

n° d'ordre: 4012

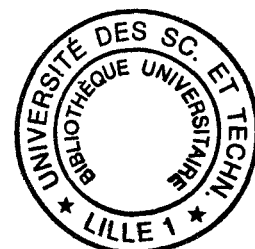
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques



présentée et soutenue publiquement par

ANNE-SOPHIE DERODE

le 17 septembre 2007

Titre

**APPROXIMATIONS DE LA
FIABILITE :
cas des systèmes à réparations différées
ou à composants vieillissants**

Directeur de thèse : Jean-Louis Bon

Jury :

Rapporteurs	James Ledoux
	Nikolaos Limnios
Examineurs	Christiane Cocozza
	Marc Bouissou
	Christophe Biernacki

REMERCIEMENTS

J'adresse mes plus vifs remerciements à Jean-Louis Bon et Marc Bouissou qui m'ont guidé tout au long de cette thèse avec une disponibilité de tous les instants.

Je tiens à remercier James Ledoux et Nikolaos Limnios qui, en leur qualité de rapporteurs, m'ont fait l'honneur d'examiner minutieusement ce travail, ainsi que Christiane Cocozza et Christophe Biernacki qui ont accepté de faire parti du jury.

Je remercie également pour leur accueil les membres du laboratoire Paul Painlevé de l'USTL ainsi que Laurent Magne, Chhary Khin-Yedid, Philippe Klein, Carole Duval et Léna Krissian, membres du département MRI d'EDF R&D.

En dernier lieu, je veux remercier mes anciens collègues du département MRI d'EDF R&D pour l'ambiance de travail particulièrement agréable dans laquelle j'ai pu évoluer. Je leur dois en grande partie le très bon souvenir que je garderai de ces trois années de thèse.

Table des matières

ANDREI ANDREEVICH MARKOV	9
1 INTRODUCTION	11
2 CONTEXTE DE L'ÉTUDE	15
2.1 Définitions et notations de base	15
2.2 Processus de Markov : propriétés, définitions	19
2.2.1 Propriété de Markov et homogénéité	19
2.2.2 Chaîne de Markov encastree	20
2.2.3 Taux de transition, matrice génératrice	21
2.2.4 Probabilité de transition et matrice de transition de la chaîne encastree	22
2.2.5 Probabilité de présence dans les états	23
2.2.6 Evolution du système	23
2.2.7 Méthodes classiques de résolution des équations de Kolmogorov	24
2.2.7.1 Méthode de développement en série	24
2.2.7.2 Méthode d'uniformisation	25
2.2.7.3 Méthode de l'approximation puissance	26
2.2.7.4 Méthode spectrale	26
2.2.7.5 Transformée de Laplace	26
2.2.8 Approche séquentielle	26
3 LES OUTILS DE NOUVELLE GÉNÉRATION	31
3.1 Les BDMP (Boolean logic Driven Markov Processes)	32
3.1.1 Les arbres de défaillances	32
3.1.2 Structure d'un BDMP	35
3.1.3 Différence entre un arbre de défaillances classique et un BDMP	36
3.2 Les algorithmes SN et SRI développés par EDF	38
3.2.1 L'algorithme SN (Séquences Normales)	38
3.2.2 L'algorithme SRI (Sans Retour à l'état Initial)	39
3.2.3 Problèmes rencontrés dans l'application de ces algorithmes	40
3.2.4 Approximation exponentielle MTTF	42
4 VIEILLISSEMENT ET APPROXIMATION EXPONENTIELLE	45
4.1 Fonction de structure cohérente - lien avec les notions de vieillissement	45
4.1.1 Fonction de structure	45

4.1.2	Fonction de structure cohérente	47
4.1.3	Pourquoi avoir choisi d'étudier les propriétés de vieillissement IFRA et NBU ?	49
4.2	Propriété IFR / DFR	53
4.2.1	Définition d'une distribution IFR / DFR	53
4.2.2	Conservation par assemblage des propriétés IFR et DFR	55
4.2.2.1	Structure série	55
4.2.2.2	Structure parallèle	55
4.2.2.3	Conservation par remise à neuf	56
4.2.2.4	Conservation par mélange	56
4.2.2.5	Structure cohérente	56
4.2.3	Comparaison de la fiabilité d'une durée de vie IFR avec l'approximation $MTTF$	57
4.3	Propriété IFRA / DFRA	58
4.3.1	Définition d'une distribution IFRA / DFRA	58
4.3.2	Conservation par assemblage	59
4.3.3	Pessimisme (optimisme) de l'approximation $MTTF$	59
4.4	Propriété NBU / NWU	61
4.4.1	Définition d'une distribution NBU / NWU	62
4.4.2	Conservation par assemblage	62
4.4.3	Pessimisme de l'approximation $MTTF$ dans le cas d'une durée de vie NBU	63
4.4.4	Optimisme de l'approximation $MTTF$ dans le cas d'une durée de vie NWU	65
4.4.5	Approche de l'intervalle	65
4.5	Comparaison entre les différentes propriétés de vieillissement	67
5	VIEILLISSEMENT POUR LES SYSTÈMES MARKOVIENS ET APPLICATIONS AUX BDMP	69
5.1	Cas général des processus de Markov utilisés en fiabilité	69
5.1.1	Espace d'états totalement ordonné	69
5.1.2	Espace d'états partiellement ordonné	72
5.1.3	Applications des théorèmes	75
5.1.3.1	Application du théorème 5.1.5 : systèmes en "strates"	75
5.1.3.2	Exemple d'application du théorème 5.1.3	76
5.2	Etude d'un système particulier	78
5.2.1	T , τ_0 et τ_1 : lois exponentielles	79
5.2.1.1	Risque non nul de refus de démarrage lors du transfert du processus 0 au processus 1	80
5.2.1.2	Démarrage assuré lors du transfert du processus 0 au processus 1	84
5.2.2	τ_0 et τ_1 : lois exponentielles et T : loi quelconque	86
5.2.2.1	Risque non nul de refus de démarrage lors du transfert du processus 0 au processus 1	87

5.2.2.2	Démarrage assuré lors du transfert du processus 0 au processus 1	90
5.2.3	τ_0 , τ_1 et T : lois quelconques	93
5.3	Conclusion	104
6	APPROXIMATION SRIA	107
6.1	Principe et calcul de l'approximation	107
6.2	Exemples	111
6.2.1	Amorces avec réparations possibles	111
6.2.2	Amorces sans réparations possibles	113
6.3	Conclusion	114
7	PRISE EN COMPTE DE CERTAINS ÉTATS LENTS : L'APPROXIMATION SRRI	115
7.1	Principe et calcul de l'approximation	115
7.2	Exemples	120
7.2.1	Application à un BDMP - Comparaison avec l'"approximation exponentielle $MTTF$ "	120
7.2.2	Comparaison avec l'approximation SRIA	122
7.3	Conclusion	123
8	APPROXIMATION "LENT-RAPIDE SANS BOUCLE"	125
8.1	Préliminaires : définitions liées à l'approximation	125
8.1.1	États lents/rapides	125
8.1.2	Séquences bouclées/non bouclées	127
8.2	Approximation "Lent-Rapide"	129
8.2.1	Motivation	129
8.2.2	Technique d'approximation	130
8.3	Principe et calcul de la nouvelle approximation	135
8.3.1	Principe	135
8.3.2	Définitions et approche : Construction du processus réduit	137
8.3.2.1	Probabilité de retour sans boucle dans l'ensemble $\mathcal{L}$	137
8.3.2.2	Chaîne des états lents	138
8.3.2.3	Approximation de la matrice des taux de transition des états lents	140
8.3.2.4	Récapitulatif	140
8.3.2.5	Probabilité de présence dans les états du processus réduit	141
8.3.3	Lien entre $\tilde{X}$ et X	142
8.4	Pessimisme de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle"	147
8.4.1	Conservatisme pour les états absorbants	147
8.4.2	Exemple de résultat non pessimiste pour les états non absorbants	148
8.5	Etude asymptotique	149
8.5.1	Cas des états absorbants	150
8.5.2	Cas des états non absorbants	151
8.6	Majoration de l'erreur à temps fini	152
8.6.1	Résultat théorique	152

8.6.2	Application au résultat théorique - Calcul pratique	156
8.6.2.1	Calcul de $\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}})$ et $\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})$	156
8.6.2.2	Choix optimal de la valeur de n	157
8.6.3	Approche différente - Cas particulier	159
8.7	Mise en oeuvre de l'algorithme	161
8.7.1	Principe général de l'algorithme : description du fonctionnement et mise en oeuvre informatique	161
8.7.1.1	Fonctions annexes	168
8.7.2	Logiciel de calcul	169
8.8	Exemples	170
8.8.1	Système de 4 composants	171
8.8.2	Système comprenant une boucle "forcée"	174
8.8.3	Système modélisé par un BDMP	175
8.9	Conclusion	177
9	CONCLUSION	179
	BIBLIOGRAPHIE	181
	NOTATIONS	187
	INDEX	188

ANDREI ANDREEVICH MARKOV (1856-1922)



Né le 14 juin 1856 à Razian, A. A. Markov était un célèbre mathématicien russe. Issu de la famille d'un petit fonctionnaire du gouvernement, il a fait ses études à l'université de Saint-Petersbourg et reçu une médaille d'or pour son mémoire sur l'intégration des équations différentielles par la méthode des fractions continues (1878). En 1874, il devint le disciple de Pafnouti Lvovitch Tchebychev. A l'âge de 30 ans, A. A. Markov devint Professeur à l'Université de Saint-Petersbourg ainsi qu'un membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.

Il publia plus de 120 papiers scientifiques dans le domaine de la théorie des nombres, des équations différentielles, la théorie des probabilités et des statistiques. Plusieurs de ses papiers ont été consacrés à un nouveau formalisme de modélisation de sys-

tèmes : les chaînes de Markov. Ceux-ci peuvent représenter les prémices de la théorie du calcul stochastique. Beaucoup de problèmes fondamentaux de la science et de la technologie modernes ne seraient pas résolus sans ses contributions, ce qui explique que ces chaînes portent son nom. C'est en 1926, juste 20 ans après ses découvertes initiales sur le sujet, que l'expression "chaîne de Markov" est utilisée pour la première fois dans un papier scientifique écrit par le mathématicien russe S. N. Bernstein.

Grand homme à la large ouverture d'esprit, il s'est également intéressé à la poésie et l'a étudiée à l'Université.

Il est décédé le 20 juillet 1922 à Saint-Petersbourg.

Chapitre 1

INTRODUCTION

Les processus de Markov sont fréquemment utilisés pour modéliser des systèmes reconfigurables et réparables, comme par exemple les alimentations électriques. Ils permettent de traduire le comportement d'un système (le comportement individuel de chaque composant et les dépendances entre eux), du fonctionnement parfait à la panne, et ceci beaucoup plus explicitement que des modèles statiques. Ils sont donc nécessaires dans le domaine des études de fiabilité.

Pour modéliser des systèmes de plus en plus complexes, EDF a développé un nouveau formalisme : les BDMP (*Boolean logic Driven Markov Processes*). Ils permettent à l'analyste de combiner dans le même paradigme des concepts issus des arbres de défaillance et des graphes de Markov. Cela permet de modéliser des systèmes dynamiques complexes de manière conviviale avec un traitement très puissant grâce à une réduction importante de la combinatoire.

Afin d'améliorer la qualité, la rapidité et l'accessibilité des études de sûreté de fonctionnement, EDF a également développé le logiciel KB3. Ce logiciel permet de construire automatiquement les modèles fiabilistes de type structurel (arbres de défaillance, systèmes d'équations booléennes,...) ou comportemental (graphes de Markov, modèles permettant une simulation de Monte-Carlo,...), relatifs à l'étude d'un système à partir d'une description graphique du synoptique du système, d'une description de ses missions, et d'une base de connaissances générique écrite dans le langage spécifique de modélisation FIGARO, développé également à EDF. L'outil de quantification des modèles markoviens produits par KB3 est le logiciel FIGSEQ. A partir d'une saisie graphique faite sous KB3, les données d'entrée de FIGSEQ sont générées. FIGSEQ comprend deux algorithmes d'exploration : l'algorithme SN (*Séquences Normales*) et SRI (*Sans Retour à l'état Initial*). Ces deux algorithmes permettent d'évaluer, entre autres, la défiabilité (complémentaire de la fiabilité à 1) d'un système sur une période de temps $[0; t]$. D'une manière générale, l'algorithme SN est performant (dans le sens où son encadrement est fin) pour des systèmes non réparables et SRI, pour des systèmes réparables "standards" (dès qu'un composant tombe en panne, la réparation débute).

Dans ce document, nous nous intéressons à une classe de systèmes que nous rencon-

trons de plus en plus souvent : les systèmes dits "à réparations différées". Ce sont ceux pour lesquels le réparateur n'intervient pas dès la première défaillance, soit parce qu'elle est indétectable, soit parce qu'on estime que la conception est suffisamment redondante pour que l'on puisse se permettre d'attendre une défaillance supplémentaire avant d'intervenir, ceci afin de diminuer les coûts d'exploitation. Mais ce sont aussi les systèmes pour lesquels le vieillissement de certains composants est modélisé par un processus de Markov : l'approximation de leur durée de vie vieillissante est représentée par une loi des Phases. La figure suivante illustre un exemple de ce type de loi :

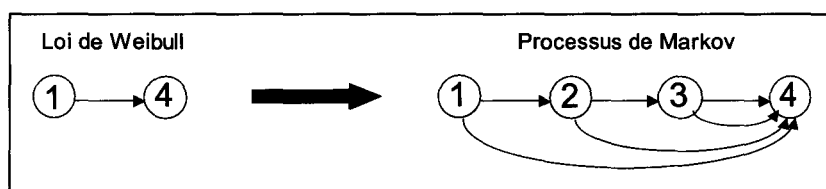


FIG. 1.1 – Approximation d'une loi de Weibull par une loi des Phases

Pour ces systèmes "intermédiaires", l'expérience montre que l'approximation SRI et la valeur pessimiste de SN sont beaucoup trop pessimistes et ne peuvent être utilisées dans les études appliquées.

Ainsi l'objectif de l'étude est de déterminer une approximation de la fiabilité pessimiste et utilisable lorsque les algorithmes SN et SRI ne sont pas performants et plus particulièrement pour ces systèmes intermédiaires. Pour cela, nous avons exploré différentes pistes :

- Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'approximation exponentielle obtenue par la fonction qui à $t \geq 0$ associe la valeur $\exp(-t/MTTF)$ ¹. De nombreux exemples nous ont montré l'efficacité de cette approximation : elle est beaucoup plus précise que celles obtenues par les algorithmes SN ou SRI dans une gamme de temps qui est celle d'intérêt (c'est à dire tant que la fiabilité reste proche de 1) tout en ayant un caractère pessimiste. Celui-ci est assuré si la loi du temps de défaillance du système est vieillissante. C'est ce qui nous a amenés à nous intéresser aux propriétés de vieillissement et plus particulièrement aux propriétés NBU (*New Better than Used*) et IFRA (*Increasing Failure Rate in Average*). Mais nous avons également pu mettre en évidence les difficultés à démontrer en théorie son pessimisme. De ce fait, nous avons aussi recherché des conditions assurant son optimisme, et des exemples de systèmes où l'utilisation de l'approximation *MTTF* est impossible.
- Dans un deuxième temps, notre attention s'est portée sur différents modes de calcul d'approximations dans un contexte plus général, c'est à dire sans imposer des

¹Par la suite, cette fonction sera appelée : "approximation exponentielle *MTTF*".

conditions autres que les réparations différées sur les systèmes :

- L'approximation SRIA [10] : des exemples ont montré son efficacité pour des temps de mission proches de l'origine ou pour des systèmes dont les états sans réparation possible sont des "amorces" (états atteignables par une seule transition à partir de l'état initial).
- L'approximation SRRI (*Sans Retour Rapide à l'état Initial*) : cette approximation prend en compte le temps passé dans l'état initial, mais aussi celui passé lors des retours longs, c'est à dire ceux qui passent par un état dans lequel le système passe beaucoup de temps (sans réparation).
- L'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle". Cette approximation repose sur l'approximation "Lent - Rapide" [42] mise en évidence en 1998. L'originale est très performante, mais difficile à calculer explicitement. En effet, il est indispensable que la taille ou la complexité de la matrice des taux de transition soit suffisamment réduite pour permettre son stockage et différents calculs matriciels. Ces difficultés ont pu être contournées et nous avons pu simplifier ces calculs en utilisant la méthode de l'approximation SRI sur les différents états lents.

Chapitre 2

CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Dans cette partie, sont présentés les différentes définitions, notations, propriétés ou encore résultats nécessaires à l'étude des modèles markoviens en fiabilité.

Le lecteur pourra se reporter aux ouvrages [9], [21], [22], ou encore [27].

On se place dans un espace de probabilité Ω représentant l'espace des observations. Dans ce rapport, la probabilité d'un événement et l'espérance d'une variable aléatoire sont respectivement notées $\mathbb{P}(\cdot)$ et $\mathbb{E}(\cdot)$.

2.1 Définitions et notations de base

Nous considérons un système de n composants $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ où chaque composant c_i ($1 \leq i \leq n$) a un niveau de dégradation à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable nommé ξ_i .

Le fonctionnement du système est donc décrit par un processus stochastique¹ $X = (X(t))_{t \geq 0}$ à temps continu et à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable $\xi = \otimes \xi_i$

$$\forall t \geq 0, \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

¹Un processus stochastique à temps T et à valeurs dans ξ est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans ξ .

L'ensemble T représente le temps et peut être par exemple :

- $\mathbb{N}$ (on parle alors de processus à temps discret unidimensionnel)
- $\mathbb{R}$ (processus à temps continu unidimensionnel)
- $\mathbb{N}^p$, $p = 2, 3, \dots$ (processus à temps discret multidimensionnel).

L'ensemble mesurable ξ est l'espace des états et peut être par exemple, $\mathbb{N}$ (on parle alors de processus univarié) ou $\mathbb{N}^p$, $p = 2, 3, \dots$ (processus multivarié).

où $x_i(t)$ désigne l'état du composant i à l'instant t .

Remarque

Souvent le niveau de dégradation du composant c_i ($1 \leq i \leq n$) est à valeurs dans $\{0, 1\}$: à l'instant $t \geq 0$, $x_i(t) = 1$ si le composant est opérationnel et $x_i(t) = 0$ sinon. L'ensemble des valeurs possibles de X est donc une partie de $\{0, 1\}^n$. Dans un cas plus général, ce sera une partie de $\mathbb{N}^n$ que nous indexerons sur $\mathbb{N}$ pour plus de simplicité dans les notations.

ξ peut être décomposé en deux sous-ensembles :

- ξ^+ : l'ensemble des états de bon fonctionnement
- ξ^- : l'ensemble des états de panne.

$$\xi = \xi^+ \cup \xi^-$$

Définition 2.1.1

Un état i est dit **absorbant** si :

$$X(t) = i \Rightarrow \forall t' \geq t, X(t') = i$$

Définition 2.1.2

La **durée de vie** τ du système (ou le temps de bon fonctionnement) s'interprète comme le temps d'entrée dans l'ensemble ξ^- :

$$\tau = \inf \{t > 0 : X(t) \in \xi^-\}.$$

Par convention, si $X(0) \in \xi^-$, la durée de vie est supposée nulle.

Définition 2.1.3

La **fiabilité** R du système à l'instant $t \geq 0$ est la probabilité que le système soit en fonctionnement sur tout l'intervalle de temps $[0; t]$:

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(X(s) \in \xi^+, \forall s \in [0; t]) \\ &= \mathbb{P}(\tau \geq t). \end{aligned}$$

La fiabilité est l'un des attributs de la sûreté de fonctionnement. Elle correspond à la continuité du service que le système doit fournir à ses utilisateurs. La fiabilité est également définie comme l'aptitude d'un système à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée.

Rappelons que la défiabilité au temps $t \geq 0$ est le complémentaire à 1 de la fiabilité au temps t :

$$\bar{R}(t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0; t], X(s) \in \xi^-)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(t) &= \mathbb{P}(\tau < t) \\ &= 1 - R(t).\end{aligned}$$

La défiabilité représente donc la probabilité que le matériel ait une panne pendant l'intervalle $[0; t]$ donné.

Hypothèses par défaut (prises dans tout le rapport)

Afin de définir au mieux les différentes notions ayant un lien avec la fiabilité, plusieurs hypothèses sont faites.

En effet, nous supposons que la fiabilité :

- possède un nombre fini ou dénombrable d'atomes
- est continue sur tout l'espace temps sauf sur les atomes
- est dérivable sur cet même espace.

Définissons t_0 , comme étant le plus petit t tel que $R(t) = 0$:

$$t_0 = \inf\{t : R(t) = 0\}.$$

Nous voulons définir la durée de survie comme le temps d'attente de la panne à partir de t sachant que le système a bien fonctionné jusqu'à t :

Définition 2.1.4

La durée de survie τ_t du système à une date $t < t_0$ est une variable aléatoire positive définie par sa fiabilité au temps $x \geq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_t \geq x) &= \mathbb{P}(\tau - t \geq x | \tau > t) \\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)}.\end{aligned}$$

La durée de survie est également appelée *durée de vie résiduelle*.

Par convention, la durée de survie est nulle au-delà de t_0 .

C'est une notion très importante dans les études de sûreté de fonctionnement. En effet, l'étude de sa loi permet de conclure sur le caractère vieillissant du système. De plus, elle est reliée à d'autres notions, comme le taux de défaillance :

Soit $t > 0$, si nous examinons le comportement de la fonction qui à tout $x \geq 0$ associe $\mathbb{P}(\tau_t < x)$, lorsque x tend vers 0, nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\tau_t < x) \cong x \frac{f(t)}{R(t)} + o(x)$$

où $o(x)$ est infiniment petit par rapport à x .

Le coefficient de proportionnalité ainsi obtenu est appelé "taux de défaillance". Il est donc défini comme suit :

Définition 2.1.5

Le taux de défaillance de la variable τ est la fonction qui à $t < t_0$ associe :

$$\begin{aligned}h(t) &= -(\log(R(t)))' \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t+x)}{xR(t)}.\end{aligned}$$

Voici une autre définition importante en fiabilité : le "*MTTF*" (Mean Time To Fai-

lure) :

Il représente la durée moyenne de bon fonctionnement du système, nous avons donc :

$$MTTF = \mathbb{E}(\tau)$$

Cette valeur se calcule à partir de la fiabilité :

Définition 2.1.6

L'espérance de la durée de vie est le temps moyen de panne ou **MTTF** (*Mean Time To Failure*) :

$$MTTF = \int_0^\infty R(u) du.$$

Dans la suite, il sera notée m .

2.2 Processus de Markov : propriétés, définitions

2.2.1 Propriété de Markov et homogénéité

En théorie des probabilités, il est dit qu'un processus stochastique vérifie la propriété markovienne si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné l'instant présent.

Un processus qui possède cette propriété est appelé "processus de Markov", ce qui s'écrit :

Définition 2.2.1 propriété forte de Markov

Le processus X est dit *markovien* (ou de Markov) si pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^{+2}$ et $j \in \xi$, on a :

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | (X(u); u \leq t)) = \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t))$$

Cette égalité signifie que le processus oublie son comportement passé. Seul l'état en cours à la date t suffit pour exprimer le futur à partir de cette date.

Toute évolution du système peut donc être déterminée à partir de la distribution initiale donnant l'état du système à la date 0. C'est une distribution p_j définie sur l'espace d'états ξ telle que :

$$p_j = \mathbb{P}(X(0) = j), \quad p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1$$

Définition 2.2.2

Le processus de Markov X est dit homogène si la probabilité de passage de l'état i vers j à la date $t \geq 0$: $\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t) = i)$, $\forall s \geq 0$ ne dépend pas de t :

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t) = i) = \mathbb{P}(X(s) = j | X(0) = i)$$

Dorénavant, nous supposons que X est un processus de Markov homogène. Le caractère markovien et homogène du système a pour conséquence que le temps de séjour dans tout état e a une distribution exponentielle et que les lois du temps d'accès à toute sous-partie $\varsigma \subset \xi$ à la date $t \geq 0$ conditionnés par l'événement " $X(t) = i$ " sont identiques pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Chaîne de Markov encadrée

La version à temps discret des notions définies dans le paragraphe 2.2.1 donne la définition des "chaînes de Markov" :

Définition 2.2.3

Un processus discret $X_0, X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans ξ est une chaîne de Markov si :

$$\forall j \in \xi \text{ et } \forall m \geq 0,$$

$$\mathbb{P}(X_{m+1} = j | X_0, \dots, X_m) = \mathbb{P}(X_{m+1} = j | X_m).$$

A partir de là, on peut définir la notion de "chaîne de Markov encadrée" :

Définition 2.2.4

Si à la place du processus à temps continu $(X(t))_{t \geq 0}$, nous observons la suite $X_0, X_1, \dots$, des états successifs visités par ce processus, nous constituons alors un processus à temps discret qui est une chaîne de Markov.

Cette chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ est appelée chaîne encastrée du processus $(X(t))_{t \geq 0}$.

Dans certains ouvrages, cette chaîne est aussi appelée chaîne immergée du processus $(X(t))_{t \geq 0}$.

Remarque

Si le processus de Markov est homogène, il en sera de même pour la chaîne encastrée.

2.2.3 Taux de transition, matrice génératrice

Pour un processus de Markov homogène, la probabilité de passage de l'état i au temps $t \geq 0$ à j au temps $t + s \geq 0$, pour tous t et s positifs, est indépendante de t (conséquence directe du caractère homogène du processus).

Cette fonction s'écrit :

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t) = i) = a_{ij}s + o(s)$$

Le nombre a_{ij} ($i \neq j$) est appelé taux de transition de l'état i vers j .

Définition 2.2.5

La matrice des taux de transition $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ est définie par :

- les taux de transition si $i \neq j$ et par
- $a_{ii} = -\Lambda_i = -\sum_{k \neq i} a_{ik}$.

Cette matrice est également appelée matrice génératrice.

A partir de cette définition, on peut définir le temps de séjour moyen dans chaque état du processus :

Propriété 2.2.1

Le temps moyen de séjour dans un état $i \in \xi$ est égal à :

$$\frac{1}{\Lambda_i}.$$

Remarque

Un processus de Markov est entièrement défini par sa chaîne encadrée et le temps de séjour moyen dans chaque état.

2.2.4 Probabilité de transition et matrice de transition de la chaîne encadrée

Définition 2.2.6

Pour tout $(i, j) \in \xi^2$, la probabilité de transition de l'état i vers j de la chaîne encadrée est notée :

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \frac{a_{ij}}{a_i} \end{aligned}.$$

Si i est un état non absorbant, $q_{ii} = 0$.

Sinon on pose $q_{ii} = 1$ par convention pour avoir dans tous les cas $\sum_{j \neq i} q_{ij} = 1$ (puisque si i est absorbant, nous avons $q_{ij} = 0$, pour tout état $j \neq i$).

On appelle matrice de transition de la chaîne, la matrice $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j}$ définie par les probabilités de transition.

2.2.5 Probabilité de présence dans les états

Définition 2.2.7

Pour tout $(i, j) \in \xi^2$, la probabilité de passage de i à j en un temps $t \geq 0$ est :

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i)$$

Quand s tend vers 0, la probabilité de passage s'écrit :

$$p_{ij}(s) = \begin{cases} a_{ij}s + o(s) & \text{si } i \neq j \\ 1 - a_i s + o(s) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le vecteur-ligne $\mathbf{P}(t) = (p_j(t))_{j=0,1,\dots}$ représentant les probabilités de présence dans chacun des états à la date t , est défini par :

$$p_j(t) = p_{0j}(t), \quad \text{si l'état initial du système est l'état 0.}$$

Le but de cette étude est de déterminer une approximation "convenable" de ce vecteur-ligne et plus particulièrement des différents $p_{0j}(t)$, pour t variant et j un état absorbant, afin d'obtenir une évaluation de la défiabilité du système.

2.2.6 Evolution du système

Désignons par $\mathbf{P}_0$ la valeur initiale du vecteur-ligne $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0)$$

Pour tout $j \in \xi$, et tous t, s positifs, la probabilité de présence en j à la date $t + s$ peut être conditionnée par la valeur de X à la date t :

$$p_j(t + s) = \sum_{i \in \xi} \mathbb{P}(X(t + s) = j | X(t) = i) p_i(t)$$

$$\mathbf{P}(t + s) - \mathbf{P}(t) = s\mathbf{P}(t)\mathbf{A} + o(s)$$

En dérivant par rapport à s , nous obtenons que $\mathbf{P}(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}$$

où $\mathbf{P}'(t)$ est le vecteur dérivé de $\mathbf{P}(t)$

Ainsi, $\mathbf{P}(t)$ est la solution unique du système :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} \end{cases}$$

Ce système différentiel est connu sous le nom équations de Kolmogorov avant.

La solution s'exprime à partir d'une exponentielle de la matrice des taux de transition :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}_0 \exp(t\mathbf{A}) \\ &= \mathbf{P}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k \end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire que le comportement du processus X est décrit entièrement par son vecteur initial et sa matrice des taux de transition.

2.2.7 Méthodes classiques de résolution des équations de Kolmogorov

Pour connaître l'évolution d'un système markovien, nous devons calculer l'expression $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \exp(t\mathbf{A})$

Plusieurs méthodes de résolution de processus de Markov dites "usuelles" existent. L'objectif de ce paragraphe est de les recenser et de mettre en évidence les problèmes rencontrés lors de leur application [57].

2.2.7.1 Méthode de développement en série

Cette méthode consiste à développer en série l'exponentielle en calculant les puissances successives de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k + r(n)$$

où $r(n)$ est l'erreur commise en remplaçant la valeur de l'exponentielle par cette somme. Elle dépend du nombre n de termes pris en compte dans le développement.

La convergence sera d'autant plus rapide que l'écart entre les taux de défaillance et de réparation est faible. Or dans notre étude, les systèmes considérés sont à taux disparates. Nous n'obtiendrons donc pas de résultats convenables avec cette méthode.

2.2.7.2 Méthode d'uniformisation

Cette méthode de calcul a été introduite par Gross et Miller en 1984 [29]. Elle est reconnue comme étant la mieux adaptée aux processus de Markov. C'est une amélioration de la méthode précédente : au lieu de chercher directement le vecteur $\mathbf{P}(t)$, on cherchera le vecteur $\mathbf{q}(t)$ défini par

$$\mathbf{q}(t) = \exp(at)\mathbf{P}(t)$$

$$\text{où } a = \max_{i \in \xi} a_i$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système différentiel suivant :

$$q'(t) = a.q(t)\mathbf{A}^*$$

$$\text{où } \mathbf{A}^* = \mathbf{I} + \frac{1}{a}\mathbf{A}.$$

La solution est obtenue en appliquant la méthode du développement en série. La convergence sera plus rapide puisque les coefficients de la matrice $\mathbf{A}^*$ sont inférieurs à 1.

D'après [9], l'erreur commise avec cette méthode peut être majorée par :

$$r(n) \leq \left(1 - \frac{at}{n+2}\right)^{-1} \frac{(at)^{n+1} e^{-at}}{(n+1)!}$$

A partir de ce résultat, Dyer [25] propose un ordre de grandeur du nombre d'itérations nécessaires lorsque l'on souhaite une erreur inférieure à ϵ :

$$n = [at] + (4 - \ln \epsilon) \frac{1 + \sqrt{at}}{2}$$

où $[.]$ est la partie entière.

Ainsi, plus le processus sera raide, plus le nombre d'itérations sera important. Cette méthode n'est donc pas valable pour notre étude.

2.2.7.3 Méthode de l'approximation puissance

Cette méthode repose sur le résultat limite :

$$e^{-\mathbf{A}t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - \mathbf{A}t/n)^n$$

en prenant comme approximation de l'exponentielle :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}t/n)^n$$

L'approximation est satisfaisante lorsque n est suffisamment grand ce qui rend le temps de calcul très important

2.2.7.4 Méthode spectrale

A partir du spectre de $\mathbf{A}$, la méthode consiste à déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres et d'effectuer une réduction de $\mathbf{A}$ (diagonalisation) afin de déterminer l'exponentielle de $\mathbf{A}t$.

Cependant, cette méthode n'est valable que pour une matrice de petite taille. L'obtention des valeurs propres est problématique pour des systèmes complexes.

2.2.7.5 Transformée de Laplace

Au lieu de déterminer explicitement l'expression du vecteur d'état $\mathbf{P}(t)$, la méthode consiste à déterminer sa transformée de Laplace, puis à reconstituer la distribution. Il est clair que cette méthode n'est utilisable que pour des petits systèmes et en aucun cas pour ceux étudiés ici.

2.2.8 Approche séquentielle

Dans la partie "Approximation "Lent-Rapide Sans Boucle"", nous serons amenés à analyser le processus X en énumérant les différentes séquences. C'est pourquoi nous introduisons quelques définitions et notations à ce sujet.

Définition 2.2.8

Etant donné un entier $k \geq 1$, on appelle séquence de longueur k du processus X tout k -uplet $s = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) \in \xi^k$ tel que :

$$q_{\eta_0\eta_1} q_{\eta_1\eta_2} \dots q_{\eta_{k-2}\eta_{k-1}} > 0$$

Cette quantité est la probabilité de la séquence.

Notations :

- Etant donnée une séquence $s = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) \in \xi^k$, la probabilité que les k premiers états visités par le processus soient ceux de s est :

$$\begin{aligned} P(s) &= \mathbb{P}(X_0 = \eta_0, X_1 = \eta_1, \dots, X_{k-1} = \eta_{k-1}) \\ &= p_{\eta_0} q_{\eta_0\eta_1} q_{\eta_1\eta_2} \dots q_{\eta_{k-2}\eta_{k-1}} \end{aligned}$$

- Pour $k \geq 1$, notons T_k l'instant de la $k^{\text{ième}}$ transition du processus (avec $T_0 = 0$) et désignons par s une séquence de longueur k :
 - Si $k \geq 2$, la loi de T_{k-1} conditionnée par l'événement " $s = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$ " est celle de la somme de $k - 1$ variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres $a_{\eta_0}, a_{\eta_1}, \dots, a_{\eta_{k-2}}$.
On note f_s la densité de probabilité de cette loi conditionnelle.
 - La loi de T_k conditionnée par l'événement " $s = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$ " est celle de la somme de k variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres $a_{\eta_0}, a_{\eta_1}, \dots, a_{\eta_{k-1}}$.
On note g_s la densité de probabilité de cette loi conditionnelle.
- Pour finir, désignons par :
 - S l'ensemble des séquences menant de l'état initial à la panne,
 - S_j l'ensemble fini ou dénombrable de séquences dont le dernier état est j ,
 - S^* , l'ensemble des séquences non bouclées menant de l'état initial à la panne.

Proposition 2.2.1

Soit $j \in \xi$ et $t \geq 0$.

Si j est un état non absorbant, la probabilité de présence en j au temps t s'écrit sous la forme séquentielle suivante :

$$p_j(t) = p_j(0) \exp(-a_j t) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in S_j \\ |s|=k}} P(s) \int_0^t f_s(t-u) \exp(-a_j u) du$$

Si l'état j est absorbant :

$$p_j(t) = p_j(0) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in S_j \\ |s|=k}} P(s) F_s(t) \quad (2.1)$$

où F_s est la fonction de répartition associée à la densité f_s .

Preuve :

La démonstration est celle décrite dans [42].

Soit $S(t)$, la séquence d'états visités par le processus jusqu'à la date t (chaîne encadrée de X). D'après le théorème des probabilités totales² :

$$\begin{aligned} p_j(t) &= \mathbb{P}(X(t) = j) \\ &= \sum_{s \in S_j} \mathbb{P}(X(t) = j \cap S(t) = s). \end{aligned}$$

En introduisant la séquence des n premiers états visités V_n et les instants de transition T_{n-1} et T_n (qui correspondent à des temps d'arrêt du processus : T_{n-1} est le temps d'entrée dans l'état j et T_n est le temps de sortie de cet état) :

²**Loi de la probabilité totale :**

Soit $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbf{N}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B , un événement. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i).$$

$$p_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{S}_j \\ |s|=k}} \mathbb{P}(V_n = s \cap T_{n-1} \leq t \cap T_n > t).$$

Or d'après le caractère markovien du processus, on a pour les séquences de longueur supérieure à 2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t \cap T_n > t | V_n = s) &= \int_0^t \mathbb{P}(T_{n-1} \in t - u + du \text{ et } T_n > t | V_n = s) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(T_{n-1} \in t - u + du \text{ et } T_n - T_{n-1} > u | V_n = s) \\ &= \int_0^t f_s(t - u) \exp(-a_j u) du. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

LES OUTILS DE NOUVELLE GÉNÉRATION

Afin d'améliorer la qualité, la rapidité et l'accessibilité des études de sûreté de fonctionnement, EDF a développé différents outils :

- Les BDMP (*Boolean logic Driven Markov Processes*) :

Introduits en 2002, les BDMP ([15], [17]) sont un nouveau formalisme pour faciliter la construction et la résolution des modèles markoviens de grande taille. Il s'agit d'un modèle markovien optimisé de manière à réduire considérablement la combinatoire du problème. Ce modèle est spécifié par une représentation graphique très proche des arbres de défaillances, donc bien plus facile à maîtriser que les graphes de Markov ou les réseaux de Petri. Un BDMP permet de définir un graphe markovien "localement", par la possibilité de calculer tous les états successeurs d'un état donné, avec les taux de transition qui y mènent. Une telle définition se prête à des méthodes de calcul originales, fondées sur l'exploration de séquences dans le graphe des états. Ce type de calcul a l'avantage de ne pas requérir la construction plus ou moins exhaustive du graphe (avec les problèmes liés à la limitation en place mémoire qui en résultent) et de donner des résultats qualitatifs très utiles pour valider les modèles et interpréter les résultats obtenus.

- Le logiciel KB3 :

Ce logiciel développé par EDF depuis le début des années 90, permet de construire automatiquement les modèles fiabilistes de type structurel (comme les arbres de défaillance, systèmes d'équations booléennes, ...) ou comportemental (graphes de Markov, modèles permettant une simulation de Monte-Carlo, ...). Les données d'entrée de KB3 pour l'étude d'un système sont une description graphique du synoptique du système, une description de ses missions, et une base de connaissances générique écrite dans un langage spécifique de modélisation (FIGARO), développé également au sein d'EDF. L'outil de quantification des modèles markoviens produits par KB3 est le logiciel FIGSEQ. A partir d'une saisie graphique faite sous KB3, les données d'entrée de FIGSEQ sont générées. FIGSEQ comprend deux algorithmes d'exploration : l'algorithme SN ("Séquences Normales") et SRI ("Sans Retour à l'état Initial").

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord brièvement les BDMP. Dans une deuxième partie, nous développons le principe des algorithmes SN et SRI. Enfin, nous terminons par un exemple de contre-performance de ces deux algorithmes et nous introduisons l'approximation exponentielle MTTF.

3.1 Les BDMP (Boolean logic Driven Markov Processes)

Partant d'un modèle bien connu qui est l'arbre de défaillances, on peut donner le principe simplifié du formalisme des BDMP avec les deux points suivants :

- 1) Il permet de remplacer des modèles simples de feuilles d'un arbre de défaillances classique par des Processus de Markov quelconques. Les états de ces processus sont classés en deux catégories. Suivant la catégorie à laquelle appartient l'état d'une feuille à un instant donné, "l'événement" correspondant à cette feuille est considéré comme VRAI ou FAUX.
- 2) Il permet de remplacer l'indépendance totale des feuilles d'un arbre de défaillances par des dépendances simples. Chaque feuille a deux modes "sollicité" et "non sollicité", correspondant à deux processus de Markov différents. Le choix du mode dans lequel une feuille se trouve à un instant donné est déterminé par la valeur (VRAI ou FAUX) d'un ensemble de feuilles. Les transitions entre ces deux modes définissent éventuellement des états instantanés dans lesquels on peut déclencher des transitions instantanées probabilisées (pour modéliser par exemple des refus de démarrage).

3.1.1 Les arbres de défaillances

La technique des arbres de défaillance est utilisée dans les études de fiabilité et de sûreté de fonctionnement depuis les années 60. Basé sur une représentation graphique, un arbre de défaillance met en évidence les relations de cause à effet. Il se compose de 3 ensembles d'événements :

- l'événement redouté
C'est l'événement indésirable pour lequel nous faisons l'étude de toutes les causes qui y conduisent. Cet événement est unique pour un arbre de défaillance et se trouve au sommet. La construction de l'arbre de défaillance permet de le décrire comme une combinaison d'événements intermédiaires ou élémentaires.
- l'ensemble des événements intermédiaires
Ce sont des événements à définir comme l'événement redouté ; la différence est qu'ils sont des causes pour d'autres événements. Par exemple c'est une combinaison d'événements intermédiaires qui conduit à l'événement redouté.

- l'ensemble des événements élémentaires
Ils correspondent au niveau le plus détaillé de l'analyse du système. Ils représentent les défaillances des composants qui constituent le système étudié.

L'objectif de la construction d'un arbre de défaillance est de suivre une logique déductive en partant d'un événement redouté pour déterminer de manière exhaustive l'ensemble des ses causes jusqu'aux événements élémentaires.

On peut donc construire un arbre dont la racine (appelée aussi "sommet", car on trace traditionnellement les arbres "à l'envers" : la racine en haut et les feuilles en bas) représente l'événement indésirable et les feuilles sont les événements élémentaires. Entre les feuilles et la racine se trouvent des embranchements appelés "portes logiques". Elles permettent de représenter la combinaison logique des événements intermédiaires qui sont à l'origine de l'événement décomposé. Les principales portes utilisées sont :

- la porte "et" : elle représente un événement réalisé **si et seulement si** tous ses événements descendants sont réalisés.



FIG. 3.1 – Représentation graphique d'une porte "et"

- la porte "ou" : elle représente un événement réalisé **si et seulement si au moins un** des événements en aval est réalisé.



FIG. 3.2 – Représentation graphique d'une porte "ou"

- la porte " k/n " : elle représente un événement réalisé **si et seulement si au moins k des n événements** sont réalisés.



FIG. 3.3 – Représentation graphique d'une porte " k/n "

Remarques

1. Les portes "et" et "ou" sont des cas particuliers des portes " k/n ", respectivement " n/n " et $1/n$
2. Un arbre de défaillance est dit cohérent si le passage de FAUX à VRAI pour un événement élémentaire ne peut jamais faire passer l'événement redouté de VRAI à FAUX.
Un arbre de défaillance composé uniquement de portes " k/n " est toujours cohérent.

Exemple

Considérons un système série-parallèle à 4 composants dont la structure est donnée par le diagramme suivant :

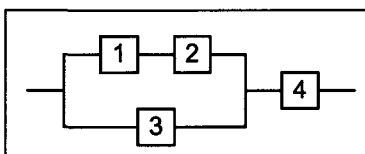


FIG. 3.4 – Diagramme d'un système série-parallèle à 4 composants

D'après le diagramme, on en déduit que le système tombe en panne :

- lorsque 4 est en panne ou
- si 3 et 1 le sont ou,
- si 3 et 2 le sont

Ce qui se traduit par l'arbre de défaillance suivant :

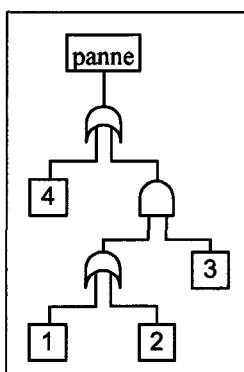


FIG. 3.5 – Arbre de défaillance d'un système à 4 composants

3.1.2 Structure d'un BDMP

La structure globale d'un BDMP est donnée par une fonction logique de type arbre de défaillances. Un BDMP est constitué des éléments suivants :

- Un arbre de défaillance (multi-sommets) cohérent F .
- Un événement sommet principal r .
- Un ensemble de "gâchettes" T
- Un ensemble de "processus de Markov pilotés" P_i associés aux événements de base de l'arbre F .
- La définition de deux catégories d'états (marche ou panne) pour les processus P_i .

Le principal événement sommet (r) du BDMP est censé représenter l'ensemble des états de panne du processus markovien global.

Si on considère le BDMP suivant, on a donc la structure logique d'un arbre de défaillance avec en plus une gâchette ayant pour origine la porte G1 et pour cible G2, et des définitions pour chaque processus P_i . La gâchette entre les deux portes G1 et G2 joue un rôle d'activation des modes de défaillances des processus P3 et P4.

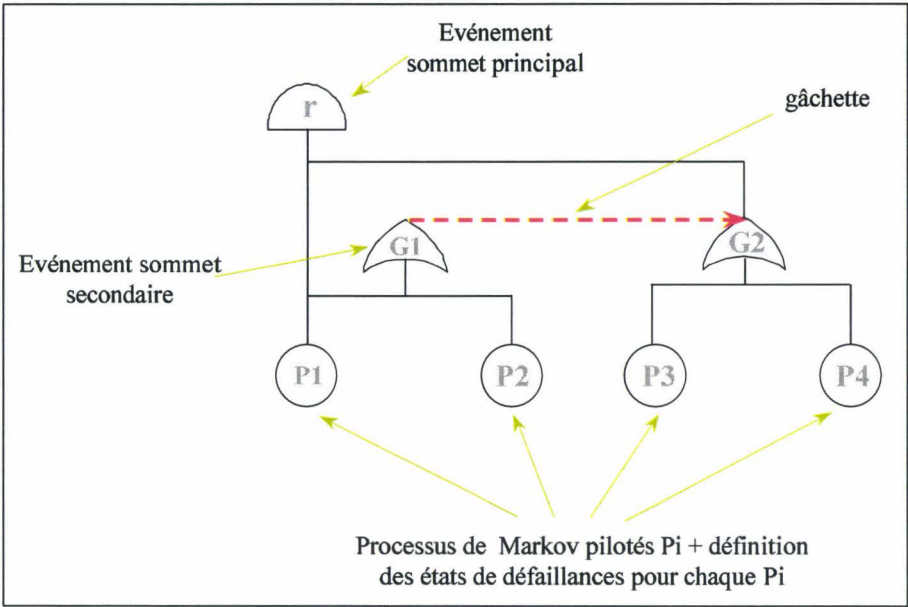


FIG. 3.6 – Un BDMP simple

3.1.3 Différence entre un arbre de défaillances classique et un BDMP

Un BDMP sans gâchette est équivalent à un arbre de défaillances classique. Dans un BDMP avec gâchette, les défaillances des composants ne sont pas toutes possibles dans l'état initial : seules celles des événements sollicités le sont.

Dans un BDMP, les portes sans parent (telles que G1 et r dans l'exemple de la Figure 1) sont sollicitées par défaut. Ces sollicitations se propagent de "père" en "fils" tout au long des branches du BDMP jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'arrivée d'une gâchette. La présence d'une telle arrivée conditionne le passage du signal de sollicitation ; ainsi la porte cible transmet la sollicitation à ses descendants seulement si l'événement qui est à l'origine de la gâchette est VRAI . Si c'est le cas, la sollicitation est ensuite transmise aux portes et feuilles en dessous suivant le même principe. Cette définition est légèrement différente de celle, plus facile à exprimer et à laquelle on pourrait penser à première vue : une porte ou une feuille est sollicitée seulement si elle reçoit un signal de ses parents ou directement via une gâchette de déclenchement.

L'utilisation des gâchettes permet de modéliser simplement toutes sortes de dépendances entre les composants d'un système, en permettant de préciser dans quels contextes les défaillances à la sollicitation ou en fonctionnement des composants doivent être envisagées.

L'explosion combinatoire des traitements à effectuer pour quantifier un modèle BDMP est considérablement limitée par l'emploi de la notion d'événement pertinent. En effet, dès qu'un des fils d'une porte OU est à VRAI, les défaillances des autres fils (et descendants) ne sont plus "pertinentes" (à condition qu'elles ne puissent pas agir ailleurs dans l'arbre) ; elles sont inhibées. On interdit ainsi de nombreuses séquences contenant des événements "non pertinents" puisque agissant sur des parties de système déjà perdues. Par exemple, le filtrage des événements pertinents permet d'inhiber des modes de défaillance supplémentaires d'un composant déjà défaillant, ce qui est souvent plus réaliste que de continuer à les autoriser (cas des modes de défaillance mutuellement exclusifs, d'un composant qui ne peut défaillir que s'il est alimenté...). Toutefois, on a la possibilité de forcer localement le déclenchement de certaines défaillances au niveau de chaque porte ou feuille.

Par exemple, considérons le BDMP de la Figure suivante pour lequel deux défaillances sont possibles dans son état initial.

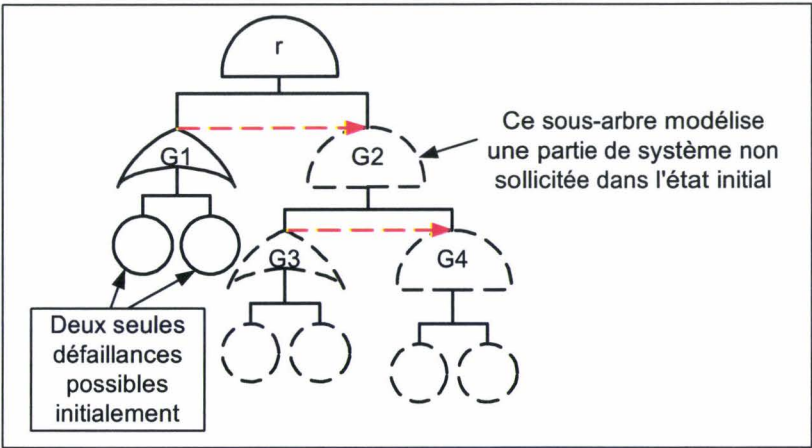


FIG. 3.7 – BDMP dans son état initial

La panne de l'un des composants de base sollicités déclenche l'activation de la porte G2 qui rend sollicités d'autres composants (Figure 3.8 - gauche) et donc possibles d'autres défaillances du processus (fils de G3). En revanche, la deuxième défaillance sous la porte G1 devient non pertinente et est donc inhibée tant que la porte G1 reste à VRAI.

La panne de l'un des composants de base fils de G3 déclenche la possibilité de défaillances sous G4 (Cf. Figure 3.8 - droite) et inhibe l'autre défaillance sous G3.

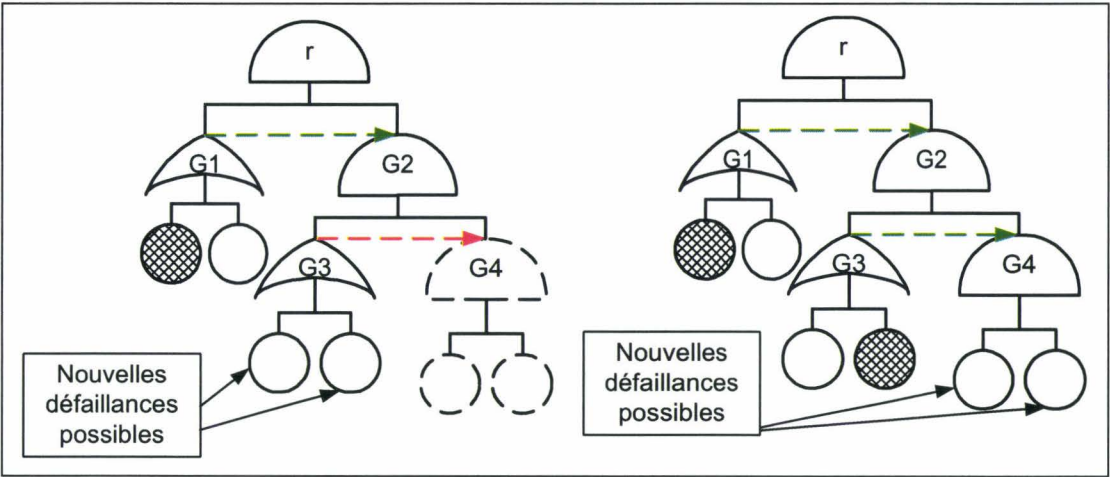


FIG. 3.8 – BDMP après une défaillance, puis deux

Dans cet exemple, on a supposé que toutes les défaillances étaient du type "en fonctionnement". Les défaillances à la sollicitation (type refus d'ouverture d'un disjoncteur, refus de démarrage d'un diesel, ...), qui correspondent à un type de feuille différent, sont

déclenchables lors du changement de mode pour la feuille, lorsqu'elle passe du mode non sollicité au mode sollicité.

Si lors de la propagation par les gâchettes et les branches de l'arbre des changements de mode dus à une défaillance, n feuilles passent simultanément du mode non sollicité au mode sollicité, cela signifie qu'on a autant de sollicitations indépendantes et qu'il faut examiner toutes les 2^n combinaisons d'issues possibles. Les BDMP permettent, grâce à des liens dits "de précédence", de contraindre l'ordre dans lequel les réponses à des sollicitations sont examinées. Ce mécanisme permet de gagner à la fois en précision de la modélisation et en effort de calcul. Il permet de diminuer notablement la combinatoire des séquences à examiner.

Pour une présentation formelle complète des BDMP et de leurs propriétés, le lecteur pourra se référer à [17].

3.2 Les algorithmes SN et SRI développés par EDF

L'outil de modélisation KB3 développé par EDF permet de construire des BDMP de deux manières :

- soit manuellement, par une saisie graphique des BDMP eux-mêmes,
- soit automatiquement, à partir de schémas de systèmes (cette possibilité n'existe pour l'instant que pour les systèmes électriques).

Quel que soit leur mode de production, les BDMP sont disponibles pour traitements sous forme d'un fichier texte en langage FIGARO. Ils peuvent donc être traités, comme tout modèle markovien écrit en ce langage, par l'outil FIGSEQ.

Deux algorithmes d'exploration ont été implémentés dans le logiciel FIGSEQ : les algorithmes SN et SRI. Ces deux algorithmes permettent d'évaluer la défiabilité d'un système sur une période de temps $[0; t]$. Ils utilisent des méthodes d'exploration de séquences, ce qui évite la construction du graphe d'états complet du système. Afin de restreindre le temps de calcul nécessaire aux algorithmes, des critères de troncature sont utilisés, comme en général, la probabilité de la séquence ou sa longueur, ce qui permet de limiter le nombre des séquences à explorer.

3.2.1 L'algorithme SN (Séquences Normales)

L'algorithme SN est une méthode directe : toutes les séquences menant de l'état initial à la panne sont explorées. Cet algorithme nous donne deux approximations pour chaque temps de mission : une valeur optimiste calculée sans prendre en compte les séquences tronquées et une valeur pessimiste calculée en prenant en compte les séquences tronquées. Nous obtenons donc un encadrement de la défiabilité (complémentaire de la fiabilité à 1).

Méthode de calcul

L'évolution du système considéré est modélisée par un processus markovien. Le calcul de la probabilité d'une séquence menant à la panne est équivalent à la quantification de la probabilité que le système visite successivement avant l'instant t un ensemble d'états, numérotés de 1 à $n + 1$, du graphe de Markov d'intérêt. Dans ce contexte, $n + 1$ est un état de panne du système.

Si la réalisation de la séquence d'intérêt est constituée par la visite successive des états 1 à $n + 1$, alors la probabilité que cette séquence se réalise avant l'instant t est obtenue par la relation :

$$\mathbb{P}(\text{La séquence se réalise avant l'instant } t) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i,i+1}}{\Lambda_i}$$

où $\lambda_{i,j}$ représente le taux de transition de l'état i à j
 Λ_i est égal à la somme des taux sortant de l'état i
 $\{T_i\}$ constitue une suite de variables exponentielles indépendantes dont les paramètres sont $\{\Lambda_i\}$.

La principale étape de la quantification d'une séquence par FigSeq réside dans l'évaluation de la quantité $\mathbb{P}(T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t)$.

Ce calcul peut être rendu difficile par des problèmes numériques. EDF a donc mis au point différents types d'approximation dont on trouvera un résumé dans [16].

Pour éviter d'avoir de trop grandes séquences ou un nombre trop important, des seuils de troncature sont utilisés, comme en général, la probabilité de la séquence ou sa longueur. Un minorant et un majorant de la défiabilité sont obtenus, ce qui nous permet d'obtenir les approximations de l'algorithme SN.

On constate le plus souvent que la valeur optimiste est assez proche de la vraie valeur quel que soit le système. Pour que l'encadrement soit précis, il suffit que le graphe soit sans boucle (système non réparable) ou que le temps de mission choisi soit relativement "petit", c'est à dire au plus de l'ordre du temps de séjour dans l'état initial. En effet, la présence de composants réparables se traduit par des séquences bouclées que l'algorithme explore systématiquement jusqu'à ce qu'un critère de troncature s'applique. Si le temps de mission est du même ordre que le temps de séjour dans l'état initial, les séquences bouclées sont négligeables devant les séquences allant à la panne sans repasser par l'état initial. Dans le cas contraire, elles ne doivent pas être négligées et leur nombre fait augmenter le temps de calcul de façon prohibitive.

3.2.2 L'algorithme SRI (Sans Retour à l'état Initial)

SRI, quant à lui, explore les séquences qui ne sont pas bouclées, c'est à dire : qui ne repassent pas dans un même état. Il intègre implicitement lors de la quantification

des séquences, les séquences bouclées ([12]). Avec cet algorithme, nous obtenons une approximation exponentielle pessimiste de la défiabilité. Cette approximation exponentielle consiste à négliger le temps passé dans les états de fonctionnement dégradé devant le temps de séjour dans l'état initial, état de fonctionnement parfait. Appliquée au calcul de la défiabilité, elle est une fonction de type : $1 - \exp(-\Lambda_0 \alpha x)$, où Λ_0 est le taux de sortie de l'état initial, α la probabilité de parvenir aux états de panne sans repasser par l'état initial et $t \geq 0$, le temps de mission. La particularité de SRI consiste à évaluer la probabilité α par une exploration de séquences.

Comme pour SN, des critères de troncature sont utilisés pour éliminer les séquences (non bouclées) négligeables, le résultat obtenu est donc une approximation pessimiste de α . Pour un système complètement réparable, l'essentiel du temps de fonctionnement est passé dans l'état de fonctionnement parfait ; l'algorithme SRI sera donc performant, au sens de raisonnablement pessimiste, si l'état initial est le seul état dans lequel le système passe un temps conséquent, c'est à dire si le système est très fiable et revient toujours rapidement dans son état optimal.

Dans les études de systèmes complexes, il nous est impossible d'obtenir la valeur exacte du MTTF. Or sa connaissance, ou celle d'un ordre de grandeur, est très importante dans les études de sûreté de fonctionnement. Il est donc intéressant de remarquer que l'algorithme SRI nous permet d'obtenir non seulement une approximation de la fiabilité (ou de la défiabilité), mais aussi une approximation du MTTF du système qui sera notée *apMTTF*. L'intérêt de cette approximation réside dans son caractère pessimiste, c'est à dire qu'elle est inférieure à la vraie valeur. En fait, grâce à cette propriété, *apMTTF* servira de référence. C'est également cette valeur qui nous permettra de calculer l'"approximation exponentielle MTTF" présentée dans le paragraphe suivant.

3.2.3 Problèmes rencontrés dans l'application de ces algorithmes

Il se trouve que sous certaines conditions, les approximations obtenues par SN et SRI ne donnent pas de bons résultats, en particulier pour les systèmes à réparations différées. En effet, même pour des temps de mission inférieurs au MTTF, SN va nous fournir un encadrement trop large. Et même si SRI les traite plus efficacement, son approximation reste trop pessimiste si le système passe beaucoup de temps dans des états dégradés (c'est à dire : autres que les états de départ et de panne). Nous allons le montrer sur un exemple :

Soit le système "série-parallèle" de six composants présenté à la Figure 3.9.

Plusieurs hypothèses sont faites sur les réparations des composants du système :

- A chaque sous-système {A1,A2}, {B1,B2} ou {C1,C2} est associé un réparateur complètement indépendant des deux autres.
- Nous supposons également que le réparateur 1 (rep_1) intervient dès que le com-

posant A1 ou A2 tombe en panne, alors que les réparateurs 2 et 3 (rep_2, rep_3) ne sont appelés que lorsque les deux composants de leur sous-système sont en dysfonctionnement.

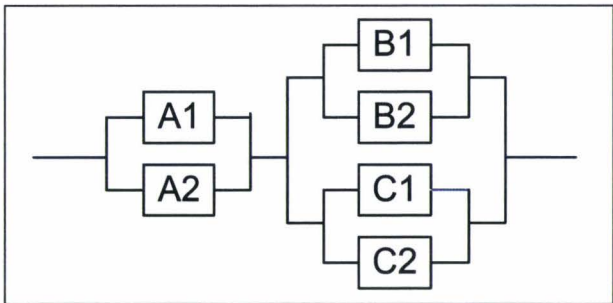


FIG. 3.9 – Système série-parallèle à réparations différées

Il nous est très facile de modéliser ce système par un BDMP, comme nous le montre la figure suivante :

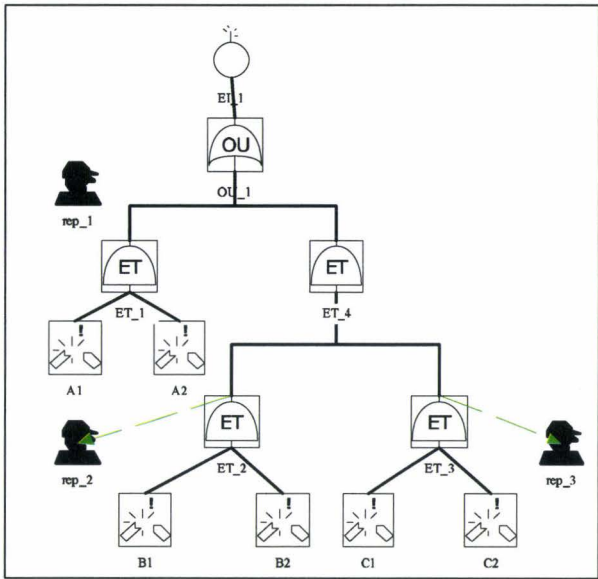


FIG. 3.10 – Système série-parallèle à réparations différées modélisé par un BDMP

Les données numériques du système sont saisies sous KB3. Nous supposons que le taux de dégradation des composants A1 et A2 vaut $10^{-5}/h$ et celui des autres, $10^{-4}/h$. Le taux de réparation est identique pour tous les composants et vaut $0,1/h$.

Les approximations obtenues par les algorithmes SN et SRI sont représentées graphique-

ment dans la figure suivante :

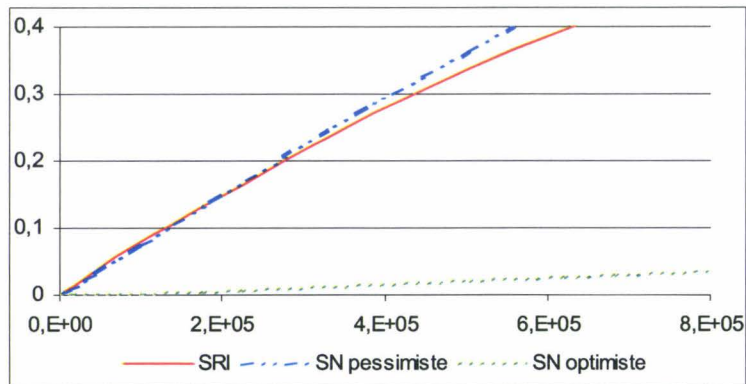


FIG. 3.11 – Représentation graphique des approximations de la défiabilité données par SRI et SN

Les légendes du graphe "SRI", "SN optimiste" et "SN pessimiste" sont respectivement le tracé de l'approximation obtenue par l'algorithme SRI et des approximations optimiste et pessimiste obtenues par l'algorithme SN.

Dorénavant, nous emploierons les mêmes dénominations dans tout le document.

Comme attendu, SRI ne nous donne pas une approximation convenable pour les temps de missions faibles : l'écart avec la valeur optimiste donnée par SN est très vite important et inutilisable dans les études fiabilistes. L'encadrement obtenu par l'algorithme SN n'est guère meilleur : en effet, l'encadrement est fin pour des temps de mission proches de 0, mais l'écart grandit très rapidement et ce pour des temps de mission très inférieurs à la valeur $apMTTF$ du système obtenue par l'algorithme SRI, qui est $1.10E + 07$.

A partir de ce résultat (rencontré dans de nombreux autres exemples), nous avons défini concrètement le but de cette étude : déterminer une approximation de la défiabilité moins pessimiste que celles obtenues par les algorithmes SN et SRI pour de tels systèmes et pour des temps de missions inférieurs à $apMTTF$.

Nous avons exploré plusieurs pistes.

3.2.4 Approximation exponentielle MTTF

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à la fonction qui à $t \geq 0$ associe la valeur $\exp(-\frac{t}{apMTTF})$ que nous appelons "approximation exponentielle MTTF".

Sur cet exemple et comme nous le montre le graphique de la FIG. 3.12, nous pouvons remarquer que cette approximation est bien plus proche de la valeur optimiste.

"expo. MTTF" est bien évidemment le tracé de l'approximation exponentielle MTTF.

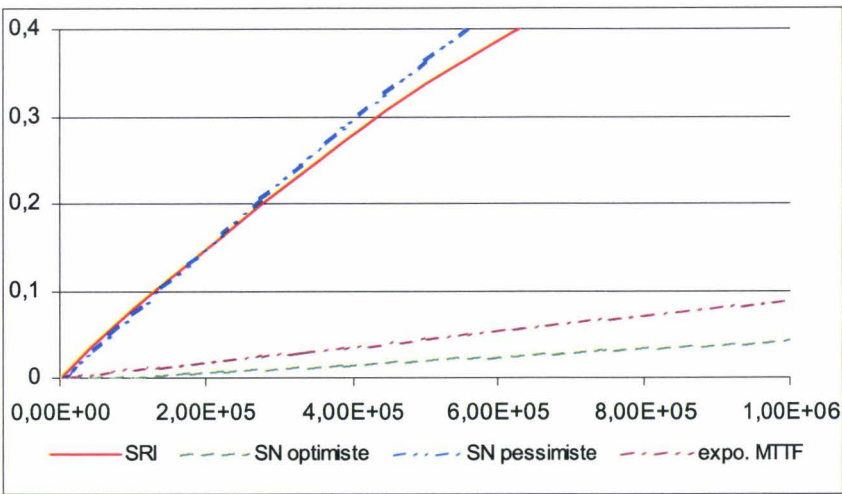


FIG. 3.12 – Comparaison des approximations de la défiabilité données par SRI et SN avec l'approximation exponentielle MTTF

Ce résultat a été obtenu sur de nombreux exemples, ce qui a motivé notre intérêt pour cette approximation.

Cependant, à ce stade de l'étude, rien ne nous affirme le caractère pessimiste de cette approximation. Rien ne laisse supposer que la valeur exacte de la défiabilité du système se situe, pour tout $t \geq 0$, entre la valeur obtenue par l'approximation "SN optimiste" et la valeur de l'approximation exponentielle MTTF.

Ce point est pourtant important : dans les études de sûreté de fonctionnement, une approximation de la fiabilité est "intéressante" si elle pessimiste. Nous avons donc recherché des conditions sur les systèmes étudiés nous assurant le pessimisme de cette approximation.

Plus précisément, nous avons travaillé sur la fonction qui à tout $t \geq 0$ associe la valeur $\exp(-\frac{t}{\text{MTTF}})$. D'un point de vue pratique, il est beaucoup plus facile d'obtenir des conditions sur le pessimisme de cette fonction que sur l'"approximation exponentielle MTTF". De plus, le pessimisme de la fonction entraîne celui de l'approximation puisque la valeur de $ap\text{MTTF}$ est inférieure à celle du MTTF. Nous avons donc :

$$\forall t \geq 0, \quad \exp(-\frac{t}{ap\text{MTTF}}) \leq \exp(-\frac{t}{\text{MTTF}}).$$

Les résultats obtenus concernant la fonction calculée avec la valeur du MTTF sont donc aussi valables pour la fonction calculée avec $ap\text{MTTF}$.

Il est assez facile de s'apercevoir qu'il existe un lien entre le caractère pessimiste de

cette approximation pour des temps "faibles" et la notion de vieillissement de la loi du temps de la première défaillance du système. Mais cette relation doit être précisée, car il existe plusieurs définitions des lois vieillissantes.

Le chapitre 4 présente ces définitions et le chapitre 5 s'intéresse à la possibilité de démontrer certains types de vieillissements pour différentes catégories de systèmes.

Chapitre 4

VIEILLISSEMENT ET APPROXIMATION EXPONENTIELLE

Le vieillissement, défini pour des variables aléatoires réelles positives représentant des durées de vie, traduit une comparaison entre l'état d'un composant (ou d'un système) à deux dates différentes. Cette comparaison repose sur les notions d'ordres stochastiques (cf Ross, Shanthikumar et Zhu [46] ou Shaked et Shanthikumar [51]), ce qui engendre différentes notions de vieillissement introduites pour la première fois par Barlow, Marshall et Proschan [5] ou Gnedenko [28].

Comme nous allons nous intéresser à la conservation des propriétés de vieillissement pour différents assemblables, nous allons commencer par définir la notion de "fonction de structure cohérente" d'un système.

4.1 Fonction de structure cohérente - lien avec les notions de vieillissement

Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages [9] et [22] ou encore [3], par exemple.

4.1.1 Fonction de structure

Rappelons que nous nous intéressons à l'étude d'un système de n composants distincts numérotés $1, 2, \dots, n$.

Pour simplifier les explications, nous supposons que nous ne distinguons que deux états pour chaque composant du système : un état de marche et un état de panne (le passage à plus de deux états ne présente pas de difficulté particulière).

Nous notons $x_1, \dots, x_n$, les variables associées à l'état des différents composants, à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Pour le composant i (compris entre 1 et n), nous notons :

$$\begin{aligned} x_i &= 1 && \text{si le composant est opérationnel} \\ x_i &= 0 && \text{s'il est en panne} \end{aligned}$$

L'ensemble des états du système est donc inclus dans $\{0, 1\}^n$.

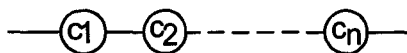
Formellement, exprimer que le système est opérationnel ou en panne en fonction de l'état de ses composants consiste à définir une fonction binaire appelée **fonction de structure** du système.

Cette fonction notée ϕ , de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1 && \text{si l'état } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est un état de marche} \\ \phi(x) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Exemples :

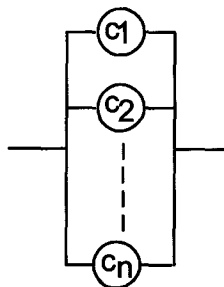
Un système en série



fonctionne si et seulement si tous ses composants sont en état de bon fonctionnement. Sa fonction de structure est :

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

De façon analogue, un système en parallèle



fonctionne si au moins un de ses composants fonctionne. Sa fonction de structure est donc :

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

4.1 Fonction de structure cohérente - lien avec les notions de vieillissement 47

Notations :

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on note :

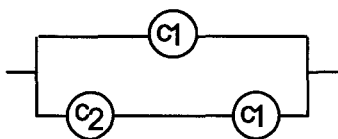
$$(x, a_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Définition 4.1.1

Un composant i est dit **inutile** à la structure ϕ si ϕ est constante en x_i , c'est à dire si :

$$\phi(1_i, x) = \phi(0_i, x), \text{ pour tout } x.$$

Par exemple, dans le système suivant, le composant 2 est inutile à la structure :



Lemme 4.1.1 Décomposition pivotale

L'identité suivante est vérifiée pour toute fonction de structure ϕ d'ordre n :

$$\phi(x) = x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i) \phi(0_i, x),$$

pour tout x et $i = 1, \dots, n$.

Le lemme 4.1.1 est un outil important pour déterminer la fonction de structure d'un système : cette formule définit un algorithme qui permet de construire de proche en proche la fonction de structure. Il suffit pour cela de décomposer successivement selon les différents composants du système.

4.1.2 Fonction de structure cohérente

On dit qu'un système est **cohérent** s'il vérifie les conditions suivantes :

1. si le système est en panne et si un composant tombe en panne alors le système reste en panne

2. si le système est en marche et si un composant est réparé alors le système reste en marche
3. lorsque tous les composants sont en panne, le système est en panne
4. lorsque tous les composants sont en marche, le système est en marche.

Ce qui se traduit formellement par la définition suivante :

Définition 4.1.2

Un système est **cohérent** si sa fonction de structure ϕ l'est, c'est à dire si elle vérifie l'ensemble des trois conditions suivantes :

i) $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$

ii) $\phi(.)$ est croissante, c'est-à-dire :

$$\text{si pour tout } i, \text{ on a } x_i \leq y_i \text{ alors } \phi(x) \leq \phi(y)$$

iii) il n'existe aucun composant i pour lequel on ait :

$$\phi(x) = \phi((x, (1 - x)_i)),$$

$$\text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_n) \in \xi.$$

Le théorème suivant nous présente deux propriétés d'une fonction de structure cohérente :

Théorème 4.1.1

Soit ϕ une fonction de structure cohérente d'ordre n , alors :

i) $\min_{i=1, \dots, n} \{x_i\} \leq \phi(x) \leq \max_{i=1, \dots, n} \{x_i\}$

ii) $\phi(x.y) \leq \phi(x) \cdot \phi(y)$

où $x.y$ représente le produit scalaire de x et y

$$\text{pour tout } x \text{ et } y \in \xi.$$

4.1.3 Pourquoi avoir choisi d'étudier les propriétés de vieillissement IFRA et NBU ?

La proposition suivante met en évidence l'intérêt qu'il y a à étudier les propriétés de vieillissement IFRA (*Increasing Failure Rate in Average*) et NBU (*New Better than Used*), ainsi que leurs duales respectives DFRA (*Decreasing Failure Rate in Average*) et NWU (*New Worse than Used*).

Ces notions seront définies en détail dans les paragraphes suivants. Mais afin d'éclairer la proposition 4.3.1, donnons quelques explications :

Une durée de vie est dite IFRA si son taux de défaillance est croissant en moyenne. Ce vieillissement est lié à l'usure alors que la propriété NBU fait référence à une comparaison neuf-usagé. En effet, la notion NBU indique que la durée de vie restante après $t > 0$ d'un composant (ou d'un système) est inférieure stochastiquement à la durée de vie initiale de ce composant.

Proposition 4.1.1

Un système pouvant être modélisé par un arbre de défaillance cohérent dont tous les composants sont non réparables et de durée de vie IFRA a lui-même une durée de vie IFRA.

C'est à dire :

$$\left. \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n, \quad X_i \text{ IFRA} \\ \phi, \text{ structure cohérente} \end{array} \right\} \Rightarrow X \text{ IFRA}$$

où $X = (X_1, \dots, X_n)$

et $X_i(t) = \mathbf{1}_{t < \tau_i}$ avec τ_i , la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ composant.

Si l'arbre de défaillances est sans événement répété, il suffit que les composants soient non réparables et possèdent la propriété NBU pour que la durée de vie du système soit NBU.

Preuve de la propriété IFRA :

Notons ϕ , la fonction de structure d'un système de n composants. Chacun de ces composants peut être en bon fonctionnement ou en panne.

Pour le composant i , nous utilisons $X_i = 1$ s'il est en bon état et $X_i = 0$ sinon.

La fiabilité du système est :

$$R = \mathbb{P}(\phi(X_1, \dots, X_n) = 1)$$

Ainsi, par conditionnement (décomposition pivotale),

$$\begin{aligned}
 R &= \mathbb{P}(\phi(1, X_2, \dots, X_n) = 1 \text{ et } X_1 = 1) + \mathbb{P}(\phi(0, X_2, \dots, X_n) = 1 \text{ et } X_1 = 0) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(\phi(1, X_2, \dots, X_n) = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(\phi(0, X_2, \dots, X_n) = 1) \\
 &\quad \text{puisque le composant 1 est indépendant des autres.} \\
 &= R_1\mathbb{P}(\phi(1, X_2, \dots, X_n) = 1) + (1 - R_1)\mathbb{P}(\phi(0, X_2, \dots, X_n) = 1)
 \end{aligned}$$

Notons $R_1^1 = \mathbb{P}(\phi(1, X_2, \dots, X_n) = 1)$ et $R_1^0 = \mathbb{P}(\phi(0, X_2, \dots, X_n) = 1)$

Nous avons donc :

$$R = R_1 R_1^1 + (1 - R_1) R_1^0$$

Supposons tout d'abord que les fiabilités R_1^0 et R_1^1 vérifient la condition de la propriété IFRA, c'est à dire supposons que : pour $0 < a < 1$ et $t \geq 0$,

$$R_1^0(at) \geq R_1^0(t)^a$$

et

$$R_1^1(at) \geq R_1^1(t)^a$$

Et montrons que R la vérifie également.

Nous avons donc à prouver que la fiabilité R du système vérifie :

$$R(at) \geq R(t)^a \text{ pour } 0 < a < 1 \text{ et } t \geq 0.$$

La fonction x^a avec $0 < a < 1$ est concave en x , nous avons donc :

$$\forall x \leq x' \text{ et } y \leq y', \quad \frac{x^a - y^a}{x - y} \geq \frac{x'^a - y'^a}{x' - y'}$$

Dans notre cas, prenons :

$$\begin{aligned}
 x &= R_1^0(t) \\
 x' &= R(t) \\
 y &= R_1(t)R_1^0(t) \\
 y' &= R_1(t)R_1^1(t)
 \end{aligned}$$

La fonction de structure ϕ étant cohérente, nous avons :

$$\mathbb{P}(\phi(0, X_2, \dots, X_n) = 1) \leq \mathbb{P}(\phi(1, X_2, \dots, X_n) = 1)$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $R_1^0(t) \leq R(t)$ et $R_1(t)R_1^0(t) \leq R_1(t)R_1^1(t)$.

Nous obtenons donc (en omettant t pour simplifier les écritures) :

$$\frac{R_1^{0a} - R_1^a R_1^{0a}}{R_1^0 - R_1 R_1^0} \geq \frac{R^a - R_1^a R_1^{1a}}{R - R_1 R_1^1}$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{R_1^{0a} - R_1^a R_1^{0a}}{R_1^0 - R_1 R_1^0} \geq \frac{R^a - R_1^a R_1^{1a}}{(1 - R_1) R_1^0}.$$

Par simplification, nous obtenons :

$$R^a \leq R_1^{0a} - R_1^a R_1^{0a} + R_1^a R_1^{1a} = R_1^{0a} (1 - R_1^a) + R_1^a R_1^{1a}$$

En utilisant l'hypothèse de vieillissement IFRA concernant R_1^0 et R_1^0 , nous déduisons, $\forall t \geq 0$, $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} R(t)^a &\leq R_1^0(at)(1 - R_1(t)^a) + R_1(t)^a R_1^1(at) \\ &\leq R_1(at)(R_1^1(at) - R_1^0(at)) + R_1^0(at) \\ R(t)^a &\leq R(at) \end{aligned}$$

Le système est donc IFRA.

Montrons maintenant que R_1^0 et R_1^1 vérifient la condition de la propriété de vieillissement IFRA sous certaines conditions. La démonstration sera faite par récurrence sur le nombre de composants du système :

Par la même démonstration que précédemment, nous avons :

Pour tout $t \geq 0$ et $0 < a < 1$,

$$R_1^0(t)^a \leq R_1^0(at)$$

et

$$R_1^1(t)^a \leq R_1^1(at)$$

si le composant 2 est indépendant des autres, IFRA et si

$$\begin{aligned} R_{1,2}^{0,0}(t)^a &\leq R_{1,2}^{0,0}(at) \\ R_{1,2}^{0,1}(t)^a &\leq R_{1,2}^{0,1}(at) \\ R_{1,2}^{1,0}(t)^a &\leq R_{1,2}^{1,0}(at) \\ R_{1,2}^{1,1}(t)^a &\leq R_{1,2}^{1,1}(at) \end{aligned}$$

où $R_{1,2}^{i,j}$ est la fiabilité du système tel que l'état du composant 1 (respectivement 2) a la valeur i (respectivement j).

En appliquant $n-3$ fois la même démonstration, nous obtenons :

Le système est IFRA si :

- la fonction de structure est cohérente
- les composants $1, \dots, n-1$ sont indépendants et IFRA
- $\forall t > 0$ et $0 < a < 1$, $R_{1,\dots,n-1}^I(t)^a \leq R_{1,\dots,n-1}^I(at)$

où I est le vecteur représentant le fonctionnement des composants $1, \dots, n-1$.

Or pour I fixé,

$$R_{1,\dots,n-1}^I = \mathbb{P}(\phi(I, x_n) = 1) = R_n \mathbb{P}(\phi(I, 1) = 1) + (1 - R_n) \mathbb{P}(\phi(I, 0) = 1)$$

en supposant que le composant n est indépendant des autres.

La fonction de structure étant cohérente, nous avons :

- Si $\mathbb{P}(\phi(I, 1) = 1) = 1$ et $\mathbb{P}(\phi(I, 0) = 1) = 0$:
 $R_{1,\dots,n-1}^I = R_n$ et vérifie la condition de la propriété de vieillissement si le composant n est IFRA.
- Si $\mathbb{P}(\phi(I, 1) = 1) = 1$ et $\mathbb{P}(\phi(I, 0) = 1) = 1$:
 $R_{1,\dots,n-1}^I = 1$ et vérifie la condition de la propriété de vieillissement.
- Si $\mathbb{P}(\phi(I, 1) = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(\phi(I, 0) = 1) = 0$:
 $R_{1,\dots,n-1}^I = 0$ et vérifie la condition de la propriété de vieillissement.

Ainsi nous avons, si le composant n est indépendant des autres et IFRA :

$$\forall t \geq 0 \text{ et } 0 < a < 1, R_{1,\dots,n-1}^I(t)^a \leq R_{1,\dots,n-1}^I(at) \forall I.$$

■

Nous avons détaillé cette preuve car habituellement on utilise une démonstration différente qui figure dans le livre de Barlow et Proschan [3].

Dans la suite de ce chapitre, seront présentées les notions IFR, IFRA, NBU ainsi que leurs duales. Des propriétés vérifiées pour chaque notion de vieillissement seront données et nous comparerons la fiabilité d'un système possédant l'une de ces propriétés à celle de l'exponentielle de même moyenne.

4.2 Propriété IFR / DFR

4.2.1 Définition d'une distribution IFR / DFR

La probabilité que le système tombe en panne sur un intervalle de temps $[0, x]$ sachant qu'il a fonctionné sans incident durant une période t est définie par :

$$\frac{\bar{R}(t+x) - \bar{R}(t)}{R(t)}.$$

Si nous divisons cette quantité par x et que nous faisons tendre x vers 0, nous obtenons le taux de défaillance (ou "hazard rate") au temps t , noté $h(t)$ (voir la partie "Contexte de l'étude").

Pour un système physique "standard", le taux de défaillance connaît 3 phases :

- la période de déverminage : le taux de défaillance décroît
- la maturité pendant laquelle il reste constant
- la période de vieillesse où le taux croît

La propriété de vieillissement IFR ("Increasing Failure Rate") repose totalement sur le sens de variation du taux de défaillance.

En effet, une distribution continue de fonction de répartition F est dite IFR si et seulement si :

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

est décroissante en t pour tout $x \geq 0$, $t \geq 0$ tels que $F(t) < 1$.

Ce qui se traduit par la définition suivante :

Définition 4.2.1

Une durée de vie τ de fiabilité R et de taux de défaillance h , est dite **IFR** (Increasing Failure Rate), ou à taux de défaillance croissant si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

1. le taux de défaillance est une fonction croissante
2. la fonction qui à $t > 0$ associe $\log(R(t))$, appelée fonction de risque, est concave en t
3. $\forall a > 0$, la fonction qui à $t > 0$ associe $\frac{R(t+a)}{R(t)}$ est décroissante en t
4. la durée de survie est stochastiquement décroissante.

Preuve de l'équivalence :

L'équivalence entre 1) et 2) provient de la définition mathématique du taux de défaillance : $h = -(\log(R))'$.

Celle entre 3) et 4) tient à la définition même de la distribution de la durée de survie.

Montrons maintenant l'équivalence entre 2) et 3) :

Posons $\psi(t) = -\log(R(t))$.

La fonction qui à $t > 0$ associe $\frac{R(t+a)}{R(t)}$ est décroissante en t si et seulement si la fonction qui à $t > 0$ associe $\log\left(\frac{R(t+a)}{R(t)}\right) = \psi(a+t) - \psi(t)$ est décroissante en t , c'est à dire $\psi'(t+a) - \psi'(t) \leq 0$ pour tout t .

Par conséquent, pour tout $a > 0$, la fonction qui à $t > 0$ associe $\frac{R(t+a)}{R(t)}$ est décroissante

en t si et seulement si ψ' est décroissante ou de façon équivalente ψ est concave.



On obtient la définition de DFR (Decreasing Failure Rate) en remplaçant dans les propriétés équivalentes la concavité par la convexité, la croissance par la décroissance et réciproquement.

Remarque : La distribution exponentielle

Il est facile de montrer que parmi les lois continues, la loi exponentielle est la seule à être à la fois IFR et DFR. Cette loi correspond à un taux de défaillance constant.

4.2.2 Conservation par assemblage des propriétés IFR et DFR

Barlow et Proschan d'un côté et Gnedenko de l'autre, ont été les premiers à étudier les propriétés de vieillissement et leur conservation par différents types d'assemblage. Dans cette partie, nous allons faire un résumé de leurs travaux concernant les propriétés IFR et DFR.

Le lecteur pourra se reporter à leurs ouvrages ([3], [4], [28]) pour obtenir les démonstrations des propriétés avancées et de plus amples détails.

4.2.2.1 Structure série

Le taux de défaillance d'un système-série est la somme des taux de défaillance de chaque composant. Ainsi si chaque composant est IFR (ou DFR), le système est IFR (ou DFR).

Les propriétés IFR et DFR sont donc conservées par structure série.

4.2.2.2 Structure parallèle

La propriété de croissance du taux de défaillance est conservée si les composants sont identiques.

Contre-exemple :

Dans le cas d'un système de 2 composants de durée de vie exponentielle de paramètres respectifs 1 et 2, la fiabilité s'écrit pour tout $t \geq 0$:

$$R(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant i à la date t .

$$R(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}.$$

Le taux de défaillance h vaut alors pour tout $t \geq 0$:

$$h(t) = \frac{e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}}{e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}}$$

Après étude de la fonction, nous constatons que le taux de défaillance croît sur $[0; 1.4436]$, puis décroît jusqu'à l'infini.

La durée de vie de ce système ne possède donc pas la propriété de vieillissement IFR.

4.2.2.3 Conservation par remise à neuf

La durée de vie d'un système qui est la somme de n durées de vie de taux de défaillance croissant a lui-même un taux de défaillance croissant.

Ce taux est inférieur à chacun des taux de défaillance :

$$h \leq \min_{i=1, \dots, n} h_i$$

où h_i est le taux de défaillance de la $i^{\text{ème}}$ durée de vie.

Par contre, la propriété DFR n'est pas conservée par cette structure.

4.2.2.4 Conservation par mélange

Soient a_i , les coefficients positifs de somme 1 d'un mélange de n durées de vie de fiabilité R_i , ($i = 1, \dots, n$).

La fiabilité du mélange est donnée par :

$$R(t) = \sum_{i=1}^n a_i R_i(t), \quad \forall t \geq 0$$

Pour ce type d'assemblage, seule la propriété de vieillissement DFR est conservée.

4.2.2.5 Structure cohérente

Terminons ces exemples de conservation de structure par le cas d'un système à structure cohérente.

Barlow et Proschan démontrent dans leur ouvrage que ni la propriété IFR, ni la propriété DFR ne sont conservées par une fonction de structure cohérente.

4.2.3 Comparaison de la fiabilité d'une durée de vie IFR avec l'approximation *MTTF*

Dans cette étude, nous recherchons des approximations pessimistes de la fiabilité de systèmes quand nous disposons de très peu d'éléments. Si l'hypothèse de la monotonie du taux de défaillance est établie, il nous est possible d'approcher la fiabilité par une fonction exponentielle calculée à partir du *MTTF*.

Théorème 4.2.1

Soit une durée de vie τ IFR (DFR) où m est le *MTTF* et R la fiabilité du système, alors :

$$R(t) \geq (\leq) \exp(-t/m) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq m$$

Preuve :

La durée de vie étant IFR (DFR), la fonction $H = \log(\frac{1}{R})$ est convexe (concave).

Ainsi, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}(H(\tau)) \geq (\leq) H(\mathbb{E}(\tau)).$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H(\tau)) &= \int_0^\infty H(u) d(-R(u)) \\ &= \int_0^\infty H(u) d(-e^{-H(u)}) \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H(\tau)) &= \int_0^\infty e^{-H(u)} d(H(u)) \\ &= \int_0^\infty e^{-v} d(v) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$H(\mathbb{E}(\tau)) = H(m) \leq (\geq) 1$$

Puisque H est convexe (concave), elle vérifie $\frac{H(t)}{t} < (>) \frac{H(m)}{m}$ pour tout $t < m$.

Ainsi,

$$H(t) \leq (\geq) \frac{t}{m} \quad \text{si } t \leq m.$$

Nous obtenons donc :

$$R(t) \geq (\leq) \exp(-t/m) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq m$$

■

4.3 Propriété IFRA / DFRA

Nous venons de définir une notion de vieillissement basée sur le comportement de la fonction taux de défaillance. Un des points négatifs de cette propriété est qu'un système cohérent constitué de composants indépendants IFR n'est pas forcément IFR.

Dans cette partie, nous allons définir une propriété basée également sur le comportement du taux de défaillance, mais qui est moins restrictive : l'étude de la monotonie se fait en moyenne.

C'est une notion introduite dans le livre de Barlow et Proschan [3]. On peut aussi consulter par exemple l'article de Kotliar et Khomenko [34].

4.3.1 Définition d'une distribution IFRA / DFRA

Définition 4.3.1

Une durée de vie τ de fiabilité R et de taux de défaillance h , est dite **IFRA** (Increasing Failure Rate in Average), ou à taux de défaillance croissant en moyenne si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

1. la fonction qui à $t > 0$ associe $\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t h(u) du$ est croissante en t
2. la fonction qui à $t > 0$ associe $R(t)^{1/t}$ est décroissante en t
3. $\forall t > 0, \forall a \in [0; 1], R(at) \geq R(t)^a$.

Preuve de l'équivalence :

En utilisant l'égalité $H = -\log R$, on a l'équivalence entre les propriétés 1) et 2). La relation 3) est identique à la décroissance en $t \geq 0$ de la fonction $R(t)^{1/t}$.

■

La définition de la propriété **DFRA** (Decreasing Failure Rate in Average) est obtenue, comme pour la définition de la propriété DFR, en inversant le sens des inégalités, en remplaçant la croissance par la décroissance et réciproquement.

4.3.2 Conservation par assemblage

Les propriétés IFRA et DFRA sont conservées par structure série et parallèle. Comme pour la propriété IFR, la notion IFRA n'est pas conservée par mélange, alors que DFRA l'est.

Et pour finir, comme nous l'avons démontré auparavant, la propriété IFRA est préservée pour les systèmes à structure cohérente et DFRA ne l'est pas.

4.3.3 Pessimisme (optimisme) de l'approximation *MTTF*

Comme pour les systèmes IFR (ou DFR), il est possible d'approcher la fiabilité d'un système possédant la propriété IFRA (ou DFRA) par la même fonction exponentielle. Seul le point d'intersection entre les deux courbes change.

En effet, dans l'ouvrage de Barlow et Proschan [3], le résultat suivant est démontré :

Théorème 4.3.1

Une durée de vie, de fiabilité R est IFRA (DFRA) si et seulement si pour tout $\lambda > 0$, la fonction qui à $t \geq 0$ associe $R(t) - e^{-\lambda t}$ change au plus une fois de signe, et s'il y a changement, la fonction est d'abord positive puis négative (négative puis positive).

Notons le point x_0 vérifiant :

$$R(x_0) = e^{-x_0/m}$$

où m est le *MTTF* du système.

Proposition 4.3.1

Le point x_0 existe toujours quelle que soit la durée de vie étudiée.

Preuve :

Par définition du MTTF, on a :

$$\int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(t/MTTF)}dt$$

Ce qui signifie que dans la figure suivante, la partie hachurée est égale à la partie colorée :

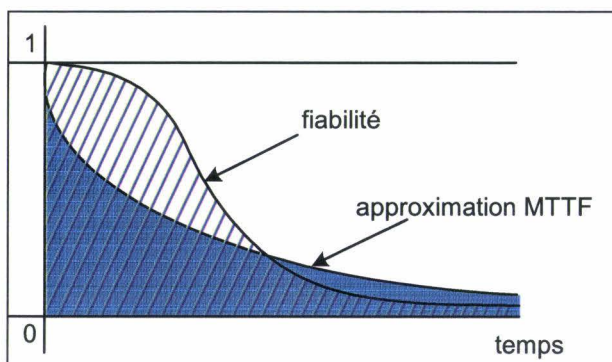


FIG. 4.1 – Comparaison Fiabilité - Approximation MTTF

Puisque la fiabilité du système est dans un premier temps, supérieure à l'approximation MTTF, il est indispensable qu'elle devienne inférieure à un certain temps afin d'obtenir l'égalité des intégrales.

L'existence du point x_0 est donc établie. ■

En appliquant le théorème 4.3.1 et le résultat de la proposition 4.3.1, il nous est possible de comparer la fiabilité à "l'approximation MTTF" :

Théorème 4.3.2

Soit une durée de vie τ IFRA (respectivement DFRA), de fiabilité R . Soit le point $x_0 > 0$ tel que $R(x_0) = \exp(-x_0/m)$ où m est le *MTTF* du système. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} R(t) &\geq (\leq) \exp(-t/m) && \text{pour } 0 \leq t \leq x_0 \\ &\leq (\geq) \exp(-t/m) && \text{pour } t \geq x_0 \end{aligned}$$

Preuve :

Supposons que τ est IFRA (DFRA) et qu'il existe un temps de mission $x_0 > 0$ tel que $R(x_0) = \exp(-x_0/m)$.

D'après la propriété 3) de la définition d'une durée de vie IFRA, nous obtenons, $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$:

$$R(\alpha x_0) \geq (\leq) R(x_0)^\alpha = \exp(-\alpha x_0/m)$$

En posant $t = \alpha x_0$, nous obtenons :

$$\forall t \leq x_0, \quad R(t) \geq (\leq) \exp(-t/m).$$

Soit $t > x_0$, il existe un unique α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\alpha t = x_0$
Et nous avons :

$$R(x_0) = R(\alpha t) \geq (\leq) R(t)^\alpha$$

$$\text{Or } R(x_0) = \exp(-x_0/m) = \exp(-\alpha t/m)$$

Ainsi :

$$\forall t > x_0, \quad R(t) \leq (\geq) \exp(-t/m).$$

■

4.4 Propriété NBU / NWU

Les propriétés IFR et IFRA indiquent une usure régulière du système quelle que soit la date d'observation. Dans cette partie, nous allons étudier une notion de vieillissement reposant sur l'usure du début : la propriété NBU qui correspond à une comparaison entre un matériel neuf et usagé.

4.4.1 Définition d’une distribution NBU / NWU

Définition 4.4.1

La variable aléatoire τ , de fiabilité R , est dite **NBU** (New Better than Used) ou encore neuve mieux qu’usagée, si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

1. $R(a + x) \leq R(a)R(x), \forall a, x > 0$

2. en notant $H(x) = \int_0^x h(u)du = \log(\frac{1}{R(t)})$, la fonction de risque du système :
 $H(a + x) \geq H(a) + H(x)$ (H est dite sur-additive)

Preuve de l’équivalence :

1) et 2) sont les deux écritures de la même propriété, l’une en termes de sur-additivité de la fonction de risque, l’autre en termes de fiabilité.



Comme précédemment, la définition de la propriété **NWU** (New Worse than Used) est obtenue en changeant le sens des inégalités.

4.4.2 Conservation par assemblage

Le tableau suivant présente une synthèse des résultats établis dans [3] ou [4] :

Assemblage	NBU	NWU
Structure série	préservée	préservée
Structure parallèle	préservée	non préservée
Structure cohérente	préservée	non préservée
Convolution / remise à neuf	préservée	préservée
Mélange	non préservée	préservée

4.4.3 Pessimisme de l'approximation *MTTF* dans le cas d'une durée de vie NBU

Rappelons maintenant un théorème cité ans les travaux de Kotliar [33] nous permettant d'encadrer à tout instant $t > 0$, la fiabilité d'une durée de vie NBU :

Théorème 4.4.1

Soit τ une durée de vie NBU de fiabilité R et de fonction de risque H , alors $\forall x_1 > 0$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{H(x_1)}{k+1}\right) &\geq R(t) \geq \exp\left(-\frac{H(x_1)}{k}\right) && \text{pour } \frac{x_1}{k+1} < t \leq \frac{x_1}{k} \\ \exp(-(k+1)H(x_1)) &\geq R(t) \leq \exp(-kH(x_1)) && \text{pour } kx_1 \leq t < (k+1)x_1 \end{aligned}$$

où $k = 1, 2, \dots$

Preuve :

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 > 0$ fixé. Pour $\frac{x_1}{k+1} < t \leq \frac{x_1}{k}$, nous avons :

$$R(t) \geq R\left(\frac{x_1}{k}\right)$$

ce qui implique :

$$R(t)^k \geq R\left(\frac{x_1}{k}\right)^k$$

Puisque τ est NBU,

$$R\left(\frac{x_1}{k}\right)^k \geq R\left(\frac{kx_1}{k}\right)$$

Ainsi,

$$\text{Pour } \frac{x_1}{k+1} < t \leq \frac{x_1}{k}, \quad R(t) \geq R(x_1)^{1/k}.$$

De même pour $kx_1 \leq t < (k+1)x_1$,

$$\begin{aligned} R(t) &\leq R(kx_1) \\ &\leq R(x_1)^k, \end{aligned}$$

puisque τ est NBU.

■

Application

Soit τ une durée de vie NBU de fiabilité R et de $MTTF$ m .

Supposons qu'il existe x_1 tel que $x_1 = 2H(x_1)m$, c'est à dire : tel que $R(x_1) = \exp(-\frac{x_1}{2m})$

– pour $k = 1$, nous avons :

$$R(t) \geq \exp(-H(x_1)) = \exp(-x_1/2m) \quad \text{pour } t \in]\frac{x_1}{2}; x_1]$$

or $t > \frac{x_1}{2}$, donc : $\exp(-t/m) < \exp(-x_1/2m)$

Ainsi :

$$R(t) \geq \exp(-t/m) \quad \text{pour } t \in]\frac{x_1}{2}; x_1].$$

– pour $k = 2$, nous avons :

$$R(t) \geq \exp\left(-\frac{H(x_1)}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x_1}{4m}\right) \quad \text{pour } t \in]\frac{x_1}{3}; \frac{x_1}{2}]$$

or $t > \frac{x_1}{3}$, donc : $t > \frac{x_1}{4}$ et $\exp(-t/m) < \exp(-x_1/4m)$

Ainsi :

$$R(t) \geq \exp(-t/m) \quad \text{pour } t \in]\frac{x_1}{3}; \frac{x_1}{2}].$$

et ainsi de suite jusqu'à $k \gg x_1 \dots$

Par conséquent, nous obtenons :

$$R(t) \geq \exp(-t/m) \quad \text{pour } t \in [0; x_1].$$

4.4.4 Optimisme de l'approximation *MTTF* dans le cas d'une durée de vie NWU

Théorème 4.4.2

Soit τ une durée de vie NWU de fiabilité R et de fonction de risque H , alors $\forall x_1 > 0$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{H(x_1)}{k}\right) &\leq R(t) \leq \exp\left(-\frac{H(x_1)}{k+1}\right) && \text{pour } \frac{x_1}{k+1} < t \leq \frac{x_1}{k} \\ \exp(-kH(x_1)) &\geq R &\geq \exp(-(k+1)H(x_1)) && \text{pour } kx_1 \leq t < (k+1)x_1 \end{aligned}$$

où $k = 1, 2, \dots$

Preuve :

La démonstration suit la même logique que celle pour une durée de vie NBU. Seules les inégalités changent de sens.



Application

En prenant $x_1 = \frac{H(x_1)m}{2}$, c'est à dire : $R(x_1) = \exp\left(-\frac{2.x_1}{m}\right)$

Nous obtenons :

$$R(t) \leq \exp(-t/m) \quad \text{pour } t \in [0; x_1].$$

4.4.5 Approche de l'intervalle

Les théorèmes que nous venons de mettre en évidence nous assurent l'existence d'un intervalle de temps du type $[0; x]$ sur lequel l'approximation exponentielle est soit pessimiste, soit optimiste selon la propriété de vieillissement vérifiée par la durée de vie. La valeur théorique de x étant impossible à obtenir (puisque la fiabilité n'est pas connue), il nous reste à déterminer comment estimer x en pratique à l'aide des outils dont nous disposons.

Dans cette section, nous considérons que la durée de vie est IFRA. Le raisonnement dans le cas NBU sera identique.

D'un point de vue théorique, nous avons montré que x_0 est déterminé par : $R(x_0) = \exp(-x_0/m)$ (unique point vérifiant cette égalité). Il nous suffit donc d'obtenir un minorant $x_{\min}$ de x_0 pour pouvoir utiliser la fonction exponentielle comme approximation pessimiste de la fiabilité pour tous les temps de missions inférieurs à $x_{\min}$.

L'algorithme SN permet de calculer un temps de mission pessimiste noté $x_{SNpessi}$ à partir de l'approximation $R_{SNpessi}$ par la formule :

$$R_{SNpessi}(x_{SNpessi}) = \exp(-x_{SNpessi}/m)$$

De même l'algorithme SRI permet d'obtenir x_{SRI} à partir de R_{SRI} par :

$$R_{SRI}(x_{SRI}) = \exp(-x_{SRI}/m)$$

Par les algorithmes SN et SRI, nous pouvons prendre comme minorant :

$$x_{\min} = \max(x_{SNpessi}; x_{SRI})$$

Le problème est que ce minorant n'a d'intérêt que s'il est différent de 0, ce qui signifie qu'il ne sera autre que $x_{SNpessi}$ puisque SRI calcule une fonction exponentielle égale à l'approximation exponentielle "approximation *MTTF*" seulement au point $t = 0$.

Comme l'approximation pessimiste de SN est très proche de celle optimiste pour les temps de mission avoisinant 0, nous aurons l'approximation pessimiste de SN supérieure à la fonction exponentielle pour les temps inférieurs à $x_{SNpessi}$.

Le schéma de la Figure 4.2 résume les positions respectives des trois courbes :

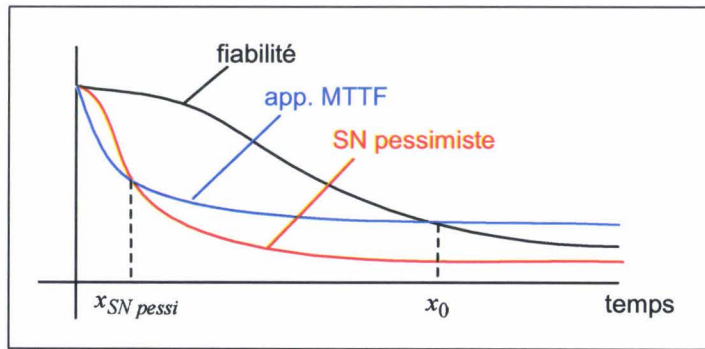


FIG. 4.2 – Estimation pessimiste de x_0

Ce qui n'est pas intéressant puisque dans ce cas, nous utiliserons cette approximation plutôt que la fonction exponentielle dans les études. Notons qu'en général, $x_{SNpessi}$ est

très faible par rapport à l'échelle des temps sauf dans le cas de systèmes non réparables.

Dans la pratique, nous pouvons nous contenter d'une approximation de x_0 à condition qu'elle soit assez proche de la vraie valeur. Or l'algorithme SN nous donne également une approximation optimiste de la fiabilité. Par définition, si nous notons x_{SN} le temps de mission donné par l'algorithme SN tel que $R_{SN}(x_{SN}) = \exp(-x_{SN}/m)$ (R_{SN} est l'approximation optimiste donnée par l'algorithme SN), nous aurons : $x_{SN} \geq x_0$, comme nous le montre le graphique ci-dessous. Cependant quel que soit le type de système étudié, l'approximation optimiste est assez proche de la vraie valeur, nous pouvons donc utiliser x_{SN} pour connaître, au moins, un ordre de grandeur de l'intervalle :

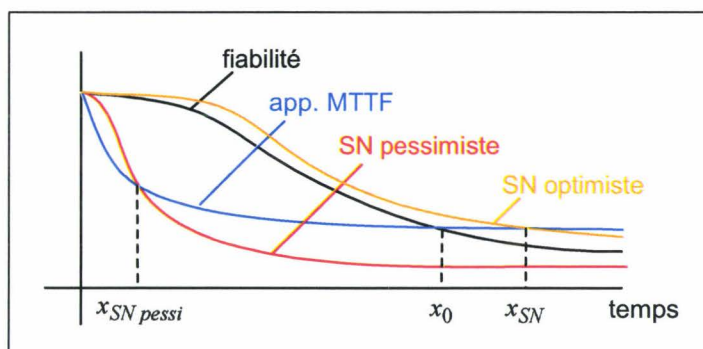


FIG. 4.3 – Encadrement de x_0

4.5 Comparaison entre les différentes propriétés de vieillissement

Ces deux chaînes d'implications strictes sont vérifiées :

$$\text{IFR} \Rightarrow \text{IFRA} \Rightarrow \text{NBU}$$

$$\text{DFR} \Rightarrow \text{DFRA} \Rightarrow \text{NWU}$$

La démonstration de ces chaînes est faite dans la plupart des livres traitant les propriétés de vieillissement.

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons toutes ces notions de vieillissement ainsi que leurs propriétés.

Chapitre 5

VIEILLISSEMENT POUR LES SYSTÈMES MARKOVIENS ET APPLICATIONS AUX BDMP

Maintenant que nous disposons d'un moyen d'estimer une gamme de temps sur laquelle l'approximation exponentielle est pessimiste pour des systèmes IFRA ou NBU, nous allons nous intéresser à la démonstration de ce type de propriété pour les processus de Markov en général et pour un type de processus en particulier. De même, nous allons mettre en évidence certaines conditions assurant le non vieillissement du système étudié et par conséquent, l'optimisme de l'approximation *MTTF*.

5.1 Cas général des processus de Markov utilisés en fiabilité

Deux théorèmes tirés des travaux de Shanthikumar [53] et de Massey [36], seront d'abord mis en évidence. Assez proches l'un de l'autre, le premier impose implicitement un ordre total sur l'ensemble des états, alors que le second ne peut être appliqué sans un ordre partiel explicitement déterminé.

5.1.1 Espace d'états totalement ordonné

Afin de faciliter la lecture des différents théorèmes cités ci-dessous, quelques définitions et notations sont tout d'abord rappelées :

Notation

Pour un processus markovien $X = \{X(t), t \geq 0\}$, $H(X, t)$ est l'histoire du processus à la date t .

Définition 5.1.1

Une variable aléatoire X de fiabilité R_X , est *stochastiquement plus fiable* (notation notée $\geq_{st}$) qu'une variable aléatoire Y de fiabilité R_Y , si :

$$\forall t > 0, \quad R_X(t) \geq R_Y(t).$$

Définition 5.1.2

Le *processus résiduel* de X à la date t , $t > 0$ est $X_t = \{X(t + s), s \in \mathbb{R}^+\}$.

Le premier théorème est une conséquence directe des travaux de Shanthikumar. Dans son article, il traite les systèmes semi-markoviens et nous donne des conditions suffisantes pour obtenir le même résultat.

La preuve dans le cas semi-markovien est essentiellement démontrée dans [39].

Dans le cas markovien, beaucoup de simplifications sont faisables grâce à la propriété de "perte de mémoire". Les conditions suffisantes sont donc moins restrictives que dans le cas semi-markovien :

Théorème 5.1.1

Supposons que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est un processus markovien avec comme espace d'états $\xi \subset \mathbb{N}$ tel que $X(0) = 0$ et vérifie les hypothèses suivantes :

$\forall i, j, n \in \xi$,

- $\sum_{k \geq n} a_{ik} \leq \sum_{k \geq n} a_{jk}, \quad \text{pour } i < j < n$
- $\sum_{k \leq n} a_{ik} \geq \sum_{k \leq n} a_{jk}, \quad \text{pour } n < i < j$

Alors pour tout $t \geq 0$,

$$X_t \leq_{st} X^* \\ \text{où } X^* =_{st} X.$$

Les conditions du théorème peuvent être traduites par :

"plus le système se trouve dans un état proche de l'état de panne, plus il a de risques d'y aller. De même, plus il est proche de l'état initial, plus il a de chances d'y retourner".

Exemple :

Nous considérons un système k/n où tous les composants sont identiques et indépendants les uns des autres :

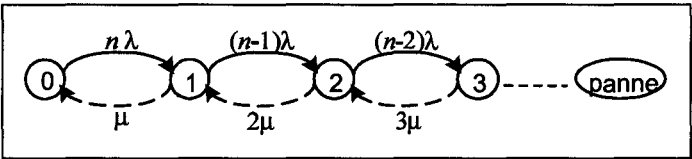


FIG. 5.1 – Système k/n iid

λ représente le taux de défaillance d'un composant et μ , son taux de réparation.

Ce type de système vérifie les conditions du théorème précédent, de manière limite : dans les inégalités du théorème, tous les termes sont nuls.

Grâce à ce théorème, nous pouvons en déduire le vieillissement du système :

Théorème 5.1.2

Supposons que pour tout $t \geq 0$,

$$X_t \leq_{st} X^*$$

$$\text{où } X^* =_{st} X$$

Alors la loi de la durée de vie du processus est NBU.

Preuve :

Par hypothèse : $X_t \leq_{st} X^*$, $t > 0$, ainsi :

$$\mathbb{P}(X^*(s) \in \xi^+) \geq \mathbb{P}(X_t(s) \in \xi^+)$$

Et $X^* =_{st} X$,

Nous avons donc :

$$\mathbb{P}(X(s) \in \xi^+) \geq \mathbb{P}(X_t(s) \in \xi^+)$$

ce qui est équivalent d'après la définition 2.1.4 à :

$$\mathbb{P}(X(t) \in \xi^+) \mathbb{P}(X(s) \in \xi^+) \geq \mathbb{P}(X(s+t) \in \xi^+)$$

La loi de la durée de vie est donc NBU. ■

5.1.2 Espace d'états partiellement ordonné

Comme pour le paragraphe précédent, rappelons tout d'abord quelques définitions indispensables à la compréhension des théorèmes.

Remarquons tout d'abord que nous notons $\mathfrak{R}$, une relation d'ordre partiel sur l'ensemble E .

Définition 5.1.3

Soit E , un ensemble dénombrable partiellement ordonné par la relation $\mathfrak{R}$. Pour tout sous-ensemble Γ de E , notons :

$$\Gamma^\uparrow = \{y | y \mathfrak{R} x, x \in \Gamma\} \quad \text{et} \quad \Gamma^\downarrow = \{y | x \mathfrak{R} y, x \in \Gamma\}$$

Un sous-ensemble Γ de E est un ensemble croissant si $\Gamma = \Gamma^\uparrow$ (décroissant si $\Gamma = \Gamma^\downarrow$).

Définition 5.1.4

Un processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est stochastiquement monotone si, pour tout $i \mathfrak{R} j$ dans E , et pour tout ensemble croissant Γ , nous avons :

$$\mathbb{P}_i(X(s) \in \Gamma) \leq \mathbb{P}_j(X(s) \in \Gamma)$$

où $\mathbb{P}_i(X(s) \in \Gamma) = \mathbb{P}(X(s) \in \Gamma | X_0 = i)$.

Nous pouvons maintenant présenter un théorème nous donnant des conditions suffisantes

pour que le processus de Markov soit stochastiquement monotone.

Théorème 5.1.3

Soit E un espace d'états partiellement ordonné par la relation notée $\mathcal{R}$. Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$, un processus de Markov à espace d'états E et A , sa matrice génératrice.

X est stochastiquement monotone si et seulement si $\forall x, y \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$, et pour tout ensemble croissant Γ tel que $x \in \Gamma$ (ce qui implique par la définition d'un ensemble croissant : $y \in \Gamma$) ou $y \in \Gamma$ (ce qui implique : $x \notin \Gamma$), nous avons :

$$\sum_{k \in \Gamma} a_{xk} \leq \sum_{k \in \Gamma} a_{yk}.$$

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant démontré dans l'article [36] de Massey :

Théorème 5.1.4

Soient $X = \{X(t), t \geq 0\}$ et $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ deux processus de Markov de matrices génératrices A et B respectivement.

Alors $X(t) \leq_{st} Y(t), \forall t \geq 0$ si et seulement si $\forall x, y \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$ et pour tout ensemble croissant Γ tel que $x \in \Gamma$ ou $y \notin \Gamma$, nous avons :

$$e_x A 1_\Gamma \leq e_y B 1_\Gamma$$

$$\text{où } e_x = (e_{x_i})_{i \in E} \text{ est un vecteur-ligne tel que : } \begin{cases} e_{x_i} = 1 & \text{si } i = x \\ e_{x_i} = 0 & \text{si } i \neq x \end{cases}$$

$$1_\Gamma = (1_{\Gamma_i})_{i \in E} \text{ est un vecteur-colonne avec : } \begin{cases} 1_{\Gamma_i} = 1 & \text{si } i \in \Gamma \\ 1_{\Gamma_i} = 0 & \text{si } i \notin \Gamma \end{cases}$$

Si l'ordre partiel sur E permet de comparer l'état initial à tous les autres états, nous pouvons conclure le vieillissement du système par le théorème suivant :

Théorème 5.1.5

Soit E , un ensemble d'états partiellement ordonné tel que l'état initial d'indice 0 soit comparable à tout autre état et soit "le meilleur", dans le sens où nous avons :

$$\forall k \in E, \quad \mathbb{P}_0(X(t) \in \xi^-) \leq \mathbb{P}_k(X(t) \in \xi^-),$$

où ξ^- est l'ensemble des états absorbants.

Si X est un processus stochastiquement monotone défini sur E , alors il est aussi NBU.

Preuve :

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$, un processus de Markov stochastiquement monotone décrivant le fonctionnement d'un système et soit τ , la durée de vie associée.

Supposons que l'état initial soit comparable avec tous les autres états et soit considéré comme "le meilleur".

Supposons également que l'ensemble des états de panne ξ^- est absorbant (il formera donc à lui seul un ensemble croissant).

Dans ce cas, nous avons :

$$\forall k \in E, \quad \mathbb{P}_0(X(t) \in \xi^-) \leq \mathbb{P}_k(X(t) \in \xi^-) = \mathbb{P}(X(t) \in \xi^- | X(0) = k)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\mathbb{P}_0(X(t) \in \xi^+) \geq \mathbb{P}_k(X(t) \in \xi^+)$$

Il nous faut montrer que :

$$\mathbb{P}_0(X(s+t) \in \xi^+) \leq \mathbb{P}_0(X(t) \in \xi^+) \mathbb{P}_0(X(s) \in \xi^+)$$

D'après la relation de Chapman-Kolmogorov (donnée et démontrée dans [9]), nous avons :

$$\mathbb{P}_0(X(s+t) \in \xi^+) = \sum_{k \in \xi^+} \mathbb{P}_0(X(t) = k) \mathbb{P}_k(X(s) \in \xi^+)$$

Donc :

$$\mathbb{P}_0(X(s+t) \in \xi^+) \leq \sum_{k \in \xi^+} \mathbb{P}_0(X(t) = k) \mathbb{P}_0(X(s) \in \xi^+)$$

Le processus est donc NBU.

■

Remarque

La propriété NWU est obtenue si le sens des inégalités est inversé dans les différentes hypothèses des théorèmes de cette partie.

5.1.3 Applications des théorèmes

5.1.3.1 Application du théorème 5.1.5 : systèmes en "strates"

La figure suivante représente un système en "strates" à n composants.

e_0 est l'état de fonctionnement parfait.

e_k est l'ensemble des états comprenant k composants en panne, avec k compris entre 0 et n .

e_p ($p \leq n$) est l'ensemble des états de panne.

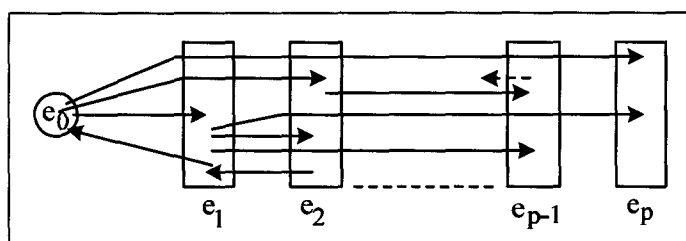


FIG. 5.2 – Système en "strates"

Nous prenons comme ordre partiel la relation $\leq$ ("inférieure ou égale") telle que deux états appartenant à un même ensemble e_k , pour tout $1 \leq k \leq n$, sont supposés non comparables. Nous supposons également, que le système peut aller d'un état appartenant à e_k , pour tout $1 \leq k \leq n$, à n'importe quel état supérieur mais ne peut aller que dans e_{k-1} , comme état inférieur.

Dans ce cas, les ensembles croissants Γ définis avec l'ordre partiel $\leq$ sont de la forme :

$$\left\{ \bigcup_{j=i}^p \{x_j\} \cup \bigcup_{z=k+1}^n e_z, \ i = 1, \dots, p, \ x_j \in e_k, \ k = 0, \dots, n, \ p = |e_k| \right\}$$

où $|\cdot|$ est le cardinal.

Ainsi, afin de pouvoir appliquer le théorème 5.1.4, le système doit vérifier les conditions suivantes :

Soient x et y deux états du système tels que $x \leq y$ et Γ , un ensemble croissant tel que $x \in \Gamma$ ou $y \in \Gamma$,

- Si y possède un taux de réparation vers un état autre que x , alors ce taux doit être inférieur au taux de réparation sortant de x .
- La somme des taux de dégradation de x vers les états appartenant à Γ doit être inférieure à la somme des taux de dégradation de y vers les états de Γ .

Ces conditions ne sont pas nécessaires, mais suffisantes et peuvent être différentes selon l'ordre partiel choisi. Pour pouvoir conclure au vieillissement du système, il faut et il suffit que l'état initial puisse être comparé à tous les autres et soit "le meilleur" (dans le sens défini au théorème 5.1.5).

5.1.3.2 Exemple d'application du théorème 5.1.3

Considérons le graphe d'états suivant :

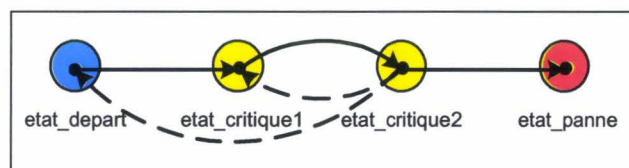


FIG. 5.3 – Système à trois composants dont deux en secours

Supposons que tous les taux de dégradation valent 10^{-05} et les taux de réparation, 0.1.

Si nous considérons comme ordre partiel, la relation "inférieure ou égale" $\leq$, telle que $\text{etat_depart} \leq \text{etat_critique1} \leq \text{etat_panne}$ et $\text{etat_depart} \leq \text{etat_critique2} \leq \text{etat_panne}$, nous vérifions très facilement que ce processus de Markov est stochastiquement monotone selon le théorème 5.1.3.

Comme la relation choisie permet de comparer l'état initial à n'importe quel autre état du système, nous pouvons conclure que le processus est NBU. Ainsi, l'approximation exponentielle sera dans un premier temps pessimiste par rapport à la fiabilité, puis optimiste.

Graphiquement, nous obtenons :

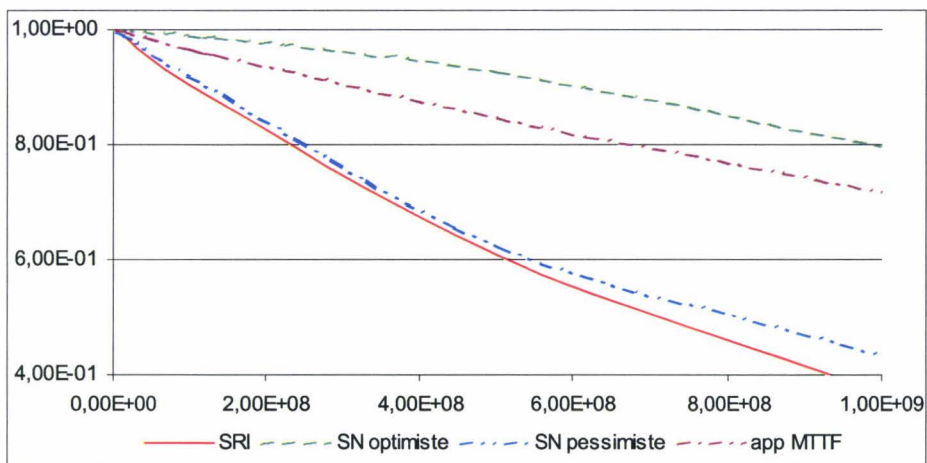


FIG. 5.4 – Représentation graphique des approximations de la fiabilité données par SRI et SN

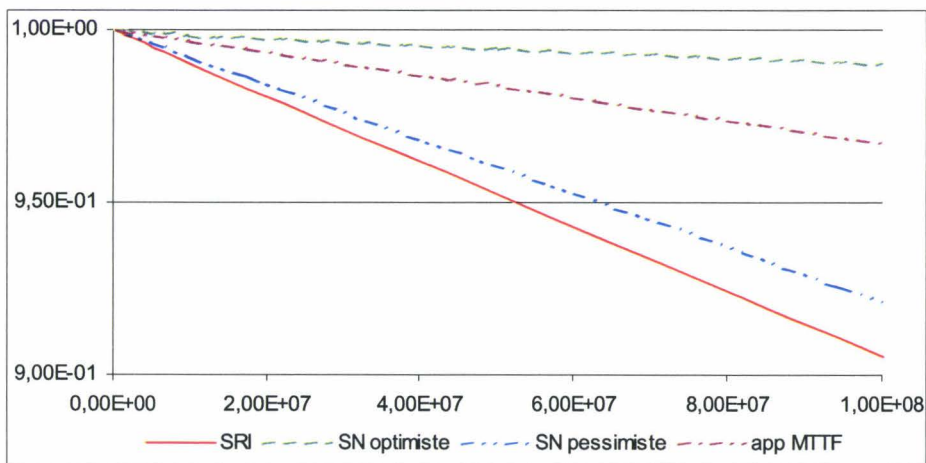


FIG. 5.5 – Représentation graphique des approximations de la fiabilité données par SRI et SN pour des temps de mission faibles

"app MTTF" est le tracé de la fonction qui à $t \geq 0$ associe $\exp^{-t/m}$ où m est le MTTF du

système.

L'encadrement obtenu avec la valeur optimiste de l'algorithme SN et l'"approximation $MTTF$ " est plus fin que ceux obtenus avec SN ou SRI.

L'"approximation $MTTF$ " serait pessimiste jusqu'à environ $x_{SN} = 3.22E+09$, d'après l'approximation optimiste de SN. Le graphe étant très simple, il est facile de calculer explicitement la fiabilité par le logiciel Scilab et par conséquent, la valeur de x_0 :

$$x_0 = 3000344300$$

Nous avons donc une différence relative entre x_0 et x_{SN} par rapport à x_0 égale à environ : 7,32%. De plus, à $t = x_{SN}$, la fiabilité ne vaut que : 0,33. Dans les études pratiques, ces temps de mission ne seront donc plus pris en compte.

5.2 Etude d'un système particulier

Nous en arrivons à l'étude d'un problème de bascule aléatoire d'un système à un autre. Très peu de travaux existent sur ce type de systèmes.

L'idée de les étudier nous est venue de la remarque suivante :

Soit un BDMP dont un extrait a la forme suivante, modélisant par exemple un mode de défaillance F impossible ou à taux réduit tant que l'événement servant de point de départ à la gâchette ne s'est pas réalisé.

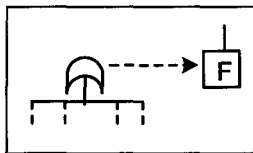


FIG. 5.6 – Extrait du BDMP

Trouver la loi du temps au bout duquel F passe à vrai revient à étudier un système dont le comportement est décrit tout d'abord par un processus 0 de durée de vie τ_0 jusqu'à une date T puis par un processus 1 de durée de vie τ_1 . La date T est une variable aléatoire indépendante des deux processus.

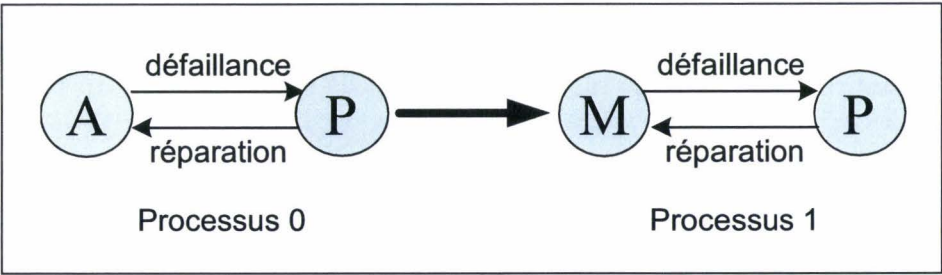


FIG. 5.7 – Description du système par les processus

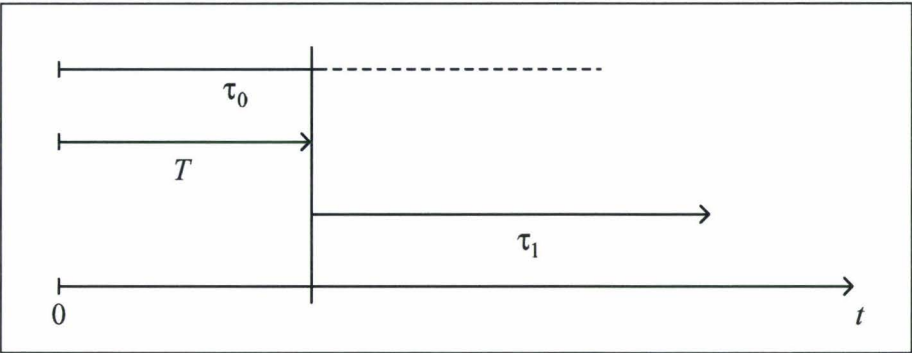


FIG. 5.8 – Evolution du système

Ce modèle peut être utilisé pour décrire différents types de systèmes dans différents domaines. Il peut être utilisé dans la modélisation par BDMP car l'aspect sollicitation de différents composants peut y être pris en compte.

Un BDMP (voir la partie 3.1), même d'une grande complexité, peut être construit à l'aide de ce "processus de Markov piloté" simple. Le comportement de chaque feuille est associé à ce processus. Le "Processus 0" de durée de vie τ_0 (respectivement "Processus 1" de durée de vie τ_1) est associé au comportement de la feuille en mode non sollicité (respectivement en mode sollicité). La sollicitation est déclenchée selon la variable T .

Différentes lois pour τ_0 , τ_1 et T sont considérées dans l'étude. De même, il est possible de prendre en compte une probabilité γ de refus de démarrage lors du transfert de loi. Commençons par le cas de lois exponentielles.

5.2.1 T , τ_0 et τ_1 : lois exponentielles

Dans un premier temps, nous supposons que les processus 0 et 1 ne sont pas réparables et ont des transitions de défaillance de lois exponentielles. De même pour la loi de T .

Précisons une notation indispensable à l'étude :

λ , λ_0 et λ_1 sont respectivement le taux de défaillance de la loi de T , du processus 0 et du processus 1.

5.2.1.1 Risque non nul de refus de démarrage lors du transfert du processus 0 au processus 1

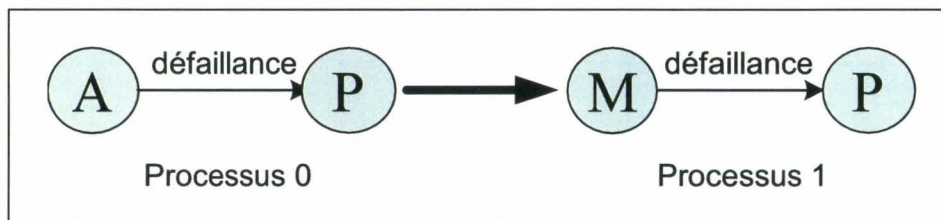


FIG. 5.9 – Système étudié

Nous supposons qu'il existe une probabilité $\gamma > 0$ telle que le système tombe en panne lors du transfert du processus 0 au processus 1.

Sous ces hypothèses, la durée de vie du système est :

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{si } T \geq \tau_0 \\ T & \text{si } T < \tau_0 \text{ et panne au transfert du processus 0 au processus 1} \\ T + \tau_1 & \text{si } T < \tau_0 \text{ et démarrage au transfert de loi.} \end{cases}$$

Remarque

Grâce au fait que tous les lois sont exponentielles, le processus peut être représenté par le graphe de Markov simple de la figure 5.10

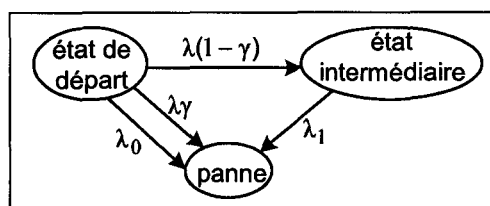


FIG. 5.10 – Graphe de Markov résumant les hypothèses

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Dans un premier temps, pour ce type de durée de vie, nous avons recherché des conditions suffisantes nous permettant d'affirmer la monotonie du taux de défaillance du système. Nous nous sommes intéressés à cette propriété de vieillissement pour simplifier les calculs puisque l'écriture explicite de la durée de vie est assez complexe.

Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 5.2.1

En supposant qu'il existe un risque non nul de refus de démarrage lors du changement de loi, la durée de vie τ est :

- IFR si et seulement si :

$$\lambda_1 \geq \lambda\gamma + \lambda_0$$

- DFR si et seulement si :

$$\lambda_1 \leq \lambda\gamma + \lambda_0.$$

Remarque

Si $\lambda_0 = \lambda_1$, τ est DFR.

En effet, les durées de vie τ_0 et τ_1 suivront la même loi exponentielle. Comme il y a "oubli du passé" lors de chaque modification physique du système, le transfert se traduit simplement par un risque non nul de panne à la date T , ce qui rend décroissant le taux de défaillance du système.

Preuve :

Pour vérifier la monotonie du taux de défaillance de la durée de vie du système, nous allons déterminer son expression. Pour cela, nous sommes amenés à définir les expressions de la fiabilité et la densité de sa loi.

Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tau < t) &= \mathbb{P}(\tau_0 < t \text{ et } T > \tau_0) + \\
 &\quad \mathbb{P}(T < t \text{ et } (T < \tau_0 \text{ et refus de démarrage au transfert})) + \\
 &\quad \mathbb{P}(T + \tau_1 < t \text{ et } (T < \tau_0 \text{ et démarrage au transfert})) \\
 &= \mathbb{P}(\tau_0 < \min(t; T)) + \gamma \mathbb{P}(T < \min(t; \tau_0)) + \\
 &\quad (1 - \gamma) \mathbb{P}(T + \tau_1 < t \text{ et } T < \tau_0) \\
 &= \int_0^t 1 - e^{-\lambda_0 x} d(1 - e^{-\lambda x}) + \int_t^\infty 1 - e^{-\lambda_0 t} d(1 - e^{-\lambda x}) + \\
 &\quad \gamma \int_0^t 1 - e^{-\lambda x} d(1 - e^{-\lambda_0 x}) + \gamma \int_t^\infty 1 - e^{-\lambda t} d(1 - e^{-\lambda_0 x}) + \\
 &\quad (1 - \gamma) \int_0^t (1 - e^{-\lambda_1(t-x)}) e^{-\lambda_0 x} d(1 - e^{-\lambda x})
 \end{aligned}$$

Après calculs et simplifications, nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\tau < t) = 1 - \frac{(1 - \gamma)\lambda}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-(\lambda + \lambda_0)t}$$

En notant $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$, la fiabilité du processus est donc :

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) = \frac{\bar{\gamma}\lambda}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-(\lambda + \lambda_0)t}$$

Notons $t_0 > 0$ tel que $t_0 = \inf\{t \mid \mathbb{P}(\tau \geq t) = 0\}$

De l'expression de $\mathbb{P}(\tau < t)$, nous pouvons déduire la densité de τ , pour tout $t \geq 0$:

$$g(t) = \frac{\bar{\gamma}\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_0)}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-(\lambda + \lambda_0)t}$$

Le taux de défaillance de τ peut être calculé à partir des expressions déterminées précédemment :

$$\begin{aligned}\forall t < t_0, h(t) &= \frac{g(t)}{\mathbb{P}(\tau \geq t)} \\ &= \frac{\bar{\gamma}\lambda\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_0)e^{-(\lambda+\lambda_0)t}}{\bar{\gamma}\lambda e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)e^{-(\lambda+\lambda_0)t}}\end{aligned}$$

Afin de prouver la monotonie sous conditions du taux de défaillance, nous devons étudier sa dérivée qui vaut, $\forall t < t_0$:

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{1}{(\lambda + \lambda_0 - \lambda_1)^2 \mathbb{P}(\tau \geq t)^2} \left[\left(-\bar{\gamma}\lambda\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_0)^2 e^{-(\lambda+\lambda_0)t} \right) \times \right. \\ &\quad \left(\bar{\gamma}\lambda e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)e^{-(\lambda+\lambda_0)t} \right) + \\ &\quad \left. \left(\bar{\gamma}\lambda\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 + \gamma\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_0)e^{-(\lambda+\lambda_0)t} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Après développements et simplifications, nous obtenons $\forall t < t_0$:

$$h'(t) = \frac{\bar{\gamma}\lambda(\lambda_1 - \lambda_0 - \gamma\lambda)e^{(\lambda+\lambda_0+\lambda_1)t}}{\mathbb{P}(\tau \geq t)^2}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \geq 0$ si et seulement si :

$$\lambda_1 - \lambda_0 - \gamma\lambda \geq 0$$

et $h'(t) \leq 0$ si et seulement si :

$$\lambda_1 - \lambda_0 - \gamma\lambda \leq 0$$

La durée de vie est donc :

$$\text{- IFR si et seulement si : } \lambda \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\gamma}$$

- DFR si et seulement si : $\lambda \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\gamma}$

■

5.2.1.2 Démarrage assuré lors du transfert du processus 0 au processus 1

Nous supposons maintenant que si le système est en état de marche à la date t du transfert, il restera en marche à t^+ ($\gamma = 0$).

Avec cette hypothèse, la durée de vie du système est :

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{si } T \geq \tau_0 \\ T + \tau_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Grâce au fait que tous les lois sont exponentielles, le processus peut être représenté par le graphe de Markov simple de la figure 5.11

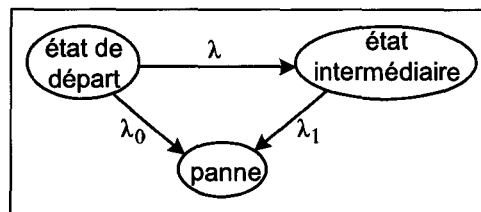


FIG. 5.11 – Graphe de Markov résumant les hypothèses

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.2

En supposant qu'aucun refus de démarrage lors du transfert de loi n'est possible, la durée de vie τ est :

- IFR si et seulement si :

$$\lambda_1 \geq \lambda_0$$

- DFR si :

$$\lambda_1 \leq \lambda_0.$$

Preuve :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 5.2.1. Seuls les principales étapes et les résultats de calculs vont être donnés.

La fiabilité du système est, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} e^{-(\lambda + \lambda_0)t}$$

A partir de ce résultat, le taux de défaillance h est déduit. Nous obtenons pour tout $t \geq 0$:

$$h(t) = \frac{\lambda \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda + \lambda_0) e^{-(\lambda + \lambda_0)t}}{\lambda e^{-\lambda_1 t} + (\lambda_0 - \lambda_1) e^{-(\lambda + \lambda_0)t}}$$

L'étude de cette fonction nous amène à conclure que la durée de vie du système est :

- IFR si et seulement si : $\lambda_1 \geq \lambda_0$

- DFR si et seulement si : $\lambda_1 \leq \lambda_0$

■

Remarques :

- si $\lambda_0 = \lambda_1$, τ suit une loi exponentielle.

- si $\lambda_0 = 0$ (modélisation du composant en attente)

La durée de vie du système τ est :

$$\tau = T + \tau_1$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < t) &= \mathbb{P}(T + \tau_1 < t) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(\tau_1 < t - x) d(1 - e^{-\lambda x}) \\ &= 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0 = \inf\{t \mid \mathbb{P}(\tau \geq t) = 0\}$

Le taux de défaillance h du système est donc, pour tout $t < t_0$:

$$h(t) = \frac{-\lambda\lambda_1 e^{-\lambda t} + \lambda\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}{-\lambda_1 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda_1 t}}$$

L'étude de cette fonction nous amène au résultat suivant :

La durée de vie du système est IFR.

5.2.2 τ_0 et τ_1 : lois exponentielles et T : loi quelconque

Dans cette partie, nous supposons que la loi de T est quelconque. Les résultats sont applicables à tous les types de loi pour T .

Notons, pour tout $t \geq 0$:

- $f(t)$, la densité de loi de la variable aléatoire T
- $R(t)$ ($= 1 - F(t)$), sa fiabilité et
- $\lambda(t)$, son taux de défaillance à l'instant t .

Les notations utilisées dans la partie précédente concernant les processus 0 et 1 seront reprises dans cette partie (et dans les suivantes).

5.2.2.1 Risque non nul de refus de démarrage lors du transfert du processus 0 au processus 1

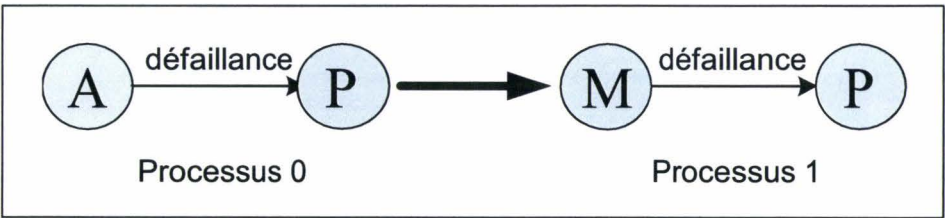


FIG. 5.12 – Système étudié

Nous supposons qu'il existe une probabilité $\gamma > 0$ que le système tombe en panne lors du transfert du processus 0 au processus 1.

Sous ces hypothèses, la durée de vie du système est :

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{si } T \geq \tau_0 \\ T & \text{si } T < \tau_0 \text{ et panne au transfert du processus 0 au processus 1} \\ T + \tau_1 & \text{si } T < \tau_0 \text{ et démarrage au transfert de loi.} \end{cases}$$

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.3

En supposant qu'un risque non nul de refus de démarrage lors du changement de loi est possible. La durée de vie τ peut être caractérisée comme suit :

1. Si $\lambda_1 > \lambda_0$,

$$T \text{ est IFR et } \frac{2(\lambda_1 - \lambda_0)}{1 + \gamma} \leq \lambda(t) \leq \frac{(1 + \gamma)(\lambda_1 - \lambda_0)}{2\gamma}, \quad \forall t \geq 0,$$

alors la durée de vie τ est IFR.

Si $\lambda_1 > \lambda_0$,

$$T \text{ est DFR et } \lambda(t) \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{1 + \gamma F(t)}, \quad \forall t \geq 0,$$

alors la durée de vie τ est DFR.

2. Si $\lambda_1 < \lambda_0$, la durée de vie τ est DFR.

3. Si $\lambda_1 = \lambda_0$, la durée de vie τ est :

$$\text{- IFR si et seulement si } \frac{f'(t)}{f(t)^2} \geq \frac{-\gamma}{1 - \gamma F(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{- DFR si et seulement si } \frac{f'(t)}{f(t)^2} \leq \frac{-\gamma}{1 - \gamma F(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve :

Seule la démonstration dans le cas $\lambda_0 = \lambda_1$ va être donnée. Pour les autres cas, la preuve repose sur le même principe que celle donnée dans le cas d'un démarrage assurée lors du transfert de loi.

Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < t) &= \mathbb{P}(\tau_0 < \min(t; T)) + \gamma \mathbb{P}(T < \min(t; \tau_0)) + \\ &\quad (1 - \gamma) \mathbb{P}(T + \tau_1 < t \text{ et } T < \tau_0) \\ &= 1 - e^{-\lambda_0 t} R(t) - (1 - \gamma) e^{-\lambda_0 t} F(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda_0 t} + \gamma e^{-\lambda_0 t} F(t) \end{aligned}$$

La fiabilité du système est donc, $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) = e^{-\lambda_0 t} - \gamma e^{-\lambda_0 t} F(t)$$

Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0 = \inf\{t \mid \mathbb{P}(\tau \geq t) = 0\}$

La densité de τ est, pour tout $t \geq 0$:

$$g(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + \gamma e^{-\lambda_0 t} f(t) - \gamma \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} F(t)$$

A partir de ces résultats, nous déduisons le taux de défaillance h , pour tout $t < t_0$:

$$h(t) = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + \gamma e^{-\lambda_0 t} f(t) - \gamma \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} F(t)}{e^{-\lambda_0 t} - \gamma e^{-\lambda_0 t} F(t)}$$

L'étude de cette fonction nous amène à calculer sa dérivée qui vaut, pour tout $t < t_0$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau \geq t)} \left[\left[-\lambda_0^2 e^{-\lambda_0 t} + \gamma \lambda_0^2 e^{-\lambda_0 t} F(t) - 2\gamma \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} f(t) + \gamma e^{-\lambda_0 t} f'(t) \right] \times \right. \\ &\quad \left. [e^{-\lambda_0 t} - \gamma e^{-\lambda_0 t} F(t)] + [\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + \gamma e^{-\lambda_0 t} f(t) - \gamma \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} F(t)]^2 \right] \\ &= \frac{\gamma e^{-2\lambda_0 t}}{\mathbb{P}(\tau \geq t)} \left[f'(t) - \gamma f'(t) F(t) + \gamma f(t)^2 \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t < t_0$, $h'(t) \geq 0$ si et seulement si :

$$f'(t) - \gamma f'(t) F(t) + \gamma f(t)^2$$

c'est à dire, si et seulement si :

$$\frac{f'(t)}{f(t)^2} \geq -\frac{\gamma}{1 - \gamma F(t)}$$

et $h'(t) \leq 0$ si et seulement si :

$$\frac{f'(t)}{f(t)^2} \leq -\frac{\gamma}{1 - \gamma F(t)}$$

■

Remarque :

Dans le cas $\lambda_1 < \lambda_0$, on retrouve bien le résultat attendu par rapport au théorème 5.2.1 à la page 81.

En effet, on a $\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\gamma} < 0$ et si on suppose T exponentielle, on ne peut qu'avoir $\lambda > \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\gamma}$ qui est l'hypothèse à vérifier pour que τ soit DFR.

5.2.2.2 Démarrage assuré lors du transfert du processus 0 au processus 1

Nous supposons dans cette partie que $\gamma = 0$.

La durée de vie du système est donc :

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{si } T \geq \tau_0 \\ T + \tau_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.4

Nous supposons qu'aucun refus de démarrage lors du changement de loi n'est possible.

1. Si $\lambda_1 > \lambda_0$, la durée de vie τ est :

- IFR si :

$$\lambda(t) \geq (\lambda_1 - \lambda_0)F(t), \quad \forall t \geq 0.$$

en particulier si : $\lambda(t) \geq \lambda_1 - \lambda_0, \quad \forall t \geq 0.$

- DFR si :

$$\lambda(t) \leq (\lambda_1 - \lambda_0)F(t)e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

2. Si $\lambda_1 < \lambda_0$, la durée de vie τ est DFR.

Preuve :

Par le raisonnement détaillé pour un cas plus général au paragraphe 5.2.3, on obtient :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} R(t) - e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)$$

La fiabilité du système est donc, $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) = e^{-\lambda_0 t} R(t) + e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)$$

Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0 = \inf\{t \mid \mathbb{P}(\tau \geq t) = 0\}$

De cette expression, nous pouvons en déduire la densité de τ , pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} R(t) - e^{-\lambda_0 t} f(t) + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) + e^{-\lambda_0 t} f(t) \\ &= \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} R(t) + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) \end{aligned}$$

ainsi que son taux de défaillance, pour tout $t < t_0$:

$$h(t) = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} R(t) + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}{e^{-\lambda_0 t} R(t) + e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}$$

L'étude de cette fonction nous amène à calculer sa dérivée qui vaut, pour tout $t < t_0$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\mathbb{P}(\tau \geq t)^2} \left[f(t) R(t) e^{-2\lambda_0 t} + e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t} f(t) \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda_1 - \lambda_0) e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t} R(t) \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) \right] \end{aligned}$$

1er cas : $\lambda_1 > \lambda_0$

Si $\lambda_1 > \lambda_0$, $\forall t \geq 0$ $h'(t) \geq 0$ si :

$$\frac{f(t)}{R(t)} \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_0) \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}{e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t} R(t) + \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}$$

Or par définition de l'intégrale, $\forall t \geq 0 \quad \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) \leq F(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t}$

Et la fonction de X définie par $\frac{(\lambda_1 - \lambda_0)X}{e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t}R(t) + X}$ est croissante.

Nous avons donc, $\forall t < t_0 \quad h'(t) \geq 0$ si :

$$\lambda(t) \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)F(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t}}{e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t}R(t) + F(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_0)t}}$$

$$\lambda(t) \geq (\lambda_1 - \lambda_0)F(t).$$

De même si $\lambda_1 \geq \lambda_0$, $\forall t < t_0 \quad h'(t) \leq 0$ si :

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_0) \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}{R(t) + \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x)}$$

Et comme $\forall t \geq 0, \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_0)x} dF(x) \leq F(t)$.

Nous obtenons comme résultat :

$$\forall t < t_0, \quad h'(t) \leq 0 \quad \text{si} \quad \lambda(t) \leq (\lambda_1 - \lambda_0)F(t)e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)t}.$$

2^{ème} cas : $\lambda_1 < \lambda_0$

Dans ce cas, il est clair que $h'(t) < 0$, pour tout $t < t_0$.

La durée de vie est donc DFR.

■

Remarque :

Si $\lambda_1 < \lambda_0$, nous retrouvons le résultat du cas T suit une loi exponentielle : la durée

de vie est toujours DFR (voir théorème 5.2.2 à la page 85).

5.2.3 τ_0 , τ_1 et T : lois quelconques

Jusqu'à maintenant nous avons étudié le cas de durées de vie τ_0 et τ_1 exponentielles. Désormais nous supposons que les durées de vies du processus 0 et 1 ainsi que la variable aléatoire T suivent des lois quelconques.

Donnons tout d'abord quelques notations indispensables à l'étude :

- $f_0(t)$ et $f_1(t)$ sont respectivement la densité de la loi de τ_0 et τ_1 , $\forall t \geq 0$.
- Les fiabilités au temps $t \geq 0$ du processus 0 et du processus 1 sont notées respectivement $R_0(t)$ et $R_1(t)$.
- Leurs taux de dégradation sont appelés respectivement $\lambda_0(t)$ et $\lambda_1(t)$, $\forall t \geq 0$.
- T est la variable aléatoire représentant la date du transfert du processus 0 au processus 1, de densité $f(t)$, de fiabilité $R(t)$ ($= 1 - F(t)$) et de taux de défaillance $\lambda(t)$, $\forall t \geq 0$.

Dans cette partie, nous allons supposer qu'aucun risque de refus de démarrage lors du transfert de loi n'existe ($\gamma = 0$).

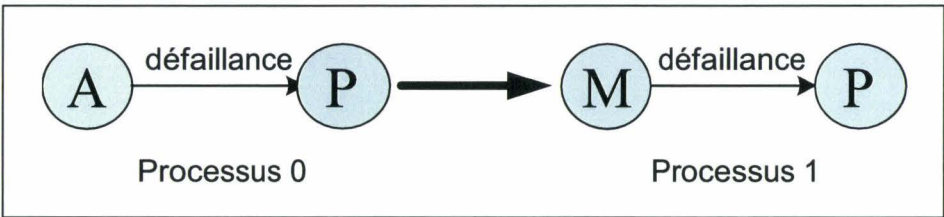


FIG. 5.13 – Système non réparable

Avec toutes ces hypothèses, la durée de vie du processus est :

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{si } T \geq \tau_0 \\ T + \tau_1 & \text{si } T < \tau_0 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tau < t) &= \mathbb{P}(\tau_0 < \min(t; T)) + \int_0^t \mathbb{P}(\tau_1 < t - x \text{ et } \tau_0 > x) dF(x) \\
 &= \int_0^t F_0(x) dF(x) + \int_t^\infty F_0(t) dF(x) + \int_0^t F_1(t - x) R_0(x) dF(x) \\
 &= F(t) - \int_0^t R_0(x) dF(x) + R(t) - R_0(t) R(t) + \int_0^t F_1(t - x) R_0(x) dF(x) \\
 &= 1 - R_0(t) R(t) + \int_0^t (F_1(t - x) - 1) R_0(x) dF(x) \\
 &= 1 - R_0(t) R(t) - \int_0^t R_1(t - x) R_0(x) dF(x).
 \end{aligned}$$

La fiabilité du processus est donc, $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) = R_0(t) R(t) + \int_0^t R_1(t - x) R_0(x) dF(x).$$

On peut donc en déduire sa densité de loi par, $\forall t \geq 0$:

$$g(t) = f_0(t) R(t) + \int_0^t f_1(t - x) R_0(x) dF(x).$$

Pour étudier ce cas particulier, nous notons, $\forall t \geq 0$:

- $\delta(t) = f_1(0) - \lambda_0(t) = \lambda_1(0) - \lambda_0(t),$
- $\psi(t) = \int_0^t R_1(t - x) R_0(x) dF(x),$
- $\psi_f(t) = \int_0^t f_1(t - x) R_0(x) dF(x) \text{ et}$
- $\psi_{f'}(t) = \int_0^t f_1'(t - x) R_0(x) dF(x).$

Nous allons envisager trois cas suivant le signe de δ :

5.2.3.1 $\forall t \geq 0, \delta(t) > 0$

Ce qui signifie que le taux de défaillance de τ_0 est toujours inférieur au taux de défaillance lors du démarrage du processus 1.

Remarque :

Dans ce cas et si τ_1 est IFR, nous avons obligatoirement $\lambda_0(t) < \lambda_1(t), \forall t \geq 0$. En revanche, si τ_1 est DFR, aucune déduction sur l'ordre de grandeur des taux de défaillance peut être faite.

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.5

Supposons que $\lambda_1(0) - \lambda_0(t) > 0, \forall t \geq 0$.

- Si τ_0 et τ_1 sont IFR et si :

$$\lambda(t) \geq \frac{\lambda_1(t)^2[R_1(t)R(t) + \psi(t)]}{4R_0(t)R(t)\delta(t)}, \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{ou } \lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2, \quad \forall t \geq 0,$$

alors la durée de vie τ du processus est IFR.

- Si τ_0 et τ_1 sont DFR et si :

$$\lambda'_0(t) \leq \delta(t)(\lambda_1(0) + \lambda_0(t) + \lambda(t)), \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{et } \lambda'_1(t) \leq [\lambda_1(t) + \lambda_1(0)][\lambda_1(t) - \lambda_1(0)], \quad \forall t \geq 0$$

alors la durée de vie τ du processus est DFR.

Preuve :

Le taux de défaillance de τ est : $\forall t \geq 0, h(t) = \frac{f_0(t)R(t) + \psi_g(t)}{R_0(t)R(t) + \psi(t)}$

Sa dérivée vaut : $\forall t \geq 0,$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[f'_0(t)R(t) - f_0(t)f(t) + \psi_{f'}(t) + f_1(0)R_0(t)f(t)] \times \right. \\ &\quad \left. [R_0(t)R(t) + \psi(t)] + [f_0(t)R(t) + \psi_f]^2 \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[R_0(t)f'_0(t)R(t)^2 + f_0(t)^2R(t)^2 + \delta(t)R(t)f(t)R_0(t)^2 + \right. \\ &\quad \left. \delta R_0(t)f(t)\psi(t) + f'_0(t)R(t)\psi(t) + 2f_0(t)R(t)\psi_f(t) + \right. \\ &\quad \left. R_0(t)R(t)\psi_{f'}(t) + \psi_{f'}(t)\psi(t) + \psi_f^2 \right] \\ h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 \right. \\ &\quad \left. + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right]. \end{aligned}$$

- Supposons que $\forall t \geq 0, \psi_{f'}(t) \geq -\lambda_1(t)\psi(t)$ et $f'_0(t) \geq -\lambda_0(t)f_0(t)$.

Nous avons donc, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} h'(t) &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][-\lambda_0(t)f_0(t)R(t) - \lambda_1(t)\psi_f(t)] + \right. \\ &\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \end{aligned}$$

Comme τ_1 est IFR et $\lambda_1(0) - \lambda_0(t) > 0, \forall t \geq 0$, nous avons : $\lambda_0(t) < \lambda_1(t), \forall t \geq 0$.

Et par déduction : $\forall t \geq 0,$

$$\begin{aligned} h'(t) &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[-\lambda_1(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f_0(t)R(t) + \psi_f(t)] + \right. \\ &\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \end{aligned}$$

Or, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & -\lambda_1(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f_0(t)R(t) + \psi_f(t)] + [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 \\ & \geq \frac{\lambda_1(t)^2[R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2}{4} - \frac{\lambda_1(t)^2[R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$,

$$h'(t) \geq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[\frac{-\lambda_1(t)^2[R_0(t)R(t) + \psi(t)]}{4} + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t) \right]$$

Et donc pour finir, $\forall t \geq 0$:

$$h'(t) \geq 0 \text{ si } \lambda(t) \geq \frac{\lambda_1(t)^2(R_0(t)R(t) + \psi(t))}{4\delta(t)R_0(t)R(t)}.$$

Montrons la deuxième condition :

$\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ & \quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ & \quad \left. [\lambda_0(t)R_0(t)R(t) + \lambda_1(0)\psi(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ & \quad \left. \lambda_0(t)^2[R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ &\geq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2R_0(t)R(t) + \right. \\ & \quad \left. \lambda_0(t)^2\psi(t) + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t) \right] \end{aligned}$$

$$h'(t) \geq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[R(t) \underbrace{[f'_0(t) + \lambda_0(t)^2 R_0(t) + \delta(t)R_0(t)\lambda(t)]}_{\geq 0 \text{ car } \tau_0 \text{ IFR et } \delta(t) > 0} + \right. \\ \left. \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t) \right].$$

Or, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t) &\geq 0 \quad \text{si} \quad f'_1(t-x) + \lambda_0(t)^2 R_1(t-x) \geq 0, \quad \forall t \geq x \geq 0 \\ &\quad \text{si} \quad f'_1(t-x) + \lambda_0(t-x)^2 R_1(t-x) \geq 0, \quad \forall t \geq x \geq 0 \\ &\quad \text{si} \quad f'_1(t) + \lambda_0(t)^2 R_1(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2, \quad \forall t \geq 0.$$

• Supposons maintenant τ_0 et τ_1 DFR,

$\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ &\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ h'(t) &\leq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t) + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t)] \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1(0)^2 [R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 \right] \\ &\leq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t) + \delta(t)R_0(t)R(t)\lambda(t) + \right. \\ &\quad \left. \lambda_1(0)^2 [R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \leq 0$ si et seulement si :

$$R(t)[f'_0(t) + \delta(t)R_0(t)\lambda(t) + \lambda_1(0)^2 R_0(t)] + \psi_{f'}(t) + \lambda_1(0)^2 \psi(t) \leq 0$$

Cette condition est vérifiée si :

$$\forall t \geq 0, \quad f'_0(t) + R_0(t)[\delta(t)\lambda(t) + \lambda_1(0)^2] \leq 0 \quad \text{et} \quad f'_1(t) + \lambda_1(0)^2 R_1(t) \leq 0.$$

C'est à dire si : $\forall t \geq 0$,

$$\lambda'_0(t) \leq \delta(t)(\lambda(t) + \lambda_1(0) + \lambda_0(t)) \quad \text{et} \quad \lambda'_1(t) \leq \lambda_1(t)^2 - \lambda_1(0)^2.$$

5.2.3.2 $\forall t \geq 0, \delta(t) = 0$

Remarque :

Dans ce cas et si τ_1 est IFR, nous avons obligatoirement $\lambda_0(t) < \lambda_1(t)$, $\forall t \geq 0$. En revanche, si τ_1 est DFR, $\lambda_0(t) > \lambda_1(t)$, $\forall t \geq 0$.

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.6

Supposons que $\lambda_1(0) - \lambda_0(t) = 0$, $\forall t \geq 0$.

- Si τ_0 et τ_1 sont IFR et si :

$$\lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_1(0)^2, \quad \forall t \geq 0$$

alors la durée de vie τ du processus est IFR.

- Si τ_0 et τ_1 sont DFR et si :

$$\lambda'_0(t) \leq \lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2, \quad \forall t \geq 0$$

alors la durée de vie τ du processus est DFR.

Preuve :

- La dérivée du taux de défaillance de τ vaut : $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
 &\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 \right] \\
 &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
 &\quad \left. [\lambda_0(t)R_0(t)R(t) + \lambda_1(0)\psi(t)]^2 \right] \\
 &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
 &\quad \left. \lambda_0(t)^2 [R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 \right] \\
 &\geq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[R(t) \underbrace{[f'_0(t) + \lambda_0(t)^2 R_0(t)]}_{\geq 0 \text{ car } \tau_0 \text{ est IFR}} + \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t) \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \geq 0$ si et seulement si :

$$R(t)[f'_0(t) + \lambda_0(t)^2 R_0(t)] + \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t) \geq 0$$

Cette condition est vérifiée si :

$$\forall t \geq 0, \quad f'_1(t) + \lambda_1(t)^2 R_1(t) \geq 0.$$

C'est à dire si :

$$\forall t \geq 0,$$

$$\lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_1(0)^2.$$

• Supposons que τ_0 et τ_1 sont DFR.

$$\forall t \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
&\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
&\quad \left. [\lambda_0(t)R_0(t)R(t) + \lambda_1(0)\psi(t)]^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\
&\quad \left. \lambda_0(t)^2 [R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 \right] \\
&\leq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[R(t) \underbrace{[f'_0(t) + \lambda_0(t)^2 R_0(t)]}_{\leq 0 \text{ car } \tau_0 \text{ est DFR}} + \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t)^2 \right]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \leq 0$ si et seulement si :

$$R(t)[f'_0(t) + \lambda_0(t)^2 R_0(t)] + \psi_{f'}(t) + \lambda_0(t)^2 \psi(t) \leq 0$$

Cette condition est vérifiée si : $\forall t \geq 0$,

$$\lambda'_0(t)R_0(t)R(t) + \psi(t)[\lambda_0(t)^2 - \lambda_1(t)^2] \leq 0.$$

C'est à dire si :

$\forall t \geq 0$,

$$\lambda'_0(t) \leq \lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2.$$

5.2.3.3 $\forall t \geq 0$, $\delta(t) < 0$

Remarque :

Dans ce cas et si τ_1 est IFR, nous avons obligatoirement $\lambda_0(t) > \lambda_1(t)$, $\forall t \geq 0$. En

revanche, si τ_1 est DFR, aucune déduction sur l'ordre de grandeur des taux de défaillance peut être faite.

Conditions pour que τ soit IFR ou DFR :

Théorème 5.2.7

Supposons que $\lambda_1(0) - \lambda_0(t) < 0, \forall t \geq 0$.

- Si τ_0 et τ_1 sont IFR, la durée de vie τ du processus est IFR si : $\forall t \geq 0$,

$$\lambda'_0(t) \geq \delta(t)[\lambda_1(0) + \lambda_0(t) + \lambda(t)]$$

$$\text{et } \lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_1(0)^2.$$

- Si τ_0 et τ_1 sont DFR, la durée de vie τ du processus est DFR si :

$$\lambda(t) \leq \frac{\lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2}{\delta(t)}.$$

Preuve :

- Nous supposons que τ_0 et τ_1 sont IFR

La dérivée du taux de défaillance de τ vaut : $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ &\quad \left. [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ &\quad \left. [\lambda_0(t)R_0(t)R(t) + \lambda_1(0)\psi(t)]^2 + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \\ &\geq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)][f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t)] + \right. \\ &\quad \left. \lambda_1(0)^2[R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \right] \end{aligned}$$

$$h'(t) \geq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[R(t)[f'_0(t) + \lambda_1(0)^2 R_0(t) + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)] + \right. \\ \left. \psi_{f'}(t) + \lambda_1(0)^2 \psi(t)^2 \right]$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \geq 0$ si et seulement si :

$$R(t)[f'_0(t) + \lambda_1(0)^2 R_0(t) + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)] + \psi_{f'}(t) + \lambda_1(0)^2 \psi(t) \geq 0$$

Cette condition est vérifiée si : $\forall t \geq 0$,

$$f'_0(t) + R_0(t)[\delta(t)\lambda(t) + \lambda_1(0)^2] \geq 0 \quad \text{et} \quad f'_1(t) + \lambda_1(0)^2 R_1(t) \geq 0.$$

C'est à dire si :

$\forall t \geq 0$,

$$\lambda'_0(t) \geq \delta(t)[\lambda(t) + \lambda_1(0) + \lambda_0(t)] \quad \text{et} \quad \lambda'_1(t) \geq \lambda_1(t)^2 - \lambda_1(0)^2.$$

• Supposons que τ_0 et τ_1 sont DFR.

$\forall t \geq 0$,

$$h'(t) = \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \times \right. \\ \left. [f'_0(t)R(t) + \psi_{f'}(t) + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)] \right. \\ \left. + [f_0(t)R(t) + \psi_f(t)]^2 \right] \\ \leq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \times \right. \\ \left. [-\lambda_0(t)^2 R_0(t)R(t) - \lambda_1(t)^2 \psi(t) + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)] + \right. \\ \left. [\lambda_0(t)R_0(t)R(t) + \lambda_1(0)\psi(t)]^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 h'(t) &\leq \frac{1}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[[R_0(t)R(t) + \psi(t)] \times \right. \\
 &\quad \left. [-\lambda_0(t)^2 R_0(t)R(t) - \lambda_1(t)^2 \psi(t) + \delta(t)\lambda(t)R_0(t)R(t)] + \right. \\
 &\quad \left. \lambda_0(t)^2 [R_0(t)R(t) + \psi(t)]^2 \right] \\
 &\leq \frac{R_0(t)R(t) + \psi(t)}{\mathbb{P}(\tau > t)^2} \left[\underbrace{\lambda(t)\delta(t)R(t)R_0(t)}_{\leq 0} + \psi(t)[\lambda_0(t)^2 - \lambda_1(t)^2] \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $h'(t) \leq 0$ si et seulement si :

$$\lambda(t)\delta(t)R(t)R_0(t) + \psi(t)[\lambda_0(t)^2 - \lambda_1(t)^2] \leq 0$$

Cette condition est vérifiée si : $\forall t \geq 0$,

$$\lambda(t) \leq \frac{\lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2}{\delta(t)}$$

ou encore :

$$\lambda(t) \leq \frac{\lambda_1(t)^2 - \lambda_0(t)^2}{\lambda_1(0) - \lambda_0(t)}.$$

5.3 Conclusion

Dans les études de fiabilité, les processus de Markov et les BDMP permettent de modéliser le comportement dynamique d'un système. Mais des problèmes surviennent pour des systèmes complexes, notamment lorsque les modèles sont de grande taille ou encore réparables sous certaines conditions. Au vu de ces difficultés, comme donner une approximation pessimiste de la fiabilité proche de la vraie valeur, nous nous sommes intéressés aux propriétés de vieillissement du système. Nous avons pu déterminer un ordre de grandeur de l'intervalle de temps de mission sur lequel le pessimisme de l'approximation exponentielle calculée avec l'approximation du *MTTF* donnée par SRI, est assurée pour un système NBU ou IFRA.

De plus, grâce aux théorèmes existants que nous avons rappelés ou nouveaux que nous avons démontrés, nous avons déterminé des conditions suffisantes pour qu'un système modélisé par un processus de Markov ou un BDMP possède la propriété de vieillissement

NBU. Nous avons donc obtenu une nouvelle approximation pessimiste de la fiabilité pour des temps de mission faibles et moyens. Afin de connaître les limites des théorèmes que nous donnons, nous avons fait de nombreuses applications, et nous avons remarqué que les conditions de ces théorèmes sont assez exigeantes et parfois difficiles à vérifier malgré le fait que l'approximation exponentielle s'avère bien pessimiste. Son utilisation dans le contexte d'études de sûreté est donc délicate.

Pour le caractère optimiste, des conditions suffisantes ont également été mises en évidence que ce soit pour un système modélisé par un processus de Markov ou un BDMP. Mais elles ne sont pas plus faciles à vérifier.

Chapitre 6

APPROXIMATION SRIA

Une possibilité afin d'améliorer l'approximation obtenue par l'algorithme SRI et sans ajouter de conditions particulières sur le système (vieillessement ou autre ...), est de prendre en compte le temps passé dans l'état initial (unique état considéré par l'algorithme SRI lors de l'évaluation de la fiabilité) ainsi que celui passé dans certains états.

C'est ce que nous nous sommes proposés de faire avec l'approximation SRIA où on prend en compte le temps passé dans les états de sortie de l'état initial. Nous devrions obtenir une approximation "meilleure" que l'approximation SRI mais qui reste pessimiste pour tout $t \geq 0$ [11].

6.1 Principe et calcul de l'approximation

Notons $X(0)$, l'état initial du processus X . Donnons tout d'abord la définition d'une "Amorce" :

Définition 6.1.1

Les états dans lesquels le système peut aboutir à partir de l'état initial après une dégradation sont appelés amorces.

Ces états seront notés dans la suite de l'exposé : $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k > 0$) et sont supposés être en nombre fini.

Notations

Supposons que le processus a pour taux de transition à partir de l'état initial $X(0)$, le taux λ_i vers l'amorce A_i (pour tout $0 < i \leq k$) et notons a_i son taux de sortie.

Enfin, notons $\forall 0 < i \leq k$, ϵ_i la probabilité qu'ayant quitté l'état A_i , le processus atteigne un état de panne (appartenant à ξ^-) avant de revenir à $X(0)$.

En considérant le temps passé dans ces amorces, la durée de vie du système τ peut s'écrire :

$$\tau = \tau_1^0 + \tau_1^a + \tau_1^r + \tau_2^0 + \tau_2^a + \tau_2^r + \dots + \tau_{N-1}^0 + \tau_{N-1}^a + \tau_{N-1}^r + \tau_N^0 + \tau_N^a + \rho$$

où N est le nombre de séjours dans l'état initial

τ_j^0 est le temps du j -ième séjour dans l'état initial

τ_j^a est le temps du j -ième séjour dans les amorces

τ_j^r est le temps passé entre une amorce et $X(0)$ lors du j -ième passage

pour $0 < j \leq N$

et ρ le temps d'accès à ξ^- à partir d'une amorce.

En ne prenant en compte que les temps de séjour dans l'état initial et les différentes amorces, nous parvenons à minorer la fiabilité du système à tout instant $t > 0$ de façon assez simple :

Théorème 6.1.1

Notons $X(0)$ l'état initial du système de taux de sortie a_0 , λ_i les taux de transition de $X(0)$ vers les amorces A_i pour $i = 1, \dots, k$, a_i les taux de sortie de ces amorces. Ainsi que ϵ_i la probabilité qu'ayant quitté A_i , le processus atteigne un état de panne avant de revenir dans $X(0)$. Alors pour tout $t \geq 0$:

$$R(t) \geq \exp \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon_i \left(\frac{\exp(-a_i t) - 1 + a_i t}{a_i} \right) \right)$$

Preuve :

Le temps passé dans une amorce A_i ($i = 1, \dots, k$) est un temps de séjour exponentiel de taux a_i . Ainsi la probabilité que la j -ième sortie de l'état $X(0)$ à la date notée $t_j > 0$ aboutisse à un état de panne avant $t > 0$ sans retour à l'état initial est inférieure à :

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{a_0} \left(1 - \exp(-a_i(t - t_j)) \right) \epsilon_i$$

Dans cette expression, a_0 est le taux de sortie de l'état initial :

$$a_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

En effet, il faut :

- passer par une amorce A_i (la probabilité que le système passe de l'état initial à l'amorce A_i est égale à $\frac{\lambda_i}{a_0}$),
- y rester moins de $t - t_j$ unités de temps (le taux de sortie de l'état A_i est noté a_i , la probabilité que le processus reste dans l'état A_i moins de $t - t_j$ unités de temps est donc égale à $1 - \exp(-a_i(t - t_j))$) et
- sortir vers les états de panne (la probabilité qu'ayant quitté A_i le processus atteigne un état de panne avant de revenir dans $X(0)$ est ϵ_i).

La somme est faite sur toutes les amorces du processus.

Ainsi la probabilité $\mathbb{P}_n(t)$ que la panne ait lieu avant $t > 0$ après exactement n sorties de l'état initial $X(0)$ ($\mathbb{P}_n(t)$ est donc la probabilité qu'aucune des $n - 1$ sorties n'aboutisse à la panne sauf la n -ième avant t) est inférieure à :

$$\begin{aligned} P &= \int \dots \int_{0 \leq t_1 < t_2 < \dots \leq t} a_0 \exp(-a_0 t_1) (1 - \alpha_1) a_0 \exp(-a_0(t_2 - t_1)) (1 - \alpha_2) dt_1 dt_n \\ &= \int \dots \int a_n a_0^n \exp(-a_0 t) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \alpha_j) dt_1 dt_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Notons } a &= 1 - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \epsilon_i}{a_0} \\ \text{et } b_i &= \frac{\lambda_i \epsilon_i}{a_0}. \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons donc : } a = 1 - \sum_{i=1}^k b_i$$

et pour $t > 0$:

$$P = \int \dots \int a_0^n \exp(-a_0 t) \prod_{j=1}^n ((a + \sum_{i=1}^k b_i \exp(-a_i u_j)) du_j)$$

Posons pour $t > 0$:

$$Q_n(t) = \int \dots \int \prod_{j=1}^n ((a + \sum_{i=1}^k b_i \exp(-a_i u_j)) du_j)$$

et

$$Q_0(t) = 1$$

La probabilité de non panne est la somme de toutes ces probabilités pour n allant de 0 à l'infini :

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \geq \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \exp(-a_0 t) Q_n(t)$$

Notons $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \exp(-a_0 t) Q_n(t)$ et remarquons que $\Phi(0) = 1$

De même, $Q'_n(t) = Q_{n-1}(t) (a + \sum_{i=1}^k b_i \exp(-a_i t))$

Ainsi pour $t > 0$:

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_0^{n+1} \exp(-a_0 t) Q_n(t) + a_0^n \exp(-a_0 t) Q_{n-1}(t) (a + \sum_{i=1}^k b_i \exp(-a_i t))$$

En remplaçant a par $1 - \sum_{i=1}^k b_i$, nous obtenons pour $t > 0$:

$$\Phi'(t) = a_0 \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{a_0} \epsilon_i (\exp(-a_i t) - 1) \Phi(t)$$

Ainsi, pour $t > 0$:

$$\Phi(t) = \exp \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon_i \left(\frac{\exp(-a_i t) - 1 + a_i t}{a_i} \right) \right)$$

■

Remarque :

Si certaines amorces sont des états où aucune réparation ne peut avoir lieu, leur taux a_i ($i = 1, \dots, k$) sont alors très faibles et nous obtenons la minoration suivante :

$$\mathbb{P}(\tau \geq t) \geq \exp \left(- \sum_{j=1}^{k_1} \lambda_j \epsilon_j \left(\frac{\exp(-a_j t) - 1 + a_j t}{a_j} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_2} a_i \lambda_i \epsilon_i t^2 \right)$$

si pour tous les états sans réparations :
 $a_i t \ll 1$

où k_1 est le nombre d'amorces où des réparations sont possibles

k_2 est le nombre d'amorces où seules des dégradations peuvent avoir lieu.

Puisque pour les amorces A_i , $i = 1, \dots, k_2$ et $t > 0$ tels que $a_i t \ll 1$, nous avons :

$$\exp(-a_i t) \approx 1 - a_i t + \frac{a_i^2 t^2}{2}$$

Notons que plus les amorces où aucune réparation n'est possible, sont nombreuses par rapport aux amorces dans lesquelles la sortie peut s'effectuer soit par une dégradation, soit par une réparation, plus l'approximation SRIA sera "préférable" (au sens : moins pessimiste) à l'approximation SRI. Nous allons le contaster sur les exemples qui suivent.

6.2 Exemples

6.2.1 Amorces avec réparations possibles

Considérons un système où la sortie de toutes les amorces peut s'effectuer par une dégradation ou une réparation :

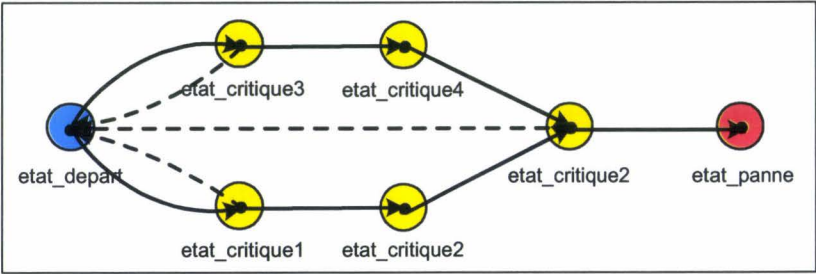


FIG. 6.1 – Système avec amorces comprenant des réparations

Tous les taux de dégradation sont supposés égaux à $\lambda = 10^{-5}/h$ et tous les taux de réparation à $\mu = 0,1/h$.

Ce système comporte deux amorces : "etat_critique1" et "etat_critique3".

Ainsi par le calcul de l'algorithme SRI, nous obtenons la majoration suivante de la défiabilité :

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq 1 - \exp \left(- \frac{2\lambda^3}{(\lambda + \mu)^2} t \right)$$

et par celui de l'approximation SRIA :

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq 1 - \exp \left(- \frac{2\lambda^3}{(\lambda + \mu)^2} \left(\frac{\exp(-(\lambda + \mu)t) - 1 + (\lambda + \mu)t}{\lambda + \mu} \right) \right)$$

Nous avons donc comparé graphiquement ces deux approximations :

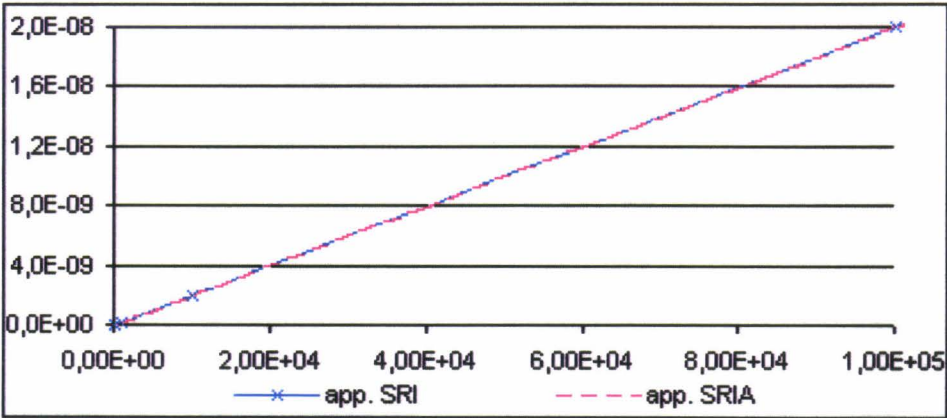


FIG. 6.2 – Approximations "SRI" et "SRIA" du système avec amorces réparables

Comme attendu, l'approximation SRIA n'améliore guère l'approximation SRI même pour des temps de missions assez faibles. En effet, ces deux courbes sont quasiment superposées.

Comparons maintenant ces deux approximations sur un système dans lequel la sortie de ces amorces ne peut s'effectuer que par une dégradation :

6.2.2 Amorces sans réparations possibles

Prenons un système où la sortie de toutes les amorces ne peut s'effectuer que par une dégradation :

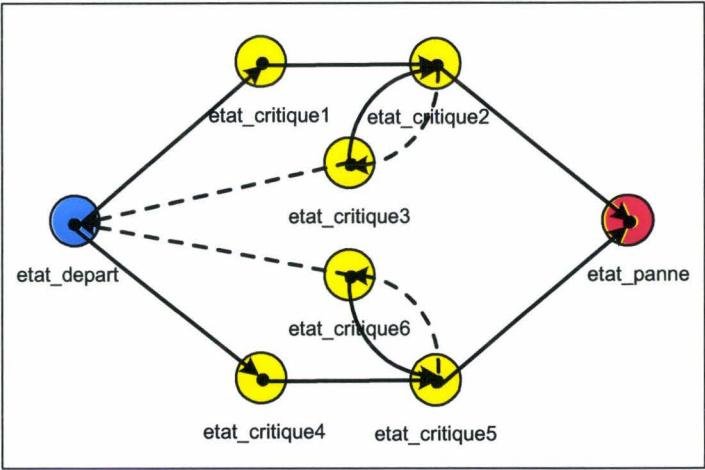


FIG. 6.3 – Système avec amorces ne comprenant pas de réparations

Il est tout aussi facile de déterminer l'approximation SRIA que pour l'exemple précédent. Voici les données (d'approximations de la défiabilité) obtenues :

t	0,00E+00	1,00E+02	1,00E+03	1,00E+04	1,00E+05	1,00E+06	1,00E+07
SRI	0,0000E+00	2,0000E-07	2,0000E-06	2,0000E-05	1,9998E-04	1,9980E-03	1,9801E-02
SRIA	0,0000E+00	0,0000E+00	1,9984E-14	1,9350E-11	1,4714E-08	3,5964E-06	3,9199E-04

FIG. 6.4 – Données des approximations de la défiabilité

Et le graphique associé :

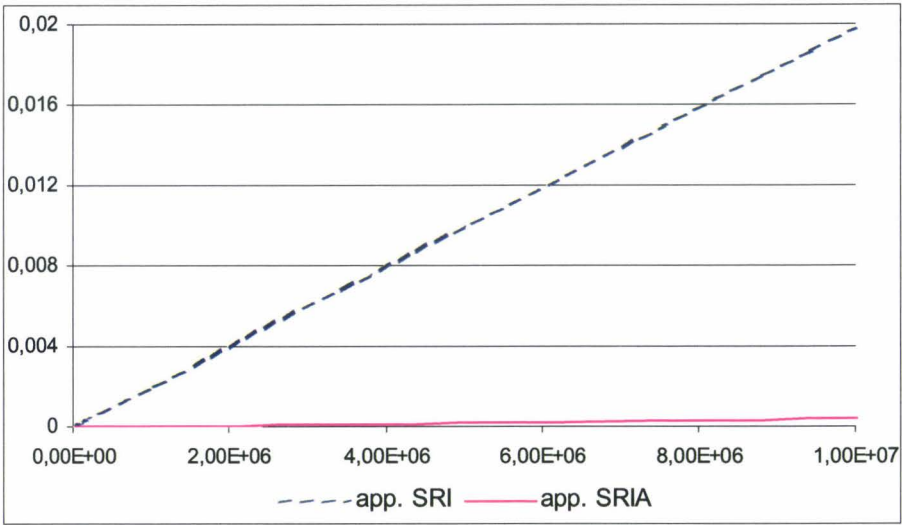


FIG. 6.5 – Approximations "SRI" et "SRIA" du système avec amorces non réparables

L'approximation est bien moins pessimiste que l'approximation obtenue par l'algorithme SRI. Elle est totalement valable lors des études fiabilistes si le système est de ce type.

6.3 Conclusion

Pour les systèmes non "standards", comme ceux étudiés dans ce document, les approximations obtenues par les algorithmes SN et SRI sont bien trop pessimistes pour être prises en considération. L'approximation "approximation exponentielle *MTTF*" est certes, plus proche de la valeur optimiste donnée par SN, mais il nous est difficile de montrer théoriquement son pessimisme. Lors du calcul de l'approximation SRIA, le temps passé dans les amorces est pris en compte et il a été vérifié que l'écart entre cette approximation et l'approximation SRI est d'autant plus significatif que les différents taux de sortie des amorces sont petits, cela est vrai en particulier quand les amorces sont des états dans lesquels il ne peut y avoir de réparations.

Chapitre 7

PRISE EN COMPTE DE CERTAINS ÉTATS LENTS : L'APPROXIMATION SRRI

L'algorithme SRI permet de calculer une approximation du temps cumulé passé dans l'état initial, cette valeur est convenable lorsque le système revient rapidement dans cet état et surtout lorsqu'il n'y a pas d'autre état dans lequel le système passe énormément de temps.

Pour les autres cas, l'algorithme SRI va nous procurer une approximation extrêmement pessimiste et inutilisable dans les études. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'approximation SRIA. Les exemples nous ont démontré qu'elle peut être "meilleure", au sens de moins pessimiste, que l'approximation SRI, mais seulement pour certains systèmes. Nous allons donc généraliser un peu plus cette approximation. Ainsi, afin d'être moins pessimiste, nous prenons en compte le temps passé dans ces états appelés "sans réparation" (c'est à dire : état dans lequel la sortie ne peut pas s'effectuer par une réparation, le système y passe donc beaucoup de temps) en négligeant les temps de retour à l'état initial par des états "avec réparations" (états dans lesquels une réparation peut avoir lieu).

7.1 Principe et calcul de l'approximation

Précisons tout d'abord qu'un état est dit "sans réparation" si le processus ne peut sortir de cet état que par une dégradation.

A partir de cette définition, nous appellerons "retour long" (respectivement "retour rapide"), tout retour à l'état initial s'effectuant en passant par au moins un état "sans réparation" (respectivement sans passer par un état "sans réparation"), les temps moyens des dégradations étant supposés grands par rapport à ceux des réparations.

La durée de vie d'un système réparable peut s'écrire en une somme de différentes durées de vie :

$$\tau = \tau_1^0 + \kappa_1 + \tau_2^0 + \kappa_2 + \dots + \tau_{N-1}^0 + \kappa_{N-1} + \tau_N^0 + \rho$$

où N est le nombre de séjours dans l'état initial,

τ_i^0 , $i = 1, \dots, N$, le temps du i -ème séjour dans l'état initial,

κ_j , $j = 1, \dots, N - 1$, le temps du j -ème retour à l'état initial,

ρ est le temps d'entrée dans un état de panne après le dernier passage dans l'état initial.

Pour distinguer les retours "longs" et "rapides", nous pouvons dissocier les retours :

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{N-1} = \kappa_{L_1} + \kappa_{L_2} + \dots + \kappa_{L_{N_1}} + \kappa_{R_1} + \kappa_{R_2} + \dots + \kappa_{R_{N_2}}$$

où N_1 est le nombre de retours "longs",

N_2 est le nombre de retours "rapides"

$$\text{avec } N_1 + N_2 = N - 1,$$

κ_{L_i} , $i = 1, \dots, N_1$, le temps d'un retour "long",

κ_{R_j} , $j = 1, \dots, N_2$, le temps d'un retour "rapide".

Ainsi, nous pouvons minorer la durée de vie du système par le temps cumulé passé dans l'état initial et les temps de retour "long" :

$$\tau \geq \tau_1^0 + \tau_2^0 + \dots + \tau_N^0 + \kappa_{L_1} + \kappa_{L_2} + \dots + \kappa_{L_{N_1}} \quad (7.1)$$

Avant de poursuivre l'étude de cette durée de vie, nous allons donner ou rappeler quelques notations indispensables à la compréhension des résultats ainsi qu'à la simplification des calculs :

Notations

Nous désignons par :

- a_0 , le taux de sortie de l'état initial
- a_L , le plus élevé des taux de sortie des états "sans réparations" autres que l'état initial

- r , la probabilité que le retour à l'état initial s'effectue par le passage dans un état "sans réparation"
- ϵ , la probabilité que le système aille dans un état de panne plutôt que de retourner dans l'état initial (cette probabilité est calculée par l'algorithme SRI)
- $\bar{r}$ (ou $\bar{\epsilon}$), le complémentaire à 1 de r (ou de ϵ).

A partir de ces notations, nous définissons les valeurs s_1 , s_2 , b_1 et b_2 par :

$$s_1 = \frac{a_0 + a_L - \bar{\epsilon}a_0\bar{r} + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$s_2 = \frac{a_0 + a_L - \bar{\epsilon}a_0\bar{r} - \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$b_1 = \frac{\epsilon a_0(a_0 - a_L - \bar{\epsilon}a_0\bar{r} + \sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}},$$

$$b_2 = \frac{\epsilon a_0(a_L - a_0 + \bar{\epsilon}a_0\bar{r} + \sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}},$$

$$\text{avec } \Delta = (a_0 + a_L - \bar{\epsilon}a_0\bar{r})^2 - 4a_0a_L\epsilon.$$

Grâce à la minoration de la durée de vie (7.1), nous obtenons une approximation pessimiste de la fiabilité par le mélange de deux exponentielles :

Théorème 7.1.1

Avec toutes les notations définies ci-dessus, la fiabilité du système peut être minorée par :

$$R(t) \geq \frac{b_1}{s_1} \exp(-s_1 t) + \frac{b_2}{s_2} \exp(-s_2 t) \quad \forall t \geq 0$$

Preuve :

Notons :

$$\tau_{SRI} = \sum_{i=1}^N \tau_i^0 + \sum_{j=0}^{N_1} \kappa_{L_j}$$

L_{τ^0} , la transformée de Laplace de la densité de τ^0

L_{κ_L} , la transformée de Laplace de la sensité de κ_L .

Nous avons $\tau > \tau_{SRRI}$ et donc, $\mathbb{P}(\tau > t) > \mathbb{P}(\tau_{SRRI} > t)$

Comme toutes les variables aléatoires qui s'ajoutent pour former τ_{SRRI} sont indépendantes, la transformée de Laplace de τ_{SRRI} est :

$$\begin{aligned}
 L_{\tau_{SRRI}} &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \epsilon L_{\tau^0}^k \sum_{i=0}^{k-1} L_{\kappa_L}^i C_{k-1}^i r^i (1-r)^{k-1-i} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \epsilon L_{\tau^0}^k (1-r)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left(\frac{r L_{\kappa_L}}{\bar{r}} \right)^i \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \epsilon L_{\tau^0}^k (1-r)^{k-1} \left(1 + \frac{r L_{\kappa_L}}{\bar{r}} \right)^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} \epsilon L_{\tau^0}^k (\bar{r} + r L_{\kappa_L})^{k-1} \\
 &= \epsilon L_{\tau^0} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\epsilon)^{k-1} L_{\tau^0}^{k-1} (\bar{r} + r L_{\kappa_L})^{k-1} \\
 &= \frac{\epsilon L_{\tau^0}}{1 - \bar{\epsilon} L_{\tau^0} (\bar{r} + r L_{\kappa_L})}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } L_{\tau^0}(s) = \frac{a_0}{a_0 + s} \text{ et } L_{\kappa_L}(s) = \frac{a_L}{a_L + s},$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
 L_{\tau_{SRRI}} &= \frac{\epsilon \frac{a_0}{a_0 + s}}{1 - \bar{\epsilon} \frac{a_0}{a_0 + s} \left(\bar{r} + r \frac{a_L}{a_L + s} \right)} \\
 &= \frac{\epsilon a_0 (a_L + s)}{(a_0 + s)(a_L + s) - \bar{\epsilon} a_0 (\bar{r}(a_L + s) + r a_L)} \\
 &= \frac{\epsilon a_0 (a_L + s)}{s^2 + s(a_0 + a_L - \bar{\epsilon} \bar{r} a_0) + a_0 a_L \epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\tau_{SRI}} &= \frac{\epsilon a_0(a_L + s)}{(s + s_1)(s + s_2)} \\
&= \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2}
\end{aligned}$$

La densité de τ_{SRI} au point $t \geq 0$ est donc :

$$b_1 \exp(-s_1 t) + b_2 \exp(-s_2 t)$$

et :

$$\mathbb{P}(\tau_{SRI} > t) = \frac{b_1}{s_1} \exp(-s_1 t) + \frac{b_2}{s_2} \exp(-s_2 t)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned}
\frac{b_1}{s_1} &\geq 0, \\
\frac{b_2}{s_2} &\geq 0 \text{ et} \\
\frac{b_1}{s_1} + \frac{b_2}{s_2} &= 1.
\end{aligned}$$

La durée de vie τ_{SRI} est donc un mélange de deux exponentielles.

■

Remarque

Si on considère un système totalement réparable, ce qui revient à prendre $r = 0$, on retrouve le calcul de l'approximation SRI car l'expression de $L_{\tau_{SRI}}$ se simplifie en :

$$\frac{\epsilon L_{\tau^0}}{1 - \bar{\epsilon} L_{\tau^0}}.$$

Dans la partie suivante, nous allons étudier cette approximation sur deux exemples en la comparant avec l'approximation exponentielle MTTF et l'approximation SRIA.

7.2 Exemples

7.2.1 Application à un BDMP - Comparaison avec l'"approximation exponentielle *MTTF*"

Considérons le système série-parallèle modélisé par un BDMP présenté dans la section "Les algorithmes SN et SRI" (page 41).

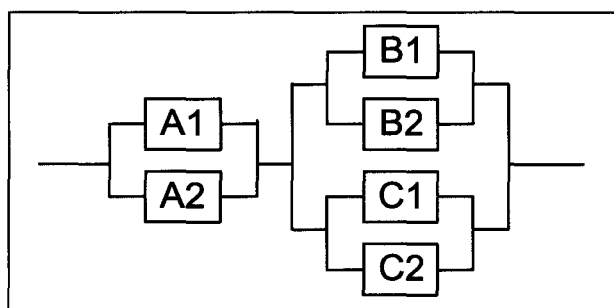


FIG. 7.1 – Système série-parallèle à réparations différées

Vu les conditions faites sur les réparations, nous avons pu déterminer une approximation de la probabilité r ($= \frac{2}{3}$) et d'en déduire l'approximation SRRI.

Rappelons que la valeur ϵ est calculée par l'algorithme SRI.

Pour cette étude, nous avons supposé que le taux de dégradation des composants A1 et A2 vaut 10^{-5} et celui des autres, 10^{-4} . Le taux de réparation est identique pour tous les composants et vaut 0,1.

Afin de comparer cette approximation à l'approximation exponentielle *MTTF*, nous avons également considéré la valeur *apMTTF* donnée par SRI.

La valeur obtenue est 10973552, soit environ $1.10E^{+07}$.

Voici les données (d'approximations de la défiabilité) obtenues :

t	0	1,00E+02	1,00E+03	1,00E+04	1,00E+05	5,00E+05	1,00E+06
SRI	0	8,2243E-05	8,2213E-04	8,1909E-03	7,8955E-02	3,3717E-01	5,6065E-01
SN optimiste	0	1,8112E-07	4,0791E-06	4,6079E-04	1,0940E-03	1,9659E-02	4,2366E-02
SN pessimiste	0	1,8259E-07	4,1542E-06	4,5143E-03	7,3474E-02	3,6257E-01	6,5233E-01
SRRI	0	8,1108E-05	7,2052E-04	3,7181E-03	2,2969E-02	1,0399E-01	1,9588E-01
expo. MTTF	0	9,1128E-06	9,1124E-05	9,1087E-04	9,0714E-03	4,4542E-02	8,7099E-02

FIG. 7.2 – Données des approximations de la défiabilité du BDMP - FIG3.10

"SRRI" représente les valeurs de l'approximation SRRI pour chaque temps de mission donné.

Les figures suivantes (FIG. 7.3 et FIG. 7.4) nous montrent le tracé des différentes approximations :

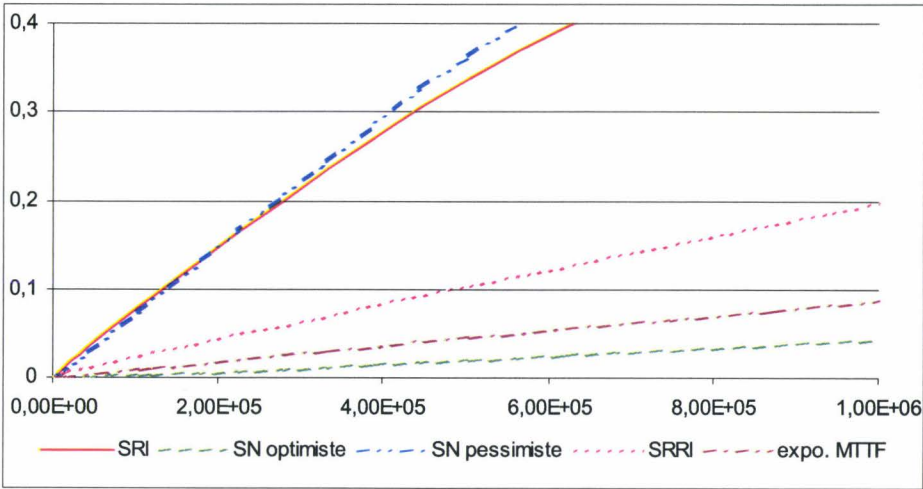


FIG. 7.3 – Représentation graphique des approximations de la défiabilité

Comme attendu, l'approximation SRRI est bien "meilleure" que les approximations SRI et SN pessimiste et ceci pour des temps de mission bien inférieurs au MTTF (supérieur à $1.10E^{+07}$). L'approximation exponentielle MTTF est plus proche de l'approximation SN optimiste que l'est l'approximation SRRI, mais il nous est impossible de déterminer son caractère pessimiste ou optimiste. Son utilisation dans les études n'est donc pas possible, alors que l'approximation SRRI l'est.

La figure suivante (FIG. 7.4) est un agrandissement du graphique précédent à l'origine :

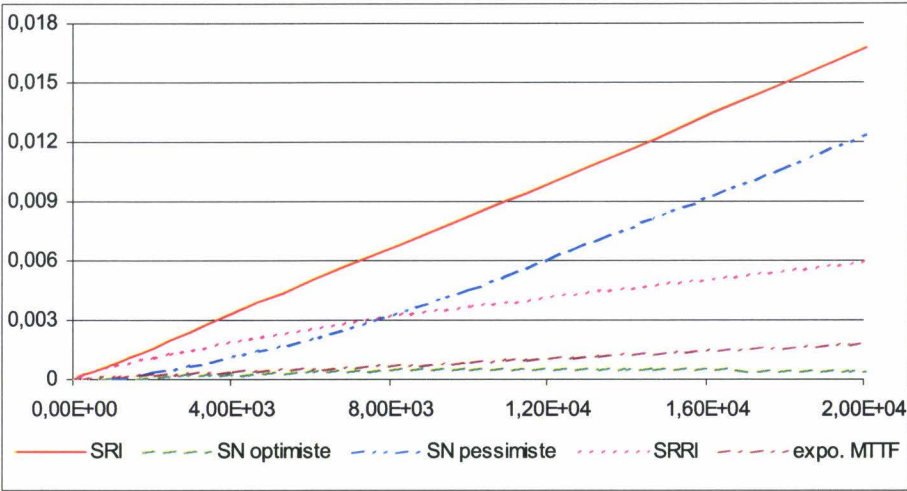


FIG. 7.4 – Comparaison des approximations à l'origine

Sur ce graphique, on remarque que l'approximation SN pessimiste est inférieure à l'approximation SRRI, et donc plus proche de la vraie valeur de la défiabilité. Mais ce résultat est obtenu pour des temps de missions très faibles, très proche de 0 par rapport au MTTF du système. L'approximation SRRI sera donc intéressante pour des temps de missions moyens et grands.

7.2.2 Comparaison avec l'approximation SRIA

Considérons maintenant le système "semi-réparable" modélisé par le processus de Markov suivant :

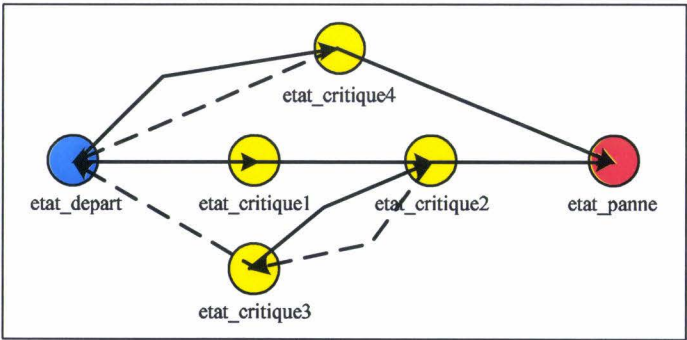


FIG. 7.5 – Système "semi-réparable"

"etat_critique1" est l'unique état "sans réparation" du système et de plus, appartient

à l'ensemble des amorces. Il sera donc pris en compte lors du calcul des deux approximations SRIA et SRRI. Comme aucun autre état n'est "sans réparation" (autre que l'état initial et "etat_critique1"), l'approximation SRIA considèrera donc plus d'états que l'approximation SRRI.

Avant tout calcul, il est donc possible de remarquer que sur cet exemple, l'approximation SRIA sera moins pessimiste que l'approximation SRRI :

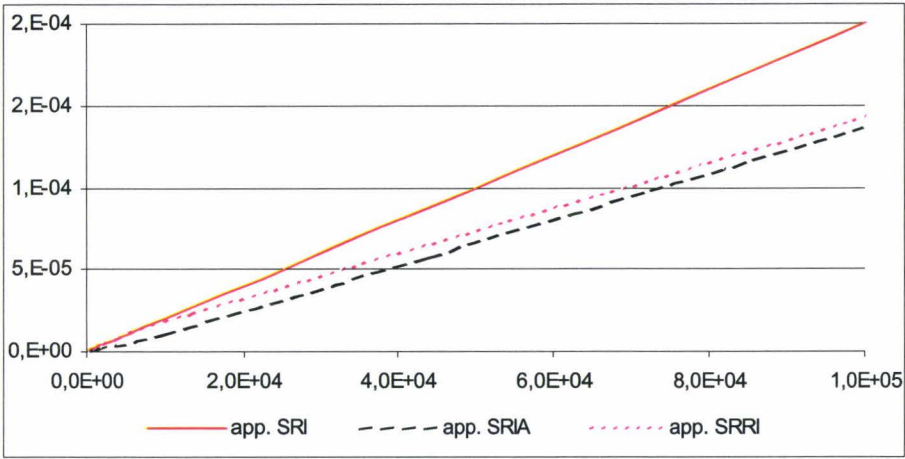


FIG. 7.6 – Représentation graphique : Comparaison approximation SRIA - SRRI

En général, l'approximation SRRI sera "meilleure" que l'approximation SRIA lorsqu'au moins un état "sans réparation" ne sera pas une amorce ou pour des temps de mission s'approchant de la valeur du *MTTF*.

7.3 Conclusion

De plus en plus dans les milieux industriels et dans les études fiabilistes, nous rencontrons des systèmes d'une grande complexité. Les premières dégradations sont de moins en moins réparées tout de suite pour différentes raisons : coût de la maintenance ou panne non détectée. Nous ne pouvons donc plus nous contenter d'une évaluation du temps cumulé dans les états de fonctionnement parfait pour obtenir une approximation "valable" de la fiabilité ou défiabilité (c'est à dire proche de la vraie valeur). Afin d'améliorer l'évaluation de cette valeur, un principe évident serait de prendre en compte également le temps cumulé dans les états de fonctionnement dégradé dans lesquels aucune réparation n'est possible. C'est le principe de l'approximation SRRI. Cette approximation apporte

une indéniable amélioration par rapport à SN ou SRI, comme nous l'avons montré sur des exemples. Toutefois, elle suppose une relative homogénéité des temps passés dans les états dont aucune réparation ne fait sortir, car pour assurer son caractère pessimiste, on doit "s'aligner" sur le plus faible des temps de séjour "longs" ($1/a_L$) en dehors de l'état initial. Mais il est encore possible d'améliorer cette approximation pour certains systèmes en prenant en compte avec précision, le temps passé dans les états dans lesquels le temps de séjour est supérieur à un certain seuil fixé. C'est ce que calcule l'approximation appelée "Lent-Rapide Sans Boucle".

Chapitre 8

APPROXIMATION "LENT-RAPIDE SANS BOUCLE"

Dans cette partie, nous présentons une nouvelle méthode de calcul de la fiabilité qui peut-être appliquée aux processus de Markov raides et complexes, comme les modèles décrivant le vieillissement des composants (avec la méthode des phases [1]) ou des systèmes avec des réparations différées (les composants ne sont pas réparés dès qu'ils tombent en panne, mais après une ou plusieurs pannes supplémentaires). Cette nouvelle approximation repose sur le principe de l'approximation "Lent-Rapide" développée par O. Pourret [42] et basée sur les travaux de K. S. Trivedi [7], [8], [24], [26], [44], [45], [54].

L'approximation initiale s'appuie sur le fait que les événements qui affectent les systèmes se produisant selon des échelles de temps très diverses : les temps de réparation sont courts par rapport aux temps de dégradation, ou certaines dégradations sont plus longues que d'autres à se produire.

Afin d'expliquer le principe de ces deux approximations, nous allons commencer par rappeler quelques notations et définitions nécessaires à la compréhension de l'étude.

8.1 Préliminaires : définitions liées à l'approximation

8.1.1 Etats lents/rapides

Dans un modèle markovien, il existe deux types de transitions possibles : celles qui caractérisent une défaillance du fonctionnement du système (panne d'un composant) et celles qui font référence à une réparation.

Il est courant (et souhaitable) que les temps de réparation soient beaucoup plus courts que ceux des dégradations, ce qui se traduit par des taux de transition plus élevés par rapport aux taux de défaillance.

Puisque nous étudions des systèmes à réparations différées, nous observons une disparité dans les taux de sortie des différents états du système :

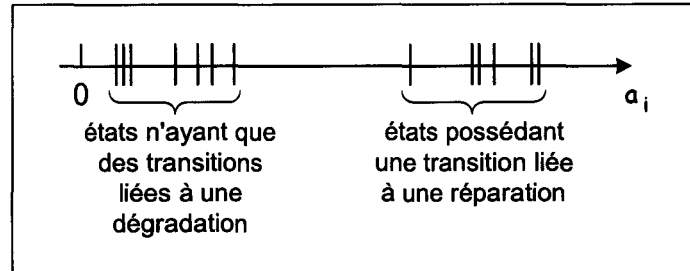


FIG. 8.1 – Disparité des taux de sortie des états

Afin de formaliser cette décomposition en deux sous-parties de l'ensemble des états du système, nous allons introduire un paramètre positif θ définissant la frontière entre transitions rapides et lentes :

Définition 8.1.1

Soit $\theta > 0$, une transition est dite rapide si son taux est supérieur à θ , sinon elle est dite lente.

Tout naturellement, nous obtenons la définition d'un état rapide ou lent :

Définition 8.1.2

Un état est défini comme rapide (respectivement lent) si au moins une transition à partir de cet état est rapide (respectivement si toutes les transitions à partir de cet état sont lentes).

Ainsi, nous définissons les sous-ensembles des états lents et rapides de ξ :

$\mathcal{L}$ est le **sous-ensemble des états lents** :

$$\mathcal{L} = \{i \in \xi | \forall j \in \xi \setminus \{i\}, a_{ij} < \theta\}$$

$\mathcal{R}$ est le **sous-ensemble des états rapides** :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \xi \setminus \mathcal{L} \\ &= \{r \in \xi \mid \exists j \in \xi \setminus \{r\}, a_{rj} \geq \theta\}.\end{aligned}$$

Après ré-indexation des états permettant de regrouper tous les états lents d'une part et tous les états rapides d'autre part, la matrice des taux de transition peut être décomposée par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} & \mathbf{A}_{\mathcal{LR}} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{RL}} & \mathbf{A}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

où $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ est le bloc des transitions entre états lents,
 $\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$ le bloc des transitions entre états rapides,
 $\mathbf{A}_{\mathcal{LR}}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{RL}}$ respectivement les blocs des transitions d'un état lent à un état rapide, et d'un état rapide à un état lent.

Remarque :

Le taux de sortie d'un état de panne étant nul, le sous-ensemble d'états ξ^- est constitué d'états lents.

8.1.2 Séquences bouclées/non bouclées

Cette nouvelle approximation fait essentiellement référence au terme "séquence bouclée" (ou "séquence non bouclée"). Précisons maintenant cette notion :

Définition 8.1.3

Soit $k \geq 1$, la séquence $s = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \in \xi^k$ est dite **bouclée**, si et seulement s'il existe i, j tels que :

$$1 \leq i < j \leq k \quad \text{et} \quad \eta_i = \eta_j.$$

Elle est dite **non bouclée** dans le cas contraire.

Définition 8.1.4

Soit la séquence bouclée $s = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ ($\eta_i \in \xi, \forall i \leq k$ et $k \geq 1$). On note $s' = (\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_p)$ ($1 \leq p \leq k$) la séquence non bouclée associée définie comme suit :

- $\eta'_1 = \eta_1$
- si $i \geq 1$ et $\{j/i < j \leq k, \{\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_i\} \cap \{\eta_j, \dots, \eta_k\} = \emptyset\} = \emptyset$ alors $p = i$
- si $i \geq 1$ et $\{j/i < j \leq k, \{\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_i\} \cap \{\eta_j, \dots, \eta_k\} = \emptyset\} \neq \emptyset$ alors :

$$\eta'_{i+1} = \eta_m$$

où $m = \min \{j/i < j \leq k, \{\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_i\} \cap \{\eta_j, \dots, \eta_k\} = \emptyset\}$

Exemple et illustration :

Soit $s = (i_0, i_1, r_1, r_2, r_1, j)$.

Alors on note s' la séquence non bouclée associée (i_0, i_1, r_1, j) :

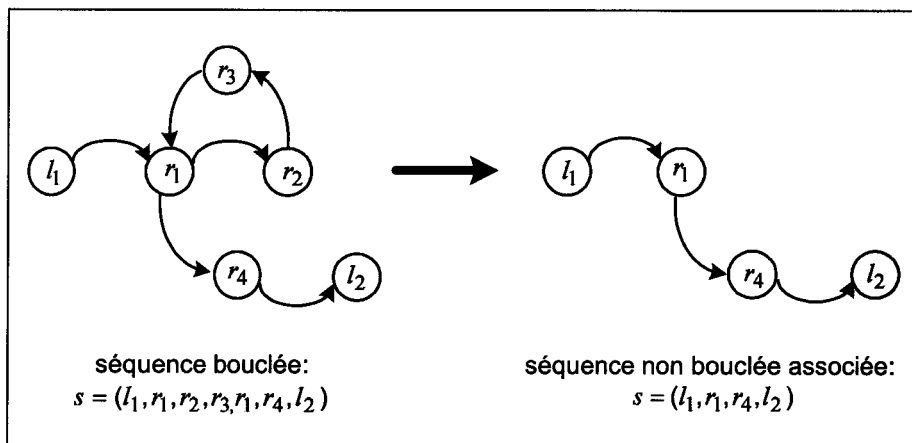


FIG. 8.2 – Séquence bouclée / non bouclée associée

8.2 Approximation "Lent-Rapide"

8.2.1 Motivation

Un cas particulier extrême pour les états rapides est celui des états dits "instantanés". Dans le monde industriel, il est fréquent d'étudier des systèmes modélisés par un processus de Markov possédant des états dits "instantanés". Considérons l'exemple suivant :

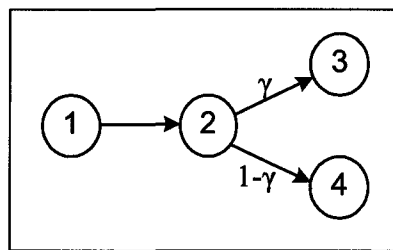


FIG. 8.3 – Processus de Markov avec état instantané

L'état (2) est considéré comme un état instantané. Le processus quitte (2) pour (3) avec la probabilité γ et pour (4) avec la probabilité $1 - \gamma$. Cette configuration peut représenter par exemple, le démarrage d'un composant de secours, avec une probabilité γ et $1 - \gamma$ de succès.

Dans la pratique, on supprime l'état (2) et on considère une transition de l'état (1) vers (3) de taux $\gamma\lambda$ (λ étant le taux de transition de l'état (1) à (2)), et une transition de l'état (1) à (4) de taux $(1 - \gamma)\lambda$.

Nous avons donc réduit le processus initial à ce nouveau processus qui ne comporte pas d'état instantané :

Ici la réduction est exacte, puisque :

$$p_3(t) = \mathbb{P}(X(t) = 3 | X(0) = 1) \quad \text{et}$$

$$p_4(t) = \mathbb{P}(X(t) = 4 | X(0) = 1)$$

sont identiques pour les deux modèles.

Supposons maintenant que le temps de séjour dans l'état (2) au lieu d'être nul suit une loi exponentielle de paramètre μ avec μ grand par rapport à λ . Dans ce cas, si on s'intéresse au processus initial, la probabilité $p_3(t)$ a pour expression :

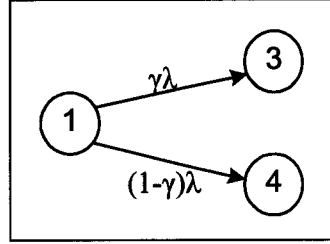


FIG. 8.4 – Processus de Markov après réduction

$$p_3(t) = \gamma - \frac{\gamma\mu \exp(-\lambda t) - \gamma\lambda \exp(-\mu t)}{\mu - \lambda}$$

Alors qu'en étudiant le processus réduit, nous obtenons comme approximation :

$$\tilde{p}_3(t) = \gamma - \gamma \exp(-\lambda t).$$

Nous n'obtenons donc pas la même expression pour les deux processus. Néanmoins, il est facile de vérifier que :

- $\forall t \geq 0, \tilde{p}_3(t) \geq p_3(t)$
- plus le rapport entre μ et λ est élevé, plus l'approximation se révèle satisfaisante.

8.2.2 Technique d'approximation

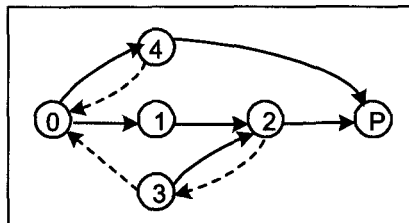
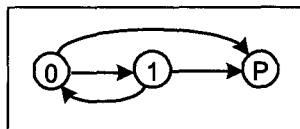
Le but de l'approximation "Lent-Rapide" est de réduire l'espace d'états du système aux états lents et de construire un nouveau processus $\tilde{X} = (\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ réduit à ces états. Il a été montré dans [7] et [42] que cette construction est possible tout en gardant le caractère markovien du système.

Nous donnons ci-dessous les principales caractéristiques de $\tilde{X}$

Exemple :

Considérons l'exemple suivant d'un processus de Markov simpliste :

Les flèches en pointillé représentent les réparations. Si on suppose qu'un état est rapide dès lors que le système peut en sortir par une réparation, le nouveau processus réduit aux états lents est le suivant :

FIG. 8.5 – Processus initial X FIG. 8.6 – Processus $\tilde{X}$ réduit aux états lents

Le calcul de la fiabilité du processus réduit peut être obtenu par une méthode analytique "standard". En effet, cette méthode réduit considérablement la taille et la raideur du modèle markovien puisqu'en général, le nombre d'états lents est très inférieur au nombre d'états rapides.

Afin de construire le processus réduit qui servira d'approximation nous commençons par introduire la notion de probabilité de retour à j à partir de r , pour $r \in \mathcal{R}$ et $j \in \mathcal{L}$, notée $\bar{q}_{rj}$:

Définition 8.2.1

Pour tout $r \in \mathcal{R}$ et $j \in \mathcal{L}$, on appelle **probabilité de retour** à j à partir de r , la probabilité notée $\bar{q}_{rj}$, que le processus rentre dans $\mathcal{L}$ par j lorsqu'il se trouve dans l'état r :

$$\bar{q}_{rj} = q_{rj} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n} q_{rr_1} \dots q_{r_{n-1}r_n} q_{r_n j}.$$

La matrice formée par ces coefficients est notée $\bar{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}}$.

A partir de cette matrice, la matrice des taux de transition $\bar{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}}$ du processus réduit est déterminée.

Nous avons :

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}_{\mathcal{L}} + \mathbf{A}_{\mathcal{LR}} \bar{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}}$$

Il est également établi dans [42] que la matrice $\bar{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}}$ peut s'exprimer en fonction des blocs de la matrice des taux de transition du processus X :

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}} = -\mathbf{A}_{\mathcal{R}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{RL}}$$

Il en découle que la matrice des taux de transition du processus réduit s'exprime à l'aide des blocs de la matrice génératrice du processus initial (voir la formule (8.1), page 127) :

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}_{\mathcal{L}} - \mathbf{A}_{\mathcal{LR}} \mathbf{A}_{\mathcal{R}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{RL}}.$$

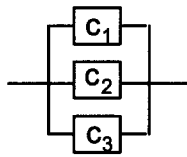
Plusieurs propriétés vérifiées par cette approximation ont été prouvées dans [42]. Les deux qui nous paraissent les plus importantes (par rapport à notre étude) sont :

- le caractère pessimiste lors de l'évaluation de la probabilité de présence dans les états absorbants,
- la faible mesure d'erreur d'approximation.

Ces deux résultats permettent d'apprécier l'intérêt de la méthode. Finissons cette présentation par un exemple assez simple nous le confirmant :

Exemple :

Nous considérons un système à 3 composants en parallèle :



Enumérons les hypothèses faites sur ce système :

1. un seul des composants est non réparable,
2. aucune dépendance entre eux n'est supposée,
3. les taux de défaillance des 3 composants sont identiques, ainsi que les taux de réparation (pour les deux composants réparables).

Avec ces conditions, le système peut être modélisé par le processus de Markov suivant :

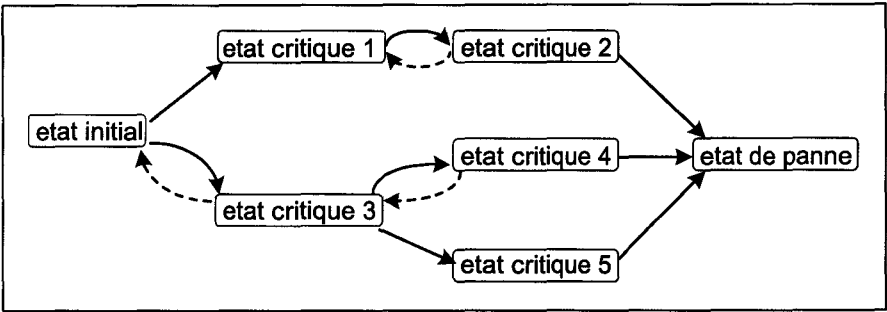


FIG. 8.7 – Système parallèle à 3 composants identiques dont 1 non réparable

Ce système est suffisamment simple pour obtenir la valeur de la fiabilité à tout instant $t \geq 0$, avec un calcul analytique standard, comme par exemple la méthode d'Uniformisation.

Dans cet exemple, nous avons pris comme valeur du taux de dégradation $10^{-5}/h$ et, comme taux de réparation $0.1/h$. Le MTTF du système est égal à 10^{09} .

En supposant qu'un état est rapide dès lors que le système peut en sortir par une réparation, nous obtenons le processus réduit $\tilde{X}$ suivant :

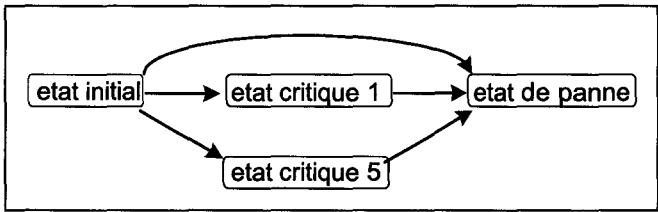


FIG. 8.8 – Système parallèle à 3 composants identiques dont 1 non réparable réduit aux états lents

Les valeurs obtenues pour le calcul de la défiabilité et par l'approximation "Lent-Rapide" sont données dans le tableau suivant :

temps de mission	100	1000	5000	10000	30000	50000	100000
défiabilité	8,99E-11	9,85E-09	2,43E-07	9,51E-07	7,8E-06	1,97E-05	6,32E-05
approx. Lent-Rapide	1,10E-10	1,01E-08	2,44E-07	9,53E-07	7,82E-06	1,97E-05	6,32E-05
erreur relative	2,22E-01	2,04E-02	4,11E-03	2,10E-03	1,99E-03	7,24E-04	4,15E-04

Le graphique suivant représente l'erreur relative entre l'approximation "Lent-Rapide" ap-

pliquée au calcul de la fiabilité du système et sa valeur réelle :

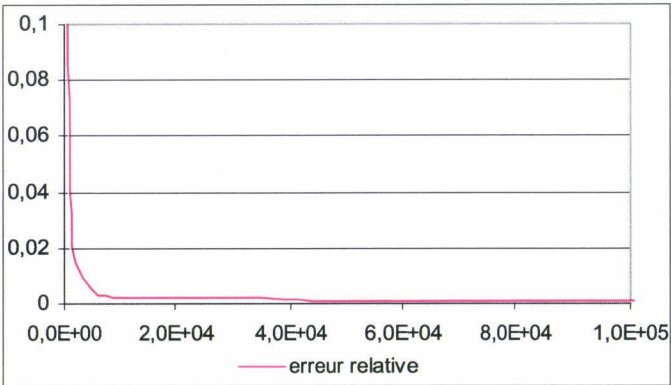


FIG. 8.9 – Erreur relative entre l’approximation "Lent-Rapide" et une méthode standard

En appliquant la méthode d’Uniformisation et pour obtenir un résultat aussi fiable, il faudrait un nombre minimum d’itérations supérieur à $1.01 \cdot 10^{05}$ à $t = 1000$ et $1.00 \cdot 10^{07}$ itérations sont nécessaires pour un temps de mission $t = 100000$.

Cette approximation est donc non seulement fiable, mais aussi elle permet d’économiser un temps de calcul non négligeable.

Cependant pour obtenir ces résultats, la matrice des taux de transition du processus initial doit être connue dans sa globalité, ce qui n’est pas le cas en général, dans les études industrielles. En effet, dans ce domaine, nous nous intéressons à des systèmes d’une grande complexité où seule la description locale du processus est connue, c’est à dire qu’à partir de chaque état, nous connaissons les transitions possibles et leur taux. L’approximation "Lent-Rapide" est donc particulièrement efficace, mais seulement pour les systèmes dont la matrice des taux de transition est suffisamment réduite pour permettre son stockage et les différents calculs matriciels.

Afin de résoudre le problème concernant la connaissance (ou non) de la matrice des taux de transition dans sa globalité et de pouvoir élargir l’utilisation de ce type d’approximation à des systèmes plus réels, nous avons développé une version plus "malléable" : l’approximation "Lent-Rapide Sans Boucle".

Pour cette dernière, les séquences bouclées ne sont plus prises en compte lors du calcul de la probabilité de retour à l’état lent j à partir de l’état rapide r , seules les transitions ou séquences directes le sont. Comme nous le montre l’algorithme présenté à la figure 8.16 à la page 163, cette hypothèse permet de rendre la connaissance de la description locale suffisante pour déterminer l’approximation.

8.3 Principe et calcul de la nouvelle approximation

Dans cette partie, nous présentons la nouvelle approximation appelée "Lent-Rapide Sans Boucle", avec son principe de fonctionnement et son mode de calcul basés sur ceux de l'approximation "Lent-Rapide".

8.3.1 Principe

Pour tout $t \geq 0$, la fiabilité d'un système de durée de vie τ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau \geq t) &= \sum_{s \in S} \mathbb{P}(\tau \geq t \text{ et } s) \\ &= \sum_{s \in S} \mathbb{P}(\tau \geq t | s) P(s).\end{aligned}$$

L'ensemble S est l'ensemble de toutes les séquences menant de l'état initial à la panne. Si nous calculons cette somme sur l'ensemble des séquences non bouclées dans $\mathcal{R}$, noté S^* , nous pouvons minorer la fiabilité du système par :

$$\sum_{s \in S^*} \mathbb{P}(\tau \geq t | s) P(s).$$

C'est la principale innovation de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle".

Afin de limiter davantage la complexité des calculs, nous proposons de négliger la durée de vie de chaque séjour dans l'ensemble $\mathcal{R}$. C'est le principe des approximations "Lent-Rapide" et "Lent-Rapide Sans Boucle" qui reposent sur l'analyse des trajectoires du système.

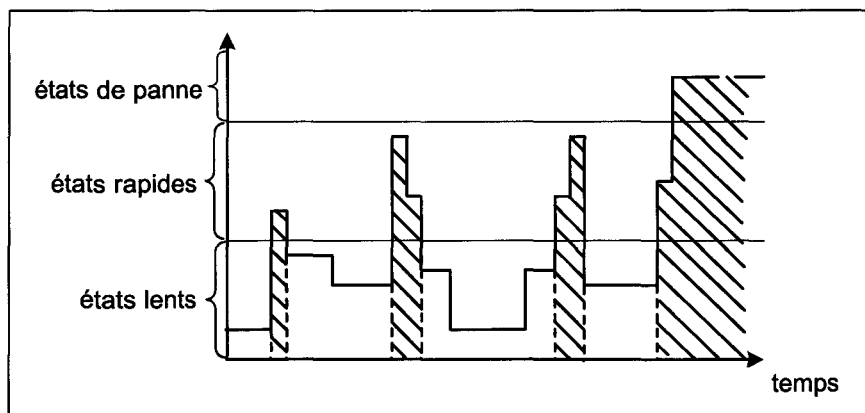


FIG. 8.10 – Trajectoire du processus initial jusqu'à la panne

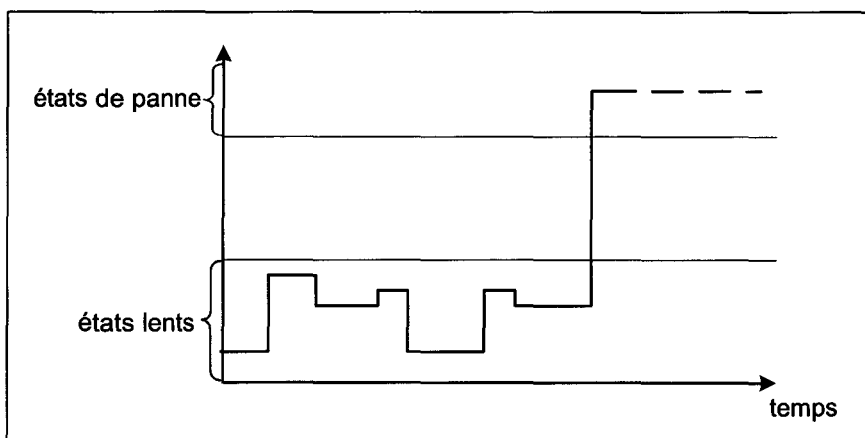


FIG. 8.11 – Trajectoire du processus réduit jusqu'à la panne

Il nous est possible d'approcher la fiabilité du système au temps $t \geq 0$ par la borne inférieure :

$$\sum_{s \in S^*} \mathbb{P}(\tau_s \geq t | s) P(s)$$

où τ_s est le temps passé dans les états lents lors de l'exploration de la séquence s .

8.3.2 Définitions et approche : Construction du processus réduit

Comme nous l'avons précisé auparavant, l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" est une extension des approximations de type "Lent-Rapide" (voir [7] et [42]). Son principal objectif est d'évaluer la probabilité d'aller d'un état lent à un autre état lent par l'exploration d'une séquence non bouclée d'états rapides pour pallier certaines difficultés d'application de l'algorithme.

Dans ce chapitre, nous reprenons la même base méthodologique que celle de l'approximation "Lent-Rapide".

8.3.2.1 Probabilité de retour sans boucle dans l'ensemble $\mathcal{L}$

Dans ce paragraphe, nous allons définir la notion de probabilité de retour dans l'ensemble $\mathcal{L}$ par l'état j à partir de l'état rapide r par l'exploration de séquences non bouclées, $\forall j \in \mathcal{L}$ et $r \in \mathcal{R}$.

Cette probabilité sera notée $\hat{q}_{rj}$ et permettra de définir la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$.

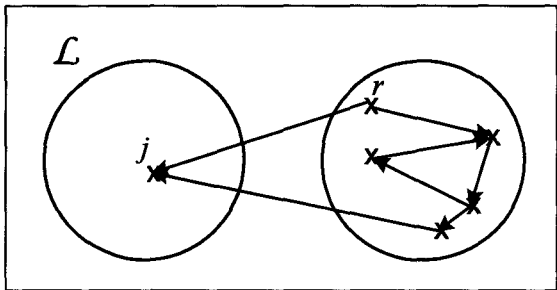


FIG. 8.12 – Séquences permettant le retour dans $\mathcal{L}$ par j à partir de l'état rapide r

La figure 8.12 représente les différentes séquences permettant de quitter l'ensemble $\mathcal{R}$ pour j . Deux issues sont possibles :

- soit il existe une transition directe de l'état r à l'état j
- soit le système explore un certain nombre d'états rapides avant d'aboutir dans l'état j .

Dans le calcul de l'approximation "Lent-Rapide", toutes les séquences sont prises en compte, même les bouclées. Nous proposons de ne pas le faire pour l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" ce qui constitue la principale innovation par rapport aux méthodes

"Lent-Rapide". On verra que cette hypothèse faite sur les séquences n'est pas anodine. En effet, c'est cette condition qui permet la définition d'un algorithme efficace et qui peut fonctionner à partir d'une définition local du processus.

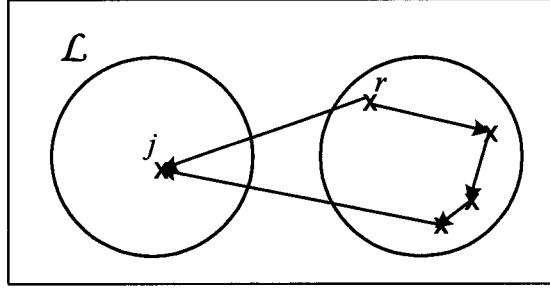


FIG. 8.13 – Séquences non bouclées permettant le retour dans $\mathcal{L}$ par j à partir de l'état rapide r

Avec l'approche séquentielle, la probabilité de retour sans boucle dans $\mathcal{L}$ par j à partir de l'état rapide r s'écrit :

$$\hat{q}_{rj} = q_{rj} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n \\ r_i \neq r_j, i, j \leq n}} q_{rr_1} \dots q_{r_{n-1}r_n} q_{r_n j} \quad \forall j \in \mathcal{L}, r \in \mathcal{R}$$

La matrice formée par ces coefficients est notée $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathcal{R}\mathcal{L}}$.

Elle ne diffère de $\bar{q}_{rj}$ que par la non prise en compte des séquences bouclées dans l'ensemble des états rapides.

Pour tout $r \in \mathcal{R}$ et $j \in \mathcal{L}$, $\hat{q}_{rj}$ est inférieur à $\bar{q}_{rj}$ et :

$$\bar{q}_{rj} - \hat{q}_{rj} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n \\ \exists i, j \text{ tels que } r_i = r_j}} q_{rr_1} \dots q_{r_{n-1}r_n} q_{r_n j}.$$

8.3.2.2 Chaîne des états lents

Nous utiliserons la même notation $X : X_n, n \in \mathbb{N}$, dans le cas de la chaîne de Markov et $X_t, t \in \mathbb{R}$, pour le processus. La nature de l'indice permettra d'éviter les confusions.

A partir de la chaîne encadrée du processus X , construisons la chaîne des états lents successifs visités par X :

Considérons la suite des "numéros" de visites à des états lents $(l_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} l_1 = \min \{l \in \mathbb{N}^*; X_l \in \mathcal{L}\} \\ \forall k \geq 2, l_k = \min \{l \in \mathbb{N}^*; l > l_{k-1}; X_l \in \mathcal{L}\} \end{cases}$$

Dans le cas où pour n , X_n est égal à un état absorbant i , nous complétons cette suite en posant pour tout $k \geq 1$:

$$l_{n+k} = l_n$$

Nous obtenons alors la **chaîne des états lents**. Elle est notée $(L_n)_{n \geq 1}$ et est définie par ses trajectoires telle qu'elle figure dans [42]. Pour tout $n \geq 1$:

$$L_n = X_{l_n}$$

Notons que tout état $i \in \mathcal{L}$ peut être visité plusieurs fois de suite.

A partir de cette chaîne, nous allons définir le **processus réduit** aux états lents, noté $\tilde{X} = (\tilde{X}(t); t \geq 0)$ qui est différent de $\tilde{X}$ défini dans l'approximation "Lent-Rapide", avec les caractéristiques suivantes :

- la loi initiale de $\tilde{X}$ est celle de $L_1 = X_{l_1}$
- les états lents visités par le processus sont $L_1, L_2, \dots$ avec répétitions possibles.

C'est ce processus que nous appelons "Lent-Rapide Sans Boucle".

Nous allons montrer par la suite qu'il est possible de construire un processus de ce type qui soit markovien, homogène sur $\mathcal{L}$ à espace de temps continu.

Pour définir le processus $\tilde{X}$, nous construisons une chaîne de Markov sur les états lents.

La construction des probabilités de transition $\hat{q}_{rj}$, pour tout état rapide r et tout état lent j , permet de fournir une approximation de la **probabilité que la chaîne des états lents successifs quitte i pour j** notée $\tilde{q}_{ij}$ pour tous les états lents i et j :

$$\tilde{q}_{ij} = q_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} q_{ir} \hat{q}_{rj}$$

De façon similaire si $i = j$:

$$\tilde{q}_{ii} = \sum_{r \in \mathcal{R}} q_{ir} \hat{q}_{ri}$$

8.3.2.3 Approximation de la matrice des taux de transition des états lents

Nous savons que le temps de séjour du processus initial dans chaque état i suit une loi exponentielle de paramètre a_i . Nous allons définir le taux de transition de l'état i vers j ($i, j \in \mathcal{L}, i \neq j$) de $\tilde{X}$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_i \tilde{q}_{ij} \\ &= a_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} \hat{q}_{rj} \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{q}_{ij}$ est proche de la vraie valeur de la probabilité que la chaîne des états lents quitte i pour j , les taux $\tilde{a}_{ij}$ seront également proches des vraies valeurs des taux de transition.

De même, on construit $\tilde{a}_i$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= \sum_{j \neq i} \tilde{a}_{ij} \\ &= a_i \sum_{j \neq i} \tilde{q}_{ij} \\ &= a_i (1 - \tilde{q}_{ii}) \end{aligned}$$

Notons $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}}$ la matrice approchant la matrice des taux de transition du processus réduit :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}_{\mathcal{L}} + \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{R}} \hat{\mathbf{Q}}_{\mathcal{R}\mathcal{L}}$$

8.3.2.4 Récapitulatif

Dans cette partie, nous allons donner un petit récapitulatif expliquant les étapes à effectuer afin d'obtenir le processus réduit aux états lents de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle".

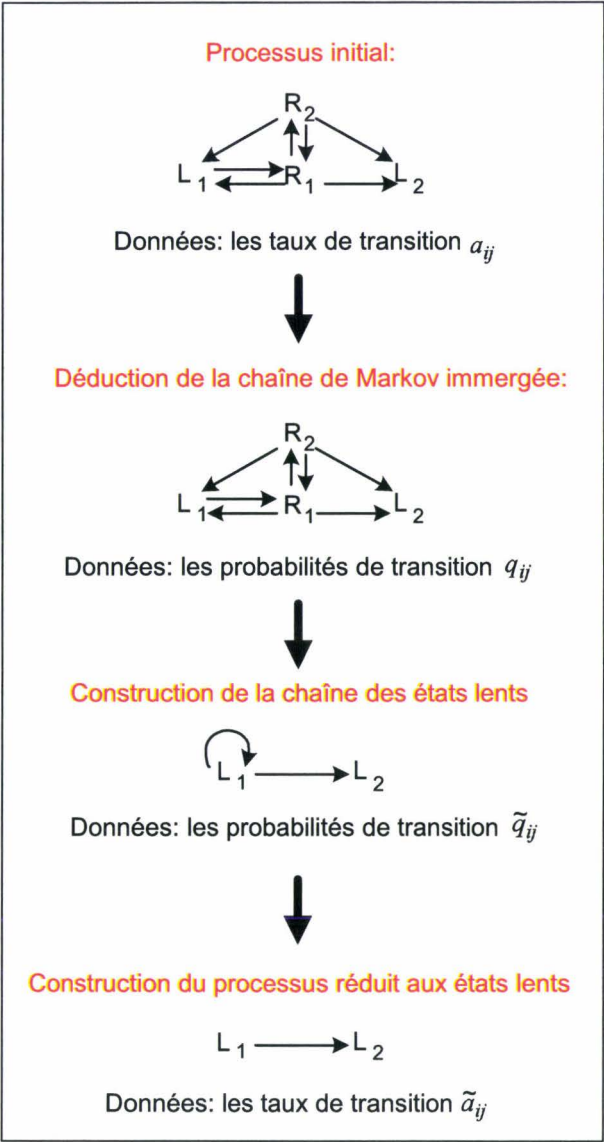


FIG. 8.14 – Récapitulatif : construction du processus réduit

8.3.2.5 Probabilité de présence dans les états du processus réduit

Pour $j \in \mathcal{L}$ et $t \geq 0$, nous notons $\tilde{p}_j(t)$ l'approximation de la probabilité de présence de ce processus à la date t en j .
Notons $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ le vecteur d'état du processus $\tilde{X}$ à la date t .

Calculer la fiabilité dans le processus réduit conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}(0) \\ \tilde{\mathbf{P}}'(t) = \tilde{\mathbf{P}}(t)\tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}} \end{cases}$$

Dans les cas réels du milieu industriel, l'état initial est un état de fonctionnement parfait où il ne peut y avoir que des dégradations. Dans ce cas, nous avons pour tout état lent j :

$$\tilde{p}_j(0) = p_j(0)$$

Pour plus de généralité, nous prendrons en compte le fait que le système peut se trouver dans un état rapide au point initial et considérons sa valeur réelle :

$$\tilde{p}_j(0) = p_j(0) + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n} p_{r_1}(0) q_{r_1 r_2} \dots q_{r_{n-1} r_n} q_{r_n j}$$

Ainsi pour évaluer la probabilité de présence de $\tilde{X}$ dans les états lents, nous devons résoudre le système suivant, pour tout état lent j :

$$\begin{cases} \tilde{p}_j(0) = p_j(0) + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n} p_{r_1}(0) q_{r_1 r_2} \dots q_{r_{n-1} r_n} q_{r_n j} \\ \tilde{p}_j'(t) = -\tilde{a}_j \tilde{p}_j(t) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{L} \\ i \neq j}} \left(a_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} \hat{q}_{rj} \right) \tilde{p}_i(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

On obtient un processus markovien $\tilde{X}$ dont il reste à définir précisément les trajectoires.

8.3.3 Lien entre $\tilde{X}$ et X

Nous allons maintenant déterminer les différentes probabilités de présence au temps $t > 0$ dans les états lents du processus réduit, sous une forme séquentielle.

Soit s une séquence explorée par le processus comportant n_1 états lents $i_1, i_2, \dots, i_{n_1}$ (visités dans cet ordre) et n_2 états rapides $r_1, r_2, \dots, r_{n_2}$. Notons n_3 le nombre d'états rapides visités plusieurs fois au cours de la séquence.

Définissons la densité $\tilde{f}_s$ comme la densité de probabilité de la somme de $n_1 - 1$ variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_1-1}}$ si

$n_3 = 0$ et comme la densité d'une loi de Dirac concentrée en 0 si $n_3 \neq 0$.

C'est à dire, pour tout $t \geq 0$:

$$\tilde{f}_s(t) = \hat{f}_s 1_{n_3=0} + \delta_0(t) 1_{n_3 \neq 0}$$

où $\hat{f}_s$ est la densité de probabilité de la somme de $n_1 - 1$ variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_1-1}}$.

La fonction de répartition associée à $\hat{f}_s$ sera notée $\hat{F}_s$, et celle de $\tilde{f}_s$, $\tilde{F}_s$.

Définissons pour tout état $j \in \mathcal{L}$ non absorbant et $t \geq 0$:

$$\bar{p}_j(t) = \bar{p}_j(0) \exp(-a_j t) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} \exp(-a_j t) P(s) \int_0^t \tilde{f}_s(u) \exp(a_j u) du \quad (8.3)$$

et pour tout état absorbant $j \in \mathcal{L}$ et $t \geq 0$:

$$\bar{p}_j(t) = \bar{p}_j(0) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} P(s) \tilde{F}_s(t) \quad (8.4)$$

Les écritures de 8.3 et de 8.4 sur le principe décrit dans la proposition 2.2.1 à la page 28.

La proposition suivante affirme que les probabilités de présence en tout état lent j et à tout temps $t > 0$, notée $\tilde{p}_j(t)$ (vérifiant le système 8.2), vérifient les équations 8.3 et 8.4. Ce qui nous permet d'écrire ces probabilités de présence sous forme séquentielle :

Proposition 8.3.1

Pour tout état $j \in \mathcal{L}$ et $t \geq 0$:

$$\tilde{p}_j(t) = \bar{p}_j(t)$$

Preuve :

Rappelons que pour tout $j \in \mathcal{L}$ et $t \geq 0$, $\tilde{p}_j(t)$ est solution du système :

$$\begin{cases} \tilde{p}_j(0) = p_j(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n} p_{r_1}(0) q_{r_1 r_2} \dots q_{r_{n-1} r_n} q_{r_n j} \\ \tilde{p}'_j(t) = -\tilde{a}_j \tilde{p}_j(t) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{L} \\ i \neq j}} \left(a_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} \hat{q}_{rj} \right) \tilde{p}_i(t). \end{cases}$$

En dérivant $\bar{p}_j$ par rapport à t , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{p}'_j(t) &= -a_j \bar{p}_j(0) \exp(-a_j t) + \\ &\quad \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} -a_j \exp(-a_j t) P(s) \int_0^t \tilde{f}_s(u) \exp(a_j u) du + P(s) \tilde{f}_s(t) \\ &= -a_j \left(\bar{p}_j(0) \exp(-a_j t) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} \exp(-a_j t) P(s) \int_0^t \tilde{f}_s(u) \exp(a_j u) du \right) + \\ &\quad \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} P(s) \tilde{f}_s(t) \\ &= -a_j \bar{p}_j(t) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} P(s) \tilde{f}_s(t). \end{aligned}$$

Pour les séquences s dans lesquelles aucun état lent n'est visité avant l'accès final à j , $\tilde{f}_s(t)$ correspond à une loi de Dirac concentrée en 0, de même si $n_3 \neq 0$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, la somme qui apparaît dans l'équation peut être restreinte à l'ensemble $\mathcal{S}_j^*$ des séquences comportant au moins un état lent en dehors de j et aucun état rapide visité plusieurs fois.

Considérons tout d'abord, les séquences s dans lesquelles l'avant dernier état visité est un état lent i (on a dans ce cas : $i \neq j$) et notons s' la séquence d'accès à i associée.

On a donc :

$$P(s) \tilde{f}_s(t) = P(s') \frac{a_{ij}}{a_i} \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) a_i \exp(-a_i u) du$$

Ainsi, la somme sur les séquences dont l'avant-dernier état est l'état lent i vaut :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'avant-dernier} \\ \text{état est } i}} P(s) \tilde{f}_s(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'avant-dernier} \\ \text{état est } i}} P(s') \frac{a_{ij}}{a_i} \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) a_i \exp(-a_i u) du$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'avant-dernier} \\ \text{état est } i}} P(s) \tilde{f}_s(t) &= a_{ij} \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathbf{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'avant-dernier} \\ \text{état est } i}} P(s') \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) \exp(-a_i u) du \\ &= a_{ij} \bar{p}_i(t) \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant, aux séquences s dans lesquelles l'avant dernier état visité est un état rapide. Pour une telle séquence, considérons le dernier état lent i visité avant j et notons s' la séquence d'accès à i associée.

Si la séquence comprend un seul état rapide r entre i et j , nous avons :

$$P(s) \tilde{f}_s(t) = P(s') \frac{a_{ir}}{a_i} q_{rj} \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) a_i \exp(-a_i u) du$$

Si la séquence comprend plusieurs états rapides que l'on note $r, r_1, \dots, r_{n-1}$ entre i et j :

$$P(s) \tilde{f}_s(t) = P(s') \frac{a_{ir}}{a_i} q_{rr_1} q_{r_1 r_2} \dots q_{r_{n-1} j} \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) a_i \exp(-a_i u) du$$

Ainsi, la somme sur les séquences dont l'état visité après l'avant dernier état lent i est l'état rapide r vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'état visité} \\ \text{après } i \text{ est } r}} P(s) \tilde{f}_s(t) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'état visité} \\ \text{après } i \text{ est } r}} P(s') \frac{a_{ir}}{a_i} * \\
&\quad \left(q_{rj} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n \\ r_i \neq r_j, i, j \leq n}} q_{rr_1} \dots q_{r_{n-1}r_n} q_{r_n j} \right) * \\
&\quad \int_0^t \tilde{f}_{s'}(t-u) a_i \exp(-a_i u) du \\
&= a_{ir} \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k \\ \text{et l'état visité} \\ \text{après } i \text{ est } r}} P(s') \hat{q}_{rj} \int_0^t \tilde{f}_{s'}(u) \exp(-a_i(t-u)) du \\
&= a_{ir} \hat{q}_{rj} \bar{p}_i(t)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $j \in \mathcal{L}$ et $t > 0$ la fonction $\bar{p}_j$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
\bar{p}'_j(t) &= -a_j \bar{p}_j(t) + \left(\sum_{\substack{i \in \mathcal{L} \\ i \neq j}} (a_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} \hat{q}_{rj}) \bar{p}_i(t) \right) + a_{jr} \hat{q}_{rj} \bar{p}_j(t) \\
&= -\tilde{a}_j \bar{p}_j(t) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{L} \\ i \neq j}} (a_{ij} + \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} \hat{q}_{rj}) \bar{p}_i(t)
\end{aligned}$$

A $t = 0$, la somme sur les séquences se limite aux séquences s ne comportant aucun état lent (la densité d'une somme de plusieurs variables aléatoires exponentielles est nulle en 0) ou comportant au moins un état rapide visité plusieurs fois.

Ainsi,

$$\bar{p}_j(0) = p_j(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n} p_{r_1}(0) q_{r_1 r_2} \dots q_{r_{n-1} r_n} q_{r_n j}$$

Les fonctions $\bar{p}_j$ vérifient donc le système différentiel qui définit les $\tilde{p}_j$, avec les mêmes conditions initiales.

On a donc, pour tout état $i \in \mathcal{L}$ et $t \geq 0$:

$$\tilde{p}_j(t) = \bar{p}_j(t)$$

■

8.4 Pessimisme de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle"

Dans cette partie, nous allons étudier le pessimisme (ou le non-pessimisme) de l'approximation lors de l'évaluation des probabilités de présence dans les différents états lents du processus markovien modélisant le système étudié.

L'analyse du processus réduit repose sur l'analyse de ses trajectoires.

Intuitivement, on aurait tendance à affirmer que cette approximation conduit à surestimer à tout instant $t \geq 0$, les probabilités de présence dans les états de panne. En effet, certaines trajectoires du processus initial vont comporter des incursions dans l'ensemble des états rapides.

Si nous négligeons la durée de chaque séjour dans $\mathcal{R}$ (ce qui est le principe de notre approximation), il est clair que le temps nécessaire pour atteindre un état de panne sera plus court, les probabilités de présence dans les états de panne seront donc majorées.

8.4.1 Conservatisme pour les états absorbants

Théorème 8.4.1

Si j est un état absorbant, alors pour tout $t \geq 0$:

$$\tilde{p}_j(t) \geq p_j(t)$$

Preuve :

Dans le cas d'un état j absorbant, nous avons :

$$p_j(t) = p_j(0) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S}_j \\ |s|=k}} P(s) F_s(t)$$

Par définition, nous avons :

$$\tilde{p}_j(0) \geq p_j(0)$$

Reste à comparer pour toute séquence s et $t > 0$, $F_s(t)$ et $\tilde{F}_s(t)$:

Soit une séquence s ,

– si $n_3 = 0$:

$\tilde{F}_s$ est la fonction de répartition associée à la densité de probabilité de la somme de $n_1 - 1$ variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_1-1}}$ et F_s est la fonction de répartition associée à la densité de probabilité de la somme de $n - 1$ variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_1-1}}, a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_{n_2}}$

Pour tout $t \geq 0$,

$$\tilde{F}_s(t) \geq F_s(t)$$

– si $n_3 \neq 0$:

Dans ce cas, $\tilde{f}_s$ correspond à une loi de Dirac concentrée en 0. Nous avons donc, pour tout $t \geq 0$:

$$\tilde{F}_s(t) = 1 \geq F_s(t)$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$,

$$\tilde{p}_j(t) \geq p_j(t)$$

■

8.4.2 Exemple de résultat non pessimiste pour les états non absorbants

Pour un état non-absorbant, l'approche séquentielle permet de mettre en évidence l'existence de cas optimiste.

En effet, considérons un système tel qu'il existe un état lent j , non absorbant, pour lequel il existe une seule séquence d'accès à cet état. Nous avons donc :

$$p_j(t) = P(s) \frac{1}{a_j} g_s(t), \quad \forall t \geq 0$$

où $P(s)$ est la probabilité que la séquence s se réalise,

g_s est la densité de probabilité de l'instant de sortie de l'état j (c'est à dire la somme des temps de séjour dans tous les états de la séquence s (y compris j), voir page 27).

Si nous appliquons l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle", nous obtenons :

$$\tilde{p}_j(t) = P(s) \frac{1}{a_j} \tilde{g}_s(t), \quad \forall t \geq 0$$

où $\tilde{g}_s$ est la densité de probabilité de la somme des temps de séjour dans tous les états lents (y compris j) de la séquence s .

Il est clair qu'une densité de probabilité ne peut majorer uniformément une autre densité. Sur cet exemple, l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" sera donc optimiste à une date $t_0 > 0$.

8.5 Etude asymptotique

Dans cette partie, nous allons étudier la valeur de la probabilité de présence dans tout état lent j obtenue par l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" lorsque t tend vers l'infini.

Commençons par donner quelques notations :

Notations :

$\forall j \in \mathcal{L}$, nous notons :

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_j(t)$$

la probabilité asymptotique de présence en j du processus X

et

$$\tilde{\pi}_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{p}_j(t)$$

celle du processus réduit.

8.5.1 Cas des états absorbants

L'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" est asymptotiquement exacte pour les états lents absorbants :

Théorème 8.5.1

$\forall j \in \mathcal{L}$ absorbant, nous avons :

$$\tilde{\pi}_j = \pi_j.$$

Preuve :

Ce résultat s'obtient en écrivant sous forme séquentielle les probabilités de présence des processus X et $\tilde{X}$ dans tout état absorbant j .

Nous savons que ces probabilités s'expriment sous la forme suivante, $\forall t \geq 0$:

$$\tilde{p}_j(t) = \sum_{s \in S_j} P(s) \tilde{F}_s(t)$$

et

$$p_j(t) = \sum_{s \in S_j} P(s) F_s(t).$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\tilde{\pi}_j = \pi_j = \sum_{s \in S_j} P(s).$$

■

S'il existe un seul état absorbant, nous avons dans ce cas :

$$\tilde{\pi}_j = 1.$$

Regardons maintenant ce qui se passe pour les autres états lents.

8.5.2 Cas des états non absorbants

Commençons par donner une nouvelle classification des états (le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage [22] pour obtenir de plus amples détails) :

Définition 8.5.1

Soit un état j non absorbant, si le processus X partant de j revient presque-sûrement en j , l'état est dit **récurrent**.

Sinon, il est dit **transient** ou **transitoire**.

Le cas j transitoire est facile à traiter puisque dans ce cas, nous avons :

$$\tilde{\pi}_j = \pi_j = 0.$$

Supposons maintenant que j est non absorbant et récurrent :

Dans [21], il est démontré que si j est un état récurrent et C_k ($k \geq 1$), la classe irréductible¹ qui le contient, on a :

$$\pi_j = \zeta_k \frac{1}{a_j k_j}$$

où ζ_k est la probabilité d'absorption dans la classe C_k

$$\zeta_k = \mathbb{P}(\exists t_0 \geq 0, \forall t \geq t_0, X(t) \in C_k)$$

k_j est le temps moyen de retour dans l'état j .

A partir de cette expression, on peut déduire le caractère pessimiste de la valeur asymptotique de l'approximation puisque le temps moyen de retour à j est plus faible pour $\tilde{X}$ que pour X , de même que le taux de sortie de j .

L'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" est donc asymptotiquement conservative.

¹Un sous-ensemble ϱ de ξ est **fermé** si aucun état extérieur à ϱ ne peut être atteint à partir d'un état de ϱ .

Un ensemble fermé est dit **irréductible** lorsqu'aucun de ses sous-ensembles stricts n'est fermé.

8.6 Majoration de l'erreur à temps fini

On constate que dans de nombreux cas pratiques, l'approximation de la fiabilité obtenue avec $\tilde{X}$ est proche de celle obtenue avec X . Mais dans la sûreté de fonctionnement, le problème de la majoration de l'erreur est un problème crucial. Nous donnons ci-dessous un résultat dans ce sens.

8.6.1 Résultat théorique

Théorème 8.6.1

Soit $\Lambda_{\mathcal{L}}$ le plus élevé des taux de sortie des états lents.

Pour tout état $j \in \xi^-$, l'erreur d'approximation se majore de la manière suivante pour tout $n > 1$ et $t > 0$:

$$\tilde{p}_j(t) - p_j(t) \leq \frac{n-1}{t} (\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})) \tilde{p}_j(t) + P_n(\Lambda t)$$

où : - $P_n(\Lambda t)$ est la probabilité qu'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de taux Λt soit supérieure ou égale à n .

- $\tau_{\mathcal{R}}$ est le majorant du temps passé lors d'un séjour dans $\mathcal{R}$

- $\tau_{\mathcal{L}}$ est le majorant du temps passé lors d'un séjour dans $\mathcal{L}$

- p_b est la probabilité d'avoir une séquence bouclée dans $\mathcal{R}$.

Preuve :

Pour démontrer ce théorème, les probabilités de présence vont être écrites sous forme séquentielle. Ainsi, commençons par rappeler quelques notations :

- Soit une séquence $s \in S_j$ de longueur n comportant :
 - o n_1 états lents notés $l_1, l_2, \dots, l_{n_1}$ (visités dans cet ordre)
 - o n_2 états rapides $r_1, r_2, \dots, r_{n_2}$.

A cette séquence, nous associons le nombre n_3 représentant le nombre d'états rapides visités plusieurs fois au cours de l'exploration de s .

- Si $n \geq 2$, la loi de T_{n-1} conditionnée par l'événement " $s = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ " est celle de la somme de $n-1$ variables aléatoires exponentielles de paramètres $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}$.

On note F_s , la fonction de répartition de cette loi.

– $\tilde{F}_s$ est :

- la fonction de répartition de la somme de $n_1 - 1$ variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de paramètres $a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_{k_n-1}}$ si $n_3 = 0$
- la fonction de répartition d'une loi de Dirac concentrée en 0 si $n_3 \neq 0$.

C'est à dire, pour tout $t \geq 0$,

$$\tilde{F}_s(t) = \hat{F}_s(t)1_{n_3=0} + 1_{n_3 \neq 0}.$$

Nous avons donc, pour tout $t \geq 0$:

$$p_j(t) = \sum_{s \in S_j} P(s) F_s(t)$$

$$\tilde{p}_j(t) = \sum_{s \in S_j} P(s) \tilde{F}_s(t)$$

Ainsi, pour tout $t > 0$:

$$\tilde{p}_j(t) - p_j(t) = \sum_{s \in S_j} P(s) (\tilde{F}_s(t) - F_s(t))$$

Supposons $n_1 \geq 2$.

Cette hypothèse n'est pas une condition contraignante puisque j est absorbant, donc est un état lent et qu'en pratique, l'état initial est également un état lent, mais non absorbant (fonctionnement parfait).

Dans ce cas, nous avons pour tout $t > 0$ et $u < t$ et pour tout état j absorbant :

$$\hat{F}_s(t) \leq \left(\frac{t}{t-u} \right)^{n_1-1} \hat{F}_s(t-u)$$

(La démonstration est faite dans [42].)

Par définition de $\tilde{F}_s$, nous en déduisons que pour tout $t > 0$ et $u < t$:

$$\tilde{F}_s(t) \leq \left(\frac{t}{t-u}\right)^{n_1-1} \tilde{F}_s(t-u) \quad (8.5)$$

Soit φ_s définie comme la densité du temps cumulé passé dans $\mathcal{R}$ lors du parcours d'une séquence si $n_3 = 0$ et comme la densité du temps cumulé passé dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ si $n_3 \neq 0$.

Ainsi, pour tout $t > 0$:

$$F_s(t) = \int_0^t \tilde{F}_s(t-u) \varphi_s(u) du$$

Soit Ψ_s une variable aléatoire positive de densité de probabilité φ_s . En supposant que la fonction $\tilde{F}_s$ est nulle pour $t < 0$, on a pour tout $t \geq 0$:

$$F_s(t) = \mathbb{E}(\tilde{F}_s(t - \Psi_s))$$

Par passage à l'espérance, il en résulte de (8.5) que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{t - \Psi_s}{t}\right)^{n_1-1}\right) \tilde{F}_s(t) \leq F_s(t)$$

La fonction qui à $u > 0$ associe $\left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n_1-1}$ lorsque $u < t$ et 0 sinon, étant convexe, nous en déduisons d'après l'inégalité de Jensen, pour tout $t > 0$:

$$\left(\frac{t - \mathbb{E}(\Psi_s)}{t}\right)^{n_1-1} \tilde{F}_s(t) \leq F_s(t)$$

Ainsi que :

$$\left(1 - (n_1 - 1) \frac{\mathbb{E}(\Psi_s)}{t}\right) \tilde{F}_s(t) \leq F_s(t)$$

$$\left(1 - (n_1 - 1) \frac{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})}{t}\right) \tilde{F}_s(t) \leq F_s(t)$$

où p_b est la probabilité d'avoir une séquence bouclée dans l'ensemble $\mathcal{R}$.

Nous avons donc pour tout $t > 0$:

$$\tilde{F}_s(t) - F_s(t) \leq (n_1 - 1) \frac{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})}{t} \tilde{F}_s(t)$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, la probabilité que le processus X ait visité et quitté n ou plus états lents à la date t est inférieure à la probabilité qu'un processus de Poisson de taux Λ ait n ou plus occurrences sur $[0; t]$.

Nous avons donc pour tout $t > 0$:

$$0 \leq p_j(t) - \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) F_s(t) \leq P_n(\Lambda t)$$

C'est à dire :

$$\sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) F_s(t) \leq p_j(t) \leq \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) F_s(t) + P_n(\Lambda t)$$

De même en raisonnant sur le processus réduit, pour tout $t > 0$:

$$\sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) \tilde{F}_s(t) \leq \tilde{p}_j(t) \leq \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) \tilde{F}_s(t) + P_n(\Lambda t)$$

Nous en déduisons donc, pour tout $t > 0$:

$$\tilde{p}_j(t) - p_j(t) \leq \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) (\tilde{F}_s(t) - F_s(t)) + P_n(\Lambda t)$$

Ainsi, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j(t) - p_j(t) &\leq \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) \left((n_1 - 1) \frac{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})}{t} \right) \tilde{F}_s(t) + P_n(\Lambda t) \\ &\leq \left((n - 1) \frac{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})}{t} \right) \sum_{\substack{s \in S_j \\ n_1 \leq n}} P(s) \tilde{F}_s(t) + P_n(\Lambda t) \end{aligned}$$

$$\tilde{p}_j(t) - p_j(t) \leq \left((n - 1) \frac{(\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + p_b \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}}))}{t} \right) \tilde{p}_j(t) + P_n(\Lambda t)$$

■

8.6.2 Application au résultat théorique - Calcul pratique

8.6.2.1 Calcul de $\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}})$ et $\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})$

Dans leurs travaux, Rubino et Séricola ([47], [48]) décrivent une méthode pour calculer le temps moyen passé dans un sous-ensemble d'états d'un processus markovien à espace d'états fini.

En voici une brève synthèse :

Considérons une partition B de l'ensemble d'états ξ :

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_b)$$

b est donc le cardinal de B .

Notons $(V_n)_{n \geq 1}$, la variable aléatoire représentant l'état de B dans lequel le $n^{\text{ième}}$ séjour de X commence.

Ainsi que $H_{B,n}$, $n \geq 1$, la variable aléatoire à valeurs continues² représentant le temps passé par le processus durant le $n^{\text{ième}}$ séjour dans B .

En étudiant la loi de cette variable aléatoire, les auteurs ont démontré que le temps moyen passé dans B lors du $n^{\text{ième}}$ séjour est :

$$\mathbb{E}(H_{B,n}) = -v_n \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{1}^T$$

où $\mathbf{A}_B$ est la sous-matrice des taux de transition entre états appartenant à B ,

$\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)^T$ de longueur b ,

v_n est le vecteur de la distribution de probabilité après la $n^{\text{ième}}$ transition réduit ax états de B :

$$v_n = (\mathbb{P}(V_n = B_1), \mathbb{P}(V_n = B_2), \dots, \mathbb{P}(V_n = B_b))$$

²Le cas "variable aléatoire à valeurs discrètes" a également été étudié et des résultats semblables ont été démontrés dans [48].

La suite $(\mathbb{E}(H_{B,n}))_{n \geq 1}$ converge au sens de Cesaro³ et nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(H_{B,l}) = \mathbb{E}(H_{B,\infty}) = -v \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{1}^T$$

8.6.2.2 Choix optimal de la valeur de n

Le majorant de l'erreur obtenu s'exprime sous la forme d'une somme d'erreur relative $\frac{n-1}{t} (\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})) \tilde{p}_j(t)$, et d'une erreur absolue $P_n(\Lambda t)$.

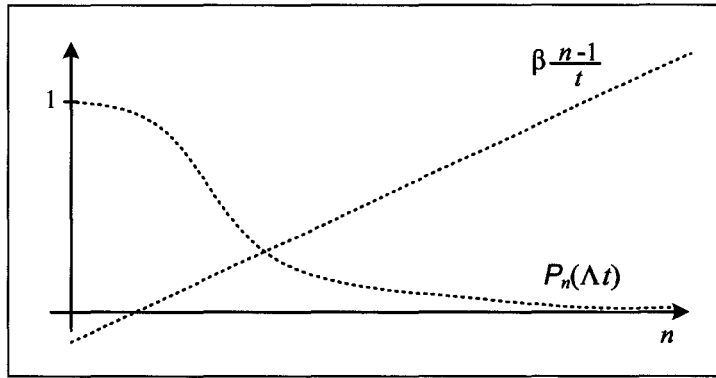


FIG. 8.15 – Erreurs relative et absolue

Comme le représente ce graphique, l'erreur relative est une fonction décroissante en n alors que l'erreur absolue est une fonction croissante de n .

Toutes les valeurs de n ne sont donc pas pertinentes et il faut choisir n de sorte que l'erreur absolue soit petite devant l'erreur relative afin de minimiser le majorant de l'erreur d'approximation.

Nous allons donc chercher à déterminer un ensemble de valeurs de n acceptables :

³Théorème de Cesaro :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle de limite l (réelle ou infinie), on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

Les problèmes d'optimisation liés au choix de n consistent à minimiser la fonction :

$$m(n) = \frac{n-1}{t} (\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})) \tilde{p}_j(t) + P_n(\Lambda t)$$

m converge vers l'infini quand n tend vers l'infini. Tout minimum n_0 de m vérifie donc :

$$n_0 = 2$$

ou

$$\begin{cases} m(n_0 + 1) \geq m(n_0) \\ m(n_0 - 1) \geq m(n_0) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$n_0 = 2$$

ou

$$\begin{cases} P_{n_0}(\Lambda t) - P_{n_0+1}(\Lambda t) \leq \left(\frac{n_0}{t} - \frac{n_0-1}{t} \right) (\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})) \tilde{p}_j(t) \\ P_{n_0-1}(\Lambda t) - P_{n_0}(\Lambda t) \geq \left(\frac{n_0-1}{t} - \frac{n_0-2}{t} \right) (\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}}) + \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{L}})) \tilde{p}_j(t) \end{cases}$$

Par conséquent, $n_0 > 2$ est optimal s'il vérifie :

$$\frac{P_{n_0}(\Lambda t) - P_{n_0+1}(\Lambda t)}{P_{n_0-1}(\Lambda t) - P_{n_0}(\Lambda t)} \leq 1$$

Or on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{P_{n_0}(\Lambda t) - P_{n_0+1}(\Lambda t)}{P_{n_0-1}(\Lambda t) - P_{n_0}(\Lambda t)} = \frac{\Lambda t}{n}$$

La valeur de n qui minimise le majorant de l'erreur d'approximation appartient donc à l'ensemble :

$$\{2\} \cup \{k > 2 | \Lambda t \leq k\}.$$

8.6.3 Approche différente - Cas particulier

La durée de vie τ d'un système à réparations différées peut s'écrire en une somme de différentes durées de vie :

$$\tau = \tau_{\mathcal{L}} + \tau_{\mathcal{R}}$$

où $\tau_{\mathcal{L}}$ est le temps passé dans les états lents considéré lors du calcul de la méthode "Lent-Rapide Sans Boucle"

$\tau_{\mathcal{R}}$, le temps négligé dans cette méthode.

Ainsi l'erreur commise en calculant la fiabilité de τ avec l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" est, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{L}} + \tau_{\mathcal{R}} > t) - \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{L}} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{L}} < t) - \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{L}} + \tau_{\mathcal{R}} < t) \\ &= \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) du - \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) G_{\mathcal{R}}(t - u) du \end{aligned}$$

où $f_{\mathcal{L}}$ est la densité de la loi de $\tau_{\mathcal{L}}$

$G_{\mathcal{R}}$ est la fonction de répartition de $\tau_{\mathcal{R}}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) (1 - G_{\mathcal{R}}(t - u)) du \\ &= \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) \overline{G}_{\mathcal{R}}(t - u) du \end{aligned}$$

où $\overline{G}_{\mathcal{R}}$ est la fiabilité de $\tau_{\mathcal{R}}$

Dans leurs travaux, Gnedenko et Solov'yev ont démontré le théorème suivant :

Théorème 8.6.2

Soient S_β et S_ϱ , deux somme de n (> 0) durées de vie de lois exponentielles de paramètres respectifs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ et $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$.

Si pour tout k variant de 1 à n , on a :

$$\prod_{i=1}^k \beta_{(i)} \leq \prod_{i=1}^k \varrho_{(i)}$$

où $\beta_{(.)}$ et $\varrho_{(.)}$ désignent les ensembles des taux ordonnés.

alors $S_\beta \geq_{st} S_\varrho$.

En appliquant ce théorème à l'évaluation de l'erreur, nous obtenons :

$\forall t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(t) \leq \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) \overline{Erl}_{\mu_{\min}}(t-u) du$$

où $\mu_{\min}$ est le plus petit taux de sortie des états ignorés lors de la construction du processus réduit,

$\overline{Erl}_{\mu_{\min}}$ est la fiabilité d'une loi d'Erlang de paramètres $\mu_{\min}$ et n (nombre d'états ignorés).

Si on se limite au cas " $f_{\mathcal{L}}$ est la densité de la somme de deux durées de vie exponentielles et qu'un seul état est ignoré lors de la construction du processus réduit", on a :

$$\forall x \geq 0, \quad f_{\mathcal{L}}(x) = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 x} + \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} e^{-a_2 x}$$

Nous avons donc pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \frac{1}{\mu_{\min} - a_1} \left[e^{-a_1 t} - e^{-\mu_{\min} t} \right] + \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{1}{\mu_{\min} - a_2} \left[e^{-a_2 t} - e^{-\mu_{\min} t} \right]$$

Pour des temps de mission supérieurs au MTTF du système, une autre approche est possible :

$\tau_{\mathcal{R}}$ est la somme de n durées de vie exponentielles, elle vérifie donc la propriété de vieillissement HNBUE (voir [9]). Nous avons donc, $\forall t \geq 0$:

$$\mathcal{E}(t) \leq \int_0^t f_{\mathcal{L}}(u) e^{1 - \frac{t-u}{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}})}} du$$

On suppose que $f_{\mathcal{L}}$ est la densité de la somme de $m > 0$ durées de vie exponentielles, on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathcal{E}(t) \leq \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m a_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} (a_j - a_i)} \left[e^{1-a_i t} - e^{1 - \frac{t}{\mathbb{E}(\tau_{\mathcal{R}})}} \right].$$

8.7 Mise en oeuvre de l'algorithme

Détermination des états lents et des taux de transition associés

Dans une première partie, nous décrivons le principe général de l'approximation et son mode de calcul. Un algorithme écrit sous scilab est également donné.

Puis dans une seconde partie, nous présentons un nouvel logiciel de calcul mettant en oeuvre une version améliorée de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle". En effet, en appliquant la méthode de calcul de l'algorithme SRI, il nous est possible d'obtenir une approximation de la probabilité d'une séquence bouclée et de la prendre en compte lors du calcul des différentes probabilités des séquences explorées.

8.7.1 Principe général de l'algorithme : description du fonctionnement et mise en oeuvre informatique

L'algorithme est écrit de telle sorte que le stockage de la matrice des taux de transition du système entier n'est pas indispensable. Seul doit être connu le comportement local,

c'est à dire que pour chaque état, ses transitions possibles et les taux associés sont connus. L'état initial du système ainsi que le taux définissant un état comme lent ou rapide, sont également indispensables.

Le fonctionnement de l'algorithme est décrit dans la figure suivante.
Pour faciliter sa compréhension, donnons ou rappelons quelques notations :

etat_depart est l'état initial du système

etat_lent est l'ensemble des états lents

$q_{e_i e_j}$ est la probabilité que le système passe dans l'état e_j alors qu'il se trouvait dans l'état e_i

$\lambda_{e_i e_j}$ est le taux de transition de l'état e_i vers e_j

$\tilde{\lambda}$ est l'approximation recherchée de la matrice des taux de transition entre les états lents

$\tilde{\lambda}_{e_i e_j}$ est donc l'approximation du taux de transition de l'état lent e_i vers l'état lent e_j

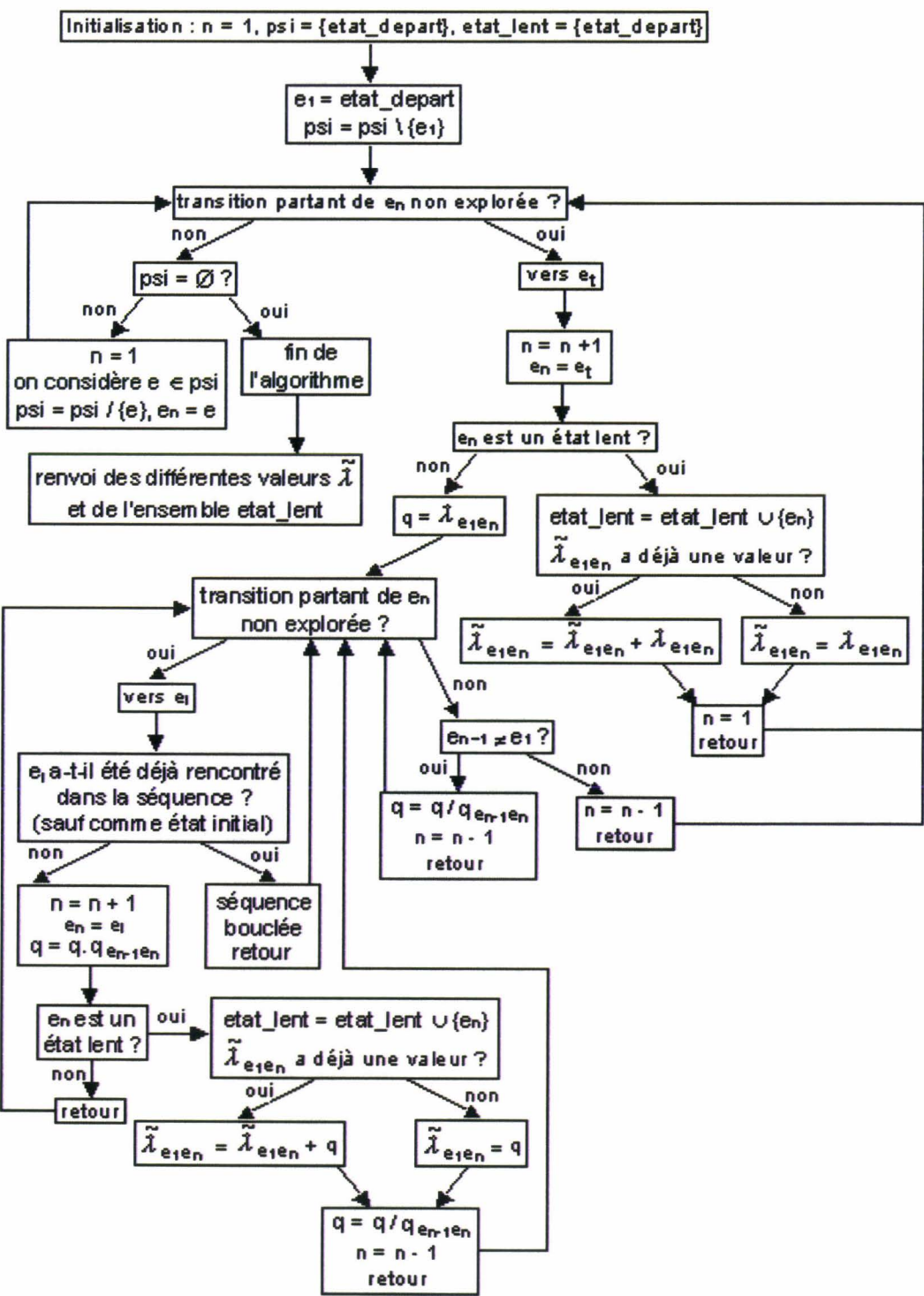


FIG. 8.16 – Principe général de l'algorithme

Les écritures sous Scilab de la fonction générale et des fonctions annexes correspondant à cet algorithme sont présentées cidessous :

Fonction principale

```
//Données d'entrée : (indispensables si le système n'est pas modélisé au préalable sous
KB3)
//      - matrice génératrice A
//      - état initial : etat_depart
//      - theta : taux de définition des états lents ou rapides

//Données de sortie :
//      - lambda_appro : approximation de la matrice des taux de transition des états lents
//      - etat_lent : ensemble des états lents du système initial

function[lambda_appro,etat_lent] = approximation_lent_rapide(A,etat_depart,theta)

//matrice de transition de la chaîne de Markov immergée. Calcul défini dans l'algorithme
SRI

taille = size(A);
for i = 1 : taille(1),
    for j = 1 : taille(1),
        if i == j then,
            Q(i,j) = 0;
        elseif A(i,i) == 0 then,
            Q(i,j) = 0;
        else
            Q(i,j) = -A(i,j) / A(i,i);
        end;
    end;
end;
etats_trans = list();

//chaque élément i de cette liste comporte
un vecteur contenant les numéros d'états
reliés à l'état i par une transition de proba-
bilité positive, ainsi qu'un vecteur contenant
les probabilités de ces transitions

k = 1;

//indice des états lents dans l'ensemble
etat_lent

m = 1;

//indice des états lents non étudiés comme
état de départ de séquence
```



```

psi(m) = etat_depart;                                //ensemble des états lents non étudiés
                                                       comme état de départ de séquence

etat_lent(k) = psi(m);                                //l'état initial du système est inclus dans
                                                       l'ensemble global des états lents

//on identifie un état dans l'ensemble des états lents psi et on l'examine comme état
initial de séquence. En premier lieu, l'état initial du système est donc considéré

while length(psi) > 0,                                //condition de la boucle : tant qu'il reste
                                                       un état lent non exploré comme état de dé-
                                                       part de séquence, faire ...

    n = 1;                                             //indice des états dans la séquence explorée
    etat_sequence(n) = psi(1);                         //le premier état de la séquence est l'état
                                                       lent

    psi(1) = [ ];                                     //on retire de l'ensemble l'état considéré et
    m = m - 1;                                         psi(i)=psi(i+1)

//recherche de l'indice de l'état considéré dans l'ensemble etat_lent

i = 1;
while etat_sequence(n) ~= etat_lent(i),
    i = i+1;
end;
r = i;
lambda_appro(r,r) = A(etat_sequence(1),etat_sequence(1));

//on liste les transitions à explorer depuis l'état initial et les probabilités de transition
associées grâce à une fonction annexe définie dans l'algorithme SRI

[liste_trans,pr_trans] = liste_proba(Q,e_sequence(n));
etats_trans(n) = list(liste_trans,pr_trans);
while length(etats_trans(n)(1)) > 0,                  //transitions non explorées
    n = n + 1;
    etat_sequence(n) = etats_trans(n-1)(1)(1);
    q = -etats_trans(n-1)(2)(1) * A(etat_sequence(1),etat_sequence(1));

    //on vérifie que l'état de transition est lent ou rapide. Si le test_taux vaut 1,
    l'état est lent, si la valeur est 0, l'état est rapide

    [liste_trans,pr_trans] = liste_proba(Q,e_sequence(n));
    etats_trans(n) = list(liste_trans,pr_trans);
    if test_taux(etat_sequence(n)) == 1 then,
        i = 1;
        stop = 0;
    end
end

```

```

while (i <= k) & (stop == 0),
  if etat_lent(i) ~= etat_sequence(n) then,
    i = i + 1;
  else
    stop = 1;
  end;
end;
if i == k + 1 then,
  k = k + 1;
  etat_lent(k) = etat_sequence(n);
  m = m + 1;
  psi(m) = etat_sequence(n);
  lambda_appro(r,k) = q;
else
  lambda_appro(r,i) = lambda_appro(r,i) + q;
end;
n = n - 1;
etats_trans(n)(1)(1) = [];           //la transition explorée est retirée de la liste
etats_trans(n)(2)(1) = [];           ainsi que sa probabilité. retour au début de
                                     la boucle

else                                 //etat_sequence(n) est un état rapide

  //on installe une boucle stoppant l'algorithme si les différents pas en arrière
  effectués lors de l'exploration des différentes séquences nous amènent à l'état
  lent considéré comme état initial des séquences

  while n > 1,
    while length(etats_trans(n)(1)) > 0,

      //une boucle "while" va vérifier qu'aucun état rapide n'est visité plu-
      sieurs fois dans la même séquence. Si la valeur finale "i" est supérieure
      à la valeur "n", la séquence n'est pas bouclée :

      i = 2;
      stop = 0;
      while (i <= n)&(stop == 0),
        if etats_trans(n)(1)(1) ~= etat_sequence(i) then,
          i = i + 1;
        else
          stop = 1;
        end;
      end;
      if i == n + 1 then,
        n = n + 1;
        etat_sequence(n) = etats_trans(n-1)(1)(1);
        q = q * etats_trans(n-1)(2)(1);

```

```

[liste_trans,pr_trans] = liste_proba(Q,e_sequence(n));
etats_trans(n) = liste(liste_trans,pr_trans);
if test_taux(etat_sequence(n)) == 1 then,
    i = 1;
    stop = 0;
    while(i <= k)&(stop == 0),
        if etat_lent(i)~ = etat_sequence(n) then,
            i = i + 1;
        else
            stop = 1;
        end;
    end;
    if i == k + 1 then,
        k = k + 1;
        etat_lent(k) = etat_sequence(n);
        m = m + 1;
        psi(m) = etat_sequence(n);
        lambda_appro(r,k) = q;
    else
        lambda_appro(r,i) = lambda_appro(r,i) + q;
    end;
    n = n - 1;
    q = q / etats_trans(n)(2)(1);
    etats_trans(n)(1)(1) = [ ];
    etats_trans(n)(2)(1) = [ ];
end;
else
    //séquence bouclée : le dernier état n'est plus considéré. Pas en arrière
    //permettant d'explorer les autres transitions de l'avant-dernier état de
    //la séquence

    etats_trans(n)(1)(1) = [ ];
    etats_trans(n)(2)(1) = [ ];
end;
end;
if n > 2 then,
    n = n - 1;
    q = q / etats_trans(n)(2)(1);
    etats_trans(n)(1)(1) = [ ];
    etats_trans(n)(2)(1) = [ ];
else
    n = n - 1;
    etats_trans(n)(1)(1) = [ ];
    etats_trans(n)(2)(1) = [ ];
end;

```

```

        end;
    end;
end;
end;
lambda_appro
etat_lent

```

8.7.1.1 Fonctions annexes

// La fonction liste_proba retourne un vecteur contenant les numéros d'états reliés à l'état courant par une transition positive, ainsi qu'un vecteur contenant les probabilités de ces transitions.

```

function [y,z] = liste_proba(Q,etat)
[ij,v] = spget(sparse(Q));
taille = size(ij);
y = [ ];
z = [ ];
l = 1;
stop = 0;
while (l <= taille(1)) & (stop == 0),
    if ij(l,1) == etat then,
        y = [y;ij(l,2)];
        z = [z;v(l)];
    end;
    if ij(l,1) > etat then,
        stop = 1;
    end;
    l = l + 1;
end;

```

// La fonction test_taux est égale à 1 si etat est un état lent, 0 si rapide

```

function [y] = test_taux(etat)
i = 1;
stop = 0;
while (i <= length(pr_trans)) & (stop == 0),
    if -pr_trans(i) * A(etat,etat) < theta then,
        i = i + 1;
    else
        stop = 1;
    end;

```

```
end;  
if i == length(pr_trans) + 1 then,  
    y = 1;  
else  
    y = 0;  
end;
```

8.7.2 Logiciel de calcul

Nous venons de voir que lors du calcul de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle", les séquences bouclées ne sont pas prises en compte. Seules les séquences dites "directes" le sont.

Il est clair que plus on "oublie" des séquences menant aux états de panne, plus l'évaluation de la fiabilité (ou de la défiabilité) sera pessimiste.

La particularité de l'algorithme SRI est de ne pas explorer les séquences bouclées menant de l'état initial aux états de panne. Cependant les boucles possibles sont détectées lors de l'exploration et incluses implicitement dans le calcul.

Nous nous sommes donc inspirés de cette méthode pour inclure la probabilité qu'une séquence bouclée soit explorée lors de l'évaluation de l'approximation "Lent-Rapide Sans boucle".

Le résultat obtenu est donc moins pessimiste que celui présenté dans ce rapport.

Cette version améliorée de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" a été mise en oeuvre dans un nouveau logiciel appelé FigMat-SF (FIGARO Matrice Slow-Fast). C'est un nouvel outil de la Plate-forme outils KB3, destiné à faire des calculs de probabilité sur des modèles markoviens définis en langage FIGARO.

A partir d'une description en langage FIGARO d'ordre 0 du système étudié, ce logiciel permet d'obtenir la probabilité de présence pour plusieurs temps de mission dans des ensembles d'états spécifiés par l'utilisateur.

La figure suivante représente la vue initiale de l'IHM du logiciel :

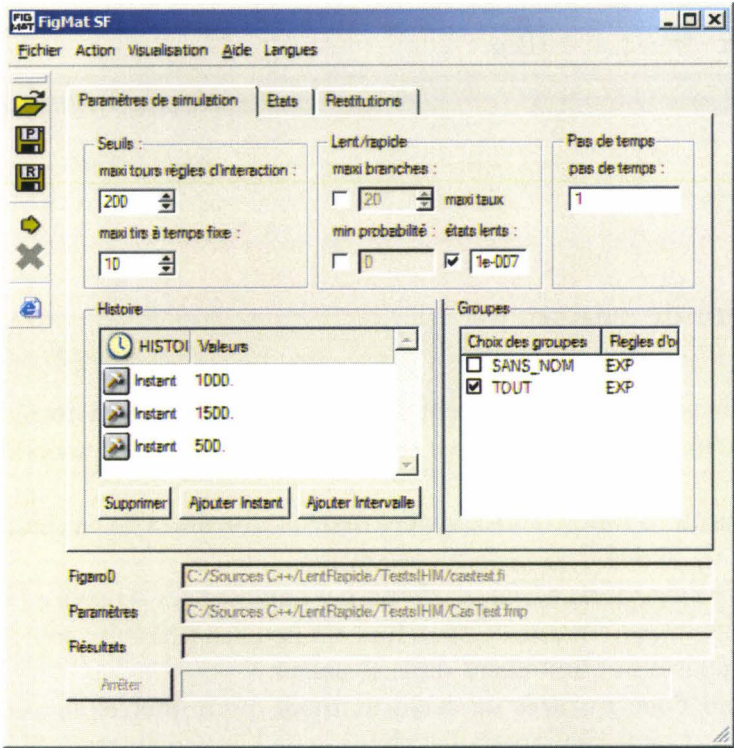


FIG. 8.17 – IHM du logiciel FigMat-SF

Cette méthode permet de disposer de trois "curseurs" de choix entre précision et performances des calculs : le seuil de taux de sortie permettant de séparer les états lents des états rapides, le seuil de probabilité minimale des séquences explorées dans la phase de construction de la matrice, et enfin le pas de temps pour le calcul de probabilité.

8.8 Exemples

Trois exemples de systèmes vont être traités :

- le premier permettra de comparer cette approximation aux différentes approximations présentées dans ce rapport,
- le deuxième sera un système comprenant des boucles "forcées". Il a pour objectif de mettre en évidence l'inefficacité de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" sur de tels systèmes,
- pour finir, l'étude sera faite sur un système modélisé par un BDMP. L'utilisation du logiciel FigMat-SF nous permettra d'obtenir le calcul de l'approximation.

Remarque

Dans chaque exemple, l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" sera déterminée à l'aide du logiciel.

8.8.1 Système de 4 composants

Nous considérons un système formé de 4 composants identiques et indépendants les uns des autres.
Nous supposons que chaque composant peut avoir 2 types de défaillance dont une seule est réparable. La durée de vie d'un composant peut donc être modélisée par le processus de Markov suivant :

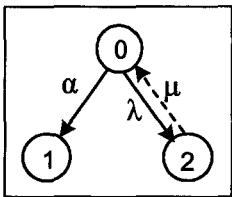


FIG. 8.18 – Graphe de Markov d'un composant

L'état 0 est l'état initial du composant : le fonctionnement parfait. Les états 1 et 2 représentent les deux types de défaillance : 1 correspond à la défaillance non réparable et 2, à celle réparable.

En utilisant la symétrie, il est possible de modéliser l'évolution de ce système par le graphe de Markov à 15 états de la figure suivante :

Nous supposons que le système se trouve initialement dans l'état "0" et que les valeurs numériques des taux de transition sont :

$$\lambda = 10^{-5}/h \text{ et } \alpha = 10^{-3}/h \text{ et } \mu = 0.1/h.$$

Si nous prenons comme seuil le taux de réparation μ pour définir les états lents et rapides, nous obtenons comme ensemble des états lents :

$$\mathcal{L} = \{0, 1, 3, 6, 10\}.$$

Le système réduit modélisé par un processus de Markov est donc :

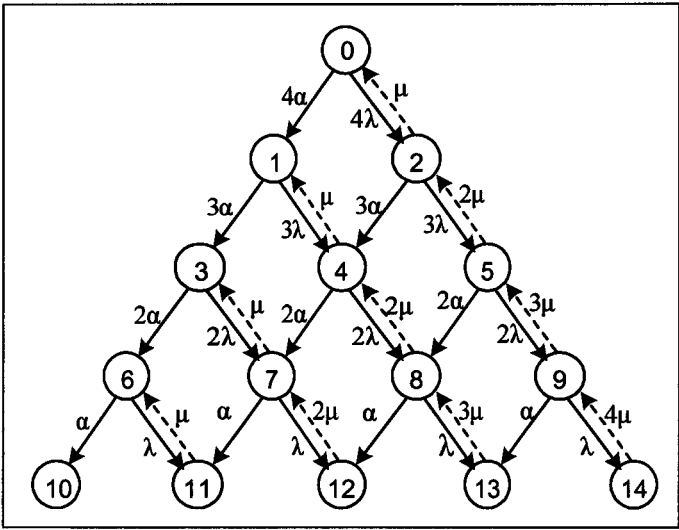


FIG. 8.19 – Graphe de markov du système complet

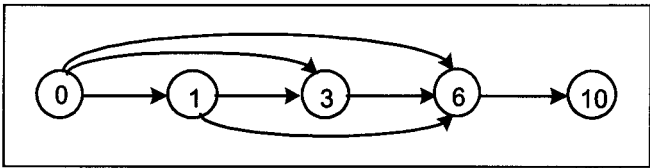


FIG. 8.20 – Processus réduit

Sur cet exemple, les différentes approximation étudiées dans ce rapport ont été calculées.

Le graphique suivant représente les résultats obtenus :

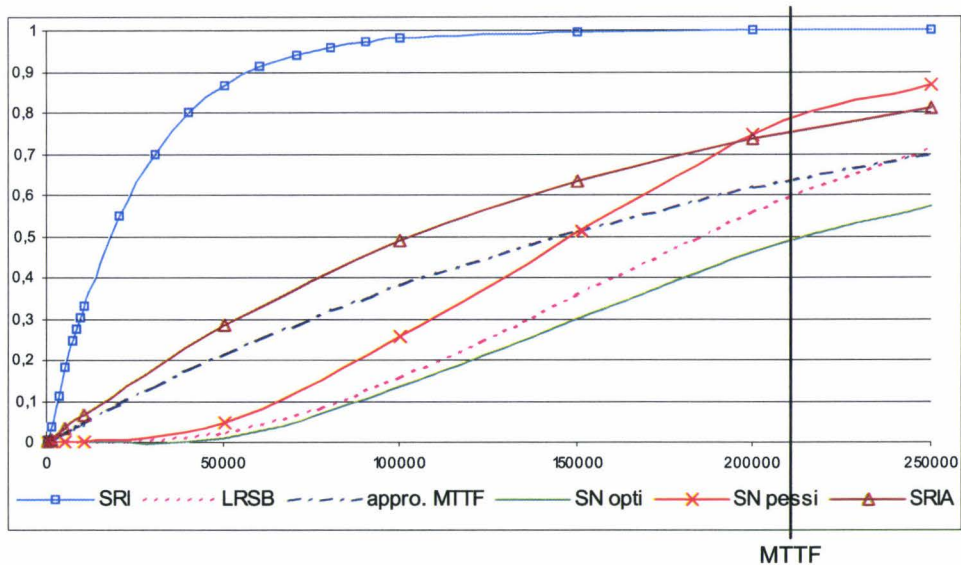


FIG. 8.21 – Comparaison des différentes approximations étudiées dans ce rapport

Rappelons la signification des différents sigles utilisés dans le graphique :

- SRI : approximation obtenue par l’algorithme "Sans Retour à l’état Initial"
- LRSB : approximation "Lent-Rapide Sans Boucle"
- approx. MTTF : approximation exponentielle MTTF
- SN opti : valeur optimiste obtenue par l’algorithme "Séquences Normales"
- SN pessi : valeur pessimiste de l’algorithme "Séquences Normales"
- SRIA : Sans Retour à l’état Initial et aux Amorces.

Pour des temps de mission inférieurs à la valeur du MTTF, l’approximation "Lent-Rapide Sans Boucle", notée sur le graphique LRSB, est la moins pessimiste. L’encadrement obtenu en prenant comme borne supérieure, cette approximation et pour borne inférieure, la valeur optimiste de l’algorithme SN, est bien plus petit (et donc plus fiable) que ceux obtenus en prenant comme bornes supérieures, l’approximation SRI ou SRIA. De plus, les temps de calcul du logiciel FigMat-SF sont très courts (36 secondes pour 6 temps de missions sur l’intervalle [0; 250000]). Son utilisation sera donc privilégiée dans l’étude.

Mais cela n’est pas toujours le cas : l’approximation sera beaucoup plus pessimiste lorsque le système comprend une boucle "forcée". Pour de tels systèmes, l’approxima-

tion SRRI (ou SRIA si les états lents sont des amorces) sera bien "meilleure". L'exemple suivant traite ce cas particulier.

8.8.2 Système comprenant une boucle "forcée"

Considérons le système modélisé par un processus de Markov de la partie "Approximation SRRI" :

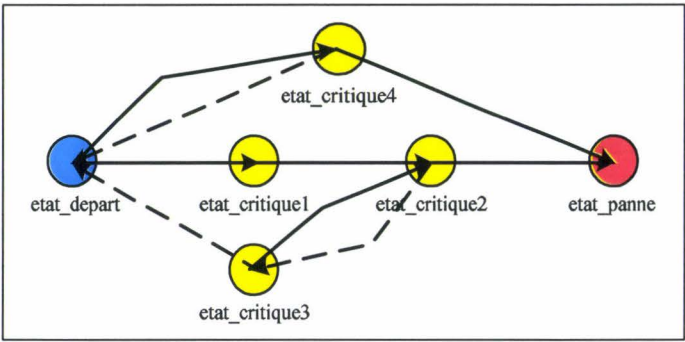


FIG. 8.22 – Processus de Markov initial

Afin de favoriser un retour dans "etat_critique2" plutôt que dans "etat_depart", lorsque le système se trouve dans "etat_critique3", la valeur du taux de dégradation sera beaucoup plus grande que celle du taux de réparation. Ainsi, le taux de "etat_critique3" vers "etat_critique2" est égal à $\mu = 0.1/h$ et le taux de "etat_critique3" vers "etat_depart" est égal à $\lambda = 10^{-5}/h$. Les autres taux de dégradation valent $10^{-5}/h$ et les taux de réparation $0.1/h$.

En prenant pour seuil définissant l'ensemble des états lents 10^{-4} , le système réduit peut être modélisé par ce processus de Markov :

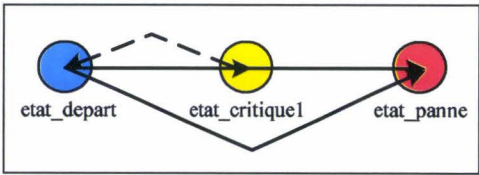


FIG. 8.23 – Processus réduit

La comparaison de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" se fait ici avec la vraie

valeur de la défiabilité ainsi qu'avec l'approximation SRIA.
Graphiquement, nous obtenons :

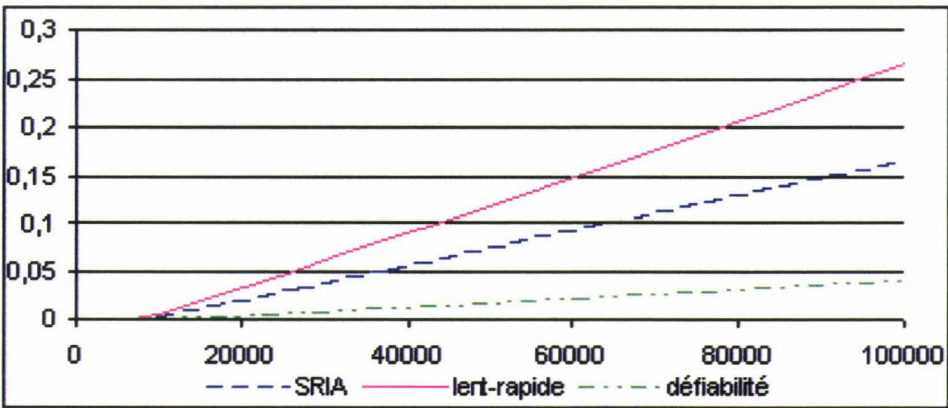


FIG. 8.24 – Approximation pour un système comportant des boucles "forcées"

Même si l'approximation SRIA n'est pas totalement satisfaisante sur cet exemple, elle est néanmoins plus proche de la valeur de la défiabilité que l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle". Elle le sera davantage si le nombre d'amorces sans réparation est plus important que le nombre d'amorces avec réparation.

8.8.3 Système modélisé par un BDMP

Le logiciel FIGMAT-SF nous permet d'étendre l'utilisation de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" aux systèmes modélisés par un BDMP.

Considérons un système de 5 éléments (notés A, B, C, D et E) et de 2 réparateurs (notés rep_1 et rep_2). Les éléments A, D et E interviennent dès la mise en fonctionnement, alors que B et C sont mis en attente.

Les réparateurs n'interviennent que sous certaines conditions :

Le réparateur rep_1 qui s'occupe des composants A, C, D, E sera sollicité dans les cas suivants :

- l'élément E tombe en panne, ou
- A et C, ou
- A et D.

Le réparateur rep_2 est chargé des composants B et C et est sollicité dès qu'un de ces composants ne fonctionne plus.

L'élément D n'est donc pas réparé dès sa mise en échec puisqu'il faudra attendre la panne

de A qui ne survient qu'après le dysfonctionnement de l'élément C ou D. L'élément A quant à lui, peut soit, être réparé dès sa mise en échec si c'est la panne de D qui a permis la sollicitation de A ou si rep_2 n'a pas terminé la réparation de C, soit être réparé ultérieurement dès que D ou C tombe en panne.

La figure suivante représente ce système modélisé par un BDMP :

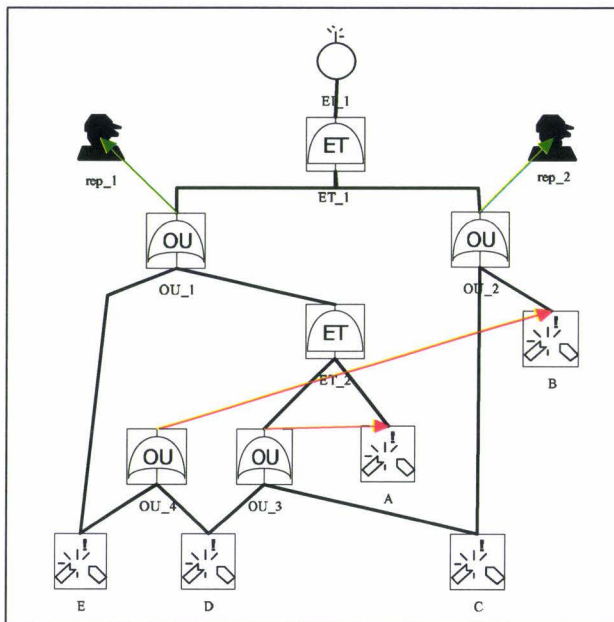


FIG. 8.25 – Système modélisé par un BDMP

Sur cet exemple, nous avons calculé les approximations SRI, SN, "Lent-Rapide Sans Boucle" ainsi que l'approximation exponentielle MTTF.

Graphiquement, nous obtenons :

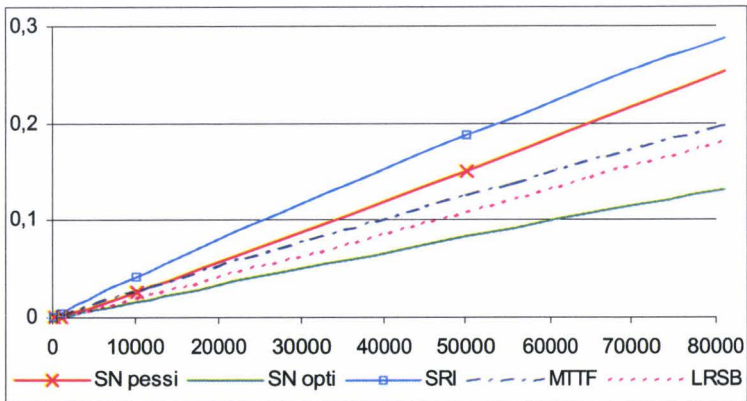


FIG. 8.26 –

L'approximation exponentielle MTTF est ici encore, "meilleure" que celles données par les algorithmes SN ou SRI sur une large gamme de temps. Malheureusement nous ne pouvons pas prouver son caractère pessimiste faute de pouvoir montrer le vieillissement du BDMP. De plus, l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle" est moins pessimiste que les 3 autres. Même si peu avant la valeur du MTTF (=370000), elle devient supérieure à l'exponentielle MTTF, nous sommes sûrs d'avoir un résultat pessimiste. On privilégiera encore une fois, son utilisation dans les études.

8.9 Conclusion

Afin d'approcher au mieux tout en étant pessimiste, la valeur de la fiabilité (ou de la défiabilité), il nous est possible de prendre en compte différents états dans lesquels le système passe beaucoup de temps tout en ignorant les séquences bouclées. C'est le principe de l'approximation "Lent-Rapide Sans Boucle". Selon la valeur du taux définissant les états lents et rapides, le calcul de l'approximation considérera plus ou moins d'états. Son pessimisme sera donc d'autant plus prononcé qu'il y aura moins d'états dans l'ensemble des états lents. De plus, il a été mis en évidence que l'efficacité de l'approximation est optimale si le système ne comporte pas d'états rapides visités en priorité par rapport à un passage dans un état lent, c'est à dire que le système ne comporte pas de boucles forcées. Un nouveau logiciel de résolution de systèmes reposant sur cette méthode de calcul a également été développé. Il permet d'élargir les cas d'applications aux BDMP, et plus généralement, à tout modèle markovien décrit en langage FIGARO.

Chapitre 9

CONCLUSION

Dans les études de fiabilité, les processus de Markov ou les BDMP sont fréquemment utilisés pour modéliser le comportement du système. Afin d'obtenir entre autre, une approximation de la fiabilité du système étudié, EDF a développé depuis des années, les algorithmes SN et SRI. Mais des problèmes surviennent lorsque les systèmes sont complexes, notamment lorsque les modèles sont de grande taille ou encore, réparables sous certaines conditions (comme les systèmes étudiés dans ce document). Au vu de ces difficultés, comme donner une approximation pessimiste proche de la vraie valeur, nous avons recherché à mettre en évidence différentes approximations qui seraient moins pessimistes que celles obtenues par les algorithmes SN et SRI. Dans ce cadre différentes pistes ont été explorées.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés aux propriétés de vieillissement du système, et plus exactement aux propriétés IFRA et NBU. Il a été mis en évidence un ordre de grandeur de l'intervalle de temps de mission nous assurant le pessimisme de l'approximation "approximation $MTTF$ " calculée avec l'approximation pessimiste du $MTTF$ donnée par l'algorithme SRI, pour un système vieillissant. De plus, grâce aux théorèmes mis en évidence, nous avons également déterminé des conditions suffisantes pour qu'un processus de Markov ou un BDMP possède la propriété NBU. Cependant, il a été démontré que ces conditions sont beaucoup trop restrictives et qu'il est difficile de les vérifier en théorie, malgré le fait que l'"approximation $MTTF$ " s'avère bien souvent pessimiste. Au vu de ces difficultés, nous avons recherché des conditions suffisantes permettant de conduire au non vieillissement du système et à l'optimisme de "approximation $MTTF$ ". De ces résultats, nous nous intéressés à un contexte plus général, c'est à dire que nous avons recherché des approximations pessimistes sans imposer des conditions autres que les réparations différées sur les systèmes.

Lors du calcul de l'approximation SRI, seul est pris en compte le temps passé dans l'état initial. Nous avons donc considéré ce mode de calcul, mais en nous intéressant à d'autres temps de séjour. Tout d'abord, les temps passés dans les différentes amorces ont été considérés, c'est le principe de l'approximation SRIA. Nous avons remarqué que plus le nombre d'amorces dans lesquelles seules des dégradations sont possibles, est important

par rapport au nombre d'amorces où la sortie peut s'effectuer par une réparation, moins cette approximation sera pessimiste. Cependant, pour des systèmes où les états "sans réparations" (le système y passe donc beaucoup de temps) ne sont pas des amorces, ce qui est le cas dans de nombreux cas industriels, cette approximation n'est guère mieux que l'approximation SRI. Nous nous sommes donc intéressés à d'autres temps de séjour : le temps d'un retour à l'état de fonctionnement parfait par un état "sans réparation". Ainsi l'approximation SRRI prend en compte ces temps de retour et la fiabilité est approchée par celle d'un mélange de deux lois exponentielles. Cette approximation sera assez proche de la vraie valeur si le système possède des amorces "avec réparations" ou si d'autres états sont "sans réparation". De même, il a été montré que cette approximation serait valable s'il existe un état dans lequel le temps de séjour est assez court par rapport aux temps de séjour dans les états "sans réparation" mais fréquemment visité. Afin de généraliser cette approximation, il a été mis en évidence l'approximation "lent-rapide sans boucle". Grâce à un taux fixé, sont déterminés les états lents et rapides du système. Le but de l'approximation est d'obtenir le processus réduit aux états lents ainsi que sa matrice des taux de transition. Pour ce faire, et surtout afin de simplifier les calculs et de pouvoir l'appliquer aux systèmes complexes (nombre de composants importants, redondance,...), lors du calcul de la matrice, les séquences bouclées ne sont pas prises en considération. Nous obtenons donc une approximation pessimiste de la matrice. Afin que le pessimisme de l'approximation ne soit pas trop important, le système ne doit pas comporter de séquences bouclées évidentes, dans le sens où il est naturel pour le système de les explorer. En somme, le temps de séjour cumulé dans chaque état lent doit être supérieur à tous ceux des états rapides.

Différentes approximations ont donc été mises en évidence ainsi que leur efficacité (ou leur inefficacité) selon les systèmes étudiés, comme le récapitule le tableau suivant :

	systèmes réparables	systèmes non réparables	systèmes semi-réparables			
			vieil. démontré	vieil. non démontré		
				boucle non forcée	boucle forcée	
					$\forall$ état long est 1 amorce	au moins 1 état long $\neq$ amorce
SN pessi		×				
SRI	×					
appro. <i>MTTF</i>			×			
SRIA					×	
SRRI						×
lent-rapide				×		

Bibliographie

- [1] S. ASMUSSEN (1992). *Applied Probability and Queues*, Willey.
- [2] S. ASMUSSEN, O. NERMAN, M. OLSSON (1996). *Fitting phase-type distributions via the EM algorithm*, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 23, 419-441.
- [3] R. E. BARLOW, F. PROSCHAN (1975). *Statistical theory of reliability and life testing*, New York London : Holt, Rinehart and Wiston.
- [4] R. E. BARLOW, F. PROSCHAN (1996). *Mathematical Theory of Reliability*, Classics in Applied Mathematics, SMIA, Philadelphia.
- [5] R. E. BARLOW, A. W. MARSHALL, F. PROSCHAN (1963). *Properties of probability distributions with monotone rate*, Ann. Math. Stat., Vol. 34, No. 2, pages 375-389.
- [6] C. BERENGER, E. CHATELET, S. COLLAS, A. GRALL (Octobre 2004). *Méthode d'accélération de la simulation de Monte-Carlo basée sur le failure biasing*, Actes du 14ème colloque $\lambda\mu$.
- [7] A. BOOBIO, K. S. TRIVEDI (1986). *An aggregation technique for the transient analysis of stiff Markov chains*, IEEE Transactions on Computers, C-35, pages 803-814.
- [8] A. BOBBIO, K. S. TRIVEDI (1990). *Computing cumulative measures of stiff Markov chains using aggregation*, IEEE Transactions on Computers, 39, pages 1291-1298.
- [9] J. L. BON (1995). *Fiabilité des systèmes : modèles mathématiques*, Masson, Techniques Stochastiques.
- [10] J. L. BON, J. BRETAGNOLLE (1990). *Calcul par séquences sur les graphes d'états*, Rapport technique EDF - Clamart.
- [11] J. L. BON, M. BOUISSOU (1992). *Fiabilité des grands systèmes séquentiels : résultats théoriques et applications dans le cadre du logiciel GSI*, Revue de Statistique Appliquée, Vol. 40, No. 2, pages 45-54.
- [12] J. L. BON, J. COLLET (1994). *An algorithm in order to implement reliability exponential approximations*, Reliability Engineering and System Safety, 43, pages 23-268.

- [13] J. L. BON, P. PAMPHILE (1999). *Reliability evaluation of markov models from Monte-Carlo methods*, International conference RAREEVENTS.
- [14] J. L. BON, P. PAMPHILE (1992). *Utilisation de méthodes de simulations en théorie de fiabilité des systèmes*, Techinal report CEMS-EDF.
- [15] M. BOUISSOU (2002). *Boolean Logic Driven Markov Processes : a powerful new formalism for specifying and solving very large Markov models*, PSAM6, Puerto Rico.
- [16] M. BOUISSOU (2007). *Gestion de la complexité dans les études quantitatives de sûreté de fonctionnement de systèmes*, Mémoire HDR.
- [17] M. BOUISSOU, J. L. BON (2003). *A new formalism that combines advantages of fault-trees and Markov models : Boolean logic driven Markov Processes*, Reliability Engineering and System Safety, 82, p 149-163.
- [18] M. BOUISSOU, A. S. DERODE (Octobre 2004). *Approximation exponentielle de la fiabilité : cas des systèmes à réparations différées*, Colloque $\lambda\mu$, Bourges.
- [19] M. BOUISSOU, S. MUFFAT, S. HUMBERT, J. C. HOUEBINE, N. VILLATE (octobre 2002). *Outil KB3 : Retour d'expérience sur les bases de connaissances et Détection d'incohérence dans les modèles*, EDF-R&D.
- [20] M. BROWN, G. E. GUANGPING (1984). *Exponential approximations for two classes of ageing distributions*, The annals of Probability, Vol. 12, No. 3, 869-875.
- [21] E. ÇINLAR (1975). *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [22] C. COCOZZA-THIVENT (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des Systèmes*, SMAI, Springer, Berlin.
- [23] A. S. DERODE (Octobre 2005). *Direct construction of a process reduced to slow states from a local description of a stiff Markov process*, International workshop IRSN.
- [24] J. B. DUGAN, K. S. TRIVEDI (1989). *Coverage modeling for dependability analysis of fault-tolerant systems*, IEEE Transactions on Computers, 38, pages 775-787.
- [25] D. DYER (1989). *Unification of reliability, availability, repairability models for Markov systems*, IEEE trans. rel., Vol. 38, No. 2, pages 246-252.
- [26] R. GEIST, K. S. TRIVEDI (1990). *Reliability estimation of fault-systems : tools and techniques*, IEEE Computers, 23, pages 52-61.
- [27] I. GIHMAN, A. SKOROKHOD (1980). *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, Edition Mir, Moscou.

-
- [28] B. V. GNEDENKO, Y. K. BELIAEV, A. D. SOLOVYEV (1972 éd. française). *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité*, Mir.
- [29] D. GROSS, D. R. MILLER (1984). *The Randomization Technic as a Modelling Tool and Solution Procedure for Markov Processes*, Oper. Res., Vol. 32, No. 3, pages 343-361.
- [30] S. JUNEJA, P. SHAHABUDDIN (2001). *Fast simulation of Markov chains with small transition probabilities*, Management Science, Vol. 47, No 4, pages 547-562.
- [31] KLEFSÖ (1981). *HNBU survival under some shock models*, Scandinavia journal of Statistics, Vol. 8, 39-47.
- [32] KLEFSÖ (1982). *The NBUE and HNWUE classes of life distributions*, Naval Res. Logist. Quart., Vol. 29, 331-344.
- [33] V. Y. KOTLIAR (1998). *Kibernetika i system analis*, Vol. 2, pages 162-167 (en russe).
- [34] V. Y. KOTLIAR, L. P. KHOMENKO (1992). *Klasi Vozratnikh raspriedienie*, Kibernetika i system analis, Vol. 9 (en russe).
- [35] Y. LEFEBVRE (2003). *Nouveaux développement et justifications de méthodes de calcul de mesure de performance en sûreté de fonctionnement*, Rapport de thèse, Université de Marne-la-vallée.
- [36] W. A. MASSEY (1987). *Stochastic orderings for Markov processes on partially ordered spaces*, Mathematics of Operations Research, Vol. 12, No. 2, U.S.A..
- [37] W. A. MASSEY, W. WHITT (1998). *Uniform acceleration expansions for Markov chains with time-varying rates*, The annals of Applied Probability, Vol. 8, No. 4, pages 1130-1155.
- [38] V. F. NICOLA, M. K. NAKAYAMA, P. HEIDELBERGER, A. GOYAL (1993). *Fast simulation of highly dependable systems with general failure and repair processes*, IEEE Transactions on Computers, 42, pages 1440-1452.
- [39] G. L. O'BRIEN (1975). *The comparison method for stochastic processes*, Annals of Probability, Vol. 3, No. 1, 80-88.
- [40] P. PAMPHILE (1994). *Calculs de la fiabilité de grands systèmes hautement fiables*, Rapport de thèse, Université de Paris-Sud, Orsay, France.
- [41] S. PAREKH, J. WALRAND (1989). *A quick simulation method for excessive backlogs in network of queues*, IEEE Trans. Automatic Control, 34, pages 54-56.
- [42] O. POURRET (1998). *L'approximation "lent - rapide" pour les processus de Markov en fiabilité*, Rapport de thèse, Université d'Orsay.
-

- [43] O. POURRET, J. COLLET, J. L. BON (1997). *Error bounds for a stiff Markov chain approximation technique, and an application for EDF*, Proceedings of the first international conference MMR'97, Bucarest, Roumanie, pages 133-141.
- [44] A. REIBMAN, K. S. TRIVEDI (1988). *Numerical transient analysis of Markov models*, Computers and Operations Research, 15, pages 19-36.
- [45] A. REIBMAN, K. S. TRIVEDI, S. KUMAR, G. CIARDO (1990). *Analysis of stiff Markov chains*, ORSA Journal of computing, 1, pages 126-133.
- [46] S. M. ROSS, J. G. SHANTHIKUMAR, Z. ZHU (2005). *On increasing-failure-rate random variables*, Journal of Applied Probability, Vol. 43, No. 3, pages 797-809.
- [47] G. RUBINO, B. SERICOLA (1990). *Closed form solution for the distribution of the total time spent in a subset of states of a homogeneous Markov process during a finite observation period*, Journal of Applied Probability, 27.
- [48] G. RUBINO, B. SERICOLA (1989). *Sojourn times in finite Markov processes*, Journal of Applied Probability, 27, pages 744-756.
- [49] J. SADOWSKY (1991). *Large deviations and efficient simulation of excessive backlogs in a GI/G/n queue*, IEEE Trans. Automatic Control, 36, pages 1383-1394.
- [50] B. SERICOLA (2000). *Occupations times in Markov processes*, Communications in Statistics, Stochastic Models, 16 (5).
- [51] M. SHAKED, J. G. SHANTHIKUMAR (1990). *Multivariate stochastic orderings and positive dependence in reliability theory*, Math. Oper. Res., Vol. 15, No. 3, pages 545-552.
- [52] D. SIEGMUND (1976). *Importance sampling in the Monte-Carlo study of sequential tests*, Ann. Statist., 4, pages 673-684.
- [53] J. G. SHANTHIKUMAR (1984). *Processes with New Better than Used first-passage times*, Advances in Applied Probability, Vol. 16, pages 667-686, Ireland.
- [54] M. SMOTHERMAN, R. GEIST, K. S. TRIVEDI (1986). *Provably conservative approximations to complex reliability models*, IEEE Transactions on Computers, c-35, pages 333-338.
- [55] D. SONDERMAN (1980). *Comparing semi-Markov processes*, Mathematics of Operations Research, Vol. 5, No. 1, U.S.A..
- [56] W. J. STEWART (1991). *Numerical Solution of Markov Chains*, Marcel Dekker, New York.

-
- [57] W. J. STEWART (1994). *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [58] B. TUFFIN (1997). *Simulation accélérée par les méthodes de Monte-Carlo et quasi Monte-Carlo : théorie et applications*, rapport de thèse, Université de Rennes, France.

NOTATIONS

Dans cette partie, nous recensons les différentes notations utilisées tout au long de ce rapport. Pour chacune d'elles, leurs significations et la page où elles ont été définies sont indiquées.

$\geq_{st}$	Stochastiquement plus fiable	70
$\bar{\gamma}$	Complémentaire à 1 d'une grandeur γ ($0 \leq \gamma \leq 1$)	17
Λ_i	Taux de sortie de l'état i	108
$\Lambda_{\mathcal{L}}$	Majorant des taux de sortie des états lents	152
λ	Taux de dégradation d'un composant modélisé par un Markov	71
μ	Taux de réparation d'un composant modélisé par un Markov	71
θ	Seuil définissant un état comme rapide ou lent	126
ϕ	Fonction de structure	46
π_j	Probabilité asymptotique de présence en j	149
A_i	$i^{\text{ème}}$ amorce du système ($i \geq 0$)	107
$\mathbf{A}$	Matrice des taux de transition	21
$\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$	Matrice des taux de transition entre états lents	127
$\mathbf{A}_{\mathcal{LR}}$	Matrice des taux de transition d'un état lent vers un état rapide	127
$\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$	Matrice des taux de transition entre états rapides	127
$\mathbf{A}_{\mathcal{RL}}$	Matrice des taux de transition d'un état rapide vers un état lent	127
a_{ij}	Taux de transition de i vers j	21
$\mathcal{D}$	Temps d'entrée dans un état de panne	116
$\mathbb{E}(Y)$	Espérance d'une variable aléatoire Y	15
ξ	Espace d'états de X	15
ξ^+	Ensemble des états de bon fonctionnement	16
ξ^-	Ensemble des états de panne	16
ξ_0	Etat initial du processus	107
f_s	Densité de probabilité du temps de parcours de s sans le dernier état	27
F_s	Fonction de répartition associée à la densité f_s	28
g_s	Densité de probabilité du temps de parcours de s	27
h	Taux de défaillance de τ	18
$H(t)$	Fonction de risque à l'instant t	18
$H(X, t)$	Histoire du processus à la date t	70
$h(t)$	Taux de défaillance de τ à l'instant t	18
I	Vecteur décrivant de façon binaire le fonctionnement du système	52
$\mathcal{L}$	Ensemble des états lents	126

$(L_n)_{n \geq 1}$	Chaîne de Markov des états lents successifs de X	139
m	Durée moyenne de bon fonctionnement ($MTTF$)	19
N	Nombre de séjour dans l'état initial	108
$P(s)$	Probabilité de la séquence s	27
$\mathbb{P}(Z)$	Probabilité d'un événement Z	15
$\mathbf{P}(t)$	Vecteur d'états à l'instant t	23
$\mathbf{P}_0$	Vecteur d'états à l'instant initial	23
p_j	$\mathbb{P}(X(0) = j)$	20
$p_j(t)$	$p_{oj}(t)$	23
$p_{ij}(t)$	Probabilité de passage de i à j en un temps t	23
$\mathbf{Q}$	Matrice des probabilités de transition	22
$\bar{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}}$	Matrice formée par les différents $\bar{q}_{rj}$	131
$\hat{\mathbf{Q}}_{\mathcal{RL}}$	Matrice formée par les différents $\hat{q}_{rj}$	138
q_{ij}	Probabilité de transition de i vers j	22
$\bar{q}_{rj}$	Probabilité d'aller de r à j	131
$\hat{q}_{rj}$	Probabilité d'aller de r à j sans séquence bouclée	138
R	Temps de retour à l'état initial	116
$\mathcal{R}$	Ensemble des états rapides	126
$R(t)$	Fiabilité du système à la date t	16
s	Séquence	27
S	Temps de séjour dans l'état initial	108
$\mathbf{S}$	Ensemble des séquences menant de l'état initial à la panne	27
$\mathbf{S}^*$	Ensemble des séquences non bouclées menant de l'état initial à la panne	27
$\mathbf{S}_j$	Ensemble des séquences d'accès à j	27
t_0	$\inf\{t : R(t) = 0\}$	17
T_k	Instant de la $k^{\text{ième}}$ transition	27
τ	Durée de vie du système	16
τ_t	Durée de survie à t	18
$\tau_{\mathcal{L}}$	Majorant de la durée d'un séjour dans $\mathcal{L}$	152
$\tau_{\mathcal{R}}$	Majorant de la durée d'un séjour dans $\mathcal{R}$	152
τ_{SRRI}	Temps considéré lors du calcul de l'approximation SRRI	117
X	Processus de Markov ($X = (X(t))_{t \geq 0}$)	15
X_t	Processus résiduel de X à la date t ($X_t = \{X(t+s), s \in \mathbb{R}^+\}$)	70
$(X_n)_{n \geq 0}$	Chaîne de Markov encastree de X	21
$\tilde{X}$	Processus de Markov réduit aux états lents ($\tilde{X} = (\tilde{X}(t); t \geq 0)$)	139

Etant donnée une grandeur Θ associée au processus X , la notation $\tilde{\Theta}$ désigne la même grandeur calculée en utilisant l'approximation "lent-rapide sans boucle".

Index

- algorithme
 - SN, 38
 - SRI, 39
- amorce, 107
- approximation
 - exponentielle MTTF, 42
 - Lent-Rapide, 129
 - SRIA, 107
 - SRRI, 115
- arbre de défaillances, 32
- BDMP, 32
- chaîne
 - de Markov, 20
 - des états lents, 138
 - encastrée, 21
 - immergée, 21
- composant inutile, 47
- décomposition pivotale, 47
- défiabilité, 17
- DFR, 55
- DFRA, 59
- durée
 - de survie, 18
 - de vie, 16
 - de vie résiduelle, 18
- ensemble
 - croissant, 72
 - décroissant, 72
 - fermé, 151
 - irréductible, 151
- équation de Kolmogorov avant, 24
- état
 - absorbant, 16
 - lent, 126
 - rapide, 126
 - récurrent, 151
 - transient, 151
 - transitoire, 151
- fiabilité, 16
- FIGMAT-SF, 169
- FIGSEQ, 31
- fonction cohérente, 48
- fonction de structure, 46
- histoire du processus, 70
- IFR, 54
- IFRA, 58
- KB3, 31
- matrice
 - de transition, 22
 - des taux de transition, 21
 - génératrice, 21
- méthode
 - d'uniformisation, 25
 - de développement en série, 24
 - de l'approximation puissance, 26
 - de la transformée de Laplace, 26
 - spectrale, 26
- MTTF, 19
- NBU, 62
- NWU, 62
- probabilité
 - de présence asymptotique, 149
- probabilité de
 - passage, 23
 - présence, 23
 - retour, 131
 - retour sans boucle, 137
 - séquence, 27

- transition, 22
- processus
 - homogène, 20
 - markovien, de Markov, 19
 - réduit, 139
 - résiduel, 70
 - stochastique, 15
- propriété
 - forte de Markov, 19
- stochastiquement
 - monotone, 72
 - plus fiable, 70
- structure
 - cohérente, 47
- système
 - cohérent, 47
- systèmes
 - à réparations différées, 12
- séquence, 27
 - bouclée, 127
 - non bouclée associée, 128
- taux de
 - défaillance, 18
 - transition, 21
- temps moyen de séjour, 22
- théorème
 - des probabilités totales, 28
 - de Cesaro, 157
- transition
 - lente, 126
 - rapide, 126

APPROXIMATIONS DE LA FIABILITE : **cas des systèmes à réparations différées ou à composants vieillissants**

Résumé :

Les processus de Markov sont fréquemment utilisés pour modéliser les systèmes réparables et reconfigurables, comme par exemple les systèmes électriques. Mais dans le monde industriel, les systèmes réels sont de plus en plus complexes (redondance, grand nombre d'états, réparations sous condition...) et conduisent à des modèles raides et de grande taille.

Si tous les composants sont réparables et non-vieillissants, l'état initial est le seul état lent et les approximations exponentielles pour le calcul de la fiabilité sont à la fois précises et faciles à utiliser. En revanche, si les composants sont vieillissants, le système peut encore être modélisé par un processus de Markov en utilisant la méthode des Phases. Mais un grand nombre d'états est alors introduit et les méthodes mentionnées auparavant sont inapplicables.

Dans cette thèse, nous étudions d'autres approximations de la fiabilité. Ces nouvelles méthodes répondent aux exigences de ce problème et sont pessimistes, un caractère important dans l'évaluation de la fiabilité. Ces méthodes sont également valables si certains composants sont à réparations différées (les composants ne sont pas réparés dès qu'ils tombent en panne, mais après une ou plusieurs pannes supplémentaires).

Mots-clés : systèmes à réparations différées, processus Markovien, BDMP, fiabilité, approximations exponentielles, vieillissement, états "lents-rapides", séquences bouclées.

APPROXIMATIONS OF THE RELIABILITY : **systems with delayed repairs or aging components**

Summary :

Markov processes are frequently used to model repairable and reconfigurable systems, e.g. electrical systems. But, in the industrial environment, real systems are more and more complex (redundancy, large number of states, repairs on approval $\ddot{E}$) and result in very large and stiff models.

If all components are repairable and non-aging, the initial state is the only slow state and exponential approximations for the system reliability are both accurate and relatively easy to calculate. On the other hand, if some components are aging, the system can still be modeled with a Markov process, using the phase method. But a lot of states (including slow states) are then introduced and the above-mentioned methods are no longer usable.

In this thesis, we study other approximations of reliability. These new approximations meet the requirements of this problem and are pessimistic, an important feature in the world of reliability assessment. These methods are also valid if some repairs are delayed (e.g. when repairs are initiated on the occurrence of a second failure). Several examples highlight what can be gained by using the different approximations.

Key-words : systems with delayed repairs, Markov process, BDMP, reliability, exponential approximations, ageing, "slow-fast" states, looped sequence.

