

N<sup>0</sup> d'ordre : 4077

# THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE**

Spécialité : Microondes et Microtechnologies

par

**Freddy Ponchel**

**ELFI : Calculateur électromagnétique pour l'établissement de schémas électriques équivalents aux interconnexions "cuivre" couplées et pour la caractérisation des matériaux**

<b>Président de jury</b>	T. Lasri	<i>Professeur à l'Université de Lille1, IEMN</i>
<b>Directeur de thèse</b>	P. Kennis	<i>Professeur à l'Université de Lille1, IEMN</i>
<b>Co-encadrant</b>	J. F. Legier	<i>Maître de conférences à l'Université de Lille1, IEMN</i>
<b>Rapporteurs</b>	S. Toutain	<i>Professeur à Polytech'Nantes</i>
	M'H. Drissi	<i>Professeur à l'INSA de Rennes</i>
<b>Examineurs</b>	D. Deschacht	<i>Directeur de Recherche à l'Université de Montpellier II</i>
	R. Bouregba	<i>Maître de conférences au CNRT "Matériaux" Basse-Normandie, Caen</i>
	E. Dogheche	<i>Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis</i>







*A la mémoire de mon père...*

*Au courage de ma mère*



## **ELFI : Calculateur électromagnétique pour l'établissement de schémas électriques équivalents aux interconnexions "cuivre" couplées et pour la caractérisation des matériaux**

### Résumé

Les travaux décrits dans ce mémoire concernent la mise en œuvre d'un code de calcul électromagnétique d'éléments finis à éléments d'arêtes nommé ELFI, et ce, en deux dimensions. Après une importante phase de validation, la méthode des éléments finis est, dans un premier temps, appliquée à l'étude de trois, cinq et huit interconnexions "cuivre", à pertes, constituant les différents niveaux de métallisation d'un circuit intégré. Les schémas électriques équivalents à ces trois systèmes sont ensuite implantés sous SPICE pour étudier les évolutions des temps de montée et de retard de propagation des signaux ainsi que le comportement de la diaphonie. Ceci est effectué en fonction de la distance séparant les connexions et en fonction de la nature des matériaux remplissant les zones de couplage. L'influence des lignes passives (les victimes) est alors clairement identifiée en présence d'une ligne active (l'agresseur) et réciproquement. Notre code de calcul est ensuite modifié puis adapté pour constituer une aide à la détermination de la permittivité diélectrique complexe du titano-zirconate de plomb (le PZT) dans la bande 1 à 26 GHz. Les impacts du posé des pointes de mesure, de la conductivité des métallisations coplanaires, de la variation de l'épaisseur de la couche de PZT ainsi que celle du tenseur de permittivité du substrat saphir qui supporte les lignes sont, tour à tour, analysées. Cette étude de sensibilité montre que l'on détermine, à ce jour, pour ce matériau polycristallin sans orientation particulière une permittivité relative de l'ordre de 1500 à  $\pm 5\%$  dans le meilleur cas de figure.

## **ELFI : An electromagnetic software for the extraction of electrical elementary cells equivalent to multi-coupled lines system and for material characterisation**

### Abstract

The work described in this report concerns a full wave 2D vector finite element method and its implementation in the Matlab environment. After various validation steps, our software named ELFI is firstly used to study the electromagnetic behaviour of a set of three, five and eight lossy copper interconnects of sub-micron sizes in mutual interaction. An extraction tool gives the electrical equivalent circuit of the elementary cell equivalent to the three, five and eight coupled lines cases in order to estimate signal integrity such as risetime, propagation delay and crosstalk. The proximity effects of several neighbour victim lossy interconnects on a single attacker are then analyzed and vice-versa. In a second part, we modify our software to predict, from [S] parameters measurement and propagation constant extraction, the complex permittivity of PZT thin film. The sensitivity to the location of the probes, the thickness of the film, the conductivity of gold metallization, and to the tensor of sapphire substrate which support the coplanar lines is undertaken. It shows that, for such polycrystal materials, the relative permittivity reaches the value of 1500 with 5% variation for the best case.





# Remerciements

*“Comme tous les hommes, il était beaucoup plus éloquent pour demander que pour remercier”*

*Prosper Mérimée*

**J'ai trouvé à l'IEMN une ambiance particulièrement favorable pour mener à bien ce travail. Je tiens à remercier en tout premier lieu Monsieur le professeur Alain CAPPY, Directeur de l'IEMN, pour m'y avoir accueilli.**

**Je remercie vivement Monsieur Patrick KENNIS, Professeur des Universités, pour m'avoir proposé ce sujet de recherche ainsi que pour m'avoir fait l'honneur d'être mon directeur de thèse.**

**Je remercie Monsieur Didier DECOESTER, Professeur des Universités, pour m'avoir accueilli suite à la fusion de l'équipe cpp et de l'équipe OPTOELECTRONIQUE.**

**J'aimerais également remercier Monsieur Tuami LASRI, Professeur des Universités, qui me fait l'honneur d'assurer la présidence du jury.**

**J'adresse ma profonde reconnaissance aux rapporteurs de cette thèse ; Monsieur Serge Toutain, Professeur à Polytech'Nantes, ainsi que Monsieur M'hamed DRISSI, Professeur à l'INSA de Rennes, pour la lecture de mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.**

**Mes remerciements vont ensuite à Monsieur Denis Deschacht, Directeur de Recherche à l'Université de Montpellier II, ainsi qu'à Monsieur Rachid Bouregba, Maître de conférences au CNRT “Matériaux” Basse-Normandie, Caen et enfin à Monsieur Elhadj Dogheche, Professeur à**

**l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.**

**J'aimerais remercier tout spécialement Monsieur Jean-François LEGIER, Maître de conférence à l'université de Lille1, pour ses encouragements, son dévouement, pour son aide et sa patience dont j'ai parfois peut-être abusé. Merci pour tout.**

**Que Monsieur Erick PALECZNY, Maître de conférence à l'université de Lille1, ainsi que Monsieur Christophe SEGUINOT, Maître de conférence à l'université de Lille1, reçoivent ici ma profonde gratitude pour avoir suivi ce travail de près et pour m'avoir aidé à comprendre certains points délicats. Leurs compétences scientifiques ont permis de mener à bien cette étude.**

**La centrale technologique de l'IEMN m'a permis de réaliser des échantillons de test dédiés à la validation expérimentale de l'aspect théorique de mon travail, et ce, dans de très bonnes conditions. Un grand merci à tous les technologues pour leur aide précieuse ainsi que leur nombreux conseils techniques.**

**J'exprime toute ma reconnaissance envers Madame Sylvie GODEY qui travail à de la Centrale de Caractérisation de l'IEMN, pour l'aide précieuse et la patience dont elle a fait preuve, lors des mesures des structures réalisées.**

**Je tiens également à remercier madame Caroline SOYEZ pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec elle ainsi que pour son dévouement pour nous apporter les informations manquantes concernant le matériau PZT.**

**Monsieur Pierre Armant : Homme de toutes les situations. Entre l'imprimante qui tombe en panne, les retours de conférence à 2 heures du matin... jusqu'a la gestion du pot de thèse. Bravo et merci pour ton**

**dévouement et pour ta patience. Je te souhaite une excellente retraite.**

**J'exprime ici ma sympathie envers Karim EL BOUAZZATI qui a partagé mon bureau pendant plusieurs années. La perception particulière qu'il avait des choses a provoqué de nombreux fous rires et parfois même de profondes réflexions. Bonne chance à toi Karim.**

**Il est temps d'adresser à tous ceux que j'ai côtoyés durant toutes ces années ma profonde sympathie. Ce sont eux qui fixent l'ambiance dans laquelle nous évoluons chaque jour. Merci à vous tous du troisième étage.**

**Je ne pourrais finir cette liste de remerciements sans saluer le courage de ma mère, qui, malgré les événements qui se sont produits a su garder la tête haute et faire en sorte que je puisse continuer mes études. Sans elle, rien de tout cela n'aurait pu être envisagé. Merci.**

**Je tiens enfin à remercier le reste de ma famille ainsi que mes amis pour leurs soutiens et leurs encouragements.**



# Table des matières

❖ <b>Introduction générale</b> .....	17
❖ <b>Chapitre 1</b> Une méthode d'éléments finis à éléments vectoriels .....	25
Introduction .....	26
1. Formulation intégrale des équations de comportement du système physique.....	32
1.1 Système physique : équations de Maxwell classiques .....	32
1.2 Equations aux dérivées partielles : Equation de Helmholtz.....	35
1.2.1 Equations aux dérivées partielles et conditions aux limites .....	35
1.2.2 Equation de Helmholtz .....	37
1.2.3 Décomposition transverse et longitudinale.....	38
1.3 Transformation des équations : Formulation intégrale.....	40
1.4 Formulation faible : Intégration par partie .....	40
1.4.1 Intérêt.....	40
1.4.2 Intégration par partie.....	41
1.4.3 Prise en compte des conditions de bord.....	42
1.4.4 Prise en compte d'une condition locale: l'impédance de surface $Z_s$ .....	44
2. Approximation de la fonction inconnue par éléments finis .....	48
2.1 Le domaine $\Omega$ : restriction sur les structures de propagation envisagées.....	48
2.2 L'élément fini .....	49
2.3 Discrétisation de l'espace $\Omega$ .....	49
2.4 Espace de référence et coordonnées barycentriques .....	51
2.4.1 Coordonnées barycentriques .....	52
2.4.2 L'espace de référence.....	55
2.5 L'espace des fonctions d'interpolation .....	57
2.5.1 Projection sur une base de fonctions d'interpolation .....	57
2.5.2 Interpolation nodale, polynômes de Lagrange .....	59
2.6 L'élément fini à élément d'arêtes .....	61
2.6.1 Intérêt .....	61
2.6.2 Interpolation de type nodale .....	62
3. La méthode de Galerkin.....	66

4. Organisation matricielle, assemblage, résolution numérique.....	68
4.1 Organisation matricielle.....	68
4.2 Mise en évidence d'un système matriciel aux valeurs propres .....	72
4.3 Assemblage.....	74
4.4 Transformation spectrale et résolution numérique.....	78
Conclusion .....	80
Bibliographie du chapitre 1.....	81
❖ <b>Chapitre 2</b> Présentation et validation de l'outil ELFI .....	85
Partie I   Présentation de l'outil ELFI.....	86
Introduction .....	86
1 Tracé de la structure et du maillage : lancer PDETOOL.....	88
2 Présentation d'ELFI-Gestionneur de données.....	90
3 Présentation d'ELFI-Calculateur EM.....	94
4 Post traitement.....	97
Partie II   Validation de l'outil ELFI .....	101
Introduction .....	101
1 Caractérisation fréquentielle de l'atténuation et du facteur de ralentissement du mode fondamental de la ligne coplanaire .....	102
1.1 Démarche .....	102
1.2 Etude de la coplanaire classique : phase de validation .....	103
1.3 La ligne coplanaire avec métallisation centrale en forme de "T" : .....	115
sensibilité à une faible variation des dimensions transverses.....	115
2. Capacité du code à fournir un schéma électrique équivalent à des lignes de transmission couplées .....	123
2.1 Etude sommaire d'un système symétrique de trois lignes en mutuelle interaction à partir de son schéma électrique équivalent : Etablissement du lien avec les grandeurs issues des éléments finis.....	124
2.2 Etude de quatre lignes en interaction mutuelle.....	132
Bibliographie du chapitre 2 .....	139

❖ <b>Chapitre 3</b> Schéma électrique équivalent et intégrité des signaux dans les systèmes multiconducteurs .....	141
Introduction .....	142
1. Structure de propagation quasi-TEM : Schéma électrique équivalent.....	145
2. Les circuits numériques à haut degré d'intégration .....	148
3. Etude électromagnétique des systèmes à 3, 5 et 8 lignes .....	151
3.1 Le diagramme de dispersion des modes à fréquence de coupure nulle. ....	151
3.2 Le champ électromagnétique .....	160
4 Etablissement du schéma électrique équivalent.....	167
5 Etude d'intégrité des signaux d'un système multiconducteur application à 3, 5 et 8 interconnexions.....	175
5.1 Etude d'un système à huit interconnexions : calcul des temps de montée et de retard de propagation .....	178
5.2 Etude conjointe des systèmes de trois, cinq et huit interconnexions : calcul des temps de montée et de retard de propagation pour une attaque au bord puis au centre. ....	181
5.3 Temps de montée et de retard de propagation : comparaison avec une interconnexion seule .....	183
5.4 Etude de la diaphonie : cas de huit interconnexions .....	185
5.5 Etude de la diaphonie : cas de trois, cinq et huit interconnexions en interaction forte, moyenne et faible .....	186
Bibliographie du chapitre 3 .....	192
❖ <b>Chapitre 4</b> Schéma électrique équivalent et intégrité des signaux dans les systèmes multiconducteurs .....	195
Introduction .....	196
1 Contexte général .....	198
2 Boucle d'asservissement incluant le noyau de calcul "ELFI" .....	199
3 Relevé expérimental de la constante de propagation complexe : Méthode de Bianco & Parodi .....	200
4 Validation de la boucle d'asservissement : ligne coplanaire déposée sur substrat AsGa ...	202

5 Réalisation de structures pour le test du matériau PZT .....	203
6 Détermination de la permittivité complexe du matériau PZT et étude de sensibilité.....	206
6.1 Détermination de la constante de propagation complexe d'un jeu de lignes après mesure des paramètres [S] .....	206
6.2 Etude de sensibilité.....	209
6.2.1 Influence du posé de pointes .....	209
6.2.2 Influence d'une variation de l'épaisseur du dépôt de PZT .....	211
6.2.3 Influence de la conductivité des métallisations.....	213
7 Bilan global.....	215
7.1 Bilan sur le triplet 07-08-09 .....	215
7.2 Bilan global.....	218
Bibliographie du chapitre 4 .....	220
❖ <b>Conclusion générale</b> .....	223
❖ <b>Bibliographie personnelle</b> .....	229



## Introduction générale

Le besoin d'applications nécessitant des opérations de traitement de signal ne fait que s'accroître. Cela requiert, par voie de conséquence, la mise en œuvre de processeurs numériques de calcul de plus en plus performants, de dimensions de plus en plus réduites et qui, pour être implantés dans les systèmes portables, doivent consommer peu d'énergie.

Ainsi, il faut dès le départ, résoudre l'équation, poids, puissance de calcul, consommation. Cette problématique s'articule, aussi, autour d'un accroissement des fréquences d'horloges et de la densité d'intégration ; le tout accompagné d'une réduction drastique de la tension d'alimentation. Ces deux triptyques constituent le fil conducteur de toutes les innovations qu'il faut réaliser dans le domaine de la microélectronique Silicium.

Jusqu'à peu encore, loi de Moore et groupes de travail de "l'International Technology Roadmap for Semiconductors" (ITRS) cadençaient le rythme des avancées technologiques réalisées par les chercheurs et les ingénieurs [1] [2].

L'avènement de la technologie du "cuivre", en lieu et place de l'aluminium chez IBM en 1997, et la confection, depuis peu, de transistors de longueur de grille de 35 nanomètres ont bouleversé totalement la hiérarchie des problèmes à traiter, y compris dans la confection des mémoires. Signalons qu'un millimètre de connexion dans la technologie des transistors 35nm induit un retard cent fois supérieur au temps de réaction du transistor lui-même [3]. Quant aux mémoires réalisées dans cette technologie, elles doivent être de plus petites dimensions et beaucoup plus rapides [4].

Pour faire sauter les verrous qui freinent la progression escomptée dans le circuit intégré numérique, il faut :

Soit, modifier la nature des matériaux entrant dans la conception de ces nouveaux circuits [5].

Soit, repenser la topologie du circuit ; ce que l'on appelle son architecture.

Les grands fabricants mondiaux ont bien compris ce dernier point puisqu'ils proposent, à ce jour, des entités à deux et quatre cœurs de processeur sur la même puce [6] [7]. Que vaut encore la loi de Moore dans un tel contexte ? C'est une question que l'on peut se poser.

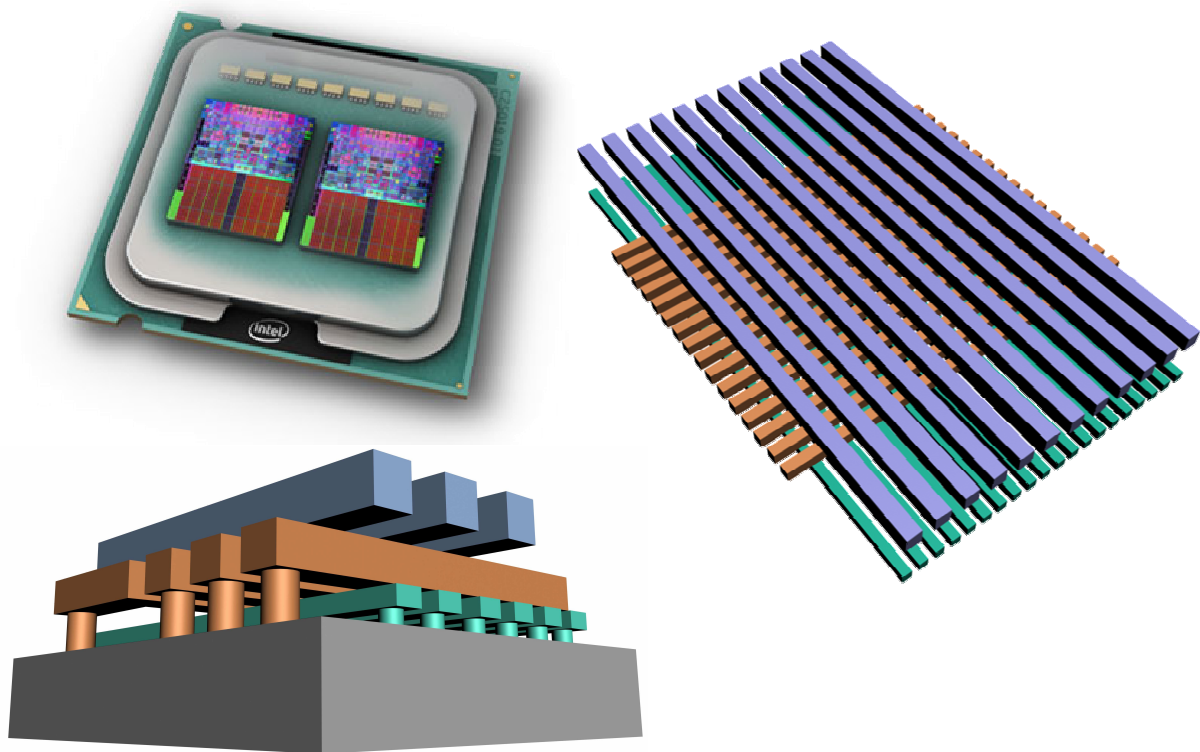
Quant à la modification de la nature des matériaux, ce n'est pas tant celle métallique de la connexion qui va changer, mais plutôt celle des matériaux diélectriques enrobant les connexions cuivre. Des matériaux innovants comme ceux à faible et très faible constante diélectrique (les matériaux lowk et ultra-lowk) sont mis au point à l'heure actuelle pour réduire les couplages entre lignes tout en accroissant la densité d'intégration. A l'opposé,

nous avons absolument besoin de matériau à très forte permittivité pour la confection, entre autre, des mémoires mais également afin de réduire les dimensions.

Ainsi, les progrès réalisés dans les performances à venir sont liés, d'abord, à la confection de matériaux nouveaux mais aussi à la modélisation des phénomènes induits du fait de l'intégration de ces matériaux innovants dans les dispositifs à concevoir.

Pour notre part, nous nous situons dans la seconde thématique ; celle de la modélisation. Les travaux que nous décrivons dans ce mémoire concernent **deux axes**.

- **Le premier** s'articule sur la **modélisation électromagnétique des interconnexions** "cuivre" de dimensions inférieures ou égales au micromètre situées dans les circuits intégrés numériques, et ce, en présence de matériaux différents de l'oxyde de silicium. Pour être plus précis, notre objectif réside dans l'étude d'un système de trois, cinq et huit interconnexions cuivre dont une illustration générale est proposée à la figure 1. Compte tenu de l'accroissement des fréquences de fonctionnement et de la réduction du temps de montée des signaux correspondants, une impulsion de 40ps de temps de montée et de fréquence 1GHz requiert un développement fréquentiel qui s'étend jusqu'à 25GHz pour sa reconstitution en série de Fourier. Le système d'interconnexion doit donc être étudié comme un guide d'onde.



**Figure 1** : Représentation schématique de trois niveaux d'interconnexions d'un circuit numérique moderne

- **Le second** axe s'appuie sur le dénominateur commun qu'est, sans conteste, **le matériau** qu'il soit "lowk" pour réduire le couplage entre les lignes, ou à très forte permittivité pour la confection, entre autre, des mémoires, comme nous l'avons signalé auparavant. Pour cette raison, nous proposons une méthode, mais aussi une aide à la caractérisation électromagnétique des matériaux déposés en couche mince qu'ils soient à faible ou haute permittivité. Comme nous mettons implicitement l'accent sur le matériau, il faut pouvoir traduire le mieux possible la problématique actuelle. Les matériaux qui vont constituer la section droite de nos structures de propagation sont donc à pertes diélectriques ou métalliques, mais aussi pourquoi pas, supraconducteurs. Ils peuvent, entre autre, présenter une anisotropie qu'elle soit diélectrique ou magnétique. La quête de l'infiniment petit implique la mise en œuvre de dépôts en couches très minces mais aussi l'existence de domaines de formes complexes et de très petites dimensions.

Les contraintes auxquelles notre code de calcul est confronté apparaissent dès lors clairement. Pour les prendre en compte nous décidons de mettre en œuvre une méthode d'éléments finis. Nous le savons, la complexité croissante des circuits à analyser nous contraint à considérer les trois dimensions d'un dispositif. Cependant, la mise en œuvre d'un code d'éléments finis à 3D, compte tenu de son extrême complexité, passe par l'établissement d'un code conçu en deux dimensions. Ce préalable indispensable qu'est la mise en œuvre de ce code à deux dimensions et son optimisation pour les deux applications citées précédemment constituent le fil conducteur de cet exposé.

Ainsi **notre mémoire est constitué de quatre chapitres.**

- **Le premier** est entièrement **dédié aux éléments finis**. Après une courte introduction rappelant les fondements de la méthode des résidus pondérés, nous débutons le problème par l'écriture des équations de Maxwell. Après avoir introduit les notions de conditions aux limites, nous développons l'équation de Helmholtz écrite en champ électrique sous forme transverse et longitudinale. Nous appliquons à ces deux formes la méthode des résidus pondérés. Une intégration par partie permet alors d'aboutir à la formulation dite faible faisant apparaître des intégrales de contour. A ce stade, conditions aux limites, de continuité et de bord sont applicables. Nous nous consacrons ensuite à la projection de la solution recherchée (le champ électrique  $\vec{E}$ ) sur une base de fonctions d'interpolation. Dans ce but, nous choisissons d'abord le triangle comme élément de discrétisation de notre section droite puisque nous nous situons dans un problème à deux dimensions. L'espace de référence, les coordonnées barycentriques et l'interpolation de type nodale sont ensuite abordées avant d'enrichir l'élément qui vient d'être défini. Cet enrichissement

de la méthode de base est connu dans la littérature sous le vocable “éléments finis à éléments d’arêtes”, puisque des champs transverses aux nœuds sont projetés sur chaque arête du triangle. Nous appliquons ensuite la méthode de Galerkin aux résidus pondérés, ce qui revient à choisir comme fonction de pondération, les fonctions de base qui ont servi à construire l’interpolation du champ électrique. L’organisation matricielle, l’assemblage et la procédure de résolution numérique viennent ensuite conclure ce premier chapitre.

➤ **Le second** chapitre de ce mémoire **comporte deux volets bien distincts.**

- **Le premier** de ces volets est consacré à **l’interface homme-machine**. C’est en quelque sorte la description d’un petit manuel de 10 à 15 pages expliquant le moyen de créer une structure de propagation, de la mailler, de lancer la recherche des solutions et les opérations graphiques de post traitement. Nous nous situons à ce stade aux frontières de l’édition d’un document du type “getting started” pour plagier la définition anglo-saxonne du document accompagnant la version professionnelle d’un logiciel de CAO moderne. Certes, nous aurions pu insérer cette partie en annexe, mais cette phase d’élaboration de notre logiciel est importante à nos yeux. Nous voulons, aussi montrer, qu’un soin tout particulier a été apporté à cette interface de façon à ce que notre code soit utilisable par le plus grand nombre sans avoir nécessairement une connaissance profonde dans le domaine des éléments finis.
- **Le deuxième** volet de ce chapitre concerne les **phases de validation du code** que nous avons créé et mis au point. La première phase de test est le préalable à la mise en œuvre d’une aide fiable à la caractérisation des nouveaux matériaux pour la microélectronique. Cette première phase s’appuie sur le relevé expérimental le plus fiable possible de la constante de propagation complexe de lignes coplanaires, et ce, avec conducteur central de forme classique ou en forme de “T”. Effectué avec un analyseur HP8510, ce relevé fréquentiel constitue un indiscutable référentiel pour la confrontation avec les prédictions numériques. Ainsi, pertes métalliques, pertes diélectriques et prise en compte de domaines de dimensions valant le 20000<sup>ième</sup> ou le 50000<sup>ième</sup> de la section droite totale sont validées grâce à l’expérience. Nous vérifions ensuite, les aptitudes de notre code à modéliser les interconnexions couplées par un schéma électrique équivalent par comparaison avec quelques résultats analytiques “remarquables”. Ainsi, notre point de départ est basé sur la mathématique liée à la description d’un schéma électrique équivalent de trois lignes où les tensions et les courants sont régis par des équations différentielles du second ordre. Ces calculs, consignés dans la littérature scientifique, montrent que le produit de la tension d’un mode par celui du courant d’un autre mode peut prendre des valeurs bien particulières. Nous avons poussé plus loin nos investigations en établissant tous les calculs relatifs à

un nombre pair de lignes soit quatre dans le cas présent. Cette étape extrêmement lourde nous a permis de montrer également que les produits croisés des tensions d'un mode par les courants d'un autre mode (les deux ayant la même parité) prennent une valeur bien spécifique. Tout comme précédemment, nous avons vérifié ce point mais sur un système de 4 interconnexions cuivre de dimension  $0.8 \times 1 \mu\text{m}$  baignant dans  $3 \mu\text{m}$  de silice.

- **Le troisième** chapitre est intégralement affecté au fonctionnement des **interconnexions** "cuivre" présentes dans les niveaux de métallisation supérieurs d'un **circuit intégré numérique**. Par fonctionnement des interconnexions, nous nous entendons l'étude de l'intégrité des signaux (temps de montée, de retard de propagation et diaphonie) au moyen d'une analyse temporelle. Nous rappelons donc les dimensions des connexions cuivre et les hypothèses établies pour résoudre, dans un premier temps, le problème électromagnétique d'un système multi-conducteurs. Ce préalable est nécessaire à l'élaboration d'un schéma électrique équivalent ; seule entité interprétable par Spice ou tout autre logiciel équivalent. Avant d'analyser l'intégrité des signaux sur 3, 5 et 8 connexions, nous commentons les évolutions des constantes de propagations complexes sur un système à 8 interconnexions sans oublier les caractéristiques d'une seule connexion cuivre. Dans ce but, une étude électromagnétique est proposée à partir des évolutions fréquentielles des constantes de propagation complexes de 8 modes normaux à fréquences de coupure nulles. Ces évolutions des 8 valeurs propres d'un système à 8 conducteurs à pertes (si l'on omet celui de référence) sont commentées en basse fréquence dans leur comportement de mode à pertes ainsi que pour des configurations multiples de couplage fort, moyen et faible. Un bilan sur les amplitudes respectives des champs conclut ce volet électromagnétique du problème. Vient ensuite, la détermination du schéma électrique équivalent d'une cellule élémentaire représentant les huit interconnexions en interactions. Nos résultats sont fournis sous forme de quatre matrices [R], [L], [C] et [G] de 64 termes chacune dans lesquelles nous vérifions quelques propriétés comme la réciprocité, la symétrie, mais aussi quelques règles simples gouvernant l'évolution des pertes. Nous établissons ainsi un schéma équivalent pour 3, 5 et 8 lignes en interaction de façon à étudier l'impact des lignes voisines sur une ligne qui, à un instant donné, est considérée comme agresseur, les autres étant des victimes. Cet impact concerne l'excitation de l'agresseur de façon symétrique avec 1, 2, 3 voir 4 lignes passives (victimes) situées de part et d'autre, mais aussi dans la version antisymétrique où 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 victimes sont localisées toutes du même côté, à droite ou à gauche. Des histogrammes récapitulent les évolutions des temps de propagation, de commutation sur le front

montant et de la diaphonie dans les cas d'un couplage fort, moyen et faible. Pour éviter un trop plein de résultats, seuls 2 cas asymptotiques encadrent une situation plus réaliste.

- Dans **le quatrième** et dernier chapitre, nous proposons une **aide à la caractérisation électromagnétique des matériaux** déposés en couche mince. Il s'agit ici du PZT. Nous montrons la façon dont notre code est inclus dans une boucle d'asservissement où la consigne est une constante de propagation mesurée alors que l'information de sortie est la permittivité complexe du matériau inconnu. Cette constante de propagation n'est pas mesurée directement mais déterminée à partir d'un relevé fréquentiel des paramètres [S] de deux structures qui ne diffèrent que par leur longueur. Ces relevés sont effectués sous pointes à l'analyseur de réseau vectoriel. Ainsi, nous décrivons d'abord la méthode mise au point pour déduire, des relevés des quatre paramètres [S], la constante de propagation complexe, seule grandeur interprétable par notre code. Les structures de test coplanaires sont ensuite réalisées en tenant compte des contraintes technologiques liées à la couche de PZT déposée sur le substrat "saphir". Une première évolution de la permittivité » complexe est ainsi proposée dans la bande 1 à 26 GHz. Vient également une étude de sensibilité où le décalage des pointes de mesure, l'épaisseur variable de la couche de PZT et l'effet de la conductivité des métallisations sont analysés. Nous étudions également l'impact, sur la valeur de la permittivité complexe déduite par notre code, d'une variation de la permittivité du substrat "saphir". Une discussion sur l'introduction d'une impédance de surface en lieu et place d'un maillage dans les métallisations est entreprise. Nous montrons cette influence sur les valeurs de la permittivité effective et la tangente de l'angle de pertes déduite de nos relevés expérimentaux. La comparaison avec un autre code de calcul (l'approche dans le domaine spectral) est effectuée avant de proposer un bilan de toutes les mesures réalisées sur les différents couples de lignes coplanaires.

La conclusion générale synthétise l'ensemble de nos résultats et ouvre des perspectives quant aux futurs travaux à mener.

## Bibliographie

- [1] G. Moore  
“*Progress in Digital Integrated Electronics*”  
Technical Digest—IEEE Int'l Electron Devices Meeting, IEEE, pp. 11–13; D. Brock, ed.,  
*Understanding Moore's Law*, 1975.
- [2] International Technology Roadmap for Semiconductors  
<http://www.itrs.net/>
- [3] J. A. Davis, R. Venkatesan, A. Kaloyeros, M. Beylansky, S. J. Souri and all  
“*Interconnect limits on gigascale integration (GSI) in the 21<sup>st</sup> century*”  
Proceedings of the I.E.E.E., Vol 89, N° 3, pp 305 – 324, March 2001.
- [4] C. Y. Chang  
“*The highlights in the nano world*”  
Proceedings of the I.E.E.E., Vol 91, N° 11, pp 1756-1764, November 2003.
- [5] L.G. Gosset, A. Farcy, J. de Pontcharra, Ph. Lyan, R. Daamen and all  
“*Advanced Cu interconnects using air gaps*”  
Proceedings of the Ninth European Workshop on Materials for Advanced Metallization, Vol 82,  
N° 3/4, pp 321-332, December 2005.
- [6] Intel Corporation  
<http://www.intel.com/>
- [7] Advanced Micro Devices (AMD)  
<http://www.amd.com/>





# Chapitre 1. Une méthode d'éléments finis à éléments vectoriels

## Introduction

La méthode des éléments finis regroupe un ensemble d'outils mathématiques dédiés à l'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles. Sa description complète, fait appel à des notions mathématiques ardues et abstraites comme l'analyse fonctionnelle ou encore la théorie des distributions. Aborder cette méthode en reprenant toutes ces notions mathématiques sort du cadre de ce mémoire, et ce, d'autant plus que nous n'y consacrons qu'un seul chapitre. Nous essaierons, toutefois, d'être le plus complet possible dans la description de cette méthode.

D'une manière générale, nous cherchons les solutions d'un problème régi par des équations du type :

$$\mathfrak{S}(v) = 0 \quad \forall x \in \Omega; \Omega \subset \mathbb{R}^n; n \leq 3 \quad (1.1)$$

où  $\mathfrak{S}$  représente un opérateur différentiel et  $v$  est la fonction inconnue recherchée. Cette dernière doit satisfaire l'expression (1.1) ainsi que les conditions aux limites minimales associées. Si la solution  $v$  ne peut être obtenue analytiquement, il est toujours possible d'en calculer une approximation, plus ou moins fine, par une démarche numérique. De notre étude bibliographique [1] à [14], il ressort figure 1.1 que cette analyse numérique du problème peut être abordée :

- ✓ soit par le biais de la méthode des résidus pondérés
- ✓ soit au moyen d'une approche variationnelle basée sur l'existence d'une fonctionnelle

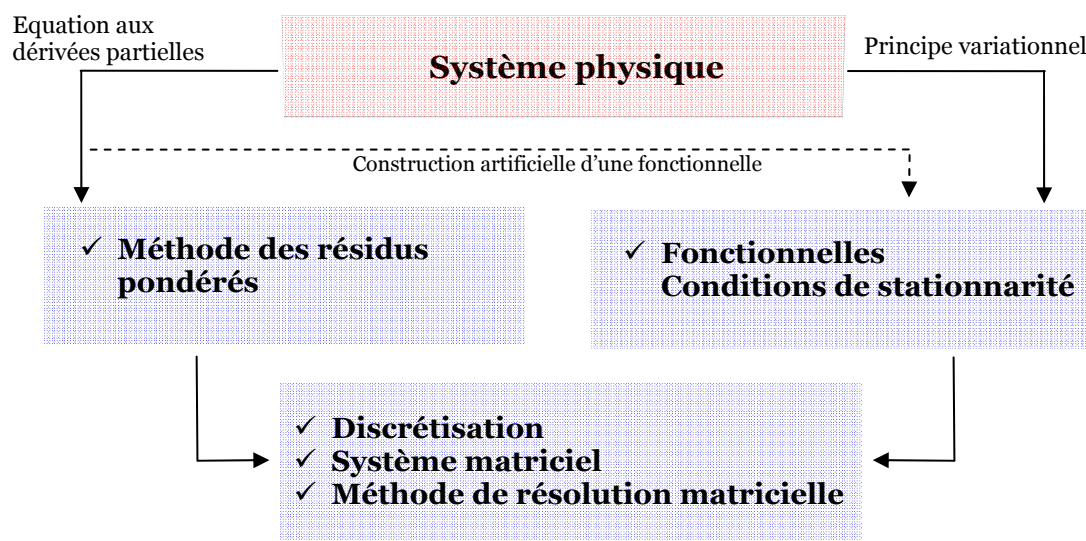


Figure 1.1 Les deux démarches numériques usuelles

Le choix de l'une ou l'autre de ces deux approches ; résidus pondérés ou méthode variationnelle, dépend essentiellement de la nature du problème étudié et des grandeurs mises en jeux. Nous voyons, figure 1.1, que ces approches conduisent toutes deux à un même objectif ; celui de formuler le problème initial sous forme matricielle permettant ainsi la résolution par ordinateur.

A ce stade, quelques précisions sur ces deux approches s'imposent. Pour être bref, l'approche variationnelle d'un problème est liée à la notion de fonctionnelle. Une fonctionnelle (fonction de plusieurs variables, de plusieurs fonctions et de leurs dérivées) est intimement liée au système physique que l'on veut décrire. Lorsque ce dernier est régi par des notions d'énergie, comme bien souvent en mécanique, une fonctionnelle peut apparaître "naturellement". Si tel n'est pas le cas, on doit alors en construire une, de manière "artificielle", et ce, à partir de l'opérateur différentiel pour peu que ce dernier remplisse certaines conditions. Ainsi, si nous sommes en possession de la fonctionnelle, nous appliquons le principe de stationnarité selon lequel toute fonction qui annule la première variation de la fonctionnelle est solution de cette dernière [9] [10] [11].

La méthode des résidus pondérés constitue un substitut à l'approche variationnelle et peut être appliquée directement aux équations différentielles qui régissent le fonctionnement de notre système physique. En effet, aucune construction mathématique autre que celle liée à la définition même de la méthode des résidus pondérés n'est nécessaire. C'est pourquoi nous optons pour cette démarche. Elle constitue donc le point de départ de cette présentation.

De la définition de la méthode des résidus pondérés émerge un nombre considérable de possibilités pour résoudre ou approximer numériquement la solution d'un problème aux différentielles partielles. La méthode des éléments finis est l'une de ces possibilités.

Reprenons l'équation générale (1.1) :

$$\mathfrak{S}(v) = 0 \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega; \Omega \subset \mathbb{R}^n; n \leq 3 \\ \mathfrak{S} : \text{Opérateur différentiel} \end{array}$$

La méthode des résidus pondérés consiste à discrétiser le domaine de définition  $\Omega$  en sous domaine  $\Omega_i$  et à substituer, à la solution inconnue  $v$ , une solution approximative, mais connue  $\bar{v}$  telle que :

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^P N_i v_i \quad (1.2)$$

Dans l'expression (1.2), les termes  $N_i$  sont appelés "fonctions de bases" et les termes  $v_i$  les degrés de liberté. Le problème revient alors à chercher les composantes  $v_i$ , devenues de ce fait les inconnues du problème, de sorte que sur un sous domaine  $\Omega_i$  les fonctions  $N_i$  correspondantes approximent au mieux la solution exacte  $v$ . Du choix des fonctions  $N_i$  va dépendre la convergence de la solution approchée. Il n'existe pas de critère rigoureux permettant de faire un choix optimal en fonction d'un problème donné. Au demeurant, s'il possède une connaissance approfondie du problème, le physicien peut choisir judicieusement les fonctions  $N_i$  de sorte que l'algorithme converge exactement vers la solution analytique.

dans ce cas :

$$\mathfrak{I}(\bar{v}) = 0 \quad (1.3)$$

dans le cas contraire, on génère un résidu "r" :

$$\mathfrak{I}(\bar{v}) = r \quad (1.4)$$

Cette dernière situation est, bien évidemment, représentative du cas le plus probable.

La méthode des résidus pondérés consiste alors à minimiser ce résidu "r" par le biais de l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} \psi r d\Omega = \int_{\Omega} \psi \mathfrak{I}(\bar{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \psi \mathfrak{I} \left( \sum_{i=1}^P N_i v_i \right) d\Omega = 0 \quad (1.5)$$

L'expression (1.5) est une formulation équivalente du problème, c'est-à-dire que les fonctions qui en sont solutions sont également solutions du problème initial (1.1). Dans cette expression, on appelle "fonction de pondération" la quantité  $\psi$ . Son rôle consiste à générer autant d'équations qu'il existe d'inconnues  $v_i$ . Même si la définition de  $\psi$  est, elle aussi, totalement arbitraire, certaines fonctions sont particulièrement adaptées et de ce fait très utilisées. Elles le sont, du reste, à un tel point qu'elles ont donné naissance à des méthodes d'approximation numérique à part entière. Elles possèdent toutes leurs avantages et leurs inconvénients et sont plus ou moins bien adaptées selon le problème à traiter. Rappelons, avant de citer quelques exemples, que ces méthodes découlent de la méthode des résidus pondérés pour laquelle un choix particulier est effectué dans la définition de la fonction de pondération  $\psi$ .

✓ *La méthode de collocation par point :*

Puisque le domaine  $\Omega$  a, au préalable, été décomposé en plusieurs sous domaines  $\Omega_i$ , certains points sont connus. La méthode de collocation par points consiste à appliquer, en ces points, des distributions de Dirac. On a dans le cas le plus général où  $\Omega$  décrit un volume :

$$\psi_j = \delta_j(x - x_j, y - y_j, z - z_j) \quad (1.6)$$

$x_j, y_j, z_j$ : coordonnées des points connus

L'expression (1.5) est donc, grâce aux distributions de Dirac, vérifiée en dehors de ces points particuliers. Il reste alors à rechercher les coefficients  $v_i$  qui annulent l'expression 1.7 en ces points. Notons que cette démarche peut dégénérer en une méthode de différences finies.

$$\int_{\Omega} \delta_j \mathfrak{L} \left( \sum_{i=1}^p N_i v_i \right) d\Omega = 0 \quad (1.7)$$

✓ *La méthode de collocation par sous domaines :*

Cette méthode consiste à choisir des fonctions  $\psi$  constantes sur un sous domaine et nulles partout ailleurs. Ainsi, comme le montrent les équations (1.8), on cherche à annuler la moyenne du résidu sur chaque sous domaine.

$$\int_{\Omega_e^1} r d\Omega = 0; \quad \int_{\Omega_e^2} r d\Omega = 0; \dots \quad \int_{\Omega_e^n} r d\Omega = 0 \quad (1.8)$$

Les fonctions  $\psi$  sont alors des combinaisons linéaires de fonctions du type "échelons unité" par sous domaines. Nous aurons, par exemple, pour un domaine  $\Omega$  à une dimension l'expression suivante:

$$\int_{\Omega} \sum_j (U(x - x_j) - U(x - x_{j+1})) \mathfrak{L} \left( \sum_{i=1}^p N_i v_i \right) d\Omega = 0 \quad (1.9)$$

✓ *La méthode des moindres carrés :*

Elle est basée sur la minimisation de la moyenne, sur  $\Omega$ , du carré du résidu. On aboutit à cette méthode en écrivant :

$$\psi_j = \frac{\partial}{\partial v_j} r = \frac{\partial}{\partial v_j} \mathfrak{S}\left(\sum_{i=1}^P N_i v_i\right) \quad (1.10)$$

Soit en remplaçant (1.10) dans (1.5) :

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \int_{\Omega} \left( \mathfrak{S}\left(\sum_{i=1}^P N_i v_i\right) \right)^2 d\Omega = 0 \quad (1.11)$$

✓ *La méthode de Galerkin :*

Cette méthode est la plus couramment utilisée. Elle consiste à écrire :

$$\psi_j = N_i \quad (1.12)$$

Ce qui revient à rendre orthogonales entre elles, les fonctions de pondérations  $\psi_j$  et les fonctions de base  $N_i$ . Ainsi l'intégrale 1.5 devient :

$$\int_{\Omega} N_j \mathfrak{S}\left(\sum_{i=1}^P N_i v_i\right) d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

L'expression 1.13 et son utilisation dans le cadre de notre problème seront développées ultérieurement. En effet, nous avons sélectionné la méthode de Galerkin appliquée à celle des résidus pondérés pour résoudre notre problème.

Le plan de ce chapitre, dédié aux éléments finis et aux éléments d'arêtes en particulier, découle alors tout naturellement des choix que nous avons effectués. Le synoptique figure 1.2, articulé autour des résidus pondérés, met en relief notre démarche et l'organisation de ce premier chapitre. En effet, à chaque bloc et sous bloc de ce synoptique correspondent un paragraphe et des sous paragraphes. Quatre paragraphes constituent donc l'ossature de ces différents développements.

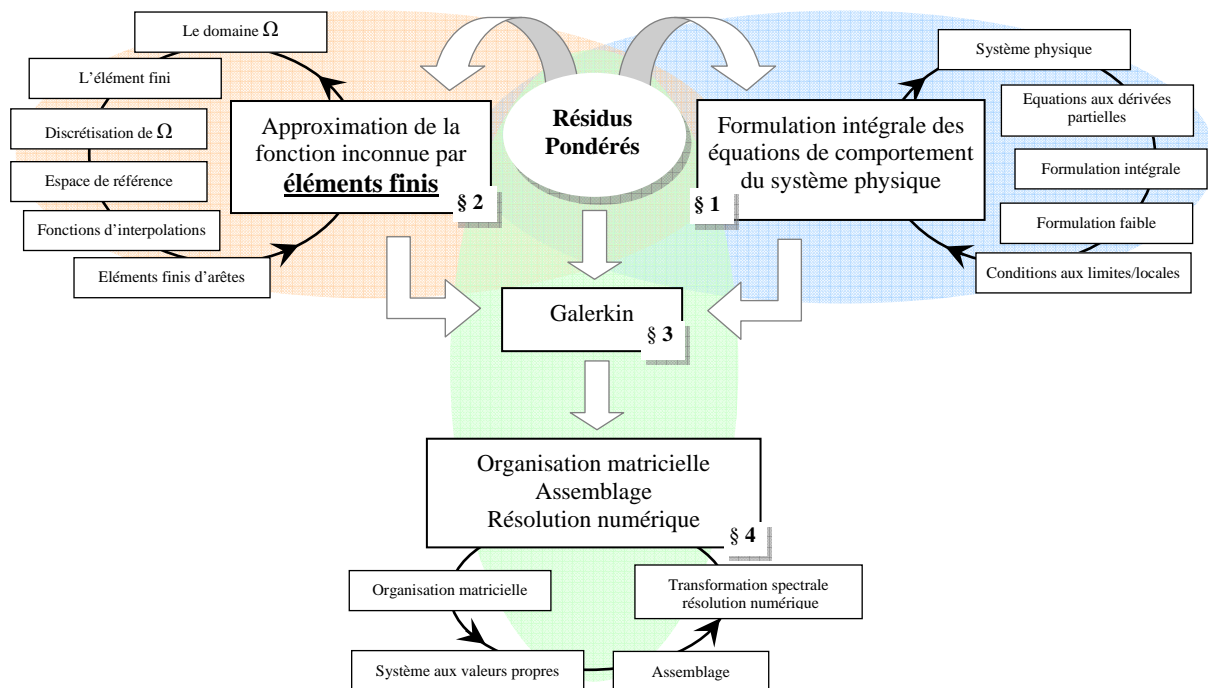


Figure 1.2 Synoptique représentant l'agencement du premier chapitre

Dans le premier paragraphe, nous rappelons l'écriture adoptée pour transcrire les équations de Maxwell ainsi que leurs formulations intégrales en vue d'aboutir à la forme faible. Cette forme doit, du reste, être identifiable à l'expression 1.5 conformément à la méthode des résidus pondérés.

Le second paragraphe porte, quant à lui, sur l'approximation de la fonction inconnue par éléments finis. Cette fonction inconnue concerne le champ électrique dans le cadre de ce mémoire. Discrétisation de l'espace, espace de référence, coordonnées barycentriques, espace des fonctions d'interpolations ou fonctions de bases, interpolation nodale et éléments d'arêtes sont le fil conducteur de ce second paragraphe majeur.

La troisième partie de cet exposé assure le lien entre les équations de Maxwell sous leur forme faible (paragraphe 1) et l'approximation de la fonction "champ électrique" par éléments finis (paragraphe 2), et ce, grâce à la définition des fonctions de pondération. Il s'agit de la méthode de Galerkin ; encore faut-il le rappeler.

Fort de tous les développements précédents, nous verrons, dans le paragraphe 4, qu'à chaque sous domaines de discrétisation, correspond une matrice de dimension  $14 \times 14$ . Cette matrice est, en quelque sorte, la signature électromagnétique de l'élément sur le sous domaine considéré. L'opération d'assemblage permet ensuite de sommer la contribution de chacun des éléments. Nous aboutissons, alors, à un système matriciel aux valeurs propres que l'on résout par le biais de la méthode d'Arnoldi.

## 1. Formulation intégrale des équations de comportement du système physique

### 1.1 Système physique : équations de Maxwell classiques

Notre objectif consiste à trouver les caractéristiques électromagnétiques de structures de propagation uniformes dont les sections droites sont constituées de plusieurs conducteurs dissipatifs de forme quelconque, le tout baignant, a priori, dans des matériaux diélectriques également à pertes. Ainsi notre système physique est régi par les équations de Maxwell classiques. Nous rappelons ces équations sous forme locale et intégrale, à savoir :

✓ deux équations exprimant le comportement intrinsèque des champs fondamentaux:

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad \xleftrightarrow{\text{Stokes}} \quad \oint_c \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \circ d\vec{S} \quad (1.14)$$

$$\text{Maxwell-Flux} \quad \vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad \xleftrightarrow{\text{Green}} \quad \oiint_s \vec{B} \circ d\vec{S} = 0 \quad (1.15)$$

✓ deux équations reliant les champs macroscopiques à leurs sources et aux milieux :

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{d}{dt} \vec{D} \quad \xleftrightarrow{\text{Stokes}} \quad \oint \vec{H} \circ d\vec{l} = \iint_s \vec{J} \circ d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_s \vec{D} \circ d\vec{S} \quad (1.16)$$

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \vec{\nabla} \circ \vec{D} = \rho \quad \xleftrightarrow{\text{Green}} \quad \oiint_s \vec{D} \circ d\vec{S} = Q \quad (1.17)$$

où :  $\vec{E}$  : vecteur champ électrique

$\vec{B}$  : vecteur champ magnétique

$\vec{D}$  : vecteur excitation (ou déplacement) électrique

$\vec{H}$  : vecteur excitation magnétique

$\vec{J}$  : vecteur densité de courant

$\rho$  : densité de charge électrique locale

$Q$  : charge à l'intérieur de la surface fermée considérée S



Nous faisons dès à présent l'hypothèse d'homogénéité et de linéarité des milieux. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E}\end{aligned}\quad (1.18)$$

Dans ces expressions,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. Les quantités  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$ , représentent, quant à elles, les permittivités et perméabilités relatives des milieux. Ces quantités sont implicitement complexes et tensorielles dans le cadre de ce mémoire afin de tenir compte des pertes et de l'éventuel caractère anisotrope du milieu. De façon à alléger l'écriture de toutes nos équations, elles ne comporteront ni astérisques (dans le cas de pertes diélectriques ou magnétiques), ni crochets (dans le cas de tenseurs). Signalons que pour des raisons de commodité qui apparaîtront plus tard, nous limitons les tenseurs à leur définition biaxiale [15] [16], à savoir :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,xx} & \varepsilon_{r,xy} & 0 \\ \varepsilon_{r,yx} & \varepsilon_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{r,zz} \end{bmatrix} \\ \mu &= \mu_0 \mu_r = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{r,xx} & \mu_{r,xy} & 0 \\ \mu_{r,yx} & \mu_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{r,zz} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.19)$$

Dans l'équation  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , où  $\sigma$  est la conductivité du matériau, nous rendons compte implicitement de la nature dissipative du matériau métallique alors que la quantité  $\sigma$  est réelle. Bien évidemment, il n'y a pas ici de tangente d'angle de pertes comme pour les matériaux diélectriques ou magnétiques. Toutefois, ne pas considérer la conductivité comme une quantité complexe, nous prive de la modélisation de matériaux supraconducteurs puisque  $\vec{J} = \sigma \vec{E} = (\sigma_a - j\sigma_b) \vec{E}$  dans le modèle à deux fluides [17] [18] [19]. Cette grandeur est donc considérée complexe. D'un point de vue purement mathématique nous adoptons également un conditionnement biaxial pour ce tenseur bien qu'il n'ait, à ce jour, aucune signification physique.

De ce fait la conductivité  $\sigma$  s'écrit d'une manière générale sous la forme suivante :

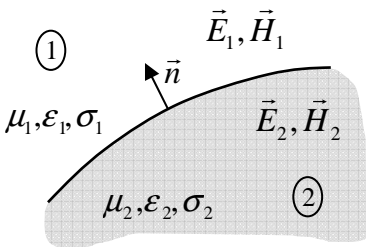
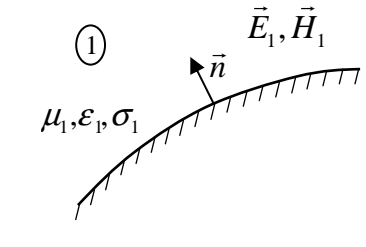
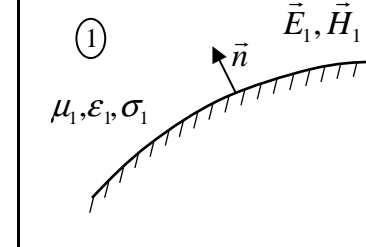
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Pour toute la suite, nous nous plaçons dans le domaine fréquentiel. Nous considérons, en outre, que notre espace géométrique de travail ( $\Omega$ ), est toujours vide de toutes charges libres et/ou liées ( $\rho=0$ ). Dans ces conditions, et selon les hypothèses précédemment établies, notre système physique est régi par les équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H} \quad (1.21) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \left[ \epsilon_r - j\frac{1}{\omega\epsilon_0}\sigma \right] \vec{E} \quad (1.23)$$

$$\vec{\nabla} \circ \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = 0 \quad (1.22) \quad \vec{\nabla} \circ \mu_0\mu_r\vec{H} = 0 \quad (1.24)$$

En guise de conclusion, nous précisons les relations de passage des champs électriques et magnétique à une interface entre 2 milieux en l'absence de charges :

Interface quelconque	Interface avec un CCE	Interface avec un CCM
 <p> <math>\vec{E}_1, \vec{H}_1</math>  <math>\vec{E}_2, \vec{H}_2</math>  <math>\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1</math>  <math>\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2</math> </p> <p> <math>\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}</math>  <math>\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\vec{J}_s</math>  <math>\vec{n} \circ (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0</math>  <math>\vec{n} \circ (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0</math> </p>	 <p> <math>\vec{E}_1, \vec{H}_1</math>  <math>\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1</math> </p> <p> <math>\vec{n} \wedge \vec{E}_1 = \vec{0}</math>  <math>\vec{n} \wedge \vec{H}_1 = -\vec{J}_s</math>  <math>\vec{n} \circ \vec{D}_1 = \rho_s</math>  <math>\vec{n} \circ \vec{B}_1 = 0</math> </p>	 <p> <math>\vec{E}_1, \vec{H}_1</math>  <math>\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1</math> </p> <p> <math>\vec{n} \wedge \vec{E}_1 = \vec{E}_s</math>  <math>\vec{n} \wedge \vec{H}_1 = \vec{0}</math>  <math>\vec{n} \circ \vec{D}_1 = \rho_s</math>  <math>\vec{n} \circ \vec{B}_1 = B_N</math> </p>

Tableaux 1.1 : relations d'interfaces des champs électriques et magnétiques

Dans ce tableau,  $\vec{J}_s$  est la densité de courant surfacique présente dans le plan de l'interface. Il est important de rappeler ces quelques relations bien qu'elles soient parfaitement connues. En effet, les cas d'interface se comportant comme un court circuit électrique parfait (CCE) ou magnétique parfait (CCM) constituent la possibilité de définir les conditions aux limites

nécessaires à la résolution d'une équation différentielle. Notre système physique étant désormais complètement défini, nous pouvons nous consacrer au développement des équations.

## 1.2 Equations aux dérivées partielles : Équation de Helmholtz

Avant d'aborder concrètement la formulation intégrale de notre problème de propagation d'onde électromagnétique, nous reprenons certains points déjà commentés dans notre introduction que nous complétons par quelques généralités sur les équations aux dérivées partielles. Ces notions, qui font ici figure de rappel, constituent un support rigoureux nous permettant de poser correctement notre problème.

### 1.2.1 Equations aux dérivées partielles et conditions aux limites

Reprenons l'expression (1.1) :  $\mathfrak{S}(v) = 0$

$$\forall x \in \Omega; \Omega \subset \mathbb{R}^n; n \leq 3$$

$\mathfrak{S}$  Opérateur différentiel

Résoudre cette équation aux dérivées partielles, c'est trouver la fonction  $v$  (vectorielle ou scalaire) qui vérifie, sur le domaine  $\Omega$ , l'opérateur différentiel  $\mathfrak{S}$ , ainsi qu'une ou plusieurs conditions aux limites associées. En effet, pour résoudre ce type d'équation, nous sommes censé connaître la physique de notre problème (l'opérateur  $\mathfrak{S}$ ), ainsi que la fonction solution  $v$ , ou l'une de ses dérivés, à un instant particulier ou encore à un endroit particulier. La résolution de (1.1) donnera un spectre de solutions admissibles au problème et, la connaissance a priori de la solution à un instant ou à un endroit précis, permettra de prélever dans ce spectre, la solution particulière qui nous intéresse.

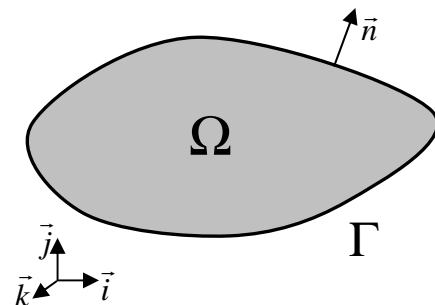


Figure 1.4 : Domaine de définition

Ainsi nous définissons plusieurs types de conditions aux limites dont les plus fréquentes sont :

- ✓ Les conditions initiales : c'est la notion temporelle qui intervient ici. Bien souvent, on connaît l'état de notre système à l'instant  $t=0$ .

- ✓ Les conditions de bord : si le domaine  $\Omega$  est fini, il est délimité par un contour (voir figure 1.4) que l'on oriente par convention. Dans certains cas, la solution du problème est connue sur ce contour.
- ✓ Les conditions à l'infini : utilisées dès l'instant où le domaine  $\Omega$  est infini au moins dans l'une de ses dimensions spatiales.

Notre système physique est décrit par les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel. Il est ici impossible de définir des conditions aux limites basées sur la notion de temps. De plus, les contraintes informatiques liées à l'opération de maillage (nous en reparlerons plus tard) impliquent que le domaine  $\Omega$  soit fini. De ce fait, seules les conditions de bord peuvent être, ici, envisagées. Comme bien souvent en physique,  $\mathfrak{S}$  est un opérateur différentiel du second ordre. Les conditions de bord s'appliquent donc directement sur la fonction  $v$  ainsi que sur ses dérivées du premier ordre.

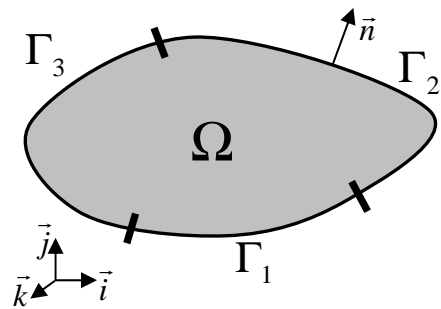


Figure 1.5 : Domaine de définition

A titre d'exemple, nous pouvons définir sur les portions de contour  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  de la figure 1.5, les conditions suivantes:

$$\checkmark \quad v = v_D \text{ sur } \Gamma_1 \quad \text{dite } \textit{condition de Dirichlet} \quad (1.25)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial}{\partial n} v = v_N \text{ sur } \Gamma_2 \quad \text{dite } \textit{condition de Neumann} \quad (1.26)$$

$$\checkmark \quad \alpha \frac{\partial}{\partial n} v + \beta v = v_R \text{ sur } \Gamma_3 \quad \text{dite } \textit{condition de Robin ou mixtes} \quad (1.27)$$

Si  $v_D$ ,  $v_N$  ou  $v_R$  sont nulles, on parle alors de conditions de bord homogène. La solution de notre problème est donc une solution générale qui satisfait l'opérateur différentiel dans  $\Omega$ , ainsi qu'au moins une des conditions précédentes sur le contour. Ces précisions étant faites, nous pouvons à présent focaliser notre attention sur l'équation de Helmholtz.

## 1.2.2 Equation de Helmholtz

A partir du système d'équations (1.21 à 1.24), il vient :

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - k_0^2 \left( \epsilon_r - j \frac{1}{\omega \epsilon_0} \sigma \right) \vec{E} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \left( \left( \epsilon_r - j \frac{1}{\omega \epsilon_0} \sigma \right)^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \right) - k_0^2 \mu_r \vec{H} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \text{où } k_0 = \frac{\omega}{C_0}$$

Où  $C_0$  est la célérité de la lumière dans le vide. On obtient deux équations différentielles indépendantes dont l'une fait intervenir le champ électrique  $\vec{E}$  et l'autre le champ magnétique  $\vec{H}$ . Ces deux champs vectoriels sont, bien entendu, les solutions que l'on recherche. Toutefois, la connaissance de l'un, engendre, grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, la connaissance de l'autre. Ainsi, nous n'avons pas à développer les deux formulations. Pour toute la suite, nous avons choisi de conserver celle faisant intervenir le champ électrique  $\vec{E}$ . Le code de calcul que nous mettons en œuvre est ainsi basé sur "la formulation E" du problème. Bien sûr, les solutions de cette équation différentielle sont des fonctions trigonométriques, ou encore des combinaisons linéaires de ces dernières puisque l'opérateur  $\vec{\nabla} \wedge$  est linéaire et homogène.

Cherchons donc des solutions de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-\gamma z} \quad \text{avec } \gamma = \alpha + j\beta \quad (1.29)$$

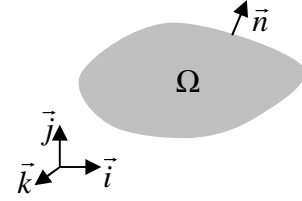
où  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  sont respectivement les constantes de propagation, d'atténuation (en Neper par mètre) et de phase (en Radians par mètre). Cette forme de solution dévoile l'hypothèse d'une propagation selon le vecteur unitaire  $\vec{k}$  de la base orthonormale directe (figure 1.4). Enfin nous munissons cette forme de solution des conditions aux limites du type court circuits électriques parfaits (CCE) et court circuits magnétiques parfaits (CCM).

En définitive, nous recherchons une solution de la forme :

$$(1.30) \quad \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{-\kappa z}$$

qui doit vérifier, dans  $\Omega$ , l'équation d'onde :

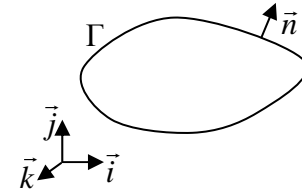
$$(1.31) \quad \vec{\nabla} \wedge (\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - k_0^2 \left( \epsilon_r - j \frac{1}{\omega \epsilon_0} \sigma \right) \vec{E} = \vec{0}$$



et satisfaire, sur  $\Gamma$ , au moins une des conditions de bord :

$$(1.32) \quad \vec{n} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{CCE})$$

$$(1.33) \quad \vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{n} \wedge (\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{0} \quad (\text{CCM})$$



Notons que dans ce cas, imposer une condition CCE revient en fait à appliquer la condition de Dirichlet homogène (les composantes du champ  $\vec{E}$  tangentes au contour  $\Gamma$  sont nulles). De même que la condition CCM, est une condition de Neumann homogène pour  $\vec{E}$ . Signalons enfin, que nous n'utilisons pas la condition de Robin. Elle doit être introduite si nous voulons prendre en compte la possibilité de définir des conditions absorbantes (ou de rayonnement), très utiles dans certain cas. Cette fonctionnalité n'existe pas dans la version actuelle de notre code de calcul car non nécessaire à la résolution des structures de propagation que nous nous proposons d'étudier dans le cadre de ce mémoire.

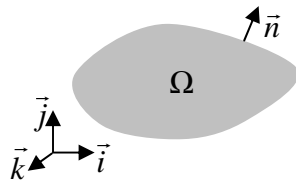
### 1.2.3 Décomposition transverse et longitudinale

L'intérêt de cette décomposition n'apparaît malheureusement que dans le second volet de ce chapitre, lorsque nous construisons l'élément fini à éléments d'arêtes. En effet, nous voyons que cette définition ne s'applique pas à toutes les composantes du champ, mais uniquement aux composantes transverses (composantes appartenant au plan formé par les deux vecteurs unitaire  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ ). Il est donc nécessaire, dès à présent, de scinder le problème en une partie transverse et une partie longitudinale. C'est, à ce stade, qu'apparaît l'intérêt de la définition biaxiale des tenseurs de permittivité et de perméabilité.

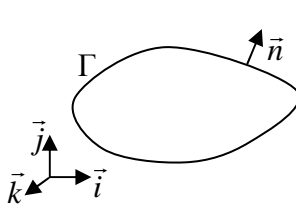
Ainsi, en posant:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{\nabla}_T + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{E} &= \vec{E}_T + E_z \vec{k}\end{aligned}\quad (1.34)$$

Nous obtenons à partir de (1.28), les expressions suivantes :



$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_T \wedge \frac{1}{\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \epsilon_r) \vec{E}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z &= 0 \\ \vec{\nabla}_T \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z + \gamma \vec{\nabla}_T \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T &= 0\end{aligned}\quad (1.35)$$



$$\begin{aligned}\vec{k} \circ \left( \frac{1}{\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T \right) &= 0 \\ \vec{n} \circ \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) &= 0\end{aligned}\quad (1.36)$$

Avec

$$\tilde{\mu}_r = \frac{1}{\mu_{rxx}\mu_{ryy} - \mu_{rxy}\mu_{ryx}} \begin{bmatrix} \mu_{rxx} & \mu_{ryx} \\ \mu_{rxy} & \mu_{ryy} \end{bmatrix}\quad (1.37)$$

On appelle  $\tilde{\mu}_r$ , le tenseur de pseudo perméabilité. Sa définition, permet d'aboutir à une écriture beaucoup plus simple du problème. En effet, il y a une étape de notre décomposition où nous sommes confronté à un terme qui possède la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mu_{rxx} & \mu_{ryx} \\ \mu_{rxy} & \mu_{ryy} \end{bmatrix}^{-1} \left( (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \wedge \vec{k} \right)\quad (1.38)$$

Cette dernière constitue un blocage dans la simplification globale du système. La recherche d'une entité pseudo tensorielle permettant l'écriture de (1.38) sous la forme suivante:

$$\left( \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx} & \tilde{\mu}_{ryx} \\ \tilde{\mu}_{rxy} & \tilde{\mu}_{ryy} \end{bmatrix}^{-1} (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \right) \wedge \vec{k}\quad (1.39)$$

est beaucoup plus intéressante, et permet d'obtenir la décomposition (1.35). Les calculs effectués à ce stade, constituent une phase de pré conditionnement. Nous pouvons à présent décrire la formulation intégrale de l'équation d'Helmholtz qui représente la première étape de notre démarche.

## 1.3 Transformation des équations : Formulation intégrale

En premier lieu, nous rappelons la forme générale issue du concept des résidus pondérés (décrite en introduction) à laquelle nous devons identifier notre problème:

$$\int_{\Omega} \psi r d\Omega = \int_{\Omega} \psi \mathfrak{S}(\bar{v}) d\Omega \quad \text{avec} \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^p N_i v_i$$

Les développements précédents, ont permis de construire l'opérateur  $\mathfrak{S}$ . Pour mémoire,  $\psi$  représente les "fonctions de pondérations" et  $\bar{v}$  les "fonctions de bases". L'application directe la méthode des résidus pondérés à notre opérateur permet alors de définir les quantités suivantes :

$$\iint_{\Omega} \bar{W}_T \circ \left( \bar{\nabla}_T \wedge \frac{1}{\mu_{rzz}} \bar{\nabla}_T \wedge \bar{E}_T - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \bar{\epsilon}_r) \bar{E}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \bar{\nabla}_T E_z \right) d\Omega = 0 \quad (1.40)$$

$$\iint_{\Omega} \bar{W}_z \left( \bar{\nabla}_T \circ \tilde{\mu}_r \bar{\nabla}_T E_z + k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z + \gamma \bar{\nabla}_T \circ \tilde{\mu}_r \bar{E}_T \right) d\Omega = 0 \quad (1.41)$$

Dans la notation générale, nous substituons :

- ✓ à la quantité  $\psi$ , le vecteur  $\bar{W} = \bar{W}_T + W_z \vec{k}$
- ✓ à la quantité  $\bar{v}$ , le vecteur champ électrique  $\bar{E}$

Dans ce cas,  $\bar{W} = \bar{W}_T + W_z \vec{k}$  est le "vecteur de pondération" dont les composantes sont les fonctions de pondération. Nous les définirons plus tard lorsque les fonctions de bases  $N_i$  associées aux composantes du vecteur champ électrique  $\bar{E}$  seront connues.

## 1.4 Formulation faible : Intégration par partie

### 1.4.1 Intérêt

La formulation faible du problème est intéressante pour plusieurs raisons :

- ✓ elle fait apparaître des intégrales de contour ce qui permettra d'étudier notre formulation intégrale lorsqu'on lui impose des conditions aux limites, locales, et de continuité.



- ✓ elle permet, en outre, de diminuer l'ordre de dérivation du système. Ce point est très intéressant car les restrictions minimales de dérivabilité que doivent subir les fonctions de bases sont réduites d'autant plus.

Toutefois, cette forme dite "faible" provoque un accroissement de l'ordre de dérivation des fonctions de pondérations ce qui peut, dans certains cas, être problématique. Nous rappelons que nous utilisons la méthode de Galerkin. Nous verrons alors dans ce cas que les fonctions de pondération sont similaires aux fonctions de bases. De ce fait, puisque nous construisons les fonctions de bases de sorte qu'elles respectent les restrictions minimales de dérivabilité imposées par la formulation du système, alors, les fonctions de pondérations les respectent implicitement.

### 1.4.2 Intégration par partie

La formulation faible s'obtient par une simple intégration par partie.

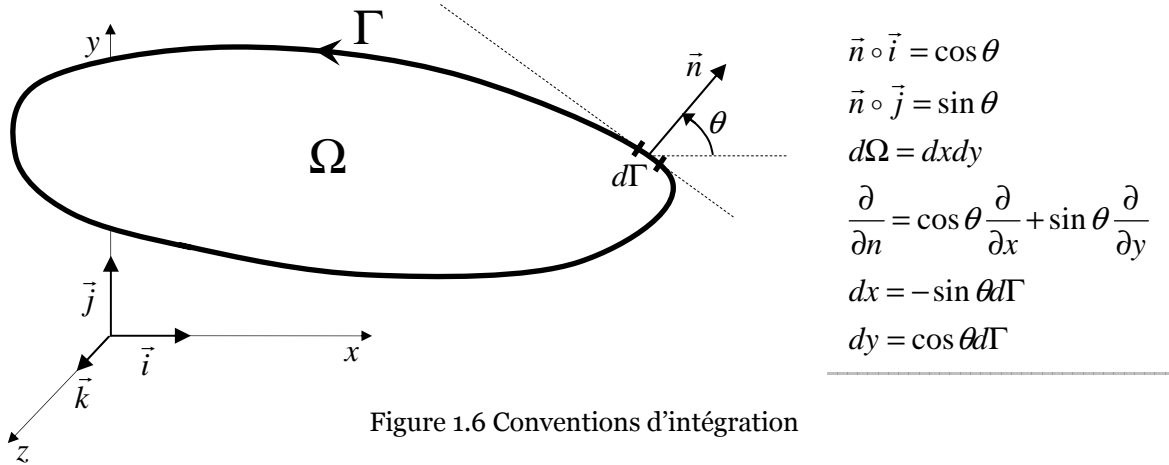


Figure 1.6 Conventions d'intégration

Ainsi, en prenant les conventions de la figure 1.6 ci-dessus, les calculs aboutissent à :

$$(1.42) \quad \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \bar{\epsilon}_r) \vec{E}_T \circ \vec{W}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega - \frac{1}{\mu_{rzz}} \oint_{\Gamma} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma = 0$$

$$(1.43) \quad \iint_{\Omega} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z W_z d\Omega - \oint_{\Gamma} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma = 0$$

Nous pouvons remarquer qu'à l'issue de cette opération d'intégration par partie, des intégrales sur le contour  $\Gamma$  de notre domaine  $\Omega$  apparaissent. Nous allons les utiliser pour inclure, dans notre modèle, les conditions de bord.

## 1.4.3 Prise en compte des conditions de bord

Dans le paragraphe suivant, nous verrons que les équations précédentes ne seront pas résolues directement dans l'espace  $\Omega$  mais dans des sous domaines  $\Omega_i$  tel que :

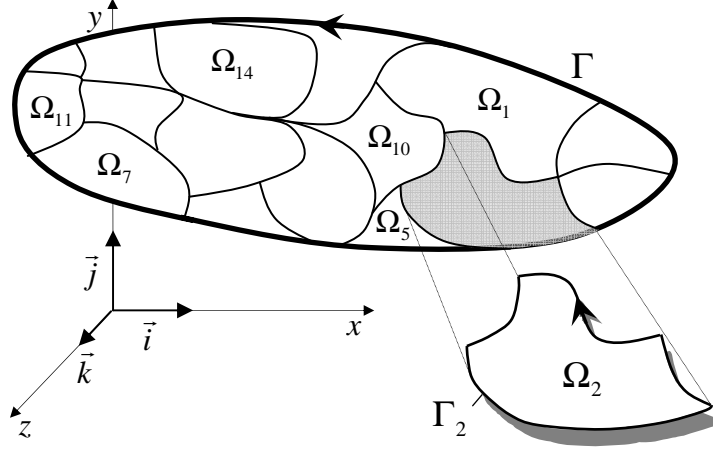


Figure 1.7 : Découpage de  $\Omega$  par sous domaines  $\Omega_i$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega ; \quad ]\Omega_i[ \cap ]\Omega_j[ = \emptyset$$

$N$  : nombre de sous domaines

Ces sous domaines  $\Omega_i$  sont, bien entendu, également délimités par leurs propres contours  $\Gamma_i$  orientés selon les mêmes conventions que pour le domaine  $\Omega$ . Vu la relation

d'intersection ci-dessus, les expressions peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \bar{\epsilon}_r) \vec{E}_T \circ \vec{W}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_{rzz}} \oint_{\Gamma_i} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma_i = 0 \quad (1.44)$$

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z W_z d\Omega_i - \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma_i = 0 \quad (1.45)$$

Isolons par exemple le sous domaine  $\Omega_2$ , figure 1.7, où  $\Omega$  décrit un espace à deux dimensions. Passons en revue toutes les possibilités de conditions aux limites qu'il est possible (ici) de définir sur son contour  $\Gamma_2$ , et observons le comportement des intégrales de contour. A cette fin, nous subdivisons le contour  $\Gamma$  en  $M$  portions, en conséquence, les expressions (1.44) et (1.45) deviennent :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_{rzz}} \oint_{\Gamma_i} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_{rzz}} \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_i^n} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma_i^n \quad (1.46)$$

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_i^n} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma_i^n \quad (1.47)$$

Imaginons de ce fait, les situations figure 1.8 où les contours  $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_2^3$  décrivent :

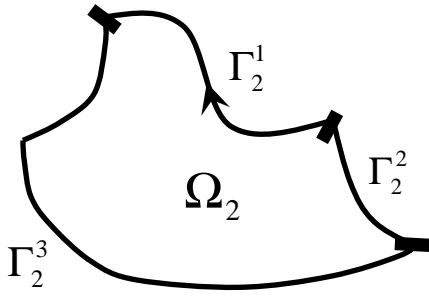


Figure 1.8 Sous domaine  $\Omega_2$

- ✓ pour  $\Gamma_2^1$ , une interface entre deux milieux quelconques.
- ✓ pour  $\Gamma_2^2$ , une condition de CCM.
- ✓ pour  $\Gamma_2^3$ , une condition de CCE.

Ainsi, sur  $\Gamma_2^1$ , nous devons, comme il se doit, appliquer la condition de continuité des champs tangents à l'interface, à savoir ;  $\vec{n} \wedge (\vec{E}_{\Omega_2} - \vec{E}_{\Omega_1}) = \vec{0}$ . Cette relation doit, bien entendu, être vérifiée indépendamment de la connaissance des champs  $\vec{E}_{\Omega_1}$  et  $\vec{E}_{\Omega_2}$  qui sont, rappelons le, la solution que l'on recherche dans les domaines respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Ils ne sont donc pas connus a priori.

Pour ce faire, il suffit d'observer la convention d'orientation des contours. Chaque sous domaine est orienté dans le même sens (nous avons choisi le sens trigonométrique). De ce fait, comme le montre la figure 1.9, si l'on isole deux sous domaines voisins, nous voyons que les portions de contour communes à ces deux sous domaines sont de sens opposé.

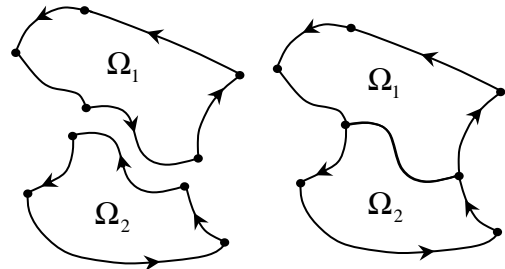


Figure 1.9 Convention d'orientation

La résultante après assemblage sera donc une soustraction des deux intégrales de contour sur les deux portions correspondantes. Pour vérifier notre relation d'interface il faut que la résultante de cette soustraction soit nulle. Afin de garantir ce résultat, à chaque fois que cette situation d'interface entre milieux quelconques apparaît, nous omettons l'intégrale de contour des expressions (1.44) et (1.45). **Ceci implique, après assemblage, la continuité du champ électrique tangent à l'interface.**

Sur  $\Gamma_2^2$ , il faut s'assurer que ;  $\vec{n} \wedge \vec{H}_{\Omega_2} = \vec{0}$ . A partir de l'expression de Maxwell-Faraday, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) = -j\omega\mu_0 H_z \vec{z} \tag{1.48}$$

$$\tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma = -j\omega\mu_0 \vec{H} \circ (\vec{z} \wedge \vec{n}) \tag{1.49}$$

Ces deux expressions apparaissent respectivement dans les intégrales de contours des relations (1.44) et (1.45). Même si cette fois nous n'avons rien à imposer, nous voyons que lorsqu'une portion de sous domaine décrit une condition CCM, alors les intégrales de contour correspondantes se retrouvent nulles. En effet  $H_z$  est nul sur un CCM et  $\vec{H} \circ (\vec{z} \wedge \vec{n})$  l'est également.

Sur  $\Gamma_2^3$  nous devons satisfaire  $\vec{n} \wedge \vec{E}_{\Omega_2} = \vec{0}$ . Précisons ici que puisque nous développons la formulation  $\vec{E}$ , le vecteur de pondération  $\vec{W}$  est physiquement homogène à un champ électrique. Il doit donc répondre aux mêmes conditions d'interface que le vecteur  $\vec{E}$ . Donc sur  $\Gamma_2^3$ ,  $\vec{n} \wedge \vec{W}_T = 0$  et  $W_z = 0$ . Ceci annule une fois encore les deux intégrales de contour.

En résumé, nous nous affranchissons des intégrales de contour pour les trois types de conditions précédentes. Pour le cas d'une interface quelconque entre deux milieux, nous imposons sa nullité dans le but de garantir la continuité du champ électrique. Dans le cas d'interface avec un CCE ou un CCM, c'est la condition elle-même qui rend les intégrales de contour nulles.

#### 1.4.4 Prise en compte d'une condition locale: l'impédance de surface $Z_s$

Pour permettre la prise en compte des pertes générées par la présence de rubans métalliques de conductivité de valeur finie, nous pouvons aussi mettre en œuvre une condition locale dite d'impédance de surface. Nous utilisons donc, une fois de plus, les intégrales de contour. Cette condition est particulièrement intéressante dès que l'on rencontre des structures de propagation incluant des domaines métalliques non parfaits dont la géométrie possède un fort rapport d'échelle. Citons par exemple, les plans de masse de la ligne coplanaire. En effet, un tel ruban métallique nécessite, pour sa reconstitution, un nombre très important de sous domaines de discrétisation. Par voie de conséquence, cela requiert une taille mémoire beaucoup plus importante comparé au cas de figure où le plan de masse est parfaitement conducteur. Face à ce constat, la définition d'une condition d'impédance de surface prend tout son sens pour peu qu'un modèle mathématique performant existe.

La relation qui lie le champ électromagnétique à cette impédance que nous notons  $Z_s$  est définie par l'expression suivante :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} = Z_s \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \quad (1.50)$$

Cette définition ne doit s'appliquer bien sûr que sur certaines portions du contour des sous domaines concernés. Examinons donc la façon dont est construite cette condition dans les intégrales de contour des expressions (1.46) et (1.47) que nous rappelons :

$$\text{dans le plan transverse : } \frac{1}{\mu_{rzz}} \oint_{\Gamma} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma = 0 \quad (1.51)$$

$$\text{et, selon le vecteur } \vec{k} : \oint_{\Gamma} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma \quad (1.52)$$

d'après la loi de Maxwell Faraday nous déduisons que :

$$H = \frac{\mu_r^{-1} \nabla \wedge E}{-j\omega\mu_0} \quad (1.53)$$

en décomposant le numérateur, nous obtenons :

$$\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T + (\tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T \vec{E}_z + \gamma \vec{E}_T)) \wedge \vec{k} \quad (1.54)$$

$$\text{cela permet d'écrire : } \vec{n} \wedge \vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left( \vec{n} \wedge \frac{1}{\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T + (\tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T \vec{E}_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n}) \vec{k} \right) \quad (1.55)$$

et nous amène à :

$$\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T + \frac{1}{j\omega\mu_0} (\tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T \vec{E}_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n}) (\vec{n} \wedge \vec{k}) = \frac{1}{Z_s} (\vec{E}_T \wedge \vec{n} + E_z (\vec{k} \wedge \vec{n})) \quad (1.56)$$

$$\text{et puisque de (1.50) : } \vec{E} \wedge \vec{n} = \vec{E}_T \wedge \vec{n} + E_z (\vec{k} \wedge \vec{n}) = Z_s \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \quad (1.57)$$

$$\text{on en déduit que : } \frac{1}{\mu_{rzz}} \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \vec{n} \wedge \vec{E}_T \quad (1.58)$$

$$\tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T \vec{E}_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} E_z \quad (1.59)$$

Ceci permet l'identification avec nos deux intégrales de contour. Celles-ci se réécrivent en fonction de  $Z_s$  de la manière suivante:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) d\Gamma = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{n} \wedge \vec{E}_T) d\Gamma \quad (1.60)$$

$$\oint_{\Gamma} W_z \tilde{\mu}_r (\vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{E}_T) \circ \vec{n} d\Gamma = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int W_z E_z d\Gamma \quad (1.61)$$

Il reste ici à définir la quantité  $Z_s$ . Il existe dans la littérature plusieurs définitions dont la plus utilisée fait intervenir la conductivité  $\sigma$  du ruban métallique ainsi que la profondeur de pénétration  $\delta$ , nous la notons  $Z_{s\sigma\delta}$  :

$$Z_{s\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} (1+j) \quad (1.62)$$

Cette formulation a été abondamment commentée dans la littérature scientifique. Nous n'avons pas la prétention d'y apporter un éclaircissement supplémentaire. Rappelons toutefois qu'elle n'est valide que si l'épaisseur du ruban métallique vaut au moins trois fois l'épaisseur de peau " $\delta$ " à la plus petite fréquence de travail. Si tel n'est pas le cas, il est préférable d'opter pour une formulation qui, elle aussi, bien qu'approchée ne soit pas limitée par la contrainte d'épaisseur précédemment citée. Pour cette raison, nous préférons employer la formulation issue des travaux de E. Tuncer et D. P. Neikirk [20]. Nous la notons  $Z_{s\sigma t}$  :

$$Z_{s\sigma t} = \frac{\frac{1}{\sigma\delta} (1+j)}{\tanh(\frac{1}{2} \frac{t}{\delta} (1+j))} = \frac{Z_{s\sigma\delta}}{\tanh(\frac{1}{2} \sigma t Z_{s\sigma\delta})} \quad (1.63)$$

Dans cette expression intervient naturellement le l'épaisseur de peau  $\delta$  mais aussi l'épaisseur  $t$  du ruban. Une définition plus précise encore prenant en compte en plus de l'épaisseur  $t$  du ruban, sa largeur  $W$ , est en cours d'implémentation [20].

Avant d'aborder le troisième paragraphe de ce chapitre, rappelons les quelques résultats obtenus ici.

Pour permettre l'approximation numérique d'un problème d'électromagnétisme, nous avons, en suivant la conduite dictée par la méthode des résidus pondérés, établi une formulation intégrale de l'équation de Helmholtz.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \epsilon_r) \vec{E}_T \circ \vec{W}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z W_z d\Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

$N$  : nombre de sous domaines discrétisant le domaine  $\Omega$ .

Cette formulation :

- ✓ Garantit que la solution du champ électrique respectera la relation de continuité des composantes tangentes à l'interface entre chaque sous domaine.
- ✓ Prend en compte implicitement la possibilité de définir, pour un sous domaine donné, les conditions de type CCE et CCM qui constituent les conditions aux limites nécessaires du problème à traiter.

Enfin, si l'on souhaite définir une condition locale d'impédance de surface, il suffit, pour les sous domaines concernés, d'ajouter un terme aux expressions ci-dessus qui prennent alors la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \epsilon_r) \vec{E}_T \circ \vec{W}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i \\ + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega\mu_0}{Z_S} \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_i^n} (\vec{n} \wedge \vec{W}_T) \circ (\vec{n} \wedge \vec{E}_T) d\Gamma_i^n = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z W_z d\Omega_i + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega\mu_0}{Z_S} \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_i^n} W_z E_z d\Gamma_i^n = 0$$

$N$  : nombre de sous domaines discrétisant le domaine  $\Omega$ .

$M$  : nombre de portions constituant la frontière du domaine  $\Omega_i$ .

## 2. Approximation de la fonction inconnue par éléments finis

Dans ce paragraphe nous nous consacrons à la projection de la solution recherchée  $\vec{E}$  sur une base de fonctions l'interpolation. C'est à partir de cette étape que la méthode générale des résidus pondérés migre vers une méthode d'éléments finis. En effet, cette projection de la solution s'effectue, ici, selon la définition de l'élément fini.

### 2.1 Le domaine $\Omega$ : restriction sur les structures de propagation envisagées

Jusqu'ici nous n'avons pas cerné précisément le domaine de définition  $\Omega$  que nous considérons comme un sous espace de  $IR^n$  avec  $n \leq 3$ . Cependant, comme le laisse sous entendre certains développements du paragraphe précédent, nous nous limitons, dans le cadre de ce mémoire, au cas  $n = 2$ . Ainsi, le domaine  $\Omega \subset IR^2$  fait référence au plan de section droite des structures de propagation que nous envisageons d'étudier. En conséquence, comme le montre l'exemple du guide coaxial figure 1.10, on émet ici l'hypothèse que selon le vecteur unitaire  $\vec{k}$ , le guide est une copie constante et infinie de ce domaine  $\Omega \subset IR^2$ .

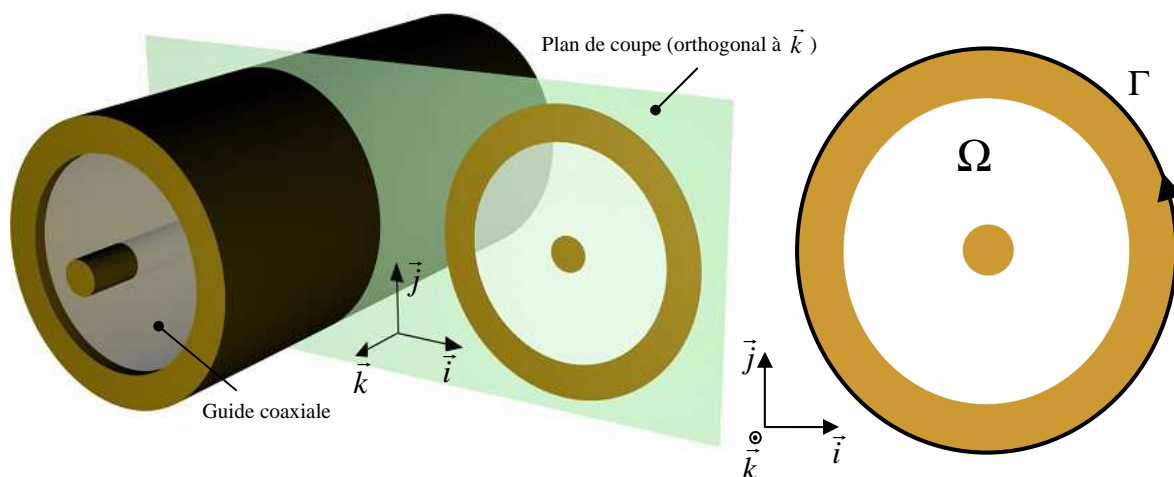


Figure 1.10 : Le domaine  $\Omega$

Cette restriction nous convient dans un premier temps compte tenu des objectifs que nous nous sommes fixés et qui ont été énumérés au début de ce mémoire. Il est clair que le passage à  $\Omega \subset IR^3$  doit constituer le prolongement de ce travail. Nous pouvons à présent introduire les notions d'éléments finis, de discrétisation de l'espace  $\Omega$ , des espaces de référence et des fonctions d'interpolation.



## 2.2 L'élément fini

Soit le triplet  $(\Omega_i, \Sigma_{\Omega_i}, P_{\Omega_i})$  pour lequel :

- ✓  $\Omega_i$  est une forme quelconque mais convexe de dimension égale à celle de  $\Omega$ .
- ✓  $\Sigma_{\Omega_i}$  représente un ensemble fini de  $N$  degrés de liberté.
- ✓  $P_{\Omega_i}$  représente l'espace des fonctions d'interpolations de dimension finie.

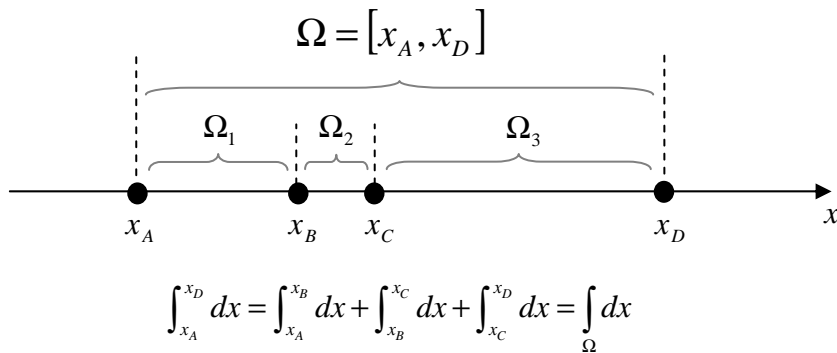
Par définition, le triplet  $(\Omega_i, \Sigma_{\Omega_i}, P_{\Omega_i})$  est un élément fini si l'ensemble  $\Sigma_{\Omega_i}$  est “ $P_{\Omega_i}$ -unisolvant”. Cela signifie qu'il doit exister une unique fonction  $p$  de l'espace  $P_{\Omega_i}$  qui prenne les valeurs de l'ensemble  $\Sigma_{\Omega_i}$  des degrés de liberté. En d'autres termes, à un ensemble défini de degrés de liberté doit correspondre une et une seule fonction d'interpolation. Les définitions des trois paramètres de ce triplet sont, en général, dépendantes les unes des autres. Ceci influe sur le type d'élément fini utilisé. En fonction de la connaissance, a priori, du problème qu'il étudie, le physicien essaiera de construire l'élément fini le mieux adapté à son problème. Ainsi, pour clarifier davantage encore nos propos, les degrés de liberté de la fonction d'interpolation constitueront les nouvelles inconnues du problème. Nous verrons qu'ils seront définis en des points particuliers de  $\Omega_i$  que nous appellerons les nœuds. C'est, en ces nœuds, que l'on cherche à résoudre la formulation intégrale (1.65). Partout ailleurs, les fonctions de base assurent l'interpolation de ces données.

## 2.3 Discrétisation de l'espace $\Omega$

Commençons, ici, par définir les sous domaines  $\Omega_i$ ; formes géométriques élémentaires discrétisant l'espace  $\Omega$ . Précisons qu'il nous faut une forme géométrique simple mais assez modulable pour permettre la reconstitution la plus fidèle possible du domaine  $\Omega$ , et ce, quelle que soit la complexité géométrique de celui-ci. Le triangle répond parfaitement à ces critères. C'est en général ce que l'on utilise dans une méthode d'éléments finis à deux dimensions. Ainsi, subdivisons le domaine  $\Omega$  en un nombre  $N$  de triangle  $\Omega_i$  selon les conditions d'intersection suivantes :

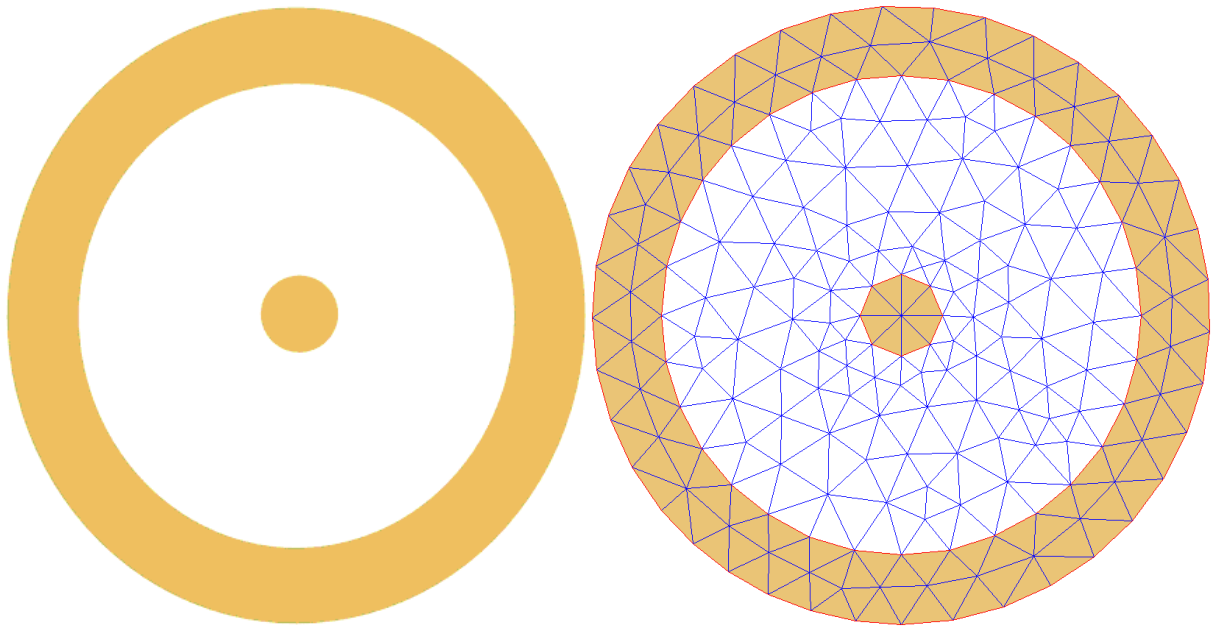
$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{éventuellement un sommet} \\ \text{éventuellement une arête} \end{array} \right. \end{array} \right\} \forall i \neq j \quad (1.66)$$

où  $\bar{\Omega}_i$  est l'intérieur de  $\Omega_i$ . Les conditions de découpage de la section droite (1.66) sont très importantes. Elles constituent la base de tout algorithme de discrétisation. Il faut, en effet, que sur le domaine  $\Omega$  discrétisé, l'on puisse toujours appliquer les propriétés de l'intégrale puisque, rappelons le, une intégrale gouverne le comportement physique de notre onde électromagnétique. La relation de Chasles constitue l'une de ces propriétés. Elle est illustrée figure 1.11 pour un problème à une dimension.



**Figure 1.11 Relation de Chasles**

Aucun "chevauchement" n'est ainsi permis. On dit que l'on réalise, par cette action de discrétisation, l'opération de maillage ou encore dans notre cas de figure particulier, l'opération de "triangulation". L'entité assurant cette opération de maillage de l'espace  $\Omega$  s'appelle le mailleur. A titre d'illustration, la figure 1.12 représente un maillage possible du plan de section droite du guide coaxial réalisé avec le mailleur de PDEtool ; une boîte à outil du logiciel Matlab [21]. Nous utilisons cette boîte à outil pour d'une part saisir graphiquement la structure que l'on souhaite simuler et d'autre part pour la mailler.



**Figure 1.12** Maillage d'un guide coaxial quelconque

Evidemment, pour des triangles, les lignes courbes sont les plus délicates à reconstituer. Cette opération est une étape de prétraitement. Le mailleur fournit une liste de chaque triangle  $\Omega_i$  ainsi que les coordonnées cartésiennes de leurs sommets respectifs. Cette liste est une donnée du problème, connue dès le début, et sur laquelle nous basons tous les calculs.

## 2.4 Espace de référence et coordonnées barycentriques

A ce stade, rappelons que :

- ✓ Le domaine  $\Omega$  est constitué de  $N$  triangles.
- ✓ Les coordonnées des  $3N$  sommets relatifs aux  $N$  triangles sont connues.
- ✓ Deux triangles ne diffèrent que par leur forme et la position par rapport au repère conventionnel.

Partant de ce constat, nous définissons :

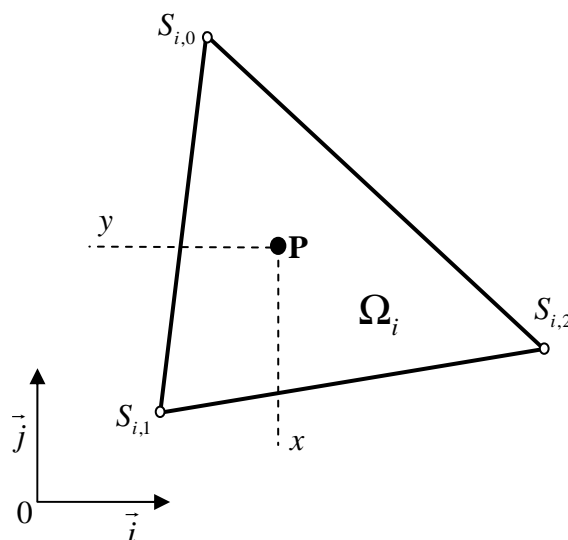
- ✓ Un nouveau système de coordonnées plus adapté au triangle.
- ✓ Un triangle de référence défini dans un repère de référence.
- ✓ Une transformation géométrique permettant le passage d'un repère à l'autre.

Les formes  $\Omega_i$  étant désormais connues ; calculer les intégrales (1.65) dans le repère conventionnel n'engendre, a priori, aucune difficulté. Néanmoins, chaque triangle possède

des coordonnées différentes. Par conséquent, il faut calculer autant d'intégrales qu'il existe de triangles dans l'espace  $\Omega$ . L'objectif, ici, est d'effectuer un changement de repère ainsi qu'une transformation géométrique. Cette association permet de définir n'importe lequel des sous domaines  $\Omega_i$  de l'espace réel à partir d'un unique triangle qui constitue de ce fait une référence. Quel que soit le nombre  $N$  de triangles composant le domaine  $\Omega$ , cette technique permet alors de ne calculer qu'une seule fois l'intégrale. Cette dernière s'effectue sur le triangle de référence, et l'intégration sur chacun des  $N$  triangles de  $\Omega$  s'obtient alors par transformation géométrique. Ce procédé, bien connu dans la littérature, allège considérablement le calcul nécessaire à l'intégration sur  $\Omega$ .

### 2.4.1 Coordonnées barycentriques

Jusque là, le point courant est repéré dans  $\Omega$  par une combinaison linéaire des deux vecteurs unitaire  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  du repère orthonormal direct ; appelons ce repère  $O_{ijk}$ . Vu les conditions d'intersection que doit respecter le mailleur, le point courant est forcément situé dans l'un des triangles  $\Omega_i$  dont les trois sommets sont, eux même, repérés par rapport à  $O_{ijk}$  (figure 1.13). Les coordonnées des trois sommets étant invariantes tout au long de la simulation, le triangle peut constituer le repère du point courant. Nous représentons figure 1.13 un des triangles  $\Omega_i$ . Nous repérons les trois sommets par les indices 0, 1, 2 tel que le montre la



**Figure 1.13** Le point courant défini en coordonnées cartésiennes

figure. Dans ce triangle apparaît le point courant "P" repéré par rapport à  $O_{ijk}$ . Traçons maintenant les segments qui relient le point courant aux trois sommets du triangle. Trois nouveaux triangles apparaissent. Définir le point P en utilisant les coordonnées barycentriques

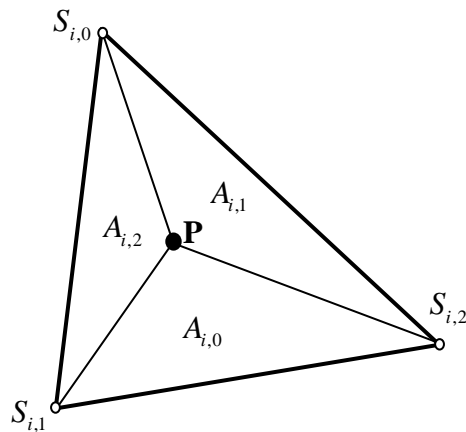


Figure 1.14 Le point courant défini en coordonnées barycentriques

relatives aux triangles  $\Omega_i$  consiste à utiliser l'aire de ces trois nouveaux triangles. Notons ces différentes aires par les quantités  $A_{i,0}, A_{i,1}, A_{i,2}$  tel que le montre la figure 1.14.

Appelons  $A_i$  l'aire totale du triangle, nous pouvons alors écrire :

$$A_{i,0} + A_{i,1} + A_{i,2} = A_i \tag{1.67}$$

Si nous normalisons ces trois aires par rapport à l'aire total du triangle  $\Omega_i$ , nous obtenons les coordonnées barycentriques :

$$\xi_0 = \frac{A_{i,0}}{A_i}, \xi_1 = \frac{A_{i,1}}{A_i}, \xi_2 = \frac{A_{i,2}}{A_i} \tag{1.68}$$

Signalons qu'il n'est pas nécessaire de leur attribuer l'indice  $i$ , elles sont, par normalisation des grandeurs, indépendantes du triangle considéré.

Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \xi_k \in [0,1] \\ \sum_{k=0}^2 \xi_k = 1 \end{array} \right\} \forall \Omega_i \subset \Omega \tag{1.69}$$

Remarquons enfin que si l'une de ces coordonnées est nulle, le point courant décrit une des arêtes du triangle, si deux coordonnées sont nulles, alors le point courant est localisé sur l'un des sommets.

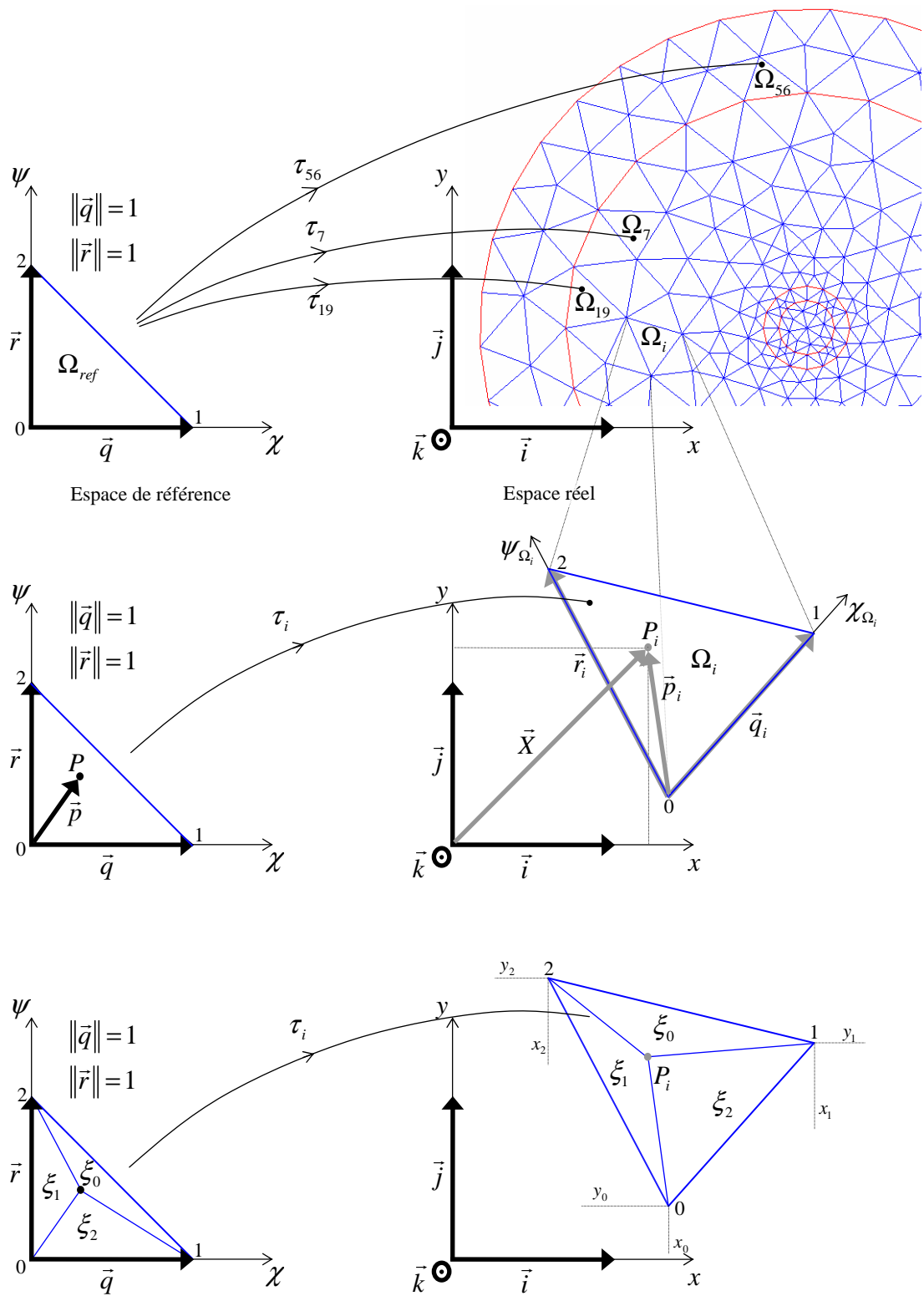


Figure 1.15 Equivalence espace de référence / espace réel

### 2.4.2 L'espace de référence

De manière à simplifier toutes les manipulations mathématiques sur les éléments triangulaires de l'espace réel, introduisons la notion d'élément de référence [5]. Cet élément  $\Omega_{ref}$  doit posséder une forme la plus simple possible. Repéré dans un espace de référence, il est l'image de l'élément réel  $\Omega_i$  par une transformation géométrique  $\tau_i$  (figure 1.15). Ainsi nous recherchons la transformation  $\tau_i$  qui au point  $P$  défini par le vecteur  $\vec{p} = \chi\vec{q} + \psi\vec{r}$  dans le repère de référence fait correspondre le point  $P_i$  défini par le vecteur  $\vec{p}_i = \chi_i\vec{q}_i + \psi_i\vec{r}_i$  dans le triangle  $\Omega_i$  du repère réel. Cette transformation apparaît directement si l'on utilise les coordonnées barycentriques. En effet, elles sont égales dans le triangle de référence et dans le triangle réel  $\Omega_i$ . Leur définition dans le repère de référence est très simple. Dans le repère réel, elle nécessite l'écriture des différents produits mixtes entre les vecteurs  $\vec{q}_i$ ,  $\vec{r}_i$  et  $\vec{p}_i$ . Le tableau suivant résume les résultats de ces différents calculs :

Dans l'espace de référence :	Dans l'espace réel :
$\xi_0 = 1 - \psi - \chi$	$\xi_0 = \frac{(\vec{q}_i \wedge \vec{r}_i + (\vec{r}_i - \vec{q}_i) \wedge \vec{p}) \circ \vec{k}}{(\vec{q}_i \wedge \vec{r}_i) \circ \vec{k}}$
$\xi_1 = \chi$	$\xi_1 = \frac{(\vec{p} \wedge \vec{r}_i) \circ \vec{k}}{(\vec{q}_i \wedge \vec{r}_i) \circ \vec{k}}$
$\xi_2 = \psi$	$\xi_2 = \frac{(\vec{q}_i \wedge \vec{p}) \circ \vec{k}}{(\vec{q}_i \wedge \vec{r}_i) \circ \vec{k}}$

**Tableau 1.2** Coordonnées barycentriques dans le triangle de référence (à gauche), dans un triangle réel (à droite).

L'expression des vecteurs  $\vec{q}_i$ ,  $\vec{r}_i$  et  $\vec{p}_i$  en fonction des coordonnées des sommets du triangle  $\Omega_i$  dans la base  $O_{ijk}$  mène aux trois expressions suivantes ;

$$\begin{aligned}
 & \frac{\langle x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad y_1 - y_2 \quad x_2 - x_1 \rangle}{y_0 (x_2 - x_1) - y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_1 - x_0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = 1 - \psi - \chi \\
 & \frac{\langle x_2 y_0 - x_0 y_2 \quad y_2 - y_0 \quad x_0 - x_2 \rangle}{y_0 (x_2 - x_1) - y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_1 - x_0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \chi \\
 & \frac{\langle x_0 y_1 - x_1 y_0 \quad y_0 - y_1 \quad x_1 - x_0 \rangle}{y_0 (x_2 - x_1) - y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_1 - x_0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \psi
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Expressions que l'on peut organiser sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} 1-\psi-\chi \\ \chi \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{y_0(x_2-x_1) - y_1(x_2-x_0) + y_2(x_1-x_0)} \begin{bmatrix} x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \\ x_2y_0 - x_0y_2 & y_2 - y_0 & x_0 - x_2 \\ x_0y_1 - x_1y_0 & y_0 - y_1 & x_1 - x_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1.71)$$

Où encore, pour simplifier :

$$\begin{Bmatrix} 1-\psi-\chi \\ \chi \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_i} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1.72)$$

Au passage, nous obtenons, par identification, l'expression des coordonnées barycentriques en fonction de x et y, tel que :

$$\xi_k = \frac{1}{2A_i} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{avec } k = 0, 1, 2 \quad (1.73)$$

Nous voyons que cette forme est identifiable à l'inverse d'une matrice dont le terme  $2A_i$  représente bien entendu le déterminant.

Ainsi, par inversion on obtient :

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1-\chi-\psi \\ \chi \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (1.74)$$

Dans ce système matriciel, nous retrouvons:

✓ la propriété fondamentale des coordonnées barycentriques :  $\sum_{k=0}^2 \xi_k = 1$  (1.75)

✓ la transformation  $\tau$  recherchée ; transformation que l'on définit alors comme :

$$\tau : \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1-\chi-\psi \\ \chi \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (1.76)$$



Cette transformation  $\tau$  est bijective si la matrice  $[J_\tau]$  n'est pas singulière :

$$[J_\tau] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \chi} & \frac{\partial y}{\partial \chi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

$$\det(J_\tau) = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$$

Ce déterminant vaut deux fois l'aire du triangle. Il s'annule donc uniquement si les trois sommets du triangle sont alignés. Cette situation est, bien entendu, implicitement exclue par le mailleur. Signalons ici qu'il n'est, bien sûr, pas obligatoire de réaliser ces différents développements lorsque l'on souhaite mettre en œuvre un code de calcul. Espace de référence et système de coordonnées barycentriques sont des outils qui permettent de simplifier l'écriture globale du problème. Il est très probable cependant, que ces simplifications auront un impact significatif sur l'efficacité, en terme de temps de calcul, de l'algorithme qui en découlera.

## 2.5 L'espace des fonctions d'interpolation

Il reste un ingrédient à définir ; les fonctions de bases. Afin d'illustrer les notions déjà introduites dans notre introduction, prenons l'exemple de la série de Fourier. Cette méthode stipule que toute forme, pourvu qu'elle soit périodique, peut être décrite par une série de fonctions trigonométriques (fonctions de base). Il suffit alors de trouver les différents coefficients (degré de liberté) pondérant chaque terme de cette série afin qu'elle converge et tende vers la forme recherchée. Il va de soi que, de part leur caractère périodique, le sinus et le cosinus constituent les fonctions de base idéales vu le problème posé. Le choix des fonctions de base est capital vis-à-vis de la convergence de la solution. Il est clair que plus elles auront de similitudes avec la solution du problème plus vite convergera cette solution.

### 2.5.1 Projection sur une base de fonctions d'interpolation

Contrairement à notre exemple de la série de Fourier, nous n'avons pas dans notre problème d'électromagnétisme de critère récurant telle la périodicité d'une variable temporelle ou spatiale permettant de faire un choix sur la fonction de base idéale ou, en tout cas, celle favorisant une convergence rapide du problème. Tout ce que l'on peut dire est que sur un intervalle d'espace assez petit, toute forme de solution tend à devenir suffisamment monotone pour qu'un polynôme d'ordre fini puisse la décrire avec un minimum d'erreur.

Ainsi, nous développons notre champ vectoriel  $\vec{E}$  sur une base de fonctions polynomiales. Afin que la formulation intégrale (1.65) ne soit pas triviale, nous avons besoin d'une forme polynomiale d'ordre au minimum égale à un. Cependant, pour des raisons de minimisation de l'erreur nous choisissons l'ordre deux. Dans l'expression générale (1.2) de notre introduction, les termes  $N_i$  sont donc des polynômes d'ordre deux à deux dimensions. Dans ce cas, la valeur du champs  $\vec{E}$  au point courant P, situé quelque part dans l'un des triangles  $\Omega_i$ , est la résultante par interpolation de six valeurs de champs  $\vec{E}_p$  tel que :

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^5 N_p \vec{E}_p \quad (1.78)$$

Désormais, les inconnues du problème sont les champs  $\vec{E}_p$ . Evidemment, ces différents champs doivent être définis en des endroits spécifiques de chaque triangle  $\Omega_i$ . Nous appelons ces positions particulières, les nœuds de l'élément. Nous avons choisi de les définir aux trois sommets du triangle ainsi que sur le milieu des trois arêtes du triangle. Le fait de les choisir sur la frontière de l'élément implique que la continuité  $C^0$  soit satisfaite. Cette continuité est nécessaire et suffisante. En effet d'un point de vue physique et notamment

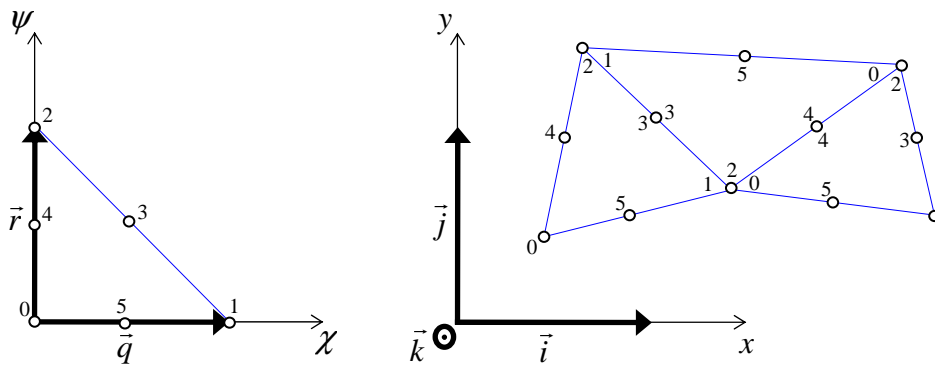


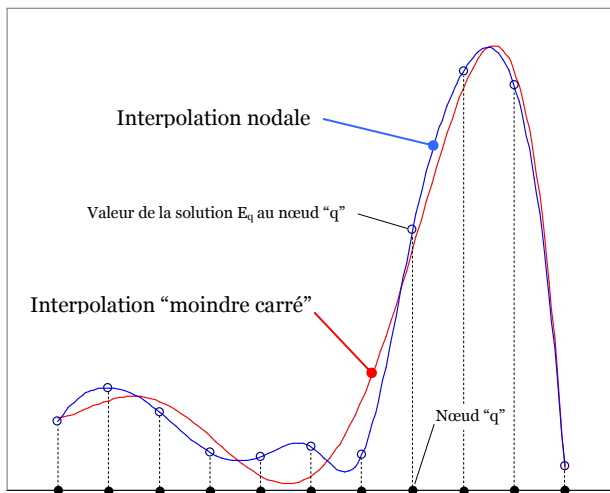
Figure 1.14 Disposition géométrique des six nœuds d'interpolations

pour certaines configurations d'interface diélectrique/métal, assurer une continuité d'ordre supérieur peut poser des problèmes dans la prise en compte des "effets de pointes". On montre sur la figure 1.14 la disposition des 6 nœuds sur le triangle de référence ainsi que sur quelques triangles de l'espace réel. Nous voyons que l'on attribue à chacun de ces nœuds un chiffre qui permettra l'identification dans les équations. Le choix de cette indexation n'est pas hasardeux. On remarque, en effet, que l'on incrémente la valeur du nombre correspondant à un nœud sommet selon le sens trigonométrique. Il en va de même pour les nœuds correspondant aux milieux des arêtes. Ils sont indexés selon le sens trigonométrique et le nœud "3" sera toujours disposer sur l'arête délimité par les nœuds aux sommets "1" et "2". Nous les avons disposés de cette façon pour que les indices des nœuds coïncident avec ceux

des coordonnées barycentriques. Ceci permet d'obtenir une récurrence dans l'écriture du polynôme d'interpolation que l'on pourra de ce fait exprimer sous forme générale. Cette démarche est purement personnelle, ce n'est donc qu'une convention. Dans l'espace réel, l'indexation d'un triangle se fait en choisissant aléatoirement l'un des trois sommets pour lui attribuer l'indice "0". L'indexation, figure 1.14, des cinq autres nœuds se fait alors en regard de ce premier nœud et selon la convention qui vient d'être décrite sur le triangle de référence.

### 2.5.2 Interpolation nodale, polynômes de Lagrange

Afin de respecter la définition de l'élément fini énoncée plus haut, nous allons



construire un polynôme d'interpolation dont le tracé doit passer exactement par les valeurs obtenues aux nœuds. En d'autres termes, il faut que la valeur de notre champ interpolé  $E$  soit au nœud  $q$  exactement égale à celle du champ solution  $E_q$ . A titre d'exemple, la figure 1.15 compare, pour un problème à une dimension, une interpolation basée sur la méthode des moindres carrés à une interpolation de type nodale, d'un ensemble de valeurs définies en plusieurs

Figure 1.15 Interpolation nodale de plusieurs données

noeuds. Dans notre cas à deux dimensions, l'interpolation nodale du champ  $\vec{E}$  s'écrit sur le triangle de référence de la manière suivante:

$$\vec{E}(\chi, \psi) = \langle N_p(\chi, \psi) \rangle \{ \vec{E}_p \} \quad \text{Avec :} \quad N_i(\chi_j, \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.79)$$

Pour aboutir à cette formulation, nous partons d'une forme polynomiale classique :

$$\vec{E}(\chi, \psi) = \langle P_p(\chi, \psi) \rangle \{ \vec{e}_p \} \quad (1.80)$$

qui se compose, bien sûr, de la somme de toutes les combinaisons possibles du couples  $\chi^i \psi^j$  tel que  $i + j \leq 2$   $i, j \in N^+$ . Si nous posons :

$$\langle P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \rangle = \langle \chi^2 \ \chi\psi \ \psi^2 \ \chi \ \psi \ 1 \rangle \quad (1.81)$$

nous pouvons alors définir la matrice  $[P]$  constituée des six vecteurs lignes  $\langle P_p \rangle$  relatifs aux six vecteurs champs  $\{\bar{E}_p\}$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_0 = \bar{E}(\chi_0, \psi_0) \\ \bar{E}_1 = \bar{E}(\chi_1, \psi_1) \\ \bar{E}_2 = \bar{E}(\chi_2, \psi_2) \\ \bar{E}_3 = \bar{E}(\chi_3, \psi_3) \\ \bar{E}_4 = \bar{E}(\chi_4, \psi_4) \\ \bar{E}_5 = \bar{E}(\chi_5, \psi_5) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \chi_0^2 & \chi_0\psi_0 & \psi_0^2 & \chi_0 & \psi_0 & 1 \\ \chi_1^2 & \chi_1\psi_1 & \psi_1^2 & \chi_1 & \psi_1 & 1 \\ \chi_2^2 & \chi_2\psi_2 & \psi_2^2 & \chi_2 & \psi_2 & 1 \\ \chi_3^2 & \chi_3\psi_3 & \psi_3^2 & \chi_3 & \psi_3 & 1 \\ \chi_4^2 & \chi_4\psi_4 & \psi_4^2 & \chi_4 & \psi_4 & 1 \\ \chi_5^2 & \chi_5\psi_5 & \psi_5^2 & \chi_5 & \psi_5 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \\ \vec{e}_5 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \\ \vec{e}_5 \end{array} \right\} \quad (1.82)$$

Pour vérifier "l'unisolvance" il faut s'assurer qu'il n'existe pas de cas où le déterminant de cette matrice peut s'annuler. Ce calcul, plutôt lourd, aboutit à l'expression suivante:

$$\det[P] = -\frac{1}{64}(\chi_0(\psi_2 - \psi_1) + \chi_1(\psi_0 - \psi_2) + \chi_2(\psi_1 - \psi_0))^4 \quad (1.83)$$

Evidemment, le triangle de référence est géométriquement invariant. Son déterminant ne peut donc s'annuler. Ce déterminant est valable pour n'importe lequel des triangles de l'espace réel (il suffit de transposer les variables  $\chi_i$  et  $\psi_i$  aux variables  $x_i$  et  $y_i$ ). Dans ce cas, le déterminant ne s'annule, cette fois encore, que si les trois sommets sont alignés ; situation implicitement exclue par le mailleur. Ainsi, nous pourrons toujours déterminer de façon unique les vecteurs  $\vec{e}_p$ . L'inversion de la matrice  $[P]$  permet de réécrire l'expression (1.80) en fonction des vecteurs  $\bar{E}_p$  :

$$\bar{E}(\chi, \psi) = \langle P_p(\chi, \psi) \rangle [P]^{-1} \{ \bar{E}_p \} \quad \text{avec} \quad [P]^{-1} = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1.84)$$

Ceci qui permet l'identification avec (1.79).

Ainsi, nous obtenons l'expression des termes  $N_p$  :

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \psi(2\psi - 1) \\
 N_1 &= 4\chi\psi + 2(\chi^2 + \psi^2) - 3(\chi + \psi) + 1 \\
 N_2 &= \chi(2\chi - 1) \\
 N_3 &= 4\chi(1 - \psi - \chi) \\
 N_4 &= 4\chi\psi \\
 N_5 &= 4\psi(1 - \psi - \chi)
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Ou encore, en coordonnées barycentriques :

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \xi_0(2\xi_0 - 1) \\
 N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\
 N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\
 N_3 &= 4\xi_1\xi_0 \\
 N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\
 N_5 &= 4\xi_2\xi_0
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

C'est cette dernière forme que nous retenons pour la suite, car elle est valable à la fois dans le triangle de référence et dans n'importe quel triangle de l'espace réel. A ce stade, le triplet  $(\Omega_i, \Sigma_{\Omega_i}, P_{\Omega_i})$  est entièrement défini et le champ vectoriel  $\vec{E}$  s'exprime comme :

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^5 N_p \vec{E}_{T_p} + \sum_{p=0}^5 N_p E_{z_p} \vec{k} \tag{1.87}$$

- ✓  $\Omega_i$  est un triangle.
- ✓  $\Sigma_{\Omega_i}$  représente un ensemble de six degrés de liberté associé aux six nœuds de  $\Omega_i$  (le vecteur  $\vec{E}_p$ ).
- ✓ et  $P_{\Omega_i}$  est affecté à l'espace des fonctions d'interpolations polynomiales (les fonctions  $N_p$ ).

## 2.6 L'élément fini à élément d'arêtes

### 2.6.1 Intérêt

Dans cette dernière section concernant l'approximation des fonctions inconnues par éléments finis, nous allons enrichir l'élément qui vient d'être défini de notions qui lui

permettront d'approximer correctement les fonctions vectorielles. En effet, même si l'élément défini à ce stade convient parfaitement à l'approximation des fonctions scalaires, il n'est pas adapté aux problèmes vectoriels. Historiquement, les différents algorithmes qui ont été mis en œuvre ont généré des solutions non physiques caractérisées par une divergence non nulle. Ses solutions qualifiées de "parasites" apparaissaient aussi bien sur des problèmes stationnaire, non stationnaire que dans un problème déterministe. Evidemment des méthodes ont depuis été proposées comme notamment la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui permet de forcer, à zéro, la divergence en utilisant une fonction de pénalité [22] à [26]. Cependant cette méthode alourdit considérablement les algorithmes et il semble aujourd'hui que les éléments d'arêtes soit la méthode la plus adaptée [2]. Outre le fait que ces nouveaux éléments éliminent les solutions parasites, ils offrent des propriétés intéressantes comme notamment, celle d'imposer implicitement la continuité tangentielle des champs entre les différents éléments. Enfin grâce à ce type de construction, la prise en compte des conditions aux limites et locales est facilitée.

## 2.6.2 Interpolation de type nodale

Rappelons que notre élément fini discrétise un domaine  $\Omega$  à deux dimensions repéré par les vecteurs unitaires  $i$  et  $j$ . De ce fait, le vecteur unitaire  $k$ , orthogonal au plan contenant  $\Omega$ , ne participe pas aux développements qui vont suivre. La forme polynomiale définie dans la section précédente relative au vecteur  $k$  reste donc inchangée. Sur la figure 1.16, nous représentons un des vecteurs du champ électrique transverse susceptible d'être solution du problème au nœud  $o$  de l'élément nodal  $\Omega_i$ .

Sur cette figure apparaît en plus du champ  $\vec{E}_T^0$  :

- ✓ les vecteurs unitaires normaux à  $\Gamma_i$
- ✓ les vecteurs unitaires tangents à  $\Gamma_i$
- ✓ les angles aux différents sommets de l'élément  $\Omega_i$

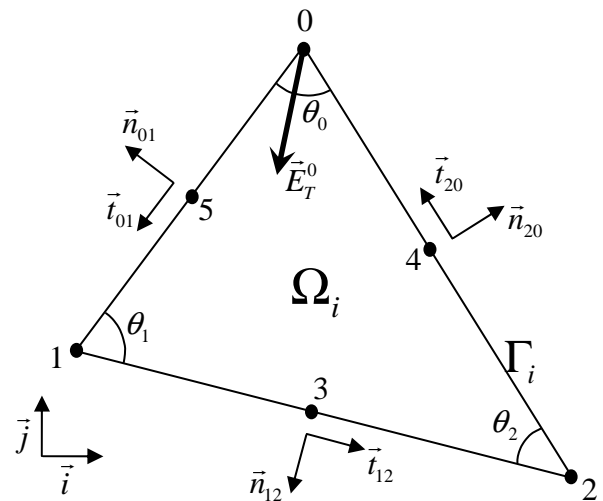


Figure 1.16 Conventions vectorielles

Les indices des différents vecteurs unitaires tangents et perpendiculaires à une arête correspondent à ceux des nœuds sommets délimitant cette arête. De même, nous affectons à l'indice de l'angle au sommet, celui du nœud sommet correspondant. Les vecteurs unitaires normaux et tangents sont tels que :  $\vec{n} \wedge \vec{t} = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ . Continuons à nous focaliser sur le

vecteur transverse  $\vec{E}_T^0$ . La méthode consiste alors à projeter le vecteur champ électrique au nœud o sur les deux arêtes latérales ayant pour point commun le nœud O. On cherche donc une expression du champ  $\vec{E}_T^0$  en fonction des différents vecteurs unitaires. Ainsi, vu les conventions de la figure 1.16, nous définissons les quantités scalaires  $e_{01}^0$  et  $e_{20}^1$  telles que :

$$\begin{aligned}\vec{E}_T^0 \circ \vec{t}_{01} &= e_{01}^0 \\ \vec{E}_T^0 \circ \vec{t}_{20} &= -e_{20}^1\end{aligned}\quad (1.88)$$

Le signe négatif représente une convention que nous commenterons plus tard. De plus, le champ  $\vec{E}_T^0$  peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire d'au moins deux vecteurs unitaires. En choisissant les deux vecteurs unitaires normaux  $\vec{n}_{01}$  et  $\vec{n}_{20}$  pour des raisons de commodité vu le nœud considéré ici, on écrit le champs  $\vec{E}_T^0$  sous la forme suivante:

$$\vec{E}_T^0 = \alpha \vec{n}_{01} + \beta \vec{n}_{20}\quad (1.89)$$

Ainsi en appliquant, à cette dernière expression du champ, les produits scalaires (1.88), nous obtenons (1.90) par substitution :

$$\vec{E}_T^0 = -\frac{e_{20}^1}{\vec{n}_{01} \circ \vec{t}_{20}} \vec{n}_{01} + \frac{e_{01}^0}{\vec{n}_{20} \circ \vec{t}_{01}} \vec{n}_{20}\quad (1.90)$$

On peut, bien sûr, remplacer les produits scalaires présents dans cette dernière expression, par le sinus de l'angle au sommet "o". Ainsi, en appliquant cette démarche aux deux autres sommets, nous obtenons l'ensemble des champs transverses aux nœuds o, 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\vec{E}_T^0 &= -\frac{1}{\sin(\theta_0)} (e_{01}^0 \vec{n}_{20} + e_{20}^1 \vec{n}_{01}) \\ \vec{E}_T^1 &= -\frac{1}{\sin(\theta_1)} (e_{12}^0 \vec{n}_{01} + e_{01}^1 \vec{n}_{12}) \\ \vec{E}_T^2 &= -\frac{1}{\sin(\theta_2)} (e_{20}^0 \vec{n}_{12} + e_{12}^2 \vec{n}_{20})\end{aligned}\quad (1.91)$$

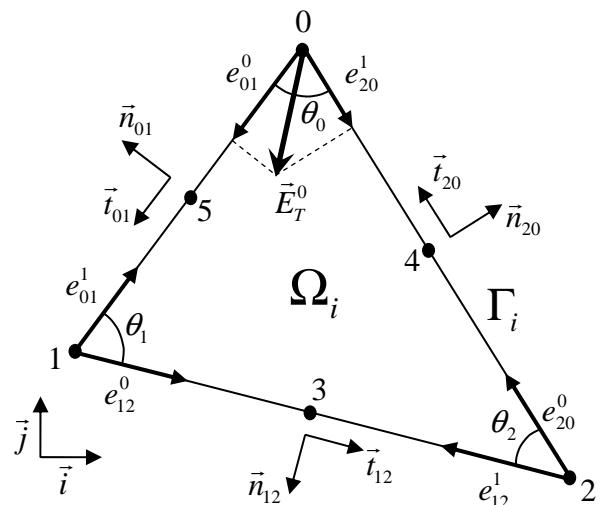


Figure 1.17 Variables tangentielles

Nous avons sur la figure 1.17 ajouté les variables  $e_{ij}^0$  et  $e_{ij}^1$ . Pour des commodités de représentation, nous les illustrons par des vecteurs alors que ces quantités sont scalaires. Ceci permet de mettre en relief l'intérêt de la convention de signe présente dans (1.88). Il en découle une "symétrie" entre les variables tangentielles d'une même arête, ce qui permet, comme le montre la figure 1.18, de réaliser l'étape d'assemblage sans difficulté majeure.

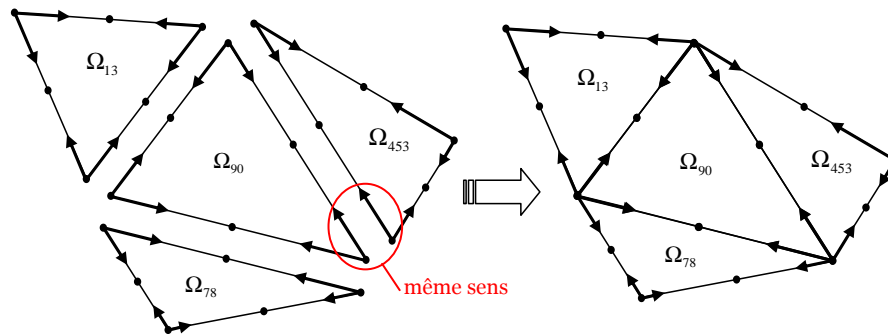


Figure 1.18.a L'assemblage relatif à cette convention ne pose aucun problème

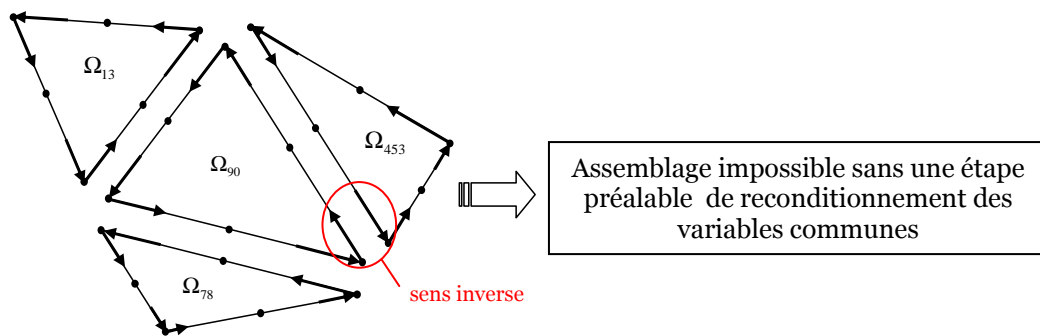


Figure 1.18.b L'assemblage relatif à cette convention nécessite une étape supplémentaire de reconditionnement des variables communes

Quant aux champs électriques situés sur les nœuds aux milieux de chaque arête (nœud 3, 4, 5), la projection est plus délicate. En effet, nous voyons qu'en ces nœuds, figure 1.19, ne se coupe aucune arête de direction différente. La démarche appliquée aux "nœuds sommets" n'est donc pas possible ici. Même si, avec le recul pris aujourd'hui, nous avons plusieurs idées pour résoudre ce problème, nous appliquons une méthode qui a fait ses preuves. Celle-ci consiste à considérer le champ sur les nœuds milieu comme la moyenne vectorielle des deux champs situés sur les deux sommets bornant l'arête en question. Cela permet de simplifier considérablement la décomposition en éléments d'arêtes.

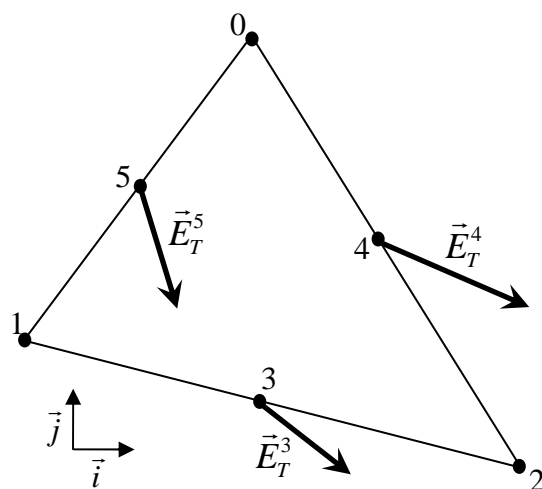


Figure 1.19. Champs sur les nœuds milieux



Ainsi, les six composantes du champ électrique transverse sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_T^0 &= -\frac{1}{\sin(\theta_0)}(e_{01}^0 \vec{n}_{20} + e_{20}^1 \vec{n}_{01}) & \vec{E}_T^3 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^1 + \vec{E}_T^2) \\
 \vec{E}_T^1 &= -\frac{1}{\sin(\theta_1)}(e_{12}^0 \vec{n}_{01} + e_{01}^1 \vec{n}_{12}) & \vec{E}_T^4 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^0 + \vec{E}_T^2) \\
 \vec{E}_T^2 &= -\frac{1}{\sin(\theta_2)}(e_{20}^0 \vec{n}_{12} + e_{12}^1 \vec{n}_{20}) & \vec{E}_T^5 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^0 + \vec{E}_T^1)
 \end{aligned} \tag{1.92}$$

Cette méthode, basée sur la moyenne des champs aux nœuds sommets, a une incidence sur le polynôme d'interpolation. En effet, les champs aux nœuds milieux sont désormais fonctions des champs aux nœuds sommets. Ceci a pour conséquence l'élimination de trois degrés de libertés sur six. Ceci implique, dans notre cas, un décrement de l'ordre du polynôme d'interpolation. Afin de conserver le degré initial de ce polynôme, Zoltan Cendes propose une méthode qui consiste à ajouter deux variables dénommées composantes faciales  $f_0$  et  $f_1$  telles que le montre la figure 1.20 [1] [2].

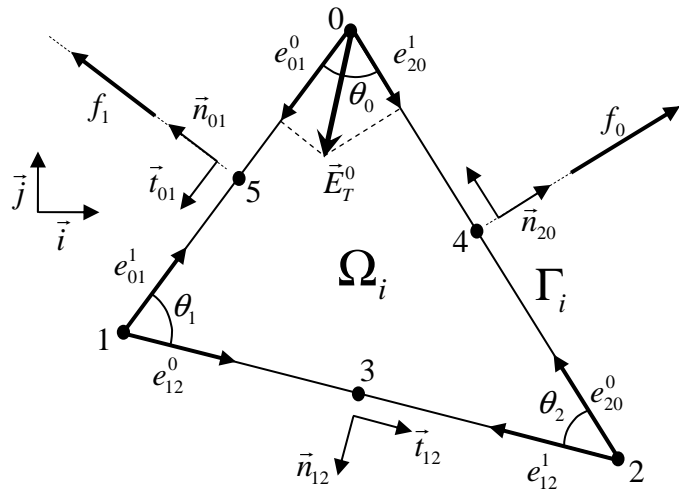


Figure 1.20. Ajout des variables faciales  $f_0$  et  $f_1$

Le choix des nœuds milieux, sur lesquels sont définis ces variables, est arbitraire. Pour notre part, nous associons les variables faciales  $f_0$  et  $f_1$  aux nœuds "4" et "5" respectivement. Le système (1.92) se réécrit alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_T^0 &= -\frac{1}{\sin(\theta_0)}(e_{01}^0 \vec{n}_{20} + e_{20}^1 \vec{n}_{01}) & \vec{E}_T^3 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^1 + \vec{E}_T^2) \\
 \vec{E}_T^1 &= -\frac{1}{\sin(\theta_1)}(e_{12}^0 \vec{n}_{01} + e_{01}^1 \vec{n}_{12}) & \vec{E}_T^4 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^0 + \vec{E}_T^2) + f_0 \vec{n}_{20} \\
 \vec{E}_T^2 &= -\frac{1}{\sin(\theta_2)}(e_{20}^0 \vec{n}_{12} + e_{12}^1 \vec{n}_{20}) & \vec{E}_T^5 &= \frac{1}{2}(\vec{E}_T^0 + \vec{E}_T^1) + f_1 \vec{n}_{10}
 \end{aligned} \tag{1.93}$$

Dans ces conditions, l'expression finale du champ électrique  $\vec{E}$  s'écrit :

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^2 -\frac{\xi_p}{\sin(\theta_p)} (e_{pq}^0 \vec{n}_{rp} + e_{rp}^1 \vec{n}_{pq}) + 4\xi_0 (\xi_2 f_0 \vec{n}_{20} + \xi_1 f_1 \vec{n}_{01}) + \sum_{p=0}^5 N_p E_{zp} \vec{k} \quad (1.94)$$

	$p$	$q$	$r$
	0	1	2
avec les associations indicielles suivantes :	1	2	0
	2	0	1

A ce stade, nous recherchons les quatorze variables ;  $e_{01}^0, e_{01}^1, e_{12}^0, e_{12}^1, e_{20}^0, e_{20}^1, f_0, f_1, E_{z0}, E_{z1}, E_{z2}, E_{z3}, E_{z4}, E_{z5}$  qui doivent satisfaire l'équation (1.65) sur un élément  $\Omega_i$  donné.

### 3. La méthode de Galerkin

Pour rappel, nous avons dans les deux sections précédentes :

- ✓ établi une formulation intégrale de notre problème :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - (\gamma^2 \tilde{\mu}_r + k_0^2 \epsilon_r) \vec{E}_T \circ \vec{W}_T - \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \epsilon_{rzz} E_z W_z d\Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

- ✓ formulation dans laquelle intervient le champ solution  $\vec{E}$  défini sur un sous domaine  $\Omega_i$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T = \sum_{p=0}^2 -\frac{\xi_p}{\sin(\theta_p)} (e_{pq}^0 \vec{n}_{rp} + e_{rp}^1 \vec{n}_{pq}) + 4\xi_0 (\xi_2 f_0 \vec{n}_{20} + \xi_1 f_1 \vec{n}_{01}) \\ E_z \vec{k} = \sum_{p=0}^5 N_p E_{zp} \vec{k} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Il reste à construire le vecteur de pondération  $\vec{W}$ . Pour cela, nous employons la méthode de Galerkin qui consiste à poser :

$$\vec{W} = \delta \vec{E}$$

où  $\delta \vec{E}$  est la première variation de  $\vec{E}$ . Ce dernier étant une interpolation nodale des champs aux nœuds de chaque élément  $\Omega_i$  (voir paragraphe 2), nous écrivons :

$$\vec{W} = \delta \vec{E} = \{N_p\} \langle \delta \vec{E}_p \rangle = \langle N_p \rangle \{ \delta \vec{E}_p \}$$

Ici les termes  $N_p$  incluent évidemment la décomposition vectorielle (1.96) du champ électrique transverse. Enfin, puisque les  $\langle \delta \vec{E}_p \rangle$  sont indépendants des domaines géométriques  $\Omega_i$ , seuls les termes  $N_p$  interviennent dans la formulation intégrale (1.95).

Finalement nous retenons que la méthode de Galerkin appliquée à la méthode des résidus pondérés consiste à choisir comme pondération, les fonctions de bases qui ont servi à construire la fonction d'interpolation. Ainsi, nous écrivons :

$$\vec{W} = \langle N_p \rangle \tag{1.97}$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent :

- ✓ Comme nous pouvons le voir, cette méthode est très simple à mettre en œuvre puisque nous n'avons rien de plus à définir ; les fonctions de bases étant maintenant connues.
- ✓ De plus, nous rappelons que nous avons construit les fonctions de bases de sorte qu'elles respectent les restrictions minimales de dérivabilité imposées par la formulation du système. Les fonctions de pondérations les respectent alors implicitement, grâce à la méthode choisie : la méthode de Galerkin.

Terminons ce paragraphe en développant le vecteur de pondération que l'on obtient à partir de l'expression du champ électrique (1.96) :

$$\begin{aligned} \vec{W}_T &= \left\langle -\frac{\xi_0}{\sin(\theta_0)} \vec{n}_{20} \quad -\frac{\xi_0}{\sin(\theta_0)} \vec{n}_{01} \quad -\frac{\xi_1}{\sin(\theta_1)} \vec{n}_{01} \quad -\frac{\xi_1}{\sin(\theta_1)} \vec{n}_{12} \quad -\frac{\xi_2}{\sin(\theta_2)} \vec{n}_{12} \quad -\frac{\xi_2}{\sin(\theta_2)} \vec{n}_{20} \quad 4\xi_0\xi_2\vec{n}_{20} \quad 4\xi_0\xi_1\vec{n}_{01} \right\rangle \\ W_z &= \langle \xi_0(2\xi_0-1) \quad \xi_1(2\xi_1-1) \quad \xi_2(2\xi_2-1) \quad 4\xi_1\xi_0 \quad 4\xi_1\xi_2 \quad 4\xi_2\xi_0 \rangle \end{aligned} \quad (1.98)$$

Chaque terme intervenant dans la formulation intégrale est désormais connu.

## 4. Organisation matricielle, assemblage, résolution numérique

Les démarches effectuées dans ce dernier paragraphe sont communes à toutes méthodes d'analyse numérique. Il faut transformer un système physique, pour peu que des équations mathématiques le définissent, en un système d'équations algébriques, dans lequel n'interviennent que des opérations simples (addition, multiplication,...), afin qu'un ordinateur puisse traiter le problème.

### 4.1 Organisation matricielle

Bien entendu, il est impossible, ici, de décrire tous les calculs que nécessite l'organisation matricielle de notre formulation intégrale. Cependant, à titre d'exemple, nous pouvons isoler l'un des termes de cette formulation et développer les calculs correspondants. Tous les autres termes se déterminent selon une démarche similaire.

Choisissons par exemple, le premier terme de l'expression générale (1.95) page 54 :

$$\iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) d\Omega_i$$

Commençons par calculer  $\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T$ . La partie transverse de l'expression 1.96 (paragraphe 3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{E}_T = \left\langle -\frac{\xi_0}{\sin(\theta_0)} \vec{n}_{20} \quad -\frac{\xi_0}{\sin(\theta_0)} \vec{n}_{01} \quad -\frac{\xi_1}{\sin(\theta_1)} \vec{n}_{01} \quad -\frac{\xi_1}{\sin(\theta_1)} \vec{n}_{12} \quad -\frac{\xi_2}{\sin(\theta_2)} \vec{n}_{12} \quad -\frac{\xi_2}{\sin(\theta_2)} \vec{n}_{20} \quad 4\xi_0\xi_2\vec{n}_{20} \quad 4\xi_0\xi_1\vec{n}_{01} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{array} \right\} \vec{k} \quad (1.99)$$

Appliquer le rotationnel transverse à chacun des termes du vecteur  $\vec{E}_T$  revient à étudier l'expression générale suivante :

$$\vec{\nabla}_T \wedge \xi_i \xi_j \vec{n}_{ij} = \xi_i \xi_j \vec{\nabla}_T \wedge \vec{n}_{ij} + \vec{\nabla}_T (\xi_i \xi_j) \wedge \vec{n}_{ij} \quad (1.100)$$

Bien sûr, les vecteurs  $\vec{n}_{ij}$  sont des vecteurs unitaires normaux aux arêtes des triangles  $\Omega_i$ . Leurs coordonnées sont donc des constantes tout au long de la simulation ce qui implique que le terme  $\vec{\nabla}_T \wedge \vec{n}_{ij}$  est nul. De plus :

$$\vec{\nabla}_T (\xi_i \xi_j) = \xi_i \vec{\nabla}_T (\xi_j) + \xi_j \vec{\nabla}_T (\xi_i) \quad (1.101)$$

et donc :

$$\vec{\nabla}_T \wedge \xi_i \xi_j \vec{n}_{ij} = \xi_i \vec{\nabla}_T (\xi_j) \wedge \vec{n}_{ij} + \xi_j \vec{\nabla}_T (\xi_i) \wedge \vec{n}_{ij} \quad (1.102)$$

Le calcul du rotationnel se réduit ainsi à un calcul de gradient. La correspondance entre les coordonnées barycentriques et les coordonnées cartésiennes (expression 1.73) nous permet de déterminer facilement le gradient d'une coordonnée barycentrique. On trouve :

$$\vec{\nabla}_T (\xi_k) = \frac{1}{2A_i} (b_k \vec{i} + c_k \vec{j}) \quad (1.103)$$

où  $b_k$  et  $c_k$  sont les termes de la matrice de passage de l'espace de référence vers l'espace réel (expression 1.72).  $A_i$  représente l'aire totale du triangle  $\Omega_i$ . Enfin, tout vecteur unitaire normal aux différentes arêtes d'un triangle peut s'exprimer selon les vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . On aboutit à une formulation générale du type :

$$\vec{n}_{ij} = \frac{-b_k \vec{i} - c_k \vec{j}}{L_{ij}} \quad (1.104)$$

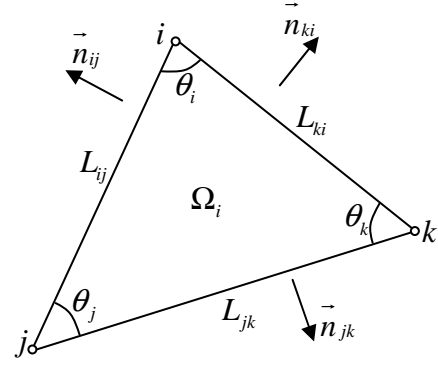
où  $L_{ij}$  est la longueur de l'arête bornée par les sommets  $i$  et  $j$ . Cette dernière formulation permet de réécrire l'expression du gradient telle que :

$$\vec{\nabla}_T (\xi_k) = \frac{-L_{ij}}{2A_i} \vec{n}_{ij} \quad (1.105)$$

et finalement :

$$\bar{\nabla}_T \wedge \xi_i \xi_j \bar{n}_{ij} = \xi_i \frac{-L_{ki}}{2A_i} \bar{n}_{ki} \wedge \bar{n}_{ij} + \xi_j \frac{-L_{jk}}{2A_i} \bar{n}_{jk} \wedge \bar{n}_{ij} \quad (1.106)$$

Avec :  $\bar{n}_{ki} \wedge \bar{n}_{ij} = \sin(\theta_i)$   
 $\bar{n}_{jk} \wedge \bar{n}_{ij} = -\sin(\theta_j)$



Ce qui permet le calcul de  $\bar{\nabla}_T \wedge \bar{E}_T$  et  $\bar{\nabla}_T \wedge \bar{W}_T$  :

$$\bar{\nabla}_T \wedge \bar{E}_T = \left\langle \frac{L_{01}}{2A_i} \quad \frac{-L_{01}}{2A_i} \quad \frac{L_{12}}{2A_i} \quad \frac{-L_{12}}{2A_i} \quad \frac{L_{20}}{2A_i} \quad \frac{-L_{20}}{2A_i} \quad \frac{4}{L_{20}}(\xi_0 - \xi_2) \quad \frac{4}{L_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \right\rangle \begin{Bmatrix} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix} \bar{k} \quad (1.107)$$

$$\bar{\nabla}_T \wedge \bar{W}_T = \left\langle \frac{L_{01}}{2A_i} \quad \frac{-L_{01}}{2A_i} \quad \frac{L_{12}}{2A_i} \quad \frac{-L_{12}}{2A_i} \quad \frac{L_{20}}{2A_i} \quad \frac{-L_{20}}{2A_i} \quad \frac{4}{L_{20}}(\xi_0 - \xi_2) \quad \frac{4}{L_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \right\rangle \bar{k}$$

Nous appliquons ensuite le produit scalaire :

$$(\bar{\nabla}_T \wedge \bar{E}_T) \circ (\bar{\nabla}_T \wedge \bar{W}_T) = \begin{Bmatrix} \frac{L_{01}}{2A_i} \\ \frac{-L_{01}}{2A_i} \\ \frac{L_{12}}{2A_i} \\ \frac{-L_{12}}{2A_i} \\ \frac{L_{20}}{2A_i} \\ \frac{-L_{20}}{2A_i} \\ \frac{4}{L_{20}}(\xi_0 - \xi_2) \\ \frac{4}{L_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \end{Bmatrix} \left\langle \frac{L_{01}}{2A_i} \quad \frac{-L_{01}}{2A_i} \quad \frac{L_{12}}{2A_i} \quad \frac{-L_{12}}{2A_i} \quad \frac{L_{20}}{2A_i} \quad \frac{-L_{20}}{2A_i} \quad \frac{4}{L_{20}}(\xi_0 - \xi_2) \quad \frac{4}{L_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \right\rangle \begin{Bmatrix} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix} \bar{k} \circ \bar{k} \quad (1.108)$$

Le vecteur transverse des fonctions de pondération ( $\overline{W}_T$ ) est ici introduit sous forme d'un vecteur colonne pour respecter les lois du produit matriciel et obtenir autant d'équations qu'il y a de fonctions de base. On aboutit, ainsi, à la forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{\mu_{rz}} (\overline{V}_T \wedge \overline{E}_T) \circ (\overline{V}_T \wedge \overline{W}_T) = \quad (1.109)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{01}^2}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}^2}{4A_i^2} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{01}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{2L_{01}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{2}{A_i}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{-L_{01}^2}{4A_i^2} & \frac{L_{01}^2}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{L_{01}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{-2L_{01}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2}{A_i}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{12}^2}{4A_i^2} & \frac{-L_{12}^2}{4A_i^2} & \frac{L_{12}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{-L_{12}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{2L_{12}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{2L_{12}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{12}^2}{4A_i^2} & \frac{L_{12}^2}{4A_i^2} & \frac{-L_{12}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{L_{12}L_{20}}{4A_i^2} & \frac{-2L_{12}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2L_{12}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{L_{20}L_{01}}{4A_i^2} & \frac{-L_{20}L_{01}}{4A_i^2} & \frac{L_{20}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{20}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{20}^2}{4A_i^2} & \frac{-L_{20}^2}{4A_i^2} & \frac{2}{A_i}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{2L_{20}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{-L_{20}L_{01}}{4A_i^2} & \frac{L_{20}L_{01}}{4A_i^2} & \frac{-L_{20}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{L_{20}L_{12}}{4A_i^2} & \frac{-L_{20}^2}{4A_i^2} & \frac{L_{20}^2}{4A_i^2} & \frac{-2}{A_i}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2L_{20}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{2L_{01}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2L_{01}}{L_{20}A_i}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{2L_{12}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2L_{12}}{A_iL_{20}}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{2}{A_i}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{-2}{A_i}(\xi_0 - \xi_2) & \frac{16}{L_{20}^2}(\xi_0 - \xi_2)^2 & \frac{16}{L_{01}L_{20}}(\xi_0 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_0) \\ \frac{2}{A_i}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{-2}{A_i}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{2L_{12}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{-2L_{12}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{2L_{20}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{-2L_{20}}{A_iL_{01}}(\xi_1 - \xi_0) & \frac{16}{L_{20}L_{01}}(\xi_1 - \xi_0)(\xi_0 - \xi_2) & \frac{16}{L_{01}^2}(\xi_1 - \xi_0)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix}$$

Il reste à intégrer cette matrice sur un triangle  $\Omega_i$ . Rappelons que seules les coordonnées barycentriques sont dépendantes du domaine géométrique. Chaque membre de la matrice précédente pourra toujours se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de l'expression intégrale suivante (ceci est valable pour tous les termes de la formulation intégrale) :

$$\iint_{\Omega_i} \xi_0^a \xi_1^b \xi_2^c d\Omega_i = \frac{2!a!b!c!A_i}{(2+a+b+c)!} \quad a, b, c \in \mathbb{N}^+ \quad (1.110)$$

L'intégration se fait donc de manière analytique. On aboutit ainsi à la forme matricielle du premier terme de la formulation intégrale :

$$\iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rz}} (\overline{V}_T \wedge \overline{E}_T) \circ (\overline{V}_T \wedge \overline{W}_T) d\Omega_i = \frac{1}{\mu_{rz}} \begin{bmatrix} \frac{L_{01}^2}{4A_i} & \frac{-L_{01}^2}{4A_i} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{01}L_{20}}{4A_i} & \frac{-L_{01}L_{20}}{4A_i} & 0 & 0 \\ \frac{-L_{01}^2}{4A_i} & \frac{L_{01}^2}{4A_i} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{01}L_{20}}{4A_i} & \frac{L_{01}L_{20}}{4A_i} & 0 & 0 \\ \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{12}^2}{4A_i} & \frac{-L_{12}^2}{4A_i} & \frac{L_{12}L_{20}}{4A_i} & \frac{-L_{12}L_{20}}{4A_i} & 0 & 0 \\ \frac{-L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{01}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{12}^2}{4A_i} & \frac{L_{12}^2}{4A_i} & \frac{-L_{12}L_{20}}{4A_i} & \frac{L_{12}L_{20}}{4A_i} & 0 & 0 \\ \frac{L_{20}L_{01}}{4A_i} & \frac{-L_{20}L_{01}}{4A_i} & \frac{L_{20}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{20}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{20}^2}{4A_i} & \frac{-L_{20}^2}{4A_i} & 0 & 0 \\ \frac{-L_{20}L_{01}}{4A_i} & \frac{L_{20}L_{01}}{4A_i} & \frac{-L_{20}L_{12}}{4A_i} & \frac{L_{20}L_{12}}{4A_i} & \frac{-L_{20}^2}{4A_i} & \frac{L_{20}^2}{4A_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8A_i}{3L_{20}^2} & \frac{-4A_i}{3L_{01}L_{20}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4A_i}{3L_{20}L_{01}} & \frac{8A_i}{3L_{01}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix} \quad (1.111)$$

Seules les longueurs des arêtes et l'aire du triangle  $\Omega_i$  correspondant subsistent à l'issue de l'opération d'intégration.

## 4.2 Mise en évidence d'un système matriciel aux valeurs propres

A cette fin, nous reprenons la formulation intégrale en répartissant certains termes de part et d'autres du signe d'égalité.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E}_T \circ \vec{W}_T d\Omega_i &= \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \gamma^2 \tilde{\mu}_r \vec{E}_T + \gamma \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i \\ \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T E_z + \gamma \vec{\nabla}_T W_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \varepsilon_r E_z W_z d\Omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.112)$$

Nous savons désormais que cette formulation intégrale conduit à une formulation matricielle du problème. De plus, en effectuant un changement de variable, nous pouvons faire apparaître un système aux valeurs propres. Nous posons :

$$E_z = \gamma e_z \quad \text{et, par conséquent (Galerkin)} : \quad W_z = \gamma w_z \quad (1.113)$$

Ceci permet de réécrire la formulation intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E}_T \circ \vec{W}_T d\Omega_i &= \gamma^2 \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \tilde{\mu}_r \vec{E}_T + \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T e_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i \\ \gamma^2 \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \vec{\nabla}_T w_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T e_z + \vec{\nabla}_T w_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T - k_0^2 \varepsilon_r e_z w_z d\Omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.114)$$

Ainsi en procédant de la même manière que dans le paragraphe 4.1, nous calculons le produit scalaire relatif à chacun des termes constituant la formulation. Nous aboutissons au système matriciel élémentaire (relatif à un seul triangle isolé) :

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_{TT}^{\Omega_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_z \end{Bmatrix}_{\Omega_i} = \gamma^2 \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} B_{TT}^{\Omega_i} & B_{Tz}^{\Omega_i} \\ B_{zT}^{\Omega_i} & B_{zz}^{\Omega_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_z \end{Bmatrix}_{\Omega_i} \quad (1.115)$$



Ou encore, de manière plus générale :

$$\sum_{i=1}^N [A^{\Omega_i}] \{E\}_{\Omega_i} = \lambda \sum_{i=1}^N [B^{\Omega_i}] \{E\}_{\Omega_i} \quad (1.116)$$

La valeur propre  $\lambda$  de ce système représente notre constante de propagation complexe élevée au carré. Elle est une constante commune à l'intégralité des sous domaine. C'est pour cela qu'elle est définie, dans l'expression, en dehors du signe « somme ». Quant au vecteur propre, il est constitué, pour un sous domaine  $\Omega_i$ , des 14 composantes de champ électrique définies dans le paragraphe 2. Nous avons vu que ces 14 composante sont liées. A chaque sous domaine  $\Omega_i$  correspond donc un vecteur propre différent.

$$E_T = \left\{ \begin{array}{c} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{array} \right\}_i \quad e_z = \left\{ \begin{array}{c} e_z^1 \\ e_z^2 \\ e_z^3 \\ e_z^4 \\ e_z^5 \\ e_z^6 \end{array} \right\}_i \quad (1.117)$$

On identifie (1.114) dans (1.115) de la manière suivante :

$$A_{TT}^{\Omega_i} = \iint_{|\Omega_i|} \frac{1}{\mu_{rzz}} (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T) \circ (\vec{\nabla}_T \wedge \vec{W}_T) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_T \circ \vec{W}_T d\Omega_i ; \text{ une sous matrice carrée (8,8)} \quad (1.118)$$

$$B_{TT}^{\Omega_i} = \iint_{|\Omega_i|} \tilde{\mu}_r \vec{E}_T \circ \vec{W}_T d\Omega_i ; \text{ une sous matrice carrée (8,8)} \quad (1.119)$$

$$B_{Tz}^{\Omega_i} = \iint_{|\Omega_i|} \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T e_z \circ \vec{W}_T d\Omega_i ; \text{ une sous matrice rectangulaire (8,6)} \quad (1.120)$$

$$B_{zT}^{\Omega_i} = \iint_{|\Omega_i|} \vec{\nabla}_T w_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{E}_T d\Omega_i ; \text{ une sous matrice rectangulaire (6,8)} \quad (1.121)$$

$$B_{zz}^{\Omega_i} = \iint_{|\Omega_i|} \vec{\nabla}_T w_z \circ \tilde{\mu}_r \vec{\nabla}_T e_z - k_0^2 \epsilon_{rzz} e_z w_z d\Omega_i ; \text{ une sous matrice carrée (6,6)} \quad (1.122)$$

$A^{\Omega_i}$  et  $B^{\Omega_i}$  sont donc deux matrices carrées de dimension 14 lignes et 14 colonnes. Elles renferment l'information électromagnétique propre à un triangle  $\Omega_i$  donné. Comme nous l'avons vu dans le sous paragraphe 4.1, l'intégration se fait de manière analytique. A l'issue de cette intégration, il ne reste (voir matrice (1.111)) que les données caractéristiques d'un triangle, à savoir ; les aires ou encore les longueurs des différentes arêtes. Il est alors aisé, puisque l'on connaît les coordonnées des sommets de chaque triangle (données fournies par le mailleur), de calculer toutes les matrices  $A^{\Omega_i}$  et  $B^{\Omega_i}$  relatives à chaque sous domaine.

### 4.3 Assemblage

A ce stade, il reste à calculer les sommes présentes dans le système matriciel (1.116). C'est-à-dire, étendre les matrices  $A^{\Omega_i}$  et  $B^{\Omega_i}$ , qui ne sont valables que sur un sous domaine  $\Omega_i$ , à la surface totale du domaine  $\Omega$  (la structure de propagation). Cependant cette opération n'est pas aussi simple qu'une sommation de  $N$  matrices  $14 \times 14$ . En effet, comme nous venons de le dire, à chaque sous domaine  $\Omega_i$  correspond un vecteur champ électrique différent. Le champ électrique dans un sous domaine est une interpolation nodale de 14 composantes définies à des endroits fixes et connus de la frontière du sous domaine (les nœuds). L'expression du champ dans une région de l'espace et donc intimement liée à la géographie et la géométrie de cette région. Il faudra donc construire un nouveau vecteur propre "général" regroupant l'intégralité des composantes de chaque vecteur propre "élémentaire", et ce, sans aucune répétition bien entendu. Ceci constitue l'opération d'assemblage.

Afin de transcrire cette opération de la manière la plus simple possible, nous choisissons de prendre un exemple totalement indépendant de notre problème d'électromagnétisme. Le système physique relatif à cet exemple est inconnu mais conduit au système matriciel suivant :

$$\sum_{i=1}^N [A^{\Omega_i}] \{V\}_{\Omega_i} - \lambda [I_{dt}] \{V\}_{\Omega_i} = 0 \quad (1.123)$$

où  $[I_{dt}]$  représente la matrice identité. Nous choisissons de résoudre le système pour la structure figure 4.1 qui est déjà subdivisée en quatre sous domaines triangulaires. La physique du problème ne nécessite pas de polynôme d'interpolation supérieur à l'ordre 1. Par conséquent, il est nécessaire, pour assurer l'unisolvance, de définir 3 nœuds d'interpolation

$(v_1, v_2, \dots, v_5)$  par éléments. Ils sont définis aux 3 sommets de chaque triangle comme le montre la figure 4.1. Ainsi le vecteur  $\{V\}_{\Omega_i}$  du système (1.123) possède trois composantes. Il en va de même pour la matrice  $A^{\Omega_i}$  qui, bien évidemment, sera de dimension  $3 \times 3$ .

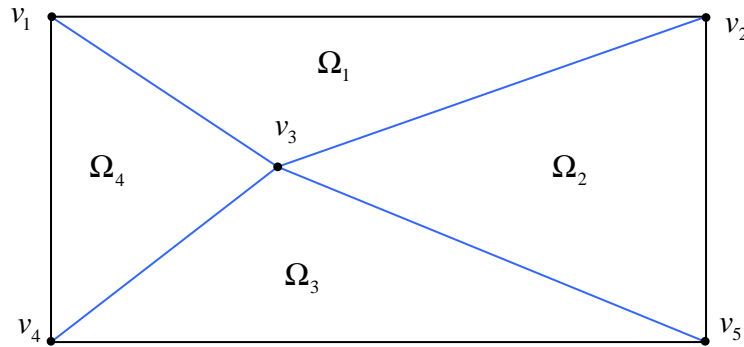
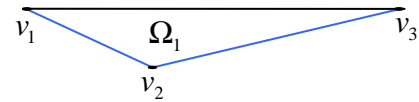


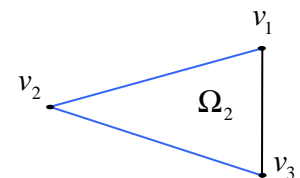
Figure 4.1 Structure d'exemple ( $\Omega$ )

Le maillage de cette structure étant une étape de pré traitement, nous connaissons les coordonnées de chaque sommet. **La première étape** consiste donc à calculer chaque matrice  $A^{\Omega_i}$  relative à chaque sous domaine.

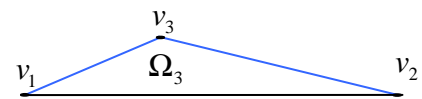
$$A^{\Omega_1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_1} & A_{12}^{\Omega_1} & A_{13}^{\Omega_1} \\ A_{21}^{\Omega_1} & A_{22}^{\Omega_1} & A_{23}^{\Omega_1} \\ A_{31}^{\Omega_1} & A_{32}^{\Omega_1} & A_{33}^{\Omega_1} \end{bmatrix} \text{ et } \{V\}_{\Omega_1} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\Omega_1}$$



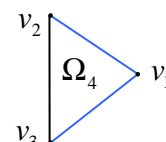
$$A^{\Omega_2} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_2} & A_{12}^{\Omega_2} & A_{13}^{\Omega_2} \\ A_{21}^{\Omega_2} & A_{22}^{\Omega_2} & A_{23}^{\Omega_2} \\ A_{31}^{\Omega_2} & A_{32}^{\Omega_2} & A_{33}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \text{ et } \{V\}_{\Omega_2} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\Omega_2}$$



$$A^{\Omega_3} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_3} & A_{12}^{\Omega_3} & A_{13}^{\Omega_3} \\ A_{21}^{\Omega_3} & A_{22}^{\Omega_3} & A_{23}^{\Omega_3} \\ A_{31}^{\Omega_3} & A_{32}^{\Omega_3} & A_{33}^{\Omega_3} \end{bmatrix} \text{ et } \{V\}_{\Omega_3} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\Omega_3}$$



$$A^{\Omega_4} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_4} & A_{12}^{\Omega_4} & A_{13}^{\Omega_4} \\ A_{21}^{\Omega_4} & A_{22}^{\Omega_4} & A_{23}^{\Omega_4} \\ A_{31}^{\Omega_4} & A_{32}^{\Omega_4} & A_{33}^{\Omega_4} \end{bmatrix} \text{ et } \{V\}_{\Omega_4} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\Omega_4}$$



Ici, les composantes  $v_1, v_2, v_3$  ne sont pas encore liées aux nœuds de notre structure. Ce sont par convention des termes génériques que nous associerons plus tard aux nœuds figure 4.1.

**La seconde étape** consiste à construire un vecteur propre générale qui contient l'intégralité des degrés de libertés définis en chacun des nœuds de la structure ( $\Omega$ ).

par exemple :

$$\{V\}_{\Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} \quad (1.124)$$

Nous aurions pu définir la position des composantes de ce vecteur dans un ordre différent. Ceci n'est qu'une convention.

**La troisième étape** consiste à étendre la dimension de chaque matrice élémentaire à la dimension de la future matrice générale ; dimension qui est connue puisque nous venons de construire le vecteur propre général. C'est ici que nous associons les composantes génériques ( $v_1, v_2, v_3$ ) aux composantes propres à la structure d'exemple ( $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ).

$$A^{\Omega_1 \rightarrow \Omega} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_1} & A_{13}^{\Omega_1} & A_{12}^{\Omega_1} & 0 & 0 \\ A_{31}^{\Omega_1} & A_{33}^{\Omega_1} & A_{32}^{\Omega_1} & 0 & 0 \\ A_{21}^{\Omega_1} & A_{23}^{\Omega_1} & A_{22}^{\Omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{V\}_{\Omega_1 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow v_1 \\ v_2 \rightarrow v_3 \\ v_3 \rightarrow v_2 \end{Bmatrix}_{\Omega_1 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Omega_1 \rightarrow \Omega} \quad (1.125)$$

$$A^{\Omega_2 \rightarrow \Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{33}^{\Omega_2} & A_{31}^{\Omega_2} & 0 & A_{32}^{\Omega_2} \\ 0 & A_{13}^{\Omega_2} & A_{11}^{\Omega_2} & 0 & A_{12}^{\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{23}^{\Omega_2} & A_{21}^{\Omega_2} & 0 & A_{22}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{V\}_{\Omega_2 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow v_3 \\ v_2 \rightarrow v_5 \\ v_3 \rightarrow v_2 \end{Bmatrix}_{\Omega_2 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ v_5 \end{Bmatrix}_{\Omega_2 \rightarrow \Omega} \quad (1.126)$$

$$A^{\Omega_3 \rightarrow \Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^{\Omega_3} & A_{12}^{\Omega_3} & A_{13}^{\Omega_3} \\ 0 & 0 & A_{21}^{\Omega_3} & A_{22}^{\Omega_3} & A_{23}^{\Omega_3} \\ 0 & 0 & A_{31}^{\Omega_3} & A_{32}^{\Omega_3} & A_{33}^{\Omega_3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{V\}_{\Omega_3 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow v_3 \\ v_2 \rightarrow v_4 \\ v_3 \rightarrow v_5 \end{Bmatrix}_{\Omega_3 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix}_{\Omega_3 \rightarrow \Omega} \quad (1.127)$$

$$A^{\Omega_4 \rightarrow \Omega} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_4} & 0 & A_{13}^{\Omega_4} & A_{12}^{\Omega_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^{\Omega_4} & 0 & A_{33}^{\Omega_4} & A_{32}^{\Omega_4} & 0 \\ A_{21}^{\Omega_4} & 0 & A_{23}^{\Omega_4} & A_{22}^{\Omega_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{V\}_{\Omega_4 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \rightarrow v_1 \\ v_2 \rightarrow v_4 \\ v_3 \rightarrow v_3 \end{Bmatrix}_{\Omega_4 \rightarrow \Omega} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Omega_4 \rightarrow \Omega} \quad (1.128)$$

Une dernière étape consiste alors à sommer l'ensemble des matrices élémentaires étendues.

$$[A^\Omega] = \sum_{i=1}^4 [A^{\Omega_i \rightarrow \Omega}] \quad (1.129)$$

Nous obtenons la matrice générale de notre exemple ; résultat de l'assemblage des quatre matrices élémentaires propres à chaque sous domaine :

$$A^\Omega = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Omega_1} + A_{11}^{\Omega_4} & A_{13}^{\Omega_1} & A_{12}^{\Omega_1} + A_{13}^{\Omega_4} & A_{12}^{\Omega_4} & 0 \\ A_{31}^{\Omega_1} & A_{33}^{\Omega_1} + A_{33}^{\Omega_2} & A_{32}^{\Omega_1} + A_{31}^{\Omega_2} & 0 & A_{32}^{\Omega_2} \\ A_{21}^{\Omega_1} + A_{31}^{\Omega_4} & A_{23}^{\Omega_1} + A_{13}^{\Omega_2} & A_{22}^{\Omega_1} + A_{11}^{\Omega_2} + A_{11}^{\Omega_3} + A_{33}^{\Omega_4} & A_{12}^{\Omega_3} + A_{32}^{\Omega_4} & A_{13}^{\Omega_3} + A_{12}^{\Omega_2} \\ A_{21}^{\Omega_4} & 0 & A_{21}^{\Omega_3} + A_{23}^{\Omega_4} & A_{22}^{\Omega_3} + A_{22}^{\Omega_4} & A_{23}^{\Omega_3} \\ 0 & A_{23}^{\Omega_2} & A_{31}^{\Omega_3} + A_{21}^{\Omega_2} & A_{32}^{\Omega_3} & A_{33}^{\Omega_3} + A_{22}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

Ainsi l'expression (1.123) devient :

$$[A^\Omega] \{V\}_\Omega - \lambda [I_{dt}] \{V\}_\Omega \quad (1.131)$$

Il faut noter que cette opération n'est pas propre à la méthode des éléments finis. Elle est en effet commune à toute méthode numérique qui, au préalable, requiert un découpage de l'espace géométrique de travail. Cette opération constitue le cœur de tout outil d'analyse numérique et représente l'étape la plus coûteuse en terme de temps de calcul. En effet, la taille de la matrice générale nécessite bien souvent une quantité mémoire dépassant celle de la mémoire interne du processeur de la machine (mémoire de petite capacité mais fonctionnant à la fréquence d'horloge du processeur). Cette matrice sera donc contenue dans la mémoire centrale de la machine (mémoire de grande capacité mais fonctionnant à une fréquence inférieure). Chaque boucle d'assemblage exige donc une communication "processeur-mémoire". Ceci ralentit considérablement le calcul qui s'effectue quasiment au rythme du bus "processeur-mémoire". La rapidité de calcul de l'outil numérique est donc liée

principalement à toutes les optimisations qu'il est possible, compte tenu des restrictions techniques énoncées, de faire sur la phase algorithmique de l'opération d'assemblage.

L'application de la démarche, décrite dans notre exemple page 62, à nos 2 matrices  $A^{\Omega_i}$  et  $B^{\Omega_i}$ , conduit à l'écriture matricielle générale (sur  $\Omega$ ) suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{TT}^{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_{\cdot z} \end{Bmatrix}_{\Omega} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{TT}^{\Omega} & B_{Tz}^{\Omega} \\ B_{zT}^{\Omega} & B_{zz}^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_{\cdot z} \end{Bmatrix}_{\Omega} \quad \text{ou} \quad [A^{\Omega}] \{E\}_{\Omega} = \lambda [B^{\Omega}] \{E\}_{\Omega} \quad (1.132)$$

#### 4.4 Transformation spectrale et résolution numérique

Afin d'optimiser la recherche de la solution de notre problème, nous effectuons une dernière opération. Elle concerne l'ensemble de définition de la valeur propre de notre système. En effet, la constante de phase du système étudié est forcément bornée par :

$$\Im_m(\sqrt{\lambda}) \in [\beta_0 \quad \Theta] \quad \text{avec} \quad \Theta = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_{r_{\max}} \mu_{r_{\max}}} \quad (1.133)$$

$\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  est, bien sûr, la constante de phase dans le vide à une pulsation donnée.  $\varepsilon_{r_{\max}}$  et  $\mu_{r_{\max}}$  sont parmi les milieux qui constituent la section droite de notre structure de propagation, ceux de perméabilité et de permittivité les plus élevés.

Cette transformation a pour but de mettre en exergue la valeur propre de plus grand module, celle correspondant au mode fondamental. A cette fin, nous soustrayons membre à membre au système (1.132) le système (1.134) :

$$\Theta^2 \begin{bmatrix} B_{TT}^{\Omega} & B_{Tz}^{\Omega} \\ B_{zT}^{\Omega} & B_{zz}^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}_T \\ e_z \end{Bmatrix}_{\Omega} = \Theta^2 \begin{bmatrix} B_{TT}^{\Omega} & B_{Tz}^{\Omega} \\ B_{zT}^{\Omega} & B_{zz}^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}_T \\ e_z \end{Bmatrix}_{\Omega} \quad (1.134)$$

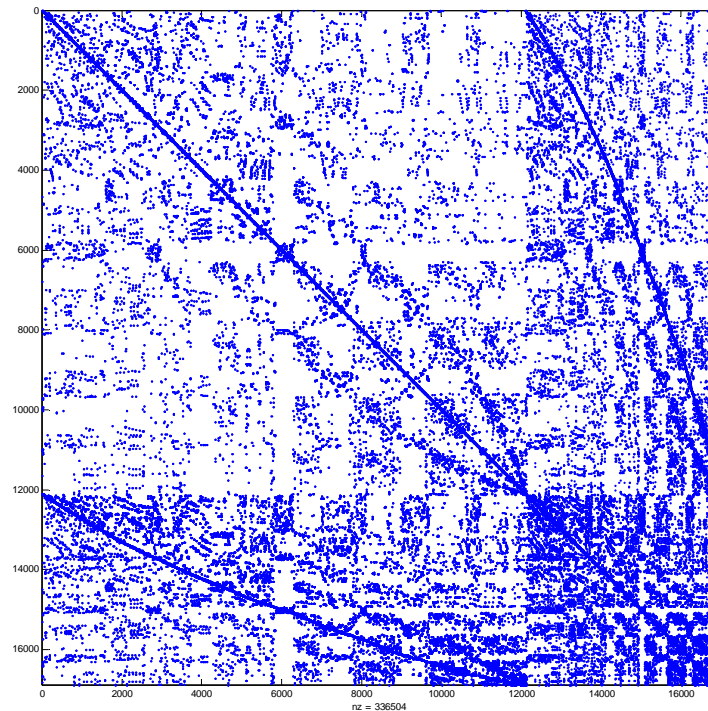
nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} B_{TT}^{\Omega} & B_{Tz}^{\Omega} \\ B_{zT}^{\Omega} & B_{zz}^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_{\cdot z} \end{Bmatrix}_{\Omega} = \frac{\Theta^2}{\gamma^2 - \Theta^2} \begin{bmatrix} \frac{A_{TT}^{\Omega}}{\Theta^2} - B_{TT}^{\Omega} & -B_{Tz}^{\Omega} \\ -B_{zT}^{\Omega} & -B_{zz}^{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_T \\ e_{\cdot z} \end{Bmatrix}_{\Omega} \quad (1.135)$$

ou de manière plus générale :

$$[A^{\Omega'}] \{E\}_{\Omega} = \lambda' [B^{\Omega'}] \{E\}_{\Omega} \quad (1.136)$$

Outre l'intérêt d'obtenir, sans ambiguïté, l'évolution du mode fondamental, cette transformation possède l'avantage de rendre la procédure de recherche de la solution systématique. En effet, la variable  $\Theta$  est alors considérée comme une variable d'initialisation.



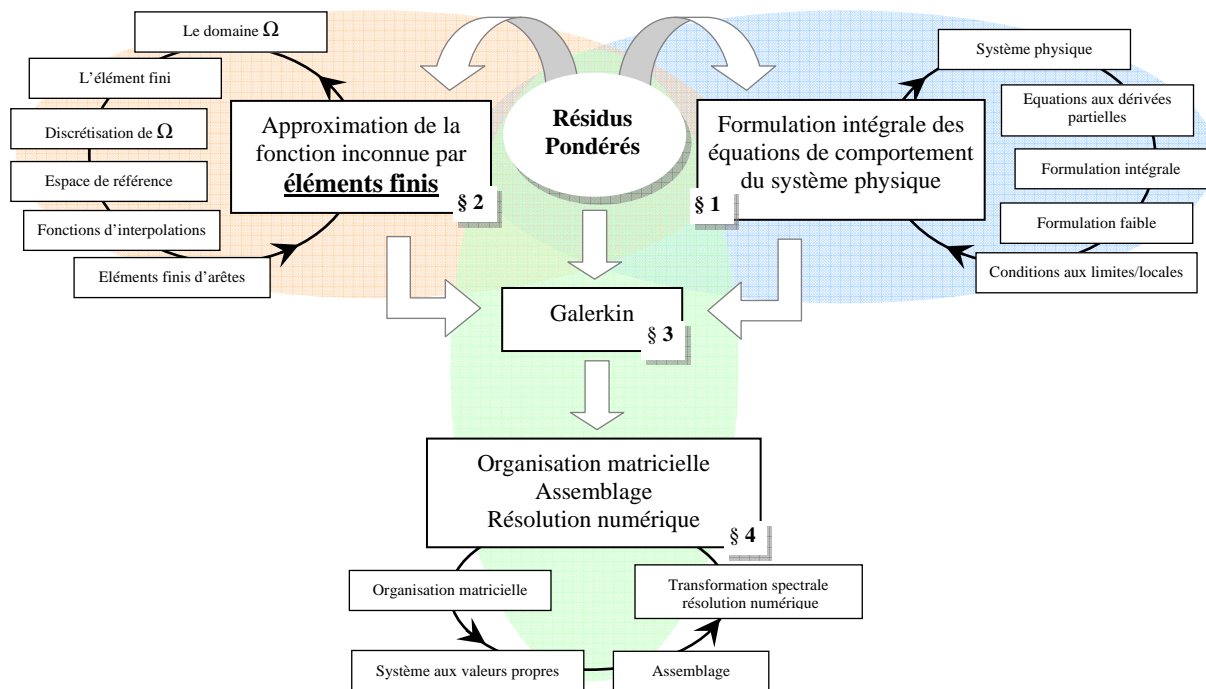
**Figure 4.2** Densité des valeurs non nulles de la matrice B

La figure 4.2 illustre la densité de valeurs non nulles contenues dans la matrice  $B^\Omega$  à l'issue de l'assemblage, et ce, dans le cas d'une simulation faisant intervenir 2433 triangles. Cette matrice est de dimension (16540,16540), elle contient 1548721 nombres significatifs et 15965615 zéros soit 90% de termes nuls qu'il sera judicieux de ne pas stocker. Enfin nous pouvons, en observant les variations abrupte de densité de nombres, identifier visuellement les sous matrices  $B_{TT}^\Omega$ ,  $B_{Tz}^\Omega$ ,  $B_{zT}^\Omega$ ,  $B_{zz}^\Omega$ .

Pour résoudre ce système matriciel, nous employons la méthode d'Arnoldi. Afin de ne pas alourdir d'avantage ce premier chapitre, nous n'allons pas développer les concepts mathématiques relatifs à cette méthode qui sortent, d'ailleurs, du cadre de ce mémoire. Précisons toutefois que parmi les techniques spécialisées dans la résolution de système de grande taille, la méthode d'Arnoldi est l'une des plus communément employée [27][28][29].

## Conclusion

En conclusion de ce premier chapitre dédié à l'approche numérique par éléments finis des problèmes de propagation guidée d'ondes électromagnétiques, nous remémorons ci-dessous le synoptique représentant l'ossature de ce chapitre.



Synoptique représentant l'agencement du chapitre 1

La méthode des résidus pondérés constitue le cœur de notre démarche. En effet sa définition contient les ingrédients de base qui, d'un problème régi par un système d'équations différentielles, conduisent à un système matriciel dont la résolution est alors tout à fait abordable par un ordinateur. Les outils numériques qui gravitent autour de cette méthode sont le résultat d'un choix que nous avons effectué face à un problème donné. Ce choix n'est bien sûr pas unique.

L'ensemble des développements décrits dans le premier chapitre de ce mémoire conduisent à la conception d'un code de calcul que nous avons nommé ELFI. Ce calculateur électromagnétique 2D est présenté succinctement dans la première partie du chapitre suivant. La seconde partie est, quant à elle, dédiée à sa validation.



## Bibliographie du chapitre 1

- [8] J. Lee, D. Sun, Z.J. Cendes  
*"Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements"*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 39, pp 1262-1271, August 1991.
- [9] Zoltan J. Cendes  
*"Vector finite element for electromagnetic field computation"*  
I.E.E.E. Trans on MAG, Vol 27, N° 5, pp 3958-3966, September 1991.
- [10] Din Sun, John Manges, Xingchao Yuan, Zoltan Cendes  
*"Spurious modes in finite-elements methods"*  
I.E.E.E. Antennas and propagation magazine, Vol 37, N° 5, October 1995.
- [11] Jin-fa Lee, Din-Kow Sun, Zoltan J. Cendes  
*"Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements"*  
I.E.E.E. Trans on MTT, Vol 39, N° 8, pp 1263-1271, August 1991.
- [12] P. P. Silvester, R. L. Ferrari  
*"Finite elements for electrical engineers"*  
Cambridge U. K. : Cambridge University Press, 1983.
- [13] K. N. Louis Bertrand  
*"Mise en œuvre d'une méthode d'éléments finis à éléments d'arêtes en deux et trois dimensions. Application aux lignes de topologies complexes pour circuits intégrés monolithiques micro-ondes et aux interconnexions sur circuit silicium"*  
Doctorat de l'université de Lille1, 14 Octobre 1999.
- [14] Christophe Delabie  
*"Elaboration d'un simulateur de dispositifs planaires microondes. Application à la caractérisation de matériaux supraconducteurs"*  
Doctorat de l'université de Lille1, 23 Septembre 1994.
- [15] Didier Kinowski  
*"Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs microondes et optroniques "*  
Doctorat de l'université de Lille1, 18 Décembre 1992.
- [16] P. Spiteri  
*"Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis"*  
Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, <http://www.techniques-ingenieur.fr/>
- [17] P. Spiteri  
*"Introduction à la méthode des éléments finis"*  
Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, <http://www.techniques-ingenieur.fr/>
- [18] P. Spiteri  
*"Présentation générale de la méthode des éléments finis"*  
Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, <http://www.techniques-ingenieur.fr/>

- [19] J. Garrigues  
*"La méthode des éléments finis"*  
 Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Janvier 2002.
- [20] G. Dhatt, G. Touzot  
*"Une présentation de la méthode des éléments finis"*  
 Maloine S. A. Editeur Paris, 1984 ISBN. 2.224-00924-0.
- [21] J. D. Jackson  
*"Electrodynamique classique"*  
 Dunod, Paris, 2001 ISBN. 2 10 004411 7.
- [22] Guanghua Peng, Jin-Fa Lee  
*"Analysis of biaxially anisotropic waveguides using tangential vector finite elements"*  
 Microwave and Optical Technology letters, Vol 9, N° 3, pp 156-162, June 1995.
- [23] G. Mazé-Merceur, S. Tedjini, and J. L. Bonnefoy  
*"Analysis of a CPW on electric and magnetic biaxial substrate"*  
 I.E.E.E Trans on MTT, Vol 41, pp 457-461, March 1993.
- [24] K. K. Mei, G. C Liang  
*"Electromagnetics of superconductors"*  
 I.E.E.E Trans on MTT, Vol 39, N° 9, September 1991
- [25] N. Klein  
*"High-Frequency Application of High-Temperature Superconductor Thin Film"*  
 Institute of physics publishing, reports on progress in physics, pp 1387-1425, September 2001.
- [26] P. Hartemann  
*"Handbook of Applied Superconductivity"*  
 E. Seeber, Ed., IOP Publishing Ltd., 1998.
- [27] E. tuncer, D. P. Neikirk  
*"Efficient calculation of surface impedance for rectangular conductor"*  
 Electron. Lett., Vol 29, pp 2127-2128, 1993.
- [28] Matlab and Simulink for Technical Computing v6.5  
 The MathWorks, <http://www.mathworks.fr/>
- [29] B.M.A. Rahman et J.B. Davies  
*"Penalty function improvement of waveguide solutions by finite elements"*  
 I.E.E.E. Trans on MTT, Vol 32, pp 922-928, August 1984.
- [30] P.Daly  
*"Anumerically finite element formulation for the general waveguide problem without spurious modes"*  
 I.E.E.E. Trans on MTT, Vol 19, pp 19-25, January 1971.
- [31] C.G. Williams et G.K. Cambrell  
*"Variational finite element analysis of dielectric waveguides with no spurious modes"*  
 I.E.E.E Trans on MTT, Vol 22, pp 329-330, March 1974.
- [32] K. Hayata, M. Koshiba, M. Eguichi, M. Suzuki  
*"Vectorial finite element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse field components"*  
 I.E.E.E Trans on MTT, Vol 34, pp 1120-1124, November 1986.

- [33] K. Paulsen et D. Lynch  
“*Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions*”  
I.E.E.E. Trans on MTT-39, March 1991.
- [34] R. J. Radke  
“*A Matlab implementation of the implicitly restarted Arnoldi method for solving large-scale eigenvalue problems*”  
Thesis, Rice University, Houston Texas, April 1996.
- [35] F. Xu, Ke Wu  
“*Application of the Arnoldi Method in FDFD Analysis of Periodic Guided-Wave Structure*”  
Poly-Grames Research Center, Departement of Electrical Engineering, Ecole polytechnique, C.  
P. 6079, Succ. Centre-ville, Montreal, Canada H3C 3A7, 1-514-340-4711.
- [36] J. Mielewski, M. Mrozowski  
“*Application of the Arnoldi Method in FEM Analysis of Waveguides*”  
I.E.E.E. Microwave and Guided Wave Letters, Vol 8, N° 1, January 1998.



# Chapitre 2. Présentation et validation de l'outil ELFI

## Partie I Présentation de l'outil ELFI

### Introduction

Nous débutons ce second chapitre dédié à la description de notre code de calcul et à sa validation en rappelant la contrainte majeure qui nous a guidée dans le choix d'une plateforme logicielle de travail et de développement. Dès le départ, nous souhaitons utiliser un ordinateur de type PC, suffisamment performant pour nous affranchir d'une station de travail bien plus coûteuse. De fait, l'outil d'exploitation quasiment incontournable accompagnant, dans la plupart des cas, ces ordinateurs est Windows. Ainsi sont résolus d'emblée les problèmes de coûts prohibitifs liés à la maintenance tant de l'ordinateur lui-même que de celle logicielle liée à Windows puisqu'elle est de coût faible voire quasiment gratuite grâce aux mises à jour automatiques. Bien évidemment, nous aurions pu choisir l'environnement Linux, qui lui est gratuit. Nous lui avons néanmoins préféré le système d'exploitation de Microsoft parce que davantage répandu et familier au plus grand nombre d'utilisateurs, même si ce dernier a ces détracteurs.

Cette mise au point effectuée, nous pouvons à présent aborder la description de l'outil que nous avons développé, et ce, en quelques pages. En effet, il n'est pas possible d'être exhaustif comme nous l'aurions voulu sous peine de rendre la lecture de la prise en main de notre code très rébarbative. Il est clair que pour être efficace, seule la rédaction d'une notice voire d'un manuel d'utilisation est à envisager si l'on désire toucher le plus grand nombre d'utilisateurs. ELFI, puisqu'il s'agit du nom de code de notre outil, possède un noyau de calcul basé sur la méthode des éléments finis décrite au chapitre précédent. Cette méthode requiert, comme nous le savons, de découper la section droite de nos structures en éléments de base de géométrie triangulaire.

La première étape de notre démarche, dans la conception d'ELFI, consiste donc à trouver un outil de maillage performant qui puisse satisfaire les contraintes énoncées précédemment. Cette recherche nous a amené à sélectionner le logiciel MATLAB. En effet, il possède une "boîte à outils" nommée PDETOOL qui inclut un mailleur triangulaire et convient parfaitement à nos attentes [1]. Le coût d'utilisation et de maintenance de l'ensemble est raisonnable. MATLAB, qui était initialement un outil spécialisé dans le traitement matriciel, est devenu un langage de programmation à part entière. Sa syntaxe est, du reste, similaire à celle des langages de programmation qualifiés "de haut niveau" tel que le Fortran le C/C++, le pascal et bien d'autres encore. Il est aujourd'hui accompagné d'une

quantité impressionnante de fonctionnalités et autres boîtes à outils (bibliothèques de fonctions) qui font de lui un environnement de développement assisté très efficace. Pour toutes ces raisons, nous l'avons sélectionné d'autant qu'il propose, en plus, des fonctions d'affichage graphiques avancées permettant des tracés en deux et trois dimensions sans contraintes particulières. Cependant, du fait de la lenteur d'exécution de la version 5, notre objectif a consisté, au départ, à construire une interface écrite sous MATLAB permettant de récupérer uniquement les données du maillage qui sont, rappelons le, toutes les informations géométriques correspondant à chaque triangle. Le rôle de cette interface est alors d'écrire ces informations sur le disque dur de la machine. Ce stockage permet ainsi de nous orienter vers n'importe quel autre outil de développement et langage informatique mieux approprié à l'exécution de code de calcul lourd. Contrairement à MATLAB qui est un interpréteur, les langages comme ceux cités précédemment (fortran, C++, ...) permettent une compilation du programme. Cette compilation fournit une forme binaire du code source directement exploitable par le processeur de la machine et de ce fait plus rapide à l'exécution. A ce stade, une "passerelle" doit assurer le lien ou encore le transfert des informations géométriques de chaque triangle stockées sur le disque dur vers le code développé dans un langage différent.

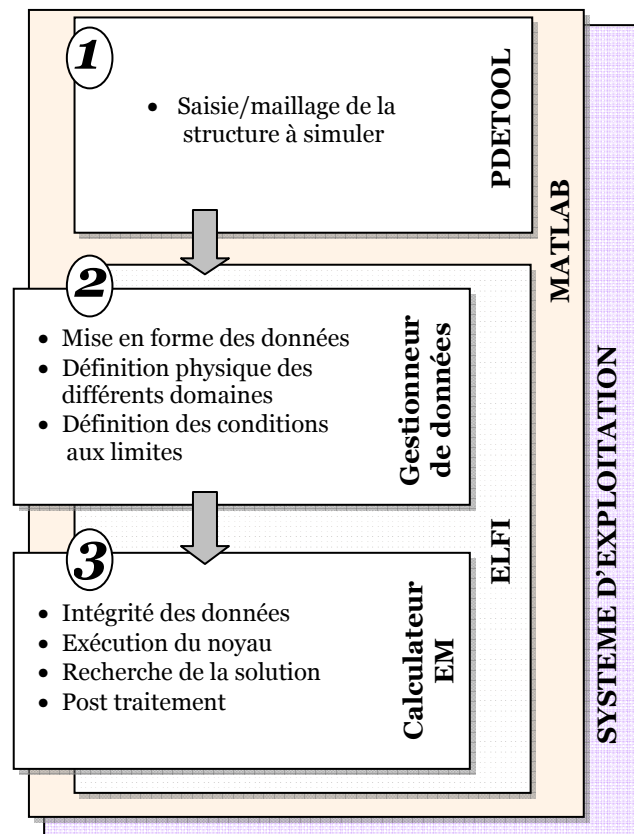


Figure 2.1 : ELFI et son environnement logiciel

Toutes nos interrogations concernant le choix du langage le mieux approprié sont levées avec l'apparition de la version 6 de MATLAB. En effet, le gain considérable de temps de calcul entre cette version et la précédente ne nous fait plus hésiter. Le temps de calcul reste, certes, supérieur à celui obtenu par le biais d'une compilation mais devient tout à fait acceptable. Nous choisissons en conséquence de développer notre code d'éléments finis intégralement sous l'environnement MATLAB. La passerelle logicielle assurant la gestion des données et leur sauvegarde sur le disque dur est, de ce fait, beaucoup plus aisée à mettre en œuvre et permet, de plus, d'éventuels dialogues entre le noyau de calcul et l'édition des données. Comme l'illustre la figure 2.1, ELFI se retrouve, par conséquent, sur la même couche logicielle qu'une boîte à outil telle que PDETOOL. ELFI et PDETOOL cohabitent donc et

reposent sur l'environnement MATLAB, lui-même géré par le système d'exploitation de la machine.

Comme nous l'avons signalé, les données du mailler issues de PDETOOL sont transférées sous ELFI composé, à ce jour, de deux parties distinctes :

- Le gestionneur de donnés
- Le calculateur électromagnétique (EM)

Afin de parcourir l'ensemble des fonctionnalités du code ELFI et de décrire rapidement les deux blocs qui le composent, nous choisissons un exemple simple de structure de

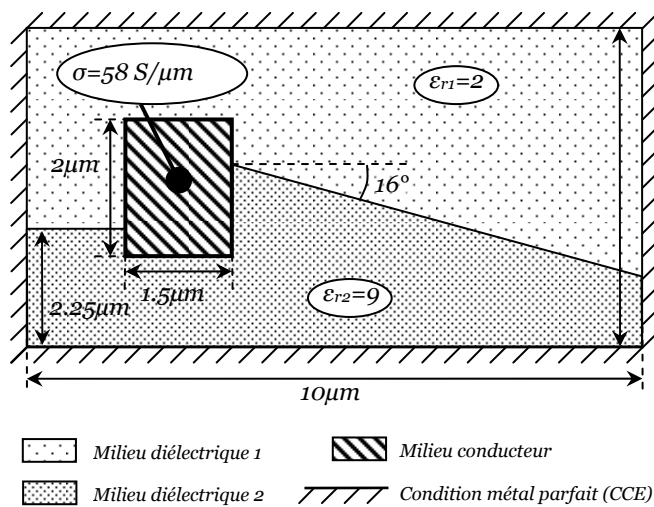


Figure 2.2 : Structure de test

propagation. Sa forme et ses dimensions sont données figure 2.2. Cette structure purement académique est composée d'un ruban de cuivre de conductivité  $58 \text{ S}/\mu\text{m}$  baignant dans deux milieux diélectriques homogènes de permittivité  $\epsilon_{r1}$  et  $\epsilon_{r2}$ . L'ensemble est délimité par une paroi métallique parfaite (condition de court circuit électrique : CCE). Cette structure non conventionnelle, il est vrai, constitue notre fil conducteur pour toutes les explications qui vont suivre.

## 1 Tracé de la structure et du maillage : lancer PDETOOL

Le contenu de la fenêtre de PDETOOL est illustré figure 2.3 où les fonctions élémentaires de saisie graphique les plus communément utilisées sont présentées sous forme d'icônes "carré", "triangle", "ellipse", "ligne brisé" etc... Notre structure est implicitement constituée de trois sous domaines différents. Ceci aboutit, par conséquent, aux tracés de trois objets graphiques qui, reconstitués, fournissent la structure originale figure 2.4. Bien évidemment il est possible, si besoin, de choisir d'avantage de domaine pour reconstituer la section droite de notre exemple figure 2.2.

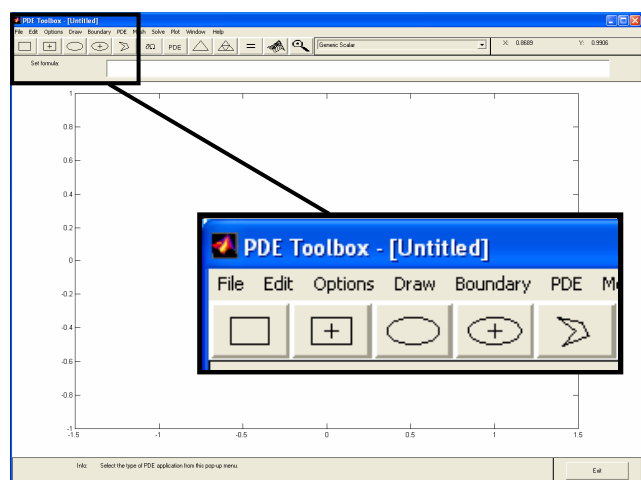


Figure 2.3 : Environnement PDETOOL



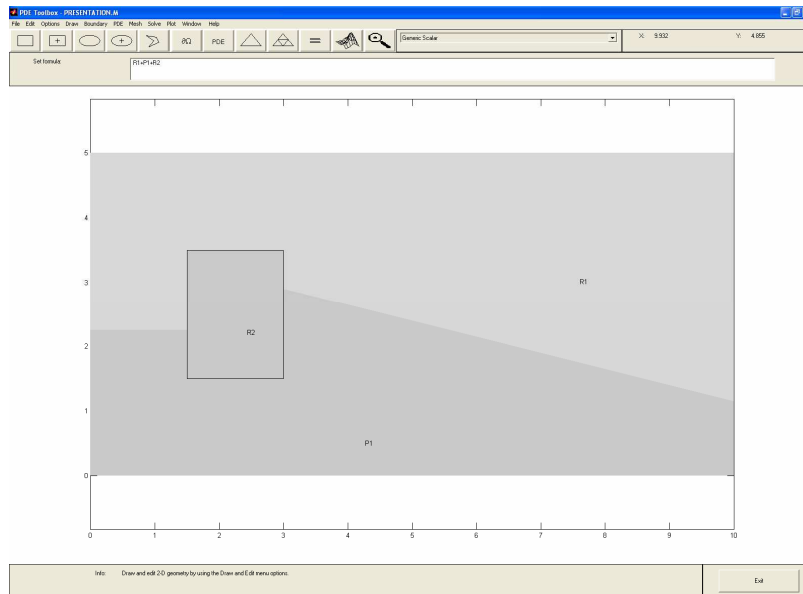


Figure 2.4 : Saisie de la structure de test

Vient ensuite l'opération de maillage accessible par le menu "Mesh".

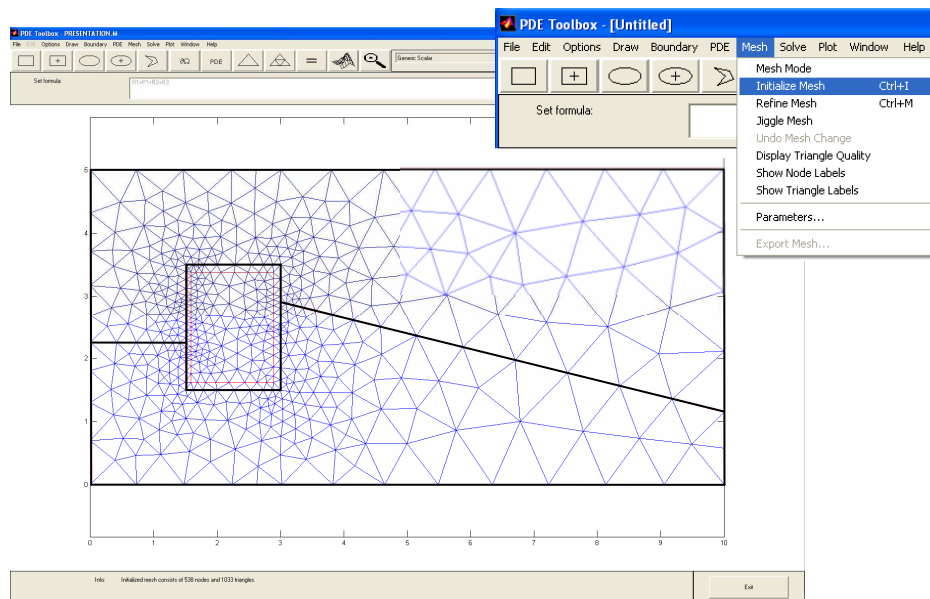


Figure 2.5 : Maillage de la structure de test

Signalons que PDETOOL propose un maillage de base figure 2.5 qu'il est possible de modifier et d'optimiser à souhait en éditant une gamme de paramètres spécifiques que nous ne pouvons détailler ici. Cette opération effectuée, nous pouvons exporter les données du maillage dans l'espace de travail de MATLAB comme le montre la figure 2.6.

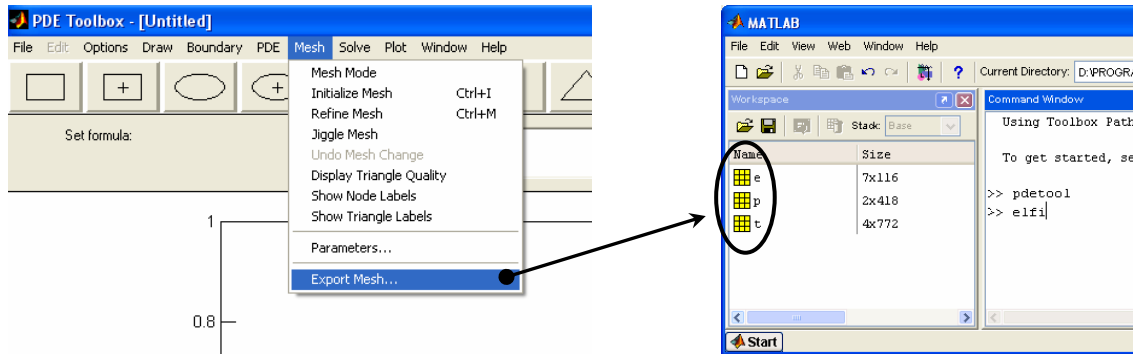


Figure 2.6 : Exportation des données de maillage de PDETOOL vers l'espace de travail de MATLAB

Ces données sont des tableaux d'entiers/réels et contiennent l'ensemble des informations relatives à la géométrie de notre structure ainsi qu'à son maillage.

## 2 Présentation d'ELFI-Gestionneur de données

Le rôle du gestionneur de données est d'établir un profil de simulation le plus précis possible de sorte que le calculateur EM exécute le noyau de calcul en exploitant directement les données de ce profil. Ainsi, à partir des trois tableaux issus de PDETOOL, le gestionneur va réaliser des tests d'intégrité, des corrections si besoin, construire de nouvelles données,

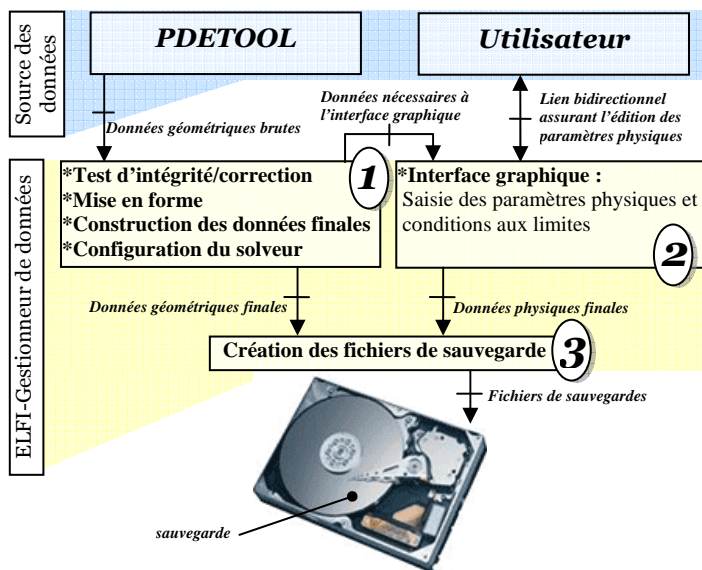


Figure 2.7 : ELFI-Gestionneur de données

mettre en forme et pré configurer le calculateur. Il va surtout permettre à l'utilisateur de définir les constantes physiques caractérisant les différents matériaux employés dans sa simulation, ainsi que les conditions aux limites. Nous l'avons compris, ce gestionneur est un ensemble de petits algorithmes indépendants exécutant des fonctions dédiées à la mise en forme générale d'un profil de données. Nous ne pouvons pas décrire ici chacune de ces fonctions.

Nous résumons l'ensemble par le schéma figure 2.7. En fait, le gestionneur de données se compose de trois blocs fonctionnels. Un premier bloc est dédié à toutes les opérations visant à établir un jeu de données concernant la géométrie de la structure ; jeu de données directement exploitable par le calculateur. Il fournit, en outre, les informations nécessaires à l'interface graphique pour reconstituer la structure et donner ainsi à l'utilisateur un réel confort d'édition des paramètres physiques. Il s'agit du bloc numéro 2. La présence de ce bloc

fonctionnel n'est pas fortuite. Bien au contraire, son existence s'est avérée peu à peu capitale. Elle résulte d'une succession de problèmes qu'il a fallu résoudre lors des phases de test du code. Outre l'assistance à l'édition qu'elle confère à l'utilisateur, cette interface est avant tout un chef d'orchestre automatisant un grand nombre d'action sur les fichiers de données. Ainsi, ce bloc fonctionnel constitué d'une interface graphique associée à un automate de gestion permet de rendre le jeu de données totalement transparent. L'utilisateur est alors libre de concevoir la structure la plus complexe qui soit, en un temps très court et sans se soucier des contraintes sous-jacentes. Enfin, les informations issues des deux fonctionnalités qui viennent d'être décrites, sont, comme le montre la figure 2.7, acheminées vers une entité de sauvegarde dont le rôle est tout simplement d'attribuer aux données le format adéquat pour l'écriture dans le disque dur. La fonction demande alors à l'utilisateur le chemin pour effectuer la sauvegarde des données. Une fois ce chemin validé, l'écriture s'exécute. Reprenons notre exemple et positionnons nous à l'instant où (figure 2.6) nous venons d'exporter les informations relatives à la géométrie et au maillage de la structure réalisé à l'aide de PDETOOL. A ce stade, les trois tableaux correspondants, sont présents dans l'espace de travail de MATLAB. Nous lançons alors ELFI qui commence par vérifier si des informations de maillage sont disponibles. Le succès de ce test provoque automatiquement le lancement du gestionneur de données qui exécute son premier bloc fonctionnel (figure 2.7). Durant cette étape relativement courte, rien ne se passe à l'écran. Si tous les tests de conformité sont réalisés avec succès, le second bloc démarre et l'interface utilisateur apparaît à l'écran conformément à la figure 2.8. Comme nous pouvons le voir sur la fenêtre de gauche, l'interface ne redessine qu'une partie de la structure. En effet, pour minimiser les erreurs et les oublis, nous avons opté pour ce système de découpage afin que l'utilisateur n'ait à se concentrer que sur un domaine à la fois.

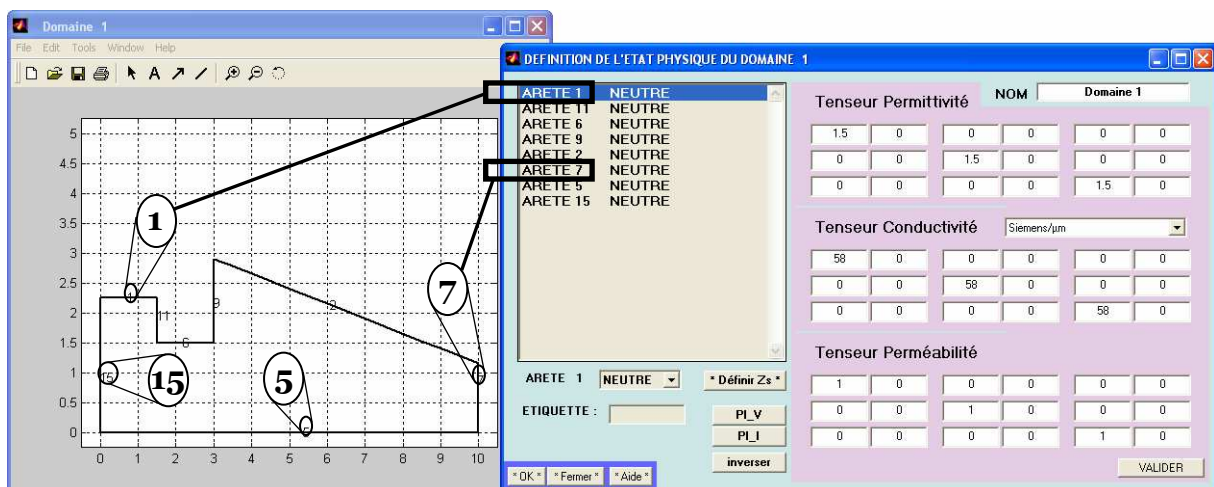


Figure 2.8 : ELFI-Gestionneur de données

Ce découpage est caractérisé par le recherche de surfaces fermées, c'est à dire délimitées par des arêtes connues, celles que l'on peut déjà voir apparaître sous PDETOOL lors de la construction de la structure (figure 2.4). L'utilisateur va alors pouvoir, grâce à la fenêtre d'édition (à droite sur la figure), paramétrer et définir l'état physique de ce domaine.

Nous allons nous arrêter un court instant et nous focaliser figure 2.9 sur cette fenêtre d'édition.

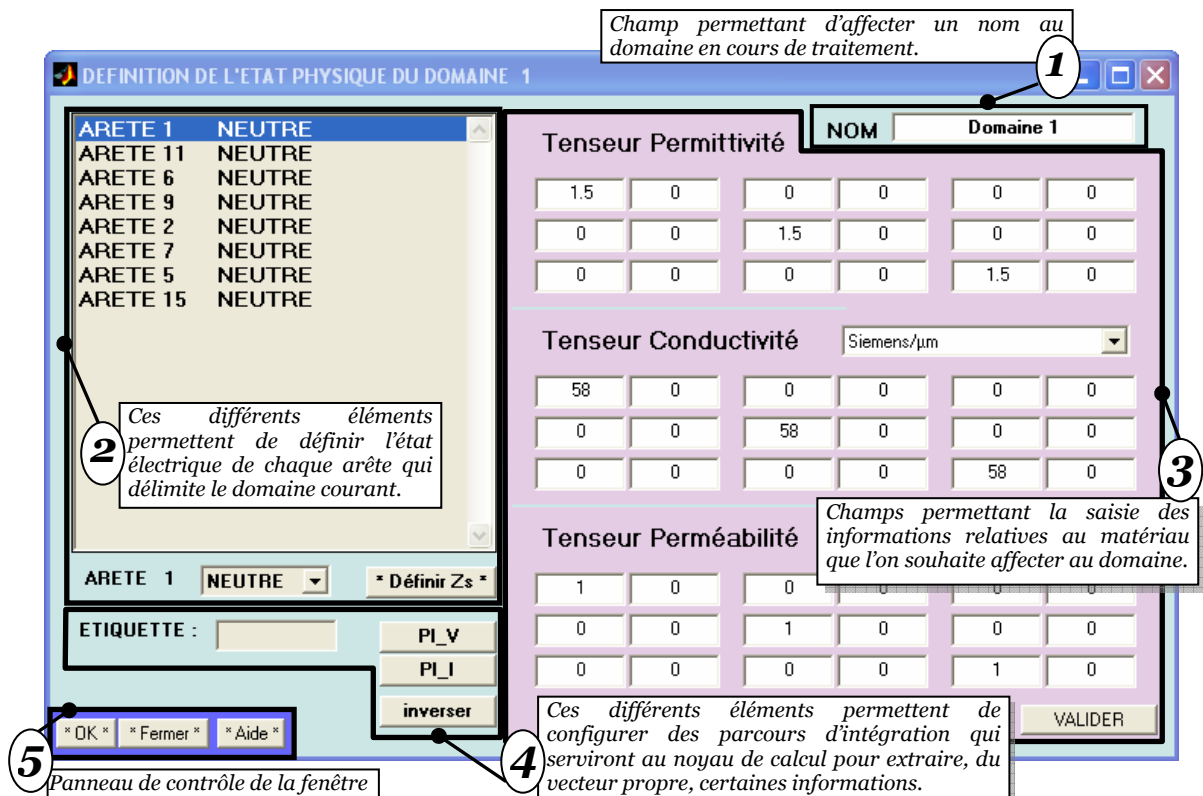


Figure 2.9 : ELFI-Gestionneur de données

Elle se divise en cinq sections. Chaque section correspond à une fonction particulière dans l'édition de l'ensemble des paramètres que le code est, à ce jour, capable de prendre en compte. Pour ne pas alourdir le contenu de ce volet, un commentaire succinct accompagne l'illustration de cette fenêtre. Il est clair qu'elle joue un rôle majeur dans le caractère convivial du code mis au point. Comme nous l'avons déjà signalé, elle résulte d'un grand nombre de situation, non résolues au départ, qui sont apparues tout au long de la mise au point d'ELFI.

Après s'être assuré que le domaine courant est complètement configuré, l'utilisateur clique sur le bouton "OK" du panneau de contrôle, et l'interface affiche le domaine suivant ainsi qu'une nouvelle fenêtre d'édition vierge. Cette séquence va se répéter autant de fois qu'il y a de domaines différents dans la section droite de la structure de propagation. La figure suivante montre la chronologie de la phase d'édition de notre structure.

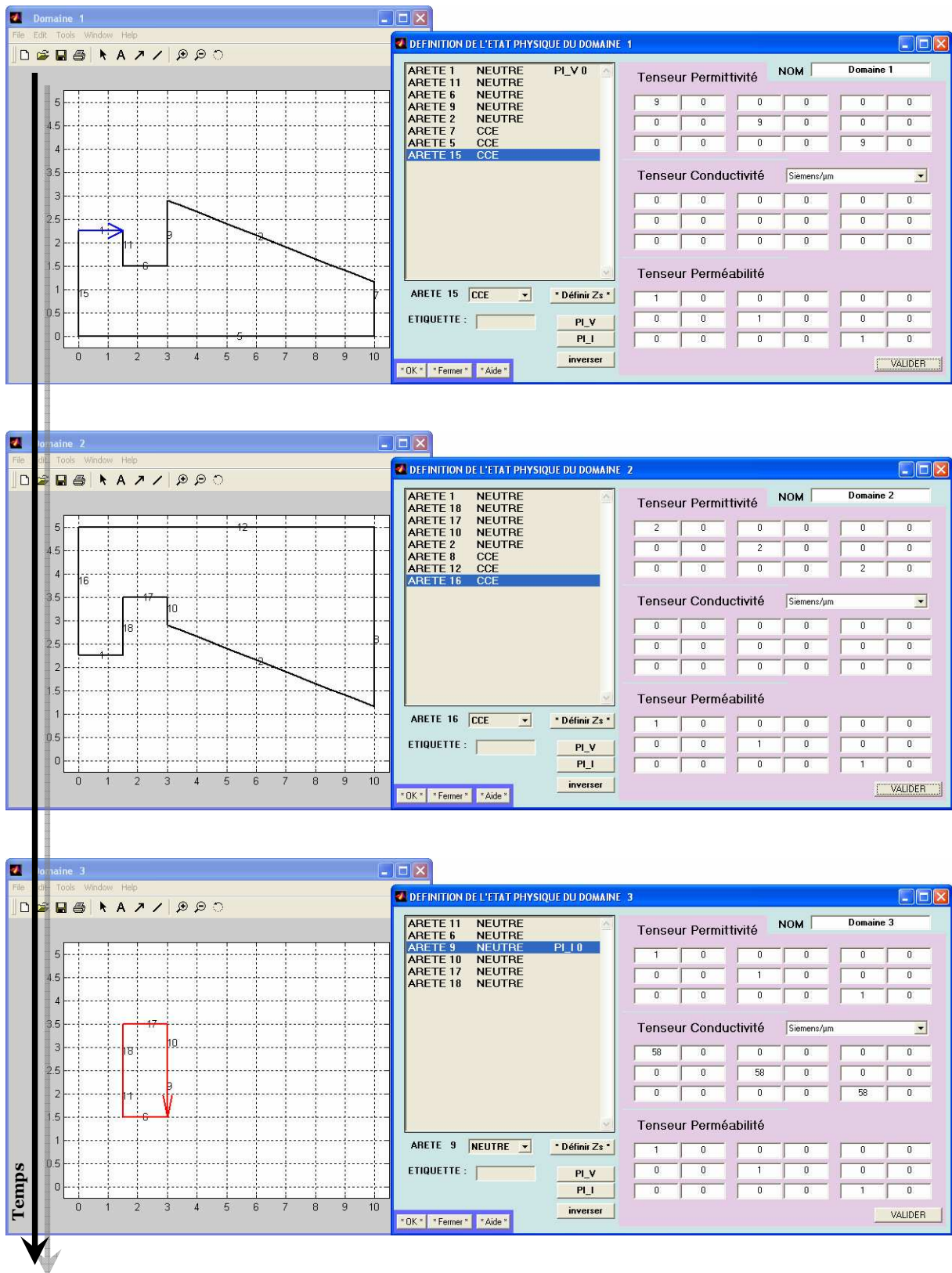


Figure 2.10 : Chronologie de la phase d'édition réalisée avec ELFI-Gestionneur de données

Les informations présentes sur chacune des trois fenêtres d'édition de la figure 2.10 correspondent au moment où l'utilisateur est sur le point de cliquer sur le bouton OK du panneau de contrôle. Autrement dit, à cet instant, chaque domaine composant la structure est entièrement défini conformément aux indications de la figure 2.2 ; le tout étant ensuite stocké sur le disque dur.

### 3 Présentation d'ELFI-Calculateur EM

Lorsque l'utilisateur démarre le calculateur électromagnétique d'ELFI, l'une des possibilités qui s'offrent à lui est d'ouvrir un nouveau fichier de simulation. Ce fichier doit bien sûr avoir été créé avec le gestionneur de données d'ELFI, et est censé être présent sur le disque dur de la machine. Outre l'accès au disque dur, l'interface utilisateur de ce calculateur EM permet de définir quelques paramètres supplémentaires de pré-traitement comme notamment l'édition d'une liste de fréquences, ou encore l'ajustement des bornes de recherche de la solution afin d'en optimiser éventuellement le temps de convergence. Il est également doté d'un environnement de post-traitement qui, comme son nom l'indique, permet de réaliser des opérations sur les diverses variables alors solutions du problème. Afficher les cartes de

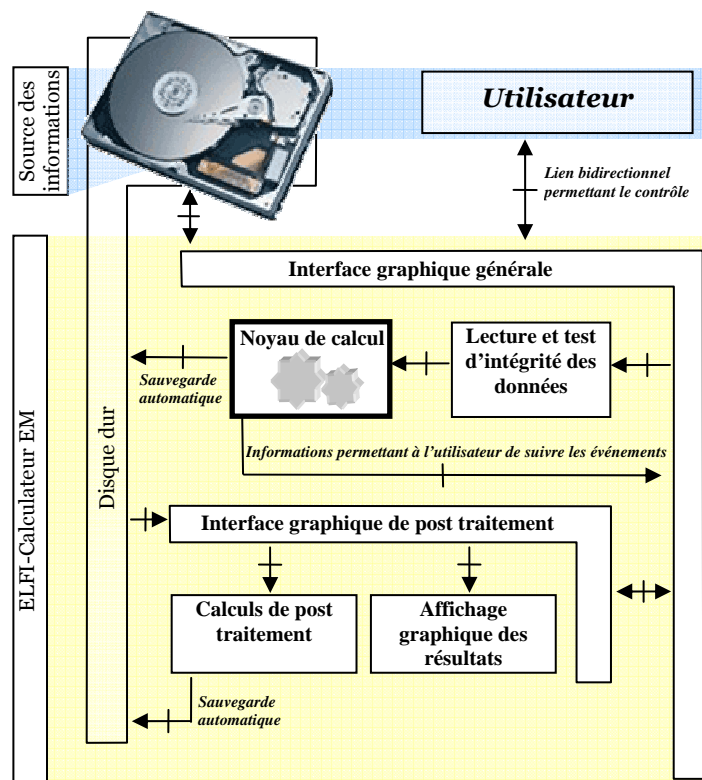


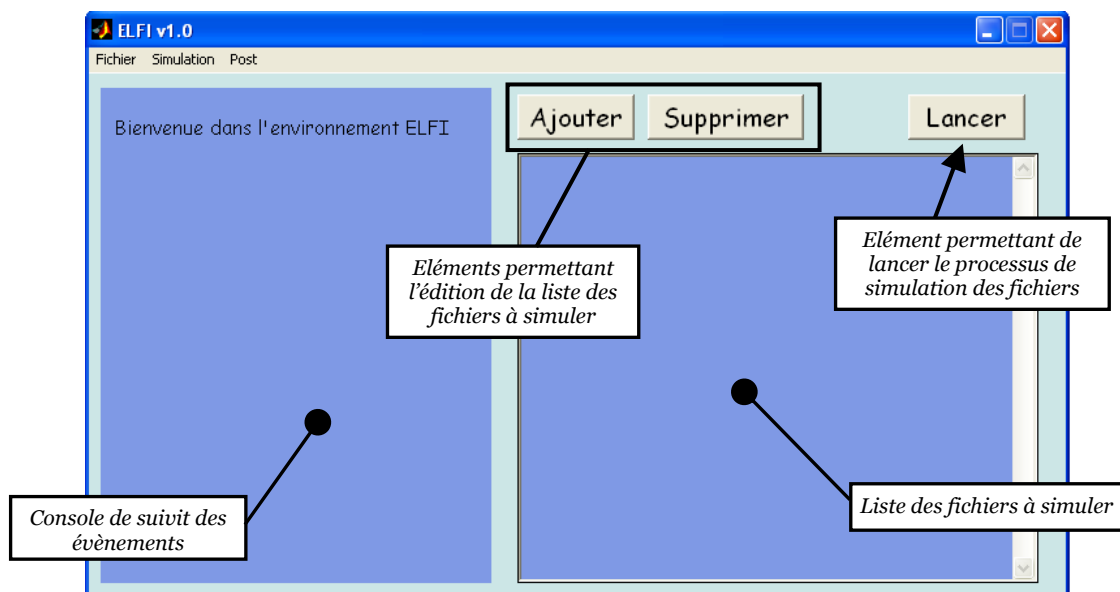
Figure 2.11 : ELFI-Calculateur EM

champs électriques et magnétiques, calculer une impédance ou encore établir le schéma électrique équivalent de la structure, s'il existe, sont autant d'opérations que cet environnement autorise. Tous ces éléments ne doivent toutefois pas masquer la fonction première du calculateur ; résoudre le problème. Nous avons, bien entendu, commencé par écrire le noyau de calcul basé sur la méthode d'éléments finis 2D à éléments d'arêtes décrite au chapitre 1. Toutes les autres fonctions gravitant autour de ce dernier, sont apparues durant la phase de "débugage" et d'optimisation du code. Une à une,

elles ont permis de réduire au maximum l'intervention de l'utilisateur, de combler les manques et de rendre ainsi l'exploitation du noyau totalement automatisée et, par conséquent, fiable. La figure 2.11 schématise l'agencement des différentes fonctions qui

composent le calculateur. Cette description est très réductrice mais permet néanmoins d'appréhender le fonctionnement général. Par l'intermédiaire d'une interface graphique, l'utilisateur va pouvoir soit lancer une nouvelle simulation à partir d'un fichier de données construit à l'aide du gestionneur, soit accéder directement à l'environnement de post traitement. En effet, comme nous pouvons le voir sur cette figure, il n'existe pas de lien direct entre le noyau de calcul et l'environnement de post traitement qui permet d'analyser les résultats. Cette construction délibérée est motivée d'une part, par le simple fait qu'il n'est pas forcément nécessaire d'effectuer des opérations de post traitement sur la solution du problème, et d'autre part, par le fait que nous pouvons les exécuter plus tard puisque la solution issue du noyau est automatiquement sauvegardée. De plus, le processus chargé de l'exécution des différentes simulations est bâti de façon à pouvoir exécuter séquentiellement ou de façon différée, plusieurs fichiers de données. Ces simulations sont traitées les unes à la suite des autres durant l'absence de l'utilisateur, pour lui permettre ensuite d'y revenir afin d'analyser les résultats en exploitant les opérations de post traitement.

Tout comme aux pages précédentes, nous ne décrivons que sommairement cette deuxième fonctionnalité de notre code. Lançons ce calculateur EM dont l'interface utilisateur est illustrée par la figure 2.12.



**Figure 2.12 :** ELFI-Calculateur EM

Cette interface est conçue pour être la plus intuitive possible. La zone graphique à droite permet de visualiser les différents fichiers de données que l'utilisateur appelle. Il les ajoute ou les supprime grâce aux deux boutons, du même nom, situés plus haut. Cette liste fonctionne comme une pile FIFO (first input first output) ; le premier fichier ajouté est le premier traité. Comme l'illustre la figure 2.13 page suivante, notre fichier de simulation (réalisé avec ELFI-Gestionneur de données) se trouve en suivant le chemin informatique

“H:\redac\simul\_presentation\...”. Nous voyons que pendant que nous recherchons notre fichier dans le disque dur, des informations surviennent sur la partie gauche de la fenêtre. Ces informations sont, on le comprend, relatives à l'action que nous venons de réaliser. Cette zone est une console de suivi qui retransmet toute action venant de l'utilisateur ou tout évènement interne au logiciel. Cette console avait été développée, à l'origine, pour faciliter la recherche des “bugs” lors de la longue phase de mise au point du logiciel. Elle est encore présente aujourd'hui et nous l'utilisons comme concentrateur d'information. Cet espace va par exemple soumettre des propositions à l'utilisateur lorsqu'il réalise des actions non souhaitées ou encore afficher tout simplement l'état d'avancement de la simulation.

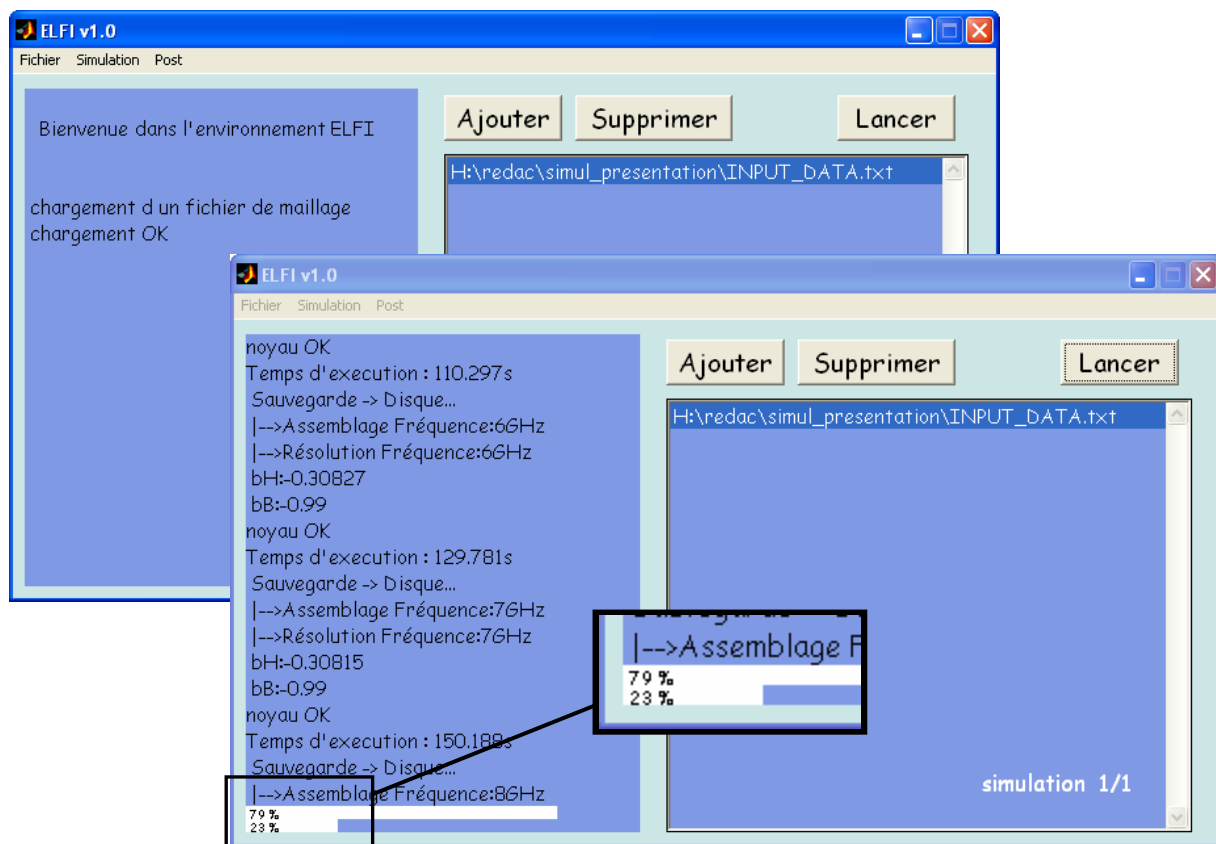


Figure 2.13 : ELFI-Calculateur EM : console de suivi

En effet, après avoir cliqué sur la commande “Lancer”, tout un ensemble d'informations défilent sur la console de suivi figure 2.13. On y voit notamment que le logiciel consacre quelques secondes à la lecture des données, ainsi qu'à des tests d'intégrité sur ces données. A l'issue de ces différents tests, le noyau de calcul se lance et la simulation commence. Lorsqu'arrive la lourde tâche d'assemblage, deux barres d'évolution apparaissent au bas de la console. Une première barre permet de visualiser l'évolution de l'opération d'assemblage de la matrice générale relative à une fréquence. La seconde permet d'estimer l'évolution globale



du processus. A l'instant où nous sélectionnons la "page écran" figure 2.13, le noyau de calcul traite de l'assemblage de la matrice correspondant à la fréquence 8GHz. Sa progression est de 79%, ce qui correspond vis-à-vis de notre plage de fréquences (30 points de fréquence) à un avancement de 23%. Les témoins d'avancement sont nécessaires chaque fois qu'un outil logiciel n'est pas défini "temps réel" et possède donc un temps de réponse, a priori, inconnu de l'utilisateur. Ils permettent tout simplement d'observer que le logiciel est en cours de fonctionnement, qu'il n'est pas "bloquer" et bien entendu, accessoirement, d'estimer le temps de calcul restant. Sur cette même figure nous voyons que le processus périodique assemblage-résolution consomme un temps de calcul approximatif de 20 secondes. C'est le processus le plus gourmand du noyau, et il faut le réitérer autant de fois qu'il y aura de fréquences dans la simulation. Bien sûr, ce temps est directement lié au nombre de triangles du maillage et aux performances de la machine qui exécute ELFI. Notre simulation qui contient 1033 triangles se termine au bout de 9 minutes et 50 secondes sur une machine équipée d'un processeur Intel P4D 2.8GHz dont les performances sont, aujourd'hui, dépassées.

## 4 Post traitement

Cette opération étant maintenant terminée, explorons rapidement l'environnement de post traitement via le menu "Post" d'ELFI.

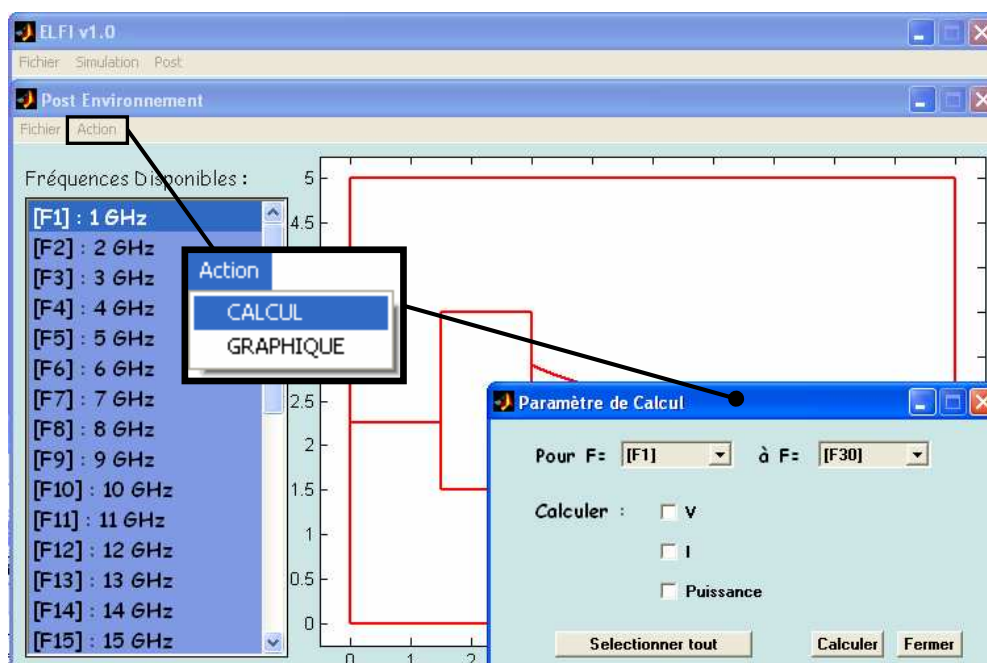


Figure 2.14 : ELFI-Post traitement, menu "Action/Calcul"

Comme nous n'avons pas éteint ce dernier depuis la fin de la simulation, l'environnement de post traitement charge automatiquement les résultats de cette simulation. Dans le cas contraire, le menu "Fichier" de l'environnement donne accès, via la fonction "Charger", au disque dur et permet donc de retrouver les résultats de n'importe quelle simulation déjà traitée. L'environnement reprend le tracé de la structure et affiche la liste des fréquences qui ont été simulées. Le menu "Action" donne alors, comme le montre la figure 2.14, la possibilité de lancer différents calculs. L'utilisateur sélectionne alors la bande de fréquence sur laquelle il désire réaliser les calculs grâce aux deux menus déroulants présents sur la fenêtre de calcul. Par défaut, cette fenêtre propose la bande de fréquence totale disponible. Puis, il coche les paramètres qu'il souhaite extraire du vecteur propre (solution de la structure); une différence de potentiel ("V"), un courant ("I") ou une puissance ("Puissance"). Notons que les algorithmes relatifs aux paramètres "V" et "I" ne seront exécutés que si des chemins d'intégration ont été définis lors de la phase de construction de la simulation. Quant à la puissance, il s'agit de la puissance totale obtenue par la somme du flux du vecteur de Poynting calculé dans chacun des triangles. A titre d'exemple, si l'on coche les cases V et I, les calculs de ces grandeurs sont sauvegardés ainsi que leur quotient correspondant. Nous exploitons ensuite ces données pour, grâce à un tableur, illustrer l'évolution de l'impédance  $Z_{VI}$  en fonction de la fréquence figure 2.15.

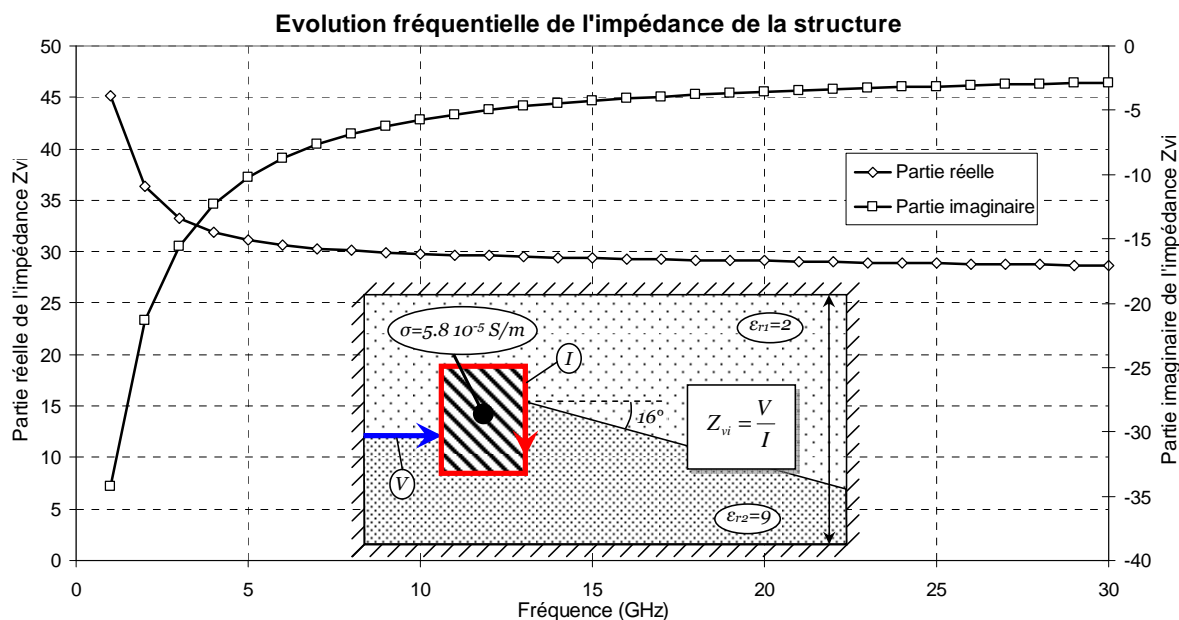
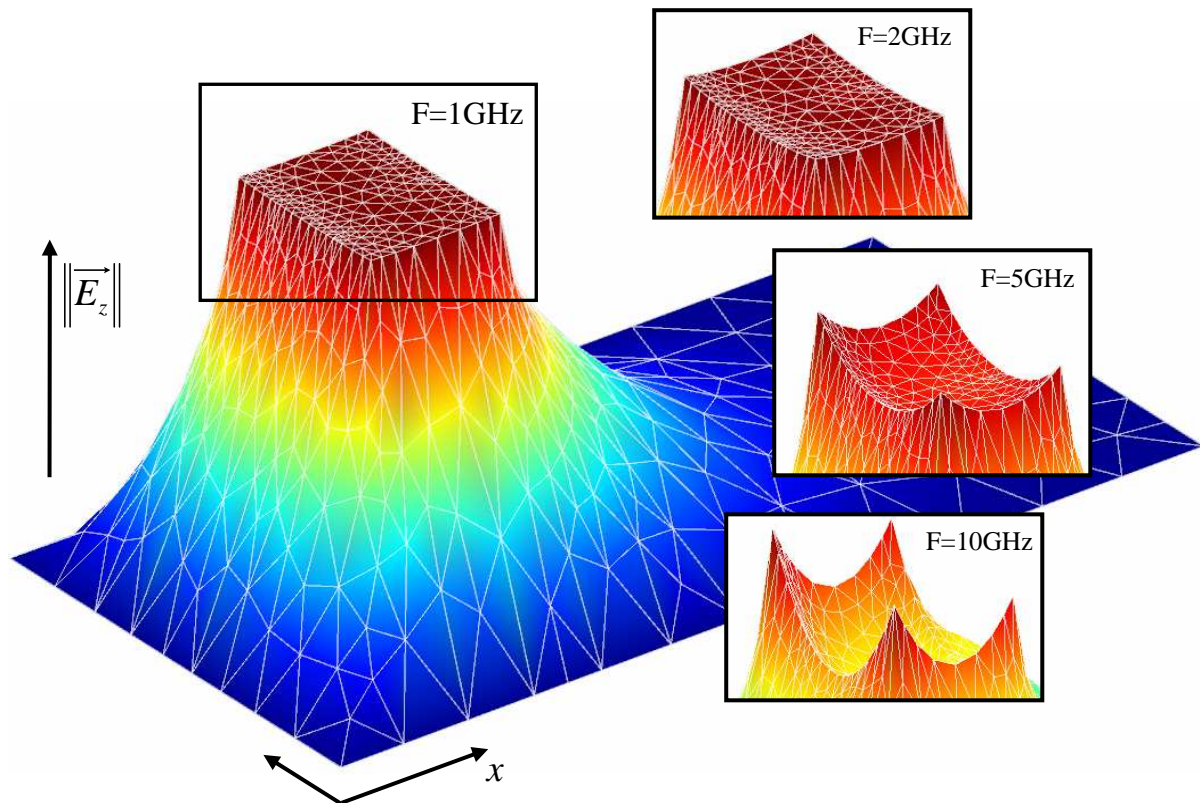


Figure 2.15 : Un exemple de l'évolution fréquentielle de l'impédance  $Z_{VI}$

En sélectionnant, figure 2.16, dans le menu "Action", l'option "graphique" puis "Champ EM" le logiciel affiche les champs électriques et magnétiques, transverses et longitudinaux, sous diverse formes.



Lorsque la représentation du module d'une composante, à partir de vecteurs de longueurs différentes, n'est pas suffisamment pertinente, nous sélectionnons un tracé en trois dimensions. Nous avons choisi, ici, d'illustrer le comportement du module du champ  $E_z$  pour différentes valeurs de fréquences figure 2.18 en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  puisque la troisième direction est affectée à l'amplitude du champ considéré.



**Figure 2.18** : Illustration du champ électrique longitudinal.

## Partie II Validation de l'outil ELFI

### Introduction

Après avoir décrit l'ensemble des fonctionnalités de notre code, nous pouvons à présent aborder sa phase de validation. Compte tenu des contraintes que nous nous sommes imposées, contraintes énumérées dans notre introduction principale, nous allons scinder cette étape en deux volets distincts.

Il est de coutume de tester les performances d'un code d'éléments finis en comparant les solutions qu'il fournit à celles analytiques concernant par exemple un guide rectangulaire métallique vide ou chargé. De nombreuses publications, existant dans la littérature, attestent de cette démarche. Nous en rappelons quelques une pour mémoire [2] [3] [4]. Cette liste n'est, bien évidemment, pas exhaustive. Même si nous avons commencé à tester notre outil par comparaison avec le guide rectangulaire métallique vide ou partiellement chargé, il est clair que nous ne montrerons aucun de ces résultats. Devenus désormais trop classiques, nous nous sommes plutôt intéressé à la problématique de la caractérisation des matériaux et à celle des couplages entre lignes métalliques d'un même niveau de métallisation. Ces deux thèmes représentent, du reste, les deux volets de notre validation.

Le premier volet relatif à la caractérisation des matériaux requiert que le code mis en œuvre puisse détecter la présence de domaines de nature très différente, si petits soient-ils. Par domaines, nous sous-entendons plutôt des régions remplies de matériaux diélectriques à pertes ou encore des métallisations non parfaites. Bien évidemment, la nature dissipative de ces matériaux, au sens large du terme, est ici introduite par le biais de la tangente de l'angle de pertes du matériau " $\text{tg}(\delta)$ " s'il est diélectrique ou par la conductivité de ce dernier s'il est métallique voire, s'il est supraconducteur, par la conductivité complexe  $\sigma_1 - j\sigma_2$  dans le cas du modèle à deux fluides [5] [6]. Cette capacité à traduire et à déceler l'existence de régions de natures différentes est étudiée dans le cadre de ce mémoire à partir des évolutions fréquentielles de la constante de propagation complexe, et ce, sur une ligne planaire constituée de rubans métalliques. Dans le cas présent, nous ne disposons bien entendu d'aucun support analytique fiable qui puisse prévoir, sans faille, constante de phase et d'atténuation. Dans ces conditions, nous articulerons une grande partie de notre discussion sur la comparaison avec le relevé expérimental. Ce dernier constitue, bien entendu, notre référentiel.

Le deuxième volet relatif aux couplages engendrés par une proximité trop importante des connexions "cuivre" dans un circuit VLSI ne repose pas sur la comparaison avec le relevé

expérimental. Au contraire de la démarche précédente, nous nous appuyons sur quelques développements analytiques “remarquables” de la théorie des lignes couplées. Certains de ces développements existent dans la littérature. Nous pensons, notamment aux travaux de V. K. Tripathi sur trois lignes couplées [7]. Nous avons pour notre part, mené l'étude analytique sur quatre lignes en mutuelles interactions ; étude analytique qui à notre connaissance n'a jamais été entreprise. La confrontation des résultats avec ceux issus de notre code nous permettra de statuer sur ses capacités à fournir des informations afférentes aux interactions mutuelles entre lignes.

Nous nous proposons dans un premier temps d'aborder le premier volet de cette validation.

## 1 Caractérisation fréquentielle de l'atténuation et du facteur de ralentissement du mode fondamental de la ligne coplanaire

### 1.1 Démarche

Pour effectuer une mesure dans des conditions optimales, il faut que la structure de propagation et son système d'excitation soit le plus compatible possible. La transition entre ligne coaxiale et le guide d'onde métallique a montré toute son efficacité depuis des décennies. L'utilisation de pointes de configuration coplanaires est, à l'heure actuelle, incontournable [8] [9]. Qu'y a-t-il de plus compatible qu'un système de pointes coplanaires posées sur une ligne coplanaire ?

Nous avons donc décidé, pour tester notre code, de réaliser des lignes coplanaires. Elles ne sont, certes, pas toujours de topologies conventionnelles comme le montre la figure 2.19, mais ce choix est délibéré. En effet, la ligne de forme simple représentée figure 2.19a nous sert à qualifier tant les pertes que la constante de phase, ou encore la permittivité relative effective du mode fondamental quasi-TEM. La ligne figure 2.19b, nous permettra quant à elle, de statuer sur les capacités du code à décrire des sous domaines de tailles et de nature physique différentes. Pour cette raison, nous avons choisi de confectionner des métallisations centrales en forme de “T”, dont le “chapeau” de dimensions variables repose sur une couche de silice.

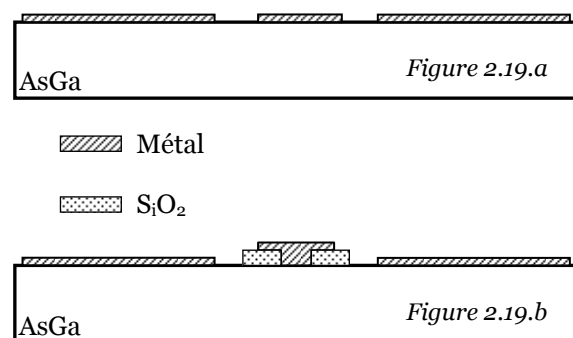


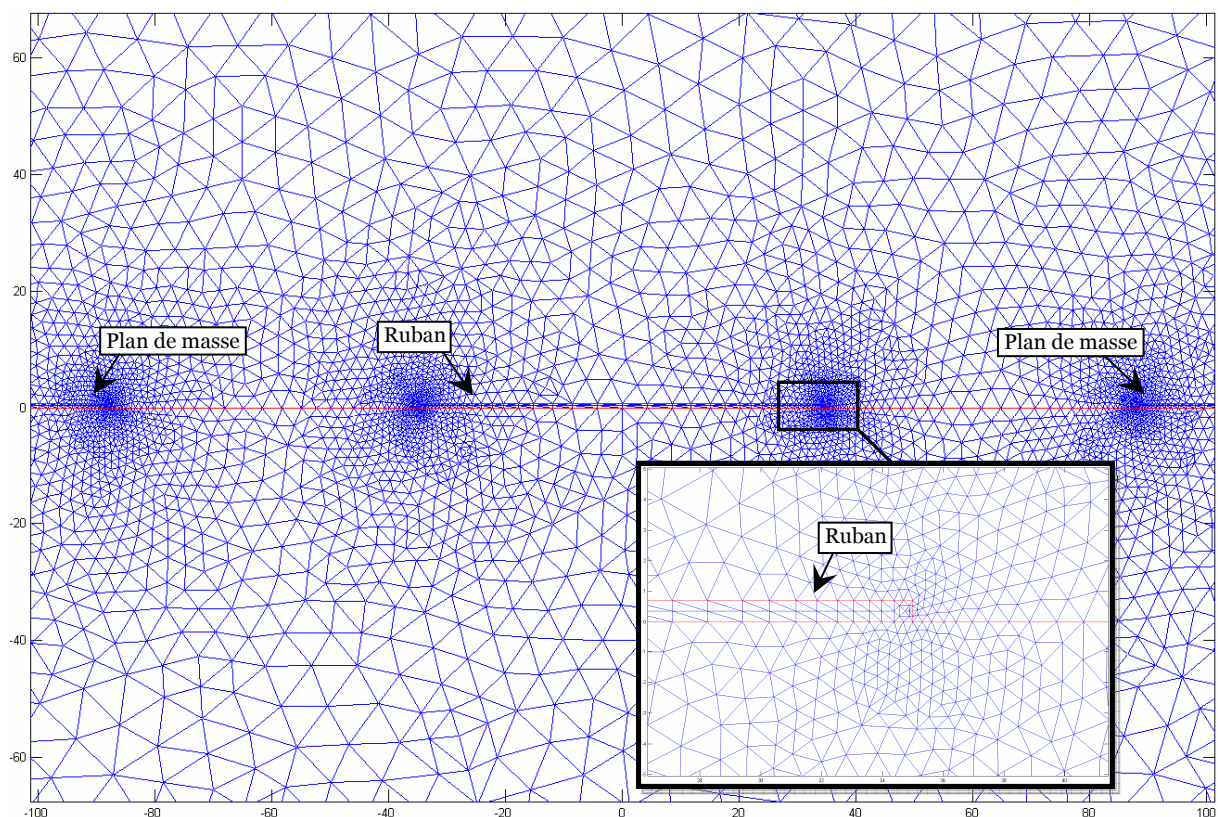
Figure 2.19 : Topologies coplanaires de test

## 1.2 Etude de la coplanaire classique : phase de validation

Avant d'estimer les performances de notre code, il nous faut rappeler les conditions dans lesquelles cette première phase de validation est gérée tant sur le plan numérique qu'expérimental.

### 1.2.1 Le point de vue numérique

Ainsi, d'un point de vue numérique, nous effectuons un maillage dans l'intégralité de la section droite. Cela signifie que les rubans métalliques sont considérés comme des domaines à part entière. Il s'agit, bien entendu, du cas de plus exigeant tant du point de vue de la taille mémoire requise que du temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une solution. Mais, c'est à ce prix qu'une solution fiable est obtenue. Rappelons que le maillage à partir de triangles élémentaires est appliqué à une ligne coplanaire blindée par un boîtier parfait. Bien évidemment, nous avons placé des murs électriques parfaits verticaux et horizontaux de façon à minimiser leurs influences respectives. Rappelons également que le maillage est soumis à quelques contraintes, notamment en présence d'arêtes vives. Ce dernier est nécessairement plus dense au voisinage d'un coin, dans le passage matériau diélectrique – matériau métallique [10] [11]. De même, à l'intérieur d'un domaine métallique, quelle que



**Figure 2.20** : Maillage typique utilisé pour évaluer par éléments finis la structure coplanaire soit sa forme, la plus grande dimension d'un triangle ne doit pas excéder l'épaisseur de peau

$\delta$  à la plus haute fréquence de travail. C'est en respectant ces quelques règles que l'on aboutit rapidement à la stabilité et à la convergence de la solution complexe de notre problème de propagation guidée ; en l'occurrence la constante de propagation et l'atténuation pour le mode fondamental.

La figure 2.20, page précédente, illustre un maillage typique. Compte tenu des faibles dimensions des métallisations, surtout au niveau des épaisseurs, un zoom des régions situées au voisinage des coins des rubans métalliques permet de mieux apprécier l'opération de maillage, dans, et autour du ruban. Notons que cette figure est déjà un zoom du maillage réel ; maillage réel dont l'illustration ici n'a qu'un intérêt limité dans la mesure où, à cette échelle, les métallisations sont peu visibles.

Pour mémoire, nous rappelons que la structure figure 2.20 comporte des triangles affectés à la description des métallisations et surtout à celle des plans de masse latéraux. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce dernier point dans la suite de notre étude.

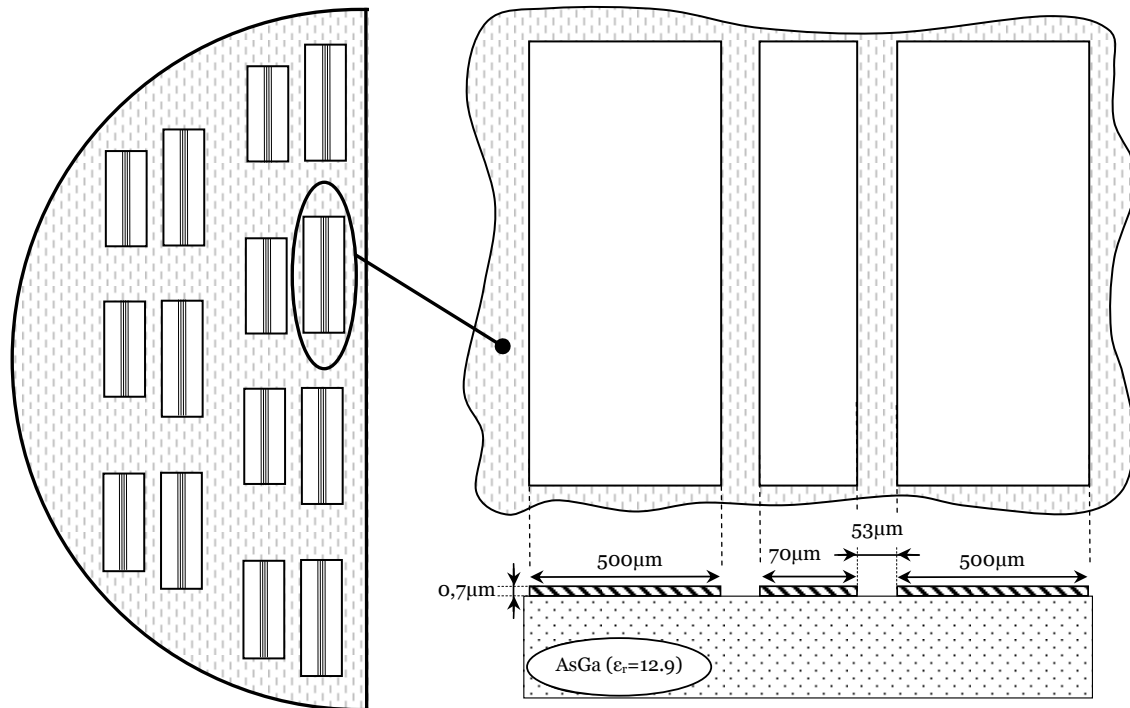
### ***1.2.2 Le point de vue expérimental***

Pour ne pas nuire à la clarté de ce paragraphe, nous ne développons pas la technique de mesure utilisée pour caractériser ces lignes. Ceci est abordé plus en détail dans le dernier chapitre de ce mémoire. Toutefois, il nous semble important de rappeler notre démarche. Puisque ces relevés doivent constituer une référence indiscutable et fiable, il est primordial de considérer les effets suivants :

- ✓ L'influence de la pose et de la dépose des pointes du système de mesures sur les différentes lignes réalisées.
- ✓ L'influence d'une faible variation des dimensions transversales des lignes.
- ✓ L'influence de l'épaisseur de la couche d'or qui constitue les métallisations.
- ✓ L'action d'une modification de la conductivité des dépôts métalliques.

Hormis le premier de ces effets, les autres se produisent malheureusement tout naturellement, et ce, à cause de la reproductibilité des phases technologiques d'insolation, de révélation, de dépôt et d'alignement. Nous allons profiter de cette carence en réalisant le plus grand nombre possible de lignes coplanaires classiques sur un demi "wafer" d'arséniure de gallium, l'autre demi "wafer" étant dédié aux lignes avec métallisation centrale en forme de "T".





**Figure 2.21 :** Lignes coplanaires déposées sur un demi-substrat d'arséniure de gallium.

La figure 2.21 illustre la topologie de la ligne coplanaire simple ainsi que la disposition des 14 lignes déposées sur le demi-wafer. Toutes ces lignes ne diffèrent que par leurs longueurs si l'on excepte, bien entendu, les faibles variations consécutives à la répétitivité du processus technologique. Rappelons que ces lignes 50Ω possèdent un ruban central de largeur 70μm et une fente de 53μm pour 500μm de largeur de plan de masse. Pour l'exemple proposé, les dimensions transversales des fentes et rubans sont reproduites avec une tolérance de ±5% autour de la valeur nominale. Quant à l'épaisseur de métallisation, elle varie de 0,72μm à 0,67μm d'après nos relevés. Une mesure statique nous fournit une valeur de la conductivité comprise entre 37S/μm et 39S/μm. Les caractéristiques du substrat sont celles fournies par le revendeur à savoir  $\epsilon_r=12.9$  et  $\text{tg}(\delta)=10^{-3}$  pour une épaisseur de 420μm.

### 1.2.3 Comparaison entre relevés expérimentaux et résultats numériques

Sans entrer dans les détails, deux lignes identiques du point de vue de leurs sections droites, mais de longueurs différentes sont nécessaires à la mise en œuvre de notre méthode de mesure de la constante de propagation complexe [12]. Le jeu de quatorze lignes déposées sur substrat d'arséniure de gallium autorise plus de 90 permutations de 2 lignes et fournit, en conséquence, plus de 90 relevés expérimentaux. Nous n'avons toutefois sélectionné que trois évolutions fréquentielles de l'atténuation figure 2.22.

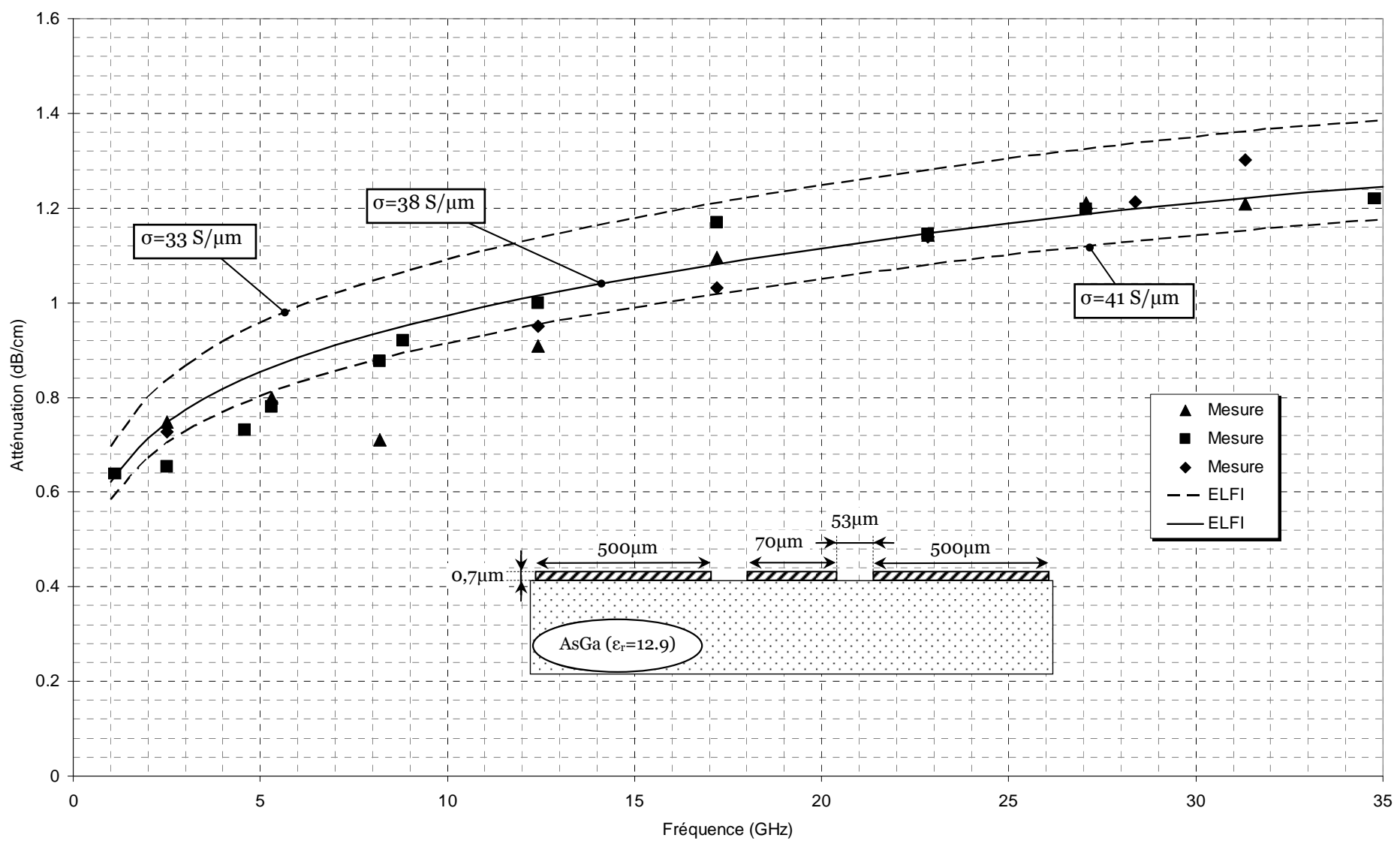


Figure 2.22: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique (comparaison mesure/ELFI)

Ce choix délibéré nous est dicté par un souci de lisibilité des résultats. Ainsi ; la figure 2.22 regroupe, pour quelques points de fréquence compris en 1 et 35GHz :

- ✓ Des symboles carrés “■” représentant les valeurs de l'atténuation les plus proches de la moyenne.
- ✓ Des symboles triangulaires “▲” et en forme de losanges “◆” affectés à la plus grande disparité observée dans nos relevés expérimentaux.

Sur cette figure, nous avons également tracé, en trait plein, l'atténuation linéique consécutive conjointement aux pertes diélectriques (même si elles sont a priori faibles) et métalliques que fournit notre code d'éléments finis. Cette prédiction de l'atténuation correspond, dans le cas présent, à une valeur de conductivité de  $38\text{S}/\mu\text{m}$  ; moyenne de la plus grande et de la plus petite des valeurs mesurées sur les différentes lignes. Nous avons également encadré cette valeur moyenne, par deux autres correspondant à des conductivités couramment employées dans la littérature scientifique à savoir  $\sigma=33\text{S}/\mu\text{m}$  et  $\sigma=41\text{S}/\mu\text{m}$  (tracés en pointillés). L'épaisseur de métallisation est ici égale à  $0,7\mu\text{m}$  ; épaisseur que nous avons mesurée sur plus de 70% des lignes réalisées. Un coup d'œil, même bref, aux différents relevés figure 2.22 montre que notre prédiction théorique de l'atténuation consécutive aux pertes est en excellent accord avec l'expérience, et ce, tant du point de vue de son comportement fréquentiel que de celui des valeurs de l'atténuation elle-même.

Il n'est donc pas surprenant que l'on obtienne un résultat tout aussi bon lorsque l'on compare, entre elles, les évolutions de la permittivité relative effective mesurée puis calculée au moyen de notre code figure 2.23, page suivante. Sur ce dernier relevé ne sont tracés que les points expérimentaux de l'évolution la plus proche de notre moyenne des 90 relevés de la constante de propagation complexe. Il faut ici signaler que les évolutions de la permittivité effective sont quasiment toutes confondues.

#### ***1.2.4 Sensibilité de la solution à une variation de la tangente de l'angle de pertes du substrat et à la conductivité des métallisations***

Nous désirons pour notre part, distinguer l'atténuation liée aux pertes métalliques de celle afférente aux pertes diélectriques. Nous insistons sur ce fait, car notre code doit pouvoir fournir de façon fiable l'impact de chaque phénomène sur l'atténuation bien que nous mesurons toujours les pertes totales. Il n'est pas aisé de quantifier, par le relevé expérimental, chacune des contributions même s'il est possible de modifier la conductivité en déposant des métaux différents à épaisseur constante ou l'inverse. La tangente de l'angle de perte est, quant à elle, une donnée du constructeur définie pour le matériau en volume.

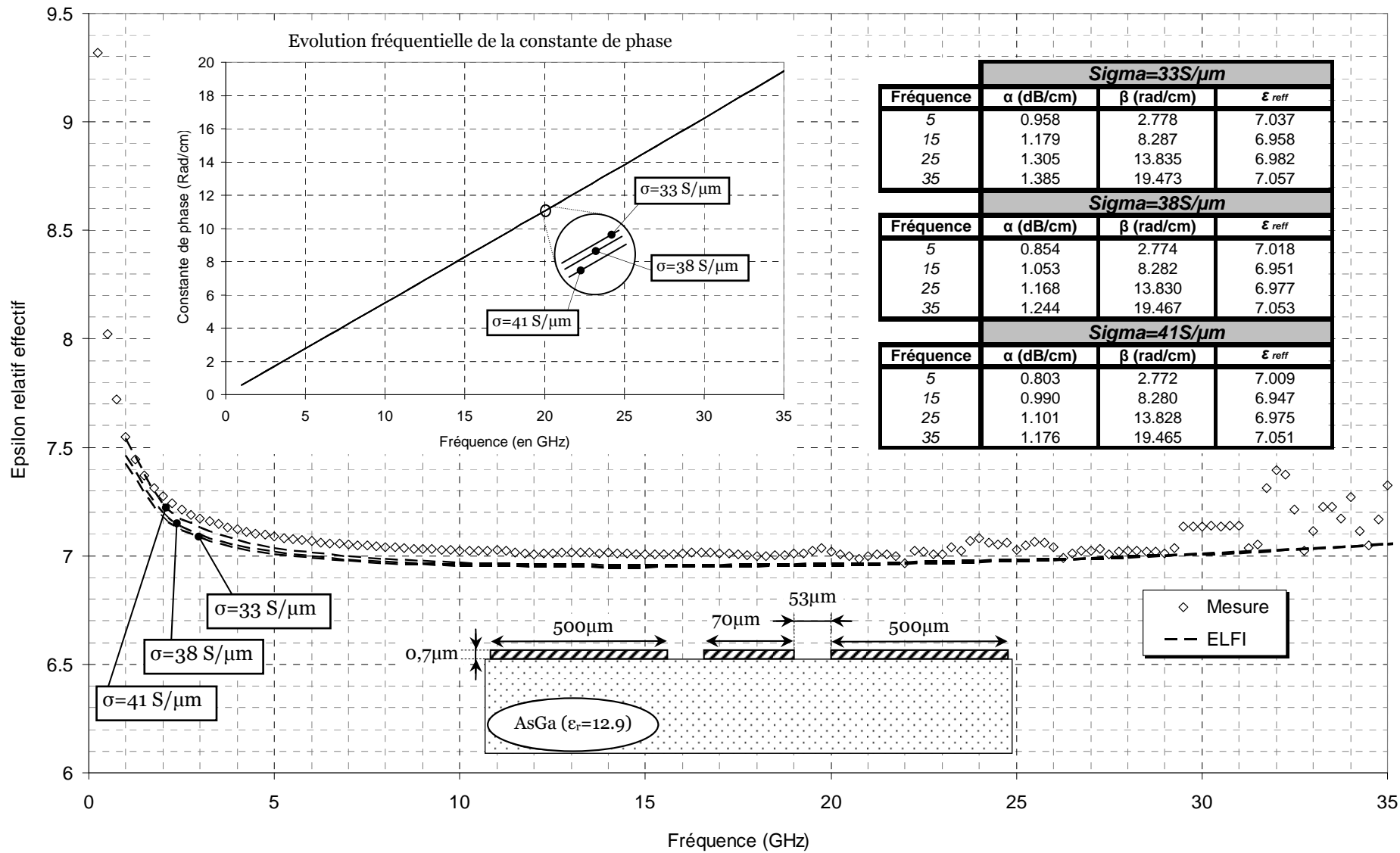


Figure 2.23: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective (comparaison mesure/ELFI)

Elle est, bien entendu, non ajustable comme on peut le comprendre. Compte tenu de ses contraintes et pour une structure coplanaire de section droite donnée, la sensibilité de notre code aux variations de conductivité et de tangente d'angle de pertes n'est donc pas totalement caractérisée de façon expérimentale.

Pour analyser nos résultats, tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif, nous allons plutôt nous appuyer sur la théorie des perturbations tant que cela est possible, bien entendu. La théorie des perturbations est certes une approche. Dès lors, il peut paraître surprenant de vouloir valider quelques comportements typiques de notre code de calcul au moyen de cette théorie. Dans notre esprit, cette modélisation doit essentiellement conforter quelques points comme :

- ✓ Le sens des évolutions.
- ✓ Le caractère de proportionnalité entre deux grandeurs.
- ✓ Le comportement d'une solution consécutive à la perturbation voire son invariance.

Ainsi, nous rappelons, pour mémoire, les résultats importants issus de cette méthode [13] [14] [15] [16] :

- ✓ Elle n'est applicable que dans le cas des pertes faibles tant métalliques que diélectriques.
- ✓ L'atténuation consécutive aux pertes diélectriques est directement proportionnelle à la fréquence ainsi qu'à la valeur de la tangente de l'angle de pertes " $tg(\delta)$ ".
- ✓ Les pertes diélectriques ne provoquent pas de modification de la constante de phase.
- ✓ Les pertes métalliques sont proportionnelles à la résistance de surface.
- ✓ Lorsqu'elles augmentent consécutivement à une réduction de la conductivité, la constante de phase croît et inversement.

Nous proposons donc d'évaluer les modifications qu'entraînent une variation de la tangente de l'angle de pertes " $tg(\delta)$ " sur la constante de propagation complexe de la ligne coplanaire réalisée précédemment. Rappelons que la conductivité des métallisations vaut  $38S/\mu m$  et que la valeur originale de la tangente de l'angle de pertes du "wafer" d'arséniure de gallium, fourni par le constructeur, est de  $10^{-3}$ . Cette dernière valeur est modifiée dans notre code de façon à ce que l'on puisse quantifier son impact lorsque, d'un cas sans pertes diélectriques ( $tg(\delta) = 0$ ) nous passons aux configurations à pertes faibles avec " $tg(\delta)$ " égal à  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ , voire  $10^{-2}$  que l'on peut considérer comme une valeur discutable en terme de pertes faibles.

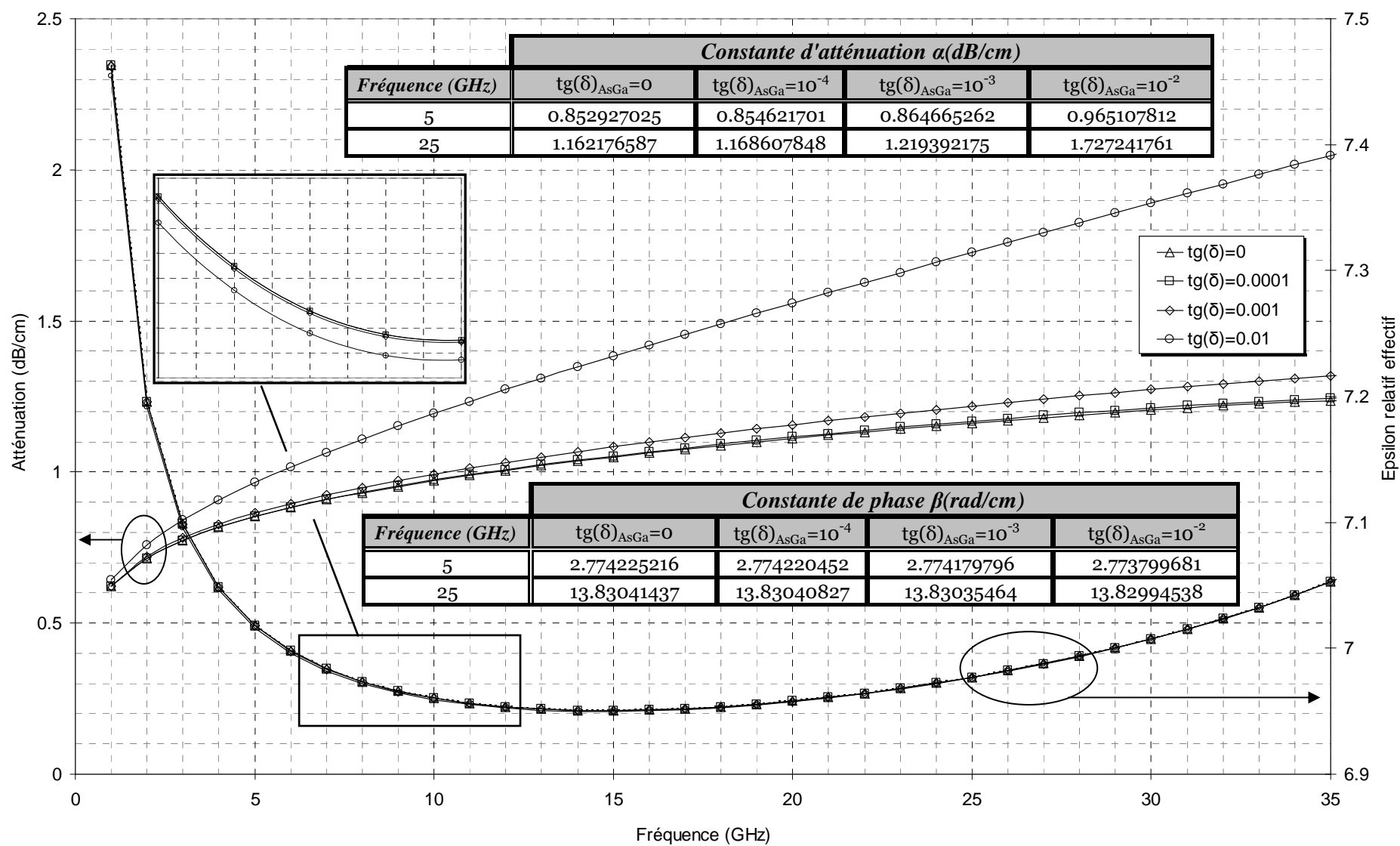


Figure 2.24: Evolution fréquentielle de la constante d'atténuation et de la permittivité relative effective

Ceci est illustré figure 2.24 tant sur l'évolution fréquentielle de l'atténuation linéique que sur celle de la permittivité relative effective.

Ainsi, du strict point de vue qualitatif, nous observons bien que la permittivité relative effective n'est pas affectée par une augmentation de la tangente de l'angle de pertes même importante. En effet, la permittivité relative effective n'a évolué que de 0.017% lorsque de  $10^{-4}$ , nous injectons dans notre code une valeur 100 fois supérieure, soit  $tg(\delta)=10^{-2}$ . La valeur de  $10^{-4}$  n'a, a priori, qu'une très faible incidence sur l'atténuation linéique comparé au cas sans pertes diélectriques ( $tg(\delta)=0$ ). Toutefois, le tableau incrusté dans l'évolution figure 2.24 montre bien un accroissement de l'atténuation quand, de  $tg(\delta)=0$ , on passe à  $tg(\delta)=10^{-4}$ . A ce stade, nous sommes en droit de nous demander si l'atténuation calculée pour  $tg(\delta)=10^{-4}$  est fiable, et si elle n'est pas noyée dans le bruit numérique généré par notre code de calcul. Pour répondre à cette question nous avons traduit les résultats issus de la théorie des perturbations sous la forme suivante, à fréquence fixée :

$$\alpha(tg(\delta)) \# [\alpha(10^{-4}) - \alpha(0)] \frac{tg(\delta)}{10^{-4}} + \alpha(0) \quad (2.1)$$

Dans cette expression, les termes  $\alpha(10^{-4})$ ,  $\alpha(0)$  représentent respectivement l'atténuation calculée, par notre code d'éléments finis pour  $tg(\delta)=10^{-4}$ , et  $tg(\delta)=0$  pour le cas sans pertes diélectriques. Le terme entre crochets traduit donc uniquement l'apport des pertes diélectriques pour  $tg(\delta)=10^{-4}$  puisque  $\alpha(0)$  et  $\alpha(10^{-4})$  correspondent à l'atténuation en présence des mêmes pertes métalliques ( $\sigma=38S/\mu m$ ). Comme nous l'avons compris, le terme entre crochets est ensuite multiplié par 10 et 100 puis ajoutée au cas sans pertes diélectriques ( $\alpha(0)$ ) si l'on veut prédire l'atténuation  $\alpha(tg(\delta))$  liée à un  $tg(\delta)$  égale à  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$  respectivement.

Ces propos sont traduits dans le tableau suivant pour deux valeurs de fréquences différentes, à savoir, 5 et 25 GHz. Ainsi,  $\alpha(tg(\delta))$  représente l'atténuation prédite pour  $tg(\delta)=10^{-3}$  et  $tg(\delta)=10^{-2}$  avec, comme seul point de départ, l'atténuation calculée en l'absence de pertes diélectriques et pour  $tg(\delta)=10^{-4}$ . Ce tableau regroupe aussi les valeurs de l'atténuation calculée par notre code d'éléments finis pour  $tg(\delta)=10^{-3}$  et  $tg(\delta)=10^{-2}$ , et ce, pour permettre la comparaison.

$tg(\delta)_{AsGa}$		$F=5GHz$		$F=25GHz$		
		0.001	0.01	0.001	0.01	
Prédiction établie par la théorie des perturbations	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$	<b>0.099548256</b>	<b>0.111111216</b>	<b>0.140389324</b>	<b>0.198873063</b>	Np/cm
		0.864665161	0.96509976	1.219406178	1.727389479	dB/cm
Prédiction fournie par ELFI	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$	<b>0.099548267</b>	<b>0.111112143</b>	<b>0.140387712</b>	<b>0.198856057</b>	Np/cm
		0.864665262	0.965107812	1.219392175	1.727241761	dB/cm
Erreur relative		$\approx 1.10^{-7}$	$\approx 8.10^{-6}$	$\approx 1.10^{-5}$	$\approx 8.10^{-5}$	

**Tableaux 2.1** : Comparaison entre les atténuations prédites par ELFI et celles prédites par la théorie des perturbations ( $tg(\delta)_{AsGa}=10^{-3}$  et  $10^{-2}$ )

A ce stade, nous ne pouvons que nous féliciter de l'excellent accord entre les deux prédictions de l'atténuation puisque nous observons un écart relatif compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-7}$ . Cet accord est encore meilleur si l'on opte pour une atténuation calculée à partir de  $tg(\delta) = 10^{-3}$ . La formulation précédente devient alors :

$$\alpha(tg(\delta)) \# \left[ \alpha(10^{-3}) - \alpha(0) \right] \frac{tg(\delta)}{10^{-3}} + \alpha(0) \quad (2.2)$$

Ceci nous permet, de prédire, l'atténuation pour  $tg(\delta) = 10^{-4}$  et  $tg(\delta) = 10^{-2}$  comme l'illustre le tableau suivant, et ce, avec une précision excellente.

$tg(\delta)_{AsGa}$		$F=5GHz$		$F=25GHz$		
		0.0001	0.01	0.0001	0.01	
Prédiction établie par la théorie des perturbations	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$	<b>0.098391961</b>	<b>0.111111332</b>	<b>0.134540952</b>	<b>0.198855316</b>	Np/cm
		0.854621711	0.965100769	1.168607859	1.727235327	dB/cm
Prédiction fournie par ELFI	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$	<b>0.098391959</b>	<b>0.111112143</b>	<b>0.134540951</b>	<b>0.198856057</b>	Np/cm
		0.854621701	0.965107812	1.168607848	1.727241761	dB/cm
Erreur relative		$\approx 1.10^{-8}$	$\approx 7.10^{-6}$	$\approx 1.10^{-8}$	$\approx 4.10^{-6}$	

**Tableaux 2.2** : Comparaison entre les atténuations prédites par ELFI et celles prédites par la théorie des perturbations ( $tg(\delta)_{AsGa}=10^{-4}$  et  $10^{-2}$ )

Intéressons nous, à présent, aux variations fréquentielles de l'atténuation pour une valeur fixée de  $tg(\delta)$ . Nous avons consigné les valeurs des atténuations calculées à la fréquence 25GHz à partir des résultats obtenus pour la fréquence 5GHz, et ce, lorsque l'angle de la tangente de pertes vaut  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$ , dans le tableau 2.3.



$tg(\delta)_{AsGa}$		0.0001	0.001	0.01	
Prédiction établie par la théorie des perturbations	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$ à 25 GHz	0.134533699	0.140315237	0.198134616	Np/cm
		1.168544858	1.218762661	1.720975409	dB/cm
Prédiction fournie par ELFI	$\alpha(tg(\delta)_{AsGa})$ à 25 GHz	0.134540951	0.140387712	0.198856057	Np/cm
		1.168607848	1.219392175	1.727241761	dB/cm
Erreur relative		$\approx 5.10^{-5}$	$\approx 5.10^{-4}$	$\approx 3.10^{-3}$	

**Tableaux 2.3 :** Comparaison entre les atténuations prédites par ELFI et celles prédites par la théorie des perturbations à la fréquence 25GHz.

L'ensemble des tableaux présentés et des résultats qui y sont consignés attestent de l'excellent comportement de notre code vis-à-vis des pertes diélectriques. Tout ceci met en lumière, les capacités sans failles des éléments finis à éléments d'arêtes à prédire l'atténuation afférente à des tangentes d'angle de pertes même très faibles ( $10^{-4}$ ) puisque la limite du bruit numérique semble loin d'être atteinte pour cette valeur. Comme nous l'avons déjà signalé, le référentiel nécessaire aux diverses comparaisons est une approche du problème réel par perturbation du problème idéal sans pertes. Ceci peut paraître déconcertant, mais nous nous sommes expliqué sur ce point. La méthode des perturbations est sans conteste fiable et ne prête à aucune controverse si elle est appliquée au cas des pertes faibles, et ce, d'autant plus s'il s'agit des pertes diélectriques. En revanche, la détermination des pertes métalliques d'une ligne de transmission par perturbation de la structure idéale sans pertes est plus restrictive. En effet, elle fait appel à la résistance de surface calculée dans le contexte d'une interface "air"- "métal non parfait" infinie dans l'une des trois directions d'un trièdre direct. Elle est, de ce fait, directement proportionnelle à l'épaisseur de peau et décrite par la formulation très connue suivante :

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (2.3)$$

Bien évidemment, cette formulation ne pourrait jamais être utilisée si l'on restreignait son champ d'application à la stricte notion d'interface séparant deux milieux infinis. Il est admis, dans la littérature scientifique, que cette notion de résistance de surface est valide tant que l'épaisseur du matériau métallique dans lequel l'onde se propage vaut au moins trois épaisseurs de peau  $\delta$  à la plus petite fréquence de travail [17].

Pour les structures que nous avons réalisées, ceci n'est jamais vérifié. En effet, nous rappelons que l'épaisseur de peau vaut environ  $0,7\mu\text{m}$  pour de l'or ( $\sigma=41\text{S}/\mu\text{m}$ ) à 10GHz. Nous ne pouvons donc pas utiliser la théorie des perturbations pour relier la conductivité à l'atténuation linéique.

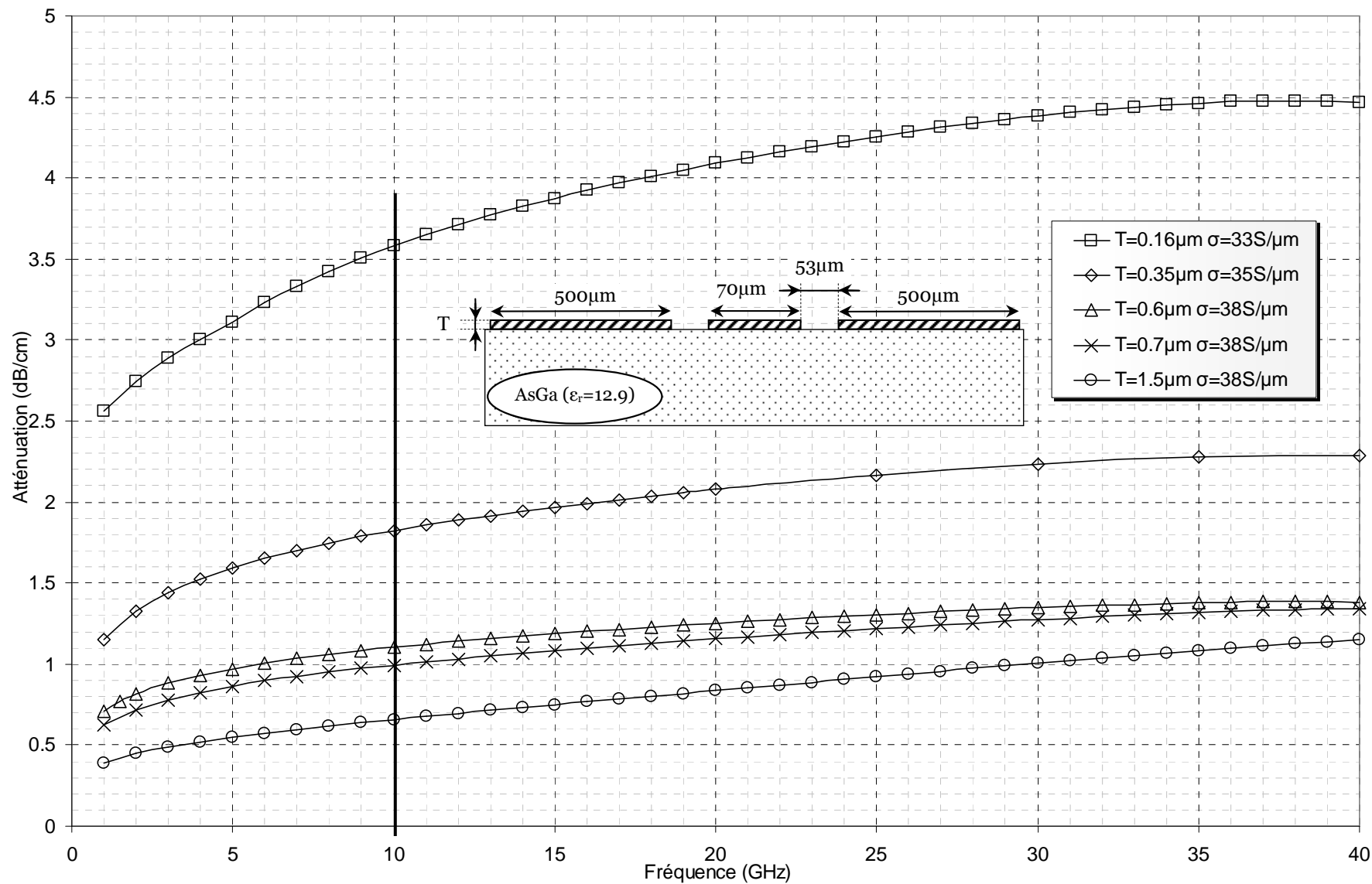
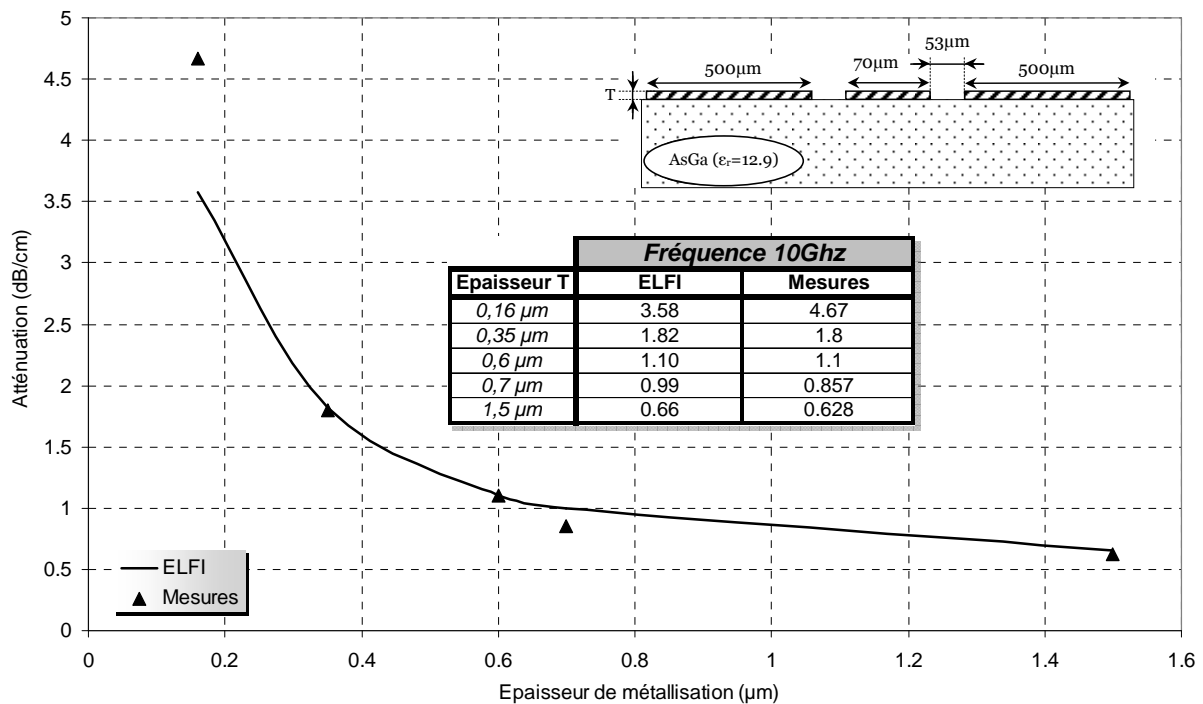


Figure 2.25: Evolution fréquentielle de l'atténuation calculée avec ELFI en fonction de différentes épaisseurs de métallisation et valeurs de la conductivité.

Pour prendre en compte l'incidence d'une évolution de la conductivité, nous avons réalisé des lignes coplanaires dont les rubans sont de largeurs identiques mais d'épaisseurs différentes. La conductivité de la couche d'or déposée varie ici de 33 à 38 voire 39S/ $\mu\text{m}$  pour un dépôt d'or de 0,16 $\mu\text{m}$  et 1,49 $\mu\text{m}$  respectivement. Ainsi, l'évolution figure 2.25 illustre l'action conjointe de la conductivité et de l'épaisseur du dépôt d'or sur l'atténuation. Comme nous pouvons l'observer figure 2.26 ci-dessous, un accord plus que satisfaisant caractérise la prédiction numérique des pertes comparée au relevé expérimental de l'atténuation sélectionné pour la fréquence 10GHz lorsque l'épaisseur varie de 0.16 $\mu\text{m}$  à 1.5 $\mu\text{m}$ .



**Figure 2.26:** Evolution de l'atténuation en fonction de l'épaisseur de métallisation à  $F=10\text{GHz}$

Il faut ici rappeler que seule l'épaisseur des dépôts d'or est déterminée avec précision ; la mesure de la conductivité étant liée à un relevé de la résistance effectuée en continu.

### 1.3 La ligne coplanaire avec métallisation centrale en forme de "T" : sensibilité à une faible variation des dimensions transverses

A la vue des résultats précédents, il est clair que notre code d'éléments finis à éléments d'arêtes fournit des prédictions fiables de la constante de propagation complexe, que ce soit en présence de pertes métalliques et (ou) diélectriques. Il nous faut à présent évaluer ses capacités à décrire des domaines dont la section droite est de très petite dimension. Nous avons choisi d'aborder cette dernière étape de validation en étudiant une structure de propagation de forme plus complexe. Tout en demeurant dans le contexte coplanaire, au ruban central classique, nous substituons une métallisation en forme de "T" comme l'est celle des grilles "champignons" des transistors à effet de champ. Nous

présentons figure 2.27, les différentes structures que nous avons réalisées, et ce, par couple de longueurs différentes comme l'exige notre méthode de mesure.

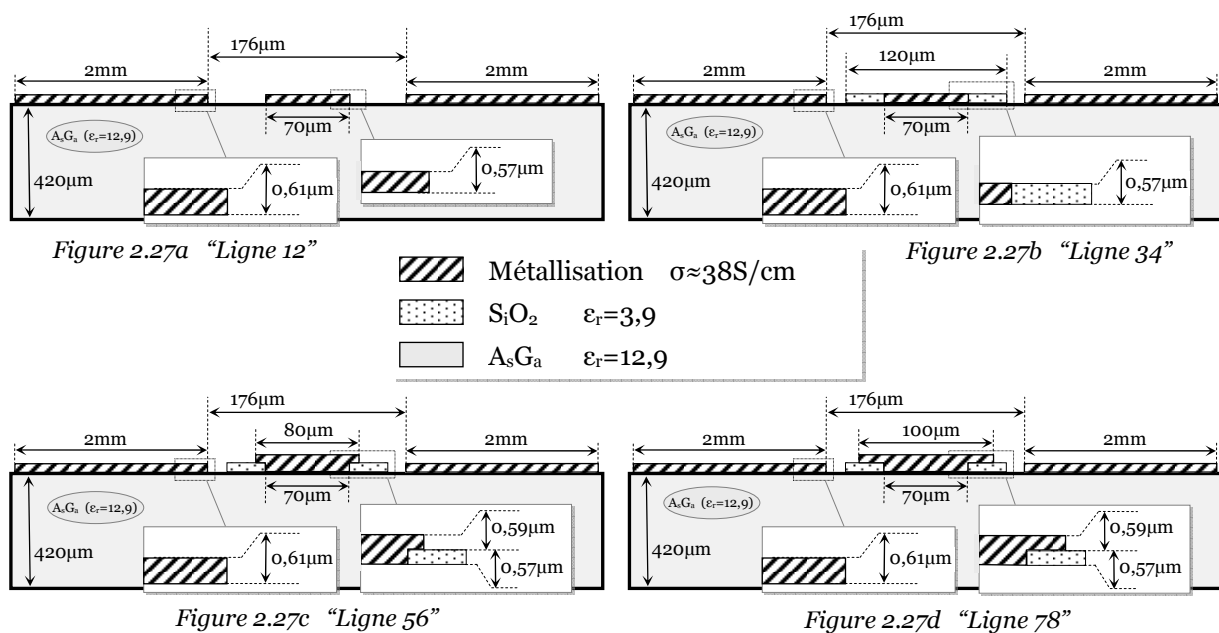


Figure 2.27 : Topologies coplanaires classiques (a, b) et coplanaires avec conducteur central en "T" (c, d)

Trois étapes différentes interviennent dans la confection de ces lignes. La première consiste à réaliser une ligne coplanaire classique figure 2.27a. Dans une seconde phase, nous effectuons un dépôt de silice ( $S_iO_2$ ) figure 2.27b pour éviter, dans une troisième phase, l'affaissement de la couche métallique supplémentaire déposée pour la confection de la métallisation en "T" figure 2.27c/2.27d. Rappelons, au préalable, que les dimensions transverses des lignes sont très proches de celles réalisées pour l'étude précédente, à l'exception des épaisseurs des dépôts métalliques voisines de  $0,6\mu m$ . L'ensemble des dimensions a été contrôlé ainsi que les diverses épaisseurs des matériaux.

Comme nous l'avons déjà précisé, un jeu de deux lignes a été réalisé pour chaque version. Ainsi, nous disposons d'une ligne coplanaire classique (a) et d'une ligne coplanaire dont la fente est partiellement remplie de silice (b), et enfin d'une structure avec ruban central en forme de "T" (c et d). Le tout est respectivement repéré par les chiffres 1-2 (a), puis 3-4 (b), 5-6 (c), 7-8 (d). Il faut ici noter que deux versions de métallisation en "T" possédant un pied de  $70\mu m$  ont été conçues où seule la largeur du chapeau évolue de  $80\mu m$  (5-6) à  $100\mu m$  (7-8).

Afin d'avoir un point de vue global, nous ne proposons, dans un premier temps, que les prédictions issues de notre code de calcul. Ainsi, les figures 2.28 et 2.29 illustrent le comportement fréquentiel de la constante de propagation complexe pour les quatre couples de lignes 1-2 et 3-4, puis 5-6 et 7-8.

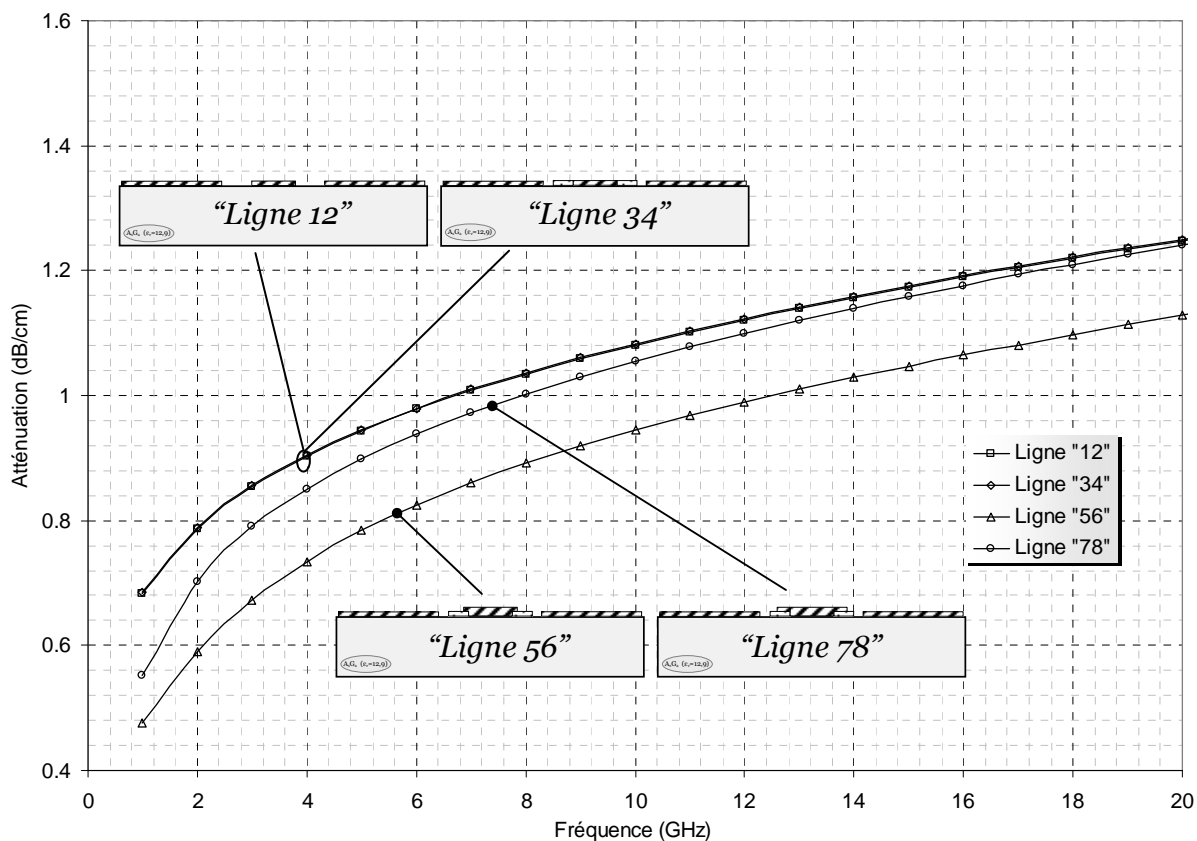


Figure 2.28 : Evolution fréquentielle théorique de la constante d'atténuation ( $\sigma=38S/\mu m$ )

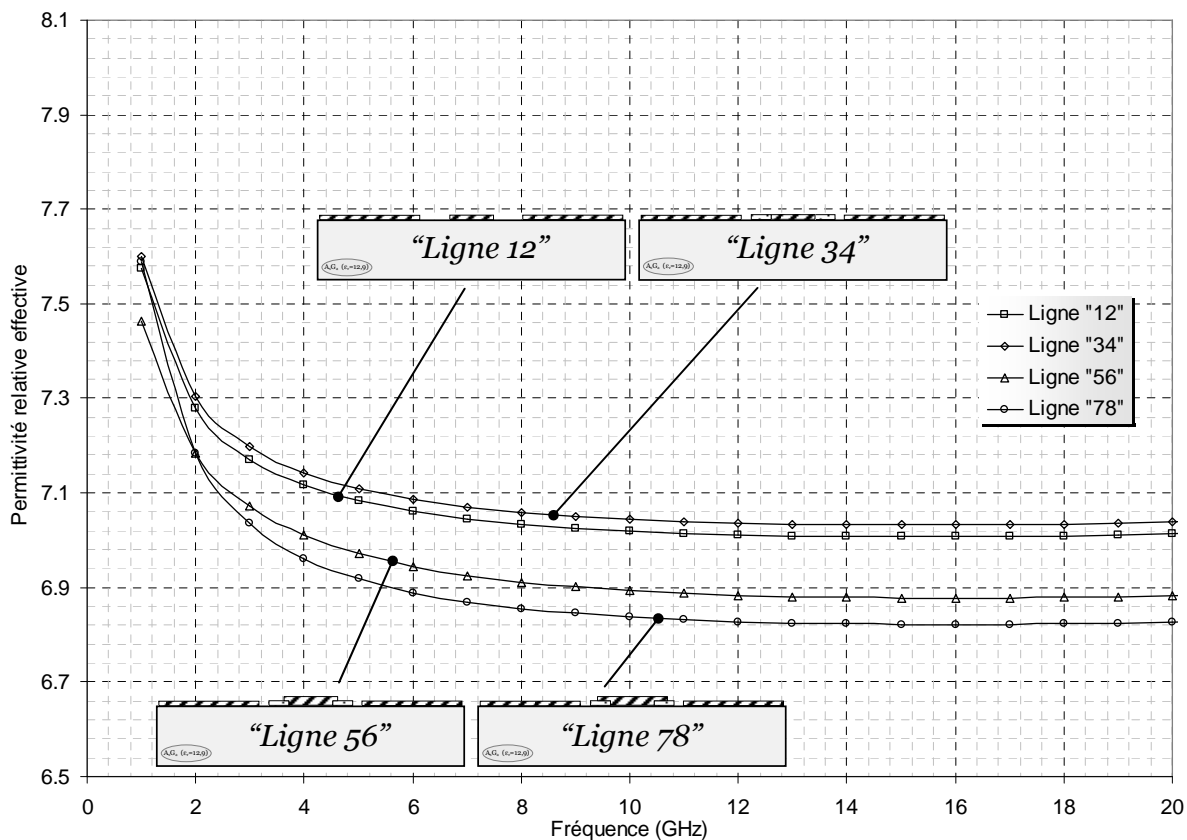


Figure 2.29 : Evolution fréquentielle théorique de la permittivité relative effective ( $\sigma=38S/\mu m$ )

Un rapide coup d'œil sur l'évolution théorique de la permittivité effective figure 2.29 montre que les éléments finis à éléments d'arêtes sont sensibles à l'ajout partiel de la couche de silice (ligne 3-4) en lieu et place de la couche d'air dans les fentes de la ligne coplanaire de base (ligne 1-2). Ce code d'éléments finis intègre tout aussi bien les modifications engendrées par une réduction ou un accroissement des dimensions de la métallisation supérieure en forme de "T". Remarquons que le sens de ces variations est tout à fait crédible. En effet, les métallisations en "T" attirent globalement plus de lignes de champs dans l'air, il n'est donc pas surprenant que la permittivité relative effective résultante soit un peu plus faible comparée au cas des métallisations classiques, même si l'une d'entre elles baigne dans la silice (3-4).

Différencier l'atténuation consécutives aux pertes métalliques des coplanaires classiques avec ou sans silice dans les fente (partiellement rempli) paraît difficile. En effet, il n'y a dans ce cas pas de modification de la section du ruban, mais seulement une légère perturbation des lignes de champs liée à l'ajout d'une couche de silice de  $0,6\mu\text{m}$  d'épaisseur. Comme nous pouvons le constater figure 2.29, notre code traduit bien ces propos. Des lors que la quantité de métal est modifiée, les pertes le sont aussi. Pour les lignes référencées 5-6 et 7-8, une réduction de l'atténuation doit être observée comme le veut la logique comparée aux ligne 1-2

et 3-4. Tous ces travaux trouvent leurs aboutissements dans la comparaison des résultats numériques avec les relevés expérimentaux (figures 2.31 à 2.36). Ces valeurs expérimentales illustrent parfaitement les comportements décrits précédemment. Elles sont, de plus, tracées pour deux conductivités différentes. La première concerne celle de l'or dite en volume soit  $4.1 \cdot 10^5 \text{ S/cm}$  (valeur maximale), la seconde caractérise un dépôt par évaporation de  $0,15\mu\text{m}$  soit  $3,2$  à  $3,3 \cdot 10^5 \text{ S/cm}$ . Nous remarquons sur les figures 2.28, 2.31 et 2.33 que les pertes correspondantes à la ligne "78" sont plus importantes que celles relatives à la ligne "56". Ceci peut surprendre quand on sait que cette ligne "78" possède un ruban central de section droite plus

importante que la ligne "56". C'est bien sûr l'effet de peau associé à la topologie particulière de ces lignes en "T" qui causent cet état de fait. La figure 2.30 représente le champ  $E_z$ , image dans le métal, de la densité de courant  $J_z$ . Nous voyons que l'effet de peau contraint cette densité de courant à se propager dans la partie métallique du ruban qui repose que le support en silice (zone métallique plus mince). Ainsi pour une même fréquence de fonctionnement la densité de courant voit, dans le cas de la ligne "78", une section droite effective plus faible.

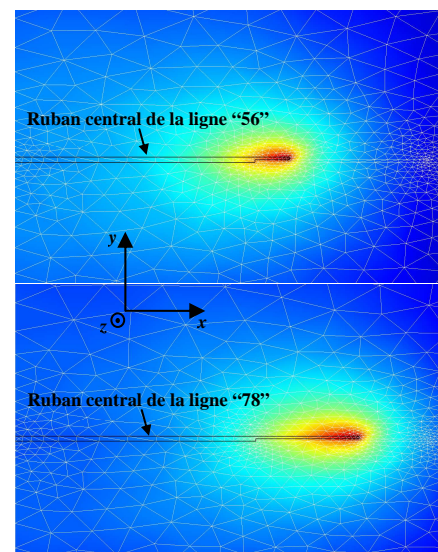


Figure 2.30 : Champ  $E_z$  à la fréquence 1Ghz

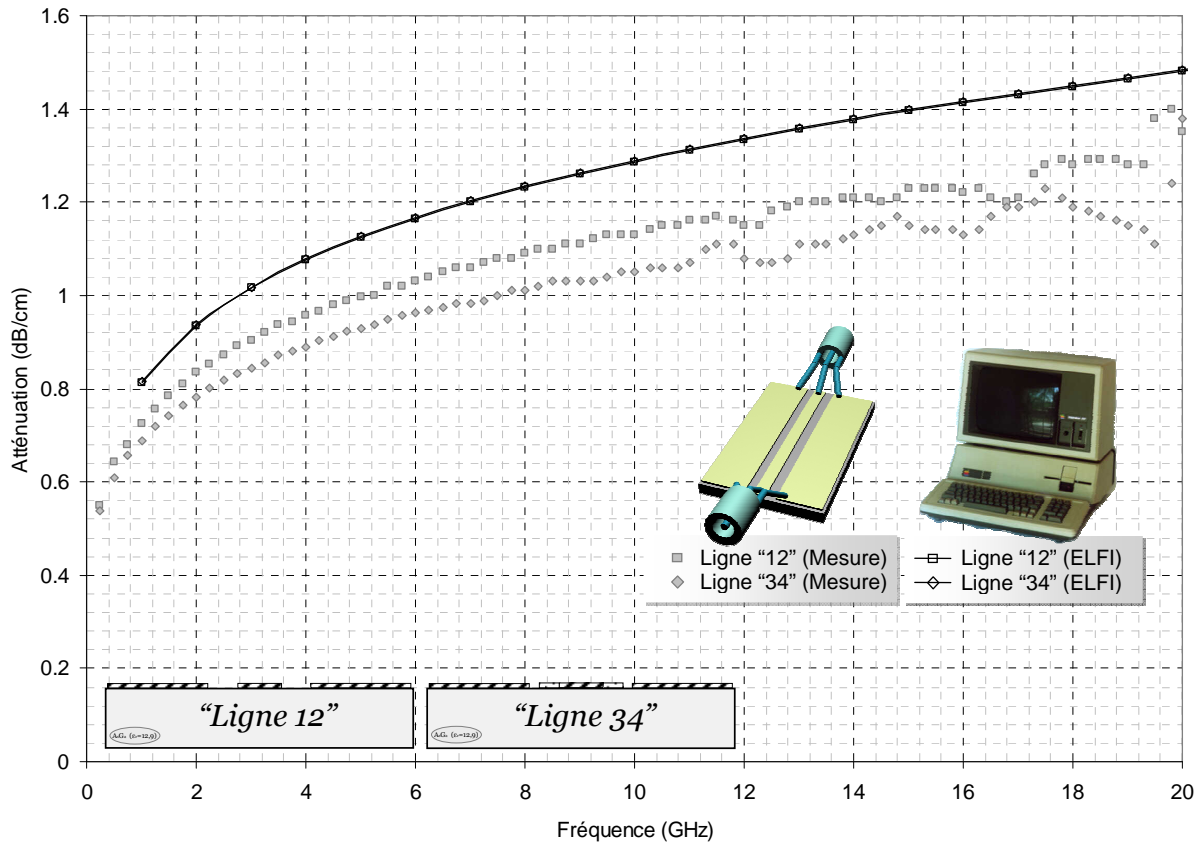


Figure 2.31 : La constante d'atténuation – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=33S/\mu m$ )

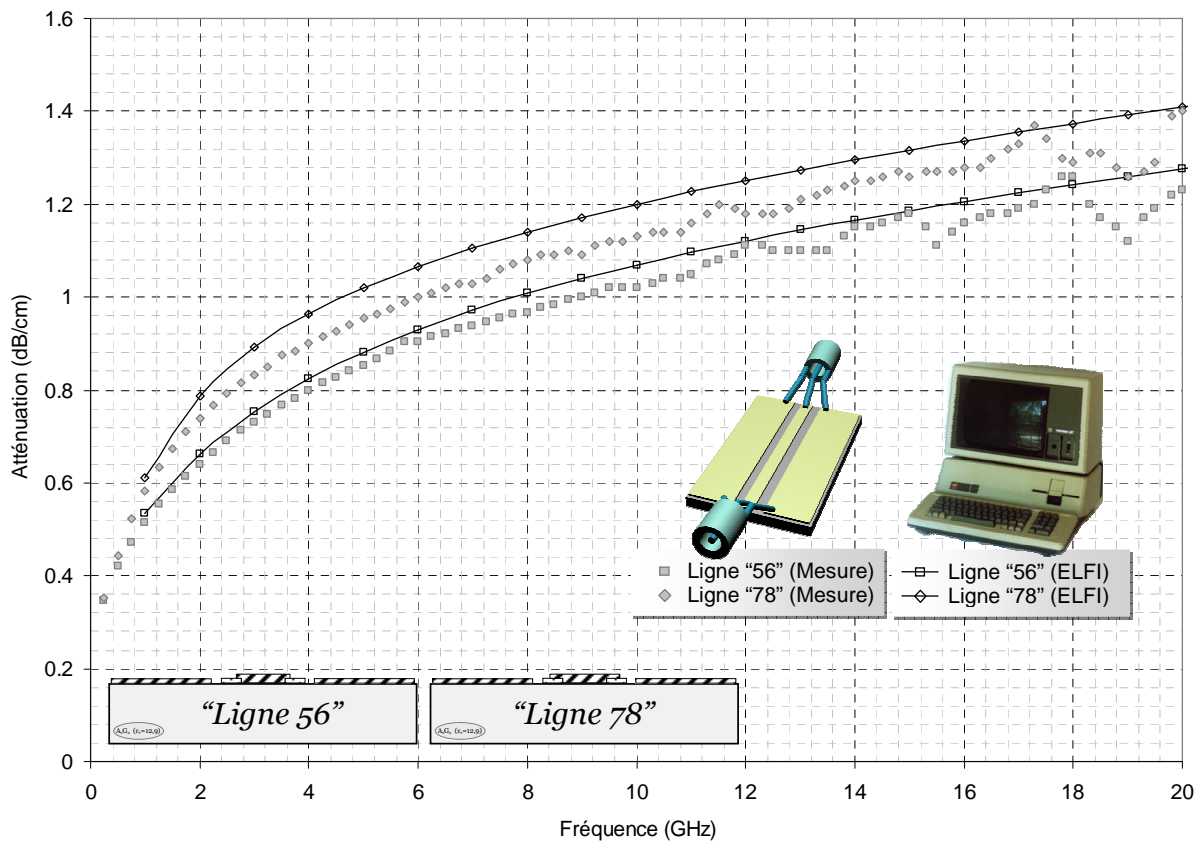


Figure 2.32 : La constante d'atténuation – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=33S/\mu m$ )

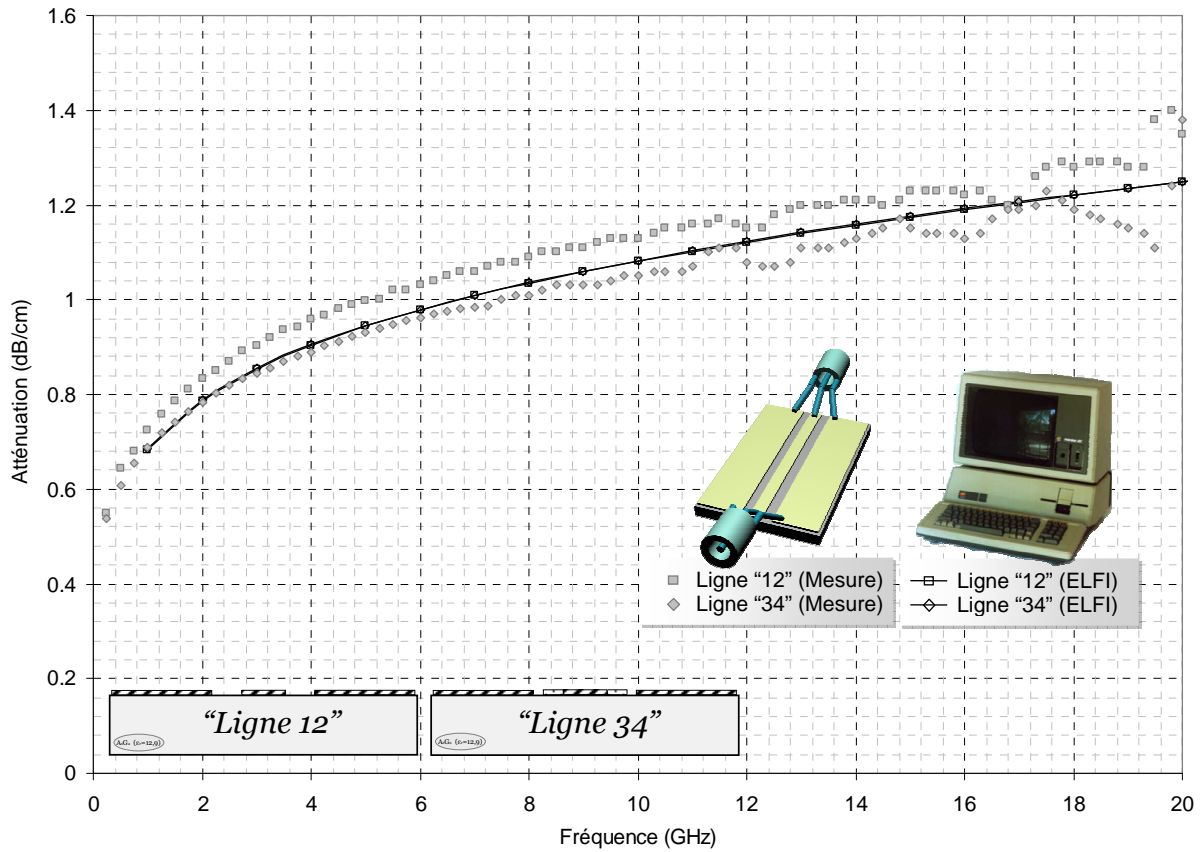


Figure 2.33 : La constante d'atténuation – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=41S/\mu m$ )

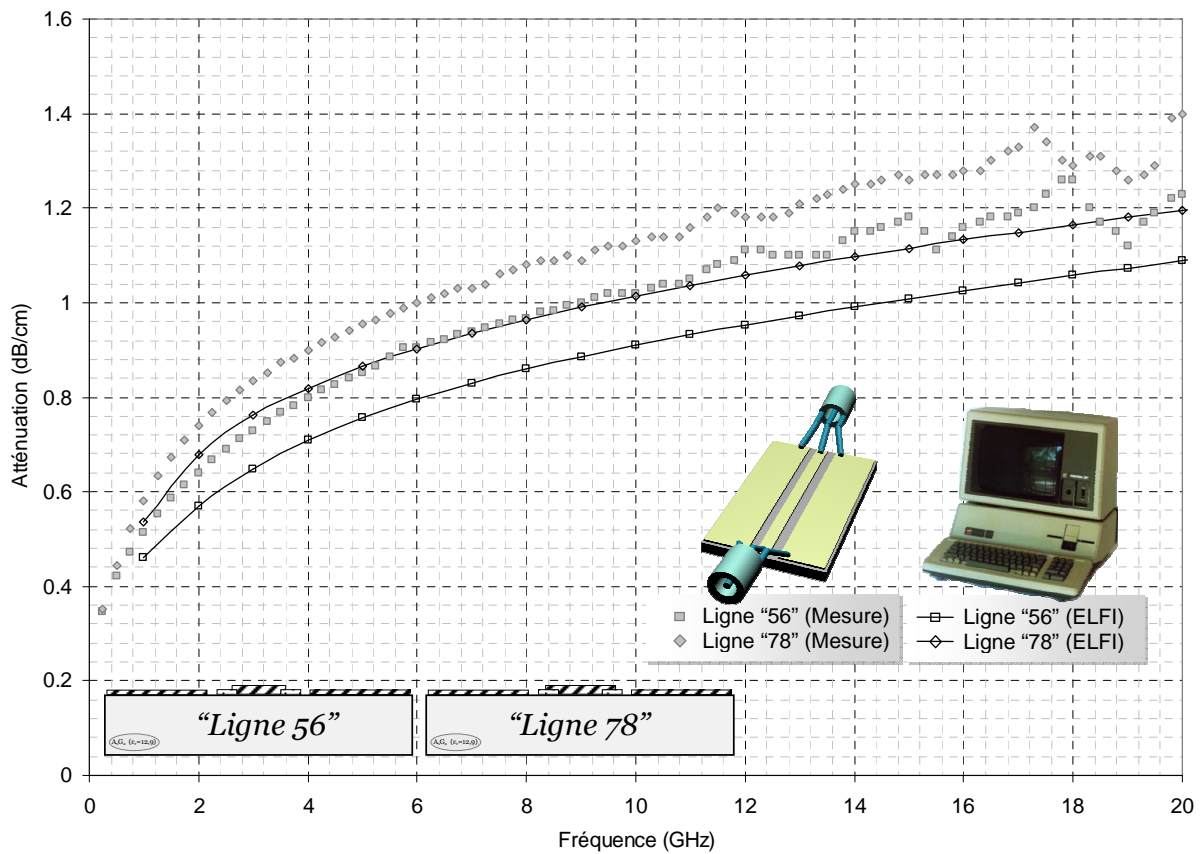


Figure 2.34 : La constante d'atténuation – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=41S/\mu m$ )



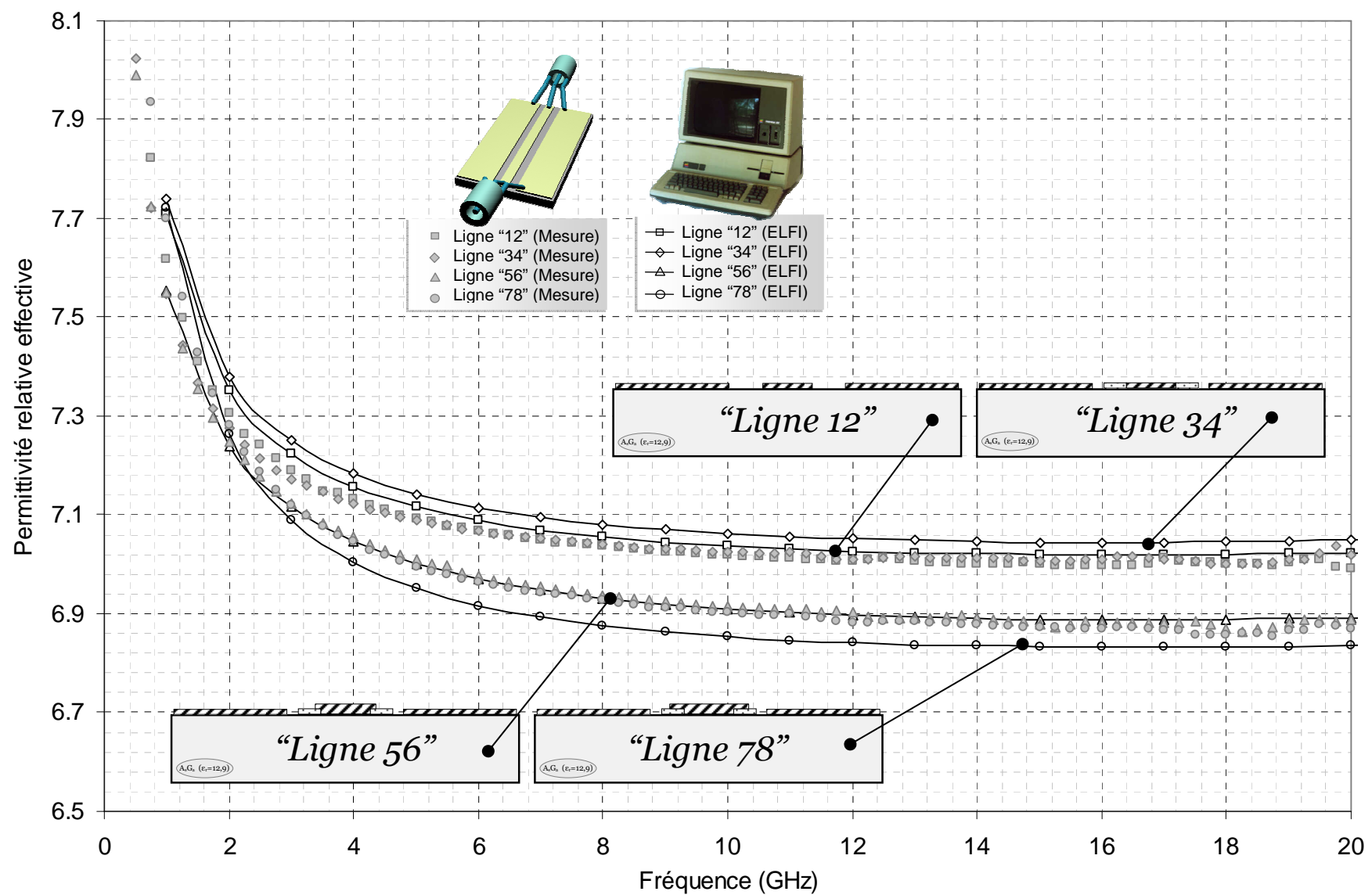


Figure 2.35 : Permittivité relative effective – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=33S/cm$ )

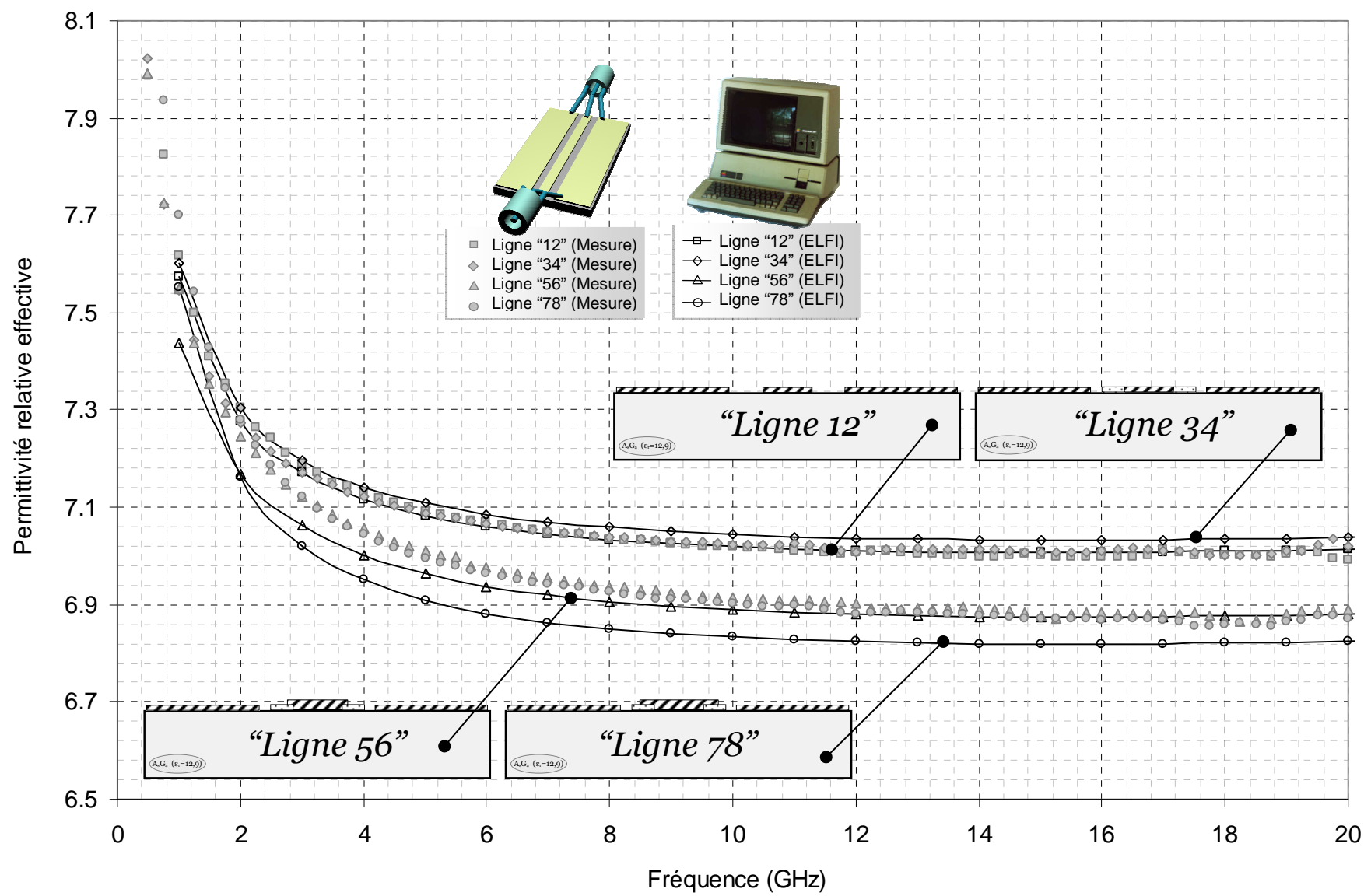


Figure 2.36 : Permittivité relative effective – confrontation mesure/ELFI ( $\sigma_{ELFI}=41S/cm$ )

L'ensemble de ces résultats montre qu'il est possible de prédire la constante de propagation complexe avec une excellente précision. Cela signifie aussi que notre code de calcul est capable de réagir à une très faible modification tant du point de vue de la nature physique d'un sous domaine que de celui de ses dimensions. Notons à ce titre que les sous domaines dont il est question, ici, ont une surface de  $25\mu\text{m} \times 0,6\mu\text{m}$  pour celui rempli de silice et  $10\mu\text{m} \times 0,6\mu\text{m}$  pour le domaine métallique. Cela correspond respectivement à environ  $1/200000$  et  $1/500000$  de la surface totale de la section droite simulée.

## 2. Capacité du code à fournir un schéma électrique équivalent à des lignes de transmission couplées

Dans cette rubrique, nous proposons un tout autre moyen pour valider les performances de notre code au travers d'une application liée aux lignes de transmission symétriques couplées. Cette validation ne s'appuie, ici, que sur la comparaison avec des développements théoriques et les quelques résultats "remarquables" issus de ces développements. Pour vérifier, grâce aux éléments finis, ces relations remarquables, il faut auparavant s'assurer que la représentation d'un système de conducteurs couplés par un schéma électrique équivalent figure 2.37 est bien viable. Ainsi, pour être certain de ce fait, nous avons opté pour un système multiconducteur, symétrique, enrobé dans un matériau diélectrique à pertes faibles, infini dans la direction  $z$ , le tout entouré par un boîtier métallique parfaitement conducteur. Même si les conducteurs possèdent une conductivité de valeur finie (celle du cuivre), la nature des modes à fréquence de coupure nulle susceptibles de se propager nous autorise à utiliser une représentation du type R, L, C, G,

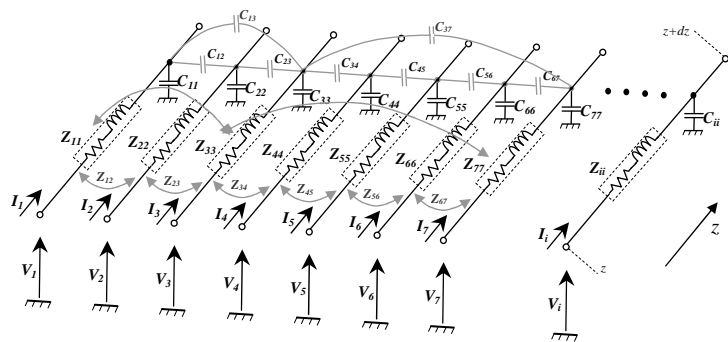


Figure 2.37 : Schéma électrique équivalent général de structures multiconducteurs quasi-TEM : la cellule élémentaire

Ce n'est que dans ce contexte d'analogie entre une structure électromagnétique et sa représentation fiable par un schéma électrique équivalent que nous sommes assurés de tester les performances "pures" de notre code.

Si le cas de deux lignes de transmission couplées est, et a été, largement commenté dans la littérature, la configuration à trois lignes couplées développée par V.K. Tripathi en 1977 [7] est peut être moins connue. Ceci constitue donc notre point de départ dans l'élaboration de

notre stratégie. Comme il s'agit d'un nombre impair de lignes, nous nous sommes aussi intéressé au cas de quatre lignes en mutuelle interaction. A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'équivalent aux travaux de Tripathi pour 4 lignes. Nous avons donc effectué tous les calculs relatifs à ces 4 lignes couplées. Toutefois, en préambule à l'étude de quatre lignes en interaction, nous remémorons l'analyse menant aux résultats fondamentaux relatifs à trois lignes couplées.

## 2.1 Etude sommaire d'un système symétrique de trois lignes en mutuelle interaction à partir de son schéma électrique équivalent :

### Etablissement du lien avec les grandeurs issues des éléments finis

#### 2.1.1 Ecriture des équations des lignes couplées et solutions correspondantes [7]

Le schéma équivalent global précédent se ramène à celui figure 2.38, pour la cellule élémentaire, dans le cas de trois lignes symétriques en interactions. Chaque accès numéroté "i" est, ici, repéré par un courant entrant  $I_i$  et une différence de potentiel  $V_i$ . A partir de la théorie des lignes de transmission, nous pouvons écrire les expressions reliant les tensions et les courants, et ce, pour une propagation qui s'effectue dans la direction z, sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \{V\} &= -[Z]\{I\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \{I\} &= -[Y]\{V\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

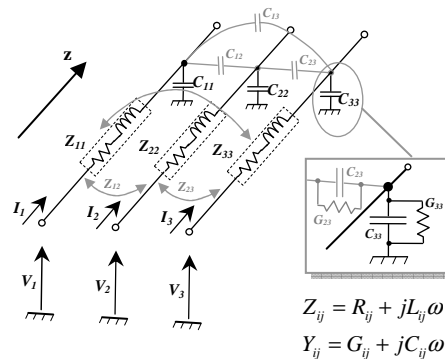


Figure 2.38 : Schéma électrique équivalent d'une cellule élémentaire à trois lignes en mutuelle interaction.

$[Z]$  et  $[Y]$  sont ici des matrices 3\*3 regroupant les caractéristiques des lignes. Bien sûr, ces matrices sont réciproques et, dans le cas présent, symétrique :

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$\{V\}$  et  $\{I\}$  sont des vecteurs colonnes dont les composantes représentent les tensions et les courants sur chaque conducteur.

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad \{I\} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Par substitution, le système d'équation (2.4) mène au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \{V\} - [Z][Y]\{V\} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \{I\} - [Y][Z]\{I\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Rappelons que chaque composante des vecteurs  $\{V\}$  et  $\{I\}$  est, pour le cas d'une onde incidente (dans la direction  $z$ ), de la forme :

$$V_i = V_i' e^{-\gamma z} \quad I_i = I_i' e^{-\gamma z} \quad (2.8)$$

où  $V_i'$  et  $I_i'$  sont des constantes dépendantes des conditions aux limites. On aboutit alors au problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} [[Z][Y] - \gamma^2 [Idt]]\{V\} &= 0 \\ [[Y][Z] - \gamma^2 [Idt]]\{I\} &= 0 \end{aligned} \quad [Idt] : \text{matrice identité} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & D \\ C & B & A \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \{V\} &= 0 \\ \left[ \begin{bmatrix} A & D & C \\ B & E & B \\ C & D & A \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \{I\} &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} A & D & C \\ B & E & B \\ C & D & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & D \\ C & B & A \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

où, bien entendu, les termes  $A, B, C, D, E$  sont issus du produit matriciel entre  $[Z]$  et  $[Y]$ .

$$\begin{aligned}
 A &= Z_{11}Y_{11} + Z_{12}Y_{12} + Z_{13}Y_{13} \\
 B &= Z_{11}Y_{12} + Z_{12}Y_{22} + Z_{13}Y_{12} \\
 C &= Z_{11}Y_{13} + Z_{12}Y_{12} + Z_{13}Y_{11} \\
 D &= Z_{12}(Y_{11} + Y_{13}) + Z_{22}Y_{12} \\
 E &= 2Z_{12}Y_{12} + Z_{22}Y_{22}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

La résolution de ce système est classique. Elle fournit trois valeurs propres qui sont les constantes de propagation relatives aux trois modes à fréquences de coupure nulle que l'on notera  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ . Ils sont, en général, dénommés "modes normaux" et leurs constantes de propagation s'expriment ici comme :

$$\begin{aligned}
 \gamma_a^2 &= \frac{A+C+E}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A+C-E)^2 + 8DB} \\
 \gamma_b^2 &= A-C \\
 \gamma_c^2 &= \frac{A+C+E}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A+C-E)^2 + 8DB}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Une fois ces valeurs propres déterminées, nous pouvons calculer puis exprimer les vecteurs propres associés. Ainsi nous représentons sous la forme matricielle ci-dessous, les vecteurs propres solutions de l'équation en tension et en courant:

$$[V] = \begin{matrix} & \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & 0 & -P_{Vc} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.13}$$

$$[I] = \begin{matrix} & \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & 0 & -P_{Ic} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.14}$$

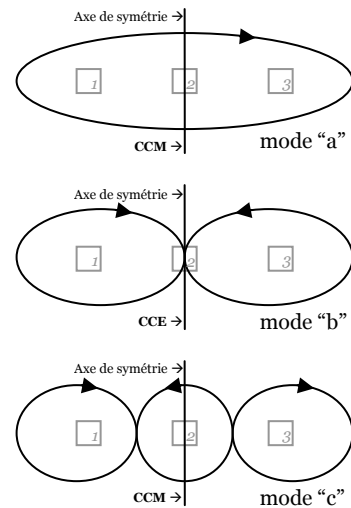


Figure 2.39 : Représentation schématique des lignes de champ magnétique transverse selon le mode de propagation

L'arrangement des vecteurs propres au sein de cette représentation matricielle n'est pas quelconque. En effet, nous disposons toujours le mode "a" en colonne 1, le mode "b" en colonne 2, et cetera. Ces modes auxquels nous attribuons les indices "a", "b", "c", ..., (car il faut bien les identifier) correspondent à une empreinte électromagnétique bien particulière. La figure 2.39 représente schématiquement les lignes de champs magnétiques transverses (plus simples à représenter que les lignes de

champs électriques) pour les trois modes propres, solutions d'une structure à trois conducteurs, le quatrième étant le conducteur de référence. Comme nous pouvons le voir, nous affectons au mode "a" la configuration magnétique transverse possédant un seul "sens de rotation" dans tout le plan de section droite. Cela signifie que pour ce mode, les courants présents dans les trois conducteurs se propagent en phase. C'est pourquoi, le vecteur propre associé (colonne 1 dans les matrices en tension ou en courant) est constitué de composantes qui possèdent toutes le même signe. Ceci constitue notre convention. Elle consiste en une classification logique de ces différents modes. Quel que soit le problème traité, le nombre de conducteurs de la structure de propagation, que la démarche soit analytique ou numérique, nous utiliserons cette convention afin de faciliter les futures comparaisons. Cette précision étant faite, observons de plus près les données contenues dans ces matrices. Notre structure étant symétrique, l'axe de symétrie électromagnétique est superposé à l'axe de symétrie géométrique. Dans notre exemple à trois conducteurs, cet axe de symétrie coupe le conducteur central. C'est pourquoi, pour le mode "b" (colonne 2), aucun potentiel ni courant n'existe sur conducteur n°2. En effet, pour ce mode l'axe de symétrie électromagnétique est un CCE (voir figure 2.39). Quant aux grandeurs  $P_{Va}$ ,  $P_{Vc}$ ,  $P_{Ia}$  et  $P_{Ic}$ , elles représentent l'amplitude du potentiel et du courant existant sur le conducteur central relativement à celui existant sur les conducteurs extérieurs. Ces grandeurs  $P_{Va}$ ,  $P_{Vc}$ ,  $P_{Ia}$  et  $P_{Ic}$  peuvent aussi être considérées comme des pondérations. Leurs expressions, issues de nos calculs, sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_{Va} &= \frac{-A - C + E + \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2B} & P_{Ia} &= \frac{-A - C + E + \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2D} \\
 P_{Vc} &= \frac{A + C - E + \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2B} & P_{Ic} &= \frac{A + C - E + \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2D}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

A ce stade, l'étude entreprise par V.K. Tripathi est complète. Toutefois, quelques manipulations supplémentaires fournissent un résultat remarquable, à savoir :

$$P_{Va}P_{Ic} = 2 \quad \text{et} \quad P_{Vc}P_{Ia} = 2 \tag{2.16}$$

Cette relation sera d'une importance capitale dans l'évaluation des performances de notre code car elle ne s'appuie sur aucune restriction majeure. Les produits croisés des pondérations "tension (mode a) \* courant (mode c)" et vice-versa traduisent donc le comportement typique en terme de lignes de transmission couplées, de n'importe quel

système de trois lignes en interactions mutuelles dans une configuration symétrique. Ce point sera bien entendu exploité par la suite.

### 2.1.2 Etablissement du lien entre les éléments finis et la formulation analytique

Compte tenu des préoccupations énoncées au début de ce paragraphe, nous allons appliquer les éléments d'arêtes à la structure figure 2.40. Le plan de section droite est constitué de trois connexions métalliques identiques de conductivité de valeur finie  $\sigma$ , de largeur  $W=0,8\mu\text{m}$  et de hauteur  $T=1\mu\text{m}$ . L'ensemble baigne de part et d'autre dans une couche de silice de  $1\mu\text{m}$  d'épaisseur. L'espace inter conducteur de hauteur  $T$  et de largeur  $S$  est rempli d'un matériau de permittivité relative  $\epsilon_{rLK}$ .

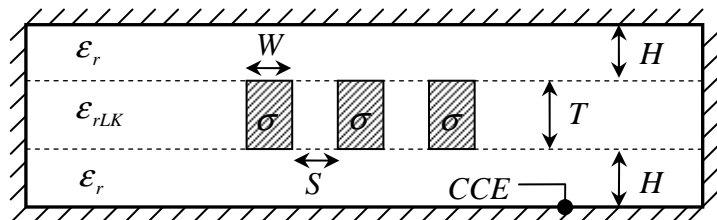


Figure 2.40 : Structures de test

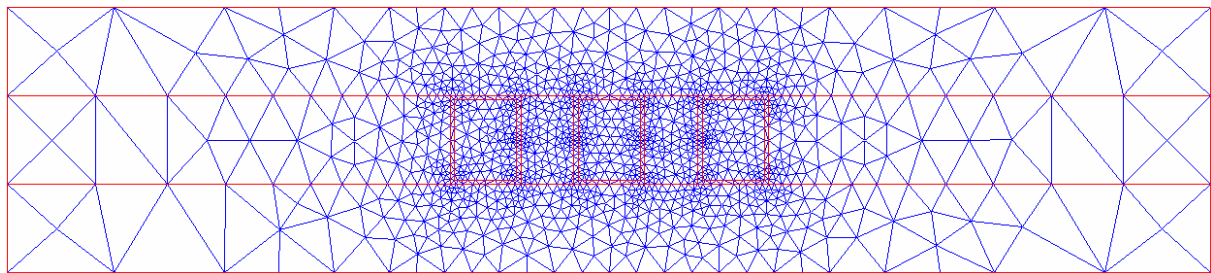
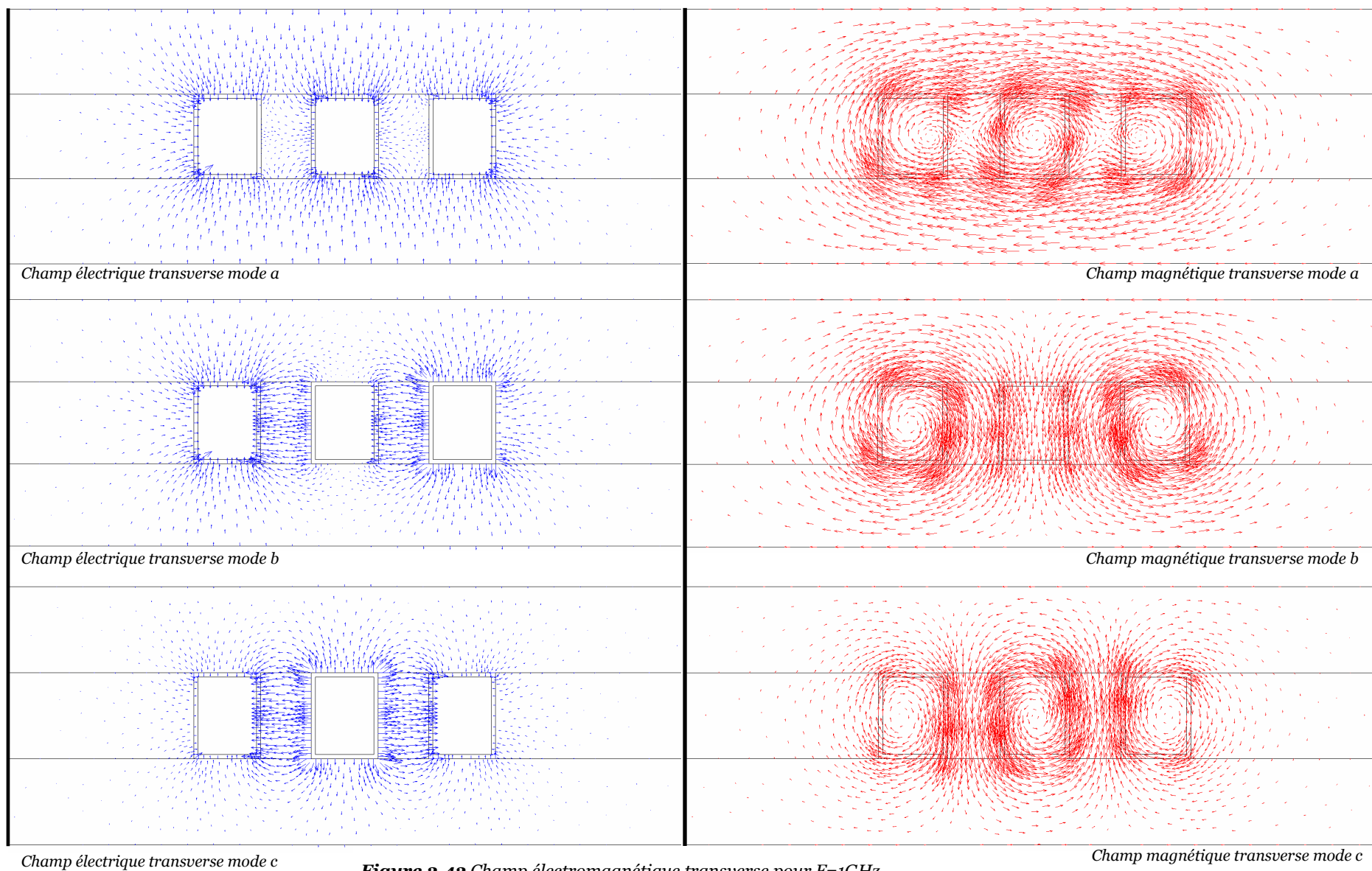


Figure 2.41 : Exemple de maillage pour  $S=0,6\mu\text{m}$

Il est alors possible de définir les vecteurs propres associés à chaque mode de propagation et par voie de conséquence les champs électriques et magnétiques dans tout le plan de section droite. A titre d'exemple, nous proposons, figure 2.42, la configuration des champs transverses pour la fréquence 1GHz. C'est à ce niveau que nous construisons la passerelle entre les deux approches ; la première purement numérique et la seconde exclusivement analytique. En effet, en calculant la circulation des champs électriques et magnétiques sur des chemins ou des contours appropriés, nous obtenons tous les éléments nécessaires à nos vérifications. Sur, et dans chaque conducteur nous déterminons respectivement un potentiel, et un courant, et ce, pour chaque mode.





**Figure 2.42** Champ électromagnétique transverse pour  $F=1\text{GHz}$

Après normalisation, il faut s'assurer :

✓ d'une part, que les vecteurs propres possèdent l'allure suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & 0 & -P_{Vc} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & (1) \\
 & (2) \\
 & (3)
 \end{array} \\
 V_{a,b,c}^{1,2,3} =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & 0 & -P_{Ic} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & (1) \\
 & (2) \\
 & (3)
 \end{array} \\
 I_{a,b,c}^{1,2,3} =
 \end{array}
 \quad
 (2.17)$$

✓ et d'autre part, que la relation remarquable définie auparavant est bien vérifiée, à savoir :

$$P_{Va} P_{Ic} = 2 \quad \text{et} \quad P_{Vc} P_{Ia} = 2 \quad (2.18)$$

Avant de fournir quelques résultats, une brève mise au point s'impose. Notre vérification s'appuie uniquement sur la comparaison entre vecteurs propres déterminés analytiquement et numériquement. Ainsi, pour étayer nos propos, nous proposons d'apprécier le degré de précision avec lequel nous évaluons les valeurs 0, 1 et -1 dans les différents triplets 1/0/-1, 1/P<sub>Va</sub>/1, 1/P<sub>Vc</sub>/1 et 1/0/-1, 1/P<sub>Ia</sub>/1, 1/P<sub>Ic</sub>/1 constituant l'ossature de notre vecteur propre "tension" et "courant" respectivement. Cette phase de comparaison est entreprise pour deux valeurs de fréquences, à savoir 1GHz et 25 GHz. Nous proposons, dans un premier temps, les résultats relatifs à la matrice "tension" [V] regroupant les vecteurs modaux {V}<sub>a,b,c</sub> :

analytique :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & 0 & -P_{Vc} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & (1) \\
 & (2) \\
 & (3)
 \end{array} \\
 [V] =
 \end{array}
 \quad
 (2.19)$$

numérique :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & -0.000070 - 0.000048i & -P_{Vc} \\ 1.000008 - 0.000017i & -0.999918 + 0.000046i & 1.000207 + 0.000163i \end{bmatrix} & (1) \\
 & (2) \\
 & (3)
 \end{array} \\
 [V]_{1GHz} =
 \end{array}
 \quad
 (2.20)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & -0.000122 - 0.000128i & -P_{Vc} \\ 0.999988 - 0.000027i & -0.999867 + 0.000064i & 1.000378 + 0.000547i \end{bmatrix} & (1) \\
 & (2) \\
 & (3)
 \end{array} \\
 [V]_{25GHz} =
 \end{array}
 \quad
 (2.21)$$

puis la matrice “courant”  $[I]$  construite à partir des vecteurs modaux  $\{I\}_{a,b,c}$ :

analytique :

$$[I] = \begin{matrix} & \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & 0 & -P_{Ic} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.22)$$

numérique :

$$[I]_{1GHz} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & -0.000063 - 0.000043i & -P_{Ic} \\ 1.000066 - 0.000018i & -0.999940 + 0.000063i & 1.000188 + 0.000131i \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.23)$$

$$[I]_{25GHz} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (a) & (b) & (c) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & -0.000058 - 0.000091i & -P_{Ic} \\ 1.000077 - 0.000129i & -0.999790 + 0.000306i & 1.000169 + 0.000092i \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.24)$$

Comme nous pouvons le constater, la valeur “1” est obtenue en moyenne à  $10^{-4}$  près, tout comme le “0” pour ce qui concerne les parties réelles. Quant aux parties imaginaires, elles sont toujours très faibles car inférieures à  $10^{-5}$ .

Dans les résultats précédents, consignés sous forme matricielle, nous avons volontairement occulté les valeurs numériques des pondérations puisque celles-ci n’ont aucun contenu informatif si ce n’est la valeur elle-même. Pour s’assurer que ces pondérations possèdent des valeurs fiables, nous avons vérifié que les produits croisés valent “2” comme le suggère notre étude analytique. Ceci est effectué aux fréquences 1Ghz et 25Ghz dans le tableau suivant.

Fréquence	$P_{Va}$	x	$P_{Ic}$	=	résultat numérique	résultat attendu
	$P_{Vc}$	x	$P_{Ia}$			
1GHz	1.191068 - 0.008789i	x	1.680122 + 0.012481i	=	2,001250 - 0,000099i	2
	1.680193 + 0.035375i	x	1.190698 - 0.024980i	=	2,001487 - 0,000150i	2
25GHz	1.121421 - 0.070600i	x	1.777394 + 0.111634i	=	2,001089 + 0,000295i	2
	1.948316 + 0.360349i	x	0.993424 - 0.183658i	=	2,001686 - 0,000155i	2

Tableaux 2.4 : Résultats numériques des produits des pondérations (cas à trois lignes couplées)

Quelle que soit la valeur de la fréquence utilisée pour effectuer cette vérification, les produits croisés des pondérations ont toujours été vérifiés à mieux que  $10^{-3}$  pour la partie réelle alors que la partie imaginaire de ces produits possède une valeur inférieure à  $10^{-4}$ .

## 2.2 Etude de quatre lignes en interaction mutuelle

Fort de cette première phase de vérification relative à trois conducteurs couplés, nous pouvons désormais aborder la description de nos travaux portant sur quatre lignes en interactions mutuelles.

### 2.2.1 Equations des lignes couplées et solutions correspondantes

Cette étude est en tout point similaire à la précédente. Toutefois, l'ajout d'un quatrième conducteur alourdit considérablement les calculs. Nous ne fournissons donc, dans cette rubrique, que les formulations analytiques essentielles à l'obtention de relations "remarquables". Ces dernières reposent sur la résolution du système de quatre conducteurs dont le schéma électrique équivalent est représenté figure 2.43.

Tout comme précédemment, les tensions aux bornes de chaque accès sont solutions de l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{V\} - [Z][Y]\{V\} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{I\} - [Y][Z]\{I\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

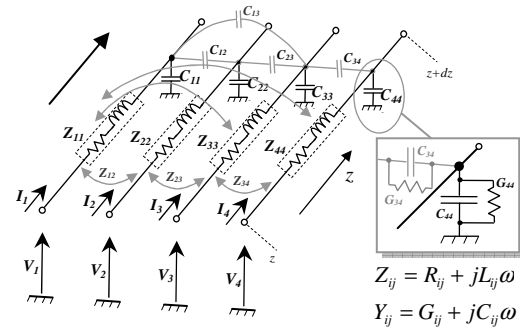


Figure 2.43 : Schéma électrique équivalent de quatre lignes en mutuelles interactions

Dans ces expressions les grandeurs  $\{V\}$  et  $\{I\}$  représentent un vecteur colonne de dimension 4. Quant aux produits de matrice  $[Z][Y]$ , ils possèdent l'allure suivante dans le cas d'un système symétrique de quatre conducteurs.

$$[Z][Y] = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ H & G & F & E \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Y][Z] = [Z][Y]^T = \begin{bmatrix} A & E & H & D \\ B & E & G & C \\ C & G & E & B \\ D & E & H & A \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Les variables  $A, B, C, D, E, F, G$  et  $H$  résultent de la somme des produits, lignes à colonnes, des matrices impédances et admittances, toutes deux de dimension 4.

$$\begin{aligned}
 A &= Z_{11}Y_{11} + Z_{12}Y_{12} + Z_{13}Y_{13} + Z_{14}Y_{14} & E &= Z_{12}Y_{11} + Z_{22}Y_{12} + Z_{23}Y_{13} + Z_{13}Y_{14} \\
 B &= Z_{11}Y_{12} + Z_{12}Y_{22} + Z_{13}Y_{23} + Z_{14}Y_{13} & F &= Z_{12}Y_{12} + Z_{22}Y_{22} + Z_{23}Y_{23} + Z_{13}Y_{13} \\
 C &= Z_{11}Y_{13} + Z_{12}Y_{23} + Z_{13}Y_{22} + Z_{14}Y_{12} & G &= Z_{12}Y_{13} + Z_{22}Y_{23} + Z_{23}Y_{22} + Z_{13}Y_{12} \\
 D &= Z_{11}Y_{14} + Z_{12}Y_{13} + Z_{13}Y_{12} + Z_{14}Y_{11} & H &= Z_{12}Y_{14} + Z_{22}Y_{13} + Z_{23}Y_{12} + Z_{13}Y_{11}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Rappelons que les “ $Z_{ii}$ ” sont affectées aux composantes séries de notre cellule élémentaire figure 2.43, alors que les “ $Y_{ii}$ ” correspondent aux composantes parallèles capacitatives et résistives. Bien évidemment, toutes les interactions mutuelles inductives et capacitatives sont décrites respectivement par les grandeurs “ $Z_{ij}$ ” et “ $Y_{ij}$ ”.

Les développements mathématiques qui suivent cette phase d'établissement des équations sont d'une lourdeur extrême. Ainsi, avant de ne procéder qu'à l'écriture de quelques relations essentielles, nous remémorons brièvement les règles adoptées pour retranscrire les solutions de ce problème. Nous adoptons la même nomenclature que celle déjà utilisée pour la configuration à trois lignes couplées. De ce fait, les quatre valeurs propres que nous avons trouvées sont décrites par les variables  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$  et pour la quatrième, par  $\gamma_d$ . Elles représentent chacune la constante de propagation du mode  $a, b, c, d$  susceptible de se propager, et ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 \gamma_a &= \frac{1}{2} \left( A + D + F + G + \sqrt{(A + D - F - G)^2 + 4(B + C)(E + H)} \right) \\
 \gamma_b &= \frac{1}{2} \left( A - D + F - G + \sqrt{(A - D - F + G)^2 + 4(B - C)(E - H)} \right) \\
 \gamma_c &= \frac{1}{2} \left( A + D + F + G - \sqrt{(A + D - F - G)^2 + 4(B + C)(E + H)} \right) \\
 \gamma_d &= \frac{1}{2} \left( A - D + F - G - \sqrt{(A - D - F + G)^2 + 4(B - C)(E - H)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

A chacune de ses valeurs propres, repérées par les indice  $a, b, c, d$ , nous adjoignons un vecteur propre contenant les pondérations  $P_{Va,b,c,d}$  ou  $P_{Ia,b,c,d}$  suivant que l'on s'intéresse aux tensions ou aux courants respectivement. Les calculs que nous avons effectués se résument sous la forme générale d'une matrice de dimension  $4 \times 4$  où chaque colonne est affectée à un mode (a, b, c, d) alors que chaque ligne correspond au numéro d'un conducteur.

$$\begin{aligned}
 & \text{mode} \rightarrow (a) \quad (b) \quad (c) \quad (d) \\
 [V] = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & P_{Vb} & -P_{Vc} & -P_{Vd} \\ P_{Va} & -P_{Vb} & -P_{Vc} & P_{Vd} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (2) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (3) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (4) \end{matrix} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

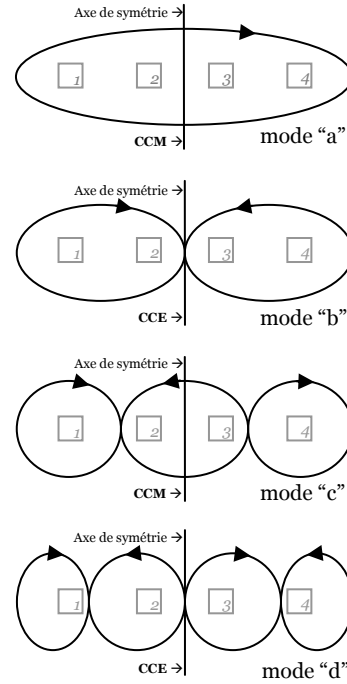
$$\begin{aligned}
 & \text{mode} \rightarrow (a) \quad (b) \quad (c) \quad (d) \\
 [I] = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & P_{Ib} & -P_{Ic} & -P_{Id} \\ P_{Ia} & -P_{Ib} & -P_{Ic} & P_{Id} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (2) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (3) \\ \downarrow \text{conducteur} \rightarrow (4) \end{matrix} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Afin de mieux comprendre la signification des différentes informations contenues dans ces deux matrices, nous leurs associons, comme précédemment, une représentation à partir de lignes de champs transverses magnétiques des quatre modes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  (figure 2.44). Nous reconnaissons les trois premiers modes ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) déjà existant dans une configuration à trois conducteurs. Rappelons que ces calculs analytiques ne sont possibles que dans l'hypothèse d'une structure géométriquement symétrique. De ce fait, pour une structure à quatre lignes, l'axe de symétrie ne passe par aucun conducteur. C'est pourquoi, nous ne retrouvons ici aucune pondération nulle comme c'était le cas dans notre étude à trois conducteurs. Ces différentes pondérations  $P_V$  et  $P_I$  concernent, ici, les deux conducteurs intérieurs (2 et 3). Elles s'expriment sous la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned}
 P_{Va} &= \frac{-A-D+F+G+\sqrt{(A+D-F-G)^2+4(B+C)(E+H)}}{2(B+C)} & P_{Ia} &= \frac{-A-D+F+G+\sqrt{(A+D-F-G)^2+4(B+C)(E+H)}}{2(E+H)} \\
 P_{Vb} &= \frac{-A+D+F-G+\sqrt{(A-D-F+G)^2+4(B-C)(E-H)}}{2(B-C)} & P_{Ib} &= \frac{-A+D+F-G+\sqrt{(A-D-F+G)^2+4(B-C)(E-H)}}{2(E-H)} \\
 P_{Vc} &= \frac{A+D-F-G+\sqrt{(A+D-F-G)^2+4(B+C)(E+H)}}{2(B+C)} & P_{Ic} &= \frac{A+D-F-G+\sqrt{(A+D-F-G)^2+4(B+C)(E+H)}}{2(E+H)} \\
 P_{Vd} &= \frac{A-D-F+G+\sqrt{(A-D-F+G)^2+4(B-C)(E-H)}}{2(B-C)} & P_{Id} &= \frac{A-D-F+G+\sqrt{(A-D-F+G)^2+4(B-C)(E-H)}}{2(E-H)}
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

De ces dernières expressions, nous tirons :

$$\begin{aligned}
 P_{Va}P_{Ic} &= 1 & \text{et} & & P_{Vc}P_{Ia} &= 1 \\
 P_{Vb}P_{Id} &= 1 & \text{et} & & P_{Vd}P_{Ib} &= 1
 \end{aligned} \quad (2.32)$$



**Figure 2.44** : Représentation schématique des lignes de champs magnétiques transverses selon le mode de propagation

Pour mémoire, les résultats remarquables obtenus pour le cas à trois lignes étaient :

$$P_{Va}P_{Vc} = 2 \quad \text{et} \quad P_{Vc}P_{Ia} = 2 \quad (2.33)$$

Nous voyons que les expressions permettant d'obtenir des valeurs remarquables dans notre cas à quatre lignes couplées sont très similaires à celles obtenues pour trois lignes. Il semble en effet que ces valeurs soient obtenues à chaque fois que l'on compare, entre elles, les pondérations issues des modes de même parité. Pour autant, en aucune manière nous ne pouvons conclure à une généralisation de ce constat.

L'ajout d'un quatrième conducteur démultiplie les combinaisons entre pondérations. Ceci a pour conséquence, ici, l'apparition d'autres relations remarquables. Elles sont toutefois moins capitales pour notre phase de validation car elles découlent des relations établies précédemment (2.32).

$$\checkmark \quad P_{Va}P_{Vc} = \frac{E-H}{B-C} \quad \text{et} \quad P_{Ia}P_{Ic} = \frac{B-C}{E-H} \quad \text{d'où} \quad P_{Va}P_{Vc}P_{Ia}P_{Ic} = 1 \quad (2.34)$$

$$\checkmark \quad P_{Vb}P_{Vd} = \frac{E+H}{B+C} \quad \text{et} \quad P_{Ib}P_{Id} = \frac{B+C}{E+H} \quad \text{d'où} \quad P_{Vb}P_{Vd}P_{Ib}P_{Id} = 1 \quad (2.35)$$

$$\checkmark \quad P_{Va}P_{Vb}P_{Vc}P_{Vd} = \frac{E^2-H^2}{B^2-C^2} \quad \text{et} \quad P_{Ia}P_{Ib}P_{Ic}P_{Id} = \frac{B^2-C^2}{E^2-H^2} \quad \text{d'où} \quad P_{Va}P_{Vb}P_{Vc}P_{Vd}P_{Ia}P_{Ib}P_{Ic}P_{Id} = 1 \quad (2.36)$$

A notre connaissance, aucun de ces résultats n'est consigné dans la littérature scientifique.

### 2.2.2 Calcul par éléments finis d'une structure à quatre conducteurs couplés

Comme nous l'avons signalé auparavant, nous allons nous appuyer sur ces travaux pour tester les aptitudes de notre code à vérifier ces résultats dans le cas d'une structure à quatre conducteurs de conductivité de valeur finie figure 2.45. Par analogie avec la structure précédente, nos quatre conducteurs rectangulaires à pertes sont enrobés dans de la silice, le tout blindé par un boîtier parfait. Les conditions dans lesquelles cette étude est effectuée sont analogues au cas précédemment traité. Cela signifie notamment que

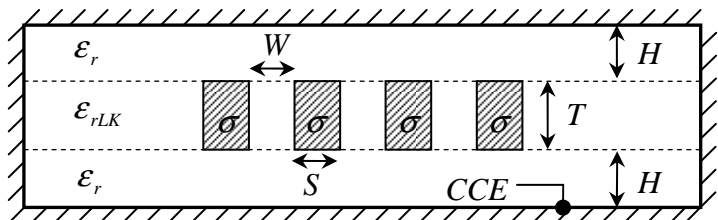


Figure 2.45 : Structure de test

nous avons maillé (figure 2.46) l'intégralité du plan de section droite. De ce fait, nous n'utilisons pas les propriétés de symétrie propre à cet arrangement de quatre lignes, et ce,

volontairement. En effet, nous désirons par ce moyen vérifier l'existence d'une éventuelle dissymétrie au niveau des vecteurs propres ; dissymétrie introduite par l'évaluation purement numérique du problème.

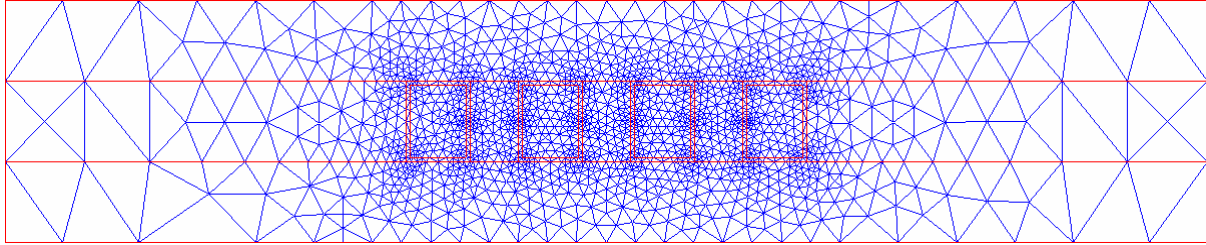


Figure 2.46 : Exemple de maillage pour  $S=0,6\mu\text{m}$

La simulation de cette structure, sous ELFI, fournit les quatre solutions électromagnétiques. Parmi les fonctions de “post traitement” que propose ELFI, l'une d'entre elle permet de construire des chemins d'intégrations. Ainsi, nous pouvons calculer la circulation des champs électriques et magnétiques sur ces différents chemins afin d'obtenir, pour les quatre solutions (modes), les potentiels et les courants sur les quatre conducteurs. Une normalisation de ces résultats est ensuite nécessaire pour qu'ils puissent être identifiables aux vecteurs propres analytiques. Nous présentons, ci-dessous, les vecteurs normalisés à partir desquels nous pouvons estimer la précision avec laquelle les valeurs “+1” et “-1” sont calculées. Ainsi, pour ce qui concerne le vecteur “tension”, nous avons d'un point de vue analytique et numérique les arrangements suivant ; et ce, aux fréquences 1 et 25GHz.

$$\begin{array}{l}
 \text{analytique :} \\
 [V] = \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} (a) \\ 1 \\ P_{Va} \\ P_{Va} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} (b) \\ 1 \\ P_{Vb} \\ -P_{Vb} \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} (c) \\ 1 \\ -P_{Vc} \\ -P_{Vc} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} (d) \\ 1 \\ -P_{Vd} \\ P_{Vd} \\ -1 \end{array}
 \end{array} \begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4)
 \end{array}
 \end{array} \quad (2.37)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{numérique:} \\
 [V]_{1\text{GHz}} = \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} (a) \\ 1 \\ P_{Va} \\ P_{Va} \\ 1,000358 + 0,000057i \end{array} & \begin{array}{c} (b) \\ 1 \\ P_{Vb} \\ -P_{Vb} \\ -1,000101 - 0,000014i \end{array} & \begin{array}{c} (c) \\ 1 \\ -P_{Vc} \\ -P_{Vc} \\ 0,999675 - 0,000107i \end{array} & \begin{array}{c} (d) \\ 1 \\ -P_{Vd} \\ P_{Vd} \\ -0,999956 + 0,000015i \end{array}
 \end{array} \begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4)
 \end{array}
 \end{array} \quad (2.38)$$



$$\begin{aligned}
 [V]_{25\text{Ghz}} &= \begin{bmatrix} (a) & (b) & (c) & (d) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Va} & P_{Vb} & -P_{Vc} & -P_{Vd} \\ P_{Va} & -P_{Vb} & -P_{Vc} & P_{Vd} \\ 1,000641 + 0,000485i & -1,000051 + 0,000182i & 0,999338 - 0,000758i & -0,999805 - 0,000035i \end{bmatrix} \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad (3) \\
 & \quad \quad \quad (4) \\
 & \quad \quad \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

La comparaison sur le vecteur “courant” s’effectue de la même manière et aux mêmes fréquences.

$$\begin{aligned}
 \text{analytique :} \quad [I] &= \begin{bmatrix} (a) & (b) & (c) & (d) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & P_{Ib} & -P_{Ic} & -P_{Id} \\ P_{Ia} & -P_{Ib} & -P_{Ic} & P_{Id} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad (3) \\
 & \quad \quad \quad (4) \\
 & \quad \quad \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

numérique:

$$\begin{aligned}
 [I]_{1\text{Ghz}} &= \begin{bmatrix} (a) & (b) & (c) & (d) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & P_{Ib} & -P_{Ic} & -P_{Id} \\ P_{Ia} & -P_{Ib} & -P_{Ic} & P_{Id} \\ 1,000423 + 0,000067i & -1,000185 - 0,000019i & 0,999791 - 0,000103i & -1,000088 + 0,000010i \end{bmatrix} \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad (3) \\
 & \quad \quad \quad (4) \\
 & \quad \quad \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [I]_{25\text{Ghz}} &= \begin{bmatrix} (a) & (b) & (c) & (d) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_{Ia} & P_{Ib} & -P_{Ic} & -P_{Id} \\ P_{Ia} & -P_{Ib} & -P_{Ic} & P_{Id} \\ 1,000803 + 0,000454i & -1,000221 + 0,000191i & 0,999518 - 0,000753i & -1,000012 - 0,000048i \end{bmatrix} \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad (3) \\
 & \quad \quad \quad (4) \\
 & \quad \quad \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Nous constatons qu’un degré de précision identique est obtenu pour ces deux cas de figure comparé à celui où trois lignes sont en interactions. Ceci n’est pas surprenant car le maillage de la structure composée de quatre conducteurs s’effectue avec un taux de raffinement identique à celui choisi pour mailler la structure à trois conducteurs.

Il reste maintenant, à vérifier que les produits croisés des pondérations s’effectuent selon les prédictions analytiques référencées en 2.32. Nous consignons, aux fréquences 1 et 25 GHz, le résultat de ces opérations dans le tableau suivant :

Fréquence	$P_{Va}$	x	$P_{Lc}$	=	résultat numérique	résultat attendu
	$P_{Vc}$	x	$P_{La}$			
	$P_{Vb}$	x	$P_{Ld}$			
	$P_{Vd}$	x	$P_{Lb}$			
1GHz	1.288062 - 0.015051i	x	0.776317 + 0.009040i	=	1.000082 - 0.000039i	1
	0.776875 + 0.021984i	x	1.286392 - 0.036436i	=	1.000167 - 0.000026i	1
	0.502485 - 0.004776i	x	1.990429 + 0.019032i	=	1.000252 + 0.000056i	1
	1.991381 + 0.040140i	x	0.502299 - 0.010084i	=	1.000673 + 0.000079i	1
25GHz	1.172196 - 0.099366i	x	0.846906 + 0.071155i	=	0.999811 - 0.000746i	1
	0.947268 + 0.191838i	x	1.014110 - 0.205705i	=	1.000096 - 0.000312i	1
	0.464655 - 0.044644i	x	2.133324 + 0.206023i	=	1.000458 + 0.000487i	1
	2.265100 + 0.490782i	x	0.422179 - 0.091134i	=	1.001005 + 0.000770i	1

Tableaux 2.5 : Résultats numériques des produits de pondérations (cas à quatre lignes couplées)

Il existe, certes, un léger désaccord mais il se traduit en moyenne par un écart relatif de un à cinq pour mille. Pour bien estimer le haut degré de performances atteint, il faut se souvenir que notre phase de validation implique le calcul le plus précis possible des constantes de propagation complexes mais il repose ensuite sur l'évaluation de la circulation des champs électriques et magnétiques transverses. Ces calculs d'intégrale le long d'un chemin ou d'un contour fermé sont effectués sur quelques dizaines de triangles choisis parmi les 2560 utilisés pour discrétiser le plan de section droite. Ceci aboutit au traitement de matrice de taille  $28672 \times 28672$  et par voie de conséquence à la mise en œuvre de calculs lourds. Malgré cela, la concordance entre les résultats numériques et ceux analytiques est excellente. Ceci valide d'une part le noyau de calcul lui-même, mais aussi les différents algorithmes de post traitement qui permettent, entre autre, d'extraire les éléments nécessaires à l'établissement de ces pondérations. Nous avons, dans cette seconde partie du chapitre 2, insisté sur le concept des pondérations, sur leur signification ainsi que sur notre convention pour les représenter de manière rigoureuse. Ceci n'est pas fortuit. En effet nous verrons dans le chapitre suivant que grâce à quelques manipulations supplémentaires, ces pondérations permettent de remonter directement au schéma électrique équivalent d'un tronçon élémentaire de lignes couplées. La précision avec laquelle ces pondérations sont calculées a nécessairement une incidence sur la fiabilité des composantes R, L, C, G de cette cellule.

**Bibliographie du chapitre 2**

- [37] Matlab and Simulink for Technical Computing v6.5  
The MathWorks, <http://www.mathworks.fr/>
- [38] L. Nuno, J.V. Balbastre, H. Castane  
*"Analysis of general lossy inhomogeneous and anisotropic waveguides by the finite-element method (FEM) using edge elements"*  
I.E.E.E. Trans on MTT, Vol 45, N° 3, pp 446-443, March 1997.
- [39] L. Valor, J. Zapata  
*"Efficient finite element analysis of waveguides with lossy inhomogeneous anisotropic materials characterized by arbitrary permittivity and permeability tensors"*  
I.E.E.E. Trans on MTT, Vol 43, N° 10, pp 2452-2459, October 1995.
- [40] J. Lee, D. Sun, Z.J. Cendes  
*"Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements"*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 39, pp 1262-1271, August 1991.
- [41] K. K. Mei, G. C Liang  
*"Electromagnetics of superconductors"*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 39, N° 9, September 1991.
- [42] N. Klein  
*"High-Frequency Application of High-Temperature Superconductor Thin Film"*  
Institute of physics publishing, reports on progress in physics, pp 1387-1425, September 2001.
- [43] V.K. Tripathi  
*"On the Analysis of Symmetrical Three-Line Microstrip Circuits "*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 25, N° 9, pp 726-729, September 1977.
- [44] S.A. Wartenberg  
*"Selected topics in RF coplanar probing"*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 51, N° 4, pp 1413-1421, April 2003.
- [45] S.A. Wartenberg  
*"RF coplanar probe basics"*  
Microwave journal (Microw. j), ISSN 0192-6217, Vol. 46, N° 3, pp 20-38, 2003.
- [46] J. Meixner  
*"The behavior of electromagnetic fields at edges"*  
I.E.E.E Transactions on Antennas and Propagation, Vol 20, N° 4, pp 442-446, July 1972.
- [47] J. S. Juntunen, T. D. Tsiboukis  
*"On the FEM treatment of wedge singularities in waveguide problems"*  
I.E.E.E Trans on MTT, Vol 48, N° 6, pp 1030-1037, June 2000.
- [48] B. Bianco, M. Parodi  
*"Determination of the propagation constant of uniform microstrip lines"*

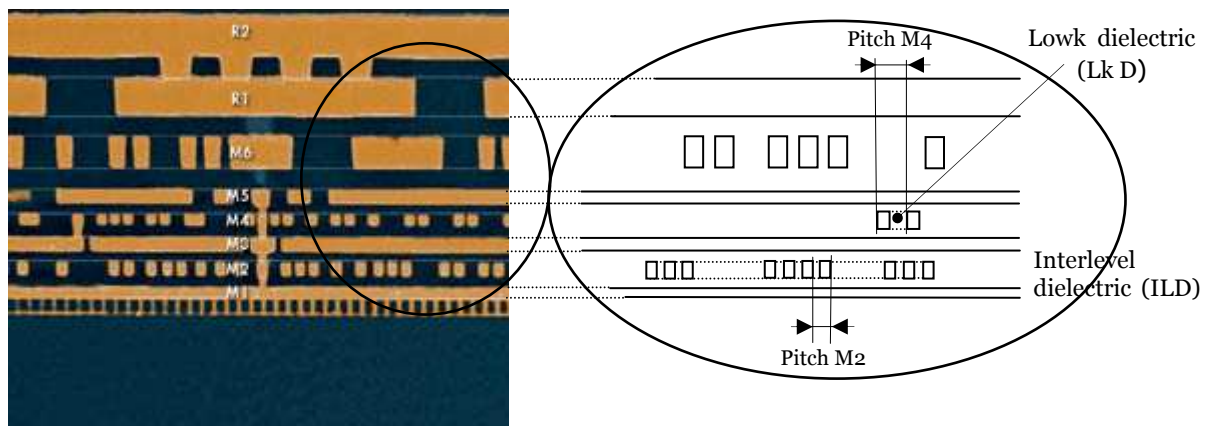
Alta Frequenza, Vol. 45, pp 107-110, February. 1976.

- [49] R. E. Collins  
“*Field theory of guided waves*”  
Mac grow-hill book company, New York, 1961.
  
- [50] R. A. Waldron  
“*Theory of guided electromagnetic waves*” (Chap. 6)  
Van Nostrand Reinhold company, ISBN 0442091672, New York, 1969.
  
- [51] C. Vassalo  
“*Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*”  
Collection Technique et Scientifique des Télécommunications (CTST), Eyrolles, 1985.
  
- [52] R. K. Hoffmann  
“*Handbook of microwave integrated circuits*”  
Antech House, ISBN 0 89006 163 7, 1987.
  
- [53] H. A. Wheeler  
“*Formulas for the Skin Effect*”  
Proceedings of the IRE, Vol 30, N° 9, pp 412- 424, September 1942.

# Chapitre 3. Schéma électrique équivalent et intégrité des signaux dans les systèmes multiconducteurs

## Introduction

Fort de toutes les vérifications opérées aux pages précédentes, nous abordons, dans ce troisième chapitre, le thème des interconnexions confectionnées à partir de cuivre. Nous focalisons particulièrement notre attention sur un système de plusieurs connexions cuivre considérées comme couplées même si ce n'est, bien évidemment, pas voulu par le concepteur du circuit numérique. Ceci implique, pour le système de connexions involontairement couplées, la recherche du schéma électrique équivalent et par voie de conséquence le calcul de toutes les composantes inductives, résistives et capacitives, mutuelles ou non, de ce schéma établi sous forme d'une cellule élémentaire. Il faut bien entendu prédire, par la suite, les temps de montée, de descente, de retard de propagation des signaux propagés dans ces connexions. A ce stade, nous ne pouvons pas oublier, non plus, un élément majeur dans le contexte des connexions couplées, et ce, même involontairement comme on peut l'imaginer ; la diaphonie. Toutes ces caractéristiques sont regroupées et connues sous le nom d'intégrité du signal. Nous les calculons par la suite, non sans rappeler succinctement, dans un premier temps, la topologie d'un circuit numérique récent et les définitions spécifiques qui accompagnent la description de sa coupe transversale. Nous exposons ensuite brièvement la problématique liée à l'accroissement récurrent de la puissance de calcul des processeurs numériques. De ce constat découle tout naturellement l'étude entreprise dans ce troisième chapitre.



**Figure 3.1** : Coupe transversale d'un circuit numérique de technologie 0,13µm

La figure 3.1 ci-dessus, illustre très bien la topologie d'un circuit numérique moderne [1]. Il est conçu dans une technologie, où le plus petit trait de gravure ou encore la longueur de grille d'un transistor n'excède pas 130 nanomètres pour cet exemple. On parle alors de "technology node 0,13µm". Nous pouvons observer, sur cette technologie dite "0,13µm", l'empilement caractéristique des niveaux métalliques et diélectriques. Dans cette succession

de couches, nous retrouvons, au niveau le plus bas, les transistors MOS dont les contacts de grille, de source et de drain sont reliés au premier niveau de métallisation ( $M_1$ ), par des plots ou des “via” en tungstène.

Nous passons ainsi au premier niveau de métallisation dénommé aussi “local level” aux niveaux intermédiaires ou “semi global level” pour aboutir aux niveaux globaux “global level”. La complexité de l’architecture du circuit impose, lors de l’étape de routage, le nombre total de niveaux de métallisations ainsi que leurs classifications, à savoir “local, semi global, global”. Bien entendu, la figure 3.1 illustre, à la fois la coupe de la section droite des conducteurs (le niveau  $M_2$  par exemple) mais aussi la coupe longitudinale d’un conducteur ( $M_3$  par exemple) puisque, pour limiter les effets de couplage, chaque niveau  $M_n$  est orienté à 90 degrés par rapport au niveau  $M_{n-1}$ . Le pas ou “pitch” est différent pour chaque catégorie d’interconnexions des niveaux locaux, semi globaux ou globaux. Il est clair que cette grandeur joue un rôle prépondérant sur la diaphonie. Il faut encore signaler que les interconnexions courtes représentent environ 80 à 90% de la longueur totale des connexions du circuit. Les 10 à 20% restants sont affectés aux niveaux supérieurs. Cela dit, sur un total de 5Km environ, la somme cumulée des connexions des niveaux intermédiaires (semi globaux) et globaux représentent encore 0,5 à 1Km. A ce stade, il ne faut pas oublier que ce sont toutes ces connexions qui posent le plus gros problème du fait de leur longueur. Ainsi, longueurs et dimensions d’interconnexions, rapport d’aspect, pas ou pitch, nombre de niveaux de métallisation, épaisseurs des couches diélectriques, permittivité “low-K” ou “ultra low-K”, temps de montée et de retard de propagation, diaphonie, consommation électrique sont autant de grandeurs qu’il faut définir pour que le circuit fonctionne au mieux. Ces grandeurs, dont la liste ci-dessus n’est pas exhaustive, sont réajustées pour chaque nouveau saut technologique. Ce rôle d’ajustement et de recadrage des performances est assuré par un groupe de travail ; l’International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS) réunissant l’Europe, l’Asie et les USA [2].

Le rôle de cette entité, indépendante, est d’identifier les pistes à explorer et les défis technologiques qu’il faut relever pour permettre la conception et le développement des circuits intégrés numériques des dix années à venir, voire plus. Il est clair que l’accent est mis, depuis peu, sur les efforts importants de modélisation que doit fournir tant la communauté scientifique des universitaires que celle des ingénieurs des grands groupes industriels.

L’ITRS insiste sur cet aspect notamment pour prédire les limites technologiques de la “roadmap” actuelle en vue d’élaborer des règles qui seront, plus tard, dédiées aux nano structures.

Les efforts préconisés par le groupe de travail de l’ITRS portent sur toute la panoplie de la conception du circuit. Ils concernent, à partir de modèles fiables :

- ✓ La prédiction du comportement électronique et quantique des matériaux diélectriques ultra minces.
- ✓ L'élaboration de modèle pour le dépôt, la croissance et l'attaque de matériaux.
- ✓ La mise en œuvre de nouveaux procédés de lithographie et de prédiction des défauts.
- ✓ L'étude des effets thermomécaniques en vue d'améliorer la fiabilité.
- ✓ Le transistor MOS ultime.
- ✓ La simulation RF des connexions entre transistors élémentaires ou blocs logiques.

Cette demande de modélisation des phénomènes s'est encore accrue avec la confection des circuits intégrés à partir du cuivre, en lieu et place de l'aluminium à la fin des années 90, et à la maîtrise croissante des dépôts de matériaux diélectriques de faible permittivité (low-K).

Ces deux révolutions technologiques vont modifier la hiérarchie des problèmes à traiter, et ce, d'autant plus que la fréquence d'horloge augmente pour chaque nouvelle génération de circuits. Le nombre toujours croissant des connexions, la puissance plus importante qui y est dissipée, et leur proximité liée à la très forte densité d'intégration constituent un frein dans l'augmentation des performances prévues par les spécialistes des circuits intégrés. Ces **performances**, jusqu'alors seules reliées à celles du transistor, sont désormais **dépendantes de la connexion métallique**. En effet, le retard de propagation des impulsions dans une connexion cuivre est désormais supérieur au temps de réponse intrinsèque du transistor lui-même, et ce, depuis la mise en œuvre et le démarrage de la technologie 0,25 $\mu$ m en 1997 par IBM. Ce phénomène s'amplifie d'ailleurs avec la réduction des dimensions des transistors. En effet, le retard prédit par l'ITRS pour une connexion cuivre de longueur 1mm sera, dans la technologie 35 nanomètres, 100 fois celui d'un transistor réalisé dans la même technologie soit 250ps.

Les interconnexions métalliques deviennent donc, consécutivement à cette prédiction, l'un des verrous majeurs dans l'amélioration des performances. Les travaux que nous effectuons dans le contexte des interconnexions correspondent parfaitement au message émanant de l'ITRS. Cette entité préconise, entre autre, la modélisation hautes fréquences et très hautes fréquences des interconnexions. Ne soyons pas surpris ; un signal d'horloge cadencé à la fréquence de 3GHz pour un temps de montée de 15ps requiert un encombrement spectral de plus de 50GHz. Une étude électromagnétique est alors indispensable, et la connexion doit être étudiée comme un guide d'onde. Notre étude bibliographique a montré que toutes les questions posées par la technologie du cuivre ont trouvé un début de réponse voire quelques solutions. Pour s'en convaincre, on peut consulter trois périodiques intégralement dédiés aux interconnexions [3][4][5] qui datent des années 2001-2002. Il n'y a, par contre, pas de solutions innovantes ni beaucoup de résultats concernant les problèmes liés à la forte intégration et, par voie de conséquence, aux lignes en mutuelles interactions



même si ce phénomène n'est pas désiré. A ce stade, il faut quand même signaler les efforts considérables fournis dans le domaine des matériaux, et des procédés technologiques visant à réduire ces phénomènes [6]. Les travaux que nous présentons dans ce troisième chapitre tentent d'apporter une modeste contribution à la modélisation des phénomènes de couplage et, par voie de conséquence, à la prédiction de la diaphonie dans un système d'interconnexions couplées même faiblement. Par modélisation, nous voulons signifier que nous nous intéressons :

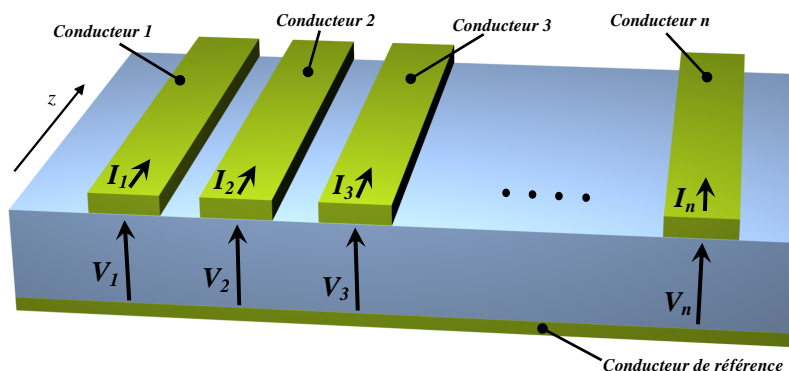
- ✓ à la caractérisation électromagnétique de plusieurs interconnexions situées dans un environnement où les milieux sont à pertes ou non, diélectriques ou métalliques.
- ✓ à la retranscription, à partir de cette étude numérique nécessitant la mise en œuvre d'un calculateur EM, d'un schéma électrique équivalent ; entité alors interprétable par les outils d'analyse d'intégrité des signaux tel que, par exemple, le célèbre logiciel commercial Spice.
- ✓ A l'estimation de l'intégrité des signaux basée sur le calcul des temps de montée et de descente, du retard de propagation et de la diaphonie présente dans un système à plusieurs conducteurs même faiblement couplés.

Ces travaux sont menés en collaboration avec Denis Deschacht, directeur de recherche au CNRS et membre du LIRM, le laboratoire d'informatique, de robotique et de microélectronique de Montpellier.

## 1 Structure de propagation quasi-TEM

### Schéma électrique équivalent

Puisque nous avons, en détails, mis l'accent sur le moyen de caractériser "numériquement" une structure électromagnétique grâce à ELFI, nous débutons la rédaction de ce troisième chapitre en explicitant la procédure mise au point pour remonter au schéma électrique équivalent d'une structure de propagation constituée de plusieurs conducteurs.



**Figure 3.2 :** Topologie quelconque d'une structure quasi-TEM à n conducteurs

Au risque de nous répéter, nous rappelons que les logiciels d'analyse d'intégrité des signaux comme SPICE mais aussi ELDO, pour les plus connus, requièrent un schéma électrique équivalent du système. Il faut donc impérativement s'assurer du lien entre la description électromagnétique et celle électrique de nos interconnexions. La figure 3.2 rappelle, pour mémoire, la topologie quelconque d'un réseau de lignes de transmission qui interagissent entre elles. Ce réseau, constitué de  $n+1$  conducteurs disjoints possède  $n$  modes à fréquence de coupure nulle. Le comportement de cette structure est alors équivalent à celui d'une concaténation infinie de cellules élémentaires infinitésimales dont le schéma électrique de l'une d'entre elles est décrit figure 3.3. Les tensions et courants pour cette cellule élémentaire sont gouvernés par les équations de la théorie des lignes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \{V\} &= -[Z]\{I\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \{I\} &= -[Y]\{V\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

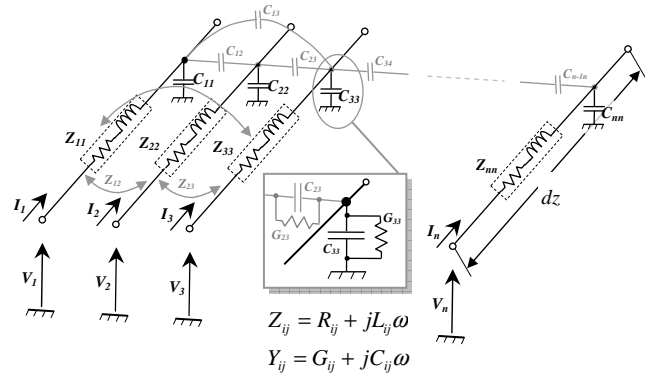


Figure 3.3 : Schéma électrique équivalent d'une cellule élémentaire à  $n$  lignes en mutuelles interactions.

Les vecteurs colonnes  $\{V\}$  et  $\{I\}$  ont respectivement pour coordonnées, les  $n$  potentiels ainsi que les  $n$  courants présents sur les  $n$  conducteurs de la structure. Les matrices  $[Z]$  et  $[Y]$  regroupent, quant à elles, l'ensemble des  $4*n*n$  éléments passifs constituant la cellule élémentaire (résistances, inductances, capacités, conductances). Ce système d'équations différentielles du premier ordre conduit, nous l'avons vu dans le chapitre précédent, à un système aux valeurs propres que nous n'allons, bien évidemment, pas développer ici. Nous savons qu'à une topologie faisant intervenir  $n+1$  conducteurs (conducteur de référence compris), correspond  $n$  vecteurs propres "tension" ( $\{V\}_a, \{V\}_b, \dots$ ) et  $n$  vecteurs propres "courant" ( $\{I\}_a, \{I\}_b, \dots$ ) associés aux  $n$  valeurs propres que sont les constantes de propagations ( $\gamma_a, \gamma_b, \dots$ ) de la structure. Ainsi, si nous connaissons ces différentes grandeurs, nous pouvons réécrire les équations du système (3.1). Sélectionnons par exemple l'équation faisant intervenir la matrice  $[Z]$ , nous avons en développant :

$$\begin{aligned} \gamma_a \{V\}_a &= [Z]\{I\}_a \\ \gamma_b \{V\}_b &= [Z]\{I\}_b \\ \gamma_c \{V\}_c &= [Z]\{I\}_c \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous obtenons n équations indépendantes où n'interviennent pour chacune d'entres elles, que les caractéristiques relatives au mode normal concerné. La matrice [Z], quant à elle, reste inchangée quel que soit le mode pris en compte puisqu'elle doit vérifier toutes les solutions propres du système. Il est alors possible d'écrire le problème sous une nouvelle forme. La transcription matricielle du système d'équations (3.2) aboutit à la relation (3.3) dans laquelle nous avons, pour mémoire, rappelé succinctement le contenu des matrices.

$$[V][\gamma] = [Z][I] \tag{3.3}$$

The diagram illustrates the expansion of equation (3.3). On the left, the voltage vector  $[V]$  is shown as a column of vectors  $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$  with subscripts  $a$  and  $b$ . The diagonal matrix  $[\gamma]$  is shown as a block matrix with diagonal elements  $\gamma_a$  and  $\gamma_b$ . On the right, the impedance matrix  $[Z]$  is shown as a matrix of elements  $z_{ij}$  (e.g.,  $z_{11}, z_{12}, z_{13}, \dots, z_{44}$ ). The current vector  $[I]$  is shown as a column of vectors  $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$  with subscripts  $a$  and  $b$ .

Bien évidemment, cette retranscription du problème respecte les conventions établies dans la rubrique “validation” du second chapitre. En multipliant chaque membre de cette dernière équation par l'inverse de la matrice regroupant les n\*n courants, nous aboutissons à la relation (3.4), à savoir :

$$[Z] = [V][\gamma][I]^{-1} \tag{3.4}$$

Par extension, la matrice [Y] s'obtient de façon similaire en traitant la seconde équation du système (3.1). Cela aboutit par conséquent à :

$$[Y] = [I][\gamma][V]^{-1} \tag{3.5}$$

A ce stade le lien entre le volet électromagnétique du problème et celui électrique articulé autour d'un schéma électrique équivalent est définitivement établi. Tout repose, dans un premier temps, sur la détermination des valeurs propres que sont les différentes constantes de propagation complexe de la structure à partir d'ELFI. La connaissance précise de ces grandeurs n'assurent pas pour autant une détermination, sans faille, des courants et tensions dans et sur les conducteurs d'une structure de propagation [7][8][9]. Il est clair que les variations et évolutions fréquentielles de ces grandeurs doivent être contrôlées [10][11]. Nous pensons notamment aux structures composées de rubans planaires comme la ligne micro ruban ou coplanaire. La problématique des interconnexions est plus simple à appréhender du

fait de la topologie et des dimensions des structures étudiées. Nous avons d'ailleurs validé notre code en vérifiant quelques relations "remarquables" qui prouvent bien que tensions et courants sont correctement calculés. Cette mise au point étant faite, dans les matrices  $[Z]$  et  $[Y]$  sont consignées toutes les composantes de notre schéma électrique équivalent. Nous pouvons à ce stade soit utiliser le logiciel mis au point dans l'équipe [7] ou celui commercial comme SPICE pour analyser l'intégrité des signaux au sens large du terme.

## 2 Les circuits numériques à haut degré d'intégration

Le problème électromagnétique auquel nous devons trouver une solution repose plutôt sur le schéma de la figure 3.4. Le niveau de métallisation  $M_n$  contenant nos interconnexions en interactions mutuelles est compris entre deux autres niveaux croisés à 90 degrés, et ce, pour réduire le

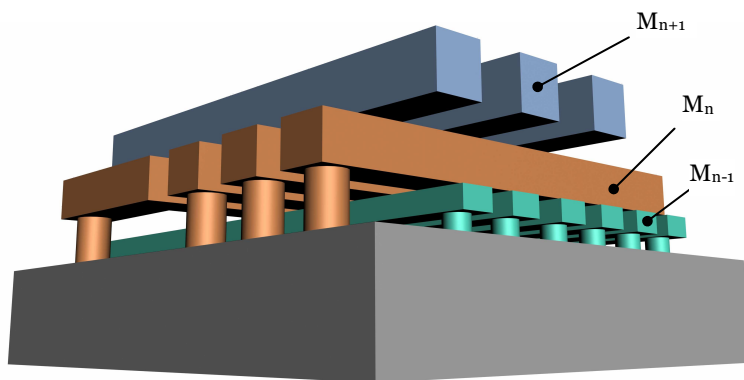


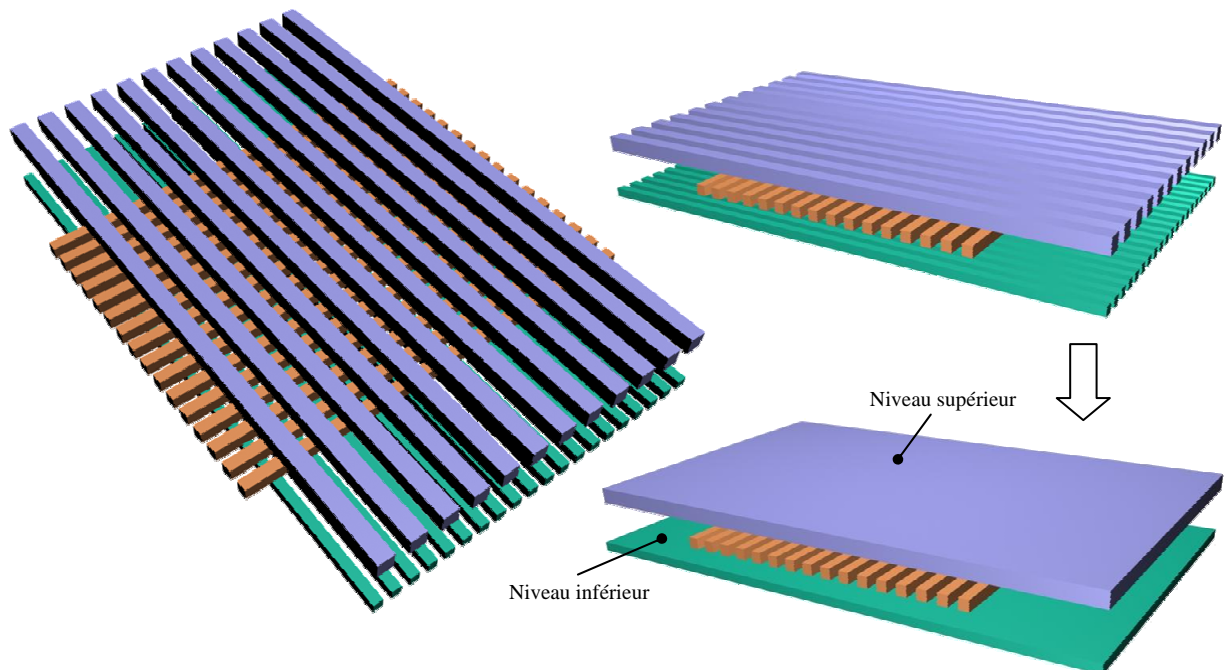
Figure 3.4 : Représentation schématique de quelques niveaux d'un circuit numérique moderne

couplage avec les niveaux environnants. Le passage de trois à deux dimensions peut s'opérer en stipulant que la structure est uniforme.

Cela est envisageable si l'on ne considère que la portion de ligne en interaction sans prendre en compte les changements de directions tels les coudes ou

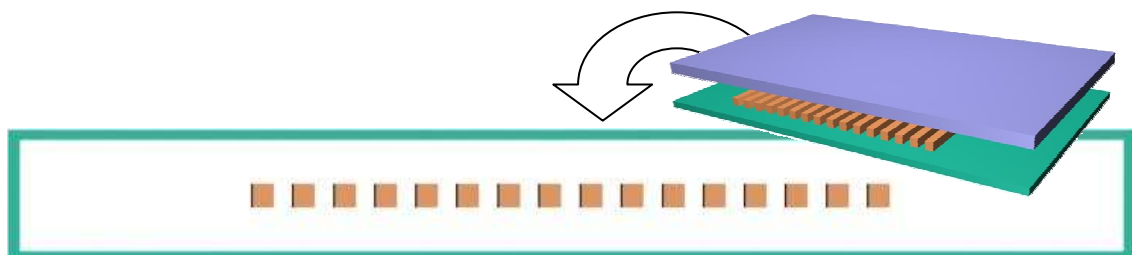
encore les "via hole". Cela signifie aussi que ces structures soient suffisamment éloignées de notre système de lignes couplées pour qu'il n'y ait pas d'interaction. Une telle hypothèse a été envisagée dans la majorité des ouvrages que nous avons compulsés. On peut citer, à titre d'exemple, quelques thèses de doctorat universitaire [12][13][14][15]. Bien évidemment, cette liste n'est pas exhaustive.

Ces précisions étant faites, nous devons à présent émettre quelques hypothèses simplificatrices. La première repose sur le comportement des niveaux englobant les interconnexions que nous désirons étudier. A ce stade, la densité d'intégration est telle que le nombre d'interconnexions est très élevée. Ainsi, chacun des niveaux entourant nos connexions est considéré comme un conducteur plan unique [16][17][18] figure 3.5. Ce conducteur plan possède, si on le juge utile, une conductivité de valeur finie. Des travaux ont montré que ceci peut avoir un impact comparé au cas où les niveaux environnants sont parfaitement conducteurs.



**Figure 3.5 :** Le treillis d'interconnexions et la représentation simplifiée des niveaux supérieurs et inférieurs englobant le niveau d'étude.

Bien évidemment, cet impact qui se traduit par un accroissement global de l'effet inductif est d'autant plus limité que la fréquence des impulsions d'horloge est faible et que les dimensions des interconnexions sont réduites. Pour être bref et concis, ce phénomène concerne pour l'essentiel les couches dites "global level", et ce, à condition que la fréquence des signaux soit très importante. Les récentes modifications apportées aux processeurs montrent qu'à un accroissement de fréquences d'horloge, on a préféré une modification



**Figure 3.6 :** La section droite de la structure finale représentant un niveau de métallisation.

radicale de l'architecture du circuit. On a même préféré l'ajout d'un processeur supplémentaire à celui déjà existant, le tout fonctionnant à des fréquences inférieures, et ce, sur une même puce physique, ce que n'avait pas envisagé G. Moore dans sa fameuse loi [19]. La seconde hypothèse repose sur le choix d'un unique conducteur de référence, conducteur englobant notre système de connexions couplées même involontairement. Cette hypothèse implique aussi que les niveaux supérieurs et inférieurs soient portés à un potentiel identique. A ce stade, nous n'avons pas trouvé dans la littérature scientifique de données claires et

précises concernant le problème des niveaux environnants, et du potentiel auquel ils sont soumis. Un grand nombre de publications et thèses de doctorat font appel à un unique conducteur de référence figure 3.6. Nous citons quelques uns de ces travaux pour mémoire [16] [17] [18].

Ces mises au point étant effectuées, nous pouvons à présent focaliser notre attention sur la structure étudiée dans ce mémoire ainsi que sur ces dimensions. Elle constitue notre “fil d’Ariane” pour toute la suite de cet exposé. Nous n’avons pas voulu choisir une configuration purement académique mais proche de la problématique liée à la forte intégration qui est prévue pour les dix années à venir. C’est pourquoi, nous nous sommes intéressés aux travaux de J. D. Meindl [20] [21] et plus précisément à une topologie d’interconnexions que l’on peut reconstituer à partir du motif de base proposé figure 3.7. Ce dernier constitue la brique élémentaire entrant dans l’association de trois, cinq et huit interconnexions figure 3.8 par répétition du motif.

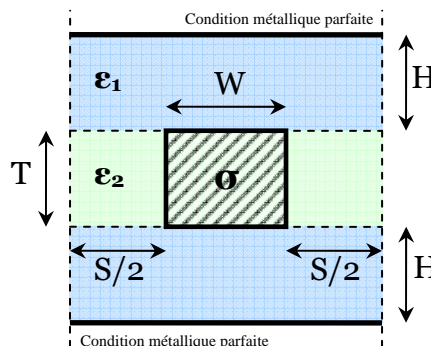


Figure 3.7 : Motif élémentaire

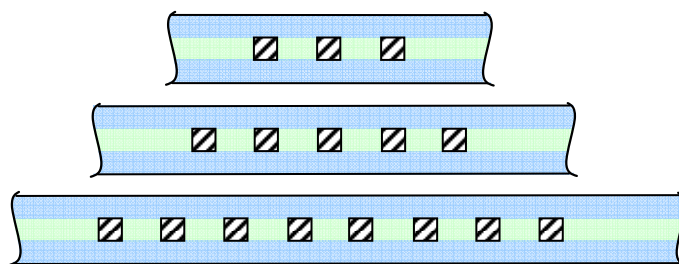


Figure 3.8 : Représentation des systèmes à 3, 5 et 8 interconnexions.

Les conducteurs de dimensions transversales  $W=0.8\mu\text{m}$  et  $T=1\mu\text{m}$  pour  $H=T=1\mu\text{m}$  concernent, ici, le niveau semi global du circuit. Les signaux d’horloge possèdent des fréquences allant du gigahertz à quelques gigahertz. Ces dimensions, constituent le dénominateur commun des travaux exposés dans ce mémoire pour 3, 5 et 8 lignes en interaction de même que la valeur de la permittivité  $\epsilon_1$  remplissant les espaces inter niveaux. Par contre, la largeur  $S$  de la zone de couplage ainsi que la permittivité du matériau occupant cette zone d’interaction de dimension  $T*S$  sont les variables de la simulation. La justification concernant ce choix précis de 3, 5 et 8 lignes apparaîtra clairement dans le troisième paragraphe de ce chapitre. Comme nous pouvons l’imaginer, la structure est fermée en plaçant à ses extrémités transverses (dans le plan de section droite) une paroi de court circuit magnétique (CCM) ou électrique (CCE) parfait. Ceci est effectué en éloignant suffisamment ces parois verticales pour ne pas perturber la première et la dernière interconnexion.

### 3. Etude électromagnétique des systèmes à 3, 5 et 8 lignes

Afin de ne pas trop alourdir le volet électromagnétique des problèmes abordés dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas le plus complexe : celui de huit lignes en interaction mutuelle. Nous essaierons, toutefois, d'introduire les grandeurs électromagnétiques caractéristiques des systèmes à trois et cinq interconnexions autant que cela est possible. Nous rappelons, pour mémoire, les dimensions de la structure figure 3.9 composée de huit interconnexions "cuivre" identiques baignant dans les mêmes matériaux diélectriques pour cet exemple. Les interconnexions possèdent la même conductivité  $\sigma=58S/\mu m$  et sont toutes, ici, séparées par la même distance  $S$ .

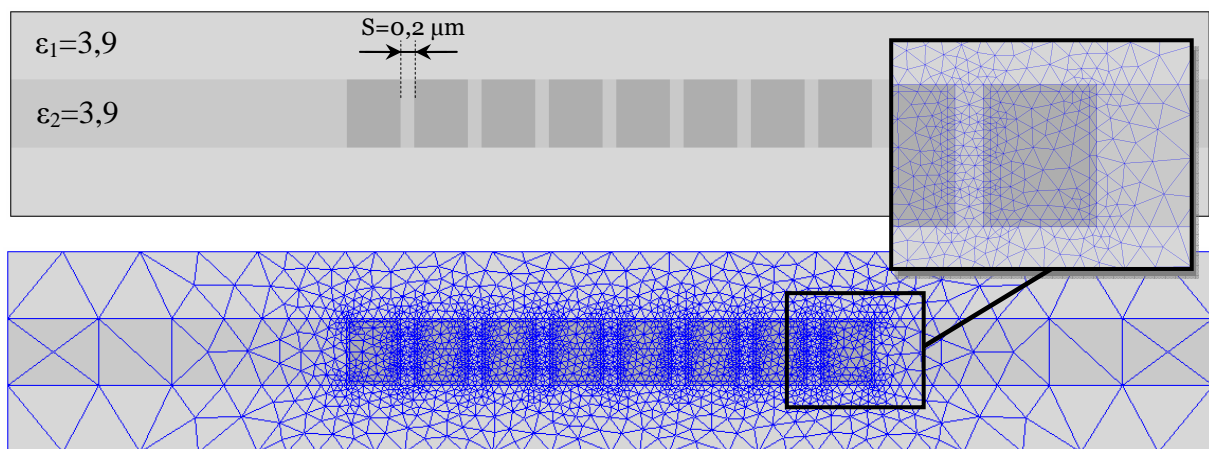


Figure 3.9 : Représentation du maillage du système simulé par ELFI.

#### 3.1 Le diagramme de dispersion des modes à fréquence de coupure nulle.

Comme nous l'avons démontré dans l'introduction de ce chapitre, l'établissement d'un schéma électrique équivalent requiert la détermination des tensions, courants et constantes de propagation pour chaque mode. Ces dernières caractéristiques sont, bien entendu, définies en premier lieu puisqu'il s'agit des valeurs propres de notre système matriciel ; valeurs dont on a impérativement besoin pour calculer les vecteurs propres correspondants (E, H puis V, I). Ainsi, la figure 3.10 regroupe, pour la topologie de lignes présentées figure 3.9, les huit constantes de propagation complexes que nous avons calculées dans la bande 1 à 40 GHz. En fait, nous avons tracé l'évolution fréquentielle de la partie réelle (la constante d'affaiblissement) et imaginaire (la constante de phase) sur le même graphe figure 3.10.

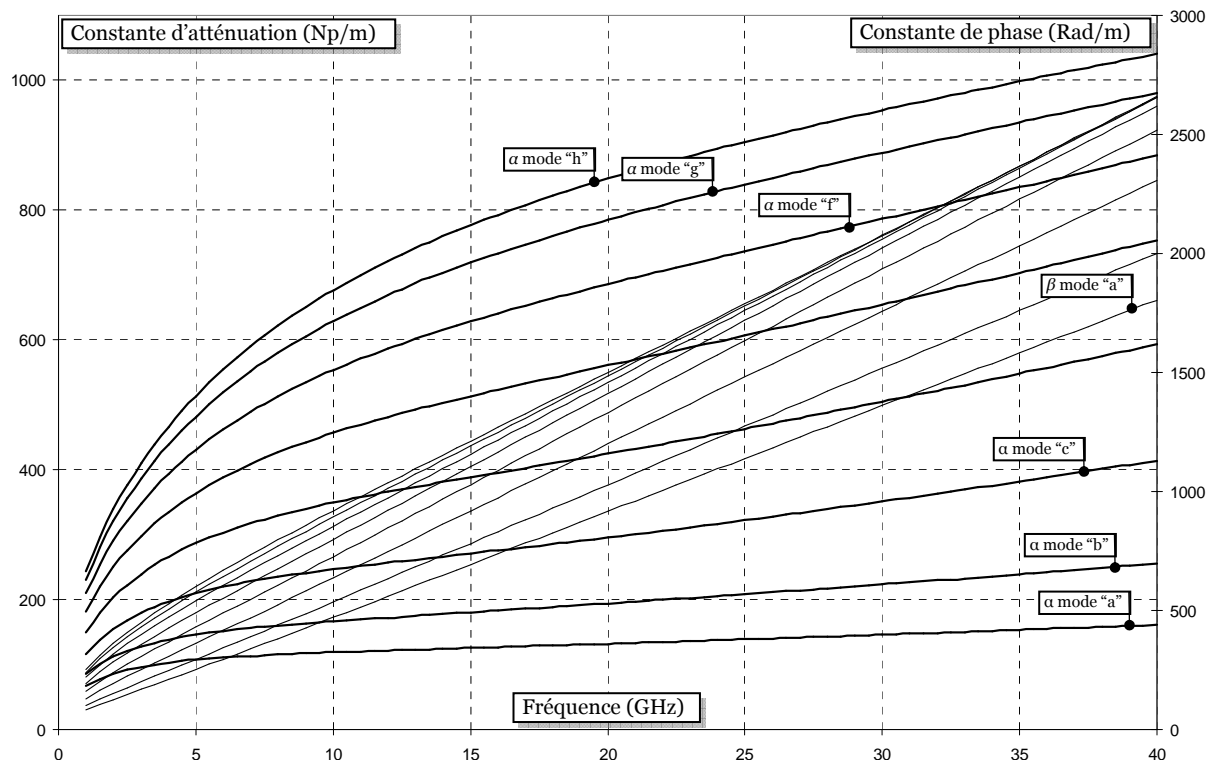


Figure 3.10 : Evolution fréquentielle des constantes de phases et d'affaiblissement des huit modes d'un système de huit interconnexions (représentation classique).

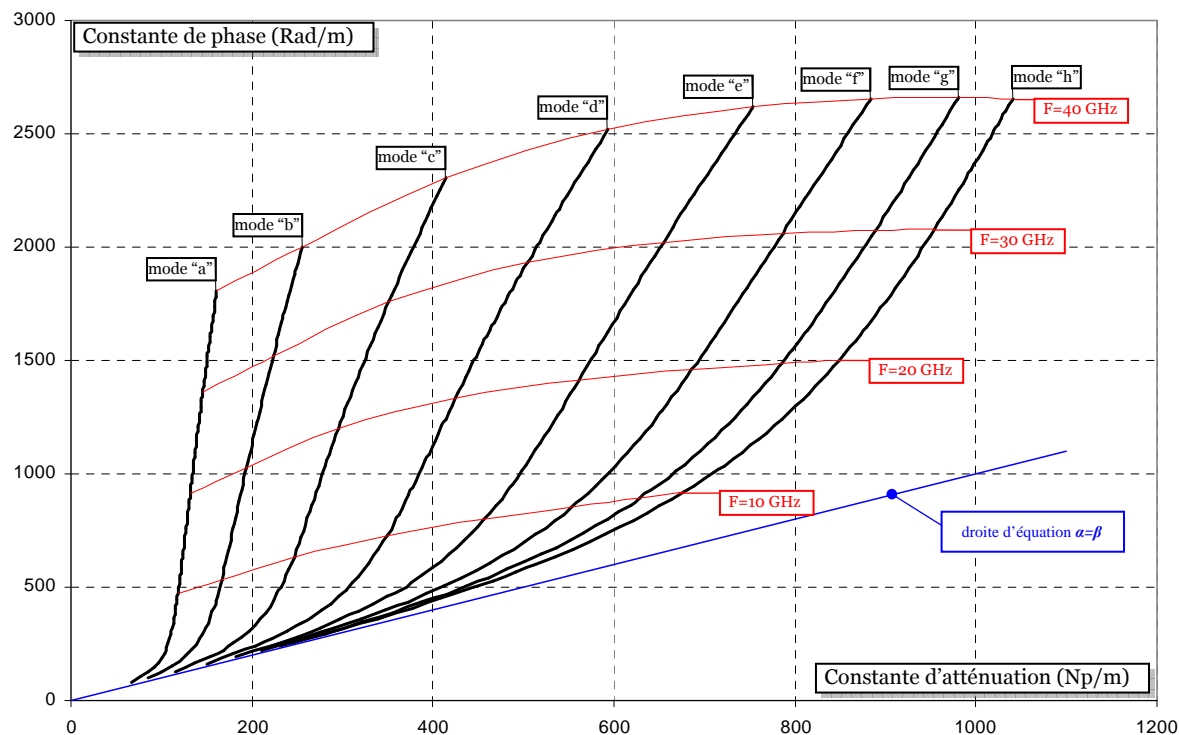


Figure 3.11 : Evolution fréquentielle des constantes de phases en fonction de la constante d'affaiblissement des huit modes d'un système de huit interconnexions (représentation dans le plan complexe).

Un bref coup d'œil à ces évolutions montre que le mode "a" possède la plus petite constante de phase mais aussi la plus petite constante d'affaiblissement. S'il est facile de discriminer les



constantes de phase en basses et moyennes fréquences, cette tâche est plus délicate pour les fréquences élevées et surtout pour les modes notés “f”, “g” et “h” au-delà de 30 GHz. En effet, le dernier mode selon notre nomenclature, soit ici le huitième ou le mode “h”, ne possède pas toujours la constante de phase la plus importante alors qu’il est toujours le plus atténué. La représentation que nous avons adoptée n’est donc pas nécessairement la meilleure pour les systèmes couplés à pertes, même si c’est a priori, la seule existante ou tout du moins la plus rencontrée dans la littérature. A la représentation classique figure 3.10 nous préférons celle figure 3.11. Elle n’est certes pas conventionnelle puisque nous avons choisi de reporter l’évolution de la constante de phase “ $\beta$ ” en fonction de la constante d’affaiblissement “ $\alpha$ ”, et ce, pour chaque point de fréquence pris en compte par ELFI. Nous avons donc en plus du relevé  $\beta=f(\alpha)$ , des courbes iso-fréquences pour marquer la dépendance fréquentielle. Cette représentation pour les lignes couplées à pertes possède deux avantages. Le premier, qualitatif, concerne la lisibilité globale du relevé. Elle est d’emblée meilleure puisque l’on discrimine parfaitement chaque valeur propre complexe comme nous pouvons le constater. Ces dernières sont repérées suivant la même nomenclature que celle utilisée dans la phase de validation au chapitre précédent. Le second est d’ordre quantitatif. En effet, outre la détermination sans ambiguïté des valeurs des constantes de phase et d’affaiblissement, on remarque que toutes les évolutions tendent vers la droite  $\beta=\alpha$  dans le relevé figure 3.11. Ceci se produit, vers les fréquences basses pour chaque mode concerné. Le terme “fréquences basses” n’est certes pas toujours approprié puisqu’à partir de 5GHz, l’évolution de la constante de propagation du 8<sup>ième</sup> mode (mode h) tend vers cette droite, caractéristique d’un mode à fortes pertes. Ce comportement particulier mérite quelques éclaircissements d’autant qu’il n’est pas spécifique aux structures couplées. Il se produit également lorsqu’une seule interconnexion est étudiée; les dimensions de cette connexion étant identiques à celles constituant notre système de huit lignes couplées. Ainsi, à partir de la théorie des lignes de transmission, on montre aisément que la constante de propagation est liée aux éléments séries et parallèles d’une cellule élémentaire au moyen de la relation suivante, et ce, pour une ligne :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_s Y_p} = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} \quad (3.6)$$

L’impédance  $Z_s$  est constituée d’une inductance en série avec une résistance liée à la conductivité du cuivre. Une capacité placée en parallèle avec une conductance dont la valeur dépend de la tangente de l’angle de perte du matériau représente l’admittance  $Y_p$ . D’un point de vue mathématique, nous retrouvons les conditions d’égalité des parties réelles et imaginaires de la constante de propagation lorsque l’expression générale (1) se réduit aux relations (3.7) et (3.8), à savoir :

$$\gamma \approx \sqrt{jRC\omega} = (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \quad (3.7)$$

$$\gamma \approx \sqrt{jLG\omega} = (1+j)\sqrt{\frac{LG\omega}{2}} \quad (3.8)$$

D'un point de vue physique, seule la relation (3.7) est viable aux fréquences basses. Pour nous en convaincre, nous allons effectuer un bilan sur chacune des composantes  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  de notre schéma équivalent, étant entendu que le phénomène de modes à pertes se produit aux fréquences décroissantes ou plutôt aux basses et très basses fréquences, et ce, jusqu'au continu. Ainsi, à fréquence nulle, la valeur de la résistance est fournie par la loi d'ohm soit  $R=1/(\sigma S)$ . Elle vaut 217  $\Omega/cm$  pour une interconnexion cuivre dont les dimensions sont  $H=T=1\mu m$ ,  $W=0,8\mu m$ . Cette valeur est la plus faible qui soit. En effet, elle croit avec la fréquence à cause de l'effet de peau. La capacité, quant à elle, est égale 1,2 pF/cm. C'est la valeur calculée au moyen des formulations approchées que l'on retrouve dans les travaux de doctorat d'université de L.Vannier [12] ou encore dans l'habilitation à diriger des recherches de E. Sicard [16]. L'inductance possède une valeur approchée de 3,2 nH/cm. La conductance, reflet des pertes diélectriques, est nulle pour le continu. Admettons que la variation fréquentielle des éléments  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  soit faible dans le domaine qui nous intéresse. Nous voyons que plus la fréquence décroît et plus le poids de la réactance de la self série est faible devant celui de la résistance dont le minimum est la valeur continue (217  $\Omega/cm$ ). Nous aboutissons à une conclusion similaire pour la composante parallèle de notre cellule élémentaire. Mais, cette fois ci, c'est la conductance que l'on néglige vis-à-vis de la susceptance de la capacité. Le schéma électrique équivalent de notre cellule élémentaire est alors constitué d'une résistance et d'une capacité. Ceci de doit pas nous surprendre car cette représentation a été adoptée jusqu'à la fin des années 90 pour traduire le schéma des interconnexions réalisées à partir d'aluminium ou de tungstène. Ce n'est que depuis l'apparition du cuivre que les effets inductifs sont apparus sans pour autant dominer intégralement le fonctionnement de la ligne. Ceci dit, bien que le cuivre permette une réduction sensible de la résistance d'une interconnexion, le phénomène que nous venons de décrire se produit toujours. Il apparaît seulement à des fréquences plus faibles comparées aux connexions "aluminium". Finalement, dans ce contexte de schéma équivalent RC, la constante de propagation a pour expression approchée :

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx \sqrt{jRC\omega} = (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \quad (3.9)$$

Ainsi, les parties réelles et imaginaires sont bien égales. Nous récapitulons ces valeurs pour les fréquences 100 MHz, 1GHz et 10 GHz dans le tableau 3.1 ; valeurs que nous comparons avec celles fournies par ELFI.

Fréquence (GHz)		0,1		1		10	
		$\alpha$ (Np/m)	$\beta$ (Rad/m)	$\alpha$ (Np/m)	$\beta$ (Rad/m)	$\alpha$ (Np/m)	$\beta$ (Rad/m)
modèle RC R=217 $\Omega$ /cm C=1.2 pF/cm	$\gamma = \alpha + j\beta$	28.6019	28.6019	90.4473	90.4473	286.0194	286.0194
		ELFI	30.2580	30.6140	102.8335	112.5575	228.1847

**Tableau 3.1 :** Comparaison entre constante d'atténuation et de phase pour une interconnexion  
 $W = 0.8\mu\text{m}$ ,  $H = T = 1\mu\text{m}$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 3.9$

Comme nous pouvons le constater, à la fréquence 100 MHz le phénomène de mode à pertes est présent puisque  $\alpha_{\text{Elfi}} \approx \beta_{\text{Elfi}}$  pour ensuite s'estomper, somme toute, lentement jusqu'à quelques gigahertz.

Nous ne disposons pas des formulations analytiques des constantes de propagation de huit lignes pour retranscrire le comportement basse fréquence figure 3.11, mais nous avons établi celles pour trois et quatre interconnexions au chapitre précédent. Nous allons donc nous appuyer sur ces configurations et sur les observations faites pour une interconnexion pour traduire le phénomène de modes à pertes dans le cas des lignes couplées. Reprenons, tout d'abord, les trois expressions des constantes de propagation relatives au système de trois interconnexions en interactions mutuelles, à savoir :

$$\begin{aligned}
 \gamma_a^2 &= \frac{A+C+E}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A+C-E)^2 + 8DB} \\
 \gamma_b^2 &= A-C \\
 \gamma_c^2 &= \frac{A+C+E}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(A+C-E)^2 + 8DB}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Compte tenu des remarques précédentes, nous négligeons toutes les conductances ainsi que les inductances (inductances mutuelles comprises) puisque les effets selfiques sont masqués par les composantes résistives des lignes. Du fait du couplage, nous ne sélectionnons que la mutuelle capacitive relative aux deux plus proches interconnexions. En effet, de nombreux travaux ont montré que, même dans le cas de couplage fort, la mutuelle entre les lignes les plus éloignées pouvait être négligée [12][22]. Compte tenu de toutes ces remarques, les expressions des grandeurs A, B, C, D, E se résument à :

$$\begin{aligned}
 A &= Z_{11}Y_{11} + Z_{12}Y_{12} + Z_{13}Y_{13} \approx jR_1C_1\omega \\
 B &= Z_{11}Y_{12} + Z_{12}Y_{22} + Z_{13}Y_{12} \approx jR_1C_m\omega \\
 C &= Z_{11}Y_{13} + Z_{12}Y_{12} + Z_{13}Y_{11} \approx 0 \\
 D &= Z_{12}(Y_{11} + Y_{13}) + Z_{22}Y_{12} \approx jR_2C_m\omega \\
 E &= 2Z_{12}Y_{12} + Z_{22}Y_{22} \approx jR_2C_2\omega
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$R_1, R_2, C_1$  et  $C_2$  représentent respectivement la résistance et la capacité des lignes où  $R_{11}=R_{33}=R_1, C_{11}=C_{33}=C_1$  et  $R_{22}=R_2, C_{22}=C_2$ . Du fait de la symétrie adoptée dans cette configuration, une seule capacité mutuelle suffit puisque  $Y_{12}=Y_{21}=Y_{32}=Y_{23}=Y_m=jC_m\omega$ . Grâce à ces simplifications, les expressions du carré des constantes de propagation des modes couplés sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_a^2 &= \frac{A+E}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-E)^2 + 8DB} \approx j\omega \left[ R_1C_1 + R_2C_2 + \sqrt{(R_1C_1 - R_2C_2)^2 + 8R_1R_2C_m^2} \right] \\ \gamma_b^2 &= A - C \approx jR_1C_1\omega \\ \gamma_c^2 &= \frac{A+E}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-E)^2 + 8DB} \approx j\omega \left[ R_1C_1 + R_2C_2 - \sqrt{(R_1C_1 - R_2C_2)^2 + 8R_1R_2C_m^2} \right]\end{aligned}\quad (3.12)$$

Il est clair que, pour ces expressions approchées, les constantes de propagation correspondantes possèdent toutes des valeurs différentes avec comme contrainte l'égalité des parties réelles et imaginaires ; ce que nous avons à démontrer. Pour mémoire nous rappelons ces expressions approchées :

$$\begin{aligned}\gamma_{a,c} &\approx \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \left[ \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(R_1C_1 - R_2C_2)^2 + 8R_1R_2C_m^2}}{2} \right]} \\ \gamma_b &\approx \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{R_1C_1\omega}\end{aligned}\quad (3.13)$$

ainsi que l'évolution fréquentielle des trois constantes de propagations déterminées numériquement grâce à ELFI figure 3.12. Comme nous pouvons le remarquer, une fois de plus, la caractéristique  $\alpha=\beta$  traduit bien asymptotiquement le fonctionnement aux fréquences décroissantes. Le même raisonnement appliqué à quatre lignes en interaction aboutit à une conclusion en tout point identique. Nous ne rappelons que les expressions des quatre constantes de propagation pour ne pas alourdir cette démonstration, à savoir :

$$\begin{aligned}\gamma_{a,c} &\approx \frac{1}{2} \left( A + F + G \pm \sqrt{(A - F - G)^2 + 4BE} \right) \\ \gamma_{b,d} &\approx \frac{1}{2} \left( A + F - G \pm \sqrt{(A - F + G)^2 + 4BE} \right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Les grandeurs A, B, F, G, E définies au second chapitre de ce mémoire sont imaginaires compte tenu des simplifications effectuées.

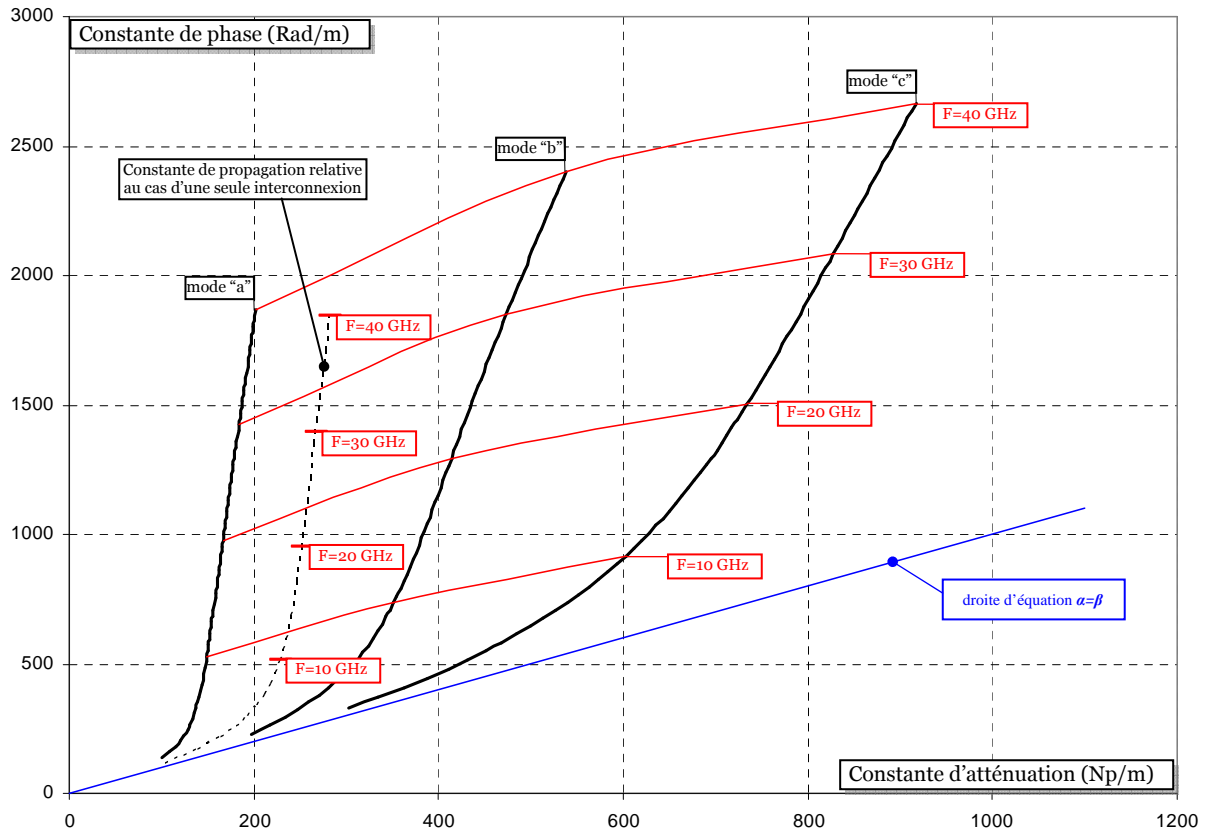


Figure 3.12 : Spectre modal de la constante de propagation relatif à trois interconnexions ( $S=0,2 \mu\text{m}$ ,  $\epsilon_2=3,9$ )

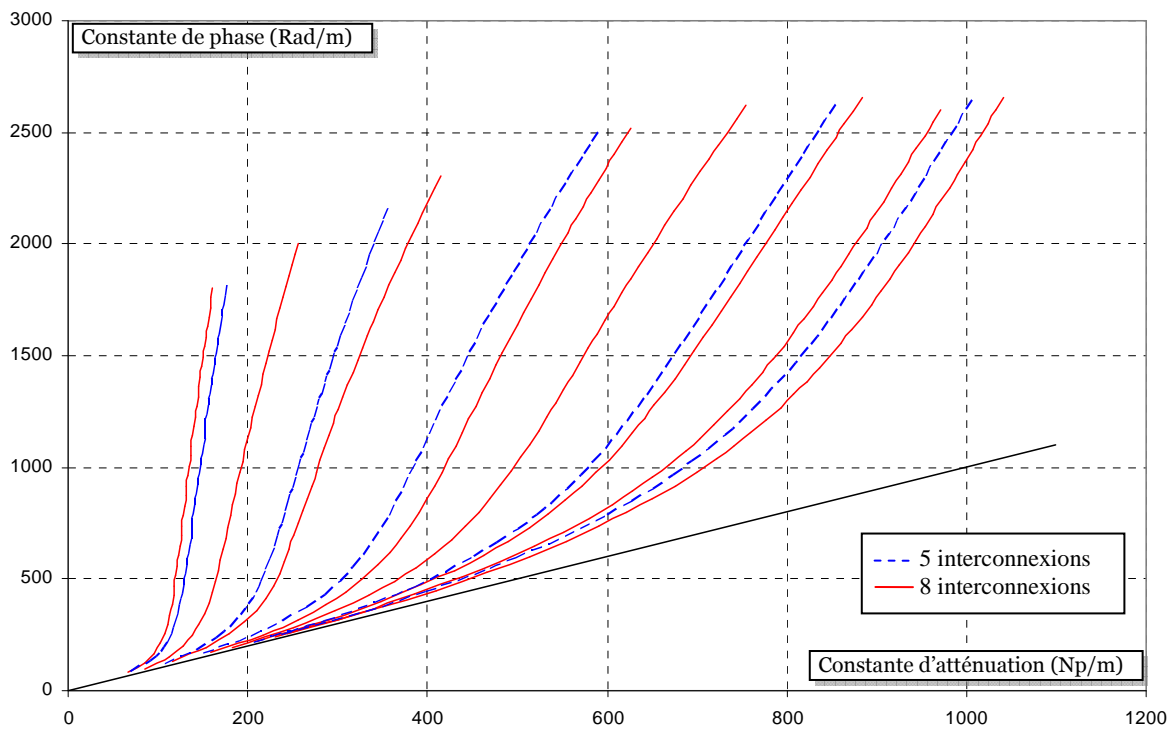


Figure 3.13 : Spectre modal de la constante de propagation relatif à cinq et huit interconnexions ( $S=0,2 \mu\text{m}$ ,  $\epsilon_2=3,9$ )

De ce fait, les constantes de propagation résultantes ont nécessairement une même constante de phase et d'affaiblissement. Ceci ne concerne, bien entendu, que la description asymptotique du comportement basse fréquence. Il en est de même quel que soit le nombre d'interconnexions considéré puisque le carré de la constante de propagation est toujours un nombre complexe purement imaginaire. Cet état de fait est propre au comportement, dans les fréquences décroissantes, d'une cellule élémentaire dans laquelle les composantes séries résistives dominant les éléments selfiques mutuels ou non. Bien évidemment dans ce même contexte fréquentiel, la conductance qui est le reflet des pertes diélectriques est toujours négligeable devant l'effet capacitif de la ligne. Nous observons bien ce phénomène de modes à pertes aux fréquences basses sur la figure 3.13 regroupant le comportement des constantes de propagation déterminés par ELFI pour cinq et huit lignes.

Afin de conclure ce volet modal de notre étude, nous récapitulons figure 3.14 l'ensemble de nos résultats relatifs à huit interconnexions en interactions. Les variables sont, ici, la permittivité du matériaux remplissant l'espace interconducteur dont la largeur  $S$  évolue de  $0.2$  à  $1 \mu\text{m}$ . Nous avons volontairement conservé les mêmes échelles pour tous les graphes de façon à identifier clairement l'action de la permittivité et de la proximité des lignes sur les constantes de propagation complexes des huit modes. En effet, le cas du fort couplage ( $\epsilon_2=3.9$ ,  $S=0,2 \mu\text{m}$ ) se caractérise par un étalement du spectre de ces huit modes alors que l'inverse se produit pour les couplages faibles ( $\epsilon_2=1$ ,  $S=1 \mu\text{m}$ ). Ce comportement n'est pas surprenant. Le couplage provoque, pour certain mode un accroissement des pertes comparé à celles d'une ligne. Y. L. Chow l'a très bien montré dans son étude sur deux lignes isolées publiée en 1991 [23]. Bien évidemment, plus le couplage est faible et plus notre faisceau de modes se contracte pour, à la limite, en cas de découplage parfait, se confondre avec l'évolution de la constante de propagation de la ligne seule. Le même phénomène est, bien évidemment, observé pour trois et cinq interconnexions en interaction.

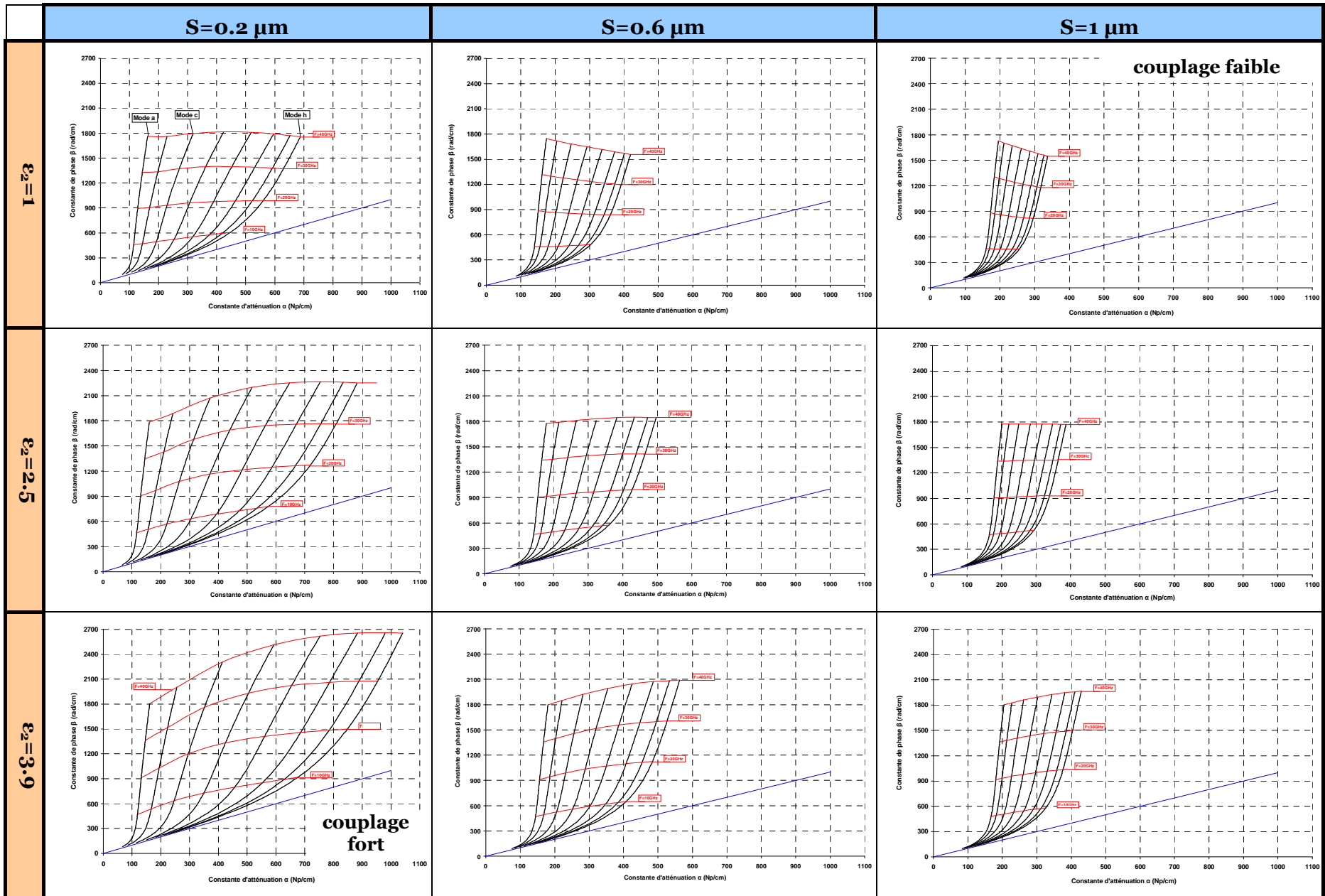


Figure 3.14 : Evolution des spectres modaux des constantes de propagation complexes en fonction du couplage entre les huit interconnexions

### 3.2 Le champ électromagnétique

Le calcul des valeurs propres, que sont les constantes de propagation complexes, constitue le préalable à la détermination des champs électromagnétiques puis, des tensions et des courants, sur et dans les interconnexions “cuivre” de conductivité de valeur finie. Cela concerne, bien entendu, chaque mode à fréquence de coupure nulle susceptible de se propager. Avant de proposer quelques cartes de champs typiques, nous avons effectué le calcul des amplitudes des champs en divers endroits de la section droite de notre système de huit interconnexions baignant dans de la silice et espacées de  $1\mu\text{m}$ , pour cet exemple. Cette opération a été menée pour chacun des huit modes, et ce, dans la plage de fréquence 1 à 25GHz.

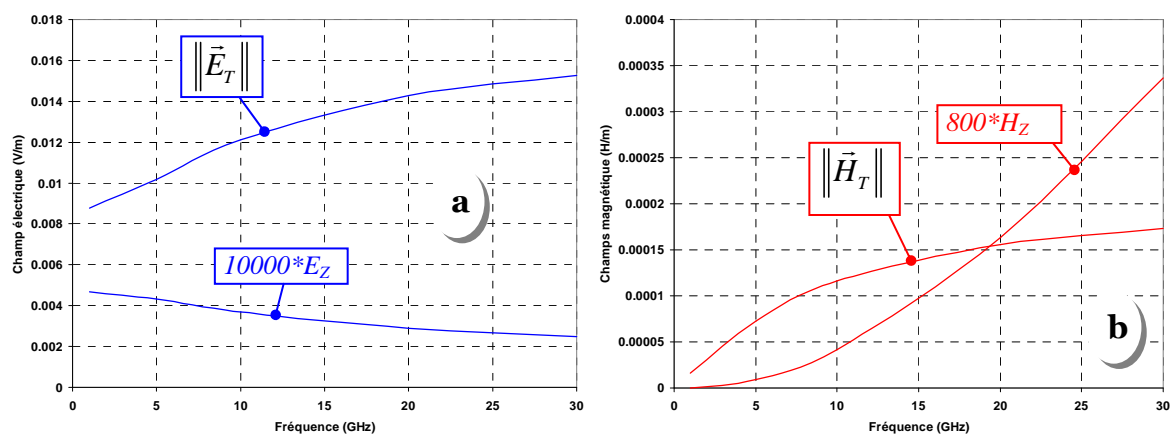


Figure 3.15 : Evolution fréquentielle des modules des champs transverse et longitudinal

Rappelons que cette bande de fréquence correspond au développement en série de Fourier assurant une reconstitution optimale de notre impulsion, de temps de montée 40ps, se propageant dans nos interconnexions. Nous illustrons figure 3.15 la synthèse de notre travail. Comme nous pouvons le remarquer, nous avons tracé les évolutions fréquentielles des champs électriques transverse et longitudinal figure 3.15a ; la figure 3.15b étant dédiée au comportement des champs magnétiques. Ces tracés concernent le premier mode de notre système de huit connexions soit le mode “a”. Ce dernier reflète assez fidèlement les tendances que nous avons observées lors de nos calculs des champs pour les autres modes. Afin d’estimer efficacement le poids des diverses composantes entre elles, nous modifions les amplitudes grâce à l’introduction d’un facteur multiplicatif de façon à cadrer les évolutions tout en réduisant artificiellement leur dynamique. Ainsi, au premier coup d’œil, nous voyons figure 3.15a que le champ électrique transverse  $E_T$  est toujours 10000 fois plus important que son homologue longitudinal  $E_Z$ . Ceci se vérifie globalement dans toute la bande 1 à 25GHz. L’évolution du champ magnétique, figure 3.15b, est tracée suivant la même philosophie. Cette fois ci, la dynamique entre le champ magnétique transverse et longitudinal est d’environ 800.



Toutefois, une différence fondamentale existe. En effet, le champ magnétique  $H_z$  est extrêmement faible aux basses fréquences. Son amplitude vaut typiquement, à 1GHz,  $10^{-16}$ . Si nous établissons un bilan des dynamiques à la fréquence 1GHz, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$E_T \gg E_Z \quad H_T \gg H_Z \quad \text{mais} \quad E_Z \neq 0 \quad \text{et} \quad H_Z \approx 0 \quad (1\text{GHz})$$

Cette hiérarchie subit une modification notoire à la fréquence 25GHz puisque :

$$E_T \gg E_Z \quad H_T \gg H_Z \quad \text{mais} \quad E_Z \neq 0 \quad \text{et} \quad H_Z \neq 0 \quad (25\text{GHz})$$

Bien que les amplitudes des champs longitudinaux soient toujours beaucoup plus faibles que celles des champs transverses, nous avons aux fréquences 1 et 25GHz deux fonctionnements, malgré tout, différents. En effet, il est fort tentant d'affirmer que les modes "a", "b", "c", ..., "h" migrent vers un fonctionnement hybride voire quasi-TEM quand la fréquence croît, alors qu'ils tendent vers un comportement transverse magnétique pour les fréquences décroissantes ou encore les basses fréquences. Ceci est une question d'appréciation. Nous retrouvons des observations similaires dans des ouvrages que nous citerons par le nom de leurs auteurs comme le Collin (pages 125 à 129) [24], le Straton (chapitre 9) [25], le Harrington (chapitre 1) [26], le Charruau [27], ou encore dans quelques publications des années 1990 [28][29][30]. Bien évidemment, cette liste n'est pas exhaustive et ne concerne, de surcroît, que le cas d'un voire deux conducteurs rectangulaires noyés dans un milieu homogène. De tous ces travaux et de la loi d'Ohm qui accompagne leur description, il ressort que la densité de courant  $J$  est prépondérante selon l'axe  $z$  du repère ; les composantes  $J_x$  et  $J_y$  étant négligeables. De ce fait, l'évolution du champ  $E_z$  est, dans les conducteurs, le reflet direct de celle de la densité  $J_z$  à la valeur de la conductivité près puisque,  $J_z = \sigma E_z$ . On peut ainsi obtenir aisément la fonction de répartition du courant longitudinal dans chaque conducteur, pour chaque mode normal, et ce, pour une fréquence variable. A ce titre, nous illustrons figure 3.16, à la fréquence 1GHz, ce comportement pour le mode a et pour le mode h ; modes présentant respectivement le moins et le plus de pertes. Sur la figure 3.16 page suivante, nous avons reporté l'évolution du module du champ  $E_z$ . Il est prélevé le long de l'axe de propagation à la position  $z=z_0$  et évolue en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  de la section droite. La localisation, sur ce graphe, des interconnexions est implicite. Pour cette raison, nous les avons juste esquissées en trait pointillé.

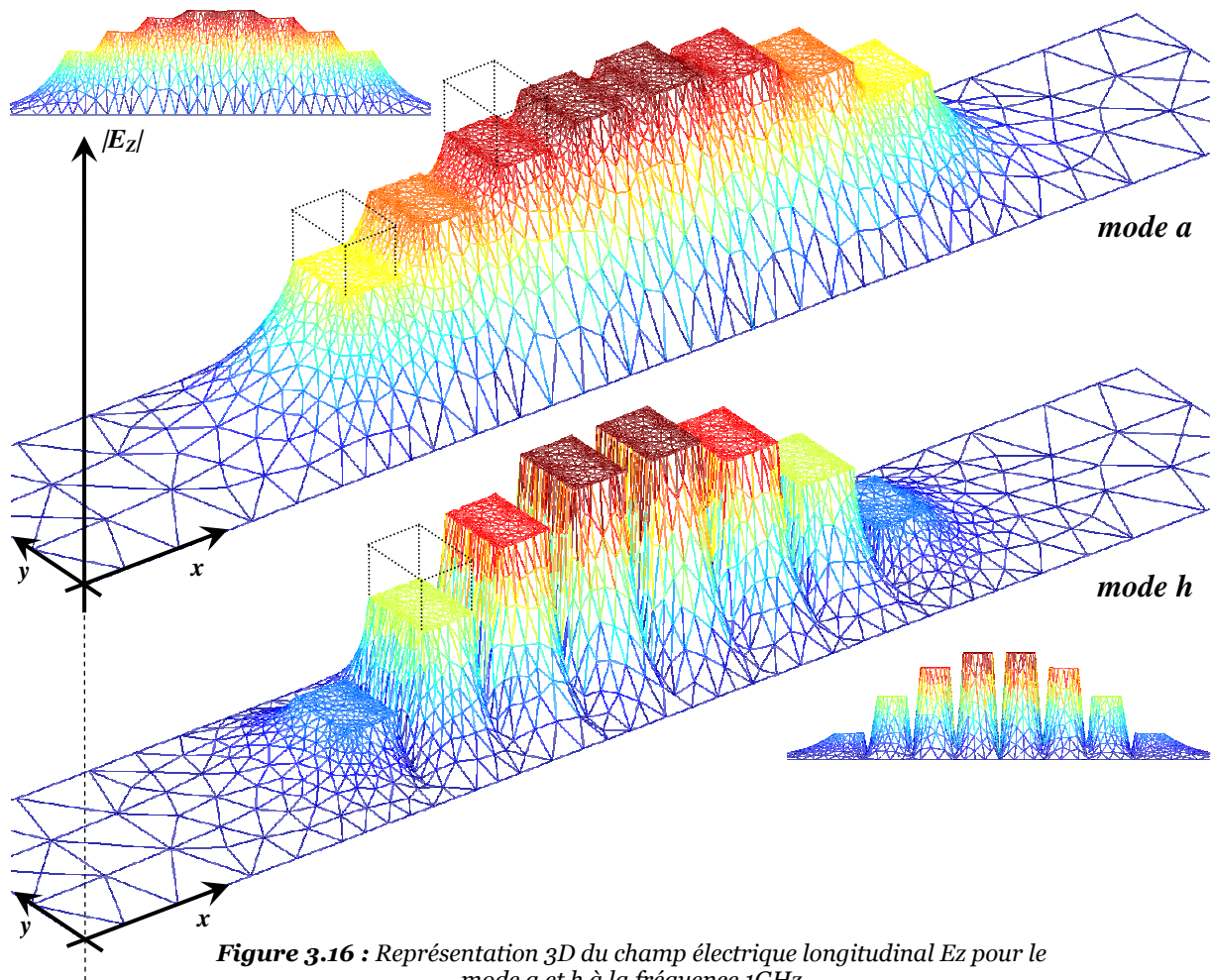


Figure 3.16 : Représentation 3D du champ électrique longitudinal  $E_z$  pour le mode a et h à la fréquence 1GHz

Un bref coup d'œil sur ces évolutions montre que:

- la densité de courant  $J$  varie très peu dans les conducteurs, quelle que soit l'interconnexion et le mode considéré
- L'amplitude de  $J$  décroît lorsque l'on s'éloigne des conducteurs centraux
- $E_z$  est, pour le mode "a", continu et monotone dans le matériau diélectrique inter conducteur alors qu'il passe par la valeur nulle entre chaque conducteur pour le mode "h".

Le relevé figure 3.17, de la répartition de l'intensité du champs  $E_z$  dans le plan de section droite (pour  $z=z_0$ ) traduit de façon plus réaliste encore les propos précédents, d'où son utilité. Résumer les spécificités du fonctionnement des interconnexions à 1GHz, quel que soit le mode normal susceptible de se propager, revient à considérer, pour les courants longitudinaux circulant dans le cuivre, une répartition quasi uniforme. L'effet de peau n'est, ici, pas encore perceptible. Tout ceci nous amène par conséquent à approximer, en premier lieu, la valeur de la résistance de la connexion au moyen de la formation statique  $R=1/\sigma S$ . Dans le cas présent, cette résistance vaut  $217 \Omega/\text{cm}$ , elle nous permettra de vérifier la bonne tenue des prévisions fournies par notre code de calcul.

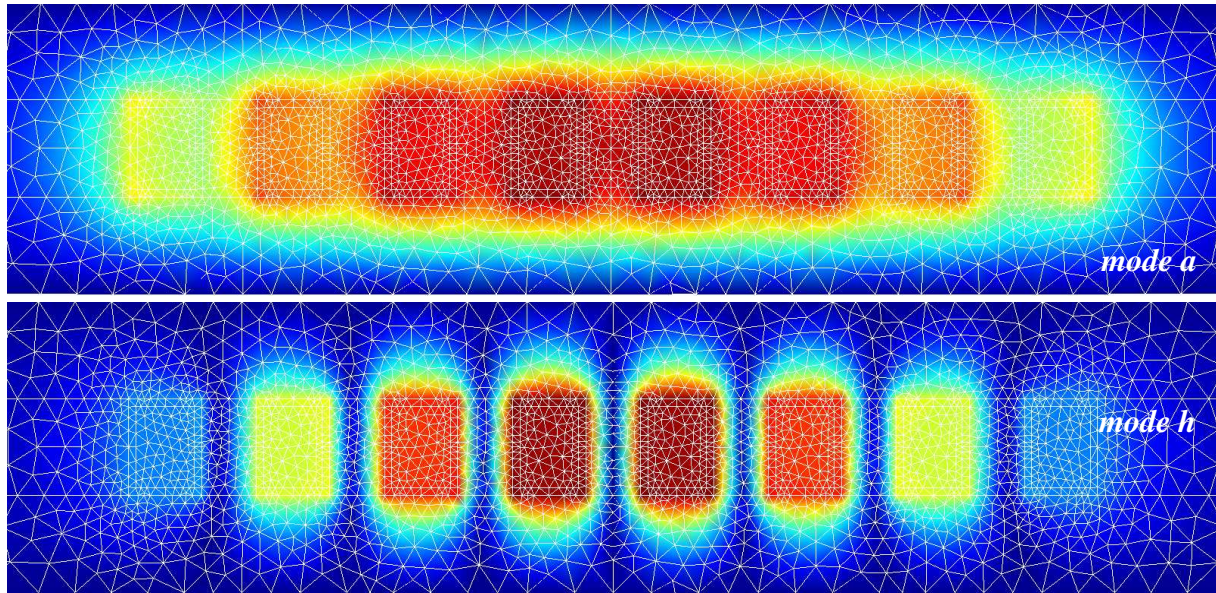


Figure 3.17 : Représentation 2D du champ  $E_z$  pour le mode a et h à la fréquence 1GHz

Bien entendu la situation est différentes à 25 GHz comme l'illustre le relevé suivant de la composante  $E_z$  figure 3.18.

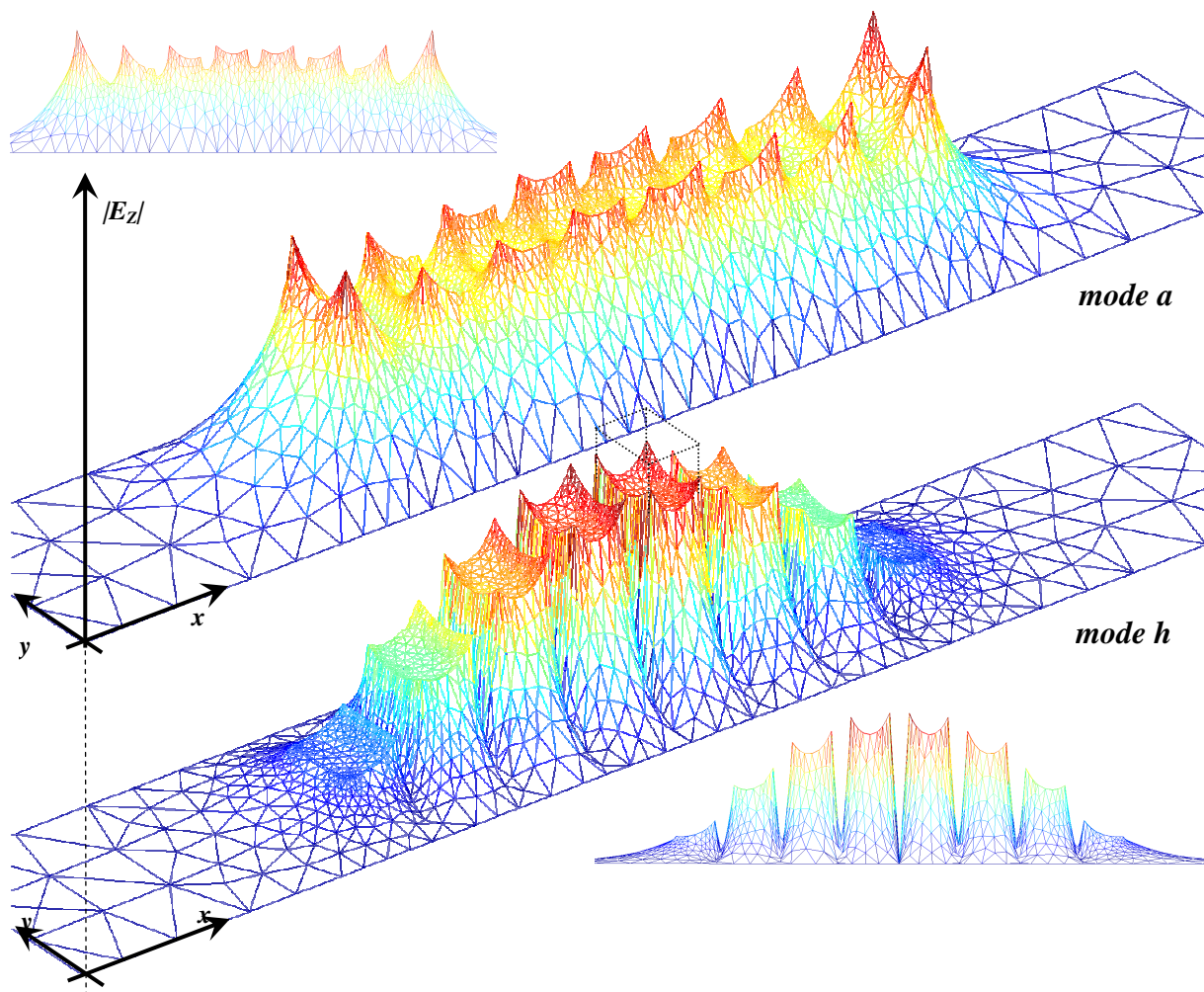
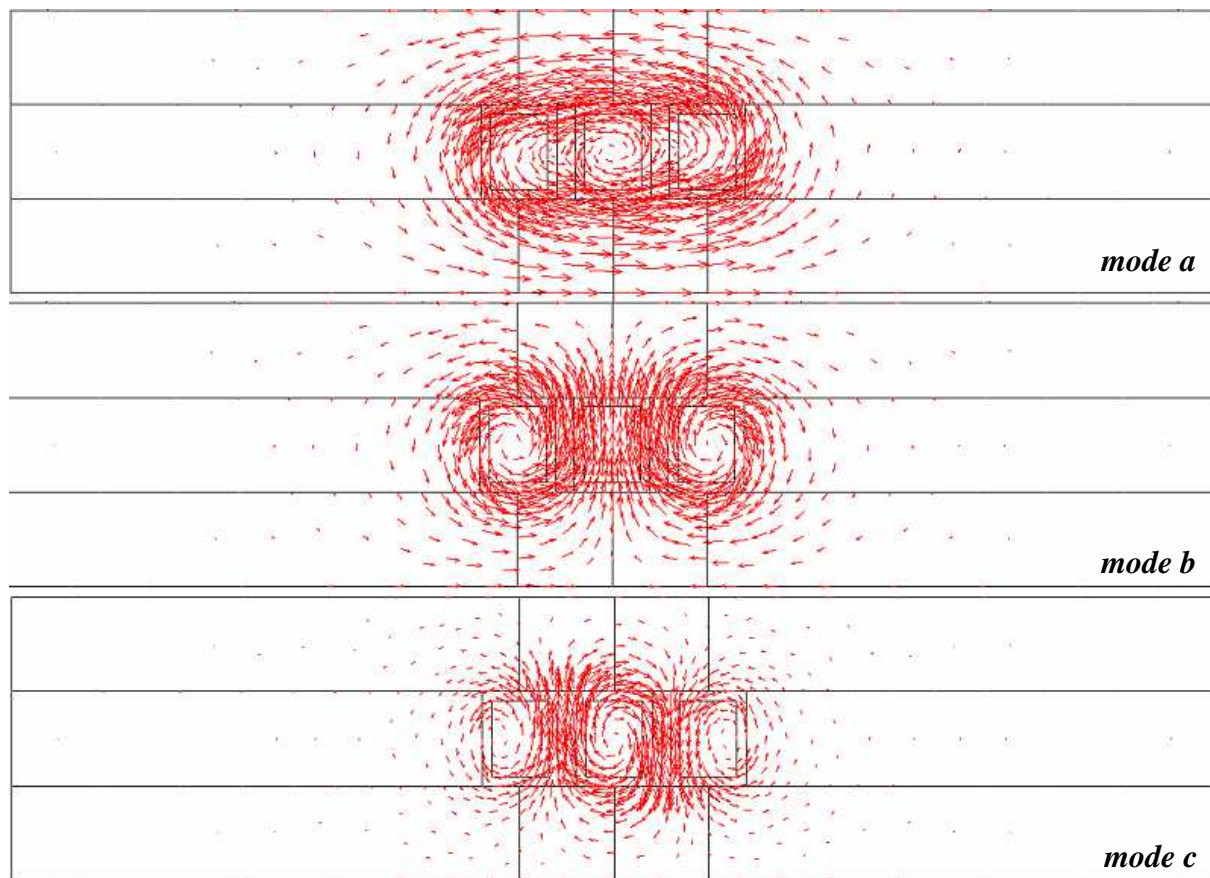


Figure 3.18 : Représentation 3D du champ électrique longitudinal  $E_z$  pour le mode a et h à la fréquence  $F=25\text{GHz}$

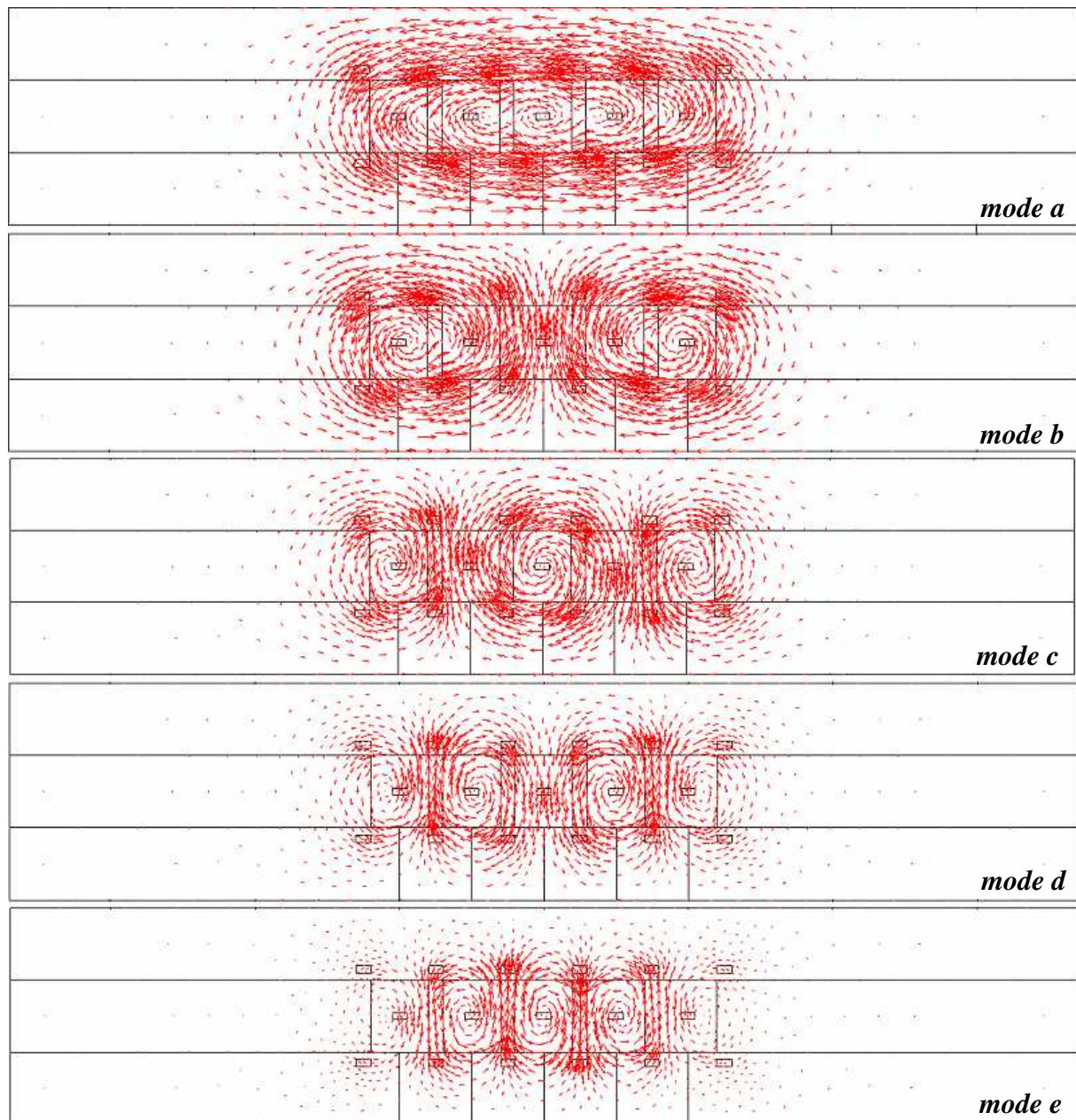
Comme nous pouvons le constater, l'amplitude du champ  $E_z$  et, par voie de conséquence, du courant  $J_z$  est plus faible vers le centre des conducteurs. Ceci est la conséquence de l'effet de peau. Cette configuration du champ électrique ressemble à celle de l'effet de pointe du champ électrique transverse. Il ne faut surtout pas les confondre, ils sont la conséquence d'effets physiques totalement différents.

Nous allons conclure cette phase d'illustration en proposant le tracé des cartes de champs magnétiques transverses relatif à nos systèmes de 3, 5 et 8 interconnexions. Ce tracé est effectué à la fréquence 1GHz pour chacun des modes.



**Figure 3.19** : Représentation vectorielle à 2 dimensions du champ  $H_T$  d'un système à trois conducteurs couplés pour  $F=1\text{GHz}$

Comme nous le constatons figure 3.19 dans le cas de trois lignes en interaction, le champ magnétique pour le mode "a" tourne autour de l'ensemble des trois conducteurs. Nous pouvons également interpréter cette topologie comme celle d'un champ tournant autour d'un unique conducteur, ce dernier résultant alors de l'association de nos trois connexions. Le mode "b" est caractérisé par deux rotations différentes de sens inverse. Le conducteur central semble alors inexistant ; aucun courant longitudinal n'y circule. Quant au mode "c", le champ magnétique tourne séparément autour de chaque conducteur en respectant, comme il se doit, la symétrie électrique du type CCM pour cet exemple.



**Figure 3.20 :** Représentation vectorielle à 2 dimensions du champ magnétique transverse  $H_t$  d'un système à cinq conducteurs couplés pour  $F=1\text{GHz}$

Nous retrouvons les trois configurations précédentes dans la cartographie des champs magnétiques transverses de cinq interconnexions figure 3.20. En effet, le nombre de rotation s'incrémente naturellement lorsque du mode "a", on passe au mode "b", puis au mode "c". Bien évidemment, deux situations supplémentaires apparaissent, celles des modes "d" et "e" où le champ magnétique transverse tourne respectivement quatre et cinq fois. Dans ce dernier cas de figure, le champ enlaçant chaque conducteur est nettement visible.

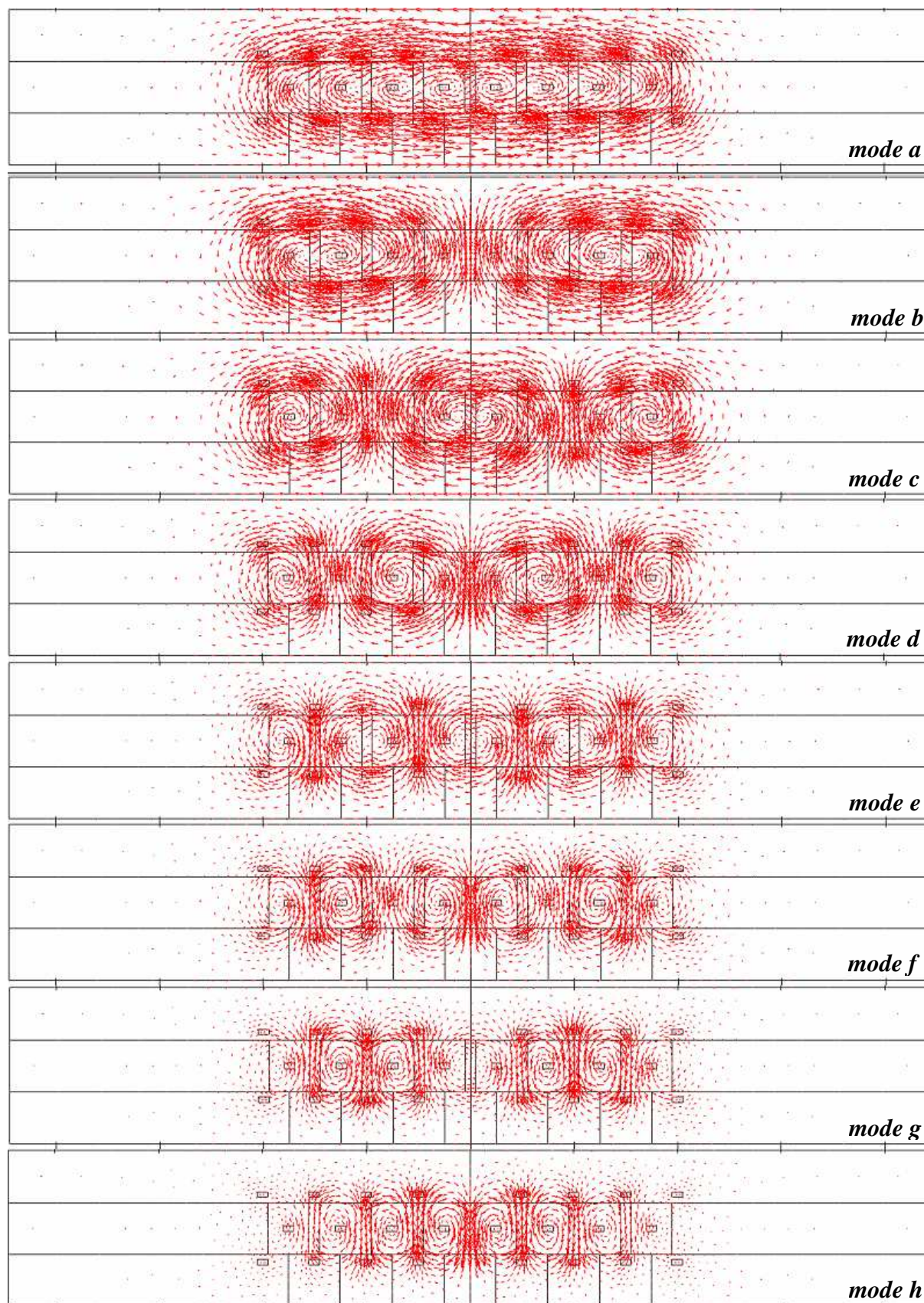


Figure 3.21 : Représentation vectorielle à 2 dimensions du champ magnétique transverse  $H_T$  d'un système à huit conducteurs couplés pour  $F=1\text{GHz}$

Les observations que nous venons d'effectuer pour la configuration à cinq interconnexions sont intégralement applicables à notre système de huit interconnexions comme l'indique la figure 3.21. Pour le mode "a", on retrouve un champ magnétique entourant l'ensemble des huit conducteurs alors que le cinquième mode (mode "e") est caractérisé par cinq rotations du champ magnétique transverse réparties sur les huit lignes. Bien évidemment, seule la cartographie du mode "h" permet de retrouver le cas de figure où les champs magnétiques tournent séparément autour de chaque conducteur, donc huit fois. On retrouve, bien entendu, des fonctionnements identiques à la fréquence 25 GHz.

#### 4 Etablissement du schéma électrique équivalent

Après avoir effectué ce bref "état des lieux" électromagnétique, nous pouvons à présent aborder la phase d'élaboration du schéma électrique équivalent à notre système de lignes couplées. Rappelons que ce système concerne toujours le cas le plus complexe de huit interconnexions cuivre espacées de 0,2  $\mu\text{m}$ , de dimension 0,8\*1  $\mu\text{m}$ , à pertes, le tout baignant dans un milieu homogène de silice d'épaisseur totale de 3  $\mu\text{m}$  ( $\epsilon_r=3.9$ ,  $\tan(\delta)=10^{-3}$ ). Au risque de nous répéter, nous remémorons les relations (3.4) et (3.5) établies auparavant ; relations sur lesquelles s'appuie la suite de notre travail, à savoir :

$$[Z] = [V][\gamma][I]^{-1} \quad (3.15)$$

$$[Y] = [I][\gamma][V]^{-1} \quad (3.16)$$

Bien évidemment, nous n'évoquons plus les spécificités de la matrice  $[\gamma]$  puisque le comportement des différentes valeurs propres a déjà été discuté. De la même manière, nous ne nous occupons pas du contenu des matrices  $[V]$  et  $[I]$ . Signalons tout de même, que nous avons sélectionné et construit des parcours d'intégrations autour des différents conducteurs, puis entre les conducteurs et celui de référence pour déterminer le contenu de ces matrices. Après calcul et extraction des éléments de notre cellule élémentaire aux fréquences 1 et 25 GHz (début et fin de spectre fréquentiel permettant une reconstitution fidèle de notre impulsion en série de Fourier), nous séparons les parties réelles et imaginaires des matrices  $[Z]$  et  $[Y]$  pour des raisons de lisibilité. Ainsi, nous répertorions leur contenu sous la forme d'une matrice résistance  $[R]$  et d'une matrice inductance  $[L]$  en lieu et place de la réactance directement proportionnelle à la pulsation. La même démarche est adoptée pour le report des valeurs complexe de la matrice  $[Y]$  sous la forme de deux matrices réelles ; l'une concerne la conductance  $[G]$ , l'autre la matrice des capacités  $[C]$ . Nous consignons l'ensemble de ces résultats dans le tableau 3.2

Avant d'entrer dans le détail des chiffres, nous désirons fournir quelques éléments d'appréciation globaux. Ainsi, nous proposons de ne discuter, dans un premier temps, que du caractère de réciprocité et de symétrie des matrices  $[R]$ ,  $[L]$ ,  $[C]$ , et  $[G]$  consignées dans le tableau 3.2 puisque ce système de connexions est d'abord passif donc réciproque puis symétrique à cause de la géométrie choisie.

Fréquence=25GHz Tan( $\delta$ )=10<sup>-3</sup>

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>[R]</b> Ω/cm	241.870200	6.641162	8.998689	7.154883	4.057319	2.005443	0.894917	0.388556
	6.641162	254.472210	11.283863	7.277355	6.489941	3.793353	1.932074	0.894925
	8.998689	11.283863	256.101520	11.906172	7.023281	6.418734	3.793390	2.005451
	7.154883	7.277355	11.906172	256.352940	11.978915	7.023136	6.490006	4.057269
	4.057319	6.489941	7.023281	11.978915	256.352600	11.906886	7.277256	7.154821
	2.005443	3.793353	6.418734	7.023136	11.906886	256.101400	11.283730	8.998820
	0.894917	1.932074	3.793390	6.490006	7.277256	11.283730	254.472530	6.641256
	0.388556	0.894925	2.005451	4.057269	7.154821	8.998820	6.641256	241.871160
<b>[L]</b> nH/cm	3.060852	1.381732	0.503653	0.182076	0.064532	0.022275	0.007375	0.002164
	1.381732	3.024025	1.373311	0.501942	0.182031	0.064724	0.022279	0.007374
	0.503653	1.373311	3.022659	1.373390	0.502188	0.182059	0.064724	0.022274
	0.182076	0.501942	1.373390	3.022907	1.373422	0.502187	0.182031	0.064531
	0.064532	0.182031	0.502188	1.373422	3.022905	1.373390	0.501942	0.182076
	0.022275	0.064724	0.182059	0.502187	1.373390	3.022659	1.373311	0.503652
	0.007375	0.022279	0.064724	0.182031	0.501942	1.373311	3.024022	1.381729
	0.002164	0.007374	0.022274	0.064531	0.182076	0.503652	1.381729	3.060843
<b>[C]</b> pF/cm	1.192704	2.133633	0.009479	0.000381	0.000141	0.000118	0.000083	-0.000077
	2.133633	0.688692	2.127895	0.009117	0.000404	0.000067	-0.000275	0.000083
	0.009479	2.127895	0.684768	2.128681	0.009305	0.000240	0.000067	0.000118
	0.000381	0.009117	2.128681	0.684921	2.128283	0.009314	0.000404	0.000141
	0.000141	0.000404	0.009305	2.128283	0.684686	2.128741	0.009110	0.000381
	0.000118	0.000067	0.000240	0.009314	2.128741	0.684935	2.128283	0.009483
	0.000083	-0.000275	0.000067	0.000404	0.009110	2.128283	0.688597	2.134287
	-0.000077	0.000083	0.000118	0.000141	0.000381	0.009483	2.134287	1.192799
<b>[G]</b> mS/cm	0.187354	0.334977	0.001554	0.000087	0.000037	0.000018	-0.000012	0.000001
	0.334977	0.108192	0.334140	0.001390	0.000052	0.000027	0.000008	-0.000024
	0.001554	0.334140	0.107581	0.334325	0.001517	0.000009	-0.000001	-0.000005
	0.000087	0.001390	0.334325	0.107599	0.334259	0.001463	0.000013	0.000023
	0.000037	0.000052	0.001517	0.334259	0.107582	0.334489	0.001443	0.000006
	0.000018	0.000027	0.000009	0.001463	0.334489	0.107600	0.334417	0.001493
	-0.000012	0.000008	0.000001	0.000013	0.001443	0.334417	0.108186	0.335303
	0.000001	-0.000024	0.000005	0.000023	0.000006	0.001493	0.335303	0.187380

Tableau 3.2 : Matrices R, L, C, G obtenues à une fréquence de 25GHz

Sélectionnons, par exemple, le troisième élément de la première colonne de chaque matrice, soit  $E_{31}$ . La réciprocité stipule que  $E_{31}=E_{13}$ . Cette propriété est illustrée pour chacun des éléments R, L, C, G dans les cases colorées en jaune. Vérifiée jusqu'à six chiffres après la virgule, elle n'est pas mise en défaut, et ce, même dans le cas d'éléments erronés puisqu'il en existe quelques uns (ceux de signe négatif). Cette réciprocité n'est pas davantage détruite pour les termes d'ordre élevé liés aux interactions très faibles entre les lignes les plus éloignées les unes des autres. Nous pensons à des éléments du type  $E_{61}$ ,  $E_{71}$  voire peut être  $E_{81}$  ou encore  $E_{28}$ , cette énumération n'étant pas exhaustive. Nous complétons ce bilan qualitatif



par une vérification des propriétés de symétrie ; propriétés afférentes à la géométrie de notre problème.

		Fréquence=25GHz Tan( $\delta$ )=10 <sup>-3</sup>							
		1	2	3	4	5	6	7	8
<b>[R]</b>	$\Omega/cm$	241.870200	6.641162	8.998689	7.154883	4.057319	2.005443	0.894917	0.388556
		6.641162	254.472210	11.283863	7.277355	6.489941	3.793353	1.932074	0.894925
		8.998689	11.283863	256.101520	11.906172	7.023281	6.418734	3.793390	2.005451
		7.154883	7.277355	11.906172	256.352940	11.978915	7.023136	6.490006	4.057269
		4.057319	6.489941	7.023281	11.978915	256.352600	11.906886	7.277256	7.154821
		2.005443	3.793353	6.418734	7.023136	11.906886	256.101400	11.283730	8.998820
		0.894917	1.932074	3.793390	6.490006	7.277256	11.283730	254.472530	6.641256
		0.388556	0.894925	2.005451	4.057269	7.154821	8.998820	6.641256	241.871160
<b>[L]</b>	nH/cm	3.060852	1.381732	0.503653	0.182076	0.064532	0.022275	0.007375	0.002164
		1.381732	3.024025	1.373311	0.501942	0.182031	0.064724	0.022279	0.007374
		0.503653	1.373311	3.022659	1.373390	0.502188	0.182059	0.064724	0.022274
		0.182076	0.501942	1.373390	3.022907	1.373422	0.502187	0.182031	0.064531
		0.064532	0.182031	0.502188	1.373422	3.022905	1.373390	0.501942	0.182076
		0.022275	0.064724	0.182059	0.502187	1.373390	3.022659	1.373311	0.503652
		0.007375	0.022279	0.064724	0.182031	0.501942	1.373311	3.024022	1.381729
		0.002164	0.007374	0.022274	0.064531	0.182076	0.503652	1.381729	3.060843
<b>[C]</b>	pF/cm	1.192704	2.133633	0.009479	0.000381	0.000141	0.000118	0.000083	-0.000077
		2.133633	0.688692	2.127895	0.009117	0.000404	0.000067	-0.000275	0.000083
		0.009479	2.127895	0.684768	2.128681	0.009305	0.000240	0.000067	0.000118
		0.000381	0.009117	2.128681	0.684921	2.128283	0.009314	0.000404	0.000141
		0.000141	0.000404	0.009305	2.128283	0.684686	2.128741	0.009110	0.000381
		0.000118	0.000067	0.000240	0.009314	2.128741	0.684935	2.128283	0.009483
		0.000083	-0.000275	0.000067	0.000404	0.009110	2.128283	0.688597	2.134287
		-0.000077	0.000083	0.000118	0.000141	0.000381	0.009483	2.134287	1.192799
<b>[G]</b>	mS/cm	0.187354	0.334977	0.001554	0.000087	0.000037	0.000018	-0.000012	0.000001
		0.334977	0.108192	0.334140	0.001390	0.000052	0.000027	0.000008	-0.000024
		0.001554	0.334140	0.107581	0.334325	0.001517	0.000009	-0.000001	-0.000005
		0.000087	0.001390	0.334325	0.107599	0.334259	0.001463	0.000013	0.000023
		0.000037	0.000052	0.001517	0.334259	0.107582	0.334489	0.001443	0.000006
		0.000018	0.000027	0.000009	0.001463	0.334489	0.107600	0.334417	0.001493
		-0.000012	0.000008	0.000001	0.000013	0.001443	0.334417	0.108186	0.335303
		0.000001	-0.000024	0.000005	0.000023	0.000006	0.001493	0.335303	0.187380

Tableau 3.3 : Matrices R, L, C, G obtenues à une fréquence de 25GHz

A ce titre, regardons le tableau 3.3 dans lequel les éléments  $E_{31}$  et  $E_{13}$  (cases jaunes) sont comparés à ceux  $E_{86}$  et  $E_{68}$  (cases oranges sur le tableau 3.3). Force est de constater qu'ils sont égaux deux à deux à savoir  $E_{31}=E_{13}$  et  $E_{86}=E_{68}$  de part la propriété de réciprocité mais ne diffèrent entre eux qu'à partir du quatrième chiffre après la virgule pour les éléments résistifs et inductifs et du cinquième ou sixième chiffre pour les conductances et les capacités. Ceci caractérise, nous l'avons compris, la symétrie de notre problème puisque d'un point de vue théorique nous devons écrire que  $E_{31}=E_{13}=E_{86}=E_{68}$ . Le résultat est tout aussi satisfaisant lorsque l'on compare les termes de plus faible interaction comme ceux déjà cités auparavant tel  $E_{71}$  par exemple. Cet élément vérifie la relation  $E_{71}=E_{17}=E_{82}=E_{28}$  pour les matrices [R], [L], [C] mais pas pour les conductances. Une explication, sur cet état de fait, est fournie par la suite. Remarquons enfin que les termes de la diagonale principale sont égaux deux à deux en

obéissant bien à la loi suivante :  $E_{11}=E_{88}$ ,  $E_{22}=E_{77}$ ,  $E_{33}=E_{66}$  et enfin  $E_{44}=E_{55}$ . Cette relation est en moyenne qualifiée à mieux que  $10^{-5}$ , et ce, quelle que soit la matrice considérée. Nous voyons, au moyen de ces quelques vérifications, que notre code prend bien en compte les propriétés de réciprocité et de symétrie, et ce, avec une très bonne précision. Il est clair que ceci constitue un gage de bon comportement, “numériquement parlant”. Cette première étape qualitative étant validée, nous pouvons à présent aborder le volet quantitatif de nos investigations. Ce volet porte essentiellement sur les composantes résistives de notre cellule de base qui ne sont que la traduction des parties réelles des matrices  $[Z]$  et  $[Y]$ . Il s’agit de la résistance et de la conductance respectivement. Dans un contexte de pertes diélectriques faibles, nous pouvons d’ailleurs montrer que la conductance (propre ou mutuelle) s’exprime au moyen de la relation suivante [24] :

$$G = C \omega \tan(\delta) \tag{3.17}$$

Comme nous le constatons, cette grandeur est proportionnelle à la capacité, à la pulsation, mais aussi à la tangente de l’angle de pertes. Pour le vérifier, nous regroupons dans le tableau 3.4, la moitié des matrices C et G calculées grâce à ELFI aux fréquences 1 et 25 GHz.

		Fréquence=1GHz				Fréquence=25GHz			
		1	2	3	4	1	2	3	4
<b>[C]</b>	1	1.190323	2.129786	0.011282	0.000608	1.192704	2.133633	0.009479	0.000381
	2	2.129786	0.688249	2.123484	0.010438	2.133633	0.688692	2.127895	0.009117
	3	0.011282	2.123484	0.683993	2.125094	0.009479	2.127895	0.684768	2.128681
	4	0.000608	0.010438	2.125094	0.683597	0.000381	0.009117	2.128681	0.684921
	5	0.000000	0.000584	0.010735	2.124219	0.000141	0.000000	0.000000	2.128283
	6	$\times \omega \tan(\delta)$	0.000172	0.000589	0.010169	0.000118	0.000000	0.000000	0.000314
	7	0.000297	0.000029	0.000029	0.001051	0.000083	-0.000000	0.000000	0.000404
	8	0.000094	0.000081	0.000112	0.000415	-0.000077	0.000000	0.000118	0.000141
<b>[G]</b>	1	0.007451	0.013530	0.000217	0.000024	0.187354	0.334977	0.001554	0.000087
	2	0.013530	0.004350	0.017228	-0.000452	0.334977	0.108192	0.334140	0.001390
	3	0.000217	0.017228	0.004372	0.016315	0.001554	0.334140	0.107581	0.334325
	4	0.000024	0.000452	0.016315	0.004244	0.000087	0.001390	0.334325	0.107599
	5	0.000013	0.000030	-0.000195	0.010914	0.000037	0.000052	0.001517	0.334259
	6	0.000007	0.000014	0.000244	0.000302	0.000018	0.000027	0.000009	0.001463
	7	-0.000004	0.000007	0.000003	-0.000022	-0.000012	0.000008	0.000001	0.000013
	8	0.000002	-0.000003	0.000001	0.000008	0.000001	-0.000024	0.000005	0.000023

Tableau 3.4 : Comparaison des quatre premières colonnes des matrices C et G à 1GHz et à 25GHz

Nous ne présentons donc que les quatre premières colonnes pour améliorer la lecture de ces données. La démarche employée pour vérifier la bonne tenue d’ELFI, et par voie de conséquence les valeurs calculées, est ainsi clairement identifiée par les “bulles” et les facteurs multiplicatifs apparaissant en encadré. En effet, si l’on sélectionne séparément, comme point de départ, les valeurs de C et G calculées par ELFI, nous en déduisons toutes les autres, au degré de précision numérique près, à savoir  $10^{-5}$ .

- ✓ soit en multipliant par 25 la valeur de G définie à 1GHz
- ✓ soit en pondérant la valeur de G calculée à 25 GHz par  $\omega \tan(\delta)$  pour obtenir la valeur des capacités.

Bien évidemment, d'autres combinaisons sont possibles avec la même précision de  $10^{-5}$  sauf pour les interactions entre les lignes les plus distantes puisqu'un signe négatif caractérise le terme  $G_{71}$ . Il est clair que les termes  $G_{71}$ ,  $G_{81}$  sont trop faibles et ne peuvent être calculés précisément par ELFI, et ce, pour cet exemple précis. Ceci dit, il ne faut pas oublier que la conductance G, quelle que soit la valeur des  $C_{ii}$  et  $C_{ij}$ , est 1000 fois plus faible que la composante réactive ( $C\omega$ ) du fait de la valeur de la tangente de l'angle de perte qui vaut  $10^{-3}$  dans le cas présent.

Pour ce qui concerne la comparaison avec d'autres travaux portant sur les évolutions des composantes réelles de la matrice impédance, notre marge de manœuvre est certes plus réduite. En effet, nous ne disposons d'aucune relation, approchée ou non, nous permettant de chiffrer et de prédire nos évolutions, si ce n'est la valeur statique de la résistance de la connexion. Ce faisant, nous avons malgré tout reporté dans le tableau 3.5 les quatre premières colonnes de la matrice R aux fréquences 1 et 25 GHz respectivement. Bien qu'il n'y ait pas de lien comparable à celui unissant G et  $C\omega$ , nous montrons également l'évolution des quatre premières colonnes de la matrice inductance, et ce, aux deux mêmes fréquences. En définitive, nous illustrons le comportement de l'impédance série de notre cellule.

		Fréquence=1GHz				Fréquence=25GHz			
		1	2	3	4	1	2	3	4
<b>[R]</b>	216.269352	0.213706	0.034951	0.022127	241.870200	6.641162	8.998689	7.154883	1
	0.213706	216.249855	0.201063	0.054313	6.641162	254.472210	11.283863	7.277355	2
	0.034951	0.201063	216.227324	0.192356	8.998689	11.283863	256.101520	11.906172	3
	0.022127	0.054313	0.192356	216.212081	7.154883	7.277355	11.906172	256.352940	4
	0.034876	0.019838	0.041059	0.182705	4.057319	6.489941	7.023281	11.978915	5
	0.024062	0.015789	0.017231	0.048759	2.005443	3.793353	6.418734	7.023136	6
	0.001791	0.026667	0.014563	0.015010	0.894917	1.932074	3.793390	6.490006	7
	0.001017	-0.002952	0.023683	0.034310	0.388556	0.894925	2.005451	4.057269	8
<b>[L]</b>	3.108237	1.396677	0.478708	0.166580	3.060852	1.381732	0.503653	0.182076	1
	1.396677	3.108799	1.396098	0.479230	1.381732	3.024025	1.373311	0.501942	2
	0.478708	1.396098	3.109230	1.395859	0.503653	1.373311	3.022659	1.373390	3
	0.166580	0.479230	1.395859	3.108390	0.182076	0.501942	1.373390	3.022907	4
	0.058802	0.166114	0.478832	1.397667	0.064532	0.182031	0.502188	1.373422	5
	0.020001	0.059011	0.166820	0.477436	0.022275	0.064724	0.182059	0.502187	6
	0.007083	0.019937	0.058379	0.167709	0.007375	0.022279	0.064724	0.182031	7
	0.002285	0.007078	0.020181	0.058178	0.002164	0.007374	0.022274	0.064531	8

Tableau 3.5 : Comparaison des quatre premières colonnes des matrices R et L à 1GHz et à 25GHz

Un bref coup d'œil, à la matrice résistance R, montre que la dynamique maximale entre les termes de la diagonale principale est très faible à 1GHz. En effet, les résistances propres des interconnexions sont toutes comprises entre 216,17  $\Omega$  et 216,21  $\Omega$  soit  $2,5 \cdot 10^{-4}$  de variation

relative. On comprend, dès lors, que la vérification de l'existence de symétrie entre des valeurs possédant une aussi faible dynamique soit critiquable. Elle peut, du reste, être imputée sur le compte d'un mauvais conditionnement numérique du problème et par voie de conséquence à un manque de précision. Pour cette raison, l'illustration de cette propriété à été effectuée à 25 GHz (notons qu'à 1 GHz la symétrie est vérifiée, encore faut il le préciser). Comme nous pouvons le constater, l'effet de peau, quasi imperceptible à 1 GHz, est davantage marqué à plus haute fréquence. En effet, 10% et 20% de variation relative caractérisent l'accroissement des résistances propres des lignes périphériques et centrales respectivement, et ce, à la fréquence 25 GHz. Quant aux résistances mutuelles, leurs comportements peuvent s'expliquer à partir d'un exemple plus simple ; celui de deux conducteur en interaction. En effet, dans un tel système de deux lignes symétriques, les modes a et b sont connus sous l'appellation de mode pair et impair. Par superposition de chaque état de base, la mathématique du problème aboutit aux relations suivantes :

$$L_{22} = L_{11} = \frac{L_a + L_b}{2} \quad L_{12} = L_{21} = L_m = \frac{L_a - L_b}{2} \quad R_{11} = R_{22} = \frac{R_a + R_b}{2} \quad R_{12} = R_{21} = \frac{R_a - R_b}{2}$$

Dans ces expressions, les indices 1 et 2 sont ceux des conducteurs. Ainsi L<sub>11</sub> est l'inductance propre du conducteur n°1, la mutuelle L<sub>12</sub> représentant l'interaction entre les conducteurs 1 et 2. Par symétrie et réciprocité nous avons bien entendu L<sub>11</sub>=L<sub>22</sub>=L et L<sub>12</sub>=L<sub>21</sub>=L<sub>m</sub> ainsi que R<sub>11</sub>=R<sub>22</sub>=R et R<sub>12</sub>=R<sub>21</sub>=R<sub>m</sub>. Les évolutions fréquentielles conjointes des résistances et des inductances pour les modes "a" et "b" (pair et impair) sont illustrées à la figure 3.22a pour deux interconnexions cuivre possédant les mêmes caractéristiques physiques et géométriques que celles entrant dans la confection de nos huit lignes couplées. Ces évolutions fréquentielles montrent que les inductances décroissent très légèrement avec la fréquence du fait d'une pénétration moindre des champs magnétiques dans le métal. L'inductance propre suit donc la même loi ; ce que nous pouvons observer figure 3.22b. Les résistances affectées à chacun des conducteurs pour les modes pair et impair tendent, toutes deux, vers une même valeur plancher soit 217 Ω/cm (la valeur statique) et croissent ensuite selon l'effet de peau. La résistance mutuelle, résultante du bilan résistif figure 3.22c, possède donc une valeur faible aux basses fréquences qui tend vers zéro pour le régime continu. Cette valeur croit, bien entendu, avec la fréquence. Nous retrouvons bien ce type de fonctionnement dans le tableau 3.5 (page précédente) où aux fréquences 1 et 25 GHz, le dixième et la dizaine d'ohms caractérisent respectivement cette mutuelle pour les lignes les plus proches (R<sub>12</sub>, R<sub>87</sub>, etc...). Il faut noter la présence de quelques valeurs négatives. Ceci est le signe d'un défaut de précision dans la détermination de la résistance mutuelle R<sub>28</sub> par exemple mais aussi R<sub>18</sub> ce qui n'est pas surprenant compte tenu de l'éloignement des lignes. Nous avons tenté

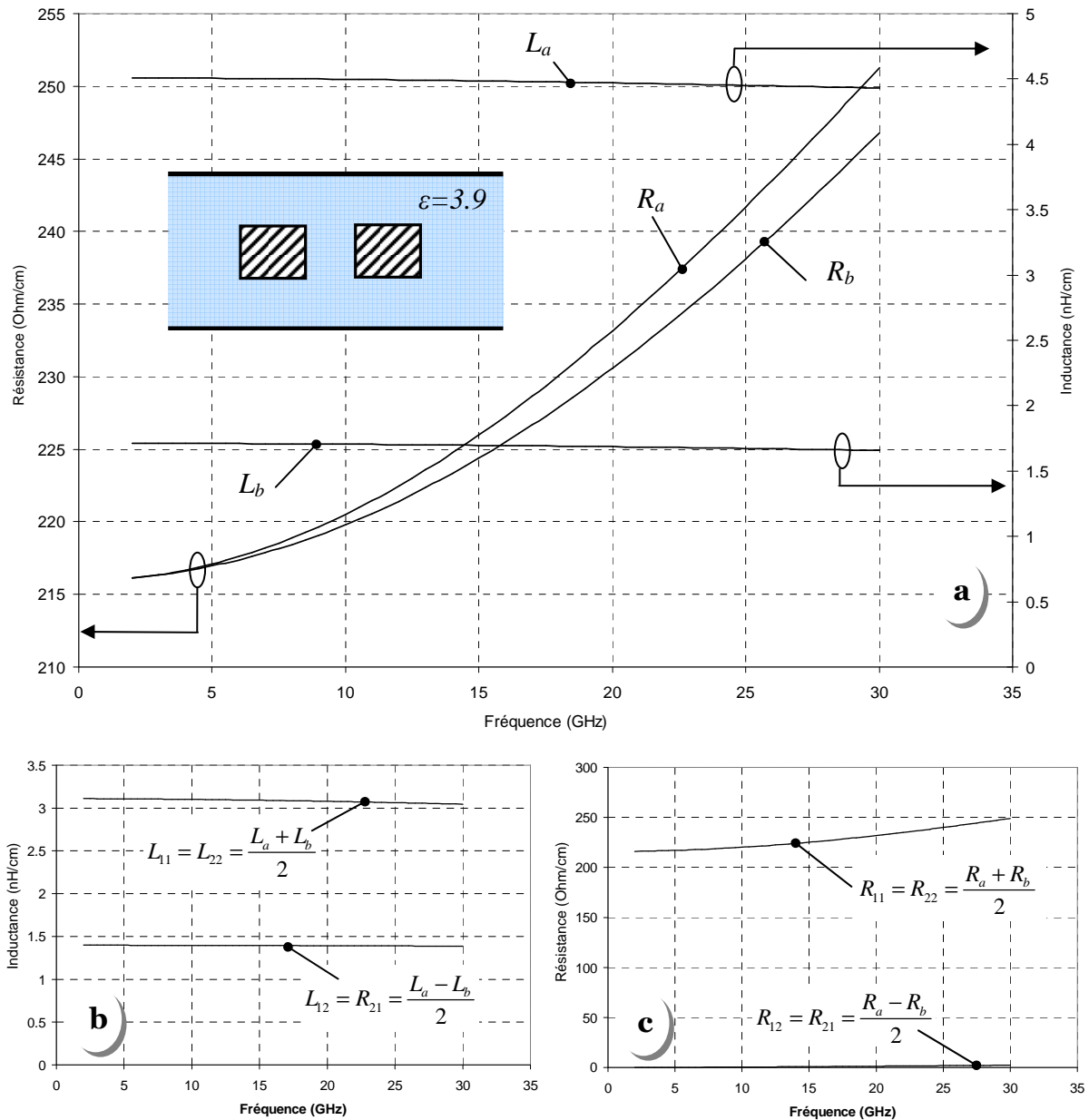


Figure 3.22 : Evolution fréquentielle des éléments  $R$ ,  $L$ ,  $R_m$ ,  $L_m$  pour un système de deux interconnexions où  $W=T=1\mu\text{m}$ ,  $H=1\mu\text{m}$  et  $\epsilon=3.9$

d'améliorer cette situation en discrétisant le plan de section droite de nos huit interconnexions sur une base de 7200 triangles. Cela correspond à environ 10% de triangles supplémentaires, comparé au cas de figure précédemment traité. Malgré cette amélioration dans le raffinement, nous avons constaté l'absence de sensibilité à une faible variation des dimensions de l'espace inter conducteur, pour les éléments  $R_{18}$ ,  $R_{28}$ ,  $G_{18}$ ,  $G_{28}$  ainsi que  $C_{18}$  et  $C_{28}$ . Comme nous pouvons le remarquer, cela ne concerne que les mutuelles résistives et capacitives entre les lignes les plus éloignées. Les inductances sont, quant à elles, sensibles à une modification de la section droite, qu'elles soient mutuelles ou non. Partant de ce constat et des propriétés de symétrie propres à notre système de huit interconnexions, les termes suivants ne sont pas pris en compte, à savoir :

$$R_{18} = R_{81} \quad R_{28} = R_{82} = R_{71} = R_{17} \quad G_{18} = G_{81} \quad G_{28} = G_{82} = G_{71} = G_{17}$$

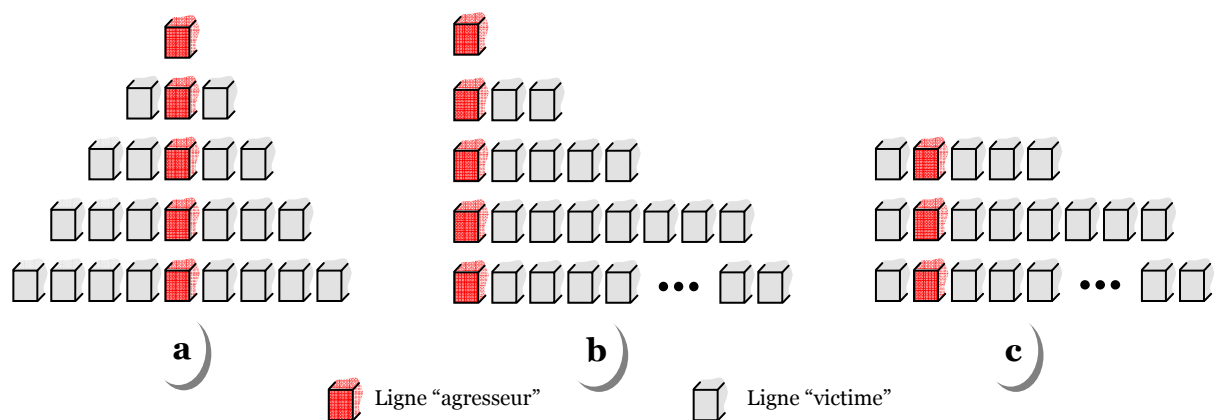
$$C_{18} = C_{81} \quad C_{28} = C_{82} = C_{71} = C_{17}$$

Sachant que chaque matrice est décrite par 64 termes, les éléments restants sont au nombre de 58 sauf pour la matrice inductance L qui, elle, est complète et ne comporte aucun terme nul pour signifier qu'une interaction n'a pu être chiffrée avec précision. Aucun problème n'a été rencontré lors de l'étude de trois et cinq interconnexions. En effet, pour ces systèmes toutes les interactions sont calculées avec précision et fiabilité. Les matrices Z et Y sont donc complètement définies.

Nous venons d'exposer le point de vue purement numérique de notre étude portant sur huit interconnexions "cuivre" et celui de l'extraction du schéma électrique correspondant. Il s'agit, bien entendu, de la configuration la plus complexe où n'ont été négligés, par manque de précision numérique, que quelques termes de très très faibles valeurs. Cela aboutit à l'élaboration, sous Spice, d'une cellule élémentaire comportant 135 éléments au lieu de 144 pour la version complète. Il est certes toujours possible de réduire ce nombre de composants. Cette opération s'effectue au prix d'un compromis entre la précision obtenue sur la solution recherchée et le nombre d'éléments requis par cellule élémentaire. Ce travail très lourd, qui doit être mené avec minutie, sort, bien entendu, du cadre de cette étude. Nous pouvons néanmoins alléger cette cellule en ôtant quelques éléments sans que cela alourdisse beaucoup notre tâche et nuise à la qualité des résultats. En effet, nous remarquons dans le tableau précédent que la première mutuelle résistive  $R_{12}$  est mille fois plus faible que la résistance propre  $R_{11}$ , et ce, à la fréquence 1GHz. Il est donc probable que l'on puisse négliger ce terme ainsi que les sept autres restants. Nous avons vérifié cet état de fait en confrontant les résultats fournis par un code de prédiction d'intégrité des signaux mis au point dans l'équipe par Christophe Séguinot à ceux calculés par Spice [31]. Pour conclure, cette cellule élémentaire est constituée de 107 éléments puisque nous avons éliminé les 28 mutuelles résistives. Bien évidemment, nous aboutissons à des conclusions en tous points identiques lorsque l'on s'intéresse aux configurations à 3 et 5 interconnexions. Dans ces deux derniers cas de figure, les cellules élémentaires, auxquelles ont été soustraites les mutuelles résistives, comportent alors 21 et 50 éléments respectivement.

## 5 Etude d'intégrité des signaux d'un système multiconducteur : application à 3, 5 et 8 interconnexions

Avant d'aborder le volet relatif à l'étude de l'intégrité des signaux, une dernière mise au point s'impose. Comme nous l'avons sous entendu dans l'introduction de ce chapitre, les travaux portant sur le thème des interconnexions couplées sont peu nombreux, si ce n'est ceux effectués sur deux et trois lignes en mutuelles interactions. Compte tenu de l'accroissement important de la densité d'intégration, nul ne peut à ce jour certifier qu'un système de deux ou trois connexions suffit pour décrire la réalité. Partant de ce constat, nous avons schématisé figure 3.23, les configurations d'excitation à trois conducteurs et plus qu'il est intéressant d'étudier. Bien évidemment, les arrangements proposés ne tiennent pas compte de la présence des niveaux supérieurs et inférieurs. Pour des raisons évidentes de clarté, nous avons occulté l'environnement de l'interconnexion et l'avons remplacé par un unique conducteur de façon à nous concentrer que sur son état à savoir "victime" (couleur blanche) ou "agresseur" (couleur rouge). A ce stade, quelques précisions s'imposent. Dans notre langage, la ligne dénommée "agresseur" est celle à l'entrée de laquelle on applique un niveau logique caractérisé par une impulsion de fréquence  $F_o$ , de temps de montée  $T_{mo}$  et d'amplitude  $V_o$ . La ligne dite "victime" est, quant à elle, passive puisqu'aucun signal n'excite l'entrée de celle dernière.



**Figure 3.23** : Quelques arrangements schématiques possibles comportant une ligne "agresseur" (rouge) entourée de lignes "victime" (blanche)

Nous reconnaissons sur la figure 3.23a le cas d'un fonctionnement symétrique où une ligne dénommée "agresseur" est entourée de lignes dites "victimes". Ainsi, en étudiant 3, 5, 7 et 9 lignes en mutuelles interactions, nous rendons compte de l'influence d'un plus proche voisin situé de part et d'autre de l'agresseur, puis de deux plus proches voisins jusqu'à quatre. Les configurations asymétriques présentées sur les figures 3.23b et 3.23c sont très nombreuses

comme on peut l'imaginer. La plus évidente concerne le cas d'une connexion perturbée à sa droite ou à sa gauche par une, deux, jusqu'à sept victimes voire plus, et ce, toutes situées du même coté. Il existe aussi tous les autres cas où la dissymétrie est moins prononcée. Il va de soi qu'à la configuration figure 3.23 il correspond le complément figure 3.24 où il n'existe qu'une victime en présence d'agresseurs.

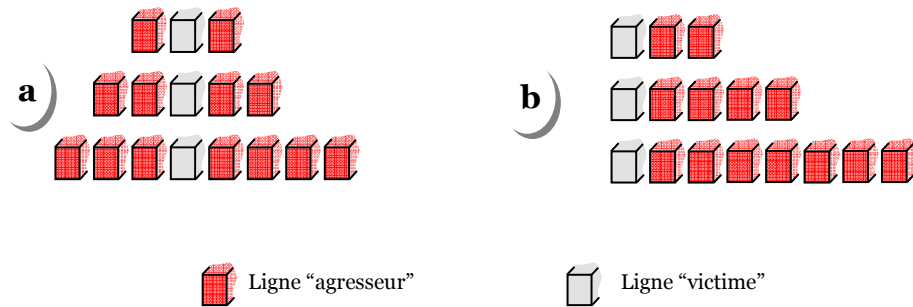


Figure 3.24 : Quelques arrangements d'une ligne victime en présence d'agresseurs

Nous ne pouvons, à ce stade, envisager toutes les combinaisons sous peine d'un trop plein de résultats. Nous avons fait le choix d'étudier un système de 3, 5 et 8 interconnexions en interaction. Nous le verrons a posteriori, les combinaisons possibles de ligne "victime" et "agresseur" sont suffisantes pour conclure. Même si ce travail vise à quantifier l'impact des interconnexions voisines sur une interconnexion de référence quelle soit victime ou agresseur, il est intéressant d'avoir, en ligne de mire, les caractéristiques d'une seule interconnexion dont les paramètres physiques et géométriques sont ceux du motif élémentaires figure 3.7 ( $W=0.8\mu\text{m}$ ,  $T=1\mu\text{m}$ ,  $H=1\mu\text{m}$ ,  $\sigma=58\text{S/cm}$ ) à partir duquel chaque système d'interconnexions est construit.

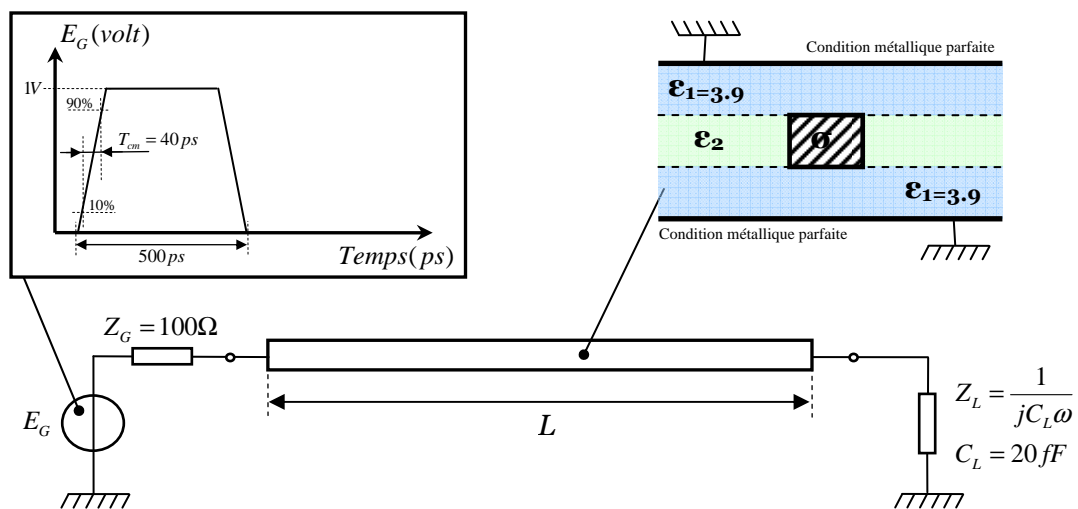


Figure 3.25 : Représentation schématique des conditions d'attaque et de charge pour une interconnexion



Les conditions d'étude de celle dernière sont alors illustrées figure 3.25. Cette interconnexion de longueur  $L$  possède un plan de section droite en tout point identique à chaque interconnexion de base intervenant dans nos systèmes de 3, 5 et 8 lignes. Les paramètres de cette étude sont la longueur de la connexion ainsi que la valeur de la permittivité  $\epsilon_2$  remplissant la zone de couplage lorsque plusieurs lignes, si elles existent, sont situées côte à côte. Elle est chargée, en sortie, par l'impédance d'entrée d'un buffer soit, une capacité de 20fF [32]. Quant à l'entrée de la connexion, un générateur délivrant une impulsion d'amplitude  $E_G=1$  V sous  $100 \Omega$  de résistance interne se substitue à la sortie du buffer d'attaque. Notre impulsion d'entrée possède une fréquence de 1GHz pour un temps de commutation sur le front montant  $T_{cm}=40$ ps. Rappelons que ce dernier est, par définition, calculé entre 10% et 90% de l'amplitude du signal ; soit 40 ps pour une rampe de 50 ps par volt. Ces mises au point étant faites, la figure 3.26 regroupe en fonction de la longueur "L" de notre interconnexion de référence, les évolutions des temps de montée " $T_{cm}$ " et de retard de propagation " $T_p$ ".

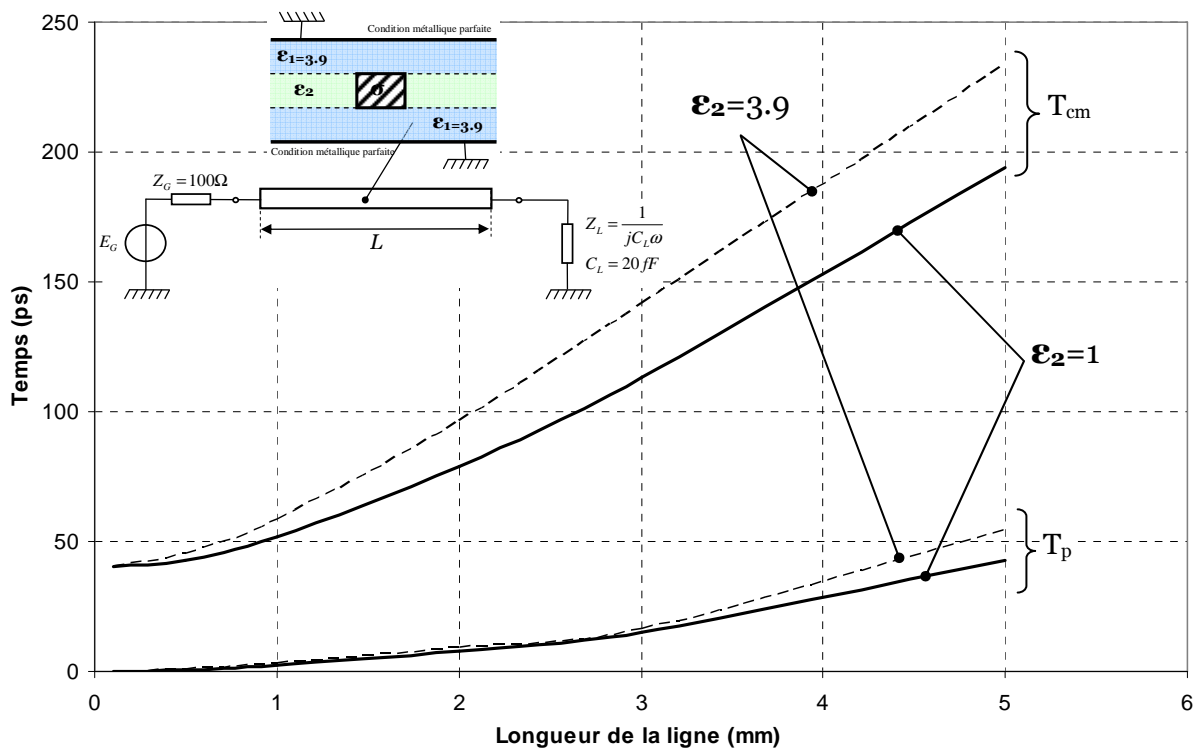
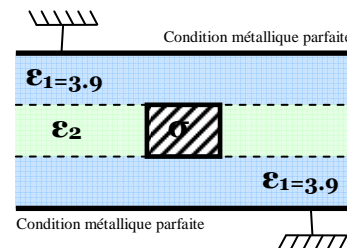


Figure 3.26 : Evolution des temps de montée et de retard de propagation en fonction de la longueur de l'interconnexion pour deux valeurs de permittivité  $\epsilon_2$ .

Ce retard représente la différence des temps calculés entre le début et la fin de la ligne. Par définition, ces temps sont estimés à la moitié de l'amplitude crête du signal d'excitation et du signal recueilli après qu'il se soit propagé sur une distance "L". Pour être concis, cette figure regroupe deux cas asymptotiques où la zone dite de " couplage" est respectivement remplie de silice (le pire cas) ou d'air qui représente la limite technologique (le meilleur cas de figure).

Ce n'est pas tant la permittivité de la zone de couplage qui importe ici, mais plutôt la longueur de l'interconnexion. En effet, réduire la permittivité d'un facteur 4 (1 pour 3.9) n'a d'incidence que dans le cas d'interconnexion longue de plus d'un millimètre. On notera que cet impact est négligeable pour les interconnexions très courtes ( $L < 100\mu\text{m}$ ). Pour réduire l'abondance de chiffres, nous préférons introduire la notion de "facteur de mérite" pour l'interconnexion. Ce dernier se définit pour le millimètre de ligne. Ainsi, pour le cas qui nous préoccupe, il faut se souvenir des chiffres récapitulés dans le tableau 3.6 suivant :

	$T_{cm}$ (ps)	$T_p$ (ps)
$\epsilon_2=3.9$	58.33	2.75
$\epsilon_2=1$	52.01	2.20



**Tableau 3.6 :** *Facteur de mérite : temps de commutation sur le front montant et de retard de propagation pour un millimètre de connexion en fonction de la permittivité  $\epsilon_2$  de la zone de couplage ( $F_0=1\text{GHz}$ ,  $T_{cm0}=40\text{ps}$ )*

Dans la configuration où le matériau diélectrique est partout le même (3.9), un millimètre de cette connexion cuivre cause presque 50% de dégradation du temps de montée comparé à celui du signal original et 2ps de temps de retard. Il faut encore rappeler que nous nous situons dans les niveaux semi globaux voire globaux d'après les travaux de Meindl ; ce qui signifie que le millimètre de connexion de suffit pas à relier, entre eux, les divers éléments du circuit. Les chiffres cités précédemment, fournissent donc une appréciation mais pas les dégradations occasionnées par deux ou trois millimètres de connexion. Ceci est la raison pour laquelle la figure 3.26 regroupe nos évolutions jusqu'à cinq millimètres de longueur de ligne.

### 5.1 Etude d'un système à huit interconnexions : calcul des temps de montée et de retard de propagation

Compte tenu de l'abondance d'informations, nous avons choisi de récapituler les résultats sur nos lignes en interaction pour trois configurations géométriques précises. Ceci est effectué quel que soit le nombre de connexions "cuivre" couplées (même faiblement) et quelle que soit la technologie envisagée, symétrique où asymétrique [33]. Ces trois configurations sont :

- ✓ pour la première ; une zone de couplage plutôt fort où la distance entre les lignes et la permittivité remplissant la zone de couplage valent respectivement 200 nanomètres et  $\epsilon_2=3.9$ .

- ✓ pour la seconde ; une zone de couplage moyenne, caractérisée par un espace inter-conducteur et un matériau remplissant cet espace égaux respectivement à 200 nm et  $\epsilon_2=1$ .
- ✓ enfin pour la troisième ; une interaction faible où de l'air occupe le volume entre deux conducteurs en regard et distants de 1 $\mu$ m.

La première et la troisième configuration représentent toutes deux une limite asymptotique qui doit être considérée respectivement comme le pire et le meilleur cas. Pour ne pas nous éloigner du contexte précédent, nous allons à présent estimer les évolutions des temps de montée  $T_{cm}$  et de retard de propagation  $T_p$  lorsqu'une ligne est active (un agresseur) et est perturbée à sa droite par la présence de sept lignes victimes. Il s'agit de l'attaque dite "au bord" dans la légende des figures qui vont suivre. De même, nous évaluons l'impact sur l'agresseur, de trois et quatre victimes situées respectivement à gauche et à droite. Cette topologie est assimilée comme une excitation dite "au centre" dans nos légendes, et ce, bien qu'il y ait une légère disymétrie. Ceci est récapitulé à la figure 3.27 suivante où l'agresseur est respectivement la ligne N°1 pour l'attaque au bord et, N°4 pour l'excitation au centre.

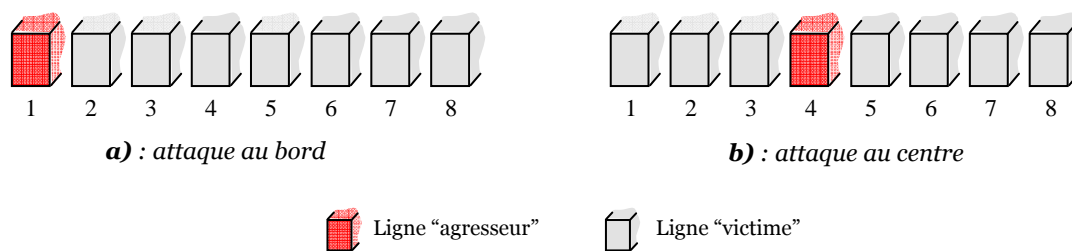


Figure 3.27 : Illustration de l'attaque dite "au bord" puis "au centre" dans un système à huit interconnexions

Dans les deux cas traités, le système étudié comporte un total de huit interconnexions. Nous rappelons, pour mémoire, les conditions d'attaque et de charge d'un agresseur et d'une victime ; conditions que l'on duplique autant de fois qu'il y a de lignes actives (agresseur) et passives (victimes). Ainsi, un générateur délivrant une impulsion d'amplitude 1 volt sous 100 $\Omega$  simule l'excitation à l'entrée de la ligne dénommée "agresseur". Le temps de montée de l'impulsion de fréquence 1GHz est celui d'une rampe de 50ps/volt soit 40 ps. La ligne active est chargée à son extrémité par une capacité de 20 fF tout comme la ligne passive. Cette ligne appelée "ligne victime" est fermée, à son entrée, sur une impédance de 200 $\Omega$  soit celle de la sortie d'un buffer dans l'état "éteint" (off).

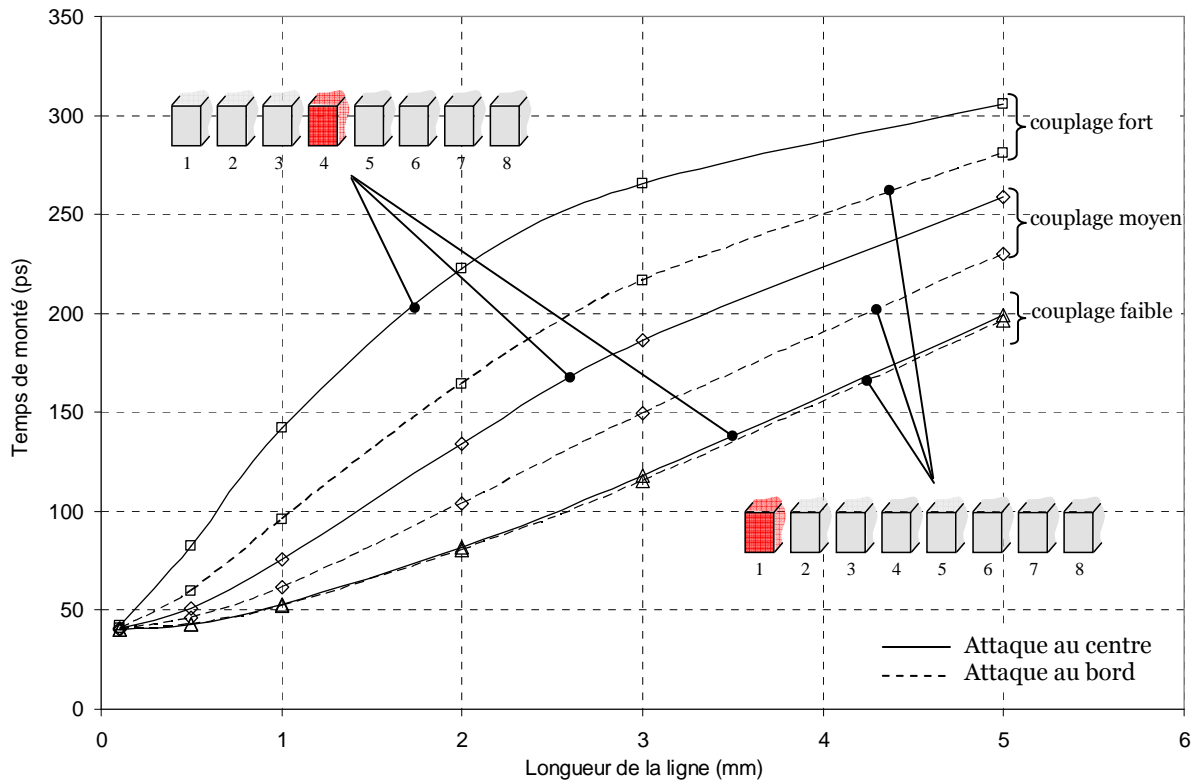


Figure 3.28a : Evolution du temps de montée en fonction de la longueur des huit interconnexions pour trois configurations de couplage (fort, moyen, faible) pour une attaque au bord et au centre.

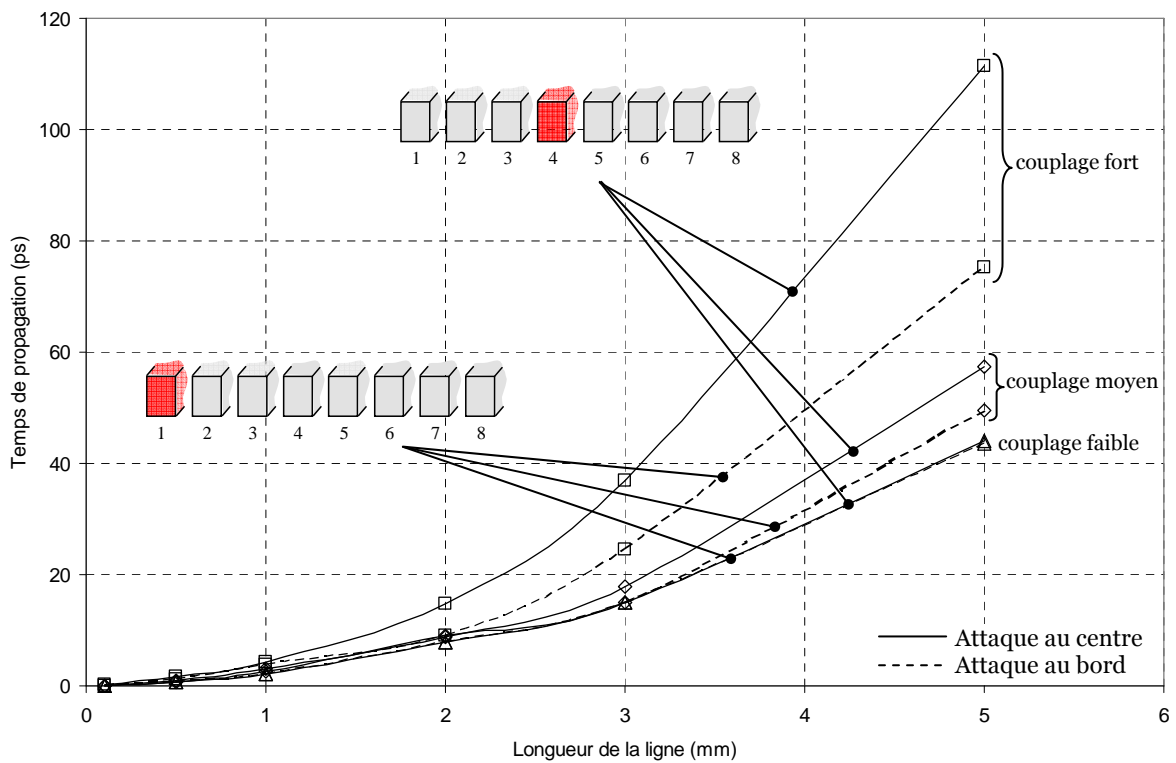


Figure 3.28b : Evolution du temps de retard de propagation en fonction de la longueur des huit interconnexions pour trois configurations de couplage (fort, moyen, faible) pour une attaque au bord et au centre.

La figure 3.28a illustre le comportement du temps de montée ou de commutation  $T_{cm}$  sur le front montant du signal présent à l'extrémité de la ligne dénommée "agresseur". Ceci est effectué pour une attaque au bord et au centre en fonction de la longueur des connexions, et ce, pour les trois configurations dites de couplage fort, moyen et faible. Ces relevés mettent en relief :

- ✓ D'une part, l'importance des dimensions longitudinales dans la dégradation rapide du temps de montée dès 100µm de longueur d'interconnexion, notamment pour le couplage fort.
- ✓ Et d'autre part, qu'une attaque au centre est toujours le pire cas comparé à une excitation au bord.

Ces évolutions montrent, grâce aux deux comportements asymptotiques (couplage fort et faible) que le temps de commutation sur le front montant est compris dans une fourchette de valeur qui passe du simple au triple jusqu'à 2mm de longueur d'interconnexion pour se situer ensuite dans une plage moindre (le double de la valeur) au delà de 3mm. Longueurs d'interconnexions et type d'attaque sont également le dénominateur commun de nos remarques relatives au temps de retard de propagation figure 3.28b que nous ne commenterons pas d'avantage dans cette rubrique.

## **5.2 Etude conjointe des systèmes de trois, cinq et huit interconnexions : calcul des temps de montée et de retard de propagation pour une attaque au bord puis au centre.**

Plutôt que de fournir un trop plein de chiffre, nous préférons récapituler l'ensemble de nos résultats sous la forme d'histogramme aux figures 3.29a et 3.29b en guise de préambule à la poursuite de nos travaux. Nous avons choisi d'étendre la notion de facteur de mérite (pour une ligne) au cas de 3, 5 et 8 lignes en interaction. Tous nos relevés concernent donc le millimètre de longueur d'interconnexions couplées. Grâce à ce triptyque, l'influence de 2, 4 et 7 lignes victimes est évaluée pour l'attaque au bord. De même, l'incidence d'une, puis deux interconnexions situées de part et d'autre de l'agresseur sont ici illustrées pour l'attaque au centre, de même que la configuration à 3 connexions d'un coté de l'agresseur et quatre de l'autre pour un système à huit interconnexions.

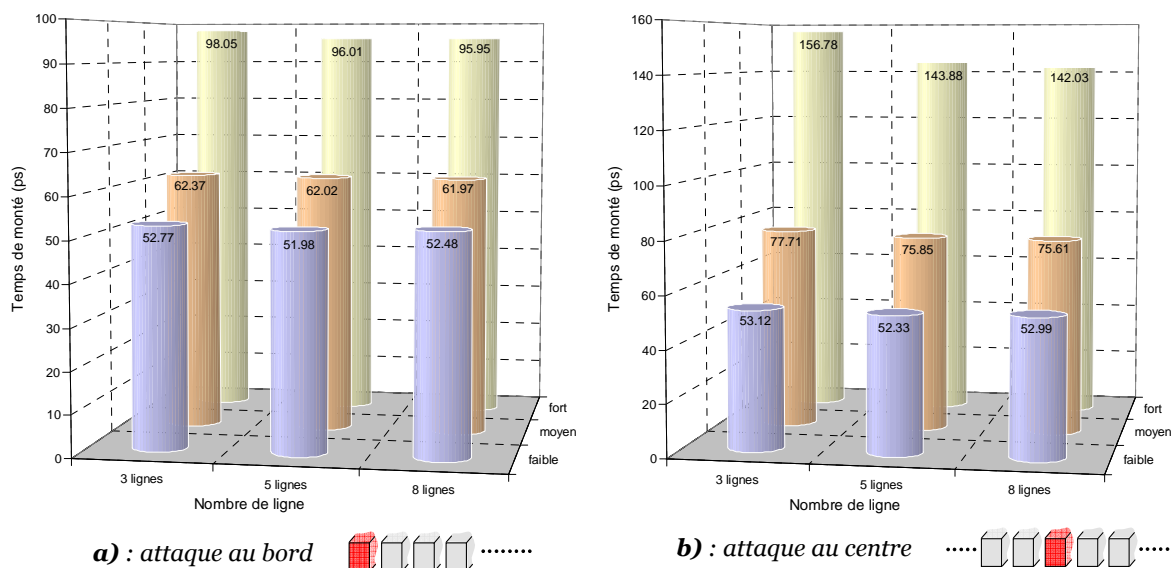


Figure 3.29a : Evolution du temps de montée, pour trois configurations de couplage (fort, moyen, faible) dans un système à 3, 5 et 8 interconnexions de 1mm de longueur : attaque au bord et au centre.

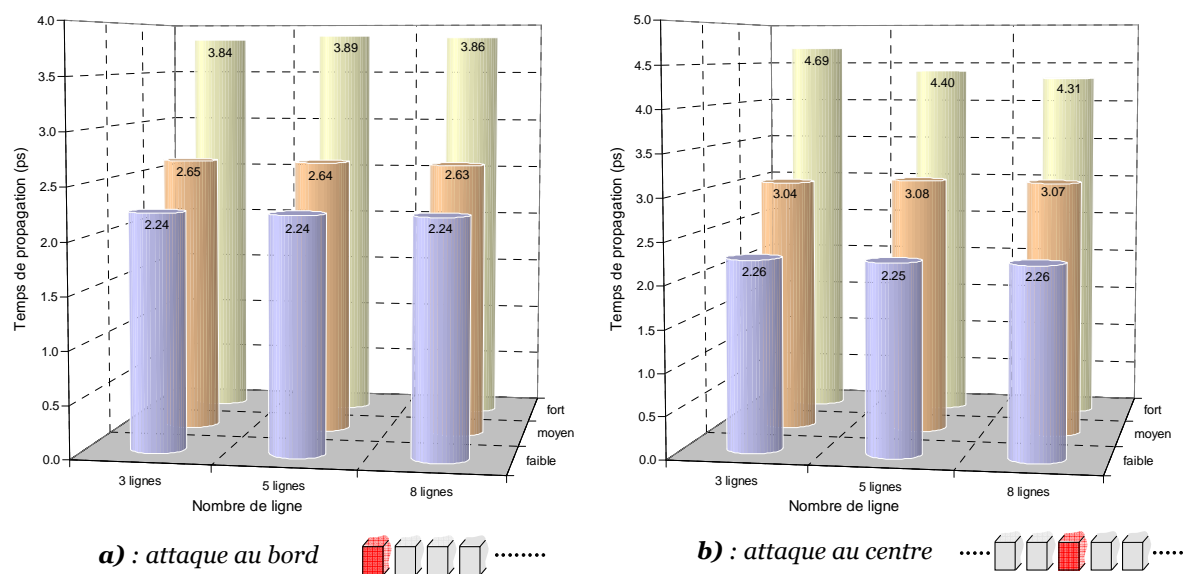


Figure 3.29b : Evolution du temps de retard de propagation, pour trois configurations de couplage (fort, moyen, faible) dans un système à 3, 5 et 8 interconnexions de 1mm de longueur : attaque au bord et au centre.

Ces relevés en trois dimensions comportent en ordonnées les valeurs des temps de propagation ou de commutation, quant à l'abscisse, elle regroupe les cas à 3, 5 et 8 interconnexions. Le premier et le dernier plan de ce tracé en trois dimensions sont respectivement dédiés aux comportements asymptotiques (couplage faible et fort), alors que le cas intermédiaire concerne un couplage, a priori, moyen. Bien évidemment, nous avons un histogramme par type d'attaque (au bord ou au centre). Ces précisions étant faites, il nous est désormais plus aisé de commenter ces multiples évolutions. Hormis l'aspect quantitatif qui

est abordé un peu plus tard figure 3.30, nos principales remarques se résument de la manière suivante :

- ✓ l'attaque au bord est la moins perturbée par le nombre de lignes adjacentes surtout pour le temps de retard de propagation.
- ✓ bien évidemment, l'excitation au centre présente toujours plus de sensibilité aux lignes environnantes et notamment pour l'évaluation du temps de montée.

### 5.3 Temps de montée et de retard de propagation : comparaison avec une interconnexion seule

Force est de constater aux figures 3.29a et 3.29b que la topologie à 3 interconnexions suffit, dans un premier temps, pour prédire temps de montée et de retard de propagation sur l'agresseur, sauf en cas de fort couplage. Ce nombre de trois lignes en interactions est le préalable indispensable à l'étude d'une connexion de base comme le montre la figure 3.30. Nous avons choisi la situation présentant le plus de sensibilité ; celle de l'attaque au centre (couplage moyen).

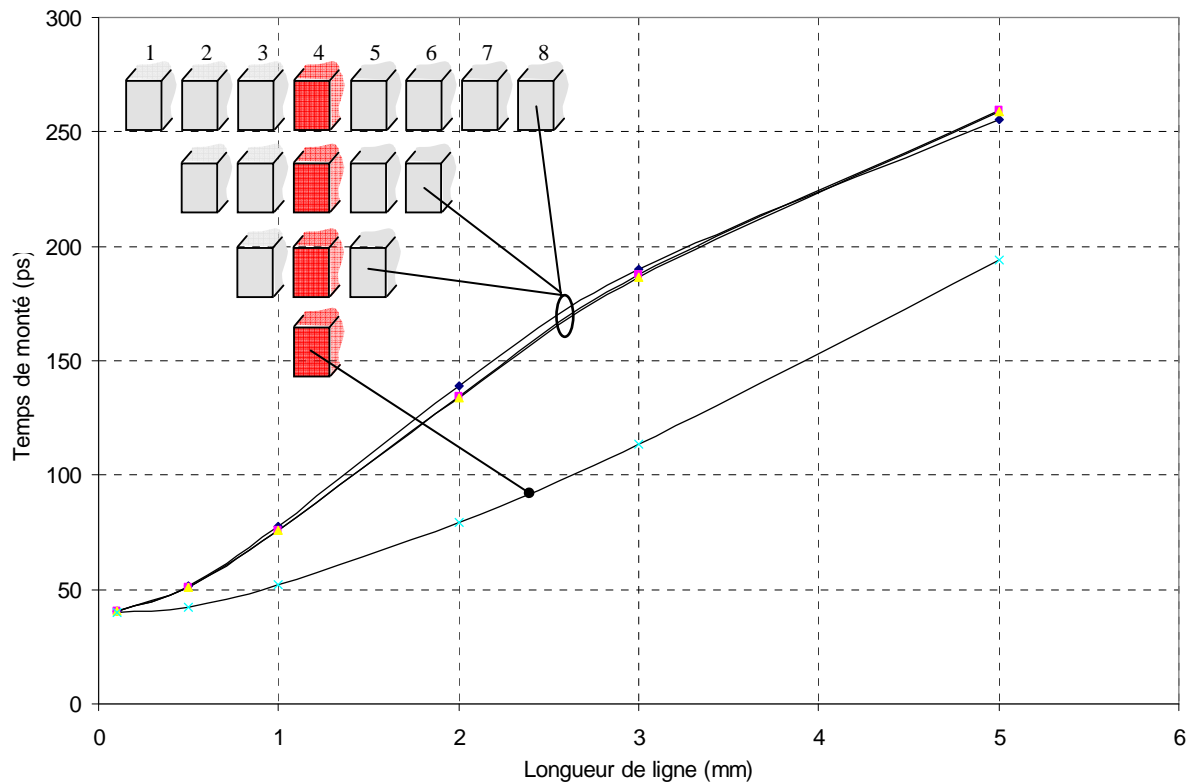


Figure 3.30 : Temps de montée, comparaison entre 1, 3, 5 et 8 lignes, couplage moyen

En effet, du point de vue du temps de montée, il n'est pas réaliste de considérer l'interconnexion seule comme élément de référence. Cette dernière est nécessairement en interaction avec ses voisines, même si cela n'est pas voulu. Elle n'est donc jamais isolée. L'exemple que nous proposons, ici figure 3.30, concerne une situation symétrique de couplage moyen. Nous reviendrons sur ce point et sur les questions qu'il soulève dans la suite de cet exposé. Dans le cas présent, 1mm de longueur d'interconnexion induit donc une dégradation du temps de montée de 10ps à 35ps par rapport à l'impulsion originale qui est de 40ps. Ceci aboutit à l'estimation d'un temps de montée compris entre 50ps et 75ps suivant qu'une ligne isolée ou une ligne en présence de ses voisines est étudiée. Comme nous pouvons le constater, la différence est considérable. Il faut aussi signaler qu'une dégradation se produit sur le temps de retard de propagation de 10 à 15%. Il est clair que le retard de propagation est le paramètre le moins touché pour 1mm de ligne. Une dégradation plus rapide s'opère au-delà de cette longueur. Signalons enfin que la version à trois lignes surestime globalement d'environ 5 à 10% la dégradation.

#### 5.4 Etude de la diaphonie : cas de huit interconnexions

Tant que l'on se cantonne à des calculs de temps, il n'est pas choquant de se focaliser sur un ensemble de trois lignes pour définir l'impact, sur l'agresseur, des connexions voisines. L'étude d'une configuration à huit interconnexions n'est nécessaire que pour lever tous les doutes et confirmer les tendances principales. Par contre, dès que l'on s'intéresse à la situation plus globale du fonctionnement, et notamment à celle du signal couplé aux autres connexions, le problème est différent. En effet, nous avons dans un premier temps, calculé les niveaux, en volt, des signaux recueillis à l'extrémité des différentes lignes victimes situées de part et d'autre de l'agresseur, et ce, pour une excitation du type attaque au centre. Ceci est effectué, à titre d'exemple, pour un système de huit interconnexions, de longueurs variables, en couplage fort ( $S=0.2\mu\text{m}$   $\epsilon_2=3.9$ ). L'ensemble de ces résultats est reporté aux figures 3.31a et b qui ne diffèrent entre elles que par l'angle de vue choisi pour appréhender le sens des évolutions.

Ainsi, en ordonnée nous retrouvons l'amplitude de l'impulsion détectée par couplage sur les lignes victimes. Ceci s'appelle le crosstalk ou encore la diaphonie. Elle est exprimée en volt, et concerne la position far end dans cet exemple. Il s'agit donc, ici, de l'information détectée après que l'impulsion couplée ait parcourue une distance finie le long de l'interconnexion dans le cas d'un couplage avant. Par opposition, la définition near end correspond au signal détecté aux extrémités des différentes victimes ; extrémités toutes situées du même côté que celle de l'agresseur qui reçoit l'excitation d'entrée. Ceci correspond, bien entendu, à un couplage arrière.



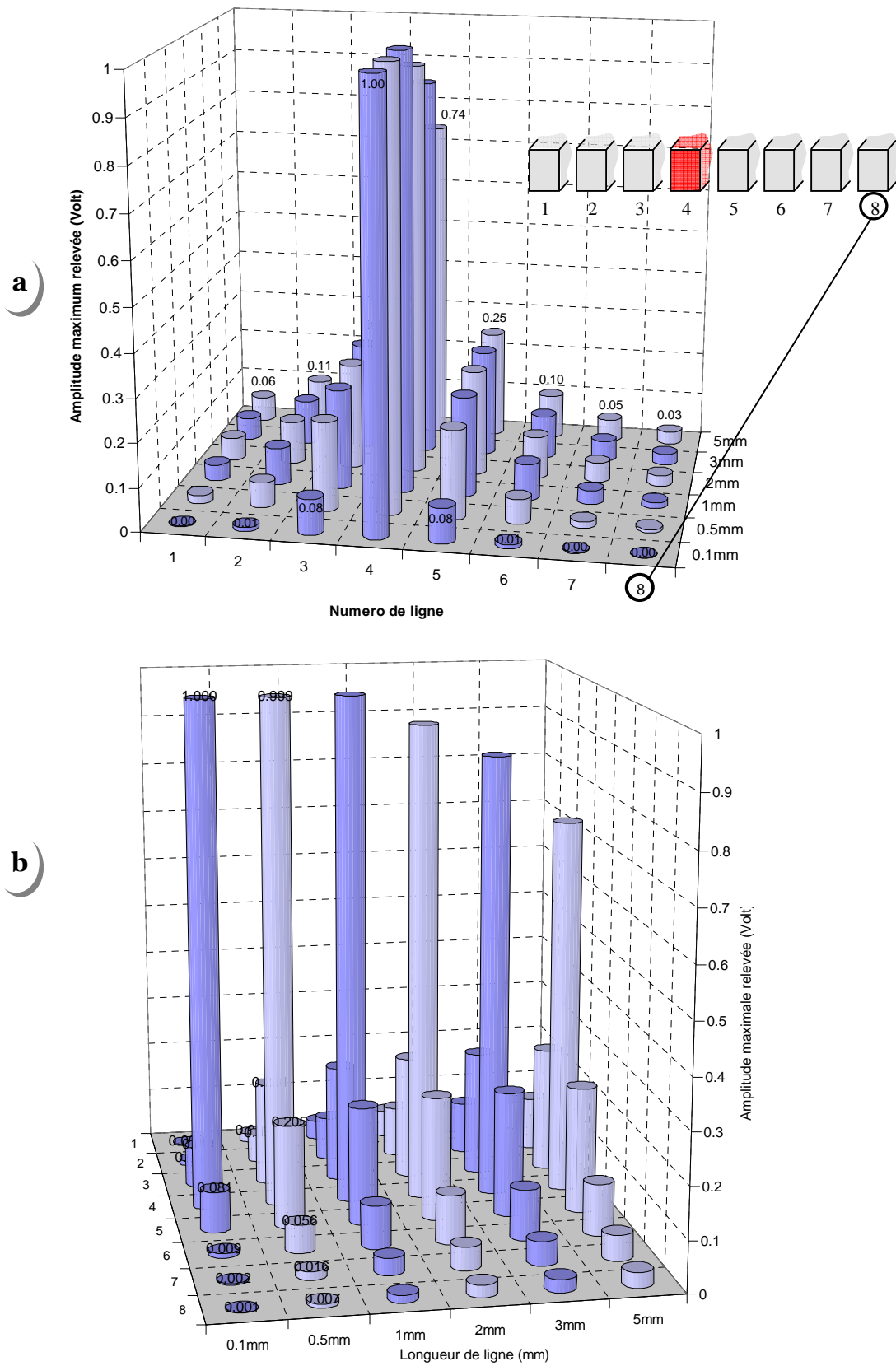


Figure 3.31 : Cas d'une attaque au centre, évolution de la diaphonie sur les lignes voisines en fonction de la longueur des interconnexions ( $S=0.2\mu\text{m}$ ,  $\epsilon_2=3.9$ ).

Comme il se doit, l'abscisse est dédiée figure 3.31a aux numéros des lignes composant notre système de huit interconnexions ; la première et la huitième étant respectivement situées le plus à gauche et le plus à droite. Le premier et le dernier plan de ce graphe, réalisé en trois dimensions, sont respectivement affectés à 0,1 et 5 mm de longueur d'interconnexions. Quant aux valeurs des autres plans intermédiaires, elles s'échelonnent par pas de 0,5, 1 puis 2mm de longueur. Nous observons, sur ces graphes au premier plan, un signal d'amplitude 1volt sur la quatrième connexion puisqu'elle joue le rôle d'agresseur. Cette information, sur l'agresseur, ne correspond en aucune manière à la diaphonie (crosstalk). Il s'agit tout simplement de l'amplitude calculée au bout de 100 $\mu$ m de longueur de ligne ; l'influence de la longueur de l'interconnexion ne se faisant pas encore ressentir. Sans faire d'analyse précise de toutes les données, un bref coup d'œil sur ces graphes aboutit aux deux remarques suivantes.

D'un point de vu qualitatif le système de huit interconnexions est totalement parasité. En effet, un signal existe même sur la troisième ligne située le plus à gauche de l'agresseur. Nous pouvons faire une constatation similaire pour l'interconnexion localisée le plus à droite, soit la quatrième. Notons que le signal couplé voit son amplitude croître avec la longueur jusqu'à 2mm environ. Aux alentours de cette valeur, le niveau de l'impulsion à l'extrémité de l'agresseur commence à décroître ce qui met en relief le rôle plus néfaste, encore, joué par l'interconnexion. A ce stade, il faut signaler qu'une situation identique caractérise aussi une seule ligne.

D'un point de vue quantitatif, l'amplitude du signal détectée sur les victimes les plus éloignées représentent 20 à 25% de celle calculée aux extrémités de la plus proche voisine située de part et d'autre de l'agresseur. Ce signal sur les lignes 3 et 5 vaut, du reste, presque le quart de volt, soit 25% de l'amplitude de l'impulsion injectée à l'entrée de l'agresseur pour 2 mm de longueur de ligne. Enfin, signalons qu'après 5mm de propagation, l'impulsion en bout d'agresseur a perdu 25% de son amplitude, pour atteindre 0.75 volt au lieu du volt initialement injecté. Ceci est du à la constante de temps global du circuit équivalent à la ligne (en présence de victimes) dont la valeur est du même ordre de grandeur que la demi période du signal d'excitation soit 500ps.

## **5.5 Etude de la diaphonie : cas de trois, cinq et huit interconnexions en interaction forte, moyenne et faible**

Ayant désormais un point de vue précis sur un arrangement particulier de huit lignes, il nous faut à présent calculer la diaphonie dans un contexte plus général de trois, cinq et huit interconnexions [34] [35].

A ce stade, nous calquons la synthèse de nos résultats sur celle du paragraphe précédent. En effet, nous choisissons d'illustrer le comportement de la diaphonie pour ces différents arrangements de conducteurs en sélectionnant deux cas asymptotiques, en vue d'encadrer une troisième situation que l'on peut qualifier de plus normale. Nous rappelons que chaque cas asymptotique représente un fonctionnement dit de couplage fort ou faible caractérisé respectivement par les données suivantes ;  $S=0.2\mu\text{m}$  ( $S/W=0.25$ )  $\epsilon_2=3.9$  et  $S=1\mu\text{m}$  ( $S/W=1.25$ )  $\epsilon_2=1$  (air). Le cas médian concerne une situation où nous avons fait le choix d'un fort rapprochement des lignes puisque l'espace interconducteur ne vaut que  $0.2\mu\text{m}$  mais cet espace est rempli d'air. Nous pouvons considérer alors que le couplage résultant est moyen. Les résultats que nous proposons aux figures 3.32 suivantes, sous forme d'histogrammes, reposent également sur une excitation symétrique, et ce, pour des interconnexions de longueur 1mm uniquement. Notre référence, à huit conducteurs, est localisée à l'arrière plan de ces graphes en trois dimensions, où l'agresseur occupe sur notre abscisse la quatrième position par analogie avec l'illustration précédente. Sachant que l'agresseur conserve toujours le même numéro, quel que soit le nombre de connexions mises en jeu, seules les lignes N°3 et N°5 se comportent comme des victimes dans le cas d'un système de trois interconnexions ; les lignes N°1, 2, 6, 7, 8 n'existant pas. Dans le même esprit, les lignes N°2, 3, 5, 6 sont des victimes dans une logique à cinq interconnexions pour une excitation symétrique. Bien évidemment, nous consignons en ordonnée toutes les valeurs du signal couplé et détecté en position "far end" sur les différentes lignes victimes. Il s'agit, comme nous l'avons rappelé auparavant, de la diaphonie. Elle est exprimée en volt pour les mêmes conditions d'excitation et de charge que celles définies figure 3.25, et ce, pour des impulsions de fréquence 1 GHz et de temps de montée de 40 ps. Comme nous avons gardé en mémoire le fonctionnement à fort couplage en fonction de la longueur des connexions cuivre, page précédente, nous nous focalisons une fois de plus sur ce contexte à couplage fort ( $S/W=0.25$   $\epsilon_2=3.9$ ). Bien entendu cela concerne maintenant les configurations à 3, 5 et 8 interconnexions. On retrouve, de ce fait, en arrière plan de la figure 3.32a, la copie de la séquence précédente correspondant à 1mm de connexion. Comme nous pouvons le constater, ne pas prendre en compte la première, puis deuxième ligne voisine située de part et d'autre de l'agresseur est une erreur comme le montre l'arrière plan de cet histogramme dédié au système de huit interconnexions.

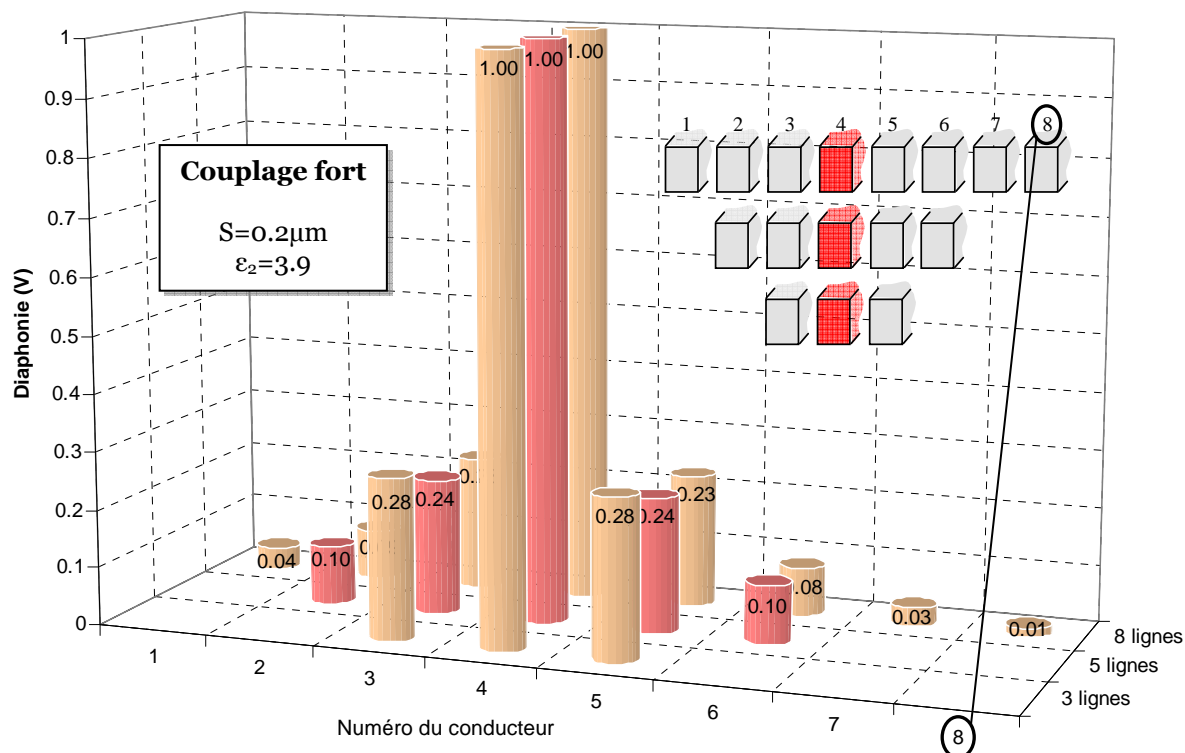


Figure 3.32a : Diaphonie calculée sur les lignes victimes dans le cas d'une attaque au centre : comparaison entre 3, 5 et 8 lignes de longueur 1mm (couplage fort)

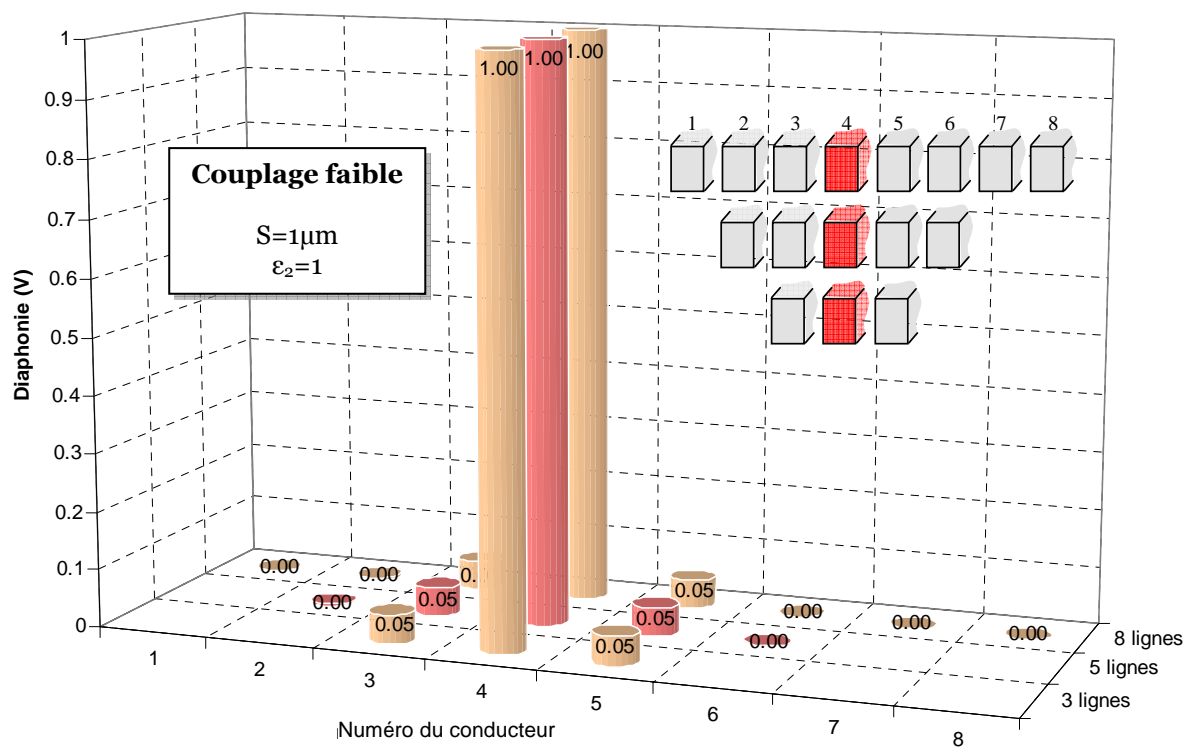


Figure 3.32b : Diaphonie calculée sur les lignes victimes dans le cas d'une attaque au centre : comparaison entre 3, 5 et 8 lignes de longueur 1mm (couplage faible)

En effet, 1% du signal est encore couplé sur la connexion N°8 soit, la plus éloignée. Cette affirmation s'atténue et n'est même plus valide lorsque l'on observe le second cas asymptotique ( $S/W=1.25 \epsilon_2=1$ ) ; opposé au cas précédent figure 3.32b puisque correspondant à du couplage faible. En effet, une ligne victime située de part et d'autre de l'agresseur suffit, ici, pour prédire le comportement général comparé au cas où trois et quatre victimes entourent l'agresseur (cas à 8 lignes). Comme nous venons de le signaler, ce cas est asymptotique. Il fixe donc la limite basse. Un peu plus de réalisme est obtenu dans une configuration intermédiaire que l'on qualifie de couplage moyen. Cette évolution figure 3.32c montre que deux, voire trois et quatre lignes situées de part et d'autre de notre agresseur exercent la même nuisance. Exception faite du signal capté sur la huitième ligne, cinq sur huit interconnexions traduisent donc la même problématique pour l'exemple que nous avons choisi de traiter dans ce mémoire.

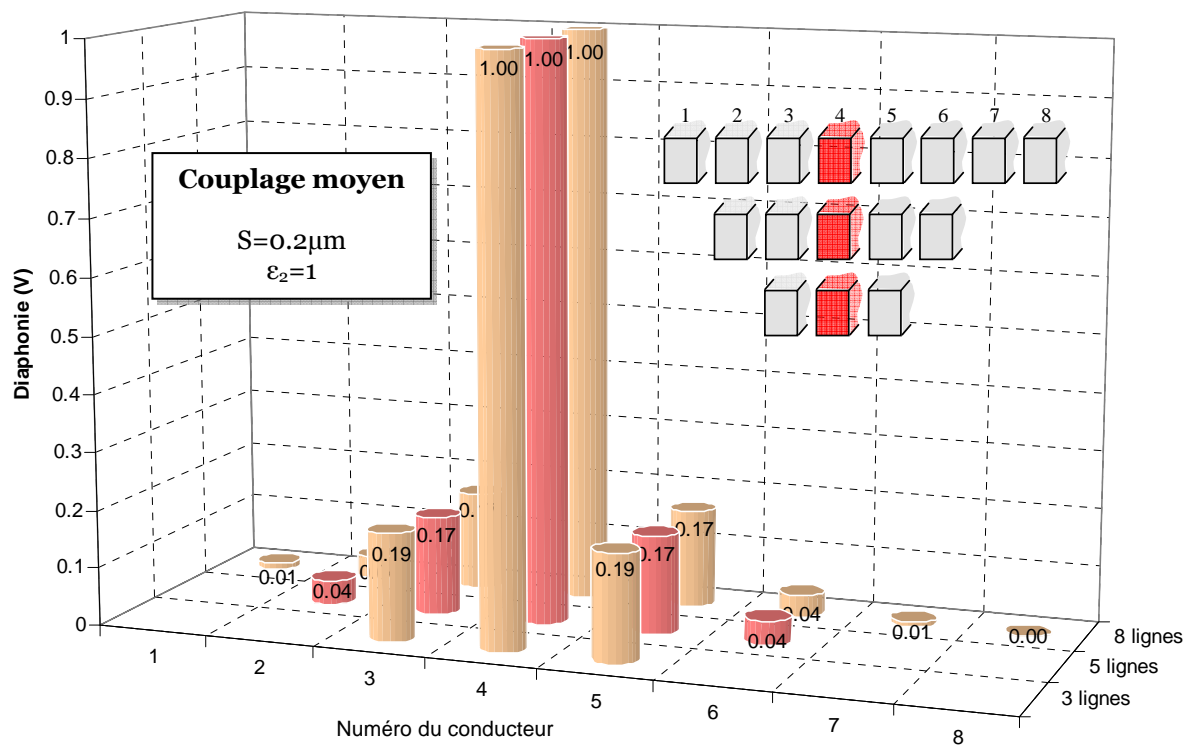


Figure 3.32c : Diaphonie calculée sur les lignes victimes dans le cas d'une attaque au centre : comparaison entre 3, 5 et 8 lignes de longueur 1mm (couplage moyen)

Nous allons clore ce chapitre, non sans effectuer une synthèse des résultats obtenus. Ils ne représentent en fait qu'une faible partie de ceux relatifs à toutes les investigations que nous avons menées sur le thème des interconnexions. La problématique des connexions "cuivre" dans un environnement de circuit intégré numérique peut être appréhendée sous deux angles différents.

Le premier concerne celui d'une ligne que l'on qualifie de ligne active puisqu'une impulsion s'y propage. Du simple point de vue de cette ligne, la considérer comme isolée des autres, même si elles sont passives, est une erreur. Nous avons montré que l'on sous estime fortement le temps de montée jusqu'à plus de 50% et, pour une moindre part, le retard de propagation (10 à 15%) de cette seule ligne. L'erreur commise peut, sans conteste, être rectifiée si l'on intègre dans notre schéma équivalent la présence des plus proches voisins. Ceci signifie, en clair, qu'un système de trois interconnexions, au moins, doit être étudié voire cinq pour éviter toutes mauvaises prédictions. Même si une seule ligne est active parmi un ensemble de lignes, nous tenons à rappeler quelques pourcentages typiques concernant la diaphonie pour un couplage moyen selon notre terminologie. Dans ce contexte d'interactions modérées, nous recueillons, quand même, aux extrémités des premières lignes victimes situées de part et d'autre de l'agresseur, 20% de l'amplitude de l'impulsion d'attaque. Nous retrouvons sur les victimes suivantes encore 5% du signal agresseur, puis 1% pour les deux autres. Tout calcul fait, nous venons de décrire une excitation centrée à 7 interconnexions. Pour notre part nous en avons choisi huit pour disymétriser légèrement cette configuration et en estimer les conséquences. Comme nous pouvons le remarquer, qualifier cet arrangement de huit lignes d'asymptotique est fondé. Bien évidemment, tous les chiffres que nous venons de rappeler ne peuvent être dissociés des conditions de charge et d'attaque que nous avons adoptées, à savoir :  $R_{ON}=100\Omega$   $R_{OFF}=200\Omega$   $C_L=20fF$   $V_o=1V$   $T_{CM0}=40ps$   $F_o=1GHz$ . Notre couplage moyen est, ici, caractérisé par un espace où les interactions électromagnétiques s'effectuent dans l'air (air gap). Le concepteur n'a donc, pour seule marge de manœuvre, que la possibilité d'accroître les dimensions de l'espace inter-conducteur s'il veut réduire la diaphonie. Mais le pas (pitch) réduit son champ d'action. Un judicieux compromis doit donc être effectué. Nous percevons, à ce stade, tout l'intérêt d'une recherche d'un schéma global du système d'interconnexions.

Le deuxième volet de cette problématique s'appuie donc sur l'étude globale d'un système. En effet, ce ne sont que dans des cas spécifiques ou pendant un laps de temps donné que l'on peut considérer une ligne comme active ; les autres étant toutes passives. Pour notre part, nous nous sommes intéressés au premier volet de cette problématique complexe. Le second concerne une étude spécifique et exhaustive des interconnexions en interaction puisqu'il consiste à effectuer une étude d'intégrité des signaux dans un contexte d'excitations multiples quelconques, voire asynchrones au moyen d'outil de prédiction de l'intégrité des signaux comme SPICE ou ELDO. Comme nous l'avons précisé plus haut, cette tâche lourde n'entre pas dans le cadre de ce mémoire.

En définitive, le dénominateur commun de ces deux volets réside bel et bien dans l'obtention d'un schéma électrique équivalent fiable, et ce, pour un système donné. Nous avons montré que nous sommes capable de fournir à l'ingénieur, qui s'occupe de l'opération de routage du circuit, le schéma électrique équivalent d'un système de plusieurs lignes en interaction, et ce, jusqu'à huit interconnexions. Nous avons effectué cette tâche pour différentes valeurs d'espacement des lignes et de permittivité remplissant l'espace de couplage. Ce point essentiel a permis de dégager deux cas asymptotiques, ces derniers encadrant, a priori, un fonctionnement plus traditionnel.

Dans ce mémoire, nous avons traité le cas d'arrangements symétriques pour les interconnexions, à savoir ; espacement, largeur et hauteur identiques. Bien évidemment, nous sommes capable de fournir le schéma électrique équivalent d'un arrangement quelconque.

Les quelques remarques, graphes et résultats précédents mettent en relief, une fois de plus, le rôle très important que joue les matériaux mis en jeu. En effet, la réduction des interactions mutuelles entre lignes ne peut se faire qu'en ajoutant des écrans métalliques pour isoler ces lignes ou encore en les éloignant. Si l'on estime ces moyens trop coûteux en opérations technologiques et en dimensions de circuit requises, il est toujours possible d'influer sur la nature du matériau enrobant les dispositifs ou encore les lignes en présence. Dans la confection de circuits intégrés, on parle alors de matériaux à faible permittivité (lowk) ou ultra faible permittivité soit "ultralowk" ou encore "air gap" pour la situation ultime où l'air occupe les espaces de dimensions microniques. L'impact du matériau est donc essentiel.

Il l'est encore plus, depuis que l'on utilise des nouveaux matériaux à très haute constante diélectrique (>300) pour la fabrication, entre autre, des condensateurs et des mémoires présentes dans les circuits intégrés. A ce stade se pose la problématique d'une détermination fiable de la permittivité de tels matériaux qui en fait, ne sont disponibles qu'en couche mince voire très mince. Nous tentons d'apporter quelques réponses sur ce sujet au chapitre suivant, et ce, pour des fréquences comprises entre 1 et 26GHz ; le matériau concerné étant du PZT.

### Bibliographie du chapitre 3

- [54] S. J. Mihelcic  
“Packaging for nanometer-scale silicon technology”  
<http://www.reed-electronics.com/>.
- [55] International Technology Roadmap for Semiconductors  
<http://www.itrs.net/>
- [56] “The limits of Semiconductor Technology”  
Special issue, Proceeding of the I.E.E.E., Vol 89, N° 3, pp 221-420, March 2001.
- [57] J.E. Schutt-Aine, K. Sung-mo  
“Interconnections – Addressing the next challenge of IC technology”  
Proceedings of the I.E.E.E., Vol 89, N° 4, pp 421-580, April 2001.
- [58] “Scaling CMOS to the limit”  
IBM journal of research and development, Vol 46, N° 2/3, pp 117-360, March/May 2002.  
<http://www.research.ibm.com/journal/>
- [59] L.G. Gosset, A. Farcy, J. de Pontcharra, Ph. Lyan, R. Daamen and all  
“Advanced Cu interconnects using air gaps”  
Microelectronic Engineering, Vol 82, Issues 3-4, pp 321-332, December 2005.
- [60] C. Seguinot, E. Paleczny, F. Huret, J. F. Legier, P. Kennis  
“Experimental determination of the characteristic impedance matrix of multiconductor quasi-TEM lines”  
Microwave and Optical Technology Letters, Vol 22, N° 6, pp 429-431, March 1999.
- [61] G. W. Slade, K. J. Webb  
“Computation of characteristic impedance for multiple microstrip transmission line using a vector finite element method”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 40, N° 1, pp 34-40, January 1992.
- [62] L. Carin, K. J. Webb  
“Characteristic impedance of multilevel, multiconductor hybrid mode microstrip”  
I.E.E.E Transactions on Magnetism, Vol 25, N° 4, pp 2947 – 2949, July 1989.
- [63] F. Olyslager, D. De Zutter; K. Blomme  
“Rigorous analysis of the propagation characteristics of general lossless and lossy multiconductor transmission lines in multilayered media”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 41, N° 1, pp 79-88, January 1993.
- [64] M.S. Alam, M. Koshiba, K. Hirayama, Y. Hayashi  
“Hybrid mode analysis of multilayered and multiconductor transmission lines”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 45, N° 2, pp 205-211, February 1997.
- [65] E. Vanier  
“Contribution à la caractérisation et à la modélisation des capacités en technologie CMOS”  
Thèse de Doctorat de l’université de Montpellier, Mai 1998.



- [66] C. Cregut  
*“Modélisation théorique et consolidation expérimentale des interconnexions en technologie silicium avancée”*  
Thèse de Doctorat de l’université de Grenoble, N° d’ordre TS 98/GRE1/0142/D, Octobre 1998.
- [67] S. Putot  
*“Calcul des capacités parasites dans les interconnexions des circuits intégrés par une méthode de domaines fictifs”*  
Thèse de Doctorat de l’université de Grenoble, Janvier 2001.
- [68] D. Bernard  
*“Caractérisation et modélisation des capacités parasites dues aux interconnexions en technologie CMOS fortement submicroniques”*  
Thèse de Doctorat de l’université de Montpellier, Novembre 2001.
- [69] E. Sicard  
*“Le couplage diaphonique dans les circuits CMOS submicroniques”*  
HDR de l’institut national des sciences appliquées de Toulouse, Novembre 1998.
- [70] M. Elfadel, A. Deutsch, G. V. Kopcsay, B. J. Rubin, and H. H. Smith  
*“A cad methodology and tool for the characterisation of wide on-chip buses”*  
I.E.E.E Transactions on advanced packaging, Vol 28, N° 1, pp 63-69, January 2005.
- [71] M. Elfadel, A. Deutsch, H. H. Smith, B. J. Rubin, and G. V. Kopcsay  
*“A multiconductor transmission line methodology for global on-chip interconnect modelling and analysis”*  
I.E.E.E Transactions on advanced packaging, Vol 27, N° 1, February 2004.
- [72] G. E. Moore  
*“Cramming more components onto integrated circuits”*  
Electronic mag, Vol 38, pp 114-117, April 1965.
- [73] J. A. Davis, V. K. De, J. D. Meindl  
*“A stochastic wire-length distribution for gigascale integration (GSI) - Part I: Derivation and validation - Part II: Application to clock frequency, power dissipation, and chip size estimation”*  
I.E.E.E Transactions on Electron Devices, Vol 45, N° 3, pp 580-597, March 1998.
- [74] J. D. Meindl, J. A. Davis, P. Zarkesh-Ha, C. S. Patel, K. P. Martin, P. A. Kohl  
*“Interconnect opportunities for gigascale integration”*  
IBM journal of research and development, Vol 46, N° 2/3, pp 245-263, March/May 2002.
- [75] T. Sakurai  
*“Closed-form expressions for interconnection delay, coupling and crosstalk in VLSI’s”*  
I.E.E.E Transactions on electron devices, Vol 40, N° 4, pp 118-124, January 1993.
- [76] R. Faraji-dana, Y.L. Chow  
*“AC resistance of two coupled strip conductors”*  
I.E.E Proceedings H, Microwaves, Antennas and Propagation, Vol 138, N° 1, pp 37-45, February 1991.
- [77] R. E. Collins  
*“Field theory of guided waves”*  
Mac grow-hill book company, New York, 1961.
- [78] J. A. Stratton  
*“Electromagnetic theory” (Chap. 9)*  
Mac grow-hill book company, New York, 1941.

- [79] R. F. Harrington  
“Time harmonic electromagnetic fields”  
Mac grow-hill book company, New York, 1961.
- [80] S. Charruau  
“Electromagnétisme et interconnexions”  
Diderot, ISBN-10: 2841340627, 1997.
- [81] R. Faraji-dana, Y.L. Chow  
“Edge condition of the field and AC resistance of a rectangular strip conductor”  
IEE Proceedings H, Microwaves, Antennas and Propagation, Vol 137, N° 2, pp 133-140, April 1990.
- [82] P. Waddow, I. Wolff  
“The skin effect at high frequency”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 33, N° 10, pp 1076-1082, October 1985.
- [83] Djordjevic, T. Sarkar, S. Rao  
“Analysis of finite conductivity cylindrical conductors excited by axially-independent TM electromagnetic field”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 33, N° 10, pp 960-966, October 1985.
- [84] C. Séguinot  
“COLINE: Calcul de la diaphonie dans un système multiconducteurs couplés décrit par son schéma équivalent”  
Code de calcul établi sous Matlab, 2001.
- [85] J. Cong  
“An interconnect centric design flow for nanometer technology”  
Proceeding of the IEEE, Vol 89, N° 4, pp 505-528, April 2001.
- [86] F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
“Full Wave Analysis and Electrical Modeling of Eight Copper Interconnects Placed in a Giga-scale Integrated Environment for Signal Integrity Evaluation”  
Electronics Systems-Integration Conference, Dresde, Germany, 2006.
- [87] F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
“Comparison of the benefits, from SiO<sub>2</sub> to ultralow-K dielectric and air spacing introduction, in term of interconnects performances, for the future high speed Ic’s in a multicoupled lines system”  
10th I.E.E.E Workshop on Signal Propagation on Interconnects, Gènes, Itali, May 09/12 2006.
- [88] F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
“Proximity Effect of Neighbour Victim Lossy Interconnects on a Single Attacker and Vice Versa”  
I.E.E.E International Symposium on Integrated Circuits, Singapore, 26/ 28 September 2007.

# Chapitre 4. Aide à la caractérisation des matériaux.

*Détermination de la permittivité d'un  
échantillon de PZT.*

## Introduction

Le sigle PZT est l'abréviation de titano-zirconate de plomb ou encore de toutes les céramiques dérivés de la composition  $\text{Pb}(\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$  ou  $x$  est un nombre compris entre 0 et 1. De sa valeur dépendent les propriétés du matériau ainsi réalisé. Notre intérêt pour ce dernier s'est accru, et ce, consécutivement aux demandes qui nous ont été faites pour sa caractérisation diélectrique microondes. Avant de nous focaliser sur la mise en œuvre des moyens nécessaires à cette mesure des propriétés diélectriques [1] à [10], nous avons entrepris une recherche bibliographique concernant le matériau. Ainsi, composition, procédés mis au point pour favoriser une croissance particulière, électrode spécifique en platine, température de recuit, cristallisation, pression, sont autant de points abordés pour améliorer, par exemple, les caractéristiques piézoélectriques de ces céramiques sans compter leur méthode de dépôt du type sol-gel ou encore par "sputtering" [11]. Ces caractéristiques, importantes pour les micro-actionneurs, le sont tout autant pour les MEMS.

L'électronique et la microélectronique ne sont pas, non plus, laisser pour compte. SRAM, DRAM, EDRAM, EDORAM, FRAM sont toutes des abréviations des mémoires intégrées présentes dans les systèmes à processeur. Dans la plupart de ces mémoires, nous trouvons en association un transistor et un condensateur. Ce condensateur possède la spécificité d'être le plus petit possible, avec le minimum de courant de fuite et de surcroît, grâce à l'effet ferroélectrique, il présente une bistabilité de la polarisation autorisant le codage de l'information en binaire (mémoire FRAM ou ferroelectric random access memory).

Il faut pourtant signaler que tous ces travaux publiés, le sont dans des ouvrages comme "Journal of Electroceramics", "Integrated Ferroelectrics", "Journal of Magnetism", "Applied Physics Letters" ou encore "Smart Material and Structures", et cette liste n'est pas exhaustive. Ces revues scientifiques sont donc plus dédiées à la physique et au matériau lui-même qu'à la caractérisation diélectrique microonde pure. Nous n'y avons donc retiré que très peu de renseignements, d'autant que la plupart des caractéristiques diélectriques sont effectuées sur des structures du type condensateur au moyen de pont de mesures. Rares sont donc les travaux offrant des évolutions de la permittivité complexe, ne serait-ce que jusqu'à la fréquence 1GHz. Il semble toutefois que l'on s'intéresse, un peu plus, au transfert de la technologie du film mince de PZT pour la confection des circuits intégrés monolithiques microondes [12] [13]. Cette technologie a donc cherché à s'adapter à un objectif de réduction

des dimensions grâce à l'introduction de condensateurs MIM (Metal Isolant Metal) de taille plus réduite ; les mesures microondes étant encore, ici, faites sur des condensateurs mais jusqu'à 18GHz.

Pour notre part, nous décidons de ne pas nous orienter vers la caractérisation microonde de capacité MIM de façon à en déduire la permittivité complexe du PZT. Toutefois, cette voie n'est peut-être pas à dénigrer. Si l'on désire utiliser ce matériau pour ces propriétés ferroélectriques, notamment dans le cas de déphaseurs microondes, il semble intéressant que le film mince fasse partie intégrante d'une structure de propagation. A ce stade, deux voies doivent être abordées.

La première concerne une étude du comportement électromagnétique de la structure de propagation dans laquelle ce film mince existe en vue d'évaluer sa bande monomode, ses pertes, sa bande passante et le déphasage induit, et ce, en présence ou non de polarisation externe. Mais, comment aborder cette phase si la permittivité complexe du matériau et son "agilité" sont inconnues ?

Le deuxième volet débouche de ce fait sur une caractérisation du PZT à partir de l'étude d'une structure de propagation et non plus de condensateur. Nous avons choisi cette dernière voie, même si elle présente plus de difficultés ; la surface de la ligne de propagation étant bien plus importante que celle d'un condensateur de  $50\mu\text{m}$  carré.

A ce stade, l'élaboration du PZT en film mince n'entre pas dans le cadre de ce travail, car hors de nos compétences. Cette tâche délicate et primordiale est effectuée, dans le cadre d'une collaboration, par des spécialistes du matériau dont le professeur Elhadj Dogheche, membre de l'équipe Optoélectronique de l'IEMN, fait partie. Pour notre part, nous concentrons nos efforts sur le volet d'aide à la caractérisation de ce matériau dans la bande de fréquences 1 à 26GHz.

## 1 Contexte général

Avant de décrire la méthode qui nous permet de caractériser un matériau à partir d'un relevé expérimental des paramètres [S], nous devons rappeler quelques spécificités liées au fonctionnement d'ELFI. La figure 4.1 récapitule sommairement le mode d'emploi du noyau de calcul.

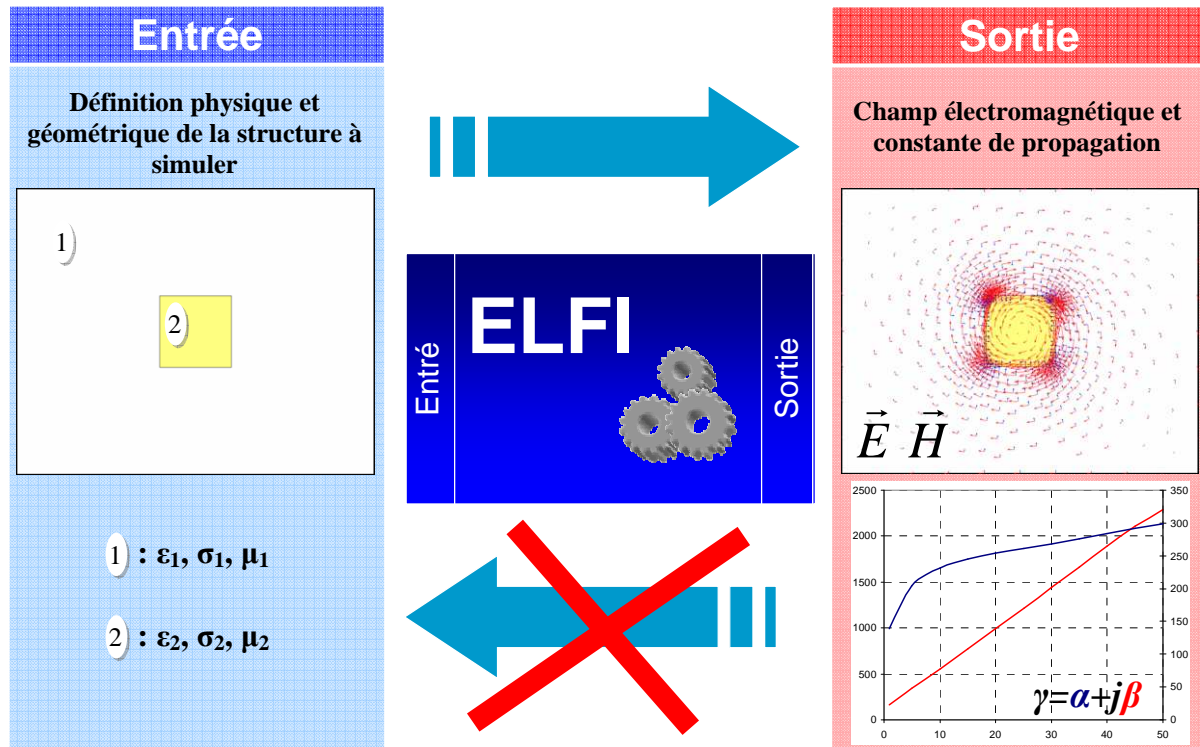


Figure 4.1: mode d'emploi d'ELFI

Les données du problème à résoudre sont les paramètres physiques et géométriques du plan de section droite de la structure. Les grandeurs de sortie, dans ce contexte, sont les constantes de propagation complexes, les champs électriques et magnétiques et, si nécessaire, le schéma électrique équivalent de la structure propageant un ou des modes à fréquence de coupure nulle. ELFI, n'est donc pas, dans sa forme originale, directement exploitable pour la caractérisation des matériaux.

Deux solutions s'offrent alors à nous :

- Modifier le noyau de calcul de sorte que la valeur propre devienne identifiable non plus, à la constante de propagation au carré de la structure, mais à la permittivité, la conductivité ou encore la perméabilité du domaine inconnu. La constante de propagation complexe devient, dans ce cas, une donnée d'entrée issue de la mesure, et la grandeur physique que nous recherchons, une grandeur de sortie.

- Ne pas modifier le noyau de calcul d'ELFI, mais l'inclure dans une boucle d'asservissement. A chaque itération, cette boucle définit une nouvelle valeur pour la grandeur physique recherchée qui reste de ce fait, vue du noyau, une donnée d'entrée. Grâce à ce degré de liberté, nous faisons tendre la constante de propagation calculée par ELFI vers celle déduite du relevé expérimental.

La première solution est très intéressante dans la mesure où nous obtenons le résultat aussi rapidement que dans le cas d'une recherche de constante de propagation classique. Ceci nécessite, toutefois, une révision totale du noyau de calcul suivie d'une nouvelle phase de validation. C'est pourquoi nous lui avons préféré la seconde solution qui va, certes, engendrer une phase de calcul plus importante, mais un temps de développement de la boucle d'asservissement et de validation restreint. A court terme, ce choix s'avère donc beaucoup plus intéressant.

## 2 Boucle d'asservissement incluant le noyau de calcul "ELFI"

Compte tenu du choix que nous avons effectué, nous enrichissons "ELFI" de quelques nouveaux composants permettant de construire cette boucle d'asservissement. Cette boucle doit permettre, avec un minimum d'itérations, de fournir la grandeur physique recherchée avec le maximum de précision possible. Nous la présentons figure 4.2.

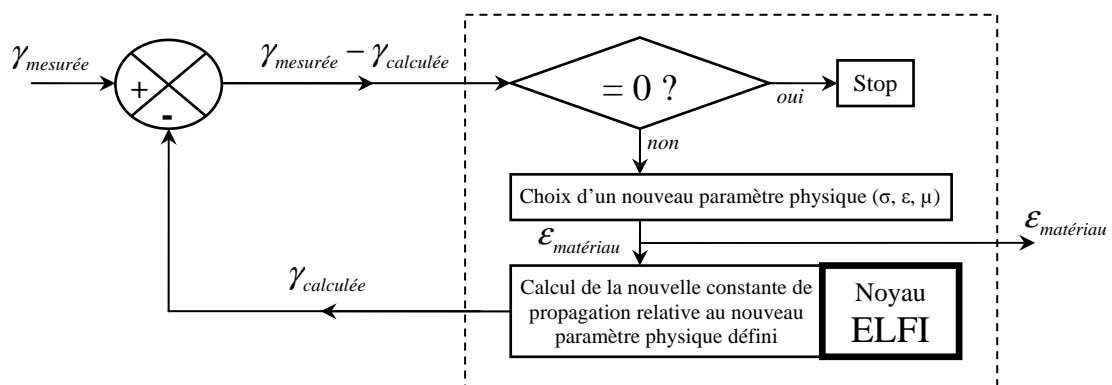


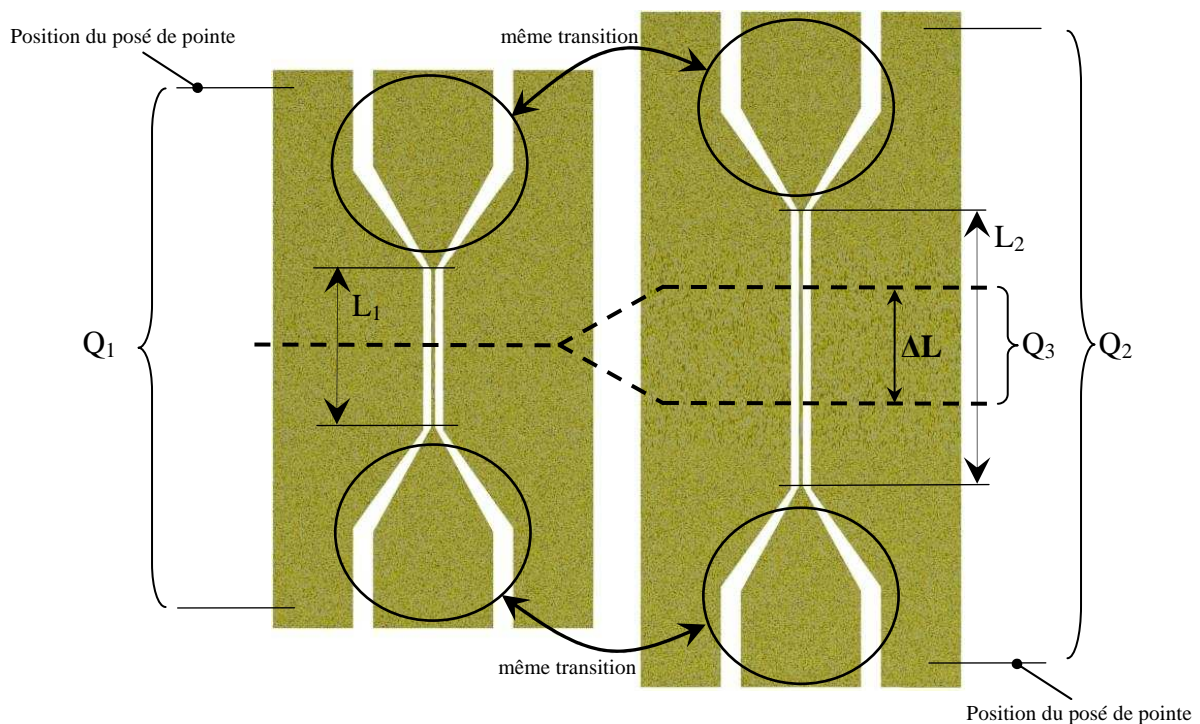
Figure 4.2 : La boucle d'asservissement incluant le noyau de calcul d'ELFI

Evidemment le noyau de calcul "ELFI" doit, au préalable, être alimenté par tous les paramètres géométriques et physiques de la structure de test; celle sur laquelle sont effectuées les mesures de la constante de propagation complexe.

Nous n'aborderons pas, ici, la description de la phase logicielle permettant d'assurer le bon fonctionnement de cette boucle. C'est une étape indispensable, certes, mais il est plus intéressant de décrire le mode de détermination expérimentale de la constante de propagation.

### 3 Relevé expérimental de la constante de propagation complexe : Méthode de Bianco & Parodi

En effet, nous devons fournir à notre boucle d'asservissement la constante de propagation issue d'un relevé expérimental. Cette grandeur, comme nous le savons, ne se mesure pas directement. Différentes techniques permettent, cependant, de la déduire des paramètres  $[S]$  fournis par l'analyseur de réseaux vectoriel. Une de ces techniques a retenu notre attention à l'issue de notre étude bibliographique. En effet, les travaux publiés en 1976 par B. Bianco et M. Parodi démontrent une habile extraction de la constante de propagation basée sur la mesure des paramètres  $[S]$  de deux quadripôles possédant des topologies identiques, et ne différant entre eux que d'un incrément de longueur de ligne que l'on notera  $\Delta L$  [10]. Nos propos sont illustrés figure 4.3 dans le cas où ces deux quadripôles sont deux lignes coplanaires de longueur utile  $L_1$  et  $L_2$  avec leurs transitions.



**Figure 4.3 :** Deux lignes coplanaires de section droite identique, mais de longueurs différentes



En admettant que les pointes de mesures soient posées précisément au même endroit sur les transitions, les travaux de Bianco et Parodi aboutissent à :

$$2 \cosh(\gamma_{Q_3} \Delta L) = \frac{S_{12,Q_1}^2 + S_{12,Q_2}^2 + S_{11,Q_1} S_{22,Q_2} + S_{11,Q_2} S_{22,Q_1} - S_{11,Q_1} S_{22,Q_1} - S_{11,Q_2} S_{22,Q_2}}{S_{12,Q_1} S_{21,Q_2}}$$

Précisons au passage que la technique décrite permet implicitement de défalquer l'influence des transitions. On obtient donc une constante de propagation correspondant au tronçon de ligne "Q<sub>3</sub>" de longueur  $\Delta L = L_2 - L_1$ . Ce sont donc les dimensions du plan de section droite de ce tronçon de ligne qui sont stockées dans ELFI pour réaliser la simulation. Finalement, nous illustrons l'ensemble de la procédure figure 4.4.

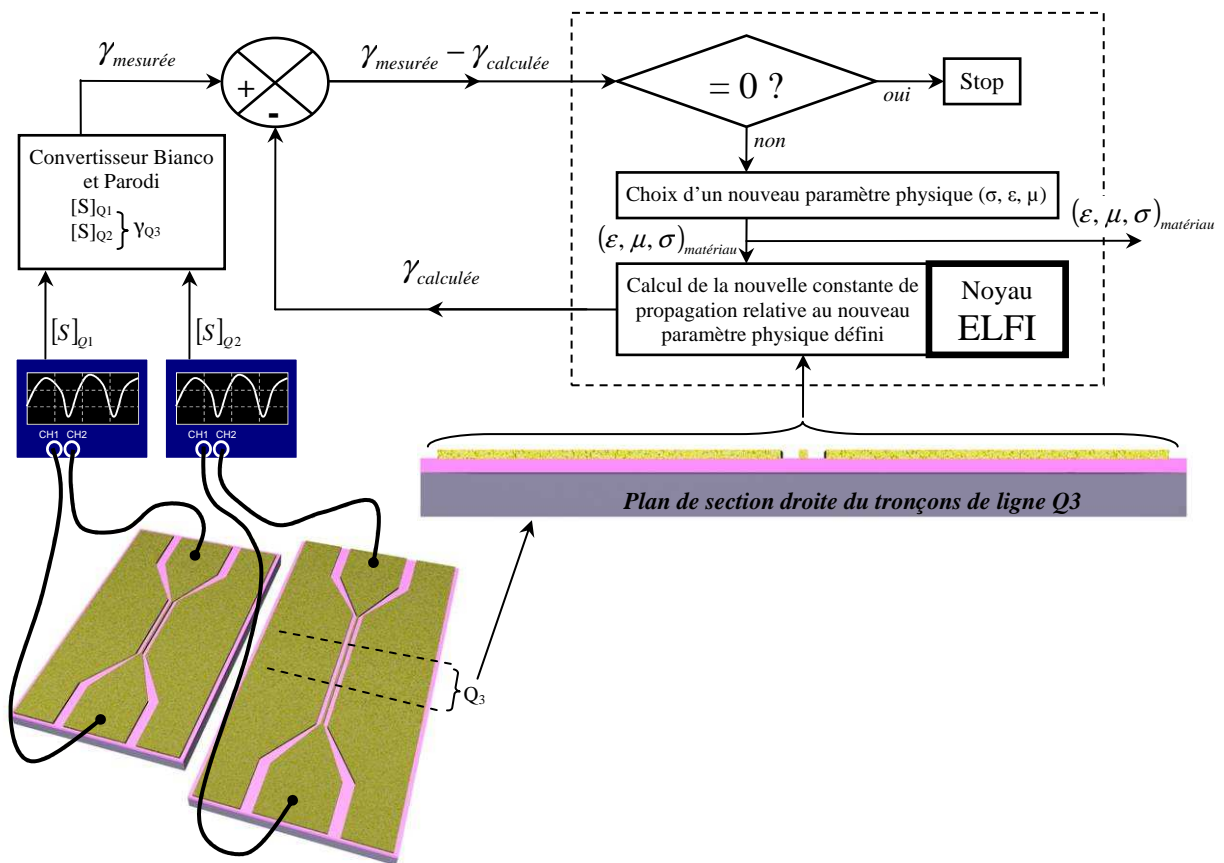


Figure 4.4 : Illustration de la procédure d'aide à la caractérisation de matériau

## 4 Validation de la boucle d'asservissement : ligne coplanaire déposée sur substrat AsGa

A ce stade d'avancement de notre travail, nous avons une solution immédiate pour tester le bon fonctionnement de notre nouvel outil d'aide à la caractérisation des matériaux. En effet, la confection des lignes coplanaires déposées sur AsGa constitue une excellente opportunité. Nous utilisons donc nos relevés de paramètres [S] initialement prévues pour quantifier les pertes au chapitre 2. Les données du problème sont alors les dimensions des lignes et la valeur de la conductivité des dépôts d'or. L'inconnue, dans ce cas précis, est la permittivité de l'arséniure de gallium que l'on déduit des mesures des paramètres [S] effectuées sur plusieurs couples de lignes de longueurs différentes.

Sur la figure 4.5, nous avons reporté l'évolution de la permittivité relative de notre substrat en fonction de la fréquence. Les évolutions que nous avons déduites d'une dizaine de relevés sont quasiment toutes superposées, et ce, que le conducteur central soit de forme classique ou en "T". Comme nous pouvons le constater, nous déduisons une valeur de permittivité relative de 12.92 ; valeur en parfaite concordance avec celle couramment répertoriée dans la littérature et celle fournie par le revendeur (12.9).

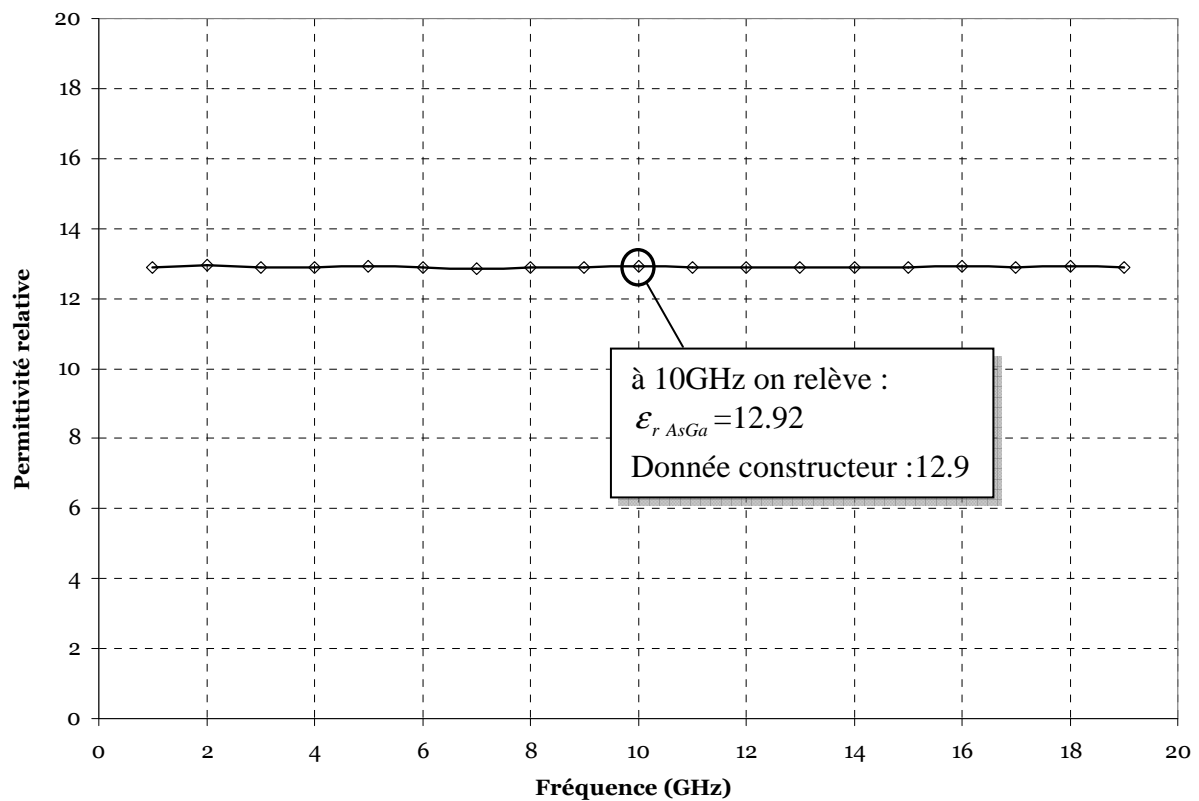


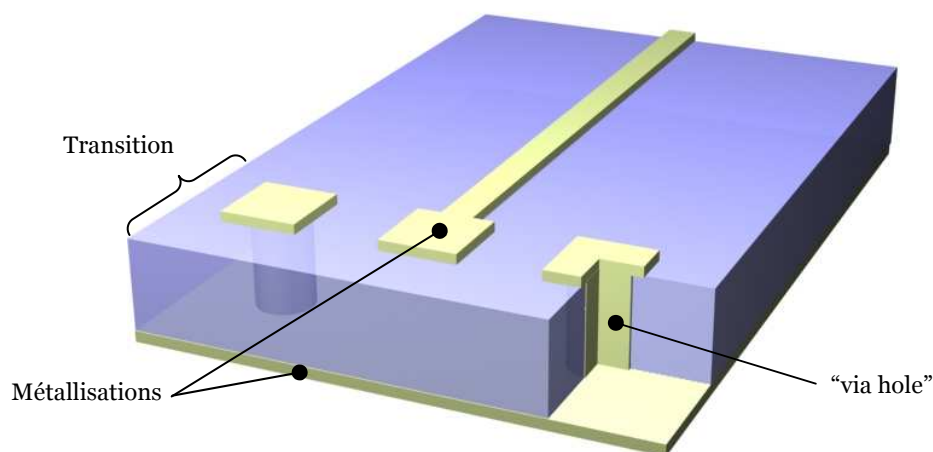
Figure 4.5 : Permittivité relative de l'AsGa obtenue par notre procédure

## 5 Réalisation de structures pour le test du matériau PZT

Comme nous l'avons signalé au second chapitre de ce mémoire et plus encore au paragraphe précédent, il nous faut réaliser deux structures de propagation qui ne diffèrent que par leur longueur. Nous employons ici, le terme de structure de propagation car la caractéristique du matériau PZT s'effectue dans la bande 1 à 26 GHz. Bien évidemment, nous ne concevons pas de dispositif d'excitation permettant d'acheminer le signal micro-onde vers nos lignes. Nous utilisons, comme il se doit, les sondes ou les pointes de topologie coplanaire couplées à l'analyseur de réseau vectoriel ; le tout constituant notre banc de mesure. Cela implique donc que les accès de nos structures de test soient de type coplanaire. A ce stade, deux possibilités s'offrent à nous pour concevoir nos cellules de test.

- La première consiste à conserver la version coplanaire tant pour l'excitation (à cause des pointes) que pour la structure de test elle-même.
- Le second choix réside en une excitation coplanaire (à cause des pointes) d'une structure de test conçue en technologie micro-ruban par exemple.

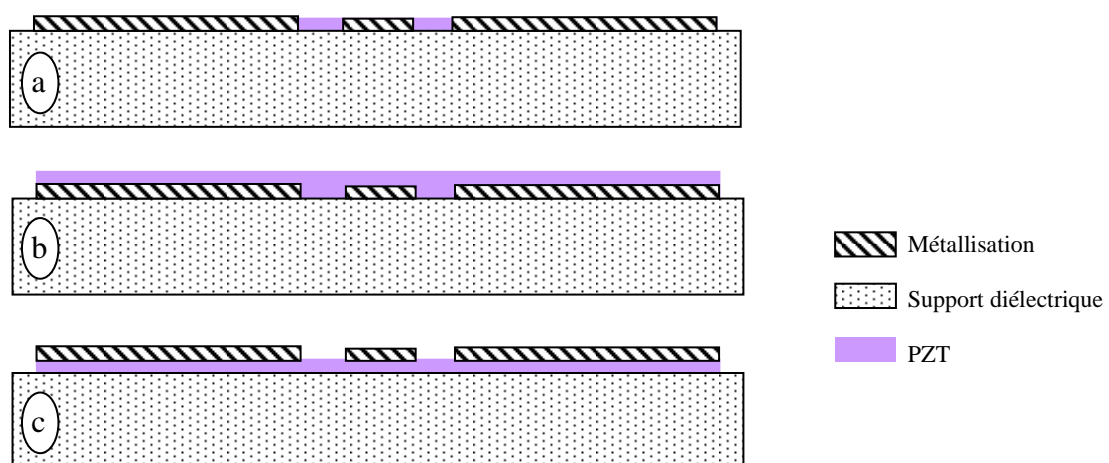
Dans ce cas, la confection de "via hole" est nécessaire pour assurer la transition figure 4.6.



**Figure 4.6** : La ligne microruban et son accès coplanaire

Il est clair que cela nécessite plusieurs étapes technologiques supplémentaires. Concevoir l'une ou l'autre des technologies n'a, sur le plan purement théorique de la détermination de la constante de propagation complexe, aucune conséquence, et ce, dès lors que l'on respecte la philosophie des propos publiés par Bianco et Parodi. Le choix d'une topologie plutôt qu'une autre a pourtant un impact sur la caractérisation du matériau s'il est anisotrope. En ce qui nous concerne, nous avons vérifié que notre couche de PZT ne présente pas d'anisotropie. Ce

point sera abordé au paragraphe suivant. Dans ces conditions, la logique veut que l'on privilégie, pour les structures de test, la topologie coplanaire. Ce choix s'effectue tout naturellement pour quelques raisons évidentes, comme la compatibilité totale avec les pointes du système de mesure, la réduction d'étapes technologiques et par voie de conséquence de coût mais aussi la reproductibilité des structures réalisées. Cette reproductibilité est d'ailleurs un facteur important, voire essentiel, pour une utilisation optimale de la méthode. Nous optons, par conséquent, pour la solution coplanaire. Il nous faut à présent réfléchir sur la façon dont on va utiliser le matériau PZT pour le caractériser dans cet environnement coplanaire. Ce matériau est déposé sous forme de film par une technique de dépôt sous vide. Cela implique la réalisation de couches minces, qui, même si elles sont superposées par étapes successives de dépôt, ne vont pas excéder une épaisseur finale de la dizaine de micromètres voire moins. On notera que ces épaisseurs sont de l'ordre de celles des métallisations d'or des lignes métalliques tout du moins jusqu'à  $3\mu\text{m}$ . Cette mise au point étant faite, plusieurs topologies sont alors envisageables. Nous en avons illustré trois à la figure 4.7.



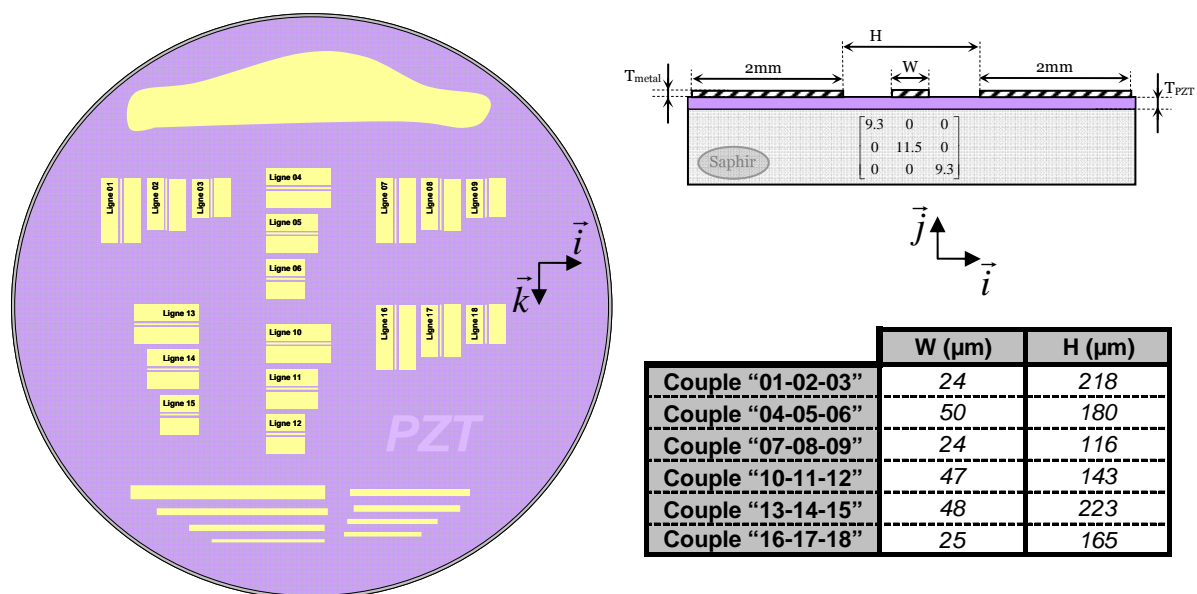
**Figure 4.7 :** Quelques topologies possibles de cellules de test

Pour la première, figure 4.7a, le matériau est déposé en film mince dans les fentes. D'un point de vue technologique, cela implique d'abord le dépôt du matériau PZT. Par la suite, la réalisation des métallisations nécessite au préalable une sérieuse opération d'alignement en terme de masquage. Ceci dit, il n'y a rien d'insurmontable dans cette pratique. Cette structure est donc potentiellement réalisable. Pour ce qui concerne la figure 4.7b, le matériau est déposé, en film mince, sur la structure coplanaire. Cela s'apparente donc, dans un langage de spécialiste à la confection d'une couche de passivation. Cette topologie finale est très intéressante puisqu'il y a une réduction sensible du nombre d'opérations technologiques requises pour sa confection comparée à la première réalisation figure 4.7a. La troisième

solution est, en quelques sortes, une solution complémentaire à la précédente. Le matériau en film mince est d'abord déposé sur le substrat. Les métallisations coplanaires sont ensuite réalisées sur la couche de PZT figure 4.7c.

A ce stade, quelques remarques s'imposent. La couche de PZT nécessite un recuit à une température supérieure à 550 degrés Celsius si l'on désire cristalliser correctement le matériau. Cette opération va nécessairement endommager les métallisations confectionnées à partir d'or, si ces dernières sont effectuées en premier lieu. Cette contrainte élimine, de fait, la structure figure 4.6b faisant intervenir une couche PZT supérieure. De plus, pour des raisons de réduction du nombre d'opérations technologiques dans la réalisation des structures de test, nous optons pour la troisième solution ; celle pour laquelle les lignes coplanaires sont réalisées sur la couche de PZT préalablement déposée sur un substrat supportant, bien entendu, des températures supérieures à 550 degrés voire beaucoup plus. Ce substrat est ici du saphir. Il est commercialisé, entre autre, par la société Crystec [14].

L'ensemble de nos propos est illustré figure 4.8, où six triplets de lignes ont été déposés sur un substrat dont le diamètre est de 2,54 cm. Chaque triplet est décliné suivant trois longueurs de lignes différentes à savoir, 2, 2.5 et 3 mm. Pour mémoire, les dimensions des sections droites des lignes de ces différents triplets sont récapitulées dans le tableau suivant.



**Figure 4.8 :** Illustration des triplets de lignes déposés sur saphir et tableau des dimensions des lignes correspondantes

Toutes les opérations de dépôt de PZT ainsi que celui des métallisations ont été réalisées par le professeur Elhadj Dogheche, spécialiste de ce type de matériau et membre du groupe

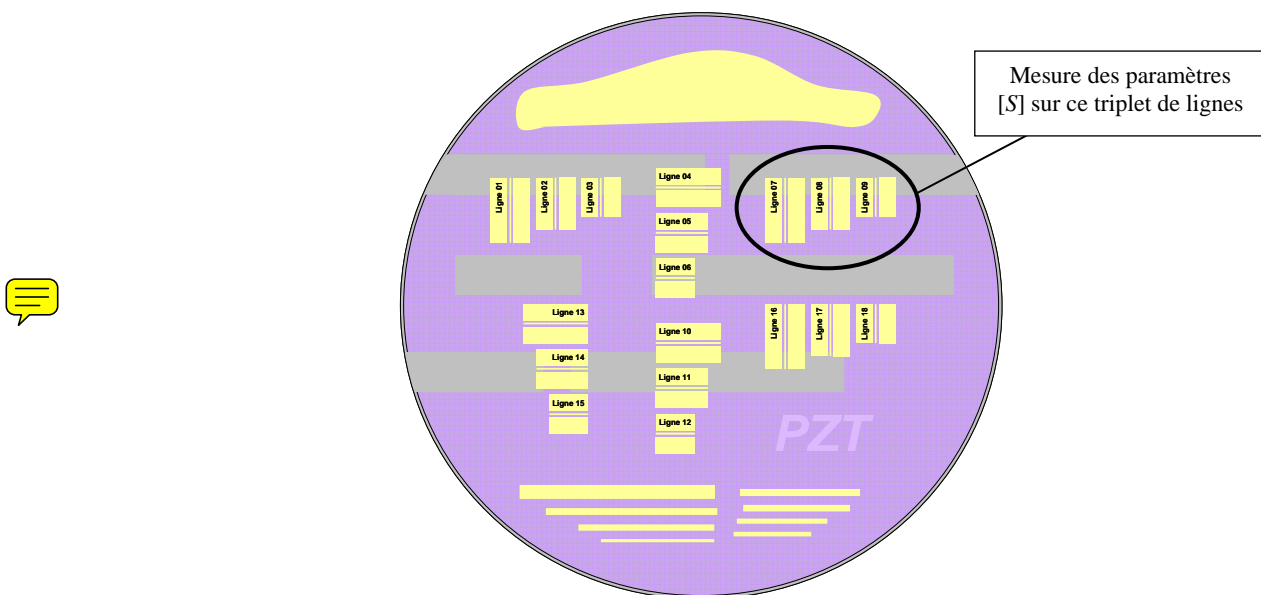
Optoélectronique dirigé par le Professeur Decoster. Les caractéristiques du dépôt de PZT reposent sur la composition suivante :  $\text{PbO} + 0.54 \text{ ZrO}_2 + 0.46 \text{ TiO}_2$  ce qui, en abrégé, s'écrit aussi  $\text{PZT}(1/0.54/0.46)$  ou encore  $\text{PZT}(x=0.54)$  pour la céramique PZT de composition générale  $\text{Pb}(\text{Zr}_{(x)}\text{Ti}_{(1-x)})\text{O}_3$ . A partir d'une diffraction par rayon X, nous en avons déduit :

- ✓ Que la couche réalisée n'est déficitaire ni en plomb, ni en oxygène, et donc, que la composition est correcte.
- ✓ Que la cristallisation s'est bien opérée (phase Perovksite)
- ✓ Que le film présente une structure polycristalline sans orientation préférentielle

## 6 Détermination de la permittivité complexe du matériau PZT et étude de sensibilité

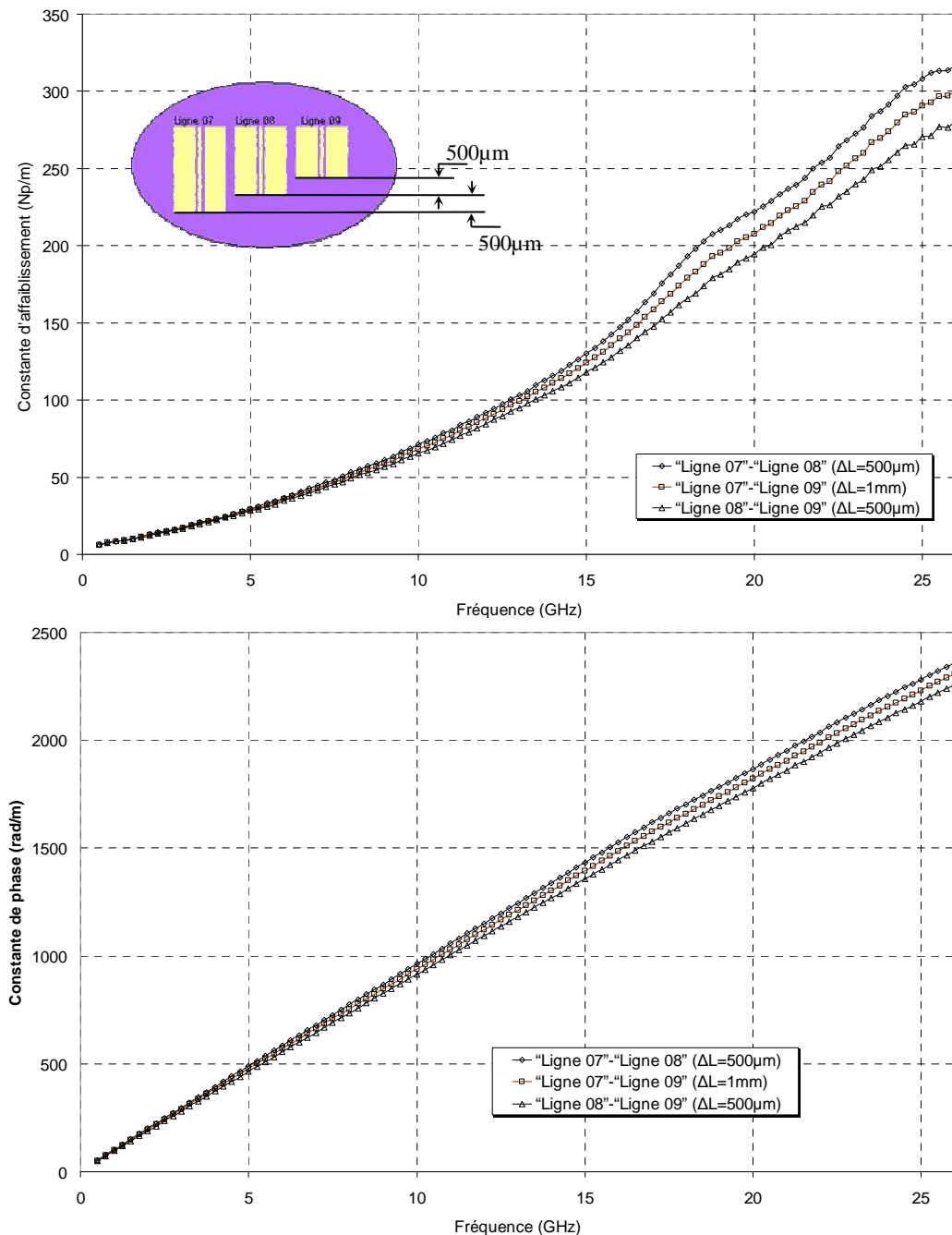
### 6.1 Détermination de la constante de propagation complexe d'un jeu de lignes après mesure des paramètres [S]

Afin de ne pas alourdir le contenu de ce paragraphe, nous ne présentons, dans un premier temps, que les résultats concernant le triplet repéré, figure 4.9, par les numéros 07, 08, 09.



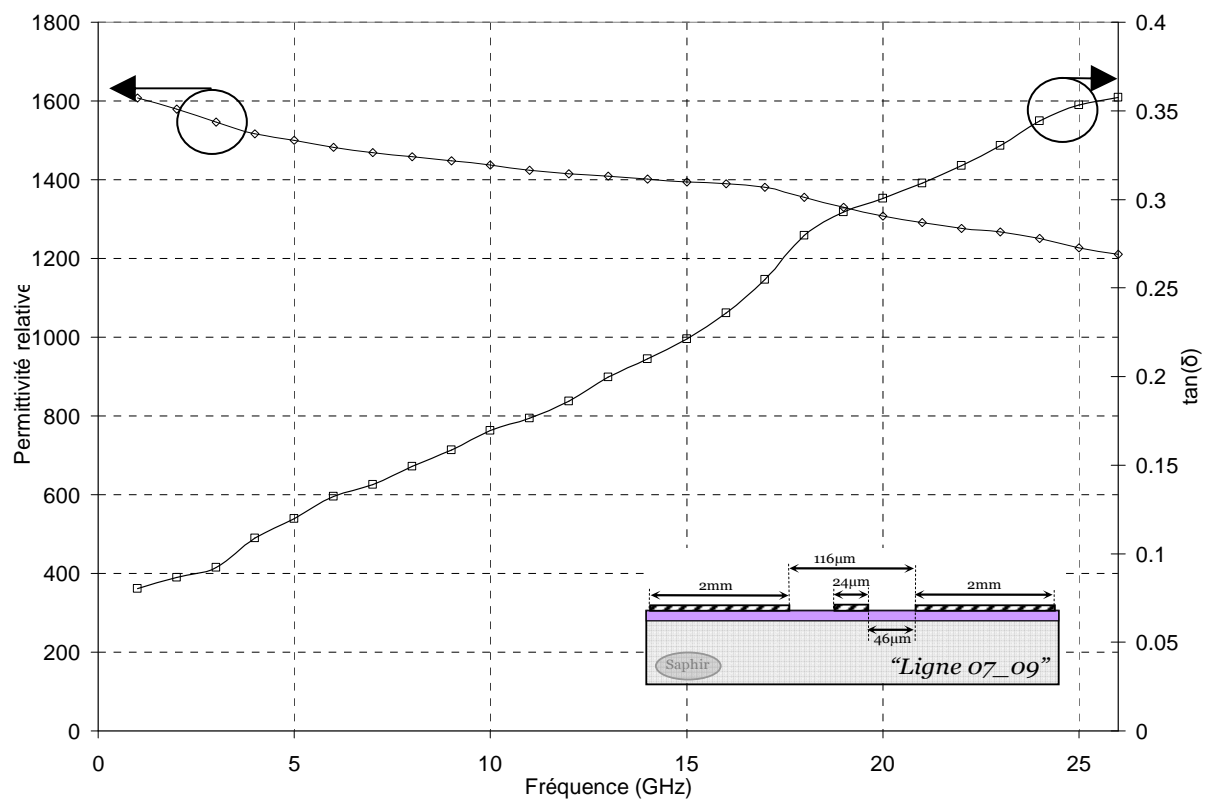
**Figure 4.9** : Triplet de lignes utilisé pour la première détermination des constantes de propagation complexes

En effet, les relevés sur les autres triplets ne sont là que pour “corroborer” ceux déjà existants et fournir une loi de dispersion qui, comme nous le verrons, est liée aussi bien à la maîtrise technologique des opérations qu'à celle expérimentale. Toutes nos mesures sont effectuées sur un analyseur de réseaux vectoriels du type “HP 8510 C” couplé à une station munie de pointes coplanaires de marque “Infinity Cascade”. La procédure d'étalonnage est du type “TRL”.



**Figure 4.10 :** Evolution fréquentielle des parties réelles et imaginaires de la constante de propagation pour les trois couples de lignes

Nous avons donc relevé les paramètres  $[S]$  des trois lignes dont la différence des longueurs vaut 1 mm pour le couple "07-09", et 500 micromètres pour les deux autres, à savoir "07-08" et "08-09". L'ensemble de ces données est traité par notre système d'extraction en vue d'obtenir l'évolution fréquentielle de la constante de propagation complexe dans la plage de fréquence 1-26 GHz. A titre d'illustration, la figure 4.10 récapitule l'ensemble de nos résultats tant sur la constante de phase que sur la constante d'affaiblissement. Comme nous pouvons le constater, les deux évolutions qui correspondent à une longueur équivalente de 500  $\mu\text{m}$  (soit "07-08" et "08-09") encadrent celle de 1mm issue de la différence entre la plus longue et la plus courte de nos trois lignes (soit "07-09"). Ce jeu de trois lignes coplanaires déposées sur notre film de PZT intègre, à lui seul, toutes les incertitudes avec lesquelles nous effectuons ces relevés. Reproductibilité liée à la position des pointes, à l'épaisseur de la couche de PZT, sont autant d'éléments dont il faut étudier l'impact. Toutefois, afin d'obtenir un bref et rapide aperçu, nous prenons comme grandeurs de référence celles extraites pour la ligne de 1mm de longueur que nous reportons dans notre code ELFI. Ce dernier fournit alors, pour une épaisseur moyenne de PZT mesurés à 0,6  $\mu\text{m}$ , l'évolution fréquentielle de la permittivité relative et de la tangente de l'angle de pertes figure 4.11.



**Figure 4.11** : Evolution fréquentielle de la permittivité complexe du matériau PZT



Ce matériau possède à 1 GHz une permittivité relative de 1608 pour une tangente d'angle de perte de  $8 \cdot 10^{-2}$ . Cette valeur de permittivité décroît d'environ 25% pour atteindre la valeur 1200 (avec  $\tan(\delta) \approx 0,35$ ) à 26 GHz.

## 6.2 Etude de sensibilité

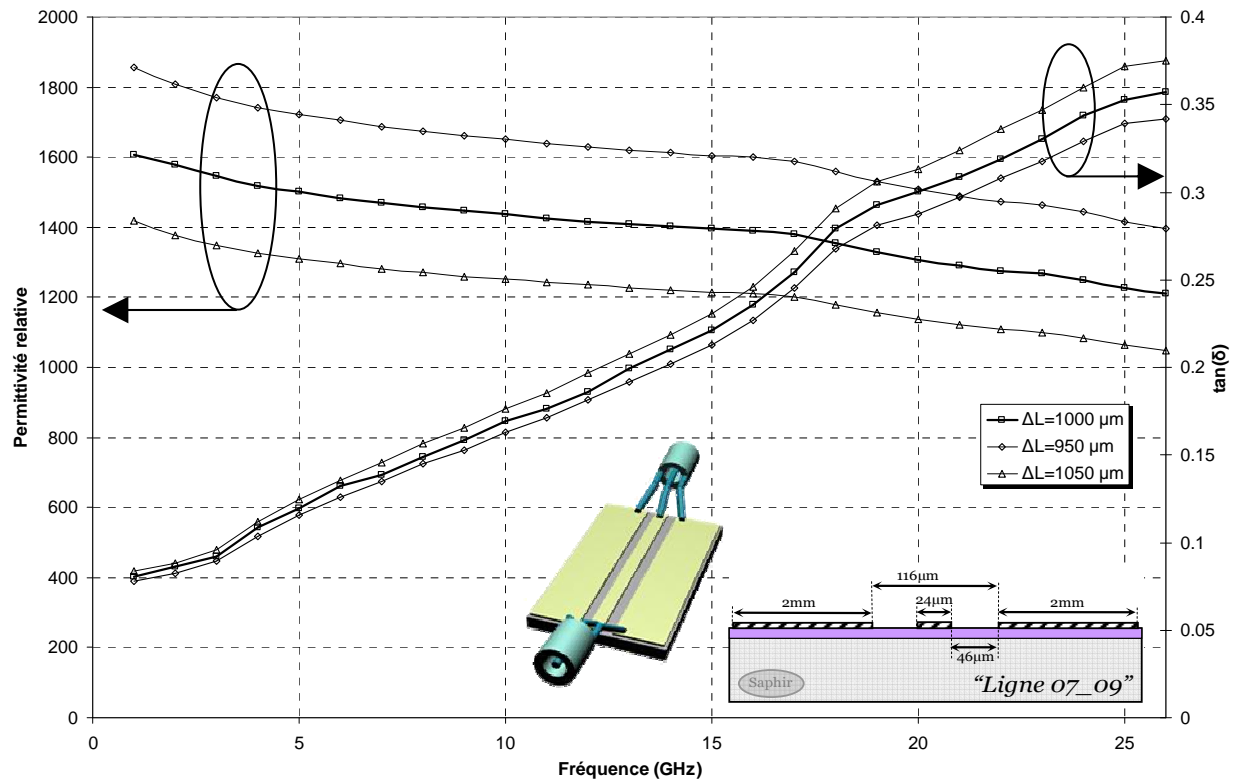
Nous désirons quantifier l'impact, sur la détermination de la permittivité complexe du PZT, tant d'une variation des dimensions géométriques (épaisseur de PZT) que des grandeurs physiques comme la conductivité les métallisations ou encore de la permittivité du Saphir. Rappelons que la permittivité relative de notre matériau PZT est déduite du code ELFI à partir d'une constante de propagation complexe ; constante que nous obtenons grâce à une mesure des paramètres  $[S]$ . Le point clé de cette méthode réside donc dans la connaissance fine de la constante de propagation de la structure sur laquelle est déposé le matériau, mais était il besoin de le rappeler ? Ceci ne peut être assuré que si l'on mesure les paramètres  $[S]$  avec la meilleure fiabilité qui soit. Si tel n'est pas le cas, nous devons recenser les points ou encore les actions qui sont à l'origine d'incertitudes sur les mesures de ces paramètres. Nous nous proposons d'effectuer un bref bilan.

### 6.2.1 Influence du posé de pointes

Nous avons, dans un premier temps, réalisé plusieurs étalonnage, décalés dans le temps, ainsi que quelques posés de pointes sur la même cellule de test. Nous n'avons constaté que des changements mineurs sur l'évolution des modules et des phases des paramètres  $[S]$  à l'issue de cette action. Cette mesure est donc reproductible. Il faut signaler que seules les pointes ont été actionnées pour qu'il y ait, ou non, contact. Cela signifie qu'elles n'ont pas été déplacées sur la surface du wafer en vue d'assurer le contact avec d'autres lignes. Si tel est le cas, une disparité se produit liée au fait que les pointes ne sont pas toujours positionnées au même endroit, même si ce déplacement est faible (de l'ordre de 20 à 30  $\mu\text{m}$ ).

Cela signifie donc, à première vue, que la différence des longueurs entre la ligne courte et la ligne longue évolue. Nous avons traduit ce phénomène sur la figure 4.12 en reportant l'évolution fréquentielle de la permittivité complexe en fonction de cette variation de longueur. Pour mémoire, nous conservons le relevé de la figure 4.11 issu du triplet 07-08-09 dans lequel les deux lignes utilisées sont la plus courtes ("07") et la plus longue ("09"). Ce relevé en trait plein sur la figure 4.12 concerne, par conséquent, la ligne dite de référence dont la longueur après le posé des pointes et vérification vaut 999,6  $\mu\text{m}$  soit pratiquement le millimètre. Il est encadré, en trait pointillé, par les valeurs extraites de notre code lorsque la

position des pointes varient de  $\pm 50 \mu\text{m}$  par rapport à leur position d'origine. Comme nous pouvons le remarquer, une variation totale de  $100 \mu\text{m}$  sur la position et donc sur la longueur de la ligne résultante ( $L=999,6 \mu\text{m}$ ) provoque 25% de variation sur la valeur de la permittivité extraite de notre code qui passe de 1400 (pour  $\Delta L=-50 \mu\text{m}$ ) à 1850 (pour  $\Delta L=+50 \mu\text{m}$ ) à  $F=1\text{GHz}$ .



**Figure 4.12** : Evolution fréquentielle de la permittivité complexe du matériau PZT liée à une variation de la longueur de la ligne de  $\pm 5\%$  ( $T=0.6\mu\text{m}$ )

Ces  $100 \mu\text{m}$  représentent, dans notre cas de figure, 10% de variation de la longueur résultante à savoir ;  $L=L_{\text{ligne}07} - L_{\text{ligne}09}$ . Quant à la tangente de l'angle de perte correspondant aux données précédentes, sa variation relative est de l'ordre de 8 à 10%. Nous avons volontairement exagéré ce phénomène pour attirer l'attention sur l'importance du contrôle du posé de pointes. Que l'on se rassure, nous pouvons améliorer ce point. En effet, nous avons vérifié, par des multiples essais, que l'on peut gagner un facteur 5, soit  $20 \mu\text{m}$  d'erreur dans le positionnement. Nous l'améliorons encore en plaçant et en gravant des repères à proximité des lignes coplanaires. Il existe du reste une solution radicale à cette source d'incertitude. Elle consiste à accroître la longueur de la ligne de référence qui peut très bien passer du millimètre au centimètre. Ceci a d'ailleurs été effectué pour mesurer les pertes métalliques de nos lignes coplanaires utilisées pour valider ELFI au second chapitre de ce mémoire.

Pour conclure ce volet lié à l'incertitude de mesure sur les paramètres  $[S]$  nous désirons rappeler que:

- Le posé des pointes et leur position doivent être contrôlés précisément
- Tant que cela est possible, la ligne de référence doit être la plus longue possible. Ceci implique, bien entendu, plus de contraintes dans la réalisation technologique des lignes courtes et longues puisqu'elles doivent conserver les mêmes dimensions transversales sur une distance plus importante.

Signalons enfin que ces sources d'incertitudes sont gérables. Une erreur relative de l'ordre de 1 à 2 % sur la détermination de la permittivité est alors tout à fait envisageable si l'on ne considère que cette seule source d'erreur.

### 6.2.2 Influence d'une variation de l'épaisseur du dépôt de PZT

Le problème est différent lorsqu'il s'agit d'un dépôt de matériau qu'il soit métallique ou diélectrique. En effet, une fois le matériau déposé, nous sommes réduit à un constat simple, celui du contrôle de son épaisseur et surtout de son uniformité sur la surface du wafer. On ne

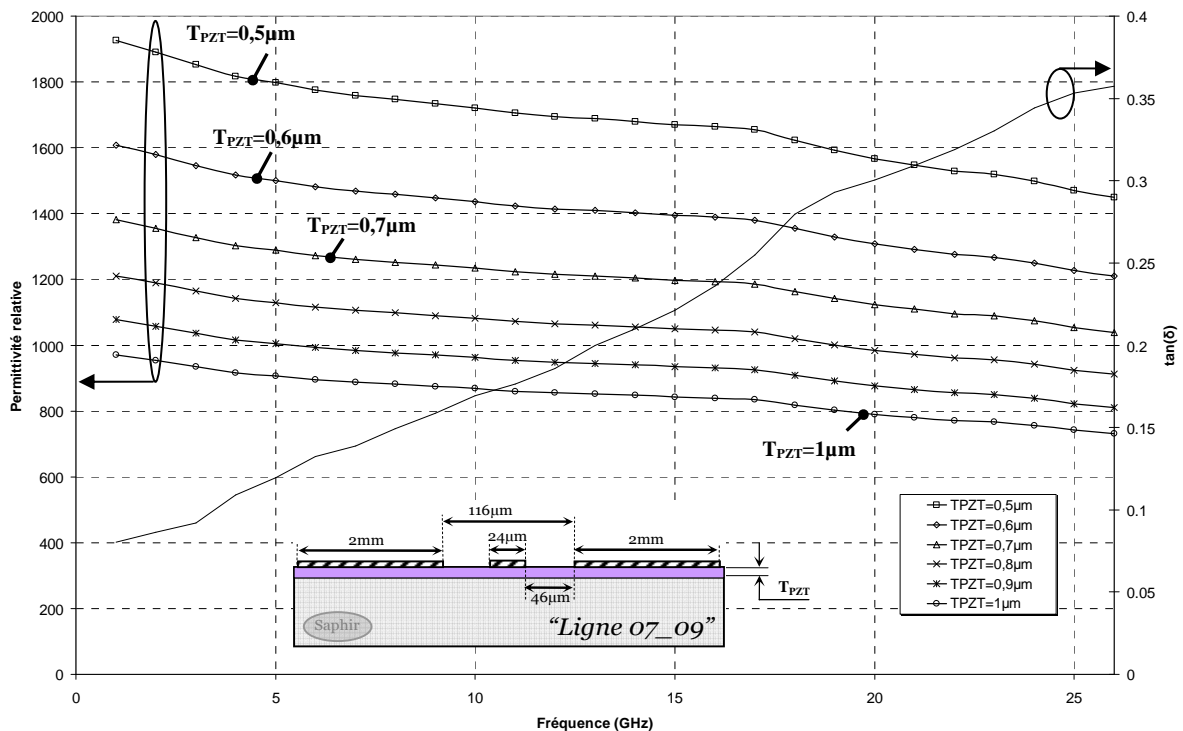


Figure 4.13 : Evolution fréquentielle de la permittivité complexe du matériau PZT

peut, à ce stade, par une action mécanique ou chimique revenir à l'épaisseur désirée au départ du processus. Afin d'avoir un point de vue général sur l'évolution de la permittivité complexe à l'issue d'une fluctuation de l'épaisseur du film de PZT, nous reprenons les relevés expérimentaux effectués sur la ligne de référence de 1 mm de longueur. La constante de propagation déduite des mesures des paramètres  $[S]$  ainsi que toutes les autres grandeurs sont fixées et interprétées comme des données par ELFI puisque seule l'épaisseur du film de PZT est variable. ELFI et l'outil d'extraction associé fournit alors, pour chaque nouvelle épaisseur de PZT (avec la constante de propagation de référence représentée figure 4.10) une autre valeur de la permittivité relative du matériau. Ceci est illustré figure 4.13 (page précédente) où l'épaisseur du film de PZT varie par pas de 0,1  $\mu\text{m}$  entre 0,5  $\mu\text{m}$  et 1  $\mu\text{m}$ . Nous récapitulons, dans le tableau suivant, les valeurs brutes des permittivités relatives extraites au moyen de notre outil. Nous consignons également, dans ce tableau, la variation relative de permittivité calculée au moyen de la relation simple suivante :

$$\frac{\Delta \epsilon_{r \text{ PZT}}}{\epsilon_{r \text{ PZT}}} = \frac{\epsilon_{r \text{ PZT } T_{i+1}} - \epsilon_{r \text{ PZT } T_i}}{\epsilon_{r \text{ PZT } T_i}}$$

Dans cette expression,  $T_{i+1}$  et  $T_i$  sont deux épaisseurs dont la différence est toujours de 0,1  $\mu\text{m}$ . Bien entendu,  $\epsilon_{r \text{ PZT}}$  pour  $T_{i+1}$  et  $T_i$  sont les permittivités relatives déduites pour chacune de ces épaisseurs. La valeur ainsi calculée met en relief l'erreur que l'on peut commettre si les variations d'épaisseur du matériau ne sont pas maîtrisées.

$T_i$ ( $\mu\text{m}$ )	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\epsilon_{\text{PZT}} (F=1\text{GHz})$	1926.75	1608.09	1380.88	1210.78	1077.40	971.53
		20%	16%	14%	12%	11%
$\epsilon_{\text{PZT}} (F=26\text{GHz})$	1449.19	1209.80	1039.54	911.59	811.22	731.57
		20%	16%	14%	12%	11%

**Tableau 4.1 :** Erreur sur l'estimation de la permittivité en fonction de l'épaisseur de la couche.

Comme nous pouvons l'observer, 0,1  $\mu\text{m}$  de fluctuation pour l'épaisseur du dépôt occasionne, en moyenne, 10 à 20% de variation relative sur la permittivité diélectrique ; ce qui est considérable. L'épaisseur du film de PZT, mais surtout son uniformité, sont des éléments fondamentaux pour la caractérisation fiable du film mais ceci n'est pas une surprise. Il est clair, que pour le cas considéré ici, il est peu probable d'aboutir à 0,1  $\mu\text{m}$  de variation d'épaisseur lorsque le dépôt lui-même est, à la base de 0,6  $\mu\text{m}$ . Toutefois, sur un wafer de grande dimension, de telles variations sont possibles, et par conséquent, très préjudiciables à l'extraction d'une valeur fiable de la permittivité complexe.

Nous allons poursuivre nos investigations en étudiant l'impact d'une variation de l'épaisseur de la métallisation des lignes coplanaires.

### 6.2.3 Influence de la conductivité des métallisations

Dans cette étude de sensibilité, les grandeurs de référence (considérées comme des données dans ELFI) sont déjà répertoriées au paragraphe précédent. Elles nous ont permis de définir l'évolution fréquentielle de la permittivité complexe du film de PZT et lorsque l'épaisseur du PZT vaut  $0,6 \mu\text{m}$  et celle des rubans métalliques  $2,7 \mu\text{m}$ . La longueur de la ligne dite de référence est de  $999,6 \mu\text{m}$  soit quasiment  $1\text{mm}$ . Rappelons qu'elle provient du triplet 07-08-09 dans lequel les lignes 07 et 09 ont été sélectionnées pour la mesure des paramètres  $[S]$ . Par voie de conséquence, l'extraction de la constante de propagation complexe correspondante est, une fois de plus, notre référentiel. A ce stade, nous désirons atteindre un double objectif. Il consiste à définir le degré de sensibilité, sur la permittivité, d'une variation d'épaisseur des rubans métalliques ainsi que le poids de cette variation sur la valeur de permittivité extraite de notre code lorsque l'épaisseur du film de PZT évolue également. Pour être le plus concis possible, nous ne considérons que deux cas de figure lorsque l'épaisseur de PZT varie de  $0,6$  à  $1 \mu\text{m}$  par pas de  $0,2 \mu\text{m}$  :

- Le premier, où la métallisation vaut  $2,7\mu\text{m}$  car il s'agit ici d'une valeur mesurée donc contrôlée.
- Le second où l'épaisseur de métallisation est considérée nulle.

Cela ne signifie pas, dans ce dernier cas, que la métallisation est inexistante, bien au contraire. La présence de cette dernière et la prise en compte des pertes métalliques est assurée par une relation locale faisant intervenir le concept d'impédance de surface. Ce point a, du reste, été abordé au premier chapitre de ce mémoire. Nous retrouvons donc, à la figure 4.14, les relevés fréquentiels de la figure précédente (où l'on maille les métallisations) auxquels ont été greffés ceux correspondant à une épaisseur de métallisation nulle (avec introduction d'une impédance de surface).

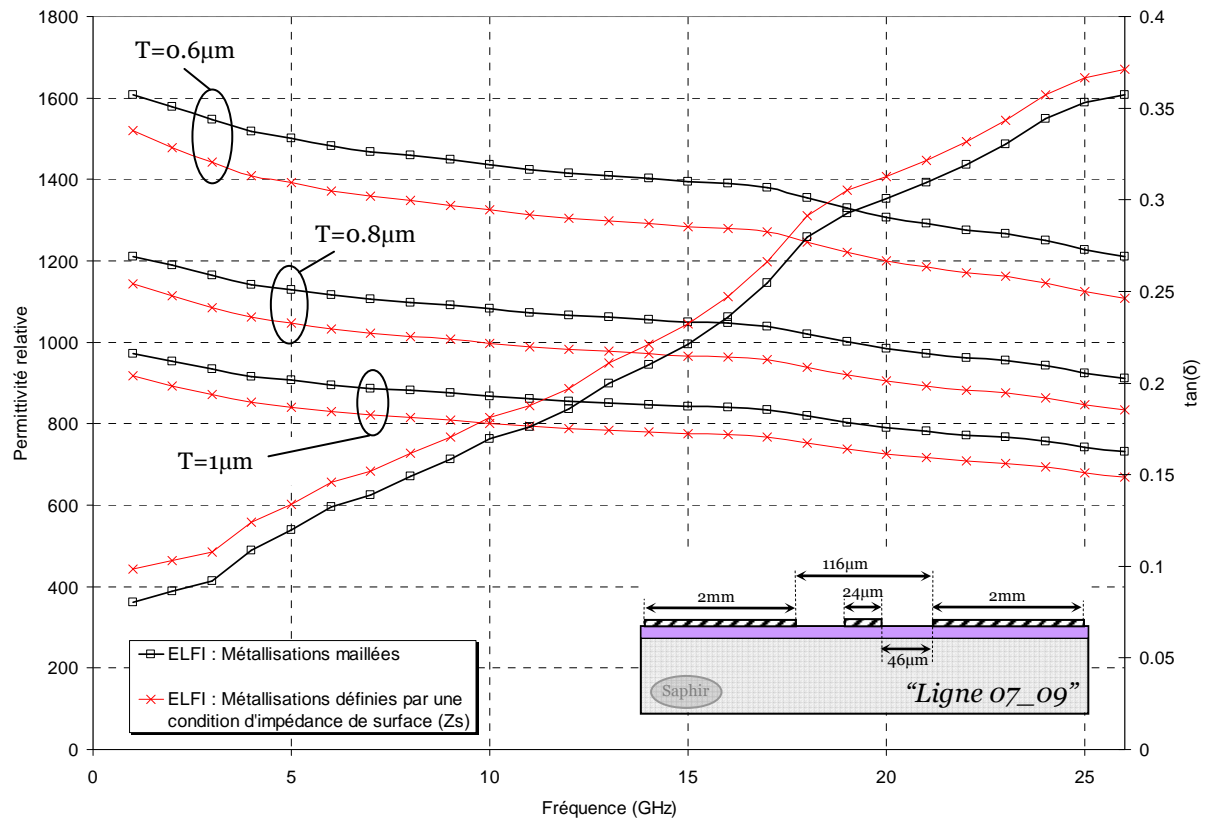


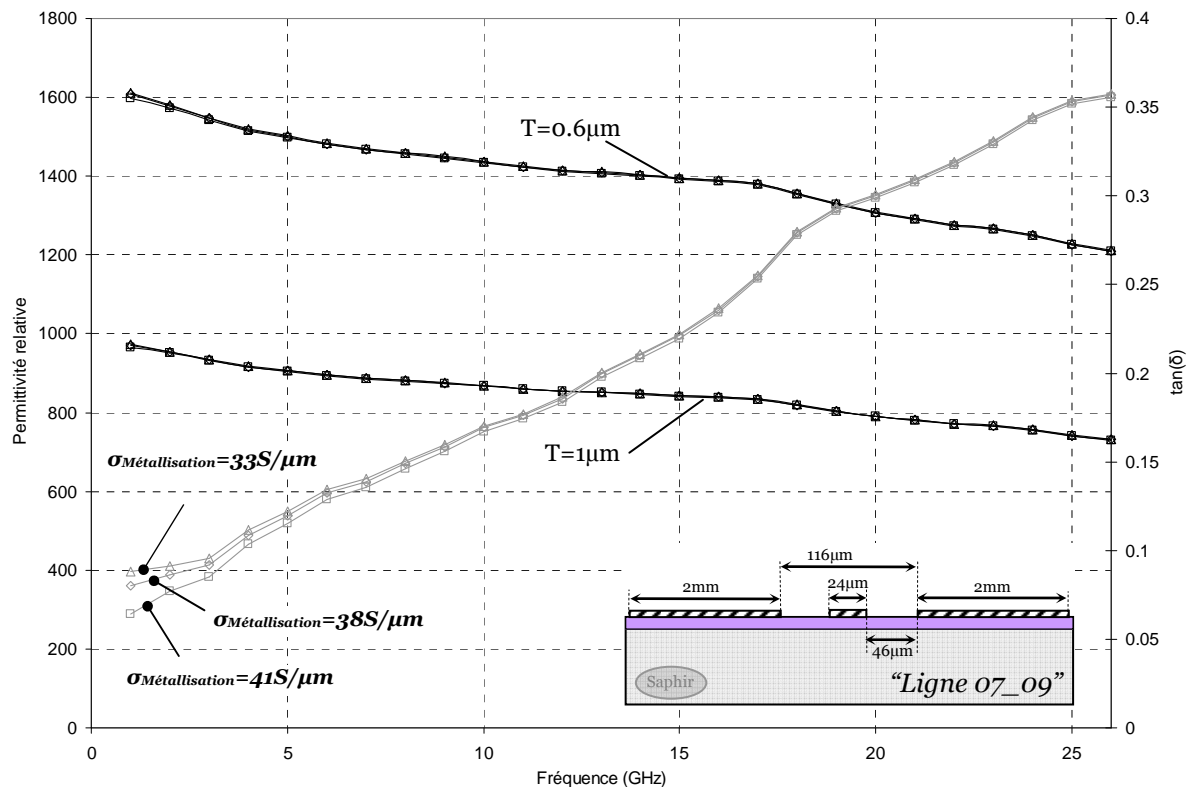
Figure 4.14 : Evolution fréquentielle de la permittivité complexe du matériau PZT lorsque la métallisation vaut  $2.7\mu\text{m}$  et lorsqu'elle est nulle ( $Z_s$ )

Cette épaisseur nulle est certes asymptotique mais elle nous renseigne très bien sur les écarts obtenus dans l'estimation brute de la permittivité relative quand d'une épaisseur nulle on passe à environ  $3\mu\text{m}$  de métallisation, et ce, du point de vue théorique et numérique. Cela occasionne entre 5 et 8 % d'erreur comme le montre le tableau 4.2 ci-dessous récapitulant nos résultats aux fréquences 1 et 26 GHz.

$T_{PZTi}$ ( $\mu\text{m}$ )		$T_{PZT1}=0.5$		$T_{PZT2}=0.6$		$T_{PZT3}=0.7$		$T_{PZT4}=0.8$		$T_{PZT5}=0.9$		$T_{PZT6}=1$	
F (GHz)		1	26	1	26	1	26	1	26	1	26	1	26
$\epsilon_{PZT}$	Rubans maillés ( $T_{\text{metal}}=2.72\mu\text{m}$ )	1927	1449	1608	1210	1381	1040	1211	912	1077	811	972	732
	Rubans définis par une condition locale d'impédance de surface ( $T_{\text{metal}}=0$ )	1820	1327	1519	1108	1304	952	1144	835	1018	743	918	670
$\Delta\epsilon/\epsilon$ (%)		6	9	6	9	6	9	6	9	6	9	6	9

Tableau 4.2 : Comparaison entre les permittivités obtenues lorsque l'on maille les rubans métalliques, et lorsqu'on les définit par une impédance de surface ( $Z_s$ ).

Nous allons quitter le contexte des métallisations, non sans estimer au préalable, l'impact d'une variation de la conductivité de ces dernières sur le comportement de la permittivité complexe.



**Figure 4.15 :** Evolution fréquentielle de la permittivité complexe du matériau PZT pour trois valeurs différentes de la conductivité des métallisations

Cet impact est, une fois de plus, illustré figure 4.15 à partir des mesures faites sur la ligne de référence issue du triplet 07-08-09, de longueur 1 mm, et où les épaisseurs de la couche de PZT et d'or valent respectivement 0,6 et 2,7  $\mu\text{m}$ . Ces évolutions tracées pour trois valeurs différentes de la conductivité montrent que la valeur de la permittivité relative du film de PZT déduite de notre code est peu sensible à cette gamme de variation de la conductivité. Par contre, il faut noter une sensibilité plus importante sur la tangente de l'angle de perte aux basses fréquences quand de  $\sigma=33\text{S}/\mu\text{m}$  on passe à  $\sigma=41\text{S}/\mu\text{m}$ ; l'écart relatif observé atteignant 15% à 1 GHz. Une mauvaise mesure de la conductivité peut donc sous évaluer ou sur évaluer la tangente de l'angle de perte du matériau PZT en dessous de 5GHz.

## 7 Bilan global

### 7.1 Bilan sur le triplet 07-08-09

L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre est le fruit d'une première tentative de mesure des caractéristiques d'un matériau de très forte permittivité, et ce, dans la plage des fréquences comprises entre 1 et 26GHz. Signalons que notre tâche est facilitée car, après

contrôle, le matériau déposé ne possède pas d'orientations privilégiées. Il n'est donc pas anisotrope. Nous rappelons, pour mémoire, dans le tableau 4.3 suivant les grandeurs qui ont contribué à notre étude de sensibilité et leurs pourcentages de variations. Bien évidemment, cette étude de sensibilité porte sur le degré de précision avec lequel permittivité relative et tangente d'angle de pertes sont déterminés à 1 et 26GHz respectivement. Signalons enfin que tous ces chiffres s'appuient sur ceux concernant une ligne de longueur 1mm pour laquelle l'épaisseur des métallisations vaut 2.7 $\mu$ m avec une conductivité de 38S/ $\mu$ m, et ce, pour une couche de PZT poly-cristalline de 0.6 $\mu$ m d'épaisseur. Cela correspond au couple 07-09 de notre triplet 07-08-09.

	posé de pointes	Variation d'épaisseur	Variation de la conductivité	Variation du tenseur de permittivité	Variation du tenseur de permittivité	Variation du tenseur de permittivité
<b>F=1GHz</b>	$\Delta L = \pm 50 \mu\text{m}$ nominale: L=1mm	$\Delta T = \pm 0.1 \mu\text{m}$ nominale: T=0.6 $\mu$ m	$\Delta \sigma = \pm 10\%$ nominale: $\sigma = 38\text{S}/\mu\text{m}$	$\epsilon_{xx} = 8.3$ et $10.3$ $\Delta \epsilon_{xx} = \pm 10\%$ nominale: $\epsilon_{xx} = 9.3$	$\epsilon_{yy} = 10.5$ et $12.5$ $\Delta \epsilon_{yy} = \pm 10\%$ nominale: $\epsilon_{yy} = 11.5$	$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 9.8$ (alumine) nominale: $\epsilon_{xx} = 9.3$ $\epsilon_{yy} = 11.5$ $\epsilon_{zz} = 9.3$
$\Delta \epsilon_r \text{ PZT} / \epsilon_r \text{ PZT}$	<b><math>\pm 8</math> à <math>10\%</math></b>	<b>+20% -15%</b>	<b>&lt;1%</b>	<b><math>\pm 6\%</math></b>	<b><math>\pm 6\%</math></b>	<b>1.5%</b>
$\Delta \text{tg}(\delta) / \text{tg}(\delta)$	<b>&lt;1%</b>	<b>&lt;1%</b>	<b>+10% -20%</b>	<b><math>\pm 3\%</math></b>	<b><math>\pm 3\%</math></b>	<b>0.5%</b>

	posé de pointes	Variation d'épaisseur	Variation de la conductivité	Variation du tenseur de permittivité	Variation du tenseur de permittivité	Variation du tenseur de permittivité
<b>F=26GHz</b>	$\Delta L = \pm 50 \mu\text{m}$ nominale: L=1mm	$\Delta T = \pm 0.1 \mu\text{m}$ nominale: T=0.6 $\mu$ m	$\Delta \sigma = \pm 10\%$ nominale: $\sigma = 38\text{S}/\mu\text{m}$	$\epsilon_{xx} = 8.3$ et $10.3$ $\Delta \epsilon_{xx} = \pm 10\%$ nominale: $\epsilon_{xx} = 9.3$	$\epsilon_{yy} = 10.5$ et $12.5$ $\Delta \epsilon_{yy} = \pm 10\%$ nominale: $\epsilon_{yy} = 11.5$	$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 9.8$ (alumine) nominale: $\epsilon_{xx} = 9.3$ $\epsilon_{yy} = 11.5$ $\epsilon_{zz} = 9.3$
$\Delta \epsilon_r \text{ PZT} / \epsilon_r \text{ PZT}$	<b><math>\pm 8</math> à <math>10\%</math></b>	<b>+20% -15%</b>	<b>&lt;1%</b>	<b><math>\pm 6\%</math></b>	<b><math>\pm 6\%</math></b>	<b>1.5%</b>
$\Delta \text{tg}(\delta) / \text{tg}(\delta)$	<b><math>\pm 10\%</math></b>	<b>&lt;1%</b>	<b>+2% -3%</b>	<b><math>\pm 4\%</math></b>	<b><math>\pm 4\%</math></b>	<b>0.5%</b>

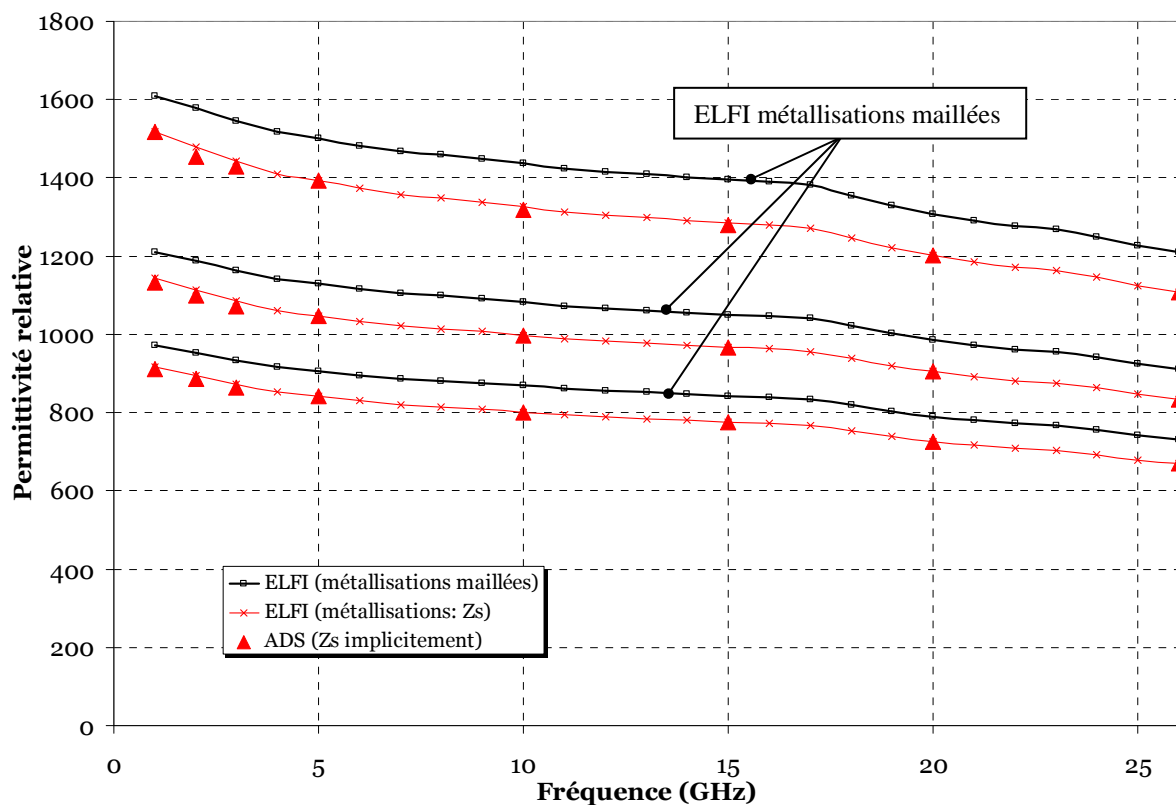
**Tableau 4.3 :** Bilan de sensibilité des différents paramètres pris en compte.

Comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre, le posé de pointes est une source d'erreur si la différence de longueur entre les deux lignes est faible. C'est certainement le cas pour ce qui nous concerne. Un décalage des pointes de  $\pm 50 \mu\text{m}$  est donc préjudiciable en regard des 1000 $\mu\text{m}$  de longueur de la ligne résultante de test. Ce point peut être, heureusement, considérablement amélioré. Nous estimons pouvoir limiter l'erreur relative sur l'estimation brute de la permittivité de la couche et la ramener à 5% voire moins. Au vue des résultats regroupés dans notre tableau, il est clair que l'épaisseur du dépôt de PZT doit être la plus constante possible. Nous ne pouvons accepter 15% d'évolution de cette épaisseur autour de sa moyenne si l'on désire extraire une valeur fiable de la permittivité. Toutes ces remarques s'appuient sur l'utilisation du code ELFI lorsque l'on maille les métallisations d'or



de  $2.7\mu\text{m}$  d'épaisseur. Remarquons que cette épaisseur représente quatre fois celle de la couche de PZT ; la largeur du ruban central valant huit fois cette épaisseur. Si l'on dispose d'un code qui ne prend pas en compte l'épaisseur de métal mais la considère nulle tout en simulant sa présence par une impédance de surface, alors l'erreur commise sur la prédiction de la permittivité de la couche est de l'ordre de 8 à 10%.

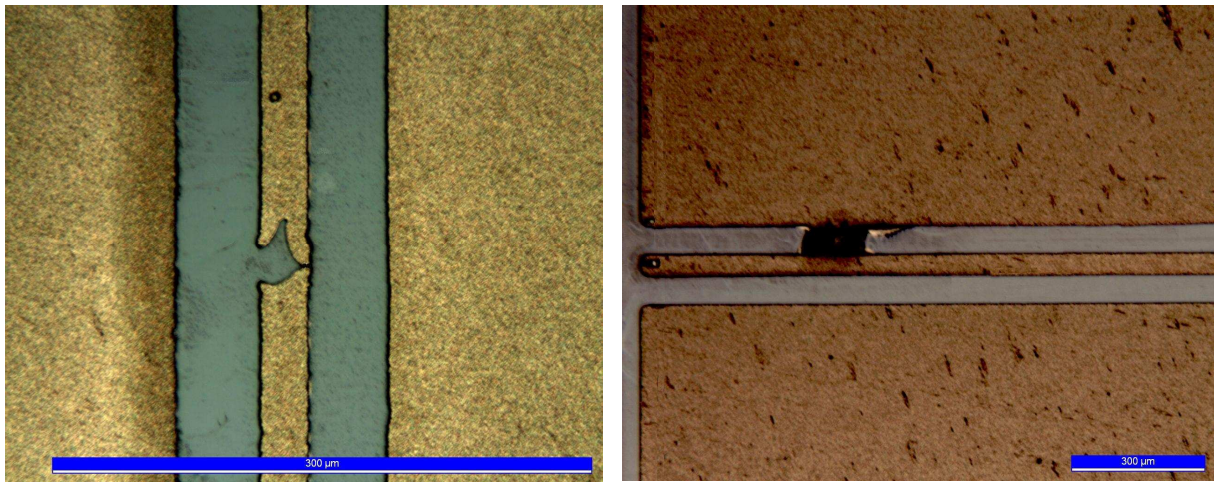
A ce titre, nous disposons dans notre équipe d'autre code de calcul. Basé sur une appréhension complètement différente du problème tant sur le point théorique que numérique, il s'agit de l'approche dans le domaine spectral (ADS). Nous avons, par curiosité, substitué d'ADS à ELFI pour déduire les évolutions fréquentielles de la permittivité complexe. Comme le montre les évolutions figure 4.16, éléments finis (Zs) et approche dans le domaine spectral (Zs) fournissent quasiment le même résultat. Cela montre, même si ce n'est pas le but, les limites d'un code comme l'ADS ne prenant pas en compte les épaisseurs finies des métallisations. Cela dit, ce dernier est à la base très performant et peut très bien constituer une première aide à la caractérisation du matériau.



**Figure 4.16 :** Evolution de la permittivité complexe : comparaison entre l'ADS (Zs implicitement) et ELFI (avec et sans impédance de surface)

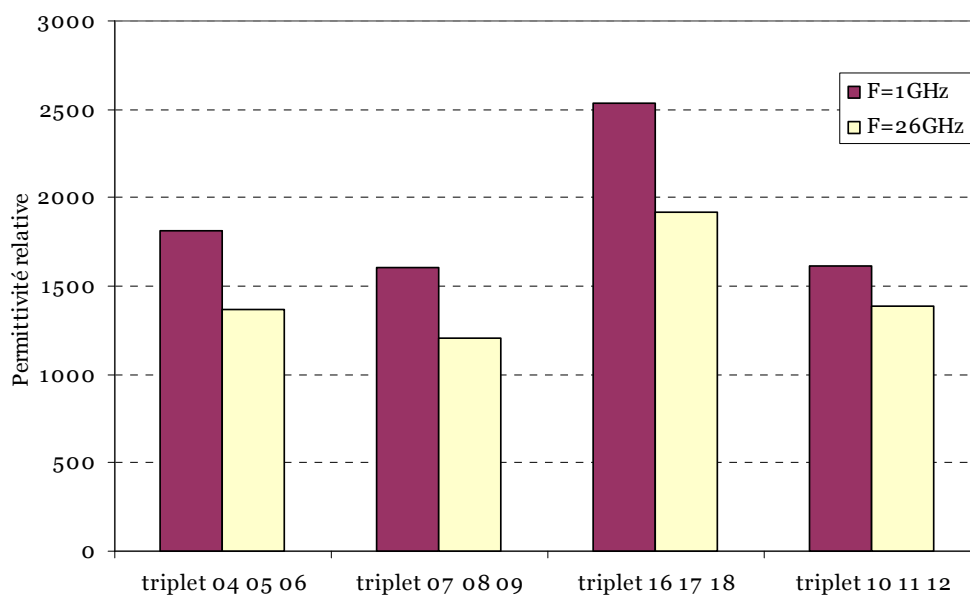
## 7.2 Bilan global

Nous allons conclure cette phase d'extraction de la permittivité complexe en présentant figure 4.18 un bilan des valeurs déduites de nos mesures effectuées sur quatre triplets de lignes parmi six. En effet, deux triplets sont inexploitable du fait de la présence de coupure dans les conducteurs centraux des lignes (figure 4.17).

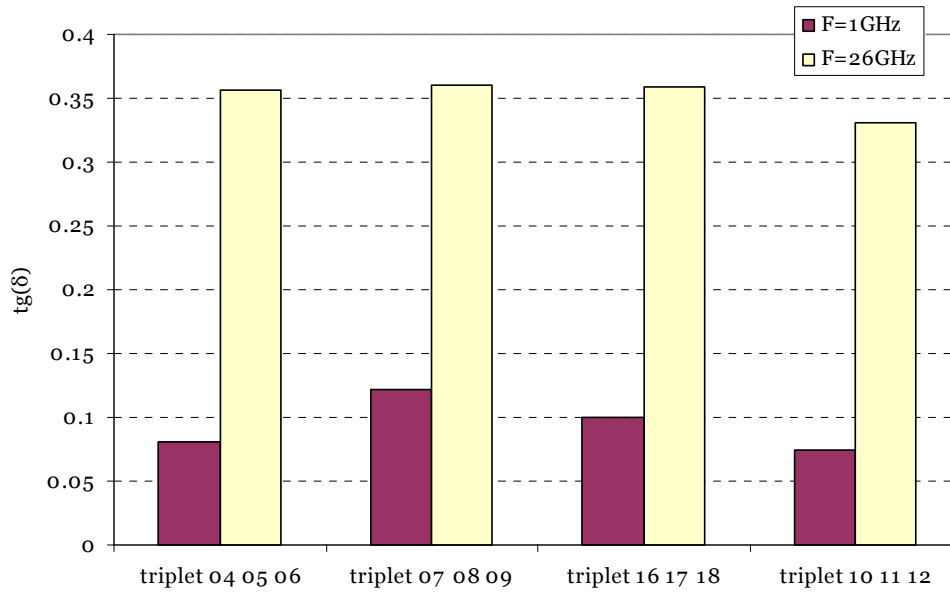


**Figure 4.17** : Photographies de quelques lignes inexploitable

Les valeurs proposés aux fréquences 1 et 26GHz sont des valeurs brutes sans prise en compte des incertitudes dont les amplitudes sont du même ordre de grandeur que celles répertoriées dans le tableau 4.3 pour le triplet 07-08-09.



**Figure 4.18a** : Evolution de la permittivité relative déduite des relevés effectués sur quatre triplets de ligne à la fréquence 1 et 26GHz



**Figure 4.18b** : Evolution de la tangente de l'angle de pertes déduite des relevés effectués sur quatre triplets de ligne à la fréquence 1 et 26GHz

Comme nous pouvons le constater, des disparités importantes apparaissent dans ces valeurs brutes. Elles sont essentiellement liées à deux facteurs, pour l'échantillon qui nous a été donné en vue de sa caractérisation diélectrique :

- ✓ Le premier, concerne les dimensions longitudinales aboutissant à une ligne de référence de 1000 $\mu$ m de longueur, donc trop faible.
- ✓ Le second concerne l'homogénéité de l'épaisseur du dépôt.

## Bibliographie du chapitre 4

- [89] B. Kang, J. Cho, C. Cheon, Y. Kwon  
“Nondestructive Measurement of Complex Permittivity and Permeability Using Multilayered Coplanar Waveguide Structures”  
I.E.E.E Microwave and Wireless Components Letters, Vol. 15, N. 5, May 2005.
- [90] V. N. Egorov, V. L. Masalov, Y. A. Nefyodov, A. F. Shevchun, and all  
“Dielectric Constant, Loss Tangent, and Surface Resistance of PCB Materials at K-Band Frequencies”  
I.E.E.E Transactions on MTT, Vol 53, N° 2, February 2005.
- [91] J. Grzyb, G. Tröster  
“Finite-Width CBCPW Characteristic Impedance De-Embedding With Probe-Tips”  
I.E.E.E Microwave and Wireless Components Letters, Vol 14, N° 5, May 2004.
- [92] R. B. Marks, D. F. Williams  
“Interconnection Transmission Line Parameter Characterization”  
40th ARFTG Conference Digest-Fall, Vol 22, pp 88-95, December 1992.
- [93] M. D. Janezic, D. F. Williams  
“Permittivity Characterization from Transmission-Line Measurement”  
I.E.E.E MTT-S International Microwave Symposium Digest, Vol 3, pp 1343-1346, 8-13 June 1997.
- [94] D. F. Williams, R. B. Marks  
“Accurate Transmission Line Characterization”  
I.E.E.E Microwave and Guided Wave Letters, VOL. 3, NO. 8, AUGUST 1993.
- [95] D. F. Williams, J.-M. Belquin, G. Dambrine, R. Fenton  
“On-wafer measurement at millimeter wave frequencies”  
I.E.E.E MTT-S International Microwave Symposium Digest, Vol 3, pp 1683-1686, 17-21 June 1996.
- [96] U. Arz, H. Grabinski, D. F. Williams  
“Accurate Characteristic Impedance Measurement on Silicon”  
2nd I.E.E.E Workshop on Signal Propagation on Interconnects, Digest of Abstracts, Travemünde, May 13-15, 1998.
- [97] K. Berdel, J. G. Rivas, P. H. Bolívar, P. de Maagt, H. Kurz  
“Temperature Dependence of the Permittivity and Loss Tangent of High-Permittivity Materials at Terahertz Frequencies”  
I.E.E.E Transactions on MTT, VOL. 53, NO. 4, APRIL 2005.
- [98] B. Bianco, M. Parodi  
“Determination of the propagation constant of uniform microstrip lines”  
Alta Frequenza, Vol. 45, pp 107-110, February. 1976.
- [99] S. Hiboux  
“Study of growth and properties of in-situ sputter deposited  $Pb(Zr_xTi_{1-x})O_3$  thin films”  
Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2001.

- [100] N. F. M. Lazim, Z. Awang, S. H. Herman, U. M. Nor, M. N. Osman, and all  
“*Fabrication and Characterization of PZT Thin Film Capacitors for MMIC Applications*”  
International RF and Microwave Conference, pp 177-181, 12-14 September 2006.
- [101] N. F. M. Lazim, Z. Awang, S. H. Herman, U. M. Nor  
“*Modeling and simulation of sol-gel thin films for monolithic microwave integrated circuit applications*”  
Asia-Pacific Conference on Applied Electromagnetics, 2005. APACE 2005, Malaysia, pp 297-300, 20-21 December 2005.
- [102] Crystec Kristalltechnologie  
<http://www.crystec.de/>



## Conclusion générale

Notre objectif dans ce travail consistait, dans une première phase en la compréhension et en l'élaboration d'une méthode d'éléments finis à deux dimensions ; préalable indispensable à la mise en œuvre, ultérieure, d'une approche, beaucoup plus complexe, en trois dimensions des problèmes. Nous nous sommes donc intéressés aux éléments d'arêtes et à leur transcription dans une plateforme logicielle qui nous a semblé et qui nous semble encore aujourd'hui, un excellent compromis : la plateforme Matlab. Nous avons consacré une part, non négligeable de notre temps, dans la création d'une interface conviviale de façon à rendre moins rébarbative la prise en main de notre logiciel que nous avons nommé ELFI. Fort de cette mise en œuvre, nous validons ce code en nous basant d'une part sur le relevé expérimental et d'autre part sur quelques résultats "remarquables" que nous fournit une approche analytique d'un problème de lignes couplées.

La composante expérimentale de cette validation, porte essentiellement sur le relevé le plus fiable possible de la constante de propagation complexe de lignes planaires. Déterminées à partir d'une mesure de paramètres  $[S]$ , elles nous ont permis de vérifier qu'ELFI est capable de fournir les constantes de phase et d'atténuation avec une excellente précision. Ces résultats, outre leur apport dans la validation du code, nous confortent également dans les aptitudes d'ELFI à traduire correctement la nature physique d'un domaine maillé (du métal par exemple avec sa conductivité de valeur finie). A ce stade, il ne faut pas omettre non plus de rappeler que des dimensions très faibles (de sous domaines) ont été interprétées correctement puisqu'elles représentent 1 pour 200000 et 1 pour 500000 de la surface de la section droite totale d'une ligne coplanaire avec conducteur central en forme de "T". Dans notre esprit, cette étape constitue un gage de fiabilité dans l'aide à la caractérisation que doit apporter ELFI.

Quant à la mathématique du problème pour une aide à la validation d'ELFI, nous l'avons appliquée sur des lignes couplées dans leur fonctionnement TEM ou quasi-TEM. Nous retirons ainsi quelques expressions ou résultats issus de la théorie des modes couplés

que nous qualifions de “remarquables”. En effet, après quelques calculs, nous montrons que les produits croisés de la tension d’un mode (à fréquence de coupure nulle) par le courant d’un autre mode possède une valeur très particulière. Cette valeur vaut 2 dans le cas de trois lignes en interactions comme l’a montré V. K. Tripathi. Nous retrouvons ce chiffre à  $10^{-5}$  près, après avoir maillé la structure, puis calculé les valeurs propres que sont les constantes de propagation pour enfin déduire, du vecteur propre associé, les tensions et les courants, sur et dans chaque conducteur, et ce, par intégration des champs. Comme il s’agit d’un nombre impair de lignes couplées nous avons cherché à traduire le cas d’un nombre pair de lignes en interaction, soit quatre. Ces calculs analytiques extrêmement lourds montrent que les produits croisés valent cette fois l’unité ; valeur qu’ELFI retrouve avec une précision de  $10^{-5}$ . A notre connaissance, aucun des résultats que nous avons trouvés sur quatre lignes en interaction n’est disponible dans la littérature, à moins que nous n’ayons pas effectué correctement notre étude bibliographique.

Ces résultats remarquables vérifiés, nous abordons la problématique des interconnexions “cuivre” de dimensions microniques, présentent dans les niveaux supérieurs de métallisations d’un circuit intégré numérique. Par problématique, nous voulons signifier le cas de plusieurs conducteurs couplés même involontairement. Mais ce n’est pas tant l’intégrité des signaux qui nous préoccupe mais le moyen de fournir à l’ingénieur, qui prend en charge le routage, un schéma électrique équivalent du système de façon à ce qu’un outil logiciel comme SPICE puisse prendre le relais. Ainsi, nous décidons de traduire les cas de trois, cinq et huit interconnexions “cuivre” ; le système de huit interconnexions se comportant comme un cas asymptotique. Afin de montrer les potentialités qu’offre ELFI, notre étude porte d’emblée sur le cas le plus complexe, celui de huit interconnexions. Avant de discuter de la validité de notre schéma électrique équivalent à ces huit lignes, nous proposons une étude électromagnétique de ce système. En effet, ces huit interconnexions sont abordées comme un guide d’onde du fait de l’encombrement spectral (25GHz) requis pour la reconstitution des impulsions se propageant à la fréquence 1GHz dans les connexions. Cette étude électromagnétique sur les huit modes à fréquences de coupure nulle met en évidence le comportement à pertes des modes aux fréquences basses du fait de la conductivité finie du cuivre composant les connexions. Elle montre aussi que, d’un fonctionnement transverse magnétique aux basses fréquences traduisant le fait que  $J = \sigma E_z$ , on migre vers une configuration plus hybride du mode que l’on peut encore qualifier de quasi-TEM aux plus hautes fréquences. Après une étape de normalisation des composantes “tension” et “courant”



et de calcul des matrices R, L, C, G nous aboutissons tout naturellement au schéma électrique équivalent d'une cellule élémentaire que l'on va concaténer pour retranscrire notre guide sous SPICE. Les éléments de cette cellule sont analysés pour vérifier quelques propriétés comme la réciprocité, la symétrie et la loi d'évolution des conductances. Seuls six éléments ont été éliminés dans les matrices [R], [C], [G] qui en comportent 64, car non significatifs voire négatifs. Nous avons encore allégé l'écriture en éliminant, après contrôle, les mutuelles résistives. Une cellule élémentaire comporte donc, dans sa version définitive, 108 éléments pour traduire le système de huit interconnexions en interaction. Le même travail de recherche de schéma équivalent a été mené pour 3 et 5 connexions en interaction. Ces trois schémas équivalents constituent alors le socle de notre étude d'intégrité des signaux. Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressé au cas d'une ligne active (un agresseur) en présence de lignes passives (des victimes) dans une configuration du type attaque au bord ou au centre. L'attaque au bord signifie, ici, que la ligne active comporte à sa droite ou à sa gauche uniquement des lignes victimes dont le nombre s'échelonne de 2 à 7. Pour l'attaque au centre, la ligne dénommée "agresseur" est entourée de part et d'autre de trois lignes voire quatre, puis deux puis une ligne dans le cas du système à 3 interconnexions. Afin de limiter le nombre des cas envisagés, nous étudions ces différents systèmes en interactions lorsque le couplage est fort, moyen et faible. Le matériau qui remplit l'espace interconducteur est ici, soit de l'air, soit de la silice. Bien évidemment, nous avons aussi étudié l'impact des matériaux "lowk" et "ultralowk"; impact que nous n'avons pas représenté puisqu'au mieux, le matériau "ultralowk" migre vers l'air (air gap). De toutes nos investigations il ressort quelques chiffres clés et remarques.

- ✓ Ainsi, l'étude d'une ligne, sans prendre en compte ses plus proches voisines, n'est pas envisageable. La présence de ces lignes passives, même dans le cas d'une interaction moyenne, provoque une dégradation du temps de montée de 50% supplémentaire, et 10 à 15% pour le temps de retard de propagation.
- ✓ Si l'on se cantonne aux seuls temps de retard de propagation et de montée de l'impulsion située en bout d'agresseur, alors un système de trois lignes en interaction suffit. Bien entendu, la situation la plus sensible est celle où l'agresseur est entouré de chaque côté par une victime.

- ✓ La situation se complique lorsque, sur le système de trois lignes que l'on vient d'étudier, on calcule le niveau du signal recueilli à l'extrémité des lignes victimes. Il s'agit, ici, de la diaphonie en position "far end" ou couplage avant. On remarque que 20% de l'amplitude du signal se retrouve en bout des premières lignes couplées dans le cas d'une interaction moyenne où l'espace interconducteur est rempli d'air (un cas asymptotique). Cette situation n'est certes pas acceptable. On peut toujours limiter cette valeur en accroissant l'espace interconducteur. Nous avons réalisé cette opération. Dans ce cas il reste encore 4% du signal en bout de la seconde ligne victime (située de part et d'autre de l'agresseur). Ceci décrit une situation asymptotique qui ne peut-être atteinte à cause du "pitch" ou du pas qui est fixé par le concepteur.

Nous sommes tenté d'affirmer que l'étude d'une ligne active (agresseur) dans un système complexe de beaucoup de lignes est correctement traduit lorsque deux interconnexions encadrent de part et d'autre l'agresseur dans le cas d'une attaque centrée. Pour une excitation sur le bord, 3 ou 4 interconnexions voisines (passives) sont suffisantes pour prédire correctement la situation. Bien évidemment, toutes ces remarques concernent un agresseur en présence de victimes. Il existe bien entendu toutes les situations complémentaires à celles d'un seul agresseur en présence de victimes. Nous n'avons pas étudié ces cas car ceci sort du cadre de notre travail ; notre objectif premier étant de fournir un schéma électrique équivalent au système de connexion à étudier. Pour notre part nous avons réussi à fournir un schéma fiable pour huit interconnexions ; ce système représentant alors notre cas asymptotique, et ce, même pour des cas de couplage fort. Ces travaux montrent l'importance du matériau remplissant l'espace interconducteur même si cela ne semble pas être suffisant pour réduire la diaphonie en cas de forte proximité des lignes donc en cas de forte intégration.

Nous n'avons pas voulu terminer ce mémoire sans mettre en avant la possibilité pour ELFI d'assurer une assistance à la caractérisation diélectrique microondes des matériaux. Le matériau concerné est du titano-zirconate de plomb plus connu sous le sigle PZT. Il est déposé en film mince sans orientation privilégiée, sur un substrat saphir ; film sur lequel sont déposées des métallisations pour confectionner des lignes coplanaires. La méthode de mesure de la constante de propagation que nous avons choisie repose sur le relevé des paramètres [S] de deux lignes qui ne diffèrent, pour la zone utile, que par leur longueur. Une fois cette constante de propagation connue et injectée dans ELFI, nous ajustons la permittivité complexe jusqu'à ce que notre code retrouve la consigne de départ, à savoir, la constante de

propagation complexe déduite de nos mesures des paramètres [S]. Notre objectif, outre la détermination de la permittivité complexe, consistait aussi à estimer le degré de précision avec lequel nous mesurons cette permittivité. Pour cela nous avons réalisé, sur le même substrat, 6 triplets de lignes coplanaires de sections droites différentes. Ce point nous a contraint à sélectionner des lignes courtes dont la longueur s'échelonne de 2 à 3mm par pas de 0.5mm. Avec le recul, ceci est peut être une erreur. En effet, ces six triplets dont deux sont défectueux, nous ont permis de mettre en avant la disparité avec laquelle sur le même substrat, la permittivité complexe est déterminée. Le résultat est, somme toute, satisfaisant sauf pour un triplet car la permittivité relative atteint la valeur de 2500. A ce jour nous n'avons pas d'explication sur ce point, si ce n'est une forte variation de l'épaisseur détectée aux extrémités des lignes étudiées et aussi au fait que seule une ligne de 2mm et 2.5mm est disponible (soit 500 $\mu$ m de longueur de ligne utile) ; d'où une imprécision qui peut monter jusqu'à  $\pm 20\%$ . Ces résultats encourageants sont, à ce jour, les premiers que nous obtenons. Compte tenu de l'expérience acquise, il n'est pas judicieux de réaliser des lignes courtes. La différence de longueur entre deux lignes doit être supérieure à 3mm si l'on veut ramener l'incertitude sur la détermination de la constante de propagation à mesurer de 5%. Il faut aussi maîtriser l'épaisseur du dépôt. Ceci est certainement le point le plus délicat. Pour ce qui concerne les développements futurs de nos travaux ils s'articulent sur deux axes :

Le premier qui concerne les interconnexions couplées est étendu au cas des lignes dont la topologie s'apparente à celle de ligne microruban. Cela concerne typiquement un bus de huit pistes en cuivre fonctionnant à des fréquences comprises, pour l'instant, entre 1 et 5GHz. Tous ces travaux, qu'ils soient en interconnexions cuivre pour les circuits intégrés ou les cartes mères des ordinateurs doivent aussi concerner des systèmes non symétriques de connexions avec la possibilité de prendre en compte une ligne jouant le rôle d'écran.

Quant à la caractérisation des matériaux, elle repose sur la mise en œuvre de mesure permettant de relever le tenseur diagonal de permittivité si tel est le cas du matériau PZT réalisé. Pour notre part, nous sommes actuellement dans l'élaboration de structures permettant la détermination large bande des caractéristiques diélectriques des polymères déposés en couche mince sur les lignes coplanaires.



## Bibliographie personnelle

- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“Proximity Effect of Neighbour Victim Lossy Interconnects on a Single Attacker and Vice Versa”*  
I.E.E.E International Symposium on Integrated Circuits, ISIC-2007, Singapore, 26 - 28 September 2007.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“Comparison of the benefits, from  $S_iO_2$  to ultralow-K dielectric and air spacing introduction, in term of interconnects performances, for the future high speed Ic’s in a multicoupled lines system”*  
11th I.E.E.E Workshop on Signal Propagation on Interconnects, Gènes, Italie, May 09/12 2007.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“Full wave analysis and electrical modeling of eight interconnects placed in a Giga Scale Integrated environment for signal integrity evaluation”*  
1st IEEE conference on Electronics System integration Technology, Dresde, Allemagne, 5-7 Septembre 2006.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“Victim and aggressor line electrical modelisation in an multicoupled interconnect environment for transient simulation”*  
10th IEEE workshop on Signal Propagation on Interconnects, Berlin, Allemagne, 9-12 Mai 2006.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“On The Analysis of Four Symmetrical interconnects for signal integrity evaluation”*  
9th IEEE workshop on Signal Propagation on Interconnects, Garmisch-Partenkirchen, Allemagne, 10-13 Mai 2005.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot  
*“Systèmes multiconducteurs couplés dans les circuits ULSI modélisation électromagnétique et schéma électrique”*  
Télécom 2005, 4<sup>ème</sup> JNFMA, Rabat, Maroc, 23-26 Mars 2005.
- K. El Bouazzati, F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot, D. Deschacht  
*“Electrical performance of single and coupled Cu interconnects for the 70nm technology”*  
8<sup>th</sup> IEEE workshop on Signal Propagation on Interconnects, Heidelberg, Germany, 9-12 Mai 2004.
- F. Ponchel, J. F. Legier, E. Paleczny, C. Séguinot  
*“Analyse temporelle d’interconnexions “ULSI” submicroniques en présence de charges non linéaires”*  
Télécom 2003, 3<sup>ème</sup> JNFMA, Marrakech, Maroc, 15-17 Octobre 2003.



## **ELFI : Calculateur électromagnétique pour l'établissement de schémas électriques équivalents aux interconnexions "cuivre" couplées et pour la caractérisation des matériaux**

### Résumé

Les travaux décrits dans ce mémoire concernent la mise en œuvre d'un code de calcul électromagnétique d'éléments finis à éléments d'arêtes nommé ELFI, et ce, en deux dimensions. Après une importante phase de validation, la méthode des éléments finis est, dans un premier temps, appliquée à l'étude de trois, cinq et huit interconnexions "cuivre", à pertes, constituant les différents niveaux de métallisation d'un circuit intégré. Les schémas électriques équivalents à ces trois systèmes sont ensuite implantés sous SPICE pour étudier les évolutions des temps de montée et de retard de propagation des signaux ainsi que le comportement de la diaphonie. Ceci est effectué en fonction de la distance séparant les connexions et en fonction de la nature des matériaux remplissant les zones de couplage. L'influence des lignes passives (les victimes) est alors clairement identifiée en présence d'une ligne active (l'agresseur) et réciproquement. Notre code de calcul est ensuite modifié puis adapté pour constituer une aide à la détermination de la permittivité diélectrique complexe du titano-zirconate de plomb (le PZT) dans la bande 1 à 26 GHz. Les impacts du posé des pointes de mesure, de la conductivité des métallisations coplanaires, de la variation de l'épaisseur de la couche de PZT ainsi que celle du tenseur de permittivité du substrat saphir qui supporte les lignes sont, tour à tour, analysées. Cette étude de sensibilité montre que l'on détermine, à ce jour, pour ce matériau polycristallin sans orientation particulière une permittivité relative de l'ordre de 1500 à  $\pm 5\%$  dans le meilleur cas de figure.

## **ELFI : An electromagnetic software for the extraction of electrical elementary cells equivalent to multi-coupled lines system and for material characterisation**

### Abstract

The work described in this report concerns a full wave 2D vector finite element method and its implementation in the Matlab environment. After various validation steps, our software named ELFI is firstly used to study the electromagnetic behaviour of a set of three, five and eight lossy copper interconnects of sub-micron sizes in mutual interaction. An extraction tool gives the electrical equivalent circuit of the elementary cell equivalent to the three, five and eight coupled lines cases in order to estimate signal integrity such as risetime, propagation delay and crosstalk. The proximity effects of several neighbour victim lossy interconnects on a single attacker are then analyzed and vice-versa. In a second part, we modify our software to predict, from [S] parameters measurement and propagation constant extraction, the complex permittivity of PZT thin film. The sensitivity to the location of the probes, the thickness of the film, the conductivity of gold metallization, and to the tensor of sapphire substrate which support the coplanar lines is undertaken. It shows that, for such polycrystal materials, the relative permittivity reaches the value of 1500 with 5% variation for the best case.

