N° ordre : 4016

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Hédi JOULAK

Quasi-orthogonalité : avancées et applications

Date de soutenance : 13 décembre 2007

Composition du Jury :

Président	: Marc Prévost
Directeur	: Claude Brezinski
Rapporteurs	: Annie Cuyt
	: André Draux
	: Michela Redivo-Zaglia
Examinateurs	: Bernhard Beckermann
	: Claude Brezinski

À mon fils Yanis,
et à ma femme Nathalie.

Remerciements

Comment pourrais-je débuter cette page sans commencer par exprimer mes plus vifs remerciements à l'initiateur de cette thèse, mon directeur de thèse, Claude Brezinski.
Il a su m'écouter et me donner toute sa confiance tout en m'indiquant les bonnes ou les mauvaises pistes. Il a pu me faire découvrir de nouvelles voies de recherche (comme l'étude des méthodes généralisées de quadrature de Gauss-Radau et de Gauss-Lobatto) dans des moments où l'inspiration n'était pas au mieux ; mais il a également été un soutien de poids pendant mes avancées.
Ce fut un honneur d'être son dernier étudiant en thèse et d'avoir pu échanger des idées pendant toutes ces années.
C'est donc pour toutes ces raisons que je lui porte mon plus grand respect, ma plus sincère estime et toute ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier très cordialement Bernhard Beckermann qui a accepté de lire mes travaux et de me faire part de nombreux commentaires qui m'ont été très utiles.
Il a eu aussi l'amabilité et le temps de me recevoir pour des discussions mathématiques très précieuses et prolifiques.

Je suis flatté de la présence dans mon jury d'Annie Cuyt, Directrice de Recherche au FNRS d'Anvers, d'André Draux, Professeur à l'INSA de Rouen, et de Michela Redivo-Zaglia, Professeur à l'Université de Padoue.
Je les remercie d'avoir accepté de me lire et de me commenter, et j'attache à ceci une pensée plus particulière pour André Draux qui m'a envoyé maints commentaires et suggestions qui ont nettement amélioré la qualité de mon travail.

Je remercie aussi chaleureusement Marc Prévost, Professeur à l'Université de Calais, qui a bien voulu présider mon jury.

Je n'oublie pas tous ceux que j'ai côtoyés et rencontrés pendant ces années, enseignants, étudiants comme moi, secrétaires, bibliothécaires, et avec qui j'ai pu partager de la plus brève discussion au dialogue plus poussé.

Je finirai mes remerciements en m'adressant à toute ma famille, plus ou moins éloignée, avec qui j'ai pu me sentir soutenu à chaque instant.
J'ai une pensée plus particulière pour mes parents qui m'ont suivi et subi gentiment du début à la fin.
Je pense également à ma belle-famille qui a été présente pour moi.
Et enfin, je partage cette thèse avec mes deux anges, ma femme Nathalie et mon fils Yanis, qui m'ont donné un amour et un équilibre de vie permettant d'effacer rapidement mes doutes.

Table des matières

Introduction

La notion d'orthogonalité et plus particulièrement de polynômes orthogonaux est très utilisée en analyse numérique, et a de nombreuses branches d'applications telles que l'interpolation, l'approximation, les méthodes de quadrature, les problèmes d'accélération de la convergence, les ondelettes, etc.
Nous allons, ici, présenter une notion assez proche de cette dernière : celle de quasi-orthogonalité. Elle consiste en un affaiblissement de la condition d'orthogonalité imposée aux polynômes.
On aura ainsi $R_{n,r}$ qui sera un polynôme quasi-orthogonal de degré n et d'ordre r si

$$\int_a^b x^i R_{n,r}(x) d\alpha(x) = \begin{cases} = 0, & i = 0, \ldots, n-1-r \\ \neq 0, & i = n-r, \end{cases} .$$

Après avoir rappelé dans le premier chapitre les notions essentielles sur les polynômes orthogonaux (et leurs associés) et leurs zéros ainsi que les résultats sur les polynômes quasi-orthogonaux, je présente dans le Chapitre 2 de nouveaux résultats sur ces polynômes quasi-orthogonaux pour, dans un premier temps, mieux cerner leurs formes d'écritures. Ainsi nous les exprimerons en tant que polynômes caractéristiques d'une certaine matrice comme ce qui avait déjà été fait par Shohat [28] pour les polynômes orthogonaux. Nous en dégagerons alors de nouvelles relations et surtout des renseignements précis sur les zéros de ces derniers.
Ce chapitre nous donne également la possibilité de dresser une classification complète des polynômes quasi-orthogonaux d'un ordre donné. On s'appuiera sur le fait qu'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r peut s'écrire comme une combinaison linéaire unique d'une certaine famille de $r+1$ polynômes quasi-orthogonaux du même ordre mais définis par une caractérisation sur leurs zéros.

Le troisième chapitre nous invite à apprécier au mieux la localisation des zéros de ces polynômes quasi-orthogonaux de petits ordres en usant des zéros d'autres polynômes (comme les orthogonaux ou des quasi-orthogonaux de degrés différents) ou à l'aide des extrémités de l'intervalle d'orthogonalité. J'ai généralisé certains théorèmes donnés dans [3] ce qui a donné lieu à une publication [21].
Je me suis aussi attardé sur le dénombrement des zéros de ces polynômes. En effet, il est connu qu'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r et de degré n a au moins $n-r$ racines réelles et distinctes situées dans l'intervalle d'orthogonalité. Il nous reste donc r racines à estimer. Cette estimation donne lieu à un théorème donnant une condition suffisante, plus précise que ce qui était déjà connu, pour qu'un tel polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 ait toutes ses racines réelles et distinctes.
J'ai pu aussi mettre en avant quelques résultats inédits sur l'ordre 3.

Dans le chapitre suivant, j'applique les résultats des Chapitres 2 et 3 à des polynômes généralisés

de Jacobi et de Laguerre. Ainsi, j'aurai l'occasion de présenter de nouveaux entrelacements entre ces polynômes (en faisant varier les paramètres les définissant ainsi que leurs degrés) et de nouvelles relations les liant.
Ces familles de polynômes nous permettent de décomposer de manière unique tout polynôme quasi-orthogonal d'un ordre donné par rapport aux mesures $(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx$ sur $[-1,1]$ et $x^{\alpha}e^{-x}dx$ sur $[0,+\infty[$.

Dans les Chapitres 5 et 6, j'évoque les méthodes de quadrature de Gauss-Radau, Gauss-Lobatto et Gauss-Turán ainsi que leurs généralisations.
Dans un premier temps, je mettrai en exergue le lien entre les polynômes quasi-orthogonaux et ces méthodes de quadrature. Les nœuds que l'on fixera au départ sont en fait les zéros d'un certain polynôme quasi-orthogonal, et ceci aura son importance car je pourrai discuter de la place de ces nœuds grâce aux théorèmes généraux sur les zéros des polynômes quasi-orthogonaux.
La deuxième partie se fait sur les poids des méthodes. Le travail a eu son origine après la lecture des articles de Gautschi (en particulier [18]). Cet article faisant l'objet d'un problème ouvert sur la positivité des poids des méthodes généralisées de Gauss-Radau et Gauss-Lobatto respectivement présentées ci-dessous

$$\int_a^{+\infty} f d\alpha = \sum_{s=0}^{r-1} \lambda_0^{(s)} f^{(s)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité du nœud a et $d\alpha$ une mesure positive (bornée ou pas) dont le support est contenu dans $[a, +\infty[$.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+r}[x]$, $R_n(f) = 0$.

$$\int_a^{b} f d\alpha = \sum_{s=0}^{r-1} \lambda_0^{(s)} f^{(s)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s \lambda_{n+1}^{(s)} f^{(s)}(b) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité des nœuds a et b, et $d\alpha$ une mesure positive dont le support est contenu dans $[a, b]$.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+2r}[x]$, $R_n(f) = 0$.
Mon dernier chapitre exposera alors deux théorèmes répondant « positivement » à cette question.

Chapitre 1

Quelques rappels

1.1 Rappels sur les polynômes orthogonaux et associés

Soient $[a,b]$ un intervalle (fini ou pas), α une mesure positive telle que l'intégrale $\mu_0 = \displaystyle\int_a^b d\alpha(x)$ existe et soit finie.

Définition 1.1
On dit que $\{\Delta_n\}_n$, où Δ_n est un polynôme de degré n, est la famille de polynômes orthogonaux sur $[a,b]$ par rapport à la mesure α si et seulement si

$$\int_a^b x^i \Delta_n(x) d\alpha(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{1.1}$$

Étant définis à une constante multiplicative près, on les supposera, par la suite, unitaires.
Ils existent et vérifient la relation de récurrence suivante

$$\Delta_{n+1}(x) = (x + B_{n+1})\Delta_n(x) - C_{n+1}\Delta_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{1.2}$$

avec $\Delta_0(x) = 1$ et $\Delta_{-1}(x) = 0$.
On peut définir, à partir de ces polynômes orthogonaux, une famille de polynômes $\{Q_n\}_n$ dite associée à la famille $\{\Delta_n\}_n$ par

$$Q_n(t) = \int_a^b \frac{\Delta_{n+1}(x) - \Delta_{n+1}(t)}{x - t} d\alpha(x), \quad n \geq -1. \tag{1.3}$$

On vient de définir une nouvelle suite de polynômes orthogonaux (parfois appelée suite de polynômes orthogonaux de seconde espèce), chaque Q_n étant de degré n.
Une autre caractérisation de ces polynômes Q_n est qu'ils vérifient la relation de récurrence à trois termes suivante

$$Q_{n+1}(x) = (x + B_{n+2})Q_n(x) - C_{n+2}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{1.4}$$

avec $Q_0(x) = \int_a^b d\alpha$ et $Q_{-1}(x) = 0$.
On remarquera, par contre, que ces polynômes ne sont plus unitaires ; en effet le monôme dominant de Q_n est ici $x^n \int_a^b d\alpha$.
Il est intéressant de noter que cette relation (1.4) est obtenue à partir de la relation (1.2) en décalant d'une unité les indices des coefficients B_{n+1} et C_{n+1} et en rectifiant le deuxième terme des conditions initiales.
On sait également que les zéros de ces polynômes Δ_n et Q_n sont tous réels, distincts et qu'ils appartiennent à $]a,b[$. De plus, on a entrelacement entre les zéros de Δ_n et de Δ_{n+1}, ainsi qu'entre ceux de Δ_n et de Q_{n-1}.
Réitérons ce que l'on a fait pour définir les polynômes associés Q_n, pour arriver à

$$\Delta_n^{(k)}(t) = \int_a^b \frac{\Delta_{n+1}^{(k-1)}(x) - \Delta_{n+1}^{(k-1)}(t)}{x-t} d\alpha(x) \tag{1.5}$$

où $\Delta_n^{(0)} = \Delta_n$ (et donc $\Delta_n^{(1)} = Q_n$).

Cette nouvelle famille $\{\Delta_n^{(k)}\}_n$ est encore une famille de polynômes orthogonaux, on l'appelle famille de polynômes généralisés associés d'ordre k.
Parallèlement à l'étude faite pour les polynômes Q_n on a également une relation de récurrence à trois termes [29] où l'on peut observer un décalage de k unités des mêmes indices que précédemment

$$\Delta_{n+1}^{(k)}(x) = (x + B_{n+k+1})\Delta_n^{(k)}(x) - C_{n+k+1}\Delta_{n-1}^{(k)}(x), \quad n \geq 0 \tag{1.6}$$

avec $\Delta_0^{(k)}(x) = (\int_a^b d\alpha)^k$ et $\Delta_{-1}^{(k)}(x) = 0$.
Ici $\Delta_n^{(k)}$ a pour monôme dominant $x^n(\int_a^b d\alpha)^k$.

1.2 Des résultats sur les zéros des polynômes orthogonaux

Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe se trouvent dans [2]. Le premier résultat essentiel à rappeler est le fait que

Théorème 1.1
Un polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive α sur $[a,b]$ a tous ses zéros réels et distincts dans $]a,b[$.

Remarque 1.1
Comme les polynômes généralisés associés d'ordre k sont aussi des polynômes orthogonaux, ils ont également toutes leurs racines réelles et distinctes dans $]a,b[$.

Il faut noter qu'on ne trouve pas de zéro commun entre deux polynômes orthogonaux de degrés consécutifs ou entre un polynôme orthogonal et son associé.

Proposition 1.1
(i) Δ_n *et* Δ_{n+1} *n'ont pas de zéro commun.*
(ii) $\forall k \geq 0$, $\Delta_n^{(k)}$ *et* $\Delta_{n+1}^{(k)}$ *n'ont pas de zéro commun.*
(iii) $\forall k \geq 0$, $\Delta_n^{(k)}$ *et* $\Delta_n^{(k+1)}$ *n'ont pas de zéro commun.*

Il y a d'ailleurs une relation entre les zéros de Δ_n, Δ_{n+1}, $\Delta_n^{(k)}$, $\Delta_n^{(k+1)}$ qui est

Théorème 1.2
(i) Deux zéros consécutifs de Δ_{n+1} *sont séparés par un zéro de* Δ_n *et réciproquement.*
(ii) Deux zéros consécutifs de $\Delta_{n+1}^{(k)}$ *sont séparés par un zéro de* $\Delta_n^{(k)}$ *et réciproquement.*
(iii) Deux zéros consécutifs de $\Delta_n^{(k)}$ *sont séparés par un zéro de* $\Delta_n^{(k+1)}$ *et réciproquement.*

1.3 Un aperçu sur les familles classiques de polynômes orthogonaux

1.3.1 Les polynômes de Jacobi [32]

Les polynômes de Jacobi vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx = 0$$

pour $i = 0, \ldots, n-1$ et $\alpha > -1,\ \beta > -1$.
Ainsi, pour $\alpha > -1$ et $\beta > -1$, tous les zéros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ sont réels et distincts et appartiennent à l'intervalle d'orthogonalité $]-1, 1[$.

On normalise les polynômes $P_n^{(\alpha,\beta)}$ en choisissant $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$. On définit ainsi de manière unique les polynômes de Jacobi.

On a la relation de récurrence à trois termes suivante

$$\begin{aligned} &2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad = (2n+\alpha+\beta-1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2]P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\qquad - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x),\ n \geq 2 \quad (1.7) \end{aligned}$$

avec $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1,\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.
On en déduit alors le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n^{(\alpha,\beta)}$

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$$

On peut aussi les définir à partir de la formule de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}\right]$$

ce qui peut s'écrire sous la forme plus explicite

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x+1)^k(x-1)^{n-k}. \tag{1.8}$$

On utilise, ici, les coefficients binômiaux généralisés

$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(z+1)}{k!\Gamma(z-k+1)},$$

où $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, et Γ est la fonction gamma d'Euler.

On peut dès à présent remarquer que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}$$

On a des familles particulières de polynômes orthogonaux avec ces choix des paramètres α, β

$\rightarrow$ pour $\alpha = \beta = 0$, on a les polynômes de Legendre.
$\rightarrow$ pour $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, on a les polynômes de Tchebycheff.
$\rightarrow$ pour $\alpha = \beta = a - \frac{1}{2}$, on a les polynômes de Gegenbauer.

1.3.2 Les polynômes généralisés de Laguerre (ou polynômes de Laguerre-Sonin)

Les polynômes généralisés de Laguerre vérifient la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_0^{+\infty} x^i L_n^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = 0$$

pour $i = 0, \dots, n-1$ et $\alpha > -1$.
Ainsi, pour $\alpha > -1$, tous les zéros de L_n^α sont réels et distincts et appartiennent à l'intervalle d'orthogonalité $]0, +\infty[$.

On normalise les polynômes L_n^α en choisissant son coefficient dominant égal à $\dfrac{(-1)^n}{n!}$. On définit ainsi de manière unique les polynômes de Laguerre-Sonin.

On a la relation de récurrence à trois termes suivante

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \; n \geq -1 \tag{1.9}$$

avec $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$.

On peut les définir à partir de la formule de Rodrigues

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+\alpha}e^{-x})$$

ce qui peut s'écrire sous la forme plus explicite

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-k+1)}x^{n-k}. \tag{1.10}$$

On a le fait que $L_n^\alpha(0) = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}$.
Comme $L_n^\alpha{}'(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$, on en déduit que $L_n^\alpha{}'(0) = -\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)(n-1)!}$.

1.4 Généralités sur les polynômes quasi-orthogonaux

En affaiblissant la condition d'orthogonalité (1.1), c'est-à-dire en restreignant la variation de l'indice i, on arrive à la définition des polynômes quasi-orthogonaux

Définition 1.2
Soit $R_{n,r}$ un polynôme de degré $n \geq r$. Si $R_{n,r}$ satisfait les conditions suivantes

$$\int_a^b x^i R_{n,r}(x) d\alpha(x) = \begin{cases} = 0, & i = 0, \dots, n-1-r \\ \neq 0, & i = n-r, \end{cases} \tag{1.11}$$

alors $R_{n,r}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r sur [a,b] par rapport à la mesure positive α.

Remarque 1.2
Les polynômes quasi-orthogonaux $R_{n,r}$ ne sont définis que pour $n \geq r$.

Remarque 1.3
Pour $r = 0$ *on retrouve la définition des polynômes orthogonaux qui, rappelons-le, sont définis de manière unique (à une constante multiplicative près). Si nous prenons* $r \geq 1$ *alors le polynôme* $R_{n,r}$ *n'est plus déterminé de manière unique par (1.11).*

La notion de quasi-orthogonalité serait apparue la première fois dans les travaux de M. Riesz [26] pour l'ordre $r = 1$. Ce cas est aussi relevé bien plus tard dans [7].
Le cas $r = 2$ est étudié par Fejér [10], et le cas général par Shohat [28], Chihara [5], Draux [9] ou encore Brezinski et al. [3].

Théorème 1.3 *[3]*
Soit $\{\Delta_n\}$ *la famille de polynômes orthogonaux sur* $[a, b]$ *par rapport à une mesure positive* α*.*
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de degré n*,* $R_{n,r}$*, soit quasi-orthogonal d'ordre* r *sur* $[a, b]$ *par rapport à la mesure* α*, est que*

$$R_{n,r}(x) = c_{0,n}\Delta_n(x) + c_{1,n}\Delta_{n-1}(x) + \cdots + c_{r,n}\Delta_{n-r}(x) \tag{1.12}$$

où les $c_{i,n}$ *sont des réels et* $c_{0,n}c_{r,n} \neq 0$*.*

Une première différence notable que l'on a entre les polynômes orthogonaux et quasi-orthogonaux concerne l'appartenance des racines à l'intervalle d'orthogonalité

Théorème 1.4 *[28]*
Un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r *a au moins* $n - r$ *racines réelles et distinctes dans* $]a, b[$*.*

On n'a malheureusement que très peu de propriétés sur les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre quelconque. On sait tout de même qu'ils vérifient une relation de récurrence à trois termes à coefficients polynômiaux (voir [5] pour les détails), mais nous n'avons pas de formules littérales toutes faites pour le moment.

Chapitre 2

Nouveaux résultats sur les polynômes quasi-orthogonaux

Ce chapitre est consacré à une étude, d'un point de vue général, sur les polynômes quasi-orthogonaux. Nous donnerons un aperçu des différentes formes que peuvent prendre ces polynômes, et ceci nous permettra de les apprivoiser au mieux ou en tous les cas de les utiliser plus efficacement (pour en déduire dans le prochain chapitre, par exemple, des résultats intéressants sur leurs zéros).

Nous avons, dans le chapitre précédent, rappelé qu'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r pouvait se décomposer suivant la famille libre $\{\Delta_{n-r}, \ldots, \Delta_n\}$ et que cette décomposition n'était pas unique (pour $r \geq 1$).
Partant de cette décomposition à caractère linéaire, nous allons en exhiber une autre plus compacte. En effet, celle-ci ne fera intervenir que les deux polynômes Δ_i et Δ_{i-1} où $i \leq n - r + 1$.
Par contre, nous perdons la linéarité de cette décomposition car les coefficients sont, cette fois-ci, polynômiaux.
Ensuite, en s'aidant de la relation de récurrence à trois termes (1.2) liant les polynômes Δ_{n+1}, Δ_n et Δ_{n-1}, nous pourrons écrire les polynômes quasi-orthogonaux (ainsi que les polynômes quasi-orthogonaux généralisés associés d'ordre k) comme des polynômes caractéristiques d'une certaine matrice que nous préciserons.

Nous verrons, en seconde partie, comment il est possible de générer des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre quelconque.
Ce travail ne sera qu'un exercice de construction, il nous permettra, tout de même, d'avoir une meilleure idée des écritures possibles d'un polynôme quasi-orthogonal et l'on distinguera le cas de l'ordre pair et impair.

Cette construction ne nous donnera pas d'ensemble générateur. Un tel sensemble sera exposé en fin de chapitre, où l'on choisira une caractérisation basée sur la liberté de l'ensemble. Il suffira alors pour un polynôme quasi-orthogonal d'un ordre donné, de trouver une famille représentative de polynômes quasi-orthogonaux du même ordre et indépendants, ce qui permettra de décomposer de manière unique ce polynôme quasi-orthogonal.

2.1 De nouvelles écritures

2.1.1 Une nouvelle décomposition

Le théorème qui suit nous donne une nouvelle décomposition d'un polynôme quasi-orthogonal de degré n d'ordre quelconque. Le Théorème 1.3 nous montrait qu'ils pouvaient s'écrire à l'aide de la famille de polynômes orthogonaux $\{\Delta_i\}_{i=n-r}^{n}$.

Nous allons ici restreindre cette famille

Théorème 2.1
Pour $r \geq 1$, on a,

$$R_{n,r} = U_{r-1}\Delta_{n-r+1} + (c_r - C_{n-r+2}U_{r-2})\Delta_{n-r} \tag{2.1}$$

où les polynômes U_r vérifient
$U_r = (x + B_{n-r+1})U_{r-1} + (c_r - C_{n-r+2}U_{r-2})$ *avec* $U_0 = 1$ *et* $U_{-1} = 0$.

Preuve
Soit $\{U_r\}_r$ la famille de polynômes satisfaisant la relation $U_r = (x+B_{n-r+1})U_{r-1}+(c_r-C_{n-r+2}U_{r-2})$ avec $U_0 = 1$ et $U_{-1} = 0$.
Avec la relation de récurrence à trois termes que vérifient les polynômes orthogonaux Δ_n, on obtient
$R_{n,r} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + \cdots + c_r\Delta_{n-r} = (x + B_n + c_1)\Delta_{n-1} + (c_2 - C_n)\Delta_{n-2} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= U_1\Delta_{n-1} + (c_2 - C_n)\Delta_{n-2} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= U_1((x + B_{n-1})\Delta_{n-2} - C_{n-1}\Delta_{n-3}) + (c_2 - C_n)\Delta_{n-2} + c_3\Delta_{n-3} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= \Delta_{n-2}((x + B_{n-1})U_1 + (c_2 - C_n)) + (c_3 - C_{n-1}U_1)\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= U_2\Delta_{n-2} + (c_3 - C_{n-1}U_1)\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$.

Nous réitérons le procédé k fois et nous avons
$R_{n,r} = U_k\Delta_{n-k} + (c_{k+1} - C_{n-k+1}U_{k-1})\Delta_{n-k-1} + c_{k+2}\Delta_{n-k-2} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$.
Nous passons à l'étape suivante
$R_{n,r} = U_k((x + B_{n-k})\Delta_{n-k-1} - C_{n-k}\Delta_{n-k-2}) + (c_{k-1} - C_{n-k+1}U_{k-1})\Delta_{n-k-1} + c_{k+2}\Delta_{n-k-2} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= (U_k(x + B_{n-k}) - C_{n-k+1}U_{k-1} + c_{k+1})\Delta_{n-k-1} + (c_{k+2} - C_{n-k}U_k)\Delta_{n-k-2} + c_{k+3}\Delta_{n-k-3} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$
$= U_{k+1}\Delta_{n-k-1} + (c_{k+2} - C_{n-k}U_k)\Delta_{n-k-2} + c_{k+3}\Delta_{n-k-3} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$.
Il suffit alors de prendre $k = r - 1$ pour obtenir le résultat voulu. ∎

Remarque 2.1
Cette écriture des polynômes quasi-orthogonaux est, comme la formule (1.12), une caractérisation, c'est-à-dire que tous les polynômes quasi-orthogonaux s'écrivent de cette manière et réciproquement.

Corollaire 2.1
On a aussi

$$R_{n,r} = U_r\Delta_{n-r} - C_{n-r+1}U_{r-1}\Delta_{n-r-1} = (U_{r+1} - c_{r+1})\Delta_{n-r-1} - C_{n-r}U_r\Delta_{n-r-2}. \tag{2.2}$$

Preuve
On part de l'égalité (2.1) et on utilise la relation de récurrence (1.2)

$$\begin{aligned} R_{n,r} &= U_{r-1}\Delta_{n-r+1} + (c_r - C_{n-r+2}U_{r-2})\Delta_{n-r} \\ &= U_{r-1}((x + B_{n-r+1})\Delta_{n-r} - C_{n-r+1}\Delta_{n-r-1}) + (c_r - C_{n-r+2}U_{r-2})\Delta_{n-r} \\ &= (U_{r-1}(x + B_{n-r+1}) + c_r - C_{n-r+2}U_{r-2})\Delta_{n-r} + (c_{r+1} - C_{n-r+1}U_{r-1})\Delta_{n-r-1} \\ &= U_r\Delta_{n-r} - C_{n-r+1}U_{r-1}\Delta_{n-r-1}. \end{aligned}$$

On utilise une nouvelle fois la relation (1.2)

$$\begin{aligned} R_{n,r} &= U_r((x + B_{n-r})\Delta_{n-r-1} - C_{n-r}\Delta_{n-r-2}) - C_{n-r+1}U_{r-1}\Delta_{n-r-1} \\ &= (U_r(x + B_{n-r}) - C_{n-r+1}U_{r-1})\Delta_{n-r-1} - C_{n-r}U_r\Delta_{n-r-2} \\ &= (U_{r+1} - c_{r+1})\Delta_{n-r-1} - C_{n-r}U_r\Delta_{n-r-2}. \end{aligned}$$

On a eu la dernière égalité car $U_{r+1} = U_r(x + B_{n-r}) - C_{n-r+1}U_{r-1} + c_{r+1}$.■

Remarque 2.2
Ces différentes formules nous montrent que $R_{n,r}$ peut s'écrire comme une combinaison de Δ_{n-r+1} et Δ_{n-r} à coefficients polynômiaux.
Nous avons aussi une décomposition avec les polynômes Δ_{n-r} et Δ_{n-r-1}, ou avec Δ_{n-r-1} et Δ_{n-r-2}. On peut ainsi continuer, et obtenir $R_{n,r}$ comme une combinaison de Δ_i et Δ_{i-1} où $i \leq n - r + 1$ toujours en utilisant la relation (1.2) et la relation sur les polynômes U_r.

2.1.2 Des polynômes aux déterminants

Un résultat important pour la théorie des polynômes orthogonaux est le lien entre ces derniers et l'algèbre linéaire. On peut écrire le polynôme orthogonal Δ_n comme le polynôme caractéristique de la matrice tridiagonale de Jacobi

$$A_n = \begin{pmatrix} -B_1 & -1 & & \\ -C_2 & -B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -C_n & -B_n \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n & x+B_n \end{vmatrix}.$$

Suivant l'idée que Shohat avait eue pour les polynômes orthogonaux, nous allons pouvoir écrire les polynômes quasi-orthogonaux comme des déterminants

Proposition 2.1
Pour un polynôme quasi-orthogonal unitaire d'ordre r et de degré n s'écrivant $R_{n,r} = \Delta_n + c_{1,n}\Delta_{n-1} + \cdots + c_{r,n}\Delta_{n-r}$, on a

$$R_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & & & & \\ C_2 & x+B_2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & C_{n-1} & x+B_{n-1} & 1 \\ & & (-1)^{r+1}c_{r,n} & \cdots & c_{3,n} & C_n - c_{2,n} & x+B_n+c_{1,n} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Preuve
Pour prouver ceci, il suffit de développer ce déterminant par rapport à la dernière ligne, ce qui donne

$$(x+B_n+c_{1,n}) \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix} + (c_{2,n}-C_n) \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-2} & x+B_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$+c_{3,n} \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-3} & x+B_{n-3} \end{vmatrix} + \cdots + c_{r,n} \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-r} & x+B_{n-r} \end{vmatrix}$$

Avec le rappel fait sur l'écriture des polynômes orthogonaux comme déterminants, on reconnaît ainsi $(x + B_n + c_{1,n})\Delta_{n-1} + (c_{2,n} - C_n)\Delta_{n-2} + c_{3,n}\Delta_{n-3} + \cdots + c_{r,n}\Delta_{n-r}$.
En utilisant la relation de récurrence (1.2), on a alors $\Delta_n + c_{1,n}\Delta_{n-1} + c_{2,n}\Delta_{n-2} + \cdots + c_{r,n}\Delta_{n-r}$, ce qui est exactement $R_{n,r}$.∎

Remarque 2.3
Cette écriture caractérise complètement les polynômes quasi-orthogonaux car, réciproquement, si

l'on prend un déterminant de la forme (1.3) alors on a un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r (en supposant $c_{r,n} \neq 0$ au départ).

Généralisons ces résultats et intéressons-nous aux polynômes généralisés associés (d'ordre k) à Δ_n (et à $R_{n,r}$)

Proposition 2.2
Le k-ème polynôme généralisé associé à Δ_n, défini par (1.5), peut s'écrire

$$\Delta_n^{(k)}(x) = \mu_0^k \begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & & \\ C_{k+2} & x+B_{k+2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x+B_{n+k} \end{vmatrix} \quad , \ k \geq 0, \ n \geq 1 \tag{2.4}$$

(on rappelle que $\mu_0 = \displaystyle\int_a^b d\alpha$).

Preuve
Raisonnement à l'aide d'une récurrence forte sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, le déterminant donne $\mu_0^k(x + B_{k+1})$, et avec la relation (1.6) on a le polynôme $\Delta_1^{(k)}(x) = \mu_0^k(x + B_{k+1})$. Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.
Supposons la proposition vraie jusqu'à l'ordre n fixé. En prenant l'ordre $n + 1$ et en développant par rapport à la dernière ligne, on a

$$\mu_0^k \begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & x+B_{k+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k+1} & x+B_{n+k+1} \end{vmatrix}$$

$$= (x+B_{n+k+1})\mu_0^k \begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x+B_{n+k} \end{vmatrix} - C_{n+k+1}\mu_0^k \begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}$$

$= (x+B_{n+k+1})\Delta_n^{(k)} - C_{n+k+1}\Delta_{n-1}^{(k)} = \Delta_{n+1}^{(k)}$, la dernière égalité étant obtenue à l'aide de la relation de récurrence (1.6).
Le résultat est donc vrai pour tout $n \geq 1$. ∎

Remarque 2.4
On s'attendait à ce que le polynôme $\Delta_n^{(k)}$ s'écrive sous cette forme car on savait que $\Delta_n^{(k)}$ était un polynôme orthogonal (comme nous l'avions rappelé dans le premier chapitre).

Pour la proposition qui suit, nous voulons écrire le polynôme généralisé associé d'ordre k $R_{n,r}^{(k)}$ sous forme déterminantale.

Avant de l'énoncer, donnons tout d'abord un résultat exprimant le polynôme généralisé d'ordre k associé à $R_{n,r}$

Proposition 2.3
Pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r s'écrivant $R_{n,r} = \Delta_n + c_{1,n}\Delta_{n-1} + \cdots + c_{n,r}\Delta_{n-r}$, avec $c_r \neq 0$, son k-ème polynôme généralisé associé est donné par

$$R_{n,r}^{(k)} = \Delta_n^{(k)} + c_{1,n+k}\Delta_{n-1}^{(k)} + \cdots + c_{r,n+k}\Delta_{n-r}^{(k)}. \tag{2.5}$$

Preuve
Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$, le résultat est trivialement donné par la relation (1.12) (dans le cas où le polynôme quasi-orthogonal $R_{n,r}$ est unitaire).
Supposons la proposition vraie à l'ordre k fixé et montrons-la à l'ordre $k+1$.
On a $R_{n,r}^{(k+1)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{R_{n+1,r}^{(k)}(x) - R_{n+1,r}^{(k)}(t)}{x-t} d\alpha(t)$
$= \displaystyle\int_a^b \frac{\Delta_{n+1}^{(k)}(x) - \Delta_{n+1}^{(k)}(t)}{x-t} d\alpha(t) + c_{1,n+k+1}\int_a^b \frac{\Delta_n^{(k)}(x) - \Delta_n^{(k)}(t)}{x-t} d\alpha(t)$
$+ \cdots + c_{r,n+k+1}\displaystyle\int_a^b \frac{\Delta_{n+1-r}^{(k)}(x) - \Delta_{n+1-r}^{(k)}(t)}{x-t} d\alpha(t)$
$= \Delta_n^{(k+1)}(x) + c_{1,n+k+1}\Delta_{n-1}^{(k+1)}(x) + \cdots + c_{r,n+k+1}\Delta_{n-r}^{(k+1)}(x)$.
Le résultat est donc vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$. ∎

Remarque 2.5
La proposition précédente nous montre aussi qu'en écrivant le polynôme généralisé d'ordre k associé à $R_{n,r}$ sous cette forme, $R_{n,r}^{(k)}$ est également un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r.

Proposition 2.4
Le k-ème polynôme généralisé associé à $R_{n,r} = \Delta_n + c_{1,n}\Delta_{n-1} + \cdots + c_{r,n}\Delta_{n-r}$, où $n \geq r$, se met sous la forme

$$R_{n,r}^{(k)}(x) = \mu_0^k \begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & & & & \\ C_{k+2} & x+B_{k+2} & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} & 1 \\ & & (-1)^{r+1}c_{r,n+k} & \cdots & c_{3,n+k} & C_{n+k}-c_{2,n+k} & x+B_{n+k}+c_{1,n+k} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Preuve
Le résultat est immédiat grâce aux relations (2.3) et (2.5). ∎

Ces différentes écritures déterminantales nous donneront des renseignements sur la localisation des zéros de tous les polynômes susnommés ; avant d'aborder l'étude de ces zéros, nous pouvons en déduire des nouvelles formules de récurrence

Proposition 2.5
On a la relation de récurrence à trois termes suivante

$$\Delta_n^{(k)}(x) = (x + B_{k+1})\frac{\Delta_{n-1}^{(k+1)}(x)}{\mu_0} - C_{k+2}\frac{\Delta_{n-2}^{(k+2)}(x)}{\mu_0^2}, \quad \textit{pour} \quad k \geq 0 \quad \textit{et} \quad n \geq 1. \tag{2.7}$$

Preuve
Soient $k \geq 0$ et $n \geq 1$.
Développons le déterminant représentant $\Delta_n^{(k)}$ par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned}
\Delta_n^{(k)} &= \mu_0^k \begin{vmatrix} x + B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & x + B_{k+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x + B_{n+k} \end{vmatrix} \\
&= \mu_0^k(x+B_{k+1}) \begin{vmatrix} x + B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x + B_{n+k} \end{vmatrix} - \mu_0^k C_{k+2} \begin{vmatrix} x + B_{k+3} & 1 & & \\ C_{k+4} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x + B_{n+k} \end{vmatrix} \\
&= (x + B_{k+1})\frac{\Delta_{n-1}^{(k+1)}(x)}{\mu_0} - C_{k+2}\frac{\Delta_{n-2}^{(k+2)}(x)}{\mu_0^2}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

De la même manière, on peut mettre en évidence une formule combinant les polynômes $R_{n,r}^{(k)}$ de différents degrés et différents ordres.

Proposition 2.6
On a la relation de récurrence à trois termes suivante

$$R_{n,r}^{(k)}(x) = (x + B_{k+1})\frac{R_{n-1,r}^{(k+1)}(x)}{\mu_0} - C_{k+2}\frac{R_{n-2,r}^{(k+2)}(x)}{\mu_0^2}, \quad \textit{pour} \quad k \geq 0 \quad \textit{et} \quad n \geq r+2. \tag{2.8}$$

Preuve
Développons le déterminant représentant $R_{n,r}^{(k)}$ par rapport à la première colonne

$$\mu_0^k(x+B_{k+1})\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} & 1 \\ & & (-1)^{r+1}c_{r,n+k} & \cdots & c_{3,n+k} & C_{n+k}-c_{2,n+k} & x+B_{n+k}+c_{1,n+k} \end{vmatrix} -$$

$$\mu_0^kC_{k+2}\begin{vmatrix} x+B_{k+3} & 1 & & & & \\ C_{k+4} & x+B_{k+4} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} & 1 \\ & & (-1)^{r+1}c_{r,n+k} & \cdots & c_{3,n+k} & C_{n+k}-c_{2,n+k} & x+B_{n+k}+c_{1,n+k} \end{vmatrix}$$

$$= (x+B_{k+1})\frac{R_{n-1,r}^{(k+1)}(x)}{\mu_0} - C_{k+2}\frac{R_{n-2,r}^{(k+2)}(x)}{\mu_0^2}. \blacksquare$$

2.2 Construction

Partant d'une famille de polynômes orthogonaux, nous pouvons écrire tout polynôme quasi-orthogonal d'ordre quelconque à l'aide d'une combinaison linéaire (1.12).
Nous allons présenter dans cette section une nouvelle manière de générer des polynômes quasi-orthogonaux. L'idée est de s'appuyer une nouvelle fois sur un polynôme orthogonal et d'abaisser sa condition d'orthogonalité ; pour ceci, nous allons attacher à ce polynôme orthogonal un polynôme générique. Nous obtiendrons, dans un premier temps, une famille (non exhaustive) de polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair. Pour recouvrir tous les cas, nous réitèrerons notre raisonnement avec cette fois un polynôme quasi-orthogonal à la place du polynôme orthogonal.
Nous avons ainsi une nouvelle écriture plus compacte de certains polynômes quasi-orthogonaux. Nous en déduirons alors des résultats plus généraux (Théorème 3.27) sur l'existence d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre quelconque ayant toutes ses racines réelles et distinctes.

2.2.1 Schéma de construction

• Nous partons de la constatation suivante, pour Δ_n, polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive α, et Π_m un polynôme générique de degré $m \geq 1$, le produit $\mathcal{R}_{n+m} = \Delta_n\Pi_m$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m$ par rapport à la mesure α (et de degré $n+m$). On supposera que $n \geq m+1$.
En effet, $\displaystyle\int_a^b \Pi_i\mathcal{R}_{n+m}d\alpha = \int_a^b \Pi_i\Delta_n\Pi_m d\alpha = \int_a^b \Pi_{i+m}\Delta_n d\alpha = 0$ pour $i+m = 0,\ldots,n-1$ et donc

pour $i = 0, \ldots, n-1-m = (n+m)-(2m)-1$.
Aussi $\int_a^b \Pi_{n-m}\mathcal{R}_{n+m}d\alpha = \int_a^b \Pi_{n-m}\Delta_n\Pi_m d\alpha = \int_a^b \Pi_n\Delta_n d\alpha \neq 0$.
Ainsi, d'après la définition (1.11), $\mathcal{R}_{n+m}$ est bien un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m$ exactement (et de degré $n+m$).
On en conclut que l'on peut construire des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair quelconque.
On en verra des conséquences très intéressantes quant aux zéros de ces polynômes quasi-orthogonaux.
Cette écriture sous forme de produit n'est pas une caractérisation de tous les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair.
On a mis en exergue une certaine classe de polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair, ceux qui s'écrivent à l'aide d'un polynôme quasi-orthogonal.

Remarque 2.6
Le polynôme orthogonal Δ_n qui intervient dans l'écriture de $\mathcal{R}_{n+m} = \Delta_n\Pi_m$ est le même que celui de la décomposition du polynôme quasi-orthogonal $\mathcal{R}_{n+m}$ suivant la famille libre $\{\Delta_{n+m}, \ldots, \Delta_{n-m}\}$. Effectivement, on considère les polynômes orthogonaux sur $[a,b]$ et par rapport à la mesure positive α, ils sont donc uniquement déterminés (à une constante multiplicative près).

Les inconvénients de cette construction sont, d'une part, le fait de n'avoir que des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair et, d'autre part, de ne pas tous les avoir (car, rappelons-le, nous ne couvrons qu'une certaine classe de ces polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair).
Essayons néanmoins de palier à l'un de ces inconvénients.

- Continuons le même raisonnement avec cette fois-ci un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 au lieu du polynôme orthogonal. Nous considérons ainsi le polynôme $\mathcal{R}_{n+m} = R_{n,1}\Pi_m$, où Π_m est un polynôme générique de degré $m \geq 1$. On supposera que $n \geq m+2$.

Nous avons $\int_a^b \Pi_i\mathcal{R}_{n+m}d\alpha = \int_a^b \Pi_i\Pi_m R_{n,1}d\alpha = \int_a^b \Pi_{i+m}R_{n,1}d\alpha = 0$ pour $i+m = 0, \ldots, n-2$ et donc pour $i = 0, \ldots, n-2-m = (n+m)-(2m+1)-1$.
Aussi $\int_a^b \Pi_{n-m-1}\mathcal{R}_{n+m}d\alpha = \int_a^b \Pi_{n-m-1}R_{n,1}\Pi_m d\alpha = \int_a^b \Pi_{n-1}R_{n,1}d\alpha \neq 0$ grâce à la définition (1.11).
Ainsi, d'après cette susnommée définition, $\mathcal{R}_{n+m}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m+1$ exactement par rapport à la mesure α (et de degré $n+m$).
Nous avons ainsi obtenu les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre impair s'écrivant à l'aide d'un polynôme orthogonal.

On peut avancer alors un résultat plus général

Théorème 2.2
Soient $R_{n,r}$ un polynôme quasi-orthogonal de degré n (avec $n \geq m+r+1$) et d'ordre r par rapport à la mesure α sur un intervalle $[a,b]$ (fini ou pas) et Π_m un polynôme quelconque de degré $m \geq 1$. Le produit $\mathcal{R}_{n+m} = R_{n,r}\Pi_m$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m+r$ (et de degré $n+m$) par rapport à la mesure α sur $[a,b]$.

Preuve
Soient Π_i un polynôme quelconque de degré i, $m \geq 1$ et $n \geq m + r + 1$.
Nous avons $\displaystyle\int_a^b \Pi_i \mathcal{R}_{n+m} d\alpha = \int_a^b \Pi_i \Pi_m R_{n,r} d\alpha = \int_a^b \Pi_{i+m} R_{n,r} d\alpha = 0$ pour $i+m = 0, \cdots, n-r-1$, et donc pour $i = 0, \cdots, n-m-r-1 = (n+m) - (2m+r) - 1$.
Aussi $\displaystyle\int_a^b \Pi_{n-m-r} \mathcal{R}_{n+m} d\alpha = \int_a^b \Pi_{n-m-r} R_{n,r} \Pi_m d\alpha = \int_a^b \Pi_{n-r} R_{n,r} d\alpha \neq 0$ d'après la définition des polynômes quasi-orthogonaux (1.11).
En conclusion, $\mathcal{R}_{n+m}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m + r$ exactement, par rapport à la mesure α sur $[a, b]$. ∎

Ce dernier théorème peut sembler de trop vu que l'on avait déjà trouvé des classes de polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair et d'ordre impair, mais il nous sera pourtant très utile dans la pratique.
En quoi ceci nous sera-t-il utile ? L'ordre de ces polynômes quasi-orthogonaux est $2m + r$, et donc on a une dépendance suivant deux paramètres. Ainsi, pour étudier un polynôme quasi-orthogonal d'un ordre donné s et de la forme présentée dans le Théorème 2.2 (ainsi $s = 2m + r$), on pourra arriver à cet ordre en faisant varier soit m soit r soit les deux.
Il nous semblera alors judicieux de choisir m le plus petit possible ($m = 1$ ou 2 semble suffisant).
Voyons sur des exemples en quoi cette construction est intéressante.

2.2.2 Étude pour le couple $(m, r) = (1, 0)$

Considérons un polynôme orthogonal Δ_n par rapport à une mesure α positive et sur un intervalle $[a, b]$ (fini ou pas) et un polynôme quelconque Π_1 de degré 1 que l'on supposera tous les deux unitaires.
Formons alors le produit $\mathcal{R}_{n+1} = \Delta_n \Pi_1 = \Delta_n(x + \beta)$.
D'après le Théorème 2.2, $\mathcal{R}_{n+1}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 par rapport à la mesure α sur $[a, b]$.

Que nous dit cette construction ? Une première chose à constater est que l'on peut construire des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 avec toutes ses racines réelles et distinctes (il suffira de choisir $\beta \neq -x_{i,n}$ où les $x_{i,n}$ sont les racines de Δ_n), et que l'on peut placer l'une de ses racines là où l'on veut.
On peut également construire des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 avec une racine double (en prenant $\beta = -x_{i,n}$) et remarquer que l'on ne peut avoir de racines de multiplicité supérieure à 2.

Remarque 2.7
Nous avions noté dans l'article [21, p. 75, Remark 7] qu'il ne pouvait y avoir deux racines à gauche de a (ou à droite de b), cette construction le vérifie bien car tous les zéros du polynôme

orthogonal Δ_n sont dans $]a, b[$ et il n'y aura donc au plus qu'une racine en dehors de $]a, b[$. Voir également le Chapitre 4.

Remarque 2.8
Nous avons montré que $\mathcal{R}_{n+1}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 à l'aide de la définition (1.11), c'est-à-dire en utilisant les intégrales. Nous pouvions aussi le montrer en nous appuyant sur la caractérisation des polynômes quasi-orthogonaux donnée par (1.12).
On part de $\mathcal{R}_{n+1} = \Delta_n\Pi_1 = \Delta_n(x+\beta) = \Delta_n(x+B_{n+1}) + (\beta - B_{n+1})\Delta_n$
$= \Delta_{n+1} + (\beta - B_{n+1})\Delta_n + C_{n+1}\Delta_{n-1}$.
La dernière égalité étant obtenue grâce à la relation de récurrence (1.2) liant les polynômes orthogonaux Δ_n.
Comme $C_n > 0$ [2] (et donc $\neq 0$), $\mathcal{R}_{n+1}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 exactement, et nous avons en supplément sa décomposition suivant les polynômes orthogonaux Δ_i.

Toutefois, il est intéressant de voir que l'on peut caractériser complètement la classe des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 qui s'écrivent $\Delta_n\Pi_1$.
En effet, nous avons
$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} + c_1\Delta_n + c_2\Delta_{n-1} &= (x + B_{n+1} + c_1)\Delta_n + (c_2 - C_{n+1})\Delta_{n-1} \text{ (grâce à (1.2))}\\ &= (x+\beta)\Delta_n.\end{aligned}$$
Par identification (la famille $\{\Delta_n, \Delta_{n-1}\}$ étant libre), on arrive à $\begin{cases} B_{n+1} + c_1 = \beta \\ c_2 = C_{n+1} \end{cases}$.

Proposition 2.7
Soit un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 unitaire s'écrivant $R_{n,2} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + c_2\Delta_{n-2}$ ($c_2 \neq 0$).
La classe des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 s'écrivant $\Delta_{n-1}\Pi_1$, où Π_1 est un polynôme unitaire de degré 1, est exactement déterminé par $c_2 = C_n$.

Preuve
Si on suppose que $R_{n,2} = \Delta_{n-1}\Pi_1$, alors on a, d'après la remarque faite juste avant la Proposition 2.6, $c_2 = C_n$ (et $\beta = B_n + c_1$).
Si nous imposons $c_2 = C_n$, alors $\Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + c_2\Delta_{n-2} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + C_n\Delta_{n-2} = (x + B_n + c_1)\Delta_{n-1}$.
Par double implication, on a bien la caractérisation de cette classe de polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2. ∎

Remarque 2.9
Nous reparlerons de cette condition $c_2 = C_n$ dans le chapitre traitant des zéros des polynômes quasi-orthogonaux (d'ordre 2).

2.2.3 Étude pour le couple $(m, r) = (2, 0)$

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un polynôme orthogonal Δ_n et un polynôme quelconque Π_2 de degré 2 que nous supposerons tous les deux unitaires.

Formons le produit $\mathcal{R}_{n+2} = \Delta_n\Pi_2 = \Delta_n(x^2 + \beta x + \gamma)$.
D'après le Théorème 2.2, $\mathcal{R}_{n+2}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4.

Remarque 2.10
Nous pourrons en déduire des renseignements sur les zéros des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 4 que nous traiterons dans le chapitre suivant.

Remarque 2.11
Comme précédemment, nous pouvons montrer d'une autre manière que c'est effectivement un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4, ceci en utilisant une nouvelle fois la caractérisation (1.12). On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{n+2} &= \Delta_n(x^2 + \beta x + \gamma) = \Delta_n\Big(\Big(x + \frac{\beta}{2}\Big)^2 + \delta\Big) \text{ où } \delta = \gamma - \frac{\beta^2}{4} \\
&= \Big(x + \frac{\beta}{2}\Big)\Big(\Delta_n\Big(x + \frac{\beta}{2}\Big)\Big) + \delta\Delta_n \\
&= \Big(x + \frac{\beta}{2}\Big)\Big(\Big(x + B_{n+1}\Big)\Delta_n + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+1}\Big)\Delta_n\Big) + \delta\Delta_n \\
&= \Big(x + \frac{\beta}{2}\Big)\Big(\Delta_{n+1} + C_{n+1}\Delta_{n-1} + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+1}\Big)\Delta_n\Big) + \delta\Delta_n \\
&= \Big(x + B_{n+2}\Big)\Delta_{n+1} + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+2}\Big)\Delta_{n+1} + C_{n+1}\Big(\Big(x + B_n\Big)\Delta_{n-1} + \Big(\frac{\beta}{2} - B_n\Big)\Delta_{n-1}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+1}\Big)\Big(\Big(x + B_{n+1}\Big)\Delta_n + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+1}\Big)\Delta_n\Big) + \delta\Delta_n \\
&= \Delta_{n+2} + \Big(\beta - B_{n+2} - B_{n+1}\Big)\Delta_{n+1} + \Big(C_{n+2} + C_{n+1} + \Big(\frac{\beta}{2} - B_{n+1}\Big)^2 + \delta\Big)\Delta_n \\
&\quad + C_{n+1}\Big(\beta - B_n - B_{n+1}\Big)\Delta_{n-1} + C_nC_{n+1}\Delta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Comme $C_nC_{n+1} > 0$, $\mathcal{R}_{n+2}$ est bien un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4 exactement, nous avons sa décomposition suivant les polynômes orthogonaux Δ_i.

En suivant la même idée que dans le paragraphe précédent, nous avons également une caractérisation des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 4 se décomposant ainsi

Proposition 2.8
Soit un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4 unitaire s'écrivant $R_{n,4} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + c_2\Delta_{n-2} + c_3\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4}$ $(c_4 \neq 0)$.
La classe des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 4 s'écrivant $\Delta_{n-2}\Pi_2$, où Π_2 est un polynôme unitaire de degré 2, est exactement déterminé par $\left\{\begin{array}{l} C_{n+1}(B_n - B_{n+2} - c_1) + c_3 = 0 \\ c_4 - C_nC_{n+1} = 0 \end{array}\right.$.

Preuve
Partons de l'écriture d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4 se décomposant sous la forme $\Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + c_2\Delta_{n-2} + c_3\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4}$ et en utilisant efficacement la formule de récurrence (1.2), on arrive à

$(x + B_n + c_1)\Delta_{n-1} + (c_2 - C_n)\Delta_{n-2} + c_3\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4}$
$= (x + B_n + c_1)((x + B_{n-1})\Delta_{n-2} - C_{n-1}\Delta_{n-3}) + (c_2 - C_n)\Delta_{n-2} + c_3\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4}$
$= ((x+B_n+c_1)(x+B_{n-1}) + c_2 - C_n)\Delta_{n-2} - C_{n-1}(x+B_{n-2})\Delta_{n-3} - C_{n-1}(B_n+c_1-B_{n-2})\Delta_{n-3} + c_3\Delta_{n-3} + c_4\Delta_{n-4}$
$= (x^2 + x(B_n + c_1 + B_{n-1}) + B_nB_{n-1} + c_1B_{n-1} + c_2 - C_n - C_{n-1})\Delta_{n-2} + (c_3 - C_{n-1}(B_n + c_1 - B_{n-2}))\Delta_{n-3} + (c_4 - C_{n-1}C_{n-2})\Delta_{n-4}$.
Ainsi, par identification, un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 4 sera de la forme
$\Delta_n(x^2 + \beta x + \gamma) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_3 - C_{n-1}(B_n + c_1 - B_{n-2}) = 0 \\ c_4 - C_{n-1}C_{n-2} = 0 \end{array} \right.$.
De plus, on a les renseignements suivants sur les coefficients β et γ du polynôme Π_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = B_{n+1} + B_{n+2} + c_1 \\ \gamma = B_{n+1}(B_{n+2} + c_1) - C_{n+2} - C_{n+1} + c_2 \end{array} \right. . \blacksquare$$

Remarque 2.12
Nous appliquerons ce résultat dans le chapitre sur l'étude des zéros des polynômes quasi-orthogonaux, en particulier à l'aide des renseignements obtenus sur les coefficients β et γ dans la dernière démonstration.

2.2.4 Les autres cas

L'idée des paragraphes précédents était de caractériser des classes de polynômes quasi-orthogonaux se décomposant d'une certaine manière.
On a considéré les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 4 s'écrivant $\Delta_n(x^2+\beta x+\gamma)$, c'est-à-dire que l'on a pris le couple $(m, r) = (2, 0)$.
On aurait pu prendre le couple $(m, r) = (1, 2)$, et on aurait obtenu les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 4 se décomposant de la forme $R_{n,1}(x + \beta)$.
Ces deux cas sont les possibilités de décomposition que l'on a présenté dans le Théorème 2.2 (en effet pour résoudre $2m + r = 4$, il nous vient les deux couples solutions (m, r) : $(2, 0)$ et $(1, 2)$ car $r \geq 1$).

Si nous avions considéré les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 3, nous aurions eu à résoudre alors $2m + r = 3$, avec $r \geq 1$, soit l'unique couple solution $(m, r) = (1, 1)$. On aurait donc l'unique décomposition $R_{n,1}\Pi_1$.

Pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 5, nous avons à résoudre $2m + r = 5$, avec $r \geq 1$, soit les couples solutions (m, r) : $(1, 3)$ ou $(2, 1)$. On aurait donc les deux décompositions possibles $R_{n,2}\Pi_1$ ou $\Delta_n\Pi_2$.

Ceci nous amène à dénombrer les différentes classes de décomposition pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2m + r$.

Proposition 2.9
Soient $R_{n,r}$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r (par rapport à la mesure α et sur l'intervalle d'orthogonalité $[a,b]$) et Π_m un polynôme quelconque de degré $m \geq 1$.
Pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $s = 2m + r$ (par rapport à la même mesure α et sur $[a,b]$), le nombre de décompositions possibles sous la forme $R_{n,r}\Pi_m$ est $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ (où $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ représente la partie entière de $\frac{s}{2}$).

Preuve
Si l'ordre est impair, $s = 2p+1$, alors la résolution de $2m+r = 2p+1$ amène aux couples solutions (m,r) suivants : $(1, 2p-1), (2, 2p-3), \ldots, (k, 2p+1-2k), \ldots, (p, 1)$.
Ce qui nous donne p couples solutions.
Si l'ordre est pair, $s = 2p$, alors la résolution de $2m + r = 2p$ amène aux couples solutions (m,r) suivants : $(1, 2p-2), (2, 2p-4), \ldots, (k, 2p-2k), \ldots, (p, 0)$.
Ce qui donne nous p couples solutions. ∎

Remarque 2.13
Cette dernière démonstration est instructive dans le sens où si nous étudions les classes de décomposition des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair (respectivement impair), alors nous aurons à considérer des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre pair (respectivement impair).

Remarque 2.14
Nous reviendrons sur ces décompositions dans le prochain chapitre pour caractériser, entre autre, l'existence d'un polynôme quasi-orthogonal ayant toutes ses racines réelles et distinctes.

2.3 Ensemble générateur

Commençons tout d'abord avec une notation

Notation 2.1
On notera $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r, de degré n, par rapport à la mesure positive α et sur l'intervalle $[a,b]$.

Remarquons la chose suivante, si nous prenons trois polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 de l'ensemble $\mathcal{S}_1$, et si l'on considère le polynôme $R = \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3$, alors il est possible de trouver un choix de ces constantes α, β, γ pour que le polynôme R soit de degré $n-2$.
En effet, si nous voulons annuler les termes en x^n et x^{n-1}, on arrive au système

$$\begin{cases} \alpha a_{1,n} + \beta a_{2,n} + \gamma a_{3,n} = 0 \\ \alpha a_{1,n-1} + \beta a_{2,n-1} + \gamma a_{3,n-1} = 0 \end{cases}$$

où $a_{i,n}$ et $a_{i,n-1}$ sont les coefficients respectifs de x^n et x^{n-1} dans R_i.
C'est donc un système linéaire homogène de 2 équations à 3 inconnues, on en déduit alors qu'il a

une infinité de solutions.
Ainsi notre polynôme R sera de degré $n-2$ et vérifiera $\int_a^b x^i R(x)d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-2$, et d'évidence sera alors nul vu que $\int_a^b R^2(x)d\alpha(x) = 0$.
Nous avons mis en exergue le résultat suivant

Théorème 2.3
Soient R_1, R_2, deux polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 de l'ensemble $\mathcal{S}_1$ non colinéaires (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $\lambda \in I\!R$ tel que $\forall x \in I\!R$, $R_1(x) = \lambda R_2(x)$).
Alors,

tout polynôme de $\mathcal{S}_1$ sera une combinaison linéaire unique de R_1 et R_2.

Preuve
Soit R_3 un polynôme de $\mathcal{S}_1$.
En considérant le polynôme $\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3$, nous savons, d'après le travail fait précédemment, qu'il existe un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ tel que ce polynôme soit nul.
Nous pouvons remarquer que nécessairement $\gamma \neq 0$, car R_1 et R_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi R_3 peut s'exprimer en fonction de R_1 et R_2. Ceci nous donne l'existence d'une telle combinaison linéaire.
Supposons que l'on ait un polynôme R de l'ensemble $\mathcal{S}_1$ qui s'écrive de deux manières différentes $R = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2$.
On a alors l'égalité $(\lambda_1 - \mu_1)R_1 = (\mu_2 - \lambda_2)R_2$. Or les deux polynômes R_1 et R_2 ne sont pas colinéaires, donc forcément, $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$, ce qui nous montre l'unicité de la combinaison linéaire. ∎

Remarque 2.15
Si nous étudions les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 de $\mathcal{S}_1$, alors il suffit de trouver deux polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 non colinéaires, R_1 et R_2, et tous les autres polynômes de $\mathcal{S}_1$ seront dans l'ensemble $\{\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2, \lambda_1, \lambda_2 \in I\!R\}$.
Remarquons que cet ensemble ne décrit pas totalement $\mathcal{S}_1$ (car un polynôme $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ peut avoir un degré $< n$ si les coefficients λ_i sont choisis de telle sorte qu'ils annulent le terme de degré n, et donc ne pas se trouver dans $\mathcal{S}_1$).

Nous pouvons alors généraliser ce résultat pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r

Théorème 2.4
Soient $R_1, \ldots, R_{r+1}$, $r+1$ polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r de $\mathcal{S}_r$ tels que la famille $\{R_1, \ldots, R_{r+1}\}$ soit libre.
Alors,

tout polynôme de $\mathcal{S}_r$ sera une combinaison linéaire unique de $R_1, \ldots, R_{r+1}$.

Preuve

Soit un polynôme R_{r+2} de $\mathcal{S}_r$.

On peut trouver des coefficients α_i tels que le polynôme $R = \sum_{i=1}^{r+2} \alpha_i R_i$ soit de degré $n - r - 1$, c'est-à-dire que nous annulons les termes en $x^n, \ldots, x^{n-r}$.

En les annulant, on arrive au système $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 a_{1,n} + \alpha_2 a_{2,n} + \cdots + \alpha_{r+2} a_{r+2,n} = 0 \\ \alpha_1 a_{1,n-1} + \alpha_2 a_{2,n-1} + \cdots + \alpha_{r+2} a_{r+2,n-1} = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 a_{1,n-r} + \alpha_2 a_{2,n-r} + \cdots + \alpha_{r+2} a_{r+2,n-r} = 0 \end{array} \right.$

où $a_{i,n}, \ldots, a_{i,n-r}$ sont les coefficients respectifs de $x^n, \ldots, x^{n-r}$ dans R_i.
Ce système linéaire homogène de $r + 1$ équations à $r + 2$ inconnues a une infinité de solutions.
Ainsi le polynôme R est de degré $n-r-1$ et il vérifie $\int_a^b x^i R(x) d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-1-r$.
Donc $\int_a^b R^2(x) d\alpha(x) = 0$ et ainsi $R = 0$.
Nécessairement $\alpha_{r+1} \neq 0$ car la famille $\{R_1, \ldots, R_{r+1}\}$ est libre ; dès lors, on a écrit R_{r+2} comme combinaison linéaire des polynômes $R_1, \ldots, R_{r+1}$.
Pour l'unicité, on suppose que l'on a un polynôme R de $\mathcal{S}_r$ qui s'écrit de deux manières différentes $R = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i R_i = \sum_{i=1}^{r+1} \mu_i R_i$, ce qui donne l'égalité $\sum_{i=1}^{r+1} (\lambda_i - \mu_i) R_i = 0$ et comme la famille $\{R_1, \ldots, R_{r+1}\}$ est libre, il nous vient $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \ldots, r + 1$. On a ainsi l'unicité de la combinaison linéaire. ∎

Chapitre 3

Étude des zéros des polynômes quasi-orthogonaux

Après avoir donné plus de renseignements sur les polynômes quasi-orthogonaux en terme de représentation, de construction et de classification, nous allons, à présent, chercher à dégager des propriétés comportementales de ces polynômes à travers l'étude de leurs zéros.
Il y aura deux voies d'étude à explorer : leur dénombrement avec la recherche de conditions (suffisantes voire nécessaires et suffisantes) pour le cas où le polynôme quasi-orthogonal a toutes ses racines réelles et distinctes et la localisation de ces dernières à l'aide d'entrelacements avec d'autres polynômes.

En ce qui concerne leur dénombrement, nous nous appuierons sur un résultat déjà connu et rappelé dans le Théorème 1.4, qui nous dit qu'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r quelconque a au moins $n-r$ racines réelles et distinctes dans son intervalle d'orthogonalité (ou plutôt de quasi-orthogonalité).
On aura donc à trouver des conditions pour que ces r racines restantes soient réelles et distinctes.
Il n'existe pas de résultats globaux concernant une caractérisation de ces r racines (voire moins) mais simplement des conditions particulières pour les ordres 1 et 2.
Pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, la question ne se pose pas car ils ont d'emblée toutes leurs racines réelles. Le travail se fera donc pour les ordres supérieurs à 2.
L'ordre 2 a déjà été abordé, dans un premier temps par Shohat [28, Thm. VIII, p. 472] puis par C. Brezinski, K.A. Driver et M. Redivo-Zaglia [3] où l'on donne une condition suffisante pour l'existence des n racines réelles distinctes.
Nous allons en proposer une plus fine en s'aidant de résultats d'analyse plus classiques. La condition que nous trouverons sera, d'ailleurs, en raccord avec le paragraphe du chapitre précédent où l'on s'attardait sur un mode de construction de polynômes quasi-orthogonaux.
En fin de chapitre, nous aborderons le cas où l'ordre vaut 3 ; ce cas n'a jamais été traité jusqu'alors. Nous mettrons ainsi en évidence toute la difficulté à préciser la nature de ces r racines restantes.

Au sujet de la localisation des racines, les résultats ont tendance à venir plus facilement. La littérature à ce sujet est d'ailleurs plus généreuse. Nous distinguerons deux types de localisation : une globale et une plus précise.
Pour la localisation globale, on s'intéressera à la place de la première et dernière racine par rapport aux extrémités de l'intervalle d'orthogonalité, et nous pourrons en donner des conditions nécessaires et suffisantes.
En ce qui concerne la localisation plus précise, nous nous inspirerons des conditions suffisantes données dans [3] sur des entrelacements entre les polynômes orthogonaux et les polynômes quasi-orthogonaux pour en dégager une caractérisation plus générale de ces entrelacements. Nous mettrons alors en exergue le rôle de l'écriture déterminantale pour ces polynômes quasi-orthogonaux pour révéler de nouveaux entrelacements.

Nous nous attarderons en toute fin de chapitre aux zéros des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre quelconque.
Dans un premier temps nous verrons comment dénombrer le nombre de caractérisations possibles pour ces r racines éventuelles. En distinguant les différents cas comme la possibilité d'avoir des racines simples, doubles, d'une certaine multiplicité voire complexes conjuguées, nous nous rendrons compte que le noyau de ce problème repose sur le nombre de partitions d'un entier. On sera donc naturellement dirigé vers les travaux de Hans Ramacher [25].
Nous nous interrogerons ensuite sur la possibilité d'avoir toutes les racines réelles et distinctes pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre arbitraire. Nous légitimerons ainsi les théorèmes donnant la position de la première et dernière racine d'un tel polynôme quasi-orthogonal.

3.1 Pour des petits ordres de quasi-orthogonalité

3.1.1 Ordre 1

Des entrelacements

Soit Δ_n le polynôme orthogonal unitaire de degré n par rapport à la mesure positive α sur l'intervalle $[a, b]$.
Les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 par rapport à la mesure α sur $[a, b]$ s'écrivent

$$R_{n,1} = \Delta_n + a_n \Delta_{n-1}$$

avec $a_n \neq 0$, ou sous la forme

$$R_{n,1}(x) = \begin{vmatrix} x + B_1 & 1 & & \\ C_2 & x + B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n & x + B_n + a_n \end{vmatrix}.$$

Nous allons donner des renseignements sur les zéros de ces polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1. Nous savons déjà que $R_{n,1}$ a, au moins, $n-1$ zéros réels et distincts dans $]a,b[$. Il ne nous reste, donc, plus qu'à localiser le n-ème zéro qui est nécessairement réel (nous noterons $y_1,\dots,y_n$ les zéros de $R_{n,1}$).

Les deux théorèmes qui suivent généralisent les résultats de [3] où l'on avait simplement la condition suffisante $-a_n < f_n(a) < 0$ (respectivement $-a_n > f_n(b) > 0$) pour conclure sur la place de y_1 par rapport à a (respectivement celle de y_n par rapport à b) c'est-à-dire $y_1 < a$ (respectivement $b < y_n$).
La démonstration dans [3] repose essentiellement sur l'identité de Christoffel-Darboux alors que nous nous contenterons de résultats d'analyse de base. Cette manière de procéder nous permet d'utiliser plus spécifiquement les propriétés des polynômes et de leurs zéros.

Théorème 3.1
Soient $y_1 < \dots < y_n$ les zéros de $R_{n,1}$ et $f_n(x) = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}(x)$.
On a
(i) $y_1 \le a$ si et seulement si $-a_n \le f_n(a) < 0$,
(ii) $b \le y_n$ si et seulement si $-a_n \ge f_n(b) > 0$,
(iii) $R_{n,1}$ a tous ses zéros dans l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si $f_n(a) \le -a_n \le f_n(b)$.

Preuve
(i) Pour prouver ce résultat, nous considérons le cas où n est pair, le cas où n est impair étant similaire. Δ_n étant unitaire, $R_{n,1}$ l'est aussi.
Supposons que $y_1 \le a$ et en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,1}(x) = +\infty$ on a $R_{n,1}(a) \le 0$.
Réciproquement, si $R_{n,1}(a) \le 0$ alors on a l'existence d'un zéro y_1 pour $R_{n,1}$ tel que $y_1 \le a$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,1}(x) = +\infty$.
Ainsi $y_1 \le a \Longleftrightarrow R_{n,1}(a) \le 0 \Longleftrightarrow \Delta_n(a) + a_n\Delta_{n-1}(a) \le 0$.
On a ici $\Delta_n(a) > 0$ et $\Delta_{n-1}(a) < 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \Delta_{n-1}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Delta_n(x) = +\infty$ et ils ont tous leurs zéros dans $]a,b[$), il vient alors que $-a_n \le \dfrac{\Delta_n(a)}{\Delta_{n-1}(a)} < 0$, i.e. $-a_n \le f_n(a) < 0$.
(ii) Preuve similaire où l'on utilisera ici le fait que $\Delta_n(b)$ et $\Delta_{n-1}(b) > 0$.
(iii) On le déduit de (i) et (ii). ∎

Remarque 3.1
Notons l'importance de la condition nécessaire et suffisante qui caractérise complètement le fait qu'il y ait (ou pas) un zéro dans l'intervalle d'orthogonalité $[a,b]$.

Ce théorème nous a donné une information sur la localisation des zéros par rapport aux extrémités a et b. À présent, il peut être intéressant de donner des résultats plus précis sur la localisation des zéros de $R_{n,1}$ par rapport à ceux de Δ_n et Δ_{n-1} (notés respectivement $x_{i,n}$ et $x_{i,n-1}$).

Théorème 3.2

(*i*) $a_n < 0$ *si et seulement si* $\forall i = 1, \ldots, n-1$, $x_{i,n} < y_i < x_{i,n-1}$ *et* $x_{n,n} < y_n$,

(*ii*) $a_n > 0$ *si et seulement si* $\forall i = 2, \ldots, n$, $x_{i-1,n-1} < y_i < x_{i,n}$ *et* $y_1 < x_{1,n}$.

Preuve

(i) Nous supposons que n est pair (le cas où n impair est similaire).
Pour prouver ce résultat, nous utilisons la propriété d'entrelacement des zéros de Δ_n et ceux de Δ_{n-1}, c'est-à-dire $\Delta_n(x_{2j-1,n-1}) < 0$, $\Delta_n(x_{2j,n-1}) > 0$, $\Delta_{n-1}(x_{2j-1,n}) < 0$ et $\Delta_n(x_{2j,n}) > 0$.
Nous avons

$$a_n < 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n < 0, \Delta_n(x_{1,n-1}) < 0, \Delta_n(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, \Delta_n(x_{n-2,n-1}) > 0, \Delta_n(x_{n-1,n-1}) < 0 \\ \Delta_{n-1}(x_{1,n}) < 0, \Delta_{n-1}(x_{2,n}) > 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x_{n-1,n}) < 0, \Delta_{n-1}(x_{n,n}) > 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_{n,1}(x_{1,n}) > 0, R_{n,1}(x_{1,n-1}) < 0, R_{n,1}(x_{2,n}) < 0, R_{n,1}(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, \\ R_{n,1}(x_{n-2,n-1}) > 0, R_{n,1}(x_{n-1,n}) > 0, R_{n,1}(x_{n-1,n-1}) < 0, R_{n,1}(x_{n,n}) < 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow x_{1,n} < y_1 < x_{1,n-1} < x_{2,n} < y_2 < x_{2,n-1} < \cdots < y_{n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n} < y_n.$$

Expliquons la dernière équivalence : l'implication $\Longleftarrow$ est facile, alors que, pour $\Longrightarrow$ nous avons à remarquer que

$$R_{n,1}(x_{1,n})R_{n,1}(x_{1,n-1}) < 0, R_{n,1}(x_{2,n})R_{n,1}(x_{2,n-1}) < 0, \ldots, R_{n,1}(x_{n-1,n})R_{n,1}(x_{n-1,n-1}) < 0$$

ce qui nous donne, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué au polynôme $R_{n,1}$, la localisation des $n-1$ zéros y_i ; la localisation du n-ème zéro vient de $R_{n,1}(x_{n,n}) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} R_{n,1}(x) = +\infty$.

(ii) On suppose de même que n est pair.
Nous avonc cette fois

$$a_n > 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n > 0, \Delta_n(x_{1,n-1}) < 0, \Delta_n(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, \Delta_n(x_{n-2,n-1}) > 0, \Delta_n(x_{n-1,n-1}) < 0 \\ \Delta_{n-1}(x_{1,n}) < 0, \Delta_{n-1}(x_{2,n}) > 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x_{n-1,n}) < 0, \Delta_{n-1}(x_{n,n}) > 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_{n,1}(x_{1,n}) < 0, R_{n,1}(x_{1,n-1}) < 0, R_{n,1}(x_{2,n}) > 0, R_{n,1}(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, \\ R_{n,1}(x_{n-2,n-1}) > 0, R_{n,1}(x_{n-1,n}) < 0, R_{n,1}(x_{n-1,n-1}) < 0, R_{n,1}(x_{n,n}) < 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow y_1 < x_{1,n} < x_{1,n-1} < y_2 < x_{2,n} < \cdots < y_{n-1} < x_{n-1,n} < x_{n-1,n-1} < y_n < x_{n,n}.$$

La dernière équivalence est obtenue pour les mêmes raisons que dans (i). ∎

Remarque 3.2

Nous pourrons noter le premier entrelacement $\Delta_n R_{n,1} \Delta_{n-1}$ *et le second* $R_{n,1}\Delta_n\Delta_{n-1}$. *Comme dans ce théorème nous avons des conditions nécessaires et suffisantes, nous sommes nécessairement dans l'une de ces deux configurations.*
Ainsi, lorque nous considérons un polynôme orthogonal, il y aura automatiquement un entrelacement de ses zéros avec ceux du polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 associé à Δ_n.

On savait que les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 étaient conditionnés par les polynômes orthogonaux de par leur décomposition suivant ces derniers (1.12), et on voit, ici, qu'ils le sont même par leurs racines.

Passons à présent au cas où le polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 n'est pas forcément unitaire. Nous userons de cette possibilité lorsque nous discuterons d'entrelacements entre des polynômes de Jacobi ou de Laguerre avec des paramètres différents.

Théorème 3.3
Pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 s'écrivant $R_{n,1} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1}$, avec $a_nb_n \neq 0$, on a les équivalences
 (i) $a_nb_n < 0$ *si et seulement si* $\forall i = 1,\dots,n-1$, $x_{i,n} < y_i < x_{i,n-1}$ *et* $x_{n,n} < y_n$,
 (ii) $a_nb_n > 0$ *si et seulement si* $\forall i = 2,\dots,n$, $x_{i-1,n-1} < y_i < x_{i,n}$ *et* $y_1 < x_{1,n}$.

Preuve
Nous allons faire de ce théorème une simple prolongation ou application du théorème précédent. Partons de l'écriture $R_{n,1} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1}$, nous allons ramener l'étude de l'entrelacement de ce polynôme quasi-orthogonal avec les polynômes orthogonaux Δ_{n-1} et Δ_n à celui d'un polynôme quasi-orthogonal unitaire.
Pour cela, on factorise comme suit $R_{n,1} = a_n\left(\Delta_n + \dfrac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1}\right)$.
En appelant $\overline{R}_{n,1} = \Delta_n + \dfrac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1}$, on a les racines de $R_{n,1}$ qui coïncident avec celles de ce polynôme unitaire $\overline{R}_{n,1}$.
Ainsi il ne nous reste plus qu'à distinguer les cas où $a_nb_n < 0$ et $a_nb_n > 0$ et d'appliquer le Théorème 3.2. ∎

Donnons à présent une généralisation du théorème précédent, c'est-à-dire un entrelacement entre les zéros de $\Delta_{n-1}^{(k)}$, $\Delta_n^{(k)}$ et de $R_{n,1}^{(k)}$.

Théorème 3.4
Soient $y_i^{(k)}, x_{i,n-1}^{(k-1)}$ *et* $x_{i,n}^{(k)}$ *les zéros respectifs de* $R_{n,1}^{(k)}, \Delta_{n-1}^{(k)}$ *et de* $\Delta_n^{(k)}$. *Nous avons les équivalences*
 (i) $a_{n+k} < 0$ *si et seulement si* $\forall i = 1,\dots,n-1$, $x_{i,n}^{(k)} < y_i^{(k)} < x_{i,n-1}^{(k)}$ *et* $x_{n,n}^{(k)} < y_n^{(k)}$,
 (ii) $a_{n+k} > 0$ *si et seulement si* $\forall i = 2,\dots,n$, $x_{i-1,n-1}^{(k)} < y_i^{(k)} < x_{i,n}^{(k)}$ *et* $y_1^{(k)} < x_{1,n}^{(k)}$.

Preuve
La preuve est similaire en tout point à celle du Théorème 3.2, on se sert ici de l'entrelacement des racines de $\Delta_n^{(k)}$ et de $\Delta_{n-1}^{(k)}$ (Théorème 1.2 *(ii)*) et du fait que $R_{n,1}^{(k)} = \Delta_n^{(k)} + a_{n+k}\Delta_{n-1}^{(k)}$ (2.5). ∎

Nous proposons maintenant deux nouveaux théorèmes sur des entrelacements qui montrent cette fois des liens entre des polynômes quasi-orthogonaux. Le premier décrit l'entrelacement existant entre des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 avec des degrés successifs (nous remarquerons la différence avec les polynômes orthogonaux où nous avons toujours l'entrelacement comme nous l'avons rappelé dans le Théorème 1.2 (i)). Le second s'intéresse à l'entrelacement des zéros de ces polynômes avec leurs polynômes associés où nous avons le même type de résultat que dans le Théorème 1.2 (ii) lorsque nous rappelions l'entrelacement des racines de $\Delta_n^{(k)}$ et $\Delta_n^{(k+1)}$.

Théorème 3.5
Soient $R_{n,1} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1}$, $R_{n+1,1} = \Delta_{n+1} + a_{n+1}\Delta_n$ et soient $y_{1,n}, \ldots, y_{n,n}$ et $y_{1,n+1}, \ldots, y_{n+1,n+1}$ (a_n et $a_{n+1} \neq 0$) leurs zéros respectifs.
Nous avons l'entrelacement $y_{1,n+1} < y_{1,n} < y_{2,n+1} < y_{2,n} < \cdots < y_{n,n+1} < y_{n,n} < y_{n+1,n+1}$ si et seulement si

$$\begin{cases} f_{n+1}(y_{n,n}) + a_{n+1} < 0 & si \quad a_n < 0 \\ f_{n+1}(y_{1,n}) + a_{n+1} > 0 & si \quad a_n > 0. \end{cases}$$

Preuve
Nous supposerons n pair, le cas où n est impair se traitant similairement.
Nous avons l'entrelacement voulu si et seulement si

$$R_{n+1,1}(y_{1,n}) > 0, R_{n+1,1}(y_{2,n}) < 0, \ldots, R_{n+1,1}(y_{n-1,n}) > 0, R_{n+1,1}(y_{n,n}) < 0$$

$$\iff \Delta_{n+1}(y_{1,n}) + a_{n+1}\Delta_n(y_{1,n}) > 0, \Delta_{n+1}(y_{2,n}) + a_{n+1}\Delta_n(y_{2,n}) < 0, \ldots, \Delta_{n+1}(y_{n,n}) + a_{n+1}\Delta_n(y_{n,n}) < 0$$

$$\iff \begin{cases} a_{n+1} < \min_{1\leq i\leq n}(-\Delta_{n+1}(y_{i,n})/\Delta_n(y_{i,n})) & \text{si} \quad a_n < 0 \\ a_{n+1} > \max_{1\leq i\leq n}(-\Delta_{n+1}(y_{i,n})/\Delta_n(y_{i,n})) & \text{si} \quad a_n > 0. \end{cases}$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que $\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}(y_{i,n}) = y_{i,n} + B_{n+1} - C_{n+1}\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y_{i,n})$ et que $\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y_{i,n}) = -\dfrac{1}{a_n}$.

Ainsi, pour $a_n < 0$, on a
$$\min_{1\leq i\leq n}\left(-\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}(y_{i,n})\right) = \min_{1\leq i\leq n}\left(-y_{i,n} - B_{n+1} - \frac{C_{n+1}}{a_n}\right) = -y_{n,n} - B_{n+1} - \frac{C_{n+1}}{a_n}.$$

Comme $f_{n+1}(y_{n,n}) = \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}(y_{n,n}) = y_{n,n} + B_{n+1} - C_{n+1}\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y_{n,n}) = y_{n,n} + B_{n+1} + \dfrac{C_{n+1}}{a_n}$, on a le résultat annoncé.
On procède de manière analogue pour $a_n > 0$.∎

Théorème 3.6
Soit $R_{n,1} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1}$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, et soit $R_{n,1}^{(1)} = Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}$ son polynôme associé ($a_n \neq 0$).
Alors

les zéros de $R_{n,1}$ et de $R_{n-1,1}^{(1)}$ s'entrelacent.

Preuve

Choisissons un point de vue différent que celui utilisé dans les preuves précédentes. Nous utilisons ici un argument algébrique en s'appuyant sur la représentation déterminantale du polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1.

Nous avons

$$R_{n,1}(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n & x+B_n+a_n \end{vmatrix}.$$

Appliquons à ce déterminant l'identité de Sylvester

$$\begin{aligned} R_{n,1}(x) \quad = \quad & \frac{\begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n & x+B_n+a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix}} \\ & - \frac{\begin{vmatrix} 1 & & & \\ x+B_2 & \ddots & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & C_n & x+B_n+a_n & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} C_2 & x+B_2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & x+B_{n-1} \\ & & & & C_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors $R_{n,1} = \dfrac{\Delta_{n-1}\frac{R^{(1)}_{n-1,1}}{\mu_0} - C_2\cdots C_n}{\frac{\Delta^{(1)}_{n-2}}{\mu_0}}$, d'où $\Delta_{n-1}R^{(1)}_{n-1,1} - R_{n,1}\Delta^{(1)}_{n-2} = \displaystyle\int_a^b \Delta^2_{n-1}d\alpha > 0$

ceci car $C_i = \dfrac{\int_a^b \Delta^2_{i-1}d\alpha}{\int_a^b \Delta^2_{i-2}d\alpha}$ et alors $C_2\cdots C_n = \dfrac{\int_a^b \Delta^2_{n-1}d\alpha}{\int_a^b d\alpha} = \dfrac{\int_a^b \Delta^2_{n-1}d\alpha}{\mu_0}$.

Si y_i, y_{i+1} sont deux zéros consécutifs de $R_{n,1}$ alors on a

$$\Delta_{n-1}(y_i)R^{(1)}_{n-1,1}(y_i) = \Delta_{n-1}(y_{i+1})R^{(1)}_{n-1,1}(y_{i+1}) > 0.$$

Maintenant, utilisons le Théorème 3.2 sur l'entrelacement des zéros de Δ_{n-1} et de $R_{n,1}$.
Nous obtenons $\Delta_{n-1}(y_i)\Delta_{n-1}(y_{i+1}) < 0$ ce qui donne $R^{(1)}_{n-1,1}(y_i)R^{(1)}_{n-1,1}(y_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.
En conclusion, nous avons l'entrelacement voulu. ∎

Remarque 3.3

Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé la formule $C_i = \dfrac{\int_a^b \Delta_{i-1}^2 d\alpha}{\int_a^b \Delta_{i-2}^2 d\alpha}$ *qui vient de la formule de récurrence (1.2).*
En effet, partons de $\Delta_i = (x+B_i)\Delta_{i-1} - C_i\Delta_{i-2}$ *et multiplions par* Δ_{i-2} *puis intégrons sur* $[a,b]$ *par rapport à la mesure* α*, on a* $\displaystyle\int_a^b \Delta_{i-2}\Delta_i d\alpha = \int_a^b (x+B_i)\Delta_{i-1}\Delta_{i-2}d\alpha - C_i\int_a^b \Delta_{i-2}^2 d\alpha$ *et donc* $\displaystyle 0 = \int_a^b x\Delta_{i-1}\Delta_{i-2}d\alpha - C_i\int_a^b \Delta_{i-2}^2 d\alpha$*, d'où* $\displaystyle C_i\int_a^b \Delta_{i-2}^2 d\alpha = \int_a^b \Delta_{i-1}^2 d\alpha$*.*

Le résultat précédent peut se généraliser aux polynômes associés d'ordre k, comme nous le montre le théorème suivant

Théorème 3.7

Soient $R^{(k)}_{n,1}$ *le polynôme quasi-orthogonal général associé à* $R_{n,1}$ *d'ordre* k *et* $R^{(k+1)}_{n,1}$ *celui d'ordre* $k+1$*.*
Alors

les racines de $R^{(k)}_{n,1}$ *et de* $R^{(k+1)}_{n-1,1}$ *s'entrelacent.*

Preuve

On utilise de la même manière que précédemment l'identité de Sylvester sur la représentation déterminantale de $R^{(k)}_{n,1}$, ainsi $R^{(k)}_{n,1}$ vaut

$$\mu_0^k \frac{\begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & x+B_{k+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k} & x+B_{n+k}+a_{n+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}}$$
$$-\frac{C_{k+2}\ldots C_{k+n}}{\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}}.$$

Ainsi $R_{n,1}^{(k)} = \mu_0^k \dfrac{\frac{\Delta_{n-1}^{(k)}}{\mu_0^k}\frac{R_{n-1,1}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}} - C_{k+2}\dots C_{k+n}}{\frac{\Delta_{n-2}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}}}$.

Ce qui donne $\Delta_{n-1}^{(k)} R_{n-1,1}^{(k+1)} - R_{n,1}^{(k)} \Delta_{n-2}^{(k+1)} = \mu_0^{2k+1} C_{k+2}\dots C_{k+n} = \mu_0^{2k+1} \dfrac{\int_a^b \Delta_{k+n-1}^2 d\alpha}{\int_a^b \Delta_k^2 d\alpha} > 0$.

Soient $y_i^{(k)}$ et $y_{i+1}^{(k)}$ deux zéros consécutifs de $R_{n,1}^{(k)}$, on a

$$\Delta_{n-1}^{(k)}(y_i^{(k)}) R_{n-1,1}^{(k+1)}(y_i^{(k)}) = \Delta_{n-1}^{(k)}(y_{i+1}^{(k)}) R_{n-1,1}^{(k+1)}(y_{i+1}^{(k)}) > 0.$$

Or, avec le Théorème 3.4, on a l'entrelacement des racines de $\Delta_{n-1}^{(k)}$ et de $R_{n,1}^{(k)}$, donc on en déduit celui des racines de $R_{n,1}^{(k)}$ et de $R_{n-1,1}^{(k+1)}$. ∎

Bornes des zéros de polynômes quasi-orthogonaux

Pour finir cette section sur les zéros des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux bornes de ces zéros et à leur représentation.
On va porter notre attention sur ces racines y_1 et y_n et tenter de donner des renseignements en fonction des coefficients B_i et C_i de la formule de récurrence (1.2). On pourra ne considérer que y_1 quitte à considérer $\overline{R_{n,1}}(x) = (-1)^n R_{n,1}(x)$ pour avoir des renseignements sur y_n.

Soient $\{a_i\}_{i=2}^{\infty}$, $\{b_i\}_{i=2}^{\infty}$ et $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ des suites de réels telles que $sgn(a_i) = sgn(b_i)$.

Construisons la matrice $S_n = \begin{pmatrix} -B_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & -B_2 & b_3 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n & -B_n - u_n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.

On a ainsi une matrice tridiagonale (qui a la propriété d'avoir une symétrie de signe) dont on peut chercher les valeurs propres. Si $a_i = b_i = 0$ pour un certain $i \leq n$, alors on en revient à un problème de recherche de valeurs propres de deux matrices tridiagonales symétriques par le signe. Donc, on ne réduit pas le problème en supposant au départ $a_i b_i > 0$ pour tout i.
On notera $\lambda_i = a_i b_i$. En développant $det(xI_n - S_n)$ par rapport à sa dernière ligne, on arrive au polynôme Δ_n. Par ailleurs, on a montré au passage que les matrices tridiagonales symétriques par le signe ont toutes leurs valeurs propres réelles et distinctes, car ces valeurs propres sont les racines d'un polynôme orthogonal (ce qui généralise le fait que les matrices symétriques aient leurs valeurs propres réelles).

Les renseignements que l'on voulait sur $y_{1,n}$ peuvent être retranscrits sur la plus petite des valeurs propres de S_n.
Écrivons $a_i = -\dfrac{\lambda_i}{\varepsilon_i}$ et $b_i = -\varepsilon_i$ pour $i \geq 2$ où $\varepsilon_i > 0$.
Avec le théorème de Gerschgörin-Hadamard on a

$$y_1 \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{-B_i - \widetilde{u_i} - \frac{\lambda_i}{\varepsilon_i} - \varepsilon_{i+1}\} \tag{3.1}$$

avec $\varepsilon_1 = +\infty$, $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\widetilde{u_i} = \begin{cases} 0 \ , \ pour \ i < n \\ u_i \ , \ pour \ i = n \end{cases}$.
Choisissons $\varepsilon_i = -\dfrac{\Delta_{i-1}(y_1)}{\Delta_{i-2}(y_1)}$, quantité qui est > 0 pour $i = 2, \ldots, n$ (pour le montrer, on se sert du fait que $y_1 < x_{i,n-1}$, $y_1 < x_{i,n-2}$ pour tout i et que $\lim_{x \to -\infty} \Delta_{n-1}(x) \cdot \lim_{x \to -\infty} \Delta_{n-2}(x) = -\infty$). Ce choix de ε_i nous donne dans (3.1) $y_1 \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{y_1 - \widetilde{u_i}\}$.
Dès lors, en supposant que $\min_{1 \leq i \leq n} \widetilde{u_i} = 0$, on a

Théorème 3.8
Avec $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ telle que $\varepsilon_1 = +\infty$, $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\varepsilon_i > 0$ $(1 < i \leq n)$, et $\min_{1 \leq i \leq n} \widetilde{u_i} = 0$, on a

$$y_1 = \max_{\varepsilon} \{ \min_{1 \leq i \leq n} \{-B_i - \widetilde{u_i} - \frac{\lambda_i}{\varepsilon_i} - \varepsilon_{i+1}\}\}$$

En fait on a généralisé, au cas des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, un théorème de Gilewicz-Leopold [35] qui était

Théorème 3.9
Avec $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ telle que $\varepsilon_1 = +\infty$, $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\varepsilon_i > 0$ $(1 < i \leq n)$, on a

$$x_{1,n} = \max_{\varepsilon} \{ \min_{1 \leq i \leq n} \{-B_i - \frac{\lambda_i}{\varepsilon_i} - \varepsilon_{i+1}\}\}$$

où $x_{1,n}$ est le premier zéro de Δ_n.

3.1.2 Ordre 2

Ces polynômes s'écrivent $R_{n,2} = \Delta_n + a_n \Delta_{n-1} + b_n \Delta_{n-2}$, avec $b_n \neq 0$ ou alors sous la forme de déterminant

$$R_{n,2}(x) = \begin{vmatrix} x + B_1 & 1 & & \\ C_2 & x + B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n - b_n & x + B_n + a_n \end{vmatrix}.$$

Nous savons déjà qu'il y a au moins $n-2$ zéros réels et distincts dans $]a,b[$. Mais, ici, la différence est que les deux zéros restants peuvent être : deux zéros réels, un zéro double, ou deux zéros complexes conjugués.

Dans le chapitre précédent, nous avions montré comment construire des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 ; pour cela, nous considérions le produit d'un polynôme orthogonal et d'un polynôme quelconque de degré 1.
Nous avions déduit de la liberté du choix de la racine de ce polynôme de degré 1 la possibilité d'avoir des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 avec une racine double ou toutes ses racines réelles et distinctes. On sait donc que de tels polynômes existent et qu'une telle configuration est possible.
On a même le fait qu'on peut placer l'une des racines d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 où on veut.

Nous voulons trouver une condition qui nous donne l'existence de n zéros réels et distincts.
Nous connaissons déjà une condition suffisante pour ceci qui est $b_n < 0$ [28, Thm. VIII, p. 472].
Donnons-en une nouvelle (a fortiori plus précise) mais qui reste encore une condition suffisante

Théorème 3.10
Soit $R_{n,2} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2}$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2.

$$\text{Si } b_n < C_n, \text{ alors } R_{n,2} \text{ a tous ses zéros réels et distincts.}$$

Preuve
L'idée est basée sur une propriété importante (obtenue à l'aide de la relation de récurrence (1.2)) du coefficient C_n qui est

$$C_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}}(x_{i,n-1}) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

Supposons que n soit pair (le cas où n est impair se traitant de manière analogue) et que $b_n < C_n$, nous obtenons alors

$$\begin{cases} \Delta_n(x_{1,n-1}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{1,n-1}) < 0 \\ \Delta_n(x_{2,n-1}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{2,n-1}) > 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \Delta_n(x_{n-2,n-1}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{n-2,n-1}) > 0 \\ \Delta_n(x_{n-1,n-1}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow R_{n,2}(x_{1,n-1}) < 0, R_{n,2}(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, R_{n,2}(x_{n-2,n-1}) > 0, R_{n,2}(x_{n-1,n-1}) < 0.$
La dernière équivalence nous donne l'existence de $n-2$ zéros pour $R_{n,2}$. Le résultat pour les deux autres zéros vient du fait que $\lim_{x\to\infty} R_{n,2}(x) = +\infty$. ∎

Remarque 3.4
Il est possible de donner un exemple d'une famille de polynômes quasi-orthogonaux où la condition $b_n < C_n$ *n'est pas une condition nécessaire d'existence des racines réelles et distinctes de* $R_{n,2}$.
En effet, prenons la suite de polynômes unitaires $\{\Delta_n\}_n$ *satisfaisant la relation de récurrence à trois termes suivante*

$$\Delta_n = (x + B_n)\Delta_{n-1} - C_n\Delta_{n-2}, \; n \geq 1,$$

avec $\Delta_{-1} = 0, \; \Delta_0 = 1$ *et* $C_n > 0$.
D'après le théorème de Favard, cette famille de polynômes est orthogonale par rapport à une unique forme linéaire définie positive (en ayant pris soin de choisir le premier moment de cette forme strictement positif) et il lui correspond une mesure positive (d'après le théorème de Boas).
Ainsi le polynôme $R_{n,2} = \Delta_n + C_n\Delta_{n-2} = (x + B_n)\Delta_{n-1}$ *est quasi-orthogonal d'ordre 2 par rapport à cette mesure positive mise en exergue précédemment.*
En choisissant $-B_n$ *différent des racines de* Δ_{n-1}, $R_{n,2}$ *a alors toutes ses racines réelles et distinctes sans que* $b_n < C_n$.

On peut alors donner le théorème concernant les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 non forcément unitaires

Théorème 3.11
Soit $R_{n,2} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1} + c_n\Delta_{n-2}$ *avec* $a_nc_n \neq 0$.

$$\text{Si } \frac{c_n}{a_n} < C_n, \text{ alors } R_{n,2} \text{ a tous ses zéros réels et distincts.}$$

Preuve
Considérons le polynôme $R_{n,2} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1} + c_n\Delta_{n-2}$, on peut le factoriser pour se ramener au cas d'un polynôme unitaire.
On obtient alors $R_{n,2} = a_n\left(\Delta_n + \frac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1} + \frac{c_n}{a_n}\Delta_{n-2}\right)$. On note $\overline{R_{n,2}} = \Delta_n + \frac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1} + \frac{c_n}{a_n}\Delta_{n-2}$.
Les zéros de $R_{n,2}$ et de $\overline{R_{n,2}}$ sont les mêmes. Avec le Théorème 3.10 on a le résultat. ∎

Comme pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, nous allons donner un résultat sur la localisation de y_1 et de y_n par rapport aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 3.12
Supposons que $R_{n,2}$ *ait tous ses zéros* y_i *réels et distincts (par exemple pour* $b_n < C_n$*), nous avons les équivalences suivantes*

$$(i) \begin{cases} f_nf_{n-1}(a) + a_nf_{n-1}(a) + b_n \leq 0 \text{ si et seulement si } y_1 \leq a \\ a_nf_{n-1}(x_{1,n}) + b_n \leq 0 \text{ si et seulement si } y_1 \leq x_{1,n} \end{cases},$$

$$(ii) \begin{cases} f_nf_{n-1}(b) + a_nf_{n-1}(b) + b_n \leq 0 \text{ si et seulement si } y_n \geq b \\ a_nf_{n-1}(x_{n,n}) + b_n \leq 0 \text{ si et seulement si } y_n \geq x_{n,n}. \end{cases},$$

$$(iii) \; R_{n,2} \text{ a tous ses zéros dans l'intervalle } [a,b] \text{ si et seulement si } \begin{cases} f_nf_{n-1}(a) + a_nf_{n-1}(a) + b_n \geq 0 \\ f_nf_{n-1}(b) + a_nf_{n-1}(b) + b_n \geq 0 \end{cases}.$$

Preuve

(i) • Pour n pair, nous avons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f_n f_{n-1}(a) + a_n f_{n-1}(a) + b_n \leq 0 &\Longleftrightarrow a_n \frac{\Delta_{n-1}(a)}{\Delta_{n-2}(a)} + b_n \leq -\frac{\Delta_n(a)}{\Delta_{n-2}(a)} \\ &\Longleftrightarrow \Delta_n(a) + a_n \Delta_{n-1}(a) + b_n \Delta_{n-2}(a) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow R_{n,2}(a) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow y_1 \leq a. \end{aligned}$$

Pour la seconde équivalence, nous utilisons juste le fait que $\Delta_{n-2}(a) > 0$.
Pour la dernière, nous procédons en deux étapes ; l'implication $\Longrightarrow$ est claire car $\lim_{x \to -\infty} R_{n,2}(x) = +\infty$; pour l'autre $\Longleftarrow$, nous utilisons le fait que deux zéros ne peuvent être tous les deux à gauche de a (pour cela, on pourra se reporter à la Remarque 3.5).

$$\begin{aligned} \bullet\ a_n f_{n-1}(x_{1,n}) + b_n \leq 0 &\Longleftrightarrow a_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}(x_{1,n}) + b_n \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow R_{n,2}(x_{1,n}) \leq 0 \text{ car } \Delta_{n-2}(x_{1,n}) > 0 \\ &\Longleftrightarrow y_1 \leq x_{1,n} \text{ avec une méthode analogue que précédemment.} \end{aligned}$$

(ii) Preuve similaire.
(iii) On le déduit de (i) et (ii). ∎

Donnons des résultats d'entrelacement pour les zéros de $R_{n,2}$. Dans un premier temps, nous allons améliorer le théorème sur l'entrelacement donné dans [3] entre les zéros de $R_{n,2}$ et ceux de Δ_{n-1} où l'on avait simplement la condition suffisante $b_n < 0$. Une nouvelle fois la preuve reposait sur l'identité de Christoffel-Darboux alors que nous n'utiliserons qu'un raisonnement d'analyse classique .

Théorème 3.13

$$b_n < C_n \textit{ si et seulement si } y_1 < x_{1,n-1} < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_{n-1,n-1} < y_n.$$

Preuve

Nous supposons que $b_n < C_n$ (et n pair, le cas impair se traitant de manière analogue). Nous obtenons $b_n < -\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}}(x_{i,n-1})$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ en utilisant (3.2).
Nous finissons avec

$$\begin{cases} \Delta_n(x_{1,n-1}) + b_n \Delta_{n-2}(x_{1,n-1}) < 0 \\ \Delta_n(x_{2,n-1}) + b_n \Delta_{n-2}(x_{2,n-1}) > 0 \\ \qquad\vdots \\ \Delta_n(x_{n-2,n-1}) + b_n \Delta_{n-2}(x_{n-2,n-1}) > 0 \\ \Delta_n(x_{n-1,n-1}) + b_n \Delta_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0 \end{cases}$$

avec $\Delta_{n-2}(x_{2j-1,n-1}) > 0$ et $\Delta_{n-2}(x_{2j,n-1}) < 0$ venant de l'entrelacement des racines de Δ_{n-2} et de Δ_{n-1}.

Ainsi, nous obtenons l'entrelacement désiré car nous avons

$$R_{n,2}(x_{1,n-1}) < 0, R_{n,2}(x_{2,n-1}) > 0, \ldots, R_{n,2}(x_{n-2,n-1}) > 0, R_{n,2}(x_{n-1,n-1}) < 0$$

et $\lim\limits_{x\to\infty} R_{n,2}(x) = +\infty$.
Par équivalence nous avons donc le résultat attendu. ∎

Remarque 3.5
Nous constatons que $x_{1,n-1} < y_2$ et $x_{n-1,n-1} < y_n$, ce qui prouve qu'il ne peut y avoir deux zéros de $R_{n,2}$ à gauche de a ou à droite de b (lorsque $b_n < C_n$).
Il n'y a donc au maximum qu'un seul zéro du polynôme $R_{n,2}$ qui sort de l'intervalle $]a, b[$.

Il vient alors le théorème plus général

Théorème 3.14
Soit $R_{n,2} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1} + c_n\Delta_{n-2}$ avec $a_nc_n \neq 0$. On a

$$\frac{c_n}{a_n} < C_n \text{ si et seulement si } y_1 < x_{1,n-1} < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_{n-1,n-1} < y_n.$$

Preuve
En factorisant de la même manière que dans la preuve du Théorème 3.11, on a l'entrelacement annoncé. ∎

Faisons place à un nouveau théorème portant sur l'entrelacement des zéros de $R_{n,2}$ et ceux de Δ_n. L'idée est similaire à ce qui a été déjà fait dans le cas des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1. Une nouvelle fois on considèrera des conditions nécessaires et suffisantes.

Théorème 3.15
(i) Nous avons l'entrelacement $y_1 < x_{1,n} < y_2 < x_{2,n} < \cdots < y_n < x_{n,n}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_n > -\dfrac{b_n(x_{n,n} + B_n)}{C_n} & \textit{et} \quad b_n < 0 \\ \textit{ou} & \\ a_n > -\dfrac{b_n(x_{1,n} + B_n)}{C_n} & \textit{et} \quad 0 < b_n < C_n. \end{cases}$$

(ii) Nous avons l'entrelacement $x_{1,n} < y_1 < x_{2,n} < y_2 < \cdots < x_{n,n} < y_n$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_n < -\dfrac{b_n(x_{1,n} + B_n)}{C_n} & \textit{et} \quad b_n < 0 \\ \textit{ou} & \\ a_n < -\dfrac{b_n(x_{n,n} + B_n)}{C_n} & \textit{et} \quad 0 < b_n < C_n. \end{cases}$$

Preuve
Supposons que n soit pair (le cas impair se traitant de manière analogue).
Pour $b_n < 0$ et $a_n > -\dfrac{b_n(x_{n,n} + B_n)}{C_n}$, nous avons, en utilisant la formule de récurrence (1.2),

$$a_n > -b_n \max_{i=1,\dots,n} \frac{x_{i,n} + B_n}{C_n} = -b_n \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{f_{n-1}(x_{i,n})} = \max_{i=1,\dots,n} \frac{-b_n}{f_{n-1}(x_{i,n})}.$$

D'où $a_n > -\dfrac{b_n}{f_{n-1}(x_{1,n})}, a_n > -\dfrac{b_n}{f_{n-1}(x_{2,n})}, \dots, a_n > -\dfrac{b_n}{f_{n-1}(x_{n,n})}$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_n\Delta_{n-1}(x_{1,n}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{1,n}) < 0 \\ a_n\Delta_{n-1}(x_{2,n}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{2,n}) > 0 \\ \vdots \\ a_n\Delta_{n-1}(x_{n,n}) + b_n\Delta_{n-2}(x_{n,n}) > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} R_n(x_{1,n}) < 0 \\ R_n(x_{2,n}) > 0 \\ \vdots \\ R_n(x_{n,n}) > 0 \end{array} \right.$$

On a la première équivalence en utilisant l'entrelacement des racines de Δ_{n-1} et de Δ_n c'est-à-dire $\Delta_{n-1}(x_{2j-1,n}) < 0$ et $\Delta_{n-1}(x_{2j,n}) > 0$.
Ainsi nous avons l'entrelacement désiré (i).
On procède de la même manière pour (ii). ∎

Remarque 3.6
Désormais, en rassemblant les résultats des deux derniers théorèmes, nous pouvons donner des conditions suffisantes pour avoir deux entrelacements que nous noterons $R_{n,2}\Delta_n\Delta_{n-1}$ *et* $\Delta_n R_{n,2}\Delta_{n-1}$ *(ces notations suffisent pour comprendre l'ordre des zéros).*
On notera la différence avec les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 où nous étions toujours dans l'un de ces entrelacements cités (il est donc, ici, impossible de classifier).
Un exemple montrant qu'il n'y a pas toujours d'entrelacement entre les zéros de $R_{n,2}$ *et ceux de* Δ_n *est*
$R_4 = T_4 + T_3 + T_2$*, où* T_n *est le polynôme de Tchebychev de première espèce (c'est-à-dire que* T_n *vérifie* $T_n(\cos t) = \cos(nt)$*).*
Rappelons que T_n *est un polynôme orthogonal par rapport à la mesure positive* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *sur* $[-1, 1]$.
On a la relation de récurrence à trois termes suivante

$$T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n$$

avec $T_0(x) = 1$ *et* $T_1(x) = x$.
On a donc $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ *et* $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.
Ainsi $R_4(x) = T_4(x) + T_3(x) + T_2(x) = 8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 3x$ *est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 par rapport à la mesure positive* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *sur* $[-1, 1]$.

Ses racines sont $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$*, alors que les racines de* T_4 *sont* $\left\{\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$*, il n'y a donc pas d'entrelacement entre les racines de* R_4 *et de* T_4 *(on n'a aucune racine de* T_4 *entre* $-\frac{1}{2}$ *et* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$*).*

Pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 non forcément unitaires, le Théorème 3.15 se traduit par

Théorème 3.16
Soit $R_{n,2} = a_n\Delta_n + b_n\Delta_{n-1} + c_n\Delta_{n-2}$ *avec* $a_nc_n \neq 0$.

(i) Nous avons l'entrelacement $y_1 < x_{1,n} < y_2 < x_{2,n} < \cdots < y_n < x_{n,n}$ *si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{b_n}{c_n} < -\frac{x_{n,n}+B_n}{C_n} \quad \textit{et} \quad \frac{c_n}{a_n} < 0 \\ \textit{ou} \\ \frac{b_n}{c_n} > -\frac{x_{1,n}+B_n}{C_n} \quad \textit{et} \quad 0 < \frac{c_n}{a_n} < C_n. \end{array}\right.$$

(ii) Nous avons l'entrelacement $x_{1,n} < y_1 < x_{2,n} < y_2 < \cdots < x_{n,n} < y_n$ *si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{b_n}{c_n} > -\frac{x_{1,n}+B_n}{C_n} \quad \textit{et} \quad \frac{c_n}{a_n} < 0 \\ \textit{ou} \\ \frac{b_n}{c_n} < -\frac{x_{n,n}+B_n}{C_n} \quad \textit{et} \quad 0 < \frac{c_n}{a_n} < C_n. \end{array}\right.$$

Preuve
On part de la même factorisation du polynôme $R_{n,2}$, $R_{n,2} = a_n\left(\Delta_n + \frac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1} + \frac{c_n}{a_n}\Delta_{n-2}\right)$.
On applique le Théorème 3.15 au polynôme unitaire $\Delta_n + \frac{b_n}{a_n}\Delta_{n-1} + \frac{c_n}{a_n}\Delta_{n-2}$ et on obtient les conditions $\left\{\begin{array}{l} \frac{b_n}{a_n} > -\frac{c_n(x_{n,n}+B_n)}{a_nC_n} \quad \text{et} \quad \frac{c_n}{a_n} < 0 \\ \text{ou} \\ \frac{b_n}{a_n} > -\frac{c_n(x_{1,n}+B_n)}{a_nC_n} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{c_n}{a_n} < C_n. \end{array}\right.$, il nous suffit alors de multiplier par $\frac{a_n}{c_n}$ en distinguant le cas où cette quantité est positive ou négative. ∎

Voici deux nouveaux théorèmes sur des liens entre les zéros des polynômes $R_{n,2}$, $R_{n+1,2}$ et $R^{(1)}_{n-1,2}$

Théorème 3.17
Soit $R_{n,2} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2}$ *un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 avec* $b_n < C_n$ *et*

$b_{n+1} < C_{n+1}$, et soient y_i les racines de $R_{n,2}$.
On a un entrelacement entre les zéros de $R_{n,2}$ et ceux de $R_{n+1,2}$ si et seulement si

$$f_{n+1}(y_i)f_n(y_i) + a_{n+1}f_n(y_i) + b_{n+1} < 0 \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Preuve
Supposons que n soit pair (le cas impair se traitant de manière analogue).
Comme $b_n < C_n$ et $b_{n+1} < C_{n+1}$, avec le Théorème 3.10 on a l'existence des n racines réelles et distinctes pour $R_{n,2}$ et des $n+1$ racines pour $R_{n+1,2}$.
Partons de l'entrelacement entre les zéros de $R_{n,2}$ et ceux de $R_{n+1,2}$, on peut l'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} R_{n+1,2}(y_1) > 0 \\ R_{n+1,2}(y_2) < 0 \\ \qquad\vdots \\ R_{n+1,2}(y_n) < 0 \end{array}\right.$$

On a alors les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} R_{n+1,2}(y_1) > 0 \\ R_{n+1,2}(y_2) < 0 \\ \qquad\vdots \\ R_{n+1,2}(y_n) < 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta_{n+1}(y_1) + a_{n+1}\Delta_n(y_1) + b_{n+1}\Delta_{n-1}(y_1) > 0 \\ \Delta_{n+1}(y_2) + a_{n+1}\Delta_n(y_2) + b_{n+1}\Delta_{n-1}(y_2) < 0 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Delta_{n+1}(y_n) + a_{n+1}\Delta_n(y_n) + b_{n+1}\Delta_{n-1}(y_n) < 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{n+1}(y_1)f_n(y_1) + a_{n+1}f_n(y_1) + b_{n+1} < 0 \\ f_{n+1}(y_2)f_n(y_2) + a_{n+1}f_n(y_2) + b_{n+1} < 0 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_{n+1}(y_n)f_n(y_n) + a_{n+1}f_n(y_n) + b_{n+1} < 0. \end{array}\right.$$

Pour la dernière équivalence, on a utilisé le fait que $\Delta_{n-1}(y_{2j-1}) < 0$ et $\Delta_{n-1}(y_{2j}) > 0$ (Théorème 3.13). ∎

Théorème 3.18
Soit $R_{n,2} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2}$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 avec $b_n < C_n$. Alors,

Les zéros de $R_{n,2}$ s'entrelacent avec ceux de $R^{(1)}_{n-1,2}$.

Preuve
La preuve est similaire à celle du Théorème 3.6. On applique l'identité de Sylvester au déterminant

représentant $R_{n,2}$, on obtient

$$R_{n,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_n - b_n & x+B_n+a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} 1 & & & \\ x+B_2 & \ddots & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & C_n - b_n & x+B_n+a_n & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_2 & x+B_2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & x+B_{n-1} \\ & & & & C_n - b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_2 & 1 & & \\ C_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n-1} & x+B_{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Nous avons alors $R_{n,2} = \dfrac{\Delta_{n-1}\frac{R^{(1)}_{n-1,2}}{\mu_0} - C_2 \dots C_{n-1}(C_n - b_n)}{\frac{\Delta^{(1)}_{n-2}}{\mu_0}}$, d'où l'identité

$$\Delta_{n-1}R^{(1)}_{n-1,2} - R_{n,2}\Delta^{(1)}_{n-2} = \int_a^b (\Delta^2_{n-1} - b_n\Delta^2_{n-2})d\alpha > 0$$

pour les mêmes raisons que dans la démonstration du Théorème 3.6 où le produit des C_i se simplifiait.

La stricte positivité vient du fait que l'on a $C_n = \dfrac{\int_a^b \Delta^2_{n-1}d\alpha}{\int_a^b \Delta^2_{n-2}d\alpha}$ et donc $\displaystyle\int_a^b (\Delta^2_{n-1} - C_n\Delta^2_{n-2})d\alpha = 0$.

Or $b_n < C_n$ donc $\displaystyle\int_a^b (\Delta^2_{n-1} - b_n\Delta^2_{n-2})d\alpha > 0$.

On termine de la même manière pour conclure quant à l'entrelacement entre les racines de $R_{n,2}$ et de $R^{(1)}_{n-1,2}$ (en s'appuyant sur l'entrelacement des racines de Δ_{n-1} et de $R_{n,2}$ valable lorsque $b_n < C_n$). ∎

Généralisons ce théorème

Théorème 3.19
Soient $R_{n,2}^{(k)} = \Delta_n^{(k)} + a_{n+k}\Delta_{n-1}^{(k)} + b_{n+k}\Delta_{n-2}^{(k)}$ le polynôme généralisé associé à $R_{n,2}$ d'ordre k, $y_i^{(k)}$ ses racines et $x_{i,n-1}^{(k)}$ celles de $\Delta_{n-1}^{(k)}$.
Alors,

$$b_{n+k} < C_{n+k} \textit{ si et seulement si } y_1^{(k)} < x_{1,n-1}^{(k)} < \cdots < y_{n-1}^{(k)} < x_{n-1,n-1}^{(k)} < y_n^{(k)}.$$

Preuve
Nous considèrerons le cas où n est pair (le cas impair se traitant de manière similaire).
Supposons que $b_{n+k} < C_{n+k}$, ainsi nous avons l'existence des n racines réelles et distinctes de $R_{n,2}^{(k)}$.
Avec l'identité (1.6), nous avons $C_{n+k} = -\dfrac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta_{n-2}^{(k)}}(x_{i,n-1}^{(k)})$, donc nous avons $b_{n+k} < -\dfrac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta_{n-2}^{(k)}}(x_{i,n-1}^{(k)})$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.
Avec l'entrelacement des racines de $\Delta_{n-2}^{(k)}$ et celles de $\Delta_{n-1}^{(k)}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta_n^{(k)}(x_{1,n-1}^{(k)}) + b_n\Delta_{n-2}^{(k)}(x_{1,n-1}^{(k)}) < 0\\
\Delta_n^{(k)}(x_{2,n-1}^{(k)}) + b_n\Delta_{n-2}^{(k)}(x_{2,n-1}^{(k)}) > 0\\
\qquad\qquad\vdots\\
\Delta_n^{(k)}(x_{n-2,n-1}^{(k)}) + b_n\Delta_{n-2}^{(k)}(x_{n-2,n-1}^{(k)}) > 0\\
\Delta_n^{(k)}(x_{n-1,n-1}^{(k)}) + b_n\Delta_{n-2}^{(k)}(x_{n-1,n-1}^{(k)}) < 0
\end{array}\right.$$

Et donc on a l'entrelacement voulu car il vient

$$R_{n,2}^{(k)}(x_{1,n-1}^{(k)}) < 0, R_{n,2}^{(k)}(x_{2,n-1}^{(k)}) > 0, \ldots, R_{n,2}^{(k)}(x_{n-2,n-1}^{(k)}) > 0, R_{n,2}^{(k)}(x_{n-1,n-1}^{(k)}) < 0. \blacksquare$$

En suivant la même idée qu'au Théorème 3.7, nous avons l'entrelacement entre les racines de $R_{n,2}^{(k)}$ et de $R_{n-1,2}^{(k+1)}$

Théorème 3.20
Soient $R_{n,2}^{(k)}$ le polynôme quasi-orthogonal général associé à $R_{n,2}$ d'ordre k et $R_{n,2}^{(k+1)}$ celui d'ordre $k+1$. On suppose que $b_{n+k} < C_{n+k}$.
Alors,

$$\textit{les racines de } R_{n,2}^{(k)} \textit{ et de } R_{n-1,2}^{(k+1)} \textit{ s'entrelacent.}$$

Preuve
On utilise l'identité de Sylvester sur le déterminant représentant $R_{n,2}^{(k)}$, et nous avons

$$\mu_0^k \frac{\begin{vmatrix} x+B_{k+1} & 1 & & \\ C_{k+2} & x+B_{k+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k}-b_{n+k} & x+B_{n+k}+a_{n+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}}$$

$$-\frac{C_{k+2}\dots C_{k+n}}{\begin{vmatrix} x+B_{k+2} & 1 & & \\ C_{k+3} & x+B_{k+3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+k-1} & x+B_{n+k-1} \end{vmatrix}}.$$

Ainsi $R_{n,2}^{(k)} = \mu_0^k \dfrac{\frac{\Delta_{n-1}^{(k)}}{\mu_0^k}\frac{R_{n-1,2}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}} - C_{k+2}\dots C_{k+n-1}(C_{k+n}-b_{n+k})}{\frac{\Delta_{n-2}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}}}$.

Ainsi on a $R_{n,2}^{(k)} = \mu_0^k \dfrac{\frac{\Delta_{n-1}^{(k)}}{\mu_0^k}\frac{R_{n-1,2}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}} - C_{k+2}\dots C_{k+n-1}(C_{k+n}-b_{n+k})}{\frac{\Delta_{n-2}^{(k+1)}}{\mu_0^{k+1}}}$.

Ce qui donne
$$\begin{aligned}\Delta_{n-1}^{(k)}R_{n-1,2}^{(k+1)} - R_{n,2}^{(k)}\Delta_{n-2}^{(k+1)} &= \mu_0^{2k+1}C_{k+2}\dots C_{k+n-1}(C_{k+n}-b_{n+k}) \\ &= \mu_0^{2k+1}\frac{\int_a^b \Delta_{k+n-1}^2 d\alpha - b_{n+k}\int_a^b \Delta_{k+n-2}^2 d\alpha}{\int_a^b \Delta_k^2 d\alpha} > 0.\end{aligned}$$

La stricte positivité de cette expression vient du fait que $C_{n+k} = \dfrac{\int_a^b \Delta_{n+k-1}^2 d\alpha}{\int_a^b \Delta_{n+k-2}^2 d\alpha}$ et aussi de la condition $b_{n+k} < C_{n+k}$.
Soient $y_i^{(k)}$ et $y_{i+1}^{(k)}$ deux zéros consécutifs de $R_{n,2}^{(k)}$, on a

$$\Delta_{n-1}^{(k)}(y_i^{(k)})R_{n-1,2}^{(k+1)}(y_i^{(k)}) = \Delta_{n-1}^{(k)}(y_{i+1}^{(k)})R_{n-1,2}^{(k+1)}(y_{i+1}^{(k)}) > 0.$$

Or, avec le Théorème 3.19, comme $b_{n+k} < C_{n+k}$, on a l'entrelacement des racines de $\Delta_{n-1}^{(k)}$ et de $R_{n,2}^{(k)}$, donc on en déduit celui des racines de $R_{n,2}^{(k)}$ et de $R_{n-1,2}^{(k+1)}$. ∎

Utilisons la Formule (2.1) du Théorème 2.1 pour obtenir le

Théorème 3.21
(i) $x_{1,n-2} > -B_n - a_n$ *(respectivement* $x_{1,n-2} < -B_n - a_n$*) si et seulement si nous avons un*

entrelacement entre les $n-2$ zéros de $R_{n,2}$ et ceux de Δ_{n-2} et cet entrelacement commence avec un zéro de Δ_{n-2} (respectivement $R_{n,2}$).
(ii) $x_{n-2,n-2} < -B_n - a_n$ (respectivement $x_{n-2,n-2} > -B_n - a_n$) si et seulement si nous avons un entrelacement entre les $n-2$ zéros de $R_{n,2}$ et ceux de Δ_{n-2} et cet entrelacement commence avec un zéro de $R_{n,2}$ (respectivement Δ_{n-2}).

Preuve
Considérons le cas où n est pair (le cas impair se traitant similairement).
En utilisant la Formule (2.1) avec $r = 2$, on a

$$R_{n,2} = U_1\Delta_{n-1} + (b_n - C_n)\Delta_{n-2}. \tag{3.3}$$

Si nous considérons les zéros de Δ_{n-2} nous avons pour $i = 1, \ldots, n-2$,

$$R_{n,2}(x_{i,n-2}) = U_1(x_{1,n-2})\Delta_{n-1}(x_{i,n-2}) = (x_{i,n-2} + B_n + a_n)\Delta_{n-1}(x_{i,n-2}).$$

Alors, $x_{1,n-2} > -B_n - a_n$ et $\Delta_{n-1}(x_{1,n-2}) > 0$, $\Delta_{n-1}(x_{2,n-2}) < 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x_{n-3,n-2}) > 0$, $\Delta_{n-1}(x_{n-2,n-2}) < 0$ nous donne $R_{n,2}(x_{1,n-2}) > 0$, $R_{n,2}(x_{2,n-2}) < 0, \ldots, R_{n,2}(x_{n-3,n-2}) > 0$, $R_{n,2}(x_{n-2,n-2}) < 0$.
Ainsi nous avons l'entrelacement entre les zéros de $R_{n,2}$ et les zéros de Δ_{n-2}. De plus l'entrelacement commence avec un zéro de Δ_{n-2}. On a ainsi (i).
(ii) Raisonnement analogue. ∎

Remarque 3.7
Parfois, il est difficile de calculer le premier ou le dernier zéro d'un polynôme orthogonal, alors, on peut remplacer la condition $x_{1,n-2} > -B_n - a_n$ par $a > -B_n - a_n$ et la condition $x_{n-2,n-2} < -B_n - a_n$ par $b < -B_n - a_n$ (si l'intervalle $[a, b]$ est fini) ; mais avec ces nouvelles conditions nous perdons les conditions nécessaires et suffisantes et nous gardons que la condition suffisante sur l'entrelacement.

Théorème 3.22
Soit un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2, $R_{n,2} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2}$.
(i) $b_n < C_n$ si et seulement s'il existe un entrelacement entre les n zéros de $R_{n,2}$ avec ceux de Δ_{n-1}.
(ii) $b_n > C_n$ si et seulement s'il existe un entrelacement entre les $n-2$ zéros de $R_{n,2}$ et ceux de Δ_{n-1}.

Preuve
(i) Nous connaissions déjà cette condition nécessaire et suffisante (Théorème 3.13) mais nous allons en donner une preuve différente.
Pour n pair et en utilisant la Formule (4.16) avec les zéros de Δ_{n-1}, nous obtenons

$$R_{n,2}(x_{i,n-1}) = (b_n - C_n)\Delta_{n-2}(x_{i,n-1})$$

pour $i = 1, \ldots, n-1$.
Supposons que l'on ait l'entrelacement entre les racines de $R_{n,2}$ et celles de Δ_{n-1}. La condition nécessaire et suffisante provient du fait que $\Delta_{n-2}(x_{i,n-1})$ et $R_{n,2}(x_{i,n-1})$ aient le même signe pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.
En effet, ceci vient de l'entrelacement des racines de $R_{n,2}$ et de Δ_{n-1}, et aussi de celui entre les racines de Δ_{n-1} et de Δ_{n-2}. Ainsi on a bien $b_n < C_n$.
(ii) Si nous supposons que $b_n > C_n$, alors nous pouvons uniquement parler de $n-2$ zéros de $R_{n,2}$.
Et avec $R_{n,2}(x_{i,n-1}) = (b_n - C_n)\Delta_{n-2}(x_{i,n-1})$ nous avons l'entrelacement voulu grâce à celui des racines de Δ_{n-2} et de Δ_{n-1}.
Par équivalence nous avons le résultat annoncé. ∎

3.1.3 Ordre 3

Ces polynômes peuvent s'écrire $R_{n,3} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2} + c_n\Delta_{n-3}$ où $c_n \neq 0$, ou sous la forme d'un déterminant

$$R_{n,3}(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & & \\ C_2 & x+B_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & c_n & C_n - b_n & x+B_n+a_n \end{vmatrix}.$$

$R_{n,3}$ a au moins $n-3$ zéros réels et distincts dans l'intervalle $]a,b[$ (Théorème 1.4) ; la différence avec les autres cas est que maintenant, aucun résultat n'a jamais été donné sur ces $n-3$ zeros.
La différence la plus notable avec les cas $r=1$ et $r=2$ est que la forme déterminantale n'est plus tridiagonale comme nous pouvons le voir ci-dessus.

Pour les trois racines restantes, il peut y avoir plusieurs configurations : une racine triple, ou une racine double et une racine simple, ou trois racines simples ou encore deux racines complexes conjuguées et une racine simple.
Nous savons, grâce à la présentation d'une construction possible d'une certaine classe de polynômes quasi-orthogonaux dans le chapitre précédent, qu'il existe des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 3 avec toutes leurs racines réelles et distinctes, avec une racine double et une racine simple, avec une racine triple.
En effet, avec la Proposition 2.9, on sait qu'il existe une seule décomposition possible pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 3 en tant que produit d'un polynôme quelconque de degré m et d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r. Cette décomposition est donnée par $\Pi_1 R_{n,1}$. Pour le polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, on peut avoir n racines réelles distinctes ou $n-2$ racines distinctes et une racine double. Comme le choix de la racine de Π_1 est totalement arbitraire, on a bien les différents cas énoncés précédemment.

Un premier résultat concerne l'entrelacement de $n-2$ racines de $R_{n,3}$ (donc une racine de plus que le nombre de racines connues) avec les racines de Δ_{n-2}

Théorème 3.23
Soit $R_{n,3} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2} + c_n\Delta_{n-3}$ $(c_n \neq 0)$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 3.
(i) $x_{1,n-2} > \dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$ si et seulement s'il existe un entrelacement entre $n-2$ zéros de $R_{n,3}$ avec ceux de Δ_{n-2} (le dernier de ces zéros étant à droite de $x_{n-2,n-2}$).
(ii) $x_{n-2,n-2} < \dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$ si et seulement s'il existe un entrelacement entre $n-2$ zéros de $R_{n,3}$ avec ceux de Δ_{n-2} (le premier de ces zéros étant à gauche de $x_{1,n-2}$).

Preuve
(i) Supposons que n soit pair (le cas impair se traitant de la même manière).
La Formule (2.1) pour $r=3$ nous donne

$$R_{n,3} = U_2\Delta_{n-2} + (c_n - C_{n-1}U_1)\Delta_{n-3}.$$

Nous allons copier la méthode utilisée pour $r=2$ dans le Théorème 3.21.
Pour cela, considérons le polynôme $c_n - C_{n-1}U_1$ et étudions son signe.
Nous avons $c_n - C_{n-1}U_1 = c_n - C_{n-1}(x + B_n + a_n)$. Son zéro est $\dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$.
La pente du polynôme est clairement négative (car $C_{n-1} > 0$). Ainsi, si $x > \dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$ (respectivement $x < \dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$) alors $c_n - C_{n-1}U_1 < 0$ (respectivement $c_n - C_{n-1}U_1 > 0$).
Pour $i = 1, \ldots, n-2$, $R_{n,3}(x_{i,n-2}) = (c_n - C_{n-1}U_1(x_{i,n-2}))\Delta_{n-3}(x_{i,n-2})$.
Si $x_{1,n-2} > \dfrac{c_n}{C_{n-1}} - B_n - a_n$, le signe de $R_{n,3}(x_{i,n-2})$ dépend seulement de celui de $\Delta_{n-3}(x_{i,n-2})$ car $c_n - C_{n-1}U_1(x_{i,n-2}) < 0$.
En utilisant le fait qu'il y a un entrelacement entre les zéros de Δ_{n-3} et ceux de Δ_{n-2}, nous obtenons $R_{n,3}(x_{1,n-2}) > 0$, $R_{n,3}(x_{2,n-2}) < 0, \ldots, R_{n,3}(x_{n-2,n-2}) < 0$.
Alors $R_{n,3}$ a $n-3$ zéros réels et distincts (ce que l'on savait déjà) et ils s'entrelacent avec ceux de Δ_{n-2} (ce qui est nouveau).
Si nous remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} R_{n,3}(x) = +\infty$, nous voyons qu'un $(n-2)$-ème zéro de $R_{n,3}$ continue l'entrelacement avec les zéros de Δ_{n-2}.
(ii) Preuve similaire (ici on remarque que $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,3}(x) = +\infty$). ∎

Voilà une série de résultats donnant la position de la première et de la dernière racine de $R_{n,3}$ en fonction des extrémités de l'intervalle $[a,b]$ (dans le cas où $[a,b]$ est fini) mais aussi en fonction des racines de $\Delta_{n-2}, \Delta_{n-1}$ et Δ_n.

Théorème 3.24
Soit $R_{n,3} = \Delta_n + a_n\Delta_{n-1} + b_n\Delta_{n-2} + c_n\Delta_{n-3}$, où $c_n \neq 0$, et supposons que nous avons n zéros réels et distincts pour $R_{n,3}$. On notera $x_{i,n}$ les zéros de Δ_n et $f_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

(i) *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(a) + a_nf_{n-1}f_{n-2}(a) + b_nf_{n-2}(a) + c_n > 0$ *alors* $y_1 < a$.
(ii) *Si* $a_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{1,n}) + b_nf_{n-2}(x_{1,n}) + c_n > 0$ *alors* $y_1 < x_{1,n}$.
(iii) *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{1,n-1}) + b_nf_{n-2}(x_{1,n-1}) + c_n > 0$ *alors* $y_1 < x_{1,n-1}$.
(iv) *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{1,n-2}) + a_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{1,n-2}) + c_n > 0$ *alors* $y_1 < x_{1,n-2}$.
(v) *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(b) + a_nf_{n-1}f_{n-2}(b) + b_nf_{n-2}(b) + c_n < 0$ *alors* $y_n > b$.
(vi) *Si* $a_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{n,n}) + b_nf_{n-2}(x_{n,n}) + c_n < 0$ *alors* $y_n > x_{n,n}$.
(vii) *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{n-1,n-1}) + b_nf_{n-2}(x_{n-1,n-1}) + c_n < 0$ *alors* $y_n > x_{n-1,n-1}$.
$(viii)$ *Si* $f_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{n-2,n-2}) + a_nf_{n-1}f_{n-2}(x_{n-2,n-2}) + c_n < 0$ *alors* $y_n > x_{n-2,n-2}$.

Preuve
(i) On suppose n pair (le cas impair se montrant de la même manière), on a alors les équivalences suivantes
$f_nf_{n-1}f_{n-2}(a) + a_nf_{n-1}f_{n-2}(a) + b_nf_{n-2}(a) + c_n > 0$
$\Longleftrightarrow \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-3}}(a) + a_n\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-3}}(a) + b_n\dfrac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}(a) + c_n > 0$
$\Longleftrightarrow \Delta_n(a) + a_n\Delta_{n-1}(a) + b_n\Delta_{n-2}(a) + c_n\Delta_{n-3}(a) < 0$
$\Longleftrightarrow R_{n,3}(a) < 0 \Longrightarrow y_1 < a$.
Pour la deuxième équivalence on remarque que $\Delta_{n-3}(a) > 0$. Pour la dernière implication, il suffit d'utiliser le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,3}(x) = +\infty$.
Pour prouver $(ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii)$ on s'inspire de (i) et on utilisera respectivement le fait que $\Delta_{n-3}(x_{1,n}) < 0, \Delta_{n-3}(x_{1,n-1}) < 0, \Delta_{n-3}(x_{1,n-2}) < 0$, et $\Delta_{n-3}(b) > 0, \Delta_{n-3}(x_{n,n}) > 0, \Delta_{n-3}(x_{n-1,n-1}) > 0, \Delta_{n-3}(x_{n-2,n-2}) > 0$. ∎

3.2 Zéros pour les ordres quelconques

Ces polynômes s'écrivent $R_{n,r} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + \cdots + c_r\Delta_{n-r}$ avec $c_r \neq 0$, et l'on a aussi la forme déterminantale

$$R_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & & & & \\ C_2 & x+B_2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & C_{n-1} & x+B_{n-1} & 1 \\ & & (-1)^{r+1}c_r & \cdots & c_3 & C_n - c_2 & x+B_n+c_1 \end{vmatrix}$$

Ce polynôme $R_{n,r}$ a au moins $n-r$ racines réelles et distinctes dans l'intervalle $]a,b[$ (Théorème 1.4).
Pour les r racines restantes on peut considérer plusieurs situations différentes comme une racine

de multiplicité m avec $1 \leq m \leq r$, des racines complexes conjuguées, ou les deux combinés.

On pourrait dénombrer le nombre de situations possibles.
Pour cela, rappelons tout d'abord une définition et un résultat de dénombrement prouvé par Hans Rademacher en 1937 [25]

Définition 3.1
La fonction partage d'un entier, notée $p(n)$, est une fonction qui, pour tout entier $n \geq 1$, donne le nombre de façons distinctes (ne dépendant pas de l'ordre des termes) de représenter n comme somme d'entiers naturels ≥ 1.

Remarque 3.8
On peut trouver l'appellation « partition d'un entier », il s'agit alors d'un anglicisme.

Remarque 3.9
Pour des petites valeurs de n, on obtient les résultats suivants : $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(6) = 11$.
La valeur explose avec n un peu plus grand $p(1000) = 24061467864032622473692149727991$.

Théorème 3.25
Soit $p(n)$ la fonction de partage d'un entier $n \geq 1$, on a la formule

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)$$

avec $A_k(n) = \sum\limits_{\substack{0\leq h\leq k\\(h,k)=1}} e^{i\pi s(h,k)-2i\pi nh/k}$ *et* $s(h,k) = \sum\limits_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \lfloor\frac{hr}{k}\rfloor\frac{1}{2}\right)$ *est la somme de Dedekind.*

Preuve
Pour la démonstration on se reportera à l'article de Hans Rademacher qui obtient ce résultat en combinant les suites de Farey, les cercles de Ford et un peu d'analyse complexe. ∎

Remarque 3.10
En fait Rademacher a affiné la méthode utilisée par Hardy et Ramanujan une vingtaine d'années plus tôt lorsqu'ils avaient obtenu la non moins surprenante approximation [25]

$$p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6\left(\frac{n-1}{24}\right)}} - \frac{1}{2\left(\frac{n-1}{24}\right)^{3/2}}\right)e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}$$

avec une correction assez énigmatique, inventée par Ramanujan, faisant de $p(200)$ une formule exacte !

Établissons le lien entre cette formule donnant le nombre de partition d'un entier et les situations possibles pour les r racines restantes d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r.
On a la possibilité d'avoir des racines simples, doubles, triples, ..., de multiplicité r ou des racines complexes conjuguées.
Notons n_1 le nombre de racines simples, n_2 celui des racines doubles, $\dots$, n_r celui des racines de multiplicité r et n_0 celui des racines complexes conjuguées (qu'on prendra par couple de conjugaison).
Pour dénombrer le nombre de possibilités d'affectation de ces différentes catégories aux r racines, on a l'équation $n_1 + 2n_2 + \cdots + rn_r + 2n_0 = r$ et il nous faudra dénombrer le nombre de $(r+1)$-uplets, $(n_0, n_1, \dots, n_r)$, pour que l'équation soit satisfaite.
On a alors ce nouveau résultat de dénombrement

Théorème 3.26
Le nombre de manières de considérer les r racines restantes d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r est

$$p(1) + \sum_{k=2}^{r} \frac{1 + (-1)^{r+k}}{2} p(k).$$

Preuve
Considérons dans un premier temps que l'ordre r de la quasi-orthogonalité est pair.
On doit donc dénombrer le nombre de possibilités pour ces r racines d'être soit simples, doubles, etc (on ne tiendra pas compte de la multiplicité des racines complexes conjuguées).
Écartons le cas où l'on trouve des racines complexes conjuguées, notre équation avec les nombres n_i dont on a parlé précédemment devient alors $n_1 + 2n_2 + \cdots + rn_r = r$. Il y en a donc $p(r)$.
Prenons à présent le cas où l'on a deux racines complexes conjuguées, il nous reste alors $r-2$ racines à traiter et on a $n_1 + 2n_2 + \cdots + (r-2)n_{r-2} = r-2$. Il y en a donc $p(r-2)$.
De proche en proche, nous arrivons au cas où on considère $r-2$ racines complexes conjuguées, il nous reste deux racines donc $p(2)$ possibilités.
Et le dernier cas étant celui où l'on a r racines complexes conjuguées, ce qui nous donne une seule possibilité (ou encore $p(1)$ possibilité).
Ainsi pour r pair, nous avons en tout $p(1) + p(2) + p(4) + \cdots + p(r-2) + p(r)$ possibilités ce qui est bien en accord avec la formule annoncée.
Voyons le cas où r est impair. Le début du raisonnement est strictement identique sauf que l'on finira par considérer $r-3$ racines complexes conjuguées, ce qui nous donnera $p(3)$ possibilités et pour finir à $r-1$ racines complexes conjuguées où l'on a une seule possibilité ($p(1)$ possibilité).
Au final on a $p(1) + p(3) + p(5) + \cdots + p(r-2) + p(r)$ possibilités. ∎

Remarque 3.11
Dans ce théorème, on a considéré uniquement les configurations de ces r racines dans leur ensemble et non pas avec une possible connection avec les $n-r$ racines déjà connues.

Pour les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, 2 et 3, nous avons donné des résultats sur la localisation de leur premier ou dernier zéro. Nous avons apprécié leur localisation avec les extrémités

de l'intervalle $[a, b]$ et, avec $x_{1,n}$ et $x_{n,n}$ aussi (voire avec $x_{1,n-1}, x_{1,n-2}, x_{n-1,n-1}, x_{n-2,n-2}$).
Nous allons pouvoir ici donner un résultat similaire à la différence que nous n'avons pas de condition suffisante pour l'existence de toutes les racines réelles et distinctes. Néanmoins, nous savons qu'une telle situation peut exister grâce à la décomposition d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre s sous la forme $\Pi_m R_{n,r}$ avec m et r de telle sorte que $s = 2m + r$.
Voyons comment avec ce théorème

Théorème 3.27
Soit $R_{n,s}$ un polynôme quasi-orthogonal d'ordre s.

Alors, il existe un tel polynôme ayant toutes ses racines réelles et distinctes.

Preuve
Pour prouver ce résultat nous allons utiliser un raisonnement par récurrence forte sur l'ordre de quasi-orthogonalité.
Pour $s = 0$, le résultat est évident car $R_{n,s} = \Delta_n$ et un polynôme orthogonal a bien toutes ses racines réelles et distinctes.
Supposons que le résultat soit vrai pour tous les ordres k avec $k \leq s$ et s fixé, et montrons-le pour l'ordre $s + 1$.
Avec le Théorème 2.2, nous savons que l'on peut trouver un polynôme $R_{n+m,s+1}$ tel que $R_{n+m,s+1} = \Pi_m R_{n,r}$ où m et r sont tels que $2m + r = s + 1$ et $m \geq 1$. On a donc $r < s$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme $R_{n,r}$ qui aura donc toutes ses racines réelles et distinctes.
De plus, comme on peut choisir de manière arbitraire ce polynôme Π_m, il en est de même de ses racines. En choisissant les racines de Π_m distinctes dans leur ensemble et par rapport aux racines de $R_{n,r}$, on a un polynôme $R_{n+m,s+1}$ avec toutes ses racines réelles et distinctes.
On a donc le résultat pour tout ordre de quasi-orthogonalité. ∎

Il sera donc légitime de supposer l'existence de toutes les racines réelles et distinctes pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre quelconque.
Pour avoir un résultat général sur la place du premier et du dernier zéro d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r, nous avons à distinguer suivant que l'ordre r soit pair ou impair.

Donnons le résultat pour n pair

Théorème 3.28
Soit $R_{n,2r} = \Delta_n + c_1\Delta_{n-1} + \cdots + c_{2r}\Delta_{n-2r}$, où $c_{2r} \neq 0$, un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2r$ et $f_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
On supposera que nous avons les n zéros réels et distincts pour $R_{n,2r}$. Posons $c_0 = 1$.
Pour la place de la première racine nous avons
(i) Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(a) + c_{2r} \leq 0$ alors $y_1 \leq a$.

(ii) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(x_{1,n}) + c_{2r} \leq 0$ *alors* $y_1 \leq x_{1,n}$.

Plus généralement nous avons

(iii) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(x_{1,n-p}) + c_{2r} \leq 0$ *alors* $y_1 \leq x_{1,n-p}$, *pour* $p = 0, \ldots, 2r-1$.

Pour la place de la dernière racine nous avons

(iv) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(b) + c_{2r} \leq 0$ *alors* $y_n \geq b$.

(v) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(x_{n,n}) + c_{2r} \leq 0$ *alors* $y_n \geq x_{n,n}$.

Plus généralement nous avons

(vi) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(x_{n-p,n-p}) + c_{2r} \leq 0$ *alors* $y_n \geq x_{n-p,n-p}$, *pour* $p = 0, \ldots, 2r-1$.

Preuve

(i) Supposons que n soit pair (le cas où n est impair se traitant de manière analogue).
On a les équivalences

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(a) + c_{2r} \leq 0 &\Longleftrightarrow \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2r}}(a) + c_1\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2r}}(a) + \cdots + c_{2r-1}\frac{\Delta_{n-2r+1}}{\Delta_{n-2r}}(a) + c_{2r} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \Delta_n(a) + c_1\Delta_{n-1}(a) + \cdots + c_{2r}\Delta_{n-2r}(a) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow R_{n,2r}(a) \leq 0 \Longrightarrow y_1 \leq a.\end{aligned}$$

La deuxième équivalence vient du fait que $\Delta_{n-2r}(a) > 0$, et la dernière implication est obtenue grâce à $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,2r}(x) = +\infty$.

Pour prouver (iii), on calque le même raisonnement que pour (i) sauf que l'on utilisera le fait que $\Delta_{n-2r}(x_{1,n-p}) > 0$ pour $p = 0, \ldots, 2r-1$ (ceci car $x_{1,n-2r} > x_{1,n-p}$ pour $p = 0, \ldots, 2r-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Delta_{n-2r}(x) = +\infty$). En effet

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2r-1} c_i \prod_{j=i}^{2r-1} f_{n-j}(x_{1,n-p}) + c_{2r} \leq 0 &\Longleftrightarrow \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2r}}(x_{1,n-p}) + \cdots + c_{2r-1}\frac{\Delta_{n-2r+1}}{\Delta_{n-2r}}(x_{1,n-p}) + c_{2r} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \Delta_n(x_{1,n-p}) + c_1\Delta_{n-1}(x_{1,n-p}) + \cdots + c_{2r}\Delta_{n-2r}(x_{1,n-p}) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow R_{n,2r}(x_{1,n-p}) \leq 0 \Longrightarrow y_1 \leq x_{1,n-p}.\end{aligned}$$

La dernière implication vient du fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} R_{n,2r}(x) = +\infty$.

Pour (iv) et (vi) on procède de même avec cette fois l'utilisation respective de $\Delta_{n-2r}(b) > 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \Delta_{n-2r}(x) = +\infty$ et $b > x_{n-2r,n-2r}$) et $\Delta_{n-2r}(x_{n-p,n-p}) > 0$ pour $p = 0, \ldots, 2r-1$ (car $x_{n-2r,n-2r} < x_{n-p,n-p}$ pour $p = 0, \ldots, 2r-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Delta_{n-2r}(x) = +\infty$). $\blacksquare$

Pour le cas où r est impair, nous n'avons rien à changer pour $(iv), (v)$ et (vi) (à part rempla-

cer $2r$ par $2r+1$).
Pour $(i),(ii)$ et (iii) et la place du premier zéro y_1 on doit remplacer <0 par >0 (et $2r$ par $2r+1$), ce qui donne

Théorème 3.29
Soit $R_{n,2r+1}=\Delta_n+c_1\Delta_{n-1}+\cdots+c_{2r+1}\Delta_{n-2r-1}$, où $c_{2r+1}\neq 0$, un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $2r+1$.
On supposera que nous avons les n zéros réels et distincts pour $R_{n,2r+1}$. Posons $c_0=1$.
Pour la place de la première racines nous avons
(i) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(a)+c_{2r+1}\geq 0$ *alors* $y_1\leq a$.
(ii) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(x_{1,n})+c_{2r+1}\leq 0$ *alors* $y_1\leq x_{1,n}$.
Plus généralement nous avons
(iii) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(x_{1,n-p})+c_{2r+1}\leq 0$ *alors* $y_1\leq x_{1,n-p}$, *pour* $p=0,\ldots,2r$.
Pour la place de la dernière racine nous avons
(iv) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(b)+c_{2r+1}\leq 0$ *alors* $y_n\geq b$.
(v) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(x_{n,n})+c_{2r+1}\leq 0$ *alors* $y_n\geq x_{n,n}$.
Plus généralement nous avons
(vi) *Si* $\displaystyle\sum_{i=0}^{2r}c_i\prod_{j=i}^{2r}f_{n-j}(x_{n-p,n-p})+c_{2r+1}\leq 0$ *alors* $y_n\geq x_{n-p,n-p}$, *pour* $p=0,\ldots,2r$.

Preuve
(i) On suppose que n est pair.
La preuve est similaire au théorème précédent sauf que nous avons $\Delta_{n-2r-1}(a)<0$, cela explique le changement de signe dans l'hypothèse.
De même, dans (iii) on utilisera $\Delta_{n-2r-1}(x_{1,n-p})<0$ pour $p=0,\ldots,2r$ (car $x_{1,n-2r-1}>x_{1,n-p}$ pour $p=0,\ldots,2r$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\Delta_{n-2r-1}(x)=-\infty$).
Par contre rien ne change pour les trois derniers résultats car nous avons $\Delta_{n-2r-1}(b)>0$ (car $x_{n-2r-1,n-2r-1}<b$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta_{n-2r-1}(x)=+\infty$) et $\Delta_{n-2r-1}(x_{n-p,n-p})>0$ pour $p=0,\ldots,2r$ (car $x_{n-2r-1,n-2r-1}<x_{n-p,n-p}$ pour $p=0,\ldots,2r$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta_{n-2r-1}(x)=+\infty$). ∎

Chapitre 4

Application aux polynômes de Jacobi et de Laguerre

Nous avons, dans le Chapitre 2, exposé une manière de construire des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre désiré et également avons mis en exergue un ensemble générateur des polynômes quasi-orthogonaux d'un ordre donné par rapport à une mesure positive.

Nous allons appliquer ces différents résultats aux mesures de Jacobi et de Laguerre-Sonin qui sont respectivement $(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx$ sur $[-1,1]$ et $x^{\alpha}e^{-x}dx$ sur $[0,+\infty[$.
Nous obtiendrons ainsi de nouveaux entrelacements entre des polynômes de Jacobi avec des paramètres différents, de même pour les polynômes de Laguerre-Sonin.
Ensuite nous suivrons le Théorème 2.4 pour décomposer de manière unique tout polynôme quasi-orthogonal d'ordre r par rapport à la mesure positive $(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx$ sur $[-1,1]$.

Pour faire ceci dans le cas de l'ordre de quasi-orthogonalité égal à 1, nous allons partir des relations d'orthogonalité sur $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ pour faire apparaître, via une modification de la mesure d'intégration, des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure $(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx$.
On s'appuiera alors sur le Théorème 2.3 pour avoir la décomposition unique de n'importe quel polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 sur ce même intervalle et par rapport à la même mesure.
On utilisera le même procédé pour l'ordre 2 ou même l'ordre r arbitraire.
On arrivera ainsi à une décomposition de tous les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure de Jacobi.

En ce qui concerne les polynômes de Laguerre-Sonin, nous dévoilerons de nouvelles relations liant ces polynômes ainsi que de nouveaux entrelacements. Nos résultats seront le fruit de l'écriture de polynômes quasi-orthogonaux par rapport à la mesure de Laguerre-Sonin.

4.1 Polynômes de Jacobi et quasi-orthogonalité d'ordre 1

4.1.1 Travail sur les polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$

Nous allons considérer les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$. Rappelons, dans un premier temps, la relation d'orthogonalité qu'ils vérifient

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)(1+x)^\beta(1-x)^{\alpha+1}dx = 0 \text{ pour } i = 0,\dots,n-1 \tag{4.1}$$

avec $\alpha > -2,\ \beta > -1$.
On va alors s'inspirer de la construction de polynômes quasi-orthogonaux présentée au Chapitre 2 et considérer le polynôme $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$.
Avec le Théorème 2.2, nous pouvons conclure que $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^{\alpha+1}dx$.
Mais nous pouvons aussi modifier la mesure d'intégration dans la relation d'orthogonalité (4.1), c'est-à-dire remplacer la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^{\alpha+1}dx$ par $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ en sortant un facteur $1-x$, ce facteur permettant de retrouver le polynôme $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$.

Restreignons-nous pour le moment à cette deuxième manière de considérer le polynôme $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ pour obtenir l'écriture suivante

Proposition 4.1
On a la relation

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = a_n\left(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{n+1+\alpha}{n+1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right) \tag{4.2}$$

où $a_n = -\dfrac{2(n+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$, $x \in [-1,1]$ *et* $\alpha,\beta > -1$.

Remarque 4.1
Comme nous avons considéré dans cette formule les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, nous avons dû considérer $\alpha > -1$ (pour en avoir l'orthogonalité). Or le polynôme $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ est défini pour $\alpha > -2$, donc nous ne recouvrons pas tous les cas.

Remarque 4.2
Ce résultat était déjà connu ([32, p. 72]) mais nous présentons ici une preuve mettant en avant l'aspect de décomposition des polynômes quasi-orthogonaux plutôt que d'utiliser des résultats sur les noyaux polynomiaux.

Preuve
Partons de la relation (4.1) et appliquons ce que nous avons dit précédemment pour l'écrire différemment

$$\int_{-1}^{1} x^i \left[P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)(1-x)\right](1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx = 0,$$

pour $i = 0, \ldots, (n+1)-1-1$.
Avec la définition de la quasi-orthogonalité (1.11), nous reconnaissons que le polynôme de degré $n+1$, $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$, est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure positive $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$.
On peut ainsi l'écrire

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{4.3}$$

où les coefficients a_n et b_n sont à déterminer.
Pour a_n, nous allons comparer les coefficients des termes de degré $n+1$ dans l'égalité (4.2), nous avons

$$-\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+1 \\ n \end{pmatrix} = \frac{a_n}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+2 \\ n+1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors la valeur de a_n qui est $a_n = -\dfrac{2(n+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$.

Pour le calcul de b_n, on pourrait adopter la même stratégie d'identification et considérer cette fois-ci les coefficients des termes de degré n ; mais nous allons proposer un chemin moins coûteux en calculs.
En choisissant $x = 1$ dans l'identité (4.3), il vient

$$\begin{aligned} a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) + b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 0 &\Longleftrightarrow a_n \begin{pmatrix} n+1+\alpha \\ n+1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow b_n = -a_n \frac{n+1+\alpha}{n+1}\ . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Le polynôme $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ est quasi-orthogonal d'ordre 1 par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$, on va pouvoir en déduire des résultats d'entrelacements avec les zéros des polynômes $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}$ et $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ en appliquant le Théorème 3.4

Théorème 4.1
En notant $x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}, x_{i,n+1}^{(\alpha,\beta)}, x_{1,n}^{(\alpha+1,\beta)}$ les zéros respectifs de $P_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha+1,\beta)}$, on a l'entrelacement suivant

$$x_{1,n+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{1,n}^{(\alpha+1,\beta)} < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{2,n+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{2,n}^{(\alpha+1,\beta)} < \cdots < x_{n,n+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,n}^{(\alpha+1,\beta)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n+1,n+1}^{(\alpha,\beta)} < 1.$$

Preuve
On a la décomposition

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

avec $b_n = -a_n \dfrac{n+1+\alpha}{n+1}$.
Les zéros de $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ sont $\{x_{i,n}^{(\alpha+1,\beta)}, 1\}_{i=1}^n$.

Avec (4.2), on a $a_n b_n = -a_n^2 \dfrac{n+1+\alpha}{n+1} < 0$, donc en appliquant le (i) du Théorème 3.4 qui nous donnait l'entrelacement entre les zéros d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 avec ceux des polynômes Δ_n et Δ_{n-1}, il vient l'entrelacement susénoncé. ∎

Remarque 4.3
On pouvait s'inspirer de la Remarque 3.2 qui nous montrait qu'on ne pouvait avoir que deux possibilités pour l'entrelacement entre les zéros de $R_{n,1}$, Δ_n et Δ_{n-1}.
Ici les zéros du polynôme $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ sont $\{x_{i,n}^{(\alpha+1,\beta)}, 1\}$ donc on finira nécessairement l'entrelacement par la racine 1 car toutes les autres racines sont dans $]-1,1[$, et on sera donc dans la configuration (i) du Théorème 3.4.

4.1.2 Travail sur les polynômes $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$

Cette fois-ci nous allons nous intéresser aux polynômes $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$. Ces derniers vérifient la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)(1+x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}dx = 0 \text{ pour } i = 0,\ldots,n-1 \tag{4.4}$$

avec $\alpha > -1, \beta > -2$.
De même que précédemment, en considérant le polynôme $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, on peut d'emblée conclure que $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure $(1+x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}dx$.
Mais nous voulons faire apparaître un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, pour cela nous allons écrire différemment la relation d'orthogonalité (4.4).

Proposition 4.2
On a la relation

$$(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = a_n\left(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{n+1+\beta}{n+1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right) \tag{4.5}$$

où $a_n = \dfrac{2(n+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$, $x \in [-1,1]$ et $\alpha, \beta > -1$.

Remarque 4.4
De même que dans le paragraphe précédent, le polynôme $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ étant orthogonal par rapport à la mesure de Jacobi $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1}dx$ pour $\beta > -2$, nous ne recouvrons pas tous les cas.

Remarque 4.5
Ce résultat se trouve également dans [32].

Preuve
Avec la relation (4.4), on peut écrire $\int_{-1}^{1} x^i \big[P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)(1+x)\big](1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx = 0$, pour $i = 0, \dots, (n+1)-1-1$.
On conclut de la même manière que dans la preuve de la Proposition 4.1, en disant que $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure positive $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$.
On a donc l'écriture

$$(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{4.6}$$

où les coefficients a_n et b_n peuvent être déterminés.
On trouve, en comparant les degrés $n+1$,

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+1 \\ n \end{pmatrix} = \frac{a_n}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+2 \\ n+1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne a_n.
Pour b_n, on prend $x=-1$ dans (4.6) et on a $b_n = a_n\frac{n+1+\beta}{n+1}$ car $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \begin{pmatrix} n+\beta \\ n \end{pmatrix}$.
∎

En constatant que le polynôme $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ est quasi-orthogonal d'ordre 1 par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$, on en arrive à des nouveaux résultats sur des entrelacements entre les zéros des polynômes $P_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ donnés par le théorème ci-dessous

Théorème 4.2
En notant $x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}, x_{i,n+1}^{(\alpha,\beta)}, x_{1,n}^{(\alpha,\beta+1)}$ les zéros respectifs de $P_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, on a l'entrelacement suivant

$$-1 < x_{1,n+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{1,n}^{(\alpha,\beta+1)} < x_{2,n+1}^{(\alpha,\beta)} < \cdots < x_{n-1,n}^{(\alpha,\beta+1)} < x_{n,n+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta+1)} < x_{n+1,n+1}^{(\alpha,\beta)}.$$

Preuve
La démonstration est identique à celle faite pour le Théorème 4.1 sauf que cette fois nous avons $a_n b_n = a_n^2\frac{n+1+\beta}{n+1}$ et on appliquera donc le (ii) du Théorème 3.4 pour les zéros de $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ qui sont $\{-1, x_{i,n}\}_{i=1}^n$. ∎

Remarque 4.6
On peut argumenter de la même manière que dans la Remarque 4.3 car -1 est racine de $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ donc on commencera l'entrelacement nécessairement par -1 car toutes les autres racines sont dans $]-1,1[$.

4.1.3 Génération de certains polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 avec les polynômes de Jacobi

Après avoir donné de nouveaux entrelacements grâce à ces polynômes $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, nous allons revenir sur l'un des théorèmes énoncé bien avant concernant la classification des polynômes quasi-orthogonaux.
Rappelons-nous que pour classifier ces polynômes quasi-orthogonaux, il nous fallait les considérer de même degré, sur un même intervalle et par rapport à une même mesure positive.
Ensuite, pour parler du cas particulier où $r = 1$, on se devait de mettre en exergue deux polynômes quasi-orthogonaux non colinéaires vérifiant ces conditions.
Les polynômes $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ vérifient bien toutes ces conditions, on peut dès lors appliquer le Théorème 2.3 pour avoir la décomposition suivante

Théorème 4.3
Tout polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, R_1, de degré $n+1$, sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ s'écrit

$$R_1 = \lambda_1(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)} + \lambda_2(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)} \tag{4.7}$$

où les λ_i satisfont $-\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Preuve
Tout d'abord, le fait que les polynômes $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ soient quasi-orthogonaux d'ordre 1 sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ vient des Propositions 4.1 et 4.2.
Ensuite, ces deux polynômes ne sont pas colinéaires car, par exemple, les ensembles des racines seraient identiques.
Ceci dit, nous pouvons alors conclure quant à la décomposition unique donnée en (4.7).
On a précisé que les coefficients λ_i devaient vérifier $-\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ car les coefficients des termes de plus haut degré des deux polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ sont les mêmes et valent $\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+1 \\ n \end{pmatrix}$, et ainsi R_1 est bien de degré $n+1$. ∎

Remarque 4.7
Ce théorème nous permet de générer ainsi tous les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1, de degré $n+1$, sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure positive $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ à l'aide des deux polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$.
Ce résultat de génération peut aussi servir de résultat de décomposition.
En effet, dans le cas où nous avons un polynôme R_1 quasi-orthogonal d'ordre 1 par rapport à la mesure de Jacobi sous sa forme développée (c'est-à-dire écrit en fonction des monômes x^i), on peut l'écrire en fonction de $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}$ et de $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}$. On peut, dès lors, trouver les coefficients de cette décomposition. Pour cela, nous allons prendre $x = 1$ dans (4.7), et nous avons

$R_1(1) = 2\lambda_2 P_n^{(\alpha,\beta+1)}(1) = 2\lambda_2 \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$, *ce qui nous donne* $\lambda_2 = \dfrac{R_1(1)}{2\begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}}$.

De même, avec $x=-1$, *nous obtenons* $\lambda_1 = (-1)^n \dfrac{R_1(-1)}{2\begin{pmatrix} n+\beta \\ n \end{pmatrix}}$.

4.2 Polynômes de Jacobi et quasi-orthogonalité d'ordre 2

4.2.1 Travail sur les polynômes $P_n^{(\alpha+2,\beta)}$

Nous allons suivre la même idée que dans le paragraphe précédent pour avoir cette fois-ci des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 à considérer.
Dans un premier temps, nous travaillerons sur les polynômes $P_n^{(\alpha+2,\beta)}$.
On a la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x)(1+x)^\beta(1-x)^{\alpha+2}dx = 0 \text{ pour } i=0,\dots,n-1 \tag{4.8}$$

avec $\alpha > -3, \beta > -1$.
Dans la proposition suivante, nous allons donner la décomposition du polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2, $P_n^{(\alpha+2,\beta)}$, par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$.

Proposition 4.3
On a la relation

$$\begin{aligned}(1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x) = a_n\Big(P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{2(2n+\alpha+\beta+3)}{(2n+\alpha+\beta+2)(n+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ + \frac{(2n+\alpha+\beta+4)(n+\alpha+1)}{(n+1)(n+2)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\Big)\end{aligned} \tag{4.9}$$

où $a_n = 4\dfrac{(n+1)(n+2)(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+4)}$.

Preuve
Pour obtenir cette décomposition, nous allons appliquer deux fois la formule (4.2).

$$\begin{aligned}(1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x) &= \frac{2(1-x)}{2n+\alpha+\beta+3}\Big((n+\alpha+2)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha+1,\beta)}(x)\Big) \\ &= \frac{2}{2n+\alpha+\beta+3}\Big(\frac{2(n+\alpha+2)}{2n+\alpha+\beta+2}\big((n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\big) \\ &\quad - \frac{2(n+1)}{2n+\alpha+\beta+4}\big((n+\alpha+2)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+2)P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\big)\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{2n+\alpha+\beta+3}\Big(\frac{2(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)}{2n+\alpha+\beta+2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-\frac{4(n+1)(n+\alpha+2)(2n+\alpha+\beta+3)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+4)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)+\frac{2(n+1)(n+2)(n+\alpha+2)}{2n+\alpha+\beta+4}P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big). \blacksquare$$

4.2.2 Travail sur les polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$

En effectuant le même raisonnement sur les polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$ qui vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1+x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha+1}dx = 0 \text{ pour } i=0,\dots,n-1 \tag{4.10}$$

pour $\alpha > -2, \beta > -2$, on arrive à montrer que

Proposition 4.4
On a la relation

$$\begin{aligned}(1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) = &-\frac{4(n+1)(n+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+4)}P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &+\frac{4(n+1)}{2n+\alpha+\beta+3}\Big(\frac{n+\alpha+2}{2n+\alpha+\beta+4}-\frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}\Big)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &+\frac{4(n+\alpha+1)(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Preuve
On applique au polynôme $(1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$ les formules (4.3) puis (4.5). $\blacksquare$

4.2.3 Travail sur les polynômes $P_n^{(\alpha,\beta+2)}$

Ici les polynômes $P_n^{(\alpha,\beta+2)}$ vérifient la relation

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha,\beta+2)}(x)(1+x)^{\beta+2}(1-x)^{\alpha}dx = 0 \text{ pour } i=0,\dots,n-1 \tag{4.12}$$

pour $\alpha > -1, \beta > -3$, et on obtient

Proposition 4.5
On a la relation

$$\begin{aligned}(1+x)^2P_n^{(\alpha,\beta+2)}(x) = &\frac{4(n+1)(n+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+4)}P_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &+\frac{4(n+1)}{2n+\alpha+\beta+3}\Big(\frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+4}+\frac{n+\beta+2}{2n+\alpha+\beta+3}\Big)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &+\frac{4(n+\beta+1)(n+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Preuve
On raisonne comme pour la démonstration de la Proposition 4.3, en appliquant deux fois la formule (4.5) au polynôme $(1+x)^2 P_n^{(\alpha,\beta+2)}$. $\blacksquare$

4.2.4 Génération de certains polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 avec les polynômes de Jacobi

En suivant le schéma présenté dans la section précédente, nous avons le résultat

Théorème 4.4
Tout polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2, R_2, de degré $n+2$, sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ s'écrit

$$R_2 = \lambda_1(1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)} + \lambda_2(1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \lambda_3(1+x)^2 P_n^{(\alpha,\beta+2)} \tag{4.14}$$

où les λ_i satisfont $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$.

Preuve
La famille $\big((1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)}, (1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}, (1+x)^2 P_n^{(\alpha,\beta+2)}\big)$ est libre.
En effet, en partant de la relation $\alpha_1(1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)} + \alpha_2(1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \alpha_3(1+x)^2 P_n^{(\alpha,\beta+2)} = 0$ on a $\alpha_1 = 0$ avec $x=-1$ et $\alpha_3 = 0$ avec $x = 1$.
Ces trois polynômes sont bien de degré $n+2$ et quasi-orthogonaux d'ordre 2 sur $[-1,1]$ par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ grâce aux Propositions 4.3, 4.4 et 4.5.
En appliquant alors le Théorème 2.4, on a l'existence de cette décomposition (4.14) et aussi de son unicité.
On a précisé que les coefficients de la décomposition devaient vérifier $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ pour que R_2 soit bien de degré 2 $\Bigg($les coefficients des termes de plus haut degré de $P_n^{(\alpha+2,\beta)}, P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$ et de $P_n^{(\alpha,\beta+2)}$ sont identiques et valent $\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta+2 \\ n \end{pmatrix}\Bigg)$. $\blacksquare$

Remarque 4.8
Ce théorème nous permet de générer ainsi tous les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2, de degré $n+2$, sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure positive $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ à l'aide des trois polynômes $P_n^{(\alpha+2,\beta)}, P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$ et $P_n^{(\alpha,\beta+2)}$.
Ce résultat de génération peut aussi servir de résultat de décomposition.
En effet, dans le cas où nous avons un polynôme R_2 quasi-orthogonal d'ordre 2 par rapport à la mesure de Jacobi sous sa forme développée (c'est-à-dire écrit en fonction des monômes x^i), on peut l'écrire en fonction de $(1-x)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)}, (1-x^2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}$ et de $(1+x)^2 P_n^{(\alpha,\beta+2)}$.
Pour le calcul des coefficients λ_i, on peut commencer par prendre $x = 1$, ce qui nous donne $R_2(1) = 4\lambda_3 P_n^{(\alpha,\beta+2)}(1) = 4\lambda_3 \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$.

Puis avec $x=-1$, on a $R_2(-1) = 4\lambda_1 P_n^{(\alpha+2,\beta)}(-1) = 4(-1)^n\lambda_1 \begin{pmatrix} n+\beta \\ n \end{pmatrix}$.
Pour λ_2, on va passer par le calcul des dérivées plutôt que de prendre une troisième valeur aléatoire. On a $R_2'(1) = -2\lambda_2 P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(1) + 2^2\lambda_3 P_n^{(\alpha,\beta+2)}(1) + 2^2\lambda_3 P_n'^{(\alpha,\beta+2)}(1)$, il nous faut donc la valeur de $P_n'^{(\alpha,\beta+2)}(1)$.
D'après [32, p. 63], on a la relation $P_n'^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ et ainsi $P_n'^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)\begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-1 \end{pmatrix}$ ce qui nous donne λ_2.

4.3 Généralisation de la génération

Si nous voulons une généralisation du travail précédent, en suivant le Théorème 2.4, il nous faut trouver $r+1$ polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r, de degré $n+r$, par rapport à la même mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ et tels que la famille formée par ces polynômes soit libre.

Nous allons considérer les $r+1$ polynômes

$(1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+r)}, (1-x)(1+x)^{r-1}P_n^{(\alpha+1,\beta+r-1)}, \ldots, (1-x)^{r-1}(1+x)P_n^{(\alpha+r-1,\beta+1)}, (1-x)^r P_n^{(\alpha+r,\beta)}$.

Donnons alors le résultat général

Théorème 4.5
Tout polynôme quasi-orthogonal d'ordre r, R_r, de degré $n+r$, sur $[-1,1]$ et par rapport à la mesure $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$ s'écrit

$$R_r = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{i+1}(1-x)^{r-i}(1+x)^i P_n^{(\alpha+r-i,\beta+i)} \tag{4.15}$$

où les λ_i sont déterminés de manière unique (non tous nuls).

Preuve
La première étape consiste à montrer que la famille $\big((1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+r)}, (1-x)(1+x)^{r-1}P_n^{(\alpha+1,\beta+r-1)}, \ldots, (1-x)^{r-1}(1+x)P_n^{(\alpha+r-1,\beta+1)}, (1-x)^r P_n^{(\alpha+r,\beta)}\big)$ est libre.
On part de la relation

$$\mu_0(1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+r)} + \mu_1(1-x)(1+x)^{r-1}P_n^{(\alpha+1,\beta+r-1)} + \ldots + \mu_r(1-x)^r P_n^{(\alpha+r,\beta)} = 0.$$

En prenant $x=1$ dans la relation précédente, on a que $\mu_0 = 1$, puis on divise le tout par $1-x$.
On réitère la même affectation en prenant à nouveau $x=1$ pour ainsi obtenir $\mu_1 = 0$.
De proche en proche, nous obtenons tous les coefficients μ_i nuls, et donc la famille est bien libre

dans $\mathbb{P}_{n+r}$.
Ensuite on utilise la relation d'orthogonalité des polynômes $P_n^{(\alpha+r-i,\beta+i)}$ qui est

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha+r-j,\beta+j)}(x)(1-x)^{\alpha+r-j}(1+x)^{\beta+j}dx = 0, \text{ pour } i = 0, \ldots, n-1.$$

On réécrit ceci différemment

$$\int_{-1}^{1} \Big((1-x)^{r-j}(1+x)^j P_n^{(\alpha+r-j,\beta+j)}(x)\Big)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = 0, \text{ pour } i = 0, \ldots, (n+r)-1-r.$$

Ainsi, avec la Définition 1.2, nous avons la quasi-orthogonalité d'ordre r des polynômes $(1-x)^{r-j}(1+x)^j P_n^{(\alpha+r-j,\beta+j)}$ pour $j = 0, \ldots, r$, sur $[-1, 1]$ et par rapport à la mesure $(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx$. Par le Théorème 2.4 on a la décomposition (4.15) avec les coefficients λ_i uniques. ∎

Remarque 4.9
À défaut de donner l'écriture exacte des coefficients λ_i, nous allons en donner un schéma récursif de calcul.
Nous avons la décomposition

$$R_r(x) = \lambda_1(1-x)^r P_n^{(\alpha+r,\beta)} + \ldots + \lambda_r(1+x)^{r-1}(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta+r-1)}(x) + \lambda_{r+1}(1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+r)}.$$

Avec $x = 1$, on a $\lambda_{r+1} = \dfrac{R_r(1)}{2^r \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}}$, avec $x = -1$, on a $\lambda_1 = \dfrac{(-1)^n R_r(-1)}{2^r \begin{pmatrix} n+\beta \\ n \end{pmatrix}}$.

On va alors réitérer le procédé en dérivant à chaque fois la décomposition et en prenant $x = 1$.
Si l'on dérive une première fois et que l'on prend $x = 1$, on aura λ_r en fonction de λ_{r+1}.
Nous avons $R_r'(1) = -2^{r-1} \begin{pmatrix} n+\alpha+1 \\ n \end{pmatrix} \lambda_r + \lambda_{r+1}\Big[(1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+1)}\Big]'_{x=1}$.

Et plus généralement, nous avons la formule

Proposition 4.6
Pour $j = 1, \ldots, r$, on a

$$R_r^{(r+1-j)}(1) = \sum_{k=j-1}^{r} \sum_{s=0}^{r+1-j} \prod_{m=1}^{s} (-1)^{r-k}\lambda_{k+1}\frac{(r+1-j)!}{s!}C_k^{j+s-1}2^{j-1}(n+\alpha+\beta+r+m)\begin{pmatrix} n+\alpha+r-k \\ n-s \end{pmatrix}.$$

Preuve
Il suffit de considérer la décomposition de R_r,

$$\lambda_1(1-x)^r P_n^{(\alpha+r,\beta)}(x) + \ldots + \lambda_j(1-x)^{r+1-j}(1+x)^{j-1}P_n^{(\alpha+r+1-j,\beta+j-1)}(x) + \ldots + \lambda_{r+1}(1+x)^r P_n^{(\alpha,\beta+r)}(x)$$

et de calculer la dérivée $(r+1-j)$-ème en 1.
Comme tous les termes avant λ_j ont une racine 1 de multiplicité $\geq r+2-j$, ils s'annulent alors en 1. Il nous reste alors
$R_r^{(r+1-j)}(1) = \sum_{k=j-1}^{r} \lambda_{k+1} \Big[(1-x)^{r-k}(1+x)^k P_n^{(\alpha+r-k,\beta+k)}(x)\Big]_{[x=1]}^{(r+1-j)}$, et avec la formule de Leibniz, on a
$R_r^{(r+1-j)}(1) = \sum_{k=j-1}^{r} \lambda_{k+1} \sum_{s=0}^{r+1-j} C_{r+1-j}^{s} \big[(1-x)^{r-k}(1+x)^k\big]_{[x=1}^{(r+1-j-s)} \dfrac{d^s P_n^{(\alpha+r-k,\beta+k)}}{dx^s}(1).$
Or, nous avions rappelé que $P_n'^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$, ce qui se généralise aisément en la formule $\dfrac{d^s}{dx^s}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2^s}\prod_{k=1}^{s}(n+\alpha+\beta+k)P_{n-s}^{(\alpha+s,\beta+s)}(x)$.
Et donc $\dfrac{d^s}{dx^s}P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \dfrac{1}{2^s}\prod_{k=1}^{s}(n+\alpha+\beta+k)\begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-s \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\text{Enfin } [(1-x)^{r-k}(1+x)^k]_{[x=1]}^{(r+1-j-s)} &= \sum_{l=0}^{r+1-j-s} C_{r+1-j-s}^{l}\big((1-x)^{r-k}\big)_{[x=1]}^{(l)}\big((1+x)^k\big)_{[x=1]}^{(r+1-j-s-l)} \\
&= (-1)^{r-k}C_{r+1-j-s}^{r-k}(r-k)!\big((1+x)^k\big)_{[x=1]}^{(k-j-s+1)} \\
&= (-1)^{r-k}C_{r+1-j-s}^{r-k}(r-k)!\frac{k!2^{j+s-1}}{(j+s-1)!}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien la formule annoncée, en remarquant que nous avons la simplification
$C_{r+1-j}^{s}C_{r+1-j-s}^{r-k}\dfrac{(r-k)!k!}{(j+s-1)!} = C_k^{j+s-1}\dfrac{(r+1-j)!}{s!}$. ∎

Remarque 4.10
Ainsi, une fois le coefficient λ_{r+1} calculé, on en déduit λ_r, grâce à l'équation donnée dans la Proposition 4.6 (en prenant $j=r$). Puis il viendra λ_{r-1} (avec $j=r-1$), λ_{r-2} (avec $j=r-2$), etc.

4.4 Polynômes de Laguerre-Sonin et quasi-orthogonalité d'ordre 1

4.4.1 Une relation de récurrence

Considérons les polynômes $L_n^{\alpha+1}$ qui satisfont la relation

$$\int_0^{+\infty} x^i L_n^{\alpha+1}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx = 0, \text{ pour } i=0,\ldots,n-1 \tag{4.16}$$

avec $\alpha > -2$.
En modifiant la mesure d'intégration nous allons construire un polynôme quasi-orthogonal d'ordre

1 sur $[0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Laguerre-Sonin $x^\alpha e^{-x}dx$ comme le montre la proposition ci-dessous

Proposition 4.7
On a la relation

$$xL_n^{\alpha+1}(x) = -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) \tag{4.17}$$

pour $\alpha > -1$, $x \in [0,+\infty[$.

Preuve
Partons de la relation d'orthogonalité (4.16), et faisons apparaître $xL_n^{\alpha+1}(x)$ comme suit

$$\int_0^{+\infty} x^i(xL_n^{\alpha+1}(x))x^\alpha e^{-x}dx = 0$$

pour $i = 0,\ldots,(n+1)-1-1$.
Ainsi $xL_n^{\alpha+1}$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 par rapport à la mesure positive $x^\alpha e^{-x}dx$ sur $[0,+\infty[$.
On a alors la décomposition

$$xL_n^{\alpha+1}(x) = a_nL_{n+1}^\alpha(x) + b_nL_n^\alpha(x)$$

Reste à trouver les coefficients a_n et b_n.
En comparant les coefficients dominants de degré $n+1$, on trouve $\dfrac{(-1)^n}{n!} = a_n\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc $a_n = -(n+1)$.
Puis avec $x=0$, on a $0 = a_n\dfrac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+1)} + b_n\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$ et donc $b_n = n+\alpha+1$.
On a donc la formule annoncée. ∎

Remarque 4.11
En considérant $\alpha > -1$ dans (4.17) pour satisfaire la définition de L_n^α, on ne recouvre pas tous les polynômes $L_n^{\alpha+1}$ qui, eux, sont définis pour $\alpha > -2$.

Remarque 4.12
Cette relation était déjà connu dans [32, p. 102] où la démonstration reposait essentiellement sur les noyaux polynomiaux.

4.4.2 Un nouvel entrelacement

Nous avons un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 $xL_n^{\alpha+1}$ sur $[0,+\infty[$ par rapport à la mesure $x^\alpha e^{-x}dx$.
Plutôt que de mettre en application le Théorème 3.3 concernant les entrelacements entre polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 et polynômes orthogonaux, nous allons adopter une manière plus directe.

Théorème 4.6
En notant $x^{\alpha}_{i,n}, x^{\alpha}_{i,n+1}, x^{\alpha+1}_{i,n}$ *les zéros respectifs des polynômes* $L^{\alpha}_n, L^{\alpha}_{n+1}$ *et* $L^{\alpha+1}_n$*, nous avons l'entrelacement*

$$0 < x^{\alpha}_{1,n+1} < x^{\alpha}_{1,n} < x^{\alpha+1}_{1,n} < x^{\alpha}_{2,n+1} < x^{\alpha}_{2,n} < x^{\alpha+1}_{2,n} < \cdots < x^{\alpha}_{n,n+1} < x^{\alpha}_{n,n} < x^{\alpha+1}_{n,n} < x^{\alpha}_{n+1,n+1}$$

Preuve
Soient $x^{\alpha}_{i,n}$ les zéros de L^{α}_n, on a, avec (4.17), $x^{\alpha}_{i,n}L^{\alpha+1}_n(x^{\alpha}_{i,n}) = -(n+1)L^{\alpha}_{n+1}(x^{\alpha}_{i,n})$ et donc

$$x^{\alpha}_{i,n}x^{\alpha}_{i+1,n}L^{\alpha+1}_n(x^{\alpha}_{i,n})L^{\alpha+1}_n(x^{\alpha}_{i+1,n}) = (n+1)^2 L^{\alpha}_{n+1}(x^{\alpha}_{i,n})L^{\alpha}_{n+1}(x^{\alpha}_{i+1,n}) < 0$$

pour $i = 1, \ldots, n-1$, grâce à l'entrelacement des racines de L^{α}_n et de L^{α}_{n+1}.
Comme $x^{\alpha}_{i,n} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ on obtient $L^{\alpha+1}_n(x^{\alpha}_{i,n})L^{\alpha+1}_n(x^{\alpha}_{i+1,n}) < 0$.
Cette dernière condition nous dit exactement que les racines de $L^{\alpha+1}_n$ et de L^{α}_n s'entrelacent.
En considérant de la même façon les zéros $x^{\alpha}_{i,n+1}$ de L^{α}_{n+1}, on trouve également un entrelacement entre les racines de L^{α}_{n+1} et celles de $L^{\alpha+1}_n$. ∎

Remarque 4.13
Une autre manière de démontrer ce résultat beaucoup plus rapidement est de se souvenir de la Remarque 3.2 (valable également pour le Théorème 3.3) qui nous disait qu'on avait uniquement deux choix d'entrelacements entre les zéros d'un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 et les deux polynômes orthogonaux Δ_n *et* Δ_{n-1}*.*
Comme ici les zéros du polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, $xL^{\alpha+1}_n$*, sont* $\{0, x^{\alpha+1}_{i,n}\}$*, on a nécessairement 0 qui est avant tous les autres zéros (car ils sont tous* > 0*) et donc on est dans la configuration* $R_{n,1}\Delta_n\Delta_{n-1}$*, qui est traduite dans le théorème précédent.*

4.5 Polynômes de Laguerre-Sonin et quasi-orthogonalité d'ordre 2

4.5.1 Une nouvelle relation

On considère cette fois les polynômes $L^{\alpha+2}_n$ vérifiant

$$\int_0^{+\infty} x^i L^{\alpha+2}_n(x)x^{\alpha+2}e^{-x}dx = 0, \text{ pour } i = 0, \ldots, n-1 \tag{4.18}$$

pour $\alpha > -3$.
On a le résultat suivant

Proposition 4.8
On a la relation

$$x^2L^{\alpha+2}_n(x) = (n+2)(n+1)L^{\alpha}_{n+2}(x) - 2(n+\alpha+2)(n+1)L^{\alpha}_{n+1}(x) + (n+\alpha+2)(n+\alpha+1)L^{\alpha}_n(x) \tag{4.19}$$

pour $\alpha > -1, x \in [0, +\infty[$.

Preuve
Nous allons obtenir ce résultat par une double application de la relation (4.17).
$x^2L_n^{\alpha+2}(x) = x\Big(-(n+1)L_{n+1}^{\alpha+1}(x)+(n+\alpha+2)L_n^{\alpha+1}(x)\Big)$
$\qquad = -(n+1)\Big(-(n+2)L_{n+2}^{\alpha}(x)+(n+\alpha+2)L_{n+1}^{\alpha}(x)\Big)+(n+\alpha+2)\Big(-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)+$
$(n+\alpha+1)L_n^{\alpha}(x)\Big)$. ∎

Remarque 4.14
On a également des lacunes dans le recouvrement de tous les cas car on ne considère que $\alpha > -1$ alors que $L_n^{\alpha+2}$ est défini pour $\alpha > -3$.

4.5.2 Un nouvel entrelacement

Par un raisonnement direct en utilisant la relation de récurrence à trois termes satisfaite par les polynômes L_n^{α} et (4.19), on arrive à l'entrelacement

Théorème 4.7
En notant $x_{i,n}^{\alpha}, x_{i,n+1}^{\alpha}, x_{i,n}^{\alpha+2}$ les zéros respectifs des polynômes $L_n^{\alpha}, L_{n+1}^{\alpha}$ et $L_n^{\alpha+2}$, on a

$$0 < x_{1,n+1}^{\alpha} < x_{1,n}^{\alpha} < x_{2,n+1}^{\alpha} < x_{2,n}^{\alpha+2} < \cdots < x_{n,n+1}^{\alpha} < x_{n,n}^{\alpha+2} < x_{n+1,n+1}^{\alpha}.$$

Preuve
On a $x_{i,n+1}^{\alpha\ 2}L_n^{\alpha+2}(x_{i,n+1}^{\alpha}) = (n+2)(n+1)L_{n+2}^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})+(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)L_n^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})$
$\qquad = -(n+\alpha+1)(n+1)L_n^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})+(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)L_n^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})$
$\qquad = (n+\alpha+1)(\alpha+1)L_n^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})$.
La dernière égalité étant obtenue à l'aide de la relation de récurrence à trois termes.
De même

$$x_{i+1,n+1}^{\alpha\ 2}L_n^{\alpha+2}(x_{i+1,n+1}^{\alpha}) = (n+\alpha+1)(\alpha+1)L_n^{\alpha}(x_{i+1,n+1}^{\alpha})$$

or $L_n^{\alpha}(x_{i,n+1}^{\alpha})L_n^{\alpha}(x_{i+1,n+1}^{\alpha}) < 0$ (étant donné l'entrelacement entre les racines de L_n^{α} et de L_{n+1}^{α}), donc $L_n^{\alpha+2}(x_{i,n+1}^{\alpha})L_n^{\alpha+2}(x_{i+1,n+1}^{\alpha}) < 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
Ainsi les zéros de $L_n^{\alpha+2}$, L_{n+1}^{α} et de L_n^{α} s'entrelacent de la façon suivante

$$0 < x_{1,n+1}^{\alpha} < x_{1,n}^{\alpha} < x_{2,n+1}^{\alpha} < x_{2,n}^{\alpha+2} < \cdots < x_{n,n+1}^{\alpha} < x_{n,n}^{\alpha+2} < x_{n+1,n+1}^{\alpha}.$$

∎

Chapitre 5

Lien entre différentes méthodes de quadrature et les polynômes quasi-orthogonaux

Nous allons, ici, présenter d'une manière différente des méthodes de quadrature telles que les méthodes de Gauss-Radau, Gauss-Lobatto et Gauss-Turán (ainsi que leurs généralisations).

Mais tout d'abord, rappelons le principe des méthodes de quadrature et le lien qu'elles ont avec les polynômes orthogonaux.
L'idée est d'approximer l'intégrale d'une fonction f par une somme finie

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + R_n(f)$$

où $d\alpha$ est une mesure positive dont le support (fini ou pas) est contenu dans $\mathbb{R}$.
Les coefficients λ_k sont appelés les poids de la quadrature et les x_k en sont les nœuds.
$R_n(f)$ est appelée l'erreur de la méthode, et on dira que cette méthode de quadrature est d'ordre m si elle est exacte sur l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq m$, noté $\mathbb{P}_m$, c'est-à-dire si $\forall f \in \mathbb{P}_m, R_n(f) = 0$.
Nous pouvons également ajouter que les nœuds x_k qui interviennent dans cette méthode sont les zéros du polynôme orthogonal par rapport à la mesure $d\alpha$ (unique à un facteur multiplicateur près). Ils appartiennent donc à l'intérieur du support de la mesure $d\alpha$.

En utilisant la notion de quasi-orthogonalité, nous allons dans un premier temps, donner un lien entre ces différentes méthodes et les zéros de polynômes quasi-orthogonaux.
Nous mettrons ainsi en évidence le lien étroit entre les nœuds de la méthode et les zéros d'un certain polynôme quasi-orthogonal.
Ces polynômes quasi-orthogonaux seront aussi le levier pour montrer l'existence et l'unicité de telles méthodes.

En appliquant nos résultats d'entrelacement du Chapitre 3, nous pourrons préciser l'emplacement de ces différents nœuds et affiner leur localisation. On ne s'était jusqu'alors qu'intéresser qu'à la place que ces nœuds pouvaient avoir par rapport à l'intervalle d'orthogonalité $[a, b]$ (tout du moins quand la méthode est considérée sur $[a, b]$ et non sur $\mathbb{R}$). Ici on appliquera nos précédents résultats pour en dire plus.

Nous passerons ensuite au calcul propre des différents poids des méthodes, qu'ils soient intérieurs ou pas, d'une manière différente de ce qui a déjà pu être fait [18].
Notre travail généralisera ce qui a pu être fait dans [16] ou [15] où l'on explictait le calcul des poids des méthodes de Gauss-Radau ou Gauss-Lobatto obtenues avec les mesures de Laguerre-Sonin ou de Jacobi. Les méthodes relevaient de la formule de Christoffel-Darboux alors que nous passerons par une manière plus directe.
Aussi le signe des poids dans les méthodes de Gauss-Radau ou Gauss-Lobatto avec un nœud double (ce qui rejoint les méthodes de Gauss-Turán) était donné pour la mesure de Tchebycheff [16, Theorem 2.1, Theorem 3.1].

Nous dégagerons de notre méthodologie à l'obtention des signes de ces poids d'une application originale sur le signe d'une certaine classe de déterminants.

5.1 Quadrature de Gauss-Radau

On supposera dans tout ce chapitre que la mesure $d\alpha$ est positive sur $[a, b]$ avec tous ses moments $\int_a^b x^n d\alpha(x)$ finis pour $n \in \mathbb{N}$ et $\int_a^b d\alpha > 0$.
Partons de la formule de quadrature de Gauss

$$\int_a^b f \; d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_{k,n}) + R_n(f).$$

Le reste $R_n(f)$ doit vérifier, $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1}[x],\; R_n(f) = 0$.
C'est le degré maximum de précision que nous puissions avoir.
Les $\{x_{k,n}\}_k$ sont les zéros du polynôme orthogonal unitaire (par rapport à la mesure positive $d\alpha$) Δ_n.

Nous allons ajouter à cette quadrature des nœuds pour en générer de nouvelles. La méthode de Gauss-Radau est basée sur le rajout du nœud a.

5.1.1 Traduction par les polynômes quasi-orthogonaux

Choisissons a pour ce $(n+1)$-ème nœud, les y_k étant les nœuds libres, nous avons alors

$$\int_a^b f\ d\alpha = \lambda_0^a f(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^a f(y_k) + R_n^a(f).$$

Cette quadrature est caractérisée par le fait qu'elle doit avoir un degré d'exactitude maximum égal à $2n$, c'est-à-dire que l'on veut que le reste $R_n^a(f)$ vérifie, $\forall f \in \mathbb{P}_{2n}[x]$, $R_n^a(f) = 0$.

En considérant $f(x) = x^i(x-a)\Pi_n(x)$ (avec Π_n unitaire), on a $\displaystyle\int_a^b x^i(x-a)\Pi_n(x)d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-1 = (n+1)-1-1$.
Ainsi $R_{n+1,1} = (x-a)\Pi_n$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1, de degré $n+1$, par rapport à la mesure $d\alpha$. On peut aussi remarquer que Π_n est un polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive modifiée $d\widetilde{\alpha} = (x-a)d\alpha$.

Avec $\displaystyle\int_a^b x^i(x-a)\Pi_n(x)d\alpha(x) = 0$ et en faisant varier i de 0 à $n-1$ on a

$$\begin{cases} \lambda_1^a(y_1-a)\Pi_n(y_1) + \lambda_2^a(y_2-a)\Pi_n(y_2) + \cdots + \lambda_n^a(y_n-a)\Pi_n(y_n) = 0 \\ \lambda_1^a y_1(y_1-a)\Pi_n(y_1) + \lambda_2^a y_2(y_2-a)\Pi_n(y_2) + \cdots + \lambda_n^a y_n(y_n-a)\Pi_n(y_n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1^a y_1^{n-1}(y_1-a)\Pi_n(y_1) + \lambda_2^a y_2^{n-1}(y_2-a)\Pi_n(y_2) + \cdots + \lambda_n^a y_n^{n-1}(y_n-a)\Pi_n(y_n) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $\prod_{i=1}^n (y_i-a)\lambda_i^a V(y_1,\ldots,y_n) \neq 0$ où $V(y_1,\ldots,y_n)$ est le déterminant de Vandermonde avec les points $y_1,\ldots,y_n$. Le système est donc un système de Cramer, et on a l'unique solution : $\Pi_n(y_1) = \cdots = \Pi_n(y_n) = 0$.
Ainsi les y_i sont les racines du polynôme orthogonal (par rapport à la mesure positive $d\widetilde{\alpha}$) Π_n, et donc se trouvent dans l'intervalle $]a,b[$.

On a ainsi : $R_{n+1,1} = (x-a)\Pi_n = \Delta_{n+1} + a_{n+1}\Delta_n$.
On sait que $\Delta_{n+1}(a) + a_{n+1}\Delta_n(a) = 0$, et donc : $a_{n+1} = -\dfrac{\Delta_{n+1}(a)}{\Delta_n(a)}$. D'où

$$\begin{aligned}(x-a)\Pi_n &= \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+1} & x+B_{n+1}+a_{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+B_1 & \sqrt{C_2} & & \\ \sqrt{C_2} & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{C_{n+1}} \\ & & \sqrt{C_{n+1}} & x+B_{n+1}+a_{n+1} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

On peut remarquer que $B_{n+1} + a_{n+1} = B_{n+1} - \dfrac{\Delta_{n+1}(a)}{\Delta_n(a)} = C_{n+1}\dfrac{\Delta_{n-1}(a)}{\Delta_n(a)} - a$.

Remarque 5.1
On pourra faire le même travail en prenant comme $(n+1)$-ème point b (on considèrera alors la mesure positive modifiée $(b-x)d\alpha$ et un Π_n de terme général -1).

Remarque 5.2
Le polynôme unitaire $R_{n+1,1} = (x-a)\Pi_n$ généré par cette méthode est unique.

5.1.2 Compléments sur les nœuds de la quadrature

Nous avons montré que $(x-a)\Pi_n(x) = \Delta_{n+1} + a_{n+1}\Delta_n$ avec $a_{n+1} = -\dfrac{\Delta_{n+1}(a)}{\Delta_n(a)}$.
Que l'entier n soit pair ou impair, on a, $a_{n+1} = -\dfrac{\Delta_{n+1}(a)}{\Delta_n(a)} > 0$.
Nous avions relevé dans le Théorème 3.2 un entrelacement entre les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 1 et des polynômes orthogonaux dont il dépend.
Ici, comme $a_{n+1} > 0$, nous avons l'entrelacement suivant

Proposition 5.1
Les racines de $R_{n+1,1} = \Delta_{n+1} + a_{n+1}\Delta_n$ étant $a, y_1, \ldots, y_n$, et comme les $y_i \in]a,b[$, on a

$$a < x_{1,n+1} < x_{1,n} < y_1 < x_{2,n+1} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n+1} < x_{n,n} < y_n < x_{n+1,n+1}.$$

Remarque 5.3
On a ainsi un entrelacement entre les racines du polynôme orthogonal (celui de degré n ou $n+1$) par rapport à la mesure positive $d\alpha$ et les racines du polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive $d\widetilde{\alpha} = (x-a)d\alpha$.

Remarque 5.4
En ce qui concerne le cas où l'on choisit le point b comme nœud fixé, il nous suffira de choisir Π_n ayant pour coefficient de terme général -1.
Ainsi, $(b-x)\Pi_n$ sera un polynôme (unitaire) quasi-orthogonal d'ordre 1 par rapport à $d\alpha$, ou alors on pourra dire que Π_n est un polynôme orthogonal par rapport à la mesure positive $(b-x)d\alpha$.
Avec $(b-x)\Pi_n = \Delta_{n+1} + a_{n+1}\Delta_n$, on a, $a_{n+1} = -\dfrac{\Delta_{n+1}(b)}{\Delta_n(b)}$.
Ici, $a_{n+1} = -\dfrac{\Delta_{n+1}(b)}{\Delta_n(b)} < 0$ pour tout n, et avec le même théorème on a l'entrelacement

$$x_{1,n+1} < y_1 < x_{1,n} < x_{2,n+1} < y_2 < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n+1} < y_n < x_{n,n} < x_{n+1,n+1} < b.$$

5.1.3 Calcul des poids

Nous reprenons notre formule de quadrature de Gauss-Radau

$$\int_a^b f\ d\alpha = \lambda_0^a f(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^a f(y_k) + R_n^a(f).$$

Cette formule est exacte pour $f \in \mathbb{P}_{2n}$.

• Pour le calcul de λ_0^a, il suffit de prendre $f = \Pi_n \in \mathbb{P}_n$ dans la formule rappelée, $\displaystyle\int_a^b \Pi_n d\alpha = \lambda_0^a \Pi_n(a)$.

On a donc une première formule, $\lambda_0^a = \dfrac{\int_a^b \Pi_n d\alpha}{\Pi_n(a)}$.

On aurait pu prendre $f = \Pi_n^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ et on aurait eu $\lambda_0^a = \dfrac{\int_a^b \Pi_n^2 d\alpha}{\Pi_n^2(a)}$.

La seconde formule nous dit que $\lambda_0^a > 0$.

Remarque 5.5

Avec la seconde formule on a déduit que $\lambda_0^a > 0$ donc $\dfrac{\int_a^b \Pi_n d\alpha}{\Pi_n(a)} > 0$, étant donné que $\Pi_n(a)$ est du signe de $(-1)^n$, on a $\displaystyle\int_a^b \Pi_n d\alpha$ qui est aussi du signe de $(-1)^n$.

• Pour le calcul de λ_l^a, on prend $f = (x-a)\displaystyle\prod_{i\neq l}(x-y_i) \in \mathbb{P}_m$,

on a $\displaystyle\int_a^b (x-a)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha = \lambda_l^a (y_l - a)\prod_{i\neq l}(y_l - y_i)$.

Ainsi $\lambda_l^a = \dfrac{1}{(y_l-a)\prod_{i\neq l}(y_l-y_i)} \displaystyle\int_a^b (x-a)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha$.

De même, avec $f = (x-a)^2\displaystyle\prod_{i\neq l}(x-y_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$,

on a $\lambda_l^a = \dfrac{1}{(y_l-a)^2\prod_{i\neq l}(y_l-a)^2} \displaystyle\int_a^b (x-a)^2\prod_{i\neq l}(x-y_i)^2 d\alpha > 0$.

On en déduit alors

Proposition 5.2

Pour la méthode de Gauss-Radau

$$\int_a^b f\ d\alpha = \lambda_0^a f(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^a f(y_k) + R_n^a(f)$$

les poids sont strictement positifs.

5.1.4 Application au signe d'une classe de déterminants

- Prenons le calcul du poids λ_0^a et remarquons que $\dfrac{\int_a^b \Pi_n d\alpha}{\Pi_n(a)} > 0$.

Ainsi, comme $\Pi_n(a)$ est du signe de $(-1)^n$, $\displaystyle\int_a^b \Pi_n d\alpha$ est du signe de $(-1)^n$.

Écrivons la décomposition $\Pi_n = \Delta_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \Delta_i = (x-y_1)\cdots(x-y_n)$.

On a $\displaystyle\int_a^b \Pi_n d\alpha = \beta_0 \int_a^b d\alpha$, ainsi β_0 est du signe de $(-1)^n$ également (car $\displaystyle\int_a^b d\alpha > 0$).

On a le système $(\mathcal{S})$ $\left\{\begin{array}{l} \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_1) = -\Delta_n(y_1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_n) = -\Delta_n(y_n) \end{array}\right.$

On a le déterminant $det(\mathcal{S}) = V(y_1,\ldots,y_n)$ (où $V(y_1,\ldots,y_n)$ est le déterminant de Vandermonde de coefficients $y_1,\ldots,y_n$). On remarque que le système est de Cramer et donc qu'on a unicité de la solution β_0

$$\beta_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_n(y_1) & \Delta_1(y_1)\cdots & \Delta_{n-1}(y_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_n(y_n) & \Delta_1(y_n)\cdots & \Delta_{n-1}(y_n) \end{vmatrix}}{V(y_1,\cdots,y_n)} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1) & \Delta_2(y_1)\cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \Delta_2(y_n)\cdots & \Delta_n(y_n) \end{vmatrix}}{V(y_1,\cdots,y_n)}.$$

Comme $V(y_1,\ldots,y_n) = \displaystyle\prod_{j>i}(y_j - y_i) > 0$, on a $\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_n(y_n) \end{vmatrix} > 0$.

- Prenons le calcul du poids λ_l^a et remarquons que $\dfrac{\int_a^b (x-a)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha}{(y_l-a)\prod_{i\neq l}(y_l-y_i)} > 0$.

Voyons d'abord le signe de $(y_l - a)\displaystyle\prod_{i\neq l}(y_l - y_i) = (y_l-a)(y_l-y_1)\cdots(y_l-y_{l-1})(y_l-y_{l+1})\cdots(y_l-y_n)$.

Donc c'est du signe de $(-1)^{n-l}$.

Ainsi $\displaystyle\int_a^b (x-a)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha$ est du signe de $(-1)^{n-l}$.

Avec la décomposition $(x-a)\displaystyle\prod_{i\neq l}(x-y_i) = \Delta_n + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\Delta_i$, on en déduit

$\displaystyle\int_a^b (x-a)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha = \beta_0\int_a^b d\alpha$ donc β_0 est du signe de $(-1)^{n-l}$ également (car $\displaystyle\int_a^b d\alpha > 0$).

On a aussi le système $(\mathcal{S})$ $\left\{\begin{array}{l} \beta_0+\beta_1\Delta_1(a)+\cdots+\beta_{n-1}\Delta_{n-1}(a)=-\Delta_n(a) \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_1)+\cdots+\beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_1)=-\Delta_n(y_1) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_{l-1})+\cdots+\beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_{l-1})=-\Delta_n(y_{l-1}) \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_{l+1})+\cdots+\beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_{l+1})=-\Delta_n(y_{l+1}) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_n)+\cdots+\beta_{n-1}\Delta_{n-1}(y_n)=-\Delta_n(y_n) \end{array}\right.$

On a $det(S)=V(a,y_1,\ldots,y_{l-1},y_{l+1},\ldots,y_n)\neq 0$ et donc on a un système de Cramer. D'où l'unicité de la solution β_0

$$\beta_0=-\frac{\begin{vmatrix} \Delta_n(a) & \Delta_1(a) & \cdots & \Delta_{n-1}(a) \\ \Delta_n(y_1) & \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_{n-1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_n(y_{l-1}) & \Delta_1(y_{l-1}) & \cdots & \Delta_{n-1}(y_{l-1}) \\ \Delta_n(y_{l+1}) & \Delta_1(y_{l+1}) & \cdots & \Delta_{n-1}(y_{l+1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_n(y_n) & \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_{n-1}(y_n) \end{vmatrix}}{V(a,y_1,\cdots,y_{l-1},y_{l+1},\cdots,y_n)}=(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \Delta_n(a) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(y_{l-1}) & \cdots & \Delta_n(y_{l-1}) \\ \Delta_1(y_{l+1}) & \cdots & \Delta_n(y_{l+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_n(y_n) \end{vmatrix}}{V(a,y_1,\cdots,y_{l-1},y_{l+1},\cdots,y_n)}.$$

Ainsi le déterminant $\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \Delta_n(a) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(y_{l-1}) & \cdots & \Delta_n(y_{l-1}) \\ \Delta_1(y_{l+1}) & \cdots & \Delta_n(y_{l+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_n(y_n) \end{vmatrix}$ est du signe de $(-1)^l$.

5.2 Quadrature de Gauss-Lobatto

5.2.1 Traduction par les polynômes quasi-orthogonaux

Cette fois-ci nous allons ajouter aux n nœuds libres y_k, deux points supplémentaires : a et b

$$\int_a^b f\ d\alpha=\lambda_0^{a,b}f(a)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{a,b}f(y_k)+\lambda_{n+1}^{a,b}f(b)+R_n^{a,b}(f).$$

Cette quadrature est caractérisée par le fait qu'elle doit avoir un degré d'exactitude maximum égal à $2n+1$, c'est-à-dire que l'on veut que le reste $R_n^{a,b}(f)$ vérifie, $\forall f\in\mathbb{P}_{2n+1}[x],\ R_n^{a,b}(f)=0$.

En considérant $f(x) = x^i(x-a)(b-x)\Pi_n(x)$ (avec Π_n de coefficient dominant -1), on a : $\int_a^b x^i(x-a)(b-x)\Pi_n(x)d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-1 = (n+2)-1-2$.

Ainsi $(x-a)(b-x)\Pi_n$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2, de degré $n+2$, par rapport à la mesure positive $d\alpha$.
On peut aussi remarquer que Π_n est un polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive modifiée $d\widetilde{\alpha} = (x-a)(b-x)d\alpha$.
De la même manière que dans le paragraphe précédent, on en déduit que $y_1, \cdots, y_n$ sont les racines de Π_n. Comme Π_n est orthogonal par rapport à la mesure positive $d\widetilde{\alpha}$, ses racines $y_i \in]a, b[$.

On a ainsi l'écriture : $(x-a)(b-x)\Pi_n = \Delta_{n+2} + a_{n+2}\Delta_{n+1} + b_{n+2}\Delta_n$, reste alors à calculer les coefficients a_{n+2} et b_{n+2}.
Avec la décomposition précédente, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+2}\Delta_{n+1}(a) + b_{n+2}\Delta_n(a) = -\Delta_{n+2}(a) \\ a_{n+2}\Delta_{n+1}(b) + b_{n+2}\Delta_n(b) = -\Delta_{n+2}(b) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est : $\Delta_{n+1}(a)\Delta_n(b) - \Delta_n(a)\Delta_{n+1}(b)$.
On peut montrer que ce déterminant est non nul.
Si n est pair, on a : $\Delta_{n+1}(a) < 0$ et $\Delta_n(b), \Delta_n(a), \Delta_{n+1}(b) > 0$ donc le déterminant est < 0.
Si n est impair, $\Delta_n(a) < 0$ et $\Delta_{n+1}(a), \Delta_n(b), \Delta_{n+1}(b) > 0$ donc le déterminant est > 0.
Ainsi, on a un système de Cramer, et les solutions (uniques) sont données par les formules suivantes

$$a_{n+2} = \frac{\Delta_n(a)\Delta_{n+2}(b) - \Delta_{n+2}(a)\Delta_n(b)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta_n(b) - \Delta_n(a)\Delta_{n+1}(b)}$$

$$b_{n+2} = \frac{\Delta_{n+2}(a)\Delta_{n+1}(b) - \Delta_{n+1}(a)\Delta_{n+2}(b)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta_n(b) - \Delta_n(a)\Delta_{n+1}(b)}$$

D'où, avec ces valeurs, l'écriture du polynôme

$$(x-a)(b-x)\Pi_n(c) = \begin{vmatrix} x+B_1 & 1 & & \\ C_2 & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & C_{n+2}-b_{n+2} & x+B_{n+2}+a_{n+2} \end{vmatrix}.$$

Remarque 5.6
Le polynôme unitaire $(x-a)(b-x)\Pi_n$ généré par cette méthode est unique.

Remarque 5.7
On peut montrer que pour tout n, $b_{n+2} < 0$.
En effet, si n est pair, le dénominateur (déterminant du système)est < 0. En ce qui concerne le

numérateur, on a $\Delta_{n+2}(a), \Delta_{n+1}(b), \Delta_{n+2}(b) > 0$ et $\Delta_{n+1}(a) < 0$ donc il est > 0. En conclusion $b_{n+2} < 0$.
De même, si n est impair, le dénominateur est > 0 ; et en ce qui concerne le numérateur, comme on a $\Delta_{n+1}(a), \Delta_{n+1}(b), \Delta_{n+2}(b) > 0$ et $\Delta_{n+2}(a) < 0$, il est < 0. Ainsi $b_{n+2} < 0$.

5.2.2 Compléments sur les nœuds de la quadrature

Avec le Théorème 3.13, on a déduit (Remarque 3.5), lorsque $b_n < C_n$, qu'il ne pouvait y avoir deux zéros de $R_{n,2}$ tous les deux à gauche de a ou à droite de b.

Ici nous avons un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 $(x-a)(b-x)\Pi_n$ unitaire de racines $a, b, \{y_i\}_{i=1}^n$. Avec la remarque rappelée, on retrouve le fait que les y_i se trouvent à l'intérieur de $]a, b[$.
Les $n+1$ intervalles formés par les zéros y_i donnent l'entrelacement entre les zéros de Δ_{n+1} et ceux de $(x-a)(b-x)\Pi_n$.

Proposition 5.3
On a
$$a < x_{1,n+1} < y_1 < x_{2,n+1} < y_2 < \cdots < x_{n,n+1} < y_n < x_{n+1,n+1} < b$$

Remarque 5.8
On a ainsi un entrelacement entre les racines du polynôme orthogonal de degré $n+1$ par rapport à la mesure positive $d\alpha$ et les racines du polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive modifiée $d\widetilde{\alpha} = (x-a)(b-x)d\alpha$.

Par le théorème rappelé, on a alors que $b_{n+2} < C_{n+2}$ (et donc $C_{n+2} - b_{n+2} > 0$).
Ainsi on a une nouvelle écriture du polynôme

$$(x-a)(b-x)\Pi_n(x) = \begin{vmatrix} x+B_1 & \sqrt{C_2} & & \\ \sqrt{C_2} & x+B_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{C_{n+2}-b_{n+2}} \\ & & \sqrt{C_{n+2}-b_{n+2}} & x+B_{n+2}+a_{n+2} \end{vmatrix}.$$

On aurait pu, par un raisonnement plus calculatoire (et donc plus long), prouver que $b_{n+2} < C_{n+2}$.

Proposition 5.4
On a pour tout n,
$$b_{n+2} < C_{n+2}$$

Preuve
On a déjà la valeur de b_{n+2}. Pour celle de C_{n+2}, il suffit d'utiliser la relation de récurrence à trois termes $\Delta_{n+2} = (x + B_{n+2})\Delta_{n+1} - C_{n+2}\Delta_n$.
En prenant la valeur en a et b on a le système $\left\{ \begin{array}{l} B_{n+2}\Delta_{n+1}(a) - C_{n+2}\Delta_n(a) = \Delta_{n+2}(a) - a\Delta_{n+1}(a) \\ B_{n+2}\Delta_{n+1}(b) - C_{n+2}\Delta_n(b) = \Delta_{n+2}(b) - b\Delta_{n+1}(b) \end{array} \right.$.

On trouve $C_{n+2} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \Delta_{n+1}(a) & \Delta_{n+2}(a) - a\Delta_{n+1}(a) \\ \Delta_{n+1}(b) & \Delta_{n+2}(b) - b\Delta_{n+1}(b) \end{vmatrix}}{\Delta_{n+1}(a)\Delta_n(b) - \Delta_n(a)\Delta_{n+1}(b)}$.
Pour comparer b_{n+2} et C_{n+2}, comme ils ont le même dénominateur, il suffit de comparer leur numérateur.
Nous distinguerons les cas suivant la parité de n.
Si n est pair, le dénominateur est < 0 donc il faut montrer que la différence entre le numérateur de b_{n+2} et celui de C_{n+2} est > 0.
Cette différence vaut $(\Delta_{n+2}(a)\Delta_{n+1}(b) - \Delta_{n+1}(a)\Delta_{n+2}(b)) - (\Delta_{n+1}(b)(\Delta_{n+2}(a) - a\Delta_{n+1}(a)) - \Delta_{n+1}(a)(\Delta_{n+2}(b) - b\Delta_{n+1}(b))) = -(b-a)\Delta_{n+1}(a)\Delta_{n+1}(b) > 0$.
De même pour n impair. ∎

Remarque 5.9
D'après la Remarque 3.5, et comme la Proposition 5.4 nous dit que $b_{n+2} < C_{n+2}$, on peut alors noter qu'il est impossible de construire une méthode de type Gauss-Lobatto avec 2 nœuds à gauche de a ou 2 nœuds à droite de b (ceci car on ne peut construire un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 avec de telles racines).

Remarque 5.10
Le polynôme $R_{n+2,2}$ généré par cette méthode est unique.

5.2.3 Calcul des poids

Reprenons la formule de Gauss-Lobatto

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lambda_0^{a,b} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{a,b} f(y_k) + \lambda_{n+1}^{a,b} f(b) + R_n^{a,b}(f).$$

Cette formule est exacte pour $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

• Pour le calcul de $\lambda_0^{a,b}$, on prend $f = (b-x)\Pi_n \in \mathbb{P}_{n+1}$, $\displaystyle\int_a^b (b-x)\Pi_n d\alpha = \lambda_0^{a,b}\Pi_n(a)(b-a)$.

On a donc, dans un premier temps, $\lambda_0^{a,b} = \dfrac{\int_a^b (b-x)\Pi_n d\alpha}{(b-a)\Pi_n(a)}$.

En prenant $f = (b-x)\Pi_n^2 \in \mathbb{P}_{2n+1}$, on trouve $\lambda_0^{a,b} = \dfrac{\int_a^b (b-x)\Pi_n^2 d\alpha}{(b-a)\Pi_n^2(a)} > 0$.

• Pour le calcul de $\lambda_{n+1}^{a,b}$, on prend $f=(x-a)\Pi_n \in \mathbb{P}_{n+1}$ et on a $\lambda_{n+1}^{a,b}=\dfrac{\int_a^b (x-a)\Pi_n d\alpha}{(b-a)\Pi_n(b)}$.

Avec $f=(x-a)\Pi_n^2 \in \mathbb{P}_{2n+1}$, on trouve $\lambda_{n+1}^{a,b}=\dfrac{\int_a^b (x-a)\Pi_n^2 d\alpha}{(b-a)\Pi_n^2(b)}>0$.

• Pour le calcul de $\lambda_l^{a,b}$ $(1 \leq l \leq n)$, on choisit $(x-a)(b-x)\prod_{i\neq l}(x-y_i) \in \mathbb{P}_{n+1}$, et on trouve

$\lambda_l^{a,b}=\dfrac{\int_a^b (x-a)(b-x)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha}{(y_l-a)(b-y_l)\prod_{i\neq l}(y_l-y_i)}$.

Avec $f=(x-a)(b-x)\prod_{i\neq l}(x-y_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$, on a $\lambda_l^{a,b}=\dfrac{\int_a^b (x-a)(b-x)\prod_{i\neq l}(x-y_i)^2 d\alpha}{(y_l-a)(b-y_l)\prod_{i\neq l}(y_l-y_i)^2}>0$.

On donne ainsi le résultat

Proposition 5.5
Pour la méthode de Gauss-Lobatto

$$\int_a^b f\ d\alpha=\lambda_0^{a,b}f(a)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{a,b}f(y_k)+\lambda_{n+1}^{a,b}f(b)+R_n^{a,b}(f)$$

les poids sont strictement positifs.

5.2.4 Application au signe d'une classe de déterminants

• Avec le calcul de $\lambda_0^{a,b}$, on a $\dfrac{\int_a^b (b-a)\Pi_n d\alpha}{\Pi_n(a)(b-a)}>0$. Donc $\displaystyle\int_a^b (b-x)\Pi_n d\alpha$ est du signe de $(-1)^n$.

Écrivons la décomposition $(b-x)\Pi_n=-\Delta_{n+1}+\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\beta_i\Delta_i$.

On a ainsi $\displaystyle\int_a^b (b-x)\Pi_n d\alpha=\beta_0\int_a^b d\alpha$, on en conclut que β_0 est du signe de $(-1)^n$.

On va trouver β_0 avec le système $(\mathcal{S})$ $\left\{\begin{array}{l} \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_1)+\cdots+\beta_n\Delta_n(y_1)=\Delta_{n+1}(y_1) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(y_n)+\cdots+\beta_n\Delta_n(y_n)=\Delta_{n+1}(y_n) \\ \beta_0+\beta_1\Delta_1(b)+\cdots+\beta_n\Delta_n(b)=\Delta_{n+1}(b) \end{array}\right.$

Comme $det\ (\mathcal{S})=V(y_1,\ldots,y_n,b)\neq 0$, on a un système de Cramer et donc une solution unique pour β_0

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta_{n+1}(y_1) & \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n+1}(y_n) & \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_n(y_n) \\ \Delta_{n+1}(b) & \Delta_1(b) & \cdots & \Delta_n(b) \end{vmatrix}}{V(y_1,\dots,y_n,b)} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_n) \\ \Delta_1(b) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(b) \end{vmatrix}}{V(y_1,\dots,y_n,b)}.$$

D'où $\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_n) \\ \Delta_1(b) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(b) \end{vmatrix} > 0.$

• Avec le calcul de $\lambda_{n+1}^{a,b}$, on a $\dfrac{\int_a^b (x-a)\Pi_n d\alpha}{(b-a)\Pi_n(b)} > 0$. Donc $\displaystyle\int_a^b (x-a)\Pi_n d\alpha > 0$.

On a la décomposition $(x-a)\Pi_n = \Delta_{n+1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \beta_i \Delta_i$ et ainsi $\int_a^b (x-a)\Pi_n d\alpha = \beta_0 \int_a^b d\alpha$.

Avec le système $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} \beta_0 + \beta_1\Delta_1(a) + \cdots + \beta_n\Delta_n(a) = -\Delta_{n+1}(a) \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_1) + \cdots + \beta_n\Delta_n(y_1) = -\Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \beta_1(y_n) + \cdots + \beta_n\Delta_n(y_n) = -\Delta_{n+1}(y_n) \end{cases}$

de déterminant $V(a, y_1, \dots, y_n) \neq 0$, on a

$$\beta_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_{n+1}(a) & \Delta_1(a) & \cdots & \Delta_n(a) \\ \Delta_{n+1}(y_1) & \Delta_1(y_1) & \cdots & \Delta_n(y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n+1}(y_n) & \Delta_1(y_n) & \cdots & \Delta_n(y_n) \end{vmatrix}}{V(a,y_1,\cdots,y_n)} = (-1)^{n+1} \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(a) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_n) \end{vmatrix}}{V(a,y_1,\cdots,y_n)}.$$

D'où $\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(a) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_n) \end{vmatrix}$ du signe de $(-1)^{n+1}$.

• Avec le calcul de $\lambda_l^{a,b}$, on a $\displaystyle\int_a^b (x-a)(b-x)\prod_{i\neq l}(x-y_i)d\alpha$ est du signe de $(-1)^{n-l}$.

Avec $(x-a)(b-x)\displaystyle\prod_{i\neq l}(x-y_i) = -\Delta_{n+1} + \sum_{i=0}^{n}\beta_i\Delta_i$, on a que β_0 est du signe de $(-1)^{n-l}$.

Par des arguments similaires, on trouve que $\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(a) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_{l-1}) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_{l-1}) \\ \Delta_1(y_{l+1}) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_{l+1}) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \Delta_1(b) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(b) \end{vmatrix}$ est du signe de $(-1)^l$.

5.3 Généralisation

5.3.1 Traduction par les polynômes quasi-orthogonaux

Nous allons considérer m nœuds fixés supplémentaires distincts y_k^* que l'on choisira en dehors de $]a, b[$. Plus précisément, on distinguera leurs positions suivant les bornes de $]a, b[$, $y_1^* < \cdots < y_r^* < a$ et $b < y_{r+1}^* < \cdots < y_m^*$.

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(y_k) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^* f(y_k^*) + R_n(f).$$

On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n+m-1}[x]$, $R_n(f) = 0$.

En considérant $f(x) = (-1)^{m-r} x^i \prod_{i=1}^m (x - y_i^*) \Pi_n(x)$ (avec Π_n unitaire), on a
$\int_a^b (-1)^{m-r} x^i \prod_{i=1}^m (x - y_i^*) \Pi_n(x) d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, (n+m) - 1 - m$.
Ainsi, $\prod_{i=1}^m (x - y_i^*) \Pi_n$ est un polynôme quasi-orthogonal unitaire d'ordre m, de degré $n + m$, par rapport à la mesure $d\alpha$. On peut aussi remarquer que Π_n est un polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure positive modifiée $d\widetilde{\alpha} = (-1)^{m-r} \prod_{i=1}^m (x - y_i^*) d\alpha$ (ceci car $\prod_{i=r+1}^m (x - y_i^*)$ est du signe de $(-1)^{m-r}$ et $\prod_{i=1}^r (x - y_i^*) > 0$ sur $]a, b[$).
On trouvera, avec la même méthode que dans les paragraphes précédents, que les y_i sont les zéros de Π_n. Or Π_n est un polynôme orthogonal par rapport à la mesure postive $d\widetilde{\alpha}$, donc les y_i se trouvent dans l'intervalle $]a, b[$.

On a ainsi l'écriture $\prod_{i=1}^m (x - y_i^*) \Pi_n = \Delta_{n+m} + c_1 \Delta_{n+m-1} + \cdots + c_m \Delta_n$.

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} c_1\Delta_{n+m-1}(y_1^*)+\cdots+c_m\Delta_n(y_1^*) = -\Delta_{n+m}(y_1^*) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_1\Delta_{n+m-1}(y_m^*)+\cdots+c_m\Delta_n(y_m^*) = -\Delta_{n+m}(y_m^*) \end{array}\right.$$

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} \Delta_{n+m-1}(y_1^*) & \cdots & \Delta_n(y_1^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n+m-1}(y_m^*) & \cdots & \Delta_n(y_m^*) \end{vmatrix}$$

Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale entre les colonnes ($\lambda_1 C_1+\cdots+\lambda_m C_m = 0$), alors le polynôme, de degré au plus $(n+m-1)$, $\lambda_1\Delta_{n+m-1}(x)+\cdots+\lambda_m\Delta_n(x)$ s'annulerait en les noeuds $y_1^*,\ldots,y_m^*$.
C'est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre (au plus) $m-1$, donc il a au moins n racines dans $]a,b[$ (il reste au plus $m-1$ places hors de $]a,b[$).
Rappelons que les noeuds y_i^* ont été choisis en dehors de l'intervalle $]a,b[$, cette situation est donc impossible. Il n'existe donc pas de combinaison linéaire non triviale entre les colonnes, et le déterminant du système est donc $\neq 0$.

Proposition 5.6
Si l'on considère la quadrature $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(y_k) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^* f(y_k^*) + R_n(f)$ *avec les* y_i^* *choisis hors de* $]a,b[$, *on génère alors un unique polynôme quasi-orthogonal unitaire de degré* $n+m$ *et d'ordre* m

$$\prod_{i=1}^m (x-y_i^*)\Pi_n = \Delta_{n+m} + c_1\Delta_{n+m-1}+\cdots+c_m\Delta_n$$

où les c_i *sont donnés par les formules de Cramer dans le système précédent.*

Remarque 5.11
C'est bien un polynôme quasi-orthogonal d'ordre m *car* $c_m \neq 0$.

En effet, $c_m = \dfrac{\begin{vmatrix} -\Delta_{n+m}(y_1^*) & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1^*) \\ \vdots & & \vdots \\ -\Delta_{n+m}(y_m^*) & \cdots & \Delta_{n+1}(y_m^*) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta_{n+m-1}(y_1^*) & \cdots & \Delta_n(y_1^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n+m-1}(y_m^*) & \cdots & \Delta_n(y_m^*) \end{vmatrix}}$, *et par un raisonnement analogue, on montre que le numérateur ne s'annule pas.*

5.3.2 Calcul des poids

- Pour le calcul de λ_l^*, on va distinguer deux cas suivant l

$\longrightarrow$ pour $l \leq r$, on choisit $f = \Pi_n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(x-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{n+m-1}$

puis $f = \Pi_n^2 \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(x-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{2n+m-1}$, on a alors

$$\lambda_l^* = \frac{\int_a^b \Pi_n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(x-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\Pi_n(y_l^*) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(y_l^*-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-y_l^*)} = \frac{\int_a^b \Pi_n^2 \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(x-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\Pi_n^2(y_l^*) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(y_l^*-y_i^*) \prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-y_l^*)}.$$

Le signe du numérateur est > 0, par contre il y a un terme dans le dénominateur qui n'a pas un signe constant (par rapport à l) : $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(y_l^*-y_i^*)$.

En écrivant $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r}(y_l^*-y_i^*) = \prod_{i=1}^{l-1}(y_l^*-y_i^*) \prod_{i=l+1}^{r}(y_l^*-y_i^*)$, on a cette quantité du signe de $(-1)^{r-l}$ et a fortiori λ_l^* aussi.

$\longrightarrow$ pour $l \geq r+1$, on choisit $f = \Pi_n \prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{n+m-1}$

puis $f = \Pi_n^2 \prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{2n+m-1}$, on a alors

$$\lambda_l^* = \frac{\int_a^b \Pi_n \prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\Pi_n(y_l^*) \prod_{i=1}^{r}(y_l^*-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-y_l^*)} = \frac{\int_a^b \Pi_n^2 \prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\Pi_n^2(y_l^*) \prod_{i=1}^{r}(y_l^*-y_i^*) \prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-y_l^*)}.$$

Cette fois, c'est le terme $\prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-y_l^*)$ qui n'est pas de signe constant (par rapport à l).

En écrivant $\prod_{\substack{i=r+1\\ \neq l}}^{m}(y_i^*-y_l^*) = \prod_{i=r+1}^{l-1}(y_i^*-y_l^*) \prod_{i=l+1}^{m}(y_i^*-y_l^*)$, on remarque qu'il est du signe de $(-1)^{l-r+1}$, a fortiori λ_l^* aussi.

• Pour le calcul de λ_l, on choisit $f = \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{n+m-1}$ puis

$f = \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)^2\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x) \in \mathbb{P}_{2n+m-2}$, on a alors

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \frac{\int_a^b \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(y_l-y_i)\prod_{i=1}^{r}(y_l-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-y_l)}\\ &= \frac{\int_a^b \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)^2\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)d\alpha}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(y_l-y_i)^2\prod_{i=1}^{r}(y_l-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-y_l)}\end{aligned}$$

Ainsi tous les poids λ_l sont > 0.

Proposition 5.7
Pour la méthode de quadrature suivante

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(y_k) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* f(y_k^*) + R_n(f)$$

on a
(i) $\forall 1 \leq l \leq n,\ \lambda_l > 0$.
(ii) $\forall 1 \leq l \leq r,\ \lambda_l^*$ *est du signe de* $(-1)^{r-l}$.
(iii) $\forall r+1 \leq l \leq m,\ \lambda_l^*$ *est du signe de* $(-1)^{l-r+1}$.

5.3.3 Application au signe de certains déterminants

• Avec le calcul de λ_l, on a $\int_a^b \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)$ du signe de $\prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(y_l-y_i)$, c'est-à-dire du signe de $(-1)^{n-l}$.

On a la décomposition $\prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x) = (-1)^{m-r}\Delta_{n+m-1} + \sum_{i=0}^{n+m-2}\beta_i\Delta_i$.

Ainsi $\int_a^b \prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}(x-y_i)\prod_{i=1}^{r}(x-y_i^*)\prod_{i=r+1}^{m}(y_i^*-x)d\alpha = \beta_0\int_a^b d\alpha$ et donc β_0 est du signe de $(-1)^{n-l}$.

Avec le système $\left\{\begin{array}{l} \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_1^*) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_1^*) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_1^*) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_r^*) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_r^*) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_r^*) \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_1) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_1) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_1) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_{l-1}) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_{l-1}) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_{l-1}) \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_{l+1}) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_{l+1}) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_{l+1}) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_n) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_n) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_n) \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_{r+1}^*) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_{r+1}^*) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_{r+1}^*) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 + \beta_1\Delta_1(y_m^*) + \cdots + \beta_{n+m-2}\Delta_{n+m-2}(y_m^*) = (-1)^{m+1-r}\Delta_{n+m-1}(y_m^*) \end{array}\right.$

de déterminant $= V(y_1^*, \cdots, y_r^*, y_1, \cdots, y_{l-1}, y_{l+1}, \cdots, y_n, y_{r+1}^*, \cdots, y_m^*) \neq 0$ (et même > 0), on trouve

$$\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1^*) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_r^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_r^*) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_n) \\ \Delta_1(y_{r+1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{r+1}^*) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_m^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_m^*) \end{vmatrix} \text{ est du signe de } (-1)^{n+l+r+1}.$$

- Avec le calcul de λ_l^* :

$\longrightarrow$ pour $l \leq r$, on trouve $\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_{l-1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{l-1}^*) \\ \Delta_1(y_{l+1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{l+1}^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_r^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_r^*) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_n) \\ \Delta_1(y_{r+1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{r+1}^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_m^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_m^*) \end{vmatrix}$ est du signe de $(-1)^{r+1}$.

$\longrightarrow$ pour $l \geq r+1$, on trouve $\begin{vmatrix} \Delta_1(y_1^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_r^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_r^*) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_1) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_n) \\ \Delta_1(y_{r+1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{r+1}^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_{l-1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{l-1}^*) \\ \Delta_1(y_{l+1}^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_{l+1}^*) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \Delta_1(y_m^*) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{n+m-1}(y_m^*) \end{vmatrix}$

est du signe de $(-1)^{r+n}$.

5.4 Quadrature de Gauss-Turán pour une racine double

Dans cette section, on ne se contente plus de considérer uniquement les nœuds fixés pour générer une méthode de quadrature mais on y introduit également leurs dérivées successives.
Dans ce premier paragraphe, nous allons nous intéresser au signe des poids pour une méthode de quadrature où nous avons ajouté le nœud a (raisonnement analogue pour b) avec sa valeur pour f et pour f'.
Nous allons alors montrer que tous les poids de cette méthode sont strictement positifs.
On pourrait alors conjecturer quant à la stricte positivité des poids pour une méthode de Gauss-

Turán plus générale du type

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=0}^{p_s} \mu_s^k f^{(k)}(z_s) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

mais il n'en est rien.
Nous allons tout de même réussir à dégager un résultat significatif sur les signes des différents poids qui sera lié à la position des nœuds fixés au départ par rapport à l'intervalle d'intégration $[a, b]$.
Il est important de remarquer que de telles méthodes existent bien, comme il a déjà été prouvé par Turán [33] ou Stancu [31].

La détermination du signe des poids dans les méthodes de quadrature de Turán a été traité par Ossicini et Rosati dans [23] à la différence où ils considèrent la quadrature sur $\mathbb{R}$ tout entier et obtiennent alors la positivité de tous les poids μ_s^{2k}.

Dans les paragraphes 5.4.1 et 5.5.1, nous établirons le lien entre les nœuds de la quadrature et les zéros d'un certain polynôme quasi-orthogonal. On pouvait déjà lire dans [33] et [31] que les noeuds libres étaient les zéros d'un polynôme orthogonal par rapport à une mesure modifiée, ce qui revient donc à un polynôme quasi-orthogonal (Théorème 2.2). Notre apport réside dans le fait de l'utilisation de ce polynôme quasi-orthogonal et de son écriture développée par rapport aux polynômes orthogonaux Δ_k pour justifier l'existence et l'unicité de cette méthode de quadrature.

5.4.1 Traduction par les polynômes quasi-orthogonaux

Nous allons considérer une méthode de quadrature où nous ajoutons un point fixé a (ou b) de cette façon

$$\int_a^b f d\alpha = \lambda_0 f(a) + \lambda_0' f'(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f).$$

On a le reste qui doit vérifier, $\forall f \in \mathbb{P}_{2n+1}[x]$, $R_n(f) = 0$.
Avec $f(x) = x^i (x-a)^2 \Pi_n(x)$ (où Π_n est unitaire), on a : $\displaystyle\int_a^b x^i (x-a)^2 \Pi_n(x) d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-1 = (n+2)-1-2$.

Ainsi $(x-a)^2 \Pi_n(x)$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2 par rapport à la mesure positive $d\alpha$ (ou Π_n est un polynôme orthogonal par rapport à la mesure positive $(x-a)^2 d\alpha$).
De la même manière que dans les paragraphes précédents, on en déduit que $y_1, \ldots, y_n$ sont les racines de Π_n. Comme Π_n est orthogonal par rapport à la mesure positive $d\widetilde{\alpha}$, ses racines $y_i \in]a, b[$.

On a aussi l'écriture : $(x-a)^2 \Pi_n(x) = \Delta_{n+2} + a_{n+2} \Delta_{n+1} + b_{n+2} \Delta_n$.

Pour trouver les coefficients a_{n+2} et b_{n+2}, il nous suffit de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+2}\Delta_{n+1}(a) + b_{n+2}\Delta_n(a) = -\Delta_{n+2}(a) \\ a_{n+2}\Delta'_{n+1}(a) + b_{n+2}\Delta'_n(a) = -\Delta'_{n+2}(a) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est $\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a)$.

1re méthode : on utilise la formule de Christoffel-Darboux :

$$\Delta_n(x)\Delta'_{n+1}(x) - \Delta_{n+1}(x)\Delta'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c(\Delta_n^2)}{c(\Delta_i^2)}\Delta_i^2(x)$$

Ainsi : $\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c(\Delta_n^2)}{c(\Delta_i^2)}\Delta_i^2(a) < 0$ où $c(\Delta_i) = \displaystyle\int_a^b \Delta_i d\alpha$.
Donc le déterminant est $\neq 0$.

2e méthode : Remarquons que $\left(\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)' = \dfrac{\Delta'_{n+1}\Delta_n - \Delta'_n\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}$.
La fonction $\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ s'annule pour la 1re fois en $x_{1,n+1}$ et tend vers $-\infty$ en $-\infty$; donc, comme $a < x_{1,n+1}$, $f'(a) > 0$ soit $\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a) < 0$ (a fortiori $\neq 0$).

C'est plus qu'il n'en faut pour conclure que le système est de Cramer et :

$$a_{n+2} = \frac{\Delta'_{n+2}(a)\Delta_n(a) - \Delta_{n+2}(a)\Delta'_n(a)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a)}$$

$$b_{n+2} = \frac{\Delta'_{n+1}(a)\Delta_{n+2}(a) - \Delta_{n+1}(a)\Delta'_{n+2}(a)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a)}$$

Remarquons que ces coefficients a_{n+2} et b_{n+2} peuvent s'écrire de manière différente,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{\Delta'_{n+2}(a)\Delta_n(a) - \Delta_{n+2}(a)\Delta'_n(a)}{\Delta_n^2(a)} \times \frac{\Delta_n^2(a)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a)} \\ &= -\left(\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_n}\right)'(a) \times \frac{1}{\left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)'(a)}. \\ b_{n+2} &= \frac{\Delta'_{n+1}(a)\Delta_{n+2}(a) - \Delta_{n+1}(a)\Delta'_{n+2}(a)}{\Delta_{n+1}^2(a)} \times \frac{\Delta_{n+1}^2(a)}{\Delta_{n+1}(a)\Delta'_n(a) - \Delta_n(a)\Delta'_{n+1}(a)} \\ &= -\left(\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}\right)'(a) \times \frac{1}{\left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right)'(a)}. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles formes d'écriture, nous allons pouvoir déterminer le signe des coefficients a_{n+2} et b_{n+2}.

$\longrightarrow$ Pour le signe de a_{n+2}, nous allons considérer les fonctions $\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ et $\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_n}$.

Étudions la fonction $\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ pour $x < x_{1,n}$ (1^{re} valeur où la fonction n'est pas définie). Elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et s'annule une unique fois en $x_{1,n+1}$. De plus cette fonction est strictement croissante, ceci grâce à la formule de Christoffel-Darboux $\Delta_n(x)\Delta'_{n+1}(x) - \Delta_{n+1}(x)\Delta'_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c(\Delta_n^2)}{c(\Delta_i^2)}\Delta_i^2(x)$, donc la valeur de sa dérivée en a est > 0.

Pour le signe de $\left(\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_n}\right)'(a)$, on écrit

$\left(\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_n}\right)'(a) = \left(\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}} \times \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)'(a) = \left(\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}\right)'(a) \times \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}(a) + \dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}(a) \times \left(\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)'(a) < 0$, ceci car $\left(\dfrac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}\right)'(a)$ et $\left(\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)'(a)$ sont > 0 d'après l'étude précédente.

Donc $a_{n+2} > 0$.

$\longrightarrow$ Pour le signe de b_{n+2}, avec des arguments similaires, on trouve $b_{n+2} > 0$.

Proposition 5.8

Le polynôme quasi-orthogonal généré par cette méthode de quadrature de Gauss-Turán avec une racine double est unique, et les coefficients a_{n+2} et b_{n+2} sont > 0.

Remarque 5.12

On pouvait prévoir que $b_{n+2} > 0$ car si $b_{n+2} < 0$ on aurait eu $n + 2$ racines réelles et distinctes pour le polynôme quasi-orthogonal d'ordre 2, or nous avons, ici, une racine double.

5.4.2 Calcul des poids

- Pour le calcul de λ'_0, on prend $f = (x-a)\Pi_n \in \mathbb{P}_{n+1}$ puis $f = (x-a)\Pi_n^2 \in \mathbb{P}_{2n+1}$, et on trouve

$$\lambda'_0 = \frac{\int_a^b (x-a)\Pi_n d\alpha}{\Pi_n(a)} = \frac{\int_a^b (x-a)\Pi_n^2 d\alpha}{\Pi_n^2(a)} > 0.$$

- Pour le calcul de λ_0, on prend $f = \Pi_n \in \mathbb{P}_n$ puis $f = \Pi_n^2 \in \mathbb{P}_{2n}$, on trouve

$$\lambda_0 = \frac{\int_a^b \Pi_n d\alpha - \lambda'_0 \Pi'_n(a)}{\Pi_n(a)} = \frac{\int_a^b \Pi_n^2 d\alpha - 2\lambda'_0\Pi'_n(a)\Pi_n(a)}{\Pi_n^2(a)} > 0.$$

Nous pouvons conclure quant à la stricte positivité de λ_0 car, en distinguant les cas suivant la parité de n, on trouve que $\Pi'_n(a)\Pi_n(a) < 0$.

- Pour le calcul de λ_l $(1 \leq l \leq n)$, on prend $f = (x-a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (x - y_i) \in \mathbb{P}_{n+1}$

puis $f = (x-a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (x - y_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$, on trouve alors

$$\lambda_l = \frac{\int_a^b (x-a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (x-y_i) d\alpha}{(y_l - a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (y_l - y_i)} = \frac{\int_a^b (x-a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (x-y_i)^2 d\alpha}{(y_l - a)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} (y_l - y_i)^2} > 0.$$

D'où la proposition suivante

Proposition 5.9
Pour la méthode de quadrature de Gauss-Turán

$$\int_a^b f d\alpha = \lambda_0 f(a) + \lambda_0' f'(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

les poids sont strictement positifs.

5.4.3 Application au calcul de certains déterminants

Avec le calcul de λ_0', on trouve que $\begin{vmatrix} \Delta_1(a) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(a) \\ \Delta_1(y_1) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta_1(y_n) & \cdots & \cdots & \Delta_{n+1}(y_n) \end{vmatrix} < 0.$

5.5 Quadrature de Gauss-Turán : cas général

5.5.1 Traduction par les polynômes quasi-orthogonaux

On considère m nœuds fixés z_i que l'on choisira en dehors de $]a, b[$ avec des multiplicités différentes $p_s + 1$. Plus précisément, on distinguera leurs positions suivant les bornes de $]a, b[$, $z_1, \ldots, z_r < a$ et $b < z_{r+1} < \cdots < z_m$.

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=0}^{p_s} \mu_s^k f^{(k)}(z_s) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n+p_1+\cdots+p_m+m-1}[x]$, $R_n(f) = 0$.
Avec $f(x) = (-1)^{\sum_{k=r-1}^{m}(p_k+1)} x^i \prod_{k=1}^{m} (x - z_k)^{p_k+1} \Pi_n(x)$ (avec Π_n unitaire), on a

$\displaystyle\int_a^b x^i \prod_{k=1}^{m}(x-z_k)^{p_k+1}\Pi_n(x)d\alpha(x) = 0$ pour $i = 0, \ldots, (n+p_1+\cdots+p_m+m)-1-(p_1+\cdots+p_m+m) = n-1$.

Ainsi, $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(x-z_k)^{p_k+1}\Pi_n$ est un polynôme quasi-orthogonal d'ordre $p_1+\cdots+p_m+m$, de degré $p_1+\cdots+p_m+m+n$, par rapport à la mesure positive $d\alpha$.
On peut aussi remarquer que Π_n est un polynôme orthogonal, de degré n, par rapport à la mesure positive modifiée $d\widetilde{\alpha} = (-1)^{\sum_{k=r-1}^{m}(p_k+1)}\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(x-z_k)^{p_k+1}d\alpha$.
On trouvera que les y_i sont les zéros du polynôme Π_n. Or Π_n est un polynôme orthogonal par rapport à la mesure positive $d\widetilde{\alpha}$, donc les y_i se trouvent dans l'intervalle $]a,b[$.

On a ainsi l'écriture

$$\prod_{k=1}^{m}(x-z_k)^{p_k+1}\Pi_n(x) = \Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m} + c_1\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1} + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta_n$$

puis le système donnant les coefficients c_i

$$\left\{\begin{array}{l}
c_1\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_1) + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta_n(z_1) = -\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m}(z_1)\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
c_1\Delta^{(p_1)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_1) + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta^{(p_1)}_n(z_1) = -\Delta^{(p_1)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m}(z_1)\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
c_1\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_m) + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta_n(z_m) = -\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m}(z_m)\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
c_1\Delta^{(p_m)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_m) + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta^{(p_m)}_n(z_m) = -\Delta^{(p_m)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m}(z_m)
\end{array}\right.$$

aura pour déterminant

$$\begin{vmatrix}
\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_1) & \cdots & \Delta_n(z_1)\\
\vdots & & \vdots\\
\Delta^{(p_1)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_1) & \cdots & \Delta^{(p_1)}_n(z_1)\\
\vdots & & \vdots\\
\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_m) & \cdots & \Delta_n(z_m)\\
\vdots & & \vdots\\
\Delta^{(p_m)}_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(z_m) & \cdots & \Delta^{(p_m)}_n(z_m)
\end{vmatrix}$$

Ce déterminant est différent de 0 pour une considération analogue de combinaison linéaire.
En effet, supposons que le déterminant soit nul, c'est-à-dire qu'on ait une combinaison linéaire

(non triviale) $\lambda_0\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1}(x)+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_m+m-1}\Delta_n(x)$ qui s'annule en les noeuds z_k avec la multiplicité p_k.
Comme c'est un polynôme quasi-orthogonal, de degré (au plus) $n+p_1+\cdots+p_m+m-1$, d'ordre (au plus) $p_1+\cdots+p_m+m-1$, donc il a au moins n racines dans $]a,b[$ (il reste au plus $p_1+\cdots+p_m+m-1$ places - multiplicités comprises - hors de $]a,b[$).
Rappelons que les nœuds z_k de multiplicité p_k+1 ont été choisis en dehors de l'intervalle $]a,b[$, cette situation est donc impossible. Il n'existe donc pas de combinaison linéaire non triviale entre les colonnes, et le déterminant du système est $\neq 0$.

Proposition 5.10
Si l'on considère la quadrature $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=0}^{p_s}\mu_s^k f^{(k)}(z_s) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(y_k) + R_n(f)$ *avec les* z_i *choisis hors de* $]a,b[$, *on génère alors un unique polynôme quasi-orthogonal unitaire d'ordre* $p_1+\cdots+p_m+m$

$$\prod_{k=1}^{m}(x-z_k)^{p_k+1}\Pi_n(x) = \Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m} + c_1\Delta_{n+p_1+\cdots+p_m+m-1} + \cdots + c_{p_1+\cdots+p_m+m}\Delta_n$$

où les c_i *sont donnés par les formules de Cramer.*

Remarque 5.13
Comme précédemment, le polynôme quasi-orthogonal est bien d'ordre $p_1+\cdots+p_m+m$ *car* $c_{p_1+\cdots+p_m+m}\neq 0$.

5.5.2 Calcul des poids

• Pour le calcul de λ_l, on prend $f = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(x-z_k)^{p_k+1}\prod_{k=r+1}^{m}(z_k-x)^{p_k+1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(x-y_k)^2 \in \mathbb{P}_{2n+p_1+\cdots+p_m+m-2}$.

On trouve alors

$$\lambda_l = \frac{\int_a^b \prod_{k=1}^{r}(x-z_k)^{p_k+1}\prod_{k=r+1}^{m}(z_k-x)^{p_k+1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(x-y_k)^2 d\alpha}{\prod_{k=1}^{r}(y_l-z_k)^{p_k+1}\prod_{k=r+1}^{m}(z_k-y_l)^{p_k+1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(y_l-y_k)^2} > 0.$$

• Pour le calcul de $\mu_l^{p_l}$, il nous faudra distinguer la position du nœud $\mu_l^{p_l}$ par rapport à l'intervalle $[a,b]$.

$\longrightarrow$ pour $l\leq r$, on prend $f = \Pi_n^2\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{r}(x-z_k)^{p_k+1}(x-z_l)^{p_l}\prod_{k=r+1}^{m}(z_k-x)^{p_k+1} \in \mathbb{P}_{p_1+\cdots+p_m+m-1}$, et

on obtient

$$\mu_l^{p_l} = \frac{\int_a^b \Pi_n^2(x) \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^r (x-z_k)^{p_k+1}(x-z_l)^{p_l} \prod_{k=r+1}^m (z_k-x)^{p_k+1} d\alpha}{(p_l)!\Pi_n^2(z_l) \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^r (z_l-z_k)^{p_k+1} \prod_{k=r+1}^m (z_k-z_l)^{p_k+1}}.$$

Le signe de $\mu_l^{p_l}$ dépend de celui de $\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{r}(z_l-z_k)^{p_k+1} = \prod_{k=1}^{l-1}(z_l-z_k)^{p_k+1} \prod_{k=l+1}^{r}(z_l-z_k)^{p_k+1}$ qui est $(-1)^{p_{l+1}+\cdots+p_r+r-l}$.

Remarque 5.14
Si la multiplicité de tous les nœuds est égale à 1, alors on retrouve le résultat du signe des poids du paragraphe 5.3.

$\longrightarrow$ pour $l \geq r+1$, on prend $f = \Pi_n^2 \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(x-z_k)^{p_k+1} \prod_{\substack{k=r+1\\k\neq l}}^{m}(z_k-x)^{p_k+1}(z_l-x)^{p_l}$, et on a

$$\mu_l^{p_l} = \frac{\int_a^b \Pi_n^2(x) \prod_{k=1}^r (x-z_k)^{p_k+1} \prod_{\substack{k=r+1\\k\neq l}}^m (z_k-x)^{p_k+1}(z_l-x)^{p_l} d\alpha(x)}{(-1)^{p_l}(p_l)!\Pi_n^2(z_l) \prod_{k=1}^r (z_l-z_k)^{p_k+1} \prod_{\substack{k=r+1\\k\neq l}}^m (z_k-z_l)^{p_k+1}}.$$

Le signe de $\mu_l^{p_l}$ dépend de celui de $\displaystyle\prod_{\substack{k=r+1\\k\neq l}}^{m}(z_k-z_l)^{p_k+1}$ qui est $(-1)^{p_{r+1}+\cdots+p_{l-1}+l-r+1}$.

Remarque 5.15
De même, si la multiplicité de tous les nœuds est égale à 1, alors on retrouve le résultat du signe des poids du paragraphe 5.3.

Remarque 5.16
On pourrait obtenir les autres poids par un calcul descendant c'est-à-dire qu'une fois trouvé le poids $\mu_l^{p_l}$, il est possible de calculer (en fonction de ce dernier) $\mu_l^{p_l-1}$.
En effet, il suffira de prendre (dans le cas où $l \leq r$) $f = \Pi_n \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{r}(x-z_k)^{p_k+1}(x-z_l)^{p_l-1} \prod_{k=r+1}^{m}(z_k-x)^{p_k+1}$.

Proposition 5.11
Pour la méthode de Gauss-Turán généralisée

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=0}^{p_s} \mu_s^k f^{(k)}(z_s) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

on a
(i) $\forall 1 \leq l \leq n,\ \lambda_l > 0.$
(ii) $\forall 1 \leq l \leq r,\ \mu_l^{p_l}$ *est du signe de* $(-1)^{p_{l+1}+\cdots+p_r+r-l}$.
(iii) $\forall r+1 \leq l \leq m,\ \mu_l^{p_l}$ *est du signe de* $(-1)^{p_{r+1}+\cdots+p_{l-1}+l-r+1}$.

5.6 Calculs pour des familles de polynômes

5.6.1 Les polynômes de Jacobi

Rappelons brièvement ce dont nous avons besoin.
Les polynômes de Jacobi vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} x^i P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx = 0 \tag{5.1}$$

pour $i = 0, \ldots, n-1$ ($\alpha > -1,\ \beta > -1$).
La mesure positive est donc ici $(1+x)^\beta(1-x)^\alpha dx$.
Ils comportent comme cas particuliers les polynômes de Legendre ($P_n = P_n^{(0,0)}$), les polynômes de Tchebycheff ($T_n = P_n^{(-1/2,-1/2)}$) et les polynômes de Gegenbauer ($C_n^\alpha = c_n^\alpha P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}$).

On a $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$ et $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \begin{pmatrix} n+\beta \\ n \end{pmatrix}$.

Le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ est

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}\Delta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta)}\Delta_n^{(\alpha,\beta)} = \mu_n\Delta_n^{(\alpha,\beta)}$$

où $\Delta_n^{(\alpha,\beta)}$ est unitaire.

Si on reprend la quadrature de Gauss-Radau, nous avions trouvé

$$B_{n+1} + a_{n+1} = B_{n+1} - \frac{\Delta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(a)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(a)} = C_{n+1}\frac{\Delta n-1^{(\alpha,\beta)}(a)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(a)} - a$$

où $\Delta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = (x+B_{n+1})\Delta_n^{(\alpha,\beta)} - C_{n+1}\Delta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ et $R_{n+1,1} = \Delta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} + a_{n+1}\Delta_n^{(\alpha,\beta)}$ le polynôme quasi-orthogonal d'ordre 1 généré par la méthode de quadrature de Gauss-Radau avec $a = -1$.
Ainsi : $B_{n+1} + a_{n+1} = B_{n+1} - \dfrac{\Delta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(-1)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(-1)} = C_{n+1}\dfrac{\Delta_{n-1}^{\alpha,\beta)}(-1)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(-1)} + 1.$
Comme $\Delta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = (x+B_{n+1})\Delta_n^{(\alpha,\beta)} - C_{n+1}\Delta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$, on a $\dfrac{1}{\mu_{n+1}}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = (x+B_{n+1})\dfrac{1}{\mu_n}P_n^{(\alpha,\beta)} - \dfrac{C_{n+1}}{\mu_{n-1}}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$
d'où

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = (x+B_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)} - C_{n+1}\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \tag{5.2}$$

En prenant dans (5.2) $x = 1$ et $x = -1$ on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{n+1}P_n^{(\alpha,\beta)}(1) - C_{n+1}\frac{k_n}{k_{n-1}}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) - P_n^{(\alpha,\beta)}(1) \\ B_{n+1}P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) - C_{n+1}\frac{k_n}{k_{n-1}}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{k_n}{k_{n+1}}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(-1) + P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) \end{array} \right.$$

Le déterminant du système vaut $-\dfrac{k_n}{k_{n-1}}\begin{vmatrix} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) & P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1) \\ P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) & P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1) \end{vmatrix}$.

On a $\dfrac{k_{n-1}}{k_n} = 2\dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} = \dfrac{2n(n+\alpha+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}$.

Après simplifications, on trouve que le déterminant du système est

$$(-1)^n\frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta-1)\Gamma(n+1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Par les formules de Cramer, on trouve

$$C_{n+1} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)}$$

De plus $\dfrac{\Delta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(-1)} = \dfrac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\dfrac{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)} = -\dfrac{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}{2(n+\alpha+\beta-1)(n+\beta)}$.

Ainsi

$$B_{n+1} + a_{n+1} = C_{n+1}\frac{\Delta_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1)}{\Delta_n^{(\alpha,\beta)}(-1)} + 1 = \frac{2n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} + 1$$

(coefficient qu'on retrouve dans le déterminant définissant le polynôme quasi-orthogonal)

5.6.2 Les polynômes de Laguerre

Les polynômes généralisés de Laguerre vérifient la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_0^{+\infty} x^i L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = 0, \quad i = 0, ..., n-1, \quad \alpha > -1, \quad n \geq 1$$

On a aussi l'écriture :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-k+1)}x^{n-k}, \quad n \geq 0.$$

On notera $L_n^\alpha = \dfrac{(-1)^n}{n!}\Delta_n^\alpha$.

Ainsi : $\dfrac{(-1)^n}{(n+2)!}\Delta_{n+2}^\alpha = \dfrac{1}{n+2}(-x+2n+\alpha+3)\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\Delta_{n+1}^\alpha - \dfrac{n+\alpha+1}{n+2}\dfrac{(-1)^n}{n!}\Delta_n^\alpha$

$$\Delta_{n+2}^\alpha = (x-2n-\alpha-3)\Delta_{n+1}^\alpha - (n+\alpha+1)(n+1)\Delta_n^\alpha$$

Donc $B_{n+1} = -2n - \alpha - 1$.
$B_{n+1} + a_{n+1} = B_{n+1} - \dfrac{\Delta_{n+1}^{\alpha}(0)}{\Delta_n^{\alpha}(0)} = -2n - \alpha - 1 + (n+1)\dfrac{L_{n+1}^{\alpha}(0)}{L_n^{\alpha}(0)} = -2n - \alpha - 1 + n + \alpha + 1 = -n.$

Chapitre 6

Positivité des poids dans les méthodes généralisées de Gauss-Radau et Gauss-Lobatto

Nous allons considérer les méthodes généralisées de Gauss-Radau et de Gauss-Lobatto. Ces méthodes généralisent celles de Gauss-Radau ou de Gauss-Lobatto que l'on a pu étudier dans le Chapitre 5 dans le sens où elles font intervenir les valeurs en l'une ou les deux extrémités de l'intervalle d'étude (suivant que l'on soit sur $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$) ainsi que celles des dérivées successives en ces points jusqu'à un ordre fixé $r - 1$.

Les formules généralisées de Gauss-Radau sont des formules de type-Gauss, c'est-à-dire que le degré d'exactitude de la formule est aussi grand que possible. Elles sont de la forme

$$\int_a^{+\infty} f d\alpha = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_0^{(k)} f^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité du nœud a et $d\alpha$ une mesure positive (bornée ou pas) dont le support est contenu dans $[a, +\infty[$.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+r}[x]$, $R_n(f) = 0$.
Ici, $\mathbb{P}_m$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq m$.
Les nœuds intérieurs y_k et les poids λ_k, $\lambda_0^{(s)}$ dépendent de n et de r.
On sait que (d'après l'étude faite au paragraphe 5.5) les nœuds y_k sont dans l'intervalle $]a, +\infty[$ (en tant que racines d'un polynôme orthogonal par rapport à la mesure modifiée $(x - a)^r d\alpha$ sur $]a, +\infty[$).

Pour les formules généralisées de Gauss-Lobatto le support de la mesure $d\alpha$ est contenu dans un intervalle fini $[a, b]$, $a < b$, ce qui nous donne

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_0^{(k)} f^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \lambda_{n+1}^{(k)} f^{(k)}(b) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité des nœuds a et b, et $d\alpha$ une mesure positive dont le support est contenu dans $[a, b]$.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+2r}[x]$, $R_n(f) = 0$.
On sait que les nœuds y_k sont dans $]a, b[$ (en tant que zéros d'un polynôme orthogonal par rapport à la mesure modifiée $(x-a)^r(b-x)^r d\alpha$ sur (a, b)).

Pour ces deux types de méthode, il est connu que [20, Theorems 3.9 and 3.12] tous les poids internes, λ_k, sont strictement positifs. W. Gautschi a également montré que tous les noeuds de ces méthodes étaient strictement positifs pour le cas $r = 2$.
Le cas $r > 2$ est resté ouvert mais des tests numériques ([18]) ont pu montré que ces nœuds restaient strictement positifs pour les mesures généralisées de Jacobi et de Laguerre où l'on faisait varier le ou les paramètres définissant ces mesures ainsi que le degré n et l'ordre de multiplicité r.

Par des arguments utilisant des techniques d'algèbre linéaire, et par une approche mettant en avant l'évaluation du signe plutôt que la caractérisation propre des poids par le calcul, nous allons montrer que pour ces deux méthodes tous les nœuds sont bien strictement positifs.
L'idée essentielle repose sur le fait que nous transposons le problème de la recherche des signes des différents poids en introduisant la recherche d'une certaine fonction qui, par ses propriétés, nous donnera le signe d'un poids.

6.1 Méthode généralisée de Gauss-Radau

Rappelons tout d'abord la forme de ces quadratures

$$\int_a^{+\infty} f d\alpha = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_0^{(k)} f^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité du nœud a et $d\alpha$ une mesure positive.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+r}[x]$, $R_n(f) = 0$.

Théorème 6.1
Tous les poids de la méthode généralisée de Gauss-Radau sont strictement positifs.

Preuve

• Pour le signe de λ_l $(1 \leq l \leq n)$, on prend $f(x) = (x-a)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (x-y_k)^2$ et on a

$$\lambda_l = \frac{\int_a^{+\infty} (x-a)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (x-y_k)^2 d\alpha}{(y_l-a)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (y_l-y_k)^2} > 0.$$

On a ainsi la stricte positivité des poids λ_l pour $1 \leq l \leq n$.

• Pour montrer que $\lambda_0^{(r-l)} > 0$, avec $1 \leq l \leq r$, il nous suffit de trouver une fonction $f \in \mathbb{P}_{2n-1+r}[x]$ telle que

$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_1)$ $f \geq 0$ sur $[a, +\infty[$ (ce qui nous donnera $\displaystyle\int_a^{+\infty} f d\alpha > 0$)
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_2)$ $f(a) = \cdots = f^{(r-l-1)}(a) = f^{(r-l+1)}(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a) = 0$
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_3)$ $\forall 1 \leq l \leq n,\ f(y_l) = f'(y_l) = 0$
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_4)$ $f^{(r-l)}(a) > 0$

Considérons la forme $f(x) = (x-a)^{r-l} P^2(x) R_{l-1}(x)$ où R_{l-1} est la $(l-1)$-ème somme partielle du développement de Taylor de la fonction $\dfrac{1}{P^2}$ au point a et $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-y_i)$.

On peut alors écrire $R_{l-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]}$.

Nous allons vérifier que cette fonction satisfait bien toutes les hypothèses $(\mathcal{H}_i)$ qui nous amèneront à la stricte positivité des poids $\lambda_0^{(r-l)}$.

Pour la vérification de $(\mathcal{H}_1)$, montrons dans un premier temps que le polynôme R_{l-1} est positif sur $[a, +\infty[$. Pour ceci, voici un lemme

Lemme 6.1
Pour tout polynôme P unitaire de degré $n \geq 1$ avec n racines $> a$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} > 0$$

Preuve
On va procéder par récurrence sur le degré n de P.
$\rightarrow$ pour $n = 1$, on a $\dfrac{1}{P^2(x)} = \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$ et donc $\left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \dfrac{(-1)^k (k+1)!}{(a-\alpha)^{k+2}} > 0$ car $a - \alpha < 0$.
C'est donc vérifié.

$\rightarrow$ Supposons la proposition vraie à l'ordre n fixé, et montrons-la à l'ordre $n+1$.
Soit $Q(x) = (x-\alpha)P(x)$ où P est de degré n et a n racines $> a$, et on prend $\alpha > a$.
On a avec la formule de Leibniz
$$\left(\frac{1}{Q^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \left(\frac{1}{(x-\alpha)^2P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(l)}_{[x=a]} \left(\frac{1}{(x-\alpha)^2}\right)^{(k-l)}_{[x=a]} > 0. \blacksquare$$
La positivité des quantités $\left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} > 0$ nous donne trivialement la positivité du polynôme R_{l-1} (car $x-a \geq 0$) sur $[a,+\infty[$. Et ainsi f est bien positive sur $[a,+\infty[$.

Les conditions $f(a) = \cdots = f^{(r-l-1)}(a) = 0$ dans $(\mathcal{H}_2)$ sont immédiates car on a un facteur $(x-a)^{r-l}$ dans f. Reste à vérifier que $f^{(r-l+1)}(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a) = 0$.
Pour ceci, remarquons tout d'abord que R_{l-1} étant la $(l-1)$-ème somme partielle du développement de Taylor de $\dfrac{1}{P^2}$ au point a, on a $R_{l-1}^{(k)}(a) = \left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]}$.
$$\begin{aligned} \text{On a } \forall s = 1,\ldots,l-1,\ f^{(r-l+s)}(a) &= \sum_{k=0}^{r-l+s} C_{r-l+s}^k \left((x-a)^{r-l}\right)^{(k)}_{[x=a]} (P^2R_{l-1}(x))^{(r-l+s-k)}_{[x=a]} \\ &= C_{r-l+s}^s (r-l)!(P^2R_{l-1}(x))^{(s)}_{[x=a]}. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{Or } (P^2R_{l-1}(x))^{(s)}_{[x=a]} &= \sum_{k=0}^{s} C_s^k (P^2)^{(k)}(a) R_{l-1}^{(s-k)}(a) = \sum_{k=0}^{s} C_s^k (P^2)^{(k)}(a) \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(s-k)}_{[x=a]} \\ &= \left(P^2 \times \frac{1}{P^2}(x)\right)^{(s)}_{[x=a]} = 0 \text{ d'après la formule de Leibniz.} \end{aligned}$$
Dès lors, toutes les quantités $f^{(r-l+1)}(a),\ldots,f^{(r-1)}(a)$ sont bien nulles, et l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est bien vérifiée.

L'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ est clairement satisfaite car les y_l sont des racines doubles dans f.

Pour la validation de la dernière hypothèse, il nous faut la valeur de $f^{(r-l)}(a)$.
On a $f^{(r-l)}(a) = (r-l)!P^2(a)R_{l-1}(a) = (r-l)! > 0$.
L'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ est ainsi bien satisfaite.

En conclusion, nous avons mis en exergue une fonction f vérifiant toutes les hypothèses $(\mathcal{H}_i)$, ce qui nous implique la stricte positivité des poids $\lambda_0^{(r-l)}$, $1 \leq l \leq r$.

6.2 Méthode généralisée de Gauss-Lobatto

Rappelons tout d'abord la forme de ces quadratures

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_0^{(k)} f^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(y_k) + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \lambda_{n+1}^{(k)} f^{(k)}(b) + R_n(f)$$

où $r > 1$ est la multiplicité des nœuds a et b, et $d\alpha$ une mesure positive.
On veut que le reste $R_n(f)$ vérifie : $\forall f \in \mathbb{P}_{2n-1+2r}[x]$, $R_n(f) = 0$.

Théorème 6.2
Tous les poids de la méthode généralisée de Gauss-Lobatto sont strictement positifs.

Preuve
• Pour le calcul de λ_l $(1 \leq l \leq n)$, on prend $f(x) = (x-a)^r (b-x)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (x - y_k)^2$ et on a

$$\lambda_l = \frac{\int_a^{+\infty} (x-a)^r (b-x)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^n (x-y_k)^2 d\alpha}{(y_l - a)^r (b - y_l)^r \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^n (y_l - y_k)^2} > 0.$$

On a ainsi la positivité des poids λ_l pour $1 \leq l \leq n$.

• Pour le signe des poids $\lambda_0^{(r-l)}$, $1 \leq l \leq r$, il nous suffit de trouver une fonction $f \in \mathbb{P}_{2n+2r-1}[x]$ telle que

$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_1)$ $f \geq 0$ sur $[a, b]$ (ce qui nous donnera $\displaystyle\int_a^b f d\alpha > 0$)
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_2)$ $f(a) = \cdots = f^{(r-l-1)}(a) = f^{(r-l+1)}(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a) = 0$
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_3)$ $f(b) = \cdots = f^{(r-1)}(b) = 0$
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_4)$ $\forall 1 \leq l \leq n,\ f(y_l) = f'(y_l) = 0$
$\rightarrow$ $(\mathcal{H}_5)$ $f^{(r-l)}(a) > 0$

Considérons la forme $f(x) = (x-a)^{r-l}(b-x)^r P^2(x) R_{l-1}(x)$ où R_{l-1} est la $(l-1)$-ème somme partielle du développement de Taylor de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(b-x)^r P^2(x)}$ au point a et $P(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - y_i)$.

On peut alors écrire $R_{l-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \left(\frac{1}{(b-x)^r P^2(x)} \right)^{(k)}_{[x=a]}$.
Nous allons montrer que cette fonction vérifie toutes les hypothèses précédentes.

L'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est satisfaite car R_{l-1} est positif sur $[a, b]$, et ceci grâce au lemme suivant

Lemme 6.2
Pour tout polynôme P unitaire de degré $n \geq 1$ avec n racines $> a$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big(\frac{1}{(b-x)^r P^2(x)}\Big)^{(k)}_{[x=a]} > 0$$

Preuve
Procédons par récurrence sur le degré n de P.
$\rightarrow$ Pour $n = 1$, on va distinguer le calcul suivant la parité de r.
Pour r pair ($r = 2r'$), on a $\left(\frac{1}{(b-x)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \left(\frac{1}{((x-b)^{r'}(x-\alpha))^2}\right)^{(k)}_{[x=a]} > 0$ d'après le Lemme 6.1.
Pour r impair ($r = 2r'+1$), on a $\left(\frac{1}{(b-x)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \left(\frac{1}{((x-b)^{r'}(x-\alpha))^2(b-x)}\right)^{(k)}_{[x=a]}$

$$= \left(\frac{1}{Q^2(x)(b-x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\frac{1}{b-x}\Big)^{(l)}_{[x=a]} \Big(\frac{1}{Q^2(x)}\Big)^{(k-l)}_{[x=a]} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{l!}{(b-a)^{l+1}} \Big(\frac{1}{Q^2(x)}\Big)^{(k-l)}_{[x=a]} > 0$$

d'après la formule de Leibniz.
Et grâce au Lemme 6.1, on a la positivité de cete dernière somme, et le cas $n = 1$ est donc vérifié.
$\rightarrow$ Supposons la proposition vraie à l'ordre n et montrons-la à l'ordre $n+1$.
Soit $Q(x) = (x-\alpha)P(x)$ où P a n racines $> a$ et $\alpha > a$.
On a à l'aide de la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{(b-x)^r Q^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} &= \left(\frac{1}{(b-x)^r(x-\alpha)^2 P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]} \\ &= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{1}{(b-x)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(l)}_{[x=a]} \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k-l)}_{[x=a]} > 0\end{aligned}$$

car $\left(\frac{1}{(b-x)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(l)}_{[x=a]} > 0$ d'après le cas $n = 1$ et $\left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k-l)}_{[x=a]} > 0$ d'après le Lemme 6.1. ∎
Les conditions $f(a) = \cdots = f^{(r-l-1)}(a) = 0$ sont satisfaites car on a un facteur $(x-a)^{r-l}$ dans f.
Pour les autres, remarquons tout d'abord que $R_{l-1}^{(k)}(a) = \left(\frac{1}{(b-x)^r P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=a]}$.

On a, $\forall s = 1, \ldots, l-1$,

$$\begin{aligned}f^{(r-l+s)}(a) &= \sum_{k=0}^{r-l+s} C_{r-l+s}^k \Big((x-a)^{r-l}\Big)^{(k)}_{[x=a]} \Big((b-x)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(r-l+s-k)}_{[x=a]} \\ &= C_{r-l+s}^s (r-l)! \Big((b-x)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(s)}_{[x=a]} = 0\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\Big((b-x)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(s)}_{[x=a]} &= \sum_{k=0}^{s} C_s^k \Big((b-x)^r P^2(x)\Big)^{(k)}_{[x=a]} R_{l-1}^{(s-k)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{s} C_s^k \Big((b-x)^r P^2(x)\Big)^{(k)}_{[x=a]} \left(\frac{1}{(b-x)^r P^2(x)}\right)^{(s-k)}_{[x=a]}\end{aligned}$$

$$= \left((b-x)^r P^2(x) \times \frac{1}{(b-x)^r P^2(x)} \right)^{(s)}_{[x=a]} = 0,$$ d'après la formule de Leibniz.
$(\mathcal{H}_2)$ est ainsi bien vérifiée.

$(\mathcal{H}_3)$ est satisfaite car on a un facteur $(b-x)^r$ dans f.

$(\mathcal{H}_4)$ est justifiée car y_l est une racine double dans f.

Pour $(\mathcal{H}_5)$, il nous faut la positivité de $f^{(r-l)}(a)$.
On a $f^{(r-l)}(a) = (r-l)!(b-a)^r P^2(a) R_{l-1}(a) = (r-l)! > 0$.

En résumé, toutes les hypothèses sont satisfaites et on a ainsi la stricte positivité des poids $\lambda_0^{(r-l)}$.

• Pour la positivité des poids $\lambda_{n+1}^{(r-l)}$, avec $1 \leq l \leq r$, il nous suffit de trouver une fonction $f \in \mathbb{P}_{2n+2r-1}[x]$ telle que

→ $(\mathcal{H}_1)$ f est du signe de $(-1)^{r-l}$ (ce qui nous donnera $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$ du signe de $(-1)^{r-l}$)
→ $(\mathcal{H}_2)$ $f(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a)$
→ $(\mathcal{H}_3)$ $f(b) = \cdots = f^{(r-l-1)}(b) = f^{(r-l+1)}(b) = \cdots = f^{(r-1)}(b)$
→ $(\mathcal{H}_4)$ $\forall 1 \leq l \leq n,\ f(y_l) = f'(y_l) = 0$
→ $(\mathcal{H}_5)$ $f^{(r-l)}(b) > 0$

Considérons la forme $f(x) = (x-a)^r (x-b)^{r-l} P^2(x) R_{l-1}(x)$ où R_{l-1} est la $(l-1)$-ème somme partielle du développement de Taylor de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^r P^2(x)}$ au point b et $P(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - y_i)$.

On peut alors écrire $R_{l-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \frac{(x-b)^k}{k!} \left(\frac{1}{(x-a)^r P^2(x)} \right)^{(k)}_{[x=b]}$.
Montrons que la fonction f proposée vérifie bien toutes les hypothèses nécessaires.

Pour satisfaire $(\mathcal{H}_1)$, voilà tout d'abord deux lemmes

Lemme 6.3
Pour tout polynôme P unitaire de degré $n \geq 1$ avec n racines $\geq a$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{1}{P^2(x)} \right)^{(k)}_{[x=b]} \quad \textit{du signe de } (-1)^k$$

Preuve
Faisons une récurrence sur le degré n de P.

$\rightarrow$ Pour $n=1$, on a (avec $\alpha > a$) $\left(\dfrac{1}{(x-\alpha)^2}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \dfrac{(-1)^k(k+1)!}{(b-\alpha)^{k+2}}$ qui est du signe de $(-1)^k$.
$\rightarrow$ Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n+1$.
Soit $Q(x) = (x-\alpha)P(x)$ où P a n racines $> a$ et $\alpha > a$. Par la formule de Leibniz, on trouve $\left(\dfrac{1}{(x-\alpha)^2 P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(l)}_{[x=b]} \left(\dfrac{1}{(x-\alpha)^2}\right)^{(k-l)}_{[x=b]}$ qui est bien du signe de $(-1)^k$ car $\left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(l)}_{[x=b]}$ est du signe de $(-1)^l$ par hypothèse de récurrence et $\left(\dfrac{1}{(x-\alpha)^2}\right)^{(k-l)}_{[x=b]}$ est du signe de $(-1)^{k-l}$ d'après le cas $n=1$. La récurrence est donc faite. ∎

Lemme 6.4
Pour tout polynôme P unitaire de degré $n \geq 1$ avec n racines $> a$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, on a

$$\left(\frac{1}{(x-a)^r P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=b]} \quad \textit{du signe de } (-1)^k$$

Preuve
Montrons ceci par une récurrence sur le degré n de P.
$\rightarrow$ Pour $n=1$, avec $\alpha > a$, on va distinguer suivant la partité de r.
Pour r pair ($r = 2r'$), on a $\left(\dfrac{1}{(x-a)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \left(\dfrac{1}{((x-a)^{r'}(x-\alpha))^2}\right)^{(k)}_{[x=b]}$ du signe de $(-1)^k$ d'après le Lemme 6.3.
Pour r impair ($r = 2r'+1$), on a $\left(\dfrac{1}{(x-a)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \left(\dfrac{1}{((x-a)^{r'}(x-\alpha))^2(x-a)}\right)^{(k)}_{[x=b]}$

$$= \left(\frac{1}{P^2(x)(x-a)}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(l)} \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k-l)}_{[x=b]} = \sum_{k=0}^{l} C_k^l \frac{(-1)^l l!}{(b-a)^{l+1}} \left(\frac{1}{P^2(x)}\right)^{(k-l)}_{[x=b]}.$$

Cette dernière somme est bien du signe de $(-1)^k$ car chacun des termes de celle-ci l'est d'après le Lemme 6.3.
$\rightarrow$ Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n+1$.
Soit $Q(x) = (x-\alpha)P(x)$ avec P ayant n racines $> a$ et $\alpha > a$.
On a, en appliquant la formule de Leibniz,
$\left(\dfrac{1}{(x-a)^r(x-\alpha)^2 P^2}\right)^{(k)}_{[x=b]} = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\dfrac{1}{(x-a)^r(x-\alpha)^2}\right)^{(l)} \left(\dfrac{1}{P^2(x)}\right)^{(k-l)}_{[x=b]}$ qui est bien du signe de $(-1)^k$ grâce au cas $n=1$ et à l'hypothèse de récurrence. La récurrence est terminée. ∎
Ainsi les quantités $\left(\dfrac{1}{(x-a)^r P^2(x)}\right)^{(k)}_{[x=b]}$ sont du signe de $(-1)^k$. De plus les $(x-b)^k$ sont du signe de $(-1)^k$ également car $x \in [a,b]$.
On peut alors conclure que R_{l-1} est toujours positif sur $[a,b]$ et qu'ainsi f est du signe de $(-1)^{r-l}$

(car f est du signe de $(x-b)^{r-l}$).

L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est évidemment vérifiée car on a un facteur $(x-a)^r$ dans f.

Les conditions $f(b) = \cdots = f^{(r-l-1)}(b) = 0$ sont données par la présence du facteur $(x-b)^{r-l}$ dans f.

Aussi, $\forall s = 1, \ldots, l-1,$
$$\begin{aligned} f^{(r-l+s)}(b) &= \sum_{k=0}^{r-l+s} C_{r-l+s}^{k} \Big((x-b)^{r-l}\Big)^{(k)}_{[x=b]} \Big((x-a)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(r-l+s-k)}_{[x=b]} \\ &= C_{r-l+s}^{s} (r-l)! \Big((x-a)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(s)}_{[x=b]}. \end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned} \Big((x-a)^r P^2 R_{l-1}(x)\Big)^{(s)}_{[x=b]} &= \sum_{k=0}^{s} C_s^k \Big((x-a)^r P^2(x)\Big)^{(k)}_{[x=b]} R_{l-1}^{(s-k)}(b) \\ &= \sum_{k=0}^{s} C_s^k \Big((x-a)^r P^2(x)\Big)^{(k)}_{[x=b]} \left(\frac{1}{(x-a)^r P^2(x)}\right)^{(s-k)}_{[x=b]} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall s = 1, \ldots, l-1,$ $f^{(r-l+s)}(b) = 0$, et on a bien $(\mathcal{H}_3)$.

$(\mathcal{H}_4)$ est trivialement vérifiée.

Et $(\mathcal{H}_5)$ est donnée grâce à $f^{(r-l)}(b) = (r-l)!(b-a)^r P^2(b) R_{l-1}(b) = (r-l)! > 0$.

Toutes ces hypothèses vérifiées par f nous impliquent la stricte positivité des poids λ_{n+1}^{r-l}, $1 \leq l \leq r$.
$\blacksquare$

Conclusion

Il est toujours difficile de mettre un terme à un travail de recherche. Il faut pourtant, pour une thèse, respecter cette règle du jeu et savoir donner le bilan et les ouvertures possibles de ses travaux.

Bilan

Je me suis penché, pendant ces années de thèse, sur l'étude de ces polynômes quasi-orthogonaux tant par leurs formes, leurs comportements, leurs caractéristiques que par leurs applications.
Le fil conducteur dans les démonstrations de ma thèse a été de savoir quelle forme ou caractérisation de ces polynômes utiliser.
Le fait d'avoir écrit un polynôme quasi-orthogonal à l'aide d'un déterminant m'a permis de sonder le côté plus algébrique de cette notion de quasi-orthogonalité et d'en tirer des résultats nouveaux sur leurs zéros entre autres.
J'ai pu ainsi générer de nouveaux théorèmes pour les ordres 1 et 2 et j'ai même pu flirter avec les zéros de l'ordre 3.
L'ordre quelconque a été également sujet à la caractérisation de la place du premier et du dernier zéro.
Un résultat non trivial que l'on a mis en exergue est qu'un polynôme quasi-orthogonal d'un ordre donné avec toutes ses racines réelles et distinctes existe.
En fait, ceci provient d'un fait plus général mis en avant avec une construction possible que nous avons donnée au paragraphe 2.2. On peut trouver des polynômes quasi-orthogonaux avec un choix des multiplicités de ses racines assez libre (cette zone de liberté étant contrôlée par le polynôme générique Π_m).

Me reposant sur des techniques d'algèbre linéaire, j'ai pu mettre en avant un ensemble générateur pour obtenir des polynômes quasi-orthogonaux d'un certain ordre et par rapport à une mesure donnée. Cette dernière nous suggère, pour un polynôme quasi-orthogonal d'ordre r de degré donné et par rapport à une mesure positive donnée, de trouver $r+1$ polynômes quasi-orthogonaux de même degré et par rapport à la même mesure pour donner une décomposition unique.
Nous avons mis ceci en pratique pour les polynômes de Jacobi et de Laguerre-Sonin. J'ai ainsi obtenu de nouveaux entrelacements entre leurs zéros et de nouvelles relations de récurrence.

Les deux dernières parties de ma thèse portent sur l'application aux méthodes de quadrature.
J'ai pu montrer le lien étroit entre les zéros des polynômes quasi-orthogonaux et les nœuds de ces

méthodes de type-Gauss.
Je me suis également arrêté sur l'étude de la stricte positivité des poids pour les méthodes généralisées de Gauss-Radau et de Gauss-Lobatto. Ce sujet avait été laissé comme question ouverte par W. Gautschi et j'ai pu, après avoir exploré différentes pistes et finalement choisi une piste assez constructive, y répondre.

Perspectives

Il me reste, à présent, à présenter les zones que j'ai laissées plus ombragées ainsi que les futurs travaux générés par ces résultats.

→ Dans un premier temps, je pense que l'étude des zéros de ces polynômes quasi-orthogonaux, et plus particulièrement pour des petits ordres, proposera encore de nombreux articles.
Il y a deux voies à explorer : la recherche d'une condition suffisante (voire nécessaire et suffisante) pour l'existence d'un maximum de racines réelles et distinctes et la localisation de celles-ci en exploitant les entrelacements éventuels avec d'autres polynômes.
Rappelons que la recherche d'une condition suffisante, même dans le cas général, d'existence de toutes les racines réelles et distinctes n'est pas vaine après l'énoncé du Théorème 3.27.

→ Une piste déjà explorée par W. Gautschi mais à laquelle on pourrait, en s'appuyant sur notre dernier chapitre, donner des avancées est celle de l'approximation par des splines.
La mesure considérée est $d\lambda^{[m]}(t) = \dfrac{(-1)^{m+1}}{m!} t^{m+1} f^{(m+1)}(t)dt$ où m est le degré de la spline, et le support de $d\lambda^{[m]}$ coïncide avec l'intervalle sur lequel f doit être approximée.
Si l'intervalle est représenté par $\mathbb{R}_+$, alors la spline a la forme $s_{n,m}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k (t_k - t)_+^m$
où $u_+(t) = max(0, u(t))$ et $t_k > 0$ sont les nœuds de la spline.
Le problème est de trouver, sur $\mathbb{R}_+$, un polynôme $s_{n,m}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^j s_{n,m}(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} t^j f(t)dt$$

pour $j = 0, \ldots, 2n-1$.
On veut donc trouver un polynôme qui a les mêmes $2n$ premiers moments que f.
Ce problème a une solution unique si la mesure $d\lambda^{[m]}$ admet une formule de quadrature de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(t)d\lambda^{[m]}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^G g(y_k^G)$$

où $g \in \mathbb{P}_{2n-1}$ et telle que $y_k^G > 0$.
Sur l'intervalle compact $[0,1]$, nous pourrrions ajouter un polynôme $p \in \mathbb{P}_m$ à la spline $s_{n,m}$ et considérer $s_{n,m}(t) = p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t_k - t)_+^m$, $0 \leq t \leq 1$, $t_k \in]0,1[$.
On peut alors s'intéresser au problème suivant :

Déterminer $s_{n,m}$ tel que

$$\int_0^1 t^j s_{n,m}(r)dt = \int_0^1 t^j f(t)dt$$

pour $j = 0, \ldots, 2n+m$.
Cette fois-ci, nous considérons les $2n+m+1$ premiers moments car nous avons à notre disposition $m+1$ paramètres supplémentaires (donnés par les coefficients de p).
W. Gautschi nous dit alors que ce problème a une unique solution si et seulement si la mesure $d\lambda^{[m]}$ admet une formule généralisée de Gauss-Lobatto avec les bornes affectées de la multiplicité $r = m+1$.
Nous pourrions voir en quoi la stricte positivité des poids de cette méthode influe sur le résultat de la spline.

→ Une autre notion étroitement liée aux méthodes de quadrature est celle d'approximants de Padé (ce qui a déjà été mis en lumière dans [2]).
On se donne une série formelle $f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i t^i$, $c_i \in \mathbb{R}$.
Les approximants de Padé sont des fractions rationnelles qui vont coïncider avec f le "plus longtemps possible".
Soit c une forme linéaire telle que $c(x^i) = c_i$, on a ainsi $f(t) = c\left(\frac{1}{1-xt}\right)$.
On peut construire une première sorte d'approximant, les approximants de type Padé, on a

$$(p/q)_f(t) - f(t) = O(t^{p+1}).$$

On a comme erreur

$$f(t) - (P/q)_f(t) = \frac{t^{p+1}}{\widetilde{v}(t)} c^{(p-q+1)}\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right).$$

On a donc pour le moment une erreur de l'ordre de $O(t^{p+1})$.
De là, on va pouvoir augmenter l'ordre de l'approximation ; pour cela, on écrit

$$f(t) - (p/q)_f(t) = \frac{t^{p+1}}{\widetilde{v}(t)} c^{(p-q+1)}\left(v(x)(1 + xt + x^2t^2 + \cdot + x^{q-1}t^{q-1} + \frac{x^q t^q}{1-xt})\right).$$

Pour augmenter la précision, on va choisir alors v tel que $c^{(p-q+1)}(x^i v(x)) = 0$ pour $i = 0, \ldots, q-1$.
Donc v est un polynôme orthogonal par rapport à la nouvelle forme linéaire $c^{(p-q+1)}$ et on a sous

ces conditions un $O(t^{p+q+1})$.
On a alors un approximant de Padé, que l'on écrit $[p/q]_f(t) = f(t) + O(t^{p+q+1})$.
On s'intéresse à présent à la construction d'approximants de type Padé d'ordre supérieur au degré du numérateur. Ainsi si le numérateur est de degré p, $(p/q)_f(t)$ doit coïncider avec la série plus loin qu'en t^p (l'erreur doit être au moins un $O(t^{p+1})$).
On a $f(t) - (k-1/k)_f(t) = \dfrac{t^k}{\widetilde{v}(t)} c\left(\dfrac{v(x)}{1-xt}\right)$.
On va imposer, en suivant la même idée que pour construire les approximants de Padé, que $c(x^i v(x)) = 0$ pour $i = 0, \ldots, m-1 \leq k-2$ (on ne prend pas $k-1$ car on retombe sur le cas précédent).
On a ainsi

$$f(t) - (k-1/k)_f(t) = \frac{t^{k+m}}{\widetilde{v}(t)} c\left(\frac{x^m v(x)}{1-xt}\right) = O(t^{k+m}).$$

Et notre polynôme v est quasi-orthogonal par rapport à c et d'ordre $k-m$.

De même avec $(p/q)_f(t)$ et en imposant $c^{(p-q+1)}(x^i v(x)) = 0$ pour $i = 0, \ldots, m-1 \leq q-2$.
v est ici un polynôme quasi-orthogonal par rapport à la forme linéaire $c^{(p-q+1)}$ et d'ordre $q-m$.
On pourrait alors de la même manière mettre en évidence le lien entre les approximants de Padé partiels et voir l'influence des zéros du polynôme quasi-orthogonal les générant sur la convergence de ceux-ci.

Notations

α est une mesure positive telle que l'intégrale $\mu_0 = \displaystyle\int_a^b d\alpha$ existe et soit finie.

Δ_n est le polynôme orthogonal par rapport à la mesure α sur $[a,b]$ unitaire et de degré n

$x_{i,k}$ sont les zéros du polynôme Δ_k

B_n et C_n sont les coefficients de la relation de récurrence à trois termes vérifiée par Δ_n

$\{\Delta_n^{(k)}\}_n$ est la famille de polynômes généralisés d'ordre k associée à la famille $\{\Delta_n\}_n$ ($Q_n = \Delta_n^{(1)}$)

$P_n^{(\alpha,\beta)}$ est le polynôme de Jacobi que l'on choisira normalisé

L_n^{α} est le polynôme de Laguerre-Sonin que l'on choisira normalisé

$R_{n,r}$ est le polynôme quasi-orthogonal par rapport à la mesure α sur $[a,b]$ d'ordre r, de degré n et unitaire

$c_{i,n}$ sont les coefficients se trouvant dans la décomposition de $R_{n,r}$ suivant la famille $\{\Delta_i\}_{i=n-r}^{n}$

$R_{n,r}^{(k)}$ est le k-ème polynôme généralisé associé à $R_{n,r}$

Π_m est un polynôme générique de degré $m \geq 1$

$\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x

$\mathcal{S}_r$ est l'ensemble des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre r par rapport à la mesure α sur $[a,b]$ et de degré n

$f_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$

$\mathbb{P}_m$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq m$

Bibliographie

[1] S. Belmehdi, On the associated orthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. 32 (1990) 311-319.

[2] C. Brezinski, *Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, Birkhäuser, Basel, 1980.

[3] C. Brezinski, K.A. Driver, M. Redivo Zaglia, Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials, Appl. Numer. Math., 48 (2004) 157-168.

[4] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, On the zeros of various kind of orthogonal polynomials, Ann. Numer. Math., 4 (1997) 67-78.

[5] T.S. Chihara, On quasi-orthogonal polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957) 765-767.

[6] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[7] D. Dickinson, On quasi-orthogonal polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961) 185-194.

[8] A. Draux, On quasi-orthogonal polynomials, J. Approx. Theory, 62 (1990) 1-14.

[9] A. Draux, *Polynômes orthogonaux formels. Applications*, Numer. Algo. 11 (1996).

[10] L. Fejér, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, Math. Z., 37 (1933) 287-309.

[11] B. Fischer, J.Prestin, Wavelets based on orthogonal polynomials, Math. Comp., 66 (1997) 1593-1618.

[12] B. Fischer, W.Themistoclakis, Orthogonal polynomial wavelets, Numer. Algo., 30 (2002) 37-58.

[13] M. Fujiwara, On the zeros of Jacobi's polynomials, Japan. J. Math., 2 (1925) 1-2.

[14] W. Gautschi, On the remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto and Gauss-Radau quadrature, Rocky Mt. J. Math., 21 (1991) 209-226.

[15] W. Gautschi, Gauss-Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions, Math. Comput. Simulation, 54 (2000) 403-412.

[16] W. Gautschi, Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures with double end points, J. Comput. Appl. Math., 34(1991) 343-360.

[17] W. Gautschi, High-order Gauss-Lobatto formulae, Numer. Algo., 25 (2000) 213-222.

[18] W. Gautschi, Generalized Gauss-Radau and Gauss-Lobatto formulae, BIT, 44 (2004) 711-720.

[19] W. Gautschi, An Algebraic Study of Gauss-Kronrod Quadrature Formulae for Jacobi Weight Functions, Math. Comput., 51 (1988) 231-248.

[20] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials : computation and approximation*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Uinversity Press, Oxford, 2004.

[21] H. Joulak, A contribution to quasi-orthogonal polynomials and associated polynomials, Appl. Numer. Math., 54 (2005) 65-78.

[22] W. Lawton, On the zeros of certain polynomials related to Jacobi and Laguerre polynomials, Bull. Am. Math. Soc., 38 (1932) 442-448.

[23] A. Ossicini, F. Rosati, Sulla convergenza dei funzionali ipergaussiani, Rend. Mat., 11 (1978) 97-108.

[24] F. Pollaczek, *Sur une Généralisation des Polynômes de Jacobi*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule CXXXI, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[25] H. Rademacher, On the partitions functions $p(n)$, Proc. London Math. Soc., 43 (1937) 241-254.

[26] M. Riesz, Sur le problème des moments, Troisième Note, Ark. Mat. Fys., 17 (1923) 1-52

[27] D.N. Sen, V. Rangachariar, Generalized Jacobi polynomials, Bull. Am. Math. Soc., 42 (1936) 901-908.

[28] J.A. Shohat, On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients, Trans. Am. Math. Soc., 42 (1937) 461-496.

[29] M.-R. Skrzipek, Generalized Associated Polynomials and Their Application in Numerical Differentiation and Quadrature, Calcolo, 40 (2003), 131-147.

[30] H. Stahl, V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[31] D. D. Stancu, Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel, Mathematica, 1 (1959) 167-182.

[32] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, 1939.

[33] P. Turán, On the theory of the mechanical quadrature, Acta Sci. Math., 12 (1950) 30-37.

[34] W. Van Assche, Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind, J. Comput. Appl. Math., 37 (1991) 237-249.

[35] E. A. Van Doorn, Representations and Bounds for Zeros of Orthogonal Polynomials and Eigenvalues of Sign-Symmetric Tri-diagonal Matrices, J. Approximation Theory, 51 (1987) 254-266.

