

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LILLE I

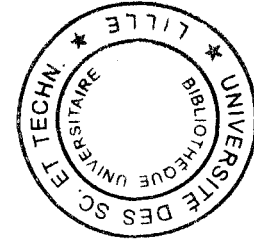
Discipline : LASERS, MOLÉCULES ET RAYONNEMENT ATMOSPHÉRIQUE

présentée et soutenue publiquement

par

Saliya COULIBALY

le: 29/09/2006



Solitons dissipatifs des oscillateurs paramétriques optiques: instabilités convectives/absolues et effets non-linéaires du walk-off

Dissipative localized structures in optical parametric oscillators: convective vs. absolute instabilities and walk-off nonlinear effects

Directeur de thèse :

Majid TAKI

JURY

Martine	LE BERRE	Université de Paris Sud, Orsay	<i>Présidente</i>
Mustapha	TLIDI	Université Libre de Bruxelles, Belgique	<i>Rapporteur</i>
Mikhail	KOLOBOV	Université de Lille I	<i>Examinateur</i>
Eric	LOUVERGNEAUX	Université de Lille I	<i>Examinateur</i>
Andrei	VLADIMIROV	Weierstrass Institute, Berlin	<i>Examinateur</i>

Remerciements

Je ne puis commencer cette page de remerciements sans que mes pensées n'aillent à mon père et ma mère qui ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui, ainsi qu'à toute ma famille.

Le laboratoire PhLAM de l'Université de Lille 1 m'ayant ouvert ses portes pour que cette thèse puisse voir le jour, je tiens à remercier ses responsables représentés à l'époque par Jean-Michel ROBBE et aujourd'hui par Georges WLODARCZAK, de même que les responsables de l'école doctorale EDSMRE représentée par Claire DEMUYNCK. Grand merci aussi à toutes les "Dames" du secrétariat pour leur immense disponibilité.

Je voudrais particulièrement présenter ici ma gratitude à l'ÉTAT DE CÔTE D'IVOIRE de m'avoir accordé l'opportunité d'effectuer ce travail grâce à son financement.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mustapha TLIDI d'avoir accepté la charge de rapporteur. Je remercie également Andrei VLADIMIROV, Mikhail KOLOBOV et Eric LOUVERGNEAUX pour leurs critiques non moins constructives dans la charge d'examinateur qui était la leur. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Martine LE BERRE qui a accepté la charge de rapporteur et m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie particulièrement Majid TAKI qui est à l'origine de ce thème et qui m'a fait confiance depuis le début et dont l'encadrement m'a permis d'acquérir le bagage nécessaire à l'accomplissement de cette thèse.

Énorme merci à ma femme Caroline pour son soutien sans faille dans les moments difficiles, de même qu'à ma *famille de France* représentée par les LOUF, LELIEUR, LE GARO (de Lyon) et à Germaine pour ses relectures et nombreux services rendus.

Je ne pourrai terminer sans dire merci à tous mes *potos du labo* qui se reconnaîtront, ainsi qu'à mon *vié-père* Justin.

Table des matières

Introduction	15
Première partie : Modes globaux dans un OPO	21
I Généralités	23
I.1 L'oscillateur paramétrique optique	24
I.1.1 Origine mécanique de la susceptibilité non linéaire quadratique . . .	24
I.1.2 Principes fondamentaux de l'OPO	26
I.1.3 Description du modèle analytique	27
I.2 Analyse de stabilité linéaire et bifurcations	30
I.2.1 Cas du detuning du signal négatif ($\Delta_s < 0$)	32
I.2.2 Cas du detuning positif ($\Delta_s > 0$)	33
I.2.3 Instabilité convective vs instabilité absolue	36
I.2.3.1 Régime convectif	42
I.2.3.2 Régime d'instabilité absolue	43
II Pompage inhomogène et modes globaux	49
II.1 Propriétés des faisceaux Gaussiens et lois d'échelle	51
II.1.1 Propriétés des faisceaux Gaussiens	51
II.1.2 Loi d'échelle dans un OPO pompé par un faisceau Gaussien	52
II.2 Modes Globaux dans un OPO sans walk-off	54
II.2.1 Cas du detuning du signal positif ($\Delta_s > 0$)	57

II.2.1.1	Analyse de stabilité linéaire au voisinage du point tournant	57
II.2.1.2	Étude faiblement non linéaire	63
II.2.2	Cas du detuning du signal négatif ($\Delta_s < 0$)	66
II.2.2.1	Analyse de stabilité linéaire au point tournant	67
II.2.2.2	Étude faiblement non-linéaire	69
II.2.3	Simulations numériques et comparaison avec les résultats théoriques	70
II.2.3.1	Cas $\Delta_s > 0$	71
II.2.3.2	Cas $\Delta_s < 0$	74
II.3	Modes globaux et walk-off dans un DOPO	82
II.3.1	Application de la méthode des coordonnées collectives	89
II.3.2	Cas limite des faibles valeurs du detuning Δ_s	96
 Deuxième partie : Effets non-linéaires du walk-off		107
 III Effets non-linéaires du walk-off dans des OPO		109
III.1	Équation d'amplitude pour le DOPO bistable en présence du walk-off . . .	111
III.1.1	Dynamique des fronts de translation en présence du gradient non- linéaire	117
III.1.1.1	Caractérisation des solutions de type front	117
III.1.2	Application à l'oscillateur paramétrique optique dégénéré	126
 IV Auto-compensation du walk-off		131
IV.1	Rappels sur l'OPO non dégénéré avec walk-off.	132
IV.2	Abaissement du seuil d'émission de l'OPO	135
IV.2.1	Description du modèle	136
IV.2.2	Analyse de stabilité linéaire	137
IV.2.3	Discussion des résultats et application à l'OPO	138
IV.2.4	Structures spatiales transverses dans des OPO	144
IV.3	Bistabilité et effet non-linéaire du walk-off	146

V L'OPO avec absorbant saturable	155
V.1 Présentation du modèle	156
V.2 Détermination semi-analytique de la vitesse du soliton asymétrique	162
Conclusion	167
Annexes	181
A Analyse linéaire dans la région du point tournant	183
A.1 OPO dégénéré (DOPO) à désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)	184
A.2 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal négatif ($\Delta_s < 0$)	185
B Dérivation de l'équation aux amplitudes du DOPO sans walk-off	187
B.1 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)	188
B.2 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal négatif ($\Delta_s < 0$)	192
C Dérivations des équations d'amplitude du DOPO avec walk-off	195
C.1 Cas du désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)	195
C.2 Cas du désaccord en fréquence du signal négatif ($\Delta_s < 0$)	196
D Résolution des équations d'amplitude au point tournant	199
D.1 Equation de Ginzburg-Landau pour l'OPO dégénéré	199
D.2 Modèle de Swift-Hohenberg pour l'OPO dégénéré	200
E Dérivation de l'équation d'amplitude de l'OPO bistable	203

Table des figures

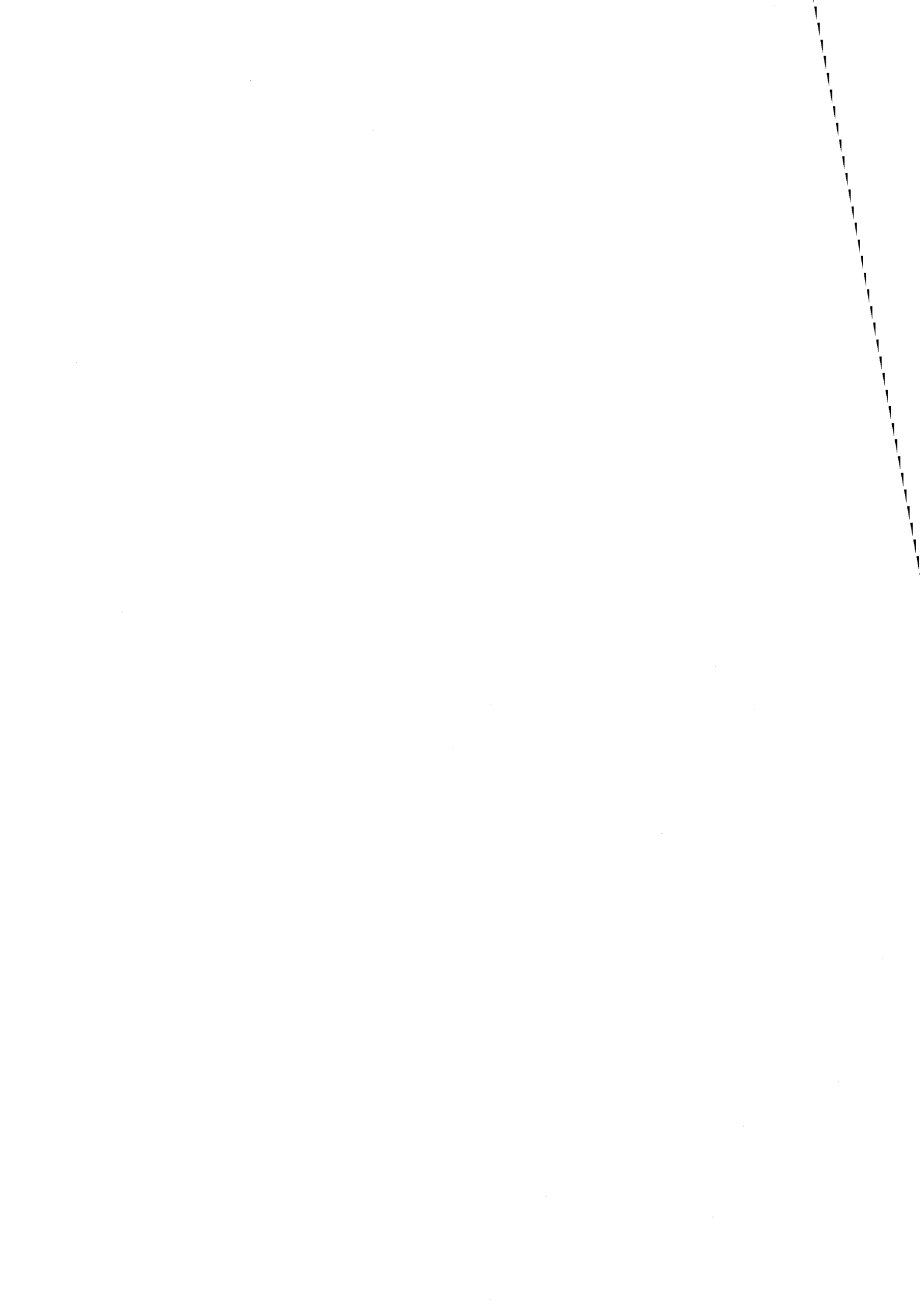
1	Exemples de structures auto-organisées	16
I.1	Illustration de l'accord de phase par biréfringence.	28
I.2	Oscillateur paramétrique optique (OPO) à cavité en anneau	28
I.3	Courbe neutre de stabilité marginale et bande des modes instables au voi- sinage du seuil pour $\Delta_s < 0$	32
I.4	Profils (partie réelle) transverses typiques du signal émis par un OPO dé- génééré (DOPO).	33
I.5	Courbe neutre de stabilité marginale et bande des modes instables au voi- sinage du seuil pour $\Delta_s > 0$	34
I.6	Diagrammes de bifurcation de l'OPO	35
I.7	Figures d'évolutions spatio-temporelle d'un paquet d'ondes	37
I.8	La condition de pincement dans l'OPO.	46
II.1	Propagation d'un faisceau Gaussien dans le vide	51
II.2	Contour $\Im[\omega_0(r)] = 0$ dans le plan complexe $r(\Re(r), \Im(r))$	55
II.3	Représentations graphiques de la demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal	65
II.4	Modes globaux linéaires du DOPO sans walk-off à deux dimensions (2D).	71
II.5	Évolution de l'intensité du champ signal dans la section transverse à 2D.	72
II.6	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de diffraction a_s	72
II.7	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du waist du champ incident	73

II.8	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de detuning Δ_s	74
II.9	Évolution de l'amplitude maximale du signal en fonction de celle du champ de pompe incident.	75
II.10	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du waist du champ incident ($\Delta_s < 0$)	76
II.11	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de diffraction a_s . ($\Delta_s < 0$)	76
II.12	Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction de Δ_s	77
II.13	Carte espace-temps du signal du DOPO et sa transformée de Hilbert. ($\Delta_s < 0$)	78
II.14	Courbes de variation de l'amplitude de la modulation de la phase du signal	79
II.15	Comparaison des waists du signal du DOPO pour $\Delta_s < 0$ et $\Delta_s > 0$	80
II.16	Profils illustrants la limite de validité des résultats	82
II.17	Courbes neutres de stabilité marginale pour un OPO non dégénéré avec walk-off	83
II.18	Contour $\Im[\omega_0(R)] = 0$ dans le plan complexe R ($R_r \equiv \Re(R)$, $R_i \equiv \Im(R)$) du DOPO avec walk-off	84
II.19	Diagrammes spatio-temporels du signal du DOPO avec walk-off	89
II.20	Courbes d'évolution des caractéristiques du signal en régime non-linéaire .	94
II.21	Courbes d'évolution des caractéristiques du signal en présence de walk-off en fonction du waist de la pompe	95
II.22	Évolutions du seuil du mode global du DOPO avec walk-off en fonction de Δ_s	96
II.23	Évolutions du seuil et du waist du mode global du DOPO avec walk-off en fonction de Δ_s	99
II.24	Fréquence relative du mode global en fonction de Δ_s	101
II.25	Fréquence du mode global en fonction de Δ_s et diagrammes spatio-temporels	102

II.26	Signal piégé et évolution de la position de piégeage en fonction de Δ_s .	104
II.27	Soliton dissipatif oscillant (breather)	105
III.1	Le paramètre de dissymétrie non-linéaire en fonction du paramètre de walk-off α_s .	111
III.2	Comportement (spatio-temporel) caractéristique des fronts dans les différents domaines de stabilité et les profils de vitesse correspondants	124
III.3	Graphe du coefficient de dissymétrie non-linéaire.	127
III.4	Comparaison des vitesses de front au point de Maxwell avec et sans walk-off.	129
III.5	Vue tridimensionnelle du signal.	129
III.6	Dissymétrie observée dans un amplificateur paramétrique optique.	130
IV.1	Brisure de la symétrie rotationnelle par le walk-off.	133
IV.2	Graphe du seuil absolu symétrique de l'OPO non dégénéré.	140
IV.3	Évolutions spatio-temporelles du signal de l'OPO pour $c_i = 0$.	141
IV.4	Diagrammes spatio-temporels du signal de l'OPO pour $c_i = 0$	142
IV.5	Graphe du seuil absolu asymétrique de l'OPO non dégénéré.	143
IV.6	Évolutions spatio-temporelles du signal de l'OPO pour $c_i \neq 0$.	143
IV.7	Diagramme spatio-temporelle du soliton statique de l'OPO non dégénéré.	151
IV.8	Diagramme spatio-temporelle du soliton oscillant de l'OPO non dégénéré.	152
IV.9	Effet du gradient non-linéaire sur la vitesse.	153
IV.10	Oscillations spatio-temporelles du maximum de l'intensité du signal.	154
V.1	Profils des solutions pulses du DOPO avec absorbant saturable.	160
V.2	Diagramme de bifurcation du DOPO avec absorbant saturable.	161
V.3	Évolution du nombre d'onde des oscillations de relaxations de la pompe.	162
V.4	Variation de la vitesse au seuil d'apparition du signal en fonction de γ .	164
V.5	Évolution de la position ainsi que de la vitesse du signal asymétrique de l'OPO dégénéré avec absorbant saturable	165

Liste des tableaux

I.1	Types d'accord de phase.	27
I.3	Tableau récapitulatif de l'étude de la dynamique spatio-temporelle du DOPO	47
II.1	Coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau inhomogène d'ordre 3 du DOPO avec walk-off.	85
II.2	Tableau récapitulatif des paramètres de l'enveloppe du signal	87
II.3	Tableau comparatif de quelques caractéristiques du signal	88



Introduction

Le tournant majeur dans ce qu'il convient d'appeler l'interaction *matière-rayonnement* est incontestablement la découverte et la mise au point expérimentale de l'émission laser au tout début de l'année 1960. D'une part, grâce au rayonnement monochromatique, cohérent et unidirectionnel qu'ils émettent, les lasers ont permis d'accéder à la plupart des propriétés intrinsèques de la matière, notamment grâce à la révolution de la spectroscopie [1]. D'autre part, la puissance des champs électromagnétiques de ce rayonnement a permis la découverte de phénomènes nouveaux, notamment non-linéaires induits par les effets de saturation qui apparaissent alors dans le milieu. Ces phénomènes ont ainsi contribué à l'émergence du vaste champ de l'optique non-linéaire.

La réalisation expérimentale de la génération de seconde harmonique par Franken *et al.* en 1961 dans un cristal de quartz [2], suivie l'année d'après des travaux d'Armstrong *et al.* [3], qui ont fourni les bases théoriques du mélange à plusieurs ondes dans un milieu diélectrique non-linéaire (un cristal), peuvent être considérés comme le point de départ de cette discipline. Les sources ainsi mises au point sont alors les premières réalisations de l'Oscillateur Paramétrique Optique (OPO). Le rayonnement émis par ces OPO, par l'interaction entre trois ondes (pompe, signal et complémentaire ou idler), possède alors les mêmes propriétés que celle d'un laser à savoir la cohérence, l'unidirectionnalité et la monochromaticité. En plus de ces propriétés, par rapport aux lasers qui ne produisent qu'une longueur d'onde spécifique, les OPO présentent l'avantage d'être des sources accordables en fréquence [4-6].

Malgré ces capacités, le développement des OPO va très peu évoluer jusqu'au début des

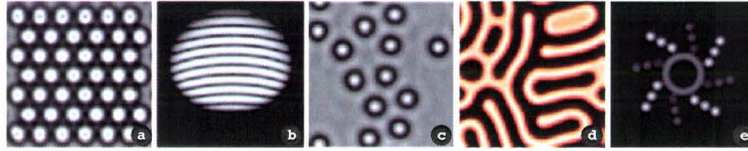


Figure 1: Quelques exemples de structures dissipatives sous forme : (a) d'hexagones [7], (b) de rouleaux [8], (c) de structures spatiales localisées [9], (d) de labyrinthe [10], (e) de solitons organisés en vortex [11].

années 1990. A partir de cette période, la maîtrise des techniques de croissance cristalline conjuguée avec l'apparition de miroirs de cavité plus résistants et des lasers de plus en plus puissants, ont permis de s'affranchir des principales difficultés rencontrées dans la réalisation des OPO. Il s'agit entre autre du contrôle des fluctuations thermiques dans le cristal et de la réalisation de la condition d'accord de phase, pour ne citer que ces deux là. Dans ce nouveau contexte, les OPO devenus alors relativement plus simples à réaliser et plus maniables, connaissent de plus en plus d'applications, par exemple en spectroscopie moléculaire ou la détection de polluants par le procédé du LIDAR¹ [12].

Le fonctionnement temporel de l'OPO est déterminé, dans le cas général, par la nature du laser qui génère l'onde de pompe. Ainsi un OPO pompé par un laser pulsé fonctionnera en régime impulsionnel ; la durée de ces impulsions allant de la nano à la femtoseconde [13–15]. Par ailleurs, C. Montes *et al.* [16] ont établi théoriquement, dans le cas où l'optimisation de la conversion paramétrique est réalisée par quasi-accord de phase, qu'il est possible d'obtenir spontanément un OPO *impulsionnel* à partir d'un pompage en continu si la pompe et le signal sont contra-propageants. En dehors donc de ces conditions particulières, un OPO pompé en continu fonctionnera de façon générale en régime continu. D'un point de vue technique, la réalisation des OPO *continus* a rencontré au départ plus de difficultés. Il s'agissait essentiellement des problèmes que posait la mise au point de cavités permettant à la fois de réaliser les conditions qu'impose la conversion paramétrique, tout en étant résonantes aux fréquences des trois champs. Cependant, grâce au développement des techniques de fabrication de cristaux de bonne qualité, notamment retournés

¹Acronyme de *light detection and ranging*. Méthode de détection utilisant des fréquences optiques, basée sur le principe du radar.

périodiquement pour le quasi-accord de phase, la mise au point des OPO *continus* avec de faibles puissances de pompe, s'est rapidement développée [17, 18].

L'interaction non-linéaire résultant de la propagation des faisceaux dans le cristal et la présence de la cavité, permettent de classer les OPO parmi les systèmes dits optiques à cavité non-linéaire [19]. La particularité de ces systèmes réside dans leur capacité à générer, dans le plan transverse à la propagation des champs, des structures ordonnées et cohérentes. Ces structures générées hors de l'état d'équilibre [20] sont le résultat de la compétition entre les effets de diffraction et/ou de dispersion qui tendent à restaurer l'uniformité de l'espace, et les effets induits par les non-linéarités qui contribuent à amplifier les inhomogénéités de ce même espace. L'intérêt sans cesse grandissant que manifeste la communauté scientifique à la formation de structures auto-organisées (ou dissipatives) [voir figure 1 pour quelques exemples], est porté en partie par le caractère universel de celles-ci. Cet intérêt se porte également à leurs applications potentielles dans l'élaboration de systèmes "tout optique", notamment en matière de stockage de l'information [21–23] ou de télécommunications [24–27]. Une des classes de structures la plus étudiée est celle des *structures spatiales localisées* (LS). Ces structures conduisent au confinement spatial de l'énergie, par analogie aux solitons temporels qui transportent l'énergie sans perte, grâce aux effets conjugués de la dispersion chromatique et des non-linéarités. Toutes ces propriétés justifient l'attention particulière, tant expérimentale que théorique, qui leur est accordée dans les études des structures dissipatives [19].

La capacité des OPO, à générer des structures dissipatives a été mise en évidence très récemment, avec l'observation de structures spatiales dans un OPO pulsé en accord de phase de type II [28], et aussi dans un OPO dégénéré en accord de phase de type I pompé en continu [29]. Dans cette dernière référence, les auteurs ont aussi rapporté l'émergence de structures en forme de labyrinthe. De même Vaupel *et al.* [30] ont mis en évidence la génération de motifs dans un OPO en accord de phase de type II, dont le lien avec le processus paramétrique à été vérifié par l'effet de la variation du detuning sur leur aspect. Contrairement aux observations expérimentales, les premières prédictions de structures

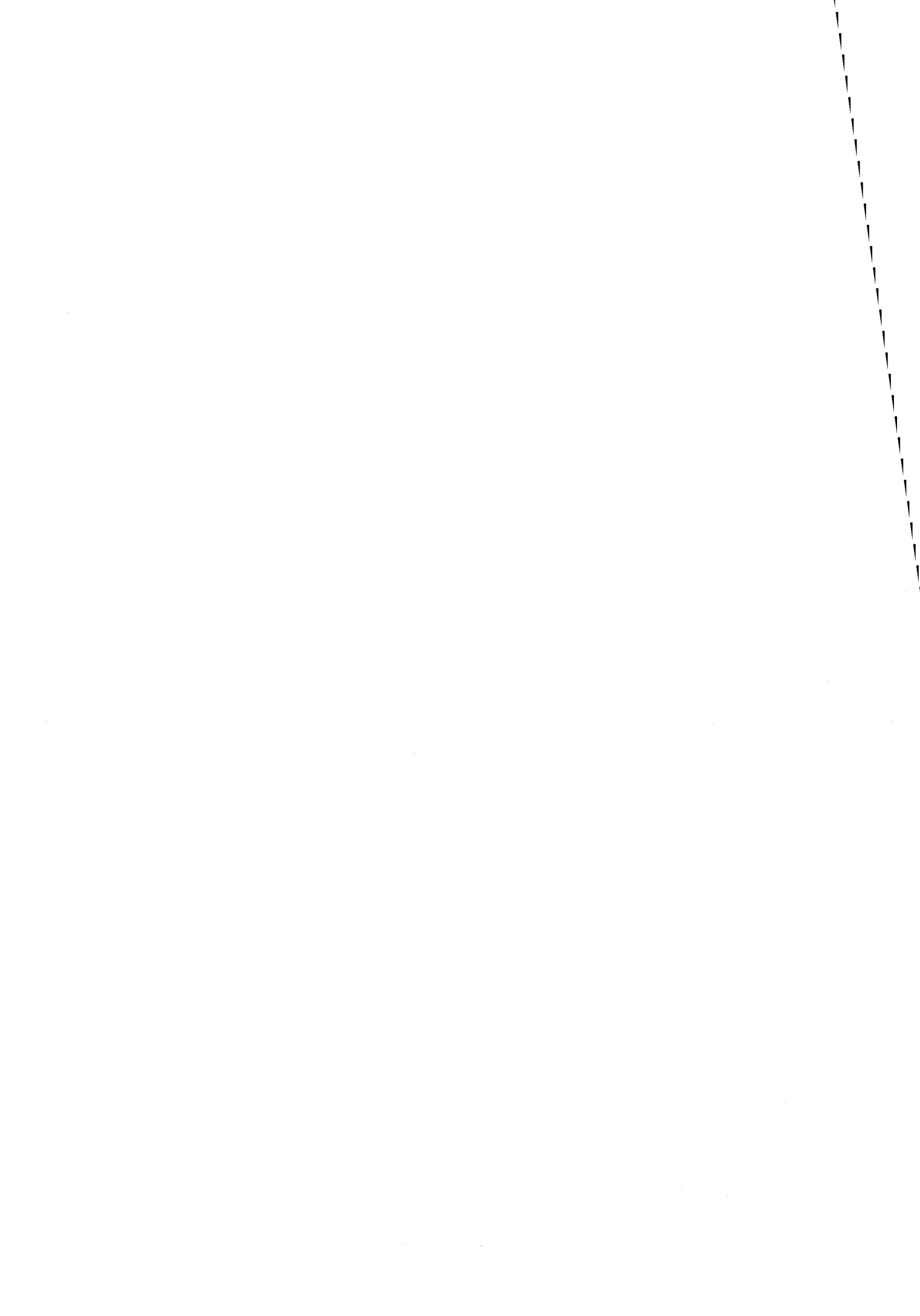
dissipatives dans les OPO sont plus anciennes. Elles ont accompagnées la mise au point des premiers modèles incluant les effets de diffraction et/ou la dispersion dans les équations décrivant l'évolution des champs en cavité. Depuis, la majorité des travaux effectués sur ce sujet ont permis de mettre en évidence un large éventail de structures transverses dans les OPO, mais aussi une grande richesse de comportements dynamiques [7, 8, 31–44].

Le travail théorique (analytique et numérique) exposé dans cette thèse se positionne alors dans la continuité de ces études. Précisément, il présente notre contribution à une meilleure compréhension de l'impact des non-uniformités spatiales et des effets non-linéaires induits par le walk-off sur la dynamique spatio-temporelle globale de l'OPO.

Dans la *première partie*, nous nous intéressons d'une part aux conséquences d'un pompage de profil transverse variable spatialement, sur le processus d'amplification paramétrique. Nous accorderons une attention particulière à la caractérisation du profil transverse du signal ainsi émis. Cette partie est constituée des chapitres 1 et 2. Le *chapitre 1* présente les aspects généraux de l'amplification paramétrique, suivi de la description des principales étapes de la résolution des équations de Maxwell dans un cristal non-linéaire, aboutissant à l'établissement du modèle du champ moyen qui, constitue le point de départ de toutes nos analyses. Dans ce chapitre, nous faisons aussi une introduction à l'analyse de stabilité linéaire classique et spatio-temporelle. Nous y développons notamment les notions d'instabilités absolues et convectives liées à la brisure de la symétrie translationnelle du système en présence d'une dérive. Dans la première partie du *chapitre 2*, nous effectuons d'abord pour le régime linéaire la résolution des équations du champ moyen sans walk-off par la méthode de WKBJ [45]; puis à l'aide de la technique des échelles multiples, nous dérivons l'équation aux amplitudes permettant d'inclure les non-linéarités dans la description de l'évolution spatio-temporelle du signal. La résolution de ces équations d'évolution permet de caractériser entièrement le signal émis par l'OPO dégénéré (DOPO). Dans la seconde partie du chapitre, le walk-off n'est plus négligé, et nous réitérons les mêmes étapes de résolution utilisées dans la partie précédente, afin de déterminer les conséquences de l'interaction *inhomogénéités/walk-off*.

La *seconde partie* de cette thèse est dédiée à la dynamique spatio-temporelle résultant du couplage entre le walk-off et les non-linéarités. Deux situations sont alors considérées : le cas de l'OPO dégénéré puis le cas général de l'OPO non-dégénéré. Pour ces cas notre démarche en deux étapes, consiste dans un premier temps à modéliser l'évolution spatio-temporelle du signal sans imposer de condition sur le walk-off ; dans la seconde étape, l'équation d'amplitude obtenue est étudiée à la fois analytiquement et numériquement. Les prédictions et résultats de cette analyse sont comparés aux solutions obtenues par intégration numérique du modèle originel de l'OPO. Cette démarche, appliquée au DOPO en régime bistable constitue l'objet du *chapitre 3*, mettant en évidence les effets non-linéaires du walk-off. Ce dernier induit l'apparition d'un terme de gradient non-linéaire dans l'équation d'amplitude gouvernant la dynamique spatio-temporelle du DOPO. L'analyse des effets de ce gradient a permis d'expliquer la brisure de la symétrie observée dans la plan transverse dans certains OPO. Dans le *chapitre 4*, la considération du cas non-dégénéré a permis la mise en évidence d'une grande richesse de dynamique linéaire et non-linéaire, spécifique à l'interaction à trois champs, qui n'a pas d'équivalent dans une interaction à deux champs (OPO dégénéré). En particulier, nous présentons un résultat surprenant qui consiste à tirer profit de la présence du walk-off, afin de générer des structures absolument stables sous le seuil linéaire (classique). Le dernier chapitre de cette seconde partie de thèse est une contribution, sous forme de perspective, à la caractérisation des solitons mobiles et fixes du DOPO avec absorbant saturable. Par une approche numérique, nous déterminons les caractéristiques principales de ces solutions en fonction des paramètres physiques du système. Ainsi nous avons mis en évidence une transition entre solitons mobiles asymétriques et des symétriques immobiles.

**Première partie : Modes globaux
dans un OPO**



Chapitre I

Généralités

Aujourd'hui, grâce aux récents progrès technologiques, les milieux optiques à forte sensibilité non-linéaire offrent la possibilité de générer et faire interagir, en leur sein, plusieurs ondes. De cette interaction, découle une variété de phénomènes physiques tels que le doublage de fréquence, la génération d'harmoniques ou encore l'amplification dite paramétrique. Celle-ci consiste en la production, dans un cristal non linéaire, de deux ondes cohérentes "signal" et "complémentaire" (ou "idler") à partir d'un faisceau laser de forte puissance appelé "pompe". Ce phénomène se trouve à l'origine de l'oscillateur paramétrique optique (OPO), dès lors qu'un cristal à forte sensibilité quadratique est inséré dans une cavité optique.

Pour une description de l'OPO que je ne détaille pas ici, je renvoie le lecteur à la thèse de H. Ward [46] pour un OPO pompé en continu et à celle de C. Durniak [47] pour un OPO fonctionnant en régime pulsé. La première partie de ce chapitre est consacrée à une brève présentation de l'OPO, ainsi qu'à la modélisation analytique de l'évolution des champs à l'intérieur de sa cavité. L'analyse de ce modèle, du point de vue de la dynamique spatio-temporelle transverse, constituera le but ultime de la seconde partie de ce chapitre introductif.

I.1 L'oscillateur paramétrique optique

L'amplification paramétrique fait partie avec la génération de seconde harmonique ou encore doublage de fréquence, des phénomènes qui résultent du mélange à trois ondes, dans des milieux optiques (cristaux) à forte susceptibilité non linéaire quadratique ($\chi^{(2)}$). L'origine physique de ce type de non-linéarité est rappelée ci-dessous à partir d'un exemple simple d'oscillateur anharmonique.

I.1.1 Origine mécanique de la susceptibilité non linéaire quadratique

Considérons maintenant un cristal éclairé par plusieurs ondes correspondantes chacune à un champ électromagnétique oscillant. Comme dans tout matériau soumis à un champ électrique, les particules du cristal auront tendance à s'écarter de leur position d'équilibre, dans un mouvement d'oscillation à la fréquence de l'onde incidente. L'effet de l'ensemble des dipôles oscillants sera alors d'induire une polarisation dans le milieu. Si l'on néglige le déplacement de toutes les particules autres que celui des électrons, de même que l'effet du champ magnétique, très faible dans le cas présent, les écarts à la position d'équilibre peuvent être modélisés par la réponse d'une particule dans un potentiel anharmonique. L'image de l'électron élastiquement lié au noyau, et l'équation du mouvement qui en résulte sont alors une représentation satisfaisante du système :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \Gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) + a [x(t)]^2 = -\frac{e}{m} \sum_{k=1}^j E_k(t). \quad (\text{I.1})$$

$x(t)$ représente le déplacement à partir de la position d'équilibre, ω_0 la fréquence de résonance du milieu, Γ l'amortissement et j le nombre de faisceaux en interaction. L'anharmonicité est introduite par le coefficient a , qui est supposé faible dans le cas général. Cette dernière va permettre de résoudre l'équation (I.1) par approximations successives. Si l'on cherche la solution sous la forme $x(t) = x^{(1)}(t) + ax^{(2)}(t) + \dots$. A l'ordre 1 en a on retrouve l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique dont la solution est ici

une combinaison linéaire des réponses à chacune des fréquences d'excitation. Ainsi si on se limite à deux ondes incidentes aux fréquences ω_1 et ω_2 d'amplitude $E_0(\omega_1)$ et $E_0(\omega_2)$ on obtient :

$$x^{(1)}(t) = -\frac{e}{2m} \left(\frac{E_0(\omega_1) e^{i\omega_1 t}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\Gamma\omega_1} + \frac{E_0(\omega_2) e^{i\omega_2 t}}{\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\Gamma\omega_2} \right) + \text{c.c} \quad (\text{I.2})$$

A l'ordre 2, le calcul donne l'évolution du terme de perturbation sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 x(t)^{(2)}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx(t)^{(2)}}{dt} + \omega_0^2 x(t)^{(2)} = -a \left[x(t)^{(1)} \right]^2. \quad (\text{I.3})$$

On constate donc que la solution d'ordre le plus bas (ordre 1) joue le rôle de source pour la correction à l'ordre suivant, dont la solution peut s'écrire sous la forme :

$$x(t)^{(2)} = \frac{1}{2} \left[x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) + x^{(2)}(\omega_1 - \omega_2) + x^{(2)}(2\omega_1) + x^{(2)}(2\omega_2) + x^{(2)}(0) \right] + \text{c.c}. \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{aligned} x^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2) &= \alpha e^{i(\omega_1 \pm \omega_2)t} \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{ae^2}{m^2} \frac{E_0(\omega_1) E_0(\omega_2)}{d(\omega_1) d(\omega_2) d(\omega_1 \pm \omega_2)} \\ \text{et} \quad d(\omega_j) &= \omega_0^2 - \omega_j^2 - i\Gamma\omega_j \\ x^{(2)}(2\omega_j) &= -\frac{ae^2}{m^2} E_0^2(\omega_j) \frac{e^{2i\omega_j t}}{d^2(\omega_j) d(2\omega_j)} \\ x^{(2)}(0) &= \frac{ae^2}{m^2} \left[\frac{|E_0(\omega_1)|^2}{|d(\omega_1)|^2} + \frac{|E_0(\omega_2)|^2}{|d(\omega_2)|^2} \right] \end{aligned}$$

On montre alors que la polarisation non linéaire induite dans le milieu s'écrit :

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \cdot \chi^{(2)} : \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (\text{I.5})$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide. Dans cette expression $\chi^{(2)}$, qui représente la susceptibilité non linéaire d'ordre 2, est un tenseur de rang 3 dont les coefficients sont proportionnels à α . Dans un milieu très peu absorbant (c'est le cas quand les fréquences

de radiation sont très loin des pulsations de résonance du milieu), ces coefficients sont réels et indépendants de la longueur d'onde d'excitation. Pour plus de détails se référer aux thèses citées ci-dessus.

I.1.2 Principes fondamentaux de l'OPO

L'oscillateur paramétrique optique ou encore l'amplification paramétrique en cavité, consiste à générer dans un cristal à forte susceptibilité non linéaire, deux ondes cohérentes appelées *signal* et *idler* respectivement à la fréquence ω_s et ω_i à partir d'une onde de *pompe* de fréquence ω_p . Ce processus physique que l'on peut présenter comme étant l'annihilation d'un photon pompe pour créer les photons signal et idler, obéit à deux lois fondamentales. La première, traduit la conservation de l'énergie $\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$. Ce qui implique que la somme des pulsations des champs signal et idler doit être résonante avec celle de la pompe :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (\text{I.6})$$

La seconde, est relative à la conservation de la quantité de mouvement $\hbar\vec{k} = \hbar(\vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i)$, où $|\vec{k}_j| = \omega_j \frac{n(\omega_j)}{c}$ et $j = p, s, i$. Bien que n'étant pas nécessaire, cette condition garantit l'optimisation du processus par le biais de la résonance spatiale des champs :

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i. \quad (\text{I.7})$$

Plus connue sous le nom de condition d'accord de phase, elle suppose que les trois champs de fréquences différentes, interfèrent dans le milieu de manière constructive. La condition d'accord de phase (I.7) est irréalisable dans les milieux à dispersion normale, compte tenu du fait que l'indice croît linéairement en fonction de la fréquence ($\partial\omega/\partial n > 0$); de même que dans les milieux à dispersion anormale si toutes les ondes ont la même polarisation pour des raisons d'absorption élevée dans cette configuration. Par contre, dans certains milieux anisotropes¹, l'accord de phase peut être obtenu grâce à la

¹Il faut préciser que le mélange à trois ondes, comme décrit ici pour l'amplification paramétrique, n'est

cristal	Type I	Type II
positif ($n_e > n_o$)	$\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^e$	$\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^o$ $\vec{k}_p^e = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^e$
négatif ($n_e < n_o$)	$\vec{k}_p^e = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^o$	$\vec{k}_p^e = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^o$ $\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^e$

Tableau I.1: Différents types d'accord de phase.

biréfringence qui va engendrer une double réfraction dans le cristal. Deux polarisations sont alors possibles (voir figure I.1) : l'une dans la direction ordinaire d'indice n_o et l'autre dans la direction extraordinaire d'indice $n(\theta)$ compris entre n_o et n_e . θ étant l'angle entre l'axe de propagation \vec{k} de l'onde et l'axe optique Z du cristal. On constate donc que pour un angle θ_{opt} fixé, correspond un couple unique de pulsations (ω_s, ω_i) pour lequel l'accord de phase est optimum et vice-versa. Ce qui fait des OPO des systèmes accordables en fréquence. Il existe deux types d'accord de phase pour chacune des configurations cristallines suivantes : cristal uniaxe positif ($n_e > n_o$) ou négatif ($n_e < n_o$). Nous les avons résumés dans le tableau (I.1).

La condition d'un angle non nul entre l'axe de propagation de l'onde extraordinaire et l'axe optique du cristal, signifie que les vecteurs de Poynting des faisceaux de polarisation extraordinaire et ordinaire, ne sont pas colinéaires. La direction de ce vecteur étant celle dans laquelle l'énergie de l'onde est transportée, on en déduit une perte de recouvrement et donc une divergence entre les faisceaux au cours de leur propagation dans le cristal. Ce phénomène porte le nom de walk-off.

I.1.3 Description du modèle analytique

L'élaboration du modèle théorique de l'OPO peut se résumer en deux étapes. Dans un premier temps les équations de Maxwell sont dérivées pour l'amplification paramétrique, en tenant compte des principes énoncés dans le paragraphe précédent. Ce calcul à été effectué pour un accord de phase de type I, dans le cadre des approximations paraxiale et

pas réalisable dans les milieux centrosymétrique, i.e invariants par la transformation $r \rightarrow -r$. En effet, dans un tel milieu $P_{NL} = \chi^{(2)} E \cdot E \rightarrow -P_{NL} = \chi^{(2)} (-E) \cdot (-E)$, ceci n'étant vrai que si $\chi^{(2)} = 0$.

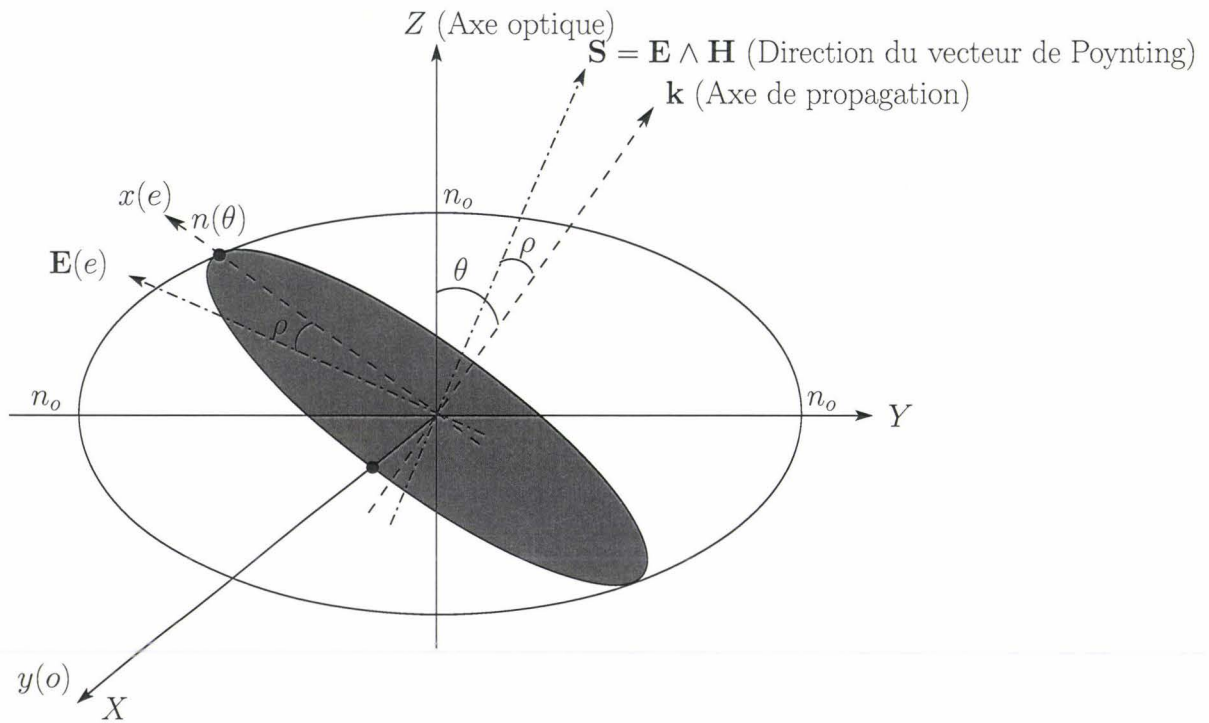


Figure I.1: Illustration de l'accord de phase par biréfringence. Les courbes en trait plein correspondent aux ellipsoïdes des indices du cristal, données par la relation $\frac{1}{n(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$ dans le système de coordonnées cristallographiques (X, Y, Z) . n_o et n_e étant respectivement les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire du cristal. $n(\theta)$ est alors l'indice de réfraction extraordinaire correspondant à l'angle θ (entre l'axe optique (Z) du cristal et l'axe de propagation (\mathbf{k})) pour lequel la condition d'accord de phase est réalisée. Il résulte de cette divergence [46–48], pour tout champ $\mathbf{E}(e)$ se propageant suivant l'axe extraordinaire correspondant ($x(e)$), un angle non-nul entre l'axe de propagation et la direction du vecteur de Poynting \mathbf{S} qui transporte l'énergie du faisceau. C'est cet angle que l'on nomme angle de walk-off et il est correspond ici à ρ .

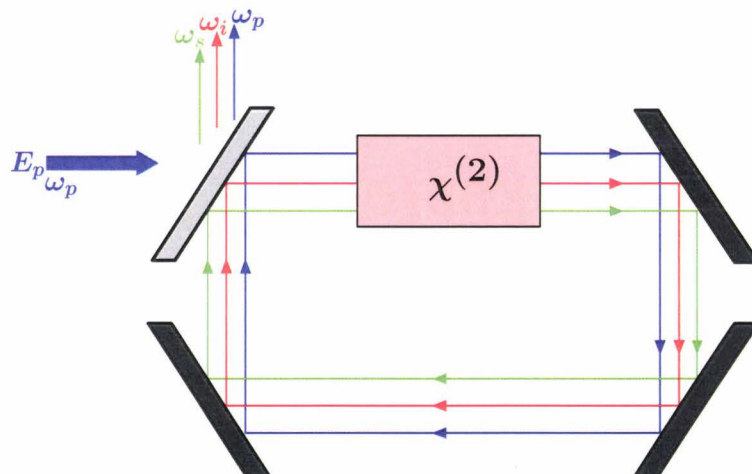


Figure I.2: Oscillateur paramétrique optique (OPO) à cavité en anneau.

de l'enveloppe lentement variable. Il en résulte les équations du modèle de la propagation en champ libre. La seconde étape consiste à adapter ce modèle à la propagation en cavité. L'intérêt de celle-ci est d'optimiser le processus paramétrique pour des faibles intensités de pompage, permettant ainsi un pompage en continu. Tout comme lors de la première étape, plusieurs approximations sont nécessaires à la dérivation des équations en présence de la cavité. Pour commencer, on ne tiendra compte de la variation des champs électriques que dans le cristal [49]; en d'autres termes on suppose que les champs ne subissent que la diffraction au cours de leur propagation dans la partie vide de la cavité. Avec des conditions aux bords périodiques, l'approximation du champ moyen (faible pertes de cavité et faible gain paramétrique) permet de ne tenir compte que de la contribution du mode fondamental de la décomposition en mode de Fourier des enveloppes des champs. Toutes ces étapes et les calculs correspondant, qui ne seront pas repris ici, sont détaillés dans la thèse de H. Ward [46]. On obtient alors le système d'équations couplées suivant, pour une cavité triplement résonante :

$$\partial_t A_p = \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p) A_p + E(x, y) - A_s A_i + i a_p \nabla_{\perp}^2 A_p \right] \quad (\text{I.8a})$$

$$\partial_t A_s = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_s + A_i^* A_p + i a_s \nabla_{\perp}^2 A_s - \alpha_s \partial_x A_s \right] \quad (\text{I.8b})$$

$$\partial_t A_i = \gamma_i \left[-(1 + i\Delta_i) A_i + A_s^* A_p + i a_i \nabla_{\perp}^2 A_i - \alpha_i \partial_x A_i \right] \quad (\text{I.8c})$$

A_j représente l'enveloppe lentement variable normalisée du champ correspondant à l'indice $j = p, s, i$ qui se rapporte respectivement à la pompe, au signal et à l'idler. $\gamma_j = \frac{v_j T_j}{L}$ caractérise le taux de décroissance du champ, où $v_j = \frac{c}{n_j}$ est sa vitesse, T_j le coefficient de transmission du miroir de sortie et L la longueur de la cavité. L'écart entre la fréquence ω_j du champ et la fréquence propre ω_n ($n = 0, 1, 2$ pour $j = p, s, i$ respectivement) la plus proche de la fréquence de résonance de la cavité est introduit par le paramètre de detuning défini par : $\Delta_j = \frac{\omega_n - \omega_j}{\gamma_j}$. La diffraction est décrite par l'opérateur $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dont le coefficient est $a_j = \frac{v_j}{2k_j \gamma_j}$. x et y sont les coordonnées cartésiennes

transverses à la direction de propagation. Enfin pour un angle de walk-off ρ_j le paramètre associé est donné par $\alpha_j = \frac{v_j}{\gamma_j} \tan \rho_j$. Par la suite, sauf indication contraire, on considérera que le signal et son complémentaire sont totalement identiques. On dit alors que l'OPO est dégénéré (DOPO) et le système d'équations (I.8) à trois ondes se réduit à un système à deux ondes :

$$\partial_t A_p = \gamma_p \left[- (1 + i\Delta_p) A_p + E(x, y) - A_s^2 + ia_p \nabla_{\perp}^2 A_p \right] \quad (\text{I.9a})$$

$$\partial_t A_s = \gamma_s \left[- (1 + i\Delta_s) A_s + A_s^* A_p + ia_s \nabla_{\perp}^2 A_s - \alpha_s \partial_x A_s \right]. \quad (\text{I.9b})$$

Les solutions stationnaires homogènes de celles-ci sont obtenues en annulant toutes les dérivées spatiales et temporelles dans les équations (I.9). Elles caractérisent l'état homogène de fonctionnement de l'OPO et sont les suivantes :

- *OPO Off*

C'est la solution de base correspondant à l'absence d'émission du signal. On l'appelle aussi solution stationnaire triviale.

$$(A_p^0, A_s^0) = \left(\frac{E(1 - i\Delta_p)}{1 + \Delta_p^2} \equiv \mu, 0 \right) \quad (\text{I.10})$$

- *OPO On*

Elle est donnée par :

$$(A_p^0, A_{s\pm}^0) = \left(\frac{E - C_{\pm}^2 e^{2i\beta}}{1 + i\Delta_p}, C_{\pm} e^{i\beta} \right), \quad (\text{I.11a})$$

$$\text{où } C_{\pm}^2 = \Delta_s \Delta_p - 1 \pm \sqrt{E^2 - (\Delta_p + \Delta_s)^2}, \quad (\text{I.11b})$$

$$\text{et } \cos(2\beta) = \frac{C_{\pm}^2 + 1 - \Delta_s \Delta_p}{E}. \quad (\text{I.11c})$$

I.2 Analyse de stabilité linéaire et bifurcations

L'analyse de stabilité linéaire de la solution *OPO Off* par rapport à des perturbations (δA_j où $j = p, s$) permet de comprendre le comportement dynamique de l'OPO lorsque le

pompage augmente progressivement à partir de zéro. Pour cela on opère les perturbations suivantes de la solution *OPO Off* qu'on introduit dans les équations (I.9) : $A_p = \mu + \delta \bar{A}_p e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $A_s = \delta \bar{A}_s e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. Les termes $\delta \bar{A}_j e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ ($j = p, s$) correspondent à des perturbations en ondes planes transverses, avec $\vec{k} = (k_x, k_y)$ et ω respectivement le vecteur d'onde réel et la fréquence complexe du problème linéarisé et $\vec{r} = (x, y)$. Il résulte du système linéarisé les relations de dispersion découplées ci-après :

$$\omega_p = i\gamma_p [-1 - i(\Delta_p + a_p k^2)] \quad (\text{I.12a})$$

$$\omega_s = i\gamma_s \left[-1 + \sqrt{|\mu|^2 - (\Delta_s + a_s k^2)^2} \right] + \gamma_s \alpha_s k_x : \mathcal{D}(\omega_s, \vec{k}, \mu) = 0, \quad (\text{I.12b})$$

avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. La partie imaginaire de ω_p , qui correspond au taux d'amplification temporelle de la pompe, étant toujours négative ($-\gamma_p$) nous pouvons conclure que A_p^0 est toujours stable. Et donc la relation de dispersion que nous considérerons par la suite sera celle donnée par (I.12b). De plus, afin de mettre en évidence la dynamique intrinsèque de l'OPO, l'effet du walk-off sera négligé dans un premier temps.

En absence donc du walk-off, la solution A_s^0 se déstabilise lorsque son taux de croissance temporelle, que constitue la partie imaginaire de ω_s devient positif c'est-à-dire lorsque $|\mu| \geq |\mu_{\text{critique}}|(k)$ avec :

$$|\mu_{\text{critique}}|(k) = \sqrt{1 + (\Delta_s + a_s k^2)^2}. \quad (\text{I.13})$$

la surface donnée par cette équation dans l'espace (μ, k_x, k_y) est appelée surface neutre de stabilité marginale. Les courbes neutres de stabilité marginale sont alors données par la projection de cette surface dans l'un des plans (μ, k_x) et (μ, k_y) . Ces courbes sont représentées sur les figures I.3 et I.5. On constate alors que la forme de la courbe neutre ainsi que la bifurcation et la nature de l'instabilité qui en découle dépendent du signe du paramètre de detuning du signal Δ_s . Ce qui nécessite des études séparées des deux cas $\Delta_s < 0$ et $\Delta_s > 0$. Une des caractéristiques physiques principale de cette courbe

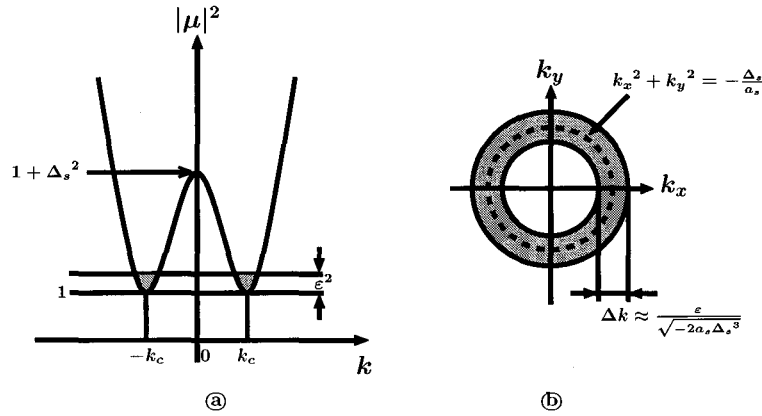


Figure I.3: (a) Courbe neutre de stabilité marginale pour $\Delta_s < 0$ et (b) domaine d'instabilité au voisinage du seuil dans le plan (k_x, k_y) .

réside dans la détermination de son minimum (min de $|\mu_{\text{critique}}|(k)$) qui constitue le seuil d'émission de l'OPO, et le nombre d'onde $k = k_c$ correspondant fournit la longueur d'onde de la structure qui va apparaître au seuil.

I.2.1 Cas du detuning du signal négatif ($\Delta_s < 0$)

La courbe neutre de stabilité marginale atteint son minimum en $|\mu_c| = 1$ (voir Fig. I.3 (a)) et le nombre d'onde transverse $\vec{k}_c = (k_x^c, k_y^c)$ des structures qui apparaissent au seuil vérifie l'équation suivante :

$$k_x^{c2} + k_y^{c2} = -\frac{\Delta_s}{a_s}. \quad (\text{I.14})$$

De telle sorte que si l'on considère un petit écart au seuil on aura un domaine de nombres d'onde, en forme d'anneau comme celui décrit par la figure I.3 (b), qui seront tous susceptibles de déstabiliser la solution triviale de l'OPO. Les structures qui apparaissent dans le plan transverse sont alors des rouleaux stationnaires [50] (anneaux concentriques à 2D), dont le spectre en champ lointain est centré autour de $k_c = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}$. L'illustration de ces résultats est faite par les figures I.4a1, b1 et c1, qui montrent le résultat d'une simulation² numérique du modèle (I.9).

²La méthode d'intégration numérique sera décrite en détail dans le chapitre suivant.

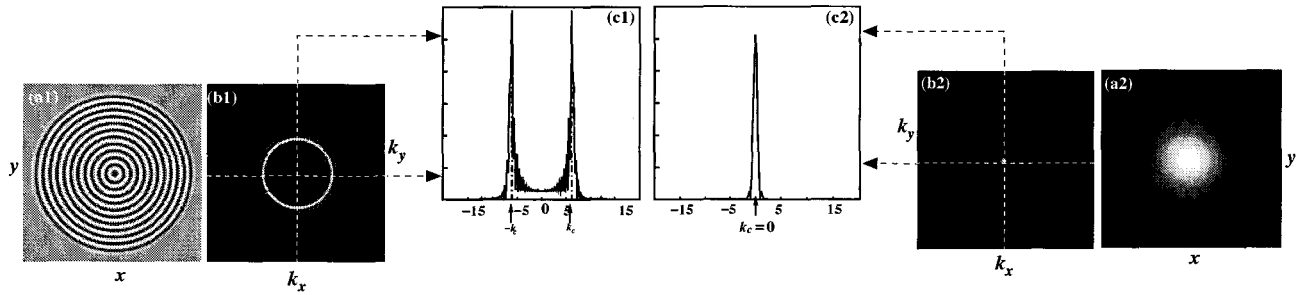


Figure I.4: [(a1) et (a2)] Profils (partie réelle) transverses typiques du signal émis par un DOPO dans le plan, pour respectivement $\Delta_s < 0$ et $\Delta_s > 0$. (b1) et (b2) sont respectivement leur profil correspondant dans l'espace de Fourier (k_x, k_y). (c1) et (c2) sont les coupes transverses en $k_y = 0$ (ou $k_x = 0$) de ces profils dans l'espace de Fourier. Le seul paramètre qui change lorsqu'on passe de (a1, b1, c1) à (a2, b2, c2) est le paramètre Δ_s qui vaut respectivement -0.4 et 0.4 . Les autres paramètres sont identiques dans les deux cas : $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_p = 0.00$ et $\alpha_s = 0.00$. La valeur de E_0 étant au dessus des valeurs critiques d'environ 1% dans chacun des cas.

On parle dans ce cas d'instabilité modulationnelle ou de Turing. En résumé pour des valeurs négatives du paramètre de detuning (Δ_s), le seuil d'émission du DOPO est caractérisé par :

$$|\mu_c| = 1 \quad (\text{I.15a})$$

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}} \quad (\text{I.15b})$$

Dans les paramètres physiques de l'OPO $|\mu_c| = 1$ se traduit par une valeur seuil de l'amplitude du champ incident $E = E_c = \sqrt{1 + \Delta_p^2}$.

I.2.2 Cas du detuning positif ($\Delta_s > 0$)

Ici le seuil est atteint pour $|\mu_c| = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$ pour le nombre d'onde transverse $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0$, comme le montre la figure I.5a. Ce qui veut dire que $k_x^c = k_y^c = 0$. Et si l'on est légèrement au dessus du seuil, le domaine d'instabilité dans le plan (k_x, k_y) correspond à la surface du cercle de diamètre Δk donné par la figure I.5b. Les structures générées sont dans ce cas homogènes et leur spectre en champ lointain est centré autour de $k_c = 0$. Une illustration de ce résultat est faite par les figures I.4a2, b2 et c2. Les

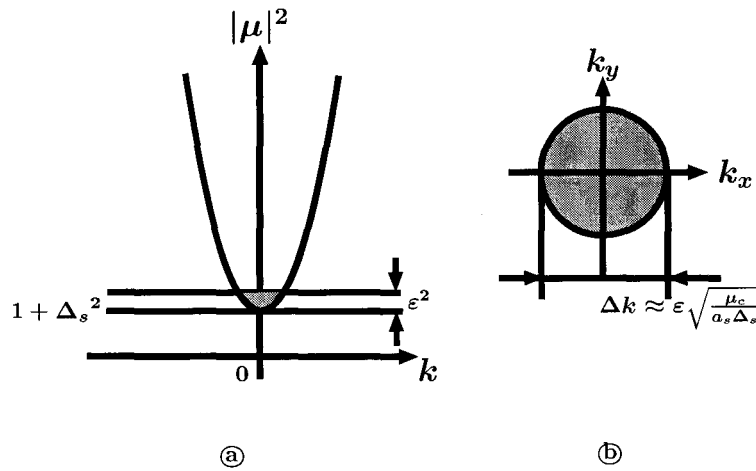


Figure I.5: (a) Courbe neutre de stabilité marginale pour $\Delta_s > 0$ et (b) domaine d'instabilité au voisinage du seuil dans le plan (k_x, k_y) .

caractéristiques du seuil se résument alors comme suit :

$$|\mu_c| = \sqrt{1 + \Delta_s^2} \quad (\text{I.16a})$$

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0 \quad (\text{I.16b})$$

L'interprétation physique de la différence significative, des deux distributions spatiales du signal, entre les deux configurations à detuning positif et négatif est la suivante. Lorsque le detuning est négatif, l'existence d'un nombre d'onde non nul peut être justifié de la façon suivante : le detuning négatif équivaut à la situation où le nombre d'onde longitudinal du signal (\vec{k}_s) donné par l'accord de phase est supérieur à celui correspondant à la fréquence de résonance de la cavité (\vec{k}_{cav}). Ainsi lorsqu'on perturbe le système, \vec{k}_s va se réorienter pour faire coïncider sa composante longitudinale avec celle de \vec{k}_{cav} , de sorte que l'on n'ait plus à compenser le detuning mais uniquement les pertes de la cavité. Ceci s'accompagne par une émission en dehors de l'axe de la cavité et de l'existence composantes non nulles du vecteur d'onde \vec{k}_s dans le plan transverse. Par contre lorsque le detuning est positif c'est \vec{k}_{cav} qui est plus grand que \vec{k}_s . Celui-ci n'a donc aucune alternative pour faire coïncider sa composante longitudinale avec celle de \vec{k}_{cav} . Ils restent donc colinéaires et on est alors obligé de compenser le detuning par le gain paramétrique. D'où la dépendance du seuil

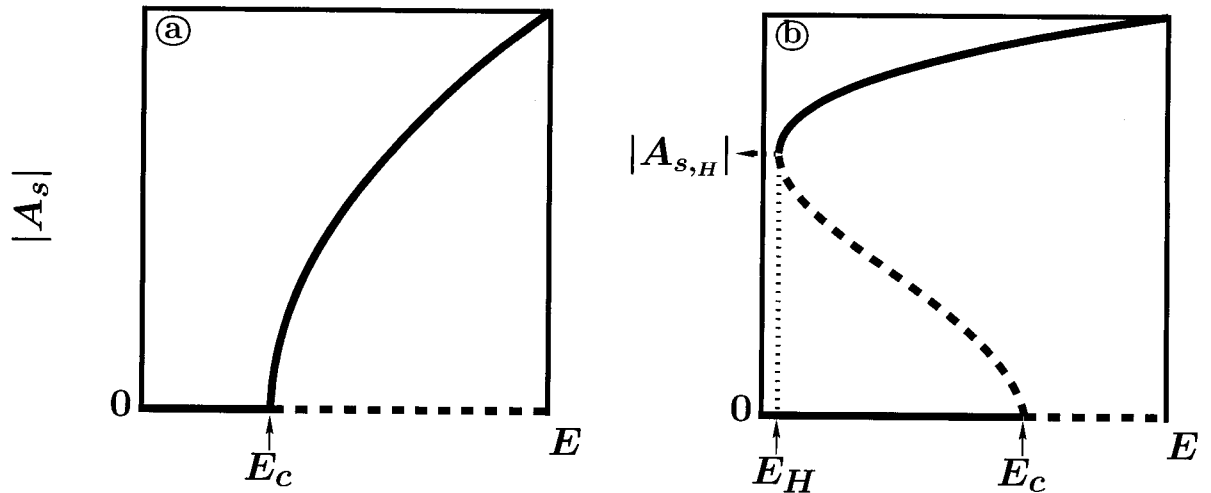


Figure I.6: Diagrammes de bifurcation possible de l'OPO. (a) bifurcation super-critique correspondant à la condition $\Delta_s \Delta_p - 1 < 0$ et (b) la bifurcation sous-critique lorsque $\Delta_s \Delta_p - 1 > 0$. Pour chacune des figures le trait plein représente la solution stable et les tirets la solution instable où $E_c = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$, $E_H = \Delta_p + \Delta_s$ et $|A_{s,H}| = \sqrt{\Delta_s \Delta_p - 1}$.

en fonction de Δ_s et l'absence de composante transverse pour \vec{k}_s .

A présent que nous connaissons les domaines de stabilité (en fonction du pompage) des solutions stationnaires du DOPO, nous souhaitons savoir comment le passage de l'une des solutions à l'autre s'effectue. Pour cela si nous considérons la solution "OPO On", on s'aperçoit d'après l'expression de C , que cette solution n'existe que sous certaines conditions. En effet si $\Delta_s \Delta_p - 1 < 0$, seule la solution C_+ existe, à condition que $\mu \geq \sqrt{1 + \Delta_s^2}$. Le système passe alors de façon continue de la solution "Off" vers la solution "On", lorsque la valeur du pompage dépasse le seuil $\mu_c = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$ comme le montre la figure I.6a. On parle dans ce cas de bifurcation super-critique et l'OPO est en régime monostable. Si $\Delta_s \Delta_p - 1 > 0$, la solution C_+ qui existe maintenant pour $\mu \geq \frac{\Delta_p + \Delta_s}{\sqrt{1 + \Delta_p^2}}$ coexiste dans la région $\mu_{bst} = \frac{E_H}{\sqrt{1 + \Delta_p^2}} \leq \mu \leq \mu_c = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$ avec la solution C_- et la solution triviale "OPO Off". On montre [51] que C_- est instable dans cette région tandis que C_+ et la solution triviale y sont toutes les deux stables, donnant naissance à un cycle d'hystérésis lorsque la pompe varie. La bifurcation est dite sous-critique et le diagramme correspondant est donné par le figure I.6b. L'OPO est alors en régime bistable.

L'avantage de l'analyse de stabilité linéaire que nous venons d'effectuer se trouve dans

le fait qu'elle permet par un raisonnement simple et rapide de déterminer à quel moment (quelle valeur du paramètre de contrôle) le système va se déstabiliser et de dire quelle sera la nature des structures qui le déstabilisent. Tout cela en analysant l'évolution temporelle système à partir d'une perturbation étendue spatialement sans tenir compte des conditions initiales. Elle ne peut donc pas rendre compte de la façon dont se comportent ces instabilités pour des perturbations localisées. Le but de la section suivante est donc d'effectuer l'analyse de stabilité linéaire quand le système est soumis à des perturbations, aussi bien étendues que localisées spatialement ou temporellement.

I.2.3 Instabilité convective vs instabilité absolue

L'analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle, s'effectue donc en suivant l'évolution d'une perturbation localisée (en $(x, y) = (0, 0)$ et à l'instant $t = 0$) à la fois dans le temps et dans l'espace. Les différents comportements de celle-ci peuvent se résumer de la façon suivante :

1. la perturbation s'atténue au cours du temps : le système est alors absolument stable (figure I.7a)
- 2a. la perturbation est amplifiée dans le temps mais s'éloigne de la position initiale. Ce qui veut dire que pour un système physique réel (d'étendue finie), l'instabilité finira par sortir des limites de celui-ci qui retrouvera alors son état stable : on dit dans ce cas qu'il est convectivement instable (figure I.7c)
- 2b. la perturbation est amplifiée et envahit tous l'espace : le système est dit absolument instable (figure I.7e).

Entre ces trois cas il existe des situations limites. La première intervient lorsque le paquet d'ondes généré à partir des perturbations initiales localisées s'éloigne de la position de départ en n'étant ni atténuée ni amplifiée. C'est la stabilité marginale et on est alors au seuil convectif (figure I.7b). La seconde correspond au cas où la perturbation est amplifiée et envahit tout l'espace : on dit alors que le seuil absolu est atteint (figure I.7d). L'objectif

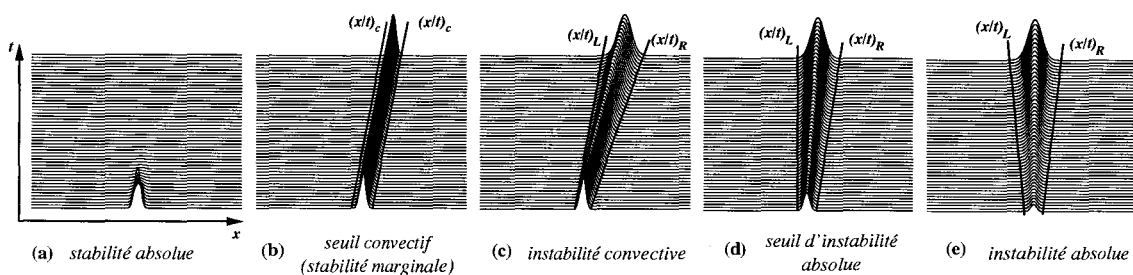


Figure I.7: Les différents cas de figure de l'évolution spatio-temporelle d'un paquet d'ondes symbolisé ici par une enveloppe gaussienne. La figure (a) représente le comportement du paquet d'ondes (d'enveloppe gaussienne) dans un milieu stable. Les figures (b)-(e) montrent quant à elles les évolutions du même paquet d'ondes dans le même milieu, devenu instable. L'étendue spatiale de ces enveloppes est délimitée par les rayons $(x/t)_L$ et $(x/t)_R$ qui correspondent respectivement aux vitesses de groupe des ailes lente et rapide du front. $(x/t)_c$ étant le cas limite où ces vitesses sont égales.

de la présente démarche est alors la caractérisation de la transition entre les régimes convectif et absolu. Pour ce faire il nous faut déterminer la réponse impulsionnelle du système (linéarisé) à une perturbation localisée. Ceci revient alors à considérer l'équation suivante :

$$\partial_t A_s - \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_s + \mu A_s^* + ia_s \nabla_{\perp}^2 A_s - \alpha_s \partial_x A_s \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(t), \quad (\text{I.17})$$

où δ est la fonction delta de Dirac. L'une des méthodes la plus couramment utilisée pour résoudre ce type de problème aux conditions initiales est celle basée sur la fonction de Green [52]. Dans le cas présent la réponse impulsionnelle est directement proportionnelle à cette fonction qui est définie par :

$$D(i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y, \mu)G(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t). \quad (\text{I.18})$$

$D(i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y, \mu)$ étant l'opérateur différentiel du système et est associé à la relation de dispersion $\mathcal{D}(\omega, k_x, k_y, \mu)$ donnée par (I.12b), et qui constitue sa double transformée de Fourier dans le temps et dans l'espace. Notons que le nombre d'onde et la fréquence sont tous deux complexes cette fois-ci. La stabilité linéaire dépend alors du comportement de la fonction de Green aux temps longs. Ainsi le système est :

- linéairement stable si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ le long de tous les rayons $x/t = \text{constante}$ (Fig. I.7a);
- linéairement instable si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = \infty$ le long d'au moins un des rayons $x/t = \text{constante}$ (Fig. I.7b-e).

Pour ce dernier cas, on distinguera deux types de réponse impulsionnelle :

- le cas de l'instabilité convective qui est caractérisé par $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ pour une position x fixée (Fig. I.7b-c);
- le cas de l'instabilité absolue si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = \infty$ pour une position x fixée (Fig. I.7d-e).

Bien que la méthode de Green soit très efficace, elle nécessite la détermination de la fonction de Green du système. Chose qui n'est pas aisée dans les systèmes complexes comme le notre. Cependant si on ne s'intéresse qu'au comportement aux temps longs ($t \rightarrow +\infty$), un développement asymptotique de cette fonction peut être obtenu par la méthode du col. Le terme dominant de celle-ci s'écrit alors comme suit [53, 54] :

$$G(x, y, t \rightarrow \infty) \sim \frac{e^{f(k_x^s, k_y^s)t}}{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega} \Big|_{\vec{k}_s, \omega_s} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_s \partial k_y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_s^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} \right]_{\vec{k}_s}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{I.19})$$

avec $f(k_x, k_y) = -i \left[\omega - k_x \frac{x}{t} - k_y \frac{y}{t} \right]$ dont la partie réelle $\Re(f) = \omega^i - k_x^i \frac{x}{t} - k_y^i \frac{y}{t}$ correspond au taux d'amplification temporelle et le nombre d'onde dominant aux temps longs $\vec{k}_s = (k_x^s, k_y^s)$ est le point selle défini par $\frac{df}{dk} \Big|_{\vec{k}_s} = 0$, soit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \Big|_{k_x^s} = \frac{x}{t} \quad (\text{I.20a})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_y} \Big|_{k_y^s} = \frac{y}{t} \quad (\text{I.20b})$$

Les équations (I.20) ne sont qu'une conséquence de la condition de stationnarité de la phase. En effet la décomposition modale que nous avons effectuée au début de cette

section ($A_s = \delta \bar{A}_s e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$) se justifie par le fait que suivant chaque rayon (x/t) et (y/t), le terme dominant de la réponse impulsionnelle prend la forme d'une onde plane. Donc l'ensemble de ces rayons ne peuvent former un paquet d'ondes que si la phase au sommet de son enveloppe est constante. Cette condition se traduit par

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} \quad \forall k. \quad (\text{I.21})$$

La stationnarité qui s'exprime alors par $\frac{\partial(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial \vec{k}} = 0$, redonne les équations (I.20). Si nous supposons maintenant que la relation de dispersion est une fonction holomorphe, cette dernière peut être développée à l'aide des équations de Cauchy-Riemann et le point selle s'exprime comme une fonction des variables (x/t) et (y/t) :

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{k_x^s} = \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^s} + i \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^s} = \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_x^i} \right|_{k_x^s} - i \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^i} \right|_{k_x^s} = \frac{x}{t}, \quad (\text{I.22a})$$

$$\text{et} \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{k_y^s} = \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^s} + i \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^s} = \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_y^i} \right|_{k_y^s} - i \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^i} \right|_{k_y^s} = \frac{y}{t}, \quad (\text{I.22b})$$

et où nous avons posé $\omega = \omega^r + i\omega^i$ et $k_{x,y} = k_{x,y}^r + ik_{x,y}^i$. Les rayons (x/t) et (y/t) étant des quantités purement réelles, nous avons finalement :

$$\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^s} = \frac{x}{t} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^s} = \frac{y}{t} \quad (\text{I.23a})$$

$$\left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^s} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^s} = 0. \quad (\text{I.23b})$$

Les critères de passage, d'une part de la stabilité absolue à l'instabilité convective et d'autre part de l'instabilité convective à l'instabilité absolue, sont définis par l'évaluation du taux d'amplification temporelle le long des rayons (x/t) et (y/t).

1. Passage de la stabilité à l'instabilité convective : le système est stable tant que

le taux de croissance est inférieur à zéro pour tous les modes

$\vec{k}_s \left(\Re(f) < 0 \quad \forall \vec{k}_s = (k_x^s, k_y^s) \right)$ et il est convectivement instable si le taux de croissance est positif pour au moins un des mode \vec{k}_s ($\Re(f) > 0$). Le passage d'un des

mode \vec{k}_s de $\Re(f) < 0$ à $\Re(f) > 0$ est le passage de la stabilité à l'instabilité convective.

régimes à l'autre intervient donc lorsque le taux de croissance s'annule ($\Re(f) = 0$) ; le nombre d'onde et la vitesse de groupe associés au mode qui vérifie en premier cette condition sont appelés respectivement nombre d'onde ($\vec{k}_s = \vec{k}_c = (k_x^c, k_y^c)$) et vitesse de groupe critique ($(x/t)_c$ et $(y/t)_c$). En résumé, le mode de plus instable au seuil convectif doit :

- vérifier la condition de stationnarité de la phase :

$$\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^c} = \left(\frac{x}{t} \right)_c \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^c} = \left(\frac{y}{t} \right)_c \quad (\text{I.24a})$$

$$\left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^c} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^c} = 0. \quad (\text{I.24b})$$

- posséder un taux de croissance maximal : $\left. \frac{\partial \Re(f)}{\partial (x/t)} \right|_{k_x^s} = \left. \frac{\partial \Re(f)}{\partial (y/t)} \right|_{k_y^s} = 0$. L'utilisation des équations de Cauchy-Riemann et des relation (I.24) donnent :

$$\left. \frac{\partial \Re(f)}{\partial (x/t)} \right|_{k_x^s} = k_x^{s^i} = 0, \quad (\text{I.25a})$$

$$\left. \frac{\partial \Re(f)}{\partial (y/t)} \right|_{k_y^s} = k_y^{s^i} = 0. \quad (\text{I.25b})$$

Ceci veut dire qu'au seuil convectif, le nombre d'onde critique est purement réel et le taux de croissance de la perturbation nul ($\Re(f) = 0$). Ce qui, d'après les relations (I.25), implique que :

$$\omega^i(\vec{k}_s^c) = 0. \quad (\text{I.26})$$

2. Passage de l'instabilité convective à l'instabilité absolue : le régime absolu est caractérisé par le fait que les fronts rapide et lents se propagent dans des directions opposées. Ce qui veut dire que leurs vitesses de groupe sont de signes opposés. Donc

le passage d'un régime à l'autre s'effectue quand l'une de ces vitesses s'annule. Par exemple pour la convention utilisée par la figure I.7, c'est la vitesse du front lent qui s'annule. Ainsi au seuil absolu :

- le taux de croissance n'est pas forcément maximal : $(k_x^a, k_y^a) \in \mathbb{C}^2$
- la condition de stationnarité doit toujours être vérifiée, mais compte tenu du fait que la vitesse s'annule en ce point nous obtenons

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{k_x^a} = 0, \quad (\text{I.27a})$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{k_y^a} = 0. \quad (\text{I.27b})$$

- un taux de croissance nul le long du rayon dont la vitesse s'annule :

$$\omega^i(\vec{k}^a) = 0. \quad (\text{I.28})$$

À ces trois conditions il faut en ajouter une quatrième afin d'assurer la causalité de la réponse impulsionnelle [53] :

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_s \partial k_y} \right)^2 \Big|_{k_a} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_s^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} \Big|_{k_a} \geq 0. \quad (\text{I.29})$$

C'est elle qui permet de déterminer parmi plusieurs solutions éventuelles des équations (I.27), laquelle est réellement physique (réalisable). Cette condition n'est pas nécessaire dans le cas de l'instabilité convective puisqu'au seuil convectif le taux de croissance spatiale \vec{k}^{c^i} est unique et nul. Notons aussi qu'à une seule dimension transverse (x par exemple), cette condition s'écrit [54, 55] :

$$\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_a} \geq 0. \quad (\text{I.30})$$

I.2.3.1 Régime convectif

L'application à l'OPO des conditions (I.26) et (I.24b) donnent :

$$|\mu_c| = \sqrt{1 + (\Delta_s + a_s k_c^2)^2}, \quad (\text{I.31})$$

$$\text{et } k_c = 0 \quad \text{ou} \quad k_c^2 = k_x^{c2} + k_y^{c2} = -\frac{\Delta_s}{a_s}. \quad (\text{I.32})$$

Nous retrouvons à travers (I.31) l'expression de la courbe neutre de stabilité linéaire classique. Compte tenu des conditions (I.25), le nombre d'onde critique au seuil convectif va dépendre ici aussi du signe de Δ_s .

I.2.3.1.1 Cas $\Delta_s < 0$

Puisque l'analyse de stabilité classique donne le seuil d'émission du DOPO $|\mu_c| = 1$, nous déduisons que le nombre d'onde au seuil convectif est donné par la solution $k_c^2 = k_x^{c2} + k_y^{c2} = -\frac{\Delta_s}{a_s}$. Il reste à déterminer les vitesses de groupe critiques associées aux paquets d'ondes générés à partir des perturbations initiales localisées. Celles-ci sont obtenues en utilisant les relations (I.24a). Nous avons alors $\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^c} = \left(\frac{x}{t} \right)_c = \gamma_s \alpha_s$ et $\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^c} = \left(\frac{y}{t} \right)_c = 0$. Ainsi pour $\Delta_s < 0$, le seuil convectif est caractérisé par :

$$|\mu_c| = 1, \quad (\text{I.33a})$$

$$k_x^c = k_y^c = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}, \quad (\text{I.33b})$$

$$v_x^c = \left(\frac{x}{t} \right)_c = \gamma_s \alpha_s \quad \text{et} \quad v_y^c = \left(\frac{y}{t} \right)_c = 0, \quad (\text{I.33c})$$

$$\omega_c = \gamma_s \alpha_s k_x^c. \quad (\text{I.33d})$$

En plus des caractéristiques (du seuil) données par l'analyse linéaire précédente, nous obtenons la vitesse critique (v_x^c) de tout paquet d'ondes généré à partir des perturbations initiales localisées. Cette vitesse est égale au produit du paramètre de walk-off et du taux de relaxation du champ signal intra-cavité. Compte tenu de cette dérive qui s'effectue dans la direction du walk-off, il apparaît, dès lors que le nombre d'onde des instabilités

au seuil est non-nul, une fréquence de passage critique (ω_c) des rouleaux d'intensité de l'enveloppe de ce paquet d'ondes pour toute position x fixée à l'intérieur de celui-ci.

I.2.3.1.2 Cas $\Delta_s > 0$

Les conditions (I.25) imposent dans cas que $k_c = \sqrt{k_x^{c2} + k_y^{c2}} = 0$. Le seuil convectif est alors atteint pour $|\mu_c| = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$, et les vitesses de groupe critiques sont alors égales à $\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{k_x^c} = \left(\frac{x}{t} \right)_c = \gamma_s \alpha_s$ et $\left. \frac{\partial \omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{k_y^c} = \left(\frac{y}{t} \right)_c = 0$. En résumé pour $\Delta_s > 0$, nous avons :

$$|\mu_c| = \sqrt{1 + \Delta_s^2}, \quad (\text{I.34a})$$

$$k_x^c = k_y^c = 0, \quad (\text{I.34b})$$

$$v_x^c = \left(\frac{x}{t} \right)_c = \gamma_s \alpha_s \quad \text{et} \quad v_y^c = \left(\frac{y}{t} \right)_c = 0, \quad (\text{I.34c})$$

$$\omega_c = 0 \quad (\text{I.34d})$$

Comme pour le cas précédent ($\Delta_s < 0$), la vitesse critique des paquets d'ondes générés par des perturbations initiales est obtenue. Les structures qui apparaissent au seuil sont homogènes ($k_c = 0$), et la fréquence de passage est nulle dans le cas présent. Ce qui confirme la relation de proportionnalité entre le nombre d'onde et cette fréquence de passage.

I.2.3.2 Régime d'instabilité absolue

Si on applique au DOPO les conditions (I.27) on obtient :

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{k_x^a} = 0 \Leftrightarrow -2ia_s \frac{k_x^a (\Delta_s + a_s k_x^{a2})}{\sqrt{|\mu|^2 - (\Delta_s + a_s k^2)^2}} + \alpha_s = 0, \quad (\text{I.35a})$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{k_y^a} = 0 \Leftrightarrow k_y^a (\Delta_s + a_s k_y^{a2}) = 0. \quad (\text{I.35b})$$

Alors deux cas de figure s'imposent :

A- $\alpha_s = 0$

Les équations (I.35) admettent alors comme solutions $(k_x^a, k_y^a) = (0, 0)$ ou $(k_x^a, k_y^a) =$

$(\pm\sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}, \pm\sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}})$. Ces solutions correspondent respectivement aux cas de detuning Δ_s positif et négatif. Elles impliquent que l'instabilité se développe à la fois dans les deux directions de l'espace transverse. Dans ce cas elle est dite bidimensionnelle. On trouve alors que les seuils absolu et convectif coïncident puisque $v_x^c = v_y^c = 0$ au seuil convectif.

B- $\alpha_s \neq 0$

L'instabilité se développe uniquement dans une seule direction : $k_a = (k_x^a, k_y^a) = (k_x^a \in \mathbb{C}, 0)$, elle est dite unidimensionnelle, et ce dans la direction du walk-off. En d'autres termes, en régime d'instabilité absolue, la présence du walk-off transforme la dynamique bidimensionnelle de l'OPO en une dynamique à une dimension.

Ainsi en présence du walk-off, et en régime absolu, l'étude de la dynamique spatio-temporelle de l'OPO se réduit à un problème à une dimension. Même si la transformation du problème (I.35) à 2D en un problème à une dimension, réduit de façon considérable la difficulté que représente sa résolution, il reste que le traitement de l'équation (I.35a) est assez fastidieux, d'autant plus qu'elle ne possède pas de solution analytique simple. Afin d'en obtenir une expression simplifiée, une des méthodes de résolution adoptée consiste à effectuer un développement de Taylor de la relation de dispersion autour du mode le plus instable [56] (au seuil convectif) caractérisé par μ_c et k_c . La relation de dispersion approchée prend alors la forme :

$$\omega^{app} = \omega_c + (\mu - \mu_c) \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right|_c + (k_x - k_x^c) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_c + \frac{1}{2} (k_x - k_x^c)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} \right|_c + (\mu - \mu_c) (k_x - k_x^c) \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x \partial \mu} \right|_c.$$

Cette expression approchée dépend du signe de Δ_s .

I.2.3.2.1 Cas $\Delta_s < 0$

La relation de dispersion approchée est :

$$\omega^{app} = i\gamma_s [(\mu - 1) + 2a_s \Delta_s (k_x - k_x^c)^2] + \gamma_s \alpha_s k_x, \quad (\text{I.36})$$

et le seuil absolu est dans ce cas caractérisé par :

$$|\mu_a| = 1 - \frac{\alpha_s^2}{8a_s\Delta_s}, \quad (\text{I.37a})$$

$$k_x^a = k_x^c + i\frac{\alpha_s}{4a_s\Delta_s} = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}} + i\frac{\alpha_s}{4a_s\Delta_s}, \quad (\text{I.37b})$$

$$\omega_a = \gamma_s\alpha_s k_x^c. \quad (\text{I.37c})$$

Par rapport au seuil convectif, la fréquence de passage reste inchangée, de même que le module du nombre d'onde de la modulation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Par contre, pour ce dernier, il apparaît ici avec une partie imaginaire non-nulle qui correspond au taux de décroissance asymptotique de l'enveloppe des paquets d'ondes générés par des perturbations localisées.

1.2.3.2.2 Cas $\Delta > 0$

Le développement de Taylor donne dans ce cas :

$$\omega^{app} = i\gamma_s [(\mu - |\mu_c|)|\mu_c| - a_s\Delta_s(k_x - k_x^c)^2] + \gamma_s\alpha_s k_x. \quad (\text{I.38})$$

Le seuil absolu est alors obtenu pour :

$$|\mu_a| = |\mu_c| + \frac{\alpha_s^2}{4|\mu_c|a_s\Delta_s}, \quad (\text{I.39a})$$

$$k_x^a = k_x^c - i\frac{\alpha_s}{2a_s\Delta_s} = -i\frac{\alpha_s}{2a_s\Delta_s}, \quad (\text{I.39b})$$

$$\omega_a = 0. \quad (\text{I.39c})$$

D'un point de vu purement mathématique³, les conditions $\Re\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) = 0$ et $\Im\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) = 0$ (conséquence de (I.27)) sont nécessaires mais pas suffisantes pour obtenir le passage du régime convectif au régime absolu. Il faut en plus s'assurer que ce point est un point selle,

³D'après le principe du maximum qui est une conséquence du théorème de la moyenne, une fonction holomorphe ne peut admettre d'extremum local.

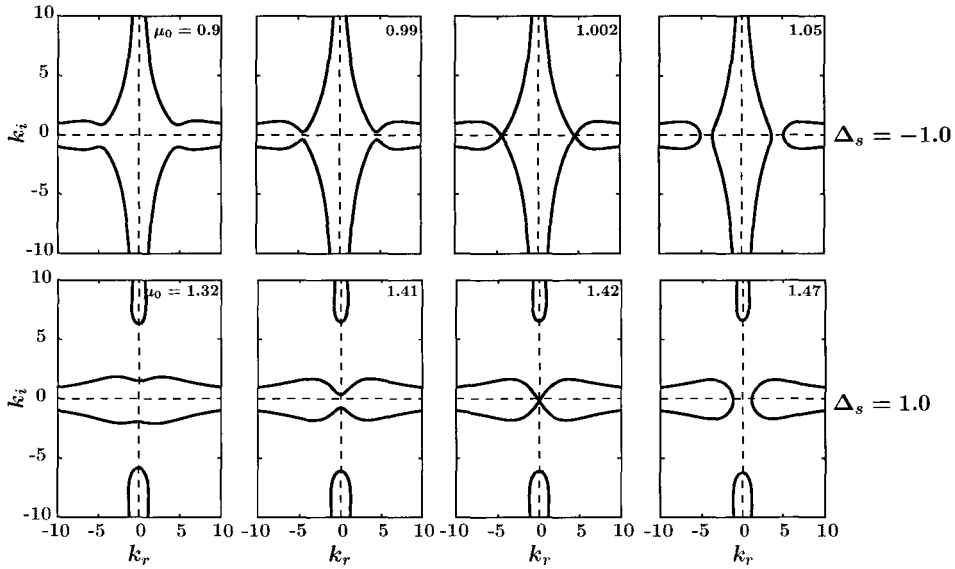


Figure I.8: Vérification de la condition de pincement ($\omega^i = 0$) pour $\Delta_s = -1.0$ et $\Delta_s = 1.0$, avec $a_s = 0.05$ et $\alpha_s = 0.02$.

car seul un tel point permet de satisfaire simultanément ces conditions [57]. Techniquement cela se traduit par un croisement des branches k_a^r et k_a^i , vérifiant ($\omega^i = 0$) situées de part et d'autre de l'axe des nombres d'onde réels ($k_i = 0$). Cette condition s'appelle la condition de pincement et constitue la condition suffisante. Dans la pratique, elle est vérifiée à partir de la projection de la surface marginale (μ , k^r , k^i) dans le plan (k^r , k^i). Nous avons ainsi une méthode numérique pour déterminer avec exactitude le seuil à partir de la relation de dispersion complète. La figure (I.8) en est une illustration, et le tableau (I.3) donne un résumé de l'étude de la dynamique spatio-temporelle du DOPO.

Autre fait à noter après cette étude linéaire, c'est qu'en dehors du seuil convectif, toute perturbation dans le système tend à s'étaler dans le plan transverse. On parlera dans ce cas de structure spatiale étendue. Cependant comme la plupart des systèmes optique [19, 31, 58–65], l'OPO est capable dans certaines conditions de générer des structures confinées dans l'espace [7, 35, 37, 39, 41, 66–71]. Celles-ci peuvent être isolées (structures solitoniques) ou organisées en réseaux (en hexagones par exemple). C'est donc l'étude de quelques uns de ces mécanismes de confinement de l'énergie, qu'il soit forcé ou spontané, qui fera l'objet des chapitres suivants.

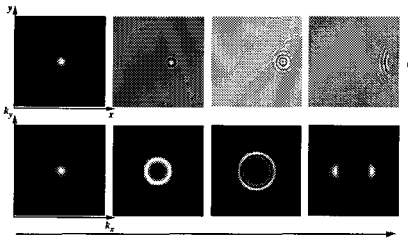
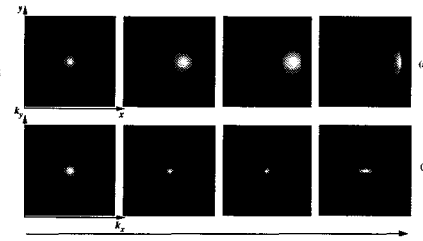
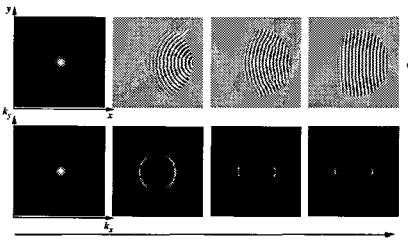
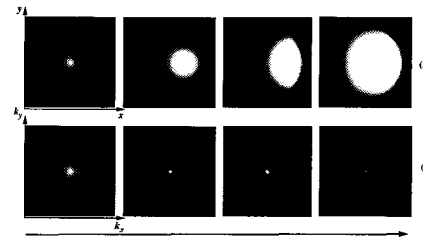
	$\Delta_s < 0$	$\Delta_s > 0$
Régime convectif (instabilités bidimensionnelles)	$ \mu_c = 1$ $k_x^c = k_y^c = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}$ $v_x^c = \alpha_s$ $v_y^c = 0$ $\omega_c = \gamma_s \alpha_s k_x^c.$ 	$ \mu_c = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$ $k_x^c = k_y^c = 0$ $v_x^c = \alpha_s$ $v_y^c = 0$ $\omega_c = 0$ 
Régime absolu (instabilités unidimensionnelles)	$ \mu_a = 1 - \frac{\alpha_s^2}{8a_s \Delta_s}$ $k_x^a = \sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s} + i \frac{\alpha_s}{4a_s \Delta_s}}$ $\omega_a = \gamma_s \alpha_s k_x^c.$ 	$ \mu_a = \mu_c + \frac{\alpha_s^2}{4 \mu_c a_s \Delta_s}$ $k_x^a = -i \frac{\alpha_s}{2a_s \Delta_s}$ $\omega_a = 0$ 

Tableau I.3: Tableau récapitulatif de l'étude de la dynamique spatio-temporelle du DOPO et les évolutions caractéristiques d'une perturbation localisée dans l'espace transverse. Pour chacune des figures les lignes (a) et (b) correspondent respectivement au profil transverse de la partie réelle et au profil de l'intensité du signal dans l'espace de Fourier associé. Les paramètres utilisés pour les simulations sont : $|\Delta_s| = 0.40$, $\Delta_p = 0.00$, $a_s = 2a_p = 0.01$, $\alpha_s = 0.03$, pour une valeur du paramètre de contrôle μ_0 supérieure de 1% à la valeur théorique correspondante.

Chapitre II

Pompage inhomogène et modes globaux dans un OPO : Structures solitoniques obtenues par piégeage

Comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent, plusieurs des paramètres présents dans les équations de l'OPO peuvent être déterminants dans la dynamique des structures transverses. Cependant, la plupart d'entre eux sont en général interdépendants via des relations souvent fixées par la géométrie du système, hormis le champ de pompe incident qui, dans cette étude, joue le rôle de paramètre de contrôle. C'est ainsi qu'une variation du champ de pompe incident dans le plan transverse (profil Gaussien) agirait directement sur la dynamique des champs signal et idler. On comprend alors que de la qualité du pompage, dépendra l'efficacité du processus d'amplification paramétrique et la dynamique des structures qui peuvent être générées. Cependant, la plupart des études analytiques supposent que le champ de pompe incident est constant, que ce soit dans la direction de propagation ou dans le plan transverse (pompage en onde plane). Dans ces conditions, la stabilité de l'état de base à une perturbation localisée, est entièrement décrite par la relation de dispersion $\mathcal{D}(\omega, k)$ donnée par (I.12b). La réponse du système à une perturbation localisée est alors décrite par le taux de croissance $\Im(\omega_0 \equiv \omega(k_0))$ où

k_0 est donné par la condition du point selle : $(\frac{\partial\omega}{\partial k})_{k_0} = 0$. Ainsi lorsque $\frac{\partial\omega_r}{\partial k_r} = v_g \neq 0$ la perturbation est advectée en même temps qu'elle est amplifiée : on dit alors que le système est convectivement instable. Par contre si $\frac{\partial\omega_r}{\partial k_r} = v_g = 0$ le système est dit absolument instable et la perturbation est amplifiée *in situ* et remplit tout l'espace. L'analyse détaillée des différents régimes d'instabilité a déjà été présentée dans le chapitre précédent.

Cependant, dans la pratique le rayonnement laser n'est constant ni dans la direction de propagation ni dans le plan transverse à celle-ci. Par conséquent les conditions d'instabilité convective ou absolue ne sont remplies que localement, entraînant des modifications importantes du comportement dynamique du système. Il a été montré théoriquement, notamment en hydrodynamique [45], que le comportement global d'un tel système pouvait être relié aux propriétés locales de celui-ci ; à condition que les inhomogénéités varient lentement, comparées aux nombres d'ondes caractéristiques des instabilités. L'analyse de stabilité linéaire du système se présente alors comme un problème aux valeurs propres, dont les fonctions propres caractérisant les instabilités sont désignées par le terme de modes globaux linéaires [45]. Autrement dit on appelle mode global toute instabilité du système pouvant être décrite par des variables séparées et présentant un caractère synchronisé. Ce sont donc ces études que nous voulons étendre à l'OPO, avec pour objectif de mettre en évidence dans quelle mesure la dépendance spatiale des paramètres va influencer sur la dynamique du système. En pratique, cette dépendance spatiale provient essentiellement du fait que le champ de pompe incident, est un faisceau Gaussien. Ceci est fondé sur le fait qu'il a été montré [72] que tout comme les ondes planes, les faisceaux Gaussiens sont eux aussi des solutions des équations décrivant la propagation des ondes électromagnétiques (Eq. II.1) ; ils rendent compte le mieux, de la variation de la distribution spatiale de l'énergie et de l'extension transversale d'une onde émise par une cavité laser.

Ici, la différence fondamentale est qu'ils apparaissent suite à des bifurcations et leurs caractéristiques (seuil, taille, longueur d'onde) ne dépendent pas que de la géométrie de la cavité, mais aussi de la nature des instabilités conduisant à ces bifurcations.

Après un bref descriptif des propriétés des faisceaux Gaussiens et des hypothèses per-

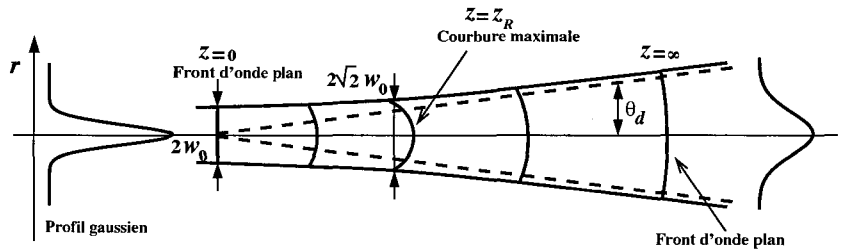


Figure II.1: Évolution des caractéristiques d'un faisceau gaussien au cours de sa propagation.

mettant de définir des lois d'échelle pour une étude perturbative de la dynamique spatio-temporelle des OPO dans la première partie de ce chapitre, nous traiterons le cas des modes globaux dans des OPO sans walk-off dans la seconde partie. Ensuite, l'influence du walk-off sur la dynamique de ces modes sera abordée dans la dernière partie du chapitre.

II.1 Propriétés des faisceaux Gaussiens et lois d'échelle

II.1.1 Propriétés des faisceaux Gaussiens

L'évolution de l'amplitude u du champ électromagnétique émis par une cavité laser, dans le cadre de l'approximation paraxiale, peut être décrite par l'équation suivante [72] issue de la dérivation des équations de Maxwell :

$$\nabla_{\perp}^2 u(\vec{r}, z) - 2ik \frac{\partial u(\vec{r}, z)}{\partial z} = 0. \quad (\text{II.1})$$

k est le nombre d'onde associé à la longueur d'onde λ , z l'axe de propagation, \vec{r} le vecteur position dans le plan transverse et ∇_{\perp}^2 le laplacien associé à celui-ci. Hormis les ondes planes, lorsque la cavité est stable, cette équation admet d'autres solutions qu'on peut approcher par les fonctions de Hermite-Gauss (TEM_{mn}) : elles constituent les modes propres de la cavité. L'enveloppe du mode fondamental transverse (TEM_{00}) possède un profil Gaussien illustré par la figure II.1. Cette figure schématise également son évolution.

Les caractéristiques du faisceau¹ sont alors définies, pour une position z donnée, par les grandeurs suivantes :

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{II.2a})$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (\text{II.2b})$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{II.2c})$$

$$\theta_d = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (\text{II.2d})$$

$R(z)$ et $w(z)$ correspondent respectivement au rayon de courbure du front d'onde du faisceau et à sa demi largeur à $1/e$ pour une position donnée. w_0 (ou le waist) représente la demi-largeur à $1/e$ du profil transverse du champ lorsque le front d'onde est parfaitement plan ($R = \infty$) c'est-à-dire en $z = 0$; elle caractérise l'extension transverse du rayonnement. La position où $w(z)$ atteint $\sqrt{2}$ fois w_0 est appelé la longueur de Rayleigh dénommée par z_R . Enfin θ_d est la grandeur qui rend compte de la divergence de l'onde. Elle correspond au demi-angle du cône reliant le centre du waist à la taille du faisceau à l'infini. Ainsi pour une longueur d'onde λ donnée, le mode fondamental peut être décrit de façon complète par le rayon de pincement w_0 . Cela fait de lui le paramètre du champ de pompe le mieux adapté pour la définition d'une loi d'échelle.

II.1.2 Loi d'échelle dans un OPO pompé par un faisceau Gaussien

Considérons à présent un OPO dégénéré décrit par les équations (I.9). Puisque c'est le coefficient de diffraction qui fixe la distance caractéristique d'interaction entre les différents points du plan transverse, il s'avère judicieux dans ce cas, de se ramener à l'échelle de ce

¹Il s'agit ici de l'enveloppe du champ électrique.

dernier ; en l'occurrence il s'agit ici du coefficient de diffraction du signal². Les équations (I.9) en champ moyen sont alors réécrites en introduisant les variables transverses $r_j = \frac{j}{\sqrt{a_s}}$ où $j = x, y$. Par ailleurs afin de développer notre approche indépendamment de la symétrie du système (rectangulaire ou radiale) d'une part et de la dimension de l'espace transverse (une ou deux dimensions), nous allons introduire la variable \vec{r} tel que $\vec{r} = \vec{r}(r_x, r_y)$ ou $\vec{r} = \vec{r}(r, \phi)$. Ainsi on obtient dans la direction du walk-off :

$$\partial_t A_p = \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p)A_p + E(r) - A_s^2 + \frac{i}{2}\nabla_{\perp}^2 A_p \right] \quad (\text{II.3})$$

$$\partial_t A_s = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s)A_s + A_s^* A_p + i\nabla_{\perp}^2 A_s - \alpha \partial_r A_s \right], \quad (\text{II.4})$$

avec $\alpha = \frac{\alpha_s}{\sqrt{a_s}}$. Le champ de pompe incident est supposé être le mode TEM₀₀ dont la demi-largeur à 1/e vaut w_0 et d'amplitude maximale E_0 . Son profil transverse au point de pincement est alors décrit par l'expression suivante :

$$E(r) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon r)^2}, \quad (\text{II.5a})$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2a_s}}{w_0} = 2\frac{\sqrt{a_p}}{w_0}. \quad (\text{II.5b})$$

ε apparaît comme le paramètre idéal pour définir la loi d'échelle de variation, il caractérisera le degré d'inhomogénéité du pompage. Il reste alors à trouver quelle configuration de l'OPO permet de l'utiliser comme paramètre de WBKJ, i.e $\varepsilon \ll 1$ [45]. La transformation de la relation (II.5b) en introduisant l'expression de a_s et celle donnant z_R en fonction

²Il faut noter que pour un DOPO, $a_s = 2a_p$ c'est uniquement pour des raisons de commodité de calcul que nous utiliserons celui du signal puisqu'on aboutit au même résultat avec le coefficient a_p de la pompe. De plus c'est le coefficient de diffraction du signal qui fixe la longueur d'onde des instabilités de Turing au seuil lorsque $\Delta_s < 0$. Notre convention a donc permis d'exprimer aussi cette longueur d'onde à l'échelle de la distance caractéristique de diffraction.

de w_0 , donne³ :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{t_p}{t_R}}, \quad (\text{II.6})$$

où $t_p = \gamma_p^{-1}$ est défini comme le temps caractéristique de décroissance (temps de décroissance) du champ de pompe dans la cavité et $t_R = \frac{z_R}{v_p}$ celui qu'il mettrait pour parcourir sa distance de Rayleigh qu'on dénommera temps de Rayleigh. L'approche de WKBJ est alors possible dans le cas où ce temps de Rayleigh est très grand, comparé au temps de décroissance ($t_p \ll t_R$). Cela revient à considérer d'une part, que la taille du champ de pompe ne change pas suivant l'axe de propagation, et d'autre part, que son enveloppe varie lentement dans le plan transverse à la propagation durant le processus d'amplification paramétrique. Cette variation lente sera introduite par l'intermédiaire de la variable $\vec{R} = \varepsilon \vec{r}$.

II.2 Modes Globaux dans un OPO sans walk-off

Pour une configuration du DOPO telle que supposée dans le paragraphe précédent, la réponse du système par rapport à une perturbation localisée est obtenue par WKBJ, à travers sa fonction de Green. Ainsi en régime linéaire le signal peut être développé comme suit :

$$A_s(R, t) = \{A_0(R) + \varepsilon A_1(R) + O(\varepsilon^2)\} \exp(-i\omega t) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{R_s}^R k(R') dR' + il\phi\right) \quad (\text{II.7})$$

tel que $A_s(R \rightarrow \infty, \phi, t, \varepsilon) = 0$ avec $k(R')$ le nombre d'onde radial et l'entier l sa composante azimutale. R_s est le point source où la perturbation est initiée. En reportant

³Si on transforme $a_p = \frac{v_p}{2k_p \gamma_p}$ en remplaçant le nombre d'onde k_p par son expression ($k_p = \frac{2\pi}{\lambda_p}$), le paramètre de diffraction prend alors la forme suivante : $a_p = \frac{\lambda_p v_p}{4\pi \gamma_p}$, soit $\lambda_p = \frac{a_p \gamma_p}{4\pi v_p}$. D'après la relation (II.2c) donnant la distance de Rayleigh, nous obtenons : $z_R = \frac{w_0^2 v_p}{4a_p \gamma_p}$. On définit alors $t_p = \frac{1}{\gamma_p}$ et $t_R = \frac{z_R}{v_p}$. Ce qui donne $\varepsilon = 2 \frac{\sqrt{a_p}}{w_0} = \sqrt{\frac{t_p}{t_R}}$.

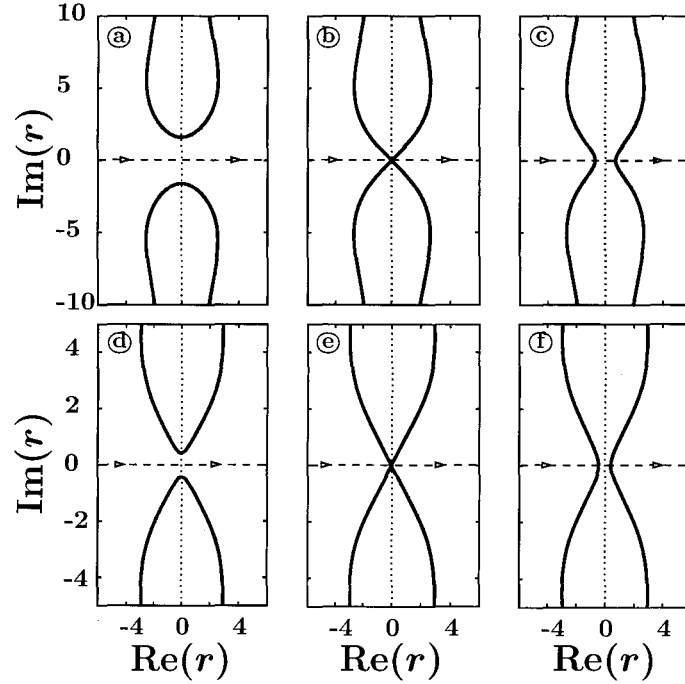


Figure II.2: Contour $\Im[\omega_0(r)] = 0$ dans le plan complexe r ($\Re(r)$, $\Im(r)$) pour différentes valeurs du couple de paramètres (Δ_s, μ_0) : $\Delta_s = -0.5$ pour a), b) et c) avec $\mu_0 = 0.900$, 1.000 et 1.010 respectivement ; $\Delta_s = 1$ pour d), e) et f) avec respectivement $\mu_0 = 1.404$, 1.414 et 1.424 .

l'expression (II.7) dans l'équation qui gouverne l'évolution linéaire du signal donnée par :

$$[\partial_t + \gamma_s - i\gamma_s(\Delta_s - \varepsilon^2\Delta_\perp)] [\partial_t + \gamma_s + i\gamma_s(\Delta_s - \varepsilon^2\Delta_\perp)] A_s - \gamma_s^2\mu(R)^2 A_s = 0 \quad (\text{II.8})$$

on obtient à l'ordre $O(\varepsilon^0)$ la relation de dispersion⁴

$$\mathcal{D}(\omega, k) = \left(-i\frac{\omega}{\gamma_s} + 1\right)^2 + (\Delta_s + k^2)^2 - |\mu(R)|^2 = 0, \quad (\text{II.9})$$

où $\mu(R) = \frac{E(R)}{1+i\Delta_p}$. A l'ordre $O(\varepsilon)$ on trouve $D(\omega, k)A_1 - 2i\Delta_s(\partial_R k)A_0 - 4i\Delta_s\partial_R A_0 = 0$.

Nous pouvons déduire, de façon analogue à [45], l'expression de A_0 sous la forme :

$$A_0(R) \propto \exp\left[i\int_0^R \frac{F(R', k, \omega)}{\partial_k \omega(R')} dR'\right], \quad (\text{II.10})$$

⁴Afin de simplifier la démarche nous avons supposé une symétrie rectangulaire pour le système.

où $F(R', k, \omega)$ est une fonction des variables du système. Il apparaît clairement que cette expression diverge pour

$$\partial_k \omega(R) = 0. \quad (\text{II.11})$$

Les points de l'espace où cette singularité survient sont appelés points tournants. En ces points l'approximation de WKB n'est donc plus valable. Soit $\omega_0 = \omega(k_0)$, où k_0 est solution de (II.11). Par définition si le contour $\Im[\omega_0(R)] = 0$ dans le plan complexe R présente un pincement entre deux branches $R^\pm(\omega_0)$ au point R^t qui vérifie en plus la condition du point selle $\partial_R \omega_0(R^t) = 0$, on est alors en présence d'un point tournant double. On déduit dans ce cas la loi d'échelle gouvernant la dynamique du système dans la région du point tournant par l'intermédiaire de la variable $\tilde{r} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} R$. En conséquence, afin de mener l'analyse dans cette région, on introduira conformément à cette nouvelle variable le développement suivant :

$$A_s(\tilde{r}, t) = \left\{ \tilde{A}_0(\tilde{r}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{A}_1(\tilde{r}) + O(\varepsilon) \right\} e^{-i\omega t} \exp \left(i\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\tilde{r}_s}^{\tilde{r}} k(\tilde{r}') d\tilde{r}' + i\ell\phi \right). \quad (\text{II.12})$$

De la même façon que pour le pompage homogène, l'équation (II.11) admet des solutions différentes selon le signe du désaccord en fréquence du signal. Soit $k_0 = 0$ pour $\Delta_s > 0$ et $k_0 = \pm\sqrt{-\Delta_s}$ dans le cas opposé, ce qui donne :

$$\omega_0(R) = i[\mu(R) - 1] \quad (\Delta_s < 0), \quad (\text{II.13})$$

ou

$$\omega_0(R) = i \left[\sqrt{\mu(R)^2 - \Delta_s^2} - 1 \right] \quad (\Delta_s > 0). \quad (\text{II.14})$$

Il apparaît clairement que le point tournant correspond dans les deux cas à $R^t = 0$. Cependant, la condition de pincement n'est pas satisfaite pour la même valeur de $\mu_0 = \mu^t$

suivant le signe de Δ_s , comme l'illustre la figure (II.2). En effet ce croisement survenant pour $\Im[\omega_0(R^t)] = 0$, on trouve que μ^t correspond aux valeurs du seuil d'émission μ_c de l'OPO données par l'analyse de stabilité du cas homogène. Nous traiterons donc séparément les cas $\Delta_s < 0$ et $\Delta_s > 0$. De plus dans la suite de cette partie nous allons considérer que la solution *OPO Off* bifurque de façon continue vers l'état *OPO On*; ceci se traduit par la relation $\Delta_s \Delta_p - 1 < 0$.

II.2.1 Cas du detuning du signal positif ($\Delta_s > 0$)

II.2.1.1 Analyse de stabilité linéaire au voisinage du point tournant

Comme nous l'avons justifié plus haut, le paramètre ε est supposé petit comparé à l'unité ($\varepsilon \ll 1$). Ainsi, la relation (II.5a) donnant l'expression du champ de pompe peut être réécrite sous forme du développement en série suivant : $\mu(\tilde{r}) = \mu_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\tilde{r}^2} \simeq \mu_0 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\tilde{r}^2 + O(\varepsilon^2)\right)$. Nous introduisons les petits écarts au point tournant à travers les paramètres ω_0 et μ_0 :

$$\omega_g = \omega_0^t + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2) \quad (\text{II.15a})$$

$$\mu_0 = \mu_0^t + \varepsilon\mu_1 + O(\varepsilon^2). \quad (\text{II.15b})$$

Finalement on obtient l'expression du pompage dans la région du point tournant comme suit :

$$\mu(\tilde{r}) = \mu_c + \frac{1}{2}\varepsilon(2\mu_1 - \mu_c\tilde{r}^2) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{II.16})$$

Nous pouvons maintenant procéder au développement de l'analyse dans la région du point tournant. Celui-ci se fera en considérant deux cas de symétrie.

II.2.1.1.1 Cas d'une symétrie radiale

Le système est dans ce cas supposé à géométrie cylindrique. Dans cette configuration,

à l'aide de la variable \tilde{r} , le terme de diffraction prend la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta_{\perp}^{\tilde{r}} A_s &= \left[-k^2 + i\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(2k \frac{d}{d\tilde{r}} + k' + \frac{k}{\tilde{r}} \right) + \varepsilon \left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \right) \right] \left(\tilde{A}_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{A}_1 + \varepsilon \tilde{A}_2 + O(\varepsilon^2) \right) \\ &* \exp(-i\omega t) \exp \left(i\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\tilde{r}_s}^{\tilde{r}} k(\tilde{r}') d\tilde{r}' + il\phi \right). \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

L'étape suivante consiste à introduire les développements (II.15), (II.16) et (II.17) dans l'équation (II.8), puis à regrouper les termes par puissance de ε . A l'ordre le plus bas, nous retrouvons la relation de dispersion (II.9) évaluée au point tournant : $D(\omega_0^t, k) = 0$. A l'ordre $O(\varepsilon)$, l'application de la condition de solvabilité donne l'équation qui gouverne l'évolution linéaire de l'enveloppe du signal :

$$\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{A}_0}{d\tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \tilde{A}_0 + (Z_0 - Z_2 \tilde{r}^2) \tilde{A}_0 = 0, \quad (\text{II.18})$$

où les quantités Z_0 et Z_2 sont données par :

$$Z_0 = \frac{1}{\Delta_s} \left(\mu_c \mu_1 + i \frac{\omega_1}{\gamma_s} \right) \quad (\text{II.19})$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\Delta_s} \mu_c^2. \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II.18) se présente sous la forme d'une équation aux valeurs propres définie localement. Avant toute chose, il serait judicieux de décrire les comportements asymptotiques de celle-ci correspondant aux cas limites $\tilde{r} \rightarrow \infty$ et $\tilde{r} \rightarrow 0$:

- $\tilde{r} \rightarrow \infty$: l'équation (II.18) se réduit à $\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}^2} - Z_2 \tilde{r}^2 \tilde{A}_0 = 0$, soit, $\tilde{A}_0(\tilde{r}) = f(\rho) \exp(-\frac{\rho}{2})$ avec $\rho = \pm \sqrt{Z_2} \tilde{r}^2$.
- $\tilde{r} \rightarrow 0$: (II.18) est équivalente à $\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{A}_0}{d\tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \tilde{A}_0 = 0$, dont les solutions peuvent se mettre sous la forme $\tilde{A}_0(\tilde{r}) \simeq r^s$. On impose alors que les solutions soient bornées à l'origine, ce qui donne $s = l$.

Au regard des précédentes conclusions nous déduisons que les solutions $\tilde{A}_0(\tilde{r})$ peuvent se mettre sous la forme $\tilde{A}_0(\tilde{r}) = \rho^{\frac{l}{2}} f(\rho) \exp(-\frac{\rho}{2})$, où $\rho = \sqrt{Z_2} \tilde{r}^2$. La fonction $f(\rho)$ est

déterminée en reportant l'expression de $\tilde{A}_0(\tilde{r})$ ci-dessus dans (II.18); ce qui nous donne l'équation différentielle ordinaire de Laguerre ci-après :

$$\rho f''(\rho) + (l+1-\rho) f'(\rho) + p f(\rho) = 0, \quad (\text{II.21})$$

avec $p = \frac{1}{4} \left[\frac{\pm Z_0(\omega_1, \mu_1)}{\sqrt{Z_2}} \right] - \frac{1}{2}(l+1)$ et $f(\rho) = L_p^l(\rho)$. Nous sommes donc passés d'un régime d'instabilités locales à une réponse globale du milieu puisque les fonctions propres de notre système correspondent aux modes de Laguerre-Gauss. De plus pour que les solutions soient physiquement acceptables, c'est-à-dire finies à l'origine et aux grandes valeurs de ρ il est nécessaire que p soit entier. Cette condition de solvabilité a pour conséquence de discrétiser ω_1 et μ_1 , qui correspondent alors aux valeurs propres associées aux fonctions propres sous forme de Laguerre-Gauss; ce sont les modes globaux linéaires du système. Ainsi pour chaque couple de valeurs propres $(\omega_{1,pl}, \mu_{1,pl})$ la réponse asymptotique du système à une perturbation localisée sera caractérisée par la fonction propre :

$$\tilde{A}_{0,pl}(\tilde{r}) = A_{pl} \exp\left(-\frac{\sqrt{Z_2}}{2} \tilde{r}^2\right) \left(\sqrt{Z_2} \tilde{r}^2\right)^{\frac{l}{2}} L_p^l\left(\sqrt{Z_2} \tilde{r}^2\right), \quad (\text{II.22})$$

où A_{pl} est une constante arbitraire et $2p+l+1 = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{\sqrt{Z_2}}$, soit :

$$\mu_{1,pl} = (2p+l+1) \sqrt{2\Delta_s} \quad (\text{II.23a})$$

$$\omega_{1,pl} = 0. \quad (\text{II.23b})$$

Il apparaît que la présence d'inhomogénéités dans le profil du pompage entraîne systématiquement une augmentation du seuil d'apparition des instabilités, puisque $\mu_{1,00}$ qui naturellement correspond au mode le plus instable est toujours non nul.

La solution sera désignée par le terme de solution interne à la région du point tournant. L'ultime étape de cette analyse linéaire consiste maintenant à trouver le ou les critères de convergence entre la solution interne (II.12) de l'équation (II.8) caractérisée par la

relation (II.21), et la solution dite externe de l'équation (II.7). On entend par interne la région de l'axe réel comprise entre les deux branches de la figure II.2f (I) et par externe celle de l'axe réel située de part et d'autre de ces mêmes branches (II).

II.2.1.1.2 Convergence asymptotique avec l'approximation de WBK.

Le but de cette démarche est précisément de faire coïncider les modes globaux donnés par la relation (II.21) lorsque $\tilde{r} \rightarrow \infty$, et la solution (II.7) obtenue par l'approximation de WKB quand $r \rightarrow 0$. Autrement dit il faut que la continuité soit assurée lorsqu'on passe de la région (I) à (II) et vice-versa. Ceci se traduit donc par le fait que

$$A(\tilde{r} \rightarrow \infty, t, \phi) \simeq A_{pl} \exp[-i\varepsilon\omega_1 t + il\phi] (Z_2)^{\frac{l}{4} + \frac{p}{2}} \tilde{r}^{2p+l} \exp\left(\pm \frac{\sqrt{Z_2}}{2} \tilde{r}^2\right) \quad (\text{II.24a})$$

$$\text{et } A(r \rightarrow 0, t, \phi) \simeq C \exp[-i\varepsilon\omega_1 t + il\phi] R^{2p+l} \exp\left(\pm \frac{\sqrt{Z_2}}{2} \frac{R^2}{\varepsilon}\right). \quad (\text{II.24b})$$

En tenant compte que $R = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{r}$ dans la relation (II.24b), la convergence asymptotique est obtenue pour :

$$A_{pl} = C \varepsilon^{p+\frac{l}{2}} (Z_2)^{-\frac{1}{2}(p+\frac{l}{2})}. \quad (\text{II.25})$$

Le cas de la symétrie radiale permet de généraliser la démarche présentée ci-dessus, aux cavités avec des miroirs courbes. Cependant, la géométrie rectangulaire, due aux miroirs plans dans la suite, implique l'utilisation des coordonnées cartésiennes, qui est abordée ci-dessous.

II.2.1.1.3 Cas de la symétrie rectangulaire

La démarche est analogue à celle utilisée pour la symétrie cylindrique. Nous avons donc utilisé les développements (II.15) et (II.16). L'équation décrivant l'évolution linéaire des instabilités dans la région du point tournant caractérisée par les variables $\tilde{r}_{x,y}$, tel que

$R_{x,y} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{r}_{x,y}$ est obtenue sous la forme de l'équation aux valeurs propres de Weber :

$$\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}_x^2} + \frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}_y^2} + [Z_0 - Z_2 (\tilde{r}_x^2 + \tilde{r}_y^2)] \tilde{A}_0 = 0, \quad (\text{II.26})$$

Z_0 et Z_2 ont été donné précédemment. Les fonctions propres de cette équation pour lesquelles la convergence asymptotique est vérifiée sont obtenues sous la forme des fonctions de Gauss-Hermite :

$$\tilde{A}_{0,nm} = D_{nm} (-1)^{n+m} H_n \left(Z_2^{\frac{1}{4}} \tilde{r}_x \right) H_m \left(Z_2^{\frac{1}{4}} \tilde{r}_y \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{Z_2}}{2} (\tilde{r}_x^2 + \tilde{r}_y^2) \right), \quad (\text{II.27})$$

n et m étant des entiers positif tel que

$$n + m + 1 = \frac{Z_0}{2\sqrt{Z_2}}. \quad (\text{II.28})$$

Les résultats obtenus ici, généralisent à deux dimensions transverses les travaux antérieurs dans une cavité laser [73] à une dimension transverse. La relation (II.28) se généralise à une et deux dimensions en posant $(2p + d) = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_2}}$, où $p = n + m$ et d le nombre de variables transverses.

Finalement on trouve l'expression du seuil et la fréquence temporelle correspondante pour chaque mode propre d'indice p comme suit :

$$\mu_{0p} = \sqrt{1 + \Delta_s^2} + (2p + d) \frac{\sqrt{a_s \Delta_s}}{w_0} \quad (\text{II.29a})$$

$$\omega_{0p} = 0 \quad \forall p \quad (\text{II.29b})$$

$$k_{0p} = 0 \quad \forall p. \quad (\text{II.29c})$$

A ce stade de notre analyse nous pouvons déduire plusieurs conclusions quant aux conséquences de la prise en compte des inhomogénéités de pompage dans un OPO. Mais avant il serait intéressant de rappeler brièvement les résultats obtenus lorsque l'onde de

pompe incidente est supposée homogène. Dans ce cas l'analyse de stabilité linéaire (section I.2) se traduit par l'existence d'une surface neutre de stabilité marginale dans l'espace $(k_x, k_y, |\mu|)$. Les minima de celle-ci permettant de déduire le seuil d'émission de l'OPO et le nombre d'onde des modes transverses les plus instables. De plus lorsque l'amplitude de la pompe est supérieure à sa valeur critique (seuil d'émission), nous avons montré (section I.2) que tout nombre d'onde compris dans la bande instable Δk est capable de déstabiliser le système.

Par contre nous avons montré ici que la prise en compte du profil Gaussien (et d'une manière générale les inhomogénéités dans les paramètres) du champ de pompe incident transforme le problème de stabilité linéaire en un problème aux valeurs propres. On déduit alors de ces valeurs propres la discrétisation du seuil, la sélection d'un nombre d'onde et d'une fréquence temporelle unique. Ce qui veut dire qu'il n'existe plus de courbe neutre de stabilité marginale. Les fonctions propres du problème donnant alors une réponse globale du système aux excitations locales de la pompe, d'où la dénomination de modes globaux. Ces modes qui s'expriment sous forme de fonctions de Laguerre-Gauss et de Hermite-Gauss selon la symétrie du système, sont à différencier des modes propres de cavité [72] qui sont instables lorsque les miroirs de la cavité sont plans comme dans notre système. Ces modes constituent donc la réponse linéaire du DOPO à une perturbation localisée. Dans cette étude linéaire les effets dus aux mélanges des ondes, générant les non-linéarités dans le milieu ont été négligés. Cependant, ce sont ces non-linéarités qui sont généralement responsables de la saturation de l'amplitude de la solution linéaire. Les mécanismes de cette saturation ayant été décrits dans la section relative aux bifurcations dans le chapitre précédent. Ainsi pour caractériser et décrire la dynamique spatio-temporelle du signal émis par l'OPO il est nécessaire de prendre en compte les non-linéarités : c'est l'objectif de la section suivante.

II.2.1.2 Étude faiblement non linéaire

La méthode que nous allons utiliser est une combinaison de deux techniques. A savoir celle du développement asymptotique et de la méthode dite des échelles multiples, introduite lorsque plusieurs échelles spatiales et/ou temporelles sont en compétition dans le système. L'intérêt de cette méthode est de transformer le problème faiblement non linéaire en une succession de problèmes linéaires. Elle a déjà fait l'objet de plusieurs études dans les OPO pour différents cas de figure [34, 35, 41–43, 48, 74], qui sont entre autre l'écart au seuil, mais aussi la "petitesse" d'un des paramètres du système (detuning, walk-off,...), etc... Cette approche est particulièrement efficace pour décrire la dynamique non-linéaire spatio-temporelle au dessus, mais proche du seuil d'émission du signal. Dans la majorité des cas elle a abouti à l'établissement de modèles simplifiés appelés équations d'amplitude. Les plus connues d'entre elles obtenues pour les OPO sont : les équations de Ginzburg-Landau, qu'elles soient réelles [34] ou complexes [43, 48], (quintique [34, 35] ou cubique [43, 48]), l'équation de Swift-Hohenberg [43, 74, 75] ou encore l'équation de Schrodinger non linéaire [37]. Les cas de figure cités plus haut limitant souvent la validité de ces équations à un domaine fixé de paramètres. Pourtant ceci ne diminue en rien leur importance pour les OPO, en ce sens qu'elles permettent, primo, de caractériser qualitativement les champs émis par celui-ci (seuils, profils, fréquence et longueur d'onde fondamentale, dynamique (stationnaire ou propagative), vitesse de groupe, etc...); secundo, elles placent les OPO dans un cadre universel, du point de vue des mécanismes de formation des structures dans le plan transverse puisqu'on retrouve ces mêmes modèles dans d'autres domaines de la physique (hydrodynamique, physique des plasmas, ...).

A la différence des précédentes études, ce ne sont pas les paramètres que nous allons utiliser pour fixer les échelles spatiales et/ou temporelles mais tout naturellement le degré d'inhomogénéité du pompage. Ce qui nous permettra de mettre en évidence l'impact de cette inhomogénéité sur la dynamique spatio-temporelle. Les détails des calculs, développés pour le cas de la bifurcation super-critique ($1 - \Delta_s \Delta_p > 0$) font l'objet de l'annexe B.1. Ils montrent que la dynamique spatio-temporelle de l'OPO dégénéré au voisinage de

la bifurcation est décrite par l'équation de Ginzburg-Landau réelle :

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} = \mu_c \left[\mu_0 - \mu_c \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \right] A_s + a_s \Delta_s \nabla_{\perp}^2 A_s - N_p A_s^3, \quad (\text{II.30})$$

avec $N_p = \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2}$ et $\tau = \gamma_s t$. μ_0 représente l'amplitude maximale du champ de pompe incident. De façon inhabituelle, nous observons que le terme d'amplification linéaire de l'équation (II.30) est une fonction des variables spatiales transverses. Notons par ailleurs que l'effet de cette dépendance est d'autant plus faible que le rayon de pincement du faisceau de pompe est grand. Ainsi pour le cas limite ($w_0 \rightarrow \infty$) correspondant à un pompage homogène (onde plane) on retrouve l'équation habituelle donnée dans la référence [48]. Cette équation (II.30) est résolue dans la même annexe (B) selon la méthode utilisée dans la référence [73]. Nous partons alors du principe que le mode fondamental ($p = 0$) ayant le seuil le plus bas et donc le taux de croissance le plus élevé de tous, c'est lui qui dominera la dynamique spatio-temporelle des modes globaux au voisinage immédiat du seuil. Par conséquent la projection de (II.30) sur celui-ci permet d'obtenir (pour le cas à deux dimensions transverses), l'évolution temporelle de l'amplitude S du mode fondamental au dessus du seuil d'émission :

$$\frac{dS}{d\tau} = \mu_c (\mu_0 - \mu_{00}) S - \frac{N_p}{2} S^3, \quad (\text{II.31})$$

μ_{00} étant donné par la relation (II.29a) avec $p = 0$. On en déduit l'amplitude maximale que doit atteindre le mode fondamental, et le profil transverse du champ signal émis par le DOPO prend la forme suivante :

$$A_s(x, y) = S_m \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_s^2}\right) \exp\left(-i \frac{\arctan(\Delta_s)}{2}\right) \quad (\text{II.32a})$$

$$\text{avec } S_m = \sqrt{\frac{2E_c(E_0 - E_{00})}{1 - \Delta_s \Delta_p}}, \quad (\text{II.32b})$$

$$\text{et } w_s = \sqrt{2w_0 \sqrt{\frac{a_s \Delta_s}{1 + \Delta_s^2}}}, \quad (\text{II.32c})$$

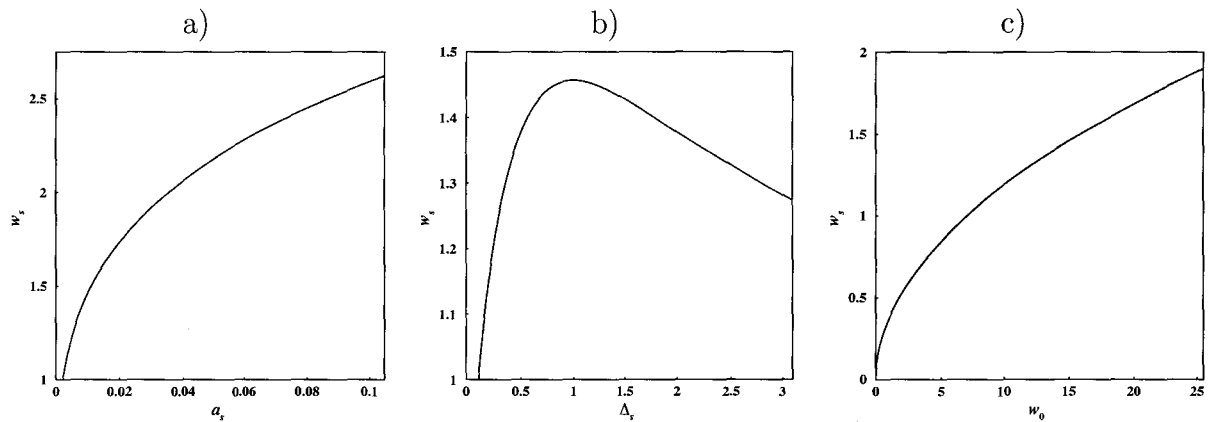


Figure II.3: Représentations graphiques de la demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal (II.32c) en fonction des coefficients de diffraction a_s (a) et de detuning Δ_s (b) et de la taille du champ de pompe incident w_0 (c).

où E_0 et E_{00} représentent respectivement l'amplitude du champ de pompe incident et le seuil du mode fondamental. Comme il fallait s'y attendre, le profil transverse de l'amplitude du champ signal est lui aussi Gaussien. Cependant, les relations (II.32) permettent de déterminer analytiquement les caractéristiques du signal de sortie en fonction de celles du champ de pompe incident. Ces prédictions offrent donc la possibilité de contrôler complètement le signal de sortie à partir de la pompe à l'entrée de l'OPO. En particulier comme le montre la relation (II.32c), la taille (waist) du signal est fixée par celle de la pompe w_0 , son coefficient de diffraction a_s et son detuning Δ_s suivant des lois d'échelles bien déterminées. Les représentations graphiques de ces variations, correspondant aux figures II.3a), b) et c) permettent de mettre en évidence les différents comportements. Ainsi la taille du faisceau signal en sortie du DOPO croît de façon monotone avec celle du champ pompe w_0 , de même qu'avec le coefficient de diffraction a_s . Elle est proportionnelle à la racine carrée de w_0 et à la racine quatrième de a_s . Pour le paramètre de detuning Δ_s on observe deux types de comportements. Une partie croissante de 0 jusqu'en $\Delta_s = 1.00$ où un maximum est atteint puis une partie de décroissance monotone.

II.2.2 Cas du detuning du signal négatif ($\Delta_s < 0$)

Nous avons montré précédemment que pour $\Delta_s < 0$, l'état de base du DOPO est linéairement instable aux structures spatialement modulées dans le plan transverse; on les appelle aussi instabilités modulationnelles. Elles sont caractérisées au seuil ($\mu_c = 1$) par le nombre d'onde critique $k_c = \sqrt{-\Delta_s}$. Au delà du seuil c'est donc une infinité de nombres d'onde compris dans l'intervalle Δk donné par le figure I.3 et centrée en k_c qui sont susceptibles de déstabiliser le système. De ce fait la question de l'effet du pompage inhomogène sur la sélection du nombre d'onde, ou plus généralement son influence sur la phase du signal émis, vient s'ajouter à celle de la réponse du système aux excitations localisées. L'objectif de cette section est donc d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations.

Pour commencer, reprenons la relation de dispersion locale donnée par (II.9). La solution *OPO Off* devient alors instable lorsque $\Im[\omega(k, R)] \geq 0$. Ce qui donne à la bifurcation :

$$1 + (\Delta_s + k^2)^2 - |\mu(R)|^2 = 0. \quad (\text{II.33})$$

Dans la situation physique où les conditions de l'approximation WKB sont remplies, le paramètre de contrôle $\mu(R)$ peut être approximé par le développement suivant :

$$\mu(R) = \mu_0 \left(1 - \frac{R^2}{2} \right) + O(R^3). \quad (\text{II.34})$$

Ainsi pour μ_0 proche du seuil linéaire $\mu_c = 1$, le nombre d'onde $k(R)$ peut être approché par le développement ci-dessous :

$$k^\pm(R) = k_c \pm iK'R + k'_2 R^2 + O(R^3), \quad (\text{II.35a})$$

$$\text{avec } K' = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta_s}} \quad (\text{II.35b})$$

$$\text{et } k'_2 = \frac{1}{8|\Delta_s|^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{II.35c})$$

Seule la solution $k(R) = k^+(R)$ est physiquement acceptable, conduisant à des solutions finies pour $R \rightarrow \pm\infty$. Le nombre d'onde est alors une fonction de la variable d'espace et la phase φ du signal évolue, dans ce cas, suivant le polynôme du troisième degré : $\varphi(R) = k_c R + \frac{k'_c}{3} R^3 + O(R^5)$.

II.2.2.1 Analyse de stabilité linéaire au point tournant

Tout comme pour le cas $\Delta_s > 0$, il existe aussi ici un point tournant double $R^t = 0$. Il apparaît pour les valeurs du paramètre de contrôle $\mu_0^t = \mu_c = 1$, du nombre d'onde $k_0^t = k_c = \sqrt{-\Delta_s}$ et de la fréquence temporelle $\omega_0^t = \omega_c = 0$. La suite du calcul se fait alors de façon analogue à celle du cas $\Delta_s > 0$, et l'évolution linéaire d'une perturbation localisée se réduit à un problème aux valeurs propres que nous mettons aussi sous la forme de l'équation de Weber :

$$\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}_x^2} + \frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}_y^2} + [Z'_0 - Z'_2 (\tilde{r}_x^2 + \tilde{r}_y^2)] \tilde{A}_0 = 0, \quad (\text{II.36})$$

$$\text{avec } Z'_0 = \frac{\mu_1 + i\frac{\omega_1}{\gamma_s}}{2|\Delta_s|} \quad (\text{II.37a})$$

$$\text{et } Z'_2 = \frac{1}{4|\Delta_s|}. \quad (\text{II.37b})$$

Nous déduisons alors les nouvelles expressions du seuil et de la fréquence temporelle due aux inhomogénéités de pompage comme suit :

$$\mu_{0p} = 1 + (2p + d) \frac{\sqrt{2a_s |\Delta_s|}}{w_0} \quad (\text{II.38a})$$

$$\omega_{0p} = 0 \quad \forall p. \quad (\text{II.38b})$$

Les modes propres correspondants étant les fonctions de Gauss-Hermite, le seuil apparaît donc sous forme discrète. Cette discrétisation du seuil soulève une grande interrogation. En effet la bande Δk , des nombres d'onde déstabilisants étant étroitement liée au pa-

ramètre de contrôle, et compte tenu du comportement local du nombre d'onde (II.35a), comment le système va-t-il sélectionner celui qui sera le plus instable, et ce, pour toute une gamme du paramètre de contrôle donnant naissance à un comportement en escalier ? Pour y répondre nous nous sommes inspirés de la démarche utilisée par Dewel et Borckmans dans la référence [76]. Celle-ci consiste à effectuer un double développement du nombre d'onde et du paramètre de contrôle au delà du seuil. On reprend ensuite le calcul précédent, tout en vérifiant la compatibilité des solutions aux différents ordres. Une éventuelle incompatibilité aboutit au rejet de tout un intervalle de valeurs du paramètre de contrôle μ . Cette condition de solvabilité est alors synonyme d'unicité du nombre d'onde sélectionné. Dans notre cas cela revient à considérer que, si l'écart au nombre d'onde critique dû au dépassement du seuil est tel que $k = k_c + q$, le double développement de ce seuil peut alors s'écrire comme suit :

$$\mu(\tilde{r}) = (1 + q\mu^{(1)} + q\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu^{(2)} + \varepsilon\mu_1)(1 - \varepsilon\tilde{r}^2). \quad (\text{II.39})$$

Ainsi après avoir collecté les termes aux ordres q , $q\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et ε on trouve, à l'ordre $O(1)$ que $A_s = A_s^*$. A l'ordre $O(q)$ nous pouvons écrire que $\mu^{(1)} = 2ik_c$, puis à l'ordre $O(q\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ on obtient :

$$\frac{\partial A_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\mu^{(2)}}{2}A_0 = 0. \quad (\text{II.40})$$

Aux ordres $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ et $O(\varepsilon)$ on retrouve les mêmes équations que celles obtenues lors du calcul précédent. Il ressort donc que les équations (II.40) et (II.36) sont incompatibles⁵. De plus la solution de l'équation (II.40) n'est pas physiquement acceptable car non bornée. Ainsi la condition de compatibilité des solutions aux différents ordres du développement imposent que q soit nul ($q = 0$). Nous en déduisons l'unicité du nombre d'onde sélectionné. Ce résultat qui peut paraître surprenant, en comparaison avec les études antérieures de la dynamique des OPO en ondes planes, et même en totale contradiction avec l'expres-

⁵ A_0 ne peut pas satisfaire simultanément les deux équations (II.40) et (II.36).

sion locale donnée en (II.35a), semble générique dès lors que les paramètres physiques présentent une dépendance spatiale. Cette unicité du nombre d'onde s'interprète comme le résultat du raccordement des solutions lorsque la variation d'un des paramètres permet de connecter les différentes régions d'existence de la solution globale, entraînant le verrouillage du nombre d'onde sur la valeur qui permet cette connection. Une situation analogue a été rencontrée dans la référence [77], où les auteurs montrent l'existence d'un nombre d'onde unique pour un système d'équations de Ginzburg-Landau réelles couplées. Ici, si nous identifions les régions de bifurcation aux régions de stabilité de la solution *OPO Off*, il ressort que la variation du paramètre de contrôle relie au point $\mu(r) = 1$, la région stable à la région instable; ce qui engendre un verrouillage sur le nombre d'onde global des oscillations sur celle correspondant au point tournant, où $\mu(r) = \mu^t = 1$.

II.2.2.2 Étude faiblement non-linéaire

La démarche utilisée est la même que celle qui nous a permis d'obtenir les équations aux amplitudes pour le cas $\Delta_s > 0$. Le détail du calcul pour le cas présent est donné dans l'annexe B. Il en résulte que l'évolution spatio-temporelle du signal au dessus du seuil, qui tient compte des effets de saturation est donnée par l'équation de Ginzburg-Landau suivante :

$$\partial_t A_s = \left(\mu_0 - 1 - \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) A_s - 2a_s \Delta_s \Delta_{\perp} A_s - N_n |A_s|^2 A_s, \quad (\text{II.41})$$

avec $N_n = \frac{2}{1+\Delta_p^2} + \frac{1}{1+(\Delta_p-2\Delta_s)^2}$. Cette équation présente la même forme que celle donnée par (II.30), sauf que ici la bifurcation ne peut être que super-critique. Nous en déduisons pour le cas d'une dimension transverse, l'expression du signal émis par le DOPO pour

$\Delta_s < 0$:

$$A_s(x) = S_m \exp\left(-\frac{x^2}{w_s^2}\right) \cos[(k_c + k_2 x^2) x] \quad (\text{II.42a})$$

$$\text{avec } S_m = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}(\mu_0 - \mu_{00})}{N_n}}, \quad (\text{II.42b})$$

$$w_s = \sqrt{2w_0\sqrt{-2a_s\Delta_s}}, \quad (\text{II.42c})$$

$$\text{et } k_2 = \frac{1}{4w_0^2|\Delta_s|^{\frac{3}{2}}\sqrt{a_s}}. \quad (\text{II.42d})$$

La différence notable avec le cas $\Delta_s > 0$ provient de la taille du signal donnée par la relation (II.42c), qui croît de façon monotone avec tous les paramètres de l'OPO (w_0 , a_s et Δ_s). À partir de l'expression du signal donnée par les relations (II.42), la transformée de Fourier nous permet de calculer la largeur à mi-hauteur du signal en champ lointain :

$$\Delta k = \frac{2}{\sqrt{w_0}} \left[\frac{2}{a_s|\Delta_s|} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{II.43})$$

Cette dernière relation montre ainsi que la prise en compte du pompage inhomogène offre un moyen précieux de contrôle sur le spectre du signal.

Afin de discuter de l'opportunité de l'approximation ayant permis l'étude analytique, nous allons confronter les résultats précédents à ceux de l'intégration numérique du modèle global (gouvernant l'OPO). C'est le but de la section suivante.

II.2.3 Simulations numériques et comparaison avec les résultats théoriques

Comme nous l'avons souligné plus haut, la résolution analytique des équations du DOPO avec un champ de pompe incident de profil Gaussien n'a été possible que grâce à l'approximation $\varepsilon \ll 1$. Nous avons développé un code numérique d'intégration des équations de l'OPO en tenant compte de la diffraction et du profil Gaussien du champ de pompe incident. En particulier, les résultats issus de cette intégration peuvent être utilisés

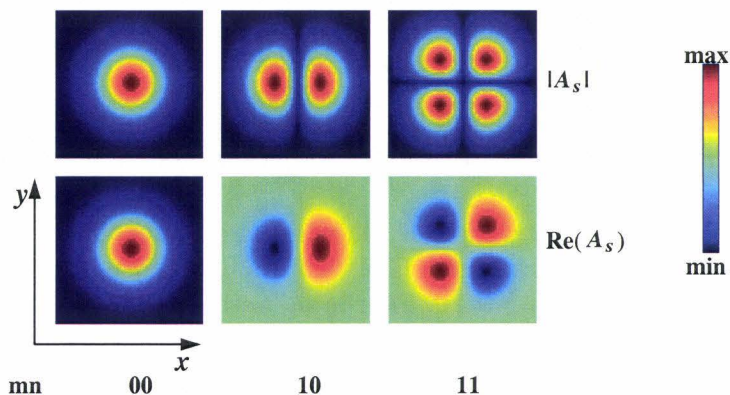


Figure II.4: Modes globaux linéaires issus de l'intégration des équations (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) à deux dimensions transverse (x, y). Les paramètres utilisés sont : $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = 0.10$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 100.00$. Ces modes sont toujours stables après 5000 unités de temps d'intégration avec $E_0 = 1.00565$, 1.00629 et 1.00692 respectivement pour les modes $mn = 00$, 10 et 11 .

comme des tests de validité de notre approximation.

La méthode d'intégration temporelle est basée sur l'algorithme de Range-Kutta d'ordre quatre à pas variable. Les variables spatiales sont définies par l'intermédiaire d'une grille de taille $L_x \times L_y$ décomposée en $N_x \times N_y$ points. Les termes de diffraction caractérisés par le laplacien, de même que la dérive spatiale (walk-off) sont traités dans l'espace de Fourier, indépendamment des termes linéaires (dissipation et désaccord en fréquence) et non linéaires (mélange à trois ondes). Le temps d'intégration est quant à lui normalisé par rapport au taux de relaxation du signal γ_s .

II.2.3.1 Cas $\Delta_s > 0$

Comme nous l'avons révélé lors de l'analyse de stabilité linéaire, les conséquences majeures du profil de pompage Gaussien sont la discrétisation du seuil et l'apparition des modes globaux sous forme de fonctions propres de Gauss-Hermite dans le plan transverse. Toutefois, ce régime linéaire, en dehors duquel les modes globaux d'ordre supérieur ne peuvent être observés, n'est obtenu numériquement que sous certaines conditions. Ces conditions sont remplies pour des rapports ε très petits devant 1 et des coefficients de non-linéarité proches de 1 ($N_p \rightarrow 1$). La première condition permet de réduire les écarts

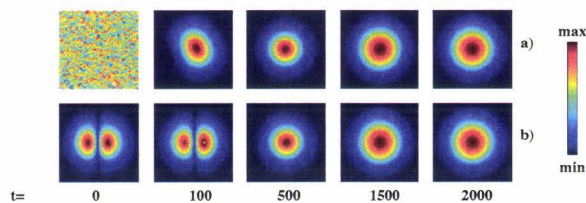


Figure II.5: Évolution à deux dimensions de l'intensité du champ signal dans la section transverse, pour un pompage de profil transverse Gaussien. La figure a) présente la simulation effectuée en démarrant avec un signal aléatoire. Pour la figure b) nous avons pris comme condition initiale une combinaison du mode de Gauss-Hermite d'ordre 1 et du mode fondamental (en faible proportion). Les paramètres utilisés sont : $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = 1.00$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 20.00$, $E_0 = 1.4345$, $L_x = L_y = 9.60$ et $N_x = N_y = 64$.

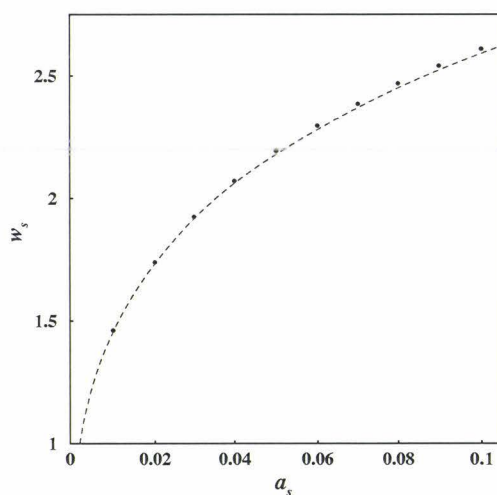


Figure II.6: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de diffraction a_s . Les tirets représentent la variation théorique prévue par la relation (II.32c) pour $\Delta_s = 1.00$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 15.00$. Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

entre les valeurs des prédictions théoriques et celles des simulations numériques, et la deuxième permet de diminuer l'impact des effets de saturation. Ainsi, les simulations numériques effectuées dans ces conditions, ont permis de montrer l'existence des modes globaux sous forme de Gauss-Hermite dans le DOPO. Ces résultats sont résumés par la figure II.4 qui montre les profils à 2D des modes globaux d'ordre 0, 1, et 2, dont les seuils déterminés numériquement concordent avec ceux prédits par le calcul analytique.

Lors de la résolution de l'équation Ginzburg-Landau inhomogène (II.30), nous avons montré que la dynamique spatio-temporelle des modes globaux en régime non-linéaire est

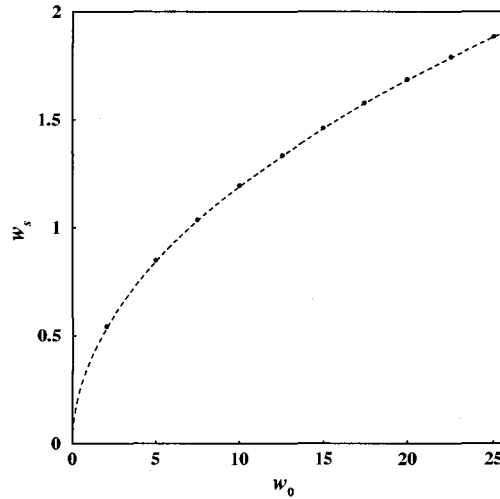


Figure II.7: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction de la taille du champ pompe incident. Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.32c) pour $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = 1.00$, $\Delta_p = 0.00$. Les points proviennent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

dominée par mode fondamental, celui-ci ayant le seuil le plus bas. La première étape des simulations numériques effectuées pour un régime faiblement non-linéaire a donc consisté à vérifier ce résultat. Pour cela nous avons suivi l'évolution du profil du signal de sortie pour différentes conditions initiales. Il s'est agi dans un premier temps d'un signal aléatoire qui symbolise le bruit dans une expérience. Son évolution spatio-temporelle est présentée par la figure (II.5a). Ainsi même en étant au dessus du seuil du mode d'ordre un en x ($E_{01} = 1.434214$) c'est le mode fondamental qui se forme très rapidement.

On aboutit au même profil en prenant cette fois comme condition initiale, le mode d'ordre 1 contaminé avec une très faible proportion du mode fondamental (voir figure II.5b). Ce qui nous permet de confirmer que c'est le mode fondamental qui domine la dynamique spatio-temporelle des modes globaux en régime faiblement non-linéaire.

Nous avons comparé les variations des caractéristiques du champ signal ainsi obtenu par l'intégration numérique, à celles prévues par le calcul analytique. Et comme en témoignent les figures II.6, II.7 et II.8, la dépendance de la taille du signal de sortie vis à vis du coefficient de diffraction, de la taille du champ incident et du paramètre de detuning sont en bon accord avec les résultats numériques.

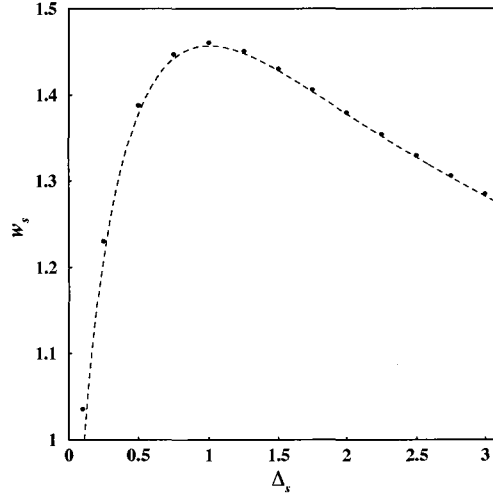


Figure II.8: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de detuning Δ_s . Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.32c) pour $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 15.00$. Les points résultent de l'intégration numérique du modèle original (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

L'accord entre les simulations numériques et les prédictions théoriques est d'autant meilleur qu'on est proche de la bifurcation. Plus on s'éloigne de la bifurcation, plus l'écart entre l'amplitude maximale prévue par la relation (II.32b) et celle issue de la simulation numérique devient important comme le montre la figure II.9. En effet lorsque l'écart au seuil est grand, les effets non linéaires deviennent importants et la dynamique spatio-temporelle ne peut plus être décrite dans le cadre de la théorie faiblement non-linéaire.

II.2.3.2 Cas $\Delta_s < 0$

Mis à part la variation de la taille du signal de sortie du DOPO en fonction du paramètre de detuning Δ_s , toutes les autres caractéristiques du signal présentent les mêmes variations que celles du cas $\Delta_s > 0$. Ainsi comme l'illustrent les figures II.10 et II.11, les croissances monotones de la taille du signal avec des lois d'échelles en puissance $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ prévues par le calcul analytique, en fonction respectivement du paramètre de diffraction et de la taille du champ de pompe incident, sont en bon accord avec le résultat de l'intégration numérique. De plus sur la figure II.10 on constate bien, que plus les inhomogénéités sont importantes, moins l'accord est bon ($w_0 < 20$). En ce qui concerne donc la taille du signal

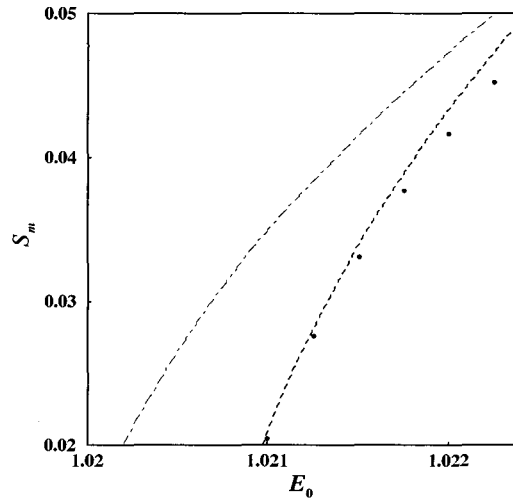


Figure II.9: Évolution de l'amplitude maximale du signal en fonction de celle du champ de pompe incident. La courbe en tirets correspond à la représentation de la relation (II.32b). Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec le champ de pompe $E(x, y)$ donné par (II.5a). Les paramètres utilisés sont : $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = 0.20$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 50.00$. La courbe en pointillés est celle que prévoit le pompage en onde plane.

émis par le DOPO, la différence notable avec le cas traité précédemment ($\Delta_s > 0$), vient du fait que la variation de celle-ci avec le paramètre de detuning est cette fois-ci monotone et ne présente pas d'extremum, comme on peut s'en apercevoir sur la figure II.12 (à comparer à la figure II.8). À noter que le résultat de l'intégration numérique correspondant aux points de la figure II.12, montre une bonne adéquation avec les prédictions (tirets) dans la caractérisation de la taille du signal.

Un autre résultat important contenu dans la relation (II.42a) concerne l'interaction du pompage Gaussien avec des structures possédant un nombre d'onde non nul au point tournant. Cette interaction entraîne un comportement local de celui-ci autour de sa valeur au seuil qui se traduit par une dépendance spatiale de la longueur d'onde critique du signal dès lors que le seuil est dépassé. Pour s'en assurer nous avons intégré numériquement les équations de l'OPO au voisinage du seuil et ce, pour un detuning négatif. Ensuite nous avons représenté sur la même figure (II.13) le résultat analytique et numérique. Les figures (II.13a) et (II.13b) donnant respectivement, dans le plan transverse, le profil du signal et le nombre d'onde correspondant, le nombre d'onde numérique étant

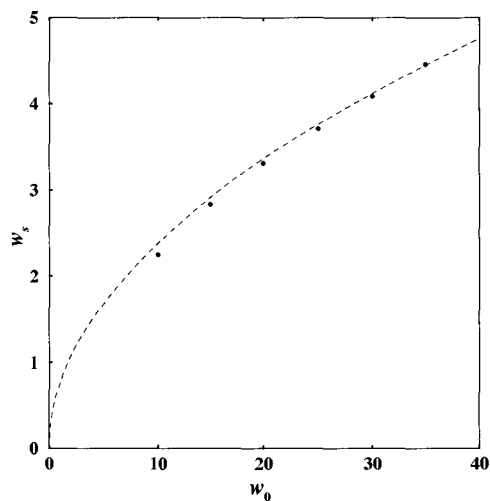


Figure II.10: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du waist du champ incident pour un désaccord en fréquence négatif. Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.42c) pour $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = -0.40$, $\Delta_p = 0.00$. Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

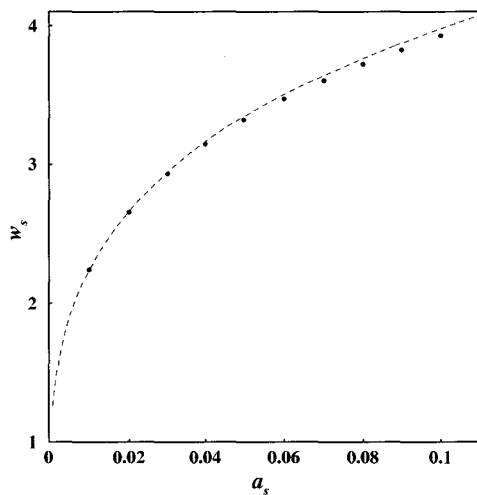


Figure II.11: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de diffraction a_s . Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.42c) pour $\Delta_s = -0.50$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 25.00$. Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

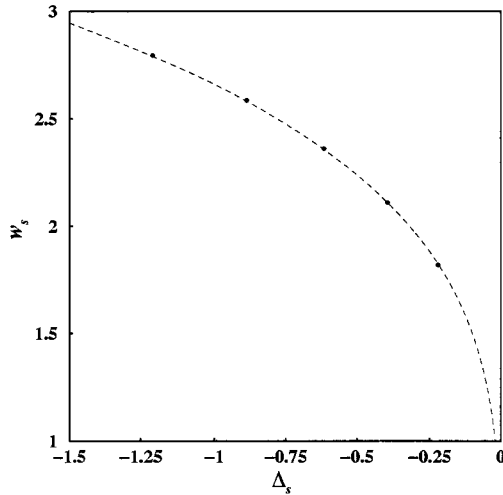


Figure II.12: Demi-largeur à $1/e$ (waist) du signal en fonction du paramètre de detuning Δ_s . Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.42c) pour $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 25.00$. Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

déduit de la transformée de Hilbert du signal. La régression non-linéaire effectuée sur les données de cette courbe donne $(k_c^{num}, k_2^{num}) = (6.19367, 0.02537)$, les valeurs prévues étant $(k_c, k_2) = (6.28318, 0.02525)$. Ainsi pour illustrer l'accord entre les deux résultats, nous avons fait une translation de la courbe numérique de la quantité $\Delta k = k_c - k_c^{num}$, constatant alors que celle-ci et la courbe théorique sont parfaitement superposées. En plus de l'accord satisfaisant entre les deux résultats, la représentation sur la même figure du résultat numérique, correspondant à un pompage en onde plane avec les mêmes paramètres, montre l'influence des inhomogénéités du pompage qui sont à l'origine de l'évolution quadratique du nombre d'onde dans le plan transverse. La dépendance du coefficient quadratique k_2 en fonction des autres paramètres physiques a_s , w_0 et Δ_s , est représentée par les figures (II.14 a), b) et c)) respectivement. Les courbes en tirets correspondent à la représentation graphique de la relation analytique (II.42d); les points sont issus des simulations numériques. On remarquera la bonne concordance des prédictions avec les résultats de l'intégration numérique du modèle originel.

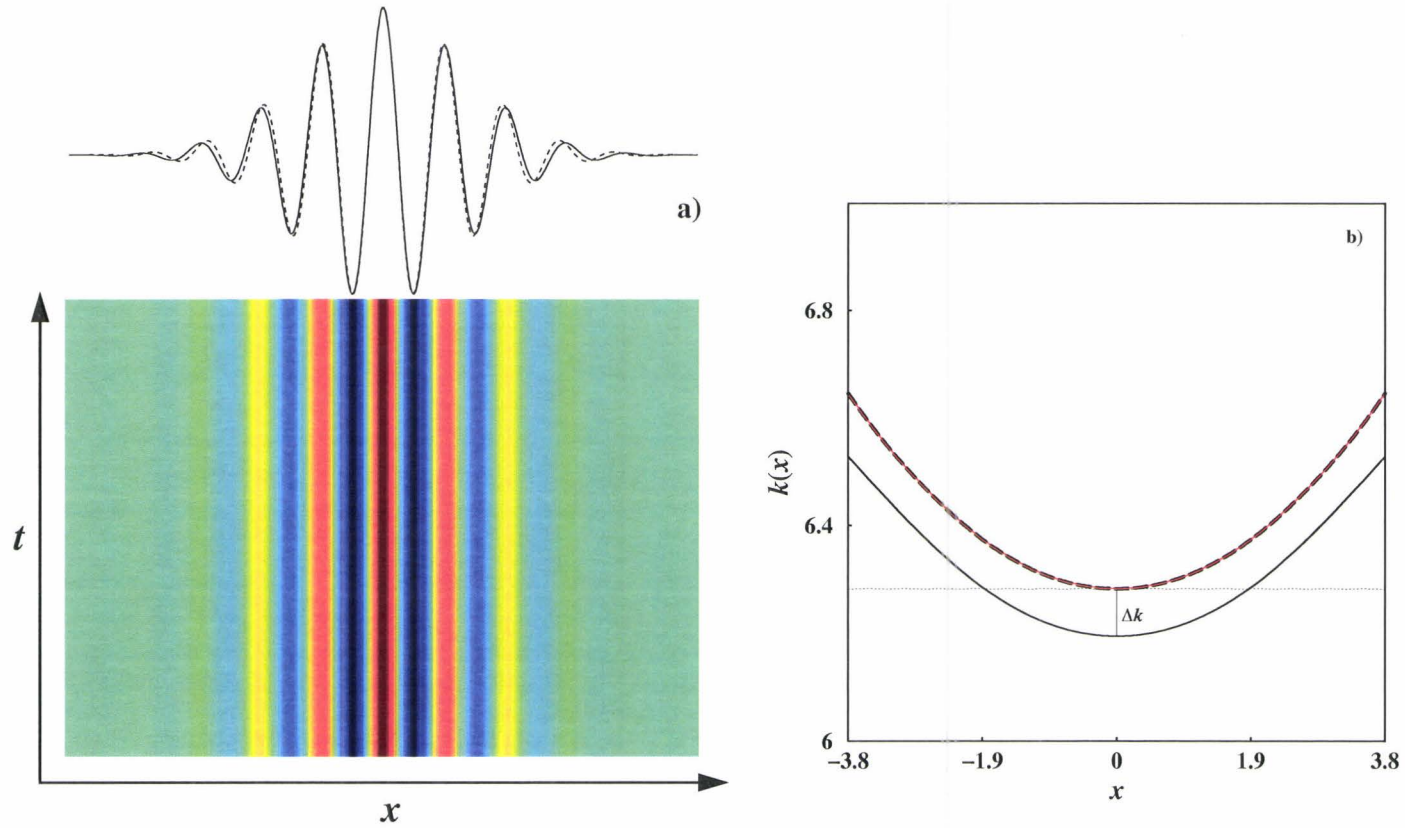


Figure II.13: a) Carte espace-temps du signal donné par l'intégration numérique des équations (I.9). La figure du haut représente le profil asymptotique du signal (trait plein). Les tirets correspondent au signal analytique donné par (II.42a). b) Nombre d'onde local dans le plan transverse. La courbe noire en trait plein représente la dérivée de la phase du signal numérique de a). La courbe rouge est la translation de celle de la quantité Δk . Les paramètres utilisés pour cette simulation sont : $\Delta_s = -0.39$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 20.00$, $a_s = 2a_p = 0.01$ et $E_0 = 1.0046$. Le trait horizontal en pointillés est le résultat de l'intégration numérique avec un pompage plan, et les tirets correspondent à la courbe théorique $k(x) = k_c + k_2 x^2$.

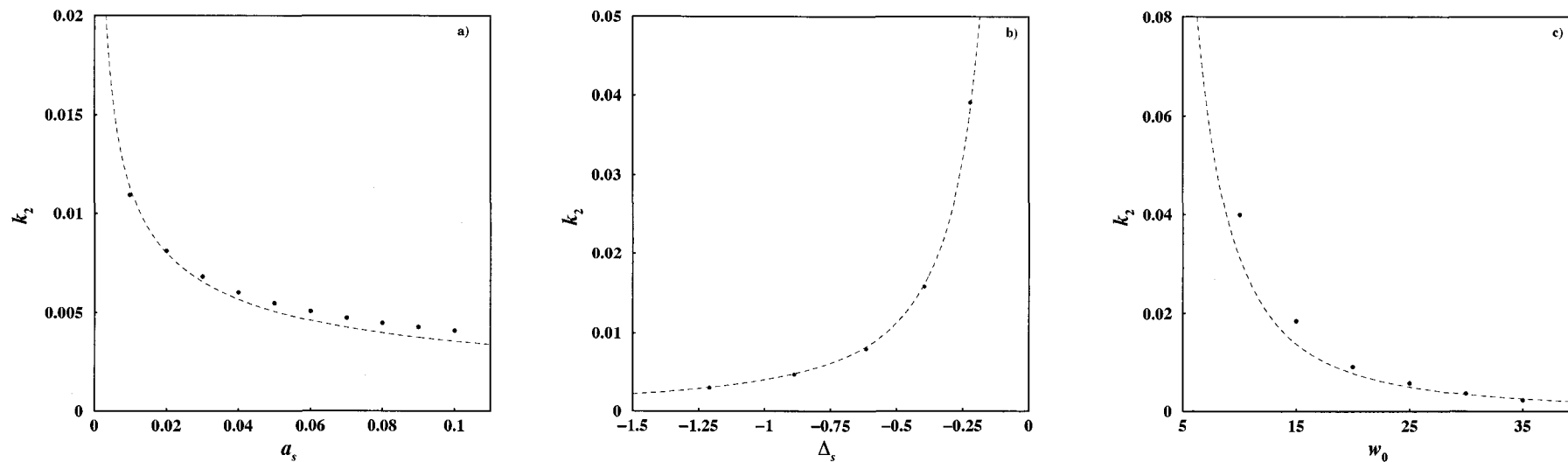


Figure II.14: La variation du coefficient k_2 apparaissant dans la phase du signal avec les paramètres a_s (a), Δ_s (b) et w_0 (c). Les tirets représentent l'évolution théorique prévue par la relation (II.42d). Les paramètres sont $\Delta_s = -0.50$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 25.00$ pour a), $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_p = 0.00$, $w_0 = 25.00$ pour b) et $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_p = 0.00$, $\Delta_s = -0.40$ pour c). Les points résultent de l'intégration numérique du modèle originel (I.9b) sans walk-off ($\alpha_s = 0.00$) avec les mêmes paramètres.

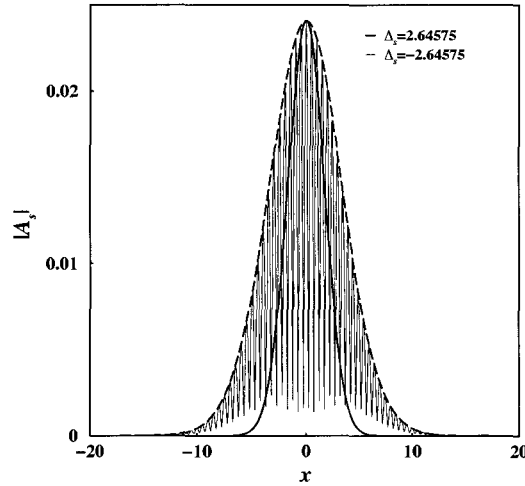


Figure II.15: Profils du signal (issus de l'intégration numérique des équations du DOPO) pour deux valeurs opposées du paramètre de detuning ($|\Delta_s| = \sqrt{7}$). La courbe en trait fin correspond au Δ_s négatif, dont l'enveloppe donnée par la transformation de Hilbert est représentée par la courbe en trait discontinu. Le cas Δ_s positif correspond à la courbe en trait épais. Les autres paramètres sont : $a_s = 2a_p = 0.067$, $w_0 = 20.00$. Les régressions non-linéaires effectuées sur ces courbes donnent $w_s^p = 2.44541$ et $w_s^n = 4.8702$, les prévisions sont : $w_s^p = 2.4403$ et $w_s^n = 4.8806$. Les signaux de sortie sont bien en rapport 1/2 conformément aux prédictions analytiques.

Compte tenu de tout ce qui précède, nous pouvons conclure qu'autour de la résonance ($|\Delta_s| \ll 1$), lorsque tous les autres paramètres sont fixés, plus on s'éloigne de la résonance plus la taille du signal augmente. Nos prédictions analytiques montrent que, proche de la résonance ($|\Delta_s| \ll 1$), cette augmentation suit une loi d'échelle en puissance $\frac{1}{4}$: $w_s \propto |\Delta_s|^{\frac{1}{4}}$. Cependant, le coefficient de proportionnalité du côté "négatif" ($\Delta_s < 0$) est plus grand d'un facteur 2 par rapport au côté "positif" ($\Delta_s > 0$). Le résultat général à retenir et qui est valable dans tous les cas de figure (pour tous les paramètres) est qu'un detuning positif conduit systématiquement à la réduction de la taille transverse du signal de sortie de l'OPO. De sorte que, si l'on fixe la valeur absolue de ce paramètre à $|\Delta_{s,d}| = \sqrt{7}$, le passage de la situation au-delà de la résonance à celle sous-résonante permet de doubler le waist du signal. C'est ce que nous avons illustrés par la figure II.15. Le dernier point à discuter maintenant est la question du domaine de validité des résultats que nous avons obtenus. Si le cas $\Delta_s > 0$ ne nous fourni à priori aucun critère permettant de répondre à cette interrogation, il en est tout autre dans la configuration opposée. En effet, la présence de rouleaux (d'intensité) nous amène à imposer la condition ci-après : on ne pourra considérer

que nous sommes en présence d'un mode global de nombre d'onde central k_c que si la demi-largeur à $1/e$ du champ signal est supérieure ou égale à la longueur d'onde λ_c . Cette condition se traduit par la relation suivante :

$$w_{0,min} = \pi^2 \frac{\sqrt{2a_s}}{|-\Delta_s|^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{II.44})$$

où $w_{0,min}$ représente la valeur du waist du champ incident en dessous de laquelle la condition énoncée plus haut n'est plus vérifiée. La relation (II.44) s'exprime aussi sous la forme :

$$\Delta_{s,max} = -\pi^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2a_s}{w_0^2} \right)^{\frac{1}{3}} = -\pi^{\frac{4}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \quad (\text{II.45})$$

où $\Delta_{s,max}$ est la valeur du paramètre de detuning en dessous de laquelle le profil du signal émis ne peut plus être considéré comme un mode global. Nous avons alors suivi l'évolution du profil du signal, en fixant dans un premier temps tous les paramètres sauf le waist du champ incident. Puis en gardant tous les paramètres constants, excepté l'écart à la résonance du signal. Les résultats obtenus sont consignés dans la figure II.16. On constate dans les deux cas que les ordres de grandeur donnés par les relations (II.44) et (II.45) sont globalement respectés. En effet comme le montrent les figures II.16-1c et 2c, selon le cas, en-dessous de 75% de la valeur limite, le profil du signal n'est plus gaussien. Si pour le cas de la figure II.16-1c ce résultat n'est pas très surprenant, car le rapport $\varepsilon = \frac{\sqrt{2a_s}}{w_0}$ ne peut manifestement plus être supposé petit devant l'unité, le cas correspondant à II.16-2c suscite quant à lui quelques interrogations. Ce comportement peut s'expliquer par le fait que pour les faibles valeurs du paramètre de detuning, l'évolution spatio-temporelle du signal est décrite à l'aide de l'équation de Swift-Hohenberg [74, 75]. La particularité de cette équation vient du fait qu'elle fait intervenir en plus de la dérivée d'ordre deux, une dérivée d'ordre 4. La dynamique spatio-temporelle de l'OPO est alors dominée par des fronts [47, 74], dont l'interaction avec les inhomogénéités de pompage se situe hors du cadre de cette étude.

L'étude effectuée dans cette section concerne les OPO sans walk-off. La question qui

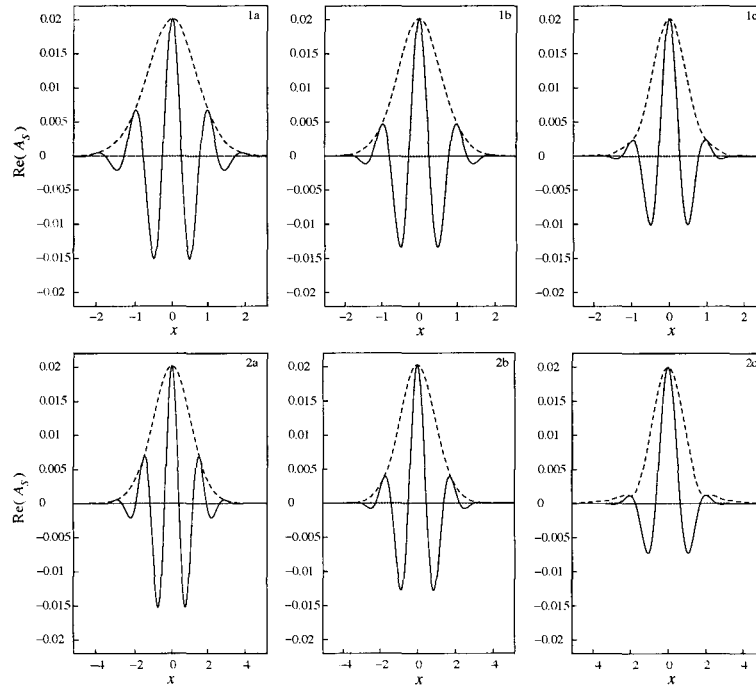


Figure II.16: profils du signal (issus de l'intégration numérique des équations du DOPO) pour différentes valeurs de la taille du champ incident (1a - $w_0 = w_{0,min}$, 1b - $w_0 = \frac{3}{4}w_{0,min}$ et 1c - $w_0 = \frac{w_{0,min}}{2}$), avec $a_s = 2a_p = 0.01$, $\Delta_s = -0.39$ et $\Delta_p = 0.00$. 2a, 2b et 2c représentent respectivement les profils obtenus pour $\Delta_s = \Delta_{s,max}$, $\frac{3}{4}\Delta_s$ et $\frac{\Delta_{s,max}}{2}$; les autres paramètres étant identiques à ceux donnés précédemment sauf $w_0 = 20.00$. Pour toutes les figures, les tirets correspondent à l'enveloppe donnée par la transformation de Hilbert.

se pose maintenant est de savoir comment les modes globaux obtenus ici, se comportent lorsque les effets du walk-off ne sont plus négligeables. La section suivante est ainsi consacrée à l'étude de la dynamique spatio-temporelle des modes globaux dans des OPO en présence du walk-off.

II.3 Modes globaux et walk-off dans un DOPO

Divers effets peuvent apparaître en présence de la double réfraction dans un OPO, de la brisure de la symétrie $x \rightarrow -x$ dans le plan transverse à l'abaissement du seuil, en passant par des régimes d'instabilité convectives. Pour l'OPO non dégénéré, il a été

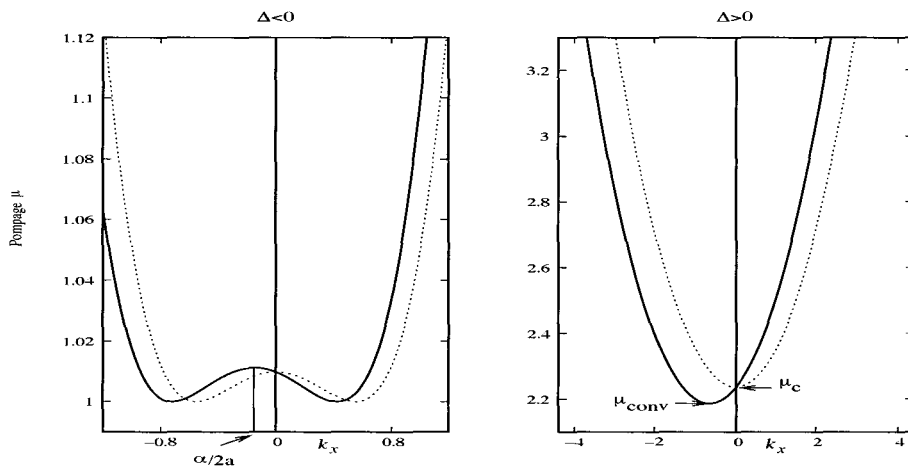


Figure II.17: Courbes neutres de stabilité marginale pour un OPO non dégénéré avec walk-off (trait plein) . La courbe de gauche correspond au cas $\Delta < 0$ et celle de droite au cas opposé. Les courbes en pointillés représentent le cas sans walk-off [cf. [48] et [78]].

montré que la brisure de symétrie est caractérisée par [48, 78] la quantité $\frac{\alpha}{a}$ avec

$$\alpha = \alpha_s \gamma_s - \alpha_i \gamma_i \quad (\text{II.46a})$$

$$a = a_s \gamma_s + a_i \gamma_i. \quad (\text{II.46b})$$

Comme l'illustre la figure II.17, cette brisure de symétrie s'accompagne ($\Delta_s > 0$) ou pas ($\Delta_s < 0$) d'un abaissement du seuil. Le système passe alors de la classe⁶ I_A à la classe I_C . Lorsqu'on se trouve dans le cas dégénéré avec walk-off, la grandeur α s'annule. En conséquence il n'y a plus ni brisure de symétrie, ni abaissement du seuil. Il ne reste que les effets purement propagatifs, qui vont entraîner l'existence d'un domaine d'instabilité convective dans le système. L'étude linéaire détaillée de ces instabilités a déjà été présentée dans la section I.2.3. Nous pouvons donc dire qu'en cas de dégénérescence, la présence du walk-off entraîne un changement de la classe du système, le faisant passer de la classe I_A à la classe I_C . Ceci signifie que les instabilités qui apparaissent au seuil possèdent une vitesse d'advection proportionnelle à α_s (cf. Eqs. I.33c, I.34c ou Tab. I.3). Il en résulte une perte du recouvrement entre les champs en interaction au cours de la propagation.

⁶On peut classer les systèmes selon la nature de l'instabilité au seuil. La classe I_A correspond aux systèmes qui passent directement de l'état stable à l'état absolument instable. Les systèmes de la classe I_C passent quant à eux par un régime convectif avant d'atteindre le régime de stabilité absolue.

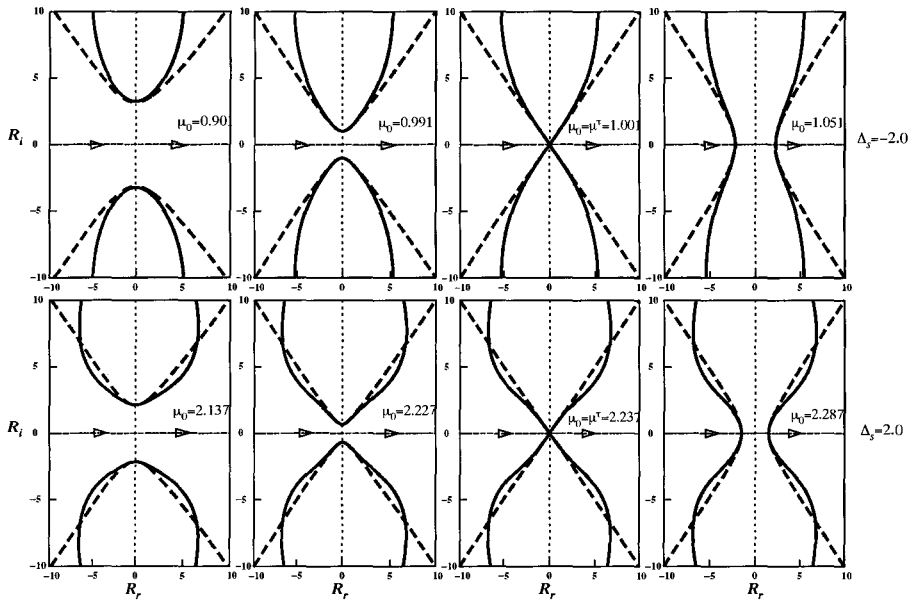


Figure II.18: Contour $\Im[\omega_0(R)] = 0$ dans le plan complexe R ($R_r \equiv \Re(R)$, $R_i \equiv \Im(R)$) pour différentes valeurs du couple de paramètres (Δ_s, μ_0) . La courbe en trait plein correspond au contour donné par la relation de dispersion exacte (II.47) et celle en tirets à la relation de dispersion approchée (II.49). Le trait mixte portant les flèches représente le contour d'intégration (réel dans le cas présent).

Les effets spatiaux de cette dérive entrent alors en compétition avec ceux du pompage si celui-ci est non uniforme dans le plan transverse. Le but de cette partie est alors de comprendre tant qualitativement que de façon quantitative, les conséquences de cette compétition sur la dynamique du DOPO. D'une manière générale, nous devons avant toute chose déterminer la nature du point tournant (simple ou double). En effet, tenant compte de la double réfraction, la relation locale de dispersion est donnée par :

$$\frac{\omega(k, R)}{\gamma_s} = i \left[-1 + \sqrt{|\mu(R)|^2 - (\Delta_s + k^2)^2} \right] + \alpha k_x. \quad (\text{II.47})$$

Les conditions $\partial_k \omega(k, R)|_{k_0} = 0$ et $\omega_0^i(R) = \Im\{\omega(k_0, R)\} = 0$ que doit satisfaire le point tournant, n'expriment rien d'autre qu'en ce point le système doit être au seuil absolu, compte tenu des relations (I.27) et (I.28). Les instabilités y sont alors unidimensionnelles et k_x peut donc être assimilé à k . Par l'application de la condition du point selle, nous sommes confrontés à la même difficulté que pour le cas homogène, à savoir qu'il n'y a pas de solution simple au problème. De plus, à cause de la dépendance spatiale de ω [Eq.

	$\Delta_s < 0$	$\Delta_s > 0$
$\lambda(r)$	$\mu_c \left[\mu_0 - \mu_c \left(1 + \frac{(\varepsilon r)^2}{2} \right) \right]$	$\mu_c \left[\mu_0 - \mu_c \left(1 + \frac{(\varepsilon r)^2}{2} \right) \right]$
d	$-2\Delta_s$	Δ_s
β_r	$\frac{2}{1+\Delta_p^2} + \frac{1+(\Delta_p-2\Delta_s)^2 + \left(\frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2}{\left[1+(\Delta_p-2\Delta_s-\frac{2\omega_c}{\gamma_p})^2\right] \left[1+(\Delta_p-2\Delta_s+\frac{2\omega_c}{\gamma_p})^2\right]}$	$\frac{1-\Delta_s\Delta_p}{1+\Delta_p^2}$
β_i	$\frac{2\omega_c}{\gamma_p} \frac{(\Delta_p-2\Delta_s)^2 - 1 - \left(\frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2}{\left[1+(\Delta_p-2\Delta_s-\frac{2\omega_c}{\gamma_p})^2\right] \left[1+(\Delta_p-2\Delta_s+\frac{2\omega_c}{\gamma_p})^2\right]}$	0

Tableau II.1: Tableau récapitulatif des coefficients de (II.48) suivant le signe de Δ_s . μ_c étant le seuil convectif correspondant au cas considéré.

(II.47)], la méthode du développement en série de Taylor n'est plus applicable. Partant du constat que la partie linéaire des équations non homogènes (II.30) et (II.41) permet de retrouver tous les résultats obtenus à partir des équations originelles (I.9) linéarisées, nous estimons que la dérivation de l'équation d'amplitudes est une méthode satisfaisante pour contourner la difficulté que représente la résolution directe de l'équation $\partial_k \omega(k, R)|_{k_0} = 0$. Tous les détails liés à la détermination de ces équations d'amplitudes sont donnés dans l'annexe C. La forme générale de ces équations dans les deux cas $\Delta_s > 0$ et $\Delta_s < 0$ reste celle de l'équation à coefficients non homogènes de Ginzburg-Landau :

$$\partial_r A_0 = \lambda(r) A_0 + d \partial_r^2 A_0 - \alpha \partial_r A_0 - (\beta_r + i\beta_i) |A_0|^2 A_0, \quad (\text{II.48})$$

dont les coefficients dépendent du signe de Δ_s et sont donnés par le tableau (II.1). r et α sont respectivement la coordonnée transverse et le paramètre de walk-off normalisés, introduits précédemment comme $r = \frac{x}{\sqrt{a_s}}$ et $\alpha = \frac{\alpha_s}{\sqrt{a_s}}$. A_0 est relié à A_s par la relation suivante : $A_s = A_0 e^{i(k_c x - \omega_c t)} + A_0^* e^{-i(k_c x - \omega_c t)}$, avec $(k_c, \omega_c) = \left(\sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}, -\gamma_s \alpha_s k_c \right)$ si $\Delta_s < 0$ et $(k_c, \omega_c) = (0, 0)$ si $\Delta_s > 0$.

Donc en régime linéaire, la relation de dispersion issue de (II.48) est, dans ce contexte, une expression approchée de (II.47). Elle s'écrit :

$$\frac{\omega(k, R = \varepsilon r)}{\gamma_s} = \lambda(R) - dk^2 - i\alpha_s k. \quad (\text{II.49})$$

Le point $R^t = 0$ est alors un point tournant double avec les caractéristiques suivantes :

$$\mu^t = \mu_c + \frac{\alpha^2}{4\mu_c d}, \quad (\text{II.50a})$$

$$k^t = -i\frac{\alpha}{2d}, \quad (\text{II.50b})$$

$$\text{et } \omega^t = 0. \quad (\text{II.50c})$$

La vérification de la condition de pincement dans le plan complexe R , à partir de la relation de dispersion exacte est résumée par la figure (II.18). Celle-ci confirme que le point $R = 0$ est bien un point tournant double, et, au voisinage de ce dernier (c'est la région qui nous intéresse), nous constatons que la relation de dispersion (II.49) est une approximation satisfaisante pour l'OPO. Nous gardons alors la variable $\tilde{r} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}R$ introduite plus tôt pour l'analyse de stabilité dans la région du point tournant. De même, on introduira dans l'équation (II.48) les développements suivants :

$$\begin{aligned} A_0 &= \left[A + \varepsilon^{\frac{1}{2}}A_1 + O(\varepsilon) \right] \exp(-i\omega\tau) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\tilde{r}} k_a d\tilde{r}'\right) \\ &= \left[A + \varepsilon^{\frac{1}{2}}A_1 + O(\varepsilon) \right] \exp(-i\omega\tau) \exp\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}2d}\tilde{r}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.51a})$$

$$\omega = \omega^t + \varepsilon\omega_1 = \varepsilon\omega_1, \quad (\text{II.51b})$$

$$\mu_0 = \mu^t + \varepsilon\mu_1. \quad (\text{II.51c})$$

L'ordre dominant en ε donne alors l'équation régissant l'évolution de l'enveloppe du signal généré par le DOPO, sous la forme de l'équation de Weber avec les coefficients $Z_0 = \frac{i\omega_1 + \mu_c\mu_1}{d}$ et $Z_2 = \frac{\mu_c^2}{2d}$. Les conditions d'existence des fonctions et valeurs propres de cette équation ont déjà été discutées au cours des sections précédentes. Celles-ci donnent $\mu_{1p} = (2p+1)\sqrt{\frac{d}{2}}$ et $\omega_{1p} = 0$, soit :

$$\mu_{0p} = \mu^t + (2p+1)\frac{\sqrt{a_s d}}{w_0} \quad p \in \mathbb{N}, \quad (\text{II.52a})$$

$$\text{et } \omega_{cp} = 0 \quad \forall p. \quad (\text{II.52b})$$

	$\Delta_s < 0$	$\Delta_s > 0$
S_0^{wo}	$2\sqrt{\frac{\mu_c(\mu_0 - \mu_{00})}{R\beta_r}}$	$\sqrt{\frac{\mu_c(\mu_0 - \mu_{00})}{R\beta_r}}$
R	$\frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\left(\frac{w_s \alpha_s}{4a_s d}\right)^2\right)$	
σ	$\frac{\alpha_s}{2da_s}$	
w_s	$\sqrt{2w_0 \frac{\sqrt{a_s d}}{\mu_c}}$	
ϕ	0	$-\frac{1}{2} \arctan(\Delta_s)$
k_c	$\sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}$	0

Tableau II.2: Tableau récapitulatif des paramètres de l'enveloppe du signal (II.53a) suivant le signe de Δ_s . μ_0 étant l'amplitude du champ incident et μ_{00} le seuil du mode fondamental.

Pour finaliser la caractérisation du signal, l'équation complète (II.48) sera résolue suivant la méthode donnée en annexe B.1. Ce qui donne :

$$A_s(x) = S_0^{wo} \exp\left(\sigma x - \frac{x^2}{w_s^2}\right) \cos(k_c x) \exp(i\phi) \quad (\text{II.53a})$$

dont les expressions des paramètres S_0^{wo} , σ , w_s , k_c et ϕ sont données par le tableau II.2.

La relation (II.53a) peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$A_s(x) = S_0^{wo} \exp\left[\left(\frac{\sigma w_s^2}{2}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma w_s^2}{2}\right)^2}{w_s^2}\right] \cos(k_c x) \exp(i\phi) \quad (\text{II.53b})$$

$$\text{soit } A_s(x) = S_m^{wo} \exp\left[-\frac{(x - x_p)^2}{w_s^2}\right] \cos(k_c x) \exp(i\phi), \quad (\text{II.53c})$$

avec $S_m^{wo} = S_0^{wo} \exp(x_p^2)$. Le pic de l'enveloppe Gaussienne du signal (qui représente aussi la position du *centre de masse* de celle-ci) est alors déplacé par rapport à celui du champ de pompe incident de :

$$x_p = \frac{\sigma w_s^2}{2} = \frac{\alpha_s w_0}{2\mu_c \sqrt{a_s d}} = \frac{\alpha_s}{2\mu_c \mu_{10}}, \quad (\text{II.54})$$

μ_{10} étant la correction au seuil "homogène" pour le mode fondamental. Cette position est unique et dépend de la direction de la dérive (ou walk-off ; α_s). Ceci implique qu'en présence

	$\Delta_s = -0.50$		$\Delta_s = 0.50$	
	<i>anal.</i>	<i>num.</i>	<i>anal.</i>	<i>num.</i>
w_s (u.a)	4.606	4.600 ± 0.050	3.663	3.666 ± 0.050
x_p (u.a)	2.652	2.650 ± 0.05	3.354	3.350 ± 0.050

Tableau II.3: Tableau comparatif de quelques caractéristiques (taille et position de piégeage) du signal donné par les diagrammes spatio-temporels de la figure II.19 (*num.*) et des valeurs prévues par le calcul analytique (*anal.*) (voir tableau II.2). L'incertitude sur les valeurs numériques provient de l'erreur induite par la discrétisation de la grille.

du walk-off le maximum de l'enveloppe du signal sera déplacé d'au moins la quantité x_p , qui sera d'autant plus grande que la taille de la pompe est grande. De plus, en ce point on a $\mu(x_p) = \mu_0 \exp\left(-\frac{\alpha_s^2}{4da_s\mu_c^2}\right) = \mu_0 \exp\left[-\frac{\mu_a - \mu_c}{\mu_c}\right]$; cela veut dire que la mesure de la position du maximum de l'amplitude du signal peut permettre de déterminer de façon assez précise certains paramètres intrinsèques du système. En effet la connaissance de cette position peut permettre de déduire la valeur du coefficient de diffraction, de walk-off ou encore du detuning, si les valeurs de deux de ces coefficients sont connues à l'avance.

Enfin, pour vérifier la validité des résultats obtenus par le calcul analytique, nous avons intégré le modèle originel (I.9) de l'OPO dégénéré. Pour cela, dans chacun des cas $\Delta_s < 0$ et $\Delta_s > 0$ nous avons suivi l'évolution spatiale et/ou temporelle des différentes caractéristiques (taille, amplitude et position) du signal émis au seuil. Le signal de départ étant une Gaussienne localisée à l'opposé de la position de piégeage prévue analytiquement. La position du *centre de masse* de l'enveloppe du champ signal, de même que sa taille et son amplitude convergent alors vers les valeurs prédites par les relations (II.53). La figure II.19 qui présente les diagrammes "espace-temps" du signal permet d'illustrer de façon qualitative l'évolution spatio-temporelle de la position du *centre de masse* $x_0(t)$ jusqu'à la position de piégeage x_p . Du point de vu quantitatif l'accord entre les résultats numérique et analytique est lui aussi très satisfaisant comme le montre le tableau (II.3) qui compare les caractéristiques (taille et position de piégeage) du signal issues des deux résultats pour différentes valeurs du detuning.

Bien entendu, ces résultats ne sont rigoureusement valables qu'au seuil. Il se pose alors

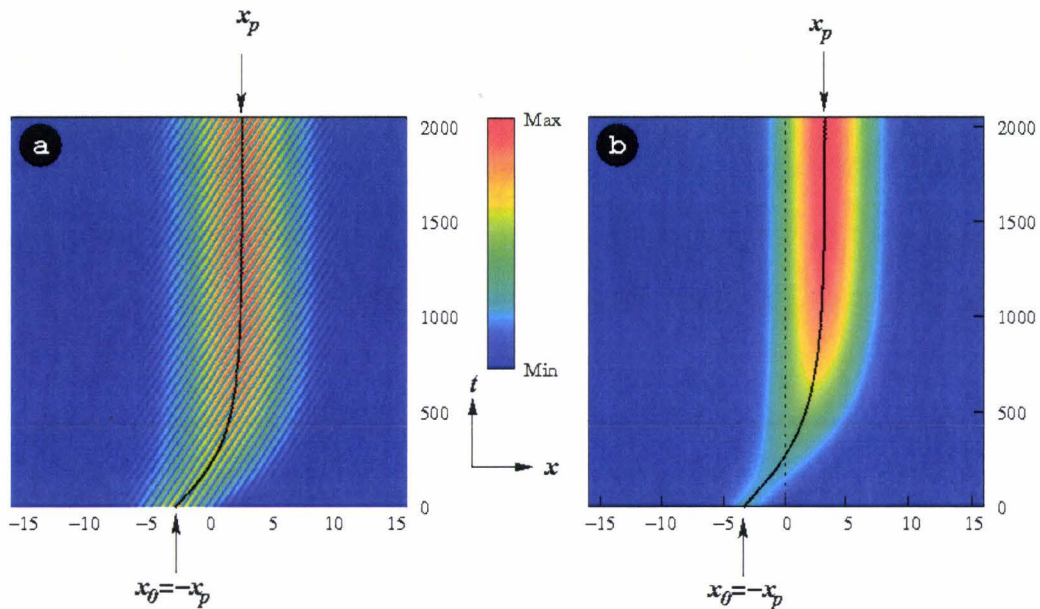


Figure II.19: Diagrammes spatio-temporels du signal (numérique) émis par le DOPO. Le trait continu repère la position du *centre de masse* de l'enveloppe (maximum de l'amplitude) du champ signal; x_0 est la position de initiale de celle-ci. Les paramètres utilisés pour la simulation sont : $a_s = 2a_p = 0.02$, $w_0 = 75.00$, $\Delta_p = 0.00$, $\alpha_s = 0.01$, avec $\mu_0 = 1.003$ et $\Delta_s = -0.500$ pour (a) et $\mu_0 = 1.122$ et $\Delta_s = 0.500$ pour (b).

la question du comportement dynamique de ces caractéristiques, notamment de la position de piégeage du signal au delà du seuil. Pour traiter cette question, nous avons fait appel à la méthode dite des coordonnées collectives. La section suivante est alors consacrée à l'application de cette méthode au DOPO à travers l'équation d'amplitude (II.48).

II.3.1 Application de la méthode des coordonnées collectives

L'objectif de la méthode des coordonnées collectives est d'obtenir l'évolution temporelle du profil d'une solution du système réputée robuste spatialement. L'idée est alors de restreindre l'analyse non-linéaire du système à une famille $A_0(x, q_1(\tau) \dots q_n(\tau); \tau)$ de solutions connues du système de sorte que pour A_0 fixé, sa dynamique soit contenue dans les fonctions $q_n(\tau)$. Une fois la solution test obtenue, la démarche consiste alors à résoudre les équations de Euler-Lagrange afin de déduire les évolutions temporelles de chacun des paramètres $q_n(\tau)$. Concrètement il s'agit dans notre cas, d'assimiler la dynamique de l'enveloppe lentement variable du signal décrite par l'équation (II.48), à la dynamique de son

amplitude et de la position de cette amplitude dans le plan transverse.

La mise en oeuvre de cette méthode nécessite alors la connaissance de la solution test A_0 de (II.48) et de la densité d'énergie libre du système. Pour cela, nous effectuons le changement suivant : $A_0 = \exp\left(\frac{\alpha_s}{2d_0}x - i\Omega\tau\right)\phi$ avec $d_0 = a_s d$ et $\Omega = \beta_i \phi^2$. Ainsi l'équation (II.48) se transforme en l'équation variationnelle ci-après :

$$\partial_\tau \phi = \left(\lambda(x) - \frac{\alpha_s^2}{4d_0}\right)\phi + d_0 \partial_x^2 \phi - \beta_r e^{\frac{\alpha_s}{2d_0}x} \phi^3. \quad (\text{II.55})$$

Au regard de la section précédente, nous pouvons considérer que l'enveloppe de la solution $A_s(x, \tau)$ peut s'écrire en variables séparées. À savoir $\phi(x, \tau) = B(\tau) f(x)$, avec $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_s^2}\right)$ qui doit satisfaire à la condition de normalisation suivante $\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx = 1$. Pour cela nous introduisons dans (II.55) la variable transverse normalisée $X = \frac{x}{d_n}$ où $d_n = w_s \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Finalement nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \phi &= \left(\lambda(X) - \frac{\alpha_s^2}{4d_0}\right)\phi + D \partial_X^2 \phi - \beta_r e^{\alpha_s \frac{d_n}{d_0} X} \phi^3, \\ \text{soit } \partial_\tau \phi &= -\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_X} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

avec $D = \frac{d_0}{d_n^2}$ et $F = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\phi, \phi_X) dX$ où

$$\mathcal{F}(\phi, \phi_X) = \frac{1}{2} \left[D \phi_X^2 - \left(\lambda(X) - \frac{\alpha_s^2}{4d_0}\right) \phi^2 + \frac{\beta_r}{2} e^{\alpha_s \frac{d_n}{d_0} X} \phi^4 \right]. \quad (\text{II.57})$$

L'analyse de la dynamique du signal à travers celle de l'amplitude et de la position du maximum de celle-ci est introduite comme suit : $\phi = B(\tau) f(X - P(\tau))$. $B(\tau)$ et $P(\tau)$ sont respectivement l'amplitude et la position⁷ du *centre de masse* de l'enveloppe. La variation de l'énergie libre du système relativement aux variables conjuguées B et P est

⁷Il s'agit en réalité de l'écart à la position x_p déterminée précédemment. En effet les différents changements introduits plus haut donnent $A_0 = B(\tau) e^{-i\Omega\tau} \exp\left(\frac{\alpha_s}{2d_0}x - \frac{x^2}{w_s^2}\right)$. Ce qui implique que le *centre de masse* de l'enveloppe du signal est initialement en $x = \frac{\alpha_s w_s^2}{4d_0} = x_p$.

alors donnée par les relations suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial P} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial P} dX \quad (\text{II.58a})$$

$$\text{et } \frac{\partial F}{\partial B} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial B} dX, \quad (\text{II.58b})$$

la fonction de F étant donnée par

$$F = \frac{1}{2} \left(Dc_1 + \frac{\alpha_s^2}{4d_0} - W(P) \right) B^2 + \beta_r \frac{c_2}{4} B^4 e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n P},$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_X f(X)]^2 dX = \frac{\pi}{2}, \\ c_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n X} f(X)^4 dX = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_s d_n}{2d_0} \right)^2}, \\ W(P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(X+P) f(X)^2 dX. \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Nous déduisons alors des relations (II.58) les équations d'évolution temporelles de P et B :

$$c_1 \frac{dP}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dP} - \beta_r c_2 \frac{\alpha_s d_n}{2d} B^2 e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n P} \right) \quad (\text{II.60a})$$

$$\frac{dB}{d\tau} = -B \left(Dc_1 + \frac{\alpha_s^2}{4d_0} - W(P) + \beta_r c_2 B^2 e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n P} \right). \quad (\text{II.60b})$$

L'amplitude et le *centre de masse* de l'enveloppe du signal vont alors correspondre aux solutions stationnaires P_0 et B_0 des équations (II.60). Celles-ci sont données par les systèmes d'équations suivants :

$$B = 0 \quad (\text{II.61})$$

$$\frac{dW}{dP} = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \beta_r c_2 B^2 e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n P} &= Dc_1 + \frac{\alpha_s^2}{4d_0} - W(P) \\ \frac{dW}{dP} &= \frac{\alpha_s d_n}{2d} \beta_r c_2 B^2 e^{\frac{\alpha_s}{d} d_n P}. \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Le système (II.61) correspond à la solution triviale *OPO Off*. Elle ne sera donc pas considérée dans la suite. Nous déduisons des équations (II.62), l'équation que doit vérifier la position P du *centre de masse* à l'état stationnaire comme suit :

$$\frac{dW}{dP} + \frac{\alpha_s d_n}{2d} \left(Dc_1 + \frac{\alpha_s^2}{4d_0} - W(P) \right) = 0. \quad (\text{II.63})$$

Ainsi à partir de l'expression de λ donnée par le tableau (II.1), nous obtenons après calcul la fonction $W(P)$ sous la forme :

$$W(P) = \lambda_0 - \lambda_1 (P^2 + c_3), \quad (\text{II.64})$$

où $\lambda_0 = \mu_c(\mu_0 - \mu_c)$, $\lambda_1 = \left(\mu_c \frac{d_n}{w_0} \right)^2$ et $c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(X)^2 dX = \frac{1}{2\pi}$. L'expression de $W(P)$ ainsi obtenue est alors reportée dans l'équation (II.63) et le problème résultant admet comme solution :

$$P_0^\pm = \frac{2d_0}{\alpha_s d_n} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_s d_n}{2d_0} \right)^2 \frac{\lambda_0 - Dc_1 - \frac{\alpha_s^2}{4d_0} - \lambda_1 c_3}{\lambda_1}} \right] \quad (\text{II.65})$$

Ces solutions P_0^\pm peuvent alors se mettre sous la forme suivante

$$P_0^\pm = \frac{2d_0}{\alpha_s d_n} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_s d_n}{2d_0} \right)^2 \frac{\lambda_0 - \lambda_{00}}{\lambda_1}} \right], \quad (\text{II.66})$$

$$\text{soit } B_0^2 = \frac{\lambda_1}{\beta_r c_2} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_{00}}{\lambda_1} - P_0^2 \right) e^{-\frac{\alpha_s}{d} d_n P_0} \quad (\text{II.67})$$

où λ_{00} est relié au seuil corrigé μ_{00} par $\lambda_{00} = \mu_c(\mu_{00} - \mu_c)$. La condition d'existence de ces solutions nous permet alors de retrouver l'expression du seuil du mode fondamental de Gauss-Hermite donnée par l'analyse linéaire. Finalement nous avons

$$A_0(\tau, x) = S_0 e^{-i\Omega\tau} e^{-\left(\frac{x-x'_p}{w_s} \right)^2}, \quad (\text{II.68a})$$

la position de piégeage x_p et l'amplitude S_0 étant données par les expressions ci-après :

$$x'_P = \frac{\alpha_s w_s^2}{4d} + \frac{\pi P_0 w_s^2}{2d_n} = x_p + x_p^{(1)}, \quad (\text{II.68b})$$

$$S_0 = B_0 e^{x_p'^2 - \frac{\pi P_0^2}{2}}. \quad (\text{II.68c})$$

Ainsi, au-delà du seuil, la position du *centre de masse* de l'enveloppe du signal se trouve corrigée de la quantité $x_p^{(1)} = \frac{\pi P_0 w_s^2}{2d_n}$, dans la limite où la taille du signal émis n'est pas très différente de sa valeur au seuil w_s . Cet écart à la position de piégeage au seuil, induit par la même occasion une diminution de l'amplitude du signal par rapport à la valeur S_m^{wo} donnée par le tableau (II.2). D'après l'analyse linéaire et la résolution non-linéaire de l'équation d'amplitude (II.48) par la méthode des perturbations, il apparaît qu'au seuil, la position de piégeage doit être donnée par x_p . Ce qui veut dire que si $\lambda_0 = \lambda_{00}$ nous devons avoir $x'_p = x_p$. Cette condition permet de déduire que des deux solutions P_0^\pm , c'est la solution P_0^- qui sera sélectionnée.

Contrairement à ce qu'on pourrait intuitivement imaginer (figures II.20), il ressort que l'augmentation de l'amplitude du champ de pompe incident entraîne la diminution de l'écart entre les *centres de masse* respectifs de la pompe et du signal. Enfin la comparaison entre ces caractéristiques analytiques et les résultats des simulations numériques permettent de confirmer ces tendances, tout en présentant un haut degré de concordance entre les deux résultats. Nous pouvons conclure qu'en présence du walk-off, la méthode des coordonnées collectives constitue la meilleure alternative pour décrire le signal dans le régime non-linéaire en général.

Les résultats que nous venons de présenter ci-dessus supposent donc que les caractéristiques au seuil d'émission du signal soient très bien déterminées. Pour vérifier cela, nous avons comparé les caractéristiques des modes globaux du DOPO avec walk-off obtenues par le calcul analytique et l'intégration numérique des équations (I.9) en fonction de la taille du champ de pompe incident dans la figure II.21. Cette figure met alors en évidence le très bon accord qualitatif et quantitatif entre les résultats numériques et analytiques.

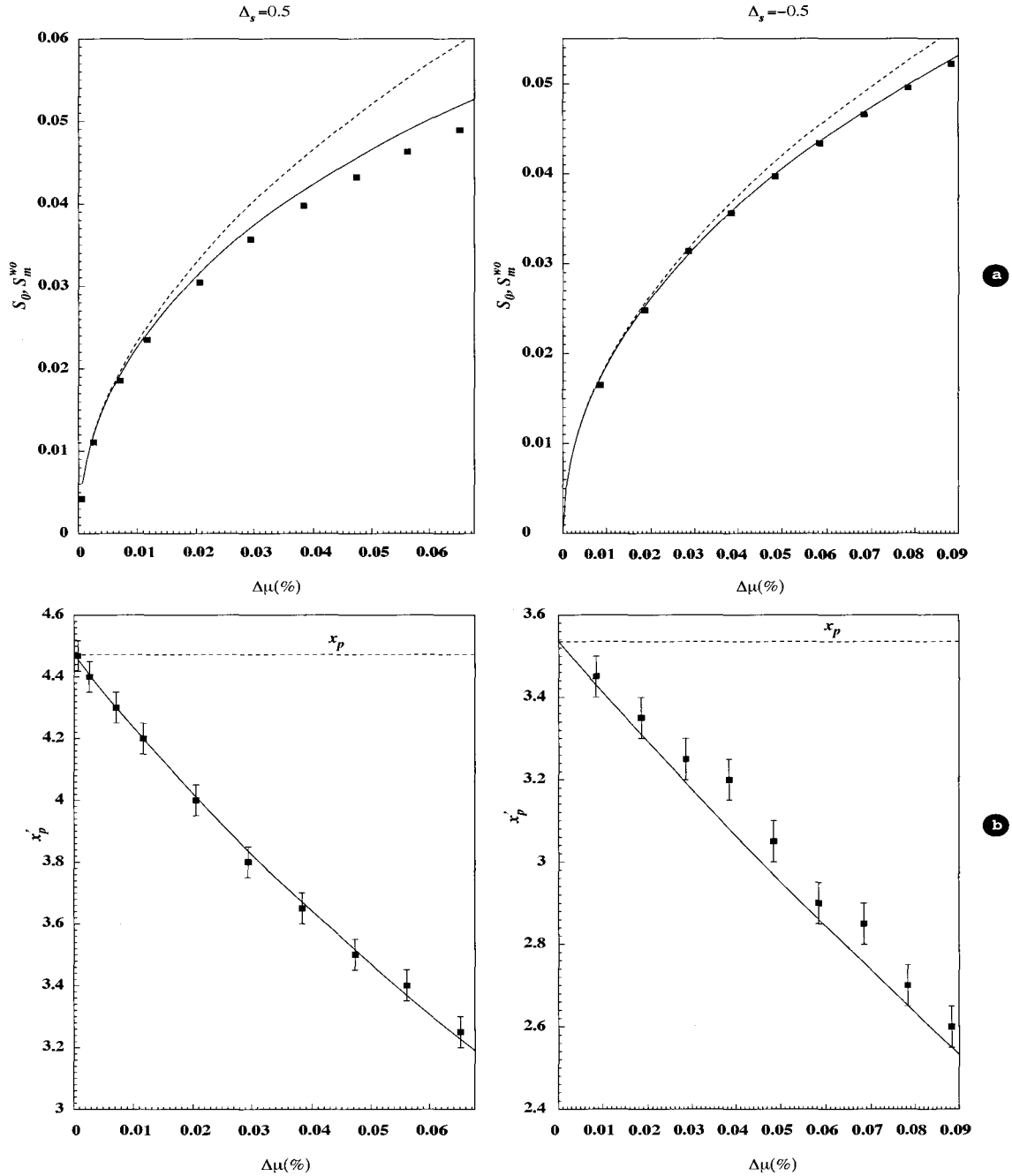


Figure II.20: Variations des caractéristiques du signal (amplitude (ligne a) et position du *centre de masse* du profil de l'enveloppe (ligne b)) en fonction du paramètre de contrôle pour deux valeurs du paramètre de detuning Δ_s . Sur toutes les figures le trait plein correspond à la représentation graphique des relations données par II.68. Les tirets correspondent aux résultats analytiques associés au tableau II.2, tandis que les carrés sont les résultats des simulations numériques effectuées à partir du modèle originel pour $a_s = 2a_p = 0.020$, $\Delta_p = 0.000$, $\alpha_s = 0.01$ et $w_0 = 100.00$. $\Delta\mu$ est l'écart relatif (en pourcentage) entre la l'amplitude du champ de pompe incident μ_0 et le seuil corrigé μ_{00} ($\Delta\mu = 100 \frac{\mu_0 - \mu_{00}}{\mu_{00}}$). Les barres d'erreurs donnent l'intervalle de confiance $\Delta x = \pm 0.05$ du à l'incertitude sur la détermination numérique de la position x'_p .

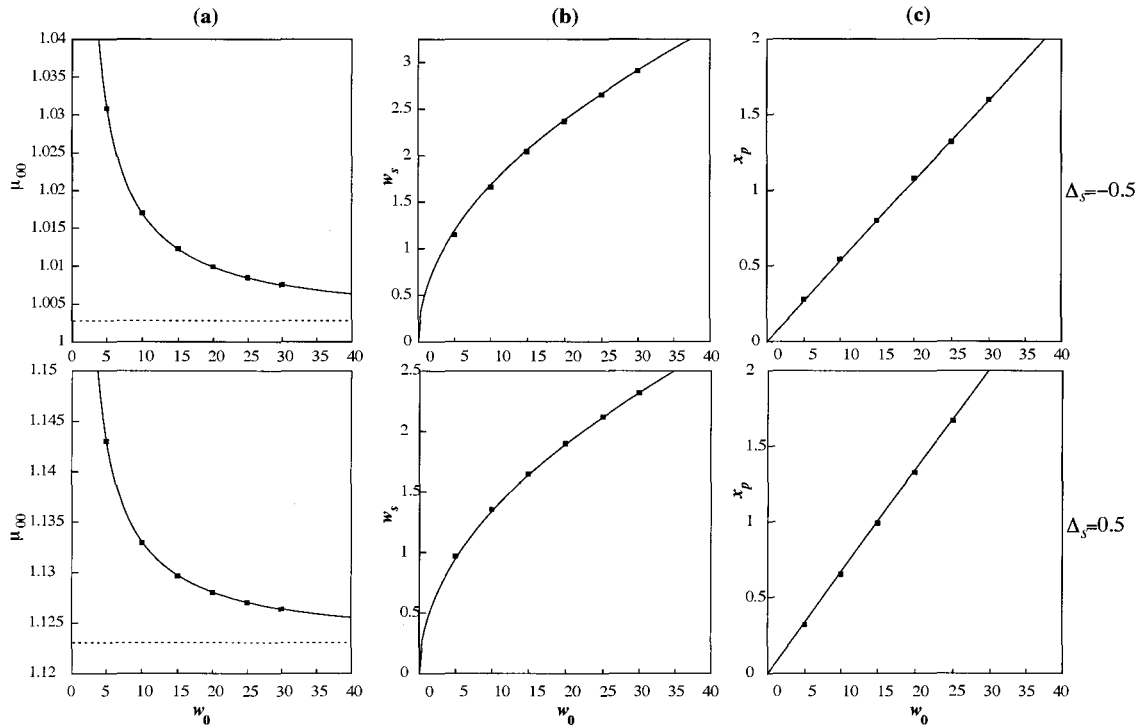


Figure II.21: Comportements (au seuil) numérique (points) et analytique (Eqs. II.53 et II.54) (trait plein) de quelques caractéristiques du signal en fonction du waist de l'amplitude du champ de pompe incident pour : $a_s = 2a_p = 0.020$, $\Delta_p = 0.000$ et $\alpha_s = 0.015$.

Nous y vérifions notamment que le seuil varie inversement à la taille du champ de pompe et que la position de piégeage varie de façon linéaire avec ce même paramètre.

Au delà de la validité de notre démarche qui est largement confirmée non seulement pour le seuil, mais aussi voisinage de celui-ci (voir respectivement les figures II.20 et II.21), c'est la validité de la relation de dispersion approchée qui est vérifiée. Il se trouve que la validité de celle-ci est mise en cause pour les faibles désaccords en fréquence. Car si on s'en tient à la relation (II.50a) donnant μ^t , celui-ci tend vers l'infini pour $\Delta_s \rightarrow 0$, ce qui n'est pourtant pas le cas d'après les points de la figure II.22 qui donne l'évolution du seuil déterminé numériquement en fonction du paramètre de detuning, puisqu'on observe une continuité de la courbe de seuil en fonction de Δ_s . C'est à l'étude de ce cas limite des petites valeurs de Δ_s ($\Delta_s \ll 1$) que nous nous intéressons dans la section qui suit.

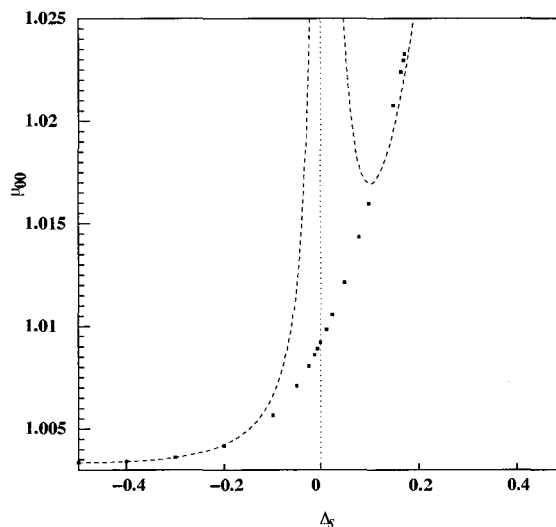


Figure II.22: Variations numérique (•) du seuil du mode global fondamental en fonction du paramètre de detuning du signal Δ_s . Les tirets correspondent aux seuils prédits par l'intermédiaire du développement de Taylor (Eq. II.52). Les paramètres $a_s = 2a_p = 0.050$ u.a., $\Delta_p = 0.000$, $w_0 = 100.000$ et $\alpha_s = 0.015$ u.a.

II.3.2 Cas limite des faibles valeurs du detuning Δ_s

Jusqu'ici l'équation de Ginzburg-Landau (Éq. II.48) nous a permis de rendre compte, de façon satisfaisante, de l'influence des inhomogénéités spatiales sur la dynamique spatio-temporelle du DOPO. Cependant, comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent (avec en illustration la figure II.22), il apparaît, au voisinage de la résonance parfaite ($\Delta_s = 0$), une divergence entre les caractéristiques analytiques et numériques du signal de sortie de l'OPO dégénéré. Le but de cette section est donc de comprendre l'origine de cette divergence et de proposer un modèle qui permet de s'affranchir de l'indétermination observée dans les caractéristiques issues de l'équation de Ginzburg-Landau (Éq. II.48) au voisinage de la résonance.

Pour commencer, il serait alors judicieux de rappeler les résultats connus pour le cas idéal (pompage en ondes planes), lorsque le signal intra-cavité de l'OPO dégénéré est quasi-résonnant. Il a été montré dans ce cas que l'évolution spatio-temporelle du signal peut être décrite par l'équation de Swift-Hohenberg réelle [74]. Dans cette même référence, les auteurs montrent alors que les instabilités qui dominent la dynamique de l'OPO ne sont plus de type modulationnel mais plutôt induites par l'existence d'un front

de commutation. En conséquence il apparaît alors que la frontière entre les structures spatialement homogènes (fronts de translation uniformes) et non-homogènes (fronts de translation modulés) se déplace vers une quantité $\Delta_s^c \neq 0$ que nous expliciterons dans la suite. Nous pouvons alors expliquer la divergence entre les résultats théoriques et les résultats numériques au voisinage de la résonance par le fait que dans cette région, les inhomogénéités spatiales n'interagissent plus avec des structures de type Turing mais plutôt avec des structures de type front.

Ainsi pour les besoins de notre étude, nous avons pris l'équation de Swift-Hohenberg donnée par la référence [74], dans laquelle nous considérons que le coefficient du gain linéaire a un profil Gaussien. Le modèle qui va nous servir de base pour notre étude est alors donné par :

$$\partial_\tau A_s = \frac{1}{2} (\mu(x)^2 - 1) A_s + \frac{1}{2} (\Delta_s - a_s \partial_x^2)^2 A_s - \alpha_s \partial_x A_s - \frac{1}{1 + \Delta_p^2} A_s^3. \quad (\text{II.69})$$

La relation de dispersion de cette équation en régime linéaire est alors obtenue comme suit :

$$\frac{\omega}{\gamma_s} = \frac{i}{2} \left[|\mu(R)|^2 - 1 - (\Delta_s + k^2)^2 \right] + \alpha k. \quad (\text{II.70})$$

L'étape suivante, dans laquelle nous caractérisons le point tournant, et qui consiste en la recherche du point selle k_0 tel que $\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0} = 0$, nous amène à résoudre l'équation ci-dessous :

$$k_0^3 + \Delta_s k_0 + i \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (\text{II.71})$$

A rappeler que moyennant certains changements ($-ik \rightarrow q$, $-i\omega \rightarrow \lambda$), la relation (II.71) est celle qui a été obtenue dans la référence [74], pour un champ de pompe incident homogène.

Pour les valeurs du paramètre de detuning supérieures ou égales à la quantité $\Delta_s^c = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$, les solutions k_0 sont toutes imaginaires pures (correspondant à des fronts uniformes en translation), tandis que pour tout $\Delta_s < \Delta_s^c$ il existera des solutions possédant une partie réelle non nulle (fronts avec modulation). En d'autres termes, lorsque $\Delta_s \geq \Delta_s^c$ ce sont les structures homogènes qui domineront la dynamique du système, alors que les structures modulées en intensité (générées derrière les fronts) vont être les plus déstabilisantes si $\Delta_s < \Delta_s^c$. C'est surtout à ces dernières que nous allons nous intéresser, l'interaction des inhomogénéités de pompage avec les structures homogènes étant très bien décrite par les résultats qui découlent de l'équation de Ginzburg-Landau étudiée précédemment. Ainsi pour $\Delta_s < \Delta_s^c$, nous avons au point tournant $R^t = 0$:

$$k^t = k_r^t + ik_i^t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - i \right) \left(\kappa + \frac{\Delta_s}{3\kappa} \right), \quad (\text{II.72a})$$

$$\omega^t = 2k_r^t k_i^t \left(\Delta_s + (k_r^t)^2 - (k_i^t)^2 \right) + \alpha k_r^t, \quad (\text{II.72b})$$

$$\mu^t = \mu_a = \sqrt{1 + \left(\Delta_s + (k_r^t)^2 - (k_i^t)^2 \right)^2 - (2k_r^t k_i^t)^2 - 2\alpha k_i^t}, \quad (\text{II.72c})$$

avec $\kappa = \left(\frac{\alpha}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_s}{\Delta_s^c} \right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} > 0$; $\forall \Delta_s < \Delta_s^c$. $R^t = 0$ étant un point tournant double, tous les développements précédents dans la région de celui-ci sont valides. Et la résolution de l'équation de Swift-Hohenberg (II.69) au voisinage de ce point tournant, en régime linéaire, conduit (voir Annexe D) comme dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau (II.48), à l'équation de Weber avec les coefficients

$$Z_0 = (i\omega_1 + \mu_a \mu_1) \zeta^2, \quad (\text{II.73a})$$

$$\text{et } Z_2 = (\mu_a \zeta)^2, \quad (\text{II.73b})$$

$$\text{où } \zeta = \frac{1}{\sqrt{(3k_r^t + \Delta_s) + 3ik_i^t}}, \quad (\text{II.73c})$$

$$\text{soit } \zeta_r + i\zeta_i = \frac{1}{2\zeta_0^{\frac{1}{2}}} \sqrt{3k_r^t + \Delta_s + \zeta_0^{\frac{1}{2}}} \left[1 - i \frac{3k_i^t}{2(3k_r^t + \Delta_s + \zeta_0^{\frac{1}{2}})} \right] \quad (\text{II.73d})$$

(voir figure (II.23)). En outre nous avons désormais accès à la fréquence⁸ corrigée du mode global au seuil. Le signe du terme correctif qui dépend implicitement du signe de la partie imaginaire du nombre d'onde k^t (voir (II.73d)), est négatif dans le cas présent. Ceci implique une diminution de la fréquence du mode global par rapport à la fréquence obtenue pour un pompage homogène. Cette diminution de la fréquence est d'autant plus importante que la taille de la pompe est petite. La variation (numérique et analytique) de la fréquence du mode global (normalisée par rapport à la fréquence au point tournant) en fonction du paramètre de detuning pour deux valeurs de w_0 , est représentée sur la figure (II.24). En particulier pour $w_0 = 20$ u.a, la fréquence relative $\frac{\omega_g}{\omega_t}$ chute de 22% entre les valeurs de Δ_s allant de -0.05 à 0.05 . On peut constater, sur cette même figure, que l'estimation numérique est en bon accord avec la prédiction analytique. En conséquence, nous devons nous attendre à ce qu'il existe une zone de paramètre de Δ_s dans laquelle, l'effet des inhomogénéités spatiales compense celui du walk-off. En d'autres termes la frontière entre les structures homogènes et les structures spatialement modulées intervient plus tôt en présence du pompage inhomogène. Pour confirmer ce résultat, nous avons procédé comme suit : dans un premier temps nous avons déterminé pour $w_0 = 20$ u.a, la valeur de Δ_s pour laquelle l'effet du walk-off se trouve entièrement compensé. C'est le point (1) de la figure II.25. Ensuite cette valeur a été utilisée pour effectuer l'intégration numérique du modèle originel de l'OPO dégénéré. Le diagramme spatio-temporel issu de cette simulation numérique, représenté sur la figure II.25, montre une structure spatialement localisée et homogène. Enfin nous avons effectué une nouvelle simulation numérique du modèle originel du DOPO avec les mêmes paramètres, mais cette fois pour un champ de pompe incident homogène. La fréquence estimée pour cette simulation correspond au point (2) de la figure II.25. Le diagramme spatio-temporel résultant présente alors des rouleaux d'intensité inclinés dans la direction du walk-off. Nous vérifions ainsi que ce sont bien les inhomogénéités spatiales qui sont à l'origine de la compensation de l'effet du walk-off.

Un autre phénomène qui découle de l'interaction entre le pompage inhomogène et le

⁸Il s'agit ici de la fréquence de passage des franges, pour un observateur dans le référentiel fixe.

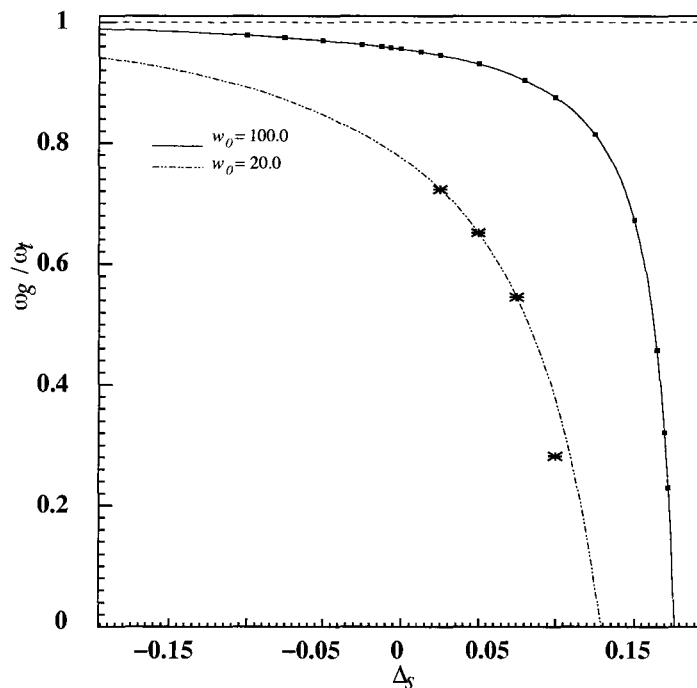


Figure II.24: Variation de la fréquence relative du mode global (normalisée par rapport à celle au point tournant) en fonction du paramètre de detuning du signal Δ_s . Les (·) et (*) correspondent aux fréquences déterminées numériquement à partir du modèle original du DOPO, pour les paramètres $a_s = 2a_p = 0.050$ u.a., $\Delta_p = 0.000$ et $\alpha_s = 0.015$ u.a.

walk-off est le piégeage des structures localisées. En effet nous avons montré que pour chaque ensemble de paramètres, il existe une position unique qui, une fois atteinte par le maximum de l'enveloppe du signal, entraîne une immobilisation de celui-ci (voir figure II.26b-2). Nous avons pour cela comparé les diagrammes spatio-temporels issus des simulations numériques des équations (I.9) respectivement pour un pompage en ondes planes (figures II.26a) et un pompage de profil Gaussien (figures II.26b). On constate alors qu'au seuil d'émission du signal, dans le premier cas (pompe homogène) celui-ci se propage jusqu'à ce qu'il sorte de l'espace transverse, alors qu'avec la pompe de profil Gaussien, le signal reste piégé à la position x_p . Comme on peut le constater sur les figures II.26, correspondant aux profils asymptotiques de la pompe (figure II.26b-1) et du signal (figure II.26b-2), ce n'est pas à la frontière absolu/convectif mais plutôt au point où $\mu = \mu_c + \varepsilon \frac{\zeta_r}{2(\zeta_r^2 + \zeta_i^2)}$ que le signal s'immobilise. Cette valeur de μ correspond au seuil convectif corrigé par la même quantité que le seuil absolu. Les variations analytiques et

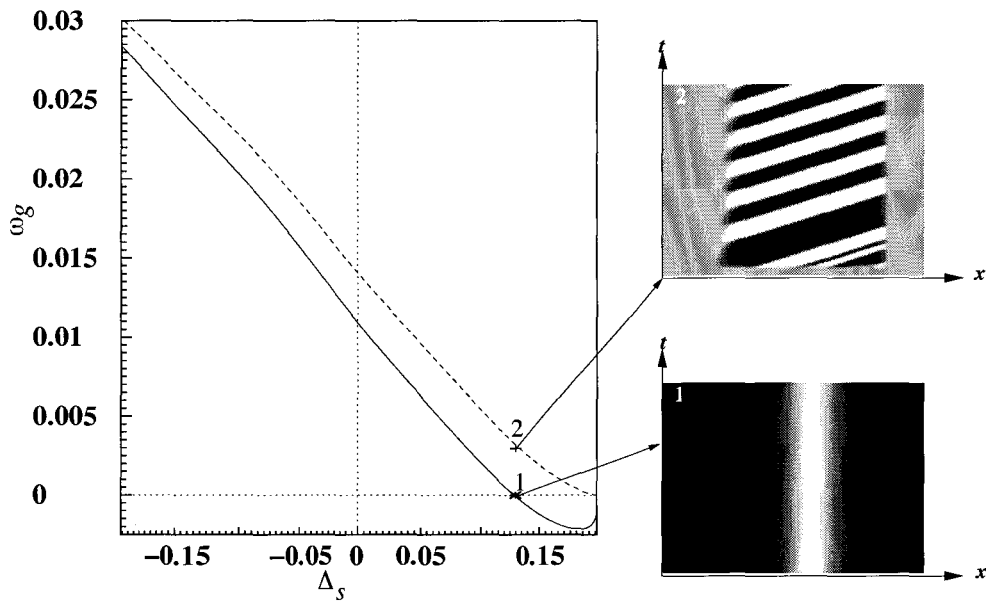


Figure II.25: Variation de la fréquence en fonction du paramètre de detuning du Δ_s et diagrammes spatio-temporels du signal émis par l'OPO dégénéré au seuil. La courbe en trait plein correspond au résultat analytique pour un pompage de profil Gaussien et les tirets au cas du pompage en ondes planes. Les points (1) et (2) correspondent aux simulations numériques ayant données les diagrammes (1) et (2). Les paramètres étant les mêmes que ceux de la figure II.24.

numériques de cette position, en fonction du paramètre de detuning, sont alors présentées dans la figure II.26d. Nous avons aussi représenté sur cette figure le résultat obtenu à partir de l'équation de Ginzburg-Landau inhomogène (II.48). Il apparaît alors que la singularité en $\Delta_s = 0$, constatée pour ce cas, a été levée grâce à la prise en compte des termes d'ordre supérieur à $O(k^2)$ dans le développement de Taylor de la relation de dispersion.

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet d'une variation spatiale de l'amplitude de l'onde de pompe incidente sur le processus d'amplification paramétrique dans un OPO. Nous avons pour cela considéré que le profil transverse de la pompe est Gaussien. Un travail analytique est alors possible si cette variation, caractérisée par le taux d'inhomogénéité, est assez faible. Nous avons montré que c'est le cas lorsque le temps mis par la pompe pour parcourir une distance de l'ordre de la distance de Rayleigh, est très grand par rapport à son temps de vie dans la cavité. Dans cette configuration le régime linéaire est régi par l'équation aux valeurs propres de Weber. Les fonctions propres de cette équation étant les fonctions de Gauss-Hermite, elles correspondent à un spectre discret et non

continu, contrairement au cas d'un pompage homogène (onde plane). Il en résulte une discrétisation des seuils d'apparition des modes et la suppression de la courbe neutre de stabilité marginale. En présence du walk-off le mode global le plus instable se trouve piégé en une position décalée par rapport au *centre de masse* de la pompe, avec une fréquence d'oscillation plus faible que celle donnée pour un pompage en ondes planes. Ainsi les oscillations induites par la double réfraction peuvent être totalement atténuées bien avant la frontière classique (pour un pompage en ondes planes) entre les structures modulées et les structures homogènes. Nous montrons aussi que pour certaines valeurs de l'écart à la résonance nous sommes en mesure de générer des structures solitoniques oscillantes dans le temps mais piégées dans le plan transverse (Fig. II.27).

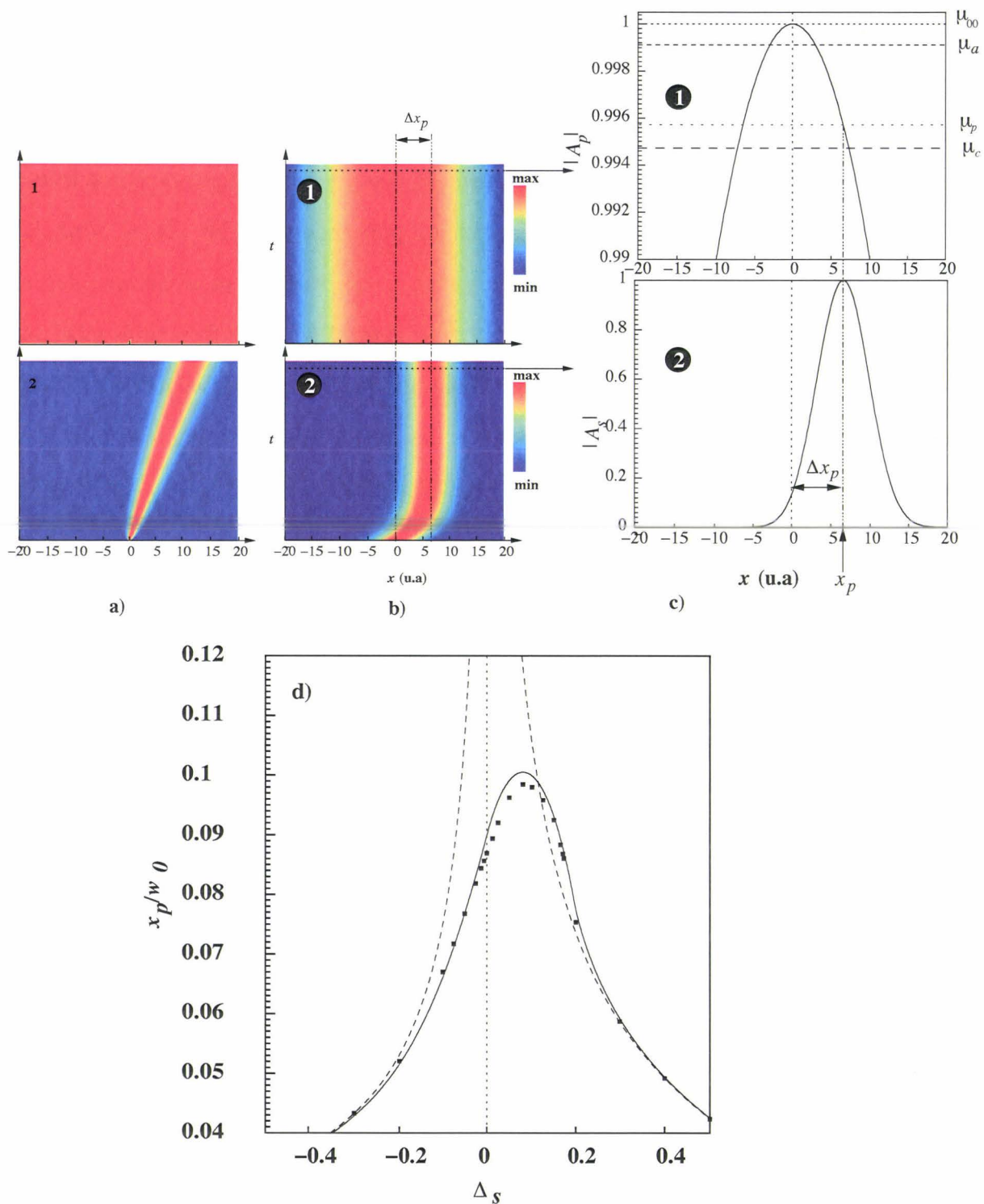


Figure II.26: a-1) et a-2) Évolutions spatio-temporelles numériques des champs intra-cavité du DOPO pour une pompe plane, et b-1) et b-2) pour une pompe de profil Gaussien. c-1) et c-2) sont respectivement les profils 1D de la pompe et du signal à un instant t donné. d) donne l'évolution de la position x_p du pic du signal (normalisée par rapport à la taille de la pompe) en fonction du paramètre de detuning Δ_s . Le trait plein correspond au résultat analytique et les (•) aux résultats numériques pour les paramètres $a_s = 2a_p = 0.050$ u.a., $\Delta_p = 0.000$, $w_0 = 100.000$ u.a et $\alpha_s = 0.015$ u.a.

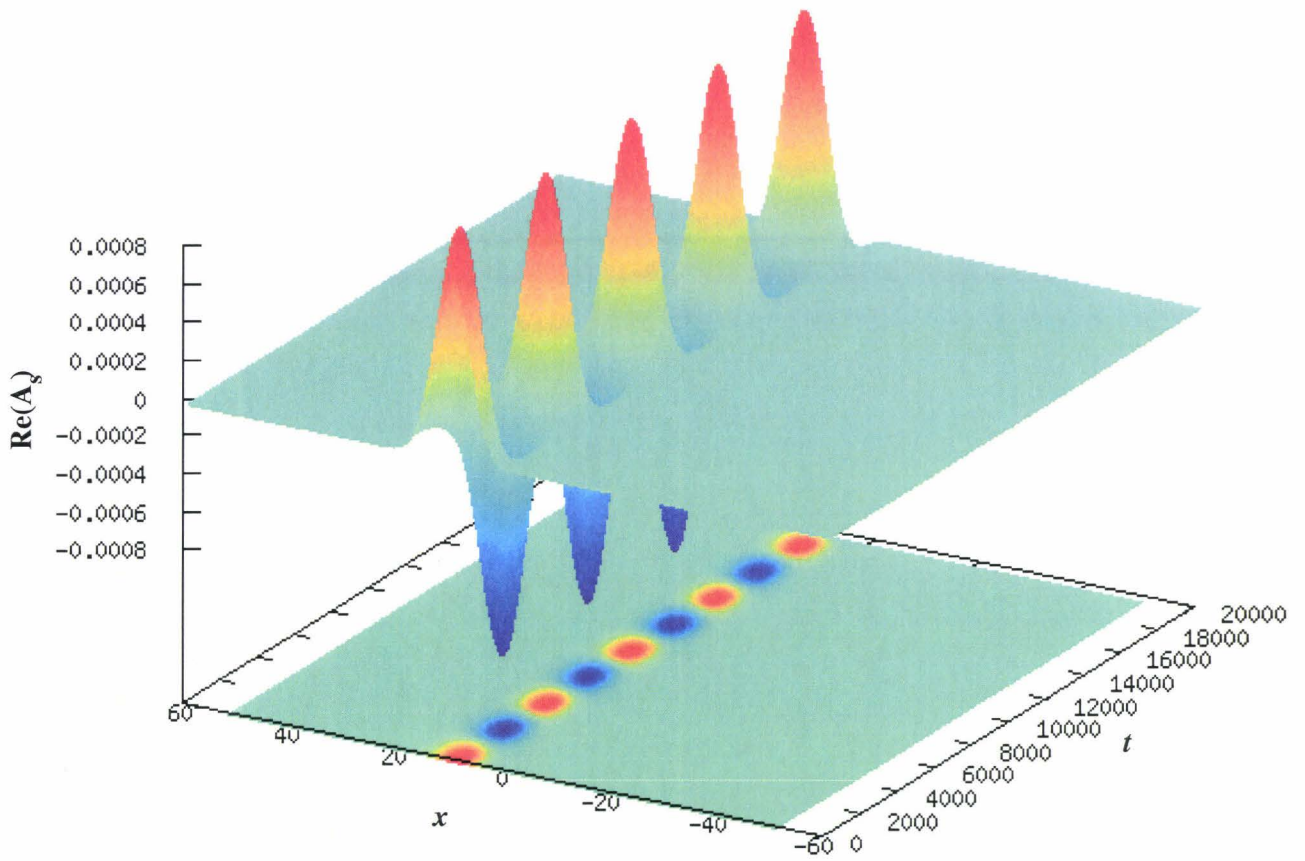


Figure II.27: Évolution spatio-temporelle du signal obtenu par l'intégration numérique du DOPO pour : $a_s = 2a_p = 0.050$ u.a., $\Delta_p = 0.000$, $\Delta_s = 0.150$, $w_0 = 100.000$, $E_0 = 1.021$ et $\alpha_s = 0.015$ u.a.

Deuxième partie : Effets non-linéaires du walk-off

Chapitre III

Effets non-linéaires du walk-off dans des OPO

Dans ce chapitre, nous étudions les effets non-linéaires induits par le walk-off, au cours du processus d'interaction paramétrique dans les OPO. A l'instar de la grande majorité des systèmes optiques, les OPO sont capables de générer une grande diversité de structures ordonnées et cohérentes. Dans nombres des cas, la dynamique des structures est directement liée à la présence d'un flot d'advection dans le plan transverse, ou alors elle y est très sensible. A la différence de certains systèmes où cette dérive est introduite en intervenant sur la géométrie du dispositif (inclinaison des miroirs [79], incidence oblique [80], etc...), elle apparaît de façon spontanée dans l'OPO, du fait de la double réfraction utilisée pour réaliser la condition d'accord de phase. Et l'action de ce walk-off, qu'elle soit directe ou résultante du couplage entre celui-ci et d'autres effets transverses (diffraction, dépendance spatiale des paramètres, etc..) sont à l'origine de divers phénomènes. On peut citer, entre autre, le déplacement du seuil d'oscillation, la brisure de la symétrie du système, ou encore la modification du domaine d'existence de certaines structures [46, 78]. La plupart des phénomènes qui viennent d'être énumérés sont dûs principalement aux effets linéaires du walk-off. Cependant, certaines observations finissent de convaincre que, vue la complexité du système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'OPO,

l'action du walk-off ne pourrait s'arrêter à des effets purement linéaires. Pour illustrer ce propos, nous allons reprendre l'équation d'amplitude (II.48) pour un detuning du signal Δ_s négatif. Les avantages que présentent les équations d'amplitude pour un système tel que l'OPO ont déjà, été discutés en II.2.1.2. Ils ne seront donc pas rediscutés ici, si ce n'est pour préciser le caractère universel qu'elles confèrent à l'OPO, car les résultats qui en découlent peuvent être étendus à d'autres systèmes décrits par le même type d'équation.

Si dans l'équation (II.48) nous faisons tendre $w_0 \rightarrow \infty$ (ce qui revient à supposer que le pompage est homogène), celle-ci prend la forme suivante :

$$\partial_\tau A_0 = (\mu_c - 1) A_0 - 2a_s \Delta_s \partial_x^2 A_0 - \alpha_s \partial_x A_0 - (\beta_r + i\beta_i) |A_0|^2 A_0,$$

avec β_r et β_i donnés par le tableau II.1 et le signal A_s est tel que $A_s \propto A_0 \exp[i(k_c x - \omega_c t)] + A_0^* \exp[-i(k_c x - \omega_c t)]$, où $(k_c, \omega_c) = \left(\sqrt{-\frac{\Delta_s}{a_s}}, -\gamma_s \alpha_s k_c \right)$. Cette équation est identique (pour une dimension transverse) à celle donnée dans la référence [81]. Et les auteurs montrent que si l'on tient compte des non-linéarités dans le mécanisme de sélection du nombre d'onde transverse, il apparaît une brisure de symétrie entre les modes $+k_c$ et $-k_c$. La figure III.1 extraite de la même référence, donne l'évolution du degré de la dissymétrie R , défini comme étant la racine carrée du rapport des intensités de chacun des modes $+k_c$ et $-k_c$ tel que $R^2 = |A_s^2(k_c)| / |A_s^2(-k_c)|$, en fonction du paramètre de walk-off du signal α_s . On constate alors que cette dissymétrie disparaît en l'absence du walk-off ($R^2 \equiv 1$). On remarque aussi que pour un walk-off non nul, la brisure de symétrie est d'autant plus importante que l'écart au seuil l'est. On a donc là un exemple des effets à la fois non-linéaires (intensité) et non-variationnels ($\beta_i \neq 0$) que le walk-off peut induire dans le comportement dynamique de l'OPO. On imagine alors l'importance que peuvent avoir les effets non-linéaires induits par la biréfringence, surtout lorsque les termes de saturation sont importants, au voisinage du seuil par exemple pour une bifurcation sous-critique [34]. C'est donc à ce cas, pour un OPO dégénéré, que nous allons nous intéresser dans ce chapitre. La méthodologie consiste à établir d'abord l'équation d'amplitude mo-

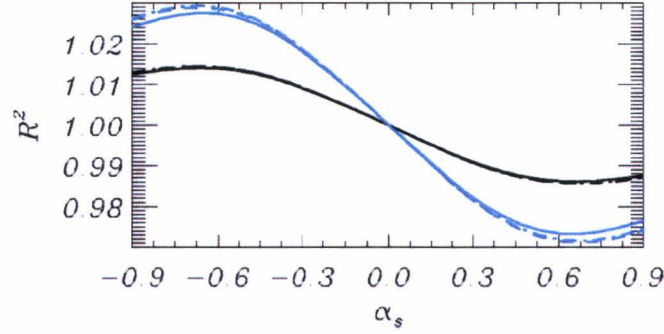


Figure III.1: Le paramètre de dissymétrie non-linéaire entre les modes k_c et $-k_c$, en fonction du paramètre de walk-off α_s , pour des écarts au seuil de 5% (courbes noires) et 10% (courbes bleues). Les traits pleins correspondent aux prédictions et les traits mixtes aux résultats numériques. Les paramètres utilisés sont : $a_s = 2a_p = 1.00$, $\Delta_p = -0.20$, $\Delta_s = -0.50$, $\gamma_s = \gamma_p = 1.00$. Cette figure a été extraite de la référence [81].

délimitant la dynamique du système au dessus du seuil d'émission du signal. Cette étape constitue la première partie de ce chapitre. Ensuite, vue le caractère universel de l'équation de Ginzburg-Landau ci-dessus, cette étude est étendue au cas général, dans la seconde partie, sans se restreindre aux liens microscopiques des coefficients spécifiques à notre système. Enfin, des simulations numériques mettant en évidence les résultats significatifs, dans le cas de l'OPO dégénéré, constituent la dernière partie de ce chapitre.

III.1 Équation d'amplitude pour le DOPO bistable en présence du walk-off

Il est utile, pour la dérivation des équations aux amplitudes, d'introduire dans les équations d'enveloppe données par le système (I.9), les changements suivants : $A_p = \mu + (1 - i\Delta_p)B$, $A_s = \sqrt{1 + \Delta_p^2}A_1$ et $E = \mu(1 + i\Delta_p)$. Les équations (I.9) s'expriment alors dans les nouvelles variables sous la forme :

$$\partial_t B = \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p) (B + A_s^2) + ia_p \nabla_{\perp}^2 B \right] \quad (\text{III.1a})$$

$$\partial_t A_1 = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_1 + \mu A_1^* + ia_s \nabla_{\perp}^2 A_1 - \alpha_s \partial_x A_1 + (1 - i\Delta_p) B A_1^* \right] \quad (\text{III.1b})$$

L'oscillateur paramétrique optique est en régime bistable, ce qui implique que la bifurcation de la solution de base *OPO Off* $(A_p^0, A_s^0) = \left(\frac{E(1-i\Delta_p)}{1+\Delta_p^2}, 0\right)$ est sous-critique, avec la condition $\Delta_s\Delta_p - 1 > 0$ (voir section I.2.2). Cette étude concernera seulement le cas $\Delta_s > 0$, le cas $\Delta_s < 0$ ayant été largement étudié [35, 42, 48, 78]. L'étendue du domaine de bistabilité peut être directement proportionnel au carré de la quantité $b_3 = (\Delta_s\Delta_p - 1)$. En effet, l'expression de la valeur du paramètre de contrôle $\mu = \mu_{bst} = \frac{\Delta_s + \Delta_p}{\sqrt{1 + \Delta_p^2}}$ pour laquelle la bifurcation selle-noeud apparaît, peut être réécrite comme suit :

$$\mu_{bst} = \mu_c \sqrt{1 - \frac{b_3^2}{\mu_c^2 (1 + \Delta_p^2)}}. \quad (\text{III.2})$$

Donc si Δ_s et Δ_p sont de ordre de l'unité, de sorte que $b_3 \ll 1$, on peut écrire que $\mu_{bst} \simeq \mu_c - \frac{b_3^2}{2\mu_c(1+\Delta_p^2)}$. Ce qui implique que pour tout μ pris au voisinage de la bifurcation, l'écart au seuil $\mu_c = \sqrt{1 + \Delta_s^2}$ peut être mesuré par l'intermédiaire du paramètre $\varepsilon \ll 1$, tel que $\mu = \mu_c + \varepsilon^2 \mu_2$ avec $\varepsilon \simeq b_3$ et μ_2 de l'ordre de l'unité, est la grandeur caractérisant le cycle de bistabilité. Dans ce cas les detuning Δ_s et Δ_p peuvent être liés par le développement suivant : $\Delta_p = \frac{1}{\Delta_s} + \varepsilon$. La bifurcation étant sous-critique, on déduit [34, 35] que les solutions des équations du DOPO (Eq. (III.1)) peuvent être exprimées par le développement asymptotique suivant :

$$V \equiv (B, A_1, A_1^*)^T = \varepsilon^{1/2} V^{(1/2)} + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^{3/2} V^{(3/2)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \dots \quad (\text{III.3})$$

Les $V^{(i/2)} = \left(B^{(i/2)}, A_1^{(i/2)}, A_1^{(i/2)*}\right)^T$ étant des fonctions lentement variables du temps et de l'espace, dont les différentes échelles sont fixées comme suit : $x = X_0 + \varepsilon X$, $y = Y_0 + \varepsilon Y$ et $t = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2$. Le detuning Δ_s étant positif, cela signifie que $(\omega_c, k_c) = (0, 0)$.

Nous déduisons dans ce cas que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t = \partial_{T_0} + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}, \\ \partial_x = \varepsilon \partial_X, \\ \partial_y = \varepsilon \partial_Y, \\ \nabla_{\perp(x,y)}^2 = \varepsilon^2 \nabla_{\perp(X,Y)}^2. \end{array} \right.$$

Nous reportons ensuite tous ces développements dans les équations (III.1). Ce qui nous permet d'obtenir aux différents ordres les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1/2)} = 0 \quad O(\varepsilon^{1/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1)} = N^{(1)} \quad O(\varepsilon^1) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(3/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1/2)} + N^{(3/2)} \quad O(\varepsilon^{3/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1)} + N^{(2)} + iN^{(1)'} \quad O(\varepsilon^2) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(5/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(3/2)} + (-\partial_{T_2} + L_2) V^{(1/2)} + N^{(5/2)} + iN^{(3/2)'} \quad O(\varepsilon^{5/2}) \end{array} \right.$$

Les expressions des opérateurs $L_0, L_1, L_2, N^{(i/2)}$ et $N^{(i/2)'}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sont données dans l'annexe E. La résolution de ces équations, avec pour condition de solvabilité l'alternative de Fredholm, donnent respectivement aux ordres $O(\varepsilon^{1/2}), O(\varepsilon^1), O(\varepsilon^{3/2})$ et $O(\varepsilon^2)$ les solutions suivantes (Voir aussi l'annexe E pour le détail des opérations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{(1/2)} = (0, e^{i\theta}, e^{-i\theta})^T \varphi, \\ V^{(1)} = -(e^{2i\theta}, 0, 0)^T \varphi^2, \\ V^{(3/2)} = (0, z, z^*)^T, \\ V^{(2)} = \left(-i \frac{2\Delta_s}{\gamma_p \mu_c} \varphi \partial_{T_1} \varphi - \frac{i}{\Delta_s} \varphi^4 e^{2i\theta}, 0, 0 \right)^T \end{array} \right.$$

où $e^{2i\theta} = \frac{1-i\Delta_s}{\mu_c} = e^{-i \arctan \Delta_s}$, $z = \frac{i}{2\Delta_s} \varphi^3 e^{i\theta}$ et φ , l'enveloppe lentement variable. Les évolutions spatio-temporelles de celle-ci, obtenues par l'application de la condition de

solvabilité aux ordres $O(\varepsilon^{3/2})$ et $O(\varepsilon^{5/2})$, sont données respectivement par :

$$\partial_{T_1}\varphi = -\gamma_s\alpha_s\partial_X\varphi \quad (\text{III.4a})$$

$$\text{et } \partial_{T_2}\varphi = \mu_c\mu_2\gamma_s\varphi + \gamma_s a_s \Delta_s \nabla_{\perp}^2 \varphi + C_1 + C_2 + C_3. \quad (\text{III.4b})$$

Avec

$$C_1 = 2\gamma_s\alpha_s\frac{\gamma_s}{\gamma_p}\varphi^2\partial_X\varphi,$$

$$C_2 = \gamma_s\Delta_s\varphi^3,$$

$$C_3 = -\gamma_s\frac{\mu_c^2}{2\Delta_s^2}\varphi^5.$$

L'équation gouvernant la dynamique de signal du DOPO au voisinage du seuil prend alors la forme de l'équation de Ginzburg-Landau suivante :

$$\partial_{\tau}\psi = \lambda\psi + d\nabla_{\perp}^2\psi - \alpha_s\partial_x\psi + v_{nl}\psi^2\partial_x\psi + b_3\psi^3 - b_5\psi^5, \quad (\text{III.5})$$

avec $\lambda = \mu_c(\mu - \mu_c)$, $b_3 = (\Delta_p\Delta_s - 1) > 0$, $b_5 = \frac{\mu_c^2}{2\Delta_s^2} > 0$, $v_{nl} = 2\gamma\alpha_s$ et $d = a_s\Delta_s$, où $\gamma = \frac{\gamma_s}{\gamma_p}$. Nous avons par ailleurs introduit la variable $\tau = \gamma_s t$ et la fonction ψ qui est liée aux enveloppes des champs de signal et pompe respectivement par $A_s = \sqrt{1 + \Delta_p^2} \exp(i\theta)\psi$ et $B = -\frac{e^{2i\theta}}{(1+i\Delta_p)}\psi^2$. Le terme $v_{nl}\psi^2\partial_x\psi$, que nous désignerons par la suite par terme de gradient non-linéaire, est un terme nouveau qui n'a encore été observé dans aucune équation modélisant la dynamique du signal émis par un DOPO [34, 35, 43, 66]. Le coefficient de ce terme est directement proportionnel au rapport des taux de relaxation des champs signal et pompe, mais aussi au walk-off, et ne peut disparaître que si celui-ci est nul ou si on suppose que le walk-off est trop faible (du même ordre que $O(\varepsilon)$) [34]. L'équation d'amplitude est dans ce cas identique à l'équation (III.5) sans le terme de gradient non-linéaire :

$$\partial_{\tau}\psi = \lambda\psi + d\nabla_{\perp}^2\psi - \alpha_s\partial_x\psi + b_3\psi^3 - b_5\psi^5. \quad (\text{III.6})$$

Les solutions stationnaires de l'équation (III.5) sont¹ :

$$\psi_s^0 = 0, \quad (\text{III.7a})$$

$$\text{et } \psi_s^\pm = \sqrt{\frac{b_3 \pm \sqrt{b_3^2 + 4b_5\lambda}}{2b_5}}. \quad (\text{III.7b})$$

Nous appellerons respectivement branche haute et branche basse les solutions ψ_s^+ et ψ_s^0 .

L'équation (III.6) de Ginzburg-Landau réelle d'ordre 5, de même que son équivalent complexe², a fait l'objet de nombreuses études [82–93]. Si pour des coefficients complexes, elle est capable de générer une grande diversité de structures stables [83–86, 89, 93], il n'en est pas de même pour l'équation de Ginzburg-Landau réelle donnée par (III.5), car les seules solutions stables connues à ce jour sont les fronts [83, 84, 86, 87, 89]. Ceux-ci sont alors classés en deux catégories et les critères de leur stabilité ont été énoncés par P. C. Hohenberg et W. Van Saarloos [84], qui seront complétés plus tard par J. M. Chomaz [92]. Selon que l'on tienne compte ou pas des non-linéarités, l'expression de la vitesse sera différente. Ainsi si on appelle v^{NL} la vitesse tenant compte des termes non-linéaires et v^* celle donnée par l'analyse de stabilité linéaire, nous pouvons écrire (lorsque $\alpha_s = 0$) que :

$$\begin{cases} v^* &= 2\sqrt{d\lambda} & \text{pour } \lambda > \lambda_L \\ v^{\text{NL}} &= b_3 \left(\frac{d}{3b_5}\right)^{\frac{1}{2}} \left[2\sqrt{1 + \frac{4b_5}{b_3^2}\lambda} - 1\right] & \text{pour } \lambda < \lambda_L. \end{cases}$$

λ_L étant le point pour lequel $v^{\text{NL}} = v^*$ est donné par $\lambda_L = \frac{3b_3^2}{4b_5} \left(\mu_L = \mu_c + \frac{3b_3^2}{4b_5\mu_c}\right)$ et la vitesse correspondante est notée $v^L = b_3 \left(\frac{3d}{b_5}\right)^{\frac{1}{2}}$. Alors les fronts sont dits linéaires (non-linéaires) si leur vitesse de translation correspond à v^* (v^{NL}). En absence donc du walk-off,

¹Compte tenue de la symétrie $\psi \rightarrow -\psi$ nous considérerons que les solutions positives.

²C'est-à-dire lorsque les coefficients λ, d, b_3 et b_5 sont complexes. L'équation prend alors la forme suivante :

$$\partial_\tau \psi = \lambda \psi + d \nabla_\perp^2 \psi - \alpha_s \partial_x \psi + b_3 |\psi|^2 \psi - b_5 |\psi|^4 \psi.$$

l'équation (III.6) possède le potentiel de Lyapunov suivant :

$$\mathcal{L}(\psi) = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 + V(\psi) \right] dx$$

où $V(\psi) = -\lambda\psi^2/2 - b_3\psi^4/4 + b_5\psi^6/6$. Ce potentiel possède deux minima dans la zone de bistabilité $\lambda_s < \lambda < 0$ ($\mu_s < \mu < \mu_c$) où $\lambda_s = -b_3^2/4b_5$ ($\mu_s = \mu_c - b_3^2/4b_5\mu_c$) qui correspondent aux branches basse et haute. La solution ψ_s^- , qui, elle, existe uniquement dans cette zone, est un maximum du potentiel et y est donc toujours instable. Pour tout $\lambda < \lambda_s$ la solution ψ_s^0 qui est le seul minimum du potentiel est donc linéairement stable. Le point de Maxwell, pour lequel les branches haute et basse ont le même potentiel est atteint pour $\lambda_M = -3b_3^2/16b_5$ ($\mu_M = \mu_c - 3b_3^2/16b_5\mu_c$). De sorte que pour $\lambda_s < \lambda < \lambda_M$ ($\mu_s < \mu < \mu_M$) $\psi_s^0 = 0$ est non-linéairement stable et la branche haute est dite métastable, tandis que pour $\lambda_M < \lambda < 0$ ($\mu_M < \mu < \mu_c$) c'est la branche basse qui est métastable et ψ_s^+ est stable. Enfin lorsque $\lambda > 0$ ($\mu > \mu_c$) ψ_s^0 devient un maximum du potentiel $V(\psi)$, il devient alors linéairement instable au profit de la branche haute.

Le walk-off introduit un degré de liberté supplémentaire, car le nombre de paramètres indépendants dans (III.6) ne peut être réduit à moins de deux paramètres, pour donner l'équation suivante :

$$\partial_T u = \Lambda u + \nabla_{\perp}^2 u - V_g \partial_X u + u^3 - u^5, \quad (\text{III.8})$$

avec $X = \frac{b_3}{\sqrt{db_5}} x$, $T = \frac{b_3^2}{b_5} \tau$, $V_g = \frac{1}{b_3} \sqrt{\frac{b_5}{d}} v_g$, $\Lambda = \frac{b_5}{b_3} \lambda$, $u = \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} \psi$. Ceci implique que la dynamique peut être entièrement décrite par l'intermédiaire du coefficient de l'advection et de celui de l'amplification linéaire. La vitesse du front dans le référentiel de laboratoire (fixe) est alors donnée par $V_f = \alpha_s - v_f$, où $v_f = v^*$ ou v^{NL} . Le domaine de métastabilité de la branche basse est alors scindé en deux, l'un dit domaine d'*instabilité convective non-linéaire* et l'autre appelée domaine d'*instabilité absolue non-linéaire*. Dans la première zone, toute perturbation localisée d'amplitude finie, évolue vers deux fronts se déplaçant avec des vitesses de même signe, tandis que dans la zone d'instabilité absolue, elle évolue

vers deux fronts ayant des vitesses de translation de signe opposé. Le seuil d'instabilité absolue (non-linéaire³) est alors obtenu en posant $V_f = 0$. Ce qui donne :

$$\lambda_A = \begin{cases} \frac{3\alpha_s^2}{16d} + \frac{3}{16} \left[\frac{2b_3}{(3db_5)^{1/2}} \alpha_s - \frac{b_3^2}{b_5} \right] & \text{pour } \alpha_s < \alpha_s^L \\ \frac{\alpha_s^2}{4d} & \text{pour } \alpha_s > \alpha_s^L. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

En tenant compte du terme de gradient non-linéaire, il n'est plus possible de réduire le nombre de paramètres indépendants à deux. En effet, la normalisation des variables (l'enveloppe ψ , les variables d'espace x et temporelle t) de l'équation (III.5) donne :

$$\partial_T u = \Lambda u + \nabla_{\perp}^2 u - V_g \partial_X u + V_g^{nl} u^2 \partial_X u + u^3 - u^5. \quad (\text{III.10})$$

où $V_g^{nl} = \frac{v_{nl}}{b_3}$. Cette équation fait alors apparaître un troisième paramètre indépendant qui s'ajoute à Λ et V_g . Nous examinons maintenant les conséquences de la présence de ce terme, qui à première vue s'oppose à l'effet du walk-off.

III.1.1 Dynamique des fronts de translation en présence du gradient non-linéaire

Nous allons dans cette section examiner les conséquences du terme d'advection non-linéaire pour le DOPO. Pour cela, les fronts étant les solutions stables de l'équation de Ginzburg-Landau (III.6), nous allons commencer par déterminer l'effet du gradient non-linéaire sur celles-ci. Ensuite nous appliquerons aux OPO dégénérés, les résultats ainsi obtenus.

III.1.1.1 Caractérisation des solutions de type front

L'équation de Ginzburg-Landau d'ordre 5 a été résolue avec plusieurs méthodes qui aboutissent d'une manière générale à la même solution, en ce qui concerne les fronts [88,89,

³Le terme non-linéaire est mis ici pour mettre l'accent sur le fait que ce sont les fronts non-linéaires qui gouvernent la dynamique.

91]. Dans le cadre de notre étude c'est la méthode dite de WTC (Weiss, Tabor, Cariello) [91, 94, 95] que nous avons retenue. Cette méthode peut être résumée comme une adaptation de la technique de résolution multi-échelles pour les équations aux dérivées partielles. Elle consiste à supposer que la dérivée seconde joue ici le rôle d'une perturbation singulière et que par conséquent la solution de (III.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) [\sigma(x, t)]^\beta, \quad (\text{III.11})$$

avec $\sigma(x, t)$ la variété singulière et β une puissance négative qui reste à déterminer. Cette détermination se fait en imposant que les termes dominants (c'est-à-dire de degré le plus bas en σ) de la dérivée seconde en x se compensent par les non-linéarités saturantes. Dans ce cas les différents termes apparaissant en (III.5) sont donnés par :

$$\begin{aligned} \psi_x &= \phi_x \sigma^\beta + \beta \phi \sigma_x \sigma^{\beta-1} \\ \psi^2 \psi_x &= \phi^2 \phi_x \sigma^{3\beta} + \beta \phi^3 \sigma_x \sigma^{3\beta-1}, \\ \psi_{xx} &= \phi_{xx} \sigma^\beta + \beta (2\phi_x \sigma_x + \phi \sigma_{xx}) \sigma^{\beta-1} + \beta (\beta - 1) \phi (\sigma_x)^2 \sigma^{\beta-2}, \\ \psi^3 &= \phi^3 \sigma^{3\beta}, \\ \psi^5 &= \phi^5 \sigma^{5\beta}. \end{aligned}$$

Ce qui implique alors que $\phi (\sigma_x)^2 \sigma^{\beta-2}$ est du même ordre que $\phi^5 \sigma^{5\beta}$. On en déduit que $\beta - 2 = 5\beta$, soit $\beta = -\frac{1}{2}$. On constate alors que le terme le plus bas dans le gradient non-linéaire $\sigma^{3\beta-1} = \sigma^{-\frac{5}{2}}$, est du même ordre que celui des non-linéarités d'ordre 5. Il en est de même pour l'advection (ψ_x) et les termes non-linéaires d'ordre 3. Nous recherchons donc les solutions de (III.5) sous la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) [\sigma(x, t)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette expression est reportée dans l'équation (III.5), et après avoir regroupé les termes par puissance de σ , nous obtenons le système d'équation différentiel suivant :

$$\phi_t = \lambda\phi + \phi_{rr} - \alpha'_s\phi_r, \quad (\text{III.12a})$$

$$\sigma_t = 2\frac{\phi_r}{\phi}\sigma_r + \sigma_{rr} - \alpha'_s\sigma_r - 2v'_{nl}\phi\phi_r - 2b_3\phi^2, \quad (\text{III.12b})$$

$$\sigma_r^2 = \frac{2}{3}v'_{nl}\phi^2\sigma_r + \frac{4}{3}b_5\phi^4, \quad (\text{III.12c})$$

où $r = \frac{x}{\sqrt{d}}$, $\alpha'_s = \frac{\alpha_s}{\sqrt{d}}$ et $v'_{nl} = \frac{v_{nl}}{\sqrt{d}}$. À partir de la dernière équation, nous déduisons que

$$\sigma_r = b'_\pm\phi^2, \quad (\text{III.13a})$$

$$\text{avec } b'_\pm = \left(\frac{v'_{nl}}{3}\right) \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{12b_5}{v'^2_{nl}}}\right]. \quad (\text{III.13b})$$

Ainsi lorsque le coefficient v_{nl} est petit nous avons

$$b'_\pm \simeq \pm 2\sqrt{\frac{b_5}{3}} + \frac{v'_{nl}}{3}. \quad (\text{III.13c})$$

Il suffit donc de déterminer l'expression de ϕ pour en déduire celle de σ . La suite de la méthode consiste à transformer les équations aux dérivées partielles couplées (III.12a) et (III.12b) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Pour cela nous égalisons les relations (III.13a) et (III.12b) après les avoir dérivé respectivement par rapport à t et r . Nous obtenons ainsi l'équation

$$\phi_t = \left(2 - \frac{v'_{nl}}{b'_\pm}\right)\phi_{rr} + \left(2 - \frac{v'_{nl}}{b'_\pm}\right)\frac{\phi_r^2}{\phi} - \left(\alpha'_s + \frac{2b_3}{b'_\pm}\right)\phi_r,$$

qui avec (III.12a), donne l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\lambda\phi - \left(1 - \frac{v'_{nl}}{b'_\pm}\right)\phi_{rr} - \left(2 - \frac{v'_{nl}}{b'_\pm}\right)\frac{\phi_r^2}{\phi} + \frac{2b_3}{b'_\pm}\phi_r = 0, \quad (\text{III.14})$$

qui admet des solutions de la forme $\phi(r) = \phi_0 e^{\kappa' r}$ avec

$$\kappa' = \frac{b_3}{3b'_\pm - 2v'_{nl}} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\lambda b'_\pm (3b'_\pm - 2v'_{nl})}{b_3^2}} \right].$$

La forme algébrique compliquée de κ' se simplifie⁴ d'une manière significative, si l'on tient compte de l'expression de la solution stationnaire ψ_s^\pm :

$$\kappa' = \frac{b'_\pm}{2} \psi_s^{\pm 2}. \quad (\text{III.15})$$

Ensuite l'équation différentielle ordinaire décrivant l'évolution temporelle de ϕ est obtenue en reportant la solution $\phi(r) = \phi_0 e^{\kappa' r}$ dans (III.12a). Il en résulte

$$\phi_t = \left(\lambda + \kappa'^2 - \alpha'_s \kappa' \right) \phi.$$

L'expression finale de $\phi(r, t)$ est alors donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \phi_0 e^{\kappa'(r-ct)}, \\ \text{avec } c &= \alpha'_s - \kappa' - \frac{\lambda}{\kappa'}. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

On en déduit que

$$\sigma(r, t) = b'_\pm \frac{\phi_0^2}{2\kappa'} \left[1 + e^{2\kappa'(r-ct)} \right],$$

⁴D'après la relation (III.13b), nous avons

$$\begin{aligned} 3b'_\pm - 2v'_{nl} &= -3b_\mp \\ b'_\pm (3b'_\pm - 2v'_{nl}) &= -3b'_\pm b'_\mp = 4b_5 \\ \text{donc, } \kappa' &= -\frac{b_3}{3b'_\mp} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b_5 \lambda}{b_3^2}} \right] = -\frac{2b_5}{3b'_\mp} \psi_s^{\pm 2}. \end{aligned}$$

Comme $b_5 = -\frac{3}{4}b'_+b'_-$, nous obtenons finalement $\kappa'_\pm = \frac{b'_\pm}{2} \psi_s^{\pm 2}$. Nous déterminerons par la suite laquelle des solutions ψ_s^\pm sera effectivement sélectionnée.

et la solution globale de l'équation d'amplitude, en fonction des variables physiques, prend la forme :

$$\psi(\zeta = x - V_f^{nl}t) = \psi_s^\pm \frac{e^{\kappa\zeta}}{[1 + e^{2\kappa\zeta}]^{\frac{1}{2}}} = \psi_s^\pm \sqrt{\frac{1 + \tanh(\kappa\zeta)}{2}}, \quad (\text{III.17})$$

avec $\kappa = \frac{\kappa'}{\sqrt{d}}$ et $V_f^{nl} = \alpha_s - \frac{\lambda + d\kappa^2}{\kappa}$ qui correspondent respectivement à la raideur et à la vitesse de translation du front connectant les solutions ψ_s^0 et ψ_s^\pm . La solution ψ_s^- étant instable nous ne garderons que celle reliant la branche basse ($\psi_s^0 = 0$) et la branche haute (ψ_s^+). Ainsi le nombre de valeurs que κ passe de quatre à deux :

$$\kappa = \kappa_\pm = \frac{b_\pm}{2} \psi_s^{+2} \quad (\text{III.18a})$$

$$\text{avec } b_\pm = \left(\frac{v_{nl}}{3d}\right) \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{12db_5}{v_{nl}^2}}\right]. \quad (\text{III.18b})$$

Les signes de ces deux valeurs, déterminés par celui de b_\pm , sont donc opposés et correspondent l'un au front montant (*kink*) et l'autre au front descendant (*anti-kink*).

– Le front montant (*kink*)

Le front est dit montant lorsque celui-ci part de la branche basse vers la branche haute. Cela se traduit ici par le fait $\psi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ et $\psi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \psi_s^+$, ce qui implique que κ doit être positif; d'où $\kappa = \kappa_+ = \frac{b_+}{2} \psi_s^{+2} > 0$. C'est donc vers ce front que tend asymptotiquement le bord lent d'une perturbation localisée⁵ (selon les conventions que nous avons utilisées jusqu'à maintenant), avec pour vitesse

$$V_{f+}^{nl} = \alpha_s - d\kappa_+ - \frac{\lambda}{\kappa_+}. \quad (\text{III.19a})$$

– Le front descendant (*anti-kink*)

Dans ce cas le front part de la branche haute vers la branche basse. Nous avons alors $\psi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \psi_s^+$ et $\psi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$, donc κ doit être négatif, d'où $\kappa = \kappa_- =$

⁵Le terme localisé est utilisé ici pour toute perturbation de taille et d'amplitude finie.

$\frac{b_-}{2}\psi_s^{+2} < 0$. C'est donc vers ce front, dont la vitesse est donnée par

$$V_{f-}^{nl} = \alpha_s - d\kappa_- - \frac{\lambda}{\kappa_-}, \quad (\text{III.19b})$$

que le bord rapide d'une perturbation localisée va évoluer de façon asymptotique.

Ainsi aux temps longs, le profil de toute perturbation localisée pourra s'écrire :

$$\psi(\zeta) = \psi_s^+ \sqrt{\frac{1 + \tanh[\kappa_+(\zeta - \zeta_+^0)]}{2}} \sqrt{\frac{1 + \tanh[\kappa_-(\zeta - \zeta_-^0)]}{2}}, \quad (\text{III.20})$$

ζ_+^0 et ζ_-^0 sont les positions des *centres de masse* (correspondant aux points d'inflexion) des fronts à un instant t donné. Afin de mettre en évidence les effets du gradient non-linéaire dans ces solutions nous examinons les cas de figure suivants :

1) Cas sans advection et sans gradient non-linéaire

En l'absence du terme d'advection et du gradient non-linéaire, la relation (III.18b) donnant b_{\pm} se réduit à

$$b_{\pm} = \pm b_0 = \pm 2\sqrt{\frac{b_5}{3d}},$$

d'où $\kappa_{\pm} = \pm\kappa_0 = \pm\frac{b_0}{2}\psi_s^2$ avec $\psi_s = \psi_s^+$. Chacun des bords d'une perturbation localisée va alors évoluer vers deux fronts, montant et descendant, de même raideur et de même vitesse $v_f^{\pm} = \pm v_0 = \pm\frac{\lambda + d\kappa_0^2}{\kappa_0}$ et donc symétriques, comme l'illustre la figure III.2.1c. Dans cette figure qui donne les variations des vitesses v_f^{\pm} en fonction du paramètre de contrôle λ , nous avons grisé le domaine de stabilité de l'état de base. Le point d'intersection de ces deux courbes où les vitesses changent simultanément de signe, donne alors la frontière entre les différents régimes de stabilité de la branche basse. Cette branche est dite stable et la branche haute est métastable si les fronts se déplacent l'un vers l'autre. Dans le cas contraire (si les fronts s'éloignent l'un de l'autre) les stabilités des deux branches s'inversent (Figure III.2.1). C'est ce que montre la figure (Figure III.2.1a), qui représente

l'évolution d'une perturbation localisée, pour des valeurs du paramètre de contrôle prises de part et d'autre du point d'inversion des signes des vitesses v_f^+ et v_f^- . Les figures NLA et NLS montrent alors les deux cas de figure possibles. En effet, dans le premier cas, les fronts s'éloignent l'un de l'autre avec la même vitesse et asymptotiquement, le système converge vers la branche haute. Le cas NLS montre la stabilité de la branche basse, les fronts se déplacent l'un vers l'autre avec la même vitesse, et asymptotiquement le système converge vers la branche basse.

2) Cas avec advection et sans le gradient non-linéaire

Les expressions de b_+ et b_- ne changent pas par rapport au cas précédent et les fronts ont toujours la même raideur. Par contre les vitesses $v_f^+ = \alpha_s - v_0$ et $v_f^- = \alpha_s + v_0$ du *kink* et de l'*anti-kink* sont différentes. Il apparaît alors, pour tout observateur dans le référentiel de laboratoire, une brisure de la symétrie de translation entre les deux parois de domaine, d'où les notions d'instabilité convective et absolue non-linéaire introduites plus tôt. Cependant cette brisure de symétrie est plus ou moins relative (apparente) car elle n'est pas perceptible dès lors que l'observateur mobile se déplace à la vitesse d'advection α_s . En effet pour un tel observateur les vitesses de translation des fronts sont données $v_f^\pm - \alpha_s = \pm v_0$. Ceci est bien visible sur la (Figure III.2.2c) en traçant la nouvelle droite horizontale passant par le point d'intersection des courbes donnant les deux vitesses v_f^+ et v_f^- . Du point de vue spatio-temporel, il existe maintenant deux situations pour lesquelles la branche basse est stable. En effet, s'ajoute au cas stable présenté dans le paragraphe précédent la situation où les deux fronts se déplacent dans la même direction avec des vitesses différentes, et la vitesse du front montant est plus grande que celle du front descendant. Le premier finit alors par entrer en collision avec le second et la solution asymptotique correspond donc à la branche basse. Ces deux cas de figure de la stabilité spatio-temporelle de la branche basse sont schématisés par la (Figure III.2.2a). A ces cas, s'ajoute aussi la situation dans laquelle les deux parois de domaine se déplacent toujours dans la même direction, mais la vitesse du front montant est inférieure à celle

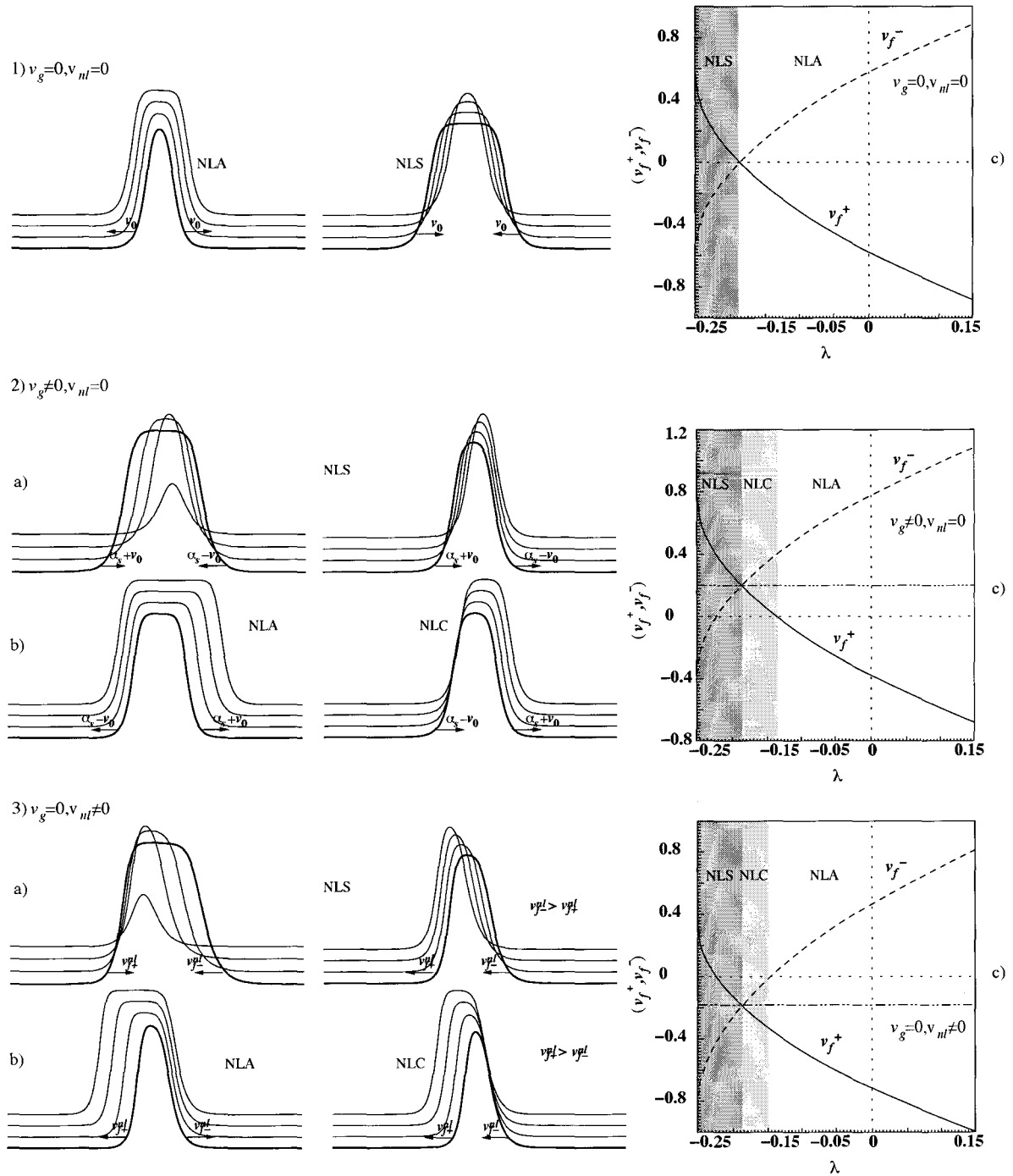


Figure III.2: Comportement (spatio-temporel) caractéristique des fronts dans les différents domaines : de stabilité non-linéaire (NLS) et d'instabilité non-linéaire convective (NLC) et absolue (NLA), pour les trois cas de base de l'équation de Ginzburg-Landau (III.5). Les figures 1), 2) et 3)c donnent les évolutions typiques des vitesses dans ces cas.

du front descendant. Ainsi la perturbation s'élargit tout en étant advectée, et la branche basse retrouve asymptotiquement sa stabilité. C'est le cas qui correspond à l'instabilité convective (Figure III.2.2b, NLC), dont le domaine est donné par la zone en gris clair sur la figure III.2.2c.

3) Cas avec le gradient non-linéaire (avec ou sans l'advection)

En présence du gradient non-linéaire, avec ou sans la dérive, l'égalité $b_+ = -b_-$, observée pour les cas précédents, n'est plus vérifiée. En d'autres termes nous avons $|b_+| \neq |b_-|$, ce qui implique que toute perturbation localisée évoluera vers deux fronts de raideur différente ($|\kappa_+| \neq |\kappa_-|$). Alors les vitesses des fronts données par les relations (III.19a) et (III.19b) sont elles aussi différentes même sans l'advection. Ainsi, quel que soit l'observateur, la dissymétrie introduite par le gradient non-linéaire sera toujours perceptible. De plus, l'effet de convection introduit par ce terme (non-linéaire) est opposé à celui du walk-off. Lorsque les deux effets sont combinés, la définition du seuil absolu dépend de celui qui prédomine. Si c'est le walk-off qui l'emporte alors, dans le domaine convectif, le *kink* et l'*anti-kink* se déplacent dans le même sens vers la droite, et le seuil absolu est atteint quand la vitesse du *kink* s'annule. La vitesse de celui-ci étant plus petite, le seuil absolu sera alors plus bas dans ce cas. Par contre, quand l'effet de l'advection non-linéaire l'emporte sur celui du walk-off, le *kink* et l'*anti-kink* se déplacent vers la gauche en régime convectif. Il en résulte que toute perturbation localisée se déplacera à contre-courant de l'advection linéaire. Ceci se traduit par un impact considérable sur la dynamique non-linéaire, notamment sur la nature convective et/ou absolue des régimes d'instabilité. Il apparaît une différence significative entre les valeurs effectives des seuils non-linéaires observées et estimées numériquement et celles fournies par l'analyse de stabilité linéaire. Dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau traitée dans cette thèse, notre méthode permet de prédire et donner l'expression analytique des seuils convectif et absolu non-linéaires (Figures III.2.3).

III.1.2 Application à l'oscillateur paramétrique optique dégénéré

Contrairement au cas général, à partir duquel nous avons obtenu les solutions de l'équation de Ginzburg-Landau avec le gradient non-linéaire, dans le DOPO, les paramètres ne peuvent pas être fixés indépendamment les uns des autres (voir Eq. (III.5)). La présence du walk-off entraîne automatiquement celle du gradient non-linéaire, dès que les effets de saturation deviennent importants. Ce qui signifie que la présence de la dérive spatiale dans le DOPO (walk-off), va créer obligatoirement un terme source de gradient non-linéaire dans le milieu. La dynamique, en termes de stabilité convective et absolue, est alors la résultante de la compétition entre les effets linéaires et non-linéaires de la dérive. Ces effets étant opposés nous nous attendons à ce que la vitesse de translation des fronts dans le DOPO soit plus petite que prévue, et par conséquent que les seuils absolus effectifs soient plus faibles aussi. En ce qui concerne la géométrie du système, il apparaît alors une brisure de la symétrie $x \rightarrow -x$. Cette dissymétrie sera plus ou moins marquée selon la configuration du système. Nous avons donc comparé, en fonction du paramètre de contrôle, les vitesses théoriques du front avec et sans le gradient non-linéaire et celles données par l'intégration du modèle originel de l'OPO dégénéré. La figure (III.4) montre clairement que le vitesse effective des fronts du DOPO est en excellent accord avec nos prédictions analytiques à partir de l'équation d'amplitude de Ginzburg-Landau, en tenant compte du gradient non-linéaire. Les seuils absolus et convectifs étant étroitement liés à la vitesse des fronts, il s'en suit un abaissement des seuils. Ceci peut être interprété comme étant une des conséquences de l'accentuation de brisure de symétrie par le gradient non-linéaire. Pour étudier cette dissymétrie nous introduisons le coefficient $\eta = \left| \frac{\kappa_-}{\kappa_+} \right|$ comme le rapport des raideurs des fronts descendant et montant :

$$\eta = \left| 1 - \frac{2v_{nl}}{v_{nl} + \sqrt{v_{nl}^2 + 12db_5}} \right|. \quad (\text{III.21})$$

Ainsi $\eta = 1$ pour des fronts symétriques, en absence du terme du gradient non-linéaire

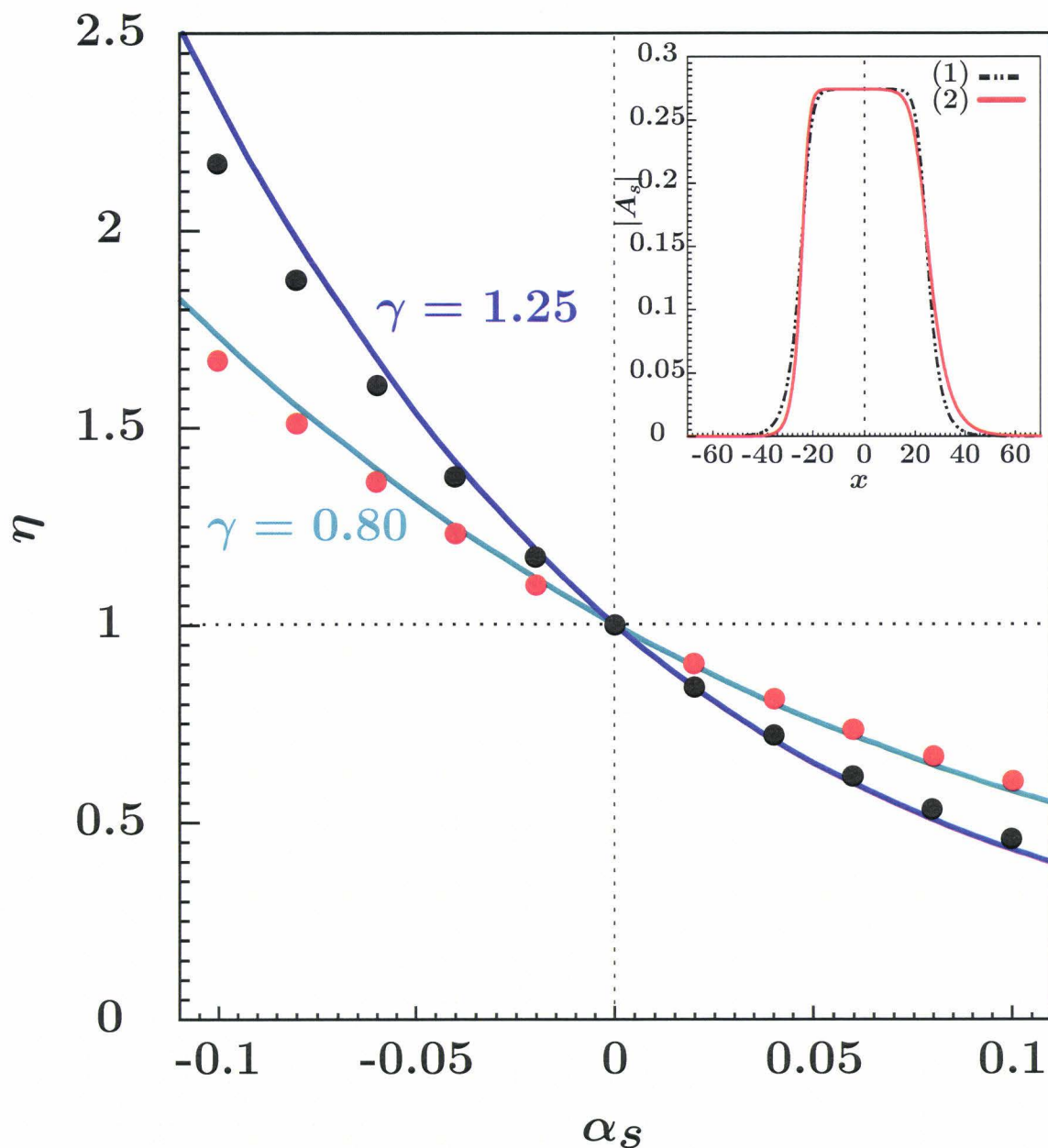


Figure III.3: Comportement du coefficient de dissymétrie non-linéaire en fonction du walk-off et du rapport des taux de relaxation des champs intra-cavité. Les courbes (trait plein) correspondent aux prévisions et les points sont obtenus suite à l'intégration numérique du modèle originel du DOPO. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux de la figure III.4. Le trait plein rouge et le trait mixte sont les profils numériques pour les points (1) et (2).

(v_{nl}) et permet de quantifier le degré de dissymétrie induit par celui-ci. L'écart absolu du rapport η à l'unité ($|\eta - 1|$) est alors d'autant plus grand que le coefficient v_{nl} est grand et, par conséquent, la dissymétrie plus importante. Dans le cas présent, celui-ci dépend à la fois du walk-off et du rapport des taux de relaxation $\gamma = \frac{\gamma_s}{\gamma_p} = \frac{t_p}{t_s}$ des champs intra-cavité (t_p et t_s sont les temps de vie respectifs des champs pompe et signal dans la cavité). Ceci traduit le fait que, non seulement la brisure de la symétrie est plus ou moins marquée selon que la dérive est plus ou moins rapide, mais aussi qu'elle est plus importante si le champ de pompe intra-cavité a une durée de vie plus longue que celle du signal (cf. Figures III.3). Pour ce faire, nous avons examiné numériquement l'importance de l'assymétrie en fonction des paramètres physiques du DOPO. Les résultats de cette étude sont présentés dans la figure (III.3) qui donne le comportement du degré de dissymétrie en fonction du walk-off, pour deux valeurs du rapport γ : 0.80 et 1.25. Outre le bon accord entre nos prévisions analytiques et les résultats numériques, nous observons (par exemple pour $\gamma = 1.25$) que la dissymétrie relative entre les fronts montant et descendant peut atteindre et même dépasser les 100%. La comparaison des profils transverses en intensité du signal pour $\alpha_s = 0.0$ et $\alpha_s = 0.1$ pour le rapport $\gamma = 0.80$, permet de visualiser la dissymétrie induite par le walk-off dans ce cas.

Ces résultats obtenus pour une seule dimension transverse, sont encore valables à 2D. En effet, la coupe transverse (en $y = 0$) du signal 2D issu de l'intégration du modèle originel de l'OPO à été comparé aux résultats de l'intégration de l'équation de Ginzburg-Landau, avec et sans le terme de gradient non-linéaire. Les résultats sont consignés dans la figure (III.5). Cette figure permet à la fois de comprendre l'origine de la dissymétrie observée sur le signal émis par l'OPO en présence du walk-off et de montrer la validité de notre modèle (Eq. (III.5)). La symétrie observée avec l'équation de Ginzburg-Landau sans le terme de gradient non-linéaire, disparaît lorsque ce terme est pris en compte. De plus, le signal issu de l'intégration de cette équation (III.5) coïncide de façon très satisfaisante avec celui émis par l'OPO dégénéré.

Nous avons réduit le système d'équations couplées décrivant l'évolution des champs

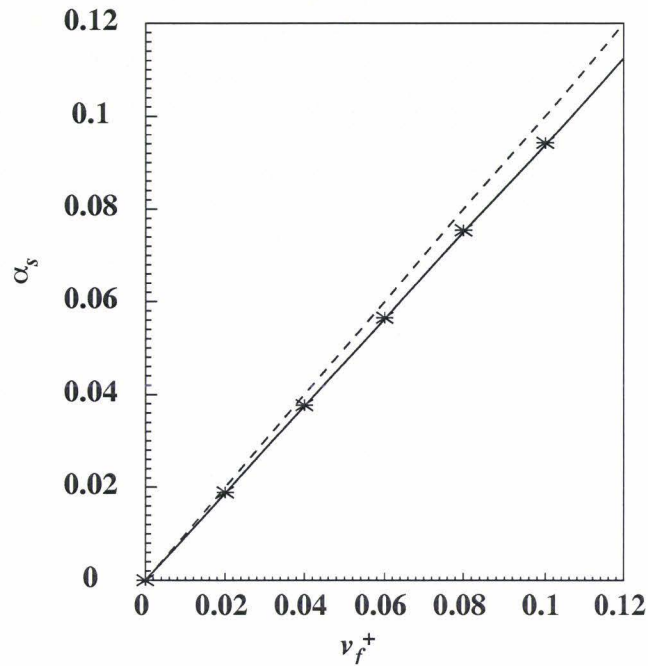


Figure III.4: Comparaison des vitesses des fronts, en tenant compte (trait plein) ou pas (tirets) du terme de gradient non-linéaire. Les (*) sont obtenus par estimation de la vitesse des fronts issus de l'intégration numérique du modèle original du DOPO pour les paramètres suivants $a_s = 2a_p/\gamma = 0.025$, $\Delta_s = 1.100$, $\Delta_p = 1.000$, $\mu_0 = 1.485$ ($E_0 = 2.101$) et $\alpha_s = 0.100$.

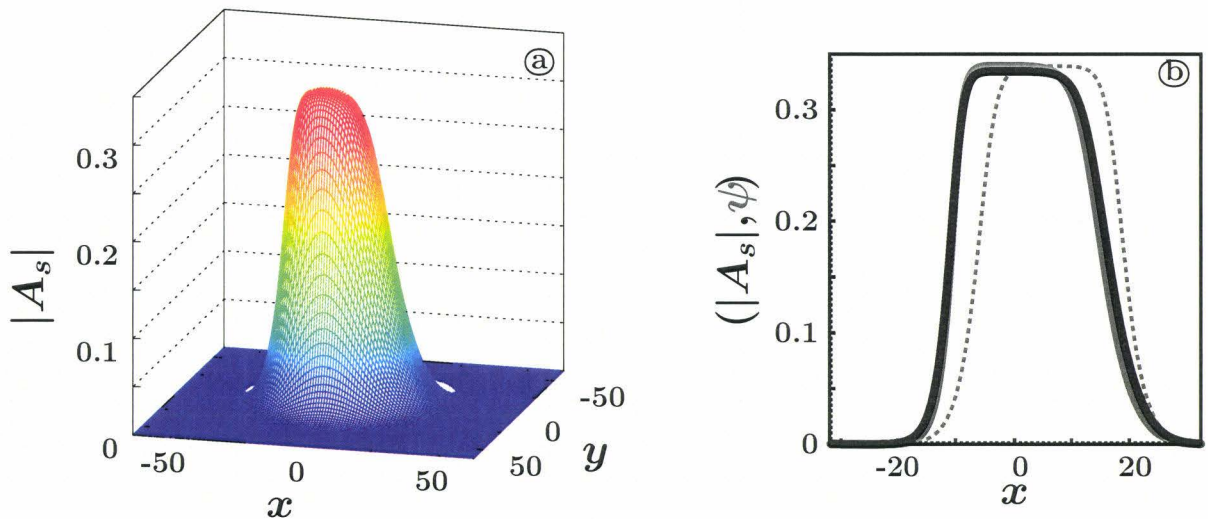


Figure III.5: Vue 3D du signal numérique émis par le DOPO à deux dimensions transverses (a). Le trait plein noir de la figure (b) donne la coupe de ce signal en $y = 0$. Le trait plein et les tirets gris sont respectivement les résultats de l'intégration de l'équation (III.5), avec et sans le gradient non-linéaire. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux de la figure III.4

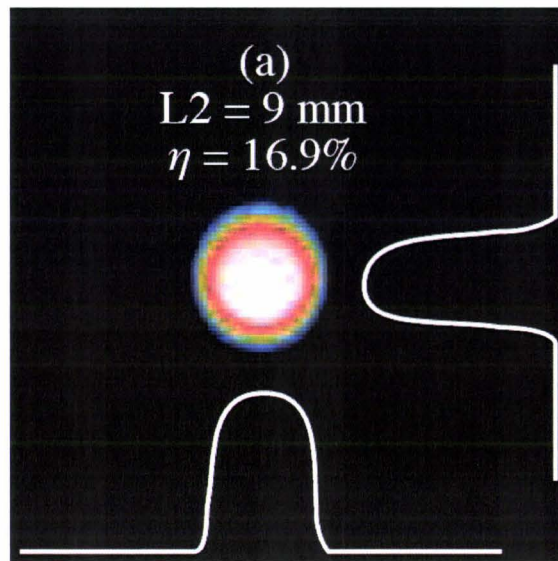


Figure III.6: Figure issue de la référence [96], le profil dissymétrique du signal numérique d'un amplificateur paramétrique optique.

dans un DOPO, à une seule équation dite équation d'amplitude. Elle nous a permis de mettre en évidence un couplage entre les non-linéarités du système et la dérive spatiale introduite par la biréfringence du milieu. Nous avons montré que la brisure de symétrie, induite par les effets linéaires associés au walk-off, peut être soit atténuée ou aggravée par ces effets non-linéaires. Cette atténuation des effets linéaires s'accompagne de la brisure de symétrie ($x \rightarrow -x$) entre les parois de domaine montante et descendante de toute perturbation localisée dans le système. Nous avons quantifié analytiquement cette dissymétrie en définissant un coefficient qui mesure l'impact du gradient non-linéaire induit par le walk-off. Dans le cas de l'OPO dégénéré, les résultats obtenus à partir de l'équation d'amplitude sont en très bon accord avec ceux donnés par l'intégration numérique du modèle originel. Les paramètres pertinents dans la description des effets non-linéaires sont alors le walk-off et la différence des temps de relaxation des champs signal et pompe intra-cavité. Nous tenons donc avec le gradient non-linéaire dû au walk-off, une des causes, sinon la cause de la dissymétrie observée dans certains OPO [13], de même que dans certains systèmes paramétriques, dès que le walk-off n'est plus négligeable. On peut citer en exemple le cas de l'amplificateur paramétrique optique (OPA) [96] dont est issue la figure III.6.

Chapitre IV

Auto-compensation du walk-off par couplage avec la diffraction et/ou les non-linéarités dans des OPO

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que l'interaction entre le walk-off et la dépendance spatiale du champ de pompe, ou encore, entre le walk-off et les non-linéarités dans l'OPO dégénéré, pouvait conduire à une modification drastique de la dynamique spatio-temporelle de celui-ci. Ce changement de comportement va de l'atténuation (couplage walk-off/non-linéarité) à l'annulation pure et simple (couplage walk-off/inhomogénéités) des effets de la dérive. Cependant, le DOPO reste un cas limite (les champs signal et complémentaire sont identiques conduisant à une interaction à deux ondes), qui offre une grande opportunité de comprendre le comportement général des OPO (interaction à trois ondes). En conséquence nous pouvons imaginer que les effets observés dans ce cas dégénéré soient plus ou moins accentués, dans le cas où le signal et son complémentaire ne sont plus indissociables. L'interaction entre diffraction et walk-off en est un parfait exemple [48]. En effet dans cette référence [48], les auteurs H. Ward *et al.* y montrent que contrairement à ce que l'on pourrait penser de prime abord, la perte de recouvrement due à la dérive n'entraîne pas forcément une augmentation du seuil

d'émission de la paire signal et idler, mais plutôt sa diminution. Il est alors possible de générer des structures convectivement stables en dessous du seuil linéaire classique (sans walk-off). C'est principalement à ce type d'interaction associant le walk-off à d'autres phénomènes, qu'ils soient linéaires (diffraction) ou non (saturation non-linéaires), que nous nous sommes intéressés dans ce chapitre. Après un rappel de l'analyse de stabilité linéaire classique dans la première partie, la seconde partie sera consacrée à l'étude du couplage walk-off/diffraction. Nous y examinerons la capacité de l'OPO à générer des structures absolument stables en dessous du seuil linéaire classique et ce pour une bifurcation super-critique. Enfin dans la troisième et dernière partie, nous étudions l'interaction walk-off et non-linéarités. A cet effet, pour comprendre comment le terme de gradient non-linéaire observé dans le chapitre précédent (pour l'OPO dégénéré) intervient dans la dynamique en cas de non-dégénérescence, nous considérerons le cas de la bifurcation sous-critique. Cette bifurcation conduit à un régime d'instabilité dans lequel nous examinons l'effet du walk-off sur les structures localisées de type solitons; ceci grâce à une équation d'amplitude contenant des termes supplémentaires qui permettent de décrire correctement la dynamique non-linéaire de l'OPO en présence de walk-off.

IV.1 Rappels sur l'OPO non dégénéré avec walk-off.

Pour l'OPO non dégénéré (Éqs. (I.8)) au delà du seuil d'oscillation, les expressions des champs émis par ce dernier peuvent s'exprimer sous forme de famille d'ondes planes progressives. Ces solutions que nous dénommerons aussi par *OPO On* se mettent alors sous la forme suivante [35, 42, 48] :

$$\begin{pmatrix} A_p^0 \\ A_s^0 \\ A_i^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E - C^2 e^{i\varphi}}{1 + i\Delta_p} \\ C \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t) \\ C e^{i\varphi} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1})$$

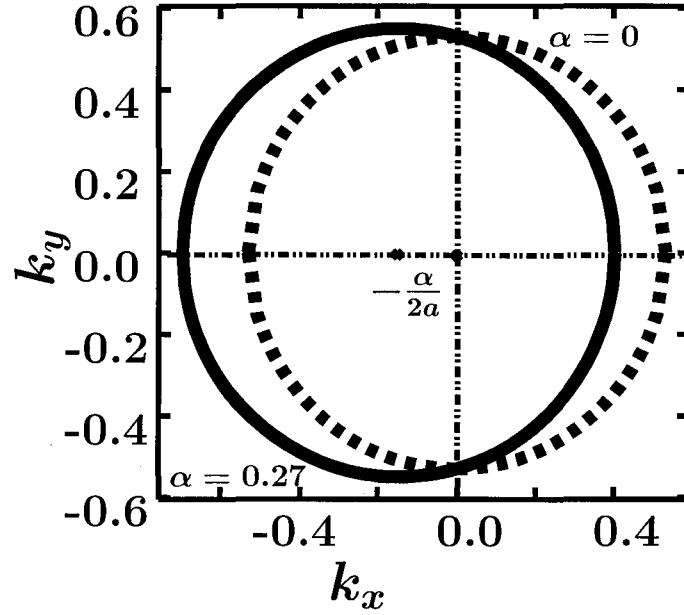


Figure IV.1: Représentation graphique du cercle d'équation (IV.7) donnant les composantes du nombre d'onde critique de l'OPO pour un detuning effectif Δ_e positif. Les tirets correspondent au cas sans walk-off ($\alpha = 0$) et le trait plein au cas avec walk-off ($\alpha = 0.135$). Les autres paramètres sont : $\gamma_s = \gamma_i = 1$, $\Delta_s = \Delta_i = -0.14$, $a_s = 0.5$, $a_i = 0.45$ et $\alpha_i = 0$ [78].

$\vec{k}(k_x, k_y)$ et $\vec{r}(x, y)$ sont respectivement le vecteur d'onde (caractéristique de chaque famille d'ondes progressives) et le vecteur position dans le plan transverse. La fréquence temporelle ω , le déphasage φ entre les champs signal et idler et leur amplitude C sont reliés aux paramètres de l'OPO par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_{\pm}^2 &= \Delta_p \Delta_k - 1 \pm \sqrt{E^2 - (\Delta_p + \Delta_k)^2} \\
 \cos(\varphi) &= \frac{1 + \Delta_p^2 + C_{\pm}^2}{E} \\
 \omega &= \frac{\gamma_s \gamma_i [\Delta_s - \Delta_i + k^2(a_s - a_i) + (\alpha_s + \alpha_i)k_x]}{\gamma_s + \gamma_i}
 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

avec $\Delta_k = \tilde{\Delta} + ak^2 + \alpha k_x$, où

$$\begin{cases} \tilde{\Delta} = \frac{\gamma_s \Delta_s + \gamma_i \Delta_i}{\gamma_s + \gamma_i}, \\ a = \frac{\gamma_s a_s + \gamma_i a_i}{\gamma_s + \gamma_i}, \\ \alpha = \frac{\gamma_s \alpha_s - \gamma_i \alpha_i}{\gamma_s + \gamma_i}, \end{cases} \tag{IV.3}$$

sont respectivement les valeurs effectives du detuning, de la diffraction et du walk-off. L'analyse de stabilité linéaire classique (à partir de la solution triviale; *OPO Off*) [35, 42, 48] permet alors de déterminer la valeur du paramètre de contrôle $\mu = \frac{E}{1+i\Delta_p}$ pour laquelle l'OPO bifurque de la solution *Off* vers la solution (IV.1), mais aussi et surtout l'expression du nombre d'onde au seuil. En effet, la relation de dispersion obtenue en introduisant la décomposition en modes normaux ci-après

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_i^* \end{pmatrix} \propto \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r} + \Omega t\right), \quad (\text{IV.4})$$

dans les équations (I.8b) et (I.8c) linéarisées autour de la solution de base s'écrit comme suit :

$$\Omega^2 - (b_s + b_i)\Omega + b_s b_i - \gamma_s \gamma_i |\mu|^2 = 0, \quad (\text{IV.5})$$

avec

$$\begin{aligned} b_s &= -\gamma_s [1 + i(\Delta_s + a_s k^2 + \alpha_s k_x)], \\ \text{et } b_i &= -\gamma_i [1 - i(\Delta_i + a_i k^2 - \alpha_i k_x)]. \end{aligned}$$

On en déduit la courbe neutre de stabilité marginale ($\Re(\Omega) = 0$)

$$|\mu|(k) = \sqrt{1 + \Delta_k^2} = \sqrt{1 + \left(\tilde{\Delta} + a k^2 + \alpha k_x\right)^2}, \quad (\text{IV.6})$$

et la fréquence correspondante $\Im(\Omega) = \omega$. Le nombre d'onde sélectionné au seuil, est celui qui minimise la courbe neutre. En présence du walk-off ce nombre d'onde ne dépend pas uniquement du signe du detuning effectif, mais de la quantité $\Delta_e = \alpha^2 - 4a\tilde{\Delta}$. Ainsi quand Δ_e est positif (ce qui est vérifié quelque soit $\tilde{\Delta} < 0$), le nombre d'onde critique obéit à l'équation du cercle

$$\left(k_x^c + \frac{\alpha}{2a}\right)^2 + k_y^c = \frac{\Delta_e}{4a^2}, \quad (\text{IV.7})$$

et le seuil correspondant est donné par $\mu_{th} = \mu_c = 1$. On remarque, par rapport au cas sans walk-off, que si le seuil reste inchangé, le cercle¹ (IV.7) caractérisant les modes les plus instables à ce seuil se trouve quant à lui déplacé de la quantité $\frac{\alpha}{2a}$ dans la direction (x) de la dérive. De plus, ce déplacement entraîne une variation du module des vecteurs d'onde des structures au seuil (cf. figure IV.1).

Pour $\Delta_e < 0$ ($\tilde{\Delta} > 0$ et α petit), $|\mu|(k)$ atteint son minimum à $(k_x^c, k_y^c) = (-\frac{\alpha}{2a}, 0)$ et l'expression du seuil est donnée par

$$\mu_{th} = \sqrt{1 + \Delta_e^2} \quad (IV.8)$$

soit à l'ordre dominant en α

$$\mu_{th} = \mu_c - \frac{\alpha^2 \tilde{\Delta}}{4a\mu_c}, \quad (IV.9)$$

avec $\mu_c = \sqrt{1 + \tilde{\Delta}^2}$.

Enfin, quelque soit le signe de $\tilde{\Delta}$, la nature de la bifurcation au seuil linéaire va dépendre du signe de la quantité $\Delta_e \Delta_p - 1$. Lorsque cette dernière est positive, les deux solutions C_{\pm}^2 coexistent pour $\frac{\Delta_p + \Delta_e}{1 + \Delta_p^2} \leq \mu \leq \mu_{th}$, donnant ainsi naissance à une bifurcation de Hopf sous-critique. Dans le second cas ($\Delta_e \Delta_p - 1 < 0$) seule la solution C_+^2 existe, ce qui va donner lieu à une bifurcation super-critique au seuil. Dans la suite nous allons traiter le cas $\Delta_e < 0$, qui entraîne un abaissement du seuil, et ce pour chacune de ces bifurcations.

IV.2 Abaissement du seuil d'émission de l'OPO

Les expressions du seuil linéaire données par la relation (IV.8) ou (IV.9) indiquent qu'en présence du walk-off, ce seuil sera toujours plus bas que celui du cas sans dérive. Cependant, l'analyse de stabilité spatio-temporelle [48] montre qu'à ce seuil les structures

¹Ce cercle correspond à la projection (au seuil) de la surface neutre de stabilité marginale ($|\mu|, k_x, k_y$) dans le plan (k_x, k_y) .

qui y apparaissent sont convectivement instables. Cela signifie que par rapport à une perturbation localisée, l'abaissement du seuil observé n'est pas un abaissement effectif, puisque pour une telle perturbation et sans source de bruit dans le système, ce dernier retrouve son état de base asymptotiquement. Dans cette section nous analysons alors la capacité de l'OPO à générer des structures absolument stables sous le seuil linéaire classique, car c'est seulement à ce cas que correspond un abaissement effectif du seuil c'est-à-dire indépendamment du type de perturbations initiales, étendues ou localisées. Pour cela nous avons utilisé l'équation d'amplitude donnée par la référence [48], obtenue pour le cas d'une bifurcation super-critique.

IV.2.1 Description du modèle

L'équation d'amplitude modélisant l'OPO en régime faiblement non-linéaire, pour une bifurcation super-critique, qui nous sert de point de départ dans notre étude a été obtenue suite à la dérivation du modèle de l'OPO en champ moyen (I.8) dans la limite des faibles valeurs de la dérive [48]

$$\tau \partial_t A_1 = (d_1 + id_2) (\mu - \mu_c) A_1 + (c_r + ic_i) \nabla_{\perp}^2 A + (v_g + iw_g) \partial_x A_1 - (N_1 + iN_2) |A_1|^2 A_1. \quad (\text{IV.10})$$

Les coefficients de celle-ci sont reliés à ceux du système originel par les relations suivantes [48] :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\gamma_s \gamma_i} \left[(\gamma_s + \gamma_i)^2 + (\gamma_s - \gamma_i)^2 \tilde{\Delta}^2 \right] \\ d_1 &= 2 \left(1 + \tilde{\Delta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\gamma_s + \gamma_i), \\ d_2 &= -2 \left(1 + \tilde{\Delta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\gamma_s - \gamma_i) \tilde{\Delta}, \\ c_r &= 2a \tilde{\Delta} (\gamma_s + \gamma_i), \\ c_i &= (a_s - a_i) (\gamma_s + \gamma_i) - (a_s + a_i) (\gamma_s - \gamma_i) \tilde{\Delta}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_g &= (\gamma_s - \gamma_i)(\alpha_s - \alpha_i)\tilde{\Delta}^2 - (\gamma_s + \gamma_i)(\alpha_s + \alpha_i), \\
w_g &= 2\tilde{\Delta}\alpha(\gamma_s + \gamma_i), \\
N_1 &= 2\frac{1 - \tilde{\Delta}\Delta_p}{1 + \Delta_p^2}(\gamma_s + \gamma_i), \\
N_2 &= -2\frac{1 - \tilde{\Delta}\Delta_p}{1 + \Delta_p^2}(\gamma_s - \gamma_i).
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Cette équation donne donc une idée de la simplification de la dynamique qu'entraîne la dégénérescence ramenant l'OPO (modèle à trois champs) à l'OPO dégénéré (modèle à deux champs : signal et idler identiques). En effet celle-ci implique d'après les relations (IV.11) l'annulation des termes effectifs de la diffraction $[c_i(\partial_x^2 + \partial_y^2)A_1]$, de l'oscillation temporelle $[d_2A_1]$ et de l'auto-modulation de la phase $[d_2N_2|A_1|^2A_1]$, qui correspondent toutes à des termes non-variationnels. Mais en plus de ces termes qui font la particularité de l'OPO non-dégénéré nous avons ici un terme de vitesse de groupe "complexe". Nous utilisons ici le terme de vitesse de groupe complexe car le terme w_g correspond bien à sa partie imaginaire et il est proportionnel à la dérive (walk-off). Il est responsable de l'apparition, en plus de la vitesse de groupe v_g , d'un nombre d'onde au seuil généré par la présence du walk-off. Les deux termes apparaissent simultanément avec le walk-off et disparaissent en son absence. Une fois ce nombre d'onde mis en évidence, un changement de variable approprié permet son élimination. À noter que ce terme apparaît aussi dans d'autres travaux dont nous citons en particulier l'étude récente de la dynamique des semi-conducteurs de la référence [97]. C'est donc sur les conséquences de l'interaction de ce terme avec les termes non variationnels de l'OPO que nous avons concentré cette étude.

IV.2.2 Analyse de stabilité linéaire

Il s'agit ici d'effectuer l'analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle à partir de la relation de dispersion du système linéarisé, autour de la solution de base de l'équation

(IV.10) :

$$\omega = (id_1 - d_2)(\mu - \mu_c) - (ic_r - c_i)k^2 - (v_g + iw_g)k. \quad (\text{IV.12})$$

L'application des conditions en (I.2.3) permet de caractériser les différents seuils d'instabilité comme suit :

a) Instabilité convective

Le régime convectif est atteint pour

$$\mu_{conv} = \mu_c - \frac{w_g^2}{4d_1c_r}, \quad (\text{IV.13a})$$

et les structures qui y apparaissent sont caractérisées par :

$$k_{conv} = -\frac{w_g}{2c_r} \quad (\text{IV.13b})$$

$$\omega_{conv} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{w_g^2 d_2}{4c_r d_1} + \frac{w_g^2 c_i}{4c_r^2} + \frac{w_g v_g}{2c_r} \right) \quad (\text{IV.13c})$$

$$v_{conv} = -\left(\frac{c_i}{c_r} w_g + v_g \right). \quad (\text{IV.13d})$$

b) Instabilité absolue

Les instabilités absolues apparaissent pour

$$\mu_{abs} = \mu_c - \frac{c_r}{4(c_r^2 + c_i^2)d_1} (w_g - v_g^+) (w_g - v_g^-) \quad (\text{IV.14a})$$

$$\text{et } k_{abs} = \frac{c_i v_g - c_r w_g}{2(c_r^2 + c_i^2)} + i \frac{c_r v_g + c_i w_g}{2(c_r^2 + c_i^2)}, \quad (\text{IV.14b})$$

où $v_g^+ = \frac{c_i + \sqrt{c_r^2 + c_i^2}}{c_r} v_g$ et $v_g^- = \frac{c_i - \sqrt{c_r^2 + c_i^2}}{c_r} v_g$.

IV.2.3 Discussion des résultats et application à l'OPO

A l'analyse de la relation (IV.13a), il apparaît que si la partie imaginaire de la vitesse de groupe est non nulle, le seuil convectif sera toujours plus bas que le seuil linéaire (classique

sans walk-off). De même, on peut constater sur la figure (IV.2), que la courbe de variation de ce seuil convectif en fonction du paramètre² w_g , est toujours symétrique. Comme nous l'avons évoqué précédemment, le régime convectif ne correspondant à un abaissement effectif du seuil qu'en présence de source permanente de bruit, nous ne nous attarderons pas sur ce cas. Nous allons donc nous intéresser dans la suite au régime d'instabilité absolu (de la solution triviale).

Pour ce régime d'instabilité, l'analyse de la relation donnant l'expression du seuil (IV.14a), nous permet de déduire que le signe du terme additionnel à μ_c est déterminé par celui de la quantité $(w_g - v_g^+) (w_g - v_g^-)$. En effet, les coefficients $c_r = 2a\tilde{\Delta}(\gamma_s + \gamma_i)$ et $d_1 = 2\left(1 + \tilde{\Delta}^2\right)^{\frac{1}{2}}(\gamma_s + \gamma_i)$ sont toujours positifs dans le cadre de notre étude. Ceci implique que la quantité $\frac{c_r}{4(c_r^2 + c_i^2)d_1}$ est toujours positive. Cela veut dire que le seuil absolu ne sera inférieur au seuil linéaire classique que si $w_g - v_g^+$ et $w_g - v_g^-$ sont de même signe. Les expressions de $v_g^- = \frac{c_i - \sqrt{c_r^2 + c_i^2}}{c_r}v_g$ et $v_g^+ = \frac{c_i + \sqrt{c_r^2 + c_i^2}}{c_r}v_g$ étant différentes lorsque le coefficient du terme de la diffraction est non nul, il apparaît dans ce cas une dissymétrie dans la courbe représentative du seuil absolu en fonction du coefficient w_g (voir figure IV.5). Par contre, lorsque le coefficient c_i est nul nous avons $v_g^\pm = \pm v_g$, ce qui se traduit par le fait que la courbe de variation de μ_{abs} en fonction de w_g est symétrique. Ceci nous amène alors à considérer les deux cas de figure suivants : celui où le coefficient de diffraction effective est nulle ($c_i = 0$) que nous appellerons le cas symétrique et le cas où $c_i \neq 0$ qui correspond au cas asymétrique.

1. Cas symétrique : $w_g \neq 0$ et $c_i = 0$ ($a_s = a_i$ et $\gamma_s = \gamma_i$).

Pour l'OPO cela signifie que le champ signal et son complémentaire ont le même taux de relaxation ($\gamma_s = \gamma_i$) dans la cavité, en plus d'avoir les mêmes coefficients de diffraction ($a_s = a_i$). Ceci implique l'annulation des coefficients d_2 et N_2 , donc respectivement de l'oscillation temporelle linéaire et de l'auto-modulation de phase.

²La variation du coefficient w_g provient de celle du walk-off effectif $\alpha = \frac{\gamma_s \alpha_s - \gamma_i \alpha_i}{\gamma_s + \gamma_i}$.

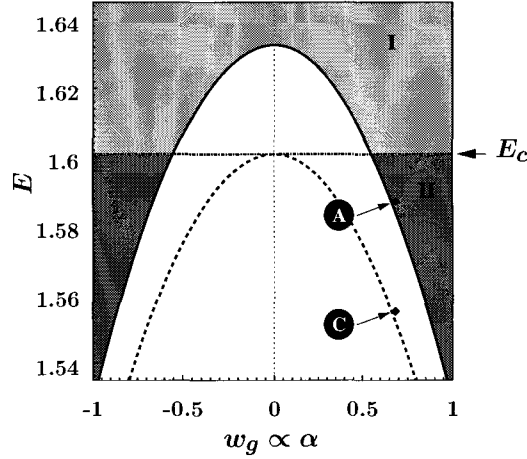


Figure IV.2: Variation des seuils convectif (tirets) et absolu (trait plein) de l'OPO non dégénéré en fonction de w_g en l'absence de diffraction ($c_i = 0$). Le trait mixte horizontal repère le seuil linéaire classique. Les régions grisées I et II correspondent au domaine d'instabilité absolu de l'OPO. La région en gris foncé (II) représente le domaine d'abaissement effectif du seuil par rapport au seuil linéaire classique. Les points (C) $(w_g, E_0) = (0.685, 1.555)$ et (A) $(w_g, E_0) = (0.685, 1.587)$ correspondent aux seuils numériques obtenus pour : $a_s = a_i = 0.075, a_p = .005, \Delta_s = \Delta_i = 1.250, \Delta_p = 0.00, \gamma_s = \gamma_i = \gamma_p = 1.00, \alpha_s = 0.275, \alpha_p = 0.001$. Ces seuils ont été déterminés numériquement à partir du modèle original de l'OPO. La figure (IV.3) montre les évolutions spatio-temporelles.

Dans ce cas nous obtenons :

$$\mu_{abs} = \mu_c - \frac{1}{4c_r d_1} (w_g^2 - v_g^2) = \mu_{conv} + \frac{v_g^2}{4c_r d_1}, \quad (\text{IV.15a})$$

$$\text{et } k_{abs} = -\frac{1}{2c_r} (w_g - i v_g). \quad (\text{IV.15b})$$

Des structures absolument stables peuvent alors être générées sous le seuil linéaire dans la mesure où la partie imaginaire de la vitesse de groupe (w_g) est plus grande que sa partie réelle (v_g). Il apparaît de même que le maximum d'écart entre le seuil absolu et le seuil linéaire classique est obtenu quand la vitesse de groupe (v_g) de la paire signal et idler est minimum. Le nombre d'onde d'oscillation (dans la direction du walk-off) $\Re(k_{abs})$, des structures qui apparaissent au seuil absolu, est alors inchangé par rapport à celui des structures qui dominent la dynamique au seuil convectif.

Maintenant que nous avons des conditions permettant de déterminer des ensembles

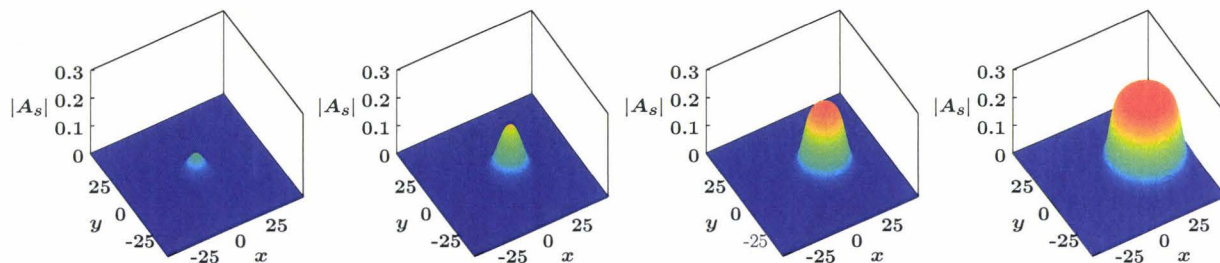


Figure IV.3: Évolution spatio-temporelle du signal de l'OPO en régime absolu correspondant au point (A) de la figure (IV.2).

de paramètres conduisant à un abaissement effectif du seuil, nous allons nous intéresser à la vérification numérique de cette diminution du seuil d'oscillation. Pour cela, après avoir fixé un ensemble de paramètres pour lequel l'OPO est potentiellement capable de générer des structures absolument stables sous le seuil linéaire classique, nous avons effectué l'intégration numérique du modèle original à trois champs, afin de déterminer les seuils absolu et convectif. On constate alors que ceux-ci sont en bon accord avec les prévisions analytiques comme le montrent les figures (IV.2) et (IV.3). Dans la première figure nous avons représenté graphiquement les courbes théoriques des variations des seuils absolu et linéaire en fonction de w_g , sur lesquelles nous avons placé les points correspondant aux seuils numériques. Dans la deuxième figure ce sont les évolutions spatio-temporelles issues des simulations que nous avons représentées à travers des profils transverses pour des instants donnés. Les coupes transverses effectuées sur la partie réelle de ces profils en champ proche et en champ lointain, nous ont alors permis de tracer les diagrammes spatio-temporels de ces évolutions et de comparer le nombre d'onde des structures aux seuils absolu et convectif sur la figure (IV.4). Ainsi comme le prévoyait l'étude analytique, nous montrons que les nombres d'onde estimés à chacun de ces seuils sont les mêmes et concordent de façon satisfaisante avec les prédictions analytiques ($k_{num} = 0.95$, $k_{th} = 0.91$).

2. Cas asymétrique : $w_g \neq 0$ et $c_i \neq 0$.

Les quantités $|v_g^\pm|$ sont alors différentes, et le seuil absolu est inférieur au seuil linéaire seulement si les quantités $(w_g - v_g^+)$ et $(w_g - v_g^-)$ sont de même signe. Cela

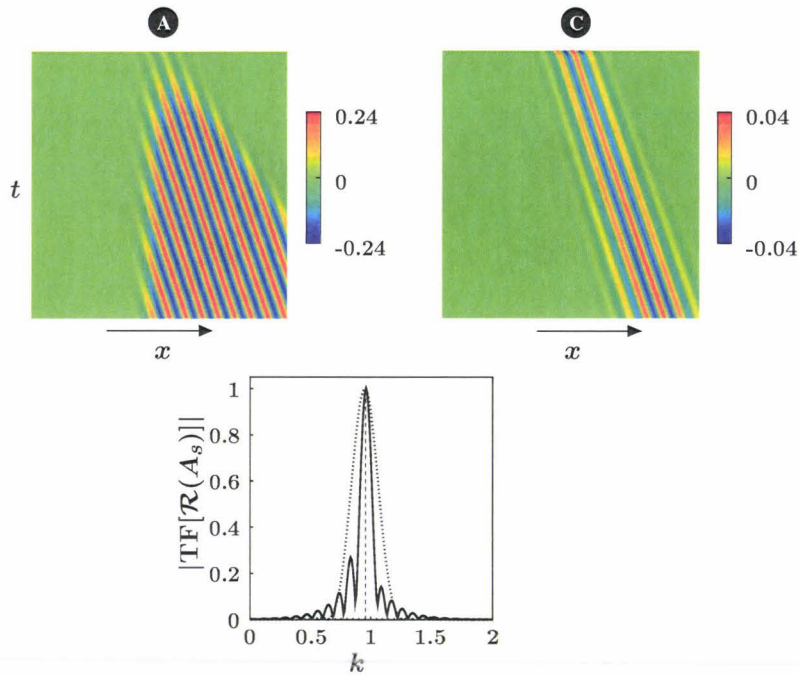


Figure IV.4: Diagrammes spatio-temporels de la partie réelle du champ du signal de l'OPO en régime absolu et convectif correspondant respectivement aux points (A) et (C) dans la figure (IV.2). Les transformées de Fourier respectives montrent l'existence du nombre d'onde généré par le walk-off sous le seuil.

fait donc apparaître une dissymétrie dans la variation du seuil absolu en fonction du paramètre w_g , due au couplage entre le walk-off et la diffraction, selon le sens (droite ou gauche) vers lequel la dérive effective entraîne le signal (voir figure IV.5). En effet en changeant uniquement le signe du paramètre de walk-off effectif $\left(\alpha = \frac{\gamma_s \alpha_s - \gamma_i \alpha_i}{\gamma_s + \gamma_i}\right)$, nous passons du régime absolu (point (A)) au régime convectif (point (C)). Il nous faut alors augmenter l'intensité du pompage pour obtenir à nouveau le régime absolu. En effet nous passons d'une diminution relative du seuil de 3.3% à augmentation relative de 2.5% par rapport au seuil linéaire classique (voir fig. IV.5), confirmant ainsi l'asymétrie induite par le couplage walk-off/diffraction.

A ce stade de cette étude, nous nous sommes intéressés à l'analyse de stabilité linéaire permettant la description de la dynamique spatio-temporelle de l'OPO (modèle à trois champs), proche du seuil d'émission de la paire signal-idler. Quelles sont les distributions spatiales transverses des champs en interaction au dessus du seuil? Quelle est l'influence des effets mis en évidence par l'analyse linéaire et notamment l'interaction walk-off et

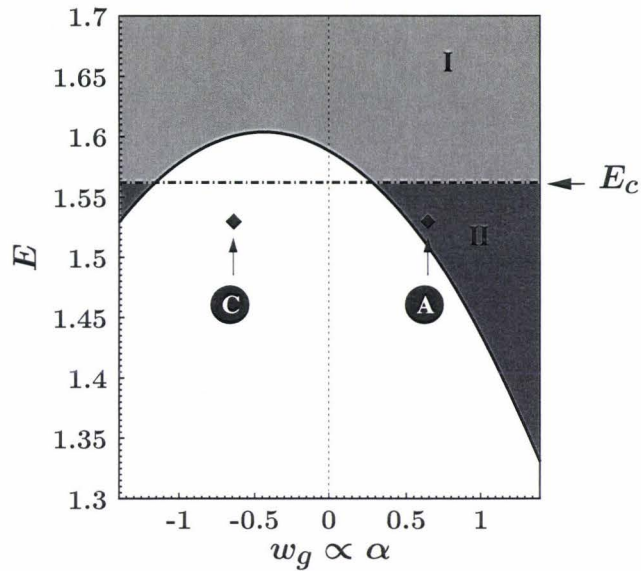


Figure IV.5: Variation du seuil absolu (trait plein) en fonction de w_g avec la diffraction ($c_i \neq 0$). Le trait mixte horizontal repère le seuil linéaire classique. Les régions grisées (I et II) correspondent au domaine de stabilité absolue de l'OPO. La région en gris foncé (II) représente le domaine d'abaissement effectif du seuil par rapport au seuil linéaire classique. Les points (A) $(w_g, E_0) = (0.636, 1.530)$ et (C) $(w_g, E_0) = (-0.636, 1.530)$ correspondent aux seuils numériques obtenus pour : $a_s = 0.125, a_i = 0.005, a_p = .005, \Delta_s = 1.200, \Delta_i = 1.200, \Delta_p = 0.00, \gamma_s = \gamma_i = \gamma_p = 1.00, \alpha_s = 0.275, \alpha_i = 0.01$. Les évolutions spatio-temporelles correspondantes sont présentées par la figure (IV.6).

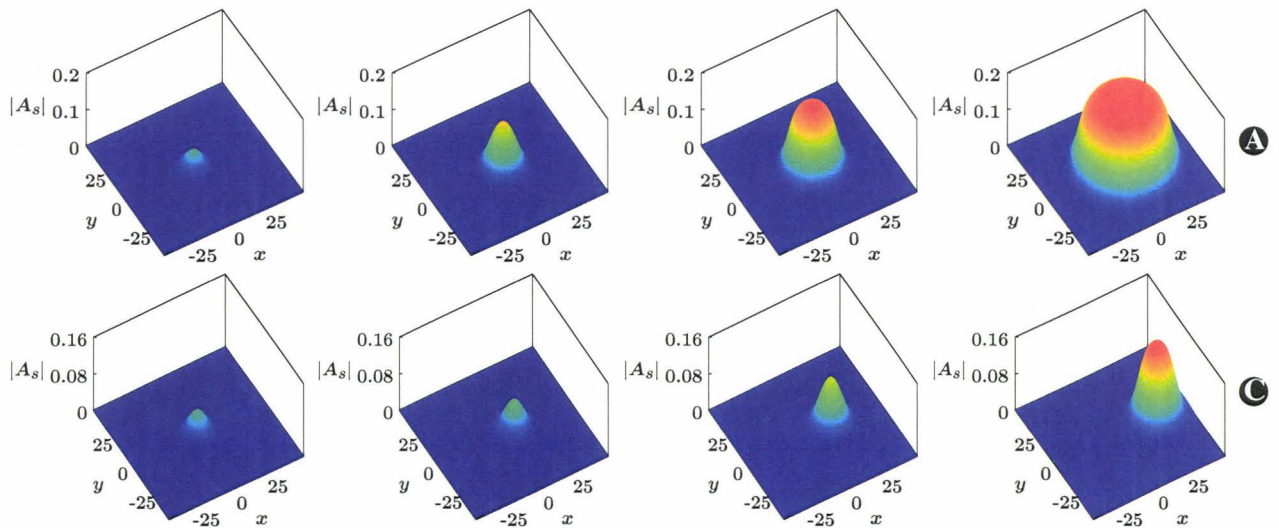


Figure IV.6: Évolutions spatio-temporelles du signal de l'OPO en régime absolu (A) et convectif (C) correspondant respectivement aux points de même nom dans la figure (IV.5).

effets non variationnels, sur la dynamique spatio-temporelle non-linéaire au dessus du seuil? Autant d'interrogations que nous allons tenter d'élucider dans la suite.

IV.2.4 Solutions de l'équation de Ginzburg-landau et structures spatiales transverses des OPO

Dans cette section, nous étudions la dynamique spatio-temporelle faiblement non-linéaire de l'OPO au dessus du seuil. Pour cela, nous déterminons les profils transverses pouvant apparaître dans l'OPO à travers les solutions de l'équation d'amplitude [98–100]. La présence du walk-off (dérive) nous amène à ne considérer que deux types de solutions. En effet, puisque nous n'étudions que le comportement asymptotique de la réponse du système à une perturbation localisée, nous avons alors deux possibilités : soit la perturbation reste localisée sans s'étaler, conduisant à un profil d'enveloppe du signal résultant de type pulse, soit elle s'étale dans l'espace, dans ce cas le profil du signal sera dominé par des solutions de type front. La recherche de ces deux types de solutions à fait l'objet de plusieurs études et continue de susciter l'intérêt de différents groupes de recherche [86,99–102]. Nous adoptons ici la démarche la plus utilisée qui consiste à chercher les solutions de l'équation (IV.10) sous la forme suivante :

$$A_0(\zeta, T) = a(\zeta) \exp(i\beta \ln[a(\zeta)] - i\omega T),$$

$$\text{avec : } a(\zeta) = BC \operatorname{sech}(B\zeta) \quad (\text{pulse})$$

$$a(\zeta) = g[1 - \tanh(\kappa\zeta)] \quad (\text{front})$$

où $\zeta = x + v_{conv}T$ et $\beta, B, C, \omega, \kappa$ et g des constantes fixées par les paramètres de l'équation de Ginzburg-Landau (IV.10) avec $T = t/\tau$. A_0 est relié à A_1 par

$$A_1 = A_0 \exp[-i(\omega_{conv} + d_2\lambda)T + ik_{conv}x],$$

avec $\lambda = \mu - \mu_c$.

Du point de vue de la dynamique, les solutions les plus simples de type front correspondent dans l'espace de phase, à des orbites hétéroclines connectant la solution triviale instable à la solution *OPO* On . Ces fronts constituent une famille de solutions, caractérisée par un nombre d'onde k et une vitesse v . Cependant toute condition initiale suffisamment étroite [55, 82], contribuera à sélectionner un seul mode caractérisé par le nombre d'onde k_{conv} ou k_{abs} , suivant que le régime d'instabilité est convectif ou absolu. Les fronts sont donc, dans le cas général, toujours (convectivement ou absolument) stables quand ils existent. Quant à la solution de type pulse elle correspond, dans l'espace de phase, à une orbite homocline connectant la solution triviale $A_1 = 0$ à elle-même. La description complète de cette dernière a fait l'objet d'un certain nombre de publications, notamment les références suivantes [86, 98, 99, 103]. En suivant la méthode de la référence [86], on obtient la solution pulse $A_0(\zeta, T)$ citée ci-dessus dont les constantes β, B, C, ω sont données par les expressions suivantes :

$$\beta_{\pm} = \frac{3 N_1 c_r + N_2 c_i}{2 N_1 c_i - N_2 c_r} \left[1 \pm \sqrt{1 + 2 \left(\frac{2 N_1 c_i - N_2 c_r}{3 N_1 c_r + N_2 c_i} \right)^2} \right] \quad (\text{IV.16a})$$

$$B = \sqrt{\frac{d_1 \lambda}{c_r (\beta^2 - 1) + 2\beta c_i}} \quad (\text{IV.16b})$$

$$C = \sqrt{\frac{3\beta (c_r^2 + c_i^2)}{N_1 c_i - N_2 c_r}} \quad (\text{IV.16c})$$

$$\omega = -\frac{2\beta c_r - c_i (\beta^2 - 1)}{2\beta c_i + c_r (\beta^2 - 1)} \quad (\text{IV.16d})$$

Cette solution de type pulse correspond à une structure spatiale localisée. On parle alors de soliton spatial dissipatif. Contrairement aux solutions de type front, le pulse donné par les relations (IV.16) n'existe que si B , qui caractérise sa taille, est réelle. De plus, il a été démontré [86] que la condition nécessaire, mais pas suffisante, à la stabilisation de cette solution, est que le produit $(d_1 \lambda)$ soit négatif. Il faut en plus de cette condition, que le produit $d_1 \lambda N_1$ soit positif pour que des solutions de type pulse stable [86, 102, 103] puissent être observées. Ce qui implique que les structures localisées de type pulse étudiées ici ne

peuvent être stabilisées que dans la zone de bistabilité d'une bifurcation sous-critique. Nous pouvons donc conclure que lorsque la nature de la bifurcation de la solution triviale vers la solution On est super-critique, les solutions de type pulse sont instables au profit des solutions de type front en régime faiblement non-linéaire.

C'est la raison pour laquelle nous allons nous intéresser au cas de la bifurcation sous-critique. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment les solutions de type pulse de l'équation de Ginzburg-Landau ne sont stables que si le produit $d_1\lambda N_1$ est positif avec $d_1\lambda < 0$. Dans l'OPO, ceci conduit à la condition $1 - \Delta_p \tilde{\Delta} < 0$. Dans cette configuration, les non-linéarités cubiques n'étant plus saturantes, l'équation (IV.16) ne permet plus de rendre compte de la dynamique spatio-temporelle faiblement non-linéaire de l'OPO. Il nous faut alors procéder à la dérivation des équations du modèle à trois champs dans le cas d'une bifurcation sous-critique en présence du walk-off. La section suivante y est alors consacrée.

IV.3 Équation d'amplitude de l'OPO non dégénéré : bistabilité et effet non-linéaire du walk-off

Dans cette section nous présentons l'étude complète de l'OPO en tenant compte à la fois de la diffraction et du walk-off. Dans un premier temps nous présenterons les principales étapes de la dérivation de l'équation d'amplitude de l'OPO non dégénéré, le signal et son complémentaire étant distincts lorsque la bifurcation au seuil est de type Hopf sous-critique. La démarche sera donc similaire à celle entreprise dans [35] et nous mettrons l'accent sur les différences notables entre le cas de l'OPO dégénéré et non dégénéré. Le calcul détaillé des opérations étant consigné dans l'annexe E.

Pour la clarté des calculs, nous introduisons préalablement dans les équations (I.8) les nouvelles variables suivantes : $A_p = \mu + (1 - i\Delta_p) B$, $A_s = \sqrt{1 + \Delta_p^2} A_1$, $A_i = \sqrt{1 + \Delta_p^2} A_2$ et $E = \mu(1 + i\Delta_p)$. Nous obtenons ainsi le système modélisant les écarts à la solution de base comme suit :

$$\partial_t B = \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p) B - A_1 A_2 + i a_p \nabla_{\perp}^2 B \right] \quad (\text{IV.17a})$$

$$\partial_t A_1 = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_1 + \mu A_2^* + i a_s \nabla_{\perp}^2 A_1 - \alpha_s \partial_x A_1 + (1 - i\Delta_p) B A_2^* \right] \quad (\text{IV.17b})$$

$$\partial_t A_2^* = \gamma_i \left[-(1 + i\Delta_i) A_2^* + \mu A_1 - i a_i \nabla_{\perp}^2 A_2^* - \alpha_i \partial_x A_2 + (1 + i\Delta_p) B^* A_1 \right] \quad (\text{IV.17c})$$

Pour introduire l'écart au seuil linéaire nous avons posé $\mu = \mu_{th} + \varepsilon^2 \mu_2$. Les échelles de temps et d'espace sont les mêmes que celles qui ont été utilisées pour le DOPO (voir [35] et Chapitre III); soit $x = X_0 + \varepsilon X$, $y = Y_0 + \varepsilon Y$ et $t = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2$. Par ailleurs nous déduisons du développement de μ précédemment donné que les solutions $V \equiv (B, A_1, A_2^*)^T$ des équations de l'OPO (IV.17) peuvent être mises sous la forme

$$V = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k/2} V^{(k/2)},$$

où les $V^{(k/2)} = (B^{(k)}, A_1^{(k)}, A_2^{(k)*})^T$ est la solution à l'ordre $O(\varepsilon^{k/2})$. Nous obtenons pour les différents ordres un système analogue à celui donné par le cas dégénéré :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1/2)} = 0 & O(\varepsilon^{1/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1)} = N^{(1)} & O(\varepsilon^1) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(3/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1/2)} + N^{(3/2)} & O(\varepsilon^{3/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1)} + N^{(2)} + iN^{(1)'} & O(\varepsilon^2) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(5/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(3/2)} + (-\partial_{T_2} + L_2) V^{(1/2)} + N^{(5/2)} + iN^{(3/2)'} & O(\varepsilon^{5/2}) \end{array} \right.$$

Les nouvelles expressions des opérateurs $L_0, L_1, L_2, N^{(k/2)}, N^{(k/2)'}$ étant données en annexe

(voir E). Nous avons alors comme solutions :

$$\begin{cases} V^{(1/2)} &= (0, 1, e^{i\theta})^T \varphi e^{i(\omega_c T_0 + k_c X_0)}, \\ V^{(1)} &= -(e^{-i\theta}, 0, 0)^T |\varphi|^2, \\ V^{(3/2)} &= (0, z, z^* e^{i\theta})^T e^{i(\omega_c T_0 + k_c X_0)}, \\ V^{(2)} &= \left(-i \frac{\Delta_e}{\gamma_p \mu_{th}} \partial_{T_1} (|\varphi|^2) - \frac{i}{\Delta_e} |\varphi|^4 e^{-i\theta}, 0, 0 \right)^T \end{cases}$$

avec,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \frac{1+i\Delta_e}{\mu_{th}}, \\ \omega_c &= -\frac{\gamma_s \gamma_i}{\gamma_s + \gamma_i} \left[\Delta_s - \Delta_i + (a_s - a_i) \frac{\alpha^2}{4a^2} - (\alpha_s + \alpha_i) \frac{\alpha}{2a} \right], \\ k_c &= -\frac{\alpha}{2a} \\ z &= \frac{i}{2\Delta_e} |\varphi|^2 \varphi. \end{aligned}$$

Les évolutions spatio-temporelles de l'enveloppe complexe φ obtenues, aux ordres $O(\varepsilon^{3/2})$ et $O(\varepsilon^{5/2})$, à partir de la condition de solvabilité peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\partial_{T_1} \varphi = -2 \frac{v_g}{\tau} \partial_X \varphi \quad (\text{IV.18a})$$

$$\text{et } \tau \partial_{T_2} \varphi = d \mu_2 \varphi + c (\partial_X^2 + \partial_Y^2) \varphi + C_1 + C_2 + C_3, \quad (\text{IV.18b})$$

avec

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(\gamma_s + \gamma_i)^2 + (\gamma_s - \gamma_i)^2 \Delta_e^2}{2\gamma_s \gamma_i (\gamma_s + \gamma_i)} \\ v_g &= \frac{1}{2} \left[\alpha_s + \alpha_i - (a_s - a_i) \frac{\alpha}{a} \right] + \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{2(\gamma_s + \gamma_i)} \left[\alpha_i - \alpha_s + (a_s + a_i) \frac{\alpha}{a} \right], \\ d &= d_r + i d_i = \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e \right] \mu_{th}, \\ \text{et } c &= c_r + i c_i = a \Delta_e + \frac{i}{2} \left[(a_s - a_i) - \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} (a_s + a_i) \Delta_e^2 \right]. \end{aligned}$$

C_1, C_2 et C_3 sont des fonctions de φ qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right]}{\gamma_p \tau} v_g \varphi \partial_x (|\varphi|^2) \\ C_2 &= \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right] \Delta_e |\varphi|^2 \varphi \\ C_3 &= \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right] \frac{\mu_{th}^2}{2\Delta_e^2} |\varphi|^4 \varphi \end{aligned}$$

Après calcul, l'équation d'amplitude réécrite dans les variables physiques du système prend la forme suivante :

$$\tau \partial_t \psi = d(\mu - \mu_{th}) \psi + c \nabla_{\perp}^2 \psi - v_g \partial_x \psi + v_{nl} \psi \partial_x (|\psi|^2) + b_3 |\psi|^2 \psi - b_5 |\psi|^4 \psi. \quad (\text{IV.19})$$

Les coefficients v_{nl}, b_3, b_5 sont donnés par :

$$\begin{aligned} v_{nl} &= v_{nl}^r + i v_{nl}^i = \gamma v_g \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right], \\ b_3 &= b_3^r + i b_3^i = (\Delta_p \Delta_e - 1) \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right], \\ b_5 &= b_5^r + i b_5^i = \frac{\mu_{th}^2}{2\Delta_e^2} \left[1 - i \frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{(\gamma_s + \gamma_i)} \Delta_e\right], \end{aligned}$$

avec $\gamma = \frac{1}{\gamma_p \tau}$. Les champs intra-cavités sont, à l'ordre dominant, reliés à l'enveloppe complexe³ ψ comme suit :

$$\begin{pmatrix} B \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\psi|^2 e^{-i\theta} \\ \psi e^{i(\omega_c t + k_c x)} \\ \psi e^{-i\theta} e^{-i(\omega_c t + k_c x)} \end{pmatrix}.$$

Par analogie avec la propagation des impulsions ultra-courtes (sub-picoseconde) dans les fibres optiques, le terme du gradient non-linéaire dans l'équation (IV.19) apparaît

³À noter qu'en cas de dégénérescence de la paire signal et idler ($\gamma_s = \gamma_i, \alpha_s = \alpha_i, \Delta_s = \Delta_i, a_s = a_i$), les coefficients figurants dans l'équation (IV.19) deviennent tous réels, de même que l'enveloppe lentement variable ψ . Nous retrouvons alors l'équation d'amplitude (III.5) issue de la dérivation des équations à deux ondes du DOPO.

comme l'équivalent dans le domaine spatial de l'auto-décalage de fréquence (*self-frequency shift*). Ce phénomène résulte d'un processus de type Raman [93, 101, 104, 105], et a été mis en évidence pour la première fois dans les fibres optiques [106]. Il est principalement à l'origine du décalage vers les hautes fréquences [104, 106]. Ce terme est dans notre cas, directement proportionnel au walk-off et disparaît avec ce dernier. Ainsi, dès l'instant où le walk-off n'est pas négligeable ce terme doit être pris en compte.

Il est à signaler que ce gradient non-linéaire et ses effets ne sont pas spécifiques à l'OPO. Son existence et ses effets ont été discutés dans de nombreux systèmes dissipatifs non-linéaires [93, 105, 107–110]. Cependant, la spécificité de l'OPO provient du fait que cette contribution non-linéaire est induite par un effet purement linéaire (le walk-off). Cet effet n'aurait pas pu être mis en évidence analytiquement sans le concours précieux de l'équation d'amplitude permettant une description faiblement non-linéaire de la dynamique spatio-temporelle de l'OPO. La suite de notre étude consiste à déterminer les conséquences d'une telle équation pour l'OPO non-dégénéré avec la méthodologie suivante : dans un premier temps nous allons considérer l'OPO sans walk-off. Les termes de dérive ($v_g \partial_x \psi$) et de gradient non-linéaire ($v_{nl} \psi \partial_x (|\psi|^2)$) sont alors nuls. L'équation d'amplitude résultante sera considérée comme le cas idéal de notre problème, dont nous allons caractériser analytiquement et/ou numériquement les solutions de type pulse. Une fois ces solutions obtenues et leur existence dans l'OPO vérifiée numériquement, nous examinerons ensuite les effets non-linéaire du walk-off sur ces dernières.

1. Cas de l'OPO sans walk-off

Dans ce cas l'équation d'amplitude de l'OPO se met sous la forme suivante :

$$\tau \partial_t \psi = d(\mu - \mu_{th}) \psi + c \nabla_{\perp}^2 \psi + b_3 |\psi|^2 \psi - b_5 |\psi|^4 \psi. \quad (\text{IV.20})$$

Cette dernière admet deux types de solutions *pulses* [105]. Le premier type est dit à intensité statique (figure IV.7) car l'enveloppe lentement variable ψ reste constante dans le temps. La caractérisation de ces structures à fait l'objet de nombreux travaux [86, 105,

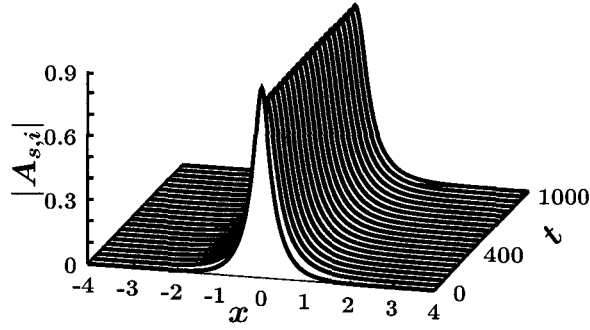


Figure IV.7: Evolution spatio-temporelle du signal de l'OPO non dégénéré sans walk-off, au seuil de génération des structures localisées. Ici ce seuil a été estimé à $\mu_0 = 1.51$ pour les paramètres suivants : $a_p = 0.02$, $a_s = 0.01$, $a_i = 0.01$, $\gamma_p = 1.0$, $\gamma_s = 1.0$, $\gamma_i = 0.8$, $\Delta_p = 1.5$, $\Delta_s = 1.2$, $\Delta_i = 1.20$.

110, 111].

Le second type sera désigné par pulse à intensité oscillante, dû au fait que ce type de solution se caractérise par une oscillation du module de l'enveloppe. Cette oscillation traduit un déphasage entre les composantes réelles et imaginaires comme c'est le cas lorsque les paramètres de detuning et/ou de diffraction des champs signal et idler sont différents (figure IV.8). Ce sont les effets non-linéaires du walk-off sur ces structures que nous allons examiner numériquement.

2. Effets non-linéaires du walk-off

Ces effets seront analysés à travers le gradient non linéaire de l'équation (IV.19). Il est intéressant de noter les travaux de H. Brand *et al.* [107–109] ou plus récemment ceux de H. P. Tian *et al.* [93, 110] et de O. Descalzi [105]. Il en ressort que dans le cas où le coefficient du terme de gradient non-linéaire est purement imaginaire, l'effet de ce dernier consiste uniquement à déplacer la fréquence d'oscillation (des parties réelle et imaginaire) de l'enveloppe du signal. De plus pour le pulse à intensité oscillante, ce terme de gradient entraîne une variation de la fréquence d'oscillation de l'intensité. Cependant, le coefficient v_{nl} pour l'OPO est complexe et sa partie réelle est non nulle (Éq. IV.19). Nous devons donc nous attendre à un effet supplémentaire du gradient non-linéaire. Pour identifier cet effet revenons un instant au cas de l'OPO dégénéré. Pour celui-ci (voir Chapitre 3), nous avons obtenu l'équation de

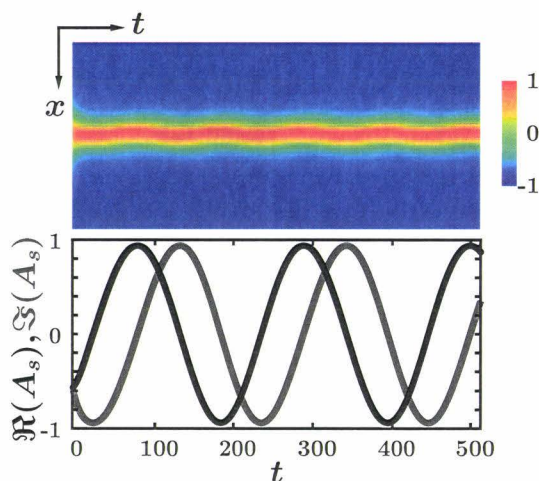


Figure IV.8: Diagramme spatio-temporel de l'intensité du signal de l'OPO et évolution temporelle des composantes réelle $[\Re(A_s)]$ et imaginaire $[\Im(A_s)]$ du même signal, et ce en l'absence du walk-off. Les paramètres suivants ont été utilisés : $a_p = 0.02$, $a_s = 0.01$, $a_i = 0.0025$, $\gamma_p = 1.0$, $\gamma_s = 1.0$, $\gamma_i = 1.0$, $\Delta_p = 1.5$, $\Delta_s = 1.2$, $\Delta_i = 1.20$.

Ginzburg-Landau quintique réelle (III.5). Le coefficient du terme de gradient non-linéaire y apparaissant, est dans ce cas réel. Et nous avons montré que ce terme est principalement responsable de la dissymétrisation du signal, accompagné d'une diminution de la vitesse de translation des structures observées. Ainsi nous pouvons donc nous attendre à ce que dans le cas non dégénéré aussi, ce terme induise une diminution de la vitesse de translation du pulse, accompagné de la dissymétrisation de l'enveloppe de ce dernier. Pour résumer nous devons nous attendre à ce que le walk-off entraîne à la fois une modification (diminution ou augmentation) de la fréquence d'oscillation des composantes des champs signal et idler, sous l'effet de la partie imaginaire du gradient non-linéaire. La partie réelle de celui-ci va quant à elle induire un ralentissement des pulses, accompagné de la dissymétrisation de l'enveloppe des champs (signal et idler) de sortie. Enfin pour le pulse à intensité oscillante, s'ajoute à ces effets un changement de la fréquence d'oscillation de l'intensité.

L'étude numérique a alors consisté dans un premier temps à vérifier que c'est bien le walk-off qui est à l'origine du gradient non-linéaire. Pour cela nous avons effectué les simulations des équations originelles de l'OPO sans walk-off avec différentes valeurs (on en a choisit

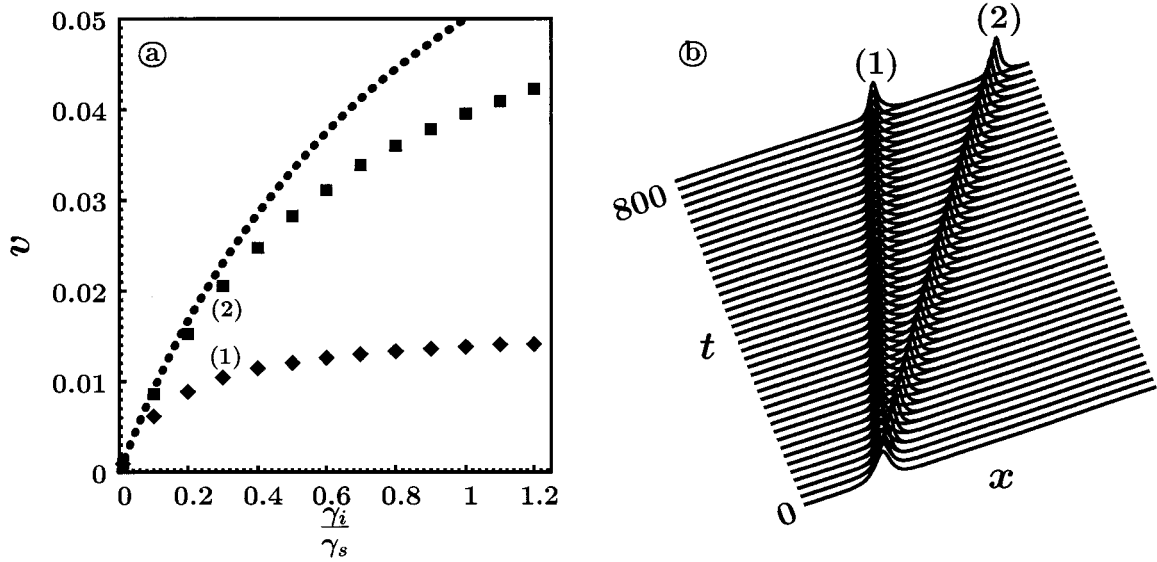


Figure IV.9: (a) Variation du soliton de l'OPO en fonction du rapport $\frac{\gamma_i}{\gamma_s}$ pour plusieurs valeurs de $\gamma = 1/\gamma_p\tau$: [◆, $\gamma_p = 0.1 \leftrightarrow \gamma = 3.250$] et [■, $\gamma_p = 1.0 \leftrightarrow \gamma = 0.325$]. Les pointillés correspondent à la représentation graphique de la vitesse v_g donnée par (IV.18b). Les autres paramètres sont les mêmes que ceux de la figure (IV.8), excepté $\alpha_s = \alpha - i = 0.05$ et $E = 1.51$. (b) Evolutions spatio-temporelles correspondant aux points (1) et (2) de la figure (a).

deux pour la figure IV.9) du rapport $\gamma = 1/\gamma_p\tau$. Et ce afin de vérifier un résultat connu des équations d'amplitudes affirmant que le taux de relaxation de la pompe (γ_p) n'a pas d'influence sur la dynamique du signal proche du seuil. Cependant, en présence du walk-off, l'équation d'amplitude (IV.19) montre que c'est le rapport du walk-off et du taux de relaxation de la pompe (γ_p) qui caractérise l'importance du gradient non-linéaire dans la dynamique de l'OPO. Pour mettre en évidence cet effet nous avons fixé la valeur du walk-off et nous avons réeffectué, avec les précédents paramètres, l'intégration numérique du modèle de l'OPO. Il ressort de cette étude numérique deux constats importants. En effet la présence du walk-off entraîne d'une part un ralentissement du soliton qui est d'autant plus marqué que le rapport γ est grand comme le montre les figures IV.9. D'autre part ce ralentissement s'accompagne d'une augmentation de la fréquence d'oscillation des composantes (réelle et imaginaire) de l'enveloppe du signal (IV.10). Ce qui permet de vérifier que le walk-off induit des effets non-linéaires via le gradient non-linéaire, avec un coefficient physique caractéristique donné par γv_g .

Nous avons examiné dans ce chapitre les effets linéaires et/ou non-linéaires du walk-off

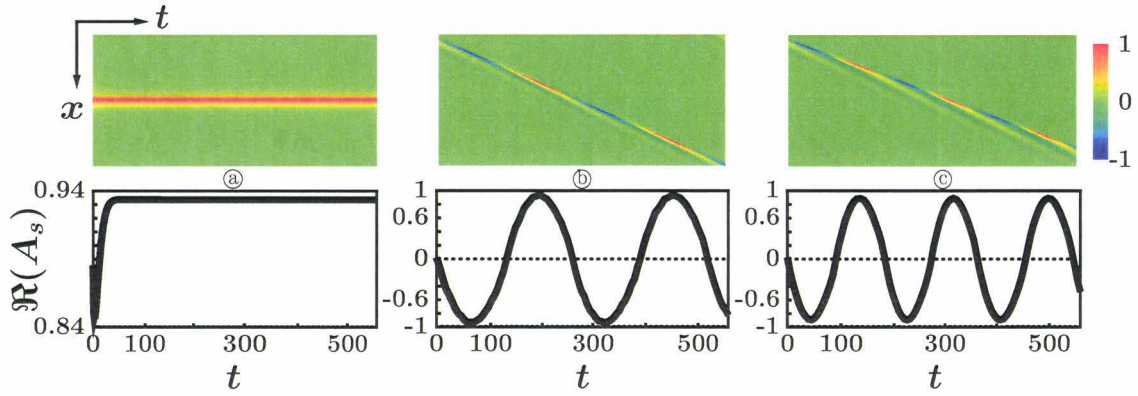


Figure IV.10: Évolutions spatio-temporelles du maximum de l'enveloppe du signal de sortie de l'OPO avec : [Ⓐ $\gamma_p = .3, \alpha_{s,i} = 0.0, E = 1.487$], [Ⓑ $\gamma_p = .6, \alpha_{s,i} = 0.1, E = 1.487$], [Ⓒ $\gamma_p = .3, \alpha_{s,i} = 0.1, E = 1.490$]. Les autres paramètres sont : $a_p = 0.03, a_{s,i} = 0.0075, \gamma_p = 1.0, \gamma_s = 1.0, \gamma_i = 0.36, \Delta_p = 1.5, \Delta_{s,i} = 1.2$.

dans l'OPO non dégénéré. Dans le cas super-critique, nous avons montré que les effets purement linéaires de la dérive générée par le walk-off, permettent d'abaisser le seuil de l'OPO. Ce qui rend alors possible, la génération de structures absolument stables sous le seuil linéaire sans walk-off. Dans le cas sous-critique, en plus de cet effet de diminution du seuil, le walk-off entraîne des effets non-linéaires qui ont pour conséquence le décalage du nombre d'onde transverse vers les courtes longueurs d'onde. A cet effet, s'ajoutent la dissymétrisation de l'enveloppe de la solution de type pulse du signal, la diminution de sa vitesse d'entraînement, et la diminution de son intensité. Ainsi, par analogie avec la propagation des impulsions ultra-courtes dans les fibres optiques, le walk-off est à l'origine de comportements non-linéaires en introduisant dans le plan transverse, l'équivalent (dans l'espace) du *self-steepening* et du *self-frequency shift*.

Chapitre V

Caractérisation des solitons

dissipatifs des OPO avec absorbant saturable

Dans les chapitres qui précèdent, nous avons toujours considéré que les pertes dans la cavité de l'OPO étaient linéaires. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la dynamique spatio-temporelle de l'OPO, en présence d'absorbant saturable. La présence de celui-ci permet de générer des structures localisées de large amplitude. Ces structures sont obtenues à l'aide de l'absorbant saturable, grâce auquel le ou les champs s'amplifient jusqu'à atteindre l'intensité dite de saturation, à partir de laquelle le milieu devient transparent. On obtient alors l'émission d'un signal jusqu'à ce que le milieu redevienne absorbant et le cycle peut alors recommencer. C'est l'une des méthodes utilisées pour générer des impulsions lasers courtes et intenses. Dans ce chapitre, nous examinons le cas de l'oscillateur paramétrique optique dégénéré, dans lequel le milieu amplificateur est associé à un absorbant saturable, agissant sélectivement sur le signal. Dans cette étude (essentiellement numérique), nous nous sommes intéressés aux solitons dissipatifs observés dans l'OPO dégénéré avec absorbant saturable [69, 71]. Nous avons alors accordé un intérêt particulier à la caractérisation de leur vitesse de translation, mais aussi à la transition des solitons

symétriques immobiles vers les solitons asymétriques en translation uniforme dans le plan transverse. Notre objectif, dans ce dernier chapitre, étant de fournir des informations numériques qui guideront peut-être l'élaboration d'une méthode analytique, permettant d'accéder aux caractéristiques de ces impulsions.

V.1 Présentation du modèle

Désormais le cristal non-linéaire n'est plus seul dans la cavité, ce qui impose une réécriture du modèle régissant l'évolution des champs en présence de l'absorbant saturable. Cette réécriture se fait alors en deux étapes [71] (ne sera considéré ici que le cas de l'OPO dégénéré) :

la première consiste à écrire séparément les équations des enveloppes des champs pour chacun des milieux traversés ($\chi^{(2)}$, AS) dans la cavité. Ainsi, après la propagation libre dans le cristal non-linéaire d'ordre 2, les évolutions des champs de pompe et signal sont gouvernées par le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned}\partial_z \mathcal{A}_p &= \frac{i}{2} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_p + i \mathcal{A}_s^2 \exp(i\Delta kz), \\ \partial_z \mathcal{A}_s &= i \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_s + i \mathcal{A}_p \mathcal{A}_s^* \exp(-i\Delta kz).\end{aligned}\tag{V.1}$$

obtenu à partir des équations de Maxwell standards. $\mathcal{A}_{p,s} = \mathcal{A}_{p,s}(x, y, z, \tau)$ sont respectivement les enveloppes lentement variables de la pompe et du signal. $\Delta k = 2n_s k_s - n_p k_p$ mesure l'écart à la condition d'accord de phase et $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{2k_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, avec $k_s = \frac{\omega_s}{2c}$, est le laplacien transverse normalisé par la longueur de diffraction (c est la vitesse de la lumière dans le vide) et $n_{p,s}$ sont les indices de réfraction linéaires respectifs de la pompe et du signal dans le cristal. Lorsque la propagation a lieu dans l'absorbant saturable, ces enveloppes doivent alors vérifier les équations ci-après :

$$\begin{aligned}\partial_z \mathcal{A}_p &= \frac{i}{2} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_p, \\ \partial_z \mathcal{A}_s &= i \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_s - \frac{r(1-i\varphi)}{1+\varphi^2+s|\mathcal{A}_s|^2} \mathcal{A}_s.\end{aligned}\tag{V.2}$$

Dans ces équations, r et s représentent respectivement les coefficients d'absorption et de saturation du milieu absorbant, et φ est l'écart entre la fréquence d'absorption du milieu et celle du champ signal. La présence de la cavité (en anneau de longueur L) se traduit par les expressions

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p(x, y, 0, \tau + d) &= \mathcal{A}_p^{\text{in}} + R_p \exp(i\theta_p) \mathcal{A}_p(x, y, L, \tau), \\ \mathcal{A}_s(x, y, 0, \tau + d) &= R_s \exp(i\theta_s) \mathcal{A}_s(x, y, L, \tau),\end{aligned}\tag{V.3}$$

qui donnent les conditions de bord à l'entrée du cristal. $\mathcal{A}_p^{\text{in}}$ et d représentent respectivement le champ de pompe incident et le temps de parcours dans la cavité. Ces relations font intervenir par ailleurs les coefficients de réflexion $R_{p,s}$ et les désaccords $\theta_{p,s} = 4n_{p,s}k_{p,s}L \pmod{2\pi}$ aux fréquences de résonance de la cavité associées respectivement à la pompe et au signal. Si on ajoute à ces conditions l'approximation du champ moyen [72], qui se traduit ici par

$$\mathcal{A}_{s,p}(x, y, 0, \tau + d) \simeq \mathcal{A}_{s,p}(x, y, 0, \tau + d) + d\partial_\tau \mathcal{A}_{s,p}(x, y, 0, \tau),$$

on obtient après calcul [71], les équations gouvernant l'évolution des enveloppes lentement variables de la pompe comme suit :

$$\begin{aligned}\partial_t E_1 &= -(1 + i\Delta_1) E_1 + E_1^* E_2 - \frac{R(1+i\delta)E_1}{1+\delta^2+S|E_1|^2} + i\nabla_\perp^2 E_1, \\ \partial_t E_2 &= -\gamma [(1 + i\Delta_2) E_2 + E_1^2 - E] + \frac{i}{2} \nabla_\perp^2 E_2,\end{aligned}\tag{V.4}$$

où on a introduit les changements ci-après : $(E_1, E_2, E) = \left(\frac{\mathcal{A}_s}{b_s}, \frac{i\mathcal{A}_p}{b_p}, \frac{i\mathcal{A}_p^{\text{in}}}{b_s^2}\right)$ et $(\Delta_2, \Delta_1, R, S, \delta, \gamma) = \left(-\frac{R_p\theta_p}{1-R_p}, -\frac{R_s\theta_s}{1-R_s}, \frac{r}{b_p}, \frac{s}{b_s^2}, \frac{\varphi}{b_p}, \frac{1-R_p}{1-R_s}\right)$, avec $b_p = 1 - R_s$ et $b_p = \sqrt{b_s(1 - R_p)}$. Pour la suite nous allons considérer que le champ signal est parfaitement résonant avec le milieu absorbant, ce qui implique l'annulation de δ . Le modèle résultant constitue alors le point de départ

de notre étude :

$$\begin{aligned}\partial_t E_1 &= -(1 + i\Delta_1) E_1 + E_1^* E_2 - \frac{R E_1}{1 + S|E_1|^2} + i\nabla_{\perp}^2 E_1, \\ \partial_t E_2 &= -\gamma [(1 + i\Delta_2) E_2 + E_1^2 - E] + \frac{i}{2} \nabla_{\perp}^2 E_2.\end{aligned}\tag{V.5}$$

Les solutions stationnaires homogènes de ce système d'équations sont données par $(E_1^0, E_2^0) = (0, \frac{E}{1+i\Delta_p})$ pour la solution triviale (solution *Off*) et $(E_1^0, E_2^0) = (\sqrt{I_1^0} \exp(i\phi), \frac{E - I_1^0 \exp(2i\phi)}{1+i\Delta_2})$ pour la solution non-nulle, tel que

$$\begin{aligned}E^2 &= I_1^{0^2} + 2I_1^0 \left(1 + \frac{R}{1+SI_1^0} - \Delta_1 \Delta_2\right) + (1 + \Delta_2^2) \left[\left(1 + \frac{R}{1+SI_1^0}\right)^2 + \Delta_1^2\right] \\ \cos(2\phi) &= \Delta_1 + \frac{\Delta_2 I_1^0}{1+\Delta_2^2}\end{aligned}\tag{V.6}$$

L'OPO avec absorbant saturable est alors bistable lorsque la condition $\Delta_1 \Delta_2 > (1 + R) [1 - RS(1 + \Delta_2)]$ est réalisée. La stabilité linéaire de ces solutions dans une configuration à une dimension spatiale a été largement étudiée [112]. Il en découle que la courbe neutre de stabilité marginale de la solution de base (triviale), est obtenue sous la forme $|\mu| = \frac{E}{\sqrt{1+\Delta_2^2}} = \sqrt{(1 + R)^2 + [\Delta_1 + k^2]^2}$. Pour les detunings (du signal) positifs, le seuil linéaire du DOPO avec absorbant saturable (DOPOSA) est alors atteint pour $\mu_c = \sqrt{(1 + R)^2 + \Delta_1^2}$ et le nombre d'onde des structures y apparaissant est nul, $k_c = 0$. Si au contraire le detuning du signal est négatif, le nombre d'onde minimisant la courbe neutre de stabilité marginale est donné par $k_c = \sqrt{-\Delta_s}$, et le seuil vaut dans ce cas $\mu_c = 1 + R$. Quant à l'analyse de stabilité linéaire de la solution *On*, pour laquelle on a introduit les perturbations $u_{1,2}$ telle que $E_{1,2} = E_{1,2}^0 + u_{1,2} \exp(\lambda t + ikx)$, elle révèle deux types d'instabilités. En effet dans ce cas, la relation de dispersion du système est obtenue sous la forme du polynôme caractéristique

$$\sum_{n=0}^4 f_n \lambda^n = 0,\tag{V.7a}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{k^2}{4} (2\Delta_1 + k^2) \left[4\gamma^2 + (2\gamma\Delta_2 + k^2)^2 \right] + 2\gamma I_1^0 \left[2\gamma (I_1^0 + 1 + \beta R) - (2\gamma\Delta_2 + k^2) (\Delta_1 + k^2) \right], \\
f_1 &= 2\gamma k^2 (2\Delta_1 + k^2) + \frac{1}{2} (1 + \beta R) \left[4\gamma^2 + (2\gamma\Delta_2 + k^2)^2 \right] + 4\gamma I_1^0 (\gamma + 1 + \beta R), \\
f_2 &= k^2 (2\Delta_1 + k^2) + \frac{1}{4} \left[4\gamma^2 + (2\gamma\Delta_2 + k^2)^2 + 16\gamma (1 + \beta R) \right] + 4\gamma I_1^0, \\
f_3 &= 2(\gamma + 1 + \beta R), \\
f_4 &= 1,
\end{aligned} \tag{V.7b}$$

où $\beta = \frac{1}{1+SI_1^0}$. Des solutions de ce polynôme, va alors dépendre la nature des structures qui déstabilisent la solution stationnaire non-nulle du DOPOSA. Deux types d'instabilités pouvant naître dans un tel système correspondent aux cas suivants :

- le polynôme (V.7a) admet une solution nulle, ce qui implique que le coefficient f_0 est lui aussi nul. Les instabilités correspondantes sont alors de type Turing (ou modulationnelles). Elles conduisent, dans le plan transverse, à la formation de structures stationnaires périodiques, de nombre d'onde k_T , obtenu par la résolution de l'équation $\frac{dI_{1T}}{dk} = 0$, où $f_0(I_{1T}) = 0$, peut être exprimée comme suit :

$$k_T = -\Delta_1 + \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{2} + \gamma \left(I_{1T} - \frac{\gamma}{8} \right) + 2(1 + \beta_T R) \beta_T^2 R I_{1T}} \tag{V.8a}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \left[4(1 + \beta_{1T} S I_{1T}) R S \beta_T^2 + \Delta_1^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]^2 &= \gamma \left[\gamma^2 - 4\Delta_1^2 + 4\gamma \beta_T^2 R S I_{1T} \right. \\
&\quad \left. + 4(1 + \beta_T S I_{1T}) (\gamma - 4\beta_T^2 R S I_{1T}) \right] I_{1T}.
\end{aligned} \tag{V.8b}$$

Cette solution correspond au cas où $\Delta_1 = 2\gamma\Delta_2$.

- le polynôme (V.7a) admet une paire de solutions purement imaginaires. Dans ce cas l'instabilité est de type Hopf et conduit à des structures oscillantes dans le temps, dont l'expression de l'amplitude est donnée, dans le cas de la résonance

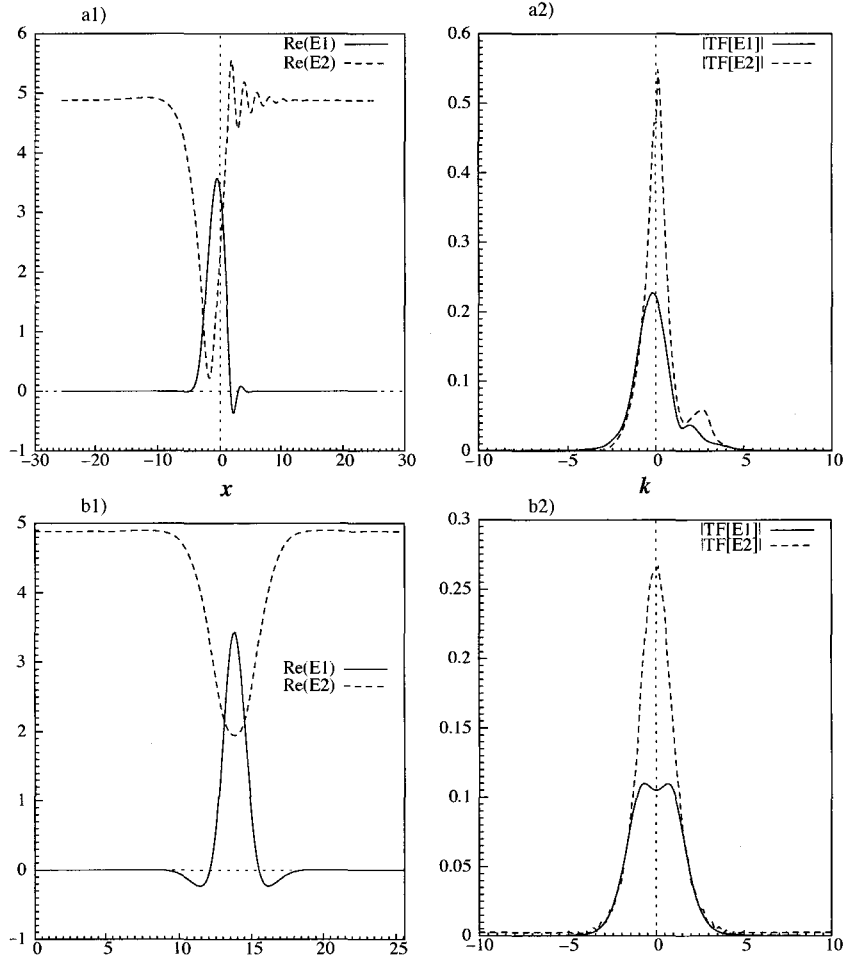


Figure V.1: Profils en champ proche des parties réelles ((a1) et (b1)) et en champ lointain ((a2) et (b2)), des champs de pompe et signal obtenus pour les mêmes valeurs de paramètres, pour des conditions initiales différentes. Les paramètres sont : $R = 5.0, S = 1.0, a_1 = 2a_2 = 1, \Delta_1 = 0.4, \Delta_2 = 0.5, \gamma = 0.56$ et $E = 6.1$.

parfaite ($\Delta_1 = 0$), par

$$[(\gamma + \xi_-)^2 - \xi_+^2] [(\gamma + \xi_-)^2 (2I_{1H} + \xi_-) - \xi_- \xi_+^2] = 0, \quad (\text{V.9})$$

avec $\xi_{\pm} = 1 + (1 \pm \beta_H S I_{1H}) R \beta_H$ et $\beta_H = \frac{1}{1 + S I_{1H}}$.

En plus de ces instabilités que le système peut potentiellement exhiber, il a été observé dans le domaine de bistabilité un autre type de solution de type solitonique [69, 71] de vitesse non-nulle, de large amplitude et présentant une forte dissymétrie (voir figure V.1). C'est la caractérisation analytique, et/ou numérique de cette solution qui a motivé cette étude. Compte tenu du caractère complexe des interactions qui peuvent exister dans ce

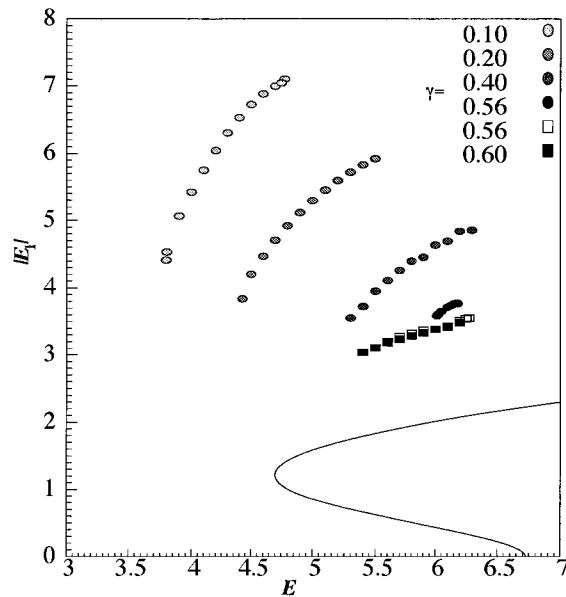


Figure V.2: Digramme de bifurcation du DOPOSA pour différentes valeurs de γ . Les cercles représentent la solution asymétrique mobile et les carrés correspondent à la solution symétrique immobile. Les paramètres utilisés sont : $R = 5.0$, $S = 1.0$, $\Delta_1 = 0.4$, $\Delta_2 = 0.5$.

ystème, nous nous sommes rendus à l'évidence qu'aucune méthode linéaire classique n'est capable de rendre compte du comportement de ce pulse. En effet d'une part, l'analyse de stabilité linéaire de la solution de base découple entièrement l'évolution des champs, ce qui ne peut conduire qu'à des relations partielles entre les caractéristiques du pulse et les paramètres du système [71]. D'autre part, comme nous venons de le voir, l'analyse de stabilité de la solution *On* donne quant à elle, quatre valeurs propres qui, faute de critères adéquats, ne peuvent rendre compte que de certains cas particuliers comme les instabilités de Hopf ou de Turing. De plus, comme le montre le diagramme de bifurcation de cette solution (voir figure V.2), son domaine d'existence et notamment le point le bifurcation, est étroitement lié au rapport des taux de relaxation de la pompe et du signal $\gamma = \frac{\gamma_p}{\gamma_s}$. Nous avons alors axé notre étude sur la caractérisation numérique de cette solution.

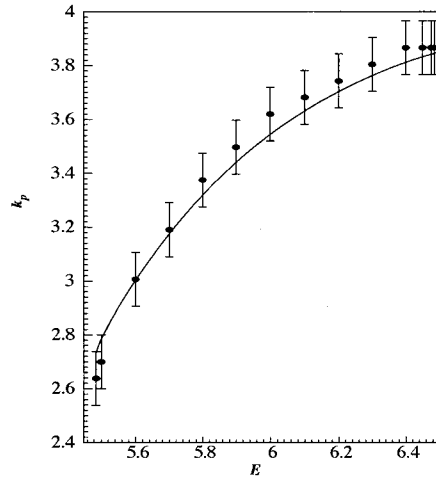


Figure V.3: Évolution du nombre d'onde des oscillations de relaxation de la pompe en fonction du paramètre de contrôle. La courbe en trait plein correspond à l'interpolation des points semi-analytiques donnés par (V.11). Les barres d'erreurs donnent l'incertitude sur la détermination numérique des points. Il s'agit ici de l'erreur due à la discrétisation de la grille d'intégration. Les paramètres utilisés sont : $R = 5.00$, $S = 1.00$, $\Delta_1 = 0.40$, $\Delta_2 = 0.50$, $\gamma = 0.45$, $a_1 = 2a_2 = 1.00$.

V.2 Détermination semi-analytique de la vitesse du soliton asymétrique

Le premier constat est que la formation des différents types de solitons est fortement sensible aux valeurs du paramètre γ . Le second constat qui a été fait, concernant la dynamique de cette solution, est le lien entre sa vitesse v , et le nombre d'onde, noté k_p , des oscillations de relaxation de la pompe. À l'ordre le plus bas en γ , cette relation est donnée par $k_p = 2v$ [71]. Afin de donner la relation complète entre ces deux grandeurs, nous avons effectué l'élimination adiabatique du signal par rapport à la pompe. Ensuite, nous avons cherché des solutions stationnaires en introduisant la variable $z = x - vt$. Il en résulte pour le champ de pompe, l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$E_2''(z) - 2ivE_2'(z) + 2i\gamma(1 + i\Delta_2)E_2(z) = 2i\gamma E, \quad (\text{V.10})$$

où les primes représentent les dérivées de E_2 par rapport à z .

Les solutions de cette équation de la forme $E_2 = \frac{E}{1+i\Delta_2} - A_p \exp(kz)$ donnent les

relations suivantes entre k_r , k_i et v :

$$\begin{aligned} k_r^\pm &= \pm \left[-\left(\frac{v^2+2\gamma\Delta_p}{2}\right) + \sqrt{\gamma^2 + \left(\frac{v^2+2\gamma\Delta_p}{2}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ k_i^\pm &= v - \frac{\gamma}{k_r^\pm}. \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

On retrouve ainsi, dans la limite de γ petit, la relation $k_p \equiv k_i^+ \simeq 2v$. La dépendance du nombre d'onde, par rapport au paramètre de contrôle, n'est donc pas explicite car incluse dans v . Pour preuve nous comparons dans la figure (V.3) les évolutions du nombre d'onde donné par le spectre de Fourier de la pompe et de celui donné par k_p (V.11), où la vitesse v a été estimée numériquement. A noter le bon accord entre ces deux résultats. Cependant, nous avons observé numériquement, une chute brutale, non présentée sur la figure, du nombre d'onde des oscillations de relaxation vers 0. Elle (la chute) correspond à la transition du soliton asymétrique mobile vers le soliton symétrique immobile. Hormis la différence de symétrie entre ces deux solutions, nous avons remarqué que pour le soliton fixe, les pics des champs de pompe et signal sont localisés au même endroit, alors qu'il existe toujours un décalage entre ces pics lorsque le soliton est asymétrique et mobile.

De plus, si dans l'équation (V.10) la fonction décrivant le profil de $E_2(z)$ est symétrique, soit $E(z) = E(-z)$, $E'(-z) = -E'(z)$ et $E''(-z) = E''(z)$, l'invariance $z \rightarrow -z$ ne peut être vérifiée que si la vitesse v est nulle. Ceci montre que le soliton symétrique ne peut être qu'immobile, et par conséquent, seuls les solitons asymétriques peuvent avoir une vitesse non-nulle.

Nous nous sommes alors intéressés au lien entre cette vitesse et la différence entre les positions des pics d'intensité du signal et de la pompe qui caractérise l'asymétrie. Le résultat de cette analyse est donné dans la figure (V.5). Il apparaît que la vitesse est reliée à l'écart entre les maxima d'intensité des champs. Nos investigations numériques montrent que pour certaines valeurs de paramètres (cf. figure V.5b1), cette relation est linéaire du type $v = v_0 + \rho\Delta x$, où Δx représente l'écart entre les pics, et v_0 , la vitesse au seuil d'apparition du pulse. v_0 et ρ étant tous les deux des fonctions des paramètres du

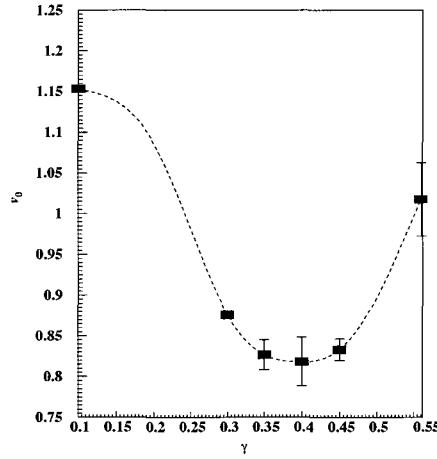


Figure V.4: Variation de la vitesse au seuil en fonction de γ . Les barres d'erreurs donnent l'incertitude sur la détermination des points (carrés) numériques, due à la dispersion des données. Les paramètres utilisés sont : $R = 5.0, S = 1.0, \Delta_1 = 0.4$ pour toutes les figures. $E = 5.5$ pour (a1 et b1) et $\Delta_2 = 0.5$ pour (b2).

système. On s'est ensuite intéressé au lien entre cette vitesse et les paramètres du système, principalement le rapport γ . Il apparaît que cette relation est complexe, comme on peut l'apercevoir dans la figure (V.4). En effet, cette figure montre que la variation de v en fonction du rapport γ est fortement non-linéaire.

Nous avons étudié numériquement, avec la méthode du split-steep Fourier (voir Chapitre II), les caractéristiques du signal émis, sous forme de soliton asymétrique mobile, en régime bistable, par l'OPO dégénéré avec absorbant saturable. Nous avons montré que cette asymétrie est à l'origine de la mobilité du soliton. Nous avons aussi montré que les solitons symétriques sont immobiles. Nous avons observé que la transition d'un soliton symétrique fixe vers un soliton asymétrique mobile n'est pas adiabatique, dans la mesure où le soliton mobile apparaît avec une vitesse finie. Après son apparition, la vitesse du soliton mobile dépend de son degré d'asymétrie. Ce dernier est relié au décalage dans les positions des maxima d'intensité des champs signal et pompe. Nous avons en particulier mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse du soliton et l'écart entre la position de son maximum d'intensité et celle de la pompe. Nous avons aussi déterminé l'allure de la courbe d'évolution de la vitesse au seuil d'existence du soliton asymétrique en fonction de γ .

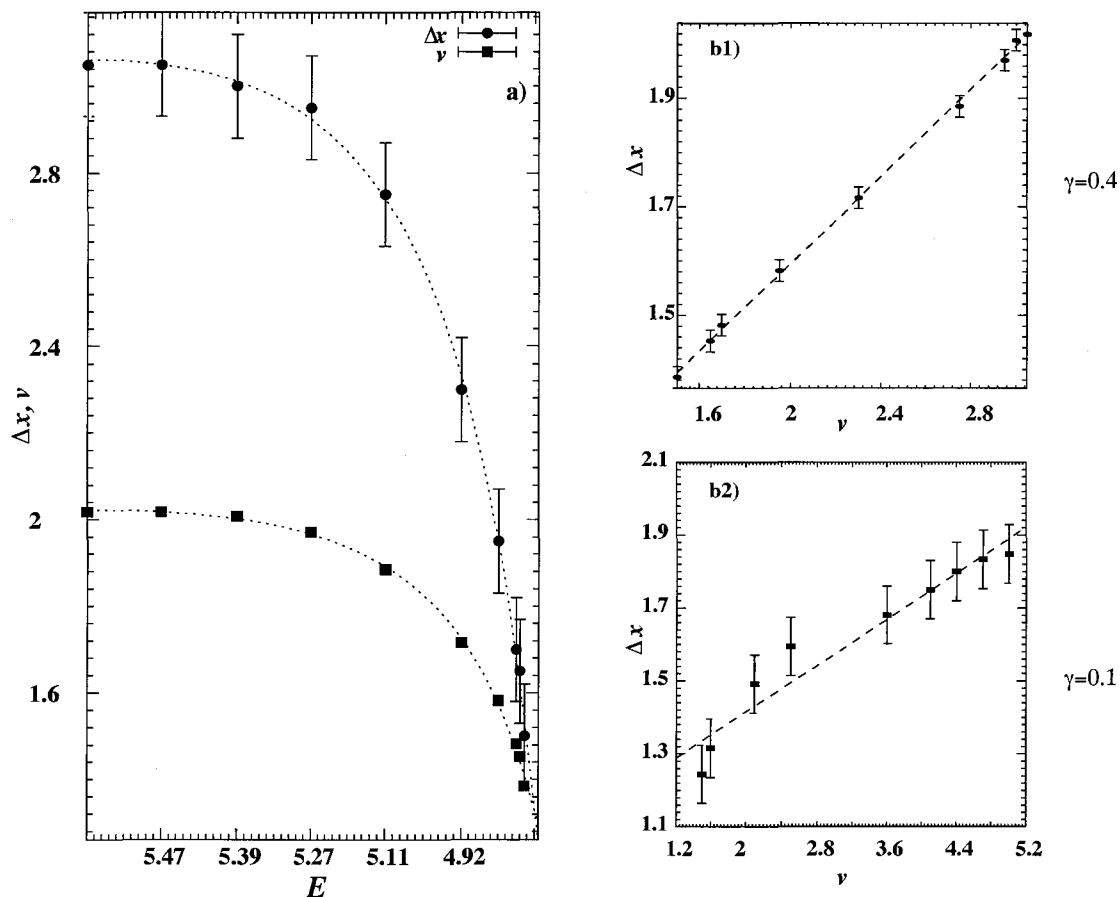


Figure V.5: (a) Variation de la position ainsi que de la vitesse du pulse asymétrique du DO-POSA. Les figures (b1) et (b2) correspondent à la variation de la vitesse en fonction de l'écart entre les pics de la pompe et du signal pour deux valeurs de γ . Les traits (discontinus) correspondent aux résultats des régressions (linéaires (b1), (b2) et non-linéaires (a)) effectuées sur les données. Les barres d'erreurs donnent l'incertitude sur la détermination des points numériques, due ici à l'échantillonnage de la grille et à la dispersion des données. Les paramètres utilisés sont : $R = 5.0, S = 1.0, \Delta_1 = 0.4$ pour toutes les figures. $E = 5.5$ pour (a1 et b1) et $\Delta_2 = 0.5$ pour (b2).

Conclusion

Au terme de ce travail théorique, nous avons étudié deux effets qui l'ont été très peu jusqu'ici. Ce sont les effets des inhomogénéités spatiales introduites en optique en général, et dans les OPO en particulier, à travers un pompage non uniforme. Ces inhomogénéités ont pour conséquence, le piégeage des structures. Le second effet est celui de la dérive qui provient de la biréfringence du milieu, et qui est mis à profit pour réaliser la condition d'accord de phase. Cette dérive est connue pour faire apparaître des domaines d'instabilité convective et absolue dans l'OPO. Nous avons alors proposé l'étude de ces effets séparément dans un premier temps, puis lorsque cela à été possible nous avons étudié l'effet de leur interaction.

Nous nous sommes intéressés en premier lieu à l'impact des inhomogénéités de pompage de type Gaussien, sur la qualité de l'émission de l'OPO dégénéré en accord de phase de type I. Nous avons déterminé que, dans la limite où la longueur d'onde de diffraction reste grande comparativement à la taille de la pompe, le formalisme de WKB peut s'étendre à l'OPO. Le travail théorique (analytique et numérique) qui s'en suit, sur la base de ce formalisme, s'est articulé autour de deux axes. Dans la première partie nous avons effectué l'étude du cas idéal sans walk-off. En réaction donc aux excitations locales du milieu dues à la variation du profil transverse de la pompe, le système réagit d'une façon globale par l'émission de modes propres sous la forme de modes transverses de Laguerre-Gauss ou de Gauss-Hermite, selon la symétrie du système. Cela a alors pour conséquence de discrétiser le seuil. De plus, dans le cas où les structures au seuil linéaire sont modulées en intensité, la phase de celles-ci s'en trouve aussi modulée. La dérivation de l'équation d'am-

plitudes et la résolution du modèle résultant, pour des valeurs du paramètre de contrôle légèrement au dessus du seuil du mode fondamental de Gauss-Hermite, nous a permis de compléter la caractérisation de la dynamique faiblement non-linéaire de l'OPO. Dans la seconde partie, l'interaction entre le walk-off et ces inhomogénéités du pompage est alors considérée. Le comportement dynamique s'en trouve complètement affecté ; la combinaison entre walk-off et inhomogénéités entraînant une atténuation de l'effet de la dérive. Le *centre de masse* du signal qui résulte de ce couplage walk-off/inhomogénéités n'est alors plus confondu avec celui du champ de pompe comme dans le cas idéal, mais déplacé à la frontière entre les seuils absolu et convectif corrigés par une quantité inversement proportionnelle à la taille du faisceau de pompe.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets non-linéaires du walk-off dans les OPO en régime bistable et ce pour le cas dégénéré puis non-dégénéré. Dans le cas dégénéré, nous avons mis en évidence l'existence d'un terme supplémentaire de gradient non-linéaire dans l'équation d'enveloppe réelle de Ginzburg-Landau quintique, modélisant la dynamique spatio-temporelle du signal. A travers les solutions exactes de type *front de translation* que nous avons obtenues, nous avons été en mesure d'expliquer, grâce à ce terme, l'origine de la dissymétrisation du signal observé en présence du walk-off, dans les OPO. Cette dissymétrisation s'accompagne d'un ralentissement du front montant et une accélération du front descendant qui constituent alors le profil transverse du signal émis. Ces effets sont d'autant plus accentués que le walk-off et l'intensité du signal sont grands. Il apparaît aussi que le rapport entre les taux de relaxation du signal et de la pompe joue un rôle de choix dans ce processus. L'étude du cas non dégénéré a apporté une meilleure compréhension de l'effet de ce terme de gradient non-linéaire. En effet, la dérivation de l'équation d'amplitude, dans ce cas, donne l'équation de Ginzburg-Landau complexe d'ordre cinq avec un terme équivalent à l'auto-décalage de fréquence (*self-frequency shift*). A ce terme qui n'a, en principe, pas d'incidence sur l'intensité du signal, s'ajoute celui qui est responsable de la dissymétrisation de l'enveloppe. L'effet de ce dernier est alors analogue à celui du *self-steepening*. En ce qui concerne la bifurcation super-critique, nous avons montré

qu'il est possible de générer des structures absolument stables sous le seuil linéaire de l'OPO.

Nous avons terminé cette thèse en ouvrant une perspective sur l'OPO avec absorbant saturable, en considérant notamment les solutions de type soliton émises par ce système en régime bistable. Ces solitons sont soit asymétriques et mobiles, soit symétriques et immobiles. La transition entre ces solutions a alors été caractérisée numériquement, de même que les propriétés des solitons asymétriques. Nous avons ainsi mis en évidence qualitativement les relations entre ces propriétés et les paramètres de l'OPO avec absorbant saturable, qui pourront guider des approches analytiques dans le futur.

Bibliographie

- [1] A. L. Schawlow. Spectroscopy in a new light. *Phys. Rev.*, 54 :697, 1982.
- [2] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich. Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, 7 :118, 1961.
- [3] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan. Interaction between light waves in a nonlinear dielectric. *Phys. Rev.*, 127 :1918, 1962.
- [4] J. A. Giordmaine and Robert C. Miller. Tunable coherent parametric oscillation in LiNbO_3 at optical frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 14 :973, 1965.
- [5] E. V. Kovalchuk, D. Dekorsy, A. I. Lvovsky, C. Braxmaier, J. Mlynek, and A. Peters. High-resolution doppler-free molecular spectroscopy with a continuous-wave optical parametric oscillator. *Opt. Lett.*, 26 :1430, 2001.
- [6] M. Ziskind, C. Mihean, N. Lebrun, B. Chazallon, C. Focsa, and J.L. Destombes. Hydrated clusters of organic molecules generated by in opo resonant desorption of frozen aqueous solutions. *Appl. Phys. A*, 79 :991, 2004.
- [7] M. Tlidi and M. Taki. Increasing spatial complexity toward near-resonant regimes of quadratic media. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :023901, 2003.
- [8] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef. Walk-off and pattern selection in optical parametric oscillators. *Opt. Lett.*, 23 :1167, 1998.
- [9] C.O.Weiss, M. Vaupel, K. Staliunas, G. Sleky, and V.B. Taranenko. Solitons and vortices in lasers. *Appl. Phys. B*, 68 :151, 1999.

- [10] D. Gomila, P. Colet, G.-L. Oppo, and M. San Miguel. Stable droplets and nucleation in asymmetric bistable nonlinear optical systems. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 6 :S265, 2004.
- [11] D. Mihalache, D. Mazilu, B. A. Malomed, and F. Lederer. Stable vortex solitons supported by competing quadratic and cubic nonlinearities. *Phys. Rev. E*, 69 :066614, 2004.
- [12] R. Frehlich. The following reference data is in a neutral format for general use. *J. Atmos. and Ocean. Tech.*, 12 :415, 1995.
- [13] A. V. Smith, W. J. Alford, T. D. Raymond, and M. S. Bowers. Comparison of a numerical model with measured performance of a seeded, nanosecond ktp optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12 :2253, 1995.
- [14] J. Watson, P. Georges, T. Lépine, B. Alonzi, and A. Brun. Imaging in diffuse media with ultrafast degenerate optical parametric amplification. *Opt. Lett.*, 20 :231, 1995.
- [15] S. Fournier, R. López-Martens, C. Le Blanc, E. Baubeau, and F. Salin. Solitonlike pulse shortening in a femtosecond parametric amplifier. *Opt. Lett.*, 23 :627, 1998.
- [16] C. Montes, C. Durniak, M. Taki, and A. Picozzi. Unconditional temporal instability and self-pulse structuration in the phase-matched degenerate backward optical parametric oscillator. *Opt. Commun.*, 216 :419, 2003.
- [17] M. Martinelli, K. S. Zhang, T. Coudreau, A. Maître, and C. Fabre. Ultra-low threshold cw triply resonant opo in the near infrared using periodically poled lithium niobate. *J. Opt. A*, 03 :1, 2001.
- [18] L. E. Myers, R. C. Eckardt, M. M. Fejer, and R. L. Byer. Multigrating quasi-phase-matched optical parametric oscillator in periodically poled linbo3. *Opt. Lett.*, 21 :591, 1996.
- [19] P. Mandel and M. Tlidi. Transverse dynamics in cavity nonlinear optics (2000-2003). *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 6 :R60, 2004.

- [20] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65 :851, 1993.
- [21] S. Barland, J. R. Tredicce, M. Brambilla, L. A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Knodl, M. Miller, and R. Jager. Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities. *Nature*, 419 :699, 2002.
- [22] S. Barland, M. Brambilla, L. Columbo, L. Furfaro, M. Giudici, X. Hachair, R. Kheradmand, L. A. Lugiato, T. Maggipinto, G. Tissoni, and J. Tredicce. Cavity solitons in a vcsel : reconfigurable micropixel arrays. *Europhys. News*, 34 :136, 2003.
- [23] A. Bramati, W. Chinaglia, S. Minardi, and P. Di Trapani. Reconstruction of blurred images by controlled formation of spatial solitons. *Opt. Lett.*, 26 :1409, 2001.
- [24] F. Wise and P. Di Trapani. Spatiotemporal solitons. *Opt. Photonics News*, 13 :28, 2002.
- [25] L. Torner and A. P. Sukhorukov. Quadratic solitons. *Opt. Photonics News*, 13 :42, 2002.
- [26] Y. S. Kivshar and G. I. Stegeman. Spatial optical solitons : Guiding light for future technologies. *Opt. Photonics News*, 13 :59, 2002.
- [27] W. J. Firth and C. O. Weiss. Cavity and feedback solitons. *Opt. Photonics News*, 13 :54, 2002.
- [28] W. E. Torruellas, Z. Wang, D. J. Hagan, E. W. VanStryland, and G. I. Stegeman. Observation of two-dimensional spatial solitary waves in a quadratic medium. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :5036, 1995.
- [29] V. B. Taranenko, K. Staliunas, and C. O. Weiss. Pattern formation and localized structures in degenerate optical parametric mixing. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :2236, 1998.
- [30] M. Vaupel, A. Maître, and C. Fabre. Observation of pattern formation in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5278, 1999.

- [31] G.-L. Oppo, A. J. Scroggie, and W. J. Firth. From domain walls to localized structures in degenerate optical parametric oscillators. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 1 :133, 1999.
- [32] M. Le Berre, D. Leduc, E. Ressayre, and A. Tallet. Striped and circular domain walls in the doped. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 1 :133, 1999.
- [33] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef. Space inversion symmetry breaking and pattern selection in nonlinear optics. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 1 :191, 1999.
- [34] M. Taki, N. Ouarzazi, H. Ward, and P. Glorieux. Nonlinear front propagation in optical parametric oscillators. *J. Opt. Soc. Am. B*, 17 :997, 2000.
- [35] S. Longhi. Spatial solitary waves in nondegenerate optical parametric oscillators near an inverted bifurcation. *Opt. Commun.*, 149 :335, 1998.
- [36] P. Lodahl and M. Saffman. Nonlinear analysis of pattern formation in singly resonant second-harmonic generation. *Opt. Commun.*, 184 :493, 2000.
- [37] S. Trillo, M. Haelterman, and A. Sheppard. Stable topological spatial solitons in optical parametric oscillators. *Opt. Lett.*, 22 :970, 1997.
- [38] A. Picozzi and M. Haelterman. Spontaneous formation of symbiotic solitary waves in a backward quasi-phase-matched parametric oscillator. *Opt. Lett.*, 23 :1808, 1998.
- [39] P.-S. Jian, W. E. Torruellas, M. Haelterman, S. Trillo, U. Peschel, and F. Lederer. Solitons of singly resonant optical parametric oscillators. *Opt. Lett.*, 24 :400, 1999.
- [40] P. Lodahl, M. Bache, and M. Saffman. Modification of pattern formation in doubly resonant second-harmonic generation by competing parametric oscillation. *Opt. Lett.*, 25 :654, 2000.
- [41] S. Longhi. Localized structures in optical parametric oscillation. *Phys. Scripta*, 56 :611, 1997.
- [42] S. Longhi. Traveling-wave states and secondary instabilities in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 53 :4488, 1996.

- [43] G. J. Valcárcel, K. Staliunas, G. Roldán, and V. J. Sánchez-Morcillo. Transverse patterns in degenerate optical parametric oscillation and degenerate four-wave mixing. *Phys. Rev. A*, 54 :1609, 1996.
- [44] P. Lodahl and M. Saffman. Pattern formation in singly resonant second-harmonic generation with competing parametric oscillation. *Phys. Rev. A*, 60 :3251, 1999.
- [45] P. A. Monkewitz, P. Huerre, and J.-M. Chomaz. Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 251 :1, 1993.
- [46] H. Ward. *Instabilités spatio-temporelles dans des oscillateurs paramétriques optiques : couplage walk-off/diffraction*. PhD thesis, Université de Lille 1, 2001.
- [47] C. Durniak. *Oscillateurs Paramétriques optiques : instabilités spatio-temporelles et solitons dynamiques*. PhD thesis, Université de Lille 1, 2004.
- [48] H. Ward, M. N. Ouazazi, M. Taki, and P. Glorieux. Transverse dynamics of optical parametric oscillators in presence of walk-off. *Eur. Phys. J. D*, 3 :275, 1998.
- [49] L. A. Lugiato and C. Oldano. Stationary spatial patterns in passive optical systems : Two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 37 :3896, 1988.
- [50] G.-L. Oppo, M. Brambilla, and L. A. Lugiato. Formation and evolution of roll patterns in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 49 :2028, 1994.
- [51] L. A. Lugiato, C. Olando, C. Fabre, E. Giacobino, and R. J. Horowicz. Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators. *Nuovo cimento D*, 10 :959, 1988.
- [52] C. Bender and S. Orszag. *Advance mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York, 1978.
- [53] M. Gaster. The development of three-dimensional wave in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 32 :173, 1968.
- [54] P. Huerre and P. A. Monkewitz. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 159 :151, 1985.

- [55] G. T. Dee and W. van Saarloos. Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :2641, 1988.
- [56] G. Agez. *Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides*. PhD thesis, Université de Lille 1, 2005.
- [57] P. Huerre and P. A. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :473, 1990.
- [58] W. J. Firth and C. O. Weiss. Cavity and feedback solitons. *Opt. Photonics News*, Feb 2002 :54, 2002.
- [59] M. Santaiustina, E. Hernander-Garcia, M. San Miguel, A. J. Scroggie, and G.-L. Oppo. Polarization patterns and vectorial defects in type-ii optical parametric oscillators. *Phys. Rev. E*, 65 :036610, 2002.
- [60] S. L. Elix and R. H. Enns. Optical switching between bistable soliton states of the second kind. *Phys. Rev. A*, 47 :5009, 1993.
- [61] T. Maggipinto and M. Brambilla. Cavity solitons in semiconductor microresonators : Existence, stability, and dynamical properties. *Phys. Rev. E*, 62 :8726, 2000.
- [62] U. Peschel, D. Michaelis, and C. O. Weiss. Spatial solitons in optical cavities. *IEEE Journal of quantum electronics*, 39 :51, 2003.
- [63] V. B. Taranenko, K. Staliunas, and C. O. Weiss. Spatial soliton laser : Localized structures in a laser with a saturable absorber in a self-imaging resonator. *Phys. Rev. E*, 56 :1582, 1997.
- [64] W. J. Firth and A. J. Scroggie. Optical bullet holes : Robust controllable localized states of a nonlinear cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :1623, 1996.
- [65] M. Tlidi, A. G. Vladimirov, and P. Mandel. Interaction and stability of periodic and localized structures in optical bistable systems. *IEEE J. Quantum Elect.*, 39 :216, 2003.
- [66] K. Staliunas and V. J. Sánchez-Morcillo. Localized structures in degenerate optical parametric oscillators. *Opt. Commun.*, 139 :306, 1997.

- [67] S. Longhi. Hexagonal patterns in multistep optical parametric processes. *Opt. Lett.*, 26 :713, 2001.
- [68] M. Tlidi, M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and L. Di Menza. High-intensity localized structures in the degenerate optical parametric oscillator : Comparison between the propagation and the mean-field models. *Phys. Rev. A*, 61 :043806, 2000.
- [69] A. Barsella, C. Lepers, M. Taki, and M. Tlidi. Moving localized structures in quadratic media with a saturable absorber. *Opt. Commun.*, 232 :381, 2004.
- [70] M. Tlidi and P. Mandel. Space-time localized structures in the degenerate optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, 59 :R2575, 1999.
- [71] M. Tlidi, M. Taki, M. Le Berre, E. Reyssayre, A. Tallet, and L. Di Menza. Moving localized structures and spatial patterns in quadratic media with a saturable absorber. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 6 :S421, 2004.
- [72] Anthony E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [73] M. N. Ouarzazi, P. A. Bois, and M. Taki. Global-stability analysis of transverse modes in lasers systems under inhomogeneous pumping. *Phys. Rev. E*, 53 :4408, 1996.
- [74] M. Taki, M. San Miguel, and M. Santagiustina. Order parameter description of walk-off effect on pattern selection in degenerate optical parametric oscillators. *Phys. Rev. E*, 61 :2133, 2000.
- [75] S. Longhi and A. Geraci. Swift-hohenberg equation for optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 54 :4581, 1996.
- [76] G. Dewel and P. Borckmans. Effects of slow spatial variations on dissipatives structures. *Phys. Lett. A*, 138 :189, 1989.
- [77] L. Kramer, E. Ben-Jacob, and H. Brand. Wavelength selection far from equilibrium. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1891, 1982.

- [78] H. Ward, M. N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux. Influence of walkoff on pattern formation in nondegenerate optical parametric oscillators. *Phys. Rev. E*, 53 :016604, 2000.
- [79] E. Louvergneaux, C. Sz waj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki. Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :043901, 2004.
- [80] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef. Noise-sustained convective structures in nonlinear optics. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3633, 1997.
- [81] R. Zambrini, M. San Miguel, C. Durniak, and M. Taki. Convection-induced nonlinear symmetry breaking in wave mixing. *Phys. Rev. E*, 72 :025603, 2005.
- [82] I. S. Aranson. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74 :99, 2002.
- [83] N. Akhmediev and V. V. Afanasjev. Novel arbitrary-amplitude solutions of the cubic-quintic complex ginzburg-landau equation. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :2320, 1995.
- [84] W. van Saarloos and P. C. Hohenberg. Pules and fronts in the complex ginzburg-landau equation near a subcritical bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :749, 1990.
- [85] S. Fauve and O. Thal. Solitary waves generated by subcritical instabilities in dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :282, 1990.
- [86] J. M. Soto-Crespo, N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, and S. Wabnitz. Pulse solutions of the cubic-quintic complex ginzburg-landau equation in the case of normal dispersion. *Phys. Rev. E*, 55 :4783, 1997.
- [87] B. A. Malomed and A. A. Nepomnyashchy. Kinks and solitons in the generalized ginzburg-landau equation. *Phys. Rev. B*, 42 :6009, 1990.
- [88] W. van Saarloos. Front propagation into unstable states. ii. linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence. *Phys. Rev. A*, 39 :6367, 1989.
- [89] W. van Saarloos. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex ginzburg-landau equations. *Physica D*, 56 :303, 1992.

- [90] A. Couairon and J.-M. Chomaz. Pushed global modes in weakly inhomogeneous subcritical flows. *Physica D*, 158 :129, 2001.
- [91] J. A. Powell and A. C. Newell. Competition between generic and nongeneric fronts in envelope equations. *Phys. Rev. A*, 44 :3636, 1991.
- [92] J. M. Chomaz. Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :1931, 1992.
- [93] H. Tian, Z. Li, J. Tian, and G. Zhou. Front and pulse solutions for the complex ginzburg-landau equation with higher-order terms. *Phys. Rev. E*, 66 :066204, 2002.
- [94] F. Cariello and M. Tabor. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations. *Physica D*, 39 :77, 1989.
- [95] J. Weiss, M. Tabor, and G. Carnevale. The painlevé property for partial differential equation^a. *J. Math. Phys.*, 24 :522, 1983.
- [96] M. J. Guardalben, J. Keegan, L. J. Waxer, V. Bagnoud, I. A. Begishev, J. Puth, and J. D. Zuegel. Design of a highly stable, high-conversion-efficiency, optical parametric chirped-pulse amplification system with good beam quality. *Opt. Express*, 11 :2511, 2003.
- [97] G. Kozyreff, S. J. Chapman, and M. Tlidi. Interaction of two modulational instabilities in a semiconductor resonator. *Phys. Rev. E*, 2003.
- [98] N. R. Pereira and L. Stenflo. Nonlinear schrodinger equation including growth and damping. *Phys. Fluids*, 20 :1733, 1977.
- [99] K. Nozaki and N. Bekki. Exact solution of the generalized ginzburg-landau equation. *J. Phys. Soc. Jap.*, 53 :1581, 1984.
- [100] R. Contet and M. Musette. Exact solutions to the complex ginzburg-landau equation of non-linear optics. *Pure Appl. Opt.*, 4 :315, 1995.
- [101] A. Ankiewicz and N. Akhmediev. Moving fronts for complex ginzburg-landau equation with raman term. *Phys. Rev. E*, 58 :6723, 1998.

- [102] H. Leblond, M. Salhi, A. Hideur, T. Chartier, M. Brunel, and F. Sanchez. Experimental and theoretical study of the passively mode-locked ytterbium-doped double-clad fiber laser. *Phys. Rev. A*, 65 :063811, 2002.
- [103] N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, and J. M. Soto-Crespo. Singularities and special soliton solutions of cubic-quintic complex ginzburg-landau equation. *Phys. Rev. E*, 53 :1190, 1996.
- [104] Govind P. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Optics and photonics, 1989, 1995, 2001.
- [105] Orazio Descalzi. Static, oscillating modulus, and moving pulses in the ginzburg-landau equation : An analytical approach one-dimensional quintic complex. *Phys. Rev. E*, 72 :046210, 2005.
- [106] F.M. Mitschke and L.F. Mollenauer. Discovery of the soliton self-frequency shift. *Optics Lett.*, 11 :659, 1986.
- [107] R. J. Deissler and H. R. Brand. Interaction of breathing localized solutions for subcritical bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :4847, 1995.
- [108] H. R. Brand and R. J. Deissler. Interaction of localized solution for subcritical bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 63 :2801, 1989.
- [109] R. J. Deissler and H. R. Brand. Effect of nonlinear gradient terms on breathing localized solutions in the quintic complex ginzburg-landau equation. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :3856, 1998.
- [110] H.P. Tian, Z.H. Li, J.P. Tian, G.S. Zhou, and J. Zi. Effect of nonlinear gradient terms on pulsating, erupting and creeping solitons. *Appl. Phys. B*, 78 :199, 2004.
- [111] J. M. Soto-Crespo, N. N. Akhmediev, and V. V. Afanasjev. Stability of the pulse-like solutions of the quintic complex ginzburg-landau equation. *J. Opt. Soc. Am. B*, 13 :1439, 1996.
- [112] M. Tlidi, P. Mandel, and M. Haelterman. Spatiotemporal patterns and localized structures in nonlinear optics. *Phys. Rev. E*, 56 :6524, 1997.

Annexes :
Présentation des calculs détaillés

Annexe A

Analyse linéaire dans la région du point tournant

Les équations en champ moyen de l'OPO dégénéré (sans walk-off) données par le système ci-après, constituent le point de départ de cette étude.

$$\begin{aligned}\partial_t A_p &= \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p) A_p + E(x, y) - A_s^2 + ia_p \nabla_{\perp}^2 A_p \right] \\ \partial_t A_s &= \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_s + A_s^* A_p + ia_s \nabla_{\perp}^2 A_s \right]\end{aligned}$$

La linéarisation de ce système autour de sa solution triviale $(A_p^0, A_s^0) = \left(\mu \equiv \frac{E}{1+i\Delta_p}, 0 \right)$, donne le système découplé suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t A'_p &= \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p) A'_p + ia_p \nabla_{\perp}^2 A'_p \right] \\ \partial_t A'_s &= \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A'_s + \mu A_s'^* + ia_s \nabla_{\perp}^2 A'_s \right].\end{aligned}$$

Dans ces équations $A'_p = A_p - \mu$ et $A'_s = A_s$, représentent les écarts à la solution de base (dans la suite nous enlèverons les prime). Ce découplage des équations signifie alors que l'évolution du champ de pompe intra-cavité suit adiabatiquement celle du signal. Nous

allons donc dans la suite prendre que l'équation relative au champ signal :

$$\partial_t A_s = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) A_s + \mu A_s^* + ia_s \nabla_{\perp}^2 A_s \right]. \quad (\text{A.1})$$

A.1 OPO dégénéré (DOPO) à désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)

La variation du champ de pompe incident étant lente dans le plan transverse, nous déduisons que l'évolution du champ signal en régime linéaire peut être décrite par l'équation suivante :

$$[\partial_t + \gamma_s - i\gamma_s (\Delta_s - \varepsilon \Delta_{\perp}^{\tilde{r}})] [\partial_t + \gamma_s + i\gamma_s (\Delta_s - \varepsilon \Delta_{\perp}^{\tilde{r}})] A_s - \gamma_s^2 \mu(\tilde{r})^2 A_s = 0, \quad (\text{A.2})$$

L'analyse linéaire au point tournant, consiste alors à remplacer dans la précédente équation A_s , ω et μ par leurs développements respectifs :

$$A_s(\tilde{r}, t) = \left[\tilde{A}_0(\tilde{r}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{A}_1(\tilde{r}) + O(\varepsilon) \right] \exp \left(-i\omega_g t + i\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\tilde{r}_s}^{\tilde{r}} k(\tilde{r}') d\tilde{r}' + il\phi \right) \quad (\text{A.3a})$$

$$\omega_g = \omega_0^t + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \quad (\text{A.3b})$$

$$\mu(\tilde{r}) = \mu_c + \frac{1}{2} \varepsilon (2\mu_1 - \mu_c \tilde{r}^2) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.3c})$$

Le laplacien de A_s est alors donné par l'expression (II.17). Ainsi en regroupant les termes en puissance de ε , on trouve à l'ordre $O(\varepsilon^0)$:

$$\mathcal{D}(\omega_0^t, k) = \left[-\frac{i}{\gamma_s} \omega_0^t + (1 - i\Delta_s) - ik^2 \right] \left[-\frac{i}{\gamma_s} \omega_0^t + (1 + i\Delta_s) + ik^2 \right] - \mu_c^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Ceci n'est rien d'autre que la relation de dispersion locale estimée au point tournant. A l'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ on a :

$$\mathcal{D}(\omega_0^t, k)\tilde{A}_1 + L_{\frac{1}{2}} \times \tilde{A}_0 = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{avec } L_{\frac{1}{2}} = -2i\Delta_s \left(2k \frac{d}{dr} + \frac{dk}{dr} + \frac{k}{r} \right).$$

Enfin à l'ordre $O(\varepsilon)$

$$L_{\frac{1}{2}} \times \tilde{A}_1 = 2\Delta_s \left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \right) \tilde{A}_0 + \mu_c (2\mu_1 - \mu_c \tilde{r}^2) \tilde{A}_0. \quad (\text{A.6})$$

On obtient alors l'équation de l'évolution linéaire de la perturbation en appliquant l'alternative de Fredholm. Ce qui nous donne :

$$\left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \right) \tilde{A}_0 + \frac{\mu_c}{\Delta_s} \left(\mu_1 - \frac{\mu_c}{2} \tilde{r}^2 \right) \tilde{A}_0 = 0. \quad (\text{A.7})$$

A.2 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal négatif ($\Delta_s < 0$)

La démarche est identique à celle utilisée pour le cas $\Delta_s > 0$, sauf que dans le cas présent c'est l'équation relative au signal¹ (A.1) qui constitue le point de départ. Les développements suivants pour (A_s, A_s^*) et μ :

$$(A_s, A_s^*) = \exp\left(-i\omega_g t + i\varepsilon^{-\frac{1}{2}} k_c \tilde{r}\right) \left[(\tilde{A}_0, \tilde{A}_0^*) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\tilde{A}_1, \tilde{A}_1^*) + O(\varepsilon) \right] \quad (\text{A.8a})$$

$$\mu(\tilde{r}) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon(2\mu_1 - \tilde{r}^2) + O(\varepsilon). \quad (\text{A.8b})$$

¹Nous avons aussi ajouté à celle-ci son complexe conjugué pour des raisons de commodité de calcul.

Le développement de ω_g étant le même que (A.3b). L'ordre $O(\varepsilon^0)$ est ainsi caractérisé par l'équation qui suit :

$$-(1 + i\Delta_s)\tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^* - ik_c^2\tilde{A}_0 = 0. \quad (\text{A.9})$$

On trouve alors que $A_0 = A_0^*$, lorsque nous remplaçons k_c par sa valeur. A l'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ nous obtenons l'équation :

$$-\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^* = 2k_c \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \tilde{r}}. \quad (\text{A.10})$$

Enfin à l'ordre $O(\varepsilon)$,

$$i \left[2ik_c \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \tilde{r}^2} \right] + \frac{1}{2} \left(2\mu_1 + i \frac{\omega_1}{\gamma_s} - \tilde{r}^2 \right) \tilde{A}_0 = 0 \quad (\text{A.11a})$$

$$-i \left[2ik_c \frac{\partial \tilde{A}_1^*}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_0^*}{\partial \tilde{r}^2} \right] + \frac{1}{2} \left(2\mu_1 + i \frac{\omega_1}{\gamma_s} - \tilde{r}^2 \right) \tilde{A}_0^* = 0. \quad (\text{A.11b})$$

Ce qui donne l'équation de Weber suivante :

$$\frac{d^2 \tilde{A}_0}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{4|\Delta_s|} \left(2\mu_1 + i \frac{\omega_1}{\gamma_s} - \tilde{r}^2 \right) \tilde{A}_0 = 0. \quad (\text{A.12})$$

Annexe B

Dérivation de l'équation aux amplitudes du DOPO sans walk-off

Dans cette annexe, nous présentons l'analyse détaillée de la dérivation des équations d'amplitude pour le DOPO pour tous les cas de figure rencontrés dans le corps de la thèse. Le point de départ de toutes ces analyses est le système suivant :

$$\partial_t B = \gamma_p \left[-(1 + i\Delta_p)B - A_s^2 + \frac{i}{2} \nabla_{\perp}^2 B \right] \quad (\text{B.1a})$$

$$\partial_t A_s = \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s)A_s + \mu(r)A_s^* + i\nabla_{\perp}^2 A_s - \alpha \partial_r A_s + A_s^* B \right]. \quad (\text{B.1b})$$

Dans ces équations, les enveloppes lentement variables A_p et A_s représentent les écarts à la solution de base (*OPO Off*) du DOPO. Par souci de clarté et de commodité, c'est la forme matricielle de ce système (B.2), où nous avons ajouté l'équation conjuguée de (B.1b), que nous utiliserons par la suite (à noter que ce travail sera effectué pour le cas de la bifurcation super-critique) :

$$\partial_t V = LV + N, \quad (\text{B.2})$$

avec $V = (B, A_s, A_s^*)^T$, $N = (-\gamma_p A_s^2, \gamma_s A_s^* B, \gamma_s A_s * B^*)^T$ et

$$L = \begin{pmatrix} -\gamma_p(1 + i\Delta_p) + \gamma_p \frac{i}{2} \Delta_\perp & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_s(1 + i\Delta_s) + \gamma_s i \Delta_\perp & \gamma_s \mu \\ 0 & \gamma_s \mu & -\gamma_s(1 - i\Delta_s) - \gamma_s i \Delta_\perp \end{pmatrix}.$$

B.1 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)

Nous supposons maintenant que le système se trouve légèrement au dessus du seuil du mode fondamental de sorte que

$$\mu_0 = \mu_c + \varepsilon \mu_1, \quad (\text{B.3})$$

avec $\mu_1 > \mu_{10}$. De plus si nous gardons les variables lentes $(\eta_x, \eta_y) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(r_x, r_y)$ introduites lors de l'analyse linéaire dans la région du point tournant, nous obtenons les développements suivants :

$$V = \varepsilon^{\frac{1}{2}} V^{(1/2)} + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} V^{(3/2)} + O(\varepsilon^2),$$

$$N = \varepsilon N^{(1)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} N^{(3/2)} + O(\varepsilon^2),$$

où $V^{(i/2)} = (B_{i/2}, A_{i/2}, A_{i/2}^*)^T$ ($i = 1, 2, 3$), $N^{(1)} = (-\gamma_p A_{1/2}^2, \gamma_s A_{1/2}^* B_{1/2}, \gamma_s A_{1/2} * B_{1/2}^*)^T$ et $N^{(3/2)} = (-2\gamma_p A_{1/2} A_1, \gamma_s A_{1/2}^* B_1, \gamma_s A_{1/2} * B_1^*)^T$. L'opérateur linéaire L s'écrit :

$$L = L_0 + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} L_{1/2} + \varepsilon L_1,$$

avec

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_p & 0 & 0 \\ 0 & L_s & \gamma_s \mu_c \\ 0 & \gamma_s \mu_c & L_s^* \end{pmatrix},$$

$$L_{1/2} = \begin{pmatrix} i\varepsilon (\partial_{r_x} \partial_{\eta_x} + \partial_{r_y} \partial_{\eta_y}) & 0 & 0 \\ 0 & 2i\varepsilon (\partial_{r_x} \partial_{\eta_x} + \partial_{r_y} \partial_{\eta_y}) & 0 \\ 0 & 0 & -2i\varepsilon (\partial_{r_x} \partial_{\eta_x} + \partial_{r_y} \partial_{\eta_y}) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } L_1 = \begin{pmatrix} -\gamma_p \frac{i}{2} \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} & 0 & 0 \\ 0 & i\gamma_s \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} & \gamma_s (\mu_1 - \frac{\mu_c}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2)) \\ 0 & \gamma_s (\mu_1 - \frac{\mu_c}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2)) & -i\gamma_s \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} \end{pmatrix},$$

avec $L_j = -\gamma_j (1 + i\Delta_j) + i\gamma_j \Delta_{\perp}^{(r_x, r_y)}$ ($j = s, p$). Les nombres d'onde k_c et k_0^t étant tous les deux nuls lorsque Δ_s est positif, l'opérateur $L_{1/2}$ s'annule lui aussi. Par ailleurs nous introduisons aussi le temps lent, suivant la variation de l'inhomogénéité comme suit : $t = t_0 + \varepsilon t_1$. Ainsi à chaque ordre ε , les équations non-linéaires s'écrivent sous la forme de la série de problèmes linéaires suivante :

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^{1/2}) &: (\partial_{t_0} - L_0) V^{(1/2)} = 0 \\ O(\varepsilon) &: (\partial_{t_0} - L_0) V^{(1)} = N^{(1)} \\ O(\varepsilon^{3/2}) &: (\partial_{t_0} - L_0) V^{(3/2)} = (-\partial_{t_1} + L_1) V^{(1/2)} + N^{(3/2)}. \end{aligned}$$

Ces équations n'ont de solution que si leur second membre est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint $(\partial_t - L_0)^* = \overline{(\partial_t - L_0)}^T$: c'est l'*alternative de Fredholm*. Elle se traduit par

$$\langle U, SM \rangle = 0, \quad (\text{B.4})$$

où U représente le vecteur propre de l'opérateur adjoint $(\partial_t - L_0)^*$ et \langle, \rangle le produit

scalaire tel que

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int f^* g dx. \quad (\text{B.5})$$

Même si l'alternative de Fredholm garantie l'existence d'une solution, l'unicité de celle-ci ne l'est pas. Aussi on impose aux solutions aux différents ordres d'être orthogonales entre elles :

$$\langle V^{(\frac{i-1}{2})}, V^{(\frac{i}{2})} \rangle = 0. \quad (\text{B.6})$$

C'est la méthode que nous utiliserons pour résoudre tous les problème de ce genre.

À l'ordre $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$

Nous trouvons :

$$V^{(\frac{1}{2})} = (0, e^{i\theta}, e^{-i\theta})^T A_0, \quad (\text{B.7a})$$

$$\text{avec } e^{-2i\theta} = \frac{1 + i\Delta_s}{\mu_c}, \quad (\text{B.7b})$$

$$\text{et } U = (0, e^{-i\theta}, e^{i\theta})^T. \quad (\text{B.7c})$$

À l'ordre $O(\varepsilon^1)$

Ici nous obtenons que

$$B_1 = -\frac{e^{2i\theta}}{1 + i\Delta_p} A_0^2.$$

La condition d'orthogonalité donne alors que $A_1 = A_1^* = 0$.

À l'ordre $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$, la condition (B.4) nous donne

$$\frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_1} A_0 = \mu_c \left[\mu_1 - \frac{\mu_c}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \right] A_0 + \Delta_s \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} A_0 - \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2} A_0^3. \quad (\text{B.8})$$

En reportant dans cette équation les développements effectués au départ ($A_s = \varepsilon^{1/2} A_0$, $\eta_{x,y} = \varepsilon^{1/2} (r_x, r_y)$, $\partial_t = \varepsilon \partial_{t_1}$) où $r_x = \frac{x}{\sqrt{a_s}}$ et $\varepsilon = \frac{\sqrt{2a_s}}{w_0}$, nous obtenons l'évolution de l'en-

veloppe du signal dans les variables physiques de l'OPO :

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} = \mu_c \left[\mu_0 - \mu_c \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \right] A_s + a_s \Delta_s \nabla_{\perp}^2 A_s - \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2} A_s^3.$$

Afin de résoudre l'équation (B.8), nous allons considérer l'écart au seuil corrigé (μ_{cp}) comme suit :

$$\mu_1 = \mu_{1p} + \delta^2 \bar{\mu},$$

puis on introduit les développements suivants :

$$\begin{aligned} t'_1 &= \delta^2 t_1 : \partial_{t_1} \rightarrow \partial_{t_1} + \delta^2 \partial_{t'_1} \\ A_0 &= \delta \bar{A}_{01}(\eta_x, \eta_y, t'_1) + \delta^3 \bar{A}_{03}(\eta_x, \eta_y, t'_1). \end{aligned}$$

Après avoir reporté tous ces développements dans l'équation (B.8) nous avons :

À l'ordre $O(\delta)$

$$\Delta_s \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} \bar{A}_{01} + \mu_c \left[\mu_{1p} - \frac{\mu_c}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \right] \bar{A}_{01} = 0.$$

La solution de cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\bar{A}_{01} = D(T') A_{00}(\eta_x, \eta_y) + \sum_{p \neq 0}^{\infty} A_{0p}(\eta_x, \eta_y, T').$$

Ainsi au voisinage immédiat du seuil du mode fondamental, nous pouvons négliger la contribution des modes d'ordre supérieur. On écrit alors que $\bar{A}_{01} = D(T') A_{00}(\eta_x, \eta_y)$, avec $A_{00}(\eta_x, \eta_y) = \exp \left[-\frac{\sqrt{Z_2}}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \right]$.

À l'ordre $O(\delta^3)$

$$\Delta_s \Delta_{\perp}^{(\eta_x, \eta_y)} \bar{A}_{03} + \mu_c \left[\mu_{1p} - \frac{\mu_c}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \right] \bar{A}_{03} = \frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_1'} \bar{A}_{01} - \mu_c \bar{\mu} A_{01} + \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2} \bar{A}_{01}^3.$$

D'après l'alternative de Fredholm,

$$\left\langle \frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_1'} \bar{A}_{01} - \mu_c \bar{\mu} A_{01} + \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2} \bar{A}_{01}^3, A_{00} \right\rangle = 0,$$

soit :

$$\frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_1'} D = \mu_c \bar{\mu} - N \frac{I_2}{I_1} D^3.$$

Avec $N = \frac{1 - \Delta_s \Delta_p}{1 + \Delta_p^2}$, $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{00}^2 d\eta_x d\eta_y$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{00}^4 d\eta_x d\eta_y$ pour le cas à deux dimensions transverse, ou $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{00}^2 d\eta_x$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{00}^4 d\eta_x$ à une dimension. En revenant aux paramètres physiques du système nous obtenons l'évolution de l'amplitude maximale du signal :

$$\begin{aligned} \frac{dA_s^m}{d\tau} &= \mu_c (\mu_0 - \mu_{00}) A_s^m - \frac{N}{2} (A_s^m)^3 & (2 \text{ dimensions}) \\ \frac{dA_s^m}{d\tau} &= \mu_c (\mu_0 - \mu_{00}) A_s^m - \frac{N}{\sqrt{2}} (A_s^m)^3 & (1 \text{ dimensions}) \end{aligned}$$

B.2 OPO dégénéré à désaccord en fréquence du signal négatif ($\Delta_s < 0$)

Dans cette section nous effectuons la dérivation de l'équation d'amplitude du DOPO pour un detuning négatif. Pour cela nous allons reprendre tous les développements introduits à la section B.1. Cependant la présence d'un nombre d'onde non nul au point tournant ($k_0^t = \sqrt{-\Delta_s}$) implique que l'opérateur $L_{1/2}$ est non nul. De plus nous ne consi-

dériverons ici que le cas à une dimension. Ainsi aux différents ordres nous avons :

$$O(\varepsilon^{1/2}) : (\partial_{t_0} - L_0) V^{(1/2)} = 0 \quad (\text{B.9a})$$

$$O(\varepsilon) : (\partial_{t_0} - L_0) V^{(1)} = L_{1/2} V^{(1/2)} + N^{(1)} \quad (\text{B.9b})$$

$$O(\varepsilon^{3/2}) : (\partial_{t_0} - L_0) V^{(3/2)} = L_{1/2} V^{(1)} + (-\partial_{t_1} + L_1) V^{(1/2)} + N^{(3/2)} \quad (\text{B.9c})$$

À l'ordre $O(\varepsilon^{1/2})$

$$B_1 = 0$$

$$\partial_t A_{1/2} = \gamma_s A_{1/2} - (1 + i\Delta_s) A_{1/2} + A_{1/2}^* + i\partial_{r_x}^2 A_{1/2}.$$

On trouve donc que $A_{1/2} = A_0 e^{ik_c r_x} + A_0^* e^{-ik_c r_x}$.

À l'ordre $O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \left[-(1 + i\Delta_p) B_1 + \frac{i}{2} \partial_{r_x}^2 B_1 \right] &= A_{1/2}^2 \\ \left[-(1 + i\Delta_s) A_1 + i\partial_{r_x}^2 A_1 + A_1^* \right] &= -2i\partial_{r_x \eta_x}^2 A_{1/2}. \end{aligned}$$

Nous avons alors $B_1 = -\frac{2|A_0|^2}{1+i\Delta_p} - \frac{1}{1+i(\Delta_p-2\Delta_s)} (A_0^2 e^{2ik_c r_x} + (A_0^*)^2 e^{-2ik_c r_x})$. En posant $A_1 = A_1^{(+1)} e^{ik_c r_x} + A_1^{(-1)} e^{-ik_c r_x}$, nous pouvons écrire :

$$A_1^{(+1)} = A_1^{(-1)*} - 2k_c \partial_{\eta_x} A_0$$

À l'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$

$$\begin{aligned} \gamma_s^{-1} \partial_{t_1} A_{1/2} &= \left[-(1 + i\Delta_s) A_{3/2} + i\partial_{r_x}^2 A_{3/2} + A_{3/2}^* \right] \\ &+ i\partial_{\eta_x}^2 A_{1/2} + (\mu_1 - \eta_x^2) A_{1/2} + 2i\partial_{r_x \eta_x}^2 A_1 + B_1 A_{1/2}^*. \end{aligned}$$

Si nous faisons la somme de cette équation avec son complexe conjugué nous obtenons :

$$2\gamma_s^{-1}\partial_{t_1}A_{1/2} = 2i\partial_{r_x\eta_x}^2(A_1 - A_1^*) + 2 * (\mu_1 - \eta_x^2) A_{1/2} + (B_1A_{1/2}^* + B_1^*A_{1/2}).$$

En négligeant les harmoniques d'ordre supérieur nous avons finalement :

$$\gamma_s^{-1}\partial_{t_1}A_0 = (\mu_1 - \eta_x^2) A_0 - 2\Delta_s\partial_{\eta_x}^2 A_0 - N_2|A_0|^2 A_0. \quad (\text{B.10})$$

Celle-ci se résout de façon analogue à (B.8).

Annexe C

Dérivations des équations d'amplitude du DOPO avec walk-off

Nous avons gardé pour ce cas les mêmes développements que dans le cas sans walk-off. La seule différence est qu'en présence de la dérive, l'opérateur $L_{1/2}$ n'est pas nul quelque soit le signe du detuning Δ_s . La dynamique étant unidimensionnelle, nous avons posé que $\eta_x \equiv \eta$ et $r_x \equiv r$

C.1 Cas du désaccord en fréquence du signal positif ($\Delta_s > 0$)

L'opérateur $L_{1/2}$ prend la forme suivante :

$$L_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_s \alpha \partial_\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_s \alpha \partial_\eta \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, aux différents ordres, les équations sont données par (B.9). Les solutions de l'ordre $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ sont données par (B.7a). À l'ordre $O\left(\varepsilon^1\right)$ nous avons

$$\begin{aligned}\partial_{t_{1/2}}A_0 &= -\gamma_s\alpha\partial_\eta A_0, \\ \text{et } B_1 &= -\frac{e^{2i\theta}}{1+i\Delta_p}A_0^2.\end{aligned}$$

La solution de l'ordre $O\left(\varepsilon^{3/2}\right)$ est obtenue identique à (B.8) pour une dimension transverse, soit :

$$\frac{1}{\gamma_s}\partial_{t_1}A_0 = \mu_c\left(\mu_1 - \frac{\mu_c}{2}\eta_x^2\right)A_0 + \Delta_s\Delta_\perp^{\eta_x}A_0 - \frac{1 - \Delta_s\Delta_p}{1 + \Delta_p^2}A_0^3.$$

L'équation d'amplitude finale est alors donnée par $\partial_t A_0 = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_{t_{1/2}}A_0 + \varepsilon\partial_{t_1}A_0$, soit :

$$\partial_\tau A_s = \mu_c\left(\mu_0 - \mu_c\left(1 - \frac{x^2}{w_0^2}\right)\right)A_s + a_s\Delta_s\partial_x^2 A_s - \frac{1 - \Delta_s\Delta_p}{1 + \Delta_p^2}A_s^3.$$

C.2 Cas du désaccord en fréquence du signal négatif

$$(\Delta_s < 0)$$

Ici l'opérateur $L_{1/2}$ s'écrit :

$$L_{1/2} = \begin{pmatrix} i\varepsilon\partial_\tau\partial_\eta & 0 & 0 \\ 0 & 2i\varepsilon\partial_{r_x}\partial_{\eta_x} - \gamma_s\alpha\partial_\eta & 0 \\ 0 & 0 & -2i\varepsilon\partial_{r_x}\partial_{\eta_x} - \gamma_s\alpha\partial_\eta \end{pmatrix},$$

et les équations gouvernant les différents ordres sont identiques à celles du cas sans walk-off. Cependant la solution de l'ordre $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ diffère à cause du walk-off et elle prend la forme suivante :

$$A_{1/2} = A_0e^{-i(\omega_ct_0 - k_cr)} + A_0^*e^{i(\omega_ct_0 - k_cr)},$$

avec $k_c = \sqrt{-\Delta_s}$ et $\omega_c = -\gamma_s \alpha k_c$. À cause de cette fréquence temporelle non nulle, les coefficients des termes de seconde harmonique de la solution de la composante de la pompe B_1 sont alors différents :

$$B_1 = -\frac{2|A_0^2|}{1+i\Delta_p} - \left(\frac{A_0^2 e^{-2i(\omega_c t_0 - k_c r)}}{1+i\left(\Delta_p - 2\Delta_s + 2\frac{\omega_c}{\Delta_p}\right)} + \frac{(A_0^*)^2 e^{2i(\omega_c t_0 - k_c r)}}{1+i\left(\Delta_p - 2\Delta_s - 2\frac{\omega_c}{\Delta_p}\right)} \right).$$

Quant à la solution de la composante du signal, elle est gouvernée par l'équation suivante :

$$\left[\frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_0} + (1+i\Delta_s) - i\partial_r^2 + \alpha \partial_r \right] A_1 - A_1^* = -\frac{1}{\gamma_s} \partial_{t_{1/2}} A_{1/2} - \alpha \partial_\eta A_{1/2} - 2i\partial_{r\eta}^2 A_{1/2}.$$

En ajoutant à cette équation son complexe conjugué nous obtenons

$$\partial_{t_{1/2}} A_0 = -\gamma_s \alpha \partial_\eta A_0.$$

Par contre en effectuant une soustraction nous trouvons

$$A_1^{(+1)} = A_1^{(-1)*} - 2k_c \partial_{\eta_x} A_0,$$

avec $A_1^{(+1)}$ et $A_1^{(-1)}$ tels que définis précédemment. L'application de l'alternative de Fredholm nous donne $A_1 + A_1^* = 0$. L'ordre $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$ est gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_s^{-1} \partial_{t_1} A_{1/2} = & \left[-\gamma_s^{-1} \partial_{t_0} A_{3/2} - (1+i\Delta_s) A_{3/2} + i\partial_r^2 A_{3/2} - \alpha \partial_r + A_{3/2}^* \right] \\ & + i\partial_\eta^2 A_{1/2} + (\mu_1 - \eta^2) A_{1/2} + 2i\partial_{r\eta}^2 A_1 + B_1 A_{1/2}^*. \end{aligned}$$

Le calcul bien que long dans le cas présent à cause des coefficients différents dans B_1 est analogue au cas correspondant sans la dérive et nous obtenons :

$$\gamma_s^{-1} \partial_{t_1} A_0 = (\mu_1 - \eta_x^2) A_0 - 2\Delta_s \partial_{\eta_x}^2 A_0 - N_2' |A_0|^2 A_0,$$

$$\text{avec } N'_2 = \frac{2}{1+\Delta_p^2} + \frac{1+(\Delta_p-2\Delta_s)^2 + \left(\frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2}{\left[1 + \left(\Delta_p - 2\Delta_s - \frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2\right] \left[1 + \left(\Delta_p - 2\Delta_s + \frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2\right]} + i \frac{2\omega_c}{\gamma_p} \frac{(\Delta_p-2\Delta_s)^2 - 1 - \left(\frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2}{\left[1 + \left(\Delta_p - 2\Delta_s - \frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2\right] \left[1 + \left(\Delta_p - 2\Delta_s + \frac{2\omega_c}{\gamma_p}\right)^2\right]}.$$

Nous obtenons l'équation d'amplitude, dans les variables physiques de l'OPO comme suit :

$$\gamma_s^{-1} \partial_t A_s = \left(\mu_0 - 1 - \frac{x^2}{w_0^2} \right) A_s - 2\Delta_s \partial_x^2 A_s - \alpha_s \partial_x A_s - N'_2 |A_s|^2 A_s,$$

qui est l'équation de Ginzburg-Landau dans laquelle le coefficient de l'amplification linéaire est inhomogène dans le plan transverse.

Annexe D

Résolution des équations d'amplitude au point tournant

D.1 Equation de Ginzburg-Landau pour l'OPO dégénéré

À l'aide de la variable \tilde{r} introduite plus haut l'équation de Ginzburg-Landau prend la forme suivante :

$$\partial_{\tau} A_s = \lambda(\tilde{r}) A_s + \varepsilon d \partial_{\tilde{r}}^2 A_s - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha \partial_{\tilde{r}} A_s - \beta |A_s|^2 A_s.$$

Le terme de l'advection s'élimine en posant $\bar{A}_s = A_s \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}d} \tilde{r}\right)$, soit :

$$\partial_{\tau} \bar{A}_s = \left(\lambda(\tilde{r}) - \frac{\alpha^2}{4d}\right) \bar{A}_s + \varepsilon d \partial_{\tilde{r}}^2 \bar{A}_s - \beta |\bar{A}_s|^2 \bar{A}_s e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}d} \tilde{r}}.$$

Si maintenant on pose $\lambda(\tilde{r}) = \mu_c \left[\mu^t - \mu_c + \varepsilon \left(\mu_1 - \frac{\mu_c}{2} \tilde{r}\right)\right]$ et que nous utilisons le développement de \bar{A}_s comme suit

$$\bar{A}_s(\tilde{r}, t) = \left[\bar{A}_0(\tilde{r}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{A}_1(\tilde{r}) + O(\varepsilon)\right] \exp\left(-i\varepsilon\omega_1 t + i\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\tilde{r}_s}^{\tilde{r}} k(\tilde{r}') d\tilde{r}'\right),$$

nous obtenons à l'ordre $O(\varepsilon^0)$ (en régime linéaire) :

$$\mu_c \left(\mu^t - \mu_c - \frac{\alpha^2}{4d} \right) \bar{A}_0 - dk^2 \bar{A}_0 = 0.$$

On a donc $k = 0$ puisque $\mu^t = \mu_c + \frac{\alpha^2}{4d}$. Finalement nous trouvons à l'ordre $O(\varepsilon)$ l'équation de Weber suivante :

$$\frac{d^2 \bar{A}_0}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{d} \left(i\omega_1 + \mu_c \mu_1 - \frac{\mu_c^2}{2} \tilde{r}^2 \right) \bar{A}_0 = 0.$$

D.2 Modèle de Swift-Hohenberg pour l'OPO dégénéré

Nous utilisons ici l'équation de Swift-Hohenberg obtenues pour un OPO dégénéré en ondes planes [74], des petites valeurs du paramètre de detuning du signal ($\Delta_s \ll 1$). Puis le terme d'amplification linéaire de cette dernière est pris de profil Gaussien. Le point de départ de notre analyse est alors donné par l'équation suivante :

$$\partial_\tau A_s = \frac{1}{2} (\mu(\tilde{r})^2 - 1 - \Delta_s^2) A_s + \varepsilon \Delta_s \partial_{\tilde{r}}^2 A_s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_{\tilde{r}}^4 A_s - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha \partial_{\tilde{r}} A_s - \frac{1}{1 + \Delta_p^2} A_s^3.$$

On effectue alors le développements suivant

$$A_s = \left[A_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} A_1 + O(\varepsilon) \right] \exp[-i(\omega^t + \varepsilon \omega_1) \tau] \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\tilde{r}} k^t d\tilde{r}'\right),$$

et les expressions différentielles sont données par

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \partial_{\tilde{r}} A_s &= e^{-i(\omega^t + \varepsilon \omega_1) \tau} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\tilde{r}} k^t d\tilde{r}'\right) \left(ik^t + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \partial_{\tilde{r}} \right) \left(A_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} A_1 \right) \\ \varepsilon \partial_{\tilde{r}}^2 A_s &= e^{-i(\omega^t + \varepsilon \omega_1) \tau} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\tilde{r}} k^t d\tilde{r}'\right) \left(-k^{t^2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} 2ik^t \partial_{\tilde{r}} + \varepsilon \partial_{\tilde{r}}^2 \right) \left(A_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} A_1 \right) \\ \varepsilon^2 \partial_{\tilde{r}}^4 A_s &= e^{-i(\omega^t + \varepsilon \omega_1) \tau} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\tilde{r}} k^t d\tilde{r}'\right) \left(k^{t^4} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} 4ik^t \partial_{\tilde{r}}^3 - \varepsilon 6k^2 \partial_{\tilde{r}}^2 + \dots \right) \left(A_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} A_1 \right). \end{aligned}$$

Si nous utilisons le développement de $\mu(\tilde{r})$ donné précédemment nous avons alors $\mu(\tilde{r})^2 = \mu^{t^2} + 2\varepsilon \left(\mu_1 \mu^t - \frac{\mu^{t^2}}{2} \tilde{r}^2 \right) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$. Ainsi à l'ordre le plus bas nous avons :

$$\left[-i\omega^t - \frac{1}{2} \left(\mu^{t^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\Delta_s + k^{t^2} \right) + i\alpha k^t \right] A_0 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}(\omega^t, k^t) A_0 = 0.$$

On en déduit la relation de dispersion au point tournant. À l'ordre $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ nous avons :

$$\mathcal{D}(\omega^t, k^t) A_1 = \left(\alpha + 2ik^t + 2ik^{t^3} \right) \partial_{\tilde{r}} A_0 \Leftrightarrow \left(\alpha + 2ik^t + 2ik^{t^3} \right) \partial_{\tilde{r}} A_0 = 0.$$

Cette relation est toujours vérifiée d'après l'équation (II.71) donnant le nombre d'onde du point selle à l'origine des front modulés observé dans des DOPO au voisinage de la résonance ($\Delta_s \ll 1$).

Nous obtenons finalement à l'ordre $O(\varepsilon)$:

$$\frac{d^2 A_0}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{3k^{t^2} + \Delta_s} \left(i\omega_1 + \mu^t \mu_1 - \frac{\mu^{t^2}}{2} \tilde{r}^2 \right) A_0 = 0,$$

qui est l'équation de Weber qui a été obtenue et décrite précédemment.

Annexe E

Dérivation de l'équation d'amplitude de l'OPO bistable

Nous allons considéré ici le cas où le diagramme de bifurcation des solutions stationnaires de l'OPO présente un cycle de bistabilité. Notre l'objectif est d'obtenir à partir du système à trois équation couplées, une seule équation permettant de modéliser l'évolution des trois champs hors de l'état d'équilibre de l'OPO. Pour cela nous introduisons dans les équations (I.8), les nouvelles variables B , A_1 et A_2 comme étant enveloppes lentement variable symbolisant (dans le même ordre) les écarts à l'état d'équilibre des champs de pompe, signal et son complémentaire. Elles sont liées aux variables A_p , A_s et A_i par les relations suivantes : $A_p = \mu + (1 - i\Delta_p) B$, $A_s = \sqrt{1 + \Delta_p^2} A_1$, $A_i = \sqrt{1 + \Delta_p^2} A_2$, où le paramètre de contrôle μ est donné par $E = \mu(1 + i\Delta_p)$. Le systèmes d'équations (E.1) ainsi obtenu, dans lequel celle relative au complémentaire à été remplacée par son complexe conjuguée, est le point de départ de ce calcul.

$$\begin{aligned}\partial_t B &= \gamma_p [-(1 + i\Delta_p)(B + A_1 A_2) + i a_p \nabla_{\perp}^2 A_0] \\ \partial_t A_1 &= \gamma_s [-(1 + i\Delta_s) A_1 + \mu A_2^* + i a_s \nabla_{\perp}^2 A_1 - \alpha_s \partial_x A_1 + (1 - i\Delta_p) B A_2^*] \\ \partial_t A_2^* &= \gamma_i [-(1 + i\Delta_i) A_2^* + \mu A_1 - i a_i \nabla_{\perp}^2 A_2^* - \alpha_i \partial_x A_2 + (1 + i\Delta_p) B^* A_1].\end{aligned}\tag{E.1}$$

Les opérateurs L et N et ainsi que le vecteur V contenant les enveloppes des champs, de la notation matricielle introduite précédemment, sont alors donnés par : $V = (A_0, A_1, A_2^*)^T$,

$$N = \begin{pmatrix} -\gamma_p (1 + i\Delta_p) A_1 A_2 \\ \gamma_s (1 - i\Delta_p) B A_2^* \\ \gamma_i (1 + i\Delta_p) B^* A_1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma_p [-(1 + i\Delta_p) + ia_p \Delta_\perp] & 0 & 0 \\ 0 & L_s & \gamma_s \mu \\ 0 & \gamma_i \mu & L_i^* \end{pmatrix}$$

avec $L_{s,i} = \gamma_{s,i} [-(1 + i\Delta_{s,i}) + ia_{s,i} \Delta_\perp - \alpha_{s,i} \partial_x]$ La première étape de ce travail consiste à déterminer les différentes échelles de variations spatiales et temporelles. De celles-ci nous déduisons le développement asymptotique des enveloppe lentement variables. Elle peut se résumer comme suit : si les detunings sont de l'ordre de $O(1)$ et que $\Delta_p \simeq \frac{1}{\Delta_e} + \varepsilon$, alors pour tout paramètre de contrôle μ , pris au voisinage de la bifurcation, nous pouvons écrire $\mu = \mu_c + \varepsilon^2 \mu_2$.

Pour fixer les échelles de variation spatiale et temporelle, nous allons faire appel à la figure I.5b. Cette figure montre que pour un écart au seuil linéaire de l'ordre de $O(\varepsilon^2)$ la bande des nombres d'onde excité est de l'ordre de $O(\varepsilon)$. Dans cette zone, à l'ordre dominant, nous pouvons écrire que

$$\mathcal{A}(\vec{r}, t) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \left(\mathcal{A}_j(t) e^{i(\vec{k}_c + \varepsilon \vec{k}_j) \cdot \vec{r} - i\omega(k_c + \varepsilon k_j)t} \right) + c.c \right),$$

avec $\mathcal{A}(\vec{r}, t) \equiv B, A_1$ ou A_2 . Compte tenu des inégalités $0 < \varepsilon \ll 1$, l'expression précédente peut se réécrire comme suit :

$$\mathcal{A}(\vec{r}, t) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{A}(\vec{R} = \varepsilon \vec{r}, T = \varepsilon t) e^{i\vec{k}_c \cdot \vec{r} - i\omega(k_c)t} + c.c \right),$$

où $\omega(k_c)$ est obtenu de la relation de dispersion du système. Nous déduisons alors les

développements multi-échelles du temps et du vecteur position $\vec{r}(x, y)$ dans le plan transverse :

$$t = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots,$$

$$x = X_0 + \varepsilon X \quad \text{et}$$

$$y = Y_0 + \varepsilon Y.$$

Soit

$$\partial_t = \partial_{T_0} + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2} + \dots,$$

$$\partial_{x,y} = \partial_{X_0, Y_0} + \varepsilon \partial_{X, Y},$$

$$\Delta_{\perp} = (\partial_{X_0}^2 + \partial_{Y_0}^2) + 2\varepsilon (\partial_{X_0 X}^2 + \partial_{Y_0 Y}^2) + \varepsilon^2 (\partial_X^2 + \partial_Y^2).$$

Tous les développements ainsi obtenus sont reportés dans les équations (E.1), en tenant compte du fait que le walk-off intervient que dans la direction x , nous donnent les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1/2)} = 0 & O(\varepsilon^{1/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(1)} = N^{(1)} & O(\varepsilon^1) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(3/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1/2)} + N^{(3/2)} & O(\varepsilon^{3/2}) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(1)} + N^{(2)} + iN^{(1)'} & O(\varepsilon^2) \\ (\partial_{T_0} - L_0) V^{(5/2)} = (-\partial_{T_1} + L_1) V^{(3/2)} + (-\partial_{T_2} + L_2) V^{(1/2)} + N^{(5/2)} + iN^{(3/2)'} & O(\varepsilon^{5/2}) \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

où les différents opérateurs linéaires L_k ($k = 0, 1, 2$) et non-linéaire $N^{(k/2)}$ ($k = 2, 3, 4, 5$) et $N^{(k/2)'}$ ($k = 4, 5$) sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 N^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\gamma_p \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) A_1^{(1/2)} A_2^{(1/2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^{(3/2)} = \begin{pmatrix} -\gamma_p \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[A_1^{(1/2)} A_2^{(1)} + A_1^{(1)} A_2^{(1/2)} \right] \\ \gamma_s \left(1 - \frac{i}{\Delta_e}\right) B^{(1)} A_2^{(1/2)*} \\ \gamma_i \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) B^{(1)*} A_1^{(1/2)} \end{pmatrix}, \\
 N^{(2)} &= \begin{pmatrix} -\gamma_p \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[A_1^{(1/2)} A_2^{(3/2)} + A_1^{(1)} A_2^{(1)} + A_1^{(3/2)} A_2^{(1/2)} \right] \\ \gamma_s \left(1 - \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[B^{(3/2)} A_2^{(1/2)*} + B^{(1)} A_2^{(1)*} \right] \\ \gamma_i \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[B^{(3/2)*} A_1^{(1/2)} + B^{(1)*} A_1^{(1)} \right] \end{pmatrix}, \\
 N^{(5/2)} &= \begin{pmatrix} -\gamma_p \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[A_1^{(1/2)} A_2^{(2)} + A_1^{(2)} A_2^{(1/2)} + A_1^{(3/2)} A_2^{(1)} + A_1^{(1)} A_2^{(3/2)} \right] \\ \gamma_s \left(1 - \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[B^{(2)} A_2^{(1/2)*} + B^{(1)} A_2^{(3/2)*} + B^{(3/2)} A_2^{(1)*} \right] \\ \gamma_i \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) \left[B^{(2)*} A_1^{(1/2)} + B^{(1)*} A_1^{(3/2)} + B^{(3/2)*} A_1^{(1)} \right] \end{pmatrix}, \\
 N^{(1)'} &= \begin{pmatrix} -\gamma_p A_1^{(1/2)} A_2^{(1/2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^{(3/2)'} = \begin{pmatrix} -\gamma_p \left[A_1^{(1/2)} A_2^{(1)} + A_1^{(1)} A_2^{(1/2)} \right] \\ -\gamma_s B^{(1)} A_2^{(1/2)*} \\ \gamma_i B^{(1)*} A_1^{(1/2)} \end{pmatrix}, \\
 L_0 &= \begin{pmatrix} \gamma_p \left[-\left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) + ia_p \Delta_{\perp}^{(0)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s \left[-(1 + i\Delta_s) + ia_s \Delta_{\perp}^{(0)} - \alpha_s \partial_{X_0} \right] & \gamma_s \mu_c \\ 0 & \gamma_i \mu_c & -\gamma_i \left[(1 - i\Delta_i) + ia_i \Delta_{\perp}^{(0)} + \alpha_i \partial_{X_0} \right] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} i\gamma_p [-1 + 2a_p \partial_{X_0 X}^2] & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s [2ia_s \partial_{X_0 X}^2 - \alpha_s \partial_X] & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_i [2ia_i \partial_{X_0 X}^2 + \alpha_s \partial_X] \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} i\gamma_p a_p (\partial_X^2 + \partial_Y^2) & 0 & 0 \\ 0 & i\gamma_s a_s (\partial_X^2 + \partial_Y^2) & \gamma_s \mu_2 \\ 0 & \gamma_i \mu_2 & -i\gamma_i a_i (\partial_X^2 + \partial_Y^2) \end{pmatrix}$$

où $\Delta_{\perp}^{(0)} = (\partial_{X_0}^2 + \partial_{Y_0}^2)$. La seconde étape consiste à résoudre successivement les équations (E.2), avec la même méthodes que dans les annexes précédentes. De plus la dynamique aux temps longs étant unidimensionnelle en présence du walk-off, nous effectuerons les calculs pour une dimension transverse dans la direction de ce walk-off. L'ordre dominant $O(\varepsilon^{1/2})$ est alors gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_s} \partial_{T_0} A_1^{(1/2)} &= -(1 + i\Delta_s) A_1^{(1/2)} + ia_s \partial_{X_0}^2 A_1^{(1/2)} - \alpha_s \partial_{X_0} A_1^{(1/2)} + \mu_c A_2^{(1/2)*} \\ \frac{1}{\gamma_i} \partial_{T_0} A_2^{(1/2)*} &= -(1 - i\Delta_i) A_2^{(1/2)*} - ia_i \partial_{X_0}^2 A_2^{(1/2)*} - \alpha_i \partial_{X_0} A_2^{(1/2)*} + \mu_c A_1^{(1/2)}, \end{aligned}$$

dont les solutions peuvent se mettre sous la forme $(A_1, A_2^*) = (1, e^{i\varphi}) u(X, T_1, T_2) e^{i(\omega_c T_0 + k_c X_0)}$, avec

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \frac{1+i\Delta_e}{\mu_{th}}, \\ \omega_c &= -\frac{\gamma_s \gamma_i}{\gamma_s + \gamma_i} \left[\Delta_s - \Delta_i + (a_s - a_i) \frac{\alpha^2}{4a^2} - (\alpha_s + \alpha_i) \frac{\alpha}{2a} \right], \\ k_c &= -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\gamma_s \alpha_s - \gamma_i \alpha_i}{2(\gamma_s a_s + \gamma_i a_i)}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de l'opérateur adjoint de $(\partial_{T_0} - L_0)$, donné par $\overline{(\partial_{T_0} - L_0)^T}$ sont alors solution du système ci-après :

$$\begin{aligned} \partial_{T_0} v_p &= \gamma_s \left[-(1 - i\Delta_s) v_p - ia_s \partial_{X_0}^2 v_p - \alpha_s \partial_{X_0} v_p \right] + \gamma_i \mu_c v_i \\ \partial_{T_0} v_i &= \gamma_i \left[-(1 + i\Delta_i) v_i + ia_i \partial_{X_0}^2 v_i - \alpha_i \partial_{X_0} v_i \right] + \gamma_s \mu_c v_s. \end{aligned}$$

Celle-ci admet comme solution $(v_s, v_i) = (\gamma_i, \gamma_s e^{-i\varphi}) e^{i(\omega_c T_0 + k_c X_0)}$. Le vecteur propre auquel

doivent être orthogonaux les seconds membres des équations (E.2) s'écrit alors comme suit :

$$V_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_i \\ \gamma_s e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i(\omega_c T_0 + k_c X_0)}.$$

Cas de l'OPO dégénéré

En cas de dégénérescence totale, $a_s = a_i$, $\alpha_s = \alpha_i$, $\gamma_s = \gamma_i$, $\Delta_s = \Delta_i$ et $A_s = A_i$, nous avons $\Delta_e = \Delta_s$, $a = a_s$ et $\alpha = 0$ soit $\mu_{th} = \mu_c$, $\omega_c = 0$ et $k_c = 0$. Les opérateurs L_0 et l_1 sont alors donnés par

$$L_0 = \begin{pmatrix} -\gamma_p \left(1 + \frac{i}{\Delta_e}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_s (1 + i\Delta_s) & \gamma_s \mu_c \\ 0 & \gamma_i \mu_c & -\gamma_i (1 - i\Delta_i) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L_1 = \begin{pmatrix} -i\gamma_p & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_s \alpha_s \partial_X & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_i \alpha_s \partial_X \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons dans ce cas $(A_1, A_1^*) = (e^{i\theta}, e^{-i\theta}) u(X, T_1, T_2)$ et

$$V_p = \gamma_s \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

avec $e^{2i\theta} = \frac{1-i\Delta_s}{\mu_c}$.

Dans les deux situation la suite du calcul est alors une succession d'opérations matricielles comme dans les annexes précédentes. Ils ont aboutis aux résultats donnés dans la section (III.1) pour le DOPO et la section (IV.3) pour l'OPO non-dégénéré.

Résumé :

Les oscillateurs paramétriques optiques (OPO) sont des sources optiques susceptibles de produire par interaction non-linéaire à trois ondes au sein d'un cristal à forte sensibilité quadratique, des faisceaux de lumière cohérente et accordable en fréquence. Ils sont classés parmi les systèmes optiques à cavité non-linéaire, dans lesquels des structures spatiales transverses auto-organisées peuvent se former de façon spontanée. Dans ce travail nous nous intéressons à la capacité des OPO à générer de telles structures, notamment celles conduisant à un confinement de l'énergie, appelées structures spatiales localisées (SSL). La première partie de cette thèse a été consacrée à l'étude de la dynamique spatio-temporelle de l'OPO en tenant compte des inhomogénéités spatiales du champ de pompe incident. Nous montrons que cela permet la formation de SSL piégées ou modes globaux sous forme de solutions d'un problème aux valeurs propres, ce qui se traduit par la quantification du seuil d'oscillation. Dans la seconde partie, la modélisation des effets non-linéaires et/ou non-variationnels du walk-off conduit en régime monostable à l'abaissement du seuil d'oscillation de l'OPO sous le seuil linéaire classique et en régime bistable à l'apparition surprenante d'un terme de gradient non-linéaire dans l'équation d'amplitude gouvernant la dynamique spatio-temporelle des champs intra-cavité. Il en résulte une auto-dépendance de la fréquence et de la vitesse d'entraînement des structures spatiales de l'OPO, vis à vis de leur intensité. Ce qui permet d'expliquer l'auto-décalage de fréquence, le freinage et la dissymétrie observée dans l'enveloppe des champs émis par l'OPO.

Abstract :

Optical parametric oscillators (OPO) are sources capable of producing coherent, frequency tunable light beam by nonlinear three-wave interaction in a crystal. They are classified among nonlinear cavity optics, in which spatial dissipative structures can be formed spontaneously. In this work we are interested in the ability of OPO to generate such structures, in particular the so-called localized structures (LS), leading to confinement of energy. The first part of this thesis was devoted to the study of spatio-temporal dynamics of the OPO by taking into account the spatial inhomogeneities of the pump field. We show that this allows the formation of trapped LS or global modes in the form of solutions of an eigenvalues problem, which imply the quantification of oscillation threshold. In the second part, the modeling of the nonlinear and/or nonvariational effects of the walk-off leads in monostable regime to the lowering of the OPO oscillation threshold under the classical linear threshold and in bistable regime to the surprising appearance of a nonlinear gradient term in the amplitude equation governing the spatio-temporal dynamic of intra-cavity fields. It leads to a self-dependence of frequency and velocity of transverse structures in the OPO, with respect to their intensity. What makes it possible to explain the self-frequency shift, the slowing down and the dissymmetry observed in the envelope of fields emitted by the OPO.

Laboratoire de Physique de Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)
 U.F.R. de Physique
 Université de Sciences et Technologies de Lille (USTL)
 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France
 ☎ : +33 (0)3 20 43 47 85 📠 : +33 (0)3 20 33 70 20

