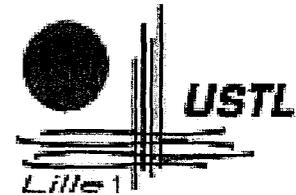
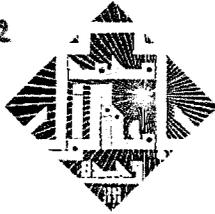


N° d'ordre : 4092



# THÈSE EN COTUTELLE

présentée

par

Youssef EL HASSOUANI

pour obtenir le grade de

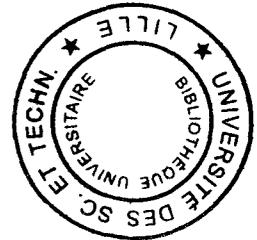
Docteur de l'Université d'Oujda

Spécialité : Physique des Matériaux

Docteur de l'Université de Lille 1

Spécialité : Microondes et Microtechnologies

Thème



Contribution à l'étude des structures phononiques et photoniques  
unidimensionnelles périodiques et quasi-périodiques : Super-réseaux  
solide-fluide et guides monomodes

Soutenue le 15 Décembre 2007 devant le jury composé de :

Président : A. Nougouai Professeur, Faculté des Sciences d'Oujda

Examineurs :

D. Bria Professeur, Faculté des Sciences d'Oujda

A. Khelif Docteur, Chargé de recherche au CNRS à Besançon

M.L.H. Lahlaouti Professeur, Université Abdelmalek Essaadi, Tetouan

V. R. Velasco Professeur, Instituto de Ciencia de Materiales, Madrid

Directeurs de thèse : E. H. El Boudouti Professeur, Faculté des Sciences d'Oujda

B. Djafari-Rouhani Professeur, Université de Lille 1

## Résumé

Ce travail de thèse présente une contribution à l'étude de la propagation et la localisation des ondes acoustiques et électromagnétiques dans les cristaux phononiques et photoniques unidimensionnels.

Notre intérêt a porté principalement sur la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux multicouches périodiques de type solide-fluide et les ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes monomodes quasi-périodiques. L'objectif étant de chercher de nouveaux matériaux avec des bandes interdites larges et étudier l'effet de la présence des inhomogénéités (défaut) dans ces structures telles que : la surface libre, l'interface avec un substrat homogène ou l'existence d'une cavité. Ces résultats sont obtenus à partir d'un calcul analytique détaillé des fonctions de Green qui nous a permis de déterminer les relations de dispersion, les densités d'états locale et totale et les différents coefficients de transmission et de réflexion ainsi que les temps de phase correspondants.

Dans le cas des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les super-réseaux solide-fluide, nous avons mis en évidence l'existence et le comportement des modes de surface et d'interface ainsi qu'une règle générale sur l'existence de ces modes. Aussi, nous avons montré que ces systèmes peuvent présenter des gaps omnidirectionnels qui réfléchissent les ondes quelque soit l'angle d'incidence (miroirs acoustiques) ainsi qu'une transmission sélective à travers les modes de défaut et d'interface (filtres acoustiques)

Dans le cas des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes monomodes quasi-périodiques (de type Fibonacci) à base de câbles coaxiaux, nous avons mis en évidence certaines propriétés liées à ces systèmes telles que l'auto-similarité avec un facteur d'échelle dans le cas d'une seule séquence de Fibonacci. Aussi, Il a été montré que ces systèmes peuvent présenter dans certaines régions de fréquences, des vitesses subluminiques et superluminiques. Dans le cas des séquences périodiques de Fibonacci, nous avons montré des propriétés liées aux bandes permises telles que la fragmentation des spectres de fréquences selon une loi en puissance ainsi que deux types de modes de surface. Les modes de volume et de surface dans ces structures peuvent présenter des comportements liés aux systèmes multifractals. Tous ces résultats sont obtenus à partir de la mesure de l'amplitude et la phase de la transmission à travers ces cristaux photoniques placés soit horizontalement entre deux guides soit verticalement sur un guide. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats théoriques.

**Mots-clés** : super-réseau, solide-fluide, guide d'onde, onde acoustique, onde électromagnétique, périodique, quasi-périodique, Fibonacci, surface, interface, défaut, fractal.

# TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale1

I. <i>Éléments sur la théorie de réponse d'interface des matériaux composites</i> . . . . .	6
I.1 Introduction . . . . .	7
I.2 Formalisme de la théorie de réponse d'interface . . . . .	7
I.2.1 Equations générales pour un système composite discret . . . . .	7
I.2.2 Equations générales pour un système composite continu . . . . .	10
I.3 Fonction de Green en théorie d'élasticité pour un solide et un fluide infini, semi-infini et fini . . . . .	11
I.3.1 Solide infini . . . . .	11
I.3.2 Solide semi-infini . . . . .	12
I.3.3 Lamé mince solide . . . . .	13
I.3.4 Fluide infini . . . . .	14
I.3.5 Fluide non visqueux semi-infini . . . . .	15
I.3.6 Lamé mince d'un fluide non visqueux . . . . .	15
I.4 Fonction de Green d'un câble coaxial infini, semi-infini et fini . . . . .	16
I.5 Conclusion . . . . .	17

Première partie : Cristaux Phononiques18

II. <i>Modes sagittaux de surface et d'interface dans les super-réseaux semi-infinis solide- fluide</i> . . . . .	20
II.1 Introduction . . . . .	21
II.2 Fonction de Green d'un super-réseau infini et semi-infini . . . . .	22

II.2.1	Super-réseau infini . . . . .	24
II.2.2	Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulation fluide . . . . .	25
II.2.3	Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulation solide . . . . .	29
II.3	Densités d'états . . . . .	33
II.4	Résultats numériques et discussions . . . . .	34
II.4.1	Super-réseau semi-infini en contact avec le vide . . . . .	36
II.4.2	Super-réseau semi-infini en contact avec un fluide homogène semi- infini . . . . .	44
II.4.3	Super-réseau semi-infini en contact avec un solide . . . . .	49
II.5	Conclusion . . . . .	50
<i>III.</i>	<i>Ondes acoustiques sagittales dans un super-réseau solide-fluide fini . . . . .</i>	<i>52</i>
III.1	Introduction . . . . .	53
III.2	Fonction de Green des super-réseaux finis solide-fluide dans différentes géométries . . . . .	54
III.3	Calcul du coefficient de transmission et de réflexion à travers un super- réseau fini . . . . .	59
III.3.1	Super-réseau fini sans défaut . . . . .	59
III.3.2	Super-réseau fini avec un défaut de type fluide . . . . .	60
III.3.3	Super-réseau fini avec un défaut de type solide . . . . .	62
III.4	Résultats numériques et discussions . . . . .	63
III.4.1	Règle générale sur les modes de surface et les modes confinés . . . . .	64
III.4.2	Coefficients de transmission et de réflexion . . . . .	65
III.4.2.1	Super-réseau fini en contact avec le fluide d'un coté et le vide de l'autre coté . . . . .	65
III.4.2.2	Super-réseau fini pris en sandwich entre deux fluides . . . . .	66
III.4.3	Miroir acoustique omnidirectionnel . . . . .	74
III.4.4	Transmission sélective . . . . .	79
III.5	Conclusion . . . . .	82
Deuxième partie : Cristaux Photoniques85		
<i>IV.</i>	<i>Propagation et localisation des ondes électromagnétiques dans les structures de boucles quasi-périodiques . . . . .</i>	<i>87</i>

IV.1	Introduction . . . . .	88
IV.2	Modèle théorique . . . . .	90
IV.2.1	Fonctions de Green inverses des constituants élémentaires . . . . .	90
IV.2.2	Coefficient de transmission . . . . .	92
IV.2.3	Relation de dispersion pour une séquence périodique infinie et semi- infinie . . . . .	93
IV.3	Dispositif expérimental . . . . .	94
IV.4	Résultats numériques et expérimentaux . . . . .	95
IV.4.1	Cas où le bloc $A$ est un segment et le bloc $B$ est une boucle . . . . .	95
IV.4.1.1	Cas de la séquence verticale . . . . .	102
IV.4.2	Cas où les blocs $A$ et $B$ sont chacun formés d'une boucle connectée à un segment . . . . .	108
IV.5	Conclusion . . . . .	113
V.	<i>Ondes électromagnétiques de surface dans les super-réseaux de Fibonacci : théorie et mise en évidence expérimentale . . . . .</i>	115
V.1	Introduction . . . . .	116
V.2	Modèle et formalisme théorique . . . . .	117
V.2.1	Formalisme théorique . . . . .	118
V.2.2	Relations de dispersion et fonctions de Green . . . . .	119
V.2.3	Densité d'états . . . . .	121
V.3	Résultats Numériques et expérimentaux . . . . .	122
V.3.1	Modes de volume . . . . .	122
V.3.2	Modes de surface : Résultats numériques . . . . .	125
V.3.3	Modes de surface : Résultats expérimentaux . . . . .	134
V.4	Conclusions . . . . .	140
	<i>Conclusion générale . . . . .</i>	141
	<i>Appendice A . . . . .</i>	145
	<i>Appendice B . . . . .</i>	147

*Annexe : Comment on "Sensitivity of surface states to the stack sequence of one-dimensional photonic crystals" J. Opt. A : Pure and Appl. Opt. 9 (2007) 308-313155*

*Bibliographie . . . . . 162*

Durant les deux dernières décennies, la propagation des ondes acoustiques et électromagnétiques dans les milieux lamellaires périodiques unidimensionnels (1D) a fait l'objet d'un grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux en raison des propriétés physiques nouvelles observées dans ces structures en comparaison avec les milieux massifs[1, 2]. Une propriété essentielle de ces structures est l'existence de bandes interdites dues à la différence entre les caractéristiques acoustiques et diélectriques des matériaux constituants qui sont arrangés de façon périodique à l'intérieur de ces systèmes. Dans le domaine de fréquences des bandes interdites, ces matériaux peuvent avoir des applications dans le guidage, le filtrage et le confinement des ondes. Dans ce travail, nous nous intéressons aux propriétés de vibrations (phonons acoustiques) dans les cristaux phononiques unidimensionnels formés à partir de multicouches solide-fluide et aux propriétés électromagnétiques (Photons) dans les cristaux photoniques à base de câbles coaxiaux.

La première partie de ce travail concerne la propagation et la localisation des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les super-réseaux (SRs) solide-fluide. L'étude des phonons acoustiques dans les SRs a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années[3–9], essentiellement depuis la première observation[10] en 1980, des doublets associés aux modes repliés dans la première minizone de Brillouin du SR. Les états propagatifs dans ces structures forment les bandes de volume qui sont séparées par des bandes interdites appelées aussi mini-gaps. Dans ces mini-gaps peuvent exister des états localisés liés aux perturbations apportées au système initial telles que l'introduction d'une surface

libre (avec ou sans couche d'encapsulation)[11–21], une interface SR/substrat[13, 22–24], une couche défaut (cavité) à l'intérieur du SR[25–31], ainsi qu'une couche tampon[17] (une couche encastrée entre le substrat et le SR).

Plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont été consacrés à l'étude de ces structures, la majeure partie d'entre eux portant sur les SRs solide-solide[4, 5, 9, 32]. Les modèles utilisés sont souvent la matrice de transfert[4, 33] et la fonction de Green[11, 12, 34]. Sur le plan expérimental, les techniques utilisées essentiellement sont : la spectroscopie[35–39], la diffusion Raman[10, 40–43], les ultrasons[44–47] et la diffraction des rayons X résolue en temps[22]. Cependant, peu de travaux ont traité le cas des SRs solide-fluide. Les premiers travaux sur ces systèmes ont été développés par Rytov[48] et par Brekhovskikh[1]. Plus tard, Shöenberg[49] et Rousseau[50] ont établi la structure de bande d'un SR solide-fluide. Ces résultats ont été confirmés expérimentalement par les ultrasons dans des SRs de types Al-eau et plexiglas-eau[51]. Aussi, il a été démontré à travers des spectres de transmission théorique et expérimentaux que ces SRs peuvent présenter de larges gaps[52–54] et la présence des couches défauts dans ces structures peut donner lieu à des modes localisés bien définis dans ces gaps[53]. Récemment[55], des expériences réalisées sur des lames de plexiglas séparées par des cavités d'eau caractérisées par un gradient d'épaisseur, ont montré l'existence des oscillations de Bloch (de type Wannier-Stark Ladder) analogues à celles observées pour les états électroniques dans les SRs semi-conducteurs polarisés[56].

Le modèle de calcul que nous avons appliqué dans ce travail est basé sur le formalisme de la théorie de réponse d'interface[57]. Cette méthode nous a permis de déterminer les densités d'états locales et totales ainsi que les coefficients de transmission et de réflexion aux différentes interfaces. Nous donnons analytiquement les fonctions de Green dans ces hétérostructures pour les modes de vibration sagittale. Nous discutons en détail, les relations de dispersion des modes localisés et résonants dans les SRs semi-infinis[58] (avec une surface libre recouverte ou non d'une couche d'encapsulation, ou en contact avec un substrat). En second lieu, nous avons examiné l'effet de la taille finie du SR solide-fluide sur la répartition des modes[59]. Ainsi, nous avons mis en évidence d'autres propriétés et caractéristiques liés aux SRs finis solide-fluide, à savoir, les zéros de transmission et de réflexion, les résonances de type Fano, l'origine des croisements des bandes et des gaps, l'angle de Brewster. Aussi, nous avons montré que ces structures possèdent la propriété de réflexion omnidirectionnelle des ondes acoustiques (miroirs acoustiques), i.e., elles permettent la réflexion des ondes quelque soit l'angle d'incidence et la polarisation des ondes

---

de la même façon que dans les systèmes phononiques 2D et 3D[60–62]. En insérant des défauts dans ces structures, on montre qu’elles peuvent jouer le rôle de filtres sélectifs. Ces différents résultats associés à ces systèmes ont été examinés et analysés en terme de spectres de transmission et de réflexion, temps de phase et densités d’états.

La deuxième partie de ce travail concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d’ondes quasi-unidimensionnels. L’étude des ondes électromagnétiques dans les multicouches 1D[63, 64, 66–74] a connu un grand intérêt depuis plusieurs années. L’idée est de mettre en évidence plusieurs propriétés importantes dans le domaine optique et optoélectronique. Du point de vue pratique, ces structures ont été proposées pour réaliser des microcavités optiques[75] et des réflecteurs omnidirectionnels[76], ainsi que dans la conception des circuits optiques comme les capteurs et les modulateurs[77–82].

Récemment, une attention particulière a été portée à l’étude des cristaux photoniques quasi-unidimensionnels formés de câbles coaxiaux[83–89]. Ces systèmes reproduisent des résultats analogues aux multicouches optiques, mais dans le domaine des radio-fréquences. Ces structures sont constituées soit d’une alternance de câbles coaxiaux d’impédances différentes, soit de structures sous forme de peigne ou de boucles[88–93]. Des structures quasi-périodiques (type Fibonacci)[90–93], fractales (type Sierpinski)[94] ou désordonnées[95] ont aussi été étudiées en utilisant des câbles coaxiaux. Les cristaux photoniques formés de ces câbles sont évidemment beaucoup plus simples pour l’étude de ces différents effets en comparaison avec leurs analogues multicouches puisqu’ils demandent un équipement simple. Les sections transversales de ces guides sont faibles par rapport à la longueur d’onde des ondes qui s’y propagent. Par conséquent, la propagation devient monomode[96] et on peut obtenir des résultats expérimentaux très précis qui peuvent être reproduits en utilisant un modèle simple 1D. En plus, contrairement aux systèmes multicouches 1D et les différents systèmes 2D et 3D où le contraste entre les constantes diélectriques des constituants joue un rôle primordiale dans la création des gaps, les guides quasi-unidimensionnels peuvent présenter de larges gaps même si les matériaux qui les constituent sont identiques.

Dans cette partie de notre travail, on s’est intéressé particulièrement aux cas des structures quasi-périodiques de type Fibonacci[90–93] caractérisées par une règle mathématique de substitution formée à partir de deux blocs  $A$  et  $B$  qui s’écrit  $S_{j+1} = S_j S_{j-1}$ , où  $j$  est le numéro de la génération. Par exemple :  $S_1 = A$ ,  $S_2 = AB$ ,  $S_3 = ABA$ ,  $S_4 = ABAAB$ ,  $S_5 = ABAABABA$ , ... Le nombre de blocs dans chaque génération est  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

---

avec  $F_1 = 1$  et  $F_2 = 2$ . En particulier, nous avons étudié les différentes propriétés de propagation et de localisation des ondes électromagnétiques en considérant soit une séquence de Fibonacci seule, soit une séquence donnée répétée périodiquement appelée SR de Fibonacci. Nous avons calculé et mesuré le coefficient de transmission (amplitude et phase) lorsque ces structures sont soit insérées entre deux guides, soit greffées verticalement le long d'un guide.

Dans le cas d'une seule séquence de Fibonacci[92], une analyse aussi bien théorique qu'expérimentale de l'amplitude et la phase du coefficient de transmission nous a permis de déduire différentes informations sur la propagation des ondes dans une séquence de Fibonacci donnée, à savoir : le temps de phase et par conséquent la densité d'états ainsi que la vitesse de groupe. En particulier, ces structures présentent dans certaines régions de fréquences des vitesses subluminiques ou superluminiques[92]. En outre, nous avons mis en évidence différentes propriétés d'auto-similarité et loi d'échelle des spectres de transmission ainsi qu'une analyse des modes propres de ces structures avec différentes conditions aux limites sur leurs extrémités. Dans le cas des SRs de Fibonacci[93], on s'est intéressé à l'étude de l'existence et le comportement des modes localisés de surface dans ces structures. Nous avons ainsi pu généraliser une règle théorique sur l'existence des modes de surface, à savoir, lorsqu'on considère deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini, il existe exactement un mode de surface par gap. Ce mode est localisé à la surface de l'un des deux SRs semi-infinis complémentaires. Différents types de modes de surface ont été trouvés et leurs localisations spatiales ont été analysées ainsi que leurs comportement multifractal.

L'observation expérimentale de ces modes est réalisée d'une façon originale, à savoir en mesurant la transmission à travers un guide droit sur lequel est greffé verticalement un SR fini, c'est-à-dire constitué d'un nombre fini de cellules quasi-périodiques. Les modes de surface apparaissent comme des maxima dans le spectre de transmission. Nous avons aussi mis en évidence la loi d'échelle sur la subdivision des bandes permises en fonction du numéro de génération et l'existence de deux types de gaps (stable et transitoires).

Finalement, nous avons montré théoriquement et expérimentalement l'existence de deux types de modes dans un SR fini composé de  $N$  cellules[88], à savoir :  $N-1$  modes propres dans chaque bande et un mode par gap qui est indépendant de  $N$ . Ce mode appartient à l'une des deux surfaces qui délimitent le SR fini.

---

Rappelons que le point commun entre ces deux parties (Phononique et Photonique), réside particulièrement dans les méthodes de calculs utilisées. Elles sont basées principalement sur le formalisme de la théorie de réponse d'interface (fonction de Green)[11, 12, 34] et quelquefois la méthode de la matrice de transfert[4, 33]. Du point de vue des résultats, les deux parties traitent les modes de surface qui présentent un intérêt pratique pour la caractérisation des propriétés acoustiques et diélectriques de ces matériaux ainsi que pour les phénomènes de guidage ou filtrage des ondes qui peuvent en résulter.

Ce travail est structuré de la façon suivante :

Dans le chapitre I, nous rappelons brièvement la théorie de réponse d'interface des matériaux composites continus, qui est à la base des différents calculs menés dans cette thèse. La première partie de cette thèse, traite les ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les SRs semi-infinis solide-fluide (chapitre II) et les SRs de taille finie (chapitre III). La deuxième partie de cette thèse est consacrée aux ondes électromagnétiques dans les structures quasi-périodiques composées soit d'une séquence de Fibonacci (chapitre IV) soit d'un SR de Fibonacci (chapitre V).

Éléments sur la théorie de réponse d'interface des  
matériaux composites

## Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>I.2</b>	<b>Formalisme de la théorie de réponse d'interface</b> . . . . .	<b>7</b>
I.2.1	Equations générales pour un système composite discret . . . . .	7
I.2.2	Equations générales pour un système composite continu . . . . .	10
<b>I.3</b>	<b>Fonction de Green en théorie d'élasticité pour un solide et un fluide infini, semi-infini et fini</b> . . . . .	<b>11</b>
I.3.1	Solide infini . . . . .	11
I.3.2	Solide semi-infini . . . . .	12
I.3.3	Lame mince solide . . . . .	13
I.3.4	Fluide infini . . . . .	14
I.3.5	Fluide non visqueux semi-infini . . . . .	15
I.3.6	Lame mince d'un fluide non visqueux . . . . .	15
<b>I.4</b>	<b>Fonction de Green d'un câble coaxial infini, semi-infini et fini</b>	<b>16</b>
<b>I.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>17</b>

---

## I.1 Introduction

La recherche sur les matériaux est la découverte et l'étude des propriétés de formes nouvelles de la matière condensée. Sur le plan théorique, l'une des méthodes qui permet d'aborder les propriétés physiques soit pour les systèmes continus (élasticité, électromagnétisme, structure électronique, ...) soit pour les systèmes discrets (dynamique des cristaux, approximation des liaisons fortes, ...), est le formalisme de la fonction de Green[34, 97, 98]. Dans ce contexte une nouvelle méthode de calcul a été développée, intitulée théorie de réponse d'interface[99]. Cette méthode nous permet de calculer la fonction réponse (dite aussi fonction de Green) afin d'obtenir toutes les propriétés physiques du système composite étudié. La connaissance des fonctions de Green de chacun des constituants d'un matériau composite nous permet, à l'aide de la théorie de réponse d'interface[99], de calculer la fonction réponse correspondante et par conséquent, les relations de dispersion des modes propres et leurs vecteurs propres, les densités d'états ainsi que les coefficients de transmission et de réflexion. Dans ce travail, nous allons étudier deux types de systèmes : i) les systèmes composites lamellaires élastiques pour l'étude des ondes acoustiques dans les systèmes solide-fluide et ii) les systèmes diélectriques pour l'étude des ondes électromagnétiques dans les câbles coaxiaux. Ces structures sont considérées comme des milieux continus qui nécessitent l'utilisation du modèle continu de la théorie de réponse d'interfaces. Dans ce qui suit, nous présentons l'ensemble des ingrédients utiles pour tous les chapitres qui suivent.

### I.2 Formalisme de la théorie de réponse d'interface

#### I.2.1 Equations générales pour un système composite discret

Soit un matériau homogène infini  $i$  [Fig. :I.1(a)] défini dans un espace  $D_\infty^i$  auquel on associe un opérateur  $\overleftrightarrow{H}_i$ . La fonction réponse  $\overleftrightarrow{G}_i$  de ce matériau n'est autre que l'inverse de l'opérateur  $\overleftrightarrow{H}_i$  et est définie par :

$$\overleftrightarrow{H}_i \overleftrightarrow{G}_i = \overleftrightarrow{I}, \quad \text{dans } D_\infty^i \quad (\text{I.1})$$

où  $\overleftrightarrow{I}$  est l'opérateur identité.

A partir de ce système (matériau) infini, on crée à l'aide de l'opérateur de clivage  $\overleftrightarrow{V}_{si}$ , un

matériau occupant l'espace  $D_i$  [Fig :I.1(b)], et délimité par des surface libres  $M_{ij}$  ( $i$  décrit l'espace  $D_i$ ,  $j$  indique l'indice d'une interface du matériau  $i$ ) et on lui associe l'opérateur  $\overleftrightarrow{h}_{si}$ , tel que :

$$\overleftrightarrow{h}_{si} = \overleftrightarrow{H}_i + \overleftrightarrow{V}_{si}, \quad \text{dans } D_i. \quad (\text{I.2})$$

La fonction réponse correspondante est définie par :

$$\overleftrightarrow{h}_{si} \overleftrightarrow{g}_{si} = \overleftrightarrow{I}, \quad (\text{I.3})$$

$\overleftrightarrow{H}_i$  et  $\overleftrightarrow{h}_{si}$  peuvent être selon les propriétés à étudier, une matrice dynamique, un hamiltonien,...

On définit l'opérateur réponse de surface par :

$$\overleftrightarrow{A}_{si} = \overleftrightarrow{V}_{si} \overleftrightarrow{G}_i, \quad \text{dans } D_i. \quad (\text{I.4})$$

Les éléments  $V_{si}(n, n')$  de cet opérateur sont nuls si  $n \notin M_i$ , où  $M_i \equiv \cup M_{ij}$  est l'espace des interfaces.

La connaissance de la fonction réponse de volume  $\overleftrightarrow{G}_i$  et de l'opérateur réponse de surface  $\overleftrightarrow{A}_{si}$ , nous permet de déduire la fonction réponse  $\overleftrightarrow{g}_{si}$  d'un matériau homogène avec surface libres (Equation de Dyson) :

$$\overleftrightarrow{g}_{si} (\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{A}_{si}) = \overleftrightarrow{G}_i, \quad \text{dans } D_i. \quad (\text{I.5})$$

D'autre part, en considérant des matrices rectangulaires  $\overleftrightarrow{A}_{si}(M_i D_i)$ , l'équation précédente s'écrit

$$\overleftrightarrow{g}_{si}(D_i D_i) = \overleftrightarrow{G}_i(D_i D_i) - \overleftrightarrow{G}_i(D_i M_i) \overleftrightarrow{\Delta}_{si}^{-1}(M_i M_i) \overleftrightarrow{A}_{si}(M_i D_i), \quad \text{dans } D_i \quad (\text{I.6})$$

avec

$$\overleftrightarrow{\Delta}_{si}(M_i M_i) = \overleftrightarrow{I}(M_i M_i) + \overleftrightarrow{A}_{si}(M_i M_i), \quad \text{dans } M_i. \quad (\text{I.7})$$

Une forme particulière de l'équation (I.6) est :

$$\overleftrightarrow{g}_{si}^{-1}(M_i M_i) = \overleftrightarrow{\Delta}_{si}(M_i M_i) \overleftrightarrow{G}_i^{-1}(M_i M_i), \quad \text{dans } M_i \quad (\text{I.8})$$

où  $\overleftrightarrow{\Delta}_{si}^{-1}(M_i M_i)$ ,  $\overleftrightarrow{g}_{si}^{-1}(M_i M_i)$  et  $\overleftrightarrow{G}_i^{-1}(M_i M_i)$  sont respectivement les inverses des matrices  $\overleftrightarrow{\Delta}_{si}(M_i M_i)$ ,  $\overleftrightarrow{g}_{si}(M_i M_i)$  et  $\overleftrightarrow{G}_i(M_i M_i)$

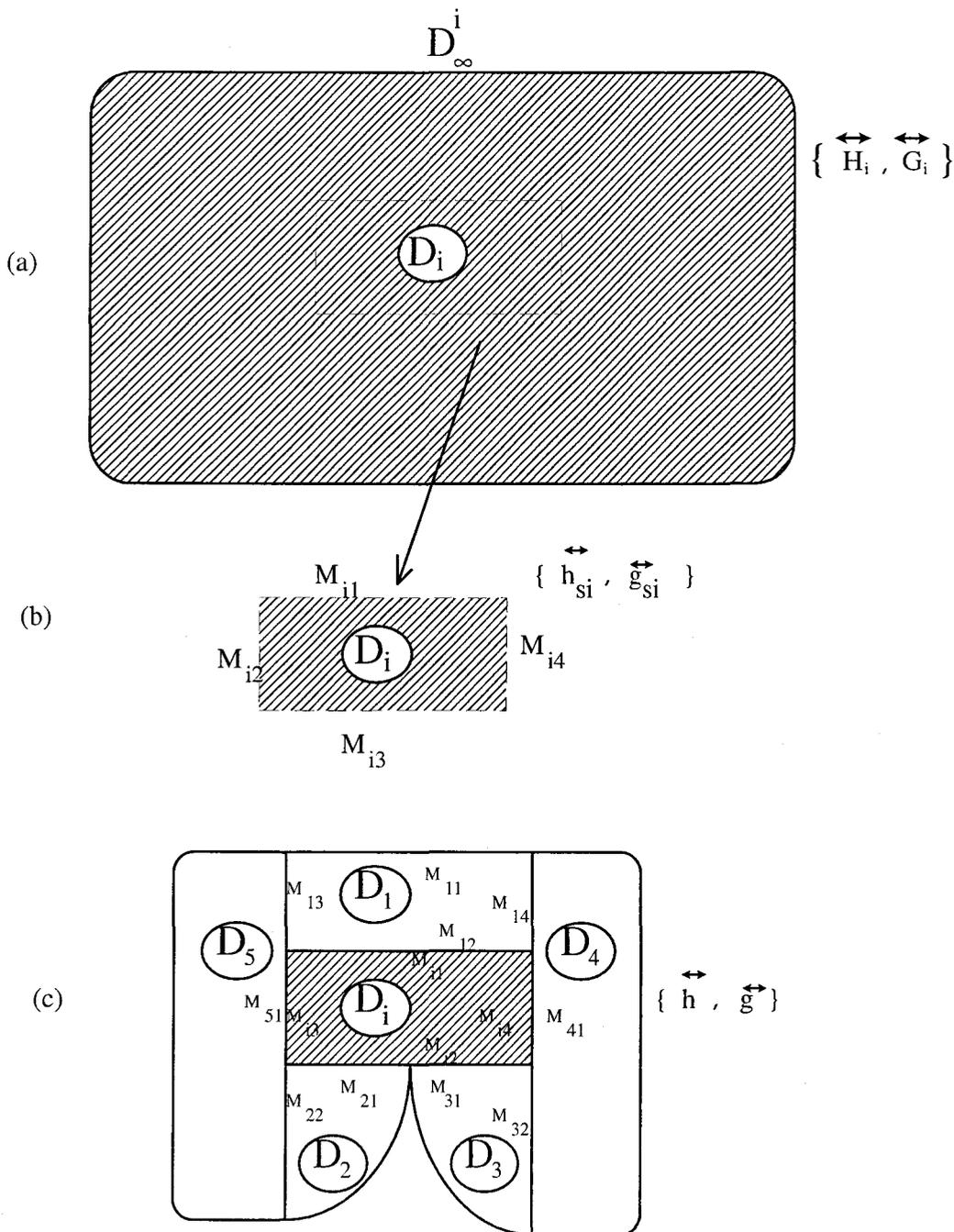


Fig. I.1: Formation d'un matériau composite (c), défini dans l'espace  $D$  ( $D = \bigcup D_i$ ), à partir de différents sous-systèmes définis dans leurs espaces d'existence  $D_i$ (b). Chacun de ces derniers est découpé de son système de référence infini défini dans l'espace  $D_\infty^i$ (a).

### I.2.2 Equations générales pour un système composite continu

Soit un système composite défini dans l'espace  $D$  et formé de sous-systèmes définis respectivement dans leurs espaces d'existence  $D_i (D \equiv \cup D_i)$  [Fig :I.1(c)]. Ces sous-systèmes sont assemblés par leurs domaines d'interfaces  $M_i \in D_i$ . Chaque sous-système  $i$  est en général en interaction avec  $J$  autres sous-systèmes. Ainsi, l'espace d'interface  $M_i$  est en général composé de  $J$  sous-interfaces  $M_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq J$ ; et l'ensemble de tous les espaces  $M_i$  est appelé espace d'interface  $M$  du matériau composite ( $M \equiv \cup M_i$ ).

La fonction réponse d'un tel système s'écrit[99, 100]

$$g(DD) = G(DD) - G(DM)G^{-1}(MM)G(MD) + G(DM)G^{-1}(MM)g(MM)G^{-1}(MM)G(MD). \quad (I.9)$$

Cette équation permet le calcul de tous les éléments de la fonction réponse  $g(DD)$  une fois connus ceux dans l'espace des interfaces  $g(MM)$ . Or ces derniers s'obtiennent par une superposition des différentes  $g_{si}^{-1}(M_{ij}M_{i'j'})$  (I.8) associées aux différents sous-systèmes  $i$  constituant le système composite[57, 101] :

$$\begin{cases} g^{-1}(M_{ij}, M_{i'j'}) = 0 & M_{i'j'} \notin M_i \\ g^{-1}(M_{ij}, M_{ij'}) = g_{si}^{-1}(M_{ij}, M_{ij'}) & j \neq j' \\ g^{-1}(M_{ij}, M_{ij}) = \sum_{i'} g_{si'}^{-1}(M_{ij}, M_{i'j'}) & M_{i'j'} \equiv M_{ij} \end{cases} \quad (I.10)$$

Toutes les conditions aux limites aux interfaces sont satisfaites à travers les équations (I.10).

Les nouveaux modes associés aux interfaces du système composite sont donnés par l'équation :

$$\det[g^{-1}(MM)] = 0. \quad (I.11)$$

Si  $|U(D)\rangle$  représente la déformation du système de référence, l'équation (I.9) nous permet de calculer la déformation  $|u(D)\rangle$  du matériau composite[102]

$$|u(D)\rangle = |U(D)\rangle - G(DM)G^{-1}(MM)|U(M)\rangle + G(DM)G^{-1}(MM)g(MM)G^{-1}(MM)|U(M)\rangle \quad (I.12)$$

En particulier, si  $|U(D)\rangle$  représente une onde de volume se propageant dans un milieu homogène du système composite, l'équation (I.12) nous permet de calculer toutes les ondes réfléchies et transmises par les différentes interfaces. L'équation (I.12) nous permet aussi de calculer les vecteurs propres correspondant aux modes d'interface. En effet, seulement le troisième terme de l'équation (I.12) est nécessaire pour obtenir les vecteurs propres non normalisés associés aux valeurs propres données par la relation (I.11), soit [57, 101]

$$|u(D)\rangle \propto G(DM)G^{-1}(MM)\det[g^{-1}(MM)]g(MM)G^{-1}(MM)|U(M)\rangle \quad (\text{I.13})$$

### I.3 Fonction de Green en théorie d'élasticité pour un solide et un fluide infini, semi-infini et fini

#### I.3.1 Solide infini

Un système lamellaire quelconque peut-être construit à partir de milieux semi-infinis et/ou de lames minces. Par conséquent, nous allons rappeler d'abord les expressions des fonctions de Green en élasticité correspondant soit à un milieu semi-infini, soit à une lame mince formés tous de milieux isotropes. Ces calculs peuvent aussi facilement être étendus [103] à des cristaux hexagonaux avec des surfaces (0001) ainsi qu'aux cristaux cubiques avec une surface (001) et une propagation selon les axes [100] et [110]. Dans la suite, on appellera  $x_3$  l'axe qui est perpendiculaire aux surfaces et on supposera que le vecteur d'onde  $k_{//}$  (parallèle aux surfaces) est dirigé selon l'axe  $x_1$ . En raison du découplage entre les vibrations transverses polarisées suivant la direction  $x_2$  et celles polarisées dans le plan sagittal  $(x_1, x_3)$  [103], on peut étudier séparément ces deux types de vibrations. La résolution de l'équation (I.1) permet de déduire les éléments de la fonction de Green de volume d'un milieu isotrope [104, 105]. Dans le cas de la vibration transverse, la fonction de Green entre deux points  $x_3$  et  $x_3'$  s'écrit sous la forme :

$$G(x_3, x_3') = -\frac{1}{2\alpha_t \rho_s v_t^2} e^{-\alpha_t |x_3 - x_3'|} \quad (\text{I.14})$$

Dans le cas de la polarisation sagittale, la fonction de Green s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$G(x_3, x'_3) = \begin{pmatrix} -\frac{k_{//}^2}{2\rho_s\omega^2\alpha_t}[e^{-\alpha_t|x_3-x'_3|} - \zeta e^{-\alpha_\ell|x_3-x'_3|}] & \frac{ik_{//}}{2\rho_s\omega^2}\text{sgn}(x_3 - x'_3)[e^{-\alpha_t|x_3-x'_3|} - e^{-\alpha_\ell|x_3-x'_3|}] \\ \frac{ik_{//}}{2\rho_s\omega^2}\text{sgn}(x_3 - x'_3)[e^{-\alpha_t|x_3-x'_3|} - e^{-\alpha_\ell|x_3-x'_3|}] & -\frac{k_{//}^2}{2\rho_s\omega^2\alpha_t}[e^{-\alpha_t|x_3-x'_3|} - \zeta e^{-\alpha_\ell|x_3-x'_3|}] \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

où

$$\alpha_t^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{v_t^2}, \quad \alpha_\ell^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{v_\ell^2}, \quad \text{et } \zeta = \frac{\alpha_t\alpha_\ell}{k_{//}^2}.$$

$v_t$ ,  $v_\ell$  et  $\rho_s$  sont, respectivement, les vitesses de cisaillement (transverse), de compression (longitudinale) et la densité du matériau.

### I.3.2 Solide semi-infini

Considérons maintenant un cristal semi-infini situé dans le demi-espace  $x_3 \geq 0$  (Fig : I.2).

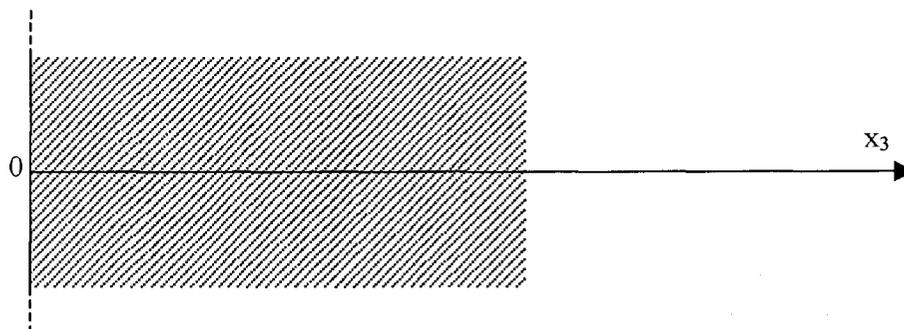


Fig. I.2: Système semi-infini

L'inverse de la fonction de Green à la surface  $x_3 = 0$  est obtenu à partir des équations (I.4), (I.7) et (I.8), soit[105]

$$g^{-1}(0, 0) = -\alpha_t\rho_s v_t^2 \quad (\text{I.16})$$

pour les vibrations de polarisation transverse, et

$$g^{-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_t\omega^2\rho_s}{k_{//}^2(1-\zeta)} & i\rho_s k_{//} \left[ -2v_t^2 + \frac{\omega^2}{k_{//}^2(1-\zeta)} \right] \\ -i\rho_s k_{//} \left[ -2v_t^2 + \frac{\omega^2}{k_{//}^2(1-\zeta)} \right] & -\frac{\alpha_t\omega^2\rho_s}{k_{//}^2(1-\zeta)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.17})$$

pour les vibrations de polarisation sagittale.

Notons que si le système occupe le demi-espace  $x_3 \leq 0$ ,  $g^{-1}(0, 0)$  a les mêmes expressions que (I.16) et (I.17), mais avec un changement de signe des termes non diagonaux qui couplent les composantes  $x_1$  et  $x_3$  dans l'équation (I.17).

### I.3.3 Lamme mince solide

Pour une lamme mince élastique d'un matériau solide d'épaisseur  $d_s$ , telle que  $-\frac{d_s}{2} \leq x_3 \leq +\frac{d_s}{2}$  (Fig : I.3), l'espace des interfaces est composé de deux états  $\{|-\frac{d_s}{2}, x_2\rangle, |+\frac{d_s}{2}, x_2\rangle\}$  pour

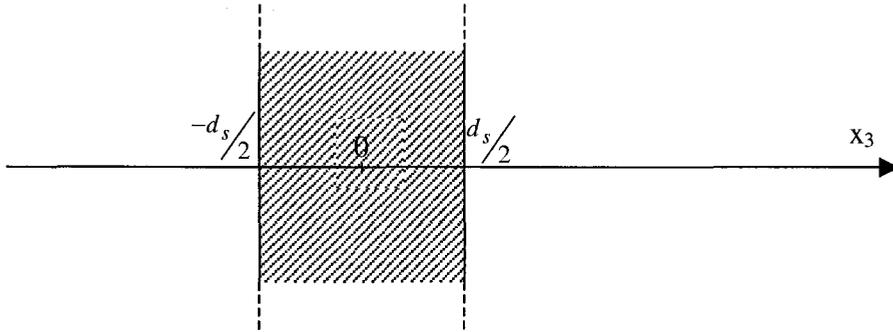


Fig. I.3: Système fini (lamme mince)

la polarisation transverse, et de quatre états  $\{|-\frac{d_s}{2}, x_1\rangle; |-\frac{d_s}{2}, x_3\rangle; |+\frac{d_s}{2}, x_1\rangle; |+\frac{d_s}{2}, x_3\rangle\}$  pour la polarisation sagittale. Dans chaque vecteur, le premier paramètre indique la position dans l'espace selon l'axe  $x_3$  et le second paramètre est lié à la polarisation de l'onde.

Dans le premier cas, l'inverse de la fonction de Green est obtenu à partir des équations (I.4), (I.7) et (I.8), soit[105]

$$g^{-1}(M, M) = \begin{pmatrix} -\frac{FC}{S} & \frac{F}{S} \\ \frac{F}{S} & -\frac{FC}{S} \end{pmatrix} \quad (I.18)$$

avec

$$S = \sinh(\alpha_t d_s), C = \cosh(\alpha_t d_s) \quad \text{et} \quad F = \alpha_t \rho_s v_t^2. \quad (I.19)$$

Dans le deuxième cas :

$$g^{-1}(MM) = \begin{pmatrix} h & iq & d & if \\ -iq & r & if & e \\ d & -if & h & -iq \\ -if & e & iq & r \end{pmatrix}, \quad (I.20)$$

où

$$h = \frac{N\alpha_\ell\omega^2}{2k_{//}v_t^2} [\sinh(\alpha_t d_s) \cosh(\alpha_\ell d_s) - \zeta \sinh(\alpha_\ell d_s) \cosh(\alpha_t d_s)] \quad (\text{I.21})$$

$$r = \frac{N\alpha_t\omega^2}{2k_{//}v_t^2} [\sinh(\alpha_\ell d_s) \cosh(\alpha_t d_s) - \zeta \sinh(\alpha_t d_s) \cosh(\alpha_\ell d_s)] \quad (\text{I.22})$$

$$q = N \left\{ \zeta (3k_{//}^2 + \alpha_t^2) \left[ \sinh^2(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \cosh^2(\alpha_t \frac{d_s}{2}) + \sinh^2(\alpha_t \frac{d_s}{2}) \cosh^2(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{2} [2\alpha_t \alpha_\ell \zeta + (k_{//}^2 + \alpha_t^2)] \sinh(\alpha_\ell d_s) \sinh(\alpha_t d_s) \right\} \quad (\text{I.23})$$

$$d = -\frac{N\alpha_\ell\omega^2}{2k_{//}v_t^2} [\sinh(\alpha_t d_s) - \zeta \sinh(\alpha_\ell d_s)] \quad (\text{I.24})$$

$$e = -\frac{N\alpha_t\omega^2}{2k_{//}v_t^2} [\sinh(\alpha_t d_s) - \zeta \sinh(\alpha_\ell d_s)] \quad (\text{I.25})$$

$$f = -N [2\alpha_\ell \alpha_t - \zeta (k_{//}^2 + \alpha_t^2)] \left[ \sinh^2(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) - \sinh^2(\alpha_t \frac{d_s}{2}) \right] \quad (\text{I.26})$$

avec

$$N = -\frac{\rho_s v_t^2}{2k_{//}} \left[ \cosh(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \sinh(\alpha_t \frac{d_s}{2}) - \zeta \cosh(\alpha_t \frac{d_s}{2}) \sinh(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \right]^{-1} \\ \times \left[ \sinh(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \cosh(\alpha_t \frac{d_s}{2}) - \zeta \sinh(\alpha_t \frac{d_s}{2}) \cosh(\alpha_\ell \frac{d_s}{2}) \right]^{-1} \quad (\text{I.27})$$

#### I.3.4 Fluide infini

Il a été démontré auparavant [106–108] que le mouvement d'un fluide régi par l'équation linéarisée de Navier-Stokes, peut être étudié à l'aide des mêmes équations qui régissent le mouvement d'un solide isotrope, à condition que les vitesses de cisaillement (transverse), et de compression (longitudinale) s'écrivent respectivement sous la forme :

$$v_\ell = \sqrt{v_f^2 - \frac{i\omega}{\rho_f} (\mu' + \frac{4}{3}\mu)}, \quad (\text{I.28})$$

et

$$v_t = \sqrt{-\frac{i\omega\mu}{\rho_f}}, \quad (\text{I.29})$$

où  $v_f$  est la vitesse longitudinale du son dans le fluide,  $\rho_f$  la densité, et  $\mu$  et  $\mu'$  les coefficients de viscosité de cisaillement et de dilatation.

Le fluide non visqueux peut être considéré aussi à partir des relations (I.28) et (I.29), où il suffit de prendre dans ces équations la limite  $v_t \rightarrow 0$ . Dans ce cas, la fonction de Green de volume d'un fluide s'écrit[109]

$$G(x_3, x'_3) = \begin{pmatrix} 2\delta(x_3 - x'_3) - \frac{k_{//}^2}{\alpha_f} e^{-\alpha_f |x_3 - x'_3|} & -ik_{//} \operatorname{sgn}(x_3 - x'_3) e^{-\alpha_f |x_3 - x'_3|} \\ -ik_{//} \operatorname{sgn}(x_3 - x'_3) e^{-\alpha_f |x_3 - x'_3|} & \alpha_f e^{-\alpha_f |x_3 - x'_3|} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.30})$$

où  $\alpha_f^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{v_f^2}$

### I.3.5 Fluide non visqueux semi-infini

L'inverse de la fonction de Green à la surface  $x_3 = 0$  d'un fluide semi-infini [Fig. I.4] est donné par[109]

$$g^{-1}(0, 0) = \frac{-\rho_f \omega^2}{\alpha_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.31})$$

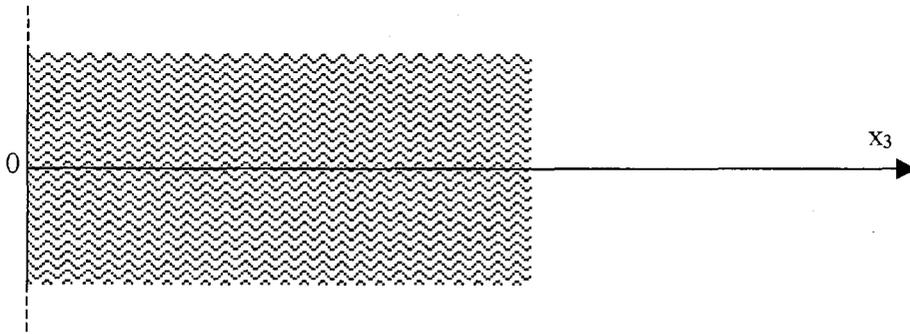


Fig. I.4: Fluide semi-infini

### I.3.6 Lamme mince d'un fluide non visqueux

L'inverse de la fonction de Green dans l'espace des interfaces d'une lamme d'un fluide est donné par[109]

$$g^{-1}(MM) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (\text{I.32})$$

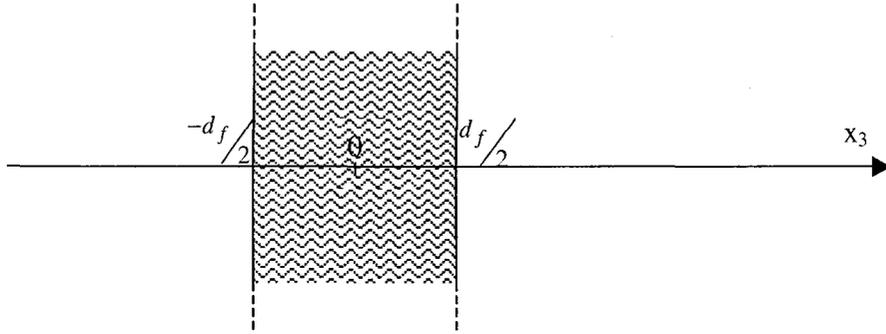


Fig. I.5: Fluide fini

où

$$a = \frac{\rho_f \omega^2 \cosh(\alpha_f d_f)}{\alpha_f \sinh(\alpha_f d_f)} \quad (\text{I.33})$$

et

$$b = -\frac{\rho_f \omega^2}{\alpha_f \sinh(\alpha_f d_f)}. \quad (\text{I.34})$$

#### I.4 Fonction de Green d'un câble coaxial infini, semi-infini et fini

Les éléments de la fonction réponse des milieux diélectriques peuvent être déduits aisément par une simple analogie avec les ondes acoustiques transverses pour un solide isotrope (infini, semi-infini et lame mince) en remplaçant dans les équations (I.14), (I.16) et (I.18)  $\alpha$  et  $F$  par :

$$\alpha_i = \sqrt{k_{//}^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon_i}{c^2}} \quad (\text{I.35})$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $\varepsilon_i$  la permittivité diélectrique et  $F$  prend deux valeurs différentes à savoir :

$$F_i = \alpha_i \quad \text{pour la polarisation } TE \quad (\text{I.36})$$

et

$$F_i = -\frac{\omega^2 \varepsilon_i}{c^2 \alpha_i} \quad \text{pour la polarisation } TM. \quad (\text{I.37})$$

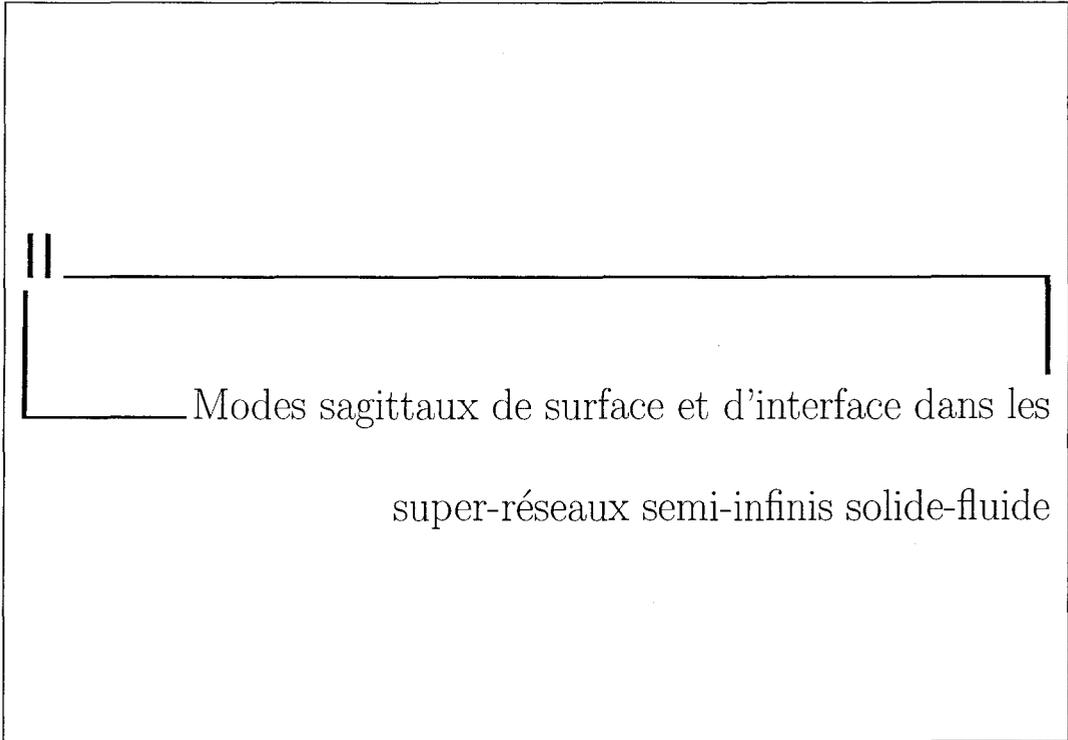
Pour la propagation dans les câbles coaxiaux, les deux polarisations  $TE$  et  $TM$  se confondent puisqu'il faut poser  $k_{//} = 0$ .

## I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la théorie de réponse d'interface qui consiste à déterminer la fonction de Green dans une structure composite quelconque. Nous avons appliqué cette théorie dans le cas de la propagation des ondes acoustiques dans les milieux stratifiés élastiques isotropes infini, semi-infini et fini (lame mince), ainsi que dans le cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques formés de câbles coaxiaux infini, semi-infini et fini. Nous possédons alors tous les ingrédients nécessaires pour étudier n'importe quel système composite, en particulier les super-réseaux (SRs) (voir chapitre II et III) et les structures en boucles (chapitre IV et V) qui feront l'objet de ce travail. Les résultats ainsi obtenus nous permettent de calculer les relations de dispersion, les coefficients de transmission et de réflexion, et les temps de phase ainsi que les densités d'états locale et totale.

Première partie :  
Cristaux Phononiques





**Sommaire**

---

<b>II.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>II.2</b>	<b>Fonction de Green d'un super-réseau infini et semi-infini</b>	<b>22</b>
II.2.1	Super-réseau infini	24
II.2.2	Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulation fluide	25
II.2.3	Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulation solide	29
<b>II.3</b>	<b>Densités d'états</b>	<b>33</b>
<b>II.4</b>	<b>Résultats numériques et discussions</b>	<b>34</b>
II.4.1	Super-réseau semi-infini en contact avec le vide	36
II.4.2	Super-réseau semi-infini en contact avec un fluide homogène semi-infini	44
II.4.3	Super-réseau semi-infini en contact avec un solide	49
<b>II.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>

---

## II.1 Introduction

L'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les structures périodiques unidimensionnelles est un sujet d'intérêt vu le large potentiel d'applications possibles présentés par ces systèmes. Plusieurs structures de type solide/solide ou solide/fluide ont été étudiées. Une propriété essentielle de ces structures par rapport aux milieux massifs est l'existence de bandes interdites dues à la différence entre les caractéristiques acoustiques des matériaux constituants. Plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont été consacrés à l'étude des super-réseaux (SRs) solide-solide[4, 5, 9, 32] de type métalliques ou semi-conducteurs (cristalins ou amorphes), en raison des propriétés physiques nouvelles observées dans ces structures en comparaison avec les milieux massifs[1, 2]. Sur le plan théorique, les modèles utilisés sont souvent la matrice de transfert[4, 33] et la fonction de Green[11, 12, 34], tandis que sur le plan expérimental les techniques utilisées sont essentiellement spectroscopiques[35–39], la diffusion Raman[10, 40, 41], les ultrasons[44–47] et la diffraction des rayons X résolue en temps[22]. Il a été montré aussi bien théoriquement et expérimentalement que, l'introduction des inhomogénéités dans un tel SR telles que : une surface libre (avec ou sans une couche d'encapsulation)[11–21], une interface SR/substrat[13, 22–24], et une couche défaut (cavité) à l'intérieur du SR[25–31], donnent lieu à des modes à l'intérieur des gaps.

Vu les importantes applications qui découlent de ces propriétés, la propagation des ondes acoustiques dans les cristaux phononiques à 2 et à 3 dimensions a aussi été entreprise depuis le début des années 90 et fait l'objet de plusieurs études à la fois théoriques[110–112] et expérimentales[60, 113–121].

L'étude des ondes acoustiques dans le cas des SRs solide-fluide a fait l'objet comparativement aux structures solide-solide de relativement peu de travaux. Les premiers travaux sur les structures lamellaires solide/fluide ont été développés par Rytov[48] et résumé ensuite par Brekhovskikh[1]. Plus tard, Schöenberg[49] et Rousseau[50] ont établi la structure de bande d'un SR formé par l'empilement alterné et périodique d'une couche solide isotrope et d'une couche fluide idéale (sans viscosité). En particulier, dans la limite des basses fréquences[49], il a été démontré l'existence d'une onde se propageant perpendiculairement aux couches et deux ondes de compression se propageant parallèlement aux couches avec des vitesses lente et rapide. Ces ondes sont sans analogue dans les SRs solide-solide et leur existence est prédite par la théorie de Biot[122]. Ces résultats ont été confirmés par des expériences par ultrasons sur des SRs de type Al-eau et plexiglas-eau[51].

Cependant, à notre connaissance, aucune étude (théorique ou expérimentale) n'avait été réalisée jusqu'à présent sur les modes de surface et d'interface dans les SRs solide-fluide.

Dans ce chapitre, nous abordons dans le cadre de la théorie de l'élasticité et en utilisant la méthode de la théorie de réponse d'interface[57], l'étude des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les SRs solide-fluide semi-infinis[58]. Nous donnerons les relations de dispersion des modes de volume et de surface[58] sous forme analytique compacte. Le SR peut-être recouvert ou non par une couche d'encapsulation d'extension finie ou semi-infinie (substrat). La couche d'encapsulation et le substrat peuvent être de type fluide ou solide, de même nature ou de nature différente de celles des constituants du SR.

La connaissance des fonctions de Green dans ces hétérostructures, nous permet de déduire aussi les densité d'états. Par conséquent, on peut obtenir en plus des modes localisés de surface et d'interface à l'intérieur des gaps, des modes résonants (appelés aussi leaky waves). Ces modes résonants apparaissent sous forme de pics bien définis dans la densité d'états soit à l'intérieur des minigaps, soit à l'intérieur des bandes de volume du SR

Ce chapitre est structuré de la façon suivante : dans une première partie, nous présentons la méthode de calcul des fonctions de Green pour un SR infini et semi-infini avec une couche d'encapsulation ou en contact avec un substrat. Les expressions analytiques des densités d'états sont beaucoup plus compliquées, c'est pourquoi, nous présentons un bref résumé de la méthode de calcul de ces quantités. La deuxième partie est consacrée aux résultats numériques. Des applications spécifiques sont données pour les SRs semi-infinis plexiglas-eau et Al-eau avec ou sans couche d'encapsulation ou en contact avec un milieu homogène semi-infini de type fluide ou solide.

Notons que l'hypothèse d'un fluide idéal est valable pour une large gamme de fréquences pour laquelle la profondeur de pénétration  $\sigma = \left(\frac{2\eta_f}{\rho_f\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$  est très petite par rapport à l'épaisseur  $d_f$  de la couche fluide[123],  $\omega$  étant la fréquence de l'onde acoustique et  $\eta_f$  la viscosité de la couche fluide[123].

## II.2 Fonction de Green d'un super-réseau infini et semi-infini

Le SR est constitué d'un empilement alterné et périodique d'une couche solide (S) élastique isotrope (Fig. 1(a)) caractérisée par une vitesse de cisaillement (transverse)  $v_t$ ,

une vitesse de compression (longitudinale)  $v_\ell$  et une densité  $\rho_s$  et une couche d'un fluide idéal (F) sans viscosité caractérisée par une vitesse longitudinale  $v_f$  et une densité  $\rho_f$ . L'inverse de la fonction de Green du SR dans l'espace des interfaces peut être construit en juxtaposant les inverses des fonction de Green des couches successives (voir équations I.20 et I.32)

Notons que toutes les interfaces sont prises parallèles au plan  $(x_1, x_2)$  et le vecteur d'onde  $k_{//}$  est parallèle à l'axe  $x_1$ . La position suivant l'axe  $x_3$  dans le milieu  $i = S$  ou  $F$  appartenant à la cellule élémentaire  $n$  est notée par  $(n, i = S \text{ ou } F, x_3)$  où  $-\frac{d_i}{2} \leq x_3 \leq \frac{d_i}{2}$ . La période du SR est notée  $D = d_1 + d_2$ .

Dans ce chapitre nous sommes intéressés par la propagation des ondes acoustiques de polarisation sagittale.

L'inverse de la fonction de Green d'une lame mince solide élastique dans l'espace des surfaces est une matrice  $4 \times 4$  (Eq. I.20)[101, 124]. Pour une lame mince d'un fluide idéal l'inverse de la fonction de Green dans l'espace des surfaces est aussi une matrice  $4 \times 4$  (Eq. I.32) dans laquelle juste les composantes  $zz$  sont différentes de zéro[101, 124]. Par conséquent, la matrice  $4 \times 4$  de la couche fluide peut être réduite à une matrice  $2 \times 2$  où on tient compte seulement des éléments  $zz$ . Nous appelons cette matrice :

$$[g_f(MM)]^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1})$$

où

$$a = -F \frac{C_f}{S_f}, \quad b = \frac{F}{S_f}, \quad C_f = \cosh(\alpha_f d_f), \quad S_f = \sinh(\alpha_f d_f), \quad F = -\rho_f \frac{\omega^2}{\alpha_f} \text{ et } \alpha_f^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{v_f^2}. \quad (\text{II.2})$$

Nous montrons dans l'appendice A une propriété intéressante qui permet de ramener aussi l'inverse de la fonction de Green de la couche solide à une matrice  $2 \times 2$  (au lieu de  $4 \times 4$ ) ce qui permet de mener de façon analytique la plupart des calculs et notamment obtenir les relations de dispersion des modes de volume et de surface. Cette propriété s'applique lorsque la couche solide est entourée de couches fluides des deux cotés. Dans ce cas, on peut inverser la matrice  $4 \times 4$  de l'inverse de la fonction de Green, garder uniquement les composantes  $zz$ , puis inverser à nouveau cette matrice  $2 \times 2$  (voir appendice



Les bandes de volume du SR solide-fluide sont obtenues facilement en annulant le déterminant de la matrice  $[g(k_3, MM)]^{-1}$  donnée par l'équation (II.8) et s'écrit sous la forme :

$$\cos(k_3 D) = \frac{A^2 - B^2 + a^2 - b^2 + 2Aa}{2Bb} \quad (\text{II.9})$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $a$  et  $b$  sont donnés par les équations (II.2) et (A11).  $k_3$  est la composante du vecteur d'onde perpendiculaire aux interfaces ( $\vec{k} \equiv (k_3, k_{//})$ ). On notera  $\eta(k_{//} D, \omega)$  la quantité (II.9). En utilisant la transformée de Fourier réciproque et le théorème des résidus, les éléments de la fonction de Green dans l'espace des interfaces (dans l'espace réel  $M_m$ ) du SR s'écrivent :

$$g(n, F, -\frac{d_f}{2}; n', F, -\frac{d_f}{2}) = g(n, F, \frac{d_f}{2}; n', F, \frac{d_f}{2}) = -\frac{(A+a)t^{|n-n'|+1}}{Bb(t^2-1)} \quad (\text{II.10a})$$

$$g(n, F, -\frac{d_f}{2}; n', F, \frac{d_f}{2}) = -\frac{t^{|n-n'|+1}}{B(t^2-1)} + \frac{t^{|n-n'-1|+1}}{b(t^2-1)} \quad (\text{II.10b})$$

$$g(n, F, \frac{d_f}{2}; n', F, -\frac{d_f}{2}) = -\frac{t^{|n-n'|+1}}{B(t^2-1)} + \frac{t^{|n-n'+1|+1}}{b(t^2-1)}. \quad (\text{II.10c})$$

Dans ces expressions  $t$  représente simplement  $e^{ik_3 D}$  et est défini par

$$t = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \quad \text{si} \quad \eta < -1 \quad (\text{II.11a})$$

$$t = \eta + i\sqrt{1 - \eta^2} \quad \text{si} \quad |\eta| \leq 1 \quad (\text{II.11b})$$

$$t = \eta - \sqrt{\eta^2 - 1} \quad \text{si} \quad \eta > -1 \quad (\text{II.11c})$$

### II.2.2 Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulation fluide

Nous souhaitons écrire la fonction de Green d'un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide en contact avec une couche d'encapsulation fluide à la surface [Fig. II.1(c)] caractérisée par une vitesse longitudinale  $v_0$ , une densité  $\rho_0$  et d'épaisseur  $d_0$ . Il convient alors de considérer les étapes suivantes en partant du SR solide-fluide infini [Fig. II.1(a)] :

- i) on détache la lame ( $n = 0, i = S$ ) afin d'obtenir deux SRs solide-fluide semi-infinis découplés terminés par une couche fluide [Fig. II.1(b)]
- ii) on change la couche ( $n = 1, i = F$ ) par la couche ( $n = 1, i = F_0$ ) [Fig. II.1(c)]

Le calcul de la fonction réponse dans l'espace des interfaces  $M_m$  du SR semi-infini [Fig. II.1(c)], nécessite d'écrire la perturbation qui a conduit à sa création. Soit  $\vec{d}$  la

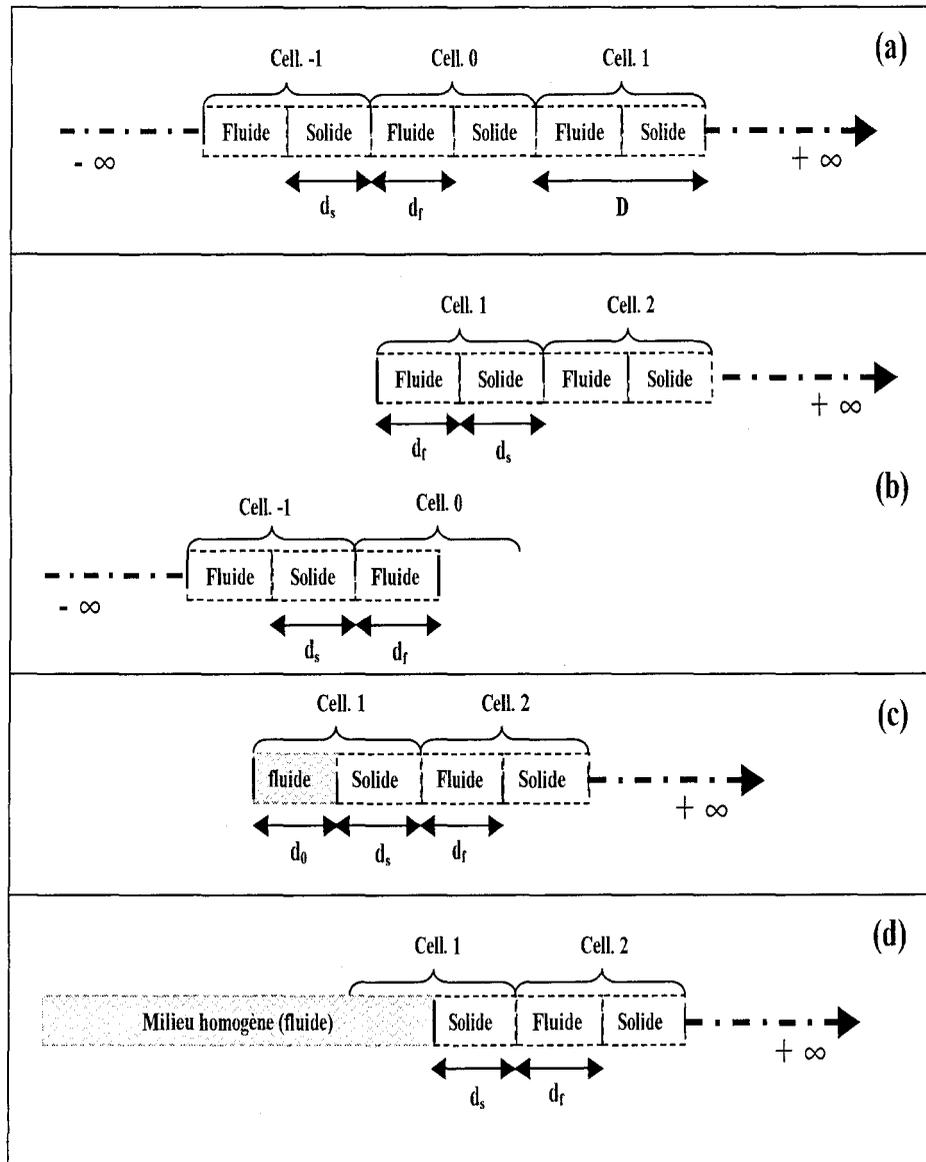


Fig. II.1: (a) Schéma de la géométrie d'un SR infini formé de deux couches solide/fluide.  $d_s$  et  $d_f$  sont les épaisseurs des couches solide et fluide du SR, respectivement, et  $D = d_s + d_f$  est la période. (b) Deux SRs semi-infinis solide-fluide découplés terminés par une couche fluide. (c) SR semi-infini solide-fluide en contact avec une couche d'encapsulation fluide d'épaisseur  $d_0$ . (d) SR semi-infini solide-fluide en contact avec un milieu homogène fluide



$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{A}(1, i = F, -\frac{d_f}{2}; n', i = F, -\frac{d_f}{2}) = \\ \frac{t}{t^2 - 1} \left\{ -t^{|n'|} + \left[ \frac{A^2 - B^2 + a^2 - b^2 + 2Aa}{2Bb} - \frac{a_0(A+a)}{Bb} + \frac{b_0}{B} \right] t^{|n'-1|} + \frac{b_0 - b}{b} t^{|n'-2|} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.17a})$$

$$\overleftrightarrow{A}(1, i = F, -\frac{d_f}{2}; n', i = F, \frac{d_f}{2}) = \frac{t}{t^2 - 1} \left\{ \frac{a_0}{b} t^{|n'|} + \left[ \frac{a_0}{B} - \frac{b_0(A+a)}{Bb} \right] t^{|n'-1|} \right\} \quad (\text{II.17b})$$

$$\overleftrightarrow{A}(1, i = F, \frac{d_f}{2}; n', i = F, -\frac{d_f}{2}) = \frac{t}{t^2 - 1} \left\{ \left[ \frac{a_0}{B} + \frac{A}{B} - \frac{b_0(A+a)}{Bb} \right] t^{|n'-1|} + \frac{a_0 - a}{b} \right\} \quad (\text{II.17c})$$

$$\overleftrightarrow{A}(1, i = F, \frac{d_f}{2}; n', i = F, \frac{d_f}{2}) = \frac{t}{t^2 - 1} \left\{ \frac{b_0 - b}{b} t^{|n'|} + \left[ \frac{b_0 - b}{B} - \frac{(a_0 - a)(A+a)}{Bb} \right] t^{|n'-1|} \right\} \quad (\text{II.17d})$$

Les éléments de la fonction réponse dans l'espace des interfaces s'obtiennent à partir de l'équation (I.6).

$$\overleftrightarrow{d}(M_m M_{m'}) = \overleftrightarrow{g}(M_m M_{m'}) - \overleftrightarrow{g}(M_m M_0) \overleftrightarrow{\Delta}^{-1}(M_0 M_0) \overleftrightarrow{A}(M_0 M_{m'}) \quad (\text{II.18})$$

où les éléments de  $\overleftrightarrow{g}(M_m M_{m'})$  sont donnés par les équations (II.10(a,b,c)) et les éléments de l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}$  sont donnés par l'équation (I.7) :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\Delta}(M_0 M_0) = \\ \left( \begin{array}{cc} 1 + \overleftrightarrow{A}(n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}) & \overleftrightarrow{A}(n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}) \\ \overleftrightarrow{A}(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}) & 1 + \overleftrightarrow{A}(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Les modes localisés de surface en présence de la couche d'encapsulation fluide se déduisent des pôles de la fonction réponse, soit

$$\det[\overleftrightarrow{\Delta}(M_0 M_0)] = 0 \quad (\text{II.20})$$

La solution de cette équation donne :

$$a(B^2 - A^2) - A(a^2 - b^2) - \frac{f_0 S_0}{C_0} [A^2 - B^2 - a^2 + b^2] + \left(\frac{f_0 S_0}{C_0}\right)^2 (A+a) = 0 \quad (\text{II.21})$$

avec la condition suivante :

$$\left| \frac{B}{b} \left( \frac{a + \frac{f_0 S_0}{C_0}}{A - \frac{f_0 S_0}{C_0}} \right) \right| > 1 \quad (\text{II.22})$$

où

$$C_0 = \cosh(\alpha_0 d_0), S_0 = \sinh(\alpha_0 d_0), f_0 = -\rho_0 \frac{\omega^2}{\alpha_0} \text{ et } \alpha_0^2 = k_{//}^2 - \frac{\omega^2}{v_0^2}. \quad (\text{II.23})$$

Cette dernière condition assure la décroissance de la fonction d'onde en pénétrant dans le volume du SR.

A partir de ces expressions générales, on peut déduire deux cas limites :

**A/ Limite d'un super-réseau solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide sans couche d'encapsulage**

Les expressions qui donnent les modes de surface pour un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide complète sont obtenues en faisant tendre l'épaisseur de la couche d'encapsulage vers zéro ( $d_0 = 0$ ); ce qui implique  $S_0 = 0$ ,

$$a(B^2 - A^2) - A(a^2 - b^2) = 0 \quad (\text{II.24})$$

avec la condition

$$\left| \frac{a B}{A b} \right| > 1. \quad (\text{II.25})$$

**B/ Limite d'un super-réseau solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide en contact avec un fluide homogène semi-infini**

Lorsque l'épaisseur  $d_0$  de la couche d'encapsulage tend vers l'infini, la quantité  $\frac{S_0}{C_0}$  tend vers 1 dans les expressions précédentes qui décrivent alors le cas de l'interface entre un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide en contact avec un fluide homogène semi-infini,

$$a(B^2 - A^2) - A(a^2 - b^2) - f_0[A^2 - B^2 - a^2 + b^2] + f_0^2(A + a) = 0 \quad (\text{II.26})$$

avec la condition

$$\left| \frac{B}{b} \left( \frac{a + f_0}{A - f_0} \right) \right| > 1. \quad (\text{II.27})$$

### II.2.3 Super-réseau semi-infini avec une couche d'encapsulage solide

En procédant de la même façon que dans le paragraphe précédent, on peut calculer la fonction de Green d'un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche fluide en

contact avec une couche d'encapsulage solide à la surface [Fig. II.2(c)] caractérisée par une vitesse transverse  $v_{t0}$ , une vitesse longitudinale  $v_{l0}$ , une densité  $\rho_{s0}$  et d'une épaisseur  $d_0$  :

- i) on détache la lame ( $n = 0, i = F$ ) afin d'obtenir deux SRs solide-fluide semi-infinis découplés terminés par une couche solide [Fig. II.2(b)]
- ii) on change la couche ( $n = 0, i = S$ ) par la couche ( $n = 0, i = S_0$ ) [Fig. II.2(c)].

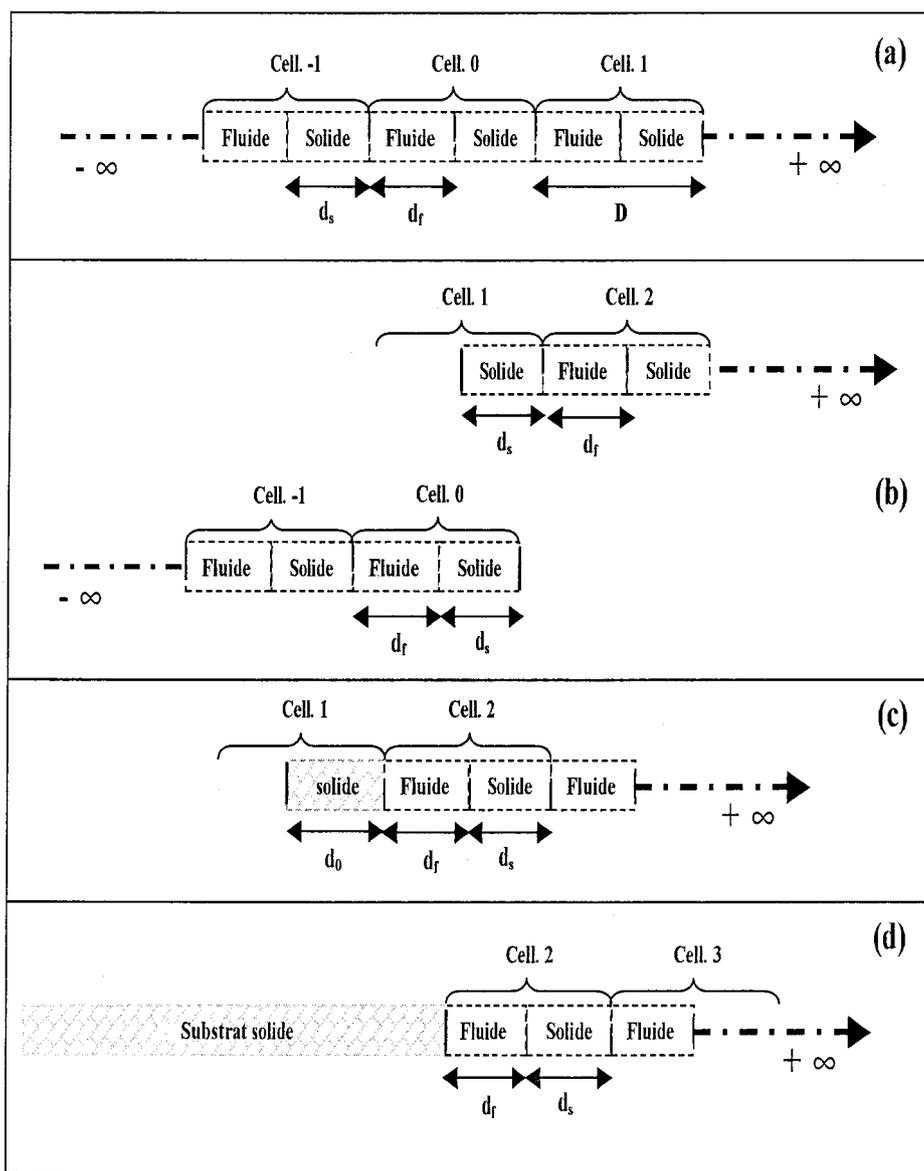


Fig. II.2: (a) Schéma de la géométrie d'un SR infini formé de deux couches solide/fluide.  $d_s$  et  $d_f$  sont les épaisseurs des couches solide et fluide du SR, respectivement, et  $D = d_s + d_f$  est la période. (b) Deux SRs semi-infinis solide-fluide découplés terminés par une couche solide. (c) SR semi-infini solide-fluide en contact avec une couche d'encapsulage solide d'épaisseur  $d_0$ . (d) SR semi-infini solide-fluide en contact avec un substrat solide



$$\overleftrightarrow{A}(1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n', i = F, \frac{d_f}{2}) = \frac{t}{t^2 - 1} \left\{ \left[ \frac{A_0}{b} - \frac{B_0(A+a)}{Bb} + \frac{a}{b} \right] t^{|n'|} + \frac{A_0 - A}{B} - t^{|n'-1|} \right\}. \quad (\text{II.33d})$$

D'où, les éléments de l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}$  :

$$\overleftrightarrow{\Delta}(M_0 M_0) = \begin{pmatrix} 1 + \overleftrightarrow{A}(n=0, i=F, \frac{d_f}{2}; n=0, i=F, \frac{d_f}{2}) & \overleftrightarrow{A}(n=0, i=F, \frac{d_f}{2}; n=1, i=F, -\frac{d_f}{2}) \\ \overleftrightarrow{A}(n=1, i=F, -\frac{d_f}{2}; n=0, i=F, \frac{d_f}{2}) & 1 + \overleftrightarrow{A}(n=1, i=F, -\frac{d_f}{2}; n=1, i=F, -\frac{d_f}{2}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Les modes localisés de surface correspondant à la couche d'encapsulation solide sont donnés par :

$$a(B^2 - A^2) - A(a^2 - b^2) - F_0[A^2 - B^2 - a^2 + b^2] + F_0^2(A + a) = 0 \quad (\text{II.35})$$

avec la condition

$$\left| \frac{b}{B} \left( \frac{A - F_0}{a + F_0} \right) \right| > 1 \quad (\text{II.36})$$

où

$$F_0 = \frac{A_0^2 - B_0^2}{A_0}. \quad (\text{II.37})$$

A partir de ces expressions générales, on peut déduire les deux cas limites suivants :

#### A/ Limite d'un super-réseau solide-fluide semi-infini terminé par une couche fluide sans couche d'encapsulation

Lorsque l'épaisseur de la couche d'encapsulation tend vers zéro (i.e.,  $d_0 = 0$ ,  $S_{t0} = 0$  et  $S_{e0} = 0$ ), les résultats précédents (Eqs. II.35, II.36) deviennent :

$$a(B^2 - A^2) - A(a^2 - b^2) = 0 \quad (\text{II.38})$$

avec la condition

$$\left| \frac{A b}{a B} \right| > 1. \quad (\text{II.39})$$

Ceux-ci décrivent alors le cas d'un SR semi-infini solide-fluide terminé par une couche fluide complète à la surface.

#### B/ Limite d'un super-réseau solide-fluide semi-infini terminé par une couche fluide en contact avec substrat solide

Les expressions donnant les modes d'interface entre un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche fluide à la surface et un substrat solide homogène (i.e.  $d_0 \rightarrow \infty$ ,  $\frac{S_{t0}}{C_{t0}} \rightarrow 1$  et  $\frac{S_{e0}}{C_{e0}} \rightarrow 1$ ) sont les mêmes que les équations (II.35) et (II.36) avec  $F_0$  (Eq. (II.37)) donné par  $F_0 = -(\gamma_0 + \beta_0)$ .

Remarques : Notons que les expressions qui donnent les modes de surface pour un SR solide-fluide semi-infini terminé par une couche solide complète (Eq. (II.38)) ou par une couche fluide complète (Eq. (II.24)) sont exactement les mêmes. Cependant, les conditions assurant la décroissance de ces modes de surface (Eqs. (II.39) et (II.25)) sont différentes dans les deux cas. En particulier, on peut noter que ces deux conditions sont inverses l'une par rapport à l'autre, ce que signifie que si un mode de surface existe pour l'un des SRs, il n'existe pas dans l'autre SR complémentaire. En plus, on peut montrer facilement à partir des équations (II.1) et (II.3) que l'expression donnant les fréquences des modes de surface pour deux SRs solide-fluide semi-infinis complémentaires est exactement la même que celle donnant les ondes stationnaires d'une cellule unitaire solide-fluide avec des surfaces libres.

### II.3 Densités d'états

Le calcul des densités d'états peut être effectué à partir de la connaissance de la fonction de Green des SRs infini et semi-infini en utilisant l'équation (I.9).

Comme nous nous sommes intéressés à la propagation des ondes acoustiques sagittales dans chaque structure, les éléments de la fonction de Green prennent la forme  $g_{\alpha\beta}(\omega^2, k_{//}|n, i, z; n', i', z')$ , où  $\omega$  est la fréquence de l'onde acoustique,  $k_{//}$  est le vecteur d'onde parallèle aux interfaces, et  $\alpha, \beta$  dénotent les directions  $x_1$  et  $x_3$ . Pour des raisons de simplicité, on va omettre dans la suite les paramètres  $\omega^2$  et  $k_{//}$ , et nous notons  $g(n, i, z; n', i', z')$  comme matrice  $2 \times 2$  dont les éléments sont  $g_{\alpha\beta}(n, i, z; n', i', z')$  ( $\alpha, \beta = x, z$ ). A partir de ces fonctions de Green, on obtient les densités d'états locales pour une valeur donnée de  $k_{//}$ .

$$n_{\alpha}(\omega^2, k_{//}; n, i, z) = -\frac{\rho_i}{\pi} \text{Im} g_{\alpha\alpha}(\omega^2, k_{//}|n, i, z; n, i, z) \quad (\alpha = x, z) \quad (\text{II.40})$$

ou de façon équivalente :

$$n_{\alpha}(\omega, k_{//}; n, i, z) = -\frac{2\omega\rho_i}{\pi} \text{Im} g_{\alpha\alpha}(\omega^2, k_{//}|n, i, z; n, i, z) \quad (\alpha = x, z). \quad (\text{II.41})$$

La densité d'états totale, pour une valeur donnée de  $k_{//}$ , est obtenue en intégrant sur  $x_3$  la densité d'états locale et en sommant sur  $n, i$ , et  $\alpha$ . Dans la pratique, nous nous intéressons à la variation de la densité d'états lorsqu'on passe du SR infini aux structures semi-infinies. Cette variation  $\Delta n(\omega)$  peut être écrite comme la somme des variations de

densités d'états  $\Delta n_f(\omega)$  et  $\Delta n_s(\omega)$  des couches fluide et solide, et la densité d'états  $n_0(\omega)$  de la couche d'encapsulage. Cette expression est donnée par :

$$\Delta n(\omega^2) = \Delta n_f(\omega^2) + \Delta n_s(\omega^2) + n_0(\omega^2) \quad (\text{II.42})$$

où

$$\Delta n_f(\omega^2) = -\frac{\rho_f}{\pi} \text{Im tr} \sum_n \int_{-\frac{d_f}{2}}^{\frac{d_f}{2}} [\mathbf{d}(n, i = f, z; n, i = f, z) - \mathbf{g}(n, i = f, z; n, i = f, z)] dz, \quad (\text{II.43})$$

$$\Delta n_s(\omega^2) = -\frac{\rho_s}{\pi} \text{Im tr} \sum_n \int_{-\frac{d_s}{2}}^{\frac{d_s}{2}} [\mathbf{d}(n, i = s, z; n, i = s, z) - \mathbf{g}(n, i = s, z; n, i = s, z)] dz \quad (\text{II.44})$$

et

$$n_0(\omega^2) = -\frac{\rho_0}{\pi} \text{Im tr} \int_{-\frac{d_0}{2}}^{\frac{d_0}{2}} \mathbf{d}(n, i = 0, z; n, i = 0, z) dz. \quad (\text{II.45})$$

$\mathbf{d}$  et  $\mathbf{g}$  sont respectivement, les fonctions de Green du système final (SR/couche d'encapsulage) et du SR solide-fluide infini. L'intégration suivant  $x_3$  et la sommation sur  $n$  s'effectue aisément puisque les éléments des fonctions de Green sont composés de termes en exponentiel seulement. Finalement la trace dans les équations (II.43)-(II.45) est prise sur les composantes  $xx$  et  $zz$  pour ce qui concerne la contribution des modes sagittaux. Dans notre cas on s'est uniquement intéressé à la composante  $zz$  étant donné qu'on a travaillé avec les calculs réduits des inverses des fonctions de Green des lames solide et fluide. Notons que si le milieu homogène 0 est semi-infini au lieu d'être fini, nous calculons  $\Delta n_0(\omega^2)$  au lieu de  $n_0(\omega^2)$ , où la contribution de milieu infini est soustraite (plus de détails à propos du calcul de la variation de densité d'états sont donnés dans la Réf.[11, 12]).

## II.4 Résultats numériques et discussions

Nous illustrons maintenant ces résultats théoriques par quelques résultats numériques pour quelques exemples spécifiques. Nous reportons les résultats des relations de dispersion et des densités d'états des ondes acoustiques dans : (i) un SR semi-infini composé de plexiglas-eau avec une surface libre ou recouvert par une couche fluide de mercure finie ou semi-infinie et (ii) un SR Aluminium-eau avec une surface libre ou recouvert par une couche solide de plexiglas finie ou semi-infinie. L'existence des bandes permises et interdites dans ces structures a été montrée théoriquement [49] et vérifiée expérimentalement

	$\rho(g/cm^3)$	$v_t(10^5 cm/s)$	$v_\ell(km/s)$
Plexiglas	1200	1.38	2.7
Aluminium	2700	3.15	6.45
Eau	1000	-	1.49
Mercure	13500	-	1.45

Tab. II.1: Paramètres élastiques du Plexiglas, Aluminium, Eau et Mercure

[51, 52]. Les épaisseurs des couches fluide et solide dans le SR sont supposées égales,  $d_f = d_s$ , et la période du SR est  $D = d_f + d_s = 2d_f$  comme dans les Refs. [49, 51]. Le tableau II.1 donne les valeurs numériques des vitesses de son et des densités de masse des matériaux utilisés dans ce chapitre.

Nous concentrerons notre attention d'abord sur l'existence et le comportement des ondes acoustiques liées à une surface libre d'un SR terminé par une couche fluide ou solide. En particulier, dans le cas d'une couche fluide à la surface, nous présentons une règle sur l'existence des ondes de surface, à savoir : la création de deux SRs semi-infinis à partir du clivage d'un SR infini à l'intérieur d'une couche fluide produit un mode par gap qui est localisé à la surface de l'un ou l'autre des deux SRs semi-infinis. Cette règle s'applique pour chaque valeur du vecteur d'onde  $k_{//}$ . En revanche, dans le cas d'un clivage au sein d'une couche solide à la surface, cette règle n'est pas satisfaite. En particulier, on peut avoir zéro, un ou deux modes de surface qui peuvent apparaître dans les gaps des deux SRs semi-infinis complémentaires.

Puis, nous nous intéressons aux modes d'interface dans le cas d'un SR solide-fluide en contact soit avec un fluide homogène soit avec un solide homogène. Nous montrons que ces interfaces peuvent supporter de nouveaux modes d'interface en comparaison avec l'interface entre deux milieux homogènes solide-fluide. Finalement, nous étudions le problème des modes guidés localisés et résonnants induits par une couche d'encapsulation de type fluide ou solide. En particulier, nous prouvons que la structure de bande du SR peut être utilisée comme un moyen pour confiner les modes à l'intérieur de la couche déposée sur le SR.

## II.4.1 Super-réseau semi-infini en contact avec le vide

Le figure II.3 donne la courbe de dispersion des bandes de volume et des modes de surface, i.e., la fréquence réduite  $\Omega = \omega D/v_t(\text{Plexiglas})$  en fonction du vecteur d'onde  $k_{//}D$  de deux SRs semi-infinis complémentaires plexiglas-eau, obtenus à partir du clivage du SR solide-fluide infini à l'interface entre une couche fluide complète et une couche solide complète. Les zones hachurées en gris correspondent aux bandes de volume où les ondes acoustiques se propagent à travers le SR. Ces bandes sont séparées par des gaps où peuvent exister des états localisés de surface. On peut noter qu'en raison du faible contraste entre les paramètres acoustiques du plexiglas et l'eau, les gaps ne sont pas assez larges contrairement au cas du SR Al-eau (voir plus loin). Les deux premières bandes de volume sont situées au-dessous des vitesses du son de Plexiglas et de l'eau et sont par conséquent constituées par les ondes évanescentes dans ces deux milieux. Ces deux bandes tendent asymptotiquement vers le mode d'interface entre le plexiglas et l'eau lorsqu'on augmente les valeurs du vecteur d'onde  $k_{//}D$ . La création de la surface libre du SR donne lieu à des modes localisés à l'intérieur des gaps du SR.

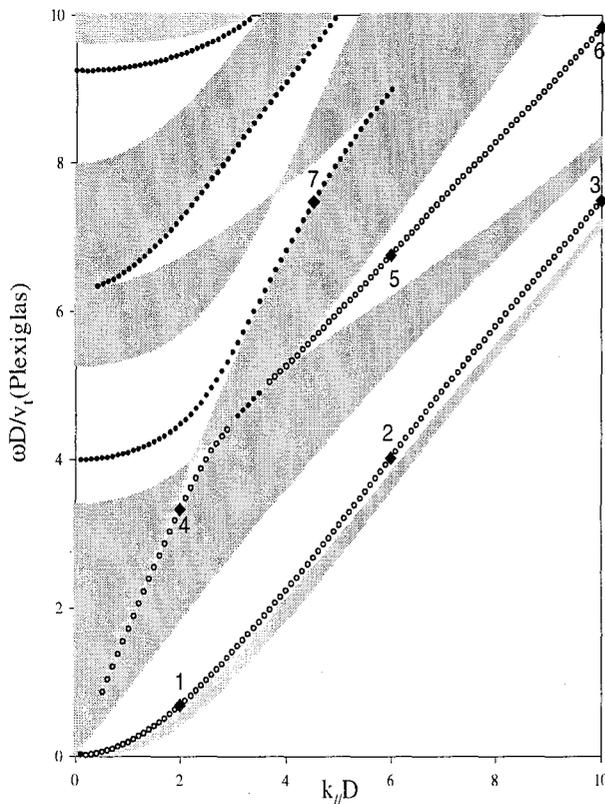


Fig. II.3: Ondes acoustiques sagittales de volume et de surface dans un SR solide-fluide formé du plexiglas-eau. Les courbes représentent  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$  en fonction de  $k_{//}D$ , où  $\omega$  est la fréquence,  $k_{//}$  le vecteur d'onde parallèle aux interfaces,  $v_t(\text{Plexiglas})$  est la vitesse transverse du son dans le plexiglas, et  $D = d_s + d_f$  la période du SR.  $d_s$  et  $d_f$  étant les épaisseurs des couches solide et fluide respectivement. Les zones en gris représentent les bandes de volume. Les cercles pleins représentent les états de surface pour le SR semi-infini terminé par une couche d'eau à la surface. Les cercles vides représentent les états de surface pour le SR complémentaire terminé par une couche de plexiglas à la surface.

Les cercles pleins (vides) représentent les modes de surface pour une couche d'eau (plexiglas) à la surface du SR. Ces modes sont obtenus à partir des équations (II.24),

(II.25), (II.38) et (II.39). A  $k_{//}D = 0$  (incidence normale), les modes dans la lame solide ont soit une polarisation purement transverse, soit purement longitudinale et se propagent indépendamment. Par conséquent, la structure de bande du SR (Fig. II.3) résulte de la propagation des ondes de compression (longitudinale) dans les lames solides et fluides sans couplage avec les ondes de cisaillement (transverse) dans les couches solides. Dans ce cas, les modes de surface apparaissent à la surface du SR dont la couche de surface a l'impédance acoustique  $Z = \rho v$  la plus faible[14]. Ceci est clairement montré dans la figure II.3, où tous les modes de surface apparaissent lorsque la couche d'eau est en surface puisque  $Z_{eau} < Z_{Plexiglas}$ . En augmentant  $k_{//}D$ , ces modes de surface existent toujours dans les gaps les plus élevés jusqu'à la fermeture des gaps. Pour le SR terminé par une couche de plexiglas à la surface, nous obtenons deux branches (cercles vides). En augmentant  $k_{//}D$ , une de ces branches (la plus basse) tend vers le mode d'interface entre le plexiglas et l'eau comme pour les deux premières bandes de volume. Cependant, la branche la plus élevée tend asymptotiquement vers l'onde de Rayleigh à la surface de la couche de plexiglas. Ceci est clairement montré dans la densité d'états locale comme il est illustré sur les figures II.4(a) et II.4(b) en fonction de la position d'espace  $x_3$  pour les modes notés 1, 2, 3 et 4, 5, 6 à  $k_{//}D = 2, 6, 10$  respectivement dans la figure II.3. La densité d'états locale reflète le module au carré du champ de déplacement dans les couches. On peut noter (Fig. II.4(a)) que les modes correspondant à la branche la plus basse (notés 1, 2 et 3 dans Fig.II.3) deviennent localisés à l'interface entre le plexiglas et l'eau en augmentant  $k_{//}D$ . Cependant, les modes dans la branche la plus élevée (notés 4, 5 et 6 dans Fig.II.3) représentent des ondes de Rayleigh localisées à la surface de la couche de plexiglas [Fig.II.4(b)].

Nous avons également tracé [Fig.II.4(c)] la densité d'états locale pour le mode noté 7 à  $k_{//}D = 4.5$  dans la figure II.3. Ce mode montre une localisation forte à la surface de la couche d'eau et diminue en pénétrant dans le SR.

Un résultat intéressant dans la figure II.3 est l'existence d'un mode par gap associé soit à un SR semi-infini soit à son complémentaire. La variation de la densité d'états vibrationnelle  $\Delta n_s(\omega)$  [respectivement,  $\Delta n_f(\omega)$ ] entre le SR semi-infini terminé par une couche de plexiglas (respectivement, une couche d'eau) et le même volume d'un SR infini est tracé dans les figures II.5(a) et II.5(b) pour  $k_{//}D = 4.5$ , en fonction de la fréquence réduite  $\Omega$ . Les fonctions  $\delta$  qui apparaissent sur ces figures sont élargies en ajoutant à la

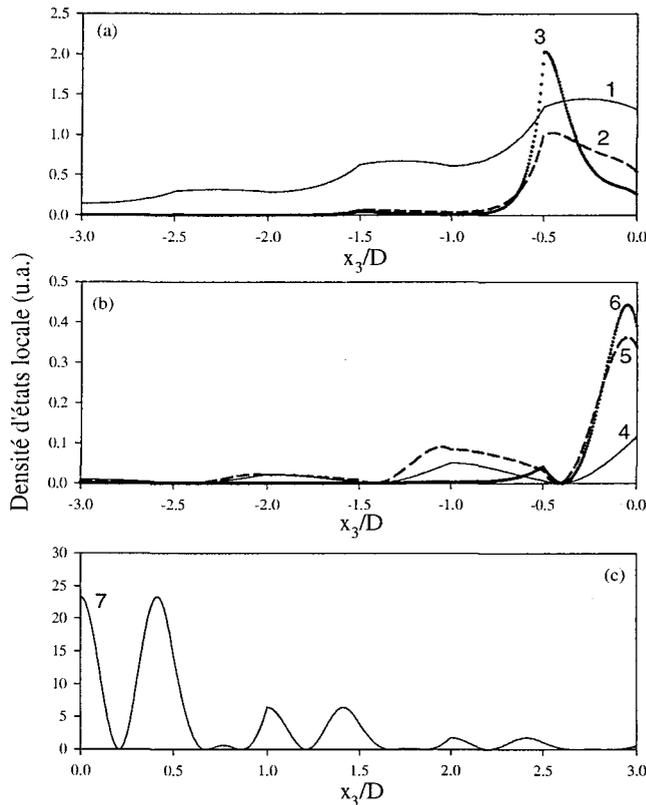


Fig. II.4: Représentation spatiale de la densité d'états locale en fonction de la position d'espace  $x_3$  pour les modes localisés notés 1, 2, 3 (a) et 4, 5, 6 (b) dans la figure II.3 à  $k_{//}D = 2, 6, 10$  respectivement. (c) La même chose que (a) et (b) mais pour le mode localisé noté 7 dans la figure II.3 à  $k_{//}D = 4.5$ .

fréquence  $\omega$  une petite quantité imaginaire.

Les fonctions  $\delta$  associées aux modes localisés de surface sont notés  $L_i$ , et les fonctions  $\delta$  de poids  $(-1/4)$ , situées respectivement, en bas et en haut des bandes de volume, sont notées  $B_i$  et  $T_i$ . Ces fonctions  $\delta$  élargies  $B_i$  et  $T_i$  de poids  $(-1/4)$  n'ont pas toutes exactement la même forme; ceci est dû aux divergences en  $(\omega - \omega_{B_i})^{-1/2}$  ou  $(\omega - \omega_{T_i})^{-1/2}$  qui existent près des limites de bandes dans les densités d'états des systèmes à une dimension. A part les pics deltas mentionnés ci-dessus et le comportement particulier aux limites des bandes de volume, la variation de la densité d'états ne révèle pas d'autres effets significatifs à l'intérieur des bandes de volume du SR. Maintenant, en considérant la variation de la densité d'états  $\Delta n(\omega) = \Delta n_s(\omega) + \Delta n_f(\omega)$  entre les deux SRs semi-infinis complémentaires et le SR infini, donnés dans les figures II.5(a) et II.5(b), on peut montrer analytiquement et numériquement [fig. II.5(c)] que :

- ◇  $\Delta n(\omega)$  est égal à zéro pour des fréquences  $\omega$  qui tombent à l'intérieur de chaque bande de volume du SR.
- ◇ La perte d'un état par bande due aux pics  $\delta$  de poids  $(-1/2)$  à chaque limite de bande de volume (puisque nous considérons deux SRs semi-infinis) est alors compensée par le gain de pics  $\delta$  de poids  $(1)$  associés aux états localisés  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ . Ces états

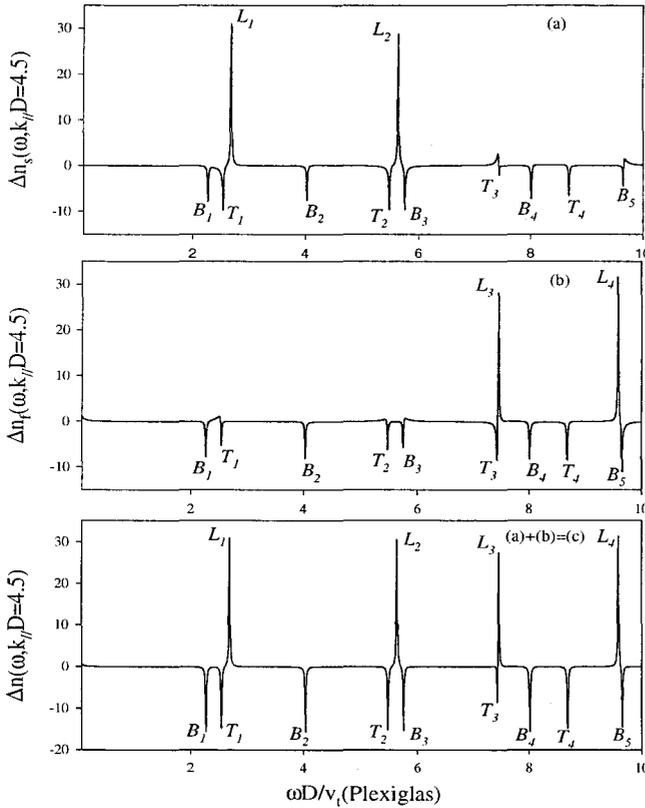


Fig. II.5: (a) Variation de la densité d'états [en unité de  $D/v_t(\text{Plexiglas})$ ] entre le SR semi-infini terminé par une couche de Plexiglas et le même volume d'un SR infini, en fonction de  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$ , pour  $k_{//}D = 4.5$ .  $B_i$  et  $T_i$  se réfèrent aux pics  $\delta$  de poids  $(-1/4)$  situés en bas et en haut des bandes de volume et  $L_i$  indique les états localisé de surface. (b) Même chose que (a), pour le SR semi-infini complémentaire terminé par une couche d'eau à la surface. (c) Même chose que (a), pour les deux SRs complémentaires pris ensemble.

apparaissent à l'intérieur des minigaps afin d'assurer la conservation du nombre total d'états.

Un point important à noter est la généralisation de cette règle quand le clivage a lieu à l'intérieur d'une couche fluide le long d'un plan parallèle aux interfaces (Fig. II.6(a)). Ces résultats sont obtenus à partir des équations (II.21) et de (II.22) en considérant la couche fluide de même nature que celle du volume (l'eau), mais avec des épaisseurs différentes :  $d_{f1} = 0.6d_f$  (cercles vides) et  $d_{f2} = 0.4d_f$  (cercles pleins). Les résultats dans la figure II.6(a) montrent clairement l'existence d'un mode par gap pour les deux SRs complémentaires. Pour illustrer ce résultat général, nous présentons dans Fig. II.6(b) la variation des modes de surface en fonction des épaisseurs  $d_{f1}$  et  $d_{f2}$  des couches fluides de surface pour les deux SRs semi-infinis complémentaires, tels que  $d_{f1} + d_{f2} = d_f$  à  $k_{//}D = 4.5$ .

Les cercles pleins (cercles vides) sont les modes de surface induits par la couche d'eau d'épaisseur  $d_{f1}$  ( $d_{f2}$ ). On remarque clairement que pour n'importe quelle combinaison de deux SRs semi-infinis complémentaires telle que  $d_{f1} + d_{f2} = d_f$ , on a toujours un état de surface par gap, et ceci pour n'importe quelle valeur du vecteur d'onde  $k_{//}D$ . Cependant, dans le cas très spécifique où le clivage est fait exactement au milieu de la couche fluide

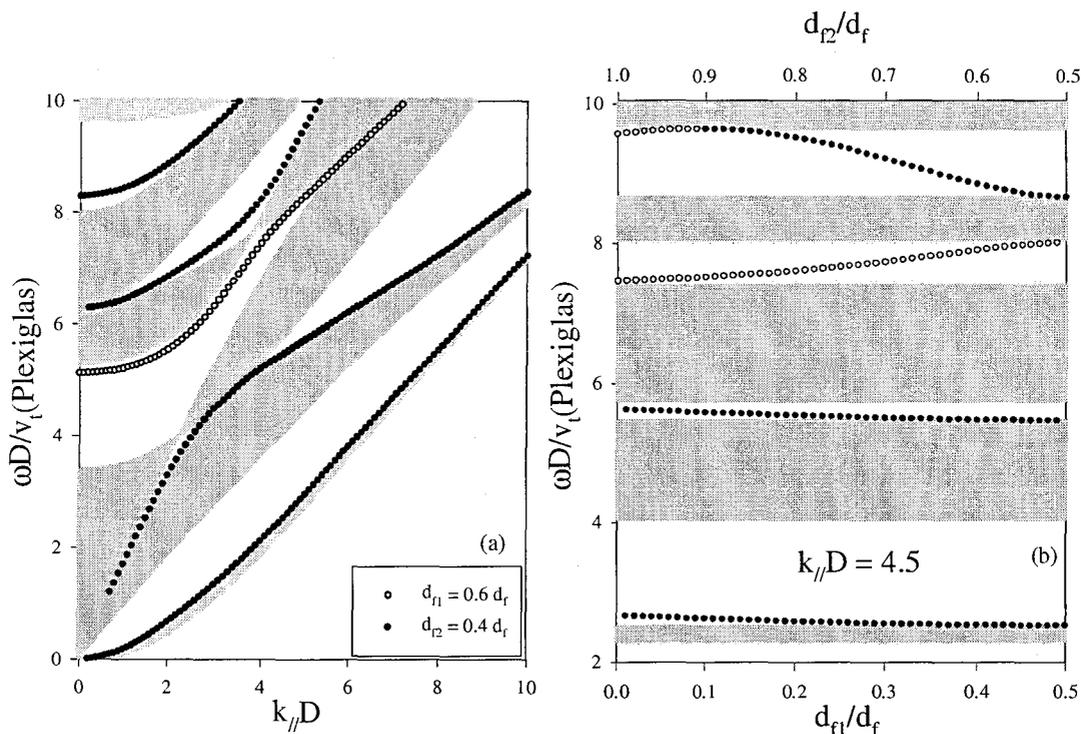


Fig. II.6: (a) Même chose que dans la figure II.3, mais pour les deux SR complémentaires obtenus à partir du clivage d'un SR infini à l'intérieur de la couche fluide tel que  $d_{f1} = 0.4d_f$  (cercles pleins) et  $d_{f2} = 0.6d_f$  (cercles vides). (b) Variation de la fréquence réduite  $[\omega D/v_t(\text{Plexiglas})]$  des modes localisés de surface induits par la couche d'encapsulation d'eau d'épaisseur  $d_{f1}$  (cercles pleins) et  $d_{f2}$  (cercles vides) à  $k_{//}D = 4.5$ .  $d_{f1}$  et  $d_{f2}$  sont choisis tels que  $d_{f1} + d_{f2} = d_f$ .

(i.e.,  $d_{f1} = d_{f2} = 0.5d_f$ ), le mode de surface n'apparaît pas à l'intérieur des gaps, mais rejoint une des limites de bande.

Afin de montrer la dépendance de la structure de bande ainsi que les modes de surface de la nature de la couche solide constituant le SR, nous avons tracé dans la figure II.7 la fréquence réduite  $\Omega = \omega D/v_t(\text{Al})$  en fonction du vecteur d'onde parallèle réduit  $k_{//}D$  pour un SR Aluminium-eau avec toujours  $d_f = d_s = D/2$ . En raison du fort contraste entre ces deux matériaux, les bandes sont plus étroites et les gaps sont plus larges en comparaison avec le cas du SR plexiglas-eau. En outre, la dispersion des modes de surface montre un comportement tout à fait différent. Par exemple, lorsque le clivage est effectué entre la couche d'Al et la couche d'eau du SR infini [Fig.II.7(a)], on observe que à part la branche la plus basse (cercles vides) associée à la couche d'Al à la surface, toutes les autres branches (cercles pleins) sont localisées à la surface de la couche d'eau.

La figure II.7(b) donne les mêmes résultats que la figure II.7(a) mais pour les deux

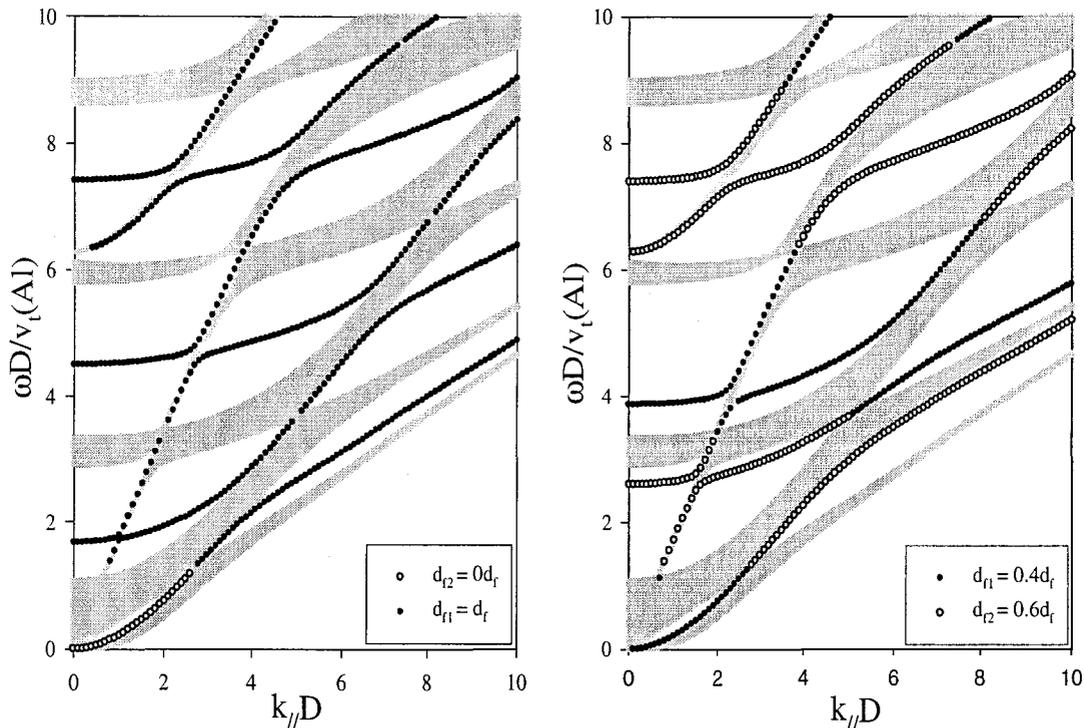


Fig. II.7: (a) Même chose que dans la figure II.3 mais pour le SR Al-eau. Les courbes représentent la fréquence réduite  $\omega D/v_t(\text{Al})$  en fonction de vecteur d'onde réduit  $k_{//}D$ . (b) Même chose que dans la figure II.6(a) mais pour le SR Al-eau.

SRs semi-infinis complémentaires terminés par deux couches fluides tels que  $d_{f1} = 0.4d_f$  (cercles pleins) et  $d_{f2} = 0.6d_f$  (cercles vides). Ces résultats montrent encore une fois l'existence d'un mode par gap et la dépendance de ces modes de surface avec l'épaisseur de la couche fluide à la surface.

Considérons maintenant le cas où le clivage est produit à l'intérieur de la couche solide le long d'un plan parallèle aux interfaces. Les figures II.8(a) et II.8(b) représentent les courbes de dispersion pour les deux SRs semi-infinis complémentaires Aluminium-eau terminés par une couche d'encapsulation de type Al, tels que  $d_{s1} = d_{s2} = d_s/2$  (Fig. II.8(a)) et  $d_{s1} = 0.2d_s$ ,  $d_{s2} = 0.8d_s$  (Fig. II.8(b)).

Ces résultats sont obtenus à partir des équations (II.35), (II.36) et (II.37) en considérant la couche solide de même nature que celle de volume mais avec des épaisseurs différentes. Contrairement au cas où le clivage est fait exactement au milieu de la couche fluide ( $d_{f1} = d_{f2} = 0.5d_f$ ) pour lequel il n'y a pas de mode de surface, la figure II.8(a) montre que dans le cas où le clivage a lieu au milieu de la couche solide à la surface, on peut avoir deux branches de modes de surface dégénérées dans quelques gaps et aucun mode

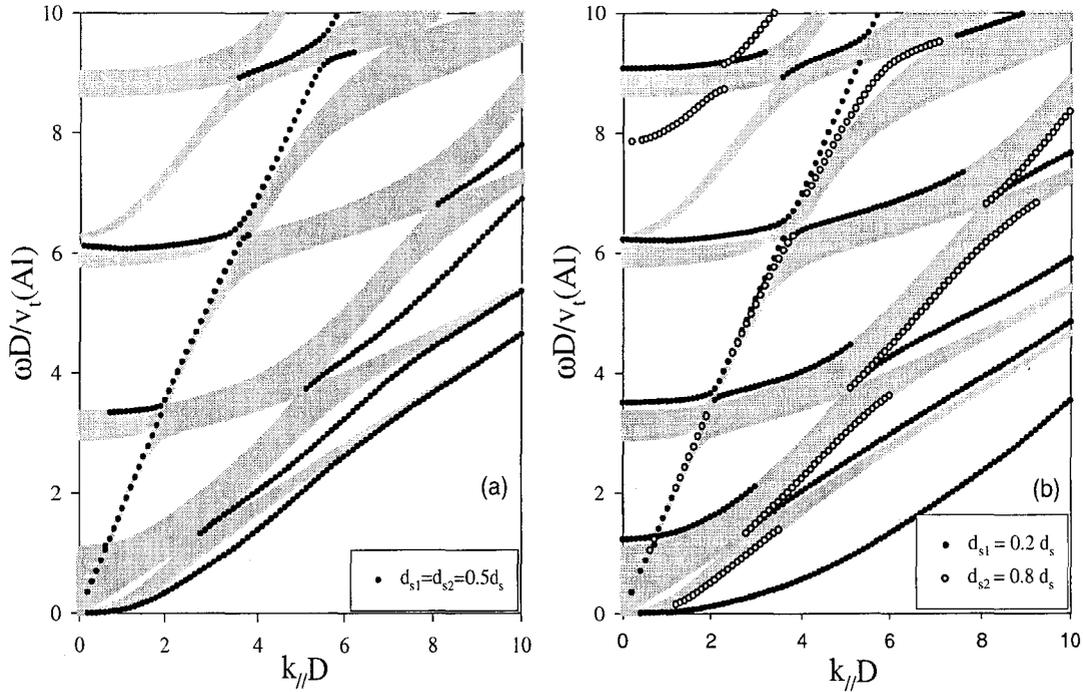


Fig. II.8: (a),(b) Même chose que dans la figure 3 mais pour les deux SR complémentaires obtenus à partir du clivage d'un SR infini au milieu de la couche solide (Al) tel que : (a)  $d_{s1} = d_{s2} = 0.5d_s$  et (b)  $d_{s1} = 0.2d_s$  et  $d_{s2} = 0.8d_s$ .

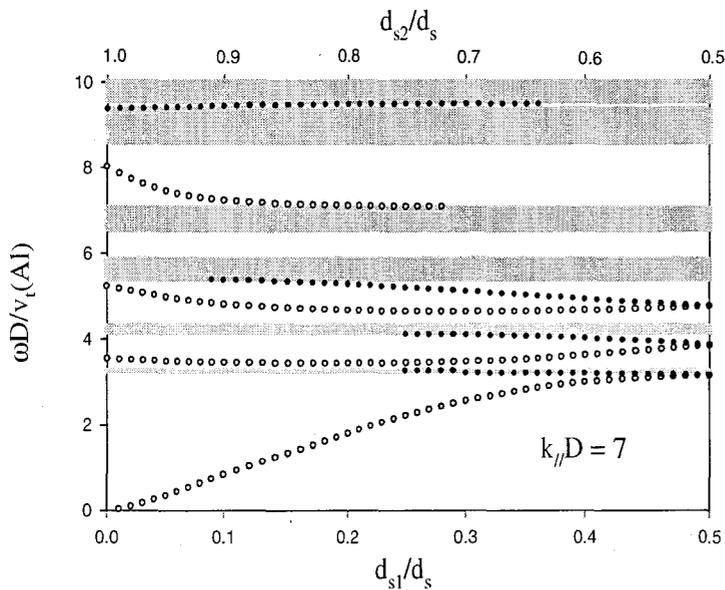


Fig. II.9: Variation de la fréquence réduite  $[\omega D/v_t(\text{Al})]$  des modes localisés de surface induits par la couche d'encapsulation d'Al d'épaisseur  $d_{s1}$  (cercles pleins) et  $d_{s2}$  (cercles vides) à  $k_{||}D = 7$ .  $d_{s1}$  et  $d_{s2}$  sont choisis tels que  $d_{s1} + d_{s2} = d_s$ .

de surface dans d'autres gaps pour les deux SRs semi-infinis complémentaires. Lorsque le clivage est fait tel que  $d_{s1} \neq 0.5d_s$  (voir Fig. II.8(b) pour  $d_{s1} = 0.2d_s$  et  $d_{s2} = 0.8d_s$ ), une levée de dégénérescence de modes de surface se produit. Par conséquent, zéro, une ou deux branches des modes de surface peuvent exister à l'intérieur des différents gaps dans le plan  $(\Omega, k_{//}D)$ . Ceci est clairement illustré dans la figure II.9 où nous avons tracé l'évolution des modes de surface pour deux SRs semi-infinis complémentaires pour différentes épaisseurs  $d_{s1}$  et  $d_{s2}$  tels que  $d_{s1} + d_{s2} = d_s$  à  $k_{//}D = 7$ . On peut noter que :

- pour  $d_{s1} = 0$  et  $d_{s2} = d_s$ , nous avons un mode par gap (ceci résulte du clivage entre une couche solide et une couche fluide).
- pour  $d_{s1} = d_{s2} = 0.5d_s$ , nous avons deux branches de modes de surface dégénérées dans les trois gaps les plus bas et aucun mode dans les trois gaps les plus haut.
- pour des valeurs arbitraires de  $d_{s1}$  et  $d_{s2}$  (avec  $d_{s1} + d_{s2} = d_s$ ), nous avons zéro, un ou deux modes pour différentes combinaisons des deux SRs semi-infinis complémentaires.

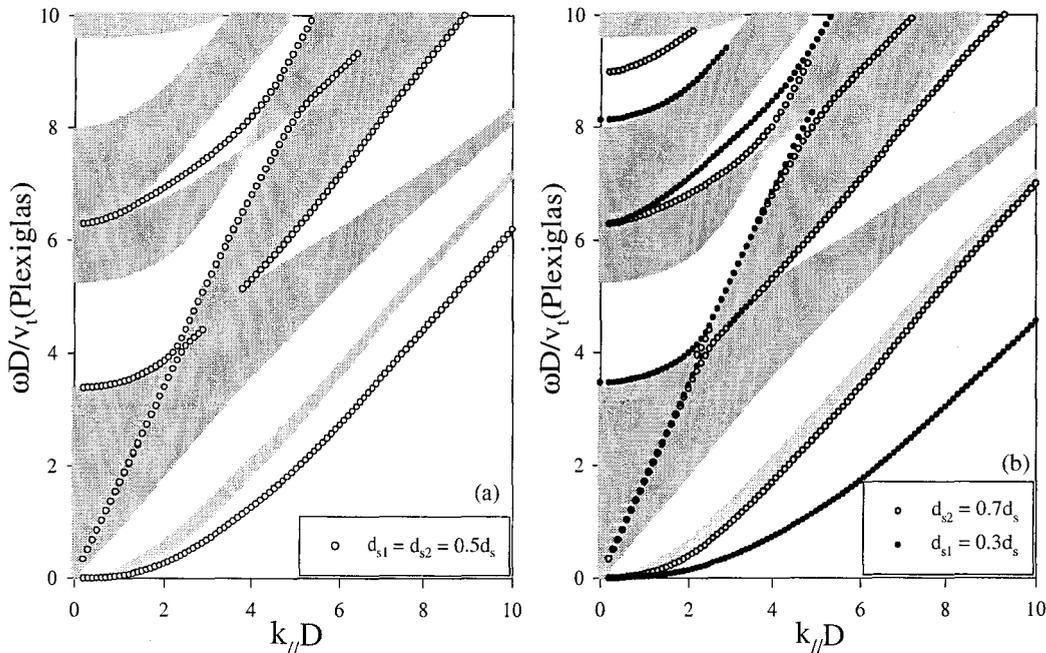


Fig. II.10: Même chose que dans la figure II.3 mais pour les deux SRs complémentaires Plexiglas-eau terminé par la couche d'encapsulation de Plexiglas tels que : (a)  $d_{s1} = d_{s2} = 0.5d_s$  et (b)  $d_{s1} = 0.3d_s$  et  $d_{s2} = 0.7d_s$ .

Des résultats similaires pour deux SRs semi-infinis plexiglas-eau avec une couche d'encapsulation solide à la surface sont donnés dans la figure II.10. Ces résultats montrent les mêmes conclusions que dans la figure II.8, à savoir l'existence de deux branches dégénérées dans quelques gaps et aucune branche dans d'autres gaps pour  $d_{s1} = d_{s2} =$

$0.5d_s$  (Fig.II.10(a)), tandis que pour  $d_{s1} \neq 0.5d_s$  (Fig. II.10(b)), on peut avoir zéro, un ou deux modes dans chaque gap pour les deux SRs complémentaires.

#### II.4.2 Super-réseau semi-infini en contact avec un fluide homogène semi-infini

Dans ce paragraphe, nous étudions les modes localisés et résonnants induits par l'interface entre un SR semi-infini en contact avec un fluide homogène semi-infini ou avec une couche d'encapsulation fluide d'épaisseur finie. D'abord, nous considérons les modes d'interface induits par l'interface entre une SR plexiglas-eau terminé par une couche de plexiglas en contact avec un fluide semi-infini homogène de Mercure (Hg). La figure II.11 donne la dispersion des modes localisés (résonnants) induits par cette interface au-dessous (au-dessus) de la bande de volume de Hg (ligne droite). Ces modes sont obtenus à partir des maxima de la variation de la densité d'états  $\Delta n(\omega)$  entre le système couplé SR/Hg et le même volume d'un SR infini et d'un milieu infini de Hg. Deux exemples de la densité d'états  $\Delta n(\omega)$  sont représentés dans les figures II.12(a) et II.12(b) pour  $k_{//}D = 2.5$  et  $k_{//}D = 7$  respectivement.

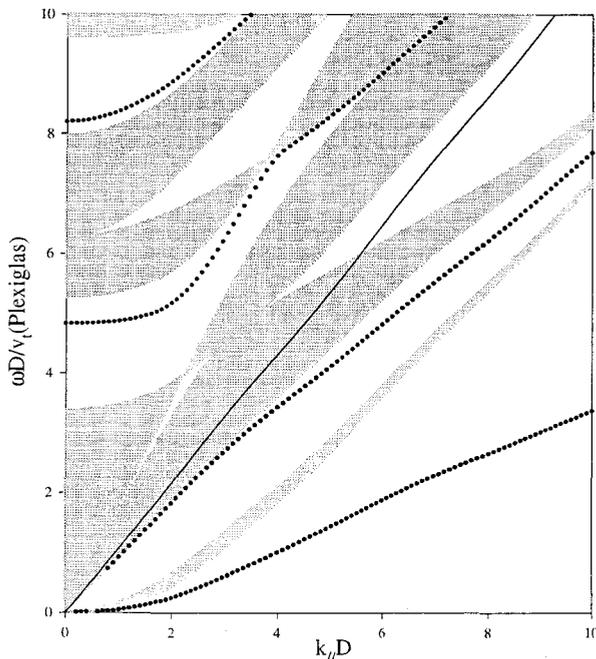


Fig. II.11: Dispersion des modes d'interface induits par l'interface entre le SR semi-infini plexiglas-eau et le milieu homogène fluide (Hg). Les courbes sont les modes localisés (résonnants) lorsque leur fréquence tombe au-dessous (au-dessus) de la ligne correspondant à la vitesse du son dans le mercure (Hg).

Les fonctions  $\delta$  de poids  $(-1/4)$  situées respectivement, au bas et en haut des bandes de volume, sont notées  $B_i$  et  $T_i$ .  $B_f$  indique un pic  $\delta$  de poids  $(-1/4)$  situé en bas de la bande de volume du milieu fluide (Hg). Les deux pics  $\delta$  positifs notés  $L_1$  et  $L_2$  représentent les modes localisés d'interface; leurs positions peuvent être déduites également à partir

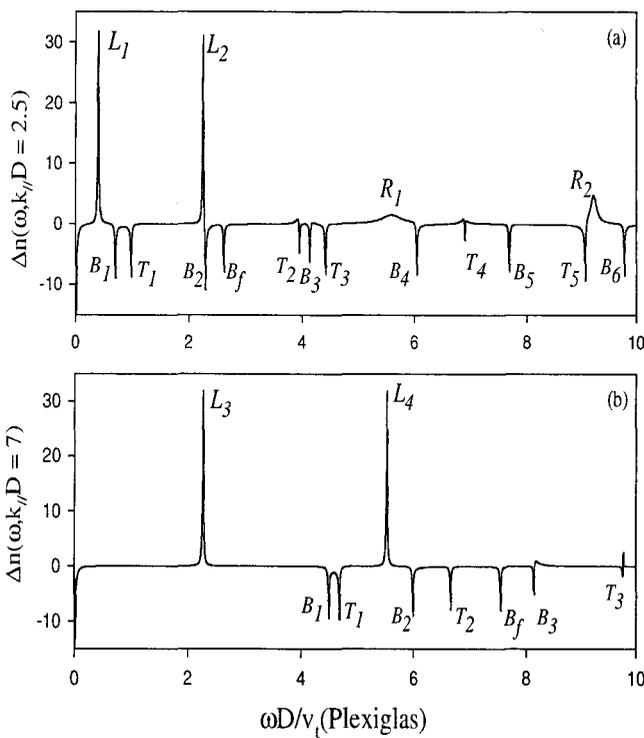


Fig. II.12: (a) Variation de la densité d'états totale [en unité de  $D/v_t(\text{Plexiglas})$ ] entre le SR semi-infini en contact avec Hg et le même volume d'un SR infini et du volume de la couche de (Hg), en fonction de  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$  à  $k_{||}D = 2.5$ .  $B_i$  et  $T_i$  représentent, respectivement, des pics  $\delta$  de poids (-1/4) situés en bas et en haut des bandes de volume et  $B_f$  indique un pic  $\delta$  de poids (-1/4) situé en bas de la bande de volume de mercure (Hg).  $L_i$  et  $R_i$  indiquent les modes localisés et résonants respectivement. (b) Même chose que (a) mais pour  $k_{||}D = 7$ .

des équations (II.26) et (II.27). Les petits pics notés  $R_1$  et  $R_2$  qui tombent au-dessus de  $B_f$  sont des modes résonants d'interface (Fig. II.12(a)). Ces derniers modes sont des modes évanescents par rapport au SR et propagatifs par rapport au mercure comme il est illustré dans la densité locale (Fig. II.13(a)) pour le mode résonant noté  $R_2$ . Notons que les modes localisés d'interface dans la figure II.12(a) sont élargis artificiellement en ajoutant à la fréquence  $\omega$  une petite quantité imaginaire, tandis que les résonances d'interface sont intrinsèquement élargies en raison de leur interaction avec la bande de volume du Hg. Expérimentalement, on peut détecter les résonances notées  $R_1$  et  $R_2$  à partir du coefficient de réflexion d'une onde incidente envoyée à partir du milieu homogène (Hg). Les deux branches des modes localisés situés au-dessous de la bande de volume de Hg montre un comportement différent dans la localisation spatiale. La plus basse branche montre une forte localisation à l'interface SR/Hg, tandis que la branche la plus élevée montre une localisation importante à l'interface interne entre les couches de plexiglas et l'eau situées juste au voisinage de l'interface SR/Hg. Ces résultats sont illustrés par les lignes discontinue et continue dans la densité d'états locale (Fig. II.13(b)) correspondant aux modes notés  $L_3$  et  $L_4$  (Fig. II.12(b)) respectivement.

Maintenant nous supposons que le milieu homogène de mercure est de taille finie

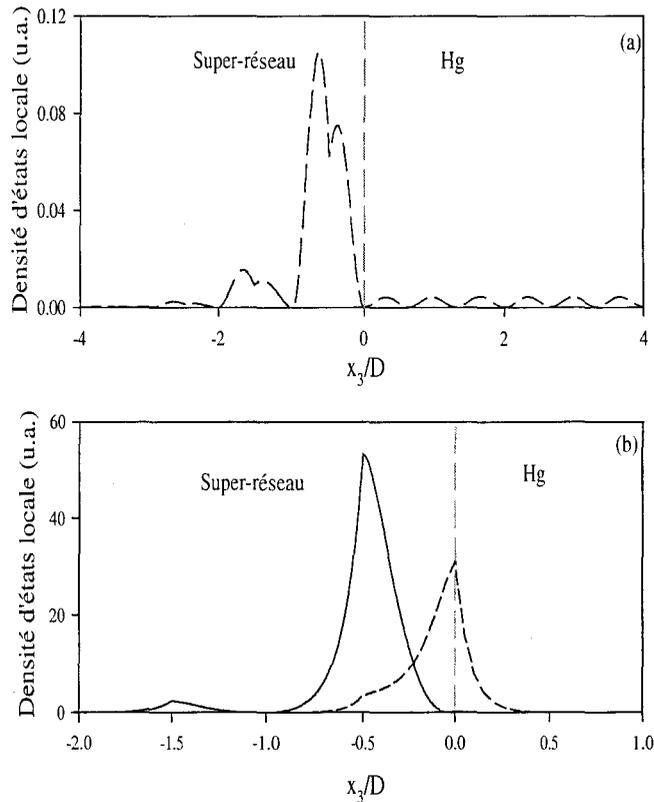


Fig. II.13: (a) Représentation spatiale de la densité d'états locales pour le mode noté  $R_2$  dans la figure II.12(a). (b) Même chose que (a) mais pour les modes localisés notés  $L_3$  (traits discontinus) et  $L_4$  (traits continus) dans la figure II.12(b).

(d'épaisseur  $d_0$ ). Les figures II.14(a) et II.14(b) donnent la dispersion des modes localisés et résonnants (cercles vides) induits par la couche d'encapsulation d'épaisseur  $d_0 = 0.5D$  et  $d_0 = 1.5D$  respectivement. La ligne droite indique la ligne du son dans Hg. Ces modes sont obtenus à partir des pics de la densité d'états totale entre le SR en contact avec une couche d'encapsulation et le même volume du SR sans la couche d'encapsulation. Les modes localisés à l'intérieur des gaps peuvent être obtenus à partir des relations de dispersion (Eqs. (II.21) et (II.22)). Les modes localisés et résonnants induits par la couche d'encapsulation, peuvent présenter différents comportements dans la direction perpendiculaire aux interfaces : ils peuvent être propagatifs à la fois dans le SR et dans la couche d'encapsulation (modes pseudo-guidés) quand leurs fréquences tombent à l'intérieur de la bande de volume du SR et au-dessus de la ligne du son dans Hg ; ou bien ils peuvent se propager dans la couche d'encapsulation et s'atténuer dans le SR (modes guidés) quand leurs fréquences tombent à l'intérieur des gaps du SR et au-dessus de la ligne de Hg ; ou encore ils peuvent s'évanouir des deux cotés de l'interface SR/Hg quand leurs fréquences tombent à l'intérieur des gaps de SR et au-dessous de la ligne de Hg. Dans la figure II.14(a), on peut noter que pour une certaine épaisseur de la couche Hg ( $d_0 = 0.5D$ ), tous les modes guidés sont localisés dans les gaps du SR, tandis que lorsque  $d_0$  augmente ( $d_0 = 1.5D$ , Fig.II.14(b)), les fréquences des modes localisés qui se trouvent à l'intérieur des gaps continuent jusqu'à ce

que les courbes correspondantes pénètrent dans les bandes de volume et deviennent des résonances (Leaky waves). Les deux branches les plus basses situées au-dessous de la ligne de Hg dans les figures II.14(a) et (b) coïncident avec les branches localisées d'interface dans la figure II.11.

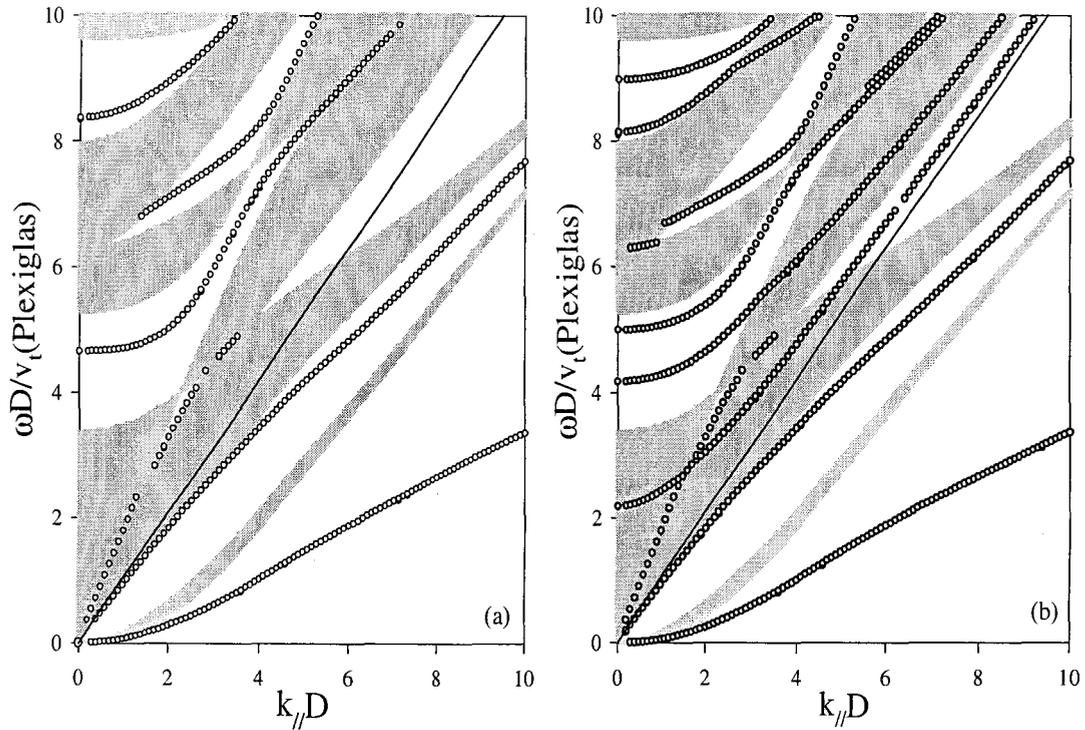


Fig. II.14: (a) Dispersion des modes localisés et résonants (cercles vides) induits par une couche fluide de Hg d'épaisseur  $d_0 = 0.5D$  déposée sur un SR semi-infini plexiglas-eau terminé par une couche complète de plexiglas. (b) Même chose que dans (a), mais pour  $d_0 = 1.5D$ . La ligne continue représente la vitesse du son dans Hg.

Ces résultats montrent que les fréquences des modes localisés et résonants dépendent fortement de l'épaisseur de la couche d'encapsulation  $d_0$ . Cette variation est mieux illustrée dans la figure II.15(a) en fonction de  $d_0$  pour  $k_{//} D = 3$ . On peut observer que les deux branches les plus basses qui correspondent aux modes localisés à l'interface entre le SR et la couche d'encapsulation deviennent presque indépendantes de l'épaisseur  $d_0$  pour  $d_0 \geq 0.5D$  (voir aussi Figs.II.14(a),(b)). Les branches plus élevées correspondent aux modes guidés de la couche Hg, ces branches tendent vers la ligne du son dans Hg lorsque  $d_0$  augmente. Aussi notons que les courbes dans cette figure sont presque horizontales lorsqu'une branche localisée tend à devenir résonante en pénétrant dans la bande de volume, tandis qu'à l'intérieur des bandes de volume les branches correspondant à ces résonances varient rapidement avec  $d_0$ . Cependant, l'intensité de ces résonances dans la densité d'états décroît voire s'annule

lorsque  $d_0$  est petit ou la fréquence est élevée.

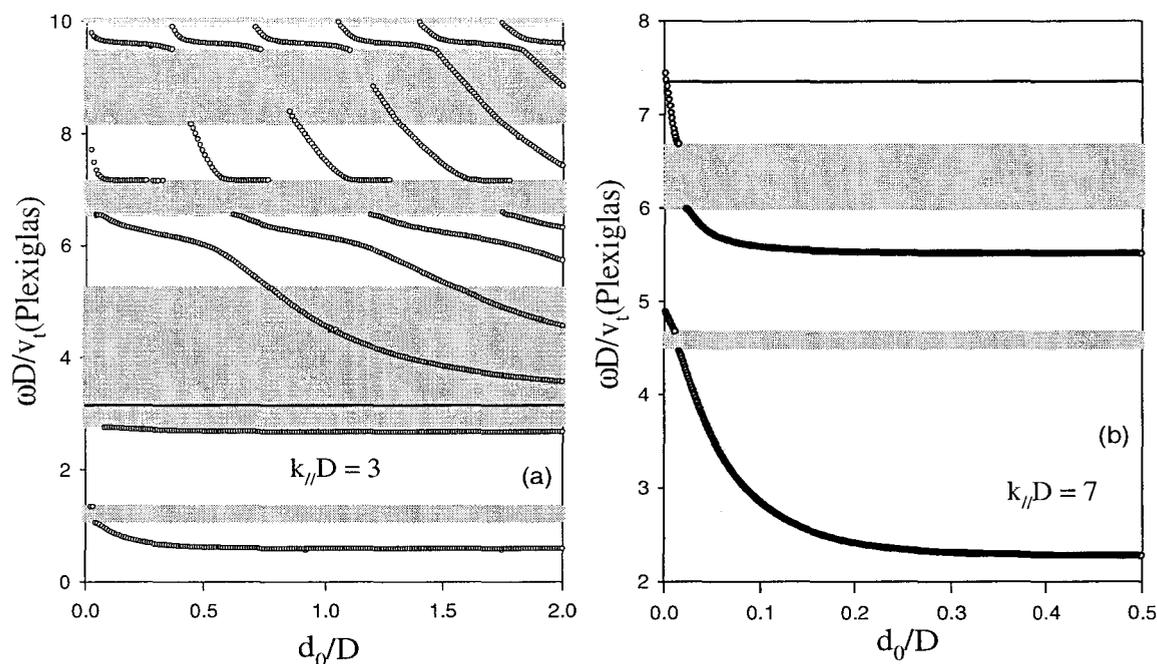


Fig. II.15: (a) Modes localisés et résonants induits par la couche d'encapsulation (Hg) en fonction de l'épaisseur  $d_0$  de cette dernière. Le SR est composé des couches plexiglas-eau terminé par une couche complète de plexiglas à la surface pour  $k_{//}D = 3$ . Les modes guidés tendent asymptotiquement vers la vitesse du son de Hg (indiqué par la ligne horizontale) au fur et à mesure que  $d_0$  augmente, cependant les deux branches les basses correspondent aux modes localisés à l'interface SR-Hg. (b) Même chose que dans (a) mais pour  $k_{//}D = 7$ .

Finalement, notons que pour une fréquence  $\omega$  donnée dans la figure II.15(a) les modes se répètent périodiquement en fonction de  $d_0$ . La figure II.15(b) donne une représentation à plus grande échelle pour la variation des deux branches d'interface les plus basses en fonction de  $d_0$  à  $k_{//}D = 7$ . A  $d_0 = 0$ , les deux branches coïncident avec les modes de surface du SR terminé par une couche de plexiglas (Fig. II.3) à la surface. Au fur et à mesure que  $d_0$  augmente, ces deux branches diminuent, croisent les deux premières bandes de volume et tendent asymptotiquement vers les branches localisées associées à l'interface SR/Hg (Fig. II.11). La localisation spatiale de ces deux branches dépend fortement de  $d_0$ . En effet, la branche la plus élevée, fortement localisée à la surface du SR pour  $d_0 = 0$  (Fig. II.4(b)), devient localisée à la surface interne entre la couche de plexiglas et l'eau pour  $d_0 \geq 0.5D$  (voir la figure II.13(b) en traits continus). Par contre, la branche la plus basse fortement localisée à la surface interne entre la couche de plexiglas et l'eau pour  $d_0 = 0$  (Fig. II.4(a)), devient localisée à l'interface SR/Hg lorsque  $d_0 \geq 0.5D$  (voir la

figure II.13(a) en traits discontinus).

### II.4.3 Super-réseau semi-infini en contact avec un solide

Maintenant, nous supposons qu'une couche d'encapsulation de plexiglas d'épaisseur  $d_0$ , est déposée sur un SR Al-eau terminé par une couche complète d'eau. La dispersion des modes localisés induits par la couche d'encapsulation d'épaisseur  $d_0 = 2D$  est représentée sur la figure II.16. Suivant leur fréquence, ces modes peuvent présenter différents comportements dans la direction perpendiculaire aux interfaces : ils peuvent se propager à la fois dans le SR et dans la couche d'encapsulation, ou se propager dans l'un et s'atténuer dans l'autre, ou s'atténuer des deux cotés de l'interface SR-couche d'encapsulation. La droite épaisse en ligne continue (discontinue) indique la vitesse du son transverse (longitudinale) dans le plexiglas. Les modes localisés sont obtenus à partir des relations de dispersion (Eqs. (II.35) et (II.36)). Les branches situées au-dessus de la vitesse du son transverse de plexiglas représentent les modes localisés induits par la couche adsorbée du plexiglas, ces modes tendent vers la ligne du son transverse de plexiglas ( $v_t(\text{Plexiglas})$ ) lorsque  $k_{//}D \rightarrow \infty$ .

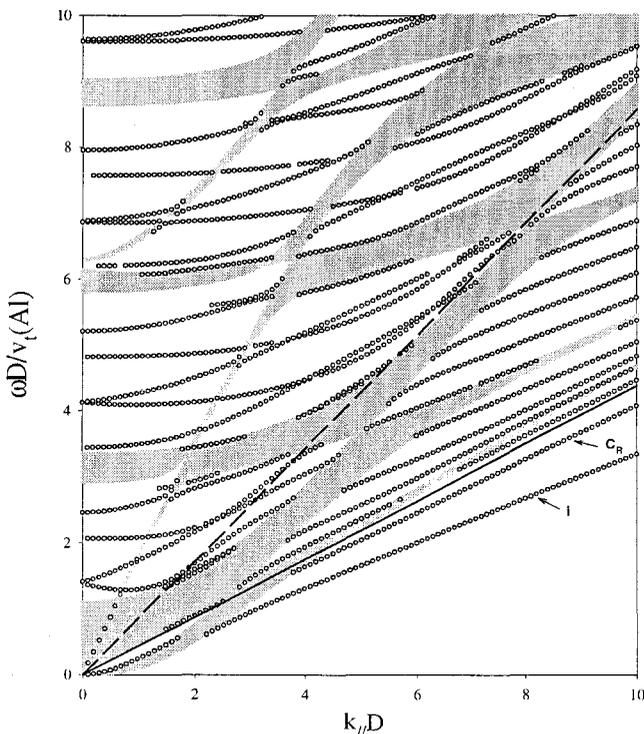


Fig. II.16: Même chose que dans la figure II.14 mais pour le SR AL-eau terminé par une couche d'encapsulation de plexiglas d'épaisseur  $d_0 = 2D$

La branche notée  $C_R$  située au-dessous de la vitesse transverse de plexiglas ( $v_t(\text{Plexiglas})$ ) correspond au mode de Rayleigh localisé à la surface de la couche de plexiglas en sur-

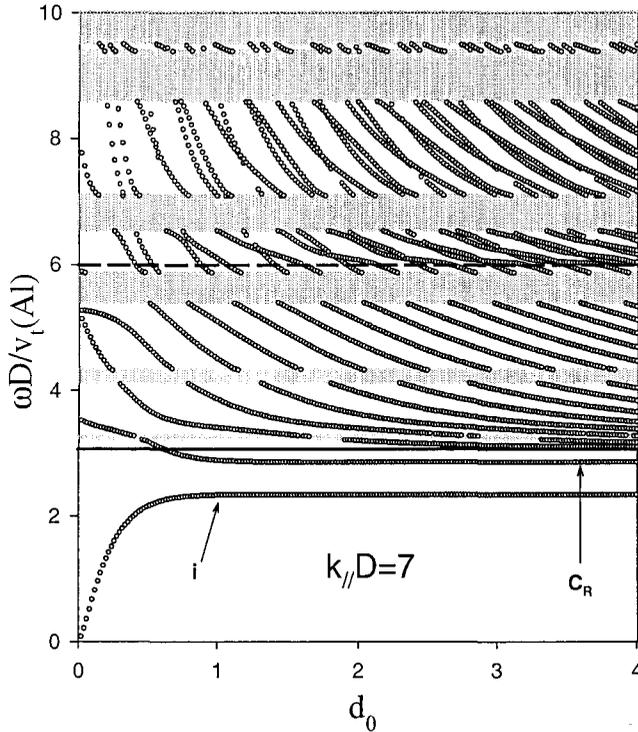


Fig. II.17: Modes localisés induits par la couche d'encapsulation de plexiglas en fonction de l'épaisseur  $d_0$  de cette dernière à  $k_{//}D = 7$ .  $C_R$  indique le mode de Rayleigh et  $i$  le mode d'interface.

face. La branche notée  $i$  dans la figure II.16 représente les modes localisés à l'interface SR/plexiglas. Les modes situés au-dessus de la vitesse transverse ( $v_t(Plexiglas)$ ) ne propagent pas dans le SR et restent bien confinés dans la couche superficielle.

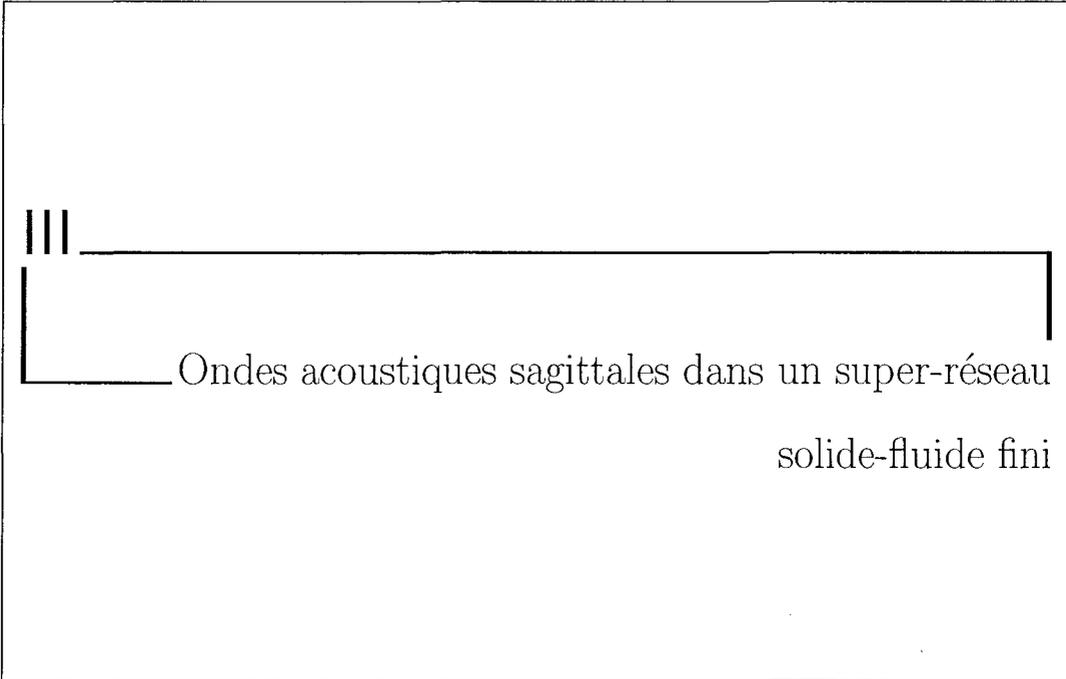
Notons que les fréquences des modes localisés dépendent fortement de l'épaisseur  $d_0$  de la couche d'encapsulation. Un exemple de cette variation est illustré dans la figure II.17 pour  $k_{//}D = 7$ . Dans cette figure, les modes situés au voisinage de la ligne de la vitesse transverse de plexiglas ( $v_t(Plexiglas)$ ) sont de caractère essentiellement transverse, tandis que les modes qui tombent entre les vitesses transverse et longitudinale du plexiglas sont de caractère mixte (transverse et longitudinal). Finalement, les modes situés au-dessus de la ligne de la vitesse longitudinale ( $v_l(Plexiglas)$ ) sont de caractère longitudinal prédominant.

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude théorique basée sur le formalisme de la fonction de Green pour les ondes acoustiques de propagation sagittale dans les SRs semi-infinis solide-fluide. L'approche des fonctions de Green utilisée dans cette étude nous a permis de déterminer les relations de dispersion des ondes de surface et d'interface, ainsi que les densités d'états locale et totale dans ces structures.

Nous avons montré que la création de deux SRs semi-infinis à partir du clivage d'un SR infini à l'intérieur d'une couche fluide donne lieu à un mode de surface par gap, ce résultat est identique à celui obtenu auparavant pour les modes purement transverses dans les SRs solide-solide. Cependant, lorsque le clivage a lieu à l'intérieur d'une couche solide, cette règle n'est plus valable et on peut avoir zéro, un ou deux modes de surface à l'intérieur de chaque gap selon les valeurs du vecteur d'onde  $k_{//}$  et les épaisseurs des couches à la surface des deux SRs complémentaires.

Nous avons aussi examiné l'existence des modes localisés et résonants dans un SR semi-infini avec une couche de surface (fluide ou solide) différente de celle de volume (couche d'encapsulation). En particulier, nous avons montré que ces modes dépendent fortement des paramètres élastiques et de l'épaisseur relative de la couche d'encapsulation, ainsi que de la nature de la couche du SR en contact avec cette dernière. Aussi, nous avons étudié les modes localisés et résonants associés à l'interface SR-substrat (de type fluide ou solide). Ces modes dépendent fortement des paramètres relatifs du substrat ainsi que de la nature de la couche du SR en contact avec ce dernier.



## Sommaire

---

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>III.2 Fonction de Green des super-réseaux finis solide-fluide dans différentes géométries</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>III.3 Calcul du coefficient de transmission et de réflexion à travers un super-réseau fini</b> . . . . .	<b>59</b>
III.3.1 Super-réseau fini sans défaut . . . . .	59
III.3.2 Super-réseau fini avec un défaut de type fluide . . . . .	60
III.3.3 Super-réseau fini avec un défaut de type solide . . . . .	62
<b>III.4 Résultats numériques et discussions</b> . . . . .	<b>63</b>
III.4.1 Règle générale sur les modes de surface et les modes confinés . . . . .	64
III.4.2 Coefficients de transmission et de réflexion . . . . .	65
III.4.3 Miroir acoustique omnidirectionnel . . . . .	74
III.4.4 Transmission sélective . . . . .	79
<b>III.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>82</b>

---

### III.1 Introduction

Du point de vue pratique, les super-réseaux (SRs) sont des structures composées d'un nombre fini de cellules déposées sur un substrat. Ces structures composites possèdent généralement des défauts artificiels ou naturels. Des perturbations introduites dans ces structures telles que : une couche tampon (une couche encastrée entre le substrat et le SR) et d'encapsulation (une couche à la surface du SR), une cavité, donnent lieu à de nouveaux modes qui peuvent exister dans les gaps en plus des modes de volume.

Expérimentalement, les spectres des phonons dans les SRs solide-solide ont été étudiés par la diffusion Raman[10, 42, 43] qui a permis l'observation, pour la première fois, des doublets associés aux modes repliés dans la première zone de Brillouin. D'autres expériences de la diffusion Raman ont été effectuées sur un SR fini  $Si/Ge_mSi_n$  pour examiner les différentes interactions du système substrat/SR/couche d'encapsulation[125], certains pics observés ont été interprétés comme des modes résonnants associés à la présence du substrat et de la couche d'encapsulation. Des études similaires dans les SRs  $Si-Ge_{1-x}Si_x$  et  $GaAs-AlAs$ , ont montré l'existence des pics faibles dans les spectres des phonons acoustiques repliés[126, 127]. Ces pics ont été interprétés comme étant des phonons confinés dans le SR fini.

Dans le cas des SRs finis solide-fluide, il a été démontré à travers des spectres de transmission théoriques et expérimentaux que des structures composées d'une[52, 53] ou plusieurs[54] périodes peuvent présenter de larges gaps et la présence des couches défauts dans ces systèmes peut donner lieu à des modes localisés bien définis dans ces gaps[53]. Récemment[55], des expériences réalisées sur les lames de plexiglas séparées par des cavités d'eau caractérisées par un gradient d'épaisseur, ont montré l'existence des oscillations de Bloch (de type Wannier-Stark Ladder) analogues à celles observées pour les états électroniques dans les SRs semi-conducteurs polarisés[56].

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés, dans le cadre de la théorie de réponse d'interface[57], à l'étude de la propagation des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les SRs solide-fluide de taille finie. Notre but est de mettre en évidence certains résultats nouveaux dans ces systèmes tels que :

- Les modes confinés liés à la taille finie du SR. En particulier, l'établissement d'une règle générale sur la répartition des modes dans les SRs.

- L'effet des différentes inhomogénéités telles que : la surface libre et l'interface avec un substrat homogène.
- Etude des coefficients de transmission et de réflexion (amplitude et phase) à travers un SR fini avec et sans défaut. En particulier, nous mettrons en évidence deux types de gaps : des gaps dus aux zéros de transmission et des gaps dus à la périodicité du système ainsi que des résonances de type Fano. La possibilité d'existence de l'angle de Brewster acoustique.
- L'existence des gaps omnidirectionnels qui permettent la réflexion des ondes quelque soit l'angle d'incidence.
- Transmission sélective à travers les modes de défaut et les modes d'interface.

Notons que ces différents points n'ont fait l'objet d'aucune étude antérieure jusqu'à présent.

Ce chapitre est structuré comme suit : les paragraphes III.2 et III.3 sont consacrés, respectivement, aux expressions explicites des fonctions de Green des différentes géométries et des coefficients de transmission et de réflexion correspondants. Dans le paragraphe III.4, nous discutons ces résultats à travers quelques illustrations numériques, telles que : la règle générale sur les modes propres d'un SR fini, les spectres de transmission et de réflexion à partir desquels on déduit les modes de surface, les zéros de transmission et de réflexion, les résonances de Fano, l'origine des croisements des bandes et des gaps et l'angle de Brewster. Aussi nous montrons que ces structures peuvent présenter la propriété de réflexion omnidirectionnelle des ondes acoustiques (miroirs acoustiques), i.e., elles permettent la réflexion des ondes quelque soit l'angle d'incidence et la polarisation des ondes de la même façon que dans les systèmes phononiques 2D et 3D[60–62]. Finalement comme dernière application, nous discuterons la possibilité de transmission sélective à travers les modes de défaut insérés dans un SR fini. Le défaut peut-être soit une cavité insérée dans le SR soit l'interface SR/milieu homogène. Les conclusions sont résumées dans le paragraphe III.5.

### *III.2 Fonction de Green des super-réseaux finis solide-fluide dans différentes géométries*

#### **A/ Super-réseau fini solide-fluide terminé de part et d'autre par une couche solide**

Considérons la géométrie de la figure III.1(b) d'un SR fini solide-fluide terminé par deux couches solides de part et d'autre, noté **S-S**.

La procédure de réalisation d'un tel système est la même que celle présentée dans le chapitre II, à savoir, la création du SR fini à partir d'un SR infini (Fig. III.1(a)) en découplant les couches  $(n = 1, i = F)$  et  $(n = N + 1, i = F)$ . Cette opération se traduit par la détermination de l'opérateur de clivage  $\overleftrightarrow{V}(MM)$ .

Lorsqu'on découple le SR infini, on supprime deux couches (de type fluide) des cellules  $(n = 1)$  et  $(n = N + 1)$ . L'espace des interfaces perturbées est donc constitué de 4 états  $M = \{(n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, \frac{d_f}{2})\}$ . L'inverse de la fonction réponse d'interface  $\overleftarrow{d}^{-1}(MM)$  qui décrit le système obtenu est équivalente à celle de la structure infinie  $\overleftarrow{g}^{-1}(MM)$  (Eq. II.10a, II.10b, II.10c) dans l'espace des interfaces sauf aux sites appartenant à l'espace  $M$  où il y a eu le découplage. L'opérateur de clivage est donné par la relation suivante :

$$\overleftrightarrow{V}(MM) = \overleftarrow{d}^{-1}(MM) - \overleftarrow{g}^{-1}(MM). \quad (\text{III.1})$$

$\overleftrightarrow{V}(MM)$  est donc une matrice  $(4 \times 4)$  définie dans l'espace des interfaces  $M$ . Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\overleftrightarrow{V}(MM) = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & -b & -a \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

où les paramètres  $a$  et  $b$  sont donnés dans le chapitre II (Eq. II.2) et caractérisent la couche fluide.

L'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}(MM)$  est défini par la relation suivante [Eq. I.7] :

$$\overleftrightarrow{\Delta}(MM) = \overleftrightarrow{I}(MM) + \overleftrightarrow{V}(MM)\overleftarrow{g}(MM). \quad (\text{III.3})$$

où  $\overleftarrow{g}(MM)$  est défini par les équations (II.10a, II.10b, II.10c) et qui s'écrit dans l'espace des interfaces  $M = \{(n = 1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, \frac{d_f}{2})\}$  sous la forme suivante :

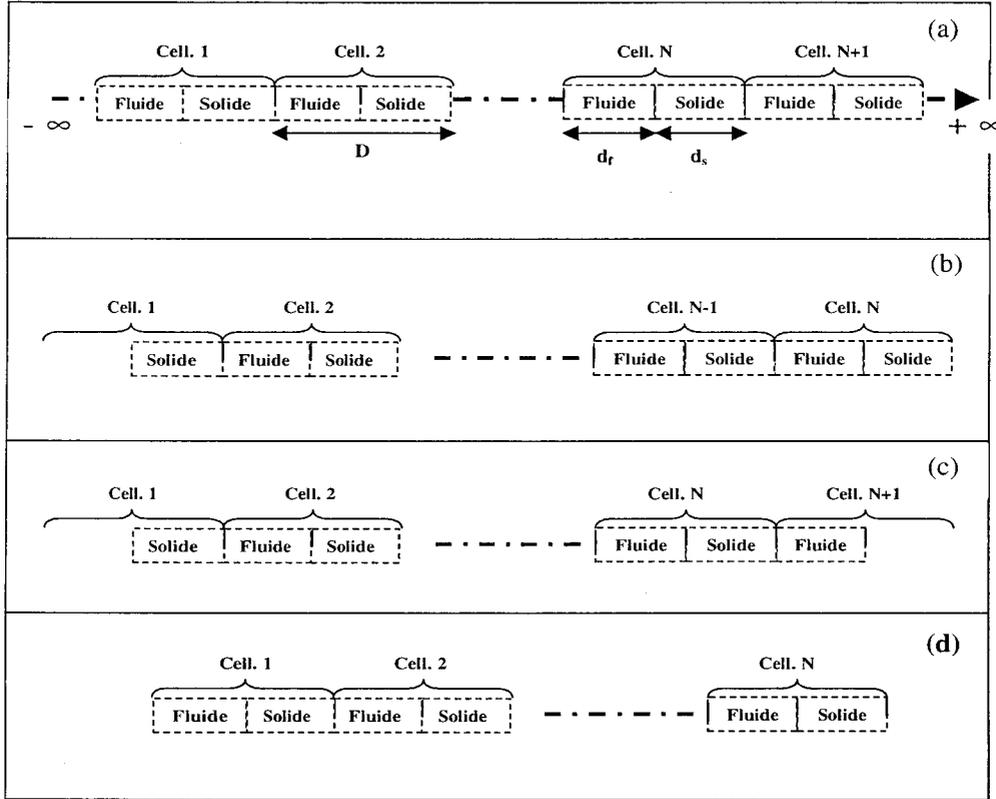


Fig. III.1: (a) Schéma de la géométrie d'un SR infini formé de deux couches solide/fluide. (b) SR fini terminé de part et d'autre par une couche solide appelé **S-S**. (c) SR fini terminé d'une part par une couche solide et d'autre par une couche fluide appelé **S-F**. (d) SR fini terminé d'une part par une couche fluide et d'autre par une couche solide appelé **F-S**.

$$\overleftrightarrow{g}(MM) = \frac{t}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} -\frac{A+a}{Bb} & \frac{b+Bt}{Bb} & -\frac{A+a}{Bb}t^N & \frac{b+Bt}{Bb}t^N \\ \frac{b+Bt}{Bb} & -\frac{A+a}{Bb} & \frac{B+bt}{Bb}t^{N-1} & -\frac{A+a}{Bb}t^N \\ -\frac{A+a}{Bb}t^N & \frac{B+bt}{Bb}t^{N-1} & -\frac{A+a}{Bb} & \frac{b+Bt}{Bb} \\ \frac{b+Bt}{Bb}t^N & -\frac{A+a}{Bb}t^N & \frac{b+Bt}{Bb} & -\frac{A+a}{Bb} \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

où  $A$  et  $B$  sont donnés dans le chapitre II (Eqs. II.4) et caractérisent la couche solide.

L'inverse de la fonction réponse de surface de la structure finie **S-S** s'écrit sous la forme suivante :

$$\overleftrightarrow{d}_s^{-1}(M_m M_m) = \overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m) \overleftrightarrow{g}_s^{-1}(M_m M_m) \quad (\text{III.5})$$

En réalité, étant donné que nous sommes intéressés par le SR fini, nous n'avons besoin que des éléments de la fonction de Green dans l'espace des interfaces  $M_m = (n =$

$1, i = F, \frac{d_f}{2}$ ),  $(n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2})$  qui délimite le SR fini. La matrice de l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m)$  s'écrit alors :

$$\overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{t^2-1} \frac{Y_1}{Bb} & -\frac{t^N}{t^2-1} \frac{Y_2}{Bb} \\ -\frac{t^N}{t^2-1} \frac{Y_2}{Bb} & 1 - \frac{t}{t^2-1} \frac{Y_1}{Bb} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.6})$$

avec

$$Y_1 = b^2 - a^2 - aA + Bbt \quad \text{et} \quad Y_2 = aB - Abt. \quad (\text{III.7})$$

$\overleftrightarrow{g}_s(M_m M_m)$  est une matrice constituée par les éléments de la fonction réponse de la structure infinie dans l'espace des interfaces  $M_m = (n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2})$ . Elle a pour expression :

$$\overleftrightarrow{g}_s(M_m M_m) = \frac{t}{t^2-1} \begin{pmatrix} -\frac{A+a}{Bb} & \frac{B+bt}{Bb} t^{N-1} \\ \frac{B+bt}{Bb} t^{N-1} & -\frac{A+a}{Bb} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.5), peut s'écrire sous la forme :

$$\overleftrightarrow{d}_s^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} A(N) & B(N) \\ B(N) & A(N) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.9})$$

avec

$$\begin{aligned} A(N) &= \left( \frac{Y_1}{A+a} \right) \left[ 1 - Bb \left( t - \frac{1}{t} \right) \frac{Y_1}{\Delta} \right] \\ B(N) &= Bb \left( t - \frac{1}{t} \right) \frac{Y_1 Y_2}{(A+a)\Delta} t^{N-1} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

et

$$\Delta = Y_1^2 - Y_2^2 t^{2(N-1)} \quad (\text{III.11})$$

**B/ Super-réseau fini solide-fluide terminé d'une part par une couche solide et d'autre part par une couche fluide**

Maintenant, considérons le SR fini terminé d'une part par une couche solide et d'autre part par une couche fluide noté **S-F** (Fig. III.1(c)). Ce système est obtenu en utilisant la même procédure que celle décrite ci-dessus : on découpe le SR infini (Fig. III.1(a)) au niveau des sites  $(n = 1, i = F)$  (où on supprime une couche fluide) et  $(n = N + 1, i = S)$

(où on supprime une couche solide). L'espace des interfaces perturbées est donc  $M = \{(n = 1, i = F, -\frac{dt}{2}), (n = 1, i = F, \frac{dt}{2}), (n = N + 1, i = F, \frac{dt}{2}), (n = N + 2, i = F, -\frac{dt}{2})\}$ .

L'opérateur de clivage s'écrit sous la forme :

$$\overleftrightarrow{V}(MM) = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -B & -A \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Dans l'espace des interfaces  $M_m = (n = 1, i = F, \frac{dt}{2}), (n = N + 1, i = F, \frac{dt}{2})$ , les éléments de l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m)$  et de la fonction réponse de la structure infinie  $\overleftrightarrow{g}_s(M_m M_m)$  s'écrivent respectivement :

$$\overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{t^2-1} \frac{Y_1}{Bb} & -\frac{t^{N+1}}{t^2-1} \frac{Y_1}{Bb} \\ \frac{t^{N+1}}{t^2-1} [t + \frac{1}{t} + \frac{Y_1}{Bb}] & 1 - \frac{t}{t^2-1} [t + \frac{1}{t} + \frac{Y_1}{Bb}] \end{pmatrix}, \quad (\text{III.13})$$

$$\overleftrightarrow{g}_s(M_m M_m) = \frac{t}{t^2-1} \left( \frac{A+a}{Bb} \right) \begin{pmatrix} 1 & t^N \\ t^N & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.14})$$

A partir des équations (III.5), (III.13) et (III.14) la fonction réponse du système final **S-F** (Fig. III.1(c)) s'écrit :

$$\overleftrightarrow{d}_s^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} X(N) & Y(N) \\ Y(N) & Z(N) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.15})$$

où

$$\begin{aligned} X(N) &= \left[ -\frac{Bb}{(A+a)(1-t^{2N})} \right] \left[ t - \frac{1}{t} - \frac{Y_1}{Bb}(1-t^{2N}) \right], \\ Y(N) &= \left[ -\frac{Bb}{(A+a)(1-t^{2N})} \right] \left( t - \frac{1}{t} \right) t^N \\ \text{et } Z(N) &= \left[ \frac{Bb}{(A+a)(1-t^{2N})} \right] \left[ 2t + \frac{Y_1}{Bb}(1-t^{2N}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Notons que, à partir de la matrice de l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m)$  (Eq. (III.13)), on peut déduire les modes propres de la structure finie, à savoir :

$$\det \left[ \overleftrightarrow{\Delta}(M_m M_m) \right] = 0 \quad (\text{III.17})$$

En remplaçant  $Y_1$  par son expression dans (III.13), l'équation (III.17) devient :

$$\left[ t - \frac{a^2 - b^2 + Aa}{Bb} \right] \left[ t + \frac{A^2 - B^2 + Aa}{Bb} \right] (1 - t^{2N}) = 0 \quad (III.18)$$

**c/ Super-réseau fini solide-fluide terminé d'une part par une couche fluide et d'autre part par une couche solide**

La troisième géométrie étudiée est un SR fini solide-fluide terminé d'une part par une couche fluide et d'autre part par une couche solide, noté **F-S** (Fig. III.1(d)). Cette structure peut être obtenue de la même façon que celle de la deuxième géométrie. Dans ce cas, il suffit d'invertir les éléments diagonaux de la matrice de la fonction réponse, soit

$$\overleftrightarrow{d}_s^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} Z(N) & Y(N) \\ Y(N) & X(N) \end{pmatrix}, \quad (III.19)$$

où  $X(N)$ ,  $Y(N)$  et  $Z(N)$  sont donnés dans l'équation (III.16).

### III.3 Calcul du coefficient de transmission et de réflexion à travers un super-réseau fini

#### III.3.1 Super-réseau fini sans défaut

Considérons le SR fini (Fig. III.1(b)) en contact avec deux fluides homogènes semi-infinis (supposés de natures différentes) aux extrémités ( $n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}$ ) et ( $n = N+1, i = F, -\frac{d_f}{2}$ ) (Fig. III.2).

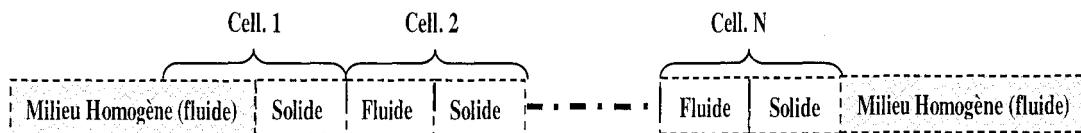


Fig. III.2: Représentation schématique d'un SR fini S-S, pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis fluides.

D'après la théorie de réponse d'interface[57], la fonction de Green d'interface  $\overleftrightarrow{d}^{-1}(M_m M_m)$  de la structure finale (Fig. III.2) est donnée par :

$$\overleftarrow{d}^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} A(N) - F_{s1} & B(N) \\ B(N) & A(N) - F_{s2} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.20})$$

où  $-F_{s1}$  et  $-F_{s2}$  sont les fonctions réponse de surface des deux fluides semi-infinis de part et d'autre du SR (Eq. I.31). Par conséquent :

$$\overleftarrow{d}(M_m M_m) = \frac{1}{A^2(N) - B^2(N) + F_{s1}F_{s2} - A(N)[F_{s1} + F_{s2}]} \begin{pmatrix} A(N) - F_{s2} & -B(N) \\ -B(N) & A(N) - F_{s1} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.21})$$

Pour calculer le coefficient de transmission et de réflexion à travers la structure finie, nous avons besoin de l'élément de matrice  $d(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2})$  pour le coefficient de transmission, soit :

$$T = \left| -2F_{s2} \frac{B(N)}{A^2(N) - B^2(N) + F_{s1}F_{s2} - A(N)[F_{s1} + F_{s2}]} \right|^2 \quad (\text{III.22})$$

et  $d(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, \frac{d_f}{2})$  pour le coefficient de réflexion, soit :

$$R = \left| \frac{A^2(N) - B^2(N) - F_{s1}F_{s2} + A(N)[F_{s1} - F_{s2}]}{A^2(N) - B^2(N) + F_{s1}F_{s2} - A(N)[F_{s1} + F_{s2}]} \right|^2 \quad (\text{III.23})$$

### III.3.2 Super-réseau fini avec un défaut de type fluide

Pour le calcul du coefficient de transmission à travers un SR fini contenant un défaut fluide, nous procédons de la même façon que précédemment (c.à.d, le cas où il n'y a pas de défaut dans la structure).

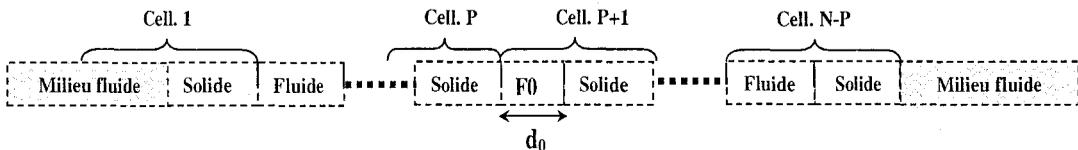


Fig. III.3: Représentation schématique de deux SRs finis S-S, reliés entre eux par l'intermédiaire d'une couche fluide (défaut), le tout est pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis fluides.

Nous utilisons la fonction de Green d'interface  $\overleftarrow{d}_s^{-1}(M_m M_m)$  (Eq. (III.9)) d'une structure finie S-S. Afin de construire un SR fini avec un défaut de type fluide, prenons

deux structures finies (Fig. III.1(b)), l'une possède  $P$  cellules ( $1 \leq n \leq P$ ) et l'autre  $N - P$  cellules ( $P + 1 \leq n \leq N$ ), on couple les deux structures entre elles aux sites ( $n = P + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}; n = P + 1, i = F, \frac{d_f}{2}$ ) par l'intermédiaire d'une couche fluide d'épaisseur  $d_0$  ensuite on couple la structure finie obtenue aux sites ( $n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}$ ) et ( $n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}$ ) (Fig. III.3) par deux fluides homogènes semi-infinis. Dans ce cas l'espace perturbé est de la forme  $M_m = (n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}), (n = P + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}), (n = P + 1, i = F, \frac{d_f}{2}), (n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2})$ . Ces opérations nous permettent de déduire la fonction de Green inverse  $\overleftrightarrow{d}^{-1}(M_m M_m)$  de la structure finale (Fig. III.3). Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\overleftrightarrow{d}^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} A(P) - F_{s1} & B(P) & 0 & 0 \\ B(P) & A(P) + a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & b_0 & A(N - P) + a_0 & B(N - P) \\ 0 & 0 & B(N - P) & A(N - P) - F_{s2} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.24})$$

$a_0$  et  $b_0$  caractérisent les éléments de la fonction de Green de la couche fluide (défaut), leurs expressions sont données par l'équation (II.13).

Pour le calcul du coefficient de transmission, on inverse la matrice de la fonction réponse du système finale (Eq. (III.24)) et on retient l'élément  $d(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = N + 1, i = F, -\frac{d_f}{2})$ , soit :

$$T = \left| \frac{-2F_{s2}B(N, P)}{A_1(N, P)A_2(N, P) - B^2(N, P) + F_{s1}F_{s2} - F_{s1}A_2(N, P) + F_{s2}A_1(N, P)} \right|^2 \quad (\text{III.25})$$

et  $d(n = 1, i = F, \frac{d_f}{2}; n = 1, i = F, \frac{d_f}{2})$  pour le calcul du coefficient de réflexion, soit :

$$R = \left| \frac{A_1(N, P)A_2(N, P) - B^2(N, P) - F_{s1}F_{s2} + F_{s1}A_2(N, P) - F_{s2}A_1(N, P)}{A_1(N, P)A_2(N, P) - B^2(N, P) + F_{s1}F_{s2} - F_{s1}A_2(N, P) + F_{s2}A_1(N, P)} \right|^2 \quad (\text{III.26})$$

avec

$$\begin{aligned} A_1(N, P) &= \frac{\psi(P) \Xi}{\psi(P)\psi(N - P) - [b_0 B(P)B(N - P)]^2} \\ A_2(N, P) &= \frac{\psi(N - P) \Xi}{\psi(P)\psi(N - P) - [b_0 B(P)B(N - P)]^2} \\ B(N, P) &= \frac{b_0 B(P)B(N - P) \Xi}{\psi(P)\psi(N - P) - [b_0 B(P)B(N - P)]^2} \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

où

$$\Xi = [A^2(P) - B^2(P) + a_0 A(P)] [A^2(N - P) - B^2(N - P) + a_0 A(N - P)] - b_0^2 A(P) A(N - P) \quad (\text{III.28})$$

et  $\psi(\ell)$  ( $\ell = P, N - p$ ) est donné par :

$$\psi(\ell) = [a_0 + A(N - \ell)] [A^2(\ell) - B^2(\ell) + a_0 A(\ell)] - b_0^2 A(\ell) \quad (\text{III.29})$$

et les autres paramètres sont donnés par l'équation (III.10).

### III.3.3 Super-réseau fini avec un défaut de type solide

La procédure d'insertion d'un défaut de type solide dans un SR fini s'effectue comme suit : Soit un SR fini terminé d'une part par une couche solide et d'autre part par une couche fluide **S-F** (Fig. III.1(c)) composé de  $P - 1$  cellules et un deuxième SR fini terminé d'une part par une couche fluide et d'autre part par une couche solide **F-S** (Fig. III.1(d)) composé de  $N - P$  cellules. On couple ces deux SRs par l'intermédiaire d'une couche solide (défaut) aux sites ( $n = P, i = F, \frac{d_f}{2}; n = P + 1, i = F, -\frac{d_f}{2}$ ). L'ensemble est pris en sandwich entre deux fluides homogènes semi-infinis (Fig. III.4).

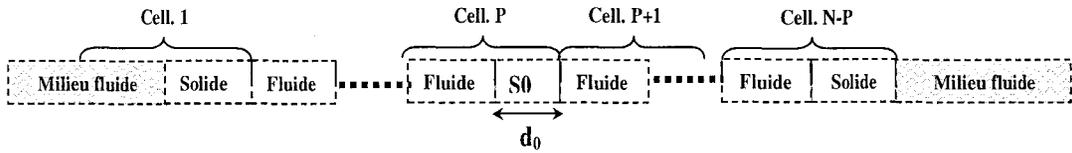


Fig. III.4: Représentation schématique de deux SRs finis **S-F** et **F-S**, reliés entre eux par l'intermédiaire d'une couche solide (défaut), le tout est pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis fluides.

La fonction de Green inverse  $\overleftrightarrow{d}_{fs}^{-1}(M_m M_m)$  de la structure finale est :

$$\overleftrightarrow{d}_{fs}^{-1}(M_m M_m) = \begin{pmatrix} X(P-1) - F_{s1} & Y(P-1) & 0 & 0 \\ Y(P-1) & X(P-1) + A_0 & B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & Z(N-P) + A_0 & Y(N-P) \\ 0 & 0 & Y(N-P) & X(N-P) - F_{s2} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.30})$$

$A_0$  et  $B_0$  caractérisent les éléments de la fonction de Green de la couche solide (défaut), leurs expressions sont données dans le chapitre II (Eq. II.29).

Les coefficients de transmission et de réflexion ont pour expressions respectivement :

$$T = \left| \frac{-2F_{s2}Y(N, P)}{X(N, P)Z(N, P) - Y^2(N, P) + F_{s1}F_{s2} - F_{s1}Z(N, P) + F_{s2}X(N, P)} \right|^2 \quad (\text{III.31})$$

$$R = \left| \frac{X(N, P)Z(N, P) - Y^2(N, P) - F_{s1}F_{s2} + F_{s1}Z(N, P) - F_{s2}X(N, P)}{X(N, P)Z(N, P) - Y^2(N, P) + F_{s1}F_{s2} - F_{s1}Z(N, P) + F_{s2}X(N, P)} \right|^2 \quad (\text{III.32})$$

avec

$$\begin{aligned} X(N, P) &= \frac{\chi(P) \Upsilon}{\chi(P)\chi(N-P) - [B_0Y(P)Y(N-P)]^2} \\ Z(N, P) &= \frac{\chi(N-P) \Upsilon}{\chi(P)\chi(N-P) - [B_0Y(P)Y(N-P)]^2} \\ Y(N, P) &= \frac{B_0Y(P)Y(N-P) \Upsilon}{\chi(P)\chi(N-P) - [B_0Y(P)Y(N-P)]^2} \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon &= [X(P)Z(P) - Y^2(P) + A_0X(P)] \\ &\quad [X(N-P+1)Z(N-P+1) - Y^2(N-P+1) + A_0X(N-P+1)] \\ &\quad - B_0^2X(P)X(N-P+1) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

et  $\chi(\ell)$  ( $\ell = P, N-P+1$ ) est donné par :

$$\chi(\ell) = [A_0 + Z(N-\ell)] [X(\ell)Z(\ell) - Y^2(\ell) + A_0X(\ell)] - B_0^2X(\ell) \quad (\text{III.35})$$

### III.4 Résultats numériques et discussions

Dans ce qui suit, nous donnons quelques illustrations relatives aux modes propres dans un SR fini solide-fluide composé de plexiglas et l'eau. Ensuite nous considérons le spectre de transmission à travers un SR fini pris en sandwich entre deux fluides de même nature (eau) avec ou sans défaut. Notons que le défaut peut être de type fluide (eau avec une épaisseur différente) ou solide (Aluminium). Nous considérons aussi l'association de deux

SRs différents afin d'illustrer la notion de "Bande Interdite phononique complète". Finalement, nous donnerons un exemple typique d'une transmission sélective à travers un SR fini composé du mercure (Hg) et d'Aluminium (Al) pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis Hg et eau. Les paramètres élastiques de tous ces matériaux sont donnés dans le chapitre II (Tableau II.1). Notons que, les épaisseurs des couches fluide et solide dans les SRs étudiés sont supposés égales,  $d_f = d_s$ , et la période du SR étant  $D = d_f + d_s = 2d_f$  comme dans les Réfs.[49, 51]

#### III.4.1 Règle générale sur les modes de surface et les modes confinés

Dans ce qui suit, nous présentons une règle générale sur l'existence des modes de surface et des modes confinés dans un SR fini solide-fluide formé de  $N$  cellules avec des surfaces libres de contraintes. A partir de l'équation (III.18), on peut distinguer deux types de modes propres de la structure finie :

† Si le vecteur d'onde  $k$  est réel, ce qui correspond aux bandes de volume, les modes propres du SR fini sont donnés par le troisième terme de l'équation (III.18), à savoir,  $\sin(NkD) = 0$  ce qui donne :  $kD = \frac{m\pi}{N}$ , avec  $m = 1, 2, \dots, N-1$ . En effet, le premier et le deuxième termes dans l'équation (III.18) ne s'annulent pas dans la bande de volume.

‡ Si le vecteur d'onde  $k$  est imaginaire (modulo  $\pi$ ), ce qui correspond à une bande interdite, dans ce cas les modes propres de la structure finie sont donnés par les deux premiers termes de l'équation (III.18), à savoir,  $t = \frac{a^2 - b^2 + Aa}{Bb}$  ou  $t = -\frac{A^2 - B^2 + Aa}{Bb}$ . Par contre, le troisième terme dans l'équation (III.18) ne peut pas s'annuler à l'intérieur du gap tant que  $t$  satisfait la condition suivante  $|t| < 1$  qui assure la décroissance des états de surface à partir de la surface.

A titre d'exemple, considérons un SR fini solide-fluide composé de  $N = 4$  cellules plexiglas-eau terminé de part et d'autre par une couche fluide d'eau d'épaisseur respectivement  $d_{f1} = 0.4d_f$  et  $d_{f2} = 0.6d_f$ , de telle façon que ces deux couches de surfaces soient complémentaires (i.e.  $d_{f1} + d_{f2} = d_f$ ). La figure III.5 montre ces différents résultats à savoir, l'existence de  $N - 1 = 3$  modes confinés à l'intérieur des bandes de volume (branches en cercles pleins) et un mode par gap. Ce dernier est associé à l'une des deux surfaces qui entourent le SR, à savoir la couche fluide d'épaisseur  $d_{f1} = 0.4d_f$  (cercles vides) ou

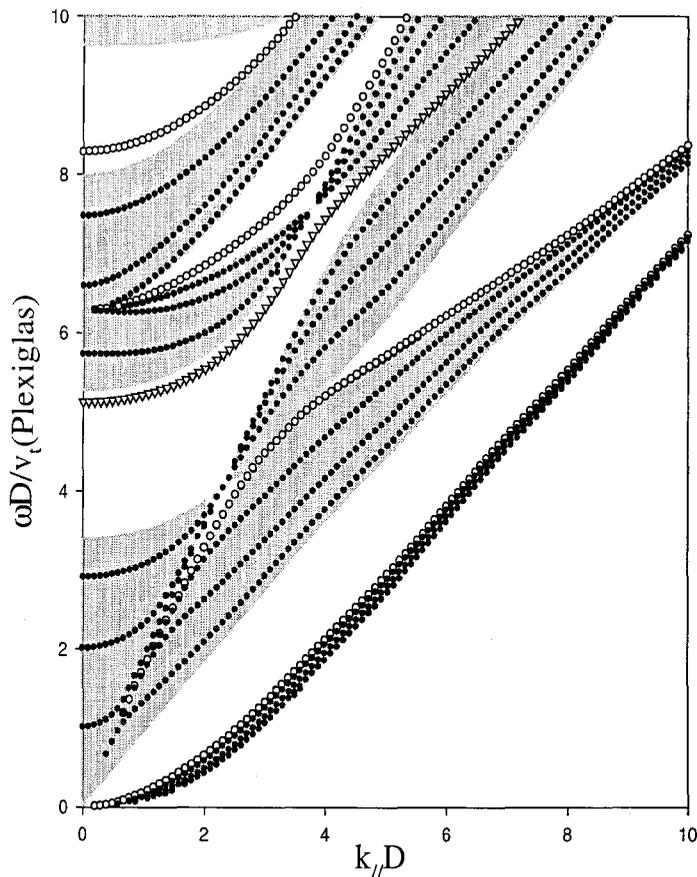


Fig. III.5: Structure de bande en fonction du vecteur d'onde réduit  $k_{//}D$ , d'un SR plexiglas-eau. Les zones hachurées en gris représentent les bandes du SR infini, les branches en cercles pleins représentent les  $N - 1 = 3$  modes confinés dans le SR fini constitué de  $N = 4$  cellules. Les cercles vides représentent les modes de surface induits par la couche d'eau d'épaisseur  $d_{f1} = 0.4d_f$  à l'une des surfaces. Les triangles vides représentent les modes de surface induits par la couche d'eau d'épaisseur  $d_{f1} = 0.6d_f$  à l'autre surface.

celle d'épaisseur  $d_{f2} = 0.6d_f$  (triangles vides). Notons que ces modes de surface sont indépendants du nombre  $N$  de cellules constituant le SR et coïncident exactement avec les modes de surface associés aux deux SRs semi-infinis complémentaires terminés par les couches fluides à la surface d'épaisseur  $d_{f1} = 0.4d_f$  et  $d_{f2} = 0.6d_f$  (voir Fig. II.6(a)). Ces résultats restent valables aussi dans le cas des modes purement transverses[128] ainsi que dans le cas des cristaux photoniques à base de câbles coaxiaux[88] (voir chapitre V). Aussi, nous avons montré que cette règle s'applique de même pour une chaîne linéaire multiatomique (voir Appendice B). Des expériences récentes sur les sphères soudées d'acier de différents diamètres sont en conformité avec cette règle[129].

### III.4.2 Coefficients de transmission et de réflexion

#### III.4.2.1 Super-réseau fini en contact avec le fluide d'un côté et le vide de l'autre côté

Le phénomène de la réflexion des phonons incidents, envoyés à partir d'un milieu homogène fluide, à la surface du SR fini est expliqué et analysé quantitativement en terme de temps de phase. En raison de la surface libre du système composite, les phonons incidents

avec des fréquences situées au-dessus de la ligne du son du milieu homogène se trouvent entièrement réfléchis. Vu que le taux de réflexion, dans ce cas, est égal à l'unité, le temps de phase demeure la seule quantité physique permettant de donner des informations relatives aux interactions des phonons incidents avec les modes de surface. Rappelons que ce temps de phase est défini dans l'approximation de la phase stationnaire, comme la dérivée de la phase du coefficient de réflexion par rapport à la pulsation. Ce temps est interprété comme le temps nécessaire à un phonon pour effectuer le processus de la réflexion. Dans ce paragraphe nous donnons, comme étant une méthode expérimentale, une méthode de détecter les modes de surface à partir des maxima du temps de phase à la réflexion d'un SR en contact d'une part avec un milieu homogène qui sert de milieu incident et d'autre part par le vide. Afin de confirmer les résultats du chapitre II sur les modes de surface d'un SR semi-infini terminé soit par une couche solide soit par une couche fluide (paragraphe II.4.1), nous considérons un SR solide-fluide fini composé de quatre cellules plexiglas-eau en contact d'un côté avec un milieu homogène (eau) et terminé de l'autre côté soit par une couche solide, soit par une couche fluide.

Dans le cas où le SR est terminé par une couche d'eau à la surface, nous présentons dans la figure III.6 les modes de surface (cercles vides) et les modes propagatifs dans le SR (cercles pleins). Notons que ces modes sont obtenus à partir des maxima du temps de phase à la réflexion comme il est illustré dans la figure insérée de la figure III.6 en fonction de la fréquence réduite à  $k_{//}D = 1$ . Le pic noté **L** correspond au mode de surface. Un autre exemple est illustré dans la figure III.7 dans le cas où le SR est terminé par une couche de plexiglas à la surface. Les triangles vides et les cercles pleins représentent, respectivement, les modes de surface et les modes propagatifs dans le SR. Ces modes sont obtenus à partir des maxima du temps de phase à la réflexion. Un exemple du temps de phase est représenté dans la figure insérée à  $k_{//}D = 5.5$ , où le mode noté **S** correspond au mode de surface. Dans ces deux exemples, on remarque que les modes de surface sont en conformité avec ceux trouvés pour les SRs semi-infinis complémentaires (Fig. II.3).

#### III.4.2.2 Super-réseau fini pris en sandwich entre deux fluides

Dans ce paragraphe, nous étudions les courbes de dispersion et la densité d'états d'un SR fini à partir du calcul du coefficient de transmission à travers ce système. Considérons

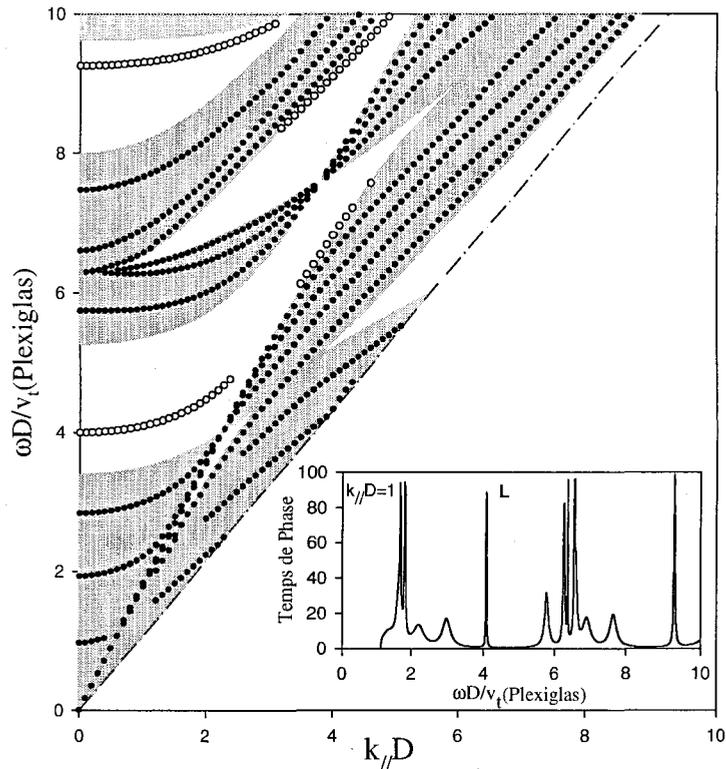


Fig. III.6: Structure de bande en fonction du vecteur d'onde réduit  $k_{//}D$ , d'un SR plexiglas-eau. Les zones hachurées en gris représentent les bandes du SR infini, les branches en cercles pleins représentent les modes propagatifs dans le SR fini constitué de  $N = 4$  cellules et terminé par une couche d'eau à la surface. Les cercles vides représentent les modes de surface associés à la couche d'eau à la surface. La droite indique la ligne du son dans l'eau. La figure insérée représente le temps de phase à la réflexion en fonction de la fréquence réduite  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$  à travers le SR décrit ci-dessus, à  $k_{//}D = 1$ . L indique le mode de surface associé à la couche d'eau à la surface.

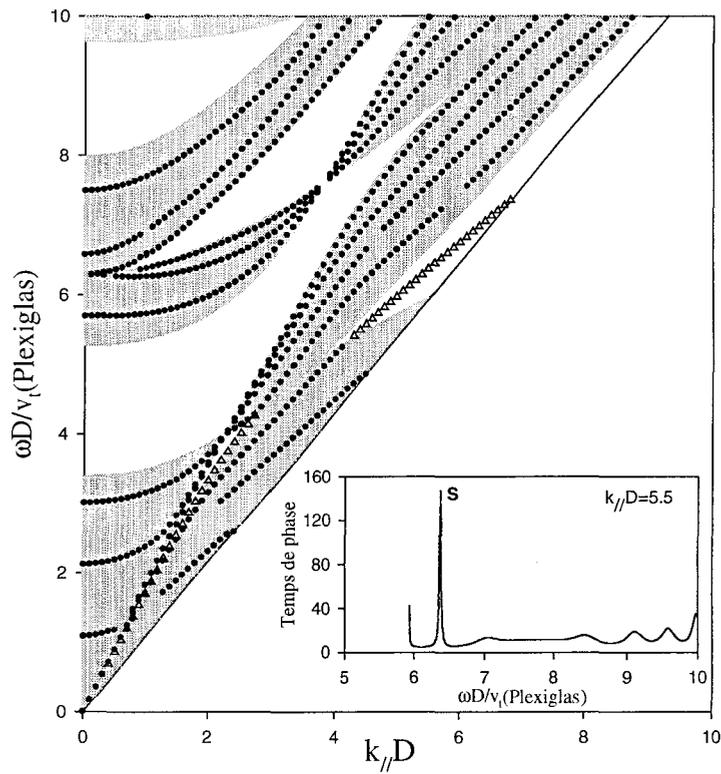


Fig. III.7: Même chose que la figure III.6, mais dans ce cas le SR est terminé par une couche de plexiglas à la surface. Les triangles vides représentent les modes de surface associés à la couche de plexiglas à la surface. La figure insérée représente le temps de phase à la réflexion en fonction de la fréquence réduite  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$  à travers le SR décrit ci-dessus, à  $k_{//}D = 5.5$ . **S** indique le mode de surface associé à la couche de plexiglas à la surface.

un SR formé de  $N = 4$  plaques de plexiglas émergées dans l'eau (Fig. III.1(b)). La figure III.8 donne les courbes de dispersion obtenus à partir des maxima du coefficient de transmission (voir aussi figure III.9). Dans cette figure les branches en lignes continues représentent les modes discrets. Le nombre de ces branches est lié au nombre de cellules constituant le SR. Au fur et à mesure que ce nombre augmente, la construction des bandes de volume devient plus marquée donnant lieu à un continuum dans la limite  $N \rightarrow \infty$  (zones hachurées en gris).

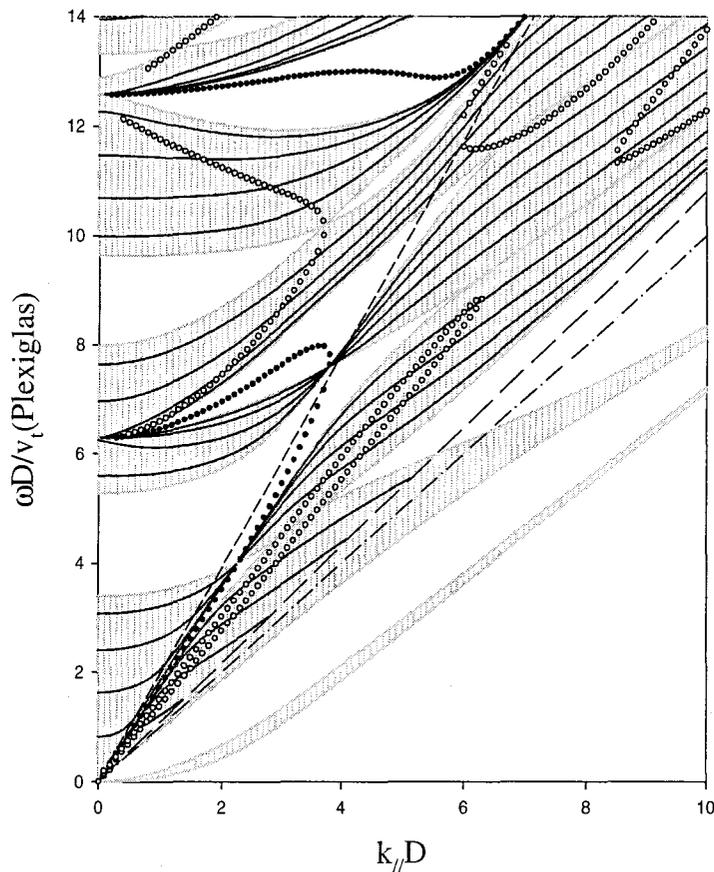


Fig. III.8: Structure de bande en fonction du vecteur d'onde réduit  $k_{//}D$ , d'un SR plexiglas-eau. Les zones hachurées en gris représentent celles du SR infini, les branches continues représentent celles du SR fini composé de  $N = 4$  cellules. Les cercles pleins et vides illustrent respectivement les branches correspondant aux zéros de transmission et de réflexion. Les droites discontinues en pointillé et en traits discontinus moyen représentent respectivement les vitesses du son transverse et longitudinale du plexiglas. La droite en traits discontinus long représente la vitesse du son longitudinale d'eau.

Sur la figure III.8, nous avons aussi présenté des branches qui correspondent à l'annulation soit du coefficient de transmission (cercles pleins) soit du coefficient de réflexion

(cercles vides). Les branches qui donnent  $T = 0$  sont obtenues à partir des équations (III.10) et (III.22), soit  $B = 0$ . Cette quantité  $B$  dépend uniquement de la couche solide du SR (ici le plexiglas), ce qui signifie que les zéros de transmission sont dus à l'insertion de la couche solide de plexiglas entre deux fluides (voir ci-dessous). Aux fréquences des zéros de transmission, la quantité  $\cos k_3 D$  (Eq. II.9) tend vers l'infini et par conséquent, l'atténuation (partie imaginaire du vecteur d'onde) dans le SR diverge. Cette propriété n'a pas d'analogue dans les SRs solide-solide.

En plus, un autre point à signaler dans cette figure est l'existence de croisements des bandes de volume. Les fréquences de ces points de croisement sont données par  $\cos k_3 D = \pm 1$  (correspondant aux limites des bandes) et  $B = 0$  (correspondant aux zéros de transmission). Lorsque les bandes se ferment, on obtient des bandes plates.

Sur la figure III.8, nous avons aussi représenté (cercles vides) les courbes correspondant à une réflexion nulle  $R = 0$ . Celles-ci s'obtiennent à partir de  $A^2 - B^2 - a^2 + b^2 = 0$  (Eq. (III.23)). Cette dernière équation donne aussi les fréquences de croisement des gaps (ou la fermeture des bandes) avec la condition  $\cos k_3 D = \pm 1$ .

La figure III.9 illustre la variation du coefficient de transmission de la structure décrite ci-dessus en fonction de la fréquence réduite  $\omega D/v_t(\text{plexiglas})$  pour différents valeurs de  $N$  (nombre de cellules constituant le SR) :  $N = 1, 2$  et  $5$  en incidence normale ( $\theta = 0^\circ$ , Figs. III.9(a),(b),(c)) et en incidence oblique ( $\theta = 25^\circ$ , Figs. III.9(e),(f),(g)).

En incidence normale, on remarque la formation de deux gaps de type Bragg au fur et à mesure que  $N$  augmente et qui sont dus à la périodicité de la structure. Notons qu'en incidence normale, les modes dans la lame solide ont soit une polarisation purement transverse, soit purement longitudinale et se propagent indépendamment. Par conséquent, la structure de bande résulte de la propagation des ondes longitudinales dans les lames solides et fluides sans couplage avec les ondes transverses dans les couches solides. Les courbes de dispersion du SR infini sont illustrées sur la figure III.9(d), où on remarque que le repliement des branches acoustiques d'origine purement longitudinale donne lieu à des gaps directs au centre et à la limite de la minizone de Brillouin. Notons que des expériences par ultrasons ont été réalisées sur les SRs de type plexiglas-eau et Aluminium-eau[52–54] pour mettre en évidence les premières branches acoustiques repliées.

En incidence oblique ( $\theta = 25^\circ$ ), le couplage avec les ondes transverses dans le solide a pour conséquence l'apparition des zéros de transmission. Pour  $N = 1$  (Fig III.9(e)),

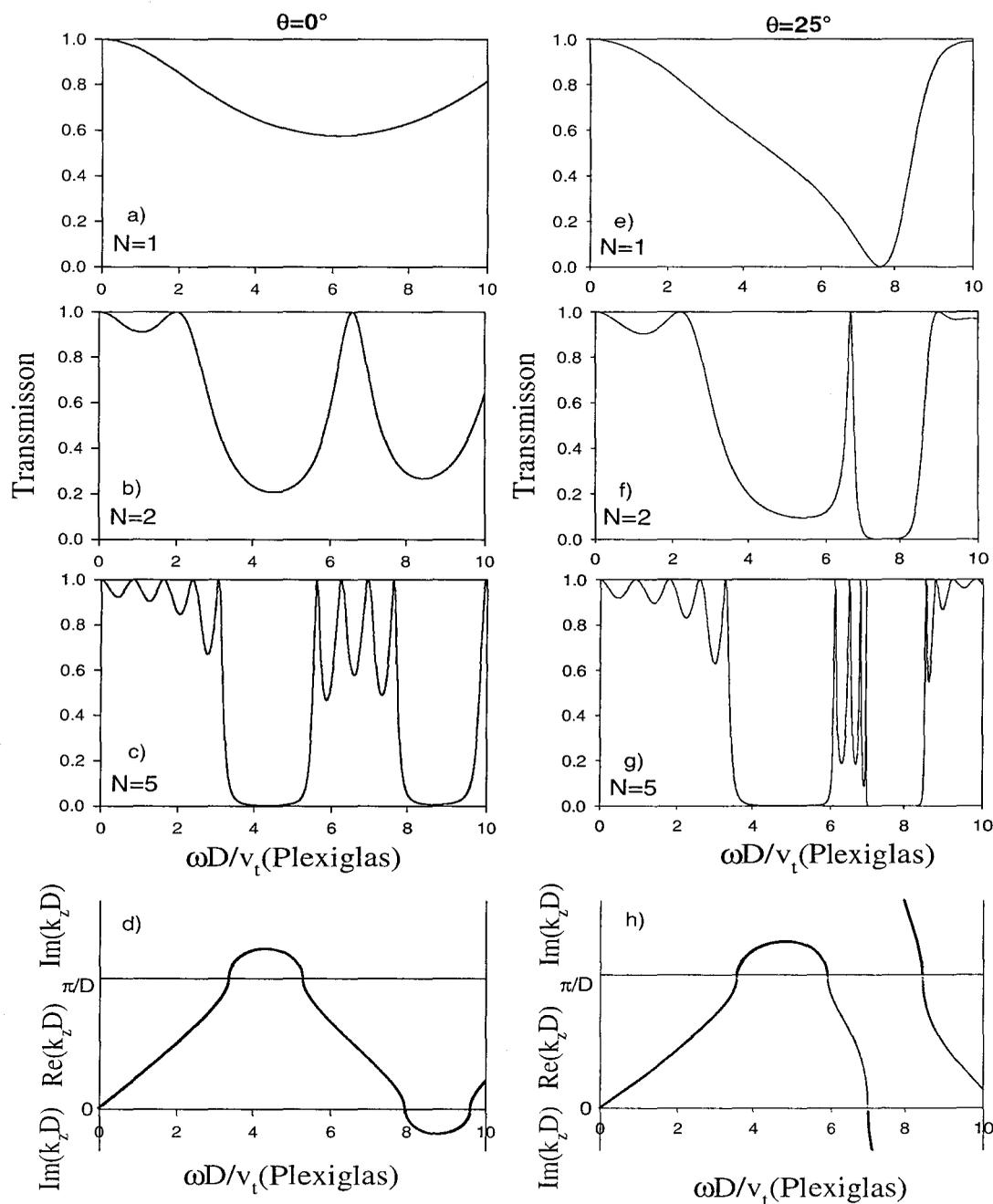


Fig. III.9: Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence réduite  $\omega D/v_t(\text{Plexiglas})$ , à travers le SR fini S-S composé de  $N = 1$  (a),(e);  $N = 2$  (b),(f) et  $N = 5$  (c),(g) cellules du plexiglas-eau. (d) et (h) Structures de bandes complexes. Le panneau de gauche correspond à l'incidence normale  $\theta = 0^\circ$  et le panneau de droite à une incidence oblique  $0^\circ < \theta = 25^\circ < \theta_{cr} = 39^\circ$ .

c.à.d pour une couche de plexiglas émergée dans l'eau, il apparaît un zéro de transmission. Ce zéro de transmission est dû à une interférence destructive des deux ondes transverse et longitudinale qui parcourent deux chemins différents dans la couche de plexiglas. Pour  $N = 2$  (Fig. III.9(f)) correspondant à deux couches de plexiglas séparées par une couche d'eau, on remarque que ce zéro de transmission se transforme en un gap en même temps qu'il apparaît un autre gap de type Bragg. Un résultat intéressant dans la figure III.9(f) est l'existence d'une résonance au voisinage du zéro de transmission. Cette résonance asymétrique est de type Fano[130], elle est due à l'insertion de la couche fluide entre deux plaques solides. Pour  $N > 2$ , on remarque que (Fig. III.9(g) pour  $N = 5$ ) le zéro de transmission se transforme en une large bande interdite. Une conséquence de ce résultat est que la partie imaginaire du vecteur d'onde diverge au voisinage du zéro de transmission comme il est illustré dans la figure III.9(h). Signalons que, ces zéros de transmission existent juste pour une certaine gamme d'angle d'incidence  $0 < \theta < \theta_{cr} = 39^\circ$  et disparaissent pour  $\theta_{cr} = 39^\circ < \theta < \pi/2$  ainsi que pour  $\theta = 0^\circ$ . Un exemple typique est représenté dans la figure III.10(a,b,c) pour  $\theta = 40^\circ$  où on observe clairement l'absence des zéros de transmission et l'apparition seulement des gaps de type Bragg.

Les bandes interdites résultent des interférences destructives des ondes transmises et réfléchies aux interfaces dans le SR. Par analogie avec les ondes électromagnétiques[2, 131], il existe aussi des angles de Brewster acoustiques à l'interface solide-fluide. Ceci signifie que la fréquence d'un mode acoustique qui satisfait une telle condition ne peut pas tomber dans une bande interdite. En d'autres termes, les gaps de la structure de bande doivent être fermés suivant une ligne droite ( $\omega$  en fonction de  $k_{//}$ ) dont la pente est définie par la condition de Brewster. L'angle acoustique de Brewster qui correspond à une transmission totale (réflexion égale à zéro) est donné, après quelques calculs algébriques, par :  $\theta_B = \arcsin\left(\frac{v_f}{\sqrt{2}v_t}\right)$ , et qui correspond à la droite  $\omega = \sqrt{2}k_{//}v_t$ . Les figures III.10(e),(f),(g) représentent la variation du spectre de transmission en fonction de la fréquence pour  $\theta_B = 49^\circ$  (angle de Brewster dans le cas du SR plexiglas-eau) et différentes valeurs de  $N$  ( $N = 1, 2$  et  $5$ ). On remarque une transmission totale quelque soit la valeur de  $N$ .

Une analyse comparative du temps de phase et de la densité d'états totale est illustrée dans la figure III.11, qui donne le temps de phase (Figs. III.11(a),(b),(c)) et la variation de la densité d'états totale  $\Delta n(\omega)$  (Figs. III.11(d),(e),(f)) en fonction de la fréquence réduite  $\omega D/v_t$  (Plexiglas) pour un SR fini composé de  $N = 5$  couches de plexiglas pour

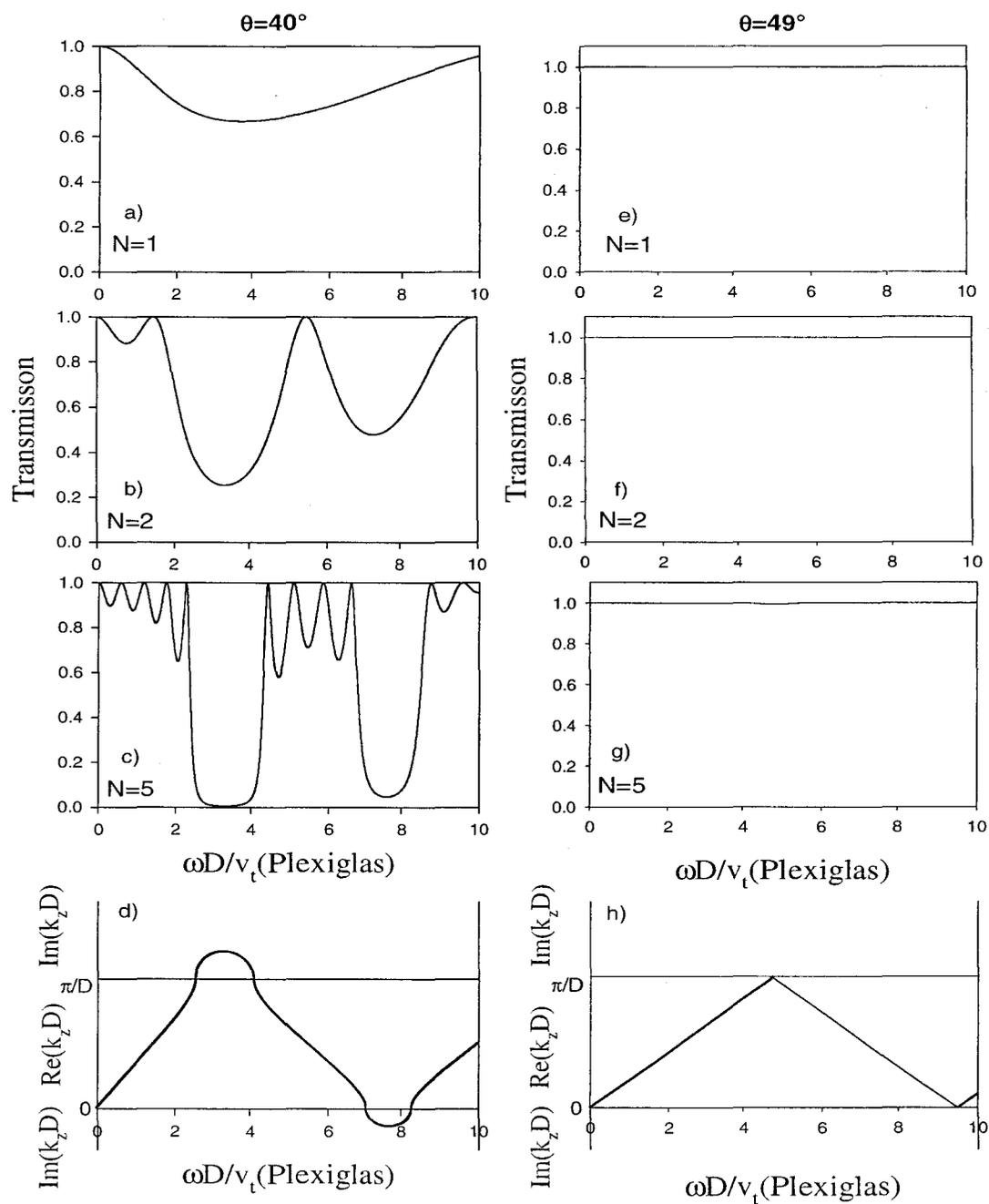


Fig. III.10: Même chose que la figure III.9, mais pour  $\theta = 40^\circ > \theta_{cr}$ , et  $\theta = \theta_B = 49^\circ$  (angle de Brewster).

trois angles d'incidence :  $\theta = 0^\circ$  (a) et (d),  $\theta = 30^\circ$  (b) et (e), et  $\theta = 60^\circ$  (c) et (f). On remarque qu'en incidence normale (Figs. III.11(a),(d)), ou lorsque l'angle d'incidence dépasse un certain angle critique (ici  $\theta_{cr} = 39^\circ$ ) (Figs. III.11(c),(f)), le temps de phase en transmission ( $\tau$ ) est proportionnel à la variation de la densité d'états totale  $\Delta n(\omega)$ , plus précisément :  $\tau = \pi \Delta n(\omega)$ . Par contre, pour les angles d'incidence  $\theta$  tels que  $0 < \theta < \theta_{cr}$ , la phase présente des sauts de  $\pi$  au voisinage des zéros de transmissions et par conséquent le temps de phase présente un pic  $\delta$  négatif comme il est illustré dans la figure III.11(b). Notons que ces pics  $\delta$ , élargis en tenant compte de l'absorption dans le cristal, n'existent pas dans la densité d'états et par conséquent  $\tau \neq \pi \Delta n(\omega)$  au voisinage des zéros de transmission.

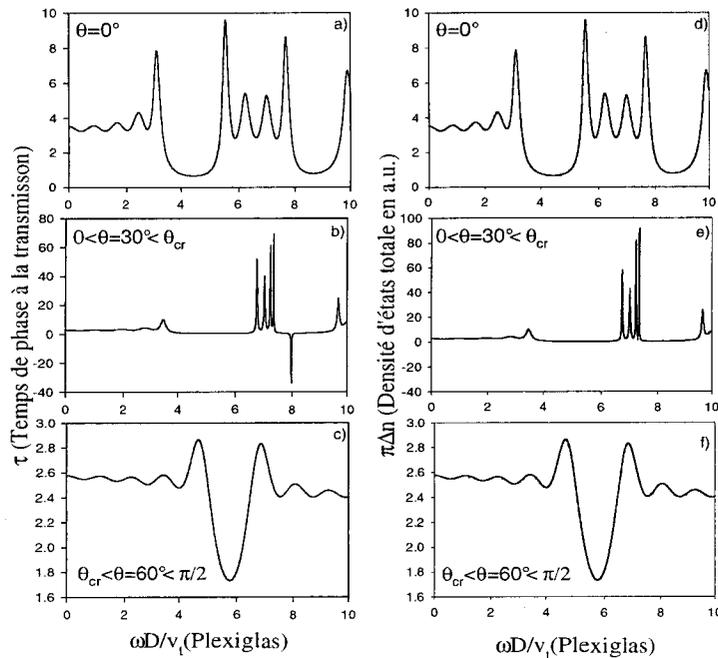


Fig. III.11: Temps de phase à la transmission (panneau à gauche) et densité d'états totale (panneau à droite) en fonction de la fréquence réduite pour le SR fini composé de  $N = 5$  cellules plexiglas-eau, pour trois angles d'incidences :  $\theta = 0^\circ$  (a),  $0 < \theta = 30^\circ < \theta_{cr}$  (b) et  $\theta = 60^\circ > \theta_{cr}$  (c)

### III.4.3 Miroir acoustique omnidirectionnel

Une propriété intéressante fournie par les ondes acoustiques/élastiques dans les cristaux phononiques est l'existence des "Bandes Interdites Phononiques" (BIP), qui a reçu l'attention des chercheurs aussi bien sur le plan théorique que sur le plan expérimental. Récemment, les structures à 2 et 3[60, 61, 132] dimensions ont fait l'objet de plusieurs

travaux sur les BIP où la propagation des ondes acoustiques/élastiques est inhibée dans toutes les directions. En comparaison avec les systèmes 2D et 3D, peu de travaux ont traité ces propriétés dans les systèmes solide-solide 1D [11–13, 24, 25]. Notre objectif dans ce paragraphe est de mettre en évidence cette propriété dans les multicouches solide-fluide. En général, l'existence de gaps omnidirectionnels dans les systèmes 1D dépend fortement du choix du substrat qui sert de support pour l'onde incidente. Pour surmonter ce problème, nous avons proposé deux solutions : la première solution consiste à insérer une couche tampon (de type solide) entre le SR solide-fluide et le milieu homogène afin de montrer l'effet de cette couche dans l'obtention d'un gap omnidirectionnel pour lequel toutes les ondes sont réfléchies quelque soit l'angle d'incidence.

Considérons un SR solide-fluide fini formé de  $N = 8$  cellules de plexiglas-eau avec une couche d'Aluminium supposée comme couche tampon d'épaisseur  $d_0 = 4D$ , l'ensemble est pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis (eau). La couche tampon de type Aluminium est caractérisée par des vitesses du son élevées. Par conséquent, cette couche peut jouer le rôle de barrière entre les phonons issus du milieu homogène semi-infini (eau) et ceux se propageant dans le SR.

La figure III.12 donne les spectres de transmission en fonction de la fréquence réduite pour trois angles d'incidence différents, à savoir :  $\theta = 0^\circ$  (Fig III.12(a)),  $\theta = 25^\circ$  (Fig III.12(b)) et  $\theta = 60^\circ$  (Fig III.12(c)).

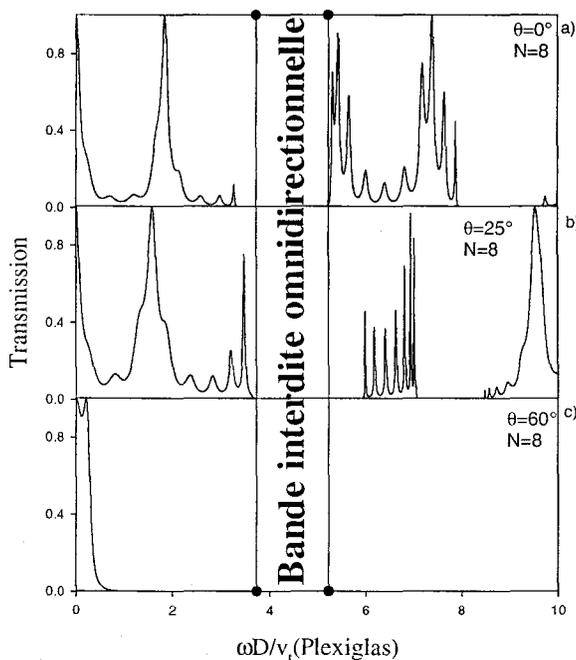


Fig. III.12: Spectre de transmission à travers un SR fini composé de  $N = 8$  cellules de plexiglas-eau en contact avec une couche tampon d'Aluminium d'épaisseur  $d_0 = 4D$ . Ces spectres sont calculés pour différents angles d'incidence :  $\theta = 0^\circ$  (a),  $\theta = 25^\circ$  (b) et  $\theta = 60^\circ$  (c).

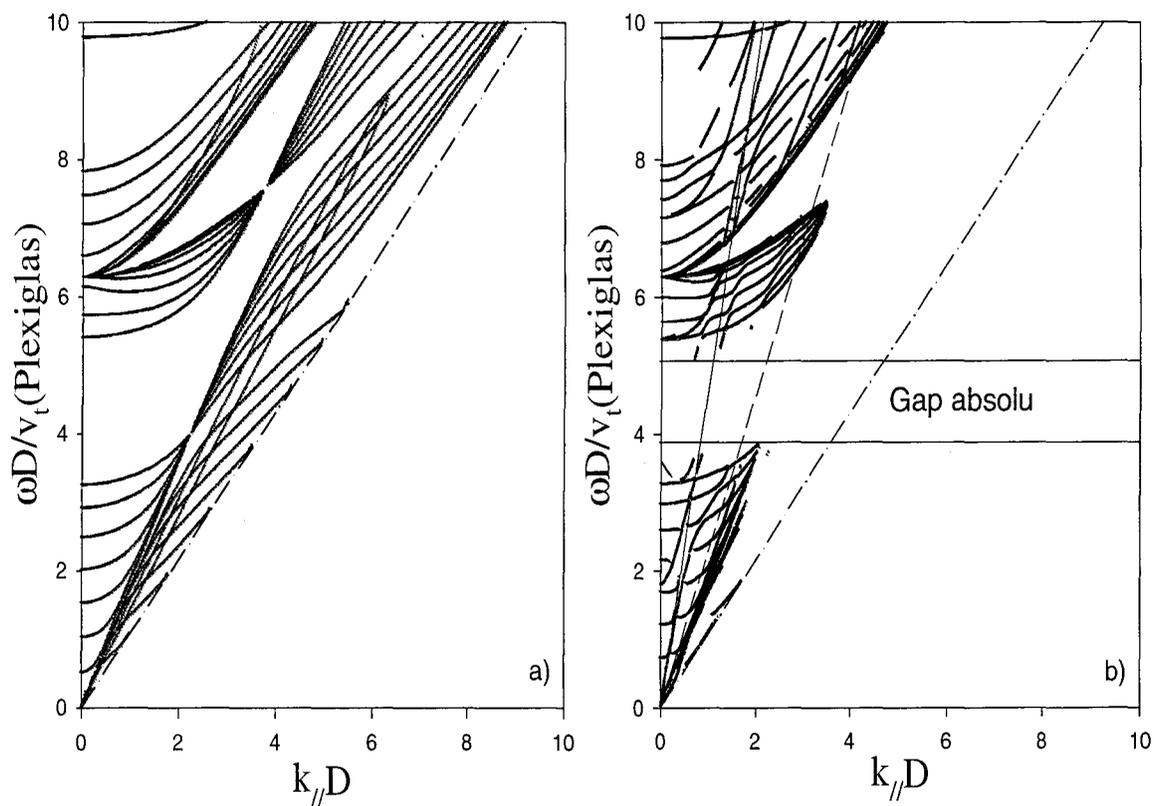


Fig. III.13: (a) Structure de bande projetée pour le SR fini composé de  $N = 8$  cellules de plexiglas-eau sans couche tampon. (b) Même chose que (a) mais pour le même SR avec une couche tampon (Al).

Nous remarquons que quelque soit l'angle d'incidence, on obtient dans le spectre de transmission une bande interdite phononique omnidirectionnelle indiquée par des petits cercles dans l'axe des fréquences. Afin de discuter davantage ce résultat, nous avons représenté dans les figures III.13(a) et 13(b) les structures de bande du SR fini sans et avec la couche tampon. Notons que ces structures sont obtenues à partir des maxima du spectre de transmission au-dessus d'un seuil fixé égal à  $10^{-3}$ . Ces résultats montrent clairement l'effet de la couche tampon dans l'obtention du gap absolu pour toute les valeurs de  $k_{//}$  (ou pour différents angles d'incidence  $\theta$ ).

L'existence du gap absolu dépend de différents paramètres dans la structure. La figure III.14(a) montre la gamme de fréquence du gap comme absolu en fonction de l'épaisseur  $d_0$  de la couche tampon, les autres paramètres sont les mêmes que ci-dessus. Le gap s'ouvre quand  $d_0$  dépasse un certain seuil (approximativement  $3D$ ) et sature très rapidement. Dans la figure III.14(b), nous montrons la largeur du gap en fonction du nombre de cellules du SR, pour une épaisseur de la couche tampon fixée à  $d_0 = 4D$ . L'existence du gap exige un nombre minimum de cellules dans le SR autour de  $N = 7$ .

La deuxième solution qui permet d'avoir le gap omnidirectionnel, consiste à associer deux SRs finis. Considérons tout d'abord deux SRs infinis solide-fluide pris indépendamment, le premier est constitué d'une alternance de deux couches plexiglas-mercure(Hg), le second de deux couches PVC-mercure(Hg). Les deux SRs sont considérés de même période  $D$  de telle façon que :  $d_{\text{Plexiglas}} = d_{\text{Mercure}} = d_{\text{PVC}} = D/2$  et les paramètres élastiques du PVC sont :  $\rho(\text{PVC}) = 1.2$ ,  $v_t(\text{PVC}) = 1.03$  et  $v_l(\text{PVC}) = 2.3$

Les structures de bande projetées des deux SRs infinis sont données sur la figure III.15(a), les zones hachurées en noirs et en gris représentent respectivement les bandes de volume des SRs plexiglas-Hg et PVC-Hg. Ces structures ont été choisies de telle façon que les bandes de volume du SR plexiglas-Hg coïncident avec les gaps du SR PVC-Hg et réciproquement. Considérons maintenant le système fini formé par l'association des deux SRs finis plexiglas-Hg (4 cellules) et PVC-Hg (4 cellules) pris en sandwich entre deux milieux homogènes (Hg) semi-infinis. La structure de bande projetée correspondante est donnée dans la figure III.15(b). Ces modes sont obtenus à partir des maxima du spectre de transmission à travers la structure au-dessous d'un seuil égal à  $10^{-3}$ . On remarque l'existence de deux gaps omnidirectionnels absolus autour de  $\Omega = 4$  et  $\Omega = 5.5$ .

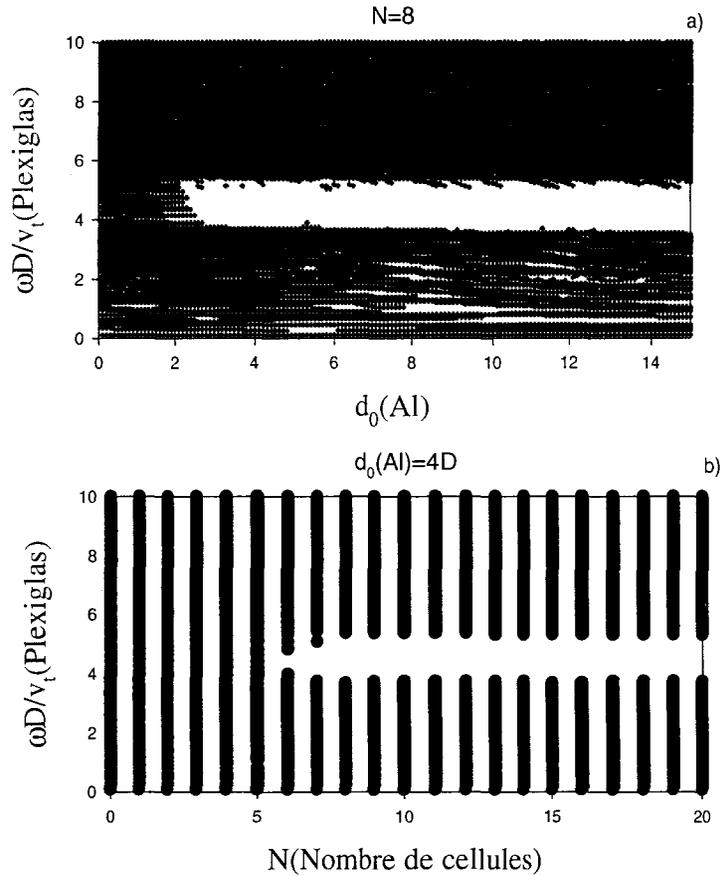


Fig. III.14: Variation du gap absolu en fonction de différents paramètres de la structure. (a) En fonction de l'épaisseur  $d_0$  de la couche tampon (Al) pour un SR composé de  $N = 8$  cellules. (b) En fonction du nombre de cellules constituant le SR avec une épaisseur de la couche tampon  $d_0 = 4D$ .

Le choix des épaisseurs des matériaux qui constituent le système final joue un rôle important pour obtenir une large bande interdite absolue. Pour illustrer ce résultat, nous avons calculé la largeur de toutes les bandes interdites en fonction de l'épaisseur des deux couches de Hg des deux SRs. Notons que, l'épaisseur de la couche de plexiglas est alors donnée par  $d_{\text{Plexiglas}}/D = 1 - d_1(\text{Hg})/D$  et l'épaisseur de la couche de PVC est donnée par  $d_{\text{PVC}}/D = 1 - d_2(\text{Hg})/D$ . La figure III.16 résume le couple des épaisseurs de Hg de chaque SR qui permet d'avoir un gap omnidirectionnel large,  $d_1(\text{Hg})$  est l'épaisseur de la couche Hg du SR plexiglas-Hg et  $d_2(\text{Hg})$  est l'épaisseur de la couche Hg du SR PVC-Hg quelque soit le vecteur d'onde réduit  $k_{//}D$ .

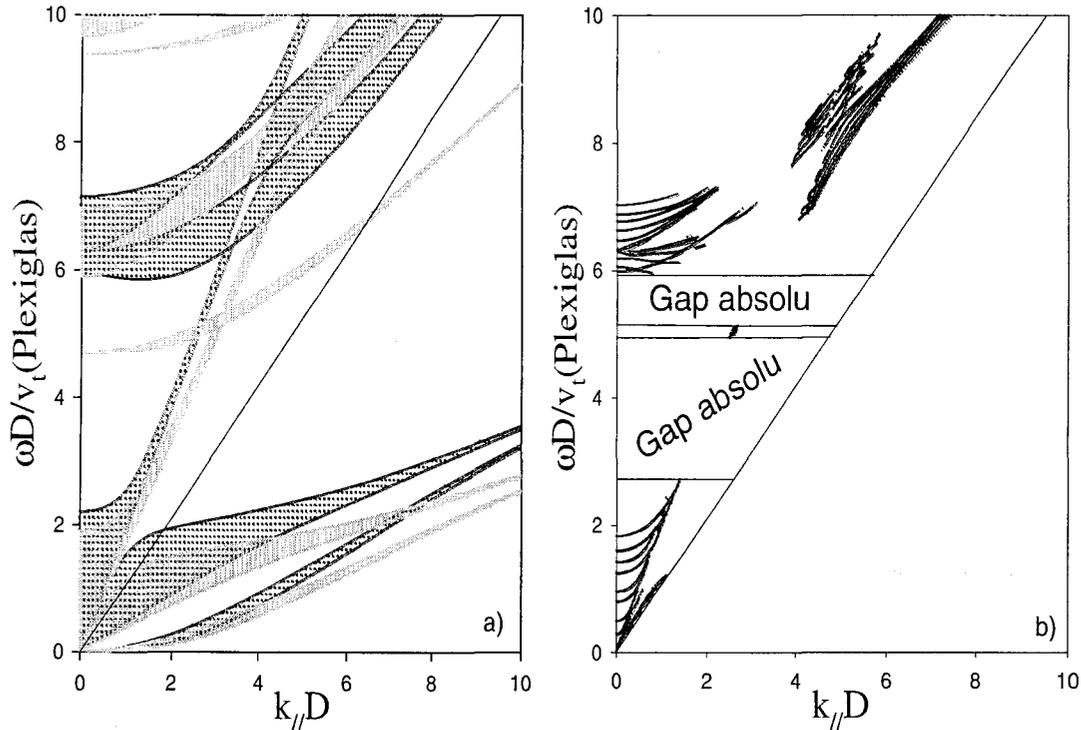


Fig. III.15: (a) Structure de bande projetée pour deux SRs infinis, plexiglas-Hg (zones hachurées en noirs) et PVC-Hg (zones hachurées en gris). (b) Même chose que (a), mais pour deux SRs finis ( $N = 4$ ) associés ensemble. Les épaisseurs de chacune des couches constituant ces deux SRs sont supposés égales :  $d_{\text{Plexiglas}} = d_{\text{Mercure}} = d_{\text{PVC}} = D/2$ . La droite épaisse dans les deux figures indique le bas de la bande de volume du Hg.

#### III.4.4 Transmission sélective

Dans ce dernier paragraphe, nous montrons la possibilité de transmission sélective en fréquence à travers un SR fini. Cette transmission peut être réalisée soit par l'insertion d'un défaut de type fluide à l'intérieur du SR soit à travers les modes à l'interface entre le SR et le fluide homogène. Plus particulièrement, nous montrons que ces deux structures peuvent jouer le rôle d'un filtre sélectif ne laissant passer qu'une seule fréquence bien déterminée à l'intérieur du gap et qui due essentiellement soit au mode de défaut soit au mode localisé à l'interface SR/Milieu Homogène fluide (semi-infini), respectivement.

##### A/ Transmission sélective à travers un défaut de type fluide

Dans ce qui suit, nous discutons l'existence des modes localisés dans les gaps lorsqu'on introduit un défaut plan dans la structure. L'introduction d'un défaut par la brisure de la périodicité de la structure, provoque l'apparition des modes localisés dans les gaps de la structure. Ces modes apparaissent sous forme de pics bien définis dans le spectre de

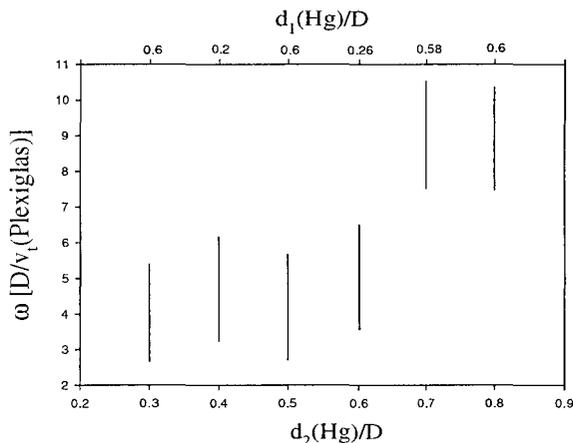


Fig. III.16: Largeur des bandes interdites absolues en fonction de l'épaisseur des deux couches de Hg des deux SRs, pour différentes valeurs des autres épaisseurs des couches constituant chaque SR fini.

transmission. La figure III.17 donne une comparaison entre les spectres de transmission avec et sans défaut, pour un nombre  $N = 6$  de cellules constituant le SR et pour un angle d'incidence  $\theta = 10^\circ$ . Notons que le SR étudié est composé de plexiglas et eau et le défaut est de type fluide (couche d'eau d'épaisseur  $d_0 = D$ ). Le défaut peut être placé dans différentes positions au sein du SR fini.

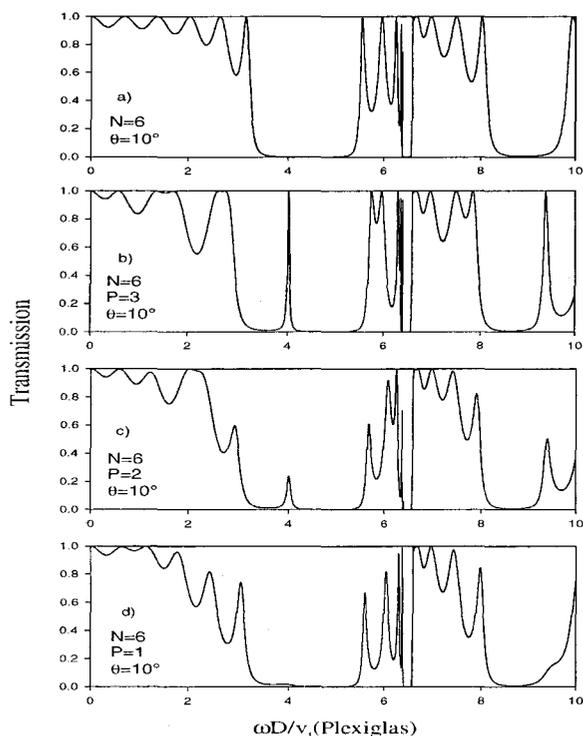


Fig. III.17: Spectre de transmission à travers un SR fini composé de  $N = 6$  cellules de plexiglas-eau et contenant un défaut fluide (eau) d'épaisseur  $d_0 = D$  dans la cellule  $P$ . (a) sans défaut, (b)  $P = 3$  au milieu, (c)  $P = 2$ , (d)  $P = 1$ .

La figure III.17(a) représente le spectre de transmission à travers le SR sans défaut. La figure III.17(b) montre le spectre de transmission dans le cas où le défaut est inséré au

centre de la structure ( $P = 3$ ). On remarque l'apparition des modes localisés dans les gaps qui atteint l'unité. Lorsque le défaut est placé loin du centre de la structure, l'amplitude des pics de transmission des modes de défaut diminue progressivement. Ce comportement est présenté dans les figures III.17(c) et III.17(d). En effet, quand le défaut est placé à  $P = 2$  (voir Fig. III.17(c)), l'amplitude du pic de transmission du mode de défaut diminue et disparaît complètement lorsque le défaut est situé à  $P = 1$  (voir Fig. III.17(d)). Notons aussi que le spectre de transmission dans les bandes de volume est affecté par la présence des modes de défaut surtout au voisinage des limites de bandes qui présentent des formes asymétriques.

### B/ Transmission sélective à travers le mode d'interface

Dans ce deuxième exemple (Fig. III.18), nous avons choisi un SR composé de Hg-Al pris en sandwich entre un milieu homogène semi-infini (Hg) qui sert de milieu incident et un second milieu homogène (l'eau) qui sert de milieu de réception. Les couches Hg et Al constituant le SR sont supposés des lames quart d'onde, par conséquent, les épaisseurs des couches sont choisies de telle façon que  $d_{Hg}/v_t(Hg) = d_{Al}/v_t(Al)$ . Dans la figure III.18, la ligne horizontale représente le taux de transmission entre les deux milieux homogènes semi-infinis (Hg et eau) sans le SR. On peut noter que l'insertion d'un SR solide-fluide fini entre ces deux milieux homogènes semi-infinis (Hg et eau) augmente de manière significative la transmission du Hg vers l'eau. Analytiquement on peut montrer qu'en incidence normale, le nombre de bicouche qui donne une transmission sélective est donné par :

$$N = \frac{1}{2} \frac{\ln(Z(Hg)/Z(eau))}{\ln(Z(Hg)/Z(Al))}, \text{ où les } Z \text{ représentent les impédances des milieux considérés.}$$

On remarque donc dans la figure III.18 que le spectre de transmission atteint l'unité pour une valeur de  $N = 11$ . Cette transmission se produit aux fréquences qui coïncident avec les modes localisés à l'interface SR/eau. Ces résultats sont semblables à ceux trouvés récemment [133–135] pour la transmission dans un SR solide-solide en contact avec l'eau. Dans la figure insérée dans la figure III.18, nous avons présenté l'amplitude du premier mode localisé à la fréquence réduite  $\omega D/v_t(Al) = 3.2194$  en fonction du nombre de cellules de SR. On remarque que l'amplitude de ce mode atteint l'unité pour  $N = 11$  et diminue pour les valeurs de  $N \neq 11$ . L'analyse du temps de phase à la transmission en fonction de la fréquence est illustrée dans la figure III.19 pour  $N = 11$ . Contrairement aux pics du spectre de transmission des modes d'interface qui diminuent lorsque  $N \neq 11$ , le temps de

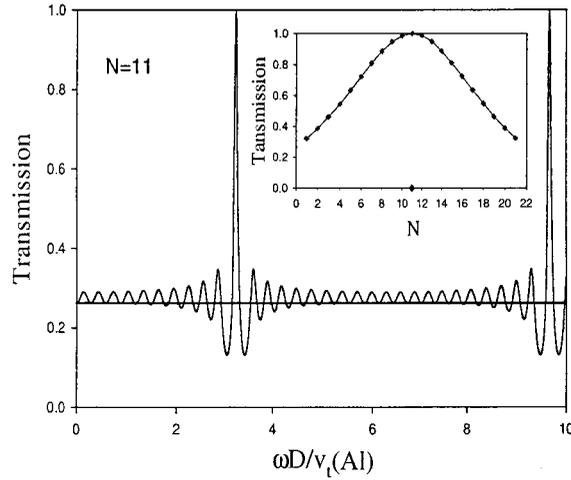


Fig. III.18: Spectre de transmission à travers un SR fini (F-S) composé de  $N = 11$  cellules de Hg-Al, pris en sandwich d'une part par Hg qui sert de milieu incident et d'autre part par eau qui sert de milieu de réception en incidence normale. La figure insérée représente le maximum de transmission en fonction du nombre de cellules constituant le SR pour le mode situé à  $\omega D/v_t(Al) = 3.2194$ .

phase associé au mode d'interface augmente avec  $N$  et tend asymptotiquement vers une valeur constante pour  $N$  de l'ordre de 30 (voir la figure insérée dans la figure III.19).

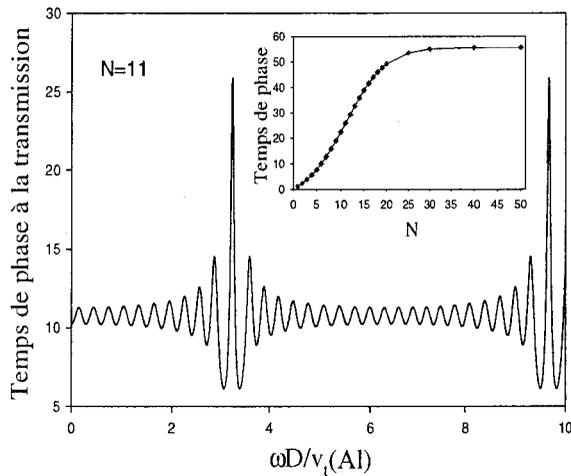


Fig. III.19: Même chose que la figure III.18, mais pour le temps de phase à la transmission

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les SRs de taille finie composés de deux couches solide-fluide. Nous avons présenté un calcul analytique de la fonction réponse (fonction de Green) pour différentes géométries. Ceci

englobe le calcul des coefficients de transmission et de réflexion ainsi que les temps de phase correspondants et la densité d'états totale, à partir desquels on déduit la dispersion des modes de surface et des modes confinés dans un SR fini avec des surfaces libres de contraintes.

Comme première application de ces résultats analytiques, nous avons obtenu une généralisation de la règle sur l'existence des modes de surface et des modes confinés dans un SR fini formé de  $N$  cellules avec des surfaces libres. En effet, nous avons montré qu'il existe  $N - 1$  modes propres à l'intérieur de chaque bande de volume et un mode de surface par gap. Ce mode de surface est associé à l'une des deux surfaces complémentaires qui délimitent la structure finie et il est indépendant de  $N$  (nombre de cellules constituant le SR). Ce mode coïncide avec le mode de surface de deux SRs semi-infinis complémentaires (chapitre II).

Un autre résultat en liaison avec le chapitre II, a été mis en évidence concernant les modes de surface. En particulier, nous avons proposé une géométrie qui permet de détecter les modes de surface à travers un SR solide-fluide fini en contact d'une part par un milieu homogène fluide, qui sert de milieu incident, et d'autre part par le vide. Les modes de surface apparaissent comme des pics bien définis dans le temps de phase en réflexion.

Comme deuxième application, nous avons aussi étudié les spectres de transmission à travers un SR fini solide-fluide. Nous avons montré que les spectres de transmission présentent des zéros de transmission qui sont dus à l'insertion d'une couche solide dans un fluide. Ces zéros de transmission se transforment en gap lorsque le nombre de couches solides insérées dans le fluide augmente. Nous avons aussi mis en évidence l'existence des résonances de type Fano qui sont dues à l'insertion d'une couche fluide entre deux couches solides.

La formation du gap absolu de transmission (appelé aussi gap omnidirectionnel ou miroir acoustique), a été l'un des objectifs de ce chapitre. En effet, l'insertion d'une couche tampon solide (défaut de type solide) dans un SR fini solide-fluide sert à stopper la transmission à travers la structure pour une gamme de fréquence bien déterminée. Une autre façon de mettre en évidence un gap absolu consiste à associer deux SRs finis solide-fluide différents, de telle façon que les bandes de l'un coïncident avec les gaps de l'autre et vice-versa, ce qui permet aussi d'élargir les gaps omnidirectionnels.

La dernière application dans ce chapitre est consacrée à la possibilité d'une transmission sélective en fréquence à travers un SR fini pris en sandwich entre deux milieux homogènes

semi-infini (fluide). La transmission est réalisée soit à travers les modes du défaut (cavité) inséré dans le SR, soit à travers les modes à l'interface SR/milieu homogène. Nous avons montré que ces deux structures peuvent jouer le rôle d'un filtre sélectif qui ne laisse passer qu'une seule fréquence bien déterminée à l'intérieur du gap, et qui est due essentiellement soit au mode de défaut soit au mode localisé à l'interface SR/milieu homogène semi-infini, respectivement.

# Deuxième partie : Cristaux Photoniques



# IV

## Propagation et localisation des ondes électromagnétiques dans les structures de boucles quasi-périodiques

### Sommaire

---

<b>IV.1 Introduction</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>IV.2 Modèle théorique</b> . . . . .	<b>90</b>
IV.2.1 Fonctions de Green inverses des constituants élémentaires . . .	90
IV.2.2 Coefficient de transmission . . . . .	92
IV.2.3 Relation de dispersion pour une séquence périodique infinie et semi-infinie . . . . .	93
<b>IV.3 Dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>IV.4 Résultats numériques et expérimentaux</b> . . . . .	<b>95</b>
IV.4.1 Cas où le bloc $A$ est un segment et le bloc $B$ est une boucle . .	95
IV.4.2 Cas où les blocs $A$ et $B$ sont chacun formés d'une boucle connectée à un segment . . . . .	108
<b>IV.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>113</b>

---

## IV.1 Introduction

La propagation des ondes électromagnétiques dans les multicouches optiques a connu un grand intérêt depuis plusieurs années[63–74]. Cet intérêt croissant provient de la grande utilité et les applications qu’offrent ces structures notamment dans le domaine de l’optique et de l’optoélectronique[2, 136, 137]. Ces matériaux présentent des domaines de fréquence caractéristiques dans la courbe de dispersion où la lumière peut se propager (bande de volume) et des domaines de fréquence où la lumière ne peut pas se propager (gaps). Ces structures présentent alors des propriétés importantes et inhabituelles qui peuvent être exploitées pour réaliser des dispositifs optiques ou électromagnétiques capables de stocker, filtrer et guider la lumière à l’échelle de la longueur d’onde. Ces matériaux sont connus sous le nom de "Matériaux à Bande Interdite Photonique" (BIP) ou "Cristaux Photoniques" (CP) lorsque leur périodicité se produit selon deux ou trois dimensions de l’espace[138–140]. Les matériaux BIP ou CP sont des structures artificielles dont la constante diélectrique varie périodiquement.

Une attention toute particulière est portée à l’étude des cristaux photoniques quasi-unidimensionnels formés par des câbles coaxiaux avec des connecteurs BNC. L’idée est de mettre en évidence plusieurs effets liés aux milieux diélectriques dans le domaine des radio fréquences, à savoir, les structures de bandes avec et sans défaut[83–89], l’effet superluminique [89, 141], la localisation du champ électrique[84], les résonateurs Perot-Fabry[142], les démultiplexeurs[143] et des effets non-linéaires[144].

Ces structures sont constituées soit d’une alternance de câbles coaxiaux d’impédances différentes, soit d’un guide coaxial avec des résonateurs latéraux (stubs) ou encore un guide coaxial contenant des boucles. Des structures quasipériodiques (type Fibonacci)[90–93], fractales (type Sierpinski)[94] ou désordonnées[95] ont aussi été étudiés en utilisant des câbles coaxiaux. Les cristaux photoniques formés de ces câbles sont évidemment beaucoup plus simples pour l’étude de ces différents effets en comparaison avec leurs analogues multicouches puisqu’ils demandent un équipement simple. Les sections transversales de ces guides sont faibles par rapport à la longueur d’onde des ondes qui s’y propagent. Par conséquent, la propagation devient monomode[96] et on peut obtenir des résultats expérimentaux très précis qui peuvent être reproduits en utilisant un modèle simple 1D. En plus, contrairement aux systèmes multicouches 1D et les différents systèmes 2D et 3D où le contraste entre les constantes diélectriques des constituants joue un rôle primordial

dans la création des gaps, les guides Q1D peuvent présenter de larges gaps même si les matériaux qui les constituent sont identiques.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les structures quasi-périodiques de type Fibonacci composées par des boucles reliées entre elles par des segments. Les expériences sont réalisées en utilisant des câbles coaxiaux standard ( $50\Omega$ ) dans le domaine de fréquences de quelques dizaines de *MHz*. Les structures quasi-périodiques[145] de type Fibonacci[146] sont généralement formées de séquences de substitution formées à partir de deux blocs *A* et *B*. Une séquence de Fibonacci est définie à partir des deux séquences précédentes par la relation :  $S_{j+1} = S_j S_{j-1}$  où *j* est le numéro de la génération. Par exemple :  $S_1 = A$ ,  $S_2 = AB$ ,  $S_3 = ABA$ ,  $S_4 = ABAAB$ ,  $S_5 = ABAABABA$ ,... Le nombre de blocs *A* et *B* dans une séquence d'ordre *k* est donnée par :  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  avec  $F_1 = 1$  et  $F_2 = 2$ . Dans ce chapitre, nous considérons des séquences de Fibonacci avec deux types de blocs :

- le bloc *A* est un segment, tandis que le bloc *B* est une boucle[Fig. 1(a) et (b)][92]. Cette structure est équivalente à celle étudiée par Kohmoto et al.[64].
- les blocs *A* et *B* sont composés chacun à la fois d'un segment et d'une boucle[Fig. 1(c) et (d)] [92]. Cette structure est équivalente à celle étudiée par Merlin et al.[147]

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le paragraphe IV.2, nous donnons un résumé du modèle théorique basé sur le formalisme de la fonction de Green. Cette fonction permet de déterminer, en plus des courbes de dispersion, les coefficients de transmission et de réflexion, les temps de phase et les vitesses de groupe correspondants ainsi que les densités d'états totale et locale. Le paragraphe IV.3 décrit le dispositif expérimental utilisé dans ce travail. Le paragraphe IV.4 est consacré à la discussion des résultats théoriques et leur comparaison avec les résultats expérimentaux des mesures des spectres de transmission à travers des séquences de Fibonacci composées de câbles coaxiaux. Cette discussion porte sur deux objectifs : i) l'étude d'une séquence de Fibonacci placée horizontalement entre deux guides semi-infinis, afin d'étudier le comportement de l'amplitude et de la phase de la transmission, à savoir : la propriété d'auto-similarité, l'effet superluminaire, ainsi que la localisation spatiale des modes dans ces systèmes selon la nature des guides à l'entrée et à la sortie de ces structures. ii) L'étude d'une séquence de Fibonacci attachée verticalement à un guide. Cette géométrie originale nous permet de mesurer les modes propres d'une séquence donnée de Fibonacci. Les conclusions sont données dans le paragraphe IV.5.

## IV.2 Modèle théorique

L'analyse théorique est réalisée à l'aide de la théorie de réponse d'interface décrite dans le chapitre I [57].

### IV.2.1 Fonctions de Green inverses des constituants élémentaires

Nous considérons un fil diélectrique isotrope homogène infini  $i$  caractérisé par son impédance caractéristique  $Z_i$ . La transformée de Fourier de la fonction de Green entre deux points  $x$  et  $x'$  de ce fil s'écrit [57]

$$G_i(x, x') = \frac{jZ_i}{2} e^{-j\alpha_i|x-x'|}, \quad (\text{IV.1})$$

avec

$$\alpha_i = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_i}, \quad (\text{IV.2})$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $\epsilon_i$  est la permittivité relative,  $\omega$  la fréquence angulaire de l'onde et  $j = \sqrt{-1}$ .

Avant d'aborder le problème des séquences de Fibonacci, il est utile de connaître les éléments de surface de leurs constituants élémentaires, à savoir, les fonctions de Green d'un segment fini de longueur  $d_1$  (voir figure IV.1(a)), d'une boucle (2,3) composée de deux fils de longueurs  $d_2$  et  $d_3$  (voir figure IV.1(b)) respectivement, et d'un fil semi-infini  $s$ . Le segment fini est caractérisé par deux surfaces libres situées en  $x = -\frac{d_1}{2}$  et  $x = +\frac{d_1}{2}$ . Ces éléments de surface peuvent être écrits sous la forme d'une matrice carrée  $g_i(MM)$  de taille 2 dans l'espace d'interface  $M_i = \{-\frac{d_i}{2}, +\frac{d_i}{2}\}$ .

L'inverse de cette matrice prend la forme suivante [96]

$$[g_1(MM)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{Z_1 S_1} & -\frac{1}{Z_1 C_1} \\ -\frac{1}{Z_1 C_1} & \frac{C_1}{Z_1 S_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.3})$$

pour le segment (figure IV.1(a)) et

$$[g_{2,3}(MM)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{Z_2 S_2} + \frac{C_3}{Z_3 S_3} & -\frac{1}{Z_2 C_2} - \frac{1}{Z_3 C_3} \\ -\frac{1}{Z_2 C_2} - \frac{1}{Z_3 C_3} & \frac{C_2}{Z_2 S_2} + \frac{C_3}{Z_3 S_3} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.4})$$

pour la boucle (figure IV.1(b)).  $C_i = \cos(\alpha_i d_i)$ ,  $S_i = \sin(\alpha_i d_i)$  et  $Z_i$  est l'impédance des différents fils ( $i = 1, 2, 3$ ). L'inverse de l'élément de surface d'un guide d'onde semi-infini caractérisé par son impédance  $Z_s$  est donné par

$$[g_s(0, 0)]^{-1} = -\frac{j}{Z_s}. \quad (\text{IV.5})$$

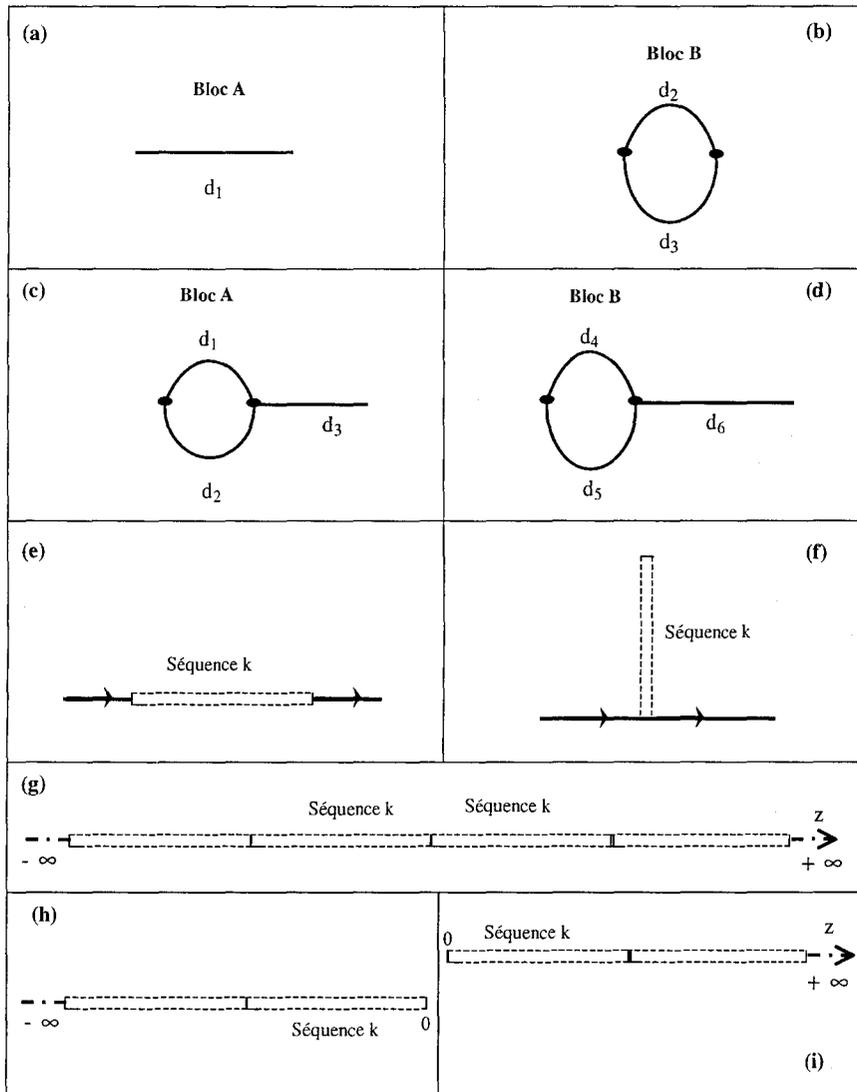


Fig. IV.1: Représentation schématique des blocs A et B constituant la structure de Fibonacci. Le bloc A (a) est un câble coaxiale simple de longueur  $d_1$  et d'impédance  $Z_1$ . Le bloc B (b) est une boucle formée de deux câbles de longueurs  $d_2$  et  $d_3$  et d'impédances  $Z_2$  et  $Z_3$  respectivement. (c) et (d) Même chose que (a) et (b), mais dans ce cas chaque bloc A (B) est formé d'une boucle de longueur  $d_1 + d_2$  ( $d_4 + d_5$ ) reliée à un segment de longueur  $d_3$  ( $d_6$ ). (e) Structure de Fibonacci finie insérée horizontalement entre deux guides d'onde. (f) Même chose que (e) mais pour une structure attachée verticalement à un guide horizontal. (g) Super-réseau (SR) infini formé par une répétition d'une séquence de Fibonacci donnée  $k$ . (h), (i) Deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini (g) entre deux séquences successives.

A partir de l'équation (IV.4), on peut déduire que si la boucle est symétrique, c'est à dire constituée de deux fils identiques de longueurs  $d_2 = d_3$  et d'impédances  $Z_2 = Z_3$ , alors elle est équivalente à un segment simple de longueur  $d_2$  et d'impédance  $Z_2/2$ . Par conséquent, dans ce cas, chaque bloc (Fig. IV.1(c),(d)) devient équivalent à deux segments différents connectés (bisegment). La mise en évidence expérimentale de l'existence de bandes interdites et de modes de défaut dans les systèmes photoniques périodiques 1D réalisés à partir de deux câbles coaxiaux d'impédances caractéristiques différentes disposés alternativement a été réalisée récemment[83, 141, 142]. Cependant, l'avantage des structures de boucles réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire d'avoir deux segments de natures différentes pour réaliser le contraste entre les deux matériaux constituant chaque bloc. Cette propriété peut être d'un intérêt pratique potentiel pour la réalisation des structures de guide d'ondes optiques.

#### IV.2.2 Coefficient de transmission

Considérons d'abord une structure constituée d'une séquence de Fibonacci. Celle-ci peut être est formée par l'assemblage d'un nombre fini de blocs  $A$  et  $B$  disposés suivant l'ordre de Fibonacci. Le domaine d'interface est composé de tous les points de raccordement entre les segments et les boucles. Dans tout l'espace d'interface du système, l'inverse de la matrice représentant la fonction de Green  $g$ , est une matrice tridiagonale finie constituée par la superposition linéaire des éléments  $[g_i(MM)]^{-1}$  (Eqs. (IV.3) et (IV.4)). Du fait que cette matrice (de grande taille) est tridiagonale, on peut l'inverser puis se restreindre à un espace limité à 2 états constitué des 2 extrémités de la séquence de Fibonacci. On peut alors écrire formellement[148] :

$$[g(MM)]^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.6})$$

Ces quatre éléments de matrice sont des quantités réelles fonction des différents éléments qui constituent les  $g_i(MM)$  (Eqs. (IV.3) et (IV.4)). A partir de l'équations (IV.6), on peut déduire l'expression des modes de la séquence de Fibonacci dans deux cas :

† Lorsque les conditions aux deux extrémités sont de type  $H = 0$  :

$$ac - b^2 = 0, \quad (\text{IV.7})$$

‡ Lorsque les conditions aux deux extrémités sont de type  $E = 0$

$$c = 0. \quad (\text{IV.8})$$

Maintenant, lorsque cette séquence de Fibonacci est insérée entre deux guides semi-infinis notés  $s$  (Fig.IV.1(e)) ou attachée verticalement le long d'un guide (Fig.IV.1(f)), on peut calculer le coefficient de transmission d'une onde incidente en provenance du guide d'onde de gauche est transmise dans le guide d'onde de droite. Les fonctions de transmission pour les géométries horizontale et verticale s'écrivent :

$$t_h = \frac{2jb/Z_s}{ac - b^2 - (1/Z_s)^2 - j(a+c)/Z_s}, \quad (\text{IV.9})$$

et

$$t_v = \frac{-2jc/Z_s}{ac - b^2 - 2jc/Z_s}, \quad (\text{IV.10})$$

respectivement,  $h$  et  $v$  signifient respectivement horizontal et vertical. La fonction de transmission peut être écrite sous la forme explicite complexe  $t = \alpha + j\beta = |t|e^{j\varphi}$  où  $|t|$  est l'amplitude du coefficient de transmission,  $\varphi = \arctan(\beta/\alpha) \pm m\pi$  est la phase du champ transmis et  $m$  est un nombre entier. La dérivée première de  $\varphi$  par rapport à la pulsation représente le temps mis par l'onde pour traverser la structure. Cette quantité, appelée temps de phase, est définie par [148–150] :

$$\tau_\varphi = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad (\text{IV.11})$$

### IV.2.3 Relation de dispersion pour une séquence périodique infinie et semi-infinie

Considérons un SR dont chaque période est constituée d'une séquence de Fibonacci. L'inverse de la fonction de Green de ce SR infini (Fig. IV.1(g)) s'obtient par une juxtaposition des matrices  $2 \times 2$  [IV.6] pour différentes interfaces. Nous obtenons une matrice tridiagonale. Après la transformée de Fourier, l'expression qui donne la relation de dispersion pour un SR infini [92] s'écrit :

$$\cos(KD) = -(a+c)/2b, \quad (\text{IV.12})$$

où  $K$  est le vecteur de propagation et  $D$  la période du SR ( $D = \sum_{i=1}^{F_k} d_i$  où  $F_k$  est le nombre de blocs pour la génération  $k$ ).

Avec le même raisonnement, la relation de dispersion qui donne les modes de surface pour un SR semi-infini situé dans le demi-espace  $z > 0$  (Fig. IV.1(i)) est donnée par

$$ac - b^2 = 0, \quad (IV.13)$$

avec la condition,

$$\left| \frac{b}{a} \right| < 1. \quad (IV.14)$$

Cette dernière condition (Eq.IV.14) assure la décroissance de la fonction d'onde en pénétrant dans le volume du SR. Nous obtenons aussi la même expression (Eq.IV.13) pour un SR semi-infini situé dans le demi-espace  $z < 0$  [Fig.1(g)] mais avec la condition

$$\left| \frac{b}{a} \right| > 1. \quad (IV.15)$$

Ce résultat montre que si le mode de surface apparaît pour la surface d'un des SRs, il n'apparaît pas pour l'autre SR complémentaire. Cependant, l'équation (IV.13) montre que l'expression donnant les modes de surface pour deux SR semi-infinis complémentaires est exactement la même que celle donnant les modes d'une seule séquence (Eq.IV.7).

### IV.3 Dispositif expérimental

La partie expérimentale a été réalisée en collaboration avec l'équipe EPHONI de Lille sous la direction du Professeur B. Djafari-Rouhani. Les différents systèmes étudiés sont constitués de câbles coaxiaux reliés par des connecteurs métalliques en forme de T. La génération et l'analyse des signaux incident et transmis sont assurées par un analyseur de spectre vectoriel "HP 89400". A l'entrée du système étudié est injecté un signal sinusoïdal d'amplitude constante modulé en fréquence  $V_i$ . A sa sortie, la tension mesurée  $V_f$ , proportionnelle au carré du champ électrique permet de déterminer le coefficient de transmission  $T = V_f/V_i$ . En plus du coefficient de transmission, L'analyse de spectre permet de mesurer également le déphasage du signal transmis par rapport au signal incident. Le pilotage de cette procédure expérimentale est réalisé à l'aide d'un logiciel de programmation graphique "LabView" permettant le pilotage de l'analyseur pour la génération et l'analyse des signaux. Le transfert et le stockage des résultats de l'expérience sont effectués directement dans des fichiers de données.

## IV.4 Résultats numériques et expérimentaux

Comme mentionnée auparavant, nous nous sommes intéressés aux structures formées par deux blocs  $A$  et  $B$  arrangés suivant la séquence de Fibonacci. Les segments constituant ces blocs sont constitués par des câbles coaxiaux standard (chaque câble est caractérisé par son impédance caractéristique  $Z = 50\Omega$  et sa permittivité  $\varepsilon = 2.3$ ). Nous étudierons en détail deux cas particulier :

- Le cas où le bloc  $A$  est formé par un simple câble coaxial de longueur  $d_A = 1m$  et d'impédance  $Z_A = Z = 50\Omega$ , tandis que le bloc  $B$  est une boucle formée par deux câbles coaxiaux identiques de même longueur  $d_B = 1m$  et d'impédance  $Z = 50\Omega$  [Fig. IV.1(a) et (b)]. Dans ce cas, la boucle est équivalente à un segment de longueur  $d_B = 1m$  et d'impédance moitié  $Z_B = Z/2 = 25\Omega$ . Cette structure est équivalente à celle étudiée par Kohmoto et al.[64] puisque la boucle symétrique est équivalente à un segment avec une impédance égale à la moitié de celle des constituants. Cette structure nous permet de discuter le comportement de l'amplitude et la phase de transmission.
- Le cas où les blocs  $A$  et  $B$  sont composés chacun à la fois d'un segment et d'une boucle [Fig. IV.1(c) et (d)]. Cette structure est équivalente à celle étudiée par Merlin et al.[147] puisque chaque bloc est équivalent à un bi-segment  $25\Omega - 50\Omega$ .

Nous montrons que ces deux géométries peuvent donner des informations différentes sur la propagation des ondes électromagnétiques dans ces structures.

### IV.4.1 Cas où le bloc $A$ est un segment et le bloc $B$ est une boucle

Dans cette section, nous nous concentrons sur le calcul du coefficient de transmission pour une structure de Fibonacci insérée horizontalement entre deux guides d'onde semi-infinis du type  $A$  (Fig. IV.1(e)) ou greffée verticalement sur un guide (Fig. IV.1(f)). En particulier, nous explorons les différents comportements de propagation et de localisation des ondes électromagnétiques de ces deux structures.

#### A/ Cas de la séquence horizontale

Considérons une séquence donnée de Fibonacci insérée horizontalement entre deux guides d'onde semi-infinis (Fig. IV.1(e)). Les figures IV.2(b)-(g) représentent le coefficient

de transmission pour les générations  $S_4$ (5 blocs),  $S_5$ (8 blocs),  $S_6$ (13 blocs),  $S_7$ (21 blocs),  $S_8$ (34 blocs) et  $S_9$ (55 blocs), respectivement. Les courbes en traits continus (discontinus) représentent les résultats théoriques avec (sans) absorption, tandis que les cercles vides correspondent aux courbes expérimentales.

Notons que, les expériences ont été réalisées en utilisant des câbles coaxiaux standard assemblés à l'aide de connecteurs métalliques en forme de T. La section transversale des câbles étant négligeable par rapport à leur longueur et à la longueur d'onde, on peut alors considérer que la propagation est monomode. Les mesures des spectres de transmission ont été réalisées en utilisant l'analyseur de spectre décrit précédemment dans une gamme de fréquences allant de 10 à 300 MHz. L'atténuation à l'intérieur des câbles coaxiaux a été simulée en prenant une constante diélectrique relative complexe ( $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ ). Le coefficient d'atténuation  $\alpha''$  a pour expression  $\alpha'' = \varepsilon''\omega/c$ . Les spécifications concernant l'atténuation fournies par le fabricant des câbles coaxiaux dans la gamme de fréquence concernée nous permettent d'écrire :  $\ln(\alpha'') = a + b\ln(\omega)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes. A partir de cette relation, on peut obtenir une expression utile pour  $\varepsilon''$  en fonction de la fréquence  $f$  (exprimée en Hertz) sous la forme :  $\varepsilon'' = 0.017f^{-0.5}$ . Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec le modèle théorique 1D utilisant la méthode de la fonction de Green.

On peut noter dans la figure IV.2 que pour une génération donnée, l'atténuation à l'intérieur des câbles induit une baisse de la transmission et ce particulièrement aux hautes fréquences. Deux régions de fréquences peuvent être alors distinguées :

- \* les régions où la transmission tombe rapidement à zéro au fur et à mesure que le numéro de génération augmente. Ces régions correspondent aux zones interdites (absence de transmission).
- \* les régions où la transmission est plus importante, ces régions correspondent aux zones permises.

En comparaison avec le spectre de transmission d'une structure périodique où un seul gap existe (Fig. IV.2(a)), on remarque que les spectres des structures de Fibonacci (Fig. IV.2(b)-(g)) présentent plusieurs régions où la transmission se creuse en particulier pour les générations élevées. En effet, cette propriété est une caractéristique des structures quasi-périodiques dans lesquelles les bandes permises subissent des fragmentations au fur et à mesure que le numéro de génération augmente[93].

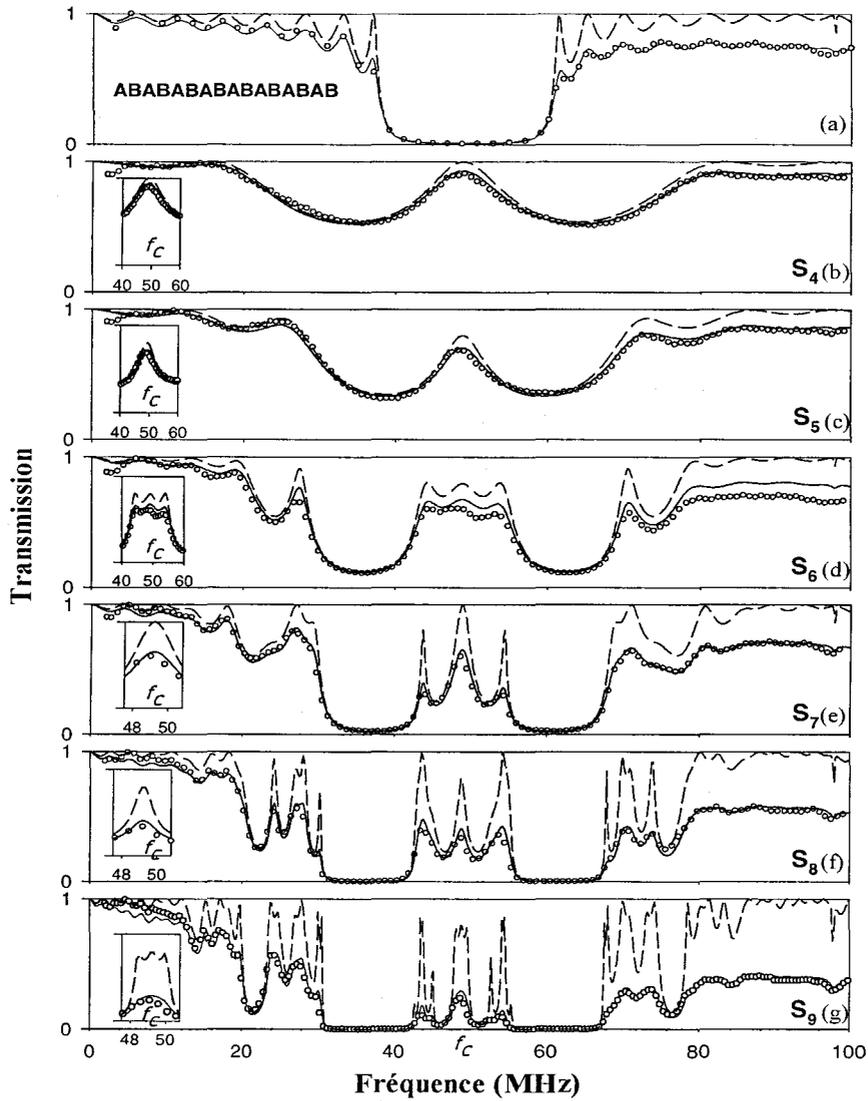


Fig. IV.2: Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence pour différentes structures. Les courbes en traits continus et en cercles vides représentent les résultats théoriques et expérimentaux respectivement. Les courbes en traits discontinus dans (a)-(g) sont les courbes théoriques sans absorption. Le bloc  $A$  est un câble de longueur  $d_1 = 1\text{m}$  et d'impédance  $Z_1 = 50\Omega$ , tandis que le bloc  $B$  est une boucle symétrique avec  $d_2 = d_3 = 1\text{m}$  et  $Z_2 = Z_3 = 50\Omega$ . (a) La structure périodique; (b)-(g) les différentes générations  $S_k$  ( $k = 4 - 9$ ) de la structure de Fibonacci respectivement. A noter le changement d'échelle et l'auto-similarité entre les figures insérées dans  $S_4$ ,  $S_5$  et  $S_6$  en comparaison avec  $S_7$ ,  $S_8$  et  $S_9$  respectivement autour de la fréquence centrale.

Un résultat intéressant peut être observé autour de la fréquence centrale du gap de la structure périodique (i.e.  $f_c = 49.34\text{MHz}$ ). En effet, les spectres de transmission autour de  $f_c$  se reproduisent toutes les trois générations. Cette propriété d'auto-similarité appelée loi d'échelle[64] a été interprétée comme un signe de localisation des ondes dans les systèmes de Fibonacci. Kohmoto et al.[64] ont montré que ce comportement des spectres de transmission est caractérisé par un facteur d'échelle

$$F = \sqrt{1 + 4(1 + I)^2} + 2(1 + I). \quad (\text{IV.16})$$

où  $I$  est un invariant qui reste constant à chaque étape de la procédure récursive, son expression a la forme suivante[64]

$$I = \frac{1}{4} \left( \frac{Z_B}{Z_A} - \frac{Z_A}{Z_B} \right)^2 \sin^2(\omega d \sqrt{\varepsilon}/c), \quad (\text{IV.17})$$

où  $Z_A = 50\Omega$  et  $Z_B = 25\Omega$  sont les impédances des segments et des boucles respectivement. Aussi, il a été démontré[64] que ce phénomène se produit autour de  $\phi = \omega d \sqrt{\varepsilon}/c = (2m + 1)\pi/2$ , où la quasi-périodicité est la plus efficace ( $m$  étant un nombre entier). Ceci signifie que le coefficient de transmission devrait présenter un caractère auto-similaire autour de la fréquence centrale avec  $T_{j+3} = T_j$  (le coefficient de transmission présente une périodicité d'ordre trois) avec un facteur d'échelle  $F$ . Pour la fréquence centrale  $f_c$ , les équations (IV.16) et (IV.17) donnent  $I = 0.526$  et  $F = 6.4061$ . Ce résultat est bien illustré à partir des figures IV.2(b),(c),(d) en comparaison avec les figures IV.2(e),(f),(g) respectivement. On remarque une grande ressemblance des générations  $S_4 - S_7$ ,  $S_5 - S_8$  et  $S_6 - S_9$  autour de la fréquence centrale  $f_c$  avec une périodicité d'ordre trois et un facteur d'échelle  $F$ . Ce résultat est similaire à celui trouvé par Kohmoto et al.[64] dans les multicouches optiques. On peut noter, cependant, qu'en raison de la dissipation dans les câbles, les différentes courbes ne sont pas bien reproduits autour de la fréquence centrale  $f_c$  comme cela est le cas avec les courbes sans absorption (voir les courbes en traits discontinus). Ceci est d'autant plus marqué pour les générations élevées (voir les figures insérées dans les figures IV.2(d) et (g)). Cependant, comme on va voir ci-dessous, les spectres de temps de phase illustrent mieux l'auto-similarité entre les différentes générations.

Il est bien établi que la localisation des modes dans une structure de Fibonacci présente un comportement critique au sein de la structure[151]. En effet, contrairement aux systèmes désordonnés, ces modes décroissent selon une loi en puissance plutôt qu'en exponentielle et la localisation de ces modes présente la propriété d'auto-similarité[152]. Afin

de comprendre la localisation spatiale des différents modes dans la figure IV.2, nous avons présenté dans la figure IV.3 la densité d'états locale[153] en fonction de la position d'espace  $z$  pour les modes situés aux fréquences  $f = 98.68, 49.34$  et  $68.08$  MHz (i.e., pour les fréquences réduites  $\phi = \pi, 0.5\pi$ , et  $0.69\pi$ ) dans la figure IV.2(f) (8<sup>ème</sup> génération). La densité d'états locale représente le module au carré du champ électrique à l'intérieur de la structure.

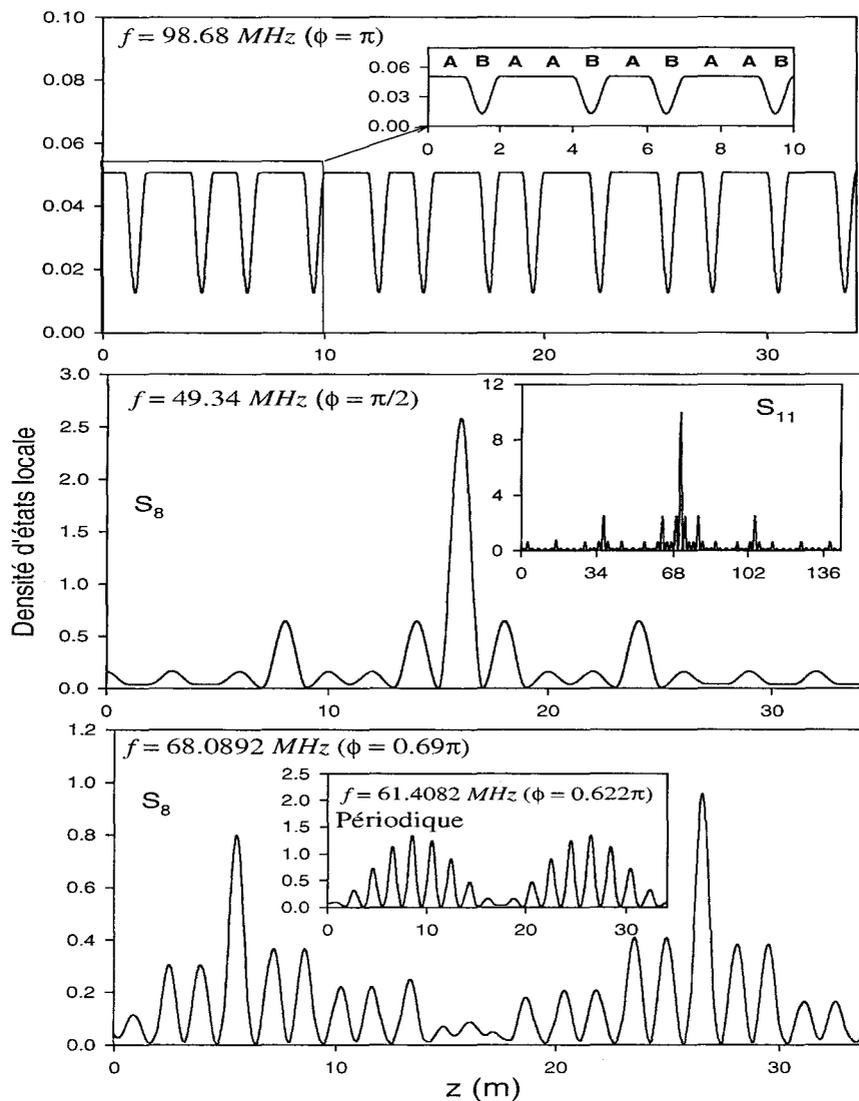


Fig. IV.3: Densité d'états locale [en unités arbitraires] en fonction de la position d'espace  $z$  pour trois fréquences appartenant à la figure IV.2(f) : (a)  $\phi = \pi$  (milieu de la bande), (b)  $\phi = 0.5\pi$  (fréquence centrale) et (c)  $\phi = 0.69\pi$  (limite de la bande). La figure insérée dans (b) correspond à la densité d'états locale associée à la 11<sup>ème</sup> génération pour  $\phi = 0.5\pi$ . La figure insérée dans (c) correspond à la densité d'états locale associée à la structure périodique pour  $\phi = 0.622$

Ces modes peuvent être classés respectivement comme suit :

- i) Les modes étendus comme il est illustré dans la figure IV.3(a) pour les modes totalement transparent ( $\phi = \pi$ ) pour lesquels la transmission atteint l'unité[151]. La distribution du champ électrique suit la géométrie de Fibonacci (voir la figure insérée dans Fig. IV.3(a)). Des résultats similaires ont été trouvés pour les ondes électroniques et électromagnétiques dans les matériaux multicouches[68, 154].
- ii) Les modes auto-similaires, comme il est montré dans la figure IV.3(b) pour le mode situé à  $\phi = 0.5\pi$ . La densité locale correspondante montre un comportement d'auto-similarité[155, 156] autour du pic principal chaque trois générations (voir la figure insérée dans la figure IV.3(b) pour la 11<sup>eme</sup> génération).
- iii) Les modes aux limites des bandes comme il est montré dans la figure IV.3(c) pour le mode  $\phi = 0.69\pi$ . Le spectre de densité locale est moins régulier en comparaison avec celui associé aux modes situés aux limites des bandes des structures périodiques (voir la figure insérée dans la figure IV.3(c)). Cependant, les résonances de la limite de bande dans les cristaux photoniques périodiques sont des états non localisés puisqu'ils se propagent tout au long du système et ne sont pas évanescents[155, 157]. En revanche, les résonances aux limites de bandes des structures de Fibonacci s'évanouissent selon une loi de puissance qui est due au caractère désordonné des blocs  $A$  et  $B$  dans ces systèmes[67, 141].

Des travaux récents ont traité ces résonances qui tombent au voisinage des limites de bandes dans des structures multicouches optiques arrangées selon la séquence de Fibonacci[158]. En raison d'un gradient d'indice optique durant le processus de croissance de ces multicouches, les modes résonants en bord de bandes montrent une décroissance dans la structure selon une loi de puissance. En particulier, il a été montré que ces résonances peuvent servir comme cavités complexes[158] dans les structures multicouches uni-dimensionnelle avec des applications dans le domaine des lasers désordonnés.

Une autre quantité importante qui caractérise l'interaction du photon incident avec les différents modes dans la séquence de Fibonacci est le temps de phase à la transmission  $\tau_\phi$ . Cette quantité est interprétée comme étant le temps nécessaire pour qu'un photon complète le processus de la transmission. Le temps de phase dans les structures en boucles symétrique est équivalent à la densité d'états totale[89, 159]. La figure IV.4(a) représente le temps de phase en fonction de la fréquence pour la structure périodique. Comme pour la densité d'états, les modes aux limites de bandes présentent un temps de phase élevé en comparaison avec les modes situés à l'intérieur des bandes de volume (le nombre d'oscil-

lation décrit les modes discrets d'une structure de taille finie). Dans les structures quasi-périodiques, on peut noter que le temps de phase (Fig. IV.4(b)-(g)) montre les mêmes comportements d'auto-similarité (chaque trois générations) que l'amplitude de transmission autour de la fréquence centrale  $f_c$ . En particulier, les spectres de temps de phase illustrent mieux l'auto-similarité autour de  $f_c$  pour les différentes générations  $S_4 - S_7$ ,  $S_5 - S_8$  et  $S_6 - S_9$  puisque la phase est moins sensible que l'amplitude à l'effet de l'absorption dans les câbles (voir les figures insérées dans IV.2).

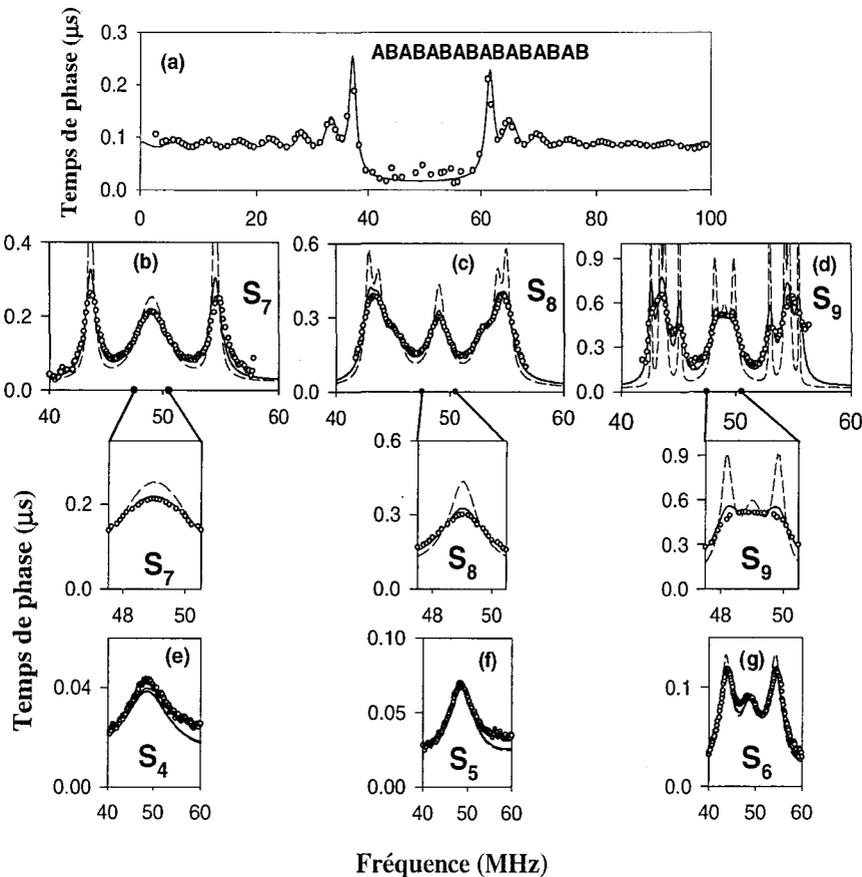


Fig. IV.4: (a) Même chose que la figure IV.2(a), mais pour le temps de phase. (b)-(g) Même chose que les figures IV.2(b)-(g), mais pour le temps de phase dans le domaine des fréquences  $[40 - 60]MHz$ .

A partir du temps de phase, on peut déduire également la vitesse de groupe  $v_g = L/\tau_\varphi$ [160] où  $L$  est la longueur totale de la structure, c-à-d, la somme des longueurs des blocs  $A$  et  $B$  constituant la structure (ici  $L = F_k(\text{en metre})$ ). Dans le cas de la structure périodique (Fig. V.5(a)), une dispersion anormale se produit à l'intérieur des gaps et des vitesses plus grandes que la vitesse de la lumière (vitesse superluminique) sont prévues[89, 141]. A l'intérieur des bandes passantes, la vitesse de groupe est égale à  $0.66c$ ,

qui est la vitesse de propagation normale des ondes dans les câbles coaxiaux utilisés dans ces expériences. Dans le cas d'une séquence de Fibonacci (Fig. IV.5(b)-(g)), la structure est désordonnée, donnant lieu à un temps de phase élevé dans le domaine des fréquences  $[40 - 60\text{MHz}]$ , et donc des vitesses de groupe faibles ( $v_g \approx 0.33c$ ) inférieures à la vitesse normale dans les câbles. Cette valeur est identique à celle trouvée par Munday et Robertson [161] dans des structures de câbles coaxiaux différentes. La structure de Fibonacci peut donc être utilisée comme un outil pour réduire la vitesse de propagation des ondes.

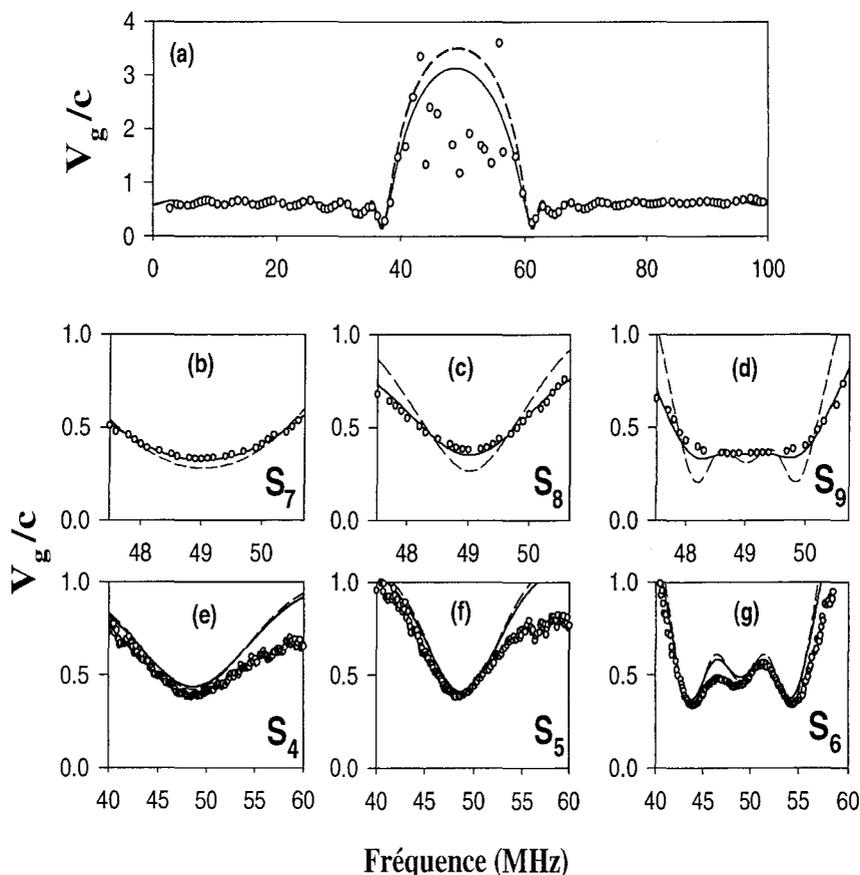


Fig. IV.5: Même chose que la figure IV.4, mais pour la vitesse de groupe.

#### IV.4.1.1 Cas de la séquence verticale

Maintenant, considérons le deuxième cas où les différentes séquences de Fibonacci sont placées verticalement sur un guide (Fig. IV.1(f)). Le choix de cette géométrie est motivé par le fait que son coefficient de transmission permet de déduire tous les modes propres de la structure finie avec les conditions  $H = 0$  aux extrémités. A partir de la comparaison des équations (IV.7) et (IV.10), on peut remarquer que les fréquences correspondant

aux maxima des spectres de transmission (i.e.  $t_v = 1$ ) donnent les modes propres de la séquence de Fibonacci avec les conditions aux limites  $H = 0$  sur les deux extrémités. Cependant, la comparaison des équations (IV.8) et (IV.10) montrent que les fréquences correspondant aux minima des spectres de transmission (i.e.  $t_v = 0$ ) donnent les modes propres de la séquence de Fibonacci avec les conditions aux limites  $H = 0$  sur une surface et  $E = 0$  sur l'autre. Quelques exemples de spectres de transmission pour les générations  $S_3 - S_8$  sont présentés dans la figure IV.6. Les résultats théoriques (traits continus) sont en bon accord avec les courbes expérimentales (cercles vides).

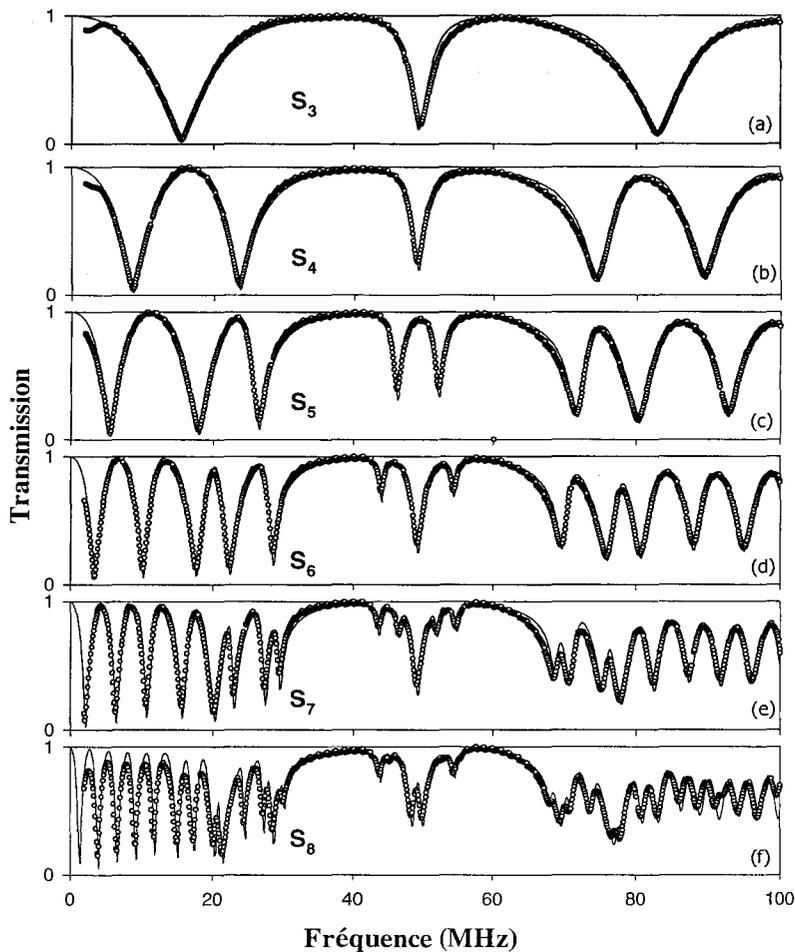


Fig. IV.6: Variation du coefficient de transmission théorique (courbes en traits continus) et expérimental (courbes en cercles vides) en fonction de la fréquence pour une séquence de Fibonacci finie greffée verticalement sur un guide (Fig. IV.1(f)) pour les générations  $S_3$ - $S_8$

Dans la figure IV.7 nous avons reporté par des cercles pleins les fréquences correspondant aux maxima des spectres dans la figure IV.6 pour les différentes générations. Comme prévu, on remarque que le nombre de modes propres dans une séquence de Fibonacci

augmente avec le numéro de génération. Un autre point intéressant, est que ces modes s'accumulent (disparaissent) dans certaines régions de fréquences qui coïncident avec les régions des modes permis (interdits) dans la figure IV.2.

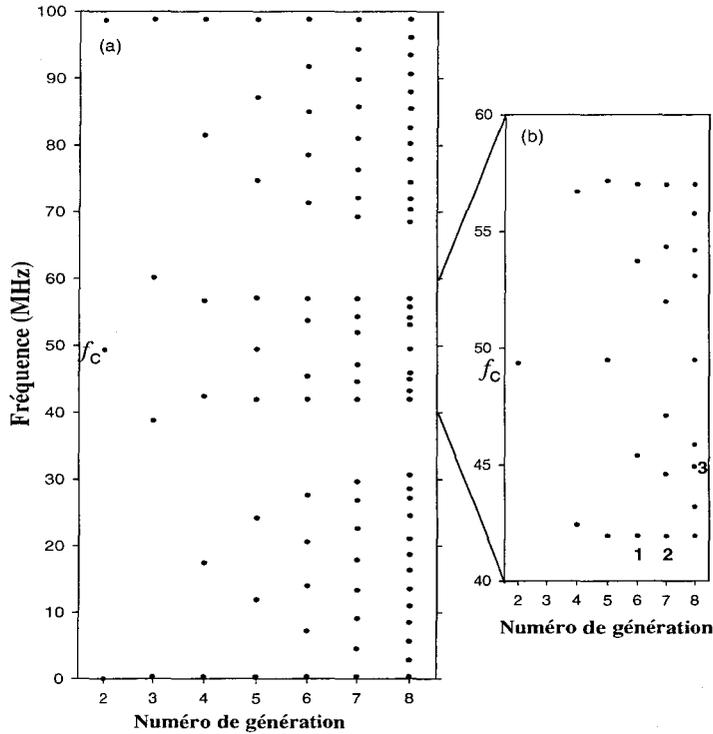


Fig. IV.7: (a) Modes propres (cercles pleins) d'une structure finie de Fibonacci en fonction du numéro de génération. Ces modes sont obtenus à partir des maxima des spectres de transmission (Fig. IV.6). (b) Agrandissement de la figure (a) dans le domaine des fréquences  $[40 - 60]MHz$

En général, la localisation spatiale des modes propres de la séquence de Fibonacci avec les conditions aux limites  $H = 0$  sur les deux extrémités présente un comportement différent en comparaison avec celle de la séquence de Fibonacci insérée entre deux guides. Un exemple de densité d'états locale en fonction de la position d'espace pour la génération  $S_{11}$ , pour le mode situé à la fréquence centrale  $f_c = 49.34MHz$  avec différentes impédances des guides qui entourent la structure est illustré dans la figure IV.8. Ces résultats montrent que le champ électrique se délocalise du centre de la structure vers ses extrémités lorsque l'impédance  $Z_s$  des guides décroît de  $Z_s = Z_A$  vers  $Z_s = 0$ .

Dans ce qui suit, on va discuter la localisation spatiale des modes propres de la structure de Fibonacci (Fig. IV.7) en distinguant plusieurs cas :

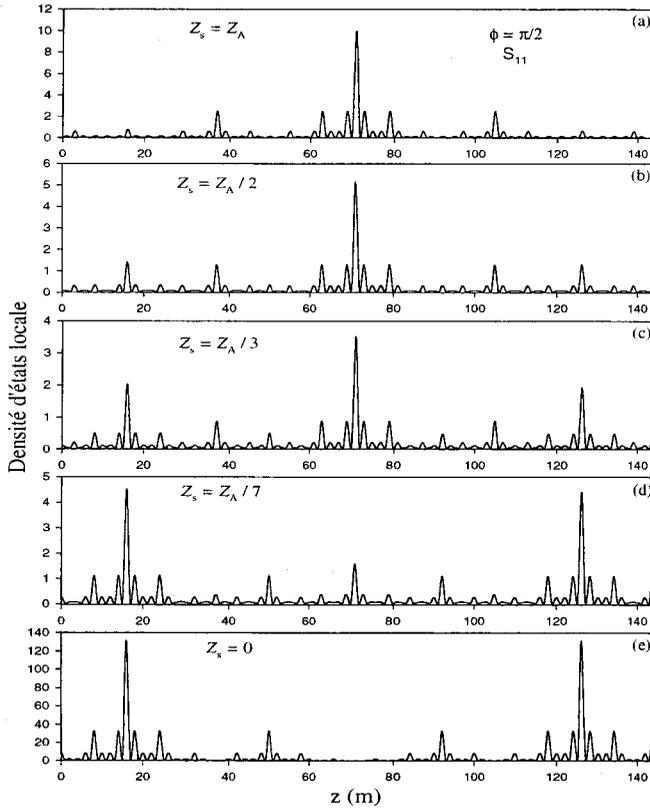


Fig. IV.8: Densité d'états locale (en unité arbitraire) en fonction de la position d'espace  $z$  pour la génération  $S_{11}$  à la fréquence centrale  $f_c = 49.34 MHz$  et pour différentes impédances des milieux qui entourent la structure de Fibonacci : (a)  $Z_s = Z_A$ , (b)  $Z_s = Z_A/2$ , (c)  $Z_s = Z_A/3$ , (d)  $Z_s = Z_A/7$ , et (e)  $Z_s = 0$ .

i) Le spectre de densité d'états locale (Fig. IV.9(a)) associé au mode situé à la fréquence centrale  $f_c = 49.34 MHz$  (voir figure IV.7) ne présente pas une auto-similarité comme il est illustré dans la densité d'états locale pour la génération  $S_{11}$  en comparaison avec celle de la génération  $S_8$  (figure insérée dans la figure IV.9(b)). Cependant, le spectre de la densité d'états locale associé à la génération  $S_{11}$  donne un spectre similaire à ceux des générations  $S_5$  et  $S_8$  dans le domaine d'espace  $z < 34m$ .

Ceci est bien clairement dans les figures IV.9(b) et (c), où on donne une comparaison des courbes de la génération  $S_{11}$  avec celles des générations  $S_8$  (Fig. IV.9(b)) et  $S_5$  (Fig. IV.9(c)).

ii) Les modes situés à la fréquence presque constante ( $f = 41.93 MHz$ ) jusqu'à la 8<sup>eme</sup> génération (Fig. IV.7(b)), ces modes sont induits par l'une des deux surfaces qui délimitent la séquence de Fibonacci comme il est illustré dans la figure IV.9(d) pour les modes notés 1 et 2 dans la figure IV.7(b). On observe une décroissance de la densité d'états locale à partir de la surface en pénétrant dans la structure avec presque la même localisation. Ceci est aussi le cas pour les modes situés à la fréquence  $f = 57.01 MHz$  [Fig. IV.7(b)]. Ces modes induits par les surfaces n'existent pas dans le cas où la séquence de Fibonacci est entourée par des guides d'impédances différentes.

- iii) Le mode situé à la fréquence  $f = 98.68\text{MHz}$  (i.e.,  $\phi = \pi$ ). On peut noter (traits discontinus dans la figure IV.9(e)) que ces modes présentent un comportement oscillatoire à l'intérieur de la structure (modes confinés).
- iv) Finalement, pour les modes dont la fréquence varie en fonction du numéro de génération; ils présentent une localisation aléatoire à l'intérieur de la structure (voir courbe en traits continus dans la figure IV.9(e) associé au mode noté 3 dans la figure IV.7(b)). Ces modes sont qualifiés comme des modes critiques. Notons que des résultats similaires ont été trouvés pour les modes de type plasmon-polaritons et magnetostatiques dans des structures de Fibonacci composées de couches magnétiques et non magnétiques[162].

Comme mentionné ci-dessus, les minima du spectre de transmission de la figure IV.6 donnent les modes propres de la séquence de Fibonacci avec les conditions aux limites  $H = 0$  sur une surface et  $E = 0$  sur l'autre. Ces résultats sont reportés dans la figure IV.10. On peut noter que lorsque les conditions aux limites sont de type  $H = 0$  sur une surface et  $E = 0$  sur l'autre, la dispersion des modes propres des différentes générations de Fibonacci est assez différente par rapport à celle lorsque les conditions aux deux extrémités sont de type  $H = 0$  (Fig. IV.7(a)).

Comme signalé précédemment, les modes propres d'une seule séquence de Fibonacci finie avec les conditions aux limites de type  $H = 0$  coïncident avec les modes de surface de deux SRs semi-infinis complémentaires obtenus à partir de clivage d'un SR infini composé par une répétition périodique des séquence de Fibonacci. Afin de confirmer ces résultats, nous avons tracé dans la figure IV.11 la distribution des largeurs des bandes (traits continus) pour un SR infini. Les bandes de volume sont séparées par des gaps où les modes de surface pour le SR situé dans le demi-espace  $z > 0$  [Fig. IV.1(f)] [ $z < 0$  (Fig. IV.1(g))] sont tracés par des cercles vides (triangles pleins). On peut noter que, à part les modes situés autour de 0 et 100MHz, tous les modes propres d'une séquence de Fibonacci (Fig. IV.7(a)) coïncident avec les modes de surface des deux SRs semi-infinis complémentaires (Fig. IV.11). En plus, nous avons généralisé une règle théorique obtenue précédemment pour les ondes élastiques transverses dans les SRs à  $N$ -couches[12], à savoir lorsqu'on considère deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini, on obtient autant de modes de surface que de mini-gaps. Le nombre de bandes permises

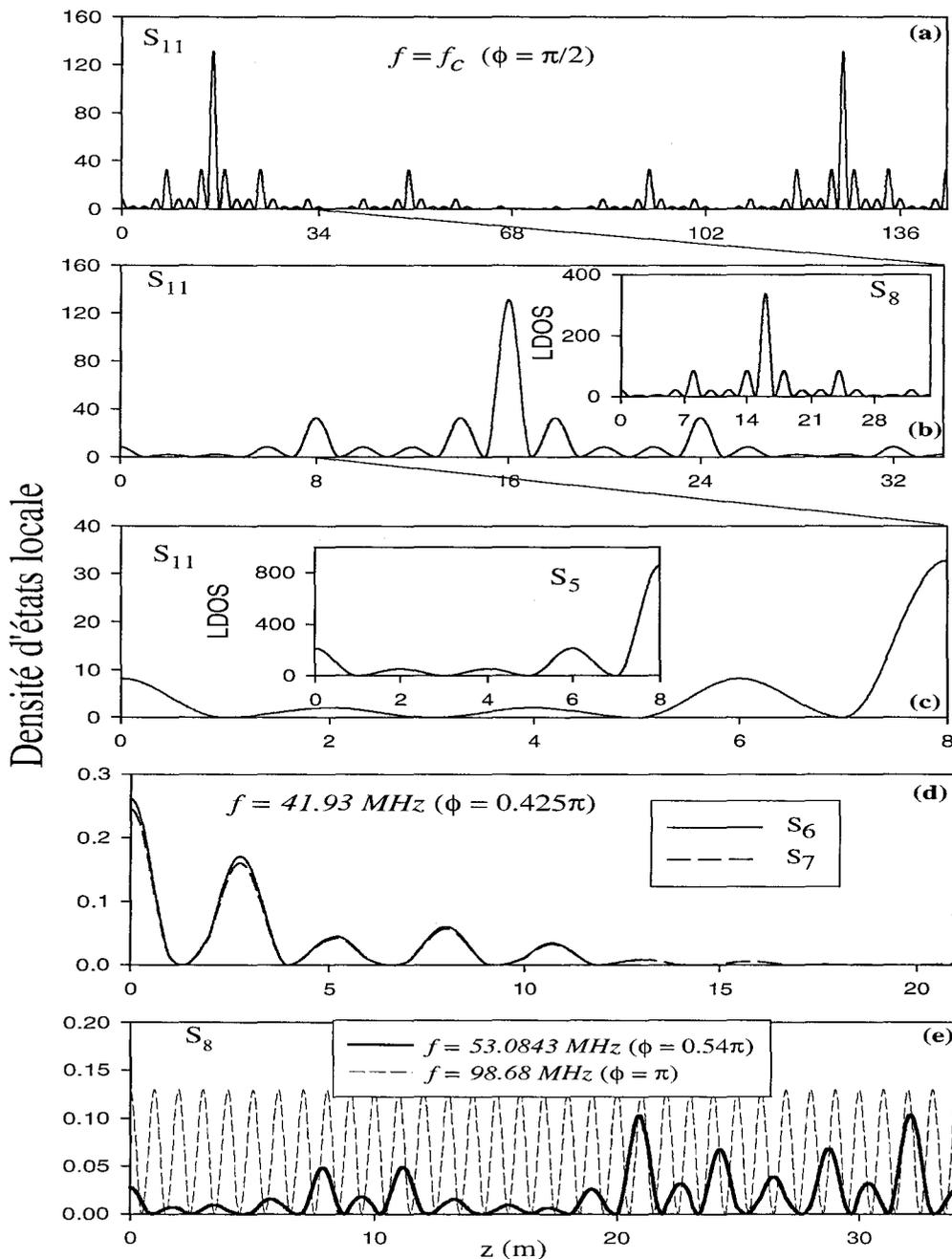


Fig. IV.9: Densité d'états locale [en unité arbitraire] en fonction de la position d'espace  $z$  pour deux fréquences : (i)  $f = f_c$  et pour différentes générations : (a)  $S_{11}$ , (b)  $S_{11}$  élargie dans la position d'espace  $z < 34$  m (la figure insérée représente la densité d'états locale pour la génération  $S_8$ ) et (c)  $S_{11}$  élargie dans la position d'espace  $z < 8$  m (la figure insérée représente la densité d'états locale pour la génération  $S_5$ ). On peut noter une grande similitude entre les courbes élargies de  $S_{11}$  et celles de  $S_8$  et  $S_5$  (ii)  $f = 41.93$  MHz; (d) la densité d'états locale pour les modes notés 1 (courbe en traits continus) et 2 (courbe en traits discontinus) dans la figure IV.7(b) pour les générations  $S_6$  et  $S_7$  respectivement. (e) La densité d'états locale pour le mode noté 3 (courbe en traits pleins) dans la figure IV.7(b); la courbe en traits discontinus correspond au mode situé à la fréquence réduite  $\phi = \pi$  ( $f = 98.68$  MHz).

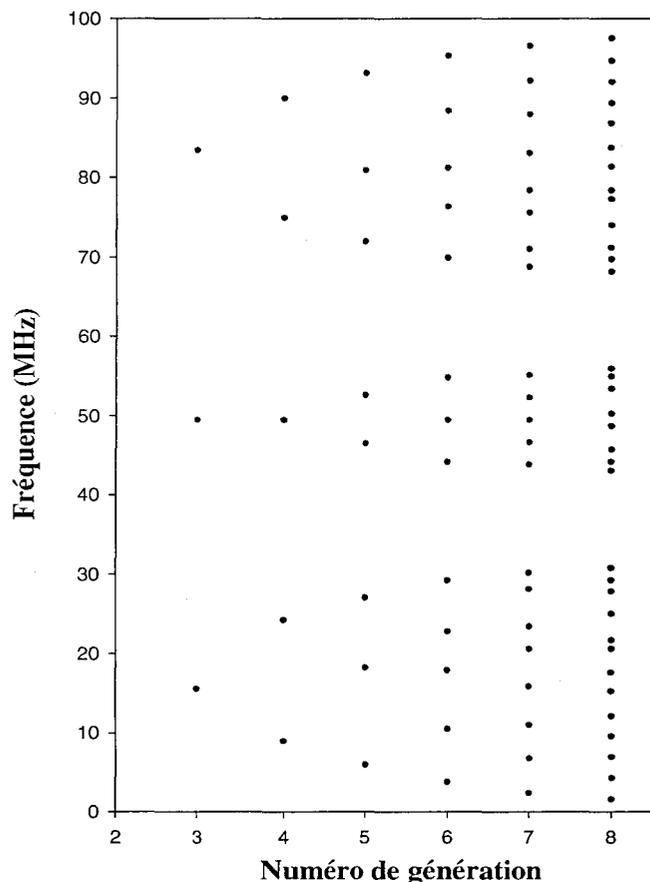


Fig. IV.10: (a) Modes propres (cercles pleins) pour une séquence finie de Fibonacci lorsque les conditions aux limites sont de type  $H = 0$  sur une surface et  $E = 0$  sur l'autre en fonction du numéro de génération. Les modes propres sont obtenus à partir des minima du spectre de transmission de la figure IV.6.

est égale au nombre de blocs  $F_k$  dans chaque génération pour le domaine de fréquence  $\phi < \pi$  (i.e.,  $f < 100\text{MHz}$ ), le nombre de gaps et donc de modes de surface est égal à  $F_k - 1$ .

#### IV.4.2 Cas où les blocs $A$ et $B$ sont chacun formés d'une boucle connectée à un segment

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où la structure de Fibonacci est formée de deux blocs  $A$  et  $B$  où chaque bloc est composé d'une boucle connectée à un segment (Figs. IV.1(c) et (d)). Afin de distinguer les deux blocs  $A$  et  $B$ , nous avons utilisé des boucles identiques (composées de câbles de  $1\text{m}$ ), par contre les segments connectés à ces boucles sont de longueurs  $d_A = 1\text{m}$  et  $d_B = 2\text{m}$  respectivement[91]. En d'autres termes, les blocs  $A$  et  $B$  deviennent équivalents à des bi-segments  $25\Omega(1\text{m}) - 50\Omega(1\text{m})$  et  $25\Omega(1\text{m}) - 50\Omega(2\text{m})$ . Notre objectif est d'étudier le comportement de l'amplitude et de la phase dans ces structures en passant d'une structure périodique à une structure de Fibonacci.

Afin de comprendre le spectre de transmission d'une génération donnée de Fibonacci formée par ces blocs  $A$  et  $B$ , nous présentons dans un premier temps le coefficient de

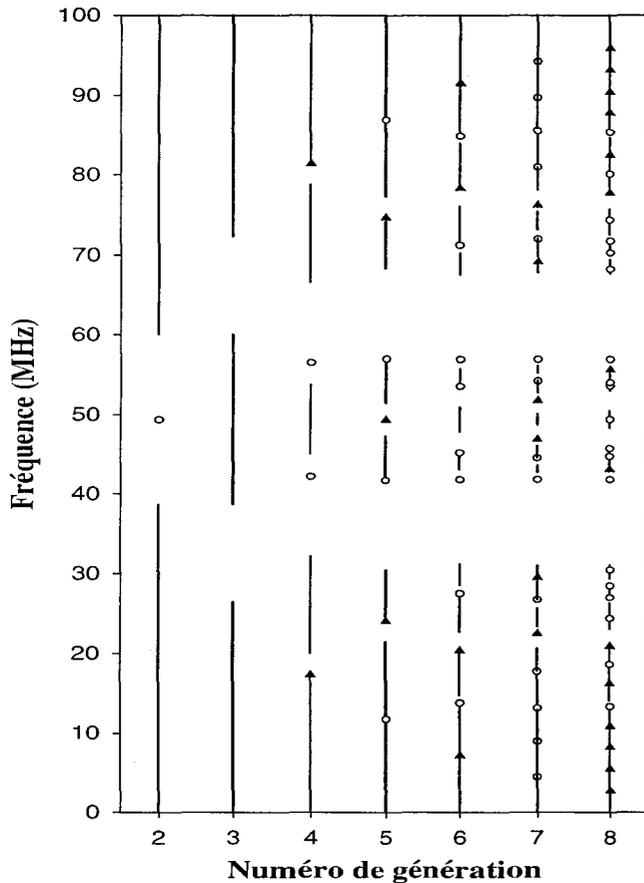


Fig. IV.11: Distribution des largeurs de bande (traits continus) pour un SR périodique (Fig. IV.1(g)) en fonction du numéro de génération. Les cercles vides et les triangles pleins correspondent aux modes de surface des deux SR semi-infinis complémentaires situés à  $z > 0$  [Fig.1(i)] et  $z < 0$  [Fig.1(h)] respectivement. On peut noter la similitude entre la position de ces modes de surface avec ceux d'une seule séquence de Fibonacci (figure IV.7(a)).

transmission d'une structure périodique composée exclusivement de blocs  $A$  ( $8A$ ) (Fig. IV.12(a)). On peut remarquer qu'il n'y a aucun mode à l'intérieur des gaps. En remplaçant un bloc  $A$  par un bloc  $B$  (Fig. V.5(b)), des petits pics associés au bloc  $B$  inséré (défaut) apparaissent au milieu des gaps. En augmentant le nombre de blocs ( $B$ ) substitués au sein de la structure périodique (Figs. IV.12(c), (d)), d'autres modes se détachent des bandes permises et tombent à l'intérieur des gaps. Ces modes donnent lieu à une nouvelle structure de bandes sans modes de défauts, lorsque tous les blocs  $A$  sont remplacés par les blocs  $B$  (Fig. IV.12(e)). Ces résultats montrent que le spectre du coefficient de transmission de la structure de Fibonacci (Fig. IV.5(c)), composée à la fois de blocs  $A$  et  $B$ , peut être considéré comme un spectre intermédiaire entre ceux associés à des structures périodiques constituées respectivement par des blocs  $A$  et par des blocs  $B$ .

Signalons que, dans le type de structure considéré ici, la propriété d'auto-similarité est obtenue chaque six générations au lieu de trois et avec un facteur d'échelle  $F^2$  au lieu de  $F$ . Cependant, à cause de la dissipation dans les câbles, l'étude expérimentale devient difficile pour les générations élevées des structures de boucles de Fibonacci. Cependant, ces propriétés peuvent être vérifiées expérimentalement pour un matériau sans perte [65, 164].

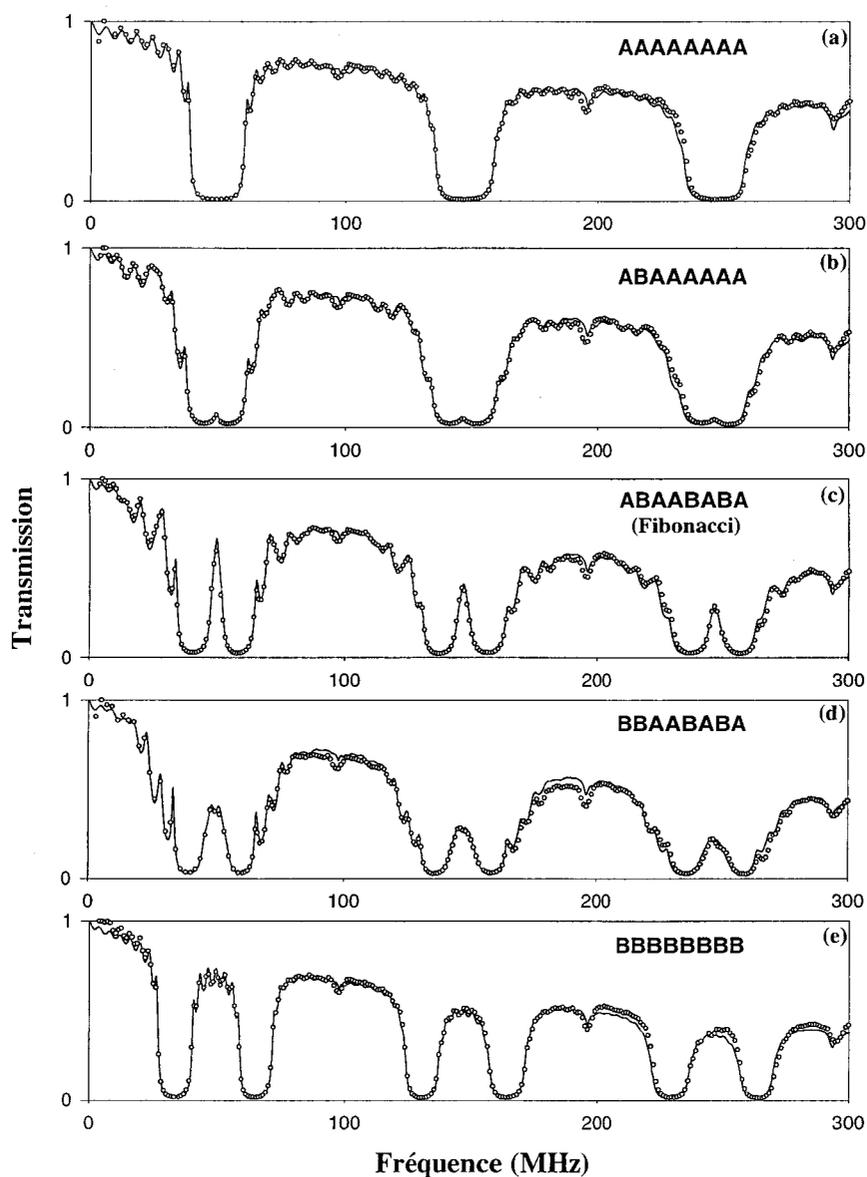


Fig. IV.12: Variations du coefficient de transmission théorique (courbes en traits pleins) et expérimental (courbes en pointillés) en fonction de la fréquence pour différentes structures : (a) structure périodique formée exclusivement de blocs A. (b), (c) et (d) même chose que (a) lorsque 1, 3, et 4 blocs A sont remplacés par des blocs B. (e) Structure périodique formée exclusivement de blocs B.

L'existence des ondes localisées dans la séquence de Fibonacci peut être utilisée pour réduire la vitesse de groupe des ondes dans de ces structures. En effet, dans un travail récent[161], il a été montré que la présence d'un défaut simple dans un système constitué de deux câbles coaxiaux différents, peut réduire considérablement la vitesse de groupe en dessous de la vitesse normale de propagation dans les câbles dans une bande de fréquence étroite. En introduisant plus d'un défaut dans ces structures comme il est le cas pour les systèmes de Fibonacci, on peut obtenir une bande de fréquence étroite où la vitesse devient plus lente. Ces résultats sont présentés dans la figure IV.13, où nous avons tracé la phase (panneau supérieur), le temps de phase (panneau au milieu) ainsi que la vitesse de groupe  $v_g = L/\tau_\varphi$ [165] (panneau inférieur) en fonction de la fréquence pour trois structures : la structure périodique 8A (Figs. IV.13(a), (b), (c)), la 5<sup>ème</sup> génération de Fibonacci (Figs. IV.13(d), (e),(f)) et la structure périodique 8B (Figs. V.13(g), (h), (k)).  $L$  est toujours la longueur totale de la structure finie, soit la somme des longueurs des blocs  $A$  et  $B$  constituant la structure. Il a été signalé auparavant, le temps de phase est équivalent à la densité d'états dans les cristaux photoniques à une dimension et la vitesse de groupe est équivalente à l'inverse de la densité d'états[165]. Dans le cas des structures périodiques (Figs. V.13(a), (b), (c), (g), (h) et (k)), une dispersion anormale se produit à l'intérieur des gaps et des vitesses superluminiques sont prévues, on arrive alors à des vitesses  $3c < v_g < 3.5c$  [89, 141]. Ce résultat n'est pas en désaccord avec la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, mais plutôt il résulte exclusivement des interférences dans la zone où la dispersion est anormale[141]. À l'intérieur des bandes passantes, la vitesse de groupe est égale à  $0.66c$ , qui est la vitesse de propagation normale des ondes dans les câbles coaxiaux utilisés dans les expériences.

Dans le cas des séquences de Fibonacci (Figs. IV.13(d), (e), (f)), la structure est désordonnée, donnant lieu à un temps de phase élevé à l'intérieur des gaps (Fig. IV.13(e)) et donc des vitesses de groupe faibles ( $v_g \approx 0.3c$ ) inférieures à la vitesse normale dans les câbles (Fig. IV.13(f)). Cette valeur est identique à celle trouvée par Munday et Robertson [161] dans des structures de câbles coaxiaux différentes.

Le ralentissement de la vitesse de groupe peut être expliqué par le temps dépensé par le photon (temps de piégeage) à l'intérieur des segments des blocs  $B$  (cavités) avant sa transmission. Un autre résultat intéressant concerne le comportement du temps de phase et de la vitesse de groupe aux limites des bandes interdites. En effet, dans les systèmes

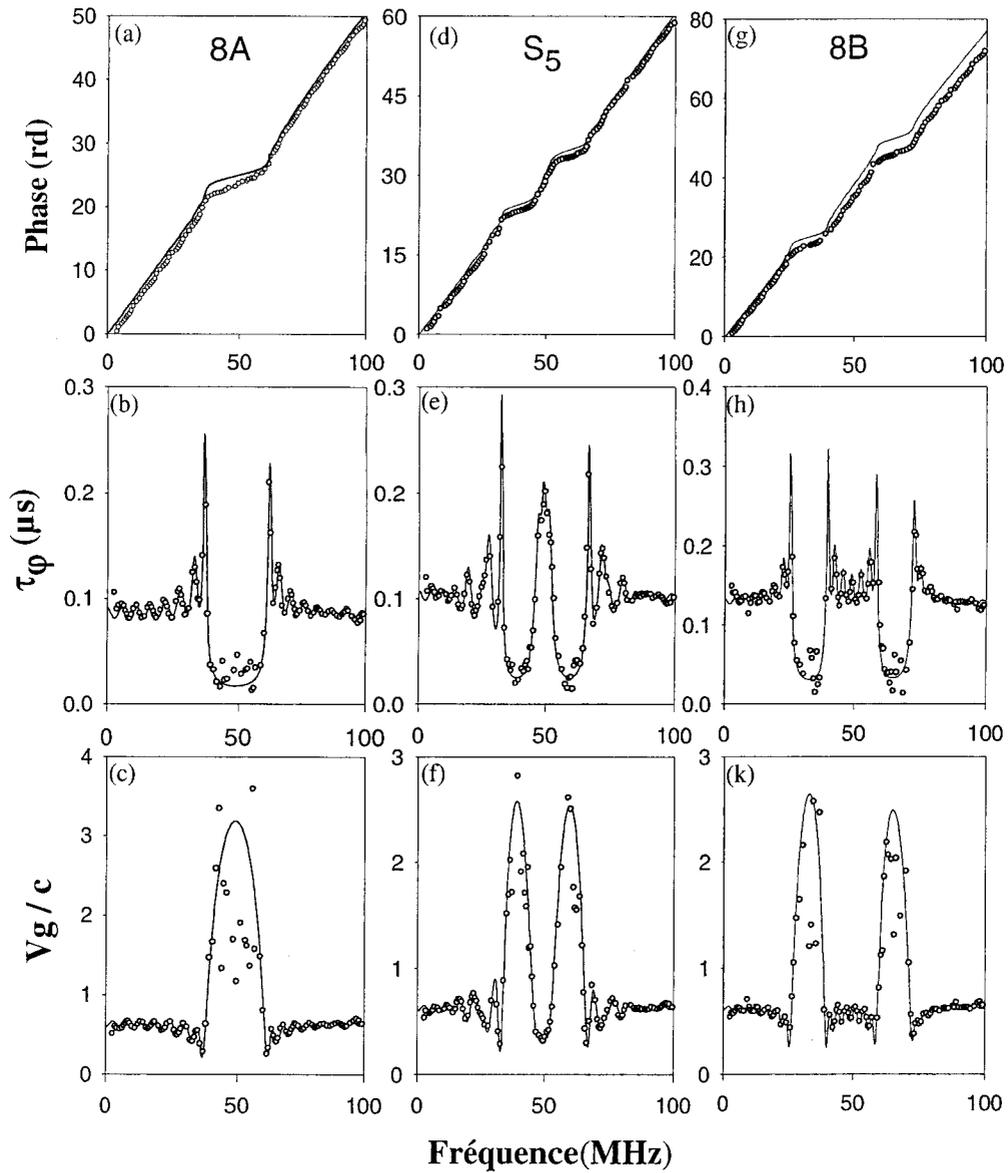


Fig. IV.13: Phase (panneau supérieur), temps de phase (panneau au milieu) et vitesse de groupe (panneau inférieur) en fonction de la fréquence pour trois structures : 8A (a), (b), (c), 5<sup>ème</sup> génération de Fibonacci (d), (e), (f) et 8B (g), (h), (k). Les courbes en traits pleins (pointillés) correspondent à la théorie (expérience).

périodiques unidimensionnels infinis, la densité des modes tend vers l'infini en bordure de bande et la vitesse de groupe devient très petite. Par contre, dans un système fini, la densité de mode électromagnétique est une fonction oscillatoire plutôt qu'une fonction monotone (Figs. IV.13(b),(h)). L'augmentation du temps de phase (densité d'états) en bords de bande induit une vitesse de groupe faible ( $v_g \approx 0.2c$ ) (Figs. IV.13(c),(k)) qui peut présenter un intérêt potentiel pour les applications en optique[157]. Dans le cas des séquences de Fibonacci (Figs. IV.13(e),(f)), le temps de phase et la vitesse de groupe présentent un comportement similaire à ceux des structures périodiques en bordure de bande. Cependant, il a été montré récemment [67] que les résonances de bord de bande dans les systèmes photoniques périodiques ne sont pas des états localisés à cause de leurs extensions linéaires avec la taille du système, et aussi du fait qu'elles ne s'évanouissent pas. En revanche, les résonances de bord de bande de Fibonacci décroissent selon une loi de puissance en raison de la nature de leur localisation.

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié à la fois théoriquement et expérimentalement la propagation et la localisation des ondes électromagnétiques dans des cristaux photoniques quasi-unidimensionnels formés de câbles coaxiaux.

Nous nous sommes intéressés à des séquences de Fibonacci avec deux types de blocs qui forment la séquence.

Dans le premier cas, les deux blocs sont respectivement un simple câble coaxial et une boucle symétrique qui joue le rôle d'un segment avec une impédance égale à la moitié de celle des constituants. Nous avons montré quelques propriétés liées à l'auto-similarité des spectres de transmission (amplitude, phase et vitesse de groupe) dans ces structures avec un facteur d'échelle bien déterminé. En particulier, la propriété d'auto-similarité récursive de Fibonacci d'ordre trois s'avère valide également pour le temps de phase et la vitesse de groupe. En plus, nous avons montré que la propagation des ondes électromagnétiques dans une séquence de Fibonacci peut présenter une dispersion anormale (très normale) à l'intérieur des gaps et donc des vitesses de groupe très rapides (assez lentes). Les modes propres de ces structures avec différentes conditions aux limites, ont été obtenus et leur localisation spatiale analysée. La majorité de ces modes présentent un comportement

critique à l'intérieur de la structure, cependant certains d'entre eux peuvent présenter un comportement oscillatoire, auto-similaire voire localisé au voisinage de l'une des surfaces.

Pour le deuxième cas, les blocs qui forment la séquence de Fibonacci sont composés chacun à la fois d'une boucle connectée à un segment. Dans ce cas, chaque bloc est équivalent à un bisegment. L'analyse des spectres de transmission et de temps de phase des différentes générations de Fibonacci nous a permis de déduire que, contrairement au cas précédent, ces spectres présentent une auto-similarité d'ordre six au lieu de trois avec un facteur d'échelle  $F^2$  au lieu de  $F$ .

V

Ondes électromagnétiques de surface dans les  
super-réseaux de Fibonacci : théorie et mise en évidence  
expérimentale

## Sommaire

---

<b>V.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>116</b>
<b>V.2</b>	<b>Modèle et formalisme théorique</b>	<b>117</b>
V.2.1	Formalisme théorique	118
V.2.2	Relations de dispersion et fonctions de Green	119
V.2.3	Densité d'états	121
<b>V.3</b>	<b>Résultats Numériques et expérimentaux</b>	<b>122</b>
V.3.1	Modes de volume	122
V.3.2	Modes de surface : Résultats numériques	125
V.3.3	Modes de surface : Résultats expérimentaux	134
<b>V.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>140</b>

---

## V.1 Introduction

L'étude des ondes électromagnétiques dans les multicouches optiques est largement développée ces dernières années. Comme signalés au chapitre précédent, ces matériaux présentent des propriétés exceptionnelles qui peuvent être explorées dans le contrôle, le guidage et le filtrage de la lumière. L'existence des modes électromagnétiques localisés à la surface de ces multicouches a été prédite théoriquement[166] et observée expérimentalement dans un super-réseau (SR)  $GaAs/Al_{0.2}Ga_{0.8}As$ [167, 168]. L'existence de ces modes de surface fut également prouvé expérimentalement dans un SR  $ZnS/cryolite$ [169]. Plus récemment, nous avons montré dans des SRs à deux et à trois couches, les conditions d'existence de ces modes de surface[170](voir Annexe). Ces résultats ne sont pas développés dans ce chapitre.

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'étude de l'existence et la localisation des ondes de surface dans un SR où chaque période (cellule) est constituée par un arrangement quasi-périodique de deux blocs  $A$  (segment) et  $B$  (boucle) (Fig. V.1) selon la séquence de Fibonacci. Notons que les quasi-cristaux photoniques (QCP) sont des structures intermédiaires entre les systèmes périodiques et les systèmes désordonnés [145]. L'étude de la propagation et la localisation de la lumière dans les QCP-1D a été largement développée durant la dernière décennie [63–76, 145, 163, 164, 171, 172]. La majorité de ces résultats concerne les propriétés de volume de ces structures, cependant les modes de surface ainsi que les propriétés d'échelle et de multifractalité, ont été peu étudiés[145] en particulier du point de vue expérimental. Notre objectif est de :

- i) généraliser au cas des structures quasi-périodiques une règle sur l'existence des modes de surface, à savoir, lorsqu'on considère deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini, il existe exactement un mode de surface dans chaque gap. Ce mode est localisé sur la surface de l'un des deux SRs semi-infinis. Nous montrons que ces modes de surface correspondent aux modes d'une cellule unique (avec la condition  $H = 0$  aux deux extrémités).
- ii) Montrer qu'en plus des modes de surface liés à la périodicité dans les SRs habituels, il existe de nouveaux modes de surface liés à la quasi-périodicité de chaque cellule élémentaire.
- iii) Utiliser la méthode expérimentale décrite dans le chapitre IV pour observer les modes de surface.

Cependant, avant de traiter les modes de surface, nous discutons quelques résultats spécifiques aux modes de volume dans les SRs de Fibonacci tels que la propriété d'échelle et la dimension fractale.

Finalement, nous montrons théoriquement et expérimentalement l'existence de deux types de modes dans une structure finie composée de  $N$  cellules, à savoir :  $N-1$  modes propres dans chaque bande et un mode de surface par gap qui est indépendant de  $N$ .

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le paragraphe V.2, nous présentons un bref résumé du formalisme théorique et des principaux résultats analytiques utilisés dans nos calculs numériques. Le paragraphe V.3 donne les principaux résultats numériques et expérimentaux relatifs aux modes de volume et aux modes de surface. Les conclusions sont résumées dans le paragraphe V.4.

## V.2 Modèle et formalisme théorique

Le SR de Fibonacci est une structure quasi-périodique unidimensionnelle simple construite à partir de deux blocs  $A$  et  $B$ . Pour la structure considérée ici, le bloc  $A$  est formé par un simple câble coaxial de longueur  $d = 1m$ , tandis que le bloc  $B$  est une boucle symétrique formée par deux câbles coaxiaux standard identiques (chaque câble est caractérisé par son impédance caractéristique  $Z = 50\Omega$  et sa permittivité  $\varepsilon = 2.3$ ) de même longueur  $d = 1m$  (Fig. V.1).

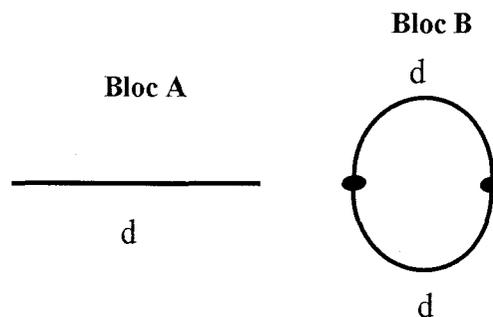


Fig. V.1: Illustration schématique des blocs  $A$  et  $B$  qui constituent la structure de Fibonacci. Le bloc  $A$  est un câble coaxial simple de longueur  $d = 1m$  et d'impédance  $Z = 50 \Omega$ . Le bloc  $B$  est une boucle symétrique composée de deux câbles coaxiaux identiques de même longueur  $d = 1m$  et d'impédance  $Z = 50 \Omega$ .

Comme il a été mentionné dans le chapitre IV, le bloc  $B$  (boucle) est équivalent à un câble coaxial caractérisé par une impédance moitié  $Z/2 = 25\Omega$ , ce qui permet de créer

un large contraste entre les impédances caractéristiques des deux blocs  $A$  et  $B$  et par conséquent la création de larges gaps dans la structure de bande [89, 91]. Les blocs  $A$  et  $B$  à l'intérieur de chaque cellule du SR respectent la séquence de Fibonacci :

$$S_{k+1} = S_k S_{k-1} \quad \text{avec} \quad S_1 = [A], S_2 = [AB]. \quad (\text{V.1})$$

Par conséquent, les générations de Fibonacci sont :

$$S_1 = [A], S_2 = [AB], S_3 = [ABA], S_4 = [ABAAB], S_5 = [ABAABABA], \dots$$

### V.2.1 Formalisme théorique

Le formalisme théorique utilisé est basé sur la théorie de réponse d'interface [57]. Dans la référence [12], El Boudouti et al. ont présenté les expressions analytiques détaillées des relations de dispersion des ondes élastiques transverses de volume et de surface dans un SR périodique où chaque période est formée de  $N$  couches différentes. Les expressions des champs de déplacement et des densités d'états locale et totale sont également données. Ces expressions restent valables aussi pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans les câbles coaxiaux qui sont des structures monomodes ; il suffit de remplacer les impédances acoustiques par les impédances électromagnétiques et les constantes élastiques par les permittivités diélectriques. Le calcul des fonctions de Green d'un SR à  $N$  couches (Fig. V.2(a)) peut être effectué en utilisant la matrice de transfert  $2 \times 2$  :

$$T_{1,\dots,N} = \Delta_N \Delta_{N-1} \dots \Delta_1, \quad (\text{V.2})$$

où

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} C_i & -jZ_i S_i \\ \frac{jS_i}{Z_i} & C_i \end{pmatrix}, \quad (\text{V.3})$$

$S_i = \sinh(\alpha_i d_i)$  et  $C_i = \cosh(\alpha_i d_i)$ .  $\alpha_i = \frac{-j\omega\sqrt{\varepsilon_i}}{c}$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  est la pulsation,  $\varepsilon_i$  la permittivité diélectrique du milieu  $i$  et  $c$  la vitesse de la lumière. Dans notre cas, les blocs  $A$  et  $B$  sont caractérisés par  $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 2.3$  et  $Z_A/2 = Z_B = 25\Omega$  et les  $N$  couches (blocs) à l'intérieur de chaque cellule respectent la séquence de Fibonacci (Fig. V.2(a)). Par

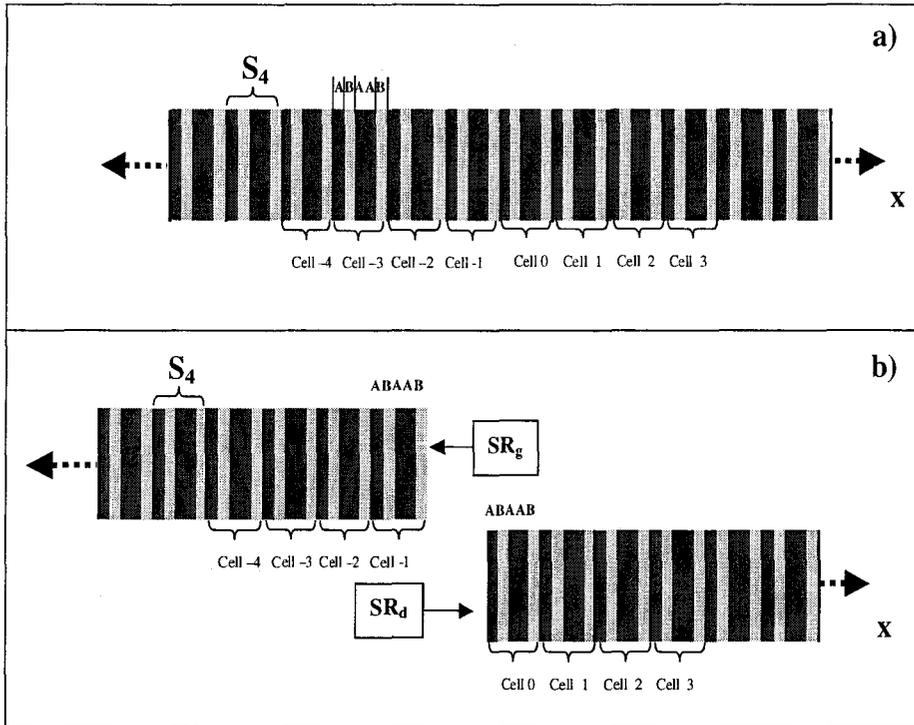


Fig. V.2: a) Schéma de la géométrie du SR infini. Chaque cellule est une génération donnée de Fibonacci (par exemple  $S_4$ ). b) Schéma de la géométrie de deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini. On note  $SR_d$  le SR à droite et  $SR_g$  le SR à gauche.

conséquent, les matrices de transfert s'écrivent (V.2) :  $T^{(1)} = \Delta_A$  pour  $S_1$ ,  $T^{(2)} = \Delta_B \Delta_A$  pour  $S_2$ ,  $T^{(3)} = \Delta_A \Delta_B \Delta_A$  pour  $S_3$ ,  $T^{(4)} = \Delta_B \Delta_A \Delta_A \Delta_B \Delta_A$  pour  $S_4$ , ...

On obtient alors la relation de récurrence :  $T^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k-1)}$  à partir de laquelle toutes les matrices  $T^{(k)}$  peuvent être déterminées où  $k$  est le numéro de génération de Fibonacci. Le nombre de blocs dans chaque génération  $k$  est  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  avec  $F_1 = 1$  et  $F_2 = 2$ . Notons aussi la propriété utile de la matrice de transfert valable pour n'importe quel numéro de génération  $k$  :

$$\det T^{(k)} = T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} = 1. \quad (V.4)$$

où  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  et  $T_{22}$  sont les éléments de la matrice de transfert  $T^{(k)}$  (V.2).

### V.2.2 Relations de dispersion et fonctions de Green

La relation de dispersion d'un SR infini (i.e.,  $\omega$  en fonction du vecteur d'onde  $Q$ ), est donnée par [12] :

$$\cos(QD) = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) = \eta. \quad (V.5)$$

où  $D = F_k$  (en mètre) est la période du SR. Chaque période est une séquence de Fibonacci d'ordre  $k$ .

Le calcul des éléments de la fonction de Green  $g(DD)$  dans l'espace complet du SR, nécessite d'abord la connaissance des éléments  $g(M_m M_m)$  dans l'espace restreint des interfaces  $M_m$  [l'indice  $m$  désigne la couche  $i$  appartenant à la cellule  $m : n \equiv (n, i)$  et  $M_m$  représente l'espace des deux interfaces de la couche  $i : M_m = (n, i, \pm \frac{d_i}{2})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ]. Ces éléments sont donnés par [12] :

$$g(n, i, -\frac{d_i}{2}, n', j, -\frac{d_j}{2}) = \left\{ \begin{array}{l} (T_{12})_{i, \dots, N, 1, \dots, i-1} \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2-1} , \quad i = j , \\ (T_{12})_{j, \dots, N, 1, \dots, i-1} \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2-1} + (T_{12})_{i, \dots, j-1} \frac{t^{|n-n'-1|+1}}{t^2-1} , \quad i < j \leq N , \\ (T_{12})_{i, \dots, N, 1, \dots, j-1} \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2-1} + (T_{12})_{j, \dots, i-1} \frac{t^{|n-n'+1|+1}}{t^2-1} , \quad j < i \leq N . \end{array} \right\} \quad (\text{V.6})$$

Les différents termes  $(T_{12})$  dans l'équation (V.6) sont obtenus à partir de l'équation (V.2) en tenant compte des indices qui donnent l'ordre des couches à commencer par le premier terme et finir par le dernier terme.  $t$  est défini par :

$$t = \left\{ \begin{array}{l} \eta + (\eta^2 - 1)^{1/2}, \quad \eta < -1 , \\ \eta \pm i(1 - \eta^2)^{1/2}, \quad -1 < \eta < +1 , \\ \eta - (\eta^2 - 1)^{1/2} , \quad \eta > 1 . \end{array} \right\} \quad (\text{V.7})$$

Le signe  $\pm$  dans l'expression de  $t$  à l'intérieur des bandes de volume est tel que  $|t(\omega^2 + i\varepsilon)|_{\varepsilon \rightarrow 0}$  sera légèrement inférieur à 1.

L'expression de la fonction de Green entre deux points quelconques du SR infini est donnée par :

$$g(n, i, x; n', i', x') = \delta_{nn'} \delta_{ii'} U_i(x, x') + \frac{1}{S_i S_i'} \{ \sinh(\alpha_i(\frac{d_i}{2} - x)); \sinh(\alpha_i(\frac{d_i}{2} + x)) \} g(M_m, M_{m'}) \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\alpha_{i'}(\frac{d_{i'}}{2} - x')) \\ \sinh(\alpha_{i'}(\frac{d_{i'}}{2} + x')) \end{array} \right\} , \quad (\text{V.8})$$

où

$$U_i(x, x') = -\frac{1}{2F_i} \exp[-\alpha_i |x - x'|] + \frac{1}{2F_i S_i} \times \{ \sinh(\alpha_i(\frac{d_i}{2} - x')) \exp(-\alpha_i(\frac{d_i}{2} + x)) + \sinh(\alpha_i(\frac{d_i}{2} + x')) \exp(-\alpha_i(\frac{d_i}{2} - x)) \} . \quad (\text{V.9})$$

Le dernier terme de l'équation (V.8) est composé d'un produit de trois matrices qui sont respectivement d'ordre  $(1 \times 2)$ ,  $(2 \times 2)$  et  $(2 \times 1)$ .  $g(M_m, M_{m'})$  est une matrice  $(2 \times 2)$  dont les éléments sont donnés par l'équation (V.6) pour  $m \equiv (n, i, \pm \frac{d_i}{2})$  et  $m' \equiv (n', i', \pm \frac{d_i}{2})$ .

La relation de dispersion d'un SR semi-infini avec une surface libre (Fig. V.2(b)) est donnée par :

$$T_{21} = 0, \quad (\text{V.10})$$

avec la condition

$$|T_{22}| > 1, \quad (|T_{22}| < 1) \text{ pour } SR_d (SR_g) \quad (\text{V.11})$$

$SR_d$  et  $SR_g$  dénotent, respectivement, le SR semi-infini à droite et le SR semi-infini à gauche (Fig. V.2(b)). Cette dernière condition assure la décroissance de la fonction d'onde à partir de la surface en pénétrant dans le volume du SR.

La fonction de Green dans l'espace des interfaces du SR semi-infini est donnée par [12].

$$d(n, i, -\frac{d}{2}; n, j, -\frac{d}{2}) = g(n, i, -\frac{d}{2}; n, j, -\frac{d}{2}) + \frac{t^{n+n'+1} Y_i Y_j}{(t^2 - 1) T_{21}}, \quad (\text{V.12})$$

où  $Y_1 = T_{22}$  pour  $i = 1$ ,

et  $Y_i = -t(T_{11})_{1, \dots, i-1} + (T_{22})_{i, \dots, N}$  pour  $i = 2, \dots, N$ .

La fonction de Green dans l'espace complet du SR semi-infini est donnée par l'équation (V.8) en remplaçant  $g(M_n, M_{n'})$  (Eq. V.6) par  $d(M_n, M_{n'})$  (Eq. V.12).

### V.2.3 Densité d'états

La densité d'états locale en un point  $x$  de la structure est donnée par :

$$n(\omega; n, i, x) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} d^+(\omega; n, i, x; n, i, x), \quad (\text{V.13})$$

où  $d^+(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\omega + i\varepsilon)$ .

La densité d'états totale est obtenue en intégrant sur  $x$  la densité d'états locale et en sommant sur  $n$  et  $i$ . Nous nous intéressons plus particulièrement à la densité d'états du système formé du SR semi-infini (Fig. V.2(b)) à partir de laquelle on soustrait la contribution du SR infini (Fig. V.2(a)).

Cette variation  $\Delta n(\omega)$  peut être écrite comme la somme des variations de densités d'états  $\Delta_i n(\omega)$  des blocs  $i$  du SR :

$$\Delta n(\omega) = \sum_{i=1}^N \Delta_i n(\omega) \quad (\text{V.14})$$

où

$$\Delta_i n(\omega) = -\frac{Z_i}{\pi} \text{Im} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-d_i/2}^{d_i/2} [d(n, i, x; n, i, x) - g(n, i, x; n, i, x)] dx, \quad (\text{V.15})$$

$d$  et  $g$  sont les fonctions de Green du SR semi-infini et infini respectivement. En remplaçant  $d$  et  $g$  par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_i(\omega) = & +\frac{Z_i \omega}{\pi} \text{Im} \frac{t}{(t^2 - 1)^2} \left( \frac{1}{\alpha_i S_i^2 T_{21}} \right) [(Y_i^2 + Y_{i+1}^2)(C_i S_i - \alpha_i d_i) + \\ & 2Y_i Y_{i+1}(\alpha_i d_i C_i - S_i)], \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

$$\begin{aligned} \Delta_N(\omega) = & +\frac{Z_N \omega}{\pi} \text{Im} \frac{t}{(t^2 - 1)^2} \left( \frac{1}{\alpha_N S_N^2 T_{21}} \right) [(Y_N^2 + (tY_1)^2)(C_N S_N - \alpha_N d_N) \\ & + 2Y_N Y_1 t(\alpha_N d_N C_N - S_N)]. \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Les vecteurs propres associés aux modes de surface du SR semi-infini à  $N$  couches (Eq. V.10) sont donnés par [12] :

$$\begin{aligned} E_i(n, x) \propto & \frac{1}{S_i} [Y_i \sinh \alpha_i \left( \frac{d_i}{2} - x \right) + Y_{i+1} \sinh \alpha_i \left( \frac{d_i}{2} + x \right)] e^{inQD} \\ & i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

$$E_N(n, x) \propto \frac{1}{S_N} [Y_N \sinh \alpha_N \left( \frac{d_N}{2} - x \right) + tY_1 \sinh \alpha_N \left( \frac{d_N}{2} + x \right)] e^{inQD} \quad (\text{V.19})$$

### V.3 Résultats Numériques et expérimentaux

#### V.3.1 Modes de volume

La figure V.3 montre les fréquences permises et interdites (distribution des largeurs de bandes) d'un SR de Fibonacci en fonction du numéro de génération  $k$  allant jusqu'à la 8<sup>ème</sup> génération (34 blocs). Des générations plus élevées sont illustrées dans la figure V.3(b) pour la gamme des fréquences [48.2-50.4]MHz autour de la fréquence centrale  $f_c = 49.34$ MHz. Dans la figure V.3, les limites des bandes sont données par  $QD = 0$  et  $QD = \pi$  dans l'équation (V.5) de telle façon qu'on a une alternance d'une bande à l'autre selon la séquence  $0, \pi, \pi, 0, 0, \pi, \pi, 0, \dots$ . Le nombre de bandes permises est égale au nombre de blocs  $F_k$  dans chaque génération pour  $f < 100$  MHz, car cette distribution est répétitive chaque  $\frac{\omega d \sqrt{\varepsilon}}{c} = \pi$  (i.e.,  $f \simeq 98.68$  MHz), d'où l'intérêt d'étudier la distribution des bandes seulement dans la zone de fréquences  $f < 100$  MHz. On peut noter aussi, l'existence des gaps stables (notés  $G_s$ ) qui apparaissent pour toutes les générations

(par exemple les gaps autour de  $f = 22, 35, 65$  et  $78$  MHz) et les gaps transitoires (notés  $G_t$ ) qui apparaissent pour une génération sur trois (par exemple les gaps autour de la fréquence centrale  $f_c = 49.34$  MHz pour  $S_2, S_5, S_8, \dots$ )[174].

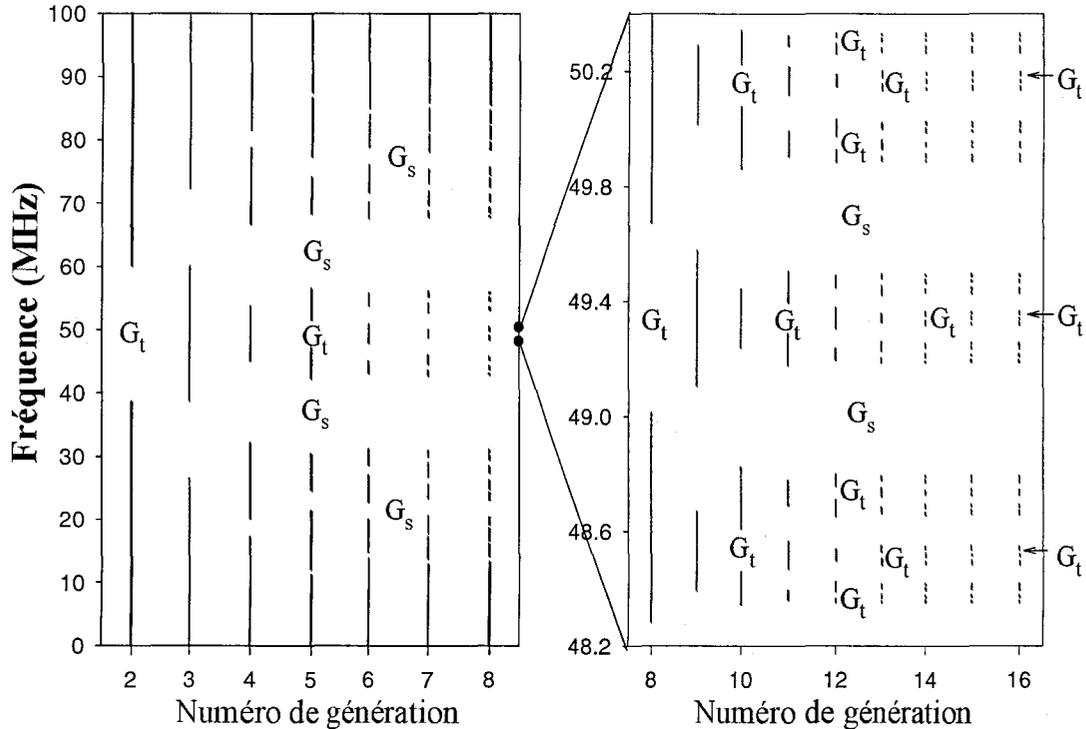


Fig. V.3: (a) Distribution des largeurs de bandes (traits continus) en fonction du numéro de génération.  $G_t$  et  $G_s$  dénotent les gaps transitoires et les gaps stables respectivement. (b) Même chose que (a) mais pour les générations plus élevées dans la gamme de fréquences [48.2, 50.4] MHz autour de la fréquence centrale  $f_c = 49.34$  MHz. L'accent est mis sur les positions des gaps transitoires  $G_t$  autour de  $f_c$  qui apparaissent chaque trois générations.

La figure V.3(b) illustre bien ces différents gaps transitoires où nous avons présenté un agrandissement des largeurs de bandes autour de  $f_c$  et en allant jusqu'à la 16<sup>ème</sup> génération. On peut noter que la largeur des gaps stables reste presque constante, tandis que la largeur des gaps transitoires diminue au fur et à mesure que le numéro de génération augmente.

Un point à signaler et que, comme prévu, les régions des bandes permises deviennent de plus en plus étroites lorsque  $k$  augmente, montrant le caractère de plus en plus localisé des modes. En effet, la largeur totale  $\Delta_k$  des bandes permises est liée au nombre de blocs  $F_k$  pour chaque génération  $k$ . La figure V.4 donne la relation log-log entre  $\Delta_k$  et  $F_k$ , et montre clairement la décroissance de la largeur totale des bandes en fonction du

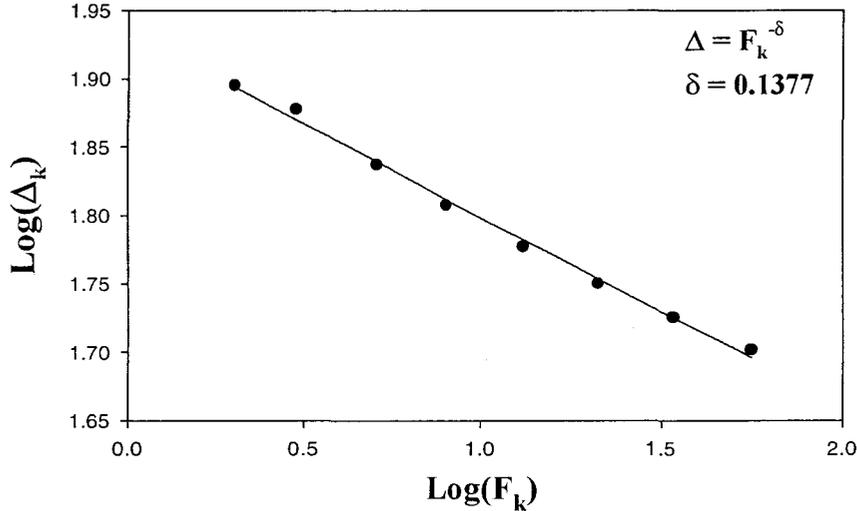


Fig. V.4: La courbe log-log représentant la largeur des bandes permises  $\Delta_k$  en fonction du numéro de génération  $F_k$ .

nombre de blocs selon la loi en puissance :

$$\Delta_k = F_k^{-\delta} \quad (\text{V.20})$$

avec  $\delta \simeq 0.137$ . Lorsque  $k$  devient de plus en plus large,  $\Delta_k$  (la mesure de Lebesgue des bandes d'énergies) tend vers zéro, par conséquent tous les états deviennent critiques. Ce résultat, propre aux structures quasi-périodiques, a été mis en évidence pour plusieurs autres types d'excitations [145].

Pour mettre en évidence expérimentalement les modes de volume, nous avons mesuré la transmission à travers une structure périodique finie prise en sandwich entre deux guides d'onde semi-infinis. La figure V.5 représente les spectres de transmission théoriques (lignes continues) et expérimentales (cercles vides) pour une structure périodique de Fibonacci composée de quatre cellules. Les lignes horizontales correspondent aux bandes de volume de la structure périodique de Fibonacci infinie. Le formalisme théorique et la mise en évidence expérimentale sont exactement les mêmes que ceux décrits dans le chapitre IV précédent. Les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord. Ces résultats montrent clairement la fragmentation du spectre (subdivision des bandes) lorsqu'on passe d'une génération de Fibonacci à une autre génération supérieure. Malgré le nombre faible de cellules (quatre), les spectres de transmission montrent bien les régions des bandes interdites (transmission faible) et les régions des bandes permises (transmission notable) en particulier pour les premières générations. En effet, pour des générations élevées, les positions des gaps étroits sont moins nettes dans le spectre de transmission en raison de

la dissipation dans les câbles. Cette contrainte (absorption) limite l'étude des générations assez élevées (voir chapitre IV).

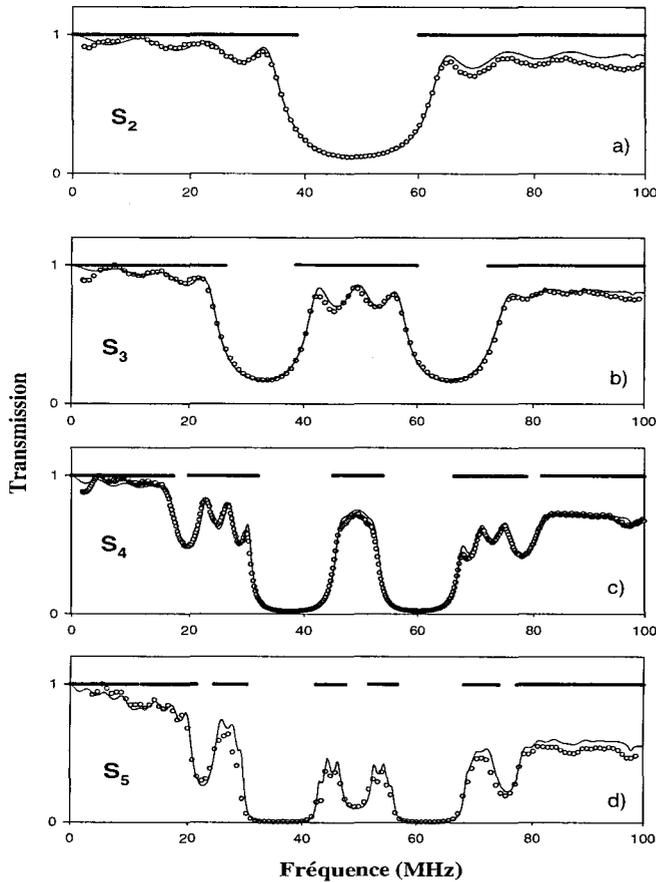


Fig. V.5: Spectre de transmission en fonction de la fréquence pour une structure périodique finie composée de quatre cellules. Chaque cellule est une génération de Fibonacci  $S_k$  ( $k = 2, 3, 4, 5$ ). Les courbes en traits continus et en cercles vides représentent les résultats théoriques et expérimentaux respectivement. Les traits horizontaux correspondent aux largeurs de bandes des structures infinies (Figure V.3(a)).

### V.3.2 Modes de surface : Résultats numériques

Quelques années auparavant, El Boudouti et al. [12] ont montré théoriquement que, dans le cas des ondes élastiques transverses, la création de deux SRs semi-infinis à  $N$  couches ( $N \geq 2$ ) à partir du clivage d'un SR infini permet la création d'un mode de surface par gap. Ce mode est localisé à la surface de l'un des deux SRs semi-infinis. Ce résultat a été confirmé expérimentalement dans un SR métallique formé par l'alternance de deux couches  $Ag/Al$  [19]. Récemment, Djafari-Rouhani et al. [85] ont confirmé ces résultats dans une structure photonique en peigne formée par des résonateurs greffés périodiquement le long d'un guide. Dans ce paragraphe, nous présentons une extension de ce travail au cas des SRs quasi-périodiques semi-infinis de type Fibonacci. En particulier, nous considérons deux SRs semi-infinis complémentaires obtenus à partir du clivage d'un SR infini. Par exemple, le clivage d'un SR infini correspondant à la 4<sup>ème</sup> génération de

Fibonacci  $\dots|ABAAB|ABAAB|ABAAB|ABAAB|\dots$  (Fig. V.2(a)) donne deux SRs semi-infinis complémentaires (Fig. V.2(b),  $SR_d$  : SR à droite et  $SR_g$  : SR à gauche).

$$\dots|ABAAB|ABAAB| \quad \text{et} \quad |ABAAB|ABAAB|\dots \quad (V.21)$$

De même, la création de deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage du SR infini correspondant à la 5<sup>ème</sup> génération de Fibonacci donne les deux SRs complémentaires :

$$\dots|ABAABABA|ABAABABA| \quad \text{et} \quad |ABAABABA|ABAABABA|\dots \quad (V.22)$$

On peut noter que lorsqu'on passe d'une génération à l'autre, les surfaces des deux SRs ne se comportent pas de la même façon. En particulier, les terminaisons des  $SR_d$  restent inchangées, par contre, les terminaisons des  $SR_g$  changent de génération en génération, tout en restant les mêmes pour les générations paires (bloc  $B$  à la surface) ainsi que pour les générations impaires (bloc  $A$  à la surface).

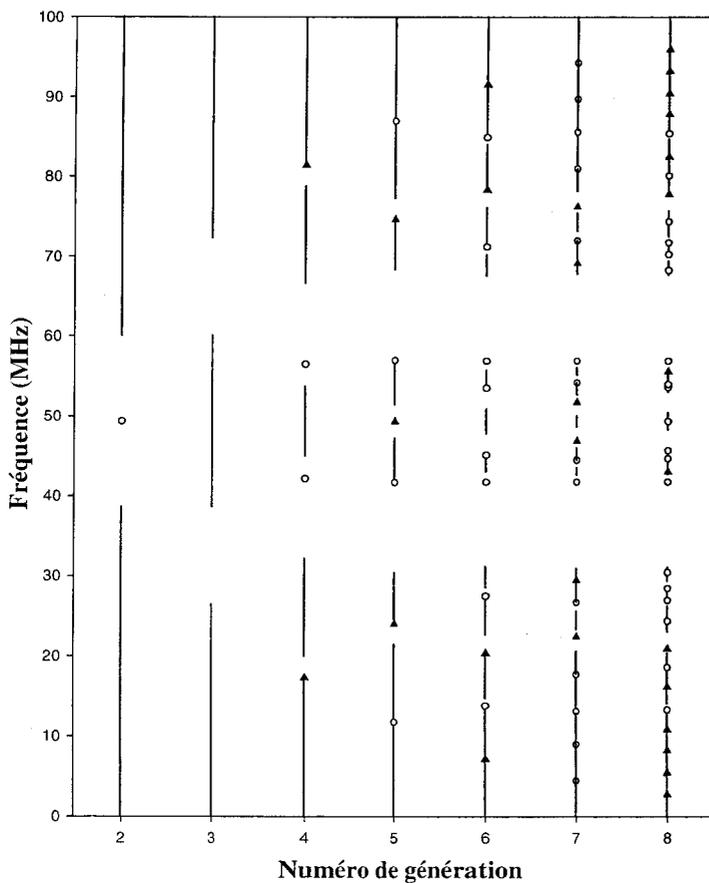


Fig. V.6: Même chose que la figure V.3(a), mais en présence des modes de surface à l'intérieur des gaps. Les cercles vides et les triangles pleins correspondent aux modes de surface des deux SRs complémentaires  $SR_d$  et  $SR_g$  (Fig. V.2(b)) respectivement.

Dans la figure V.6, nous avons représenté les modes de surface pour deux SRs semi-infinis complémentaires pour différentes générations allant jusqu'à la 8<sup>ème</sup> génération. Les cercles vides donnent les modes de surface des  $SR_d$  et les triangles pleins ceux des SRs

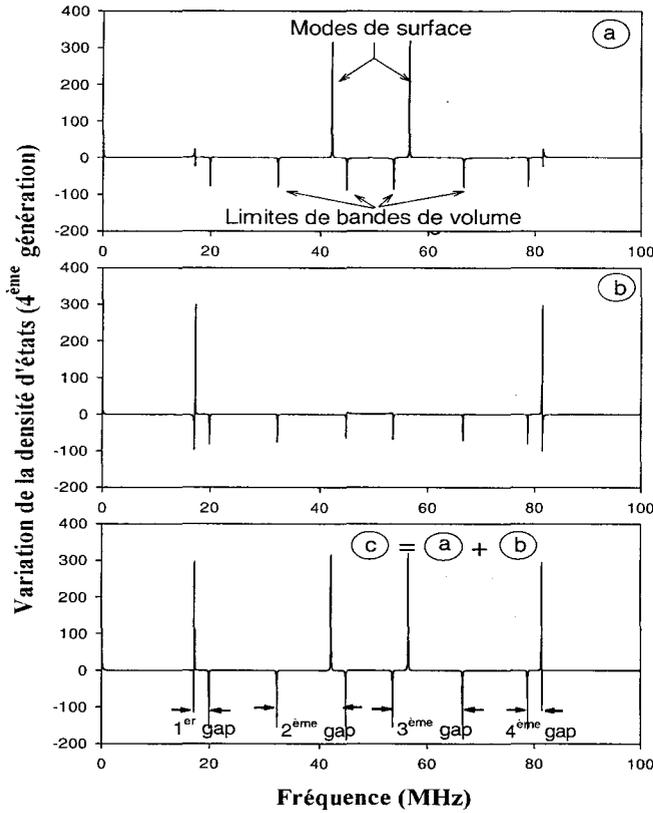


Fig. V.7: a) Variation de la densité d'états totale (en unité arbitraire) entre le SR semi-infini  $SR_d$  (Fig. V.2(b)) et le même volume du SR infini (Fig. V.2(a)) en fonction de la fréquence. Les blocs à l'intérieur de chaque cellule respectent la séquence  $S_4$ . Les pics  $\delta$  positifs correspondent aux modes de surface, tandis que les pics  $-\frac{1}{4}\delta$  négatifs correspondent aux limites des bandes de volume. b) Même chose que a) pour le SR complémentaire  $SR_g$ . c) même chose que a), mais pour les deux SRs complémentaires ensemble.

complémentaires  $SR_g$ . Ces modes sont obtenus à partir de la relation de dispersion (Eqs. V.10 et V.11). On peut noter l'existence d'un mode de surface par gap, ce mode est associé à la surface de l'une des deux structures périodiques semi-infinies. Pour expliquer ce résultat, nous avons tracé dans la figure V.7, la variation de densité d'états entre le SR semi-infini et le même volume d'un SR infini (Eqs. V.16 et V.17) et ceci pour les deux SRs  $SR_d$  (Fig. V.7(a)) et  $SR_g$  (Fig. V.7(b)) correspondant à la 4<sup>ème</sup> génération. Les modes localisés de surface apparaissent comme des pics  $\delta$  de poids 1. Ces pics sont élargis artificiellement en ajoutant une petite quantité imaginaire à la fréquence  $\omega$ . Aux limites des bandes de volume apparaissent des pics  $\delta$  de poids  $-\frac{1}{4}$ , ces pics n'ont pas exactement le même poids à cause des divergences qui existent aux limites des bandes dans la densité d'états des systèmes 1D. Lorsqu'on considère les deux SRs complémentaires ensemble (Fig. V.7(c)) :

- † La variation de densité d'états présente une perte d'un demi-état à la limite de chaque bande, soit un état par bande.
- ‡ La variation de densité d'états est nulle à l'intérieur des bandes de volumes des deux structures complémentaires.

Ces deux résultats ensemble associés à la nécessaire conservation du nombre total de modes, montrent qu'il doit exister un mode de surface de poids 1 par gap (Fig. V.7(c))

pour compenser la perte d'un état par bande. Comme il a été démontré analytiquement dans la référence [12], l'expression donnant les fréquences des modes de surface pour deux SRs semi-infinis complémentaires (Eq. V.15) est exactement la même que celle donnant les ondes stationnaires d'une cellule unitaire avec les conditions aux limites  $H = 0$ . Dans la figure V.6, on peut distinguer deux types de modes de surface :

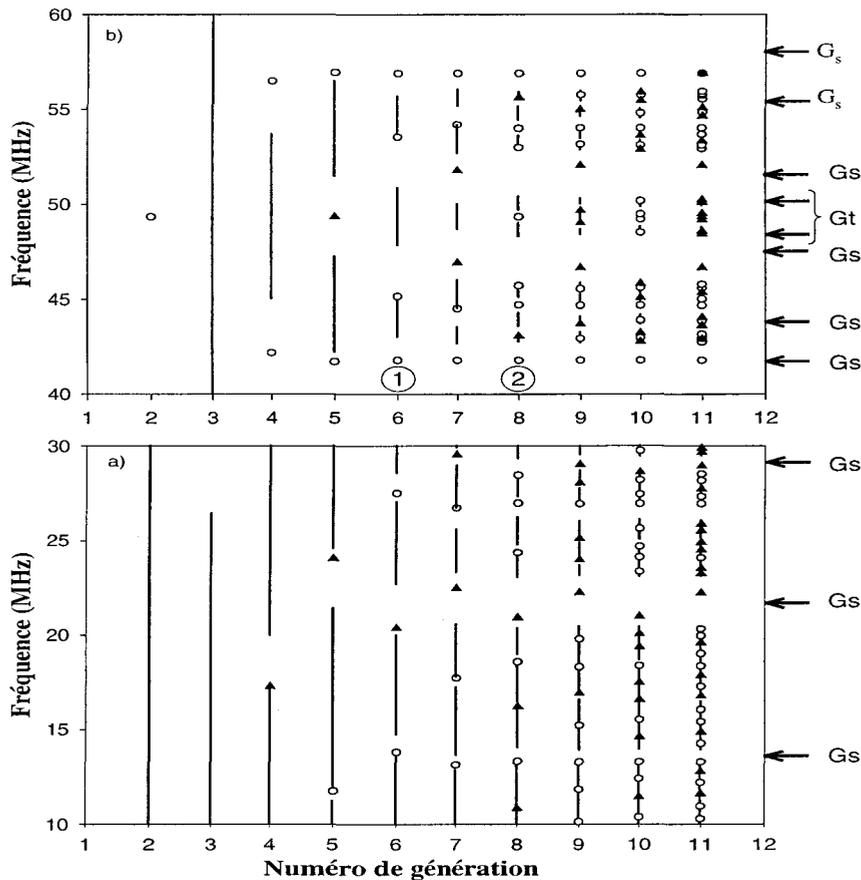


Fig. V.8: Même chose que la figure V.6, mais élargies dans la zone de fréquences [10,30]MHz et [40,60]MHz afin de bien illustrer les positions des différents modes de surface dans les gaps stables et transitoires. Les positions de ces gaps sont indiquées par des flèches à droite de ces courbes.

- i) Les modes qui tombent dans les gaps stables, ces modes apparaissent presque à la même fréquence pour toutes les générations des  $SR_d$  (cercles vides) et pour une génération sur deux des  $SR_g$  (triangles pleins). Ce résultat est prévisible puisque, comme signalé précédemment, les terminaisons des  $SR_d$  restent inchangées quelque soit le numéro de génération, tandis que les terminaisons des  $SR_g$  changent de façon alternée d'une génération paire à une génération impaire. Ce résultat est bien illustré dans la figure V.8 où nous avons élargi la figure V.6 dans les intervalles de fréquences

[10,30] MHz (Fig. V.8(a)) et [40,60] MHz (Fig. V.8(b)) et en allant jusqu'à la 11<sup>ème</sup> génération. Notons que la gamme de fréquence [70,90] MHz est équivalente à [10,30] MHz puisque le spectre de fréquences de la figure V.6 est symétrique par rapport à la fréquence centrale  $\frac{\omega d\sqrt{\epsilon}}{c} = \frac{\pi}{2}$  (i.e.,  $f_c = 49.34 \text{ MHz}$ ). Des résultats similaires ont été trouvés pour les modes magnéto-statiques dans des structures de Fibonacci composées de couches magnétiques et non magnétiques [175].

ii) les modes qui tombent dans les gaps transitoires autour de  $f_c$  (Fig. V.3(b)). Ces modes apparaissent à la même fréquence chaque six générations selon le schéma d'arborescence présenté dans la figure V.9 pour les  $SR_d$ . Le même schéma est obtenu pour les  $SR_g$  où entre deux modes de surface de même fréquence du  $SR_d$ , il existe un mode de surface du  $SR_g$ .

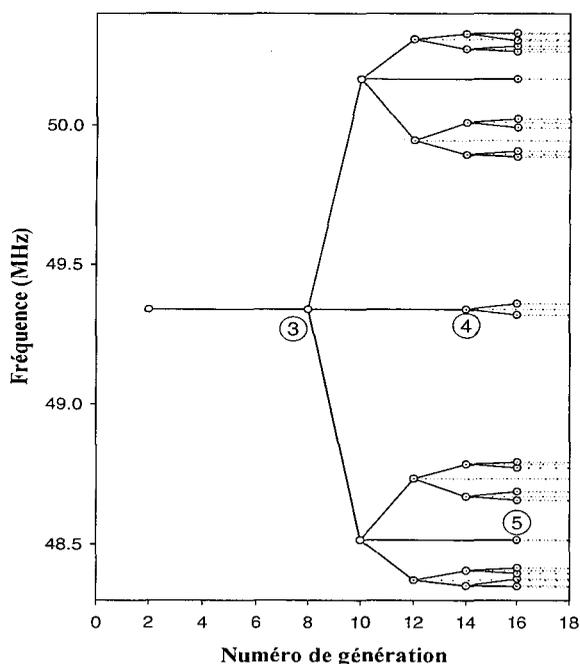


Fig. V.9: Schéma illustrant la distribution des modes de surface à l'intérieur des gaps transitoires de la figure V.3 pour le SR  $SR_d$  autour de la fréquence centrale  $f_c = 49.34 \text{ MHz}$  (i.e.,  $\frac{\omega d\sqrt{\epsilon}}{c} = \frac{\pi}{2}$ ).

Une analyse du champ électrique ou de façon équivalente la densité d'états locale (Fig. V.10), permet de distinguer la localisation spatiale des deux types de modes de surface discutés précédemment. La longueur de localisation est définie par  $\ell = \frac{1}{|\chi|}$  où  $\chi$  est la partie imaginaire du vecteur d'onde  $Q$  obtenu à partir de l'équation (V.5). Les modes de surface qui tombent à l'intérieur des gaps stables présentent presque la même longueur de localisation ( $\sim 8m$ ), comme il est illustré dans les figures V.10(a) et V.10(b) pour les modes notés 1 et 2 dans la figure V.8(a) pour les générations  $S_6$  et  $S_8$  respectivement. Par contre, les modes à l'intérieur des gaps transitoires présentent une longueur de localisation proportionnelle à la période  $D$ . En effet, on peut montrer analytiquement que

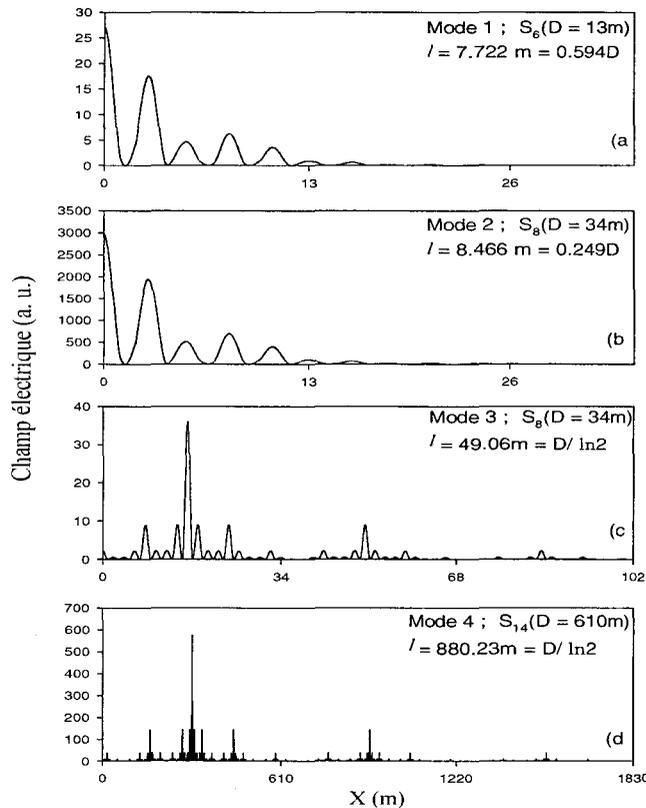


Fig. V.10: a) et b) Module du champs électrique (en unité arbitraire) en fonction de la position d'espace pour les modes notés 1 et 2 dans la figure V.8(b) respectivement. c) et d) Même chose que a) et b) pour les modes notés 3 et 4 dans la figure V.9 respectivement.

$\ell = D/\log 2 = 1.433D$  pour les modes qui tombent à la fréquence centrale  $\frac{\omega d\sqrt{\epsilon}}{c} = \frac{\pi}{2}$  (i.e.,  $f_c = 49.34$  MHz). La même expression a été trouvée aussi par Zijlstra et al[176] pour les états de surface dans les SRs de Fibonacci en utilisant le modèle de liaison forte. Numériquement, nous avons vérifié que la valeur de  $\ell$  reste presque la même pour les modes de surface dans les gaps transitoires au voisinage de  $f_c$  (Fig. V.9). Ce résultat montre que, contrairement aux modes dans les gaps stables, la longueur de localisation des modes dans les gaps transitoires augmente avec le numéro de génération comme il est illustré dans les figures V.10(c) et V.10(d) pour les modes notés 3 et 4 dans la figure V.9 pour les générations  $S_8$  et  $S_{14}$  respectivement. La localisation spatiale des deux types de modes de surface discutés précédemment présente des comportements différents en fonction de la position d'espace  $x$ . Les modes de surface dans les gaps stables décroissent à partir de la surface en pénétrant dans le volume du SR (Fig. V.10(a) et V.10(b)) comme dans les SRs périodiques usuels. Tandis que les modes dans les gaps transitoires présentent une localisation importante au milieu de chaque cellule et un comportement d'auto-similarité d'ordre six (voir Fig. V.10(c) et V.10(d) pour  $S_8$  et  $S_{14}$ , respectivement). Ce comportement est dû à la quasi-périodicité des blocs  $A$  et  $B$  à l'intérieur de chaque cellule élémentaire, et qui peut être caractérisé par l'analyse multifractale. Ce concept de multifractalité a été utilisé pour comprendre les fonctions d'onde critiques en utilisant le modèle de liaison forte[152]

ainsi que dans des guides d'ondes quantiques[177]. Cependant, à notre connaissance, ce concept n'a pas été appliqué pour les modes de surface situés dans les gaps transitoires.

Il a été montré que les spectres des systèmes quasi-périodiques peuvent être expliqués en utilisant le concept multifractale. La notion de fractal [178] est liée à la définition de dimension. Les objets fractals et multifractals sont identifiés dans de nombreux domaines de la physique en particulier dans le contexte développé de turbulence [179]. L'analyse multifractale permet de décrire les propriétés statistiques de mesure. Si on couvre le support de la mesure par une partition en boules de rayon  $\varepsilon$  et on note par  $p_i(\varepsilon)$  la probabilité (mesure intégrée) dans la boule  $i$ , on définit alors un exposant (degré de singularité)  $\alpha_i$  par :

$$p_i(\varepsilon) \simeq \varepsilon^{\alpha_i}. \quad (\text{V.23})$$

Si on compte le nombre de boules  $N(\alpha)d\alpha$  pour lesquelles la probabilité  $p_i$  présente un degré de singularité entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ , alors  $f(\alpha)$  peut être défini comme la dimension fractale de l'ensemble de boules de singularité  $\alpha$  par :

$$N(\alpha)d\alpha \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}d\alpha. \quad (\text{V.24})$$

L'exposant de singularité  $\alpha$  rend compte du degré de régularité de la mesure. Cette mesure est dite monofractale si  $f(\alpha)$  se réduit à un point. Elle est multifractale si le support de  $f(\alpha)$  est large et qu'il existe une variété d'exposants. Par conséquent, une structure multifractale peut être considérée comme un ensemble de structures monofractales entrelacées de différentes dimensions  $\alpha$ , où  $f(\alpha)$  est une mesure de leurs intensités relatives. Le spectre de singularité  $f(\alpha)$  donne une description précise de l'irrégularité du système.

Le formalisme multifractal permet une description statistique convenable pour l'étude du comportement à long distance d'un système physique. Dans le cas des systèmes quasi-périodiques, l'origine de fractalité (ou multifractalité) peut être attribuée à l'ordre à long distance présenté par la hiérarchie structurale des séquences quasi-périodiques. La fractalité est une propriété de fragmentation caractérisée par :

- L'auto similitude qui est une propriété d'un phénomène physique de se ressembler à lui même à différentes échelles. On parle de "symétrie liée à l'invariance d'échelle",
- dimension non-entière,
- fragmentation récursive.

Plusieurs modèles basés sur le calcul de la dimension fractale généralisée  $D_q$  ont été élaborés [179, 180] pour calculer  $\alpha$  et  $f(\alpha)$ . L'expression de  $D_q$  en fonction de la variable  $q$  est donnée par :

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i p_i^q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (\text{V.25})$$

Lorsque  $f(\alpha)$  et  $D_q$  sont des fonctions lisses en fonction de  $\alpha$  et  $q$ , alors  $f(\alpha)$  est reliée à la quantité

$$\tau(q) = (q-1)D_q \quad (\text{V.26})$$

par la transformée de Legendre

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{d\tau}{dq}. \quad (\text{V.27})$$

Ce modèle a été appliqué pour la première fois par Kohmoto et al. [155] pour l'étude des électrons dans des structures quasi-périodiques 1D. Cependant, l'application de cette méthode présente des difficultés avec la transformée de Legendre en particulier lorsque  $f(\alpha)$  ou  $\tau(q)$  présentent des discontinuités [181]. Pour remédier à ce problème, une nouvelle méthode mathématique précise a été proposée par Chabra et al. [182]. Elle permet le calcul de  $f(\alpha)$  avec une excellente précision numérique. Cette méthode a été appliquée avec succès pour plusieurs excitations élémentaires dans des systèmes 1D [145, 183, 184]. Dans cette méthode, l'ingrédient essentiel dans la caractérisation multifractale est la densité de probabilité  $p_i$  (mesure). Dans notre cas,  $p_i$  est défini comme étant le poids du champs électrique dans le spectre de densité d'états, à savoir :

$$p_i = \frac{|E_i|^2}{\sum_{j=1}^N |E_j|^2}, \quad (\text{V.28})$$

où  $N = F_k$  est le nombre de blocs considéré dans une cellule élémentaire pour une génération  $k$  et  $|E_i|$  est le champs électrique moyen dans le bloc  $i$ . En suite, on construit la fonction de partition :

$$Z(q) = \sum_{i=1}^N p_i^q. \quad (\text{V.29})$$

Notons que les régions de haute densité ont un plus grand poids pour  $q > 1$ , et les régions moins denses pèsent davantage pour  $q < 1$ . Pour  $q = 1$ , la mesure  $Z(1)$  reproduit la mesure originale. Les expressions de  $\alpha$  et  $f(\alpha)$  sont données par [183] :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\log N} \frac{Z'(q)}{Z(q)}, \\ f(\alpha) &= \frac{1}{\log N} \left( \log Z(q) - q \frac{Z'(q)}{Z(q)} \right) \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

avec

$$Z'(q) = \frac{dZ}{dq} = \sum_{i=1}^N p_i^q \log p_i.$$

Le spectre de singularité  $f(\alpha)$  donne une description précise de la distribution du champs électrique dans la structure. En effet, il a été bien établi que  $f(\alpha)$  est réduit en un seul point  $f(\alpha = 1) = 1$  pour des modes étendus et  $f(\alpha = 0) = 0$  et  $f(\alpha = \infty) = 1$  pour les modes localisés. Cependant, pour les modes auto-similaire,  $f(\alpha)$  est prévu d'être une fonction lisse dans la région finie  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ .

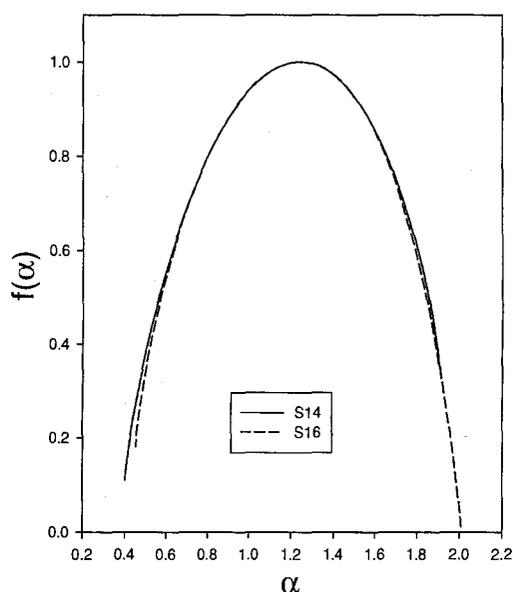


Fig. V.11: La fonction  $f(\alpha)$  pour la distribution des modules du champs électrique correspondant au modes notés 4 (ligne continue) et 5 (ligne discontinue) dans la figure V.9. Ces modes appartiennent aux générations 14<sup>ème</sup> et 16<sup>ème</sup> respectivement.

Les résultats numériques de  $f(\alpha)$  pour le champs électrique associé aux modes notés 4 et 5 dans la figure V.9 sont donnés dans la figure V.11. Ces résultats montrent clairement que les modes situés dans les gaps transitoires ne sont ni étendus ni localisés mais possèdent des propriétés multifractales qui caractérisent les modes auto-similaires. Dans la figure V.11, les valeurs extrêmes  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  des abscisses de la courbe  $f(\alpha)$  représentent le minimum et le maximum de l'exposant de singularité  $\alpha$ . En effet,  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  correspondent respectivement aux régions où l'intensité de la mesure est très dense et moins dense. La quantité  $\Delta_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$  peut être utilisée comme un paramètre qui reflète le désordre de l'intensité de la mesure [184]. Ces résultats et analyses montrent clairement que les spectres de fréquences des structures de Fibonacci étudiées ici, correspondent à

une distribution non uniforme de l'intensité de la mesure, et par conséquent ils possèdent la propriété d'échelle des systèmes multifractals. Contrairement aux modes localisés situés dans les gaps transitoires, le champ électrique associé aux modes de surface situés dans les gaps stables (figure V.10(a) et 10(b)) montre la propriété des ondes localisées, à savoir,  $\alpha_{min} \simeq 0$  et augmentent rapidement au fur et mesure que le numéro de génération augmente, comme il est illustré dans la figure V.12 pour les générations  $S_8 - S_{13}$  à la fréquence  $\Omega = 41.78876$  MHz.

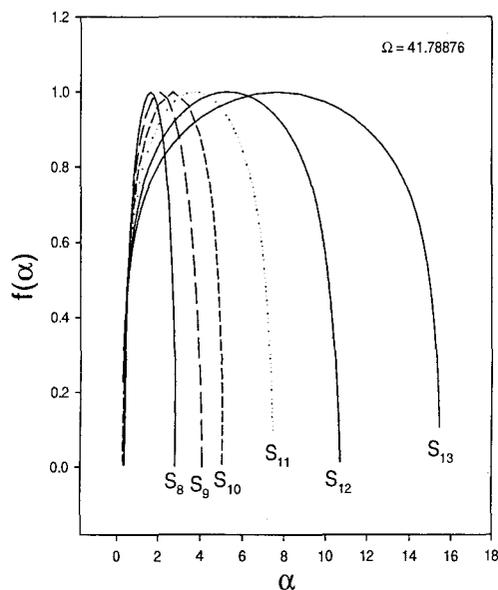


Fig. V.12: Même chose que dans la figure V.11, mais pour le mode qui tombe dans le gap stable à la fréquence  $\Omega = 41.78876$  MHz pour les générations  $S_8 - S_{13}$ .

### V.3.3 Modes de surface : Résultats expérimentaux

Pour mettre en évidence expérimentalement les modes de surface, nous avons attaché verticalement un SR fini de Fibonacci à un guide. Cette structure est formée par quatre cellules où chaque cellule est constituée d'une génération donnée de Fibonacci (Fig. V.13).

Le choix de ce système est motivé par le fait que son coefficient de transmission permet de déduire tous les modes propres de la structure finie avec les conditions aux extrémités  $H = 0$ . En effet, soit  $g^{-1}(MM)$  l'inverse de la fonction de Green dans l'espace des interfaces  $M = \{0, 1\}$  de la structure finie avec des surfaces libres (Fig. V.13(a)).  $g^{-1}(MM)$  est

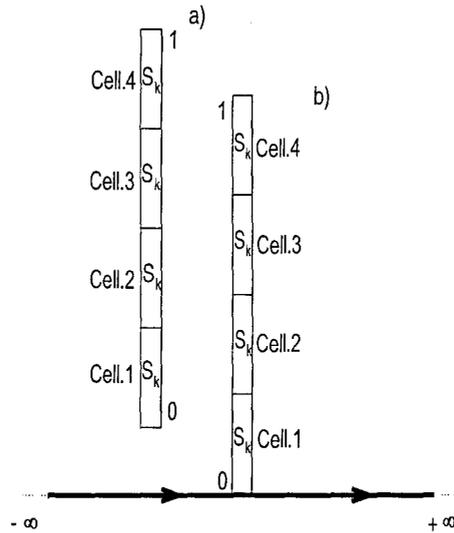


Fig. V.13: a) Structure finie constituée de 4 cellules, chaque cellule est une génération de Fibonacci  $S_k$ . b) Structure finie attachée verticalement à un guide horizontal.

obtenu de la même façon que dans le chapitre IV, son expression peut être écrite sous la forme :

$$g^{-1}(MM) = \begin{pmatrix} g^{-1}(0,0) & g^{-1}(0,1) \\ g^{-1}(1,0) & g^{-1}(1,1) \end{pmatrix}. \quad (\text{V.31})$$

Si on greffe cette structure verticalement à deux guides semi-infinis d'impédances  $Z_s$  sur le site  $\{0\}$  (Fig. V.13(b)), on obtient la fonction de Green du système final sur ce site sous la forme :

$$d(0,0) = \frac{g^{-1}(1,1)}{[g^{-1}(0,0)g^{-1}(1,1) - g^{-1}(0,1)g^{-1}(1,0)] - 2jg^{-1}(1,1)/Z_s} \quad (\text{V.32})$$

Le site  $\{0\}$  est le point où s'effectue la réflexion et la transmission d'une onde incidente dans le premier guide semi-infini gauche  $(-\infty, 0)$ . L'onde transmise dans le guide semi-infini à droite  $(0, +\infty)$  s'écrit :

$$t = \frac{-2jg^{-1}(1,1)/Z_s}{[g^{-1}(0,0)g^{-1}(1,1) - g^{-1}(0,1)g^{-1}(1,0)] - 2jg^{-1}(1,1)/Z_s} \quad (\text{V.33})$$

Les modes propres de la structure finie avec la condition  $H = 0$  sur les deux surfaces (Fig. V.13(a)) sont donnés par  $\det g^{-1}(MM) = g^{-1}(0,0)g^{-1}(1,1) - g^{-1}(0,1)g^{-1}(1,0) = 0$  (Eq. V.31). Par conséquent, le coefficient de transmission (Eq. V.33) devient égale à l'unité. Ce résultat montre que tous les modes propres de la structure finie isolée, peuvent être déterminés à partir des maxima du coefficient de transmission de la même structure greffée verticalement sur un guide horizontal.

Quelques spectres de transmission pour les générations  $S_3$  et  $S_4$  correspondant à une et quatre cellules greffées sont présentés dans la figure V.14. Les résultats théoriques (traits continus) sont en bon accord avec les courbes expérimentales (cercles ouverts). Comme signalé précédemment, ces courbes présentent des minima et des maxima.

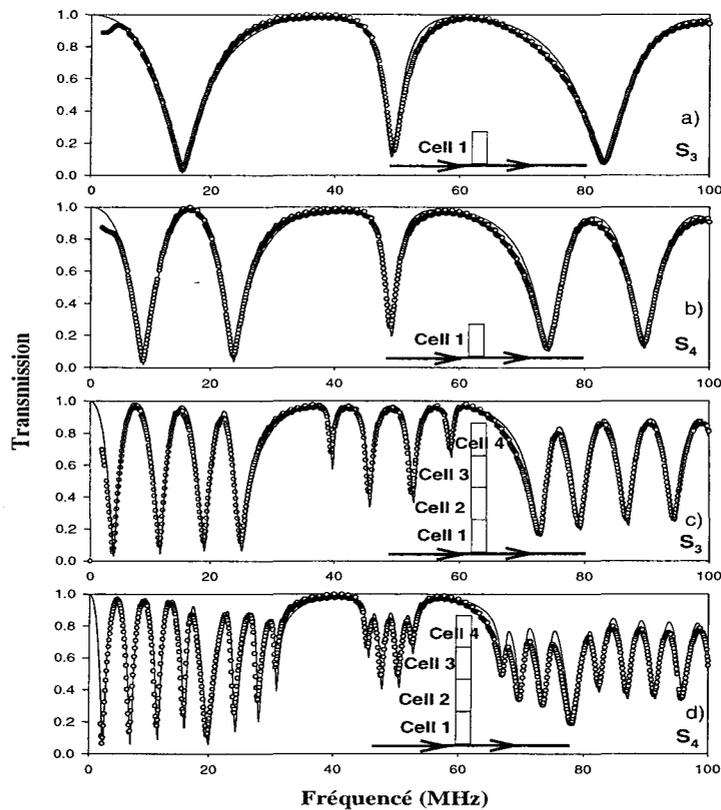


Fig. V.14: Spectre de Transmission d'une structure périodique finie greffée verticalement sur un guide. La structure finie est composée de quatre cellules, chaque cellule est une génération de Fibonacci  $S_k$  ( $k = 2, 3, 4, 5$ ).

Les fréquences correspondant aux maximums de ces courbes donnent les modes propres de la structure finie la condition  $H = 0$  sur les deux surfaces. Ces modes sont reportés dans la figure V.15(a) par des petits traits horizontaux et des cercles ouverts pour une et quatre cellules, respectivement, pour chaque génération. Les traits foncés verticaux correspondent aux bandes de volume des structures infinies (Fig. V.3(a)).

On remarque que les modes propres d'une seule cellule ( $N = 1$ ) coïncident avec ceux des deux SRs semi-infinis complémentaires (Fig. V.6). Ces résultats expérimentaux sont en conformité avec le résultat théorique démontré dans la référence [12] et rappelé dans le paragraphe V.3.2, à savoir, les modes propres d'une seule cellule donnent aussi les modes de surface des deux SRs semi-infinis complémentaires. Dans le cas de  $N = 4$  cellules,

on obtient en plus des modes de surface qui tombent dans les gaps,  $N - 1 = 3$  modes qui tombent dans chaque bande comme nous allons le discuter ci-dessous. Ces résultats montrent encore une fois la fragmentation des bandes lorsqu'on augmente le numéro de génération.

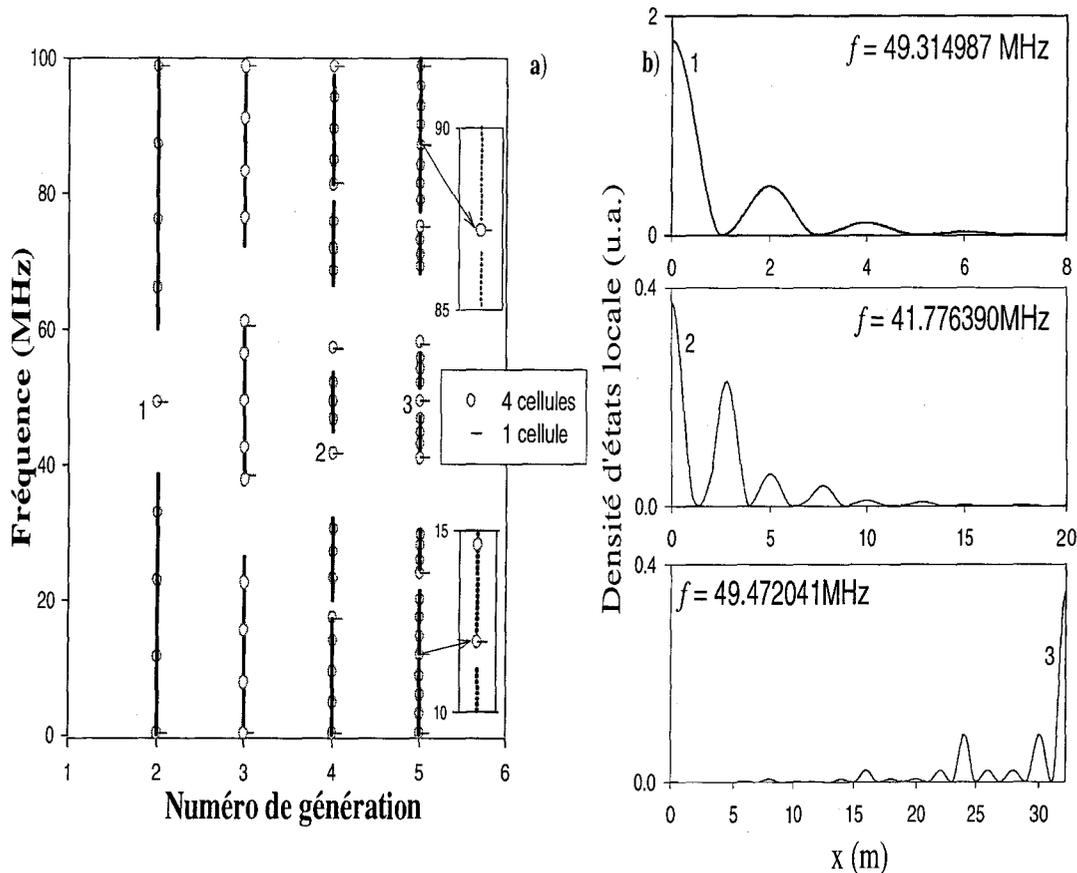


Fig. V.15: a) Distribution des largeurs de bandes (traits continus) et des modes propres (cercles ouverts) de la structure finie (quatre cellules). Les modes propres de la structure finie sont obtenus à partir des maxima des coefficients de transmission de la figure V.14. Les petits traits horizontaux représentent les modes associés à une seule cellule au lieu de quatre. b) L'analyse de la densité locale en fonction de la position d'espace permet de distinguer les modes associés aux deux surfaces de la structure finie. Par exemple, les modes notés 1 et 2 (Fig. V.15(a)) sont associés à la surface greffée sur le guide, tandis que le mode 3 est associé à l'autre surface libre.

Une analyse de la densité d'états locale en fonction de la position d'espace (Fig. V.15(b)), permet de distinguer les modes associés aux deux surfaces de la structure finie. Par exemple, les modes notés 1 et 2 (Fig. V.15(a)) sont associés à la surface greffée sur le guide, tandis que le mode 3 est associé à l'autre surface libre. Malgré le nombre petit de cellules (quatre), la localisation spatiale des modes surface est analogue à celle des modes

de surface dans les SRs semi-infinis.

Finalement, un résultat général démontré dans le chapitre III analytiquement et numériquement sur les modes propres d'une structure finie a été mis en évidence numériquement et vérifié expérimentalement pour le cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'onde quasi-unidimensionnels. En effet, nous avons montré que pour une structure finie composée de  $N$  cellules avec les conditions aux limites sur les deux extrémités de type  $H = 0$  ou  $E = 0$ , il existe deux types de modes propres :  $N - 1$  modes confinés dans chaque bande et un mode localisé par gap associé à l'une des deux surfaces qui délimitent la structure[88]. Ces derniers modes sont indépendants de  $N$  et coïncident avec ceux de deux SRs semi-infinis complémentaires obtenus à partir du clivage d'un SR infini entre deux cellules. Nous présentons deux exemples typiques pour les générations  $k = 2 (S_2)$  et  $k = 3 (S_3)$  répétés 4 fois ( $N = 4$ ). La figure V.16 représente en plus des courbes de dispersion d'une structure infinie (traits continus et discontinus), les modes propres (cercles vides et pleins) de la structure finie composée de  $N = 4$  cellules de type  $S_2$ . Dans l'exemple de la figure V.16(a) (théorie) et V.16(b) (expérience), on peut distinguer  $N - 1 = 3$  modes (cercles pleins) qui tombent à l'intérieur de chaque bande de volume et un mode par gap (cercles ouverts) induit par l'une des deux surfaces et qui est indépendant de  $N$ .

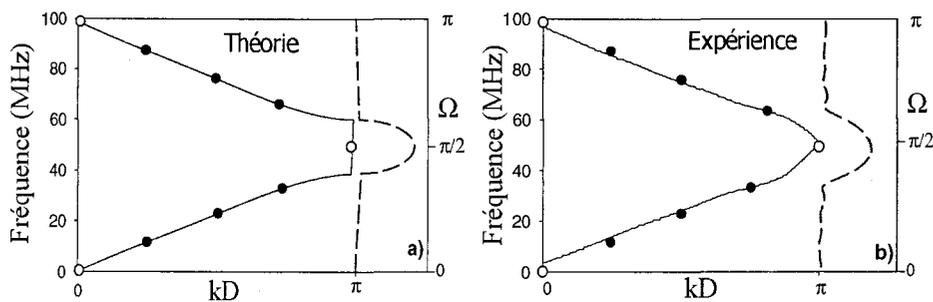


Fig. V.16: Structure de bande (courbes en traits continus et discontinus) du système infini et modes propres (cercles vides et pleins) du système fini composé de  $N = 4$  cellules. Chaque cellule est formée d'une boucle attaché à un segment. Tous les câbles sont de longueurs 1m chacun. a) : Théorie ; b) : Expérience.

Afin de monter l'indépendance de ces modes du nombre  $N$  de cellules constituant la structure finie, nous avons présenté dans la figure V.17 la variation des modes propres de la structure finie en fonction du nombre de cellules  $N$ . On remarque qu'on a toujours un mode de surface par gap et qui tombe à une fréquence constante pour différentes valeurs de  $N$ , et  $N - 1$  modes dans chaque bande.

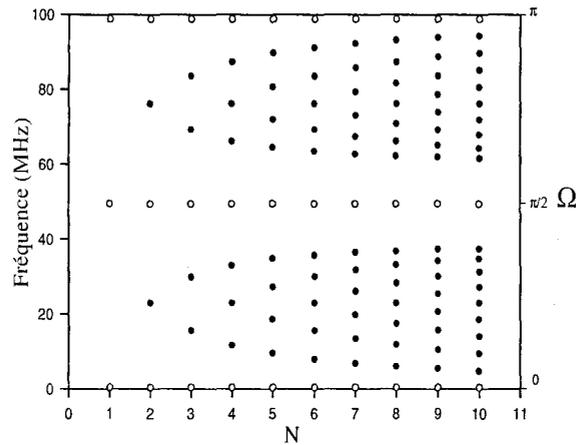


Fig. V.17: Variation des modes propres de la structure finie en fonction de nombre de cellules.

Le deuxième exemple est présenté dans la figure V.18 pour la génération  $S_3$  (répété 4 fois), dans ce cas les deux surfaces de la structure finie sont identiques (deux segments identiques de longueurs égales à la moitié de celles des segments qui composent le cristal photonique); dans ce cas les modes de surfaces tombent aux limites des gaps comme il a été montré auparavant dans le chapitre III pour les modes sagittaux dans les SRs finis solide-fluide[58].

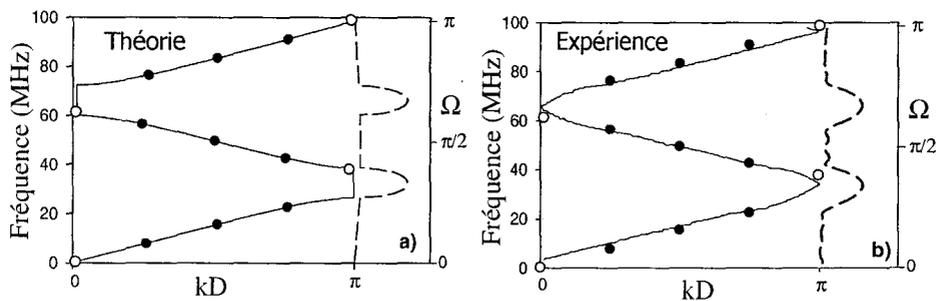


Fig. V.18: Même chose que la figure V.16, mais pour la génération  $S_3$  de Fibonacci répétée quatre fois (chaque cellule est formé de segment-boucle-segment), a) : Théorie ; b) : Expérience.

Dans les figures V.18(a) (théorie) et V.18(b) (expérience), on peut noter qu'en plus des  $N - 1 = 3$  modes de volume (cercles pleins), il existe un mode par gap, mais qui tombe exactement à la limite de chaque gap (cercles vides). Ces modes sont indépendants de  $N$ . Dans les deux exemples, les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie.

## V.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats théoriques et expérimentaux des modes de volume et de surface dans les SRs quasi-périodiques unidimensionnels de type Fibonacci. Les blocs  $A$  et  $B$  qui constituent ces structures sont formés par des câbles coaxiaux sous forme de boucles et de segments. Différentes propriétés liées aux bandes de volume telles que la fragmentation des spectres de fréquences, la loi sur la subdivision des bandes selon une loi en puissance en fonction du numéro de génération, sont analysées et discutées en détail. Nous avons généralisé une règle théorique sur l'existence des modes de surface dans les SRs quasi-périodiques, à savoir lorsqu'on considère deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini, on obtient autant de modes de surfaces que de mini-gaps. Deux types de modes de surface peuvent être distingués :

- i) les modes à l'intérieur des gaps stables. Ces modes tombent à la même fréquence pour chaque génération pour le premier SR et pour chaque deux générations pour le SR complémentaire. Ces modes sont très localisés à la surface et présentent presque la même longueur de localisation. Ils sont liés à la périodicité de la structure.
- ii) Les modes à l'intérieur des gaps transitoires. Ces modes apparaissent chaque six-génération suivant un schéma bien précis (Fig. V.9) et leur localisation spatiale montre la propriété d'auto-similarité d'ordre six et le comportement multifractal lié à la quasi-périodicité de la structure.

Expérimentalement, nous avons mis en évidence l'existence des bandes permises et interdites du SR de Fibonacci en mesurant la transmission à travers une structure finie placée horizontalement entre deux guides semi-infinis. En outre, nous avons proposé une méthode originale pour détecter les modes de surface en mesurant la transmission à travers un guide le long duquel la structure finie est attachée verticalement.

## Conclusion générale

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont été consacrés à l'étude des cristaux phononiques 1D (première partie), à base de multicouches solide-fluide et à l'étude des cristaux photoniques 1D (deuxième partie) à base de câbles coaxiaux. Ces études ont été menées dans le cadre de la théorie de réponse d'interface (fonction de Green).

La première partie est consacrée à l'étude des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les super-réseaux (SRs) solide-fluide (infini, semi-infini et fini). L'approche des fonctions de Green utilisée dans cette étude nous a permis de déterminer des expressions analytiques compactes des relations de dispersion des ondes de surface et d'interface, les différents coefficients de transmission et de réflexion ainsi que les temps de phase correspondant. Le calcul des densités d'états locales et totales est plus compliqué et un calcul numérique s'avère nécessaire.

Sur le plan numérique, nous avons montré dans le cas des SRs semi-infinis que la création de deux SRs semi-infinis à partir du clivage d'un SR infini à l'intérieur d'une couche fluide donne lieu à un mode de surface par gap comme pour les modes purement transverses. Cependant, lorsque le clivage a lieu à l'intérieur d'une couche solide, cette règle n'est plus satisfaite et on peut avoir zéro, un ou deux modes de surface à l'intérieur de chaque gap selon les valeurs du vecteur d'onde  $k_{//}$  et les épaisseurs des couches à la surface des deux SRs complémentaires.

Nous avons aussi examiné l'existence des modes localisés et résonants dans un SR semi-infini avec une couche d'encapsulation en surface différente (de type fluide ou solide) de celle de volume. En effet, les modes localisés et résonants induits par cette couche

d'encapsulation, apparaissent respectivement dans les gaps et dans les bandes de volume du SR. En particulier, nous avons montré que ces modes dépendent fortement des paramètres élastiques et de l'épaisseur relative de la couche d'encapsulation, ainsi que de la nature de la couche du SR en contact avec cette dernière. Aussi, nous avons étudié les modes localisés et résonants associés à l'interface SR-substrat (de type fluide ou solide). Ces modes dépendent fortement des paramètres relatifs du substrat ainsi que de la nature de la couche du SR en contact avec ce dernier.

En ce qui concerne le cas des SRs solide-fluide finis, un calcul analytique a été développé de la fonction réponse (fonction de Green) pour différents geometries. Ceci englobe le calcul des coefficients de transmission et de réflexion ainsi que les temps de phase correspondant à partir desquels on déduit la dispersion des modes de surface et des modes confinés dans un SR fini avec des surfaces libres de contraintes. En particulier, nous avons obtenu une généralisation de la règle sur l'existence des modes de surface et des modes confinés dans un SR fini formé de  $N$  cellules avec des surfaces libres. En effet, nous avons montré qu'il existe  $N - 1$  modes propres à l'intérieur de chaque bande de volume et un mode de surface par gap. Ce mode de surface est associé à l'une des deux surfaces complémentaires qui délimitent la structure finie et il est indépendant de  $N$  (nombre de cellules constituant le SR). Ce mode coïncide avec les modes de surface de deux SRs semi-infinis complémentaires. Du point de vue pratique, nous avons proposé une géométrie qui permet de détecter les modes de surface à travers un SR solide-fluide fini en contact d'un côté avec un milieu homogène fluide, qui sert de milieu incident, et de l'autre côté avec le vide. Les spectres de transmission ont été aussi étudiés à travers un SR fini solide-fluide. Dans ce cas, nous avons montré que le spectre de transmission présente des zéros de transmission qui sont dus à l'insertion d'une couche solide dans un fluide. Ces zéros de transmission se transforment en gap lorsque le nombre de couches solides insérées dans le fluide augmente. Aussi, nous avons mis en évidence l'existence des résonances de type Fano qui sont dues à l'insertion d'une couche fluide entre deux couches solides. Les zéros de transmission et les résonances Fano n'existent pas dans les SRs solide-solide.

Sous certaines conditions, nous avons montré que les SRs finis solide-fluide peuvent présenter des "Bandes Interdites Omnidirectionnelles" où la propagation des ondes acoustiques à travers ces structures subissent une réflexion totale. Pour réaliser ces gaps omnidirectionnels, deux solutions ont été proposées :

- ◇ La première solution consiste à insérer une couche tampon (de type solide) dans la

structure. Cette couche est caractérisée par des vitesses du son élevées afin de jouer le rôle de barrière entre les phonons dans le substrat (qui sert du milieu incident) et le SR.

- ◊ La deuxième solution consiste en l'association de deux SRs différents de telle façon que les bandes de l'un coïncident avec les gaps de l'autre et vice versa, ce qui permet aussi d'élargir les gaps omnidirectionnels.

Nous avons également étudié la possibilité d'une transmission sélective en fréquence à travers un SR fini pris en sandwich entre deux milieux homogènes semi-infinis fluides. La transmission s'effectue soit à travers les modes de défaut inséré dans le SR, soit à travers les modes d'interface SR/milieu homogène semi-infini. Nous avons montré que ces deux structures peuvent jouer le rôle d'un filtre sélectif qui ne laisse passer qu'une seule fréquence bien déterminée à l'intérieur des gaps. Cette étude peut être étendue aux multicouches quasi-périodiques, en particulier aux structures de Fibonacci formées par deux blocs  $A$  et  $B$  où le bloc  $A$  est une couche fluide, tandis que le bloc  $B$  est une couche solide.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude (théorique et expérimentale) de la propagation et la localisation des ondes électromagnétiques dans les cristaux photoniques quasi-unidimensionnels formés de câbles coaxiaux. En particulier, nous nous sommes intéressés à des structures quasi-périodiques de type Fibonacci constituées par deux blocs  $A$  et  $B$ . Ces blocs sont formés par des câbles coaxiaux sous forme de boucles et de segments. Ces résultats ont permis de reproduire plusieurs phénomènes similaires à ceux observés dans leurs analogues 1D voire dans les systèmes 2D et 3D. Nous avons traité ces structures de Fibonacci sous deux aspects en considérant soit une seule séquence de Fibonacci, soit une séquence répétée périodiquement.

Le premier volet de cette deuxième partie consiste à étudier des structures quasi-périodiques composées d'une séquence de Fibonacci donnée où le bloc  $A$  est un segment et le bloc  $B$  est une boucle et dans le cas où les blocs  $A$  et  $B$  sont composés chacun à la fois d'un segment et d'une boucle. Dans les deux cas, nous avons mis en évidence certaines propriétés liées à ces systèmes telles que l'auto-similarité et la loi d'échelle et qui peuvent présenter des vitesses subluminiques et superluminiques. Tous ces résultats sont obtenus à partir de la mesure de l'amplitude et la phase de la transmission à travers ces cristaux photoniques placés soit horizontalement entre deux guides soit verticalement sur un guide. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats théoriques.

---

Dans le deuxième volet, nous avons présenté les résultats théoriques et expérimentaux des modes de volume et de surface dans les SRs quasi-périodiques de type Fibonacci. En particulier, une propriété liée aux bandes de volume telle que la fragmentation des spectres de fréquences selon la loi en puissance, est analysée et discutée en détail. Aussi, nous avons généralisé une règle théorique sur l'existence des modes de surface dans les SRs quasi-périodiques, à savoir lorsqu'on considère deux SRs semi-infinis obtenus à partir du clivage d'un SR infini, on obtient autant de modes de surfaces que de mini-gaps. Deux types de modes de surface ont été mis en évidence :

- i) les modes à l'intérieur des gaps stables. Ces modes tombent à la même fréquence pour chaque génération pour un SR semi-infini et pour chaque deux générations pour le SR complémentaire. Ces modes sont très localisés à la surface et présentent presque la même longueur de localisation. Ils sont liés à la périodicité de la structure.
- ii) Les modes à l'intérieur des gaps transitoires. Ces modes apparaissent chaque six-génération suivant un schéma bien précis et leur localisation spatiale montre la propriété d'auto-similarité d'ordre six ainsi qu'un comportement multifractale, lié à la quasi-périodicité de la structure.

Expérimentalement, nous avons mis en évidence l'existence des bandes permises et interdites du SR de Fibonacci en mesurant la transmission à travers une structure finie placée horizontalement entre deux guides semi-infinis. En outre, nous avons proposé une méthode originale pour détecter les modes de surface en mesurant la transmission à travers un guide le long duquel la structure finie est attachée verticalement.

Comme suite de ces travaux, nous envisageons d'étudier, dans le cas des cristaux phononiques, la propagation des ondes acoustiques dans les structures de Fibonacci formées par des blocs solide et fluide. Ces structures peuvent présenter des résultats nouveaux par rapport aux SRs solide-solide. Aussi, l'effet de la viscosité dans le fluide peut être introduit en considérant le fluide comme un solide, mais avec des constantes élastique complexes. Aussi, vu l'intérêt croissant de l'étude des cristaux phononiques à deux et trois dimensions et en utilisant la méthode des différences finies (FDTD finite difference time Domain), nous avons déjà commencé par étudier les résonances locales de type Fano dans des systèmes 2D formés de tiges rigides plongées dans l'eau. Cette étude est réalisée en collaboration avec l'équipe de Lille (Ephoni) qui a une bonne expérience dans ce domaine. Dans le cas des cristaux photoniques, nous comptons aussi poursuivre les expériences avec les câbles coaxiaux dans le but de réaliser des démultiplexeurs avec des structures photoniques ainsi que la recherche des résonances de type Fano dans ces systèmes.

---

Expressions  $A$  et  $B$  de la matrice réduite de la lame solide (Eq. II.14).

Rappelons l'inverse de la fonction de Green d'une lame solide (Eq. I.20)

$$g_s^{-1}(MM) = \begin{pmatrix} h & iq & d & if \\ -iq & r & if & e \\ d & -if & h & -iq \\ -if & e & iq & r \end{pmatrix}, \quad (\text{A1})$$

où  $h, r, q, d, e$ , et  $f$  sont données par les équations (I.21-I.27).

L'inverse de cette matrice A1 s'écrit sous la forme :

$$g(MM) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \boxed{M} & \times & \boxed{N} \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \boxed{N} & \times & \boxed{M} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

où

$$\begin{aligned} M &= r(h^2 - d^2) - h(q^2 + f^2) - 2fqd, \\ N &= e(d^2 - h^2) + d(q^2 + f^2) + 2hfq \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

et

$$\Delta = [(r - e)(h - d) - (f + q)^2] [(r + e)(h + d) + (f - q)^2]. \quad (\text{A4})$$

Le couplage des plaques solides avec le fluide nécessite la connaissance seulement des éléments  $zz$  de la matrice (A2). Par conséquent, si on retient seulement les éléments  $zz$  de (A2), on obtient la matrice tronquée suivante :

$$g_s(MM) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}, \quad (\text{A5})$$

Or, pour construire les multicouches solide-fluide, nous avons besoin de l'inverse de la matrice A5 :

$$g_s^{-1}(MM) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (\text{A6})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{h^2 - d^2} \\ \text{et } B &= -\frac{N}{h^2 - d^2} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

### Expressions des éléments $A$ et $B$

A partir de l'équations A3, on a :

$$\begin{aligned} M - N &= (h + d) [(r + e)(h - d) - (f + q)^2] \\ M + N &= (h - d) [(r - e)(h + d) - (f - q)^2] \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

et

$$M^2 - N^2 = (h - d)(h + d) [(r - e)(h - d) - (f + q)^2] [(r + e)(h + d) + (f - q)^2] \quad (\text{A9})$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= (h + d) [(r + e)(h - d) - (f + q)^2] + (h - d) [(r - e)(h + d) - (f - q)^2] \\ \text{et } N &= (h - d) [(r - e)(h + d) - (f - q)^2] - (h + d) [(r + e)(h - d) - (f + q)^2] \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

En remplaçant  $h, r, q, d, e,$  et  $f$  par leurs expressions (Eqs. I.21-I.27),  $A$  et  $B$  deviennent :

$$\begin{aligned} A &= \rho \frac{v_t^4}{\omega^2 \alpha_\ell} \left[ (k_{//}^2 + \alpha_t^2)^2 \frac{C_\ell}{S_\ell} - 4\alpha_t \alpha_\ell k_{//}^2 \frac{C_t}{S_t} \right], \\ B &= \rho \frac{v_t^4}{\omega^2 \alpha_\ell} \left[ -(k_{//}^2 + \alpha_t^2)^2 \frac{1}{S_\ell} + 4\alpha_t \alpha_\ell k_{//}^2 \frac{1}{S_t} \right], \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Dans cette appendice, nous présentons une démonstration similaire à celle de l'équation (III.18) pour une chaîne linéaire diatomique et triatomique.

### A/ chaîne diatomique

La figure B.1(a) représente la structure infinie de la chaîne linéaire constituée de deux atomes de masses  $m_1$  et  $m_2$  alternées et reliées entre elles par la même constante de force  $\beta$ . En utilisant la relation fondamentale de la dynamique et en tenant compte des premiers proches voisins, on aboutit à la matrice dynamique de la chaîne infinie suivante :

$$H(M_m, M_m) = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & -\gamma_2 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma_1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\gamma_2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -\gamma_1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B1})$$

où  $\gamma_i = 2\beta - m_i\omega^2$ ,  $(i = 1, 2)$ .

Grâce à la périodicité par translation suivant l'axe  $Ox$  de la structure, la transformée de Fourier  $g^{-1}(k; MM)$  à l'intérieur d'une cellule élémentaire de la matrice tridiagonale (B1) s'écrit sous la forme suivante :

$$g^{-1}(k; MM) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \beta + \beta e^{-jkd_1} \\ \beta + \beta e^{jkd_1} & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B2})$$

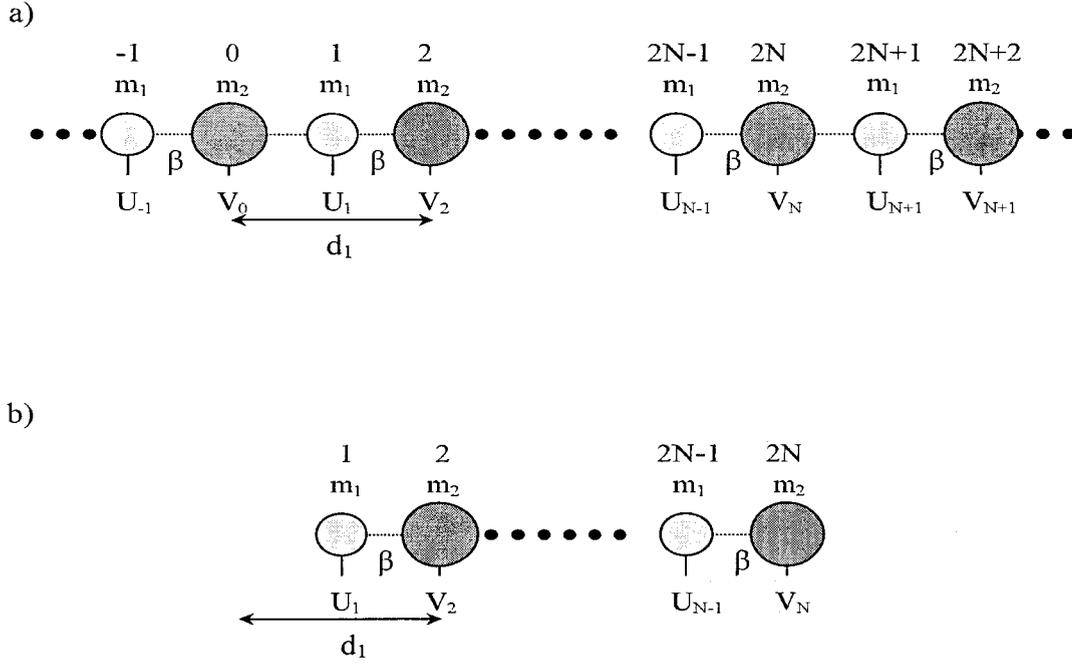


Fig. B.1 :(a) Schéma de la structure infinie de la chaîne linéaire diatomique formée de deux atomes ( $m_1 - m_2$ ). La figure (b) illustre la structure finie formée de  $N$  bi-atomes. Les masses sont fixées à  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$  et la constante de force est prise égale à  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ .

où  $k$  est le module du vecteur d'onde du réseau réciproque.

En inversant la matrice (B2) la fonction réponse d'interface s'écrit :

$$g(k; MM) = \frac{-1}{2(\cos(kd_1) - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\beta^2} + 1)} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{\beta^2} & \frac{1+e^{-jkd_1}}{\beta} \\ \frac{1+e^{jkd_1}}{\beta} & \frac{\gamma_1}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (B3)$$

D'où, on déduit la relation de dispersion donnée par  $\det(g^{-1}(k; MM)) = 0$ , sous la forme :

$$\cos(kd_1) = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2\beta^2} - 1 \quad (B4)$$

où  $d_1$  est la distance entre les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ .

En utilisant la transformée de Fourier réciproque et le théorème des résidus, les éléments de la fonction réponse qui est une matrice  $2 \times 2$ , dans l'espace des interfaces (réel) sont donnés par :

$$g(n, 1; n', 1) = \left(\frac{\gamma_2}{\beta^2}\right) \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2 - 1}, \quad (\text{B5})$$

$$g(n, 1; n', 2) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2 - 1} + \frac{t^{|n-n'-1|+1}}{t^2 - 1} \right), \quad (\text{B6})$$

$$g(n, 2; n', 1) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2 - 1} + \frac{t^{|n-n'+1|+1}}{t^2 - 1} \right), \quad (\text{B7})$$

$$g(n, 2; n', 2) = \left(\frac{\gamma_1}{\beta^2}\right) \frac{t^{|n-n'|+1}}{t^2 - 1}. \quad (\text{B8})$$

où  $t = e^{ikd_1}$  et  $n, n'$  désignent les numéros des différents sites correspondants aux masses  $m_1$  et  $m_2$  notées 1 et 2.

Maintenant, on se propose d'étudier analytiquement les modes localisés dans une structure finie formée de  $2N$  atomes (i.e.,  $N$  bi-atomes) obtenue à partir du clivage de la structure infinie dans l'espace d'interface  $M = \{0, 1, 2N, 2N + 1\}$  (Fig.B.1(b)) qui commence par l'atome 1 de masse  $m_1$  et se termine par l'atome  $2N$  de masse  $m_2$ . L'opérateur de clivage est donné par la formule :

$$V_d(MM) = h(MM) - H(MM) \quad (\text{B9})$$

où  $h$  est la matrice dynamique du système total obtenu après le clivage. Donc  $V_d(MM)$  est une matrice  $4 \times 4$ , définie dans l'espace des interfaces  $M$  et s'écrit sous la forme suivante :

$$V_d(MM) = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\beta \\ 0 & 0 & -\beta & \beta \end{pmatrix}. \quad (\text{B10})$$

L'opérateur  $\Delta(MM)$  est défini par la relation suivante :

$$\Delta(MM) = I(MM) + V_d(MM)g(MM) \quad (\text{B11})$$

où  $g(MM)$  s'écrit dans l'espace des interfaces  $M = \{(0, 1, 2N, 2N + 1)\}$  sous la forme suivante :

$$g(MM) = \frac{t}{\beta(t-1)} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{\beta} \frac{1}{t+1} & 1 & \frac{\gamma_1}{\beta} \frac{t^{2N}}{t+1} & t^{2N} \\ 1 & \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{1}{t+1} & t^{2N-1} & \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{t^{2N}}{t+1} \\ \frac{\gamma_1}{\beta} \frac{t^{2N}}{t+1} & t^{2N-1} & \frac{\gamma_1}{\beta} \frac{1}{t+1} & 1 \\ t^{2N} & \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{t^{2N}}{t+1} & 1 & \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B12})$$

D'où on déduit l'expression de  $\Delta_s(M_s M_s)$  de la structure finale dans l'espace des surfaces  $M_s = \{0, 2N\}$  (Fig.B.1(b)) sous la forme :

$$\Delta_s(M_s M_s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t-1} + \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{1}{t^2-1} & \left(-\frac{\gamma_1}{\beta} \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t-1}\right) t^{2N} \\ \left(\frac{1}{t-1} - \frac{\gamma_2}{\beta} \frac{1}{t^2-1}\right) t^{2N} & -\frac{1}{t-1} + \frac{\gamma_1}{\beta} \frac{1}{t^2-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B13})$$

Les modes localisés sont donnés par l'équation suivante :

$$\det(\Delta_s) = 0. \quad (\text{B14})$$

Après quelques calculs algébriques, l'équation (B14) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(t + \frac{\beta}{\beta - \gamma_1}\right) \left(t + \frac{\beta}{\beta - \gamma_2}\right) (t^{2N} - 1) = 0. \quad (\text{B15})$$

Donc, lorsque  $k$  est réel, ce qui correspond à la bande passante, les modes propres sont donnés par l'annulation du troisième terme dans l'équation (B15), à savoir :

$$\sin(Nkd_1) = 0, \quad (\text{B16})$$

$$\text{ou } kd_1 = \frac{m\pi}{N}, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (\text{B17})$$

Lorsque  $k$  est imaginaire, ce qui correspond au gap, les modes propres sont donnés par l'annulation des deux premiers termes dans l'équation (B15) tels que :

$$t = \frac{\beta}{\gamma_1 - \beta} \quad (\text{B18})$$

et

$$t = \frac{\beta}{\gamma_2 - \beta} \quad (\text{B19})$$

avec la condition :

$$|t| < 1 \quad (\text{B20})$$

qui assure la décroissance des ondes à partir de la surface. La relation de dispersion est donné par :

$$\beta(\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad (\text{B21})$$

En combinant les équations (B18) (respectivement (B19)) et (B20) avec la relation de dispersion de l'équation B21, nous permettent d'aboutir au résultat  $m_2 < m_1$  (respectivement  $m_1 < m_2$ ) qui affirme que les modes localisés de surface apparaissent lorsque la chaîne se termine par la masse la plus petite.

La figure B.2(a) montre la fréquence en fonction de  $kd_1/\pi$  dans la première zone de Brillouin pour une chaîne bi-atomique telle que :  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$  et  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ . Ces paramètres sont identiques à ceux utilisés dans le travail récent de Hladky et al.[? ]. La structure de bande d'une structure infinie est représentée par les pointillés et les modes confinés de la structure finie formée de  $N = 4$  bi-atomes sont représentés par les cercles pleins, tandis que les modes de surface sont représentés par les cercles vides.

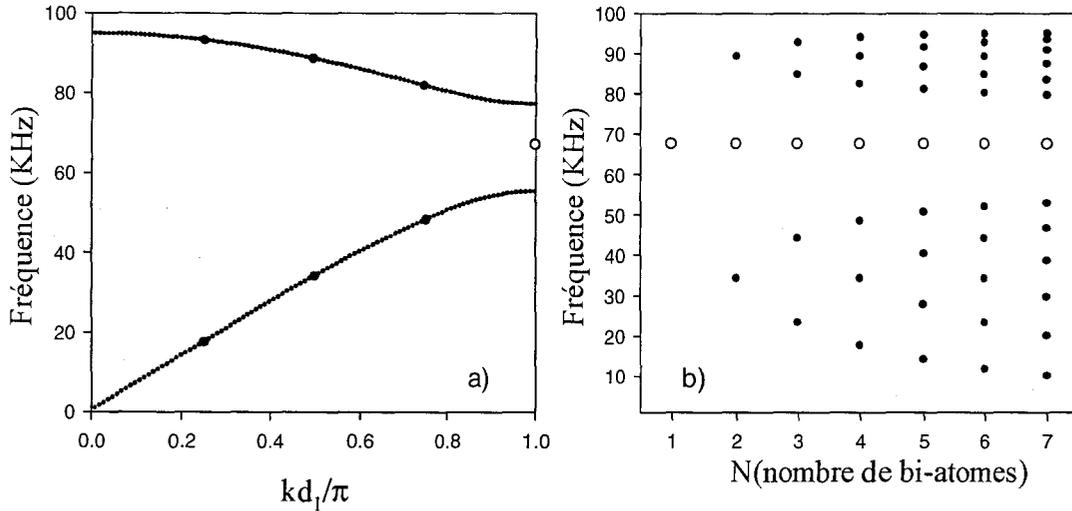


Fig. B.2 : (a) Variation de la fréquence en  $KHz$  en fonction de  $\frac{kd_1}{\pi}$ , pour une chaîne linéaire diatomique. Les masses sont fixées à  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$  et la constante de force est prise égale à  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ . Les pointillés représentent la structure de bande de la chaîne infinie, les cercles pleins représentent les modes confinés de la structure finie (formée de  $N = 4$  biatomes) qui commence par l'atome 1 et se termine par l'atome 2, ils sont au nombre de  $N - 1$  et les cercles vides sont les modes localisés aux deux surfaces libres. La figure (b) illustre la variation de la fréquence en  $KHz$  en fonction du nombre  $N$  de biatomes. Les cercles pleins sont les modes confinés et les cercles vides sont les modes localisés.

La branche inférieure commence par l'origine pour  $\frac{kd_1}{\pi} = 0$  et croît progressivement jusqu'à la fréquence  $\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}$  pour  $\frac{kd_1}{\pi} = 1$ . La branche supérieure commence par la fréquence  $\sqrt{\frac{2\beta(m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)}}$  pour  $\frac{kd_1}{\pi} = 0$  et décroît progressivement jusqu'à la fréquence  $\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}$  pour  $\frac{kd_1}{\pi} = 1$ .

On voit bien que chaque une des deux branches contient  $N - 1$  modes confinés. Le gap est de largeur  $\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}} - \sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}$ . A l'intérieur du gap apparaît un mode localisé[?] qui est dû à l'atome de plus petite masse à la surface. Ce mode est indépendant de  $N$  comme il est illustré dans la figure B.2(b) où nous avons représenté la variation de la fréquence en fonction du nombre de bi-atomes.

### B/ chaîne triatomique

La figure B.3(a) représente une structure infinie de la chaîne linéaire constituée de trois atomes de masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  alternées et reliées par la même constante de force  $\beta$ . La figure B.3(b) est la structure finie correspondante après clivage de la structure infinie entre les sites  $(0, 1)$  et  $(3N, 3N + 1)$ . En effectuant la même procédure de calcul que celle du cas diatomique, on aboutit à la relation de dispersion de la chaîne infinie (Fig.B.3(a)) :

$$\cos(kd_2) = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \beta^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{2\beta^3} \quad (\text{B22})$$

et les modes propres de la chaîne finie (Fig.B.3(b)) :

$$\left(t - \frac{\beta^2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta^2 - \beta\gamma_2}\right)\left(t - \frac{\beta^2}{\gamma_2\gamma_3 - \beta^2 - \beta\gamma_2}\right)(t^{2N} - 1) = 0 \quad (\text{B23})$$

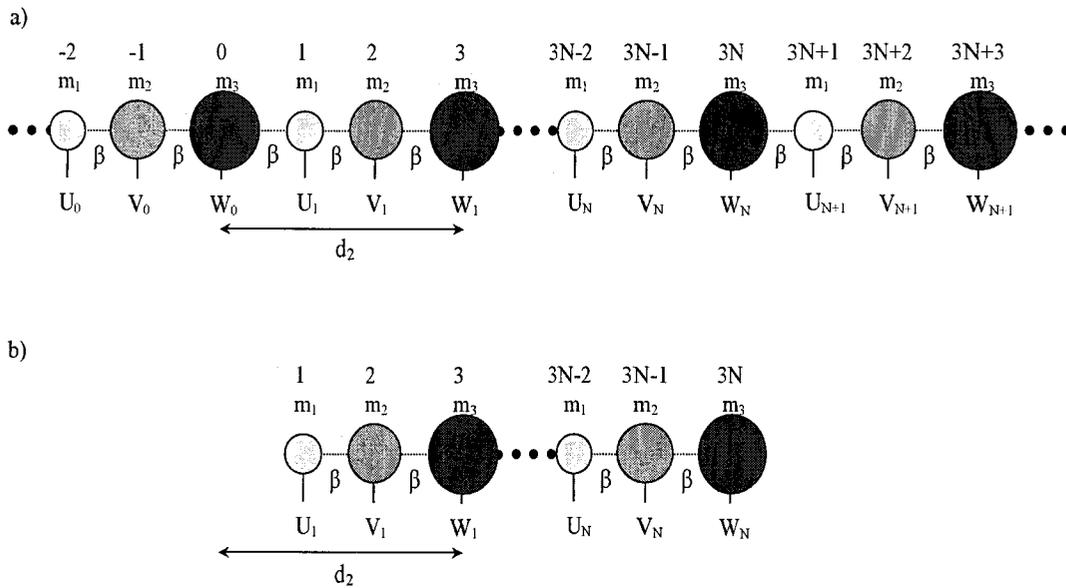


Fig. B.3 :(a) Schéma de la structure infinie de la chaîne linéaire triatomique formée de trois atomes ( $m_1 - m_2 - m_3$ ). La figure (b) représente la structure finie composée de  $N$  triatomes. Les masses sont fixées à  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$ ,  $m_3 = 6.07g$  et la constante de force est prise égale à  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ .

Pour  $k$  réel, le troisième terme de l'équation (B23) donne la même expression que l'équation (B17).

Par contre, lorsque  $k$  est imaginaire, les deux premiers termes de l'équation (B23) donnent les modes localisés de surface, à savoir :

$$t = \frac{\beta^2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta^2 - \beta\gamma_2} \quad (\text{B24})$$

et

$$t = \frac{\beta^2}{\gamma_2\gamma_3 - \beta^2 - \beta\gamma_2} \quad (\text{B25})$$

avec la condition :

$$|t| < 1 \quad (\text{B26})$$

La relation de dispersion des modes de surface est donnée par :

$$\beta\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3) + \beta^2(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) - 2\beta^3 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0 \quad (\text{B27})$$

Dans le cas particulier où les masses  $m_1$  et  $m_3$  sont identiques, les équations (B24) et (B25) s'écrivent :

$$t = \pm 1 \quad (\text{B28})$$

Ce résultat montre que les modes de surface tombent à la limite des bandes de volume.

Comme dans le cas de la structure diatomique, Les équations (B24) (respectivement (B25)) et (B26) combinées avec la relation de dispersion B27 nous permettent d'aboutir au résultat  $m_3 < m_1$  (respectivement  $m_1 < m_3$ ) qui affirme que les modes localisés de surface apparaissent lorsque la chaîne se termine par la masse la plus petite.

La figure B.4(a) montre la variation de la fréquence en fonction de  $kd_2/\pi$  pour une chaîne triatomique telle que :  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$ ,  $m_3 = 6.07g$  et  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ . La structure de bande de la chaîne infinie est représentée par les pointillés, tandis que les modes confinés (de surface) sont représentés par les cercles pleins (vides).

La structure de bande est formée de trois branches acoustiques séparées par deux gaps. On remarque la formation de  $N - 1$  modes confinés à l'intérieur de chaque bande et un mode de surface par gap induit par l'atome la plus légère. Ces modes sont indépendants de  $N$  comme il est illustré dans la figure B.4(b).

Les figures B.4(c) et (d) donnent les mêmes résultats que dans les figures B.4(a) et (b), mais pour une chaîne triatomique symétrique dans laquelle les deux masses extrêmes sont identiques, c'est à dire,  $m_1 = m_3 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$  et  $\beta = 6.310^6 N/m$ .

A la différence du cas précédent et en conformité avec la démonstration analytique (Eq.B28), les modes localisés (cercles vides) apparaissent dans ce cas exactement aux limites des bandes.

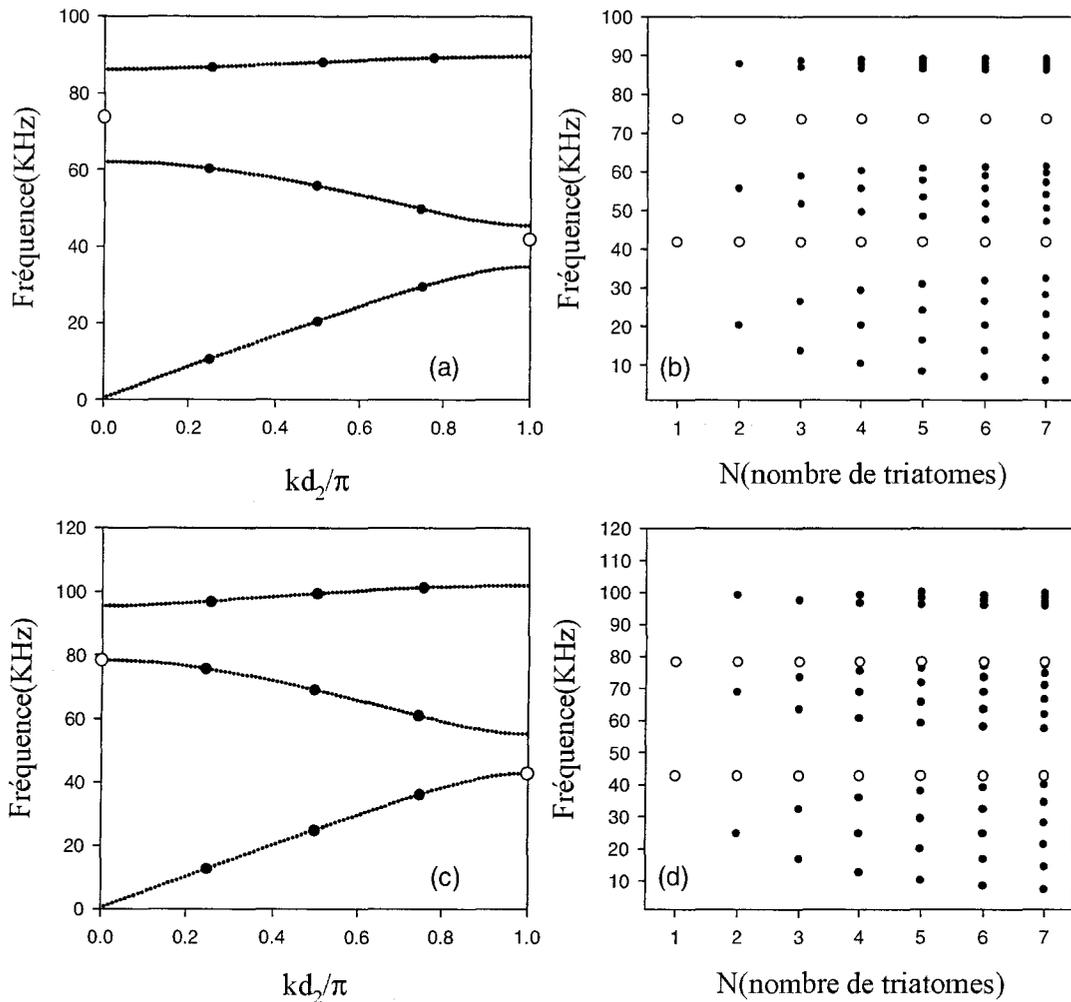


Fig. B.4 : (a) Variation de la fréquence en  $KHz$  en fonction de  $\frac{kd_2}{\pi}$ , pour une chaîne linéaire triatomique formée de trois atomes de masses  $m_1 - m_2 - m_3$ . Les masses sont fixées à  $m_1 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$ ,  $m_3 = 6.07g$  et la constante de force est prise égale à  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ . Les pointillés représentent la structure de bande de la chaîne infinie, les cercles pleins représentent les modes confinés de la structure finie qui commence par l'atome 1 et se termine par l'atome 3, ils sont au nombre de  $N - 1$  et les cercles vides sont les modes localisés aux deux surfaces libres. La figure (b) illustre la variation de la fréquence en  $KHz$  en fonction du nombre  $N$  de tri-atomes, les cercles pleins sont les modes confinés et les cercles vides sont les modes localisés. (c) et (d) Même chose que (a) et (b), mais pour une chaîne tri-atomique telle que  $m_1 = m_3 = 2.09g$ ,  $m_2 = 4.08g$  et  $\beta = 6.3 \cdot 10^6 N/m$ .

Annexe

## COMMENT

# Comment on ‘Sensitivity of surface states to the stack sequence of one-dimensional photonic crystals’

Y El Hassouani<sup>1</sup>, E H El Boudouti<sup>1</sup>, H Aynaou<sup>1</sup>,  
B Djafari-Rouhani<sup>2</sup> and V R Velasco<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Dynamique et d’Optique des Matériaux, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mohamed Premier, 60000 Oujda, Morocco

<sup>2</sup> Institut d’Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie, UMR CNRS 8520, UFR de Physique, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d’Ascq, France

<sup>3</sup> Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid, CSIC, Sor Juana Inés de la Cruz 3, E-28049 Madrid, Spain

E-mail: elhoudouti@yahoo.fr

Received 11 March 2006, accepted for publication 18 January 2007

Published 26 February 2007

Online at stacks.iop.org/JOptA/9/308

## Abstract

We analyse the theoretical and numerical results of Feng *et al* (2005 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7** 374–81) and show that the dispersion relation derived for surface states in a one-dimensional (1D) photonic crystal made of two or more composite layers requires an additional condition that ensures the decaying of surface states from the surface. Consequently, most of the surface states presented by the authors are not true surface localized states. In particular, we show that the surface states do not exhibit connectivity in the dispersion curves as the authors of the paper claimed.

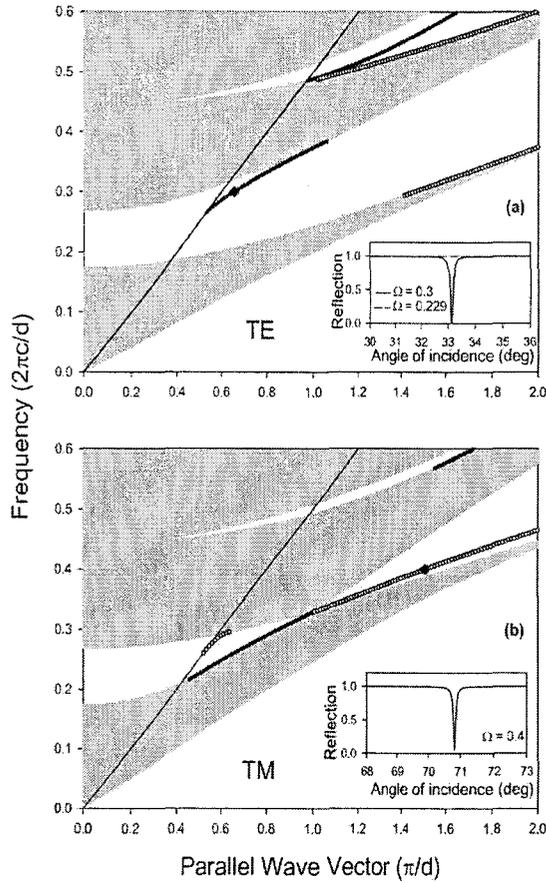
**Keywords:** photonic crystal, surface states, stack sequence

In a recent paper, Feng *et al* [1] employ an analytical Bloch mode to analyse the dispersion behaviour of localized surface states supported by the surface of a semi-infinite 1D photonic crystal (PC) that is adjacent to an air background. The crystal consists of two or multiple composite layers. It was shown that the surface states are sensitive to the stack sequence of the semi-infinite 1D PC with respect to the air background. In particular, the authors found that ‘the dispersion curves of surface states for one composite layer at the surface exhibit connectivity with the dispersion curves for the other composite layer at the surface’. Unfortunately, part of these results are incorrect because the authors have forgotten to ensure that the surface modes should decay when penetrating into the superlattice. To avoid similar mistakes, in particular for the benefit of other researchers working in this field, the object of this comment is to show the correct way of calculating these surface waves. Our discussion is based on the use of an analytical method we have developed some

years ago to derive closed form expressions of surface and interface transverse elastic waves in two-component or  $N$ -component semi-infinite superlattices by using the Green’s function method [2, 3]. These results could also be used straightforwardly for transverse electric (TE) and transverse magnetic (TM) waves, as the theories for all these waves are isomorphic (see [4] for the transpositions).

Our aim in this comment is twofold:

- (i) To show that, with respect to the results of [1], the dispersion relation derived for surface states in a 1D photonic crystal made of two or more composite layers requires an additional condition that ensures the decaying of surface states from the surface. As a consequence, the dispersion curves of surface states for two semi-infinite superlattices obtained by the cleavage of an infinite superlattice do not exhibit connectivity (contrary to the statement of [1]).



**Figure 1.** Calculated band diagrams of the background PC and the surface modes for both the TE (a) and TM (b) polarizations when the parameters of the two layers are  $n_1 = 1.7$ ,  $n_2 = 3.4$ ,  $d_1 = dn_2/(n_1 + n_2)$ ,  $d_2 = dn_1/(n_1 + n_2)$ , where  $d = d_1 + d_2$  is the period of the superlattice. Two samples that are arrayed in the  $|air|n_1|n_2|n_1|n_2| \dots$  (solid dotted lines) and  $|air|n_2|n_1|n_2|n_1| \dots$  (open dotted lines) sequences are considered. The inset in figure 1(a) shows the angular reflectivity for a surface mode for TE polarization at  $\Omega = 0.3$  (solid curve) and  $\Omega = 0.229$  (dashed curve). The inset in figure 1(b) represents the same as in the inset in figure 1(a) but for TM polarization at  $\Omega = 0.4$ . The surface state obtained by the angular reflectivity is indicated by a diamond for TE and TM polarizations.

(ii) The information on localized surface states supported by the 1D PC could also be extracted from examination of the reflection spectrum of a finite-thickness PC deposited on top of a substrate, in the same way as in recent experimental work [5, 6].

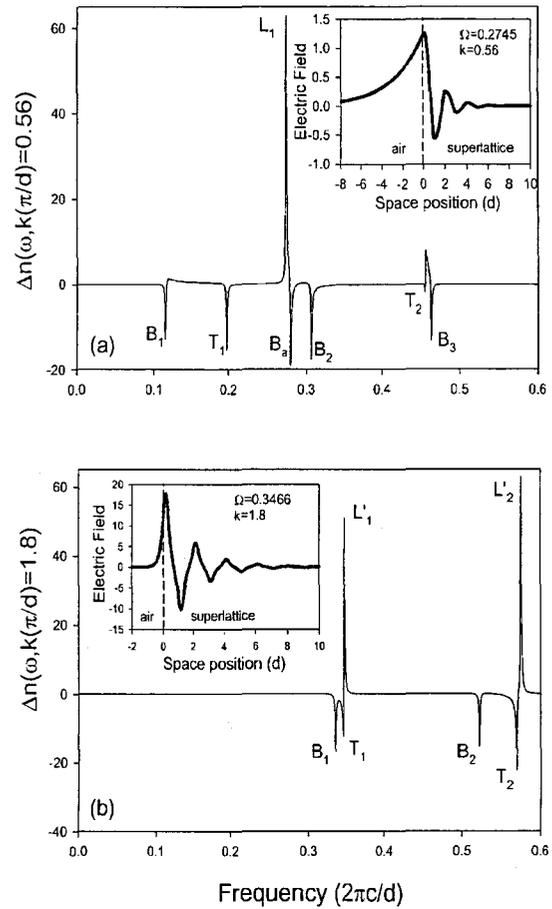
In [1] the dispersion relation giving the localized surface states in a semi-infinite PC made of two or more alternating layers is given by

$$e^{ikd} - Q_{11} + k_{0z} Q_{12} = 0 \quad (1)$$

where  $e^{ikd}$  is given by the dispersion relation for bulk waves

$$2 \cos(kd) = Q_{11} + Q_{22} \quad (2)$$

where  $k$  is the Bloch wavevector,  $d$  the period of the superlattice and the expressions of  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  and  $Q_{22}$  for



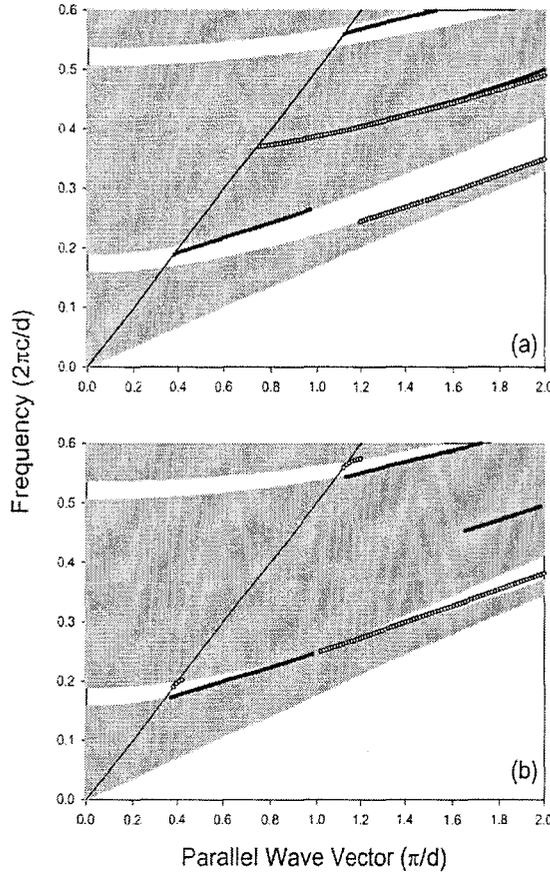
**Figure 2.** Variation of the density of states for the semi-infinite superlattice terminated by layer 1 at  $k = 0.56$  (a) and layer 2 at  $k = 1.8$  (b).  $B_i$  and  $T_i$  refer to  $\delta$  peaks of weight  $-1/4$  at the edges of the different bulk bands.  $L_1$  (a) and  $L'_1$ ,  $L'_2$  (b) indicate surface modes induced by a semi-infinite superlattice terminated by layer 1 and layer 2, respectively.  $B_0$  indicates the bottom of the light line. The insets in figures 2(a) and (b) show the calculated field distributions of a surface mode at  $(\Omega = 0.2745, k = 0.56)$  and  $(\Omega = 0.3466, k = 1.8)$ , respectively.

TE polarization (for example) in a two-layer superlattice are given by

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \cos(k_{1z}d_1) \cos(k_{2z}d_2) - \frac{k_{1z}}{k_{2z}} \sin(k_{1z}d_1) \sin(k_{2z}d_2) \\ Q_{12} &= \frac{i}{k_{1z}} \sin(k_{1z}d_1) \cos(k_{2z}d_2) + \frac{i}{k_{2z}} \cos(k_{1z}d_1) \sin(k_{2z}d_2) \\ Q_{21} &= ik_{2z} \cos(k_{1z}d_1) \sin(k_{2z}d_2) + ik_{1z} \sin(k_{1z}d_1) \cos(k_{2z}d_2) \\ Q_{22} &= \cos(k_{1z}d_1) \cos(k_{2z}d_2) - \frac{k_{2z}}{k_{1z}} \sin(k_{1z}d_1) \sin(k_{2z}d_2) \end{aligned} \quad (3)$$

where  $d_i$ ,  $k_{iz} = \sqrt{\varepsilon_i k_0^2 - k_x^2}$  and  $\varepsilon_i$  are the thickness, the perpendicular wavevector component and the dielectric constant in each medium.  $k_0 = \omega/c$  is the wavevector in vacuum, where  $\omega$  is the angular frequency and  $c$  the speed of light.  $k_x$  is the parallel wavevector component which is a conservative quantity. Similar equations to equation (3) for TM polarization are given in [1].

Comment



**Figure 3.** Calculated band diagrams of the background PC and the surface modes for both the TE (a) and TM (b) polarizations when the parameters of the two layers are  $n_1 = 2.5$ ,  $n_2 = 3.4$ ,  $d_1 = dn_2/(n_1 + n_2)$  and  $d_2 = dn_1/(n_1 + n_2)$ , where  $d = d_1 + d_2$  is the period of the superlattice. Two samples are arrayed in the  $|air|n_1|n_2|n_1|n_2| \dots$  (solid dotted lines) and  $|air|n_2|n_1|n_2|n_1| \dots$  (open dotted lines).

$Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  and  $Q_{22}$  are related by the well known equation

$$Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = 1. \quad (4)$$

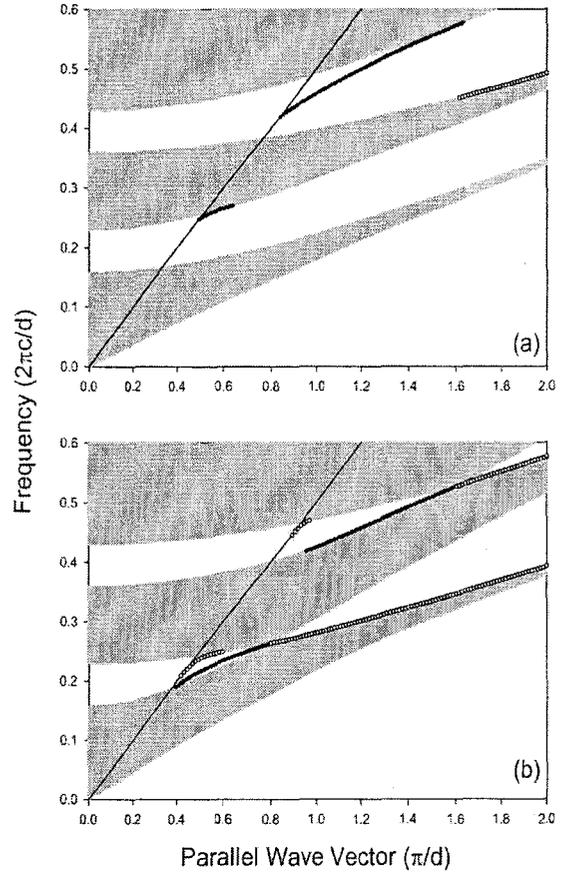
However, the two solutions of  $e^{ikd}$  obtained from equation (2) and replaced in equation (1) are not all valid. Indeed, as we are concerned with surface states inside the gaps of the superlattice,  $k$  is imaginary (modulo  $\pi$ ) and a valid solution  $e^{ikd}$  should satisfy the condition

$$|e^{ikd}| < 1 \quad (5)$$

to ensure that the state is decaying far from the surface. Therefore, in order to avoid unphysical states, it is more convenient to calculate  $e^{ikd}$  from equation (1) and to replace it in equation (2). We obtain the following equation, after using equation (4) and factorizing by the factor  $Q_{12}$ ,

$$k_{0c}^2 Q_{12} + k_{0c}(Q_{22} - Q_{11}) - Q_{21} = 0. \quad (6)$$

As mentioned by the authors of [1], equation (6) should be solved within the photonic bandgap and below the light line of the air background as we are interested only in localized surface states. However, to ensure the decaying of surface



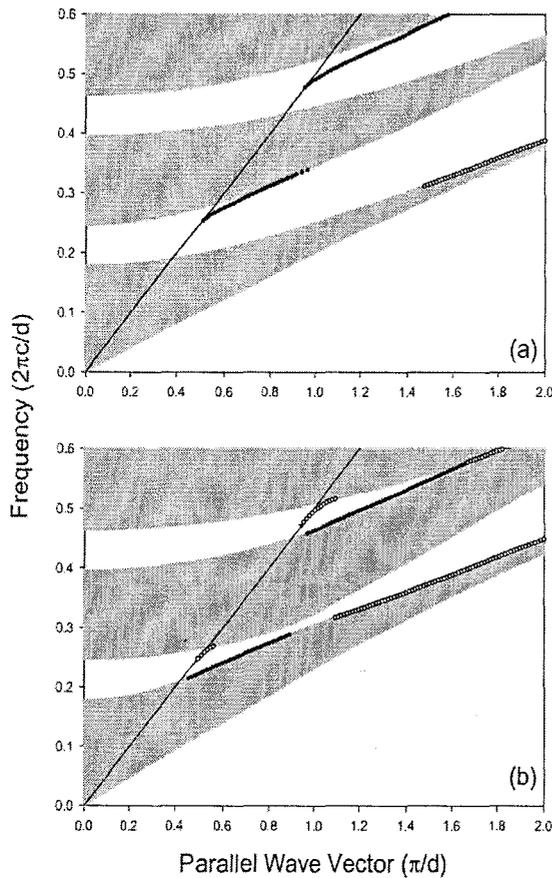
**Figure 4.** Calculated band diagrams of the background PC and the surface modes for both the TE (a) and TM (b) polarizations when the parameters of the two layers are  $n_1 = 1.7$ ,  $n_2 = 3.4$  and  $d_1 = d_2 = d/2$ , where  $d = d_1 + d_2$  is the period of the superlattice. Two samples are arrayed in the  $|air|n_1|n_2|n_1|n_2| \dots$  (solid dotted lines) and  $|air|n_2|n_1|n_2|n_1| \dots$  (open dotted lines).

states when penetrating into the superlattice, and thus keeping only the correct surface dispersion curves, it is necessary to introduce an additional condition. This condition is obtained from equations (1) and (5), namely

$$|Q_{11} - k_{0c}Q_{12}| < 1. \quad (7)$$

Consequently, equation (6) together with the condition (7) give, without any ambiguity, the dispersion relation of surface states for a semi-infinite PC. These relations are derived also in [2, 3].

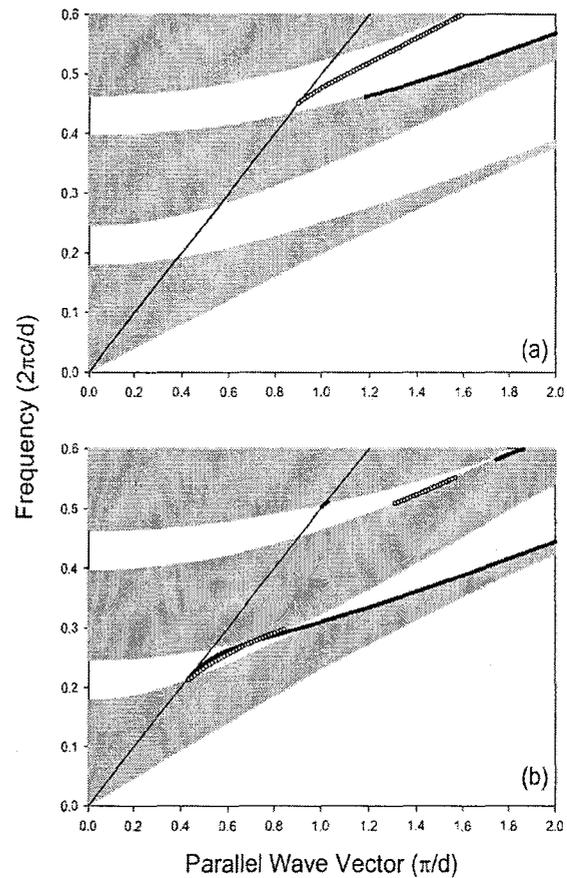
In the following we will discuss in detail the results concerning figure 1 of [1] and we shall present later the new versions of all the other figures of the paper (reduced frequency versus reduced parallel wavevector). Figure 1 gives the bandgap structure for TE (figure 1(a)) and TM (figure 1(b)) polarizations in two-layer superlattices. The refraction indices of layers 1 and 2 of the superlattice are set to be  $n_1 = 1.7$  and  $n_2 = 3.4$ . The corresponding layer widths are  $d_1 = dn_2/(n_1 + n_2)$  and  $d_2 = dn_1/(n_1 + n_2)$  where  $d = d_1 + d_2$  is the period of the superlattice (these parameters are the same as those of [1]). The grey areas represent the allowed bands, while the white areas correspond to the forbidden bands (gaps). The straight line indicates



**Figure 5.** Calculated band diagrams of the background PC and the surface modes for both the TE (a) and TM (b) polarizations when the parameters of the three layers are  $n_1 = 1.7$ ,  $n_2 = 2.5$ ,  $n_3 = 3.4$ ,  $d_1 = dn_2, n_3/(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$ ,  $d_2 = dn_1n_3/(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$  and  $d_3 = dn_1n_2/(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$ . The sample is arrayed in the  $|air|n_1|n_2|n_3|n_1|n_2|n_3|\dots$  (solid dotted lines) and  $|air|n_3|n_2|n_1|n_3|n_2|n_1|\dots$  (open dotted lines).

the light line of the air background. Below the light line of the air and inside the superlattice forbidden bands, we displayed by solid dotted lines and open dotted lines the surface modes associated, respectively, with two complementary semi-infinite superlattices terminated by layers 1 and 2 following the sequences  $\dots|n_1|n_2|n_1|n_2|n_1|air|$  and  $|air|n_2|n_1|n_2|n_1|\dots$ . One can notice that, although some of the surface states in figure 1 of [1] coincide with those in our figure 1, there exist some additional surface states in figure 1 of [1] that we believe are not true surface states. Indeed, these surface states are due to the fact that the condition (equation (7)) is not taken into account in [1]. Consequently, the surface dispersion curves in figure 1 do not exhibit connectivity for both TE and TM polarizations as it is found by the authors of [1].

Another method of calculation that enables us to excite surface states in PC is the Kretschmann configuration used in attenuated total reflectance [7, 8]. This method has been often used experimentally to excite surface plasmons in metals. Recently, this method has been employed to excite surface electromagnetic waves in 1D photonic multilayers [5, 6]. An example of the reflectance as a function of the incident angle

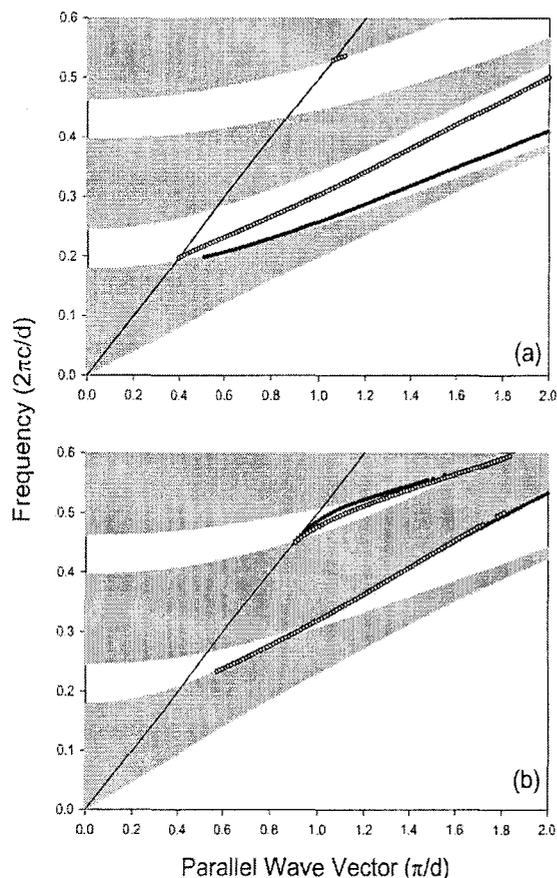


**Figure 6.** The same as figure 5, but the sample is arrayed in the  $|air|n_2|n_3|n_1|n_2|n_3|n_1|\dots$  (solid dotted lines) and  $|air|n_1|n_3|n_2|n_1|n_3|n_2|\dots$  (open dotted lines).

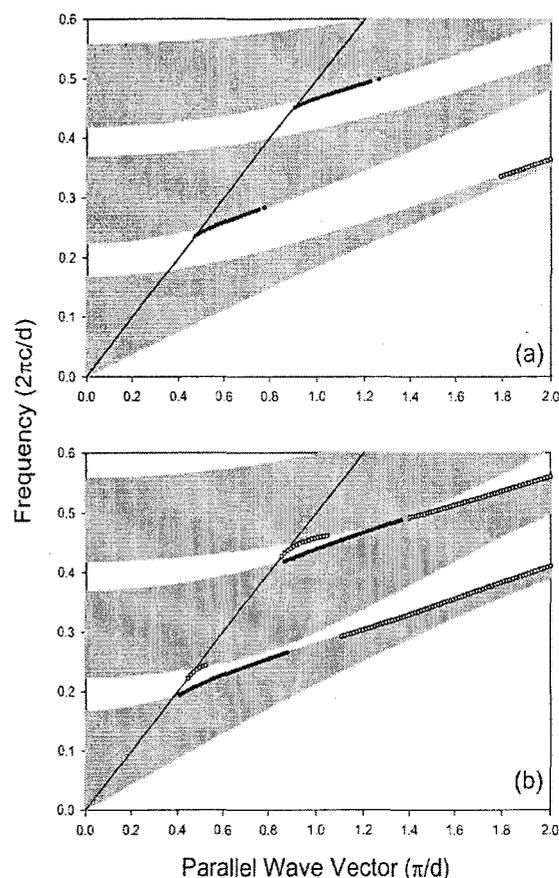
for a finite size superlattice composed of four cells is sketched in the insets of figures 1(a) and (b) for a given reduced frequency  $\Omega = \omega d/2\pi c$ . The superlattice is deposited on a substrate with an index of refraction  $n_s = 2$  from which the incident wave is launched, while the other surface is in contact with air.

In the region of frequency below the light line in air, the incident waves launched from the substrate are completely reflected. However, if we take into account the loss inside the multilayers (by adding a small imaginary part to the refractive indices [6]), then the incident wave interacts with surface waves supported by the multilayer and gives rise to dips in the reflectance. In the inset of figure 1(a), we have plotted the reflectance as a function of the angle of incidence  $\theta$  at  $\Omega = 0.3$  (solid curve) and  $\Omega = 0.229$  (dashed curve). The cap layer of the superlattice in contact with air is of type 1 (the details of the theoretical calculations are given in [9]). These results clearly show the existence of only one surface state at  $\Omega = 0.3$  lying at  $\theta = 33.13^\circ$  (indicated by a square in the surface dispersion curves of figure 1(a)). However, there is no surface state at  $\Omega = 0.229$ , which is not the case in figure 1 of Feng *et al* [1] where an additional surface state exists. Similar remarks can be made for the surface states in the first gap of figure 1(b) (TM polarization) at  $\Omega = 0.4$ . The superlattice being ended now with layer 2, we notice here also (see the inset of figure 1(b))

Comment



**Figure 7.** The same as figure 5, but the sample is arrayed in the  $[\text{air}|n_3|n_1|n_2|n_3|n_1|n_2|\dots]$  (solid dotted lines) and  $[\text{air}|n_2|n_1|n_3|n_2|n_1|n_3|\dots]$  (open dotted lines).



**Figure 8.** Calculated band diagrams of the background PC and the surface modes for both the TE (a) and TM (b) polarizations when the parameters of the three layers are  $n_1 = 1.7$ ,  $n_2 = 2.5$ ,  $n_3 = 3.4$  and  $d_1 = d_2 = d_3 = d/3$ . The sample is arrayed in the  $[\text{air}|n_1|n_2|n_3|n_1|n_2|n_3|\dots]$  (solid dotted lines) and  $[\text{air}|n_3|n_2|n_1|n_3|n_2|n_1|\dots]$  (open dotted lines).

the existence of only one surface state at  $\theta = 70.8^\circ$  instead of two states as is found by the authors of [1].

To stress the correctness of our results, we also calculate the frequencies of the surface localized states from the peaks in the density of states (DOS). More precisely, we calculate for each semi-infinite superlattice the so-called variation of the density of states (VDOS) (see figure 2), namely the DOS of the semi-infinite superlattice from which we subtract the DOS of the same volume of the infinite superlattice using the Green's function method (for more details see [2, 3]).

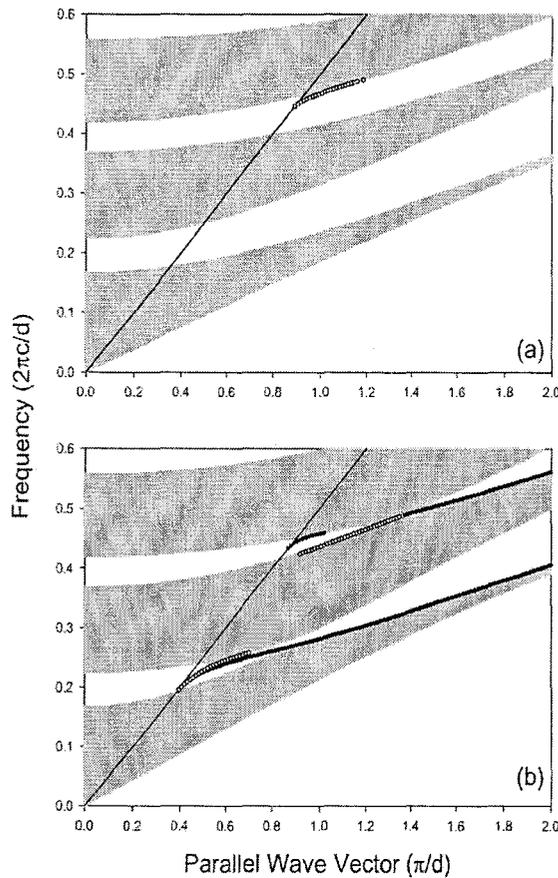
Figures 2(a) and (b) give the VDOS of TE modes as a function of the frequency for the semi-infinite superlattices terminated by layer 1 and layer 2, respectively, and for the parallel wavevectors  $k = 0.56$  and  $1.8$ , respectively. The positive  $\delta$  peaks indicate the positions of surface states, while negative  $-\delta/4$  peaks indicate the positions of the edges of the superlattice bulk bands and air light line. The bottom and top of the bulk band  $i$  of the superlattice are labelled by  $B_i$  and  $T_i$ , respectively, while the air light line is labelled  $B_a$ . The  $\delta$  peaks are enlarged artificially by adding a small imaginary part to the frequency  $\omega$ .

One can notice that inside the first gaps limited by  $T_1$  and  $B_2$  in figures 2(a) and (b) there is only one surface state instead of two, as is found by Feng *et al* [1]. In the insets of figures 2(a) and (b) we have sketched the spatial localization of the surface

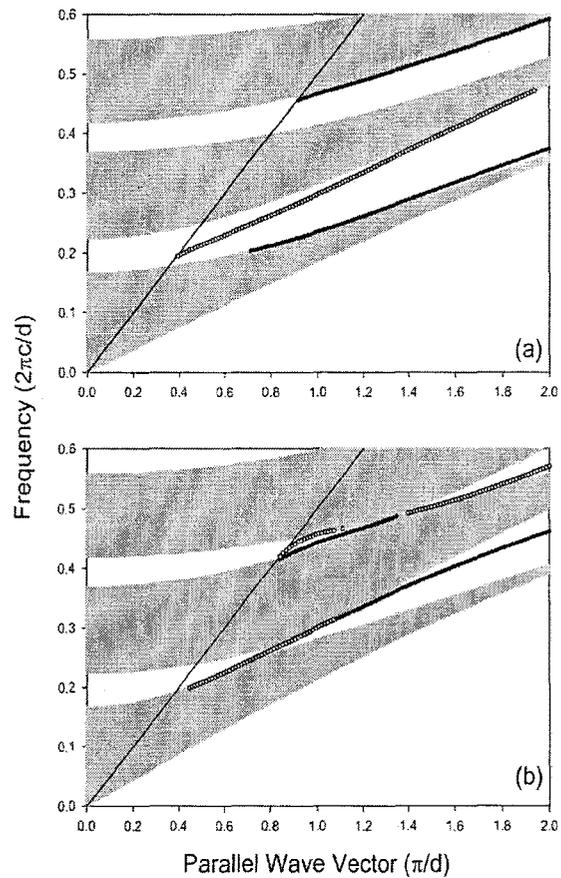
modes lying in the first gap. The electric field clearly shows a strong localization at the interface between the superlattice and air and a fast decaying far from the interface.

In what follows, we have checked carefully all the other dispersion curves of surface states given by Feng *et al* [1] and given below the amended figures (the number of these figures correspond to those in [1]). As a final remark, let us mention that Feng *et al* [1] have attributed the terminology TM (TE) waves to the case where the electric (magnetic) field is perpendicular to the incidence plane. However, we think that the commonly used terminology is the opposite (see, for example, [10]). That is why we have permuted these terminologies in this comment.

In conclusion, we have shown that the dispersion relation derived for surface states in a one-dimensional (1D) photonic crystal made of two or more composite layers [1] requires an additional condition that ensures the decaying of surface states from the surface. Therefore, the surface states for two semi-infinite complementary superlattices do not exhibit connectivity in the dispersion curves, as claimed by the authors of [1]. Our calculations are based on dispersion relations, densities of states in semi-infinite superlattices as well as total internal reflection in finite size superlattices.



**Figure 9.** The same as figure 8, but the sample is arrayed in the  $|\text{air}|n_2|n_3|n_1|n_2|n_3|n_1| \dots$  (solid dotted lines) and  $|\text{air}|n_1|n_3|n_2|n_1|n_3|n_2| \dots$  (open dotted lines).



**Figure 10.** The same as figure 8, but the sample is arrayed in the  $|\text{air}|n_3|n_1|n_2|n_3|n_1|n_2| \dots$  (solid dotted lines) and  $|\text{air}|n_2|n_1|n_3|n_2|n_1|n_3| \dots$  (open dotted lines).

## References

- [1] Feng S, Sang H-Y, Li Z-H, Chen B-Y and Zhang D Z 2005 Sensitivity of surface states to the stack sequence of one-dimensional photonic crystals *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7** 374–81
- [2] Bah M L, Akjouj A, El Boudouti E H, Djafari-Rouhani B and Dobrzynski L 1996 Surface and interface optical waves in superlattices: transverse electric localized and resonant modes *J. Phys.: Condens. Matter* **8** 4171
- [3] El Boudouti E H, Djafari-Rouhani B, Akjouj A and Dobrzynski L 1996 Theory of surface and interface transverse elastic waves in N-layer superlattices *Phys. Rev. B* **54** 14728
- [4] Djafari-Rouhani B and Dobrzynski L 1987 Simple excitations in N-layered superlattices *Solid State Commun.* **62** 609
- [5] Robertson W M and May M S 1999 Surface electromagnetic wave excitation on one-dimensional photonic band-gap arrays *Appl. Phys. Lett.* **74** 1800
- [6] Robertson W M 1999 Experimental measurement of the effect of termination on surface electromagnetic waves in one-dimensional photonic bandgap arrays *J. Lightwave Technol.* **17** 2013
- [7] Cottam M G and Tilly D R 1989 *Introduction to Surface and Superlattice Excitations* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [8] Regalado V F, Ramos-Mcndieta L E, Gaspar-Armenta F and Lopez-Rios J T 2002 Photonic crystal sensor based on surface waves for thin-film characterization *Opt. Lett.* **27** 646
- [9] Lahlaoui M L H, Akjouj A, Djafari-Rouhani B, Dobrzynski L, Hammouchi M, El Boudouti E H, Nougouai A and Kharbouch B 2001 Theoretical analysis of the density of states and phase times: Application to resonant electromagnetic modes in finite superlattices *Phys. Rev. B* **63** 035312
- [10] Yeh P 1988 *Optical Waves in Layered Media* (New York: Wiley)

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media* (Academic, New York, 1981)
- [2] P. Yeh, *Optical waves in layered media* (John Wileysons, New York, 1988)
- [3] M.V. Klein, *IEEE J. Quant. Elec.* QE-22, 1760 (1986)
- [4] J. Sapriel and B. Djafari-Rouhani, *Surf. Sci. Rept.* 10, 189 (1989)
- [5] B. Jusserand and M. Cardona, in "Light Scattering in Solids", V, ed. M. Cardona and G. Guntherodt (Springer, Berlin, 1989) p. 49
- [6] M. Cardona, in : *Proc. Nato ARW on Spectroscopy of Semiconductor Microstructures*, ed. G Fasol, A. Fasolino and P. Lugli (Plenum, New York, 1990)
- [7] M. Cardona, *Superlatt. and Microstruct.* 4, 27 (1989)
- [8] A. Huber, T. Egeler, W. Etmuller, H. Rothfritz, G. Trankle and G. Abstreiter, *Superlatt. and Microstruct.* 9, 309 (1991)
- [9] D.J. Lockwood and J.F. Young, *Light Scattering in Semiconductor Structures and Superlattices* (Plenum, New York, 1991)
- [10] L. Colvard, R. Merlin, M.V. Klein, and A.C. Gassard, *Phys. Rev. Lett.* 45, 298 (1980)
- [11] E.H. El Boudouti, B. Djafari-Rouhani, E.M. Khourdifi, and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 48, 10987 (1993)

- 
- [12] E.H. El Boudouti, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 54, 14728 (1996)
- [13] E.H. El Boudouti and B. Djafari-Rouhani, *Phys. Rev. B* 49, 4586 (1994)
- [14] B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, O. Hardouin Duparc, R.E. Camley, and A.A. Maradudin, *Phys. Rev. B* 28, 1711 (1983)
- [15] T. Aono and S.I. Tamura, *Phys. Rev. B* 58, 4838 (1998)
- [16] S. Mizuno and S.I. Tamura, *Phys. Rev. B* 53, 4549 (1996)
- [17] M. Hammouchi, E.H. El Boudouti, A. Nougouai, B. Djafari-Rouhani, M.L.H. Lahlaoui, A. Akjouj, and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 59, 1999 (1999)
- [18] H.J. Trodahl, P.V. Santos, G.V.M. Williams, and A. Bittar, *Phys. Rev. B* 40, R8577 (1989)
- [19] W. Chen, Y. Lu, H.J. Maris, and G. Xiao, *Phys. Rev. B* 50, 14506 (1994)
- [20] B. Perrin, B. Bonello, J.C. Jeannet, and E. Romatet, *Physica B* 219§220, 681 (1996); B. Bonello, B. Perrin, E. Romatet, and J.C. Jeannet, *Ultrasonics* 35, 223 (1997)
- [21] N-W. Pu and J. Bokor, *Phys. Rev. Lett.* 91, 076101 (2003); N-W. Pu, *Phys. Rev. B* 72, 115428 (2005)
- [22] P. Sondhaus, J. Larsson, M. Harbst, G.A. Naylor, A. Plech, K. Scheidt, O. Synergren, M. Wulff, and J.S. Wark, *Phys. Rev. Lett.* 94, 125509 (2005)
- [23] E.M. Khourdifi and B. Djafari-Rouhani, *Surf. Sci.* 211/212, 361 (1989)
- [24] D. Bria, E.H. El Boudouti, A. Nougouai, B. Djafari-Rouhani, and V.R. Velasco, *Phys. Rev. B* 60, 2505 (1999)
- [25] E.M. Khourdifi and B. Djafari-Rouhani, *J. Phys. Condens. Matter* 1, 7543 (1989)
- [26] D. Bria, E.H. El Boudouti, A. Nougouai, B. Djafari-Rouhani, and V.R. Velasco, *Phys. Rev. B* 61, 15858 (2000)
- [27] K-Q Chen, X-H. Wang and B-Y Gu, *Phys. Rev. B* 61, 12075 (2000)
- [28] S. Mizuno, *Phys. Rev. B* 65, 193302 (2002)
-

- 
- [29] S.I. Tamura, H. Watanabe, and T. Kawasaki, *Phys. Rev. B* 72, 165306 (2005)
- [30] G.P. Schwartz, G.J. Gualtieri, and W.A. Sunder, *Appl. Phys. Lett.* 58, 971 (1991)
- [31] M. Trigo, A. Bruchhausen, A. Fainstein, B. Jusserand, and V. Thierry-Mieg, *Phys. Rev. Lett.* 89, 227402 (2002); P. Lacharmoise, A. Fainstein, B. Jusserand, and V. Thierry-Mieg, *Appl. Phys. Lett.* 84, 3274 (2004); N.D. Lanzillotti Kimura, A. Fainstein, and B. Jusserand, *Phys. Rev. B* 71041305(R) (2005)
- [32] S. Tamura, *Proceedings of the 6th International Conference on Phonon scattering in Condensed Matter, Heidelberg, 1989* (World Scientific, Singapore, 1990), p.703
- [33] S.I. Tamura, *Phys. Rev. B* 39, 1261 (1989); S. Mizuno and S.I. Tamura, *ibid.* 45, 13423 (1992)
- [34] F. Garcia-Moliner and V.R. Velasco, *Theory of Single and Multiple Interfaces. The Method of Surface Green Function Matching* (World Scientific, Singapore, 1992)
- [35] A.S. Barker, J.L. Merz, and A.C. Gossard, *Phys. Rev. B* 17, 3181 (1978)
- [36] V. Narayanamurti, H.L. Stormer, M.A. Chin, A.C. Gossard, and W. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* 43, 2012 (1979)
- [37] O. Koblinger, J. Mebert, E. Dittrich, S. Dottinger, W. Eisenmenger, P.V. Santos, and L. Ley, *Phys. Rev. B* 35, 9372 (1987)
- [38] D.J. Dieleman, A.F. Koenderink, M.G.A van Veghel, A.F.M. Arts, and H.W. de Wijn, *Phys. Rev. B* 64, 174304 (2001)
- [39] S. Tamura, D.C. Hurley, and J.P. Wolfe, *Phys. Rev. B* 38, 1427 (1988)
- [40] B. Jusserand, D. Paquet, F. Mollot, F. Alexandre, and G. LeRoux, *Phys. Rev. B* 35, 2808 (1987)
- [41] D.J. Lockwood, R.L.S. Devine, A. Rodriguez, J. Mendiàldua, B. DjafariRouhani, and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 47, 13553 (1993)
- [42] M.W.C. Dharma-Wardana, P. X. Zhang, and D. J. Lockwood, *Phys. Rev. B* 48, 11960 (1993)
- [43] V. Lemos, O. Pilla, M. Montagana, and C. F. De Souza, *Superlatt. And Microstruct.* 17, 51 (1995)
-

- [44] P.J. Shull, D.E. Chimenti and A. Safaeinili, *J. Acoust. Soc. Am.* 95, 99 (1994); A. Safaeinili and D.E. Chimenti, *J. Acoust. Soc. Am.* 98, 2336 (1995)
- [45] H.T. Grahn, H.J. Maris, J. Tauc, and B. Abeles, *Phys. Rev. B* 38, 6066 (1988)
- [46] A. Yamamoto, T. Mishina, Y. Masumoto, and M. Nakayama, *Phys. Rev. Lett.* 73, 740 (1994)
- [47] A. Bartels, T. Dekorsy, and H. Kurz, *Appl. Phys. Lett.* 72, 2844 (1998); A. Bartels, T. Dekorsy, H. Kurz, and K. Köhler, *Phys. Rev. Lett.* 82, 1044 (1999)
- [48] S.M. Rytov, *Phys. Acoust.* 2, 68 (1956)
- [49] M. Schoenberg, *Wave Motion* 6, 303 (1984)
- [50] M. Rousseau, *J. Acoust. Soc. Am.* 86, 2369 (1989)
- [51] T.J. Plona, K.W. Winkler, and M. Schoenberg *J. Acoust. Soc. Am.* 81, 1227 (1987)
- [52] C. Gazanhes and J. Sageloli, *Acustica* 81, 221 (1995)
- [53] R. James, S.M. Woodley, C. M. Dyer, and F. Humphrey, *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 2041 (1995)
- [54] M. Shen and W. Cao, *Appl. Phys. Lett.* 75, 3713 (1999)
- [55] H. Sanchis-Alepuz, Y.A. Kosevich and J. Sánchez-Dehesa, *Phys. Rev. Lett.* 98, 134301 (2007)
- [56] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, D. A. B. Miller, J. E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink, *Phys. Rev. B* 46, R7252 (1992), T. Dekorsy, P. Leisching, K. Köhler, and H. Kurz, *Phys. Rev. B* 50, 8106 (1994)
- [57] L. Dobrzynski, *Surf. Sci. Rep.* 11, 139 (1990)
- [58] Y. El Hassouani, E.H. El Boudouti, B. Djafari-Rouhani, H. Aynaou, and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 74, 144306 (2006)
- [59] Y. El Hassouani, E. H. El Boudouti, B. Djafari-Rouhani and R. Rais, 12th International Conference on Phonon Scattering in Condensed Matter PHONONS 2007, (Paris 15-20 Juillet 2007); *Journal of Physics : Conference Series* (accepted)
-

- [60] F.R. Montero de Espinoza, E. Jimenez, and M. Torres, Phys. Rev. Lett. 80, 1208 (1998); J. O. Vasseur, P.A. Dymier, G. Frantziskonis, G. Hong, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski, J. Phys. : Condens. Matter 10, 6051 (1998)
- [61] Voir par exemple : M.S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, Phys. Rev. Lett. 71, 2022 (1993); M. Sigalas and E.N. Economou, Solid State Commun. 86, 141 (1993); I.E. Psarobas, N. Stefanou, and A. Modinos, Phys. Rev. B 62, 278 (2000); *ibid.* 62, 5536 (2000)
- [62] S. Benchabane, Thèse, Université Franche-Comté (2006)
- [63] T. Hattori, N. Tsurumachi, S. Kawato, et H. Nakatsuka Phys. Rev. B 50, 4220 (1994)
- [64] M. Kohmoto, B. Sutherland, et K. Iguchi Phys. Rev. Lett. 58, 2436 (1987)
- [65] W. Gellermann, M. Kohmoto, B. Sutherland, et P. C. Taylor Phys. Rev. Lett. 72, 633 (1994)
- [66] R. Polster, V. Gasparian, et G. Nimtz Phys. Rev. E 55, 7645 (1997)
- [67] L. Dal Negro, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, P. Johnson, A. Lagendijk, R. Righini, M. Colocci, et D. S. Wiersma Phys. Rev. Lett. 90, 055501 (2003)
- [68] M. S. Vasconcelos, E. L. Albuquerque et A. M. Mariz J. Phys. : Condens. Matter 10, 5839 (1998)
- [69] X. Huang, et C. Gong Phys. Rev. B 58, 739 (1998)
- [70] N-h. Liu Phys. Rev. B 55, 3543 (1997)
- [71] X. Q. Huang, S. S. Jiang, R. W. Peng, and A. Hu, Phys. Rev. B 63, 245104 (2001)
- [72] M. Ghulinyan, C. J. Oton, L. D. Negro, L. Pavesi, R. Sapienza, M. Colocci, and D. S. Wiersam, Phys. Rev. B 71, 094204 (2005)
- [73] R. W. Peng, X. Q. Huang, F. Qiu, M. Wang, A. Hu, S. S. Jiang, and M. Mazzer, Appl. Phys. Lett. 80, 3063 (2002)
- [74] E. Cojocar, J. Appl. Phys. 91, 4000 (2002)
- [75] E. Macia, Phys. Rev. B 63, 205421 (2001).
-

- [76] D. Lusk, I. Abdulhalim, and F. Placido, *Opt. Commun.* 198, 273 (2001).
- [77] F. Villa, L. E. Regalado, F. Ramos-Mendieta, J. Gaspar-Armenta, and T. López-Ríos, *Opt. Lett.* 27, 646 (2002).
- [78] F. Villa, J.A. Gaspar-Armenta, F. Ramos-Mendieta, *Opt. Commun.* 216, 361 (2003).
- [79] S. Feng, H-Yi. Sang, Z-Y. Li, B-Y. Cheng, and D-Z. Zhang, *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.* 7, 374 (2005).
- [80] D. N. Chigrin, A. V. Lavrinenko, D. A. Yarotsky, and V. Gaponenko, *J. Lightwave Technol.* 17, 2018 (1999).
- [81] T. Okamoto, T. Kamiyama, and I. Yamaguchi, *Opt. Lett.* 18, 1570 (1993).
- [82] W. M. Robertson, *J. Lightwave Technol.* 17, 2013 (1999).
- [83] G. J. Schneider, S. Hanna, J. L. Davis, and G. H. Watson, *J. Appl. Phys.* 90, 2642 (2001)
- [84] A. Haché and A. Slimani, *Am. J. Phys.* 72, 916 (2004)
- [85] B. Djafari-Rouhani, E. H. El Boudouti, A. Akjouj, L. Dobrzynski, J. O. Vasseur, A. Mir, N. Fettouhi, and J. Zemmouri, *Vacuum* 63/1-2, 177 (2001)
- [86] L. Dobrzynski, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and J. Zemmouri, *Phys. Rev. B* 57, R9388 (1998); J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, A. Akjouj, , and J. Zemmouri, *Phys. Rev. B* 59, 13446 (1999)
- [87] J. O. Vasseur, M. Pecquery, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, A. Akjouj, and J. Zemmouri, N. Fettouhi, and E. H. El Boudouti, in *Photonic Crystal and Light Localization in the 21 st Century*, (Ed.) C. M. Soukoulis 181 (2001)
- [88] E. H. El Boudouti, Y. El Hassouani, B. Djafari-Rouhani, H. Aynaou, *Phys. Rev. E* 76, 026607 (2007)
- [89] E. H. El Boudouti, N. Fettouhi, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, A. Mir, J. O. Vasseur, L. Dobrzynski, and J. Zemmouri, *J. Appl. Phys.* 95, 1102 (2004); A. Mir, A. Akjouj, J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, N. Fettouhi, E. H. El Boudouti, L. Dobrzynski, and J. Zemmouri, *J. Phys. :Condens. Matter* 15, 1593 (2003)
-

- [90] H. Aynaou, E.H. El Boudouti, Y. El Hassouani, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski and V.R. Velasco , *Physica A* 358, 68 (2005)
- [91] H. Aynaou, E.H. El Boudouti, Y. El Hassouani, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, A. Benomar and V.R. Velasco, *Phys. Rev. E* 72, 056601 (2005)
- [92] E. H. El Boudouti, Y. El Hassouani, H. Aynaou, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj and V. R. Velasco, *J. Phys. : Condens. Matter* 19, 246217 (2007)
- [93] Y. El Hassouani, H. Aynaou, E. H. El Boudouti , B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj and V.R. Velasco, *Phys. Rev. B* 74, 035314 (2006)
- [94] M. Li, Y. Liu, and Z.-Q. Zhang, *Phys. Rev. B* 61, 16193 (2000)
- [95] Z. Q. Zhang, C. C. Wong, K. K. Fung, Y. L. Ho, W. L. Chan, S. C. Kan, T. L. Chan, and N. Cheung, *Phys. Rev. Lett.* 81, 5540 (1998)
- [96] Voir l'article de revue, J.O. Vasseur, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and E.H. El Boudouti, *Surf. Sci. Rep.* 54/1-4 pp. 1-156 (2004)
- [97] F Garcia-Moliner and J. Rubio, *J. Phys. C* 2, 1789 (1969); *Proc. R. Soc. London Ser. A* 234, 257 (1971)
- [98] M.G. Cottam and A.A. Maradudin, *Surface Excitations (Moderne Problems in Condensed Matter Sciences 9)*, Amterdam : North-Holland 1986.
- [99] L. Dobrzynski, *Surf. Sci. Rept.* 6, 119 (1986)
- [100] L. Dobrzynski, *Surf. Sci.* 180, 489 (1987); *Surf. Sci.* 182, 362 (1987)
- [101] L. Dobrzynski, J. Mendialdua, A. Rodriguez, S. Bolibo, and M. More, *J. Phys. Fr.* 50, 2563 (1989)
- [102] L. Dobrzynski and H. Puzkarski, *J. Phys. : Condens. Matter* 1, 1239 (1989)
- [103] A. Nougouai and B. Djafari-Rouhani, *Surf. Sci.* 185, 125 (1987); 185, 154 (1987); 199, 638 (1988); *J. Electron Spectroscopy and Related Phenomena* 45, 197 (1987) E.H.
- [104] B. Djafari-Rouhani and L. Dobrzynski, *Phys. Rev. B* 14, 2296 (1976); *Surf. Sci.* 61, 521 (1976)
-

- [105] El Boudouti, Thèse de l'Université de Lille 1 (1994)
- [106] F. Garcia-Moliner, *Ann. Phys. Fr.* 2, 179 (1977)
- [107] V.R. Velasco and F. Garcia-Moliner, *Physica Scripta* 20, 111 (1979)
- [108] B. Djafari-Rouhani and L. Dobrzynski, *J. Phys. Fr.* 43, 523 (1982)
- [109] S. Bolibo, Rapport de DEA, Université de Lille 1 (1989)
- [110] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani *Phys. Rev. Lett.* 71, 2022 (1993); M. Sigalas, E. N. Economou *Solid State Commun.* 86, 141 (1993); M. S. Kushwaha, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski *Phys. Lett. A* 248, 252 (1998)
- [111] I. E. Psarobas and M. M. Sigalas *Phys. Rev. B* 66, 052301 (2002); R. Sainidou, N. Stefanou, I. E. Psarobas, et A. Modinos *Phys. Rev. B* 66, 024303 (2002); R. Sainidou, N. Stefanou, and A. Modinos *Phys. Rev. B* 69, 064301 (2004)
- [112] C. Goffaux, J. Sanchez-Dehesa, A. Levy Yeyati, Ph. Lambin, A. Khelif, J. O. Vasseur, and B. Djafari-Rouhani *Phys. Rev. Lett.* 88, 225502 (2002); H. Chandra, P. A. Deymier, and J. O. Vasseur *Phys. Rev. B* 70, 054302 (2004)
- [113] D. Caballero, J. Sanchez-Dehesa, C. Rubio, R. Martinez-Sala, J. V. Sánchez-Pérez, F. Meseguer, J. Llinares *Phys. Rev. E* 60, R6316 (1999)
- [114] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, et P. Sheng *Science* 289, 1734 (2000)
- [115] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, et P. Sheng *Phys. Rev. Lett.* 88, 104301 (2002); *ibid.* 93, 024301 (2004)
- [116] W. M. Robertson, and J. F. Rudy III *J. Acoust. Soc. Am.* 104, 694 (1998)
- [117] J. O. Vasseur, P. A. Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and D. Prevost, *Phys. Rev. Lett.* 86, 3012 (2001)
- [118] C. Goffaux, F. Maseri, J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, and P. Lamin, *Appl. Phys. Lett.* 83, 281 (2003)
- [119] M. M. Sigalas and N. Garcia, *Appl. Phys. Lett.* 76, 2307 (2000)
-

- [120] D. García-Pablos, M. Sigalas, F. R. M. de Espinosa, M. Torres, M. Kafesaki, and N. García, *Phys. Rev. Lett.* 84, 4349 (2000)
- [121] M. Torres, F. R. M. de Espinosa, D. García-Pablos, and N. García, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3054 (1999)
- [122] M.A. Biot, *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 168 (1962)
- [123] R. Loudon, in *Surface Excitation*, vol.9 of *Modern Problems in Condensed Matter Sciences* (V.M. Agranovich and R. Loudon Edits., North Holland, Amsterdam, 1984)
- [124] E.H. El Boudouti, Ph.D. Thesis, University Mohamed I, Oujda, Morocco (1998)
- [125] D.J. Lockwood, M.W.C. Dharma-Wardana, G.C. Aers, and J.M. Baribeau, *Appl. Phys. Lett.* 52, 2040 (1988)
- [126] P.X. Zhang, D.J. Lockwood, and J.M. Baribeau, *Can. J. Phys.* 70, 843 (1992); P.X. Zhang, D.J. Lockwood, H.J. Labbé, and J.M. Baribeau, *Phys. Rev. B* 46, 9881 (1992)
- [127] M. Trigo, A. Fainstein, B. Jusserand and V. Thierry-Mieg, *Phys. Rev. B* 66, 125311 (2002)
- [128] S.Y. Ren and Y.C. Chang, *Phys. Rev. B* 75, 212301 (2007)
- [129] A.-C. Hladky-Hennion, G. Allan, and M. de Billy, *J. Appl. Phys.* 98, 054909 (2005)
- [130] Fano, *Phys. Rev.* 124, 1866 (1961)
- [131] F. Ramos-Mendieta and P. Halevi, *J. Opt. Soc. Am. B* 14, 370 (1997)
- [132] S. Yang, J.H. Page, Z. Liu, M.L. Cowan, C.T. Chan, and P. Sheng, *Phys. Rev. Lett.* 88, 104301 (2002)
- [133] H. Kato, *Phys. Rev. B* 59, 11136 (1999)
- [134] S. Mizuno, *Phys. Rev. B* 63, 035301 (2000)
- [135] D. Zhao, W. Wang, Z. Liu, J. Shi, and W. Wen, *Physica B* 390, 159 (2007)
- [136] "Highlights in Condensed Matter Physics and Future Prospects" édité par L. Esaki (Plenum Press, New York, 1991)
-

- [137] "Photonic Band Gap Materials" édité par C. M. Soukoulis, (NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1996)
- [138] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. 58 2059 (1987)
- [139] S. John, Phys. Rev. Lett. 58 2486 (1987)
- [140] J-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J-M. Gérard, D. Maystre, and A. Tchelnokov, Photonic Crystals, Ed. Springer, 2005.
- [141] A. Haché and L. Poirier, Phys. Rev. E 65, 036608 (2002); J. N. Munday and W. Robertson, Appl. Phys. Lett. 80, 518 (2002)
- [142] M. del Mar Sanchez-Lopez, J. A. Davis, and K. Crabtree, Am. J. Phys. 71, 1314 (2003)
- [143] L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, J. O. Vasseur, and J. Zemmouri, Phys. Rev. B 60, 10628 (1999)
- [144] L. Poirier and A. Haché, Appl. Phys. Lett. 78, 2626 (2001)
- [145] E. L. Albuquerque and M. G. Cottam, Phys. Rep. 376, 225 (2003)
- [146] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, Phys. Rev. Lett. 53, 1951 (1984); A. I. Goldman, and R. F. Ketton, Rev. Mod. Phys. 65, 213 (1993)
- [147] R. Merlin, K. Bajema, and R. Clarke Phys. Rev. Lett. 55, 1768 (1985); K. Bajema and R. Merlin Phys. Rev. B 36, 4555 (1987)
- [148] M.L.H. Lahlaouti, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, M. Hammouchi, E.H. El Boudouti, A. Nougououi, and B. Kharbouch, Phys. Rev. B 63, 035312 (2001).
- [149] M. Buttiker and R. Landauer, Phys. Rev. Lett. 49, 1739 (1982); E.H. Hange J.A. Stovneng, Rev. Mod. Phys. 61, 917 (1989).
- [150] H.-W Lee, Phys. Rev. Lett. 82, 2358 (1999); T. Taniguchi, and M. Buttiker, Phys. Rev. B 60, 13814 (1999).
- [151] E. Macia, and F. Dominguez-Adame Phys. Rev. Lett. 76, 2957 (1996)
-

- [152] T. Fujiwara, M. Kohmoto, and T. Tokihiro Phys. Rev. B 40, 7413 (1989); C. M. Soukoulis and E. N. Economou Phys. Rev. Lett. 48, 1043 (1982)
- [153] Plus de détails pour le calcul de la densité d'états locale est donné dans la Ref.[12]
- [154] C. S. Ryu, G. Y. Oh, and M. H. Lee Phys. Rev. B 46, 5162 (1992); *ibid.* 48, 132 (1993)
- [155] M. Kohmoto, B. Sutherland, et C. Tang Phys. Rev. B 35, 1020 (1987); M. Kohmoto, J. R. Banvar Phys. Rev. B 34, 563 (1986)
- [156] D. Jin, and G. Jin Phys. Rev. B 71, 014212 (2005)
- [157] M. Scalora, R. J. Flynn, S. B. Reinhardt, et R. L. Fork, M. J. Bloemer, M. D. Tocci, C. M. Bowden, H. S. Ledbetter, J. M. Bendickson, et J. P. Dowling Phys. Rev. E 54, R1078 (1996); D. Tocci, M. Scalora, M. J. Bloemer, J. P. Dowling, et C. Bowden Phys. Rev. A 53, 2799 (1996)
- [158] D. Wiersma, R. Sapienza, S. Mujumdar, M. Colocci, M. Ghulinyan, and L. Pavesi J. Opt. A : Pure Appl. Opt. 7, S190 (2005)
- [159] M. L.H. Lahlaouti, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, M. Hammouchi, E. H. El Boudouti , A. Nougouai, and B. Kharbouch Phys. Rev. B 63, 035312 (2001)
- [160] J. N. Zhu, N. Liu, H. Zheng, and H. Chen, Opt. Commun. B 174, 139 (2000)
- [161] J.N. Munday and W.M. Roberston, Appl. Phys. Lett. 83, 1053 (2003).
- [162] N-h Liu , Y. He, W-g Feng, and X. Wu Phys. Rev. B 52, 11105 (1995); S. S. Kang Phys. Rev. B 65, 064401 (2002)
- [163] L. Chow, and K.H. Guenther, J. Opt. Soc. Am. A 10, 2231 (1993).
- [164] R.W. Peng, Y.M.Liu, X.Q. Huang, F. Qiu, Mu Wang, A. Hu, S.S. Jiang, D. Feng, L.Z. Ouyang and J. Zou, Phys. Rev. B 69, 165109 (2004).
- [165] S. Zhu, N. Liu, H. Zheng, and H. Chen, Opt. Commun. 174, 139 (2000).
- [166] P. Yeh, A. Yariv, and C. S. Hong, J. Opt. Soc. Am. A 67, 423 (1977).
- [167] P. Yeh, A. Yariv, and A. W. Cho, Appl. Phys. Lett. 32, 104 (1978).
-

- [168] W. Ng, P. Yeh, P. C. Chen, and A. Yariv, *Appl. Phys. Lett.* 32, 370 (1978).
- [169] A. A. Bulgakov and V. R. Koturn, *Opt. Spectrosc.* 56, 269 (1984).
- [170] Y. El Hassouani, E. H. El Boudouti, H. Aynaou, B. Djafari-Rouhani, and V. R. Velasco, *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.* 9, 308 (2007).
- [171] R.W. Peng, M. Wang, A. Hu, S.S. Jiang, and D. Feng, *Phys. Rev. B* 57, 1544 (1998).
- [172] C. Sibilìa, I.S. Nefedov, M. Scalora, and M. Bertolotti, *J. Opt. Soc. Am. B* 15, 1947 (1998).
- [173] X. Huang, Y. Wang, and C. Gong, *J. Phys. : Condens. Matter* 11, 7645 (1999).
- [174] F. Piechon, M. Benakli, and A. Jagannathan, *Phys. Rev. Lett.* 74, 5248 (1995).
- [175] J. W. Feng, G. J. Jin, A. Hu, S. S. Kang, S. S. Jiang, and D. Feng, *Phys. Rev. B* 52, 15312 (1995).
- [176] E. S. Zijlstra, A. Fasolino, and T. Janssen, *Phys. Rev. B* 59, 302 (1999).
- [177] R. W. Peng, G. J. Jin, M. Wang, A. Hu, S. S. Jiang, and D. Feng, *J. Phys. : Condens. Matter* 12, 5701 (2000).
- [178] Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1983).
- [179] Pour les articles de revues, voir J. L. McCauley, *Phys. Rep.* 189, 225 (1990) ; G. Paladin and A. Vulpiani, *Phys. Rep.* 156, 147 (1987).
- [180] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman, *Phys. Rev. B* 33, 1141 (1986).
- [181] P. Grassberger, R. Badii, and A. Politi, *J. Stat. Phys.* 51, 135 (1988).
- [182] A. B. Chabra and R. V. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* 62, 1327 (1989).
- [183] R. W. Peng, G. J. Jin, M. Wang, A. Hu, S. S. Jiang and Deng, *J. Phys. : Condens. Matter* 12, 5701 (2000).
- [184] C. G. Bezerra and M. G. Cottam, *Physica A* 309, 121 (2002).
-



## Résumé

Ce travail de thèse présente une contribution à l'étude de la propagation et la localisation des ondes acoustiques et électromagnétiques dans les cristaux phononiques et photoniques unidimensionnels.

Notre intérêt a porté principalement sur la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux multicouches périodiques de type solide-fluide et les ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes monomodes quasi-périodiques. L'objectif étant de chercher de nouveaux matériaux avec des bandes interdites larges et étudier l'effet de la présence des inhomogénéités (défaut) dans ces structures telles que : la surface libre, l'interface avec un substrat homogène ou l'existence d'une cavité. Ces résultats sont obtenus à partir d'un calcul analytique détaillé des fonctions de Green qui nous a permis de déterminer les relations de dispersion, les densités d'états locale et totale et les différents coefficients de transmission et de réflexion ainsi que les temps de phase correspondants.

Dans le cas des ondes acoustiques de polarisation sagittale dans les super-réseaux solide-fluide, nous avons mis en évidence l'existence et le comportement des modes de surface et d'interface ainsi qu'une règle générale sur l'existence de ces modes. Aussi, nous avons montré que ces systèmes peuvent présenter des gaps omnidirectionnels qui réfléchissent les ondes quelque soit l'angle d'incidence (miroirs acoustiques) ainsi qu'une transmission sélective à travers les modes de défaut et d'interface (filtres acoustiques)

Dans le cas des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes monomodes quasi-périodiques (de type Fibonacci) à base de câbles coaxiaux, nous avons mis en évidence certaines propriétés liées à ces systèmes telles que l'auto-similarité avec un facteur d'échelle dans le cas d'une seule séquence de Fibonacci. Aussi, il a été montré que ces systèmes peuvent présenter dans certaines régions de fréquences, des vitesses subluminiques et superluminiques. Dans le cas des séquences périodiques de Fibonacci, nous avons montré des propriétés liées aux bandes permises telles que la fragmentation des spectres de fréquences selon une loi en puissance ainsi que deux types de modes de surface. Les modes de volume et de surface dans ces structures peuvent présenter des comportements liés aux systèmes multifractals. Tous ces résultats sont obtenus à partir de la mesure de l'amplitude et la phase de la transmission à travers ces cristaux photoniques placés soit horizontalement entre deux guides soit verticalement sur un guide. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats théoriques.

**Mots-clés** : super-réseau, solide-fluide, guide d'onde, onde acoustique, onde électromagnétique, périodique, quasi-périodique, Fibonacci, surface, interface, défaut, fractal.