

Université des Sciences et Technologies de Lille
École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THÈSE de DOCTORAT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de LILLE 1

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

Fabien BÉCHET

**ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DES SINGULARITÉS EN
THÉORIE DES COQUES MINCES ÉLASTIQUES**

Directeurs de thèse : É. Sanchez-Palencia et O. Millet

Soutenue le mardi 11 décembre 2007 devant le Jury composé de :

Aziz HAMDOUNI	Professeur, Université de La Rochelle	Président
Dominique LEGUILLON	Directeur de recherche, LMM	Rapporteur
Michel POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Rapporteur
Paul-Louis GEORGE	Directeur de recherche, INRIA Rocquencourt	Examinateur
Olivier MILLET	Professeur, Université de La Rochelle	Examinateur
Évariste SANCHEZ-PALENCIA	Directeur de recherche, LMM	Examinateur
Géry de SAXCÉ	Professeur, Université de Lille 1	Examinateur

Université des Sciences et Technologies de Lille
École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THÈSE de DOCTORAT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de LILLE 1

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

Fabien BÉCHET

**ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DES SINGULARITÉS EN
THÉORIE DES COQUES MINCES ÉLASTIQUES**

Directeurs de thèse : É. Sanchez-Palencia et O. Millet

Soutenue le mardi 11 décembre 2007 devant le Jury composé de :

Aziz HAMDOUNI	Professeur, Université de La Rochelle	Président
Dominique LEGUILLON	Directeur de recherche, LMM	Rapporteur
Michel POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Rapporteur
Paul-Louis GEORGE	Directeur de recherche, INRIA Rocquencourt	Examineur
Olivier MILLET	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
Évariste SANCHEZ-PALENCIA	Directeur de recherche, LMM	Examineur
Géry de SAXCÉ	Professeur, Université de Lille 1	Examineur

Remerciements

Voilà, encore trois années de passées. Même si les choses ont parfois été longues et difficiles au cours de la thèse, me voilà arrivé à son terme et cette page est l'occasion pour moi de remercier ceux qui ont contribué à l'achèvement de ce travail.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille. Je tiens tout d'abord à remercier mes deux encadrants qui ont su me guider malgré la distance, Évariste Sanchez-Palencia étant à Paris, et Olivier Millet promu professeur à La Rochelle. Je remercie Évariste de m'avoir transmis une petite partie de ses connaissances et de m'avoir fait l'honneur d'être son dernier thésard (a priori!) même s'il m'a toujours considéré comme un collègue. Je remercie Olivier pour son soutien, les heures passées au téléphone et à faire tourner le fax pour aboutir à ce travail.

J'adresse de vifs remerciements aux deux rapporteurs de ce travail, Michel Potier-Ferry, et surtout Dominique Leguillon qui m'a aussi aidé sur quelques aspects numériques. Je remercie vivement Aziz Hamdouni, Paul-Louis George et Géry de Saxcé respectivement président et membres du jury.

Je tiens à remercier le Laboratoire de Mécanique de Lille et ses directeurs successifs, Guy Caignaert et Issam Shahrouf, pour m'avoir accueilli pendant mon doctorat au sein du laboratoire et pour avoir financé mes voyages Lille-Paris-La Rochelle. J'exprime également ma reconnaissance à l'égard du ministère de la Recherche pour avoir financé ce travail via une bourse MENRT. Je tiens également à remercier l'école Polytechnique Universitaire de Lille pour m'avoir confié le poste de moniteur dans le département Mécanique pendant ces trois années. Je pense particulièrement à Jean-Luc Muñoz, qui fut successivement pour moi un enseignant et un collègue dévoué, et qui nous a malheureusement quitté.

Merci également à tous les collègues du laboratoire, et notamment ceux que j'ai côtoyé au quotidien : Djimedo, Céline, Cosmin, Émilie, Jamila, Slava, Bian et mes inconditionnels compagnons de RU Ludo, Nicolas et Vincent et bien sûr Vanessa.

Merci à tous mes amis qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont aidé à décompresser notamment par la musique et les interminables parties de football.

Je remercie aussi toute ma famille et notamment mes parents, mon frère et mes deux soeurs qui m'ont épaulé tout au long ma scolarité.

Finalement, je remercie Vanessa qui m'a soutenu pendant ces deux dernières années. Nous avons passé cette épreuve ensemble et j'espère que la vie nous réserve de belles choses.

Table des matières

Introduction	1
<hr/>	
1 . Singularités et couches limites en théorie des coques élastiques linéaires	7
<hr/>	
1.1	<i>Introduction</i> 7
1.2	<i>Rappels sur la théorie des surfaces</i> 7
1.2.1	Carte locale - base covariante 7
1.2.2	Première forme fondamentale de la surface S - base contravariante 8
1.2.3	Deuxième forme fondamentale 9
1.2.4	Classification des surfaces 9
1.2.5	Dérivation sur la surface S 12
1.2.6	Déformation d'une surface 14
1.3	<i>Théorie des coques minces élastiques</i> 15
1.3.1	Le modèle de Koiter 15
1.3.2	Rigidité des surfaces 17
1.3.3	Théorie asymptotique des coques 18
1.3.4	Convergence vers le problème limite 19
1.3.5	Couches limites et singularités 20
1.4	<i>Réduction du système membranaire à une équation aux dérivées partielles</i> 21
1.4.1	Cas du déplacement normal u_3 22
1.4.2	Cas des déplacements tangentiels u_1 et u_2 22
1.5	<i>Structure des singularités des déplacements lors d'un chargement singulier</i> 24
1.5.1	Singularité le long d'une ligne non caractéristique 26
1.5.2	Singularité le long d'une courbe caractéristique 29
1.5.3	Synthèse des résultats 33
1.6	<i>Étude des épaisseurs de couche</i> 34
1.6.1	Cas d'une couche le long d'une courbe non caractéristique 35
1.6.2	Cas d'une couche le long d'une courbe caractéristique 36
1.7	<i>Conclusion</i> 38

2 . Simulation numérique et adaptation de maillage	39
---	-----------

2.1	<i>Introduction</i>	39
2.2	<i>Le verrouillage numérique et les remèdes existants</i>	39
2.3	<i>L'élément de coque D.K.T.C. et le problème discret.</i>	40
2.3.1	L'élément D.K.T.C.	40
2.3.2	Discrétisation	41
2.4	<i>Maillage adaptatif avec BAMG</i>	42
2.4.1	Le logiciel BAMG	43
2.4.2	Couplage BAMG-MODULEF	44
2.5	<i>Calcul des énergies de membrane et de flexion</i>	45
2.6	<i>Validation</i>	46
2.6.1	Cas d'une plaque circulaire sous pression	46
2.6.2	Cas d'une demi-sphère sous pression uniforme	48
2.7	<i>Application au cas parabolique.</i>	51
2.8	<i>Conclusion.</i>	53

3 . Étude des singularités dans le cas des coques paraboliques inhibées	55
--	-----------

3.1	<i>Introduction</i>	55
3.2	<i>Propagation d'une singularité dans le cas parabolique</i>	56
3.2.1	Singularité le long d'une courbe caractéristique	56
3.2.2	Singularité le long d'une courbe non-caractéristique	58
3.3	<i>Exemple d'un demi-cylindre de révolution.</i>	60
3.3.1	Caractéristiques géométriques	60
3.3.2	Chargement et conditions aux limites	62
3.3.3	Étude des déplacements	65
3.4	<i>Simulation numérique</i>	69
3.4.1	Adaptation du maillage	70
3.4.2	Résultats numériques sur les déplacements	71
3.4.3	Répartitions des énergies	73
3.5	<i>Convergence vers le problème limite de membrane</i>	73
3.5.1	Convergence des déplacements vers la solution du problème de membrane	73
3.5.2	Formation des couches internes et énergies	75
3.5.3	Comparaison entre maillages uniformes et adaptés	77

3.6	<i>Étude numérique dans le cas non-caractéristique</i>	78
3.7	<i>Cas d'une singularité le long d'un bord</i>	81
3.7.1	Théorie	81
3.7.2	Simulations numériques	82
3.8	<i>Singularités dues à la forme du domaine</i>	86
3.8.1	Conclusion	89

4 . Étude des coques elliptiques bien-inhibées **91**

4.1	<i>Introduction</i>	91
4.2	<i>Existence de singularités logarithmiques.</i>	91
4.2.1	Étude des singularités de l'équation $\Delta^2 u_3 = C_4 f^3$	92
4.2.2	Cas particulier où les courbures principales sont égales	97
4.2.3	Condition d'existence d'une singularité logarithmique	98
4.3	<i>Exemple d'un parabolôïde elliptique</i>	101
4.3.1	Caractéristiques géométriques	101
4.3.2	Résultats numériques	103
4.3.3	Adaptation du maillage	103
4.3.4	Étude de la couche interne en $y^1 = 0.5$	105
4.3.5	Influence du domaine de chargement	107
4.3.6	La singularité logarithmique au coin du chargement	109
4.3.7	Un cas sans singularité logarithmique	111
4.3.8	Un autre cas sans singularité logarithmique	112
4.3.9	Énergies de membrane et de flexion	112
4.4	<i>Conclusion.</i>	114

5 . Étude des coques elliptiques mal-inhibées **115**

5.1	<i>Généralités</i>	115
5.2	<i>La condition de Shapiro-Lopatinskii</i>	116
5.2.1	Cas d'un bord libre	117
5.2.2	Cas d'un bord fixé	118
5.3	<i>Étude du problème sensitif</i>	119
5.3.1	Problèmes modèles permettant d'étudier le phénomène	119
5.3.2	Retour au problème de coques	121

5.4	<i>Calculs numériques pour une coque mal-inhibée</i>	122
5.4.1	Convergence vers le problème limite mal posé.	124
5.4.2	Influence de la longueur du bord libre	127
5.4.3	Répartition des énergies dans un problème sensitif.	130
5.5	<i>Autre exemple de chargement</i>	131
5.6	<i>Conclusion.</i>	133
<hr/>		
6	Comportement limite du modèle de Koiter pour des coques allongées	135
<hr/>		
6.1	<i>Introduction</i>	135
6.2	<i>Description du problème</i>	136
6.2.1	La géométrie et le paramétrage.	136
6.2.2	Le modèle de Koiter.	136
6.3	<i>Adimensionnalisation des équations et mise à l'échelle</i>	137
6.3.1	Adimensionnalisation des tenseurs $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$	137
6.3.2	Mise à l'échelle sur les déplacements et les efforts.	139
6.4	<i>Développement asymptotique des équations</i>	140
6.4.1	Cinématique de type Vlassov	141
6.4.2	Conditions aux limites associées	146
6.5	<i>Équations d'équilibre</i>	147
6.5.1	Équations d'équilibre en formulation faible	147
6.5.2	Équation de traction	148
6.5.3	Équation de torsion	149
6.5.4	Équation de flexion selon e_2	150
6.5.5	Équation de flexion selon e_3	151
6.6	<i>Retour aux variables dimensionnelles.</i>	152
6.7	<i>Comparaison des résultats obtenus.</i>	153
6.7.1	Équations d'équilibre réduites.	153
6.7.2	Comparaison avec le modèle de Vlassov.	154
6.8	<i>Conclusion.</i>	155
<hr/>		
Conclusion Générale et perspectives		157
<hr/>		
ANNEXES		165
<hr/>		
A. Réduction des équations à une équation aux dérivées partielles		165

<i>A.1</i>	<i>Problème membranaire.</i>	165
A.1.1	Cas du déplacement normal u_3	166
A.1.2	Equation réduite pour les déplacements tangentiels u_1 et u_2 .	169
<i>A.2</i>	<i>Problème complet.</i>	170

B.	Quelques notions sur les distributions et la famille des Dirac	173
-----------	---	------------

<i>B.1</i>	<i>Notions élémentaires sur les distributions.</i>	173
<i>B.2</i>	<i>La famille de distributions de Dirac.</i>	173

C.	Courbures principales	175
-----------	------------------------------	------------

Introduction

LES coques minces sont des corps tridimensionnels dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les deux autres. Elles sont aujourd'hui très utilisées dans l'industrie, notamment dans l'industrie automobile (carrosserie), aéronautique (carlingue, ailes, ...) ou encore dans le génie civil (ponts, toits, ...). Leur utilisation s'explique par un poids propre faible et par une grande résistance qui est due pour une majeure partie à la courbure qui permet aux efforts d'être mieux répartis. Ainsi leur résistance vis-à-vis des efforts de flexion est bien plus importante que celle des plaques. L'utilisation de coques minces permet donc de concevoir des structures de très grande envergure et pouvant encaisser des efforts importants (voir Figs. 1 et 2). Dans la conception de telles structures, on essaye autant que possible de réduire leur épaisseur afin de réduire leur poids, tout en conservant une résistance suffisante.



FIG. 1 – L'A380 de Airbus



FIG. 2 – Le Dôme à Marseille

Les premiers travaux sur les plaques remontent à la fin du 19^{ème} siècle (Kirchhoff) et furent ensuite poursuivis par Love au début du 20^{ème} siècle. Il fallut attendre les années 50 pour voir apparaître les premiers modèles de coques [18, 23, 61, 73], obtenus à partir d'hypothèses *a priori*. D'autres modèles furent proposés en élasticité non linéaire [95] et en plasticité et élasto-plasticité [8, 90, 92]. Par la suite, de nombreux travaux portèrent sur la justification de ces modèles de plaques et de coques par des méthodes asymptotiques. A.L. Goldenveiser fut le premier à essayer de justifier en formulation locale le modèle de plaques de Kirchhoff-Love [46] et de coques de Novozhilov-Donnell [47]. Par la suite, au début des années 1980, de nombreuses justifications basées sur les méthodes asymptotiques furent menées, aussi bien dans le cadre de l'élasticité linéaire que non linéaire, en utilisant une formulation variationnelle du problème tridimensionnel initial. Ainsi, P.G. Ciarlet et P. Destuynder justifèrent par méthode asymptotique, le modèle linéaire de plaques de Kirchhoff-Love [27], ainsi que le modèle non linéaire de plaques de Von Karman [28]. En utilisant une formulation intrinsèque, le modèle linéaire de coques de Novozhilov-Donnell pour des courbures faibles fut ensuite justifié, ainsi que le modèle linéaire de membrane [37, 38]. Une approche en composante fut également développée par E. Sanchez-Palencia [84–86] puis par P.G. Ciarlet *et al.* [30, 31]. Ces derniers travaux mirent en évidence le rôle fondamental des déplacements inextensionnels sur le comportement limite (quand l'épaisseur tend vers zéro), qui est, soit un modèle de membrane si la coque est inhibée, soit un modèle de flexion pure dans le cas contraire. La convergence vers l'un ou l'autre des modèles ne dépend alors que de la géométrie de la surface moyenne de la coque et des conditions aux limites [38]. Ces travaux furent ensuite poursuivis

dans le cas non linéaire [68, 71]. En utilisant une formulation locale des équations tridimensionnelles de l'élasticité non linéaire, une classification des modèles asymptotiques a été établie en fonction du niveau d'efforts appliqués [52, 53]. Cependant, malgré tous ces travaux visant à justifier les modèles bidimensionnels de plaques et de coques existants, et à construire de nouveaux modèles, le modèle de coques de Koiter n'a jamais pu être justifié par approche asymptotique, bien que ce soit le modèle le plus couramment utilisé pour les résolutions numériques.

Parallèlement, des modèles de poutres élastiques furent également justifiés par méthodes asymptotiques. Les premiers travaux sont dus à A. Rigolot [79, 80] dans le cadre de l'élasticité linéaire. Une extension à l'élasticité non linéaire fut ensuite proposée dans [32, 69].

À la croisée de ces deux types de structures (les coques et les poutres à section pleine), se trouvent les poutres voiles. Celles-ci peuvent être vues comme des poutres à paroi mince ou comme des coques très allongées. Le modèle de référence pour ce type de structures est celui de Vlassov [96] qui est un modèle unidimensionnel composé de quatre équations différentielles. Dans [76–78, 94], J.M. Rodriguez et J.M. Viaño aboutissent à partir d'un modèle de poutre pleine qu'ils ont établi au préalable par méthode asymptotique, à un modèle plus riche que celui de Vlassov, mais dans lequel l'équation de torsion n'est que du deuxième ordre (elle est du quatrième ordre dans le modèle classique de Vlassov). Par la suite, des justifications à partir des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire ont été développées dans [48, 49] en faisant tendre en même temps la largeur et l'épaisseur du profil vers zéro. Le modèle de Vlassov est retrouvé dans le cas fortement courbé avec cependant des termes de couplage flexion/torsion supplémentaires. Dans le cas des poutres voiles à profil faiblement courbé, un modèle asymptotique unidimensionnel est également obtenu dans le cas élastique linéaire [51]. Un modèle non linéaire de poutre voile élastique a aussi été obtenu à partir de l'élasticité tridimensionnelle non linéaire [50]. Notons enfin les travaux récents de J. I. Diaz et E. Sanchez-Palencia [40] qui ont établi des résultats de convergence du modèle de Novozhilov-Donnell vers un modèle de poutres voiles faiblement courbées.

La première partie de ce travail de thèse concerne l'étude des singularités en théorie des coques minces élastiques, à partir du modèle de Koiter [61, 62]. Ce modèle, bien qu'il ne puisse pas être justifié par méthodes asymptotiques, est le plus couramment utilisé pour l'étude de coques minces, car il tient à la fois compte des effets de déformations membranaires et de variation de courbure couplés à des ordres de grandeur différents. Ainsi la formulation faible du modèle de Koiter contient deux contributions, la forme bilinéaire d'énergie de membrane, proportionnelle à l'épaisseur, et la forme bilinéaire d'énergie de flexion proportionnelle au cube de l'épaisseur.

La première difficulté rencontrée lors de l'étude des coques minces à partir du modèle de Koiter vient du fait que le comportement limite, lorsque l'épaisseur tend vers zéro, est très différent selon que la surface moyenne (et les conditions aux limites associées) est ou non géométriquement rigide. Une coque sera alors dite indifféremment "géométriquement rigide", "à flexion pure inhibée", ou plus simplement "inhibée" lorsque les seuls déplacements inextensionnels¹ existants sont les déplacements nuls. Le caractère rigide ou inhibé d'une surface dépend non seulement de la nature de la surface considérée (elliptique, hyperbolique, parabolique), mais aussi des conditions aux limites imposées [24, 85]. Si la coque n'est pas inhibée en flexion (géométriquement rigide), le modèle asymptotique limite est celui de flexion pure² [26, 84]. Par contre lorsque la coque est inhibée en flexion (géométriquement rigide), nous avons un problème de perturbations singulières [65] dont le problème limite est le modèle de membrane. Dans ce mémoire nous nous focaliserons sur les coques inhibées.

¹Déplacements qui ne modifient pas la métrique de la surface moyenne.

²Ce modèle traduit une rigidité moindre de la structure, la rigidité en flexion étant proportionnelle au cube de l'épaisseur.

Dans le cas des coques inhibées, les solutions du problème limite de membrane (pour une épaisseur nulle) sont moins régulières que les solutions du problème de Koiter (pour une épaisseur strictement positive). Ainsi lorsque l'épaisseur tend vers zéro, il apparaît des couches limites le long des bords de la coque et également des couches internes à l'intérieur desquelles les déplacements sont de plus en plus singuliers [89]. Cette perte de régularité est d'autant plus importante lorsque le problème limite n'est pas elliptique (il est de la même nature que la surface moyenne de la coque). Cependant, même quand la surface moyenne de la coque est elliptique, il peut apparaître une instabilité (oscillations sur le bord libre) quand la coque possède un bord libre : nous avons alors un problème sensitif [45, 66, 75]. Dans ce cas, le problème limite est mal posé et la solution n'est pas contenue dans l'espace des distributions. De plus, toujours dans le cas des coques elliptiques, lorsque le domaine de chargement possède un coin, il peut apparaître une singularité logarithmique au voisinage de ce point [13].

La diversité des problèmes et des singularités existant en théorie des coques lorsque l'épaisseur tend vers zéro, pose de sérieux problèmes lorsque l'on cherche à résoudre numériquement le modèle de Koiter, qui ne possède en général pas de solutions analytiques. Les éléments finis de coques ont fait leur apparition vers le milieu des années 1960, précédés de quelques années par les premiers éléments de plaques. Les premiers éléments proposés étaient basés sur des méthodes en déplacements. Un historique des différents éléments utilisés peut être trouvé dans [67, 97]. Cependant, ces éléments classiques rencontrent vite des problèmes lorsque l'épaisseur relative³ de la coque devient petite : un phénomène de verrouillage numérique (de cisaillement "shear locking" ou de membrane "membrane locking") rend, dans certains cas, les résultats totalement faux. Et ceci d'une manière dangereuse car les résultats sur les déplacements sont en général très sous-estimés ; ce qui s'avère problématique pour le dimensionnement d'une structure. Depuis, cela est devenu un challenge de réussir à contourner ce problème de verrouillage numérique et plusieurs méthodes ont été proposées parmi lesquelles :

- l'utilisation d'intégration numérique réduite [56]
- l'utilisation de formulations mixtes telles que les éléments MITC, d'abord mises au point pour les plaques [12] puis pour les coques [9, 10]
- l'adaptation de maillage (méthodes-h ou méthodes-p par exemple) [5, 6, 44].

D'autre part, lorsque l'on veut résoudre numériquement un problème de coques minces par la méthode des éléments finis en utilisant le modèle de Koiter, on rencontre, outre le blocage membranaire, des difficultés à bien rendre compte des fortes variations des déplacements dans les couches où apparaissent des singularités pour de faibles épaisseurs. Sans avoir a priori de connaissance particulière sur les singularités existantes et sur leur propagation éventuelle, le seul moyen d'avoir des résultats précis serait de raffiner uniformément et fortement le maillage en diminuant la taille des éléments. Cependant, cela induirait une forte augmentation du nombre d'éléments et donc du temps de calcul, de façon souvent irréaliste. Ainsi, pour limiter le nombre de degrés de liberté et d'éléments, il est important d'avoir un maillage raffiné localement là où les déplacements sont singuliers, et plus spécifiquement dans les directions où ceux-ci sont singuliers. C'est tout l'intérêt des procédures de maillages adaptatifs anisotropes, même si, en général, il est recommandé d'avoir des éléments isotropes pour assurer la convergence de la méthode des éléments finis. Cependant, compte tenu des forts gradients des déplacements à l'intérieur des couches, dans la direction transverse à la couche, un maillage anisotrope s'avère précis et adéquat [83]. Ce type de maillage adaptatif et anisotrope a déjà été utilisé dans [1] pour des problèmes de perturbations singulières (en diffusion), et dans [16, 17, 20, 55] pour des calculs sur les ondes de choc en mécanique des fluides. Dans tous les cas, l'adaptation de maillage est un processus itératif utilisant un estimateur *a posteriori*. A partir d'un maillage initial approximativement isotrope, et d'un critère à définir selon le problème traité (voir par exemple [2]), le maillage sera raffiné dans les zones où ce critère est vérifié. Le maillage peut être raffiné, soit globalement, soit en divisant en plusieurs éléments des éléments du maillage précédent, ou encore en déformant le maillage initial. L'équipe de P.L. George à l'INRIA a développé un mailleur adaptatif anisotrope bidimensionnel BAMG [54]. Ce mailleur a été

³rapport entre l'épaisseur et la longueur caractéristique de la coque

couplé au code éléments finis MODULEF dans [33] afin d’obtenir un maillage adaptatif dans le cas des coques. Des résultats intéressants ont été obtenus pour des problèmes modèles et pour les coques hyperboliques [34]. Il s’avère en particulier qu’un maillage adapté est plus performant qu’un maillage structuré uniforme et isotrope. De plus, l’utilité de raffiner dans les couches pour obtenir des résultats précis avec un nombre réduit d’éléments est clairement mis en évidence.

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous focaliserons sur l’étude des singularités en théorie des coques minces elliptiques et paraboliques inhibées⁴, à partir du modèle de Koiter d’un point de vue théorique, et en utilisant le logiciel d’éléments finis MODULEF couplé avec le mailleur adaptatif anisotrope BAMG pour les simulations numériques. On rappelle que les coques elliptiques sont des coques dont les deux courbures principales sont de même signe. Les exemples les plus courants de coques elliptiques sont les ellipsoïdes (dont la sphère est un cas particulier) et le paraboloïde elliptique. Ces surfaces ont la particularité de ne pas avoir de ligne asymptotique réelle. Nous verrons qu’il n’y aura donc pas de propagation des singularités, celles-ci se propageant le long des lignes asymptotiques. Les surfaces paraboliques sont des surfaces ayant une courbure principale nulle. Les exemples classiques sont les surfaces développables : les cylindres, les cônes ou encore l’hélicoïde développable. Les coques parabolique possèdent une seule famille de lignes asymptotiques et la propagation des singularités est possible.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à des considérations théoriques. Tout d’abord, nous y rappelons les notions élémentaires de la théorie des surfaces utiles dans la suite, ainsi que la formulation du modèle de coques minces de W.T. Koiter. Nous étudierons ensuite son comportement limite quand l’épaisseur tend vers zéro, avec apparition possible de couches limites et internes liées à la perte de régularité des solutions. La suite du premier chapitre est consacrée à l’étude détaillée des singularités apparaissant dans les couches limites et internes, lorsque le chargement est singulier. Pour cela, nous commençons par établir une formulation réduite du modèle de membrane ne faisant intervenir qu’une seule composante du déplacement à la fois, particulièrement bien adaptée à l’étude des singularités. A partir de cette formulation réduite, nous établissons un certain nombre de résultats assez généraux, donnant l’ordre des singularités des déplacements dans le cas d’un chargement normal singulier. Les résultats obtenus sont différents selon la nature de la coque, et le fait que le chargement est singulier le long d’une ligne caractéristique (confondue avec les lignes asymptotiques de la surface) ou d’une ligne non-caractéristique. Enfin, à partir d’une équation réduite du modèle de Koiter pour le déplacement normal u_3 , nous retrouvons les résultats classiques donnant les épaisseurs des couches (limites ou internes) selon la nature de la surface moyenne et de la couche (suivant une ligne caractéristique ou non).

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous présentons les outils de simulation numérique et d’adaptation de maillage utilisés pour résoudre le modèle de coques de Koiter pour de très faibles épaisseurs. Nous commençons par rappeler le problème de blocage membranaire que l’on rencontre lorsque que l’on veut discrétiser un problème de coques minces par la méthode des éléments finis. Nous présentons ensuite les différentes méthodes existantes pour y remédier, ainsi que la solution que nous avons choisie. Il s’agit de l’utilisation de l’élément de coque DKTC non conforme de MODULEF, couplé avec le mailleur adaptatif anisotrope BAMG. Nous verrons que les simulations numériques réalisées avec un nombre réduit d’éléments permettent d’approcher précisément les singularités prédites par la théorie. Enfin, nous exposons la nouvelle routine que nous avons implémentée dans MODULEF, qui permet de calculer séparément les énergies de membrane et de flexion. Quelques exemples d’application viendront vérifier son bon fonctionnement et sa précision.

Le chapitre 3 concerne l’étude théorique et numérique des singularités dans le cas des coques paraboliques inhibées. Dans un premier temps, nous mettons en évidence en intégrant directement le système membranaire, les différences qui existent sur l’ordre des singularités des déplacements, suivant que le

⁴Les coques hyperboliques ont déjà fait l’objet d’études théoriques et numériques dans [33, 57, 58].

chargement est singulier le long d'une ligne caractéristique ou non-caractéristique. Nous considérerons ensuite l'exemple d'un demi-cylindre soumis à un effort normal appliqué seulement dans une zone circulaire. Nous verrons que les déplacements résultants ont alors des singularités "fractionnaires". Ces résultats sont confrontés à des simulations numériques réalisées avec MODULEF et BAMG couplés. Nous constatons que le maillage est raffiné automatiquement uniquement dans les couches internes où les déplacements sont les plus singuliers. Enfin, des calculs numériques sont présentés dans le cas d'un chargement singulier le long du bord (libre ou encastré) ou encore lorsque le domaine de définition de la surface moyenne est plus complexe.

Le chapitre 4 est consacré aux coques elliptiques bien-inhibées, fixées sur tout leur bord. Lorsque le chargement est singulier, les singularités des déplacements correspondent à celles obtenues dans le cas d'un chargement singulier le long d'une ligne non-caractéristique (dans le cas des coques elliptiques, il n'y a pas de ligne caractéristique réelle). D'autre part, nous montrons à partir de la formulation réduite du problème de membrane, qu'il peut apparaître un autre type de singularité : il s'agit d'une singularité du déplacement normal, ponctuelle et de type logarithmique. Celle-ci apparaît lorsque le domaine de chargement possède des coins et lorsque les courbures principales y sont différentes. Des simulations numériques illustreront ces différents types de singularités et montreront à nouveau que la méthode de résolution numérique utilisée est bien adaptée. En effet, le maillage est raffiné automatiquement d'une manière anisotrope dans les couches limites (comme précédemment), et d'une manière isotrope autour de la singularité logarithmique.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons cette fois aux coques elliptiques mal-inhibées, dont une partie du bord est libre. Dans ce cas, nous montrons que le problème limite et les conditions aux limites associées, ne satisfont pas à la condition de Shapiro-Lopatinskii. Le problème limite est mal posé ; ses solutions sont dans l'espace des fonctionnelles analytiques qui est bien plus grand que celui des distributions. Ainsi, nous avons à faire à un problème sensitif : le modèle de Koiter bien posé tend vers un problème limite mal posé. Il apparaît alors un phénomène de complexification : des oscillations de plus en plus rapprochées et de plus en plus amples apparaissent le long du bord libre à mesure que l'épaisseur tend vers zéro. Des simulations numériques nous permettront de visualiser le phénomène aussi bien au niveau des déplacements, que de la répartition de l'énergie de flexion qui se concentre au niveau du bord libre.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous étudierons le comportement limite du modèle de Koiter quand une des deux dimensions de la surface moyenne de la coque est beaucoup plus importante que l'autre. Nous essaierons en particulier de répondre à la question suivante : une coque très allongée peut-elle être décrite indifféremment par le modèle de Koiter ou le modèle unidimensionnel de Vlassov ? Pour cela, au chapitre 6, à partir de la formulation faible du modèle de Koiter, nous effectuerons un développement asymptotique des équations d'équilibre par rapport à l'épaisseur relative, du même ordre de grandeur que l'inverse de l'élanement. Nous limitons notre étude au cas des profils fortement courbés. Comme problème limite, nous retrouvons naturellement la cinématique de Vlassov, ainsi que les équations d'équilibre unidimensionnelles classiques existant dans la littérature. Seul un coefficient géométrique lié au terme du second ordre de l'équation de torsion diffère. Nous en obtenons une expression analytique avec l'approche développée, alors que Vlassov n'en donne qu'une expression semi-empirique. Enfin, nous comparons les résultats obtenus à ceux donnés par un développement asymptotique des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire [49].

Chapitre 1

Singularités et couches limites en théorie des coques élastiques linéaires

1.1 Introduction

Les modèles de coques que nous utiliserons au cours de cette thèse sont des modèles bidimensionnels, où la géométrie de la coque est décrite par une surface moyenne (surface plongée dans l'espace tridimensionnel) et par une épaisseur généralement supposée constante. Dans ce chapitre nous commencerons par rappeler les principales définitions de la théorie des surfaces et de géométrie différentielle (surface paramétrée, base locale, champs de vecteurs, dérivation sur une surface ...) en coordonnées curvilignes, nécessaires à la formulation des problèmes de coques.

Nous rappellerons ensuite la formulation variationnelle classique du modèle de coque de Koiter et les phénomènes de couches limites qui apparaissent lorsque l'épaisseur tend vers zéro.

Nous établirons à la section 1.4 une formulation réduite des modèles de membrane et de Koiter particulièrement bien adaptée à l'étude des singularités et des couches limites. Au paragraphe 1.5, cette formulation réduite du modèle de membrane nous permettra d'énoncer un certain nombre de résultats assez généraux caractérisant l'ordre des singularités des déplacements résultant d'un chargement singulier.

L'étude des épaisseurs de couche sera effectuée à la section 1.6 de ce chapitre en se basant sur la réduction du modèle de Koiter en une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir que le déplacement normal u_3 . On verra que l'on retrouve entre autres certains résultats classiques.

1.2 Rappels sur la théorie des surfaces

Ce paragraphe n'est pas exhaustif sur le sujet mais présente les principaux aspects utiles pour les problèmes de coque. Le lecteur pourra se référer par exemple à [93] ou [19] pour des informations plus détaillées.

1.2.1 Carte locale - base covariante

Soit (O, e_1, e_2, e_3) un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 . Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 . Une surface S peut être définie par une carte locale (Ω, Ψ) où Ψ est une application injective au moins $\mathcal{C}^2(\Omega)$ à valeur dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (y^1, y^2) &\longmapsto \Psi(y^1, y^2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

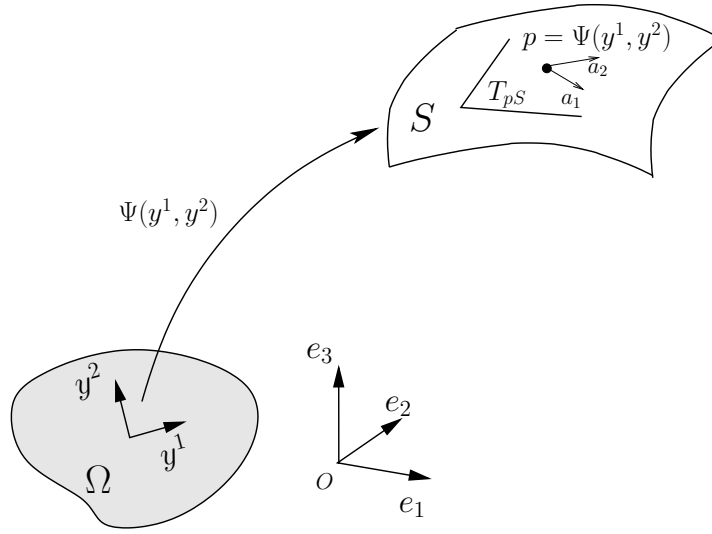


FIG. 1.1 – Définition d’une surface plongée dans \mathbb{R}^3

En chaque point $p = \Psi(y^1, y^2)$ de S , on peut alors définir les deux vecteurs tangents à la surface S en ce point par :

$$a_\alpha = \frac{\partial \Psi(y^1, y^2)}{\partial y^\alpha} \tag{1.2}$$

où $\alpha \in \{1, 2\}$. De façon générale, les indices grecs prendront des valeurs dans l’ensemble $\{1, 2\}$ et les indices latins dans l’ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Pour une carte locale donnée, ces vecteurs sont définis de manière unique. Ils sont linéairement indépendants et définissent le plan tangent en tout point p de S , noté T_pS . On peut alors définir le vecteur unitaire normal au plan tangent par :

$$N = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|} \tag{1.3}$$

Définition 1.2.1 *Le triplet (a_1, a_2, N) définit la base covariante en chaque point p de la surface S .*

1.2.2 Première forme fondamentale de la surface S - base contravariante

A partir de la base covariante, on peut définir le *tenseur métrique* $(a_{\alpha\beta})$ de la surface S associé à la carte (Ω, Ψ) par ses composantes covariantes :

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta \tag{1.4}$$

où le \cdot désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

Si on considère une courbe Γ tracée sur la surface S , définie sous la forme paramétrique $(y^1 = y^1(t), y^2 = y^2(t))$, la longueur ds d’un élément d’arc de Γ sera donnée par :

$$ds^2 = a_{11}dy^1dy^1 + 2a_{12}dy^1dy^2 + a_{22}dy^2dy^2 \tag{1.5}$$

La forme quadratique définie par (1.5) est appelée la *première forme fondamentale* de la surface S .

On peut également calculer l’aire d’un élément de surface dS de S en fonction d’un élément d’aire dy^1dy^2 de Ω suivant :

$$dS = \sqrt{a}dy^1dy^2 \quad \text{avec } a = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \tag{1.6}$$

A la base covariante (qui n'est pas en général orthonormée), nous associons une *base contravariante* (a^1, a^2, a^3) définie par :

$$a^\beta \cdot a_\alpha = \delta_\alpha^\beta \quad \text{et} \quad a^3 = N \quad (1.7)$$

où δ_α^β désigne le symbole de Kronecker¹.

Les vecteurs de la base covariante et de la base duale contravariante sont reliés entre eux par le tenseur métrique :

$$a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta \quad (1.8)$$

et inversement :

$$a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta \quad (1.9)$$

où $(a^{\alpha\beta})$ est le tenseur métrique lié à la base contravariante défini par :

$$a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta = (a_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

On a comme propriété évidente $\det(a^{\alpha\beta}) = \frac{1}{\det(a_{\alpha\beta})} = \frac{1}{a}$.

1.2.3 Deuxième forme fondamentale

La *deuxième forme fondamentale* de la surface S est directement reliée à la courbure de celle-ci. Elle s'écrit sous forme quadratique :

$$b(dy^1, dy^2) = b_{11}dy^1dy^1 + 2b_{12}dy^1dy^2 + b_{22}dy^2dy^2 \quad (1.11)$$

où les $b_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes du tenseur de courbure définies par :

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -a_\alpha \cdot N_{,\beta} = N \cdot a_{\alpha,\beta} \quad (1.12)$$

Ce tenseur peut également être exprimé dans la base contravariante à l'aide du tenseur métrique :

$$b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\mu} a^{\lambda\beta} b_{\mu\lambda} \quad (1.13)$$

Enfin, on définit les composantes mixtes du tenseur de courbure :

$$b_\beta^\alpha = -a^\alpha \cdot N_{,\beta} = N \cdot a_{,\beta}^\alpha \quad (1.14)$$

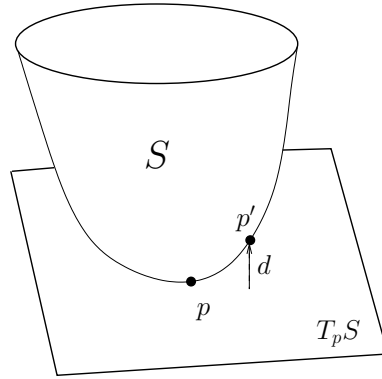
qui représentent les composantes de l'endomorphisme de courbure associé. Ce sont les composantes mixtes qui ont une signification physique concrète. Par exemple, pour une demi-sphère de rayon R , on a toujours $b_1^1 = b_2^2 = \frac{1}{R}$ et $b_1^2 = b_2^1 = 0$ alors que les composantes $b_{\alpha\beta}$ et $b^{\alpha\beta}$ dépendent du paramétrage choisi pour décrire la surface S .

1.2.4 Classification des surfaces

On se place dans le cas d'une coque, qui, à la différence des plaques, possède au moins une composante b_α^β de l'opérateur de courbure non nulle. On peut ainsi définir la nature de chaque point p de S (avec $\overrightarrow{Op} = \Psi(y^1, y^2)$) en étudiant la position d'un point p' de S proche du point p (avec $\overrightarrow{Op'} = \Psi(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2)$) par rapport au plan tangent en p . Appelons d la distance algébrique entre le plan tangent² en p et p' .

¹On rappelle que l'on a $\delta_\alpha^\beta = 1$ si $\alpha = \beta$ et $\delta_\alpha^\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

²On rappelle que le plan tangent à S en p est le plan défini par les 2 vecteurs a_1 et a_2 tangents à S au point p .

FIG. 1.2 – Définition de la distance d

Cette distance d s'exprime alors comme suit [93] :

$$d = [\Psi(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2) - \Psi(y^1, y^2)] \cdot a_3 \quad (1.15)$$

En développant $\Psi(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2)$, on peut montrer que d s'exprime à l'ordre principal par :

$$d = \frac{1}{2} [b_{11} dy^1 dy^1 + 2b_{12} dy^1 dy^2 + b_{22} dy^2 dy^2] \quad (1.16)$$

Les directions (dy^1, dy^2) qui annulent (1.16) sont appelées directions asymptotiques de la surface S au point $p = \Psi(y^1, y^2)$. La nature de ces directions dépend directement de la nature de la surface moyenne S .

La nature du point p dépendra du signe de d qui dépend lui-même du déterminant de la seconde forme fondamentale :

- Si $b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 > 0$, d garde le même signe et la surface se situe donc d'un même côté du plan tangent dans un voisinage de p . Le point p est alors un *point elliptique* de la surface S . Les deux directions asymptotiques sont imaginaires.
- Si $b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = 0$, il existe localement une direction où $d = 0$. Le plan tangent "colle" à la surface en p le long de cette direction. Le point p est un *point parabolique* de la surface S . La direction où d s'annule est alors la direction asymptotique (racine double de l'équation $d = 0$).
- Si $b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 < 0$, il existe localement deux directions où $d = 0$. Les courbures principales de S sont alors de signe opposé en p . Le plan tangent coupe la surface S en p . La surface S se trouve de part et d'autre du plan tangent dans un voisinage de p . Le point p est un *point hyperbolique* de la surface S . Les 2 directions où d s'annule sont les directions asymptotiques (racines simples de $d = 0$).

Définition 1.2.2 La surface S sera dite uniformément elliptique, parabolique ou hyperbolique si le déterminant de la seconde forme fondamentale est respectivement positif, nul, ou négatif en tout point de S .

Les courbes asymptotiques de la surface S seront les courbes tangentes en chacun de leurs points à une direction asymptotique. Ces courbes vérifient donc l'équation :

$$b_{11} dy^1 dy^1 + 2b_{12} dy^1 dy^2 + b_{22} dy^2 dy^2 = 0 \quad (1.17)$$

Les courbes asymptotiques au point p sont représentés sur les Figs. 1.3 à 1.5 pour les trois types de surface (elliptique, parabolique, hyperbolique) en pointillés.

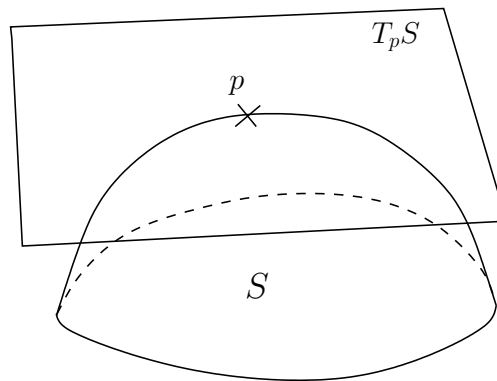


FIG. 1.3 – Exemple de point elliptique - Pas de courbe asymptotique réelle

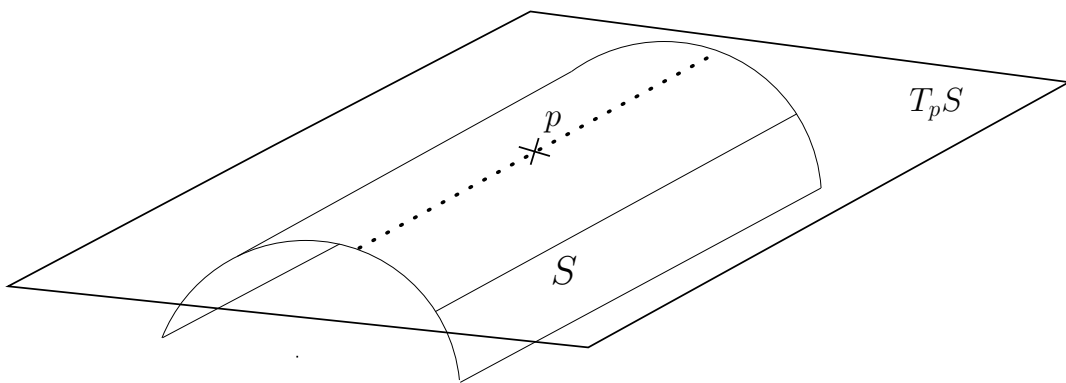


FIG. 1.4 – Exemple de point parabolique - Une famille de courbes asymptotiques doubles

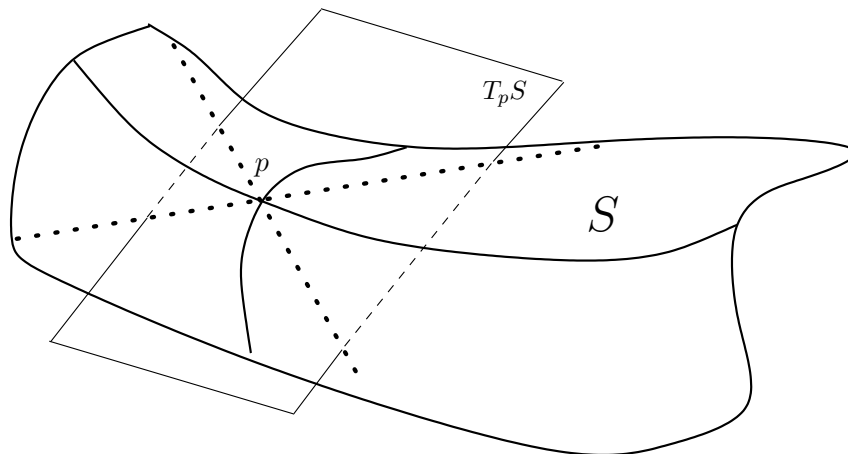


FIG. 1.5 – Exemple de point hyperbolique - Deux familles de courbes asymptotiques simples

1.2.5 Dérivation sur la surface S

Les bases covariante (a_1, a_2, N) et contravariante (a^1, a^2, N) ne sont ni orthonormées ni orthogonales en général et dépendent du point p de S . Ainsi, les dérivées des vecteurs de ces deux bases ne sont pas nulles. De plus, la dérivée d'un vecteur tangent n'est en général pas dans le plan tangent. Elle possède une composante suivant la normale, liée à la courbure de la surface. On a les formules de dérivation suivantes (formule de Gauss pour les vecteurs du plan tangent et de Weingarten pour le vecteur normal) qui s'écrivent :

$$a_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda + b_{\alpha\beta} N \quad (1.18)$$

$$a_{,\beta}^\alpha = -\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha a^\lambda + b_\beta^\alpha N \quad (1.19)$$

$$N_{,\alpha} = -b_\alpha^\lambda a_\lambda \quad (1.20)$$

où

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = a^\lambda \cdot a_{\alpha,\beta} \quad (1.21)$$

sont les *symboles de Christoffel* associés à la première forme fondamentale. On ajoute généralement à ceux-ci les symboles de Christoffel associés à la deuxième forme fondamentale :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \Gamma_{3\alpha}^\beta = -b_\alpha^\beta \quad (1.22)$$

Soit maintenant u un champ de vecteurs défini sur la surface S . Il peut alors s'écrire dans les bases covariante et contravariante :

$$u = u^\alpha a_\alpha + u^3 N \quad \text{ou} \quad u = u_\alpha a^\alpha + u_3 N \quad (1.23)$$

De façon équivalente, tout champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 à support sur S peut se décomposer en la somme d'un vecteur du plan tangent $u_t = u^\alpha a_\alpha$ et d'un vecteur suivant la normale $u_3 N$. Autrement dit, on a la décomposition $\mathbb{R}^3 = T_p S \oplus \mathbb{R}N$. La dérivation sur S du champ de vecteurs u à support sur S nécessite de définir les notions suivantes.

Dérivation d'un champ scalaire

Soit

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow f(p) \end{aligned} \quad (1.24)$$

un champ scalaire défini sur la surface S . On a :

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} a^\alpha = f_{,\alpha} a^\alpha \quad (1.25)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial p}$ est une forme linéaire sur Ω , son transposé $\overline{\frac{\partial f}{\partial p}}$ est un vecteur appelé gradient de f (noté $gradf$). On a :

$$gradf = f_{,\alpha} a^{\alpha\beta} a_\beta \quad (1.26)$$

Dérivation d'un champ de vecteur tangent

Par généralisation de la définition précédente, on a :

$$\frac{\partial u_t}{\partial p} = \frac{\partial u_t}{\partial y^\alpha} a^\alpha = u_{t,\alpha} a^\alpha \quad (1.27)$$

Comme $u_t = u^\beta a_\beta$, on obtient la formule de dérivation d'un vecteur tangent en utilisant (1.18) à (1.20)

$$\frac{\partial u_t}{\partial p} = u^\alpha|_\beta a_\alpha \cdot a^\beta + (u^\alpha b_{\alpha\beta}) N \cdot a^\beta \quad (1.28)$$

Ainsi, la dérivée d'un vecteur tangent n'est pas nécessairement dans le plan tangent à la surface S en p . Sa dérivée contient un terme selon la normale, le second terme de l'expression (1.28).

La composante tangente de $\frac{\partial u_t}{\partial p}$, projection sur le plan tangent $T_p S$ en p à S est appelée dérivée covariante de u_t et est notée $\frac{\hat{\partial} u_t}{\partial p}$. On a :

$$\frac{\hat{\partial} u_t}{\partial p} = \Pi \frac{\partial u_t}{\partial p} = u^\alpha|_\beta a_\alpha \cdot a^\beta \quad (1.29)$$

où Π désigne l'opérateur de projection sur $T_p S$.

C'est un endomorphisme de $T_p S$ dont les composantes sont définies par :

$$u^\alpha|_\beta = u^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} u^\lambda \quad (1.30)$$

$$\iff u_\alpha|_\beta = u_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} u_\lambda \quad (1.31)$$

avec

$$u^\alpha|_\beta = a^{\alpha\gamma} u_\gamma|_\beta \quad (1.32)$$

Dérivation d'un champ de vecteur de \mathbb{R}^3

Pour finir, généralisons la définition précédente à un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 qui s'écrit :

$$u = u_t + u_3 N \quad (1.33)$$

D'après ce qui précède, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial p}$ du champ de vecteurs u défini sur S est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial p} = (u^\alpha|_\beta - b^\alpha_\beta u_3) a_\alpha a^\beta + (u_{3,\beta} + b^\alpha_\beta u_\alpha) N \cdot a^\beta \quad (1.34)$$

avec les relations complémentaires :

$$u_\alpha|_\beta = a_{\alpha\lambda} u^\lambda|_\beta \quad \text{et} \quad b^\alpha_\beta u_\alpha = b_{\alpha\beta} u^\alpha \quad (1.35)$$

Par la suite, pour simplifier l'écriture, on notera $D_\alpha u_\beta = u_\alpha|_\beta$.

Dérivation d'un champ de tenseurs

Soit T un champ de tenseurs d'ordre deux défini sur la surface S . On peut représenter T soit par ses composantes 2 fois contravariantes :

$$T = T^{\alpha\beta} a_\alpha \otimes a_\beta \quad (1.36)$$

soit par ses composantes mixtes³ $T = T^\alpha_\beta a_\alpha a^\beta$ dans le cas de l'endomorphisme associé. Dans ce qui suit, afin d'écrire les équations d'équilibre des coques, on a besoin de définir l'opérateur de dérivation suivant sur T qui constitue une généralisation de ce qui a été vu dans le cas des vecteurs :

$$T^{\alpha\beta}|_\gamma = \partial_\gamma T^{\alpha\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\lambda} T^{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda} T^{\lambda\beta} \quad (1.37)$$

Par la suite, on écrira $D_\gamma T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}|_\gamma$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

³L'écriture de T en composantes covariantes ne nous intéresse pas ici.

1.2.6 Déformation d'une surface

Lors d'une sollicitation extérieure (chargement appliqué par exemple), la surface S se déforme en une nouvelle surface \tilde{S} . La carte de \tilde{S} s'écrit alors :

$$\tilde{\Psi}(y^1, y^2) = \Psi(y^1, y^2) + u(y^1, y^2) \quad (1.38)$$

où $u(y^1, y^2)$ est le déplacement subi par un point $p = \Psi(y^1, y^2)$ de S (voir Fig. 1.6).

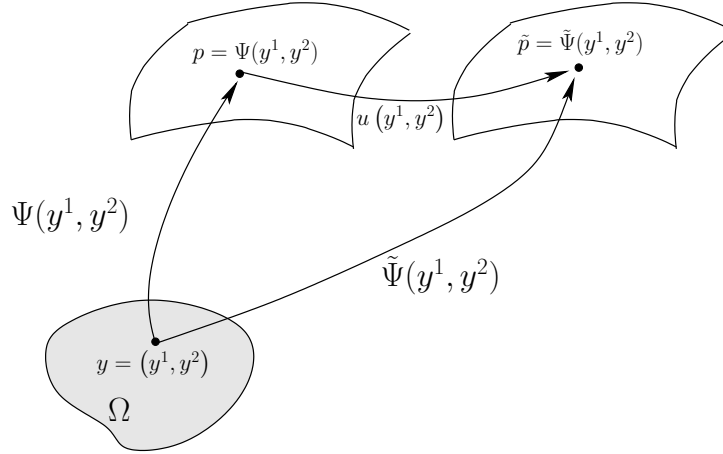


FIG. 1.6 – Déformation d'une surface

On peut calculer les nouveaux tenseurs métrique $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ et de courbure $\tilde{b}_{\alpha\beta}$ correspondant à la surface déformée \tilde{S} . Afin de caractériser la déformation de la surface lors du déplacement u , on définit les tenseurs de *variation de métrique* $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ et de *variation de courbure* $\rho_{\alpha\beta}(u)$ comme suit :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \quad (1.39)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad (1.40)$$

On trouvera dans [39, 82] par exemple une étude détaillée sur le sujet où les expressions de $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ sont obtenues, soit en calculant la variation tridimensionnelle de la métrique dans l'épaisseur de la coque, soit par un calcul de variations de $b_{\alpha\beta}$.

En se plaçant dans le cadre de la théorie linéaire en petits déplacements, la linéarisation des expressions (1.39) et (1.40) conduit à :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) - b_{\alpha\beta} u_3 \quad (1.41)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(u) = \partial_\alpha \partial_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda u_3 - b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} u_3 + D_\alpha (b_\beta^\lambda u_\lambda) + b_\alpha^\lambda D_\beta u_\lambda \quad (1.42)$$

avec $D_\alpha u_\beta = u_\beta|_\alpha$. Cette notation sera celle utilisée par la suite.

Il est important de noter, qu'en théorie linéarisée (hypothèse de petits déplacements), ce qui sera le cas dans cette thèse, la donnée de $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ et $\rho_{\alpha\beta}(u)$ suffit à caractériser complètement la déformation d'une surface S soumise au champ de déplacements u . En effet, on a le théorème de Koiter suivant qui est un cas particulier du théorème de Gauss-Bonnet dans le cas linéarisé :

Théorème 1.2.1 *Soit $u(p)$ un champ de déplacement d'une surface S , de point courant $p = \Psi(y^1, y^2)$. Si $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \rho_{\alpha\beta}(u) = 0 \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}$, alors u est un déplacement de solide rigide.*

1.3 Théorie des coques minces élastiques

Nous rappellerons d'abord ici la théorie des coques linéaires élastiques et principalement le modèle de Koiter. Nous présenterons ensuite les principaux résultats existant sur le comportement asymptotique des coques lorsque leur épaisseur tend vers zéro.

1.3.1 Le modèle de Koiter

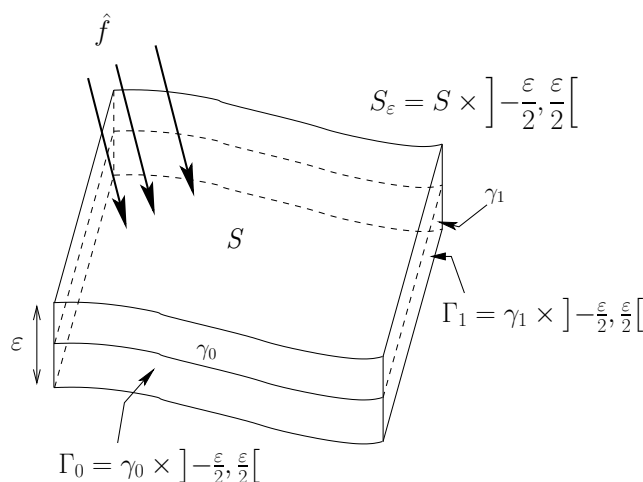


FIG. 1.7 – Coque considérée

Soit une coque de surface moyenne S et d'épaisseur ε occupant le domaine

$$S_\varepsilon = S \times]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$$

de \mathbb{R}^3 dans sa configuration initiale, constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope. Le but du problème mécanique est de trouver le champ de déplacement u de la coque soumise à un chargement \hat{f} et satisfaisant à des conditions aux limites données. Nous supposons que les efforts sont suffisamment petits pour rester dans le cadre de l'élasticité linéaire.

De façon générale, la frontière $\gamma = \partial S$ de S peut être décomposée en 2 parties, γ_0 et γ_1 constituant une partition de γ . On définit alors la frontière latérale $\Gamma = \gamma \times]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$ de la coque S_ε sur laquelle peuvent être imposés deux types de conditions aux limites différentes, cinématiques sur le bord $\Gamma_0 = \gamma_0 \times]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$ et statiques sur $\Gamma_1 = \gamma_1 \times]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$ (voir Fig. 1.7). On peut par exemple imposer sur Γ_0 des conditions aux limites cinématiques du type :

$$\begin{aligned} \text{encastrement} & : u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \\ \text{ou} & \\ \text{fixation} & : u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \end{aligned} \tag{1.43}$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{gradu} \cdot n$ désigne la dérivée normale et n la normale extérieure à γ_0 .

Le modèle bidimensionnel de Koiter découle du problème tridimensionnel linéaire élastique auquel ont été ajoutées plusieurs hypothèses :

- l'hypothèse de Reissner-Mindlin qui suppose que la déformation normale est nulle suivant l'épaisseur (il n'y a pas de variation d'épaisseur au cours de la déformation).
- l'hypothèse de contrainte de pincement ou de compression nulle suivant l'épaisseur.

Ces deux hypothèses conduisent à un modèle de type Nagdhi qui prend en compte le cisaillement transverse. Si la coque est mince, le cisaillement transverse peut être supposé très faible, voire négligeable, ce qui constitue l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love :

– les normales à la surface moyenne non-déformée restent normales à la surface moyenne déformée.

Ces trois hypothèses suffisent à établir le modèle bidimensionnel de Koiter à partir des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire, par intégration sur l'épaisseur.

Si l'on considère que les efforts volumiques sont constants dans l'épaisseur, supposée elle-même constante, le déplacement u , solution du problème, est donné par le modèle de Koiter :

Trouver $u \in V$, tel que, $\forall v \in V$:

$$\varepsilon \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) \gamma_{\alpha\beta}(v) dS + \frac{\varepsilon^3}{12} \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(u) \rho_{\alpha\beta}(v) dS = \int_S \hat{f}^i v_i dS \quad (1.44)$$

avec $V = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) ; v \text{ satisfaisant à (1.43)}\}$

Les $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ représentent les coefficients de la loi de comportement linéaire élastique isotrope. Ce sont des tenseurs du quatrième ordre. Leur expression quatre fois contravariante est donnée par (voir [15]) :

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right] \quad (1.45)$$

où ν et E représentent respectivement le coefficient de Poisson et le module d'Young.

Ces coefficients relient le tenseur des contraintes membranaires au tenseur des déformations membranaires, et le tenseur des moments de flexion au tenseur de variation de courbure par les relations :

$$T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} \quad (1.46)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{12} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu} \quad (1.47)$$

Ces coefficients satisfont les conditions usuelles de symétrie

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = A^{\beta\alpha\lambda\mu} = A^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad (1.48)$$

et de positivité

$$\exists C > 0 \quad tq \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \geq C \sum_{(\alpha,\beta)} \gamma_{\alpha\beta}^2 \quad (1.49)$$

A partir de ces coefficients, on peut déterminer les coefficients de souplesse $B_{\alpha\beta\lambda\mu}$ vérifiant les relations inverses :

$$\gamma_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\lambda\mu} T^{\lambda\mu} \quad (1.50)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = 12 B_{\alpha\beta\lambda\mu} M^{\lambda\mu} \quad (1.51)$$

Le premier membre de la formulation variationnelle (1.44) contient deux parties. La première est la forme bilinéaire de déformation membranaire, proportionnelle à l'épaisseur ε , tandis que la seconde, la forme bilinéaire de flexion est proportionnelle au cube de l'épaisseur ε^3 . La rigidité en flexion est donc beaucoup plus faible que la rigidité en membrane quand ε est petit.

Afin d'étudier le processus asymptotique du modèle de Koiter quand $\varepsilon \searrow 0$, on l'écrit classiquement sous la forme du problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ suivant :

$$a_m(u, v) + \varepsilon^2 a_f(u, v) = b(v) \quad (1.52)$$

où

$$a_m(u, v) = \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) \gamma_{\alpha\beta}(v) dS$$

représente la forme bilinéaire d'énergie de membrane et

$$a_f(u, v) = \frac{1}{12} \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(u) \rho_{\alpha\beta}(v) dS$$

la forme bilinéaire d'énergie de flexion et où on a posé :

$$b(v) = \int_S f^i v_i dS$$

avec

$$\hat{f} = \varepsilon f \quad (1.53)$$

Remarque 1.3.1 Pour $\varepsilon > 0$, l'existence et l'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ est démontrée à l'aide du théorème de Lax-Milgram [14]. Ce théorème s'appuie sur la continuité et la coercivité du premier membre de (1.52). La coercivité de cette forme bilinéaire a été démontrée dans [14] à l'aide d'inégalités de Korn sur une surface, dès que $\varepsilon > 0$.

On peut aussi écrire le problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ sous la forme locale suivante, constituée d'un système de 3 équations aux dérivées partielles couplées (voir section VIII.3.1 de [82]) :

$$\begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta} - \varepsilon^2 \left[b_\gamma^\beta D_\alpha M^{\alpha\gamma} + D_\gamma (b_\alpha^\gamma M^{\alpha\beta}) \right] = f^\beta & \text{pour } \beta = 1, 2 \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \left[D_\alpha D_\beta M^{\alpha\beta} - b_\delta^\alpha b_{\beta\delta} M^{\alpha\beta} \right] = f^3 \end{cases} \quad (1.54)$$

où $T^{\alpha\beta}$ et $M^{\alpha\beta}$ représentent les tenseurs de contraintes membranaires et de moments de flexion. Il convient bien entendu de rajouter aux équations d'équilibre (1.54) les conditions aux limites cinématiques sur (u_1, u_2, u_3) , ainsi que les conditions aux limites de bord libre ou d'efforts imposés faisant intervenir $T^{\alpha\beta}$ et $M^{\alpha\beta}$.

1.3.2 Rigidité des surfaces

Lorsque que cela est possible, la coque a tendance à se déformer par des déplacements inextensionnels, c'est-à-dire des déplacements annulant la forme bilinéaire d'énergie membranaire. En effet, la rigidité en flexion étant beaucoup plus faible quand l'épaisseur relative ε est petite, les déplacements, qui ont tendance à minimiser l'énergie privilégieront naturellement, lorsque cela est possible, les déformations de flexion pure. Or l'existence de déplacements inextensionnels dépend de la nature géométrique (elliptique, hyperbolique, parabolique) de la surface moyenne S , ainsi que des conditions aux limites, et notamment du fait que celles-ci assurent ou non le caractère inhibé de la coque. On rappelle ici les principales définitions et les principaux résultats utiles par la suite.

On dit qu'une coque n'est pas géométriquement rigide (ou est non inhibée), si elle peut se déformer par des déplacements inextensionnels, autrement dit par des déplacements qui ne modifient pas la métrique et qui annulent $a_m(\cdot, \cdot)$.

On définit ainsi G , sous-espace des flexions pures de la façon suivante.

Définition 1.3.1 *Le sous-espace G des déplacements inextensionnels ou des flexions pures est défini par :*

$$G = \{v \in V; a_m(v, v) = 0\} = \{v \in V; \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0\} \quad (1.55)$$

Ces deux définitions sont bien équivalentes du fait de la positivité des coefficients $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ de la loi de comportement. D'autre part, on peut montrer [82] que les courbes caractéristiques du système de rigidité correspondant à $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ coïncident avec les lignes asymptotiques de la surface S .

Définition 1.3.2 *La surface S associée à des conditions aux limites données est dite inhibée (ou géométriquement rigide) si $G = \{0\}$. Dans le cas contraire, S est non-inhibée.*

De plus, une surface S inhibée est dite *bien-inhibée* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_m(v, v) \geq C (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_1^2 + \|v_3\|_0^2) \quad \forall v \in V. \quad (1.56)$$

Il est important de noter que ces propriétés de rigidité conditionnent le comportement asymptotique du modèle de Koiter étudié dans la section suivante.

1.3.3 Théorie asymptotique des coques

Il est connu que le modèle de Koiter n'est pas un modèle asymptotique contrairement au modèle de Novozhilov-Donnell pour les coques faiblement courbées [39, 52]. Il contient à la fois de manière couplée, les effets de membrane et les effets de flexion. Cependant, on peut montrer que lorsque $\varepsilon \searrow 0$, le modèle de Koiter tend, soit vers le modèle de membrane dans le cas des coques inhibées, soit vers le modèle de flexion pure dans le cas des coques non-inhibées, qui sont tous les deux des modèles asymptotiques [84, 85].

Ainsi, les problèmes limites sont très différents suivant le caractère inhibé ou non de la surface moyenne de la coque.

Si $G \neq \{0\}$, la coque est non-inhibée, et le processus asymptotique (quand $\varepsilon \searrow 0$) entre alors dans le cadre d'un problème de pénalisation (voir [82], section VI.1.3) dont le problème limite est le modèle de flexion pure [84].

Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement au cas des coques inhibées où $G = \{0\}$. Dans le cas d'une coque inhibée, nous avons affaire à un problème de perturbations singulières. En effet, les dérivées d'ordre supérieur sont contenues dans a_f qui disparaît à la limite compte tenu du facteur ε^2 . Le problème limite $\mathcal{P}(0)$ s'écrit alors :

$$\mathcal{P}(0) \begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_a, \text{ tel que, } \forall v \in V_a : \\ a_m(u^0, v) = b(v) \end{cases} \quad (1.57)$$

avec

$$V_a = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) ; (v_1, v_2) \text{ vérifiant (1.59)}\} \quad (1.58)$$

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ si la coque est encastrée ou fixée sur } \gamma_0 \quad (1.59)$$

Le problème (1.57) a une solution unique dans V_a si la coque est bien-inhibée car la coercivité de $a_m(.,.)$ est alors assurée d'après 1.56. Dans ce cas, on a $V_a = V_m$ où V_m est défini au paragraphe 1.3.4. Il est important de noter que la formulation faible (1.52) du modèle de Koiter est posée dans

$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ dans le cas d'une coque encastree sur tout son bord latéral. Par contre, le problème $\mathcal{P}(0)$ sera posé uniquement dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans le cas d'une coque bien-inhibée. Il n'est donc pas possible d'imposer des conditions aux limites sur u_3 . En effet, $u_3 \in L^2(\Omega)$, ce qui d'après le théorème des traces implique que la valeur de u_3 n'est pas définie sur le bord du domaine Ω . Ce phénomène classique correspond à l'apparition de couches limites le long du bord de la coque lors du processus asymptotique. La perte de régularité est encore plus importante si la coque n'est pas bien-inhibée.

Le problème $\mathcal{P}(0)$ est appelé problème membranaire car il ne prend en compte que l'énergie de déformation membranaire. Alors que l'opérateur associé à a_f est toujours elliptique (ce qui implique que le problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ est elliptique), celui associé à a_m est de même nature que la surface moyenne S . Ainsi, le problème limite $\mathcal{P}(0)$ est elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que la surface moyenne S est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique.

Le problème $\mathcal{P}(0)$ peut, de la même manière que $\mathcal{P}(\varepsilon)$, s'écrire sous forme d'un système appelé système membranaire :

$$\begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta} = f^\beta \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = f^3 \end{cases} \quad (1.60)$$

avec les conditions aux limites cinématiques (1.59) sur u_1 et u_2 sur γ_0 , et les conditions de bord libre naturelles associées sur γ_1 . On rappelle que la dérivée $D_\alpha T^{\alpha\beta}$ du tenseur T est définie en (1.37).

1.3.4 Convergence vers le problème limite

Dans le cas d'une coque inhibée nous avons

$$a_m(v, v) = 0, \quad v \in V \Rightarrow v = 0 \quad (1.61)$$

Ainsi

$$\|v\|_{V_m} = a_m(v, v)^{1/2} \quad (1.62)$$

définit une norme sur V . On note alors V_m l'espace complété de V pour cette norme, qui est un espace de Hilbert. V_m est bien sûr plus grand que V , ce qui donne l'inclusion inverse au niveau des duals :

$$V_m \supset V \Leftrightarrow V'_m \subset V' \quad (1.63)$$

Dans le cas d'une coque inhibée, nous avons le résultat classique suivant sur la convergence de u^ε solution du problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ vers la solution du problème limite u^0 (voir [87] et VI.1.4 de [82] pour la démonstration).

Théorème 1.3.1 *Si $f \in V'_m$ autrement dit s'il existe une constante C telle que*

$$|\langle f, v \rangle| \leq C a_m(v, v)^{1/2} \quad \forall v \in V, \quad (1.64)$$

la solution u^ε du problème $\mathcal{P}(\varepsilon)$ est telle que

$$u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} u^0 \quad \text{dans } V_m \text{ fort,} \quad (1.65)$$

où u^0 est la solution du problème limite $\mathcal{P}(0)$ posé dans V_m :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_m, \text{ tel que, } \forall v \in V_m : \\ a_m(u^0, v) = b(v) \end{cases} \quad (1.66)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème limite sont démontrées par le théorème de Lax-Milgram [29] (la forme bilinéaire a_m étant coercive et continue sur V_m).

Il est important de noter que l'hypothèse (1.64) est très restrictive. Dans certains cas, cette hypothèse exclut certains champs de forces très réguliers (de classe C^∞).

Ainsi, le problème limite $\mathcal{P}(0)$ est bien posé dans V_m pourvu que $f \in V'_m$. Dans le cas d'une coque bien-inhibée, V_m est le plus petit possible et coïncide avec V_a défini en (1.58). Ainsi, le dual $V'_m = H^{-1} \times H^{-1} \times L^2$ est le plus grand possible et contient les champs de forces usuels.

Par contre, lorsque $f \notin V'_m$, on a un problème de coques mal-inhibées et des phénomènes d'instabilités peuvent apparaître à la limite lorsque $\varepsilon \searrow 0$ (voir [66]). Ce sont des phénomènes sensitifs qui seront étudiés plus en détails dans le chapitre 5.

1.3.5 Couches limites et singularités

Comme c'est souvent le cas dans les problèmes de perturbations singulières, la solution u^0 du problème limite est moins régulière que u^ε , puisque u^0 est la solution d'un problème d'ordre inférieur.

Pour des valeurs petites de ε , le comportement de la coque se rapproche de celui décrit par $\mathcal{P}(0)$, le problème membranaire, qui ne contient pas de termes de flexion.

Comme on vient de le voir, le problème limite est associé à l'espace d'énergie V_m qui est plus grand que V , ce qui implique une perte de régularité quand ε tend vers zéro. Pour que le problème limite $\mathcal{P}(0)$ soit bien posé, il faut que $f \in V'_m$. Or V'_m pouvant être très petit, il arrive que $f \notin V'_m$. La solution du problème limite u^0 appartient alors à des espaces qui sont encore plus grands que V_m et qui peuvent même ne pas être contenus dans l'espace des distributions. Ces problèmes dit sensitifs, seront étudiés dans le chapitre 5.

Même si la solution limite quand $\varepsilon \searrow 0$ n'est pas régulière, dès que $\varepsilon > 0$, u^ε est régulière puisque $u^\varepsilon \in V$. Lorsque ε devient très petit, il apparaît un phénomène de couche limite au voisinage des zones où u^0 est singulier. De plus, en passant de $u^\varepsilon \in V$ à $u^0 \in V_m$, la composante u_3 passe de $H^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$ au mieux. Cela implique la perte des conditions aux limites concernant u_3 et il apparaît, pour ε petit, une couche limite au niveau du bord de la coque, le long des contours de la surface S . Lorsque ε devient petit, il peut également apparaître d'autres types de couches appelées couches internes :

- le long des courbes où le chargement f est discontinu
- le long des courbes où la courbure est discontinue
- le long des caractéristiques tangentes à une des courbes citées auparavant

Nous n'étudierons pas dans cette thèse tous les cas de figure de singularités et de couches limites que l'on peut rencontrer, notamment celles qui apparaissent au niveau des contours de la surface S . En particulier, nous concentrerons notre attention sur l'étude des singularités dues à une discontinuité du chargement f , ou à l'existence de coins sur le contour du domaine de chargement (dans le cas de coques elliptiques). Dans le premier cas, nous essaierons de développer dans la section 1.5 une théorie générale de l'étude des singularités, permettant de déduire l'ordre de grandeur des singularités des déplacements de celle du chargement (notamment du chargement normal f^3), et ceci en fonction de la géométrie de la coque. Nous étudierons plus particulièrement le cas des coques elliptiques et paraboliques.

Le cas des coques hyperboliques a été étudié en détails dans [33, 57, 59]. Il a été montré que la perte de régularité est plus importante le long des caractéristiques correspondant aux courbes asymptotiques de la surface moyenne S . Il apparaît des singularités le long des courbes où le chargement est singulier mais aussi le long des caractéristiques tangentes aux discontinuités du chargement lorsque $\varepsilon \searrow 0$. De plus, il a été mis en évidence des phénomènes de réflexion des singularités lorsque le bord de la surface moyenne n'est pas parallèle à une courbe asymptotique [58].

Nous étudierons au chapitre 3, le cas des coques paraboliques, qui est assez semblable au cas des coques hyperboliques, mais sans le phénomène de réflexion du fait qu'il n'y a qu'une famille de lignes asymptotiques.

Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons également au cas des coques elliptiques bien-inhibées qui présentent plusieurs particularités. Nous verrons que les singularités ne se propagent jamais (car une coque elliptique n'a pas de courbes asymptotiques réelles). De plus, on mettra en évidence l'apparition de singularités particulières lorsque le domaine de chargement possède des coins. Dans le cas de coques mal-inhibées, nous verrons qu'il apparaît en plus un phénomène de complexification le long du bord libre (chapitre 5).

1.4 Réduction du système membranaire à une équation aux dérivées partielles

On se propose dans cette section de ramener les équations d'équilibre couplées du système membranaire (1.60) à une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir qu'un seul déplacement. On verra que ces équations réduites sont très commodes pour étudier les ordres des singularités des déplacements provenant d'une discontinuité des efforts ou encore afin d'étudier les épaisseurs des couches limites et internes. Étant donné que l'objectif principal est d'étudier les singularités et leur propagation, on va voir qu'il suffit de garder les termes de plus haut degré en terme de dérivation des déplacements u_1 , u_2 et u_3 .

Le système membranaire (1.60) s'écrit en termes de déplacements en utilisant la loi de comportement (1.46) ainsi que la définition (1.41) des déformations membranaire $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\begin{cases} -A^{1\beta\gamma^1}\partial_\beta\partial_\gamma u_1 - A^{1\beta\gamma^2}\partial_\beta\partial_\gamma u_2 + A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta u_3 + \dots = f^1 \\ -A^{2\beta\gamma^1}\partial_\beta\partial_\gamma u_1 - A^{2\beta\gamma^2}\partial_\beta\partial_\gamma u_2 + A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta u_3 + \dots = f^2 \\ -A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta u_1 - A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta u_2 + A^{\alpha\beta\gamma\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}u_3 + \dots = f^3 \end{cases} \quad (1.67)$$

Les termes complémentaires $+\dots$ font intervenir les dérivées des coefficients de la loi de comportement $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et les symboles de Christoffel multipliés par des dérivées d'ordre moins élevé des déplacements. D'après l'analyse microlocale (voir [41]), ces termes d'ordre inférieur⁴ peuvent être négligés dans l'étude des singularités. Cela revient à considérer l'équation réduite (1.67) que l'on peut écrire matriciellement :

$$A\vec{u} = \vec{f} \quad (1.68)$$

avec $A = (A_{ij})$. La matrice A découle des termes principaux du système (1.67) et s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -A^{1\beta\gamma^1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{1\beta\gamma^2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{2\beta\gamma^1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{2\beta\gamma^2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & -A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & A^{\alpha\beta\gamma\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Les ordres de dérivation des A_{ij} sont alors :

⁴L'ordre de dérivation le plus important n'est pas le même pour les 3 déplacements et les 3 équations. L'ordre de dérivation le plus important pour chaque déplacement et chaque équation est indiqué dans (1.70).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

1.4.1 Cas du déplacement normal u_3

L'analyse microlocale développée ici revient à considérer que tous les coefficients dans le système (1.68) sont constants⁵. On peut montrer que cela ne modifie pas l'étude des ordres principaux des singularités développée dans ce qui suit. En appliquant au système (1.68) une technique analogue à la règle de Cramer pour les systèmes différentiels à coefficients constants, on obtient :

$$Det(A)u_3 = A_{13}^C f^1 + A_{23}^C f^2 + A_{33}^C f^3 \quad (1.71)$$

où les A_{ij}^C sont les cofacteurs de la matrice $A = (A_{ij})$.

On considère dans ce qui suit le cas d'un chargement $f = f^3 e_3$ uniquement normal à la surface moyenne, qui introduit des singularités plus élevées que f^1 et f^2 . On supposera donc que :

$$f^1 = f^2 = 0 \text{ et } f^3 \neq 0 \quad (1.72)$$

L'expression (1.71) se réduit alors à :

$$Det(A)u_3 = A_{33}^C f^3 \quad (1.73)$$

Après quelques calculs, relativement longs mais sans difficulté particulière (détaillés dans l'annexe A.1, formules (A.19) et (A.22)), les expressions de $Det(A)$ et A_{33}^C se simplifient. On obtient :

$$Det(A) = \frac{E^3}{2(1-\nu^2)(1+\nu)a^3} [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} \quad (1.74)$$

et

$$A_{33}^C = \frac{E^2}{2(1-\nu^2)(1+\nu)a} [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} \quad (1.75)$$

On rappelle que $a = det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$ désigne le déterminant du tenseur métrique de la surface moyenne S . Finalement, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$E [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} u_3 = a^2 [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} f^3 \quad (1.76)$$

caractérisant à l'ordre principal, les singularités du déplacement u_3 en fonction des singularités éventuelles du chargement f^3 . Comme $(a^{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(a_{\alpha\beta})$ on a enfin d'après (1.10) :

$$E [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} u_3 = [a_{22}\partial_1^2 + a_{11}\partial_2^2 - 2a_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} f^3 \quad (1.77)$$

1.4.2 Cas des déplacements tangentiels u_1 et u_2

Reprenons la même démarche que dans la section précédente mais pour les déplacements tangentiels u_1 et u_2 . Afin d'obtenir une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir que u_1 , nous partons de la formule suivante analogue à (1.73) :

$$Det(A)u_1 = A_{31}^C f^3 \quad (1.78)$$

⁵Ce qui est le cas si le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ et donc les coefficients $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ sont supposés constants au moins localement.

obtenue de façon similaire.

Comme nous avons déjà calculé $\det(A)$, nous devons seulement calculer A_{31}^C . Le calcul de A_{31}^C (détaillé dans l'annexe A.1, formule (A.26)) conduit à⁶ :

$$\begin{aligned}
A_{31}^C = \frac{E^2}{4a(1+\nu)^2} & \left[\left\{ (2+J)b_{11}(a^{11})^2 + (a^{11}a^{22} - (2+2J)(a^{12})^2) b_{22} \right\} \partial_1^3 + \right. \\
& \left. \left\{ 2(2+J)(a^{22})^2 b_{12} + 2(2+J)a^{22}a^{12}b_{11} \right\} \partial_2^3 \right. \\
& + \left\{ 4(2+J)a^{11}a^{22}b_{11} + (4(2+J)(a^{12})^2 - 2a^{11}a^{22})b_{12} - 2(2+J)a^{22}a^{12}b_{22} \right\} \partial_1^2 \partial_2 \\
& \left. \left\{ ((3J+4)a^{11}a^{22} + (6+2J)(a^{12})^2)b_{11} \right. \right. \\
& \left. \left. - (2+J)(a^{22})^2 b_{22} + (8+4J)a^{22}a^{12}b_{12} \right\} \partial_1 \partial_2^2 \right] \quad (1.79)
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que $J = \frac{2\nu}{1-\nu}$.

Si on se place dans un système de coordonnées quelconque, l'opérateur A_{31}^C est donc de la forme :

$$A_{31}^C = m'_{10} \partial_2^3 + m'_{11} \partial_2^2 \partial_1 + m'_{12} \partial_2 \partial_1^2 + m'_{13} \partial_1^3 \quad (1.80)$$

De la même manière pour u_2 , les singularités en déplacements à l'ordre principal sont régies par l'équation :

$$\text{Det}(A)u_2 = A_{32}^C f^3 \quad (1.81)$$

Pour avoir A_{32}^C , il suffit d'intervertir tous les indices 1 et 2 dans l'expression de A_{31}^C et d'ajouter un signe moins. On aura alors :

$$\begin{aligned}
A_{32}^C = -\frac{E^2}{4a(1+\nu)^2} & \left[\left\{ 2(2+J)(a^{11})^2 b_{12} + 2(2+J)a^{11}a^{12}b_{22} \right\} \partial_1^3 \right. \\
& \left\{ (a^{11}a^{22} - (2+2J)(a^{12})^2) b_{11} + (2+J)b_{22}(a^{22})^2 \right\} \partial_2^3 + \left\{ -(2+J)(a^{11})^2 b_{11} \right. \\
& \left. + ((3J+4)a^{11}a^{22} + (6+2J)(a^{12})^2)b_{22} + (8+4J)a^{11}a^{12}b_{12} \right\} \partial_1^2 \partial_2 \\
& \left. + \left\{ -2(2+J)a^{11}a^{12}b_{11} + 4(2+J)a^{22}a^{11}b_{22} + (4(2+J)(a^{12})^2 - 2a^{11}a^{22})b_{12} \right\} \partial_1 \partial_2^2 \right] \quad (1.82)
\end{aligned}$$

Dans un système de coordonnées quelconque, A_{32}^C s'écrit de manière générale sous la forme :

$$A_{32}^C = m'_{20} \partial_2^3 + m'_{21} \partial_2^2 \partial_1 + m'_{22} \partial_2 \partial_1^2 + m'_{23} \partial_1^3 \quad (1.83)$$

où les coefficients m'_{2i} peuvent être identifiés à partir de la formule (1.82).

⁶On pourrait utiliser la formule (1.10) pour exprimer les 2 formules suivantes à l'aide des composantes covariantes du tenseur métrique mais cela ne simplifierait pas les expressions.

1.5 Structure des singularités des déplacements dans le cas d'un chargement singulier le long d'une courbe

Dans cette partie, on considère toujours le cas d'un chargement normal $f^3 \neq 0$, les chargements tangentiels f^1 et f^2 étant nuls. Comme on l'a vu précédemment (équations (1.73), (1.78) et (1.81)), le problème membranaire limite $\mathcal{P}(0)$ peut être ramené, dans le cas d'un chargement normal, à 3 équations du type :

$$Lu_i = M_i f^3 \quad (1.84)$$

où $L = a^3 \det(A)$ est un opérateur différentiel du 4^{ème} ordre donné par (1.74). On l'écrira de façon générale sous la forme :

$$L = l_0 \partial_2^4 + l_1 \partial_2^3 \partial_1 + l_2 \partial_2^2 \partial_1^2 + l_3 \partial_2 \partial_1^3 + l_4 \partial_1^4 \quad (1.85)$$

où chaque l_i peut être identifié avec l'expression (1.74) de $\det(A)$. On a par exemple :

$$l_0 = \frac{E^3}{2(1-\nu^2)(1+\nu)} b_{11}^2 \quad (1.86)$$

Dans (1.84), u_i représente la composante i du déplacement u . Le second membre $M_i f^3$ dépend de M_i , qui est égal à $a^3 A_{3i}^C$. Ainsi, M_1 et M_2 sont des opérateurs du 3^{ème} ordre que l'on peut écrire sous la forme :

$$M_\alpha = m_{\alpha 0} \partial_2^3 + m_{\alpha 1} \partial_2^2 \partial_1 + m_{\alpha 2} \partial_2 \partial_1^2 + m_{\alpha 3} \partial_1^3, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.87)$$

Par contre, M_3 est un opérateur du 4^{ème} ordre de la forme :

$$M_3 = m_{30} \partial_2^4 + m_{31} \partial_2^3 \partial_1 + m_{32} \partial_2^2 \partial_1^2 + m_{33} \partial_2 \partial_1^3 + m_{34} \partial_1^4 \quad (1.88)$$

Pour l'instant, nous traitons le cas d'une coque ayant une surface moyenne S de nature quelconque (elliptique, hyperbolique ou parabolique) et pour des conditions aux limites pas encore précisées. Considérons un chargement f^3 présentant une singularité à l'intérieur du domaine, par exemple, le long de la droite $y^2 = 0$ (voir Fig. 1.8). Le cas d'une courbe est analogue dans des coordonnées curvilignes adaptées. Notons que, en coordonnées curvilignes, les coefficients ne sont plus constants mais les résultats correspondants resteront vrais pour les termes d'ordre supérieur.

Dans ce qui suit, on considère de façon générale une singularité $S_0(y^2)$ et la chaîne de singularités correspondante :

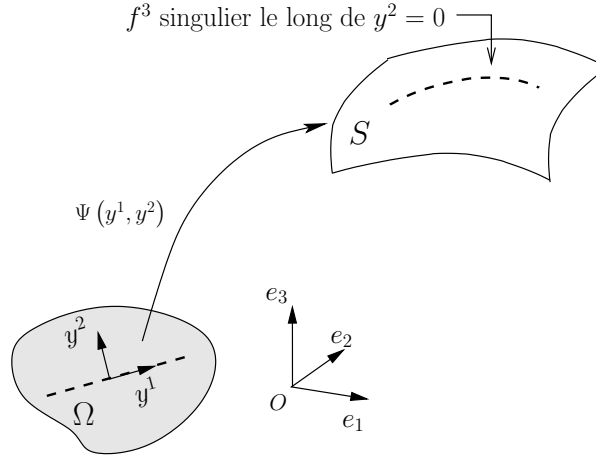
$$\dots, S_{-2}(y^2), S_{-1}(y^2), S_0(y^2), S_1(y^2), S_2(y^2), S_3(y^2), \dots \quad (1.89)$$

avec $S_{k+1} = \frac{d}{dy^2} S_k$.

Cette chaîne de singularités est prise au sens de fonctions (ou distributions) définies à une fonction (ou distribution) additive près qui est régulière au voisinage de $y^2 = 0$. Un exemple d'une chaîne de singularités peut être :

$$\dots, y^2 H(y^2), H(y^2), \delta(y^2), \delta'(y^2), \dots \quad (1.90)$$

$H(\cdot)$ étant la fonction saut de Heavyside et $\delta(\cdot)$ la distribution de Dirac à l'origine, mais d'autres chaînes existent. Nous en verrons un exemple dans le paragraphe 3.3.2.

FIG. 1.8 – Singularité du chargement en $y^2 = 0$

Considérant que f^3 présente une singularité en $S_0(y^2)$ le long de la droite $y^2 = 0$, f^3 peut s'écrire de la forme :

$$f^3 = \Phi(y^1)S_0(y^2) \quad (1.91)$$

où $\Phi(y^1)$ est une fonction régulière en y^1 . Ainsi le second membre de (1.84) s'écrit :

$$M_i f^3 = \Psi_i(y^1)S_{\beta_i}(y^2) \quad (1.92)$$

où la fonction $\Psi_i(y^1)$ est une fonction régulière contenant des dérivées d'ordre au plus égal à 4 en y^1 et β_i un entier relatif à déterminer pour chaque déplacement u_i .

Classiquement, on cherche la solution u_i sous la forme :

$$u_i(y^1, y^2) = U_{i\alpha_i}(y^1)S_{\alpha_i}(y^2) + U_{i\alpha_i-1}(y^1)S_{\alpha_i-1}(y^2) + \dots \quad (1.93)$$

L'expression (1.93) est une séquence formelle de la chaîne de singularités (1.89) dont le terme le plus singulier est plus élevé que celui de (1.92), multipliées par des coefficients inconnus $U_{i\alpha_i}(y^1)$, $U_{i\alpha_i-1}(y^1)$, ...

En remplaçant (1.92) et (1.93) dans (1.84), on a par identification avec (1.85) :

$$\begin{aligned} l_0 & \left[U_{i\alpha_i}(y^1)S_{\alpha_i+4}(y^2) + U_{i\alpha_i-1}(y^1)S_{\alpha_i+3}(y^2) + \dots \right] \\ & + l_1 \left[U_{i\alpha_i}^{(1)}(y^1)S_{\alpha_i+3}(y^2) + \dots \right] \\ & + l_2 \left[U_{i\alpha_i}^{(2)}(y^1)S_{\alpha_i+2}(y^2) + \dots \right] \\ & + l_3 \left[U_{i\alpha_i}^{(3)}(y^1)S_{\alpha_i+1}(y^2) + \dots \right] \\ & + l_4 \left[U_{i\alpha_i}^{(4)}(y^1)S_{\alpha_i}(y^2) + \dots \right] = \Psi(y^1)S_{\beta_i}(y^2) + \dots \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\text{où } U_j^{(k)} = \frac{\partial^k U_j}{\partial y_1^k}$$

Nous allons voir dans ce qui suit que le fait que $y^2 = 0$ soit une courbe caractéristique ou pas joue un rôle primordial. Cela a non seulement des conséquences sur l'ordre des singularités des déplacements mais également sur le fait que cette singularité se propage ou pas.

1.5.1 Singularité le long d'une ligne non caractéristique

Nous étudions ici le cas où la droite $y^2 = 0$ n'est pas une courbe caractéristique⁷. Par définition, les lignes asymptotiques vérifient en tout point l'équation (1.17). Dans le cas étudié ici, on a nécessairement $b_{11} \neq 0$ quelle que soit la nature de la surface moyenne. En effet, si b_{11} était nul, (1.17) impliquerait que $y^2 = \text{constante}$ est une direction asymptotique, ce qui n'est pas le cas ici. De plus, si on se réfère à l'expression (1.86), le coefficient l_0 est également non nul.

Afin de déterminer l'ordre des singularités des déplacements, on identifie les termes les plus singuliers de chaque membre de l'équation (1.94) (on part du plus singulier S_β , puis $S_{\beta-1}$, etc). On trouve que $\alpha_i + 4 = \beta_i$.

• Déplacement u_1

On distingue deux cas différents selon que m_{10} est nul ou non. D'après l'expression (1.79) de A_{31}^C , le coefficient m_{10} s'écrit :

$$m_{10} = \frac{E^2 a^2}{2(1+\nu)^2} (2+J)a^{22}(a^{22}b_{12} + a^{12}b_{11}) = \frac{E^2 a^2}{2(1+\nu)^2} (2+J)a^{22}b_1^2 \quad (1.95)$$

Comme $a > 0$ et $a^{22} > 0$, m_{10} s'annule si b_1^2 est nul. C'est le cas par exemple si le paramétrage (y^1, y^2) correspond aux directions des courbures principales. Ainsi, il convient de distinguer les deux cas suivants :

- Si $b_1^2 \neq 0$, on a :

$$M_1 f^3 = \Psi_1(y^1)S_{\beta_1} + \dots = m_{10}\Phi(y^1)S_3(y^2) + \dots \quad (1.96)$$

On trouve alors $\beta_1 = 3$ et donc $\alpha_1 = -1$, ce qui donne en terme de singularités pour le déplacement u_1 :

$$u_1(y^1, y^2) = U_{1-1}(y^1)S_{-1}(y^2) + \dots \quad (1.97)$$

avec

$$U_{1-1}(y^1) = \frac{m_{10}}{l_0}\Phi(y^1) \quad (1.98)$$

Le facteur U_{1-1} est toujours défini comme $l_0 \neq 0$.

Ainsi, dans le cas général où $b_1^2 \neq 0$, le déplacement u_1 est d'un ordre moins singulier que le chargement normal f^3 .

- Si $b_1^2 = 0$, on a $m_{10} = 0$. On doit alors distinguer deux nouveaux cas suivant que m_{11} est nul ou non. Rappelons d'abord l'expression de m_{11} déduite de (1.79) :

$$m_{11} = \frac{E^2 a^2}{4(1+\nu)^2} \left[((3J+4)a^{11}a^{22} + 2(3+J)(a^{12})^2)b_{11} - (2+J)(a^{22})^2b_{22} + 4(2+J)a^{22}a^{12}b_{12} \right] \quad (1.99)$$

⁷En théorie linéaire, les courbes caractéristiques du système de rigidité coïncident avec les courbes asymptotiques de la surface S .

Il est assez difficile de donner une interprétation géométrique à la condition $m_{11} = 0$. Cependant, si on est dans le repère principal des courbures (qui implique bien $m_{10} = 0$), la condition $m_{11} = 0$ devient :

$$(3J + 4)a^{11}a^{22}b_{11} - (2 + J)(a^{22})^2b_{22} = 0 \quad (1.100)$$

soit finalement :

$$\frac{a^{11}b_{11}}{a^{22}b_{22}} = \frac{b_1^1}{b_2^2} = \frac{2 + J}{4 + 3J} = \frac{1}{2 + \nu} \quad (1.101)$$

Autrement dit, si (y^1, y^2) correspond au paramétrage du repère principal des courbures, m_{10} est nul, et m_{11} est nul si on a $b_2^2 = (2 + \nu)b_1^1$. Ceci ne peut arriver que dans le cas d'une coque elliptique où les deux courbures sont de même signe.

Revenons au 2^{ème} cas traité, celui où $m_{10} = 0$ car $b_1^2 = 0$. On distingue les deux sous-cas suivants :

- Si m_{11} est non nul, l'équation (1.94) devient :

$$l_0 [U_{1\alpha_1}(y^1)S_{\alpha_1+4}(y^2) + \dots] + \dots = m_{11}\Phi^{(1)}(y^1)S_2(y^2) + \dots \quad (1.102)$$

Cela donne cette fois $\beta_1 = 2$ et $\alpha_1 = -2$. Ainsi, le terme le plus singulier pour le déplacement u_1 sera :

$$u_1(y^1, y^2) = U_{1-2}(y^1)S_{-2}(y^2) + \dots \quad (1.103)$$

avec

$$U_{1-2}(y^1) = \frac{m_{11}}{l_0}\Phi^{(1)}(y^1) \quad (1.104)$$

Dans ce cas, la singularité du déplacement u_1 sera de 2 ordres moins singulier que le chargement f^3 .

- Enfin, si m_{11} est nul, il faut distinguer à nouveaux 2 cas suivant que m_{12} est nul ou non. Dans le repère principal des courbures, m_{12} se réduit à :

$$m_{12} = \frac{E^2a^2}{(1 + \nu)^2}(2 + J)a^{11}a^{22}b_{11} \quad (1.105)$$

et est donc non nul. L'équation (1.94) devient alors :

$$l_0 [U_{1\alpha_1}(y^1)S_{\alpha_1+4}(y^2) + \dots] + \dots = m_{12}\Phi^{(2)}(y^1)S_1(y^2) + \dots \quad (1.106)$$

Cela donne cette fois $\beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = -3$. Ainsi, le terme le plus singulier pour le déplacement u_1 s'écrit :

$$u_1(y^1, y^2) = U_{1-3}(y^1)S_{-3}(y^2) + \dots \quad (1.107)$$

avec

$$U_{1-3}(y^1) = \frac{m_{12}}{l_0}\Phi^{(2)}(y^1) \quad (1.108)$$

Ainsi, dans ce cas très particulier, le déplacement u_1 sera de 3 ordres moins singulier que le chargement f^3 .

On constate que l'étude générale des singularités nécessite de considérer un certain nombre de cas et de sous-cas particuliers, entraînant une étude complète qui peut être fastidieuse. Cependant, ce qui nous intéresse est de déterminer les déplacements les plus singuliers, qui sont les plus pénalisant pour

la structure. Les cas particuliers conduisant à des déplacements moins singuliers, sont donc moins importants à étudier de façon générale, d'autant qu'ils correspondent à des cas rarement rencontrés en principe. Cela dit, ces cas particuliers pourraient être envisagés spécifiquement en pratique pour dimensionner des structures sous certaines sollicitations de façon à réduire les singularités des déplacements.

Remarque 1.5.1 Si $b_1^2 = 0$ (ce qui est le cas dans le repère principal de courbures) et si f^3 ne dépend pas de y^1 (i.e. $\phi(y^1) = \text{constante}$), d'après (1.108), on aura $U_{1-3} = 0$. En continuant l'étude des singularités, on montrerait que les coefficients U_{1-n} , liés à $\Phi^{(n)}(y^1)$ (avec $n > 3$) sont nuls. Dans ce cas particulier, u_1 ne serait pas singulier.

Ceci est dû au fait que les coefficients $U_{1\alpha_i}$ dépendent alors des dérivées de $\phi(y^1)$ par rapport à y^1 et sont donc tous nuls.

• Déplacement u_2

Pour déterminer les singularités les plus importantes du déplacement u_2 , nous procédons de la même façon que pour le déplacement u_1 . Nous repartons de l'équation (1.84) avec $i = 2$. Le coefficient m_{20} devant le terme en ∂_2^3 peut être nul dans certains cas. En effet, il s'écrit :

$$m_{20} = \frac{E^2 a^2}{4(1+\nu)^2} \left((a^{11} a^{22} - 2(1+J)(a^{12})^2) b_{11} + (2+J) b_{22} (a^{22})^2 \right) \quad (1.109)$$

Celui-ci s'annule dans des cas très spécifiques, quand :

$$b_{22} = \frac{2(1+J)(a^{12})^2 - a^{11} a^{22}}{(2+J)(a^{22})^2} b_{11} \quad (1.110)$$

Si on est dans le repère principal des courbures, cette condition devient :

$$b_2^2 = \frac{\nu - 1}{2} b_1^1 \quad (1.111)$$

Cela ne peut se rencontrer que dans le cas d'une coque hyperbolique car $\nu - 1 < 0$.

Considérons le cas le plus courant où le coefficient m_{20} est non nul. On a alors :

$$M_2 f^3 = m_{20} \Phi(y^1) S_3(y^2) + \dots \quad (1.112)$$

On obtient par identification $\beta_2 = 3$ et donc $\alpha_2 = -1$, ce qui donne :

$$u_2(y^1, y^2) = U_{2-1}(y^1) S_{-1}(y^2) + \dots \quad (1.113)$$

avec

$$U_{2-1}(y^1) = \frac{m_{20}}{l_0} \Phi(y^1) \quad (1.114)$$

D'une manière générale⁸, si la singularité de f^3 n'est pas le long d'une courbe caractéristique, u_2 sera d'un ordre moins singulier que f^3 .

• Déplacement u_3

Le calcul de l'ordre de la singularité du déplacement normal u_3 s'obtient de manière similaire en repartant à nouveau de (1.84) avec $i = 3$ cette fois. Un point important est que dans le cas du déplacement u_3 , le coefficient au second membre m_{30} est toujours non nul. En effet, on a :

⁸Sauf pour le cas très particulier où $m_{20} = 0$, qui a très peu de chances d'être rencontré en pratique.

$$m_{30} = \frac{E^2}{2(1-\nu^2)(1+\nu)} a_{11} \quad (1.115)$$

avec a_{11} strictement positif par définition. Ainsi, on a :

$$M_3 f^3 = m_{30} \Phi(y^1) S_4(y^2) + \dots \quad (1.116)$$

Dans ce cas, on trouve par identification que $\alpha = 4$ et $\alpha_3 = 0$, ce qui donne :

$$u_3(y^1, y^2) = U_{30}(y^1) S_0(y^2) + \dots \quad (1.117)$$

avec

$$U_{30}(y^1) = \frac{m_{30}}{l_0} \Phi(y^1) \quad (1.118)$$

qui est défini et non nul car $m_{30} \neq 0$ et $l_0 \neq 0$. Ainsi, le déplacement normal u_3 aura toujours la même singularité que le chargement f^3 quand la singularité du déplacement est le long d'une courbe non caractéristique.

1.5.2 Singularité le long d'une courbe caractéristique

Contrairement au cas d'une singularité du chargement le long d'une courbe non caractéristique, les ordres des singularités des déplacements dépendent de la nature de la surface moyenne de la coque lorsque la singularité f^3 est le long d'une courbe caractéristique. On peut tout de suite mettre à part le cas des coques elliptiques qui, ne possédant pas de courbe caractéristiques réelles, sont uniquement concernées par des singularités le long de lignes non caractéristiques.

Cas d'une coque parabolique

Commençons par le cas d'une coque parabolique avec des caractéristiques le long des droites $y^2 = \text{constante}$. La direction $dy^2 = 0$ annule donc la deuxième forme fondamentale, ce qui implique nécessairement que $b_{11} = 0$ d'après (1.17). La coque étant parabolique, on a $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$, ce qui implique nécessairement que $b_{12} = 0$ et $b_{22} \neq 0$ (sinon on aurait une plaque). On a donc $l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$ et $l_4 \neq 0$ d'après (1.74).

On considère comme précédemment le cas où f^3 possède une singularité en $S_0(y^2)$ au voisinage de $y^2 = 0$ qui correspond à une courbe caractéristique (dans le plan des paramètres). Ainsi, dans le cas d'une coque parabolique, l'équation (1.94) devient :

$$l_4 \left[U_{i\alpha_i}^{(4)}(y^1) S_{\alpha_i}(y^2) + \dots \right] = \Psi(y^1) S_{\beta_i}(y^2) + \dots \quad (1.119)$$

Cette équation permet comme on l'a vu de déterminer les ordres des singularités des déplacements u_1 , u_2 et u_3 . On aura de façon générale, en identifiant les termes les plus singuliers $\alpha_i = \beta_i$

• Déplacement u_1

Dans le cas parabolique considéré, comme $b_{11} = b_{12} = 0$, on a $m_{10} = 0$. On a donc comme coefficient au second membre, $m_{11} = -\frac{E^2 a^2}{4(1+\nu)^2} (2+J)(a^{22})^2 b_{22}$. Comme a^{22} et b_{22} sont forcément non nuls, on a $m_{11} \neq 0$ et :

$$M_1 f^3 = m_{11} \Phi^{(1)}(y^1) S_2(y^2) \quad (1.120)$$

où on rappelle que $\Phi^{(1)} = \frac{d\Phi}{dy^1}$.

On trouve alors $\beta_1 = 2$ et $\alpha_1 = 2$. Cela donne :

$$u_1(y^1, y^2) = U_{12}(y^1)S_2(y^2) + \dots \quad (1.121)$$

avec

$$\frac{d^4 U_{12}}{d(y^1)^4}(y^1) = \frac{m_{11}}{l_4} \Phi^{(1)}(y^1) \quad (1.122)$$

où l_4 est différent de zéro, ainsi que m_{11} . Le déplacement u_1 est donc de deux ordres plus singulier que le chargement f^3 .

• Déplacement u_2

De même que pour u_1 , on détermine les singularités du déplacement u_2 dues à une singularité de f^3 le long de $y^2 = 0$. Le coefficient m_{20} est non nul si la condition (1.110) n'est pas satisfaite. Cette dernière devient dans le cas parabolique avec $b_{11} = b_{12} = 0$:

$$a^{11}a^{22} - 2(J+1)(a^{12})^2 = 0 \quad (1.123)$$

que l'on suppose non vérifiée. Il est évident que cela est le cas pour un paramétrage correspondant aux lignes de courbure principale⁹ où $a^{12} = 0$ et $a^{11} > 0$, $a^{22} > 0$.

Ainsi, si $m_{20} \neq 0$, on a le second membre :

$$M_2 f^3 = m_{20} \Phi(y^1) S_3(y^2) \quad (1.124)$$

On trouve alors $\alpha_2 = 3$. Le terme le plus singulier du déplacement u_2 est alors :

$$u_2(y^1, y^2) = U_{23}(y^1) S_3(y^2) + \dots \quad (1.125)$$

avec

$$\frac{d^4 U_{23}}{d(y^1)^4}(y^1) = \frac{m_{20}}{l_4} \Phi(y^1) \quad (1.126)$$

Dans ce cas, le déplacement u_2 est de 3 ordres plus singulier que f^3 .

• Déplacement u_3

Comme on l'a vu précédemment, le coefficient m_{30} est toujours non nul, quelle que soit la géométrie de la surface moyenne S (expression (1.115)). On a alors :

$$M_3 f^3 = m_{30} \Phi(y^1) S_4 \quad (1.127)$$

qui conduit à $\alpha_3 = 4$. On a donc dans ce cas :

$$u_3(y^1, y^2) = U_{34}(y^1) S_4(y^2) + \dots \quad (1.128)$$

avec

$$\frac{d^4 U_{34}}{d(y^1)^4}(y^1) = \frac{m_{30}}{l_4} \Phi(y^1) \quad (1.129)$$

Ainsi, le déplacement normal u_3 sera de 4 ordres plus singulier que le chargement f^3 .

⁹Dans le cas des coques paraboliques, une des lignes de courbure principale coïncide avec les génératrices $y^2 = cste$, sur lesquelles on suppose le chargement singulier.

Cas d'une coque hyperbolique

Nous étudions maintenant le cas où la coque est hyperbolique avec des caractéristiques le long des droites $y^2 = \text{constante}$. Comme précédemment, la direction $dy^2 = 0$ annule la deuxième forme fondamentale, ce qui implique nécessairement que $b_{11} = 0$.

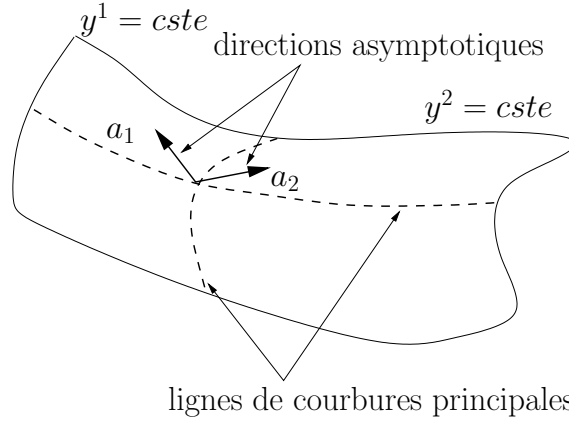


FIG. 1.9 – Exemple de coque hyperbolique et système de coordonnées choisi

La coque étant hyperbolique, on a $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$, et donc b_{12} est nécessairement non nul. On a donc $l_0 = l_1 = 0$ d'après (1.74). L'équation (1.94) devient :

$$l_2 \left[U_{i\alpha_i}^{(2)}(y^1) S_{\alpha_i+2}(y^2) + \dots \right] + \dots = \Psi(y^1) S_{\beta_i}(y^2) + \dots$$

où $l_2 = \frac{-E^3 b_{12}^2}{(1-\nu^2)(1+\nu)} \neq 0$ d'après ce qui précède. Dans le cas des coques hyperboliques, on aura donc $\alpha_i + 2 = \beta_i$. Ainsi, les déplacements sont en général moins singuliers que dans le cas parabolique.

• Déplacement u_1

D'après ce qui précède, on a $b_{11} = 0$ et $m_{10} = \frac{E^2 a^2}{4(1+\nu)^2} 2(2+J)(a^{22})^2 b_{12}$ d'après (1.79) qui est forcément non nul. On a donc comme second membre :

$$M_1 f^3 = m_{10} \Phi(y^1) S_3(y^2) \quad (1.130)$$

On trouve alors $\beta_1 = 3$ et $\alpha_1 = 1$. Cela donne :

$$u_1(y^1, y^2) = U_{11}(y^1) S_1(y^2) + \dots \quad (1.131)$$

avec

$$\frac{d^2 U_{11}}{d(y^1)^2}(y^1) = \frac{m_{10}}{l_2} \Phi(y^1) \quad (1.132)$$

qui est toujours défini et non nul dès que $\Phi(y^1) \neq 0$. Ainsi, le déplacement u_1 sera d'un ordre plus singulier que le chargement f^3 .

• **Déplacement** u_2

D'après l'expression (1.109) de m_{20} , celui-ci sera nul dans le cas hyperbolique si la condition suivante est satisfaite :

$$(2 + J)b_{22}(a^{22})^2 = 0 \quad (1.133)$$

- Si $m_{20} \neq 0$ (i.e si $b_{22} \neq 0$), le second membre s'écrit :

$$M_2 f^3 = m_{20} \Phi(y^1) S_3(y^2) + \dots \quad (1.134)$$

et le déplacement u_2 s'écrit en terme singularité :

$$u_2(y^1, y^2) = U_{21}(y^1) S_1(y^2) + \dots \quad (1.135)$$

avec

$$\frac{d^2 U_{21}}{d(y^1)^2} = \frac{m_{20}}{l_2} \Phi(y^1) \quad (1.136)$$

Ainsi, u_2 sera d'un ordre plus singulier que f^3 , tout comme le déplacement u_1 .

- Dans le cas hyperbolique, si le système de coordonnées correspond aux lignes asymptotiques (qui sont distinctes), on a $b_{11} = b_{22} = 0$ et $b_{12} \neq 0$. Ainsi, la condition $m_{20} = 0$ sera automatiquement vérifiée. Le coefficient m_{21} se réduit alors à

$$m_{21} = \frac{-E^2 a^2}{2(1 + \nu)^2} (2(2 + J)(a^{12})^2 - a^{11} a^{22}) \quad (1.137)$$

qui est généralement non nul sauf pour les cas très particuliers où

$$a^{11} a^{22} = 2(2 + J)(a^{12})^2$$

qui ne seront pas considérés ici.

On a alors, si m_{21} est non nul, comme second membre :

$$M_2 f^3 = m_{21} \Phi^{(1)}(y^1) S_2(y^2) \quad (1.138)$$

et le déplacement u_2 s'écrit avec $\beta_2 = 2$ et $\alpha_2 = 0$:

$$u_2(y^1, y^2) = U_{20}(y^1) S_0(y^2) + \dots \quad (1.139)$$

où

$$\frac{d^2 U_{20}(y^1)}{d(y^1)^2} = \frac{m_{21}}{l_2} \Phi^{(1)}(y^1) \quad (1.140)$$

Si le système de coordonnées correspond aux lignes asymptotiques, la singularité du déplacement u_2 est dans ce cas du même ordre que f^3 , alors que u_1 est d'un ordre plus singulier.

- **Déplacement** u_3

Comme dans les cas traités précédemment, m_{30} est toujours non nul, ce qui implique que :

$$M_3 f^3 = m_{30} \Phi(y^1) S_4(y^2) \quad (1.141)$$

On trouve alors que $\beta_3 = 4$ et $\alpha_3 = 2$ dans le cas hyperbolique. On donc a dans ce cas :

$$u_3(y^1, y^2) = U_{32}(y^1) S_2(y^2) + \dots \quad (1.142)$$

avec

$$\frac{d^2 U_{34}(y^1)}{d(y^1)^2} = \frac{m_{30}}{l_4} \Phi(y^1) \quad (1.143)$$

Le déplacement normal u_3 est alors de 2 ordres plus singulier que le chargement f^3 .

1.5.3 Synthèse des résultats

Malgré la diversité des cas étudiés et des résultats obtenus, dépendant à la fois de la nature de la surface S et de la direction des singularités du chargement (suivant ou non une courbe caractéristique du système membranaire), il est possible de dégager un certain nombre de résultats généraux. Les cas et sous cas considérés ne concernent que les déplacements tangentiels dont les deux composantes dépendent fortement du paramétrage choisi tandis que les résultats concernant le déplacement normal u_3 sont intrinsèques. Ces résultats permettent de déterminer à priori l'ordre de grandeur des singularités des déplacements u_1 , u_2 et u_3 en fonction de la singularité du chargement et de son orientation.

Tout d'abord, il y a deux différences majeures suivant que la singularité du chargement f^3 soit ou non le long d'une courbe caractéristique. Cette distinction n'a bien sûr de sens que dans le cas des coques paraboliques et hyperboliques, une surface elliptique n'ayant pas de courbe asymptotique réelle.

- Dans le cas d'une singularité le long d'une courbe caractéristique, les déplacements u_1 , u_2 et u_3 sont en général plus singuliers que f^3 . Ainsi, si par exemple f^3 présente une singularité en $(y^2)^3 H(y^2)$ qui n'est pourtant pas très importante, alors u_3 aura une singularité en $\delta(y^2)$ dans le cas parabolique et en $y^2 H(y^2)$ dans le cas hyperbolique. La deuxième différence majeure est que lorsque le chargement est singulier le long d'une caractéristique, les singularités vont se propager sur toute la caractéristique. En effet, dans les résultats obtenus au paragraphe 1.5.2, $U_{12}(y^1)$, $U_{23}(y^1)$ et $U_{34}(y^1)$ sont des primitives de $\Phi(y^1)$, du 4^{ème} ordre dans le cas parabolique et du 2^{ème} ordre dans le cas hyperbolique. Ainsi, même si $\Phi(y^1) = 0$ (ce qui est le cas hors de la zone chargée), ces trois facteurs sont en général non nuls.

- Par contre, dans le cas d'un chargement f^3 le long d'une courbe non caractéristique de la surface moyenne S , les fonctions $U_{11}(y^1)$, $U_{12}(y^1)$, $U_{23}(y^1)$ sont directement proportionnelles à $\Phi(y^1)$ (résultats du paragraphe 1.5.1). Elles sont donc exactement nulles hors de la zone de chargement et il n'y a aucune propagation des singularités.

D'autre part, tous les résultats obtenus à la section 1.5 peuvent se résumer dans le résultat suivant :

Résultat 1.5.1 Soit S une surface quelconque plongée dans \mathbb{R}^3 , paramétrée par la carte locale (Ω, Ψ) où (y^1, y^2) est un point courant de $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Cette surface est supposée soumise à un chargement uniformément normal f^3 , qui possède une singularité sur la ligne $y^2 = 0$. Alors, on a les résultats suivants :

1) Si $y^2 = 0$ n'est pas une courbe caractéristique,

- les déplacements u_1 et u_2 seront d'un ordre moins singulier que le chargement f^3 , sauf dans des cas très particuliers.

- le déplacement normal u_3 aura toujours la même singularité que f^3 .

- il n'y a aucune propagation des singularités.

2) Si $y^2 = 0$ est une ligne asymptotique, le résultat dépend de la nature géométrique de la surface S mais dans tous les cas, les singularités se propagent le long de cette ligne asymptotique.

i) si la surface S est parabolique :

- u_1 est généralement de 2 ordres plus singulier que f^3 (sauf cas très particuliers).

- u_2 est généralement de 3 ordres plus singulier que f^3 (sauf cas très particuliers).

- u_3 est toujours de 4 ordres plus singulier que f^3 .

ii) si la surface S est hyperbolique :

- u_1 est toujours d'un ordre plus singulier que f^3 .

- u_2 est d'un ordre plus singulier que f^3 (ou du même ordre si le système de coordonnées est celui des lignes asymptotiques)

- u_3 est toujours de 2 ordres plus singulier que f^3 .

Remarque 1.5.2 Dans le cas d'une coque hyperbolique, la direction des déplacements u_1 et u_2 n'est pas toujours facile à interpréter géométriquement dans le système de coordonnées correspondant aux courbes caractéristiques. En effet, il s'agit des composantes covariantes dans la base duale (a^1, a^2) du plan tangent, qui est orthogonale à la base (a_1, a_2) , elle-même tangente aux courbes caractéristiques $y^1 = \text{cste}$ et $y^2 = \text{cste}$, mais pas nécessairement orthogonale. Dans le cas parabolique, où les courbes caractéristiques sont confondues, l'interprétation est plus aisée, si on se place dans le système de coordonnées lié aux courbures principales. Dans ce cas, la base locale (a_1, a_2) est orthogonale et une des deux directions correspond nécessairement à une ligne asymptotique (la direction où la courbure est nulle).

1.6 Étude des épaisseurs de couche

Dans cette section, nous proposons de retrouver les résultats classiques donnant les ordres des épaisseurs des couches limites et internes en fonction de la nature de la surface moyenne de la coque (elliptique, parabolique, hyperbolique), et de la nature de la couche (le long d'une courbe caractéristique ou non).

En effet, l'épaisseur de la couche n'est pas la même si celle-ci se trouve ou non le long d'une courbe caractéristique du système membranaire correspondant aux lignes asymptotiques de la surface moyenne. Nous commencerons par établir une équation aux dérivées partielles réduite, déduite du modèle complet de Koiter, mais ne faisant intervenir que le déplacement normal u_3 . Cette formulation réduite s'obtient de la même façon que la formulation réduite du modèle de membrane (1.76) présentée à la section 1.4.1. Au terme de membrane correspondant à la formulation réduite (1.76), il convient de rajouter le terme de flexion en ε^2 , ou plutôt seulement le terme de flexion prépondérant pour l'étude des singularités. Ce terme sera celui qui aura la plus faible puissance en ε et l'ordre de dérivation le plus important.

Écrivons le système complet du modèle de Koiter (1.44) sous la forme $Au = f$. La matrice A s'exprime ici (voir le détails des calculs en annexe A.2) :

$$\begin{pmatrix} -A^{1\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{1\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \\ -A^{2\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{2\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \\ -A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & -A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & A^{\alpha\beta\gamma\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} + \frac{\varepsilon^2}{12}F \\ +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

avec $F = [A^{1111}\partial_1^4 + A^{2222}\partial_2^4 + (2A^{1122} + 4A^{1212})\partial_1^2\partial_2^2 + 4A^{1112}\partial_1^3\partial_2 + 4A^{1222}\partial_1\partial_2^3]$

et où $+\varepsilon^2(\partial^n + \dots)$ dénotent les termes restants et n les ordres les plus élevés des dérivées de ces termes.

Ainsi le terme de flexion le plus important (en terme de singularité) provient de la multiplication du cofacteur A_{33}^C par le terme $\frac{\varepsilon^2}{12}F$ de A_{33} . Ce terme est en ε^2 et comporte des dérivées d'ordre 8. Tous les autres termes de flexion contiennent des dérivées d'ordre inférieur ou sont facteurs de terme en ε^n avec $n > 2$. Ils sont donc dans les 2 cas moins importants en termes de singularités.

On obtient finalement l'équation réduite suivante du modèle de Koiter pour l'étude des singularités lorsque $\varepsilon \searrow 0$ qui s'écrit :

$$E \left[\frac{\varepsilon^2}{12} a^2 [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(4)} + (1 + \nu) [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \right. \quad (1.145)$$

$$\left. \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] u_3 = \left[a^2(1 + \nu) [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3$$

Pour $\varepsilon = 0$ qui correspond au cas limite du modèle de membrane, on retrouve bien évidemment l'expression (1.76) de l'équation réduite du modèle de membrane. Cette équation réduite peut également s'écrire sous la forme :

$$E \left[\frac{\varepsilon^2}{12} \frac{1}{a^2} [a_{11}\partial_1^2 + a_{22}\partial_2^2 + 2a_{12}\partial_1\partial_2]^{(4)} + (1 + \nu) [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \right. \quad (1.146)$$

$$\left. \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] u_3 = \left[(1 + \nu) [a_{22}\partial_1^2 + a_{11}\partial_2^2 - 2a_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3$$

1.6.1 Cas d'une couche le long d'une courbe non caractéristique

L'épaisseur de couche est identique quelle que soit la géométrie de la coque, dans le cas d'une singularité le long d'une courbe non caractéristique. Prenons par exemple une couche dans la direction $y^2 = \text{constante}$. Comme on l'a vu précédemment (section 1.5.1), si cette droite est non caractéristique,

on a forcément $b_{11} \neq 0$. Nous effectuons alors de façon classique une dilatation dans la direction perpendiculaire à la couche :

$$(y^1, y^2) \Rightarrow (z^1, z^2) \text{ tel que } \begin{cases} z^1 = y^1 \\ z^2 = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} y^2 \end{cases} \quad (1.147)$$

Cherchons l'épaisseur de la couche sous la forme $\eta = \varepsilon^\alpha$, α étant une constante positive indéterminée pour l'instant. Avec les nouvelles variables (z^1, z^2) , l'équation (1.145) devient :

$$E \left[\varepsilon^2 \left(\frac{K_f}{\varepsilon^{8\alpha}} \frac{\partial^8}{\partial (z^2)^8} + \dots \right) + K_m \frac{1}{\varepsilon^{4\alpha}} \frac{\partial^4}{\partial (z^2)^4} + \dots \right] u_3 = \quad (1.148)$$

$$\left[(1 + \nu) [a_{11}\partial_1^2 + a_{22}\partial_2^2 + a_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3$$

où $+$... dénotent des termes contenant des ordres de dérivation inférieurs par rapport à z^2 , et où K_f et K_m sont des constantes. A l'intérieur des couches, les termes de flexion et de membrane doivent être de même ordre même pour un faible ε . A l'intérieur des couches on doit donc avoir :

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{8\alpha}} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\varepsilon^{4\alpha}} \right) \quad (1.149)$$

soit :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (1.150)$$

Dans le cas d'une couche le long d'une courbe non caractéristique, l'épaisseur η de la couche est donc de l'ordre de $\eta = \varepsilon^{1/2}$ quelle que soit la géométrie de la surface moyenne S .

1.6.2 Cas d'une couche le long d'une courbe caractéristique

Cas d'une coque parabolique

Dans le cas d'une coque parabolique, les choses sont différentes si la couche se trouve le long d'une courbe caractéristique ou asymptotique, celles-ci étant confondues. Nous étudions ici le cas où la couche se trouve le long d'une courbe caractéristique $y^2 = \text{constante}$. On a alors $b_{11} = 0$. Comme la coque est parabolique, on a $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$, ce qui implique que $b_{12} = 0$. L'équation (1.145) devient alors :

$$E \left[\frac{\varepsilon^2}{12a^2} [a_{11}\partial_1^2 + a_{22}\partial_2^2 + a_{12}\partial_1\partial_2]^{(4)} + (1 + \nu) [b_{22}\partial_1^2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] u_3 = \quad (1.151)$$

$$\left[(1 + \nu) [a_{11}\partial_1^2 + a_{22}\partial_2^2 + a_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3$$

On effectue à nouveau la dilatation (1.147) dans la direction perpendiculaire à la caractéristique $y^2 = \text{constante}$. Avec ces nouvelles variables (z^1, z^2) , le premier membre de l'équation (1.151) devient :

$$E \left[\varepsilon^2 \left(\frac{K_f}{\varepsilon^{8\alpha}} \frac{\partial^8}{\partial (z^2)^8} + \dots \right) + K_m \frac{\partial^4}{\partial (z^1)^4} + \dots \right] u_3^\varepsilon \quad (1.152)$$

Dans ce cas on obtient :

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{8\alpha}} = \mathcal{O}(1) \quad (1.153)$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad (1.154)$$

Ainsi, dans le cas d'une coque parabolique, l'épaisseur d'une couche limite ou interne le long d'une caractéristique est de l'ordre de $\varepsilon^{1/4}$. Elle est donc plus épaisse qu'une couche le long d'une droite non caractéristique lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

Cas d'une coque hyperbolique

On considère cette fois-ci une coque hyperbolique. Si la ligne $y^2 = \text{constante}$ est caractéristique, alors $b_{11} = 0$. Comme la coque est hyperbolique, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$, ce qui implique cette fois-ci que $b_{12} \neq 0$. L'équation (1.145) devient alors :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\varepsilon^2}{12} [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + a^{12}\partial_1\partial_2]^{(4)} + (1+\nu)a^2 [b_{12}\partial_1\partial_2 + b_{22}\partial_1^2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] u_3 = \\ \left[(1+\nu) [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3 \end{aligned} \quad (1.155)$$

En effectuant encore la dilatation (1.147), le premier membre de l'équation (1.155) devient :

$$E \left[\varepsilon^2 \left(\frac{K_f}{\varepsilon^{8\alpha}} \frac{\partial^8}{\partial(z^2)^8} + \dots \right) + K_m \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^4}{\partial(z^1)^2 \partial(z^2)^2} + \dots \right] u_3^\varepsilon \quad (1.156)$$

qui conduit à :

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{8\alpha}} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \right) \quad (1.157)$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad (1.158)$$

Dans le cas d'une coque hyperbolique, l'épaisseur d'une couche interne ou limite le long d'une courbe caractéristique est de l'ordre de $\varepsilon^{1/3}$. Elle est donc plus épaisse qu'une couche le long d'une courbe non caractéristique lorsque $\varepsilon \searrow 0$, mais moins épaisse qu'une couche le long d'une ligne caractéristique dans le cas d'une coque parabolique.

Finalement, on peut résumer les résultats existant sur les épaisseurs de couche η de la façon suivante :

- $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ le long des couches qui ne sont pas caractéristiques et cela pour tous les types de coques (elliptique, parabolique, hyperbolique)
- $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$ le long des caractéristiques doubles, i.e. pour les coques paraboliques
- $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ le long des caractéristiques simples, i.e. pour les coques hyperboliques

Nous verrons dans les chapitres suivants, lors de l'étude numérique précise de l'apparition de ces couches limites ou couches internes lorsque ε tend vers 0, que l'on retrouve précisément les ordres de grandeur d'épaisseurs de couches prédites par la théorie dans les différents cas étudiés.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils élémentaires de géométrie différentielle permettant de formuler correctement le modèle linéaire de coque élastique de Koiter, ainsi que les problèmes de couches limites et couches internes qui apparaissent lorsque l'épaisseur ε tend vers 0. Nous avons ensuite établi une formulation réduite du modèle de Koiter, et du modèle membranaire limite, particulièrement bien adaptée à l'étude des singularités. Cette formulation réduite a permis d'énoncer un certain nombre de résultats assez généraux caractérisant l'ordre des singularités des déplacements résultant d'une discontinuité du chargement. Nous avons également pu retrouver les résultats classiques donnant les épaisseurs de couche suivant la géométrie de la surface moyenne de la coque (elliptique, parabolique, hyperbolique), et l'intersection ou non de la couche avec les courbes caractéristiques de la surface moyenne.

Dans les chapitres suivants, nous approfondirons cette étude des singularités dans le cas des coques paraboliques et elliptiques, non seulement d'un point de vue théorique, mais également avec des simulations numériques basées sur l'adaptation de maillage.

Chapitre 2

Simulation numérique et adaptation de maillage

2.1 Introduction

On se propose dans la suite de cette thèse de mettre en oeuvre des simulations numériques par éléments finis permettant de visualiser précisément les singularités prédites par la théorie dans différents cas de figure. Afin de pouvoir appréhender finement les singularités en déplacements apparaissant lorsque l'épaisseur de la coque devient très faible, il est nécessaire de raffiner de façon importante le maillage à l'intérieur des couches. Or, les couches limites et internes qui apparaissent sont de petite épaisseur (entre $\varepsilon^{1/2}$ et $\varepsilon^{1/4}$) comparativement à leur longueur. L'utilisation d'éléments finis anisotropes à l'intérieur des couches est donc une solution bien adaptée pour raffiner le maillage au voisinage des singularités avec un nombre réduit d'éléments. Un tel maillage sera réalisé de façon adaptative en utilisant le logiciel BAMG (Bidimensional Anisotropic Mesh Generator) développé à l'INRIA couplé avec le logiciel éléments finis MODULEF développé également à l'INRIA. L'utilisation d'éléments finis anisotropes permet également de réduire le phénomène de blocage (ou verrouillage) numérique qui apparaît lorsque l'épaisseur devient très faible.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler les phénomènes de verrouillage numérique existant classiquement en théorie des coques minces élastiques, ainsi que les solutions pour y remédier. Nous présenterons ensuite l'élément fini DKTC, ainsi que la technique de raffinement de maillage (maillage adaptatif) utilisés pour les simulations numériques. Enfin, nous présenterons une nouvelle routine implémentée dans MODULEF permettant de calculer séparément les énergies de membrane et de flexion lors de la déformation des coques. Ces renseignements seront utiles afin de mieux comprendre les phénomènes apparaissant lors de la création de couches limites et internes.

2.2 Le verrouillage numérique et les remèdes existants

Le *phénomène de verrouillage numérique* est rencontré lorsque l'on discrétise par la méthode des éléments finis un problème de structure mince (coques, plaques, poutres), qui dépend d'un petit paramètre ε . Si on fixe le maillage, et que l'on fait tendre l'épaisseur relative ε vers 0, il peut survenir, dans certains cas, un phénomène de blocage ou verrouillage numérique. Dans le cas des coques, ce phénomène est dû à une mauvaise description de l'espace des déplacements inextensionnels G . En effet, lorsque la coque est non-inhibée, les déplacements solutions sont tous dans l'espace G (voir section 1.3.2). Or il arrive que $G \cap V_h = \{0\}$ où V_h est l'espace discrétisé de V . Dans ce cas, le verrouillage est total et la solution tend vers 0 si on fixe le maillage et que l'on fait tendre ε vers 0.

Le verrouillage numérique peut également être vu [7] comme la non uniformité de la convergence du problème discret quand h (le pas du maillage) tend vers 0 par rapport à ε . Autrement dit, les

constantes intervenant dans l'étude de la convergence uniforme du problème discret par rapport à h dépendent de ε , et le problème ne converge pas de la même façon quelle que soit l'épaisseur.

Le verrouillage numérique a été étudié théoriquement et numériquement pour divers types de problèmes : le "shear locking" dans le cas des poutres en flexion avec cisaillement (poutres de Timoshenko [21]), et le "membrane locking" dans le cas d'arches dans le plan [22] ou de coques hyperboliques [25, 82]. Dans les trois cas, la démarche est similaire : on montre que l'espace des solutions ($V_h \cap G$ dans le cas des coques non-inhibées) se réduit à l'élément nul. Ainsi, les éléments finis sont incapables de tenir compte des phénomènes de flexion. Les déplacements résultants sont alors sous-estimés.

Diverses méthodes ont été proposées pour essayer de résoudre les problèmes de verrouillage numérique. Des techniques d'intégration réduite permettent d'éviter ce problème, mais ne sont pas toujours précises car il apparaît souvent des solutions parasites. Celles-ci peuvent parfois être contrôlées par des méthodes de stabilisation.

Une autre possibilité pour réduire le phénomène de verrouillage numérique consiste à utiliser des méthodes d'éléments finis mixtes. La formulation utilisée n'est plus la formulation variationnelle classique du problème, mais une formulation faisant intervenir d'autres inconnues telles que les déformations. Cette méthode fonctionne bien dans le cas de coques non-inhibées (en flexion) mais pose parfois problème dans le cas de coques inhibées.

Les dernières méthodes permettant de réduire le verrouillage, sont les méthodes d'adaptation de maillage. Il en existe principalement trois sortes : les *méthodes-h*, les *méthodes-p* et les *méthodes-hp* décrites à la section 2.4.

2.3 L'élément de coque D.K.T.C. et le problème discret

L'élément D.K.T.C. de MODULEF a été développé par M. Bernadou [15] à partir de l'élément D.K.T. (Discrete Kirchhoff Triangle). Il est basé sur une méthode d'approximation non conforme : l'espace discret V_h n'est pas inclus dans l'espace continu V . Ceci permet d'utiliser des éléments finis plus simples dans lesquels seule la continuité \mathcal{C}^0 est assurée. En effet, une méthode conforme satisfaisant à $V_h \subset V$ nécessite quant à elle une continuité \mathcal{C}^1 (c'est le cas par exemple de l'élément Kanev-Argyris de MODULEF). La non-conformité de l'élément ainsi que la convergence du problème discret vers le problème continu sont démontrées dans [15]. L'utilisation de l'élément D.K.T.C est justifiée par son faible nombre de degrés de liberté (21 par éléments) par rapport à l'élément Kanev-Argyris (51 degrés de liberté). Ceci permet de limiter le nombre total de degrés de liberté lors de l'adaptation de maillage.

2.3.1 L'élément D.K.T.C.

La construction de l'élément D.K.T.C. est basée sur la formulation faible du problème de Naghdi dans lequel on a :

- négligé l'énergie de cisaillement transverse
- introduit des contraintes de type Kirchhoff-Love en un nombre de points finis ce qui permet d'avoir un problème bien posé.

Cet élément constitue donc un certain compromis entre les méthodes d'approximation des modèles de Koiter et de Naghdi. Il s'agit d'une méthode d'approximation non conforme du modèle de Koiter.

L'élément D.K.T. classique utilise 2 espaces différents d'éléments finis suivant les composantes à approximer :

- les composantes u_1 et u_2 des déplacements et β_1, β_2 des rotations sont approchées par un élément fini de type P2-Lagrange. On a donc besoin de 6 noeuds pour ces composantes (les 3 sommets et les 3 milieux des arêtes) avec 4 inconnues pour chacun des 6 noeuds.
- la composante u_3 est approchée par un élément de type P3'-Hermite. L'approximation se fait donc

sur 3 noeuds mais avec 3 inconnues par noeud $(u_3, u_{3,1}, u_{3,2})$.

Cela fait donc au total : $4 \times 6 + 3 \times 3 = 33$ inconnues par élément D.K.T.

On impose ensuite pour l'élément D.K.T.C. 12 contraintes de type Kirchhoff-Love obtenues en négligeant les effets de cisaillement transverse. Celles-ci permettent de relier les déplacements aux rotations suivant $\beta_\alpha = -u_{3,\alpha} - b_\alpha^\lambda u_\lambda$. On a ainsi un problème discret bien posé. Le nombre d'inconnues passe alors à 21 (voir Fig. 2.1) pour l'élément D.K.T.C..

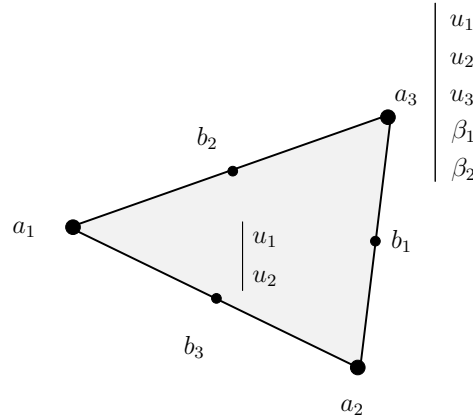


FIG. 2.1 – Élément fini triangulaire avec les différentes inconnues à chaque type de noeud

2.3.2 Discrétisation

La discrétisation du modèle de coque de Koiter s'effectue classiquement à partir de la formulation faible (1.44) et conduit au problème discret :

$$a^S(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h, \vec{v}_h, \underline{\delta}_h) = \sum_K a_K^S(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h, \vec{v}_h, \underline{\delta}_h) = f^S(\vec{v}_h, \underline{\delta}_h) \quad (2.1)$$

où $a^S(.,.)$ est la forme bilinéaire discrétisée de $\varepsilon a_m(.,.) + \varepsilon^3 a_f(.,.)$ et $a_K^S(.,.)$ la forme bilinéaire discrétisée de l'élément K . Le second membre $f^S(.,.)$ représente la forme linéaire des efforts discrétisés. On peut l'écrire matriciellement sous la forme :

$$\sum_K {}^t U_K R_K U_K = \sum_K {}^t F_K U_K \quad (2.2)$$

où U_K désigne le vecteur déplacement inconnu, R_K la matrice de rigidité élémentaire et F_K le vecteur force élémentaire de l'élément K .

D'un point de vue plus technique, nécessaire pour le lecteur qui voudrait rentrer plus à même dans MODULEF, la formulation (2.1) s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \sum_K \left[DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h) \right] [B] \left\{ \sum_{l=1}^L \omega_{l,K} ([LAMBDA] [A_{IJ}]^t [LAMBDA]) (b_{l,K}) \right\} \\ & {}^t [B]^t [DLDKT(\vec{v}_h, \underline{\delta}_h)] = \quad (2.3) \\ & \sum_K \left\{ \sum_{l=1}^L \omega_{l,K} ({}^t P^t [LAMBDA]) (b_{l,K}) \right\}^t [B]^t [DLDKT(\vec{v}_h, \underline{\delta}_h)] \end{aligned}$$

où K représente l'élément considéré et où :

- les constantes $\omega_{l,K}$ sont les poids de l'intégration numérique aux points de Gauss $b_{l,K}$
- la matrice $[B]$ contient les différents coefficients constants issus de l'interpolation utilisée
- le vecteur $[LAMBDA]$ contient la partie variable due à l'interpolation et est donc intégrée
- $[DLDKT]$ est le vecteur contenant les déplacements rangés par variable
- P est le vecteur des efforts surfaciques.

Enfin :

$$[A_{IJ}] = \frac{Ee}{1-\nu^2} \sqrt{a} \left\{ (1-\nu)^t \Lambda_\beta^\alpha \Lambda_\alpha^\beta + \nu^t \Lambda_\alpha^\alpha \Lambda_\beta^\beta + \frac{e^2}{12} \left[(1-\nu)^t N_\beta^\alpha N_\alpha^\beta + \nu^t N_\alpha^\alpha N_\beta^\beta \right] \right\} \quad (2.4)$$

est la matrice de rigidité élémentaire contenant les termes de membrane et de flexion où Λ_α^β et N_α^β sont définis par

$$\gamma_\alpha^\beta(\vec{u}_h) = \Lambda_\alpha^\beta \ ^t [LAMBDA]^t [B]^t [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]$$

$$\rho_\alpha^\beta(\vec{u}_h) = N_\alpha^\beta \ ^t [LAMBDA]^t [B]^t [DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h)]$$

C'est à ce niveau que nous pourrions séparer la matrice (A_{IJ}) en 2 parties contenant chacune les contributions des énergies de membrane et de flexion (voir section 2.5).

Il faut noter, qu'avant d'enregistrer la matrice de rigidité de chaque élément, MODULEF la range par noeud et non plus par inconnue pour faciliter l'assemblage. L'ordre des noeuds est alors le suivant : $a_1, a_2, a_3, b_3, b_1, b_2$.

2.4 Maillage adaptatif avec BAMG

L'adaptation de maillage est une technique de plus en plus utilisée dans les méthodes de résolution par éléments finis. Elle permet d'obtenir de meilleurs résultats en maillant plus finement dans les régions sensibles du problème, et en augmentant par contre la taille des éléments là où ils sont inutilement trop fins. Il y a diverses méthodes d'adaptation de maillages.

Les *méthodes-h* permettent d'adapter le maillage via un critère déterminé, en modifiant la taille des éléments de manière isotrope ou anisotrope (dans une direction privilégiée). Ceci peut être fait localement (seule une partie du maillage est modifiée) ou globalement (le maillage est entièrement reconstruit en respectant certains critères). L'adaptation de maillage se fait en conservant un degré d'interpolation constant. Dans le cas de maillages anisotropes, la condition sur les angles du triangle doit être respectée [4].

Les *méthodes-p* consistent à adapter le degré des polynômes d'interpolation de certains éléments sans modifier la géométrie du maillage, pour obtenir de meilleurs résultats. Ces méthodes sont efficaces dans le cas de géométries simples.

Enfin, les *méthodes-hp* couplent ces deux stratégies en combinant les avantages respectifs des 2 approches.

Dans tous les cas, il est nécessaire d'avoir un critère (gradient de la solution, estimation d'erreur, ...) permettant de détecter les régions où l'adaptation est nécessaire.

Le logiciel BAMG [55], développé à l'INRIA est un mailleur adaptatif anisotrope basé sur une méthode d'adaptation globale et un mailleur classique de type Delaunay. Il permet, à partir d'un maillage initial et des résultats de la simulation éléments finis utilisant ce maillage, de créer un maillage adapté, et ceci avec des éléments éventuellement anisotropes selon le problème étudié. Dans le cas des problèmes de coques, cela s'avère particulièrement adapté à l'étude des couches limites et de leur caractère, non seulement local, mais aussi fortement anisotrope (les déplacements varient beaucoup dans la direction perpendiculaire à la couche limite). Ainsi, un maillage raffiné plus spécifiquement dans la direction perpendiculaire à la couche limite permet d'obtenir de meilleurs résultats tout en utilisant un nombre de degrés de liberté inférieur à celui d'un maillage uniforme, et également inférieur à celui d'un maillage raffiné de manière isotrope. En procédant de la sorte, nous verrons qu'il est possible d'approcher très précisément la forme des singularités des déplacements au voisinage des couches limites et internes.

2.4.1 Le logiciel BAMG

Le logiciel BAMG est basé sur un mailleur utilisant une décomposition de Delaunay. Il s'agit de créer des éléments dont les côtés ont la taille appropriée. Dans le cas d'un maillage isotrope, le côté AB (décrit par la paramétrisation $\gamma(t) = A + t\vec{AB}$, $t \in [0, 1]$) doit satisfaire :

$$l_h(AB) = \int_0^1 \sqrt{\frac{\overrightarrow{tAB} \overrightarrow{tAB}}{h^2(t)}} dt = 1 \quad (2.5)$$

où $h(t)$ désigne la longueur souhaitée du côté AB à la position t . Il faut noter que la valeur de $h(t)$ est déterminée aux noeuds. Ainsi, pour avoir une valeur de h sur l'arête, il est nécessaire d'interpoler h entre les deux noeuds de l'arête AB [16].

On peut encore écrire (2.5) sous la forme :

$$l_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 \sqrt{\overrightarrow{tAB} \mathcal{M}(t) \overrightarrow{tAB}} dt = 1 \quad (2.6)$$

avec :

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2(t)} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Si on veut un maillage anisotrope, la condition pour avoir des éléments de taille adéquate reste $l_{\mathcal{M}}(AB) = 1$ mais avec une métrique anisotrope de la forme :

$$\mathcal{M}(t) = {}^t\mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(t) \quad (2.8)$$

où $\mathcal{R}(t)$ est une matrice de rotation indiquant la direction de l'anisotropie, et où $h_i(t)$ est la longueur souhaitée dans la direction i correspondante.

L'idée principale de l'adaptation de BAMG est "le contrôle de la métrique" (en anglais "metric control") basée sur une estimation des zones où la solution varie le plus. Si on considère que la solution éléments finis η est exacte aux noeuds et si on appelle η_h la solution interpolée linéairement entre les noeuds (interpolation P^1), l'erreur d'interpolation est alors obtenue grâce à un développement de Taylor [3] :

$$|\eta - \eta_h|_{\infty} \leq c_0 h^2 \|\mathcal{H}(\eta)\|_{\infty} \quad (2.9)$$

\mathcal{H} étant la matrice Hessienne de η défini par :

$$\mathcal{H}(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial (y^1)^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^1 \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2 \partial y^1} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial (y^2)^2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Dans (2.9), c_0 désigne une constante, h la taille du maillage, $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini de \mathbb{R}^2 et $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini des matrices. Cette méthode n'est pas basée sur une estimation d'erreur à partir des résultats, mais sur une estimation des zones où la solution varie le plus.

Ensuite, BAMG génère un nouveau maillage en utilisant une nouvelle métrique $\mathcal{M}(t)$ déterminée en fonction de la matrice hessienne de η et de l'erreur relative ϵ sur une arête a_i du maillage actuel [44] :

$$\epsilon = c_0 |{}^t a_i \mathcal{H} a_i| \quad (2.11)$$

Comme \mathcal{H} n'est en général pas défini positif et ne définit pas une métrique, on définit $|\mathcal{H}|$ à partir de la matrice diagonale composée des valeurs absolues des valeurs propres λ_1 et λ_2 de \mathcal{H} :

$$|\mathcal{H}| = \mathcal{R} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \quad (2.12)$$

On considère alors la nouvelle métrique :

$$\mathcal{M}(t) = \frac{c_0}{\epsilon} |\mathcal{H}| \quad (2.13)$$

qui est obtenue en se fixant une erreur ϵ . Celle-ci est anisotrope en général et les directions principales d'anisotropie correspondent aux directions où les dérivées de η varie le plus (ou le moins). BAMG réalise ensuite un nouveau maillage à partir d'une discrétisation en éléments finis triangulaires de type Delaunay en utilisant la nouvelle métrique (2.13), où la longueur des côtés des éléments est toujours l'unité.

Avec cette nouvelle métrique, les longueurs sont modifiées : elle sont augmentées (respectivement diminuées) là où les dérivées secondes de la solution sont importantes (respectivement faibles). En conséquence, le maillage est raffiné (respectivement élargi) dans les zones où les dérivées secondes sont importantes (respectivement faibles).

Remarque 2.4.1 *Dans le cas d'une interpolation linéaire et continue par morceaux (de type P^1), les dérivées secondes sont nulles. La matrice hessienne est alors estimée à l'aide d'une formulation faible ne faisant intervenir que des dérivées premières.*

2.4.2 Couplage BAMG-MODULEF

Le logiciel BAMG que nous avons utilisé est la version v0.68 datant d'avril 2001, développée par Frédéric Hecht. Même si l'INRIA détient les droits de propriété sur le logiciel, celui-ci est du domaine public et peut être téléchargé avec sa documentation à l'adresse :

<http://www-rocq1.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg/fra.htm>

Le couplage entre les logiciels MODULEF et BAMG a été réalisé lors du travail de thèse de Carlos De Souza [33]. Le schéma du couplage est représenté Fig. 2.2.

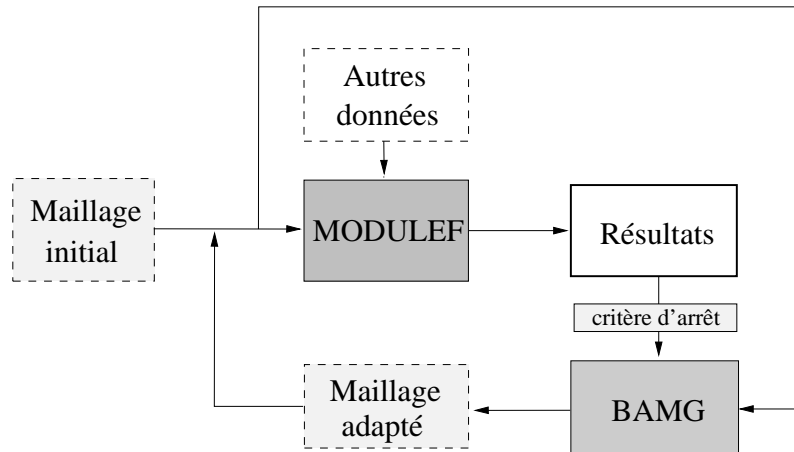


FIG. 2.2 – Schéma du couplage BAMG-MODULEF

Tout d’abord, on lance un premier calcul avec MODULEF en utilisant un maillage grossier approximativement uniforme et isotrope. Ensuite, BAMG utilise les résultats de ce calcul ainsi que le maillage initial pour générer un nouveau maillage adapté. On peut alors lancer le calcul avec ce nouveau maillage et obtenir un deuxième maillage adapté. On répète le processus plusieurs fois jusqu’à avoir un maillage optimisé pour l’erreur choisie.

Pour les problèmes de coques étudiés ici, c’est le déplacement u_3 qui a été choisi comme paramètre scalaire η pour l’adaptation. En effet, nous avons vu que dans les couches limites, u_3 avait les singularités les plus importantes. En outre, les dérivées secondes de u_3 représentent les termes prépondérants des variations de courbure $\rho_{\alpha\beta}$ (les termes prépondérants de $\rho_{\alpha\beta}$ étant $\partial_\alpha\partial_\beta u_3$). Ainsi le maillage est raffiné là où les phénomènes de flexion sont importants. On sait que dans le cas des coques très minces, la flexion est localisée dans les couches limites. Avec la procédure utilisée pour le raffinement du maillage, celui-ci sera donc raffiné au niveau des couches limites.

L’adaptation se termine quand la différence entre deux itérations est faible. Pour estimer cette différence, on projette la solution de l’itération $i - 1$ sur le maillage de l’itération i (option de BAMG) et on compare les résultats des deux itérations à l’aide d’une norme de la forme :

$$dif_i = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |u_3^i(j) - u_3^{i-1}(j)|}{|sup(u_3^i) - inf(u_3^i)|} \times 100 \quad (2.14)$$

où n est le nombre de noeuds du maillage de l’itération i , $u_3^i(j)$ la valeur de u_3 au noeud j du maillage de l’itération i et $u_3^{i-1}(j)$ la valeur de la solution de l’itération $i - 1$ projetée sur le maillage de l’itération i au noeud j . Ainsi, dif_i s’exprime en % et le critère d’arrêt que nous avons choisi est $dif_i < 0.10\%$ sauf mention contraire.

2.5 Calcul des énergies de membrane et de flexion

Nous avons développé une routine permettant de calculer les énergies de membrane et de flexion dans chaque élément. La forme bilinéaire $a(\vec{u}, \vec{u}) = \varepsilon a_m(\vec{u}, \vec{u}) + \varepsilon^3 a_f(\vec{u}, \vec{u})$ de la formulation faible du modèle de Koiter utilisée pour la discrétisation représente l’énergie totale de déformation, contenant l’énergie de membrane et de flexion. Ainsi, à partir de la discrétisation (2.1)-(2.3) faite dans la section 2.3.2, il est possible de calculer l’énergie totale d’un élément en calculant $a_K^S(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h; \vec{u}_h, \underline{\beta}_h)$. Pour cela, on

calcule ${}^tU_K R_K U_K$ avec :

$$U_K = \left[DLDKT(\vec{u}_h, \underline{\beta}_h, \vec{v}_h, \underline{\delta}_h) \right]$$

$$R_K = [B] \left\{ \sum_{l=1}^L \omega_{l,K} ([LAMBDA] [A_{IJ}]^t [LAMBDA]) (b_{l,K}) \right\}^t [B] \quad (2.15)$$

On rappelle que U_K est le vecteur solution et R_K la matrice de rigidité de l'élément K considéré. Pour calculer l'énergie de l'élément K , il faut donc récupérer la matrice de rigidité R_K de l'élément K et les résultats des inconnus aux noeuds de cet élément. Finalement, on calcule l'énergie totale ${}^tU_K R_K U_K$. Un point important est qu'il faut ordonner les résultats de telle sorte que ceux-ci soient rangés tels qu'ils le sont dans MODULEF. Ceci se fait de la façon suivante.

Mise en ordre du vecteur résultat

Pour mettre le vecteur résultat en ordre, il faut récupérer le numéro des noeuds de l'élément K ordonnés comme dans la matrice de rigidité R_K , dans l'ordre suivant : $a_1, a_2, a_3, b_3, b_1, b_2$. Ainsi, nous avons 5 inconnues pour les 3 premiers noeuds et 2 pour les 3 derniers.

Ensuite, on crée le vecteur résultat pour chaque élément de la façon suivante :

$$\left[\underbrace{u_1(a_1), u_2(a_1), u_3(a_1), \beta_1(a_1), \beta_2(a_1))}_{\substack{\text{résultats} \\ \text{au noeud } a_1}}, \underbrace{\dots}_{a_2}, \underbrace{\dots}_{a_3}, \underbrace{u_1(b_3), u_2(b_3)}_{\substack{\text{résultats} \\ \text{au noeud } b_3}}, \underbrace{\dots}_{b_1}, \underbrace{\dots}_{b_2} \right]$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit entre la forme bilinéaire R_K et le vecteur déplacement U_K pour obtenir l'énergie de l'élément K .

Calcul des énergies de membrane et flexion

Le calcul séparé des énergies de membrane et de flexion pour chaque élément s'effectue simplement à partir de la matrice de rigidité R_K correspondant à l'énergie totale. On sépare la matrice de rigidité élémentaire R_K en deux parties, contenant respectivement la matrice de rigidité de membrane R_{Km} et de flexion R_{Kf} . Ces deux matrices de rigidité sont calculées dans la sous-routine *cdaijc* modifiée pour négliger tantôt l'énergie de flexion tantôt l'énergie de membrane. Les deux énergies de membrane E_m et de flexion E_f s'obtiennent ensuite en calculant ${}^tU_K R_{Km} U_K$ et ${}^tU_K R_{Kf} U_K$.

2.6 Validation

Afin de valider l'implémentation numérique effectuée, nous allons comparer la valeur des énergies calculées numériquement à des résultats analytiques connus. Ensuite, nous verrons dans des cas plus complexes où il n'existe pas de solution analytique simple, si le résultat obtenu est conforme à la tendance qualitative prédite par la théorie.

2.6.1 Cas d'une plaque circulaire sous pression

Théorie

Nous considérons d'abord le cas d'une plaque circulaire, de rayon $R = 100 \text{ mm}$, d'épaisseur $h = 3.28 \text{ mm}$, de module d'Young et de coefficient de Poisson de $E = 210\,000 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.33$.

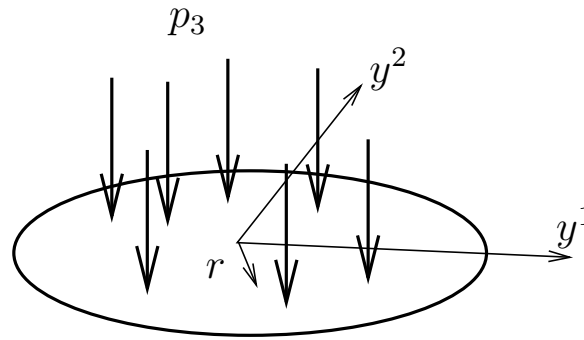


FIG. 2.3 – Schéma de la plaque considérée

Cette plaque supposée encastree sur tout son bord est soumise à une pression normale uniforme $p_3 = -0.025 \text{ MPa}$ (voir Fig. 2.3). Les déflexions u_3 sont solutions du modèle de plaque de Kirchhoff-Love :

$$\begin{cases} D\Delta^2 u_3 = p_3 \text{ dans } S \\ u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial S \end{cases} \quad (2.16)$$

avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ et où S désigne la surface moyenne de la plaque.

La solution théorique est classiquement :

$$u_3(r) = \frac{3}{16} \frac{p}{Eh^3} (1-\nu^2) (R^2 - r^2)^2 \quad (2.17)$$

où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, l'origine étant prise au centre de la plaque.

L'application numérique nous donne au centre un déplacement normal maximum $u_3 = -1.711 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$. Dans ce problème, nous n'avons que de la flexion car les problèmes de membrane et de flexion sont découplés. On a donc $E_m = 0$ et $E_f = E_{tot}$. L'énergie de flexion E_f est alors simplement donnée par :

$$E_f = \int_S p_3 u_3 dS = 2\pi p_3 \int_0^R \alpha (R^2 - r^2)^2 r dr = \frac{\pi}{3} \alpha p_3 R^6 \quad (2.18)$$

où l'on a posé $\alpha = \frac{3p_3}{16Er^3} (1-\nu^2)$.

L'application numérique pour les valeurs des paramètres considérées nous donne $E_f = 44.77 \text{ mJ}$.

Résultats numériques

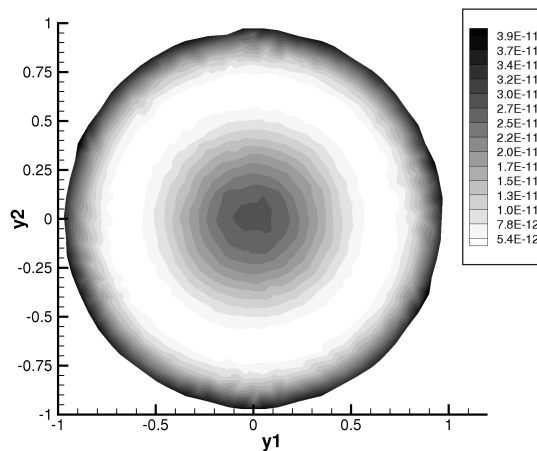
Le problème précédent est maintenant résolu numériquement avec les logiciels MODULEF et BAMG couplés, comme décrit précédemment. De plus, les énergies de membrane et de flexion sont calculées séparément comme indiqué à la section 2.5. On constate que pour un problème simple, les résultats sur les déplacements sont déjà très précis pour 964 éléments seulement. En effet, on trouve $u_3(0) = -1.707 \cdot 10^{-5}$ soit une erreur de 0.2% par rapport à la solution théorique.

Le tableau 2.1 donne les répartitions d'énergie en fonction du nombre d'éléments du maillage (Nel).

Nel	E_f (mJ)	E_m (mJ)	E_{tot} (mJ)
964	45.22	0	45.22
1602	44.92	0	44.92
2762	44.86	0	44.86

TAB. 2.1 – Évolution des énergies avec l'épaisseur relative

On constate que l'énergie de flexion calculée numériquement est très proche de la valeur théorique, et que l'énergie de membrane est exactement nulle. De plus, le résultat dépend peu du nombre d'éléments. Enfin, la répartition de la densité d'énergie (Fig 2.4) est conforme à la théorie. On peut en effet remarquer qu'à l'endroit où u_3 possède un point d'inflexion, l'énergie de déformation de flexion est la plus faible.

FIG. 2.4 – Répartition de la densité surfacique d'énergie de flexion E_{fs}

2.6.2 Cas d'une demi-sphère sous pression uniforme

Résultats analytiques

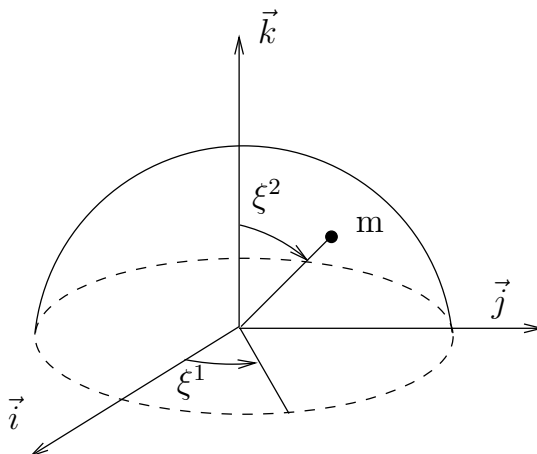


FIG. 2.5 – Demi-sphère et carte considérée

Considérons le domaine $\Omega = \left\{ (\xi^1, \xi^2) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \right\}$ et la demi-sphère définie par la carte (Ω, ψ) où :

$$\psi(\xi^1, \xi^2) = (R \cos(\xi^1) \sin(\xi^2), R \sin(\xi^1) \sin(\xi^2), R \cos \xi^2) \quad (2.19)$$

On considère une calotte sphérique constituée de la demi-sphère $S = \Psi(\Omega)$ comme surface moyenne, et d'épaisseur $\varepsilon \ll R$. Cette coque mince élastique est supposée soumise à une pression uniforme constante $p = f^3$ sur toute la surface intérieure. On considère de plus les conditions aux limites suivantes, afin que la surface S soit inhibée en flexion et que le modèle limite soit membranaire :

– les déplacements u_1 et u_2 sont bloqués sur le bord $\xi^2 = \frac{\pi}{2}$ soit

$$u_1(\xi^2 = \frac{\pi}{2}) = u_2(\xi^2 = \frac{\pi}{2}) = 0$$

– le déplacement u_3 est libre sur le bord $\xi^2 = \frac{\pi}{2}$.

L'absence de condition aux limites sur u_3 (u_3 libre sur le bord) est nécessaire pour limiter le phénomène de couche limite lorsque ε tend vers zéro. En effet, la coque considérée étant bien-inhibée, le modèle de Koiter converge pour de petites épaisseurs vers le modèle de membrane, posé ici dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ainsi, il n'est pas possible d'imposer des conditions aux limites sur u_3 . Ceci est bien évidemment vrai en théorie à la limite lorsque $\varepsilon = 0$. Pour des valeurs petites de ε différentes de zéro, la solution numérique sera donnée par le modèle de Koiter et non par celui de membrane. C'est pour cela que l'on observe de très faibles flexions, mais de la flexion tout de même très proche du bord latéral (voir Figs 2.6(a) et 2.6(b)).

La solution de ce problème de coque sous pression uniforme peut être obtenu facilement par résolution du problème de membrane dont la solution est [39] :

$$u_1 = u_2 = 0 \quad (2.20)$$

$$u_3 = \frac{(1 - \nu)pR^2}{2\varepsilon E} \quad (2.21)$$

Considérons dans ce qui suit un rayon $R = 100 \text{ mm}$, une épaisseur $\varepsilon = 3.14 \text{ mm}$, un chargement $f^3 = 1 \text{ MPa}$ ainsi que les constantes élastiques du matériau $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$. On obtient alors la valeur numérique suivante pour u_3 :

$$u_3 = 5.307 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (2.22)$$

Calcul des énergies

On peut calculer l'énergie totale de déformation qui est égale au travail des efforts extérieurs :

$$E_{tot} = \int_S p u dS \quad (2.23)$$

Dans notre cas, p et u sont constants. On a donc :

$$E_{tot} = p_3 u_3 \int_S dS = p_3 u_3 S \quad (2.24)$$

où $S = 2\pi R^2$ est la surface de la demi-sphère, surface moyenne de la coque. L'application numérique conduit à : $E_{tot} = 5.307 \cdot 10^{-3} \text{ S mJ}$. Nous pouvons noter que cette énergie est quasiment membranaire pour de petites épaisseurs.

Par ailleurs, nous pouvons calculer l'énergie de flexion car il subsiste une très légère flexion pour $\varepsilon \neq 0$. En effet, les composantes suivantes du tenseur de variation de courbure ne sont pas nulles. En effet, d'après la définition (1.40) de $\rho_{\alpha\beta}$, on a :

$$\rho_{11} = -b_1^\lambda b_{\lambda 1} u_3 \quad \text{et} \quad \rho_{22} = -b_2^\lambda b_{\lambda 2} u_3 \quad (2.25)$$

Compte tenu du paramétrage considéré (voir (2.19)), on a :

$$\rho_{11} = -u_3 \sin^2(y^2) \quad \text{et} \quad \rho_{22} = -u_3 \quad (2.26)$$

ou encore en composantes mixtes :

$$\rho_1^1 = \rho_2^2 = -\frac{u_3}{R^2} \quad (2.27)$$

Par la loi de comportement en contrainte plane écrite en composantes mixtes, on obtient :

$$M_1^1 = M_2^2 = \left(\frac{8\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \rho_1^1 + \frac{4\lambda \mu}{3(\lambda + 2\mu)} \rho_2^2 \right) \quad (2.28)$$

L'énergie totale de flexion est alors donnée par :

$$E_f = \frac{\varepsilon^3}{8} \int_S (M_1^1 \rho_1^1 + M_2^2 \rho_2^2) dS = \frac{E\varepsilon^3}{6(1-\nu)} \left(\frac{u_3^2}{R^4} \right) S \quad (2.29)$$

L'application numérique pour les paramètres physiques choisis nous donne : $E_f = 4.361 \cdot 10^{-7} S \text{ mJ}$. Ainsi, l'énergie de flexion est bien très inférieure à l'énergie de membrane (de l'ordre de 10^{-4} fois) mais non nulle exactement pour $\varepsilon > 0$.

On obtient finalement les densités surfaciques d'énergie en divisant E_m et E_f par S soit $E_{ms} = 5.307 \cdot 10^{-3} \text{ mJ/mm}^2$ et $E_{fs} = 4.361 \cdot 10^{-7} \text{ mJ/mm}^2$.

Résultats numériques

Les simulations numériques sont effectuées avec une carte différente de (2.19) car la carte utilisée pour le calcul analytique présente un point singulier (le sommet de la demi-sphère).

Considérons donc le domaine $\Omega = \left\{ (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2, (y^1)^2 + (y^2)^2 \leq R^2 \right\}$ et la demi-sphère S définie par la carte (Ω, Φ) où :

$$\Phi(y^1, y^2) = \left(y^1, y^2, \sqrt{R^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2} \right) \quad (2.30)$$

Pour les simulations numériques, nous serons obligés d'enlever le bord de S où les dérivées de Φ pour $(y^1)^2 + (y^2)^2 = R^2$ ne sont pas définies. Cependant, cela ne change pas les valeurs numériques des densités surfaciques d'énergie. Les valeurs numériques des énergies de membrane et de flexion totales obtenues sont respectivement $E_m = 286.3 \text{ mJ}$ et $E_f = 0.02354 \text{ mJ}$.

Les résultats obtenus numériquement pour les déplacements sont très proches de la théorie. Ils sont compris entre $5.305 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ et $5.308 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ sur tout le domaine, les faibles erreurs se concentrant sur le bord. Cela nous donne une erreur relative maximale de 0.38% par rapport à la valeur théorique.

Nous calculons enfin les densités surfaciques d'énergie de membrane et de flexion de chaque élément que nous comparons aux valeurs théoriques dans le tableau 2.2 en fonction du nombre d'éléments (Nel).

Nel	E_{ms} (mJ/mm ²)	E_{fs} (mJ/mm ²)
1631	$5.325 \cdot 10^{-3}$	$4.375 \cdot 10^{-7}$
2795	$5.317 \cdot 10^{-3}$	$4.369 \cdot 10^{-7}$
4725	$5.313 \cdot 10^{-3}$	$4.366 \cdot 10^{-7}$
valeur théorique	$5.307 \cdot 10^{-3}$	$4.361 \cdot 10^{-7}$

TAB. 2.2 – Comparaison des énergies surfaciques moyennes numériques et théoriques

Les densités d'énergie E_{ms} et E_{fs} obtenues numériquement sont conformes aux valeurs prédites par la théorie. À mesure que l'on augmente le nombre d'éléments, leur valeur converge vers la valeur théorique.

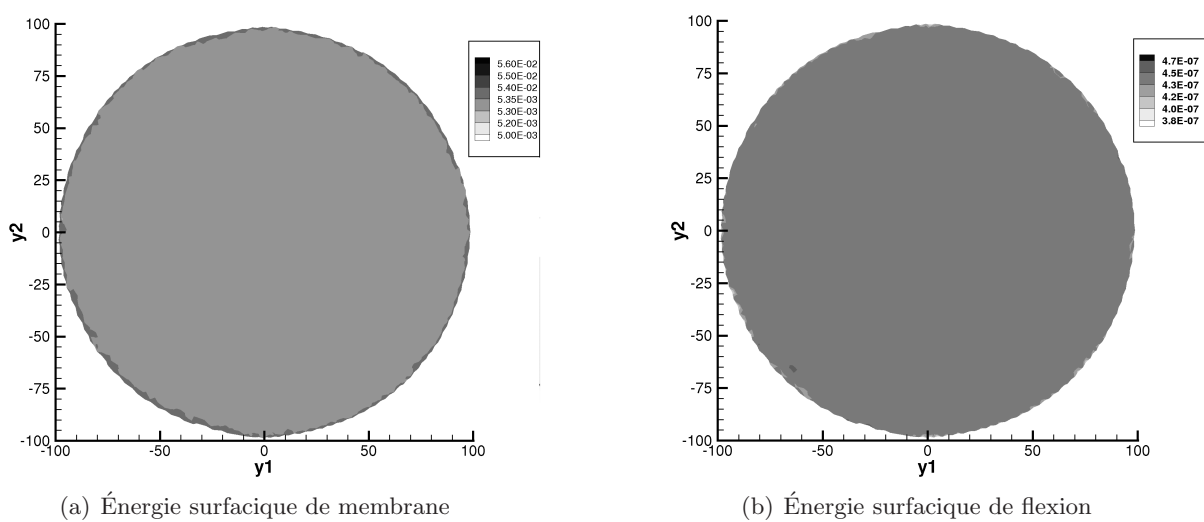


FIG. 2.6 – Répartition des énergies surfaciques pour 4725 éléments

Pour finir, la répartition des énergies surfaciques de membrane et de flexion sont représentées sur les Figs. 2.6(a) et 2.6(b). Les valeurs sont quasiment constantes sur tout le domaine. Il y a juste de très faibles différences au niveau du bord de la demi-sphère à cause de la présence de la couche limite.

Cet exemple, ainsi que le précédent, permettent de valider la nouvelle routine de calcul des énergies implémentée dans MODULEF.

2.7 Application au cas parabolique

Maintenant que nous avons validé la procédure de calcul des énergies de membrane et de flexion (totales et surfaciques) sur des exemples où une solution analytique est connue, nous proposons un cas un peu plus complexe de coque parabolique inhibée où seule une étude qualitative sera possible. Il s'agit d'un demi-cylindre de révolution de longueur 100 mm (suivant l'axe y^1) et de rayon 25 mm, fixé sur tout son pourtour. On applique un effort constant $f^3 = 10 \text{ } \varepsilon \text{ MPa}$ sur tout le domaine, proportionnel à l'épaisseur relative.

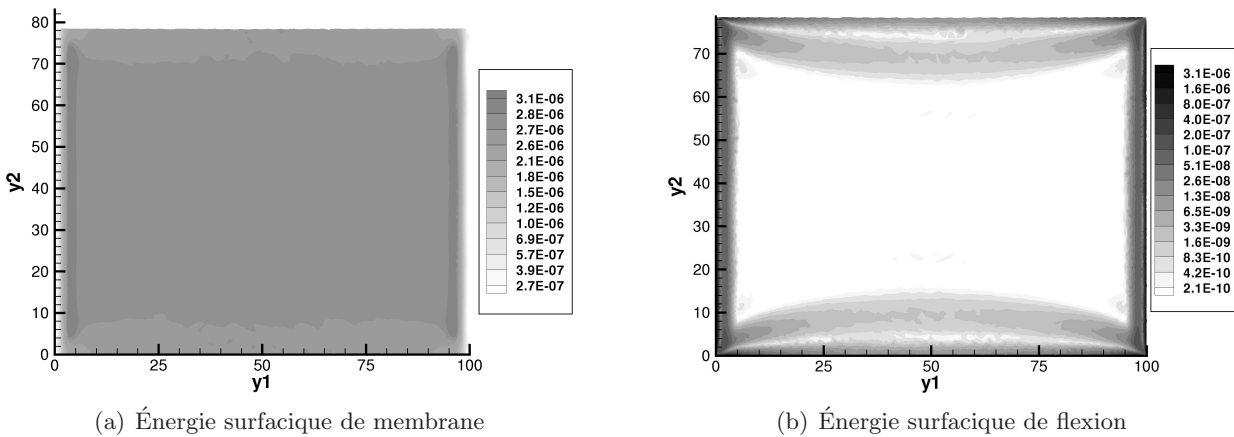
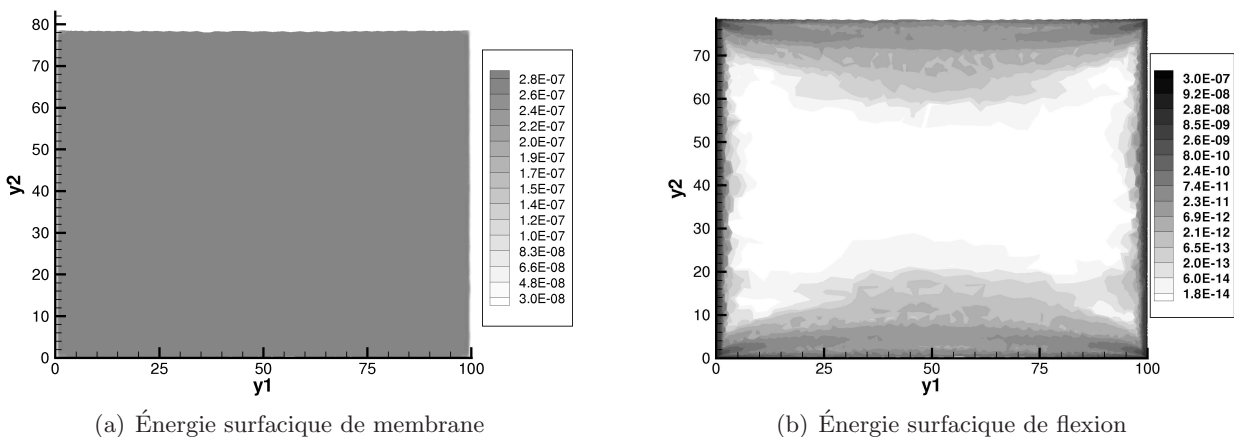
L'évolution des énergies de membrane et de flexion est donnée dans le tableau 2.3 après résolution numérique avec MODULEF et BAMG.

ε	E_f (mJ)	E_m (mJ)
10^{-3}	$1.4248 \cdot 10^{-4}$	$2.0636 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$4.1921 \cdot 10^{-6}$	$2.1094 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$1.1541 \cdot 10^{-7}$	$2.1224 \cdot 10^{-4}$

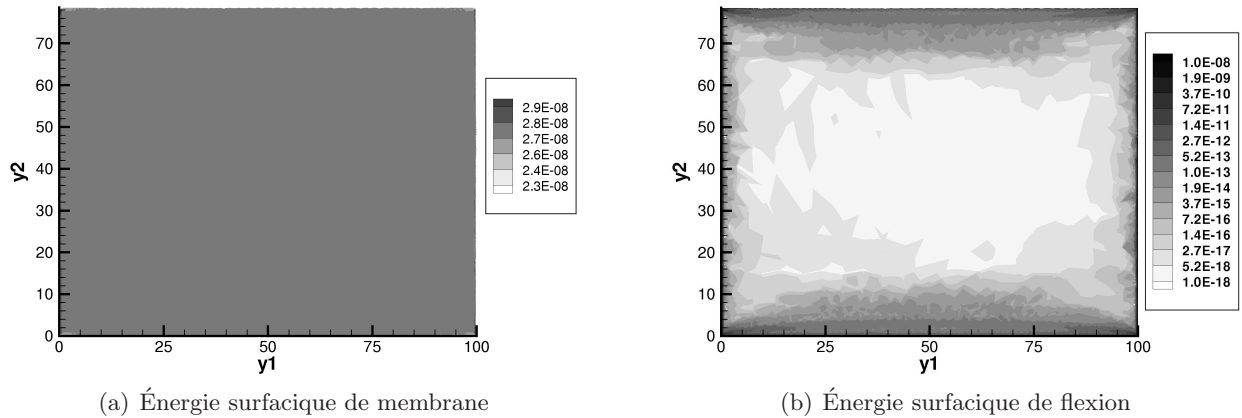
TAB. 2.3 – Évolution des énergies avec l'épaisseur relative

On voit que l'énergie membranaire totale évolue proportionnellement à ε , comme prédit par la théorie. L'énergie totale de flexion quant à elle diminue plus vite et représente une part de plus en plus négligeable par rapport à l'énergie totale (0.7% pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et 0.06% pour $\varepsilon = 10^{-5}$).

Regardons maintenant la répartition des énergies pour 3 épaisseurs différentes.

FIG. 2.7 – Répartition des énergies surfaciques pour $\varepsilon = 10^{-3}$ FIG. 2.8 – Répartition des énergies surfaciques pour $\varepsilon = 10^{-4}$

On observe que dans les 3 cas l'énergie de membrane est assez uniforme, un peu plus faible sur les bords. L'énergie de flexion est très faible au centre de la coque et n'est quasiment présente que dans les couches limites qui sont elles-même de plus en plus étroites quand l'épaisseur relative diminue. Ces résultats sont bien conformes à la théorie.

FIG. 2.9 – Répartition des énergies surfaciques pour $\varepsilon = 10^{-5}$

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les logiciels de simulation numérique qui seront utilisés dans la suite pour étudier précisément les singularités en théorie des coques. Il s'agit du logiciel d'éléments finis MODULEF couplé avec le maillage adaptatif anisotrope BAMG, basés respectivement sur des éléments finis de coques non conformes D.K.T.C., et sur une adaptation de maillage raffinant de manière anisotrope dans les zones de forte flexion, en particulier à l'intérieur et au voisinage des couches limites et internes. D'autre part, nous avons présenté également une nouvelle routine implémentée dans MODULEF qui permet de calculer séparément les énergies de membrane et de flexion. Celle-ci a été validée en comparant les résultats numériques à des solutions analytiques existantes.

Chapitre 3

Étude des singularités dans le cas des coques paraboliques inhibées

3.1 Introduction

Dans le chapitre 1, nous avons développé une étude générale des singularités en théorie des coques élastiques linéaires, basée sur une réduction du système membranaire couplé en une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir qu'un seul déplacement inconnu. Cette étude basée sur l'analyse microlocale, revenait à supposer, au moins localement, que la géométrie (1^{ère} forme fondamentale, tenseur des courbures) était constante.

Dans le cas des surfaces paraboliques étudiées ici, nous allons voir qu'il est possible d'intégrer directement les équations du système membranaire, qui se découpent en se plaçant dans un système de coordonnées bien choisi, celui des courbures principales¹. On détermine ainsi, sans aucune hypothèse sur la géométrie, les singularités des déplacements résultant d'une singularité du chargement normal f^3 qui produit les singularités les plus importantes.

On retrouve de cette façon les résultats du chapitre 1. En particulier, les résultats sont de nature très différente selon que la singularité du chargement est présente ou non le long d'une courbe caractéristique. En effet, dans le premier cas, les déplacements sont non seulement plus singuliers (respectivement de 2, 3 et 4 ordres pour u_1, u_2, u_3 pour une singularité de f^3), mais en plus les singularités se propagent le long de cette caractéristique. Par contre, si la singularité du chargement se trouve sur une ligne non-caractéristique, les singularités des déplacements restent confinées autour de la singularité du chargement. Elles sont, de plus, moins singulières que dans le cas précédent.

D'autre part, suivant le cas, les couches internes qui apparaissent au voisinage des singularités n'ont pas la même épaisseur. Elle est de l'ordre de $\varepsilon^{1/4}$ dans le cas d'une singularité le long d'une ligne caractéristique et de l'ordre de $\varepsilon^{1/2}$ sinon.

Dans ce chapitre, après une étude théorique complète des singularités par intégration directe du système membranaire, nous particulariserons les résultats dans le cas d'une coque cylindrique (demi-cylindre de révolution). Nous comparerons ensuite les résultats obtenus par des simulations numériques² pour de très petites épaisseurs, à ceux fournis par la théorie (ordre des singularités des déplacements, forme des déplacements, épaisseur des couches . . .). Nous verrons que la technique de maillage adaptatif anisotrope est particulièrement bien adaptée pour appréhender précisément les différentes singularités présentes avec un minimum de degrés de liberté. Sans la technique de maillage adaptatif, les erreurs commises à l'intérieur des couches seraient très importantes. Dans un second temps, nous présenterons

¹On peut faire de même dans le cas des coques hyperboliques en se plaçant dans le système de coordonnées des courbes asymptotiques. Le lecteur pourra se référer à [33, 59] pour plus de détails.

²En utilisant les logiciels MODULEF et BAMG couplés comme décrit au chapitre 2

des résultats numériques obtenus dans des cas plus complexes, soit de chargement singulier le long d'un bord (libre ou encasté), soit de domaine de définition de la surface moyenne plus complexe.

3.2 Propagation d'une singularité dans le cas parabolique

Dans cette partie nous allons montrer, par intégration du système membranaire, que les singularités des déplacements sont de nature différente selon que le chargement est singulier ou non le long d'une ligne caractéristique. Considérons une coque parabolique et plaçons-nous dans le système de coordonnées des courbures principales, où $y^2 = cste$ correspond aux lignes asymptotiques (car une des courbures principales est nulle). Dans ce système de coordonnées, nous avons alors $b_{11} = b_{12} = 0$ et $b_{22} = b_{22}(y^1, y^2)$ est différent de zéro. Le système membranaire (1.60) s'écrit alors :

$$\begin{cases} D_1 T^{11} + D_2 T^{12} = 0 \\ D_2 T^{22} + D_1 T^{12} = 0 \\ -b_{22}(y^1, y^2) T^{22} = f^3 \end{cases} \quad (3.1)$$

où comme précédemment les composantes tangentielles f^1 et f^2 des efforts sont supposées nulles.

Afin d'étudier les singularités et leur propagation, on suppose le chargement normal f^3 de la forme³ :

$$f^3 = \psi(y^1) \varphi(y^2) \quad (3.2)$$

où on considérera soit $\psi(y^1)$, soit $\varphi(y^2)$ singulière suivant les cas étudiés.

Nous avons volontairement limité notre étude au cas des chargements normaux f^3 car ce sont eux qui engendrent les singularités les plus importantes. Essayons alors de déterminer, à partir du chargement f^3 , les singularités les plus importantes des déplacements u_1 , u_2 et u_3 . Pour cela, nous ne gardons que les termes les plus importants par leur ordre de singularité lors de la résolution du système (3.1). Ainsi nous pouvons remplacer les dérivées covariantes par des dérivées simples et le système membranaire devient :

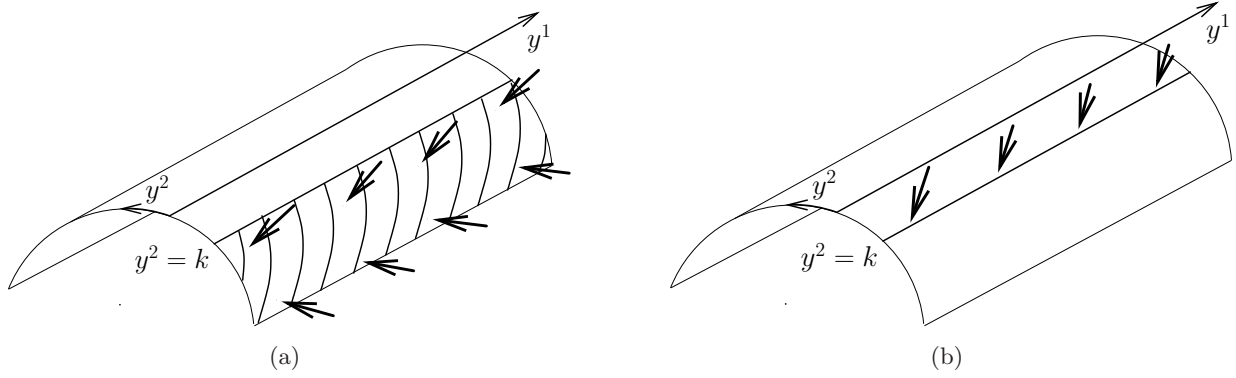
$$\begin{cases} \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{12} = 0 \\ \partial_2 T^{22} + \partial_1 T^{12} = 0 \\ -b_{22}(y^1, y^2) T^{22} = f^3 \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous faisons une étude microlocale de ces singularités au voisinage des lignes $y^1 = q$ ou $y^2 = k$. Ainsi, nous prendrons la valeur des divers coefficients variables des équations aux dérivées partielles en $y^1 = q$ ou $y^2 = k$.

3.2.1 Singularité le long d'une courbe caractéristique

On étudie ici le cas où la fonction $\varphi(y^2)$ est singulière en $y^2 = k$. Le chargement f^3 est donc singulier le long d'une courbe caractéristique du système correspondant à une ligne asymptotique de la surface S .

³Dans l'étude des singularités développées au chapitre 1, on avait considéré un effort $f^3 = \Phi(y^1)S_0(y^2)$ possédant une singularité en $S_0(y^2)$ le long de la ligne $y^2 = 0$. Via des notations légèrement différentes considérées ici, il y a concordance des résultats obtenus dans le cas parabolique.

FIG. 3.1 – Exemples de chargement singulier le long de la ligne $y^2 = k$

Par exemple, les figures 3.1(a) et 3.1(b) représentent le cas de 2 chargements singuliers sur la ligne $y^2 = k$. Dans les deux cas, $f^3 = \psi(y^1) \varphi(y^2)$ avec $\psi(y^1) = \text{constante}$. Par contre, $\varphi(y^2) = H(y^2 - k)$ dans le premier cas et $\varphi(y^2) = \delta(y^2 - k)$ dans le deuxième cas.

Pour effectuer l'étude du terme le plus singulier des déplacements, plaçons-nous au voisinage de la droite $y^2 = k$. On tire immédiatement de la troisième équation du système (3.3) :

$$T^{22} = \tau^{22}(y^1) \varphi(y^2) \quad (3.4)$$

avec

$$\tau^{22}(y^1) = -\frac{1}{b_{22}(y^1, k)} \psi(y^1) \quad (3.5)$$

Par la suite, on ne gardera que les termes les plus singuliers engendrés par f^3 . En remplaçant l'expression de T^{22} dans la deuxième équation de (3.3), on obtient la forme de T^{12} :

$$T^{12} = \tau^{12}(y^1) \varphi'(y^2) + \dots \quad (3.6)$$

avec

$$\frac{d}{dy^1} \tau^{12}(y^1) = -\tau^{22}(y^1) \quad (3.7)$$

Puis en remplaçant l'expression de T^{12} dans la première équation de (3.3), on obtient la forme de T^{11} :

$$T^{11} = \tau^{11}(y^1) \varphi''(y^2) + \dots \quad (3.8)$$

avec

$$\frac{d}{dy^1} \tau^{11}(y^1) = -\tau^{12}(y^1) \quad (3.9)$$

On peut remarquer que la tension la plus singulière est T^{11} , qui est de 2 ordres plus singulière que $\varphi(y^2)$ car $\varphi(y^2)$ apparaît dérivée deux fois dans l'expression (3.8) de T^{11} . Ainsi, on considérera uniquement cette tension pour la suite de la résolution. Utilisant la loi de comportement inverse (1.50), on obtient le système suivant en termes de déplacements :

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 = B_{1111} \tau^{11}(y^1) \varphi''(y^2) + \dots \\ \partial_2 u_2 - b_{22}(y^1, k) u_3 = B_{2211} \tau^{11}(y^1) \varphi''(y^2) + \dots \\ \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = 2B_{1211} \tau^{11}(y^1) \varphi''(y^2) + \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Remarque 3.2.1 *Il arrive souvent que $B_{1211} = B_{1222} = 0$. Dans ce cas, il faut considérer T^{12} (la deuxième tension la plus singulière) dans la troisième équation de (3.10). Cependant, nous verrons que cela n'a pas d'incidence dans le cas d'une singularité le long d'une courbe caractéristique.*

On peut en déduire les déplacements en utilisant respectivement la première équation de (3.10) d'où on tire u_1 , puis la troisième qui nous donne⁴ u_2 et enfin la seconde équation qui nous donne u_3 . On obtient alors les termes les plus singuliers des trois déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(y^1, y^2) = U_1(y^1) \varphi''(y^2) + \dots \\ u_2(y^1, y^2) = U_2(y^1) \varphi^{(3)}(y^2) + \dots \\ u_3(y^1, y^2) = U_3(y^1) \varphi^{(4)}(y^2) + \dots \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1}{dy^1} = B_{1111}\tau^{11}(y^1) \\ \frac{dU_2}{dy^1} = -U_1(y^1) \\ U_3 = \frac{1}{b_{22}}U_2(y^1) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

et où on a utilisé la notation classique $\varphi^{(n)}(y^2) = \frac{d^n \varphi}{d(y^2)^n}(y^2)$.

Pour déterminer les facteurs $\tau^{11}(y^1)$, $\tau^{22}(y^1)$, $\tau^{12}(y^1)$, $U_1(y^1)$, $U_2(y^1)$ et $U_3(y^1)$, nous avons des équations différentielles en y^1 ainsi que les conditions aux limites cinématiques sur les déplacements u_1 et u_2 et sur les tensions membranaires.

Les déplacements u_1 , u_2 et u_3 sont donc respectivement 2, 3 et 4 ordres plus singuliers que f^3 . De plus, les singularités se propagent le long de la ligne caractéristique $y^2 = k$. En effet, les facteurs U_1 , U_2 et U_3 ne s'annulent pas en général lorsque $\psi(y^1)$ s'annule, c'est-à-dire en dehors de la zone chargement. En effet, comme ce sont des primitives de $\psi(y^1)$, ils contiennent des termes réguliers qui sont généralement différents de zéro. En conséquence, une singularité de f^3 en un point de la caractéristique $y^2 = k$ implique une singularité des déplacements sur toute la droite $y^2 = k$ (voir Fig. 3.2).

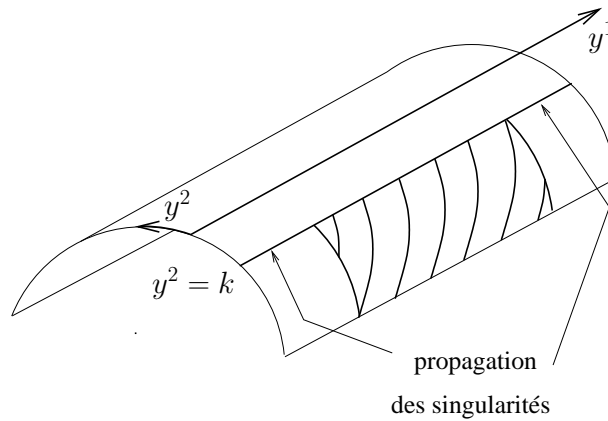


FIG. 3.2 – Propagation des singularités le long de la caractéristique $y^2 = k$

3.2.2 Singularité le long d'une courbe non-caractéristique

Dans cette section, nous considérons le cas où $\psi(y^1)$ (et donc f^3) est singulière sur la ligne $y^1 = q$. Il s'agit donc d'une singularité le long d'une ligne non-caractéristique. On se place cette fois-ci au

⁴Il faut noter que $\partial_2 u_1$ est plus singulier que le second membre, que B_{1112} soit nul ou pas, d'où la fin de la remarque 3.2.1

voisinage de la droite $y^1 = q$. Partant de la même manière de la troisième équation de (3.10), on obtient :

$$T^{22} = \tau^{22}(y^2) \psi(y^1) \quad (3.12)$$

avec

$$\tau^{22}(y^2) = -\frac{1}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \quad (3.13)$$

où la fonction $\varphi(y^2)$ est supposée cette fois régulière par rapport à y^2 .

On voit que la tension T^{22} est la plus singulière car pendant la résolution du système (3.3), la fonction $\psi(y^1)$ est toujours intégrée et jamais dérivée. En général, il n'est pas nécessaire de calculer les autres tensions pour déterminer le terme le plus singulier des déplacements sauf lorsque $B_{1211} = B_{1222} = 0$ (voir remarque 3.2.1). Nous avons alors besoin de déterminer T^{12} pour calculer u_2 .

Nous considérons ici le cas général où B_{1222} est non nul. Reprenant la loi de comportement inverse (1.50), on obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 = -\frac{B_{1122}}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \psi(y^1) + \dots \\ \partial_2 u_2 - b_{22} u_3 = -\frac{B_{2222}}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \psi(y^1) + \dots \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = -\frac{B_{1222}}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \psi(y^1) + \dots \end{cases} \quad (3.14)$$

où ... représente les tensions ayant une singularité plus faible en y^1 . Notons encore que ce système est exact si le coefficient de la loi de comportement B_{1222} n'est pas nul.

Considérant la première équation de (3.14), la singularité en u_1 sera d'un ordre moins élevé que celle de $\psi(y^1)$ et sera de la forme :

$$u_1 = U_1(y^2) \psi^{(-1)}(y^1) + \dots \quad (3.15)$$

avec $\frac{d\psi^{(-1)}}{dy^1} = \psi(y^1)$ et + ... dénotant des termes d'ordre inférieurs.

Utilisant la troisième équation de (3.14), on obtient une expression similaire pour u_2 :

$$u_2 = U_2(y^2) \psi^{(-1)} + \dots \quad (3.16)$$

avec $\frac{d\psi^{(-1)}}{dy^1} = \psi(y^1)$ et + ... dénotant des termes d'ordre inférieurs.

Finalement, avec la seconde équation de (3.14), on obtient u_3 :

$$u_3 = U_3(y^2) \psi(y^1) + \dots \quad (3.17)$$

avec :

$$\begin{cases} U_1(y^2) = -\frac{B_{1122}}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \\ U_2(y^2) = -\frac{2B_{1222}}{b_{22}(q, y^2)} \varphi(y^2) \\ U_3(y^2) = \frac{B_{2222}}{(b_{22}(q, y^2))^2} \varphi(y^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

Remarque 3.2.2 Dans le cas où B_{1222} est nul, u_2 sera moins singulier d'au moins un ordre.

Dans le cas d'une singularité le long d'une courbe non-caractéristique, on voit que la singularité de u_3 est du même ordre que celle de f^3 , alors que u_1 et u_2 sont d'un ordre moins singulier. De plus, les trois déplacements sont non nuls seulement si $\varphi(y^2) \neq 0$. Ainsi les singularités en y^1 existent seulement là où f^3 est singulier. Il n'y a donc pas de propagation de ces singularités suivant les lignes $y^1 = q$ (voir Fig. 3.3). On retrouve bien les résultats sur les ordres des singularités obtenus au résultat 1.5.1 du chapitre 1 à partir de la formulation réduite du modèle de membrane. Dans le cas d'une surface parabolique, il a été possible d'intégrer directement le système membranaire dans le système de coordonnées correspondant aux courbures principales.

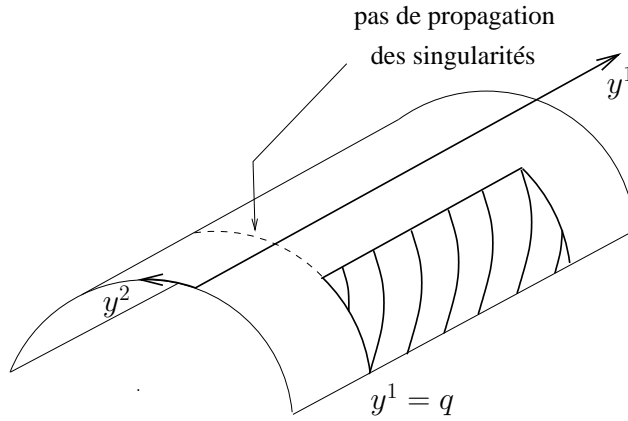


FIG. 3.3 – Non propagation des singularités le long de la droite $y^1 = q$

3.3 Exemple d'un demi-cylindre de révolution

Dans cette section, nous particularisons les calculs précédents dans le cas d'une coque dont la surface moyenne est un demi-cylindre de révolution. Après avoir défini le paramétrage choisi et les propriétés géométriques qui en découlent, nous déduisons les singularités des déplacements en utilisant les résultats de la section précédente.

3.3.1 Caractéristiques géométriques

• Carte

Nous considérons le domaine $\Omega = \left\{ (y^1, y^2) \in [0, L] \times [0, l], L \in \mathbb{R}_+, l \in \mathbb{R}_+, \right\}$ et la surface parabolique S définie par la carte (Ω, ψ) où :

$$\Psi(y^1, y^2) = \left(R \cos \left(\frac{y^2}{R} \right), y^1, R \sin \left(\frac{y^2}{R} \right) \right) \quad (3.19)$$

et où $R \in \mathbb{R}$ est une constante. Nous prenons $l = \pi R$.

La coque considérée correspond à un demi-cylindre de révolution de rayon R et de longueur L . Pour les applications numériques, nous prendrons : $R = 25mm$, $L = 100mm$ et $l = 25\pi$ mm (voir Fig. 3.4). L'épaisseur relative ε est prise comme étant le rapport $\frac{\text{épaisseur}}{L} = \frac{\text{épaisseur}}{100}$.

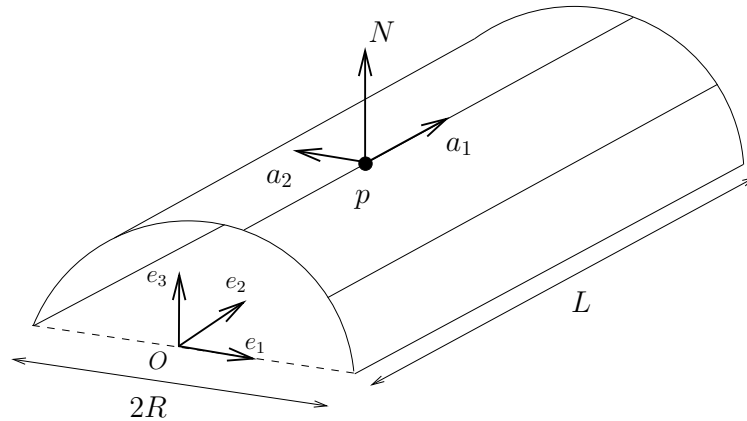


FIG. 3.4 – Surface S

• Bases covariante et contravariante

Le plan tangent à la surface S est défini en tout point $p = \Psi(y^1, y^2)$ de S par les 2 vecteurs tangents $a_\alpha = \partial_\alpha \psi$, soit dans notre cas :

$$a_1 = \left(0, 1, 0\right) \quad \text{et} \quad a_2 = \left(-\sin\left(\frac{y^2}{R}\right), 0, \cos\left(\frac{y^2}{R}\right)\right) \quad (3.20)$$

Le vecteur normal au plan tangent est donc $N = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$ soit :

$$N = \left(-\cos\left(\frac{y^2}{R}\right), 0, -\sin\left(\frac{y^2}{R}\right)\right) \quad (3.21)$$

Ainsi la base covariante (a_1, a_2, N) définie au point $\Psi(y^1, y^2)$ est orthonormée si bien que la base duale définie par $a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha$ est identique à la base covariante. On a $a^\alpha = a_\alpha$. Le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ a donc respectivement pour composantes covariantes et pour composantes contravariantes :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{\alpha\beta})^{-1} = a^{\alpha\beta} \quad (3.22)$$

• Tenseur de courbure et symboles de Christoffel

Le tenseur de courbure s'obtient aisément d'après (1.12) et (1.14). On a, compte tenu de (3.22) :

$$b_{\alpha\beta} = b_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Le fait que $\det(b_{\alpha\beta}) = 0$ prouve que la surface est bien parabolique en tout point de S. Les directions asymptotiques sont celles qui annulent la deuxième forme fondamentale égale ici à $b_{22}(dy^2)^2$. Cela donne :

$$dy^2 = 0 \iff y^2 = \text{constante} \quad (3.24)$$

Les lignes asymptotiques sont donc les droites $y^2 = \text{cste}$ correspondant aux génératrices du cylindre.

Ici, compte tenu du paramétrage choisi, tous les symboles de Christoffel sont nuls : $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = 0$. Ainsi, les dérivées des vecteurs de la base covariante (et de la base duale) s'écrivent respectivement :

$$\partial_\alpha a_\beta = \partial_\alpha a^\beta = b_{\alpha\beta} a_3 = b_\alpha^\beta a_3 \quad (3.25)$$

Les dérivées covariantes sont donc égales aux dérivées ordinaires. On a en particulier :

$$\begin{cases} D_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta \\ D_\lambda T^{\alpha\beta} = \partial_\lambda T^{\alpha\beta} \end{cases} \quad (3.26)$$

• Loi de comportement

En prenant en compte le caractère orthonormé de la base covariante, on déduit de l'expression (1.45) des coefficients de la loi de comportement que l'on a :

$$\begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{22} \\ T^{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

La loi de comportement inverse faisant intervenir les coefficients $B_{\alpha\beta\lambda\mu}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{22} \\ T^{12} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

En particulier, on remarque que l'on a ici $B_{1211} = B_{1222} = 0$. Il faut donc prendre en compte la remarque 3.2.2 pour déterminer les singularités de u_2 dans le cas d'une singularité de f^3 le long d'une courbe non-caractéristique. Le déplacement u_2 sera dans ce cas d'un ordre moins singulier que u_1 , lui-même d'un ordre moins singulier que f^3 .

Remarque 3.3.1 *Il est important de noter que les deux approches théoriques que nous avons développées, dans le chapitre 1 à partir de l'équation réduite du modèle de membrane, et dans ce chapitre par intégration directe, conduisent au même résultat dans le cas particulier rencontré ici. En effet, u_2 est de 2 ordres plus singulier que f^3 car $B_{1211} = 0$, qui provient lui-même du fait que le paramétrage de S correspond aux courbures principales. On est donc dans le cas particulier du paragraphe 1.5.1 lorsque $m_{10} = 0$ et $m_{11} \neq 0$ car $b_2^2 \neq 0$ d'une part, et que $m_{20} \neq 0$ car (1.110) n'est pas vérifiée.*

Il faut juste faire attention au fait que les directions 1 et 2 peuvent être inversées (cela dépend si on étudie le cas d'une singularité le long d'une ligne caractéristique ou non) compte tenu des notations choisies.

3.3.2 Chargement et conditions aux limites

Considérons le problème mécanique où toutes les données sont considérées dans le plan des paramètres (y^1, y^2) . Soit une coque fixée sur les segments OA et CD . On applique chargement normal constant $f^3 = -1$ dans la zone circulaire (hachurée), centrée en $(a, \frac{l}{2})$ et de rayon égal à $\frac{l}{4}$ (voir Fig. 3.5).

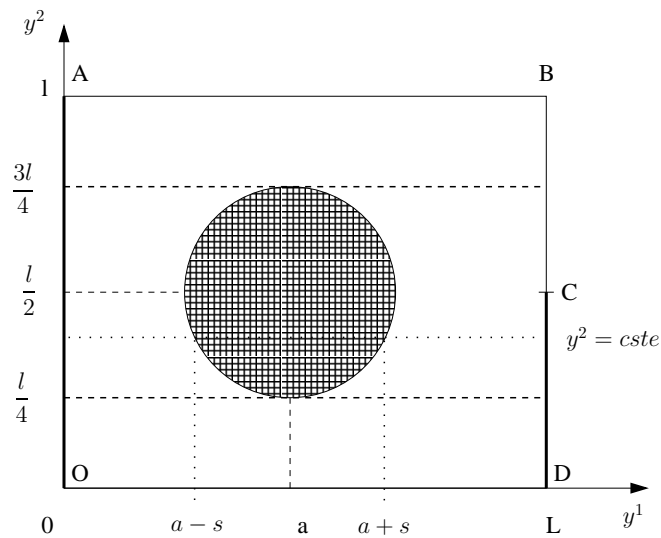


FIG. 3.5 – Système de coordonnées choisi et conditions aux limites

Pour les applications numériques, nous prendrons $a = 50 \text{ mm}$. Cet exemple est intéressant car il présente des singularités dans toutes les directions. Nous verrons cependant, comme prédit par la théorie, que seules les singularités dans la direction tangente aux caractéristiques se propagent.

Expression de la force f^3 au voisinage des lignes $y^2 = \frac{l}{4}$ et $y^2 = \frac{3l}{4}$

Afin de déterminer les singularités des déplacements résultant du chargement, il est nécessaire d'exprimer f^3 sous la forme $f^3 = \psi(y^1)\varphi(y^2)$ au voisinage des lignes $y^2 = \frac{l}{4}$ et $y^2 = \frac{3l}{4}$. C'est l'objet de ce qui suit. Pour cela, on considère la force f^3 comme étant une distribution en y^2 appartenant à $[0, l]$ à valeurs dans $\mathbb{D}'(0, L)_{y^1}$. Cette distribution a pour valeur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } 0 < y^2 < \frac{l}{4}, \quad f^3 = 0 \\ \text{Pour } \frac{l}{4} < y^2 < \frac{3l}{4}, \quad f^3 = H(y^1 - (a - s)) - H(y^1 - (a + s)) \\ \text{Pour } \frac{3l}{4} < y^2 < l, \quad f^3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

où $2s$ est la longueur de la corde reliant les 2 intersections entre le cercle et la droite $y^2 = cste$ (voir Fig. 3.5) et $H(\cdot)$ étant la fonction d'Heavyside définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x - a) = 0 \text{ si } x - a < 0 \\ H(x - a) = 1 \text{ si } x - a \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Dans un premier temps, nous allons expliciter f^3 au voisinage des droites $y^2 = l/4$ et $y^2 = 3l/4$ pour pouvoir étudier les déplacements au voisinage de ces 2 droites. Exprimons tout d'abord s en fonction de y^2 . Les coordonnées (y^1, y^2) des points d'intersection entre le cercle et la droite $y^2 = cste$ à y^2 , fixé appartenant à $[\frac{l}{4}, \frac{3l}{4}]$, vérifient :

$$(y^2 - \frac{l}{2})^2 + (y^1 - a)^2 = \frac{l^2}{16} \quad (3.31)$$

$$\text{soit } y^1 - a = \pm \sqrt{-(y^2)^2 + ly^2 - \frac{3l^2}{16}} = \pm \sqrt{-\left(y^2 - \frac{l}{4}\right) \left(y^2 - \frac{3l}{4}\right)}$$

On obtient finalement :

$$s = \sqrt{-\left(y^2 - \frac{l}{4}\right) \left(y^2 - \frac{3l}{4}\right)} \quad (3.32)$$

• **Étude de la fonction f^3 au voisinage de $y^2 = \frac{l}{4}$**

La figure 3.6 représente les variations de f^3 pour y^2 fixé, $y^2 \in \left[\frac{l}{4}, \frac{3l}{4}\right]$.

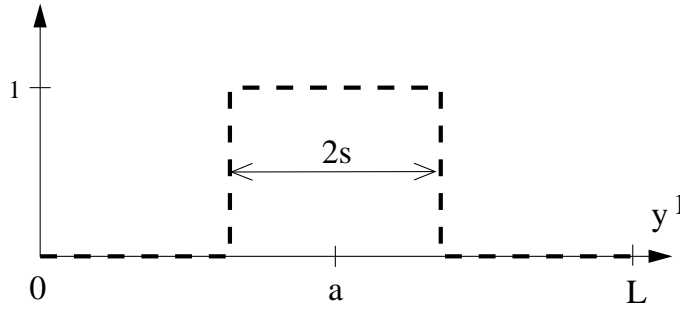


FIG. 3.6 – Chargement f^3 pour $\frac{l}{4} < y^2 < \frac{3l}{4}$

En $y^2 = \frac{l}{4}$, la fonction f^3 a une discontinuité de type Heavyside. La fonction f^3 est donc de la forme :

$$f^3(y^1, y^2) = \left[H(y^1 - (a - s)) - H(y^1 - (a + s)) \right] H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right) \quad (3.33)$$

Exprimons maintenant f^3 au voisinage de $y^2 = \frac{l}{4}$. Pour cela, écrivons f^3 sous la forme suivante :

$$f^3 = (2s) H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right) \left[\frac{H(y^1 - (a - s)) - H(y^1 - (a + s))}{2s} \right] \quad (3.34)$$

Au voisinage de $y^2 = \frac{l}{4}$, on a $s \sim \sqrt{\frac{l}{2} \left(y^2 - \frac{l}{4}\right)}$. Quand $y^2 \rightarrow \frac{l}{4}$, on a $s \rightarrow 0$.

On a donc :

$$\lim_{y^2 \rightarrow \frac{l}{4}} \frac{H(y^1 - (a - s)) - H(y^1 - (a + s))}{2s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H(y^1 - (a - s)) - H(y^1 - (a + s))}{2s} = \delta(y^1 - a) \quad (3.35)$$

Finalement, on obtient la forme de f^3 au voisinage de $y^2 = \frac{l}{4}$:

$$f^3 \simeq 2\sqrt{\frac{l}{2} \left(y^2 - \frac{l}{4}\right)} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right) \delta(y^1 - a) \quad (3.36)$$

- **Étude de la fonction f^3 au voisinage de $y^2 = \frac{3l}{4}$**

En suivant la même démarche que précédemment, on obtient l'expression suivante de f^3 au voisinage de $y^2 = \frac{3l}{4}$:

$$f^3 \simeq 2\sqrt{\frac{l}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right) \delta(y^1 - a) \quad (3.37)$$

Dans les 2 cas, f^3 possède une singularité en $\sqrt{y^2}H(y^2)$ par rapport y^2 . Cette singularité n'est pas classique : elle est intermédiaire entre $y^2H(y^2)$ et $H(y^2)$. La singularité en δ par rapport à y^1 est beaucoup plus importante mais n'apparaît que comme un coefficient de la singularité en y^2 .

3.3.3 Étude des déplacements

Étudions maintenant la manière dont se propagent les singularités sur les lignes caractéristiques $y^2 = \frac{3l}{4}$ et $y^2 = \frac{l}{4}$. Dans les 2 cas, les singularités des tensions et des déplacements vont se propager le long de la caractéristique correspondante et seront du même ordre. Seules leur amplitude et leurs variations seront différentes par rapport à y^1 à cause des conditions aux limites.

- **Étude de la singularité le long de la caractéristique $y^2 = \frac{3l}{4}$**

Reprenons les résultats théoriques de la section 3.2 avec un chargement de la forme (3.2). On a alors $\varphi(y^2) = \sqrt{3l/4 - y^2} H(3l/4 - y^2)$ et $\psi(y^1) = \sqrt{2l} \delta(y^1 - a)$. Dans la suite, on pose $K = \sqrt{2l}/b_{22}(y^1, 3l/4)$. Rappelons que la coque est encastree sur le bord $y^1 = 0$ et libre sur le bord $y^1 = L$. On obtient directement l'expression de τ^{22} d'après (3.5) :

$$\tau^{22}(y^1) = -K\delta(y^1 - a) \quad (3.38)$$

Le bord étant libre en $(y^1, y^2) = (L, 3l/4)$, on doit avoir $\tau^{12}(L) = 0$. En intégrant (3.7), on obtient donc (la constante étant déterminée grâce à la condition aux limites en $y^1 = L$) :

$$\tau^{12}(y^1) = K(H(y^1 - a) - 1) \quad (3.39)$$

Finalement, en utilisant (3.9) et la condition de bord libre en $y^1 = L$ qui donne $\tau^{11}(L) = 0$, on obtient :

$$\tau^{11}(y^1) = -K(y^1 - a) [H(y^1 - a) - 1] \quad (3.40)$$

Les allures des fonctions $\tau^{12}(y^1)$ et $\tau^{11}(y^1)$ sont représentées Figs. 3.7 et 3.8 au voisinage de $y^2 = 3l/4$.

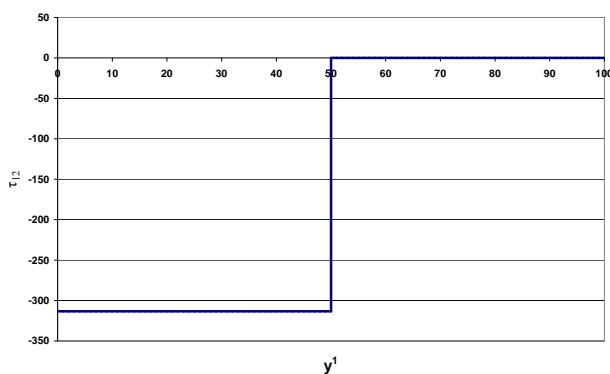


FIG. 3.7 – Forme de $\tau^{12}(y^1)$

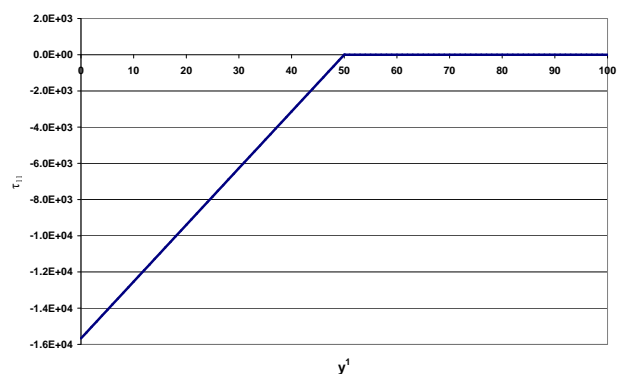


FIG. 3.8 – Forme de $\tau^{11}(y^1)$

Déterminons maintenant les singularités des déplacements. La coque est encastrée en $y^1 = 0$, on a donc :

$$U_1(0) = U_2(0) = 0 \quad (3.41)$$

En considérant (3.11) et en intégrant successivement, on obtient :

$$U_1(y^1) = -\frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^2}{2} [H(y^1 - a) - 1] + \frac{a^2}{2} \right) \quad (3.42)$$

$$U_2(y^1) = \frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^3}{6} [H(y^1 - a) - 1] + \frac{a^2}{2} y^1 + \frac{a^3}{6} \right) \quad (3.43)$$

avec $B_{1111} = \frac{1}{E}$ dans le cas du demi-cylindre considéré ici. Les fonctions $U_1(y^1)$ et $U_2(y^1)$ sont représentées Figs. 3.9 et 3.10 au voisinage de $y^2 = 3l/4$.

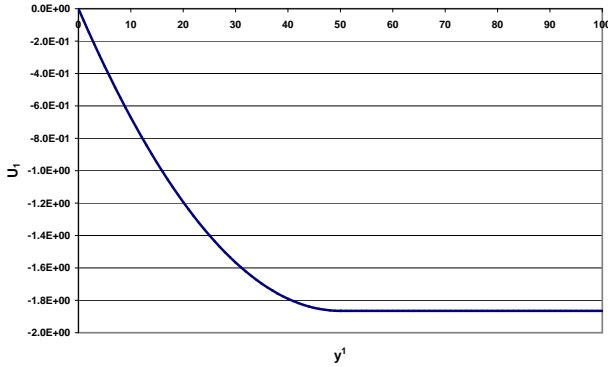


FIG. 3.9 – Forme de U_1

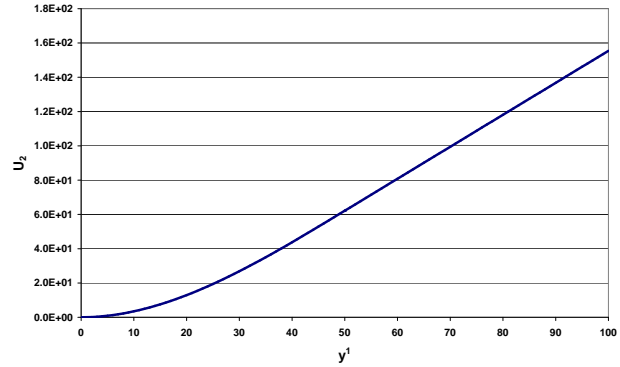


FIG. 3.10 – Forme de U_2

On obtient enfin l'expression de U_3 à partir de (3.11) :

$$U_3(y^1) = \frac{K}{b_{22}E} \left(\frac{(y^1 - a)^3}{6} [H(y^1 - a) - 1] + \frac{a^2}{2} y^1 + \frac{a^3}{6} \right) \quad (3.44)$$

représentée sur la Fig. 3.11.

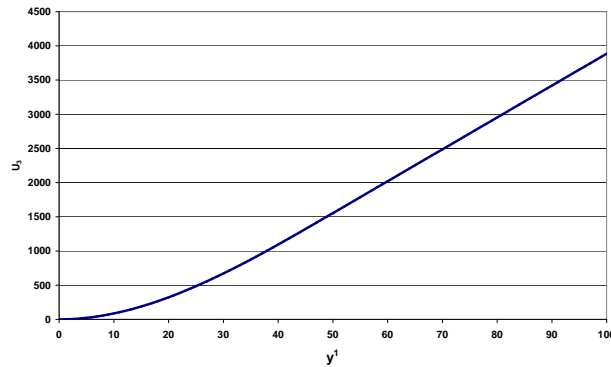


FIG. 3.11 – Forme de U_3

Finalement, la forme des singularités des déplacements est donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = U_1(y^1)\varphi''(y^2) + \dots \\ u_2 = U_2(y^1)\varphi^{(3)}(y^2) + \dots \\ u_3 = U_3(y^1)\varphi^{(4)}(y^2) + \dots \end{cases} \quad (3.45)$$

avec $\varphi(y^2) = \sqrt{\frac{3l}{4} - y^2} H\left(\frac{3l}{4} - y^2\right)$.

• **Étude des singularités le long de la ligne $y^2 = \frac{l}{4}$**

Dans le cas de la singularité de f^3 en $y^2 = l/4$, le chargement normal f^3 est défini par (3.36). On a alors $\varphi(y^2) = \sqrt{y^2 - l/4} H(y^2 - l/4)$ et $\psi(y^1) = \sqrt{2l} \delta(y^1 - a)$. Les équations à résoudre pour déterminer les singularités des déplacements sont les mêmes que précédemment. Seules les conditions aux limites en $y^1 = L$ sont différentes.

La coque étant fixée en $(L, l/4)$, nous n'avons pas de conditions limites ni sur τ^{12} ni sur τ^{11} . Les conditions de fixation s'appliquent seulement sur u_1 et u_2 . Nous cherchons donc directement les expressions de $U_1(y^1)$ et $U_2(y^1)$.

En intégrant les équations du système (3.11), on obtient les expressions suivantes de $U_1(y^1)$ et $U_2(y^1)$:

$$U_1(y^1) = -\frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^2}{2} H(y^1 - a) + K_1 \frac{(y^1)^2}{2} + K_2 y^1 + K_3 \right) \quad (3.46)$$

$$U_2(y^1) = \frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^3}{6} H(y^1 - a) + K_1 \frac{(y^1)^3}{6} + K_2 \frac{(y^1)^2}{2} + K_3 y^1 + K_4 \right) \quad (3.47)$$

qui dépendent de 4 constantes à déterminer.

La coque étant encadrée en $y^1 = 0$ et $y^1 = L$, nous avons bien 4 conditions aux limites :

$$\begin{cases} U_1(0) = U_1(L) = 0 \\ U_2(0) = U_2(L) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

qui permettent de déterminer les 4 constantes. On obtient finalement :

$$U_1(y^1) = -\frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^2}{2} H(y^1 - a) - \frac{(2a + L)(L - a)^2}{2L^3} (y^1)^2 + \frac{a(L - a)^2}{L^2} y^1 \right) \quad (3.49)$$

$$U_2(y^1) = \frac{K}{E} \left(\frac{(y^1 - a)^3}{6} H(y^1 - a) - \frac{(2a + L)(L - a)^2}{6L^3} (y^1)^3 + \frac{a(L - a)^2}{2L^2} (y^1)^2 \right) \quad (3.50)$$

$$U_3(y^1) = \frac{K}{Eb_{22}} \left(\frac{(y^1 - a)^3}{6} H(y^1 - a) - \frac{(2a + L)(L - a)^2}{6L^3} (y^1)^3 + \frac{a(L - a)^2}{2L^2} (y^1)^2 \right) \quad (3.51)$$

Nous avons représenté l'allure des fonctions $U_1(y^1)$, $U_2(y^1)$ et $U_3(y^1)$ sur les Figs. 3.12 à 3.14. Celles-ci diffèrent bien de celles obtenues le long de la courbe caractéristique $y^2 = 3l/4$ à cause des conditions aux limites différentes. Finalement la forme des singularités des déplacements en $y^2 = l/4$ est donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = U_1(y^1)\varphi''(y^2) + \dots \\ u_2 = U_2(y^1)\varphi^{(3)}(y^2) + \dots \\ u_3 = U_3(y^1)\varphi^{(4)}(y^2) + \dots \end{cases} \quad (3.52)$$

avec $\varphi(y^2) = \sqrt{y^2 - \frac{l}{4}} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)$.

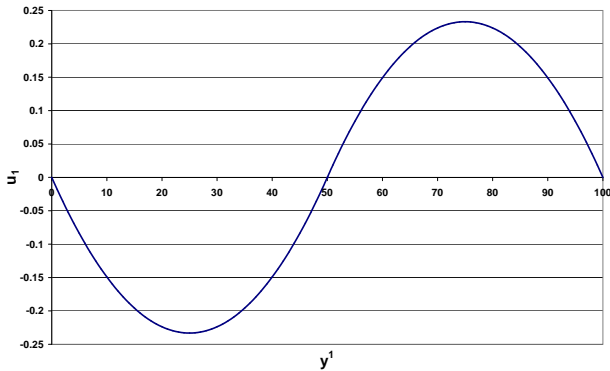


FIG. 3.12 – Forme de U_1

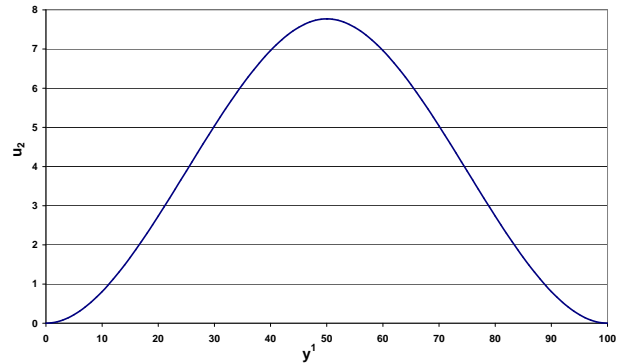


FIG. 3.13 – Forme de U_2

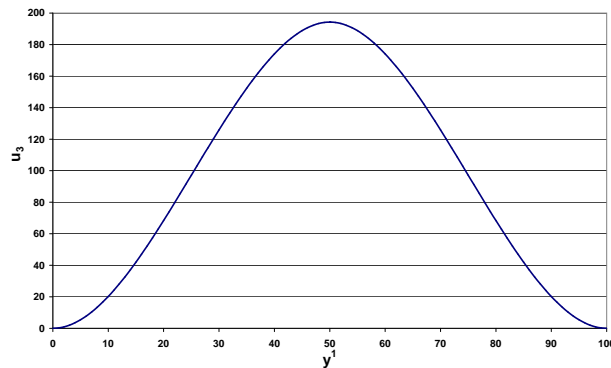


FIG. 3.14 – Forme de U_3

Remarque 3.3.2 Les fonctions $\varphi(y^2)$ et $\varphi'(y^2)$ sont localement intégrables, autrement dit, $(\varphi, \varphi') \in (L^1)^2$. En effet, pour $\varphi(y^2) = \sqrt{\frac{3l}{4} - y^2} H\left(\frac{3l}{4} - y^2\right)$, dans le cas de l'étude de la singularité en $y^2 = \frac{3l}{4}$, on a :

$$\int_{\frac{3l}{4}-\epsilon}^{\frac{3l}{4}+\epsilon} \left| \sqrt{\frac{3l}{4} - y^2} H\left(\frac{3l}{4} - y^2\right) \right| dy^2 < \infty, \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.53)$$

et

$$\int_{\frac{3l}{4}-\epsilon}^{\frac{3l}{4}+\epsilon} \left| -\frac{1}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-1/2} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right) \right| dy^2 < \infty, \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.54)$$

Ce n'est pas le cas des dérivées suivantes de φ . En effet :

$$\varphi''(y^2) = -\frac{1}{4} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{3}{2}} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right) \text{ et } \varphi^{(3)}(y^2) = -\frac{3}{8} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{5}{2}} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)$$

ne sont pas localement intégrables, et ne peuvent être associées à une distribution. Il faut donc considérer les dérivées de φ' au sens des distributions :

$$\varphi''(y^2) = \frac{d}{dy^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right) \right) \quad (3.55)$$

telle que, pour $\theta \in \mathcal{D} \left(\frac{3l}{4} - \epsilon, \frac{3l}{4} + \epsilon \right)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^d}{dy^1} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right) \right), \theta \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} H \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right), \theta' \right\rangle \\ &= \int_{\frac{3l}{4}-\epsilon}^{\frac{3l}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{3l}{4} - y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \theta' dy^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Et ainsi de suite pour les dérivées suivantes. Le problème est le même pour l'étude de la singularité en $y^2 = \frac{l}{4}$, où cette fois nous avons $\varphi(y^2) = \sqrt{y^2 - \frac{l}{4}} H \left(y^2 - \frac{l}{4} \right)$.

3.4 Simulation numérique

Nous réalisons maintenant une simulation numérique du problème précédent à l'aide des logiciels BAMG et MODULEF couplés de façon à avoir un processus de maillage adaptatif calculé par rapport au déplacement u_3 qui est le plus singulier. Nous rappelons les valeurs des constantes utilisées :

- $L = 100 \text{ mm}$
- $l = 25\pi \text{ mm}$
- $R = 25 \text{ mm}$
- $E = 210000 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.3$
- $\hat{f}^3 = 10\epsilon \text{ MPa}$ d'où $f^3 = 10 \text{ MPa}$

Par la suite, tous les résultats sur les déplacements seront exprimés en mm .

Au cours des simulations numériques, nous ferons varier l'épaisseur relative ϵ de 10^{-3} à 10^{-6} afin de mettre en évidence les singularités à l'intérieur des couches.

3.4.1 Adaptation du maillage

Le maillage initial (Fig. 3.15) est un maillage régulier approximativement isotrope. Il décrit juste les différents domaines (notamment la frontière du cercle sur lequel on impose les efforts). Les figures 3.16, 3.17, 3.18 représentent le maillage adapté et raffiné à différentes itérations pour $\varepsilon = 10^{-5}$.

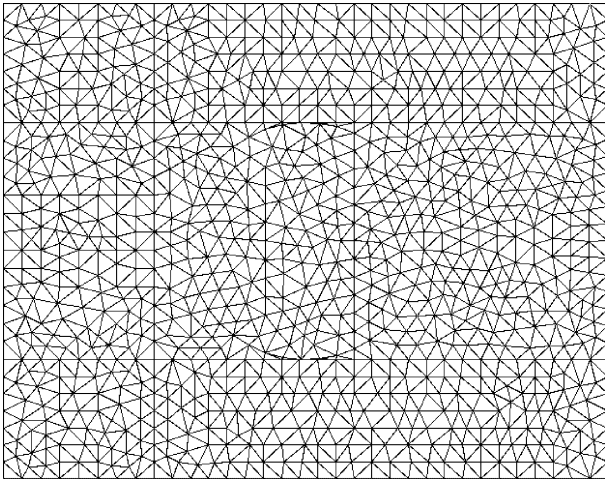


FIG. 3.15 – Maillage initial (11275 DDL)

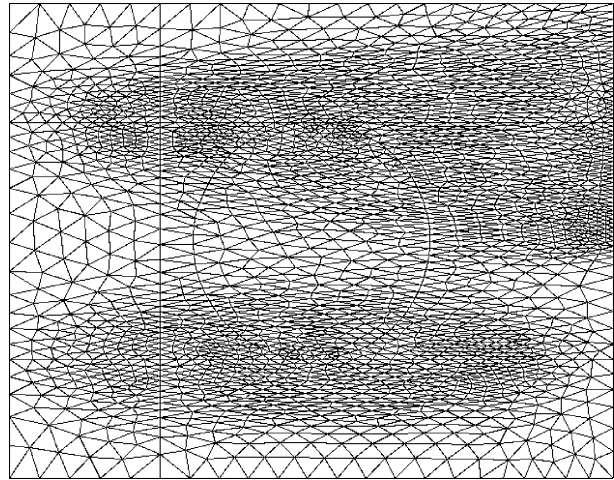


FIG. 3.16 – Itération 2 (23226 DDL)

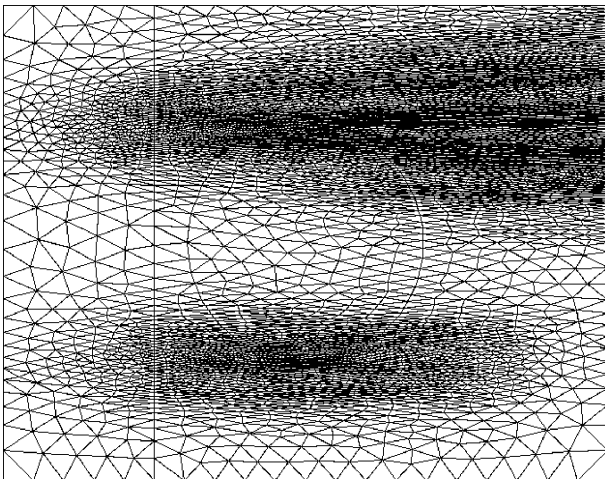


FIG. 3.17 – Itération 5 (66778 DDL)

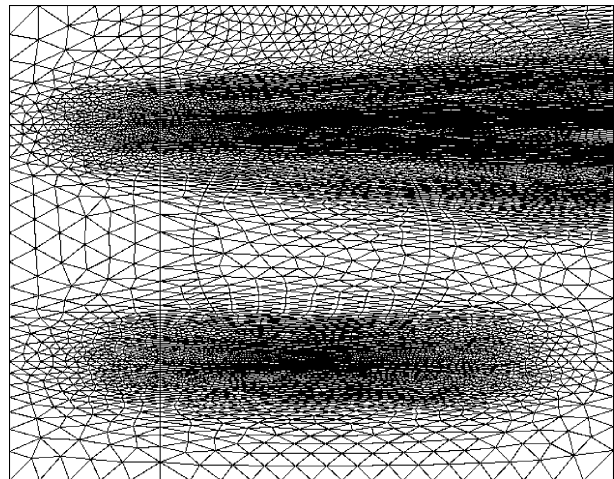


FIG. 3.18 – Itération 7 (66283 DDL)

On peut voir dans le processus de raffinement du maillage que les singularités se propagent bien comme prévu théoriquement le long des lignes $y^2 = \frac{l}{4}$ et $y^2 = \frac{3l}{4}$. Les conditions aux limites en $y^1 = L$ (bord libre pour $y^2 \geq \frac{l}{2}$ et encastré pour $y^2 < \frac{l}{2}$) influent grandement sur le maillage. Dans la partie haute ($y^2 > \frac{l}{2}$), la taille du maillage reste à peu près constante lorsqu'on s'approche du bord libre, tandis que dans la partie basse ($y^2 < \frac{l}{2}$), la taille du maillage regrossit quand on s'approche du bord encastré en $y^1 = L$. Notons enfin que les couches sont plus évasées que dans le cas hyperbolique (voir [33]). En théorie, leur épaisseur est de l'ordre de $\varepsilon^{1/4}$ contre $\varepsilon^{1/3}$ dans le cas hyperbolique. Nous reviendrons sur le calcul des épaisseurs de couche plus tard.

3.4.2 Résultats numériques sur les déplacements

La figure 3.19 montre l'évolution de la forme de u_3 (déplacement le plus singulier) sur la ligne $y^1 = \frac{L}{4}$ au cours des différentes itérations de l'adaptation de maillage. Les calculs sont réalisés pour une épaisseur relative de $\varepsilon = 10^{-5}$. On constate que u_3 converge bien au fur et à mesure de l'adaptation vers la valeur donnée à la 7^{ème} itération (car l'adaptation de maillage converge).

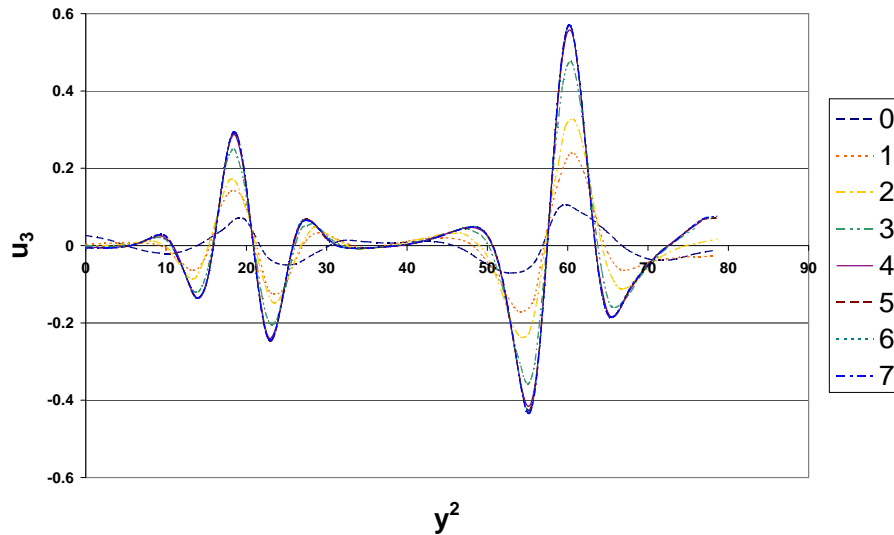


FIG. 3.19 – Convergence de u_3 sur la ligne $y^1 = \frac{L}{4}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$

D'autre part, il y a un rapport 2 entre la valeur maximale de u_3 trouvée à l'itération 2 et celle trouvée à l'itération 8. Ceci prouve l'efficacité du maillage adaptatif qui converge rapidement (en 7 itérations).

Après l'adaptation de maillage et la convergence des résultats, visualisons tout d'abord la déformée 3D, ainsi que le déplacement u_3 sur tout le domaine (Figs. 3.20(a) et 3.20(b)). Nous y observons que seules les singularités dans les directions tangentes aux courbes caractéristiques (les génératrices) se sont propagées. De plus, on constate la dissymétrie des déplacements due aux conditions aux limites.

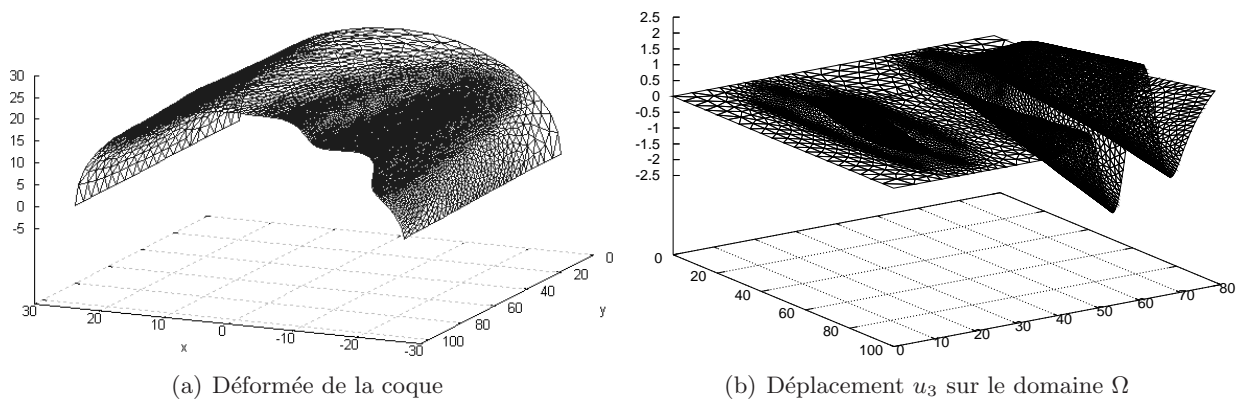
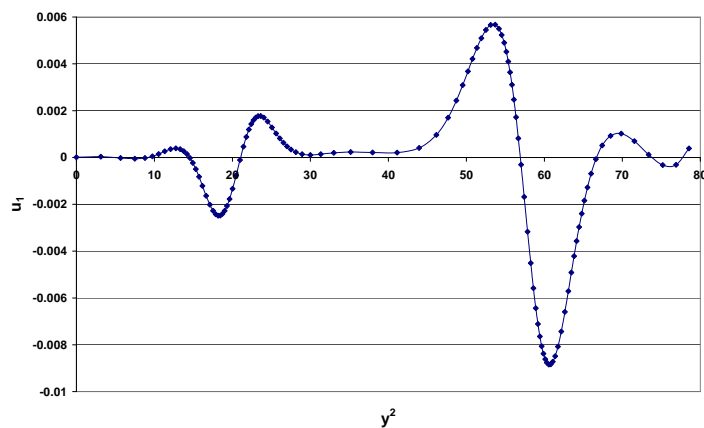
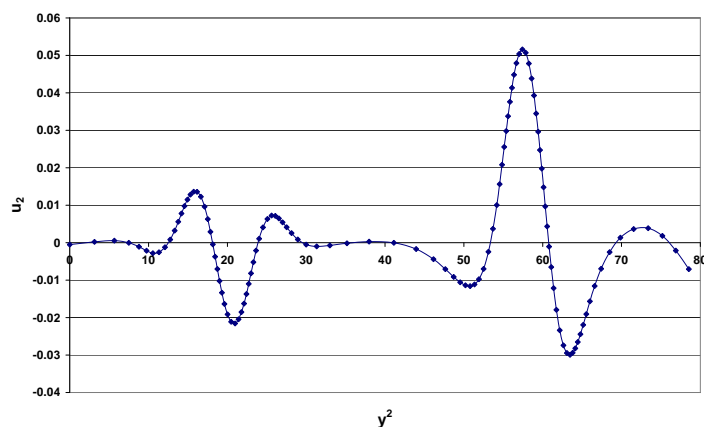
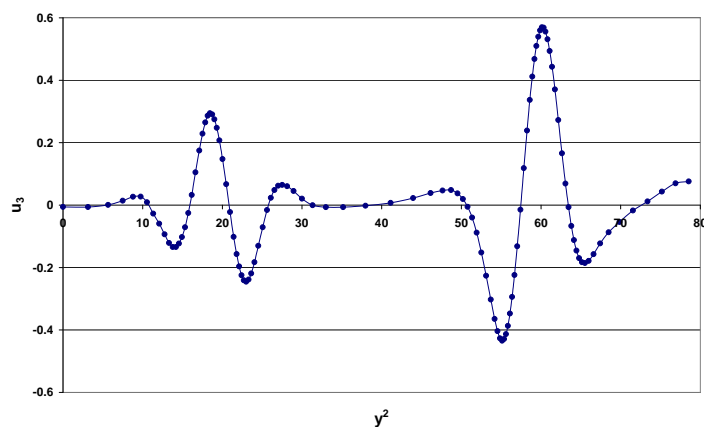


FIG. 3.20 – Résultats pour $\varepsilon = 10^{-5}$

Pour finir, les figures 3.21 à 3.23 représentent les trois déplacements (en mm) obtenus à la septième itération après convergence de l'adaptation, pour $\varepsilon = 10^{-5}$ fixé, sur la ligne $y^1 = L/4$.

FIG. 3.21 – Déplacement u_1 pour $y^1 = L/4$ et $\varepsilon = 10^{-5}$ FIG. 3.22 – Déplacement u_2 pour $y^1 = L/4$ et $\varepsilon = 10^{-5}$ FIG. 3.23 – Déplacement u_3 pour $y^1 = L/4$ et $\varepsilon = 10^{-5}$

Afin de pouvoir interpréter la forme des déplacements en terme de singularité, nous renvoyons le lecteur en annexe B où figurent quelques rappels élémentaires sur la distribution de Dirac et ses dérivées. On constate que la singularité de u_2 est plus importante que celle de u_1 . En effet, le déplacement u_2 possède 4 "bosses" dans chaque couche limite alors que u_1 n'en a que 3. De même, la singularité de

u_3 est plus importante que celle de u_2 (5 "bosses" contre 4). De plus, pour $y^1 = L/4$ fixé, à un facteur près on constate que u_2 est bien la dérivée de u_1 (à chaque extremum de u_1 correspond un zéro de u_2) et de même, u_3 est la dérivée de u_2 . Enfin, même s'il est difficile de déduire exactement l'expression analytique de la singularité à partir de la forme du déplacement, on constate que $u_1(L/4, y^2)$ est bien intermédiaire entre δ et δ' , $u_2(L/4, y^2)$ entre δ' et δ'' , et $u_3(L/4, y^2)$ entre δ'' et δ''' , comme prédit par la théorie au résultat 1.5.1 du paragraphe 1 compte tenu des expressions de $\varphi(y^2)$ sur les 2 caractéristiques étudiées.

3.4.3 Répartitions des énergies

Toujours pour le même exemple, la répartition des densités surfaciques d'énergie de membrane et de flexion (respectivement E_{ms} et E_{fs}) est représentée sur les Figs. 3.24 et 3.25 pour une épaisseur relative $\varepsilon = 10^{-5}$.

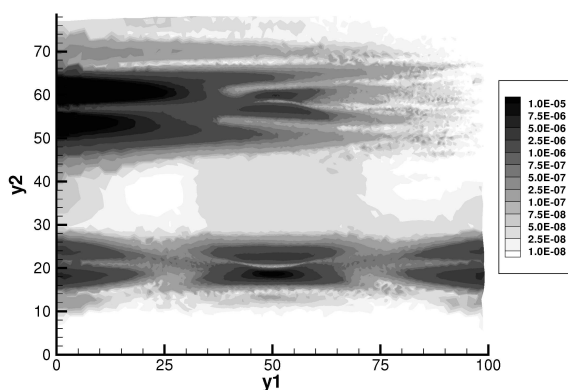


FIG. 3.24 – Répartition de E_{ms} (en mJ/mm^2) pour $\varepsilon = 10^{-5}$

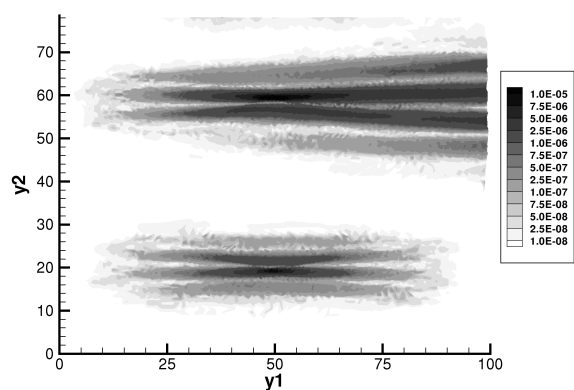


FIG. 3.25 – Répartition de E_{fs} (en mJ/mm^2) pour $\varepsilon = 10^{-5}$

On constate que les 2 énergies sont principalement localisées le long des 2 couches limites en $y^2 = \frac{l}{4}$ et $y^2 = \frac{3l}{4}$ (correspondant à $y^2 \approx 20$ et $y^2 \approx 60$). On peut aussi voir l'influence des conditions limites. Pour $y^2 = \frac{3l}{4}$, il y a plus d'énergie de flexion du côté du bord libre en $y^1 = L$, tandis que sur cette même ligne, l'énergie de membrane se concentre à l'opposé en $y^1 = 0$ où la coque est encastree. En $y^2 = \frac{l}{4}$, les répartitions des 2 énergies est symétrique par rapport à la ligne $y^1 = L/2$ tout comme le sont les conditions aux limites. Les oscillations présentes au niveau des déplacements, notamment sur u_3 , sont observables sur la répartition de E_{fs} . Si on se place en $y^1 = 20$ sur la figure 3.25, on observe sur chaque couche limite 3 zones où E_{fs} est élevée, séparées par 2 zones où E_{fs} est faible. Les 3 zones où E_{fs} est élevée correspondent aux trois sommets principaux de u_3 présents dans les 2 couches limites (voir Fig. 3.23). Les zones où E_{fs} est faible correspondent à des zones où u_3 présente des points d'inflexion donc une énergie de flexion faible.

3.5 Convergence vers le problème limite de membrane

Dans cette partie, nous étudions d'un point de vue numérique, la convergence du modèle de Koiter vers le problème de membrane lorsque ε tend vers 0. Pour cela, nous effectuons des simulations numériques pour différentes valeurs de ε en prenant comme effort $\hat{f}_3 = \varepsilon f^3$ (voir 1.53) ce qui permet d'avoir des déplacements du même ordre de grandeur lorsque ε varie.

3.5.1 Convergence des déplacements vers la solution du problème de membrane

Nous allons étudier ici comment varient les déplacements dans la couche interne quand ε tend vers 0. Nous en étudierons deux aspects :

- l'évolution de l'amplitude des déplacements en fonction de ε en $y^1 = L/4$ fixé.
- l'épaisseur η de la couche interne en $y^2 = \frac{3l}{4}$ qui correspond à une ligne caractéristique.

Les graphes du déplacement u_3 sur la ligne $y^1 = L/4$ pour différentes valeurs ε sont présentés Figs. 3.26 à 3.29. Nous voyons que le maximum de u_3 est de plus en plus élevé au fur et à mesure que ε diminue. Parallèlement, la zone affectée par les déplacements les plus importants correspondant aux singularités est de plus en plus étroite : pour $\varepsilon = 10^{-3}$, des déplacements "importants" sont présents sur toute la coque, mais pour $\varepsilon = 10^{-6}$, ils ne sont plus présents que dans une très petite zone autour des 2 courbes caractéristiques $y^2 = \frac{l}{4}$ et $y^2 = \frac{3l}{4}$. La couche interne et donc les effets de flexion se concentrent autour des 2 courbes caractéristiques quand ε diminue.

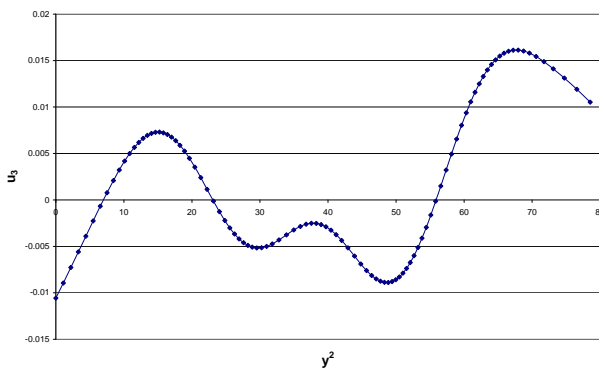


FIG. 3.26 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-3}$

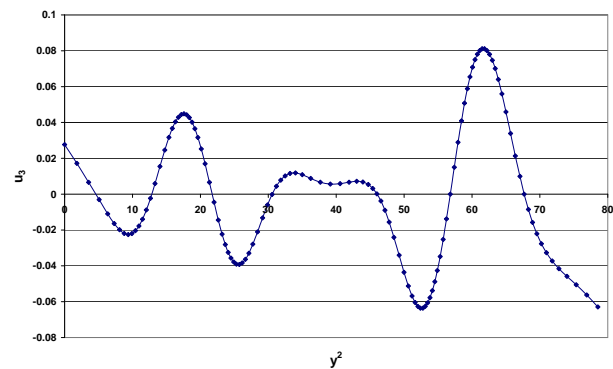


FIG. 3.27 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$

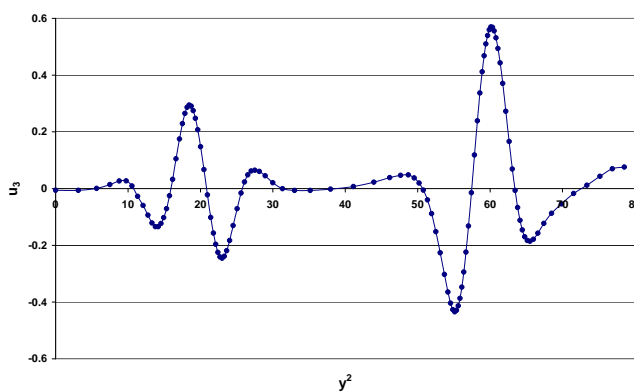


FIG. 3.28 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-5}$

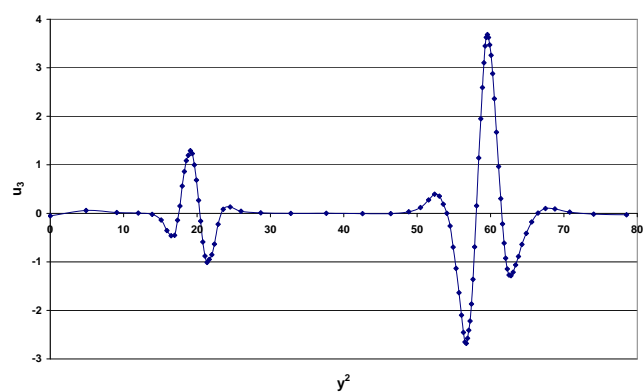
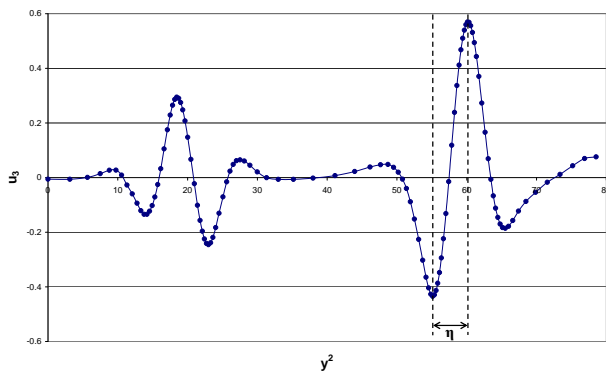
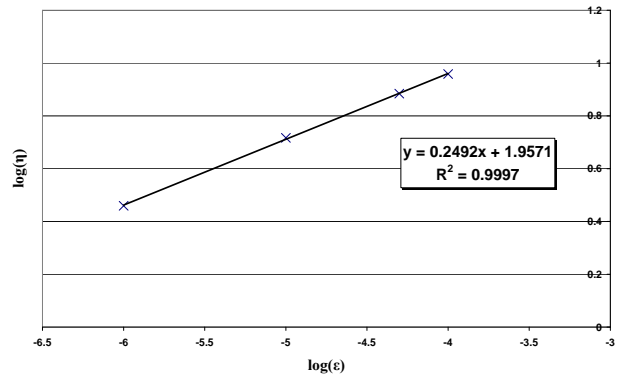


FIG. 3.29 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-6}$

Étudions maintenant l'épaisseur des couches internes. Nous nous intéresserons à celle en $y^2 = \frac{3l}{4}$, les résultats étant similaires en $y^2 = \frac{l}{4}$. Nous définissons l'épaisseur de la couche interne η comme étant la distance entre les 2 principaux sommets de u_3 (Fig. 3.30).

FIG. 3.30 – Définition de η à partir u_3 FIG. 3.31 – $\log \eta$ fonction de $\log \varepsilon$

A partir des résultats des simulations numériques des Figs. 3.26 à 3.29, pour chaque valeur de ε , nous obtenons une valeur de η correspondante. Nous traçons alors $\log(\eta)$ en fonction de $\log(\varepsilon)$, ce qui nous donne quasiment une droite (coefficient de régression linéaire de 0.9997) de pente 0.2492. On en déduit que $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.2492})$ ce qui est très proche du résultat théorique $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.25})$ (voir expression (1.154)).

En utilisant enfin les propriétés sur la famille de singularités des Dirac (voir annexe B), à partir des solutions analytiques (3.45), on en déduit que :

- la singularité de $u_1(L/4, y^2)$ est entre δ et δ' : son amplitude varie comme $\eta^{-\alpha_1}$, avec $1 < \alpha_1 < 2$
- la singularité de $u_2(L/4, y^2)$ est entre δ' et $\delta^{(2)}$: son amplitude varie comme $\eta^{-\alpha_2}$, avec $2 < \alpha_2 < 3$
- la singularité de $u_3(L/4, y^2)$ est entre $\delta^{(2)}$ et $\delta^{(3)}$: son amplitude varie comme $\eta^{-\alpha_3}$, avec $3 < \alpha_3 < 4$

En considérant que $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$ (ce que nous venons de vérifier numériquement), nous avons :

- l'amplitude de $u_1(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-\lambda_1}$, avec $\frac{1}{4} < \lambda_1 < \frac{1}{2}$
- l'amplitude de $u_2(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-\lambda_2}$, avec $\frac{1}{2} < \lambda_2 < \frac{3}{4}$
- l'amplitude de $u_3(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-\lambda_3}$, avec $\frac{3}{4} < \lambda_3 < 1$

Après avoir relevé l'amplitude maximale des trois déplacements à partir des simulations numériques des Figs. 3.26 à 3.29, on trouve (avec un coefficient de régression linéaire $R^2 > 0.9996$) que :

- l'amplitude de $u_1(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-0.3758}$
- l'amplitude de $u_2(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-0.5584}$
- l'amplitude de $u_3(L/4, y^2)$ varie comme $\varepsilon^{-0.8021}$

Les résultats sont tous compris dans les fourchettes prévues théoriquement.

3.5.2 Formation des couches internes et énergies

L'évolution des énergies de membrane et de flexion est un bon indicateur de formation des couches internes et limites. Nous proposons de le vérifier numériquement toujours sur le même exemple. Les

figures 3.32 et 3.33 représentent la proportion de densité d'énergie surfacique de flexion (en %) par rapport à la densité d'énergie totale (membrane et flexion). Comme il y a plusieurs couches (2 couches internes sur les lignes caractéristiques, une autre sur la frontière circulaire du chargement et une couche limite le long du contour de la coque), il est assez difficile d'étudier précisément l'épaisseur des couches. Cependant, on observe bien le phénomène d'amincissement des couches internes quand ε diminue. Pour $\varepsilon = 10^{-5}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, les couches deviennent très fines. On peut encore observer des zones où l'énergie de flexion est prépondérante, alternant avec des zones où elle est faible, correspondant respectivement à des maximums et des points d'inflexion de u_3 .

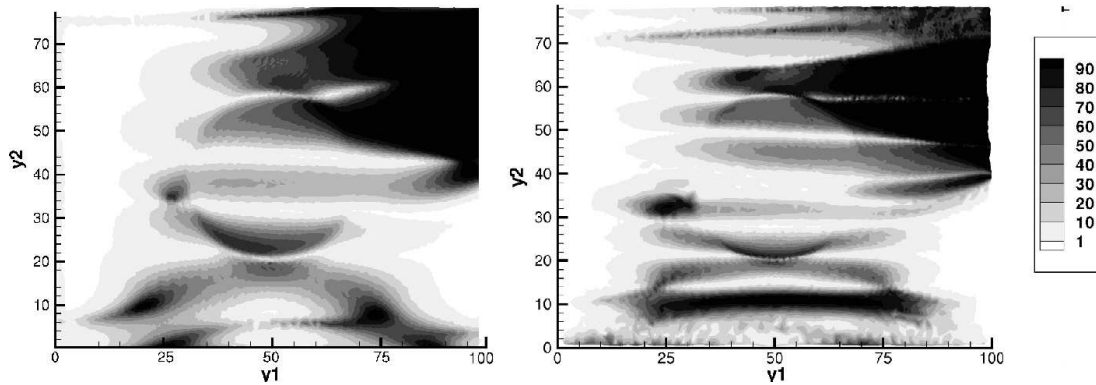


FIG. 3.32 – Evolution du pourcentage de E_{fs} pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et 10^{-4}

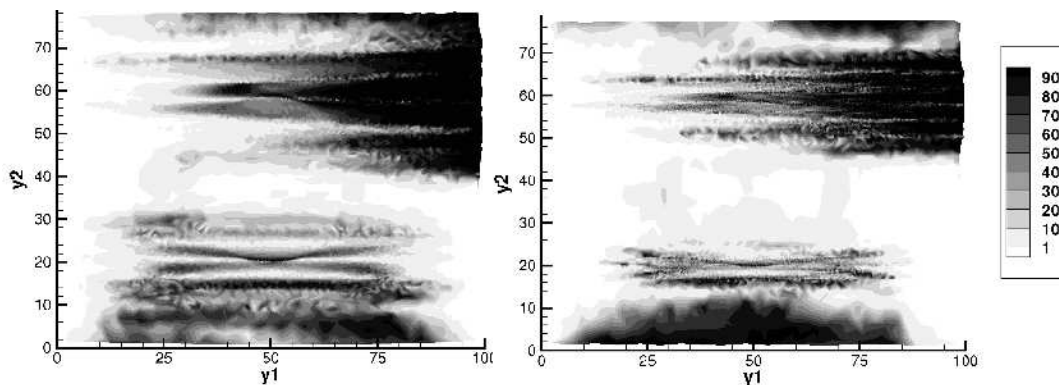


FIG. 3.33 – Evolution du pourcentage de E_{fs} pour $\varepsilon = 10^{-5}$ et 10^{-6}

Ces simulations numériques permettent de visualiser précisément la formation des couches internes, dues à un chargement singulier, le long d'une ligne caractéristique, ici le long des lignes $y^2 = l/4 \approx 20$ et $y^2 = 3l/4 \approx 60$.

Cependant, dans l'exemple que nous venons de traiter, il y a aussi formation de couches internes le long d'autres lignes non-caractéristiques. C'est le cas sur la frontière de la zone de chargement (exceptés aux points $(a, l/4)$ et $(a, 3l/4)$ où une ligne caractéristique est tangente à la frontière). Comme nous l'avons vu d'un point de vue théorique général (résultat 1.5.1 du chapitre 1 et section 3.2.2), les singularités le long des lignes non-caractéristiques sont d'ordre inférieur à celles le long des lignes caractéristiques. Pour cette raison, elles ne sont pas visibles sur les figures 3.32 et 3.33. Afin de mettre en évidence ces couches numériquement, nous allons étudier dans la section suivante un cas particulier où il n'y a pas de singularité le long de lignes caractéristiques, mais uniquement une singularité du chargement sur une ligne non-caractéristique.

3.5.3 Comparaison entre maillages uniformes et adaptés

Dans cette section, nous présentons une comparaison entre maillages uniformes et adaptés afin de mettre en évidence la nécessité (et l'efficacité) des maillages adaptés dans de telles configurations. Le maximum du déplacement normalisé $u_3(\frac{L}{4}, y^2)/u_{3ref}$ est représenté sur les figures 3.34 à 3.36 pour différentes épaisseurs, en fonction du nombre d'éléments. Le déplacement de référence u_{3ref} est le maximum obtenu à la dernière itération du processus d'adaptation même s'il n'est pas forcément la solution exacte.

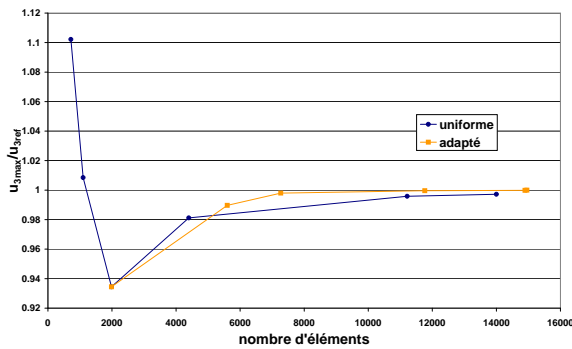


FIG. 3.34 – Maximum du déplacement normalisé $u_3(\frac{L}{4}, y^2)/u_{3ref}$ en fonction du nombre d'éléments pour $\varepsilon = 10^{-3}$

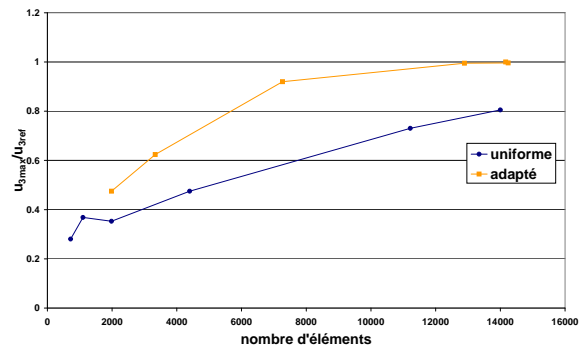


FIG. 3.35 – Maximum du déplacement normalisé $u_3(\frac{L}{4}, y^2)/u_{3ref}$ en fonction du nombre d'éléments pour $\varepsilon = 10^{-4}$

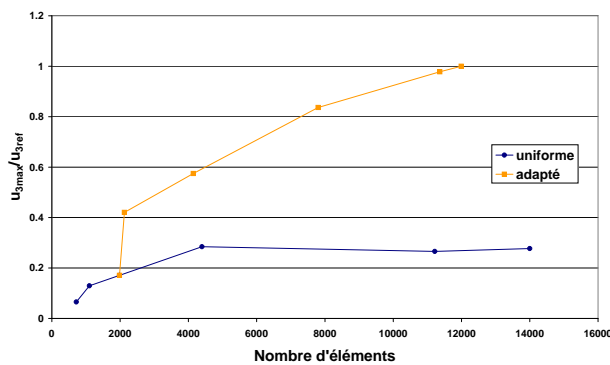


FIG. 3.36 – Maximum du déplacement normalisé $u_3(\frac{L}{4}, y^2)/u_{3ref}$ en fonction du nombre d'éléments pour $\varepsilon = 10^{-5}$

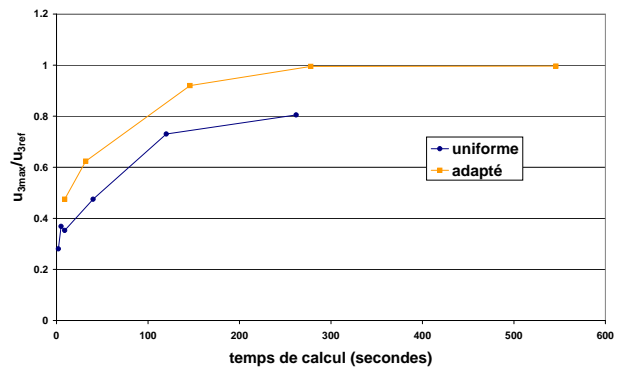


FIG. 3.37 – Maximum du déplacement normalisé $u_3(\frac{L}{4}, y^2)/u_{3ref}$ en fonction du temps de calcul pour $\varepsilon = 10^{-4}$

On observe qu'un maillage adapté est bien plus efficace qu'un maillage uniforme, et surtout pour des valeurs faibles de l'épaisseur relative ε . Les résultats convergent vers la solution de référence avec beaucoup moins d'éléments. Cette tendance s'accroît quand l'épaisseur relative ε tend vers zéro. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, les performances des deux types de maillages sont similaires. Mais le surplus de temps de calcul induit par l'adaptation donne un avantage aux maillages uniformes pour des épaisseurs importantes. Par contre, pour $\varepsilon = 10^{-4}$ et surtout $\varepsilon = 10^{-5}$, un maillage adapté donne de bien meilleurs résultats par rapport à un maillage uniforme : sur la Fig. 3.35, on voit qu'un maillage adapté de 6000 éléments donne la même précision qu'un maillage uniforme de 14000 éléments.

Pour $\varepsilon = 10^{-5}$, la solution u_3 donnée par un maillage uniforme est très lente à converger contrairement aux résultats obtenus avec un maillage adapté. Cela est dû à un blocage qui apparaît dans les couches pour des faibles valeurs de ε .

Pour des faibles valeurs de ε , même en considérant le surplus de temps dû à l'adaptation (en incluant le

temps de toutes les itérations), le maillage adapté est bien plus efficace que le maillage uniforme⁵ (voir Fig. 3.37 pour $\varepsilon = 10^{-4}$). Quelque soit le temps de calcul considéré, le maillage adapté est toujours plus proche du résultat que le maillage uniforme.

Ainsi, pour de faibles valeurs de ε (inférieures à 10^{-4}), l'utilisation de maillages adaptés est nécessaire pour réduire le blocage dans les couches et pour obtenir des résultats précis (un maillage uniforme ne converge pas) avec un temps de calcul raisonnable.

3.6 Étude numérique dans le cas non-caractéristique

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un problème plus simple nous permettant d'étudier les couches le long de courbes non-caractéristiques. Afin d'éviter toute singularité sur une ligne caractéristique, nous considérons un cylindre de révolution complet soumis à un effort normal constant f^3 sur la zone hachurée (Fig. 3.38), et encastré sur toute sa frontière. Nous imposons des conditions de symétrie sur les droites AB et OD (voir Fig. 3.38).

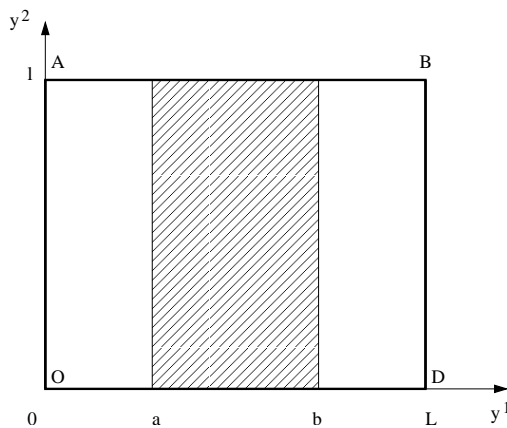


FIG. 3.38 – Domaine de \mathbb{R}^2 définissant la surface moyenne du cylindre

Le problème considéré est axisymétrique et les résultats sont donc indépendants de la variable angulaire y^2 . L'expression analytique du chargement est ici :

$$f^3 = H(y^1 - a) - H(y^1 - b) \quad (3.57)$$

avec $a = 30 \text{ mm}$ et $b = 70 \text{ mm}$.

En considérant les résultats du paragraphe 3.2.2, on peut déduire les ordres des singularités des différents déplacements :

- u_1 doit avoir une singularité de la forme $(y^1 - a)H(y^1 - a) - (y^1 - b)H(y^1 - b)$ (à une constante multiplicative près) par rapport à y^1
- u_2 est nul du fait des symétries du problème
- u_3 doit avoir une singularité de la forme $H(y^1 - a) - H(y^1 - b)$ par rapport à y^1

Notons que les symétries du problèmes font que l'on est dans le cadre de la remarque 3.2.1 pour le déplacement u_2 qui est nul ici.

Les résultats numériques des figures 3.39 et 3.40 retranscrivent bien les calculs développés précédemment. On peut voir Fig. 3.39 que u_1 est bien continue mais que sa dérivée est discontinue en $y^2 = a$ et $y^2 = b$, ce qui correspond bien à des singularités du type $(y^1 - a)H(y^1 - a)$ et $(y^1 - b)H(y^1 - b)$. On

⁵Les calculs ont été effectués sur un Pentium IV 3GHz avec 1Gb of RAM.

observe que u_2 est bien nul exactement. Quant à u_3 , il présente 2 discontinuités qui correspondent à celles du chargement (Fig. 3.40). Le déplacement u_3 a bien les mêmes singularités que le chargement f^3 donné par (3.57).

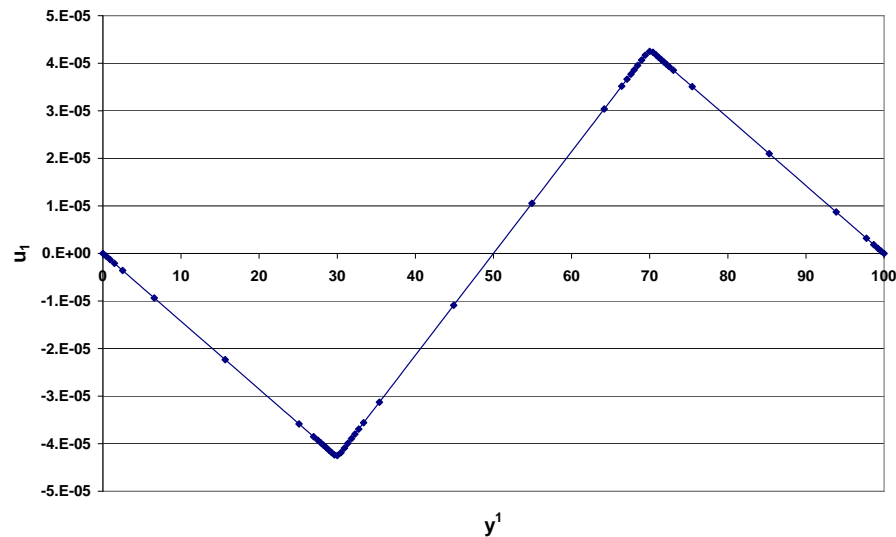


FIG. 3.39 – u_1 pour y^2 fixé et pour $\varepsilon = 10^{-4}$

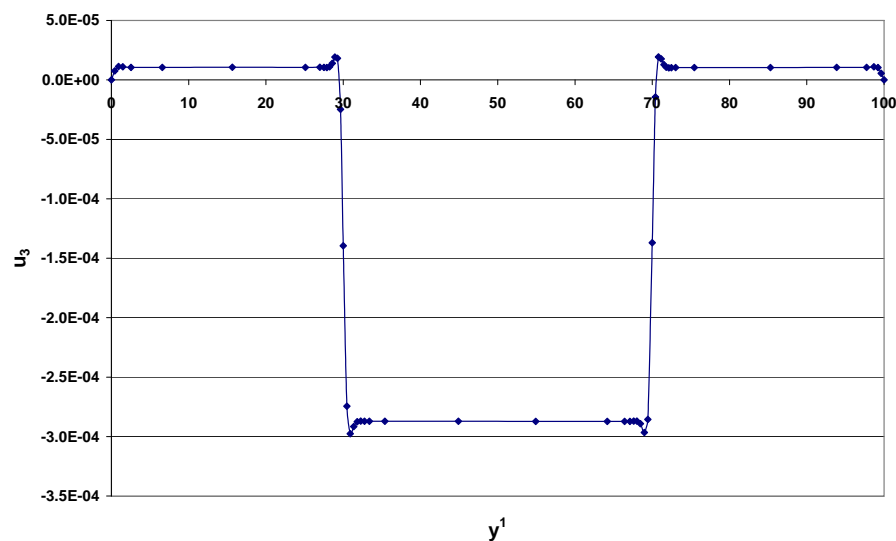
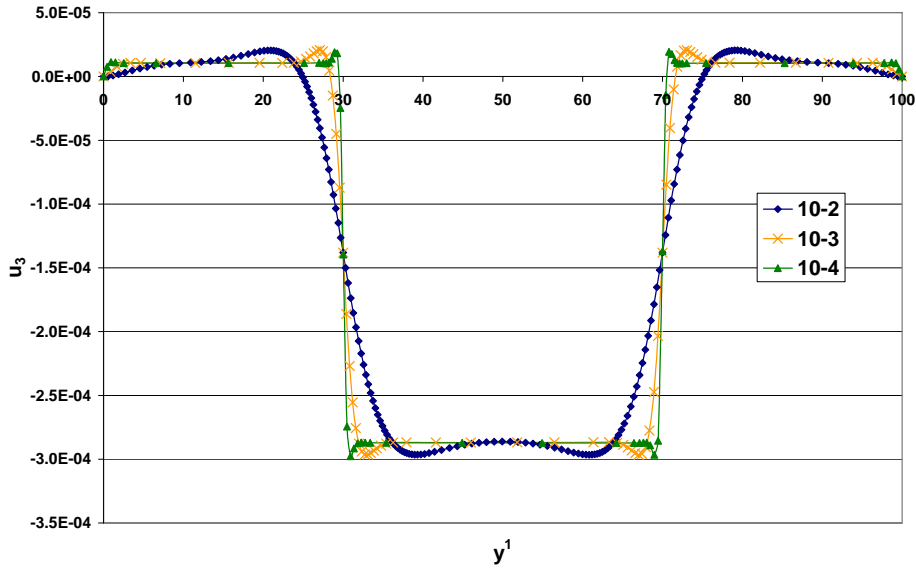
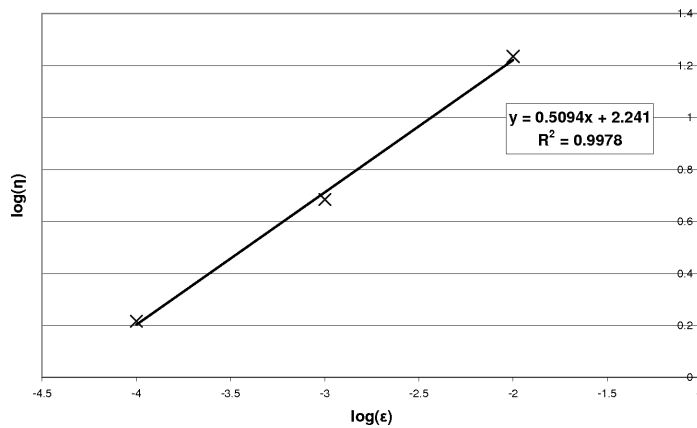
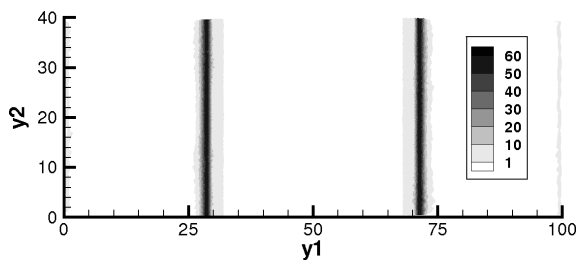
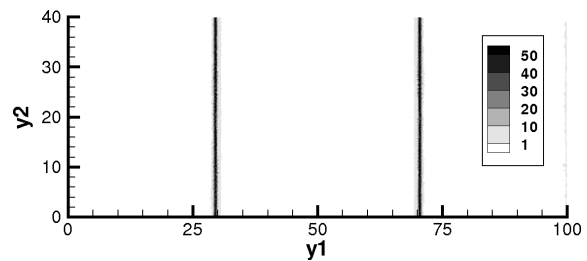


FIG. 3.40 – u_3 pour y^2 fixé et pour $\varepsilon = 10^{-4}$

Nous nous intéressons ensuite à la caractérisation de la couche interne correspondant à une discontinuité sur une ligne non-caractéristique. La figure 3.41 représente l'évolution du déplacement u_3 sur une droite $y^2 = \text{constante}$ quelconque. On constate que u_3 tend vers une singularité de type Heavyside en $y^1 = a$ et $y^1 = b$ correspondant à la singularité (3.57) du chargement f^3 . On peut également voir une petite oscillation des 2 côtés de chaque couche correspondant aux zones autour de $y^1 = a$ et $y^1 = b$. Pour une valeur de ε donnée, nous considérons que la distance entre ces 2 oscillations caractérise l'épaisseur η de la couche. Pour chaque valeur de ε , on représente sur la figure 3.42 $\log \eta$ en fonction de $\log \varepsilon$.

FIG. 3.41 – Évolution de u_3 en fonction de ε FIG. 3.42 – $\log(\eta)$ fonction de $\log(\varepsilon)$

On trouve que $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.5094})$, qui est un résultat très proche du résultat théorique $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.5})$ prédit dans le cas d'une couche suivant une ligne non-caractéristique. On peut également étudier l'épaisseur de la couche à partir des énergies. Les figures 3.43 à 3.45 montrent l'évolution du pourcentage de densité surfacique d'énergie de flexion E_{fs} (par rapport à l'énergie totale) quand ε diminue. On observe que la zone où E_{fs} et E_{ms} sont du même ordre (par exemple la zone où E_{fs} représente au moins 10% du total) rétrécit quand $\varepsilon \searrow 0$.

FIG. 3.43 – Proportion de E_{fs}
pour $\varepsilon = 10^{-3}$ (en %)FIG. 3.44 – Proportion de E_{fs}
pour $\varepsilon = 10^{-4}$ (en %)

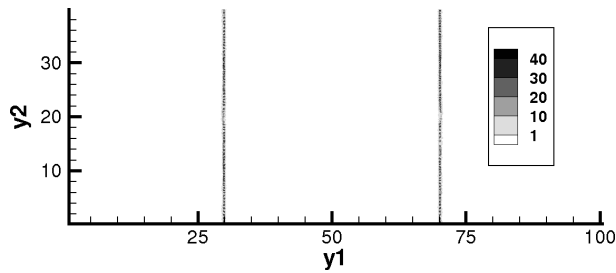


FIG. 3.45 – Proportion de E_{fs} pour $\varepsilon = 10^{-5}$ (en %)

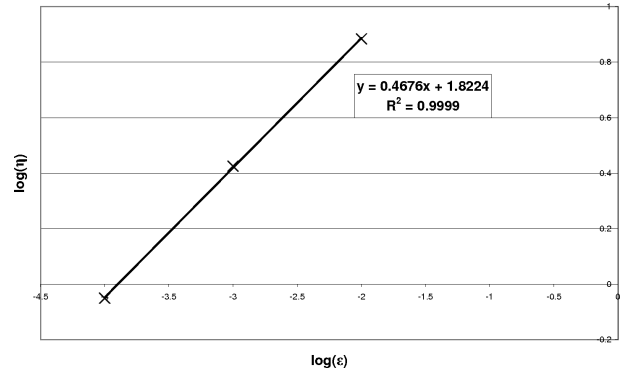


FIG. 3.46 – $\log(\eta)$ fonction de $\log(\varepsilon)$

Si on prend η comme étant la largeur de la zone où E_{fs} représente plus de 10% de la densité surfacique d'énergie totale, on trouve $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.4676})$ (Fig. 3.46). Dans ce cas, on trouve que le résultat est un peu moins proche du résultat théorique que la mesure utilisant les déplacements (Fig. 3.42). La détermination de l'épaisseur des couches à partir des énergie dépend fortement du critère choisi pour "est du même ordre de grandeur", et de la détermination de l'épaisseur de la zone où le critère est vérifié qui peut être imprécise.

3.7 Cas d'une singularité le long d'un bord

3.7.1 Théorie

Nous considérons le même problème que précédemment mais nous réduisons le domaine de telle sorte que les bords OD et AB soient tangents au cercle de chargement (Fig. 3.47). Nous étudierons le cas où ces 2 bords sont encastés, puis le cas où ils sont libres.

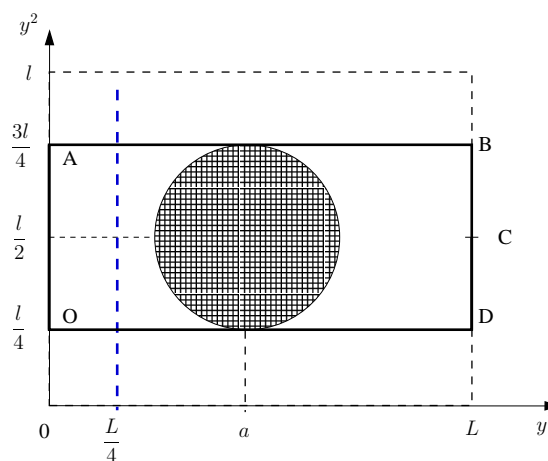


FIG. 3.47 – Domaine de \mathbb{R}^2 définissant la surface moyenne

En suivant la démarche de [88] dans le cas parabolique, on peut trouver les déplacements en prolongeant la solution (T^{ij}, u_k) du modèle de membrane par 0 en dehors du domaine. Par exemple, prenons comme nouveau domaine de \mathbb{R}^2 : $[0, l] \times [0, L]$ et définissons le déplacement \tilde{u}_1 :

$$\tilde{u}_1 = \begin{cases} u_1 \text{ pour } y^2 \in \left[\frac{l}{4}, \frac{3l}{4}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.58)$$

Les déplacements \tilde{u}_i solution du problème de membrane sur $[0, l] \times [0, l]$ devraient donc être de la même forme que précédemment pour $y^2 \in [\frac{l}{4}, \frac{3l}{4}]$, nuls pour $y^2 \leq \frac{l}{4}$ et $y^2 \geq \frac{3l}{4}$. C'est ce qu'on se propose d'observer numériquement dans les paragraphes suivants.

3.7.2 Simulations numériques

Cas où les bords OD et AB sont encastrés

Considérons les mêmes valeurs numériques (l, L) que précédemment pour la géométrie, (E, ν) pour le matériau et f^3 pour le chargement. Les figures 3.48 à 3.50 représentent les déplacements sur la ligne $y^1 = \frac{L}{4}$ tangente au domaine de chargement, obtenus par simulation numérique toujours pour une épaisseur relative $\varepsilon = 10^{-5}$. Nous les comparons avec les résultats du problème précédent où les singularités étaient à l'intérieur du domaine.

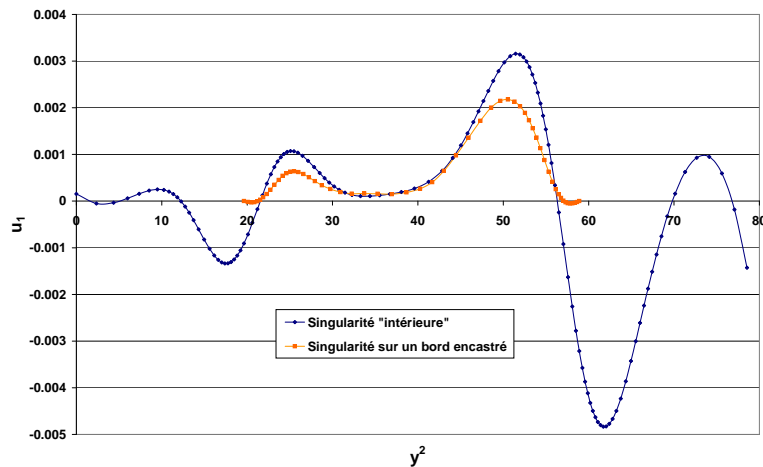


FIG. 3.48 – Déplacement u_1 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord encastré pour $\varepsilon = 10^{-5}$

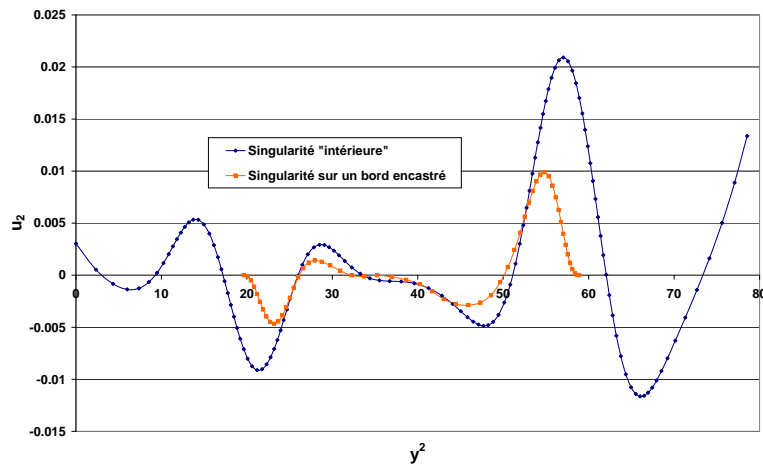


FIG. 3.49 – Déplacement u_2 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord encastré pour $\varepsilon = 10^{-5}$

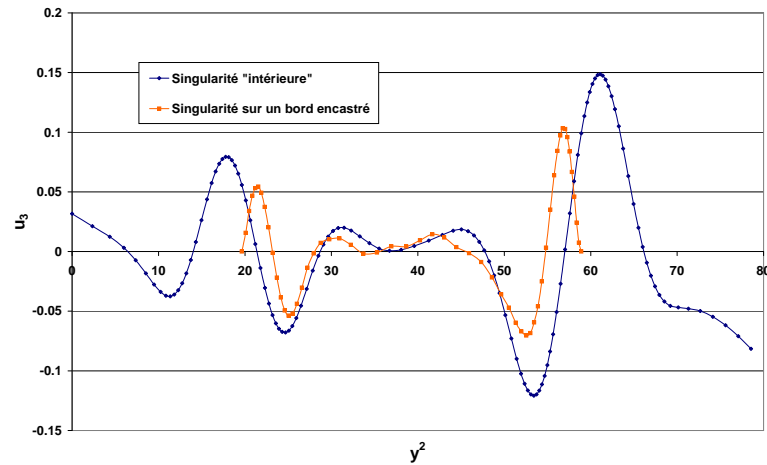


FIG. 3.50 – Déplacement u_3 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord encastré pour $\varepsilon = 10^{-5}$

Dans cet exemple, les bords sont encastrés en $y^2 = l/4$ et en $y^2 = 3l/4$. Les déplacements obtenus sont bien comme prévus par la théorie. Les singularités ont la même forme que dans le problème précédent mais sont "tronquées" au niveau des bords encastrés.

Cas où les bords OD et AB sont libres

• Forme des déplacements obtenus

Considérons toujours le même problème que précédemment mais libérons maintenant les bords AB et OD . La forme des déplacements en $y^1 = L/4$ obtenus par simulation numérique toujours pour une épaisseur relative $\varepsilon = 10^{-5}$, sont représentés sur les figures 3.51 à 3.53.

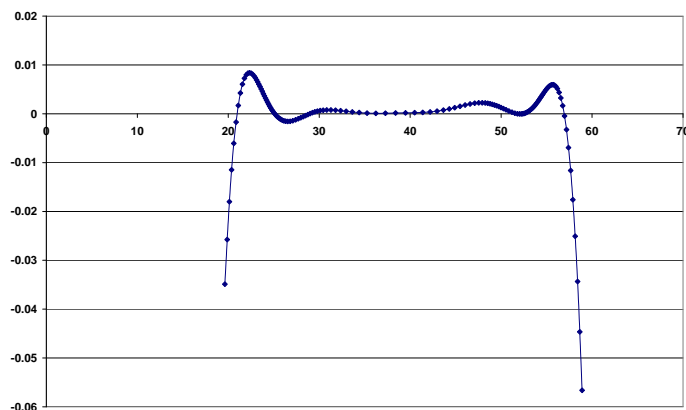


FIG. 3.51 – Déplacement u_1 en $y^1 = \frac{L}{4}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$

Cette fois-ci, nous n'observons pas tout à fait le même phénomène : la valeur des déplacements est beaucoup plus importante au niveau des 2 bords libres. Pour le reste, les ordres de grandeur respectifs des singularités sont respectés : u_{3max} est environ 10 fois plus important que u_{2max} , lui-même 10 fois plus important que u_{1max} . Le nombre de "bosses" caractérisant l'ordre des singularités est aussi respecté, même si les oscillations de u_3 sont un peu aplaties sur le graphique à cause de l'amplitude maximale qui est très grande.

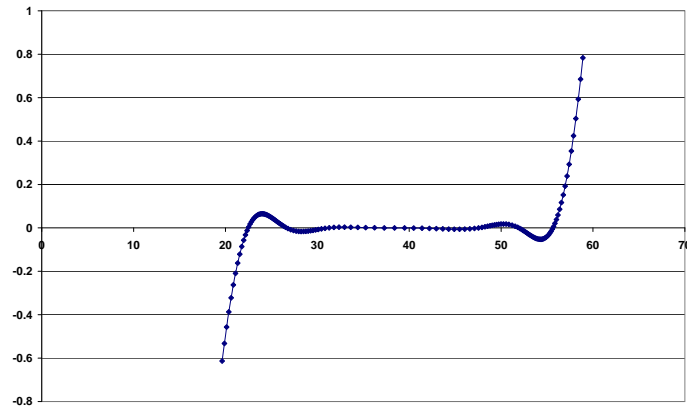


FIG. 3.52 – Déplacement u_2 en $y^1 = \frac{L}{4}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$

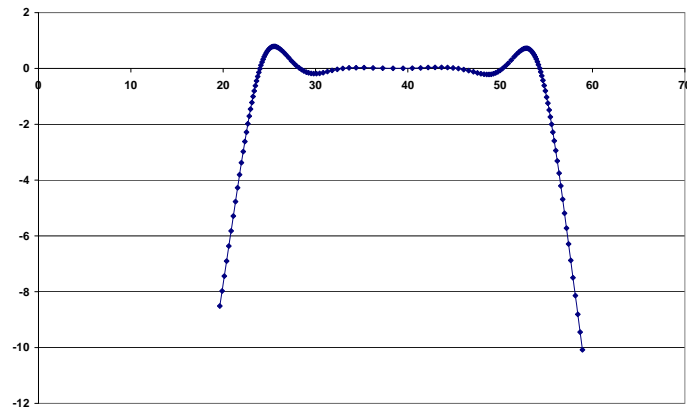


FIG. 3.53 – Déplacement u_3 en $y^1 = \frac{L}{4}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$

• Détermination de la singularité du déplacement u_3

Afin de déterminer l'ordre de la singularité du déplacement u_3 , le plus singulier, regardons comment varie son amplitude en fonction de ε . Pour cela, nous faisons varier ε de 10^{-3} à 10^{-5} .

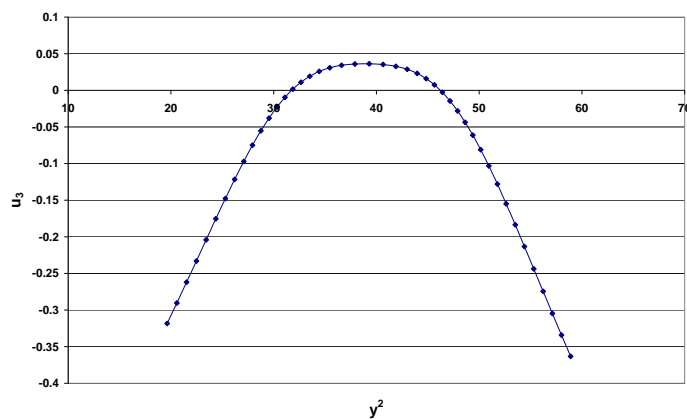
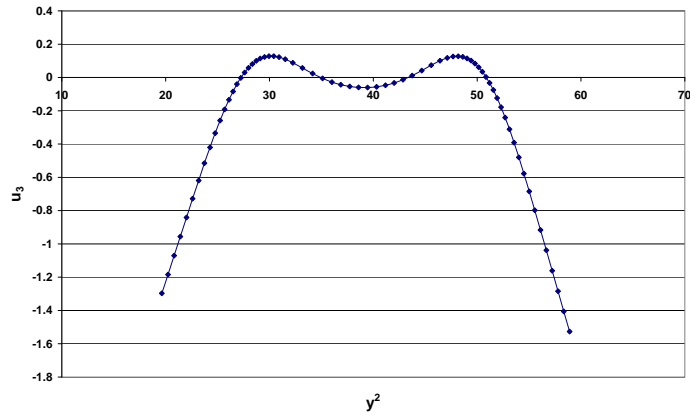
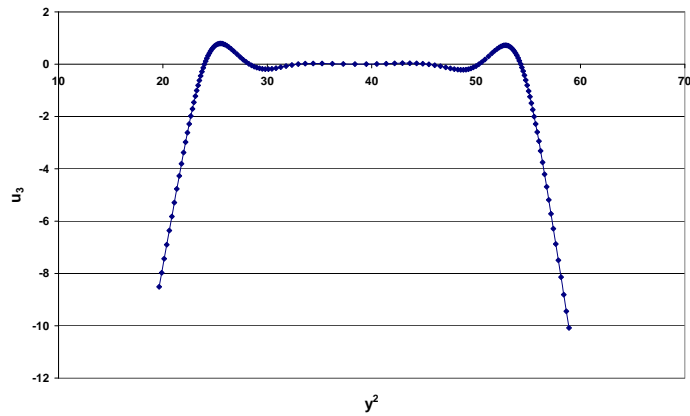
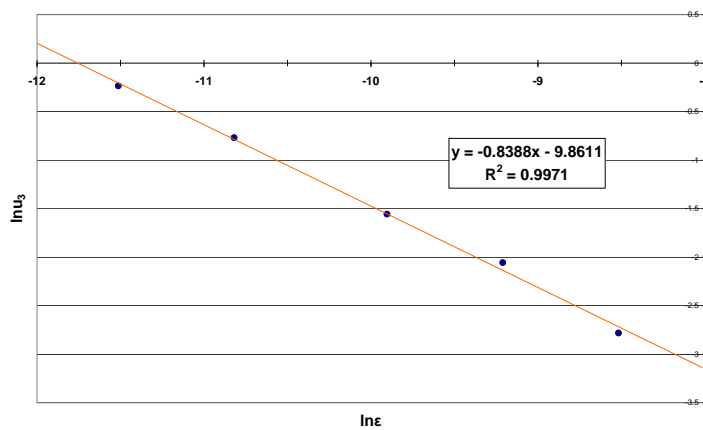


FIG. 3.54 – Déplacement u_3 pour $y^1 = \frac{L}{4}$ et $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$

FIG. 3.55 – Déplacement u_3 pour $y^1 = \frac{L}{4}$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 3.56 – Déplacement u_3 pour $y^1 = \frac{L}{4}$ et $\varepsilon = 10^{-5}$

De la même manière que pour le problème avec des singularités à l'intérieur du domaine, nous représentons sur les Figs. 3.54 à 3.56 l'évolution de l'amplitude de u_3 en fonction de ε . Nous regardons plus précisément la variation d'amplitude de la première oscillation. Nous trouvons que l'amplitude de cette oscillation est de l'ordre de $\varepsilon^{-0.8388}$ (voir Fig. 3.57), ce qui est exactement entre les valeurs de $\varepsilon^{-3/4}$ et ε^{-1} prédites par la théorie (voir paragraphes 3.3.3 et 3.5.1).

FIG. 3.57 – Amplitude de $\ln u_3$ en fonction de $\ln \varepsilon$

• Comparaison avec le cas de singularités à l'intérieur du domaine

Pour finir, comparons les allures des déplacements u_1 , u_2 et u_3 avec celles du problème avec des singularités à l'intérieur du domaine (section 3.5) où les bords $y^2 = 0$ et $y^2 = l$ étaient libres. Sur les figures 3.58 à 3.60 sont représentés les déplacements (en mm) résultant d'une singularité le long d'un bord libre ou à l'intérieur du domaine pour $\varepsilon = 10^{-5}$, sur la même figure et avec la même échelle.

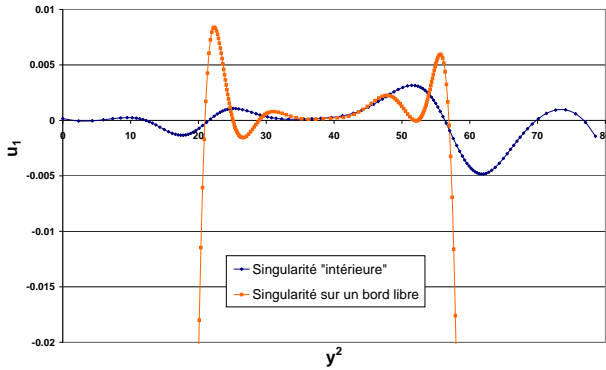


FIG. 3.58 – Déplacement u_1 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord libre en $y^1 = L/4$

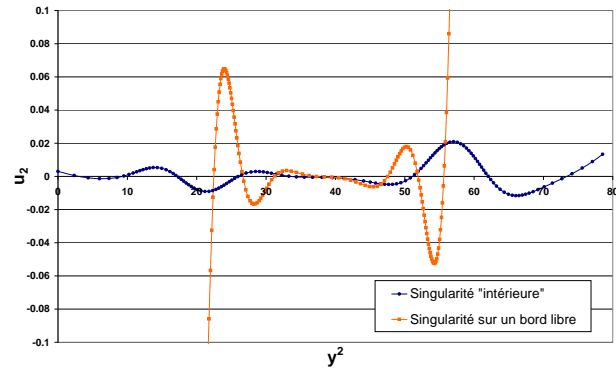


FIG. 3.59 – Déplacement u_2 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord libre en $y^1 = L/4$

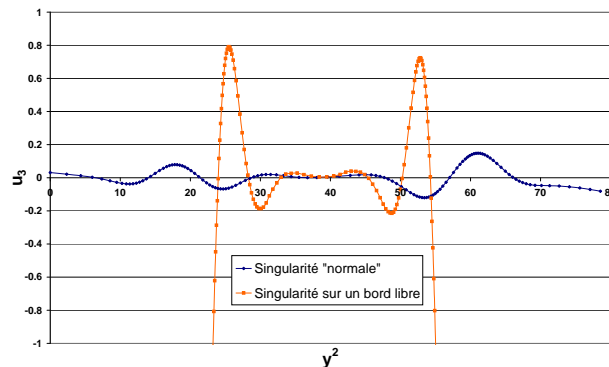


FIG. 3.60 – Déplacement u_3 dans le cas d'une singularité à l'intérieur du domaine et le long d'un bord libre en $y^1 = L/4$

Que le bord soit libre ou encastré, les déplacements ont les mêmes singularités (même si elles sont tronquées dans le cas d'un bord encastré). Si le bord est libre, on observe le même nombre d'oscillations (un peu plus serrées) que dans le cas d'une singularité du chargement à l'intérieur du domaine. De plus, l'amplitude des déplacements est bien évidemment beaucoup plus importante.

3.8 Singularités dues à la forme du domaine

Pour terminer l'étude des singularités dans le cas des coques paraboliques, nous proposons ce dernier exemple où le domaine Ω de la carte est plus complexe mais le chargement est uniforme sur tout le domaine. On va voir que dans ce cas, les singularités provenant de la couche limite du bord CD vont se propager à l'intérieur du domaine le long de la ligne caractéristique CF (voir Fig. 3.61).

Considérons une coque parabolique définie par le même plongement (3.19) $\Psi(y^1, y^2)$ que précédemment mais avec cette fois un domaine Ω différent représenté sur la figure 3.61. On applique une force $f^3 = -1$ uniforme sur tout le domaine. La coque est encastée sur tout son pourtour. On cherche à voir si quelque chose de particulier se passe au niveau de la ligne CF à l'intérieur du domaine.

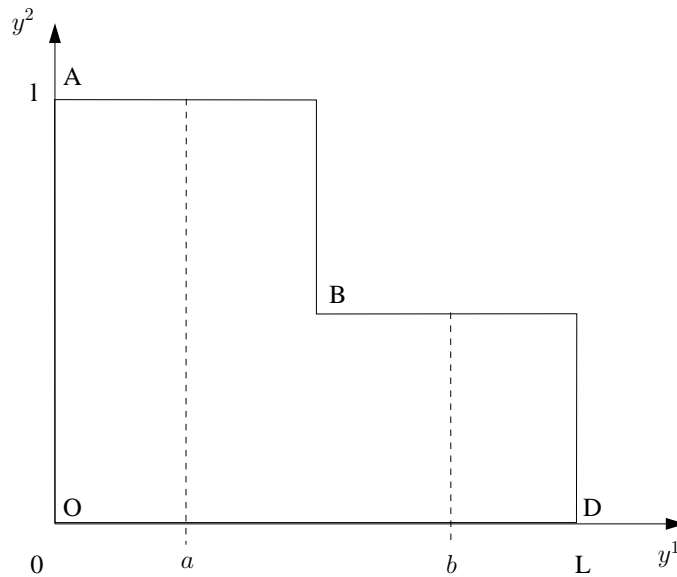
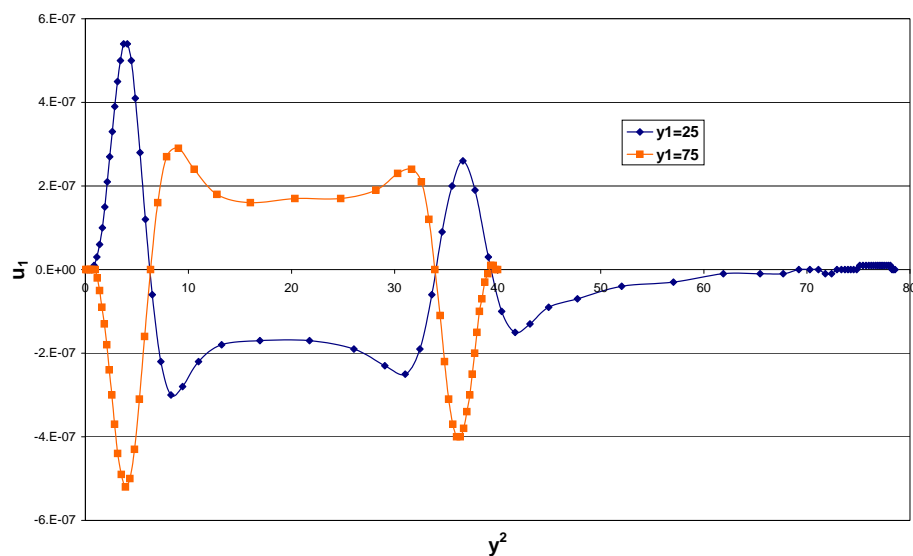
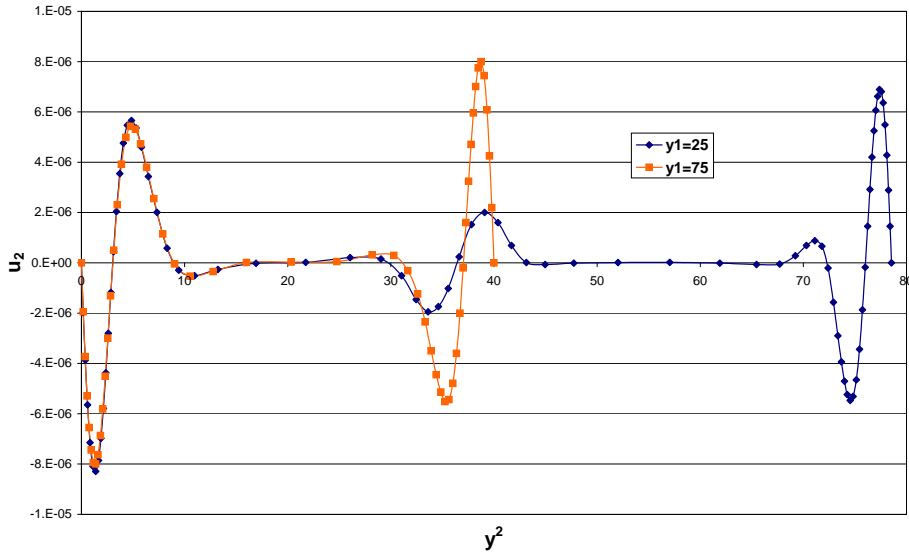
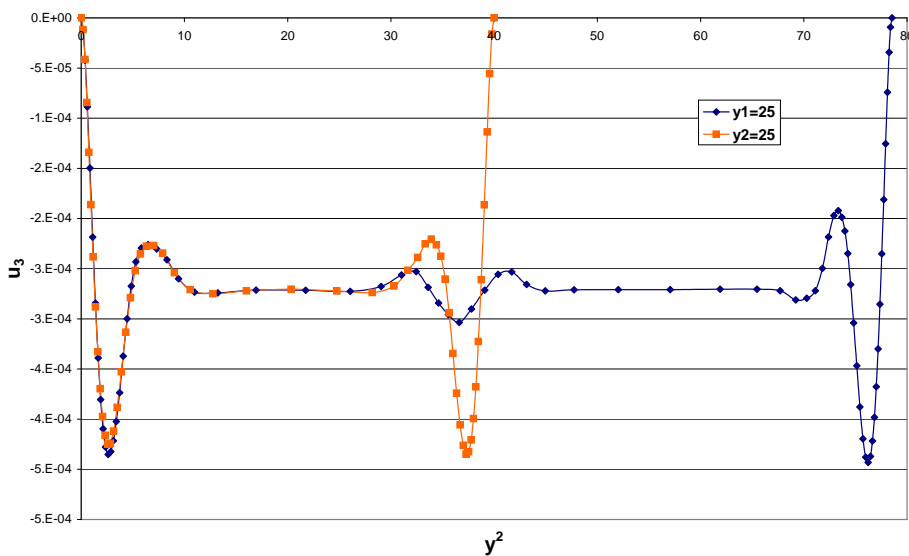


FIG. 3.61 – Domaine considéré

Pour cela, on étudie les déplacements sur les 2 lignes $y^1 = a$ et $y^1 = b$, avec ici $a = 25 \text{ mm}$ et $b = 75 \text{ mm}$. Les résultats en mm pour $\varepsilon = 10^{-5}$ sont présentés sur les figures 3.62 à 3.64.

FIG. 3.62 – Déplacement u_1 sur les lignes $y^1 = a$ et $y^1 = b$

FIG. 3.63 – Déplacement u_2 sur les lignes $y^1 = a$ et $y^1 = b$ FIG. 3.64 – Déplacement u_3 sur les lignes $y^1 = a$ et $y^1 = b$

En $y^1 = b$, on remarque une singularité au niveau de chacun des bords encastres correspondant à la présence d'une couche limite, comme on l'a déjà étudié à la section 3.7.2. Par contre, on remarque 2 types de singularités différentes sur la ligne $y^1 = a$. Aux 2 extrémités, on a des singularités de bord comme en $y^1 = b$. Par contre, la singularité du milieu en $y^2 = l/2$ est causée par une couche limite d'une manière indirecte. En effet, la singularité apparaît sur le bord CD et se propage le long de la ligne CF car celle-ci est une ligne caractéristique.

On peut remarquer que la forme de cette singularité est différente de celle due à la couche limite sur le bord CD . Ce problème est complexe car c'est à la fois un problème de singularité sur un bord libre et de propagation sur une ligne caractéristique. A notre connaissance, il n'existe aucun résultat théorique de comparaison. Ce dernier exemple montre la complexité de l'interaction entre les différents types de singularités pouvant exister. Ainsi, on voit encore que sans la technique de maillage adaptatif "automatique", il serait difficile d'appréhender tous les types de singularités qui existent.

3.8.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord déterminé théoriquement les ordres des singularités des déplacements résultant d'une singularité du chargement par intégration du système membranaire. Cela a été possible dans le cas des coques paraboliques, en se plaçant dans un système de coordonnées approprié. On retrouve bien les résultats du chapitre 1 obtenus par réduction des équations membranaires. En particulier, on retrouve le fait que les singularités des déplacements n'ont pas les mêmes ordres et se propagent ou pas, selon que la singularité est ou non suivant une courbe caractéristique.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas d'un demi-cylindre de révolution. Dans un premier temps, nous avons étudié le cas d'un chargement sur une zone circulaire. Nous avons observé numériquement que la seule direction où les singularités des déplacements se propagent est celle des lignes caractéristiques. Cela donne dans le cas étudié, 2 couches internes tangentes à la zone de chargement. Le maillage a été raffiné automatiquement à l'intérieur de ces couches, nous permettant d'avoir des résultats précis et de retrouver les résultats théoriques en terme d'épaisseur de couche et d'ordre des singularités des déplacements.

Les singularités dans les couches internes le long d'une ligne caractéristique masquant totalement celles existant le long des lignes non-caractéristiques, nous avons ensuite étudié ce dernier cas séparément. Cela nous a permis de retrouver les résultats théoriques dans le cas de singularités le long de lignes non-caractéristiques. Nous avons vu que les maillages adaptés convergent plus rapidement vers la solution (quand on raffine le maillage) que les maillages uniformes surtout quand l'épaisseur relative diminue.

Par la suite, nous nous sommes intéressés au cas particulier d'une zone de chargement tangente au bord du domaine. On constate que les singularités le long d'un bord caractéristique se propagent et ont le même ordre que pour une couche interne intérieure au domaine. Les déplacements ont la même forme que dans le cas d'une couche interne; les oscillations semblent juste tronquées au niveau du bord qui est encastré, et "resserrés" au niveau du bord libre. Enfin, pour des domaines de forme plus complexes, nous avons mis en évidence numériquement des cas où des singularités provenant des couche limites se propagent à l'intérieur du domaine le long des caractéristiques.

Chapitre 4

Étude des coques elliptiques bien-inhibées

4.1 Introduction

On a vu d'un point de vue théorique aux chapitres 1 et 3 que des singularités des déplacements peuvent apparaître dans les couches limites ou internes lorsque le chargement est singulier. Ces singularités et ces couches internes sont liées à la perte de régularité du déplacement u_3 , solution du modèle de Koiter, lorsque l'épaisseur ε tend vers zéro.

Dans le cas d'une coque elliptique, lorsque la frontière du domaine de chargement présente des coins, des singularités peuvent également apparaître à ces coins. Elles sont alors d'un genre tout à fait différent. Ce sont des singularités logarithmiques beaucoup plus importantes, présentes tout autour du coin en question, et moins classiques car à notre connaissance il n'existe pas de travaux particuliers sur le sujet (en tout cas en ce qui concerne les coques).

Nous proposons dans ce chapitre, à partir de la formulation réduite (1.76) du modèle de membrane, de mettre en évidence l'existence de ces singularités logarithmiques d'un point de vue théorique, dans le cas des coques elliptiques bien-inhibées. Nous proposons ensuite de visualiser numériquement ces singularités logarithmiques, ainsi que les autres singularités plus classiques existant, dans le cas d'un parabolöide elliptique. Les simulations numériques seront réalisées avec la procédure de maillage adaptatif couplant BAMG et MODULEF déjà mise en oeuvre au chapitre précédent dans le cas des coques paraboliques.

4.2 Existence de singularités logarithmiques aux coins de la zone de chargement

Considérons une coque elliptique encastrée sur tout son bord. Elle est ainsi bien-inhibée en flexion et d'après ce qui précède, le modèle de Koiter tend vers le problème de membrane quand ε tend vers zéro. Étudions donc, à partir du problème membranaire, comment peuvent apparaître de telles singularités aux coins de la zone de chargement. Pour cela, repartons de la formulation réduite (1.76) du problème de membrane obtenue au chapitre 1, ne faisant intervenir que le déplacement normal u_3 . On rappelle qu'elle s'écrit :

$$E [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} u_3 = a^2 [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} f^3 \quad (4.1)$$

Pour une coque elliptique, cette équation peut être simplifiée si l'on se place dans le système de coordonnées lié aux lignes de courbures principales (y^1, y^2) . La base locale associée étant orthogonale, on a alors $a^{12} = 0$ et $b_1^2 = b_2^1 = 0$. Ainsi b_{12} est aussi nul (b_{11} et b_{22} sont strictement non nuls et de même signe). L'équation (4.1) devient :

$$E [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2]^{(2)} u_3 = a^2 [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2]^{(2)} f^3 \quad (4.2)$$

Il est important de noter que dans le cas de coques elliptiques, les deux membres de l'équation font intervenir uniquement des opérateurs elliptiques. Si l'on considère l'équation homogène, une solution au voisinage de l'origine¹ peut se développer en termes de solutions de la forme (voir [42] par exemple) :

$$r^{\lambda_k} \varphi_k(\theta) \quad (4.3)$$

ou

$$r^{\lambda_k} [\varphi_k(\theta) + \log(r) \psi_k(\theta)] \quad (4.4)$$

ou faisant même intervenir des puissances plus élevées en $\log(r)$ pour des exposants caractéristiques λ_k spécifiques. Les valeurs de λ_k donnant une description complète des singularités dépendent des coefficients de l'équation. En général, ces valeurs qui sont les valeurs propres d'un certain opérateur, peuvent être seulement obtenues numériquement [64]. Cependant, dans certains cas (impliquant le laplacien ou des opérateurs analogues), un développement en série de Fourier par rapport à θ permet d'obtenir une description complète de la structure de la solution. En utilisant le même genre de technique dans le cas non homogène, on peut trouver la structure locale (parfois singulière) de la solution au voisinage de l'origine.

L'équation (4.2) peut se ramener à une équation en bilaplacien par le changement de variable :

$$(y^1, y^2) \Rightarrow (z^1, z^2) \text{ avec } \begin{cases} z^1 = b_{22}^{-1/2} y^1 \\ z^2 = b_{11}^{-1/2} y^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

On obtient alors l'équation :

$$\Delta^2 u_3 = C_4 f^3 \quad (4.6)$$

où C_4 est un opérateur du 4^{ème} ordre. Cet opérateur peut s'écrire $C_4 = (D_2)^2$ avec :

$$D_2 = \frac{E^{-1/2}}{a^{11}a^{22}} \left(\frac{a^{11}}{b_{22}} \frac{\partial^2}{\partial(z^1)^2} + \frac{a^{22}}{b_{11}} \frac{\partial^2}{\partial(z^2)^2} \right) = E^{-1/2} \left[\frac{1}{b_2^2} \frac{\partial^2}{\partial(z^1)^2} + \frac{1}{b_1^2} \frac{\partial^2}{\partial(z^2)^2} \right] \quad (4.7)$$

Considérant l'équation (4.6), nous allons pouvoir étudier l'existence de singularités logarithmiques en utilisant un développement en série de Fourier.

4.2.1 Étude des singularités de l'équation $\Delta^2 u_3 = C_4 f^3$

Problème modèle avec le laplacien

Nous allons dans cette partie commencer par étudier un problème modèle pour des opérateurs du second ordre au lieu du 4^{ème} ordre. Ceci nous aidera à mieux appréhender le problème. Plaçons nous au voisinage d'un point P du domaine de chargement et prenons ce point comme centre du repère en coordonnées polaires (r, θ) (Fig. 4.1). Nous cherchons les fonctions $u(r, \theta)$ solution de :

$$\Delta u = E_2 f^3(\theta) \text{ dans un voisinage de } r = 0 \quad (4.8)$$

où E_2 est un opérateur du second ordre comme le Laplacien Δ (mais non proportionnel à Δ) et où $f^3(\theta)$ est indépendant de r .

¹En coordonnées polaires (r, θ) où le point étudié est l'origine.

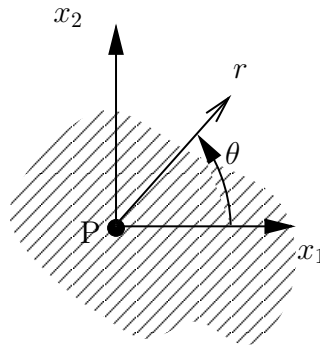


FIG. 4.1 – Repère polaire associé

Remarque 4.2.1 *Le cas où l'opérateur E_2 est proportionnel à Δ n'est pas intéressant. En effet, si on a $E_2 = K\Delta$, l'équation (4.8) peut être écrite :*

$$\Delta(u - Kf^3) = 0 \quad (4.9)$$

Dans ce cas, $u - Kf^3$ est une fonction harmonique, u et f^3 ont donc les mêmes singularités notamment au niveau d'éventuels coins. Cette remarque est également valable pour l'équation $\Delta^2 u_3 = C_4 f^3$ où l'on considérera que Δ^2 et C_4 ne sont pas proportionnels.

Il s'agit maintenant de montrer que u a de façon générique une singularité en $\log(r)$, et pas seulement une singularité correspondant à celle de $f^3(\theta)$.

Pour étudier les singularités du problème (4.8), il suffit de trouver celles d'une solution particulière. Les autres auront nécessairement les mêmes singularités. En effet, soit u une solution particulière choisie et u^* une autre solution, on a alors :

$$\Delta u = E_2 f^3(\theta) \quad (4.10)$$

$$\Delta u^* = E_2 f^3(\theta) \quad (4.11)$$

$$\text{soit par linéarité : } \Delta(u - u^*) = 0 \quad (4.12)$$

La différence entre les 2 fonctions est une fonction harmonique donc régulière, les 2 solutions auront les mêmes singularités.

• **Étude de $\Delta v = f^3(\theta)$**

Pour commencer, on étudie le problème

$$\Delta v = f^3(\theta) \quad (4.13)$$

sans l'opérateur E_2 . En coordonnées polaires, on a :

$$\frac{1}{r^2} \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2)} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] v = f^3(\theta) r^0 \quad (4.14)$$

où $r^0 = 1$ figure explicitement pour insister sur le fait que v dépend à priori de r .

On cherche maintenant $v(r, \theta)$, 2π -périodique en θ , solution de (4.14). On peut alors décomposer $v(r, \theta)$ en série de Fourier en θ avec des coefficients fonction de r :

$$v = v_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n(r) \cos(n\theta) + w_n(r) \sin(n\theta)) \quad (4.15)$$

et de même pour f^3 , également 2π -périodique en θ :

$$f^3(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (4.16)$$

Les dérivées secondes par rapport à θ faisant apparaître le coefficient $(-n^2)$, on obtient alors le nouveau problème suivant pour les coefficients de Fourier v_n et w_n de v :

$$\frac{1}{r^2} \left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} v_0(r) = a_0 r^0 \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} - n^2 \right] v_n(r) = a_n r^0 \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} - n^2 \right] w_n(r) = b_n r^0 \quad (4.19)$$

En multipliant par r^2 , il vient :

$$\left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} v_0(r) = a_0 r^2 \quad (4.20)$$

$$\left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} - n^2 \right] v_n(r) = a_n r^2 \quad (4.21)$$

$$\left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{(2)} - n^2 \right] w_n(r) = b_n r^2 \quad (4.22)$$

On se ramène ensuite à une équation différentielle à coefficients constants grâce au changement de variable $\log(r) = t$. Ainsi :

$$r \frac{d}{dr} = \frac{d}{dt} \quad (4.23)$$

et le problème (4.20)-(4.22) devient alors :

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{v}_0(t) = a_0 e^{2t} \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - n^2 \right) \tilde{v}_n(t) = a_n e^{2t} \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - n^2 \right) \tilde{w}_n(t) = b_n e^{2t} \quad (4.26)$$

La solution de l'équation non homogène sera alors en e^{2t} sauf si $n = 2$. Pour $n = 2$, la fonction \tilde{v}_2 sera de la forme $A_2 t e^{2t}$ et \tilde{w}_2 de la forme $B_2 t e^{2t}$. On aura alors dans ce cas :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 4 \right) A_2 t e^{2t} = 4A_2 e^{2t} = a_2 e^{2t} \quad (4.27)$$

On a alors (d'une manière similaire pour B_2) :

$$A_2 = \frac{a_2}{4} \quad (4.28)$$

$$B_2 = \frac{b_2}{4} \quad (4.29)$$

On peut donc remonter d'abord à $\tilde{v}(t, \theta)$:

$$\tilde{v} = \frac{a_2}{4} t e^{2t} \cos(2\theta) + \frac{b_2}{4} t e^{2t} \sin(2\theta) + \text{termes en } e^{nt} \text{ avec } n \neq 2 \quad (4.30)$$

et ensuite à $v(r, \theta)$ en revenant à la variable $r = e^t$:

$$v(r, \theta) = \frac{a_2}{4} \log(r).r^2 \cos(2\theta) + \frac{b_2}{4} \log(r).r^2 \sin(2\theta) + \text{termes en } r^n \text{ } n \neq 2 \quad (4.31)$$

• **Retour au problème** $\Delta u = E_2 f^3(\theta)$

Afin de revenir au problème (4.8), appliquons l'opérateur E_2 aux deux membres du problème (4.8), on obtient : $E_2 \Delta v = E_2 f^3(\theta)$. Comme E_2 commute avec Δ (car les coefficients sont constants), on a :

$$\Delta(E_2 v) = E_2 f^3(\theta) \quad (4.32)$$

Ainsi, $u = E_2 v$ est une solution particulière de (4.8). D'après (4.10)-(4.12), elle a les mêmes singularités que toute autre solution du problème précédent. Les singularités de n'importe quelle solution u sont donc les singularités de $E_2 v$. Or, E_2 est un opérateur d'ordre 2. Les termes les plus singuliers sont donc ceux qui sont dérivés deux fois par rapport à z^1 et/ou z^2 . Ces dérivées peuvent s'exprimer en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial}{\partial z^1} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.34)$$

Ainsi, toutes les dérivations d'ordre 2 font diminuer les puissances de r de 2 ordres que ce soit par dérivation par rapport à r ou par division par r . On obtient donc finalement que n'importe quelle solution $u(r, \theta)$ du problème (4.8) où E_2 est un opérateur de second ordre, s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(r, \theta) = G(\theta) \log(r) + \text{termes plus réguliers}} \quad (4.35)$$

où $G(\theta)$ est une fonction qui ne dépend que de θ . On a bien montré que dans le cas général (sauf lorsque $G(\theta) = 0$ et sauf si E_2 est proportionnel au laplacien Δ), que toute solution u de (4.8) possède une singularité logarithmique au voisinage de P (en $r = 0$). On obtient donc bien une singularité logarithmique par rapport à r .

Retour à l'équation $\Delta^2 u = E_4 f^3(\theta)$

Pour finir, revenons à l'équation (4.6) qui correspond au problème membranaire réduit qui nous intéresse. Considérons d'abord le problème simplifié sans l'opérateur E_4 :

$$\Delta^2 u = f^3(\theta) \quad (4.36)$$

que l'on peut décomposer en deux problèmes successifs :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta v = f^3(\theta) \\ v = \Delta u \end{cases} \quad (4.37)$$

Or, nous avons déjà étudié la première équation de (4.37). La solution est de la forme (4.31) :

$$v(r, \theta) = \frac{a_2}{4} \log(r).r^2 \cos(2\theta) + \frac{b_2}{4} \log(r).r^2 \sin(2\theta) + \text{termes en } r^n, n \neq 2 \quad (4.38)$$

En remplaçant alors v dans la deuxième équation de (4.37), on obtient :

$$\Delta u = \frac{a_2}{4} \log(r).r^2 \cos(2\theta) + \frac{b_2}{4} \log(r).r^2 \sin(2\theta) + \text{termes en } r^n, n \neq 2 \quad (4.39)$$

Comme les termes réguliers ne donnent que des termes réguliers, nous n'étudierons donc que les termes singuliers correspondant à :

$$\Delta u = \frac{a_2}{4} \log(r).r^2 \cos(2\theta) + \frac{b_2}{4} \log(r).r^2 \sin(2\theta) \quad (4.40)$$

L'étude des singularités dans l'équation de (4.40) se fait comme précédemment en décomposant u en série de Fourier par rapport à la variable θ :

$$u = u_0(r) + \sum_1^{\infty} (u_n(r) \cos(n\theta) + u_n^*(r) \sin(n\theta)) \quad (4.41)$$

Les termes singuliers ne provenant que des termes d'ordres $n = 2$, on n'étudie que ceux-ci et l'on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2)} - 4 \right] u_2(r) = a_2 r^2 \log(r) \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2)} - 4 \right] u_2^*(r) = b_2 r^2 \log(r) \quad (4.43)$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2)} - 4 \right] u_2(r) = a_2 r^4 \log(r) \quad (4.44)$$

$$\left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(2)} - 4 \right] u_2^*(r) = b_2 r^4 \log(r) \quad (4.45)$$

En effectuant le même changement de variable $\log(r) = t$ que précédemment, on obtient :

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - 4 \right] \tilde{u}_2(t) = a_2 t e^{4t} \quad (4.46)$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - 4 \right] \tilde{u}_2^*(t) = b_2 t e^{4t} \quad (4.47)$$

Comme e^{4t} n'est pas solution de l'équation homogène associée à (4.46) et (4.47), u_2 (et d'une manière similaire u_2^*) est de la forme :

$$\tilde{u}_2 = A t e^{4t} + B e^{4t} \Rightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} - 4 \right] u_2 = A(8 + 16t)e^{4t} + 16B e^{4t} \quad (4.48)$$

Ainsi \tilde{u}_2 est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} 8A + 16B = 0 \\ 16A = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{a_2}{16} \\ B = -\frac{a_2}{32} \end{cases} \quad (4.49)$$

En revenant aux variables (r, θ) avec $r = e^t$, la solution $u(r, \theta)$ du problème (4.37) est de la forme :

$$u(r, \theta) = \frac{a_2}{16} \log(r).r^4 \cos(\theta) + \frac{b_2}{16} \log(r).r^4 \sin(\theta) + \text{termes plus réguliers} \quad (4.50)$$

Finalement, afin de déterminer les singularités de la solution u du problème membranaire, on applique l'opérateur E_4 comme à la section précédente. Or, celui-ci étant un opérateur du 4^{ème} ordre, les termes les plus singuliers sont ceux dérivés 4 fois ou encore divisés par r^4 en coordonnées polaires. Ainsi, on a :

$$\boxed{u_3(r, \theta) = H(\theta) \log(r) + \text{termes plus réguliers}} \quad (4.51)$$

où $H(\theta)$ est une fonction qui ne dépend que de θ .

On a donc bien démontré que toute solution u_3 du problème de membrane contient une singularité logarithmique au voisinage de $r = 0$ dès que $H(\theta) \neq 0$. Il peut arriver que $H(\theta) = 0$ si la décomposition de Fourier de $f^3(\theta)$ comporte des termes d'ordre 2 nuls, c'est-à-dire $a_2 = 0$ et $b_2 = 0$ avec :

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \cos(2\theta) d\theta \quad (4.52)$$

et

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \sin(2\theta) d\theta \quad (4.53)$$

4.2.2 Cas particulier où les courbures principales sont égales

L'équation réduite (4.6) a été établie dans le cas général en se plaçant dans le système de coordonnées lié aux courbures principales dans lequel $b_1^2 = b_2^1 = 0$. Pendant la résolution, nous avons supposé que les 2 opérateurs de l'équation (4.6) ne sont pas proportionnels (remarque 4.2.1). Ceci peut cependant arriver si $b_1^1 = b_2^2 = b$.

Dans ce cas, le point étudié est un point ombilical de la surface S . Alors, les deux opérateurs de (4.6) sont proportionnels et on a :

$$\Delta^2 \left[E u_3 - \frac{1}{b} f^3 \right] = 0 \quad (4.54)$$

D'après la remarque 4.2.1, $E u_3 - \frac{1}{b} f^3$ est une fonction harmonique. En conséquence, u_3 et f^3 ont les mêmes singularités. Autrement dit, même si a_2 ou b_2 n'est pas nul, il n'y aura pas de singularité logarithmique au point P si les courbures principales y sont égales (si P est un point ombilical de la surface S).

4.2.3 Condition d'existence d'une singularité logarithmique

Afin de rendre plus concrète l'étude théorique précédente, on va s'intéresser à différents cas (forme du chargement et point P étudié) et donc à différentes fonctions $f^3(\theta)$. On verra ainsi dans quels cas a_2 ou b_2 est non nul, et donc dans quels cas il existera une singularité logarithmique au voisinage du point P . Dans les exemples suivants, nous considérons une surface S elliptique quelconque dont la carte locale (domaine Ω et Ψ) n'est pas explicitement connue. Le chargement f^3 est uniquement normal, constant et appliqué dans la zone hachurée.

Cas 1

On se place tout d'abord en un point P qui se trouve à l'intérieur de la zone de chargement (pas sur la frontière) où est appliqué un effort f^3 constant égal à 1 (Fig. 4.2).

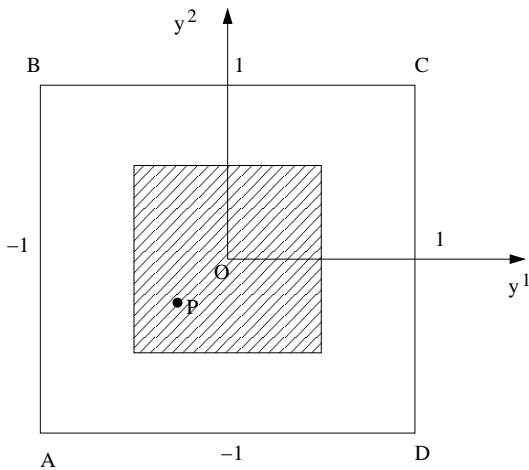


FIG. 4.2 – Position du point P

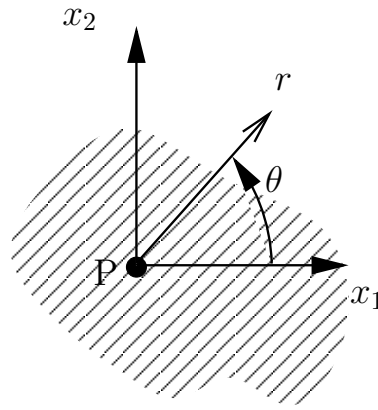


FIG. 4.3 – Repère polaire considéré

On a donc :

$$f^3(\theta) = 1 \text{ pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.55)$$

et en conséquence :

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \cos(2\theta) d\theta = 0 \text{ et } b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \sin(2\theta) d\theta = 0$$

Ainsi, si le point P est à l'intérieur de la zone de chargement, on a $a_2 = b_2 = 0$ et il n'y a pas de singularité logarithmique. Étant donné qu'aucune singularité n'est présente au niveau du chargement en ce point, ce résultat était prévisible.

Cas 2

Considérons maintenant un point P qui se trouve sur la frontière de la zone de chargement, à un endroit où la frontière ainsi que sa tangente sont continues. Deux cas de figure possibles sont représentés sur les figures 4.4 et 4.6.

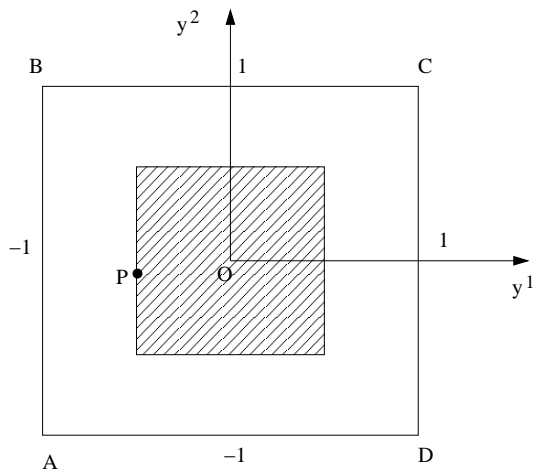


FIG. 4.4 – Position du point P

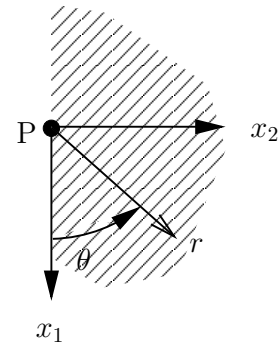


FIG. 4.5 – Repère polaire associé

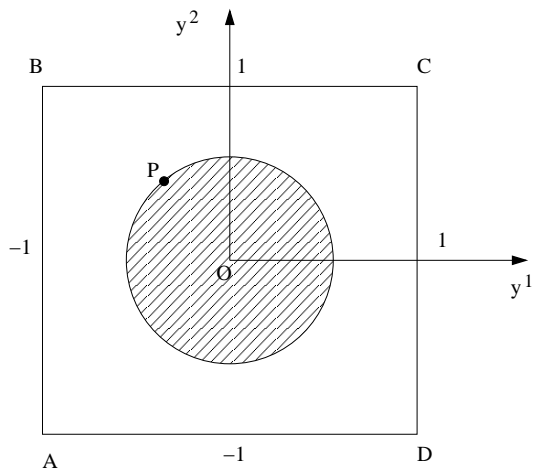


FIG. 4.6 – Autre position possible du point P

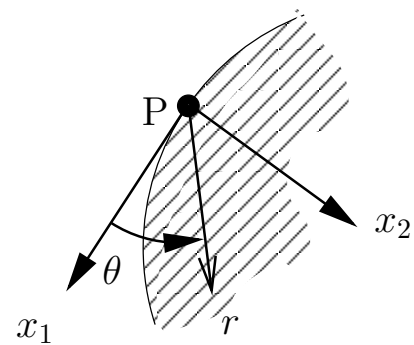


FIG. 4.7 – Repère polaire associé

Dans les deux cas $f^3(\theta)$ peut s'écrire dans le repère polaire local :

$$f^3(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{pour } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.56)$$

On a alors :

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2\theta) d\theta = 0$$

On a une nouvelle fois $a_2 = b_2 = 0$. Ainsi, si la frontière du chargement au point P est une droite, un cercle, ou tout autre courbe régulière dont la tangente est continue partout (ne possédant pas de coin), il n'y aura aucune singularité logarithmique. On retrouve alors un résultat connu : dans le cas d'une singularité le long d'une courbe régulière, u_3 a les mêmes singularités que f^3 .

Cas 3

On considère enfin le cas où le point P est sur la frontière de la zone de chargement où la tangente n'est pas continue. Autrement dit, on se place en un coin de la zone de chargement (Figs. 4.8 et 4.9).

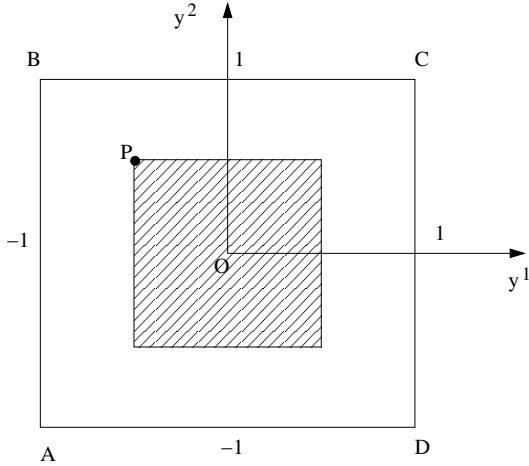


FIG. 4.8 – Position du point P

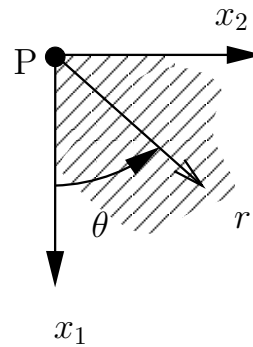


FIG. 4.9 – Repère polaire associé

Dans le cas d'un coin à 90° , la fonction $f^3(\theta)$ s'écrit localement dans le repère polaire :

$$f^3(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.57)$$

On a alors :

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta) d\theta = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi, un des deux coefficients de la décomposition de Fourier du chargement f^3 , ici b_2 , est non nul dans le cas d'un coin. On aura donc une singularité logarithmique dans ce coin si les 2 courbures principales y sont différentes.

Finalement, les résultats obtenus dans la section 4.2 peuvent se résumer de la façon suivante :

Proposition 4.2.1 *Considérons une coque elliptique bien-inhibée soumise à un chargement normal f^3 et un point P de la zone de chargement. On considère localement un paramétrage en coordonnées polaires autour du point P correspondant à $r = 0$. Si les 2 conditions suivantes sont vérifiées au point P :*

- la décomposition en série de Fourier du chargement f^3 par rapport à θ comporte au moins un terme de 2^{ème} rang (a_2 ou b_2) non nul. C'est le cas si la zone de chargement comporte un "coin".
- les courbures principales b_1^1 et b_2^2 ne sont pas égales en ce point (le point P n'est pas un point ombilical de la surface S)

alors une singularité logarithmique existe au point P .

L'existence de telles singularités logarithmiques sera observée numériquement à la section suivante.

4.3 Exemple d'un parabolôide elliptique

Nous proposons maintenant de visualiser numériquement l'existence de singularités des déplacements dues à une singularité du chargement dans le cas d'un parabolôide elliptique. Conformément à la théorie développée précédemment, les singularités seront logarithmiques (pour u_3 uniquement) si les hypothèses de la proposition 4.2.1 sont vérifiées, et plus classiques sinon.

Considérons le domaine $\Omega = \{(y^1, y^2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ et la surface elliptique S (Fig. 4.11) définie par la carte (Ω, ψ) où :

$$\psi(y^1, y^2) = (y^1, y^2, (y^1)^2 + (y^2)^2) \quad (4.58)$$

Considérons alors une coque définie par la surface moyenne S et ayant une épaisseur ε constante. La coque est encastrée sur tout son pourtour ce qui assure qu'elle est bien-inhibée. La coque est, en outre, soumise à un effort normal f^3 sur le domaine F défini par $F = \{(y^1, y^2) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$ (correspondant à la zone hachurée Fig. 4.10). D'après (1.53), nous prendrons $\hat{f}^3 = 10 \varepsilon MPa$ proportionnel à l'épaisseur ε , afin que f^3 soit constant. Nous considérons enfin des constantes élastiques correspondant à un acier classique : $E = 210\,000 MPa$ et $\nu = 0.3$. L'épaisseur relative ε est prise comme étant le rapport $\frac{\text{épaisseur}}{\text{longueur caractéristique}} = \frac{\text{épaisseur}}{2.9}$.

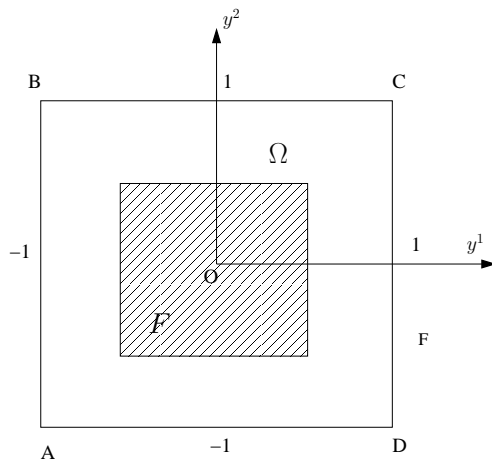


FIG. 4.10 – Domaine Ω et zone de chargement F

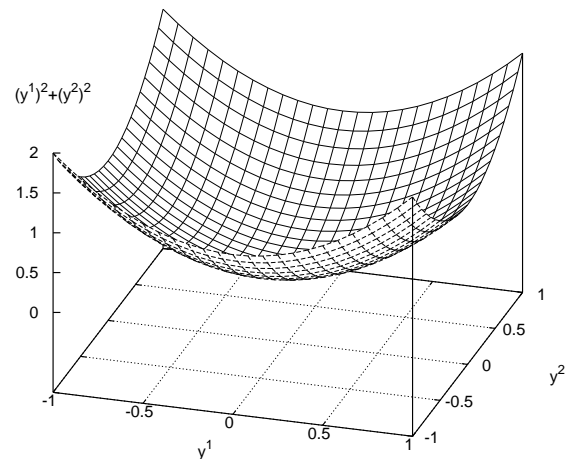


FIG. 4.11 – Surface moyenne S elliptique

Le problème étant symétrique par rapport aux lignes $y^1 = 0$ et $y^2 = 0$, nous ne modéliserons qu'un quart du domaine en appliquant les symétries suivantes sur les déplacements :

$$u_1 = 0 \text{ et } u_{3,1} = 0 \text{ sur la ligne } y^1 = 0 \quad (4.59)$$

$$u_2 = 0 \text{ et } u_{3,2} = 0 \text{ sur la ligne } y^2 = 0 \quad (4.60)$$

4.3.1 Caractéristiques géométriques

Commençons par déterminer les caractéristiques géométriques (base locale, tenseurs de courbures) du parabolôide elliptique défini en (4.58).

• Bases covariante et contravariante

Le plan tangent à la surface S est défini en tout point $\psi(y^1, y^2)$ de S par les 2 vecteurs tangents $a_\alpha = \partial_\alpha \psi$, soit ici :

$$a_1 = (1, 0, 2y^1) \text{ et } a_2 = (0, 1, 2y^2) \quad (4.61)$$

Le vecteur normal au plan est donc $N = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$ soit :

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(y^1)^2 + 4(y^2)^2}} \left(-2y^1, -2y^2, 1 \right) \quad (4.62)$$

Cette base n'est ni orthogonale ni normée. Le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ a donc respectivement pour composantes covariantes et pour composantes contravariantes :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 + 4(y^1)^2 & 4y^1y^2 \\ 4y^1y^2 & 1 + 4(y^2)^2 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

et

$$a^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{1 + 4(y^1)^2 + 4(y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + 4(y^2)^2 & -4y^1y^2 \\ -4y^1y^2 & 1 + 4(y^1)^2 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

On pose $C(y^1, y^2) = \frac{1}{1 + 4(y^1)^2 + 4(y^2)^2}$. On en déduit la base covariante :

$$a^1 = C(y^1, y^2) \left(1 + 4(y^2)^2, -4y^1y^2, 2y^1 \right) \quad \text{et} \quad a^2 = C(y^1, y^2) \left(-4y^1y^2, 1 + 4(y^1)^2, 2y^2 \right) \quad (4.65)$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^1 = 4y^1C(y^1, y^2) \quad \text{et} \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^2 = 4y^2C(y^1, y^2) \quad (4.66)$$

• Tenseur de courbure

Les composantes covariantes du tenseur de courbure sont données par $b_{\alpha\beta} = N \cdot a_{\alpha,\beta}$ (voir (1.12)). On a donc ici :

$$b_{\alpha\beta} = 2\sqrt{C(y^1, y^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Le fait que $\det(b_{\alpha\beta}) = 4C > 0$ prouve que la surface est bien elliptique en tout point de S . Les directions asymptotiques sont alors imaginaires pures.

Les courbures mixtes (qui sont les courbures physiques) sont alors :

$$b_{\beta}^{\alpha} = 2C(y^1, y^2)^{3/2} \begin{pmatrix} 1 + 4(y^2)^2 & -4y^1y^2 \\ -4y^1y^2 & 1 + 4(y^1)^2 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

La surface S ne possède donc qu'un seul point ombilical, situé en $(0, 0)$. Les courbures principales étant égales en ce point, elles le sont dans toutes les bases (toutes les bases sont principales). Ainsi, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 4.2, il ne pourra apparaître de singularité logarithmique en ce point même si le domaine de chargement possède un coin. Un exemple similaire sera étudié numériquement au paragraphe 4.3.7.

4.3.2 Résultats numériques

Pour chaque valeur de ε , nous ne modélisons qu'un quart du parabolöide. Le calcul est alors lancé avec un maillage initial uniforme comportant 236 éléments (Fig. 4.12). Le maillage est ensuite raffiné automatiquement. Le déplacement normal u_3 est représenté en mètres sur la Fig. 4.13 sur le quart du domaine après 7 itérations. On peut voir clairement les deux phénomènes qui apparaissent :

- une singularité de type Heavyside le long de la frontière de la zone de chargement
- une singularité logarithmique (ressemblant à un pic) au coin de la zone de chargement F .

Les sections suivantes concernent l'étude de ces deux singularités.

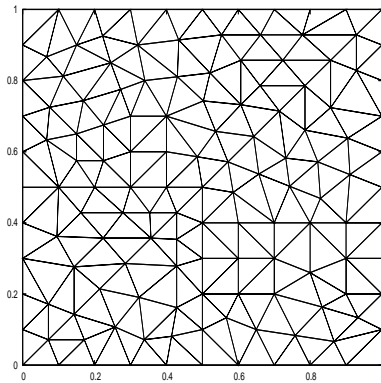


FIG. 4.12 – Maillage initial sur le quart du domaine (236 elts)

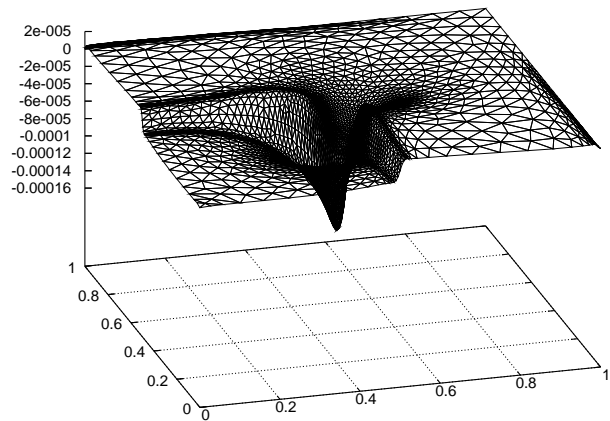


FIG. 4.13 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$

La couche interne due au chargement

En utilisant le résultat 1.5.1, on peut facilement déduire la singularité du déplacement u_3 d'après le chargement f^3 qui s'écrit dans Ω comme le produit de deux fonctions créneau :

$$f^3 = -10 [H(y^1 + 0.5) - H(y^1 - 0.5)] [H(y^2 + 0.5) - H(y^2 - 0.5)] \quad (4.69)$$

où $H(\cdot)$ est la fonction saut d'Heavyside : $H(y^1 - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } y^1 < a \\ 1 & \text{si } y^1 > a \end{cases}$.

Comme u^3 a les mêmes singularités que f^3 , le déplacement u_3 aura des singularités de type Heavyside sauf près du coin de la zone de chargement. Nous devrions observer sur les résultats des simulations numériques un saut de la fonction u_3 au niveau des lignes $y^1 = 0.5$ (pour $y^2 < 0.5$) et $y^2 = 0.5$ (pour $y^1 < 0.5$).

Tout d'abord nous allons nous intéresser à l'adaptation du maillage.

4.3.3 Adaptation du maillage

Considérons ici une épaisseur $\varepsilon = 10^{-4}$ fixée et observons l'évolution du maillage sur les figures 4.14 et 4.15 au cours du processus d'adaptation. On peut voir que le maillage est principalement raffiné le long du domaine de chargement F et encore plus autour du point $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. On a vu précédemment que la discontinuité du chargement induit une couche interne le long de la frontière du domaine de chargement F , ainsi qu'une singularité logarithmique aux coins lorsque les hypothèses de la proposition 4.2.1 sont vérifiées (ce qui est le cas ici). Avec le mailleur adaptatif BAMG, le maillage est raffiné dans les zones où le déplacement u_3 est le plus singulier (où ses dérivées secondes varient le plus).

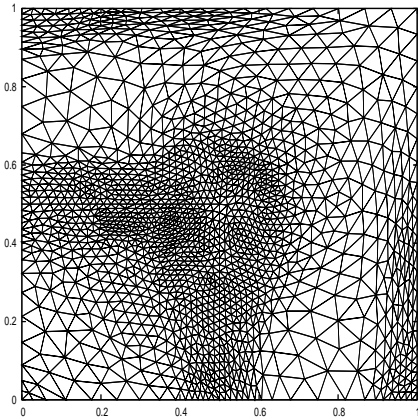


FIG. 4.14 – Maillage à la 3^{ème} itération (3076 éléments)

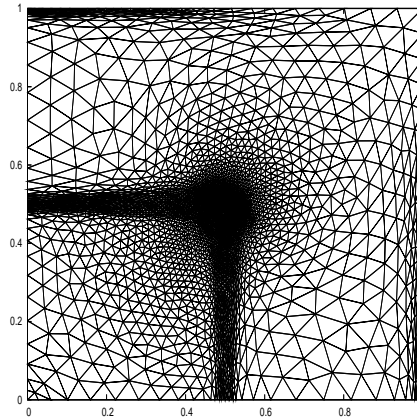


FIG. 4.15 – Maillage à la 7^{ème} itération (5351 éléments)

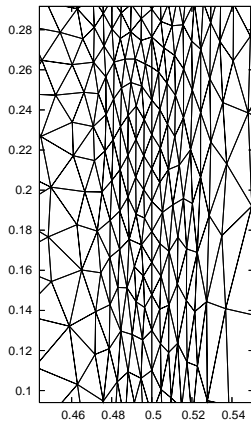


FIG. 4.16 – Maillage à l'intérieur de la couche en $y^1 = \frac{1}{2}$

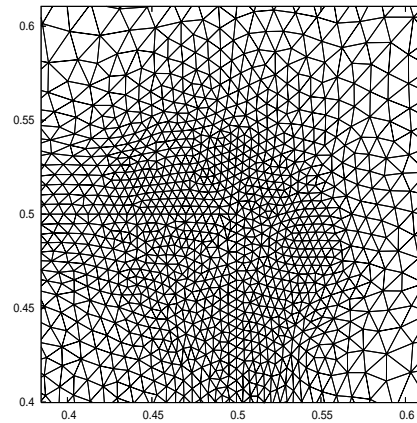


FIG. 4.17 – Maillage autour de la singularité logarithmique

On constate que l'aspect du maillage est différent selon la partie considérée. Dans la couche interne, les éléments sont anisotropes : la longueur du côté dans la direction de la couche est plus importante que celle du côté dans la direction perpendiculaire (Fig. 4.16). Cela est bien sûr dû à la singularité qui existe uniquement dans la direction perpendiculaire à la frontière du domaine F . Par contre, sur la figure 4.17 le maillage autour du coin du domaine de chargement est isotrope : la singularité logarithmique existe tout autour du point $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, il n'y a donc pas de direction privilégiée.

Intéressons-nous maintenant à la convergence du processus d'adaptation de maillage à travers le déplacement u_3 qui est le plus singulier. Les figures 4.18 et 4.19 montrent l'efficacité de la procédure de remaillage sur le calcul de u_3 . Alors que le maillage initial donne de mauvais résultats à l'intérieur de la couche (la forme de la singularité n'est pas bien décrite), les résultats à la 3^{ème} itération sont proches de la théorie. En effet, on observe bien le saut de u_3 à travers la ligne $y^1 = 0.5$, qui correspond à la singularité en Heavyside prédite théoriquement. Les résultats sont encore plus précis aux itérations suivantes.

Un autre point à souligner est que le nombre de noeuds (ou d'éléments) augmente à l'intérieur de la couche mais reste constant en dehors. En effet, entre les lignes $y^1 = 0$ et $y^1 = 0.25$, ainsi qu'à partir de $y^1 = 0.75$, les valeurs numériques de u_3 sont les mêmes pour chaque itération. Cela est dû à l'absence de singularité dans ces zones où u_3 y est régulier et est donc très bien décrit avec peu d'éléments.

Finalement, comparons les résultats obtenus aux différentes itérations du processus d'adaptation de maillage, avec ceux résultant d'un maillage uniforme contenant à peu près le même nombre d'éléments qu'à la septième itération (5582 éléments). On voit clairement sur les figures 4.18 et 4.19 que le maillage uniforme donne de mauvais résultats à l'intérieur de la couche. L'approximation de u_3 obtenue à la 3^{ème} itération avec un maillage adapté anisotrope contenant presque deux fois moins d'éléments (3076 exactement) qu'un maillage uniforme, donne de meilleurs résultats. Ce résultat met en évidence l'intérêt d'un maillage adaptatif anisotrope pour les problèmes présentant des singularités et des couches limites ou internes.

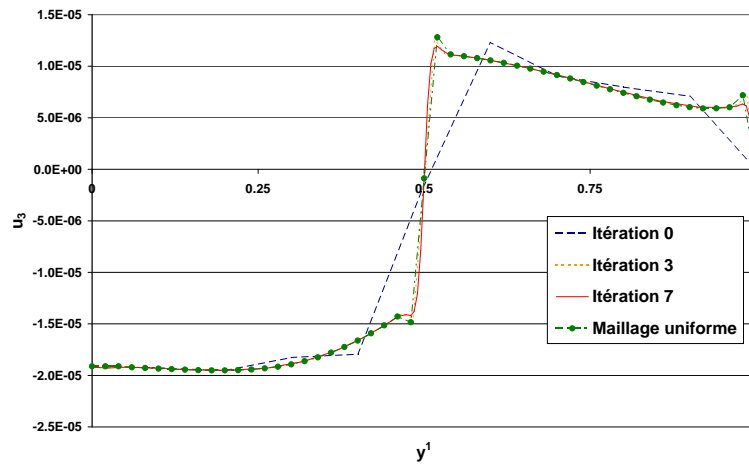


FIG. 4.18 – Convergence de u_3 pendant l'adaptation de maillage pour $y_2 = 0$ et $y_1 \in [0, 1]$

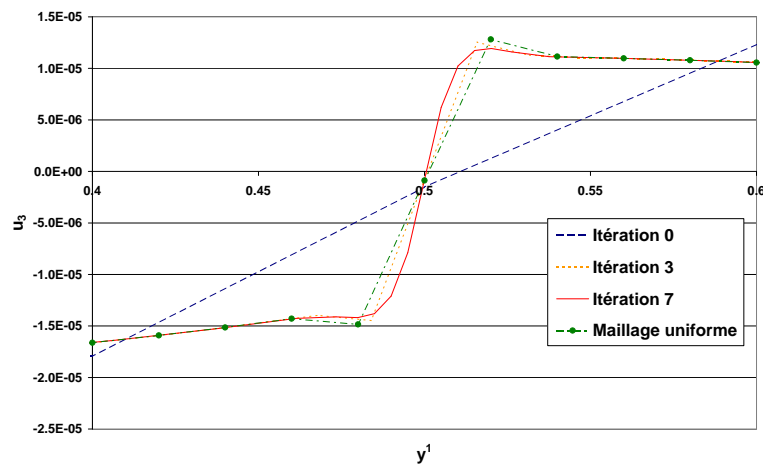


FIG. 4.19 – Convergence de u_3 pendant l'adaptation de maillage pour $y_2 = 0$. Zoom sur l'intervalle $y_1 \in [0.4, 0.6]$

4.3.4 Étude de la couche interne en $y^1 = 0.5$

Dans cette section, on se propose de déterminer l'épaisseur de la couche interne grâce aux simulations numériques faites sur le même exemple que précédemment. Les variations de u_3 pour différentes valeurs de ε sont représentées sur la figure 4.20. On rappelle que l'effort appliqué est proportionnel à ε sur le domaine F . Ainsi, le déplacement u_3 reste à peu près le même en dehors de la couche interne (dans les régions où u_3 est continue à la limite $\varepsilon = 0$) et il est facile de comparer les résultats sur la même figure.

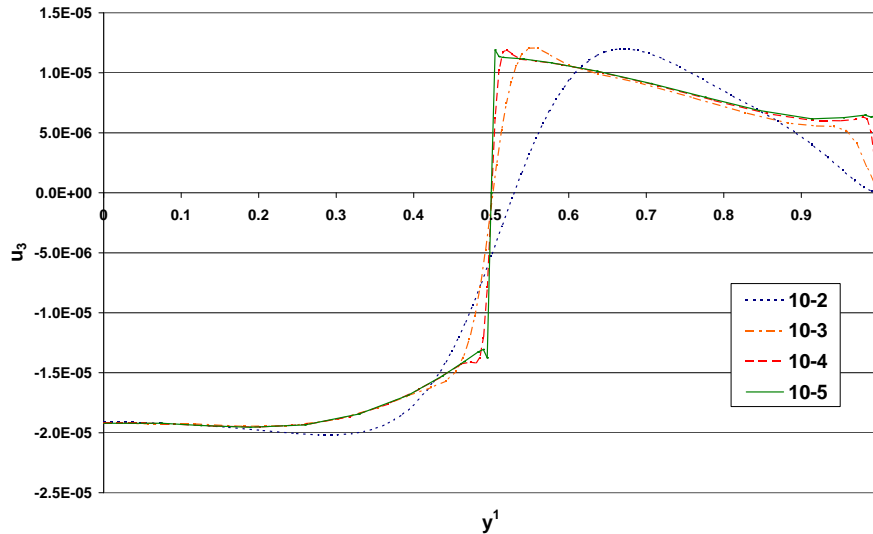


FIG. 4.20 – Déplacement u_3 pour différentes valeurs de ε allant de 10^{-2} à 10^{-5}

Quand ε tend vers zéro, nous avons vu que u_3 tend vers une singularité de type Heavyside. Pour des coques plus épaisses ($\varepsilon = 10^{-2}$ par exemple), u_3 est une fonction continue et il est difficile de mesurer l'épaisseur de la couche interne. Une première possibilité consiste à mesurer la distance entre les deux extrema locaux près de $y^1 = 0.5$. L'extremum est difficile à déterminer précisément pour de relativement grands ε (surtout pour $y^1 < 0.5$). Il est donc préférable de mesurer la distance η (voir Fig. 4.21) pour $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$. Nous cherchons ensuite une relation de la forme $\eta = \varepsilon^\alpha$. Pour cela, nous représentons Fig. 4.22 $\log(\eta)$ en fonction de $\log(\varepsilon)$ pour différentes valeurs de ε . Les résultats sont proches de la théorie² : on trouve alors $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.5163})$ avec un facteur de régression linéaire très proche de 1.

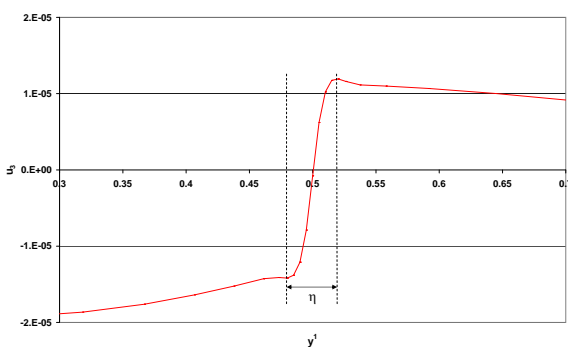


FIG. 4.21 – Mesure de η sur le déplacement u_3

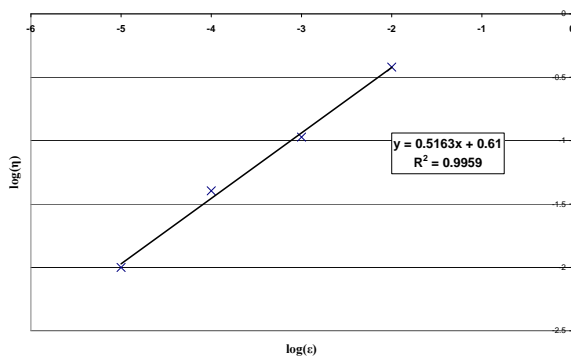
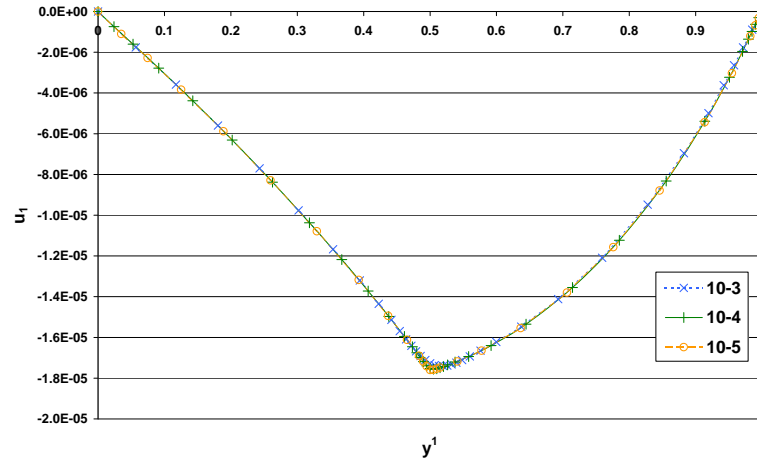
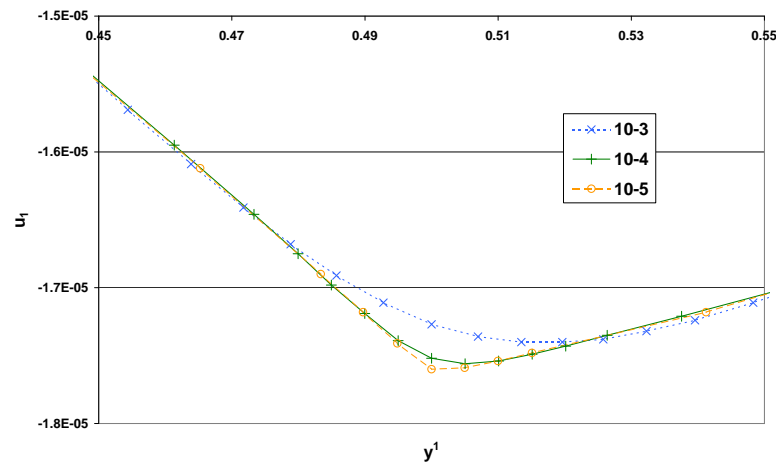


FIG. 4.22 – Tracé de $\log(\eta)$ en fonction de $\log(\varepsilon)$ mesuré sur u_3

Regardons également l'évolution des autres déplacements u_1 et u_2 . Ils ont un comportement identique mais inversé par rapport aux axes y^1 et y^2 . En effet, les symétries du problème imposent $u_1(y^1, y^2) = u_2(y^2, y^1)$. De ce fait, contentons nous d'étudier u_1 sur la ligne $y^2 = 0$ (du fait des symétries, u_2 est nul sur cette même ligne).

²Pour de tels problèmes, l'épaisseur de la couche interne est de l'ordre de $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

FIG. 4.23 – Déplacement u_1 sur la droite $y^2 = 0$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 4.24 – Déplacement u_1 sur la droite $y^2 = 0$ entre $y^1 = 0.45$ et $y^1 = 0.55$ pour différents ε

D'après le résultat 1.5.1 du chapitre 1, dans le cas d'une coque elliptique bien-inhibée considérée ici, les déplacements u_1 et u_2 ont des singularités d'un ordre inférieur à celle de f^3 . Autrement dit, ils doivent avoir une singularité en $(y^1 - 0.5)H(y^1 - 0.5)$. C'est bien ce qu'on observe : u_1 est proche d'une fonction dont la dérivée est discontinue en $y^1 = 0.5$ (voir Fig. 4.23). Au cours du processus asymptotique, le déplacement u_1 sur la ligne $y^2 = 0$ varie très peu : on voit juste sur la Fig. 4.24 que la dérivée en $y^1 = 0.5$ tend de plus en plus à être discontinue.

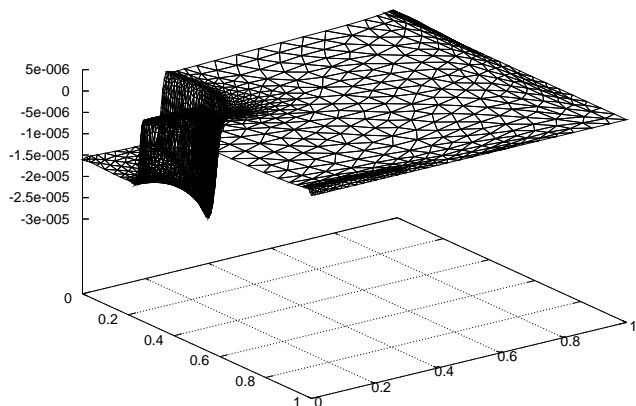
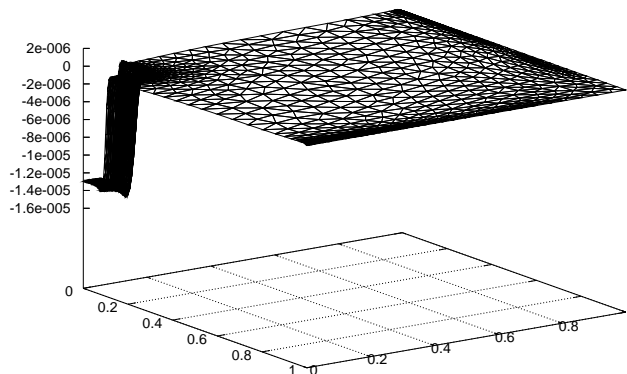
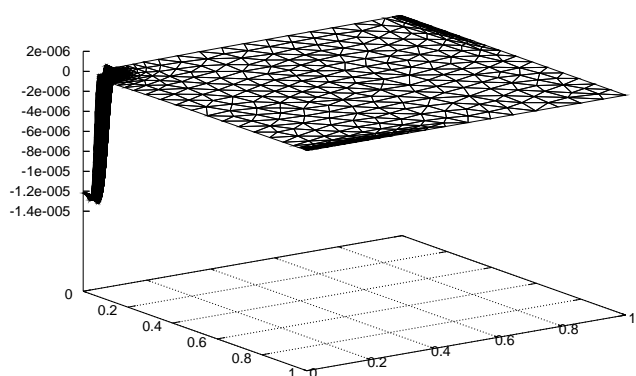
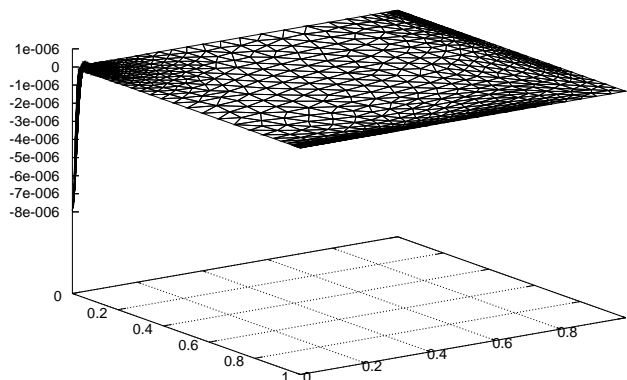
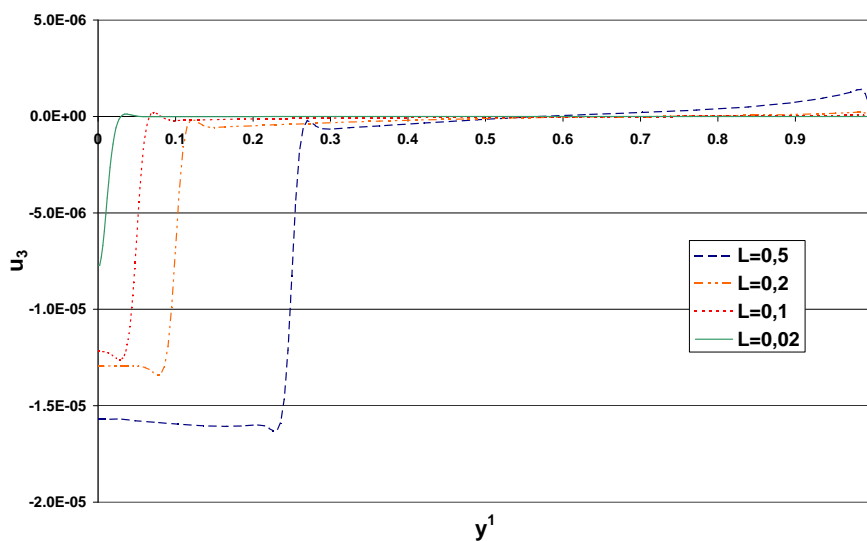
4.3.5 Influence du domaine de chargement

Pour étudier l'influence du domaine de chargement, considérons le même problème que précédemment mais faisons varier la taille de la zone de chargement F . Appelons L la largeur du côté de la zone de chargement carrée. On considère des valeurs décroissantes de L de telle sorte que le chargement tende vers une distribution de Dirac à l'origine.

Les calculs numériques sont toujours réalisés sur un quart du domaine. On observe Figs. 4.25 à 4.28 que, lorsque L diminue, la discontinuité de u_3 suit la frontière du domaine de chargement. De plus, il est évident sur la Fig. 4.29 que le déplacement u_3 tend vers un Dirac à l'origine.

On peut également remarquer que la singularité logarithmique tend à disparaître lorsque L tend vers

zéro. En effet, lorsque le chargement f^3 tend vers une distribution de Dirac à l'origine, le coin de la zone de chargement tend vers l'origine $(0,0)$ qui est le seul point ombilical de la surface S . Il n'y aura donc pas de singularité logarithmique en ce point d'après la proposition 4.2.1.

FIG. 4.25 – Déplacement u_3 pour $L = 0.5$ FIG. 4.26 – Déplacement u_3 pour $L = 0.2$ FIG. 4.27 – Déplacement u_3 pour $L = 0.1$ FIG. 4.28 – Déplacement u_3 pour $L = 0.02$ FIG. 4.29 – Déplacement u_3 pour différentes valeurs de L

4.3.6 La singularité logarithmique au coin du chargement

Comme nous l'avons vu dans la section 4.2, dans le cas elliptique, il peut y avoir des singularités logarithmiques aux coins du domaine de chargement si les deux conditions de la proposition 4.2.1 sont satisfaites. Vérifions le dans le cas particulier considéré ici.

Tout d'abord, le développement en série de Fourier de f^3 au voisinage du point $P(0.5, 0.5)$ donne : $a_2 = 0$ mais $b_2 \neq 0$. En effet, au voisinage de P , le chargement peut s'exprimer en coordonnées polaires (Fig. 4.9) par :

$$f^3(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 1 & \text{pour } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (4.70)$$

On a donc :

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos(2\theta) d\theta = 0 \quad (4.71)$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^3(\theta) \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \quad (4.72)$$

La deuxième condition est que les courbures principales en composantes mixtes doivent être différentes en P . Or, nous avons vu que le seul point ombilical de S se situe en $(0, 0)$. Ainsi le résultat 4.2.1 prévoit l'existence d'une singularité logarithmique de u_3 au niveau du coin $(0.5, 0.5)$ du domaine chargement F .

Essayons maintenant de visualiser très précisément cette singularité à partir des simulations numériques.

La figure 4.30 représente le déplacement normal u_3 sur la ligne $y^2 = y^1$ qui passe bien par P .

Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, le maximum de u_3 se trouve à $y^1 = 0.48$. N'étant pas exactement au problème limite ($\varepsilon = 10^{-4} \neq 0$), u_3 n'est pas exactement une fonction logarithmique au voisinage de P . Il y a une partie de la courbe qui est en quelque sorte un lien régulier entre les 2 parties logarithmiques de u_3 . Pour mieux décrire u_3 au niveau du coin, faisons un zoom au voisinage du point P pour $y^1 > 0.5$ (Fig. 4.31). Nous avons enlevé les points constituant le lien régulier entre les 2 parties logarithmiques. On considère alors le point où u_3 atteint son maximum comme l'origine du repère polaire local (Fig. 4.9) et on appelle r la distance entre cette origine et les autres points. Le graphe de u_3 pour $0 < r < 0.1$ (sur le côté $y^1 > 0.5$) montre que u_3 est très proche d'une fonction logarithmique.

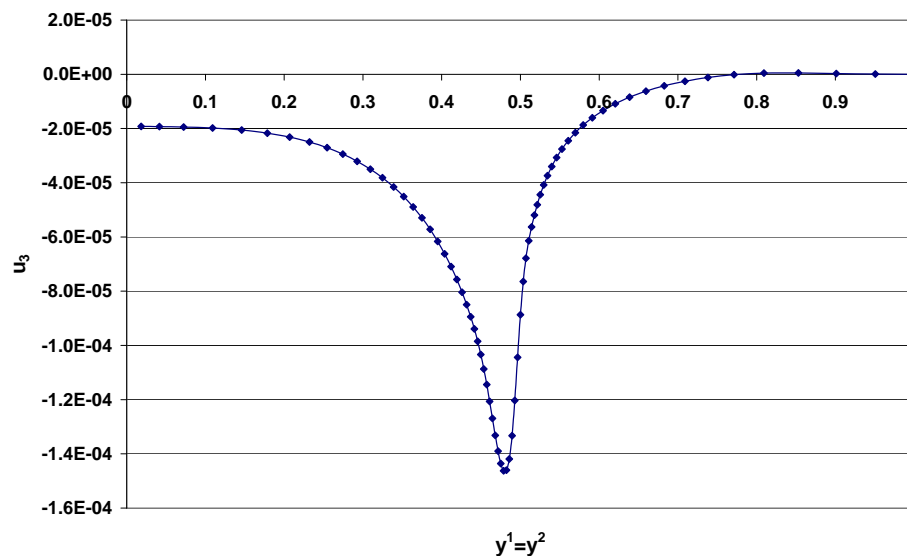


FIG. 4.30 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^2 = y^1$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

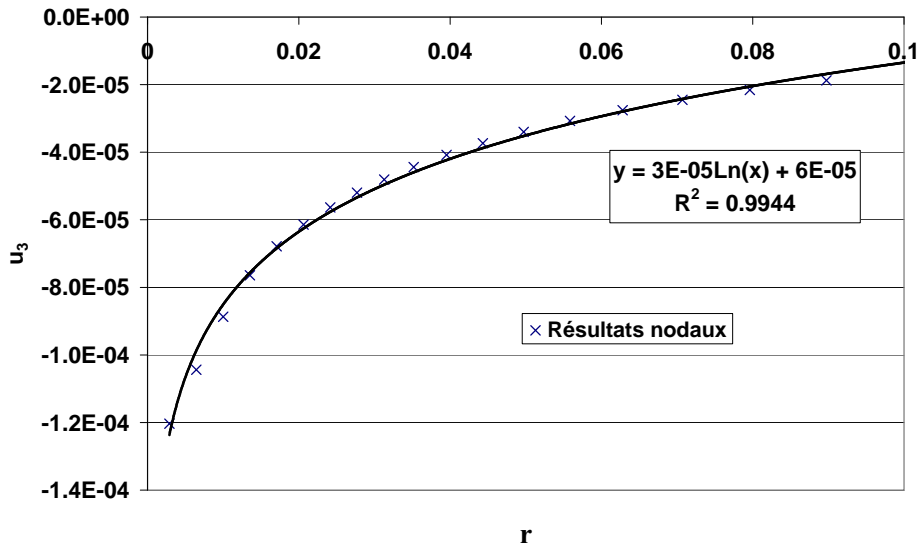


FIG. 4.31 – Comparaison entre u_3 et une fonction logarithmique au voisinage du point P

Évolution de la singularité logarithmique

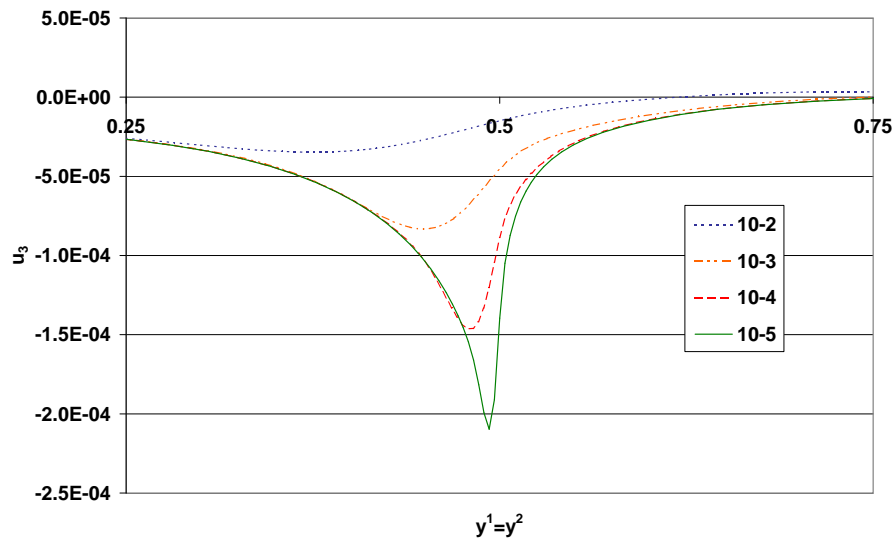


FIG. 4.32 – Évolution de la singularité logarithmique pour différentes valeurs de ε de 10^{-2} à 10^{-5}

La figure 4.32 montre l'évolution de la singularité logarithmique quand ε diminue. On voit clairement que lorsque ε tend vers zéro, le déplacement normal tend vers la solution du problème de membrane qui possède une singularité logarithmique près du coin $y^1 = y^2 = 0.5$. Pour une coque assez épaisse ($\varepsilon = 10^{-2}$), la solution u_3 est beaucoup plus régulière et la singularité n'est pratiquement pas visible. Celle-ci apparaît plus clairement pour des plus petites valeurs de ε (pour $\varepsilon < 10^{-4}$).

D'autre part, quand ε diminue, le maximum de u_3 devient plus grand : $3.5 \cdot 10^{-5}$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$ et $2.1 \cdot 10^{-4}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$. Il est facile de voir que ce maximum est proportionnel à $\log(\varepsilon)$.

On peut aussi remarquer que le "lien régulier" entre les deux parties logarithmiques de u_3 (Fig. 4.32)

est de plus en plus étroit. Ces 2 aspects sont en relation. En effet, u_3 se comporte comme une fonction logarithmique ($u_3 \approx c \log(r)$) sauf dans une zone toute proche de P qui tend vers zéro lorsque ε diminue. Si la taille de cette zone est de l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$ avec α fixé, la partie logarithmique de u_3 commence à $r = a \varepsilon^\alpha$, a étant une constante réelle positive. De plus, comme le maximum de u_3 est proche du maximum de la partie logarithmique atteint en $r = a \varepsilon^\alpha$ (le lien régulier qui contient le maximum de u_3 n'augmente que de peu le maximum de la partie logarithmique), on a :

$$u_{3max} \approx c \log(a \varepsilon^\alpha) \underset{0}{\sim} c \alpha \log(\varepsilon) \quad (4.73)$$

Ainsi, la valeur maximale de u_3 au voisinage de P est bien proportionnelle à $\log \varepsilon$. De plus, on peut remarquer que la position du maximum de u_3 tend progressivement vers $P = (0.5, 0.5)$ lorsque ε tend vers 0.

4.3.7 Un cas sans singularité logarithmique

Comme nous l'avons vu dans la section 4.2.2, il n'existe pas de singularité logarithmique au niveau du coin du domaine de chargement quand les courbures principales γ sont égales. Pour vérifier cela numériquement, nous considérons le même problème que précédemment mais avec une demi-sphère de rayon 100 mm au lieu du parabolöide elliptique. Les courbures principales γ sont égales sur tout le domaine. Le chargement est toujours appliqué sur un domaine F présentant 4 coins. La demi-sphère est encastrée sur tout son pourtour et est donc bien-inhibée. Nous ne modélisons encore qu'un quart du problème en considérant les mêmes conditions de symétrie.

Le maillage ainsi que le déplacement normal sont représentés respectivement Fig. 4.33 et Fig. 4.34 à la dernière itération de l'adaptation de maillage (avec 7559 éléments) pour $\varepsilon = 10^{-4}$.

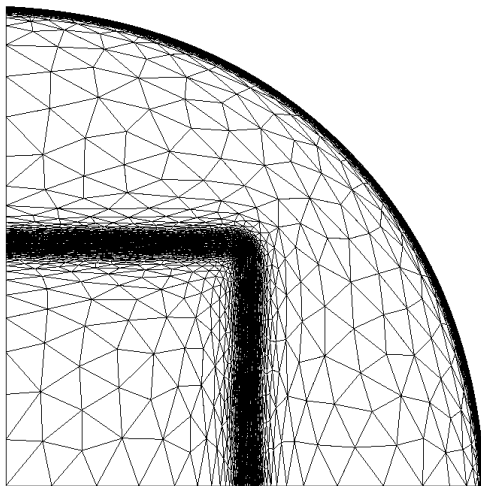


FIG. 4.33 – Maillage à la dernière itération

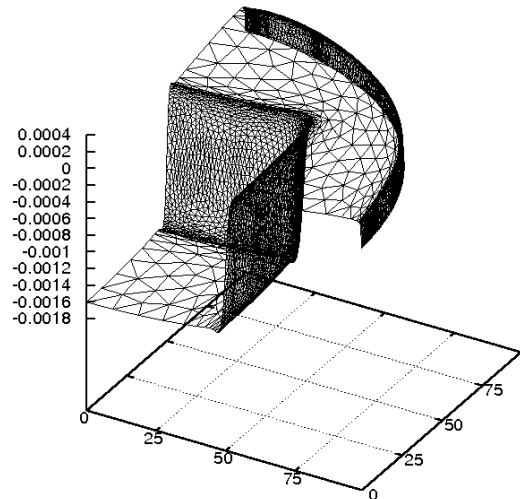


FIG. 4.34 – Déplacement u_3 sur le quart du domaine

On voit clairement que pour ce problème, il n'y a aucune singularité logarithmique au niveau du coin. On observe seulement un saut de u_3 dans la direction perpendiculaire à la frontière de chargement, comme prédit par la théorie dans le cas d'une coque elliptique (voir résultat 1.5.1).

On a donc bien vérifié numériquement que lorsque les courbures principales sont égales sur tout le domaine, il n'y a pas de singularité logarithmique.

Ceci serait également vrai si les deux courbures principales étaient égales uniquement au coin du domaine de chargement (pas nécessairement partout comme dans le cas de la sphère). Cela serait le

cas si le domaine de chargement F avait un coin à l'origine $(0, 0)$, seul point ombilical du parabolôïde elliptique considéré au paragraphe 4.3.

4.3.8 Un autre cas sans singularité logarithmique

Revenons au parabolôïde elliptique étudié en 4.3. Prenons cette fois une zone de chargement de forme circulaire. Le domaine F ne possède cette fois pas de coin. La première condition de la proposition 4.2.1 n'est pas satisfaite. On a en effet : $a_2 = b_2 = 0$ pour un tel chargement en tout point de la frontière (voir section 4.2.3).

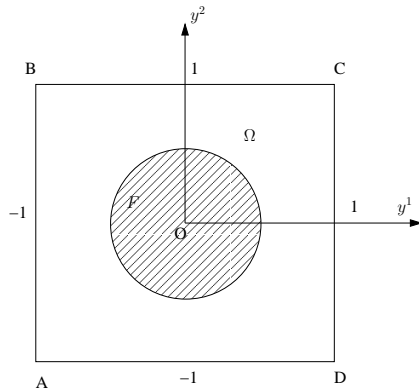


FIG. 4.35 – Domaine Ω

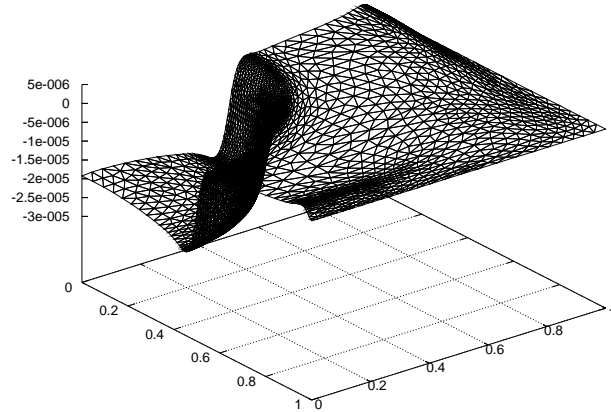


FIG. 4.36 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Ainsi, il ne devrait exister aucune singularité logarithmique sur la frontière de la zone de chargement. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 4.36 : un saut de u_3 correspondant à une singularité en Heaviside de même ordre que la discontinuité du chargement, comme prédit par le résultat 1.5.1 du chapitre 1.

4.3.9 Énergies de membrane et de flexion

Dans cette partie, revenons à nouveau au problème du parabolôïde elliptique présenté au paragraphe 4.3. Nous allons étudier la répartition des énergies, représentée sur les Figs. 4.37 et 4.38 pour $\varepsilon = 10^{-4}$ sur un quart du domaine.

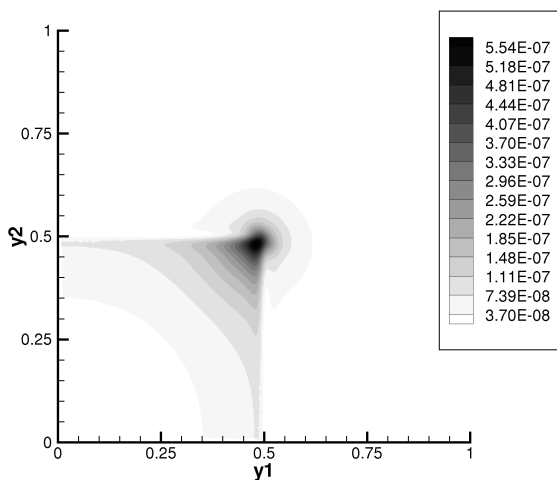


FIG. 4.37 – Densité surfacique d'énergie de membrane pour $\varepsilon = 10^{-4}$

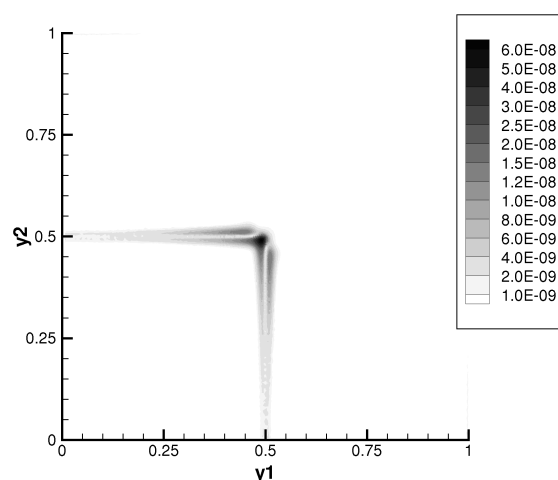


FIG. 4.38 – Densité surfacique d'énergie de flexion pour $\varepsilon = 10^{-4}$

Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, on peut voir que les 2 énergies sont réparties de la même façon : le long de la frontière du chargement mais surtout au niveau de la singularité logarithmique. Dans le paragraphe 4.3.4, nous avons déterminé l'épaisseur de la couche interne à partir du déplacement normal u_3 . Nous pouvons également déterminer cette épaisseur à partir des densités surfaciques d'énergie. Pour cela, regardons l'évolution de la proportion d'énergie surfacique de flexion par rapport à l'énergie surfacique totale (Figs. 4.39 et 4.40).

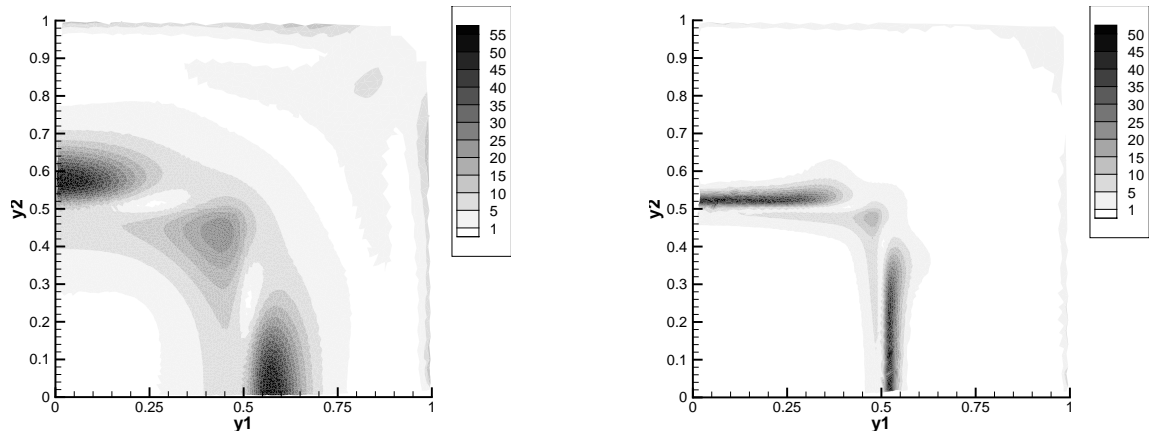


FIG. 4.39 – Pourcentage de densité d'énergie de flexion pour $\varepsilon = 10^{-2}$ et 10^{-3}

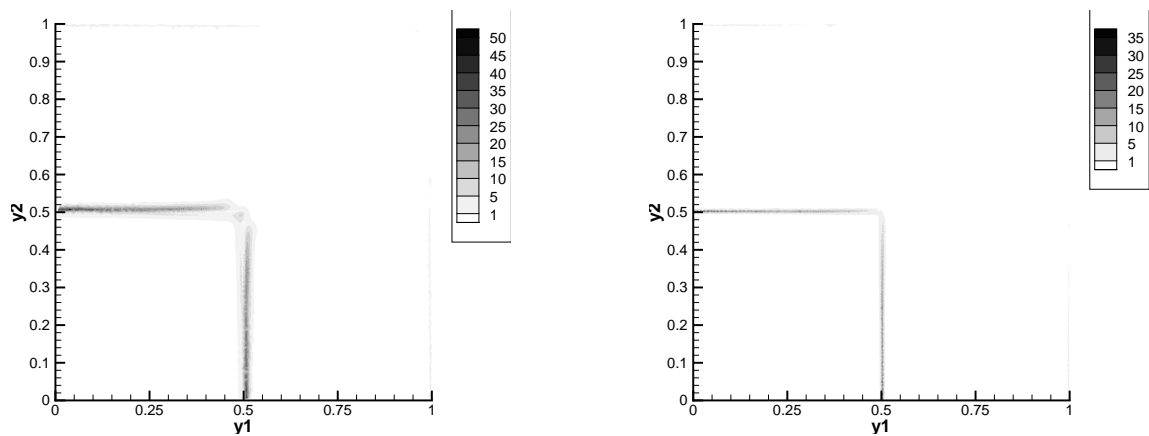


FIG. 4.40 – Pourcentage de densité d'énergie de flexion pour 10^{-4} et 10^{-5}

Nous savons que la particularité de la couche interne est que la flexion y reste significative, alors qu'elle devient négligeable dans le reste de la coque lorsque $\varepsilon \searrow 0$. Les deux densités surfaciques d'énergie y sont donc du même ordre. Ainsi, si on considère que E_f est du même ordre que E_m si elle représente au moins 10% de la densité d'énergie totale, la zone où E_f représente plus de 10% peut être considérée comme étant la couche interne. On peut voir clairement sur les Figs. 4.39 et 4.40 que l'épaisseur de la couche limite diminue quand ε tend vers zéro.

En mesurant pour chaque valeur de ε la largeur η de la zone où E_f est du même ordre que E_m , on peut déterminer l'épaisseur de la couche interne. En effet, en traçant $\log \eta$ en fonction de $\log \varepsilon$ sur la figure 4.41, on obtient une épaisseur de couche de l'ordre de $\varepsilon^{0.5012}$ alors que la valeur théorique est de $\varepsilon^{1/2}$ (voir 1.5.1). Ainsi, la détermination de l'épaisseur de couche par la répartition d'énergie donne ici de très bons résultats, même meilleurs qu'à partir des déplacements (voir paragraphe 4.3.4).

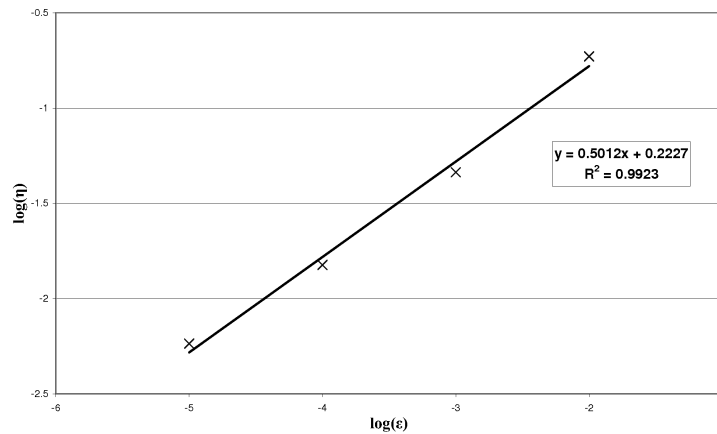


FIG. 4.41 – $\log(\eta)$ en fonction de $\log(\varepsilon)$ mesuré sur les figures 4.39 et 4.40

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié théoriquement et numériquement deux types de singularités qui peuvent apparaître dans le cas de coques elliptiques bien-inhibées. Il s’agit en premier lieu d’une singularité usuelle que l’on rencontre lorsque le chargement est singulier le long d’une courbe non-caractéristique. Nous avons alors vérifié numériquement les résultats théoriques suivants pour ce type de singularité :

- le déplacement u_3 tend à avoir la même singularité que f^3 lorsque $\varepsilon \searrow 0$, alors que u_1 et u_2 sont d’un ordre moins singulier,
- les énergies de déformation membranaire et de flexion se concentrent au niveau des couches internes,
- l’épaisseur de la couche interne est proportionnelle à $\varepsilon^{1/2}$.

En outre, nous avons mis en évidence l’existence d’une singularité logarithmique de u_3 peu connue qui apparaît quand le domaine de chargement comporte des coins. Nous avons démontré théoriquement son existence et étudié numériquement l’évolution de u_3 par des simulations utilisant un maillage adaptatif. On a bien constaté numériquement que u_3 tend vers une fonction logarithmique et que les énergies de membrane et de flexion sont encore plus importantes au niveau de cette singularité logarithmique ponctuelle que dans les couches internes.

L’utilisation d’un maillage adaptatif a permis d’approcher numériquement très précisément ces deux types de singularité, en raffinant de manière anisotrope dans la couche interne et de manière isotrope au voisinage de la singularité logarithmique.

Chapitre 5

Étude des coques elliptiques mal-inhibées

5.1 Généralités

Dans ce chapitre, on étudiera à la différence du chapitre précédent, les coques elliptiques ayant une partie de leur bord libre : il s'agit des coques elliptiques mal-inhibées. Le problème est alors sensitif et il apparaît un phénomène de complexification lorsque ε tend vers zéro : des oscillations apparaissent dans la direction tangentielle au bord libre, alors que les déplacements décroissent exponentiellement vers l'intérieur de la coque. Ce type de problème a été mis en évidence d'une manière générale dans [66] et plus spécifiquement pour les coques dans [11, 45, 75].

On peut montrer que dans le cas des problèmes sensitifs (voir paragraphe 5.3), le problème limite ne satisfait pas à la condition de Shapiro-Lopatinskii : il est ainsi mal posé et n'a pas de solution dans l'espace des distributions. Des problèmes modèles [35, 36, 70] permettent de montrer qu'il existe cependant des solutions dans un espace beaucoup plus grand que l'espace des distributions. Il s'agit de l'espace \mathcal{Z}' , image de l'espace des distributions (tempérées ou non) par transformée de Fourier. Les éléments de \mathcal{Z}' sont des fonctionnelles analytiques (terme générique qui désigne les éléments des espaces duaux d'espaces de fonctions analytiques). Mais les éléments de \mathcal{Z}' peuvent difficilement être considérés comme des fonctions (même généralisées). En effet, ils sont non seulement très singuliers, mais ils le sont partout, comme on le verra dans un exemple plus tard. En général, ils n'ont pas de support, et on ne peut pas parler de leur valeur en un point (comme une fonction) ou au voisinage d'un point (comme une distribution).

Dans ce chapitre, on présentera dans un premier temps la condition de Shapiro-Lopatinskii pour le problème membranaire et différents types de conditions aux limites associées. Le paragraphe suivant résumera les résultats obtenus dans le cas de problèmes modèles, et expliquera comment ils peuvent être généralisés au cas des coques. Enfin, des résultats numériques viendront illustrer les principaux résultats théoriques présentés. On étudiera en particulier la convergence du modèle de Koiter $\mathcal{P}(\varepsilon)$ vers le problème de membrane limite mal posé et le phénomène de complexification qui apparaît quand ε diminue. On mettra ensuite en évidence l'influence de la taille du bord libre sur les déplacements résultants pour de très faibles valeurs de ε . La répartition des énergies nous donnera également des informations importantes sur la localisation des oscillations qui se concentrent près du bord libre. Enfin un dernier exemple illustrera l'importance des conditions aux limites (de bord libre ou non) dans le cas d'un chargement localisé au niveau d'un coin du domaine Ω .

5.2 La condition de Shapiro-Lopatinskii

En premier lieu, rappelons que la condition de Shapiro-Lopatinskii pour un système (ou une equation) donné, et ses conditions aux limites associées, représente en quelque sorte le fait que le système soit en harmonie ou non avec ses conditions aux limites. Pour vérifier si la condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite, il faut considérer le problème homogène simplifié associé dans un demi-plan avec des conditions aux limites homogènes. On ne garde que les termes d'ordre supérieur (on annule tous les symboles de Christoffel) et on gèle tous les coefficients variables (on prend leur valeur au point où l'on vérifie si la condition est satisfaite). On cherche alors des solutions sinusoïdales le long du bord et décroissantes exponentiellement dans la direction perpendiculaire au bord vers l'intérieur du domaine. S'il existe de telles solutions non nulles, on dit que la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite. Par contre, si les seules solutions de ce type sont identiquement nulles, alors la condition est satisfaite.

Le fait que cette condition ne soit pas satisfaite conduit à une sorte de non-unicité des solutions. En effet, le problème étant homogène, toutes les données (notamment le chargement) sont nulles. Cependant, le problème simplifié dans le demi-plan a des solutions non nulles. Même si ce sont des solutions dans le demi-plan considéré, lorsque l'on considère le problème général dans le domaine Ω complet, elles apparaissent comme des solutions locales au voisinage du bord où la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite. Ainsi, la structure des solutions du problème complet dépend également de considérations non-locales, tout comme dans un problème où la condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite sur tout le bord.

Dans la suite, nous allons vérifier si la condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite ou non pour le problème membranaire limite avec différents types de conditions aux limites associées.

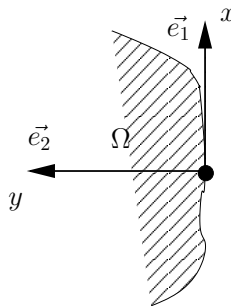


FIG. 5.1 – Repère utilisé et domaine Ω considéré

Considérons une coque elliptique ayant un bord tangent à la direction \vec{e}_1 , où \vec{e}_2 est la direction perpendiculaire à \vec{e}_1 vers l'intérieur du domaine Ω (Fig. 5.1). On considère alors deux types de conditions aux limites associées :

$$\text{Bord fixé} : u_1 = u_2 = 0 \text{ (condition de Dirichlet)} \quad (5.1)$$

$$\text{Bord libre} : T^{\alpha\beta} n_\beta = 0 \text{ (condition de Neumann)} \quad (5.2)$$

On rappelle que les conditions aux limites ne portent que sur u_1 et u_2 dans le cas du problème membranaire. Comme u_3 n'est que $L^2(\Omega)$, sa valeur ne peut pas être définie sur le bord.

La condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas vérifiée (voir [82], p.92) s'il existe des solutions non nulles du problème limite dans le demi-plan $y > 0$ avec $f^i = 0$ et satisfaisant aux conditions aux limites, ayant la forme :

$$u^0 = U(y)e^{i\mu x} \quad (5.3)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $U(y) = (U_1(y), U_2(y), U_3(y))$ désignant une fonction exponentiellement décroissante vers l'intérieur du domaine Ω .

Remarque 5.2.1 Les solutions (5.3) peuvent être vues comme une transformée de Fourier $x \rightarrow \mu$. Elles sont $\frac{2\pi}{|\mu|}$ -périodiques en x . Cela nous permet d'étudier le problème sur une bande de périodicité $B = [0, \frac{2\pi}{\mu}] \times [0, +\infty[$.

Considérons u^0 , une solution du système membranaire simplifié homogène qui s'écrit :

$$\begin{cases} -\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $T^{\alpha\beta}(u^0) = A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}$ et $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - b_{\alpha\beta} u_3$. Les dérivées covariantes ont été remplacées par des dérivées usuelles pour ne tenir compte que des termes d'ordre supérieur.

En multipliant chaque ligne du système respectivement par \bar{u}_1^0 , \bar{u}_2^0 et \bar{u}_3^0 , où \bar{u}_i^0 désigne le complexe conjugué de u_i^0 , et en sommant les 3 lignes, après une intégration par parties, on obtient la formulation variationnelle du modèle de membrane dans la bande de périodicité B :

$$\int_B T^{\alpha\beta}(u^0) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}^0) dS = \int_B A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u^0) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}^0) dS = 0 \quad (5.5)$$

Lors de l'intégration par parties, les termes intégrés sur le bord ont la forme $n_\alpha T^{\alpha\beta}(u^0) \bar{u}_\beta^0$ et s'annulent pour différentes raisons à cause des 2 conditions aux limites considérées :

- sur la ligne $y = 0$ du fait des conditions limites (5.1) ou (5.2).
- pour $y \rightarrow \infty$ car $U(y)$ est exponentiellement décroissante vers l'infini.
- sur les lignes $x = 0$ et $x = \frac{2\pi}{\mu}$ du fait de la périodicité (la normale \vec{n} en $x = 0$ est opposée à celle en $x = \frac{2\pi}{\mu}$ et la somme des deux termes s'annule).

En utilisant la propriété de positivité des coefficients $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$, le problème est équivalent à :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u^0) = 0, \quad (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2 \quad (5.6)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \partial_x U_1 - b_{11} U_3 = 0 \\ \partial_y U_2 - b_{22} U_3 = 0 \\ \partial_x U_2 + \partial_y U_1 - 2b_{12} U_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} i\mu U_1 - b_{11} U_3 = 0 \\ \partial_y U_2 - b_{22} U_3 = 0 \\ i\mu U_2 + \partial_y U_1 - 2b_{12} U_3 = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

A partir de là, nous étudions séparément les deux conditions aux limites en ne gardant que les termes d'ordre supérieur.

5.2.1 Cas d'un bord libre

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème limite de membrane avec une condition aux limites de type Neumann (bord libre).

Proposition 5.2.1 Une condition aux limites de Neumann (5.2) associée au problème limite de membrane ne satisfait pas à la condition de Shapiro-Lopatinskii.

En effet, dans ce cas, on peut trouver une solution u^0 de la forme (5.3) et plus précisément :

$$u^0 = U^0 e^{\eta y} e^{i\mu x} \quad (5.8)$$

avec $U^0 \in \mathbb{C}^3$ et $Re(\eta) < 0$. Le système (5.7) devient alors :

$$\begin{cases} i\mu U_2^0 - b_{11} U_3^0 = 0 \\ \eta U_1^0 - b_{22} U_3^0 = 0 \\ \eta U_1^0 + i\mu U_2^0 - 2b_{12} U_3^0 = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Une solution de ce système est :

$$\mu \text{ fixé, } \eta = \mu \left(\frac{ib_{12} - \sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}{b_{11}} \right), \quad U^0 = \left(-\frac{ib_{11}}{\mu}, \frac{b_{22}}{\eta}, 1 \right) \quad (5.10)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ (ce qui donne des oscillations sur le bord libre) et $Re(\eta) < 0$ (ce qui donne une décroissance exponentielle vers l'intérieur du domaine).

Comme u^0 est solution de (5.6), on a $\gamma_{\alpha\beta}(u^0) = 0$, et toutes les tensions $T^{\alpha\beta}$ sont donc nulles d'après la loi de comportement (1.46). La condition de Neumann (5.2) est alors automatiquement satisfaite.

Cela prouve que la condition aux limites considérée (5.2) ne satisfait pas à la condition de Shapiro-Lopatinskii. Le problème limite considéré est donc mal posé en un point du bord latéral où la coque est libre.

5.2.2 Cas d'un bord fixé

On considère maintenant une condition aux limites de Dirichlet (bord fixé).

Proposition 5.2.2 *Une condition aux limites de Dirichlet (5.1) associée au problème limite de membrane satisfait à la condition de Shapiro-Lopatinskii.*

Résolvons d'abord le système (5.7) pour $U(y)$ où la solution complète $u^0(x, y)$ est de la forme (5.3). C'est un système linéaire à coefficients constants. Les solutions générales pour $U(y)$ sont donc de la forme :

$$U(y) = U e^{\eta y} \quad (5.11)$$

avec $U \in \mathbb{C}^3$; η restant à définir.

Les solutions non nulles η doivent vérifier :

$$0 = \begin{vmatrix} i\mu & 0 & -b_{11} \\ 0 & \eta & -b_{22} \\ \eta & i\mu & -2b_{12} \end{vmatrix} = b_{11}\eta^2 - 2i\mu b_{12}\eta - b_{22}\mu^2 \quad (5.12)$$

Cela donne deux solutions η_1 et η_2 pour chaque μ . Le discriminant $4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\mu^2$ est toujours strictement positif car $\mu \neq 0$ et la surface moyenne est elliptique (donc $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$). On a alors 2 solutions distinctes η_1 et η_2 , toutes deux étant des constantes de \mathbb{C} . Comme on cherche celle qui est

exponentiellement décroissante pour $y \rightarrow \infty$, on considère la solution de (5.12) qui vérifie $Re(\eta) < 0$. On a donc :

$$u^0(x, y) = U e^{i\mu x} e^{\eta y} \quad (5.13)$$

D'autre part, u^0 doit aussi satisfaire aux conditions aux limites (5.1) : $u_1^0(x, 0) = u_2^0(x, 0) = 0$ pour tout point x du bord concerné. Compte tenu de (5.13), U_1 et U_2 s'annulent donc partout. En reprenant la première équation de (5.7), on a donc :

$$-b_{11}U_3(x, y) = 0 \quad (5.14)$$

Comme $b_{11} \neq 0$ car la surface moyenne est elliptique, on a $U_3 = 0$ et donc $u_3^0 = 0$. Au final la seule solution ayant la forme recherchée est :

$$u^0(x, y) = 0 \quad (5.15)$$

La condition de Shapiro-Lopatinskii est donc satisfaite pour une coque elliptique ayant un bord fixé. Le processus asymptotique converge alors vers le problème de membrane qui est bien posé et dont la solution est contenue dans l'espace des distributions.

Remarque 5.2.2 *Le résultat est similaire pour les conditions aux limites suivantes :*

- le déplacement $u_1 = 0$ sur le bord
- le déplacement $u_2 = 0$ sur le bord

5.3 Étude du problème sensitif

On s'intéresse maintenant uniquement aux coques mal-inhibées, dont une partie du bord est libre. Dans ce cas, la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite et le problème limite est mal posé. On a donc existence d'instabilités de la forme (5.3). Ce problème n'est pas classique.

Dans ce cas, pour $\varepsilon = 0$, il n'y a généralement pas de solution dans l'espace des distributions. Un phénomène de complexification apparaît au fur et à mesure que $\varepsilon \searrow 0$: les solutions du problème limite existent seulement hors de l'espace des distributions. Ce processus de complexification n'est d'une certaine manière pas local. En effet, quel que soit le chargement f , il se localise principalement au voisinage du bord portant les conditions aux limites pathologiques.

5.3.1 Problèmes modèles permettant d'étudier le phénomène

On peut étudier le phénomène de complexification par le biais de problèmes modèles [35, 36, 70]. Ces problèmes modèles sont des problèmes de perturbations singulières, dont le problème limite et les conditions aux limites associées ne respectent pas la condition de Shapiro-Lopatinskii. L'équation aux dérivées partielles réduite (1.145) en u_3 , représentant les termes les plus singuliers de u_3 dans le modèle de Koiter, a une forme voisine de :

$$\Delta^2 u + \varepsilon^2 \Delta^4 u = F \quad (5.16)$$

Les problèmes modèles de [35, 36, 70] sont des problèmes assez semblables à (5.16) avec des conditions aux limites ne satisfaisant pas la condition de Shapiro-Lopatinskii pour le problème limite ($\varepsilon = 0$). Comme ils sont posés sur une bande infinie $\Omega = \mathbb{R} \times [0, 1]$, on peut les étudier par une transformée de Fourier par rapport à la variable x_1 . On étudie alors le problème dans l'espace image par la transformée de Fourier : $\mathbb{R}_\xi \times [0, 1]$.

Dans un premier temps, on étudie la solution du problème limite (quand $\varepsilon = 0$). Si l'on considère des conditions aux limites qui ne satisfont pas la condition de Shapiro-Lopatinskii, les solutions comporteront alors des termes de la forme $e^{c\xi}$. Ces termes sont croissants à l'infini, si bien que la distribution n'est pas "tempérée" au sens de L. Schwarz. On sort alors du cadre des transformées de Fourier des fonctions tempérées qui vont de \mathcal{D}' dans \mathcal{D}' . Il n'est donc en principe pas possible de revenir à la solution dans l'espace de départ. On peut considérer que ces solutions n'existent pas au sens des distributions. Mais on peut aussi les considérer dans un espace plus grand que celui des distributions qui est \mathcal{Z}' , l'espace des fonctionnelles analytiques.

Celles-ci sont assez peu connues. Pour s'en faire une idée, on peut étudier une suite de distributions tendant vers une fonctionnelle analytique (voir [35]). Pour cela, on considère l'image par la transformée de Fourier inverse d'une suite de distributions tempérées tendant vers une distribution non tempérée :

$$\hat{f}^\lambda(\xi) = \begin{cases} \cosh(\xi) & \text{pour } |\xi| < \lambda \\ 0 & \text{pour } |\xi| > \lambda \end{cases} \quad (5.17)$$

Quand $\lambda \nearrow \infty$, la fonction $\hat{f}^\lambda(\xi)$ tend vers $\cosh(\xi)$ au sens des distributions. Or $\cosh(\xi)$ n'est pas une distribution tempérée. Donc les transformées inverses $f^\lambda(x)$ convergent au sens de \mathcal{Z}' seulement, mais pas dans \mathcal{D}' . La transformée de Fourier inverse $f^\lambda(x)$ de $\hat{f}^\lambda(\xi)$ s'écrit alors :

$$f^\lambda(x) = \frac{1}{2\pi(x^2 + 1)} \left\{ e^\lambda [\cos(\lambda x) + x \sin(\lambda x)] - e^{-\lambda} [\cos(\lambda x) - x \sin(\lambda x)] \right\} \quad (5.18)$$

Ainsi, $f^\lambda(x)$ est une distribution dont la fréquence est proportionnelle à λ , et l'amplitude proportionnelle à e^λ . Mais à la limite, quand $\lambda \nearrow \infty$, $f(x)$ est une "fonction" dont la fréquence et l'amplitude sont infinies, ce qui n'est pas une distribution.

Revenons maintenant au problème de perturbations singulières. Pour un ξ fixé, la solution du problème de perturbations singulières se rapproche de celle du problème de membrane limite quand $\varepsilon \searrow 0$. En négligeant le terme en ε^2 et par transformée de Fourier $x \rightarrow \xi$, on obtient un problème dont la solution se comporte pour $|\xi| \rightarrow \infty$ comme :

$$u \approx K e^{(c+x_2)|\xi|} \quad (5.19)$$

Regardons maintenant le comportement pour ε fixé et $\xi \rightarrow \infty$. La transformée de Fourier du second terme de (5.16) est :

$$\varepsilon^2 \Delta^4 u \approx \varepsilon^2 \xi^8 \hat{u} \quad (5.20)$$

Il est clair que (5.20) est très important pour $\xi \rightarrow \infty$. Ainsi, on peut négliger le premier terme en Δ^2 dans (5.16) et ne garder que celui qu'on vient de voir, qui est prépondérant. La transformée de Fourier de l'équation (5.16) est alors :

$$\varepsilon^2 \xi^8 \hat{u} \approx \hat{F}(\xi, x_2) \quad (5.21)$$

ce qui donne

$$\hat{u} \approx \frac{\hat{F}(\xi, x_2)}{\varepsilon^2 \xi^8} \quad (5.22)$$

Si ε est fixé, la solution tend vers $\varepsilon^{-2} \xi^{-8} \hat{F}(\xi, x_2)$ quand $\xi \rightarrow \infty$. Pour un ε petit, la solution est un tracé continu entre les 2 solutions pour un ξ fixé et un ξ tendant vers l'infini (Fig. 5.2).

Ainsi, lorsque ε tend vers zéro, on a :

– pour $|\xi|$ fixé, le terme en ε^2 est négligeable

– pour $|\xi|$ très grand, le terme en Δ^2 est négligeable

La solution exacte est donc une courbe qui approche de $Ke^{(c+x_2)|\xi|}$ pour $|\xi|$ fixé et de $\varepsilon^{-2}\xi^{-8}F(\xi, x_2)$ pour $|\xi|$ très grand (voir Fig. 5.2).

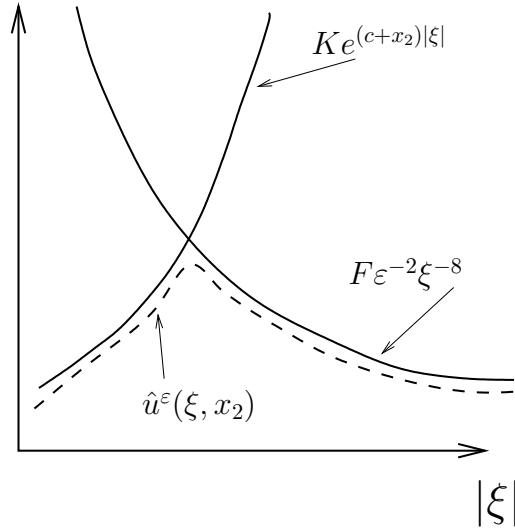


FIG. 5.2 – Forme de $\hat{u}^\varepsilon(\xi, x_2)$

La région où aucun des deux comportements n'est négligeable par rapport à l'autre correspond à :

$$|\xi| = \mathcal{O}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (5.23)$$

De plus, c'est dans cette zone que $\hat{u}^\varepsilon(\xi, x_2)$ atteint son maximum. C'est donc là que se trouve la fréquence caractéristique qui décrit le comportement de la solution $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ des problèmes modèles.

5.3.2 Retour au problème de coques

Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, le problème est bien posé et la solution du problème existe dans l'espace des distributions, mais devient de plus en plus singulière quand $\varepsilon \searrow 0$. Pour $\varepsilon = 0$, la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite et nous avons donc l'existence de solutions sinusoïdales dans la direction tangente au bord libre et exponentiellement décroissante vers l'intérieur de Ω dans la direction perpendiculaire. Quand $\varepsilon \ll 1$, il apparaît dans la solution des termes de la forme :

$$e^{i\xi x} e^{\lambda y} \quad (5.24)$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^*$, $\lambda < 0$. Les constantes ξ et λ sont liées par une relation algébrique du type :

$$\lambda = c|\xi| \quad (5.25)$$

où $|\xi|$ dénote la valeur absolue de ξ et où c est indépendant de ε . C'est ce qu'on a vu dans la section précédente portant sur l'étude de la condition de Shapiro-Lopatinskii où η dépend de μ (voir 5.10). Ici ξ joue le rôle de μ et λ celui de $Re(\eta)$.

Il apparaît donc des oscillations tangentes au bord ayant une longueur d'onde de $\frac{2\pi}{|\xi|}$. Pour $\varepsilon \neq 0$, le comportement de u_3 est donné par la zone de transition comme on l'a vu pour les problèmes modèles. Ainsi, les termes de flexion sont opposés à ces oscillations lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \searrow 0$. Les termes

de flexion (en ε^2) empêchent l'existence de très grands $|\xi|$. Un équilibre s'établit entre ε^2 et $e^{c|\xi|}$ ce qui donne, comme $c < 0$, $|\xi| = \mathcal{O}(\log \frac{1}{\varepsilon})$ comme ordre de la fréquence des oscillations. Le phénomène est donc très lent. Mais, quand on se rapproche de la limite $\varepsilon = 0$, nous aurons une fonction avec un nombre d'oscillations et avec une amplitude augmentant jusqu'à l'infini. Si on observe cette fonction sur le bord libre, elle va progressivement recouvrir tout le graphe.

5.4 Calculs numériques pour une coque mal-inhibée

Nous étudierons ici le même parabolôïde elliptique que dans le chapitre 4 mais cette fois encastré sur seulement une partie du bord. Nous considérons à nouveau le domaine $\Omega = \{(y^1, y^2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ et la surface elliptique S définie par la carte (Ω, ψ) où :

$$\psi(y^1, y^2) = (y^1, y^2, (y^1)^2 + (y^2)^2) \quad (5.26)$$

La coque est alors définie par sa surface moyenne S et son épaisseur relative ε constante prise égale au rapport $\frac{\text{épaisseur}}{\text{longueur caractéristique}} = \frac{\text{épaisseur}}{2.9}$.

Le chargement représenté sur la figure 5.3 est identique à celui représenté sur la figure 4.10. Il s'agit d'un chargement normal, appliqué sur le domaine F défini par

$$F = \left\{ (y^1, y^2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

La seule différence se trouve au niveau des conditions aux limites : le bord CD est maintenant libre (Fig. 5.3). Dans ce cas, nous avons un problème sensitif et nous verrons que les solutions sont très différentes de celles du chapitre précédent.

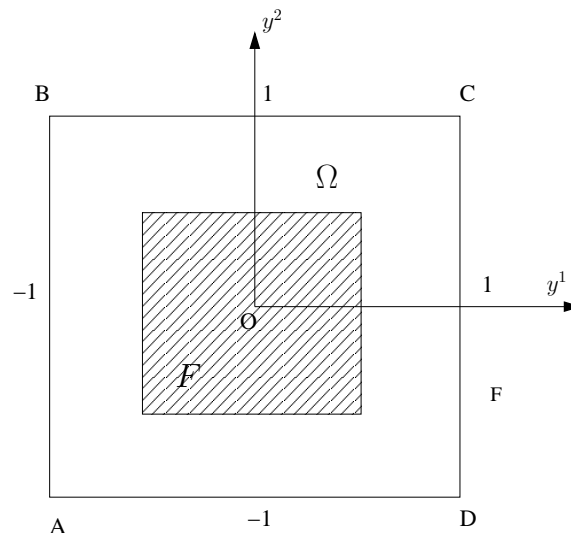
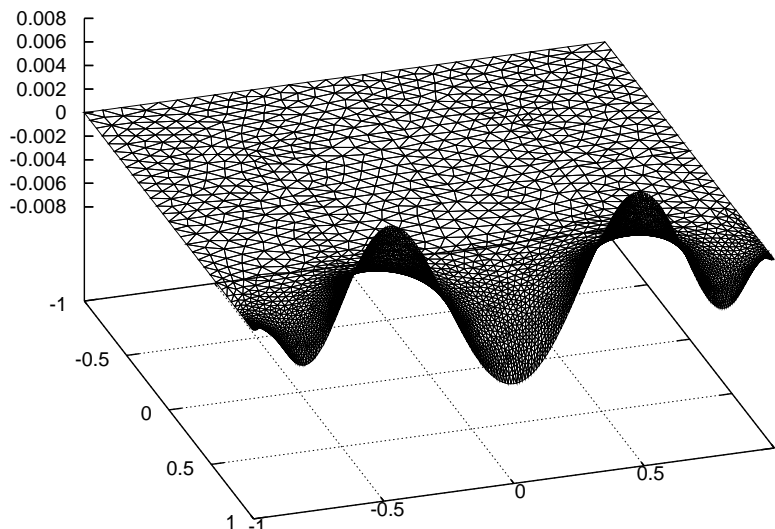


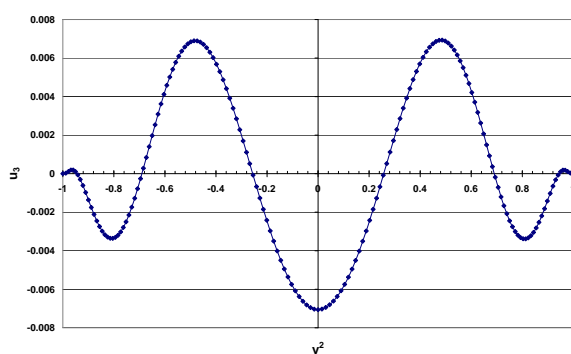
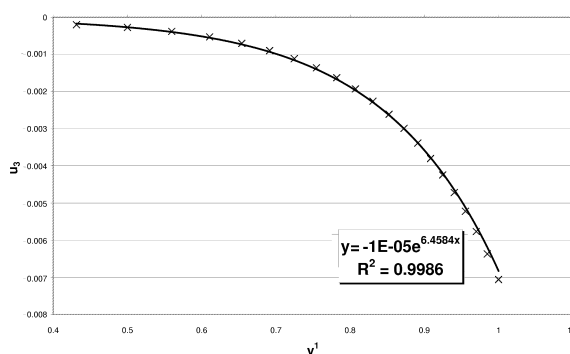
FIG. 5.3 – Chargement considéré

Visualisons tout d'abord les déplacements pour une épaisseur relative fixée $\varepsilon = 10^{-4}$ (Fig. 5.4). Les résultats numériques sont donnés en mètres.

FIG. 5.4 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$

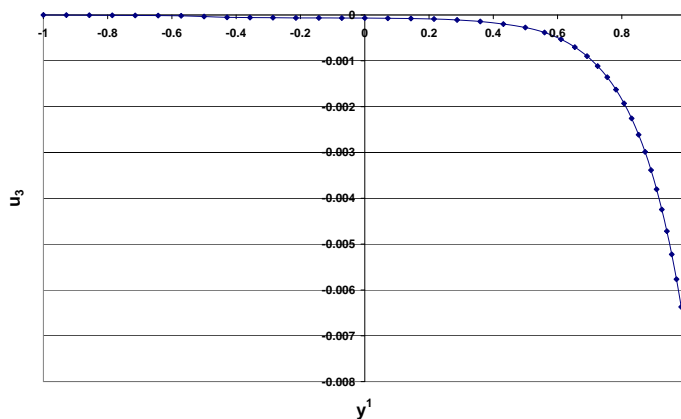
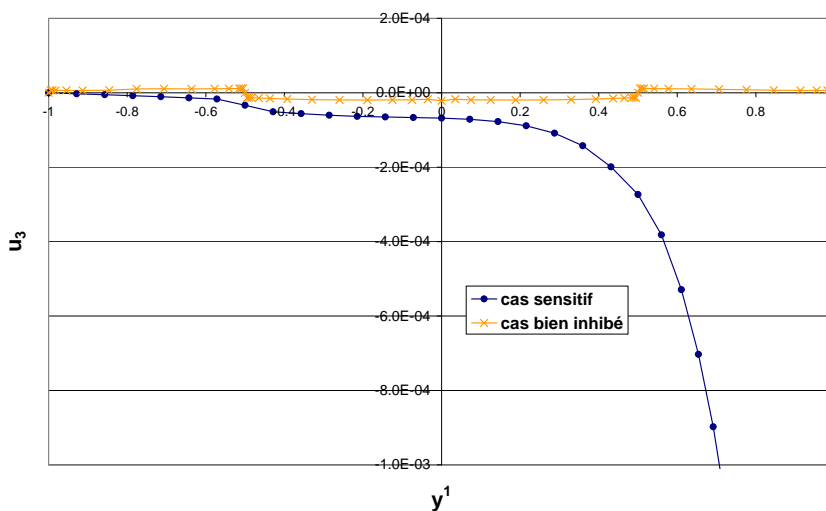
On voit clairement sur la Fig. 5.4, que quand la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite, des oscillations décroissantes vers l'intérieur du domaine apparaissent au niveau du bord libre. Ces oscillations de u_3 sont représentées plus précisément sur la ligne $y^1 = 1$ correspondant au bord libre, sur la figure 5.5. La figure 5.6 montre que u_3 a bien un comportement exponentiel décroissant vers l'intérieur du domaine de $y^1 = 0.43$ à $y^1 = 1$.

Cette instabilité et les oscillations résultantes sont si importantes que les autres singularités présentes dans le cas bien inhibé (couche interne et singularité logarithmique) sont invisibles en comparaison. Cependant, elles existent encore, comme on le verra par la suite. On peut également remarquer cela sur la figure 5.7 où u_3 est tracé sur la ligne $y_2 = 0$. La singularité en Heaviside est quasiment invisible, on ne la voit que très légèrement près de $y^1 = -0.5$. La figure 5.8 montre bien la forme radicalement

FIG. 5.5 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.6 – Interpolation de u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $y^1 \in [0.43, 1]$

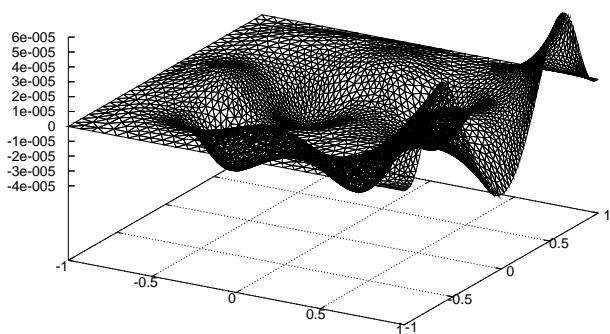
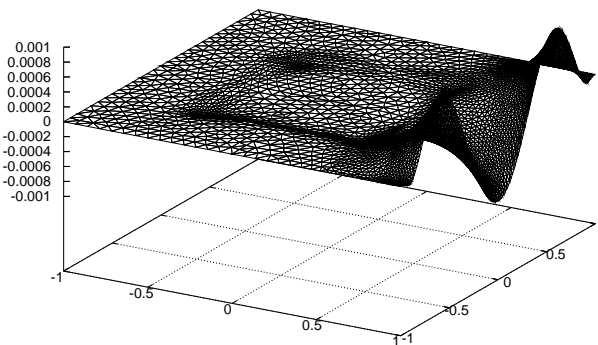
différente du déplacement u_3 dans les cas bien et mal inhibés.

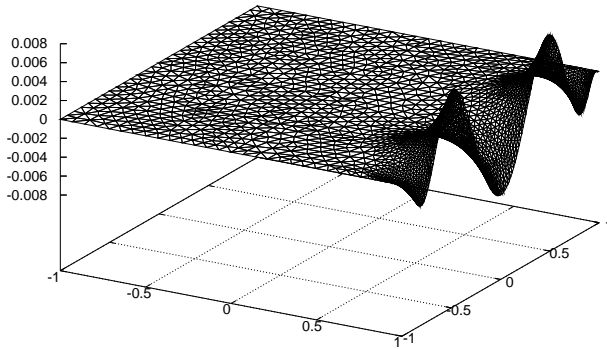
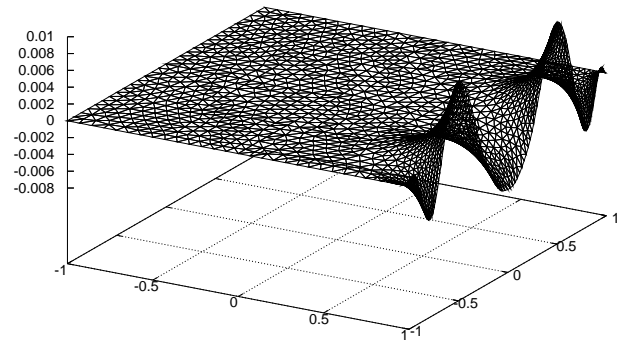
Toutes ces simulations sont en accord avec la théorie exposée au paragraphe 5.2, quand la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite. Ces simulations numériques ont été faites pour $\varepsilon = 10^{-4}$. L'évolution du problème en fonction de ε est présentée dans la section suivante.

FIG. 5.7 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.8 – Comparaison du déplacement u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ dans les cas bien-inhibé et mal-inhibé

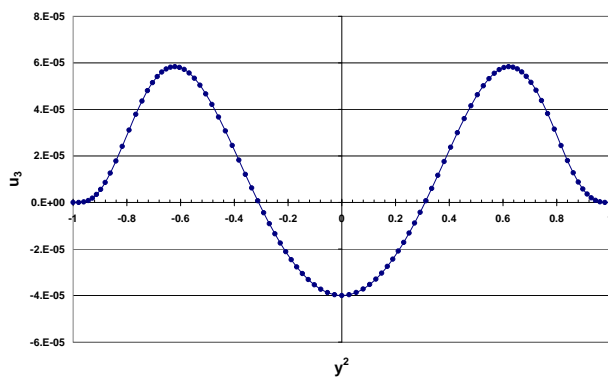
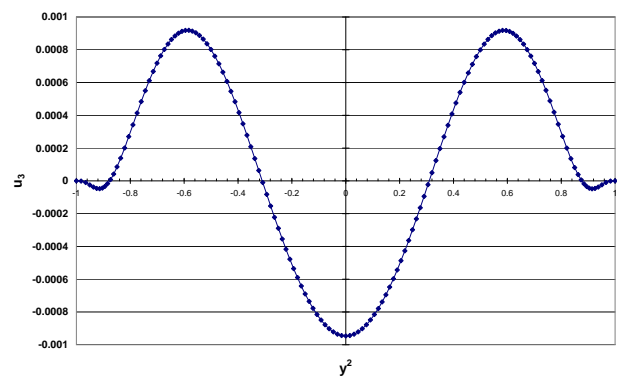
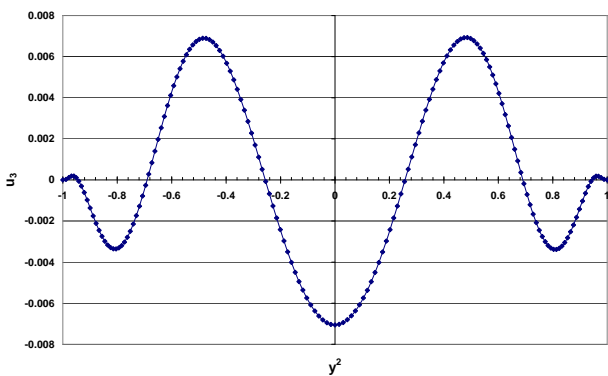
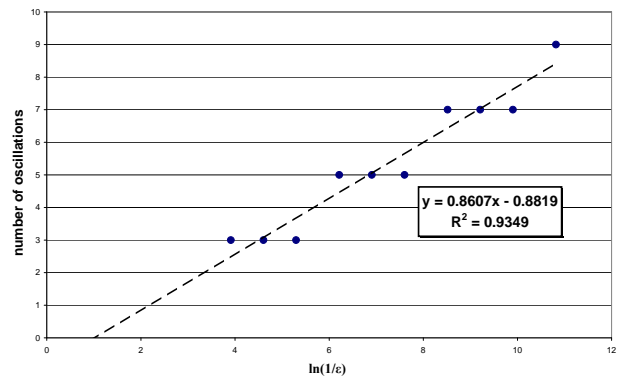
5.4.1 Convergence vers le problème limite mal posé

Regardons le comportement de u_3 sur le domaine Ω pour différentes valeurs de ε (Figs. 5.9 à 5.12). Les déplacements sont représentés sur le domaine Ω de \mathbb{R}^2 .

FIG. 5.9 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-2}$ FIG. 5.10 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-3}$

FIG. 5.11 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.12 – Déplacement u_3 pour $\varepsilon = 5.10^{-5}$

Pour des valeurs de ε relativement grandes (de 10^{-2} à 10^{-3}), on peut toujours remarquer les singularités autour du domaine de chargement qui étaient déjà présentes dans le cas bien-inhibé (Figs. 5.9 et 5.10). Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, ces singularités sont de même ampleur que les oscillations au voisinage du bord libre. Quand ε diminue, les singularités classiques "disparaissent" progressivement. En fait, elles existent toujours mais sont négligeables par rapport à l'instabilité qui apparaît près du bord libre. Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, elles sont environ 40 fois plus petites que les oscillations, ce qui les rend imperceptibles (Figs. 5.11 et 5.12). En d'autres termes, pour des efforts identiques, les déplacements résultants seront bien plus importants dans le cas sensible que dans le cas d'un problème bien-inhibé. Ainsi, des conditions aux limites de bord libre (même sur une petite partie du bord) conduisent à un problème sensible, et donc à un affaiblissement de la structure.

FIG. 5.13 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$ FIG. 5.14 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$ FIG. 5.15 – Déplacements u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.16 – Nombre d'oscillations en fonction de $\log(\varepsilon^{-1})$

Sur les figures 5.13 à 5.15, nous comparons les oscillations sur le bord libre pour différentes valeurs de ε allant de 10^{-2} à 10^{-4} . On constate que le nombre d'oscillations augmente quand ε tend vers zéro mais le phénomène est assez lent. Dans le cas des problèmes modèles étudiés au paragraphe 5.3, nous avons vu que la fréquence caractéristique des oscillations de la solution varie comme $\log(\varepsilon^{-1})$ (voir section 5.3 pour plus de détails). Cela correspond à un équilibre entre les termes de flexion et le comportement exponentiel. Pour mettre en évidence cette propriété numériquement, nous traçons sur la figure 5.16 le nombre d'oscillations en fonction de $\log(\varepsilon^{-1})$. Le nombre d'oscillations étant une fonction discrète, on voit des paliers correspondant à l'émergence d'une nouvelle oscillation, qui est un phénomène assez lent. Le nombre d'oscillations a bien tendance à augmenter suivant la fonction $\log(\varepsilon^{-1})$.

Ensuite, sur la figure 5.17 sont représentées les variations du déplacement normal u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour différentes valeurs de ε . On observe que l'amplitude de u_3 augmente très rapidement quand ε tend vers zéro. De plus, la zone affectée par cette singularité augmente également. En effet, pour $\varepsilon = 10^{-2}$ seul le voisinage du bord libre est en flexion. Mais pour $\varepsilon = 10^{-4}$, le comportement exponentiel s'est propagé à l'intérieur du domaine et la singularité en Heavyside a entièrement disparu autour de $y^1 = 0.5$ (en comparaison avec les oscillations).

Les résultats numériques obtenus reflètent bien une fois encore la tendance générale prédite par la

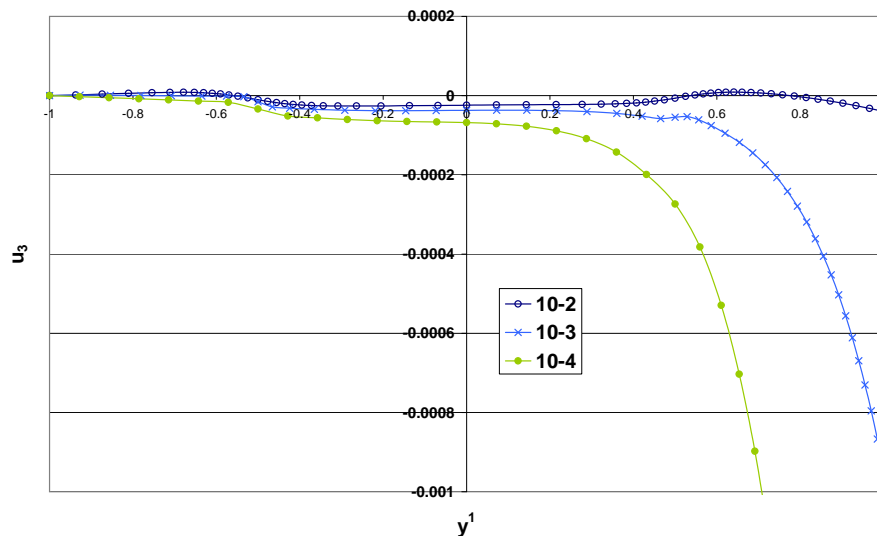


FIG. 5.17 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour différentes valeurs de ε

théorie (étude de la condition de Shapiro-Lopatinskii et des problèmes modèles). Pour des valeurs assez grandes de ε , l'instabilité au niveau du bord libre est aussi importante que les singularités autour du domaine de chargement. Mais à mesure que $\varepsilon \searrow 0$, u_3 tend vers quelque chose de difficile à imaginer : une fonction ayant des oscillations le long du bord libre avec une fréquence et une amplitude tendant vers l'infini. Cependant, comme le phénomène est très lent (il dépend de $\log(\varepsilon^{-1})$), il est difficile d'atteindre des hautes fréquences. Il faudrait effectuer des simulations numériques pour de très petites valeurs de ε (inférieures à 10^{-7}), ce qui ne peut être réalisé à cause de limitations numériques, principalement dues au verrouillage.

5.4.2 Influence de la longueur du bord libre

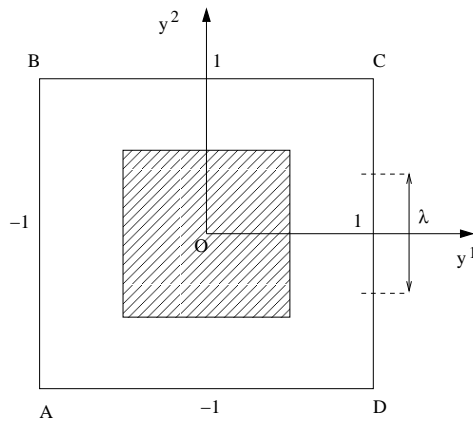
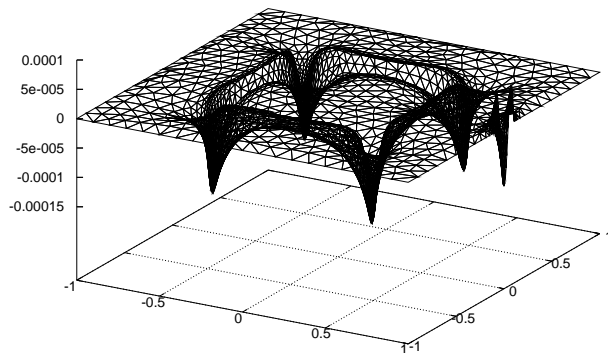
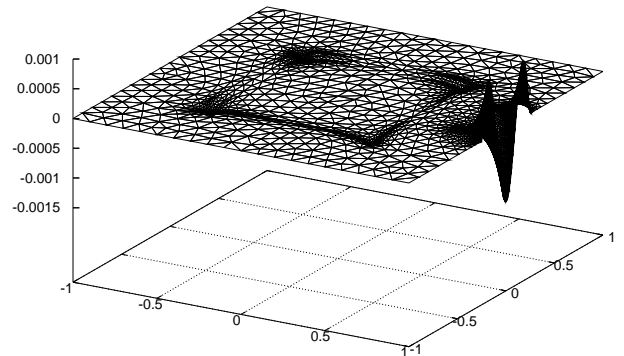
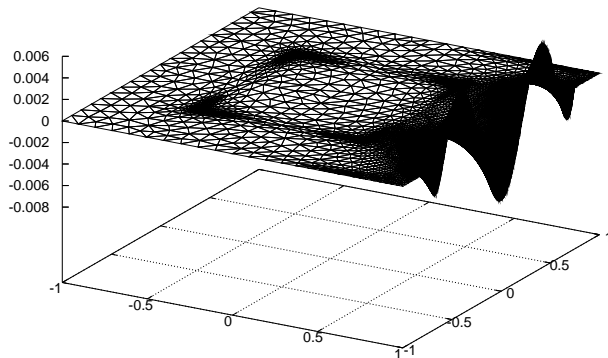
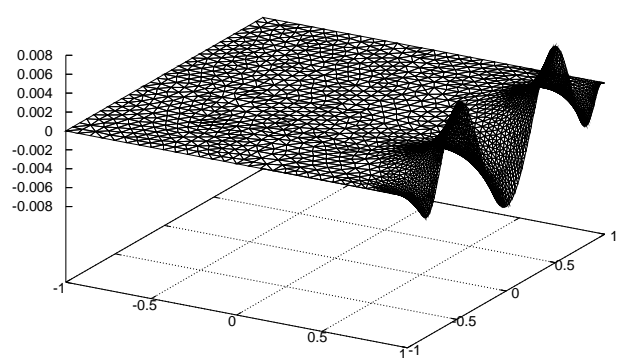


FIG. 5.18 – Problème considéré

Reprenons le même problème que précédemment mais faisons varier la longueur du bord libéré. Une partie de longueur λ du bord CD est maintenant libre (Fig. 5.18). Les figures 5.19 à 5.22 montrent l'évolution du déplacement normal u_3 en mètres quand λ augmente pour $\varepsilon = 10^{-4}$ fixé.

FIG. 5.19 – Déplacement u_3 pour $\lambda = 0.2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.20 – Déplacement u_3 pour $\lambda = 0.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.21 – Déplacement u_3 pour $\lambda = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ FIG. 5.22 – Déplacement u_3 pour $\lambda = 2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$

Quand λ est petit (Fig. 5.19), le problème est proche du problème bien-inhibé étudié dans le chapitre précédent. On observe l'existence de singularités logarithmiques aux coins du domaine de chargement,

et de singularités en Heavyside correspondant à la discontinuité du chargement. Parallèlement, un autre genre de singularité apparaît : il s'agit d'oscillations le long du bord libre. Quand λ augmente (Fig. 5.22), ces oscillations deviennent si importantes que les singularités autour de la zone de chargement deviennent négligeables. De plus, le phénomène a quelque chose de non-local : il démarre au niveau du bord libre (bien qu'il n'y ait pas de singularité du chargement à ce niveau) et il se propage sur toute la coque au fur et à mesure que λ augmente.

Les figures 5.23 et 5.24 montrent clairement que u_3 se comporte comme une fonction exponentielle dans une partie du domaine. On peut voir que la partie exponentielle de u_3 s'agrandit quand λ augmente : elle commence à $y^1 = 0.5$ pour $\lambda = 1$ et environ à $y^1 = 0.4$ pour $\lambda = 2$. Les figures 5.25 et 5.26 montrent également cette tendance. Pour $\lambda = 0.5$, on peut toujours voir la singularité autour du domaine de chargement (pour $y^1 = 0.5$) due aux singularités de f^3 . Mais pour $\lambda = 1.5$, la partie exponentielle de u_3 s'est agrandie et il n'est plus possible de voir la singularité en Heavyside en $y^1 = 0.5$.

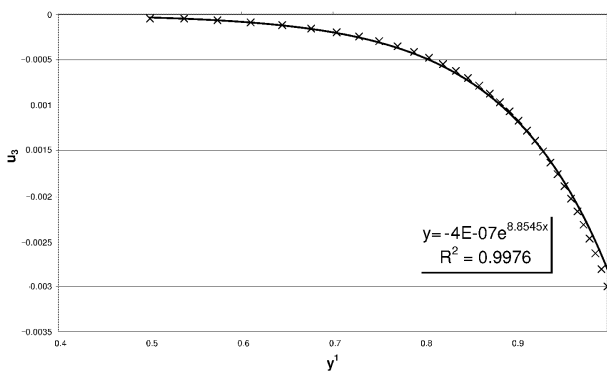


FIG. 5.23 – Interpolation de u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\lambda = 1$ et $y^1 \in [0.5, 1]$

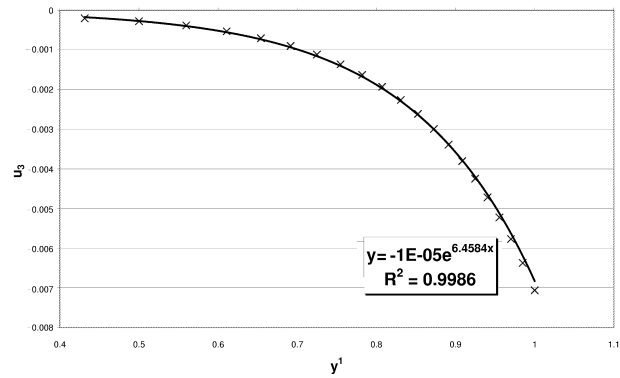


FIG. 5.24 – Interpolation de u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\lambda = 2$ et $y^1 \in [0.43, 1]$

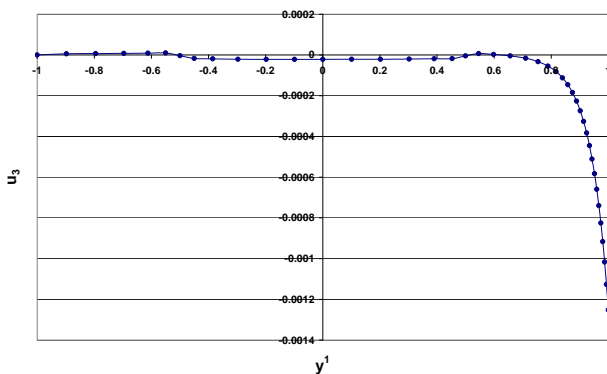


FIG. 5.25 – Déplacement normal u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\lambda = 0.5$ et pour $\varepsilon = 10^{-4}$

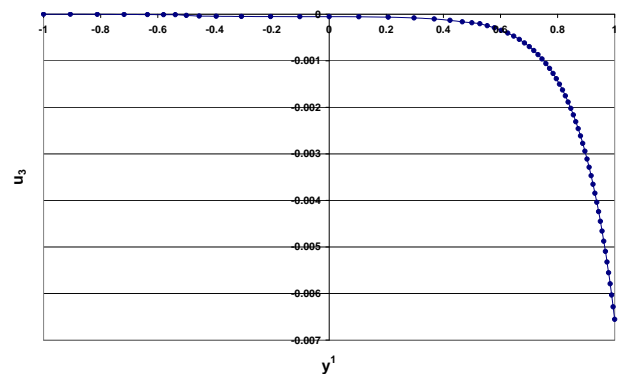


FIG. 5.26 – Déplacement normal u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\lambda = 1.5$ et pour $\varepsilon = 10^{-4}$

On constate sur les figures 5.27 et 5.28 qu'au niveau du bord libre, le nombre d'oscillations augmente également avec λ . Pour une valeur de ε fixée et pour un problème donné, on a une fréquence correspondante $\xi = \mathcal{O}(\log(\frac{1}{\varepsilon}))$. Il est donc assez difficile de comparer d'une manière théorique les fréquences correspondantes. Cependant, la tendance qualitative semble bien suivre la théorie.

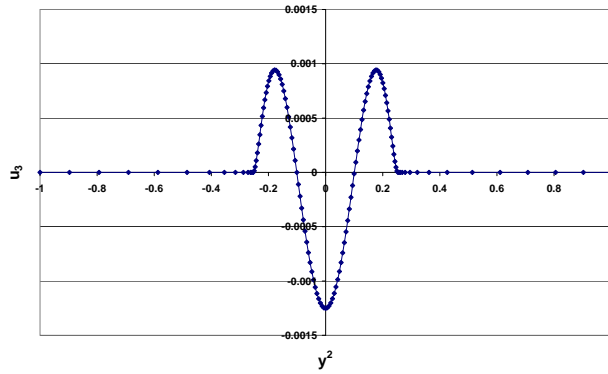


FIG. 5.27 – Visualisation des 3 extrema de u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\lambda = 0.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$

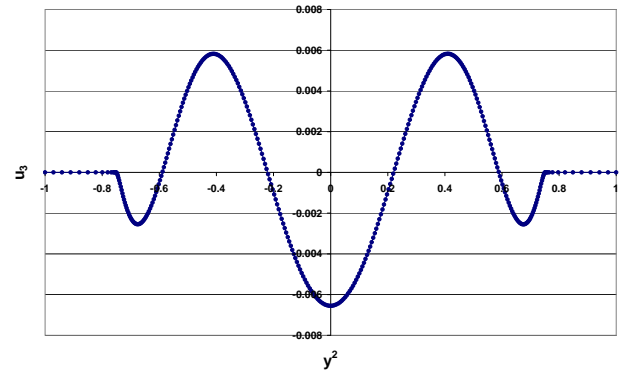


FIG. 5.28 – Visualisation des 5 extrema de u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\lambda = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$

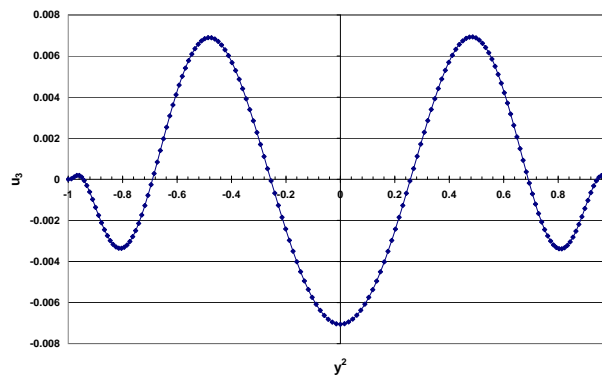


FIG. 5.29 – Visualisation des 7 extrema de u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\lambda = 2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$

Voyons enfin ce qui se passe si on libère les autres côtés. Les Figs. 5.30 et 5.31 correspondent respectivement à deux et trois bords libres. Dans les deux cas, comme pour le problème précédent, on observe des oscillations principalement au voisinage du bord libre. Dans le cas où trois bords sont libres, on remarque qu'il y a peu d'oscillations sur le bord du milieu (bord BC), en face du seul bord encastré, à cause de la symétrie du problème.

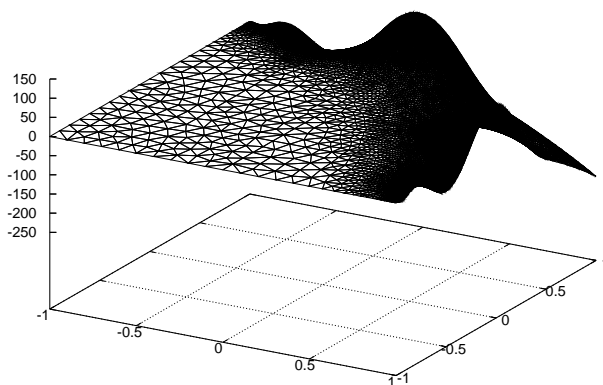


FIG. 5.30 – Déplacement u_3 dans le cas de deux bords libres

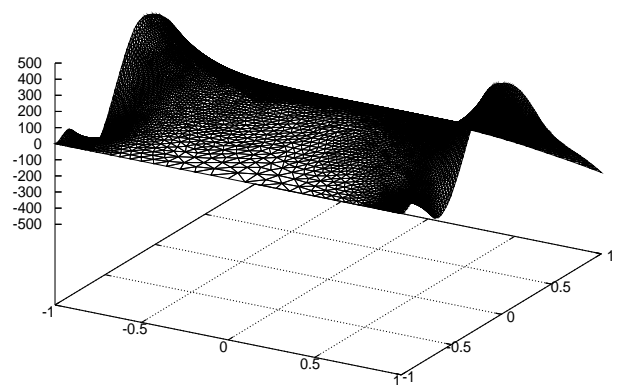


FIG. 5.31 – Déplacement u_3 dans le cas de trois bords libres

5.4.3 Répartition des énergies dans un problème sensitif

Étudions d'abord la répartition des deux densités surfaciques d'énergie de membrane et de flexion pour le problème sensitif avec le bord CD libre, pour $\varepsilon = 10^{-4}$.

La répartition de la densité surfacique d'énergie de membrane E_{ms} (Fig. 5.32) est assez semblable à celle du problème bien-inhibé : elle se concentre aux 4 coins du domaine de chargement où se trouve une singularité logarithmique, même si nous ne pouvons la voir sur le graphe de u_3 à cause de l'instabilité importante au niveau du bord libre. Elle est aussi importante au niveau des frontières du domaine de chargement F , et également au niveau des bords AD et BC perpendiculaires au bord libre (voir Fig. 5.3).

Par contre, la répartition de la densité d'énergie de flexion E_{fs} est très différente par rapport au cas bien-inhibé. Elle se concentre uniquement le long du bord libre (Fig 5.33). On peut voir 7 zones où E_{fs} est plus important que sur le reste de la coque qui correspondent aux 7 extrema (des oscillations) de u_3 le long du bord libre (Fig. 5.15). Entre chaque extremum, E_{fs} est plus faible. Ces zones de faible énergie de flexion correspondent à un point d'inflexion de u_3 (où la dérivée seconde de u_3 par rapport à y^2 est nulle). Sur le reste de la coque, E_{fs} est très inférieure.

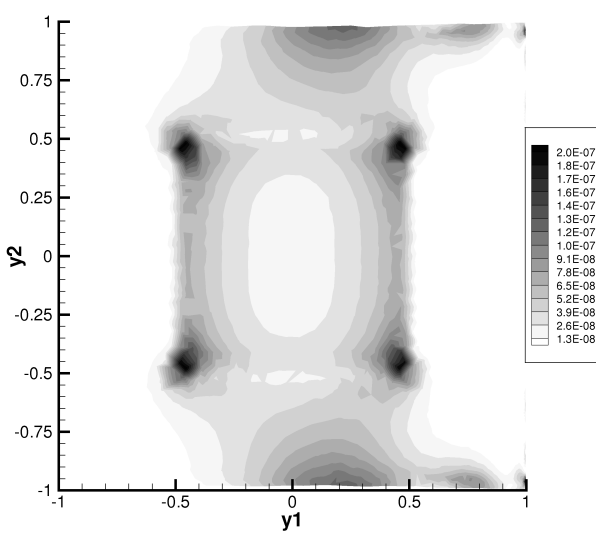


FIG. 5.32 – Répartition d'énergie surfacique de membrane E_{ms} pour $\varepsilon = 10^{-4}$

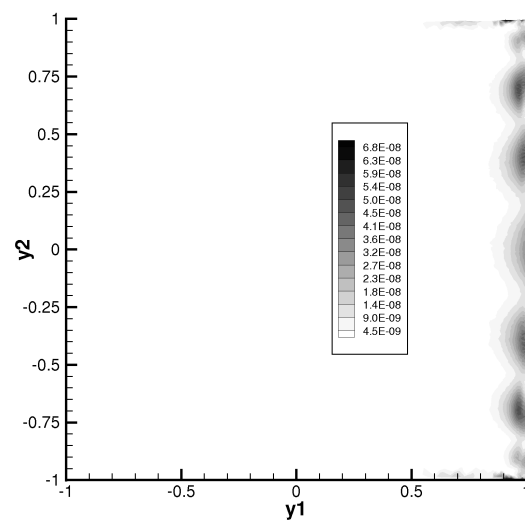


FIG. 5.33 – Répartition d'énergie surfacique de flexion E_{fs} pour $\varepsilon = 10^{-4}$

Pour finir, nous étudions l'évolution du pourcentage de densité surfacique d'énergie de flexion E_{fs} par rapport à la densité totale d'énergie ($E_{ms} + E_{fs}$) lorsque ε diminue (Fig 5.34). Quand ε est assez grand (10^{-2}), E_{fs} est prédominant (plus de 70%) au centre du bord libre et autour des couches internes parallèles au bord libre. La densité surfacique d'énergie de flexion E_{fs} est également assez importante (entre 20% et 50%) au niveau des 4 coins du domaine de chargement et près des autres couches internes (perpendiculaires au bord libre). Le reste de la coque est dominé par l'énergie de membrane.

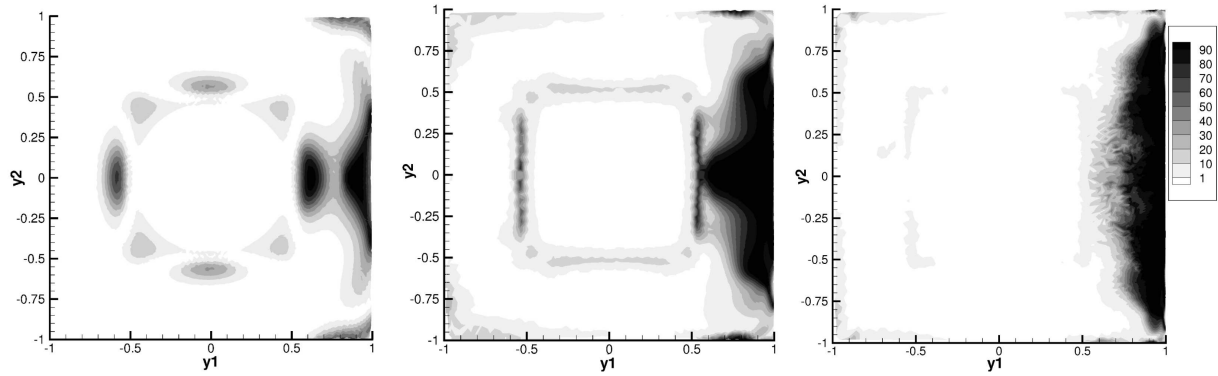


FIG. 5.34 – Evolution du pourcentage de E_{fs} pour différentes valeurs de ε allant de 10^{-2} à 10^{-4}

Lorsque ε diminue, la proportion de E_{fs} augmente le long du bord libre et vers l'intérieur de la coque (à partir du bord libre), alors qu'elle diminue au niveau des couches internes qui s'amincissent (comme on l'a vu dans le cas bien-inhibé). C'est une différence importante entre les deux types de singularités existant dans le cas inhibé, et les instabilités propres au problème sensitif. Alors que les couches internes amincissent quand ε tend vers 0, le phénomène de complexification se propage à l'intérieur du domaine Ω .

5.5 Autre exemple de chargement

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un chargement appliqué plus près du bord libre, au niveau d'un coin. On va voir que, comme précédemment, la nature des solutions varie radicalement selon que la coque est ou non bien-inhibée. Considérons à nouveau la coque définie par le plongement (5.26) et la zone de chargement $F = [0.25, 1] \times [0.25, 1]$ (Fig. 5.35). Le chargement surfacique est uniquement normal et constant $f_3 = 10\varepsilon$ MPa.

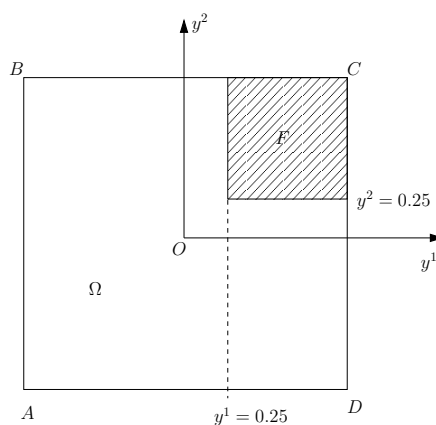


FIG. 5.35 – Zone de chargement F

La coque est encadrée sur les bords AB , BC et AD . Étudions les différences de comportement suivant que la coque est libre ou encadrée sur le bord CD .

Les figures 5.36 et 5.37 représentent le déplacement u_3 sur tout le domaine (en mètres).

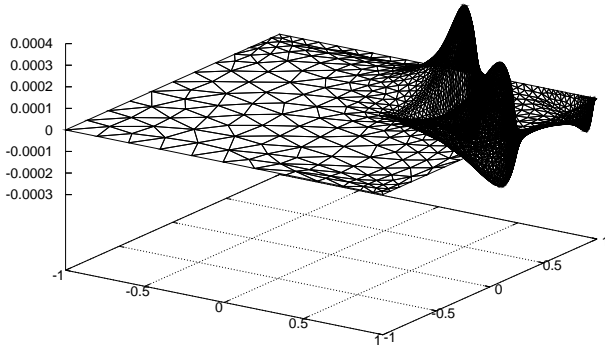


FIG. 5.36 – Déplacement u_3 sur le domaine Ω pour $\varepsilon = 10^{-4}$ quand le bord CD est encastré

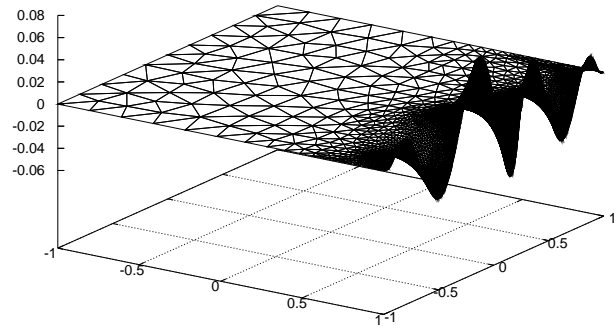


FIG. 5.37 – Déplacement u_3 sur le domaine Ω pour $\varepsilon = 10^{-4}$ quand le bord CD est libre

On observe sur la figure 5.36 une singularité logarithmique aux quatre coins de la zone de chargement F (celle en $(0.25, 0.25)$ est très faible car les deux courbures principales γ sont proches). Dans le cas sensitif (Fig. 5.37), les déplacements se concentrent près du bord libre où l'on observe des oscillations tangentielles. La différence est aussi visible si on observe les résultats sur la ligne $y^1 = 0.75$ (voir Fig. 5.38).

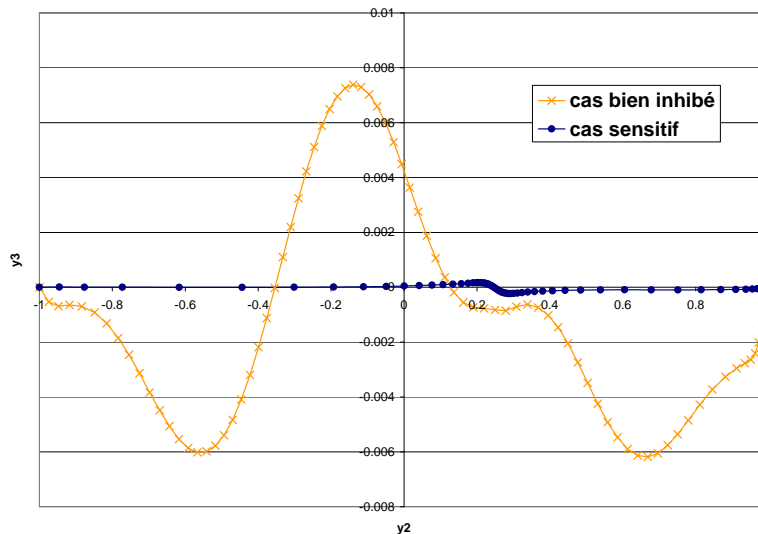


FIG. 5.38 – Déplacement u_3 sur la ligne $y^1 = 0.75$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

La figure 5.38 représente le déplacement u_3 dans les cas bien et mal-inhibés. On observe une forte différence d'amplitude : les déplacements dans le cas mal-inhibé sont 50 fois plus importants. Il y a également une différence très importante au niveau de la forme des déplacements. Les résultats n'ont rien en commun. Pour mieux se rendre compte des différences de forme, traçons les déplacements normalisés par leur valeur maximale (Figs. 5.39 à 5.41).

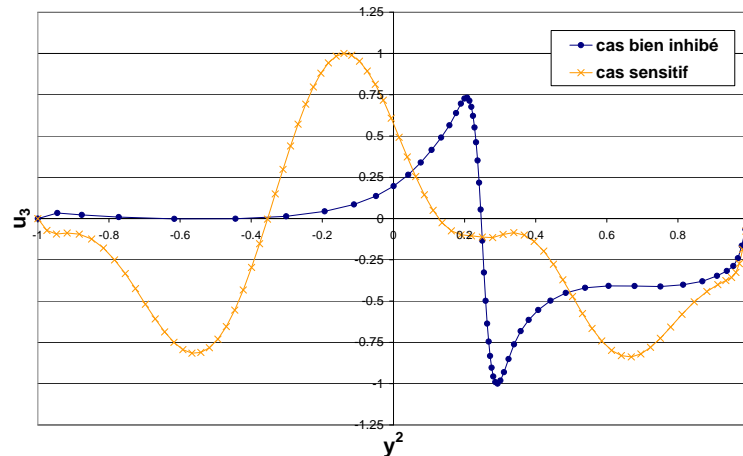


FIG. 5.39 – Déplacement normalisé u_3/u_{3max} sur la ligne $y^1 = 0.75$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

Sur la figure 5.39, on reconnaît le saut de type Heavyside en $y^2 = 0.25$ comme vu dans le cas bien-inhibé. Dans le cas mal-inhibé, on observe des oscillations qui ne ressemblent en rien au cas bien-inhibé (même si les singularités du cas bien-inhibé sont toujours présentes mais complètement masquées). Le résultat est très différent du cas d'une coque parabolique cylindrique où le fait d'avoir un bord libre ou non dans la direction y^2 n'affectait fondamentalement la forme des déplacements que dans la direction des génératrices. Dans le cas elliptique étudié ici, la forme de déplacement est très différente non seulement dans la direction y^1 , mais également dans la direction y^2 . Au voisinage du bord CD , les solutions n'ont aucun point commun dans les deux cas. Ceci est aussi observable sur les déplacements u_1 et u_2 (Figs 5.40 et 5.41).

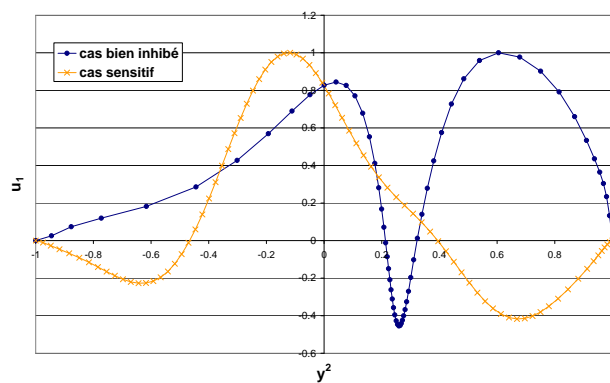


FIG. 5.40 – Déplacement normalisé u_1/u_{1max} sur la ligne $y^1 = 0.75$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

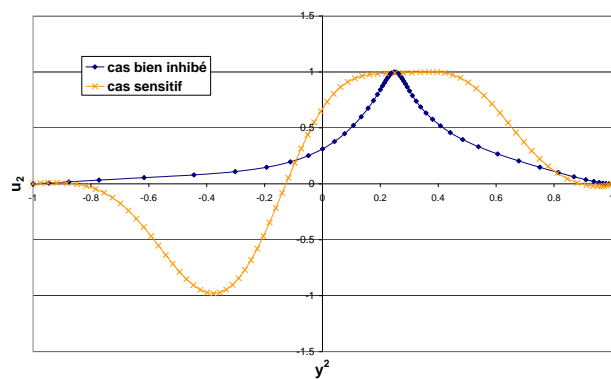


FIG. 5.41 – Déplacement normalisé u_2/u_{2max} sur la ligne $y^1 = 0.75$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème de coque mal-inhibée. Nous avons d'abord montré que le problème membranaire associé à des conditions aux limites de bord libre ne satisfait pas la condition de Shapiro-Lopatinskii. Ainsi, dès qu'une coque elliptique a une partie de son bord libre, à mesure que l'épaisseur ε diminue, les déplacements tendent vers la solution du problème membranaire limite mal posé. Il apparaît des solutions oscillantes localisées au niveau du bord en question. Ces solutions sont oscillantes tangentiellement au bord libre et exponentiellement décroissantes vers l'intérieur du domaine. Une étude théorique sur des problèmes modèles permet de montrer que ces solutions, qui ne sont pas des distributions mais des fonctionnelles analytiques, ont "une fréquence et

une amplitude infinies". Tant que $\varepsilon > 0$, les termes de flexion s'opposent à ce comportement exponentiel et la fréquence caractéristique des oscillations est alors $|\xi| = \log(1/\varepsilon)$.

Des simulations numériques par maillage adaptatif ont permis de retrouver qualitativement et quantitativement ce comportement. On observe des solutions de plus en plus oscillantes et de plus en plus amples, la fréquence caractéristique étant bien en $|\xi| = \log(1/\varepsilon)$. Les singularités logarithmiques et liées à la discontinuité du chargement, décrites au chapitre précédent, existent toujours mais deviennent négligeables par rapport à ces instabilités. D'autre part, quand $\varepsilon \searrow 0$, l'énergie de flexion se concentre au niveau du bord libre, tandis que l'énergie de déformation membranaire est localisée au niveau des singularités du chargement.

Le maillage adaptatif a permis un raffinement localisé du maillage au niveau des bords libres, d'une manière plus ou moins isotrope car il faut tenir compte, dans un sens des oscillations, et dans l'autre sens, de la décroissance exponentielle de la solution.

Chapitre 6

Comportement limite du modèle de Koiter pour des coques allongées

6.1 Introduction

Dans cette thèse, les calculs théoriques et les simulations numériques ont été effectués à partir du modèle de coques minces élastiques de Koiter, valable pour les coques a priori quelconques. Nous nous intéressons maintenant au cas particulier des coques allongées qui s'apparentent en termes géométriques aux poutres voiles. Ainsi, ce type de structures allongées (voire très allongées) peut être modélisé, soit par le modèle bidimensionnel de Koiter prenant en compte le caractère allongé dans la description de la surface moyenne, soit par des modèles de poutres voiles, comme par exemple celui de Vlassov [96] en théorie linéaire. Or le modèle de Vlassov est un modèle unidimensionnel où la géométrie de la poutre est intégrée dans des constantes géométriques intervenant dans les équations d'équilibre (qui sont des équations différentielles du quatrième ordre). Ainsi on peut légitimement se demander si une coque très allongée peut être décrite indifféremment par le modèle de Koiter ou par le modèle unidimensionnel de poutre voile de Vlassov. Autrement dit, le modèle de Koiter dégénère-t-il au sens asymptotique du terme, vers le modèle de Vlassov lorsqu'une dimension de la coque (la longueur) est très grande devant les autres ?

Pour répondre à cette question, nous nous proposons de repartir du modèle de coque de Koiter écrit sous forme dimensionnelle. Une adimensionnalisation des équations d'équilibre fera apparaître naturellement des nombres adimensionnels caractérisant le problème, et notamment la géométrie. On effectuera ensuite une mise à l'échelle des équations traduisant le caractère très allongé de la coque. Le développement asymptotique des équations permettra de déterminer le modèle unidimensionnel limite. De plus, cette analyse adimensionnelle permettra de se placer dans les mêmes hypothèses que dans [49] où le développement asymptotique est effectué en partant des équations d'équilibre tridimensionnelles et de comparer les résultats obtenus.

6.2 Description du problème

6.2.1 La géométrie et le paramétrage

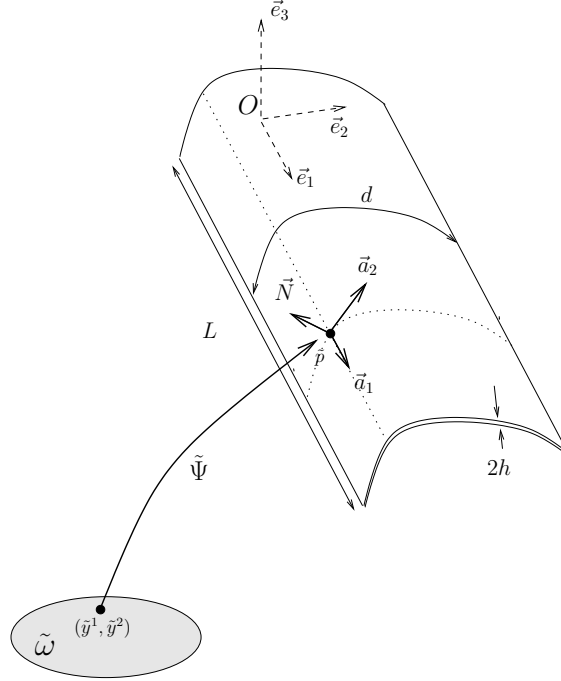


FIG. 6.1 – Poutre voile considérée et paramétrage utilisé

Considérons comme poutre voile ou coque allongée, un cylindre élastique de longueur L , d'épaisseur $2h$, dont le profil a une courbure quelconque \tilde{c} et une longueur d . La poutre est supposée encastree à ses deux extrémités. Nous limiterons notre étude au cas particulier où la courbure de la poutre est importante (dans un sens que l'on précisera par la suite) mais pas nécessairement constante.

Considérons un repère cartésien noté $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et un repère local, au point \tilde{p} , noté $(\tilde{p}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$, où $\vec{a}_1 = \vec{e}_1$ est la direction des génératrices (voir Fig. 6.1). Dans le cas des coques cylindriques, on peut toujours considérer un paramétrage $\tilde{\Psi}(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2)$ de la surface moyenne tel que la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ soit orthonormée. C'est le choix qui est fait ici. Ainsi, on a $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, si bien que la base duale $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{N})$ et la base locale $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{N})$ coïncident. Par la suite, on pourra confondre les composantes covariantes et contravariantes des champs de vecteurs (et de tenseurs) considérés. Pour des raisons de simplicité, tous les vecteurs seront notés sous la forme $u = U_i e_i$ dans la base cartésienne et $u = u_i a_i$ dans la base locale, avec $a_3 = N$. De plus, les variables de la carte locale seront notées $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$. Un point courant $p = \tilde{\Psi}(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2)$ de la poutre pourra être aussi repéré par ses coordonnées cartésiennes $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

Dans tout le chapitre, les grandeurs dimensionnelles sont notées avec un tilde (ex : \tilde{u}_2) tandis que les grandeurs adimensionnelles sont notées sans tilde (ex : u_2). Les grandeurs surlignées avec une barre (ex : \bar{u}_1) ne dépendent que de la variable y_1 . La poutre étant supposée encastree à ses deux extrémités, on a $\tilde{u}_i = 0$ en $y_1 = 0$ et $y_1 = L$ pour $i = 1, 2, 3$.

6.2.2 Le modèle de Koiter

Pour décrire le comportement d'une coque mince élastique fortement courbée, on utilise le modèle général de coque de Koiter¹. Rappelons la formulation faible du modèle de coque mince de Koiter

¹Dans le cas d'une coque faiblement courbée, on aurait pu utiliser le modèle de Novozhilov-Donnell qui est un modèle asymptotique.

pour une coque d'épaisseur $2h$ qui s'écrit d'après (1.44) :

Trouver $u \in V = \{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)\}$, v satisfaisant (1.43) :

$$2h \int_{\tilde{S}} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{\gamma}_{\lambda\mu}(\tilde{u}) \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\tilde{v}) d\tilde{S} + \frac{2h^3}{3} \int_{\tilde{S}} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{\rho}_{\lambda\mu}(\tilde{u}) \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\tilde{v}) d\tilde{S} = \int_{\tilde{S}} \tilde{f}^i \tilde{v}_i d\tilde{S} \quad \forall v \in V \quad (6.1)$$

où $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ sont les coefficients de la loi de comportement. Ceux-ci s'écrivent :

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right] \quad (6.2)$$

On a en particulier :

$$\begin{cases} A^{1111} = A^{2222} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} = \mu \frac{4(\beta + 1)}{2 + \beta} \\ A^{1122} = A^{2211} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} = \mu \frac{2\beta}{2 + \beta} \\ A^{1212} = \mu \\ A^{1211} = A^{1222} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

où l'on a posé $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. On notera par la suite $A = \frac{8(\beta + 1)}{2 + \beta}$ et $B = \frac{4\beta}{2 + \beta}$.

Dans le cas des poutres voiles considérées ici, on a comme seule courbure non nulle $b_{22} = b_2^2 = \tilde{c}$ compte tenu du paramétrage utilisé. De plus, on se limitera au cas classique où $\tilde{c}(y_2)$ ne dépend que de la variable y_2 . Ainsi les expressions des tenseurs de déformation de membrane $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ et de variation de courbure $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$ s'écrivent dans le cas particulier d'une coque cylindrique de courbure quelconque \tilde{c} :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{11} = \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{\gamma}_{22} = \tilde{u}_{2,2} - \tilde{c} \tilde{u}_3 \\ \tilde{\gamma}_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{1,2} + \tilde{u}_{2,1}) \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{11} = \tilde{u}_{3,11} \\ \tilde{\rho}_{22} = \tilde{u}_{3,22} + \tilde{c}\tilde{u}_{2,2} + (\tilde{c}\tilde{u}_2)_{,2} - \tilde{c}^2\tilde{u}_3 \\ \tilde{\rho}_{12} = \tilde{u}_{3,12} + \tilde{c}\tilde{u}_{2,1} \end{cases} \quad (6.5)$$

6.3 Adimensionnalisation des équations et mise à l'échelle

6.3.1 Adimensionnalisation des tenseurs $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$

Afin d'effectuer l'adimensionnalisation des équations, définissons comme dans [48–51, 53] les grandeurs de référence h, d, L caractérisant la géométrie de la coque, u_{1r}, u_{2r}, u_{3r} caractérisant l'ordre de grandeur des déplacements et f_{1r}, f_{2r}, f_{3r} l'ordre de grandeur des efforts. On définit alors les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$y_1 = \frac{\tilde{y}_1}{L} \quad y_2 = \frac{\tilde{y}_2}{d} \quad u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{u_{1r}} \quad u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{u_{2r}} \quad u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{u_{3r}} \quad (6.6)$$

$$f_1 = \frac{\tilde{f}_1}{f_{1r}} \quad f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{f_{2r}} \quad f_3 = \frac{\tilde{f}_3}{f_{3r}} \quad (6.7)$$

On a de façon évidente $\tilde{\partial}_1 = \frac{1}{L} \partial_1$ et $\tilde{\partial}_2 = \frac{1}{d} \partial_2$, où on a noté $\tilde{\partial}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_\alpha}$ et $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$.

Afin de ne faire pour aucune hypothèse a priori sur les déplacements, on considère pour l'instant $u_{1r} = u_{2r} = u_{3r} = h$ de façon à rester dans le cadre de l'élasticité linéaire. Compte tenu de cette adimensionnalisation, les expressions des déformations membranaires s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{11} = \frac{u_{1r}}{L} u_{1,1} = \eta \varepsilon u_{1,1} \\ \tilde{\gamma}_{22} = \frac{u_{2r}}{d} u_{2,2} - c_r u_{3r} c u_3 = \eta u_{1,2} - \nu c u_3 \\ \tilde{\gamma}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{1r}}{d} u_{1,2} + \frac{u_{2r}}{L} u_{2,1} \right) = \frac{1}{2} \eta (u_{1,2} + \varepsilon u_{2,1}) \end{array} \right. \quad (6.8)$$

où l'on a posé

$$\varepsilon = \frac{d}{L}, \quad \eta = \frac{h}{d} \text{ et } \nu = h c_r.$$

De la même façon, on peut écrire les composantes du tenseur de variation de courbure sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_{11} = \frac{u_{3r}}{L^2} u_{3,11} = \frac{1}{d} \varepsilon^2 \eta u_{3,11} \\ \tilde{\rho}_{22} = \frac{u_{3r}}{d^2} u_{3,22} + \frac{c_r u_{2r}}{d} [c u_{2,2} + (c u_2)_{,2}] - c^2 c_r^2 u_{3r} u_3 \\ = \frac{1}{d} \left(\eta u_{3,22} + \nu c u_{2,2} + \nu (c u_2)_{,2} - \frac{\nu^2}{\eta} c^2 u_3 \right) \\ \tilde{\rho}_{12} = \frac{u_{3r}}{L d} u_{3,12} + c_r \frac{u_{2r}}{L} c u_{2,1} = \frac{1}{d} \varepsilon (\eta u_{3,12} + \nu c u_{2,1}) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Ainsi l'adimensionnalisation des équations fait apparaître les nombres sans dimension suivants caractérisant la géométrie des poutres voiles ou des coques allongées :

- le rapport $\varepsilon = \frac{d}{L}$ représente l'éclatement de la poutre,
- le rapport $\eta = \frac{h}{d}$ représente l'épaisseur relative de la poutre par rapport à sa largeur,
- le rapport $\nu = h c_r$ est le rapport entre l'épaisseur et le plus petit rayon de courbure.

Dans le cas des poutres voiles, à la différence des coques, on a besoin d'un nombre sans dimension supplémentaire pour caractériser la géométrie de la structure.

Ces trois nombres sans dimension sont des données géométriques du problème qui contient plusieurs échelles de longueur. Pour se ramener à un problème mono-échelle afin d'effectuer le développement asymptotique des équations, il est nécessaire d'exprimer η et ν en fonction de ε , considéré comme le

petit paramètre de référence. Dans ce qui suit, on s'intéressera aux poutres voiles fortement courbées c'est-à-dire aux coques très allongées et fortement courbées vérifiant :

$$\eta = \varepsilon \text{ et } \nu = \varepsilon \quad (6.10)$$

De façon équivalente, la condition $\nu = \varepsilon$ revient à avoir $hc_r \approx h/d \Leftrightarrow 1/c_r \approx d$ ce qui est bien vérifié pour les profils fortement courbés (par exemple un demi-cylindre). Ce sont les poutres voiles les plus couramment utilisées dans la pratique (tube fendu, gouttière, mâts de bateau...).

6.3.2 Mise à l'échelle sur les déplacements et les efforts

De même l'adimensionnalisation du travail des efforts extérieurs (second membre de (6.1)) conduit à² :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{S}} \tilde{f} \cdot \tilde{v} \, d\tilde{S} &= \int_{\tilde{S}} \left[\tilde{f}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{f}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{f}_3 \tilde{v}_3 \right] d\tilde{S} \\ &= \mu Ldh \int_S \left[(G_1) f_1 v_1 + (G_2) f_2 v_2 + (G_3) f_3 v_3 \right] dS \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ainsi l'adimensionnalisation du modèle de Koiter fait également apparaître les nombres adimensionnels suivants caractérisant les efforts :

$$G_1 = \frac{f_{1r}}{\mu} \quad G_2 = \frac{f_{2r}}{\mu} \quad G_3 = \frac{f_{3r}}{\mu} \quad (6.12)$$

Ils représentent le rapport entre les efforts appliqués (qui sont déjà surfaciques) et le coefficient de Lamé μ qui joue le rôle de contrainte référence. Dans ce qui suit, de façon à pouvoir comparer les résultats avec ceux obtenus dans [49] à partir du développement asymptotique des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire, on considérera les mêmes niveaux d'efforts vérifiant :

$$G_1 = \varepsilon^5 \quad G_2 = \varepsilon^6 \quad G_3 = \varepsilon^6 \quad (6.13)$$

Pour ces niveaux d'efforts, on pourrait montrer (en suivant la démarche de [49]) que les déplacements axiaux de traction/compression \tilde{u}_1 sont d'un ordre inférieur par rapport aux déplacements de flexion³ \tilde{u}_2 et \tilde{u}_3 . On considérera donc comme dans [49] que l'on a :

$$u_{1r} = \varepsilon h, \quad u_{2r} = h, \quad u_{3r} = h \quad (6.14)$$

Avec cette mise à l'échelle, on se ramène à un problème ne dépendant plus que du petit paramètre ε , épaisseur relative de la poutre voile. Les déformations membranaires deviennent alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{11} &= \varepsilon^3 \gamma_{11} & \gamma_{11} &= u_{1,1} \\ \tilde{\gamma}_{22} &= \varepsilon \gamma_{22} & \text{avec} & \gamma_{22} = u_{2,2} - c u_3 \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \varepsilon^2 \gamma_{12} & \gamma_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Les composantes du tenseur de variation de courbure s'écrivent quant à elles :

²On est toujours placé dans la base locale orthonormée.

³Qui jouent des rôles symétriques pour un profil fortement courbé.

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{11} &= \frac{1}{d} \varepsilon^3 \rho_{11} & \rho_{11} &= u_{3,11} \\
\tilde{\rho}_{22} &= \frac{1}{d} \varepsilon \rho_{22} & \text{avec} & \rho_{22} = u_{3,22} + cu_{2,2} + (cu_2)_{,2} - c^2 u_3 \\
\tilde{\rho}_{12} &= \frac{1}{d} \varepsilon^2 \rho_{12} & & \rho_{12} = u_{3,12} + cu_{2,1}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Formulation faible adimensionnée

Compte tenu de la mise à l'échelle effectuée sur la géométrie, les efforts et les déplacements, la formulation faible adimensionnelle du modèle de Koiter s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_S \left(\left[\varepsilon^6 A \gamma_{11}(u) + \varepsilon^4 B \gamma_{22}(u) \right] \gamma_{11}(v) + \varepsilon^4 8 \gamma_{12}(u) \gamma_{12}(v) + \left[\varepsilon^2 A \gamma_{22}(u) + \varepsilon^4 B \gamma_{11}(u) \right] \gamma_{22}(v) \right) dS \\
& + \frac{\varepsilon^2}{3} \int_S \left(\left[\varepsilon^6 A \rho_{11}(u) + \varepsilon^4 B \rho_{22}(u) \right] \rho_{11}(v) + \varepsilon^4 8 \rho_{12}(u) \rho_{12}(v) \right. \\
& \quad \left. + \left[\varepsilon^2 A \rho_{22}(u) + \varepsilon^4 B \rho_{11}(u) \right] \rho_{22}(v) \right) dS = \varepsilon^6 \int_S \left[f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \right] dS
\end{aligned} \tag{6.17}$$

que l'on peut écrire sous la forme du problème de pénalisation suivant :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^4} \int_S A \gamma_{22}(u) \gamma_{22}(v) dS + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_S \left[B \gamma_{22}(u) \gamma_{11}(v) + B \gamma_{11}(u) \gamma_{22}(v) + 8 \gamma_{12}(u) \gamma_{12}(v) \right] dS \\
& \frac{1}{\varepsilon^2} \int_S \frac{A}{3} \rho_{22}(u) \rho_{22}(v) dS + \int_S A \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(v) dS \\
& + \int_S \left[\frac{B}{3} \rho_{22}(u) \rho_{11}(v) + \frac{B}{3} \rho_{11}(u) \rho_{22}(v) + \frac{8}{3} \rho_{12}(u) \rho_{12}(v) \right] dS + \varepsilon^2 \int_S \frac{A}{3} \rho_{11}(u) \rho_{11}(v) dS \\
& = \int_S \left[f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \right] dS
\end{aligned} \tag{6.18}$$

On rappelle que l'on a posé $A = \frac{8(\beta + 1)}{2 + \beta}$ et $B = \frac{4\beta}{2 + \beta}$ compte tenu de (6.3).

6.4 Développement asymptotique des équations

En suivant la démarche classique [81, 84], on cherche le déplacement inconnu (u_1, u_2, u_3) sous la forme d'un développement formel en puissance du petit paramètre ε :

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + \varepsilon u_1^1 + \varepsilon^2 u_1^2 + \dots \\ u_2 = u_2^0 + \varepsilon u_2^1 + \varepsilon^2 u_2^2 + \dots \\ u_3 = u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 u_3^2 + \dots \end{cases} \tag{6.19}$$

En remplaçant (6.19) dans les équations (6.18) et en annulant successivement les facteurs des différentes puissances de ε , on obtient une série de problèmes en cascade couplés. De ces problèmes couplés, on cherche à caractériser le déplacement u^0 du développement (6.19) du déplacement qui sera la solution du modèle unidimensionnel de poutre voile recherché.

6.4.1 Cinématique de type Vlassov

Résultat 6.4.1 Pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$ et $G_1 = \varepsilon^5$, à l'ordre principal, le déplacement $u^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ est un déplacement de type Vlassov qui s'écrit :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \bar{U}_1 - x_2 \frac{d\bar{U}_2^c}{dy_1} - x_3 \frac{d\bar{U}_3^c}{dy_1} - \omega \frac{d\bar{\Theta}^0}{dy_1} \\ u_2^0 &= \bar{U}_2^c \cos \alpha + \bar{U}_3^c \sin \alpha - q(y_2) \bar{\Theta}^0 \\ u_3^0 &= -\bar{U}_2^c \sin \alpha + \bar{U}_3^c \cos \alpha + l(y_2) \bar{\Theta}^0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

avec :

$$\begin{cases} l(y_2) = (x_2 - x_2^c) \cos \alpha + (x_3 - x_3^c) \sin \alpha \\ q(y_2) = -(x_2 - x_2^c) \sin \alpha + (x_3 - x_3^c) \cos \alpha \\ \frac{d\alpha}{dy_2} = c \end{cases} \quad (6.21)$$

et où :

- \bar{U}_1 est le déplacement en traction suivant la direction $a_1 = e_1$
- \bar{U}_2^c et \bar{U}_3^c sont les déplacements du point C quelconque dans le plan de la section de coordonnées (x_2^c, x_3^c)
- $\bar{\Theta}^0$ représente la rotation autour de l'axe (C, e_1)
- ω est l'aire sectorielle définie par :

$$\frac{d\omega}{dy_2} = -q$$

-Démonstration :

La démonstration du résultat 6.4.1 s'effectue en caractérisant le gouffre, correspondant au problème de pénalisation (6.18), dans lequel se situe nécessairement le déplacement solution. En effet, les termes apparaissant en $1/\varepsilon^4$ et $1/\varepsilon^2$ dans (6.18) sont des termes de pénalisation qui caractérisent la cinématique de la solution u^0 à l'ordre principal du développement. La démonstration de ce résultat peut se diviser en 2 grandes étapes numérotées i) et ii).

i) Caractérisation du gouffre

▷ Problème \mathcal{P}^{-4}

L'annulation du facteur en ε^{-4} conduit au problème P^{-4} qui s'écrit :

$$\text{Trouver } u^0 \in V \text{ tq } \int_S A \gamma_{22}(u^0) \gamma_{22}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V \quad (6.22)$$

En considérant des déplacements tests $v = u^0$, on obtient :

$$\int_S A [\gamma_{22}(u^0)]^2 dS = 0 \quad (6.23)$$

Le coefficient A étant strictement positif, $\gamma_{22}(u^0)$ est forcément nul. On a donc :

$$\gamma_{22}(u^0) = 0 \Leftrightarrow \partial_2 u_2^0 - cu_3^0 = 0 \quad (6.24)$$

▷ *Problème \mathcal{P}^{-3}*

Le problème \mathcal{P}^{-3} résultant de l'annulation des termes en ε^{-3} s'écrit :

$$\text{Trouver } u^1 \in V \text{ tq } \int_S A \gamma_{22}(u^1) \gamma_{22}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V \quad (6.25)$$

Si on choisit comme déplacement test particulier $v = u^1$, il vient comme précédemment :

$$\int_S A [\gamma_{22}(u^1)]^2 dS = 0 \quad (6.26)$$

Comme à l'ordre zéro, cela implique que :

$$\gamma_{22}(u^1) = 0 \Leftrightarrow \partial_2 u_2^1 - cu_3^1 = 0 \quad (6.27)$$

▷ *Problème \mathcal{P}^{-2}*

L'annulation des termes en ε^{-2} conduit au problème \mathcal{P}^{-2} qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_S [B\gamma_{22}(u^0)\gamma_{11}(v) + 8\gamma_{12}(u^0)\gamma_{12}(v) + A\gamma_{22}(u^2)\gamma_{22}(v) + B\gamma_{11}(u^0)\gamma_{22}(v)] dS \\ + \int_S \frac{A}{3} \rho_{22}(u^0)\rho_{22}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (6.28)$$

Or, comme $\gamma_{22}(u^0) = 0$ d'après (6.24), en prenant comme déplacement test $v = u^0$, il reste :

$$\int_S 8 [\gamma_{12}^0(u^0)]^2 dS + \int_S \frac{A}{3} [\rho_{22}^0(u^0)]^2 dS = 0 \quad (6.29)$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \gamma_{12}(u^0) = 0 & \partial_2 u_1^0 + \partial_1 u_2^0 = 0 \\ \rho_{22}(u^0) = 0 & \partial_{22} u_3^0 + c\partial_2 u_2^0 + \partial_2(cu_2^0) - c^2 u_3^0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (6.30)$$

Ainsi, le gouffre G est caractérisé par :

$$G = \{u^0 \in V, \text{ tel que } \gamma_{22}(u^0) = 0, \rho_{22}(u^0) = 0, \gamma_{12}(u^0) = 0\} \quad (6.31)$$

Établissons maintenant une relation qui sera utile par la suite. Compte-tenu de (6.24) et (6.30), le problème \mathcal{P}^{-2} se réduit à :

$$\text{Trouver } u^0 \in V \text{ et } u^2 \in V \text{ tq } \int_S [A\gamma_{22}(u^2) + B\gamma_{11}(u^0)] \gamma_{22}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V \quad (6.32)$$

Considérons alors un déplacement test de la forme :

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } v_2 \in C^1(\Omega) \in H^1(\Omega) \quad (6.33)$$

On a alors $\gamma_{22} = v_{2,2}$ et (6.32) devient :

$$\int_S [A\gamma_{22}(u^2) + B\gamma_{11}(u^0)] v_{2,2} dS = 0 \quad \forall v_{2,2} \in C^0(\bar{\Omega}) \quad (6.34)$$

Or, dans le cas d'une section ouverte, lorsque v_2 est arbitraire, $v_{2,2}$ l'est également. En effet, on peut toujours prendre pour v_2 la primitive d'une fonction arbitraire $w \in C^0(\bar{\Omega})$ par rapport à y_2 . On a alors $v_{2,2} = w \in C^0(\bar{\Omega})$. Finalement la relation (6.32) conduit à :

$$A\gamma_{22}(u^2) + B\gamma_{11}(u^0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (6.35)$$

ii) Cinématique de Vlassov

On a vu que $G = \{u^0 \in V, \gamma_{22}(u^0) = 0, \rho_{22}(u^0) = 0, \gamma_{12}(u^0) = 0\}$. Ainsi si u^0 est dans le gouffre, il satisfait à :

$$\begin{cases} \gamma_{22}(u^0) = 0 & \Leftrightarrow & \partial_2 u_2^0 - cu_3^0 = 0 \\ \gamma_{12}(u^0) = 0 & \Leftrightarrow & \partial_2 u_1^0 + \partial_1 u_2^0 = 0 \\ \rho_{22}(u^0) = 0 & \Leftrightarrow & \partial_{22} u_3^0 + c\partial_2 u_2^0 + \partial_2(cu_2^0) - c^2 u_3^0 = 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

Or, on peut remarquer que, compte-tenu de l'expression de $\gamma_{22}(u^0)$, on a :

$$\rho_{22}(u^0) = \partial_{22} u_3^0 + \partial_2(cu_2^0) + c\gamma_{22}(u^0) = \partial_{22} u_3^0 + \partial_2(cu_2^0) \quad (6.37)$$

On va maintenant voir que les éléments du gouffre G ne sont rien d'autre que les déplacements possédant une cinématique de type Vlassov donnée par (6.20)-(6.21) (voir aussi [96]). Pour cela, nous procédons comme dans [49]. D'après (6.37), on a :

$$\partial_2 [\partial_2 u_3^0 + cu_2^0] = 0 \quad (6.38)$$

soit

$$\partial_2 u_3^0 + cu_2^0 = \bar{\Theta}^0 \quad (6.39)$$

où $\bar{\Theta}^0$ est une fonction ne dépendant que de y_1 . On est donc amené à intégrer le système :

$$\begin{cases} \partial_2 u_2^0 - cu_3^0 = 0 \\ \partial_2 u_3^0 + cu_2^0 = \bar{\Theta}^0 \end{cases} \quad (6.40)$$

qui caractérise les déplacements rigides plans.

Afin de résoudre le système (6.40), exprimons les composantes (u_2^0, u_3^0) du déplacement u^0 dans la base locale en fonction des composantes cartésiennes (U_2^0, U_3^0) . Pour cela, définissons l'angle $\alpha = (e_2, a_2)$ comme indiqué sur la figure 6.2.

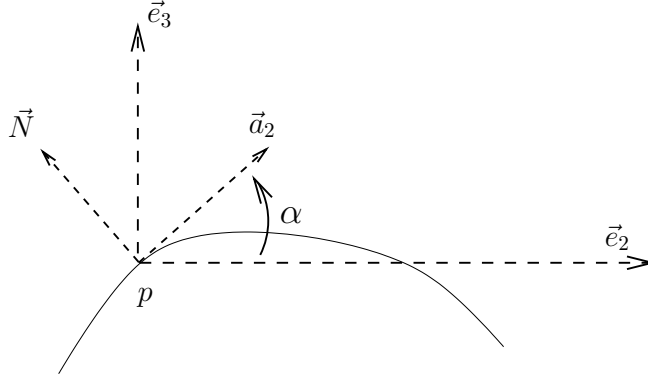


FIG. 6.2 – Définition de l'angle α

On a classiquement les relations suivantes caractérisant les vecteurs normés a_2 et N dans la base cartésienne (e_2, e_3) :

$$a_2 = \frac{\partial p}{\partial y_2} \text{ avec } p = \begin{pmatrix} x_2(y_2) \\ x_3(y_2) \end{pmatrix}_{(e_2, e_3)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_2}{dy_2} = \cos \alpha \\ \frac{dx_3}{dy_2} = \sin \alpha \end{cases} \quad (6.41)$$

N étant tel que le triplet (a_1, a_2, N) forme une base orthonormée directe. La courbure du profil est définie par :

$$\frac{da_2}{dy_2} = cN \Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dy_2} = c \text{ avec } N = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}_{(e_2, e_3)} \quad (6.42)$$

où c est la courbure du profil. Ainsi la relation liant les composantes des déplacements dans le plan de la section s'écrit :

$$\begin{cases} u_2^0 = U_2^0 \cos \alpha + U_3^0 \sin \alpha \\ u_3^0 = -U_2^0 \sin \alpha + U_3^0 \cos \alpha \end{cases} \quad (6.43)$$

Le système (6.40) est alors équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_2^0}{\partial y_2} = -\bar{\Theta}^0 \sin \alpha \\ \frac{\partial U_3^0}{\partial y_2} = \bar{\Theta}^0 \cos \alpha \end{cases} \quad (6.44)$$

On peut donc écrire les déplacements dans la base cartésienne sous la forme :

$$\begin{cases} U_2^0 = \bar{U}_2^c - (x_3 - x_3^c) \bar{\Theta}^0 \\ U_3^0 = \bar{U}_3^c + (x_2 - x_2^c) \bar{\Theta}^0 \end{cases} \quad (6.45)$$

où les déplacements \bar{U}_2^c et \bar{U}_3^c représentent ceux d'un point arbitraire C de coordonnées (x_2^c, x_3^c) et $\bar{\Theta}^0$ la rotation autour de l'axe (C, e_3) .

Pour finir en remplaçant les expressions (6.45) de U_2^0 et U_3^0 dans (6.43), on obtient la cinématique de type solide rigide des sections écrite dans la base locale (a_2, N) :

$$\begin{cases} u_2^0 = \bar{U}_2^c \cos \alpha + \bar{U}_3^c \sin \alpha - q(y_2) \bar{\Theta}^0 \\ u_3^0 = -\bar{U}_2^c \sin \alpha + \bar{U}_3^c \cos \alpha + l(y_2) \bar{\Theta}^0 \end{cases} \quad (6.46)$$

avec :

$$\begin{cases} l(y_2) = (x_2 - x_2^c) \cos \alpha + (x_3 - x_3^c) \sin \alpha \\ q(y_2) = -(x_2 - x_2^c) \sin \alpha + (x_3 - x_3^c) \cos \alpha \end{cases} \quad (6.47)$$

On peut interpréter $l(y_2)$ et $q(y_2)$ comme suit en se plaçant dans la base locale (voir Fig. 6.3).

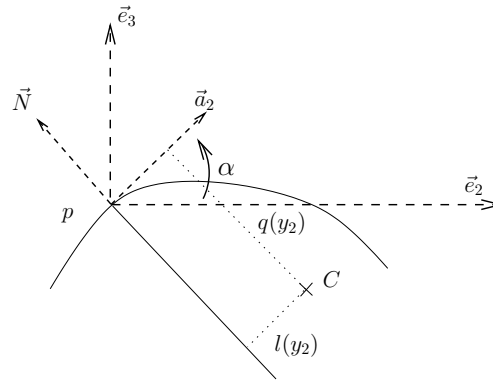


FIG. 6.3 – Interprétation de $l(y_2)$ et $q(y_2)$

On a $\vec{Cp} = (x_2 - x_2^c)e_2 + (x_3 - x_3^c)e_3$ dans la base cartésienne. En exprimant les vecteurs de la base cartésienne dans la base locale par la relation :

$$\begin{cases} e_2 = \cos \alpha a_2 - \sin \alpha N \\ e_3 = \sin \alpha a_2 + \cos \alpha N \end{cases} \quad (6.48)$$

on obtient l'expression de \vec{Cp} dans la base locale :

$$\vec{Cp} = [(x_2 - x_2^c) \cos \alpha + (x_3 - x_3^c) \sin \alpha] a_2 + [-(x_2 - x_2^c) \sin \alpha + (x_3 - x_3^c) \cos \alpha] N \quad (6.49)$$

soit

$$\vec{Cp} = l(y_2) a_2 + q(y_2) N \quad (6.50)$$

Ainsi $l(y_2)$ et $q(y_2)$ ne sont rien d'autre que les composantes du vecteur \vec{Cp} dans la base locale (a_2, N) .

Pour finir, le déplacement axial de traction u_1^0 s'obtient simplement à partir de la condition (6.30) $\gamma_{12}(u^0) = 0$ qui correspond à l'hypothèse de non distortion du profil effectuée a priori par Vlassov [96].

Celle-ci s'obtient ici naturellement à partir du modèle de Koiter. La condition $\gamma_{12}(u^0) = 0$ conduit alors à :

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} = -\frac{\partial u_2^0}{\partial y_1} = -\cos \alpha \frac{d\bar{U}_2^c}{dy_1} - \sin \alpha \frac{d\bar{U}_3^c}{dy_1} + q(y_2) \frac{d\bar{\Theta}^0}{dy_1} \quad (6.51)$$

En utilisant le fait que $\frac{dx_2(y_2)}{dy_2} = \cos \alpha$ et $\frac{dx_3(y_2)}{dy_2} = \sin \alpha$, on obtient l'expression (6.20) de u_1^0 où

$$\frac{d\omega(y_2)}{dy_2} = -q(y_2)$$

La fonction $\omega(y_2)$ s'appelle classiquement l'aire sectorielle (voir [96]).

Pour terminer la démonstration, on se propose de montrer que le déplacement u^1 à l'ordre 1 vérifie aussi la cinématique de Vlassov.

▷ *Problème \mathcal{P}^{-1}*

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, le problème \mathcal{P}^{-1} résultant de l'annulation des termes en ε^{-1} s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_S \left[B\gamma_{22}(u^1)\gamma_{11}(v) + 8\gamma_{12}(u^1)\gamma_{12}(v) + A\gamma_{22}(u^3)\gamma_{22}(v) + B\gamma_{11}(u^1)\gamma_{22}(v) \right] dS \\ & + \int_S \frac{A}{3} \rho_{22}(u^1)\rho_{22}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (6.52)$$

En procédant de la même manière qu'au problème \mathcal{P}^{-2} avec u^1 au lieu de u^0 (on a exactement les mêmes propriétés pour u^0 et u^1), on obtient des résultats analogues pour u^1 :

$$\begin{cases} \gamma_{12}(u^1) = 0 \\ \rho_{22}(u^1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_2 u_1^1 + \partial_1 u_2^1 = 0 \\ -\partial_{22} u_3^1 - c\partial_2 u_2^1 - \partial_2(cu_2^1) + c^2 u_3^1 = 0 \end{cases} \quad (6.53)$$

Ainsi, compte tenu de (6.27) on a aussi $u^1 \in G$. Le déplacement à l'ordre 1 vérifie donc aussi la cinématique de Vlassov et peut également s'écrire sous la forme (6.20)-(6.21).

6.4.2 Conditions aux limites associées

Il est possible de préciser dès maintenant les conditions aux limites naturelles associées à la cinématique de Vlassov. En effet, les conditions aux limites aux extrémités encastées de la poutre voile s'écrivent au premier ordre du développement :

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0 \quad \text{en } y_1 = 0 \quad \text{et } y_1 = L \quad \forall y_2 \in [y_2^-, y_2^+] \quad (6.54)$$

où y_2^- et y_2^+ sont les coordonnées des extrémités du profil suivant y_2 . Compte tenu de la cinématique (6.20)-(6.21) de type Vlassov pour u^0 , les conditions aux limites (6.54) impliquent que l'on a :

$$\begin{cases} \bar{U}_2^c(0) = \bar{U}_2^c(L) = 0 \\ \frac{d\bar{U}_2^c}{dy_1}(0) = \frac{d\bar{U}_2^c}{dy_1}(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{U}_3^c(0) = \bar{U}_3^c(L) = 0 \\ \frac{d\bar{U}_3^c}{dy_1}(0) = \frac{d\bar{U}_3^c}{dy_1}(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\Theta}^0(0) = \bar{\Theta}^0(L) = 0 \\ \frac{d\bar{\Theta}^0}{dy_1}(0) = \frac{d\bar{\Theta}^0}{dy_1}(L) = 0 \end{cases} \quad (6.55)$$

et

$$\bar{U}_1(0) = \bar{U}_1(L) = 0 \quad (6.56)$$

Ainsi, on a 4 conditions aux limites pour les déplacements de flexion \bar{U}_2^c et \bar{U}_3^c et pour l'angle de torsion $\bar{\Theta}^0$ mais seulement 2 pour le déplacement axial \bar{U}_1 . On verra après établissement des équations d'équilibre unidimensionnelles à la section suivante, que ces conditions aux limites sont bien compatibles avec les équations différentielles obtenues, du deuxième ordre seulement pour la traction/compression, mais du quatrième ordre pour la flexion et la torsion.

6.5 Équations d'équilibre

Maintenant que nous avons établi la cinématique de type Vlassov pour le premier terme u^0 du développement qui provient des termes de pénalisation, on va voir que le problème \mathcal{P}^0 conduit aux équations d'équilibre associées. Nous allons d'abord les établir sous forme faible, relativement peu explicite, puis sous forme locale de façon à les comparer aux équations d'équilibre classiques de Vlassov [96].

6.5.1 Équations d'équilibre en formulation faible

▷ *Problème \mathcal{P}^0*

Compte tenu des résultats précédents obtenus sur la cinématique, le problème \mathcal{P}^0 s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_S \left([B\gamma_{22}(u^2) + A\gamma_{11}(u^0)] \gamma_{11}(v) + 8\gamma_{12}(u^2)\gamma_{12}(v) + [A\gamma_{22}(u^4) + B\gamma_{11}(u^2)] \gamma_{22}(v) \right) dS \\ & + \frac{1}{3} \int_S \left(8\rho_{12}(u^0)\rho_{12}(v) + [A\rho_{22}(u^2) + B\rho_{11}(u^2)] \rho_{22}(v) \right) dS = b(v) \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\text{avec } b(v) = \int_S (f_1v_1 + f_2v_2 + f_3v_3) dS$$

Étant donné que la solution $u^0 \in G$, il est nécessaire de restreindre la formulation faible (6.57) à $V \cap G$. Elle s'écrit alors en utilisant (6.35) :

Trouver $u^0 \in V \cap G$ tq :

$$\int_S \frac{2E}{\mu} \gamma_{11}(u^0)\gamma_{11}(v) dS + \int_S \frac{8}{3} \rho_{12}(u^0)\rho_{12}(v) dS = \int_S fvdS \quad \forall v \in V \cap G \quad (6.58)$$

Comme on a $v \in G$, il est possible de l'écrire sous la forme :

$$v^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 = \bar{V}_1 - x_3 \frac{d\bar{V}_3}{dy_1} - x_2 \frac{d\bar{V}_2}{dy_1} - \omega \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} \\ v_2^0 = \bar{V}_2 \cos \alpha + \bar{V}_3 \sin \alpha - q(y_2)\bar{\delta} \\ v_3^0 = -\bar{V}_2 \sin \alpha + \bar{V}_3 \cos \alpha + l(y_2)\bar{\delta} \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

où $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{\delta})$ est un champ test arbitraire ne dépendant que de y_1 .

Avec la cinématique de G , on aura pour u^0 :

$$\begin{cases} \gamma_{11}(u^0) = \frac{d\bar{U}_1}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}}{dy_1^2} \\ \rho_{12}(u^0) = \left(\frac{dl}{dy_2} - cq \right) \frac{d\bar{\Theta}}{dy_1} \end{cases} \quad (6.60)$$

Compte tenu des expressions (6.21) de $l(y_2)$ et $q(y_2)$, on peut montrer facilement que l'on a :

$$\frac{dl}{dy_2} - cq = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dy_2} + cq = 0 \quad (6.61)$$

Ainsi, on trouve $\rho_{12}(u^0) = \frac{d\bar{\Theta}}{dy_1}$. De même, on obtient une expression similaire pour v :

$$\begin{cases} \gamma_{11}(v) = \frac{d\bar{V}_1}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{V}_2}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{V}_3}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\delta}}{dy_1^2} \\ \rho_{12}(v) = \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} \end{cases} \quad (6.62)$$

Les équations d'équilibre (6.58) peuvent s'expliciter en remplaçant u^0 et v par les expressions (6.20)-(6.21) et (6.59). On va voir que l'on obtient quatre équations d'équilibre unidimensionnelles qui sont des équations différentielles pour les quatre inconnues \bar{U}_1 , \bar{U}_2^c , \bar{U}_3^c et $\bar{\Theta}^0$ caractérisant de façon unique la cinématique de Vlassov.

D'autre part, compte tenu de la formulation (6.58) pour le problème limite posé dans $V \cap G$ ainsi que de la cinématique de Vlassov (6.20)-(6.21) caractérisant le gouffre G , il est possible de préciser dès maintenant la régularité pour les nouvelles inconnues unidimensionnelles \bar{U}_1 , \bar{U}_2^c , \bar{U}_3^c et $\bar{\Theta}^0$. On rappelle que ces dernières ne dépendent que de y_1 .

En effet, pour que $(u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega))$, compte tenu de la cinématique (6.20)-(6.21) et des conditions aux limites (6.55)-(6.56), on doit avoir :

$$\bar{U}_1 \in H_0^1(]0, L[); \quad \bar{U}_2^c \in H_0^2(]0, L[); \quad \bar{U}_3^c \in H_0^2(]0, L[); \quad \bar{\Theta}^0 \in H_0^2(]0, L[). \quad (6.63)$$

6.5.2 Équation de traction

Résultat 6.5.1 *Pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues $(\bar{U}_1, \bar{U}_2^c, \bar{U}_3^c, \bar{\Theta}^0)$ sont solutions de l'équation de traction suivante :*

$$-\frac{E}{\mu} S \frac{d^2\bar{U}_1}{dy_1^2} + \frac{E}{\mu} S_2 \frac{d^3\bar{U}_2^c}{dy_1^3} + \frac{E}{\mu} S_3 \frac{d^3\bar{U}_3^c}{dy_1^3} + \frac{E}{\mu} S_\omega \frac{d^3\bar{\Theta}^0}{dy_1^3} = F_1 \quad (6.64)$$

avec

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} dy_2 & S_2 &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2 dy_2 & S_3 &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_3 dy_2 \\ S_\omega &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega dy_2 & F_1 &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} f_1 dy_2 \end{aligned}$$

-Démonstration :

Afin d'établir l'équation d'équilibre en traction, considérons des déplacements tests particuliers dans la formulation faible(6.58) de la forme : $\bar{V}_2 = \bar{V}_3 = \bar{\delta} = 0$ avec $\bar{V}_1 \in H_0^1(]0, L[)$ quelconque. On a ainsi :

$$v = \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

et donc :

$$\begin{cases} \gamma_{11}(v) = \frac{d\bar{V}_1}{dy_1} \\ \rho_{12}(v) = 0 \end{cases} \quad (6.66)$$

La formulation faible (6.58) devient alors :

$$\frac{2E}{\mu} \int_S \left(\frac{d\bar{U}_1^c}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}^0}{dy_1^2} \right) \frac{d\bar{V}_1}{dy_1} dy_1 dy_2 = \int_S f_1 \bar{V}_1 dy_1 dy_2 \quad (6.67)$$

$\forall \bar{V}_1 \in H_0^1(]0, L[)$

Après une intégration par parties par rapport à y_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{\mu} \int_S \left(-\frac{d^2\bar{U}_1^c}{dy_1^2} + x_2 \frac{d^3\bar{U}_2^c}{dy_1^3} + x_3 \frac{d^3\bar{U}_3^c}{dy_1^3} + \omega \frac{d^3\bar{\Theta}^0}{dy_1^3} \right) \bar{V}_1 dy_1 dy_2 \\ & + \frac{2E}{\mu} \int_{y_2^-}^{y_2^+} \left[\left(\frac{d\bar{U}_1^c}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}^0}{dy_1^2} \right) \bar{V}_1 \right]_{y_1=0}^{y_1=L} dy_2 = \int_S f_1 \bar{V}_1 dy_1 dy_2 \quad (6.68) \end{aligned}$$

$\forall \bar{V}_1 \in H_0^1(]0, L[)$

Comme $\bar{V}_1 \in H_0^1(]0, L[)$, le second terme du membre de gauche disparaît bien et on obtient le résultat 6.5.1.

Notons que le coefficient 2 en facteur des constantes géométriques S , S_2 et S_ω provient de l'épaisseur adimensionnalisée. Si l'on avait considéré une poutre d'épaisseur h , on n'aurait pas ce facteur 2.

6.5.3 Équation de torsion

Résultat 6.5.2 Pour des niveaux d'efforts extérieurs de l'ordre $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues $(\bar{U}_1, \bar{U}_2^c, \bar{U}_3^c, \bar{\Theta}^0)$ sont solutions de l'équation de torsion suivante :

$$-\frac{E}{\mu} S_\omega \frac{d^3\bar{U}_1}{dy_1^3} + \frac{E}{\mu} J_{2\omega} \frac{d^4\bar{U}_2^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{3\omega} \frac{d^4\bar{U}_3^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{\omega\omega} \frac{d^4\bar{\Theta}^0}{dy_1^4} - J_{\omega d'} \frac{d^2\bar{\Theta}^0}{dy_1^2} = -M_t + \frac{dM_1}{dy_1} \quad (6.69)$$

avec

$$\begin{aligned} S_\omega &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega dy_2 & J_{2\omega} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega x_2 dy_2 & J_{3\omega} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega x_3 dy_2 & J_{\omega\omega} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega^2 dy_2 \\ J_{\omega d'} &= \frac{8}{3} \int_{y_2^-}^{y_2^+} dy_2 & M_t &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} [q(y_2)f_2 - l(y_2)f_3] dy_2 & M_1 &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega f_1 dy_2 \end{aligned}$$

-Démonstration :

On considère maintenant des déplacements tests particuliers de la forme : $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = 0$ et $\bar{\delta} \in H_0^2(]0, L[)$ quelconque. On a alors :

$$v = \begin{pmatrix} -\omega \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} \\ -q(y_2)\bar{\delta} \\ l(y_2)\bar{\delta} \end{pmatrix} \quad d'o\grave{u} \quad \begin{cases} \gamma_{11}(v) = -\omega \frac{d^2\bar{\delta}}{dy_1^2} \\ \rho_{12}(v) = \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} \end{cases} \quad (6.70)$$

La formulation faible (6.58) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{\mu} \int_S \left(\frac{d\bar{U}_1}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}}{dy_1^2} \right) \left(-\omega \frac{d^2\bar{\delta}}{dy_1^2} \right) dy_1 dy_2 + \frac{8}{3} \int_S \left(\frac{d\bar{\Theta}}{dy_1} \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 \\ & = \int_S \left(-\omega f_1 \frac{d\bar{\delta}}{dy_1} - q(y_2) f_2 \bar{\delta} + l(y_2) f_3 \bar{\delta} \right) dy_1 dy_2 \quad \forall \bar{\delta} \in H_0^2(]0, L[) \quad (6.71) \end{aligned}$$

Après 2 intégrations par partie successives par rapport à y_1 pour le premier terme du membre de gauche et une pour le second, comme $\bar{\delta} \in H_0^2(]0, L[)$ on retrouve l'équation de torsion du résultat 6.5.2.

6.5.4 Équation de flexion selon e_2

Résultat 6.5.3 Pour des niveaux d'efforts extérieurs de l'ordre $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues $(\bar{U}_1, \bar{U}_2^c, \bar{U}_3^c, \bar{\Theta}^0)$ sont solutions de l'équation de flexion selon e_2 suivante :

$$-\frac{E}{\mu} S_2 \frac{d^3\bar{U}_1}{dy_1^3} + \frac{E}{\mu} J_{22} \frac{d^4\bar{U}_2^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{23} \frac{d^4\bar{U}_3^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{2\omega} \frac{d^4\bar{\Theta}^0}{dy_1^4} = F_2 + \frac{dM_{12}}{dy_1} \quad (6.72)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{22} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2 dy_2 & J_{22} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2^2 dy_2 & J_{23} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2 x_3 dy_2 & J_{2\omega} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega x_2 dy_2 \\ F_2 &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} [f_2 \cos \alpha - f_3 \sin \alpha] dy_2 & M_{12} &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2 f_1 dy_2 \end{aligned}$$

-Démonstration :

Pour établir l'équation de flexion selon e_2 , on considère des déplacements tests particuliers de la forme : $\bar{V}_1 = \bar{V}_3 = \bar{\delta} = 0$ et $\bar{V}_2 \in H_0^2(]0, L[)$ quelconque. On a maintenant :

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{d\bar{V}_2}{dy_1} x_2 \\ \bar{V}_2 \cos \alpha \\ -\bar{V}_2 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{cases} \gamma_{11}(v) = -\frac{d^2\bar{V}_2^c}{dy_1^2} x_2 \\ \rho_{12}(v) = 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

La formulation faible (6.58) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{\mu} \int_S \left[\frac{d\bar{U}_1}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}^0}{dy_1^2} \right] \left(-x_2 \frac{d^2\bar{V}_2}{dy_1^2} \right) dy_1 dy_2 \\ &= \int_S \left[-f_1 x_2 \frac{d\bar{V}_2}{dy_1} + f_2 \bar{V}_2 \cos \alpha - f_3 \bar{V}_2 \sin \alpha \right] dy_1 dy_2 \quad \forall V_2 \in H_0^2(]0, L[) \end{aligned}$$

Après 2 intégrations par parties successives par rapport à y_1 , on retrouve l'équation d'équilibre (6.72) en flexion suivant e_2 .

6.5.5 Équation de flexion selon e_3

Résultat 6.5.4 Pour des niveaux d'efforts extérieurs de l'ordre $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues $(\bar{U}_1, \bar{U}_2^c, \bar{U}_3^c, \bar{\Theta}^0)$ sont solutions de l'équation de flexion selon e_3 suivante :

$$-\frac{E}{\mu} S_3 \frac{d^3\bar{U}_1}{dy_1^3} + \frac{E}{\mu} J_{23} \frac{d^4\bar{U}_2^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{33} \frac{d^4\bar{U}_3^c}{dy_1^4} + \frac{E}{\mu} J_{2\omega} \frac{d^4\bar{\Theta}^0}{dy_1^4} = F_3 + \frac{dM_{13}}{dy_1} \quad (6.74)$$

avec

$$\begin{aligned} S_3 &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_3 dy_2 & J_{23} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_2 x_3 dy_2 & J_{33} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_3^2 dy_2 & J_{2\omega} &= 2 \int_{y_2^-}^{y_2^+} \omega x_3 dy_2 \\ F_3 &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} [f_2 \sin \alpha + f_3 \cos \alpha] dy_2 & M_{13} &= \int_{y_2^-}^{y_2^+} x_3 f_1 dy_2 \end{aligned}$$

-Démonstration :

On considère pour terminer des déplacements tests de la forme : $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{\delta} = 0$ et $\bar{V}_3 \in H_0^2(]0, L[)$ quelconque. On a maintenant :

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{d\bar{V}_3}{dy_1} x_3 \\ \bar{V}_3 \sin \alpha \\ \bar{V}_3 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma_{11}(v) = -\frac{d^2\bar{V}_3}{dy_1^2} x_3 \\ \rho_{12}(v) = 0 \end{cases} \quad (6.75)$$

Ainsi la formulation faible (6.58) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{\mu} \int_S \left[\frac{d\bar{U}_1}{dy_1} - x_2 \frac{d^2\bar{U}_2^c}{dy_1^2} - x_3 \frac{d^2\bar{U}_3^c}{dy_1^2} - \omega \frac{d^2\bar{\Theta}^0}{dy_1^2} \right] \left(-x_3 \frac{d^2\bar{V}_3}{dy_1^2} \right) dy_1 dy_2 \\ &= \int_S \left[-f_1 x_3 \frac{d\bar{V}_3}{dy_1} + f_2 \bar{V}_3 \sin \alpha + f_3 \bar{V}_3 \cos \alpha \right] dy_1 dy_2 \\ & \quad \forall V_3 \in H_0^2(]0, L[) \end{aligned} \quad (6.76)$$

En procédant comme pour l'équation de flexion suivant e_2 , après 2 intégrations par parties, on obtient bien le résultat 6.5.4 annoncé.

6.6 Retour aux variables dimensionnelles

On retourne aux équations d'équilibre dimensionnelles en introduisant les grandeurs dimensionnelles suivantes définies à partir des inconnues :

$$\bar{U}_1 = \varepsilon h \bar{U}_1 \quad \bar{U}_2^c = h \bar{U}_2^c \quad \bar{U}_3^c = h \bar{U}_3^c \quad \bar{\Theta}^0 = \varepsilon \bar{\Theta}^0 \quad (6.77)$$

ou à partir des données géométriques :

$$\tilde{x}_1 = Lx_1 \quad \tilde{x}_2 = dx_2 \quad \tilde{x}_3 = dx_3 \quad \tilde{\omega} = d^2\omega \quad \tilde{q} = dq \quad \tilde{l} = dl \quad (6.78)$$

Résultat 6.6.1 *Pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $G_1 = G_2 = \varepsilon^5$ et $G_3 = \varepsilon^6$, le déplacement $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0, \tilde{u}_3^0)$ est un déplacement de type Vlassov qui s'écrit :*

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^0 &= \bar{U}_1 - \tilde{x}_2 \frac{d\bar{U}_2^c}{d\tilde{y}_1} - \tilde{x}_3 \frac{d\bar{U}_3^c}{d\tilde{y}_1} - \tilde{\omega} \frac{d\bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1} \\ \tilde{u}_2^0 &= \bar{U}_2^c \cos \alpha + \bar{U}_3^c \sin \alpha - \tilde{q}(\tilde{y}_2) \bar{\Theta}^0 \\ \tilde{u}_3^0 &= -\bar{U}_2^c \sin \alpha + \bar{U}_3^c \cos \alpha + \tilde{l}(\tilde{y}_2) \bar{\Theta}^0 \end{aligned} \quad (6.79)$$

En utilisant (6.77) et (6.78), ainsi que (6.6), (6.7) et (6.14), on obtient de façon évidente le résultat 6.6.1 à partir du résultat 6.4.1. De la même manière, en revenant aux variables dimensionnelles, on obtient les équations dimensionnelles de traction, torsion et flexion suivantes.

Résultat 6.6.2 *Pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues $(\bar{U}_1, \bar{U}_2^c, \bar{U}_3^c, \bar{\Theta}^0)$ sont solutions des équations d'équilibre dimensionnelles suivantes :*

$$-E \tilde{S} \frac{d^2 \bar{U}_1}{d\tilde{y}_1^2} + E \tilde{S}_2 \frac{d^3 \bar{U}_2^c}{d\tilde{y}_1^3} + E \tilde{S}_3 \frac{d^3 \bar{U}_3^c}{d\tilde{y}_1^3} + E \tilde{S}_\omega \frac{d^3 \bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^3} = \tilde{F}_1 \quad (6.80)$$

$$-E \tilde{S}_\omega \frac{d^3 \bar{U}_1}{d\tilde{y}_1^3} + E \tilde{J}_{2\omega} \frac{d^4 \bar{U}_2^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{3\omega} \frac{d^4 \bar{U}_3^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{\omega\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^4} - \mu \tilde{J}_{\omega d} \frac{d^2 \bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^2} = -\tilde{M}_t + \frac{d\tilde{M}_1}{d\tilde{y}_1} \quad (6.81)$$

$$-E \tilde{S}_2 \frac{d^3 \bar{U}_1}{d\tilde{y}_1^3} + E \tilde{J}_{22} \frac{d^4 \bar{U}_2^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{23} \frac{d^4 \bar{U}_3^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{2\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^4} = \tilde{F}_2 + \frac{d\tilde{M}_{12}}{d\tilde{y}_1} \quad (6.82)$$

$$-E \tilde{S}_3 \frac{d^3 \bar{U}_1}{d\tilde{y}_1^3} + E \tilde{J}_{23} \frac{d^4 \bar{U}_2^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{33} \frac{d^4 \bar{U}_3^c}{d\tilde{y}_1^4} + E \tilde{J}_{3\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^4} = \tilde{F}_3 + \frac{d\tilde{M}_{13}}{d\tilde{y}_1} \quad (6.83)$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} d\tilde{y}_2 & \tilde{S}_2 &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2 d\tilde{y}_2 & \tilde{S}_3 &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2 & \tilde{S}_{\tilde{\omega}} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} d\tilde{y}_2 \\
\tilde{J}_{2\tilde{\omega}} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} \tilde{x}_2 d\tilde{y}_2 & \tilde{J}_{3\omega} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2 & \tilde{J}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega}^2 d\tilde{y}_2 & \tilde{J}_{\tilde{\omega}d'} &= \frac{8}{3}h^3 \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} d\tilde{y}_2 \\
\tilde{J}_{22} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2^2 d\tilde{y}_2 & \tilde{J}_{33} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_3^2 d\tilde{y}_2 & \tilde{J}_{23} &= 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2 \\
\tilde{F}_1 &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{f}_1 d\tilde{y}_2 & \tilde{F}_2 &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} [\tilde{f}_2 \cos \alpha - \tilde{f}_3 \sin \alpha] d\tilde{y}_2 \\
\tilde{F}_3 &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} [\tilde{f}_2 \sin \alpha + \tilde{f}_3 \cos \alpha] d\tilde{y}_2 & \tilde{M}_t &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} [\tilde{q}(y_2) \tilde{f}_2 - \tilde{l}(\tilde{y}^2) \tilde{f}_3] d\tilde{y}_2 \\
\tilde{M}_1 &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} \tilde{f}_1 d\tilde{y}_2 & \tilde{M}_{12} &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2 \tilde{f}_1 d\tilde{y}_2 & \tilde{M}_{13} &= \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_3 \tilde{f}_1 d\tilde{y}_2
\end{aligned}$$

La démonstration ne pose aucune difficulté et est laissée au lecteur.

6.7 Comparaison des résultats obtenus

6.7.1 Équations d'équilibre réduites

Les équations d'équilibre unidimensionnelles de traction, torsion et flexion obtenues au résultat 6.6.2 font intervenir un certain nombre de constantes géométriques liées au profil de la poutre. On retrouve bien évidemment :

- l'aire $\tilde{S} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} d\tilde{y}_2$ de la section,
- les moments statiques $\tilde{S}_2 = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2 d\tilde{y}_2$ et $\tilde{S}_3 = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2$,
- l'aire sectorielle $\tilde{S}_{\tilde{\omega}} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} d\tilde{y}_2$
- les moments et produits d'inertie :

$$\tilde{J}_{22} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2^2 d\tilde{y}_2 \quad , \quad \tilde{J}_{33} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_3^2 d\tilde{y}_2 \quad , \quad \tilde{J}_{23} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2$$

- ainsi que les moments sectoriels centraux :

$$\tilde{J}_{2\tilde{\omega}} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} \tilde{x}_2 d\tilde{y}_2 \quad \tilde{J}_{3\omega} = 2h \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} \tilde{\omega} \tilde{x}_3 d\tilde{y}_2$$

l'intégration étant effectuée sur la section du profil d'épaisseur constante $2h$.

Il est important de noter que les équations d'équilibre du résultat 6.6.2 sont écrites dans un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ et font intervenir le déplacement d'un point C quelconque. De plus

l'origine de l'abscisse curviligne \tilde{y}_2 paramétrant le profil et intervenant implicitement est également quelconque. Or il est possible de simplifier considérablement les équations d'équilibre (6.80)-(6.83) en choisissant judicieusement le repère \mathcal{R} , le point C et l'origine de l'abscisse curviligne. On obtient alors les équations d'équilibre du résultat 6.7.1 appelées équations d'équilibre réduites.

Résultat 6.7.1 *Pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $G_1 = \varepsilon^5$ et $G_2 = G_3 = \varepsilon^6$, les inconnues \tilde{U}_3 , $\tilde{\Theta}^0$, \tilde{U}_1^c , \tilde{U}_2^c sont solutions des équations d'équilibre suivantes dans le repère principal d'inertie et avec le centre de cisaillement C comme pôle principal :*

$$-E \tilde{S} \frac{d^2 \tilde{U}_1^c}{d\tilde{y}_1^2} = \tilde{F}_1 \quad (6.84)$$

$$E \tilde{J}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \frac{d^4 \tilde{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^4} - \mu \tilde{J}_{\tilde{\omega}d'} \frac{d^2 \tilde{\Theta}^0}{d\tilde{y}_1^2} = -\tilde{M}_t + \frac{d\tilde{M}_3}{d\tilde{y}_1} \quad (6.85)$$

$$E \tilde{J}_{22} \frac{d^4 \tilde{U}_2^c}{d\tilde{y}_1^4} = \tilde{F}_2 + \frac{d\tilde{M}_{12}}{d\tilde{y}_1} \quad (6.86)$$

$$E \tilde{J}_{33} \frac{d^4 \tilde{U}_3}{d\tilde{y}_1^4} = \tilde{F}_3 + \frac{d\tilde{M}_{13}}{d\tilde{y}_1} \quad (6.87)$$

En effet, si on se place dans le repère principal d'inertie du profil dont l'origine O correspond au centre de gravité du profil et dont les directions e_2 et e_3 coïncident avec les axes principaux d'inertie, on a classiquement :

$$\tilde{S}_2 = \tilde{S}_3 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{23} = 0 \quad (6.88)$$

Si de plus, on choisit comme point C le centre de cisaillement du profil qui sera utilisé comme pôle pour le calcul de l'aire sectorielle $\tilde{\omega}$ (voir [96], chapitre 1), on a :

$$\tilde{J}_{2\tilde{\omega}} = \tilde{J}_{3\tilde{\omega}} = 0 \quad (6.89)$$

Enfin l'annulation du moment sectoriel statique $\tilde{S}_{\tilde{\omega}}$ détermine la position de l'origine de l'abscisse curviligne \tilde{y}_2 . Si le profil possède un axe de symétrie, alors l'origine de l'abscisse curviligne doit être prise à l'intersection entre l'axe de symétrie et le profil. Avec ce choix de paramétrage, les équations d'équilibre se réduisent bien à celles du résultat 6.7.1.

6.7.2 Comparaison avec le modèle de Vlassov

A partir d'hypothèses cinématiques et statiques a priori, en effectuant le bilan des efforts s'exerçant sur une tranche de poutre de longueur dx_1 , Vlassov a établi la forme générale de la cinématique dite "de Vlassov" ainsi que des équations d'équilibre en traction, torsion, et flexion caractéristiques des poutres voiles.

Les équations d'équilibre unidimensionnelles que nous avons établies à partir du modèle de coque de Koiter, ainsi que la cinématique du résultat 6.6.1 associée, correspondent à celles établies par Vlassov à partir d'hypothèses a priori. La seule différence réside dans l'expression (ou la définition) de la constante géométrique $\tilde{J}_{\tilde{\omega}d'}$. En effet, au résultat 6.7.1, on obtient l'expression analytique exacte

$$\tilde{J}_{\tilde{\omega}d'} = \frac{8}{3} h^3 \int_{\tilde{y}_2^-}^{\tilde{y}_2^+} d\tilde{y}_2 = \frac{8}{3} h^3 d \quad (6.90)$$

où d désigne la longueur du profil. Vlassov, quant à lui, n'en donne qu'une expression empirique :

$$\tilde{J}_{\omega d} = \frac{a}{3} dh'^3 \quad (6.91)$$

où h' est l'épaisseur de la poutre et où a est un coefficient empirique voisin de l'unité, déterminé expérimentalement [96]. Pour une gouttière (un demi-cylindre) de rayon R et d'épaisseur $h' = 2h$, les expériences réalisées par Vlassov donnent une valeur moyenne de $a=0.99$. Dans ce cas, les expressions (6.90) et (6.91) coïncident. Cependant, pour chaque type de profil, il est nécessaire de réaliser de nouvelles expériences afin de déterminer la constante empirique a .

Par contre, avec l'approche proposée ici, où les équations d'équilibre unidimensionnelles sont déduites par développement asymptotique du modèle de Koiter, l'expression analytique générale (6.90) de $\tilde{J}_{\omega d}$ obtenue permet de calculer cette constante géométrique exactement pour n'importe quel profil (qui soit fortement courbé).

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le développement asymptotique du modèle de Koiter conduit à un modèle unidimensionnel de poutre voile dont la cinématique et les équations d'équilibre sont similaires à celles du modèle de Vlassov [96]. La seule différence réside dans la constante géométrique $\tilde{J}_{\omega d}$ intervenant dans l'équation de torsion. Alors que Vlassov n'en donne qu'une expression en partie empirique, nous en obtenons ici une expression analytique générale valable pour les profils fortement courbés de forme quelconque. En ce sens, l'analyse développée ici est plus générale. Ainsi une coque suffisamment allongée et fortement courbée vérifiant $\eta = \varepsilon$ et $\nu = \varepsilon$, peut être considérée comme une poutre voile décrite par les équations d'équilibre unidimensionnelles de Vlassov du résultat 6.6.2.

D'autre part, il est important de remarquer que les équations d'équilibre unidimensionnelles obtenues par développement asymptotique du modèle de Koiter ne coïncident pas avec celles obtenues dans [49] à partir des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire. En effet, le développement asymptotique des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire conduit à un modèle similaire à celui de Vlassov (résultats 6.6.2 et 6.7.1), mais avec des termes de couplage supplémentaires entre la flexion et la torsion [48]. Ainsi, le modèle de Vlassov ne serait pas un modèle asymptotique au sens propre du terme, car il ne peut pas être déduit directement des équations tridimensionnelles. On ne l'obtient qu'à partir du modèle de coque de Koiter qui n'est lui-même pas un modèle asymptotique, mais un modèle intermédiaire entre les équations tridimensionnelles et les modèles asymptotiques de coques (modèles de membrane et de flexion pure pour les coques fortement courbées). Il reste à étudier la convergence de ce problème.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au comportement asymptotique des coques minces. Nous avons étudié les différents types de singularités qui apparaissent lorsque l'épaisseur relative ε de la coque tend vers zéro. Les singularités "classiques" apparaissent à l'intérieur de couches limites et internes et cela quel que soit le type de coque (elliptique, parabolique, hyperbolique). Après avoir établi des équations aux dérivées partielles réduites du problème de membrane pour chaque déplacement, nous avons mis en évidence les différences qui existent au niveau des ordres des singularités, selon que les couches sont le long d'une ligne caractéristique ou non. Si la couche n'est pas le long d'une ligne caractéristique, les singularités ne se propagent pas et les déplacements sont, au plus, aussi singuliers que le chargement f^3 . Par contre, si la couche se situe le long d'une ligne caractéristique, les singularités seront plus importantes et se propagent.

Par la suite, nous avons retrouvé ces résultats théoriques à l'aide de calculs par éléments finis utilisant une technique de maillage adaptatif anisotrope : le logiciel MODULEF couplé avec le mailleur adaptatif BAMG. Ceci nous permet d'avoir une bonne description des singularités à l'intérieur des couches, où les déplacements varient beaucoup, avec un nombre limité d'éléments. En effet, le caractère anisotrope des éléments permet de raffiner le maillage dans une seule direction, perpendiculaire à la couche limite. Dans le cas des coques paraboliques, nous avons pu retrouver les résultats théoriques établis au préalable (ordre et propagation des singularités).

Une étude des coques elliptiques a ensuite été effectuée. Celles-ci ont un comportement très différent selon qu'elles sont bien inhibées ou mal inhibées. Dans le cas où la coque elliptique est bien inhibée, on retrouve numériquement les résultats théoriques établis dans le cas d'une couche interne le long d'une ligne non-caractéristique. On a mis également en évidence théoriquement l'existence d'une singularité ponctuelle de type logarithmique, qui n'existe que si le domaine de chargement possède un coin, et si les courbures principales sont différentes en ce point. Nous retrouvons précisément ces résultats par simulations numériques avec un maillage adapté automatiquement à l'intérieur des couches.

Dans le cas de coques elliptiques mal inhibées, lorsqu'une partie du bord est libre, nous avons montré que la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite sur cette partie du bord. La solution du modèle de Koiter tend alors vers une solution qui appartient à l'espace des fonctionnelles analytiques et non plus à celui des distributions. Nous observons ces résultats numériquement par les oscillations qui apparaissent le long du bord libre, et qui deviennent de plus en plus rapprochées et de plus en plus amples quand l'épaisseur relative ε tend vers zéro. Ces oscillations sont bien plus amples que les singularités existant dans le cas bien inhibé. Ces dernières sont toujours présentes mais négligeables en comparaison.

Dans la dernière partie de ce mémoire, nous avons étudié le comportement limite du modèle de Koiter quand la coque devient très allongée. Par un développement asymptotique, nous avons montré que la cinématique limite correspond à celle de Vlassov dans le cas d'un profil fortement courbé. De plus, les équations d'équilibre unidimensionnelles limites obtenues sont quasiment identiques à celles de Vlassov. Seul le coefficient géométrique, relatif au terme du second ordre de l'équation de torsion diffère.

Nous en obtenons une expression analytique exacte générale, alors que Vlassov n'en donne qu'une expression faisant intervenir un coefficient empirique qui doit être déterminé expérimentalement pour chaque profil. Cependant, ce résultat ne prouve pas que le modèle de Vlassov soit un modèle asymptotique, car le modèle de Koiter que nous utilisons comme point de départ du développement, n'est pas un modèle tridimensionnel mais un modèle intermédiaire entre les équations tridimensionnelles et les modèles asymptotiques de coques.

Les résultats obtenus dans ce travail de thèse nous permettent d'envisager de nombreuses perspectives de développement. Dans un premier temps, il conviendrait d'approfondir l'étude des problèmes sensitifs, notamment sur la manière dont varient l'amplitude et la taille de la "couche" qui apparaît le long du bord libre. On pourrait également étendre l'étude à d'autres problèmes de coques (de tout type) comme les problèmes de jonctions.

D'un point de vue numérique, on pourrait améliorer l'outil numérique en essayant d'avoir un meilleur critère pour l'adaptation. On pourrait également transposer la technique de maillage adaptatif à des logiciels éléments finis qui maillent directement la surface dans \mathbb{R}^3 (ce qui est plus pratique pour des applications industrielles), ou à d'autres types d'éléments finis plus performants réduisant le phénomène de verrouillage. Enfin, vu les déplacements potentiellement très importants, une étude en grands déplacements (par exemple en lagrangien actualisé) pourrait aussi être envisagée.

En ce qui concerne le comportement limite des coques allongées, il serait intéressant d'effectuer des comparaisons analytiques et numériques entre le modèle unidimensionnel obtenu et celui de Vlassov pour différentes géométries, afin d'analyser l'influence du coefficient géométrique qui diffère sur les résultats. Nous pourrions également étendre l'étude au cas des profils faiblement courbés.

Bibliographie

- [1] **T. APEL & G. LUBE** : *Anisotropic mesh refinement for a singularly perturbed reaction diffusion model problem*, Appl. Numer. Math., 26, pp. 415-433, 1998.
- [2] **T. APEL, S. GROSMAN, P. K. JIMACK & A. MEYER** : *A new methodology for anisotropic mesh refinement based upon error gradients*, Appl. Numer. Math., 50, pp. 329-341, 2004.
- [3] **E. F. D'AZEVEDO & R. B. SIMPSON** : *On optimal interpolation triangle incidences*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 10, pp. 1063-1075, 1989.
- [4] **I. BABUSKA & A. K. AZIZ** : *On the angle condition in the finite element methods*, SIAM J. Numer. Anal., 13, pp. 63-85, 1976.
- [5] **I. BABUSKA, M. GRIEBEL & J. PITKARANTA** : *The problem of selecting the shape functions for p-type finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng. , 28, pp. 1891-1908, 1989.
- [6] **I. BABUSKA & M. SURI** : *The p and the hp versions of the finite element method : An overview*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. , 80, pp. 5-26, 1990.
- [7] **I. BABUSKA & M. SURI** : *On locking and robustness in the finite element method*, J. Numer. Anal, 29, 5, pp. 1261-1293, 1992.
- [8] **Y. BASAR & D. WEICHERT** : *A finite-rotation theory for elastic-plastic shells under consideration of shear deformations*, ZAMM, 71, pp. 379-389, 1991.
- [9] **K.J. BATHE & E.N. DVORKIN** : *A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components*, Int. J. Num. Meth. Eng. , 22, pp. 697-722, 1986.
- [10] **K.J. BATHE, A. IOSILEVICH & D. CHAPELLE** : *An evaluation of the MITC shell elements*, Computers and Structures, 75, pp. 1-30, 2000.
- [11] **K.-J. BATHE & D. CHAPELLE** : *A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes*, Int. J. Num. Meth. Eng., 57, pp. 1039-1052, 2003.
- [12] **J.-L. BATOZ, K.-J. BATHE & L.-W. HO** : *A study of three-node triangular plate bending elements*, Int. J. Num. Meth. Eng, 15, pp. 1771-1812, 1980.
- [13] **F. BÉCHET, E. SANCHEZ-PALENCIA & O. MILLET** : *Computing singular perturbations for elliptic clamped shells*, publication acceptée dans Computational Mechanics, 2007.
- [14] **M. BERNADOU & P. G. CIARLET** : *Sur l'ellipticité du modèle linéaire des coques de W. T. Koiter*, Computing Methods in Sciences and Engineering, R. Glowinski, J.-L. Lions editors in *Lectures notes in Economics and Math. Systems*, Springer, 134, p. 89-136, 1976.
- [15] **M. BERNADOU** : *Méthodes d'éléments Finis pour les Problèmes de Coques Minces*, Masson, 1994.

- [16] **H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG & E. SALTEL** : *Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms*, Finite Elements in Analysis and Design, 25, pp. 61-83, 1997.
- [17] **H. BOROUCAKI, F. HECHT & P.J. FREY** : *Mesh gradation control*, Int. J. Num. Meth. Eng., 43, pp. 1143-1165, 1998.
- [18] **J. BREUNVAL** : *Schéma d'une théorie générale des coques minces élastiques*, J. Mec., 10, 2, pp. 291-313, 1971.
- [19] **M. P. DO CARMO** : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [20] **M. J. CASTRO-DIAZ, F. HECHT, B. MOHAMMADI & O. PIRONNEAU** : *Anisotropic unstructures mesh adaptation for flow simulations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, 25, pp. 475-491, 1997.
- [21] **D. CHAPELLE & K-J. BATHE** : *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*, Berlin, Springer, 2003.
- [22] **D. CHENAIS & J.-C. PAUMIER** : *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*, Numer. Math., 67, pp. 427-440, 1994.
- [23] **W. Z. CHIEN** : *The intrinsic theory of thin shells and plates. Part I : General theory and Part III : Application to thin shells*, Quart. Applied Math., 1, pp. 297-327 and Vol. 2, pp. 120-135, 1944.
- [24] **D. CHOÏ** : *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces*, Thèse, Université de Paris VI, 1995.
- [25] **D. CHOÏ, F. J. PALMA, E. SANCHEZ-PALENCIA & M.A. VILARIÑO** : *Membrane locking in the finite element computation of very thin shells*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M2AN), 32, pp. 131-152, 1998.
- [26] **D. CHOÏ** : *Computations on non-inhibited hyperbolic elastic shells. Bench-mark for the membrane locking*, Journal Mathematical Methods Applied Sciences, 22, pp. 1293-1321, 1999.
- [27] **P.G. CIARLET & P. DESTUYNDER** : *Justification of the two-dimensionnal linear plate model*, J. Mécanique, 18, pp. 315-344, 1979.
- [28] **P.G. CIARLET & P. DESTUYNDER** : *A justification of the nonlinear model in plate theory*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 17/18, pp. 227-258, 1979.
- [29] **P.G. CIARLET & E. SANCHEZ-PALENCIA** : *Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations des coques membranaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 317, pp. 801-805, 1993.
- [30] **P.G. CIARLET, V. LODS & B. MIARA** : *Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. I. Coques "membranaires"*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 318, pp. 863-868, 1994.
- [31] **P.G. CIARLET, V. LODS & B. MIARA** : *Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. I. Coques "membranaires"*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 319, pp. 95-100, 1994.
- [32] **A. CIMETIÈRE, G. GEYMONAT, H. LE DRET, A. RAOULT & Z. TUTEK** : *Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods*, J. Elasticity, 19, pp. 111-116, 1988.
- [33] **C.A. DE SOUZA** : *Techniques de maillage adaptatif pour le calcul des solutions de coques minces*, Thèse, Université de Paris VI, 2003.

- [34] **C.A. DE SOUZA, D. LEGUILLON & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Adaptive mesh computation for a shell-like problem with singular layers.*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 1, 4, 2003.
- [35] **C.A. DE SOUZA & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Complexification phenomenon in an example of sensitive singular perturbation*, C. R. Mecanique, 332, pp. 605-612, 2004.
- [36] **C.A. DE SOUZA & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Complexification in sensitive singular perturbations and their approximation*, Int. J. Mult. Comp. Eng., 3, pp. 481-498, 2005.
- [37] **P. DESTUYNDER** : *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'Etat, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [38] **P. DESTUYNDER** : *A classification of thin shell theory*, Acta Applicandae Mathematicae, 4, pp. 15-63, 1985.
- [39] **P. DESTUYNDER** : *Modélisation des Coques Minces Élastiques*, Masson, 1990.
- [40] **J. I. DIAZ & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *On slender shells and related problems suggested by Torroja's structures*, Asymptotic Analysis, 52, pp. 259-297, 2007.
- [41] **Y. V. EGOROV & M. A. SHUBIN** : *Partial Differential Equations, vols I and II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vols 30 and 31, Springer 1992 and 1994.
- [42] **Y. V. EGOROV & B.W. SCHULTZE** : *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*, Birkhäuser, 1997.
- [43] **L. EULER** : *Recherches sur la courbure des surfaces* , Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 16, pp. 119-143, 1767.
- [44] **P.L. GEORGE** : *Maillage et adaptation*, Hermes, 2001.
- [45] **P. GÉRARD & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Sensitivity phenomena for certain thin elastic shells with edges*, Math. Meth. Appl. Sci., 23, pp. 379-399, 2000.
- [46] **A.L. GOLDENVEIZER** : *Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity*, Prikl. Math. Mech., 26, 4, pp. 668-686, 1962.
- [47] **A.L. GOLDENVEIZER** : *Derivation of an approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity*, Prikl. Math. Mech., 27, pp. 593-608, 1963.
- [48] **L. GRILLET, A. HAMDOUNI & C. ALLERY** : *Modèle asymptotique linéaire de poutres voiles fortement courbés*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, 328, pp. 587-592, 2000.
- [49] **L. GRILLET** : *Modèles asymptotiques linéaires et non linéaires de poutres voiles élastiques*, Thèse, Université de Poitiers, 2003.
- [50] **L. GRILLET, A. HAMDOUNI & O. MILLET** : *An asymptotic non-linear model for thin-walled rods*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, 332, pp. 123-128, 2004.
- [51] **L. GRILLET, A. HAMDOUNI & O. MILLET** : *Justification of the kinematic assumptions for thin-walled rods with shallow profile*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, 333, pp. 493-498, 2005.
- [52] **A. HAMDOUNI & O. MILLET**, *Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part I : the shallow shells*, Arch. Mech., 55, pp.135-175, 2003.

- [53] **A. HAMDOUNI & O. MILLET** : *Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part II : the strongly bent shells*, Arch. Mech., 55, pp. 177-219, 2003.
- [54] **F. HECHT** : *BAMG : Bidimensionnal Anisotropic Mesh Generator*, INRIA, Roquencourt, 1998.
- [55] **F. HECHT & H. BOROUCAKI** : *Mesh Adaption by Metric Control for Multi-scale Phenomena and Turbulence*, AIAA-97-0859-.
- [56] **T.J.R. HUGHES, M. COHEN & M. HAROUN** : *Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates*, Nuclear Engineering and Design, 46, pp. 203-222, 1978.
- [57] **P. KARAMIAN** : *Nouveaux résultats numériques concernant les coques minces hyperboliques inhibées : cas du paraboloïde hyperbolique*, C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb, 326, pp. 755-760, 1998.
- [58] **P. KARAMIAN** : *Réflexion des singularités dans les coques hyperboliques inhibées*, C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb, 326, pp. 609-614, 1998.
- [59] **P. KARAMIAN** : *Coques élastiques minces hyperboliques inhibées : calcul du problème limite par éléments finis et non-réflexion des singularités*, Thèse Université de Caen Basse-Normandie, Caen, 1999.
- [60] **P. KARAMIAN & J. SANCHEZ-HUBERT** : *Boundary layers in thin elastic shells with developable middle surface*, European Journal of Mechanics, 21, pp. 13-47, 2002.
- [61] **W. T. KOITER** : *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, pp. 12-33, 1960.
- [62] **W.T. KOITER** : *The Theory of Thin Elastic Shells*, North-Holland, Amsterdam, 1959.
- [63] **V.A. KONDRATIEV** : *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. 16, pp. 227-313, 1967.
- [64] **D. LEGUILLON & E. SANCHEZ-PALENCIA** : *Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity*, John Wiley & Sons, 1987.
- [65] **J.L. LIONS** : *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lectures Notes in Math, 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [66] **J.L. LIONS & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Problèmes aux limites sensitifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, 319, série I, pp. 1021-1026, 1994.
- [67] **R. H. MACNEAL** : *Perspective on finite elements for shell analysis*, Finite Element in Analysis and Design, 30, pp. 175-186, 1998.
- [68] **V. LODS & B. MIARA** : *Nonlinearly elastic shell models : A formal asymptotic approach. II. The flexural model*, Arch. Ration. Mech. Anal., 142, pp. 355-374, 1998.
- [69] **J-J. MARIGO, H. GHIDOUCHE & Z. SEDKAOUI** : *Des poutres flexibles aux fils extensibles : une hiérarchie de modèles asymptotiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, 326, pp. 79-84, 1998.
- [70] **N. MEUNIER & É. SANCHEZ PALENCIA** : *Sensitive versus classical singular perturbation via Fourier transform*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 16, pp. 1783-1816, 2006.
- [71] **B. MIARA** : *Analyse asymptotique des coques membranaires non linéairement élastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 318, pp. 689-694, 1994.

- [72] **B. MIARA & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Asymptotic analysis of linearly elastic shells*, *Asymptotic Analysis*, 12, pp. 41-54, 1996.
- [73] **V. V. NOVOZHILOV** : *The theory of thin shells.* , Walters Noordhoff Publ. , Groningen, 1959.
- [74] **J. PITKÄRANTA** : *The problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells*, *Numerische Mathematik*, 61, pp. 523-542, 1992.
- [75] **J. PITKÄRANTA & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *On the asymptotic behaviour of sensitive shells with small thickness*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 325, pp. 127-134, 1997.
- [76] **A.R. RODRIGUEZ & J.M. VIAÑO** : *Analyse asymptotique de l'équation de Poisson dans un domaine mince. Application à la théorie de torsion des poutres élastiques à profil mince, I : domaine sans jonctions*, *C. R. Acad. Sci. Paris, série I, Math.*, 317, pp. 637-642, 1993.
- [77] **A.R. RODRIGUEZ & J.M. VIAÑO** : *Asymptotic analysis of Poisson's equation in a thin domain. Application to the thin-walled elastic beams*, in P.G. Ciarlet, L. Trabucho and J.M. Viaño Eds., *Asymptotic Methods for Elastic Structures* (Walter de Gruyter, Berlin), pp. 181-193, 1995.
- [78] **A.R. RODRIGUEZ & J.M. VIAÑO** : *Asymptotic of a general linear model for thin-walled elastic rods*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 47, pp. 287-321, 1997.
- [79] **A. RIGOLOT** : *Sur une théorie asymptotique des poutres droites*, Thèse d'Etat, Paris, 1973.
- [80] **A. RIGOLOT** : *Déplacements finis et petites déformations des poutres droites : analyse asymptotique de la solution à grande distance des bases*, *Journal de Mécanique Appliquée*, 1, 2, pp. 175-206, 1977.
- [81] **J. SANCHEZ-HUBERT & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992.
- [82] **J. SANCHEZ-HUBERT & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Coques Élastiques Minces - Propriétés Asymptotiques*, Masson, Paris, 1997.
- [83] **J. SANCHEZ-HUBERT & É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Anisotropic finite element estimates and local locking for shells : parabolic case*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 329, pp. 153-159, 2001.
- [84] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Statique et dynamique des coques minces, I - Cas de flexion pure non inhibée*, *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, 309, pp. 411-417, 1989.
- [85] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Statique et dynamique des coques minces, I - Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire*, *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, 309, pp. 531-537, 1989.
- [86] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces* , *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, pp. 909-916, 1990.
- [87] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems*, *J. Math. Pures Appl.*, 71, pp. 379-406, 1992.
- [88] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *Propagation of singularities along a characteristic boundary for a model problem of shell theory and relation with the boundary layer*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 329, pp. 249-254, 2001.
- [89] **É. SANCHEZ-PALENCIA** : *On internal and boundary layers with unbounded energy in thin shell theory*, *Asymptotic Analysis*, 36, pp. 169-185, 2003.
- [90] **R. SCHMIDT & D. WEICHERT** : *A refined theory for elastic-plastic shells at moderate rotations*, *ZAMM*, 69, pp. 11-21, 1989.

- [91] **L. SCHWARZ** : *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1950.
- [92] **H. STUMPF & B. SCHIECK** : *Theory and analysis of shells undergoing finite elastic-plastic strains and rotations*, Acta Mechanica, 106, pp. 1-21, 1994.
- [93] **J. J. STOKER** : *Differential Geometry*, Wiley, New York, 1969.
- [94] **L. TRABUCHO & J.M. VIAÑO** : *Mathematical modeling of rods*, in : P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds., Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV (North Holland Amsterdam), pp.487-974, 1996.
- [95] **R. VALID** : *The Nonlinear Theory of Shells through Variational Principles*, John Wiley et Sons Ltd, 1995.
- [96] **V.Z. VLASSOV** : *Pièces Longues en Voiles Minces*, Eyrolles, Paris, 1962.
- [97] **H. T. Y. YANG, S. SAIGAL, A. MASUD AND R. K. KAPANIA** : *A survey of recent shell finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 47, pp. 101-127, 2000.

Annexe A

Réduction des équations à une équation aux dérivées partielles

Cette annexe détaille les calculs qui permettent de réduire le système membranaire (1.60) à une équation aux dérivées partielles pour u_1 , u_2 et u_3 . Le même calcul est ensuite effectué pour le problème complet (section A.2) mais seulement pour u_3 .

A.1 Problème membranaire

On part en premier lieu du système membranaire (obtenu par intégration par parties de la formulation faible du problème de membrane) :

$$\begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta} = f^\beta \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = f^3 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En utilisant la loi de comportement, on obtient :

$$\begin{cases} -D_\alpha (A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}) = f^\beta \\ -b_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} = f^3 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Etant donné que l'objectif est d'étudier les singularités et leur propagation, d'après l'analyse microlocale [41], il suffit de garder les termes de plus haut degré en terme de dérivation des déplacements u_1 , u_2 et u_3 et considérer que les coefficients géométriques $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont constants au moins localement (ils prennent leur valeur au point étudié). On obtient alors le système suivant ne faisant intervenir que les déplacements u_1 , u_2 et u_3 :

$$\begin{cases} -A^{1\beta\gamma 1} \partial_\beta \partial_\gamma u_1 - A^{1\beta\gamma 2} \partial_\beta \partial_\gamma u_2 + A^{1\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \partial_\beta u_3 + \dots = f^1 \\ -A^{2\beta\gamma 1} \partial_\beta \partial_\gamma u_1 - A^{2\beta\gamma 2} \partial_\beta \partial_\gamma u_2 + A^{2\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \partial_\beta u_3 + \dots = f^2 \\ -A^{1\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \partial_\beta u_1 - A^{2\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \partial_\beta u_2 + A^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} u_3 + \dots = f^3 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où $+\dots$ dénotent des termes de plus bas degré en terme de dérivation, de la forme $\Gamma_{\mu\delta}^\xi \partial_\gamma u_\beta$ et $\Gamma_{\mu\delta}^\eta \Gamma_{\beta\eta}^\xi u_\beta$ ou encore $\Gamma_{\mu\delta}^\xi b_{\eta\mu} u_3$ dans les deux premières lignes du système, et de la forme $\Gamma_{\mu\delta}^\xi b_{\eta\mu} u_\beta$ dans la troisième. Par la suite, on ne garde que les dérivées d'ordre supérieur. Le problème simplifié nous permet d'obtenir les résultats recherchés en termes de singularités pour les déplacements.

Ecrivons le système simplifié (A.3) sous une forme matricielle :

$$A\vec{u} = \vec{f} \quad (\text{A.4})$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -A^{1\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{1\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{2\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{2\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & -A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & A^{\alpha\beta\gamma\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

En développant les termes de la matrice A , on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} -A^{1111}\partial_1^2 - A^{1212}\partial_2^2 & -A^{1112}\partial_1^2 - A^{1222}\partial_2^2 & B\partial_1 \\ -2A^{1112}\partial_1\partial_2 & -(A^{1122} + A^{1212})\partial_1\partial_2 & +C\partial_2 \\ -A^{1112}\partial_1^2 - A^{1222}\partial_2^2 & -A^{2222}\partial_2^2 - A^{1212}\partial_1^2 & C\partial_1 \\ -(A^{1122} + A^{1212})\partial_1\partial_2 & -2A^{1222}\partial_1\partial_2 & +D\partial_2 \\ -B\partial_1 & -C\partial_1 & Bb_{11} + Db_{22} \\ -C\partial_2 & -D\partial_2 & +2Cb_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

avec

$$\begin{aligned} B &= A^{11\alpha\beta}b_{\alpha\beta} \\ C &= A^{12\alpha\beta}b_{\alpha\beta} \\ D &= A^{22\alpha\beta}b_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

où il y a une sommation sur les indices α et β (convention d'Einstein).

A.1.1 Cas du déplacement normal u_3

Pour obtenir l'équation réduite pour u_3 , nous avons besoin de calculer le cofacteur A_{33}^C (voir section 1.4 du chapitre 1). Par définition, $A_{33}^C = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$, d'où :

$$\begin{aligned} A_{33}^C &= [A^{1111}A^{1212} - (A^{1112})^2]\partial_1^4 + [A^{2222}A^{1212} - (A^{1222})^2]\partial_2^4 \\ &+ [A^{1111}A^{2222} + (A^{1212})^2 + 4A^{1112}A^{1222} - 2A^{1112}A^{1222} - (A^{1122} + A^{1212})^2]\partial_1^2\partial_2^2 \\ &[2A^{1111}A^{1222} + 2A^{1112}A^{1212} - 2A^{1112}(A^{1122} + A^{1212})]\partial_1^3\partial_2 \\ &+ [2A^{2222}A^{1112} + 2A^{1222}A^{1212} - 2A^{1222}(A^{1122} + A^{1212})]\partial_1\partial_2^3 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} A_{33}^C &= [A^{1111}A^{1212} - (A^{1112})^2]\partial_1^4 + [A^{2222}A^{1212} - (A^{1222})^2]\partial_2^4 \\ &+ [A^{1111}A^{2222} + 2A^{1112}A^{1222} - (A^{1122})^2 - 2A^{1122}A^{1212}]\partial_1^2\partial_2^2 \\ &[2A^{1111}A^{1222} - 2A^{1112}A^{1122}]\partial_1^3\partial_2 + [2A^{2222}A^{1112} - 2A^{1222}A^{1122} +]\partial_1\partial_2^3 \end{aligned}$$

Rappelons l'expression des coefficients de la loi de comportement isotrope linéaire élastique :

$$A^{\alpha\beta\lambda\delta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[a^{\alpha\lambda} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\lambda} + J a^{\alpha\beta} a^{\lambda\delta} \right] \quad \text{avec } J = \frac{2\nu}{1-\nu} \quad (\text{A.7})$$

Compte tenu des diverses symétries, on a :

$$A^{1111} = \frac{E}{2(1+\nu)} (2+J)(a^{11})^2 \quad (\text{A.8})$$

$$A^{1112} = \frac{E}{2(1+\nu)} (2+J)a^{11}a^{12} \quad (\text{A.9})$$

$$A^{2222} = \frac{E}{2(1+\nu)} (2+J)(a^{22})^2 \quad (\text{A.10})$$

$$A^{1222} = \frac{E}{2(1+\nu)} (2+J)a^{22}a^{12} \quad (\text{A.11})$$

$$A^{1212} = \frac{E}{2(1+\nu)} ((1+J)(a^{12})^2 + a^{11}a^{22}) \quad (\text{A.12})$$

$$A^{1122} = \frac{E}{2(1+\nu)} ((2)(a^{12})^2 + Ja^{11}a^{22}) \quad (\text{A.13})$$

Dans l'expression de A_{33}^C , nous calculons séparément les différents termes intervenant :

– Termes en ∂_1^4 :

$$\begin{aligned} & \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[(2+J)(a^{11})^2 (a^{11}a^{22} + (1+J)a^{12}a^{12}) - (2+J)^2 (a^{11}a^{12})^2 \right] \\ & = \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} (2+J)(a^{11})^2 (a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

– Termes en ∂_2^4 (obtenus symétriquement) :

$$\frac{E^2}{4(1+\nu)^2} (2+J)(a^{22})^2 (a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \quad (\text{A.15})$$

– Termes en $\partial_1^2 \partial_2^2$

$$\begin{aligned}
& \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[(2+J)^2(a^{11}a^{22})^2 + 2(2+J)^2(a^{12})^2 a^{11}a^{22} - (2a^{12}a^{12} + Ja^{11}a^{22})^2 \right. \\
& \left. - 2(2a^{12}a^{12} + Ja^{11}a^{22})(a^{11}a^{22} + (1+J)a^{12}a^{12}) \right. \\
& = \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[(2+J)^2(a^{11}a^{22})(a^{11}a^{22} + 2(a^{12})^2) - (4(a^{12})^4 + J^2(a^{11}a^{22})^2 + 4Ja^{11}a^{22}(a^{12})^2) \right. \\
& \left. - 2 \left(2a^{11}a^{22}(a^{12})^2 + 2(1+J)(a^{12})^4 + J(a^{11}a^{22})^2 + J(1+J)a^{11}a^{22}(a^{12})^2 \right) \right] \\
& = \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[2(2+J)(a^{11}a^{22})^2 - 4(2+J)(a^{12})^2 \right. \\
& \left. + 2(2+J)a^{11}a^{22}(a^{12})^2 \right] \\
& = \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[2(2+J)(a^{11}a^{22} - (a^{12})^2)(a^{11}a^{22} + 2(a^{12})^2) \right]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

– Termes en $\partial_1^3 \partial_2$

$$\begin{aligned}
& \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[2(2+J)^2(a^{11})^2(a^{22}a^{12}) - 2(2+J)a^{11}a^{12}(2(a^{12})^2 + Ja^{11}a^{22}) \right] \\
& = \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[4(2+J)a^{11}a^{12}(a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \right]
\end{aligned} \tag{A.17}$$

– Termes en $\partial_1 \partial_2^3$ (obtenus symétriquement)

$$\frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[4(2+J)a^{22}a^{12}(a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \right] \tag{A.18}$$

On a finalement après simplification :

$$\begin{aligned}
A_{33}^C &= \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} (2+J)(a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \left[(a^{11})^2 \partial_1^4 + (a^{22})^2 \partial_2^4 + 2(a^{11}a^{22} + 2(a^{12})^2) \partial_1^2 \partial_2^2 \right. \\
& \left. + 4a^{11}a^{12} \partial_1^3 \partial_2 + 4a^{22}a^{12} \partial_1 \partial_2^3 \right]
\end{aligned} \tag{A.19}$$

En remplaçant J et en factorisant, il vient :

$$A_{33}^C = \frac{E^2}{2(1+\nu)^2(1-\nu)} (a^{11}a^{22} - (a^{12})^2) \left[a^{11} \partial_1^2 + a^{22} \partial_2^2 + 2a^{12} \partial_1 \partial_2 \right]^{(2)} \tag{A.20}$$

soit comme $a^{11}a^{22} - (a^{12})^2 = (a_{11}a_{22} - (a_{12})^2)^{-1} = \frac{1}{a}$:

$$A_{33}^C = \frac{E^2}{2(1+\nu)^2(1-\nu)a} \left[a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2 \right]^{(2)} \quad (\text{A.21})$$

Le terme $\det(A)$ est obtenu de façon similaire (après vérification avec le logiciel MAPLE) :

$$\text{Det}(A) = \frac{E^3}{2(1+\nu)^2(1-\nu)a^3} \left[b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2 \right]^{(2)} \quad (\text{A.22})$$

En remplaçant dans l'équation $\text{Det}(A)u_3 = A_{33}^C f^3$, on obtient finalement l'équation de membrane réduite (1.76) ne faisant intervenir que le déplacement u_3 :

$$E \left[b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2 \right]^{(2)} u_3 = a^2 \left[a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2 \right]^{(2)} f^3 \quad (\text{A.23})$$

A.1.2 Equation réduite pour les déplacements tangentiels u_1 et u_2

On peut de la même manière, obtenir une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir que les déplacements u_1 et u_2 . Nous traiterons en détails le cas de u_1 , celui de u_2 donne des résultats symétriques.

Repardons de l'équation (1.78) caractérisant u_1 :

$$\text{Det}(A)u_1 = A_{31}^C f^3 \quad (\text{A.24})$$

Il est donc nécessaire de calculer A_{31}^C pour expliciter cette équation. On a :

$$\begin{aligned} A_{31}^C &= A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13} \\ &= -A^{1112}C\partial_1^3 - A^{1222}C\partial_1\partial_2^2 - (A^{1122} + A^{1212})C\partial_1^2\partial_2 - A^{1112}D\partial_1^2\partial_2 - A^{1222}D\partial_2^3 \\ &\quad - (A^{1122} + A^{1212})D\partial_1\partial_2^2 + A^{1212}B\partial_1^3 + A^{2222}C\partial_2^3 + A^{2222}B\partial_1\partial_2^2 + A^{1212}C\partial_1^2\partial_2 \\ &\quad + 2A^{1222}B\partial_1^2\partial_2 + 2A^{1222}C\partial_1\partial_2^2 \\ &= (-A^{1112}C + A^{1212}B)\partial_1^3 + (A^{2222}C - A^{1222}D)\partial_2^3 \\ &\quad + (A^{1212}C + 2A^{1222}B - (A^{1212} + A^{1122})C - A^{1112}D)\partial_1^2\partial_2 \\ &\quad + (A^{2222}B + 2A^{1222}C - (A^{1212} + A^{1122})D - A^{1222}C)\partial_1\partial_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Après des calculs assez longs d'ordre essentiellement technique (vérifiés sur MAPLE), on obtient :

$$\begin{aligned} A_{31}^C &= \frac{1}{a} \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} \left[\left\{ (2+J)b_{11}(a^{11})^2 + (a^{11}a^{22} - (2+2J)(a^{12})^2) b_{22} \right\} \partial_1^3 + \right. \\ &\quad \left. \left\{ 2(2+J)(a^{22})^2 b_{12} + 2(2+J)a^{22}a^{12}b_{11} \right\} \partial_2^3 \right. \\ &\quad + \left\{ 4(2+J)a^{11}a^{22}b_{11} + (4(2+J)(a^{12})^2 - 2a^{11}a^{22})b_{12} - 2(2+J)a^{22}a^{12}b_{22} \right\} \partial_1^2\partial_2 \\ &\quad \left. \left\{ ((3J+4)a^{11}a^{22} + (6+2J)(a^{12})^2)b_{11} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2+J)(a^{22})^2 b_{22} + (8+4J)a^{22}a^{12}b_{12} \right\} \partial_1\partial_2^2 \right] \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

A.2 Problème complet

Pour obtenir l'équation réduite en u_3 du modèle complet de Koiter, on part de la formulation locale (1.54) du modèle de Koiter :

$$\begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta} - \varepsilon^2 \left[b_\gamma^\beta D_\alpha M^{\alpha\gamma} + D_\gamma (b_\alpha^\gamma M^{\alpha\beta}) \right] = f^\beta \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \left[D_\alpha D_\beta M^{\alpha\beta} - b_\delta^\alpha b_{\beta\delta} M^{\alpha\beta} \right] = f^3 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

où $T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\delta} \gamma_{\lambda\delta}$ et $M^{\alpha\beta} = \frac{1}{12} A^{\alpha\beta\lambda\delta} \rho_{\lambda\delta}$ représentent les contraintes membranaires et les moments de flexion.

On ne s'intéresse, dans l'équation en u_3 , qu'aux termes de flexion les plus importants, c'est-à-dire à ceux qui auront la plus faible puissance en ε , et les dérivées d'ordre le plus élevé. La forme de la matrice A permettant de se ramener à une écriture matricielle de la forme (A.4) pour le problème complet de Koiter s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} -A^{1111} \partial_1^2 - A^{1212} \partial_2^2 & -A^{1112} \partial_1^2 - A^{1222} \partial_2^2 & B \partial_1 \\ -2A^{1112} \partial_1 \partial_2 & -(A^{1122} + A^{1212}) \partial_1 \partial_2 & +C \partial_2 \\ +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \\ \\ -A^{1112} \partial_1^2 - A^{1222} \partial_2^2 & -A^{2222} \partial_2^2 - A^{1212} \partial_1^2 & C \partial_1 \\ -(A^{1122} + A^{1212}) \partial_1 \partial_2 & -2A^{1222} \partial_1 \partial_2 & +D \partial_2 \\ +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^2 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \\ \\ -B \partial_1 & -C \partial_1 & +Bb_{11} + Db_{22} + 2Cb_{12} \\ -C \partial_2 & -D \partial_2 & +\frac{\varepsilon^2}{12} F \\ +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) & +\varepsilon^2(\partial^3 + \dots) \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

avec $F = [A^{1111} \partial_1^4 + A^{2222} \partial_2^4 + (2A^{1122} + 4A^{1212}) \partial_1^2 \partial_2^2 + 4A^{1112} \partial_1^3 \partial_2 + 4A^{1222} \partial_1 \partial_2^3]$ et où $+\varepsilon^2(\partial^n + \dots)$ dénotent les termes de flexion non explicités, n étant l'ordre de dérivation le plus élevé contenu dans ces termes. Notons que F est un opérateur d'ordre 4.

Ainsi, le terme de flexion le plus important de $\det(A)$ provient de :

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{12}) \frac{\varepsilon^2}{12} F = \frac{\varepsilon^2}{12} A_{33}^C [A^{1111} \partial_1^4 + A^{2222} \partial_2^4 + (2A^{1122} + 4A^{1212}) \partial_1^2 \partial_2^2 + 4A^{1112} \partial_1^3 \partial_2 + 4A^{1222} \partial_1 \partial_2^3] \quad (\text{A.29})$$

Ce terme est en ε^2 et comporte des dérivées d'ordre 8. Les autres termes en ε^2 ont forcément des dérivées d'ordre inférieur. L'expression complète de $\text{Det}(A)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) = E^3 & \left(\frac{\varepsilon^2}{24(1+\nu)^3(1-\nu)^2 a} [a^{11} \partial_1^2 + a^{22} \partial_2^2 + 2a^{12} \partial_1 \partial_2]^{(4)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(1+\nu)^2(1-\nu)a^3} [b_{22} \partial_1^2 + b_{11} \partial_2^2 - 2b_{12} \partial_1 \partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dénotent des termes contenant des dérivées d'ordre inférieur ou étant facteurs de terme en ε^n avec $n > 2$. On a toujours :

$$A_{33}^C = E^2 \frac{1}{2(1+\nu)^2(1-\nu)a} [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{A.31})$$

si bien que, quand $\varepsilon \searrow 0$, l'équation réduite en u_3 du modèle de Koiter s'écrit :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\varepsilon^2}{12} a^2 [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(4)} + (1+\nu) [b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] u_3 = \\ \left[a^2(1+\nu) [a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2]^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] f^3 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Annexe B

Quelques notions sur les distributions et la famille des Dirac

B.1 Notions élémentaires sur les distributions

La théorie des distributions a été formalisée par L. Schwarz vers 1950 [91]. Une distribution est une généralisation de la notion de fonction : au lieu d'évaluer une fonction en un point donné, on calcule une moyenne pondérée de la distribution au voisinage du point considéré. Cette moyenne est de la forme :

$$I_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad (\text{B.1})$$

où

- $\varphi(x)$ est une fonction test (à support compact et de classe C^∞) sur Ω : $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- $f(x)$ est une distribution sur Ω

Définition B.1.1 Une distribution T sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_m \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

pour chaque suite de fonctions tests vérifiant :

$$i) \exists K \text{ compact tel que } \forall m \text{ supp}(\varphi_m) \subset K$$

$$ii) \|\varphi_m - \varphi\|_{\infty} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Autrement dit, une distribution T est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions tests, que l'on note $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

B.2 La famille de distributions de Dirac

La masse de Dirac δ à l'origine est une distribution. Elle associe à une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$ sa valeur en 0. Autrement dit :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{B.2})$$

La distribution de Dirac peut être vue comme la limite d'une suite de distributions associées à des fonctions. En effet, soit w une fonction de support $[-1, 1]$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\varphi(x)dx = \int_{-1}^1 w(x)\varphi(x)dx = 1 \quad (\text{B.3})$$

Soit alors la suite de fonction w_η de support $[-1/\eta, 1/\eta]$ définie par :

$$w_\eta = \eta w(\eta x) \quad (\text{B.4})$$

On peut montrer que la suite de fonction w_η tend vers δ quand $\eta \rightarrow \infty$.

Il est possible de définir la dérivée δ' de la distribution de Dirac comme la limite de la suite de fonctions $w_\eta^{(1)}$ définie par :

$$w_\eta^{(1)} = \frac{dw_\eta}{dx} = \eta^2 w'(\eta x) \quad (\text{B.5})$$

On peut montrer que la suite de fonction $w_\eta^{(1)}$ converge quant à elle vers la dérivée de la fonction δ , notée δ' (la dérivation commute avec le passage à la limite des distributions), définie par :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \langle \delta, -\varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad (\text{B.6})$$

On peut de même construire toute une famille de distributions définies comme limites des dérivées successives de w_η . On obtient alors la famille des distributions de Dirac et ses dérivées notées : $\delta, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(k)}$. Les trois premières distributions de cette famille sont les limites des fonctions représentées Fig. B.1.

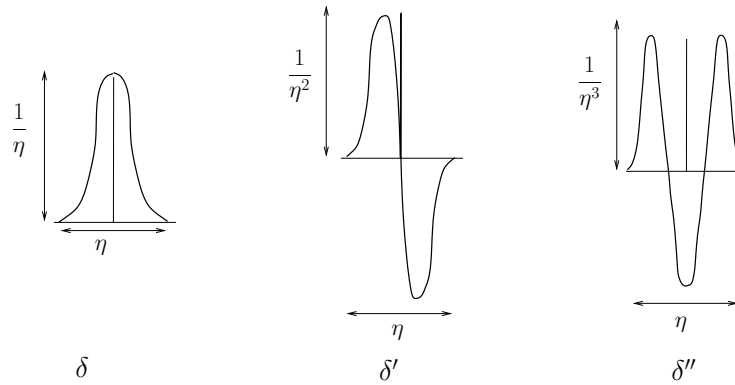


FIG. B.1 – Suites de fonctions convergeant vers $\delta, \delta', \delta''$

Compte tenu de la propriété (B.3) que doit vérifier w_η , on a le résultat suivant :

Résultat B.2.1 *L'amplitude de $w_\eta^{(k)}$ varie en $\frac{1}{\eta^{k+1}}$ quand $\eta \rightarrow 0$.*

Ce résultat nous permettra de caractériser les singularités observées sur les déplacements en étudiant simplement l'évolution de leur amplitude quand l'épaisseur relative ε diminue, $\eta\varepsilon$ étant alors l'épaisseur de la couche étudiée.

Remarque B.2.1 *La distribution δ peut être également définie comme la dérivée de la distribution d'Heavyside définie par :*

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi on peut définir toute une famille de singularités basée sur la distribution de Dirac :

$$x^m H(x), \dots, xH(x), H(x), \delta(x), \delta'(x), \delta''(x), \dots, \delta^{(k)}(x) \quad (\text{B.7})$$

Cette famille de singularités est un exemple de chaîne de singularités qui peut être utilisée pour l'étude des singularités en théorie des coques, jouant le rôle de $S_0(x), S_1(x), \dots$ (voir (1.89) au chapitre 1).

Annexe C

Courbures principales

En 1767, Euler écrivit déjà un article concernant l'étude des courbures d'une surface [43]. Dans celui-ci, il montre en particulier que parmi toutes les sections normales en un point p de la surface, obtenues en faisant tourner un plan autour de la normale au plan tangent en p , il en existe deux pour lesquelles les courbures sont respectivement minimale et maximale. Ces sections, dites principales, ont la particularité d'être perpendiculaires entre elles. Les courbures correspondantes sont les courbures principales de la surface S au point p .

Les courbures principales λ_1 et λ_2 d'une surface S en un point p peuvent se retrouver à partir d'une équation du second degré (voir [82] p. 11) :

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\lambda^2 + (-a_{11}b_{22} + 2a_{12}b_{12} - a_{22}b_{11})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0 \quad (\text{C.1})$$

On peut montrer, et c'est l'objet de ce qui suit, que cette équation peut également se retrouver à partir de la diagonalisation de l'endomorphisme de courbure b dont les composantes mixtes sont les courbures b_α^β de la surface S . Cela prouve que les courbures principales d'une surface S correspondent aux valeurs propres de l'opérateur de courbure, écrit en composantes mixtes. Ce résultat est bien sûr faux si l'on considère les composantes covariantes de b , comme on va le voir dans la démonstration qui suit. Cela prouve encore une fois que ce sont les composantes mixtes qui sont intrinsèques et qui ont une interprétation géométrique simple.

Considérons l'équation caractéristique suivante permettant de calculer les valeurs propres de l'opérateur de courbure (endomorphisme du plan tangent). Elle s'écrit :

$$\lambda^2 - Tr(b)\lambda + det(b) = 0 \quad (\text{C.2})$$

avec

$$Tr(b) = b_1^1 + b_2^2 \quad (\text{C.3})$$

$$det(b) = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = \frac{(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{a} \quad (\text{C.4})$$

où $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. L'équation (C.2) peut alors s'écrire :

$$a\lambda^2 - aTr(b)\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Le développement de $Tr(b)$ donne :

$$Tr(b) = a^{11}b_{11} + a^{22}b_{22} + 2a^{12}b_{12} \quad (\text{C.6})$$

Ainsi on a :

$$aTr(b) = a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} \quad (\text{C.7})$$

En effet, $a^{\alpha\beta}$ étant la matrice inverse de $a_{\alpha\beta}$, on a :

$$a^{\alpha\beta} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

On a par exemple $a^{11} = \frac{a_{22}}{a}$. D'où la relation (C.7).

En remplaçant (C.7) dans (C.5), on retrouve bien l'équation du second ordre (C.1) obtenue de façon classique dans [82]. Ainsi les courbures principales d'une surface correspondent bien aux valeurs propres de l'endomorphisme de courbure en composantes mixtes.

Quand on connaît les courbures principales d'une surface en un point, on peut retrouver les courbures de chaque section normale en ce point, avec la formule d'Euler ou l'indicatrice de Dupin.

Résultat C.1 *La formule d'Euler permet de retrouver la courbure correspondante dans chaque section normale et s'écrit :*

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \theta + \frac{1}{R_2} \sin^2 \theta \quad (\text{C.9})$$

θ étant l'angle entre la section normale principale de courbure $\frac{1}{R_1}$ et la section normale considérée.

Les courbures de chaque section normale peuvent être représentées par l'indicatrice de Dupin obtenue en utilisant le plan tangent comme plan de paramétrage, et un paramétrage polaire [82][93]. On obtient alors la relation suivante :

$$b_1^1 x_1^2 + 2b_1^2 x_1 x_2 + b_2^2 x_2^2 = \pm 1 \quad (\text{C.10})$$

où x_1 et x_2 sont les paramètres utilisés. On peut écrire la même relation avec les composantes covariantes du tenseur de courbure car on a $b_{\alpha\beta} = b_\alpha^\beta$ dans le cas du paramétrage choisi.

L'équation (C.10) décrit la réunion de deux coniques (sauf si le point p est parabolique). On peut réduire cette conique en diagonalisant la matrice associée qui n'est rien d'autre que celle l'endomorphisme diagonalisé précédemment. L'équation (C.10) devient alors dans la base principale :

$$\frac{1}{R_1} \eta_1^2 + \frac{1}{R_2} \eta_2^2 = \pm 1 \quad (\text{C.11})$$

η_1 et η_2 étant les paramètres dans le repère principal. Il convient de distinguer 3 cas selon que R_1 et R_2 sont du même signe ou pas, ou que l'une des deux courbures est nulle. On obtient alors les 3 représentations des Figs. C.1 à C.3 correspondant aux trois natures possibles du point p considéré : une ellipse quand le point est elliptique, une double hyperbole quand il est hyperbolique, et deux droites parallèles quand il est parabolique.

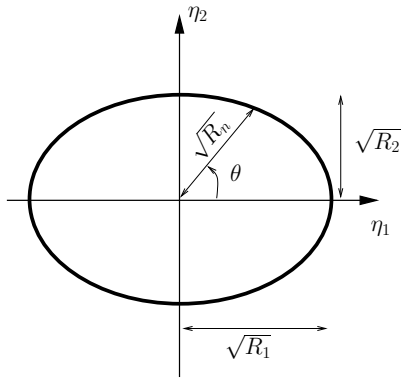


FIG. C.1 – Point elliptique

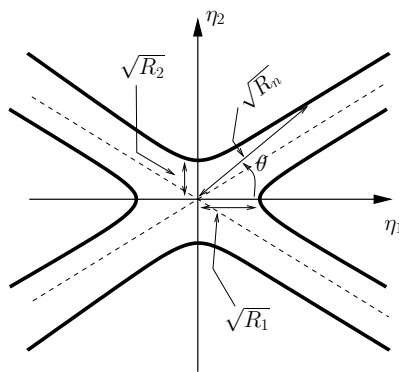


FIG. C.2 – Point hyperbolique

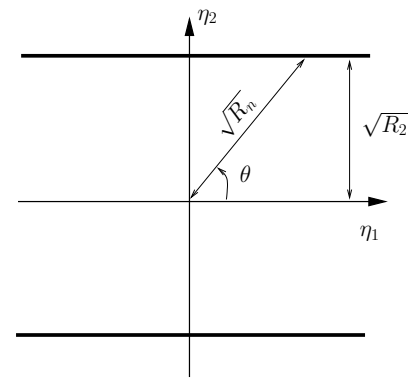


FIG. C.3 – Point parabolique

La distance entre l'origine et l'intersection entre la conique et la droite faisant un angle θ avec l'abscisse représente la racine carrée du rayon de courbure de la section normale faisant un angle θ avec la section normale principale de rayon de courbure R_1 . Les directions asymptotiques sont celles où le rayon de courbure R_n tend vers l'infini.

ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DES SINGULARITÉS EN THÉORIE DES COQUES MINCES ÉLASTIQUES

Ce mémoire porte principalement sur l'étude des singularités dans les problèmes de coques minces élastiques inhibées. Lorsque l'épaisseur de la coque tend vers zéro, les singularités qui apparaissent dans les couches limites ou internes diffèrent selon la nature de la coque (elliptique, parabolique ou hyperbolique) et les conditions aux limites. A partir d'équations réduites du problème de membrane, nous établissons un résultat général concernant l'ordre et la propagation de ces singularités, suivant la nature de la coque et le fait que la couche est le long d'une ligne caractéristique ou non. On effectue ensuite des simulations numériques utilisant un logiciel éléments finis couplé à un maillage adaptatif anisotrope. On retrouve les résultats théoriques établis au préalable pour les coques paraboliques et elliptiques bien inhibées. Pour les coques elliptiques bien inhibées, on met également en évidence l'existence de singularités logarithmiques pour le déplacement normal u_3 lorsque que le domaine de chargement possède des coins. Enfin, on propose une étude des problèmes sensitifs correspondant aux coques elliptiques dont une partie du bord est libre. Il apparaît alors un phénomène de complexification : des oscillations de plus en plus amples et de plus en plus rapprochées apparaissent au niveau du bord libre quand l'épaisseur tend vers zéro. Dans la deuxième partie de ce mémoire, on étudie par développement asymptotique le comportement limite du modèle de Koiter pour une coque très allongée à profil fortement courbé. On retrouve la cinématique et les équations d'équilibre unidimensionnelles classiques du modèle de Vlassov établi à partir d'hypothèses à priori.

Mots-clés : coques minces élastiques, perturbations singulières, problèmes sensitifs, maillages adaptatifs anisotropes

THEORETICAL AND NUMERICAL STUDY OF SINGULARITIES IN ELASTIC THIN SHELL THEORY

This thesis mainly deals with thin inhibited elastic shells. When the thickness of the shell tends towards zero, the solutions of the Koiter model exhibit various types of singularities which depend on the nature of the shell (elliptic, hyperbolic, parabolic) and also on the boundary conditions. From reduced partial differential equations of the membrane problem, we deduce the properties of the singularities appearing inside the boundary and internal layers, which depend on whether the layer is along a characteristic line or not. We then perform numerical simulations using a finite element program coupled with an anisotropic and adaptive mesh generator. This enables us to obtain accurate results inside the layers which are in a good agreement with the theoretical results. Moreover, for elliptic shells, we put in a prominent position the existence of logarithmic singularities when the loading domain has corners. In the case of ill-inhibited shells, we study the sensitive problem. When a part of the edge is free, a complexification phenomenon arises as the thickness tends towards zero : oscillations which are larger and larger and whose frequency increases appear along the free edge. In a second part, we study the behaviour of long cylindrical shells with a strongly curved profile. We study the limit of the Koiter model by an asymptotic expansion : the limit behaviour corresponds to the kinematics and the equilibrium equations of the classical Vlassov model established with a priori assumptions.

Key words : thin elastic shells, singular perturbations, sensitive problems, anisotropic adaptive mesh