Numéro d'ordre: 3961

THÈSE

présentée à

L 'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLEI

U.F.R DE MATHEMATIQUES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

discipline : Mathématiques Pures

Par

Olfa BEL HADJ FREDJ

Ascente essentielle, descente essentielle et problème de perturbations

Soutenance prévue le 26 janvier 2007 devant la commission d'examen:

Directeur :	Pr. Mostafa MBEKHTA	Université de LilleI
Rapporteurs:	Pr. Manuel GONZALEZ	Université de cantabria, Espagne
	Pr. Marek PTAK	Université d'agriculture, Al. Mickiewicza, pologne
	Pr. Gilles CASSIER	Université de Lyon1,France
Examinateurs :	Pr. Florian-Horia VASILESCU	Université Lille1, France
	Pr. Catalin BADEA	Université de Lille1, France
	Pr. Hervé QUEFFÉLEC	Université de Lille1, france
	Pr. Pascal Lefèvre	Université d'Artois, france

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Groupe d'Analyse Fonctionnelle de l'Université des Sciences et Technologies de Lille I.

En premier lieu je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mostafa Mbekhta, Professeur à l'Université de Lille I, qui m'a dirigé durant ces trois années de thèse avec la plus grande compétence et la plus grande disponibilité. Son soutien et sa gentillesse m'ont énormément apporté pendant l'élaboration de cette thèse. Sa passion des mathématiques ainsi que les conseils et la clarté des explications qu'il me prodiguait chaque fois que je m'adresse à lui m'ont beaucoup apporté.

Je tiens donc à remercier chaleureusement Monsieur M. Mbekhta sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour.

Je remercie très sincèrement Monsieur Florian-Horia Vasilescu, Professeur à l'université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs Manuel Gonzalez, Marek Ptak et Gilles Cassier d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail et de m'avoir apporté des remarques judicieuses.

Mes remerciements vont également à Monsieurs Catalin Badea et Hervé Queffélec, Professeurs à l'Université de Lille I, et Monsieur Pascal lefèvre, Professeurs à l'Université d'artois, qui ont accepté d'examiner mon travail et me fair l'honneur de participer au jury de cette thèse.

J'exprime mes remerciements à mes amis pour leur soutien moral très précieux.

Je remercie Mourade Oudghiri pour son aide et l'amitié qu'il m'a témoigné au cours de ces trois années de thèse.

Je tiens à exprimer tout particulièrement mes sincères remerciements à mon mari Dimassi Bassem pour son soutien moral très précieux et inestimable.

Je dédie cette thèse à mes parents,qui ont su m'amener à ce niveau d'étude, mes frères, Maysoun, ma soeur, Jamel, et mon oncle rached pour qui j'éprouve un grand amour et un profond respect que je tiens à leur exprimer ici, de la manière la plus humble.

Ascente essentielle, descente essentielle et problème de perturbations

BEL HADJ FREDJ. Olfa

Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse au problème de relèvement des éléments de l'algèbre de Calkin, dans le cas d'un espace de Hilbert. Plus précisément, si on note $\mathcal{L}(H)$, $C(H) := \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ respectivement l'algèbre des opérateurs bornés sur H, l'algèbre de Calkin et si on note $\pi : \mathcal{L}(H) \to C(H)$ la surjection canonique, alors le problème de relèvement consiste à étudier la question suivante :*soit* $\pi(T)$ *un élément de* $C(H)$ *vérifiant certaine propriété "*$\mathcal{P}$*" (par exemple : idempotent, quasinilpotent, algébrique, normal...), existe-t-il un opérateur* T' *élément de* $\mathcal{L}(H)$ *appartenant à la même classe que* T *(i.e.* $\pi(T) = \pi(T')$*) et vérifiant cette même propriété "*$\mathcal{P}$*" ?*

Historiquement, J.W. Calkin est le premier mathématicien qui s'est intéressé à ce problème. Il a démontré, en 1941 (voir [12]), le résultat suivant : *Si* $\pi(E)$ *est un projecteur dans* $C(H)$ *(i.e.* $\pi(E) = \pi(E)^2 = \pi(E)^*$*), alors il existe* E' *projecteur dans* $\mathcal{L}(H)$ *tel que* $E - E'$ *soit un opérateur compact.*

Ainsi, J.W. Calkin, a résolu le problème du relèvement des projecteurs. Plus tard ce résultat a été généralisé aux familles analytiques d'idempotents (voir [4, 29]).

En 1966, T.T. West, a résolu le problème du relèvement des quasinilpotents, en démontrant que (voir [51]) : *Si* $\pi(T)$ *un élément quasinilpotent dans* $C(H)$ *(i.e. le spectre de* $\pi(T)$ *est réduit a zéro) alors il existe* T' *quasinilpotent dans* $\mathcal{L}(H)$ *tel que* $T' - T$ *soit un opérateur compact.*

En 1971, C.L. Olsen (voir[42]), a démontré que : *Si* $\pi(T)$ *un élément algébrique dans* $C(H)$ *(i.e.* $\pi(T)$ *est annulé par un polynôme non nul) alors il existe* T' *algébrique dans* $\mathcal{L}(H)$ *tel que* $T' - T$ *soit un opérateur compact.*

En 1973, L.G. Brown, R.G. Douglas, P.A. Fillmore (voir [10]), ont résolu le fameux problème du relèvement des opérateurs normaux, en utilisant des outils de la topologie algébrique. Dans ce résultat l'indice apparaît comme une "obstruction", plus précisément, ils ont démontré que : *Si* $\pi(T)$ *un élément normal dans*

$C(H)$ alors il existe T' normal dans $\mathcal{L}(H)$ tel que $T' - T$ soit un opérateur compact si et seulement si l'indice de $T - \lambda$ est nul pour tout λ dans le domaine de Fredholm de T.

Depuis, l'algèbre de Calkin a fait l'objet d'une grande étude par plusieurs auteurs. Dans [14] on trouve une très bonne introduction sur ce sujet. Par ailleurs, il faut noter que l'algèbre de Calkin est le plus célèbre exemple d'une C^*-algèbre qui n'est pas une algèbre de Van Neumann.

Ce travail comporte deux grandes parties.

La première partie concerne la résolution du problème de relèvement des pôles de la résolvante dans l'algèbre de Calkin. Plus précisément, nous répondons à la question suivante : *soit T un opérateur défini sur un espace de Hilbert séparable tel que zéro soit un pôle d'ordre d de la résolvante de $\pi(T)$, existe t-il un opérateur compact K tel que zéro soit un pôle d'ordre d de la résolvante de $T + K$?*

La deuxième partie consiste à étudier l'ascente essentielle et la descente essentielle d'un opérateur. Ces deux notions jouent un rôle très important dans les caractérisations des pôles de la résolvante dans l'algèbre de Calkin. D'autre part, elles permettent aussi de définir des spectres associés vérifiant certaines propriétés du spectre classique.

La thèse est organisée de la façon suivante :

Dans le premier chapitre on introduit des définitions et des résultats qu'on utilisera dans la suite. On rappelle des résultats sur les opérateurs semi-Fredholm et semi-réguliers. On rappelle aussi quelques résultats fondamentaux sur l'ascente essentielle et la descente essentielle d'un opérateur qui jouent un rôle essentiel dans ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ascente et de l'ascente essentielle d'un opérateur T défini sur un espace de Banach complexe et leurs spectres associés. On commence dans la section 1 de ce chapitre par établir des résultats sur la stabilité de l'ascente essentielle sous des "petites" perturbations du type λI. Ces perturbations sont importantes pour l'étude du spectre associé à l'ascente essentielle :

Théorème. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur tel que $a_e(T)$ est finie et $R(T^{a_e(T)+1})$ est fermé, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$ et $p := p(T)$, on a :
(i) $T - \lambda$ est semi-régulier,

(ii) $\dim N(T-\lambda)^n = n \dim(N(T^{p+1})/N(T^p))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\operatorname{codim} R(T-\lambda)^n = n \dim(R(T^p)/R(T^{p+1}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De ce théorème, on en déduit que les spectres de l'ascente et de l'ascente essentielle sont compacts pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$. Ensuite, on obtient plusieurs résultats classiques sur le comportement des éléments de la frontière de ces deux spectres.

Dans la section 2 de ce chapitre, on définit grâce aux opérateurs de multiplications l'ascente et l'ascente essentielle d'un élément d'une algèbre de Banach complexe et on établit le résultat suivant :
Théorème. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe avec unité, alors les assertions suivante sont équivalentes :
(i) $\dim(\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A}))$ est finie et $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})$ où $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{A}$,
(ii) $\sigma_{\mathrm{asc}}(x) = \emptyset$ pout tout $x \in \mathcal{A}$,
(iii) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(x) = \emptyset$ pout tout $x \in \mathcal{A}$,
(iv) $\mathcal{A}$ est algébrique.

Dans [26], M. Kaashoek et D. Lay établissent que si F est un opérateur borné sur un espace de Banach X, pour le quel il existe un entier positif n tel que F^n est de rang fini, alors l'ascente de $T+F$ est finie pour tout opérateur T commutant avec F et ayant l'ascente finie. Il conjecturent également que l'opérateur F peut être caractérisé par cette propriété. Dans la section 3 de ce chapitre on donne une réponse positive à cette question dans le cadre général de l'ascente essentielle :

Théorème. Soit F un opérateur borné dans X, alors les conditions suivantes sont équivalentes
(i) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T+F) = \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec F ;
(ii) $\sigma_{\mathrm{asc}}(T+F) = \sigma_{\mathrm{asc}}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec F ;
(iii) il existe un entier positif n tel que F^n est de rang fini.

Enfin, comme le coeur analytique et la partie quasi-nilpotente d'un opérateur jouent un rôle important dans la théorie de Fredholm (particulièrement dans la décomposition de Kato) et dans la théorie spectrale locale, on généralise dans les propositions 2.4.2 et 2.4.3 des résultats démontrés dans [38] et [34], portant sur les opérateurs semi-réguliers. On donne aussi une caractérisation de la propriété d'extension unique pour un opérateur d'ascente essentielle finie. Notons que le cas particulier des opérateurs d'ascentes finies a été traité par P. Aiena et M. Tbioni dans un travail paru en 2002 (voir [2]).

L'objectif du troisième chapitre est de mener une étude similaire à celle établie dans le deuxième chapitre pour le spectre de la descente essentielle au lieu du spectre de l'ascente essentielle. On commence par établir que le spectre de la descente essentielle vérifie certaines propriétés du spectre classique. Plus précisément, on montre qu'il est compact et satisfait le théorème de l'application spectrale pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$. Cependant, le spectre de la descente essentielle peut être vide. Dans le théorème suivant on caractérise les opérateurs dont le spectre de la descente essentielle est vide :

Théorème. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors

$$\rho^{e}_{\mathrm{des}}(T) \cap \partial\sigma(T) = \rho_{\mathrm{des}}(T) \cap \partial\sigma(T) = \mathrm{Pol}(T).$$

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sigma_{\mathrm{des}}(T) = \emptyset$,
(ii) $\sigma^{e}_{\mathrm{des}}(T) = \emptyset$,
(iii) $\partial\sigma(T) \subseteq \rho_{\mathrm{des}}(T)$,
(iv) $\partial\sigma(T) \subseteq \rho^{e}_{\mathrm{des}}(T)$,
(v) T est algébrique.

En se basant sur ce dernier résultat, on montre que pour tout opérateur $F \in \mathcal{L}(X)$, si $\sigma^{e}_{\mathrm{des}}(T+F) = \sigma^{e}_{\mathrm{des}}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $TF = FT$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F^k est de rang fini. De plus, dans [39], M. Mbekhta et V. Müller ont étudié aussi la stabilité du spectre de la descente essentielle sous différents types de perturbations et ont montré que le spectre de la descente essentielle de tout opérateur défini sur un espace de Banach reste invariant sous perturbations par opérateurs de rang fini. Par conséquent, $\sigma^{e}_{\mathrm{des}}(T) \subseteq \bigcap_{F \in F(X)} \sigma_{\mathrm{des}}(T+F)$. Une question naturelle peut être posée : *l'inclusion précédente est-elle une égalité ?* Dans le théorème ci-dessous on donne une réponse à cette question :

Théorème. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors

$$\sigma^{e}_{\mathrm{des}}(T) \cup acc\sigma^{+}_{sf}(T) = \bigcap_{F \in F(X)} \sigma_{\mathrm{des}}(T+F).$$

Pour conclure ce chapitre, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un opérateur de descente essentielle finie soit d'image fermée. On obtient en particulier des résultats démontré par D. Barraza dans le cas des opérateurs de descentes finies, [6].

L'objectif du dernier chapitre est de résoudre le problème de relèvement des pôles dans l'algèbre da Calkin d'un espace de Hilbert séparable. On montre par un exemple que l'existence d'un tel relèvement n'est pas possible en général et on établit le théorème suivant :

Théorème. Soit T un opérateur borné dans H, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ si et seulement si il existe un opérateur compact K tel que $T + K = A \oplus B$, A nilpotent et B de Fredholm.

Comme le théorème ci-dessus le montre la condition zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ n'implique pas en général que l'indice de $T - \lambda$ est nul au voisinage de zéro. Cependant, si on suppose qu'il existe un opérateur compact K tel que zéro soit un pôle de la résolvante de $T + K$, il vient que l'indice de $T - \lambda$ est nul au voisinage de zéro. Par conséquent, l'indice non nul au voisinage constitue une obstruction à relever les pôles. En particulier, on démontre :

Corollaire. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que zéro soit un pôle de la résolvante de $\pi(T)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe un opérateur compact K tel que zéro est un pôle de la résolvante de $T + K$,
(ii) il existe $\delta > 0$ tel que $\pi(T) - \lambda \in G_o$ pour tout $0 <| \lambda |< \delta$, où G_o dénote la composante connexe des éléments inversibles de $C(H)$ contenant l'identité.
(iii) il existe $\delta > 0$ tel que $T - \lambda$ est de Fredholm d'indice zéro pour tout $0 <| \lambda |< \delta$.

Notre point de départ dans la deuxième partie de ce chapitre se base sur le résultat de Caradus suivant : Zéro est un pôle de la résolvante de T si et seulement si l'ascente et la descente de T sont finies. Dans le cas d'une algèbre de Calkin, on établit :

Théorème. Soit T un opérateur borné dans H, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ si et seulement si il existe un opérateur compact K tel que $a_e(T + K)$ et $d_e(T + K)$ sont finies.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Dans toute la suite, X désigne un espace de Banach complexe, $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur X, $\mathcal{F}(X)$ l'idéal des opérateurs de rang fini et $\mathcal{K}(X)$ l'idéal des opérateurs compacts. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, on notera T^* l'adjoint de T, $\mathrm{N}(T)$ le noyau de T, $\mathrm{R}(T)$ l'image de T, $\sigma(T)$ le spectre de T , $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ le spectre approximatif de T et $\sigma_{\mathrm{su}}(T)$ le spectre surjectif de T.

1.1 Opérateurs semi-Fredholm et semi-réguliers

1.1.1 Opérateurs semi-Fredholm

On appelle opérateur *semi-Fredholm* tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{R}(T)$ est fermé et $\dim \mathrm{N}(T)$, ou $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T)$ est fini. Pour un tel opérateur, l'indice est défini par

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \mathrm{N}(T) - \operatorname{codim} \mathrm{R}(T).$$

Si $\operatorname{ind}(T)$ est fini, alors on dit que T est un *opérateur de Fredholm* ; ce qui est aussi équivalent à dire que l'image de T par la surjection canonique π de $\mathcal{L}(X)$ sur *l'algèbre de Calkin* $C(X) := \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ est inversible [13]. Il est claire que si T est un opérateur de Fredholm, alors pour tout opérateur compact K défini sur X, $T + K$ est aussi de Fredholm. Dans [13] et [40], on trouve la généralisation suivante aux opérateurs semi-fredholms :

Théorème 1.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur semi-fredholm, alors pour tout opérateur compact K défini sur X, $T + K$ est un opérateur semi-fredholm. De plus,* $\operatorname{ind}(T + K) =$

ind(T).

Dans toute la suite on dénote par :

$$\Phi_+(X) = \{T \in \mathcal{L}(X), \text{ tel que} R(T) \text{ est fermé et } dim N(T) < \infty\},$$

et par

$$\Phi_-(X) = \{T \in \mathcal{L}(X), \text{ tel que } codim R(T) < \infty\}.$$

Théorème 1.1.2. *[40] soient $T, S \in \mathcal{L}(X)$, alors :*
(i) $T \in \Phi_+(X)$ et $S \in \Phi_+(X)$, alors $TS \in \Phi_+(X)$ et $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$
(ii) $T \in \Phi_-(X)$ et $S \in \Phi_-(X)$, alors $TS \in \Phi_-(X)$ et $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$

Le spectre essentielle de T, $\sigma_e(T)$, est par definition :

$$\sigma_e(T) := \sigma(\pi(T)) = \{\lambda : T - \lambda \text{ n'est pas de Fredholm }\},$$

c'est un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$.

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\sigma_e(T) = \{0\}$, ou encore $\pi(T)$ est quasi-nilpotent dans $C(X)$, est dit *opérateur de Riesz*. Le spectre d'un tel opérateur est dénombrable et zéro est son unique éventuel point d'accumulation.

Proposition 1.1.3. [13]. *Soient $R \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur de Riesz et M un de ses sous-espaces fermés invariants, alors $T_{|M}$ et $T_{/M}$ sont aussi des opérateurs de Riesz, où $T_{|M}$ désigne la restriction de T au sous-espace M et $T_{/M}$ désigne l'opérateur défini sur X/M par $T_{/M}(x + M) = Tx + M$.*

Étant donnés un opérateur de Fredholm $T \in \mathcal{L}(X)$ et un opérateur de Riesz $R \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec T. En utilisant le fait que l'ensemble des éléments inversibles d'une l'algèbre de Banach est stable par toute perturbation quasi-nilpotent commutative, on obtient que $T + R$ est un opérateur de Fredholm et $\text{ind}(T+R) = \text{ind}(T)$. Dans [46], M. Schechter et R. Whitley généralisent ce résultat aux opérateurs semi-Fredholm.

Théorème 1.1.4. *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur semi-Fredholm et $R \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur de Riesz commutant avec T, alors $T + R$ est un opérateur semi-Fredholm et* $\text{ind}(T + R) = \text{ind}(T)$.

On rappelle que si le spectre d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est réunion de deux fermés disjoints F_1 et F_2, alors par le calcul fonctionnel de Riesz, il existe deux sous-espaces fermés X_1 et X_2, hyperinvariants par T, tels que $X = X_1 \oplus X_2$, $\sigma(T_{|X_1}) = F_1$ et $\sigma(T_{|X_2}) = F_2$.
Dans le cas d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ avec unité, on denote par $\sigma(x; \mathcal{A})$ le spectre d'un element $x \in \mathcal{A}$, ou simplement par $\sigma(x)$ si aucune confusion n'est possible. Dans [9], F. F. Bonsall et J. Duncan établissent le résultat suivant :

Théorème 1.1.5. *soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach avec unité et $x \in \mathcal{A}$. zéro est un point isolé de $\sigma(x)$ si et seulement si il existe un projecteur e commutant avec x tel que $\sigma(exe; e\mathcal{A}e) = \{0\}$ et $\sigma((1-e)x(1-e); (1-e)\mathcal{A}(1-e)) = \sigma(x) \setminus \{0\}$.*

1.1.2 Partie quasi-nilpotente et Coeur analytique

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, la *partie quasi-nilpotente*, $\mathrm{H_o}(T)$, de T et le *coeur analytique* de T, $\mathrm{K}(T)$, sont définies respectivement par

$$\mathrm{H_o}(T) = \{ x \in X \quad : \quad \lim_{n \to \infty} \| T^n x \|^{\frac{1}{n}} = 0 \}$$

et

$$\mathrm{K}(T) = \{ x \in X \quad : \quad \exists \, \{x_n\}_{n \geq 0} \subseteq X \text{ et } \exists \, c > 0 \text{ tels que } x = x_0, \\ T x_{n+1} = x_n \text{ et } \| x_n \| \leq c^n \, \| x \| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \}.$$

Ces deux sous-espaces ont été profondément étudiés par M. Mbekhta dans [35], [36], [37] et [38].

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier et seront souvent utilisées dans le premier chapitre :

(i) $\mathrm{H_o}(T)$ et $\mathrm{K}(T)$ sont des sous-espaces vectoriels de X.
(ii) Soit $x \in X$, alors $x \in \mathrm{H_o}(T)$ si et seulement si $Tx \in \mathrm{H_o}(T)$.
(iii) $\mathrm{N}(T^n) \subseteq \mathrm{H_o}(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(iv) Si T est inversible alors $\mathrm{H_o}(T) = \{0\}$.
(v) Si T est quasi-nilpotent alors $\mathrm{K}(T) = \{0\}$.
(vi) $T(\mathrm{K}(T)) = \mathrm{K}(T)$.

La partie quasi-nilpotente et le coeur analytique d'un opérateur sont des sous-espaces non nécessairement fermés.

Proposition 1.1.6. [50]. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors T est quasi-nilpotent si et seulement si* $\mathrm{H}_0(T) = X$.

En particulier, si T est un opérateur tel que $\mathrm{H}_0(T)$ est fermé, alors $T_{|\mathrm{H}_0(T)}$ est un opérateur quasi-nilpotent.

1.1.3 Opérateurs semi-réguliers

Étant donné un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, on denote respectivement par $\mathcal{N}^\infty(T) := \cup_n \mathrm{N}(T^n)$ et $\mathcal{R}^\infty(T) := \cap_n \mathrm{R}(T^n)$ le *noyau généralisé* et *l'image généralisé* de T. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit *semi-régulier* si $\mathrm{R}(T)$ est fermé et $\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathrm{R}(T)$.

Évidemment cette classe d'opérateurs, introduite par T. Kato dans [24], contient les opérateurs surjectifs et les opérateurs injectifs à images fermées. Dans [35], M. Mbekhta démontre les deux résultats suivants qui seront souvent utilisés :

Proposition 1.1.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que* $\mathrm{R}(T)$ *est fermé et* $\mathrm{N}(T)$ *possède un complement M dans X, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *T est semi-régulier,*
(ii) *Il existe un voisinage U de zéro dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $\lambda \in U$,* $\mathrm{N}(T-\lambda) \oplus M = X$.

Proposition 1.1.8. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que* $\mathrm{R}(T)$ *est fermé et* $\mathrm{R}(T)$ *possède un complement M dans X, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *T est semi-régulier ;*
(ii) *Il existe un voisinage U de zéro dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $\lambda \in U$,* $\mathrm{R}(T-\lambda) \oplus M = X$.

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on appelle *coeur algébrique* de T qu'on note $Co(T)$, le plus grand sous-espace M de X tel que $T(M) = M$. Il est évident que $\mathrm{K}(T) \subseteq Co(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$. Il est bien connu d'après M. Mbekhta que si $Co(T)$ est fermé, alors $Co(T) = \mathrm{K}(T)$.

Théorème 1.1.9. *[38], [34] Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur semi-régulier, alors on a*
(i) $\mathrm{R}(T^n)$ *est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(ii) $\overline{\mathrm{H}_0(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}$ *et* $T(\overline{\mathrm{H}_0(T)}) = \overline{\mathrm{H}_0(T)}$.
(iii) $Co(T) = \mathrm{K}(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$.
(iv) *Si* $\mathrm{H}_0(T)$ *est fermé, alors* $\mathrm{H}_0(T) = \{0\}$.

L'*ensemble résolvant semi-régulier* d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, s-reg(T) , est l'ensemble des complexes λ pour les quels $T - \lambda$ est semi-régulier. Le *spectre singulier*,

$\sigma_s(T)$, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de s-reg(T), c'est une partie fermée, non vide puisqu'elle contient la frontière de $\sigma(T)$ et vérifie le théorème de l'application spectrale, voir [37].

Proposition 1.1.10. *[38], Soit T un opérateur borné sur X, alors les applications $\lambda \to H_0(T-\lambda)$ et $\lambda \to K(T-\lambda)$ sont constantes sur chaque composante connexe de s-reg(T).*

1.2 La notion d' ascente essentielle

1.2.1 Ascente et descente

On rappelle que pour un opérateur borné T défini sur X, l'ascente, $a(T)$, et la descente, $d(T)$, sont définies respectivement par :

$a(T) := inf\{n \geq 0 : N(T^n) = N(T^{n+1})\}$ et $d(T) := inf\{n \geq 0 : R(T^n) = R(T^{n+1})\}$

Dans [49], on trouve les deux caractérisations suivantes d'ascente et de descente finies :

$$a(T) \text{ est finie } \Leftrightarrow R(T^d) \cap N(T) = \{0\} \text{ pour un certain } d \geq 0. \tag{1.1}$$

et

$$d(T) \text{ est finie } \Leftrightarrow R(T) + N(T^d) = X \text{ pour un certain } d \geq 0, \tag{1.2}$$

Comme conséquence immediate des deux caractérisations suivantes, on annonce la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et $0 \in \sigma(T)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *L'ascente de T et la descente de T sont finies,*
(ii) $a(T) = d(T) = d$,
(iii) $X = R(T^p) \oplus N(T^p)$,
(iv) $T = T_1 \oplus T_2$, *T_1 inversible et T_2 nilpotent d'ordre d,*
(v) *zéro est un pôle d'ordre d de la résolvante de T.*

Le lemme suivant sera souvent utilisé par la suite,

Lemme 1.2.2. *[40] Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ et M un sous-espace fermé de X tel que $M + R(T)$ et $M \cap R(T)$ sont fermés, alors $R(T)$ est fermé.*

On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit *algébrique* s'il existe un polynôme complexe non nul, $\mathcal{P}$, tel que $\mathcal{P}(T) = 0$. D'après le théorème de l'application spectrale, le spectre d'un tel opérateur est fini. Dans [11], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri on montré qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est algébrique si et seulement si $\mathrm{d}(T - \lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dans le cas d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, l'ascente et la descente d'un élément $x \in \mathcal{A}$ est par définition l'ascente et la descente de l'opérateur de multiplication à gauche L_x donné par $L_x(y) := xy$ pour tout $y \in \mathcal{A}$.

On signale que dans le cas d'un espace de Hilbert H, la descente d'un opérateur T, $\mathrm{d}(T)$, et la descente de T en tant qu'élément de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(H)$ sont de même nature. En fait, il suffit d'appliquer un résultat dû à R. G. Douglas affirmant que si A et B sont deux opérateurs bornés sur H tel que $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(B)$, alors il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A = BS$, voir [16].

1.2.2 Ascente essentielle et descente essentielle d'un opérateur borné

D'après S. Grabiner [19], on associe à tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ les deux suites décroissantes $\{\dim \mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\dim \mathrm{R}(T^n)/\mathrm{R}(T^{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$. *L'ascente essentielle* et *la descente essentielle* d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ sont définies respectivement par :

$$\mathrm{a_e}(T) := inf\{n \in \mathbb{N} : \dim \mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^n) \text{ est finie }\}$$

et

$$\mathrm{d_e}(T) := inf\{n \in \mathbb{N} : \dim \mathrm{R}(T^n)/\mathrm{R}(T^{n+1}) \text{ est finie }\}$$

Les opérateurs d'ascente essentielle et de descente essentielle finie ont été étudiées dans [19], [20], [39] et [40].

Remarques.

(1) Il est simple à vérifier que si l'ascente essentielle et la descente essentielle d'un opérateur borné T sont finies, alors on a $\mathrm{a_e}(T) = \mathrm{d_e}(T)$.

(2) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{R}(T)$ est fermé, alors

$$\mathrm{a_e}(T) = 0 \text{ si et seulement si } T \in \Phi_+(X),$$

et

$$\mathrm{d_e}(T) = 0 \text{ si et seulement si } T \in \Phi_-(X).$$

(3) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, $N(T^n)$ est de codimension finie dans $N(T^{n+1})$ si et seulement si $N(T^n)$ est de codimension finie dans $N(T^{n+m})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De même, $R(T^{n+1})$ est de codimension finie dans $R(T^n)$ si et seulement si $R(T^{n+m})$ est de codimension finie dans $R(T^n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Dans [20], S. Grabiner et J. Zemànek ont établit les caractérisations suivantes d'ascente essentielle et de descente essentielle finies qui sont analogues à celles d'ascente et de descente finies données dans les formules (1.1) et (1.2) :

$$\mathrm{a_e}(T) \text{ est finie } \Leftrightarrow \dim(R(T^d) \cap N(T)) < \infty \text{ pour un certain } d \geq 0. \tag{1.3}$$

$$\mathrm{d_e}(T) \text{ est finie } \Leftrightarrow \operatorname{codim}(R(T) + N(T^d)) < \infty \text{ pour un certain } d \geq 0 \tag{1.4}$$

Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ d'ascente essentielle finie, M. Mbekhta et V. Müller ont établit dans [39] le lemme suivant :

Lemme 1.2.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{a_e}(T) < \infty$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *Il existe $n \geq \mathrm{a_e}(T) + 1$ tel que $R(T^n)$ est fermé ;*
(ii) *$R(T^n)$ est fermé pour tout $n \geq \mathrm{a_e}(T)$.*

L'ensemble résolvant de l'ascente essentielle et de la descente essentielle d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ sont définis respectivement par :

$$\rho^{e}_{asc}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{a_e}(T-\lambda) \text{ est finie et } R(T^{\mathrm{a_e}(T-\lambda)+1}) \text{ est fermé } \}.$$

et

$$\rho^{e}_{des}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{d_e}(T-\lambda) \text{ est finie } \}.$$

Les ensembles complémentaires $\sigma^{e}_{asc}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho^{e}_{asc}(T)$ et $\sigma^{e}_{des}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho^{e}_{des}(T)$ sont appelés respectivement *le spectre de l'ascente essentielle* et *le spectre de la descente essentielle*. Il est claire que $\sigma^{e}_{asc}(T) \subseteq \sigma(T)$ et $\sigma^{e}_{des}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Le lemme technique et le théorème suivants seront souvent utilisés par la suite, voir[19] :

Lemme 1.2.4. *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ et U, V, W et E des sous-espaces vectoriels de X, alors*
(i) *Les sous espaces vectoriels $U/(U \cap V)$ et $(U + V)/V$ sont isomorphes,*
(i) $T^{-1}(T(U)) = \mathrm{N}(T) + U$,
(ii) $T(U \cap T^{-1}(E)) = T(U) \cap E$.

Théorème 1.2.5. *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ et $d \in \mathbb{N}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *L'application linéaire induite par T de $\mathrm{R}(T^n)/\mathrm{R}(T^{n+1})$ à $\mathrm{R}(T^{n+1})/\mathrm{R}(T^{n+2})$ est une isomorphisme pour tout $n \geq d$,*
(ii) *La suite des sous-espaces $\{\mathrm{R}(T^n) \cap \mathrm{N}(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est constante pour tout $n \geq d$,*
(iii) $\mathrm{R}(T^d) \cap \mathrm{N}(T) = \mathcal{R}^\infty(T) \cap \mathrm{N}(T)$,
(iv) *L'application linéaire induite par T de $\mathrm{N}(T^{n+2})/\mathrm{N}(T^{n+1})$ à $\mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^n)$ est une isomorphisme pour tout $n \geq d$,*
(v) *La suite $\{\mathrm{N}(T^n) + \mathrm{R}(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est constante pour tout $n \geq d$,*
(vi) $\mathrm{N}(T^d) + \mathrm{R}(T) = \mathcal{N}^\infty(T) + \mathrm{R}(T)$.

Chapitre 2

Spectre de l'ascente essentielle

Notre but, dans ce chapitre, est d'adopter des méthodes utilisés par S. Grabiner (dans [19]) et M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri (dans [11]) a fin d'étudier l'ascente et l'ascente essentielle d'un opérateur défini sur un espace de Banach et la stabilité de leurs spectres associés sous différents types de perturbations, ce qui nous sera utile dans les chapitres suivants. L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec M. Burgos et M. Oudghiri.

2.1 Spectre de l'ascente et de l'ascente essentielle

On commence cette section par généraliser un résultat démontré par M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri dans [11] aux opérateurs d'ascente essentielle finie. En particulier, on établit que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $0 \in \rho^{e}_{\text{asc}}(T)$, zéro ne peut pas être un point d'accumulation de son spectre semi-régulier.

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ d'ascente essentielle finie. Comme la suite $\{\dim \mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, notons par $p(T)$ le plus petit entier positif n tel que $\dim \mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^{n}) = \dim \mathrm{N}(T^{k+1})/\mathrm{N}(T^{k})$ pour tout $k \geq n$. Il est clair que $\mathrm{a_e}(T) \leq p(T)$ et que si $\mathrm{a}(T)$ est finie , alors $\mathrm{a}(T) = p(T)$.

Théorème 2.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur tel que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ est fermé, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout$0 < |\lambda| < \delta$ et $p := p(T)$, on a :*

(i) *$T-\lambda$ est semi-régulier,*
(ii) $\dim \mathrm{N}(T-\lambda)^n = n \dim(\mathrm{N}(T^{p+1})/\mathrm{N}(T^p))$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\mathrm{codim}\, \mathrm{R}(T-\lambda)^n = n \dim(\mathrm{R}(T^p)/\mathrm{R}(T^{p+1}))$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Avant de démontrer ce Théorème, quelques Lemmes techniques doivent être établis :

Lemme 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ est fermé, alors l'opérateur $\tilde{T}$ défini sur $X/\mathrm{N}(T^p)$ par $\tilde{T}(x+\mathrm{N}(T^p)) = Tx + \mathrm{N}(T^p)$, où $p := p(T)$, est à la fois semi-régulier et semi-Fredholm.*

Preuve. Comme $\mathrm{N}(\tilde{T})$ est de dimension fini et $\mathrm{R}(T)+\mathrm{N}(T^p) = T^{-p}(\mathrm{R}(T^{p+1}))$, alors d'après le Lemme 1.2.3, $\mathrm{R}(\tilde{T}) = (\mathrm{R}(T)+\mathrm{N}(T^p))/\mathrm{N}(T^p)$ est fermé et par conséquent $\tilde{T}$ est semi-Fredholm. Soit n un entier positif arbitraire et considérons la restriction S de $\tilde{T}$ au sous-espace de dimension fini $Y := \mathrm{N}(T^{p+n+1})/\mathrm{N}(T^p)$. Puisque

$$dim Y/\mathrm{N}(S) = dim \mathrm{N}(T^{p+n+1})/\mathrm{N}(T^{p+1}) = dim \mathrm{N}(T^{p+n})/\mathrm{N}(T^p),$$

on obtient que

$$\mathrm{N}(\tilde{T}^n) = \mathrm{N}(T^{p+n})/\mathrm{N}(T^p) = \mathrm{R}(S) \subseteq \mathrm{R}(\tilde{T}).$$

D'où $\tilde{T}$ est semi-régulier. ■

Lemme 2.1.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur semi-régulier, alors* $\dim \mathrm{N}(T^n) = n \dim \mathrm{N}(T)$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\mathrm{N}(T^{n-1}) \subseteq \mathrm{R}(T)$, T définit une surjection de $\mathrm{N}(T^n)$ sur $\mathrm{N}(T^{n-1})$. Ce qui implique que $\dim \mathrm{N}(T^n) = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{N}(T^{n-1})$. Ainsi en répétant le même argument plusieurs fois on aura $\dim \mathrm{N}(T^n) = n \dim \mathrm{N}(T)$. ■

Preuve du Théorème 2.1.1. Soit $\tilde{T}$ l'opérateur défini sur $X/\mathrm{N}(T^p)$ par $\tilde{T}(x + \mathrm{N}(T^p)) = Tx + \mathrm{N}(T^p)$, d'après le lemme 2.1.2, $\tilde{T}$ est à la fois semi-Fredholm et semi-régulier. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $0 <| \lambda |< \delta$, $\tilde{T}-\lambda$ est à la fois semi-Fredholm et semi-régulier. Comme pour tout $0 <| \lambda |< \delta$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{N}(\tilde{T}-\lambda)^n = \mathrm{N}((T-\lambda)^n T^p)/\mathrm{N}(T^p) = [\mathrm{N}(T-\lambda)^n \oplus \mathrm{N}(T^p)]/\mathrm{N}(T^p) \qquad (2.1)$$

et

$$\mathrm{R}(\tilde{T}-\lambda) = [\mathrm{R}(T-\lambda)+\mathrm{N}(T^p)]/\mathrm{N}(T^p) = \mathrm{R}(T-\lambda)/\mathrm{N}(T^p).$$

il vient que pour tout $0 <| \lambda |< \delta$ et $n \in \mathbb{N}$, $R(T - \lambda)$ est fermé et contient le sous espace vectoriel de dimension finie $N(T - \lambda)^n$. Ce qui implique que $T - \lambda$ est à la fois semi-régulier et semi-Fredholm. Maintenant, d'après la formule (2.1), le lemme 2.1.3 et la proposition 1.1.7, il vient que pour tout $0 <| \lambda |< \delta$,

$$\begin{aligned} \dim N(T - \lambda)^n &= \dim N(\tilde{T} - \lambda)^n = n \dim N(\tilde{T} - \lambda) \\ &= n \dim N(\tilde{T}) = n \dim N(T^{p+1})/N(T^p). \end{aligned}$$

Enfin, par la continuité de l'indice on obtient,

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} R(T - \lambda)^n &= \operatorname{codim} R(T - \lambda)^n/N(T^p) = \operatorname{codim} R(\tilde{T} - \lambda)^n \\ &= \dim N(\tilde{T} - \lambda)^n - \operatorname{ind}(\tilde{T} - \lambda)^n \\ &= n \dim N(\tilde{T}) - n\operatorname{ind}(\tilde{T} - \lambda) \\ &= n \dim N(\tilde{T}) - n\operatorname{ind}(\tilde{T}) \\ &= n\operatorname{codim} R(\tilde{T}) = n \dim X/[R(T) + N(T^p)]. \end{aligned}$$

Mais comme T^p induit une isomorphisme de $X/[R(T) + N(T^p)]$ sur $R(T^p)/R(T^{p+1})$, on obtient

$$\operatorname{codim} R(T - \lambda)^n = n \dim X/[R(T) + N(T^p)] = n \dim R(T^p)/R(T^{p+1}).$$

ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 2.1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $a_e(T)$ est finie et $R(T^{a_e(T)+1})$ est fermé, alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$, $T - \lambda \in \Phi_+(X)$.*

Comme cas particulier du théorème 2.1.1, la proposition suivante prouve que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $a(T) < \infty$ et $R(T^{a(T)+1})$ est fermé, zéro ne peut pas être un point d'accumulation de son spectre ponctuel.

Proposition 2.1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $d := a(T)$ est finie et $R(T^{d+1})$ est fermé, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$,*
(i) $T - \lambda$ est injectif,
(ii) $\operatorname{codim} R(T - \lambda) = \dim R(T^d)/R(T^{d+1})$.

Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, *l'ensemble résolvant de l'ascente* de T, $\rho_{asc}(T)$, est par définitions l'ensemble des nombres complexes λ tels que $a(T - \lambda)$ est finie et $R(T^{a(T-\lambda)+1})$ est fermé. L'ensemble complémentaire $\sigma_{asc}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho_{asc}(T)$ sera appelé *spectre de l'ascente* de T. Il est claire que $\sigma^e_{asc}(T) \subseteq \sigma_{asc}(T)$, et on a le résultat suivant :

Corollaire 2.1.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors $\sigma^{e}_{asc}(T)$ et $\sigma_{asc}(T)$ sont deux sous-ensembles compacts de $\sigma(T)$*

Notons que le spectre de l'ascente et de l'ascente essentielle peuvent être vides. En effet, il suffit de considérer l'opérateur $T = 0$.

Proposition 2.1.7. *Soient T et S deux opérateurs bornés sur X, alors*

$$\sigma^{e}_{asc}(TS) \setminus \{0\} = \sigma^{e}_{asc}(ST) \setminus \{0\} \text{ et } \sigma_{asc}(TS) \setminus \{0\} = \sigma_{asc}(ST) \setminus \{0\}.$$

Preuve. il suffit de prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\dim \mathrm{N}(TS - \lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(TS - \lambda)^{n} = \dim \mathrm{N}(ST - \lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(ST - \lambda)^{n}$$

et

$$\mathrm{R}(TS - \lambda)^{n} \text{ est fermé} \Leftrightarrow \mathrm{R}(ST - \lambda)^{n} \text{ est fermé.}$$

Considérons l'opérateur $\hat{S}: \mathrm{N}(TS-\lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(TS-\lambda)^{n} \to \mathrm{N}(ST-\lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(ST-\lambda)^{n}$ défini par $\hat{S}(x + \mathrm{N}(TS - \lambda)^{n}) = Sx + \mathrm{N}(ST - \lambda)^{n}$. Il est clair que $\hat{S}$ est injectif et par conséquent,

$$\dim \mathrm{N}(TS - \lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(TS - \lambda)^{n} \leq \dim \mathrm{N}(ST - \lambda)^{n+1}/\mathrm{N}(ST - \lambda)^{n}.$$

L'autre inégalité peut être obtenue de la même manière. Supposons maintenant que $\mathrm{R}(TS-\lambda)^{n}$ est fermé et soit $y \in X$ tel que $y = \lim(ST-\lambda)^{n}x_k$, où $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de X. On a $Ty = \lim(TS-\lambda)^{n}Tx_k$, d'où il existe $w \in X$ tel que $Ty = (TS-\lambda)^{n}w$ et par conséquent,

$$-\lambda y = (ST - \lambda)y - STy = (ST - \lambda)y - (ST - \lambda)^{n}Sw. \tag{2.2}$$

Donc $y \in \mathrm{R}(ST - \lambda)$. Enfin, D'après la formule (2.2) et par induction on obtient que $y \in \mathrm{R}(ST - \lambda)^{n}$. Ce qui termine la preuve. ∎

Proposition 2.1.8. *Soit T un opérateur borné sur X, alors $\sigma_{asc}(T) \setminus \sigma^{e}_{asc}(T)$ est un ensemble ouvert.*

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_{asc}(T) \setminus \sigma^{e}_{asc}(T)$, d'après le théorème 2.1.1, il existe un voisinage ouvert, V, pointé de λ tel que $V \cap \sigma^{e}_{asc}(T) = \emptyset$ et

$$\dim \mathrm{N}(T - \mu)^{n} = n \dim(\mathrm{N}(T - \lambda)^{p+1}/\mathrm{N}(T - \lambda)^{p}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \mu \in V,$$

où $p := p(T - \lambda)$. Mais comme l'ascente de $T - \lambda$ est infinie, alors $\dim N(T - \lambda)^{p+1}/N(T - \lambda)^p$ est non nul pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par conséquent $\{\dim N(T - \mu)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour tout $\mu \in V$ et donc $V \subseteq \sigma_{\mathrm{asc}}(T)$. ∎

Dans [39], M. Mbekhta et V. Müller ont démontré que les spectres de l'ascente et de l'ascente essentielle vérifient le théorème de l'application spectrale.

Théorème 2.1.9. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et f une fonction analytique sur un voisinage ouvert de $\sigma(T)$ non identiquement constante sur aucune composante connexe de son domaine de définition, alors*

$$\sigma_{\mathrm{asc}}(f(T)) = f(\sigma_{\mathrm{asc}}(T)) \ \ et \ \ \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(f(T)) = f(\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)).$$

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, on dénote par $\mathrm{Pol}(T)$ l'ensemble des pôles de la résolvante de T.

Théorème 2.1.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T) = \rho_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T) = \mathrm{Pol}(T).$$

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sigma_{\mathrm{asc}}(T) = \emptyset$,

(ii) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) = \emptyset$,

(iii) $\partial\sigma(T) \subseteq \rho_{\mathrm{asc}}(T)$,

(iv) $\partial\sigma(T) \subseteq \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$,

(v) *T est algébrique.*

Preuve. Comme $\mathrm{Pol}(T) \subseteq \rho_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T) \subseteq \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T)$, il suffit de prouver que $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T) \subseteq \mathrm{Pol}(T)$. Soit $\lambda \in \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cap \partial\sigma(T)$, alors d'après le théorème 2.1.1, il existe un voisinage ouvert U pointé de λ tel que pour tout $\mu \in U$, $\dim N(T - \mu) = \dim N(T - \lambda)^{p+1}/N(T - \lambda)^p$ et $\operatorname{codim} R(T - \mu) = \dim R(T - \lambda)^p/R(T - \lambda)^{p+1}$, où $p := p(T - \lambda)$. De plus, comme $\lambda \in \partial\sigma(T)$, alors $U \setminus \sigma(T)$ est non vide. Donc

$$\dim N(T - \lambda)^{p+1}/N(T - \lambda)^p = \dim R(T - \lambda)^p/R(T - \lambda)^{p+1} = 0,$$

et par conséquent l'ascente et la descente de $T - \lambda$ sont finies, d'où λ est un pôle de la résolvante de T.
Il est claire que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \sigma(T)$ et par conséquent on a (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$

(iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Supposons que $\partial\sigma(T) \subseteq \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$, alors d'après la première assertion, $\partial\sigma(T)$ est l'ensemble des pôles de T. Par conséquent $\sigma(T) = \partial\sigma(T)$ est un ensemble fini de nombres complexes $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ tel que $d_i = \mathrm{d}(T-\lambda_i) = \mathrm{a}(T-\lambda_i)$ est finie pour tout $1 \leq i \leq n$. Considérons le polynôme complexe $f(\lambda) = \Pi_{i=1}^n(\lambda - \lambda_i)^{d_i}$, alors $f(T) = 0$. En effet, si on dénote par T_o la restriction de T au sous-espace fermé $M := \mathrm{R}(f(T)) = \cap_{i=1}^n \mathrm{R}(T-\lambda_i)^{d_i}$, il résulte directement que $\sigma(T_o) \subseteq \sigma(T)$. De plus, pour chaque $1 \leq i \leq n$,

$$\mathrm{N}(T_o - \lambda_i) = \mathrm{N}(T-\lambda_i) \cap M \subseteq \mathrm{N}(T-\lambda_i)^{d_i} \cap \mathrm{R}(T-\lambda_i)^{d_i} = \{0\},$$

et comme $T - \lambda_i$ est d'ascente finie, on a aussi

$$\begin{aligned}(T_o - \lambda_i)M &= (T-\lambda_i)\Pi_{j=1}^n (T-\lambda_j)^{d_j} X = [\Pi_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (T-\lambda_j)^{d_j}](T-\lambda_i)^{d_i+1} X \\ &= [\Pi_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (T-\lambda_j)^{d_j}](T-\lambda_i)^{d_i} X = \Pi_{j=1}^n (T-\lambda_j)^{d_j} X \\ &= M,\end{aligned}$$

ce qui implique que $T_o - \lambda_i$ est inversible, d'où $\sigma(T_o)$ est vide. Ainsi $M = \mathrm{R}(f(T)) = \{0\}$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Supposons que T est algébrique et soient f le polynôme minimal tel que $f(T) = 0$ et $\mu \in \sigma(T)$, alors $f(\lambda) = (\lambda - \mu)^d g(\lambda)$, où $d \in \mathbb{N}$ et g un polynôme complexe tel que $g(\mu) \neq 0$. D'où

$$X = \mathrm{N}(g(T)) \oplus \mathrm{N}(T-\mu)^d$$

et

$$\mathrm{R}(T-\mu)^d \cap \mathrm{R}(g(T)) = \{0\}.$$

De plus, comme $g(\mu)$ est non nul, il est simple à verifier que $\mathrm{N}(g(T)) \subseteq \mathrm{R}(T-\mu)^d$ et $\mathrm{N}(T-\mu)^d \subseteq \mathrm{R}(g(T))$. Par conséquent $X = \mathrm{R}(T-\mu)^d \oplus \mathrm{N}(T-\mu)^d$; d'où le résultat désiré. ∎

Corollaire 2.1.11. *Soit T un opérateur borné sur X, alors*

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cup \mathrm{Pol}(T).$$

Théorème 2.1.12. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et Ω une composante connexe de $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$, alors*

$$\Omega \subset \sigma(T) \quad ou \quad \Omega \setminus E_\Omega \subseteq \rho(T),$$

où $E_\Omega := \Omega \cap \mathrm{Pol}(T)$.

Preuve. Soit $\Omega_r = \{\lambda \in \Omega\colon T - \lambda$ est à la fois semi-régulier et semi-Fredholm$\}$. D'après le théorème 2.1.1, $\Omega_o := \Omega \setminus \Omega_r$ est au plus dénombrable et donc Ω_r est connexe. Supposons que $\Omega \cap \rho(T)$ est non vide, alors il en est de même pour $\Omega_r \cap \rho(T)$. De plus, d'après la continuité de l'indice et la proposition 1.1.7, $\dim \mathrm{N}(T-\lambda)$ et $\mathrm{codim}\, \mathrm{R}(T-\lambda)$ sont deux fonctions constantes sur Ω_r, ce qui implique que $\Omega_r \subseteq \rho(T)$. Par conséquent Ω_o est constitué par des points isolés de $\sigma(T)$, d'où

$$\Omega_o \subseteq \partial\sigma(T) \cap \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda \text{ est un pôle de la résolvante de } T\}.$$

Ainsi $E_\Omega = \Omega_o$ et $\Omega \setminus E_\Omega \subseteq \rho(T)$. ■

Corollaire 2.1.13. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$\sigma(T)$ est au plus dénombrable,*
(ii) *$\sigma_{\mathrm{asc}}(T)$ est au plus dénombrable,*
(iii) *$\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$ est au plus dénombrable.*
Dans ce cas, on a $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) = \sigma_{\mathrm{asc}}(T)$ et $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{asc}}(T) \cup \mathrm{Pol}(T)$.

Preuve. Comme $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \sigma(T)$, alors les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$ est au plus dénombrable, alors $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$ est connexe et puisque $\rho(T) \subseteq \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$, le théorème précèdent implique que $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \setminus \mathrm{Pol}(T) \subseteq \rho(T)$. Ainsi $\sigma(T) = \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \cup \mathrm{Pol}(T)$ est au plus dénombrable. De plus, d'après la proposition 2.1.8, $\sigma_{\mathrm{asc}}(T) \setminus \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$ est un ouvert au plus dénombrable, donc $\sigma_{\mathrm{asc}}(T) = \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T)$. Ce qui termine la preuve. ■

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit *méromorphique* si tout nombre complexe non nul λ du spectre de T est un pôle de la résolvante de $T - \lambda$. Évidement, tout opérateur compact et plus généralement de Riesz est méromorphique.

Corollaire 2.1.14. *Soit T un opérateur borné sur X, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *T est méromorphique,*
(ii) $\sigma_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \{0\}$,
(iii) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) \subseteq \{0\}$.

Pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, on dénote par L_T l'opérateur correspondant de multiplication à gauche sur $\mathcal{L}(X)$ donné par $L_T(S) := TS$ pour tout $S \in \mathcal{L}(X)$. Notons que

$$\mathrm{R}(L_T) \text{ est fermé } \Rightarrow \mathrm{R}(T) \text{ est fermé }. \tag{2.3}$$

En effet, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à éléments dans X tel que $\lim Tx_n = y$. Choisissons $z \in X$ et $f \in X^*$ tel que $f(z) = 1$. Comme $\lim T(f \otimes x_n) = \lim(f \otimes Tx_n) = f \otimes y$ et $\mathrm{R}(L_T)$ est fermé, il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $f \otimes y = TS$. Donc $y = f \otimes y(z) = TS(z)$.

De plus, dans le cas d'un espace de Hilbert, l'implication (2.3) devient une équivalence, voir [16].

Proposition 2.1.15. *Soit T un opérateur borné sur X, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathrm{a}(T)$ *est finie,*
(ii) $\mathrm{a}(L_T)$ *est finie,*
(iii) $\mathrm{a_e}(L_T)$ *est finie.*
De plus, si X est un espace de Hilbert, alors $\sigma_{\mathrm{asc}}(L_T) = \sigma_{\mathrm{asc}}(T)$.

Preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que l'ascente de T est infinie et soient n un entier positif arbitraire et $x \in \mathrm{N}(T^{n+1}) \setminus \mathrm{N}(T^n)$. Considérons une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires continues linéairements indépendantes, alors $(f_k \otimes x) \subsetneq \mathrm{N}(L_{T^{n+1}}) \setminus \mathrm{N}(L_{T^n})$. Donc l'ascente essentielle de L_T est infinie ; ce qui termine la preuve. ∎

Théorème 2.1.16. *Soit X un espace de Banach, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *X est de dimension finie ;*
(ii) $\sigma_{\mathrm{asc}}(T) = \emptyset$ *pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$,*
(iii) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(T) = \emptyset$ *pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$,*
(iv) *L'ascente de T est finie pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$,*
(v) *L'ascente essentielle de T est finie pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$,*
(vi) *L'ascente de L_T est finie pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$,*
(vii) *L'ascente essentielle de L_T est finie pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$.*

Preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) Sont claires.
Les équivalences (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) sont des conséquences immédiates du Théorème 2.1.10 et de la Proposition 2.1.15.
(v) $\Rightarrow$ (i). Supposons que X est de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

infinie de vecteurs linéairements indépendants et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de formes linéaires continues tel que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. Considérons l'opérateur borné $T = \sum_{p\in\mathbb{N}} \lambda_p f_{2p} \otimes e_p$, où $\{\lambda_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes non nuls tel que $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mid \lambda_p \|\| f_{2p} \|\|\| e_p \|$ est finie. Il est simple à vérifier que la suite $\{e_{2^{k+1}p+2^k}\}_{p\in\mathbb{N}}$ est constituée de vecteurs linéairements indépendants de $\mathrm{N}(T^{k+1}) \setminus \mathrm{N}(T^k)$. Donc l'ascente essentielle de T est infinie. D'où le résultat désiré. ∎

Dans [7], B. A. Barnes a montré le Théorème suivant :

Théorème 2.1.17. *Soient $T, S \in \mathcal{L}(X)$, si $\mathrm{R}(S) \subseteq \mathrm{R}(T)$ et s'il existe un sous-espace vectoriel fermé W de X tel que $X = \mathrm{N}(T) \oplus W$, alors $S = TR$ pour un certain $R \in \mathcal{L}(X)$.*

Comme conséquence immédiate du théorème 2.1.16 et du théorème 2.1.17, on annonce le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.18. *Soit T un opérateur borné sur X, alors $\mathrm{a}(T)$ et $\mathrm{d}(T)$ sont finies si et seulement si $\mathrm{a}(L_T)$ et $\mathrm{d}(L_T)$ sont finies.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $a := \mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T)$ est finie, alors d'après la Proposition 2.1.15, $\mathrm{a}(L_T)$ est finie. De plus, comme $\mathrm{R}(T^a) = \mathrm{R}(T^{a+1})$ et $X = \mathrm{R}(T^{a+1}) \oplus \mathrm{N}(T^{a+1})$, le théorème 2.1.17 assure l'existence d'un opérateur $U \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T^a = T^{a+1}U$. Donc $\mathrm{d}(L_T)$ est finie.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Si $a := \mathrm{d}(L_T)$ est finie, alors il existe un opérateur $U \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T^a = T^{a+1}U$. D'où $\mathrm{R}(T^a) \subseteq \mathrm{R}(T^{a+1})$ et par conséquent la descente de T est finie. ∎

2.2 la notion d'ascente essentielle dans une algèbre de Banach

Tout au long de cette section, $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de Banach Complexe avec unité. À un élément $x \in \mathcal{A}$, on associe l'opérateur de multiplication à gauche L_x donné par $L_x(y) := xy$ pour tout $y \in \mathcal{A}$. L'ascente et l'ascente essentielle d'un élément $x \in \mathcal{A}$ sont définies respectivement par $\mathrm{a}(x) := \mathrm{a}(L_x)$ et $\mathrm{a_e}(x) := \mathrm{a_e}(L_x)$.

Notons d'après la Proposition 2.1.15, que l'ascente d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ et l'ascente de T en tant qu' un élément de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(X)$ sont deux définitions équivalentes. Par contre il n' existe aucune relation qui lie l'ascente essentielle de T en tant qu' un opérateur et l'ascente essentielle de T en tant qu'un élément de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(X)$. En effet ; D'après la proposition 2.1.15, il suffit de considérer un opérateur T d'ascente essentielle finie et d'ascente infinie.

On appelle *radical de* $\mathcal{A}$, $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, l'intersection de tous les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$. On rappelle qu'un élément $x \in \mathrm{Rad}(A)$ si et seulement si $1-xz$ est inversible pour tout $z \in \mathcal{A}$. Dans le cas où $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est dite *semi-simple*. Il est bien connu que l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ est semi-simple , voir [5].

Une algèbre avec unité, $\mathcal{A}$, est dite *algébrique* si pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe un polynôme non nul, $\mathcal{P}$, tel que $\mathcal{P}(a) = 0$.

Dans [5], B. Aupetit établit le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe contenant un ouvert non vide U tel que pour tout x de U, $\sigma(x)$ est fini, alors $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}\mathcal{A}$ est de dimension finie.*

Théorème 2.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe avec unité, alors les assertions suivante sont équivalentes :*

(i) $\dim(\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A}))$ *est finie et* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})$ *où* $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ *désigne l'ensemble des éléments nilpotents de* $\mathcal{A}$,

(ii) $\sigma_{\mathrm{asc}}(x) = \emptyset$ *pout tout* $x \in \mathcal{A}$,

(iii) $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(x) = \emptyset$ *pout tout* $x \in \mathcal{A}$,

(iv) $\mathcal{A}$ *est algébrique.*

Preuve. L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) est une conséquence immédiate du théorème 2.1.10.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $x \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ est une algèbre de dimension finie, alors il existe un polynôme complexe Q tel que $Q(x + \mathrm{Rad}(\mathcal{A})) = 0$. Ainsi $Q(x)$ appartient à $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ et par conséquent $Q(x)^n = 0$ pour un certain entier positif n. Ce qui implique que x est algébrique.

L' implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est claire.

(iii)$\Rightarrow$ (i). Supposons que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{asc}}(x) = \emptyset$ pout tout $x \in \mathcal{A}$, alors le théorème 2.1.10 implique que x est algébrique pour tout $x \in \mathcal{A}$. Par conséquent d'après le théorème2.2.1 , $\dim \mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ est finie. De plus, si $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, alors x est quasinilpotent et algébrique et donc nilpotent. ■

2.3 Spectres de l'ascente essentielle et perturbations

Dans [26, Theorem 2.2], M. Kaashoek et D. Lay établissent que si F est un opérateur borné sur X pour lequel il existe un entier positif n tel que F^n est de rang fini, alors

$$\sigma_{\text{asc}}(T+F) = \sigma_{\text{asc}}(T) \text{ pour tout opérateur borné } T \in \mathcal{L}(X) \text{ commutant avec } F.$$

Ils ont également conjecturé qu'un tel opérateur F peut être caractérisé par cette propriété.

L'objectif principal de cette section est de répondre à cette question et de généraliser ce résultat à l'ascente essentielle.

Proposition 2.3.1. *Soit $F \in \mathcal{L}(X)$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F^n est de rang fini et $T \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec F, alors*

$$\mathrm{a_e}(T) \text{ est finie } \Leftrightarrow \mathrm{a_e}(T+F) \text{ est finie.}$$

Preuve. Il est claire qu'il suffit de prouver une seule implication. Supposons que $d := \mathrm{a_e}(T)$ est finie et notons respectivement par T_o et F_o la restriction de T et F à $X_o := \mathrm{N}(T+F)^k$, où $k \geq n+d$. Comme $T_o + F_o$ est nilpotent, alors il existe $S \in \mathcal{L}(X_o)$ tel que $T_o^k = SF_o = F_oS$ et par conséquent T_o^{kn} est de rang fini. Ainsi $\dim \mathrm{N}(T+F)^k/[\mathrm{N}(T^{kn}) \cap \mathrm{N}(T+F)^k]$ est finie. De plus, comme

$$\dim \mathrm{N}(T^{kn}) \cap \mathrm{N}(T+F)^k/[\mathrm{N}(T^d) \cap \mathrm{N}(T+F)^k] \leq \dim \mathrm{N}(T^{kn})/\mathrm{N}(T^d) < \infty$$

on obtient que $\dim \mathrm{N}(T+F)^k/[\mathrm{N}(T^d) \cap \mathrm{N}(T+F)^k] < \infty$.
D'autre part, on a

$$\mathrm{N}(F^n) \cap \mathrm{N}(T^d) \subseteq \mathrm{N}(T+F)^k \cap \mathrm{N}(T^d) \subseteq \mathrm{N}(T^d),$$

et comme F^n est de rang fini, alors $\dim \mathrm{N}(T^d)/[\mathrm{N}(F^n) \cap \mathrm{N}(T^d)]$ est fini. Ce qui implique que pour tout $k \geq d+n$,

$$\dim \mathrm{N}(T+F)^k/[\mathrm{N}(T^d) \cap \mathrm{N}(F)^n] < \infty,$$

Ce qui prouve que $\mathrm{a_e}(T+F) \leq n+d$. ∎

Remarque 2.3.2. *Dans l'exemple ci-dessous on montre que le résultat précédent n'est pas vrai en général si l'opérateur F ne commute pas avec T.*

Exemple. Considérons les opérateurs T et F définis sur l'espace de Hilbert muni de la base orthonormale $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ par :

$$Te_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1, \\ e_{i,j-1} & \text{si j impair et } j \geq 2, \\ 0 & \text{si j pair.} \end{cases}$$

et

$$Fe_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si j impair}, \\ e_{i,j-1} & \text{si j pair.} \end{cases}$$

Il est évident que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $F^2 = 0$, mais l'opérateur $T + F$ est d'ascente essentielle infinie.

Comme conséquence immédiate de la proposition 2.3.1, on annonce les Corollaires suivants.

Corollaire 2.3.3. *Soit T un opérateur borné sur X et $F \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur de rang fini commutant avec T, alors $\mathrm{a_e}(T)$ est finie si et seulement si $\mathrm{a_e}(T + F)$ est finie.*

Corollaire 2.3.4. *Soit T un opérateur borné sur X et $N \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur nilpotent commutant avec T, alors $\mathrm{a_e}(T)$ est finie si et seulement si $\mathrm{a_e}(T + N)$ est finie.*

Remarque 2.3.5. *L'exemple ci-dessous nous montre que le résultat de la proposition 2.3.1 ne peut pas être généralisé aux opérateurs compacts.*

Exemple. Considérons l'opérateur $T = 0$ défini sur l'espace de Hilbert muni de la base orthonormale $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$, on a $\mathrm{a_e}(T) = 0$. Cependant, si on considère l'opérateur compact K défini par :

$$Ke_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1, \\ \frac{1}{ij}e_{i,j-1} & \text{pour tout } j \geq 2, \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{N}(K^n)$ est le sous espace engendré par $\{e_{i,j} : 1 \leq i \text{ et } 1 \leq j \leq n\}$ et par conséquent $\mathrm{a_e}(K)$ est infinie.

Théorème 2.3.6. *Soit F un opérateur borné sur X, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\sigma^{e}_{asc}(T + F) = \sigma^{e}_{asc}(T)$ *pour tout* $T \in \mathcal{L}(X)$ *commutant avec* F,

(ii) $\sigma_{asc}(T + F) = \sigma_{asc}(T)$ *pour tout* $T \in \mathcal{L}(X)$ *commutant avec* F,

(iii) *il existe un entier positif* n *tel que* F^n *est de rang fini.*

La preuve de ce théorème est basée sur le Lemme suivant :

Lemme 2.3.7. *Soient* $T \in \mathcal{L}(X)$ *et F un opérateur borné défini sur X commutant avec T pour lequel il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* F^n *est de rang fini, alors*

(i) *Si L'ascente essentielle de T est finie, alors* $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ *est fermé si et seulement si* $\mathrm{R}(T + F)^{\mathrm{a_e}(T+F)+1}$ *est fermé.*

(ii) *Si l'ascente de T est finie, alors* $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a}(T)+1})$ *est fermé si et seulement si* $\mathrm{R}(T + F)^{\mathrm{a}(T+F)+1}$ *est fermé.*

Preuve. (i). Supposons que $d := \mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{d+1})$ est fermé, alors d'après la preuve de la proposition 2.3.1, $\mathrm{a_e}(T + F) \leq n + d$. Soit k un entier naturel vérifiant $k \geq n + d + 1 \geq \mathrm{a_e}(T + F) + 1$, il est clair d'après le lemme 1.2.3 qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{R}(T + F)^k$ est fermé. Considérons les opérateurs $\tilde{T}$ et $\tilde{F}$ induit respectivement par T et F sur $X/\mathrm{N}(T^d)$, il vient que $\tilde{T}$ est semi-Fredholm, et comme F est un opérateur de Riesz commutant avec T, alors $\tilde{F}$ est un opérateur de Riesz commutant avec $\tilde{T}$. Par conséquent $\tilde{T}+\tilde{F}$ est semi-Fredholm. Ainsi $\mathrm{R}(T+F)^k+\mathrm{N}(T^d)$ est fermé. De plus, comme on a $\mathrm{N}(F^n) \cap \mathrm{N}(T^d) \subseteq \mathrm{N}(T + F)^k \cap \mathrm{N}(T^d) \subseteq \mathrm{N}(T^d)$ et F^n est de rang fini, on obtient que $\dim \mathrm{N}(T^d)/[\mathrm{N}(T + F)^k \cap \mathrm{N}(T^d)]$ est fini, d'où

$$\dim[\mathrm{R}(T + F)^k \cap \mathrm{N}(T^d)]/[\mathrm{R}(T + F)^k \cap \mathrm{N}(T + F)^k \cap \mathrm{N}(T^d)] < \infty. \tag{2.4}$$

De plus, comme l'ascente essentielle de $T + F$ est finie, alors d'après la formule (1.3), $\dim \mathrm{R}(T+F)^k \cap \mathrm{N}(T+F)^k$ est finie. Ce qui implique que $\dim \mathrm{R}(T+F)^k \cap \mathrm{N}(T^d)$ est finie. Finalement, d'après 1.2.2, $\mathrm{R}(T + F)^k$ est fermé.

(ii) Supposons que $\mathrm{a}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a}(T)+1})$ est fermé, alors $\mathrm{a}(T + F)$ est finie. De plus, comme $\mathrm{a_e}(T) \leq \mathrm{a}(T)$, alors d'après le lemme 1.2.3 et (i), on obtient que $\mathrm{R}(T + F)^{\mathrm{a}(T+F)+1}$ est fermé. ∎

Dans [11], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri ont établie que le commutant de tout opérateur défini sur un espace de Banach de dimension infinie contient un opérateur non algébrique.

Preuve du théorème 2.3.6. Les implications (iii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (ii) sont des conséquences immediates de la proposition 2.3.1 et le lemme 2.3.7.
Pour démontrer (i) $\Rightarrow$ (iii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii), il suffit de supposer (i) ou (ii). Notons par Γ le spectre de l'ascente ou de l'ascente essentielle. En prenant $T \equiv 0$, on obtient d'après la proposition 2.1.10 que F est algébrique. Notons par $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les éléments du spectre de F, il vient que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$, où les sous espaces X_i sont invariant par F et la restriction de $F - \lambda_i$ à X_i est un opérateur nilpotent pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors pour tout $\lambda_i \neq 0$, $\dim X_i$ est finie. En effet, Supposons le contraire. Soit $\lambda_i \neq 0$ tel que $\dim X_i$ est infinie. Alors il existe un opérateur non algébrique S_i défini sur X_i commutant avec la restriction F_i de F à ce sous-espace. Notons par S l'extension de S_i à X donnée par $S \equiv 0$ sur chaque X_j tel que $j \neq i$, il est évident que $SF = FS$ et par consequent $\Gamma(S + F) = \Gamma(S)$ par hypothèse. D' autre part, comme pour tout $1 \leq i \leq n$, $F_i - \lambda_i$ est nilpotent et $\Gamma(S) = \Gamma(S_i)$ et $\Gamma(S + F) = \Gamma(S_i + F_i)$, il résulte que $\Gamma(S_i) = \Gamma(S_i + F_i) = \Gamma(S_i + \lambda_i)$. Prenons un nombre complexe arbitraire $\alpha \in \Gamma(S) \neq \emptyset$, il vient que $k\lambda_i + \alpha \in \Gamma(S)$ pour tout entier naturel k, ce qui implique que $\lambda_i = 0$ puisque $\Gamma(S)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}$; contradiction. Ainsi pour tout λ_i non nul X_i est de dimension finie, et par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F^n est de rang fini. ■

2.4 Partie quasi-nilpotent, coeur analytique et la SVEP

Comme le montre les articles de M.Mbekhta, [32] et [36], le coeur analytique et la partie quasi-nilpotente d'un opérateur jouent un rôle fondamentale dans la théorie spectrale locale et la théorie de Fredholm d'un opérateur défini sur un espace de Banach complexe. Cette partie est consacrée à l'étude de la propriété de l'extension unique d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$. Nous rapporterons cette propriété aux opérateurs d'ascente et d'ascente essentielle finie, aussi bien qu'aux coeur analytique et la partie quasi-nilpotente de T.

On commence par généraliser des résultats démontré par M. Mbekhta et A. Ouahab dans [35], [37] et [38] sur les opérateurs semi-réguliers aux opérateurs d'ascente essentielle finie.

Proposition 2.4.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur d'ascente essentielle finie, alors* $\mathrm{Co}(T) = \mathcal{R}^{\infty}(T)$.

Preuve. Il est clair que $Co(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T)$, donc il suffit de prouver que $\mathcal{R}^\infty(T) \subseteq Co(T)$. Soit $u \in \mathcal{R}^\infty(T) \subseteq \mathrm{R}(T^{p+1})$, où $p := p(T)$, donc il existe $v \in X$ tel que $u = T^{p+1}v$. Posons $w = T^p v$, alors $u = Tw$. D'autre part, comme pour tout $n \geq p$, $u \in \mathrm{R}(T^{n+1})$, il existe $v_n \in X$ tel que $u = T^{n+1}v_n$ et par conséquent $T^n v_n - T^p v = T^n v_n - w \in \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{R}(T^p)$. Ce qui implique d'après le théorème 1.2.5, que $w \in \mathcal{R}^\infty(T)$. Ainsi $\mathcal{R}^\infty(T) \subseteq T(\mathcal{R}^\infty(T))$. Ce qui termine la preuve. ∎

Proposition 2.4.2. *Soit T un opérateur borné sur X tel que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ est fermé, alors*
(i) $\overline{\mathrm{H_o}(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}$,
(ii) $\mathrm{H_o}(T)$ *est fermé si et seulement si* $\mathrm{H_o}(T) = \mathrm{N}(T^p)$,
(iii) $\overline{\mathrm{H_o}(T)} = T(\overline{\mathrm{H_o}(T)}) + \mathrm{N}(T^p)$.
(iv) $\mathrm{K}(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$ *est fermé*,
(v) $\mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathcal{R}^\infty(T) + \mathrm{N}(T^p)$, *où* $p := p(T)$,

Preuve. Soit $\tilde{T}$ l'opérateur semi-régulier défini sur $X/\mathrm{N}(T^p)$ par $\tilde{T}(x + \mathrm{N}(T^p)) = Tx + \mathrm{N}(T^p)$ et π_p la surjection canonique de X à $X/\mathrm{N}(T^p)$.
(i) D'abord, on démontre que $\mathrm{H_o}(\tilde{T}) = \pi_p(\mathrm{H_o}(T))$. Il est clair que $\pi_p(\mathrm{H_o}(T)) \subseteq \mathrm{H_o}(\tilde{T})$. Pour l'autre inclusion, soit $\pi_p(x)$ tel que $\lim \|\tilde{T}^n(\pi_p(x))\|^{\frac{1}{n}} = 0$, alors il existe une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans $\mathrm{N}(T^p)$ tel que $\lim \|T^n x + u_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Donc

$$\|T^{p+n}x\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^p\|^{\frac{1}{n}} \|T^n x + u_n\|^{\frac{1}{n}},$$

ainsi $T^p x \in \mathrm{H_o}(T)$. D'où $x \in \mathrm{H_o}(T)$.
De plus, comme $\tilde{T}$ est semi-régulier, alors on obtient que

$$\overline{\mathrm{H_o}(T)}/\mathrm{N}(T^p) = \overline{\mathrm{H_o}(\tilde{T})} = \overline{\mathcal{N}^\infty(\tilde{T})} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}/\mathrm{N}(T^p).$$

Et par conséquent $\overline{\mathrm{H_o}(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}$.
(ii) D'après la preuve de (i), il vient que $\mathrm{H_o}(T)$ est fermé si et seulement si $\mathrm{H_o}(\tilde{T})$ est fermé, et comme $\tilde{T}$ est semi-régulier, alors d'après 1.1.9, $\mathrm{H_o}(\tilde{T}) = \mathrm{H_o}(T)/\mathrm{N}(T^p) = \{0\}$, i.e $\mathrm{H_o}(T) = \mathrm{N}(T^p)$.
(iii) Puisque $\tilde{T}$ est semi-régulier, [38, Lemme 1.2] implique que $\tilde{T}(\overline{\mathrm{H_o}(\tilde{T})}) = \overline{\mathrm{H_o}(\tilde{T})}$. Alors

$$\frac{T(\overline{\mathrm{H_o}(T)}) + \mathrm{N}(T^p)}{\mathrm{N}(T^p)} = \frac{\overline{\mathrm{H_o}(T)}}{\mathrm{N}(T^p)},$$

(iv) D'après la Proposition 2.4.1, on a $\mathrm{Co}(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$. De plus, comme $R(T^n)$ est fermé pour tout $n \geq a_e(T)+1$, alors $\mathrm{Co}(T)$ est fermé. Ainsi $K(T) = \mathrm{Co}(T) = \mathcal{R}^\infty(T)$.
(v) Puisque $\tilde{T}$ est semi-régulier, on a $\pi_p(\mathcal{N}^\infty(T)) = \mathcal{N}^\infty(\tilde{T}) \subseteq \mathcal{R}^\infty(\tilde{T}) = K(\tilde{T})$. Pour finir la preuve, il suffit de verifier que $K(\tilde{T}) = \pi_p(K(T))$. Soit $\pi_p(x) \in K(\tilde{T})$, alors il existe une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans X tel que $\pi_p(x) = \tilde{T}^n\pi_p(y_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $T^px = T^{n+p}y_n$. D'où $T^px \in R(T^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $T^px \in K(T)$ et par conséquent $T^px = T^py$ pour certain $y \in K(T)$. Ce qui implique que $x \in K(T) + N(T^p)$. Donc $K(\tilde{T}) \subseteq \pi_p(K(T))$. Réciproquement, on a

$$\begin{aligned}\pi_p(K(T)) &= K(T)+N(T^p)/N(T^p) = [\mathcal{R}^\infty(T)+N(T^p)]/N(T^p)\\ &\subseteq \cap_n[R(T^n)+N(T^p)]/N(T^p) = K(\tilde{T}).\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.4.3. *Soit T un opérateur borné sur X tel que* $a_e(T)$ *est finie et* $R(T^{a_e(T)+1})$ *est fermé, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $0 <|\lambda|< \delta$ *et* $p := p(T)$,
(i) $\overline{H_o(T-\lambda)+N(T^p)} = \overline{H_o(T)}$,
(ii) $K(T-\lambda) = K(T)+N(T^p)$.

Preuve. Soit $\tilde{T}$ et π_p comme dans la preuve de la proposition précédente, alors on a $H_o(\tilde{T}) = H_o(T)/N(T^p)$ et $K(\tilde{T}) = [K(T)+N(T^p)]/N(T^p)$. Soit $\delta > 0$ tel que $\tilde{T}-\lambda$ est semi-régulier pour tout $|\lambda|< \delta$, il vient d'après la proposition1.1.10 que $\overline{H_o(\tilde{T}-\lambda)} = \overline{H_o(\tilde{T})}$ et $K(\tilde{T}-\lambda) = K(\tilde{T})$. Ainsi il suffit de démontrer que pour tout $0 <|\lambda|< \delta$,

$$\overline{H_o(\tilde{T}-\lambda)} = \overline{[H_o(T-\lambda)+N(T^p)]}/N(T^p) \text{ and } K(\tilde{T}-\lambda) = K(T-\lambda)/N(T^p) \quad . (2.5)$$

Il est évident que , $\overline{\pi_p(H_o(T-\lambda))} \subseteq \overline{H_o(\tilde{T}-\lambda)}$. Pour l'autre inclusion on a

$$\begin{aligned}\overline{H_o(\tilde{T}-\lambda)} &= \overline{\cup_n N(\tilde{T}-\lambda)^n} = \overline{[\cup_n N((T-\lambda)^nT^p)]}/N(T^p)\\ &= \overline{\cup_n[N(T-\lambda)^n \oplus N(T^p)]}/N(T^p) = \overline{[\cup_n N(T-\lambda)^n]\oplus N(T^p)}/N(T^p)\\ &\subseteq \overline{H_o(T-\lambda)+N(T^p)}/N(T^p) = \overline{\pi_p(H_o(T-\lambda))}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie de (2.5), on a $N(T^p) \subseteq K(T-\lambda)$. Donc

$$\begin{aligned}K(\tilde{T}-\lambda) &= \cap_n R(\tilde{T}-\lambda)^n = [\cap_n R(T-\lambda)^n]/N(T^p)\\ &= K(T-\lambda)/N(T^p).\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Avant de commencer cette partie, on aura besoin d'introduire quelques notions de la théorie spectrale locale. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ satisfait la *propriété de l'extension unique*, ou SVEP en abrégé, en λ si pour tout ouvert U de λ, $f = 0$ est l'unique solution analytique sur U de l'équation $(T - \lambda)f(\lambda) = 0$. Il est bien connu d'après P. Aiena, Colasante, Maria Luisa et M. González,[2], qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ d'ascente finie satisfait la SVEP en zéro.

Dans [2], P. Aiena, Colasante, Maria Luisa et M. González ont montré les implications suivantes :

$\mathrm{H}_0(T - \lambda)$ est fermé $\Rightarrow \mathrm{H}_0(T - \lambda) \cap \mathrm{K}(T - \lambda) = \{0\} \Rightarrow T$ satisfait la SVEP en λ.

Et

$X = \mathrm{H}_0(T - \lambda) + \mathrm{K}(T - \lambda) \Rightarrow T^*$ satisfait la SVEP en λ.

Dans le cas où T est un opérateur semi-fredholm les implications suivantes deviennent des équivalences. En particulier, un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ surjectif qui vérifie la SVEP en zéro est inversible.

Proposition 2.4.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ est fermé, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *T satisfait la SVEP en 0,*
(ii) *0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$,*
(iii) *T est d'ascente finie,*
(iv) *$\mathrm{H}_0(T)$ est fermé,*
(v) *$\mathrm{H}_0(T) \cap \mathrm{K}(T) = \{0\}$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Notons par T_0 la restriction de T au sous-espace fermé $\mathrm{K}(T)$. Comme T satisfait la SVEP, alors il en est de même pour T_0. Mais comme T_0 est surjectif, alors T_0 est inversible. Par conséquent pour tout $\lambda \neq 0$ suffisamment petit, on a

$$\mathrm{N}(T - \lambda) = \mathrm{N}(T - \lambda) \cap \mathrm{K}(T) = \mathrm{N}(T_0 - \lambda) = \{0\}.$$

D'autre part, pour tout nombre complexe λ non nul et suffisamment petit, $T - \lambda$ est semi-Fredholm, d'où $\mathrm{R}(T - \lambda)$ est fermé. Ce qui montre que zéro n'est pas un point d'accumulation de $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.
L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est une conséquence du théorème 2.1.1 (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons que T est d'ascente finie d, alors $\mathcal{N}^{\infty}(T) = \mathrm{N}(T^d)$. Donc d'après la Proposition 2.4.2, $\mathrm{H}_0(T) = \mathrm{N}(T^d)$ est fermé.
Les implications (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) sont claires. ■

Remarque 2.4.5. *Notons d'après l'exemple ci-dessous que la proposition 2:4.4 n'est pas en général vraie si on ne suppose pas que* $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ *est fermé.*

Exemple. Considérons l'opérateur T défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots)$, il est claire que T est un opérateur quasi-nilpotent et $\dim(\mathrm{N}(T^k)) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi T a la SVEP en zéro et $\mathrm{a_e}(T)$ est finie mais $\mathrm{a}(T)$ est infinie.

Proposition 2.4.6. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $\mathrm{a_e}(T)$ *est finie et* $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ *est fermé, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) T^* *a la SVEP en 0,*
(ii) $X = \mathrm{K}(T) + \mathrm{N}(T^p)$, *où* $p := p(T)$,
(iii) T *est de descente finie,*
(iv) 0 *n'est pas un point d'accumulation de* $\sigma_{\mathrm{su}}(T)$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Considérons la restriction S de T^* au sous-espace fermé $\mathrm{R}(T^{*p})$. Puisque

$$\dim \mathrm{R}(T^{*p})/\mathrm{R}(T^{*(p+1)}) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{R}(T^*) + \mathrm{N}(T^{*p})) = \dim \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{R}(T^p) < \infty,$$

alors S est semi-Fredholm, d'où

$$\mathrm{K}(S) \;=\; \mathcal{R}^\infty(S) = \mathcal{R}^\infty(T^*) \subseteq \mathrm{K}(T^*).$$

Donc $\mathrm{K}(T^*) = \mathcal{R}^\infty(T^*)$ est fermé. De plus, la restriction de T^* à $\mathrm{K}(T^*)$ est surjective et satisfait la SVEP, alors elle est injective. Par conséquent pour tout nombre complexe λ non nul suffisamment petit, $\mathrm{N}(T^* - \lambda) = \mathrm{N}(T^* - \lambda) \cap \mathrm{K}(T^*) = \{0\}$. De plus, d'après Théorème 2.1.1, on peut supposer que pour un tel λ, $T - \lambda$ est semi-Fredholm. Donc $T - \lambda$ est surjectif et $\mathrm{K}(T - \lambda) = X$. D'où d'après la proposition 2.4.3, $X = \mathrm{K}(T) + \mathrm{N}(T^p)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si $X = \mathrm{K}(T) + \mathrm{N}(T^p)$, alors $\mathrm{R}(T^n) = T^n(\mathrm{K}(T)) = \mathrm{K}(T)$ pour tout $n \geq p$, d'où T est de descente finie.
L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) est une conséquence du théorème 2.1.1 (iii).
(iv) $\Rightarrow$ (i). Il suffit de voir que pour tout nombre complexe $\lambda \neq 0$ suffisamment petit, $T^* - \lambda$ est injectif. ∎

Les corollaires suivants sont des conséquences immédiates des propositions 2.4.2, 2.4.4 et 2.4.6.

Corollaire 2.4.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{a_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{\mathrm{a_e}(T)+1})$ est fermé, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *T et T^* vérifient la SVEP en 0,*
(ii) $X = \mathrm{H_o}(T) \oplus \mathrm{K}(T)$,
(iii) $X = \mathrm{R}(T^p) \oplus \mathrm{N}(T^p)$, *où $p := p(T)$*
(iv) 0 *est un pôle de la résolvante de T.*

Pour tout opérateur borné T défini sur X, on dénote par $\mathcal{S}(T)$ l'ensemble des nombres complexes λ tel que T ne satisfait pas la SVEP en λ. Il est clair que $\mathcal{S}(T)$ est un sous-ensemble fermé de $\sigma(T)$. On dit qu'un opérateur T satisfait la SVEP précisément quand $\mathcal{S}(T)$ est vide. Il est clair aussi que si $\mathrm{a}(T-\lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors T satisfait la SVEP. L'exemple suivant nous montre que ce résultat ne reste pas vrai dans le cas où $\mathrm{a_e}(T-\lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Example. Soit T l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Puisque T est surjectif et non inversible, alors T ne satisfait pas la SVEP. Mais comme $\dim \mathrm{N}(T-\lambda) = 1$ pour tout $|\lambda| < 1$ et $\mathrm{N}(T-\lambda) = \{0\}$ pour tout $|\lambda| \geq 1$, alors $\mathrm{a_e}(T-\lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corollaire 2.4.8. *Soit T un opérateur borné sur X, alors*

$$\sigma_{\mathrm{asc}}(T) = \sigma_{\mathrm{asc}}^{\mathrm{e}}(T) \cup \mathcal{S}(T).$$

Preuve. Il est évident que si $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{asc}}(T)$, alors $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{asc}}^{\mathrm{e}}(T)$ et T a la SVEP en λ. Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{asc}}^{\mathrm{e}}(T) \cup \mathcal{S}(T)$, alors d'après la Proposition 2.4.4, $\mathrm{a}(T-\lambda)$ est finie. ∎

Chapitre 3

spectre de la descente essentielle et perturbations

Dans le présent chapitre, une étude similaire à celle établie dans le deuxième chapitre est menée sur la descente essentielle et le spectre que lui est associé.

3.1 Caractérisation du spectre de la descente essentielle

La plupart des résultats obtenus dans cette section sont basés sur le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *: Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $\mathrm{d_e}(T)$ *est finie, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $0 < |\lambda| < \delta$ *et* $p := p(T)$*,*
(i) $T - \lambda$ *est semi-régulier,*
(ii) $\dim \mathrm{N}(T-\lambda)^n = n \dim \mathrm{N}(T^{p+1})/\mathrm{N}(T^p)$,
(iii) *codim*$\mathrm{R}(T-\lambda)^n = n \dim \mathrm{R}(T^p)/\mathrm{R}(T^{p+1})$. *En particulier,* $T - \lambda \in \Phi_-(X)$ *pour tout* $0 < |\lambda| < \delta$.

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.1.2. *: Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$ *un opérateur semi-régulier, alors* $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T^n) = n\operatorname{codim} \mathrm{R}(T)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit n un entier naturel positif arbitraire et $\tilde{T}^{n-1} : X \longmapsto X/\mathrm{R}(T^n)$ l'opérateur induit par T^{n-1}. Comme T est un opérateur semi-régulier, $N(\tilde{T}^{n-1}) = R(T) + N(T^{n-1}) = R(T)$ et par conséquent $\dim X/R(T) = \dim R(T^{n-1})/R(T^n)$. D'autre part, on a $\dim X/R(T^n) = \dim X/R(T^{n-1}) + \dim R(T^{n-1})/R(T^n)$, d'où

$$\dim X/R(T^n) = \dim X/R(T^{n-1}) + \dim X/R(T).$$

Ainsi en répétant le même argument plusieurs fois on obtient le résultat désiré.
■

Preuve du Théorème 3.1.1 : Soit $\hat{T}$ la restriction de T à $R(T^p)$. On définit une nouvelle norme sur $R(T^p)$ par

$$|y| = \|y\| + inf\{\|x\| : x \in X \, et \ \ y = T^p x\} \text{ pour tout } y \in R(T^p)$$

Il est évident que $R(T^p)$ muni de cette norme est un espace de Banach, donc $\hat{T}$ est à la fois semi-Fredholm et semi-régulier. En effet ; comme $R(\hat{T}) = R(T^{p+1})$ et $\dim R(T^p)/R(T^{p+1})$ est finie, alors $\hat{T}$ est semi-fredholm. D'autre part, comme $d_e(T)$ est finie, le théorème1.2.5, implique que $N(T) \cap R(T^p) = N(T) \cap R(T^{p+n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$N(\hat{T}) = N(T) \cap R(T^p) = N(T) \cap R(T^{p+n}) \subseteq R(T^{p+n}) = R(\hat{T}^n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et par conséquent $\hat{T}$ est semi-régulier. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $0 \leq |\lambda| < \delta$, $\hat{T} - \lambda$ est à la fois semi-Fredholm et semi-régulier. De plus comme il est bien connu que ,

$$X = R(T - \lambda) + R(T^p) \text{ pour tout } \lambda \neq 0,$$

il vient que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$,

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} R(\hat{T} - \lambda) &= \dim R(T^p)/R(T^p) \cap R(T - \lambda) \\ &= \dim(R(T - \lambda) + R(T^p))/R(T - \lambda) \\ &= \dim X/R(T - \lambda) = \operatorname{codim} R(T - \lambda) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} N(T - \lambda) &= R(T^p) \cap N(T - \lambda) \\ &= N(\hat{T} - \lambda) \subseteq R(\hat{T} - \lambda)^n \subseteq R(T - \lambda)^n \end{aligned}$$

D'où $T - \lambda$ est à la fois semi-fredholm et semi-régulier pour tout $0 < |\lambda| < \delta$. Alors d'après la proposition1.1.8, on obtient que :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{N}(T-\lambda)^n &= \dim \mathrm{N}(\hat{T}-\lambda)^n = n \dim \mathrm{N}(\hat{T}) \\ &= n \dim \mathrm{R}(T^p) \cap \mathrm{N}(T)\end{aligned}$$

Mais comme T^p induit une isomorphisme de $\mathrm{N}(T^{p+1})/\mathrm{N}(T^p)$ sur $\mathrm{R}(T^p) \cap \mathrm{N}(T)$, il résulte que

$$\dim \mathrm{N}(T-\lambda) = \dim \mathrm{R}(T^p) \cap \mathrm{N}(T) = \dim \mathrm{N}(T^{p+1})/\mathrm{N}(T^p)$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1.2 et la Proposition 1.1.8, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{codim} \mathrm{R}(T-\lambda)^n &= n\operatorname{codim} \mathrm{R}(T-\lambda) = n\operatorname{codim} \mathrm{R}(\hat{T}-\lambda) \\ &= n\operatorname{codim} \mathrm{R}(\hat{T}) = n \dim \mathrm{R}(T^p)/\mathrm{R}(T^{p+1}).\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ∎

Comme le montre le corollaire suivant, le théorème précédent est une généralisation du résultat démontré par M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri dans[11], où le cas de la descente a été traité :

Corollaire 3.1.3. *[11] : Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $d := \mathrm{d}(T)$ est finie, alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$,*
(i) *$T - \lambda$ est surjectif,*
(ii) $\dim \mathrm{N}(T-\lambda) = \dim \mathrm{N}(T^{d+1})/\mathrm{N}(T^d)$.

Corollaire 3.1.4. *: Soit T un opérateur borné sur X, alors $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est un sous-ensemble compact de $\sigma(T)$.*

Dans [39], M. Mbekhta et V. Müller ont démontré que l'ensemble $\{T \in \mathcal{L}(X) :$ $\mathrm{d}_e(T)$est finie $\}$ est une régularité dans $\mathcal{L}(X)$. Par conséquent d'après [27, théorème 1.4], le spectre de la descente essentielle satisfait le théorème de l'application spectrale.

Théorème 3.1.5. *Soit T un opérateur borné sur X et f une fonction analytique sur un voisinage ouvert de $\sigma(T)$, non identiquement nulle sur aucune composante connexe de son domaine de définition, alors*

$$\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(f(T)) = f(\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)).$$

Proposition 3.1.6. *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Si $\mathrm{d_e}(T-\lambda)$ est finie, alors λ est un pôle de la résolvante de T.*

Preuve. Supposons que $\mathrm{d_e}(T-\lambda)$ est finie et soit $p := p(T-\lambda)$, alors d'après le théorème 3.1.1, il existe un voisinage ouvert, U, pointé de λ tel que $\dim \mathrm{N}(T-\mu) = \dim \mathrm{N}((T-\lambda)^{p+1})/\mathrm{N}((T-\lambda)^p)$ et $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T-\mu) = \dim \mathrm{R}((T-\lambda)^p)/\mathrm{R}(T-\lambda)^{p+1})$ pour tout $\mu \in U$. Mais comme $\lambda \in \partial\sigma(T)$, $U \setminus \sigma(T)$ est non vide et par conséquent

$$\dim \mathrm{N}((T-\lambda)^{p+1})/\mathrm{N}((T-\lambda)^p) = \dim \mathrm{R}((T-\lambda)^p)/\mathrm{R}((T-\lambda)^{p+1}) = 0.$$

Donc $T-\lambda$ est d'ascente et de descente finies, d'où λ est un pôle de la résolvante de T. ∎

Proposition 3.1.7. *: Soit T un opérateur borné sur X, alors $\sigma_{\mathrm{des}}(T) \setminus \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_{\mathrm{des}}(T) \setminus \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ et $p := p(T-\lambda)$, alors d'après le théorème 3.1.1, il existe un voisinage ouvert V pointé de, λ, tel que $V \cap \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) = \emptyset$ et pour tout $\mu \in V$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{codim} \mathrm{R}(T-\mu)^n = n \dim \mathrm{R}(T-\lambda)^p/\mathrm{R}(T-\lambda)^{p+1}.$$

De plus, comme $T-\lambda$ est de descente infinie, alors *dim*$\mathrm{R}(T-\lambda)^p/\mathrm{R}(T-\lambda)^{p+1}$ est non nul et par conséquent la suite $(\operatorname{codim} (\mathrm{R}(T-\mu)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante pour tout $\mu \in V$. Donc $V \subseteq \sigma_{\mathrm{des}}(T)$; ce qui termine la preuve. ∎

Notons que le spectre de la descente essentielle d'un opérateur peut être vide. Le théorème suivant caractérise les opérateurs dont le spectre de la descente essentielle est vide.

Théorème 3.1.8. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est vide si et seulement si T est algébrique.*

Preuve. Notons que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est vide si et seulement si $\sigma_{\mathrm{des}}(T)$ l'est aussi. En effet supposons que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) = \emptyset$, alors d'après la proposition précédente, $\sigma_{\mathrm{des}}(T)$ est vide. Et par conséquent, d'après [11, théorème 1.5], on a T est algébrique. ∎

Théorème 3.1.9. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et Ω une composante connexe de $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$, alors*

$$\Omega \subset \sigma(T) \quad ou \quad \Omega \setminus \Omega_1 \subseteq \rho(T)$$

où $\Omega_1 := \{\lambda \in \Omega : \lambda$ est un pôle de la resolvante de $T\}$.

Preuve. :Soit $\Omega_r = \{\lambda \in \Omega\colon T - \lambda$ est à la fois semi-régulier et semi-Fredholm$\}$. Alors d'après théorème 3.1.1, $\Omega_o := \Omega \setminus \Omega_r$ est un ensemble dénombrable et donc Ω_r est connexe. Supposons que $\Omega \cap \rho(T)$ est non vide, alors il en est de même pour $\Omega_r \cap \rho(T)$. De plus, comme d'après les propositions 1.1.7, 1.1.8 et la continuité de l'indice, on a dim $N(T-\lambda)$ et codim $R(T-\lambda)$ sont deux fonctions constantes sur Ω_r, il vient que $\Omega_r \subseteq \rho(T)$. Par conséquent Ω_o est constitué par des points isolés du spectre, d'où d'après la proposition 3.1.6,

$$\Omega_o = \Omega_1 = \{\lambda \in \Omega : \lambda \text{ est un pôle de la résolvante de } T\}.$$

■

Corollaire 3.1.10. *: Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$\sigma(T)$ est au plus dénombrable,*
(ii) *$\sigma_{\mathrm{des}}(T)$ est au plus dénombrable,*
(iii) *$\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est au plus dénombrable.*
Dans ce cas, on a

$$\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) = \sigma_{\mathrm{des}}(T) \text{ et } \sigma(T) = \sigma_{\mathrm{des}}(T) \cup \{\lambda \in \Omega : \lambda \text{ est un pôle de la résolvante de } T\}).$$

Preuve. : Comme $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{des}}(T) \subseteq \sigma(T)$, alors les implications (i)⇒(ii)⇒(iii) sont claires.
(iii)⇒(i) Notons comme dans le chapitre précédent par Pol(T) l'ensemble des pôles de la résolvante de T et supposons que $\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est au plus dénombrable, alors $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est connexe. De plus, comme $\rho(T) \subseteq \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$, le Théorème précédent implique que $\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) \setminus \mathrm{Pol}(T) = \rho(T)$. Donc $\sigma(T) = \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T) \cup \mathrm{Pol}(T)$ est au plus dénombrable. Cependant, comme $\sigma_{\mathrm{des}}(T) \setminus \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$ est un ensemble ouvert au plus dénombrable, on déduit que $\sigma_{\mathrm{des}}(T) = \sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{des}}(T)$. ■

3.2 La notion de descente essentielle dans une algèbre de Banach

Tout au long de cette section, $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de Banach complexe avec unité. À un élément $x \in \mathcal{A}$, on associe l'opérateur de multiplication à gauche L_x donné par $L_x(y) := xy$ pour tout $y \in \mathcal{A}$. La descente et la descente essentielle d'un élément $x \in \mathcal{A}$ sont définies respectivement par $\mathrm{d}(x) := \mathrm{d}(L_x)$ et $\mathrm{d_e}(x) := \mathrm{d_e}(L_x)$.

Soit $x \in \mathcal{A}$, le spectre de la descente et de la descente essentielle de x sont définies respectivement par :

$$\sigma_{\text{des}}(x) := \sigma_{\text{des}}(L_x) \quad et \quad \sigma^{\text{e}}_{\text{des}}(x) := \sigma^{\text{e}}_{\text{des}}(L_x).$$

Dans [11], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri ont montré que dans le cas d'un espace de Hilbert, la descente de T comme étant un élément de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(H)$ est finie si et seulement si la descente de T est finie. Cependant, dans le cas d'un espace de Banach complexe, il existe aucune relation entre la descente de T comme étant un élément de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(X)$ et T comme étant un opérateur défini sur X. Pour l'ascente essentielle, le lemme suivant nous montre qu'il n'existe aucune relation entre l'ascente essentielle de L_T et l'ascente essentielle de T.

Lemme 3.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Si la descente essentielle de L_T est finie, alors il en est de même pour la descente de T.*

Preuve. supposons que $\mathrm{d}(T)$ est finie et soit n un entier naturel et $x = T^n z \in \mathrm{R}(T^n) \setminus \mathrm{R}(T^{n+1})$ où, $z \in X$. Si on considère une suite infinie de formes linéaires continues linéairements indépendants $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, il vient que la suite $(f_k \otimes x)_{k \in \mathbb{N}}$ est linéairements indépendante dans $\mathrm{R}(L_{T^n}) \setminus \mathrm{R}(L_{T^{n+1}})$. En effet, pour $y \in X$, $(f_k \otimes x)(y) = f_k(y)x = f_k(y)T^n z = T^n(f_k(y)z) = T^n(f_k \otimes z(y))$, et par conséquent, $f_k \otimes x = T^n(f_k \otimes z)$; Ce qui implique que $f_k \otimes x \in \mathrm{R}(L^n_T)$. Supposons maintenant que $f_k \otimes x \in \mathrm{R}(L_{T^{n+1}})$, alors il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $f_k \otimes x = T^{n+1}S$, et par conséquent pour tout $y \in \mathcal{L}(X)$ $f_k(y)x = T^{n+1}(S(y))$; contradiction. Ce qui termine la preuve. ■

Comme généralisation du résultat [11, théorème] aux opérateurs de descente essentielle finie, on annonce le théorème suivant :

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe avec unité, alors les assertions suivante sont équivalentes :*
(i) $\dim(\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A}))$ *est finie et* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq N(\mathcal{A})$ *où* $N(\mathcal{A})$ *désigne l'ensemble des éléments nilpotents de* $\mathcal{A}$,
(ii) $\sigma_{\text{des}}(x) = \emptyset$ *pout tout* $x \in \mathcal{A}$,
(iii) $\sigma^{\text{e}}_{\text{des}}(x) = \emptyset$ *pout tout* $x \in \mathcal{A}$,
(iv) $\mathcal{A}$ *est algébrique.*

Preuve. Conséquence immédiate du [11, théorème 3.1] et théorème3.1.8.

3.3 Spectre de la descente essentielle et perturbations

Dans [11], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri ont montré que pour tout opérateur $F \in \mathcal{L}(X)$, si $\sigma^{e}_{\text{des}}(T+F) = \sigma^{e}_{\text{des}}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $TF = FT$, alors Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F^k est de rang fini. Dans le théorème suivant on généralise ce résultat aux opérateurs d'ascente essentielle finies.

Théorème 3.3.1. *Soit $F \in \mathcal{L}(X)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\sigma^{e}_{\text{des}}(T+F) = \sigma^{e}_{\text{des}}(T)$ *pour tout* $T \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $TF = FT$.
(ii) *Il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* F^k *est de rang fini.*

La démonstration de ce résultat nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ et S un opérateur borné sur X commutant avec T, alors pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$\dim \mathrm{R}(T^{n+k-1})/\mathrm{R}(T+S)^n \cap \mathrm{R}(T^{n+k-1}) \leq \dim \mathrm{R}(S^k)$$

Preuve. Soient $x_1, ..., x_m \in X$ tel que $T^{n+k-1}x_1, T^{n+k-1}x_2, ..., T^{n+k-1}x_m$ sont linéairements indépendants modulo $\mathrm{R}(T^{n+k-1}) \cap \mathrm{R}(T+S)^n$. Puisque T commute avec S, alors pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $u_i, v_i \in X$ vérifiant :

$$T^{n+k-1}x_i = (T+S)^n u_i + S^k v_i.$$

Supposons que $m > \dim \mathrm{R}(S^k)$, alors il existe des nombres complexes $(a_1, a_2, ..., a_m) \neq (0, 0, ..., 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{m} a_i S^k v_i = 0$ et par conséquent $\sum_{i=1}^{m} a_i T^{n+k-1} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i (T+S)^n u_i$; contradiction. ■

Preuve du théorème 3.3.1.
$(ii) \Rightarrow (i)$ D'après le lemme3.3.2, on a $\dim \mathrm{R}(T^{n+k-1})/\mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^{n+k-1})$ est finie pour tout entier $n \geq 1$, et comme $d := \mathrm{d_e}(T)$ est finie, il vient que $\dim \mathrm{R}(T^d)/\mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^{n+k-1})$ est finie pour tout $n \geq d$. De plus, puisque

$$\mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^{n+k-1}) \subseteq \mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^d) \subseteq \mathrm{R}(T^d),$$

il résulte que $\dim \mathrm{R}(T^d)/\mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^d)$ est finie pour tout $n \geq d$. Mais comme F^k est de rang fini, on obtient que

$$\dim(\mathrm{R}(T^d) + \mathrm{R}(F^k))/\mathrm{R}(T+F)^n \cap \mathrm{R}(T^d) \text{ est finie pour tout } n \geq d \tag{3.1}$$

D'autre part, en interchangeant T et $T + F$ dans le lemme 3.3.2, on peut conclure que

$$\dim R(T+F)^{n+k-1}/R(T^n) \cap R(T+F)^{n+k-1} < \infty$$

De plus, on a $R(T^n) \cap R(T+F)^{n+k-1} \subseteq R(T+F)^{n+k-1} \cap R(T^d) \subseteq R(T+F)^{n+k-1}$ pour tout $n \geq d$ et par conséquent,

$$\dim R(T+F)^{n+k-1}/R(T^d) \cap R(T+F)^{n+k-1} \text{ est finie pour tout } n \geq d \tag{3.2}$$

Donc en combinant (3.1) et (3.2) on obtient que

$$\dim(R(T^d) + R(F^k))/R(T+F)^n \text{ est finie pour tout } n \geq d + k.$$

Ainsi $d_e(T + F) \leq d + k$.

(i)⇒(ii) En prenant $T = 0$ on obtient que $\sigma^e_{\text{des}}(F)$ est vide et donc F est algébrique. Notons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ les éléments du spectre de F, il vient que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots\ldots \oplus X_n$, où les sous-espaces X_i sont invariants par F et la restriction de $F - \lambda_i$ à X_i est un opérateur nilpotent pour tout $1 \leq i \leq n$. Supposons que pour un $\lambda_i \neq 0$, X_i est de dimension infin, alors il existe un opérateur non algébrique S_i sur X_i commutant avec la restriction F_i de F à X_i. Si on dénote par S l'extension de S_i à X donnée par $S = 0$ sur chaque X_j tel que $j \neq i$, il est évident que $SF = FS$ et par suite, $\sigma^e_{\text{des}}(S+F) = \sigma^e_{\text{des}}(S)$ par hypothèse. D'autre part, comme $\sigma^e_{\text{des}}(S) = \sigma^e_{\text{des}}(S_i)$ et $\sigma^e_{\text{des}}(S + F) = \sigma^e_{\text{des}}(S_i + F_i)$ et $F_i - \lambda_i$ est un opérateur nilpotent, on obtient que $\sigma^e_{\text{des}}(S_i) = \sigma^e_{\text{des}}(S_i + F_i) = \sigma^e_{\text{des}}(S_i + \lambda_i)$. Choisissons un nombre complexe $\alpha \in \sigma^e_{\text{des}}(S) \neq \emptyset$, alors $n\lambda_i + \alpha \in \sigma^e_{\text{des}}(S)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $\lambda_i = 0$; contradiction. ∎

Remarque 3.3.3. *L'exemple ci-dessous nous montre que le résultat précédent ne peut pas être généralisé aux perturbations par des compacts.*

Exemple. Considérons l'opérateur $T = 0$ défini sur l'espace de Hilbert muni de la base orthonormale $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$; il est claire que $d_e(T)$ est finie. Cependant, si on considère l'opérateur compact K défini par

$$Ke_{i,j} = \frac{1}{ij} e_{i,j+1},$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \geq 1$, $e_{i,n+1} \in R(K^n) \setminus R(K^{n+1})$, ce qui implique que $d_e(K)$ est infinie.

M. Mbekhta et V. Müller ont montré dans [39] que si $T \in \mathcal{L}(X)$, alors $\sigma^{e}_{\text{des}}(T + F) = \sigma^{e}_{\text{des}}(T)$ pour tout opérateur F de rang fini défini sur X. Par conséquent, on obtient :

$$\sigma^{e}_{\text{des}}(T) \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}(X)} \sigma_{\text{des}}(T + F)$$

Pour un sous ensemble K de $\mathbb{C}$, on dénote par $isoK$ l'ensemble de tous ses points isolés et par $accK = K \setminus isoK$ l'ensemble de tous ses points d'accumulations.

Dans le résultat suivant on démontre que l'inclusion précédente devient une égalité si on complète l'ensemble $\sigma^{e}_{\text{des}}(T)$ par tous les points d'accumulation de l'ensemble $\sigma^{+}_{sf}(T)$ formé par les nombres complexe λ pour les quels $T - \lambda$ n'est pas un opérateur semi-Fredholm d'indice positif.

Théorème 3.3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$\sigma^{e}_{\text{des}}(T) \cup acc\sigma^{+}_{sf}(T) = \bigcap_{F \in F(X)} \sigma_{\text{des}}(T + F)$$

Preuve. Si $0 \notin \bigcap_{F \in F(X)} \sigma_{\text{des}}(T + F)$, alors il existe $F \in F(X)$ tel que $\text{d}(T + F)$ est finie et par conséquent, $0 \in \rho^{e}_{\text{des}}(T)$. D'autre part, comme $\text{d}(T + F)$ est finie, alors d'après le corollaire 3.1.3, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$, $(T+F-\lambda)$ est surjéctif. Ce qui implique que $0 \in iso\sigma^{+}_{sf}(T) \cap \rho^{e}_{\text{des}}(T)$. Réciproquement, soit $0 \notin \sigma^{e}_{\text{des}}(T) \cup acc\sigma^{+}_{sf}(T)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$, $\text{ind}(T - \lambda) \geq 0$ et par conséquent il existe un opérateur de rang fini F tel que $T + F - \lambda$ est surjectif pour tout $0 < |\lambda| < \delta$. De plus, comme $\text{d}_e(T)$ est finie, alors il en est de même pour $\text{d}_e(T + F)$ et par conséquent, le théorème3.1.1, implique que $\text{d}(T + F)$ est finie ; ce qui termine la preuve. ■

3.4 Propriété de l'extension unique, partie quasi-nilpotente et coeur analytique

Dans cette partie, on généralise des résultats démontrés dans la dernière partie du chapitre 2 aux opérateurs de descentes essentielles finies.

Proposition 3.4.1. *Soit T un opérateur borné défini sur X de descente essentielle finie, alors pour $p := p(T)$ on a :*
(i) $\overline{H_0(T)} = \overline{N^\infty(T)}$
(ii) $Co(T) = R^\infty(T)$
(iii) $H_0(T)$ *est fermé si et seulement si* $H_0(T) = \mathrm{N}(T^p)$
(iv) $\overline{H_0(T)} = T(\overline{H_0(T)}) + \mathrm{N}(T^p)$

Pour démontrer ce résultat, on utilise souvent le lemme suivant :

Lemme 3.4.2. *[19, Lemma 2.2] Soient T un opérateur borné à image fermée de X sur Y et $E \subseteq X$ et $F \subseteq Y$ deux sous espaces vectoriels tel que* $\mathrm{N}(T) \subseteq E$ *et* $F \subseteq \mathrm{R}(T)$, *alors*
(i) $T(\overline{E}) = \overline{T(E)}$
(ii) $T^{-1}(\overline{F}) = \overline{T^{-1}(F)}$

Soit $F \subseteq \mathrm{R}(T^p)$ un sous espace vectoriel. Dans toute la suite, on dénote par $cl_p(F)$ l'adhérence de F dans l'espace topologique $\mathrm{R}(T^p)$.

Preuve de la Proposition 3.4.1 Pour démontrer les quatres propriétés , remarquons d'abord que comme la restriction $\hat{T}$ de T au sous espace vectoriel $\mathrm{R}(T^p)$ est semi-régulier , alors d'après le théorème 1.1.9, $cl_p(H_0(\hat{T})) = cl_p(N^\infty(\hat{T}))$ et $Co(\hat{T}) = R^\infty(\hat{T})$ et montrons que :

$$H_0(\hat{T}) = \mathrm{R}(T^p) \cap H_0(T) = T^p(H_0(T)) \tag{3.3}$$

et

$$T^{-p}(H_0(\hat{T})) = H_0(T) \tag{3.4}$$

Il est clair que $H_0(\hat{T}) \subseteq \mathrm{R}(T^p) \cap H_0(T)$. Pour l'autre inclusion, soit $y \in \mathrm{R}(T^p) \cap H_0(T)$, il existe $x \in H_0(T)$ tel que $y = T^p x$. De plus, comme on a

$$|\hat{T}^n y|^{1/n} \leq (\|T^p\| + 1)^{1/n} \|T^n x\|^{1/n},$$

il résulte que $y \in H_0(\hat{T})$.
Pour démontrer la dernière égalité, il suffit de voir que $T^{-p}(H_0(\hat{T})) = T^{-p}(T^p(H_0(T)) = H_0(T) + \mathrm{N}(T^p) = H_0(T)$.
(i) Il est clair que $N^\infty(\hat{T}) = \mathrm{R}(T^p) \cap N^\infty(T)$ et par consequent,

$$T^{-p}(N^\infty(\hat{T})) = N^\infty(T) \tag{3.5}$$

D'autre part, si on applique le lemme 3.4.2(ii) à l'opérateur T^p, on obtient d'après les formules (3.4) et (3.5) que :

$$\overline{H_0(T)} = \overline{T^{-p}(H_0(\hat{T}))} = T^{-p}(cl_p(H_0(\hat{T})) = T^{-p}(cl_p(N^{\infty}(\hat{T}))) = \overline{N^{\infty}(T)} \qquad (3.6)$$

(ii) Comme $\hat{T}$ est semi-régulier et $R^{\infty}(\hat{T}) = R^{\infty}(T)$, il vient que $\hat{T}(R^{\infty}(\hat{T})) = R^{\infty}(\hat{T}) = R^{\infty}(T) \subseteq T(R^{\infty}(T))$. Par conséquent $Co(T) = R^{\infty}(T)$.
(iii) Si on applique le lemme 3.4.2 (i) à l'opérateur T^p, on obtient d'après les formules (3.3) que : $T^p(\overline{H_0(T)} = cl_p(H_0(\hat{T}))$. Par conséquent, si $H_0(T)$ est fermé,

$$H_0(\hat{T}) = T^p(H_0(T)) = T^p(\overline{H_0(T)} = cl_p(H_0(\hat{T})).$$

Donc $H_0(\hat{T})$ est fermé. Mais comme $\hat{T}$ est semi-régulier, alors d'après théorème 1.1.9 et la formule 3.3, $H_0(\hat{T}) = \mathrm{R}(T^p) \cap H_0(T) = \{0\}$. Par conséquent $H_0(T) = \mathrm{N}(T^p)$, car si $y \in H_0(T)$, $T^p y \in H_0(T) \cap \mathrm{R}(T^p) = 0$.
(iv) Comme $\hat{T}$ est semi-régulier, il vient d'après le théorème 1.1.9 que

$$cl_p(H_0(\hat{T})) = \hat{T}(cl_p(H_0(\hat{T}))) = \hat{T}(T^p(\overline{H_0(T)}) = T^p(T(\overline{H_0(T)}).$$

Donc d'après la formule (3.6), $\overline{H_0(T)} = T^{-p}(cl_p(H_0(\hat{T}))) = T(\overline{H_0(T)}) + \mathrm{N}(T^p)$. Ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 3.4.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ de descente essentielle finie, alors T est quasi-nilpotent si et seulement si T est nilpotent de degré p, où $p := p(T)$.*

Preuve. Supposons que T est quasi-nilpotent, alors $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} \| T^n x \|^{\frac{1}{n}} = 0$ et par conséquent $\mathrm{H}_o(T) = X$ est fermé. Alors, d'après la proposition 3.4.1(iii), $H_0(T) = X = \mathrm{N}(T^p)$. ■

Proposition 3.4.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ de descente essentielle finie, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$ et $p := p(T)$, on a :*
(i) $\overline{H_0(T - \lambda) + \mathrm{N}(T^p)} = \overline{H_0(T)}$
(ii) $Co(T - \lambda) = Co(T) + \mathrm{N}(T^p)$

Preuve. Soit $\hat{T}$ la restriction de T au sous espace vectoriel $\mathrm{R}(T^p)$. Comme $\hat{T}$ est semi-régulier, alors d'après la proposition3.1.1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$, $\hat{T} - \lambda$ et $T - \lambda$ sont semi-réguliers

(i) Comme $N^{\infty}(\hat{T}-\lambda) = \mathrm{R}(T^p) \cap N^{\infty}(T-\lambda)$, alors d'après la proposition1.1.10, on obtient que

$$cl_p(H_0(\hat{T})) = cl_p(H_0(\hat{T}-\lambda)) = cl_p(N^{\infty}(\hat{T}-\lambda)) = cl_p(\mathrm{R}(T^p) \cap N^{\infty}(T-\lambda)) \text{ pour tout } 0 < |\lambda| < \delta$$

De plus, comme $T^{-p}(\mathrm{R}(T^p) \cap N^{\infty}(T-\lambda)) = N^{\infty}(T-\lambda) + \mathrm{N}(T^p)$ et si on applique le lemme 3.4.2 (ii) à l'opérateur T^p il vient que :

$$\begin{aligned} \overline{H_0(T)} &= T^{-p}(cl_p(H_0(\hat{T})) = T^{-p}(cl_p(\mathrm{R}(T^p) \cap N^{\infty}(T-\lambda)) \\ &= \overline{N^{\infty}(T-\lambda) + \mathrm{N}(T^p)} = \overline{H_0(T-\lambda) + \mathrm{N}(T^p)}. \end{aligned}$$

(ii) On a $\hat{T}$ est semi-régulier. Alors d'après les propositions 1.1.10 et 3.4.1 (ii), il vient que :

$$\begin{aligned} Co(T) &= R^{\infty}(T) = R^{\infty}(\hat{T}) = Co(\hat{T}) \\ &= Co(\hat{T}-\lambda) = R^{\infty}(\hat{T}-\lambda) \\ &= \mathrm{R}(T^p) \cap R^{\infty}(T-\lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent, $T^p(Co(T)) = Co(T) = \mathrm{R}(T^p) \cap R^{\infty}(T-\lambda)$. Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} Co(T) + \mathrm{N}(T^p) &= T^{-p}(T^p(Co(T)) = T^{-p}(\mathrm{R}(T^p) \cap Co(T-\lambda)) \\ &= T^{-p}(\mathrm{R}(T^p) \cap R^{\infty}(T-\lambda)) = R^{\infty}(T-\lambda) + \mathrm{N}(T^p) \\ &= R^{\infty}(T-\lambda) = Co(T-\lambda). \end{aligned}$$

■

3.5 Descente essentielle et image fermé

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, un résultat célèbre de T. Kato montre que si codim $\mathrm{R}(T)$ est finie, alors l'image de T est fermé. Ce résultat est généralisé par Goldberg comme suit : si M est un sous-espace fermé de X tel que $\mathrm{R}(T) \oplus M$ est fermé, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé. Mais l'exemple suivant nous montre que si on remplace la condition du théorème de T. Kato par la descente essentielle de T est finie, alors l'image de T n'est pas en général fermée.
Exemple : soit H l' espace de Hilbert muni de la base orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'opérateur T défini par $Te_{2n} = \frac{1}{n}e_{2n-1}$ et $Te_{2n-1} = 0$, alors $\mathrm{R}(T)$ n'est pas fermé et $\mathrm{d}(T) = 2$.

Dans la suite de cette partie on va donner quelques conditions suffisantes pour que l'image d'un opérateur d'ascente essentielle finie soit fermée.

Théorème 3.5.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, si $d := \mathrm{d_e}(T)$ et $\dim \mathrm{N}(T)$ sont finies, alors $\mathrm{R}(T^m)$ est fermé pour tout entier $m \geq 1$.*

Preuve. Pour tout entier naturel $m \geq 1$, on a

$$\dim X/\mathrm{R}(T^m) = \dim(\mathrm{N}(T^d) + \mathrm{R}(T^m))/\mathrm{R}(T^m) + \dim X/\mathrm{N}((T^d) + \mathrm{R}(T^m)) \quad (3.7)$$

De plus, d'après M. A. Kaashoek[25], on a

$$\dim(\mathrm{N}(T^d) + \mathrm{R}(T^m))/\mathrm{R}(T^m) = \dim \mathrm{N}(T)/\mathrm{R}(T^{d+m}) \cap \mathrm{N}(T) \quad (3.8)$$

En combinant (3.7) et (3.8), on obtient que

$$\operatorname{codim} \mathrm{R}(T^m) = \dim \mathrm{N}(T)/\mathrm{R}(T^{d+m}) \cap \mathrm{N}(T) + \operatorname{codim} (\mathrm{N}(T^d) + \mathrm{R}(T^m))$$

et comme $\mathrm{d_e}(T)$ est finie, alors la formule (1.4) implique que codim $\mathrm{R}(T^m)$ est finie pour tout $m \geq 1$. Ce qui termine la preuve. ∎

Théorème 3.5.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $d := \mathrm{d_e}(T)$ est finie. Si $\mathrm{N}(T^d) \cap \mathrm{R}(T^k)$ possède un sous-espace vectoriel complémentaire dans $\mathrm{N}(T^d)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{R}(T^k)$ est fermé.*

Preuve. Par définition de sous-espace complémentaire fermé, il existe un sous-espace fermé $M \subseteq \mathrm{N}(T^d)$ tel que $\mathrm{N}(T^d) = M \oplus \mathrm{N}(T^d) \cap \mathrm{R}(T^k)$. Puisque $\mathrm{N}(T^d)$ est fermé dans X, alors il en est de même pour M. D'autre part, comme $d := \mathrm{d_e}(T)$ est finie, alors codim $(\mathrm{R}(T^k) + \mathrm{N}(T^d)) < \infty$. Donc il existe un sous-espace fermé de dimension fini M_1 tel que $X = [\mathrm{R}(T^k) + \mathrm{N}(T^d)] \oplus M_1 = \mathrm{R}(T^k) \oplus M \oplus M_1$. D'où d'après le théorème de Goldberg, $\mathrm{R}(T^k)$ est fermé. ∎

Corollaire 3.5.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{d_e}(T) = 1$, alors*
(i) *Si $\dim \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{R}(T)$ est finie, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*
(ii)*Si X est un espace de Hilbert, alors $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{R}(T)$ est fermé si et seulement si $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

Théorème 3.5.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{d_e}(T - \lambda_0) = 1$. S'il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de nombres complexes qui converge vers λ_0 tel que $\dim \mathrm{N}(T - \lambda_i)$ est finie pour tout $i \geq 1$, alors $\mathrm{R}(T - \lambda_0)$ est fermé.*

Preuve. Soit $\lambda_0 = 0$ et supposons qu'il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de nombres complexes qui converge vers λ_0 tel que $\dim \mathrm{N}(T - \lambda_i)$ est finie pour tout $i \geq 1$, alors d'après le théorème 3.1.1, $\dim \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{R}(T)$ est finie, d'où d'après le corollaire précédent, $\mathrm{R}(T)$ est fermé. ∎

Chapitre 4

Relèvement des pôles dans l'algèbre de Calkin

Dans ce chapitre on étudie le problème de relèvement des pôles dans l'algèbre de Calkin d'un espace de Hilbert séparable. De plus, une caractérisation des pôles dans l'algèbre de Calkin en termes d'ascente essentielle et de descente essentielle est fournie.

4.1 Relèvement des points isolés du spectre dans l'algèbre de Calkin

Dans cette section on étudie le problème de relèvement des points isolés du spectre dans l'algèbre de Calkin d'un espace de Hilbert séparable :« Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que zéro est un point isolé de son spectre essentielle, existe-il un opérateur compact K tel que zéro est un point isolé du spectre de $T + K$ ». On montre par un exemple qu'un tel relèvement n'est pas possible en général. Ensuite, on donne les obstructions à relever cette classe d'éléments de l'algèbre de Calkin.

Exemple 4.1.1. *Considérons l'opérateur shift à droite T défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, ...)$. Il est claire que $T - \lambda$ est un opérateur de Fredholm d'indice strictement négatif pour tout complexe $|\lambda| < 1$. Cependant, s'il existe un opérateur compact K tel que zéro est un point isolé du spectre de $T + K$, alors* $\operatorname{ind}(T + K - \mu) = \operatorname{ind}(T - \mu) = 0$ *pour tout μ dans un voisinage de zéro ; contradiction.*

Comme on a montré dans l'exemple 4.1.1, le relèvement des points isolés du spectre dans l'algèbre de Calkin d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ n'est pas possible en général. Cependant, si un tel relèvement peut exister, alors l'indice de $T - \lambda$ doit être nul au voisinage de ce point. Donc l'indice non nul au voisinage constitue une obstruction à relever les points isolés du spectre essentielle.

Dans toute la la suite on considère le cas où $X = H$ est un espace de Hilbert séparable et on dénote par G_0 la composante connexe des éléments inversibles de l'algèbre de Calkin $C(H)$ contenant l'identité. D'après R. G. Douglas [15], on a $\pi(T) \in G_0$ si et seulement si $\mathrm{ind}(T) = 0$. Et dans ce cas, il existe un opérateur compact K tel que T+K est inversible.

Dans[48], J. G. Stampfli a démontré le résultat suivant :

Théorème 4.1.2. *Soit T un opérateur borné sur H, alors il existe un opérateur compact K tel que*

$$\sigma(T + K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas de Fredholm d'indice zéro }\}.$$

Théorème 4.1.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que zéro est un point isolé de son spectre essentiel, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *il existe un opérateur compact K tel que zéro est un point isolé du spectre de $T + K$.*
(ii) *il existe $\delta > 0$ tel que $\pi(T) - \lambda \in G_0$ pour tout $0 <| \lambda |< \delta$.*
(iii) *il existe $\delta > 0$ tel que $T - \lambda$ est de Fredholm d'indice zéro pour tout $0 <| \lambda |< \delta$.*

Preuve. L'implication (i)$\Rightarrow$ (iii) est claire.
(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $T - \lambda$ est de Fredholm d'indice zéro pour tout $0 <| \lambda |< \delta$, alors d'après le théorème 4.1.2, il existe $K \in K(H)$ tel que zéro est un point isolé du spectre de $T + K$

4.2 Relèvement des pôles dans l'algèbre de Calkin

On commence cette section par montrer par un exemple que le relèvement des pôles dans l'algèbre de Calkin d'un espace de Hilbert séparable n'est pas possible en général.

Exemple 4.2.1. *Soit S l'opérateur shift à gauche défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ par $Se_{i+1} = e_i$ et $Se_1 = 0$, où $\{e_i : i \geq 1\}$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{N})$. Considérons l'opérateur $T = 0 \oplus S$ défini sur l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$. Il est évident que $T - \lambda$ est de Fredholm et $ind(T - \lambda) = 1$ pour tout nombre complexe $0 < |\lambda| < 1$. De plus, comme la descente de T est finie, alors il en est de même pour la descente de $\pi(T)$. Par conséquent zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$. Cependant, s'il existe un opérateur compact K tel que zéro est un pôle de la résolvante de $T + K$, alors $ind(T + K - \lambda) = ind(T - \lambda) = 0$ pour tout $0 < |\lambda| < 1$; Contradiction.*

Lemme 4.2.2. *[42, Theorem 2.3] Soient A et B deux opérateurs bornés sur H tel que leur produit $AB \in \mathcal{K}(H)$, alors il existe une projection $P \in \mathcal{L}(H)$ tels que AP et $(I - P)B$ sont deux opérateurs compacts.*

Proposition 4.2.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\pi(T)^k = 0$, alors il existe un opérateur compact K tel que $(T + K)^k = 0$.*

Preuve. Pour démontrer ce résultat on va procéder par induction sur k. Supposons que $\pi(T) = 0$, alors T est un opérateur compact. En suite, supposons que T^k est un opérateur compact pour un certain $k \geq 2$ et que le résultat est vrai pour $k - 1$, alors d'après le lemme 4.2.2, il existe une projection P tels que $T^{k-1}P$ et $(I - P)T$ sont deux opérateurs compacts. Par conséquent

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & X \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{R}(P) \\ \mathrm{N}(P) \end{matrix}$$

où K_{21} et K_{22} sont deux opérateurs compacts et $A = T_{\backslash \mathrm{R}(P)}$.
Observons que

$$\left(T - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\right)^{k-1} P = \begin{pmatrix} A^{k-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \in \mathcal{K}(H)$$

Donc $A^{k-1} \in \mathcal{K}(\mathrm{R}(P))$ et par conséquent d'après l'hypothèse d'induction, il existe un opérateur compact $K_{11} \in \mathcal{L}(\mathrm{R}(P))$ tel que $(A - K_{11})^{k-1} = 0$.
Considérons l'opérateur compact

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}(T-K)^k &= \begin{pmatrix} A-K_{11} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix} A-K_{11} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-K_{11} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

Théorème 4.2.4. *Soit T un opérateur borné sur H, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ si et seulement si il existe un opérateur compact K tel que $T+K = A \oplus B$, A nilpotent et B de Fredholm.*

Preuve. Supposons que zéro est un pôle de la résolvante de $\tilde{T} = \pi(T)$ d'ordre d, alors il existe un idempotent $\tilde{E}$ tel que $\tilde{E}\tilde{T} = \tilde{T}\tilde{E}$, $\sigma(\tilde{E}\tilde{T}\tilde{E}, \tilde{E}C(H)\tilde{E}) = \{0\}$ et $\sigma((1-\tilde{E})\tilde{T}(1-\tilde{E}), (1-\tilde{E})C(H)(1-\tilde{E})) = \sigma(\tilde{T}) \setminus \{0\}$. Soit λ un nombre complexe non nul, alors $\tilde{E}\tilde{T}\tilde{E} - \lambda\tilde{E}$ est inversible dans $\tilde{E}C(H)\tilde{E}$. De plus, d'après la proposition 4.2.3, on peut relever $\tilde{E}$ à un idempotent E défini sur H. Donc il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $[E(T-\lambda)E][ESE] - E$ et $[ESE][E(T-\lambda)E] - E$ sont compacts et par conséquent $ETE_{|\mathrm{R}(E)} - \lambda$ est de Fredholm. Donc $\sigma_e(ETE_{|\mathrm{R}(E)}) = \{0\}$. De la même manière on obtient que $(I-E)T(I-E)_{|\mathrm{N}(E)}$ est de Fredholm. D' autre part, comme la descente de $\tilde{T}$ est finie, alors il existe $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\tilde{T}^d = \tilde{T}^{d+1}\tilde{U}$, où $\tilde{U} = \pi(U)$. D'où

$$(\tilde{E}\tilde{T}\tilde{E})^d = \tilde{E}\tilde{T}^d\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{T}^{d+1}\tilde{U}\tilde{E} = [\tilde{E}\tilde{T}^{d+1}\tilde{E}][\tilde{E}\tilde{U}\tilde{E}] = (\tilde{E}\tilde{T}\tilde{E})^{d+1}(\tilde{E}\tilde{U}\tilde{E}).$$

Par conséquent $(ETE)^d - (ETE)^{d+1}(EUE)$ est compact et il en est de même pour sa restriction sur le sous-espace invariant $\mathrm{R}(E)$, ce qui implique que la descente de $\pi_{\mathrm{R}(E)}(ETE_{|\mathrm{R}(E)})$ est finie, où $\pi_{\mathrm{R}(E)} : \mathcal{L}(\mathrm{R}(E)) \to C(\mathrm{R}(E))$ dénote la surjection canonique. De plus, comme $\pi_{\mathrm{R}(E)}(ETE_{|\mathrm{R}(E)})$ est quasi-nilpotent dans l'algèbre de Calkin $C(\mathrm{R}(E))$, donc d'après le théorème 3.1.8, $\pi_{\mathrm{R}(E)}(ETE_{|\mathrm{R}(E)})$ est nilpotent. Ainsi la proposition 4.2.3 assure l'existence d'un opérateur compact K_1 définie sur $\mathrm{R}(E)$ tel que $ETE_{|\mathrm{R}(E)} + K_1$ est nilpotent. Posons $K = EK_1E - ET(I-E) - (I-E)TE$, alors il est simple à vérifier que K est un opérateur compact. Finalement, $T+K = A \oplus B$, $A = (ETE)_{\mathrm{R}(E)} + K_1$ est un opérateur nilpotent et $B = (I-E)T(I-E)_{|\mathrm{N}(E)}$ est de Fredholm.

Réciproquement, supposons qu'il existe un opérateur compact K tel que $T+K = A \oplus B$, où $A^n = 0$ pour un certain entier positif n et B de Fredholm. Notons par P la projection tel que $P(T+K)P = A$ et $(I-P)(T+K)(I-P) = B$, alors il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $(I-P) - B(I-P)S(I-P)$ est compact. Par conséquent, $T^n - T^{n+1}(I-P)S(I-P)$ est compact, ainsi la descente de $\pi(T)$ est finie. De plus, comme zéro est un point isolé de $\sigma(\pi(T))$, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ d'ordre $d \leq n$.

Remarque 4.2.5. *Comme l'exemple 4.2.1 le montre, le relèvement des pôles dans l'algèbre de Calkin n'est pas possible en général. En outre, supposons que zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ et qu'il existe un opérateur compact K tel que zéro est un pôle de la résolvante de $T+K$, alors l'indice de $T-\lambda$ est nul dans un voisinage de zéro. Donc l'indice non nul au voisinage du pôle constitue une obstruction pour le relèvement.*

Corollaire 4.2.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *il existe un opérateur compact K tel que zéro est un pôle de la résolvante de $T+K$.*
(ii)*il existe $\delta > 0$ tel que $\pi(T) - \lambda \in G_o$ pour tout $0 <\mid \lambda \mid< \delta$.*
(iii) *il existe $\delta > 0$ tel que $T - \lambda$ est de Fredholm d'indice zéro pour tout $0 <\mid \lambda \mid< \delta$.*

Preuve. (i)$\Rightarrow$ (ii). Comme zéro est un pôle de la résolvante de $T+K$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 <\mid \lambda \mid< \delta$, $T+K-\lambda$ est inversible et par conséquent $\text{ind}(T-\lambda) = \text{ind}(T+K-\lambda) = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Comme zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$, alors le théorème 4.2.4 assure l'existence d'un opérateur compact K_1 défini sur H tel que $T+K_1 = A \oplus B$, A nilpotent et B de Fredholm. De plus, comme $\text{ind}(T-\lambda) = 0$ pour tout $0 <\mid \lambda \mid< \delta$, alors d'après la continuité de l'indice on obtient que $\text{ind}(B) = 0$ et par conséquent l'existence d' un opérateur compact K_2 tel que $B + K_2$ est inversible. Enfin, il suffit de prendre $K = K_1 + (0 \oplus K_2)$.

■

4.3 Pôles dans l'algèbre de Calkin, ascente essentielle et descente essentielle

En se basant sur les multiples définitions et résultats démontrés dans les premiers chapitres, une caractérisation des pôles de la résolvante dans l'algèbre de Calkin en termes d'ascente essentielle et de descente essentielle est fournie dans cette section.

Dans [20], S. Grabiner et J. Zemanek ont établit le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ d'ascente essentielle et de descente essentielle finies, alors on a*
(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\dim \mathrm{N}(T^{n+1})/\mathrm{N}(T^n)$ *est finie si et seulement si* $\dim \mathrm{R}(T^n)/\mathrm{R}(T^{n+1})$ *est finie.*
(ii) *Si* $\dim \mathrm{R}(T^n)/\mathrm{R}(T^{n+1})$ *est finie, alors* $\mathrm{R}(T^n)$ *est fermé.*

Théorème 4.3.2. *Soit T un opérateur borné sur H, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ si et seulement si il existe un opérateur compact K tel que* $\mathrm{a_e}(T+K)$ *et* $\mathrm{d_e}(T+K)$ *sont finies.*

Preuve. Le sens directe est une conséquence immédiate du théorème 4.2.4. Réciproquement, supposons qu'il existe un opérateur compact K tel que $\mathrm{a_e}(T+K)$ et $\mathrm{d_e}(T+K)$ sont finies, alors d'après un résultat du à V. Müller, [40], il existe deux sous-espaces fermés M et N invariants par $T+K$ tels que $H = M \oplus N$ et $T+K = T_1 \oplus T_2$, où T_1 nilpotent et T_2 de Fredholm. Ce qui termine la preuve. ∎

Remarque 4.3.3. *Dans le résultat précèdent, l'opérateur compact K ne peut pas être identiquement nul. En effet, considérons l'opérateur compact K défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $Ke_n = \frac{1}{n}e_n$, alors il est évident que zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(K) = 0$. Mais si on suppose que K est d'ascente essentielle et de descente essentielle finies, alors d'après le théorème 4.3.1,* $\mathrm{R}(K^d)$ *est fermé, où $d :=$* $\mathrm{a_e}(K) = \mathrm{d_e}(K)$*; contradiction.*

Avant de commencer cette partie on rappelle quelques résultats et notions introduites par B. N. Sadovskii dans [44] et [40]. On dénote par $l^\infty(H)$ l'espace de Banach de toutes les suites bornées d'éléments de H muni de la norme sup et par $m(H)$ le sous espace fermé de $l^\infty(H)$ de toutes les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H tel que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est précompact.
Soit $\mathcal{P}(H) = l^\infty(H)/m(H)$. À partir d'un opérateur $T \in B(H)$ on défini un opérateur

$$T^\infty : l^\infty(H) \to l^\infty(H) \text{ par } T^\infty((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Comme $T^\infty(m(H)) \subseteq m(H)$, alors on peut définir un opérateur P(T) défini sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ tel que

$$\mathrm{P(T)} = 0 \Leftrightarrow T \text{ compact} \tag{4.1}$$

Et

$$\text{Si } \mathrm{R}(T) \text{ est fermé, alors } \mathrm{N}(\mathrm{P}(T)) = l^{\infty}(\mathrm{N}(T)) + m(H) \tag{4.2}$$

Lemme 4.3.4. *Soient M et N deux sous-espaces fermés de H tel que $M \subset N$, alors*
(i) Si $\dim N/M < \infty$, alors $l^{\infty}(M) + m(H) = l^{\infty}(N) + m(H)$
(ii) Si $\dim N/M = \infty$, alors $\dim(l^{\infty}(M) + m(H))/(l^{\infty}(N) + m(H)) = \infty$

Théorème 4.3.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ d'ordre d et $\mathrm{R}(T^d)$ et $\mathrm{R}(T^{d+1})$ sont fermés, alors $d = \mathrm{a_e}(T) = \mathrm{d_e}(T)$.*

Preuve. Soit Q la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(T^{d+1})$, alors $\pi(T^{d+1})\pi(Q) = 0$ et comme $d = \mathrm{a}(\pi(T))$, il vient que $\pi(T^d)\pi(Q) = 0$. D'autre part, comme $\mathrm{R}(T^d)$ est fermé, alors il en est de même pour $\mathrm{R}(T^dQ) = \mathrm{R}(T^d) \cap \mathrm{N}(T)$ et par conséquent $\mathrm{R}(T^d) \cap \mathrm{N}(T)$ est de dimension finie. De plus, comme $\mathrm{N}(T^{d+1})/\mathrm{N}(T^d)$ est isomorphe à $\mathrm{R}(T^d) \cap \mathrm{N}(T)$, alors $\mathrm{a_e}(T) \leq d$. D'autre part, par passage à l'adjoint, il résulte que $\dim \mathrm{R}(T^{*d}) \cap \mathrm{N}(T^*)$ est finie et donc codim $(\mathrm{N}(T^d) + \mathrm{R}(T))$ est finie. Enfin, d'après la formule(1.4), on conclut que $\mathrm{d_e}(T)$ est finie. Supposons maintenant que $\mathrm{a_e}(T) = \mathrm{d_e}(T) < d$, alors $\dim \mathrm{N}(T^d)/\mathrm{N}(T^{d-1})$ est finie. D'où d'après le lemme4.3.4, $\ell^{\infty}(\mathrm{N}(T^d)) + m(H) = \ell^{\infty}(\mathrm{N}(T^{d-1})) + m(H)$, et comme $\mathrm{R}(T^d)$ est fermé, alors $\mathrm{N}(\mathrm{P}(T^d)) \subseteq \mathrm{N}(\mathrm{P}(T^{d-1}))$. Donc $\mathrm{N}(\mathrm{P}(T^d)) = \mathrm{N}(\mathrm{P}(T^{d-1}))$. Finalement, si S est un opérateur tel que T^dS est compact alors il en est de même pour $T^{d-1}S$, ce qui implique que $\mathrm{a}(\pi(T)) < d$; contradiction. ∎

Notons que le sens inverse du théorème 4.3.5 n'est pas vrai en général. En effet ; si on considère l'opérateur compact K défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $Ke_{2p} = \frac{1}{p}e_{2p-1}$ et $Ke_{2p-1} = 0$, alors $\mathrm{a_e}(K) = \mathrm{d_e}(K) = 2$ et zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(K)$ d'ordre 1. Cependant, si on suppose que $\mathrm{R}(T^{d-1})$ est fermé on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.3.6. *Soit T un opérateur borné sur H, si $d := \mathrm{a_e}(T) = \mathrm{d_e}(T)$ est finie et $\mathrm{R}(T^{d-1})$ est fermé, alors zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$ d'ordre d.*

Preuve. Comme le théorème 4.3.2 assure que zéro est un pôle de la résolvante de $\pi(T)$, alors il suffit d'établir que $d = \mathrm{a}(\pi(T))$. D'abord, supposons que $n := \mathrm{a}(\pi(T)) < d$ et soit Q la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(T^d)$, alors $T^{d-1}Q$ est compact et donc $\mathrm{P}(T^{d-1}Q) = \mathrm{P}(T^{d-1})\mathrm{P}(Q) = 0$. On a $\ell^{\infty}(\mathrm{N}(T^d)) + m(H) = \ell^{\infty}(\mathrm{N}(T^{d-1})) + m(H)$. En effet ; soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{\infty}(\mathrm{N}(T^d))$, alors $\mathrm{P}(T^{d-1})(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} +$

$m(H)) = \mathrm{P}(T^{d-1})\mathrm{P}(Q)(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + m(H)) = 0$. Par conséquent $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + m(H) \in \mathrm{N}(\mathrm{P}(T^{d-1})) = \ell^\infty(\mathrm{N}(T^{d-1})) + m(H)$ puisque $\mathrm{R}(T^{d-1})$ est fermé. En utilisant maintenant le lemme4.3.4, on obtient que $\dim \mathrm{N}(T^d)/\mathrm{N}(T^{d-1})$ est finie ; contradiction. Donc $n \geq d$. Finalement, d'après le théorème4.3.1, $\mathrm{R}(T^n)$ et $\mathrm{R}(T^{n+1})$ sont fermés et par conséquent $n = d$ d'après le théorème 4.3.5. ∎

Bibliographie

[1] P. Aiena, Colasante, Maria Luisa and M. González, *Operators which have a closed quasi-nilpotent part*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2701-2710.

[2] P. Aiena, M. T. Biondi, *Ascent, descent, quasi-nilpotent part and analytic core of operators*, Mat. Vesnik 54 (2002), 57-70.

[3] C. Apostol, *The reduced minimum modulus*, Michigan Math. J. **32** (1985), 276-294.

[4] B. Aupetit, E. Makai Jr, M. Mbekhta, J. Zemánek, *The connected components of the idempotents in the Calkin algebra, and their liftings*, Operator theory and Banach algebras (Rabat, 1999), Theta, Bucharest, (2003), 23-30.

[5] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[6] D.Barraza, *Descent and closed range*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 341-344.

[7] B. Barnes, *Functional algebras, ideal properties and range inclusion*, Acta Sci. Math. (Szeged) 66 (2000) 245-256.

[8] S. K. Berberian, *The Weyl spectrum of an operator*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970), 529-544.

[9] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebeite, Band 80, Springer Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[10] L. G.Brown ; R. G.Douglas ; P. A.Fillmore, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras*. Proceedings of a Conference on Operator Theory (Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1973), pp. 58–128. Lecture Notes in Math., Vol. 345, Springer, Berlin, 1973.

[11] M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta, M.Oudghiri, *On the descent spectrum* , to appear in J. Oper. Theory.

[12] J.W.CALKIN, *Two-sides ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. of Math. (2) 42, (1941). 839–873.

[13] S.R. CARADUS, W.E. PFAFFENBERGER, Y. BERTRAM , *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1974.

[14] P. DE LA HARPE, *Initiation à l'algèbre de Calkin* (French), Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., 725, Springer, Berlin, 1979, 180-219.

[15] R. G. DOUGLAS, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic press 1972.

[16] R.G. DOUGLAS, *On majorization, factorisation and range inclusion of operators on Hilbert spaces* , Proc. Amer Math. Soc. 17 (1966) 413-415.

[17] I. GELFAND, M. NEUMARK, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space.* Corrected reprint of the 1943 original [MR 5, 147]. Contemp. Math., 167, C*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), 2–19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[18] S. GOLDBERG, *Unbounded linear operators, McGraw-Hill, Nw York, 1966*

[19] S. GRABINER, *Uniform ascent and descent of bounded operators*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982) 317-337.

[20] S. GRABINER AND J. ZEMÁNEK, *Ascent, descent, and ergodic properties of linear operators*, J. Oper. Theory 48 (2002) 69-81.

[21] D. HADWIN, *Lifting algebraic elements in C*-algebras*, J. Funct. Anal. 127 (1995), no. 2, 431-437.*

[22] P. R. HALMOS, *Capacity in banach algebra*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970), 855-863.

[23] H. HEUSER, *Functional Analysis* , Wiley, New York, 1982.

[24] T. KATO,*Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators*, J. D'analyse Math. 11 (1958), 261-322.

[25] M. A. KAASHOEK *Ascent, descent, nullity and defect* , a note an a paper by A.E.Taylor, Math. Annalen. 172 (1967),105-115.

[26] M. A. KAASHOEK, D. C. LAY , *Ascent, descent, and commuting perturbations*, Trans. Amer. Math. Soc. 169 (1972) 35-47.

[27] V. Kordula and V. Müller, *On the axiomatic theory of the spectrum*, Studia Math. 119 (1996), 109-128.

[28] J. P. Labrousse, *Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*, y Rend Circ. Mat. Palermo 29 (1980), 161-258.

[29] J. P. Labrousse,*The general local form of an analytic mapping into the set of idempotent elements of a Banach algebra*, (English. English summary) Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 11, 3467-3471.

[30] K. B. Laursen, *Operators with finite ascent*, Pacific J. Math. 157 (1992), 323-336.

[31] D. C. Lay, *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect*, Math. Ann. 184 (1970) 197-214.

[32] M. Mbekhta, *Généralisations de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math. J. 29 (1987), 159-175.

[33] M. Mbekhta, *Semi-Fredholm perturbations and commutators*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.113 (1993), 173-177.

[34] M. Mbekhta, *Résolvant généralisé et théorie spectrale*, J. Oper. Theory 21 (1989), 69-105.

[35] M. Mbekhta, *On the generalized resolvent in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 362-377.

[36] M. Mbekhta , *Sur la théorie spectrale locale et limite des nilpotents*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 621-631.

[37] M. Mbekhta and A. Ouahab, *Opérateur s-régulier dans un espace de Banach et théorie spectrale*, Acta Sci. Math. (Szeged) 59 (1994), 525-543.

[38] M. Mbekhta and A. Ouahab, *Perturbation des opérateurs s-réguliers*, Topics in operator theory, operator algebras and applications (Timişoara, 1994), 239-249, Rom. Acad., Bucharest, 1995.

[39] M. Mbekhta and V. Muller, *On the axiomatic theory of spectrum II* , Studia Math. 199 (1996) 129-147.

[40] V. Muller, *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*. Operator Theory : Advances and Applications, 139. Birkhäusser Verlag, Basel, 2003.

[41] C. L.Olsen and J.K. Plastiras, *Quasialgebraic operators, compact perturbation and the essential norm*. Michigan Math. J. 21 (1974), 385-397.

[42] C. L. Olsen, *A structure theorem for polynomially compact operators.* Amer. J. Math. **93** (1971), 686-698.

[43] M. Oudghiri, *Weyl's and Browder's theorems for operators satisfying the SVEP,* Studia math. 163 (2004), 85-101.

[44] B. N. Sadovskii, *Limit-compact and condensing operators,* (Russian) Uspehi Mat. Nauk **163** (1972), 81-146 (Russian), English transl. Russian Math. Surveys **27** (1972), 85-155.

[45] C. Schmoeger, *A note on Meromorphic operators,* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2004) 511-518.

[46] M. Schechter and R. Whitley, *Best Fredholm perturbation theorems* , Studia Math. **90** (1988), 175-190.

[47] M. Schechter and R. Whitley, *Best Frdholm perturbation theorems,* Studia Math. **90** (1988), 175-190.

[48] J. G. Stampfli, *Compact perturbation, normal eigenvalues and a problem of Salinas,* J. london Math.Soc. (2), 9 (1974), 165-175.

[49] A. E. Taylor, D.C. Lay , *Introduction to functional analysis* , Wiley, 1980.

[50] P. Vrbova, *On local spectral properties of operators in Banach spaces,* Czechoslovak Math. J. **23** (1973), 483-492.

[51] T.T.West, *The decomposition of riesz operaors,* Proc. London Math. Soc. 16 (1966), 737-752.

Notations

Index