé, dans la mesure du possible, de toujours commencer par le champ le plus commun pour en arriver au plus technique, bien que la nature de ce mémoire se place sous le sceau de la théorie. J'espère que cette contribution intéressera — au moins en partie — aussi bien les scientifiques que les néophytes, et que notre courageux lecteur sera sensible à cette démarche.

« *Tout homme possède sur le plan mythique deux "pères" : la sublimité et le perversissement.* »

Paul Diel, *Le symbolisme dans la mythologie grecque*, Éditions Petite Bibliothèque Payot, Paris, 2002, p.114.

# Remerciements

---

Je tiens à remercier les nombreuses personnes qui directement, indirectement, humainement, amicalement, ironiquement, amoureuxment, haineusement, ont contribué à former ma personnalité. Les amis de bureau, Delphine, Adrien, Nicolas, George, Emmanuel, Romain, Mickaël, Mohammed et Alexandre. Les amis de tous les jours, Jean-Gabriel, Marc, Nicolas, Mathieu, Guillaume, Sophie, Emilie, Alexandre, Céline, Flore, Marlen, Nki, Iyad et Mehdi. Les personnes qui ont joué un grand rôle dans ma vie, Juliette, Zoï, Etienne, Sophie et Marie. Ma famille, mon père Siavosh, ma tante Azar, mon frère Nader, mon oncle Jacques et mon cousin Darian.

\*

Il est également important de noter les efforts de mon encadrement présidé par M. le professeur Jean-Pierre Richard et suivi par M<sup>me</sup> Annemarie Kőkösy et M. le professeur Michel Dambrine. Mon caractère et mes idées n'ont certainement pas facilité cet encadrement et, le recul aidant, je peux affirmer que chacune des trois personnes a adopté une stratégie différente avec plus ou moins de succès pour un même but : me permettre de mener à bien le travail de cette thèse. Il convient ici de les féliciter pour tant de patience et de difficultés surmontées.

\*

Il convient de remercier d'une part mes deux rapporteurs, messieurs les professeurs Olivier Sename et Thierry-Marie Guerra, pour le temps consacré à l'étude de ce mémoire et les remarques importantes qui m'ont permis d'améliorer sa rigueur et d'autre part, M. le professeur

---

Dominique Meizel qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

\*

Que soient salués les directeurs de l'ISEN et de l'École Centrale de Lille, pour leur accueil. La fondation Norbert Ségard et la région Nord Pas de Calais sont remerciées pour le soutien financier accordé durant trois années de thèse. La quatrième fut plus folklorique.

\*

La vie de laboratoire s'est partagée entre l'ISEN et l'École Centrale. L'ambiance et les mentalités y sont différentes. A Centrale, je tiens à saluer Bernard l'artiste, et son génie créateur qui a toujours eu mon admiration ainsi que Patrick, dont la sympathie n'a d'égale que ses compétences informatiques, Jacques, Pascal, Marie-Françoise et les nombreuses personnes qui m'ont côtoyé durant ces années. A l'ISEN, j'aimerais saluer vivement les femmes de ménages qui travaillent dans des conditions difficiles et qui, pour certaines, ont plus d'ancienneté que la plupart des enseignants de cette école. Mes chaleureuses salutations sont adressées à toute l'équipe de SST : Christelle, Laurent, David et Christophe.

\*

Une mention spéciale est décernée à messieurs Thomas Bourdeaud'hui et Mathieu Roche. Le premier, malgré nos différences profondes politiques et religieuses, fut d'un incroyable dévouement et sympathie pour me permettre de résoudre les nombreuses difficultés de mises en page de ce mémoire. Tous les fichiers utilisés en latex sont de son inspiration. Le deuxième fut mon relecteur le plus assidu, sans pitié pour mes fautes jusque dans ces lignes.

\*

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui luttent, individuellement ou collectivement, pour vivre dignement aujourd'hui.

# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>13</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>17</b>
<b>1 A propos de la stabilité</b>	<b>29</b>
1.1 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes à retards . . . . .	29
1.1.1 Définitions . . . . .	30
1.1.2 Caractérisation par des gains non linéaires . . . . .	32
1.1.3 Critères temporels . . . . .	33
1.1.3.1 L'approche de Lyapunov-Krasovskii . . . . .	34
1.1.3.2 L'approche de Lyapunov-Razumikhin . . . . .	37
1.2 Problématique, les systèmes perturbés . . . . .	38
1.2.1 Comportement vis-à-vis de perturbations . . . . .	38
1.2.2 La stratégie adoptée . . . . .	39
1.3 Une approche possible : la stabilité entrée-état . . . . .	40
1.3.1 Philosophie de l'étude . . . . .	40
1.3.2 Présentation générale . . . . .	41
1.3.3 Intérêt de l'étude . . . . .	48

1.4	Conclusion . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Stabilité entrée-sortie des systèmes à retards</b>	<b>51</b>
2.1	Présentation . . . . .	51
2.1.1	Un domaine largement étudié . . . . .	52
2.1.2	Les bases mathématiques . . . . .	52
2.2	Approche temporelle des systèmes linéaires à retards variables . . . . .	53
2.2.1	Critère de stabilité, problème du petit gain . . . . .	53
2.2.2	Analyse . . . . .	55
2.2.3	Exemple . . . . .	60
2.3	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes à retards</b>	<b>61</b>
3.1	Stabilité en temps fini, cas général . . . . .	61
3.1.1	Définitions . . . . .	63
3.1.2	Critère de stabilité en temps fini . . . . .	64
3.2	Stabilisation en temps fini d'un système linéaire à retards constants . . . . .	67
3.2.1	Résultats en utilisant une transformation d'Artstein . . . . .	68
3.2.2	Perspectives en utilisant la transformation de Fiagbedzi et Pearson . . . . .	72
3.2.3	Limites et perspectives . . . . .	74
3.3	Conclusion . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Stabilité entrée-état des systèmes à retard</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Définition de la stabilité entrée-état des systèmes retardés . . . . .	78
4.2.1	Présentation . . . . .	78
4.2.2	Cohérence avec le cas linéaire . . . . .	79
4.2.3	Autre définition et cohérence théorique . . . . .	80
4.3	Caractérisation par dissipation . . . . .	82

4.3.1	Approche par la méthode de Lyapunov-Krasovskii . . . . .	82
4.3.1.1	Définition d'une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag . . . . .	82
4.3.1.2	Condition suffisante de stabilité . . . . .	82
4.3.2	Approche par la méthode de Lyapunov-Razumikhin . . . . .	85
4.4	Relation entre stabilité exponentielle et stabilité entrée-état . . . . .	87
4.5	Systèmes en cascade . . . . .	89
4.6	Bilan et perspectives . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Stabilité pratique et problème de la réticence dans la commande par modes glissants</b>	<b>93</b>
5.1	Commande par modes glissants . . . . .	93
5.1.1	Modes glissants d'ordre un . . . . .	94
5.1.2	Le phénomène de réticence . . . . .	96
5.1.3	Position du problème . . . . .	100
5.2	Sur la stabilité pratique . . . . .	103
5.2.1	Présentation . . . . .	103
5.2.2	Critère de stabilité pratique . . . . .	104
5.3	Lissage de la commande . . . . .	106
5.3.1	Stabilisation d'un système à retard variable inconnu . . . . .	107
5.3.2	Stabilisation pratique d'un système à retards via une fonction sigmoïde	108
5.3.3	Simulations . . . . .	112
5.3.3.1	Retour sur le pendule inverse . . . . .	112
5.3.3.2	Exemple académique . . . . .	115
5.4	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion générale</b>	<b>119</b>


<b>Annexes</b>	<b>123</b>
<b>A A propos de l'histoire de l'automatique</b>	<b>125</b>
A.1 Sur l'évolution de l'automatique . . . . .	126
A.1.1 Définition et premiers pas . . . . .	126
A.1.2 L'explosion avec l'industrialisation . . . . .	128
A.1.3 Une théorie jeune d'un demi-siècle . . . . .	130
A.2 Sur la théorie et la pratique . . . . .	130
<b>B Quelques outils mathématiques</b>	<b>132</b>
B.1 Équation de Riccati et LMI . . . . .	132
B.2 Principe de comparaison . . . . .	133
B.3 Lemme de Gronwall-Bellman . . . . .	134
<b>C Quelques démonstrations</b>	<b>135</b>
C.1 Lemme de comparaison . . . . .	135
C.2 Théorème réciproque, stabilité exponentielle . . . . .	136
<b>D Chemin de croix avec Pekee</b>	<b>138</b>
D.1 Le modèle . . . . .	138
D.2 Communication entre les différents modules du robot . . . . .	139
D.3 Les limites du robot et les problèmes rencontrés . . . . .	139
D.4 Système d'exploitation en temps réel . . . . .	140
	
<b>Liste des figures</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>144</b>





Figure 1 – Dessin de Pancho dans le journal *Le Monde* du 11 janvier 2004 illustrant l'article intitulé "La révolte des chercheurs contre le gouvernement"

# Notations

---

## Typographie

- 1)  $\tau$  désigne le retard dans l'ensemble de ce mémoire et est, soit une fonction, soit une constante suivant les circonstances.
- 2) Les notations “entre guillemets” correspondent à l'emploi de termes techniques que nous voulons faire ressortir et ‘entre deux apostrophes’ désignent des mots employés en dehors de leur contexte d'utilisation habituelle, dans un but de clarification du discours.
- 3) Les expressions de langues étrangères ou les mots que nous voulons souligner sont indiqués *en italiques*.

## Acronymes

- 1) ISS : *input-to-state stable*.
- 2) LMI : *linear matriciel inequalities*.
- 3) DEA : diplôme d'étude approfondi.
- 4) GAS : globalement asymptotiquement stable.
- 5) CMG : commande par modes glissants

## Ensembles et nombres

- 1)  $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

- 2)  $\mathbb{R}_+$  : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- 3)  $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.
- 4)  $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.
- 5)  $[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .
- 6)  $]a, b[$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .
- 7)  $[a, b[$  ou  $]a, b)$  : intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .
- 8)  $[1..n]$  : entiers naturels de 1 à  $n$ .
- 9)  $\mathcal{C}$  : ensemble des fonctions continues de  $[-h, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
- 10)  $\mathcal{C}_a$  : ensemble des fonctions continues dans  $\mathcal{C}$  bornées par une constante réelle  $a > 0$ .
- 11)  $\Sigma_\epsilon$  : classe des fonctions  $\epsilon$ -sigmoïde.
- 12)  $\mathcal{K}$  : ensemble des fonctions continues de  $[0, a) \rightarrow [0, \infty)$ , où  $a$  est un réel positif (éventuellement infini), strictement croissantes et nulles en zéro.
- 13)  $\mathcal{K}_\infty$  : ensemble des fonctions de  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  de classe  $\mathcal{K}$  tendant vers l'infini.
- 14)  $\mathcal{KL}$  : une fonction continue  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$  si, pour  $s$  fixé, la fonction  $\beta(\cdot, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$  par rapport à la première variable et si, pour  $r$  fixé, la fonction  $\beta(r, \cdot)$  est décroissante par rapport à la deuxième variable avec  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ .
- 15)  $t \in \mathbb{R}_+$  : variable temporelle.
- 16)  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  : dérivée de la variable  $x$  par rapport au temps.
- 17)  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  : seconde dérivée de  $x$  par rapport au temps.

## Vecteurs et fonctions

- 1)  $x^T$  : transposé du vecteur  $x$ .
- 2)  $x \in \mathbb{R}^n$  : vecteur de composantes  $x_i$ .
- 3)  $x(t; t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^n$  ( $x(t)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté) : vecteur de  $\mathbb{R}^n$  représentant "l'état instantané" du système à l'instant  $t$ , avec pour état initial  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$  à l'instant  $t_0$ .
- 4)  $x_t(t_0, \varphi_0)$  ( $x_t$  quand il n'y a pas d'ambiguïté) : fonction de  $\mathcal{C}$  représentant l'état du système à l'instant  $t$ , avec pour état initial  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ , et définie par  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [-h, 0]$ .
- 5)  $\text{sign}$  : fonction signe qui renvoie le signe d'un scalaire  $a \in \mathbb{R}$  et 0 en 0. Par extension,  $\text{sign}(x)$  où  $x \in \mathbb{R}^n$  sera le vecteur de composantes  $\text{sign}(x_i)$ .

- 6)  $\sigma_\epsilon$  : fonction  $\epsilon$ -sigmoïde (*cf.* définition 5.2).
- 7)  $|\cdot|$  : valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
- 8)  $\|\cdot\|$  : norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
- 9)  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  : norme sur  $\mathcal{C}$  définie par  $\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \{\|\varphi(\theta)\|\}$ .
- 10)  $e^x$  : fonction exponentielle de  $x$ .  
 $\ln(x)$  : fonction logarithme népérien de  $x$ .
- 11)  $\max$  : fonction maximum.
- 12)  $\deg(P)$  : renvoie le degré du polynôme  $P$ .
- 13)  $\nabla f$  : gradient de la fonction  $f$ .

## Matrices

- 1)  $A^T$  : transposée de la matrice  $A$ .
- 2)  $A > 0$  (respectivement  $A < 0$ ) : la matrice  $A$  est définie positive (respectivement définie négative).
- 3)  $\|A\|$  : norme euclidienne de la matrice  $A$ .
- 4)  $\text{rang}(A)$  : rang de la matrice  $A$ .
- 5)  $I_n$  : matrice identité de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

# Introduction générale : à propos des systèmes à retards

*Je suis comme je suis  
Je suis faite comme ça  
Que voulez-vous de plus  
Que voulez-vous de moi*

— Prévert<sup>1</sup>

---

DANS ce chapitre introductif, nous présenterons dans un premier temps les systèmes<sup>2</sup> à retards et les notions mathématiques qui s’y rapportent de manière à être compris le plus largement possible. Ensuite, nous ferons le point sur la *problématique* de la thèse et sur l’état de l’art associé. Nous proposerons pour conclure un rapide survol des éléments présentés dans ce manuscrit et la façon dont ils s’enchaînent.

---

## Présentation des systèmes à retards

A l’image de cette jeune fille dans ce poème de Prévert, les systèmes que nous étudions possèdent des caractéristiques intrinsèques que nous ne pouvons changer. Leur étude nécessite donc des outils spécifiques qui seront succinctement présentés dans cette section en s’attachant à illustrer le plus concrètement possible les notions présentées. Une littérature abondante et de qualité sur les systèmes à retards est disponible ; nous pouvons citer ici une liste non exhaustive de références qui nous ont guidé tout au long de nos travaux. Pour les livres, les contributions [Bellman et Cooke, 1963, Krasovskii, 1963, Yoshizawa, 1966,

---

<sup>1</sup>Jacques Prévert, *Paroles*, Éditions Gallimard, collection Folio, Paris, 1949, p.100.

<sup>2</sup>Le concept *système* est couramment usité dans le langage scientifique. Il provient du terme grec *sustêma* qui veut dire “ensemble”. En nous référant à l’avant-propos du livre [Richard, 2002], nous pouvons le définir comme une combinaison d’éléments réunis de manière à former un ensemble qui possède au moins l’un des trois aspects suivants : interactivité, dynamique et cohérence.

Kolmanovskii et Nosov, 1986, Kolmanovskii et Myshkis, 1992, Hale et Verduyn-Lunel, 1993, Kolmanovskii et Shaikhet, 1996, Niculescu, 2001] et [Gu et al., 2003] permettront d’obtenir une vision d’ensemble des problèmes abordés durant ce mémoire. Nous nous sommes aussi référé aux articles [Watanabe et al., 1996, Kharitonov, 1998, Kolmanovskii et al., 1999] et [Richard, 2003], ainsi qu’à quelques-unes des nombreuses thèses consacrées à cette problématique [Dambrine, 1994, Sename, 1994, Bartholomeus-Goubet, 1996] et [Tchangani, 1999]. Il ne s’agit donc pas, dans cette introduction, de revenir sur tous les aspects des systèmes à retards déjà largement exposés dans les références citées ci-dessus. Il nous est néanmoins apparu intéressant de présenter *autrement que mathématiquement* certains concepts pour clarifier les tenants et aboutissants des chapitres futurs.

## Les systèmes à retards au quotidien

Notre domaine d’étude, *la commande<sup>3</sup> des systèmes à retards*, n’est généralement compréhensible que par quelques érudits. Ces simples mots tétanisent le public aussi spontanément que la rencontre avec l’œil de la Méduse, alors que chacun des termes pris séparément appartient au langage courant. Pourtant, les systèmes à retards font partie de notre quotidien tout comme la pluie — du moins pour les nordistes — comme le montrent les exemples qui suivent.

**Des systèmes à retards constants.** Les exemples de retards *constants* sont peut-être les plus faciles à trouver. La dynamite, inventée par Alfred Nobel, dispose d’un dispositif — la mèche — pour retarder le déclenchement de son explosion ; son utilisation serait difficile sans cet artifice... Cet exemple nous semble convenir parfaitement à notre entrée en matière ; car contrairement à ce que l’on pourrait penser de prime abord, un retard peut s’avérer utile ! Il peut même parfois être absolument nécessaire comme dans le cas de la dynamite. Les mathématiciens pourront se référer à l’exemple, désormais classique, présenté dans [Kolmanovskii et Nosov, 1986], d’un système dont l’équilibre est stable lorsqu’il possède un retard approprié<sup>4</sup>.

L’exemple le plus classique concerne la “douche écossaise”<sup>5</sup>. Sur certaines douches, le décalage

---

<sup>3</sup>La *commande* désigne quelque chose qui agit pour contrôler l’évolution d’un système. Par exemple, dans le cas de la conduite d’une voiture, la commande correspond à l’action sur le volant, qui permet un changement de direction, et sur l’accélérateur qui permet un changement de vitesse. Ces éléments — direction, accélérateur — sont fréquemment appelés *actionneurs* dans la communauté automatique.

<sup>4</sup>Nous étudierons et définirons plus loin les notions concernant la stabilité.

<sup>5</sup>En réalité, le retard dépend aussi du débit de l’eau mais nous considérons que ses variations, pour un usage classique, sont négligeables.

---

entre le moment où nous réglons les manettes d'arrivée d'eau et le moment où les changements au niveau de la température sont réellement ressentis provoque quelques désagréables oscillations dont chacun a pu subir les conséquences<sup>6</sup>. Les expatriés, eux, connaissent les difficultés d'une communication téléphonique à longue distance ou par un réseau internet ; le laps de temps entre l'instant où ils parlent et l'instant où leur interlocuteur les entend, rend toute discussion philosophique très vite difficile. Nous rencontrons le retard en passant le permis de conduire puisque nous apprenons que le temps de réaction de notre système nerveux, lors de la conduite, est de l'ordre de la seconde et qu'il faut prendre soin de mettre une distance suffisante entre deux voitures qui se suivent. Les épidémies, les maladies possédant un temps d'incubation, etc. ; la biologie renferme des phénomènes qui peuvent être modélisés par des retards.

**Des systèmes à retards variables ou multiples.** Nous savons que la lumière du soleil met quelques minutes à nous parvenir, c'est un retard constant si la distance reste constante. Mais nous savons que l'univers est en expansion et que la vitesse de récession est proportionnelle à la distance : plus les étoiles sont éloignées et plus elles s'éloignent rapidement de nous. Dans le ciel étoilé se propage donc la lumière de nombreuses étoiles, toutes à des distances plus ou moins éloignées de la terre, ayant mis un certain temps à nous parvenir : quelques minutes pour le soleil, mais des centaines de millions d'années pour d'autres étoiles. Ainsi observons-nous le passé en regardant le ciel nocturne ! Cependant, le retard est beaucoup plus handicapant dans d'autres domaines. Les organistes nécessitent un certain temps d'adaptation lorsqu'ils jouent sur un orgue qu'ils ne connaissent pas. En effet, à cause du temps de propagation de l'air dans les tuyaux, le retard entre le moment où le musicien enfonce la touche du clavier et le moment où le son retentit dans la salle peut être assez conséquent, de l'ordre de la demi-seconde pour certains grands orgues. Théoriquement, ce retard varie en fonction de la hauteur de la note puisque les tuyaux sont de longueurs différentes ce qui en fait un exemple de système à retards multiples.

Plus récemment, la croissance exponentielle des nouvelles technologies et notamment l'utilisation de plus en plus fréquente de vidéo-télécommunications permet à un plus large public l'expérimentation quotidienne des difficultés liées aux systèmes à retards variables. Les utilisateurs de *webcam*, par exemple, connaissent la désagréable impression d'avoir fréquemment les images en retard par rapport au son. Pour finir, notons un dernier exemple, concernant les systèmes à retard distribué : l'arrivée en cours des élèves dans un amphithéâtre<sup>7</sup>...

---

<sup>6</sup>Bien entendu, le théoricien spécialiste des retards évitera de se mettre sous le pommeau tant que la température de l'eau n'est pas stable.

<sup>7</sup>Exemple tiré des cours de M. Pierre Borne, Professeur à l'École Centrale de Lille.

## Le problème de la modélisation

La question est de savoir comment nous pouvons modéliser les systèmes à retards. Il convient en premier lieu de définir *l'état* du système. Dans le domaine de l'automatique, c'est en quelque sorte la "mémoire" du système, c'est-à-dire, un ensemble des variables présentes permettant de déterminer le comportement du système dans un futur proche. Pour *les équations différentielles ordinaires*<sup>8</sup>, on suppose que l'évolution d'un système à un instant  $t + \Delta t$  ne dépend que de la valeur de ses variables à l'instant  $t$ . Prenons par exemple une boule de pétanque en vol. Si les forces extérieures qui s'y appliquent sont données, les lois de la balistique nous assurent qu'il suffit de connaître la position et la vitesse de la boule de pétanque à l'instant  $t$  — représentant l'état — pour calculer précisément sa position et sa vitesse aux instants suivants.

Or, ce qui semble évident dans les exemples usuels l'est moins pour certains processus qui sont appelés *systèmes héréditaires*. Pour éviter le champ purement mathématique, il convient de se tourner vers les domaines de la biologie<sup>9</sup>. Le cycle de vie de la sauterelle, comme chez de nombreux insectes, est caractérisé par une phase de vie adulte, pendant laquelle elle se reproduit, qui ne dure que quelques semaines tandis que sa phase larvaire — entre l'éclosion des œufs et la métamorphose en adulte — peut durer de 5 à 13 ans suivant l'espèce envisagée. Ainsi, la population à l'instant  $t$  dépend de celle présente à l'instant  $t - \tau$  où  $\tau$  représenterait, ici, le retard qui se compterait en année. De même, les démographes, qui doivent prédire la population d'un pays dans le futur, se frottent au phénomène du retard. Le taux global de fécondité d'une population à l'instant présent repose sur les individus qui sont nés les années précédentes. Pour ces systèmes à *retard*, l'état n'est plus un ensemble fini de valeurs mais une *fonction* définie sur un intervalle de la longueur du retard.

Un retour au champ mathématique permettra d'éclaircir ce dernier point. La croissance continue d'une population animale — comme nos sauterelles — peut se modéliser mathématiquement, en première approximation, par l'équation à retard suivante :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{N_e} \right).$$

$N(t)$  représente l'effectif de la population à l'instant  $t$ ,  $r$  le taux de fécondité,  $\tau$  le retard qui peut aller jusqu'à 13 ans dans le cas des sauterelles et  $N_e$  la population d'équilibre définie par les ressources disponibles dans l'environnement. En termes simples, nous pourrions dire que

---

<sup>8</sup>Le terme *équation* peut être compris comme la modélisation d'un système sous forme d'égalités mathématiques et le terme *différentielle* prend en compte l'évolution de ce système en fonction du temps.

<sup>9</sup>Les exemples qui suivent sont tirés de l'article "Du retard au...chaos" de la revue *Science et Vie Micro* de juin 1994.



---

la dérivée  $\dot{N}$  représente le taux d'évolution du nombre de sauterelles  $N$  en fonction du temps. Si  $N(t - \tau) > N_e$  — c'est-à-dire si le nombre de sauterelles il y a  $\tau$  années était supérieur à celui d'équilibre — alors la population diminue car  $\dot{N} < 0$  et inversement.

Une telle équation peut s'écrire de manière plus générale sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)),$$

où  $f$  est une fonction qui dépend de la valeur de  $x$  à l'instant  $t$  et  $t - \tau$ . Mais simplifions encore l'équation<sup>10</sup> :

$$\dot{x}(t) = -x(t - 1),$$

où  $x(t)$  représente un nombre réel évoluant suivant la variable réelle  $t$  qui représente le temps et 1 détermine la valeur du retard.  $x$  varie donc en fonction de la valeur qu'il prenait à l'instant  $t - 1$ . Essayons de résoudre cette équation qui semble apparemment simple. La dérivée  $\dot{x}$  en  $t = 0$  est égale à la valeur de  $x$  en  $t = -1$ . Il nous faut donc connaître la valeur de  $x$  en  $t = -1$  pour résoudre notre équation. Nous pouvons raisonner de la même façon pour tous les temps  $t$  contenus dans l'intervalle  $[-1, 0]$ . Il est alors clair que nous avons besoin de la connaissance de  $x$  sur l'intervalle  $[-1, 0]$  pour obtenir la résolution de cette équation sur l'intervalle  $]0, 1]$ .

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, la donnée d'une équation (différentielle) et d'un vecteur (caractérisant les conditions initiales) ne suffit pas pour trouver une solution; il faut y ajouter *une infinité de points* qui décrivent un segment particulier de la largeur du retard étudié, c'est-à-dire, ici, le segment  $[-1, 0]$  de longueur 1. C'est en cela que les systèmes à retards font partie de la classe plus générale des systèmes à dimension infinie<sup>11</sup>, ce qui rend complexe leur étude.

Nous avons entamé la résolution de cette équation différentielle par la méthode dite "pas à pas" : il s'agit de chercher des solutions sur des intervalles de la longueur du retard, c'est-à-dire de type  $[k\tau, (k + 1)\tau]$  où  $k$  représente un entier naturel non nul et  $\tau$  le retard — valant 1 dans notre exemple. Cette méthode fut présentée dans [R. Bellman, 1965]. D'autres ont montré qu'elle restait aussi valable pour les retards variables, à condition que le retard ne s'annule jamais — [El'sgol'ts et Norkin, 1973].

---

<sup>10</sup>Dans [Marshall et al., 1992], entre autres, les auteurs traitent de cet exemple classique pour une classe d'équation de la forme  $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$  où  $\tau$  est une constante réelle représentant le retard.

<sup>11</sup>La *dimension* d'un système représente la dimension du vecteur représentant l'état du système. La dimension du vecteur état est le nombre de grandeurs utilisées pour décrire les caractéristiques du système en question. Par exemple, le système {avion} peut être de dimension 6, si nous faisons un choix drastique, en prenant un vecteur d'état avec 3 composantes représentant les coordonnées du centre de gravité de l'avion et 3 composantes pour caractériser les angles de rotation de l'avion autour de son centre de gravité.

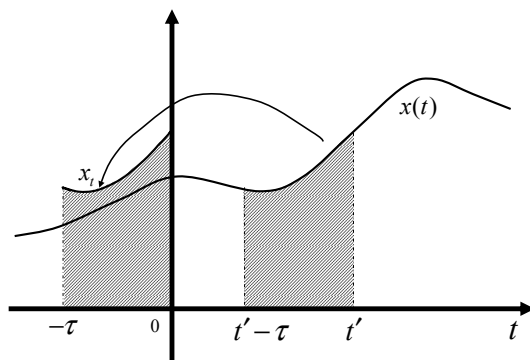
## Le choix de l'espace de travail

**Sur le choix de l'état.** Prenons une équation fonctionnelle générique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $t$  est un réel positif représentant le temps,  $x$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}$  représente la dérivée par rapport au temps de  $x$ ;  $x_t$  et  $\varphi_0$  sont des fonctions de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est une fonctionnelle. Nous allons tenter de définir ces termes. Notons que l'égalité  $x_{t_0} = \varphi_0$  définit les conditions initiales du problème à l'instant  $t_0$ .

La vision généralement adoptée consiste à 'ramener' les valeurs que prend le vecteur  $x$  pendant un temps  $\tau$  sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ ,  $\tau$  représentant le retard. Observons la figure 2.



**Figure 2** – Chaque segment de longueur  $\tau$  est vu sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$

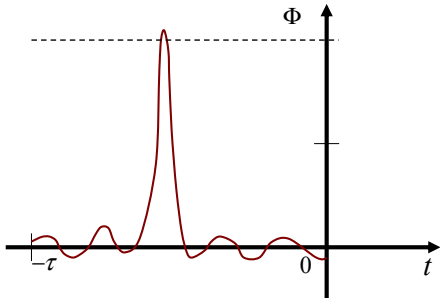
L'idée consiste à 'couper' chaque tranche de la courbe pour la 'ramener' sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ . Si l'on parcourt le chemin en sens inverse, on définit alors une fonction — représentant l'état du système — qui prend ses valeurs sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  et coïncide avec  $x$  'à l'arrivée'. En langage mathématique, cette fonction est notée  $x_t(\cdot)$ <sup>12</sup> et se définit par  $x_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  pour tout réel  $\theta$  variant dans  $[-\tau, 0]$ . Ainsi, le système est vu comme évoluant dans l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Une solution du système (1) est notée  $x(t; t_0, \varphi_0)$  pour faire apparaître explicitement les conditions initiales<sup>13</sup>.

Nous comprenons à présent que  $f$ , définie dans l'équation (1), est une fonction qui admet comme variables un réel  $t$  et une autre fonction,  $x_t$ . C'est donc une "fonction de fonction" que nous appelons *fonctionnelle*.

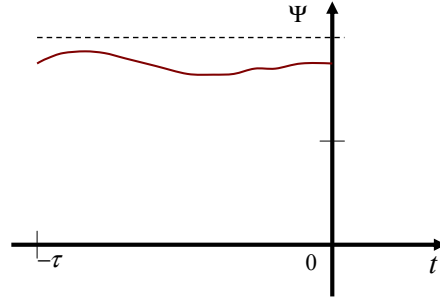
<sup>12</sup>Notation proposée dans [Shimanov, 1960].

<sup>13</sup>Concernant les conditions d'existence des solutions — appelées conditions de Cauchy — le lecteur peut consulter, par exemple, l'ouvrage [Hale, 1977].

**Sur le choix de la norme.** Le lecteur néophyte pourrait se demander pourquoi nous avons besoin de définir une norme. Nous proposons alors un petit jeu. Considérons les figures 3 et 4 qui représentent deux fonctions de l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Quelle est la fonction la plus grande ?



**Figure 3 – Fonction  $\Phi$  de de l'ensemble  $\mathcal{C}$**



**Figure 4 – Fonction  $\Psi$  de l'ensemble  $\mathcal{C}$**

Pour pouvoir répondre à la question, il faut bien entendu expliquer ce que signifie une fonction plus grande qu'une autre. Une norme servant à définir une distance, c'est l'outil qu'il nous faut introduire pour pouvoir comparer. Cela sera d'une grande importance lorsque nous aborderons les notions de stabilité puisque nous devons évaluer la distance qui sépare la trajectoire du système au point d'équilibre.

L'état étant un élément de l'ensemble  $\mathcal{C}$ , comme nous l'avons vu précédemment, il convient de définir une norme pour cet espace. La norme d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}$  s'écrit alors

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Fort de cet outil, nous pouvons désormais répondre à la question de départ ; la fonction  $\Phi$  est plus grande que la fonction  $\Psi$  au sens de la norme présentée. Mais si nous introduisons une norme différente, par exemple,  $\|\varphi\|_i = \int_{-\tau}^0 \|\varphi\| dt$  ; alors c'est la fonction  $\Psi$  qui est plus grande que la fonction  $\Phi$  !

**Remarque 0.1.** *Cet exemple illustre le fait qu'en dimension infinie toutes les normes ne sont pas équivalentes. Il n'est donc pas forcément évident de choisir cette norme plutôt qu'une autre. C'est un choix délibéré qui doit être fait en fonction du problème étudié.*

## La stabilité, une notion physique

Il n'est pas dans notre objectif, dans cette introduction, de décrire entièrement les notions de stabilité mais simplement d'en donner l'idée générale. Les lecteurs pourront se référer à

l'ouvrage [Krasovskii, 1963] concernant les techniques basées sur les méthodes de Lyapunov<sup>14</sup>, que nous détaillons quelque peu dans le chapitre 1, ainsi qu'aux références citées précédemment.

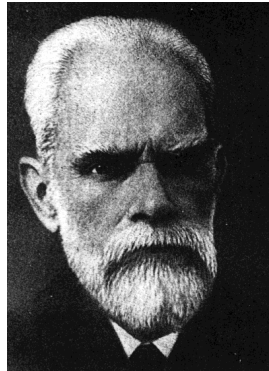


Figure 5 – Portrait d'Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918)



Figure 6 – Portrait de Nikolaï Krasovskii (1924-)

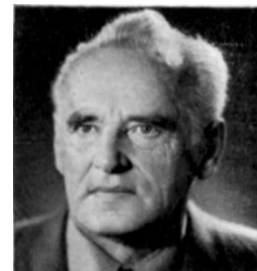


Figure 7 – Portrait de Boris Sergeevich Razumikhin

Bien que la notion de stabilité soit assez intuitive, le premier à avoir formulé mathématiquement cette idée est Lyapunov à la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Son nom y est depuis associé, que ce soit pour s'y référer — “stable au sens de Lyapunov” — ou pour s'en distinguer. Partant d'une position d'équilibre<sup>15</sup>, elle sera dite stable si, en s'en écartant, on en reste “proche”<sup>16</sup>. C'est, par exemple, ce que nous observons sur les montagnes russes d'une fête foraine. Imaginons qu'aucune force ne soit appliquée sur le chariot et qu'il se trouve dans un creux de la montagne : cette position serait alors une position d'équilibre stable puisqu'un léger mouve-

---

<sup>14</sup>Tous nos travaux étant basés sur les méthodes de Lyapunov, il nous semble important de lui redonner forme humaine en joignant son portrait, figure 5.

<sup>15</sup>Cette notion, qui fait partie du langage courant, peut bien sûr se définir mathématiquement.

<sup>16</sup>La définition exacte de la stabilité sera donnée dans le chapitre 1.

---

ment du chariot ne provoquerait qu'un faible déplacement de ce dernier. Par contre, il semble naturel, pour tout un chacun, qu'un léger mouvement en haut de la montagne déstabilise le chariot et entraîne une irrémédiable descente pour le plaisir du plus grand nombre. Une bosse est donc un point d'équilibre instable et un creux, stable, bien que plus ennuyeux...

Pour permettre d'étudier mathématiquement la stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov généralise la notion d'énergie et regarde l'évolution de cette dernière. Pour notre chariot sur son manège, l'énergie serait, par exemple, la somme de l'énergie potentielle due à la gravitation de la terre et de l'énergie cinétique liée au mouvement du chariot.

Pour en revenir aux systèmes à retards, deux hommes ont permis de généraliser l'idée de Lyapunov au cas des équations différentielles fonctionnelles et ont aussi rattaché leur nom à la théorie. Il s'agit de Krasovskii et de Razumikhin, présentés sur les figures 6 et 7. De nombreuses avancées furent ajoutées par la suite à cette base, comme nous le verrons tout au long de ce mémoire.

## Problématique : les systèmes à retards non linéaires et perturbés

Bien que l'intérêt de la communauté scientifique pour l'étude des systèmes à retards soit assez récent — environ un demi-siècle —, de multiples pistes ont déjà été explorées en profondeur. Les nouvelles pistes se font donc rares et demandent une spécialisation de plus en plus importante.

Néanmoins, la recherche scientifique, et tout particulièrement la recherche en automatique, s'est toujours orientée vers des domaines pratiques et c'est souvent la *technique* — au sens large — qui suscite des exigences impliquant l'analyse de systèmes de plus en plus complexes. L'étude de modèles économiques basés sur les systèmes chaotiques<sup>17</sup> en est un exemple. Autre exemple quelque peu médiatisé, la chirurgie à distance — la *téléopération* chirurgicale — fait appel à des informations traversant un réseau de communication, donc à des retards de transmissions dépendant de la charge de ce réseau. En ce sens, la stabilité représente avant tout un enjeu de sécurité et ses différentes modulations correspondent à des critères de performances différentes.

L'approximation par des modèles linéaires a permis l'obtention de de résultats pratiques qu'on estimait suffisants ; il n'en va plus de même aujourd'hui où le souci de performances est de plus en plus exigeant. A l'étude des systèmes linéaires avec, éventuellement, des retards

---

<sup>17</sup>Un système chaotique est un système qui peut donner deux états finaux complètement différents même si on part de deux états initiaux très proches. Le papillon de Lorenz en a popularisé la légende.

variables, se rajoute donc l'étude des systèmes non linéaires dans le but de se rapprocher suffisamment de la réalité physique<sup>18</sup>. A tout cela nous pouvons ajouter, cerise sur le gâteau, l'étude des perturbations — éléments extérieurs au système étudié, non seulement indésirables, mais aussi la plupart du temps imprévisibles. Il est intéressant dans ces conditions de définir *d'autres formes de stabilité* et d'analyser les différentes implications théoriques sur des systèmes de plus en plus complexes.

La **problématique** de cette thèse est donc la suivante : *que peut-on garantir lorsqu'on étudie des systèmes qui sont à retards, non linéaires et soumis à des perturbations pouvant être importantes ?*

Bien que la situation puisse apparaître extrêmement ardue, nous pouvons la tempérer par deux considérations :

- 1) nous ne traiterons pas toujours du cas le plus désavantageux,
- 2) les travaux réalisés dans le cas des systèmes non retardés seront une source d'inspiration constante.

Dans cette optique, notre travail porte essentiellement sur la stabilité dont quatre formes sont explorées dans les chapitres qui suivent. Nous pouvons résumer en quelques traits les principales contributions de ce mémoire dans le tableau qui suit<sup>19</sup>.

SES	- Approche originale par des fonctionnelles de type Lyapunov-Krasovskii - Critère de stabilité développé <i>via</i> la forme descripteur, cas des retards variables
STF	- Nouvelle théorie : extension de résultats proposés pour les équations sans retards - Critère de stabilité des systèmes non linéaires - Stabilisation dans le cas linéaire avec un retard pur sur l'entrée
SEE	- Synthèse des premiers travaux sur le sujet - Notion de fonctionnelle de Lyapunov-Sontag - Condition suffisante de stabilité des systèmes non linéaires à retards - Relation avec la stabilité exponentielle et étude par décomposition
SP	- Définition et critère de stabilité pour des systèmes non linéaires - Application à la résolution du problème de la réticence dans la CMG

Abordons, pour conclure, la structure de ce mémoire.

---

<sup>18</sup>Rappelons à ce propos, suivant les cours de M. Jean-Pierre Richard, Professeur à l'École Centrale de Lille, qu'aucun système physique n'est linéaire.

<sup>19</sup>SES stabilité entrée-sortie, STF stabilité en temps fini, SEE stabilité entrée-état et SP stabilité pratique.

---

## Sommaire général

Dans un premier temps, essentiellement dans **le chapitre 1**, nous aborderons le problème général de la stabilité pour mettre en place les bases nécessaires à la compréhension de nos travaux. Il s’agira donc de définir, dans le cas des systèmes à retards, les notions générales de stabilité au sens de Lyapunov et de rappeler quelques résultats existants. Puis nous discuterons de la stabilité entrée-état pour des systèmes *sans retard* qui, comme nous le verrons, est un puissant outil pour aborder la problématique des systèmes non linéaires sous perturbations.

Ensuite, dans **le chapitre 2**, nous analyserons la stabilité entrée-sortie des systèmes à retards. Cette étude succincte, sera essentiellement l’occasion de décrire une approche intéressante : l’utilisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii *via* le “modèle descripteur”.

Dans **le chapitre 3**, nous définirons la stabilité en temps fini d’un système à retard. Le chapitre sera partagé en deux, une partie traitera du problème de la stabilité en temps fini — et nous verrons les difficultés de cette étude — une autre, permettra de contourner le problème en traitant la stabilisation des systèmes qui présentent un retard seulement sur la commande. Quelques exemples illustreront la viabilité des résultats présentés.

**Le chapitre 4** sera entièrement dévolu à la stabilité entrée-état des systèmes à retards. Le chapitre intégrera le cas le plus contraignant de la problématique de ce mémoire : les systèmes non linéaires perturbés et à retards. Ce domaine étant encore peu exploré par la communauté scientifique, nous prendrons soin d’harmoniser les quelques contributions qui existent à l’heure actuelle et d’unifier les différentes approches. Ensuite, nous proposerons de caractériser des systèmes à retards stables entrée-état par des fonctionnelles de type Lyapunov-Krasovskii que nous expliciterons. Enfin, nous analyserons les liens entre la stabilité exponentielle et la stabilité entrée-état.

Dans **le chapitre 5**, nous aborderons un sujet bien connu de la communauté internationale, le problème de la réticence dans la commande par modes glissants<sup>20</sup>. Nous proposerons une stratégie de lissage de la commande pour éviter le problème de la réticence pour les systèmes retardés. Cela ne se fera pas sans conséquence, le système soumis à cette nouvelle loi de commande sera alors “pratiquement stable”, stabilité que nous expliciterons et caractériserons dans un sens énergétique. De nombreuses simulations seront présentées pour souligner les tenants et aboutissants de cette approche.

Enfin, nous conclurons sur ce travail de thèse et nous soulignerons les pistes qu’il permet d’ouvrir.

---

<sup>20</sup>Cette commande et ses principales caractéristiques seront présentées dans le chapitre 5.

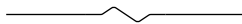
# A propos de la stabilité

*Mais maintenant que je te tiens, je peux poursuivre le récit à ma convenance, c'est-à-dire sans plus de stratagèmes. Il n'y aura désormais plus de mystères, et tu connaîtras vingt pages à l'avance le dénouement de chaque intrigue ; et, pour commencer, je te révélerai celui de toute l'histoire.*

— Tchernychevski<sup>1</sup>

---

LA stabilité est au cœur même de la problématique de notre discipline<sup>2</sup>. L'étendue de données que recouvre ce terme impose de faire des choix dans ce chapitre. Nous avons donc pris soin de ne présenter *que* les points qui nous seront utiles pour la suite de notre mémoire. Il conviendra, dans un premier temps, de revenir sur les définitions liées à la stabilité des systèmes à retards ainsi que *les méthodes de Lyapunov* qui nous concernent. Ensuite, nous montrerons en quoi ces méthodes peuvent être insuffisantes dans certaines conditions et nous concluerons sur la nécessité d'aborder d'autres formes de stabilité. Nous prendrons alors soin d'analyser, dans le cas non retardé, la notion de *stabilité entrée-état*. Les bases de cette théorie seront abordées dans le cadre général des systèmes non linéaires et perturbés. Nous conclurons en montrant l'intérêt de définir et d'analyser des notions nouvelles de stabilité des systèmes à retard.



## 1.1 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes à retards

Comme souligné dans l'introduction générale, la formalisation du concept de stabilité n'est pas aussi ancienne que nous pourrions le penser de prime abord. Deux voies ont été explorées plus ou moins parallèlement : une approche temporelle et une autre fréquentielle. Dans le

---

<sup>1</sup>Nicolai Tchernychevski (auteur russe du 19e siècle), *Que faire ?*, Éditions des Syrtes, Paris, 2000, p. 27.

<sup>2</sup>Le lecteur pourra se référer à l'annexe A sur l'histoire de l'automatique.



cadre de cette thèse, nous nous plaçons par rapport à la première approche et délaissions la deuxième qui, de plus, trouve ses limites lorsqu'un modèle linéarisé n'est pas disponible. L'approche temporelle se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes non linéaires car il ne nous est pas nécessaire de disposer de la notion des pôles<sup>3</sup> ni de connaître précisément la trajectoire des solutions. Il est très rare de connaître l'expression formelle des trajectoires dans le cas de systèmes non linéaires de dimension supérieure à deux<sup>4</sup>.

Pour vérifier la convergence d'une trajectoire vers un équilibre donné, il suffit d'étudier l'évolution de la distance séparant le point courant de cet équilibre. C'est sur ce principe que sont basées les *première et seconde méthodes de Lyapunov* dans lesquelles on considère des distances généralisées appelées *fonctions de Lyapunov*. Dans le cas des systèmes à retards, la différence revient dans le choix des distances utilisées, c'est-à-dire la recherche d'une fonction ou d'une fonctionnelle de Lyapunov dont on pourra montrer la décroissance vers zéro.

### 1.1.1 Définitions

La *stabilité* d'un point d'équilibre d'un système — *cf.* figure 1.1 — avec ou sans retards, consiste toujours à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage — le domaine de stabilité. La *stabilité asymptotique*, en plus de garantir la condition précédente, indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre, au bout d'un temps éventuellement infini, si on s'en écarte 'légèrement'. Notons que la notion de stabilité asymptotique est la plus exigée en pratique. Ceci s'explique certainement parce qu'elle constitue une première approche pouvant s'adapter à plusieurs situations — précision d'un suivi d'équilibre, poursuite d'une trajectoire de référence, etc. Elle ne présente pas pour autant le cahier des charges le plus strict : la *stabilité exponentielle* la complète en exigeant non seulement le caractère asymptotique mais aussi la rapidité de convergence — *cf.* figure 1.2.

Venons-en au langage mathématique. Soit le système retardé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x$  est une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , localement lipschitzienne en son second argument et telle que  $f(t, 0) \equiv 0$  quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ . Nous rappelons que  $\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des fonctions continues de  $[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{C}_a$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{C}$ , telles que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_a$ ,  $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} \leq a$ , où  $a$  est un réel positif.

---

<sup>3</sup>Les pôles d'un système sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert qui le représente.

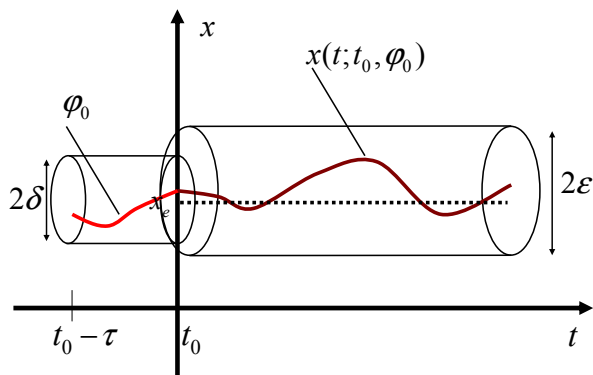
<sup>4</sup>D'où la prolifération des méthodes numériques pour résoudre les équations.

**Définition 1.1** ([Hale et Verduyn-Lunel, 1993]). *L'origine du système (1.1) est dite :*

- **stable**<sup>5</sup> si,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  tel que :

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta \implies \|x(t; t_0, \varphi_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.2)$$

- **uniformément stable** si,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$ , indépendant de  $t_0$ , tel que la condition (1.2) soit satisfaite.



**Figure 1.1** – Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

Ces définitions, bien que formelles, nous semblent assez naturelles et familières. Néanmoins, nous aimerions insister sur la difficulté de l'étude dans le cas des systèmes à retards. Le comportement d'une solution peut dépendre de l'instant initial choisi. Un équilibre peut, par exemple, être instable pour un instant initial donné et stable pour un autre. Certains auteurs ont donc tenté de définir la stabilité autrement pour éviter ce genre de désagrément : quelques-uns garantissent les conditions énoncées ci-dessus pour tous les instants initiaux (par exemple [Yoshizawa, 1966] et [Burton et Hatvani, 1990]) et d'autres, sur un intervalle de temps fini [Grujić, 1975].

**Définition 1.2** ([Hale et Verduyn-Lunel, 1993]). *L'origine du système (1.1) est dite :*

- **asymptotiquement stable** si elle est stable et s'il existe  $b_0(t_0) > 0$  tel que :

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < b_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, \varphi_0) = 0,$$

- **uniformément asymptotiquement stable** si elle est uniformément stable et s'il existe  $b_0 > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe un  $T(\eta)$  de telle sorte que :

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < b_0 \implies \|x(t; t_0, \varphi_0)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

<sup>5</sup>Sans perte de généralité, nous pouvons restreindre l'étude à la stabilisation à l'origine — si le point d'équilibre est non nul, un simple changement de variable peut le ramener à l'origine.

- *globalement uniformément asymptotiquement stable* si la condition précédente est vraie quelle que soit  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ .

**Définition 1.3** ([Kolmanovskii et Myshkis, 1992]). *L'origine du système (1.1) est dite **exponentiellement stable** s'il existe trois constantes positives  $a, b$  et  $\delta$  — qui éventuellement dépendent de  $t_0$  — telles que*

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta \implies \|x(t; t_0, \varphi_0)\| < a \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} e^{-b(t-t_0)}.$$

*La propriété est uniforme si  $a, b$  et  $\delta$  ne dépendent pas du temps  $t_0$ .*

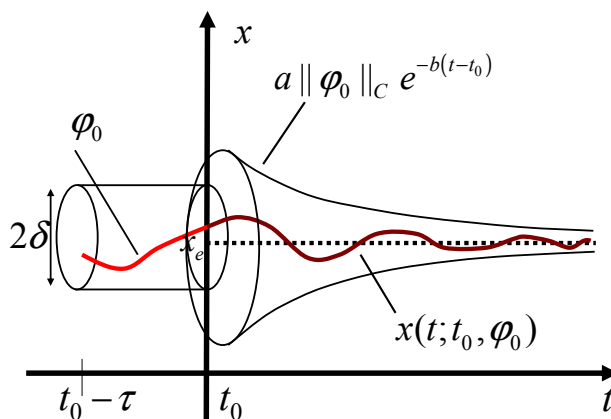


Figure 1.2 – Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

### 1.1.2 Caractérisation par des gains non linéaires

Nous présentons ici des caractérisations par des gains non linéaires des définitions proposées ci-dessus car elles nous seront utiles dans l'ensemble de ce mémoire. Afin de simplifier leur écriture, nous introduisons quelques définitions — désormais usuelles — pour l'étude des systèmes non linéaires que nous utiliserons fréquemment par la suite.

**Définition 1.4** ([Khalil, 2002]).

- Une fonction continue  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ , où  $a$  est un réel positif, est dite de **classe  $\mathcal{K}$**  si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Elle sera dite de **classe  $\mathcal{K}_\infty$**  si  $a = \infty$  et  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

- Une fonction continue  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de **classe  $\mathcal{KL}$**  si, pour  $s$  fixé, la fonction  $\beta(\cdot, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$  par rapport à la première variable et si, pour  $r$  fixé, la fonction  $\beta(r, \cdot)$  est décroissante par rapport à la deuxième variable avec  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow \infty$ .

Ce qui nous permet de formuler le lemme suivant :

**Lemme 1.1.** *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est :*

- *uniformément stable si, et seulement si, il existe une fonction  $\alpha(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  et une constante positive  $c$ , telles que :*

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \alpha(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}), \quad \forall t \geq 0, \forall \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < c,$$

- *uniformément asymptotiquement stable si, et seulement si, il existe une fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une constante positive  $c$ , telles que :*

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < c, \quad (1.3)$$

- *globalement uniformément asymptotiquement stable si la condition précédente est vraie quelle que soit  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ .*

**Preuve.** Le lecteur pourra se référer à [Khalil, 2002, Appendice C.5]. ■

### 1.1.3 Critères temporels

Nous allons aborder les théorèmes liés à la stabilité des systèmes en présentant ceux qui sont les plus couramment utilisés et qui nous serviront de base de départ pour les travaux présentés dans les chapitres futurs. Ces résultats ont été exposés et mis en pratique, pour la plupart, au début de la deuxième moitié du 20<sup>e</sup> siècle ([Razumikhin, 1956, Krasovskii, 1963] ou encore [Halanay, 1966, El'sgol'ts et Norkin, 1973] et [Hale, 1977]). Deux théories, désormais usuelles dans le cas des systèmes à retards, nous intéressent particulièrement : la méthode de *Lyapunov-Krasovskii* qui utilise des fonctionnelles de Lyapunov et la méthode de *Lyapunov-Razumikhin* qui emploie des fonctions de Lyapunov classiques.

Mais avant de les aborder, précisons à nouveau quelques définitions :

- Une fonctionnelle  $V(\cdot)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  est dite définie positive s'il existe une fonction scalaire  $\omega$  vérifiant  $\omega(\theta) > 0$  pour  $\theta > 0$  et  $\omega(0) = 0$ , telle que  $V(t, \varphi) \geq \omega(\|\varphi(0)\|)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathbb{R}$ .

– Nous noterons

$$D^+V(t, x_t) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}) - V(t, x_t)}{\Delta t},$$

qui représente la dérivée supérieure à droite de  $V$  le long des trajectoires de (1.1). Mathématiquement, cette dérivée est appelée “dérivée de Dini” de  $V$ .

**Remarque 1.1.**

- 1) Nous aimerions attirer l'attention du lecteur sur la définition de  $D^+V$  qui est communément appelée dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système étudié. Nous verrons dans le chapitre 4 qu'il est possible de choisir d'autres formes de dérivation plus appropriées pour certaines démonstrations mais gardant les mêmes propriétés.
- 2) La notation  $\limsup$  se nomme “limite supérieure” et présente le grand avantage d'exister dans tous les cas (éventuellement infini). Par exemple, la suite  $u_n = (-1)^n$  n'admet pas de limite au sens usuel mais  $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ . En effet, la suite des nombres pairs converge vers 1 et aucune sous-suite de  $u_n$  ne converge vers une valeur plus grande que 1. La fonction  $\cos(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  n'admet pas de limite au sens usuel mais  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \cos(x) = 1$ . Bien sûr, si la fonction admet une limite, la limite supérieure et la limite sont confondues.

**1.1.3.1 L'approche de Lyapunov-Krasovskii**

**Condition suffisante** Cette technique est une extension des fonctions usuelles de Lyapunov à des fonctionnelles vérifiant certaines propriétés et qui décroissent le long des trajectoires du système étudié. De telles fonctionnelles sont appelées *fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii* et généralisent la deuxième méthode de Lyapunov aux systèmes de type retardé.

**Théorème 1.2 ([Krasovskii, 1963]).** *S'il existe une fonctionnelle  $V$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , définie positive, telle que  $D^+V(t, \varphi) \leq 0$  le long des trajectoires de (1.1) alors la solution nulle de (1.1) est stable.  $V$  est alors dite **fonctionnelle de Lyapunov**.*

---

Une version de ce théorème est donnée pour le cas autonome<sup>6</sup> par Hale. Nous la proposons ici car elle nous sera utile dans le chapitre 3 pour démontrer le théorème 3.2 qui y sera présenté.

---

<sup>6</sup>Une équation est dite autonome si le temps  $t$  n'intervient pas explicitement dans les variables de la fonction étudiée.

**Théorème 1.3 ([Hale et Verduyn-Lunel, 1993]).** *Considérons le système autonome :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonctionnelle continue telle que  $f(0) = 0$ . Supposons que les solutions  $x_t(\varphi_0)$  du système (1.4) sont continues quel que soit  $\varphi_0$ . S'il existe une fonctionnelle continue  $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction  $\alpha_1$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et une fonction  $\alpha_2$  définie positive telles que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}$ ,

- 1)  $V(\varphi) \geq \alpha_1(\|\varphi(0)\|)$ ,
- 2)  $D^+V(\varphi) \leq -\alpha_2(\|\varphi(0)\|)$ ,

alors l'origine du système (1.4) est asymptotiquement stable.

Enfin, nous présentons le théorème le plus largement utilisé dans l'étude de la stabilité des systèmes à retards.

**Théorème 1.4 ([Kolmanovskii et Myshkis, 1992]).** *Soient  $\alpha_1, \alpha_2$  deux fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et  $\alpha_3$  une fonction continue positive et croissante de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Supposons qu'il existe une fonctionnelle  $V(t, \varphi) : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que*

- 1)  $\alpha_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$ ,
- 2)  $D^+V(t, \varphi) \leq -\alpha_3(\|\varphi(0)\|)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  le long des trajectoires de (1.1).

Alors, la solution nulle du système retardé (1.1) est uniformément asymptotiquement stable. Si, de plus,  $\alpha_3$  est de classe  $\mathcal{K}$ , alors la solution nulle est globalement uniformément asymptotiquement stable.

L'approche de Lyapunov-Krasovskii est très souvent utilisée pour prouver la stabilité d'un système retardé. La principale difficulté reste néanmoins de trouver une fonctionnelle qui vérifie les hypothèses du théorème, en particulier les conditions de décroissance sur la dérivée de  $V$ . Cela demande une pratique, de l'expérience, voire de l'intuition. Dans le cas d'un système linéaire, cette méthode conduit à résoudre un problème de Riccati ou de LMI (*Linear Matricial Inequality*, [Boyd et al., 1994]) comme nous le verrons dans le chapitre 2.

**Condition nécessaire** La question, dans ce paragraphe, est de savoir si le système étudié admet une fonctionnelle vérifiant certaines conditions quand elle possède des propriétés de stabilité. Ce problème fut résolu dans [Krasovskii, 1963] où l’auteur montre que les systèmes de la forme (1.1) sont asymptotiquement stables *si, et seulement si*, ils possèdent une fonctionnelle de type Lyapunov-Krasovskii avec des hypothèses néanmoins plus sévères. C’est l’une des grandes forces de cette approche, elle donne la possibilité d’obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser la stabilité. Nous parlerons dans ce cas de “théorème réciproque”. Nous proposons de détailler deux points particuliers qui nous serviront dans les chapitres futurs.

Kharitonov a développé des résultats pour construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Cette approche sera utilisée dans le chapitre 5.

**Théorème 1.5 ([Kharitonov et Zhabko, 2003]).** *Si le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (1.5)$$

*où  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées et  $\tau$  un retard constant, est asymptotiquement stable alors la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta)Ax(t + \theta)d\theta, \\ & + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta_2)A^T \int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2)Ax(t + \theta_1)d\theta_1d\theta_2 \\ & + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta)[(\tau + \theta)R_1 + W_1]x(t + \theta)d\theta, \end{aligned}$$

où

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) [W_0 + W_1 + \tau R_1] K(t + \tau)dt,$$

*et  $W_0$ ,  $W_1$  et  $R_1$  sont des matrices définies positives, est une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour le système (1.5).*

Dans l’expression de  $U$ ,  $K(t)$  représente la matrice fondamentale du système (1.5), c’est-à-dire la matrice solution de l’équation différentielle retardée  $\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - \tau)$  avec les conditions initiales  $K(0) = I_n$  et  $K(t) = 0$  pour  $t < 0$  — [Kharitonov et Zhabko, 2003].

Le second résultat que nous présentons ci-dessous démontre l’existence d’une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii quand la solution nulle du système étudié est exponentiellement stable. Ce résultat nous sera utile pour certaines démonstrations du chapitre 4 qui traite de la stabilité entrée-état des systèmes à retards.

Considérons le système (1.1), la fonction  $f$  étant localement lipschitzienne (uniformément en  $t$ ), nous noterons par  $\ell > 0$  sa constante de Lipschitz (indépendante de  $t$ ); *i.e.* pour tout  $x_t, y_t \in \mathcal{C}_a$  et quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|f(t, x_t) - f(t, y_t)\| \leq \ell \|x_t - y_t\|_{\mathcal{C}}.$$

Le théorème réciproque fut présenté dans [Krasovskii, 1963, Lemme 33.1] et les détails de la preuve sont explicités dans l'annexe C.

**Théorème 1.6.** *S'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que pour tout  $t \geq t_0$  et  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_{\bar{a}}$ , la solution  $x(t; t_0, \varphi_0)$  du système (1.1) satisfait la condition*

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq a \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} e^{-b(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \tag{1.6}$$

alors il existe une fonctionnelle  $V(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les conditions suivantes :

$$c_1 \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \leq V(t, \varphi) \leq c_2 \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \tag{1.7}$$

$$D^+V(t, \varphi) \leq -c_3 \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \tag{1.8}$$

$$|V(t, \varphi_1) - V(t, \varphi_2)| \leq c_4 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}}. \tag{1.9}$$

Ici,  $c_i$ ,  $i = 1..4$ , représentent des constantes positives et  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des fonctions arbitraires de  $\mathcal{C}_{\bar{a}}$ .

### 1.1.3.2 L'approche de Lyapunov-Razumikhin

Razumikhin est un mathématicien économiste qui, en conséquence, s'est toujours intéressé à l'aspect pratique des choses comme en témoigne son approche de la théorie de Lyapunov dans le cas des systèmes à retards. Pour ces derniers, le vecteur  $x(t)$  possède bien un sens physique tandis que l'état du système — noté  $x_t$  — semble plus difficile à appréhender : l'état du système est une fonction qui prend ses valeurs dans  $[-\tau, 0]$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Razumikhin chercha donc à éviter cette modélisation pour se retrouver sur des terrains plus proches du concret. Son idée consiste donc à rester dans l'espace 'habituel' — c'est-à-dire l'espace des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  — et à constater que, pour obtenir la stabilité, il n'est pas nécessaire d'avoir une condition générale qui garantisse que *toutes* les trajectoires du système tendent vers le point de convergence<sup>7</sup>, mais *seulement* celles qui ont *tendance* à s'en éloigner. Nous en donnons ci-dessous la formulation mathématique.

---

<sup>7</sup>Mathématiquement, cette condition dépend de la dérivée de la fonction/fonctionnelle de Lyapunov.



**Théorème 1.7 ([Razumikhin, 1956]).** Soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et  $\alpha_3$  une fonction définie positive. S'il existe une fonction continue  $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- 1)  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^n,$
- 2)  $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\xi(\|x(t)\|)$  pour les trajectoires de (1.1) vérifiant :

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

alors la solution nulle de (1.1) est uniformément stable.

Sous les mêmes hypothèses, s'il existe une fonction croissante  $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, p(\varpi) > \varpi$  pour  $\varpi > 0$  telle que :

- 3)  $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\xi(\|x(t)\|)$  pour les trajectoires de (1.1) vérifiant

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p[V(t, x(t))], \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

alors la solution nulle de (1.1) est uniformément asymptotiquement stable.

## 1.2 Problématique, les systèmes perturbés

Nous avons présenté les bases de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes à retards. Mais pour comprendre l'enjeu de ce chapitre, arrêtons-nous un instant sur quelques éléments essentiels.

### 1.2.1 Comportement vis-à-vis de perturbations

Prêtons attention à l'exemple qui suit [Khalil, 2002] :

**Exemple 1.1.** Soit le système :

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + (2x^2(t) + 1)u(t),$$

où  $x(t)$  et  $u(t)$  sont des fonctions scalaires. Il est évident que l'origine du système est exponentiellement stable quelles que soient les conditions initiales pour une entrée nulle  $u(t) \equiv 0$  puisque l'équation se réduit à  $\dot{x}(t) = -3x(t)$ . Maintenant, considérons le cas où  $x(0) = 2$  et  $u(t) \equiv 1$ . La résolution de l'équation différentielle donne  $x(t) = (3 - e^t)/(3 - 2e^t)$  et  $x(t)$  ne tend plus vers l'origine mais la constante  $1/2$ .

Plus surprenant encore, prenons le cas d'une entrée  $u(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}}$  et la condition initiale

$x(0) = \sqrt{2}$ . La solution s'écrit  $x(t) = \sqrt{2t+2}$  et diverge donc vers l'infini alors même que  $u(t)$  tend asymptotiquement vers 0.

Considérons maintenant que  $u(t)$  ne représente pas une entrée de commande, mais une entrée de perturbation. La stabilité asymptotique garantit que la solution restera dans un voisinage de l'origine si  $u(t)$  est suffisamment petit mais ne nous donne aucune estimation de cette borne. Dans l'exemple cité,  $u(t)$ , bien que petit pour les instants initiaux, fait diverger les solutions. C'est certainement dans les applications que ce genre de situations sont à même de se présenter. On comprend alors la nécessité de considérer la présence de perturbations additionnelles sur l'entrée, et ceci, qu'elles soient petites ou larges.

### 1.2.2 La stratégie adoptée

Aussi précise que soit la modélisation, un écart irréductible existe entre la théorie et la pratique. Cette évidence marque le début de deux philosophies pour appréhender les systèmes physiques, qui peuvent d'ailleurs être complémentaires et aboutir à des compromis. La première est la recherche d'un modèle *le plus fidèle possible* se rapprochant de la réalité comme, par exemple, la frénésie enthousiasmante de ce début de 21<sup>e</sup> siècle pour découvrir une théorie — ou modèle — expliquant l'origine de l'univers. La deuxième philosophie est celle que nous avons adoptée dans ce mémoire. Elle consiste à prendre un modèle, éventuellement peu précis, et à trouver des conditions pour lesquelles nous pourrions le considérer satisfaisant ou non. Cette idée revient donc à chercher des critères de stabilité "robuste"<sup>8</sup>.

Il nous faut donc explorer *d'autres champs* que la stabilité au sens classique de Lyapunov. C'est pourquoi nous nous sommes intéressé à quatre formes de stabilité. Néanmoins, nous ne détaillerons dans ce chapitre que l'approche de la stabilité entrée-état, les autres formes de stabilité seront détaillées dans les chapitres qui suivent. Nous faisons ce choix pour deux raisons. Premièrement, par souci de clarté car c'est la notion qui demande le plus d'attention dans ce mémoire et deuxièmement, parce qu'elle unifie mathématiquement les différentes approches du problème de la stabilité. Mais ne faisons plus attendre notre lecteur et explicitons cette dernière remarque dans la section suivante.

---

<sup>8</sup>La notion de robustesse est généralement appliquée à une commande qui permet au système bouclé de ne pas subir trop de dégradations de ses performances en présence d'éventuelles perturbations ou incertitudes.

## 1.3 Une approche possible : la stabilité entrée-état

### 1.3.1 Philosophie de l'étude

Comme nous venons de le voir, les différentes branches théoriques découlant des travaux de Lyapunov ne prennent pas en compte les entrées et les sorties du système. Les notions de stabilité développées sont des caractéristiques intrinsèques aux systèmes étudiés —  $\dot{x} = f(x)$  — où seul apparaîtrait explicitement l'état.

Pourtant, dans de nombreuses situations pratiques, l'ingénieur se trouve face à ce qu'il a coutume d'appeler communément *une boîte noire*. L'opérateur n'a la possibilité d'intervenir sur  $y$  (la sortie), qu'en manipulant  $u$  (l'entrée, *cf.* figure 1.3) pour garantir que, si l'une est bornée, l'autre le reste aussi. Il ne s'agit pas là de prétendre qu'aucune étude concrète ne puisse être faite par l'approche de Lyapunov car, pour cette dernière, il est toujours possible, entre autres, de considérer le système comme résultant d'un retour fonction de l'état, calculé au préalable. Mais considérer le modèle comme une boîte noire représentée par une relation notée  $\mathbf{H}$  reliant  $u$  et  $y$  ( $y = \mathbf{H}(u)$ ) témoigne d'une volonté d'aborder le problème d'une manière différente. C'est dans cet esprit que Zames a proposé une conception nouvelle de la stabilité des systèmes : la stabilité entrée-sortie que nous aborderons dans le chapitre suivant — [Zames, 1966a] et [Zames, 1966b].

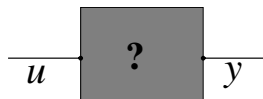


Figure 1.3 – Schématisation d'une boîte noire

Ces deux approches différentes d'un même problème ont chacune abouti parallèlement à de nombreuses applications dont la liste est aujourd'hui innombrable. Sontag fut le premier à les réunir dans une synthèse exposée dans son article [Sontag, 1989] et détaillée dans [Sontag, 1990]. L'idée consiste donc à définir une notion de stabilité qui reprend le thème de la stabilité au sens de Lyapunov tout en tenant compte des entrées du système étudié. La *stabilité entrée-état* expose la somme de ces deux approches différentes : une stabilité dépendant de l'état du système — donc au sens de Lyapunov — et une autre dépendant de l'entrée — donc au sens de Zames. Autrement dit, la stabilité entrée-état, c'est, premièrement, une stabilité asymptotique globale du point d'équilibre du système étudié pour une entrée nulle, et deuxièmement, un état borné pour une entrée bornée.

Nous pouvons à présent aborder les détails mathématiques.

### 1.3.2 Présentation générale

Comme nous souhaitons, dans ce mémoire, étendre quelques résultats développés dans le cas non retardé au cas qui nous intéresse — c'est-à-dire l'étude des systèmes à retards — il nous paraît intéressant ici de détailler la stabilité entrée-état et ses principales caractéristiques. La clé de voûte de cette théorie est la prise en compte des perturbations symbolisées par  $u$ , qu'il ne faut pas voir comme une entrée de commande. En ce sens, la stabilité entrée-état est principalement utile dans le cas des systèmes **non linéaires**, puisque dans le cas linéaire, les notions de stabilité 'entrée-sortie' et stabilité 'asymptotique (globale)' sont équivalentes sous certaines hypothèses.

Dans ce paragraphe, l'entrée  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est considérée comme localement mesurable et essentiellement bornée<sup>9</sup>. La norme essentielle supérieure de  $u(t)$  sera notée  $|u(t)|_\infty = \text{ess sup}_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|$  ou plus simplement  $|u|_\infty$  quand aucune confusion n'est possible.

Avant d'en arriver à la définition de la stabilité entrée-état, nous aimerions ici en montrer la cohérence avec les inégalités qu'il est possible d'obtenir dans le cas linéaire ([Sontag, 2000]). Précisément, pour un système linéaire,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées, la solution générale s'écrit :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Si la matrice  $A$  est de Hurwitz<sup>10</sup> alors  $\|e^{At}\| \leq ce^{-rt}$ , où  $c > 0$  et  $r > 0$  sont des réels choisis judicieusement. Nous pouvons ainsi majorer  $x$  :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c \|x(0)\| e^{-rt} + \int_0^t ce^{-r(t-s)} \|B\| \|u(s)\| ds \\ &\leq c \|x(0)\| e^{-rt} + \frac{c \|B\|}{r} |u|_\infty, \end{aligned}$$

et réécrire la dernière égalité sous la forme

$$\|x(t)\| \leq c \|x(0)\| e^{-rt} + k |u|_\infty, \tag{1.10}$$

pour  $k > 0$  une constante appropriée.

Cette dernière inégalité montre, d'une part, que l'équilibre  $x = 0$  du système pour une entrée  $u$  nulle est exponentiellement stable et, d'autre part, que quelle que soit l'entrée bornée  $u$ ,

<sup>9</sup>Cette propriété est vérifiée par toutes les fonctions qu'il est possible de trouver dans la pratique, c'est la condition minimale pour pouvoir parler de norme, donc de *mesurer* des distances.

<sup>10</sup>Une matrice de Hurwitz est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négatives.

l'état reste borné. Il est néanmoins clair, comme montré dans l'exemple 1.1, que ces caractéristiques ne sont pas toujours vraies dans le cas des systèmes non linéaires.

L'idée consiste alors à donner une version raisonnable de cette inégalité dans le cas non linéaire. Nous aboutissons donc à deux points centraux de la stabilité entrée-état :

- utiliser des gains non linéaires plutôt que des estimés linéaires,
- ne pas chercher la valeur exacte des gains mais plutôt s'interroger sur la question qualitative<sup>11</sup> de leur existence.

Nous aimerions ici attirer l'attention du lecteur sur un point important. Pour la suite, nous partons du principe suivant, sur lequel repose le travail qui va suivre :

**Principe 1.1.** *Les notions de stabilité devraient être invariantes sous un changement statique (non linéaire) de variables.*

Par *changement de variable statique* dans  $\mathbb{R}^n$ , nous entendons ici n'importe quelle transformation  $x = T(z)$  avec  $T(0) = 0$ , où  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme dont la restriction à  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  est un difféomorphisme. Regardons à présent quelles relations peuvent découler de l'inégalité (1.10) par suite de changements de variables non linéaires. Posons :  $x = T(z)$ ,  $u = S(v)$ . Pour toute entrée  $u$  et toute condition initiale  $x(0)$ , la trajectoire correspondante sera notée  $x(t) = x(t, x(0), u)$  et  $x(t) = T(z(t))$ ,  $u(t) = S(v(t))$ ,  $z(0) = T^{-1}(x(0))$ . Pour des fonctions appropriées  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\bar{\gamma}$  de classes  $\mathcal{K}_\infty$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_1(\|z\|) &\leq \|T(z)\| \leq \omega_2(\|z\|) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \\ \|S(v)\| &\leq \bar{\gamma}(\|v\|) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

La condition (1.10) du cas linéaire devient après le changement de variable :

$$\omega_1(\|z(t)\|) \leq ce^{-rt}\omega_2(\|z(0)\|) + k\bar{\gamma}(\|v\|_\infty), \quad \forall t \geq 0.$$

En notant à nouveau “ $x$ ” et “ $u$ ” pour l'état et l'entrée et en posant  $\beta(s, t) \triangleq ce^{-rt}\omega_2(s)$  et  $\gamma(s) \triangleq k\bar{\gamma}(s)$ , nous arrivons à l'inégalité suivante, avec  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  :

$$\omega_1(\|x(t)\|) \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty).$$

Notons<sup>12</sup> que pour toute fonction  $\beta \in \mathcal{KL}$ , il existe deux fonctions  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  avec

$$\beta(r, t) \leq \alpha_2(\alpha_1(r)e^{-t}), \quad \forall r, t.$$

---

<sup>11</sup>Comme nous le montre Sontag dans [Sontag, 2000], il s'agit d'une vision ‘topologique’ plutôt qu'une vision ‘métrique’. Par analogie dans le domaine linéaire cela reviendrait à se demander “le gain est-il fini ?” ou “l'opérateur est-il borné ?”

<sup>12</sup>Le lecteur pourra consulter [Khalil, 2002, Chapitre 4].

Ainsi, nous pouvons écrire, en posant  $\beta'$  et  $\gamma'$  qui sont, d'après la remarque précédente, deux fonctions de classes  $\mathcal{KL}$  et  $\mathcal{K}_\infty$  respectivement,

$$\|x(t)\| \leq \beta'(\|x(0)\|, t) + \gamma'(|u|_\infty).$$

Nous pouvons maintenant donner la définition de la stabilité entrée-état dans le cas d'un système sans retard.

**Définition 1.5 ([Sontag, 1989]).** *Considérons le système non linéaire de la forme suivante :*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \geq 0, \tag{1.11}$$

où  $x$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et l'entrée  $u$  dans  $\mathbb{R}^m$ . La fonction  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continûment différentiable et  $f(0, 0) = 0$ . Le système (1.11) est **stable entrée-état** s'il existe une fonction  $\beta \in \mathcal{KL}$  et une fonction  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  de telle sorte que :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma(|u|_\infty). \tag{1.12}$$

---

**Remarque 1.2.** *Il est possible d'utiliser de manière équivalente la fonction "max" à la place du signe "+" de l'addition, dans l'estimation de cette borne. C'est-à-dire :*

$$\|x(t)\| \leq \max[\beta(\|x(0)\|, t), \gamma(|u|_\infty)].$$

Sontag a ainsi obtenu une définition de la stabilité entrée-état qui garde la cohérence avec des résultats existants dans le cas linéaire. A présent, il devient intéressant de regarder différentes caractérisations de cette propriété.

### Caractérisation asymptotique du gain

Pour  $u \equiv 0$ , l'inégalité (1.12) se réduit à  $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t)$ . Cela implique que si le système est stable entrée-état, la solution triviale du système libre  $\dot{x} = f(x, 0)$  est alors (asymptotiquement) stable (cf. lemme 1.1).

D'un autre côté, nous pouvons remarquer qu'un système stable entrée-état possède un *gain asymptotique* bien défini. Comme  $\beta \in \mathcal{KL}$ , cette fonction est décroissante et tend vers l'origine pour  $t \rightarrow \infty$ . Il existe donc une fonction  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  telle que pour tout  $x(0)$  et  $u$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x(0), u)| \leq \gamma(|u|_\infty),$$

ce qui est caractérisé sur la figure 1.4. La fonction  $\gamma$  est alors appelée *gain asymptotique* du système (1.11).

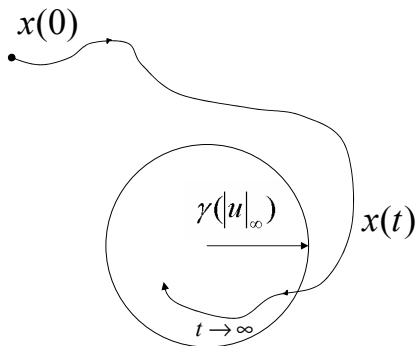


Figure 1.4 – Caractérisation asymptotique du gain

Notons aussi que ces deux propriétés forment une condition nécessaire et suffisante pour caractériser la stabilité entrée-état :

**Théorème 1.8 (Principe de “superposition”, [Sontag et Wang, 1996]).** *Le système (1.11) est stable entrée-état si, et seulement si, il admet un gain asymptotique et que le système non forcé est stable.*



### Caractérisation par dissipation

A première vue, il semble difficile de vérifier l’existence des fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  présentes dans la définition 1.5 pour vérifier la condition de stabilité entrée-état. Il est par ailleurs utile de disposer des outils traditionnels pour les systèmes non linéaires — les fonctions de Lyapunov — afin d’étudier cette forme de stabilité. C’est ce que nous présentons dans ce paragraphe.

On définit une fonction lisse<sup>13</sup>  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nommée fonction ISS-Lyapunov<sup>14</sup> de la façon suivante :

---

<sup>13</sup>C’est-à-dire indéfiniment dérivable.

<sup>14</sup>Pour plus de clarté en direction de la communauté scientifique accoutumée à cette notion de stabilité, nous avons préféré garder la dénomination anglaise dans le cas non retardé, ISS pour *input-to-state stability* ou *input-to-state stable* suivant les cas.

**Définition 1.6** ([Sontag et Wang, 1995]). Une fonction lisse  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  est dite **fonction ISS-Lyapunov** pour le système (1.11) s'il existe deux fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et deux fonctions  $\alpha_3, \chi$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$  :

- 1)  $\alpha_1(\|\xi\|) \leq V(\xi) \leq \alpha_2(\|\xi\|)$ ,
  - 2)  $\dot{V}(\xi, u) = \nabla V f(\xi, u) \leq -\alpha_3(\|\xi\|)$ , quel que soit  $u \in \mathbb{R}^m$  vérifiant  $\|\xi\| \geq \chi(\|u\|)$ .
- 

**Remarque 1.3.** La condition de dérivation de la fonction  $V$  peut être écrite de façon équivalente comme suit : pour  $\gamma, \alpha \in \mathcal{K}_\infty$ ,

$$\dot{V}(\xi, u) = \nabla V f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) + \gamma(\|u\|), \quad \forall x, u.$$

Sontag et Wang ont montré un résultat fondamental qui permet une étude de la stabilité entrée-état par des méthodes usuelles :

**Théorème 1.9** ([Sontag et Wang, 1995, Lin et al., 1996]). Le système (1.11) est stable entrée-état si, et seulement si, il admet une fonction ISS-Lyapunov.

---

Un exemple pourra éclaircir le fonctionnement de ce théorème.

**Exemple 1.2.** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u \end{cases} \quad (1.13)$$

et  $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  est le vecteur d'état. Considérons alors la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

La dérivée de  $V$  suivant les trajectoires du système (1.13) s'écrit :

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + x_2 u \leq -\|x\|^2 + |x_2| |u|.$$

En utilisant le terme  $-x_1^2 - x_2^2$  pour dominer  $|x_2| |u|$ , nous pouvons réécrire la dernière inégalité de la manière suivante

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) \|x\|^2 - \theta \|x\|^2 + |x_2| |u|,$$

où  $0 < \theta < 1$ . Le lecteur pourra aisément vérifier que le terme

$$-\theta \|x\|^2 + |x_2| |u|,$$



est négatif quand  $|x_2| > |u|/\theta$ , ou bien quand  $|x_1| > |u|/\theta$  et  $|x_2| < |u|/\theta$ . Ce que nous pouvons résumer mathématiquement par

$$\max[|x_1|, |x_2|] \geq \frac{|u|}{\theta}.$$

Si maintenant nous définissons la fonction de classe  $\mathcal{K}$

$$\chi(r) = \frac{r}{\theta},$$

nous obtenons l'inégalité recherchée :

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) \|x\|_\infty^2, \quad \forall \|x\|_\infty \geq \chi(|u|),$$

où  $\|x\|_\infty = \max[|x_1|, |x_2|]$ . La fonction  $V$  est donc une fonction ISS-Lyapunov ce qui prouve que le système (1.13) est stable entrée-état.

### Propriétés pour des systèmes connectés



Figure 1.5 – à gauche : Systèmes en cascade, à droite : Systèmes interconnectés

Considérons le système en cascade suivant (figure 1.5 de gauche) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{z} = g(z, x) \end{cases}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  sont trois vecteurs donnés et  $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $g : \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  deux fonctions continues et localement lipschitziennes.

On suppose ici que les deux systèmes sont stables entrée-état, le système  $\dot{z} = f(z, x)$  ayant pour entrée  $x$ . Pour chaque sous-système, il existe une fonction ISS-Lyapunov qui vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z, x) &\leq \theta(\|x\|) - \alpha(\|z\|), \\ \dot{V}_2(u, x) &\leq \tilde{\theta}(\|u\|) - 2\theta(\|x\|). \end{aligned}$$

Alors la fonction  $W(x, z) = V_1(z) + V_2(x)$  est une ISS-Lyapunov fonction avec :

$$\dot{W}(x, z) \leq \tilde{\theta}(\|u\|) - \theta(\|x\|) - \alpha(\|z\|),$$

ce qui prouve qu'une cascade de systèmes en série, stables entrée-état, garde cette caractéristique. Il est aussi possible de montrer que la connexion en série d'un système stable entrée-état et d'un système dont l'origine est globalement asymptotiquement stable garde la propriété de la stabilité asymptotique (cf. par exemple [Khalil, 2002, Chapitre 4]).

Plus généralement, il est possible de garantir qu'un retour — éventuellement soumis à des perturbations — ne modifie pas les propriétés désirées. Le système, obtenu par le bouclage des deux systèmes stables entrée-état  $\dot{x} = g(x, u)$  et  $\dot{z} = f(z, x)$  où  $u = k(z)$ , garde lui-même cette propriété (cf. figure 1.5 de droite pour l'illustration et l'article [Jiang et al., 1994]). Il suffit que le retour  $u = k(z)$  soit suffisamment 'petit', c'est-à-dire vérifiant la condition  $\|k(z)\| \leq \tilde{\theta}^{-1}((1 - \epsilon)\alpha(\|z\|))$ , où  $0 < \epsilon < 1$ . Dans ce cas, on peut montrer que :

$$\tilde{\theta}(\|u\|) \leq (1 - \epsilon)\alpha(\|z\|),$$

et donc que

$$\dot{W}(x, z) \leq -\theta(\|x\|) - \epsilon\alpha(\|z\|),$$

ce qui prouve que le système, avec ce retour, reste stable entrée-état. Il s'agit ici de l'exposé du *problème du petit gain* étendu au cas de la stabilité entrée-état.

Nous finissons cette partie en donnant un exemple illustrant l'intérêt des systèmes connectés en série.

**Exemple 1.3 ([Sontag, 2000]).** *Un bras actionné.* Considérons la stabilisation du moment angulaire d'un corps rigide contrôlé par des couples qui agissent sur ses axes principaux — ce système peut, par exemple, modéliser un satellite contrôlé par deux jets opposés. Si  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est la vitesse de rotation du corps et  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  la matrice d'inertie du corps rigide, le système peut être modélisé sous la forme suivante :

$$I\dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} I\omega + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Supposons que  $I_2 \neq I_3$  ; dans ce cas, si nous introduisons des nouvelles coordonnées pour l'entrée et l'état, suivant le changement  $(I_2 - I_3)x_1 = I_1\omega_1$ ,  $x_2 = \omega_2$ ,  $x_3 = \omega_3$  et si nous notons  $u_1, u_2$  les nouveaux contrôles donnés par les relations  $I_2u_1 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + v_1$  et  $I_3u_2 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + v_2$ , nous obtenons un système dans  $\mathbb{R}^3$  avec un contrôle dans  $\mathbb{R}^2$  qui

s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = u_1 \\ \dot{x}_3 = u_2 \end{cases}$$

Pour obtenir un système stable entrée-état, appliquons le retour d'état suivant :

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_1 - x_2 - x_2 x_3 + v_1, \\ u_2 &= -x_3 + x_1^2 + 2x_1 x_2 x_3 + v_2. \end{aligned}$$

En notant  $z_2 = x_1 + x_2$ ,  $z_3 = x_3 - x_1^2$  et  $\alpha(x_1, z_2, z_3) = z_2 z_3 - z_3 x_1 + z_2 x_1^2$ , le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + \alpha(x_1, z_2, z_3) \\ \dot{z}_2 = -z_2 + v_1 \\ \dot{z}_3 = -z_3 + v_2 \end{cases}$$

Il est facile de voir que le sous-système lié à  $x_1$  est stable entrée-état — en considérant  $x_2$  et  $x_3$  comme entrées de ce sous-système — car comme  $\deg_{x_1} \alpha \leq 2$  le terme cubique domine pour des  $x_1$  larges. Ainsi, le système en cascade peut aussi être stable entrée-état. En particulier, le point d'équilibre du système est globalement asymptotiquement stable pour  $v_1 = v_2 = 0$ . Nous avons ici aussi un résultat fort, la stabilité entrée-état implique la robustesse globale par rapport aux bruits des actionneurs — c'est-à-dire les entrées indésirables.

### 1.3.3 Intérêt de l'étude

Le point essentiel dans ce que nous venons de présenter réside dans la possibilité de garantir qu'un système non linéaire respectera le cahier des charges désiré malgré d'éventuelles perturbations d'amplitudes non négligeables. Par ailleurs, nous pouvons récapituler plusieurs points importants :

- Possibilité d'étudier des systèmes complexes vus comme une interconnexion d'éléments plus simples (systèmes en cascade).
- Existence de nombreux outils à disposition pour analyser le même problème permettant ainsi de nombreuses applications : [Tsinias, 1997], [Angeli, 1999, Angeli et al., 2000] (norme différente), [Nešić et Laila, 2002], [Liberzon et al., 2002], [Arcak et al., 2002] et [Tanner et al., 2002, Tanner, 2004] (étude d'une formation de robots coopératifs).
- Possibilité de quantifier la réponse d'un système sous perturbations.
- Unification des différentes notions de stabilité s'appliquant soit sur les entrées/état du système soit sur les entrées/sorties.

La stabilité entrée-état semble être le candidat parfait pour résoudre la problématique que nous avons énoncée dans l'introduction générale : que faire quand la situation la plus contraignante se présente à nous, c'est-à-dire lorsque nous devons étudier des systèmes non linéaires retardés et soumis à des perturbations ?

## 1.4 Conclusion

Revenons un instant sur les différents points abordés dans ce chapitre. Premièrement, nous nous sommes focalisé sur les méthodes dites temporelles car elles permettent, en général, de conclure sur la stabilité d'un système sans pour autant en connaître explicitement les trajectoires. Ce sont les méthodes usuelles basées sur les perspectives ouvertes par Lyapunov. Ceci nous a aussi permis de poser plus précisément la problématique de nos travaux. Il s'agit en effet pour nous d'étendre des résultats connus dans le domaine des systèmes non retardés dans le cas des systèmes à retards et, notamment, des outils permettant de prendre en compte des systèmes non linéaires perturbés.

En ce sens, la théorie entrée-état, que nous avons présentée dans le dernier point de ce chapitre, apparaît comme un excellent moyen de traiter le problème des systèmes soumis à des perturbations larges. De plus, elle propose de nombreuses interprétations particulièrement utiles dans les applications pratiques — entre autres, la caractérisation dissipative et les systèmes en cascade.

L'enjeu pour la suite est donc simple. Il nous faut exposer les résultats que nous avons obtenus sur les différentes notions de stabilité abordées : stabilité entrée-sortie, stabilité en temps fini, stabilité entrée-état et stabilité pratique. Elles feront donc respectivement l'objet d'une attention particulière dans les quatre chapitres qui suivent. Nous verrons que, dans certains cas, il faudra alléger les conditions imposées et revenir parfois au cas des systèmes linéaires à retards comme dans le chapitre qui suit.


# Stabilité entrée-sortie des systèmes à retards

*Ce que je fais m'apprend ce que je cherche.*

— Paul Klee<sup>1</sup>

---

Nous abordons le thème de la stabilité *entrée-sortie*, dont nous avons esquissé l'idée dans le premier chapitre. Après une présentation succincte des principales caractéristiques de cette approche, nous verrons qu'il est possible, dans le cas des systèmes linéaires à retards, d'utiliser une mise en forme particulière du système — *la forme descripteur* — pour améliorer des critères de stabilité et trouver une borne maximale du retard admissible.



## 2.1 Présentation

Si nous voulions synthétiser la notion de stabilité entrée-sortie en quelques mots, nous pourrions dire qu'un système est stable entrée-sortie si ses sorties restent toujours bornées, quelles que soient les entrées et les conditions initiales finies, c'est-à-dire bornées. Cela suppose, comme nous l'avons souligné au chapitre précédent dans le paragraphe 1.3.1, une philosophie totalement différente de celle adoptée dans le cadre de la théorie de Lyapunov. L'intérêt se porte sur les signaux en entrée(s) et sortie(s) et non plus sur l'état du système qui, en quelques sortes, représente sa "mémoire".

En ce sens, les systèmes dynamiques sont vus comme des opérateurs reliant les signaux sans tenir compte de la structure interne considérée. Cette vision que nous avons schématisée par une boîte noire (*cf.* paragraphe 1.3.1) présente l'avantage d'analyser un système sans

---

<sup>1</sup>Peintre du 20e siècle.

en chercher une description détaillée (ou modèle) et de produire des résultats peut-être plus faciles d'utilisation — [Desoer et Vidyasagar, 1975] et [Loria et Ortega, 1996, Introduction].

### 2.1.1 Un domaine largement étudié

Il n'est pas dans notre objectif dans ce chapitre de développer en détail les travaux existant sur la stabilité entrée-sortie. La fécondité de ce terrain d'étude — bien que généralement limitée au cas des systèmes linéaires — n'est plus à démontrer depuis sa formalisation par Zames comme nous le notions dans le chapitre précédent. Pour notre part, il nous a semblé utile de préciser l'approche que nous développons ci-dessous dans le cas de retards variables pour rendre ce mémoire complet du point de vue de la stabilité. Notons aussi que ces travaux se rapprochent de la commande nommée  $H_\infty$  qui consiste à garantir un gain  $L_2$  entrée-sortie<sup>2</sup>. Le lecteur pourra se référer aux articles [Fridman et Shaked, 2003, Wu, 2003] et [Xu et al., 2005].

### 2.1.2 Les bases mathématiques

Dans cette section, nous nous cantonnons au minimum mathématique pour éviter de rentrer dans des complications inutiles sur les recherches qui suivent. La clé de voûte de cette approche reposant sur les liens entre les signaux d'entrée et de sortie d'un opérateur, il nous faut des outils appropriés pour les mesurer ; d'où l'introduction d'espaces fonctionnels normés ainsi que les normes qui y sont associées.

**L'espace de travail** Dans cette partie,  $L_2^m$  représente l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui sont de carré sommable (ou intégrable), c'est-à-dire, telles que l'intégrale  $\int_0^\infty \|f\|^2 dt$  existe et soit finie. Sur cet espace, nous pouvons définir la norme  $L_2$  :

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt}.$$

La notation  $L_2^m$  s'explique naturellement : l'indice 2 représente la norme 2 utilisée et l'indice  $m$  représente la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Ce dernier indice pourra être omis s'il n'est pas nécessaire, ceci pour alléger l'écriture des équations.

Mais travailler dans cet espace restreint de fait le champ d'action. En effet, il faut remarquer qu'une fonction divergente ne peut pas appartenir à l'espace  $L_2$ . Or, il est évidemment utile de disposer d'un espace de travail qui puisse prendre en compte ces fonctions. C'est

---

<sup>2</sup>Ce gain est défini dans le paragraphe suivant.

pourquoi il convient de travailler sur un espace noté  $L_{2e}$ , autrement dit espace “ $L_2$  étendu”. Un opérateur  $\mathbf{H}$  sera donc habituellement défini de  $L_{2e}^m \rightarrow L_{2e}^q$  où  $L_{2e}^m$  représente

$$L_{2e}^m = \{f | f_T \in L_2^m, \forall T \in \mathbb{R}_+\},$$

et  $f_T$  est la troncature de  $f$  définie par

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

L’intérêt ici réside dans le fait que, pour une fonction  $f(t) \in L_{2e}$ , il est possible d’avoir  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_T(t)\| = \infty$ .

**Définitions** Nous pouvons à présent définir la stabilité entrée-sortie pour des systèmes linéaires.

**Définition 2.1** ([Gu et al., 2003]). *Le système  $\mathbf{H} : L_{2e}^m \rightarrow L_2^q$  est dit :*

- *$L_2$ -stable si  $\mathbf{H}f \in L_2^q$  quel que soit  $f \in L_{2e}^m$ ,*
- *$L_2$ -stable de gain fini s’il est  $L_2$ -stable et s’il existe deux réels  $\gamma > 0$  et  $b$  tels que  $\|\mathbf{H}f\|_{L_2} \leq \gamma \|f\|_{L_2} + b$  pour tout  $f \in L_{2e}^m$ ,*
- *stable entrée-sortie s’il est  $L_2$ -stable et s’il existe un réel  $\gamma > 0$  tel que  $\|\mathbf{H}f\|_{L_2} \leq \gamma \|f\|_{L_2}$  pour tout  $f \in L_{2e}^m$ .*

Si le système  $\mathbf{H}$  est stable entrée-sortie, nous noterons alors  $\gamma_0(\mathbf{H})$  son *gain* défini comme :

$$\gamma_0(\mathbf{H}) = \inf\{\gamma | \|\mathbf{H}f\|_{L_2} \leq \gamma \|f\|_{L_2} \quad \forall f \in L_{2e}^m\}.$$

## 2.2 Approche temporelle des systèmes linéaires à retards variables

### 2.2.1 Critère de stabilité, problème du petit gain

Considérons le système  $\mathbf{G}$  décrit par l’équation retardée suivante :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2}$$

où  $x$  est une fonction du temps à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  et  $y$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et symbolisent respectivement l’entrée et la sortie.  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de

dimensions appropriées. Le retard  $\tau$  est variable et borné par un réel positif noté  $h$ .

Notons que les vecteurs  $u(t)$  et  $y(t)$  ont la même dimension : cette contrainte est imposée pour faciliter les notations mais n'est pas importante dans le raisonnement. Soit  $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  un ensemble de matrices réelles non singulières et

$$\mathcal{Z} = \{X^T X \mid X \in \mathcal{X}\}.$$

Le problème du petit gain étendu<sup>3</sup> est de déterminer à quelles conditions le système  $\mathbf{G}$  possède la stabilité interne<sup>4</sup> tout en garantissant

$$\gamma_0(\mathbf{G}_X) < 1 \tag{2.3}$$

où  $\mathbf{G}_X$  est le nouveau système défini par  $\mathbf{G}_X u = X\mathbf{G}(X^{-1}u)$ .

Nous pouvons maintenant présenter une caractérisation de ce problème par des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

**Proposition 2.1 ([Gu et al., 2003]).** *Soit  $\alpha_1$  une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et  $\alpha_2, \alpha_3$  deux fonctions de classe  $\mathcal{K}$ . Il existe une matrice  $X \in \mathcal{X}$  telle que le système  $\mathbf{G}$  décrit par (2.1) et (2.2) est stable entrée-sortie et vérifie (2.3), s'il existe un  $Z \in \mathcal{Z}$ , une constante  $\epsilon > 0$  et une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V(t, \varphi)$  tels que, quelle que soit  $\varphi \in \mathcal{C}$  :*

$$\alpha_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \tag{2.4}$$

et que la fonctionnelle,

$$W(t, \varphi, u(t)) = D^+V(t, \varphi) + y^T(t)Zy(t) - u^T(t)Zu(t),$$

satisfasse

$$W(t, \varphi, u(t)) \leq -\alpha_3(\|\varphi(0)\|) - \epsilon\|u(t)\|^2, \tag{2.5}$$

où  $D^+V$  représente la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (2.1).

La proposition présentée est intéressante car elle fait intervenir une approche robuste par des techniques de Lyapunov appliquées à un problème de stabilité entrée-sortie.

Nous tentons donc d'appliquer cette méthode en utilisant la forme descripteur — *descriptor form* en anglais [Fridman, 2001a, Fridman et al., 2003a] — qui permet notamment de prendre en compte des retards variables mais bornés.

---

<sup>3</sup>Dans le cas où  $\mathcal{X} = \{I\}$ , nous retrouvons le problème du petit gain habituellement traité.

<sup>4</sup>Un système  $\dot{x} = f(t, x_t, u)$  possède cette propriété si l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x_t, 0)$  est uniformément globalement asymptotiquement stable.



### 2.2.2 Analyse

En utilisant la formule de Newton, l'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme descripteur équivalente :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= z(t), \\ 0 &= -z(t) + (A_0 + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau}^t z(s)ds + Bu(t), \end{aligned}$$

ou encore :

$$E\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix} \bar{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t z(s)ds + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u, \quad (2.6)$$

avec  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$  et  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Prenons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\begin{aligned} V(t) &= \bar{x}^T EP\bar{x}(t) + V_2(t), \\ P &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, P_1 > 0, EP = P^T E \geq 0, \\ V_2(t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t z^T(s)Rz(s)dsd\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nous noterons :

$$W(t) = D^+V(t) + y^T Zy(t) - u^T Zu(t). \quad (2.8)$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Théorème 2.2.** *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de matrices réelles non singulières et  $\mathcal{Z} = \{X^T X | X \in \mathcal{X}\}$ . Il existe une matrice  $X \in \mathcal{X}$  telle que le système  $\mathbf{G}$  décrit par (2.1) et (2.2) est stable entrée-sortie et vérifie (2.3) pour tout retard  $\tau(t) < h$  s'il existe  $Z \in \mathcal{Z}$ ,  $0 < P_1, P_2, P_3$ ,*

$R > 0$ , et  $k$  un nombre positif qui satisfont la LMI suivante :

$$\Pi = \begin{bmatrix} (A_0 + A_1)^T P_2 + P_2^T (A_0 + A_1) & P_1^T - P_2^T + (A_0 + A_1)^T P_3 & 0 & hP_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T & hR & hP_3^T A_1 \\ * & * & -hR & 0 \\ * & * & * & -hR \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ P_2^T B & C^T Z & C^T Z D \\ P_3^T B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -kI & 0 & 0 \\ * & -Z & 0 \\ * & * & -Z + kI + D^T Z D \end{bmatrix} < 0, \quad (2.9)$$

où les  $*$  représentent les entrées symétriques.

**Preuve.**

**Ligne directrice :** L'idée consiste à calculer  $W(t)$  défini dans l'équation (2.8) et à majorer judicieusement cette quantité pour obtenir la LMI (2.9).

La preuve se déroule en **trois temps**. Nous calculons d'abord la dérivée de la fonctionnelle  $V$  définie en (2.7) puis  $W$  comme définie dans la proposition 2.1. Ensuite, nous majorons  $W$  en utilisant des inégalités triangulaires et enfin, nous mettons l'inégalité obtenue sous la forme d'une LMI en utilisant le complément de Schur — cf. annexe B.

Remarquons que

$$\bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t) = x^T(t)P_1x(t).$$

En dérivant la première partie de (2.7) par rapport à  $t$ , nous obtenons l'égalité suivante

$$\frac{d}{dt}\{\bar{x}^T(t)EP\bar{x}(t)\} = 2x^T(t)P_1\dot{x}(t) = 2\bar{x}^T(t)P^T \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où, en utilisant l'équation (2.6) et en notant que  $|\tau| \leq h$ , nous pouvons majorer la dérivée de  $V$  le long des trajectoires de (2.1) :

$$\begin{aligned}
 D^+V &= 2\bar{x}^T P^T \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix} \bar{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t z(s)ds + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u \right) \\
 &\quad + \int_{-h}^0 z^T R z d\theta - \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) R z(t+\theta) d\theta \\
 &\leq 2\bar{x}^T P^T \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix} \bar{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t z(s)ds + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u \right) \\
 &\quad + h z^T R z - \int_{t-h}^t z^T(s) R z(s) ds.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Le premier terme de l'inégalité peut être réexprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^T \left( P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix}^T P \right) \bar{x} + 2\bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u \\
 - 2\bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t z(s) ds.
 \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 \eta_0(t) &= -2 \int_{t-\tau}^t \bar{x}^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} z(s) ds, \\
 \eta_1(t) &= 2\bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t).
 \end{aligned}$$

Avec ces notations, l'inégalité (2.10) devient :

$$D^+V \leq \bar{x}^T \Psi_0 \bar{x} + h z^T R z + \eta_0 + \eta_1 - \int_{t-h}^t z^T(s) R z(s) ds, \tag{2.11}$$

avec

$$\Psi_0 = P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 & -I \end{bmatrix}^T P.$$

En remarquant que  $2m^T n \leq m^T Q^{-1} m + n^T Q n$ , où  $m$  et  $n$  sont deux vecteurs de dimensions appropriées et  $Q$  une matrice définie positive, nous obtenons les inégalités :

$$\eta_0 \leq h \bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \end{bmatrix} P \bar{x} + \int_{t-h}^t z^T(s) R z(s) ds, \tag{2.12}$$

et

$$\eta_1 \leq k^{-1} \bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} P \bar{x} + k u^T u, \quad (2.13)$$

où  $k$  est un réel positif.

En remplaçant, dans l'expression (2.11), les inégalités (2.12) et (2.13), les termes intégraux  $\int_{t-h}^t z^T(s) R z(s) ds$  se simplifient et ainsi :

$$\begin{aligned} D^+V &\leq \bar{x}^T \Psi_0 \bar{x} + h z^T R z + h \bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \end{bmatrix} P \bar{x} + k^{-1} \bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} P \bar{x} \\ &\quad + k u^T u \\ &\leq \bar{x}^T \left( \Psi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} h R \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} + h P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \end{bmatrix} P + k^{-1} P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} P \right) \bar{x} \\ &\quad + k u^T u. \end{aligned}$$

Finalement, en revenant sur  $W$  défini en (2.8), nous pouvons écrire :

$$W \leq \bar{x}^T \bar{\Gamma}_0 \bar{x} + y^T Z y - u^T [Z - kI] u, \quad (2.14)$$

où

$$\bar{\Gamma}_0 = \Psi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} h R \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} + h P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \end{bmatrix} P + k^{-1} P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} P.$$

A présent, concentrons-nous sur le terme quadratique  $y^T Z y$ . Notons que (2.2) peut être écrit sous la forme :

$$y(t) = CL\bar{x}(t) + Du(t),$$

où  $L = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} y^T Z y &= (CL\bar{x} + Du)^T Z (CL\bar{x} + Du) \\ &= \bar{x}^T L^T C^T Z C L \bar{x} + 2\bar{x}^T L^T C^T Z D u + u^T D^T Z D u. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En utilisant l'égalité (2.15) dans l'expression (2.14), il résulte que  $W$  est majoré par

$$W \leq \bar{x}^T \bar{\Gamma} \bar{x} + 2\bar{x}^T L^T C^T Z D u + u^T [-Z + kI + D^T Z D] u, \quad (2.16)$$

où :

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_0 + L^T C^T Z C L.$$

Pour appliquer le complément de Schur (*cf.* annexe B), reformulons cette expression :

$$\begin{aligned}
 & \bar{x}^T \left[ \Psi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ hI \end{bmatrix} Rh^{-1}(R^{-1}R) \begin{bmatrix} 0 & hI \end{bmatrix} + hP^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} h^{-1}R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A_1^T \end{bmatrix} Ph \right. \\
 & \left. + P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} k^{-1}I \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} C^T Z Z^{-1} Z C \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \right] \bar{x} \\
 & + 2\bar{x}^T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} C^T Z D u + u^T [-Z + kI + D^T Z D] u
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donc, l'expression (2.17) est définie négative si la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix}
 \Psi_0 & \begin{bmatrix} 0 \\ hI \end{bmatrix} R & hP^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} C^T Z & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} C^T Z D \\
 * & -hR & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & -hR & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & -kI & 0 & 0 \\
 * & * & * & 0 & -Z & 0 \\
 * & * & * & * & * & -Z + kI + D^T Z D
 \end{bmatrix} < 0,$$

En développant le terme  $\Psi_0$ , cette LMI s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 (A_0 + A_1)^T P_2 + P_2^T (A_0 + A_1) & P_1^T - P_2^T + (A_0 + A_1)^T P_3 & 0 & hP_2^T A_1 \\
 * & -P_3 - P_3^T & hR & hP_3^T A_1 \\
 * & * & -hR & 0 \\
 * & * & * & -hR \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 P_2^T B & C^T Z & C^T Z D \\
 P_3^T B & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 -kI & 0 & 0 \\
 * & -Z & 0 \\
 * & * & -Z + kI + D^T Z D
 \end{bmatrix} < 0,$$

ce qui conclut la preuve. ■

### 2.2.3 Exemple

Pour exposer le résultat donné dans le théorème précédent, observons le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 0.1u(t).\end{aligned}$$

La résolution de la LMI (2.9) permet de trouver la borne maximale du retard qui atteint 0.3 pour cet exemple.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé brièvement la stabilité entrée-sortie des systèmes à retards. Le théorème 2.2 se base sur la forme descripteur. Ce résultat est valable pour des systèmes à retards linéaires, le retard pouvant être variable tout en restant borné. Il permet de trouver la borne maximale admissible du retard assurant la stabilité entrée-sortie du système étudié.

Nous allons désormais entamer la troisième partie de notre mémoire qui aborde une notion totalement nouvelle — à notre connaissance — dans la littérature scientifique traitant des systèmes héréditaires. Il s'agit de la stabilité en temps fini.

# Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes à retards

*Was kein Verstand der Verständigen sieht,  
das übet in Einfalt ein kindlich Gemüt.*

— Schiller<sup>1</sup>

---

Nous analysons dans ce chapitre un problème nouveau dans la littérature : *la stabilité et la stabilisation en temps fini* des systèmes à retards. Nous étudierons, dans un premier temps, cette stabilité dans le cas général des systèmes non linéaires. Nous verrons que la classe des systèmes à retards dont les trajectoires convergent en temps fini est limitée. Nous donnerons néanmoins le premier exemple d'un point d'équilibre stable en temps fini, pour une équation différentielle fonctionnelle. Ensuite, afin d'obtenir des résultats exploitables, nous traiterons le problème de la stabilisation des systèmes linéaires à retards constants sur l'entrée ou l'état. Deux transformations, celles d'Artstein et de Fiagbedzi-Pearson, aideront à trouver une commande admissible qui, comme nous le montrerons, sera nécessairement de type distribué.

---

## 3.1 Stabilité en temps fini, cas général

Comme nous le verrons dans le dernier chapitre, la théorie des modes glissants s'est répandue à partir des années 80. Cette commande, spectaculaire par sa simplicité de mise en

---

<sup>1</sup>Auteur allemand du 19<sup>e</sup> siècle. Cette citation, populaire en Allemagne, ne connaît pas *a priori* de traduction française littérale. Nous proposons la traduction suivante : “Ce que le sage des sages ne voit, un esprit enfantin le touche par sa simplicité”. Golz et Keres, deux grands techniciens allemands du jeu d'échec, rajoutent : “nous vous prions néanmoins de ne pas prendre le terme enfantin au pied de la lettre”...

œuvre et sa robustesse, a soulevé une problématique nouvelle. Elle ne présente en effet ses principales caractéristiques que sur la surface de glissement. Mais encore faut-il être sûr que cette surface soit atteinte et, mieux encore, après un laps de temps fini. Des critères simples ont été développés pour garantir la convergence des trajectoires en temps fini sur la surface — cf. chapitre 5. Ces travaux ont certainement permis de sensibiliser la communauté scientifique à la notion de “temps fini”.

Haimo fut le premier, dans [Haimo, 1986], à publier un article traitant de la stabilité en temps fini. Il faudra attendre la fin des années 90 pour que cette théorie se développe sous l’impulsion de Bhat et Bernstein — [Bhat et Bernstein, 1995, Bhat et Bernstein, 1996] et [Bhat et Bernstein, 1997] — en montrant qu’avec certaines propriétés d’homogénéité du système, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité en temps fini.

Dans [Bhat et Bernstein, 1998], les auteurs présentent une application à la robotique. Et dans [Bhat et Bernstein, 2000], ils démontrent le premier théorème “réciproque” ajoutant une nouvelle page à la théorie.

Moulay et Perruquetti ont repris ces travaux et étendu les résultats, d’une part, à différentes classes de systèmes [Moulay et Perruquetti, 2005a, Moulay et Perruquetti, ] et d’autre part, à la stabilisation [Moulay et Perruquetti, 2005b].

**Remarque 3.1.** *Il ne faut pas confondre ce terme avec les notions de stabilité pratique, présentées aussi au chapitre 5, où des auteurs définissent la stabilité sur un intervalle de temps fini — par exemple [Lazarevic et al., 2000].*

Nous concluons cette introduction par l’exemple le plus classique, dans la littérature, d’une équation différentielle dont les solutions sont connues explicitement. Elles permettent de conclure simplement que l’origine étudiée est stable en temps fini.

**Exemple 3.1.** *Soit l’équation*

$$\dot{x} = -\psi_a(x), \tag{3.1}$$

où  $x$  est une fonction à valeur dans  $\mathbf{R}$ ,  $a \in ]0, 1[$  et  $\psi_a(x) = |x|^a \text{sign}(x)$ . Les solutions partant de  $x_0$  en  $t = 0$  sont données par

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \left( |x_0|^{1-a} - t(1-a)^{\frac{1}{1-a}} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-a}}{1-a}, \\ 0 & \text{si } t > \frac{|x_0|^{1-a}}{1-a}. \end{cases}$$

*Elles décroissent et finissent pas être nulles à partir d’un certain temps.*

**Remarque 3.2.** *Notons que la fonction  $\psi_a$  de l’exemple 3.1 n’est pas lipschitzienne en l’origine, car, dans ce cas, la stabilité en temps fini ne peut être obtenue du fait de l’unicité des solutions.*



### 3.1.1 Définitions

La notion de stabilité en temps fini est assez intuitive : l'idée consiste à certifier que le système, *au bout d'un temps déterminé*, a atteint le point d'équilibre et qu'il y reste par la suite. Connaître l'instant où la trajectoire rejoindra celle désirée est évidemment un aspect important dans les applications pratiques qui cherchent à garantir des performances (de rapidité) intéressantes.

Les résultats qui suivent sont issus d'une collaboration avec Emmanuel Moulay et sont présentés dans [Moulay et al., 2006].

**Définition 3.1.** *Considérons l'équation différentielle fonctionnelle de la forme :*

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

où  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonctionnelle continue telle que  $f(0) = 0$ . L'origine du système (3.2) est **stable en temps fini** si :

- 1) elle est stable, et
- 2) il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_\delta$ , alors il existe  $0 \leq T(\varphi_0) < +\infty$  tel que  $x_t(\varphi_0) = 0$  pour tout  $t \geq T(\varphi_0)$ .

$$T_0(\varphi_0) = \inf\{T(\varphi_0) \geq 0 : x_t(\varphi_0) = 0, \quad \forall t \geq T(\varphi_0)\}$$

est une fonctionnelle appelée **temps d'établissement** du système (3.2).

Cette définition est illustrée sur la figure 3.1.

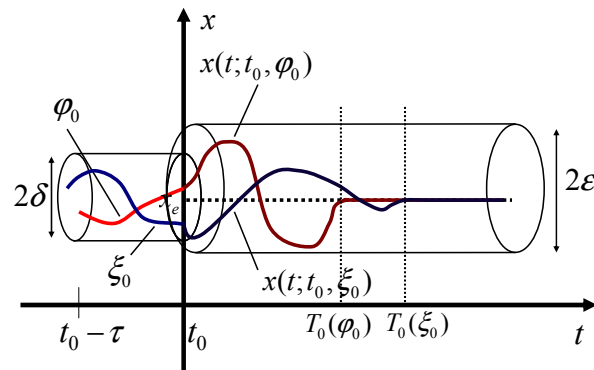


Figure 3.1 – Illustration de la stabilité en temps fini et du temps d'établissement

La ligne directrice de cette partie sera la suivante : *nous essayerons toujours de revenir à des systèmes non retardés pour appliquer des critères connus*. Dans la partie 3.1.2, nous utiliserons le lemme de comparaison — cf. annexe B — pour revenir au cas non retardé et donner une condition suffisante pour vérifier la stabilité en temps fini d’un système à retards. Dans la partie 3.2, nous serons amené à travailler dans le cas linéaire afin d’appliquer les transformations d’Artstein — cas du retard sur l’entrée — et de Fiagbedzi — cas du retard sur l’entrée et l’état — pour pouvoir conclure sur la stabilisation en temps fini d’un système à retards. Après ces quelques éclaircissements, nous pouvons aborder ce qui suit.

### 3.1.2 Critère de stabilité en temps fini

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, sous quelles conditions l’origine d’un système non linéaire à retard est stable en temps fini. Le résultat est directement inspiré des critères obtenus dans le cas des systèmes non retardés (cf. [Haimo, 1986, Bhat et Bernstein, 2000] et plus récemment [Moulay et Perruquetti, 2003]).

Mais la stabilité en temps fini des systèmes à retards réserve quelques surprises que nous allons tenter d’expliquer. Nous commençons donc par une proposition qui restreint la classe de systèmes à retards dont les trajectoires sont susceptibles d’être stables en temps fini. Les propriétés intrinsèques des équations différentielles fonctionnelles limitent l’étude à la classe des systèmes à retard distribué, ou, à des fonctions vérifiant des conditions particulières.

**Proposition 3.1** ([Moulay et al., 2006]). *Considérons l’équation différentielle retardée<sup>2</sup>*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

où  $\tau \in \mathbb{R}_+$  représente le retard et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue, non nulle, telle que, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(0, y) = 0 \Rightarrow y = 0. \quad (3.4)$$

Alors l’origine ne peut pas être stable en temps fini.

**Preuve.**

**Ligne directrice :** *Le raisonnement se fait par l’absurde. Il convient alors de montrer, en s’appuyant sur l’hypothèse faite sur la fonction  $f$ , que si une solution s’annule à partir d’un temps  $T(\varphi_0)$  alors*

---

<sup>2</sup>Nous pourrions tout aussi bien raisonner, de façon identique, sur les systèmes de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k))$ , où  $\tau_1, \dots, \tau_k$  sont des nombres positifs mais nous restons sur le cas d’un seul retard pour faciliter la compréhension.

sur chaque intervalle de longueur  $\tau - [T(\varphi_0) - k\tau, T(\varphi_0) - (k + 1)\tau]$  où  $k$  est un entier naturel — la solution est aussi identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction  $f$  est identiquement nulle, ce qui aboutit à une contradiction.

Supposons que l'origine soit stable en temps fini. Par définition, si  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$  représente la condition initiale, il existe un temps  $T(\varphi_0) > 0$  tel que,  $x_t(\varphi_0) = 0$  pour tout  $t \geq T(\varphi_0)$ . Ceci implique évidemment que  $x(t; \varphi_0) = 0$  pour  $t \geq T(\varphi_0) - \tau$ , en rappelant que  $x(t; \varphi_0)$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  solution de l'équation (3.3) avec la condition initiale  $\varphi_0$ . Il en découle que  $\dot{x}(t) = 0$  pour tout  $t \geq T(\varphi_0) - \tau$ .

Or, pour tout  $t \geq T(\varphi_0) - \tau$ ,  $\dot{x}(t) = f(0, x(t - \tau))$  et d'après l'hypothèse (3.4) faite sur la fonction  $f$ , pour  $t \geq T(\varphi_0) - \tau$ ,  $x(t - \tau; \varphi_0) = 0$ . On a montré que sur l'intervalle  $[T(\varphi_0) - \tau, T(\varphi_0) - 2\tau]$ ,  $x(t; \varphi_0) \equiv 0$ . De même, il est facile de montrer par récurrence que pour tout intervalle  $[T(\varphi_0) - k\tau, T(\varphi_0) - (k + 1)\tau]$  où  $k$  est un entier naturel, la solution  $x(t; \varphi_0) \equiv 0$ . Dans ce cas, la solution est nulle sur  $[-\tau, \infty)$  ce qui implique que  $f \equiv 0$ . Ceci conduit à une contradiction. ■

**Remarque 3.3.** Cette proposition amène deux conclusions importantes :

- Les trajectoires des systèmes de la forme (3.3), pour un retard aussi petit qu'il soit, ne peuvent être stables en temps fini.
- Dans le cas des systèmes à retard sur l'entrée, il est impossible de résoudre le problème de la stabilisation sans utiliser des retours avec des retards distribués, comme nous le verrons dans la partie 3.2.

Nous pouvons désormais présenter le résultat suivant :

**Théorème 3.2 ([Moulay et al., 2006]).** *Considérons un système (3.2) où  $f$  est continue et telle que les solutions  $x_t(\varphi_0)$  dépendent continûment de la condition initiale  $\varphi_0$ . S'il existe une fonctionnelle continue  $V : \mathcal{C}_a \rightarrow \mathbb{R}_+$  et deux fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que les solutions de l'équation  $\dot{z} = \alpha_2(z)$  existent et que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_a$ ,*

- 1)  $V(\varphi) \geq \alpha_1(\|\varphi(0)\|)$ ,
- 2)  $D^+V(\varphi) \leq -\alpha_2(V(\varphi))$  avec  $\int_0^c \frac{dz}{\alpha_2(z)} < \infty$ ,

alors le système (3.2) est stable en temps fini avec un temps d'établissement vérifiant l'inégalité  $T_0(\varphi_0) \leq \int_0^{V(\varphi_0)} \frac{dz}{\alpha_2(z)}$ .

**Preuve.**

**Ligne directrice :** L'idée consiste à utiliser les résultats développés dans le cas non retardé. Pour cela, nous appliquons le lemme de comparaison pour obtenir une majoration de  $V(x_t(\varphi_0))$  et nous montrons que la fonctionnelle  $V$  est nulle après un certain temps donné.  $V$  étant définie positive, cela est suffisant pour montrer que la solution  $x_t(\varphi_0)$  est nulle en temps fini.

Remarquons d'abord que les hypothèses du théorème 1.3 sont vérifiées et donc que l'origine du système (3.2) est asymptotiquement stable. Soit  $x_t(\varphi_0)$  une solution de (3.2) qui rejoint l'origine avec le temps d'établissement  $0 \leq T_0(\varphi_0) \leq \infty$ , nous devons montrer que  $T_0(\varphi_0) < \infty$ . Par hypothèse, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_a$ ,

$$D^+V(x_t(\varphi_0)) \leq -\alpha_2 [V(x_t(\varphi_0))].$$

En appliquant le lemme de comparaison (cf. annexe B), nous pouvons en déduire que :

$$V(x_t(\varphi_0)) \leq \Phi(t, V(\varphi_0)), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \varphi_0 \in \mathcal{C}_a,$$

où  $\Phi(t, z)$  est le flot de l'équation  $\dot{z} = -\alpha_2(z)$ .

Dans ce cas, d'après les travaux de [Haimo, 1986] et [Moulay et Perruquetti, 2003], nous savons que :

$$V(x_t(\varphi_0)) \leq \Phi(t, V(\varphi_0)) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq \int_0^{V(\varphi_0)} \frac{dz}{\alpha_2(z)}.$$

Comme  $V$  est définie positive, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_a$ ,

$$x_t(\varphi_0) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq \int_0^{V(\varphi_0)} \frac{dz}{\alpha_2(z)}.$$

Donc, l'origine du système (3.2) est stable en temps fini avec le temps d'établissement :

$$T_0(\varphi_0) \leq \int_0^{V(\varphi_0)} \frac{dz}{\alpha_2(z)} < \infty.$$

■

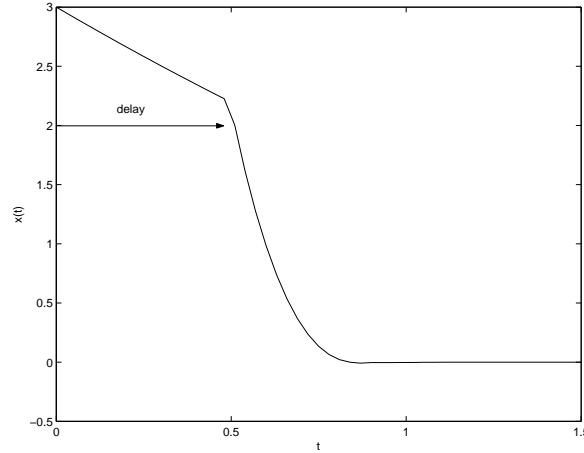
L'application de ce théorème nous permet de montrer le premier exemple — à notre connaissance — d'un système à retard dont l'origine est stable en temps fini.

**Exemple 3.2.** *Considérons le système à retard suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\psi_a(x(t))(1 + x(t - \tau)^2), \\ x(\theta) = \varphi_0(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\psi_a(x) = |x|^a \text{sign}(x)$  avec  $0 < a < 1$ . Le système étant lipschitzien par rapport à la deuxième variable  $x(t - \tau)$ , les solutions obtenues sont continues par rapport à cette variable.

En ce qui concerne la première variable  $x(t)$ , le système est lipschitzien en dehors de l'origine. Donc, la continuité des solutions par rapport à la première variable en dehors de l'origine est garantie. Or, la seule solution qui parte de l'origine est la solution nulle. En conséquence, un tel système possède des solutions continues par rapport aux conditions initiales. Soit la



**Figure 3.2** – évolution de la solution  $x(t)$  du système (3.5) stable en temps fini pour  $a = \tau = 0.5$  et  $\varphi_0 \equiv 3$

fonctionnelle  $V(x_t) = \frac{x(t)^2}{2}$ , alors

$$\begin{aligned} D^+V(x_t) &= -|x(t)|^{1+a} (1 + x(t-\tau)^2) \\ &\leq -|x(t)|^{1+a} = -2^{\frac{1+a}{2}} V(x_t)^{\frac{1+a}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, le système est stable en temps fini avec le temps d'établissement  $T_0(\varphi_0) \leq \frac{|x(0)|^{1-a}}{1-a}$ . La figure 3.2 montre l'évolution de  $x(t)$  pour  $a = \tau = 0.5$  et la condition initiale  $\varphi_0 \equiv 3$ . Dans ces conditions,  $T_0(\varphi_0) = 3.46s$  ce qui correspond à la simulation donnée sur la figure 3.2 où la solution semble atteindre l'origine à l'instant  $t = 0.9s$ .

**Remarque 3.4.** Cet exemple peut surprendre le lecteur mais précisons que la fonction qui définit le système (3.5) ne vérifie pas la condition (3.4) de la proposition 3.1.

## 3.2 Stabilisation en temps fini d'un système linéaire à retards constants

Jusqu'à présent, nous avons toujours parlé de *stabilité*. Le grand challenge du domaine de l'automatique, c'est de trouver une commande qui la garantira, si l'origine ne possède pas

naturellement la propriété désirée ; on parle alors de *stabilisation*.

Dans un premier temps, par souci de clarté, nous allons exposer la définition de la stabilisation en temps fini pour des systèmes linéaires à retard constant sur la commande.

**Définition 3.2** ([Moulay et al., 2006]). *Le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - \tau_i), \\ x(\theta) = \varphi_0(\theta), \quad \forall \theta \in [-\max_i(\tau_i), 0], \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_a$ ,  $A$  est une matrice  $n \times n$ , les matrices  $B_i$  sont de dimensions  $n \times m$  et les  $\tau_i$  sont des constantes positives, est **stabilisable en temps fini** s'il existe un contrôle  $u$  dépendant du temps et de l'état du système tel que :

- 1)  $u(0) = 0$ ,
- 2) l'origine du système (3.6) bouclé est stable en temps fini.

Si  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ , alors le système est dit **globalement stabilisable en temps fini**.

Nous pouvons remarquer, d'un point de vue applicatif, que de tels systèmes sont généralement utilisés pour représenter des retards introduits par les lignes de transmission, comme en téléopération, ou pour des systèmes contrôlés par réseau<sup>3</sup>.

Rappelons la stratégie de cette partie : afin d'étudier la stabilisation en temps fini d'un système linéaire à retards, nous tentons, par une transformation adéquate, de nous ramener au cas des systèmes sans retards et d'appliquer les résultats connus.

### 3.2.1 Résultats en utilisant une transformation d'Artstein

Le problème étant posé, nous pouvons à présent proposer une extension du modèle de réduction d'Artstein (cf. [Artstein, 1982, Théorème 6.1]) à des contrôles non linéaires. Si on définit

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^\tau_{(A,B)} f &= \int_{-\tau}^0 e^{-As} B f(s) ds, \text{ et,} \\ \tilde{B}_i &= e^{-A\tau_i} B_i, \end{aligned}$$

alors le changement de variable

$$z(t) = x(t) + \sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(A, \tilde{B}_i)} u_t,$$

---

<sup>3</sup>A ce sujet, le lecteur pourra consulter [Bushnell, 2001], le numéro spécial [Mounier et Richard, 2003], la thèse [Witrant, 2005] et l'article [Seuret et al., 2006].

où  $u_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$  est donné par  $u_t(s) = u(t+s)$  pour tout  $s \in [-\tau, 0]$ , permet d'obtenir un système où le retard n'apparaît plus sur l'entrée :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + \tilde{B}u(t), \text{ avec,} \\ \tilde{B} &= \sum_{i=0}^k \tilde{B}_i. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous obtenons le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** *Si le système (3.7) est stabilisable (respectivement stabilisable en temps fini) par un contrôle  $u(t) = h(t)g(z(t))$  avec  $h(t)$  bornée et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue telle que  $g(0) = 0$  et s'il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que*

$$\|g(x)\| \leq \alpha(\|x\|),$$

alors le système (3.6) est stabilisable (respectivement stabilisable en temps fini) par le contrôle

$$u(t) = h(t)g\left(x(t) + \sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(A, \tilde{B}_i)} u_t\right).$$

**Preuve.**

**Ligne directrice :** *Les démonstrations de la stabilisation et de la stabilisation en temps fini sont exactement les mêmes. Il suffira de prouver l'une pour montrer l'autre. Nous allons donc majorer  $x(t)$  par une fonction de classe  $\mathcal{K}$  ce qui est connu pour être une condition suffisante pour montrer la stabilité asymptotique vers l'origine.*

Supposons que le système (3.7) soit stabilisable par un contrôle  $u(t) = h(t)g(z(t))$  avec  $h(t)$  bornée et  $g$  continue telle que  $g(0) = 0$ . Notons au préalable que

$$\begin{aligned} \|g \circ z_t\|_c &= \max_{-\tau_i \leq s \leq 0} \|g(z(t+s))\|, \\ &\leq \max_{-\tau_i \leq s \leq 0} \alpha(\|z(t+s)\|) \text{ par hypothèse,} \\ &\leq \alpha\left(\max_{-\tau_i \leq s \leq 0} \|z(t+s)\|\right) \text{ parce que } \alpha \in \mathcal{K}, \\ &\leq \alpha(\|z_t\|_c). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons les inégalités qui suivent :

$$\begin{aligned}
 \|x(t)\| &\leq \|z(t)\| + \sum_{i=0}^k \left\| \int_{-\tau_i}^0 e^{A(-\tau_i-s)} \tilde{B}_i u(t+s) ds \right\| \\
 &\leq \|z(t)\| + \sum_{i=0}^k \tau_i \|e^{A\cdot}\| \|\tilde{B}_i\| \|u_t\|_{\mathcal{C}} \\
 &\leq \|z(t)\| + \sum_{i=0}^k \tau_i \|e^{A\cdot}\| \|\tilde{B}_i\| |h|_{\infty} \|g \circ z_t\|_{\mathcal{C}} \\
 &\leq \|z(t)\| + \sum_{i=0}^k \tau_i \|e^{A\cdot}\| \|\tilde{B}_i\| |h|_{\infty} \alpha(\|z_t\|_{\mathcal{C}}).
 \end{aligned}$$

Si  $z(t)$  tend asymptotiquement vers l'origine, alors, d'après la caractérisation de la stabilité donnée par des gains non linéaires rappelée dans [Khalil, 2002, Lemme 4.5], il existe une fonction  $\alpha'$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que  $\|z(t)\| \leq \alpha'(\|z(t)\|)$ . La somme de fonctions de classe  $\mathcal{K}$  reste, évidemment, de classe  $\mathcal{K}$ , ce qui nous permet de conclure à la stabilité asymptotique de  $x(t)$  d'après le lemme 1.1 donné dans le chapitre 1. Cette preuve reste vraie pour la stabilité en temps fini.  $\blacksquare$

La difficulté, ici, réside du fait que ni le contrôle — les fonctions  $h$  et  $g$  ne sont pas données — ni le temps d'établissement ne sont connus explicitement. Mais considérons maintenant la stabilisation en temps fini des systèmes *linéaires scalaires* à retards constants. Il est possible, dans le cas scalaire, de trouver non seulement la commande explicite qui stabilise en temps fini l'origine du système mais aussi une borne maximale du temps  $T_0(\varphi)$ , présentée dans la définition 3.1.

Rappelons d'abord un résultat connu dans le cas des systèmes sans retard ([Haimo, 1986]) qui nous sera utile dans la preuve de la proposition 3.4 qui suit.

Soit le système

$$\dot{z} = az + \tilde{b}u, \quad (z, u) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.8)$$

où  $\tilde{b} \neq 0$  et  $\psi_l(z) = |z|^l \text{sign}(z)$  avec  $0 < l < 1$ . Ce système est stabilisable en temps fini par le contrôle  $u = (-\psi_l(z) - az) / \tilde{b}$  et

$$T(z(0)) = \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l}, \quad (3.9)$$

où  $T(z(0))$  représente le temps d'établissement du système non retardé (3.8) avec la condition initiale  $z(0)$ . En utilisant le lemme 3.3, on en déduit le résultat suivant.



**Proposition 3.4.** *Soit  $a, b_i \in \mathbb{R}$  avec  $0 \leq i \leq k$ , le système*

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=0}^k b_i u(t - \tau_i),$$

*est stabilisable en temps fini avec le contrôle*

$$u(t) = \frac{-1}{\tilde{b}} [az(t) + \psi_l(z(t))],$$

*où  $z(t) = x(t) + \sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(a, \tilde{b}_i)} u_t$  avec  $\tilde{b}_i = b_i e^{-a\tau_i}$  et  $\tilde{b} = \sum_{i=0}^k \tilde{b}_i$ . De plus, la fonction temps d'établissement vérifie*

$$T_0(x_t) \leq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l} + \max_{0 \leq i \leq k} \tau_i.$$

**Preuve.**

**Ligne directrice :** *En appliquant le lemme précédent, nous savons déjà que l'origine du système bouclé est stable en temps fini. Il ne reste plus qu'à majorer judicieusement  $T_0(x_t)$ . Il suffit pour cela de constater que  $z(t)$  tend vers l'origine avec un temps d'établissement dont on connaît une borne maximale et, ensuite, que  $x(t) = -\sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(a, \tilde{b}_i)} u_t$ . Mais  $u(t)$  s'annule aussi, il suffit donc d'attendre le maximum des  $\tau_i$  temps supplémentaires pour s'assurer que  $x(t)$  a bien atteint l'origine.*

La seule chose que nous ayons à prouver est que  $T_0(x_t) \leq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l} + \max_{0 \leq i \leq k} \tau_i$ . On sait d'après l'équation (3.9) que

$$z(t) = x(t) + \sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(a, \tilde{b}_i)} u_t$$

atteint l'origine en temps fini  $T(z(0)) = \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l}$ , ainsi  $x(t) = -\sum_{i=0}^k \mathbf{L}^{\tau_i}_{(a, \tilde{b}_i)} u_t$  pour tout  $t \geq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l}$ . Dans le même temps,  $u(t) = \frac{-1}{\tilde{b}} [az(t) + \psi_l(z(t))] = 0$  pour tout  $t \geq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l}$ . Ainsi,

$$\mathbf{L}^{\tau_i}_{(a, \tilde{b}_i)} u_t = \int_{-\tau_i}^0 e^{-as} \tilde{b}_i u(t+s) ds$$

s'annule pour tout  $t \geq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l} + \tau_i$ . Comme ceci est vrai pour tout  $0 \leq i \leq k$ , on en déduit que

$$T_0(x_t) \leq \frac{|z(0)|^{1-l}}{1-l} + \max_{0 \leq i \leq k} \tau_i, \tag{3.10}$$

ce qui conclut la preuve par application du lemme 3.3. ■

Voici un exemple d'application de la proposition 3.4.

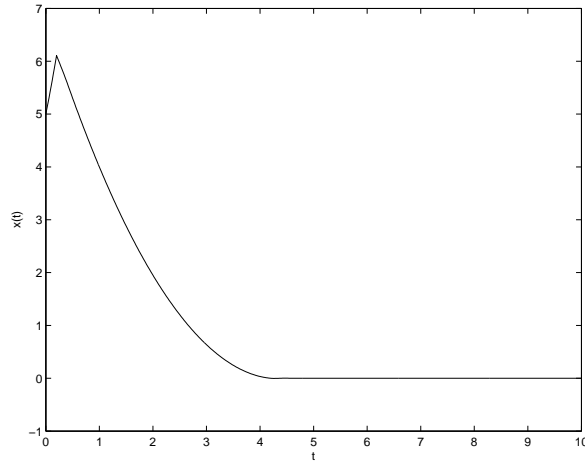
**Exemple 3.3.** En utilisant la proposition 3.4, on sait que le système,

$$\dot{x}(t) = x(t) + e^\tau u(t - \tau),$$

est stabilisable en temps fini par le contrôle

$$u(t) = -z(t) - \psi_a(z(t)),$$

avec  $z(t) = x(t) + \mathbf{L}^\tau_{(1,1)} u_t$ . Ceci conduit à la simulation de la figure 3.3 avec  $\tau = 0.2$ ,  $l = 0.5$ ,  $\varphi_0 \equiv 5$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Le temps d'établissement donné par (3.10) est de 4.7s ce qui concorde avec l'observation faite sur la figure 3.3.



**Figure 3.3** – évolution de la solution  $x(t)$  pour  $\tau = 0.2$ ,  $l = 0.5$ ,  $\varphi_0 \equiv 5$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$

Nous allons, à présent, étudier le cas plus général où le retard se trouve sur l'entrée et sur l'état du système.

### 3.2.2 Perspectives en utilisant la transformation de Fiagbedzi et Pearson

Dans cette partie, nous allons utiliser le modèle de réduction de Fiagbedzi et Pearson (cf. [Fiagbedzi et Pearson, 1986]) dans le cadre de l'étude de la stabilité en temps fini. Considérons le système

$$(\mathcal{S}) : \quad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t) + B_1 u(t - \tau_2), \quad (3.11)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $(A_0, A_1)$  sont deux matrices  $n \times n$ ,  $(B_0, B_1)$  sont des matrices  $n \times m$ ,  $t \geq 0$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_1$  sont des constantes. On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\nu_0) &= \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq -\nu_0\}, \\ \sigma(\mathcal{S}) &= \{s \in \mathbb{C} : \det [sI - A_0 - e^{-\tau_1 s} A_1] = 0\}, \\ \sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) &= \{s \in \mathbb{C} : s \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ et } \operatorname{Re}(s) \geq -\nu_0\}, \end{aligned}$$

où  $\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S})$  est l'ensemble des valeurs propres instables du système (3.11). Le système (3.11) est *spectralement stabilisable avec une marge  $\nu_0$*  si

$$\operatorname{rang} [sI - A_0 - e^{-\tau_1 s} A_1 | B_0 + e^{-\tau_2 s} B_1] = n,$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}(\nu_0)$ .

Supposons que l'équation

$$\begin{cases} A = A_0 + e^{-A\tau_1} A_1 \\ B = B_0 + e^{-A\tau_2} B_1 \end{cases}$$

admette une solution  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  telle que

$$\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\tilde{A}).$$

Alors on peut considérer le changement de coordonnées

$$z(t) = x(t) + \mathbf{L}^{\tau_1}(\tilde{A}, A_1)x_t + \mathbf{L}^{\tau_2}(\tilde{A}, B_1)u_t,$$

et le système

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t). \tag{3.12}$$

Le lemme suivant est une extension du modèle de réduction de Fiagbedzi et Pearson donné dans [Fiagbedzi et Pearson, 1986] qui montre que tout contrôle non linéaire  $u(t) = h(t)g(z(t))$  stabilisant le système (3.12), stabilise le système (3.11) avec une marge de  $\nu_0$ , *i.e.* le spectre du système bouclé n'a pas d'élément dans  $\mathbb{C}(\nu_0)$ .

**Proposition 3.5.** *Soit  $\nu_0 \geq 0$ , sous les hypothèses suivantes*

- 1) *le système (3.11) est spectralement stabilisable avec une marge  $\nu_0$ ,*
- 2)  $\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\tilde{A})$ ,
- 3) *le système (3.12) est stabilisable par un contrôle  $u(t) = h(t)g(z(t))$  avec  $h(t)$  bornée et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue telle que  $g(0) = 0$  et telle qu'il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que*

$$\|g(x)\| \leq \alpha(\|x\|),$$

alors le système (3.11) est stabilisable avec une marge  $\nu_0$  par le contrôle

$$u(t) = h(t)g \left( x(t) + \mathbf{L}^{\tau_1}_{(\tilde{A}, A_1)} x_t + \mathbf{L}^{\tau_2}_{(\tilde{A}, B_1)} u_t \right).$$

De plus, si le système (3.12) est stabilisable en temps fini alors il existe  $T_x > 0$  telle que  $x(t)$  vérifie l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$x(t) = -\mathbf{L}^{\tau_1}_{(\tilde{A}, A_1)} x_t = - \int_{\tau_1}^0 e^{\tilde{A}(-\tau_1-s)} A_1 x(t+s) ds,$$

pour tout  $t \geq T_x$ .

**Preuve.** Supposons que les hypothèses 1, 2 et 3 soient satisfaites. En utilisant les mêmes inégalités que celles données dans la preuve du lemme 3.3, on en déduit que

$$\left\| x(t) + \mathbf{L}^{\tau_1}_{(\tilde{A}, A_1)} x_t \right\| \leq \|z(t)\| + \tau_2 \left\| e^{\tilde{A}} \right\| \|B_1\| |h|_{\infty} \alpha(\|z_t\|_C).$$

Le fait que  $z(t)$  tende asymptotiquement vers l'origine implique que  $x(t) + \mathbf{L}^{\tau_1}_{(\tilde{A}, A_1)} x_t$  tend asymptotiquement vers l'origine (cf. [Khalil, 2002, Lemma 4.5]). La stabilité asymptotique de  $x(t)$  se déduit du résultat suivant [Fiagbedzi et Pearson, 1986, Theorem 3.3]. De plus, la stabilité en temps fini du système (3.12) implique que pour toutes les solutions  $x(t)$  du système (3.11), il existe  $T_x > 0$  tel que  $x(t) + \mathbf{L}^{\tau_1}_{(\tilde{A}, A_1)} x_t = 0$  pour tout  $t \geq T_x$ . ■

Ce résultat est différent de celui de la proposition 3.4. En général, il semble difficile d'obtenir la stabilisation en temps fini du système à retards (3.11) en utilisant la stabilisation en temps fini du système (3.12). Néanmoins, après un temps fini, toutes les solutions du système (3.11) avec le contrôle  $u(t)$  vérifient une équation intégrale de Fredholm de première espèce. Une des perspectives sera d'étudier les propriétés de ces solutions dont une étude exhaustive se trouve dans [Pipkin, 1991]. Il sera ainsi possible de déterminer si la stabilité en temps fini peut être obtenue sous certaines hypothèses supplémentaires.

### 3.2.3 Limites et perspectives

Revenons un instant sur les différents résultats de cette section. Le théorème 3.2 nous a permis de donner une condition suffisante de stabilité en temps fini d'un système non linéaire à retards se basant sur les fonctionnelles de Lyapunov. Ensuite nous nous sommes intéressé au problème de la stabilisation en nous restreignant aux classes des systèmes linéaires à retards

constants pour nous ramener aux conditions permettant d'appliquer des extensions du modèle de réduction d'Artstein — cas d'un retard sur l'entrée, lemme 3.3 et proposition 3.4 — et du modèle de réduction de Fiagbedzi — cas d'un retard sur l'entrée et l'état, proposition 3.5.

Cette étude nous a permis de montrer que la classe des systèmes à retards stables en temps fini était assez limitée — *cf.* proposition 3.1. Néanmoins, grâce à l'application de notre théorème, nous avons obtenu un système à retard stable en temps fini et nous l'avons présenté dans l'exemple 3.2. Les conditions de stabilisation d'un système à retards sont aussi assez restrictives. Pour obtenir un résultat exploitable, il nous a fallu considérer le cas des retards constants sur l'entrée pour un système linéaire et scalaire — *cf.* exemple 3.3. Dans le cas d'un retard sur l'entrée et l'état, il est possible de montrer que l'état vérifie une intégrale de Fredholm de première espèce mais nous n'avons pas pu conclure à la stabilisation en temps fini. Ces différents points peuvent faire l'objet de recherches futures dans un domaine qui n'a pas encore été étudié — à notre connaissance. Nous espérons que nos travaux permettront à d'autres chercheurs de contribuer à cette étude.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes à retards. Nous pouvons résumer notre contribution en énumérant les différents résultats proposés :

- **stabilité en temps fini** : le théorème 3.2 généralise les résultats sur la stabilité en temps fini dans le cas des systèmes non linéaires à retards.
- **stabilisation en temps fini** : pour obtenir des résultats exploitables, nous nous sommes placé dans le cas des systèmes linéaires à retards constants pour obtenir le lemme 3.3 et la proposition 3.5. Le premier résultat permet de démontrer la proposition 3.4 qui donne explicitement un contrôle stabilisant en temps fini un système scalaire linéaire à retards constants sur l'entrée. Le deuxième résultat, proposition 3.5, traite des systèmes linéaires possédant des retards sur l'entrée et l'état mais ne permet pas de conclure à la stabilité en temps fini.

# Stabilité entrée-état des systèmes à retard

*Il faut reconstruire son monde pierre par pierre.*

— Wassermann<sup>1</sup>

---

Nous entrons au cœur de notre problématique : le cas des systèmes non linéaires perturbés et à retards variables. C'est un domaine encore peu exploré que nous tenterons, par nos résultats, de construire "pierre par pierre". Il conviendra de définir rigoureusement et clairement toutes les notions qui serviront à présenter nos différentes contributions. Nous nous efforcerons donc, dans une première partie, de faire un bilan des quelques travaux déjà exposés sur le sujet et d'en montrer la cohérence avec les nôtres. Dans une deuxième partie, en vue d'applications pratiques, nous proposerons une caractérisation d'un système à retards stable entrée-état par l'approche de Lyapunov-Krasovskii. La fonctionnelle présentée sera alors nommée *fonctionnelle de Lyapunov-Sontag*<sup>2</sup>. Ensuite, nous étudierons les liens entre la stabilité exponentielle et la stabilité entrée-état. Nous concluons finalement par quelques applications et les nombreuses pistes que ces travaux permettront, nous l'espérons, d'ouvrir.

---

<sup>1</sup>Jacob Wassermann (auteur allemand du début du 20e siècle), *Joseph Kerkhoven*, éditions mémoire du livre, Paris, 2002, p.202.

<sup>2</sup>Nous proposons de nommer ainsi cette fonctionnelle car, d'une part, Sontag fut le premier et le principal instigateur de cette théorie et, d'autre part, cela nous évite des anglicismes peu esthétiques — la désignation internationale est *ISS-Lyapunov function* dans le cas non retardé.

## 4.1 Introduction

Comme nous l'avons dit, très peu d'études ont été menées sur la stabilité entrée-état des systèmes à retards. Teel est le premier à avoir formalisé le problème dans [Teel, 1998] en établissant un lien entre le théorème de Razumikhin (*cf.* théorème 1.7) et l'approche proposée par Sontag. Par la suite, dans [Polushin et Marquez, 2003], les auteurs ont appliqué ces résultats dans le cas d'un système téléopéré avec des retards de transmission. Très récemment, des travaux ont été publiés indépendamment des nôtres dans [Pepe et Jiang, 2005] reprenant le thème que nous exposons dans la section 4.3 : une caractérisation de la stabilité entrée-état par des fonctionnelles et non plus des fonctions comme proposé dans l'approche de Teel que nous exposerons dans cette même partie.

L'application, illustrée dans [Polushin et Marquez, 2003], montre parfaitement l'enjeu que représente la généralisation de cette théorie à la classe des équations différentielles fonctionnelles. Dans cet article, les auteurs appliquent les résultats développés par Teel dans le cas des réseaux téléopérés modélisés par des systèmes non linéaires soumis à des perturbations.

## 4.2 Définition de la stabilité entrée-état des systèmes retardés

Nous présentons dans cette section la stabilité entrée-état avec la même démarche que celle adoptée dans le chapitre 1. Après avoir défini cette notion de stabilité, nous montrerons la cohérence de la définition proposée avec les inégalités qu'il est possible d'obtenir dans le cas linéaire. Ensuite, nous montrerons que la définition que nous exposons est équivalente à celle que Teel a développée dans [Teel, 1998].

### 4.2.1 Présentation

Considérons les systèmes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $f$  est une fonction continue définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . L'entrée de perturbation  $u_t$  est considérée comme bornée.

**Remarque 4.1.** *Avant d'aborder les détails de ce chapitre, nous voudrions une nouvelle fois préciser les notations qui pourraient tromper le lecteur. Dans ce mémoire,  $x(t; t_0, \varphi_0)$  est une solution du système (4.1) à l'instant  $t$  partant de la condition initiale  $\varphi_0$  en  $t_0$  et représente*

**un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .** Nous désignerons aussi  $x_t(t_0, \varphi_0)$  — **une fonction de  $\mathcal{C}$**  — comme une solution du système étudié sous les mêmes conditions initiales. Si aucune ambiguïté n'existe, ces deux valeurs seront notées respectivement  $x(t)$  et  $x_t$ .

Il convient aussi d'observer que  $x_{t_0}(t_0, \varphi_0) \equiv \varphi_0$  ce qui nous sera utile dans certaines démonstrations.

La définition donnée ci-dessous est une extension naturelle de celle présentée dans le chapitre 1.

**Définition 4.1.** Le système (4.1) est dit **stable entrée-état** s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telles que, quelle que soit la fonction initiale  $\varphi_0$  et une entrée bornée  $u$ , la solution  $x_t(t_0, \varphi_0)$  existe pour tout  $t \geq t_0$  et vérifie l'inégalité

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) + \gamma(|u_t|_\infty). \quad (4.2)$$

**Remarque 4.2.** Comme dans le cas non retardé, cette définition peut aussi se traduire de façon équivalente sous la forme suivante :

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \max[\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0), \gamma(|u_t|_\infty)].$$

**Remarque 4.3.** Cette définition implique que si  $u(t) \equiv 0$ , alors l'origine du système (4.1) est globalement asymptotiquement stable d'après le lemme 1.1. L'inverse reste néanmoins faux et l'exemple qui suit convaincra le lecteur sceptique. Considérons l'équation différentielle scalaire  $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)x(t - 1)$ . Le système est, bien entendu, exponentiellement stable pour une entrée  $u$  nulle mais ne l'est plus si le système est soumis à une entrée suffisamment importante : si  $u$  est une constante supérieure à 1 les trajectoires du système divergent.

### 4.2.2 Cohérence avec le cas linéaire

Il est intéressant d'observer que l'inégalité (4.2) est en cohérence avec celle que nous pouvons obtenir dans le cas linéaire. Considérons l'équation différentielle retardée de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

où  $A$  est supposée de Hurwitz,  $A_d$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées,  $\tau > 0$  est une constante représentant le retard,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représente la valeur du signal exogène. La solution de l'équation (4.3) avec la condition initiale  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$  vérifie

$$x(t; t_0, \varphi_0) = e^{At} \varphi_0(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} [A_d x(s - \tau) + Bu(s)] ds.$$



De même qu'au chapitre 1 et en observant que  $\|\varphi_0(0)\| \leq \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}$ , nous pouvons majorer cette quantité par

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, \varphi_0)\| &\leq ce^{-rt} \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} + \int_{-\tau}^{t-\tau} ce^{-r(t-s)} e^{r\tau} \|A_d\| \|x(s)\| ds + \int_0^t ce^{-r(t-s)} \|B\| \|u(s)\| ds \\ &\leq ce^{-rt} \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} + \int_{-\tau}^0 ce^{-r(t-s)} e^{r\tau} \|A_d\| \|x(s)\| ds \\ &\quad + \int_0^t ce^{-r(t-s)} e^{r\tau} \|A_d\| \|x(s)\| ds + \int_0^t ce^{-r(t-s)} \|B\| \|u(s)\| ds \\ &\leq c \left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right) \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} e^{-rt} + \int_0^t ce^{-r(t-s)} e^{r\tau} \|A_d\| \|x(s)\| ds + \frac{c\|B\|}{r} |u|_{\infty}, \end{aligned}$$

où  $c$  et  $r$  sont des constantes positives choisies de telle sorte que  $\|e^{At}\| \leq ce^{-rt}$ . En notant que  $\frac{c\|B\|}{r} |u|_{\infty}$  est une fonction non décroissante en  $t$ , nous pouvons appliquer l'inégalité (B.3) de Gronwall présentée dans l'annexe B et obtenir :

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, \varphi_0)\| &\leq c \left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right) \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} e^{-rt} + \frac{c\|B\|}{r} |u|_{\infty} e^{\int_0^t ce^{-r(t-s)} e^{r\tau} \|A_d\| ds} \\ &\leq c \left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right) \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} e^{-rt} + \frac{c\|B\|}{r} e^{\frac{ce^{r\tau}\|A_d\|}{r}} |u|_{\infty}. \end{aligned}$$

La solution vérifie bien l'équation (4.2) avec les fonctions  $\beta(s, t) = c \left(1 + \frac{\|A_d\| e^{r\tau}}{r}\right) se^{-rt} \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma(s) = \frac{c\|B\|}{r} se^{\frac{ce^{r\tau}\|A_d\|}{r}} \in \mathcal{K}_{\infty}$ .

Nous pouvons formaliser ce résultat par la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** *Le système linéaire à retard (4.3) est stable entrée-état si, et seulement si, la solution nulle de ce système pour une entrée  $u \equiv 0$  est asymptotiquement stable.*

### 4.2.3 Autre définition et cohérence théorique

Le travail de Teel sur les systèmes à retards s'appuie sur une définition différente de celle que nous avons présentée. En fait, dans l'article [Teel, 1998], l'auteur se réfère non pas à la définition classique par des fonctions de classes  $\mathcal{KL}$  et  $\mathcal{K}$  mais à une caractérisation proposée par Sontag que nous avons rappelée dans le chapitre 1 — théorème “de superposition” 1.8. Les résultats que développe ensuite Teel sont basés sur cette définition. Il est donc intéressant de présenter ici cette définition et de montrer en quoi elle est reliée à celle que nous avons proposée plus haut. Ceci, non seulement du point de vue de la théorie, mais aussi parce qu'il est toujours utile de connaître plusieurs expressions d'une même définition. Cela permet,

dans certains cas, de déduire des propriétés de manière plus simple en choisissant l'une des caractérisations proposées.

**Définition 4.2 ([Teel, 1998]).** *Considérons l'équation différentielle fonctionnelle (4.1). Ce système est dit **stable entrée-état de gain**  $\gamma$  —  $\gamma$  étant une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  — si les solutions de (4.1) sont définies sur  $t \in [-\tau, \infty)$  et si les deux propriétés suivantes sont vérifiées uniformément en  $t_0$  :*

1) (**borne uniforme**) — *Il existe une fonction  $\delta \in \mathcal{K}$  telle que*

$$\sup_{t \geq t_0} \|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \max[\delta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}), \gamma(|u_t|_\infty)]. \quad (4.4)$$

2) (**convergence uniforme**) — *Pour tout  $\epsilon, \eta > 0$  il existe  $T = T(\eta, \epsilon) \geq 0$  tel que si  $\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} \leq \eta$ , alors :*

$$\sup_{t \geq t_0 + T} \|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \max[\epsilon, \gamma(|u_t|_\infty)]. \quad (4.5)$$

Montrons à présent que qu'un système stable entrée-état au sens de la définition 4.1 l'est aussi au sens de la définition 4.2. Notons au passage que la réciproque n'est pas encore démontrée et mérite une attention particulière.

**Preuve.** D'après la remarque 4.2, nous savons qu'il existe deux fonctions  $\beta \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  telles que

$$\forall t \geq t_0 \quad \|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \max[\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0), \gamma(|u_t|_\infty)] \leq \max[\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, 0), \gamma(|u_t|_\infty)],$$

car la fonction  $\beta$  est décroissante en  $t$ . Donc, puisque  $\sup_{t \geq t_0} \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) = \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, 0)$ , il en résulte :

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \max[\sup_{t \geq t_0} \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, 0), \gamma(|u_t|_\infty)].$$

Il suffit alors de constater que  $\sup_{t \geq t_0} \|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} = \max(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, \sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, \varphi_0)\|)$  et que  $\delta(r) = \max(r, \beta(r, 0))$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  pour obtenir la condition de borne uniforme (4.4).

En ce qui concerne la condition de convergence uniforme (4.5), elle se montre de la manière suivante : considérons  $\eta > 0$  et  $\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} \leq \eta$ . La fonction  $\beta$  de la définition 4.1 étant de classe  $\mathcal{KL}$ , il existe  $T = T(\eta, \epsilon)$  tel que  $\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) \leq \epsilon$  pour  $t \geq t_0 + T - \tau$ . Donc

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \max[\epsilon, \gamma(|u_t|_\infty)], \quad \forall t \geq t_0 + T - \tau.$$

Dans ce cas

$$\sup_{t \geq t_0 + T} \|x_t(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \max[\epsilon, \gamma(|u_t|_\infty)], \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

ce qui correspond précisément à la condition de convergence uniforme. ■

### 4.3 Caractérisation par dissipation

Vérifier l'inégalité (4.2) n'est pas trivial car la construction des gains non linéaires n'est pas aisée. Trouver un critère en terme de fonction d'énergie, c'est-à-dire, en s'appuyant sur les théories de Lyapunov, donne un moyen de vérifier cette propriété *a priori* plus aisément.

#### 4.3.1 Approche par la méthode de Lyapunov-Krasovskii

##### 4.3.1.1 Définition d'une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag

**Définition 4.3.** Une fonctionnelle  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite **fonctionnelle de Lyapunov-Sontag** du système (4.1) s'il existe des fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et deux fonctions  $\chi, \alpha_3$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que :

- 1)  $\alpha_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$ ,
- 2)  $D^+V(t, \varphi, \mu)_{(4.1)} \leq -\alpha_3(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \quad \forall \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \geq \chi(\|\mu\|)$ ,

pour tout  $(t, \varphi, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m$ .



Notons que si l'entrée  $\mu$  est identiquement nulle, alors nous retombons sur la définition usuelle d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Cela est parfaitement en accord avec la notion de stabilité entrée-état : pour une entrée nulle, le système est au moins GAS.

**Remarque 4.4.** L'inégalité 2) de la définition 4.3 peut s'écrire de manière équivalente sous la forme suivante :

$$D^+V(t, \varphi, \mu)_{(4.1)} \leq -\alpha_3(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}) + \alpha_4(\|\mu\|),$$

où  $\alpha_4$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$ .

##### 4.3.1.2 Condition suffisante de stabilité

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, le théorème que nous proposons dans ce paragraphe a été développé parallèlement aux travaux de [Pepe et Jiang, 2005]. Ce

théorème représente, en effet, la pierre angulaire de cet article. Bien que le système étudié et la définition proposée pour la stabilité entrée-état se basent sur un système non retardé en entrée, une généralisation aux systèmes de la forme (4.1) n'est pas contraignante. Il faut aussi noter que le choix de la norme proposée dans cet article est différent de la norme supérieure généralement adoptée. En prenant

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \left( \varphi^T(0)\varphi(0) + \int_{\tau}^0 \varphi^T(s)\varphi(s)ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\varphi \in \mathcal{C}$ , les démonstrations restent équivalentes mais les critères sont plus simples à vérifier. Il est temps de présenter ce résultat.

**Théorème 4.2.** *S'il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag pour le système (4.1), alors il est stable entrée-état au sens de la définition 4.1.*

Avant de développer la démonstration, il convient de présenter le lemme suivant.

**Lemme 4.3.** *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (4.6)$$

Supposons qu'il existe une fonctionnelle  $V(t, \varphi)$  définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  qui satisfasse les conditions suivantes :

- 1)  $\alpha_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$ ,
- 2)  $D^+V(t, \varphi)_{(4.6)} \leq -\alpha_3(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$ , pour tout  $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} \geq H > 0$ ,

$\forall t \geq 0$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{C}$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{K}_{\infty}$ ,  $\alpha_3$  une fonction de classe  $\mathcal{K}$  et  $H$  une constante réelle positive. Alors,

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(H)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.7)$$

**Preuve.**

**Ligne directrice :** La preuve est divisée en deux parties. En premier, nous montrons, en utilisant le principe de comparaison, l'existence d'une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et d'un instant  $t_1$  tels que pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0)$ . En second, nous montrons que l'ensemble désigné par  $\Lambda_{t, \alpha_2(H)}$  est invariant pour  $t \geq t_1$ . Cette condition implique que pour  $t \geq t_1$ ,  $\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(H))$ . La réunion de ces deux inégalités suffit pour conclure la preuve.

Afin de rendre la démonstration plus lisible, on notera, quand aucune confusion n'est possible,  $x_t$  la solution  $x_t(t_0, \varphi_0)$  et  $\Lambda_{t, \alpha_2(H)}$  désignera le sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  défini par

$$\{\varphi \in \mathcal{C} \mid V(t, \varphi) \leq \alpha_2(H)\}.$$

Pour plus de clarté, la preuve est décomposée en deux parties.

*i) Premier point.* Soit  $t_1$  le premier instant où la solution  $x_t$  entre dans  $\Lambda_{t, \alpha_2(H)}$ .  $t_1$  peut être infini si la solution n'entre jamais dans cet ensemble. Pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $x_t$  est en dehors de  $\Lambda_{t, \alpha_2(H)}$  ce qui implique

$$V(t, x_t) > \alpha_2(H),$$

et donc, d'après l'inégalité 1) du lemme, on sait que  $\|x_t\|_{\mathcal{C}} > H$ . En combinant les inégalités 1) et 2) du lemme et en écrivant  $v(t) = V(t, x_t)$ , on obtient la majoration suivante :

$$D^+V(t) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(v(t))) \triangleq -g(v(t)).$$

Soit  $y(t)$  une fonction satisfaisant l'équation différentielle autonome suivante

$$\dot{y} = -g(y), \quad y(t_0) \geq v(t_0).$$

Le principe de comparaison (*cf.* annexe B) nous assure que  $v(t) \leq y(t)$  quel que soit  $t_0 \leq t \leq t_1$ . D'après le lemme C.1 de l'annexe C, il existe une fonction de classe  $\mathcal{KL}$  notée  $\sigma(r, s)$  telle que

$$v(t) \leq \sigma(v(t_0), t - t_0).$$

En utilisant l'inégalité 1) du lemme, on peut conclure que :

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, \varphi_0)\| &\leq \alpha_1^{-1}(v(t)) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(v(t_0), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}), t - t_0)) \triangleq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $\beta$  est décroissante en sa deuxième variable, continue et  $\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , il existe un temps fini après lequel  $\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) < H$  quel que soit  $t$ . Dans ce cas, le temps  $t_1$  doit être fini.

*ii) Deuxième point.* Il nous faut montrer que  $x_t \in \Lambda_{t, \alpha_2(H)}$ ,  $\forall t \geq t_1$ . Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que l'ensemble  $\mathcal{T} = \{t \geq t_1 \mid V(t, x_t) > \alpha_2(H)\} \subset \mathbb{R}$  n'est pas vide. Notons  $t^*$  son minimum. Par continuité de  $v(t)$ , nous avons  $V(t^*, x_{t^*}) = \alpha_2(H)$ . Donc, la condition 1) implique que  $\|x_{t^*}\|_{\mathcal{C}} \geq H$ , et l'inégalité

$$D^+V(t^*, x_{t^*}) < 0$$

provient de 2). La fonction  $v(t)$  est strictement décroissante dans un voisinage de  $t^*$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $t^*$  est le minimum du sous-ensemble  $\mathcal{T}$ .

iii) *Conclusion* : Nous avons montré qu'il existe un temps  $t_1 \geq t_0$  tel que :

- $\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0)$ , pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,
- $\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \|x_{t_1}(t_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{C}} \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(H))$  pour  $t \geq t_1$ .

Cela peut se résumer par l'inégalité suivante

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \max[\beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0), \alpha_1^{-1}(\alpha_2(H))], \quad \forall t \geq t_0,$$

ou par celle développée dans (4.7), ce qui conclut notre démonstration. ■

Après avoir démontré l'inégalité (4.7) nous pouvons revenir à la démonstration du théorème 4.2 qui en est une conséquence immédiate.

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le lemme précédent en remplaçant  $H$  par  $\chi(|u_t|_{\infty})$  et l'inégalité (4.7) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\|x(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) + \gamma(|u_t|_{\infty}), \quad \forall t \geq t_0,$$

où  $\gamma(u) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \chi(u)$ . Le système (4.1) est donc stable entrée-état suivant la définition 4.1. ■

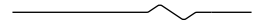
### 4.3.2 Approche par la méthode de Lyapunov-Razumikhin

Cette partie résume les avancées théoriques proposées dans [Teel, 1998]. Teel présente de multiples résultats mais nous choisissons de nous limiter au principal théorème, qui, en fait, est le pilier de tout l'article.

**Théorème 4.4.** *Supposons qu'il existe  $\alpha_1, \alpha_2$  deux fonctions de classe  $\mathcal{K}_{\infty}$ , des fonctions  $\alpha_3, \gamma_v, \gamma_u$  de classe  $\mathcal{K}$  et une fonction continue  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telles que*

- 1)  $\alpha_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2(\|x(t)\|)$ ,
- 2)  $V(t, x(t)) \geq \max[\gamma_v(\|V_t\|_{\mathcal{C}}), \gamma_u(|u|_{\infty})] \Rightarrow \dot{V}(t, x(t), u) \leq -\alpha_3(\|x(t)\|)$ ,
- 3)  $\gamma_v(s) < s$  pour  $s > 0$ .

Alors le système (4.1) est stable entrée-état.



La démonstration de ce théorème nécessite l'application du lemme qui suit :

**Lemme 4.5.** *Soient une fonction  $\mu(t) \geq 0$  et une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$ . Si  $V(t) \geq \mu(t)$  implique  $D^+V(t) < -\alpha(V(t))$ , il existe une fonction  $\beta \in \mathcal{KL}$  indépendante de  $\mu(t)$  avec  $\beta(s, 0) > s$  telle que  $V(t) < \max[\beta(V(t-t_0), t-t_0), \sup_{t \geq t_0} \mu(t)]$ .*

**Preuve.** Supposons qu'il existe un  $\mu(t) \geq 0$  et une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  de sorte que si  $V(t) \geq \mu(t)$  alors  $D^+V(t) < -\alpha(V(t))$ . Deux cas se présentent donc.

Si  $V(t) \geq \sup_{t \geq t_0} \mu(t)$ , alors  $D^+V(t) < -\alpha(V(t))$  et on peut montrer l'existence d'une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  — comme proposé dans la preuve du lemme (4.3) — telle que  $D^+V(t) < \beta(V(t-t_0), t-t_0)$ . Sinon,  $V(t) < \max[\beta(V(t-t_0), t-t_0), \sup_{t \geq t_0} \mu(t)]$ . ■

#### Preuve. Théorème 4.4

**Ligne directrice :** *Cette preuve est différente de celle proposée dans l'article [Teel, 1998], bien qu'elle s'en inspire largement. Nous montrons que le système est stable entrée-état au sens de la définition 4.1 que nous avons proposée. La preuve est essentiellement technique et se sert de plusieurs majorations judicieusement choisies.*

Montrons, dans un premier temps, que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\|V_t\|_{\mathcal{C}} \leq \max \left[ \frac{1}{2} \|V_{t_0}\|_{\mathcal{C}} (1 - \text{sign}(t - t_0 - \tau)), |V|_{\infty} \right], \quad (4.8)$$

$$V(t) \leq \max [\beta_1(V(t_0), t - t_0), \gamma_v(\|V_t\|_{\mathcal{C}}), \gamma_u(|u_t|_{\infty})]. \quad (4.9)$$

La première inégalité est évidente ; quant à la deuxième, elle se justifie par application directe du lemme 4.5 sur l'inégalité 2) du théorème 4.4 avec  $\mu(t) = \max[\gamma_v(\|V_t\|_{\mathcal{C}}), \gamma_u(|u|_{\infty})]$  et  $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ .

L'inégalité 1) implique que

$$\|x(t)\| \leq \max [\alpha_1^{-1}(\beta_1 \circ \alpha_2^{-1}(\|\varphi(0)\|_{\mathcal{C}}, t - t_0), \alpha_1^{-1}(\gamma_u(|u|_{\infty}))],$$

car  $V(t_0) \leq \alpha_2(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}})$ .

Nous venons de montrer qu'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{K}_{\infty}$  telle que

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}}, t - t_0) + \gamma(|u|_{\infty}),$$

c'est-à-dire que le système est stable entrée-état. ■

## 4.4 Relation entre stabilité exponentielle et stabilité entrée-état

Nous proposons, dans cette section, de mettre en relation la stabilité exponentielle et la stabilité entrée-état. Il s'agit de considérer les systèmes de la forme (4.1) et de montrer que, sous certaines conditions, si les solutions pour une entrée  $u = 0$  sont exponentiellement stables alors le système est stable entrée-état. Nous utilisons le théorème 4.2 développé dans la partie précédente ainsi qu'un théorème 'réciproque' présenté dans le chapitre 1 — cf. théorème 1.6. Néanmoins, pour obtenir ce résultat, il est intéressant d'introduire une nouvelle manière de définir la dérivée d'une fonctionnelle  $V$ .

Soit la fonctionnelle  $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ; nous définissons la dérivée à droite notée  $D_*^+V$  de la fonctionnelle  $V$  par (cf. [Burton, 1985, Définition 4.2.4])

$$D_*^+V(\varphi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (V(\varphi_{\Delta t, u}^*) - V(\varphi)), \quad (4.10)$$

où  $\varphi_{\Delta t, u}^* \in \mathcal{C}$  est donnée par

$$\varphi_{\Delta t, u}^*(s) = \begin{cases} \varphi(s + \Delta t), & s \in [-\tau, -\Delta t], \\ \varphi(0) + f(\varphi)(\Delta t + s), & s \in [-\Delta t, 0]. \end{cases} \quad (4.11)$$

Il est important de noter que cette définition est sensiblement différente de celle que nous avons présentée dans le chapitre 1, paragraphe 1.1.3 . Mais, les deux notions de dérivées présentées sont confondues si la fonction  $f$  étudiée est localement lipschitzienne en sa deuxième variable, ce qui est le cas dans l'ensemble de ce mémoire.

Ce résultat fut présenté dans [Driver, 1962] qui exigeait, en plus, que les solutions du système étudié soient uniques. Yoshizawa a montré, dans [Yoshizawa, 1966], que cette condition n'était pas nécessaire.

Considérons à nouveau le système (4.1) pour une entrée nulle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, 0), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Nous pouvons alors présenter le résultat suivant [Yeganefar et al., 2006] :

**Théorème 4.6.** *Supposons que  $f(t, x_t, u)$  soit continûment dérivable et globalement lipschitzienne en  $(x_t, u)$  uniformément en  $t$ . Si l'origine du système non forcé (4.12) est globalement exponentiellement stable alors le système (4.1) est stable entrée-état au sens de la définition 4.1.*



**Preuve.**

**Ligne directrice :** L'idée principale de la preuve est de montrer qu'il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag pour le système (4.1); le théorème 4.2 assure alors que notre système est stable entrée-état. De plus, la fonctionnelle que nous recherchons est la même que celle du système non perturbé (4.12) déduite du théorème inverse 1.6 présentée chapitre 1.

Le théorème réciproque 1.6, présenté au chapitre 1, nous assure que le système non perturbé (4.12) possède une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii notée  $V(t, \varphi)$  qui satisfait les inégalités (1.7-1.9). La dérivée supérieure à droite de la fonctionnelle  $V$  du système (4.1) peut être définie d'une manière analogue à celle présentée plus haut, *i.e.* :

$$D_*^+ V(t, \varphi, u) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi)), \quad (4.13)$$

où, pour mémoire,  $\varphi_{\Delta t, u}^* \in \mathcal{C}$  est donnée par

$$\varphi_{\Delta t, u}^*(s) = \begin{cases} \varphi(s + \Delta t), & s \in [-\tau, -\Delta t], \\ \varphi(0) + f(t, \varphi, u)(\Delta t + s), & s \in [-\Delta t, 0]. \end{cases} \quad (4.14)$$

Alors,

$$\begin{aligned} D_*^+ V(t, \varphi, u) &= \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi)) \\ &= \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi_{\Delta t, 0}^*) - V(t, \varphi) + V(t, \varphi_{\Delta t, 0}^*)) \\ &= D_*^+ V(t, \varphi, 0) + \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi_{\Delta t, 0}^*)) \\ &\leq -c_3 \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi_{\Delta t, 0}^*)). \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |V(t, \varphi_{\Delta t, u}^*) - V(t, \varphi_{\Delta t, 0}^*)| &\leq c_4 \|\varphi_{\Delta t, u}^* - \varphi_{\Delta t, 0}^*\|_{\mathcal{C}} \\ &= c_4 \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi_{\Delta t, u}^*(s) - \varphi_{\Delta t, 0}^*(s)\| \\ &\leq c_4 \sup_{s \in [-\Delta t, 0]} |\Delta t + s| \|f(t, \varphi, u) - f(t, \varphi, 0)\| \\ &\leq c_4 |\Delta t| \ell \|u\| \leq c_4 |\Delta t| \ell \|u\|_{\infty}, \end{aligned}$$

car, par hypothèse,  $f$  est uniformément globalement lipschitzienne. Nous en déduisons donc que :

$$D_*^+ V(t, \varphi, u) \leq -c_3 \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + c_4 \ell \|u\|_{\infty}.$$

Il est facile de constater que cette dernière inégalité est équivalente à celle de la définition donnée pour caractériser un système stable entrée-état. L'idée est d'utiliser le terme  $-c_3 \|\varphi\|_{\mathcal{C}}$  pour dominer  $c_4 \ell |u|_{\infty}$  pour des  $\|\varphi\|_{\mathcal{C}}$  assez larges. Dans cette optique, nous réécrivons la dernière inégalité de la manière suivante :

$$D_*^+ V(t, \varphi, u) \leq -c_3(1 - \theta) \|\varphi\|_{\mathcal{C}} - c_3 \theta \|\varphi\|_{\mathcal{C}} + c_4 \ell |u|_{\infty},$$

où  $0 < \theta < 1$ . Alors

$$D_*^+ V(t, \varphi, u) \leq -c_3(1 - \theta) \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \quad \forall \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \geq \frac{c_4 \ell |u|_{\infty}}{c_3 \theta},$$

pour tout  $(\varphi, u)$ . Mais ceci est aussi vrai pour une trajectoire  $x_t \in \mathcal{C}_{\bar{a}}$ . Donc, les conditions du théorème 4.2 sont satisfaites avec  $\alpha_1(r) = c_1 r$ ,  $\alpha_2(r) = c_2 r$ ,  $\alpha_3(r) = c_3 r$  et  $\chi(r) = \frac{c_4 \ell}{c_3 \theta} r$ , ce qui conclut la démonstration. ■

**Remarque 4.5.** *Dans cette preuve, nous avons choisi une fonctionnelle de Lyapunov en utilisant un théorème réciproque pour le système (4.12) et nous avons calculé sa dérivée le long des trajectoires du même système, i.e. système (4.1), pour une entrée  $u$  non nulle. Nous avons pu montrer que cette fonctionnelle était une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag pour le système (4.1). Il est possible de montrer, en adoptant une démarche similaire, que le système (4.1), pour une fonction  $f$  globalement lipschitzienne en  $u$  et  $x_t$ , est stable entrée état, **si, et seulement si**, il possède une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag. Mais, bien entendu, la condition d'uniformité globale sur  $f$  est une condition très forte qui n'est généralement pas respectée. Obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité entrée-état, pour des fonctions  $f$  localement lipschitziennes, reste un problème ouvert.*

## 4.5 Systèmes en cascade

Comme souligné dans le chapitre 1, la propriété de connexion est particulièrement intéressante pour décomposer un système en plusieurs éléments plus simples à étudier. La proposition suivante reprend celle donnée dans le premier chapitre mais la démonstration n'est pas développée puisqu'elle est identique à celle énoncée dans [Sontag, 1989] et reprise de façon synthétique dans [Khalil, 2002, Lemme 4.7].

**Proposition 4.7.** *Supposons que le système*

$$\dot{z}(t) = f_1(z_t, u_t, w_t) \tag{4.15}$$

est stable entrée-état par rapport aux entrées  $u$  et  $w$ , et que le système

$$\dot{y}(t) = f_2(y_t, v_t) \tag{4.16}$$

est aussi stable entrée-état par rapport à l'entrée  $v$ . Alors, la connexion des deux systèmes en série

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f_1(z_t, y_t, w_t) \\ \dot{y}(t) = f_2(y_t, v_t) \end{cases}$$

est stable entrée-état par rapport aux entrées  $v$  et  $w$ .

Cette proposition fut appliquée pour étudier la stabilité de réseaux téléopérés et présentée dans [Polushin et Marquez, 2003].

## 4.6 Bilan et perspectives

Ce chapitre nous a permis de construire une architecture nouvelle — la notion de stabilité entrée-état — pour l'étude des systèmes non linéaires perturbés à retards. Tout d'abord, nous avons étendu cette notion au cas des systèmes retardés en nous attachant à respecter la cohérence avec les résultats existants pour les équations différentielles ordinaires : cohérence de la définition avec les inégalités qu'il est possible d'obtenir pour les systèmes linéaires (*cf.* proposition 4.1), cohérence de la définition avec celle proposée par d'autres auteurs (*cf.* définition 4.2 et la preuve qui suit).

Ces définitions étant difficilement exploitables — en général, les fonctions “ $\beta$ ” et “ $\gamma$ ” présentées ne sont pas connues explicitement — nous avons cherché une caractérisation en termes d'énergie en définissant une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag. Ceci nous a permis d'obtenir une condition suffisante de stabilité entrée-état (*cf.* théorème 4.2). Et, pour rendre ce chapitre complet, nous avons reformulé une caractérisation proposée par Teel qui s'appuie sur des méthodes de type Lyapunov-Razumikhin (*cf.* théorème 4.4 et la preuve qui suit, différente de celle proposée par Teel).

Ensuite, nous nous sommes intéressé au lien existant entre la stabilité exponentielle et la stabilité entrée-état (*cf.* théorème 4.6). La preuve de ce théorème est intéressante, car comme observé dans la remarque 4.5, sous les hypothèses présentées, nous pouvons trouver une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité entrée-état.

Nous avons terminé ce chapitre par un petit résultat — proposition 4.7 — sur les systèmes en cascade qui peut s'avérer utile pour étudier un système en le décomposant.

Bien entendu, ce chapitre, présentant un domaine peu étudié, débouche sur de nombreuses pistes de recherches. Le problème le plus enthousiasmant, du moins théoriquement, est de trou-

ver une condition nécessaire et suffisante concernant la stabilité entrée-état. La remarque 4.5 nous incite à penser que l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag est vraisemblablement une condition *nécessaire et suffisante* à la stabilité entrée-état des systèmes à retard. Il semble aussi certain que, pour aboutir, il faille s'attaquer à la tâche ardue de la construction d'une fonctionnelle de type Lyapunov-Krasovskii, sur un système judicieusement choisi et, ensuite, montrer que cette fonctionnelle est de type Lyapunov-Sontag sur le système étudié.

Nous avons également donné deux définitions de la stabilité entrée-état en montrant l'équivalence. En nous ralliant à la pensée de Sontag, nous affirmons aussi que la force d'une théorie est de pouvoir s'exprimer de plusieurs manières. Nous en avons proposé trois dans ce chapitre : les deux définitions introduites et la caractérisation par les fonctionnelles de Lyapunov-Sontag. En s'inspirant des différentes caractérisations données dans le cas non retardé, il semble logique d'essayer d'étendre ces résultats aux systèmes que nous étudions. Ce travail reste à faire.

Enfin, il convient évidemment de montrer la force de cette nouvelle théorie par des applications pratiques comme cela est montré par les nombreuses publications dans le cas des systèmes 'ordinaires'. Des pistes intéressantes sont dégagées par le travail, cité plus haut, de Pepe, puisque le choix de la norme effectuée permet une vérification plus simple des conditions du théorème 4.2. Ce travail est en voie d'aboutir, nous l'espérons, dans le cadre d'une collaboration avec Emilia Fridman<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Emilia Fridman est Professeur à l'université de Tel-aviv.

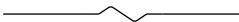
# Stabilité pratique et problème de la réticence dans la commande par modes glissants

*J'y suis, j'y reste, je ne partirai pas.*

— Refrain de lutte des sans-papiers

---

Nous abordons le dernier chapitre de notre mémoire. Nous y présenterons un algorithme connu pour sa robustesse vis-à-vis de certaines perturbations : *la commande par modes glissants*. Après avoir exposé le problème de *la réticence* posé par cette commande, nous introduirons, dans la deuxième partie, la notion de *stabilité pratique*. Nous verrons ensuite comment il est possible de quantifier — sinon de résoudre simplement — le problème de la réticence dans le cas d'un système linéaire à retard. Nous montrerons qu'il est possible d'utiliser des fonctions *sigmoïdes* pour obtenir une stabilisation pratique de l'origine du système étudié. Nous terminerons enfin par plusieurs simulations qui mettront en évidence les tenants et aboutissants de ces travaux.



## 5.1 Commande par modes glissants

Au cours de nos recherches en DEA puis en thèse, nous avons été amené à travailler sur un robot mobile non holonome — *cf.* annexe D — sur lequel nous avons tenté d'appliquer des commandes par modes glissants en présence de retards. Ce travail n'a pas abouti<sup>1</sup> mais nous

---

<sup>1</sup>La principale difficulté était liée au système d'exploitation du robot étudié dont l'architecture ne convenait pas à une commande temps réel. Les nouvelles perspectives sont proposées dans l'annexe D.

a tout de même permis d'être confronté à la difficulté de passer de la théorie à la pratique et d'affiner la théorie en conséquence. Mais, avant d'exposer nos résultats, il convient en premier lieu de rappeler le principe des commandes par modes glissants.

### 5.1.1 Modes glissants d'ordre un

L'épigraphe de ce chapitre résume à sa manière la philosophie des commandes par modes glissants : il s'agit d'atteindre une surface prédéfinie et d'y rester par la suite malgré d'éventuelles perturbations.

La commande par modes glissants fait partie de la classe plus générale des commandes à *structure variable*, dont l'une des plus connues est celle de type *bang-bang*. Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés principalement en Russie à partir des années soixante — [Anosov, 1959, Emel'yanov, 1963] et [Emel'yanov, 1967]. La structure du système commandé change délibérément de façon discontinue durant le processus de contrôle, suivant des règles prédéfinies qui dépendent de l'état du système. Dans le cas particulier de la commande par modes glissants, comme nous le disions plus haut, le système est contraint à évoluer sur une surface préalablement choisie dans l'espace d'état, appelée *surface de glissement*. Le système, lorsqu'il évolue sur cette dernière, est dit en *régime glissant*.

Une des difficultés des commandes par modes glissants réside justement dans le choix de cette surface, qui, en général, est choisie au moins pour garantir la stabilité des trajectoires<sup>2</sup> une fois qu'elle est atteinte. En régime glissant, nous pouvons donc non seulement connaître mais aussi imposer la dynamique du système. Pour autant, aucun principe n'a été formulé pour justifier de manière systématique tel ou tel choix de surface de glissement.

Une procédure simple, dénommée méthode de *la commande équivalente* et présentée pour la première fois en anglais dans [Utkin, 1977], permet de calculer facilement et de manière systématique un algorithme par modes glissants dit "d'ordre un". Par souci de simplicité, nous présentons la méthode de la commande équivalente dans le cas linéaire.

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + p(t), \quad (5.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  et  $B$  des matrices de dimensions appropriées et  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  les perturbations. Notons  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction linéaire — appelée *variable de glissement* — définie par :

$$s(x) = Sx,$$

---

<sup>2</sup>Que le lecteur nous excuse cet abus de langage, car, c'est le point d'équilibre qui est stable.

où  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice de rang plein en ligne. La surface de glissement est alors :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}.$$

**Remarque 5.1.** *La commande  $u(t)$  du système (5.1) étant une fonction discontinue en  $x$ , l'équation différentielle engendrée n'a de sens que dans la théorie des inclusions différentielles — [Filippov, 1983] ou [Aubin et Cellina, 1984].*

Considérons alors le modèle nominal de (5.1), *i.e.* sans la perturbation  $p$ . Supposons qu'à l'instant  $t_s$  l'état du système arrive sur la surface  $\mathcal{S}$  et qu'il reste en régime glissant par la suite. Nous avons alors  $Sx(t) = 0$  et  $S\dot{x}(t) = 0$  pour tout  $t \geq t_s$ . D'après (5.1), nous obtenons l'équation algébrique suivante :

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) = 0, \quad \forall t \geq t_s. \quad (5.2)$$

Lorsque la matrice  $SB$  est inversible<sup>3</sup>, nous pouvons définir la commande équivalente comme suit :

**Définition 5.1 ([Utkin, 1992]).** *La commande équivalente associée au système nominal (5.1), notée  $u_{eq}$ , est définie comme étant l'unique solution de l'équation algébrique (5.2), c'est-à-dire*

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}SAx(t).$$

Mais cette commande ne force pas la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement. Il est donc nécessaire d'y ajouter une commande à structure variable, définie comme suit :

$$u = \begin{cases} u^+(s) & \text{si } \text{sign}(s(x)) > 0 \\ u^-(s) & \text{si } \text{sign}(s(x)) < 0 \end{cases}, \quad u^+ \neq u^-,$$

où  $u^+$  et  $u^-$  sont des fonctions continues et “sign” représente la fonction signe<sup>4</sup>. Habituellement, la commande s'écrit

$$u = u_{eq} + k\text{sign}(s), \quad (5.3)$$

où  $k$  est une constante suffisamment grande, choisie de façon à ‘écraser’ les perturbations  $p(t)$ .

Il nous reste à définir une condition suffisante pour obtenir un régime glissant. Intuitivement, la surface doit être au moins attractive, c'est-à-dire que les trajectoires du système de

---

<sup>3</sup>Cette condition est obtenue par un choix judicieux de  $S$ .

<sup>4</sup>Pour un scalaire  $a$ ,  $\text{sign}(a)$  représente le signe de  $a$  et vaut 0 si  $a = 0$ . Pour un vecteur  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{sign}(x) = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_n)]^T$ .

part et d'autre de la surface doivent tendre vers cette dernière. Cela s'exprime mathématiquement par la *condition d'attractivité* [Utkin, 1992] :

$$\dot{s}^T s < 0.$$

Pour être sûr que la surface soit atteinte en temps fini — et donc, fonctionner en régime glissant —, nous pouvons remplacer cette dernière condition par celle plus généralement adoptée, appelée *condition de  $\eta$ -attractivité* :

$$\dot{s}^T s < -\eta \|s\|, \quad (5.4)$$

$\eta$  étant un réel strictement positif.

Nous ne pouvons finir cette partie sans ajouter que les modes glissants présentent des propriétés de robustesse intéressantes vis-à-vis de certaines perturbations. Si celles-ci vérifient une condition dite de *recouvrement*, elles n'affectent pas le système quand il atteint le régime de glissement, comme l'indique le théorème suivant :

**Théorème 5.1 ([Utkin, 1992]).** *Un régime glissant sur  $\mathcal{S}$ , du système perturbé (5.1), est indépendant du signal de perturbation  $p$  si, et seulement si, celui-ci est borné et vérifie*

$$p(t) = B\xi(t), \quad (5.5)$$

où  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ . La condition (5.5) est appelée **condition de recouvrement** ou “matching condition” pour la désignation internationale.

Le lecteur s'intéressant à cette commande et ses principales caractéristiques pourra aussi se référer aux ouvrages et articles [Itkis, 1976], [Edwards et Spurgeon, 1998], [Levant, 2001], [Perruquetti et Barbot, 2002] et [Yu et Xu, 2002].

### 5.1.2 Le phénomène de réticence

Le terme “réticence” décrit un phénomène d'oscillations d'amplitude et de fréquence finie, sur *les variables de l'état*<sup>5</sup>, qui se manifeste lors de la mise en oeuvre des commandes par modes glissants. Il est causé par les imperfections des organes de commutation — ne pouvant travailler à une fréquence théoriquement infinie — issues de la présence de la fonction ‘signe’

---

<sup>5</sup>Nous insistons sur le fait que seules les oscillations sur l'état font partie de ce que la communauté scientifique nomme habituellement “réticence”. En particulier, les oscillations sur la commande ne rentrent pas dans ce cadre.



dans la commande par modes glissants. Cette commutation à haute fréquence peut exciter des ‘dynamiques non modélisées’, comme les dynamiques propres des actionneurs ou capteurs, souvent négligées dans le modèle car elles sont généralement plus rapides que la dynamique du système étudié. Mais, pour les commandes par modes glissants, puisque les oscillations sont de fréquences infinies dans le cas *idéal*, cette hypothèse ne tient plus et il convient d’étudier de près l’influence de ces dynamiques négligées. Le problème de la réticence est donc un handicap sérieux lors de l’application pratique des modes glissants d’ordre un, que nous venons de présenter, et peut parfois conduire à des situations d’instabilité — [Heck, 1991]. La remarque qui suit devrait interpellier le lecteur familier avec cette commande et clarifier le travail à venir :

**Remarque 5.2.** *Le terme réticence — “chattering” pour la désignation internationale — englobe, en fait, plusieurs effets qui sont, néanmoins, tous issus de la présence de la fonction signe dans la commande. Le premier est dû à l’échantillonnage lors de l’implémentation : dans le cas idéal, la fréquence d’échantillonnage est infinie ce qui n’est plus vrai dans la réalité et provoque l’apparition d’oscillations sur l’état dont l’amplitude dépend de la période d’échantillonnage. Plus celle-ci est petite, plus les amplitudes sont faibles. Le second est dû aux dynamiques non modélisées comme nous l’avons présenté ci-dessus. Le lecteur pourra consulter [Guldner et Utkin, 2000] et [Utkin et Lee, 2006].*

*Nous ne nous intéressons, dans ce chapitre, qu’à l’influence des dynamiques des actionneurs non prises en compte. L’échantillonnage ne fera pas l’objet de notre étude car nous ferons l’hypothèse que nous sommes dans un cas de glissement idéal. Dans cette optique, toutes les simulations présentées sont réalisées avec un pas d’échantillonnage de  $10^{-5}$  pour se rapprocher au mieux de ce cas idéal.*

Un exemple pourra permettre au lecteur de comprendre les enjeux de cette difficulté.

### Exemple 5.1. le pendule inverse

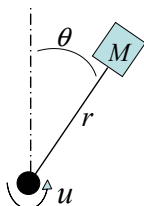
*Étudions le problème lié à la réticence sur le cas du pendule inverse — cf. figure 5.1. En négligeant les frottements, il est possible de modéliser le pendule par application directe des lois fondamentales de la dynamique :*

$$Mr^2\ddot{\theta} + Mgr \sin \theta = u(t),$$

*avec  $M$  la masse du pendule,  $r$  sa longueur,  $g$  la constante de gravitation,  $\theta$  l’angle que fait le pendule avec la verticale et  $u(t)$  la commande appliquée — ici, un couple. Ce système se réécrit dans l’espace d’état :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_2 \sin x_1(t), \quad (5.6)$$

où  $x(t) = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$  et  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  s'expriment en fonction des constantes du système. On notera au passage que le terme non linéaire peut être ici considéré comme une perturbation rejetable puisqu'il vérifie la condition de recouvrement (5.5).



**Figure 5.1 – Schéma du pendule inverse**

Appliquons la méthode de la commande équivalente, comme développée au paragraphe 5.1.1, en choisissant la variable de glissement  $s(x) = mx_1 + x_2$  où  $m > 0$  est un réel. Cette commande possède le double avantage d'être non seulement simple à mettre en oeuvre, mais en plus, elle nous garantit qu'une fois la surface atteinte, les trajectoires du système évolueront en ligne droite dans l'espace des phases, avec une pente qui dépendra du choix de la constante  $m$ . La commande équivalente,  $u_{eq} = -\frac{m}{a_1}x_2$ , est obtenue en résolvant l'équation  $\dot{s}(x) = mx_2 + a_1u_{eq} = 0$  issue du système nominal (5.6). Nous en déduisons la commande (5.3) :

$$u = -\frac{m}{a_1}x_2 - k\text{sign}(s),$$

où la constante  $k > \frac{a_2}{a_1} > 0$  est choisie suffisamment grande pour écarter la perturbation bornée  $a_2 \sin x_1$ .

La condition de  $\eta$ -attractivité (5.4) est respectée, ce qui garantit la convergence en temps fini du pendule vers la surface, dans le cas idéal ! Or nous allons voir qu'il peut en être tout à fait autrement.

Une simulation — cf. figure 5.2 — a été réalisée sous le logiciel matlab avec un algorithme d'intégration Runge-Kutta. Les constantes du système sont  $M = 0.1$ ,  $r = 1$ ,  $g = 10$ ,  $m = 1$  et  $k = 10$ , impliquant  $a_1 = a_2 = 10$ . Partant de la position initiale  $\theta = 3$ , la figure 5.2 montre — comme attendu — que l'état rejoint la surface  $s$ , qui représente une droite dans l'espace des phases, en un peu moins d'une seconde et y reste par la suite. Nous pouvons observer, sur la figure 5.3, les oscillations à très haute fréquence de la commande une fois la surface atteinte.

**Prise en compte de la dynamique des actionneurs** Afin d'observer le phénomène de réticence, nous modélisons la dynamique des actionneurs, par exemple avec un système du

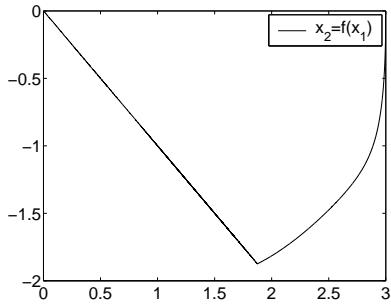


Figure 5.2 – Trajectoire du pendule dans l'espace des phases pour un pas d'échantillonnage de  $10^{-5}$

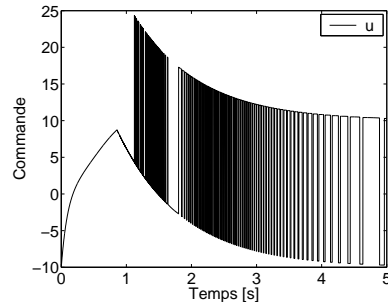


Figure 5.3 – Oscillations à haute fréquence de la commande envoyée

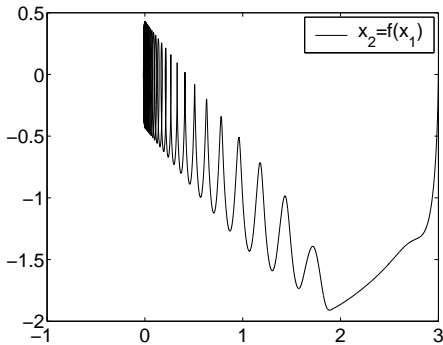


Figure 5.4 – Réticence observée dans l'espace des phases en modélisant la dynamique des actionneurs

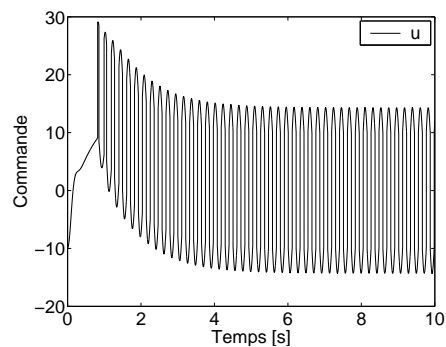


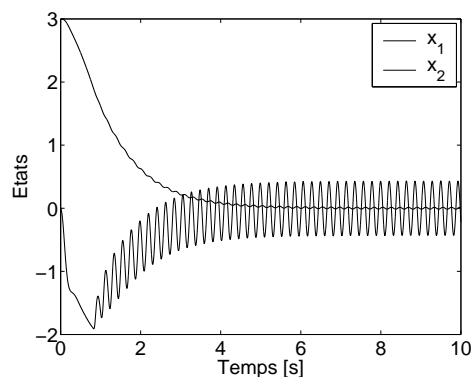
Figure 5.5 – Commande  $u(t)$  avant l'influence de la dynamique des actionneurs.

deuxième ordre.

Dans ces conditions, le système (5.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 v(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_2 \sin x_1(t), \\ \ddot{v} + 2\omega_0 \xi \dot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 u. \end{cases}$$

Le paramètre  $\omega_0$  représente la pulsation propre de l'actionneur et  $\xi$  le facteur d'amortissement. La simulation a été réalisée avec  $\omega_0 = 30$  et  $\xi = 0.7$  pour obtenir un temps de réponse rapide — de l'ordre de  $10^{-1}$  seconde — et un dépassement faible. Les résultats sont assez révélateurs, comme nous pouvons l'observer sur les figures 5.4 et 5.5 : des oscillations apparaissent principalement sur  $x_2$  et le régime de glissement n'est jamais atteint. Ces oscillations sont atténuées sur  $x_1$  à cause de la relation d'intégration entre  $x_1$  et  $x_2$  ce qui s'observe plus



**Figure 5.6** – Réticence observée sur  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  en modélisant la dynamique des actionneurs

*simplement sur la figure 5.6.*

Physiquement, ce phénomène se comprend de façon assez intuitive. Dans le cas continu, sans modéliser les actionneurs, si le régime de glissement est atteint, la commande réagit instantanément si les trajectoires le quittent — par exemple sous l’effet d’une perturbation — pour les ramener sur la surface de glissement. Mais lorsque la dynamique des actionneurs est prise en compte, l’action de la commande n’est pas assez rapide pour forcer les trajectoires à rester sur la surface. Le phénomène de réticence est alors observé : l’état présente des oscillations non négligeables autour de la surface de glissement.

### 5.1.3 Position du problème

Les commandes par modes glissants ont été étudiées avec un certain succès sur les systèmes linéaires à retards. Pour un bilan, le lecteur pourra se référer entre autres à [Gouaisbaut, 2001, Richard et al., 2001], [Perruquetti et Barbot, 2002, Chapitre 11], [Richard, 2003] ou encore [Xia et Jia, 2003].

Si, à l’image du cas non retardé, ces commandes ont fait leurs preuves tant par la simplicité de l’implémentation que par la robustesse, il s’avère aussi qu’elles présentent les mêmes inconvénients que les systèmes sans retard, c’est-à-dire principalement le phénomène de *réticence* présenté au paragraphe précédent.

Dans le cas des systèmes sans retard, le phénomène de réticence a été étudié de façon théorique — [Guldner et Utkin, 2000, Fridman, 2001b, Fridman et al., 2003b, Fridman, 2003] et plus récemment [Utkin et Lee, 2006]. Léonid Fridman fut l’un des premiers à véritablement

formaliser et analyser le problème. C'est par la méthode des perturbations singulières qu'il propose d'étudier le phénomène de réticence, la dynamique des actionneurs étant (théoriquement) beaucoup plus rapide que celle du système étudié. Le dernier article que nous citons résume clairement les différents problèmes désignés par le terme de réticence ainsi que les solutions envisageables pour la réduire ou la contourner. Les auteurs de cet article distinguent deux problèmes ; le premier concerne la dynamique des actionneurs habituellement négligée que nous avons abordé plus haut, le deuxième s'intéresse à l'utilisation de plus en plus fréquente de contrôleurs numériques qui ne peuvent osciller plus vite que leurs périodes d'échantillonnage. Plusieurs solutions sont ensuite présentées : la possibilité d'approcher la fonction signe par des fonctions sigmoïde (initialement abordée dans [Slotine et Sastry, 1983, Slotine et Li, 1991]), la possibilité d'utiliser des observateurs qui cette fois seraient basés sur des algorithmes de 'glissement idéal', et enfin celle de réduire l'amplitude du contrôle lorsque les trajectoires du système se rapprochent de la surface de glissement.

La dernière méthode qui permet — entre autres ! — de résoudre le problème de la réticence propose d'étendre la théorie de la commande par modes glissants en abordant les modes glissants *d'ordres supérieurs* — [Floquet, 2000, Bartolini et al., 2000] et [Levant, 2003]. A ce propos, notons qu'un résultat a permis d'étudier un algorithme par modes glissants d'ordre deux sur un double intégrateur avec un retard sur l'entrée [Levaggi et Punta, 2003b]. Néanmoins, la difficulté de la démarche semble avoir poussée la communauté scientifique vers les solutions abordées ci-dessus. A notre connaissance, aucune étude n'a été menée pour réduire le phénomène de réticence par l'utilisation de fonctions sigmoïdes dans le cas retardé.

Au lieu de s'attacher à l'étude des commandes par modes glissants d'ordres supérieurs, nous avons tenté d'analyser les conséquences de l'utilisation de fonctions sigmoïdes dans le cas des systèmes à retards. Il nous faut néanmoins définir précisément ce que l'on nomme fonction sigmoïde.

**Définition 5.2** ([Canudas de Wit et Perruquetti, 2002]). *Pour un  $\epsilon$  donné,  $0 < \epsilon < 1$ , une fonction continue  $\sigma_\epsilon$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **une fonction  $\epsilon$ -sigmoïde** (et on notera  $\Sigma_\epsilon$  la classe de telles fonctions) si elle vérifie les relations suivantes, pour  $z \in \mathbb{R}$  :*

- 1)  $\sigma_\epsilon(z)z > 0, z \neq 0,$
- 2)  $\sigma_\epsilon(0) = 0,$
- 3)  $|z| \leq \epsilon \Rightarrow |\sigma_\epsilon(z)| \geq \frac{|z|}{\epsilon}(1 - \epsilon)$  et  $|z| \geq \epsilon \Rightarrow |1 - \sigma_\epsilon(z)\text{sign}(z)| \leq \epsilon.$

La figure 5.7 illustre cette définition. Les fonctions  $\text{sat}_\epsilon(z)$  (cf. figure 5.8),  $\tanh(\frac{4z}{\epsilon})$  (cf. figure 5.9) mais également  $\frac{\text{sign}(z)|z|^\epsilon}{|z|^\epsilon + \frac{\epsilon}{2}}$  sont quelques exemples de sigmoïdes les plus couramment

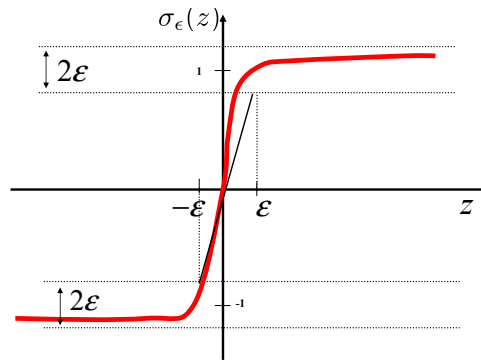


Figure 5.7 – Illustration de la définition d'une fonction sigmoïde

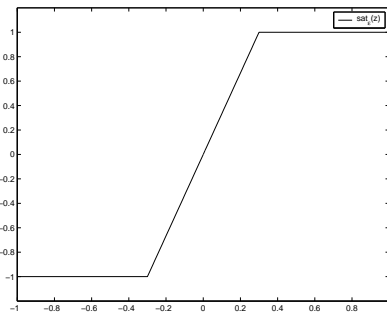


Figure 5.8 – Fonction sigmoïde  $\text{sat}_\epsilon(z)$  pour  $\epsilon = 0.3$

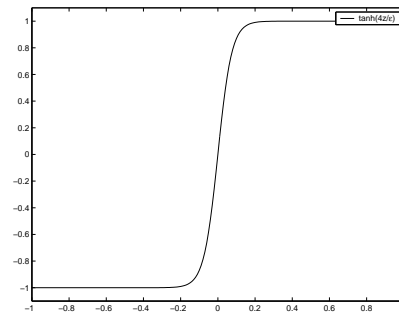


Figure 5.9 – Fonction sigmoïde  $\tanh(\frac{4z}{\epsilon})$  pour  $\epsilon = 0.3$

adoptées dans la littérature. En revanche, la fonction  $\frac{2}{\pi} \arctan(\frac{z}{\epsilon})$ , qui est parfois utilisée par certains auteurs, n'est pas une fonction sigmoïde au sens où nous l'avons définie.

Nous pouvons désormais aborder la deuxième partie de ce chapitre. Il s'agit d'étudier la commande par modes glissants d'ordre un sur un système linéaire à retards et de montrer qu'il est possible d'obtenir une stabilisation pratique en lissant la commande étudiée grâce aux fonctions sigmoïdes que nous venons de présenter. Il convient donc de revenir sur ce que nous nommons la stabilité pratique.

## 5.2 Sur la stabilité pratique

### 5.2.1 Présentation

Il existe de multiples définitions de la stabilité pratique dans la littérature actuelle. Si elles présentent toutes des différences qui peuvent être plus ou moins importantes, l'essence ou plutôt l'idée fondamentale reste la même : rendre la stabilité plus "souple" pour, entre autres, faciliter les applications industrielles. Ce qui nous intéresse, c'est principalement la distance entre la trajectoire du système perturbé et la solution étudiée. Nous cherchons ainsi à garantir que l'état se trouve à l'intérieur d'un domaine plus ou moins grand et *connu*, et ceci, parfois, sur un intervalle de temps fini.

La notion de stabilité pratique fut développée dans [Lasalle et Lefschetz, 1961]. Elle est définie pour un système perturbé, par rapport à un ensemble de conditions initiales et un ensemble donné de perturbations admissibles. L'intervalle de temps, sur lequel la stabilité est étudiée, est infini. D'autres auteurs ont abordé le problème de la stabilité pratique en temps fini — [Weiss et Infante, 1967]. Dans un article consacré à la stabilité pratique, [Grujić, 1973], l'auteur développe la notion de stabilité pratique sur un intervalle de temps fini pour des systèmes en régime forcé avec des perturbations exogènes non nulles et des critères par méthodes de comparaison ont été obtenus dans [Perruquetti et al., 1995].

Dans le cas des systèmes à retards, les définitions sont aussi variées. Le lecteur pourra éventuellement se référer à [Palmor, 1980], [Palmor et Halevi, 1983] ou encore à l'extension des définitions de Grujić proposée dans [Goubet-Bartholomeus et al., 1997].

Nous présentons ici celle que nous avons proposée dans les articles [Yeganefar et al., 2004a] et [Yeganefar et al., 2004c]. Pour mémoire,  $\mathcal{C}_a$  est l'ensemble des fonctions de  $[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  bornées par une constante  $a > 0$ .

**Définition 5.3.** *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C}_a, \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(t, 0) \equiv 0$ .

L'origine du système (5.7) est dite **localement pratiquement stable** si pour  $\epsilon > 0$  un réel donné, il existe deux réels positifs  $\delta$  et  $T$  tels que  $\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta$  implique  $\|x(t)\| < \epsilon$ , quel que soit  $t \geq T$ .

Si  $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ , l'origine du système sera dite **globalement pratiquement stable**.

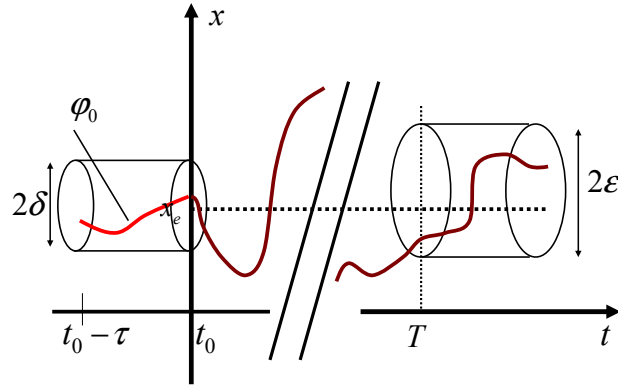


Figure 5.10 – Illustration de la stabilité pratique

Dans ce cas, la stabilité pratique n'est pas définie sur un intervalle de temps fini. La figure 5.10 met en évidence les caractéristiques de cette définition. Pour une vue d'ensemble sur la stabilité pratique, nous conseillons au lecteur de se reporter aux thèses [Bartholomeus-Goubet, 1996] et [Kökösy, 1999] où cette notion est présentée respectivement dans le cas retardé et dans le cas non retardé.

### 5.2.2 Critère de stabilité pratique

Nous allons développer, pour la suite, une condition suffisante que doit vérifier une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour assurer la stabilité pratique d'un système à retards au sens de la définition 5.3.

Pour ce faire, considérons à nouveau le système (5.7). Nous supposons que  $f$  est choisie de telle sorte que, pour tout  $\varphi_0 \in \mathcal{C}_a$ , le problème (5.7) admette une solution unique  $x(t)$  qui satisfasse la condition de Lipschitz

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| < \ell |t_2 - t_1|, \quad \forall t_2, t_1 \geq t_0. \quad (5.8)$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Théorème 5.2 ([Yeganefar et al., 2004c]).** *Pour le système (5.7), supposons qu'il existe une fonctionnelle continue,  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}_a \rightarrow \mathbb{R}_+$ , deux fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}$ , une fonction  $\alpha_3$  définie positive et une constante positive  $H$ , telles que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_a$ ,*

$$\alpha_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \quad (5.9)$$



et<sup>6</sup>

$$D^+V(t, \varphi) \leq -\alpha_3(\|\varphi(0)\|) \text{ si } \forall \theta \in [-\tau, 0], \|\varphi(\theta)\| \geq H > 0. \quad (5.10)$$

De plus, supposons que :

$$\alpha_1^{-1}(\alpha_2(H + \tau\ell)) + \tau\ell < a. \quad (5.11)$$

Alors, pour toute fonction initiale  $x_{t_0}$  satisfaisant

$$\|x_{t_0}\|_{\mathcal{C}} \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(a - \tau\ell)) - \tau\ell, \quad (5.12)$$

il existe  $T > 0$  tel que la solution nulle de (5.7) est localement pratiquement stable. Les solutions satisfont de plus la condition suivante :

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(H + \tau\ell)), \forall t \geq t_0 + T. \quad (5.13)$$

---

**Remarque 5.3.** Ce théorème, inspiré des travaux du chapitre 4, est sensiblement différent du lemme 4.3. La borne sur la dérivée de  $V$  fait intervenir  $\|\varphi(0)\|$  ce qui est une condition beaucoup plus simple à vérifier mais demande des hypothèses un peu plus contraignantes résumées par les équations (5.8) et la deuxième partie de (5.10).

**Preuve.**

**Ligne directrice :** L'idée consiste à montrer qu'il existe un temps  $T$  pour lequel quel que soit  $t > t_0 + T$ ,  $V(t, x_t) \leq \alpha_2(H + \tau\ell)$  ce qui suffit à prouver l'inégalité (5.13) d'après la première partie de l'inégalité (5.9) en sachant que  $\alpha_1$  est de classe  $\mathcal{K}$ .

Soit  $\mathcal{L}_a$  l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes dans  $\mathcal{C}_a$  de constante  $\ell$  :

$$\mathcal{L}_a = \{\varphi \in \mathcal{C}_a : \|\varphi(\theta_2) - \varphi(\theta_1)\| \leq \ell |\theta_2 - \theta_1|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in [-\tau, 0]\},$$

et soit  $\Lambda_{t,\xi} = \{x_t \in \mathcal{L}_a : V(t, x_t) \leq \xi\}$ , pour  $\xi > 0$ .

Notons que

$$\mathcal{L}_{\alpha_2^{-1}(\xi)} \subset \Lambda_{t,\xi} \subset \mathcal{L}_{\alpha_1^{-1}(\xi) + \tau\ell}.$$

Prouvons par exemple la seconde inclusion : si  $\varphi \in \Lambda_{t,\xi}$  alors  $\|\varphi(0)\| \leq \alpha_1^{-1}(\xi)$  et, puisque  $\varphi \in \mathcal{L}_a$ , nous obtenons :

$$\|\varphi(\theta)\| \leq \|\varphi(0)\| + \theta\ell \leq \alpha_1^{-1}(\xi) + \tau\ell.$$

---

<sup>6</sup>Nous rappelons que  $\tau$  représente le retard dans l'ensemble de ce mémoire. Ici, il s'agit du retard pour le système (5.7).

Soit  $\rho = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(a - \tau\ell))$ . Nous avons alors les inclusions suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &\subset \mathcal{L}_{H+\tau\ell} \subset \Lambda_{t,\alpha_2(H+\tau\ell)} \subset \Lambda_{t,\alpha_2(\rho)} \subset \mathcal{L}_a, \\ \mathcal{L}_\rho &\subset \Lambda_{t,\alpha_2(\rho)}.\end{aligned}$$

Les ensembles  $\Lambda_{t,\alpha_2(H+\tau\ell)}$  et  $\Lambda_{t,\alpha_2(\rho)}$  sont positivement invariants<sup>7</sup>. De plus, supposons que  $x_t$  est à la frontière de  $\Lambda_{t,\alpha_2(H+\tau\ell)}$  (ou  $\Lambda_{t,\alpha_2(\rho)}$ ) alors  $\|x_t\|_{\mathcal{C}} \geq H + \tau\ell$  et donc, puisque  $x_t \in \mathcal{L}_a$ ,  $\|x_t(\theta)\| \geq H$  quel que soit  $\theta \in [-\tau, 0]$ , ce qui garantit  $D^+V(t, x_t) < 0$ .

Pour une fonction initiale  $x_{t_0} \in \mathcal{C}_{\rho-\tau\ell}$ , d'après la propriété (5.8),  $x_t$  est dans  $\mathcal{C}_\rho$  pour  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ , et  $x_t$  appartient à  $\mathcal{L}_a$  pour  $t \geq t_0 + \tau$ . Donc,  $x_{t_0+\tau} \in \mathcal{L}_\rho$ .

Supposons que  $x_{t_0+\tau} \in \Lambda_{t,\alpha_2(\rho)} \setminus \Lambda_{t,\alpha_2(H+\tau\ell)}$ . Dans ce cas,  $D^+V(t, x_t) \leq -k < 0$ , avec  $k = \max_{H \leq s \leq a} \alpha_3(s)$ . Cette inégalité implique que

$$\begin{aligned}V(t, x_t) &\leq V(t_0 + \tau, x_{t_0+\tau}) - k(t - t_0 - \tau) \\ &\leq \alpha_2(\rho) - k(t - t_0 - \tau).\end{aligned}$$

Finalement, il existe un temps fini  $T$ , indépendant de  $x_{t_0}$  tel que, pour  $t \geq t_0 + T$ ,  $V(t, x_t) \leq \alpha_2(H + \tau\ell)$  et, dans ce cas, l'inégalité (5.13) est vérifiée.  $\blacksquare$

### 5.3 Lissage de la commande

Pour simplifier la lecture, il convient de présenter la démarche adoptée dans cette section. En premier lieu, dans la partie 5.3.1, nous présentons une commande par modes glissants classique qui est connue pour stabiliser asymptotiquement l'origine d'un système linéaire à retards. En second lieu, nous étudions cette commande en remplaçant la fonction signe par une fonction sigmoïde et nous montrons que, sous certaines conditions, l'origine du système est localement pratiquement stable (partie 5.3.2). Puis, nous concluons par plusieurs simulations incluant des retards variables ou constants dans la partie 5.3.3.

---

<sup>7</sup>C'est-à-dire, si l'état  $x_t$  appartient à un de ces ensembles, alors il y reste par la suite.

### 5.3.1 Stabilisation d'un système à retard variable inconnu

Soit le système à retard inconnu et éventuellement variable suivant, mis sous la forme régulière — [Lukyanov et Utkin, 1981, Perruquetti et al., 1997] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}x_i(t) + A_{d1i}x_i(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{2i}x_i(t) + A_{d2i}x_i(t - \tau)) + Bu(t) + p(t, x_t), \\ x(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (5.14)$$

où  $x(t) = [x_1, x_2]^T$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^r$ .  $A_{ij}$ ,  $A_{dij}$ , ( $i = 1, 2, j = 1, 2$ ) sont des matrices constantes de dimensions appropriées;  $B$  est une matrice régulière  $r \times r$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$  est la commande,  $\tau$  représente un retard variant et borné ( $0 \leq \tau(t) \leq h, \forall t \geq 0$ ) et  $\phi \in \mathcal{C}_a$  représente la condition initiale.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

#### Hypothèse 5.1.

**H1)** La paire de matrices  $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$  est commandable<sup>8</sup>.

**H2)** La perturbation  $p(t, x_t)$  est une fonction bornée uniformément en  $t$  et vérifie la condition de recouvrement (cf. théorème 5.1).

Considérons la variable de glissement suivante :

$$s(x) = x_2 + Kx_1, \quad (5.15)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ . Posons :

$$\Omega(x_t) = \sum_{i=1}^2 [(A_{2i} + KA_{1i})x_i(t) + (A_{d2i} + KA_{d1i})x_i(t - \tau)], \quad (5.16)$$

de telle sorte que

$$\dot{s}(t) = \Omega(x_t) + Bu(t) + p(t, x_t). \quad (5.17)$$

La commande<sup>9</sup>

$$u(t) = -B^{-1} [\Omega(x_t) + m_1 \text{sign}(s(x(t)))], \quad (5.18)$$

avec  $m_1 > \|p(t, x_t)\|_{\mathcal{C}}$

<sup>8</sup>Cette hypothèse permet de réduire *a priori* le conservatisme des résultats en développant des critères dépendant de la taille du retard. La notion de commandabilité correspond à celle classique du système non retardé obtenu en posant  $\tau = 0$ .

<sup>9</sup>Pour faciliter la lecture de ce chapitre, nous la nommerons par la suite “**commande signe**”.

stabilise asymptotiquement l'origine du système (5.14) si pour  $\epsilon > 0$ , les matrices définies positives  $Q_1, Q_2, Q_3$  et  $Y$  vérifient la LMI qui suit :

$$\begin{bmatrix} Q_2 + Q_2^T & X_{12} & 0 & hQ_2^T \\ * & -Q_3 - Q_3^T & h\epsilon(A_{d11}Q_1 + A_{d12}Y) & 0 \\ * & * & -h\epsilon Q_1 & 0 \\ * & * & * & -h\epsilon Q_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

où

$$X_{12} = Q_1(A_{11}^T + A_{d11}^T) + Y^T(A_{12}^T + A_{d12}^T) - Q_2^T + Q_3.$$

Cette LMI garantit que les trajectoires du système convergent asymptotiquement vers l'origine une fois la surface de glissement atteinte.

**Remarque 5.4.** *Il n'est pas dans l'objectif de ce chapitre d'améliorer les performances des commandes par modes glissants sur les systèmes à retards. Nous avons donc choisi de travailler sur la commande la plus simple qui existe dans la littérature — basée sur la méthode de la commande équivalente — pour focaliser notre étude sur le problème de la réticence. C'est pourquoi, la démonstration n'est pas développée mais nous pouvons tout de même indiquer qu'une fois la surface de glissement atteinte, elle est équivalente à celle présentée pour le théorème 2.2 du chapitre 2.*

### 5.3.2 Stabilisation pratique d'un système à retards via une fonction sigmoïde

**Cas du retard constant** Considérons le système (5.14) avec un retard constant  $\tau = h$ , la variable de glissement  $s$  définie en (5.15) et  $\Omega$  défini en (5.16). Nous supposons de plus :

**Hypothèse 5.2.**

**H3)** *l'origine du sous-système,*

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K)x_1(t) + (A_{d11} + A_{d12}K)x_1(t - \tau), \quad (5.20)$$

*obtenu si la surface de glissement est atteinte, est asymptotiquement stable, condition qui est vérifiée si la LMI (5.19) est satisfaite.*

Le théorème suivant montre qu'en remplaçant la fonction signe par la fonction sigmoïde, dans la commande (5.18), il est possible de montrer que l'origine du système étudié est (localement) pratiquement stable.

**Théorème 5.3 ([Yeganefar et al., 2004c]).** *Sous les hypothèses citées (H1-H3) et dans le cas d'un retard constant  $\tau = h$ , l'origine du système (5.14) est localement pratiquement stable sous la loi de commande suivante<sup>10</sup> :*

$$u(t) = -B^{-1} [\Omega(x_t) + m_1 \sigma_\epsilon(s)], \quad (5.21)$$

où  $\sigma_\epsilon$  est une fonction sigmoïde,  $m_1 = \frac{m'_1 + 2M V'_M}{1-\epsilon}$ ,  $m'_1 \geq \|p(t, x_t)\|_{\mathcal{C}}$ ,  $M = \max[\|A_{d12}\|, \|A_{d12}\|]$  et finalement  $V'_M = \sup_{x_{1t} \in C_a} \|V'_1(x_{1t})\|$  où  $V'_1$  est définie dans l'expression (5.22).

**Preuve.**

**Ligne directrice :** *Pour montrer la stabilité pratique de l'origine du système, l'idée consiste à se placer dans les conditions du théorème 5.2, c'est-à-dire à trouver une fonctionnelle qui soit négative en dehors d'un certain voisinage.*

*En se servant de l'hypothèse H3, le sous système (5.20) est asymptotiquement stable ce qui implique l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour ce sous-système. Toute l'astuce consiste alors à calculer la dérivée de cette fonctionnelle le long des trajectoires du système (5.14). Il est possible de montrer, en utilisant les propriétés des fonctions sigmoïdes, que cette dérivée est négative en dehors d'un certain voisinage, nous permettant ainsi de conclure grâce au théorème précité.*

D'après l'hypothèse H3, il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V_r(t, \varphi) : \mathbb{R} \times C_a \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle qu'il existe  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  des fonctions définies positives sur  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $\varphi \in C_a$  et pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\varphi(0)\|) &\leq V_r(t, \varphi) \leq \alpha_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \\ \dot{V}_r|_{(5.20)}(t, \varphi) &\leq -\alpha_3(\|\varphi(0)\|), \end{aligned}$$

où  $\dot{V}_r|_{(5.20)}$  est la dérivée de  $V_r$  le long des trajectoires de (5.20). D'après le théorème 1.5 présenté au chapitre 1, on sait que cette fonctionnelle, dans le cas d'un système linéaire à retard constant, peut être choisie sous la forme :

$$\begin{aligned} V_r(x_{1t}) &= x_1^T(t) U(0) x_1(t) + 2x_1^T(t) \int_{-h}^0 U(-h - \theta) (A_{d11} + A_{d12}K) x_1(t + \theta) d\theta, \\ &+ \int_{-h}^0 x_1^T(t + \theta_2) (A_{d11} + A_{d12}K)^T \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2) (A_{d11} + A_{d12}K) x_1(t + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \\ &+ \int_{-h}^0 x_1^T(t + \theta) [(h + \theta)R_1 + W_1] x_1(t + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

<sup>10</sup>De même, nous la nommerons “**commande sigmoïde**”.

Il s'agit alors de calculer la dérivée de  $V_r$  le long des trajectoires du système (5.14). Pour relier cette dérivée à celle obtenue le long des trajectoires du système (5.20), remarquons que seuls les deux premiers termes de  $V_r$  engendrent par dérivation la présence de  $\dot{x}_1$ . En les isolant, nous pouvons écrire,

$$\dot{V}_r|_{(5.14)} = V_1' \dot{x}_1 + \dot{V}_2'|_{(5.14)},$$

où

$$V_1'(t) = 2x_1^T(t)U(0) + \left( 2 \int_{-h}^0 U(-h-\theta)(A_{d11} + A_{d12}K)x_1(t+\theta)d\theta \right)^T, \quad (5.22)$$

et  $\dot{V}_2'$  contient les termes restant suite à la dérivation. Or comme  $\dot{x}_1$  n'intervient pas dans  $\dot{V}_2'$ , nous savons que  $\dot{V}_2'|_{(5.14)} = \dot{V}_2'|_{(5.20)}$ . Par conséquent,  $\dot{V}_r|_{(5.14)} = V_1' \dot{x}_1 + \dot{V}_2'|_{(5.20)}$ .

Considérons alors la fonctionnelle :

$$V(t) = \frac{1}{2} \|s(x(t))\|^2 + M V_M' \int_{-h}^0 \|s(t+\theta)\|_1 d\theta + V_r(x_{1t}),$$

où  $\|s\|_1 = s^T \text{sign}(s)$ . La dérivée de  $V$  le long des trajectoires de (5.14) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)|_{(5.14)} &= s^T (\Omega(x_t) + Bu(t) + p(t, x_t)) \\ &\quad + M V_M' (\|s(t)\|_1 - \|s(t-h)\|_1) + V_1'(t) \dot{x}_1(t) + \dot{V}_2'(t)|_{(5.20)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Si on pose :

$$g(x_{1t}, x_{2t}) = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}x_i(t) + A_{d1i}x_i(t-h)) = \dot{x}_1(t),$$

alors, en remplaçant la commande  $u$  par son expression (5.21), l'équation (5.23) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T(t) (-m_1 \sigma_\epsilon(s) + p(t, x_t)) + M V_M' (\|s(t)\|_1 - \|s(t-h)\|_1) \\ &\quad + V_1' (g(x_{1t}, x_{2t}) - g(x_{1t}, Kx_{1t})) + V_1'(t)g(x_{1t}, Kx_{1t}) + \dot{V}_2'(t)|_{(5.20)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Par simple calcul, on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} g(x_{1t}, x_{2t}) - g(x_{1t}, Kx_{1t}) &= A_{12}(x_2(t) - Kx_1(t)) + A_{d12}(x_2(t-h) - Kx_1(t-h)), \\ &= A_{12}s(t) + A_{d12}s(t-h). \end{aligned}$$

$$\dot{V}_r|_{(5.20)} = \dot{V}_2'|_{(5.20)} + V_1' g(x_{1t}, Kx_{1t}),$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation (5.24)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T(t) (-m_1 \sigma_\epsilon(s) + p(t, x_t)) + M V_M' (\|s(t)\|_1 - \|s(t-h)\|_1) \\ &\quad + V_1' (A_{12}s(t) + A_{d12}s(t-h)) + \dot{V}_r|_{(5.20)}. \end{aligned}$$

En sachant que  $M = \max[\|A_{12}\|, \|A_{d12}\|]$  et en observant que  $\|s\|_1 = s^T \text{sign}(s)$ , nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & s^T(t) (-m_1 \sigma_\epsilon(s) + \text{sign}(s(t)) \|p(t, x_t)\|_{\mathcal{C}}) \\ & + M \|V'_1(t)\| [s^T(t) \text{sign}(s(t)) + s^T(t-h) \text{sign}(s(t-h))] \\ & + M V'_M(t) [s^T(t) \text{sign}(s(t)) - s^T(t-h) \text{sign}(s(t-h))] + \dot{V}_r(t)|_{(5.20)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, le sous-système (5.20) étant asymptotiquement stable, le terme  $\dot{V}_r|_{(5.20)}$  est défini négatif. Il suffit alors de vérifier, grâce aux propriétés de la fonction sigmoïde (définition 5.2), et les conditions sur  $m_1$ , que le terme

$$s^T [-m_1 \sigma_\epsilon(s) + \text{sign}(s) \|p\|_{\mathcal{C}}] + 2M V'_M s^T \text{sign}(s)$$

est négatif pour  $\|s\| \geq \epsilon$ . Cela revient à montrer que

$$-s^T \frac{\sigma_\epsilon(s)}{1-\epsilon} + s^T \text{sign}(s) \leq 0,$$

ce qui est vrai d'après la condition 3) de la définition 5.2 et permet de conclure la preuve, par application du théorème 5.2. ■

**Cas du retard variable** On suppose, dans cette partie, les hypothèses supplémentaires suivantes :

**H4)** Le retard  $\tau(t)$  est borné par  $h$  et  $|\dot{\tau}| \leq b < 1$ ,

**H5)**  $\dot{x}_1 = (A_{11} + A_{d11} + (A_{12} + A_{d12})K)x_1$  est asymptotiquement stable<sup>11</sup>.

**Corollaire 5.4 ([Yeganefar et al., 2004b]).** *D'après les hypothèses (H1-H5), l'origine du système (5.14) est localement pratiquement stable pour un retard variable  $|\tau(t)| < h$  sous la loi de commande suivante :*

$$u(t) = -B^{-1} [\Omega(x_t) + m_1 \sigma_\epsilon(s)],$$

les constantes étant définies comme dans le cas du théorème 5.3.

---

<sup>11</sup>Cette équation différentielle représente le système (5.14) sans retard si la surface de glissement est atteinte.

**Preuve.** La preuve est identique à celle du théorème 5.3, à cela près que pour le sous-système (5.20), nous choisissons cette fois la fonctionnelle développée dans [Gouaisbaut, 2001] :

$$V_r(x_{1t}) = x_1^T P x_1 + \frac{1}{1-b} \int_{t-h}^t \int_s^t x_1^T(\theta) Q x_1(\theta) d\theta ds,$$

qui, d'après les hypothèses (H4-H5), est une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour le sous-système (5.20) quand  $Q$  et  $P$  sont deux matrices définies positives. Le seul terme susceptible de faire apparaître des termes en  $\dot{x}_1$  est le premier terme de la fonctionnelle  $x_1^T P x_1$ . Donc, d'après les notations du théorème 5.3, on a  $V'_1 = 2x_1^T P$  et la fonctionnelle choisie s'écrit :

$$V(t) = \frac{1}{2} \|s(x(t))\|^2 + M V'_M \int_{-h}^0 |s(t+\theta)| d\theta + V_r(x_{1t}).$$

Nous montrons de même que cette fonctionnelle est négative pour  $|s| > \epsilon$ , concluant ainsi la preuve par application du théorème 5.2. ■

### 5.3.3 Simulations

#### 5.3.3.1 Retour sur le pendule inverse

**Simulations sans modélisation de la dynamique des actionneurs** Considérons à nouveau l'exemple 5.1 du pendule avec les constantes définies de la même façon. Supposons qu'il existe un retard constant sur la variable  $x(t)$ , le système devient :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_1 u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_2 \sin x_1(t). \quad (5.25)$$

Pour la surface de glissement  $s = x_1 + x_2$ , la loi de commande (5.18) s'écrit :

$$u(t) = -a_1^{-1} (x_2(t-\tau) + m_1 \text{sign}(s)).$$

Les simulations ont été faites avec  $m_1 = 10$  et un retard de 0.5.

Comme prévu, nous pouvons visualiser, sur les figures 5.11 et 5.12, que la commande stabilise parfaitement le système mais présente de fortes oscillations.

Les figures 5.13 et 5.14 montrent le même système soumis à une commande sigmoïde ( $\tanh(\frac{4z}{\epsilon})$ ), avec  $\epsilon = 0.3$ , faisant disparaître les oscillations observées sur la commande lors de l'utilisation de la fonction signe.



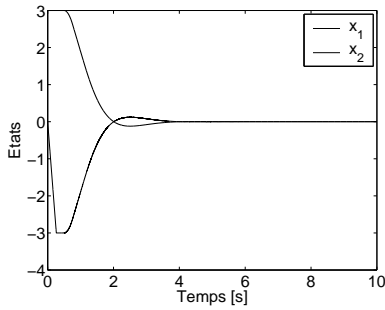


Figure 5.11 – Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs, fonction signe

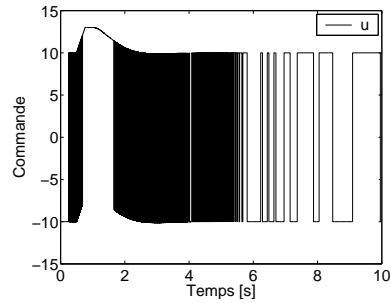


Figure 5.12 – Commande signe appliquée au pendule sans modélisation des actionneurs

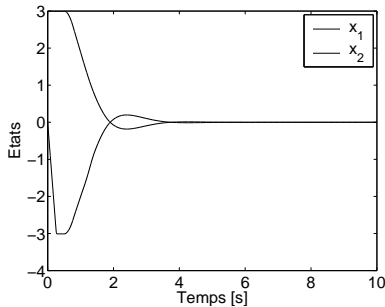


Figure 5.13 – Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs, fonction sigmoïde

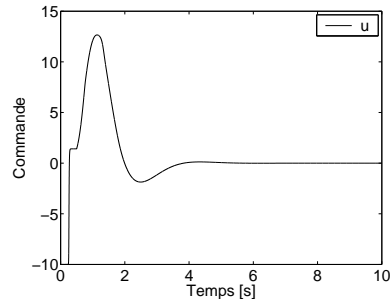


Figure 5.14 – Commande sigmoïde appliquée au pendule sans modélisation des actionneurs

**Simulations avec modélisation de la dynamique des actionneurs** La même commande, en modélisant la dynamique des actionneurs, fait apparaître le problème de la réticence : des oscillations apparaissent dans l'espace d'état — cf. figures 5.15 et 5.16. L'utilisation d'une fonction sigmoïde permet de résoudre le problème de la réticence avec  $\epsilon = 0.9$  — cf. figures 5.17 et 5.18.

**Remarque 5.5.** *Les résultats de ces simulations sont plutôt impressionnants mais nous avons choisi des valeurs qui permettaient de montrer l'efficacité de cette approche. Les simulations dépendent fortement du gain  $m_1$  choisi. Il est facile de montrer que pour des gains plus faibles, la fonction signe est plus robuste que la fonction sigmoïde avec laquelle on visualise véritablement une stabilité pratique. Si nous reprenons le système (5.25) sans modéliser la dynamique des actionneurs et si nous appliquons une commande avec un gain plus faible de 6.1, nous obtenons les figures 5.19 et 5.20 qui mettent en évidence la stabilité pratique dans le cas de l'utilisation d'une fonction sigmoïde.*

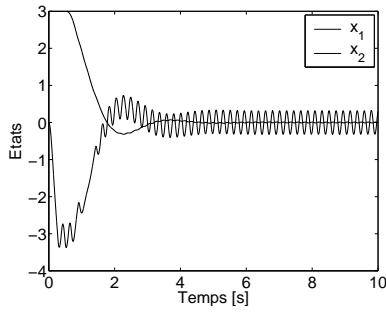


Figure 5.15 – Stabilisation du pendule avec modélisation des actionneurs, fonction signe

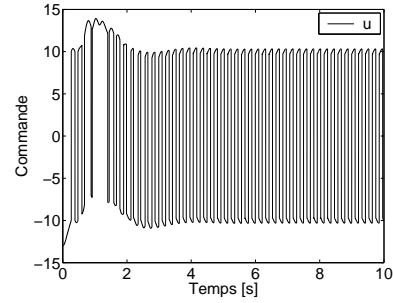


Figure 5.16 – Commande signe appliquée au pendule avec modélisation des actionneurs

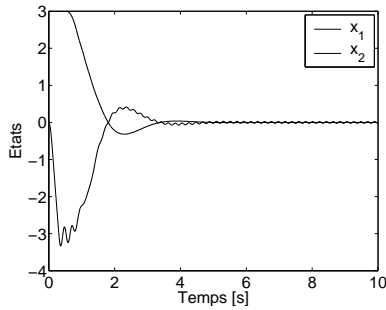


Figure 5.17 – Stabilisation du pendule avec modélisation des actionneurs, fonction sigmoïde

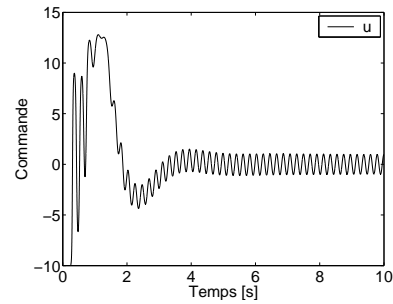


Figure 5.18 – Commande sigmoïde appliquée au pendule avec modélisation des actionneurs

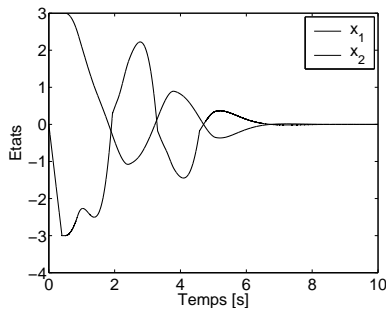


Figure 5.19 – Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs avec un gain plus faible  $m_1 = 6.1$ , via une fonction signe

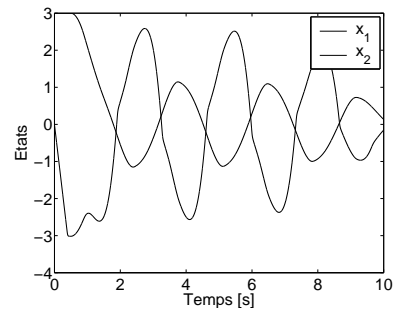


Figure 5.20 – Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs avec un gain plus faible  $m_1 = 6.1$ , via une fonction sigmoïde

### 5.3.3.2 Exemple académique

**Avec un retard constant** Soit le système perturbé sous la forme régulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2(t) + \begin{pmatrix} 0.2 & -1 \\ -0.9 & -1 \end{pmatrix} x_1(t - \tau) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) + \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \end{pmatrix} x_1(t - \tau) + Bu(t) + p(t). \end{cases} \quad (5.26)$$

On considère la variable de glissement :

$$s(t) = x_2(t) - Kx_1(t),$$

avec  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ . La commande est la suivante :

$$u(t) = -B^{-1} [\Omega(x_t) + m\sigma_\epsilon(s)]. \quad (5.27)$$

Les simulations ont été faites avec  $\epsilon = 0.3$ ,  $K = [1.6, -1]$ ,  $m = 10$ ,  $\sigma_\epsilon(s) = \text{sat}_\epsilon(s)$  et  $\tau = 0.2$ . La perturbation  $p$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 0.94.

Les conditions initiales sur les différentes variables sont des fonctions constantes ( $x_{10} \equiv 2$ ,  $x_{20} \equiv 1$  et  $x_{30} \equiv 0$ ).

Les figures 5.23 et 5.24 représentent respectivement l'état du système (5.26) sous la commande (5.27) tandis que sur les figures 5.21 et 5.22, nous visualisons l'état du même système mais avec une commande classique.

Nous observons bien, sur la figure 5.23, que l'origine du système (5.26) est pratiquement stable ( $|x_i| < 0.2$ ) en présence de perturbations, tandis que la commande est fortement lissée (Fig. 5.24) comparée à la commande par modes glissants classique (Fig. 5.22).

**Avec un retard variable et inconnu** Nous reprenons le système (5.26) précédent, avec la même perturbation, sauf que, cette fois, le retard est choisi de façon aléatoire sous forme d'un bruit blanc à spectre limité dont nous avons bien-sûr pris seulement les valeurs positives.

En agrandissant la zone de stabilisation après quelques secondes — comme montré sur la figure 5.27 — nous pouvons constater que la zone de stabilisation est inférieure à 0.02.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre a vu l'introduction de plusieurs notions nouvelles qu'il convient de récapituler ici. Nous avons introduit, dans un premier temps, la commande par modes glissants qui présente le grand avantage d'être robuste aux perturbations vérifiant la condition de recouvrement. Ensuite, en s'appuyant sur l'exemple du pendule, nous avons amené l'attention du

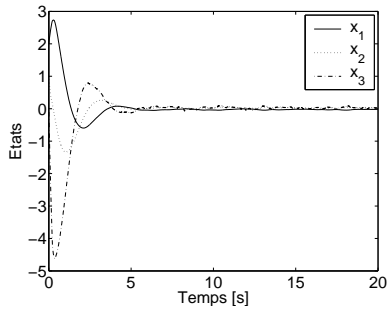


Figure 5.21 – Retard constant : stabilisation par une commande classique sous perturbations

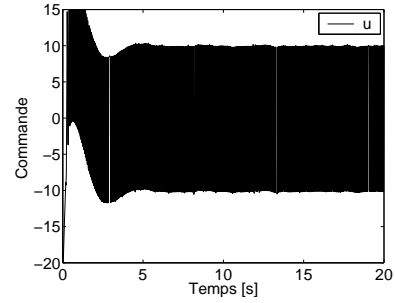


Figure 5.22 – Commande classique

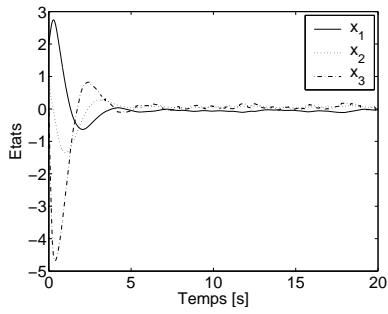


Figure 5.23 – Retard constant : stabilisation par une commande sigmoïde

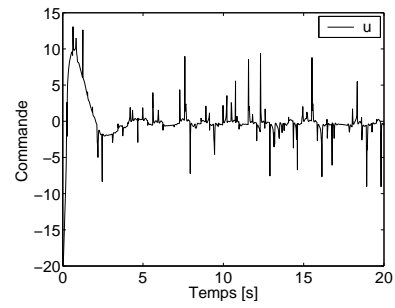


Figure 5.24 – Commande sigmoïde

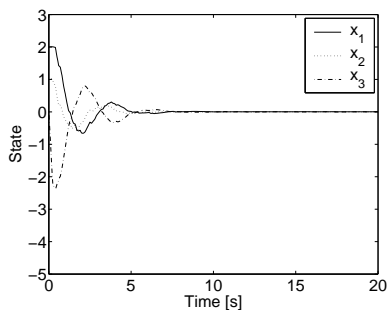


Figure 5.25 – Stabilisation par une commande sigmoïde avec un retard variable

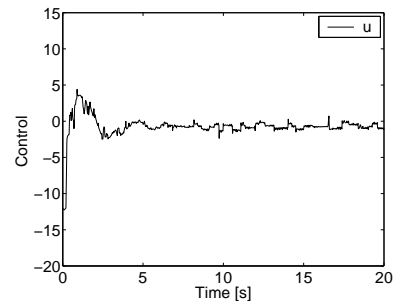
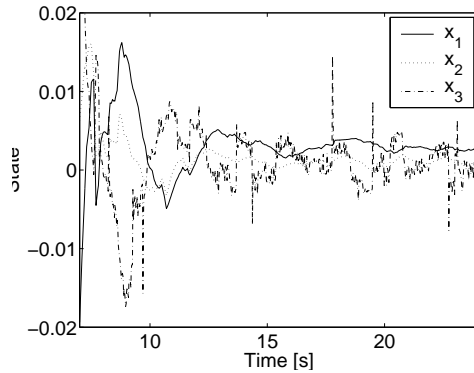


Figure 5.26 – Commande sigmoïde avec un retard variable



**Figure 5.27 – Agrandissement de la zone de “stabilisation”**

lecteur sur l’un des inconvénients majeurs de cette commande : le problème de la réticence qui se manifeste lors de la mise en application. La fréquence d’oscillations de la commande, une fois la surface de glissement atteinte, est théoriquement infinie du fait de la présence d’une fonction signe dans l’algorithme. Cette oscillation peut parfois exciter des modes non désirés — par exemple, la dynamique des actionneurs — et rendre le système instable ou oscillant. Pour éviter ce phénomène, nous avons donc étudié le remplacement de la fonction signe, utilisée dans les algorithmes, par une fonction sigmoïde dont nous avons donné une définition précise.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressé à la stabilité pratique des systèmes non linéaires à retards. Après avoir défini cette notion, nous avons donné un critère, basé sur les fonctionnelles de Lyapunov, pour garantir la stabilité pratique d’un système non linéaire à retards — *cf.* théorème 5.2.

Ces bases mises en places, il s’agissait, dans un troisième et dernier temps, d’analyser les conséquences du remplacement de la fonction signe par une sigmoïde. L’amélioration de la réticence ne pouvait se faire sans en payer également le prix. Cela nous a permis d’assurer non plus la stabilité asymptotique de l’origine mais la stabilité pratique dans le cas d’un système linéaire à retard inconnu et variable (*cf.* théorème 5.3 et son corollaire 5.4). Nous avons fini par quelques exemples illustrant nos deux résultats, aussi bien dans le cas d’un retard constant, que celui d’un retard variable. Ces simulations ont permis de montrer que la méthode est particulièrement efficace lorsque le gain se trouve être important. D’un point de vue pratique, il s’agira donc de trouver un compromis entre les différentes approches suivant le cahier des charges du système étudié.


# Conclusion générale et perspectives

*J'ai seulement eu en vue d'exposer dans cet ouvrage ce que je suis parvenu à faire en ce moment et ce qui, peut-être, pourra servir de point de départ pour d'autres recherches de même genre*

— Lyapunov<sup>1</sup>

---

L'ENSEMBLE de ce mémoire est dévolu à la stabilité des systèmes à retards. Quatre points particuliers sont développés dans les chapitres présentés, à savoir, la stabilité **entrée-sortie**, la stabilité et stabilisation **en temps fini**, la stabilité **entrée-état** et la stabilité **pratique**. Dans chaque chapitre, ces notions sont définies et analysées et les différentes contributions que nous apportons sont mises en évidence. Il s'agit ici d'exposer les temps forts de cette étude et, en particulier, de dégager les futures pistes de recherches envisagées.



## Synthèse

Cette thèse est construite sur la problématique de la stabilité des systèmes à retards en présence de perturbations et de la robustesse du système.

Le chapitre 1 présente, dans un premier temps, divers résultats, pour la plupart classiques, concernant la stabilité des systèmes à retards. Nous y rappelons les définitions et théorèmes usuels — notamment les méthodes de Lyapunov-Krasovskii et de Razumikhin — et quelques points plus spécifiques qui nous sont utiles pour les chapitres qui suivent. Après avoir mis en évidence, par un exemple simple, les problèmes que peuvent présenter les perturbations, nous proposons ensuite de définir et d'analyser des notions parfois nouvelles de stabilité. Cette fin de chapitre se focalise néanmoins sur une de ces solutions : la stabilité entrée-état. Nous y présentons les travaux menés à ce sujet dans le cas non retardé et préparons les investigations qui se feront dans le domaine des systèmes à retards au cours des chapitres futurs .

---

<sup>1</sup>M.A. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, réimpression par Editions Jacques Gabay, 1988, p.207.

Le chapitre 2 présente l'état de l'art sur la stabilité **entrée-sortie**. L'approche proposée — *via* la **forme descripteur** — présente généralement des résultats plus performants que ceux obtenus par les fonctionnelles classiques développées dans le cadre de la théorie de Lyapunov-Krasovskii. Un exemple académique en donne l'illustration.

Le chapitre 3 aborde un aspect théorique qui n'a, à notre connaissance, jamais été étudié par la communauté scientifique. Le chapitre est divisé en deux parties : l'une traite de la **stabilité** et l'autre de la **stabilisation en temps fini**. Dans la première, après avoir étendu les définitions aux cas des équations différentielles fonctionnelles, nous mettons en évidence les difficultés intrinsèques de l'étude en montrant que la classe des systèmes à retards, dont les trajectoires sont susceptibles d'être stables en temps fini, est limitée. Une caractérisation *via* des fonctionnelles de type Lyapunov-Krasovskii est proposée mais ce résultat s'avère difficilement exploitable. Ceci nous conduit naturellement à nous intéresser au problème de la stabilisation. Nous étudions, d'une part, le cas d'un retard sur l'entrée — un retour constructible stabilisant les solutions du système en temps fini est proposé — et, d'autre part, le cas d'un retard sur l'entrée et sur l'état.

Le chapitre 4 nous plonge dans le vif du sujet. Il traite du cas le plus contraignant de notre problématique : l'étude des systèmes non linéaires perturbés et à retards. Il est important de rappeler que les perturbations peuvent être larges contrairement à l'approche habituelle. Ce chapitre définit la notion de **stabilité entrée-état** dans le cas des équations différentielles fonctionnelles et relie les quelques travaux exposés sur le sujet dans la littérature scientifique. Une condition suffisante est donnée pour vérifier cette propriété en définissant ce que nous appelons une **fonctionnelle de Lyapunov-Sontag** en hommage au fondateur de cette théorie. Enfin, de nombreux résultats faisant l'état de l'art dans un domaine encore peu exploré y sont décrits : l'approche de Razumikhin — développée par d'autres auteurs — est exposée et démontrée d'une manière nouvelle, la stabilité exponentielle et la stabilité entrée-état sont reliées en utilisant un théorème inverse et les systèmes en cascade sont brièvement étudiés à l'image de ce qui existe déjà dans le cas des systèmes sans retards.

Le chapitre 5 présente une application aux **commandes par modes glissants** de la notion de **stabilité pratique**. Après avoir rappelé les principales caractéristiques de cette commande, nous étudions le problème de la **réticence** qu'elle présente avec l'exemple du pendule inverse. Cette recherche se focalise sur l'influence de la dynamique des actionneurs rencontrée lors des applications physiques. Une solution est ensuite envisagée afin d'éviter ce phénomène indésirable : elle consiste à remplacer la fonction signe présente dans la commande par modes glissants — cause de cette réticence — par les fonctions sigmoïdes que nous définissons de façon particulière. Dans ces conditions, la commande obtenue permet de garantir une

---

stabilité pratique, c'est-à-dire une stabilité garantissant un état borné pour une entrée bornée. De nombreuses simulations concluent sur l'efficacité et sur les limites de cette méthode.

## Problèmes ouverts

Le chapitre 2 propose d'étudier le problème de la stabilité entrée-sortie par des méthodes utilisant des fonctionnelles de Lyapunov [Gu et al., 2003, Chapitre 3]. Cette spécificité, peu explorée jusqu'à présent par la communauté scientifique, nous semblait intéressante à étudier. Néanmoins ce travail reste à être approfondi, les majorations proposées étant pour la plupart assez contraignantes.

Dans le chapitre 5, il serait intéressant d'étudier plus en profondeur l'influence du gain sur la commande par modes glissants en fonction du  $\epsilon$  choisi pour la fonction sigmoïde; et plus généralement d'étudier les différences entre les diverses fonctions sigmoïdes choisies. D'autres techniques — non explorées pour le moment — existent afin d'éviter le problème de réticence. La plus populaire d'entre-elles reste la commande par modes glissants d'ordres supérieurs introduite dans les années 90 — [Fridman et Levant, 1996]. Quelques auteurs ont essayé d'adapter les algorithmes d'ordres supérieurs aux systèmes à retards mais cette extension ne semble pas immédiate — dans [Levaggi et Punta, 2003a, Levaggi et Punta, 2003b], les auteurs traitent le cas d'un double intégrateur.

Les chapitres 3 et 4 méritent une attention particulière puisqu'ils traitent de problèmes qui n'ont jamais été abordés — ou très peu — par la communauté scientifique dans le cas des systèmes à retards.

Nous avons pu mettre en évidence la difficulté de l'étude concernant la stabilité en temps fini. L'exemple 3.2 est trivial car le terme retardé est très rapidement éliminé par simple majoration. De plus, la fonctionnelle choisie est, en fait, une fonction. En revanche, la stabilisation semble donner des résultats exploitables. Il serait intéressant, par exemple, de considérer des chaînes d'intégrateurs à retard pur et de trouver une commande stabilisant le système. Or, il est possible, sous certaines conditions, d'écrire un système linéaire sous forme de chaînes d'intégrateurs. Le problème général de la stabilisation en temps fini d'un système linéaire à retard pur sur l'entrée pourrait alors être résolu. Ces travaux sont actuellement en cours avec l'aide précieuse d'Emmanuel Moulay.

Dans le chapitre 4 nous avons donné un critère permettant de vérifier la stabilité entrée-état d'un système à retards *via* les méthodes de Lyapunov-Krasovskii. C'est une condition suffisante de stabilité. La question la plus passionnante concerne évidemment la nécessité :



peut-on prétendre qu'un système à retards est stable entrée-état *si, et seulement si*, il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Sontag comme définie dans le chapitre concerné? L'intuition nous pousse à le penser. Il fut d'ailleurs remarqué que cette condition nécessaire était obtenue si de fortes hypothèses étaient vérifiées concernant la fonctionnelle  $f$  décrivant le système étudié — elle doit être globalement liptschizienne en ses variables. Il est certain que, pour aboutir au résultat, il conviendra de développer des théorèmes réciproques et de revisiter les travaux de nos illustres prédécesseurs Malkin, Massera, et Krasovskii — dans [Malkin, 1952], [Massera, 1956] et [Krasovskii, 1963]. Quoi qu'il en soit, ce problème reste ouvert et se présente comme un défi, qui, nous l'espérons, soulèvera l'intérêt de la communauté scientifique.

Mais la stabilité entrée-état ne présente pas seulement un intérêt théorique. Il serait intéressant d'analyser les résultats que nous pouvons obtenir en appliquant ces travaux dans le cas de la téléopération, en vogue actuellement. Les propriétés de décomposition du système — systèmes en cascades — ont déjà été utilisées par l'approche de Lyapunov-Razumikhin. Les étudier par l'approche de Lyapunov-Krasovskii serait une étape importante; elle donne *a priori* des résultats moins conservatifs. Liberzon, dans un article en cours de publication [Liberzon, ], s'est aussi inspiré du travail présenté dans [Teel, 1998] pour étudier l'effet de quantification quand le retour — quantifié et perturbé — est soumis à un retard. Il serait intéressant de comparer les différentes approches sur ce terrain très populaire.

Ces pistes font l'objet, actuellement, d'intenses recherches de notre part et d'une collaboration avec Emilia Fridman.

# ANNEXES



Figure 28 – *Schtroumpf formaliste* de Serge III, 1979, peinture sur poster collé sur bois, 65 × 45 × 2 cm, Musée d'Art Moderne et d'Art Contemporain de Nice

# A propos de l’histoire de l’automatique

*L’histoire est la science la plus fondamentale, car il n’y a pas de connaissance humaine qui ne puisse perdre son caractère scientifique quand les hommes oublient les conditions de sa naissance, les questions auxquelles elle répond et la fonction pour laquelle elle a été créée.*

— Farrington<sup>1</sup>

---

CET travail n’est pas celui d’un historien, mais d’un étudiant curieux qui a pris conscience de l’importance de l’histoire des sciences dans son cursus scientifique. Ne possédant ni la formation ni le temps nécessaire pour se consacrer pleinement à cette étude, nous nous sommes contenté d’exposer de grandes lignes, généralement connues des personnes initiées à l’histoire des sciences, en essayant d’en retracer sommairement le fil jusqu’à notre domaine d’étude. La tâche fut, de plus, agrémentée de passionnantes lectures : [Boorstin, 1963, Farrington, 1967, Ronan, 1988, Jacomy, 1990, Guedj, 2000, Cotardiere, 2004], ainsi que la thèse [Remaud, 2004] qui traite spécifiquement de la genèse de l’automatique en France. Néanmoins, il ne fut pas simple de se consacrer à cette étude qui sort du cadre général des thèses de la section 61. Cette annexe se veut donc délibérément courte et nous prions le lecteur de son indulgence. Par ailleurs, très peu d’études ont été réalisées sur l’histoire de l’automatique en français. Ceci peut s’expliquer pour plusieurs raisons. La première est politique car le domaine de l’histoire des sciences n’est pas forcément en vogue dans la société actuelle en attente de résultats profitables ; la deuxième est plus technique puisque la théorie des systèmes à retards est aujourd’hui encore très récente — environ un demi-siècle — comme celle de l’automatique<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Benjamin Farrington, *La science dans l’Antiquité*, Éditions petite bibliothèque Payot, Paris, 1967, p.313.

<sup>2</sup>Rappelons pour cela que la civilisation, commençant avec l’agriculture, n’a que 10000 ans, que les hommes ont vécu sous forme de tribus pendant des millions d’années et que l’histoire moderne ne représente qu’une fraction de seconde comparée au règne des dinosaures et encore moins à l’existence de la terre (4,5 milliards d’années).

## A.1 Sur l'évolution de l'automatique

### A.1.1 Définition et premiers pas

Qu'est-ce que l'*automatique* ? Ce domaine est peu connu du grand public en France, du moins en a-t-il une image faussée. Le problème vient de son appellation française, car "automatique" fait avant tout référence à automatisme, automates, et tout ce qui s'ensuit dans l'imaginaire du profane. A la décharge du grand public, il faut admettre que l'origine du mot automatique, venu avec l'industrialisation au 18e siècle, découle du mot Automate. Pourtant, si les domaines de l'*automatisme* font partie de l'*automatique*, ils ne représentent pourtant qu'un échantillon de son ensemble. L'automatique est avant tout **la science de la régulation** : elle consiste à garder certaines grandeurs d'un système physique le plus proche possible des valeurs souhaitées, et ce, malgré l'intervention d'actions perturbatrices.

La régulation s'observe abondamment dans la nature. A commencer dans la biologie : de nombreux systèmes régulés sont présents dans les corps vivants dès l'apparition des premiers organismes, comme le cycle de Krebs observé chez les plantes. Le corps humain est aussi le siège de nombreuses régulations. La respiration, par exemple, est conditionnée (entre autres) par l'activité physique : la consommation en oxygène augmente d'autant plus que l'énergie demandée est importante. En terme 'automatique', nous pourrions schématiser ce phénomène par une action intégrale — énergie plus grande, oxygène plus grande — soumise à une saturation ; l'homme ne peut emmagasiner de l'oxygène plus que ses poumons et ses muscles ne peuvent en recevoir !

Le premier système 'humain' de régulation semble dater de la période de la Grèce antique. Il s'agit de la clepsydre d'Hérodote (5e av. J.C.) que le mathématicien grec Ktesibios (3e av. J.C.) perfectionna en y ajoutant l'un des premiers systèmes de retour<sup>3</sup> qui permettait de contrôler l'écoulement de l'eau. Comme le montre le schéma<sup>4</sup> A.1, la vitesse  $v$  est utilisée pour permettre la montée progressive d'un marqueur sur une graduation donnant l'heure. Cette vitesse étant proportionnelle<sup>5</sup> à la hauteur  $h$ , il faut, pour la maintenir constante, garantir une hauteur de référence constante dans  $B$ , notée  $h_c$ . L'astuce est donc dans l'élément supplémentaire entre le réservoir  $A$  et  $B$  : si  $h < h_c$ , l'ouverture de  $A$  sera plus grande, augmentant la quantité d'eau qui provient de  $A$  et réciproquement.

---

<sup>3</sup>Appelé *feedback* en anglais.

<sup>4</sup>Ce schéma et le suivant sont inspirés de l'excellente introduction du livre de J.-F. Pommaret <http://cermics.enpc.fr/~pommaret/intro.ps>.

<sup>5</sup>Par application du théorème de Bernouilli,  $v^2 = 2gh(s/S)^2$ , où  $g$  représente la gravité et  $s/S$  le rapport des deux sections.

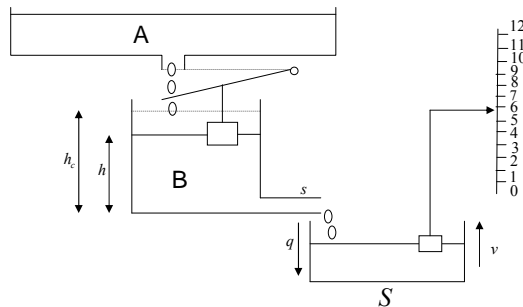


Figure A.1 – Principe de l'horloge à eau

Héron d'Alexandrie (1er ap. J.C.) a aussi montré des trésors d'ingéniosité pour inventer des machines automates et des systèmes régulés. Le mécanisme qui a obtenu un succès retentissant à son époque fut vraisemblablement celui de l'ouverture des portes d'un temple, figure<sup>6</sup> A.2. Que le lecteur s'imagine un instant la stupeur des grecs qui, arrivant devant ce temple, voyaient



Figure A.2 – Système d'ouverture d'un temple imaginé par Héron

ces portes massives s'ouvrir en allumant un feu et se refermer en l'éteignant, donnant l'illusion qu'une force divine contrôlait l'ouverture des portes<sup>7</sup>. Le procédé, très en avance sur son temps, utilisait déjà les notions de compressibilité/incompressibilité. En effet, Héron avait remarqué qu'au contraire de l'air, l'eau ne se compressait que très peu. Le feu entraînait le réchauffement de l'air à l'intérieur d'un ballon qui, en se détendant, repoussait l'eau qui remplissait un vase voisin. La masse d'eau devenant au fur et à mesure plus importante que la résistance de

<sup>6</sup>La figure provient du site <http://www.yanminh.com/english/CtTempleHeron.html>.

<sup>7</sup>Nul doute d'ailleurs qu'un tel procédé aurait grand succès aujourd'hui dans notre société, où le paranormal et le mysticisme reviennent au galop...

L'ouverture des portes, elles finissaient par s'ouvrir "automatiquement". Processus réversible!

Mais jusqu'à l'industrialisation, la science de l'automatique resta limitée à quelques ingénieurs techniciens qui travaillaient sur la régulation de température, des horloges, des moulins mais surtout sur des automates et des jeux qui tous n'étaient pas aussi 'sophistiqués' que le "Turc mécanique" : supercherie du 17e siècle où un ingénieur prétendait avoir construit un automate jouant aux échecs — il était en réalité guidé par un humain caché dans la boîte!

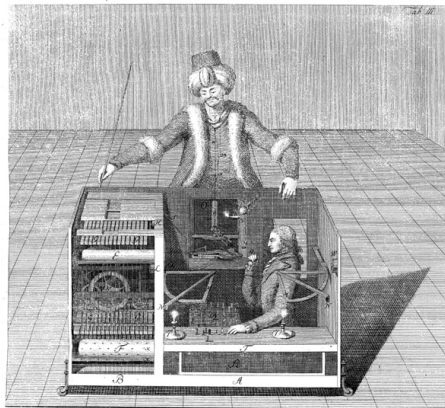


Figure A.3 – Le Turc mécanique

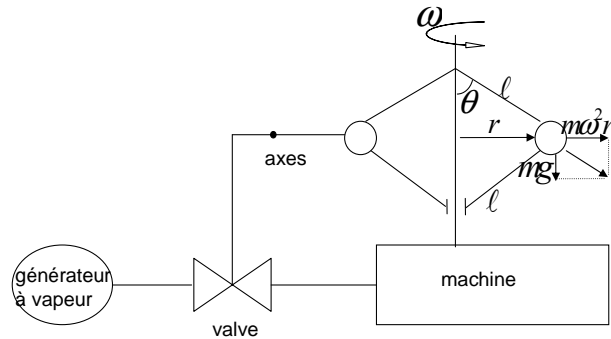
### A.1.2 L'explosion avec l'industrialisation

L'histoire de l'automatique démarre réellement avec l'industrialisation. La nécessité d'augmenter les cadences et la productivité ont très tôt poussé les scientifiques à rationaliser la production et à simplifier les tâches afin de les faire exécuter par des machines. De plus, la régulation prend forme dans des domaines très variés, telles la théorie de la valeur chez Adam Smith (1723-1790), ou l'évolution de Charles Darwin (1809-1882). Claude Bernard (1813-1878) montre notamment qu'un organisme fait appel à des mécanismes physiologiques de contrôle — connus sous le nom d'homéostasie — dans le but de préserver la stabilité de ses différentes constantes physiologiques. Ceci favorisera sans aucun doute la naissance de la théorie de l'automatique.

L'un des premiers systèmes qui marque véritablement la naissance de cette science est le régulateur à boules de James Watt (1736-1819), inventé à la fin du 18e siècle. Une nouvelle ère commence : les scientifiques laissent de côté les 'bricolages' techniques pour modéliser et analyser la régulation en tant que telle.



**Figure A.4** – La machine de Watt, musée des arts et métiers



**Figure A.5** – Schéma de la machine de Watt

Le régulateur à boules de James Watt — figures A.4 et A.5 — a permis de développer la puissance de machines fonctionnant à la vapeur tout en évitant les risques d'explosions. Le système étonne par son ingéniosité et par sa simplicité. Si la vitesse de rotation augmente, alors, sous l'effet des forces centrifuges, les boules tendent vers l'horizontal. Ceci actionne une valve diminuant la quantité de vapeur provenant de la chaudière et par ce biais, la vitesse du moteur diminue et ainsi de suite.

Au menu du 20e siècle se rajoute deux guerres mondiales qui favoriseront grandement l'explosion — sans mauvais jeu de mot — de l'automatique en tant que science. Alors que la mécanique était jusqu'à l'industrialisation le moteur de son évolution, le 20e fut sous le règne de la télécommunication. Une nouvelle manière de modéliser et d'étudier les systèmes est née sous l'essor de grands scientifiques tels que Harold Black (1898-1983), Harry Nyquist (1889-1976) et Hendrik Bode (1905-1982). L'automatique est formalisée ; les concepts de 'système', 'fonction de transfert', 'schéma bloc' et un panel d'outils pour le calcul opérationnel permettent de faire face aux besoins technologiques. C'est dans ce cadre que le phénomène du retard apparaît naturellement au détour de quelques applications pratiques...



### A.1.3 Une théorie jeune d'un demi-siècle

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce mémoire, les systèmes à retards font partie de la classe des équations différentielles fonctionnelles. En s'inspirant de la note du livre [Gu et al., 2003], nous pouvons en retracer une histoire succincte. Ces équations furent étudiées par des grands scientifiques comme Euler (1707-1783), Condorcet (1743-1794), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827) et Poisson (1781-1840) au 18e siècle. Mais c'est au début du 20e siècle que naissent les premières modélisations faisant apparaître explicitement un retard. Les problèmes auxquels s'attachaient les scientifiques découlaient d'un besoin de plus de précisions pour se rapprocher au mieux de la réalité physique : la modélisation de systèmes soumis à des frottements visqueux vers le début du 20e, le modèle proie-prédateur étudié par Volterra dans les années 30, les modèles biologiques étudiés par Kostyzin à la même période et l'étude de la stabilisation d'un bateau publié en 1942 par Minorsky.

La théorie de la stabilité découla de ces premières applications avec notamment le travail de Pontryagin qui obtint des résultats sur l'étude des polynômes en 42 et Chebotarev qui étudia le critère de Routh-Hurwitz début 1940. Myshkis fut le premier à se pencher sur la difficulté que représentent les conditions initiales et peu après, Krasovskii ouvrit un champ d'investigation plus que fécond en étendant le travail de Lyapunov aux systèmes à retards. Il fut le premier à choisir un état du système sous la forme d'une fonction en 1956. Razumikhin, quant à lui, montra qu'il est possible de contourner la difficulté liée aux fonctionnelles utilisées. De nombreuses extensions ont suivi par Kolmanovskii et Nosov en particulier sur les équations neutres. Depuis la fin du 20e siècle, la théorie reprend le dessus sur les applications pratiques comme peuvent en témoigner les nombreuses publications dans ce domaine.

## A.2 Sur la théorie et la pratique

Si nous suivons la pensée de Colin Ronan, dans son livre précité, la technique a toujours précédé la théorie. Parcourons un instant ces siècles d'évolution.

Les premiers pas de la science doivent leurs origines aux rites et coutumes 'magiques' dans les sociétés primitives. Les guérisseurs invoquaient certes des pouvoirs divins mais utilisaient des herbes (parfois) efficaces. La démarche faisait d'eux des "pré-scientifiques". La productivité augmentant avec l'arrivée de l'agriculture, il était *matériellement* possible d'élargir la taille des tribus. L'apparition de l'esclavage fut certainement la première révolution qui permit un saut en avant de la science, paradoxalement... Une classe de la population a pu se détacher du cycle de la production pour se consacrer entièrement à l'étude des sciences. Mais, là-encore,

les études répondaient à une certaine nécessité pratique : le commerce impliquait le besoin de compter pour troquer, échanger, marchander ; l'agriculture nécessitait de pouvoir arpenter les terrains, d'établir un calendrier donc d'étudier les astres et leurs cycles ; la navigation et la construction demandaient des calculs nombreux pour la consolidation des structures ainsi que le repérage spatial ; la poterie et la fonte des alliages impliquaient la compréhension des mécanismes 'chimiques', le contrôle de la température de cuisson, etc.

Seule la période de la Grèce Antique, si on excepte le 20e siècle, semble échapper à ce constat. Les historiens attribuent cette particularité aux rapports de forces existant entre les possédants et les esclaves. Pour les possédants, il fallait écarter les fondements de l'univers et de la société de tout ce qui pouvait rappeler le travail productif fourni par les esclaves.

Pour en revenir à l'automatique, celle-ci apparaît comme un exemple typique de technique ayant précédé une science. Si la régulation est un phénomène abondant dans la nature, l'idée même de devoir exécuter des tâches automatiquement, fait référence à l'industrialisation et demande une importante connaissance technologique préalable. Puisque l'automatique s'avère être justement la science de la régulation, elle nécessite le développement des autres sciences pour pouvoir pleinement s'épanouir. Ceci explique en partie son développement si tardif dans l'histoire des sciences.

L'ère industrielle, née du capitalisme, est caractérisée par un renouveau de l'attrait théorique. Selon Bruno Jacomy : *“Ce processus général de dématérialisation, que nous retrouvons à propos des communications, est l'un des traits dominants que l'historien des techniques peut lire dans les profondes mutations dont a été l'objet notre société occidentale depuis deux siècles.”* Il reste désormais à l'expliquer...

# Quelques outils mathématiques

---

## B.1 Équation de Riccati et LMI

Une LMI peut s'écrire de façon équivalente sous la forme d'une équation de Riccati (et réciproquement) grâce au complément de Schur que nous présentons dans le lemme ci-dessous et sa généralisation dans le corollaire qui suit.

**Lemme B.1 ([Boyd et al., 1994]).** *La LMI*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & B(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{B.1})$$

où  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $B(x) = B(x)^T$  et  $S(x)$  dépendent seulement de  $x$ , est équivalente à

$$\begin{aligned} B(x) &> 0, \\ Q(x) - S(x)B^{-1}(x)S(x)^T &> 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Une série d'inégalités non linéaires (B.2) peut être représentée sous forme d'une LMI (B.1).

Ce résultat peut facilement s'étendre en augmentant l'ordre de la matrice. Le corollaire qui suit se montre par récurrence.

**Corollaire B.2.** *La LMI*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S_1(x) & \dots & \dots & S_n(x) \\ * & R_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & \dots & * & R_n(x) \end{bmatrix},$$

où  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R_i(x) = R_i(x)^T$  pour tout  $i \in [1..n]$ , et  $S_i(x)$  pour tout  $i \in [1..n]$  dépendant seulement de  $x$ , est équivalente à

$$\forall i \in [1..n], R_i(x) > 0,$$

$$Q(x) - \sum_{i=1}^n S_i(x) R_i^{-1}(x) S_i^T(x) \geq 0.$$

## B.2 Principe de comparaison

Le principe de comparaison est très utile quand nous cherchons une borne de la solution  $x(t)$  de l'équation d'état  $\dot{x} = f(t, x)$  sans connaître explicitement cette dernière. Le lemme présenté le définit mathématiquement. Il s'applique dans une situation où une fonction scalaire  $v(t)$  satisfait l'inégalité  $\dot{v} \leq f(t, v(t))$  quel que soit  $t$  dans un certain intervalle. Le lemme compare les solutions de l'inégalité différentielle précédente avec celle de l'équation différentielle  $\dot{u} = f(t, u)$  et garantit donc sous certaines conditions que  $v(t) \leq u(t)$  dans l'intervalle de temps déterminé.

Il est temps de présenter ce principe.

**Lemme B.3 (Principe de comparaison).** *Considérons l'équation scalaire différentielle suivante :*

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

où  $f(t, u)$  est une fonction continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $u$  pour tout  $t \geq 0$  et  $u(t) \in \mathbb{R}$ . Soit  $[t_0, T)$  ( $T$  pouvant être infini) l'intervalle maximum d'existence de la solution  $u(t) \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Soit  $v(t)$  une fonction continue dont la dérivée supérieure à droite  $D^+v(t)$  satisfait l'ingalité différentielle :

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u(t_0),$$

avec  $v(t) \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Alors  $v(t) \leq u(t)$  quels que soient  $t \in [t_0, T)$ .

### B.3 Lemme de Gronwall-Bellman

Nous finissons par la présentation du lemme de Gronwall-Bellman appliqué dans le chapitre 4.

**Lemme B.4 (Lemme 3.1, [Hale et Verduyn-Lunel, 1993]).** *Si  $u$  et  $\alpha$  sont deux fonctions réelles continues à valeurs dans  $[a, b]$  et  $\beta \geq 0$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  avec,*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(z)dz} ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Si, de plus, la fonction  $\alpha$  n'est pas décroissante, alors

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad a \leq t \leq b. \tag{B.3}$$

# Quelques démonstrations

---

## C.1 Lemme de comparaison

Le lemme qui suit donne une caractérisation du lemme de comparaison *via* des fonctions de classe  $\mathcal{KL}$ .

**Lemme C.1.** *Considérons l'équation différentielle (scalaire et autonome) suivante :*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

où  $\alpha$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  localement lipschitzienne définie sur  $[0, a)$ . Quel que soit  $0 \leq y_0 < a$ , cette équation admet une unique solution  $y(t)$  définie pour tout  $t \geq t_0$ . De plus,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0),$$

où  $\sigma$  est de classe  $\mathcal{KL}$  définie sur  $[0, a) \times [0, \infty)$ .

**Preuve.** Cette preuve est présentée dans [Khalil, 2002, Appendice C.5]. Nous la reproduisons ici pour rendre ce mémoire complet.

Comme  $\alpha$  est localement lipschitzienne, l'équation admet une unique solution pour toutes les conditions initiales  $y_0 \geq 0$ . Sachant que  $\dot{y}(t) < 0$  si  $y(t) > 0$ , la solution vérifie  $y(t) \leq y_0$  pour tout  $t \geq t_0$ . La solution est donc bornée et définie sur tout  $t \geq t_0$ . Par intégration, nous avons

$$-\int_{y_0}^y \frac{dx}{\alpha(x)} = \int_{t_0}^t d\tau.$$

Soit  $b$  un nombre positif plus petit que  $a$ , et définissons

$$\eta(y) = -\int_b^y \frac{dx}{\alpha(x)}.$$

La fonction  $\eta(y)$  est strictement décroissante, dérivable sur  $[0, a]$ . De plus,  $\lim_{y \rightarrow 0} \eta(y) = \infty$ . Cette limite provient de deux observations. D'abord, la solution de l'équation différentielle  $y(t)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  — car  $\dot{y}(t) < 0$  quand  $y(t) > 0$ . Ensuite, la limite  $y(t) \rightarrow 0$  peut se produire seulement asymptotiquement quand  $t \rightarrow \infty$ . Cette limite ne peut pas avoir lieu sur un temps fini à cause de l'unicité de la solution. Soit  $c = -\lim_{y \rightarrow \alpha} \eta(y)$  ( $c$  peut être, éventuellement, infini). L'ensemble de définition de la fonction  $\eta$  est  $[-c, \infty)$ . Comme la fonction  $\eta$  est strictement décroissante, son inverse  $\eta^{-1}$  est définie aussi sur  $[-c, \infty)$ . Et pour tout  $y_0 > 0$ , la solution  $y(t)$  vérifie

$$\eta(y(t)) - \eta(y_0) = t - t_0,$$

ce qui implique que

$$y(t) = \eta^{-1}(\eta(y_0) + t - t_0).$$

Par ailleurs, si  $y_0 = 0$  alors  $y(t) \equiv 0$ , car  $y = 0$  est un point d'équilibre. Définissons une fonction  $\sigma(r, s)$  par :

$$\sigma(r, s) = \begin{cases} \eta^{-1}(\eta(r) + s), & r > 0 \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

Alors,  $y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$  pour tout  $t \geq t_0$  et  $y_0 \geq 0$ . La fonction  $\sigma$  est continue — comme  $\eta$  et  $\eta^{-1}$  sont continues sur leurs domaines et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \eta^{-1}(x) = 0$ .  $\sigma$  est strictement décroissante en  $r$  pour  $s$  fixé puisque

$$\frac{\partial \sigma(r, s)}{\partial r} = \frac{\alpha(\sigma(r, s))}{\alpha(r)} > 0,$$

et strictement décroissante en  $s$  pour  $r$  fixé puisque

$$\frac{\partial \sigma(r, s)}{\partial s} = -\alpha(\sigma(r, s)) < 0.$$

De plus,  $\sigma(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ , la fonction  $\sigma$  est donc une fonction de classe  $\mathcal{KL}$ . ■

## C.2 Théorème réciproque, stabilité exponentielle

**Lemme C.2 (Lemme 27.1, [Krasovskii, 1963]).** *Soient  $t_0 \geq 0$  un instant réel positif fixé, les conditions initiales  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_a$ . Pour  $t \geq t_0$ , les trajectoires du système (1.1) vérifient :*

$$\|x_t(t_0, \varphi_1) - x_t(t_0, \varphi_2)\|_{\mathcal{C}} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}} e^{\ell(t-t_0)}. \quad (\text{C.1})$$

**Preuve.** Soit la fonctionnelle

$$V(t, \varphi) = \int_t^{t+T} \|x_s(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}} ds + \sup_{t \leq s \leq t+T} (\|x_s(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}}), \quad (\text{C.2})$$

où  $T = 1/b \ln(2b)$  est choisi d'après l'équation (1.6) de sorte que  $\|x_{t+T}(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}} \leq 1/2 \|\varphi\|_{\mathcal{C}}$ . Les inégalités (1.7) découlent de

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} (\|x_s(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}}) \geq \|\varphi\|_{\mathcal{C}},$$

et de la relation

$$\begin{aligned} V(t, \varphi) &\leq \int_t^{t+T} a \|\varphi\|_{\mathcal{C}} e^{-b(s-t)} ds + a \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \\ &= a \left[ 1 + \frac{1}{b} \left( 1 - \frac{1}{2a} \right) \right] \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

obtenue en utilisant l'inégalité (1.6) de départ.

Montrons à présent que l'inégalité (1.9) est vérifiée pour la fonctionnelle  $V$  que nous avons choisie. Ici, intervient le lemme C.2 qui nous permet d'obtenir les inégalités qui suivent :

$$\begin{aligned} |V(t, \varphi_1) - V(t, \varphi_2)| &\leq \int_t^{t+T} \|x_s(t, \varphi_1) - x_s(t, \varphi_2)\|_{\mathcal{C}} ds + \sup_{t \leq s \leq t+T} (\|x_s(t, \varphi_1) - x_s(t, \varphi_2)\|_{\mathcal{C}}) \\ &\leq \int_t^{t+T} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}} e^{\ell(s-t)} ds + \sup_{t \leq s \leq t+T} (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}} e^{\ell(s-t)}) \\ &\leq \frac{e^{\ell T}}{\ell} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}} + e^{\ell T} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}} \\ &\leq c_4 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Il reste à présent à calculer la dérivée de  $V$ .

$$\begin{aligned} D^+V(t, \varphi) &\leq \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{t+\Delta t}^{t+T+\Delta t} \|x_s(t+\Delta t, \varphi)\|_{\mathcal{C}} ds - \int_t^{t+T} \|x_s(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}} ds \right) \\ &= -\|\varphi\|_{\mathcal{C}} + \|x_{t+T}(t, \varphi)\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la relation (1.6) et le choix du nombre  $T$ , nous obtenons

$$D^+V(t, \varphi) \leq -\frac{1}{2} \|\varphi\|_{\mathcal{C}},$$

ce qui conclut la démonstration. ■



# Chemin de croix avec Pekee

---

## D.1 Le modèle

Le robot Pekee<sup>1</sup>, sur lequel nous avons travaillé, est un robot mobile à trois roues schématisé sur la figure D.1 : une roue “folle” pour permettre au robot d’être stable et deux roues motrices qui ne peuvent pas braquer et sont commandées par deux moteurs indépendants. En jouant sur la vitesse des deux roues, le robot tourne dans la direction souhaitée. Toutes les



**Figure D.1 – Le robot Pekee**

trajectoires ne sont donc pas admissibles. Posons  $x$  et  $y$  les coordonnées du centre de gravité du robot et  $\theta$  l’angle que fait l’axe orthogonal à l’essieu avec l’horizontale. La contrainte due aux contacts des roues sur le sol, contrainte de non glissement, impose que la vitesse des roues soit perpendiculaire à la normale passant par les roues, ce qui se traduit par la relation  $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$ . Cette contrainte limite l’accès à certaines courbures et ce genre de systèmes est dit non holonomes. Ils se caractérisent par des contraintes cinématiques prenant la forme d’équations qui portent sur les dérivées des paramètres de configuration : le système

---

<sup>1</sup>Cette partie s’inspire du travail de Stanislaw Matusiak avec qui nous avons collaboré dans le cadre d’un travail sur le robot Pekee.

est non holonome lorsque ces équations ne sont pas intégrables (le lecteur pourra consulter [Sontag, 1999]).

En notant  $v$  la vitesse de translation et  $w$  la vitesse angulaire, on exprime facilement les équations cinématiques du robot [Laumond, 1998] :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Les capteurs intégrés, commandés par le microcontrôleur, comprennent : 15 capteurs infra-rouge, 2 gyromètres, 2 capteurs de température, 1 capteur de lumière. La caméra vidéo, quant à elle, est gérée par le PC embarqué.

## D.2 Communication entre les différents modules du robot

D'une part la communication entre les modules du robot est assurée par le PC embarqué, équipé d'un microprocesseur Intel 486, fonctionnant initialement sous système d'exploitation (OS) Windows98. D'autre part, elle est effectuée par un bus OPP : Ordinateur Parallèle et Polymorphique (protocole de communication, propriétaire à Wany Robotics). Il assure la gestion des communications entre cartes filles (PC embarqué, module Wifi,...) et microcontrôleur.

L'horloge principale permettant de cadencer cette communication est fixée à 63 ms : toute commande moteur (par exemple) envoyée entre deux " top " d'horloge, est ignorée. D'autres limitations d'interaction avec le robot sont liées aux capteurs infra-rouge qui peuvent introduire un retard de 400 ms. En effet, on accorde seulement 30% de crédibilité à la mesure qui vient d'être faite, il faut que celle-ci se confirme sur plusieurs échantillons pour devenir crédible.

## D.3 Les limites du robot et les problèmes rencontrés

Pekee dispose d'un ordinateur embarqué qui communique avec un micro-contrôleur. Ce dernier gère les capteurs et actionneurs du robot Pekee et permet la communication avec le PC embarqué ou un PC externe via un bus développé par la société Wany qui commercialise le robot, le bus OPP.

L'accent a été porté sur quatre points qui nous semblaient fondamentaux :

- gestion du temps dans le processus de programmation

- méthode de programmation des algorithmes
- le positionnement sur le robot Pekee
- les limites physiques des moteurs du robot

Ces expériences nous ont permis de montrer que la principale source d’erreurs empêchant la mise en place pratique de lois de commandes pour le suivi de trajectoires sur le robot Pekee est due à la gestion des tâches sur le PC embarqué qui fonctionne sur Pekee.

Windows n’est pas adapté à des applications en temps réel, et ceci pour une raison assez simple à comprendre : il nous est impossible de gérer les priorités d’exécution des tâches que nous lui demandons.

La solution envisagée et développée parallèlement par d’autres laboratoires (comme le LAG à Grenoble) fut d’implémenter le logiciel Linux sur l’ordinateur embarqué du robot Pekee. Il reste ensuite à gérer les liaisons avec le microcontrôleur et d’effectuer à nouveau les tests pour vérifier les performances du Pekee sous Linux.

## D.4 Système d’exploitation en temps réel

La gestion du temps constitue un problème majeur des systèmes d’exploitation, car les OS modernes sont tous multitâches, mais ils utilisent cependant le matériel basé sur des processeurs quant à eux qui ne le sont pas.

Par conséquent le OS doit partager le temps du processeur entre les différentes tâches. Cette notion de partage implique une gestion du passage d’une tâche à l’autre effectuée par un ensemble d’algorithmes appelés “ordonnanceur”. Le rôle de l’ordonnanceur étant de partager le temps processeur entre les applications, ceci implique que le temps de réponse d’un système classique n’est pas garanti.

Le cas “des systèmes temps réels” en effet, est différent : un système est dit “temps réel” lorsqu’il est qualifié selon la condition décrite ci-après : un système temps réel est une association logiciel/matériel où le logiciel permet, entre autres, une gestion adéquate des ressources matérielles en vue de remplir certaines tâches ou fonctions dans des limites temporelles bien précises.

Ce travail fut récemment accompli par George Palos avec succès à l’ISEN ce qui permet d’espérer prochainement des applications de lois de commande sur ce robot.

# Liste des figures

---

1	Dessin de Pancho dans le journal <i>Le Monde</i> du 11 janvier 2004 illustrant l'article intitulé "La révolte des chercheurs contre le gouvernement" . . . .	11
2	Chaque segment de longueur $\tau$ est vu sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ . . . . .	22
3	Fonction $\Phi$ de de l'ensemble $\mathcal{C}$ . . . . .	23
4	Fonction $\Psi$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ . . . . .	23
5	Portrait d'Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) . . . . .	24
6	Portrait de Nikolai Nikolaevich Krasovskii (1924-) . . . . .	24
7	Portrait de Boris Sergeevich Razumikhin . . . . .	24
1.1	Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ . . . . .	31
1.2	Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ .	32
1.3	Schématisation d'une boîte noire . . . . .	40
1.4	Caractérisation asymptotique du gain . . . . .	44
1.5	à gauche : Systèmes en cascade, à droite : Systèmes interconnectés . . . .	46
3.1	Illustration de la stabilité en temps fini et du temps d'établissement . . .	63
3.2	évolution de la solution $x(t)$ du système (3.5) stable en temps fini pour $a = \tau = 0.5$ et $\varphi_0 \equiv 3$ . . . . .	67

3.3	évolution de la solution $x(t)$ pour $\tau = 0.2, l = 0.5, \varphi_0 \equiv 5$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$	72
5.1	Schéma du pendule inverse . . . . .	98
5.2	Trajectoire du pendule dans l'espace des phases pour un pas d'échantillonnage de $10^{-5}$ . . . . .	99
5.3	Oscillations à haute fréquence de la commande envoyée . . . . .	99
5.4	Réticence observée dans l'espace des phases en modélisant la dynamique des actionneurs . . . . .	99
5.5	Commande $u(t)$ avant l'influence de la dynamique des actionneurs. . . . .	99
5.6	Réticence observée sur $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en modélisant la dynamique des actionneurs . . . . .	100
5.7	Illustration de la définition d'une fonction sigmoïde . . . . .	102
5.8	Fonction sigmoïde $\text{sat}_\epsilon(z)$ pour $\epsilon = 0.3$ . . . . .	102
5.9	Fonction sigmoïde $\tanh(\frac{4z}{\epsilon})$ pour $\epsilon = 0.3$ . . . . .	102
5.10	Illustration de la stabilité pratique . . . . .	104
5.11	Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs, fonction signe	113
5.12	Commande signe appliquée au pendule sans modélisation des actionneurs	113
5.13	Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs, fonction sigmoïde	113
5.14	Commande sigmoïde appliquée au pendule sans modélisation des actionneurs	113
5.15	Stabilisation du pendule avec modélisation des actionneurs, fonction signe	114
5.16	Commande signe appliquée au pendule avec modélisation des actionneurs	114
5.17	Stabilisation du pendule avec modélisation des actionneurs, fonction sigmoïde	114
5.18	Commande sigmoïde appliquée au pendule avec modélisation des actionneurs	114
5.19	Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs avec un gain plus faible $m_1 = 6.1$ , via une fonction signe . . . . .	114
5.20	Stabilisation du pendule sans modélisation des actionneurs avec un gain plus faible $m_1 = 6.1$ , via une fonction sigmoïde . . . . .	114

---

5.21	Retard constant : stabilisation par une commande classique sous perturbations . . . . .	116
5.22	Commande classique . . . . .	116
5.23	Retard constant : stabilisation par une commande sigmoïde . . . . .	116
5.24	Commande sigmoïde . . . . .	116
5.25	Stabilisation par une commande sigmoïde avec un retard variable . . . . .	116
5.26	Commande sigmoïde avec un retard variable . . . . .	116
5.27	Agrandissement de la zone de “stabilisation” . . . . .	117
28	<i>Schtroumpf formaliste</i> de Serge III, 1979, peinture sur poster collé sur bois, 65 × 45 × 2 cm, Musée d’Art Moderne et d’Art Contemporain de Nice	124
A.1	Principe de l’horloge à eau . . . . .	127
A.2	Système d’ouverture d’un temple imaginé par Héron . . . . .	127
A.3	Le Turc mécanique . . . . .	128
A.4	La machine de Watt, musée des arts et métiers . . . . .	129
A.5	Schéma de la machine de Watt . . . . .	129
D.1	Le robot Pekee . . . . .	138

# Bibliographie

---

- [Angeli, 1999] Angeli, D. (1999). Input-to-state stability of PD-controlled robotic systems. *Automatica*, vol. 35 :1285–1290.
- [Angeli et al., 2000] Angeli, D., Sontag, E., et Wang, Y. (2000). A Lyapunov characterization of integral input-to-state stability. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 45 :1082–1097.
- [Anosov, 1959] Anosov, D. (1959). On stability of equilibrium points of relay systems. *Automation and Remote Control*, vol. 2 :135–149.
- [Arcak et al., 2002] Arcak, J., Angeli, D., et Sontag, E. (2002). A unifying integral ISS framework for stability of nonlinear cascades. *SIAM J. Control and Opt.*, vol. 40 :1888–1904.
- [Artstein, 1982] Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls : A reduction. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 27(4) :869–879.
- [Aubin et Cellina, 1984] Aubin, J. et Cellina, A. (1984). *Differential inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, Allemagne.
- [Bartholomeus-Goubet, 1996] Bartholomeus-Goubet, A. (1996). *Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes retardés : critères dépendant des retards*. Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de lille.
- [Bartolini et al., 2000] Bartolini, G., Ferrera, A., Usai, E., et Utkin, V. (2000). On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 45(9) :1711–1717.
- [Bellman et Cooke, 1963] Bellman, R. et Cooke, K. (1963). *Differential difference equations*. Academic Press, New York, London.
- [Bhat et Bernstein, 1995] Bhat, S. et Bernstein, D. (1995). Lyapunov analysis of finite-time differential equations. Dans *Proc. Amer. Control Conf.*, Seattle, USA.

- [Bhat et Bernstein, 1996] Bhat, S. et Bernstein, D. (1996). Continuous, bounded, finite-time stabilization of the translational and rotational double integrator. Dans *IEEE Conference on control applications*, Beaborn, MI, USA.
- [Bhat et Bernstein, 1997] Bhat, S. et Bernstein, D. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. Dans *Proc. Amer. Control Conf.*, Albuquerque, USA.
- [Bhat et Bernstein, 1998] Bhat, S. et Bernstein, D. (1998). Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrator. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43(5) :678–682.
- [Bhat et Bernstein, 2000] Bhat, S. et Bernstein, D. (2000). Finite time stability of continuous autonomous systems. *SIAM J. Control Optim.*, vol. 38(3) :751–766.
- [Boorstin, 1963] Boorstin, D. (1963). *Les découvreurs*. Academic Press, New York.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, L., Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia.
- [Burton, 1985] Burton, T. (1985). *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*. Academic Press, Inc.
- [Burton et Hatvani, 1990] Burton, T. et Hatvani, L. (1990). On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations. *Differential and integral equations*, vol. 3(2) :285–293.
- [Bushnell, 2001] Bushnell, L. (2001). Networks and control. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22(1) :22–99.
- [Canudas de Wit et Perruquetti, 2002] Canudas de Wit, C. et Perruquetti, W. (2002). Smoothing strategies for high-gain control. Dans *CLCA'02, IFAC Latin-American Conference on Automatic Control*, Guadalajara, Mexico.
- [Cotardiere, 2004] Cotardiere, P. (2004). *Histoire des sciences de l'Antiquité à nos jours*. Tallandier, Paris, France.
- [Dambrine, 1994] Dambrine, M. (1994). *Contribution À L'étude de la Stabilité Des Systèmes À Retards*. Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de lille.
- [Desoer et Vidyasagar, 1975] Desoer, C. et Vidyasagar, M. (1975). *Feedback systems : input-output properties*. Academic Press, New York.
- [Driver, 1962] Driver, R. (1962). Existence and stability of solutions of a delay-differential system. *Arch. Rational Mech., Anal.*, vol. 10 :401–426.
- [Edwards et Spurgeon, 1998] Edwards, C. et Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control : Theory and Applications*. Taylor and Francis Eds.



- [El'sgol'ts et Norkin, 1973] El'sgol'ts, L. et Norkin, S. (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Math. in Science and Eng., 105, Academic Press.
- [Emel'yanov, 1963] Emel'yanov, S. (1963). On peculiarities of variable suture control systems with discontinuous switching functions. *Doklady ANSSR*, vol. 153 :776–778.
- [Emel'yanov, 1967] Emel'yanov, S. (1967). *Variable Suture Control Systems*. Nauka.
- [Farrington, 1967] Farrington, B. (1967). *La science dans l'antiquité*. Petite Bibliothèque Payot, Paris, France.
- [Fiagbedzi et Pearson, 1986] Fiagbedzi, Y. et Pearson, A. (1986). Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 31(9) :847–855.
- [Filippov, 1983] Filippov, A. (1983). *Differential Equations with Discontinuous Right Hand-Sides. Mathematics and its Applications*. Kluwer Ac. Pub.
- [Floquet, 2000] Floquet, T. (2000). *Contributions à la commande par modes glissants d'Ordre supérieur*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [Fridman, 2001a] Fridman, E. (2001a). New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems and Control Letters*, vol. 43, Issue 4 :309–319.
- [Fridman et al., 2003a] Fridman, E., Gouaisbaut, F., Dambrine, M., et Richard, J.-P. (2003a). A descriptor approach to sliding mode control of systems with time-varying delays. Dans *ECC'03*, Cambridge, England.
- [Fridman et Shaked, 2003] Fridman, E. et Shaked, U. (2003). Delay-dependent stability and H<sub>∞</sub> control : constant and time-varying delays. *Int. Journal of Control*, vol. 76(1) :48–60.
- [Fridman, 2001b] Fridman, L. (2001b). An averaging approach to chattering. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 46(8) :1260–1265.
- [Fridman, 2003] Fridman, L. (2003). Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors. *Int. J. of Control*, vol. 76(9) :906–912.
- [Fridman et Levant, 1996] Fridman, L. et Levant, A. (1996). *Higher order sliding modes as a natural phenomena of control theory*, volume 217. Lectures Notes in Control and Information Science, Springer-Verlag, London.
- [Fridman et al., 2003b] Fridman, L., Strygin, V., et Polyakov, A. (2003b). Stabilization of oscillations amplitudes via relay delay control. *Int. J. of Control*, vol. 76(8) :770–780.
- [Gouaisbaut, 2001] Gouaisbaut, F. (2001). *Sur la commande par modes glissants des systèmes à retards*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille, Université des Sciences et Technologies de Lille.

- [Goubet-Bartholomeus et al., 1997] Goubet-Bartholomeus, A., Dambrine, M., et Richard, J. (1997). Practical stability of nonlinear time-varying delay systems. Dans *IFAC-IFIP-IMACS Conference on Control of Industrial Systems*.
- [Grujić, 1973] Grujić, L. T. (1973). On practical stability. *International Journal of Control*, vol. 17(4) :881–887.
- [Grujić, 1975] Grujić, L. T. (1975). Novel development of Lyapunov stability of motion. *International Journal of Control*, vol. 22(4) :525–549.
- [Gu et al., 2003] Gu, K., Kharitonov, V., et Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, Boston, USA.
- [Guedj, 2000] Guedj, D. (2000). *Le théorème du perroquet*. Seuil, Paris, France.
- [Guldner et Utkin, 2000] Guldner, J. et Utkin, V. (2000). The chattering problem in sliding mode systems. Dans *MTNS2000 Mathematical Theory of Networks and Systems*. Perpignan, France.
- [Haimo, 1986] Haimo, V. (1986). Finite time controllers. *SIAM J. Control Optim.*, vol. 24(4) :760–770.
- [Halanay, 1966] Halanay, A. (1966). *Differential equations : stability, oscillations, time-lags*. Academic Press, New York.
- [Hale, 1977] Hale, J. (1977). *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [Hale et Verduyn-Lunel, 1993] Hale, J. et Verduyn-Lunel, S. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [Heck, 1991] Heck, B. (1991). Sliding mode control for singularly perturbed systems. *International Journal of Control*, vol. 53 :985–1001.
- [Itkis, 1976] Itkis, U. (1976). *Control Systems of Variable Structure*. Wiley, New York, USA.
- [Jacomy, 1990] Jacomy, B. (1990). *Une histoire des techniques*. Seuil, Paris, France.
- [Jiang et al., 1994] Jiang, Z., Teel, A., et Praly, L. (1994). Small gain theorem for ISS systems and applications. *MCSS, Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 7 :95–120.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, third edition.
- [Kharitonov, 1998] Kharitonov, V. (1998). Robust stability analysis of time delay systems : A survey. Dans *Fourth IFAC conference on system structure and control, Plenary lecture*, pp. 1–12, Nantes, France.
- [Kharitonov et Zhabko, 2003] Kharitonov, V. et Zhabko, A. (2003). Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, vol. 39 :15–20.

- [Kökösy, 1999] Kökösy, A. (1999). *Systèmes de commande automatique et poursuite pratique. Applications aux robots industriels*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Franche-Comté.
- [Kolmanovskii et Myshkis, 1992] Kolmanovskii, V. et Myshkis, A. (1992). *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Acad. Pub.
- [Kolmanovskii et al., 1999] Kolmanovskii, V., Niculescu, S., et Gu, K. (1999). Delay effects on stability : A survey. Dans *38th IEEE CDC'99*, Phoenix, AZ.
- [Kolmanovskii et Nosov, 1986] Kolmanovskii, V. et Nosov, V. (1986). *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, London.
- [Kolmanovskii et Shaikhet, 1996] Kolmanovskii, V. et Shaikhet, L. (1996). Control of systems with aftereffect. *American Mathematical Society*, vol. 157.
- [Krasovskii, 1963] Krasovskii, N. (1963). *Stability of motion*. Stanford University Press.
- [Lasalle et Lefschetz, 1961] Lasalle, J. et Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press.
- [Laumond, 1998] Laumond, J. (1998). *Robot Motion planning and Control*. Springer-Verlag.
- [Lazarevic et al., 2000] Lazarevic, M., Debeljkovic, D., Nenadic, Z., et Milinkovic, S. (2000). Finite-time stability of delayed systems. *J. Math. Control Inform.*, vol. 17 :101–109.
- [Levaggi et Punta, 2003a] Levaggi, L. et Punta, E. (2003a). Second order variable structure systems : Behaviour under an unknown input delay. Dans *ECC'03*, Cambridge.
- [Levaggi et Punta, 2003b] Levaggi, L. et Punta, E. (2003b). Stabilization of a second-order variable structure system with unknown input delay. Dans *TDS'03*, Rocquencourt, France.
- [Levant, 2001] Levant, A. (2001). Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 46(9) :1447–1451.
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, vol. 76(9) :924–941.
- [Liberzon, ] Liberzon, D. Quantization, time delays, and nonlinear stabilization. *IEEE Trans. Aut. Control*.
- [Liberzon et al., 2002] Liberzon, D., Sontag, E., et Wang, Y. (2002). Universal construction of feedback laws achieving ISS and integral-ISS disturbance attenuation. *Systems & Control Letters*, vol. 46 :111–127.
- [Lin et al., 1996] Lin, Y., Sontag, E., et Wang, Y. (1996). A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34(1) :124–160.

- 
- [Loria et Ortega, 1996] Loria, A. et Ortega, R. (1996). *Systèmes de régulation*. Masson.
- [Lukyanov et Utkin, 1981] Lukyanov, A. et Utkin, V. (1981). Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form. *Automation and Remote Control*, vol. 42(4) :413–420.
- [Malkin, 1952] Malkin, I. (1952). *Theory of stability of motion*. Gostehizdat.
- [Marshall et al., 1992] Marshall, J., Górecki, H., Korytowski, A., et Walton, K. (1992). *Time-delay systems stability and performance criteria with applications*. Ellis Horwood, Chichester, England.
- [Massera, 1956] Massera, J. (1956). Contributions to stability theory. *Ann. Math.*, vol. 64 :182–206.
- [Moulay et al., 2006] Moulay, E., Dambrine, M., Perruquetti, W., et Yeganefar, N. (2006). Une première approche de la stabilité et de la stabilisation en temps fini des systèmes à retard. Dans *CIFA '06*, Bordeaux, France.
- [Moulay et Perruquetti, ] Moulay, E. et Perruquetti, W. Finite-time stability and stabilization of a class of continuous systems. *A paraître dans : J. Math. Anal. Appl.*
- [Moulay et Perruquetti, 2003] Moulay, E. et Perruquetti, W. (2003). Finite time stability of nonlinear systems. Dans *42th IEEE CDC03 (Conf. On Dec. and Control)*, pp. 3641–3646, Hawaii, USA.
- [Moulay et Perruquetti, 2005a] Moulay, E. et Perruquetti, W. (2005a). Finite-time stability of differential inclusions. *IMA J. Math. Control Inform.*, vol. 22(4) :465–475.
- [Moulay et Perruquetti, 2005b] Moulay, E. et Perruquetti, W. (2005b). Stabilization of non affine systems : a constructive method for polynomial systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 50(6) :520–526.
- [Mounier et Richard, 2003] Mounier, H. et Richard, J.-P. (2003). IJSS special issue on telecommunications. *International Journ. of Systems Science*, vol. 34(10-11) :561.
- [Nešić et Laila, 2002] Nešić, D. et Laila, D. (2002). A note of input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 47(7) :1153–1158.
- [Niculescu, 2001] Niculescu, S. (2001). *Delay effect on stability : a robust control approach*. Springer.
- [Palmor, 1980] Palmor, Z. (1980). Stability properties of Smith dead-time compensator controllers. *Int. J. Control.*, vol. 32 :937–949.
- [Palmor et Halevi, 1983] Palmor, Z. et Halevi, Y. (1983). On the design and properties of multivariable dead time compensators. *Automatica*, vol. 19 :255–264.

- [Pepe et Jiang, 2005] Pepe, P. et Jiang, Z.-P. (2005). A Lyapunov-Krasovskii methodology for ISS of time-delay systems. Dans *Proc. Of the 44th IEEE CDC and ECC*, Seville, Spain.
- [Perruquetti et Barbot, 2002] Perruquetti, W. et Barbot, J., editors (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*. Control Engineering Series. Marcel Dekker, New York.
- [Perruquetti et al., 1997] Perruquetti, W., Borne, P., et Richard, J. (1997). A generalized regular form for sliding mode stabilization of MIMO systems. Dans *Proc. Of the 36th IEEE CDC*, San Diego.
- [Perruquetti et al., 1995] Perruquetti, W., Richard, J.-P., Grujić, L., et Borne, P. (1995). On practical stability with the settling time via vector norms. *Int. J. Control*, vol. 62(1) :173–189.
- [Pipkin, 1991] Pipkin, A. (1991). *A course on integral equations*. Springer Verlag, New York.
- [Polushin et Marquez, 2003] Polushin, I. et Marquez, H. (2003). Stabilization of bilaterally controlled teleoperators with communication delay : an ISS approach. *Systems and Control Letters*, vol. 24 :351–359.
- [R. Bellman, 1965] R. Bellman, K. C. (1965). On the computational solution of a class of functional differential equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 12 :495–500.
- [Razumikhin, 1956] Razumikhin, B. (1956). On the stability of systems with a delay. *PMM*, vol. 20(4) :500–512.
- [Remaud, 2004] Remaud, P. (2004). *Une histoire de la genèse de l'automatique en France 1850-1950*. Thèse de Doctorat, Conservatoire National des Arts et des Métiers de Paris.
- [Richard, 2002] Richard, J.-P. (2002). *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*. Hermes Science Publications, Paris, France.
- [Richard, 2003] Richard, J.-P. (2003). Time delay systems : An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, vol. 39(10) :1667–1694.
- [Richard et al., 2001] Richard, J.-P., Gouaisbaut, F., et Perruquetti, W. (2001). Sliding mode control in the presence of delay. *Kybernetika*, vol. 37 :277–294.
- [Ronan, 1988] Ronan, C. (1988). *Histoire mondiale des sciences*. Seuil, Paris, France.
- [Sename, 1994] Sename, O. (1994). *Sur la commandabilité et le découplage des systèmes linéaires à retards*. Thèse de Doctorat, Laboratoire d'Automatique de Nantes, Univ. de Nantes et EC Nantes, France.
- [Seuret et al., 2006] Seuret, A., Michaut, F., Richard, J.-P., et Divoux, T. (2006). Networked control using gps synchronization. Dans *ACC'06, American Control Conference*, Mineapolis, USA.

- 
- [Shimanov, 1960] Shimanov, S. (1960). On stability in the critical case of a zero root for systems with time lag. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 24 :653–668.
- [Slotine et Li, 1991] Slotine, J. et Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ.
- [Slotine et Sastry, 1983] Slotine, J. et Sastry, S. (1983). Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator. *International Journal of Control*, vol. 38(2) :465–492.
- [Sontag, 1989] Sontag, E. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 34(4) :435–443.
- [Sontag, 1990] Sontag, E. (1990). Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 35(4) :473–476.
- [Sontag, 1999] Sontag, E. (1999). Stability and stabilization : Discontinuities and the effect of disturbances. in *Proc. NATO Advanced Study Institute Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control (Montreal, Jul/Aug 1998)*, Kluwer, pp. 551–598.
- [Sontag, 2000] Sontag, E. (2000). the ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior. *Nonlinear Control in the Year 2000 (Volume 2)*, pp. 443–468.
- [Sontag et Wang, 1995] Sontag, E. et Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, vol. 24 :351–359.
- [Sontag et Wang, 1996] Sontag, E. et Wang, Y. (1996). New characterizations of the input-to-state stability. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 41(9) :1283–1294.
- [Tanner, 2004] Tanner, H. (2004). ISS properties of nonholonomic mobile robots. *Systems & Control Letters*, vol. 53(3-4) :229–235.
- [Tanner et al., 2002] Tanner, H., Pappas, G., et Kumar, V. (2002). Input-to-state stability on formation graphs. Dans *41th IEEE CDC (Conf. On Dec. and Control)*, pp. 2439–2444, Kobe, Japan.
- [Tchangani, 1999] Tchangani, A. (1999). *Sur la Stabilité Des Systèmes Héritaires Non Linéaires*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Teel, 1998] Teel, A. (1998). Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorem. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 43(7) :960–964.
- [Tsinias, 1997] Tsinias, J. (1997). Control Lyapunov functions, input-to-state stability and applications to global feedback stabilization for composite systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, vol. 7(2) :1–31.
- [Utkin, 1977] Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-22(2) :212–222.

- [Utkin, 1992] Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, New York.
- [Utkin et Lee, 2006] Utkin, V. et Lee, H. (2006). Chattering problem in sliding mode control systems. Dans *VSS'06 Intern. Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 346–350, Alghero, Italie.
- [Watanabe et al., 1996] Watanabe, K., Nobuyama, E., et Kojima, K. (1996). Recent advances in control of time-delay systems a tutorial review. Dans *35th IEEE CDC96 (Conf. On Dec. and Control)*, pp. 2083–2089, Kobe, Japan.
- [Weiss et Infante, 1967] Weiss, L. et Infante, E. (1967). Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-12(1) :54–59.
- [Witrant, 2005] Witrant, E. (2005). *Stabilisation des systèmes commandés par réseaux*. Thèse de Doctorat, INPG, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Wu, 2003] Wu, F. (2003). Robust quadratic performance for time-delayed uncertain linear systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Systems*, vol. 13 :153–172.
- [Xia et Jia, 2003] Xia, Y. et Jia, Y. (2003). Robust sliding mode control for uncertain time-delay systems : An LMI approach. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 48(6) :1086–1092.
- [Xu et al., 2005] Xu, S., Lam, J., et Zou, Y. (2005). Simplified descriptor system approach to delay-dependent stability and performance analyses for time-delay systems. *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 152(2) :147–151.
- [Yeganefar et al., 2004a] Yeganefar, N., Dambrine, M., et Kökösy, A. (2004a). Stabilisation pratique par modes glissants pour un système linéaire à retard. *e-STA, sciences et technologies de l'automatique*, vol. 1(4).
- [Yeganefar et al., 2004b] Yeganefar, N., Dambrine, M., et Kökösy, A. (2004b). Stabilisation pratique par modes glissants pour un système linéaire à retard. Dans *CIFA'04*, Douz, Tunisie.
- [Yeganefar et al., 2004c] Yeganefar, N., Dambrine, M., Kökösy, A., et Richard, J. (2004c). Smoothing strategy for sliding mode control for time-delay systems. Dans *TDS'04*, Leuven, Belgium.
- [Yeganefar et al., 2006] Yeganefar, Ni., Dambrine, M., et Yeganefar, Na. (2006). Relation between exponential stability and input-to-state stability. Dans *ACC'06*, New York.
- [Yoshizawa, 1966] Yoshizawa, T. (1966). *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo.
- [Yu et Xu, 2002] Yu, X. et Xu, J.-X., editors (2002). *Variable structure systems : towards the 21st century*, volume 274. Lect. Notes in Control and Inf. Sci. Springer-Verlag, New York.

- [Zames, 1966a] Zames, G. (1966a). On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part i : conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-11(2) :228–238.
- [Zames, 1966b] Zames, G. (1966b). On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part ii : conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-11(3) :465–238.



**Titre : DÉFINITIONS ET ANALYSE DE STABILITÉS POUR LES SYSTÈMES À RETARD NON LINÉAIRES**

Ce mémoire est dédié à l'étude de la stabilité des systèmes à retards *via* les méthodes temporelles de Lyapunov. Au-delà des formes usuelles de stabilité, nous étudions quatre autres propriétés : stabilité entrée-sortie, stabilité en temps fini, stabilité entrée-état et stabilité pratique. Après une large introduction, le second chapitre se focalise sur la stabilité entrée-sortie des systèmes linéaires à retards variables par une approche originale se basant sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. La forme descripteur est utilisée pour obtenir des conditions en termes d'inégalités matricielles. Dans le troisième chapitre, la stabilité en temps fini caractérise un équilibre asymptotiquement stable qui, de plus, est atteint en temps fini. Plusieurs résultats sont proposés concernant la stabilité et la stabilisation sur des systèmes non-linéaires et linéaires respectivement. Les premiers exemples de systèmes stables en temps fini sont donnés. Ensuite, la stabilité entrée-état est analysée dans le cadre des systèmes non linéaires soumis à des perturbations larges. Cette nouvelle notion est étendue au cas des systèmes retardés et plusieurs résultats sont proposés *via* des fonctionnelles de Krasovskii. Le dernier chapitre se consacre à l'étude de la stabilité pratique appliquée au problème de la réticence dans la commande par modes glissants. En présence de retards, cette technique de type "grands gains" peut provoquer une oscillation importante sur l'état du système — notamment lorsque la dynamique des actionneurs ne peut être négligée. Le phénomène de réticence est analysé formellement et de nombreuses simulations permettent de confirmer les avantages de la méthode proposée.

**Mots clés :** stabilité, systèmes à retards, systèmes non-linéaire, théorie de Lyapunov, commande par modes glissants.

---

**Title : DEFINITIONS AND ANALYSIS OF STABILITIES FOR NONLINEAR DELAYED SYSTEMS**

The focus of this work is the notion of stability for nonlinear time-delay systems using the Lyapunov time-domain approach. Five different chapters are devoted to stability properties. After a general introduction, the second chapter proposes an unconventional approach — based on Lyapunov-Krasovskii functionals — to the problem of input-output stability. The descriptor form is used to guaranty this stability by solving linear matricial inequalities (LMI). The next chapter, finite-time stability, is, as far we know, the first work on this topic for time-delay systems. Specifically several results are given for the stabilization problem on linear systems with delayed input. The first examples of finite-time stable delayed systems are also given. The fourth chapter is devoted to the input-to-state stability, which is generalized to the delay case. Sufficient conditions are given to check this stability using Lyapunov-Krasovskii methodology. The interest of the study based on perturbation problems is highlighted and some interesting perspectives for further research are given. The last part of the work is devoted to the study of practical stability used in solving the so-called chattering problem in sliding mode control. As the control is rapidly switching, chattering may appear on the state space — for instance in practical applications when the control dynamics can no longer be neglected. The chattering problem is carefully analyzed and many simulations are given to demonstrate the advantages of the proposed solution.

**Keywords :** delay systems, Lyapunov theory, non linear systems, sliding mode control, stability.